UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Danijela Rajter

Konstrukcija Kolomboovih rešenja determinističkih i stohastičkih diferencijalnih jednačina

- doktorska disertacija -

Predgovor

Teorija klasičnih funkcija i operacija sa njima, iako korisna u mnogo slučajeva, ne obezbedjuje univerzalan alat za rešavanje matematičkih problema. Koristeći se isključivo klasičnim pristupom, mnogi matematički modeli raznih fizičkih procesa nisu dovoljno jasno formulisani, ili čak njihova formulacija nema nikakav prirodan smisao.

Teorija distribucija je nastala upravo u želji da se takve prepreke otklone i pokušaju da se reše matematički problemi koji nemaju rešenje u okviru klasične teorije. Medjutim, operacija množenja je dobro definisana samo na nekim podskupovima prostora distribucija dok, pod nekim prirodnim uslovima koje bi množenje trebalo da zadovoljava, nije moguće definisati ovu operaciju na čitavom prostoru distribucija. Ovaj nedostatak čini prostore distribucija posebno nepovoljnim za rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina. Iz tih razloga, ukazala se potreba za uvodjenjem prostora koji bi zadržali (skoro) sve prednosti prostora distribucija u odnosu na prostore klasičnih funkcija, ali u kojima bi bilo dobro definisano množenje. Prostori uopštenih funkcija Kolomboovog tipa su, u tom smislu, veoma pogodno rešenje.

Danas, teorija Kolomboovih uopštenih funkcija predstavlja modernu teoriju matematičke analize. Ona je povezana sa ostalim matematičkim teorijama, posebno sa teorijom distribucija sa jedne i nestandardnom analizom sa druge strane. Primene u teoriji nelinearnih jednačina su jedan od razloga što se teorija Kolomboa ubrzano razvija i sve više primenjuje.

Rešavanjem diferencijalnih jednačina dobijaju se familije glatkih rešenja koje modeliraju stvarne, pre svega fizičke pojave. Te familije rešenja odredjuju klase ekvivalencija u Kolomboovim prostorima. Naročito je interesantno proučavanje granične vrednosti tih uopštenih rešenja. Ukoliko ta granična vrednost postoji kao klasična funkcija ili distribucija, onda je Kolomboovo rešenje posebno značajno sa stanovišta primene.

Doktorska disertacija je posvećena rešavanju nelinearnih diferencijalnih jednačina, kao i linearnih jednačina sa singularitetima u okviru Kolomboovih prostora. U osnovi, disertacija se može podeliti na dva dela.

Prvi deo disertacije je posvećen rešavanju determinističkih parcijalnih diferencijalnih jednačina u okviru prostora Kolomboovih uopštenih funkcija, primenom teorije polugrupa operatora. Teorija polugrupa operatora je jedna od bitnih metoda za rešavanje diferencijalnih jednačina i ispitivanje rešenja. Klase jednačina koje se mogu rešavati pomoću odgovarajuće polugrupe operatora upravo motivišu pronalaženje i ispitivanje novih klasa polugrupa operatora u različitim prostorima koji uopštavaju Banahove prostore.

Drugi deo disertacije posvećen je rešavanju stohastičkih običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ove jednačine sadrže Kolomboove uopštene slučajne procese kao nelinearni deo, ili kao početne uslove. Za nas je posebno interesantno bilo da posmatramo jednačine koje sadrže proces belog šuma, proces pozitivnog šuma, itd.

Prva glava *Uvod* posvećena je osnovama različitih matematičkih oblasti koje smo kasnije koristili u ostalim glavama, kao što su teorija polugrupa ograničenih linearnih operatora, teorija parcijalnih diferencijalnih jednačina, stohastička analiza i teorija Kolomboovih uopštenih funkcija. U ovoj glavi su izloženi uglavnom već poznati rezultati, te je stoga većina tvrdjenja navedena bez dokaza. Manji broj rezultata koji su originalni naveden je sa kompletnim dokazima.

Druga glava sa naslovom *Kolomboove polugrupe i primene na rešavanje PDJ* posvećena je polugrupama operatora definisanim na prostorima Kolomboovih uopštenih funkcija i primenama u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina. U osnovi, proučavamo dva tipa uopštenih polugrupa. Prvi tip čine Kolomboove C_0-polugrupe koje ćemo koristiti za rešavanje klasa linearnih i semilinearnih paraboličnih jednačina sa singularnim koeficijentima i singularnim početnim uslovima. Drugi pristup podrazumeva rad sa uniformno neprekidnim Kolomboovim polugrupama i primenama te teorije na rešavanje nekih PDJ sa regularizovanim izvodima. Svi rezultati izloženi u ovoj glavi su originalni i dobijeni su u saradnji sa dr Markom Nedeljkovim i dr Stevanom Pilipovićem.

Treća glava sa naslovom *Stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine sa Kolomboovim uopštenim slučajnim procesima* je posvećena prvenstveno rešavanju nelinearne stohastičke talasne jednačine i ispitivanju granične vrednosti rešenja. Na samom početku glave ukratko ćemo se upoznati sa rezultatima Oberguggenberger-a koji služe kao motivacija za dalji rad. Svi ostali rezultati su originalni. Rezultati vezani za granično ponašanje rešenja jednodimenzionalne nelinearne talasne jednačine kada su početni uslovi funkcionali belog šuma dobijeni su u saradnji sa dr Michael-om Oberguggenberger-om, dok su svi rezultati izloženi u odeljku 3.3 dobijeni u saradnji sa dr Markom Nedeljkovim.

Četvrta glava disertacije sa naslovom *Stohastičke obične diferencijalne jednačine sa Kolomboovim uopštenim slučajnim procesima* posvećena je proučavanju linearnih običnih stohastičkih diferencijalnih jednačina koje sadrže "nestandardne" uopštene slučajne procese (na primer, mi ćemo uzeti proces pozitivnog šuma). Veći deo ove glave sadrži originalne rezultate koji su dobijeni u saradnji sa dr Michael-om Oberguggenberger-om.

• • •

Zahvaljujem se svima koji su me podržavali i pomogali mi prilikom izrade disertacije. Medju njima su, naravno, moja porodica i moji dragi prijatelji.

Veoma sam zahvalna profesoru Stevanu Pilipoviću koji mi je značajno pomogao i koji je to uvek činio još dok sam bila student osnovnih studija.

Takodje, zahvaljujem se profesorici Zagorki Lozanov-Crvenković koja je dala niz korisnih sugestija u cilju poboljšanja kvaliteta disertacije.

Ne bih mogla da napišem ovu zahvalnicu, a da ne spomenem izuzetno gostoprimstvo čitavog Instituta za inženjersku matematiku, geometriju i računarstvo iz Insbruka (Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik, Innsbruck), gde sam provela školsku 2000/2001 godinu, a moj boravak je finansirala organizacija ÖAD iz Austrije.

Posebno bih želela da se zahvalim profesoru Michaelu Oberguggenbergeru, mome austrijskom komentoru, sa kime sam provela mnogo vremena u diskusijama i koji je uvek bio spreman da me podučava i da mi daje korisne savete i sugestije. On mi je veoma mnogo pomogao, ne samo prilikom pisanja ove disertacije, već i time što mi je (zajedno sa svojom porodicom) znatno olakšao svakodnevni život u stranoj državi.

I na kraju, želela bih da se posebno zahvalim mome mentoru, profesoru Marku Nedeljkovu, od koga sam puno naučila i koji mi je pružao snažnu podršku tokom čitavih studija.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

U ovoj glavi navešćemo neke osnovne definicije i osobine pojmova koje ćemo koristiti u nastavku. Većina tvrdjenja je dobro poznata i zbog toga će biti izložena bez dokaza. Za objekte koji se prvi put definišu i stoga čitaocu predstavljaju nove pojmove, sva tvrdjenja će biti data sa kompletnim dokazima.

Glava vodi čitaoca kroz uvodne delove različitih oblasti matematičke analize kao što su teorija polugrupa ograničenih linearnih operatora, teorija parcijalnih diferencijalnih jednačina, stohastička analiza i teorija Kolomboovih uopštenih funkcija. To su sve veoma važne oblasti koje ćemo kasnije koristiti prilikom rešavanja pojedinih problema zadatih pomoću običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednačina.

1.1 Polugrupe linearnih operatora

Teorija polugrupa ograničenih linearnih operatora se veoma brzo razvila nakon postavljanja Hile-Jošidine teoreme 1948. godine. Danas ona predstavlja snažnu matematičku teoriju, veoma važnu u primenama na rešavanje mnogih problema matematičke analize.

U ovom poglavlju ćemo se podsetiti nekih osnovnih definicija i osobina polugrupa ograničenih linearnih operatora. Detaljne dokaze svih rezultata koje ćemo ovde izložiti čitaoc može naći, na primer, u knjizi [41]. U celoj glavi E će označavati Banahov prostor sa normom $\| \; \|$.

Definicija 1.1 *Jednoparametarska familija $S(t)$, $t \geq 0$, ograničenih linearnih operatora $E \to E$ se zove polugrupa ograničenih linearnih operatora na E ako*

(i) $S(0) = I$, *gde je I identički operator na E.*

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, *za svako $t, s \geq 0$.*

Uslov (ii) se zove svojstvo semigrupe.

Definicija 1.2 *Infinitezimalni generator A polugrupe ograničenih linearnih operatora na E, $S(t)$, $t \geq 0$, je linearan operator definisan sa*

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} S(t)x \ , \quad \text{za } x \in D(A), \tag{1.1}$$

gde je

$$D(A) = \left\{ x \in E \ : \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \text{postoji} \right\} \tag{1.2}$$

domen operatora A.

1.1.1 Uniformno neprekidne polugrupe

Definicija 1.3 *Polugrupa ograničenih linearnih operatora $S(t)$, $t \geq 0$, je uniformno neprekidna ako*

$$\lim_{t \to 0} \|S(t) - I\| = 0. \tag{1.3}$$

Iz definicije sledi

$$\lim_{t \to s} \|S(t) - S(s)\| = 0, \ \ t, s \geq 0. \tag{1.4}$$

Teorema 1.1 *Linearan operator A je infinitezimalni generator uniformno neprekidne polugrupe ako i samo ako je A ograničen operator.*

Svaka polugrupa ograničenih linearnih operatora ima jedinstveni infinitezimalni generator. Ako je $S(t)$, $t \geq 0$, uniformno neprekidna polugrupa njen infinitezimalni generator je ograničen linearan operator.

Sa druge strane, svaki ograničen linearan operator A je infinitezimalni generator uniformno neprekidne polugrupe

$$S(t) = e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(tA)^k}{k!}, \quad t \geq 0.$$

Ta polugrupa je jedinstveno odredjena, kao što tvrdi sledeća teorema.

Teorema 1.2 *Neka su $S(t)$ i $\tilde{S}(t)$ uniformno neprekidne polugrupe sa infinitezimalnim generatorima A i B, redom. Ako je $A = B$ onda $S(t) = \tilde{S}(t)$, za svako $t \geq 0$.*

Propozicija 1.1 *Neka je $S(t)$, $t \geq 0$, uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora. Tada*

(i) Postoji konstanta $\omega \geq 0$ takva da $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $t \geq 0$.

(ii) Postoji jedinstveni ograničen linearan operator A takav da

$$S(t) = e^{tA}, \quad t \geq 0.$$

(iii) Operator A iz (ii) je infinitezimalni generator polugrupe $S(t)$.

(iv) Preslikavanje $t \mapsto S(t)$, $t \geq 0$, je diferencijabilno i važi

$$\frac{d}{dt}S(t) = AS(t) = S(t)A. \tag{1.5}$$

1.1.2 C_0-polugrupe

Jako neprekidne polugrupe ograničenih linearnih operatora (ili kraće, C_0-polugrupe) su proučavane od strane mnogih autora i predstavljaju važan alat u rešavanju diferencijalnih jednačina. Ovaj odeljak je posvećen nekim osnovnim osobinama C_0-polugrupa.

Definicija 1.4 *Za polugrupu $S(t)$, $t \geq 0$, ograničenih linearnih operatora na E kažemo da je jako neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora ili C_0-polugrupa ako*

$$\lim_{t\to 0} S(t)x = x, \quad \text{za svako } x \in E. \tag{1.6}$$

Teorema 1.3 *Ako je $S(t)$, $t \geq 0$, C_0-polugrupa tada postoje konstante $\omega \geq 0$ i $M \geq 1$ takve da*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0. \tag{1.7}$$

Definicija 1.5 *Neka su ω i M konstante iz Teoreme 1.3. Ako je $\omega = 0$, onda se C_0-polugrupa $S(t)$ zove uniformno ograničena polugrupa. Ako pri tome još važi da je $M = 1$, $S(t)$ se zove C_0-polugrupa kontrakcija.*

U nekoliko narednih tvrdjenja izložili smo neke od važnih osobina C_0-polugrupa.

Propozicija 1.2 *Neka je $S(t)$, $t \geq 0$, C_0-polugrupa. Za svako $x \in E$, $t \mapsto S(t)x$ jeste neprekidna funkcija koja preslikava $[0, \infty) \to E$.*

Teorema 1.4 *Neka je $S(t)$, $t \geq 0$, C_0-polugrupa sa infinitezimalnim generatorom A. Tada,*

(i) Za $x \in E$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x \, ds = S(t)x. \tag{1.8}$$

(ii) Za $x \in E$, $\int_0^t S(s)x \, ds \in D(A)$ i važi

$$A\left(\int_0^t S(s)x \, ds\right) = S(t)x - x. \tag{1.9}$$

(iii) Za $x \in D(A)$, $S(s)x \in D(A)$ i važi

$$\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{1.10}$$

(iv) Za $x \in D(A)$ i $t_1, t_2 \geq 0$,

$$S(t_1)x - S(t_2)x = \int_{t_1}^{t_2} S(s)Ax \, ds = \int_{t_1}^{t_2} AS(s)x \, ds. \tag{1.11}$$

Propozicija 1.3 *Ako je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$, tada je A zatvoren linearan operator sa domenom gustim u E.*

Konačno, sa stanovišta primene u rešavanju diferencijalnih jednačina veoma je koristan sledeci rezultat.

Teorema 1.5 *Neka su $S(t)$ i $\tilde{S}(t)$ dve C_0-polugrupe sa infinitezimalnim generatorima A i B, redom. Ako je $A = B$ tada $S(t) = \tilde{S}(t)$, za svako $t \geq 0$.*

Karakterizacija infinitezimalnih generatora C_0-polugrupa

Ovaj odeljak je posvećen karakterizaciji infinitezimalnih generatora C_0-polugrupa koja se uglavnom ogleda u razmatranju rezolventi operatora A i davanju potrebnih i dovoljnih uslova na A koji obezbedjuju da on bude infinitezimalni generator neke C_0-polugrupe.

Definicija 1.6 *Neka je A linearan operator na E. Rezolventni skup operatora A je skup*

$$\rho(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \textit{postoji } (\lambda I - A)^{-1}\right\},$$

odnosno, $(\lambda I - A)^{-1}$ je ograničen linearan operator za $\lambda \in \rho(A)$. Familija $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, ograničenih linearnih operatora se zove rezolventa operatora A.

U slučaju kada je $S(t)$, $t \geq 0$, C_0-polugrupa kontrakcija važi sledeće tvrdjenje, poznato kao Hile-Jošidina teorema.

Teorema 1.6 *(Hille-Yosida) Linearan operator A je infinitezimalni generator C_0-polugrupe kontrakcija $S(t)$, $t \geq 0$, ako i samo ako važi*

(i) A zatvoren operator i $D(A)$ je gust u E.

(ii) Rezolventni skup $\rho(A)$ operatora A sadrži $\mathbb{R}^+$ i

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{1.12}$$

U opštem slučaju, za kompleksne brojeve λ važi slično tvrdjenje:

Korolar 1.1 *Ako je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe kontrakcija $S(t)$, $t \geq 0$, tada $\{\lambda : Re\,\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ i*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{Re\,\lambda}, \quad Re\,\lambda > 0. \tag{1.13}$$

Neka je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$, koja zadovoljava $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $t \geq 0$, za neko $\omega \geq 0$. Tada je

$$\tilde{S}(t) = e^{-\omega t} S(t), \quad t \geq 0,$$

C_0-polugrupa kontrakcija sa infinitezimalnim generatorom $A - \omega I$.

Sa druge strane, ako je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe kontrakcija $\tilde{S}(t)$, $t \geq 0$, tada je $A + \omega I$ infinitezimalni generator C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$, koja zadovoljava $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $t \geq 0$. Očigledno je da važi

$$S(t) = e^{\omega t} \tilde{S}(t), \quad t \geq 0.$$

To nas dovodi do sledećeg tvrdjenja.

Korolar 1.2 *Linearan operator A je infinitezimalni generator C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$, koja zadovoljava $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $t \geq 0$, (za neko $\omega \geq 0$) ako i samo ako važi*

(i) A je zatvoren operator i $D(A)$ je gust u E.

(ii) Rezolventni skup $\rho(A)$ operatora A sadrži skup $\{\lambda : \lambda > \omega\}$ i važi

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \lambda > \omega. \tag{1.14}$$

Primetimo da smo najpre dali karakterizaciju infinitezimalnih generatora C_0-polugrupa kontrakcija. Zatim smo mogli videti da ta karakterizacija vodi do karakterizacije infinitezimalnog generatora C_0-polugrupe koja zadovoljava $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, $t \geq 0$, za neko $\omega \geq 0$.

Sada se vraćamo na problem karakterizacije infinitezimalnih generatora opštih C_0-polugrupa. Podsetimo se da za takve polugrupe postoje konstante $\omega \geq 0$ i $M \geq 1$ takve da $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$. Neka je za početak $\omega = 0$.

Teorema 1.7 *Linearan operator A je infinitezimalni generator C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$, koja zadovoljava $\|S(t)\| \leq M$, gde je $M \geq 1$, ako i samo ako važi*

(i) A je zatvoren operator i $D(A)$ je gust u E.

(ii) Rezolventni skup $\rho(A)$ operatora A sadrži $\mathbb{R}^+$ i važi

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad \lambda > 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.15}$$

U slučaju opšte C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$, kada $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, za neke $M \geq 1$ i $\omega > 0$, možemo posmatrati C_0-polugrupu $\tilde{S}(t) = e^{-\omega t}S(t)$, $t \geq 0$, koja zadovoljava $\|\tilde{S}(t)\| \leq M$, $t \geq 0$.

To nas dovodi do sledećeg tvrdjenja.

Teorema 1.8 *Linearan operator A je infinitezimalni generator C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$, koja zadovoljava uslov $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, ako i samo ako važi*

(i) A je zatvoren i $D(A)$ je gust u E.

(ii) Rezolventni skup $\rho(A)$ operatora A sadrži skup $\{\lambda : \lambda > \omega\}$ i

$$\|R(\lambda : A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \lambda > \omega, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.16}$$

1.1.3 Polugrupe operatora i semilinearan početni problem

Posmatrajmo semilinearan početni problem

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = u_0, \; t > t_0, \tag{1.17}$$

gde je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$, na Banahovom prostoru E, funkcija $f : [t_0, T] \times E \to E$ je neprekidna po t i Lipšicova po u i važi $u_0 \in D(A)$.

U opštem slučaju Košijev problem (1.17) nema rešenje. Medjutim, ukoliko postoji klasično rešenje problema (1.17), tada ono zadovoljava integralnu jednačinu

$$u(t) = S(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} S(t - s)f(s, u(s))ds. \tag{1.18}$$

To nas dovodi do sledeće definicije.

Definicija 1.7 *Neprekidno rešenje u integralne jednačine (1.18) se zove umereno rešenje početnog problema (1.17).*

Sledeći rezultat obezbedjuje postojanje i jedinstvenost umerenog rešenja početnog problema (1.17) u slučaju kada je funkcija f Lipšic-neprekidna.

Teorema 1.9 *Neka je funkcija $f : [t_0, T] \times E \to E$ neprekidna po t na $[t_0, T]$ i uniformno Lipšic-neprekidna na E. Ako je $-A$ infinitezimalni generator C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$ na E tada za svako $u_0 \in D(A)$ početni problem (1.17) ima jedinstveno umereno rešenje $u \in C([t_0, T] : E)$. Štaviše, $u_0 \mapsto u$ je Lipšic-neprekidni preslikavanje $E \to C([t_0, T] : E)$.*

Primetimo da u prethodnom tvrdjenju uniformna Lipšic-neprekidnost funkcije f obezbedjuje postojanje globalnog umerenog rešenja problema (1.17), tj. rešenja definisanog na svim intervalima $[t_0, T]$.

Ako malo modifikujemo dokaz Teoreme 1.9, dobijamo opštije tvrdjenje:

Korolar 1.3 *Neka je operator A dat kao u Teoremi 1.9. Tada, za svako $g \in C([t_0, T] : E)$, integralna jednačina*

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} S(t-s) f(s, w(s)) ds \tag{1.19}$$

ima jedinstveno rešenje $w \in C([t_0, T] : E)$.

Ukoliko f samo zadovoljava uslove Teoreme 1.9 umereno rešenje problema (1.17) u opštem slučaju ne mora da bude i njegovo klasično rešenje. Dovoljan uslov da to važi je dat u sledećoj teoremi.

Teorema 1.10 *Neka je $-A$ infinitezimalni generator C_0-polugrupe $S(t)$, $t \geq 0$, na E. Ako je $f : [t_0, T] \times E \to E$ neprekidno diferencijabilna funkcija iz $[t_0, T] \times E$ u E tada je umereno rešenje početnog problema (1.17) gde $u_0 \in D(A)$, takodje i klasično rešenje.*

1.2 Uvodne napomene o nekim PDJ

U ovom odeljku ćemo se podsetiti nekih osnovnih činjenica iz teorije parcijalnih diferencijalnih jednačina. Prvi deo je posvećen klasičnoj jednačini provodjenja toplote i njenom fundamentalnom rešenju (videti [50]). Navedeni rezultati će nam trebati u odeljku 2.1.2 gde ćemo proučavati klasu jednačina provodjenja toplote sa singularnim koeficijentima i singularnim početnim uslovima primenjujući teoriju polugrupa.

Drugi deo ovog odeljka je posvećen semilinearnim talasnim i Klajn-Gordonovim jednačinama i energijskim nejednakostima (videti [49]). Metod energijskih nejednakosti ćemo koristiti u odeljcima 3.3 i 3.4, kada budemo proučavali jednodimenzionalne talasne i trodimenzionalne talasne i Klajn-Gordonove stohastičke jednačine sa Kolomboovim uopštenim stohastičkim procesima koje su prvi put definisali Oberguggenberger i Russo ([39], [40]).

1.2.1 Jednačina provodjenja toplote

U ovom delu ćemo navesti neke osnovne osobine rešenja Košijevog problema za jednačinu provodjenja toplote na $[0,\infty)\times\mathbb{R}^n$:

$$\partial_t u - \Delta u = 0, \tag{1.20}$$

$$u|_{t=0} = f, \tag{1.21}$$

gde je Δ Laplasov operator na $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \tag{1.22}$$

Pretpostavićemo da $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Rešenje u ćemo tražiti u prostoru $C^\infty([0,\infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, koristeći metode Furijeove analize. Uzimajući Furijeovu transformaciju od u (u odnosu na x), dobijamo ODJ sa parametrima

$$\partial_t \hat{u} = -|\xi|^2 \hat{u}(t,\xi), \quad t>0,\ \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{1.23}$$

sa početnim uslovom

$$\hat{u}(0,\xi) = \hat{f}(\xi), \tag{1.24}$$

gde $\hat{}$ označava Furijeovu transformaciju.

Tačkasto rešenje problema (1.23)-(1.24) je dato sa

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}\hat{f}(\xi), \quad t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.25}$$

Stavimo

$$G(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}, \quad t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.26}$$

Primetimo da, za svako $t > 0$, $G(t,\cdot) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Koristeći formulu

$$\mathcal{F}(u * v)(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{u}(\xi)\hat{v}(\xi), \quad u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

gde $\mathcal{F}$ označava Furijeovu transformaciju, dobijamo

$$u(t,x) = (2\pi)^{n/2}\hat{G}(t,\cdot) * f(x), \quad t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.27}$$

Može se pokazati da važi

$$u(t,x) = p(t,\cdot) * f(x), \quad t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.28}$$

gde

Fundamentalno rešenje.

$$p(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.29}$$

Zaista, kako je

$|ix|^2 = i^2x^2 = -1|x|^2$

$$p(t,ix) = (4\pi t)^{-n/2} e^{|x|^2/4t}, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n$$

i

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\, d\xi = \pi^{n/2}$$

možemo pisati

$$\begin{aligned}
p(t,ix) &= (2\pi)^{-n}\, t^{-n/2}\, e^{|x|^2/4t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2}\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-n}\, e^{|x|^2/4t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x/2\sqrt{t}+\sqrt{t}\xi|^2}\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-x\cdot\xi - t|\xi|^2}\, d\xi, \quad t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$p(t,x) = (2\pi)^{n/2}\hat{G}(t,x), \quad t > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definicija 1.8 *Funkcija $p(t,x)$ data sa (1.29) se zove fundamentalno rešenje jednačine provodjenja toplote (1.20)-(1.21).*

Fundamentalno rešenje $p(t,x)$ zadovoljava

$$(\partial_t - \Delta)p = 0, \quad \text{za } t > 0, \tag{1.30}$$

$$\lim_{t\to 0} p(t,x) = \delta(x) \quad \text{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \tag{1.31}$$

Propozicija 1.4 *Jednačina provodjenja toplote (1.20)-(1.21), pri čemu $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ima jedinstveno rešenje $u \in C^\infty([0,\infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$, dato sa (1.28)-(1.29). To rešenje je klase C^∞ na $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Ako $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tada $u \in C^\infty([0,\infty), \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.*

Primetimo da se jedinstvenost rešenja jednačine toplote tvrdi samo unutar klase $C^\infty([0,\infty), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$. Uklanjanjem odgovarajućeg uslova na rast rešenje ne mora biti jedinstveno. Na primer, za $n = 1$, funkcija

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k!}\, x^{2k} \frac{d^k}{dt^k}\, e^{-1/t^2}$$

zadovoljava jednačinu

$$(\partial_t - \Delta)v = 0, \quad \text{za } t > 0,$$
$$v(0,x) = 0,$$

ali, za fiksirano $t > 0$, to rešenje raste suviše brzo da bi pripadalo $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

U vezi sa osobinama ograničenosti i neprekidnosti za (1.26), navodimo sledeći rezultat.

Propozicija 1.5 *Neka $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Tada rešenje u jednačine (1.20) sa početnim uslovom (1.21) pripada $C([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^n))$.*

Primedba 1.1 *Ne možemo tvrditi da $u \in C^\infty([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^n))$, ili čak da $\partial_t \in C^\infty([0,\infty), L^2(\mathbb{R}^n))$, bez daljih restrikcija na funkciju f.*

1.2.2 Semilinearne talasne i Klajn-Gordonove jednačine

U ovom delu posmatraćemo početni problem za nelinearnu talasnu jednačinu

$$\partial_t^2 u - \Delta u + g(u) = 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \tag{1.32}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1, \tag{1.33}$$

gde je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dovoljno regularna funkcija.

Linearni slučaj

$$g(u) = m^2 u, \quad u \in \mathbb{R},$$

gde $m \in \mathbb{R}$, odgovara klasičnoj Klajn-Gordonovoj jednačini u relativističkoj teoriji čestice. Konstanta m^2 predstavlja masu.

Za modeliranje nelinearnih fenomena kao što je kvantovanje, jednačine tipa (1.32) sa nelinearnostima kao što su

$$g(u) = m^2 u + u^3, \quad m \geq 0,$$

su 1950-tih godina predložene za modele u relativističkoj mehanici sa lokalnim interakcijama.

Model

$$\partial_t^2 u - \Delta u + u|u|^{p-2} = 0, \quad p > 2, \tag{1.34}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1, \tag{1.35}$$

je takodje interesantan. Za $n = 3$, $p < 6$, Jörgens je pokazao globalnu egzistenciju i regularnost rešenja ([20]). On je takodje pokazao i lokalnu egzistenciju regularnih rešenja problema (1.34)-(1.35) za proizvoljno veliko p. Štaviše, on je redukovao problem egzistencije globalnog, regularnog rešenja za (1.32) na razmatranje lokalnih ocena L^∞-normi rešenja.

Ovi rezultati su uopšteni za veće dimenzije. Medjutim, takva uopštenja je bilo veoma teško dobiti.

Sa druge strane, pogodnom aproksimacijom i korišćenjem energijskih ocena, za sve $p > 2$ i $n \geq 3$ moguće je konstruisati globalno slabo rešenje koje zadovoljava (1.34) u distribucionom smislu.

Formule reprezentacije

Za proizvoljne $f, u_0, u_1 \in C^\infty$, može se konstruisati jedinstveno C^∞-rešenje Košijevog problema

$$\partial_t^2 u - \Delta u = f \quad \text{na } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \tag{1.36}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1. \tag{1.37}$$

Označimo

$$B_\rho = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \rho\}.$$

U slučaju $n = 3$ to rešenje je dato sa

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(x)} u_0(y)\,dy\Big) + \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(x)} u_1(y)\,dy \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{\partial B_{t-s}(x)} \frac{f(y,s)}{t-s}\,dy\,ds. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Rešenje $u(t)$ ima kompaktan nosač za sve $t \geq 0$ ukoliko to važi za u_0, u_1 i f.

Formula (1.38) pokazuje nedostatak klasičnog pristupa: Za $u_0 \in C^3$, $u_1 \in C^2$ i $f \in C^2$, rešenje je samo klase C^2, to jest, gubi se diferencijabilnost.

Energijske nejednakosti

Množenjem jednačine (1.36) sa $\partial_t u$ dobijamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|u_t|^2 + |\nabla u|^2}{2}\right) - \operatorname{div}(u_t \nabla u) = f u_t,$$

gde se

$$e_0(u) := \frac{|u_t|^2 + |\nabla u|^2}{2} \quad \text{i} \quad p(u) := \partial_t \nabla u$$

mogu interpetirati kao energija i moment rešenja u. Sada, integralimo po x (ako $u(t, \cdot)$ ima kompaktan nosač, za svako t).

Koristeći Helderovu nejednakost dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_0(u(t)) &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(\cdot,t)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u_t(\cdot,t)|^2\,dx\right)^{1/2}\\ &\le \left(2E_0(u(t))\right)^{1/2}\|f(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

gde

$$E_0(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^n} e_0(u(\cdot,t))\,dx =: \|u(t)\|_0^2$$

označava "energijsku normu". Tada,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_0 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|f(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|f(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.39}$$

Ako $f = 0$, tada je energija E_0 očuvana.

1.3 Osnovi stohastičke analize

Modeliranje velikog broja sistema (na primer, pomoću diferencijalnih jednačina) veoma često zahteva slučajne parametre. Takvi modeli često nastaju iz problema u prirodnima naukama ili ekonomiji gde nemamo dovoljno informacija o vrednostima parametara koji se pojavljuju. Postavlja se pitanje kako da radimo sa nekim parametrima kada ne znamo kako oni tačno izgledaju.

Jedna od mogućnosti je da koristimo prilaz stohastičke analize i da posmatramo te parametre kao slučajne objekte. Druga mogućnost bi mogla biti zamenjivanje pravih (ali nepoznatih) parametara nekom vrstom prosečnih vrednosti i rad sa odgovarajućim determinističkim sistemom nadajući se da je to dovoljno "dobra" aproksimacija polaznog problema.

Tokom proteklog veka, sve češće su korišćeni metodi stohastičke analize. Takav pristup se razvijao veoma brzo i sada predstavlja važan alat u radu sa diferencijalnim jednačinama koje modeluju odgovarajuće sisteme, na primer, stohastičke dinamičke sisteme i mnoge druge.

U ovom odeljku podsetićemo se nekih osnova stohastičke analize koje ćemo kasnije koristiti da razvijemo naš stohastički aparat za rešavanje problema koji uključuju ODJ i PDJ u okviru Kolomboove teorije uopštenih funkcija.

1.3.1 Osnovi teorije verovatnoće

Podsetimo se osnovnih definicija i osobina pojmova koji se javljaju u teoriji verovatnoće, a koje ćemo koristiti kasnije. Takvi pojmovi su, na primer, prostor verovatnoća, slučajna promenljiva, funkcija raspodele, očekivanje, slučajni proces, itd.

Prostor verovatnoća i slučajne promenljive

U teoriji verovatnoće radimo sa matematičkim modelima čiji je ishod slučajan. Neka Ω označava skup mogućih ishoda - elementarnih dogadjaja ω.

Primetni dogadjaj A je podskup skupa Ω ($A \subset \Omega$). Medjutim, u opštem slučaju, nije svaki podskup skupa Ω primetan dogadjaj. Primetni dogadjaji jednog opita čine "sigma algebru" $\mathcal{F}$ čije smo osobine izložili u sledećoj definiciji.

Definicija 1.9 *Familija $\mathcal{F}$ podskupova od Ω se zove σ-algebra ako*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii) Ako $A \in \mathcal{F}$ tada $(\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$.

(iii) Ako $A_n \in \mathcal{F}$, za sve $n \in \mathbb{N}$, tada $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Elementi sigma algebre su "merljivi" skupovi, a par $(\Omega, \mathcal{F})$ se zove merljiv prostor.

Neka su $(\Omega, \mathcal{F})$ i $(\Omega', \mathcal{F}')$ merljivi prostori.

Definicija 1.10 *Ω'-vrednosna slučajna promenljiva $X : \Omega \to \Omega'$ je merljivo preslikavanje. Drugim rečima, slučajna promenljiva X je preslikavanje iz Ω u Ω' ako su originali merljivih skupova u Ω' merljivi u Ω, odnosno, ako*

$$\{\omega; X(\omega) \in A'\} = [X(\omega) \in A'] = X^{-1}(A') \in \mathcal{F}, \quad \text{za sve } A' \in \mathcal{F}'.$$

Kompozicija dve slučajne promenljive je ponovo slučajna promenljiva.

Definicija 1.11 *Skup $\mathcal{F}(X)$ originala merljivih preslikavanja je σ-algebra na Ω i to je najmanja sigma algebra u odnosu na koju je X merljivo. Ona se zove sigma algebra generisana sa X na Ω.*

Definicija 1.12 *Neka je E metrički prostor. Najmanja σ-algebra podskupova od E koja sadrži sve otvorene (zatvorene) podskupove od E se zove Borelova σ-algebra i označava se sa $\mathcal{B}(E)$.*

Definicija 1.13 *Prostor verovatnoća je trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gde je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor i P je probabilistička mera na $\mathcal{F}$, što znači da $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ i*

(i) $P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0.$

(ii) $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, *gde su $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, disjunktni skupovi.*

Definicija 1.14 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, $(E, \mathcal{E})$ merljiv prostor i $X : \Omega \to E$ slučajna promenljiva. Zakon raspodele $\mathcal{L}(X)$ slučajne promenljive X je probabilistička mera P_X na $(E, \mathcal{E})$ definisana sa*

$$P_X(A) = P(\omega\, ; X(\omega) \in A), \text{ za sve } A \in \mathcal{E}.$$

Ako je probabilistička mera P data na merljivom prostoru $(E, \mathcal{E})$ tada je $(E, \mathcal{E}, P)$ prostor verovatnoća i preslikavanje $X(\omega) = \omega$, $\omega \in E$ se zove kanonička slučajna promenljiva. Njen zakon raspodele je upravo P.

Definicija 1.15 *Slučajne promenljive $X_1, ..., X_n$ sa vrednostima u $E_1, ..., E_n$, redom, su nezavisne ako je njihov zajednički zakon raspodele $\mathcal{L}(X_1, ..., X_n)$ na prostoru $(E_1 \times ... \times E_n, \mathcal{E}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{E}_n)$ jednak proizvodu $\mathcal{L}(X_1) \times ... \times \mathcal{L}(X_n)$, odnosno, ako*

$$P(X_1 \in \Gamma_1, ..., X_n \in \Gamma_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in \Gamma_k), \quad \Gamma_k \in \mathcal{E}_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Definicija 1.16 *Neka je X $\mathbb{R}^n$-vrednosna slučajna promenljiva. Funkcija F definisana sa*

$$F_X(x) = F_X(x_1, \ldots, x_n) = P\{\omega : \ X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\} = P[X \leq x]$$

se zove funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Funkcija raspodele slučajne promenljive X pokazuje koliko je verovatno da X uzima vrednosti manje od x.

Ukoliko postoji, gustina raspodele slučajne promenljive se definiše na sledeći način.

Definicija 1.17 *Neka je verovatnoća na prostoru gde $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$ koju označavamo sa P_F, Lebeg-neprekidna (to jest, $P_F(N) = 0$ za svaki skup $N \in \mathcal{B}^n$ Lebegove mere nula). Tada za P_F kažemo da ima gustinu raspodele, odnosno, postoji integrabilna funkcija $f(x) \geq 0$ takva da*

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \dots, y_n)\, dy_1 \dots dy_n.$$

Očekivanje slučajne promenljive

Nekoj realnoj slučajnoj promenljivoj X definisanoj na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ možemo dodeliti odredjeni broj, njeno očekivanje. Ako X ima samo konačno mnogo različitih vrednosti $c_1, \dots, c_n$, očekivanje od X je definisano sa

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, P[X_i = c_i].$$

Ovo možemo proširiti na proizvoljnu realnu slučajnu promenljivu.
Korak 1. Pretpostavimo da je

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i\, I_{A_i}, \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j), \quad A_i \in \mathcal{F},$$

takozvana step funkcija. Definišemo

$$\int_\Omega X(\omega)\, dP(\omega) = \int_\Omega X\, dP = \sum_{i=1}^{n} c_i\, P(A_i).$$

Korak 2. Neka je $X \geq 0$ proizvoljna merljiva funkcija. Tada postoji rastući niz $\{X_n\}$ nenegativnih merljivih step funkcija takvih da

$$\lim_{n \to \infty} N_n(\omega) = X(\omega) \ \text{ za sve } \omega \in \Omega$$

i

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n\, dP = c \leq \infty.$$

Ovde je c nezavisno od specijalnog niza $\{X_n\}$. Definišemo

$$\int_\Omega X\, dP = c.$$

Korak 3. Neka X označava proizvoljnu merljivu funkciju. Izvršićemo njenu dekompoziciju na pozitivan i negativan deo:

$$X = X^+ - X^-,\quad X^+ = X\, I_{[X\geq 0]},\quad X^- = -X\, I_{[X<0]}.$$

Tada definišemo

$$\int_\Omega X\, dP = \int_\Omega X^+\, dP - \int_\Omega X^-\, dP,$$

gde pretpostavljamo da to ne vodi ka slučaju $\infty - \infty$.

Definicija 1.18 *Slučajna promenljiva X je P-integrabilna ako*

$$\int |X|\, dP < \infty.$$

Očekivanje slučajne promenljive X se definiše kao

$$E(X) = \int_\Omega X\, dP.$$

Za izračunavanje očekivanja u praksi se koristi sledeće tvrdjenje.

Teorema 1.11 *Neka je $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ merljiva funkcija. Tada je, za slučajnu promenljivu $Y = g(X)$,*

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dF_X(x),$$

i, specijalno, za $n = m$ i $g(x) \equiv x$,

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} x\, dF_X(x),$$

ukoliko integrali na desnim stranama postoje.

Stavimo, za svako $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p &= \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, P) \\ &= \{X : X \text{ je } \mathbb{R}^n\text{-vrednosna slučajna promenljiva }, E(|X|^p) < \infty\}. \end{aligned}$$

Za $p \geq q$ imamo da $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^q$ i $\mathcal{L}^p$ je linearan prostor. Ako u $\mathcal{L}^p$ predjemo na skup L^p klasa ekvivalencije slučajnih promenljivih koje se podudaraju sa verovatnoćom 1 i stavimo

$$\|X\|_p = (E(|X|)^p)^{1/p}$$

tada je L^p Banahov prostor u odnosu na tu normu. Štaviše, L^2 je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom

$$(X, Y) = E\left(X^T Y\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i Y_i),$$

gde X^T označava transponovano X.

Definicija 1.19 *Neka je $n = 1$.*

(1) $V(X) = E(X - E(X))^2 = \sigma^2(X)$, gde $X \in L^2$, se zove disperzija slučajne promenljive X.

(2) $\sigma = \sqrt{V(x)}$ se zove standardna devijacija slučajne promenljive X.

(3) $E(X^k)$, $X \in L^k$, $k \in \mathbb{N}$, je k-ti momenat slučajne promenljive X.

(4) $E(X - E(X))^k$, gde $X \in L^k$, $k \in \mathbb{N}$, se zove k-ti centralni momenat slučajne promenljive X.

Definicija 1.20 *Neka je $n = 1$. Tada se*

$$Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))),$$

gde $X, Y \in L^2$, zove kovarijansa slučajnih promenljivih X i Y. Ako je $Cov(X, Y) = 0$, kažemo da su slučajne promenljive X i Y nekorelirane.

Za $n > 1$, simetrična nenegativna $n \times n$ matrica

$$Cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))^T\right) = (Cov(X_i, Y_j)), \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

se zove kovarijansna matrica $\mathbb{R}^n$-vrednosnih slučajnih promenljivih X i Y. Za $Cov(X, X)$ jednostavno pišemo $Cov(X)$.

Na kraju ovog dela navodimo definiciju karakteristične funkcije slučajne promenljive.

Definicija 1.21 *Karakteristična funkcija slučajne promenljive X ili njene funkcije raspodele F je*

$$\varphi(t) = \varphi_X(t) = E\left(e^{it^T X}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{it^T x}\, dF(x), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Funkcija raspodele F je jedinstveno odredjena sa φ.

Koncepti konvergencije

U teoriji verovatnoće postoji nekoliko koncepta konvergencije. Četiri koncepta, važna u primenama, su navedena u sledećoj definiciji.

