UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Mr Zorana Lužanin

LOKALNA I GLOBALNA KONVERGENCIJA MODIFIKACIJA NJUTNOVOG POSTUPKA

- doktorska disertacija -

NOVI SAD, 1997

Uvod

Savremena teorija i praksa poznaju mnoštvo problema koji, poput graničnih problema, integralnih jednačina ili problema optimalne kontrole, iziskuju rešavanje sistema nelinearnih jednačina. Postojanje srazmerno malog broja nelinearnih sistema čije je nule moguće egzaktno odrediti, osnovni je motiv neprekidnom razvoju i usavršavanju postupaka za iterativno rešavanje pomenutog problema. Svakako najpoznatiji iterativni postupak za rešavanje nelinearnog sistema jednačina jeste Njutnov postupak, koji se odlikuje dobrim teorijskim osobinama kao što su kvadratna konvergencija i afina invarijantnost. Uprkos svojim prednostima, ovaj postupak, u praktičnoj primeni, ispoljava odredjeni broj ograničenja. To se pre svega odnosi na cenu Njutnove iteracije, koja je veoma visoka zbog potrebe izračunavanja svih elemenata matrice Jakobijana, kao i zbog egzaktnog rešavanja linearnog sistema jednačina sa potpuno novom matricom sistema u svakoj iteraciji. U težistu opsežne analize koja je sprovedena u okviru disertacije, nalaze se različite klase postupaka koji su nastali modifikacijom Njutnovog postupka, sa osnovnim ciljem da se njegova ograničenja ublaže ili u potpunosti prevazidju.

U prvom delu su, pored pregleda oznaka, definicija i teorema, izloženi direktni i iterativni postupci za rešavanje linearnog sistema jednačina. Takodje je data opšta definicija iterativnih postupaka za rešavanje nelinearnog sistema jednačina i osobina postupaka koje su razmatrane u daljem radu, kao što su brzina konvergencije, afina invarijantnost i redukcija norme.

Njutnov postupak je definisan i ukratko analiziran na početku drugog dela, pri čemu su razmatranjem obuhvaćene i dve velike grupe modifikacija Njutnovog postupka,

- kvazi-Njutnovi postupci (QN postupci);
- netačni Njutnovi postupci (IN postupci);

Osnovni zadatak QN postupaka sastoji se u eliminaciji izračunavanja matrice Jakobijana u svakoj iteraciji. Matrica Jakobijana bira se, nekim postupkom, medju rešenjima jednačine sečice. Pored ostalih, u ovu grupu postupaka spadaju "dobar" i "loš" Brojdenov postupak, redak i simetričan Brojdenov postupak, Martinezov postupak sa modifikacijom jedne kolone, Martinezov postupak sa QR dekompozicijom, Dennis-Marwell-ov postupak i neki drugi. Kod ovih postupaka Njutnova jednačina se zamenjuje kvazi-Njutnovom jednačinom, tako da je problem rešavanja linearnog sistema jednačina prisutan i u ovom slučaju. Neki od QN postupaka, kao što je Martinezov postupak sa QR dekompozicijom, omogućuju da se ovaj nedostatak eliminiše.

Za razliku od QN postupaka, IN postupci zadržavaju Njutnovu jednačinu, odnosno matrica Jakobijana se izračunava u svakoj iteraciji. Medjutim, za razliku od Njutnovog postupka, pomenuta jednačina se rešava samo približno. Opravdano je pitanje kada se približno rešenje može smatrati dovoljno dobrim, tj. prihvatljivim. Stoga je u drugom delu navedeno nekoliko takvih uslova, na osnovu čega je predložena sistematizacija IN postupaka.

U Herceg, Krejić, Lužanin [34] je data nova klasa modifikacija Njutnovog postupka. Osnovna ideja novih postupaka jeste da se Njutnova jednačina zameni jednačinom koja u svakoj iteraciji ima istu matricu, čime se broj rešavanja linearnog sistema svodi na jedan, a da se korekcija vrši samo na slobodnom vektoru Njutnove jednačine. Ovu klasu postupaka nazivamo *postupcima modifikacije slobodnog vektora* (MSV postupci). Uvodjenjem relaksacionog parametra moguće je ubrzati konvergenciju, ali i generisati postupak koji je najsličniji Njutnovom. Pvi postupci su razmatrani u trećem delu.

Ozbiljan nedostatak iterativnih postupaka za rešavanje nelinearnog sistema jednačina predstavlja lokalna konvergencija, pri čemu postupak konvergira za početnu iteraciju koja je dovoljno bliska rešenju. S obzirom da pomenuto ograničenje u nekim slučajevima može predstavljati nerešiv problem, kao jedna od mogućnosti za ublažavanje ovog problema predlaže se uvodjenje relaksacionog parametra. Ova ideja je, u četvrtom delu, primenjena na netačnim Njutnovim postupcima, gde je dokazana globalna konvergencija relaksacionih IN postupaka. Uz malu modifikaciju uslova na preslikavanje F i početnu iteraciju, uvodjenjem relaksacionog parametra dobijena je osobina redukcije norme, koja je, uz neka ograničenja, omogućila globalnu konvergenciju. Za razliku od dosadašnjih rezultata, u disertaciji su, po prvi put, dovedeni u vezu parametar relaksacije i parametar greške (*forcing term*) IN postupka. Na ovaj način se, pogodnim izborom parametra greške, može odrediti relaksacioni parametar i bez pomoći backtrackinga kao, do sada, najpoznatijeg iterativnog postupka za odredjivanje relaksacionog parametra.

U praktičnoj primeni iterativnih postupaka pojavljuju se i neki problemi kao što su izbor početnih aproksimacija, izbor izlaznog kriterijuma, ocena nekih veličina i slično. Ovi problemi su razmatrani u petom delu. Takodje je, na relevantnim primerima, izvršeno testiranje postupaka koji su definisani i razmatrani u ovoj disertaciji.

U okviru dodatka A nalazi se spisak primera koji su korišćeni u numeričkim eksperimentima. Dodatak B sadrži spisak programskih rutina za numerička izračunavanja, koje su realizovane primenom programskog paketa Matematika (*Mathematica* 2.0). Imajući u vidu teoriju fraktala, koja poslednjih godina doživljava ekspanziju, u dodatku C su predstavljene dve fraktalne slike koje su nastale kao rezultat primene novog MSV postupka.

Priložena disketa sadrži programe iz dodatka B i slike iz sekcija 2.4, 3.3, 4.2 i dodatka C.

Veliku zahvalnost na idejama, pomoći i zainteresovanosti u toku mog dosadašnjeg rada dugujem dr Dragoslavu Hercegu, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta.

Zahvaljujem se akademiku dr Olgi Hadžić, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta, dr Mariu Martinezu, redovnom profesoru Univerziteta u Kampinjasu i dr Zorici Uzelac, vanrednom profesoru Fakulteta tehničkih nauka na pomoći i interesovanju sa kojom su pratili moj rad i izradu ove disertacije.

Posebno se zahvaljujem dr Nataši Krejić, docentu PMF u Novom Sadu, na podršci i nesebičnoj pomoći koju mi je do sada pružala.

Sadržaj

Oznake **1**

1 Uvodni deo **3**

1.1 Definicije, teoreme 3

1.2 Linearni sistemi 5

1.2.1 Direktni metodi 6

1.2.2 Iterativni postupci 8

1.3 Iterativni postupci za nelinearne sisteme 10

2 Definicija iterativnih postupaka i lokalna konvergencija **15**

2.1 Njutnov postupak 15

2.2 Kvazi-Njutnovi postupci 17

2.2.1 Lokalna konvergencija QN postupaka 21

2.3 Netačni Njutnovi postupci 23

2.3.1 Lokalna konvergencija IN postupaka 25

2.4 Medjusobni odnos lokalnih konvergencija Njutnovog postupka, QN i IN postupaka 26

2.5 Hibridni postupci 29

3 Postupak modifikacije slobodnog vektora **35**

3.1 Lokalna konvergencija MSV postupaka 36

3.2 Numerički primeri 43

3.3 Medjusobni odnos lokalnih konvergencija MSV postupaka 45

4 Uticaj relaksacije postupaka na konvergenciju **49**

4.1 Lokalna konvergencija i brzina konvergencije relaksacionih postupaka 50

4.2 Redukcija norme 51
4.2.1 Uticaj relaksacionog parametra na lokalnu konvergenciju 54
4.3 Globalna konvergencija relaksacionih IN postupaka . . . 55
4.3.1 Globalna konvergencija AIN postupaka 55
4.3.2 Globalna konvergencija YIN postupka 71

5 Računarska primena i numerički rezultati **75**
5.1 Konstrukcija algoritama 75
5.2 Izbor iterativnih postupaka 75
5.3 Izbor početnih vrednosti 76
5.4 Izbor postupka za rešavanje linearnog sistema 77
5.5 Izbor kriterijuma zaustavljanja 77
5.6 Numerički rezultati 79

Dodatak A: Primeri **85**

Dodatak B: Programske rutine **89**

Dodatak C: Fraktalne slike **101**

Literatura **103**

Oznake:

N - skup prirodnih brojeva;

R - skup realnih brojeva;

R_+ - skup nenegativnih realnih brojeva;

R^n - skup n-dimenzionalnih realnih vektora;

$R^{m\times n}$ - skup realnih matrica formata $m \times n$;

D_B - skup nesingularnih matrica;

$\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ - n-dimenzionalni vektor;

$A = [\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}]$ - matrica $A \in R^{n\times n}$ sa kolonama $\mathbf{a_i} \in R^n$;

$A = [a_{ij}]$ - matrica $A \in R^{n\times n}$ sa elementima $a_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$;

A^T - transponovana matrica matrice A;

A^{-1} - inverzna matrica matrice A;

$\mathrm{diag}(d_i)$ - dijagonalna matrica sa elementima d_i na dijagonali;

I - jedinična matrica;

$\mathbf{e^1}, \ldots, \mathbf{e^n}$ -jedinični vektori prostora R^n;

$A = [a_i, b_i, c_i]$ - tridijagonalna matrica sa elementima b_i na glavnoj dijagonali, elementima a_i ispod, i elementima c_i iznad glavne dijagonale;

$$a^+ = \begin{cases} \frac{1}{a} , & a \neq 0 \\ 0 , & a = 0 \end{cases}$$

1

Uvodni deo

1.1 Definicije, teoreme

Definicija 1.1 *Matrica* $A \in R^{n \times n}$ *naziva se:*

- *retka, ako ima relativno malo elemenata različitih od nule;*
- *simetrična, ako je* $A^T = A$;
- *ortogonalna, ako je* $A^T A = I$;
- *pozitivno definitna, ako je* $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ *za svako* $\mathbf{x} \in R^n$;
- *permutaciona, ako je* $A = [\mathbf{e}^{\mathbf{s}_1}, \ldots, \mathbf{e}^{\mathbf{s}_n}]$ *gde je* $(s_1, \ldots, s_n)$ *permutacija brojeva* $(1, \ldots, n)$;
- *Givensova matrica (transformacija,rotacija), ako je oblika*

$$J(i,k,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & \cdots & s & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & -s & \cdots & c & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

gde je $c = \cos\theta$ *i* $s = \sin\theta$.

Perturbaciona lema [61] *Neka $A, C \in R^{n \times n}$ i neka je A nesingularna matrica za koju važi $||A^{-1}|| \leq \alpha$. Ako je $||A - C|| \leq \beta$ i $\alpha\beta < 1$, tada je C takodje nesingularna i*

$$||C^{-1}|| \leq \alpha/(1 - \alpha\beta).$$

Definicija 1.2 *Kažemo da preslikavanje $F : D \subset R^n \to R^n$ zadovoljava Lipšicov uslov u tački $\mathbf{x}$ sa konstantom $L > 0$, ako za svako $\mathbf{y} \in D$ važi*

$$||F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})|| \leq L||\mathbf{x} - \mathbf{y}||.$$

Definicija 1.3 *Preslikavanje $F : D \subset R^n \to R^n$ je Lipšic neprekidno sa konstantom γ nad oblasti D, ako za svako $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in D$ važi*

$$||F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})|| \leq \gamma||\mathbf{x} - \mathbf{y}||.$$

Skup svih preslikavanja koje zadovoljavaju prethodnu definiciju označavamo sa $Lip_\gamma(D)$.

Definicija 1.4 *Preslikavanje $F : D \subset R^n \to R^n$ je Frechet-diferencijabilno (F-diferencijabilno) u unutrašnjoj tački $\mathbf{x}$ oblasti D, ako postoji linearni operator $A \in R^{n \times n}$, takav da je*

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{||F(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - F\mathbf{x} - A\mathbf{h}||}{||\mathbf{h}||} = 0. \tag{1.1}$$

Ako postoji linearni operator A koji zadovoljava relaciju (1.1) tada je on jedinstven, nezavisan od norme i naziva se F-izvod preslikavanja F u tački $\mathbf{x}$, u oznaci $F'(\mathbf{x})$. Matrični zapis linearnog operatora A je matrica Jakobijana $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{ij}$.

Lema 1.1 *[61] Pretpostavimo da je $F : D \subset R^n \to R^m$ diferencijabilno preslikavanje na konveksnom skupu $D_0 \subset D$. Tada, za svako $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_0$, važi*

$$||F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x})|| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} ||\mathcal{J}(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))|| \cdot ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||.$$

Lema 1.2 *[61] Neka je $F : D \subset R^n \to R^m$ neprekidno diferencijabilno na konveksnom skupu $D_0 \subset D$ i $\mathrm{x} \in D_0$. Pretpostavimo da važi*

$$||\mathcal{J}(\mathrm{y}) - \mathcal{J}(\mathrm{x})|| \leq \gamma(\mathrm{x})||\mathrm{y} - \mathrm{x}|| \quad \textit{za sve} \;\; \mathrm{y} \in D_0.$$

Tada važi

$$||F(\mathrm{y}) - F(\mathrm{x}) - \mathcal{J}(\mathrm{x})(\mathrm{y} - \mathrm{x})|| \leq \frac{1}{2}\gamma(\mathrm{x})||\mathrm{y} - \mathrm{x}||^2 \quad \textit{za sve} \;\; \mathrm{y} \in D_0.$$

Lema 1.3 *[16] Neka je $F : D \subset R^n \to R^n$ neprekidno diferencijabilno na otvorenom konveksnom skupu D i neka F' zadovoljava Lipšicov uslov u $\mathrm{z} \in D$, sa konstantom L. Tada za svako $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in D$ važi*

$$||F(\mathrm{x}) - F(\mathrm{y}) - F'(\mathrm{z})(\mathrm{x} - \mathrm{y})|| \leq L \max\{||\mathrm{x} - \mathrm{z}||, ||\mathrm{y} - \mathrm{z}||\}||\mathrm{x} - \mathrm{y}||.$$

1.2 Linearni sistemi

Pri rešavanju nelinearnih sistema jednačina primenom postupaka koji su obradjeni u ovoj disertaciji, pojavljuje se problem rešavanja linearnog sistema jednačina. Iz tog razloga, u ovom delu osvrnućemo se na rešavanje pomenutog problema.

Neka je

$$A\mathrm{x} = b, \tag{1.2}$$

gde je $A \in R^{n \times n}$ nesingularna matrica i $b \in R^n$. Za odredjivanje jedinstvenog rešenja $\mathrm{x}^* \in R^n$ sistema (1.2) poznati su mnogi postupci koji se mogu podeliti u dve grupe - direktne i iterativne postupke. Direktni postupci omogućuju dobijanje tačnog rešenja x^* primenom konačnog broja računskih operacija, uz zanemarivanje greške zaokruživanja. Medjutim, vreme potrebno za primenu ovakvih postupaka često predstavlja ograničavajući faktor, dok se kod nekih, npr. loše usloveljenih, sistema ne može zanemariti uticaj zaokruživanja.

Za razliku od direktnih postupaka, kod iterativnih postupaka dobija se samo približno rešenje sistema (1.2), ali sa proizvoljnom tačnošću. Ovi postupci u nekim slučajevima mogu biti brži i jeftiniji od direktnih postupaka. Osnovni nedostatak iterativnih postupaka ogleda se u tome što se pojedini od njih mogu primeniti samo na sisteme čija matrica ima neku specijalnu strukturu.

1.2.1 Direktni metodi

Iz ove grupe metoda navešćemo samo faktorizacione metode tj. metode koji se zasnivaju na razlaganju matrice sistema na proizvod dve ili više matrica, čiji je oblik takav da omogućuje svodjenje rešavanja sistema na dva ili više sistema jednačina koji se jednostavno rešavaju (sistemi sa dijagonalnom, trougaonom ili ortogonalnom matricom). Narednom definicijom obuhvaćene su tri dekompozicije koje su korišćene u daljem radu.

Definicija 1.5 *Neka je $A \in R^{n \times n}$. Tada*

(i) razlaganje $A = LU$, gde je $L \in R^{n \times n}$ donja trougaona matrica sa jedinicama na glavnoj dijagonali i $U \in R^{n \times n}$ gornja trougaona matrica, nazivamo LU dekompozicija matrice A;

(ii) razlaganje $PA = LU$, gde je $P \in R^{n \times n}$ permutaciona matrica, a L i U isto kao pod (i), nazivamo LUP dekompozicija matrice A;

(iii) Ako je $A \in R^{m \times n}$, $m > n$ tada razlaganje $A = QR$, gde je $Q \in R^{m \times m}$ ortogonalna matrica i $R \in R^{m \times n}$ gornja trougaona matrica, nazivamo QR dekompozicija matrice A.

Odgovarajući algoritmi za njihovo odredjivanje mogu se definisati na sledeći način,

Algoritam 1.1: LU dekompozicija matrice A

za $r = 1, ..., n$

ako je $a_{rr} = 0$ tada "ne postoji LU dekompozicija",

inače,

LU1: odredjivanje elemenata matrice U

$$u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj}, \quad j = r, ..., n$$

LU2: odredjivanje elemenata matrice L

$$l_{ir} = (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}) / u_{rr}, \quad i = r+1, ..., n$$

Algoritam 1.2: LUP dekompozicija matrice A

početne vrednosti: P=I

za $r = 1, ..., n$

LUP1: odredjivanje najvećeg pivota
$i = \min\{k | k \geq r \text{ i } |a_{kr}| = \max_{r \leq i \leq n} |a_{ri}|\}$

LUP2: zamena $r-$te i $i-$te vrste u matrici A i matrici P

LUP3: odredjivanje elemenata matrice U

$$u_{rj} = a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{kj}, \quad j = r, ..., n$$

LUP4: odredjivanje elemenata matrice L

$$l_{ir} = (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr}) / u_{rr}, \quad i = r + 1, ..., n$$

Algoritam 1.3: QR dekompozicija pomoću Givensovih transformacija

početne vrednosti: $R = A, \;\; Q = E$

za $q = 2, ..., m$

za $p = 1, 2, ..., \min\{q - 1, n\}$

QR1: odredjivanje θ, tako da za $c = \cos\theta$ i $s = \sin\theta$ važi

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{pp} \\ a_{qp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{pp} \\ 0 \end{bmatrix}$$

QR2: odredjivanje matrice $R = J(p, q, \theta) R$

QR3: odredjivanje matrice $Q = QJ(p, r, \theta)$

1.2.2 Iterativni postupci

Stacionarni iterativni postupci

Iterativni postupak koji možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} = B\mathbf{x}^{\mathbf{k}} + c,$$

gde $B \in R^{n \times n}$ i $c \in R^n$ ne zavise od k, nazivamo stacionarni iterativni postupak.
Neka je dato standardno razlaganje matrice A

$$A = D + L + U,$$

gde je D dijagonalna matrica, L strogo donja, a U strogo gornja trougaona matrica. Iz klase stacionarnih postupaka izdvajamo:

- **Gaus-Zajdelov postupak** za koji je

  $$B_{GZ} = -(D+L)^{-1}U, \quad c = (D+L)^{-1}b$$

  Algoritam 1.4: Gaus-Zajdelov postupak

  $k = 1, 2...$

  GS1: za $i = 1, \ldots, n$

  $$x_i^{k+1} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^k)/a_{ii}$$

- **SOR postupak** (Successive Overrelaxation) koji je dobijen ekstrapolacijom Gaus-Zajdelovog postupka

  $$B_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U), \quad c = \omega(D + \omega L)^{-1}b,$$

  gde je $\omega \neq 0$ ekstrapolacioni parametar.

  Algoritam 1.5: SOR postupak

  $k = 1, 2...$

SOR1: za $i = n, \ldots, 1$

$$x_i^{k+1} = \omega(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{k+1})/a_{ii} + (1-\omega)x_i^k$$

Kod oba postupka konvergencija je dokazana samo za specijalne klase linearnih sistema. Parametar ω ima veliki uticaj na brzinu konvergencije SOR postupka, što odredjivanje optimalnog izbora čini posebnim pitanjem. U vezi sa konvergencijom, brzinom konvergencije i izborom parametra ω postoji znatan broj rezultata, videti [67].

Nestacionarni iterativni postupci

Nestacionarni postupci razlikuju se od stacionarnih utoliko što se podaci korišćeni za izračunavanja menjaju u svakoj iteraciji. Iz ove klase postupaka izdvajamo:

- **Metod konjugovanog gradijenta** jeste jedan od najstarijih i najpoznatijih metoda iz ove grupe. Primenljiv je na simetrične pozitivno definitni sisteme. Ideja je da k–tu iteraciju $\mathbf{x}^\mathbf{k}$ odredimo kao minimum funkcionele $\Phi : R^n \to R$ definisane sa

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A\mathbf{x} - \mathbf{x}^T b$$

nad skupom $\mathbf{x}^\mathbf{0} + \mathcal{K}_k$, gde je $\mathcal{K}_k$ k–ti Krilov podprostor definisan sa $\mathcal{K}_k = \mathrm{span}(\mathbf{r_0}, A\mathbf{r_0}, \ldots, A^{k-1}\mathbf{r_0})$, $\mathbf{r_0} = b - A\mathbf{x}^\mathbf{0}$. Ovaj postupak možemo opisati sledećim algoritmom.

Algoritam 1.6: CG postupak

CG1: $\mathbf{x}^\mathbf{0} = 0$; $r^0 = b$;

$k = 1, \ldots, n$

CG2: Ako je $r^{k-1} = 0$ tada $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathbf{k-1}$ i STOP,
inače,

$$\begin{aligned}
\beta_k &= ||r^{k-1}||^2/||r_{k-2}||^2 & (\beta_1 \equiv 0)\\
p^k &= r^{k-1} + \beta_k p^{k-1} & (p^1 \equiv r^0)\\
\alpha_k &= ||r^{k-1}||^2/((p^k)^T A p^k) & \\
\mathbf{x}^\mathbf{k} &= \mathbf{x}^\mathbf{k-1} + \alpha_k p^k &
\end{aligned}$$

CG3: $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}}$

- **GMRES postupak** (Generalized Minimum RESidual) predstavlja postupak koji je nastao 1986. godine kao postupak Krilovog podprostora za nesimetrične sisteme. Ideja je da k-tu iteraciju odredimo kao rešenje problema najmanjih kvadrata (the least squares problem)
$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbf{x}^0+\mathcal{K}_k} ||b - A\mathbf{x}||_2.$$
Zbog složenosti i dužine algoritma navodjenje će izostati. Napomenimo da je korišćena verzija sa Gram-Schmidt-ovim procesom ortogonalizacije i primenom Givensovih rotacija za rešavanje problema najmanjih kvadrata. Budući da je najveći nedostatak GMRES postupka izražena potreba za memorijom, definisan je postupak GMRES(m), koji posle svakih m iteracija restartuje GMRES i na taj način ublažava pomenuti problem.

Detaljnije o pomenutim postupcima može se naći u [1, 38].

1.3 Iterativni postupci za nelinearne sisteme

U ovom delu biće definisani opšti iterativni postupak i neke osobine postupaka koje su razmatrane u daljem radu.

Posmatramo problem odredjivanja nule funkcije $F : D \subset R^n \to R^n$, odnosno, problem rešavanja jednačine

$$F(\mathbf{x}) = 0. \tag{1.3}$$

Prethodna jednačina može imati proizvoljan broj rešenja, pri čemu se podrazumeva da skup rešenja može biti i prazan. Odredjivanje broja rešenja kao i njihova lokalizacija još uvek su otvoreni problemi. U daljem radu pretpostavićemo da postoji izolovano rešenje $\mathbf{x}^*$ jednačine (1.3) nad skupom D.

Nasuprot sistemima linearnih jednačina, vrlo je mali broj sistema nelinearnih jednačina za koje su poznati direktni metodi za odredjivanje nule. Obično su to sistemi sa specijalnom strukturom. Zbog toga je za rešavanje sistema (1.3) razvijen veliki broj postupaka koji aproksimiraju rešenje $\mathbf{x}^*$, odnosno veliki broj iterativnih postupaka.

Jednačina (1.3) se uvek može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$\mathbf{x} = G\mathbf{x},$$

$G : D \subset R^n \to R^n$. Najčešći izbor preslikavanja G je

$$G\mathbf{x} = \mathbf{x} - A(\mathbf{x})F(\mathbf{x}), \quad A(\mathbf{x}) \in R^{n \times n}, \quad \mathbf{x} \in D.$$

Na ovaj način, problem rešavanja sistema (1.3) svodi se na problem odredjivanja nepokretne tačke preslikavanja G.

Tačku $\mathbf{x}^0 \in D$ nazivamo početna aproksimacija. Niz $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ definisan sa

$$\mathbf{x}^{k+1} = G(\mathbf{x}^k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.4}$$

nazivamo iterativni niz, funkciju G funkcijom koraka, a formulu (1.4) iterativno pravilo ili iterativni postupak. Kada iterativni niz konvergira ka $\mathbf{x}^*$ kažemo da iterativni postupak konvergira.

U analizi iterativnih postupaka pojavljuje se nekoliko problema.

Prvi problem je tzv. problem dobre definisanosti, u smislu da za svako k tačka $G(\mathbf{x}^k)$ pripada skupu D.

Drugi problem je problem konvergencije iterativnog niza ka nepokretnoj tački preslikavanja G, odnosno ka nuli preslikavanja F. Prva vrsta konvergencije koja je razmatrana jeste lokalna konvergencija, u kojoj polazimo od pretpostavke da je $\mathbf{x}^*$ nepokretna tačka preslikavanja G i pokazujemo egzistenciju okoline tačke $\mathbf{x}^*$, $\mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$ sa osobinom da za svako $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{O}(\mathbf{x}^*)$, odgovarajući iterativni niz konvergira ka $\mathbf{x}^*$. Jednostavno rečeno, iterativni postupak lokalno konvergira ka $\mathbf{x}^*$ ako konvergira za svako $\mathbf{x}^0$ dovoljno blisko $\mathbf{x}^*$. Druga vrsta konvergencije koja je razmatrana jeste globalna konvergencija, pod kojom podrazumevamo da postupak konvergira za svaku početnu aproksimaciju iz domena ili većeg dela domena preslikavanja F.