Definicija 1.22 *Neka X i X_n, $n \in \mathbb{N}$, označavaju $\mathbb{R}^d$-vrednosne slučajne promenljive definisane na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

(1) Ako postoji skup mere nula $N \in \mathcal{F}$ takav da, za sve $\omega \notin N$, niz $X_n(\omega) \in \mathbb{R}^d$ konvergira ka $X(\omega) \in \mathbb{R}^d$, tada kažemo da niz $\{X_n\}$ konvergira P-skoro sigurno ili sa verovatnoćom 1 ka X. Pišemo

$$ss - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

(2) Ako, za svako $\varepsilon > 0$,

$$p_n(\varepsilon) = P\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\} \to 0, \quad \textit{kada} \quad n \to \infty,$$

tada kažemo da niz $\{X_n\}$ konvergira u verovatnoći ka X. Pišemo

$$P - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

(3) Ako $X_n, X \in L^p$, $p \geq 1$, i $E(|X_n - X|^p) \to 0$, kada $n \to \infty$, tada kažemo da niz $\{X_n\}$ konvergira u p-srednjem ka X. Za $p = 1$ govorimo o konvergenciji u srednjem, a za $p = 2$ govorimo o konvergenciji u srednje kvadratnom i pišemo

$$sk - \lim_{n\to\infty} X_n = X.$$

(4) *Neka su F_n i F funkcije raspodela slučajnih promenljivih X_n i X, redom. Tada, ako za svaku realnu neprekidnu funkciju g definisanu na $\mathbb{R}^d$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, dF_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, dF(x),$$

kažemo da niz $\{X_n\}$ konvergira u raspodeli ka X. To je slučaj ako i samo ako

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

u svakoj tački u kojoj je F neprekidna ili

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t), \quad \text{za sve } t \in \mathbb{R}^d,$$

gde φ_n i φ označavaju odgovarajuće karakteristične funkcije.

Može se pokazati da su ovi koncepti konvergencije medjusobno u sledećim relacijama.

Ako je $p \leq q$, tada q-srednja konvergencija implicira p-srednju konvergenciju. Takodje, konvergencija u p-srednjem i skoro sigurna konvergencija impliciraju konvergenciju u verovatnoći, koja dalje implicira konvergenciju u raspodeli. Dalje, niz konvergira u verovatnoći ako i samo ako svaki podniz tog niza sadrži skoro sigurno konvergentan podniz.

Konačno, dovoljan uslov da $\text{ss} - \lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ je da

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(|X_n - X|^p) < \infty \quad \text{za neko} \quad p > 0.$$

Slučajni procesi

Neka I označava proizvoljan neprazan indeksni skup i neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće.

Definicija 1.23 *Familija $\{X_t : t \in I\}$ $\mathbb{R}^d$-vrednosnih slučajnih promenljivih se zove slučajan proces sa parametarskim (indeksnim) skupom I i prostorm stanja $\mathbb{R}^d$.*

Neka je $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ slučajan proces. Tada je $X_t(\cdot)$ $\mathbb{R}^d$-vrednosna slučajna promenljiva, za svako fiksirano $t \in [t_0, T]$.

Definicija 1.24 *Neka je $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ slučajan proces. Tada je, za svako fiksirano $\omega \in \Omega$, $X_{\cdot}(\omega)$ $\mathbb{R}^d$-vrednosna funkcija na $[t_0, T]$ i zove se staza (trajektorija) slučajnog procesa.*

Definicija 1.25 *Konačno-dimenzionalne raspodele slučajnog procesa $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ su date sa*

$$\begin{aligned} P[X_t \leq x] &= F_t(x), \\ P[X_{t_1} \leq x_1,\ X_{t_2} \leq x_2] &= F_{t_1,t_2}(x_1, x_2), \\ &\vdots \\ P[X_{t_1} \leq x_1, \ldots, X_{t_n} \leq x_n] &= F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \end{aligned}$$

gde t i t_i, pripadaju $[t_0, T]$ i x_i, pripada $\mathbb{R}^d$, $i = 1, 2, \ldots$.

Može se pokazati da sistem funkcija raspodela zadovoljava sledeća dva uslova:

(1) *Uslov simetrije:* Ako je $\{i_1, \ldots, i_n\}$ permutacija brojeva $1, \ldots, n$, tada za proizvoljne trenutke i $n \geq 1$,

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

(2) *Uslov kompatibilnosti:* Za $m < n$ i za proizvoljne trenutke $t_{m+1}, \ldots, t_n \in [t_0, T]$, važi

$$F_{t_1,\ldots,t_m,t_{m+1}\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_m, \infty, \ldots, \infty) = F_{t_1,\ldots,t_m}(x_1, \ldots, x_m).$$

Često je umesto familije slučajnih promenljivih definisanih na nekom prostoru verovatnoća data familija raspodela $P_{t_1,\ldots,t_n}(B_1, \ldots, B_n)$ ili funkcija raspodela $F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)$ koje zadovoljavaju uslove simetrije i kompatibilnosti. Ova dva koncepta su ekvivalentna kao što se može videti iz sledećeg tvrdjenja.

Teorema 1.12 *(Kolmogorova fundamentalna teorema) Za svaku familiju funkcija raspodele koja zadovoljava uslove simetrije i kompatibilnosti postoje prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i slučajni proces $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ definisan na njemu koji poseduje date raspodele kao konačno-dimenzionalne raspodele.*

U nastavku, umesto $\{X_t : t \in [t_0, T]\}$ jednostavno ćemo pisati X_t.

Definicija 1.26 *Slučajni procesi X_t i $\overline{X}_t$ definisani na istom prostoru verovatnoća su (stohastički) ekvivalentni ako, za svako $t \in [t_0, T]$, važi $X_t = \overline{X}_t$ sa verovatnoćom 1. Tada se $\overline{X}_t$ zove verzija procesa X_t i obrnuto.*

Konačno-dimenzionalne raspodele dva ekvivalentna slučajna procesa se podudaraju. Sa druge strane, trajektorije ekvivalentnih procesa mogu imati potpuno različita svojstva.

Definicija 1.27 *Proces X_t je separabilan ako postoji prebrojiv skup trenutaka $M = \{t_1, t_2, \ldots\}$, gust u untervalu $[t_0, T]$, i skup $N \in \mathcal{F}$ P-mere nula takav da se, za svaki otvoren podinterval (a, b) intervala $[t_0, T]$ i svaki zatvoreni podskup A od $\mathbb{R}^d$, skupovi*

$$\{\omega : X_t(\omega) \in A \text{ za sve } t \in (a, b) \cap M\} \in \mathcal{F}$$

i

$$\{\omega : X_t(\omega) \in A \text{ za sve } t \in (a, b)\}$$

razlikuju samo na podskupu od N.

Definicija 1.28 *Slučajan proces je (strogo) stacionaran ako su njegove konačno-dimenzionalne raspodele invarijantne u odnosu na raspored u vremenu, odnosno ako, za sve $t_i, t_i + t \in [t_0, T]$,*

$$F_{t_1+t, \ldots, t_n+t}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1, \ldots, t_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Pored stroge stacionarnosti češće govorimo o takozvanoj stacionarnosti u širem smislu koja se definiše na sledeći način:

Definicija 1.29 *Slučajan proces X_t je stacionaran u širem smislu ako je $E(X_t) = m = const$ i $Cov(X_t, X_s) = C(t-s)$, gde je C funkcija jedne promenljive.*

Ako taj proces ima osobinu $\lim_{t\to s} E\left(|X_t - X_s|^2\right) = 0$ (srednje kvadratna neprekidnost), tada kovarijansna matrica C ima reprezentaciju

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\, dF(u), \quad -\infty < t < \infty,$$

gde je $d \times d$ matrica $F(u)$ spektralna funkcija raspodele od X_t. Ako F ima gustinu f, tada se ona zove spektralna gustina od X_t. U slučaju

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(t)|\, dt < \infty,$$

f se dobija inverznom formulom

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu}\, C(t)\, dt, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Jedan od najčešće korišćenih slučajnih procesa je svakako Gausovski proces.

Definicija 1.30 *$\mathbb{R}^d$-vrednosni slučajan proces se zove Gausovski proces ako su njegove konačno-dimenzionalne raspodele normalne. Drugim rečima, ako zajednička raspodela od $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ ima sledeću karakterističnu funkciju*

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_n}(u_1,\ldots,u_n) = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} u_k^T\, m(t_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_k^T\, C(t_k, t_j)\, u_j \right),$$

gde $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$, $t_1, \ldots, t_n \in [t_0, T]$.

Ovde je $m(t) = E(X_t)$ i $C(t,s) = Cov(X_t, X_s)$.

Zato su konačno-dimenzionalne raspodele Gausovskog procesa jedinstveno odredjene dvema funkcijama $m(t)$ i $C(t,s)$, odnosno, prvim i drugim momentom.

1.3.2 Vinerov proces i beli šum

Definicija 1.31 *Vinerov proces W_t je slučajan proces sa nezavisnim, stacionarnim i $\mathcal{N}(0,(t-s)I)$-raspodeljenim priraštajima $W_t - W_s$ (I je jedinična matrica), sa početnom vrednošću $W_0 = 0$ i skoro sigurno neprekidnim trajektorijama.*

Može se pokazati da je W_t Gausovski proces sa očekivanjem $E(W_t) = 0$ i kovarijansnom matricom

$$E\left(W_t\, W_s^T\right) = \min(t,s)\, I.$$

Dalje, ako je W_t Vinerov proces, procesi $-W_t$, $c\, W_{t/c^2}$ ($c \neq 0$), $t\, W_{1/t}$ i $W_{t+s} - W_s$ (s je fiksirano i $t \geq 0$) su takodje Vinerovi procesi.

Skoro sve trajektorije Vinerovog procesa su neprekidne ali nigde diferencijabilne funkcije. Da bismo stekli probabilističku predstavu o tome, uzmimo da je t fiksirano.

Diferencni količnik $\dfrac{W_{t+h} - W_t}{h}$ je normalno raspodeljen sa parametrima 0 i $\dfrac{1}{|h|}\, I$. To zapisujemo

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h}\ :\ \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{|h|}\, I\right).$$

Kada $h \to 0$, ta normalna raspodela divergira, odnosno, za svaki ograničren merljiv skup B,

$$P\left[\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \in B\right] \to 0, \quad \text{kada } h \to 0.$$

Zato, diferencni količnik ne konvergira sa pozitivnom verovatnoćom ka nekoj konačnoj slučajnoj promenljivoj.

Kao što smo videli,Vinerov proces je klasičan slučajan proces.

U nastavku ćemo definisati proces belog šuma i pokazati da to nije moguće učiniti na klasičan način. Radi jednostavnosti, na početku ćemo posmatrati jednodimenzionalni slučaj.

U inženjerskoj literaturi takozvani (Gausovski) beli šum se definiše kao stacionaran Gausovski proces ξ_t, $-\infty < t < \infty$, sa srednjom vrednošću $E(\xi_t) = 0$ i konstantnom spektralnom gustinom $f(\lambda)$ na realnoj osi $\mathbb{R}$.

Ako je $E(\xi_s \xi_{t+s}) = C(t)$ kovarijansna funkcija za ξ_t, tada

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\, C(t)\, dt = \frac{c}{2\pi}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1.40}$$

gde je c pozitivna konstanta. Možemo, bez gubitka opštosti, uzeti da je $c \equiv 1$.

Drugim rečima, takav proces ima spektralnu gustinu u kojoj sve frekvencije učestvuju sa istom gustinom. Zbog analogije sa belom svetlošću u optici, gde se sve frekvencije vidljive svetlosti pojavljuju uniformno, taj spektar se zove "beli" spektar. Medjutim, takav proces ne postoji u klasičnom smislu jer (1.40) odgovara samo izboru $C(t) = \delta(t)$, gde je δ Dirakova delta funkcija. Onda bismo imali

$$C(0) = E(\xi_t^2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda = \infty.$$

Kako je $C(t) = 0$ za $t \neq 0$, vrednosti ξ_t i ξ_{t+s} bi bile nekorelirane za proizvoljno male vrednosti s i, kako je proces Gausovski, bile bi i nezavisne. Trajektorije procesa sa nezavisnim vrednostima u svakoj tački moraju biti jako iregularne.

U stvari, beli šum je prvi put korektno opisan i definisan koristeći teoriju uopštenih funkcija (teoriju distribucija) kao što ćemo ukratko ilustrovati u sledećem delu ovog odeljka koji je posvećen uopštenim slučajnim procesima.

1.3.3 Uopšteni slučajni procesi

Neka je (Ω, Σ, μ) prostor verovatnoće.

Definicija 1.32 *Slabo merljivo preslikavanje*

$$X : \Omega \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

se zove uopšten slučajan proces na $\mathbb{R}^d$.

Za svaku fiksiranu funkciju $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, preslikavanje $\Omega \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$\omega \mapsto \langle X(\omega), \varphi \rangle$$

je slučajna promenljiva.

Prostor uopštenih slučajnih procesa ćemo označavati sa $\mathcal{D}'_{\Omega}(\mathbb{R}^d)$. Karakteristična funkcija procesa X je

$$C_X(\varphi) = \int e^{i\langle X(\omega), \varphi \rangle} d\mu(\omega), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Uzmimo da je prostor verovatnoća Ω prostor temperiranih distribucija $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ i da je Σ Borelova σ-algebra generisana slabom topologijom. Tada postoji jedinstvena probabilistička mera μ on (Ω, Σ) takva da je

$$\int e^{i\langle X(\omega), \varphi \rangle} d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Ovaj rezultat sledi iz Bohner-Minlosove (Bochner-Minlos) teoreme (videti [17] ili [18]).

Definicija 1.33 *Proces belog šuma $\dot{W} : \Omega \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ je identičko preslikavanje $\dot{W}(\omega) = \omega$, odnosno,*

$$\langle \dot{W}(\omega), \varphi \rangle = \langle \omega, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

To je uopšten slučajan Gausovski proces sa srednjom vrednošću nula i disperzijom

$$V(\dot{W}(\varphi)) = E(\dot{W}(\varphi)^2) = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

gde E označava očekivanje. Njegova kovarijansa je bilinearni funkcional

$$E\left(\dot{W}(\varphi)\dot{W}(\psi)\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\psi(y)\, dy$$

reprezentovana Dirakovom merom na dijagonali $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, pokazajući tako singularnu prirodu belog šuma.

Neka je φ_ε molifajer dat sa

$$\varphi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^d}\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \int \varphi(y)dy = 1.$$

Mreža φ_ε se zove nenegativna model delta mreža.

Definicija 1.34 *Proces uglačanog belog šuma $\mathbb{R}^d$ se definiše kao*

$$\dot{W}_\varepsilon(x) = \langle \dot{W}(y), \varphi_\varepsilon(x-y) \rangle,$$

gde je $\dot{W} : \Omega \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ proces belog šuma na $\mathbb{R}^d$ i φ_ε je nenegativna model delta mreža.

Sada ćemo dati vezu izmedju belog šuma i Vinerovog procesa na $\mathbb{R}^d$, pri čemu ćemo oba posmatrati kao uopštene slučajne procese.

Za $x \in \mathbb{R}^d$ definišimo njegovu indikatorsku funkciju znaka

$$m(x,y) = \prod_{j=1}^{d} \operatorname{sign}(x_j)\kappa(x,y),$$

gde je $\kappa(x,\cdot)$ indikatorska funkcija d-dimenzionalnog intervala od koordinatnog početka do tačke x.

Uopšteni Vinerov proces na $\mathbb{R}^d$ definišemo na sledeći način.

Definicija 1.35 *Neka je φ_ε nenegativna model delta mreža i*

$$B(x) := \lim_{\varepsilon\to 0} \langle \dot{W}, m(x,\cdot) * \varphi_\varepsilon \rangle. \tag{1.41}$$

Verzija procesa $(x,\omega) \to B(x,\omega)$ koja ima skoro sigurno neprekidne trajektorije se zove (uopšteni) Vinerov proces na $\mathbb{R}^d$.

Primetimo da limes na desnoj strani u (1.41) postoji u $L^2(\Omega)$. Iz konstrukcije sledi da je

$$\dot{W} = \partial_{x_1} \ldots \partial_{x_d} B$$

skoro svuda u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dakle, beli šum na $\mathbb{R}^d$ možemo posmatrati kao distribucioni izvod d-tog reda Vinerovog procesa.

Pozitivan šum

Analiza pozitivnog šuma posmatranog kao Vikov (Wick) eksponent je prikazana u [18]. Mi ćemo ovde posmatrati proces uglačanog pozitivnog šuma. Razmatraćemo samo jednodimenzionalni slučaj jer je to slučaj koji ćemo posmatrati u primenama datim u poglavlju 3.

Definicija 1.36 *Proces uglačanog pozitivnog šuma $W_\varepsilon^+(x)$ na $\mathbb{R}$ se defniše kao*

$$W_\varepsilon^+(x) = \exp\left(\dot{W}_\varepsilon(x) - \frac{1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{L^2}^2\right), \tag{1.42}$$

gde je $\dot{W}_\varepsilon$ proces uglačanog belog šuma na $\mathbb{R}$ i φ_ε je nenegativna model delta mreža.

Propozicija 1.6 *Proces uglačanog pozitivnog šuma ima srednju vrednost 1 i disperziju $V(W_\varepsilon^+) = e^{\sigma_\varepsilon^2} - 1$, gde je $\sigma_\varepsilon^2 = \left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{L^2}^2$.*

Dokaz

Za uglačani beli šum $\dot{W}_\varepsilon = \dot{W} * \varphi_\varepsilon$ imamo da su njegova srednja vrednost i disprerzija

$$E(\dot{W}_\varepsilon) = 0, \quad V(\dot{W}_\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2.$$

Zato dobijamo

$$\begin{aligned}
E\left(W_\varepsilon^+\right) &= E\left(\exp\left(\dot{W}_\varepsilon(x) - \frac{1}{2}\left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{L^2}^2\right)\right) \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}y^2} e^{(y-\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2)} \, dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} \int e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(y-\sigma_\varepsilon^2)^2} \, dy \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Slično imamo

$$\begin{aligned}
E\left(\left(W_\varepsilon^+\right)^2\right) &= E\left(\exp\left(2\dot{W}_\varepsilon(x) - \left\|\varphi_\varepsilon\right\|_{L^2}^2\right)\right) \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}y^2} e^{(2y-\sigma_\varepsilon^2)} \, dy \\
&= e^{\sigma_\varepsilon^2} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\varepsilon} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(y-2\sigma_\varepsilon^2)^2} \, dy \\
&= e^{\sigma_\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

Zato je,

$$V(W_\varepsilon^+) = E\left(\left(W_\varepsilon^+\right)^2\right) - \left(E\left(W_\varepsilon^+\right)\right)^2 = e^{\sigma_\varepsilon^2} - 1.$$

Dakle, dokaz je završen. □

1.4 Prostori Kolomboovih uopštenih funkcija

Kao što smo već spomenuli, operacija množenja je dobro definisana samo na nekim podskupovima prostora $\mathcal{D}'(Q)$, gde $\mathcal{D}'(Q)$ označava prostor distribucija na otvorenom podskupu Q od $\mathbb{R}^n$. Pod nekim prirodnim uslovima koje bi množenje trebalo da zadovoljava nije moguće definisati ovu operaciju na čitavom prostoru $\mathcal{D}'(Q)$. To je dobro poznati Švarcov (Schwartz) rezultat o nemogućnosti množenja (videti [48]).

Sa druge strane, veliki broj teškoća u rešavanju raznih, kako teorijskih tako i problema u primenama, nastaje upravo usled nemogućnosti množenja elemenata iz $\mathcal{D}'(Q)$.

Iz tih razloga, ukazala se potreba za uvodjenjem prostora koji bi zadržali (skoro) sve prednosti prostora distribucija u odnosu na prostore klasičnih funkcija, ali u kojima bi bilo dobro definisano množenje. Prostori uopštenih funkcija Kolomboovog tipa su, u tom smislu, veoma pogodno rešenje. Ovaj odeljak je posvećen takvim prostorima uopštenih funkcija.

1.4.1 Osnovne definicije i osobine

Nelinearna teorija uopštenih funkcija se značajno razvila tokom poslednjih par decenija. Za njen razvoj su prvenstveno zaslužni J.F. Colombeau ([9], [10]), Yu.V. Egorov ([14]), E.E. Rosinger ([44], [45]), H. Biagioni ([5]), M. Oberguggenberger ([34], [35]) i drugi.

Mi ćemo ovde uvesti prostore Kolomboovog tipa sledeći konstrukciju izloženu u [9] i [10].

Elementarne konstrukcije

Neka je $\mathcal{A}_0(\mathbb{R})$ skup svih funkcija $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ koje zadovoljavaju

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 1, \quad \mathrm{diam}(\mathrm{supp}\phi) = 1.$$

Tada je $\mathcal{A}_q(\mathbb{R})$ skup svih funkcija $\phi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$ koje zadovoljavaju

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 1, \int_{\mathbb{R}} \phi(t)t^i dt = 0, \ \mathrm{diam}(\mathrm{supp}\phi) = 1, \tag{1.43}$$

gde je $1 \leq i \leq q$ i $q \in \mathbb{N}$.

U n-dimenzionalnom slučaju definišemo $\phi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R}^n)$ sa

$$\phi(x) = \phi_1(x_1) \cdots \phi_1(x_n),$$

gde $\phi_1 \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R})$. Pretpostavka $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\phi) = 1$, koja je postavljena zbog jednostavnosti, implicira $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\phi_\varepsilon) = \varepsilon$, gde je $\phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\phi\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Očigledno važi, $\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \ldots$

$\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ je skup svih funkcija $G : \mathcal{A}_0 \times (0,1) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ koje zadovoljavaju $G_{\phi,\varepsilon}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, za sve $\phi \in \mathcal{A}_0$ i za svako $\varepsilon \in (0,1)$.

Definicija 1.37 *Funkcija $G \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ je umerena na $\mathbb{R}^n$ ako za svaki kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ i svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ postoji $N \in \mathbb{N}$ sa osobinom da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$, postoje konstante $\eta > 0$, $c > 0$ takve da*

$$|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq c\varepsilon^{-N}, \quad x \in K,\ \varepsilon < \eta.$$

Sa $\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$ označavamo skup svih umerenih funkcija na $\mathbb{R}^n$. To je algebra, podlagebra od $\mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$.

Definicija 1.38 *Funkcija $G \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^n]$ se zove nula funkcija na $\mathbb{R}^n$ ako za svaki kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^n$ i sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $b \in \mathbb{R}$ postoji $q \in \mathbb{N}$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, postoje konstante $\eta > 0$, $c > 0$ takve da*

$$|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq c\varepsilon^{b}, \quad x \in K,\ \varepsilon < \eta.$$

Sa $\mathcal{N}[\mathbb{R}^n]$ označavamo skup svih nula funkcija na $\mathbb{R}^n$. Može se pokazati da je taj skup ideal skupa $\mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]$.

Definicija 1.39 *Kolomboova algebra uopštenih funkcija se definiše kao*

$$\mathcal{G}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_M[\mathbb{R}^n]/\mathcal{N}[\mathbb{R}^n].$$

Ako u prethodnim definicijama umesto skupa $\mathbb{R}^n$ koristimo otvoren podskup Q od $\mathbb{R}^n$, tada dobijamo prostor Kolomboovih uopštenih funkcija nad Q, koga označavamo sa $\mathcal{G}(Q)$. Kao što se može videti, svaka funkcija $G \in \mathcal{G}(Q)$ je definisana svojim predstavnikom (reprezentom) $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M(Q)$.

Sve operacije su definisane pomoću odgovarajućih operacija medju predstavnicima. Na primer, $\partial^\alpha G = [\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}]$, $\alpha \in \mathbb{N}_0$, $G\tilde{G} = [G_{\phi,\varepsilon}\tilde{G}_{\phi,\varepsilon}]$, itd.

Ovako definisana algebra $\mathcal{G}(Q)$ ima sledeće osobine:

(1) $\mathcal{G}(Q)$ je komutativna, asocijativna algebra sa izvodima prirodno definisanim na predstavnicima.

(2) Postoji linearno potapanje $\mathcal{D}'(Q) \to \mathcal{G}(Q)$.

(3) $\partial_j \restriction_{\mathcal{D}'(Q)}$ se poklapa sa običnim izvodom na $\mathcal{D}'(Q)$, $j = 1, \dots, n$.

(4) Proizvod elemenata iz $\mathcal{G}(Q)$ se poklapa sa običnim proizvodom u $C^\infty(Q)$.

(5) Ako je F polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima funkcija i ako $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{G}(Q)$, tada $F(U_1, \dots, U_n) \in \mathcal{G}(Q)$.

Prostor Kolomboovih uopštenih funkcija na zatvorenju $\overline{Q}$ otvorenog skupa Q u $\mathbb{R}^n$ se može definisati na sledeći način.

Definicija 1.40 *$\mathcal{E}[\overline{Q}]$ je skup svih funkcija $G : \mathcal{A}_0 \times (0,1) \times \overline{Q} \to \mathbb{C}$ čije restrikcije na Q pripadaju $\mathcal{E}[Q]$ i izvodi tih restrikcija se mogu neprekidno produžiti na $\overline{Q}$.*

$\mathcal{E}_M[\overline{Q}]$ je skup svih funkcija $G \in \mathcal{E}[\overline{Q}]$ takvih da za svaki kompaktan skup $K \subset \overline{Q}$ i svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $\phi \in \mathcal{A}_N$, postoje konstante $\eta > 0$, $c > 0$ takve da

$$|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq c\varepsilon^{-N}, \quad x \in K, \ \varepsilon < \eta.$$

$\mathcal{N}[\overline{Q}]$ je skup svih funkcija $G \in \mathcal{E}[\overline{Q}]$ takvih da za svaki kompaktan skup $K \subset \overline{Q}$ i sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $b \in \mathbb{R}$ postoji $q \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $\phi \in \mathcal{A}_q$, postoje konstante $\eta > 0$, $c > 0$ takve da

$$|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq c\varepsilon^{b}, \quad x \in K, \ \varepsilon < \eta.$$

Kolomboova algebra je faktor algebra

$$\mathcal{G}(\overline{Q}) = \mathcal{E}_M[\overline{Q}]/\mathcal{N}[\overline{Q}].$$

Konačno, uvedimo algebru uopštenih kompleksnih brojeva.

Neka je $\mathbb{C}_M$ skup svih funkcija $A : \mathcal{A}_0 \times (0,1) \to \mathbb{C}$ sa osobinom da postoji $N \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje konstante $\eta > 0,\ c > 0$ takve da

$$|A_{\phi,\varepsilon}| \leq c\varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon < \eta.$$

Označimo sa $\mathbb{C}_0$ skup svih funkcija $A \in \mathbb{C}_M$ sa osobinom da za svako $b \in \mathbb{R}$ postoji $q \in \mathbb{N}$ takvo da za sve $\phi \in \mathcal{A}_q$ postoje konstante $\eta > 0,\ c > 0$ takve da

$$|A_{\phi,\varepsilon}| \leq c\varepsilon^{b}, \quad \varepsilon < \eta.$$

Algebra $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_M/\mathbb{C}_0$ je algebra uopštenih kompleksnih brojeva.

Primetimo da se za sve $x \in \mathbb{R}^n$ i $G \in \mathcal{G}$, $G(x)$ uopšten kompleksni broj definiše predstavnikom $G_{\phi,\varepsilon}(x)$, koji je, u stvari, vrednost uopštene funkcije G u tački x.

Simplifikovana Kolomboova algebra

U primenama na rešavanje nekih ODJ i PDJ problema koje ćemo razmatrati u poglavljima koja slede uvek ćemo koristiti takozvanu simplifikovanu Kolomboovu algebru.

$\mathcal{E}_{M,S}(Q)$ je skup funkcija $G_\varepsilon \in \mathcal{E}(Q)$ koje preslikavaju $(0,1) \times Q \to \mathbb{R}$ sa osobinom da za svaki kompaktan skup $K \subset Q$ i sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ postoje konstante $N \in \mathbb{N}$ i $\eta > 0,\ c > 0$ takve da

$$\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} \leq c\varepsilon^{-N},\ \varepsilon < \eta. \tag{1.44}$$

$\mathcal{N}_S(Q)$ je skup funkcija $G_\varepsilon \in \mathcal{E}(Q)$ koje preslikavaju $(0,1) \times Q \to \mathbb{R}$ sa osobinom da za svaki kompaktan skup $K \subset Q$, za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i $a \in \mathbb{R}$ postoje konstante $\eta > 0,\ c > 0$ takve da

$$\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^\infty(K)} \leq c\varepsilon^{a},\ \varepsilon < \eta. \tag{1.45}$$

Kao i u prethodnim slučajevima, $\mathcal{E}_{M,S}(Q)$ je algebra i $\mathcal{N}_S(Q)$ je ideal.

Definicija 1.41 *Simplifikovana algebra Kolomboovih uopštenih funkcija se definiše kao faktor algebra*

$$\mathcal{G}_S(Q) = \mathcal{E}_{M,S}(Q)/\mathcal{N}_S(Q).$$

Slično, uvodimo algebru L^p-umerenih funkcija, koju označavamo sa $\mathcal{E}_{L^p}(Q)$. To je prostor svih funkcija $G_\varepsilon \in \mathcal{E}(Q)$ sa osobinom da za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ postoje konstante $a \in \mathbb{R}$ i $C > 0$ takve da

$$\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^p(Q)} \leq C\, \varepsilon^a,$$

Algebra L^p-nula funkcija, $\mathcal{N}_{L^p}(Q)$, je prostor svih funkcija $G_\varepsilon \in \mathcal{E}(Q)$ sa osobinom da za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ i svako $b \in \mathbb{R}$ postoje konstante $C > 0$ takve da

$$\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^p(Q)} \leq C\, \varepsilon^b.$$

Može se pokazati da je $\mathcal{N}_{L^p}(Q)$ ideal prostora $\mathcal{E}_{L^p}(Q)$. Odgovarajuća algebra Kolomboovih uopštenih funkcija se definiše

$$\mathcal{G}_{L^p}(Q) = \mathcal{E}_{L^p}(Q)/\mathcal{N}_{L^p}(Q).$$

Primetimo da je $\mathcal{N}_{L^p}(Q) \subset \mathcal{N}(Q)$ i $\mathcal{E}_{L^p}(Q) \subset \mathcal{E}_M(Q)$ što znači da postoji kanoničko preslikavanje $\mathcal{G}_{L^p}(Q) \to \mathcal{G}(Q)$.

Jednakost i asociranost u Kolomboovim prostorima

Kažemo da je funkcija $G \in \mathcal{G}(Q)$ jednaka u smislu uopštenih funkcija distribuciji $g \in \mathcal{D}'(Q)$, što zapisujemo $G \overset{\mathcal{D}'(Q)}{=} g$, ako

$$\int G(x)\psi(x)dx = \langle g(x), \psi(x)\rangle \quad \text{u } \overline{\mathbb{C}},$$

za svako $\psi \in \mathcal{D}(Q)$.

Dve uopštene funkcije F i G su jednake u smislu uopštenih funkcija ako je $F - G = 0$ u smislu uopštenih funkcija.

Broj $Z \in \overline{\mathbb{C}}$ je asociran sa $z \in \mathbb{C}$, što zapisujemo $Z \approx z$, ako za neki njegov predstavnik, $Z_{\phi,\varepsilon}$, postoji $N \in \mathbb{N}$ takvo da

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Z_{\phi,\varepsilon} = z, \ \phi \in \mathcal{A}_N.$$

Ova definicija ne zavisi od izbora predstavnika.

Kažemo da je uopštena funkcija $G \in \mathcal{G}(Q)$ asocirana sa distribucijom g, što zapisujemo $G \approx g$, ako za svako $\psi \in \mathcal{D}(Q)$

$$\int G(x)\psi(x)dx \approx \langle g(x), \psi(x)\rangle.$$

Dve uopštene funkcije F i G su asocirane, što zapisujemo $F \approx G$, ako je $F - G \approx 0$, gde je 0 nula distribucija.

Potapanje prostora distribucija u prostore Kolomboa

Potapanje ι_0 prostora distribucija sa kompaktnim nosačem $\mathcal{E}'(Q)$ u Kolomboovu algebru $\mathcal{G}(Q)$ je dato sa

$$\iota_0(w)(\varphi) = (w * \varphi) \restriction_Q$$

za $w \in \mathcal{E}'(Q)$ i $\varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n)$.

U slučaju kada ne radimo sa distribucijama sa kompaktnim nosačem proces potapanja se vrši na sledeći način (videti [34]). Koristićemo (bez dokaza) činjenicu da je Kolomboova algebra $\mathcal{G}(Q)$ snop (diferencijalnih algebri), odakle imamo da postoji samo jedno proširenje ι od ι_0 kao morfizam snopa $\mathcal{D}'(Q) \to \mathcal{G}(Q)$.

Stavimo

$$l(\varphi) = \sup\{\ |x| :\ \varphi(x) \neq 0\}, \quad \varphi \in \mathcal{A}_q(\mathbb{R}^n).$$

Tada je $l(\varphi_\varepsilon) = \varepsilon\ l(\varphi)$. Dalje, iscrpljujemo skup Q kompaktnim skupovima

$$(Q)_r = \left\{x \in Q :\ |x| \leq \frac{1}{r},\ \mathrm{dist}(x, \partial Q) \geq 2r\right\}$$

gde je $r > 0$. Neka je κ_r karakteristična funkcija za $(Q)_r$ i konačno, stavimo

$$\theta(\varphi) = \kappa_{l(\varphi)} * \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^n).$$

Prvo, $\theta(\varphi) \in \mathcal{D}(Q)$. Ako $w \in \mathcal{D}'(Q)$, definišemo $\iota(w) \in \mathcal{G}(Q)$ kao klasu preslikavanja

$$\varphi \to (\theta(\varphi)w) * \varphi.$$

Može se pokazati da je ι linearno potapanje koje komutira sa izvodima i daje podalgebru $C^\infty(Q)$. Primetimo, ako je φ fiksirano i K je kompaktan podskup od Q, tada

$$(\theta(\varphi_\varepsilon)w) * \varphi_\varepsilon(x) = \langle w(y), \varphi_\varepsilon(x-y)\rangle$$

za sve $x \in K$, pri čemu je ε dovoljno malo. Na osnovu same konstrukcije, elementi algebre $\mathcal{G}(Q)$ su već odredjeni njihovim vrednostima na (φ_ε, x) za malo ε i x iz kompaktnog podskupa.

1.4.2 Vektorski prostori uopštenih funkcija

U ovom delu ćemo izložiti konstrukcije i neke osnovne osobine prostora Kolomboovih uopštenih funkcija koje ćemo kasnije koristiti za rešavanje determinističkih PDJ sa singularitetima. Odeljci 2.1.2 i 2.2.2 su potpuno posvećeni spomenutim primenama.

Neka je $H^{r,s}(\Omega)$ Soboljev prostor funkcija u $L^s(\Omega)$ čiji distribucioni izvodi reda $|\alpha| \leq r$ pripadaju $L^s(\Omega)$ sa normom

$$\|u\|_{r,s,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|\leq r} \|\partial^\alpha u\|^s_{L^s(\Omega)} \right)^{1/s}.$$

U slučaju $s = 2$ pišemo samo $H^r(\Omega)$.

Upućujemo čitaoca na [5], [10], [30] i [34] gde može naći detaljniju priču o opštim Kolomboovim algebrama i na [7] and [29] za detalje vezane za Kolomboove algebre tipa $\mathcal{G}_{L^p,L^q}$. Ovde ćemo učiniti neophodne izmene koje zavise od problema koji posmatramo.

Definicija 1.42 *$\mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T) : \mathbb{R}^n)$, $T > 0$, je vektorski prostor mreža $(G_\varepsilon)_\varepsilon$ funkcija*

$$G_\varepsilon \in C^0\left([0,T) : H^2(\mathbb{R}^n)\right) \cap C^1\left((0,T) : L^2(\mathbb{R}^n)\right),\ \varepsilon \in (0,1)$$

takvih da za svako $T_1 \in (0,T)$ postoji $a \in \mathbb{R}$ takvo da

$$\max\left\{ \sup_{t\in[0,T)} \|G_\varepsilon(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}, \sup_{t\in[T_1,T)} \|\partial_t G_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right\} = \mathcal{O}(\varepsilon^a), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0. \tag{1.46}$$

$\mathcal{N}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$, $T>0$, je vektorski prostor mreža $(G_\varepsilon)_\varepsilon$ funkcija

$$G_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$$

takvih da za svako $T_1 \in (0,T)$ i svako $b \in \mathbb{R}$

$$\max\left\{\sup_{t\in[0,T)} \|G_\varepsilon(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)}, \sup_{t\in[T_1,T)} \|\partial_t G_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right\} = \mathcal{O}(\varepsilon^b), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0. \tag{1.47}$$

Količnički prostor

$$\mathcal{G}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n) = \frac{\mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)}{\mathcal{N}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)}$$

je vektorski prostor Kolomboovog tipa.

Ako odbacimo uslove date na $\partial_t G_\varepsilon$ u relacijama (1.46) i (1.47) dobijamo prostore $\mathcal{E}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{N}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{G}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$.

U nastavku nećemo pisati $\mathbb{R}^n$ u podindeksu oznake za normu.

Tvrdjenja data u sledećoj lemi su posledica Soboljevskih nejednakosti, odnosno činjenice da za $n \le 3$, važi $H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.1 *Neka je $n \le 3$. Prostor $\mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ je algebra sa množenjem i prostor $\mathcal{N}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ je ideal prostora $\mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$. Zato je, $\mathcal{G}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ algebra sa množenjem. Isto tvrdjenje važi i za prostore $\mathcal{E}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{N}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{G}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$.*

Ukoliko u (1.46) zamenimo H^2-norme L^2-normama dobijamo vektorske prostore

$$\mathcal{E}_{C^1,L^2}([0,T):\mathbb{R}^n),\ \mathcal{N}_{C^1,L^2}([0,T):\mathbb{R}^n) \text{ i } \mathcal{G}_{C^1,L^2}([0,T):\mathbb{R}^n).$$

Kanoničko preslikavanje $\iota_{L^2} : \mathcal{G}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n) \to \mathcal{G}_{C^1,L^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ je definisano sa $\iota_{L^2}(G) = H$, gde je $H = [G_\varepsilon]$ i $(G_\varepsilon)_\varepsilon$ je predstavnik za G.

Prostor $\mathcal{G}_{H^2}(\mathbb{R}^n)$ se može definisati na sličan način kao i $\mathcal{G}_{C^1,H^2}(\mathbb{R}^n)$, ali sa predstavnicima nezavisnim od vremenske promenljive t. Ovaj prostor je takodje algebra za $n \le 3$.

Sada ćemo se detaljnije upoznati sa prostorom $\mathcal{G}_{H^{2,\infty}}([0,T):\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{E}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$, (respektivno, $\mathcal{N}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$) je prostor mreža $(G_\varepsilon)_\varepsilon$ funkcija $G_\varepsilon \in H^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon \in (0,1)$, takvih da postoji $a \in \mathbb{R}$ (respektivno, za svako $a \in \mathbb{R}$) tako da

$$\|G_\varepsilon\|_{H^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\varepsilon^a), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0.$$

Oba prostora definisana gore su algebre sa uobičajenim množenjem i $\mathcal{N}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ je ideal. Algebra Kolomboovog tipa se definiše kao

$$\mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n) = \frac{\mathcal{E}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)}{\mathcal{N}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)}.$$

Definicija 1.43 *Elemenat $V \in \mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ je h_ε-tipa, $h_\varepsilon < \varepsilon^{-1}$, ako ima predstavnika $(V_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ sa osobinom*

$$\|V_\varepsilon\|_{H^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq M h_\varepsilon, \quad \varepsilon < \varepsilon_0,$$

za neke $M > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$.

Specijalno, elemenat $V \in \mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ je logaritamskog tipa ako ima predstavnika $(V_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ sa osobinom

$$\|V_\varepsilon\|_{H^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}\left(\log \varepsilon^{-1}\right),$$

a, $V \in \mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ je log-log tipa ako ima predstavnika $(V_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ sa osobinom

$$\|V_\varepsilon\|_{H^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\log^a(\log \varepsilon^{-1})), \quad \textit{za svako } a \in (0,1).$$

U poglavlju posvećenom primenama trebaće nam sledeći prostori.

Definicija 1.44 *$\mathcal{E}_M([0,\infty) : L^p(\mathbb{R}^n))$ je prostor mreža*

$$G_\varepsilon : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \; G_\varepsilon(t,\cdot) \in L^p(\mathbb{R}^n), \; \textit{za svako } t \in [0,\infty),$$

sa osobinom da za svako $T > 0$ postoje $C > 0$, $N \in \mathbb{N}$ i $\eta > 0$ takvi da

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\partial_t^\alpha G_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p} \leq C\varepsilon^{-N}, \; \alpha \in \{0,1\}, \; \varepsilon < \eta.$$

$\mathcal{N}([0,\infty):L^p(\mathbb{R}^n))$ je prostor mreža $G_\varepsilon \in \mathcal{E}_M([0,\infty):L^p(\mathbb{R}^n))$ sa osobinom da za svako $T>0$ i $a\in\mathbb{R}$ postoje $C>0$ i $\eta>0$ takvi da

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\partial_t^\alpha G_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^p} \le C\varepsilon^a,\ \alpha\in\{0,1\},\ \varepsilon<\eta.$$

Sada definišemo količnički prostor

$$\mathcal{G}([0,\infty):L^p(\mathbb{R}^n)) = \frac{\mathcal{E}_M([0,\infty):L^p(\mathbb{R}^n))}{\mathcal{N}([0,\infty):L^p(\mathbb{R}^n))}.$$

Na sličan način mogu se definisati prostori $\mathcal{E}_M(L^p(\mathbb{R}^n))$, $\mathcal{N}(L^p(\mathbb{R}^n))$ i $\mathcal{G}(L^p(\mathbb{R}^n))$.

Primetimo da navedeni prostori nisu algebre u odnosu na množenje (što je slučaj sa originalnim definicijama prostora uopštenih funkcija).

1.4.3 Uopštene polugrupe

Prostori Kolomboovih uopštenih funkcija su prirodan okvir za rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina, kao i linearnih diferencijalnih jednačina sa singularitetima. Zato nam je bilo veoma interesantno da proučavamo polugrupe operatora u okviru teorije Kolomboovih prostora.

U radu [31], M. Nedeljkov, S. Pilipović i D. Rajter su kombinovali teorije C_0-polugrupa i Kolomboovih uopštenih funkcija, dok su u radu [32], proučavane uniformno neprekidne polugrupe definisane u okviru prostora Kolomboovog tipa.

Ovaj deo disertacije je posvećen Kolomboovim uopštenim polugrupama spomenutim gore. Navešćemo definicije oba tipa uopštenih polugrupa i pokazaćemo neka njihova osnovna svojstva koja su važna sa stanovišta primene. Kasnije, u glavi 2, prikazaćemo neke od primena ovih polugrupa na rešavanje determinističkih PDJ problema.

Definicija Kolomboove C_0-polugrupe

Neka je $(E, \|\cdot\|)$ Banahov prostor i $\mathcal{L}(E)$ prostor svih linearnih neprekidnih preslikavanja $E\to E$.