U slučaju pozitivnog odgovora na pitanje da li iterativni niz konvergira, postavlja se problem brzine ili reda konvergencije. Zbog toga uvodimo neke pojmove vezane za ovaj problem.

Definicija 1.6 *Neka je* $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty} \in D$ *i* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^*$. *Tada kažemo da iterativni niz konvergira*

- *q-linearno ako postoji* $\sigma \in (0,1)$ *takvo da je*

$$||\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{x}^*|| \leq \sigma ||\mathbf{x}^{\mathbf{k}} - \mathbf{x}^*||,$$

- *q-superlinearno ako je*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{x}^*||}{||\mathbf{x}^{\mathbf{k}} - \mathbf{x}^*||} = 0,$$

- *q-superlinearno sa q-redom* $\alpha > 1$ *ako postoji* $K > 0$ *takvo da je*

$$||\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{x}^*|| \leq K ||\mathbf{x}^{\mathbf{k}} - \mathbf{x}^*||^{\alpha},$$

- *q-kvadratno (ili q-superlinearno sa q-redom 2) ako postoji* $K > O$ *takvo da je*

$$||\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{x}^*|| \leq ||\mathbf{x}^{\mathbf{k}} - \mathbf{x}^*||^2,$$

za dovoljno veliko k.

Naredna lema daje važnu osobinu q-superlinearnih nizova.

Lema 1.4 *[15] Neka niz* $\{\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\}_{k=0}^{\infty}$ *konvergira q-superlinearno ka* $\mathbf{x}^*$. *Tada važi*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{x}^{\mathbf{k}}||}{||\mathbf{x}^{\mathbf{k}} - \mathbf{x}^*||} = 1.$$

U nastavku teksta, zbog konciznosti, navedeni termini su korišćeni bez q prefiksa.

U slučaju iterativnih postupaka možemo razmatrati i sledeće osobine

Definicija 1.7 *Za iterativni postupak kažemo da je afino invarijantan na kodomenu ako, primenjen na probleme* $F(\mathbf{x}) = 0$ *i* $\tilde{F} \equiv TF(\mathbf{x}) = 0$, *gde je* T *nesingularna matrica, daje identične iterativne nizove za svaku početnu aproksimaciju.*

Definicija 1.8 *Neka je D domen preslikavanja F, T nesingularna matrica i $\mathbf{x} \in D$. Neka je $\tilde{D}$ transformisani prostor nezavisne promenljive, tj. $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{D}$ ako je $\tilde{\mathbf{x}} = T\mathbf{x}$. Neka je G iterativna funkcija na D, a $\tilde{G}$ odgovarajuća iterativna funkcija na $\tilde{D}$. Za iterativni postupak (1.4) kažemo da je afino inverijantan na domenu ako važi,*

$$G(\mathbf{x}) = T^{-1}\tilde{G}(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Definicija 1.9 *Za iterativni postupak kažemo da ima osobinu redukcije norme, ako odgovarajući iterativni niz $\{\mathbf{x^k}\}_{k=0}^{\infty}$ ima osobinu*

$$||AF(\mathbf{x^{k+1}})|| \leq ||AF(\mathbf{x^k})||,$$

gde je $A \in R^{n \times n}$ nesingularna matrica. Često se razmatra specijalan slučaj kada je $A \equiv I$.

Radi preglednosti, uvešćemo oznake za neke pretpostavke o preslikavanju F, na koje ćemo se pozivati u daljem radu.

S1: Preslikavanje F je neprekidno diferencijabilno na otvorenom konveksnom skupu D;

S2: Postoji $\mathbf{x}^* \in D$ takvo da je $F(\mathbf{x}^*) = 0$ i $\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)$ je nesingularna matrica;

S3: $\mathcal{J}$ zadovoljava Lipšicov uslov u $\mathbf{x}^*$ sa konstantom γ, tj. postoji konstanta $\gamma > 0$ takva da za svako $\mathbf{x} \in D$ važi

$$||\mathcal{J}(\mathbf{x}) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)|| \leq \gamma||\mathbf{x} - \mathbf{x}^*||.$$

2

Definicija iterativnih postupaka i lokalna konvergencija

2.1 Njutnov postupak

Najpoznatiji postupak za rešavanje nelinearnog sistema $F(\mathbf{x}) = 0$ jeste Njutnov postupak (skraćeno NP), čije iterativno pravilo glasi

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} - \mathcal{J}(\mathbf{x^k})^{-1} F(\mathbf{x^k}), \qquad k = 0, 1, \dots \tag{2.1}$$

Praktično, jedna iteracija Njutnovog postupka razlaže se u dva koraka, pa dobijamo odgovarajući algoritam,

Algoritam 2.1: Njutnov postupak

Neka je dato $\mathbf{x^0} \in D$;

za $k = 0, 1, \dots$

N1: odrediti korekciju $\mathbf{s^k}$ kao rešenje linearnog sistema

$$\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} = -F(\mathbf{x^k}) \tag{2.2}$$

N2: odrediti novu iteraciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + \mathbf{s^k}$$

Jednačina (2.2) poznata je kao Njutnova jednačina, a vektor $\mathbf{s}^\mathbf{k}$ kao Njutnova korekcija.

Bez dokaza navodimo tvrdjenje o konvergenciji Njutnovog postupka.

Teorema 2.1 *[16] Neka F zadovoljava uslove S1, S2. Tada postoji otvoren skup S koji sadrži $\mathbf{x}^*$ takav da je za svako $\mathbf{x}^0 \in S$ iterativni niz $\{\mathbf{x}^\mathbf{k}\}_{k=0}^{\infty}$ dat sa (2.1) dobro definisan i konvergira superlinearno ka $\mathbf{x}^*$. Ako je zadovoljen i uslov S3 tada Njutnov postupak konvergira kvadratno ka $\mathbf{x}^*$.*

Neka je $\tilde{F}(\mathbf{x}) = AF(\mathbf{x})$, gde je A nesingularna matrica. Tada je $\tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{x}) = A\mathcal{J}(\mathbf{x})$ pa važi

$$\tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{k+1}} = \mathbf{x}^\mathbf{k} - \tilde{\mathcal{J}}(\mathbf{x}^\mathbf{k})^{-1}\tilde{F}(\mathbf{x}^\mathbf{k}) = \mathbf{x}^\mathbf{k} - \mathcal{J}(\mathbf{x}^\mathbf{k})^{-1}A^{-1}AF(\mathbf{x}^\mathbf{k}) = \mathbf{x}^{\mathbf{k+1}}.$$

Na osnovu definicije 1.7 sledi da je Njutnov postupak afino invarijantan na kodomenu.

Neka je $\tilde{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ i $\tilde{F}(\tilde{\mathbf{x}}) = F(A^{-1}\tilde{\mathbf{x}})$. Tada je $\tilde{\mathcal{J}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathcal{J}(A^{-1}\tilde{\mathbf{x}})A^{-1}$ i važi

$$\tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{k+1}} = \tilde{\mathbf{x}}^\mathbf{k} - A\mathcal{J}(A^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^\mathbf{k})^{-1}F(A^{-1}\tilde{\mathbf{x}}^\mathbf{k}) = A(\mathbf{x}^\mathbf{k} - \mathcal{J}(\mathbf{x}^\mathbf{k})^{-1}F(\mathbf{x}^\mathbf{k})) = A\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}}.$$

Iz prethodne relacije na osnovu definiceije 1.8 zaključujemo da je Njutnov postupak afino-invarijantan na domenu.

Afinu varijantu dobro poznate Njutn-Kantorovičeve teoreme o konvergenciji NP dali su Deuflhard, Heindl [22].

Analizom Njutnovog postupka možemo doći do sledećih prednosti i ograničenja.

1. **prednost:** Njutnov postupak je brz, tj. za dovoljno dobru početnu aproksimaciju konvergira kvadratno;

2. **prednost:** Njutnov postupak je afino invarijantan i na domenu i na kodomenu;

1. **ograničenje:** u svakom iterativnom koraku potrebno je izračunati svih n^2 elemenata matrice Jakobijana;

2. **ograničenje:** u svakoj iteraciji potrebno je rešiti linearni sistem jednačina sa potpuno novom matricom sistema;

3. **ograničenje:** nema osobinu redukcije norme;

Poslednjih decenija razvijen je velik broj postupaka koji su nastali modifikacijom Njutnovog postupka, sa ciljem da se otklone navedena ograničenja, uz što bolje očuvanje postojećih prednosti.

2.2 Kvazi-Njutnovi postupci

Prva klasa postupaka koje ćemo razmatrati nastala je iz Njutnovog postupka eliminacijom 1. ograničenja. Glavna ideja ovih postupaka jeste da se matrica Jakobijana $\mathcal{J}(\mathbf{x^k})$ zameni nekom matricom B_k koja je znatno jednostavnija za izračunavanje, a relativno dobro aproksimira Jakobijan. Najjednostavniji postupak sa ovom osobinom jeste **fiksni Njutnov postupak** u kojem se matrica $\mathcal{J}(\mathbf{x^k})$ zamenjuje nekom konstantnom matricom C za svako $k = 0, 1, \ldots$. Najčešće se za matricu C uzima $\mathcal{J}(\mathbf{x^0})$. Glavni nedostatak ovih postupaka ogleda se u tome što je lokalni karakter još izraženiji, tj. početna aproksimacija mora biti veoma blizu tačnog rešenja, što je praktično teško izvodljivo. Drugi pravac razvoja postupaka koji aproksimiraju matricu Jakobijana jesu **diferencni Njutnovi postupci**, u kojima se elementi matrice $\mathcal{J}(\mathbf{x^k})$ zamenjuju diferencnim količnikom. Kod diferencnih postupaka izbegnuto je izračunavanje izvoda funkcije F, ali se zato znatno povećao broj izračunavanja funkcije F u svakoj iteraciji. Treća grupa postupaka sa idejom da se aproksimira Jakobijan jesu postupci u kojima se nova aproksimacija Jakobijana, B_{k+1}, dobija pomoću prethodne aproksimacije Jakobijana, B_k, i vrednosti funkcije F u tačkama $\mathbf{x^{k-1}}$ i $\mathbf{x^k}$. Kod ovih postupaka, dakle, nema dodatnih izračunavanja vrednosti funkcije F. Ovakve postupke nazivamo **kvazi-Njutnovi postupci** (skraćeno QN postupci). Prema tome, kvazi-Njutnov postupak se može opisati sledećim algoritmom,

Algoritam 2.2: QN postupak

Neka je dato $\mathbf{x^0} \in D$, $B_0 \in R^{n \times n}$.

za $k = 0, 1, \dots$

Q1: odrediti korekciju $\mathbf{s^k}$ kao rešenje sistema

$$B_k \mathbf{s^k} = -F(\mathbf{x^k}) \tag{2.3}$$

Q2: odrediti novu iteraciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + \mathbf{s^k}$$

Q3: odrediti novu aproksimaciju Jakobijana

$$B_{k+1} = G_1(B_k, \mathbf{x^k}).$$

Analizom prethodnog algoritma zaključujemo da iterativno pravilo QN postupaka predstavlja uredjeni par iterativnih pravila, od kojih jedno daje iterativni niz vektora $\{\mathbf{x^k}\}_{k=0}^{\infty}$ koji su aproksimacija rešenja $\mathbf{x^*}$, a drugo, iterativni niz matrica $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ koje su aproksimacije matrica Jakobijana $\mathcal{J}(\mathbf{x^k})$, odnosno

$$\Phi \equiv (G, G_1), \quad \Phi : D \times D_B \rightarrow R^n \times D_B,$$

$$G : D \times D_B \rightarrow D_B : \quad \mathbf{x^{k+1}} = G(\mathbf{x^k}, B_k) \equiv \mathbf{x^k} - B_k^{-1} F(\mathbf{x^k})$$

$$G_1 : D \times D_B \rightarrow R^{n \times n} : \quad B_{k+1} = G_1(\mathbf{x^k}, B_k),$$

gde $D_B \subset R^{n \times n}$ predstavlja skup nesingularnih matrica.

Kako se iz navedene definicije kvazi-Njutnovog postupka vidi, iterativno pravilo za odredjivanje matrica B_k nije precizirano. Umesto niza $\{B_k\}$ može se posmatrati niz matrica $\{H_k\}$ $(H_k = B_k^{-1})$ koje aproksimiraju matrice $\mathcal{J}(\mathbf{x^k})^{-1}$. Nad skupom nesingularnih matrica, ova dva niza jednoznačno odredjuju jedan drugog, pa ćemo se kod analize QN postupaka zadržati samo na aproksimacijama Jakobijana, tj. matricama B_k. Poslednjih trideset godina razvijen je veliki broj postupaka iz ove klase. Jedan od prvih rezultata objavio je Broyden, 1965. godine. Takodje veliki doprinos razvoju ovih postupaka dali su Moré, Dennis, Martínez, Wolker i neki drugi autori.

Ključnu ulogu kod odredjivanja iterativne funkcije G_1 ima **jednačina sečice**

$$B(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}).$$

Za $\mathbf{x} = \mathbf{x^k}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x^{k-1}}$, uz oznake $\mathbf{x^k} - \mathbf{x^{k-1}} = \mathbf{s^k}$ i $\mathbf{y^k} = F(\mathbf{x^k}) - F(\mathbf{x^{k-1}})$ gornja jednačina postaje

$$B\mathbf{s^k} = \mathbf{y^k}, \tag{2.4}$$

koja je poznata pod nazivom **kvazi-Njutnova jednačina**. Očigledno postoji neograničen broj matrica B koje za tačno odredjene vektore $\mathbf{x^k}$ i $\mathbf{y^k}$ zadovoljavaju jednačinu (2.4). Skup svih takvih matrica obeležićemo sa $Q(\mathbf{y^k}, \mathbf{s^k})$. U ovom odeljku navešćemo neka poznata iterativna pravila za odredjivanje niza B_k.

I **"dobar" Brojdenov postupak** [8]: matrica B_{k+1} odredjuje se kao jedinstveno rešenje problema

$$\min\{||B - B_k||_F : \ B \in Q(\mathbf{y^k}, \mathbf{s^k})\},$$

odnosno,

$$B_{k+1} = B_k + \frac{\left(\mathbf{y^k} - B_k\mathbf{s^k}\right)\mathbf{s^k}^T}{(\mathbf{s^k}, \mathbf{s^k})}. \tag{2.5}$$

II **"loš" Brojdenov postupak** [8]:

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(\mathbf{y^k} - B_k\mathbf{s^k})\mathbf{y^k}^T B_k}{(B_k\mathbf{s^k}, \mathbf{y^k})}. \tag{2.6}$$

Brojdenovi postupci mogu pogoršati osobine matrice Jakobijana, što znači da ako je matrica Jakobijana retka ili simetrična, njena aproksimacija B_k ne mora imati istu osobinu. Na taj način znatno se može otežati problem rešavanja linearnog sistema (2.3). Iz tog razloga razvijeni su postupci kod kojih matrica B_k, osim što pripada skupu nesingularnih matrica koje zadovoljavaju kvazi-Njutnovu jednačinu, takodje pripada i skupu matrica sa nekom dodatnom osobinom (skup simetričnih matrica, skup matrica sa 0 na istim mestima kao $\mathcal{J}(\mathbf{x})$ i sl.). Skup matrica sa nekom specijalnom osobinom obeležavamo sa O_B. Ukoliko je presek pomenuta dva skupa prazan, matrica B_{k+1} bira se kao najbliža matrica iz skupa O_B skupu D_B. Na ovaj način nastala su sledeća dva postupka: (uvodimo oznaku $\mathbf{r^k} = \mathbf{y^k} - B_k\mathbf{s^k}$)

III **simetričan Brojdenov postupak** [16]: O_B je skup simetričnih matrica

$$B_{k+1} = B_k + \frac{\mathbf{r^k}\mathbf{s^k}^T + \mathbf{s^k}\mathbf{r^k}^T}{(\mathbf{s^k}, \mathbf{s^k})} - \frac{\mathbf{r^k}^T\mathbf{s^k}\mathbf{s^k}\mathbf{s^k}^T}{(\mathbf{s^k}, \mathbf{s^k})^2}. \tag{2.7}$$

IV **redak Brojdenov postupak** [1] [65]: O_B je skup matrica koje imaju nule na istim mestima kao matrica Jakobijana

$$B_{k+1} = B_k + \sum_{i=1}^{n}(S_i\mathbf{s^k})^T(S_i\mathbf{s^k})^+\mathbf{e^i}^T\mathbf{r^k}\mathbf{e^i}(S_i\mathbf{s^k})^T \tag{2.8}$$

gde je S_i, $i = 1, \ldots n$ operator ortogonalne projekcije u Frobenijusovoj normi na prostor matrica koje imaju 0 na mestima gde i $\mathcal{J}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D$.

Kod prethodnih postupaka menjaju se svi elementi ili svi elementi matrice B_k koji su različiti od 0. Martínez [45, 49] je definisao QN postupke u kojima se pri jednoj iteraciji ažurira samo jedna kolona matrice B_k, odnosno H_k.

V **Martinezov postupak sa ažuriranjem jedne kolone** [45]: Neka je $\alpha \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ i j takvo da je $|s_j| > \alpha\|\mathbf{s^k}\|$. Neka je $I_j^k \subseteq \{1, \ldots, n\}$ skup indeksa elemenata iz j-te kolone koje treba ažurirati. Tada se matrica B_{k+1} razlikuje od matrice B_k samo u j-toj koloni,

$$b_{ij}^{k+1} = \begin{cases} \dfrac{y_i - \sum\limits_{l \neq j} b_{il}^k s_l^k}{s_j^k} & i \in I_j^k \\ b_{ij}^k & i \notin I_j^k \end{cases} \tag{2.9}$$

[1]poznat i kao Šubertov postupak

Kod prethodnih postupaka uvek se pojavljuje problem rešavanja linearnog sistema $B_k \mathbf{s^k} = -F(\mathbf{x^k})$. Osnovna ideja za naredne QN postupke jeste da se iskoristi informacija o faktorizaciji matrice B_k pri odredjivanju matrice B_{k+1}, odnosno da matricu B_k ažuriramo na takav način da bez dodatnih izračunavanja dobijemo faktorizaciju matrice B_{k+1}, čime se problem rešavanja linearnog sistema (2.3) veoma pojednostavljuje. Za ilustraciju ovakvog tipa QN postupka poslužiće sledeći postupak.

VI **Martinezov postupak sa QR dekompozicijom** [46]: Neka je data dekompozicija matrice B_k

$$B_k = Q_k D_k T_k,$$

gde je Q_k ortogonalna matrica, T_k gornja trougaona matrica sa jedinicama na glavnoj dijagonali i D_k dijagonalna matrica. Tada je matrica $B_{k+1} = Q_{k+1} D_{k+1} T_{k+1}$, gde je

$$Q_{k+1} = Q_k, \quad T_{k+1} = T_k, \quad D_{k+1} = \mathrm{diag}(d_i^{k+1}) \tag{2.10}$$

$$d_i^{k+1} = \begin{cases} \dfrac{[Q_k^{-1}\mathbf{y^k}]_i}{[T_k \mathbf{s^k}]_i} & |[T_k \mathbf{s^k}]_i| > \alpha ||\mathbf{s^k}|| \\ d_i^k & |[T_k \mathbf{s^k}]_i| \le \alpha ||\mathbf{s^k}|| \end{cases}.$$

Postupke sa faktorizacijom razmatrali su, izmedju ostalih, Dennis,Marwil [19] i Johnson,Austria [35].

Martínez je u [47] razvio familiju QN postupaka koja, kao specijalne slučajeve, sadrži mnoge poznate QN postupke kao što su Brojdenov "dobar" postupak, Brojdenov "loš" postupak, redak Brojdenov postupak, Džonson-Austrijin postupak. Takodje je u [26] predstavljen veliki broj numeričkih rezultata za QN algoritme koji su primenjeni na retke nelinearne sisteme.

2.2.1 Lokalna konvergencija QN postupaka

Početkom sedamdesetih godina ovoga veka, nastupila je ekspanzija razvoja QN postupaka. Pored novih postupaka iz ove klase, pojavio se i veliki broj rezultata u vezi sa konvergencijom QN postupaka. U prve, a ujedno i najznačajnije rezultate, spadaju rezultati Broyden-a, Dennis-a, Moré-a, [9, 10, 15, 16]. Krajem sedamdesetih i početkom osamdesetih godina Dennis, Walker i Schnabel, [17, 18], proširili su teoriju o konvergenciji QN postupaka. Martínez, [50], je dao teoriju nepokretne tačke za QN postupke.

Ovde ćemo navesti samo neka jednostavnija tvrdjenja o QN postupcima. Naredna teorema je jedna od prvih tvrdjenja koje je dalo dovoljne uslove za linearnu konvergenciju QN postupaka.

Teorema 2.2 *[16] Neka preslikavanje F zadovoljava uslove S1, S2 i S3, i neka je*

$$||B_{k+1} - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)|| \leq [1 + \alpha_1 \sigma(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1})]||B_k - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)|| + \alpha_2 \sigma(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}),$$

za neke konstante α_1 i α_2, gde je $\sigma(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}) = \max\{||\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*||, ||\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*||\}$. Tada postoje $\varepsilon, \delta > 0$ takve da ako $\mathbf{x}^0 \in D$ i $B_0 \in R^{n \times n}$ zadovoljavaju $||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*|| < \varepsilon$ i $||B_0 - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)|| < \delta$ onda je iterativni niz $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ definisan QN postupkom dobro definisan i linerano konvergira ka $\mathbf{x}^*$.

Naredna teorema je, svakako, najčešće korišćena pri dokazivanju superlinearne konvergencije.

Teorema 2.3 *[15] Neka F zadovoljava uslove S1 i S2 i neka je $\{B_k\}$ niz nesingularnih matrica. Pretpostavimo da je za neko $\mathbf{x}^0 \in D$, niz definisan QN postupkom dobro definisan, $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^*$, za $k \geq 0$, i da konvergira ka $\mathbf{x}^*$. Tada niz $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ konvergira superlinearno ka $\mathbf{x}^*$ ako i samo ako je*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{||(B_k - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*))(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k)||}{||\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k||} = 0. \tag{2.11}$$

Uslov (2.11) poznat je pod nazivom Dennis-Moré-ov uslov. Koristeći prethodne dve teoreme može se dokazati superlinearna konvergencija QN postupaka datih sa (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) i (2.10). Radi postizanja superlinearne konvergencije, postupak definisan sa (2.9) ili Dennis-Marwil-ov postupak [19], zahteva restart posle q iteracija.

Za razliku od Njutnovog postupka, QN postupci, u opštem slučaju, nisu afino invarijantni. Tako su, na primer, "dobar" Brojdenov postupak i Martinezov postupak sa ažuriranjem jedne kolone afino invarijantni na kodomenu, a "loš" Brojdenov postupak je afino invarijantan na domenu.

Na kraju treba napomenuti da je ideja slična onoj koju koristi QN postupak, takodje primenjena i za rešavanje diferencijalnih i integralnih jednačina [29, 36, 37]. Takodje je posmatrana i njihova primena na rešavanje linearnih sistema jednačina.

2.3 Netačni Njutnovi postupci

Za razliku od QN postupaka koji donekle otklanjaju problem izračunavanja Jakobijana, netačni Njutnovi postupci (IN postupak) stavljaju akcenat na otklanjanje drugog ograničenja Njutnovog postupka. Naime, Njutnova jednačina se više ne rešava tačno već samo približno, tj. umesto primene direktnog metoda za sistem (2.2) primenjujemo neki linearni iterativni postupak. Postavlja se pitanje kada treba smatrati da je približno rešenje Njutnove jednačine dobro. Dembo, Eisenstat i Steihaug, [13], definisali su jedan dovoljan uslov. Vektor $\mathbf{s}^{\mathbf{k}}$ se smatra zadovoljavajućim rešenjem Njutnove jednačine (2.2) ako važi

$$||\mathcal{J}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})\mathbf{s}^{\mathbf{k}} + F(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})|| \leq \eta_k ||F(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})||, \tag{2.12}$$

gde je $\eta_k < \eta < 1$. Na ovaj način definisan je **klasičan netačan Njutnov postupak** (skraćeno CIN postupak). Uslov (2.12) se može modifikovati na nekoliko načina. Jedna mogućnost je uvodjenje matrice skaliranja A_k tako da (2.12) postaje

$$||A_k(\mathcal{J}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})\mathbf{s}^{\mathbf{k}} + F(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}))|| \leq \eta_k ||A_k F(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})||. \tag{2.13}$$

Prethodna relacija definiše **skaliran netačan Njutnov postupak** (skraćeno SIN postupak). Martínez [54] je razmatrao podklasu SIN postupaka gde je matrica A_k odredjena kao aproksimacija inverznog Jakobijana $\mathcal{J}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})^{-1}$ tj. $A_k = B_k^{-1}$,

$$||B_k^{-1}(\mathcal{J}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})\mathbf{s}^{\mathbf{k}} + F(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}))|| \leq \eta_k ||B_k^{-1} F(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})||. \tag{2.14}$$

Ovakav postupak predstavlja jednu moguću kombinaciju QN postupka i netačnog Njutnovog postupka. Ovu klasu postupaka označićemo sa QIN.

Posebno ćemo razmatrati podklasu SIN postupaka, gde je $A_k \equiv A$ konstantna matrica. Takve postupke označićemo sa AIN, a uslov (2.13) se svodi na

$$||A(\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k}))|| \leq \eta_k ||AF(\mathbf{x^k})||. \tag{2.15}$$

Treba napomenuti da nijedan od ponudjenih uslova nije afino-invarijantan. Jednu takvu modifikaciju dao je Ypma [68],

$$||\mathcal{J}(\mathbf{x^k})^{-1}(\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k}))|| \leq \eta_k ||\mathcal{J}(\mathbf{x^k})^{-1}F(\mathbf{x^k})||. \tag{2.16}$$

Ove postupke označićemo sa YIN.

Sada IN postupke možemo definisati sledećim algoritmom,

Algoritam 2.3: Netačan Njutnov postupak

Neka je dato $\mathbf{x^0} \in D$ i realni niz $\{\eta_k\}$, $\eta_k \geq 0$.

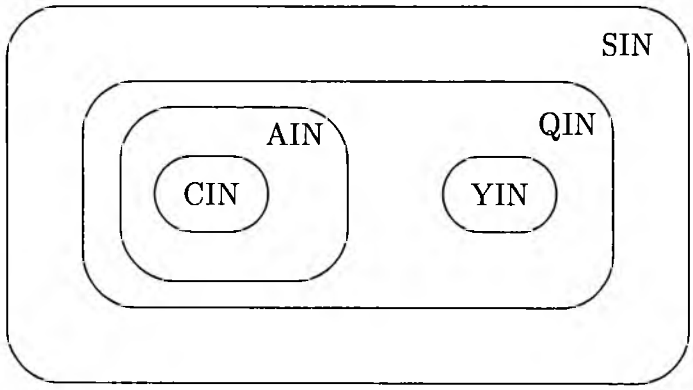
za $k = 0, 1, \ldots$

IN1: odrediti $\mathbf{s^k}$ tako da važi uslov (2.12) ili (2.13) ili (2.14) ili (2.15) ili (2.16)

IN2: odrediti novu aproksimaciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + \mathbf{s^k}.$$

Njutnov postupak je očigledno specijalan slučaj CIN postupka za $\eta_k \equiv 0$. Medjusobni odnosi navedenih podklasa IN postupaka mogu se grafički ilustrovati na sledeći način.



slika 2.1: Odnos podklasa IN postupaka

2.3.1 Lokalna konvergencija IN postupaka

Kao što je kod QN postupaka bilo neophodno definisati pravilo za odredjivanje matrice B_k, kod IN postupaka potrebno je definisati niz $\{\eta_k\}_{k=0}^{\infty}$. Realni parametar η_k poznat je pod nazivom *forcing term*. Očigledno je da će η_k igrati odlučujuću ulogu kada su u pitanju konvergencija i brzina konvergencije za IN postupke. Iz tog razloga prvo navodimo osnovno tvrdjenje za IN postupke.

Teorema 2.4 *[13] Neka za F važi S1 i S2 i neka je $\eta_k \leq \eta_{max} < t < 1$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takvo da ako je $||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}|| \leq \varepsilon$, tada iterativni niz definisan IN postupkom sa (2.12) (CIN postupak) linearno konvergira ka $\mathbf{x}^*$, u normi $||\cdot||_*$ ($||\mathbf{y}||_* = ||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)\mathbf{y}||$).*

Štaviše, ako je $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$ tada niz $\{\mathbf{x^k}\}_{k=0}^{\infty}$ konvergira superlinearno, a ako je $\eta_k = \mathcal{O}(||F(\mathbf{x^k})||)$ konvergencija je kvadratna.

Konvergenciju YIN postupaka ispitao je Ypma [68]. Ako se pretpostavka S3 zameni sa

$$||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}(\mathcal{J}(\mathbf{y}) - \mathcal{J}(\mathbf{z}))|| \leq K_\lambda ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||^\lambda,$$

$\lambda \in [0,1]$ i $K_\lambda > 0$, tada važi tvrdjenje slično teoremi 2.4.

Za konvergenciju SIN postupaka dovoljno je da pored standardnih pretpostavki o preslikavanju F važi da su $||A_k||$ i $||A_k||^{-1}$ ograničeni. Tada za SIN postupke važi tvrdjenje analogno teoremi 2.4.

Neki od poznatih izbora parametara η_k su:

- najjednostavniji izbor: $\eta_k = const < 1$, npr. $\eta_k = 10^{-1}, 10^{-4}...$;
- Brown, Saad [6]: $\eta_k = 1/2^{k+1}$;
- Dembo,Steihaug [14] : $\eta_k = \min\{1/(k+2), ||F(\mathbf{x^k})||\}$;
- Eisenstat, Walker [24]:
  $\eta_k = (||F(\mathbf{x^k}) - F(\mathbf{x^{k-1}}) - \mathcal{J}(\mathbf{x^{k-1}})\mathbf{s^{k-1}}||/||F(\mathbf{x^{k-1}})||$

Potrebno je napomenuti da ni QN ni IN postupci nemaju osobinu redukcije norme, kao ni Njutnov postupak.

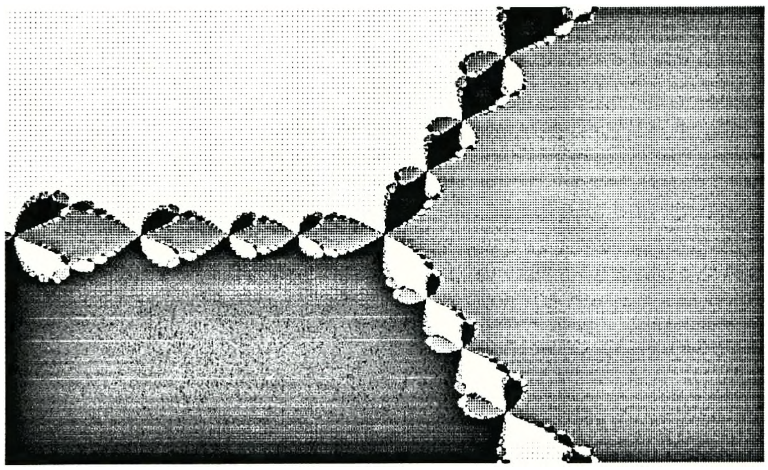
2.4 Medjusobni odnos lokalnih konvergencija Njutnovog postupka, QN i IN postupaka

QN i IN postupci nastali su kao modifikacija Njutnovog postupka u cilju ublažavanja nekih njegovih nedostataka. Ove modifikacije razmatrane su u sekcijama 2.2 i 2.3. U ovom delu ćemo na jednom jednostavnom primeru razmatrati uticaj pomenutih modifikacija na izbor početne aproksimacije $\mathbf{x^0}$. Na osnovu poznatih teorijskih rezultata sva tri postupka su lokalnog karaktera, odnosno konvergiraju za $\mathbf{x^0}$ iz neke dovoljno male okoline tačke $\mathbf{x^*}$. Posmatraćemo četiri postupka: Njutnov postupak (kvadratna konvergencija), "dobar" Brojdenov postupak (superlinearna konvergencija) iz klase QN postupaka, a iz klase IN postupaka, CIN postupak za koji je $\eta_k = 1/(k+2)$ (superlinearna konvergencija) i $\eta_k = 0.5$ (linearna konvergencija).

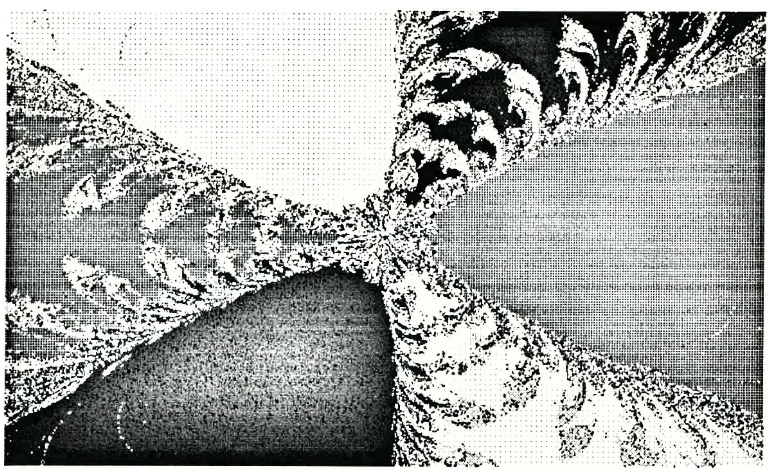
Posmatramo problem rešavanja nelinearnog sistema

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 1; \\ f_2(x_1, x_2) &= 3x_1^2x_2 - x_2^3; \end{aligned}$$

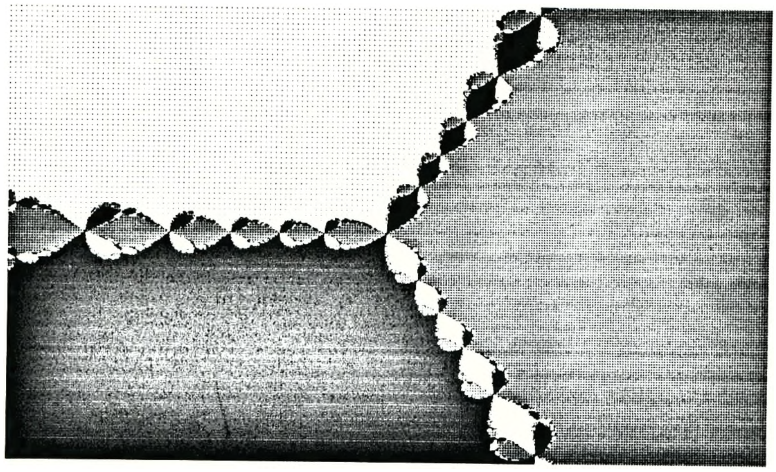
koji ima tri rešenja $\mathbf{x_1^*} = [1, 0]^T$, $\mathbf{x_2^*} = [0.5, \sqrt{3} \cdot 0.5]^T$ i $\mathbf{x_3^*} = [0.5, -\sqrt{3} \cdot 0.5]^T$. Uradjen je test konvergencije posmatranih postupaka pri izboru početne aproksimacije $\mathbf{x^0}$ iz pravougaonika $D = [-3.5, 3.5] \times [-2.5, 2.5]$. Za izlazni kriterijum korišćen je uslov $||F(\mathbf{x^k}) < 10^{-3}$, a maksimalni broj iteracija je 64.



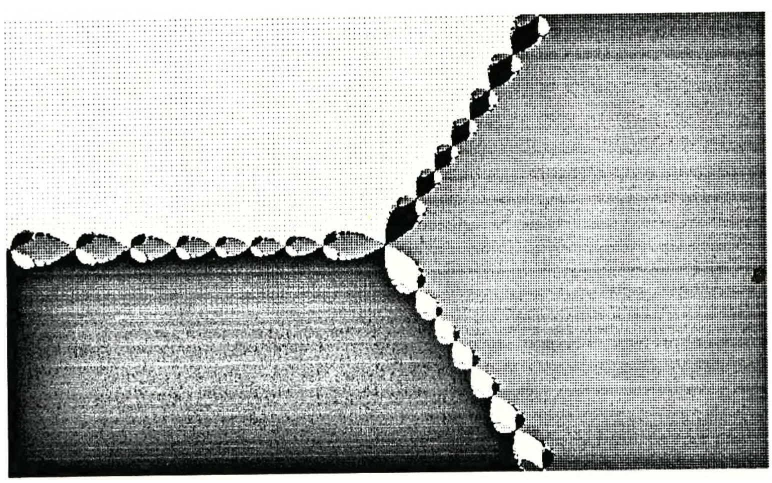
Slika 2.2: Njutnov postupak



Slika 2.3: Brojdenov "dobar" postupak



Slika 2.4: CIN postupak sa $\eta_k = 1/(k+2)$

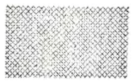


Slika 2.5: CIN postupak sa $\eta_k = 0.5$

 konvergencija ka $\mathbf{x}_1^*$;

 konvergencija ka $\mathbf{x}_2^*$;

 konvergencija ka $\mathbf{x}_3^*$;

 ne konvergira;

Analizirajući prethodne slike dolazimo do zaključka da se Brojdenov postupak najlošije ponašao. Eliminacija izračunavanja matrice Jakobijana znatno je uticala na izbor početne aproksimacije. Za razliku od Njutnovog i IN postupaka pojavila se i oblast za koju Brojdenov postupak divergira. Oba postupka iz klase IN postupaka, za razliku od Brojdenovog postupka, zadržala su ponašanje slično Njutnovom postupku.

Pored dve velike grupe modifikacija Njutnovog postupka koje su do sada obradjene, u poslednjih dvadesetak godina razvijen je još jedan broj postupaka sa sličnom idejom da se ograničenja Njutnovog postupka minimiziraju. U daljem radu definisaćemo nekoliko hibridnih postupaka kao kombinaciju do sada poznatih postupaka i jednu novu modifikaciju Njutnovog postupka.

2.5 Hibridni postupci

Poznat je velik broj postupaka koji predstavljaju kombinaciju Njutnovog, QN i IN postupaka. Neke mogućnosti su već spomenute. To se pre svega odnosi na kombinaciju neke od modifikacija Njutnovog postupka sa čistim Njutnovim postupkom, pri čemu se, posle q iteracija nekog modifikovanog Njutnovog postupka, primenjuje čista Njutnova iteracija. Ovakav postupak se obično naziva postupak sa restartom. Za neke QN postupke ovakva kombinacija je bila neophodna za postizanje konvergencije, dok je u drugim slučajevima mogla da ubrza postupak. Ovo se pre svega odnosi na računsko vreme potrebno za realizaciju nekog od modifikovanih Njutnovih postupaka. Naime, restart sa Njutnovom iteracijom znatno smanjuje broj potrebnih iteracija. S druge strane, prečesto korišćenje Njutnove iteracije zbog izračunavanja matrice Jakobijana ili tačnog rešavanja Njutnove jednačine, mogu suviše da produže vreme izračunavanja, smanjujući efikasnost algoritma.

Naredni algoritam predstavlja kombinaciju QN i Njutnovog postupka.

Algoritam 2.4: QN-Njutnov postupak

Neka je $\mathbf{x^0} \in D$, $B_0 \in R^{n \times n}$ i $m \in N$ dato.

za $k = 0, 1, \ldots$

QNN1: odrediti korekciju $\mathbf{s^k}$

$$\mathbf{s^k} = \begin{cases} -B_k^{-1} F(\mathbf{x^k}), & k \not\equiv 0 \pmod{m} \\ -\mathcal{J}(\mathbf{x^k})^{-1} F(\mathbf{x^k}), & k \equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

QNN2: odrediti novu iteraciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + \mathbf{s^k}$$

QNN3: odrediti novu aproksimaciju $B_{k+1} = G_1(\mathbf{x^k}, B_k)$ nekim QN postupkom

Napomenimo da se u svakom m-tom koraku može restartovati i iterativni postupak za odredjivanje aproksimacije B_{k+1} što takodje znatno ubrzava postupak. Tačnije, korak QNN3 zamenjujemo sa

QNN3: odredtiti novu aproksimaciju B_{k+1}

$$B_{k+1} = \begin{cases} G_1(\mathbf{x^k}, \mathcal{J}(\mathbf{x^k})), & k \equiv 0 \pmod{m} \\ G_1(\mathbf{x^k}, B_k), & k \not\equiv 0 \pmod{m} \end{cases}$$

Drugu mogućnost kombinacije opisanih postupaka dao je Martínez koji je predložio postupak koji predstavlja kombinaciju QN i IN postupaka. Izmedju ostalog, ovakvi postupci su razmatrani u [51, 54, 55]. Jedan od pomenutih postupaka može se definisati sledećim algoritmom.

Algoritam 2.5: [51] Kvazi-netačan Njutnov postupak

Neka su $\mathbf{x^0} \in D$, $B_0 \in D_B$, $\theta_k \in (0, \theta)$, $k = 0, 1, \ldots, 0 < \theta < t < 1$ i $\lim\limits_{k \to \infty} \theta_k = 0$ dati.

za $k = 0, 1, 2, \ldots$

QIN1: (**QN iteracija**) izračunati

$$\mathbf{s_Q^k} = -B_k^{-1} F(\mathbf{x^k})$$

QIN2: ako je

$$||\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s_Q^k} + F(\mathbf{x^k})|| \leq \theta ||F(\mathbf{x^k})||$$

tada je $\mathbf{s^k} = \mathbf{s_Q^k}$

inače (**IN iteracija**) odrediti $\mathbf{s^k}$ primenom linearnog iterativnog metoda na Njutnovu jednačinu, koristeći B_k kao matricu prekondicioniranja, tako da važi

$$||\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k})|| \leq \theta_k ||F(\mathbf{x^k})|| \tag{2.17}$$

QIN3: odrediti novu iteraciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + \mathbf{s^k}$$

QIN4: odrediti novu matricu (prekondicioniranja) B_{k+1}

Analizom prethodnog algoritma zaključujemo da se IN iteracija koristi samo za loše QN iteracije, ali se i tada koristi informacija iz QN iteracije o matrici B_k koja se koristi kao matrica prekondicioniranja Njutnove jednačine.

Martínez [54] je uopštio prethodni algoritam uvodeći parametar λ_k pri odredjivanju korekcije $\mathbf{s^k}$ i zamenjujući uslov (2.17) sa

$$||B_k^{-1}(\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k}))|| \le \theta_k ||B_k^{-1}F(\mathbf{x^k})||. \tag{2.18}$$

Kako je to već napomenuto u odeljku 2.2, čak i kod nekih postupaka iz klase QN postupaka ostaje problem rešavanja linearnog sistema, npr. kod "dobrog" i "lošeg" Brojdenovog postupka. Ako za rešavanje linearnog sistema upotrebimo iterativni postupak, dobijamo nov postupak koji nazivamo netačni kvazi-Njutnov postupak (IQN postupak) i definišemo ga sledećim algoritmom

Algoritam 2.6: Netačni kvazi-Njutnov postupak

Neka je dato $\mathbf{x^0} \in D$, $B_0 \in D_B$, $\eta_k \in (0,\eta), k = 0,1,\ldots,$ $\eta \in (0,1)$.

za $k = 0,1,\ldots$

IQ1: odredi $\mathbf{s^k}$ tako da važi

$$||B_k\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k})|| \le \eta_k ||F(\mathbf{x^k})|| \tag{2.19}$$

IQ2: odredi novu iteraciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + \mathbf{s^k}$$

IQ3: odredi matricu B_{k+1}

Primetimo da za $B_k = \mathcal{J}(\mathbf{x^k})$ dobijamo CIN postupak, a za $\eta_k \equiv 0$ QN postupak.

Martínez [55] je definisao novu klasu QN postupaka u kojima se jednačina sečice (2.4) zamenjuje Jakobijevom jednačinom

$$B_{k+1}\mathbf{s^k} = \mathcal{J}(\mathbf{x^{k+1}})\mathbf{s^k}.$$

Za ove postupke je interesantno da matrica B_k nema više cilj da zameni izračunavanje matrice Jakobijana, kao kod većine QN postupaka, već je njen osnovni zadatak da pojednostavi rešavanje Njutnove jednačine.

Dennis,Li [21] definisali su hibridni postupak kao kombinaciju dva QN postupka. Tačnije, ako matricu B_k razložimo na zbir dve matrice, $B_k = B_k^1 + B_k^2$, tada za ažuriranje matrice B_k primenjujemo dva QN postupka, pri čemu prvi postupak primenjujemo na matricu B_k^1, a drugi na matricu B_k^2.

3

Postupak modifikacije slobodnog vektora

U ovom delu definisan je novi postupak koji u svakoj iteraciji ima istu matricu sistema, a ažurira se samo slobodan vektor u Njutnovoj jednačini. Njutnova jednačina zamenjuje se novom jednačinom

$$A\mathbf{s^k} = -F(\mathbf{x^k}) + \alpha\mathbf{r^k}, \tag{3.1}$$

gde je $A \in R^{n\times n}$ konstantna nesingularna matrica za svako $k = 0, 1, \ldots$, $\mathbf{r^k} \in R^n$ vektor, a α je realan parametar. Ako matricu A smatramo aproksimacijom matrice Jakobijana $\mathcal{J}(\mathbf{x^k})$, tada postupak definisan pomoću relacije (3.1) možemo smatrati QN postupkom, a ako vektor $\mathbf{r^k}$ posmatramo kao grešku pri rešavanju sistema $A\mathbf{s^k} = -F(\mathbf{x^k})$ tada postupak (3.1) možemo posmatrati kao IN postupak, tj. postupak definisan sa (3.1) može biti tumačen i kao netačan kvazi-Njutnov postupak. Medjutim, mi ćemo ovaj postupak tretirati na drugi način. Naime, unapred ćemo zadati vektor $\mathbf{r^k}$ i tada sistem (3.1) tačno rešiti.

Neka je

$$F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + G(\mathbf{x}), \tag{3.2}$$

gde je $A \in R^{n\times n}$ nesingularna matrica i $G : D \subset R^n \to R^n$ nelinearno preslikavanje. Napomenimo da se svako preslikavanje F može zapisati u obliku (3.2) na neograničen broj načina. Jedan od prirodnih načina za izbor matrice A i preslikavanja G, jeste da se za matricu A uzme linearni deo preslikavanja F, a za G nelinearni deo preslikavanja F.

Još jedan logičan izbor jeste $A = \mathcal{J}(\mathbf{x^0})$ i $G(\mathbf{x}) = \mathcal{J}(\mathbf{x}) - \mathcal{J}(\mathbf{x^0})$. Za preslikavanje oblika (3.2) matrica Jakobijana postaje

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}) = A + G'(\mathbf{x}).$$

Novi postupak nazivamo postupak modifikacije slobodnog vektora (skraćeno MSV postupak) i definišemo sledećim algoritmom,

Algoritam 3.1: MSV postupak

Neka je $\mathbf{x^0} \in D$ i $\alpha \in R$ dato;

za $k = 0, 1, \ldots$

MSV1: izračunati $\mathbf{r^k}$

MSV2: izračunati $\mathbf{s^k}$

$$\mathbf{s^k} = A^{-1}(-F(\mathbf{x^k}) + \alpha \mathbf{r^k}) \tag{3.3}$$

MSV3: odrediti novu iteraciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + \mathbf{s^k}.$$

Primetimo da se kod MSV postupka rešavanje linearnog sistema pojavljuje samo u prvoj iteraciji, a u svim ostalim koristimo već izračunatu matricu A^{-1} ili sračunatu LU dekompoziciju matrice A.

3.1 Lokalna konvergencija MSV postupaka

Teorema 3.1 *Neka su za preslikavanje F ispunjeni uslovi S1 i S2 i neka postoji $t \in (0,1)$ takvo da je*

$$\eta_k = \frac{\| -G'(\mathbf{x^k})A^{-1}F(\mathbf{x^k}) + \alpha(I + G'(\mathbf{x^k})A^{-1})\mathbf{r^k}\|}{\|F(\mathbf{x^k})\|} < t < 1, \tag{3.4}$$

za $k = 0, 1, \ldots$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takvo da za $\|\mathbf{x^0} - \mathbf{x^*}\| \leq \varepsilon$ niz $\{\mathbf{x^k}\}_{k=0}^{\infty}$ definisan MSV postupkom linearno konvergira ka $\mathbf{x^*}$.

Dokaz: Koristeći (3.2) i (3.3) dobijamo

$$\begin{aligned} ||\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k})|| &= ||(A + G'(\mathbf{x^k}))A^{-1}(-F(\mathbf{x^k}) + \alpha\mathbf{r^k}) + F(\mathbf{x^k}) \\ &= || - G'(\mathbf{x^k})A^{-1}F(\mathbf{x^k}) + \alpha(I + G'(\mathbf{x^k})A^{-1})\mathbf{r^k}|| \\ &= \eta_k||F(\mathbf{x^k})||, \end{aligned} \tag{3.5}$$

pa tvrdjenje sledi na osnovu primene teoreme 2.4.□

Za QN postupke bilo je potrebno definisati pravilo za odredjivanje matrice B_k. Neke od mogućnosti su navedene u odeljku 2.2. Slično je u odeljku 2.3 dato nekoliko mogućnosti za izbor parametra η_k kod IN postupaka. Kod MSV postupaka potrebno je definisati pravilo za odredjivanje vektora $\mathbf{r^k}$. Ovde ćemo navesti tri mogućnosti

$$\mathbf{r^k} \equiv \mathbf{0} \tag{3.6}$$

$$\mathbf{r^k} = -G'(\mathbf{x^k})F(\mathbf{x^k}) \tag{3.7}$$

$$\mathbf{r^k} = -G'(\mathbf{x^k})\mathbf{s^{k-1}}. \tag{3.8}$$

Sada se (3.4) svodi

- za (3.6) na

$$\eta_k = ||G'(\mathbf{x^k})A^{-1}F(\mathbf{x^k})||/||F(\mathbf{x^k})||;$$

- za (3.7) na

$$\eta_k = ||G'(\mathbf{x^k})(\alpha I + A^{-1} + \alpha A^{-1}G'(\mathbf{x^k}))F(\mathbf{x^k})||/||F(\mathbf{x^k})||;$$

- za (3.8) na

$$\eta_k = ||G'(\mathbf{x^k}) \cdot (A^{-1}F(\mathbf{x^k}) + \alpha(I + A^{-1}G'(\mathbf{x^k}))\mathbf{s^{k-1}})||/||F(\mathbf{x^k})||.$$

Očigledno je da je za izbor vektora (3.8) u prvoj iteraciji potrebno primeniti neki drugi izbor vektora $\mathbf{r^k}$ ili neki drugi postupak.

Treba napomenuti da konvergencija MSV postupka, pored izbora vektora $\mathbf{r^k}$, zavisi i od izbora matrice A, odnosno preslikavanja G.

Predloženi postupak kao specijalan slučaj sadrži fiksni Njutnov postupak, izbor (3.6), ali ne i Njutnov postupak.

Lokalna konvergencija za izbor (3.7). U nastavku ćemo razmatrati konvergenciju MSV postupka kada za vektor $\mathbf{r}^{\mathbf{k}}$ biramo (3.7). Ovaj postupak je definisan i razmatran u Herceg, Krejić, Lužanin [34]. Za postizanje konvergencije neophodno je modifikovati predloženi algoritam restartovanjem sa Njutnovom iteracijom. Tačnije, posmatramo MSV-Njutnov postupak definisan sledećim algoritmom,

Algoritam 3.2: MSV-Njutnov postupak

Neka je $\mathbf{x}^{\mathbf{0}} \in D$, $\alpha \in R$ i $m \in N$ dato;

za $k = 0, 1, \dots$

MN1: izračunati $\mathbf{s}^{\mathbf{k}}$

$$\mathbf{s}^{\mathbf{k}} = \begin{cases} -\mathcal{J}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})^{-1} F(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}), & k \equiv 0 (\text{mod } m) \\ -A^{-1}(I + \alpha G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})) F(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}), & k \equiv q (\text{mod } m),\ q = 1, \dots, m-1 \end{cases} \tag{3.9}$$

MN2: odrediti novu iteraciju

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}} + \mathbf{s}^{\mathbf{k}}.$$

Radi preglednosti, uvodimo oznaku $H_k = A^{-1}(E + \alpha G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}))$, za $k \not\equiv 0$ (mod m) i $H_k = \mathcal{J}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})^{-1}$ za $k \equiv 0$ (mod m).