Definicija 1.45 *$\mathcal{SE}_M([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je prostor mreža $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ jako (strogo) neprekidnih preslikavanja*

$$S_\varepsilon:[0,\infty)\to\mathcal{L}(E),\ \varepsilon\in(0,1),$$

takvih da za svako $T>0$ postoji $a\in\mathbb{R}$ takvo da

$$\sup_{t\in[0,T)}\|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}=\mathcal{O}\left(\varepsilon^a\right),\quad \text{kada } \varepsilon\to 0. \tag{1.48}$$

$\mathcal{SN}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je prostor mreža $(N_\varepsilon)_\varepsilon$ jako neprekidnih preslikavanja

$$N_\varepsilon:[0,\infty)\to\mathcal{L}(E),\ \varepsilon\in(0,1),$$

sa osobinama

(i) Za sve $b\in\mathbb{R}$ i $T>0$

$$\sup_{t\in[0,T)}\|N_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)}=\mathcal{O}(\varepsilon^b),\quad \text{kada } \varepsilon\to 0. \tag{1.49}$$

(ii) Postoje $t_0>0$ i $a\in\mathbb{R}$ takvi da

$$\sup_{t<t_0}\left\|\frac{N_\varepsilon(t)}{t}\right\|=\mathcal{O}(\varepsilon^a),\quad \text{kada } \varepsilon\to 0. \tag{1.50}$$

(iii) Postoji mreža $(H_\varepsilon)_\varepsilon$ u $\mathcal{L}(E)$ i $\varepsilon_0\in(0,1)$ takvi da

$$\lim_{t\to 0}\frac{N_\varepsilon(t)}{t}x=H_\varepsilon x,\quad x\in E,\ \varepsilon<\varepsilon_0. \tag{1.51}$$

(iv) Za svako $b>0$

$$\|H_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)}=\mathcal{O}(\varepsilon^b),\quad \text{kada } \varepsilon\to 0. \tag{1.52}$$

Propozicija 1.7 *$\mathcal{SE}_M([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je algebra u odnosu na operaciju kompozicije i $\mathcal{SN}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je ideal prostora $\mathcal{SE}_M([0,\infty):\mathcal{L}(E))$.*

Dokaz

Neka

$$(S_\varepsilon(t))_\varepsilon \in \mathcal{SE}_M([0,\infty):\mathcal{L}(E)) \quad \text{i} \quad (N_\varepsilon(t))_\varepsilon \in \mathcal{SN}([0,\infty):\mathcal{L}(E)).$$

Dokazaćemo samo drugo tvrdjenje, odnosno da

$$(S_\varepsilon(t)N_\varepsilon(t))_\varepsilon, \ (N_\varepsilon(t)S_\varepsilon(t))_\varepsilon \in \mathcal{SN}([0,\infty):\mathcal{L}(E)),$$

gde $S_\varepsilon(t)N_\varepsilon(t)$ označava kompoziciju.

Neka $\varepsilon \in (0,1)$. Na osnovu relacija (1.48) i (1.49), za neko $a \in \mathbb{R}$ i svako $b \in \mathbb{R}$,

$$\|S_\varepsilon(t)N_\varepsilon(t)\| \leq \|S_\varepsilon(t)\| \cdot \|N_\varepsilon(t)\| = \mathcal{O}(\varepsilon^{a+b}), \quad \text{kada} \quad \varepsilon \to 0.$$

Isto važi i za $\|N_\varepsilon(t)S_\varepsilon(t)\|$. Dalje, na osnovu (1.48) i (1.51),

$$\sup_{t<t_0}\left\|\frac{S_\varepsilon(t)N_\varepsilon(t)}{t}\right\| \leq \sup_{t<t_0}\|S_\varepsilon(t)\| \sup_{t<t_0}\left\|\frac{N_\varepsilon(t)}{t}\right\| = \mathcal{O}(\varepsilon^a), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0,$$

za neke $t_0 > 0$ i $a \in \mathbb{R}$. Takodje,

$$\sup_{t<t_0}\left\|\frac{N_\varepsilon(t)S_\varepsilon(t)}{t}\right\| = \mathcal{O}(\varepsilon^a), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0,$$

za neke $t_0 > 0$ i $a \in \mathbb{R}$.

Primetimo da je relacija (1.52) zadovoljena i za $S_\varepsilon(0)H_\varepsilon$ i za $H_\varepsilon S_\varepsilon(0)$.

Neka je $\varepsilon \in (0,1)$ fiksirano. Imamo

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{S_\varepsilon(t)N_\varepsilon(t)}{t}x - S_\varepsilon(0)H_\varepsilon x\right\| \\
&= \left\|S_\varepsilon(t)\frac{N_\varepsilon(t)}{t}x - S_\varepsilon(t)H_\varepsilon x + S_\varepsilon(t)H_\varepsilon x - S_\varepsilon(0)H_\varepsilon x\right\| \\
&\leq \|S_\varepsilon(t)\| \cdot \left\|\frac{N_\varepsilon(t)}{t}x - H_\varepsilon x\right\| + \|S_\varepsilon(t)H_\varepsilon x - S_\varepsilon(0)H_\varepsilon x\|.
\end{aligned}$$

Na osnovu (1.48) i (1.51) kao i neprekidnosti preslikavanja $t \mapsto S_\varepsilon(t)(H_\varepsilon x)$ u nuli, sledi da poslednji izraz teži nuli kada $t \to 0$.

Slično imamo

$$
\begin{aligned}
&\left\| \frac{N_\varepsilon(t) S_\varepsilon(t)}{t} x - H_\varepsilon S_\varepsilon(0) x \right\| \\
&= \left\| \frac{N_\varepsilon(t)}{t} S_\varepsilon(t) x - \frac{N_\varepsilon(t)}{t} S_\varepsilon(0) x + \frac{N_\varepsilon(t)}{t} S_\varepsilon(0) x - H_\varepsilon S_\varepsilon(0) x \right\| \\
&\leq \left\| \frac{N_\varepsilon(t)}{t} \right\| \| S_\varepsilon(t) x - S_\varepsilon(0) x \| + \left\| \frac{N_\varepsilon(t)}{t} (S_\varepsilon(0) x) - H_\varepsilon (S_\varepsilon(0) x) \right\| .
\end{aligned}
$$

Pretpostavke (1.50), (1.51) i (1.48) impliciraju da poslednji izraz teži nuli kada $t \to 0$. Time je dokaz završen. $\square$

Sada Kolomboovu algebru definišemo kao

$$
\mathcal{SG}([0, \infty) : \mathcal{L}(E)) = \frac{\mathcal{SE}_M([0, \infty) : \mathcal{L}(E))}{\mathcal{SN}([0, \infty) : \mathcal{L}(E))}.
$$

Elemente prostora $\mathcal{SG}([0, \infty) : \mathcal{L}(E))$ ćemo označavati sa $S = [S_\varepsilon]$, gde je $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnik klase.

Definicija 1.46 *$S = [S_\varepsilon] \in \mathcal{SG}([0, \infty) : \mathcal{L}(E))$ se zove Kolomboova C_0-polugrupa ako postoji predstavnik $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ takav da je S_ε, za neko $\varepsilon_0 > 0$, C_0-polugrupa za sve $\varepsilon < \varepsilon_0$.*

U nastavku ćemo koristiti predstavnike S_ε Kolomboove C_0-polugrupe S koji su (klasične) C_0-polugrupe, za dovoljno malo ε.

Propozicija 1.8 *Neka su $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ i $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnici Kolomboove C_0-polugrupe S sa infinitezimalnim generatorima $(A_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, i $(\tilde{A}_\varepsilon)_\varepsilon$ $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}_0$, redom.*

Tada je $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$, za svako $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_0 = \min\{\varepsilon_0, \tilde{\varepsilon}_0\}$ i $A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$ se može produžiti na $\mathcal{L}(E)$, pri čemu ćemo to proširenje ćemo opet označavati sa $A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$. Štaviše, za svako $a \in \mathbb{R}$, važi

$$
\| A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon \| = \mathcal{O}(\varepsilon^a), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0. \tag{1.53}
$$

Dokaz

Označimo $(N_\varepsilon)_\varepsilon = (S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{SN}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. Neka je $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_0$ fiksirano i neka $x \in E$. Imamo

$$\frac{S_\varepsilon(t)x - x}{t} - \frac{\tilde{S}_\varepsilon(t)x - x}{t} = \frac{N_\varepsilon(t)}{t}x.$$

Puštajući da $t \to 0$, dobijamo da je $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$. Sada imamo

$$\begin{aligned}(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)x &= \lim_{t\to 0}\frac{S_\varepsilon(t)x - x}{t} - \lim_{t\to 0}\frac{\tilde{S}_\varepsilon(t)x - x}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{N_\varepsilon(t)}{t}x = H_\varepsilon x,\ x \in D(A_\varepsilon). \end{aligned} \tag{1.54}$$

Kako je $D(A_\varepsilon)$ gust u E, svojstva (1.51), (1.52) i (1.54) impliciraju da za svako $a \in \mathbb{R}$, $\left\| A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon \right\| = \mathcal{O}(\varepsilon^a)$, kada $\varepsilon \to 0$. □

Infinitezimalni generator A Kolomboove C_0-polugrupe S definišemo na sledeći način. Označimo sa $\mathcal{A}$ skup parova $(A_\varepsilon, D(A_\varepsilon))$, gde je A_ε zatvoren linearan operator na E sa domenom gustim u $D(A_\varepsilon) \subset E$, za svako $\varepsilon \in (0,1)$. Uvodimo relaciju ekvivalencije na $\mathcal{A}$:

$$(A_\varepsilon, D(A_\varepsilon)) \sim (\tilde{A}_\varepsilon, D(\tilde{A}_\varepsilon))$$

ako postoji $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takvo da je $D(A_\varepsilon) = D(\tilde{A}_\varepsilon)$, za sve $\varepsilon < \varepsilon_0$, i ako za svako $a \in \mathbb{R}$ postoje konstante $C > 0$ i $\varepsilon_a \le \varepsilon_0$ takvi da, za $x \in D(A_\varepsilon)$, $\|(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)x\| \le C\varepsilon^a\|x\|$, $x \in D(A_\varepsilon)$, $\varepsilon \le \varepsilon_a$.

Kako A_ε ima domen gust u E, $A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon$ se može produžiti da bude operator na $\mathcal{L}(E)$ koji zadovoljava $\|A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon\| = \mathcal{O}(\varepsilon^a)$, $\varepsilon \to 0$, za svako $a \in \mathbb{R}$.

Označimo sa A odgovarajući elemenat količničkog prostora $\mathcal{A}/\sim$. Na osnovu propozicije 1.8, definicija koja sledi ima smisla.

Definicija 1.47 *A je infinitezimalni generator Kolomboove C_0-polugrupe S ako postoji predstavnik $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ za A takav da je A_ε infinitezimalan generator polugrupe S_ε, $\varepsilon < \varepsilon_0$.*

Neka dalja tvrdjenja vezana za Kolomboove C_0-polugrupe će biti formulisana i dokazana u odeljku 2.1.1.

Definicija uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe

U ovom delu ćemo definisati proširenje klasične uniformno neprekidne polugrupe na prostor uopštenih funkcija. Ta polugrupa će biti definisana kao specifičan elemenat prostora Kolomboovog tipa.

Definicija 1.48 *$\mathcal{SE}_M([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je prostor mreža $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ linearnih preslikavanja*

$$S_\varepsilon:[0,\infty)\to\mathcal{L}(E),\ \varepsilon\in(0,1)$$

diferencijabilnih po $t\in[0,\infty)$, takvih da za svako $T>0$ postoje $N\in\mathbb{N}$, $M>0$ i $\varepsilon_0\in(0,1)$ takvi da

$$\sup_{t\in[0,T)}\left\|\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}S_\varepsilon(t)\right\|_{\mathcal{L}(E)}\leq M\varepsilon^{-N},\ \varepsilon<\varepsilon_0,\ \alpha\in\{0,1\}. \tag{1.55}$$

$\mathcal{SN}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je prostor mreža $(N_\varepsilon)_\varepsilon$ linearnih preslikavanja

$$N_\varepsilon:[0,\infty)\to\mathcal{L}(E),\ \varepsilon\in(0,1)$$

diferencijabilnih po $t\in[0,\infty)$, takvih da za svako $T>0$ i $a\in\mathbb{R}$ postoje $M>0$ i $\varepsilon_0\in(0,1)$ takvi da

$$\sup_{t\in[0,T)}\left\|\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}N_\varepsilon(t)\right\|_{\mathcal{L}(E)}\leq M\varepsilon^{a},\ \varepsilon<\varepsilon_0,\ \alpha\in\{0,1\}. \tag{1.56}$$

Prostor $\mathcal{SE}_M([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ je algebra u odnosu na kompoziciju operatora. Lako se može pokazati da je $\mathcal{SN}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ ideal prostora $\mathcal{SE}_M([0,\infty):\mathcal{L}(E))$.

Kolomboovu algebru definišemo kao faktor algebru

$$\mathcal{SG}([0,\infty):\mathcal{L}(E))=\frac{\mathcal{SE}_M([0,\infty):\mathcal{L}(E))}{\mathcal{SN}([0,\infty):\mathcal{L}(E))}.$$

Elemente prostora $\mathcal{SG}([0,\infty):\mathcal{L}(E))$ ćemo označavati sa $S=[S_\varepsilon]$, gde je $(S_\varepsilon)_\varepsilon$predstavnik klase.

Slično možemo definisati sledeće prostore:

Definicija 1.49 *$\mathcal{SE}_M(E)$ je prostor mreža $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ linearnih preslikavanja $A_\varepsilon : E \to E$, $\varepsilon \in (0,1)$, takvih da postoje konstante $N \in \mathbb{N}$, $M > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da*

$$\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)} \le M\varepsilon^{-N}, \ \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{1.57}$$

$\mathcal{SN}(E)$ je prostor mreža $(A_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{SE}_M(E)$ linearnih preslikavanja $A_\varepsilon : E \to E$, $\varepsilon \in (0,1)$, takvih da za svako $a \in \mathbb{R}$ postoje konstante $M > 0$ i $\varepsilon_0 > 0$ takve da

$$\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)} \le M\varepsilon^{a}, \ \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{1.58}$$

Odgovarajući Kolomboov prostor definišemo sa

$$\mathcal{SG}(E) = \frac{\mathcal{SE}_M(E)}{\mathcal{SN}(E)}.$$

Kao i do sada, elemente prostora $\mathcal{SG}(E)$ ćemo označavati sa $A = [A_\varepsilon]$, gde je $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnik klase.

Definicija 1.50 *$S \in \mathcal{SG}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ je uniformno neprekidna Kolomboova polugrupa ako ima predstavnika $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ takvog da je S_ε uniformno neprekidna polugrupa za svako dovoljno malo ε, odnosno,*

(1) $S_\varepsilon(0) = I$, gde je I identički operator na E.

(2) $S_\varepsilon(t_1 + t_2) = S_\varepsilon(t_1)S_\varepsilon(t_2)$, za sve $t_1, t_2 \ge 0$.

(3) $\lim_{t\to 0} \|S_\varepsilon(t) - I\| = 0$

Propozicija 1.9 *Neka su $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ i $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ predstavnici uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S \in \mathcal{SG}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$, sa infinitezimalnim generatorima $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ i $(\tilde{A}_\varepsilon)_\varepsilon$, redom, za dovoljno malo ε.*

Tada je $(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{SN}(E)$.

Dokaz

Imamo da je

$$\begin{aligned} A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon &= \frac{d^+}{dt} S_\varepsilon(t)\bigg|_{t=0} - \frac{d^+}{dt}\tilde{S}_\varepsilon(t)\bigg|_{t=0} \\ &= \frac{d^+}{dt}\left(S_\varepsilon(t) - \tilde{S}_\varepsilon(t)\right)\bigg|_{t=0}. \end{aligned}$$

Kako je $(S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon = (N_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{SN}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ imamo da za svako $a \in \mathbb{R}$ postoji $M > 0$ takvo da

$$\left\| \frac{d^+}{dt}\left(S_\varepsilon(t) - \tilde{S}_\varepsilon(t)\right)\bigg|_{t=0} \right\| \leq M\varepsilon^a,$$

za dovoljno malo ε.

To implicira da za svako $a \in \mathbb{R}$ postoji $M > 0$ takvo da

$$\|A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon\| \leq M\varepsilon^a,$$

za dovoljno malo ε. Dakle, $(A_\varepsilon - \tilde{A}_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{SN}(E)$. □

Sada smo u mogućnosti da definišemo infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe.

Definicija 1.51 *$A \in \mathcal{SG}(E)$ je infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S \in \mathcal{SG}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$ ako ima predstavnika $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ takvog da je A_ε infinitezimalni generator polugrupe S_ε, za svako $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \in (0,1)$.*

Neka dalja tvrdjenja vezana za uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe će biti formulisana i dokazana u odeljku 2.2.1.

1.4.4 Kolomboovi uopšteni slučajni procesi

Na samom početku ovog odeljka definisaćemo neke prostore Kolomboovih uopštenih funkcija koje ćemo koristiti. Detaljni rezultati vezane za ove procese mogu se naći u [5], [10], [30] i [34].

Neka je O otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{E}(O)$ je skup svih preslikavanja $G : (0,1) \times O \to \mathbb{C}$ takvih da

$$G(\varepsilon,\cdot) = G_\varepsilon \in C^\infty(O),\ \varepsilon > 0.$$

Definicija 1.52 *$\mathcal{E}_b([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ je prostor svih $G_\varepsilon \in \mathcal{E}([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ sa osobinom da za sve $T>0$ i $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ postoji $N\in\mathbb{N}$ takvo da $\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^\infty}$ ima umerenu granicu, odnosno,*

$$\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \quad \text{kada } \varepsilon\to 0.$$

$\mathcal{N}_b([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ je prostor svih $G_\varepsilon\in\mathcal{E}([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ sa osobinom da je za sve $T>0$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ i $a\in\mathbb{R}$, $\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^\infty}$ nula funkcija, odnosno,

$$\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{a}), \quad \text{kada } \varepsilon\to 0.$$

Prostori $\mathcal{E}_b([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{N}_b([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ su algebre i $\mathcal{N}_b([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ je ideal od $\mathcal{E}_b([0,T)\times\mathbb{R}^n)$.

Faktor algebra

$$\mathcal{G}_b([0,T)\times\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_b([0,T)\times\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}_b([0,T)\times\mathbb{R}^n)$$

se zove algebra Kolomboovih uopštenih funkcija ograničenog tipa.

Slično definišemo algebre $\mathcal{E}_b(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{N}_b(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{G}_b(\mathbb{R}^n)$ čiji elementi ne zavise od vremenske promenljive t.

U radu [7] data je konstrukcija prostora $\mathcal{G}_{p,q}$. Ovde posmatramo specijalan slučaj i uvodimo prostor $\mathcal{G}_{2,2}$.

Definicija 1.53 *$\mathcal{E}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ je algebra svih $G_\varepsilon\in\mathcal{E}([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ sa osobinom da za skoro sve $T>0$ i $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ postoji $N\in\mathbb{N}$ takvo da $\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^2}$ ima umerenu granicu, odnosno da,*

$$\sup_{t\in[0,T)}\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^2([0,T)\times\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \quad \text{kada } \varepsilon\to 0.$$

$\mathcal{N}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ je algebra svih $G_\varepsilon\in\mathcal{E}([0,T)\times\mathbb{R}^n)$ sa osobinom da za sve $T>0$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ i $a\in\mathbb{R}$, $\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^2}$ jeste nula funkcija, odnosno,

$$\sup_{t\in[0,T)}\|\partial^\alpha G_\varepsilon\|_{L^2([0,T)\times\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{a}), \quad \text{kada } \varepsilon\to 0.$$

Kolomboova algebra se definiše kao faktor algebra

$$\mathcal{G}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^n).$$

Slično se mogu definisati prostori $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{N}_{2,2}(\mathbb{R}^n)$ i $\mathcal{G}_{2,2}(\mathbb{R}^n)$ čiji elementi ne zavise od vremenske promenljive t.

Neka Q označava $[0,T) \times O$ ili O. Dokaz da je $\mathcal{N}_{2,2}(Q)$ ideal od $\mathcal{E}_{2,2}(Q)$ je dat u radu [7]. Soboljevske teoreme o potapanju daju $\mathcal{E}_{2,2}(Q) \subset \mathcal{E}_b(Q)$ i $\mathcal{N}_{2,2}(Q) \subset \mathcal{N}_b(Q)$. Dakle, postoji kanoničko preslikavanje $\mathcal{G}_{2,2}(Q) \to \mathcal{G}_b(Q)$. To znači da u $\mathcal{G}_{2,2}(Q)$ umesto L^2-normi na traci $[0,T) \times \mathbb{R}^n$ možemo koristiti L^∞-norme na $[0,T)$ i L^2-norme na $\mathbb{R}^n$ i obrnuto.

Definicija 1.54 *Kolomboov uopšten slučajan proces na prostoru verovatnoće* (Ω, Σ, μ) *je preslikavanje* $U : \Omega \to \mathcal{G}_b(Q)$ *takvo da postoji funkcija* $\tilde{U} : (0,1) \times Q \times \Omega \to \mathbb{R}$ *sa sledećim osobinama:*

1) Za fiksirano $\varepsilon \in (0,1)$, *preslikavanje* $(x,\omega) \mapsto \tilde{U}(\varepsilon, x, \omega)$ *je zajednički merljivo u* $Q \times \Omega$.

2) $\varepsilon \mapsto \tilde{U}(\varepsilon, \cdot, \omega)$ *pripada* $\mathcal{E}_b(Q)$ *skoro sigurno za* $\omega \in \Omega$, *i to je predstavnik od* $U(\omega)$.

Sa $\mathcal{G}_b^\Omega(Q)$ *ćemo označavati algebru Kolomboovih uopštenih slučajnih procesa.*

Definicija 1.55 $\mathcal{G}_{2,2}$*-Kolomboov uopšten slučajan proces na* (Ω, Σ, μ) *je preslikavanje* $U : \Omega \to \mathcal{G}_{2,2}(Q)$ *takvo da postoji funkcija* $\tilde{U} : (0,1) \times Q \times \Omega \to \mathbb{R}$ *sa sledećim osobinama:*

1) Za fiksirano $\varepsilon \in (0,1)$, *preslikavanje* $(x,\omega) \mapsto \tilde{U}(\varepsilon, x, \omega)$ *je zajednički merljivo u* $Q \times \Omega$.

2) $\varepsilon \mapsto \tilde{U}(\varepsilon, \cdot, \omega)$ *pripada* $\mathcal{E}_{2,2}(Q)$ *skoro sigurno za* $\omega \in \Omega$, *i to je predstavnik od* $U(\omega)$.

Sa $\mathcal{G}_{2,2}^\Omega(Q)$ *ćemo označavati algebru svih* $\mathcal{G}_{2,2}$*-Kolomboovih uopštenih slučajnih procesa.*

Zbog jednostavnosti, promenljivu ε ćemo pisati u podindeksu, a ω ćemo jednostavno izostavljati, to jest, umesto $\tilde{U}(\varepsilon, \cdot, \omega)$ pisaćemo $U_\varepsilon(\cdot)$.

U radu [36] data je definicija uopštenog slučajnog procesa u jednodimenzionalnom slučaju koja potpuno odgovara našoj definiciji Kolomboovog uopštenog slučajnog procesa ako stavimo da je dimenzija jedan. Mi ćemo, zbog konzistencije, te procese takodje zvati Kolomboovi uopšteni procesi.

Sada ćemo navesti konstrukciju iz [36]. Fiksirajmo prostor verovatnoće (Ω, Σ, μ), gde Σ označava merljiv podskup od Ω i μ je probabilistička mera. Za vremenski interval uzimamo $\mathbb{R}$.

Algebru klasičnih slučajnih procesa na $\mathbb{R}$ sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama ćemo označavati sa $\mathcal{C}_\Omega(\mathbb{R})$, dok će $\mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbb{R})$ označavati algebru klasičnih slučajnih procesa na $\mathbb{R}$ sa skoro sigurno glatkim trajektorijama.

Označimo sa $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ prostor mreža $(X_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, procesa X_ε sa skoro sigurno glatkim trajektorijama, odnosno, prostor mreža procesa

$$X_\varepsilon : (0,1) \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$$

takvih da

$$\begin{aligned} &\omega \mapsto X_\varepsilon(t,\omega) \ \text{ je merljivo, za sve } \varepsilon \in (0,1) \text{ i } t \in \mathbb{R}; \\ &t \mapsto X_\varepsilon(t,\omega) \ \text{pripada } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \ \text{ za sve } \varepsilon \in (0,1) \text{ i skoro sve } \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Primetimo da nam svojstvo merljivosti po t i glatkosti trajektorija za skoro svako ω upravo daje svojstvo zajedničke merljivosti po t i ω koje tražimo u definiciji 1.54.

Sada specijalno, u jednodimenzionalnom slučaju, definišemo prostore $\mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R})$, $\mathcal{N}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ na sledeći način.

Definicija 1.56 *$\mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R})$ je prostor mreža procesa $(X_\varepsilon)_\varepsilon$ koji pripadaju $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\varepsilon \in (0,1)$, sa osobinom da za skoro svako $\omega \in \Omega$, za sve $T > 0$ i $\alpha \in \mathbb{N}_0$, postoje konstante N, $C > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da*

$$\sup_{t\in[0,T]} |\partial^\alpha X_\varepsilon(t,\omega)| \le C\,\varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon \le \varepsilon_0. \tag{1.59}$$

$\mathcal{N}_b^\Omega(\mathbb{R})$ je prostor mreža procesa $(X_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\varepsilon \in (0,1)$, sa osobinom da za skoro svako $\omega \in \Omega$, za sve $T > 0$ i $\alpha \in \mathbb{N}_0$ i sve $b \in \mathbb{R}$, postoje konstante $C > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da

$$\sup_{t\in[0,T]} |\partial^\alpha X_\varepsilon(t,\omega)| \le C\,\varepsilon^{b}, \quad \varepsilon \le \varepsilon_0. \tag{1.60}$$

Algebra Kolomboovih uopštenih slučajnih procesa je faktor algebra

$$\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R}) = \mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R}) / \mathcal{N}_b^\Omega(\mathbb{R}).$$

Kako je $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ diferencijalna algebra, Kolomboove uopštene slučajne procese možemo množiti i tražiti njihove (uopštene) izvode. Štaviše, ta činjenica čini mogućom superpoziciju Kolomboovog uopštenog slučajnog procesa sa polinomijalno ograničenom funkcijom (ili ograničenom funkcijom).

Neka $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^n)$ označava algebru glatkih polinomijalno ograničenih funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definicija 1.57 *Familija* $G = (G_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, *se zove temperirana ako* $G_\varepsilon \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^2)$ *za sve* $\varepsilon \in (0,1)$ *i ako za sve* $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ *postoje konstante* $N, C > 0$ *takve da*

$$|\partial^\alpha G_\varepsilon(x,y)| \leq C\, \varepsilon^{-N}\,(1+|x|+|y|)^N, \quad \text{za sve } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ i\ \varepsilon \in (0,1).$$

U [36] dokazano je sledeće tvrdjenje.

Propozicija 1.10 *([36]) Neka su* $X, Y \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ *Kolomboovi uopšteni slučajni procesi i neka je* G *temperirana familija. Tada je* $G(X,Y)$ *dobro definisan elemenat prostora* $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$. *Specijalno,* $F(X,Y)$ *je dobro definisano ako* $F \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^2)$.

Sada ćemo definisati potapanje prostora procesa sa neprekidnim trajektorijama u Kolomboov prostor $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$. U tu svrhu, izaberimo elemenat $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ takav da $\int_\mathbb{R} \varphi(s)ds = 1$, čiji svi momenti nestaju, to jest, $\int_\mathbb{R} s^j \varphi(s)ds = 0$, za sve $j \geq 1$. Dalje, uzmimo $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tako da je $\psi(s) \equiv 1$ u okolini od $s = 0$.

Za proces Z sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama definišemo odgovarajući elemenat prostora $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ kao

$$\iota(Z) = [(Z * (\psi\varphi_\varepsilon))_\varepsilon], \ \ \varepsilon \in (0,1), \tag{1.61}$$

gde zagrade [ ] označavaju klasu, $\varphi_\varepsilon(s) = \frac{1}{\varepsilon}\,\varphi\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)$ i konvolucija je konvolucija po trajektorijama

$$(Z * (\psi\varphi_\varepsilon))(t,\omega) = \int_\mathbb{R} Z(s,\omega)\, \psi(t-s)\, \varphi_\varepsilon(t-s)\, ds. \tag{1.62}$$

Za skoro svako $\omega \in \Omega$, $(Z * (\psi\varphi_\varepsilon)(t,\omega))_\varepsilon$ pripada $\mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R})$ obzirom da je $Z(\cdot,\omega)$ uniformno ograničeno na kompaktnom vremenskom intervalu. Dakle, možemo uzeti njegovu klasu u $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$.

Funkcija sečenja ψ se može odbaciti uzimanjem da φ ima kompaktan nosač. Medjutim, u tom slučaju φ nema sve momente koji nestaju, kao što tražimo u propoziciji 1.11.

Primer 1.1 *Neka je W Vinerov proces. Tada $W \in \mathcal{C}_\Omega(\mathbb{R})$ i*

$$\dot{W} = \frac{d}{dt}\,\iota(W)$$

predstavlja beli šum kao elemenat prostora $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$.

Procesi $\mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbb{R})$ sa skoro sigurno glatkim trajektorijama se takodje mogu potopiti u $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ pomoću standardnog potapanja

$$\sigma(Z) = [(Z_\varepsilon)_\varepsilon], \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{1.63}$$

Svojstvo konzistencije $\iota\restriction_{\mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbb{R})} = \sigma$ je dato u sledećoj propoziciji.

Propozicija 1.11 *([36]) Ako je Z proces sa skoro sigurno glatkim trajektorijama, tada*

$$\iota(Z) = \sigma(Z) \quad u\ \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R}).$$

Iz ovog tvrdjenja sledi da je $\iota(\mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbb{R}))$ diferencijabilna subalgebra od $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$.

Za izračunanje vrednosti Kolomboovog uopštenog slučajnog procesa u fiksiranom vremenskom trenutku uvodimo koncept Kolomboove uopštene slučajne promenljive.

Neka je $\mathcal{ER}$ prostor mreža merljivih funkcija na Ω.

Definicija 1.58 *$\mathcal{ER}_b$ je prostor mreža $(X_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{ER}$, $\varepsilon \in (0,1)$, sa osobinom da za skoro sve $\omega \in \Omega$ postoje konstante N, $C > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da*

$$|X_\varepsilon(\omega)| \leq C\,\varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{1.64}$$

$\mathcal{NR}$ je prostor mreža $(X_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{ER}$, $\varepsilon \in (0,1)$, sa osobinom da za skoro sve $\omega \in \Omega$ i sve $b \in \mathbb{R}$, postoje konstante $C > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da

$$|X_\varepsilon(\omega)| \leq C\,\varepsilon^b, \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{1.65}$$

Diferencijalna algebra $\mathcal{GR}$ Kolomboovih uopštenih slučajnih promenljivih je faktor algebra

$$\mathcal{GR} = \mathcal{ER}_b/\mathcal{NR}.$$

Za Kolomboov uopšten slučajni proces $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i vremenski trenutak $t_0 \in [0,T)$ imamo da je $X(t_0)$ Kolomboova uopštena slučajna promenljiva, odnosno, elemenat prostora $\mathcal{GR}$.

Uveden koncept Kolomboovog uopštenog slučajnog procesa i Kolomboove uopštene slučajne promenljive ćemo koristiti u glavama 3 i 4 gde ćemo proučavati neke stohastičke diferencijalne jednačine. U glavi 3 ćemo posmatrati stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine, a glava 4 će biti posvećena stohastičkim običnim diferencijalnim jednačinama.

Glava 2

Kolomboove polugrupe i primene na rešavanje PDJ

Ova glava je posvećena polugrupama operatora definisanim na prostorima Kolomboovih uopštenih funkcija. Kolomboove uopštene polugrupe su definisane u odeljku 1.4.3 gde su takodje pokazana i neka njihova osnovna svojstva.

U osnovi, ovde ćemo proučavati dva tipa uopštenih polugrupa. Prvi tip čine Kolomboove C_0-polugrupe koje ćemo koristiti u rešavanju klase linearnih i semilinearnih paraboličnih jednačina sa singularnim koeficijentima i singularnim početnim uslovima. Rezultati vezani za ovaj tip polugrupa će biti izloženi u odeljku 2.1 ove glave. Drugi pristup podrazumeva rad sa uniformno neprekidnim Kolomboovim polugrupama i primenama te teorije na rešavanje nekih PDJ sa regularizovanim izvodima, što će biti prezentovano u odeljku 2.2.

2.1 Kolomboove C_0-polugrupe

U ovom odeljku ćemo koristiti mreže C_0-polugrupa za rešavanje nekih klasa PDJ sa singularnim koeficijentima i singularnim početnim uslovima. Ideja koja se nalazi u osnovi je jednostavna i poznata: ona leži u samoj konstrukciji prostora uopštenih funkcija (videti [10] ili [34]). Singularne koeficijente (uopštene funkcije) parcijalne diferencijalne jednačine regularišemo mrežom glatkih funkcija koje zavise od malog parametra ε. Regularizovanu PDJ tada rešavamo koristeći odgovarajuću mrežu polugrupa i mreža rešenja koju dobijemo na ovaj način predstavlja uopšteno rešenje. U tu svrhu, koristićemo razne varijante Kolomboovih algebri uopštenih prostora. Te algebre sadrže potopljene distribucije i pomoću pojma asociranosti prirodno proširuju pojam slabog limita i slabe jednakosti u teoriji distribucija. Čitaoca koji bi hteo detaljnije da se upozna sa algebrama Kolomboovog tipa i njihovom primenom upućujemo na [9], [34], [5], kao i na skorašnje radove [15], [13], [16].

Prvi deo ovog odeljka posvećen je analizi uopštenih polugrupa definisanih u odeljku 1.4.3 kao i nekim njihovim osobinama koje su ovde detaljno dokazane. U drugom delu, koristićemo uvedene uopštene polugrupe vezane za Šredingerov (Schrödinger) operator $\Delta - V$ u rešavanju klase linearnih i semilinearnih paraboličnih jednačina

$$\partial_t u - (\Delta - V)u = f, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

sa singularnim potencijalom V. Koncept asociranog rešenja jednačine

$$\frac{d}{dt}G = AG$$

se realizuje kroz egzistenciju limita

$$\varepsilon^{-a} \sup_{t\in[0,T)} \left\| \frac{d}{dt}G_\varepsilon - A_\varepsilon G_\varepsilon \right\|_{L^2} \to 0, \ \varepsilon \to 0, \quad \text{za svako } a > 0,$$

gde je $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ odgovarajuća mreža operatora koja predstavlja infinitezimalni generator A. Taj koncept ćemo koristiti kasnije kada budemo definisali uopšteno rešenje Košijevog problema.

Spomenimo samo da proučavanje familija polugrupa operatora i odgovarajućih familija rezolventi i infinitezimalnih generatora počinje još sa Troterom (Trotter) u [51], a taj pristup je sledilo i mnogo drugih autora posle njega.

Ukoliko je čitaoc zainteresovan za analizu stacionarnog slučaja, $\frac{d}{dt}u \equiv 0$, gde se pojavljuje samo operator $-\Delta$ ili njegove singularne perturbacije (na primer, $\Delta u(x) - \alpha u(0)\delta(x) = 0$), upućujemo ga na [2] i tamošnje reference.

Kada je u pitanju Košijev problem za semilinearne parabolične jednačine sa distribucionim singularitetima kao početnim uslovima i potencijalom $V = 0$, rad Brezisa (Brézis) i Fridmana (Friedman) u [8] bio je motivacija za mnoge radove i knjige u tom pravcu. Spomenimo samo neke od tih radova: Kato [21], Kato i Ponce [22], Kozono i Yamazaki [24], Biagioni, Cadeddu i Gramchev [6].

U tim radovima uslovi na rast nelinearnog dela $g(u) = u|u|^p$ i red singularnosti početnih uslova vodi ka jedinstvenom globalnom rešenju u odgovarajućem prostoru Katovog tipa. Na primer, u radu [6] Biagioni, Cadeddu i Gramchev razmatraju semilinearan parabolični Košijev problem

$$\partial_t u - \Delta u + g(u) = 0, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R}^n,$$

gde je $g(u)$ lokalno Lipšicova realna funkcija, a početni uslovi su jako singularni, odnosno pripadaju jakom dualu Banahovog prostora $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ svih funkcija iz $C^k(\mathbb{R}^n)$ sa ograničenim izvodima do reda k.

Colombeau i Langlais su u [12] proučavali ovaj problem za semilinearnu paraboličnu jednačinu u slučaju $n = 1$ i $g(u) = u^3$ i uspeli su da "pokriju" klasična rešenja problema kada su početni uslovi L^p-funkcije.

Mi ćemo u ovom delu disertacije, u osnovi proučavati dva tipa jednačina i konstruisaćemo njihova rešenja u prostoru uopštenih funkcija koji smo označili sa $\mathcal{G}_{C^1,H^2}([0,T) : \mathbb{R}^n)$, $T > 0$.

Konačno, spomenimo i to da rezultati koji će biti izloženi u ovom odeljku predstavljaju esencijalni deo rada [31] čiji su autori M. Nedeljkov, S. Pilipović i D. Rajter.

2.1.1 Svojstva Kolomboovih C_0-polugrupa

Počećemo sa dobro poznatim tvrdjenjem iz klasične teorije C_0-polugrupa koje je ovde jednostavno preneseno na uopštene polugrupe. U tom smislu, sledeću propoziciju čine neka osnovna tvrdjenja vezana za Kolomboove C_0-polugrupe.

Propozicija 2.1 *Neka je S Kolomboova C_0-polugrupa sa infinitezimalnim generatorom A. Tada postoji $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takvo da važi:*

(a) *Preslikavanje $t \mapsto S_\varepsilon(t)x : [0,\infty) \to E$ je neprekidno za svako $x \in E$ i svako $\varepsilon < \varepsilon_0$.*

(b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S_\varepsilon(s)x\,ds = S_\varepsilon(t)x,\ \varepsilon<\varepsilon_0,\ x\in E.$$

(c)

$$\int_0^t S_\varepsilon(s)x\,ds \in D(A_\varepsilon),\ \varepsilon<\varepsilon_0,\ x\in E.$$

(d) *Za svako* $x\in D(A_\varepsilon)$ *i* $t\geq 0$, $S_\varepsilon(t)x\in D(A_\varepsilon)$ *i*

$$\frac{d}{dt}S_\varepsilon(t)x = A_\varepsilon S_\varepsilon(t)x = S_\varepsilon(t)A_\varepsilon x,\ \varepsilon<\varepsilon_0. \tag{2.1}$$

(e) *Neka su* $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ *i* $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ *predstavnici Kolomboove* C_0*-polugrupe* S, *sa infinitezimalnim generatorima* $(A_\varepsilon)_\varepsilon$ *i* $(\tilde{A}_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon<\varepsilon_0$, *respektivno. Tada, za sve* $a\in\mathbb{R}$ *i* $t\geq 0$ *važi*

$$\left\|\frac{d}{dt}S_\varepsilon(t)-\tilde{A}_\varepsilon S_\varepsilon(t)\right\| = \mathcal{O}\left(\varepsilon^a\right),\quad \text{kada } \varepsilon\to 0. \tag{2.2}$$

(f) *Za sve* $x\in D(A_\varepsilon)$ *i sve* $t,s\geq 0$

$$S_\varepsilon(t)x - S_\varepsilon(s)x = \int_s^t S_\varepsilon(\tau)A_\varepsilon x\,d\tau = \int_s^t A_\varepsilon S_\varepsilon(\tau)x\,d\tau,\ \varepsilon<\varepsilon_0.$$

U rešavanju diferencijalnih jednačina veoma je važno sledeće svojstvo Kolomboovih C_0-polugrupa.

Teorema 2.1 *Neka su S i $\tilde{S}$ Kolomboove C_0-polugrupe sa infinitezimalnim generatorima A i $\tilde{A}$, redom. Ako je $A=\tilde{A}$ tada je $S=\tilde{S}$.*

Dokaz

Neka je ε dovoljno malo i $x\in D(A_\varepsilon)=D(\tilde{A}_\varepsilon)$. Propozicija 2.1 (d) implicira da je preslikavanje $s\mapsto \tilde{S}_\varepsilon(t-s)S_\varepsilon(s)x$, gde $t,s\geq 0$ diferencijabilno i da je

$$\frac{d}{ds}\left(\tilde{S}_\varepsilon(t-s)S_\varepsilon(s)x\right) = -\tilde{A}_\varepsilon\tilde{S}_\varepsilon(t-s)S_\varepsilon(s)x + \tilde{S}_\varepsilon(t-s)A_\varepsilon S_\varepsilon(s)x,\quad t,s\geq 0.$$

Pretpostavka $A = \tilde{A}$ povlači da je $A_\varepsilon = \tilde{A}_\varepsilon + R_\varepsilon$, gde je $R_\varepsilon \sim$ nula operator i $\sim$ je relacija uvedena u odeljku 1.4.3.

Kako $\tilde{A}_\varepsilon$ komutira sa $\tilde{S}_\varepsilon$, za svako $x \in D(A_\varepsilon)$, imamo da je

$$\frac{d}{ds}\left(\tilde{S}_\varepsilon(t-s)S_\varepsilon(s)x\right) = \tilde{S}_\varepsilon(t-s)R_\varepsilon(t-s)S_\varepsilon(s)x,$$

a to implicira

$$\tilde{S}_\varepsilon(t-s)S_\varepsilon(s)x - \tilde{S}_\varepsilon(t)x = \int_0^s \tilde{S}_\varepsilon(t-u)R_\varepsilon S_\varepsilon(u)x\,du. \tag{2.3}$$

Stavljajući $s = t$ u (2.3) dobijamo

$$S_\varepsilon(t)x - \tilde{S}_\varepsilon(t)x = \int_0^t \tilde{S}_\varepsilon(t-u)R_\varepsilon S_\varepsilon(u)x\,du, \quad t \geq 0,\ x \in D(A_\varepsilon). \tag{2.4}$$

Kako je $D(A_\varepsilon)$ gust u E, za svako $y \in E$ postoji niz $\{x_n\}_n \subset D(A_\varepsilon)$ koji konvergira ka njemu. Možemo zameniti x sa x_n u (2.4) i uzeti limit obe strane kada $n \to \infty$. Koristeći proširenje R_ε na $\mathcal{L}(E)$ umesto njega samog, i činjenicu da su svi operatori u gornjoj jednakosti neprekidni dobijamo

$$S_\varepsilon(t)y - \tilde{S}_\varepsilon(t)y = \int_0^t \tilde{S}_\varepsilon(t-u)R_\varepsilon S_\varepsilon(u)y\,du, \ t \geq 0,\ y \in E. \tag{2.5}$$

Dokažimo da $(N_\varepsilon)_\varepsilon = (S_\varepsilon - \tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{SN}([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$.