Teorema 3.2 *Neka F zadovoljava uslove S1, S2 i S3 i neka je $r \in (0,1)$. Tada postoje $\varepsilon = \varepsilon(r) > 0$ i $\delta = \delta(r) > 0$ takvi da je za $||\mathbf{x}^{\mathbf{0}} - \mathbf{x}^*|| \leq \varepsilon$ i $||\mathcal{J}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})^{-1} - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}|| \leq \delta$, $k \equiv 0 (mod\, m)$ niz $\{\mathbf{x}^{\mathbf{k}}\}_{k=0}^{\infty}$ dobro definisani, konvergira ka $\mathbf{x}^*$ i*

$$||\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{x}^*|| \leq r||\mathbf{x}^{\mathbf{k}} - \mathbf{x}^*||.$$

Dokaz: Neka su M i C konstante za koje važi

$$||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}|| \leq M \quad \text{i} \quad ||A^{-1}|| \leq C.$$

Definišimo pomoćne funkcije $b_i : R^2 \to R$,

$$b_0(\delta, \varepsilon) = \delta \tag{3.10}$$

$$b_i(\delta,\varepsilon) = b_{i-1}(\delta,\varepsilon) + K\varepsilon, \quad i = 1,2,\ldots,m-1, \tag{3.11}$$

gde je $K = C|\alpha|\gamma(1+r)$ konstanta. Očigledno je za svako $\varepsilon, \delta > 0$,

$$b_0(\delta,\varepsilon) < b_1(\delta,\varepsilon) < \cdots < b_m(\delta,\varepsilon), \tag{3.12}$$

$$\lim_{\delta,\varepsilon\to 0} b_i(\delta,\varepsilon) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,m-1. \tag{3.13}$$

Kako je $\mathcal{J}(\mathbf{x}) = A + G'(\mathbf{x})$, to i preslikavanje G' zadovoljava Lipšicov uslov u tački $\mathbf{x}^*$ sa konstantom γ,

$$||G'(\mathbf{x}^*) - G'(\mathbf{x})|| \le \gamma||\mathbf{x}^* - \mathbf{x}||. \tag{3.14}$$

Na osnovu pretpostavke S3 i leme 1.3 sledi

$$||F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}^*) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)|| \le \gamma||\mathbf{x}-\mathbf{x}^*||^2, \quad \mathbf{x} \in D. \tag{3.15}$$

Na osnovu (3.10) i (3.11) možemo izabrati $\varepsilon = \varepsilon(r) > 0$, i $\delta = \delta(r) > 0$ takve da važi

$$b_i(\delta,\varepsilon) + \gamma\varepsilon < \frac{r}{M_1}, \quad i = 0,1,\ldots,m-1, \tag{3.16}$$

gde je $M_1 = \max\{||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)||, 2M\}$.

Koristeći indukciju pokazaćemo da za $k \equiv q \pmod{m}$ važi:

(i): $||H_k - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}|| \le b_q(\varepsilon,\delta)$;

(ii): H_k je nesingularna i $||H_k|| \le 2M$;

(iii): $||\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} - \mathbf{x}^*|| \le r||\mathbf{x}^{\mathbf{k}} - \mathbf{x}^*||$;

za svako $q = 0,1,\ldots,m-1$.

Neka je $k = 0$. Na osnovu pretpostavke je

$$||H_0 - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}|| \le \delta = \delta_0(\varepsilon,\delta).$$

Iz prethodne relacije i (3.16) sledi

$$||H_0|| \le ||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}|| + ||H_0 - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}|| \le M + \delta \le 2M.$$

Iz primene (3.15), takodje sledi:

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^*|| &= ||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^* + \mathbf{s}^0|| = ||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^* - H_0 F(\mathbf{x}^0)|| \\
&\leq ||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^* - H_0 \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*)|| \\
&\quad + ||H_0|| \cdot ||F(\mathbf{x}^0) - F(\mathbf{x}^*) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*)|| \\
&\leq (||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)|| \cdot ||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1} - H_0|| + \gamma\varepsilon ||H_0||)\, ||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*|| \\
&\leq M_1(b_0(\delta,\varepsilon) + \gamma\varepsilon)||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*|| \leq r||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*||.
\end{aligned}
$$

Posmatrajmo sada slučaj $k \equiv q \pmod m$. Za $q = 0$ dokaz relacija $(i) - (iii)$ analogan je dokazu za slučaj $k = 0$.

Pretpostavimo da je $k > 0$ i da važi

$$||H_{k-1} - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}|| \leq b_{q-1}(\delta,\varepsilon)$$

$$||H_{k-1}|| \leq 2M$$

$$||\mathbf{x}^{\mathbf{k}} - \mathbf{x}^*|| \leq r||\mathbf{x}^{\mathbf{k-1}} - \mathbf{x}^*||.$$

Preostaje da pokažemo da relacije *(i)*, *(ii)* i *(iii)* važe za $k \equiv q$, $q > 0$.

Očigledno je,

$$
\begin{aligned}
H_k &= A^{-1}(I + \alpha G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k}})) \\
&= A^{-1}(I + \alpha G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k-1}})) + \alpha A^{-1}(G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) - G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k-1}})),
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
||H_k - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}|| &= ||H_{k-1} - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}|| + ||\alpha A^{-1}(G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) - G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k-1}}))|| \\
&\leq b_{q-1}(\delta,\varepsilon) + |\alpha|\, ||A^{-1}||\, ||G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k}}) - G'(\mathbf{x}^{\mathbf{k-1}}) \pm G'(\mathbf{x}^*)|| \\
&\leq b_{q-1}(\delta,\varepsilon) + ||A^{-1}||\, |\alpha|\gamma\left(||\mathbf{x}^{\mathbf{k}} - \mathbf{x}^*|| + ||\mathbf{x}^{\mathbf{k-1}} - \mathbf{x}^*||\right) \\
&\leq b_{q-1}(\delta,\varepsilon) + C|\alpha|\gamma(1+r)\varepsilon = b_q(\delta,\varepsilon),
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Ovim je dokazana relacija (i). Takodje je

$$\begin{aligned} \|H_k\| &\leq \|\mathcal{J}(\mathrm{x}^*)\| + \|H_k - \mathcal{J}(\mathrm{x}^*)\| \\ &\leq \|\mathcal{J}(\mathrm{x}^*)\| + \frac{r}{M_1} \\ &\leq \|\mathcal{J}(\mathrm{x}^*)\| + \frac{1}{\|\mathcal{J}(\mathrm{x}^*)\|} \leq 2M, \end{aligned} \tag{3.18}$$

tako da na osnovu perturbacione leme sledi da je H_k nesingularna, pa je dokazano (ii). Na osnovu (3.17), (3.18) i (3.16) sledi

$$\begin{aligned} \|\mathrm{x}^{k+1} - \mathrm{x}^*\| &= \|\mathrm{x}^k - \mathrm{x}^* + \mathrm{s}^k\| = \|\mathrm{x}^k - \mathrm{x}^* - H_k F(\mathrm{x}^k)\| \\ &\leq \|I - H_k \mathcal{J}(\mathrm{x}^*)\| \cdot \|\mathrm{x}^k - \mathrm{x}^*\| \\ &\quad + \|H_k\| \cdot \|F(\mathrm{x}^k) - F(\mathrm{x}^*) - \mathcal{J}(\mathrm{x}^*)(\mathrm{x}^k - \mathrm{x}^*)\| \\ &\leq \|\mathcal{J}(\mathrm{x}^*)\| \cdot \|\mathcal{J}(\mathrm{x}^*)^{-1} - H_k\| \cdot \|\mathrm{x}^k - \mathrm{x}^*\| \\ &\quad + \gamma\varepsilon \|H_k\| \, \|\mathrm{x}^k - \mathrm{x}^*\| \\ &\leq M_1(b_q(\delta, \varepsilon) + \gamma\varepsilon)\|\mathrm{x}^k - \mathrm{x}^*\| \leq r\|\mathrm{x}^k - \mathrm{x}^*\|. \end{aligned}$$

čime je dokazana i relacija *(iii)*, odnosno tvrdjenje teoreme. □

Važno je napomenuti da restart nije morao biti vršen Njutnovom iteracijom. Tačnije, za $k \equiv 0 \bmod(m)$, ako je $\|H_k - \mathcal{J}(\mathrm{x}^*)^{-1}\| \leq \delta$ korekciju s^k odredjujemo sa

$$\mathrm{s}^k = -H_k F(\mathrm{x}^k).$$

Pošto smo do sada spomenuli neke od mogućih izbora za matricu A i vektor r^k, preostaje da damo još neka zapažanja o uticaju parametra α. Najjednostavniji izbor parametra je $\alpha = \mathrm{const}$. Medjutim, može se razmatrati i opštiji slučaj kada se parametar α menja u svakoj iteraciji. Ako korekciju s^k (3.3) tretiramo kao aproksimaciju Njutnove korekcije s_N^k ($\mathrm{s}_N^k = -\mathcal{J}(\mathrm{x}^k)^{-1}F(\mathrm{x}^k)$), tada uslov (3.4), odnosno veličina η_k predstavlja grešku primenjene aproksimacije. Možemo reći da, što je η_k bliže nuli, to je novi postupak "bliži" Njutnovom postupku. Na ovaj način možemo definisati optimalan izbor parametra α u svakoj iteraciji kao minimum funkcije

$$h(\alpha) = \| - G'(\mathrm{x}^k)A^{-1}F(\mathrm{x}^k) + \alpha(I + G'(\mathrm{x}^k)A^{-1})\mathrm{r}^k\|.$$

Tako je dobijen postupak iz klase MSV postupaka koji je "najbliži", odnosno najsličniji Njutnovom postupku. Parametar α odredjen na opisan način zvaćemo optimalan parametar. Ovakvu ideju ilustrovaćemo na primeru.

Izbor optimalnog parametra za MSV postupak sa izborom (3.7). Neka je $\mathbf{x} \in D$. Definišimo funkciju $s : R \to R_+$ sa

$$s(\alpha) = || - G'(\mathbf{x})A^{-1}F(\mathbf{x}) + \alpha G'(\mathbf{x})F(\mathbf{x}) + \alpha G'(\mathbf{x})A^{-1}G'(\mathbf{x})F(\mathbf{x})||_2^2. \tag{3.19}$$

Zbog preglednosti uvedimo oznake:

$$\begin{aligned} M &= G'(\mathbf{x})A^{-1} \\ \mathbf{v} &= MF(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w} &= G'(\mathbf{x})F(\mathbf{x}) \\ \mathbf{t} &= M\mathbf{w}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Sada funkciju s možemo zapisati u obliku

$$s(\alpha) = ||\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w} + \alpha\mathbf{t}||_2^2.$$

Kako je funkcija s nenegativna i polinom drugog stepena po α to ona sigurno ima minimum koji ujedno predstavlja i optimalni parametar α_{op}. Rešavajući jednačinu $s'(\alpha) = 0$ dobijamo

$$\alpha_{op} = -\frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{t})}{(\mathbf{w} + \mathbf{t}, \mathbf{w} + \mathbf{t})}, \tag{3.21}$$

i

$$s_{min} = s(\alpha_{op}) = ||\mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{t})}{(\mathbf{w} + \mathbf{t}, \mathbf{w} + \mathbf{t})}(\mathbf{w} + \mathbf{t})||_2^2. \tag{3.22}$$

Analizom relacija (3.20), zaključujemo da je za izračunavanje optimalnog parametra potrebno izvršiti jedno množenje matrica i tri množenja matrice i vektora. Ako je $s_{min} = 0$ tada se novi postupak poklapa sa Njutnovim postupkom.

3.2 Numerički primeri

Na primeru 1 (Dodatak A) za $n = 4$ i $\mathbf{x^0} = [0.9, 0.9, 0.9, 0.9]$ i izlaznim kriterijumom $||F(\mathbf{x^k})|| \leq 10^{-8}$ testiraćemo uticaj izbora matrice A, vektora $\mathbf{r^k}$ i parametra α na konvergenciju MSV postupka.

Njutnov postupak je konvergirao u 8. iteraciji.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

α	$-\alpha G_k' F_k$	$-\alpha G_k' \mathbf{s^{k-1}}$
1	D	D
0.4	D	9
0.3	D	9
0.2	D	8
0.1	12	8
0	7	7
-0.1	5	8
-0.2	7	8
-0.3	8	8
-0.4	D	8
-1	D	10

Tabela 3.1

$$A_2 = \mathcal{J}(\mathbf{x^0})$$

α	$-\alpha G_k' F_k$	$\alpha G_k' \mathbf{s^{k-1}}$
1	53	> 100
0.5	28	67
0.3	22	38
0.1	18	23
0	14	14
-0.1	15	13
-0.3	14	17
-0.5	12	22
-0.8	10	28
-1	7	33
-1.2	10	41

Tabela 3.2

Analizirajući prethodne dve tabele zaključujemo da je najbrži postupak dobijen pri izboru matrice A_1, vektora $\mathbf{r^k} = -\alpha G'(\mathbf{x^k})F(\mathbf{x^k})$ i parametra $\alpha = -0.1$. Treba napomenuti da je ovakav izbor omogućio dobijanje rezultata koji je bolji, kako od Njutnovog postupka tako i od fiksnog Njutnovog postupka ($\alpha = 0$). Za izbor $\mathbf{r^k} = -\alpha G'(\mathbf{x^k})F(\mathbf{x}))$, izbor matrice A je imao znatan uticaj, ne samo na broj iteracija, već i na izbor parametra α, jer se oblast konvergencije za parametar α znatno smanjila kod izbora A_1. Kod izbora $\mathbf{r^k} = -\alpha G'(\mathbf{x^k})\mathbf{s^{k-1}}$, izbor matrice A uticao je pre svega na brzinu, odnosno na broj iteracija.

Na istom primeru ilustrovaćemo i izbor optimalnog parametra α_k, pri izboru $\mathbf{r^k} = -\alpha_k G'(\mathbf{x^k})F(\mathbf{x^k})$. Za matricu A je uzeta matrica $\mathcal{J}(\mathbf{x^0})$.

iter.	α_k	uslov (η_k)	$\|\|s^k - s_N^k\|\|$
1	1.	0.	0.
2	-94.87	$2.362 \cdot 10^{-16}$	$6.67 \cdot 10^{-15}$
3	3.57	0.	$5.66 \cdot 10^{-15}$
4	10.50	0.	$1.79 \cdot 10^{-15}$
5	21.48	$1.14 \cdot 10^{-15}$	$9.58 \cdot 10^{-16}$
6	25.58	0.	$3.30 \cdot 10^{-15}$
7	25.73	$4.09 \cdot 10^{-16}$	$8.95 \cdot 10^{-15}$
8	33.91	$8.16 \cdot 10^{-16}$	$8.37 \cdot 10^{-15}$

Tabela 3.3

Očigledno je da je novi postupak zadržao isto ponašanje kao Njutnov postupak, iako je teorijski dokazana samo linearna konvergencija. Ovakvo ponašanje postupka moglo se zaključiti na osnovu relacije (3.22). Za dati sistem i dati izbor matrice A u svakoj iteraciji važi $s_{min} = s(\alpha_{op}) = 0$, odnosno $\eta_k = 0$. Mala odstupanja η_k od 0 su posledica zaokruživanja.

Na primeru 8 (Dodatak A) testiran je novi MSV postupak sa izborom (3.7) i $\alpha = 1$. Izlazni kriterijum je $||F(\mathrm{x}^k)|| \leq 10^{-5}$. Za rešavanje linearnog sistema korišćena je LU dekompozicija blok-tridijagonalne matrice, videti ([25]). U tabeli 3.4 uporedno su dati broj iteracija i CPU vreme za Njutnov i novi postupak.

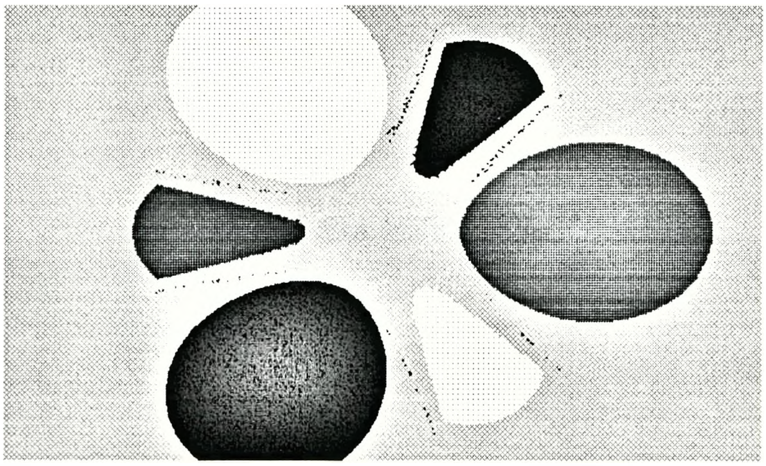
	Njutnov postupak		MSV postupak	
N	iter.	vreme	iter.	vreme
8	8	34.7	14	39.2
16	8	156.0	9	101.2
32	7	851.7	8	399.6
64	7	6589.3	7	1845.4

Tabela 3.4

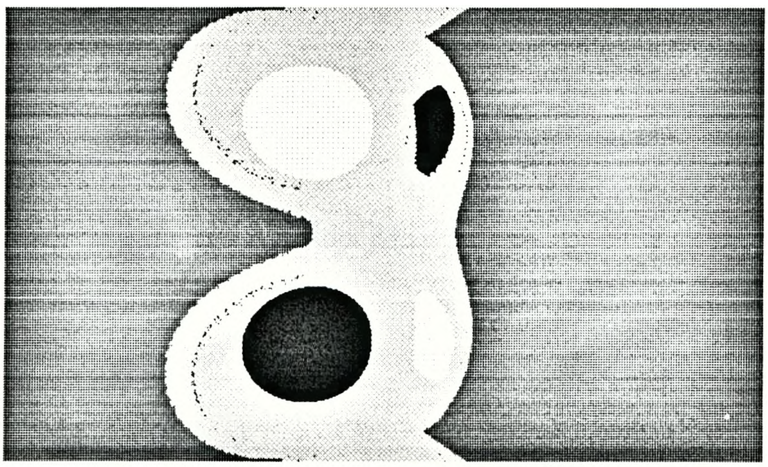
Bitno je napomenuti da ni kod jednog primera nije radjen restart sa Njutnovom iteracijom.

3.3 Medjusobni odnos lokalnih konvergencija MSV postupaka

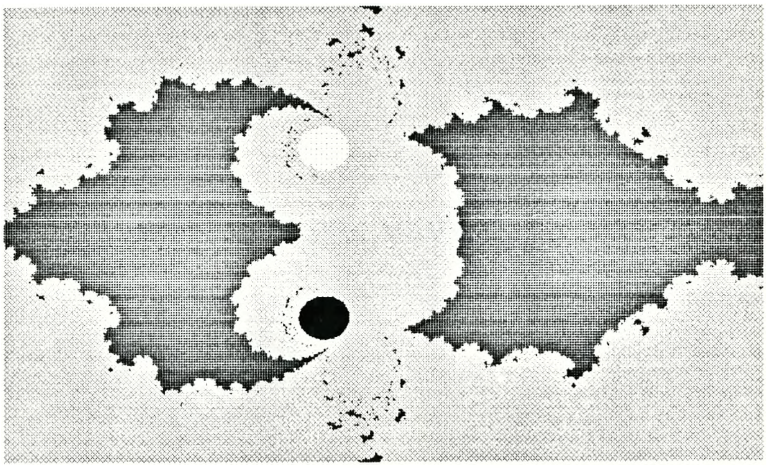
Na primeru iz odeljka 2.4 posmatraćemo i ponašanje postupaka iz klase MSV postupaka sa izborom (3.7).



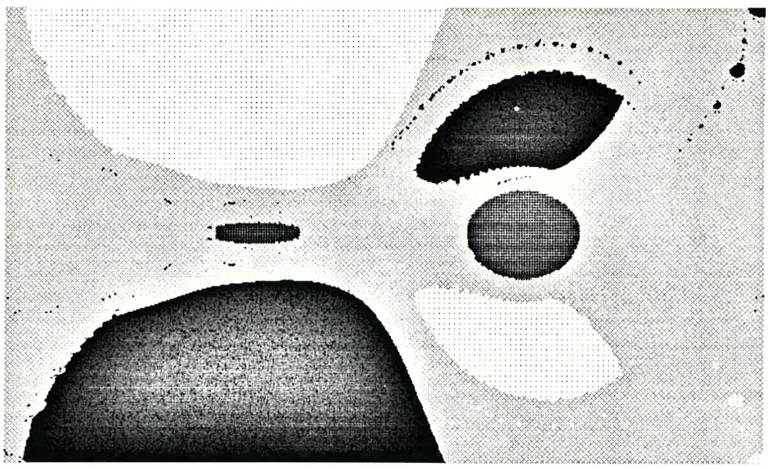
Slika 3.1: Fiksni Njutnov postupak (MSV sa $\alpha = 0$)



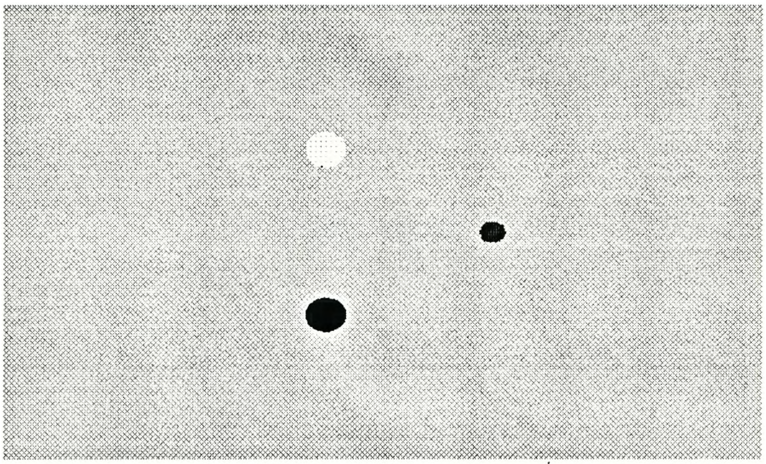
Slika 3.2: MSV postupak sa $\alpha = -0.1$



Slika 3.3: MSV postupak sa $\alpha = -0.5$



Slika 3.4: MSV postupak sa $\alpha = 0.1$



Slika 3.5: MSV postupak sa $\alpha = 1$

konvergencija ka $\mathbf{x}_1^*$;

konvergencija ka $\mathbf{x}_2^*$;

konvergencija ka $\mathbf{x}_3^*$;

ne konvergira;

Analizirajući prethodne slike zaključujemo da se najbolje ponašao MSV postupak sa $\alpha = -0.1$, dok je kod postupka sa $\alpha = 1$ najviše došao do izražaja lokalni karakter.

Napomena: Na kraju napomenimo da veći deo teorijskih rezultata iz poglavlja 2 i 3 važi i za opštiji uslov od S3. Naime, S3 možemo zameniti sa

$$||\mathcal{J}(\mathbf{x}) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)|| \leq \gamma ||\mathbf{x} - \mathbf{x}^*||^p, \quad \gamma, p > 0,$$

što je ovde, zbog jasnoće i konciznosti, izostavljeno.

4

Uticaj relaksacije postupaka na konvergenciju

Kako je već napomenuto, jedan od najvećih nedostataka iterativnih postupaka za rešavanje nelinearnih sistema jeste lokalna konvergencija, odnosno potreba da se početna aproksimacija dovoljno dobro odredi. U većini slučajeva ovaj problem nije zadovoljavajuće rešen. Jedan pravac istraživanja predstavljaju postupci za odredjivanje prihvatljivog početnog vektora, videti [57, 58, 59, 64]. Drugi pravac, koji ćemo ovde razmatrati, jeste uvodjenje relaksacionog parametra. Na ovaj način postiže se da postupak konvergira za svako $\mathbf{x^0}$ iz D ili iz većeg dela skupa D.

Svi do sada razmatrani postupci mogu se predstaviti u dva koraka. U prvom koraku se odredjuje korekcija $\mathbf{s^k}$, a u drugom, nova iteracija $\mathbf{x^{k+1}}$.

Postupci razmatrani u ovoj disertaciji mogu se modifikovati uvodjenjem relaksacionog parametra pri odredjivanju nove iteracije. Relaksacione postupke definišemo pomoću sledećeg algoritma.

Algoritam 4.1: Relaksacioni postupak

Neka su date potrebne početne veličine.

za $k = 0, 1, 2, \ldots$

R1: odrediti korekciju $\mathbf{s^k}$

R2: odrediti novu iteraciju

$$\mathbf{x}^{\mathbf{k+1}} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}} + t_k \mathbf{s}^{\mathbf{k}} \tag{4.1}$$

za neki realan parametar t_k.

U ovoj disertaciji razmatran je uticaj relaksacionog parametra na IN postupke definisane u odeljku 2.3. U zavisnosti koji IN postupak koristimo u koraku R1 dobijamo odgovarajući relaksacioni postupak, npr. relaksacioni CIN postupak, relaksacioni SIN postupak i sl.

4.1 Lokalna konvergencija i brzina konvergencije relaksacionih postupaka

Relaksacioni parametar nekada može ubrzati konvergenciju osnovnog postupka, što se pre svega dešava kod relaksacionih iterativnih postupaka za rešavanje linearnih sistema, dok je kod iterativnih postupaka za rešavanje nelinearnih sistema glavni cilj proširenje oblasti za izbor početne aproksimacije (globalizacija postupka). Naravno, uvodjenje parametra kod nelinearnih iterativnih postupaka ne sme da naruši brzinu konvergencije. Drugim rečima, relaksacija je dobra ukoliko postoji k_0 takvo da za svako $k \geq k_0$ možemo uzeti $t_k = 1$, tj. relaksacioni postupak se svodi na osnovni, pa brzina ostaje očuvana.

Naredna teorema daje oblast za izbor relaksacionog parametra kod CIN postupka (2.12).

Teorema 4.1 *Neka su ispunjene pretpostavke S1 i S2 i neka je*

$$0 < t \leq t_k < \frac{2-s}{1+\eta_k} \quad i \quad 0 \leq \eta_k \leq \eta < 1, \tag{4.2}$$

gde je $t, s, \eta \in (0,1)$. *Tada postoji* $\varepsilon > 0$ *takvo da ako je* $||\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*|| \leq \varepsilon$ *iterativni niz definisan relaksacionim CIN postupkom linearno konvergira ka* $\mathbf{x}^*$.

Ako je $\lim_{k\to\infty} t_k = 1$ *i* $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$ *tada relaksacioni RIN postupak konvergira superlinearno.*

Dokaz:
Označimo $\tilde{s}^k = t_k \mathbf{s}^\mathbf{k}$. Tada je

$$\begin{aligned} ||\mathcal{J}(\mathbf{x}^\mathbf{k})\tilde{s}^k + F(\mathbf{x}^\mathbf{k})|| &= ||\mathcal{J}(\mathbf{x}^\mathbf{k})t_k\mathbf{s}^\mathbf{k} + t_kF(\mathbf{x}^\mathbf{k}) + (1-t_k)F(\mathbf{x}^\mathbf{k})|| \\ &\leq |t_k| \cdot ||\mathcal{J}(\mathbf{x}^\mathbf{k})\mathbf{s}^\mathbf{k} + F(\mathbf{x}^\mathbf{k})|| + |1-t_k| \cdot ||F(\mathbf{x}^\mathbf{k})|| \\ &\leq |t_k|\eta_k||F(\mathbf{x}^\mathbf{k})|| + |1-t_k| \cdot ||F(\mathbf{x}^\mathbf{k})|| \\ &= (\eta_k|t_k| + |1-t_k|)||F(\mathbf{x}^\mathbf{k})|| \end{aligned}$$

Definišimo zatim

$$\alpha_k = \eta_k|t_k| + |1-t_k|.$$

Posmatraćemo dva slučaja u zavisnosti od parametra t_k. Parametar t_k odredjujemo tako da važi $\alpha_k \in [0, \alpha)$, $\alpha \in (0,1)$ pa na osnovu primene teoreme o lokalnoj konvergenciji CIN postupka sledi konvergencija relaksacionog postupka.