Na osnovu relacije (2.4) i definicije 1.45 imamo da za neke $C > 0$ i $\tilde{a} \in \mathbb{R}$, važi

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T)} \|S_\varepsilon(t)x - \tilde{S}_\varepsilon(t)\| &\leq \sup_{t\in[0,T)} \int_0^t \|\tilde{S}_\varepsilon(t-u)\| \cdot \|R_\varepsilon\| \cdot \|S_\varepsilon(u)\|\,du \\ &\leq T\,C\,\varepsilon^{a+\tilde{a}}\,\|R_\varepsilon\|.\end{aligned}$$

Kako, za svako $a \in \mathbb{R}$,

$$\|R_\varepsilon\| = \mathcal{O}(\varepsilon^a), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0,$$

$(S_\varepsilon(t) - \tilde{S}_\varepsilon(t))_\varepsilon$ zadovoljava uslov (1.49) u definiciji 1.45. Uslov (1.50) sledi iz ograničenosti $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ i $(\tilde{S}_\varepsilon)_\varepsilon$ na domenu $[0, T)$, iz svojstava mreže $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ i sledećeg izraza:

$$\begin{aligned} \frac{N_\varepsilon(t)}{t} x &= \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{S}_\varepsilon(t-u) R_\varepsilon S_\varepsilon(u) x \, du \\ &\leq \|\tilde{S}_\varepsilon\| \, \|R_\varepsilon\| \, \|S_\varepsilon\| \, \|x\|, \quad x \in E. \end{aligned}$$

Da bismo pokazali da uslov (1.51) važi, primetimo da je

$$\begin{aligned} \frac{N_\varepsilon(t)}{t} x &= \frac{S_\varepsilon(t) - \tilde{S}_\varepsilon(t)}{t} x \\ &= \frac{S_\varepsilon(t)x - x}{t} - \frac{\tilde{S}_\varepsilon(t)x - x}{t} \\ &= A_\varepsilon x - \tilde{A}_\varepsilon x = R_\varepsilon x. \end{aligned}$$

Hoćemo da pokažemo da postoji mreža $(H_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{L}(E)$ takva da

$$\lim_{t \to 0} \frac{N_\varepsilon(t)}{t} x = H_\varepsilon x,$$

i da, za svako $b \in \mathbb{R}$, $\|H_\varepsilon\| = \mathcal{O}(\varepsilon^b)$, kada $\varepsilon \to 0$.

Kako je $D(A_\varepsilon)$ gust u E, za $y \in E$ postoji niz $\{x_n\} \in D(A_\varepsilon)$ takav da $\lim_{n \to \infty} x_n = y$ i imamo da je $\lim_{n \to \infty} H_\varepsilon x_n = H_\varepsilon y$.

Sada, za $y \in E$, imamo

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{N_\varepsilon(t)}{t} y - H_\varepsilon y \right\| \\ &\leq \left\| \frac{N_\varepsilon(t)}{t} y - \frac{N_\varepsilon(t)}{t} x_n \right\| + \left\| \frac{N_\varepsilon(t)}{t} x_n - H_\varepsilon x_n \right\| + \|H_\varepsilon x_n - H_\varepsilon y\| \\ &\leq \left\| \frac{N_\varepsilon(t)}{t} \right\| \cdot \|y - x_n\| + \left\| \frac{N_\varepsilon(t)}{t} x_n - H_\varepsilon x_n \right\| + \|H_\varepsilon\| \cdot \|x_n - y\| \end{aligned}$$

Poslednji izraz teži nuli kada t teži nuli i n teži beskonačnosti. Dakle, dokaz je završen. □

Primedba 2.1 *Pretpostavimo da uslovi definicije 1.45 važe. Štaviše, pretpostavimo da važi jači uslov nego što je (1.48):*

Postoje konstante $M > 0$, $a \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da

$$\sup_t \|S_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M\varepsilon^a e^{\alpha_\varepsilon t}, \; \varepsilon < \varepsilon_0, \; t \geq 0,$$

gde $0 < \alpha_\varepsilon < \alpha$, za neko $\alpha > 0$.

Tada dobijamo odgovarajuću podalgebru algebre $\mathcal{SG}\left([0,\infty) : \mathcal{L}(E)\right)$ u okviru koje možemo formulisati Hile-Jošidinu (Hille-Yosida) teoremu na uobičajen način. Za čitavu algebru Kolomboovih C_0-polugrupa formulacija i dokaz Hile-Jošidine teoreme su još uvek otvoren problem.

2.1.2 Jednačina provodjenja toplote sa singularnim potencijalom i singularnim početnim uslovima

Pre nego što navedemo primene Kolomboovih C_0-polugrupa na rešavanje klase jednačina provodjenja toplote sa singularnim potencijalom i singularnim početnim uslovima, primetimo da množenjem iz $G \in \mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ i $H \in \mathcal{G}_{C^1,H^2}\left([0,T) : \mathbb{R}^n\right)$ dobijamo elemenat prostora $\mathcal{G}_{C^1,H^2}\left([0,T) : \mathbb{R}^n\right)$.

Zaista, ako $(G_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ i $(H_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^2}\left([0,T) : \mathbb{R}^n\right)$ tada

$$(G_\varepsilon H_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^2}\left([0,T) : \mathbb{R}^n\right).$$

Slično, ako je $(G_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ ili $(H_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{C^1,H^2}\left([0,T) : \mathbb{R}^n\right)$ tada

$$(G_\varepsilon H_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{C^1,H^2}\left([0,T) : \mathbb{R}^n\right).$$

Iz tog razloga, množenje potencijala $V \in \mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ i funkcije $u \in \mathcal{G}_{C^1,H^2}\left([0,T) : \mathbb{R}^n\right)$, rešenja jednačine $\partial_t u = (\Delta - V)u$, $u(0,x) = u_0(x)$, ima smisla.

Definicija 2.1 *Neka je $(A_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, mreža linearnih operatora sa zajedničkim domenom $H^2(\mathbb{R}^n)$ i kodomenom u $L^2(\mathbb{R}^n)$. Za uopštenu funkciju $G \in \mathcal{G}_{C^1,H^2}([0,T) : \mathbb{R}^n)$, $T > 0$, kažemo da je rešenje jednačine $\dfrac{d}{dt}G = AG$ ako, za svako $a \in \mathbb{R}$,*

$$\sup_{t\in[0,T)} \left\| \frac{d}{dt}G_\varepsilon(t,\cdot) - A_\varepsilon G_\varepsilon(t,\cdot) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\varepsilon^a), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0.$$

$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$

$R(A) = L^2(\mathbb{R}^n)$

Opšti potencijal

Da bismo dobili odgovarajuću polugrupu koja odredjuje rešenje jednačine, pretpostavićemo da je potencijal V logaritamskog tipa.

Teorema 2.2 *Neka je $V \in \mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ logaritamskog tipa.*

(i) Diferencijalni operatori $A_\varepsilon = (\Delta - V_\varepsilon)$, sa domenom $D(A_\varepsilon) = H^2(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, su infinitezimalni generatori polugrupa S_ε, na $L^2(\mathbb{R}^n)$, za svako $\varepsilon < \varepsilon_0$, i $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ je predstavnik Kolomboove C_0-polugrupe

$$S \in \mathcal{SG}\left([0,\infty) : \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))\right).$$

(ii) Neka $u_0 \in \mathcal{G}_{H^2}(\mathbb{R}^n)$ i neka je S_ε kao u (i).

Tada, za svako $T > 0$, $u(t) = S(t)u_0 \in \mathcal{G}_{C^1,H^2}([0,T) : \mathbb{R}^n)$ je rešenje jednačine

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) + V(x)u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{2.6}$$

To rešenje je jedinstveno u prostoru $\mathcal{G}_{C^1,L^2}([0,T) : \mathbb{R}^n)$, odnosno, ako je v takodje rešenje jednačine (2.6) onda je $\iota_{L^2}(u) = \iota_{L^2}(v)$.

Dokaz

(i) Neka je $\varepsilon < \varepsilon_0$ fiksirano. Operator A_ε je infinitezimalni generator odgovarajuće polugrupe

$$S_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$$

definisane Fejnman-Kacovom (Feynman-Kac) formulom

$$S_\varepsilon(t)\psi(x) = \int_\Omega \exp\left(-\int_0^t V_\varepsilon(\omega(s))\,ds\right)\psi(\omega(t))d\mu_x(\omega),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.7}$$

za $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, gde je $\Omega = \prod_{t\in[0,\infty)} \overline{\mathbb{R}^n}$ i μ_x je Vinerova mera koncentrisana u $x \in \mathbb{R}^n$ (videti [50] ili [43]).

Kako je V logaritamskog tipa, postoje konstante $C > 0$ i $\eta \in (0,1)$ takve da

$$\begin{aligned} |S_\varepsilon(t)\psi(x)| &\leq \exp\left(t \sup_{s\in\mathbb{R}^n}|V_\varepsilon(s)|\right)\int_\Omega |\psi(\omega(t))|d\mu_x(\omega) \\ &= \varepsilon^{Ct}(4\pi t)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)|\psi(y)|dy, \end{aligned}$$

za svako $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon < \eta$.

Zbog toga, postoje konstante $C_0 > 0$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takve da

$$\sup_{t\in[0,T)} \|S_\varepsilon(t)\psi\|_{L^2} \leq C_0\varepsilon^{CT}\|\psi\|_{L^2},\ \varepsilon < \varepsilon_0,$$

odnosno $(S_\varepsilon)_\varepsilon$, zadovoljava (1.48) i $S = [S_\varepsilon] \in \mathcal{SG}\left([0,\infty) : \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))\right)$.

(ii) Neka je $\varepsilon < \varepsilon_0$. Rešenje jednačine

$$\partial_t u_\varepsilon(t,x) - \Delta u_\varepsilon(t,x) + V_\varepsilon(x)u_\varepsilon(t,x) = 0,\ u_\varepsilon(0,x) = u_{0\varepsilon}(x) \tag{2.8}$$

je dato sa

$$u_\varepsilon(t,x) = S_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}(x),\ t \in [0,T),\ x \in \mathbb{R}^n,$$

i $u_\varepsilon \in C^1\left([0,T) : L^2(\mathbb{R}^n)\right)$. Pokažimo da $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^2}\left([0,T) : \mathbb{R}^n\right)$. Podsetimo se da je jezgro za jednačinu toplote dato sa

$$E_n(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}. \tag{2.9}$$

i njegova $L^1(\mathbb{R}^n)$-norma je jednaka 1, za svako $t > 0$.

Na osnovu Duhamelovog principa, rešenje $u_\varepsilon(t,x)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, jednačine (2.8) se može zapisati kao

$$u_\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t,x-y)u_{0\varepsilon}(y)dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,x-y)V_\varepsilon(y)u_\varepsilon(s,y)dyds, \tag{2.10}$$

za $t \in [0,T)$ i $x \in \mathbb{R}^n$.

Jangova (Young) nejednakost implicira

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} &\leq \|E_n(t,\cdot)\|_{L^1}\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\
&+ \int_0^t \|E_n(t-s,\cdot)\|_{L^1}\|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\,ds \\
&= \|u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int_0^t \|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\,ds, \quad t\in[0,T),\ \varepsilon<\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Gronvalova (Gronwall) nejednakost nam zatim daje

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\ \exp\left(\int_0^t \|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\,ds\right),\ t\in[0,T),\ \varepsilon<\varepsilon_0.$$

Koristeći činjenice da je potencijal $V\in\mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ logaritamskog tipa i da $(u_{0\varepsilon})_\varepsilon\in\mathcal{E}_{H^2}(\mathbb{R}^n)$, sledi da $\sup_{t\in[0,T)}\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$ ima umerenu granicu.

Diferenciranjem jednačine (2.10) po nekoj prostornoj promenljivoj x_i dobijamo

$$\begin{aligned}
\partial_{x_i}u_\varepsilon(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t,y)\partial_{x_i}u_{0\varepsilon}(x-y)\,dy \\
&+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,y)\partial_{x_i}(V_\varepsilon(x-y)u_\varepsilon(s,x-y))\,dy\,ds, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t,y)\partial_{x_i}u_{0\varepsilon}(x-y)\,dy \\
&+ \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,y)(\partial_{x_i}V_\varepsilon(x-y)u_\varepsilon(s,x-y) \\
&+ V_\varepsilon(x-y)\partial_{x_i}u_\varepsilon(s,x-y))\,dy\,ds,
\end{aligned}$$

za $t\in[0,T)$, $x\in\mathbb{R}^n$ i $\varepsilon<\varepsilon_0$. Tada, za $t\in[0,T)$ i $\varepsilon<\varepsilon_0$,

$$\begin{aligned}
&\|\partial_{x_i}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} \leq \|\partial_{x_i}u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\
&+\int_0^t\Big(\|\partial_{x_i}V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2} + \|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|\partial_{x_i}u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\Big)ds.
\end{aligned}$$

Kako $\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$ i norma prva dva izvoda od V_ε imaju umerene granice nezavisno od $t\in[0,T)$, primenom Gronvalove nejednakosti dobijamo da je i $\sup_{t\in[0,T)}\|\partial_{x_i}u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$ umereno.

Slično se mogu oceniti i izvodi višeg reda funkcije u_ε. Svojstvo umerenosti za $\sup_{t\in[T_1,T)}\|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^2}$, $T_1 < T$, jednostavno sledi iz jednačine (2.6). Dakle, $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$.

Ostaje da pokažemo da je $[u_\varepsilon(t,x)]$ jedinstveno u smislu opisanom u formulaciji teoreme.

Pretpostavimo da su $(u_\varepsilon)_\varepsilon, (v_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ predstavnici dva rešenja datog Košijevog problema. Tada $G_\varepsilon := u_\varepsilon - v_\varepsilon$ zadovoljava

$$\begin{aligned}&\partial_t G_\varepsilon(t,x) - (\Delta - V_\varepsilon)G_\varepsilon(t,x) = N_\varepsilon(t,x)\\ &G_\varepsilon(0,x) = N_{0\varepsilon}(x),\end{aligned}$$

gde $(N_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{C^1,L^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ and $(N_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}_{H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$.

Tada je

$$\begin{aligned}G_\varepsilon(t,x) &= \int E_n(t,x-y)N_{0\varepsilon}(y)\,dy\\ &+ \int_0^t\int E_n(t-s,x-y)V_\varepsilon(y)G_\varepsilon(s,y)\,dy\,ds\\ &+ \int_0^t\int E_n(t-s,x-y)N_\varepsilon(s,y)\,dy\,ds,\end{aligned}$$

za $x\in\mathbb{R}^n$, $t\in[0,T)$ i $\varepsilon<\varepsilon_0$, gde $(N_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}_{H^2}(\mathbb{R}^n)$ i

$$\sup_{t\in[0,T)}\|N_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} = \mathcal{O}(\varepsilon^a),\quad \text{kada } \varepsilon\to 0,$$

za svako $a\in\mathbb{R}$.

Jangova i Gronvalova nejednakost impliciraju

$$\|G_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} \le \|N_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int_0^t \|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|G_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\,ds + \int_0^t \|N_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\,ds,$$

za $t\in[0,T)$, odnosno,

$$\sup_{t\in[0,T)}\|G_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} = \mathcal{O}(\varepsilon^a),\quad \text{kada } \varepsilon\to 0,$$

za svako $a\in\mathbb{R}$. □

Delta distribucija kao potencijal

Neka je $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ mreža molifajera oblika

$$\phi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\phi(\cdot/\varepsilon),\ \varepsilon \in (0,1), \tag{2.11}$$

gde $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \phi(x)dx = 1$ i $\phi(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n$.

Mreža $(\phi_\varepsilon)_\varepsilon$ je predstavnik delta funkcije u $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$.

Stepeni delta funkcije se definišu kao

$$\delta^\alpha = \left[\frac{1}{\varepsilon^{n\alpha}}\phi^\alpha\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right)\right],\ \varepsilon \in (0,1), \tag{2.12}$$

gde je $\alpha > 0$.

Neka je

$$A_\varepsilon u = (\Delta - \phi_\varepsilon)u,\quad u \in H^2(\mathbb{R}^n),\ \varepsilon < 1.$$

Operator A_ε je infinitezimalni generator polugrupe

$$S_\varepsilon : [0,\infty) \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n)),$$

označene sa

$$S_\varepsilon(t) = e^{(\Delta-\phi_\varepsilon)t},\quad t \geq 0,\ \varepsilon \in (0,1),$$

koja je definisana sa (2.7), i $(S_\varepsilon)_\varepsilon$ je predstavnik Kolomboove C_0-polugrupe $S \in \mathcal{SG}\left([0,\infty) : \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))\right)$.

Fejnman-Kacova formula (2.7) daje

$$S_\varepsilon(t)\psi(x) = \int_\Omega \exp\left(-\int_0^t \phi_\varepsilon(\omega(s))\,ds\right)\psi(\omega(t))d\mu_x(\omega),\ \psi \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{2.13}$$

za svako $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ i $\varepsilon \in (0,1)$.

Kako je delta funkcija predstavljena mrežom nenegativnih funkcija, familija $\{S_\varepsilon(t),\ \varepsilon \in (0,1),\ t \geq 0\}$ je ograničena u $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ (ne samo umerena) i stoga zadovoljava relaciju (1.48).

Propozicija 2.2 *Neka je* $\delta^\alpha \in \mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$, *definisana sa (2.12) i neka je* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *neprekidna ograničena funkcija. Tada je*

$$u_\varepsilon(t,x) = \int_\Omega \exp\Big(- \frac{1}{\varepsilon^{n\alpha}} \int_0^t \phi^\alpha \left(\frac{\omega(s)}{\varepsilon} \right) ds \Big) u_0(\omega(t)) d\mu_x(\omega)), \tag{2.14}$$

gde $t \in [0,T)$ *i* $x \in \mathbb{R}^n$, *predstavnik rešenja* $u(t,x) \in \mathcal{G}_{C^1,H^1}([0,T) \times \mathbb{R}^n)$ *jednačine*

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) + \delta^\alpha(x) u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{2.15}$$

To rešenje je jedinstveno u $\mathcal{G}_{C^1,L^2}([0,T) \times \mathbb{R}^n)$. *Predstavnik (2.14) ima podniz* $u_{\varepsilon_\nu}(t,x)$, $\nu \in \mathbb{N}$, *koji konvergira u* $\mathcal{D}'$ *ka* $u(t,x) = e^{-\Delta t} u_0(x)$, *rešenju jednačine*

$$\partial_t u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{2.16}$$

Dokaz

Predstavnik $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ rešenja jednačine (2.15) je dat sa

$$(u_\varepsilon(t,x))_\varepsilon = (S_\varepsilon(t) u_0(x))_\varepsilon, \quad t \in [0,T), \ x \in \mathbb{R}^n, \ \varepsilon < \varepsilon_0,$$

gde je $S_\varepsilon(t)$ polugrupa generisana operatorom

$$A_\varepsilon = \Delta - \frac{1}{\varepsilon^{n\alpha}} \phi^\alpha \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right), \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Fejnman-Kacova formula (2.7) daje (2.14). Slično kao u dokazu teoreme 2.2 sledi da

$$S_\varepsilon(t) u_0(\cdot) \in L^2 \left([0,T) \times \mathbb{R}^n \right),$$

za sve $T > 0$ i $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Koristeći to i činjenicu da je familija $\{S_\varepsilon(\cdot) u_0(\cdot);\ \varepsilon < \varepsilon_0\}$ ograničena u $L^2 \left([0,T) \times \mathbb{R}^n \right)$, i zbog toga relativno kompaktna u odnosu na slabu topologiju, dobijamo da postoji niz $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ takav da

$$S_{\varepsilon_\nu}(t) u_0(x) \to u(t,x), \ \varepsilon_\nu \to 0,$$

u smislu slabe topologije u $L^2 \left([0,T) \times \mathbb{R}^n \right)$.

Neka $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T)$ i $\varepsilon < \varepsilon_0$. Koristeći Duhamelov princip dobijamo

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t, x-y) u_0(y)\, dy \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s, x-y) \frac{1}{\varepsilon^{n\alpha}} \phi^\alpha\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\ u_\varepsilon(s,y)\, dy\, ds, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t, x-y) u_{0\varepsilon}(y)\, dy \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s, x-y\varepsilon) \varepsilon^{n(1-\alpha)} \phi(y)\ u_\varepsilon(s, y\varepsilon)\, dy\, ds.
\end{aligned}
$$

Iz (2.14) i na osnovu pretpostaki datih na početni uslov i na ϕ vidimo da je $\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \infty$.

Neka $\psi \in \mathcal{D}([0,T) \times \mathbb{R}^n)$ i

$$
\begin{aligned}
J_{\varepsilon_\nu} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s, x-y) \varepsilon_\nu^{n(1-\alpha)} \phi(y) \\
&\quad u_{\varepsilon_\nu}(s, \varepsilon_\nu y)\, dy\, ds\, \psi(t,x)\, dx\, dt \\
&= \varepsilon_\nu^{n(1-\alpha)} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \exp\left(-\frac{(x-\varepsilon_\nu y)^2}{4(t-s)}\right) \phi(y) \\
&\quad u_{\varepsilon_\nu}(s, \varepsilon_\nu y)\, dy\, ds\, \psi(t,x) dx\, dt,
\end{aligned}
$$

gde $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Korišćenjem Lebegove (Lebesgue) teoreme o dominantnoj konvergenciji sledi tvrdjenje. Dakle, dokaz je kompletiran. □

Na sličan način može se dokazati sledeće tvrdjenje.

Propozicija 2.3 *Neka je $\delta \in \mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ definisana predstavnikom (2.11) i neka je u_0 neprekidna ograničena $L^2(\mathbb{R}^n)$-funkcija.*

Neka je u rešenje jednačine (2.6), gde $V = \delta$, i neka je $S_\varepsilon(t)$polugrupa generisana operatorom

$$A_\varepsilon = \Delta - \phi_\varepsilon, \ \ \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Tada postoji opadajući niz $\{\varepsilon_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ koji konvergira ka nuli, takav da

$$u_{\varepsilon_\nu}(t,x) = S_{\varepsilon_\nu}(t) u_0(x) \to u(t,x), \ \varepsilon_\nu \to 0, \ \ (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n,$$

u smislu slabe topologije u $L^2\left((0,T) \times \mathbb{R}^n\right)$, $T > 0$.

Primedba 2.2 *Navedene jednačine možemo rešavati i u slučaju kada je δ-funkcija zamenjena pozitivnom linearnom kombinacijom njenih stepena*

$$\sum_{i=1}^{M} \alpha_i \delta^i(x),$$

gde $M \in \mathbb{N}$ *i* $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots M$. *Tada*

$$\exp\left(- \int_0^1 (\phi_\varepsilon(\omega(s)))^i \, ds \right) \leq 1, \ i \leq M,$$

odnosno, $(S_\varepsilon(t)\psi(x))_\varepsilon$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, *definisano sa (2.7) zadovoljava*

$$\sup_{t \in [0,T)} \|S_\varepsilon(t)\psi\|_{L^2} = \mathcal{O}(1).$$

Stoga je $(S_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon})_\varepsilon$ *predstavnik rešenja jednačine*

$$\partial_t u(t,x) = \left(\Delta - \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \delta^i(x) \right) u(t,x), \quad t \in [0,T), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Lipšicovski nelinearan slučaj

U ovom delu koristićemo dobro poznatu nejednakost

$$\| \, | \nabla g|^2 \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \| \nabla g \|^2_{L^4(\mathbb{R}^n)} \leq \| \nabla g \|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}, \ g \in H^2(\mathbb{R}^n), \qquad (2.17)$$

koja važi za $n \leq 4$. Medjutim, u nastavku teksta stalna pretpostavka će biti da je $n \leq 3$ jer je samo u tom slučaju $\mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T) : \mathbb{R}^n)$ algebra.

Lema 2.1 *Neka je* $n \leq 3$. *Pretpostavimo da funkcija* $f : [0,T) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *zadovoljava uslove* $f(t,\cdot) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $f(\cdot,y) \in C^1([0,T))$, $T > 0$, *i*

$$|f(t,y)| \leq L_0(t)|y|, \ |\partial_y f(t,y)| \leq L_1(t), \ |\partial_{yy} f(t,y)| \leq L_2(t), \qquad (2.18)$$

za $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T)$ *i za neke pozitivne i ograničene funkcije*

$$L_i : [0,T) \to \mathbb{R}, \ \ i = 0,1,2.$$

Tada su sa $(u_\varepsilon)_\varepsilon \mapsto (f(t,u_\varepsilon))_\varepsilon$ definisana preslikavanja

$$\mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n) \to \mathcal{E}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$$

i

$$\mathcal{N}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n) \to \mathcal{N}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n).$$

Stoga preslikavanje $u \mapsto [f(t,u_\varepsilon)]$,

$$\mathcal{G}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n) \to \mathcal{G}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n).$$

ima smisla.

Dokaz

Dokazaćemo da iz činjenice da $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ sledi da $(f(t,u_\varepsilon))_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^0,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$. Ostali delovi dokaza slede na sličan način.

Treba da pokažemo da postoje $a \in \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon_0 \in (0,1)$ takvi da

$$\sup_{t\in[0,T)} \|f(t,u_\varepsilon)\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\varepsilon^a), \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Medjutim, (2.18) implicira

$$\|f(t,u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le L_0(t)\|u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \; t\in[0,T), \; \varepsilon<1.$$

Kako $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$, sledi da $\sup_{t\in[0,T)}\|f(t,u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ ima umerenu granicu.

Nakon diferenciranja po nekoj prostornoj promenljivoj x_i dobijamo

$$\begin{aligned}\|\partial_y f(t,u_\varepsilon)\partial_{x_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\le \|\partial_y f(t,u_\varepsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\partial_{x_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\le L_1(t)\|\partial_{x_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Slično dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)}\|f_y(t,u_\varepsilon)\partial_{x_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Nakon još jedne diferencijacije po prostornoj promenljivoj x_i, koristeći (2.17), ocenu

$$|L_1(t)|, |L^2(t)| \le C, \; t\in[0,T),$$

i činjenicu da je $\mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ algebra za $n\leq 3$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\|\partial_{yy}f(t,u_\varepsilon)(\partial_{x_i}u_\varepsilon)^2+\partial_y f(t,u_\varepsilon)\partial_{x_i,x_j}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \|\partial_{yy}f(t,u_\varepsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|(\partial_{x_i}u_\varepsilon)^2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&+\|\partial_y f(t,u_\varepsilon)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|\partial_{x_ix_j}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq L_2(t)\|\partial_{x_i}u_\varepsilon\|^2_{L^4(\mathbb{R}^n)}+L_1(t)\|\partial_{x_ix_j}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\left(\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}+\|\partial_{x_ix_j}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right),
\end{aligned}$$

gde $\partial_y f$ izvod po drugom argumentu.

Kako, na osnovu pretpostavke, $\|\partial_{x_ix_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ ima umerenu granicu, dokaz je završen. □

Sada možemo formulisati rezultat o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja.

Teorema 2.3 *Neka je $n\leq 3$, zatim neka je $V\in\mathcal{G}_{H^{2,\infty}}(\mathbb{R}^n)$ logaritamskog tipa i $u_0\in\mathcal{G}_{H^2}(\mathbb{R}^n)$. Pretpostavimo da funkcija $f:[0,T)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ zadovoljava uslove leme 2.1.*

Tada postoji rešenje $u(t,x)\in\mathcal{G}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$ jednačine

$$\partial_t u(t,x)=(\Delta-V)u(t,x)+f(t,u(t,x)),\ \ u(0,x)=u_0(x). \tag{2.19}$$

Štaviše, ako je potencijal V log-log tipa, tada je rešenje jednačine (2.19) jedinstveno u $\mathcal{G}_{C^1,L^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$.

Dokaz

Neka je ε dovoljno malo i fiksirano. Posmatrajmo jednačinu sa predstavnicima

$$\partial_t u_\varepsilon(t,x)=(\Delta-V_\varepsilon)u_\varepsilon(t,x)+f(t,u_\varepsilon(t,x)),\ u_\varepsilon(0,x)=u_{0\varepsilon}(x). \tag{2.20}$$

Kao što smo pokazali u teoremi 2.2 (i), polugrupa $(S_\varepsilon)_\varepsilon$, definisana sa (2.7), je elemenat $\mathcal{SE}_M\left([0,\infty):\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))\right)$. Za svako fiksirano $\varepsilon\in(0,1)$ postoji klasično rešenje jednačine (2.20) i ono zadovoljava

$$u_\varepsilon(t,x)=S_\varepsilon(t)u_{0\varepsilon}(x)+\int_0^t S_\varepsilon(t-s)f(s,u_\varepsilon(s,x))\,ds, \tag{2.21}$$

za $t \in [0,T)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Pokažimo da $(u_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_{C^1,H^2}([0,T):\mathbb{R}^n)$. Prvo,

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t,x-y)u_{0\varepsilon}(y)dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,x-y)V_\varepsilon(y)u_\varepsilon(s,y)dyds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,x-y)f(s,u_\varepsilon(s,y))ds, \end{aligned} \tag{2.22}$$

za $t \in [0,T)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Zato je

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} &\le \|E_n(t,\cdot)\|_{L^1}\|u_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\ &+ \int_0^t \|E_n(t-s,\cdot)\|_{L^1}\|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}ds \\ &+ \int_0^t \|E_n(t-s,\cdot)\|_{L^1}\|f(s,u_\varepsilon(s,\cdot))\|_{L^2}ds \\ &\le \|u_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int_0^t \|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}ds \\ &+ \int_0^t L_0(s)\,\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}ds, \end{aligned}$$

za $t \in [0,T)$, i (obzirom da je V logaritamskog tipa)

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} = \|u_{0\varepsilon}\|_{L^2}\exp\left(\int_0^t (\|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty} + L_0(s))\,ds\right) = \mathcal{O}(\varepsilon^a), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.23}$$

uniformno za $t \in [0,T)$, za neko $a \in \mathbb{R}$.

Kako $u_{0\varepsilon} \in H^2(\mathbb{R}^n)$ i važi (2.17) dobijamo da $\|u_{0\varepsilon}(\cdot)\|_{L^4}$ ima umerenu granicu, a ista procedura, sa $\|\cdot\|_{L^4}$ umesto $\|\cdot\|_{L^2}$, daje umerenu granicu za $\|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^4}$.

Diferenciranjem (2.22) po prostornoj promenljivoj dobijamo

$$\begin{aligned} \partial_{x_i}u_\varepsilon(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t,y)\partial_{x_i}u_{0\varepsilon}(x-y)\,dy \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,y)\partial_{x_i}(V_\varepsilon(x-y)u_\varepsilon(s,x-y))\,dy\,ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,y)\partial_{x_i} f(s,u_\varepsilon(s,x-y))dyds, \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t,y)\partial_{x_i} u_{0\varepsilon}(x-y)\,dy \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,y)(\partial_{x_i} V_\varepsilon(x-y)u_\varepsilon(s,x-y) \\
&+ V_\varepsilon(x-y)\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,x-y))\,dy\,ds \\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,y)\partial_u f(s,u_\varepsilon(s,x-y))\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,x-y)dyds,
\end{aligned}
$$

za $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$.

Primenom Jangove nejednakosti dobijamo

$$
\begin{aligned}
\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} \;&\leq\; \|E_n(t,\cdot)\|_{L^1}\|\partial_{x_i} u_{0\varepsilon}(\cdot)\|_{L^2} \\
&+ \int_0^t \|E_n(t-s,\cdot)\|_{L^1}(\|\partial_{x_i} V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2} \\
&+ \|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2})\,ds \\
&+ \int_0^t \|E_n(t-s,\cdot)\|_{L^1}\|\partial_u f(s,u_\varepsilon(s,\cdot))\|_{L^\infty}\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\,ds, \\
&\leq \|\partial_{x_i} u_{0\varepsilon}(\cdot)\|_{L^2} + \int_0^t (\|\partial_{x_i} V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2} \\
&+ \|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2})\,ds \\
&+ \int_0^t L_1(s)\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\,ds,
\end{aligned}
$$

uniformno za $t \in [0,T)$. Iz toga sledi

$$
\begin{aligned}
\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} \;&\leq\; (\|\partial_{x_i} u_{0\varepsilon}(\cdot)\|_{L^2} + \int_0^t \|\partial_{x_i} V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}) \\
&\qquad \cdot \exp(\int_0^t (\|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty} + L_1(s))\,ds,\; t \in [0,T).
\end{aligned}
$$

Kako $\sup_{t\in[0,T)} \|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$ ima umerenu granicu i kako je V logaritamskog tipa lako dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)} \|\partial_{x_i} u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$.

Kako norme $\|\partial_{x_i} u_{0\varepsilon}(\cdot)\|_{L^4}$ i $\sup_{t\in[0,T)} \|u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^4}$ imaju umerene granice (prva na osnovu nejednakosti (2.17), a druga na osnovu prethodnog koraka), istom procedurom dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)} \|\partial_{x_i} u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^4}$.

Nakon još jednog diferenciranja po x_j dobijamo

$$\partial_{x_i x_j} u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} E_n(x,y)\partial_{x_i x_j} u_{0\varepsilon}(x-y)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,y)$$
$$\cdot\Big(\partial_{x_i x_j} V_\varepsilon(x-y) u_\varepsilon(s,x-y) + \partial_{x_i} V_\varepsilon(x-y)\partial_{x_j} u_\varepsilon(s,x-y)$$
$$+\partial_{x_j} V_\varepsilon(x-y)\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,x-y) + V_\varepsilon(x-y)\partial_{x_i x_j} u_\varepsilon(s,x-y)\Big)\,dy\,ds$$
$$+\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s,y)\Big(\partial_{uu} f(s,u_\varepsilon(s,x-y))\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,x-y)$$
$$\cdot\partial_{x_j} u_\varepsilon(s,x-y) + \partial_u f(s,u_\varepsilon(s,x-y))\partial_{x_i x_j} u_\varepsilon(s,x-y)\Big)\,dy\,ds.$$

Primenom Jangove nejednakosti dobijamo

$$\begin{aligned}
\|\partial_{x_i x_j} u(t,\cdot)\|_{L^2} \;\le\;& \|\partial_{x_i x_j} u_{0\varepsilon}(\cdot)\|_{L^2} + \int_0^t \Big(\|\partial_{x_i x_j} V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\\
+\;& \|\partial_{x_i} V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|\partial_{x_j} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\\
+\;& \|\partial_{x_j} V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\\
+\;& \|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|\partial_{x_i x_j} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\Big)\,ds\\
+\;& \int_0^t \Big(L_2(s)\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^4}\|\partial_{x_j} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^4}\\
+\;& L_1(s)\|\partial_{x_i x_j} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\Big)\,ds, \quad t\in[0,T).
\end{aligned}$$

Iz toga sledi

$$\begin{aligned}
\|\partial_{x_i x_j} u(t,\cdot)\|_{L^2} \;\le\;& \Big(\|\partial_{x_i x_j} u_{0\varepsilon}(\cdot)\|_{L^2} + \int_0^t \Big(\|\partial_{x_i x_j} V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\\
+\;& \|\partial_{x_i} V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|\partial_{x_j} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\\
+\;& \|\partial_{x_j} V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty}\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}\Big)\,ds\\
+\;& \int_0^t L_2(s)\|\partial_{x_i} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^4}\|\partial_{x_j} u_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^4}\Big)\,ds
\end{aligned}$$

$$\cdot \exp\left(\int_0^t \|V_\varepsilon(\cdot)\|_{L^\infty} + L_1(s)\right) ds, \quad t \in [0,T).$$

Umerenost $\sup_{t\in[0,T)} \|\partial_{x_i x_j} u_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2}$ sledi na osnovu prethodno navedenih ocena kao i logaritamskog rasta norme $\|V_\varepsilon\|_{L^\infty}$. Dakle, egzistencija rešenja je dokazana. Pokažimo jedinstvenost tog rešenja.

Primetimo najpre da ako je potencijal V log-log tipa (kao što smo pretpostavili za jedinstvenost) tada iz (2.23) sledi da je rešenje (2.19), u, logaritamskog tipa.

Neka su u i v dva rešenja jednačine (2.19). Označimo

$$g_\varepsilon(t,x) = \int_0^1 \partial_u f(t, \sigma u_\varepsilon(t,x) + (1-\sigma)v_\varepsilon(t,x))\, d\sigma, \ t \in [0,T), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

i

$$G_\varepsilon = u_\varepsilon - v_\varepsilon, \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Tada je G_ε rešenje jednačine

$$\begin{aligned}
&\partial_t G_\varepsilon(t,x) = (\Delta - V_\varepsilon)G_\varepsilon(t,x) + g_\varepsilon(t,x)G_\varepsilon(t,x) + N_\varepsilon(t,x),\\
&G_\varepsilon(0,x) = N_{0\varepsilon}(x), \quad \varepsilon < \varepsilon_0,
\end{aligned}$$

gde $(N_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{C^1,L^2}([0,T) : \mathbb{R}^n)$ i $(N_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}_{H^2}(\mathbb{R}^n)$.

Na osnovu definicije g_ε, uslova datih na funkciju f i činjenice da su u i v logaritamskog tipa sledi

$$\|g_\varepsilon(t,x)\|_{L^2} \le C\left(\|u_\varepsilon\|_{L^2} + \|v_\varepsilon\|_{L^2}\right) = \mathcal{O}(\log \varepsilon^{-1}), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0.$$

Ako stavimo

$$V_{1\varepsilon} = V_\varepsilon - g_\varepsilon, \quad \varepsilon < \varepsilon_0,$$

tada je funkcija V_1 logaritamskog tipa. Sada je

$$\begin{aligned}
G_\varepsilon(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t, x-y) N_{0\varepsilon}(y) dy\\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s, x-y) V_{1\varepsilon}(y) G_\varepsilon(s,y) dyds\\
&+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E_n(t-s, x-y) N_\varepsilon(s,y)\, ds,
\end{aligned}$$

za $\varepsilon < \varepsilon_0$, $t \in [0,T)$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Odatle dobijamo

$$\begin{aligned} \|G_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} &\leq \|E_n(t,\cdot)\|_{L^1}\|N_{0\varepsilon}\|_{L^2} \\ &+ \int_0^t \|E_n(t-s,\cdot)\|_{L^1}\|V_{1\varepsilon}(\cdot)\|_{L^\infty}\|G_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}ds \\ &+ \int_0^t \|E_n(t-s,\cdot)\|_{L^1}\|N_\varepsilon(s,\cdot)\|_{L^2}ds. \end{aligned}$$

Kako $(N_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}_{H^2}(\mathbb{R}^n)$, $(N_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_{C^1,L^2}([0,T) : \mathbb{R}^n)$ i kako je V_1 logaritamskog tipa, primenom Gronvalove nejednakosti dobijamo

$$\|G_\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^2} = \mathcal{O}(\varepsilon^a),\ \varepsilon \to 0,$$

uniformno po $t \in [0,T)$, za svako $a \in \mathbb{R}$. Dakle, rešenje jednačine (2.19) je jedinstveno u $\mathcal{G}_{C^1,L^2}([0,T) : \mathbb{R}^n)$. □

2.2 Uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe

Klasična teorija polugrupa se razvila prvenstveno radi nalaženja rešenja evolucionih jednačina i sistema. Medjutim, postoji široka klasa u klasičnom smislu nerešivih jednačina i sistema, posebno onih kod kojih se pojavljuju nelinearne operacije (kao što je množenje).

U prethodnom odeljku koristili smo Kolomboove C_0-polugrupe u cilju rešavanja nekih PDJ sa singularitetima. U ovom odeljku ćemo koristiti uniformno neprekidne polugrupe definisane na Kolomboovim prostorima uopštenih funkcija.

Uniformno neprekidne polugrupe su veoma pogodne za rad, ali imaju veliki nedostatak: diferenciranje nije ograničen operator. Stoga operatori koji sadrže diferenciranje ne mogu odredjivati uniformno neprekidne polugrupe.

Sa druge strane, postoji pojam regularizovanog izvoda (videti [11] i [44]) pomoću koga zamenjujemo izvod sa ograničenim integralnim operatorom. To će biti problem na kome ćemo se bazirati, rešavaćemo jednačine sa regularizovanim izvodima koristeći dobro razvijen aparat teorije uniformno neprekidnih polugrupa operatora. Sve rezultate koje ćemo izložiti u ovom odeljku dobili su M. Nedeljkov i D. Rajter i čitaoc ih može naći u radu [32].

2.2.1 Osobine uniformno neprekidnih Kolomboovih polugrupa

U odeljku 1.4.3 dali smo definiciju uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe i njenog infinitezimalnog generatora. Ovde nastavljamo sa ispitivanjem nekih daljih svojstava ovih polugrupa. Počećemo sa sledećom definicijom:

Definicija 2.2 *Neka je h_ε pozitivna mreža koja zadovoljava $h_\varepsilon < \varepsilon^{-1}$. Kažemo da je operator $A \in \mathcal{SG}(E)$ h_ε-tipa ako ima predstavnika A_ε takvog da*

$$\|A_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(E)} = \mathcal{O}(h_\varepsilon), \ \varepsilon \to 0. \tag{2.24}$$

Za $\mathcal{G}\left([0,\infty):L^p(\mathbb{R}^n)\right)$ kažemo da je h_ε-tipa ako ima predstavnika G_ε takvog da

$$\|G_\varepsilon\|_{L^p} = \mathcal{O}(h_\varepsilon), \ \varepsilon \to 0.$$

Na osnovu teoreme 1.1 znamo da u klasičnoj teoriji polugrupa važi da je linearan operator A infinitezimalni generator uniformno neprekidne polugrupe ako i samo ako je A ograničen linearan operator.

U slučaju uniformno neprekidnih Kolomboovih polugrupa važi sledeće tvrdjenje.

Lema 2.2 *Svaki operator $A \in \mathcal{SG}(E)$ h_ε-tipa, gde je $h_\varepsilon \leq C \log \dfrac{1}{\varepsilon}$, jeste infinitezimalni generator neke uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $T \in \mathcal{SG}\left([0,\infty):\mathcal{L}(E)\right)$.*

Dokaz

Svaki ograničen operator A_ε jeste infinitezimalni generator uniformno neprekidne polugrupe

$$\boxed{T_\varepsilon(t) = e^{tA_\varepsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA_\varepsilon)^n}{n!}.}$$

Pokažimo sada da $(T_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{SE}_M\left([0,\infty):\mathcal{L}(E)\right)$. Imamo da

$$\|T_\varepsilon(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|tA_\varepsilon\|^n}{n!} \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(th_\varepsilon)^n = Me^{th_\varepsilon}.$$

(Kod uniformno neprekidnih

Kako je $h_\varepsilon \leq C \log \frac{1}{\varepsilon}$ imamo da

$$\sup_{t \in [0,T)} \|T_\varepsilon(t)\| \leq M\varepsilon^{-TC},$$

za dovoljno malo ε. Kako je

$$\frac{d}{dt} T_\varepsilon(t) = A_\varepsilon,$$

za svako dovoljno malo ε, imamo da je

$$\left\| \frac{d}{dt} T_\varepsilon(t) \right\| = \|A_\varepsilon\| \leq C \log \frac{1}{\varepsilon} \leq C\varepsilon^{-1},$$

za svako takvo ε, odnosno $(T_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{SE}_M([0,\infty) : \mathcal{L}(E))$. □

Propozicija 2.4 *Neka je A infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe S i neka je B infinitezimalni generator uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe T. Ako je $A = B$ onda $S = T$.*

Dokaz

Neka je $N_\varepsilon = A_\varepsilon - B_\varepsilon \in \mathcal{SN}(E)$. Imamo da je

$$\frac{d}{dt}(S_\varepsilon(t) - T_\varepsilon(t))x = A_\varepsilon(S_\varepsilon(t) - T_\varepsilon(t))x + N_\varepsilon T_\varepsilon(t)x.$$

Duhamelov princip i $S_\varepsilon(0) = T_\varepsilon(0) = I$ impliciraju

$$(S_\varepsilon(t) - T_\varepsilon(t))x = \int_0^t S_\varepsilon(t-s) N_\varepsilon T_\varepsilon(s) x ds.$$

Lako se može pokazati da $\|S_\varepsilon(t) - T_\varepsilon(t)\| \leq C\varepsilon^a$, za svaki realan broj a, obzirom da $N_\varepsilon \in \mathcal{SN}(E)$. Za t-izvode od $S_\varepsilon(t) - T_\varepsilon(t)$ iste granice se mogu dobiti sukcesivnim diferenciranjem gornjeg izraza. □

2.2.2 Diferencijalne jednačine sa regularizovanim izvodima

Za neke osnovne osobine regularizovanih izvoda čitaoca upućujemo na [11] i [44]. Podsetimo se definicije regularizovanog α-tog izvoda.

Definicija 2.3 *Neka je $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Regularizovani α-ti izvod uopštene funkcije G_ε je definisan predstavnikom*

$$\tilde{\partial}^{\alpha}_{h_\varepsilon} G_\varepsilon = G_\varepsilon * \partial^\alpha \phi_{h_\varepsilon}, \tag{2.25}$$

gde $\phi_{h_\varepsilon}(x) = h_\varepsilon^n \phi(x h_\varepsilon)$, $\phi(y) = \phi_1(y_1) \cdot \ldots \cdot \phi_1(y_n)$, $\phi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\phi_1(\xi) \geq 0$ i $\int \phi_1(\xi) d\xi = 1$.

U nastavku će prostor E biti $L^2(\mathbb{R}^n)$. Propozicija koja sledi obezbedjuje da svaki operator reprezentovan regularizovanim izvodom $\tilde{\partial}^{\alpha}_{h_\varepsilon} G_\varepsilon$ gde je h_ε mreža iz definicije 2.3, bude infinitezimalni generator neke uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe.

Lema 2.3 *Pretpostavimo da $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ i da je h_ε mreža iz definicije 2.3. Tada*

$$\|\tilde{\partial}^{\alpha}_{h_\varepsilon} f\|_{L^2} \leq C_{\phi,\alpha} h_\varepsilon^{|\alpha|} \|f\|_{L^2}.$$

Dokaz

Za $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ imamo

$$\left\|\tilde{\partial}^{\alpha}_{h_\varepsilon} f\right\|_{L^2} = \|f * \partial^\alpha \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|\partial^\alpha \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^1}.$$

Primetimo da

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha \phi_{h_\varepsilon}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\partial^\alpha \left(h_\varepsilon^n \phi\left(x h_\varepsilon\right)\right)\right| \, dx \\
&= h_\varepsilon^{n+|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\left(\partial^\alpha \phi\right)\left(x h_\varepsilon\right)\right| \, dx \\
&= h_\varepsilon^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\partial^\alpha \phi(y)\right| \, dy = h_\varepsilon^{|\alpha|} \|\partial^\alpha \phi\|_{L^1} \leq C_{\phi,\alpha} h_\varepsilon^{|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Sada jednostavno sledi tvrdjenje. □

Teorema 2.4 *Neka je* $u_0 \in \mathcal{G}\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)$, $n \leq 3$, *i* $h_\varepsilon = \left(\log \dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1/(2m)}$.
Dalje, neka je $A \in \mathcal{SG}\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)$ *reprezentovan mrežom operatora*

$$A_\varepsilon = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha,\varepsilon}(x)\, \tilde{\partial}^{\alpha}_{h_\varepsilon},\ a_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2.26}$$

$$A_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

gde je $a_\alpha \in \mathcal{G}(L^\infty(\mathbb{R}^n))$ $\left(\log \dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}$*-tipa.*

Uopštena funkcija $u \in \mathcal{G}([0,\infty) : L^2(\mathbb{R}^n))$, *reprezentovana sa*

$$u_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t) u_{0\varepsilon},$$

gde je $S(t) \in \mathcal{SG}\left([0,\infty) : L^2(\mathbb{R}^n)\right)$ *uniformno neprekidna Kolomboova polugrupa generisana sa* A, *jeste jedinstveno rešenje Košijevog problema*

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} u(t) = A u(t), \\ &u(0) = u_0 \in \mathcal{G}(L^2(\mathbb{R}^n)). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dokaz

Koristeći tvrdjenje leme 2.3 dobijamo

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon u_\varepsilon(t)\|_{L^2} &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|a_{\alpha,\varepsilon}\|_{L^\infty} \|\partial^\alpha_{h_\varepsilon} u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \\ &\leq C_1 \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2} \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\phi,\alpha} \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|/(2m)} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2} \\ &\leq C \log \frac{1}{\varepsilon}\, \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Na osnovu lema 2.2 i 2.3, $A \in \mathcal{SG}(L^2(\mathbb{R}^n))$ je infinitezimalni generator neke uniformno neprekidne Kolomboove polugrupe $S \in \mathcal{SG}([0,\infty) : \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n)))$. Na osnovu dobro poznatih klasičnih rezultata sledi da je $u_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t) u_{0\varepsilon}$ rešenje problema

$$\frac{d}{dt} u_\varepsilon(t) = A_\varepsilon u_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(0) = u_{0\varepsilon},$$

za svako dovoljno malo ε.

Pokažimo da je to rešenje jedinstveno u $\mathcal{G}([0,\infty):L^2(\mathbb{R}^n))$.

Funkcija $w_\varepsilon := u_\varepsilon - v_\varepsilon$ zadovoljava

$$\frac{d}{dt}w_\varepsilon(t) = A_\varepsilon w_\varepsilon(t) + N_\varepsilon(t),\ w_\varepsilon(0) = w_{0\varepsilon},$$

gde $N_\varepsilon(t) \in \mathcal{N}([0,\infty):L^2(\mathbb{R}^n))$ i $w_{0\varepsilon} \in \mathcal{N}(L^2(\mathbb{R}^n))$.

Tada je

$$w_\varepsilon(t) = S_\varepsilon(t)w_{0\varepsilon} + \int_0^t S_\varepsilon(t-s)N_\varepsilon(s)\,ds, \tag{2.28}$$

i

$$\|w_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|S_\varepsilon(t)w_{0\varepsilon}\|_{L^2} + \int_0^t \|S_\varepsilon(t-s)N_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds,\ t \in [0,\infty),$$

odakle dobijamo $\mathcal{N}$-granicu za $\|w_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Jednačina (2.2.2) implicira
(2.27)

$$\|\frac{d}{dt}w_\varepsilon(t)\|_{L^2} \leq \|A_\varepsilon w_\varepsilon(t)\|_{L^2} + \|N_\varepsilon(t)\|_{L^2}.$$

Kako, na osnovu prethodnog koraka, $\|w_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ ima $\mathcal{N}$-granicu i kako $N_\varepsilon(t) \in \mathcal{N}([0,T) : L^2(\mathbb{R}^n))$ dobijamo da $\left\|\frac{d}{dt}w_\varepsilon(t)\right\|_{L^2}$ takodje ima $\mathcal{N}$-granicu. Dakle, $w_\varepsilon := u_\varepsilon - v_\varepsilon \in \mathcal{N}([0,\infty):L^2(\mathbb{R}^n))$. $\Box$

Definicija 2.4 *Rešenje u problema (2.27) iz teoreme 2.4 se zove uopšteno rešenje jednačine*

$$\frac{d}{dt}u(t) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(\cdot)\partial^\alpha u(t)$$

sa regularizovanim izvodima.

Glava 3

Stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine sa Kolomboovim uopštenim slučajnim procesima

3.1 Uvodne napomene

U ovoj glavi ćemo proučavati parcijalne diferencijalne jednačine sa singularitetima predstavljenim stohastičkim izrazima, odnosno, Kolomboovim uopštenim slučajnim procesima definisanim u glavi 1. Zbog čega je pogodno da slučajne izraze u PDJ posmatramo u okviru Kolomboove teorije? Na početku ćemo pokušati da damo odgovor na to pitanje.

Široka klasa slučajnih procesa koja se javlja u primenama ne može se definisati na klasičan način. Jedan od najpoznatijih primera takvog procesa je sigurno proces belog šuma koji predstavlja veoma dobar model fluktuirajućih pojava koje se vrlo često javljaju, na primer, u dinamičkim sistemima.

Proces belog šuma je prvi put korektno definisan koristeći jezik teorije uopštenih funkcija (distribucija). Takav koncept belog šuma (kao uopštenog slučajnog procesa) se pokazao kao veoma korisna matematička idealizacija.

Medjutim, rad sa uopštenim slučajnim procesima podrazumeva prostore distribucija koji nisu pogodni usled nemogućnosti množenja, pa samim tim nisu pogodni ni za nelinearne stohastičke PDJ. Jedan od mogućih pristupa u rešavanju stohastičkih diferencijalnih jednačina jeste korišćenje Vikovog proizvoda, kao što je to učinjeno u [18].

Da bismo prevazišli problem množenja mi ćemo koristiti aparat teorije prostora Kolomboovih uopštenih funkcija (videti [5], [10]). Taj prilaz je korišćen i u radovima [39], [40], [46], a slična procedura je korišćena u radu [1]. Mi ćemo ovde koristiti Kolomboove algebre konstruisane u [7] (konstrukcija je takodje izložena i u odeljku 1.4) i energijske nejednakosti za talasnu jednačinu.

3.2 Jednodimenzionalna nelinearna stohastička talasna jednačina sa Lipšicovskim nelinearnostima

Ovaj odeljak je posvećen jednodimenzionalnoj nelinearnoj stohastičkoj talasnoj jednačini sa globalnim Lipšicovim nelinearnostima. Oberguggenberger i Russo (videti [39]) su pokazali egzistenciju i jedinstvenost uopštenog rešenja n-dimenzionalne stohastičke talasne jednačine za $n = 1, 2, 3$. Specijalno, u slučaju $n = 1$, oni su posmatrali i granično ponašanje rešenja kada je početni uslov proces belog šuma. Mi ćemo ovde izložiti te rezultate, kao i rezultate koje su dobili Oberguggenberger i Rajter, a vezani su za granično ponašanje uopštenih rešenja u slučajevima kada su početni uslovi neki funkcionali belog šuma (na primer, početni uslov može biti proces pozitivnog šuma koji smo definisali u odeljku 1.3.3). Kao što će čitaoc kasnije videti, u tim slučajevima se javlja takozvani efekat trivijalnosti.

3.2.1 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

Posmatraćemo Košijev problem

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U(x,t) = F(U(x,t)) + H(x,t), \tag{3.1}$$

$$U(x,0) = I(x), \quad \partial_t U(x,0) = J(x), \tag{3.2}$$

gde je F glatka, globalno-Lipšicova funkcija sa polinomijalno ograničenim svim izvodima i H, I i J su uopšteni slučajni procesi na $\mathbb{R}^2$, respektivno na $\mathbb{R}$.

Obzirom da ćemo kasnije ispitivati jednodimenzionalnu stohastičku talasnu jednačinu, rezultati egzistencije i jedinstvenosti rešenja će biti formulisani za $n = 1$. Ipak, napominjemo da rezultat koji sledi važi za $n = 1, 2, 3$, kao što je pokazano u [39].

Teorema 3.1 *([39]) Neka je (Ω, Σ, μ) fiksirani prostor verovatnoća, F kao gore, $H \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ i $I, J \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R})$. Tada postoji skoro sigurno jedinstveno rešenje $U \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ problema (3.1)-(3.2).*

Dokaz

Problem (3.1)-(3.2) dat sa predstavnicima glasi

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U_\varepsilon(x,t) = F(U_\varepsilon(x,t)) + H_\varepsilon(x,t), \tag{3.3}$$

$$U_\varepsilon(x,0) = I_\varepsilon(x), \quad \partial_t U_\varepsilon(x,0) = J_\varepsilon(x), \tag{3.4}$$

gde $H_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ i $I_\varepsilon, J_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}(\mathbb{R})$.

Za fiksirano ε, problem (3.3)-(3.4) ima rešenje i ono je dato formulom Dalambera (d'Alambert):

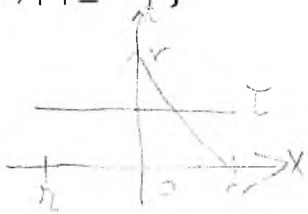
$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x,t) &= \frac{1}{2}\left(I_\varepsilon(x-t) + I_\varepsilon(x+t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} J_\varepsilon(y)\, dy \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} \left(F(U_\varepsilon(y,s)) + H_\varepsilon(y,s)\right)\, dy\, ds. \end{aligned}$$

Preslikavanje $(x,t,\omega) \to U_\varepsilon(x,t,\omega)$ je zajednički merljivo po (x,t) i ω za svako fiksirano ε. Ostaje da pokažemo da $U_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$.

Za $r > 0$ definišemo trapezoidnu oblast

$$K_\tau = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2\, ;\, 0 \le t \le \tau,\ |x| \le r - t\right\} \tag{3.5}$$

čija je baza interval $[-r, r]$.



Da bismo dokazali da $U_\varepsilon \in \mathcal{E}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ trebalo bi da pokažemo da izvesne ocene važe na kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}^2$. Kako je K podskup od K_τ, za dovoljno veliko τ, mi ćemo te ocene dokazati na K_τ. Sledeća ocena važi

$$\|U_\varepsilon\|_{L^\infty(K_\tau)} \leq C(\tau)\Big(\|I_\varepsilon\|_{L^\infty(K_\tau)}+\tau\|J_\varepsilon\|_{L^\infty(K_\tau)}+\int_0^T \|F(U_\varepsilon)+H_\varepsilon\|_{L^\infty(K_t)}dt\Big).$$

Gronvalova nejednakost daje

$$\begin{aligned}\|U_\varepsilon\|_{L^\infty(K_\tau)} &\leq C(\tau)\Big(\|I_\varepsilon\|_{L^\infty(K_\tau)} + \tau\|J_\varepsilon\|_{L^\infty(K_\tau)} + \int_0^T \|H_\varepsilon\|_{L^\infty(K_t)}dt\Big) \\ &\quad \exp\left(C_F\int_0^T \|U_\varepsilon\|_{L^\infty(K_t)}dt\right)\end{aligned}$$

gde je C_F Lipšicova konstanta za funkciju F, odakle dobijamo $\mathcal{E}_M$-ocenu za $\|U_\varepsilon\|_{L^\infty(K_\tau)}$. $\mathcal{E}_M$-ocene za izvode višeg reda dobijamo nakon diferenciranja jednačine (3.3) koristeći istu argumentaciju.

Takodje, slična argumentacija primenjena na razliku dva rešenja povlači da predstavnik te razlike pripada nula prostoru $\mathcal{N}^\Omega(\mathbb{R}^2)$, što dokazuje jedinstvenost rešenja. □

3.2.2 Granično ponašanje rešenja i efekat trivijalnosti

Proučavanje ponašanja konstruisanih uopštenih rešenja u graničnom slučaju za (ne samo stohastičke) PDJ je veoma važno zbog analize dinamike rešenja. Medjutim, to često nije lak posao. Navedenim problemom ćemo se baviti u ovom odeljku i pokušaćemo da damo odgovore na neka pitanja koja se nameću.

U nastavku ćemo posmatrati Košijev problem

$$\begin{aligned}&(\partial_t^2 - \partial_x^2)U(x,t) = F(U(x,t)),\\ &U(x,0) = H = h(\dot{W})(x), \quad \partial_t U(x,0) = 0\end{aligned}$$

u algebrama Kolomboovih uopštenih slučajnih procesa. Pretpostavićemo da je nelinearan deo F glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima, globalno Lipšicova funkcija i da je $H \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R})$ Kolomboov uopšten slučajni proces, funkcional procesa belog šuma $\dot{W} \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R})$. U prethodnom delu smo videli da postoji skoro sigurno jedinstveno rešenje $U \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ za navedeni problem.

Proces belog šuma kao početni uslov

Ovaj deo sadrži rezultate koje su dobili Oberguggenberger i Russo, a koji se odnose na ponašanje trajektorija Kolomboovog uopštenog rešenja jednodimenzionalne nelinearne stohastičke talasne jednačine sa procesom belog šuma kao početnim uslovom (videti [39]).

Posmatramo Košijev problem

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U(x,t) = F(U(x,t)), \tag{3.6}$$

$$U(x,0) = \dot{W}(x), \quad \partial_t U(x,0) = 0, \tag{3.7}$$

gde je $\dot{W}$ proces belog šuma na $\mathbb{R}$, posmatran kao element prostora $\mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R})$ (kao što je izloženo u glavi 1, $\Omega = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$) i F je glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima, globalno Lipšicova funkcija za koju je

$$\lim_{|y|\to\infty} F(y) = L.$$

Ako je $V \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ rešenje slobodne jednačine

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)V(x,t) = 0, \tag{3.8}$$

$$V(x,0) = \dot{W}(x), \quad \partial_t V(x,0) = 0, \tag{3.9}$$

tada je ono dato predstavnikom

$$V_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\left(\dot{W}_\varepsilon(x+t) + \dot{W}_\varepsilon(x-t)\right), \tag{3.10}$$

gde je $\dot{W}_\varepsilon(x,t) \in \mathcal{E}^{\Omega}(\mathbb{R})$ predstavnik belog šuma.

Za svako fiksirano (x,t), $V_\varepsilon(x,t)$ su Gausovske slučajne promenljive (sa srednjom vrednoću nula) na prostoru verovatnoće belog šuma (Ω, Σ, μ). Prvi, veoma važan korak jeste dobijanje ocena za disperziju $V_\varepsilon(x,t)$. To nas dovodi do sledećeg rezultata.

Propozicija 3.1 *([39]) Postoje pozitivne konstante C_0 i C_1 takve da*

$$\frac{C_1}{\varepsilon} \le E\left(V_\varepsilon(x,t)^2\right) \le \frac{C_0}{\varepsilon}$$

za sve $\varepsilon > 0$ i $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Dakle, disperzija $V_\varepsilon(x,t)$ teži ka beskonačnosti kada ε teži nuli. Može se pokazati (videti [39]) da to povlači skoro sigurnu divergenciju nekog podniza, kao što je navedeno u sledećem tvrdjenju.

Korolar 3.1 *([39]) Postoji podniz $\varepsilon_k \to 0$ takav da za skoro sve $(x,t) \in \mathbb{R}^2$*

$$\lim_{k\to\infty} |V_{\varepsilon_k}(x,t,\omega)| = \infty$$

μ-skoro sigurno po $\omega \in \Omega$.

Sada se vraćamo na problem (3.6)-(3.7) i definišemo funkciju

$$M = \frac{t^2}{2}\,L$$

gde je L, na osnovu pretpostavke, limit funkcije F u beskonačnosti.

Problem (3.6)-(3.7) dat sa predstavnicima glasi

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U_\varepsilon(x,t) = F(U_\varepsilon(x,t)), \tag{3.11}$$

$$U_\varepsilon(x,0) = \dot{W}_\varepsilon(x), \quad \partial_t U_\varepsilon(x,0) = 0. \tag{3.12}$$

Važi sledeće tvrdjenje.

Teorema 3.2 *([39]) Neka je F glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima, globalno Lipšicova funkcija koja ima limit u beskonačnosti jednak L. Svaki niz koji teži nuli ima podniz $\varepsilon_k \to 0$ takav da za svaki kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^2$ važi*

$$\lim_{k\to\infty} \|U_{\varepsilon_k} - V_{\varepsilon_k} - M\|_{L^1(K)} = 0$$

μ-skoro sigurno, gde je $M = \dfrac{t^2}{2}\,L$.

Dokaz

Imamo da je

$$\begin{aligned} &(\partial_t^2 - \partial_x^2)(U_\varepsilon - V_\varepsilon - M) \qquad (3.13)\\ &= \int_0^1 F'(\sigma U_\varepsilon + (1-\sigma)(V_\varepsilon + M))d\sigma(U_\varepsilon - V_\varepsilon - M) + F(V_\varepsilon + M) - L. \end{aligned}$$

Neka je K_τ trapezoidna oblast definisana sa (3.5).

Za dimenzije $n = 1,2,3$ i za $p = 1$ i $p = \infty$, važe sledeće ocene:

$$\|u\|_{L^p(K_\tau)} \le c(\tau)\left(\|u(\cdot,0)\|_{H^{1,p}(K_0)} + \int_0^\tau \|F(u)\|_{L^p(K_t)}\,dt\right), \tag{3.14}$$

gde je $c(\tau) = \max(1,\tau)$.

L^1-verzija ocene (3.14) primenjena na (3.13) daje

$$\begin{aligned}&\|U_\varepsilon - V_\varepsilon - M\|_{L^1(K_\tau)}\\ &\le \tau\|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\int_0^\tau \|U_\varepsilon - V_\varepsilon - M\|_{L^1(K_t)} + \tau^2\|F(V_\varepsilon + M) - L\|_{L^1(K_\tau)}.\end{aligned}$$

Na osnovu korolara 3.1, svaki niz koji teži 0 ima podniz $\varepsilon_k \to 0$ takav da $|V_{\varepsilon_k}(x,t,\omega)| \to \infty$, skoro sigurno po $\omega \in \Omega$ za sve $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Za svako $\omega \in \Omega$, $F(V_\varepsilon + M) - L$ konvergira ka nuli skoro svuda. Tvrdjenje sledi primenom Lebegove teoreme i Gronvalove leme. □

Primedba 3.1 *U slučaju $n = 1$ problem*

$$\begin{aligned}&(\partial_t^2 - \partial_x^2)U(x,t) = F(U(x,t)),\\ &U(x,0) = 0 \quad \partial_t U(x,0) = \dot{W}(x),\end{aligned}$$

ima klasično, skoro sigurno neprekidno rešenje. To sledi na osnovu Dalamberove formule i činjenice da integracijom procesa belog šuma dobijamo Vinerov proces. Kolomboovo uopšteno rešenje je skoro sigurno asocirano sa tim klasičnim rešenjem.

Proces pozitivnog šuma kao početni uslov

Podsetimo se da se proces pozitivnog šuma $W^+(x) \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R})$ definiše predstavnikom

$$W_\varepsilon^+(x) = \exp\left(\dot{W}_\varepsilon(x) - \frac{1}{2}\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2\right) \in \mathcal{E}_M^\Omega(\mathbb{R}),$$

gde je $\dot{W}_\varepsilon \in \mathcal{E}_M^\Omega(\mathbb{R}) = \dot{W} * \varphi_\varepsilon(x)$ proces uglačanog belog šuma (φ_ε je nenegativna model delta mreža).

U glavi 1 smo dokazali da proces pozitivnog šuma ima srednju vrednost 1 i disperziju $V(W_\varepsilon^+) = e^{\sigma_\varepsilon^2} - 1$, gde $\sigma_\varepsilon^2 = \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 \to \infty$, kada $\varepsilon \to 0$.

Posmatraćemo Košijev problem

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U(x,t) = F(U(x,t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.15}$$

$$U(x,0) = W^+(x), \tag{3.16}$$

gde je $W^+(x) \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R})$ definisano sa (1.42). Pretpostavićemo da je F glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima, globalno Lipšicova i ograničena funkcija takva da je $F(0) = 0$. Ako je W^+ logaritamskog tipa, znamo da postoji skoro sigurno jedinstveno rešenje $U \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ problema (3.15)-(3.16).

Neka je $V \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje slobodne jednačine

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.17}$$

$$V(x,t) = W^+(x). \tag{3.18}$$

Tada je ono dato svojim predstavnikom $V_\xi = t\delta'$ if $w = \delta$.

$$V_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\Big(W_\varepsilon^+(x-t) + W_\varepsilon^+(x+t)\Big). \tag{3.19}$$

Lema 3.1 *Neka F ima gore navedene osobine i neka je $V \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.17)-(3.18). Tada važi*

$$E\,|F(V_\varepsilon(x,t))| \to 0, \text{ kada } \varepsilon \to 0,$$

za skoro svako x i $t > 0$.

Dokaz

Kako je uglačani beli šum Gausovski slučajan proces, za malo ε i $t > 0$ imamo

$$\begin{aligned}
&E\,|F(V_\varepsilon(x,t))| \\
&= E\left|F\left(\frac{1}{2}\exp\left(\dot{W}_\varepsilon(x-t) - \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right) + \frac{1}{2}\exp\left(\dot{W}_\varepsilon(x+t) - \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right)\right)\right| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\left|F\left(\frac{1}{2}e^{y_1 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} + \frac{1}{2}e^{y_2 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}}\right)\right| e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2} - \frac{y_2^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}\, dy_1\, dy_2 \\
&\qquad \text{SMENA: } \tfrac{y_1}{\sigma_\varepsilon} = y_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left|F\left(\frac{1}{2}e^{\sigma_\varepsilon y_1 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} + \frac{1}{2}e^{\sigma_\varepsilon y_2 - \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}}\right)\right| e^{-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)}\, dy_1\, dy_2.
\end{aligned}$$

Obzirom da je F ograničena, Lebegova teorema implicira

$$E\left|F(V_\varepsilon(x,t))\right| \to F(0) = 0, \text{ kada } \varepsilon \to 0,$$

za skoro svako x i $t > 0$. □

Sada možemo formulisati rezultat koji se odnosi na efekat trivijalnosti rešenja.

Teorema 3.3 *Pretpostavimo da su zadovoljeni svi gore navedeni uslovi i neka je $U \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.15)-(3.16) i $V \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.17)-(3.18). Tada*

$$E\left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\right\|_{L^1(K_\tau)} \to 0, \text{ kada } \varepsilon \to 0, \tag{3.20}$$

gde je, za fiksirano $r > 0$, oblast K_τ definisana sa(3.5).

Dokaz

Uzimajući očekivanje obe strane u oceni

$$\left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\right\|_{L^1(K_\tau)} \leq \tau \left\|F'\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^\tau \left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\right\|_{L^1(K_t)} dt + \tau^2 \left\|F(V_\varepsilon)\right\|_{L^1(K_\tau)}$$

slično kao i pre, dobijamo

$$E\left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\right\|_{L^1(K_\tau)} \leq \tau\, C_F \int_0^\tau E\left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\right\|_{L^1(K_t)} dt + \tau^2 E\left\|F(V_\varepsilon)\right\|_{L^1(K_\tau)},$$

gde je C_F Lipšicova konstanta za funkciju F.

Znamo da važi

$$E\left\|F(V_\varepsilon)\right\|_{L^1(K_\tau)} = \int\int_{K_\tau} E\left|F(V_\varepsilon(x,t))\right| dx\, dt.$$

Na osnovu leme 3.1, poslednji izraz na desnoj strani teži 0, kada ε teži nuli.

Dakle,

$$\tau^2 E\left\|F(V_\varepsilon)\right\|_{L^1(K_\tau)} \to 0, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0.$$

Tvrdjenje direktno sledi primenom Gronvalove nejednakosti. □

Polinom pocesa belog šuma kao početni uslov

Posmatramo problem

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U(x,t) = F(U(x,t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.21}$$

$$U(x,0) = \dot{W}^m(x) = [\dot{W}_\varepsilon^m(x)], \tag{3.22}$$

gde $\dot{W}_\varepsilon^m(x) \in \mathcal{E}_M^\Omega(\mathbb{R})$ označava m-ti stepen ($m \in \mathbb{N}$) procesa uglačanog belog šuma. Opet ćemo pretpostaviti da je F glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima, globalno Lipšicova i ograničena funkcija, ali takva da je sada $F(\infty) = 0$. Kao i pre, znamo da postoji skoro sigurno jedinstveno rešenje $U \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ problema (3.21)-(3.22).

Neka je $V \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje slobodne jednačine

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.23}$$

$$V(x,t) = \dot{W}^m(x). \tag{3.24}$$

To rešenje je dato svojim predstavnikom

$$V_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\dot{W}_\varepsilon^m(x-t) + \dot{W}_\varepsilon^m(x+t)\Big).$$

Lema 3.2 *Neka F ima osobine navedene gore i neka je $V \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.23)-(3.24). Tada važi*

$$E\,|F(V_\varepsilon(x,t))| \to 0, \ \textit{kada}\ \varepsilon \to 0,$$

za skoro svako x i $t > 0$.

Dokaz

Kao u dokazu leme 3.1, za malo ε i $t > 0$ imamo

$$\begin{aligned} E\,|F(V_\varepsilon(x,t))| &= E\left|F\left(\frac{\dot{W}_\varepsilon^m(x-t) + \dot{W}_\varepsilon^m(x+t)}{2}\right)\right| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\left|F\left(\frac{y_1^m + y_2^m}{2}\right)\right| e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2} - \frac{y_2^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}\,dy_1dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left|F\left(\frac{\sigma_\varepsilon^m(y_1^m + y_2^m)}{2}\right)\right| e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)}dy_1dy_2. \end{aligned}$$

Skup $A = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; y_1^m + y_2^m = 0, \; m \in \mathbb{N}\}$ ima meru nula u $\mathbb{R}^2$, što implicira

$$F\left(\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^m (y_1^m + y_2^m)\right) \to F(\infty) = 0, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0,$$

skoro svuda po (y_1, y_2), i zbog toga,

$$E\,|F(V_\varepsilon(x,t))| \to 0, \;\text{ kada } \varepsilon \to 0,$$

za skoro svako x i $t > 0$, kao što smo tvrdili. □

Košijev problem (3.21)-(3.22) se može uopštiti na problem gde je početni uslov neki polinom procesa belog šuma:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U(x,t) = F(U(x,t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.25}$$

$$U(x,0) = a_m \dot{W}^m(x) + a_{m-1}\dot{W}^{m-1} + \ldots + a_1 \dot{W} + a_0, \tag{3.26}$$

gde $a_0, \ldots a_m \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ i gde F ima ista svojstva kao i u prethodnom slučaju. Važi analogno tvrdjenje:

Lema 3.3 *Neka je F kao u formulaciji leme 3.2 i neka je $V \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema*

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.27}$$

$$V(x,0) = a_m \dot{W}^m(x) + a_{m-1}\dot{W}^{m-1} + \ldots + a_1 \dot{W} + a_0. \tag{3.28}$$

Tada važi

$$E\,|F(V_\varepsilon(x,t))| \to 0, \;\textit{ kada } \varepsilon \to 0,$$

za skoro svako x i $t > 0$.

Dokaz

Dokaz je analogan dokazu leme 3.2, sa tom razlikom da sada, umesto $\left|F\left(\frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^m (y_1^m + y_2^m)\right)\right|$ ispod znaka integrala u očekivanju $E\,|F(V_\varepsilon(x,t))|$, imamo

$$\left|F\left(\sigma_\varepsilon^m (y_1^m + y_2^m) a_m \left(1 + \frac{a_{m-1}}{\sigma_\varepsilon}\,\frac{y_1^{m-1} + y_2^{m-1}}{y_1^m + y_2^m} + \ldots + \frac{a_0}{\sigma_\varepsilon^m}\,\frac{1}{y_1^m + y_2^m}\right)\right)\right|.$$

Tvrdjenje sada sledi korišćenjem argumenta da je skup

$$A = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y_1^m + y_2^m = 0, \ m \in \mathbb{N}\}$$

mere nula u $\mathbb{R}^2$. □

Lako možemo dokazati, kao što je to učinjeno u dokazu teoreme 3.3, sledeće tvrdjenje koje opisuje efekat trivijalnosti.

Teorema 3.4 *Neka funkcija F ima navedene osobine. Ako je $U \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.25)-(3.26) i $V \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.27)-(3.28), tada*

$$E\left(\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\|_{L^1(K_\tau)}\right) \to 0, \ \textit{kada } \varepsilon \to 0.$$

Opšti funkcional procesa belog šuma kao početni uslov

Vratimo se na Košijev problem

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U(x,t) = F(U(x,t)), \tag{3.29}$$

$$U(x,0) = H = h(\dot{W}). \tag{3.30}$$

Pretpostavićemo da su F i H glatke, polinomijalno ograničene sa svim svojim izvodima funkcije, da je F globalno Lipšicova i da $\dot{W}_\varepsilon \in \mathcal{E}^\Omega(\mathbb{R})$. Primetimo da tada $H = [h(\dot{W}_\varepsilon)] \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R})$. Takodje ćemo pretpostaviti da

$$\lim_{|y|\to\infty} h(y) = \infty, \tag{3.31}$$

i da $F(\infty) = M$. Sa

$$V_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}h\left(\dot{W}_\varepsilon(x-t)\right) + \frac{1}{2}h\left(\dot{W}_\varepsilon(x+t)\right). \tag{3.32}$$

je dat predstavnik rešenja slobodne jednačine

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)V(x,t) = 0, \tag{3.33}$$

$$U(x,0) = h(\dot{W}). \tag{3.34}$$

Ukoliko važe navedeni uslovi, lako se može dokazati sledeće tvrdjenje.

Lema 3.4 *Neka je F glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima, globalno Lipšicova i ograničena funkcija za koju važi $F(\infty) = M$ i neka h zadovoljava (3.31). Ako je $V \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.33)-(3.34), tada*

$$E\left|F(V_\varepsilon(x,t))\right| \to M, \text{ kada } \varepsilon \to 0,$$

za skoro svako x i $t > 0$.

Granično ponašanje rešenja dato je u sledećem tvrdjenju.

Teorema 3.5 *Neka su zadovoljeni svi uslovi navedeni gore. Dalje, neka je $U \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.29)-(3.30) i $V \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.33)-(3.34). Tada, za K_τ definisano kao u teoremi 3.3, važi*

$$E\left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon - \frac{1}{2}Mt^2\right\|_{L^1(K_\tau)} \to 0, \text{ kada } \varepsilon \to 0. \tag{3.35}$$

Dokaz

Važi sledeća ocena

$$\begin{aligned}\left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon - \frac{1}{2}Mt^2\right\|_{L^1(K_\tau)} &\leq \tau\left\|F'\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\int_0^\tau \left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon - \frac{1}{2}Mt^2\right\|_{L^1(K_t)} dt \\ &+ \tau^2\left\|F\left(V_\varepsilon + \frac{1}{2}Mt^2\right) - M\right\|_{L^1(K_\tau)}.\end{aligned}$$

Kada uzmemo očekivanje obe strane dobijamo

$$\begin{aligned}E\left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon - \frac{1}{2}Mt^2\right\|_{L^1(K_\tau)} &\leq \tau\, C_F\int_0^\tau E\left\|U_\varepsilon - V_\varepsilon - \frac{1}{2}Mt^2\right\|_{L^1(K_t)} dt \\ &+ \tau^2 E\left\|F\left(V_\varepsilon + \frac{1}{2}Mt^2\right) - M\right\|_{L^1(K_\tau)},\end{aligned}$$

gde je C_F Lipšicova konstanta za funkciju F. Kako

$$E\left|F\left(V_\varepsilon(x,t) + \frac{1}{2}Mt^2\right)\right| \to F(\infty) = M, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0,$$

tvrdjenje sledi primenom Gronvalove nejednakosti. $\square$

Primedba 3.2 *Primetimo da je teorema 3.4 specijalan slučaj prethodne teoreme za $M = 0$.*

Vikov stepen belog šuma kao početni uslov

Vikovi stepeni procesa belog šuma definisani su u [18]. Ovde definišemo m-ti Vikov stepen procesa belog šuma, koga označavamo sa $\dot{W}^{\diamond m}(x)$, kao elemenat prostora $\mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R})$, njegovim predstavnikom

$$\dot{W}_{\varepsilon}^{\diamond m}(x) = \left(\dot{W} * \varphi_{\varepsilon}\right)^{\diamond m}(x) = \|\varphi_{\varepsilon}\|^{m}\, h_m\left(\frac{\dot{W}_{\varepsilon}(x)}{\|\varphi_{\varepsilon}\|}\right), \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{3.36}$$

gde je $h_m(x)$ hermitski (Hermite) polinom definisan sa

$$h_m(x) = (-1)^m e^{1/2x^2} \frac{d^m}{dx^m}\left(e^{-1/2x^2}\right); \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Posmatramo problem

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U(x,t) = F(U(x,t)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.37}$$

$$U(x,0) = \dot{W}^{\diamond m}(x) = [\dot{W}_{\varepsilon}^{\diamond m}(x)], \tag{3.38}$$

gde je $\dot{W}_{\varepsilon}^{\diamond m}(x) \in \mathcal{E}_M^{\Omega}(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}_0$, dato sa (3.36). Opet ćemo pretpostaviti da je F glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima, globalno Lipšicova i ograničena funkcija koja nestaje u beskonačnosti.

Neka je $V \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ rešenje slobodne jednačine

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)V(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.39}$$

$$V(x,t) = \dot{W}^{\diamond m}(x). \tag{3.40}$$

Ono je dato svojim predstavnikom

$$V_{\varepsilon}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\dot{W}_{\varepsilon}^{\diamond m}(x-t) + \dot{W}_{\varepsilon}^{\diamond m}(x+t)\right).$$

Lema 3.5 *Neka F ima gore opisana svojstva i neka je $V \in \mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.39)-(3.40). Tada*

$$E\,|F(V_{\varepsilon}(x,t))| \to 0, \text{ kada } \varepsilon \to 0,$$

za skoro svako x i $t > 0$.

Dokaz

Zbog jednostavnosti, dajemo dokaz za slučaj $m = 2$. Tvrdjenje se može pokazati za proizvoljno $m \in \mathbb{N}_0$ na sličan način.

Iz definicije hermitskog polinoma imamo da je $h_2(x) = x^2 - 1$, odakle lako dobijamo

$$\dot{W}_\varepsilon^{\diamond 2}(x) = \left(\dot{W} * \varphi_\varepsilon\right)^{\diamond 2}(x) = \dot{W}_\varepsilon^2(x) - \|\varphi_\varepsilon\|^2 = \dot{W}_\varepsilon^2(x) - \sigma_\varepsilon^2.$$

Rešenje slobodnog problema (3.39)-(3.40), za $m = 2$, dato je predstavnikom

$$V_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}\left(\dot{W}_\varepsilon^2(x-t) + \dot{W}_\varepsilon^2(x+t) - 2\sigma_\varepsilon^2\right).$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} & E\left|F(V_\varepsilon(x,t))\right| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\left|F\left(\frac{y_1^2 + y_2^2 - 2\sigma_\varepsilon^2}{2}\right)\right| e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2} - \frac{y_2^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}\, dy_1 dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left|F\left(\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - 1\right)\right)\right| e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)} dy_1 dy_2, \end{aligned}$$

za malo ε kada je $t > 0$.

Skup $A = \left\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - 1\right\}$ ima meru nula u $\mathbb{R}^2$, što implicira

$$F\left(\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - 1\right)\right) \to F(\infty) = 0, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0.$$

Zbog toga,

$$E\left|F(V_\varepsilon(x,t))\right| \to 0, \;\text{kada } \varepsilon \to 0,$$

za skoro svako x i $t > 0$. $\square$

Sada se lako može dokazati sledeće tvrdjenje koje opisuje efekat trivijalnosti.

Teorema 3.6 *Neka je F kao gore. Ako je $U \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.37)-(3.38) i $V \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.39)-(3.40), tada*

$$E\left(\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\|_{L^1(K_T)}\right) \to 0, \;\text{kada } \varepsilon \to 0.$$

Vikov sinus belog šuma kao početni uslov

Vikov sinus procesa belog šuma, koga označavamo sa $\sin^{\diamond}\dot{W}(x)$, posmatran kao elemenat prostora $\mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R})$, se definiše predstavnikom

$$\sin^{\diamond}\dot{W}_{\varepsilon}=\exp\left(\frac{1}{2}\,\sigma_{\varepsilon}^{2}\right)\sin\dot{W}_{\varepsilon}, \tag{3.41}$$

gde je $\dot{W}_{\varepsilon}\in\mathcal{E}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$ proces uglačanog belog šuma, a $\sin\dot{W}_{\varepsilon}$ označava njegovu "uobičajenu" sinusnu funkciju.

Posmatramo problem

$$(\partial_t^2-\partial_x^2)U(x,t)=F(U(x,t)),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.42}$$

$$U(x,0)=\sin^{\diamond}\dot{W}(x)=[\sin^{\diamond}\dot{W}_{\varepsilon}(x)], \tag{3.43}$$

gde $\sin^{\diamond}\dot{W}(x)\in\mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R})$. Uslovi dati na nelinearni deo F su isti kao u većini prethodnih slučajeva, odnosno, F je glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima, globalno Lipšicova i ograničena funkcija koja nestaje u beskonačnosti.