I slučaj: Neka je $0 < t \leq t_k \leq 1$, odnosno $\alpha_k = 1 + t_k(\eta_k - 1)$. Tada je $\alpha_k \in [0, \max\{1-t, \eta\})$ za $\eta_k \in [0, \eta)$.

II slučaj: Neka je $t_k > 1$, odnosno $\alpha_k = t_k(1+\eta_k) - 1$. Tada je $\alpha_k \in [0, 1-s)$ za $\eta_k \in [0, \eta)$ i $t_k \in (1, (2-s)/(1+\eta_k))$.

Na osnovu predjašnjeg sledi da su za t_k i η_k iz uslova (4.2) ispunjeni uslovi teoreme 2.4 o konvergenciji CIN postupka tj. dokazana je lokalna konvergencija relaksacionog CIN postupka.

Ako je $\lim_{k\to\infty} t_k = 1$ i $\lim_{k\to\infty} \eta_k = 0$ tada je $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ pa relaksacioni CIN postupak superlinearno konvergira na osnovu već pomenute teoreme 2.4 $\square$.

4.2 Redukcija norme

Funkcija g definisana sa

$$g(\mathbf{x}) = ||F(\mathbf{x})||^2; \tag{4.3}$$

$$g(\mathbf{x}) = ||AF(\mathbf{x})||^2; \tag{4.4}$$

$$g(\mathbf{x}) = ||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}F(\mathbf{x})||^2; \tag{4.5}$$

naziva se **nivo funkcija**. Očigledno je da nivo funkcija (4.3) predstavlja specijalan slučaj nivo funkcije (4.4) za $A = I$, dok je funkcija (4.5) afino-invarijantna. U prethodnim poglavljima je napomenuto da ni jedna klasa posmatranih modifikacija Njutnovog postupka, kao ni sam Njutnov postupak, nemaju osobinu

$$g(\mathbf{x^k}) < g(\mathbf{x^{k+1}}) \tag{4.6}$$

ni za jednu funkciju g definisanu sa (4.3),(4.4),(4.5). Drugim rečima, nemaju **osobinu redukcije norme**. Očigledno da postupci za koje bi bila zadovoljena relacija (4.6) daju opadajući niz $\{CF(\mathbf{x^k})\}$, gde je $C \in \{I, A, \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)^{-1}\}$, što još uvek nije dovoljan uslov za konvergenciju. Tačnije, takav postupak može konvergirati ka lokalnom minumumu funkcije F.

Za svako $\mathbf{x} \in D$ definisaćemo nivo skup.

Definicija 4.1 *Neka je dato preslikavanje F i $\mathbf{x} \in D$. Tada maksimalni povezani podskup skupa*

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in D,\ \|CF(\mathbf{y})\| \le \|CF(\mathbf{x})\|\}$$

koji sadrži tačku $\mathbf{x}^*$, nazivamo **nivo skup** *za $\mathbf{x}$ u odnosu na matricu C (u oznaci $L(\mathbf{x}, C)$).*

Prvo pitanje koje se postavlja jeste da li za svaku korekciju $\mathbf{s^k}$ postoji parametar t_k tako da relacija (4.6) bude zadovoljena za neki od izbora funkcije g. Ako postoji t_0 takvo da za svako $t_k \in (0, t_0)$ iteracija $\mathbf{x^{k+1}}$ zadovoljava (4.6), korekcija $\mathbf{s^k}$ naziva se **pravac opadanja**. Dovoljan uslov da $\mathbf{s^k}$ bude pravac opadanja jeste da važi

$$\nabla g(\mathbf{x^k})^T \mathbf{s^k} < 0$$

gde je $\nabla g(\mathbf{x^k})$ gradijent funkcije g u tački $\mathbf{x^k}$. Odnosno, ako iskoristimo osobine funkcije F i za nivo funkciju uzmemo npr. (4.3), dobijamo da je $\nabla g(\mathbf{x^k}) = 2\mathcal{J}(\mathbf{x^k})^T F(\mathbf{x^k})$, pa prethodni uslov postaje

$$\left(\mathcal{J}(\mathbf{x^k})^T F(\mathbf{x^k})\right)^T \mathbf{s^k} < 0. \tag{4.7}$$

Za Njutnov postupak važi $\mathbf{s^k} = -\mathcal{J}(\mathbf{x^k})^{-1} F(\mathbf{x^k})$, te (4.7) postaje

$$-F(\mathbf{x^k})^T F(\mathbf{x^k}) < 0,$$

što je uvek zadovoljeno. Kod QN postupaka uslov (4.7) svodi se na

$$-F(\mathbf{x^k})^T \mathcal{J}(\mathbf{x^k}) B_k^{-1} F(\mathbf{x^k}) < 0.$$

Ovde ćemo dokazati teoremu da je za AIN postupak (2.15) korekcija $\mathbf{s^k}$ takodje pravac opadanja ako za nivo-funkciju biramo (4.4).

Teorema 4.2 *Neka je F diferencijabilna na nepraznom i otvorenom skupu D. Neka je $\mathbf{x^k} \in D$ i $F(\mathbf{x^k}) \neq 0$. Označimo*

$$z(t) = \mathbf{x^k} + t\mathbf{s^k},$$

gde $\mathbf{s^k}$ zadovoljava relaciju

$$||A(\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k}))|| \leq \eta_k ||AF(\mathbf{x^k})||, \tag{4.8}$$

za $\eta_k \in [0, 1)$. Tada postoji $t_0 > 0$ takvo da važi

$$||AF(z(t_k))|| < ||AF(\mathbf{x^k})|| \tag{4.9}$$

i $z(t_k) \in D$ za $t_k \in [0, t_0)$.

Dokaz: Kako je D neprazan i otvoren skup i $z(0) = \mathbf{x} \in D$ to postoji $t' > 0$ takvo da je $z(t) \in D$ za sve $t \in [0, t')$. Definišimo funkciju $g : R \to R_+$

$$g(t) = ||AF(z(t))||^2,$$

Diferencirajući $g(t)$ dobijamo

$$g'(t) = 2\left(A\mathcal{J}(z(t))\mathbf{s^k}, AF(z(t))\right).$$

Stavljajući $t = 0$ i koristeći Cauchy-Schwarz-ovu nejednakost i (4.8) dobijamo

$$\begin{aligned}
g'(0) &= 2(A\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k}, AF(\mathbf{x^k})) \pm (AF(\mathbf{x^k}), AF(\mathbf{x^k})) \\
&\leq 2\left[\left(A(\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k})), AF(\mathbf{x^k})\right) - (AF(\mathbf{x^k}), AF(\mathbf{x^k}))\right] \\
&\leq 2(\eta_k - 1)||AF(\mathbf{x^k})||^2 < 0,
\end{aligned}$$

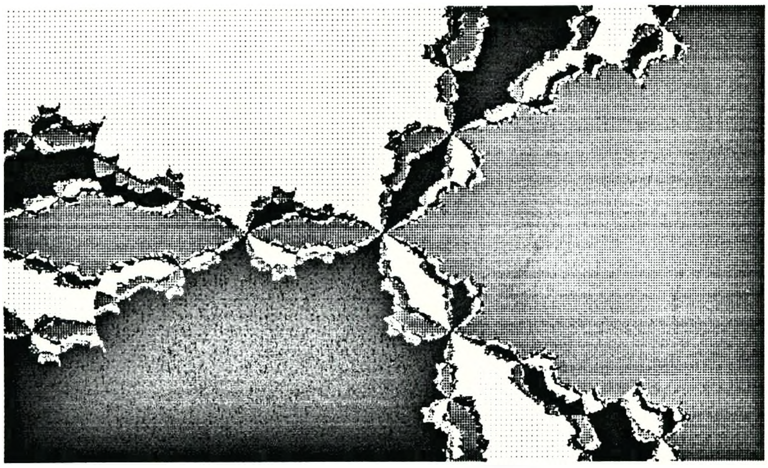
za sve $\eta_k \in [0, 1)$. Prema tome, postoji $t_0 \leq t'$ takvo da je

$$g(t_k) < g(0)$$

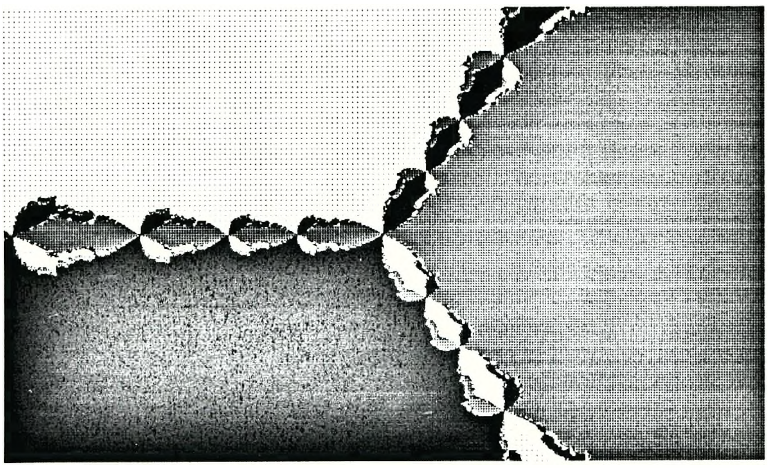
zadovoljeno za sve $t_k \in [0, t_0)$, tj. važi (4.9). □

4.2.1 Uticaj relaksacionog parametra na lokalnu konvergenciju

Ponovo ćemo posmatrati primer iz odeljka 2.4 i primenu relaksacionog Njutnovog postupka i CIN postupka sa $\eta_k = 0.5$. Parametar t_k odredjujemo tako da važi (4.6) za $g(\mathrm{x}) = ||F(\mathrm{x})||$. Ako je $t_k < 2^{-12}$ tada stavljamo $t_k = 1$.



Slika 4.1: Njutnov postupak sa relaksacijom



Slika 4.2: CIN postupak sa $\eta_k = 0.5$ i relaksacijom

Slike 4.1 i 4.2 ilustruju uticaj relaksacije na lokalnu konvergenciju. Uporedjujući sliku 4.1 sa slikom 2.2 i sliku 4.2 sa slikom 2.5, vidimo da parametar t_k neznatno utiče na konvergenciju u posmatranoj oblasti. Drugim rečima, relaksacija nije imala značajnog uticaja u oblasti gde stacionarni postupak ($t_k \equiv 1$) konvergira.

Kako je već napomenuto, uslov (4.6) nije dovoljan uslov za konvergenciju niza $\{\mathbf{x}^k\}_{k=0}^{\infty}$ ka nuli $\mathbf{x}^*$ funkcije F. Pomenuti nedostatak može se otkloniti uvodjenjem jačih uslova na preslikavanje F, skup D ili startnu aproksimaciju $\mathbf{x}^0$. Postoji velik broj rezultata koji se odnose na sličan problem za Njutnov, QN i CIN postupak, videti [3, 4, 6, 7, 11, 20, 23, 26, 28, 38, 41].

4.3 Globalna konvergencija relaksacionih IN postupaka

U odeljku 2.3 definisano je nekoliko podklasa netačnog Njutnovog postupka. U ovoj disertaciji razmatraćemo globalnu konvergenciju dve podklase IN postupaka; AIN postupke i YIN postupke, kao afino-invarijantnu podklasu IN postupaka. Napomenimo da su do sada najčešće razmatrani CIN postupci, koji predstavljaju specijalan slučaj AIN postupaka.

4.3.1 Globalna konvergencija AIN postupaka

Prvi postupak iz grupe IN postupaka koji ćemo razmatrati, jeste AIN postupak. Definišimo relaksacioni AIN postupak sledećim algoritmom.

Algoritam 4.2: Relaksacioni AIN postupak

Neka je dato $\mathbf{x}^0 \in D$

za $k = 0, 1, \ldots$

RAIN1: odrediti $\mathbf{s^k}$ tako da važi

$$||A(\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k}))|| \leq \eta_k ||AF(\mathbf{x^k})||, \tag{4.10}$$

gde je $\eta_k \geq 0$ realan parametar.

RAIN2: izračunati novu iteraciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + t_k \mathbf{s^k},$$

gde je $t_k \geq 0$ relaksacioni realan parametar.

Pre glavnih teorema o globalnoj konvergenciji, zbog jasnoće i preglednosti, uvodimo neke pretpostavke i oznake.

Za nesingularnu matricu $A \in R^{n \times n}$ i $\mathbf{x} \in D$, uvodimo sledeće pretpostavke:

A1: $L(\mathbf{x}, A)$ je kompaktan i $L(\mathbf{x}, A) \subseteq D$

A2: $\mathcal{J}(\mathbf{z})$ je nesingularna matrica i neprekidno preslikavanje za $\mathbf{z} \in L(\mathbf{x}, A)$

A3: Postoji $q > 0$ takvo da je

$$||\mathcal{J}(\mathbf{y})^{-1}\mathcal{J}(\mathbf{z}) - I|| \leq q||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| \quad \text{za } \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L(\mathbf{x}, A).$$

Q1: $\beta(\mathbf{x}) = \sup\limits_{\mathbf{y} \in L(\mathbf{x}, A)} ||\mathcal{J}(\mathbf{y})^{-1}F(\mathbf{x})||$

Q2: $\kappa(\mathbf{x}) = ||A\mathcal{J}(\mathbf{x})|| \cdot ||(A\mathcal{J}(\mathbf{x}))^{-1}||$

Q3: $a_0(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}\kappa(\mathbf{x})(1 + \kappa(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x}))$

$$a_1(\mathbf{x}) = \frac{1 + 2\eta(\mathbf{x}) + 2\kappa(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})^2}{1 + \kappa(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})}$$

$$a_2(\mathbf{x}) = \frac{1 - \kappa(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})}{a_0(\mathbf{x})}$$

Q4: $P_3(\mathbf{x}, t) = a_0(\mathbf{x})t((q\beta(\mathbf{x})t)^2 + a_1(\mathbf{x})q\beta(\mathbf{x})t - a_2(\mathbf{x}))$.

Bez dokaza navodimo teoremu o Njutnovoj stazi.

Teorema 4.3 *[11] Neka je* $\mathbf{x} \in D$ *i* $A \in R^{n\times n}$. *Neka* $F, \mathbf{x}$ *i* A *zadovoljavaju pretpostavke A1 i A2. Tada postoji jedinstvena diferencijabilna funkcija* $p : [0,1] \to L(\mathbf{x}, A)$ *za koju važi*

$$F(p(t)) = (1-t)F(\mathbf{x}), \quad t \in [0,1].$$

Takodje, p zadovoljava i relacije

$$\begin{aligned} p'(t) &= -\mathcal{J}(p(t))^{-1}F(\mathbf{x}), \quad t \in [0,1] \\ p(0) &= \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Štaviše, $\mathbf{x}^* = p(1)$ *predstavlja jedinstveno rešenje sistema* $F(\mathbf{x}) = 0$ *u* $L(\mathbf{x}, A)$.

Funkcija p poznata je pod nazivom Njutnova staza.

Prva teorema koju ćemo dokazati predstavlja najvažnije tvrdjenje za dokaz konvergencije iterativnog niza. Ona daje egzistenciju parametra t, tako da iterativni niz bude dobro definisan.

Teorema 4.4 *Neka su* $A \in R^{n\times n}$ *i* $\mathbf{x} \in D$ *takvi da važi* $F(\mathbf{x}) \neq 0$ *i da su zadovoljene pretpostavke A1,A2,A3. Neka* $\mathbf{s}$ *zadovoljava relaciju*

$$||A(\mathcal{J}(\mathbf{x})\mathbf{s} + F(\mathbf{x}))|| \leq \eta(\mathbf{x})||AF(\mathbf{x})||. \tag{4.11}$$

Pretpostavimo da postoji konstanta $\theta > 0$ *takva da je*

$$\eta(\mathbf{x})\mathrm{K}(\mathbf{x}) < \frac{1}{\theta}. \tag{4.12}$$

Tada, za svako t koje zadovoljava

$$0 \leq t \leq \min(1, \xi(t)),$$

gde je $\xi(x)$ *realni pozitivni koren jednačine* $P_3(\mathbf{x}, t) = 0$, *tj.*

$$\xi(\mathbf{x}) = \frac{-a_1(\mathbf{x}) + \sqrt{a_1(\mathbf{x})^2 + 4a_2(\mathbf{x})}}{2q\beta(\mathbf{x})} \tag{4.13}$$

važi $\mathbf{x} + t\mathbf{s} \in L(\mathbf{x}, A)$ *i*

$$||AF(\mathbf{x} + t\mathbf{s})|| \leq (1 + P_3(\mathbf{x}, t))||AF(\mathbf{x})||. \tag{4.14}$$

Dokaz: Na osnovu teoreme 4.3 postoji jedinstvena funkcija $p : [0,1] \to L$, $L = L(\mathbf{x}, A)$, takva da za svako $t \in [0,1]$ važi

$$F(p(t)) = (1-t)F(\mathbf{x}) \tag{4.15}$$

$$p'(t) = -\mathcal{J}(p(t))^{-1}F(\mathbf{x}), \quad p(0) = \mathbf{x}. \tag{4.16}$$

Definišimo funkcije $z : [0,1] \to R^n$, $w : [0,1] \times [0,1] \to R^n$, $\delta : [0,1] \to R$ i skup L_0 na sledeći način

$$z(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{s} \tag{4.17}$$

$$w(t,v) = p(t) + v(z(t) - p(t)) \tag{4.18}$$

$$\delta(t) = \sup\{v \mid v \in [0,1], w(t,v') \in L \text{ za sve } v' \in [0,v]\} \tag{4.19}$$

$$L_0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = w(t,v),\ t \in [0,1], v \in [0,\delta(t)]\} \tag{4.20}$$

Na osnovu neprekidnosti funkcije F i (4.15), sledi $\delta(t) \neq 0$ za $t \in (0,1]$. Za $t = 0$ je $w(0,v) = \mathbf{x}$ što daje $\delta(0) = 1$. Prema tome važi

$$\delta(t) \neq 0 \quad \text{za sve } t \in [0,1].$$

Na osnovu (4.19) imamo $w(t,v) \in L$ za sve $t \in [0,1]$ i $v \in [0,\delta(t))$, dok iz uslova o kompaktnosti skupa L, sledi $w(t,\delta(t)) \in L$, na osnovu čega sledi $L_0 \subset L$.

Sada ćemo dokazati relaciju (4.14). Izaberimo $t \in [0,1]$. Za $v \in (0,\delta(t)]$ primenjujemo teoremu o srednjoj vrednosti

$$F(w(t,v)) = F(w(t,0)) + \frac{1}{v}\int_0^v \mathcal{J}(w(t,v'))dv'\,(w(t,v) - w(t,0)).$$

Na osnovu definicije funkcije w i relacije (4.15), imamo

$$\begin{aligned} AF(w(t,v)) &= (1-t)AF(\mathbf{x}) + A\mathcal{J}(\mathbf{x})(w(t,v) - p(t)) + \\ &\quad + \frac{1}{v}A\int_0^v (\mathcal{J}(w(t,v')) - \mathcal{J}(\mathbf{x}))dv'\,(w(t,v) - p(t)), \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}||AF(w(t,v))|| &\leq (1-t)||AF(\mathrm{x})|| + \Big(||A\mathcal{J}(\mathrm{x})|| + \\ &\frac{1}{v}\int_0^v ||A(\mathcal{J}(w(t,v')) - \mathcal{J}(\mathrm{x}))||dv'\Big) \, ||w(t,v) - p(t)||.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Pre ocena za

$$I_1 = ||w(t,v) - p(t)|| \quad \text{i} \quad I_2 = \int_0^v ||A(\mathcal{J}(w(t,v')) - \mathcal{J}(\mathrm{x}))||dv',$$

ocenićemo još neke potrebne izraze. Na osnovu (4.16) i pretpostavke A3, sledi

$$\begin{aligned}||p'(t) - p'(0)|| &= ||-\mathcal{J}(p(t))^{-1}F(\mathrm{x}) + \mathcal{J}(p(0))^{-1}F(\mathrm{x})|| \\ &= ||(\mathcal{J}(p(t))^{-1}\mathcal{J}(\mathrm{x}) - I)\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}F(\mathrm{x})|| \\ &\leq q||p(t) - \mathrm{x}|| \cdot ||\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}F(\mathrm{x})||.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Koristeći lemu 1.1, imamo

$$||p(t) - \mathrm{x}|| \leq t\beta(\mathrm{x}). \tag{4.23}$$

Kombinujući relacije (4.22) i (4.23) dobijamo

$$||p'(t) - p'(0)|| \leq q\beta(\mathrm{x})t||\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}F(\mathrm{x})||.$$

Sada na funkciju p možemo primeniti lemu 1.2, pa sledi

$$\begin{aligned}||p(t) - \mathrm{x} - p'(0)t|| &\leq \frac{1}{2}q\beta(\mathrm{x})||\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}F(\mathrm{x})||t^2 \\ &\leq \frac{1}{2}q\beta(\mathrm{x})||(A\mathcal{J}(\mathrm{x}))^{-1}|| \cdot ||AF(\mathrm{x})||t^2.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Ocena za I_1 : Na osnovu relacija (4.18) i (4.16), imamo

$$\begin{aligned}w(t,v) - p(t) &= v(z(t) - p(t) \pm tp'(0)) \\ &= v\Big((\mathrm{x} - p(t) + tp'(0)) + t(\mathrm{s} + \mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}F(\mathrm{x}))\Big),\end{aligned}$$

tako da iz (4.24) i (4.11) sledi

$$\begin{aligned} I_1 &\leq v\left[||\mathrm{x}-p(t)+tp'(0)||+t||\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}A^{-1}||\cdot||A(\mathcal{J}(\mathrm{x})\mathrm{s}+F(\mathrm{x}))||\right] \\ &\leq (\frac{1}{2}q\beta(\mathrm{x})t^2+t\eta(\mathrm{x}))||(A\mathcal{J}(\mathrm{x}))^{-1}||\cdot||AF(\mathrm{x})|| \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ocena za I_2 : Koristeći pretpostavku A3 dobijamo

$$\begin{aligned} ||(\mathcal{J}(w(t,v'))-\mathcal{J}(\mathrm{x}))|| &\leq ||A\mathcal{J}(\mathrm{x})||\cdot||\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}\mathcal{J}(w(t,v'))-I|| \\ &\leq ||A\mathcal{J}(\mathrm{x})||q||w(t,v')-\mathrm{x}||, \end{aligned}$$

dok iz (4.16), (4.18) i (4.23) sledi

$$\begin{aligned} ||w(t,v')-\mathrm{x}|| &= ||p(t)+v'(z(t)-p(t)\pm tp'(0))-p(0)|| \\ &\leq (1-v')||p(t)-p(0)||+v't||\mathrm{s}+\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}F(\mathrm{x})|| \\ &\quad +v't||\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}F(\mathrm{x})|| \\ &\leq (1-v')t\beta(\mathrm{x})+v't\eta(\mathrm{x})||(A\mathcal{J}(\mathrm{x}))^{-1}||\ ||AF(\mathrm{x})||+v't\beta(\mathrm{x}) \\ &\leq t\beta(\mathrm{x})+t\eta(\mathrm{x})||(A\mathcal{J}(\mathrm{x}))^{-1}||\ ||AF(\mathrm{x})||. \end{aligned}$$

Konačno je

$$I_2 \leq ||A\mathcal{J}(\mathrm{x})||qt\left(\beta(\mathrm{x})+\eta(\mathrm{x})||(A\mathcal{J}(\mathrm{x}))^{-1}||\cdot||AF(\mathrm{x})||\right) \tag{4.26}$$

Na osnovu $||(A\mathcal{J}(\mathrm{x}))^{-1}||\cdot||AF(\mathrm{x})|| \leq \kappa(\mathrm{x})\beta(\mathrm{x})$, te relacija (4.25) i (4.26), iz (4.21) sledi

$$\begin{aligned} ||AF(w(t,v))|| \leq & \Big((1-t)+\kappa(\mathrm{x})(\frac{1}{2}q\beta(\mathrm{x})t+\eta(\mathrm{x}))\cdot \\ & \cdot(1+t\beta(\mathrm{x})(1+\eta(\mathrm{x})\kappa(\mathrm{x})))\Big)||AF(\mathrm{x})||. \end{aligned}$$

Nakon sredjivanja desne strane dobijamo

$$||AF(w(t,v))|| \leq (1+P_3(\mathrm{x},t))||AF(\mathrm{x})||, \quad t\in[0,1] \ \text{ i } \ v\in(0,\delta(t)] \tag{4.27}$$

Kako je $a_2(\mathrm{x}) > 0$, to na osnovu uslova (4.12) postoji jedinstvena, pozitivna nula polinoma $P_3(\mathrm{x},t)$ koja je data relacijom (4.13). Koristeći uslove o kompaktnosti skupa L i neprekidnosti Jakobijana $\mathcal{J}$ kao i definicije funkcija w i δ, može se pokazati da važi $\delta(t) = 1$ za $t \in [0, \min(1, \xi(\mathrm{x}))]$.

Pretpostavimo suprotno,

$$\exists t^* \in (0,1), \quad t^* < \xi(\mathrm{x}), \quad \delta(t^*) < 1.$$

Tada na osnovu relacije (4.27) sledi $||AF(w(t^*, v)|| < ||AF(\mathrm{x})||$ za $v \in [0, \delta(t^*)]$, tj. $w(t^*, \delta(t^*)) \in int(L)$. Na osnovu pretpostavke A2, F je lokalni homeomorfizam za svako $\mathrm{y} \in int(L)$, pa postoji $\rho > 0$ takvo da važi

$$S(w(t^*, \delta(t^*)), \rho) = \{\mathrm{y} | \, ||\mathrm{y} - w(t^*, \delta(t^*)|| < \rho\} \subset L.$$

Prema tome, $w(t^*, v) \in int(L)$ za svako $v < \delta(t^*) + \rho$ što je u kontradikciji sa definicijom funkcije $\delta(t)$.

Sada možemo uzeti $v = 1$, pa iz relacije (4.27) sledi

$$||AF(\mathrm{x} + t\mathrm{s})|| \leq (1 + P_3(\mathrm{x}, t))||AF(\mathrm{x})|| \quad \text{for} \quad t \in [0, \min(1, \xi(\mathrm{x}))]$$

što je trebalo dokazati. □

Upravo dokazana teorema dala je egzistenciju polinoma trećeg stepena čije vrednosti, pored parametra t, zavise i od tačke x. Naredna teorema daje ocenu pomenutog polinoma P_3.

Teorema 4.5 *Neka su ispunjeni uslovi teoreme 4.4 i neka α zadovoljava relaciju*

$$0 < \alpha \leq \min(1, \frac{\theta - 1}{4.5 q \beta(\mathrm{x}) \mathrm{K}(\mathrm{x})(1 + \theta)}). \tag{4.28}$$

Tada je $\alpha \leq (1, \xi(\mathrm{x}) - \alpha)$ i za svako t koje zadovoljava

$$\alpha \leq t \leq \min(1, \xi(\mathrm{x}) - \alpha) \tag{4.29}$$

važi $\mathrm{x} + t\mathrm{s} \in L(\mathrm{x}, A)$ i

$$||AF(\mathrm{x} + t\mathrm{s})|| \leq (1 - \frac{\alpha^2}{4}(1 - \frac{1}{\theta}))||AF(\mathrm{x})||. \tag{4.30}$$

Dokaz: Koristeći $\mathrm{K}(\mathrm{x}) \geq 1$ i uslov $\eta(\mathrm{x})\mathrm{K}(\mathrm{x}) < 1/\theta$ imamo

$$2\frac{\theta-1}{\mathrm{K}(\mathrm{x})(1+\theta)} < a_2(\mathrm{x}) < \frac{2}{\mathrm{K}(\mathrm{x})} \leq 2.$$

Na osnovu nejednakosti $-b+\sqrt{b^2+x} \geq \dfrac{x}{2b+\sqrt{x}}$ za $b, x > 0$ dobijamo ocenu za $\xi(\mathrm{x})$,

$$\xi(\mathrm{x}) \geq \frac{a_2(\mathrm{x})}{q\beta(\mathrm{x})\left(a_1(\mathrm{x})+\sqrt{a_2(\mathrm{x})}\right)}. \tag{4.31}$$

Kako je $\mathrm{K}(\mathrm{x}) \geq 1$, $\theta > 1$, to je $\eta(\mathrm{x}) < 1$, pa ocena za $a_1(\mathrm{x})$ glasi

$$a_1(\mathrm{x}) = \frac{1+2\eta(\mathrm{x})+2\mathrm{K}(\mathrm{x})\eta(\mathrm{x})^2}{1+\mathrm{K}(\mathrm{x})\eta(\mathrm{x})} \leq 1+2\eta(\mathrm{x}) < 3.$$

Sada dobijamo

$$a_1(\mathrm{x})+\sqrt{a_2(\mathrm{x})} < 3+\sqrt{2} < 4.5,$$

što u kombinaciji sa (4.31) daje

$$\xi(\mathrm{x}) \geq \frac{a_2(\mathrm{x})}{4.5q\beta(\mathrm{x})} \geq \frac{2(\theta-1)}{4.5q\beta(\mathrm{x})\mathrm{K}(\mathrm{x})(1+\theta)}.$$

Na osnovu prethodne nejednakosti, za α koje zadovoljava (4.28), sledi $\alpha \leq \xi(\mathrm{x})/2$, što daje

$$\alpha \leq (1, \xi(\mathrm{x})-\alpha). \tag{4.32}$$

Znajući da je interval (4.29) uži od intervala $[0, \min(1, \xi(\mathrm{x}))]$, na osnovu teoreme 4.4, sledi $\mathrm{x}+t\mathrm{s} \in L(\mathrm{x}, A)$.

Za ocenu relacije (4.30) dovoljno je pokazati

$$P_3(\mathrm{x}, t) \leq -\frac{\alpha^2}{4}(1-\frac{1}{\theta}) \text{ for } t \in [\alpha, \min(1, \xi(\mathrm{x})-\alpha)], \tag{4.33}$$

Označimo

$$P_2(\mathrm{x}, t) = (q\beta(\mathrm{x}))^2t^2 + a_1(\mathrm{x})q\beta(\mathrm{x})t - a_2(\mathrm{x}).$$

Polinom $P_2(\mathrm{x}, t)$ ima jednu realnu pozitivnu nulu $\xi(\mathrm{x})$ datu relacijom (4.13) i minimum u tački

$$t^* = -\frac{a_1(\mathrm{x})}{2q\beta(\mathrm{x})} < 0.$$

Prema tome, $P_2(\mathrm{x}, t)$ je negativna i neopadajuća za $t \in [0, \min(1, \xi(\mathrm{x}))]$.

Označimo

$$\bar{\xi} = \min(1, \xi(\mathrm{x}) - \alpha),$$

tada je $P_2(\mathrm{x}, t) \leq P_2(\mathrm{x}, \bar{\xi})$ i

$$P_3(\mathrm{x}, t) = a_0(\mathrm{x}) t P_2(\mathrm{x}, t) \leq a_0(\mathrm{x}) \alpha P_2(\mathrm{x}, \xi(\mathrm{x})) \quad \text{za } t \in [\alpha, \bar{\xi}]. \tag{4.34}$$

Sada se problem svodi na dokazivanje relacije

$$P_2(\mathrm{x}, \bar{\xi}) \leq -\frac{\alpha}{4} a_2(\mathrm{x}). \tag{4.35}$$

Stavljajući $d = \xi(\mathrm{x}) - \bar{\xi}$, dobijamo

$$\begin{aligned} P_2(\mathrm{x}, \bar{\xi}) &= P_2(\mathrm{x}, \bar{\xi}) - P_2(\mathrm{x}, \xi(\mathrm{x})) \\ &= -(q\beta(\mathrm{x}))^2 d(\bar{\xi} + \xi(\mathrm{x})) - a_1(\mathrm{x}) q\beta(\mathrm{x}) d \end{aligned}$$

pa na osnovu (4.13) i $\bar{\xi} = \xi(\mathrm{x}) - d$, sledi

$$P_2(\mathrm{x}, \bar{\xi}) = q\beta(\mathrm{x}) d \left(q\beta(\mathrm{x}) d - \sqrt{a_1(\mathrm{x})^2 + 4a_2(\mathrm{x})} \right). \tag{4.36}$$

Konačno preostaje da ocenimo izraze

$$O_1 = q\beta(\mathrm{x}) d \quad \text{i} \quad O_2 = q\beta(\mathrm{x}) d - \sqrt{a_1(\mathrm{x})^2 + 4a_2(\mathrm{x})}.$$

Razlikovaćemo dva slučaja u zavisnosti od $\bar{\xi}$.

Slučaj I: $\bar{\xi} = \xi(\mathrm{x}) - \alpha$, tj. $d = \alpha$;
Koristeći relacije (4.32) i (4.13), imamo

$$\alpha \leq \frac{1}{4q\beta(\mathrm{x})} \left(-a_1(\mathrm{x}) + \sqrt{a_1(\mathrm{x})^2 + 4a_2(\mathrm{x})} \right).$$

Množeći prethodnu relaciju sa $q\beta(\mathrm{x})$, dodajući $-\sqrt{a_1(\mathrm{x})^2+4a_2(\mathrm{x})}$ i, konačno, koristeći $\alpha = d$, dobijamo

$$O_2 \leq -\frac{1}{4}\left(a_1(\mathrm{x})+\sqrt{a_1(\mathrm{x})^2+4a_2(\mathrm{x})}\right) < 0. \tag{4.37}$$

Na osnovu $\bar{\xi} < 1$ i $d < 1$ tj. $\xi(\mathrm{x}) < 2$, sledi

$$2 > \frac{-a_1(\mathrm{x})+\sqrt{a_1(\mathrm{x})^2+4a_2(\mathrm{x})}}{2q\beta(\mathrm{x})}.$$

Množeći prethodnu relaciju sa $dq\beta(\mathrm{x})/2$ i koristeći $d = \alpha$, dobijamo

$$O_1 > \frac{1}{4}\alpha\left(-a_1(\mathrm{x})+\sqrt{a_1(\mathrm{x})^2+4a_2(\mathrm{x})}\right) > 0. \tag{4.38}$$

Prema tome, iz (4.36), na osnovu (4.37) i (4.38), sledi relacija (4.35).

Slučaj II: $\bar{\xi} = 1$
Koristeći (4.13) i $\bar{\xi} = 1$, dobijamo

$$1 = \frac{-a_1(\mathrm{x})+\sqrt{a_1(\mathrm{x})^2+4a_2(\mathrm{x})}}{2q\beta(\mathrm{x})} - d.$$

Množeći prethodnu jednakost sa $q\beta(\mathrm{x})d$ i nakon sredjivanja sledi

$$dq\beta(\mathrm{x}) = \frac{d}{2(1+d)}\left(-a_1(\mathrm{x})+\sqrt{a_1(\mathrm{x})^2+4a_2(\mathrm{x})}\right) \tag{4.39}$$

Kako je funkcija $h : R_+ \to R$ definisana sa $h(y) = y/(1+y)$ opadajuća i $h(y) \leq 1$, iz (4.39) sledi

$$O_2 < -\frac{1}{2}\left(a_1(\mathrm{x})+\sqrt{a_1(\mathrm{x})^2+4a_2(\mathrm{x})}\right) < 0. \tag{4.40}$$

Ako iskoristimo činjenicu da je $\alpha \leq \xi(\mathrm{x}) - \bar{\xi} = d$ i $h(\alpha) < h(d)$, iz (4.39) dobijamo

$$O_1 \geq \frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\left(-a_1(\mathrm{x})+\sqrt{a_1(\mathrm{x})^2+4a_2(\mathrm{x})}\right) > 0. \tag{4.41}$$

Koristeći (4.40), (4.41) kao i uslov $\alpha \leq 1$, iz relacije (4.36) sledi (4.35).

Na osnovu dokazane relacije (4.35), iz (4.34) sledi

$$P_3(\mathbf{x}, t) \leq -\frac{\alpha^2}{4} a_0(\mathbf{x}) a_2(\mathbf{x}). \tag{4.42}$$

Na osnovu definicije izraza $a_0(\mathbf{x})$, $a_1(\mathbf{x})$ i uslova (4.12) dobijamo

$$a_0(\mathbf{x}) a_2(\mathbf{x}) \leq 1 - \frac{1}{\theta},$$

odnosno relaciju (4.33).

Kako je $[\alpha, \xi(\mathbf{x}) - \alpha] \subset [0, \xi(\mathbf{x})]$, to na osnovu teoreme 4.4 sledi relacija (4.30). □

Sada možemo dati teoremu o globalnoj konvergenciji posmatranog postupka. Pre toga uvedimo skraćenu oznaku $\eta(\mathbf{x^k}) = \eta_k$.

Teorema 4.6 *Neka $\mathbf{x^0} \in D$, i neka je $A \in R^{n \times n}$ nesingularna matrica i neka važe pretpostavke A1, A2, A3. Neka je niz $\{\mathbf{x^k}\}$ definisan algoritmom 4.2, $F(\mathbf{x^k}) \neq 0$ i neka postoji konstanta $\theta > 1$ takva da važi*

$$\eta_k \mathrm{K}(\mathbf{x^k}) < \frac{1}{\theta}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots \tag{4.43}$$

Ako konstanta α zadovoljava relaciju

$$0 < \alpha \leq \min(1, \frac{\theta - 1}{4.5 q \beta(\mathbf{x^k}) \mathrm{K}(\mathbf{x^k})(1 + \theta)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.44}$$

a parametar t_k relaciju

$$\alpha \leq t_k \leq \min(1, \xi(\mathbf{x^k}) - \alpha), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.45}$$

tada važe sledeća tvrdjenja

(i) niz $\{\mathbf{x^k}\}$ je dobro definisan i $\{\mathbf{x^k}\} \subset L(\mathbf{x^0}, A)$

(ii) niz $\{\mathbf{x^k}\}$ konvergira ka jedinstvenom rešenju $\mathbf{x}^* \in L(\mathbf{x^0})$

(iii) postoji $k_0 \geq 0$ takvo da $t_k = 1$ zadovoljava (4.45) za $k \geq k_0$.

Dokaz: Koristeći indukciju pokazaćemo da važi tvrdjenje *(i)*. Na osnovu definicije nivo skupa, za $k = 0$ je $\mathbf{x^0} \in L(\mathbf{x^0}, A)$. Pretpostavimo da važi $\mathbf{x^k} \in L(\mathbf{x^0}, A)$. Tada, na osnovu definicije i kompaktnosti skupa $L(\mathbf{x^0}, A)$, nivo skup $L(\mathbf{x^k}, A)$ je takodje kompaktan i važi $L(\mathbf{x^k}, A) \subset L(\mathbf{x^0}, A)$. Prema tome, za $\mathbf{x^k}$ su ispunjeni uslovi teorema 4.4 i 4.5, pa njihovom primenom dobijamo

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + t_k \mathbf{s^k} \in L(\mathbf{x^k}, A) \quad \text{za sve} \quad t_k \in [0, \min(1, \xi(\mathbf{x^k}))]$$

i

$$||AF(\mathbf{x^{k+1}})|| \leq (1 - \frac{\alpha^2}{4}(1 - \frac{1}{\theta}))||AF(\mathbf{x^k})|| \tag{4.46}$$

za t_k koje zadovoljava (4.45).

Kako $\theta > 1$ i $\alpha \leq 1$ ne zavise od k, iz (4.46) sledi

$$\lim_{k \to \infty} ||AF(\mathbf{x^k})|| = 0.$$

Iz kompaktnosti skupa $L(\mathbf{x^0}, A)$ sledi postojanje podniza niza $\{\mathbf{x^k}\}$ koji konvergira ka $\mathbf{x^*} \in L(\mathbf{x^0}, A)$ tako da važi $F(\mathbf{x^*}) = 0$. Jedinstvenost rešenja sledi iz teoreme 4.3. Ovim je dokazano tvrdjenje *(ii)*.

Kako je $\lim_{k \to \infty} \beta(\mathbf{x^k}) = 0$, to postoji $k_0 > 0$ takvo da je

$$\xi(\mathbf{x^k}) \geq 2 \quad \text{za sve} \quad k \geq k_0,$$

pa je $\min(1, \xi(\mathbf{x^k}) - \alpha) = 1$. Prema tome, možemo uzeti $t_k = 1$ za svako $k \geq k_0$, čime je dokazano i tvrdjenje *(iii)*. □

Relacija (4.46) predstavlja ocenu brzine konvergencije. Očigledo da izraz $1 - \frac{\alpha^2}{4}(1 - \frac{1}{\theta})$ opada kada θ raste. Za Njutnov postupak je $\eta_k \equiv 0$ pa za θ možemo uzeti proizvoljno veliki broj i tako dobiti najbrži postupak u ovoj klasi.

Kao ilustracija predložene globalizacije poslužiće jedan jednostavan primer.

Primer 4.1: Neka je $f(x) = \ln x$, $x_0 = 10$ i $A = 1$. Primenom Njutnovog postupka dobijamo $s_0 = -10 \ln 10$, pa $x_1 \notin D$, te Njutnov postupak nije dobro definisan. Kako je $L(x_0) = [0.1, 10]$ kompaktan skup, $f'(x) = 1/x$, $f'(x) \neq 0$, $x \in L(x_0)$, $|f'(y)^{-1} f'(z) - 1| \leq 10|y - z|$, $y, z \in L(x_0)$ i $\mathrm{K}(x) = 1$, $x \in L(x_0)$, možemo primeniti Teoremu 4.6, tj. postupak definisan algoritmom 4.2 konvergira za izbor parametra t_k kako je to dato u teoremi 4.6.

Analiza globalizacije AIN postupaka

Većina do sada poznatih postupaka za globalizaciju CIN postupaka, za odredjivanje parametra t_k koristi tehniku poznatu pod nazivom *backtracking*, koja se može jednostavno opisati sledećim algoritmom.

Algoritam 4.3: Backtracking

Neka je dato $\theta, \alpha \in (0, 1)$, i $t_k = \theta$.

BC1: Ako je

$$||F(\mathbf{x^k} + t_k \mathbf{s^k})|| \leq \alpha ||(\mathbf{x^k})||,$$

tada ići na BC3.

BC2: Staviti $t_k = \theta t_k$ i ići na BC1.

BC3: t_k je prihvatljiv parametar.

Takodje se pri praktičnom odredjivanju parametra t_k koristi i postupak interpolacije (najčešće se koristi kvadratna ili kubna interpolacija). Radi jasnoće algoritma, definišimo funkciju $h : [0, 1] \to D$, $h(t) = ||F(\mathbf{x^k} + t\mathbf{s^k})||$ ili $h(t) = ||AF(\mathbf{x^k} + t\mathbf{s^k})||$.

Algoritam 4.4: Kvadratna interpolacija

Neka je $t_2 = 1$ i $\alpha \in (0, 1)$.

KI1: Odrediti $t_s = t_2/2$.

KI2: Postavljanje parabole kroz tačke $(0, h(0))$, $(t_2, h(t_2))$ i $(t_s, h(t_s))$ i odredjivanje njenog minimuma

$$t_{min} = \frac{1}{2} \frac{(t_s^2 - t_2^2)h(t_1) + t_2^2 h(t_s) - t_s^2 h(t_2)}{(t_s - t_2)h(0) + t_2 h(t_s) - t_s h(t_2)}$$

KI3: Ako je

$$h(t_{min}) \le \alpha h(0)$$

tada je $t_k = t_{min}$
inače $t_2 = t_{min}$ i idi na korak KI1.

Nedostatak prethodnih algoritama ogleda se u nemogućnosti procene broja potrebnih iteracija za odredjivanje prihvatljivog parametra. Takodje se ne može proceniti da li je prihvatljiv parametar suviše mali što može prouzrokovati prekid izračunavanja.

Takodje je za sve poznate globalizacije IN postupaka niz $\{\eta_k\}$ bio zadat nezavisno od parametra t_k.

Glavna prednost postupka globalizacije koja je predložena u ovoj distertaciji jeste dovodjenje u vezu parametara η_k i t_k. Na taj način se izbegava upotreba backtrackinga ili interpolacije. Za primenu novog pristupa potrebno je oceniti neke veličine. To se pre svega odnosi na kondicioni broj matrice $A\mathcal{J}(\mathrm{x^k})$ i veličinu $\beta(\mathrm{x^k})$. S tim u vezi razmotrićemo dve mogućnosti.

I mogućnost: Ako je za posmatrani problem poznato $M > 0$ tako da važi $||\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}|| < M$, tada koristimo aproksimacije

$$\begin{aligned} \kappa(\mathrm{x}) \approx \tilde{\kappa}(\mathrm{x}) &= M\kappa_{\mathrm{A}}||\mathcal{J}(\mathrm{x})|| \\ \beta(\mathrm{x}) \approx \tilde{\beta}(\mathrm{x}) &= M||F(\mathrm{x})|| \end{aligned} \tag{4.47}$$

gde je $\kappa_{\mathrm{A}} = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$.

II mogućnost: Matricu $\mathcal{J}(\mathrm{x})^{-1}$ aproksimiramo matricom B_k^{-1}, tačnije koristimo deo iteracije QN postupka, odnosno koristimo sledeće aproksimacije

$$\begin{aligned} \kappa(\mathrm{x}) \approx \tilde{\kappa}(\mathrm{x}) &= \kappa_{\mathrm{A}}||B_k^{-1}|| \cdot ||\mathcal{J}(\mathrm{x})|| \\ \beta(\mathrm{x}) \approx \tilde{\beta}(\mathrm{x}) &= ||B_k^{-1}F(\mathrm{x})|| \end{aligned} \tag{4.48}$$

Napomenimo da je druga mogućnost podobna za primenu na hibridne postupke gde se koristi IN i QN postupak.

Vratimo se na odredjivanje relaksacionog parametra. U teoremama o konvergenciji dat je interval iz kojeg možemo da biramo parametar t_k. Postavlja se pitanje kako iz zadatog intervala odabrati jedan parametar. Jedna mogućnost je da za parametar t_k biramo minimum funkcije $1 + P_3(\mathbf{x^k}, t)$. Ovako odredjen parametar t_k nazivaćemo optimalnim parametrom i označavati sa t^k_{opt}. Jednostavnim računom dobijamo da je

$$t^k_{opt} = \frac{-a_1(\mathbf{x^k}) + \sqrt{a_1(\mathbf{x^k})^2 + 3a_2(\mathbf{x^k})}}{3q\beta(\mathbf{x^k})}. \tag{4.49}$$

Tehnikom sličnom kao u dokazu teoreme 4.5 pokazuje se da t^k_{opt} pripada intervalu za izbor parametra t_k. Za ilustraciju novog pristupa globalizacije nastavićemo Primer 4.1.

Primer 4.2: Za funkciju f iz Primera 4.1 dobijamo $q = 10$,

$$\beta(x^k) = \begin{cases} x^k \ln x^k, & x^k \geq 1 \\ -\frac{\ln x^k}{x^k}, & x^k < 1 \end{cases}.$$

pa se sve veličine $a_i(x^k)$ mogu tačno odrediti, odnosno u svakoj iteraciji se parametar t^k_{opt} može odrediti.

Pretpostavimo, za trenutak, da se mogu tačno izračunati $\beta(\mathbf{x^k}), \mathrm{K}(\mathbf{x^k})$ i q. Globalni postupak tada možemo predstaviti sledećim algoritmom,

Algoritam 4.5: Globalni AIN algoritam

Neka je $\mathbf{x^0} \in D$, $A \in R^{n \times n}$ i $\theta > 1$ dato.

za $k = 0, 1, \ldots$

G1: izračunati $\mathrm{K}(\mathbf{x^k})$ i $\beta(\mathbf{x^k})$

G2: izabrati η_k tako da važi

$$\eta_k < \frac{1}{\theta \mathrm{K}(\mathbf{x^k})} \tag{4.50}$$

G3: odrediti korekciju $\mathbf{s^k}$ nekim linearnim iterativnim postupkom, tako da važi

$$||A(\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k}))|| \leq \eta_k ||AF(\mathbf{x^k})|| \qquad (4.51)$$

G4: ako je $||AF(\mathbf{x^k} + \mathbf{s^k})|| < ||AF(\mathbf{x^k})||$
tada (bez relaksacije)

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + \mathbf{s^k},$$

inače (relaksacija)

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + t^k_{opt}\mathbf{s^k},$$

gde je t^k_{opt} dato sa (4.49)

Kako je već napomenuto, u praksi je često nemoguće odrediti potrebne veličine, što iziskuje primenu jedne od aproksimacija (4.47) ili (4.48). U ovom slučaju potrebno je izbeći loše aproksimacije. Jedna mogućnost, koju ćemo ovde izložiti, koristi se u kombinaciji sa backtrackingom. U narednom algoritmu za ocenu potrebnih veličina koristimo (4.48).

Algoritam 4.6: Globalni AIN algoritam sa aproksimacijama

Neka je dato $\mathbf{x^0} \in D$, $A, B_0 \in R^{n \times n}$ i $\theta > 1$.

za $k = 0, 1, 2, \ldots$

GA1: odrediti $\tilde{\mathrm{K}}(\mathbf{x^k})$ i $\tilde{\beta}(\mathbf{x^k})$ koristeći (4.48)

GA2: izabrati η_k tako da važi

$$\eta_k < \frac{1}{\tilde{\mathrm{K}}(\mathbf{x^k})\theta}$$

GA3: odrediti korekciju $\mathbf{s^k}$ tako da važi (4.51)

GA4: ako je $||AF(\mathbf{x^k} + \mathbf{s^k})|| < ||AF(\mathbf{x^k})||$
tada (**bez relaksacije**) staviti $t_k = 1$ i ići na korak GA6,

inače, odrediti $\tilde{t}^k_{opt}$

GA5: ako je $||AF(\mathbf{x^k} + \tilde{t}^k_{opt}\mathbf{s^k})|| < ||AF(\mathbf{x^k})||$

tada (**optimalni**) staviti $t_k = \tilde{t}^k_{opt}$

inače (**backtracking**) t_k odrediti postupkom backtrackinga

GA6: odrediti novu iteraciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + t_k\mathbf{s^k}$$

GA7: odrediti novu aproksimaciju B^{-1}_{k+1}

Analizirajući prethodni algoritam dolazimo do zaključka da matrica B_k^{-1} nije dovoljno iskorišćena, odnosno da je u nekim slučajevima skupo sračunavati matricu B_k^{-1} isključivo radi ocene pojedinih veličina. Stoga se prethodni algoritam može povezati sa idejom iznetom kod hibridnih postupaka tj. kombinovati sa QN iteracijom. Ideja je da se korak GA3 razgrana na sledeći način

GA3': Odredi $\mathbf{s^k} = -B_k^{-1}F(\mathbf{x^k})$.
Ako je zadovoljen uslov (4.51)
tada (**QN iteracija**) idi na korak GA4
inače (**IN iteracija**) primeni korak GA3.

Na ovaj način iskoristili smo dobru aproksimaciju inverznog Jakobijana i preskočili primenu lineranog iterativnog metoda.

4.3.2 Globalna konvergencija YIN postupka

Druga podklasa IN postupaka, čija je globalizacija izvršena uvodjenjem relaksacionog parametra, jeste afino-invarijanta podklasa (YIN postupci). Posmatrani postupak definišemo sledećim algoritmom:

Algoritam 4.7: Relaksacioni YIN postupak

za $k = 0, 1, \ldots$

RYIN1: odrediti $\mathbf{s^k}$ tako da važi

$$||\mathcal{J}(\mathbf{x^k})^{-1}(\mathcal{J}(\mathbf{x^k})\mathbf{s^k} + F(\mathbf{x^k}))|| \leq \eta_k||\mathcal{J}(\mathbf{x^k})^{-1}F(\mathbf{x^k})||$$

RYIN2: odrediti novu iteraciju

$$\mathbf{x^{k+1}} = \mathbf{x^k} + t_k\mathbf{s^k},$$

gde je t_k realni parametar.

Ako uvedemo nove oznake,

Q1: $\beta(\mathbf{x}) = \sup\limits_{\mathbf{y}\in L(\mathbf{x},A)} ||\mathcal{J}(\mathbf{y})^{-1}F(\mathbf{x})||$

Q2: $\mathrm{K}(\mathbf{x}) = \frac{||\mathcal{J}(\mathbf{x})||\cdot||\mathcal{J}(\mathbf{x})^{-1}F(\mathbf{x})||}{||F(\mathbf{x})||}$

Q3: $a_0(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{K}(\mathbf{x})(1+\eta(\mathbf{x}))$

$$a_1(\mathbf{x}) = \frac{1+2\eta(\mathbf{x})+2\eta(\mathbf{x})^2}{1+\eta(\mathbf{x})}$$

$$a_2(\mathbf{x}) = \frac{1-\eta(\mathbf{x})}{a_0(\mathbf{x})}$$

Q4: $P_3(\mathbf{x},t) = a_0(\mathbf{x})t((q\beta(\mathbf{x})t)^2 + a_1(\mathbf{x})q\beta(\mathbf{x})t - a_2(\mathbf{x}))$.

i za nivo funkciju izaberemo (4.3), tehnikom sličnom kao za globalizaciju AIN postupka možemo dokazati analogna tvrdjenja za globalni YIN postupak (Lužanin,Krejić,Herceg [42]). Ovde navodimo glavnu teoremu o konvergenciji relaksacionog YIN postupka.