Neka je $V\in\mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ rešenje slobodne jednačine

$$(\partial_t^2-\partial_x^2)V(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2, \tag{3.44}$$

$$V(x,t)=\sin^{\diamond}\dot{W}(x). \tag{3.45}$$

Ono je dato svojim predstavnikom

$$V_{\varepsilon}(x,t)=\frac{1}{2}\Big(\sin^{\diamond}\dot{W}_{\varepsilon}(x-t)+\sin^{\diamond}\dot{W}_{\varepsilon}(x+t)\Big).$$

Lema 3.6 *Neka je F glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima, globalno Lipšicova i ograničena funkcija takva da je $F(\infty)=0$. Dalje, neka je $V\in\mathcal{G}^{\Omega}(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.44)-(3.45). Tada*

$$E\,|F(V_{\varepsilon}(x,t))|\to 0,\ \textit{kada}\ \varepsilon\to 0,$$

za skoro svako x i $t>0$.

Dokaz

Treba nam ocena za očekivanje

$$
\begin{aligned}
&E\left|F(V_\varepsilon(x,t))\right| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2} \left| F\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}}\left(\sin y_1 + \sin y_2\right)\right)\right| e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2}-\frac{y_2^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}\, dy_1 dy_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| F\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}}\left(\sin(\sigma_\varepsilon y_1) + \sin(\sigma_\varepsilon y_2)\right)\right)\right| e^{-\frac{y_1^2}{2}-\frac{y_2^2}{2}}\, dy_1 dy_2,
\end{aligned}
$$

za malo ε kada je $t > 0$.

Radi jednostavnosti, dokazaćemo samo jednodimenzionalni slučaj, a na kraju dokaza ćemo dati neke primedbe koje se odnose na dokaz za slučaj kada je dimenzija jednaka 2. Posmatramo

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| F\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} \sin(\sigma_\varepsilon y)\right)\right| e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy. \tag{3.46}
$$

Za $\dfrac{(k-1)\pi}{\sigma_\varepsilon} + \dfrac{2}{\sigma_\varepsilon^2} \le y \le \dfrac{k\pi}{\sigma_\varepsilon} - \dfrac{2}{\sigma_\varepsilon^2}$ imamo $\sin(\sigma_\varepsilon y) \ge \dfrac{1}{\sigma_\varepsilon}$. ?

Sada je

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| F\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} \sin(\sigma_\varepsilon y)\right)\right| e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{(k-1)\pi}{\sigma_\varepsilon}+\frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}}^{\frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon}-\frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| F\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} \sin(\sigma_\varepsilon y)\right)\right| e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon}-\frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}}^{\frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon}+\frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| F\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} \sin(\sigma_\varepsilon y)\right)\right| e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.
\end{aligned}
$$

Prvi integral sa desne strane teži nuli kada ε teži nuli jer je u tom slučaju $\sin(\sigma_\varepsilon y) \ge \dfrac{1}{\sigma_\varepsilon}$ i F nestaje u beskonačnosti. Pokažimo sada da integral

$$
\int_{\frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon}-\frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}}^{\frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon}+\frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| F\left(\frac{1}{2}e^{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2}} \sin(\sigma_\varepsilon y)\right)\right| e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \tag{3.47}
$$

takodje taži nuli kada ε teži nuli.

Podsetimo se da je F ograničena i označimo $\|F\|_{L^\infty} = C$.
Tada je integral (3.47) manji ili jednak od ?

$$C\Big(\int_{-N}^{N} \kappa_\varepsilon(y)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy + \int_{|y|\geq N} \kappa_\varepsilon(y)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\Big), \qquad (3.48)$$

gde je κ_ε karakteristična funkcija intervala $\left[\frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon} - \frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}, \frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon} + \frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}\right]$.

Izaberimo N dovoljno veliko tako da je drugi integral u (3.48) manji od nekog datog $\eta > 0$. Ostaje da pokažemo da za takvo N prvi integral u (3.48) teži nuli kada ε teži nuli.

Primetimo da je broj čvorova $\frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon}$ u intervalu $[-N, N]$ jednak $\mathcal{O}(\sigma_\varepsilon)$, obzirom da

$$\frac{2N}{\frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon}} \sim \frac{2N}{k\pi}\sigma_\varepsilon.$$

Sa druge strane, dužina intervala $\left[\frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon} - \frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}, \frac{k\pi}{\sigma_\varepsilon} + \frac{2}{\sigma_\varepsilon^2}\right]$ je $\mathcal{O}\left(1/\sigma_\varepsilon^2\right)$. To znači da je dužina ukupne oblasti integracije u prvom integralu u (3.48) jednaka $\mathcal{O}\left(1/\sigma_\varepsilon^2\right) \cdot \mathcal{O}(\sigma_\varepsilon) = \mathcal{O}(1/\sigma_\varepsilon)$, što implicira da taj integral teži nuli kada ε teži nuli.

Slično se može analizirati dvodimenzionalni slučaj. Tada, umesto dužine intervala izračunavamo meru odgovarajućeg kvadrata. Ta mera je $\mathcal{O}\left(1/\sigma_\varepsilon^3\right)$. ? U tom slučaju je broj odgovarajućih čvorova u takvim kvadratima jednak $\mathcal{O}\left(\sigma_\varepsilon^2\right)$ odakle sledi tvrdjenje.

Dakle,

$$E\,|F(V_\varepsilon(x,t))| \to 0, \text{ kada } \varepsilon \to 0,$$

za skoro svako x i $t > 0$. □

Lako se može dokazati efekat trivijalnosti koji se ovde pojavljuje. Rezultat je dat u sledećoj teoremi i obzirom da je dokaz isti kao dokaz teoreme 3.3, ovde ćemo ga izostaviti.

Teorema 3.7 *Neka je F kao gore. Ako je $U \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.42)-(3.43) i $V \in \mathcal{G}^\Omega(\mathbb{R}^2)$ rešenje problema (3.44)-(3.45), tada*

$$E\left(\|U_\varepsilon - V_\varepsilon\|_{L^1(K_T)}\right) \to 0, \text{ kada } \varepsilon \to 0.$$

3.3 Nelinearna jednodimenzionalna stohastička talasna jednačina sa ne-Lipšicovskim nelinearnostima

Ovaj odeljak je posvećen jednodimenzionalnoj nelinearnoj stohastičkoj talasnoj jednačini

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U + F(U) \cdot S = 0,$$
$$U|_{t=0} = A, \; \partial_t U|_{t=0} = B,$$

gde su A i B Kolomboovi uopšteni stohastički procesi na $\mathbb{R}$, S je Kolomboov uopšten stohastički proces na $\mathbb{R}^2$ i funkcija F je glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima takva da je $F(0) = 0$.

Kako funkcija F nije Lipšicovska, koristićemo takozvanu regularizaciju funkcije F i umesto polazne jednačine, koju zovemo neregularizovana, posmatraćemo odgovarajuću regularizovanu jednačinu koju dobijamo tako što u polaznoj jednačini funkciju F zamenimo familijom glatkih Lipšicovih funkcija F_ε, za $\varepsilon \in (0,1)$. Pokazaćemo egzistenciju i jedinstvenost rešenja regularizovane jednačine. Konačno, interesovaće nas pod kojim je uslovima (datim na početne uslove) rešenje regularizovane jednačine ujedno i rešenje neregularizovane (polazne) jednačine.

Rezultate izložene u ovom delu dobili su M. Nedeljkov i D. Rajter i čitaoc ih može naći u radu [33].

3.3.1 Pripremne konstrukcije

Posmatramo problem

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U + F(U) \cdot S = 0, \tag{3.49}$$

$$U|_{t=0} = A, \; \partial_t U|_{t=0} = B, \tag{3.50}$$

gde su $A, B \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R})$ $\mathcal{G}_{2,2}$-Kolomboovi uopšteni slučajni procesi na $\mathbb{R}$ i $S \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$ je $\mathcal{G}_{2,2}$-Kolomboov uopšteni slučajan proces na $\mathbb{R}^2$ koji ima skoro sigurno kompaktan nosač. Pretpostavićemo da je funkcija F glatka, polinomijalno ograničena sa svim svojim izvodima takva da je $F(0) = 0$. Rešenje tražimo u prostoru $U \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$.

Funkciju F zamenićemo familijom glatkih funkcija F_ε, $\varepsilon \in (0,1)$, koju zovemo regularizacija funkcije F. To ćemo učiniti na sledeći način.

Izabraćemo glatku funkciju F_ε sa osobinom da postoji mreža a_ε takva da za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0$ postoje $\varepsilon_0 \in (0,1)$ i $m_\alpha \in \mathbb{N}$ takvi da

$$F_\varepsilon(y) = F(y), \text{ for } |y| \leq a_\varepsilon, \ \varepsilon < \varepsilon_0$$

$$\|D^\alpha F_\varepsilon(y)\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(a_\varepsilon^{m_\alpha}).$$

U nastavku ćemo koristiti oznaku $m = \sup_{|\alpha|\leq 1} m_\alpha$.

Označićemo sa $\tilde{F}(U) = [F_\varepsilon(U_\varepsilon)]$, gde F_ε ima gore navedene osobine. Tada, umesto neregularizovanog problema (3.49)-(3.50), posmatramo regularizovani problem

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U + \tilde{F}(U) \cdot S = 0, \tag{3.51}$$

$$U|_{\{t=0\}} = A, \ \partial_t U|_{\{t=0\}} = B, \tag{3.52}$$

gde $S = [S_\varepsilon] \in \mathcal{G}^\Omega_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$ i $A, B \in \mathcal{G}^\Omega_{2,2}(\mathbb{R})$.

Primetimo još i to da za $U_\varepsilon, V_\varepsilon \in \mathcal{E}^\Omega_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$ takvo da je $U_\varepsilon - V_\varepsilon \in \mathcal{N}^\Omega_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$, imamo da $F_\varepsilon(U_\varepsilon) - F_\varepsilon(V_\varepsilon) \in \mathcal{N}^\Omega_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$.

3.3.2 Regularizovana talasna jednačina

Pre nego što izložimo glavni rezultat ovog odeljka dokazaćemo lemu čije ćemo tvrdjenje u nastavku često koristiti. Napomenimo samo da za norme sa subindeksima L^2, H^1 uvek mislimo na norme sa subindeksima $L^2(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.7 *([29]) Neka je $u \in C^1([0,T)) \times H^2(\mathbb{R}^n)$ rešenje jednačine*

$$u_{tt} - u_{xx} = f.$$

Tada

$$\|\partial_t u(t)\|_{L^2} \leq \|(\partial_t u(0), \nabla u(0))\|_{L^2} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2} ds, \tag{3.53}$$

i

$$\|u(t)\|_{H^1} \leq \max(1,t) \left(\|\partial_t u(0)\|_{L^2} + \|u(0)\|_{H^1} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2} ds \right). \tag{3.54}$$

Dokaz

U [49] može se naći sledeća ocena

$$\boxed{\|(\partial_t u(t), \nabla u(t))\|_{L^2} \leq \|(\partial_t u(0), \nabla u(0))\|_{L^2} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2} ds.}$$

To direktno povlači (3.53). Dalje, imamo

$$\boxed{u(t) = u(0) + \int_0^t \partial_t u(s) ds.}$$

Zato je,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2} &\leq \|u(0)\|_{L^2} + \int_0^t \|\partial_t u(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq \|u(0)\|_{L^2} + t\|(\partial_t u(0), \nabla u(0))\|_{L^2} + \int_0^t \int_0^s \|f(r)\|_{L^2} dr ds \qquad ? \\
&\leq \|u(0)\|_{L^2} + t\|(\partial_t u(0), \nabla u(0))\|_{L^2} + t \int_0^t \|f(s)\|_{L^2} ds.
\end{aligned}$$

Stoga (3.54) sledi i dokaz je završen. □

U nastavku ćemo koristiti oznaku $\gamma = \max(1, T)$.

Teorema 3.8 *Pretpostavimo da mreža a_ε koja se koristi za regularizaciju funkcije F ima osobinu*

$$a_\varepsilon = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{\frac{1}{2m}}\right). \tag{3.55}$$

Tada, za svako $T > 0$, rešenje problema (3.51)-(3.52) skoro sigurno postoji u $\mathcal{G}_{2,2}^{\Omega}([0, T) \times \mathbb{R})$.

Ako slučajni proces $S \in \mathcal{G}_{2,2}^{\Omega}([0, T) \times \mathbb{R})$ dodatno zadovoljava

$$\|S_\varepsilon\|_{L^2} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3.56}$$

tada je dobijeno rešenje skoro sigurno jedinstveno u $\mathcal{G}_{2,2}^{\Omega}([0, T) \times \mathbb{R})$.

Dokaz

Kao što je to uobičajeno u Kolomboovoj teoriji, posmatraćemo problem (3.51)-(3.52) dat sa predstavnicima

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)U_\varepsilon + F_\varepsilon(U_\varepsilon) \cdot S_\varepsilon = 0, \tag{3.57}$$

$$U_\varepsilon|_{\{t=0\}} = A_\varepsilon, \; \partial_t U_\varepsilon|_{\{t=0\}} = B_\varepsilon, \tag{3.58}$$

gde $S_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$ i $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Neka su $\omega \in \Omega$ i $\varepsilon \in (0,1)$ fiksirani. Primetimo da je F_ε globalno Lipšicova za svako fiksirano ε. Košijev problem (3.57)-(3.58) ima jedinstveno rešenje $U_\varepsilon(\cdot, \omega)$.

Preslikavanje $(x,t,\omega) \to U_\varepsilon(x,t,\omega)$ je zajednički merljivo po (x,t) i ω za svako fiksirano ε. Taj zaključak sledi primenom metoda sukcesivnih aproksimacija i korišćenjem činjenice da je neprekidno preslikavanje merljive funkcije takodje merljivo.

Na osnovu leme (3.7) imamo
(3.14)

$$\begin{aligned}
&\max\left(\|\partial_t U_\varepsilon(t)\|_{L^2}, \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}\right) \\
&\leq \gamma\Big(\|\partial_t U_\varepsilon(0)\|_{L^2} + \|U_\varepsilon(0)\|_{H^1} + \int_0^T \|F_\varepsilon(U_\varepsilon(s))S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds\Big) \\
&\leq \gamma\Big(\|\partial_t U_\varepsilon(0)\|_{L^2} + \|U_\varepsilon(0)\|_{H^1} + \int_0^T \|F_\varepsilon(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty} \|S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds\Big) \\
&\leq \gamma\Big(\|\partial_t U_\varepsilon(0)\|_{L^2} + \|U_\varepsilon(0)\|_{H^1} + T\int_0^T a_\varepsilon^m \|S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds\Big), \; t < T.
\end{aligned}$$

nije trebao Gronwall.

Odatle direktno dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}$.

Primetimo da, za fiksirano $\omega \in \Omega$, $S_\varepsilon \in \mathcal{E}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}) \subset \mathcal{E}_b([0,T) \times \mathbb{R})$; odakle dobijamo $\mathcal{E}_b$-svojstvo regularizovanog slučajnog procesa S_ε što ćemo koristiti u nastavku.

Da bismo dobili umerene granice za izvode višeg reda funkcije U_ε, jednačinu (3.57) diferenciramo po prostornoj promenljivoj x i dobijamo

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\partial_x U_\varepsilon + F'_\varepsilon(U_\varepsilon)\partial_x U_\varepsilon S_\varepsilon + F_\varepsilon(U_\varepsilon)\partial_x S_\varepsilon = 0. \tag{3.59}$$

Energijska nejednakost daje

$$\begin{aligned}
&\|(\partial_{tx}U_\varepsilon, \partial_{xx}U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} \leq \|(\partial_{tx}U_\varepsilon, \partial_{xx}U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} \\
&+ \int_0^T \|F'_\varepsilon(U_\varepsilon(s))\partial_x U_\varepsilon(s) S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds + \int_0^T \|F_\varepsilon(U_\varepsilon(s))\partial_x S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq \|(\partial_{tx}U_\varepsilon, \partial_{xx}U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|F'_\varepsilon(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty} \|\partial_x U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \|F_\varepsilon(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty} \|\partial_x S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq \|(\partial_{tx}U_\varepsilon, \partial_{xx}U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T a_\varepsilon^m \|\partial_x U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T a_\varepsilon^m \|\partial_x S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds.
\end{aligned}$$

Kako je $S_\varepsilon \in \mathcal{E}_b([0,T)\times\mathbb{R})$ i $\sup_{t\in[0,T)} \|\partial_x U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ je umereno, dobijamo da je $\sup_{t\in[0,T)} \|\partial_{xx} U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ takodje umereno.

Diferenciranjem jednačine (3.59) dobijamo

$$\begin{aligned}
&(\partial_t^2 - \partial_x^2)\partial_{xx}U_\varepsilon + F''_\varepsilon(U_\varepsilon)(\partial_x U_\varepsilon)^2 S_\varepsilon + F'_\varepsilon(U_\varepsilon)\partial_{xx}U_\varepsilon S_\varepsilon \\
&+2F'_\varepsilon(U_\varepsilon)\partial_x U_\varepsilon \partial_x S_\varepsilon + F_\varepsilon(U_\varepsilon)\partial_{xx} S_\varepsilon = 0.
\end{aligned}$$

Slično kao maločas, korišćenjem Soboljevskih teorema o potapanju, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\|(\partial_{txx}U_\varepsilon, \partial_{xxx}U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} \\
&\leq \|(\partial_{txx}U_\varepsilon, \partial_{xxx}U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|F''_\varepsilon(U_\varepsilon(s))(\partial_x U_\varepsilon(s))^2 S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^T \|F'_\varepsilon(U_\varepsilon(s))\partial_{xx} U_\varepsilon(s) S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+2 \int_0^T \|F'_\varepsilon(U_\varepsilon(s))\partial_x U_\varepsilon(s) \partial_x S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^T \|F_\varepsilon(U_\varepsilon(s))\partial_{xx} S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq \|(\partial_{txx}U_\varepsilon, \partial_{xxx}U_\varepsilon)(0)\|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T \|F_\varepsilon''(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty}\|\partial_x U_\varepsilon(s)\|_{L^4}^2\|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+\int_0^T \|F_\varepsilon'(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty}\|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}\|\partial_{xx}U_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+2\int_0^T \|F_\varepsilon'(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty}\|\partial_x U_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|\partial_x S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+\int_0^T \|F_\varepsilon(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty}\|\partial_{xx}S_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&\leq \|(\partial_{txx}U_\varepsilon, \partial_{xxx}U_\varepsilon)(0)\|_{L^2}+C\int_0^T a_\varepsilon^{m_2}\|\partial_x U_\varepsilon(s)\|_{H_1}^2\|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+\int_0^T a_\varepsilon^m\|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}\|\partial_{xx}U_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+2\int_0^T a_\varepsilon^m\|\partial_x S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}\|\partial_x U_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds+\int_0^T a_\varepsilon^m\|\partial_{xx}S_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds.
\end{aligned}
$$

Slično kao gore dobijamo da je $\sup_{t\in[0,T)}\|\partial_{xxx}U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ umereno.

Da bismo dobili umerene granice L^2-normi izvoda m-tog reda funkcije U_ε, $\partial_x^m U_\varepsilon$, treba samo da damo granice izraza koji sadrži izvod najvišeg reda funkcije U_ε jer se u svim ostalim izrazima pojavljuju izvodi najviše $(m-2)$-og reda. Njihove L^∞-norme su ograničene L^2- normama izvoda najviše $(m-1)$-og reda za koje znamo da su umerene na osnovu prethodnog koraka. Izraz koji sadrži izvod reda $m-1$ (izvod najvišeg reda) je oblika

$$\int_0^T \|F_\varepsilon'(U_\varepsilon(s))\partial_x^{m-1}U_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds.$$

Sada imamo

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \|F_\varepsilon'(U_\varepsilon(s))\partial_x^{m-1}U_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds &\leq \int_0^T \|F_\varepsilon'(U_\varepsilon)\|_{L^\infty}\|\partial_x^{m-1}U_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&\leq \int_0^T a_\varepsilon^m\|\partial_x^{m-1}U_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds.
\end{aligned}
$$

Kako, na osnovu prethodnog koraka, imamo da $\sup_{t\in[0,T)}\|\partial_x^{m-1}U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ ima umerenu granicu, sledi da L^2-norma izvoda proizvoljnog reda ima takodje umerenu granicu.

Izvodi funkcije U_ε u odnosu na vremensku promenljivu t mogu se oceniti izvodima od U_ε po x korišćenjem same jednačine koju rešavamo i njenim diferenciranjem. Ovaj argument ćemo, bez posebnog naglašavanja, koristiti i kada dokazujemo jedinstvenost rešenja. Dakle, $U_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$, odnosno, $U = [U_\varepsilon] \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$ je rešenje problema (3.51)-(3.52).

Pokažimo sada da je to rešenje jedinstveno u $\mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$, odnosno da za data dva rešenja jednačine (3.57), $U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon} \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$, njihova razlika $\bar{U}_\varepsilon := U_{1\varepsilon} - U_{2\varepsilon}$ pripada prostoru $\mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$.

Sledeće je zadovoljeno

$$\begin{aligned} &(\partial_t^2 - \partial_x^2)\bar{U}_\varepsilon + (F_\varepsilon(U_{1\varepsilon}) - F_\varepsilon(U_{2\varepsilon}))S_\varepsilon + N_\varepsilon = 0, \\ &\bar{U}_\varepsilon|_{t=0} = N_{1\varepsilon}, \ \partial_t \bar{U}_\varepsilon|_{t=0} = N_{2\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.60}$$

gde $N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon} \in \mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R})$ i $N_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R})$.

Na osnovu leme 3.7 dobijamo

$$\begin{aligned} &\max\left(\|\partial_t \bar{U}_\varepsilon(t)\|_{L^2}, \|\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{H^1}\right) \\ &\leq \gamma\Big(\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2} + \|N_{1\varepsilon}\|_{H^1} + \int_0^T \|N_\varepsilon\|_{L^2} ds \\ &+ \int_0^T \|(F_\varepsilon(U_{1\varepsilon}) - F_\varepsilon(U_{2\varepsilon}))S_\varepsilon\|_{L^2} ds\Big) \\ &\leq \gamma\Big(\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2}\|N_{1\varepsilon}\|_{H^1} + \int_0^T \|N_\varepsilon\|_{L^2} ds \\ &+ \int_0^T \|F'_\varepsilon(\tilde{U}_\varepsilon)\|_{L^\infty}\|\bar{U}_\varepsilon\|_{L^\infty}\|S_\varepsilon\|_{L^2} ds\Big) \\ &\leq \gamma\Big(\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2} + \|N_{1\varepsilon}\|_{H^1} + \int_0^T \|N_\varepsilon\|_{L^2} ds + \int_0^T a_\varepsilon^m C \|\bar{U}_\varepsilon\|_{H^1}\|S_\varepsilon\|_{L^2} ds\Big), \end{aligned}$$

za neko $\tilde{U}_\varepsilon \in (\min(U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon}), \max(U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon}))$.

Kako S_ε zadovoljava (3.56) i mreža a_ε zadovoljava (3.55), Gronvalova nejednakost implicira da je $\sup_{t\in[0,T)} \|\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ nula funkcija.

Posmatrajmo sada izvode višeg reda funkcije $\bar{U}_\varepsilon$ i pokažimo da su njihove L^2-norme takodje nula funkcije.

U tu svrhu diferenciramo jednačinu (3.60) u odnosu na x i dobijamo

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t^2 - \partial_x^2)\partial_x \bar{U}_\varepsilon + F_\varepsilon'(U_{1\varepsilon})\partial_x U_{1\varepsilon} S_\varepsilon - F_\varepsilon'(U_{2\varepsilon})\partial_x U_{2\varepsilon} S_\varepsilon \\
&+(F_\varepsilon(U_{1\varepsilon}) - F_\varepsilon(U_{2\varepsilon}))\partial_x S_\varepsilon + \partial_x N_\varepsilon = 0.
\end{aligned}
$$

Energijska nejednakost daje

$$
\begin{aligned}
&\|\partial_x \bar{U}_\varepsilon(t)\|_{H^1} \le \|(\partial_x N_{2\varepsilon}, \partial_{xx} N_{1\varepsilon})\|_{L^2} + \int_0^T \|\partial_x N_\varepsilon\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^T \|F_\varepsilon'(U_{1\varepsilon})\partial_x U_{1\varepsilon} - F_\varepsilon'(U_{1\varepsilon})\partial_x U_{2\varepsilon}\|_{L^\infty} \|S_\varepsilon\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^T \|F_\varepsilon'(U_{1\varepsilon})\partial_x U_{2\varepsilon} - F_\varepsilon'(U_{2\varepsilon})\partial_x U_{2\varepsilon}\|_{L^\infty} \|S_\varepsilon\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^T \|F_\varepsilon'(\tilde{U}_\varepsilon)\|_{L^\infty} \|\bar{U}_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\partial_x S_\varepsilon\|_{L^2} ds \\
&\le \|(\partial_x N_{2\varepsilon}, \partial_{xx} N_{1\varepsilon})\|_{L^2} + \int_0^T \|\partial_x N_\varepsilon\|_{L^2} ds + \int_0^T a_\varepsilon^m \|\partial_x \bar{U}_\varepsilon\|_{L^\infty} \|S_\varepsilon\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^T a_\varepsilon^m \|\bar{U}_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\partial_x U_{2\varepsilon}\|_{L^\infty} \|S_\varepsilon\|_{L^2} ds + C_1 \int_0^T a_\varepsilon^{m_2} \|\bar{U}_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\partial_x S_\varepsilon\|_{L^2} ds \\
&\le \|(\partial_x N_{2\varepsilon}, \partial_{xx} N_{1\varepsilon})\|_{L^2} + \int_0^T \|\partial_x N_\varepsilon\|_{L^2} ds \\
&+ C\Big(\int_0^T a_\varepsilon^m \|\partial_x \bar{U}_\varepsilon\|_{H^1} \|S_\varepsilon\|_{L^2} ds + \int_0^T a_\varepsilon^m \|\partial_x \bar{U}_\varepsilon\|_{L^2} \|\partial_x U_{2\varepsilon}\|_{L^\infty} \|S_\varepsilon\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^T a_\varepsilon^{m_2} \|\bar{U}_\varepsilon\|_{H^1} \|\partial_x S_\varepsilon\|_{L^2} ds \Big),
\end{aligned}
$$

gde $\tilde{U}_\varepsilon \in (\min(U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon}), \max(U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon}))$. $\tilde{U}_\varepsilon \in (U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon})$

Na osnovu prethodnog koraka imamo da je $\sup_{t\in[0,T)} \|\partial_x \bar{U}_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ nula funkcija. Kako a_ε i S_ε zadovoljavaju relacije (3.55) i (3.56), respektivno, Gronvalova nejednakost implicira da je i $\sup_{t\in[0,T)} \|\partial_{xx} \bar{U}_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ nula funkcija. Slično se može pokazati da je L^2- norma izvoda proizvoljnog reda od $\bar{U}_\varepsilon$ nula funkcija. □

Primedba 3.3 *Specijalno, možemo izabrati da je slučajni proces S_ε proces uglačanog belog šuma takav da*

$$\dot{W}_\varepsilon = \left(\dot{W} * \frac{1}{h_\varepsilon}\phi\left(\frac{\cdot}{h_\varepsilon}\right)\right)\xi_\varepsilon, \quad \text{gde } h_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[2m]{\log \varepsilon^{-1}}}$$

gde je ξ_ε nenegativna mreža glatkih, funkcija sečenja (cut-off funkcija) sa kompaktnim nosačem koje konvergiraju ka jedinici. Precedura sečenja je neophodna da bismo dobili L^2-umerena svojstva funkcije $\dot{W}_\varepsilon$.

3.3.3 Regularizovana i neregularizovana jednačina

Teorema 3.9 *Neka je F_ε regularizacija funkcije F, a G_ε nenegativna primitivna funkcija od F_ε. Neka je Kolomboov uopšten slučajan proces $S \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R})$ nenegativan i neka zavisi samo od promenljive x, odnosno, neka postoji predstavnik S_ε procesa S takav da je $S_\varepsilon(x) \geq 0$, za svako dovoljno malo ε i svako $x \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da*

$$\|B_\varepsilon\|_{L^2} + \|A_\varepsilon\|_{H^1} = o(a_\varepsilon), \text{ kada } \varepsilon \to 0, \tag{3.61}$$

gde je a_ε odgovarajuća mreža korešćena u regularizaciji funkcije F. Tada je, za svako $T > 0$, rešenje regularizovane jednačine (3.51)-(3.52) ujedno i rešenje neregularizovane jednačine (3.49)-(3.50).

Dokaz

Množenje sa $\partial_t u_\varepsilon$ i integracija po x daju $F(u)\,\partial_t u$

$$\frac{1}{2}\partial_t \int \Big((\partial_t U_\varepsilon(x,t))^2 + (\partial_x U_\varepsilon(x,t))^2 + G_\varepsilon(U_\varepsilon(x,t))S_\varepsilon(x)\Big)dx = 0.$$

Kako je $G_\varepsilon \geq 0$, korišćenjem procedure date u dokazu leme 3.7, može se videti da je

$$\max\left(\|\partial_t U_\varepsilon(t)\|_{L^2}, \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}\right) \leq \gamma\Big(\|B_\varepsilon\|_{L^2} + \|A_\varepsilon\|_{H^1}\Big).$$

Korišćenjem (3.61) i

$$\|U_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\|U_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R})}, \; t \in [0,T),$$

za neko $C > 0$, dobijamo

$$\|U_\varepsilon(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq a_\varepsilon, \ t \in [0, T).$$

Dakle,

$$F_\varepsilon(U_\varepsilon) = F(U_\varepsilon),$$

i dokaz je završen. □

Primedba 3.4 *Isto tvrdjenje važi i ako uzmemo, specijalno, da slučajan proces S u teoremi 3.9 bude proces pozitivnog šuma koji zavisi samo od prostorne promenljive x i koji ima odgovarajući rast. Ponovo je procedura sečenja neophodna zbog dobijanja L^2-umerenih svojstava gornje funkcije.*

3.4 Trodimenzionalne stohastičke talasne i Klajn-Gordonove jednačine

U ovom odeljku ćemo proučavati trodimenzionalne stohastičke talasne i Klajn-Gordonove jednačine koje sadrže Kolomboove uopštene slučajne procese. Posmatraćemo četiri različita slučaja u zavisnosti od brzine rasta L^2-normi početnih uslova kao i L^∞-normi Kolomboovih uopštenih slučajnih procesa koji čine aditivni ili multiplikacioni deo nelinearnosti.

Pretpostavimo da su A, B, S, S_1 i S_2 neki Kolomboovi uopšteni slučajni procesi i da su f i g globalno Lipšicovske funkcije, polinomijalno ograničene zajedno sa svim svojim izvodima takve da je $f(0) = g(0) = 0$.

Prvi tip jednačine koju ćemo posmatrati je

$$(\partial_t^2 - \triangle)U + U^3 \cdot S = 0,$$
$$U|_{\{t=0\}} = A, \ \partial_t U|_{\{t=0\}} = B.$$

Drugi tip je

$$(\partial_t^2 - \triangle)U + U \cdot S + U^3 = 0,$$
$$U|_{\{t=0\}} = A, \ \partial_t U|_{\{t=0\}} = B.$$

Zatim ćemo posmatrati jednačinu

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t^2 - \triangle)U + U + U^3 + S = 0, \\
&U|_{\{t=0\}} = A, \ \partial_t U|_{\{t=0\}} = B.
\end{aligned}
$$

Konačno, interesovaće nas jednačina oblika

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t^2 - \triangle)U + f(U)S_1 + g(U) + S_2 = 0, \\
&U|_{\{t=0\}} = A, \ \partial_t U|_{\{t=0\}} = B,
\end{aligned}
$$

gde funkcije f i g zadovoljavaju uslove navedene gore.

U sva četiri slučaja ćemo konstruisati rešenja (koja posmatramo kao Kolomboove uopštene slučajne procese) i dokazati njihovu jedinstvenost. Uslovi pod kojim postoje jedinstvena rešenja su različiti u sva četiri slučaja, što je razlog zašto ih posmatramo odvojeno.

Rezultate izložene u ovom delu dobili su M. Nedeljkov i D. Rajter i čitaoc ih može naći u radu [33].

3.4.1 Kubna talasna jednačina sa nenegativnim slučajnim procesom

Posmatramo problem

$$
(\partial_t^2 - \triangle)U + U^3 \cdot S = 0, \qquad \boxed{n=3} \tag{3.62}
$$

$$
U|_{\{t=0\}} = A, \ \partial_t U|_{\{t=0\}} = B, \tag{3.63}
$$

gde su $A, B \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R}^3)$ $\mathcal{G}_{2,2}$-Kolomboovi uopšteni slučajni procesi takvi da

$$
\|B_\varepsilon\|_{L^2} + \|A_\varepsilon\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/4}\right), \tag{3.64}
$$

i $S \in \mathcal{G}^{\Omega}_b(\mathbb{R}^3)$ je nenegativan Kolomboov uopšten slučajni proces koji zavisi samo od promenljive x i takav da

$$
\|S_\varepsilon\|_{L^\infty} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right). \tag{3.65}
$$

Teorema 3.10 *Neka su zadovoljeni svi gore navedeni uslovi. Problem (3.62)-(3.65) ima skoro sigurno jedinstveno rešenje u $\mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$, za svako $T > 0$.*

Dokaz

Neka su $\omega \in \Omega$ i $\varepsilon \in (0,1)$ fiksirani. Problem (3.62)-(3.63) dat sa predstavnicima glasi

$$(\partial_t^2 - \triangle)U_\varepsilon + U_\varepsilon^3 \cdot S_\varepsilon = 0, \tag{3.66}$$

$$U_\varepsilon|_{\{t=0\}} = A_\varepsilon,\ \partial_t U_\varepsilon|_{\{t=0\}} = B_\varepsilon, \tag{3.67}$$

gde $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{E}_{2,2}^{\Omega}(\mathbb{R}^3)$ zadovoljavaju relaciju (3.64) i nenegativan proces $S_\varepsilon \in \mathcal{E}_b^{\Omega}(\mathbb{R}^3)$ zadovoljava relaciju (3.65).

Koristeći istu argumentaciju kao i u dokazu teoreme 3.8, preslikavanje $(x,t,\omega) \to U_\varepsilon(x,t,\omega)$ je zajednički merljivo po (x,t) i ω za svako fiksirano ε.

Usled nenegativnosti primitivne funkcije nelinearnog člana i osobina procesa S_ε, slično kao u lemi 3.7,

$$\max\left(\|\partial_t U_\varepsilon(t)\|_{L^2}, \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}\right) \leq \gamma\Big(\|\partial_t U_\varepsilon(0)\|_{L^2} + \|U_\varepsilon(0)\|_{H^1}\Big)$$

odakle direktno dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}$. Štaviše, $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/4}\right)$.

Kao što smo napomenuli u prethodnom odeljku, izvodi funkcije U_ε po vremenskoj promenljivoj t mogu se oceniti pomoću izvoda funkcije U_ε po prostornim promenljivama diferenciranjem jednačine koju rešavamo. To je razlog zbog kojeg ćemo ocenjivati samo izvode po prostornim promenljivama.

U cilju dobijanja umerenih granica L^2-normi izvoda višeg reda funkcije U_ε, diferenciramo jednačinu (3.66) po nekoj prostornoj promenljivoj i dobijamo

$$(\partial_t^2 - \triangle)\nabla U_\varepsilon + 3U_\varepsilon^2 \nabla U_\varepsilon S_\varepsilon + U_\varepsilon^3 \nabla S_\varepsilon = 0. \tag{3.68}$$

Energijska nejednakost i Soboljevske teoreme potapanja daju

$$\|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} \leq \|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2}$$
$$+3\int_0^T \|U_\varepsilon^2(s)\nabla U_\varepsilon(s) S_\varepsilon\|_{L^2} ds + \int_0^T \|U_\varepsilon^3(s)\nabla S_\varepsilon\|_{L^2} ds$$
$$\leq \|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + 3\int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^6}^2 \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^6} \|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds$$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$\|u^2 \nabla u\|_{L^2} \|S_\varepsilon\|_\infty \leq \|u^2\|_{L^3} \|\nabla u\|_{L^6} \|S_\varepsilon\|_\infty \leq \|u\|_{L^6}^2 \|\nabla$

$$
+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^6}^3 \|\nabla S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds
$$

$$
\leq \|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + C\Big(\int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2 \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{H^1} \|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds
$$

$$
+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^3 \|\nabla S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds \Big).
$$

Ovde, kao i u nastavku, C će označavati pozitivnu realnu konstantu. Prvi član na desnoj strani ima umerenu granicu. Na osnovu prethodnog koraka i činjenice da $S_\varepsilon \in \mathcal{E}_b(\mathbb{R}^3)$ i treći član ima umerenu granicu. Takodje, znamo da je $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/4} \right)$. Koristeći sve navedene argumente kao i relaciju (3.65), primenom Gronvalove nejednakosti dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla^2 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Još jednim diferenciranjem po nekoj prostornoj promenljivoj dobijamo

$$
(\partial_t^2 - \triangle)\nabla^2 U_\varepsilon + 6U_\varepsilon(\nabla U_\varepsilon)^2 S_\varepsilon + 3U_\varepsilon^2 \nabla^2 U_\varepsilon S_\varepsilon + 6U_\varepsilon^2 \nabla U_\varepsilon \nabla S_\varepsilon + U_\varepsilon^3 \nabla^2 S_\varepsilon = 0.
$$

Slično kao gore dobijamo

$$
\|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} \leq \|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2}
$$

Sobolev imbedding

$$
+6 \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^6} \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^6}^2 \|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds
$$

$H^1 \subset L^6$

$$
+3 \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}^2 \|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds
$$

$H^2 \subset L^\infty$

$$
+6 \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^6}^2 \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^6} \|\nabla S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds + \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^6}^3 \|\nabla^2 S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds
$$

$$
\leq \|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + C\Big(\int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1} \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2 \|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds
$$

$$
+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^2}^2 \|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds
$$

$$
+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2 \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{H^1} \|\nabla S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds + \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^3 \|\nabla^2 S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds \Big).
$$

Kako $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ i $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla^2 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ imaju umerene granice dobijamo umerenu granicu i za $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla^3 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Slično se mogu dobiti umerene granice za L^2-norme izvoda višeg reda funkcije U_ε.

Dakle, $U_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$, odnosno, $U = [U_\varepsilon] \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ je rešenje problema (3.62)-(3.63).

Pokažimo sada da je to rešenje jedinstveno u $\mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$, odnosno da za data dva rešenja jednačine (3.66), $U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon} \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$, njihova razlika $\bar{U}_\varepsilon := U_{1\varepsilon} - U_{2\varepsilon}$ pripada prostoru $\mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$.

Sledeće važi

$$\begin{aligned} &(\partial_t^2 - \Delta)\bar{U}_\varepsilon + (U_{1\varepsilon}^3 - U_{2\varepsilon}^3)S_\varepsilon + N_\varepsilon = 0, \\ &\bar{U}_\varepsilon|_{t=0} = N_{1\varepsilon},\ \partial_t\bar{U}_\varepsilon|_{t=0} = N_{2\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.69}$$

gde $N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon} \in \mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R}^3)$ i $N_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$.

Primenom leme 3.7 i Soboljevskih teorema o potapanju dobijamo

$$\begin{aligned} &\max\left(\|\partial_t\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{L^2}, \|\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{H^1}\right) \\ &\leq \gamma\Big(\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2} + \|N_{1\varepsilon}\|_{H^1} + \int_0^T \|N_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\ &+ \int_0^T \|\left(U_{1\varepsilon}^2(s) + U_{1\varepsilon}(s)U_{2\varepsilon}(s) + U_{2\varepsilon}^2(s)\right)\bar{U}_\varepsilon S_\varepsilon\|_{L^2} ds\Big) \\ &\leq \gamma\Big(\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2} + \|N_{1\varepsilon}\|_{H^1} + \int_0^T \|N_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\ &+ \int_0^T \left(\|U_{1\varepsilon}(s)\|_{L^6}^2 + \|U_{1\varepsilon}(s)\|_{L^6}\|U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^6} + \|U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^6}^2\right) \\ &\|\bar{U}_\varepsilon\|_{L^6}\|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds\Big) \\ &\leq \gamma\Big(\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2} + \|N_{1\varepsilon}\|_{H^1} + \int_0^T \|N_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds\Big) \\ &+C\int_0^T \left(\|U_{1\varepsilon}(s)\|_{H^1}^2 + \|U_{1\varepsilon}(s)\|_{H^1}\|U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1} + \|U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1}^2\right) \\ &\|\bar{U}_\varepsilon\|_{H^1}\|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds. \end{aligned}$$

Kako imamo da je $\sup_{t\in[0,T)} \|U_{i\varepsilon}(t)\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/4}\right)$, $i \in \{1, 2\}$, i $\|S_\varepsilon\|_{L^\infty} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right)$, primenom Gronvalove nejednakosti dobijamo da je $\sup_{t\in[0,T)} \|\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ nula funkcija.