Teorema 4.7 *Neka su $A = I$ i $\mathbf{x^0} \in D$ takvi da važe pretpostavke A1, A2, A3. Neka je niz $\{\mathbf{x^k}\}$ definisan algoritmom 4.7, $F(\mathbf{x^k}) \neq 0$ i neka postoji konstanta $\theta > 1$ takva da važi*

$$\eta_k\mathrm{K}(\mathbf{x^k}) < \frac{1}{\theta}, \quad k = 0,1,2\ldots \tag{4.52}$$

Ako konstanta α zadovoljava relaciju

$$0 < \alpha \leq \min(1, \frac{\theta - 1}{4q\beta(\mathbf{x^k})\mathrm{K}(\mathbf{x^k})(1+\theta)}), \tag{4.53}$$

a parametar t_k *relaciju*

$$\alpha \leq t_k \leq \min(1, \xi(\mathbf{x^k}) - \alpha) \tag{4.54}$$

tada važe sledeća tvrdjenja

(i) niz $\{\mathbf{x^k}\}$ *je dobro definisan i* $\{\mathbf{x^k}\} \subset L(\mathbf{x^0}, A)$;

(ii) niz $\{\mathbf{x^k}\}$ *konvergira ka jedinstvenom rešenju* $\mathbf{x}^* \in L(\mathbf{x^0})$;

(iii) postoji $k_0 \geq 0$ *takvo da* $t_k = 1$ *zadovoljava (4.54) za* $k \geq k_0$.

Na kraju napomenimo da je, primenom slične tehnike, moguće globalizovati i IQN postupak definisan algoritmom 2.6.

Iako je u ovom odeljku data globalizacija dve podklase IN postupaka, AIN i YIN, logično je očekivati da se sličan postupak globalizacije može primeniti i na najširu klasu IN postupaka, tj. na SIN postupke.

5

Računarska primena i numerički rezultati

5.1 Konstrukcija algoritama

Pri praktičnom rešavanju problema $F(\mathbf{x}) = 0$ primenom postupaka koji su razmatrani u ovoj disertaciji, pojavljuju se i neki problemi kao što su izbor početnih vrednosti, izlaznog kriterijuma, ocena nekih veličina i sl. Pored toga, do sada posmatrani postupci ostavljaju neke izbore proizvoljnim, npr. postupak za rešavanje linearnog sistema. U ovom odeljku razmatraćemo konstrukciju algoritma za rešavanje nelinearnog sistema jednačina. Pri rešavanju pomenutog problema potrebno je izvršiti sledeće izbore:

1. izbor iterativnog postupka;
2. izbor početnih vrednosti;
3. izbor postupka za rešavanje linearnog sistema jednačina;
4. izbor kriterijuma zaustavljanja;

5.2 Izbor iterativnih postupaka

Zbog preglednosti, za postupke razmatrane u disertaciji, uvodimo oznake:

NP - Njutnov postupak;

BD - dobar Brojdenov postupak;

BL - loš Brojdenov postupak;

BS - simetričan Brojdenov postupak;

BR - redak Brojdenov postupak;

MK - Martinezov postupak sa ažuriranjem jedne kolone;

MD - Martinezov postupak sa QR dekompozicijom;

IN - netačan Njutnov postupak;

MSV - postupak modifikacije slobodnog vektora;

5.3 Izbor početnih vrednosti

Broj i vrsta početnih vrednosti zavise od izbora iterativnog postupka. Izvesno je da je, za sve iterativne postupke potrebna početna aproksimacija $\mathbf{x}^0$, čiji izbor spada u teže probleme. U slučaju numeričkih primera koji slede smatraćemo da je vektor $\mathbf{x}^0$ odredjen na neki način.

Za QN postupke potrebno je izabrati početnu aproksimaciju matrice Jakobijana. Posmatraćemo dve mogućnosti,

1: $B_0 = I$;

2: $B_0 = \mathcal{J}(\mathbf{x}^0)$;

Za IN postupke potrebno je definisati niz η_k. Neke mogućnosti navedene su u odeljku 2.3,a mi ćemo testirati tri mogućnosti,

$\eta_k^1 = 0.5$;

$\eta_k^2 = 1/2^{k+1}$;

$\eta_k^3 = \min\{1/(k+2), ||F(\mathbf{x}^\mathbf{k})||\}$;

Za MSV postupke potrebno je izabrati vektor $\mathbf{r}^\mathbf{k}$ i parametar α. Razmatraćemo MSV sa $\mathbf{r}^\mathbf{k} = -G'(\mathbf{x}^\mathbf{k})F(\mathbf{x}^\mathbf{k})$ i

$\alpha^1 = 0;$

$\alpha^2 = -0.1;$

$\alpha^3 = -0.5;$

$\alpha^4 = -1;$

Takodje ćemo posmatrati i MSV postupak u slučaju kada α biramo kao optimalni parametar, α_{op}.

5.4 Izbor postupka za rešavanje linearnog sistema

Primena Njutnovog ili QN postupka zahteva odredjivanje tačnog rešenja linearnog sistema. Pri numeričkim izračunavanjima ponudjena su tri direktna postupka za rešavanje linearnog sistema jednačina,

- LU dekompozicija;
- LUP dekompozicija;
- QR dekompozicija;

kao i tri iterativna postupka,

- CG postupak;
- GMRESm postupak;
- SOR postupak;

5.5 Izbor kriterijuma zaustavljanja

Kriterijum konvergencije. Kod svih postupaka postavlja se pitanje kada je $\mathbf{x}^\mathbf{k}$ dovoljno dobra, odnosno prihvatljiva aproksimacija nule $\mathbf{x}^*$.

Prvi uslov koji zahtevamo jeste

$$||F(\mathbf{x}^\mathbf{k})|| \le \delta_F, \tag{5.1}$$

gde je δ_F unapred zadata tolerancija. Uslov (5.1) zaustavlja računanje kada je vrednost funkcije F u tački $\mathbf{x^k}$ dovoljno mala, bez obzira na udaljenost aproksimacije $\mathbf{x^k}$ od rešenja $\mathbf{x}^*$ ili prethodne iteracije $\mathbf{x^{k-1}}$. Problem nastaje kada funkcija F suviše sporo raste, odnosno opada u okolini tačke $\mathbf{x}^*$, tj. kada je $||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)||$ suviše malo. Na osnovu Leme 1.2 za $\mathbf{y} = \mathbf{x^k}$ i $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ dobijamo

$$||F(\mathbf{x^k}) - \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x^k} - \mathbf{x}^*)|| \leq \mathcal{O}(||\mathbf{x^k} - \mathbf{x}^*||).$$

Iz prethodne relacije vidimo da ako je $||\mathbf{x^k} - \mathbf{x}^*||$ malo i $||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x^k} - \mathbf{x}^*)||$ veliko, tj. $||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)||$ veliko, tada je $||F(\mathbf{x^k})||$ veliko i kriterijum (5.1) biće zadovoljen samo za $\mathbf{x^k}$ koje je dovoljno blisko $\mathbf{x}^*$. U slučaju kada je $||\mathcal{J}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x^k} - \mathbf{x}^*)||$ malo u odnosu na $||\mathbf{x^k} - \mathbf{x}^*||$, tada $F(\mathbf{x^k})$ može biti dovoljno malo i kada $\mathbf{x^k}$ nije dovoljno blizu tački $\mathbf{x}^*$.

Zbog svega što je navedeno, koristićemo i drugi kriterijum konvergencije koji se može predstaviti u obliku

$$||\mathbf{x^k} - \mathbf{x}^*|| \leq \delta_{rx}||\mathbf{x^k}|| + \delta_{ax} \tag{5.2}$$

gde su δ_{rx} i δ_{ax} unapred zadate tolerancije. Problem kriterijuma (5.2) je, naravno, nemogućnost izračunavanja veličine $||\mathbf{x^k} - \mathbf{x}^*||$, jer nije poznato $\mathbf{x}^*$. Jedna mogućnost je zamena kriterijuma (5.2) kriterijumom

$$||\mathbf{x^k} - \mathbf{x^{k-1}}|| \leq \delta_{rx}||\mathbf{x^k}|| + \delta_{ax}. \tag{5.3}$$

U primerima koji slede aproksimaciju $\mathbf{x^k}$ smatraćemo dovoljno dobrom ako su zadovoljeni uslovi (5.1) i (5.3), u kom slučaju kažemo da postupak **konvergira**.

Ako je zadovoljen uslov

$$||F(\mathbf{x^k})|| > M_{max} \tag{5.4}$$

gde je M_{max} unapred zadati broj (u primerima je korišćeno $M_{max} = 10^{10}$) smatraćemo da postupak **divergira**.

Pri svakoj primeni iterativnih postupaka mora se ograničiti broj dozvoljenih iteracija (ovaj broj označićemo sa it_{max}.) Ako posle it_{max} nije zadovoljen ni uslov konvergencije ni uslov divergencije smatraćemo da postupak sporo konvergira. Napomenimo da u ovu grupu prekida spada i slučaj kada postupak konvergira ka nekom lokalnom minimumu.

Takodje se pojavljuje i problem prouzrokovan aritmetikom računara. Može se pojaviti numerička singularnost matrice Jakobijana ili doći do pojave suviše male vrednosti relaksacionog parametra, pojave ispadanja trenutne aproksimacije iz oblasti definisanosti i slično. U ovakvim slučajevima smatraćemo da je došlo do prinudnog prekida.

Prema tome, računanje se prekida u jednom od četiri slučaja,

K : zadovoljen je kriterijum konvergencije, odnosno, dobili smo dovoljno dobru aproksimaciju rešenja;

S : zadovoljen je uslov spore konvergencije;

D : zadovoljen je uslov divergencije;

P : zadovoljen je uslov prinudnog prekida;

5.6 Numerički rezultati

U ovoj sekciji predstavićemo neke numeričke rezultate koji su dobijeni primenom razmatranih postupaka na rešavanje problema iz dodatka A. U radu su korišćene programske rutine iz dodatka B, koje su pisane u programskom paketu *Mathematica* (verzija 2.0). Za sva izračunavanja korišćeno je $\delta_F = \delta_{rx} = \delta_{ax} = 10^{-8}$, $M_{max} = 10^{10}$, i $it_{max} = 50$. U primerima 2 i 5 uzeto je $c = 10$, a u primeru 3 $c = 10^{-3}$.

Tabela 5.1: Prvi rezultati prikazani u tabeli 5.1 pokazuju broj potrebnih iteracija za Njutnov postupak, QN i IN postupke. Ovi rezultati dopunjuju razmatranja iz sekcije 2.4. Kod primene IN postupaka za rešavanje linearnog sistema korišćen je GMRESm postupak ($m = 4$).

Tabela 5.2: Pored rezultata za tri već pomenute klase postupaka, u tabeli 5.2 su dati i rezultati za novodefinisanu klasu MSV postupaka (poglavlje 3). Za primer 8, $n = 49$, kod primene IN postupaka korišćen je GMRESm za $m = 8$, dok je u ostalim slučajevima $m = 4$.

Tabela 5.3: Izmedju ostalog, u sekciji 2.5 definisani su QN-Njutnovi postupci. U tabeli 5.3 prikazani su rezultati za četiri QN postupka, pri čemu je restart vršen posle svakih $m \in \{3, 4, 5, 6\}$ iteracija.

Tabela 5.4: U tabeli 5.4 prikazan je uticaj relaksacije postupka na lokalnu konvergenciju (sekcija 3.1). S označava striktni ili osnovni postupak ($t \equiv 1$), B primenu backtracking-a, a I primenu kvadratne interpolacije na Njutnov i dva Brojdenova postupka. Donja granica za relaksacioni parametar t kod backtracking-a je 2^{-10}, a broj dozvoljenih interpolacija u relalksaciji jedne iteracije je 10.

				QN postupci				IN postupci		
Pr.	n	$\mathbf{x}^0$	NP	BD	BL	BR	MD	η_k^1	η_k^2	η_k^3
1	4	I	8	(13,12)*	(12,11)	(S,12)	(D,14)	10	5	5
1	8	I	25	(14,16)	(D,19)	(S,16)	(D,D)	6	5	5
1	4	II	15	(20,9)	(17,19)	(S,9)	(D,D)	7	7	7
1	4	III	23	(D,14)	(D,32)	(S,14)	(D,D)	10	7	7
2	4	I	4	(18,5)	(18,5)	(S,5)	(S,6)	6	5	4
2	8	I	11	(D,P)	(D,D)	(D,D)	(D, D)	P	P	P
3	4	I	5	(11,28)	(11,D)	(D,8)	(22,D)	7	6	6
3	8	II	9	(21,D)	(24,D)	(D,17)	(36,D)	24	13	14
4	4	I	4	(16,5)	(15,5)	(17,5)	(D,5)	8	5	5
4	4	II	4	(18,6)	(17,6)	(17,13)	(10,D)	5	5	4
4	8	II	4	(21,6)	(19,6)	(P,13)	(S,D)	8	5	4
4	4	III	6	(22,14)	(16,13)	(20,14)	(S,D)	9	6	7
5	4	I	6	(D,15)	(D,14)	(32,15)	(D,16)	14	7	7
5	8	I	7	(D,19)	(D,17)	(37,17)	(D,S)	16	7	7
5	16	I	7	(D,19)	(D,18)	(41,18)	(D,S)	16	7	7

Tabela 5.1

*–prvi i drugi broj u zagradi predstavljaju QN postupak za $B_0 = I$, odnosno, $B_0 = \mathcal{J}(\mathbf{x}^0)$;

				BDm				BLm				MKm				MDm			
Pr.	n	$\mathbf{x}^0$	NP	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5	6	3	4	5	6
3	4	I	5	10^*_4	13_3	16_3	11_3	10_4	16_3	12_4	14_3	D	D	D	D	14_5	25_7	D	D
5	4	I	7	8_3	8_2	9_2	8_3	8_3	9_2	8_3	8_2	9_4	10_3	12_3	13_3	9_4	10_3	12_3	10_2

Tabela 5.3

*–donji indeks predstavlja broj Njutnovih iteracija;

				QN postupci					IN postupci			MSV postupci				
Pr.	n	$\mathbf{x}^0$	NP	BD	BL	BS	BR	MD	η_k^1	η_k^2	η_k^3	α^1	α^2	α^3	α^4	α_{op}
6	4	I	5	(12,7)	(14,7)	(15,7)	(S,7)	(S,13)	17(28)*	5(16)	5(17)	13	12	11	10	9
6	8	I	4	(18,6)	(21,6)	(38,6)	(S,5)	(S,9)	20(52)	7(65)	6(83)	13	13	13	9	7
6	16	I	5	(32,7)	(36,8)	(S,7)	(S,6)	(D,13)	26(147)	8(239)	7(360)	13	13	13	13	9
6	4	II	4	(12,5)	(12,5)	(14,5)	(S,5)	(S,7)	17(34)	4(15)	4(15)	7	7	6	6	5
7	4	I	5	(8,7)	(8,7)	(8,7)	(12,7)	(11,13)	9(9)	6(9)	5(12)	13	12	9	8	6
7	8	I	5	(8,7)	(8,7)	(8,7)	19,7)	(17,13)	10(10)	6(10)	5(12)	13	12	9	8	5
7	32	I	5	(8,7)	(8,7)	(8,7)	(19,7)	(17,13)	11(11)	6(10)	6(23)	13	12	9	8	6
8	9	I	11	(24,8)	(38,8)	(D,8)	(S,8)	(D,14)	20(29)	10(57)	10(95)	14	12	11	25	11
8	49	I	10	(9,8)	(D,8)	(D,8)	(S,8)	(D,12)	27(71)	10(102)	11(184)	12	12	10	11	11

Tabela 5.2

*–broj u zagradi označava ukupan broj linearnih iteracija;

			N			BD			BL		
Pr.	n	$\mathbf{x}^0$	S	B	I	S	B	I	S	B	I
1	4	I	8	5_1^*	6_1	(13,12)	$(P,9_6)$	$(13_{12},9_7)$	(12,11)	$(12_3,9_4)$	$(14_6,7_5)$
1	4	II	15	9_3	11_3	(20,9)	(P,P)	(P,P)	(17,19)	$(11_3,P)$	$(16_4,P)$
1	4	III	23	13_2	9_1	(D,14)	(P,P)	(P,P)	(D,32)	(P,P)	(P,P)
6	4	I	5	$\searrow^{**}$	$\searrow$	(12,7)	$(12_6,\searrow)$	$(16_4,\searrow)$	(14,7)	$(13_3,\searrow)$	$(16_4,\searrow)$

Tabela 5.4

*–donji indeks označava broj iteracija u kojima je vršena relaksacija;

**–iterativni niz stacionarnog metoda ima osobinu redukcije norme (ne vrši se relaksacija);

DODATAK A: Primeri

Primer 1: [Brown]

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= -1 + \prod_{k=1}^{n} x_k; \\ f_i(\mathbf{x}) &= -(n+1) + x_i + \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad i = 2, \ldots, n; \end{aligned}$$

rešenje:

$\mathbf{x}_1^* = [1, \cdots, 1]$;

$\mathbf{x}_2^* = [1/p^{n-1}, p, \cdots, p]$,

p je realna nula polinoma $np - (n+1)p^{n-1} + 1 = 0, \quad p \neq 1$;

početna aproksimacija:

I: $\mathbf{x}^0 = [0.9, \cdots, 0.9]$

II: $\mathbf{x}^0 = [0.5, \cdots, 0.5]$

III: $\mathbf{x}^0 = [5, \cdots, 5]$

Primer 2: [Bus]

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= c\prod_{k=1}^{n} x_k - 1; \\ f_i(\mathbf{x}) &= e^{-x_{i-1}} + e^{-x_i} - (1 + \frac{1}{c}), \quad i = 2, \ldots, n; \end{aligned}$$

gde je $c > 0$ realan parametar;

rešenje: zavisi od n i c;

početna aproksimacija:

I: $x_{2i}^0 = 1$; $x_{2i-1}^0 = c^{-2/n}$

Primer 3: [Powell]

$$f_i(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{i} x_k, \quad i = 1, \ldots, n;$$

rešenje:

$\mathbf{x}_1^* = [1, \cdots, 1]$;

početna aproksimacija:

I: $x^0_{2i} = 0.5$; $x^0_{2i-1} = -0.5$
II: $\mathbf{x^0} = [0.5, \cdots, 0.5]$

Primer 4: [Rosenbrock]

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= -4c(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1 - x_1); \\ f_i(\mathbf{x}) &= 2c(x_i - x_{i-1}) - 4c(x_{i+1} - x_i^2)x_i - 2(1 - x_i), \quad i = 2, \dots, n-1; \\ f_n(\mathbf{x}) &= 2c(x_n - x_{n-1}^2); \end{aligned}$$

gde je $c > 0$ realan parametar;
rešenje:
$\mathbf{x_1^*} = [1, \cdots, 1]$;

početna aproksimacija:
I: $x^0_{2i} = 1$, $x^0_{2i-1} = -1.2$;
II: $\mathbf{x^0} = [0, \cdots, 0]$;
III: $\mathbf{x^0} = [10, \cdots, 10]$;

Primer 5: [Broyden]

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= c(3 - cx_1)x_1 + 1 - 2x_2; \\ f_i(\mathbf{x}) &= (3 - cx_i)x_i + 1 - x_{i-1} - 2x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, n-1; \\ f_n(\mathbf{x}) &= (3 - cx_n)x_n + 1 - x_{n-1}, \end{aligned}$$

gde je $c > 0$ realan parametar;
rešenje: zavisi od n i c;

početna aproksimacija:
I: $\mathbf{x^0} = [-1, \cdots, -1]$

Primer 6: [Moré,Cosnard]

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= 2x_1 - x_2 + \tfrac{1}{2}h^2(x_1 + t_1 + 1)^3 \\ f_i(\mathbf{x}) &= 2x_i - x_{i+1} - x_{i-1} + \tfrac{1}{2}h^2(x_i + t_i + 1)^3, \quad i = 1, \dots, n \\ f_n(\mathbf{x}) &= 2x_n - x_{n-1} + \tfrac{1}{2}h^2(x_n + t_n + 1)^3 \end{aligned}$$

gde je $t_i = ih$, $i = 1, \dots, n$, i $h = 1/(n + 1)$;

rešenje: Zavisi od n;

početna aproksimacija:
I: $\mathbf{x^0} = [0.5, \cdots, 0.5]$;
II: $\mathbf{x^0} = [0, \cdots, 0]$;

Primer 7: [Moré,Cosnard]

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}) &= x_i + \frac{1}{2}h\left((1-t_i)\sum_{k=1}^{i} t_k(x_k+t_k+1)^3\right. \\ &\left. + t_i \sum_{k=i+1}^{n}(1-t_k)(x_k+t_k+1)^3\right) \quad i = 1,\ldots,n, \end{aligned}$$

gde je $t_i = ih$, $i = 1, \ldots, n$, i $h = 1/(n+1)$;
rešenje: Zavisi od n;

početna aproksimacija:
I: $\mathbf{x^0} = [0.5, \cdots, 0.5]$;

Primer 8: ([52]) Puasonova jednačina

Familija nelinearnih sistema nastala petotačkastom diskretizacijom nelinearne Puasonove jednačine

$$\nabla u + u^3 = f(x, y).$$

Funkciju f i Dirihleove granične uslove na $[0,1] \times [0,1]$ generišemo na taj način da funkcija

$$u^*(x, y) = (x-0.5)^2 + (y-0.7)^2 + \sin x + \cos 3y$$

bude egzaktno rešenje Puasonove jednačine.
rešenje: Zavisi od n;

početna aproksimacija:
I: $\mathbf{x^0} = [0, \cdots, 0]$;

DODATAK B: Programske rutine

paket: Utils

- `fn[a_]`
  opis: izračunava Frobenijusovu normu matrice

  a - kvadratna matrica;

  izlaz: {p}

  p - Frobenijusova norma matrice a;

- `vn2[a_]`
  opis: izračunava vektorsku normu dva

  a - vektor;

  izlaz: {p}

  p - vektorska norma dva vektora a;

- `proj[v_]`
  opis: projektuje vektor v na dijagonalnu matricu Si tako da je $Si_{i,i} = 0$, ako je $v_i = 0$, inače $Si_{i,i} = 1$;

  v - vektor;

  izlaz: {si}

  si - dijagonalna matrica sa 0 i 1 na dijagonali;

- `inv[a_]`
  opis: izračunava inverzan elemenat od a

  a - realan broj;

  izlaz: {ai}

  ai - inverzan broj 1/a (0, ako je a=0);

paket: LinDir

Programi za direktno rešavanje linearnog sistema.

- `LU[a_]`
  opis: odredjuje LU dekomoziciju matrice

  a - kvadratna matrica;

  izlaz: {l,u}

  l - donja trougaona matrica sa 1 na dijagonali;
  u - gornja trougaona matrica;

- `LUP[a_]`
  opis: odredjuje LUP dekomoziciju matrice

  a - kvadratna matrica;

  izlaz: {l,u,p}

  l - donja trougaona matrica sa 1 na dijagonali;
  u - gornja trougaona matrica;
  p - permuatciona matrica;

- `QR[a_]`
  opis: odredjuje QR dekomoziciju matrice

  a - kvadratna matrica;

  izlaz: {q,r}

  q - ortogonalna matrica;
  r - gornja trougaona matrica;

- `res[l_,u_,b_]`
  opis: rešava sistem LUx=b

  l - donja trougaona matrica sa 1 na dijagonali;
  u - gornja trougaona matrica;
  b - vektor;

  izlaz: {x}

  x - vektor, rešenje posmatranog sistema;

- `resi[a_,b_,d_]`
  opis: rešava sistem Ax=b

  a - kvadratna matrica sistema;
  b - slobodan vektor sistema;
  d - parametar izbora direktnog postupka (1-LU; 2-LUP;)

izlaz: {r}

r - vektor, rešenje posmatranog sistema;

- `Trougao[U_,f_]`
  opis: rešava sistem Ux=f čija je matrica sistema gornja trougaona;

  `U` - gornja trougaona matrica;
  `f` - slobodan vektor sistema;

  izlaz: {xr}

  xr - vektor, rešenje posmatranog sistema;

paket: LinIter

Programi za iterativno rešavanje linearnog sistema.
potrebni paketi: Utils;

- `SOR[x0_,A_,b_,om_,kmax_,eps_]`
  opis: rešava linearni sistem Ax=b SOR postupkom;

  `x0` - početna aproksimacija rešenja;
  `A` - kvadratna matrica sistema;
  `b` - slobodan vektor sistema;
  `om` - realni parametar iz (0,1];
  `kmax` - maksimalan broj iteracija;
  `eps` - zahtevana tačnost;

  izlaz: {x,it}

  x - vektor, numeričko rešenje posmatranog sistema;
  it - broj izvedenih iteracija;

- `CG[x0_,A_,b_,kmax_,eps_]`
  opis: rešava linearni sistem Ax=b postupkom konjugovanog gradijenta;

  `x0` - početna aproksimacija rešenja;
  `A` - simetrična pozitivno definitna matrica sistema;
  `b` - slobodan vektor sistema;
  `kmax` - maksimalan broj iteracija;
  `eps` - zahtevana tačnost;

izlaz: {x,it}

x - vektor, numeričko rešenje posmatranog sistema;
it - broj izvedenih iteracija;

- `GMRES[x_,A_,b_,kmax_,eps_]`
  opis: rešava linearni sistem Ax=b GMRES postupkom;

`x`	-	početna aproksimacija rešenja;
`A`	-	kvadratna matrica sistema;
`b`	-	slobodan vektor sistema;
`kmax`	-	maksimalan dozvoljeni broj iteracija;
`eps`	-	zahtevana tačnost;

  izlaz: {xk,k}

  xk - vektor, numeričko rešenje posmatranog sistema;
  k - broj izvedenih iteracija;

- `GMRESm[x_,A_,b_,m_,itmax_,eps_]`
  opis: rešava linearni sistem Ax=b restartovanjem postupka GMRES nakon svakih m iteracija;

`x`	-	početna aproksimacija rešenja;
`A`	-	kvadratna matrica sistema;
`b`	-	slobodan vektor sistema;
`m`	-	maksimalan broj iteracija pri jednom pozivu GMRES-a;
`itmax`	-	ukupan maksimalan broj iteracija;
`eps`	-	zahtevana tačnost;

  izlaz: {xk,it}

  xk - vektor, numeričko rešenje posmatranog sistema;
  it - ukupan broj izvedenih iteracija;

paket: Conver

Programi koji ispituju konvergenciju postupaka za nelinearne sisteme, kao i postupci za relaksaciju.
potrebni paketi: Utils;

- `konver[fx_,x_,xs_,df_,dr_,da_]`
  opis: ispituje konvergenciju trenutne iteracije;

`fx` - vrednost funkcije f u trenutnoj aproksimaciji;
`x` - trenutna aproksimacija rešenja;
`xs` - prethodna aproksimacija rešenja;
`df,dr,da` - zahtevana tačnost;

izlaz: {px}

px - parametar konvergencije:
 0 - nije zadovoljen nijedan uslov prekida;
 1 - zadovoljen uslov konvergencije;
 2 - zadovoljen uslov divergencije;

- `backtr[xv_,sv_,max_,q_]`
 opis: odredjuje relaksacioni parametar metodom backtrecking-a;

 `xv` - trenutna aproksimacija rešenja;
 `sv` - razlika dve poslednje iteracije;
 `max` - maksimalan broj iteracija;
 `q` - faktor dužine koraka;

 izlaz: {t,det,k}

 t - izračunati relaksacioni parametar;
 det - indikator:
  0 - parametar suviše mali, numerička singularnost;
  1 - parametar je odredjen;
 k - broj izvršenih iteracija;

- `inter[xv_,sv_,max_]`
 opis: odredjuje relaksacioni parametar primenom kvadratne interpolacije;

 `xv` - trenutna aproksimacija rešenja;
 `sv` - razlika dve poslednje iteracije;
 `max` - maksimalan broj iteracija;

 izlaz: {t,det,k}

t	-	odredjeni relaksacioni parametar;
det	-	indikator:
		0 - parametar suviše mali, numerička singularnost;
		1 - parametar je odredjen;
k	-	broj izvršenih iteracija;

napomena: za sve iterativne postupke za rešavanje nelinearnih sistema potrebno je van programa definisati funkcije:

`funkcija[x_]`: sračunava vrednost funkcije f u tački x;

`jakob[x_]`: sračunava matricu Jakobijana u tački x;

`nelin[x_]`: sračunava nelinearni deo matrice Jakobijana potreban za MSV postupak;

paket: NMeth

Program za Njutnov postupak.