Posmatrajmo sada izvode višeg reda funkcije $\bar{U}_\varepsilon$ i pokažimo da su njihove L^2-norme takodje nula funkcije. U tu svrhu diferenciramo jednačinu (3.69) po nekoj prostornoj promenljivoj

$$(\partial_t^2 - \triangle)\nabla\bar{U}_\varepsilon + \left(3U_{1\varepsilon}^2\nabla U_{1\varepsilon} - 3U_{2\varepsilon}^2\nabla U_{2\varepsilon}\right)S_\varepsilon + \left(U_{1\varepsilon}^3 - U_{2\varepsilon}^3\right)\nabla S_\varepsilon + \nabla N_\varepsilon = 0.$$

Energijska nejednakost i Soboljevske teoreme o potapanju daju

$$\begin{aligned}
&\|(\partial_t\nabla\bar{U}_\varepsilon, \nabla^2\bar{U}_\varepsilon)(t)\|_{L^2}\\
&\leq \|(\nabla N_{2\varepsilon}, \nabla^2 N_{1\varepsilon})\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla N_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+3\int_0^T \|U_{1\varepsilon}^2(s)\nabla U_{1\varepsilon}(s) - U_{2\varepsilon}^2(s)\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2}\|S_\varepsilon\|_{L^\infty}ds\\
&+\int_0^T \|\left(U_{1\varepsilon}^2(s) + U_{1\varepsilon}(s)U_{2\varepsilon}(s) + U_{2\varepsilon}^2(s)\right)\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|\nabla S_\varepsilon\|_{L^\infty}ds\\
&\leq \|(\nabla N_{2\varepsilon}, \nabla^2 N_{1\varepsilon})\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla N_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+3\int_0^T \|U_{1\varepsilon}^2(s)\nabla U_{1\varepsilon}(s) - U_{1\varepsilon}^2(s)\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2}\|S_\varepsilon\|_{L^\infty}ds\\
&+3\int_0^T \|U_{1\varepsilon}^2(s)\nabla U_{2\varepsilon}(s) - U_{2\varepsilon}^2(s)\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2}\|S_\varepsilon\|_{L^\infty}ds\\
&+\int_0^T \left(\|U_{1\varepsilon}(s)\|_{L^6}^2 + \|U_{1\varepsilon}(s)\|_{L^6}\|U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^6} + \|U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^6}^2\right)\\
&\|\bar{U}_\varepsilon\|_{L^6}\|\nabla S_\varepsilon\|_{L^\infty}ds\\
&\leq \|(\nabla N_{2\varepsilon}, \nabla^2 N_{1\varepsilon})\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla N_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&\qquad\qquad \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}\\
&+3\int_0^T \|U_{1\varepsilon}(s)\|_{L^6}^2\|\nabla\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^6}\|S_\varepsilon\|_{L^\infty}ds\\
&+3\int_0^T \|\left(U_{1\varepsilon}(s) - U_{2\varepsilon}(s)\right)\left(U_{1\varepsilon}(s) + U_{2\varepsilon}(s)\right)\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2}\|S_\varepsilon\|_{L^\infty}ds\\
&+C_1\int_0^T \left(\|U_{1\varepsilon}(s)\|_{H^1}^2 + \|U_{1\varepsilon}(s)\|_{H^1}\|U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1} + \|U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1}^2\right)\\
&\|\bar{U}_\varepsilon\|_{H^1}\|\nabla S_\varepsilon\|_{L^\infty}ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|(\nabla N_{2\varepsilon}, \nabla^2 N_{1\varepsilon})\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla N_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+C\Big(\int_0^T \|U_{1\varepsilon}(s)\|^2_{H^1} \|\nabla \bar{U}_\varepsilon(s)\|_{H^1} \|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{H^1} \left(\|U_{1\varepsilon}(s)\|_{H^1} + \|U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1}\right) \|\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1} \|S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \left(\|U_{1\varepsilon}(s)\|^2_{H^1} + \|U_{1\varepsilon}(s)\|_{H^1} \|U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1} + \|U_{2\varepsilon}(s)\|^2_{H^1}\right) \\
&\|\bar{U}_\varepsilon\|_{H^1} \|\nabla S_\varepsilon\|_{L^\infty} ds\Big).
\end{aligned}
$$

Primenom sličnih argumenata koje smo koristili i pre dobijamo da je $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla^2 \bar{U}_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ nula funkcija. Slično se može pokazati da su L^2-norme svih izvoda funkcije $\bar{U}_\varepsilon$ nula funkcije. □

Primedba 3.5 *Svakom uopštenom slučajnom procesu s možemo dodeliti Kolomboov uopšten slučajni proces S na takav način da je ocena (3.65) zadovoljena (videti primedbu 3.3 za proces belog šuma). Ovakva primedba se može dodati nakon svakog daljeg tvrdjenja u kojem koristimo ocene slučajnog člana.*

3.4.2 Kubna talasna jednačina sa multiplikativnim slučajnim procesom

Posmatramo problem

$$
(\partial_t^2 - \triangle)U + U \cdot S + U^3 = 0, \tag{3.70}
$$

$$
U|_{\{t=0\}} = A, \ \partial_t U|_{\{t=0\}} = B, \tag{3.71}
$$

gde $A, B \in \mathcal{G}^\Omega_{2,2}(\mathbb{R}^3)$ zadovoljavaju

$$
\|B_\varepsilon\|_{L^2} + \|A_\varepsilon\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right), \tag{3.72}
$$

i $S \in \mathcal{G}^\Omega_b([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ zadovoljava

$$
\|S_\varepsilon\|_{L^\infty} = o\left(\log \left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{\frac{1}{2T}}\right). \tag{3.73}
$$

Teorema 3.11 *Neka su zadovoljeni svi gore navedeni uslovi. Problem (3.70)-(3.73) ima skoro sigurno jedinstveno rešenje u* $\mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$, *za svako* $T>0$.

Dokaz

Neka su $\omega\in\Omega$ i $\varepsilon\in(0,1)$ fiksirani. Problem (3.70)-(3.71) dat sa predstavnicima glasi

$$(\partial_t^2-\Delta)U_\varepsilon+U_\varepsilon\cdot S_\varepsilon+U_\varepsilon^3=0, \tag{3.74}$$

$$U_\varepsilon|_{\{t=0\}}=A_\varepsilon,\ \partial_t U_\varepsilon|_{\{t=0\}}=B_\varepsilon, \tag{3.75}$$

gde $A_\varepsilon,B_\varepsilon\in\mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R}^3)$ zadovoljavaju (3.72) i $S_\varepsilon\in\mathcal{E}^{\Omega}_b([0,T)\times\mathbb{R}^3)$ zadovoljava (3.73).

Kao i pre, preslikavanje $(x,t,\omega)\to U_\varepsilon(x,t,\omega)$ je zajednički merljivo po (x,t) i ω za svako fiksirano ε.

Ponovo, korišćenjem procedure kao u dokazu teoreme 3.10, dobijamo

$$\begin{aligned}
&\max\left(\|\partial_t U_\varepsilon(t)\|_{L^2},\|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}\right)\\
&\le\gamma\Big(\|\partial_t U_\varepsilon\|_{L^2}+\|U_\varepsilon(0)\|_{H^1}+\int_0^T\|U_\varepsilon(s)S_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\Big)\\
&\le\gamma\Big(\|\partial_t U_\varepsilon\|_{L^2}+\|U_\varepsilon(0)\|_{H^1}+\int_0^T\|U_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}ds\Big)\\
&\le\gamma\Big(\|\partial_t U_\varepsilon\|_{L^2}+\|U_\varepsilon(0)\|_{H^1}+\int_0^T\|U_\varepsilon(s)\|_{H^1}\|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}ds\Big).
\end{aligned}$$

Kako važi (3.73), primenom Gronvalove leme dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)}\|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}$.

Štaviše, $\sup_{t\in[0,T)}\|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}=o\left(\left(\log\varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right)$.

U cilju dobijanja umerenih granica L^2-normi izvoda višeg reda funkcije U_ε, diferenciramo jednačinu (3.74) po nekoj prostornoj promenljivoj

$$(\partial_t^2-\Delta)\nabla U_\varepsilon+\nabla U_\varepsilon S_\varepsilon+U_\varepsilon\nabla S_\varepsilon+3U_\varepsilon^2\nabla U_\varepsilon=0. \tag{3.76}$$

Energijska nejednakost i Soboljevske teoreme o potapanju daju

$$
\begin{aligned}
&\|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} \\
&\leq \|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla U_\varepsilon(s) S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s) \nabla S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds + 3 \int_0^T \|U_\varepsilon^2(s) \nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq \|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\nabla S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds + C \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2 \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{H^1} ds.
\end{aligned}
$$

Kako je $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right)$ primenom Gronvalove leme dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla^2 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Još jednim diferenciranjem po nekoj prostornoj promenljivoj dobijamo

$$
(\partial_t^2 - \triangle)\nabla^2 U_\varepsilon + \nabla^2 U_\varepsilon S_\varepsilon + 2\nabla U_\varepsilon \nabla S_\varepsilon + U_\varepsilon \nabla^2 S_\varepsilon + 6 U_\varepsilon (\nabla U_\varepsilon)^2 + 3 U_\varepsilon^2 \nabla^2 U_\varepsilon = 0.
$$

Slično kao u prethodnim slučajevima dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} \\
&\leq \|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+2 \int_0^T \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\nabla S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds + \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\nabla^2 S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\qquad \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2} \\
&+6 \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^6} \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^6}^2 ds + 3 \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}^2 \|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+\|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+2 \int_0^T \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\nabla S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds + \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\nabla^2 S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+C\Big(\int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1} \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2 ds + \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^2}^2 \|U_\varepsilon(s)\|_{H^2} ds \Big).
\end{aligned}
$$

$L^6 \supset H^1(\mathbb{R}^3)$ $\quad$ $L^\infty \supset H^2(\mathbb{R}^3)$

Kako $\sup_{t\in[0,T)}\|U_\varepsilon(t)\|_{H^2}$, $\sup_{t\in[0,T)}\|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ i $\sup_{t\in[0,T)}\|\nabla^2 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ imaju umerene granice, $\sup_{t\in[0,T)}\|\nabla^3 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ takodje ima umerenu granicu. Slično se mogu dobiti umerene granice L^2-normi izvoda višeg reda od U_ε.

Dakle, $U_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$, odnosno, $U=[U_\varepsilon]\in\mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$ je rešenje problema (3.70)-(3.71).

Pokažimo sada da je to rešenje jedinstveno u $\mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$, odnosno da za data dva rešenja jednačine (3.74), $U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon}\in\mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$, njihova razlika $\bar{U}_\varepsilon := U_{1\varepsilon}-U_{2\varepsilon}$ pripada prostoru $\mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$.

Sledeće važi

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t^2-\triangle)\bar{U}_\varepsilon+\bar{U}_\varepsilon S_\varepsilon+U_{1\varepsilon}^3-U_{2\varepsilon}^3+N_\varepsilon=0,\\
&\bar{U}_\varepsilon|_{t=0}=N_{1\varepsilon},\ \partial_t\bar{U}_\varepsilon|_{t=0}=N_{2\varepsilon},
\end{aligned}\tag{3.77}
$$

gde $N_{1\varepsilon},N_{2\varepsilon}\in\mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R}^3)$ i $N_\varepsilon\in\mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$.

Na osnovu $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$, $L^6\supset H^1(\mathbb{R}^3)$

$$
\begin{aligned}
\|U_{1\varepsilon}^3-U_{2\varepsilon}^3\|_{L^2} &\le \|U_{1\varepsilon}-U_{2\varepsilon}\|_{L^6}\|U_{1\varepsilon}^2+U_{1\varepsilon}U_{2\varepsilon}+U_{2\varepsilon}^2\|_{L^3}\\
&\le \|\bar{U}_\varepsilon\|_{H^1}\left(\|U_{1\varepsilon}\|^2_{H^1}+\|U_{1\varepsilon}\|_{H^1}\|U_{2\varepsilon}\|_{H^1}+\|U_{2\varepsilon}\|^2_{H^1}\right),
\end{aligned}
$$

slično kao u prethodnim slučajevima dobijamo $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$

$$
\begin{aligned}
&\max\left(\|(\partial_t\bar{U}_\varepsilon\|_{L^2},\|\bar{U}_\varepsilon\|_{H^1}\right)\\
&\le\gamma\Big(\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2}+\|N_{1\varepsilon}\|_{H^1}+\int_0^T\|N_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+\int_0^T\|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|S_\varepsilon(s)\|_{L^\infty}ds\Big)\\
&+C\int_0^T\left(\|U_{1\varepsilon}(s)\|^2_{H^1}+\|U_{1\varepsilon}(s)\|_{H^1}\|U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1}+\|U_{2\varepsilon}(s)\|^2_{H^1}\right)\\
&\|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{H^1}ds.
\end{aligned}
$$

Primenom Gronvalove nejednakosti dobijamo da je $\sup_{t\in[0,T)}\|\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ nula funkcija. Slično se može pokazati da su L^2-norme svih izvoda funkcije $\bar{U}_\varepsilon$ nula funkcije. Ponovo, pri dokazu i egzistencije i jedinstvenosti rešenja, izvodi funkcije U_ε po vremenskoj promenljivoj t mogu se oceniti pomoću izvoda od U_ε po prostornim promenljivama diferenciranjem same jednačine koju rešavamo. □

3.4.3 Kubna Klajn-Gordonova jednačina sa aditivnim slučajnim procesom

Posmatramo problem

$$(\partial_t^2 - \triangle)U + U + U^3 + S = 0, \tag{3.78}$$

$$U|_{\{t=0\}} = A, \ \partial_t U|_{\{t=0\}} = B, \tag{3.79}$$

gde procesi $A, B \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R}^3)$ zadovoljavaju uslov

$$\|B_\varepsilon\|_{L^2} + \|A_\varepsilon\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right), \tag{3.80}$$

i proces $S \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ zadovoljava uslove

$$\|S_\varepsilon\|_{L^\infty} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right) \tag{3.81}$$

i

$$S_\varepsilon \text{ ima kompaktan nosač.} \tag{3.82}$$

Teorema 3.12 *Neka su zadovoljeni svi gore navedeni uslovi. Problem (3.78)-(3.82) ima skoro sigurno jedinstveno rešenje u* $\mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$, *za svako* $T > 0$.

Dokaz

Neka su $\omega \in \Omega$ i $\varepsilon \in (0,1)$ fiksirani. Posmatramo problem (3.78)-(3.79) dat sa predstavnicima

$$(\partial_t^2 - \triangle)U_\varepsilon + U_\varepsilon + U_\varepsilon^3 + S_\varepsilon = 0 \tag{3.83}$$

$$U_\varepsilon|_{\{t=0\}} = A_\varepsilon, \ \partial_t U_\varepsilon|_{\{t=0\}} = B_\varepsilon, \tag{3.84}$$

gde $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R}^3)$ zadovoljavaju (3.80) i $S_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ zadovoljava uslove (3.81) i (3.82).

Kao i u prethodnim slučajevima, preslikavanje $(x,t,\omega) \to U_\varepsilon(x,t,\omega)$ je zajednički merljivo po (x,t) i ω za svako fiksirano ε.

Kao na početku dokaza teoreme 3.10 imamo

$$\begin{aligned}
&\max\left(\|\partial_t U_\varepsilon(t)\|_{L^2}, \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}\right) \\
&\leq \gamma\Big(\|\partial_t U_\varepsilon(0)\|_{L^2} + \|U_\varepsilon(0)\|_{H^1} + \int_0^T \|S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds\Big).
\end{aligned}$$

Odatle direktno dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}$.

Štaviše, $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right)$.

Da bismo dobili umerene granice L^2-normi izvoda višeg reda funkcije U_ε, diferenciramo jednačinu (3.83) po nekoj prostornoj promenljivoj

$$(\partial_t^2 - \triangle)\nabla U_\varepsilon + \nabla U_\varepsilon + 3U_\varepsilon^2 \nabla U_\varepsilon + \nabla S_\varepsilon = 0. \tag{3.85}$$

Energijska nejednakost i teoreme o potapanju daju

$$\begin{aligned}
\|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} &\le \|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+3 \int_0^T \|U_\varepsilon^2(s) \nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds + \int_0^T \|\nabla S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&\le \|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+C \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2 \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{H^1} ds + \int_0^T \|\nabla S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds.
\end{aligned}$$

Obzirom da $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right)$ primenom Gronvalove nejednakosti dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla^2 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$.

Još jednim diferenciranjem po nekoj prostornoj promenljivoj dobijamo

$$(\partial_t^2 - \triangle)\nabla^2 U_\varepsilon + \nabla^2 U_\varepsilon + 6U_\varepsilon(\nabla U_\varepsilon)^2 + 3U_\varepsilon^2 \nabla^2 U_\varepsilon + \nabla^2 S_\varepsilon = 0.$$

Slično kao pre dobijamo

$$\begin{aligned}
\|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} &\le \|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} \\
&+ \int_0^T \|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds + C\Big(\int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1} \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2 ds \\
&+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2 \|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{H^1} ds\Big) + \int_0^T \|\nabla^2 S_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds.
\end{aligned}$$

Isti argumenti i činjenice da $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ i $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla U_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ imaju umerene granice impliciraju umerenost norme $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla^3 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$. Na isti način, dobijamo umerenost L^2-normi ostalih izvoda funkcije U_ε.

Dakle, $U_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$, odnosno, $U = [U_\varepsilon] \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ je rešenje problema (3.78)-(3.79).

Pokažimo sada da je to rešenje jedinstveno u $\mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$, odnosno da za data dva rešenja jednačine (3.83), $U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon} \in \mathcal{E}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$, njihova razlika $\bar{U}_\varepsilon := U_{1\varepsilon} - U_{2\varepsilon}$ pripada prostoru $\mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$. Sledeće važi

$$\begin{aligned}
&(\partial_t^2 - \Delta)\bar{U}_\varepsilon + \bar{U}_\varepsilon + U_{1\varepsilon}^3 - U_{2\varepsilon}^3 + N_\varepsilon = 0, \\
&\bar{U}_\varepsilon|_{t=0} = N_{1\varepsilon}, \ \partial_t \bar{U}_\varepsilon|_{t=0} = N_{2\varepsilon},
\end{aligned} \tag{3.86}$$

gde $N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon} \in \mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R}^3)$ i $N_\varepsilon \in \mathcal{N}^{\Omega}_{2,2}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$. Kao malopre imamo

$$\begin{aligned}
&\max\left(\|\partial_t \bar{U}_\varepsilon\|_{L^2}, \|\bar{U}_\varepsilon\|_{H^1}\right) \\
&\leq \gamma\Big(\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2} + \|N_{1\varepsilon}\|_{H^1} + \int_0^T \|N_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds + \int_0^T \|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds\Big) \\
&+C \int_0^T \left(\|U_{1\varepsilon}(s)\|^2_{H^1} + \|U_{1\varepsilon}(s)\|_{H^1}\|U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1} + \|U_{2\varepsilon}(s)\|^2_{H^1}\right) \\
&\|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{H^1} ds.
\end{aligned}$$

Kako je $\sup_{t\in[0,T)} \|U_{i\varepsilon}(t)\|_{H^1} = o\left(\left(\log \varepsilon^{-1}\right)^{1/2}\right)$, $i = 1,2$, primenom Gronvalove leme dobijamo da je $\sup_{t\in[0,T)} \|\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ nula funkcija. Slično se može pokazati da su L^2-norme svih izvoda funkcije $\bar{U}_\varepsilon$ nula funkcije. Kao i u prethodnim slučajevima, izvodi po t funkcije U_ε (u dokazu egzistencije rešenja) i funkcije $\bar{U}_\varepsilon$ (u dokazu jedinstvenosti rešenja) mogu se oceniti izvodima po prostornim promenljivama odgovarajućih funkcija. □

3.4.4 Stohastička talasna jednačina sa Lipšicovskim nelinearnostima

Neka su f i g globalno Lipšicove funkcije, polinomijalno ograničene zajedno sa svim svojim izvodima i takve da je $f(0) = g(0) = 0$. Posmatramo problem

$$(\partial_t^2 - \Delta)U + f(U)S_1 + g(U) + S_2 = 0, \tag{3.87}$$

$$U|_{\{t=0\}} = A, \ \partial_t U|_{\{t=0\}} = B, \tag{3.88}$$

gde su $A, B \in \mathcal{G}^{\Omega}_{2,2}(\mathbb{R}^3)$ $\mathcal{G}_{2,2}$-Kolomboovi uopšteni slučajni procesi.

Kolomboov uopšten slučajni proces $S_1 \in \mathcal{G}_b^{\Omega}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ je takav da zadovoljava

$$\|S_{1\varepsilon}\|_{L^\infty} = o\left(\log \varepsilon^{-1}\right), \tag{3.89}$$

a $\mathcal{G}_{2,2}$-Kolomboov uopšten slučajni proces $S_2 \in \mathcal{G}_{2,2}^{\Omega}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ ima kompaktan nosač.

Teorema 3.13 *Neka su zadovoljeni svi gore navedeni uslovi. Problem (3.87)-(3.89) ima skoro sigurno jedinstveno rešenje u* $\mathcal{G}_{2,2}^{\Omega}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$, *za svako* $T > 0$.

Dokaz

Neka su $\omega \in \Omega$ i $\varepsilon \in (0,1)$ fiksirani. Posmatramo problem (3.87)-(3.88) dat sa predstavnicima

$$(\partial_t^2 - \Delta)U_\varepsilon + f(U_\varepsilon)S_{1\varepsilon} + g(U_\varepsilon) + S_{2\varepsilon} = 0, \tag{3.90}$$

$$U_\varepsilon|_{\{t=0\}} = A_\varepsilon,\ \partial_t U_\varepsilon|_{\{t=0\}} = B_\varepsilon, \tag{3.91}$$

gde $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{E}_{2,2}^{\Omega}(\mathbb{R}^3)$, $S_{1\varepsilon} \in \mathcal{E}_b^{\Omega}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ i $S_{2\varepsilon} \in \mathcal{E}_{2,2}^{\Omega}([0,T) \times \mathbb{R}^3)$ zadovoljavaju gore navedene uslove.

Prvo, preslikavanje $(x,t,\omega) \to U_\varepsilon(x,t,\omega)$ je zajednički merljivo po (x,t) i ω za svako fiksirano ε. Primenom leme 3.7 dobijamo

$$\begin{aligned}
&\max\left(\|\partial_t U_\varepsilon(t)\|_{L^2}, \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}\right) \\
&\le \gamma\Big(\|\partial_t U_\varepsilon(0)\|_{L^2} + \|U_\varepsilon(0)\|_{H^1} + \int_0^T \|f(U_\varepsilon(s))\|_{L^2}\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \|g(U_\varepsilon(s))\|_{L^2} ds + \int_0^T \|S_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2} ds\Big) \\
&\le \gamma\|\partial_t U_\varepsilon(0)\|_{L^2} + \|U_\varepsilon(0)\|_{H^1} + C\Big(\int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds + \int_0^T \|S_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2} ds\Big) \\
&\le \gamma\|\partial_t U_\varepsilon(0)\|_{L^2} + \|U_\varepsilon(0)\|_{H^1} + C\Big(\int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1}\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^1} ds + \int_0^T \|S_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2} ds\Big),
\end{aligned}$$

$H^1 \subset L^2(\mathbb{R}^3)$

gde smo koristili Lipšicovska svojstva funkcija f i g i Soboljevske teoreme o potapanju. Kako regularizovani slučajan proces $S_{1\varepsilon}$ zadovoljava (3.89) primenom Gronvalove leme dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{H^1}$. Da bismo dobili umerene granice L^2-normi izvoda višeg reda funkcije U_ε, diferenciramo jednačinu (3.90) po nekoj prostornoj promenljivoj i dobijamo

$$(\partial_t^2 - \triangle)\nabla U_\varepsilon + f'(U_\varepsilon)\nabla U_\varepsilon S_{1\varepsilon} + f(U_\varepsilon)\nabla S_{1\varepsilon} + g'(U_\varepsilon)\nabla U_\varepsilon + \nabla S_{2\varepsilon} = 0.$$

Energijska nejednakost i Soboljevske teoreme o potapanju daju

$$\begin{aligned}
&\|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} \le \|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} \\
&+ \int_0^T \|f'(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty} \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \|f(U_\varepsilon(s))\|_{L^2} \|\nabla S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \|g'(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty} \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds + \int_0^T \|\nabla S_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2} ds \\
&\le \|(\partial_t \nabla U_\varepsilon, \nabla^2 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + C\Big(\int_0^T \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+ \int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\nabla S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds + \int_0^T \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+ \int_0^T \|\nabla S_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2} ds \Big).
\end{aligned}$$

Kako $\sup_{t\in[0,T)} \|U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ i $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ imaju umerene granice, $\sup_{t\in[0,T)} \|\nabla^2 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$ ima takodje umerenu granicu. Još jednim diferenciranjem po nekoj prostornoj promenljivoj dobijamo

$$\begin{aligned}
&(\partial_t^2 - \triangle)\nabla^2 U_\varepsilon + f''(U_\varepsilon)(\nabla U_\varepsilon)^2 S_{1\varepsilon} + f'(U_\varepsilon)\nabla^2 U_\varepsilon S_{1\varepsilon} + 2f'(U_\varepsilon)\nabla U_\varepsilon \nabla S_{1\varepsilon} \\
&+ f(U_\varepsilon)\nabla^2 S_{1\varepsilon} + g''(U_\varepsilon)(\nabla U_\varepsilon)^2 + g'(U_\varepsilon)\nabla^2 U_\varepsilon + \nabla^2 S_{2\varepsilon} = 0.
\end{aligned}$$

Slično kao u prethodnim slučajevima dobijamo

$$\begin{aligned}
&\|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(t)\|_{L^2} \le \|(\partial_t \nabla^2 U_\varepsilon, \nabla^3 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2} \\
&+ \int_0^T \|f''(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty} \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2 \|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} =$ [illegible] $+ \frac{1}{2}$

$L^4(\mathbb{R}^3) \supset H_1$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T \|f'(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty}\|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+2\int_0^T \|f'(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty}\|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|\nabla S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+\int_0^T \|f(U_\varepsilon(s))\|_{L^2}\|\nabla^2 S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds+\int_0^T \|g''(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty}\|\nabla U_\varepsilon(s))\|_{H^1}^2 ds\\
&+\int_0^T \|g'(U_\varepsilon(s))\|_{L^\infty}\|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds+\int_0^T \|\nabla^2 S_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2}ds\\
&\leq \|(\partial_t\nabla^2 U_\varepsilon,\nabla^3 U_\varepsilon)(0)\|_{L^2}\\
&+C\Big((1+\int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{H^2}^{q_1})\|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{H^1}^2\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+\int_0^T \|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds+\int_0^T \|\nabla U_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|\nabla S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+\int_0^T \|U_\varepsilon(s)\|_{L^2}\|\nabla^2 S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds+\int_0^T (1+\|U_\varepsilon(s)\|_{H^2}^{q_2})\|\nabla U_\varepsilon(s))\|_{H^1}^2 ds\\
&+\int_0^T \|\nabla^2 U_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds+\int_0^T \|\nabla^2 S_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2}ds\Big),
\end{aligned}
$$

za neke $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$.

Korišćenjem sličnih argumenata kao u prethodnim slučajevima dobijamo umerenu granicu za $\sup_{t\in[0,T)}\|\nabla^3 U_\varepsilon(t)\|_{L^2}$. Slično se mogu dobiti umerene granice L^2-normi izvoda višeg reda funkcije U_ε. Dakle, upravo smo dokazali da $U_\varepsilon \in \mathcal{E}_{2,2}^{\Omega}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$, odnosno da je $U=[U_\varepsilon]\in \mathcal{G}_{2,2}^{\Omega}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$ rešenje problema (3.87)-(3.88).

Pokažimo sada da je to rešenje jedinstveno u $\mathcal{G}_{2,2}^{\Omega}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$. Neka su $U_{1\varepsilon}, U_{2\varepsilon} \in \mathcal{E}_{2,2}^{\Omega}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$, dva rešenja jednačine (3.90). Treba da pokažemo da $\bar{U}_\varepsilon := U_{1\varepsilon}-U_{2\varepsilon}$ pripada prostoru $\mathcal{N}_{2,2}^{\Omega}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$.

Sledeće važi

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t^2-\Delta)\bar{U}_\varepsilon+(f(U_{1\varepsilon})-f(U_{2\varepsilon}))\,S_{1\varepsilon}+g(U_{1\varepsilon})-g(U_{2\varepsilon})+N_\varepsilon=0,\\
&\bar{U}_\varepsilon|_{t=0}=N_{1\varepsilon},\ \partial_t\bar{U}_\varepsilon|_{t=0}=N_{2\varepsilon},
\end{aligned}
\tag{3.92}
$$

gde $N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon} \in \mathcal{N}_{2,2}^{\Omega}(\mathbb{R}^3)$ i $N_\varepsilon \in \mathcal{N}_{2,2}^{\Omega}([0,T)\times\mathbb{R}^3)$.

Na osnovu leme 3.7 imamo

$$
\begin{aligned}
&\max\left(\|\partial_t\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{L^2}, \|\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{H^1}\right)\\
&\leq \gamma\Big(\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2} + \|N_{1\varepsilon}\|_{H^1} + \int_0^T \|N_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+ \int_0^T \|f(U_{1\varepsilon}(s)) - f(U_{2\varepsilon}(s))\|_{L^2}\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+ \int_0^T \|g(U_{1\varepsilon}(s)) - g(U_{2\varepsilon}(s))\|_{L^2}ds\Big)\\
&\leq \gamma\|N_{2\varepsilon}\|_{L^2} + \|N_{1\varepsilon}\|_{H^1} + C\Big(\int_0^T \|N_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+ \int_0^T \|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{H^1}\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds + \int_0^T \|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{H^1}ds\Big),
\end{aligned}
$$

gde smo koristili Lipšicovska svojstva funkcija f i g i Soboljevske teoreme o potapanju. Kako proces $S_{1\varepsilon}$ zadovoljava uslov (3.89), primenom Gronvalove leme dobijamo da je $\sup_{t\in[0,T)}\|\bar{U}_\varepsilon(t)\|_{H^1}$ nula funkcija. Diferenciranjem jednačine (3.92) po nekoj prostornoj promenljivoj dobijamo

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t^2 - \triangle)\nabla\bar{U}_\varepsilon + \left(f'(U_{1\varepsilon})\nabla U_{1\varepsilon} - f'(U_{2\varepsilon})\nabla U_{2\varepsilon}\right)S_{1\varepsilon}\\
&+ \left(f(U_{1\varepsilon}) - f(U_{2\varepsilon})\right)\nabla S_{1\varepsilon} + g'(U_{1\varepsilon})\nabla U_{1\varepsilon} - g'(U_{2\varepsilon})\nabla U_{2\varepsilon} + \nabla N_\varepsilon = 0.
\end{aligned}
$$

Ponovo, energijska nejednakost i teoreme Soboljevskog tipa daju

$$
\begin{aligned}
&\|(\partial_t\nabla\bar{U}_\varepsilon, \nabla^2\bar{U}_\varepsilon)(t)\|_{L^2}\\
&\leq \|(\partial_t\nabla\bar{U}_\varepsilon, \nabla^2\bar{U}_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla N_\varepsilon(s)\|_{L^2}ds\\
&+ \int_0^T \|f'(U_{1\varepsilon}(s))\nabla U_{1\varepsilon}(s) - f'(U_{1\varepsilon}(s))\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2}\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+ \int_0^T \|f'(U_{1\varepsilon}(s))\nabla U_{2\varepsilon}(s) - f'(U_{2\varepsilon}(s))\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2}\|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+ \int_0^T \|f(U_{1\varepsilon}(s)) - f(U_{2\varepsilon}(s))\|_{L^2}\|\nabla S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty}ds\\
&+ \int_0^T \|g'(U_{1\varepsilon}(s))\nabla U_{1\varepsilon}(s) - g'(U_{1\varepsilon}(s))\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2}ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T \|g'(U_{1\varepsilon}(s))\nabla U_{2\varepsilon}(s) - g'(U_{2\varepsilon}(s))\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq \|(\partial_t \nabla \bar{U}_\varepsilon, \nabla^2 \bar{U}_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla N_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+\int_0^T \|f'(U_{1\varepsilon}(s))\|_{L^\infty} \|\nabla \bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+\int_0^T \|f'(U_{1\varepsilon}(s)) - f'(U_{2\varepsilon}(s))\|_{L^4} \|\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^4} \|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+C_f \int_0^T \|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\nabla S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+\int_0^T \|g'(U_{1\varepsilon}(s))\|_{L^\infty} \|\nabla \bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+\int_0^T \|g'(U_{1\varepsilon}(s)) - g'(U_{2\varepsilon}(s))\|_{L^4} \|\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{L^4} ds \\
&\leq \|(\partial_t \nabla \bar{U}_\varepsilon, \nabla^2 \bar{U}_\varepsilon)(0)\|_{L^2} + \int_0^T \|\nabla N_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+C\Big(\int_0^T \|\nabla \bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+\int_0^T \|\bar{U}_\varepsilon(s))\|_{H^1} \|\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1} \|S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds \\
&+\int_0^T \|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^2} \|\nabla S_{1\varepsilon}(s)\|_{L^\infty} ds + \int_0^T \|\nabla \bar{U}_\varepsilon(s)\|_{L^2} ds \\
&+\int_0^T \|\bar{U}_\varepsilon(s)\|_{H^1} \|\nabla U_{2\varepsilon}(s)\|_{H^1} ds\Big),
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$(H^1 \subset L^4(\mathbb{R}^3))$

Zato je $|g''| < C$.

gde je C_f Lipšicova konstanta za funkciju f.

Slično se može pokazati da su L^2-norme svih izvoda funkcije $\bar{U}_\varepsilon$ nula funkcije. Kao i do sada, izvodi po vremenskoj promenljivoj t funkcije U_ε (u dokazu egzistencije rešenja), odnosno funkcije $\bar{U}_\varepsilon$ (u dokazu jedinstvenosti rešenja), mogu se oceniti izvodima tih funkcija po prostornim promenljivama. $\square$

Glava 4

Stohastičke obične diferencijalne jednačine sa Kolomboovim uopštenim slučajnim procesima

4.1 Uvodne napomene

U ovoj glavi proučavaćemo neke stohastičke obične diferencijalne jednačine, koje ćemo kratko označavati sa SDJ. U prirodnim i inženjerskim naukama stohastičke diferencijalne jednačine se pojavljuju na prirodan način i pri tome najčešće opisuju takozvane "sisteme sa šumom".

U prvom delu ove glave izložićemo rezultate o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja za široku klasu stohastičkih diferencijalnih jednačina. Te rezultate dobio je Oberguggenberger u [36], mada u malo drugačijem obliku - koristeći sekvencijalni prilaz. Mi ćemo ovde koristiti mreže slučajnih procesa, a ne nizove, tako da svaki put kada citiramo neki rezultat iz [36] mi u stvari navodimo odgovarajući rezultat iz tog rada, ali sa mrežama umesto nizovima slučajnih procesa. Takodje ćemo, kao što smo napomenuli u odeljku 1.4.4, procese koje Oberguggenberger u [36] zove uopšteni slučajni procesi, mi ovde, zbog konzistencije, zvati Kolomboovi uopšteni slučajni procesi.

U drugom delu ove glave proučavaćemo, u okviru algebri Kolomboovih uopštenih funkcija, linearne SDJ u kojima se pojavljuju "nestandardni" uopšteni slučajni procesi (na primer, mi ćemo uzeti proces pozitivnog šuma). Sa tim u vezi izložićemo rezultate egzistencije i jedinstvenosti rešenja. Pored toga, proučavaćemo granično ponašanje prva dva momenta rešenja. Rezultati iz ovog dela su deo rada [38] koji je još uvek u pripremi.

4.2 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

U ovom odeljku ćemo izložiti rezultat egzistencije i jedinstvenosti rezultata stohastičkih diferencijalnih jednačina tipa

$$X'(t) = F(X(t), Y(t)), \; t \in \mathbb{R}, \quad X(0) = A, \tag{4.1}$$

u prostorima Kolomboovih uopštenih slučajnih procesa koje smo definisali u odeljku 1.4.4.

Pretpostavljamo da je Y Kolomboov uopšten slučajan proces na $\mathbb{R}$, odnosno, $Y = [(Y_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$, $\varepsilon \in (0,1)$. Početna vrednost je Kolomboova uopštena slučajna promenljiva $A = [(A_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{GR}$, $\varepsilon \in (0,1)$, a funkcija $F = [(F_\varepsilon)_\varepsilon] \in \mathcal{E}[\mathbb{R}^2]$, $\varepsilon \in (0,1)$, je data temperiranom familijom (videti definiciju 1.57).

Rešenje jednačine (4.1), $X = [(X_\varepsilon)_\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0,1)$, ćemo posmatrati kao element prostora $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$.

Dodatno, pretpostavićemo da svaka od funkcija F_ε (koje definišu F) ima globalno ograničen gradient:

$$|\nabla F_\varepsilon(x,y)| \le C \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; \varepsilon \in (0,1), \tag{4.2}$$

za neku konstantu $C > 0$. Specijalno, ova pretpostavka je ispunjena ako je F klasična globalno Lipšicova neprekidna funkcija koja pripada $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^2)$.

Teorema 4.1 *(Rešenje i jedinstvenost, [36]) Neka je F kao gore. Za date $Y \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i $A \in \mathcal{GR}$, problem (4.1) ima jedinstveno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$.*

Dokaz

(*Egzistencija rešenja*) Fiksirajmo $\varepsilon \in (0,1)$. Tada možemo koristiti klasične teoreme za rešenja trajektorija i dobiti jedinstveno rešenje X_ε sa glatkim stazama.

Ostaje da pokažemo da $(X_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R})$. Njegova klasa u $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ će tada biti traženo rešenje.

Za skoro svako fiksirano $\omega \in \Omega$ imamo

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(t) &= A_\varepsilon + t\, F_\varepsilon(0,0) + \int_0^t \partial_y F_\varepsilon(\theta(X_\varepsilon(s), Y_\varepsilon(s)))Y_\varepsilon(s)\, ds \\ &+ \int_0^t \partial_x F_\varepsilon(\theta(X_\varepsilon(s), Y_\varepsilon(s)))X_\varepsilon(s)\, ds, \end{aligned}$$

za neku funkciju θ.

Kako su $F_\varepsilon(0,0)$ i $Y_\varepsilon \restriction_{[0,T]}$ reda ε^{-N} na fiksiranom intervalu $[0,T]$, za svako $T > 0$, a $\partial_x F_\varepsilon$ i $\partial_y F_\varepsilon$ reda $\log \dfrac{1}{\varepsilon}$, primenom Gronvalove nejednakosti dobijamo

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t)| \leq C\, \varepsilon^{-N} \exp(T \log \varepsilon^{-1}) = C\, \varepsilon^{-(N+T)},$$

odnosno, X_ε ima umerenu granicu. Slične ocene za izvode od X_ε direktno slede iz jednačine primenom indukcije.

(*Jedinstvenost rešenja*) Neka su X i $\tilde{X}$ dva rešenja problema (4.1). Tada, postoje $(N_{1\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i $(N_{2\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{NR}$ takvi da

$$\begin{aligned} &(X_\varepsilon - \tilde{X}_\varepsilon) = F_\varepsilon(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) - F_\varepsilon(\tilde{X}_\varepsilon, Y_\varepsilon) + N_{1\varepsilon}, \\ &X_\varepsilon(0) - \tilde{X}_\varepsilon(0) = N_{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$X_\varepsilon(t) - \tilde{X}_\varepsilon(t) = N_{2\varepsilon} + \int_0^t N_{1\varepsilon}(s)ds + \int_0^t \partial_x F_\varepsilon(\theta, Y_\varepsilon)(X_\varepsilon(s) - \tilde{X}_\varepsilon(s))\, ds,$$

za neku funkciju $\theta = \theta(X_\varepsilon, \tilde{X}_\varepsilon)$.

Na osnovu Gronvalove leme

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t) - \tilde{X}_\varepsilon(t)| \leq C\,(1+T)\,\varepsilon^b \exp(T\log\varepsilon^{-1}) = C\,(1+T)\,\varepsilon^{b-T},$$

odnosno, razlika $X_\varepsilon - \tilde{X}_\varepsilon$ je nula funkcija. Slično se mogu oceniti svi izvodi te razlike i na osnovu toga zaključiti da $(X_\varepsilon - \tilde{X}_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_b^\Omega(\mathbb{R})$.

Dakle, $X = \tilde{X}$ pripada $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i time je dokaz završen. □

Ako je $F_\varepsilon \equiv F$, za malo ε, klasična globalno Lipšicova neprekidna funkcija, proces $S \in \mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbb{R})$ je gladak, i početna vrednost $A_\varepsilon = A \in \mathcal{L}^0$ je klasična slučajna promenljiva, onda problem

$$Z' = F(Z,S), \quad Z(0) = A \tag{4.3}$$

ima klasično, glatko rešenje $Z \in \mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbb{R})$. Veoma je važno da se, u tom slučaju, uopšteno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ poklapa sa klasičnim rešenjem Z, kao što je izloženo u sledećoj propoziciji.

Propozicija 4.1 *(Konzistencija, [36]) Neka je $F_\varepsilon \equiv F \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^2)$, zatim neka je $|\nabla F|$ ograničeno i $A_\varepsilon = A \in \mathcal{L}^0$. Pretpostavimo da $S \in \mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbb{R})$. Neka je $Z \in \mathcal{C}_\Omega^\infty(\mathbb{R})$ klasično rešenje jednačine (4.3), a $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ uopšteno rešenje jednačine (4.1) sa $Y = \iota(S)$. Tada je $X = \iota(Z)$ u $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$.*

Dokaz

Na osnovu propozicije 1.11, $(Y_\varepsilon)_\varepsilon \equiv S$, $\varepsilon \in (0,1)$, daje predstavnika za $Y = \iota(S)$. Slično, $(Z_\varepsilon)_\varepsilon$, koje definiše klasično rešenje Z, može biti predstavnik jedinstvenog uopštenog rešenja X. □

Primedba 4.1 *Ovaj pristup nam omogućava da radimo i sa glatkim funkcijama F proizvoljnog rasta i to koristeći pogodnu proceduru sečenja. Sa druge strane, postavljanjem nekih dodatnih uslova na Y, procedura sečenja može postati nepotrebna, kao što je pokazano u sledećem primeru.*

Primer 4.1 *(Primer 4.4 u [36]) Posmatramo jednačinu multiplikativnog šuma*

$$X'(t) = \alpha\, X(t)\, \dot{W}(t), \quad X(0) = A, \tag{4.4}$$

gde $\dot{W} \in \mathcal{G}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$ *označava beli šum (videti primer 1.1),* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i* $A \in \mathcal{GR}$ *je Kolomboova uopštena slučajna promenljiva.*

Bez procedure sečenja desna strana u

$$F(X, \dot{W}) = \alpha\, X(t)\, \dot{W}(t)$$

ne zadovoljava pretpostavke teoreme 4.1. Ipak, zahvaljujući lokalnoj ograničenosti Vinerovog procesa, imamo jedinstveno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$.

Zaista, za $(W_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, *predstavnika od* $\iota(W)$, *na osnovu (1.61), imamo da je* $(\dot{W}_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, *predstavnik od* $\dot{W}$.

Ako je $(X_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, *predstavnik rešenja* $X \in \mathcal{G}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$ *za (4.4) tada, za neke* $(N_{1\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$ *i* $(N_{2\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{NR}$,

$$X'_\varepsilon(t) = \alpha\, X_\varepsilon(t)\, \dot{W}_\varepsilon(t) + N_{1\varepsilon}(t), \quad X_\varepsilon(0) = A_\varepsilon = N_{2\varepsilon},$$

gde je $(A_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, *predstavnik od* A.