Potrebni paketi: Utils, LinDir, Conver;

- `Njutn[x0_,itmax_,df_,dr_,da_,rel_,pos_]`

  opis: rešava nelinearni sistem f(x)=0 Njutnovim postupkom;

`x0`	-	početna (startna) aproksimacija rešenja sistema;
`itmax`	-	maksimalan broj iteracija;
`df,dr,da`	-	zahtevana tačnost;
`rel`	-	parametar koji odredjuje vrstu relaksacije:
		0 - bez relaksacije;
		1 - backtracking;
		2 - postupak interpolacije;
`pos`	-	direktni postupak za rešavanje njutnove jednačine:
		1 - LU;
		2 - LUP;

  izlaz: {k,it,xk}

k - vrsta prekida:
  0 - spora konvergencija;
  1 - konvergencija;
  2 - divergencija;
  3 - prekid zbog numeričke singularnosti;
it - broj iteracija do prekida izračunavanja;
xk - vektor, numeričko rešenje posmatranog sistema;

paket: QNMeth

Programi za QN postupke.
Potrebni paketi: Utils, LinDir, Conver;

- `DBrojden[bk_,yk_,sk_]`
  opis: odredjuje novu aproksimaciju Jakobijana dobrim Brojdenovim postupkom;

  bk - trenutna aproksimacija Jakobijana;
  yk - vektor razlike funkcije u dve uzastopne iteracije;
  sk - vektor razlike dve uzastopne iteracije;

  izlaz: {b}

  b - nova aproksimacija Jakobijana;

- `LBrojden[bk_,yk_,sk_]`
  opis: odredjuje novu aproksimaciju Jakobijana lošim Brojdenovim postupkom;

  bk - trenutna aproksimacija Jakobijana;
  yk - vektor razlike funkcije u dve uzastopne iteracije;
  sk - vektor razlike dve uzastopne iteracije;

  izlaz: {b}

  b - nova aproksimacija Jakobijana;

- `SBrojden[bk_,yk_,sk_]`
  opis: odredjuje novu aproksimaciju Jakobijana simetričnim Brojdenovim postupkom;

  bk - trenutna aproksimacija Jakobijana;
  yk - vektor razlike funkcije u dve uzastopne iteracije;
  sk - vektor razlike dve uzastopne iteracije;

izlaz: {b}

b - nova aproksimacija Jakobijana;

- `RBrojden[bk_,yk_,sk_]`
  opis: odredjuje novu aproksimaciju Jakobijana retkim Brojdenovim postupkom;

  bk - trenutna aproksimacija Jakobijana;
  yk - vektor razlike funkcije u dve uzastopne iteracije;
  sk - vektor razlike dve uzastopne iteracije;

  izlaz: {b}

  b - nova aproksimacija Jakobijana;

- `KolonaM[bk_,yk_,sk_,alfa_]`
  opis: odredjuje novu aproksimaciju Jakobijana Martínezovim postupkom ažuriranja jedne kolone;

  bk - trenutna aproksimacija Jakobijana;
  yk - vektor razlike funkcije u dve uzastopne iteracije;
  sk - vektor razlike dve uzastopne iteracije;
  alfa - realni parametar;

  izlaz: {b}

  b - nova aproksimacija Jakobijana;

- `QRdekM[mq_,md_,mt_,yk_,sk_,alfa_]`
  opis: odredjuje novu aproksimaciju Jakobijana Martínezovim postupkom sa QR dekompozicijom;

  mq - ortogonalna matrica iz dekompozicije bk;
  md - dijagonalna matrica iz dekompozicije bk;
  mt - gornja trougaona matrica iz dekompozicije bk;
  yk - vektor razlike funkcije u dve uzastopne iteracije;
  sk - vektor razlike dve uzastopne iteracije;
  alfa - realni parametar;

  izlaz: {md1}

  md1 - ažurirana dijagonalna matrica iz dekompozicije bk;

- `QN[x0_,itmax_,df_,dr_,da_,rel_,pos_,apr_,poc_]`
  opis: rešava nelinearni sistem f(x)=0 QN postupkom;

  `x0` - početna (startna) aproksimacija rešenja sistema;
  `itmax` - maksimalan broj iteracija;
  `df,dr,da` - zahtevana tačnost;
  `rel` - parametar koji odredjuje vrstu relaksacije:
    0 - bez relaksacije;
    1 - backtracking;
    2 - postupak interpolacije;
  `pos` - direktni postupak za rešavanje njutnove jednačine:
    1 - LU;
    2 - LUP;
  `apr` - korišćena aproksimacija Jakobijana:
    1 - dobar Brojdenov postupak;
    2 - loš Brojdenov postupak;
    3 - simetričan Brojdenov postupak;
    4 - redak Brojdenov postupak;
    5 - Martinezov postupak sa ažuriranjem jedne kolone;
    6 - Martinezov postupak sa QR dekompozicijom;
  `poc` - početna aproksimacija Jakobijana:
    1 - jedinična matrica;
    2 - matrica $\mathcal{J}(\mathbf{x}^0)$;

  izlaz: {k,it,xk}

  k - vrsta prekida:
    0 - spora konvergencija;
    1 - konvergencija;
    2 - divergencija;
    3 - prekid zbog numeričke singularnosti;
  it - broj iteracija do prekida izračunavanja;
  xk - vektor, numeričko rešenje posmatranog sistema;

- `QNm[x0_,itmax_,df_,dr_,da_,rel_,pos_,apr_,m_]`
  opis: rešava nelinearni sistem f(x)=0 QN postupkom koji se restartuje Njutnovim postupkom posle svakih m iteracija;

  `x0`,..., `apr` - isto kao kod QN[$\cdots$];
  `m` - broj iteracija posle kojih se vrši restart;

izlaz: {k,it,xk}

k,it,xk - isto kao kod QN[···];

paket: MSVMeth

Programi za MSV postupke.

potrebni paketi: Utils, LinDir, Conver;

- `MSV[x0_,itmax_,df_,dr_,da_,izbor_,poc_,koef_]`

  opis: rešava nelinearni sistem f(x)=0 MSV postupkom bez restarta;

`x0`	-	početna aproksimacija;
`df,dr,da`	-	zahtevana tačnost;
`izbor`	-	izbor vektora rk: 1: rk=0; 2: rk=G'(xk)F(xk); 3: rk=G'(xk)s(k-1);
`poc`	-	izbor matrice A: 1: po slobodnom izboru; 2: A=J(x0);
`koef`	-	realan parametar;

  izlaz: {k,it,xk}

k	-	vrsta prekida: 0 - spora konvergencija; 1 - konvergencija; 2 - divergencija; 3 - prekid zbog numeričke singularnosti;
it	-	broj iteracija do prekida izračunavanja;
xk	-	vektor, numeričko rešenje posmatranog sistema;

- `MSVop[x0_,itmax_,df_,dr_,da_,izbor_,poc_,1]`

  opis: rešava nelinearni sistem f(x)=0 MSV postupkom bez restarta sa odredjivanjem optimalnog parametra;

  `x0`, ..., `poc` - isto kao kod MSV[···];

  izlaz: {k,it,xk}

  k,it,xk - isto kao kod MSV[···];

paket: INMeth

Programi za IN postupke.
potrebni paketi: Utils, LinIter, Conver;

- `IN[x0_,itmax_,df_,dr_,da_,rel_,linmax_,nmax_,izbor_]`
  opis: rešava nelinearni sistem f(x)=0 IN postupkom;

`x0`	-	početna aproksimacija;
`df,dr,da`	-	zahtevana tačnost;
`rel`	-	parametar koji odredjuje vrstu relaksacije: 0- bez relakacije; 1- backtracking; 2- postupak interpolacije;
`linmax`	-	dozvoljen broj linearnih iteracija;
`nmax`	-	dozvoljen broj iteracija pri pozivu GMRES-a;
`izbor`	-	izbor parametra η_k: 1: $\eta_k = 0.5$; 2: $\eta_k = 0.5^{k+1}$; 3: $\eta_k = \min\{1/(k+2), \|\|F(\mathbf{x^k})\|\|\}$

izlaz: {k,it,linit,xk}

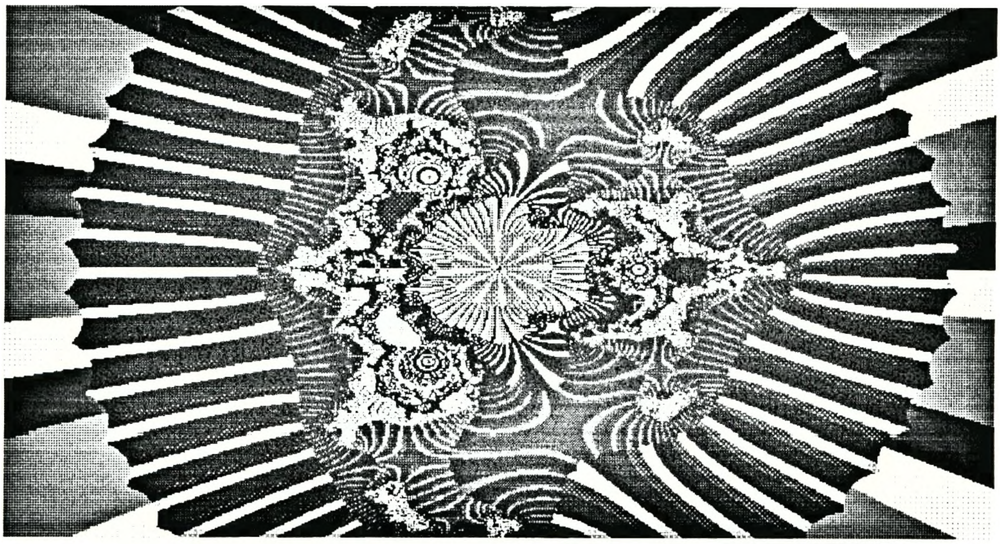
k	-	vrsta prekida: 0 - spora konvergencija; 1 - konvergencija; 2 - divergencija; 3 - prekid zbog numeričke singularnosti);
it	-	broj iteracija do prekida izračunavanja;
linit	-	broj linearnih iteracija;
xk	-	vektor, numeričko rešenje posmatranog sistema;

DODATAK C: Fraktalne slike

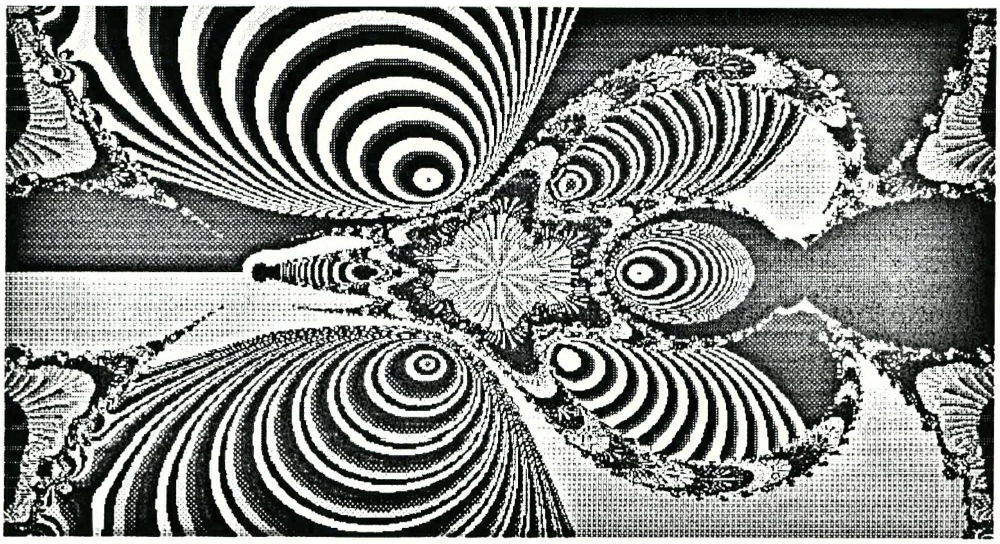
Poznati su načini crtanja fraktalnih slika koristeći iterativne postupke. Detaljnije o fraktalima može se naći u [5], [66]. Na priloženoj disketi nalazi se 10 fraktalnih slika i to:

fraktal 1:	Njutnov postupak;
fraktal 2:	IN postupak sa $\eta_k = 0.5$;
fraktal 3:	Brojdenov dobar postupak;
fraktal 4:	Njutnov postupak sa relaksacijom;
fraktal 5:	IN postupak sa $\eta_k = 0.5$ i relaksacijom;
fraktal 6:	Fiksni Njutnov postupak (MSV sa $\alpha = 0$);
fraktal 7:	postupak MSV sa $\alpha = -0.1$;
fraktal 8:	postupak MSV sa $\alpha = -0.5$;
fraktal 9:	postupak MSV sa $\alpha = 0.1$;
fraktal 10:	postupak MSV sa $\alpha = 1$;

Za ilustraciju dajemo dve fraktalne slike.



Slika A.1: MSV postupak sa $\alpha = 1$



Slika A.2: MSV postupak sa $\alpha = 0.1$

LITERATURA

[1] R. BARRETT, M. BERRY, T. F. CHAN, I. J. DEMME, J. DONATO, J. DONGARRA, V. EIJKHOUT, R. POZO, C. ROMINE, H. VAN DER VORST, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods,* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia,PA,1993.

[2] R. E. BANK AND D. J. ROSE, *Marching algorithms for Elliptic Boundary Value Problems I, The Constant Coefficient Case,* SIAM J.Numer.Anal., 14 (1977), pp.792.

[3] R. E. BANK AND D. J. ROSE, *Parameter Selection for Newton-Like Methods Applicable to Nonlinear Partial Differential Equations,* SIAM J.Numer.Anal., 17 (1980), pp.806-822.

[4] R. E. BANK AND D. J. ROSE, *Global Approximate Newton Methods,* Numer.Math., 37 (1981), pp.279-295.

[5] M.BARNSLEY, *Fractals Everywhere,* Academic Press,Inc., Boston, 1988.

[6] P. N. BROWN AND Y. SAAD, *Hybrid Krylov methods for Nonlinear Systems of Equations,* SIAM J. Sci.Statist.Comput., 11 (1990), pp.450-481.

[7] P. N. BROWN AND Y. SAAD, *Convergence Theory of Nonlinear Newton-Krylov algorithms,* SIAM J.Optim., 4 (1994), pp.297-330.

[8] G. BROYDEN, *A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations,* Math.Comp. 19 (1965), pp.577-593.

[9] G. BROYDEN, *The Convergence og Single-rank Quasi-Newton Methods,* Math.Comp. 24(1970), pp.365-382.

[10] G. G. BROYDEN, J. E. DENNIS AND J.J. MORÉ, *On the Local and Superlinear Convergence of Quasi-Newton Methods,* J. Inst. Math. Apll. 12(1973), pp.223-246.

[11] J. C. P. BUS, *Numerical Solution of Systems of Nonlinear Equations,* Tract 122,Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[12] J. R. CASH AND M. H. WRIGHT, *Implementation Issues in Solving Nonlinear Equations for Two-Point Boundary Value Problems,* Computing 45(1990), pp.17-37.

[13] R. S. DEMBO, S. C. EISENSTAT AND T. STEIHAUG, *Inexact Newton Methods,* SIAM J.Numer.Anal., 19 (1982), pp.400-408.

[14] R. S. DEMBO AND T. STEIHAUG, *Truncated Newton Algorithms for Large-scale Optimization,* Math.Programming, 26 (1983), pp.190-212.

[15] J. E. DENNIS AND J. J. MORÉ, *A Characterization of Superlinear Convergence and its Application to Quasi-Newton Methods,* Math. Comp., 28(1974), pp.549-560.

[16] J. E. DENNIS AND J. J. MORÉ, *Quasi-Newton Methods, Motivation and Theory,* SIAM Review, 19(1977), pp.46-89.

[17] J. E. DENNIS AND R. B. SCHNABEL, *Least Change Secant Updates for Quasi-Newton Methods,* SIAM Review, 21(1979), pp.443-459.

[18] J. E. DENNIS AND H. F. WALKER, *Convergence Theorems for Least-Change Secant Update Methods,* SIAM J. Numer. Anal., 18(1981), pp.949-987.

[19] J. E. DENNIS AND E. S. MARWIL, *Direct Secant Updates of Matrix Factorizations,* Math. Comp., 38 (1982), pp.459-474.

[20] J. E. DENNIS, JR. AND R. B. SCHNABEL, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

[21] J. E. DENNIS AND G. LI, *A Hybrid Algorithm for Solving Sparse Nonlinear Systems of Equations,* Math. Comput., 50(1988), pp.155-166.

[22] P. DEUFLHARD AND G. HEINDL, *Affine Invariant Convergence Theorems for Newton's Method and Extensions to Related Methods,* SIAM J.Numer.Anal., 16 (1979), pp.1-10.

[23] S. C. EISENSTAT AND H. F. WALKER, *Globally Convergent Inexact Newton Methods,* SIAM J.Optim., 4 (1994), pp.393-422.

[24] S. C. EISENSTAT AND H. F. WALKER, *Choosing the Forcing Terms in an Inexact Newton Method,* SIAM J.Sci.Comput., 17 (1996), pp.16-32.

[25] G. H. GOLUB, C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations,* The Johns Hopkins University Press, Baltimore,MD,1983.

[26] M. A. GOMES-RUGGIERO, J. M. MARTÍNEZ AND A. C. MORETTI, *Comparing Algorithms for Solving Sparse Nonlinear System of Equations,* SIAM J.Sci.Comput., 13 (1992), pp.459-483.

[27] M. A. GOMES-RUGGIERO, J. M. MARTÍNEZ AND S. A. SANTOS, *Solving Nonsmooth Equations by Means of Quasi-Newton Methods with Globalization,* Department of Applied Mathematics, IMECC-UNICAMP, 1994.

[28] M. A. GOMES-RUGGIRO, D. N. KOZAKEVICH AND J. M. MARTÍNEZ, *A Numerical Study on Large-scale Nonlinear solvers,* Department of Applied Mathematics, IMECC-UNICAMP, 1995.

[29] W. E. HART AND S. O. W. SOUL, *Quasi-Newton Methods for Discetized Nonlinear Boundary Problems,* J. Inst. Appl. Math., 11(1973), pp.351-359.

[30] D. Herceg, *Uniform Fourth Order Difference Scheme for a Singular Perturbation Problem,* Numer. Math. 56(1990), pp.675-693.

[31] D. Herceg, M. M. Martins, M. E. Trigo, *Extended Convergence Area for the (MSOR) Method,* J. Comput. Appl. Math. 33(1990), pp.123-132.

[32] D. Herceg, M. M. Martins, M. E. Trigo, *On the Convergence of the MSOR Method for some Classes of Matrices,* SIAM J. Matrix. Anal. Appl. 14(1993), pp.122-131.

[33] D. Herceg, N. Krejić, *On a Numerical Method for Discrete Analogues of Boundary Value Problems,* The second World Congress of Nonlinear Analysts, Athens, 1996.

[34] D. Herceg, N. Krejić, Z. Lužanin, *Quasi-Newton's Method with Correction,* Journal of Novi Sad, (in print)

[35] G. W. Johnson and N. H. Austria, *A Quasi-Newton Method Employing Direct Secant Updates of Matrix Factorizations,* SIAM J.Numer. Anal., 20(1983), pp.315-325.

[36] C. T. Kelley and E. W. Sachs, *Broyden's Method for Approximate Solution of Nonlinear Integral Equations,* J. Integral Equations, 9(1985), pp.25-43.

[37] C. T. Kelley and E. W. Sachs, *A Quasi-Newton Method for Elliptic Boundary Value Problems,* SIAM J.Numer.Anal., 24(1987),pp.516-531.

[38] C. T. Kelley, *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations,* SIAM, Philadelphia, 1995.

[39] N. Krejić, Z. Ogrizović, *Nonlinear AOR method,* IX Conference on Applied Mathematics, (D.Herceg, Lj.Cvetković,eds.), Budva 1994.,pp.

[40] N. Krejić, *Proširenje oblasti i ubrzanje konvergencije dvoparametarskih relaksacionih postupaka,* doktorska disertacija, Institut za matematiku, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, 1994.

[41] P. J. LANZKRON, D. J. ROSE AND J. T. WILKES, *An Analysis of Approximate Nonlinear Elimination,* SIAM J.Sci.Comput., 17 (1996), pp.538-559.

[42] Z. LUŽANIN, N. KREJIĆ AND D. HERCEG, *Parameter Selection for Inexact Newton Method,* The second World Congress of Nonlinear Analysts, Athens, 1996.

[43] Z. LUŽANIN, *A New Approach to Globalization of Inexact Newton Methods,* (submitted)

[44] J. M. MARTÍNEZ, *A Quasi-Newton Method with a New Updating for the LDU Factorization of the Approximate Jacobian,* Math.Aplic.e Comput., 2(1983), pp.131-142.

[45] J. M. MARTÍNEZ, *A Quasi-Newton Method with Modification of one Column per Iteration,* Computing 3(1984), pp.353-362.

[46] J. M. MARTÍNEZ, *Quasi-Newton Methods with Factorization Scaling for Solving Sparse Nonlinear Systems of Equations,* Computing 38(1987), pp.133-141.

[47] J. M. MARTÍNEZ, *A Family of Quasi-Newton Methods for Nonlinear Equations with Direct Secant Updates of Matrix Factorizations,* SIAM J. Numer. Anal. 27(1990), pp.1034-1049.

[48] J. M. MARTÍNEZ, *Local Convergence Theory of Inexact Newton Methods Based on Structured Least Change Updates,* Math. Comput., 55 (1990), pp.143-168.

[49] J. M. MARTÍNEZ AND M. C. ZAMBALDI, *An Inverse Column-updating Method for Solving Large-scale Nonlinear Systems of Equations,* Optim. Methods Software, 1 (1992), pp.129-140.

[50] J. M. MARTÍNEZ, *Fixed-Point Quasi-Newton Methods,* SIAM J. Numer. Anal. 29(1992), pp.1413-1434.

[51] J. M. MARTÍNEZ, *A Theory of Secant Preconditioners,* Math. Comput., 60 (1993), pp.681-698.

[52] J. M. Martínez *SOR-Secant Methods,* SIAM J. Numer. Anal. 31(1994), pp.217-226.

[53] J. M. Martínez, *Inexact Newton Methods for Solving Nonsmooth Equations,* J. Comp. Appl. Math. 60(1995), pp.127-145.

[54] J. M. Martínez, *An Extension of the Theory of Secant Preconditioners,* J.Comput. and Appl.Math., 60 (1995), pp.115-125

[55] J. M. Martínez, *Quasi-Newton Methods with Derivatives,* Department of Applied Mathematics, IMECC-UNICAMP, 1996.

[56] J. M. Martínez, *Quasi-Inexact-Newton Methods with Global Convergence for Solving Constrained Nonlinear Systems,* Department of Applied Mathematics, IMECC-UNICAMP, 1996.

[57] R. E. Moore, *A Test for Existence of Solutions to Nonlinear Systems,* SIAM J. Numer. Anal. 14(1977), pp.611-615.

[58] R. E. Moore, S. T. Jones, *Safe Starting Regions for Iterative Methods,* SIAM J. Numer. Anal. 14(1977), pp.1051-1065.

[59] Z. Ogrizović, *Root-Finding Algorithms for Nonlinear Equations without Use of Derivatives,* VIII Conference on Applied Mathematics, Tivat, 1993., pp.169-178.

[60] Z. Ogrizović, *Iterativno rešavanje nekih klasa sistema jednačina,* magistarski rad, Institut za matematiku, PMF, Univerzitet u Novom Sadu, 1994.

[61] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables,* Academic Press, New York, 1970.

[62] A. M. Ostrowski, *Solution of Equationas and Systems of Equations,* Academic Press, New York, 1960.

[63] L. B. Rall, *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations,* John Wiley & Sons, 1969.

[64] J. ROHN, *An Existence Theorem for Systems of Nonlinear Equations,* ZAMM 60(1980), pp.345.

[65] L. K. SCHUBERT, *Modification of a Quasi-Newton Method for Nonlinear Equations with a Sparse Jakobian,* Math. Comp., 24(1970), pp.27-30.

[66] R. STEVENS, *Fractal, Programming in Turbo Pascal,* M& T Publishing,Redwood City, California, 1990.

[67] R. S. VARGA, *Iterative Analysis,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962

[68] T. J. YPMA, *Local Convergence of Inexact Newton Methods,* SIAM J.Numer.Anal., 21 (1984), pp.583-590.