Dakle,

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(t) &= (A_\varepsilon + N_{2\varepsilon}) \exp(\alpha W_\varepsilon(t) - \alpha W_\varepsilon(0)) \\ &+ \int_0^t \exp(\alpha W_\varepsilon(t) - \alpha W_\varepsilon(s)) N_{1\varepsilon}(s)\, ds. \end{aligned}$$

Na osnovu ograničenosti po trajektorijama $(W_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, *na svakom intervalu* $[0,T]$, *nezavisno od* ε, *mreža* $(X_\varepsilon)_\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, *pripada* $\mathcal{E}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$. *Ona definiše rešenje.*

Lako se može videti da je to rešenje jedinstveno obzirom da izrazi koji sadrže $N_{1\varepsilon}$ *i* $N_{2\varepsilon}$ *pripadaju* $\mathcal{N}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$. *Predstavnik rešenja je*

$$\tilde{X}_\varepsilon(t) = A_\varepsilon \exp(\alpha W_\varepsilon(t) - \alpha W_\varepsilon(0)).$$

U slučaju kada je A_ε *klasična slučajna promenljiva* A, $X_\varepsilon(t)$ *ili* $\tilde{X}_\varepsilon(t)$ *konvergiraju, po trajektorijama uniformno po* $t \in [0,T]$, *ka*

$$Z(t) = A\, \exp(\alpha W_\varepsilon(t)), \quad \text{kada } \varepsilon \to \infty.$$

To možemo tumačiti kao da je uopšteno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ asocirano sa klasičnim procesom $Z \in \mathcal{C}_\Omega(\mathbb{R})$.

U opštem slučaju, kada umesto belog šuma u (4.4) imamo proizvoljan uopšteni slučajan proces teško je dati odgovor da li je uopšteno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ asocirano sa nekim klasičnim slučajnim procesom ili ne. Siguran pozitivan odgovor imamo postoji samo za glatke procese. Tada je X jednako klasičnom rešenju.

4.3 SDJ koje sadrže proces pozitivnog šuma

U ovom odeljku posmatramo linearne SDJ sa "nestandardnim" aditivnim uopštenim slučajnim procesima u okviru Kolomboovih algebri. Prvo ćemo posmatrati jednačinu sa "uobičajenim" pozitivnim šumom.

U nastavku će $\varphi \geq 0$ biti simetrična funkcija i $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ će biti nenegativna unimodalna model delta mreža. Podsetimo se, uglačani beli šum

$$\dot{W}_\varepsilon = \dot{W} * \varphi_\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

je Gausovski uopšten slučajan proces (za svako ε) sa srednjom vrednošću nula i disperzijom $V(\dot{W}_\varepsilon(t)) = \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2 = \sigma_\varepsilon^2$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Proces pozitivnog šuma W^+ se može definisati kao elemenat $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ predstavnikom (takozvanim procesom uglačanog pozitivnog šuma)

$$W_\varepsilon^+ = \exp\left(\dot{W}_\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right) \in \mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R}),$$

gde je $\dot{W}_\varepsilon$ uglačani beli šum i σ_ε^2 je kao gore.

U odeljku 1.3 je pokazano da je uglačani pozitivan šum uopšteni slučajni proces, log-normalno raspodeljen sa srednjom vrednošću 1 i disperzijom $V(W_\varepsilon^+(t)) = e^{\sigma_\varepsilon^2} - 1$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Posmatramo Košijev problem

$$X'(t) = a(t)\, X(t) + b(t)\, W^+(t), \quad t \geq 0 \tag{4.5}$$
$$X(0) = X_0, \tag{4.6}$$

gde je $W^+(t) \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ pozitivan šum i $X_0 = [X_{0\varepsilon}] \in \mathcal{GR}$ je Kolomboova uopštena slučajna promenljiva.

Pretpostavićemo da je $a(t)$ deterministička, glatka integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$ i označićemo

$$\tilde{a}(\tau) = \int_0^{\tau} a(t)\, dt. \tag{4.7}$$

Takodje ćemo za funkciju $b(t)$ pretpostaviti da je deterministička i glatka na $\mathbb{R}$ takva da

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\tilde{a}(x)} b(x)\, dx < \infty.$$

Teorema 4.2 *Pod uslovima navedenim gore problem (4.5)-(4.6) ima jedinstveno rešenje* $X \in \mathcal{G}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$.

Dokaz

Fiksiramo $\omega \in \Omega$ i $\varepsilon \in (0,1)$. Košijev problem (4.5)-(4.6) dat sa predstavnicima glasi

$$X_\varepsilon'(t) = a(t)\, X_\varepsilon(t) + b(t)\, W_\varepsilon^+(t), \quad t \geq 0 \tag{4.8}$$

$$X_\varepsilon(0) = X_{0\varepsilon}, \tag{4.9}$$

gde $(W_\varepsilon^+)_\varepsilon \in \mathcal{E}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$ i $(X_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{ER}_b$. Problem (4.8)-(4.9) ima rešenje

$$X_\varepsilon(t) = X_{0\varepsilon} e^{\tilde{a}(t)} + e^{\tilde{a}(t)} \int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, W_\varepsilon^+(\tau)\, d\tau. \tag{4.10}$$

Pokažimo da $(X_\varepsilon)_\varepsilon$ pripada $\mathcal{E}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$. Prvo, iz (4.10) imamo

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t)| \leq |X_{0\varepsilon}|\, e^{\max_{t\in[0,T]} |\tilde{a}(t)|}$$

$$+ e^{\max_{t\in[0,T]} |\tilde{a}(t)|} \int_0^t e^{-\min_{\tau\in[0,T]} |\tilde{a}(\tau)|} \max_{\tau\in[0,T]} |b(\tau)| \sup_{\tau\in[0,T]} |W_\varepsilon^+(\tau)|\, d\tau.$$

Kako $(W_\varepsilon^+)_\varepsilon \in \mathcal{E}_b^{\Omega}(\mathbb{R})$ i $(X_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{ER}_b$ korišćenjem činjenice da su $\tilde{a}(t)$ i $b(t)$ neprekidne, dobijamo

$$\sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t)| \leq C_1 \varepsilon^{b_1} + C_2 T \varepsilon^{b_2},$$

za neke $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ i neke $C_1, C_2 > 0$. Dakle, $\sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t)|$ ima umerenu granicu.

Umerenu granicu prvog izvoda od X_ε dobijamo iz (4.8):

$$\sup_{t\in[0,T]} |X'_\varepsilon(t)| \leq C_1 \sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t)| + C_2 \sup_{t\in[0,T]} |W_\varepsilon^+(t)|.$$

Kako $(W_\varepsilon^+)_\varepsilon \in \mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i $\sup_{t\in[0,T]} |X_\varepsilon(t)|$ ima umerenu granicu, vidimo da i $\sup_{t\in[0,T]} |X'_\varepsilon(t)|$ ima umerenu granicu.

Sukcesivnim diferenciranjem mogu se oceniti izvodi višeg reda od X_ε i dobiti njihove umerene granice.

Dakle, $(X_\varepsilon)_\varepsilon$ pripada $\mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i $X = [X_\varepsilon] \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ definiše rešenje problema (4.5)-(4.6). Lako se može pokazati da je to rešenje jedinstveno u $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i to posmatranjem jednačine

$$\begin{aligned} \tilde{X}'_\varepsilon(t) &= a(t)\, \tilde{X}_\varepsilon(t) + N_\varepsilon(t), \\ \tilde{X}_\varepsilon(0) &= N_{0\varepsilon}, \end{aligned}$$

gde $(\tilde{X}_\varepsilon)_\varepsilon = (X_{1\varepsilon} - X_{2\varepsilon})_\varepsilon$ i gde su $(X_{1\varepsilon})_\varepsilon, (X_{2\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R})$ dva rešenja jednačine (4.8), i $(N_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{N}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i $(N_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}\mathcal{R}$.

Nakon sličnog postupka kao u dokazu egzistencije rešenja dobijamo da $(X_{1\varepsilon} - X_{2\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{N}_b^\Omega(\mathbb{R})$. Dakle, rešenje X jednačine (4.5) je jedinstveno u $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$. $\square$.

Označimo, za fiksirano $\varepsilon \in (0,1)$,

$$E(X_{0\varepsilon}) = x_{0\varepsilon}.$$

Očekivanje rešenja $X_\varepsilon(t)$ problema (4.8)-(4.9) je

$$E(X_\varepsilon(t)) = E(X_{0\varepsilon})e^{\tilde{a}(t)} + e^{\tilde{a}(t)} \int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, E\left(W_\varepsilon^+(\tau)\right)\, d\tau,$$

odnosno, kako je $E\left(W_\varepsilon^+(\tau)\right) = 1$, imamo

$$E(X_\varepsilon(t)) = x_{0\varepsilon}e^{\tilde{a}(t)} + e^{\tilde{a}(t)} \int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, d\tau. \tag{4.11}$$

Očigledno je da se očekivanje X_ε problema (4.8)-(4.9) poklapa sa rešenjem jednačine koja se dobija iz (4.8)-(4.9) uzimanjem srednjih vrednosti koeficijenata:

$$\begin{aligned} \overline{X}'_\varepsilon(t) &= a(t)\, \overline{X}_\varepsilon(t) + b(t) \\ \overline{X}_\varepsilon(0) &= x_{0\varepsilon}. \end{aligned}$$

Ako dodatno pretpostavimo da

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x_{0\varepsilon} = x_0 < \infty,$$

tada

$$E(X_\varepsilon(t)) \to x_0 e^{\tilde{a}(t)} + e^{\tilde{a}(t)} \int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, d\tau, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0.$$

Medjutim, drugi momenat rešenja $X_\varepsilon(t)$ divergira kada ε teži nuli. Zaista, drugi momenat od $X_\varepsilon(t)$ je

$$\begin{aligned} E(X_\varepsilon^2(t)) &= E(X_{0\varepsilon}^2)\, e^{2\tilde{a}(t)} + E(X_{0\varepsilon})\, e^{2\tilde{a}(t)} \int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, d\tau \\ &+ e^{2\tilde{a}(\tau)} E\left(\left(\int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, W_\varepsilon^+(\tau)\, d\tau\right)^2\right). \end{aligned}$$

Očekivanje poslednjeg izraza na desnoj strani je

$$\begin{aligned} & E\left(\left(\int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, W_\varepsilon^+(\tau)\, d\tau\right)^2\right) \\ &= E\left(\int_0^t \int_0^t e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, W_\varepsilon^+(x) e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, W_\varepsilon^+(y)\, dx\, dy\right) \\ &= \int_0^t \int_0^t e^{-\tilde{a}(x)-\tilde{a}(y)}\, b(x)\, b(y)\, E\left(W_\varepsilon^+(x)\, W_\varepsilon^+(y)\right)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Divergencija drugog momenta rešenja X_ε je posledica sledećeg tvrdjenja.

Propozicija 4.2 *Neka je $W^+ \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ proces pozitivnog šuma. Tada*

$$E\left(W_\varepsilon^+(x)\, W_\varepsilon^+(y)\right) \to \infty, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0. \tag{4.12}$$

Dokaz

Kovarijansa procesa belog šuma je

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(\dot W * \varphi_\varepsilon(x), \dot W * \varphi_\varepsilon(y)\right) &= \int \varphi_\varepsilon(x-z)\,\varphi_\varepsilon(y-z)\,dz \\
&= \int \varphi_\varepsilon(z')\,\varphi_\varepsilon(y-x+z')\,dz' \\
&= \int \varphi_\varepsilon(z')\,\check\varphi_\varepsilon(x-y-z')\,dz' \\
&= \varphi_\varepsilon * \check\varphi_\varepsilon\,(x-y).
\end{aligned}$$

Kako smo pretpostavili da je mreža φ sijmetrična, $\check\varphi = \varphi$. Označimo $t = x - y$. Kovarijansna matrica je tada

$$C_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varphi_\varepsilon * \check\varphi_\varepsilon\,(0) & \varphi_\varepsilon * \check\varphi_\varepsilon\,(t) \\ \varphi_\varepsilon * \check\varphi_\varepsilon\,(t) & \varphi_\varepsilon * \check\varphi_\varepsilon\,(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & \tau_\varepsilon^2(t) \\ \tau_\varepsilon^2(t) & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix},$$

gde $\sigma_\varepsilon^2 = \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2$ i

$$\tau_\varepsilon^2(t) := \varphi_\varepsilon * \check\varphi_\varepsilon\,(t) = \varphi_\varepsilon * \varphi_\varepsilon\,(t).$$

Primetimo da

$$\sigma_\varepsilon^2 = \varphi_\varepsilon * \check\varphi_\varepsilon\,(0) > \varphi_\varepsilon * \check\varphi_\varepsilon\,(t) = \tau_\varepsilon^2(t), \quad \text{za } t \neq 0. \tag{4.13}$$

Kako je

$$\det C_\varepsilon = \sigma_\varepsilon^4 - \tau_\varepsilon^4(t)$$

lako možemo izračunati inverznu matricu kovarijansne matrice

$$C_\varepsilon^{-1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^4 - \tau_\varepsilon^4(t)} \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & -\tau_\varepsilon^2(t) \\ -\tau_\varepsilon^2(t) & \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Za $x \neq y$ imamo da

$$\begin{aligned}
&E\left(W_\varepsilon^+(x)\,W_\varepsilon^+(y)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_\varepsilon^2}\frac{1}{\sqrt{\det C_\varepsilon}}\, e^{x+y} e^{-\frac{1}{2}(x,y)C_\varepsilon^{-1}(x,y)^T}\,dx\,dy.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Smenom promenljivih

$$\sqrt{C_\varepsilon^{-1}}(x,y)^T \mapsto (x_1,y_1)^T$$

na osnovu koje je

$$(x,y)^T \mapsto \sqrt{C_\varepsilon}(x_1,y_1)^T,$$

dobijamo

$$d(x_1,y_1) = \frac{1}{\sqrt{\det C_\varepsilon}}\, d(x,y).$$

Korišćenjem

$$(\sigma_\varepsilon^2 - \lambda)^2 - \tau_\varepsilon^4 = 0 \quad \text{for} \quad \lambda = \sigma_\varepsilon^2 \pm \tau_\varepsilon^2$$

matricu C_ε možemo zapisati u dijagonalnom obliku

$$C_\varepsilon = Q \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 + \tau_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 - \tau_\varepsilon^2 \end{pmatrix} Q^T,$$

gde smo označili

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zato je,

$$\sqrt{C_\varepsilon} = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \tau_\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 - \tau_\varepsilon^2} \end{pmatrix} Q^T,$$

i

$$(x,y)^T = Q \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \tau_\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 - \tau_\varepsilon^2} \end{pmatrix} Q^T\, (x_1,y_1)^T.$$

Nakon izvodjenja elementarnih računskih operacija dobijamo

$$x + y = \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \tau_\varepsilon^2}\, x_1 + \sqrt{\sigma_\varepsilon^2 + \tau_\varepsilon^2}\, y_1. \tag{4.15}$$

Vraćanjem na problem (4.14) dobijamo

$$E\left(W_\varepsilon^+(x)\,W_\varepsilon^+(y)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_\varepsilon^2}\, e^{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\tau_\varepsilon^2}(x_1+y_1)-\frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}}\,dx_1\,dy_1. \tag{4.16}$$

Korišćenjem relacije

$$e^{-\sigma_\varepsilon^2}\, e^{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\tau_\varepsilon^2}(x_1+y_1)-\frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}} = e^{\tau_\varepsilon^2} e^{-\frac{1}{2}\left(x_1-\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\tau_\varepsilon^2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(y_1-\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\tau_\varepsilon^2}\right)^2}$$

možemo zapisati (4.16) kao

$$\begin{aligned}
&E\left(W_\varepsilon^+(x)\,W_\varepsilon^+(y)\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau_\varepsilon^2} e^{-\frac{1}{2}\left(x_1-\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\tau_\varepsilon^2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(y_1-\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\tau_\varepsilon^2}\right)^2}\,dx_1\,dy_1\\
&= e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left(x_1-\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\tau_\varepsilon^2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(y_1-\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+\tau_\varepsilon^2}\right)^2}\,dx_1\,dy_1\\
&= e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)},
\end{aligned}$$

za $x \neq y$. Kako $\tau_\varepsilon^2 \to \infty$, kada $\varepsilon \to 0$, dobijamo (4.12). $\square$

Divergencija disperzije rešenja jednačine (4.8)-(4.9) nas je motivisala da uvedemo "novi" proces pozitivnog šuma koji predstavlja renormalizaciju uobičajenog pozitivnog šuma u asimptotskom smislu. Taj novi proces ćemo stoga zvati renormalizovani pozitivan šum.

Preciznije, definišemo uopšteni slučajan proces $\tilde{W}^+(t)$, kao elemenat prostora $\mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$, definisan predstavnikom

$$\tilde{W}_\varepsilon^+(t) = \exp\left(\dot{W}_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{2}\log C^2\int_0^T\int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(r-s)}dr\,ds\right), \tag{4.17}$$

gde $t \in [0,T]$, $T > 0$, $C \neq 0$ je konstanta, $(\dot{W}_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R})$ je proces uglačanog belog šuma, a $\tau_\varepsilon^2 = \varphi_\varepsilon * \check{\varphi}_\varepsilon$. U stvari,

$$\tilde{W}_\varepsilon^+(t) = \frac{W_\varepsilon^+(t)}{|C|\sqrt{\int_0^T\int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(r-s)}dr\,ds}}, \quad t \in [0,T],\ T > 0, \tag{4.18}$$

$W_\varepsilon^+(t) = \exp\left(W_\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\|\varphi_\varepsilon\|_{L^2}^2\right)$

gde je $W_\varepsilon^+(t)$ uobičajen pozitivan šum.

Renormalizovan pozitivan šum $\tilde{W}^+(t) \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$, konstruisan na navedeni način, ima srednju vrednost koja konvergira ka konstanti (tačnije, ka nuli) i disperziju koja teži beskonačnosti kada ε teži nuli. To ga čini pogodnim za opisivanje brzo fluktuirajućih pojava.

Lema 4.1 *Neka je $\tilde{W}^+(t) \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ renormalizovan pozitivan šum. Tada*

$$E\left(\tilde{W}_\varepsilon^+(t)\right) \to 0, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0,$$

i

$$V\left(\tilde{W}_\varepsilon^+(t)\right) \to \infty, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0,$$

Dokaz

Neka $t \in [0,T]$, $T > 0$. Prvo tvrdjenje lako sledi jer imamo

$$\begin{aligned}
E\left(\tilde{W}_\varepsilon^+(t)\right) &= \frac{E\left(W_\varepsilon^+(t)\right)}{|C|\sqrt{\int_0^T \int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(r-s)} dr\, ds}} \\
&= \frac{1}{|C|\sqrt{\int_0^T \int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(r-s)} dr\, ds}} \to 0, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0,
\end{aligned}$$

Za drugi momenat od $\tilde{W}_\varepsilon^+(t)$ imamo

$$\begin{aligned}
E\left(\left(\tilde{W}_\varepsilon^+(t)\right)^2\right) &= \frac{E\left(\left(W_\varepsilon^+(t)\right)^2\right)}{\left(|C|\sqrt{\int_0^T \int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(r-s)} dr\, ds}\right)^2} \\
&= \frac{e^{\sigma_\varepsilon^2}}{C^2 \int_0^T \int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(r-s)} dr\, ds} \\
&= \frac{1}{C^2T^2} \, \frac{\int_0^T \int_0^T e^{\sigma_\varepsilon^2} dr\, ds}{\int_0^T \int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(r-s)} dr\, ds}.
\end{aligned}$$

Kako važi (4.13), dobijamo

$$\frac{\displaystyle\int_0^T \int_0^T e^{\sigma_\varepsilon^2} dr\, ds}{\displaystyle\int_0^T \int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2 (r-s)} dr\, ds} \to \infty, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0.$$

Konačno, divergencija drugog momenta procesa $\tilde{W}_\varepsilon^+(t)$ implicira divergenciju disperzije $V\left(\tilde{W}_\varepsilon^+(t)\right)$. □

Sada ćemo posmatrati jednačinu

$$X'(t) = a(t)\ X(t) + b(t)\ \tilde{W}^+(t), \quad t \geq 0 \tag{4.19}$$

$$X(0) = X_0, \quad t \in [0, T),\ T > 0, \tag{4.20}$$

gde je $\tilde{W}^+(t) \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ renormalizovan pozitivan šum i $X_0 = [X_{0\varepsilon}] \in \mathcal{GR}$ je Kolomboova uopštena slučajna promenljiva.

Neka je $a(t)$ kao u prethodnom slučaju, odnosno, deterministička, glatka integrabilna funkcija na $\mathbb{R}$ i neka je $\tilde{a}(\tau)$ dato sa (4.7).

Takodje, za $b(t)$ ćemo pretpostaviti da je deterministička i glatka funkcija na $\mathbb{R}$ takva da

$$\int e^{-\alpha \tilde{a}(x)} b^\alpha(x)\, dx < \infty, \quad \alpha = 1, 2.$$

Problem (4.19)-(4.20) dat sa predstavnicima glasi

$$X_\varepsilon'(t) = a(t)\ X_\varepsilon(t) + b(t)\ \tilde{W}_\varepsilon^+(t), \quad t \geq 0 \tag{4.21}$$

$$X_\varepsilon(0) = X_{0\varepsilon}, \tag{4.22}$$

gde $(\tilde{W}_\varepsilon^+)_\varepsilon \in \mathcal{E}_b^\Omega(\mathbb{R})$ i $(X_{0\varepsilon})_\varepsilon \in \mathcal{ER}_b$.

Dokaz sledećeg tvrdjenja je veoma sličan dokazu teoreme 4.2, pa ćemo ga zato preskočiti.

Teorema 4.3 *Pod navedenim uslovima problem (4.19)-(4.20) ima jedinstveno rešenje $X \in \mathcal{G}_b^\Omega(\mathbb{R})$ dato sa*

$$X_\varepsilon(t) = X_{0\varepsilon} e^{\tilde{a}(t)} + e^{\tilde{a}(t)} \int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\ b(\tau)\ \tilde{W}_\varepsilon^+(\tau)\, d\tau. \tag{4.23}$$

Označimo $E(X_{0\varepsilon}) = x_{0\varepsilon}$, $E(X_{0\varepsilon}^2) = \tilde{x}_{0\varepsilon}$ i pretpostavimo da

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_{0\varepsilon} = x_0 < \infty \quad \text{i} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{x}_{0\varepsilon} = \tilde{x}_0 < \infty. \tag{4.24}$$

Sada imamo, kao što tvrdimo u teoremi koja sledi, da prvi moment rešenja X_ε problema (4.21)-(4.22) konvergiraka nuli kada ε teži nuli, dok drugi konvergira ka konačnoj vrednsoti, što je upravo i bio razlog za uvodjenje renormalizovanog pozitivnog šuma $\tilde{W}^+(t)$.

Teorema 4.4 *Neka je X_ε rešenje problema (4.21)-(4.22). Tada*

$$E(X_\varepsilon(t)) \to x_0 e^{\tilde{a}(t)}, \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0,$$
$$E(X_\varepsilon^2(t)) \to \tilde{x}_0 e^{2\tilde{a}(t)} + \frac{e^{2\tilde{a}(t)}}{C^2 T} \int_0^t e^{-2\tilde{a}(y)} b^2(y)\, dy, \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0.$$

Dokaz

Primetimo najpre da za očekivanje od $X_\varepsilon(t)$ dato sa (4.23) važi

$$E(X_\varepsilon(t)) = E(X_{0\varepsilon}) e^{\tilde{a}(t)} + e^{\tilde{a}(t)} \int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, E\left(\tilde{W}_\varepsilon^+(\tau)\right)\, d\tau.$$

Očigledno je da se to očekivanje poklapa sa rešenjem jednačine (4.21)-(4.22) kada u toj jednačini uzmemo srednje vrednosti koeficijenata.

Kako je

$$E\left(\tilde{W}_\varepsilon^+(\tau)\right) \to 0, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0,$$

korišćenjem (4.24) dobijamo

$$E(X_\varepsilon(t)) \to x_0 e^{\tilde{a}(t)}, \quad \text{kada } \varepsilon \to 0.$$

Drugi momenat rešenja $X_\varepsilon(t)$ je

$$\begin{aligned} E(X_\varepsilon^2(t)) &= \tilde{x}_{0\varepsilon}\, e^{2\tilde{a}(t)} + x_{0\varepsilon}\, e^{2\tilde{a}(t)} \int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, d\tau \\ &+ e^{2\tilde{a}(\tau)} E\left(\left(\int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, \tilde{W}_\varepsilon^+(\tau)\, d\tau\right)^2\right). \end{aligned}$$

Očekivanje poslednjeg izraza na desnoj strani je

$$
\begin{aligned}
&E\left(\left(\int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, \tilde{W}_\varepsilon^+(\tau)\, d\tau\right)^2\right)\\
&= E\left(\int_0^t \int_0^t e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, \tilde{W}_\varepsilon^+(x) e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, \tilde{W}_\varepsilon^+(y)\, dx\, dy\right),
\end{aligned}
$$

odnosno,

$$
\begin{aligned}
&E\left(\left(\int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, \tilde{W}_\varepsilon^+(\tau)\, d\tau\right)^2\right)\\
&= \int_0^t \int_0^t e^{-\tilde{a}(x)-\tilde{a}(y)}\, b(x)\, b(y)\, E\left(\tilde{W}_\varepsilon^+(x)\, \tilde{W}_\varepsilon^+(y)\right)\, dx\, dy.
\end{aligned}
$$

Korišćenjem relacije (4.18) lako dobijamo

$$
E\left(\tilde{W}_\varepsilon^+(x)\, \tilde{W}_\varepsilon^+(y)\right) = \frac{E\left(W_\varepsilon^+(x) W_\varepsilon^+(y)\right)}{C^2 \displaystyle\int_0^T \int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(r-s)} dr\, ds}, \quad t \in [0,T],\ T > 0. \tag{4.25}
$$

Medjutim, u dokazu propozicije 4.2, videli smo da je

$$
E\left(W_\varepsilon^+(x) W_\varepsilon^+(y)\right) = e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)},
$$

gde je $\tau_\varepsilon^2(t) := \varphi_\varepsilon * \check{\varphi}_\varepsilon\ (t)$ i $(\varphi_\varepsilon)_\varepsilon$ je nenegativna model delta mreža.

To znači da je

$$
\begin{aligned}
&E\left(\left(\int_0^t e^{-\tilde{a}(\tau)}\, b(\tau)\, \tilde{W}_\varepsilon^+(\tau)\, d\tau\right)^2\right)\\
&= \frac{\displaystyle\int_0^t \int_0^t e^{-\tilde{a}(x)} e^{-\tilde{a}(y)}\, b(x)\, b(y)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx\, dy}{C^2 \displaystyle\int_0^T \int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx\, dy},
\end{aligned}
$$

gde $t \in [0,T)$ za $T > 0$.

Sada hoćemo da izračunamo limit izraza

$$\frac{\int_0^t e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, dy \int_0^t e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx}{C^2 \int_0^T dy \int_0^T e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx}, \tag{4.26}$$

kada ε teži.

Kako je $\tau_\varepsilon^2(t) = 0$ kada $t \notin [-\varepsilon, \varepsilon]$, izraz (4.26) možemo zapisati kao

$$\frac{\int_0^t e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, dy \left(\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx + A_\varepsilon(y)\right)}{C^2 \int_0^T dy \left(\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx + B_\varepsilon(y)\right)}, \tag{4.27}$$

gde

$$A_\varepsilon(y) = \int_0^{y-\varepsilon} e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, dx + \int_{y+\varepsilon}^t e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, dx$$

i

$$B_\varepsilon(y) = \int_0^{y-\varepsilon} dx + \int_{y+\varepsilon}^T dx,$$

za $t \in [0, T]$, $T > 0$.

Prvo, primetimo da kada ε teži nuli, i brojilac i imenilac u (4.27) teže beskonačnosti.

Sa druge strane, očigledno je da su izrazi A_ε i B_ε konačni kada ε teži nuli.

Stoga je za izračunavanje limita (kada ε teži nuli) izraza (4.27) dovoljno da izračunamo limit izraza

$$\frac{\int_0^t e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, dy \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx}{C^2 \int_0^T dy \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx}, \tag{4.28}$$

kada ε teži nuli.

Molifajer $\varphi \geq 0$ je simetričan što implicira

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx = 2\int_{y}^{y+\varepsilon} e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx$$

i

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx = 2\int_{y}^{y+\varepsilon} e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx.$$

Dakle, treba da izračunamo limit

$$\frac{\displaystyle\int_0^t e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, dy \int_y^{y+\varepsilon} e^{-\tilde{a}(x)}\, b(x)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx}{\displaystyle C^2 \int_0^T dy \int_y^{y+\varepsilon} e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx}, \tag{4.29}$$

kada ε teži nuli.

Smenom promenljivih $x - y \mapsto x$ prethodni izraz postaje

$$\frac{\displaystyle\int_0^t e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, dy \int_0^{\varepsilon} e^{-\tilde{a}(x+y)}\, b(x+y)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x)}\, dx}{\displaystyle C^2 \int_0^T dy \int_0^{\varepsilon} e^{\tau_\varepsilon^2(x)}\, dx}. \tag{4.30}$$

Označimo

$$R_\varepsilon(x) = \int_0^{\varepsilon} e^{\tau_\varepsilon^2(x-y)}\, dx. \tag{4.31}$$

Imenilac u (4.30) je tada $C^2\, T\, R_\varepsilon(x)$.

Dodavanjem i oduzimanjem izraza

$$\int_0^t e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, dy \int_0^{\varepsilon} e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x)}\, dx,$$

brojilac u (4.30) postaje

$$\begin{aligned} &R_\varepsilon(x) \int_0^t e^{-2\tilde{a}(y)}\, b^2(y)\, dy \\ &+ \int_0^t e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, dy \int_0^{\varepsilon} \Big(e^{-\tilde{a}(x+y)}\, b(x+y) - e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\Big)\, e^{\tau_\varepsilon^2(x)}\, dx. \end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke, $e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)$ je neprekidna funkcija i stoga,

$$\int_0^t e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\, dy \int_0^{\varepsilon} \left(e^{-\tilde{a}(x+y)}\, b(x+y) - e^{-\tilde{a}(y)}\, b(y)\right) e^{\tau_\varepsilon^2(x)} \sim \varepsilon R_\varepsilon(x),$$

za dovoljno malo ε.

Konačno, to znači da nas u stvari interesuje limit izraza

$$\frac{R_\varepsilon(x) \displaystyle\int_0^t e^{-2\tilde{a}(y)}\, b^2(y)\, dy + \varepsilon R_\varepsilon(x)}{C^2\, T\, R_\varepsilon(x)}$$

kada ε teži nuli.

Puštanjem da ε teži nuli lako dobijamo

$$\frac{R_\varepsilon(x) \displaystyle\int_0^t e^{-2\tilde{a}(y)}\, b^2(y)\, dy + \varepsilon R_\varepsilon(x)}{C^2\, T\, R_\varepsilon(x)} \to \frac{\displaystyle\int_0^t e^{-2\tilde{a}(y)}\, b^2(y)\, dy}{C^2\, T}, \text{ kada } \varepsilon \to 0,$$

što implicira

$$E(X_\varepsilon^2(t)) \to \tilde{x}_0 e^{2\tilde{a}(t)} + \frac{e^{2\tilde{a}(t)}}{C^2 T} \int_0^t e^{-2\tilde{a}(y)} b^2(y)\, dy, \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

Time je dokaz završen. □

Literatura

[1] Albeverio S, Haba Z and Russo F (1996), *Trivial solutions for a non-linear two-space-dimensional wave equation perturbed by space-time white noise*, Stochastics and Stochastics Reports 56, no. 1-2, 127-160.

[2] Albeverio S and Kurasov (2000), *Singular Perturbations of Differential Operators*, London Math. Soc., Lect. Notes Ser. 271, Cambridge Univ. Press.

[3] Arnold L (1974), *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, Wiley-Interscience, John Wiley and Sons, New York.

[4] Berezin F A and Fadeev L D (1961), *Remarks on the Schrödinger equation with singular potential*, Doklady Akad. Nauk SSSR, 137, 1011-1014.

[5] Biagioni H A (1990), *A Nonlinear Theory of Generalized Functions*, Lect. Notes Math. 1421, Springer, Berlin.

[6] Biagioni H A, Cadeddu L and Gramchev T, *Semilinear parabolic equations with singular initial data in anisotropic weighted spaces*, Preprint.

[7] Biagioni H A and Oberguggenberger M (1992), *Generalized solutions to the Korteweg-de Vries and the regularized long-wave equations*, SIAM J. Math. Anal. 23, 923-940.

[8] Brézis H and Friedman A (1983), *Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions*, J. Math. Pures Appl., **62**, 73-97.

[9] Colombeau J F (1983), *New Generalized Functions and Multiplication of the Distributions*, North Holland, Amsterdam.

[10] Colombeau J F (1985), *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, North Holland, Amsterdam.

[11] Colombeau J F, Heibig A and Oberguggenberger M (1996), *Generalized solutions to partial differential equations of evolution type*, Acta Appl. Math. **45**, 115 - 142.

[12] Colombeau J F and Langlais M (1990), *Generalized solutions of nonlinear parabolic equations with distributions as initial conditions*, J. Math. Anal. Appl., **145**, 186-196.

[13] Djapić N, Kunzinger M and Pilipović S (2001), *Symmetry group analysis of weak solutions*, Proc. London Math. Soc., to appear.

[14] Egorov Yu V (1990), *A contribution to the theory of generalized functions* Russian Math. Surveys, **45:5**, 1-49.

[15] Grosser M, Farkas E, Kunzinger M and Steinbauer R (2001), *On the foundations of nonlinear generalized functions I, II* Mem. Am. Math. Soc., **153**.

[16] Grosser M, Kunzinger M, Steinbauer R and Vickers J A (2001), *A global theory of algebras of generalized functions*, Adv. Math., to appear.

[17] Hida T, Kuo H H, Potthoff J and Streit L (1993), *White Noise, An Infinite Dimensional Calculus*, Kluwer, Dordrecht.

[18] Holden H, Øksendal B, Ubøe J and Zhang S (1996), *Stochastic Partial Differential Equations*, Birkhäuser-Verlag, Basel.

[19] Itô K (1951), *On Stochastic Differenatial Equations*, New York, Memoirs, Amer. Math. Soc. No. 4.

[20] Jörgens K (1961), *Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nicht-linearer Wellengleichungen*, Math. Z. **77**, 295-308.

[21] Kato T (1994), *The Navier-Stokes equation for an incompressible fluid in $\mathbb{R}^2$ with a measure as the initial vorticity*, Diff. Int. Eqs., **7**, 949-966.

[22] Kato T and Ponce G (1994), *The Navier-Stokes equation with weak initial data*, International Mathematics Research Notes, **10**, 1-10.

[23] Kichenassamy S (1996), *Nonlinear wave equations*, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel-Hong Kong.

[24] Kozono H and Yamazaki M (1994), *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. Partial Differential Equations, **19**, 959-1014.

[25] Ladyzhenskaya O A, Solonnikov V A and Ural'tseva N N (1967), *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, Nauka, Moscow.

[26] Léandre R, Russo, F (1992), *Small stochastic perturbation of a one-dimensional wave equation*, in Stochastic analysis and related topics, eds Körezlioğlu H and Üstünel A S, Birkhäuser, Boston. Prog. Probab. 31, 285-332.

[27] Lions J L (1960), *Semi-groupes distributions*, Portugal. Math., 19, 141-164.

[28] Mijatović M and Pilipović S (1999), *A class of distribution exponentially bounded semigroups*, Preprint.

[29] Nedeljkov M, Oberuggenberger M and Pilipović S, *Generalized solutions to a semilinear wave equation*, Preprint.

[30] Nedeljkov M, Pilipović S and Scarpalézos D (1998), *The Linear Theory of Colombeau Generalized Functions*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, Essex.

[31] Nedeljkov M, Pilipović S and Rajter D (2001), *Semigroups in generalized function algebras. Heat equation with singular potential and singular data*, Preprint.

[32] Nedeljkov M and Rajter D (2001), *Semigroups and PDEs with perturbations*, Integral Transforms and Special functions, to appear.

[33] Nedeljkov M and Rajter D (2001), *Nonlinear stochastic wave equation with Colombeau generalized stochastic processes*, Math. Models Methods Appl. Sci., to appear.

[34] Oberguggenberger M (1992), *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations*, Pitman Res. Not. Math. 259, Longman Sci. Techn., Essex.

[35] Oberguggenberger M (1994), *Nonlinear theories of generalized functions*, In: Advances in Analysis, Probability, and Mathematical Physics - Contribution from Nonstandard Analysis (Albeverio S, Luxemburg W A J, Wolff M P H, eds.), Kluwer, Dordrecht.

[36] Oberguggenberger M (1995), Generalized functions and stochastic processes. In: Bolthausen E, Dozzi M, Russo F (Eds.), Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications. Birkhäuser-Verlag, Basel. Prog. Probab **36**, 215 - 229.

[37] Oberguggenberger M and Kunzinger M (1999), Characterization of Colombeau generalized functions by their pointvalues. Math. Nachr., **203**, 147 - 157.

[38] Oberguggenberger M and Rajter D, *Singular limits in stochastic differential equations*, Preprint.

[39] Oberguggenberger M and Russo F, *Nonlinear stochastic wave equations*, Integral Transforms and Special Functions, Vol. 6, No. 1-4, 71-83, 1998.

[40] Oberguggenberger M, Russo F (1998), Nonlinear SPDEs: Colombeau solutions and pathwise limits. In: Decreusefond L, Gjerde J, Øksendal B, Üstünel A S (Eds.), Stochastic Analysis and Related Topics VI. Birkhäuser, Boston. Prog. Probab. 42, 319 - 332.

[41] Pazy A (1983), *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York Inc.

[42] Peszat S, Zabczyk J (2000), Nonlinear stochastic wave and heat equations. Probab. Theory Relat. Fields **116**, 421-443.

[43] Reed M and Simon B (1975, 1978), *Methods of Mathematical Physics*, Academic Press, New York, Vols. 1,2 1975, Vols. 3,4 1978.

[44] Rosinger E E (1982), Nonlinear equivalence, reduction of PDEs to ODEs and fast convergent numerical methods. Research Notes in Mathematics 77. Pitman, Boston - London - Melbourne.

[45] Rosinger E (1980), *Nonlinear Partial Differential Equations. Sequential and Weak Solutions*, North Holland, Amsterdam.

[46] Russo F (1994), *Colombeau generalized functions and stochastic analysis.* In: Cardoso A I, de Faria M, Potthoff J, Sénéor R, Streit L (Eds.), *Analysis and Applications in Physics.* Kluwer, Dordrecht, 329 - 349.

[47] Schwartz L (1950-1951), *Théorie des distributions, 1, 2 vols.*, Hermann, Paris.

[48] Schwartz L (1954), *Sur L'impossibilité de la multiplication des distributions*, C. R. Acad. Sci. Paris, **239**, 847-848.

[49] Struwe M (1992), *Semilinear wave equations*, Bull. Am. Math. Soc. 26, 53-85.

[50] Taylor M E (1996), *Partial Differential Equations I*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg.

[51] Trotter H F, (1958), *Approximation of semi-groups of operators*, Pacific J. Math., **8**, 887-919.

[52] Walsh J B (1980), *An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations*, In: R. Carmona, H. Kesten, J.B. Walsh (Eds), École D'Été de Probabilités de Saint Flour XIV, Springer Lecture Notes Vol. 1180, Springer-Verlag, 265-439, New York.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: mr Danijela Rajter
AU
Mentor: dr Marko Nedeljkov
MN
Naslov rada: Konstrukcija Kolomboovih rešenja determinističkih i stohastičkih diferencijalnih jednačina
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica) i engleski
JP
Jezik izvoda: s/e
JI
Zemlja publikovanja: SR Jugoslavija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2001
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Institut za matematiku, Prirodno matematički

fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: (4/ 157/ 52/ 0/ 0/ 0/ 0)
(broj poglavlja/strana/lit citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Diferencijalne jednačine
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: distrubucije, diferencijalne jednačine, Kolomboovi prostori, polugrupe operatora, infinitezimalni generator, Kolomboove polugrupe operatora, slučajni proces, beli šum.
PO

UDK:
Čuva se:
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Doktorska disertacija je posvećena rešavanju nelinearnih diferencijalnih jednačina, kao i linearnih diferencijalnih jednačina sa singularitetima u okviru prostora Kolomboovih uopštenih funkcija. U osnovi, disertacija se može podeliti na dva dela. Prvi deo disertacije je posvećen rešavanju determinističkih parcijalnih diferencijalnih jednačina primenom teorije polugrupa operatora definisanih na prostorima Kolomboa. Drugi deo disertacije posvećen je rešavanju stohastičkih običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ove jednačine sadrže Kolomboove uopštene slučajne procese kao nelinearni deo, ili kao početne uslove.

IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN veća: juli 2001.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
(Naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet)

KO
Predsednik: dr Stevan Pilipović, redovni profesor, PMF Novi Sad
Član: dr Marko Nedeljkov, vanredni profesor, PMF Novi Sad
Član: dr Michael Oberguggenberger, redovni profesor, vanredni profesor, Fakultet za gradjevinu i arhitekturu, Insbruk
Član: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor, PMF Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Doctoral thesis
CC
Author: MA Danijela Rajter
AU
Mentor: Dr. Marko Nedeljkov
MN
Title: Construction of Colombeau solutions to deterministic and stochastic differential equations
TI

Language of text: serbian (latin alphabet) and english
LT
Language of abstract: English
LA
Country of publication: FR Yugoslavia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2001
PY
Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Institute of Mathematics, Faculty of Science, Trg

Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: (4/ 157/ 52/ 0/ 0/ 0/ 0)
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphs/additional lists)
PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Differential equations
SD
Subject/Key words: distrubutions, differential equations, Colombeau spaces, semigroups of operators, infinitesimal generator, Colombeau semigroups of operators, stochastic proces, white noise.
SKW

UC:
Holding data:
HD
Note:
N
Abstract: Doctoral thesis is devoted to nonlinear differential equations, as well as linear differential equations with singularities in the framework of Colombeau generalized function spaces. Basically, the thesis can be devided into two parts. The first part is devoted to solving deterministic partial differential equations applaying semigroup theory where those semigroups are defined on Colombeau spaces. The second part of the thesis is devoted to stochastic ordinary and partial differential equations. Those equations contain Colombeau generalized stochastic processes as nonlinear part, or as initial data.
AB
Accepted by the Scientific Board on: July, 2001.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
(Degree/name/surname/title/faculty)

DB
President: Dr. Stevan Pilipović, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Dr. Marko Nedeljkov, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad
Member: Dr. Michael Oberguggenberger, Associate Professor, Faculty of Civil Engineering and Architecture in Innsbruck
Member: Dr. Zagorka Lozanov-Crvenković, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad