naslovna1

naslovna2

Predgovor

Doktorska disertacija posvećena je rešavanju nelinearnih hiperboličnih skalarnih zakona održanja u heterogenim sredinama, proučavanjem osobina kompaktnosti rešenja familija aproksimativnih jednačina. Tačnije, u cilju dobijanja rešenja $u = u(t,x)$ problema

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \mathrm{div}_x f(t,x,u) = 0, \\ &u|_{t=0} = u_0(x), \end{aligned}$$

gde su promenljive $x \in \mathbf{R}^d$ i $t \in \mathbf{R}^+$, posmatramo familije problema koji na neki način aproksimiraju početni problem, a koje znamo da rešimo, i ispitujemo familije dobijenih rešenja koja zovemo aproksimativna rešenja. Cilj nam je da pokažemo da je dobijena familija u nekom smislu prekompaktna, tj. da ima konvergentan podniz čija granica rešava početni problem.

Nelinearni hiperbolični zakoni održanja su model mnogih fenomena u fizici, mehanici i hemiji, kao što su protok kroz propustljive (porozne) materije, procesi sedimentacije, protok saobraćaja, protok krvi itd. Ovi fenomeni se najčešće javljaju u heterogenim sredinama. Zbog toga je od velikog značaja ispitivati zakone održanja, kod kojih funkcija f, fluks održive veličine, eksplicitno zavisi od prostorne i vremenske promenljive.

Disertacija je podeljena na četiri poglavlja. U uvodnom poglavlju opisan je problem istraživanja i date su osnovne osobine klasične teorije H-mera. Poseban akcenat stavljen je na Panovljevo uopštenju klasične H-mere, odnosno na H-mere neprebrojive dimenzije, koje koristimo gotovo pri svakoj analizi problema u disertaciji i koje je jako bitno shvatiti pre no što krenemo u rešavanje problema.

U drugom poglavlju rešavamo problem difuziono-disperzione granice. Tačnije pokazujemo prekompaktnost niza rešenja aproksimacije multidimenzionalnog zakona održanja u heterogenoj sredini preko difuzije i disperzije.

Treće poglavlje bavi se aproksimacijom preko viskoznosti dvodimenzionalnog skalarnog zakona održanja sa prekidnim fluksom, tj. prekompaktnošću niza rešenja takve aproksimacije. U tom poglavlju dat je i novi uslov prirodne nelinearnosti znatno slabiji od postojećih u literaturi.

U četvrtom poglavlju, zakoni održanja u heterogenim sredinama su posmatrani u algebri Kolomboovskih uopštenih funkcija. Ukratko je pretstavljena pomenuta teorija i dati su rezultati postojanja i jedinstvenosti Kolomboovskih uopštenih rešenja.

Originalni rezultati dati su u drugom, trećem i četvrtom poglavlju.

Na ovom mestu želim da se zahvalim članovima svih komisija za ocenu i odbranu ove disertacije, profesorki Mirjani Stojanović, profesoru Darku Mitrović, profesoru Teodoru Atanackoviću, profesorki Dušanki Perišić i profesoru Stevanu Pilipović, što su dali niz korisnih sugestija u cilju poboljšanja kvaliteta disertacije.

Izuzetno sam zahvalna profesoru Darku Mitroviću na gostoprimstvu i neiscrpnim diskusijama u toku mog boravka u Budvi i Podgorici, kao i na njegovom trudu i čestim posetama Novom Sadu, tokom kojih je i nastala ideja za ovu doktorsku disertaciju. Pored moga mentora, on mi je pružio najviše stručne pomoći u naučnom radu i pri izradi disertacije.

Na kraju, posebno bih želela da se zahvalim mentoru, profesoru Stevanu Pilipoviću, koji mi je uvek predstavljao neiscrpan izvor znanja i konstantno pružao snažnu podršku tokom čitavih studija. Od njega sam puno naučila tokom proteklih godina i sigurna sam da bez njegovog usmeravanja ova disertacija ne bi imala sadašnji oblik.

Disertacija je izrađena u okviru projekta 144016 MNTR *Metode funkcionalne analize, ODJ i PDJ sa singularitetima.*

Novi Sad, 2009.

Jelena Aleksić

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Nelinearni hiperbolični zakoni održanja su model mnogih fenomena u fizici, mehanici i hemiji, kao što su protok kroz propustljive (porozne) materije, procesi sedimentacije, protok saobraćaja, protok krvi itd. Ovi fenomeni se najčešće javljaju u heterogenim sredinama. Zbog toga je od velikog značaja ispitivati zakone održanja sa fluksom koji eksplicitno zavisi od prostorne i vremenske promenljive.

1.1 Opis problema

Predmet istraživanja doktorske disertacije je Košijev problem

$$\begin{aligned} u_t + \mathrm{div}_x f(t,x,u) &= 0, \qquad x \in \mathbf{R}^d,\ t \in \mathbf{R}^+, \\ u|_{t=0} &= u_0(x), \qquad x \in \mathbf{R}^d. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Nepoznata funkcija $u = u(t,x) : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ je rešenje problema (1.1), odnosno gustina fizičke veličine koja se održava. Izvod po vremenskoj promenljivoj obeležavamo sa u_t. $\mathrm{div}_x f(t,x,u) = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} f_i(t,x,u)$ je divergencija fluksa $f = (f_1, ..., f_d)$ u odnosu na prostorne promenljive $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbf{R}^d$. Fluks $f = f(t,x,u)$ je data vektorska funkcija koja, osim od održive veličine, zavisi i od vremenske i prostorne promenljive, što govori da je sredina u kojoj se nalazimo *heterogena*. Ako je fluks $f = f(u)$ zavisan samo od u, odnosno isti u svakom trenutku i u svakoj tački prostora, to znači da se nalazimo u homogenoj sredini. Data funkcija $u_0(x)$ opisuje početno stanje rešenja.

Zakoni održanja imaju dugu istoriju rešavanja. U opštem slučaju, klasična rešenja Košijevog problema za nelinearni hiperbolični zakon održanja (1.1) postoje samo lokalno po vremenu čak iako su početne vrednosti u_0 male i glatke. To znači da se posle nekog vremena uvek pojave udarni talasi u rešenju, odnosno rešenja postaju prekidna i ne zadovoljavaju jednačinu u klasičnom smislu. Zbog toga proučavamo *slaba rešenja* koja zadovoljavaju (1.1) u smislu distribucija $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$, odnosno koja, za sve test funkcije $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$, zadovoljavaju jednačinu

$$\int_{\mathbf{R}}\int_{\mathbf{R}^d} \partial_t\phi(t,x)u(t,x) + \nabla_x\phi(t,x)\cdot f(t,x,u(t,x))\,dxdt+ \\ + \int_{\mathbf{R}^d} u_0(x)\phi(0,x)\,dx = 0.$$

Ovde smo koristili oznaku $\nabla_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_d})$ za gradijent u odnosu na prostornu promenljivu $x \in \mathbf{R}^d$, tj. $\nabla_x\phi = (\partial_{x_1}\phi, ..., \partial_{x_d}\phi)$. Ovakva rešenja nazivaju se slaba, a često i klasična, rešenja. Da bismo pokazali egzistenciju slabog rešenja jednačine (1.1), standardni metod se sastoji u rešavanju odgovarajuće familije problema koji na odgovarajući način aproksimiraju problem (1.1), a koje znamo da rešimo. Ono što se nadamo da ćemo dobiti je da rešenja te aproksimativne familije problema konvergiraju, ili bar imaju podniz koji konvergira, ka rešenju početnog problema. Put do dobijanja ovakvog rezultata je dugačak i zahteva korišćenje raznih metoda i tehnika funkconalne analize: metoda slabe konvergencije, kompenzovane kompaktnosti, (mikrolokalne) mere defekta itd. Slaba konvergencija se užasno loše slaže sa nelinearnošću, a slaba konvergencija je najlepše što možemo dobiti. Ipak prava, tzv. prirodna nelinearnost (engl. genuine nonlinearity) može da ulepša stvari, tj. da nam omogući rezultate o kompaktnosti rešenja aproksimativne familije jednačina. Uslov prirodne nelinearnosti pojavljuje se pri rešavanju svih problema obrađenih u ovoj disertaciji. Posebno dolazi do izražaja u trećem poglavlju.

1.1.1 Difuziono-disperziona regularizacija

Jedna dobra aproksimacija problema (1.1) je sledeća familije problema:

$$\partial_t u^{\varepsilon,\delta} + \operatorname{div}_x f(t,x,u^{\varepsilon,\delta}) = \varepsilon \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} b_j(\nabla_x u^{\varepsilon,\delta}) + \delta \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j x_j x_j} u^{\varepsilon,\delta}, \tag{1.2}$$

$$u^{\varepsilon,\delta}(0,x) = u_0^{\varepsilon}(x), \quad x \in \mathbf{R}^d. \tag{1.3}$$

Zvaćemo je *aproksimacija nelinearnom difuzijom i linearnom disperzijom* (engl. zero-diffusion-dispersion limit). Vektorsku funkciju $b = (b_1, ..., b_d)$ zovemo difuzija i u ovom slučaje je nelinearna. Iz (1.2) vidimo da je difuzija modelovana drugim izvodom. Disperzija je modelovana trećim prostornim izvodom i u našem slučaju je linearna, $\sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j x_j x_j} u$.

Svaki od problema iz (1.2)–(1.3) ima svoj difuzioni parametar $\varepsilon > 0$, disperzioni parametar $\delta > 0$ i početni uslov u_0^{ε} za koji pretpostavljamo da je u nekom od Soboljevih prostora. Sa početnim uslovom problema (1.1), novi početni uslovi su prirodno vezani na sledeći način

$$u_0^{\varepsilon} \to u_0, \text{ jako u } L^2(\mathbf{R}^d) \cap L^1(\mathbf{R}^d), \text{ kada } \varepsilon \to 0.$$

Skraćeno pišemo $u^{\varepsilon} \equiv u^{\varepsilon,\delta}$, jer nam je cilj da nađemo odnos između difuzionog i disperzionog parametra koji će nam omogućiti da niz rešenja problema (1.2)–(1.3) ima podniz koji konvergira (u nekom smislu) ka rešenju problema (1.1). Tačnije iz niza rešenja problema (1.2)–(1.3) treba izvući neki konvergentan podniz čiji limit u rešava (1.1). Granica u je onda jedinstveno, (entropijski) prihvatljivo slabo rešenje problema (1.1). Naš cilj je da dobijemo tu granicu pod što slabijim odnosom parametara ε i δ. Naprimer, $\delta = o(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, što znači da $\frac{\delta}{\varepsilon^2} \to 0$ kad $\varepsilon \to 0$, je jača pretpostavka od $\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, što znači da $\frac{\delta}{\varepsilon^2} \leq c$, ali druga pretpostavka daje bolji rezultat.

Daćemo sad hronološki pregled rešavanja ovog problema u homogenom slučaju. U homogenim sredinama, kada fluks ne zavisi od vremena i prostora, problem difuziono-disperzione granice prvi put je rešen 1982. u radu [37]. Koristeći metod tzv. kompenzovane kompaktnosti, Maria Schonbek je pokazala da familija rešenja KdV-jednačine konvergira ka slabom rešenju Burgers-ove jednačine ako je odnos između parametara

$$\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^2), \ \varepsilon \to 0.$$

U ovim jednačinama fluks je oblika $f(u) = u^2/2$.

Isti problem, samo za fluks u opštem obliku, $f = f(u)$, rešen je 1999. u radu [25]. Dobijen je isti odnos parametara.

Uz pojačan uslov
$$\delta = o(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,$$
rešen je i multidimenzionalni problem u radu [19]. Bitno je istaći da se ovde prvi put koristi DiPerna-in koncept meroznačnih rešenja.

Četiri godine kasnije u radu [13], koristeći kinetički pristup iz [35] i Leme usrednjenja (engl. averaging lemma) iz [26, 35, 40], autorpoboljšava odnos parametara na
$$\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,\ \text{odnosno}\ \delta = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}}),\ \varepsilon \to 0,\ \text{za neko}\ r \geq 1.$$
Bitno je istaći da u svim prethodno pomenutim radovima fluks koji odgovara posmatranim zakonima održanja ne zavisi eksplicitno od vremena i prostora, što znači da se posmatrani procesi odvijaju u homogenim sredinama.

U heterogenim sredinama radi se na rešavanju ovog problema u dva slučaja, za prekidan i neprekidan fluks. Za prekidan fluks (po x i t), Holden, Mitrović i Karlsen[1] dobijaju odnos parametara
$$\delta = o(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,$$
dok bolji odnos
$$\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^2),\ \varepsilon \to 0,\ \text{tačnije}\ \delta = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}}),\ \varepsilon \to 0$$
za $r \geq 1$ dobijamo mi, ali po ceni "lepšeg", Lipšic-neprekidnog fluksa. Osim poboljšanja dosadašnjih rezultata, značaj našeg rada je što se prvi put koriste tzv. H-mere (još se zovu i mikrolokalne mere defekta, engl. microlocal defect measures). Uveli su ih nezavisno jedan od drugog Tartar u radu [41] i Gerard u radu [9]. H-mere opisaćemo detaljno u sledećem odeljku, ovde dajemo samo motivaciju. H-mere su značajne jer mere gubitak (defekt) jake konvergencije, u smislu da jaku konvergenciju nemamo u okolini tačaka iz nosača H-mere (znamo da ako niz rešenja problema (1.2)–(1.3) ima jako konvergentan podniz, da je limit tog podniza rešenje problema (1.1)). Ilustrovaćemo ih na nekim primerima.

Naime, neka je Ω otvoren skup u $\mathbf{R}^n$ i neka je niz $(u_k)_k$ ograničen u $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, takav da konvergira u smislu distribucija ka nekom $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

[1]Njihove rezultate ćemo detaljnije objasniti u poglavlju 2.2.

Trebamo ispitati gubitak jake kompaktnosti u $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ skupa $\{u\} \cup \{u_k : k \in \mathbb{N}\}$. Prvi pokušaj su bile tzv. mere defekta, definisane na sledeći način. Naime, niz

$$\nu_k = |u_k - u|^2 \tag{1.4}$$

je ograničen u $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, stoga slabo konvergira ka nekoj pozitivnoj Radonovoj[2] meri ν, koju zovemo mere defekta niza $(u_k)_k$. Nosač mere ν je skup tačaka iz Ω blizu kojih u_k ne konvergira jako ka u. Pomoću ovih mera možemo klasifikovati gubitak kompaktnosti. Na primer, ako je

$$u_k(x) = (2\pi k)^{n/2}\, \mathrm{e}^{\dfrac{-k|x-x_0|^2}{2}},$$

ν je Dirac-ova (delta) mera u x_0 i gubitak je posledica koncentracije ($\text{supp}\nu = \text{supp}\delta = \{x_0\}$).

Drugi primer je

$$v_k(x) = \mathrm{e}^{ikx\cdot\xi_0}, \tag{1.5}$$

gde je $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}$. U ovom slučaju, ν je Lebegova mera, pa je gubitak kompaktnosti posledica oscilacija. Kako ν ne zavisi od frekvencije ξ_0, a oscilacije su veoma zastupljene u rešenju problema (1.2)–(1.3), trebaju nam mere koje će zavisiti i od frekvencije. Zbog toga umesto (1.4), posmatramo granice nizova oblika

$$\langle A(u_k - u) \,|\, u_k - u \rangle$$

gde je $\langle\,|\,\rangle$ skalarni proizvod, a A se uzima iz klase tzv. test-operatora koja je šira od samo množenja neprekidnom funkcijom. Najčešće je to neki pseudodiferencijalni operator, a najpoznatiji primer je sa Furijeovom transformacijom, dat u sledećoj teoremi.

Teorema 1. [42] *Ako je $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz u $L^2_{\text{loc}}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^{d+1}$, takav da $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, tada postoji podniz $(u_{n'})_{n'} \subset (u_n)_n$ i pozitivna kompleksna*

[2]Radonova mera definiše se na Hausdorff-ovom prostoru kao lokalno konačna i unutrašnje regularna mera na Borelovoj σ-algebri. Unutrašnje regularna znači da je mera Borelovog skupa supremum mera kompaktnih skupova sadržanih u tom skupu, a lokalno konačna znači da svaka tačka ima okolinu konačne mere. Na lokalno kompaktnom Hausdorff-ovom prostoru (svaka tačka ima kompaktnu okolinu), Radonove mere su mere koje odgovaraju neprekidnim linearnim funkcionelama definisanim na prostoru neprekidnih funkcija sa kompaktnim nosačem.

Radonova mera $\mu = (\mu^{jk})_{j,k=1,\dots,r}$ *na* $\mathbf{R}^{d+1} \times \mathbf{S}^d$ *tako da za sve* $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0(\Omega)$ *i* $\psi \in C(S^{d-1})$,

$$\begin{aligned}\lim_{n'\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\varphi_1 u^j_{n'})(\xi)\overline{\mathcal{F}(\varphi_2 u^k_{n'})(\xi)}\psi(\frac{\xi}{|\xi|})d\xi = \langle \mu^{jk}, \varphi_1\bar{\varphi}_2\psi\rangle := \\ := \int_{\mathbf{R}^d\times S^{d-1}} \varphi_1(x)\overline{\varphi_2(x)}\psi(\xi)d\mu^{jk}(x,\xi),\end{aligned} \tag{1.6}$$

gde je $\mathcal{F}$ *oznaka za Furijeovu transformaciju, S je jedinična sfera u* $\boldsymbol{R}^d$, $\overline{u}$ *je oznaka za konjugovani kompleksni broj i* Ω *je otvoren skup u* $\boldsymbol{R}^d$.

Za nizove beskonačnih dimenzija, sa kojima i mi radimo ($i, j \in \mathcal{E}$, gde je $\mathcal{E}$ beskonačan, neprebrojiv skup), Tartarov rezulat je uopštio Panov u radu [31]. Kako se naš rad oslanja na pomenuti Panovljev rad, odnosno na teoriju H-mera koje odgovaraju nizovima beskonačnih dimenzija, u sledećem poglavlju pretstavićemo glavne rezultate te teorije.

1.1.2 Uslov prirodne nelinearnosti

Kao što smo pomenuli, rešavanje nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina je uvek praćeno takozvanim uslovom prirodne nelinearnosti (engl. genuine nonlinearity). U poslednjem poglavlju posmatramo dvodimenzionalni skalarni zakon održanja sa prekidnim fluksom i sa početnim uslovom ograničene varijacije. Preciznije, posmatramo sledeći Košijev problem za dvodimenzionalani skalarni zakon održanja

$$\begin{aligned} u_t + f_1(x,y,u)_x + f_2(x,y,u)_x = 0, \\ u(0,x,y) = u_0(x,y), \end{aligned} \tag{1.7}$$

gde je $u = u(t,x,y)$, $x, y \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}^+$ i $f = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$. Kako je početni uslov $u_0 \in (BV \cap L^\infty)(\mathbf{R}^2)$, aproksimiramo ga familijom glatkih uslova $\{u_0^\delta\}_{\delta>0}$ koju dobijamo konvolucijom početnog uslova sa adekvatnim molifajerima.

Aproksimacija zakona održanja koju koristimo zovemo *regularizacija pomoću viskoznosti* (engl. vanishing viscosity). Ona podrazumeva da na desnu stranu jednačine (1.7) dodamo Laplasijan rešenja pomnožen malim pozitivnim parametrom $\varepsilon \to 0$. Osim toga i prekidan fluks aproksimiramo familijom glatkih funkcija $\{f^\delta\}_\delta$, za isti parametar δ kao kod početnog uslova, koju opet dobijamo konvolucijom sa adekvatnim molifajerima, tako da imamo dve regularizacije (dva parametra ε i δ).

Dakle posmatrani problem, (1.7), aproksimiramo sledećom familijom problema (oznaka Δ označava Laplasov operator, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$):

$$\begin{aligned} \partial_t u^{\varepsilon,\delta} + \operatorname{div} f^{\delta}(x,y,u^{\varepsilon,\delta}) &= \varepsilon \Delta u^{\varepsilon,\delta}, \\ u^{\varepsilon,\delta}|_{t=0} &= u_0^{\delta}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

gde su

$$f_i^{\delta}(x,y,\lambda) = \frac{1}{\delta^3} \iiint_{\mathbf{R}^3} f_i(\xi,\eta,\zeta)\omega\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right)\omega\left(\frac{y-\eta}{\delta}\right)\omega\left(\frac{\lambda-\zeta}{\delta}\right) d\xi d\eta d\zeta,$$

$$u_0^{\delta}(x,y) = \frac{1}{\delta^2} \iint_{\mathbf{R}^2} u_0(\xi,\eta)\omega\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right)\omega\left(\frac{y-\eta}{\delta}\right) d\xi d\eta,$$

za $\omega : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ proizvoljnu glatku funkciju, takvu da je $\omega(\xi) = 0$ za $|\xi| \geq 1$, i $\int_{\mathbf{R}} \omega(\xi)\, d\xi = 1$. Naš rezultat je novi, slabiji nego u dosadašnjim radovima, uslov prirodne nelinearnosti koji obezbeđuje jaku prekompaktnost familije rešenja regularizacije posmatranog zakona održanja u prostoru lokalno integrabilnih funkcija.

Egzistenciju rešenja početnog problema (1.7) dobijamo tako što pokažemo da je familija rešenja aproksimacije tog problema, (1.8), jako prekompaktna u $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2)$. Da bismo to pokazali neophodan je uslov prirodne nelinearnosti. Standardno se koristi sledeći uslov, [17, 18, 33, 40]:

Neka je $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ jedinična sfera. Kažemo da fluks (f_1, f_2) zadovoljava uslov prirodne nelinearnosti ako važi

$$\begin{gathered} \text{za skoro sve } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \text{ i sve } \xi \in S^2 \text{ preslikavnje} \\ \lambda \mapsto \xi_0\lambda + f_1(x,y,\lambda)\xi_1 + f_2(x,y,\lambda)\xi_2 \\ \text{nije konstantno po } \lambda \text{ na bilo kom netrivijalnom intervalu.} \end{gathered}$$

U našoj analizi dobilijamo da je izvod $u_t(t,\cdot,\cdot)$ ograničen u $L^1(\mathbf{R}^2)$, za svako $t > 0$. To nam omogućava da u_t zamenimo funkcijom $(h(x,y,u))_t$, a u_t prebacimo na desnu stranu jednačine, i da pri tom ne pokvarimo argumente potrebne za prekompaktnost. To znači da možemo da zamenimo $\xi_0\lambda$ u standardnom uslovu prirodne nelinearnosti, sa $\xi_0 h(x,y,\lambda)$. Ovako dobijeni uslov je opštiji i glasi:

postoji funkcija $h(x,y,\lambda) \in C^1(\mathbf{R}_\lambda\,; L^\infty(\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_y))$
tako da za sve $\xi \in S^2$, preslikavanje
$\lambda \mapsto \xi_0 \cdot h(x,y,\lambda) + \xi_1 \cdot f_1(x,y,\lambda) + \xi_2 \cdot f_2(x,y,\lambda)$
nije konstantno po λ ni na jednom netrivijalnom intervalu.

Na kraju uvodnog dela, napomenimo da ćemo, ako drugačije nije navedeno u tekstu, koristiti sledeće oznake i skraćenice:

- c za različite konstante koje se pojavljuju u ovoj disertaciji;
- $\mathcal{M}(\cdot)$ za prostor Radonovih mera na određenom skupu;
- θ ili H je Heavyside-ova funkcija;
- Za vektor $g = (g_1, ..., g_d)$, pišemo

$$|g|^2 = \sum_{i=1}^{d} |g_i|^2;$$

- Parcijalni izvod po nezavisnoj promenljivoj D_{x_i} u tački (t,x,u), gde u može da zavisi od (t,x), definišemo kao

$$D_{x_i} g(t,x,\lambda) = (\partial_{x_i} g(t,x,\lambda))|_{\lambda=u(t,x)}.$$

  Preciznije, pun izvod, ∂_{x_i}, i parcijalni, D_{x_i}, vezani su identitetom

$$\partial_{x_i} g(t,x,u) = D_{x_i} g(t,x,u) + \partial_u g(t,x,u) \partial_{x_i} u.$$

- Dejstvo funkcionele μ (mere, distribucije) na test funkciju φ obeležavaćemo sa $\langle \mu\,,\,\varphi \rangle$.

1.2 H-mere

Dali smo već primer sa oscilacijama, (1.5), koji ilustruje neophodnost uvođenja H-mera, kao i Teoremi 1. U ovom odeljku ćemo se detaljnije upoznati sa H-merama, [9, 22, 31, 42].

H-mere, ili kako se još nazivaju mikrolokalne mere defeka, definisali su krajem osamdesetih godina dvadesetog veka, nezavisno jedan od drugog, Luc Tartar, [42], i Patric Gérard, [9]. Tartar je rešavao probleme iz homogenizacije, te ih je nazvao H-mere, a Gérard mikrolokalne mere defekta jer ih je uveo kao uopštenje mere defekta uvodjenjem frekvencijske (mikrolokalne, fazne) promenljive, što smo videli u uvodnoj priči. One su Radonove mere koje zavise od dve promenljive, prostorne $x \in \mathbf{R}^d$ i frekvencijske $\xi \in S^{d-1}$, gde je S^{d-1} jedinična sfera prostora $\mathbf{R}^d$. Dobijaju se kao granica kvadratnih izraza funkcija iz prostora L^2. Od posebnog značaja je njihova primena u hiperboličnim i paraboličnim problemima [9, 12, 22, 31, 32, 33, 36, 42]. Metode koje se pri tom koriste se temelje na dva svojstva H-mera: lokalizacijskom i transportnom. Lokalizacijsko svojstvo opisuje nosač H-mere, dok transportno svojstvo omogućava pridruživanje parcijalnim diferencijalnim jednačinama posebne transportne jednačine koje opisuju širenje i oscilacija i koncentracija. Ovo svojstvo razlikuje H-mere od Young-ovih, koje daju samo statički opis oscilacija.

Egzistencija H-mera osigurana je Teoremom 1. Mera μ definisana u pomenutoj teoremi zove se *H-mera pridružena nizu* (u_n). Za niz (u_n) kažemo da je *čist* ako svaki njegov podniz definiše jednu i smao jednu H-meru.

Granicu u izrazu (1.6) Teoreme 1 možemo napisati i u drugačijem obliku koristeći sledeću komutacijsku lemu.

Lema 2. *Neka su funkcijama $a \in C(S^{d-1})$ i $b \in C_0(\boldsymbol{R}^d)$[3] pridruženi operatori na $L^2(\boldsymbol{R}^d)$, A i B:*

$$\mathcal{F}(Au)(\xi) := a\left(\frac{\xi}{\|\xi|}\right)\hat{u}(\xi),$$
$$Bu(x) := b(x)u(x).$$

Tada je njihov komutator $K := [A,B] = AB - BA$ kompaktan operator na $L^2(\boldsymbol{R}^d)$.

[3] Ovde pod $C_0(\mathbf{R}^d)$ podrazumevamo prostor funkcija koje se anuliraju u beskonačnosti. Ako je b definisana samo na kompaktnom podskupu od $\mathbf{R}^d$, onda je van tog skupa prosto možemo (do)definisati nulom.

Koristeći ovu lemu, granicu iz (1.6) možemo napisati u obliku

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle \widehat{\varphi_1 u_n^j}, \bar{\psi}_0\widehat{\varphi_2 u_n^k}\right\rangle_{L^2} = \lim_{n\to\infty}\left\langle \varphi_1 u_n^j\,,\ \left(\bar{\psi}_0\widehat{\varphi_2 u_n^k}\right)^{\vee}\right\rangle_{L^2} = $$
$$= \lim_{n\to\infty}\left\langle \varphi_1 u_n^j\,,\ \varphi_2\left(\bar{\psi}_0\widehat{u_n^k}\right)^{\vee}\right\rangle_{L^2},$$

gde je $\hat{}$ oznaka za Furijeovu transformaciju, $^{\vee}$ oznaka za inverznu Furijeovu transformaciju i $\psi_0(\xi)=\psi(\xi/|\xi|)$. Dakle, (1.6) možemo napisati u obliku

$$\langle \mu^{jk}\,,\ \varphi\psi\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle \widehat{\varphi u_n^j}\,,\ \bar{\psi}_0\widehat{u_n^k}\right\rangle_{L^2},\quad \varphi := \varphi_1\bar{\varphi}_2.$$

Kao direktne posledice Teoreme 1 imamo sledeću osobinu H-mera.

Posledica 3. *H-mera μ je pozitivno semidefinitna, odnosno za svaku ograničenu vektorsku funkciju $\phi\in C(\boldsymbol{R}^d)$, mera $\mu\phi\cdot\phi$ je pozitivna Radovova mera na $\boldsymbol{R}^d\times S^{d-1}$.*

Drugi pristup definiciji H-mere, [9], dat je preko pseudodiferencijalnih operatora. Klasični pseudodiferncijalni operator je linearni operator

$$A:\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)\to\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$$

pridružen funkciji (simbolu) $a\in C^\infty(\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d)$, takav da je

$$Au(x)=\int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)d\xi,$$

pri čemu simbol a zadovoljava još neke dodatne uslove, koje ćemo kasnije navesti. Prostor pseudodiferencijalnih operatora na $\mathbf{R}^d$ reda $m\in\mathbf{Z}$, u oznaci $\Psi^m(\mathbf{R}^d)$, sastoji se od operatora čiji simbol a pripada Hörmander-ovoj klasi $S^m_{0,1}$, odnosno zadovoljava sledeće ocene: za sve multiindekse α,β, postoji konstanta $C_{\alpha,\beta}>0$, tako da za sve $x,\xi\in\mathbf{R}^d$,

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)|\le C_{\alpha,\beta}\left(\sqrt{1+4\pi^2|\xi|^2}\right)^{m-|\beta|}.$$

Osim toga, potrebno je da je simbol oblika

$$a(x,\xi)=a^m(x,\xi)\left(1-\phi(\xi)\right)+a^{m-1}(x,\xi),$$

gde je a^m homogena funkcija reda m po ξ, $\phi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$, sa nosačem u jediničnoj lopti i osobinom da je na nekoj okoliki tačke $\xi = 0$ identički jednaka jedinici, a a^{m-1} pripada Hörmander-ovoj klasi $S_{0,1}^{m-1}$. Funkciju a^m nazivamo glavnim simbolom operatora A, što skraćeno pišemo $\sigma_m(A) = a^m$. Potprostor oparatora iz $\Psi^m(\mathbf{R}^d)$, čiji simboli imaju kompaktan nosač po x obeležićemo sa $\Psi_c^m(\mathbf{R}^d)$.

Sada granicu iz (1.6) Teoreme 1 možemo preformulisati na sledeći način,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} Pu_n \cdot u_n dx = \langle \mu, p\rangle,$$

za sve $P \in \Psi_c^m(\mathbf{R}^d)$, sa glavnim simbolom p.

H-mere su definisane za kompleksne nizove, ali ako je niz (u_n) realan, onda njemu pridružena H-mera ima dodatne osobine koje su posledica sledeće leme.

Lema 4. *Neka je (u_n) čist kompleksni niz u $L^2(\boldsymbol{R}^d)$ i μ njemu pridružena H-mera. Tada je i niz $(\bar{u}_n)$ čist i za njemu pridruženu H-meru ν važi $\nu(x,\xi) = \mu(x,-\xi)$.*

Kako H-mere proučavaju limese kvadratnih izraza slabo konvergentnih nizova, osnovni primeri H-mera se odnose na pojave koje uzrokuju odstupanje slabe od jake konvergencije, tj. oscilacije i koncentracije.

Primer 5. *Neka je $v \in L^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^d)$ periodična funkcija sa jediničnim periodom po svakoj promenljivoj, čija je srednja vrednost nula. Neka je (u_n) niz u $L^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^d)$ definisan kao*

$$u_n(x) := v(nx).$$

Ovako definisani niz, slabo konvergira ka nuli u $L^2(\boldsymbol{R}^d)$, te mu možemo, na osnovu Teoreme 1, pridružiti H-meru. Osim toga, definisani niz je čist, tj. svaki njegov podniz definiše istu H-meru. Pomenuta H-mera se dobija kao kombinacija Dirac-ovih mera u dualnom (faznom) prostoru (promenljive ξ) i Lebesque-ove mere u fizičkom prostoru (promenljive x), tj. kao

$$\mu(x,\xi) = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}^d\setminus\{0\}} |v_k|^2 \,\mathrm{meas}(x)\, \delta_{\frac{k}{|k|}}(\xi),$$

gde su v_k Fourier-ovi koeficijenti funkcije v, tj.

$$v(x) = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}^d} v_k e^{2\pi i k\cdot x},$$

a meas *je Lebesque-ova mera na $\boldsymbol{R}^d$.*

Primer 6. *Neka je $v \in L^2(\boldsymbol{R}^d)$ i neka je (u_n) slabo konvergentan niz u $L^2(\boldsymbol{R}^d)$ definisan kao*

$$u_n(x) := n^{\frac{d}{2}} v(nx).$$

Ovako definisani niz je čist i pridružena mu je H-mera oblika

$$\mu(x,\xi) = \delta_0(x)\nu(\xi),$$

gde je ν mera na sferi definisana sa

$$\nu(\xi) = \int_0^\infty |\hat{v}(t\xi)|^2 t^{d-1} dt.$$

Direktna posledica Teoreme 1 je da je H-mera pridružena L^2-jako konvergentnom nizu trivijalna (skoro svuda je nula), ali obrnuto ne mora da važi, tj. H-mera pridružena samo slabo konvergentnom nizu može biti trivijalna, kao što pokazuje sledeći primer.

Primer 7. *Posmatrajmo funkciju $v(x) = \frac{1}{2\pi x}\sin(2\pi x)$. Jasno da je funkcija $v \in (L^2 \cap L^\infty)(\boldsymbol{R})$, a nije integrabilna $L^1(\boldsymbol{R})$-funkcija. Definišimo niz (skaliranje funkcije v)*

$$u_n(x) := \frac{1}{n} v\left(\frac{x}{n^2}\right) = \frac{n}{2\pi x}\sin\left(\frac{2\pi x}{n^2}\right). \tag{1.9}$$

Furijeova transformacija članova ovog niza je

$$\hat{u}_n(\xi) := \begin{cases} \frac{n}{2}, & |\xi| < \frac{1}{n^2} \\ 0, & inače \end{cases}.$$

Očigledno je da ovaj niz ne konvergira jako ka nuli u L^2, jer su L^2-norme ovih funkcija jednake $1/2$, ali konvergira slabo, jer za test-funkciju $\phi \in (L^1 \cap L^2)(\boldsymbol{R})$ važi

$$\begin{aligned} \Big|\int_{\boldsymbol{R}} u_n(x)\phi(x)dx\Big| &\le \int_{\boldsymbol{R}} \Big|\frac{n}{2\pi x}\sin\frac{2\pi x}{n^2}\phi(x)\Big| dx \\ &\le \int_{\boldsymbol{R}} \Big|\frac{n}{2\pi x}\Big|\,\Big|\frac{2\pi x}{n^2}\Big|\,|\phi(x)|dx \le \frac{1}{n}\|\phi\|_{L^1} \to 0. \end{aligned}$$

Izračunajmo sad H-meru pridruženu nizu (u_n). Uzmimo test-funkcije $\varphi \in C_0^\infty(\boldsymbol{R})$, $\psi_0 \in C(\boldsymbol{R})$, $\psi_0(\xi) = \psi(\xi/|\xi|)$, i operator $P \in \Psi_c^0(\boldsymbol{R})$ sa glavnim *simbolom* $\sigma_0(P) = \varphi\psi_0$. *Dobijemo*

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\langle Pu_n\,,\,u_n\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle (\psi_0(\widehat{\varphi u_n}))^{\vee}\,,\,u_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle \widehat{\varphi u_n}\,,\,\psi_0\hat{u}_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}} \widehat{\varphi u_n}(\xi)\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)\overline{\hat{u}_n(\xi)}d\xi = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}} \widehat{\varphi u_n}(\xi)\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi \\
&\leq \frac{\|\hat{\varphi}\|_\infty\|\psi\|_\infty}{n^2} \to 0,
\end{aligned}
$$

jer je

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\varphi u_n}|(\xi) &= \Big|\int_{\boldsymbol{R}}\hat{\varphi}(\xi-\eta)\hat{u}_n(\eta)d\eta\Big| \leq \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}}|\hat{\varphi}(\xi-\eta)|d\eta \\
&\leq \frac{n}{2}\frac{2}{n^2}\|\varphi\|_\infty = \frac{1}{n}\|\varphi\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\langle \mu\,,\,\varphi\psi\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle Pu_n\,,\,u_n\rangle = 0,
$$

što znači da je H-mera pridružena nizu (u_n) *trivijalna.*

Ovaj primer, odnosno skaliranje kao u (1.9), može se generalizovati na klasu nizova generisanih netrivijalnom funkcijom $v \in (L^2\cap L^\infty)(\mathbf{R}^d)$, za koju definišemo niz

$$
u_n(x) := \frac{1}{n^d}v\left(\frac{x}{n^2}\right).
$$

Ovaj niz ne konvergira jako ka nuli u L^2, jer su L^2-norme ovih funkcija konstantne i jednake $\|v\|_{L^2}$, ali konvergira slabo, jer za test-funkciju $\phi \in (L^1\cap L^2)(\mathbf{R}^d)$ važi

$$
\Big|\int_{\mathbf{R}^d}u_n(x)\phi(x)dx\Big| \leq \int_{\mathbf{R}^d}\Big|v(\frac{x}{n^2})\phi(x)\Big|dx \leq \frac{1}{n^d}\|\phi\|_{L^1}\|v\|_{L^\infty} \to 0.
$$

Kao u prethodnom primeru, dobijemo da je H-mera pridružena niza (u_n) trivijalna i da je niz (u_n) čist.

Ovo uopštenje nastalo je proučavanjem fenomena suprotnih koncentraciji koje možemo nazvati disperzijom. Možemo zaključiti da iako ne mora jako da konvergira ka nuli u L^2, niz (u_n) čija je H-mera trivijalna, konvergira jako ka nuli u L^2_{loc}.

1.2.1 Panovljevo uopštenje H-mere

Kao što vidimo, u Teoremi 1, H-mera μ^{kj}, $k, j \in E$ je definisana za niz $(u_n)_n = (u_n(x,\lambda))_n$, $x \in \Omega$, $\lambda \in E$, koji slabo konvergira ka nuli u $L^2(\Omega)$, gde je E konačan skup. Koristeći proceduru dijagonalizacije, H-mera može biti definisana za nizove $(u_n)_n = (u_n(x,\lambda))_n$, gde je $\lambda \in E$ i E je prebrojiv skup. Ali ako pretpostavimo da je niz $u_n = u_n(x,\lambda)$ definisan za $\lambda \in \mathbf{R}$, tj. neprebrojiv skup, i dodatno pretpostavimo da je $(u_n)_n$ uniformno neprekidan na skupu $E \subset \mathbf{R}$ pune mere, tada možemo definisati H-meru $\mu = \mu^{kj}$ za sve $k, j \in E$. Možemo izabrati prebrojiv gust podskup skupa E i definisati H-meru na tom prebrojivom skupu, koju ćemo zatim proširiti za sve $k, j \in E$. Ova činjenica je prvi put primenjena u [31] i mi ćemo je koristiti.

Panovljev rad,[31], može se primeniti na zakon održanja kad fluks zavisi od nezavisne promenljive x,

$$u_t + (f(x,u))_x = 0, \tag{1.10}$$

i odgovarajući entropijski par (η, q), $\partial_u q(x,u) = \eta'(u)\partial_u f(x,u)$. Jedan takav par je

$$\eta(u) = |u-c|, \qquad q(x,u) = \operatorname{sgn}(u-c)(f(x,u) - f(x,c)),$$

za proizvoljnu konstantu c. Kad pomnožimo (1.10) sa $\eta'(u) = \operatorname{sgn}(u-c)$ dobijemo

$$\partial_t|u-c| + \operatorname{sgn}(u-c)(D_x f(x,u) + \partial_u f(x,u)\partial_x u) = 0, \tag{1.11}$$

što možemo zapisati u obliku

$$\operatorname{div}_{(t,x)}\Big(\operatorname{sgn}(u-c)(u-c, f(x,u)-f(x,c))\Big) + \operatorname{sgn}(u-c)\partial_x f(x,c) = 0. \tag{1.12}$$

Ako u jednačini (1.12) zamenimo $\phi(x,u) = (u, f(x,u))$, i promenljive (t,x) posmatramo kao jednu višedimenzionalnu promenljivu, dolazimo do kvazilinearne jednačine prvog reda

$$\operatorname{div}\phi(x,u) + \psi(x,u) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d, \tag{1.13}$$

čije je rešenje $u \in L^1(\mathbf{R}^d) \cap L^\infty(\mathbf{R}^d)$ merljiva i ograničena funkcija.

Kako bi tvrđenje Teoreme 1 pokazao i za nizove neprebrojivih dimenzija, Panov uvodi pojam uopštenog meroznačnog rešenja i druge pomoćne pojmove i njihove osobine, date u sledećim definicijama.

Definicija 8. *Merljiva, ograničena funkcija* $u \in L^1(\boldsymbol{R}^d) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^d)$ *je* uopšteno rešenje *jednačine* (1.13) *ako za sve* $f \in C_0^1(\Omega)$ *i sve* $c \in \boldsymbol{R}$ *važi*

$$\int_\Omega \Big[\big\langle \mathrm{sgn(u-c)}\,(\phi(\mathrm{x,u}) - \phi(\mathrm{x,c}))\,, \nabla \mathrm{f(x)} \big\rangle \\ - \mathrm{sgn}(u-c)\big(\mathrm{div}\phi(x,u) + \psi(x,u)\big) f(x) \Big] dx \geq 0.$$

Primedba 9. Pojmovi iz prethodne i sledećih definicija dati su onako kako ih je definisao Panov, [31]. Prethodna definicija se dobija tako što se u (1.12) zameni $\phi(x,u) = (u, f(x,u))$, a nejednakost potiče od parabolične regularizacije, tj. iz ocene $\varepsilon u_{xx}\mathrm{sgn}(u-c) = \varepsilon(\mathrm{sgn}(u-c)u_x)_x - 2\delta(u-c)u_x^2 \leq \varepsilon(\mathrm{sgn}(u-c)u_x)_x \to 0$, u $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definicija 10. Meroznačna funkcija *je slabo merljivo preslikavanje*

$$\nu : \Omega \to \mathcal{M}_B(\boldsymbol{R}), \quad x \mapsto \nu_x,$$

gde je $\mathcal{M}_B(\boldsymbol{R}^d)$ *prostor Borelovih probabilističkih mera. Slaba merljivost ovakvog preslikavanja znači da je funkcija*

$$F(x) := \int_{\boldsymbol{R}} p(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)$$

merljiva za sve neprekidne funkcije $p \in C(\boldsymbol{R})$. *Skup meroznačnih funkcija na* Ω *obeležavamo* $MV(\Omega)$.

Za niz meroznačnih funkcija $(\nu^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\nu^k = \{\nu_x^k\}_{x\in\Omega}$, *kažemo da slabo konvergira u* $MV(\Omega)$, *u oznaci* $\nu^k \rightharpoonup \nu$, *ako za sve* $p \in C(\boldsymbol{R})$

$$\int p(\lambda)\, d\nu_x^k(\lambda) \rightharpoonup \int p(\lambda)\, d\nu_x(\lambda), \text{ slabo}-* \text{ u } L^\infty(\Omega).$$

Za niz meroznačnih funkcija $(\nu^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $\nu^k = \{\nu_x^k\}_{x\in\Omega}$, *kažemo da jako konvergira u* $MV(\Omega)$, *u oznaci* $\nu^k \to \nu$, *ako za sve* $p \in C(\boldsymbol{R})$

$$\int p(\lambda)\, d\nu_x^k(\lambda) \to \int p(\lambda)\, d\nu_x(\lambda), \text{ jako u } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

Definicija 11. *Meroznačna funkcija* $\{\nu_x^k\}_x$ *koja, u smislu distribucija, zadovoljava nejednakost*

$$\mathrm{div} \int \mathrm{sgn}(\lambda - c)\Big(\phi(x,\lambda) - \phi(x,c)\Big) d\nu_x(\lambda) + \\ + \int \mathrm{sgn}(\lambda - c)\Big(\mathrm{div}_x\, \phi(x,c) + \psi(x,\lambda)\Big) d\nu_x(\lambda) \leq 0 \tag{1.14}$$

naziva se uopšteno meroznačno rešenje.

Primedba 12. Ako na mestu $\nu_x(\lambda)$, u Definiciji 11, zamislimo $\delta(\lambda - u)$, dobijamo definiciju uopštenog rešenja.

Definicija 13. *Niz meroznačnih rešenja* $(\nu^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *je ograničen ako je*

$$\mathrm{supp}\nu_x^k \subset [-M, M],$$

uniformno po k*, za skoro sve* $x \in \Omega$*, tj.* $\nu_x^k((a,b)) = 0$ *ako je*

$$(a, b) \cap [-M, M] = \emptyset.$$

Napomenimo da ako je ograničen niz $(\nu^k)_{k\in\mathbb{N}}$ oblika $\nu_x^k(\lambda) = \delta(\lambda - u_k(x))$, onda je niz $|u_k(x)| \leq M$.

Prvi korak ka uopštenju Tartarove teoreme je uopštenje Teoreme o Young-ovoj meri (engl. Young measure theorem). Navedimo osnovnu teoremu i njeno uopštenje.

Teorema 14 (Teorema o Young-ovoj meri)**.** *Ako je niz* $(u_k)_k \in L^\infty(\Omega)$*, onda postoji njegov podniz* $(u_n)_n$ *i Radonova mera* ν_x*, tako da za sve* $p \in C(\boldsymbol{R})$*:*

a) $p(u_n(x)) \rightharpoonup \int p(\lambda) d\nu_x(\lambda)$, slabo–$*$ u $L^\infty(\Omega)$.

b) $\nu_x = \delta(\lambda - u(x)) \iff u_n(x) \to u(x)$, jako u $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Teorema 15 (Panov)**.** *Neka je* $(\nu^k)_k$ *niz ograničenih meroznačnih funkcija. Tada postoji njegov podniz (isto indeksiran) i* $\{\nu_x\}_x \in MV(\Omega)$ *tako da*

$$\nu_x^k \rightharpoonup \nu_x, \text{ slabo u } MV(\Omega).$$

Dokaz Teoreme 15: Neka je supp$\nu_x^k \subset [-M, M]$. Za $p(x, \lambda) \in C_0(\Omega \times [-M, M])$ definišemo meru μ^k na $\Omega \times [-M, M]$ (ovde i inače, ako to nije drugačije naglašeno, C_0 označava neprekidne funkcije sa kompaktnim nosačem):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times[-M,M]} p(x,\lambda) d\mu^k(x,\lambda) &=: \langle \mu^k, p(x,\lambda)\rangle = \\ &= \int_\Omega \int_{-M}^{M} p(x,\lambda) d\nu^k(\lambda) dx. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Vidimo da je $\mu^k = \nu_x^k \otimes \text{meas}$ (ovde i inače, ako to nije drugačije naglašeno, "meas" označava Lebesque-ovu meru na Ω). Jasno je da je $(\mu_k)_k$ niz pozitivnih lokalno ograničenih mera, jer je

$$|\langle \mu^k, p(x,\lambda)\rangle| = |\int_\Omega \int_{-M}^{M} p(x,\lambda) d\nu^k(\lambda) dx| \leq \|p(x,\lambda)\|_\infty \cdot c(\operatorname{supp} p).$$

Kako svaki lokalno ograničeni niz mera ima slabo konvergentni podniz, zaključujemo da postoji podniz $(\mu^r)_r$ i mera $\mu \in \mathcal{M}(\Omega \times [-M,M])$ tako da

$$\mu^r \rightharpoonup \mu, \text{ slabo u } \mathcal{M}(\Omega \times [-M,M]), \tag{1.16}$$

što znači da za sve $p \in C_0(\Omega \times [-M,M])$, $\langle \mu^r, p\rangle \to \langle \mu, p\rangle$, kad $r \to \infty$, odnosno

$$\int_\Omega \int_{-M}^{M} p(x,\lambda) d\nu_x^r(\lambda) dx \to \int\limits_{\Omega\times[-M,M]} p(x,\lambda)\, d\mu(x,y).$$

Kako je projekcija svake mere μ^r na Ω Lebegova mera na Ω, onda je i projekcija granične mere μ na Ω takođe Lebegova mera na Ω. Dalje, primenjujemo Teoremu o dekompoziciji (engl. Decomposition Theorem) koja tvrdi da ako imamo meru μ na $A \times B$ i $pr_A\mu = \mu_A$ onda postoji mera na B μ_B, takva da je $\mu = \mu_a \times \mu_B$. Dakle, postoji mera ν_x na $[-M,M]$ takva da je $\mu = \nu_x \times \text{meas}$. Jasno je da je ν_x ograničena meroznačna funkcija.

Uzmimo sad test-funkciju oblika $p(x,\lambda) = \tilde{\phi}(x) g(\lambda)$, $\tilde{\phi} \in C_0(\Omega)$, $g \in C_0(\mathbf{R})$. Tada

$$\int_\Omega \int_{\mathbf{R}} g(\lambda) d\nu_x^r(\lambda) \cdot \tilde{\phi}(x) dx \to \int_\Omega \int_{\mathbf{R}} g(\lambda) d\nu_x(\lambda) \cdot \tilde{\phi}(x) dx, \quad r \to \infty. \tag{1.17}$$

Označimo sa $F(x) = \int_{\mathbf{R}} g(\lambda) d\nu_x(\lambda)$. Funkcija F je uniformno ograničena na Ω, jer je $|F(x)| \leq 2M\|g\|_\infty$. Prostor C_0 je gust u L^1 pa hoćemo da (1.17) važi i u L^1. Neka je $\tilde{\phi} \in L^1(\Omega)$ i ϕ_r niz u $C_0(\Omega)$ takav da je

$$\int |\phi_r - \tilde{\phi}| dx < \frac{1}{r}.$$

Tada imamo da za $\tilde{\phi} \in L^1(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_{\mathbf{R}} g(\lambda) d\nu_x^r(\lambda) \tilde{\phi}(x) dx - \int_\Omega \int_{\mathbf{R}} g(\lambda) d\nu_x(\lambda) \tilde{\phi}(x) dx \\
&\quad = \int_\Omega \left(\int_{\mathbf{R}} g(\lambda) d\nu_x^r(\lambda) - F(x) \right) (\tilde{\phi}(x) - \phi_r(x) + \phi_r(x)) dx \\
&\quad \le c \int_\Omega |\tilde{\phi}(x) - \phi_r(x)| dx + \int_\Omega \left(\int_{\mathbf{R}} g(\lambda) d\nu_x^r(\lambda) - F(x) \right) \phi_r(x) dx \\
&\quad \le \frac{c}{r} + \int_\Omega \left(\int_{\mathbf{R}} g(\lambda) d\nu_x^r(\lambda) - F(x) \right) \phi_r(x) dx \to 0, \quad r \to \infty,
\end{aligned}
$$

što sledi iz (1.17) i konstrukcije niza ϕ_r. Dakle, (1.17) važi i za sve $\tilde{\phi} \in L^1(\Omega)$ što znači da $\nu_x^r \rightharpoonup \nu_x$, slabo–$*$ u $L^\infty(\Omega)$. Time smo dokazali Teoremu 15. ❑

Uopštenje Tartarove teoreme

Već smo napomenuli da ćemo raditi sa H-merama indukovanim nizovima beskonačne dimenzije. Uzmimo sada notaciju iz Teoreme 1, odnosno posmatrajmo niz $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ u $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^{d+1}$, takav da $u_n \rightharpoonup 0$ u $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, i odgovarajuću H-meru iz Teoreme 1, $\mu = (\mu^{jk})_{j,k=1,\dots,r}$ na $\mathbf{R}^{d+1} \times \mathbf{S}^d$. Da bismo došli do uopštenja Teoreme 1, potrebne su nam sledeće leme.

Lema 16. *Neka je* $M_i = \limsup_{k\to\infty} \|u_i^k\|_{2,\Omega}$, $i = 1, \dots, p$. *Tada važi*

$$
Var\mu^{ij} \le 4 M_i M_j.
$$

Dokaz: Prvo izvodimo dokaz za $i = j$. Za $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ i $\psi = 1$ iz (1.6) dobijamo

$$
\langle \mu^{ii}, \varphi\bar{\varphi} \rangle = \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}(\varphi u_i^r)(\xi)|^2 d\xi \ge 0,
$$

odnosno da je μ^{ii} pozitivna mera (delujući na pozitivnu funkciju daje pozitivan broj). Stoga je

$$
\begin{aligned}
Var\mu^{ii} &= \mu^{ii}(\Omega \times S) = \langle \mu^{ii}, \chi_\Omega \chi_\Omega \chi_S \rangle =^{(1.6)} \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}(\chi_\Omega u_i^r)(\xi)|^2 d\xi \\
&=^{(Planch)} \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbf{R}^d} |(\chi_\Omega u_i^r)(x)|^2 dx = \lim_{r\to\infty} \|u_i^r\|^2_{2,\Omega} = M_i^2.
\end{aligned}
$$

Za $i \neq j$ i $A \subset \Omega \times S$ dobijamo

$$|\mu^{ij}(A)| = |\langle \mu^{ij}, \chi_{\text{proj}_\Omega A}\chi_{\text{proj}_\Omega A}\chi_{\text{proj}_S A}\rangle| =$$
$$\lim_{r\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(\chi_{\text{proj}_\Omega A}u_i^r)(\xi)\overline{\mathcal{F}(\chi_{\text{proj}_\Omega A}u_j^r)(\xi)}\chi_{\text{proj}_S A}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi$$
$$\leq \lim_{r\to\infty}\left(\int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}(\chi_{\text{proj}_\Omega A}u_i^r)(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}(\chi_{\text{proj}_\Omega A}u_j^r)(\xi)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \lim_{r\to\infty} \|u_i^r\|_{2,\Omega}\|u_j^r\|_{2,\Omega} = M_i M_j.$$

Tvrđenje sledi iz $|\mu^{ij}(A)| = \sqrt{(Re\mu^{ij})^2 + (Im\mu^{ij})^2}$, i Hahn-Jordanove dekompozicije realnih mera $Re\mu^{ij}$ i $Im\mu^{ij}$ na razliku nenegativnih mera. ❑

Lema 17. *Neka je $\{\nu_x\}_x \in MV(\Omega)$. Tada, za svaku Borelovu funkciju $p(\lambda)$,*

$$\text{preslikavanje } x \mapsto \int_{\mathbf{R}} p(\lambda)d\nu_x(\lambda) \text{ je merljivo.} \tag{1.18}$$

Dokaz: Pošto je $\{\nu_x\}_x \in MV(\Omega)$, to znači da je ν_x Borelova probabilistička mera i da za sve neprekidne funkcije p, važi (1.18). Sada hoćemo da pokažemo da (1.18) važi i za sve Borelove funkcije. Potsetimo se da je funkcija f Borelova ako je inverzna slika svake poluprave Borelov skup, tj. $f^{-1}((a,\infty)) \in \mathcal{B}$. Potreban i dovoljan uslov da je funkcija Borelova je da $f \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_i$, gde su $\mathcal{B}_i$ Borelove klase reda i čiju ćemo konstrukciju videti u ovom dokazu.

Definišimo prvo klasu funkcija F:

$$F = \left\{ p(\lambda) \,\middle|\, p(\lambda) \text{ je neprekidna na } \mathbf{R},\ |p(\lambda)| \leq 1, \right.$$
$$\left. \left[x \mapsto \int_{\mathbf{R}} p(\lambda)d\nu_x(\lambda)\right] \in L^1(\Omega) \right\}.$$

Vidimo odmah da je jedinična sfera prostora $C_0(\mathbf{R})$, $B_{C_0(\mathbf{R})}(0;1)$ sadržana u F. Posmatrajmo tačkasti limes proizvoljnog niza $\{p_k(\lambda)\} \subset B_{C_0(\mathbf{R})}(0;1)$,

$$p_k(\lambda) \to p(\lambda) \text{ tačkasto.}$$

Tada za fiksirano $x \in \Omega$, na osnovu Lebesque-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji, imamo da

$$\int_{\mathbf{R}} p_k(\lambda)d\nu_x(\lambda) \to \int_{\mathbf{R}} p(\lambda)d\nu_x(\lambda), \tag{1.19}$$

jer je $p_k(\lambda) \leq 1 \equiv g(\lambda)$ i $\int 1 d\nu_x(\lambda) = 1$, tj. funkcija $g(\lambda) = 1$ je merljiva u meri $\nu_x(\lambda)$.

Odatle zaključujemo da je preslikavanje $[x \mapsto \int_{\mathbf{R}} p(\lambda) d\nu_x(\lambda)] \in L^1$ kao tačkasti limes merljivih funkcija, odnosno da (1.18) važi i za sve limese oblika (1.19).

Borelova klasa prvog reda, $\mathcal{B}_1$, definiše se kao unija funkcija iz $B_{C_0(\mathbf{R})}(0;1)$ i svih tačkastih limesa oblika (1.19). Dakle, za sve funkcije iz $\mathcal{B}_1$ važi (1.18). Ponavljajući istu proceduru dobijamo da (1.18) važi i za tačkaste limese funkcija iz $\mathcal{B}_1$, odnosno za sve funkcije iz $\mathcal{B}_2$, jer se $\mathcal{B}_2$ definiše kao unija svih funkcija iz $\mathcal{B}_1$ i njihovih tačkastih limesa. Rekurentno zaključijemo da za sve $i \in \mathbb{N}$, važi da za svaka funkcija iz $\mathcal{B}_i$ važi (1.18), odnosno da za svako $p \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i$ važi (1.18). ❑

Lema 18. *Neka je $\{\nu_x\}_x \in MV(\Omega)$. Tada je funkcija*

$$u(x, \lambda) := \nu_x((\lambda, \infty))$$

Lebesque-merljiva na $\Omega \times \boldsymbol{R}$.

Dokaz: Znamo da je preslikavanje

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}} H(\lambda - p) d\nu_x(\lambda) = \int_p^{\infty} d\nu_x(\lambda)$$

merljivo na Ω, a treba da pokažemo da je

$$(x, p) \mapsto \int_p^{\infty} d\nu_x(\lambda)$$

merljivo na $\Omega \times \mathbf{R}$. Posmatramo niz

$$u_k(x, \lambda) := u\left(x, \frac{i}{k}\right) = \int H\left(p - \frac{i}{k}\right) d\nu_x(p), \quad \frac{i-1}{k} \leq \lambda \leq \frac{i}{k}.$$

Po prethodnoj lemi, preslikavanje $x \mapsto u_k(x, \lambda)$ je merljivo. Jasno da je preslikavanje $[\lambda \mapsto \chi\left(\frac{i-1}{k} \leq \lambda \leq \frac{i}{k}\right)] \in L^1(\mathbf{R})$. Stoga je prelikavanje

$$\left[(x, \lambda) \mapsto \chi\left(\frac{i-1}{k} \leq \lambda \leq \frac{i}{k}\right) \cdot \int H\left(p - \frac{i}{k}\right) d\nu_x(p)\right] \in L^1(\Omega \times \mathbf{R}).$$

Odatle je i

$$u_k(x,\lambda) = \sum_i \chi\left(\frac{i-1}{k} \le \lambda \le \frac{i}{k}\right) \cdot \int H\left(p - \frac{i}{k}\right) d\nu_x(p) \in L^1(\Omega \times \mathbf{R}).$$

Kao tačkasti limes merljivih funkcija i u je u $L^1(\Omega \times \mathbf{R})$.

Ovde smo sa H obeležavali Heavyside-ovu funkciju, a sa χ karakterističnu funkciju. ❑

Lema 19. *Neka je $\nu^k \in MV(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, ograničen niz meroznačnih funkcija takav da*

$$\nu_x^k \rightharpoonup \nu_x, \quad k \to \infty. \tag{1.20}$$

Neka je dalje

$$u^k(x,\lambda) = \nu_x^k((\lambda,\infty)) \quad \text{i} \quad u^0(x,\lambda) = \nu_x((\lambda,\infty)).$$

Označimo sa E sledeći skup,

$$E = \{\lambda_0 \in \boldsymbol{R} \,|\, u^0(x,\lambda) \to u^0(x,\lambda_0), \text{ kad } \lambda \to \lambda_0 \text{ u } L^1_{\text{loc}}(\Omega)\}.$$

Tada važi:

a) Skup $E^C = \boldsymbol{R} \backslash E$ je najviše prebrojiv.

b) Za sve $\lambda \in E$, $u^k(x,\lambda) \rightharpoonup u^0(x,\lambda)$, kad $k \to \infty$, slabo–$*$ u $L^\infty(\Omega)$.

Dokaz: a) Neka je $\phi(x) \in C(\Omega) \cup L^1(\Omega)$, $\phi \ge 0$ i neka je A skup tačaka prekida funkcije

$$p(\lambda) = \int_\Omega u^0(x,\lambda)\phi(x)dx.$$

Jasno je da je $p(\lambda)$ nerastuća funkcija, stoga ima najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida, odakle zaključujemo da je A^C neprebrojiv skup. Pokazaćemo da $A^C \subset E$. Uzmimo proizvoljno $\lambda_0 \in A^C$. To znači da je

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_\Omega \left(u^0(x,\lambda) - u^0(x,\lambda_0)\right) \phi(x)dx = 0.$$

Za ϕ biramo χ_K, za proizvoljan kompaktan potskup $K \subset\subset \Omega$. Naravno ova funkcija nije neprekidna, ali je možemo napisati kao limes neprekidnih χ_K^ε, što će nam rešiti problem i dovesti nas do zaključka da je

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \int_K u^0(x,\lambda) - u^0(x,\lambda_0)\, dx = 0,$$

tj. $L^1_{\text{loc}} - \lim_{\lambda\to\lambda_0} u^0(x,\lambda) = u^0(x,\lambda_0)$. Dakle $\lambda_0 \in E$, tj. $A^C \subset E$.

b) Sada dokazujemo da

$$u^k(x,\lambda) = \int_\Omega H(p-\lambda)d\nu_x^k(p) \rightharpoonup \int_\Omega H(p-\lambda)d\nu_x(p) = u^0(x,\lambda)$$

Definišimo familije funkcija

$$\theta_h^-(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \lambda_0 + h \\ 0, & \lambda \leq \lambda_0 \end{cases}, \quad \theta_h^+(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \geq \lambda_0 \\ 0, & \lambda \leq \lambda_0 - h \end{cases}.$$

Jasno je da je $H(\lambda-\lambda_0-h) \leq \theta_h^-(\lambda) \leq H(\lambda-\lambda_0) \leq \theta_h^+(\lambda) \leq H(\lambda-\lambda_0+h)$, što kad prointegralimo po ν_x^k daje sledeće

$$u_k(x,\lambda_0+h) \leq \int \theta_h^-(\lambda)d\nu_x^k(\lambda) \leq u_k(x,\lambda_0) \leq \int \theta_h^+(\lambda)d\nu_x^k(\lambda) \leq u_k(\lambda-\lambda_0).$$

Ovde sada posmatramo slabi–$*$ limes kad $k\to\infty$, što nam daje

$$\int \theta_h^-(\lambda)d\nu_x(\lambda) \leq w^* - \lim_{k\to\infty} u_k(x,\lambda_0) \leq \int \theta_h^+(\lambda)d\nu_x(\lambda).$$

Kada pustimo da $h \to 0$, vidimo i da leva i desna strana prethodne nejednakosti teži ka $u_0(x,\lambda_0)$, dok uklještena veličina ne zavisi od h. Stoga je

$$w^* - \lim_{k\to\infty} u_k(x,\lambda_0) = u_0(x\lambda_0).$$

❑

Definišemo sada

$$U_\lambda^k(x) := u_k(x,\lambda_0) - u_0(x\lambda_0). \tag{1.21}$$

Iz prethodne leme sledi da za sve $\lambda \in E$, $U_\lambda^k(x) \rightharpoonup 0$, kad $k\to\infty$, slabo–$*$ u $L^\infty(\Omega)$.

Sada možemo formulisati i dokazati uopštenje Teoreme 1.

Teorema 20 (Panov, uopštenje Tartar-ove teoreme)**.**

1. Postoji familija lokalno konačnih Borelovih mera $\{\mu^{pq}\}_{p,q\in E}$ *na* $\Omega\times S$ *i postoji podniz*

$$U^r(x) := \{U_p^r(x)\}_{p\in E} = \{u^k(x,p) - u_0(x,p)\}_{p\in E} = \{\nu_x^k(p,\infty) - \nu_x(p,\infty)\}_{p\in E}$$

takav da za sve $\phi_1, \phi_2 \in C_0(\Omega)$ *i sve* $\psi \in C(S)$*, važi*

$$\begin{aligned}&\langle \mu^{pq}, \phi_1(x)\bar{\phi}_2(x)\psi(\xi)\rangle = \\ &= \lim_{r\to\infty} \int_{\boldsymbol{R}^d} \mathcal{F}(\phi_1 U_p^r)(\xi)\overline{\mathcal{F}(\phi_2 U_q^r)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi.\end{aligned} \tag{1.22}$$

2. Preslikavanje $(p,q) \mapsto \mu^{pq}$ *je neprekidno kao preslikavanje iz* $E \times E$ *u* $Z(\Omega \times S)$*- prostor lokalno konačnih Borelovih mera sa topologijom generisanom polunormama* $\|\mu\|_k = Var(\mu)(K)$*,* $K \subset\subset \Omega \times S$*.*

Dokaz: Dokaz ćemo izvesti za otvoren, prekompaktan skup $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$. Prelaz sa $\widetilde{\Omega}$ na Ω ide standardno. Neka je D prebrojiv, gust podskup skupa E. Na osnovu Tartar-ove teoreme o H-merama važi da za svaki konačan skup $B \subset D$, postoji podniz $U^r(x)$ i postoji familija mera $\{\mu^{pq}\}_{p,q\in B}$ na $\widetilde{\Omega}\times S$ takvi da važi (1.22). Postupkom dijagonalizacije sa konačnih skupova B možemo tvrđenje (1.22) proširiti i na prebrojiv skup D. Stoga zaključujemo da (1.22) važi za sve $p, q \in D$.

Uzmimo sad proizvoljne $p, p' \in E$, i ocenimo razliku

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |U_p^r(x) - U_{p'}^r(x)|dx \leq \int_{\widetilde{\Omega}} |u^r(x,p) - u^r(x,p')|dx + \int_{\widetilde{\Omega}} |u_0(x,p) - u_0(x,p')|dx.$$

Kako je za fiksirano p, $u^r(x,p) - u^r(x,p') = \nu_x^r(p,\infty) - \nu_x^r(p',\infty)$ istog znaka, to je

$$\int_{\widetilde{\Omega}} |u^r(x,p) - u^r(x,p')|dx = \left|\int_{\widetilde{\Omega}} u^r(x,p) - u^r(x,p')dx\right|,$$

pa možemo dalje ocenjivati

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{\Omega}} |U_p^r(x) - U_{p'}^r(x)|dx \leq &\left|\int_{\widetilde{\Omega}} (u^r(x,p) - u_0(x,p))dx + \right.\\ &+ \left.\int_{\widetilde{\Omega}} (u^r(x,p') - u_0(x,p')dx + \int_{\widetilde{\Omega}} (u_0(x,p) - u_0(x,p')dx\right| + \\ &+ \int_{\widetilde{\Omega}} |u_0(x,p) - u_0(x,p')|dx \leq \left|\int_{\widetilde{\Omega}} (u^r(x,p) - u_0(x,p))dx\right| + \\ &+ \left|\int_{\widetilde{\Omega}} (u^r(x,p') - u_0(x,p')dx\right| + 2\int_{\widetilde{\Omega}} |u_0(x,p) - u_0(x,p')|dx\end{aligned}$$

Kako su $p, p' \in E$, iz Leme 19 imamo da

$$u^r(x,p) \to u_0(x,p), \quad u^r(x,p') \to u_0(x,p'), \ \text{slabo}-* \text{ u } L^\infty(\Omega).$$

Stoga je

$$\left|\int_{\widetilde{\Omega}}(u^r(x,p)-u_0(x,p))dx\right| \leq \|u^r(x,p)-u_0(x,p)\|_\infty \cdot \mathrm{meas}(\widetilde{\Omega}),$$

$$\left|\int_{\widetilde{\Omega}}(u^r(x,p')-u_0(x,p'))dx\right| \leq \|u^r(x,p')-u_0(x,p')\|_\infty \cdot \mathrm{meas}(\widetilde{\Omega}),$$

odakle dobijamo da je

$$\limsup_{r\to\infty}\int_{\widetilde{\Omega}}|U_p^r(x)-U_{p'}^r(x)|dx \leq 2\int_{\widetilde{\Omega}}|u_0(x,p)-u_0(x,p')|dx.$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to\infty}\|U_p^r(x)-U_{p'}^r(x)\|_{L^2(\widetilde{\Omega})} = \limsup_{r\to\infty}\left(\int_{\widetilde{\Omega}}|U_p^r(x)-U_{p'}^r(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \limsup_{r\to\infty}\left(\|U_p^r(x)-U_{p'}^r(x)\|_{L^\infty(\widetilde{\Omega})}\cdot\int_{\widetilde{\Omega}}|U_p^r(x)-U_{p'}^r(x)|dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(2c\int_{\widetilde{\Omega}}|u_0(x,p)-u_0(x,p')|dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Sada puštamo da $p'\to p$. Kako je $p\in E$ dobijamo da je

$$\lim_{p'\to p}\limsup_{r\to\infty}\|U_p^r(x)-U_{p'}^r(x)\|_{L^2(\widetilde{\Omega})} = 0. \tag{1.23}$$

Uzmimo sada proizvoljne test-funkcije $\phi_1,\phi_2\in C_0(\widetilde{\Omega})$ i $\psi\in C(S)$, pa definišimo

$$F_r(p,q) := \int_{\mathbf{R}^n}\mathcal{F}(\phi_1U_p^r)(\xi)\overline{\mathcal{F}(\phi_2U_q^r)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi.$$

Za $p,q,p',q'\in E$ imamo

$$\begin{aligned}
\Big|F_r(p',q')-F_r(p,q)\Big| &= \Big|\int_{\mathbf{R}^n}\mathcal{F}(\phi_1(U_{p'}^r-U_p^r+U_p^r))(\xi)\overline{\mathcal{F}(\phi_2U_{q'}^r)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi\\
&- \int_{\mathbf{R}^n}\mathcal{F}(\phi_1U_p^r)(\xi)\overline{\mathcal{F}(\phi_2(U_q^r-U_{q'}^r+U_{q'}^r))(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi\Big| =\\
&= \Big|\int_{\mathbf{R}^n}\mathcal{F}(\phi_1(U_{p'}^r-U_p^r))(\xi)\overline{\mathcal{F}(\phi_2U_{q'}^r)(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi\\
&- \int_{\mathbf{R}^n}\mathcal{F}(\phi_1U_p^r)(\xi)\overline{\mathcal{F}(\phi_2(U_q^r-U_{q'}^r))(\xi)}\psi\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)d\xi\Big|.
\end{aligned}$$

Sada primenimo Caushy-Schwartz-ovu nejednakost i Plancharel-ovu teoremu na desnu stranu prethodne jednakosti i dobijemo

$$
\begin{aligned}
&\Big|F_r(p',q')-F_r(p,q)\Big| \le \|\psi\|_\infty \cdot \\
&\cdot\Big(\|\phi_1(U^r_{p'}-U^r_p)\|_{L^2(\tilde\Omega)}\cdot\|\phi_2 U^r_{q'}\|_{L^2(\tilde\Omega)}+\|\phi_1 U^r_p\|_{L^2(\tilde\Omega)}\cdot\|\phi_2(U^r_q-U^r_{q'})\|_{L^2(\tilde\Omega)}\Big)\\
&\le \|\psi\|_\infty\|\phi_1\|_\infty\|\phi_2\|_\infty\Big(\|U^r_{p'}-U^r_p\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|U^r_{q'}\|_{L^2(\tilde\Omega)}+\|U^r_p\|_{L^2(\tilde\Omega)}\|U^r_q-U^r_{q'}\|_{L^2(\tilde\Omega)}\Big)\\
&\le c\Big(\|U^r_{p'}-U^r_p\|_{L^2(\tilde\Omega)}+\|U^r_q-U^r_{q'}\|_{L^2(\tilde\Omega)}\Big)\longrightarrow^{(1.23)} 0,\ r\to\infty,\ p\to p',\ q\to q',
\end{aligned}
$$

jer je $\|U^r_q\|_{L^2(\tilde\Omega)} \le \|U^r_{q'}\|_\infty \cdot \sqrt{\mathrm{meas}(\tilde\Omega)} = c$. Dakle, dobili smo da je

$$\lim_{(p',q')\to(p,q)}\limsup_{r\to\infty}\Big|F_r(p',q')-F_r(p,q)\Big| = 0,\ \text{ za sve } p,q\in E. \tag{1.24}$$

Znamo da za $p',q'\in D$ važi $F_r(p',q')\to\langle\mu^{p'q'},\ \phi_1\phi_2\psi\rangle$. Zbog toga, proizvoljne $p,q\in E$ aproksimiramo nizom $p_n,q_n\in D$, $p_n\to p$, $q_n\to g$. Takvi nizovi postoje jer je D gust u E. Tada je

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to 0}\limsup_{r\to\infty}\Big|F_r(p_n,q_n)-F_r(p,q)\Big| = \\
&= \lim_{n\to 0}\Big|\limsup_{r\to\infty}F_r(p_n,q_n)-\limsup_{r\to\infty}F_r(p,q)\Big| = \\
&= \Big|\lim_{n\to 0}\langle\mu^{p_nq_n},\ \phi_1\phi_2\psi\rangle-\limsup_{r\to\infty}F_r(p,q)\Big|.
\end{aligned} \tag{1.25}
$$

Tako smo dobili da je

$$\lim_{n\to 0}\langle\mu^{p_nq_n},\ \phi_1\phi_2\psi\rangle = \limsup_{r\to\infty}F_r(p,q) =: F(p,q).$$

Pokažimo sad da je tako definisana funkcija F neprekidna na $E\times E$. Neka su $p,q,p',q'\in E$. Kako je D gust u E, postoje $p_n,q_n,p'_n,q'_n\in D$, tako da je $|(p,q)-(p_n,q_n)|<\varepsilon_n$, $|(p',q')-(p'_n,q'_n)|<\varepsilon_n$, za proizvoljan nula niz $(\varepsilon_n)_n$ realnih pozitivnih brojeva. Tada je

$$
\begin{aligned}
&|F(p,q)-F(p',q')| \le |F(p,q)-F(p_n,q_n)|+|F(p_n,q_n)-F(p'_n,q'_n)|+\\
&+|F(p'_n,q'_n)-F(p',q')| \le 2\varepsilon_n+|F(p_n,q_n)-F(p'_n,q'_n)|\to 0,
\end{aligned}
$$

jer je F neprekidna na D zbog (1.24).

Iz Leme 16 imamo da je za $p, q \in D$,

$$Var\mu^{pq} \leq 4 \limsup_{r\to\infty} \|U_p^r\|_{L^2(\widetilde{\Omega})} \limsup_{r\to\infty} \|U_q^r\|_{L^2(\widetilde{\Omega})} \leq c.$$

Kako je prostor mera slabo prekompaktan zaključujemo da za svaki niz $(\mu^{p_n q_n})$ postoji konačna mera (μ^{pq}) na $\widetilde{\Omega} \times S$ i postoji podniz $\mu^{p_k q_k} \rightharpoonup \mu^{pq}$, slabo–$*$ u $Z(\widetilde{\Omega} \times S) = (C_0(\widetilde{\Omega} \times S))^*$, tj. za sve ϕ_1, ϕ_2, ψ

$$\langle \mu^{p_k q_k}\,,\, \phi_1 \bar{\phi}_2 \psi \rangle \to \langle \mu^{pq}\,,\, \phi_1 \bar{\phi}_2 \psi \rangle.$$

Kako je F neprekidna to je

$$F(p,q) = \lim_{k\to\infty} F(p^k, q^k) = \lim_{k\to\infty} \langle \mu^{p_k q_k}\,,\, \phi_1 \bar{\phi}_2 \psi \rangle = \langle \mu^{pq}\,,\, \phi_1 \bar{\phi}_2 \psi \rangle,$$

za sve $p, q \in E$, i svaki podniz. ❑

Lokalizacija H-mere

Neka je $\mu = \{\mu^{i,j}\}_{i,j}$ H-mera indukovana nizom $(U_p^k)_{p\in E}$. Hoćemo da nađemo njen nosač. Prvo što ćemo pokazati je da je

$$\mathrm{supp}\mu^{pp} = \Omega \times S.$$

U cilju dobijanja pomenutog rezultata dokažimo sledeću lemu.

Lema 21. *Neka je ν_x meroznačno rešenje jednačine* (1.13) *i konstanta $M > 0$, takva da za skoro sve $x \in \Omega$,* $\mathrm{supp}\nu_x \subset [-M, M]$. *Neka je, dalje, za ϕ i ψ iz* (1.13),

$$q(x) = \int_p^\infty (\phi(x,\lambda) - \phi(x,p)) d\nu_x(\lambda) = \int_{\boldsymbol{R}} H(\lambda - p)(\phi(x,\lambda) - \phi(x,p)) d\nu_x(\lambda)$$

$$c(x) = \int_p^\infty (\mathrm{div}_x\, \phi(x,p) + \psi(x,\lambda)) d\nu_x(\lambda) =$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}} H(\lambda - p)(\mathrm{div}_x\, \phi(x,p) + \psi(x,\lambda)) d\nu_x(\lambda).$$

Tada postoji nenegativna lokalno konačna mera μ na Ω takva da je

$$\mathrm{div}\, q(x) + c(x) = -\mu, \ \text{ u } \mathcal{D}',$$

pri čemu je još

$$Var\phi\mu = \int_\Omega |\phi(x)d\nu(x) \leq c_1, \quad \phi\mu \in H^{-1}_\infty, \quad \|\phi\mu\|_{H^{-1}_\infty} \leq c_2,$$

za sve $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *i neke konstante* c_1, c_2 *koje zavise od* M, ϕ.[4]

Dokaz: Neka je $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Definišemo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) :=& \int_\Omega \left[\langle q(x)\,,\, \nabla f(x)\rangle - c(x)f(x)\right] dx \\
\mathcal{A}(f) :=& \int_\Omega \Big[\Big\langle \int_R (\phi(x,\lambda) - \phi(x,p))\mathrm{sgn}(\lambda - p)d\nu_x(\lambda)\,,\, \nabla f(x)\Big\rangle - \\
& \int_{\mathbf{R}} \mathrm{sgn}(\lambda - p)\Big(\,\mathrm{div}_x\, \phi(x,p) + \psi(x,\lambda)\Big)d\nu_x(\lambda))f(x)\Big] dx \\
\mathcal{B}(f) :=& \int_\Omega \Big[\Big\langle \int_R (\phi(x,\lambda) - \phi(x,p))d\nu_x(\lambda)\,,\, \nabla f(x)\Big\rangle - \\
& \int_{\mathbf{R}} \Big(\,\mathrm{div}_x\, \phi(x,p) + \psi(x,\lambda)\Big)d\nu_x(\lambda))f(x)\Big] dx.
\end{aligned}$$

Jednostavnim računom dobijamo da je $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{2}[\mathcal{A}(f) + \mathcal{B}(f)]$. $\mathcal{B}(f) = 0$ jer je $\nu_x(\lambda)$ meroznačno rešenje jednačine (1.13). Naime,

$$\mathcal{B}(f) = \int_\Omega \Big[\Big\langle \int_R \phi(x,\lambda)d\nu_x(\lambda)\,,\, \nabla f(x)\Big\rangle - \Big(\int_R \psi(x,\lambda)d\nu_x(\lambda)\Big)f(x) \tag{1.26}$$

$$- \Big\langle \phi(x,p)\int_R d\nu_x(\lambda)\,,\, \nabla f\Big\rangle - \Big(\,\mathrm{div}_x\, \phi(x,p)\int_{\mathbf{R}} d\nu_x(\lambda)\Big)f(x)\Big] dx \tag{1.27}$$

Sada je (1.26) nula zbog toga što je $\nu_x(\lambda)$ meroznačno rešenje jednačine (1.13), a sabirci u (1.27) se potiru. Kako je $\mathcal{A}(f)$ ustvari -1 puta leva strana u (1.14) u Definiciji 11, zaključujemo da je $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(f)\mathcal{A}(f) \geq 0$.

Na osnovu Schwartz-ove leme o nenegativnim distribucijama zaključujemo da postoji mera $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ takva da je $\mathcal{A}(f) = \langle \mu\,,\, f\rangle$. Dalje, mera μ je

[4] Norma funkcije $f \in H_p^s(\Omega)$, za $\Omega \subset \mathbf{R}^d$, definisana je kao

$$\|f\|_{H_p^s(\Omega)} = \|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\widehat{f}(\xi)\|_{L^p(\Omega)}.$$

lokalno konačna i nenegativna, jer je za proizvoljan kompaktan potskup $K \subset\subset \Omega$, $\mu(K) = \langle \mu\,,\, \chi_K \rangle \leq \langle \mu\,,\, \chi_K^\varepsilon \rangle =: \mathcal{A}(\chi_K^\varepsilon)$, gde je χ_K^ε neprekidna regularizacija karakteristične funkcije skupa K, χ_K. Dakle,

$$\mathcal{L}(f) = \langle -\operatorname{div} q - c\,,\, f \rangle = \frac{1}{2}\mathcal{A}(f) = \frac{1}{2}\langle \mu\,,\, f \rangle,$$

za sve $f \in C_0^\infty$, odnosno u $\mathcal{D}'$ važi $-\operatorname{div} q - c = \frac{1}{2}\mu$.

Ostaje još da dokažemo i drugi deo tvrđenja leme. Za "novo" μ uzećemo dosadašnje $\frac{1}{2}\mu$. Neka je $\phi \in C_0^\infty$. Kako je

$$\operatorname{div} \phi q = \phi \operatorname{div} q + \langle q\,,\, \nabla\phi \rangle,$$

to je

$$-\phi\mu = \phi(\operatorname{div} q + c) = \operatorname{div} \phi q - \langle q\,,\, \nabla\phi \rangle + c\phi.$$

Znamo da su $\|\phi\|_\infty \leq c$, $\|\nabla\phi\|_\infty \leq c$, $\|q(x)\|_\infty \leq c$, pa je $\|\nabla\phi\|_\infty \leq c$, odakle je $\operatorname{div} \phi q \in H_\infty^{-1}(\Omega)$. Takođe je i $\langle \nabla\phi\,,\, q \rangle \in L^\infty(\Omega) \hookrightarrow H_\infty^{-1}(\Omega)$, što nam daje i ostatak tvrđenja leme. ❑

Za dokaz principa lokalizacije trebaće nam i sledeće dve poznate teoreme.

Teorema 22 (Muratova lema o interpolaciji)**.** *Ograničen skup u $H_p^{-1}(\Omega)$ je prekompaktan u $H_q^{-1}(\Omega)$, za sve $q < p$.*

Teorema 23 (Muratova lema)**.** *Neka je niz $\{q_\varepsilon\}_\varepsilon$ ograničen u $H_p^{-1}(\Omega)$ za neko $p > 2$ i neka je $q_\varepsilon = a_\varepsilon + b_\varepsilon$, pri čemu je $\{a_\varepsilon\}$ ograničen niz mera u $\mathcal{M}(\Omega)$ i $\{b_\varepsilon\}_\varepsilon \in H_c^{-1}(\Omega)$ je prekompaktan niz u $H^{-1}(\Omega)$, onda je $q_\varepsilon \in H_c^{-1}(\Omega)$.*

Definišimo za ϕ iz (1.13) i za $x \in \Omega$, $p \in \mathbf{R}$, $\xi \in S$,

$$A(x,\xi,p) := \left\langle \xi, \frac{\partial\phi(x,p)}{\partial p} \right\rangle = \sum_{i=1}^{d} \xi_i \frac{\partial\phi_i(x,p)}{\partial p}. \tag{1.28}$$

Neka je $\nu_x^k(\lambda)$ niz uopštenih meroznačnih rešenja jednačine (1.13), takav da $\nu_x^k \rightharpoonup \nu_x^0$, i neka je $\{\mu^{pq}\}_{p,q\in E}$ H-mera koja odgovara nizu $U_p^k = \nu_x(p,\infty) - \nu_x^0(p,\infty)$.

Teorema 24 (Princip lokalizacije)**.** *Za sve $p, q \in E$ važi*

$$A(x,\xi,p)\mu^{pq} = 0.$$

Dokaz: Neka je $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ i supp$\nu_x^\lambda \subset [-M, M]$. Na osnovu Leme 21 i Murat-ove leme sledi da za sve $p \in \mathbf{R}, k \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_p^k :=& \operatorname{div}_x \Big(\varphi(x) \int_p^\infty (\phi(x,\lambda) - \phi(x,p)) d\nu_x^k(\lambda)\Big) = \operatorname{div}_x q^k \varphi + \langle q^k, \nabla\varphi\rangle \\
=& - \varphi\mu_k - \varphi \int_p^\infty [\operatorname{div}_x \phi(x,p) + \psi(x,\lambda)] d\nu_x^k(\lambda) \\
&+ \langle \nabla\varphi\,, \int_p^\infty (\phi(x,\lambda) - \phi(x,p)) d\nu_x^k(\lambda)\rangle,
\end{aligned}
\tag{1.29}
$$

prekompaktan u $H_2^{-1}(\Omega)$. Preciznije, znamo da je $\varphi\mu_k \in \mathcal{M}(\Omega)$. Dalje (1.29) je u $L^2 \cap L^\infty(\Omega)$, pa i u svakom $L^p(\Omega)$, stoga je prekompaktan u $H_2^{-1}(\Omega)$. Na isti način zaključujemo i da je

$$
c_k(x) = \int_p^\infty [\operatorname{div}_x \phi(x,p) + \psi(x,\lambda)] d\nu_x^k(\lambda) \in H_{2,c}^{-1}(\Omega).
$$

Onda na osnovu Murat-ove leme sledi da je $\mathcal{L}_p^k \in H_{2,c}^{-1}(\Omega)$.

Dalje, neka je $p \in [-M, M]$. Važi

$$
\begin{aligned}
q_k(x) &= \int_p^\infty (\phi(x,\lambda) - \phi(x,p)) d\nu_x^k(\lambda) \\
&= - \int_p^\infty (\phi(x,\lambda) - \phi(x,p)) \frac{d}{d\lambda} u^k(x,\lambda) d\lambda,
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

jer je $\frac{d}{d\lambda} u^k = \frac{d}{d\lambda} \int_\lambda^\infty d\nu_x^k(p) = -d\nu_x^k(\lambda)$. Dalje parcijalnom integracijom u (1.30), dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
q_k(x) &= \int_p^\infty u^k(x,\lambda) \frac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda} d\lambda = \int_p^\infty \frac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda} d\nu_x^k(\lambda) \\
&= \int_p^M \frac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda} u_k(x,\lambda) d\lambda,
\end{aligned}
$$

jer je supp$\nu_x^k \subset [-M, M]$. Sada to vratimo u $\mathcal{L}_p^k$ i dobijemo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_p^k(x) :=& \operatorname{div}_x \Big(\varphi(x) q^k(x)\Big) = \operatorname{div}_x \Big(\varphi(x) \int_p^M \frac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda} u_k(x,\lambda) d\lambda\Big) \\
=& \int_p^M \operatorname{div}_x \Big(\varphi(x) \frac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda} u_k(x,\lambda)\Big) d\lambda.
\end{aligned}
$$

Neka je

$$\begin{aligned} V_p^k(x) &:= U_p^k(x)\varphi(x) \\ \mathcal{B}_p^k(x) &:= \int_p^M \mathrm{div}_x\Big(\frac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda}V_\lambda^k(x)\Big)d\lambda = \mathcal{L}_p^k(x) - \mathcal{L}_p^0(x) \in H_{2,c}^{-1} \end{aligned}$$

Kako $U_p^k \rightharpoonup 0$ slabo–$*$ u L^∞, onda i $\mathcal{B}_p^k \to 0$ u H_2^{-1}, jer $\|B_p^k\|_{H_2^{-1}} \to \widetilde{c}$, do na podniz (jer je prekompaktan), i

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_p^k\|_{H_2^{-1}} &= \|(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}(\mathcal{B}_p^k)\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \\ &= \|(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\mathcal{B}_p^k(x)dx\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \\ &= \|(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\int_p^M \mathrm{div}_x\Big(\frac{\partial\phi(x,\lambda)}{\partial\lambda}V_\lambda^k(x)\Big)d\lambda dx\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \\ &= \|(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^d \xi_j\int_{\mathbf{R}^d}\int_p^M \mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\,\frac{\partial\phi_j(x,\lambda)}{\partial\lambda}V_\lambda^k(x)d\lambda dx\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \\ &= \|\sum_{j=1}^d(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\xi_j\int_p^M\int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\,\frac{\partial\phi_j(x,\lambda)}{\partial\lambda}V_\lambda^k(x)d\lambda dx\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}. \end{aligned}$$

Kako je $\mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\,\frac{\partial\phi_j(x,\lambda)}{\partial\lambda} \in L^1$ i $V_\lambda^k(x) \to 0$ kad $k\to\infty$, slabo–$*$ u L^∞, to i, za fiksirano ξ,

$$\int_p^M\int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{e}^{-i2\pi x\xi}\frac{\partial\phi_j(x,\lambda)}{\partial\lambda}V_\lambda^k(x)d\lambda dx \to 0,$$

odnosno $\widetilde{c}=0$. Dakle, po definiciji konvergencije u H_2^{-1} imamo da je

$$\frac{1}{|\xi|}\mathcal{F}(\mathcal{B}_p^k)(\xi) \to 0, \text{ u } L^2(\Omega). \tag{1.31}$$

Dalje je i

$$\int_{\mathbf{R}^d}\frac{1}{|\xi|}\mathcal{F}(\mathcal{B}_p^k)(\xi)\overline{\mathcal{F}(V_q^k)(\xi)}\psi(\frac{\xi}{|\xi|})d\xi \to 0,\ k\to\infty,$$

jer je

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d}\frac{1}{|\xi|}\mathcal{F}(\mathcal{B}_p^k)(\xi)\overline{\mathcal{F}(V_q^k)(\xi)}\psi(\frac{\xi}{|\xi|})d\xi \le \\ &\qquad \le \|\frac{1}{|\xi|}\mathcal{F}(\mathcal{B}_p^k)(\xi)\|_{L^2}\|\overline{\mathcal{F}(V_q^k)(\xi)}\|_{L^2}\|\psi(\frac{\xi}{|\xi|})\|_{L^\infty} \to 0,\ k\to\infty, \end{aligned}$$

odakle je i

$$\int_p^M \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{|\xi|} \sum \xi_j \mathcal{F}(V_\lambda^k \frac{\partial \phi_j(\cdot,\lambda)}{\partial \lambda})(\xi) \cdot \\ \cdot \overline{\mathcal{F}(V_q^k)(\xi)} \psi(\frac{\xi}{|\xi|}) d\xi d\lambda \to 0, \ k \to \infty. \tag{1.32}$$

Sada u (1.22) stavimo $\psi = \frac{\xi_j}{|\xi|}\psi(\frac{\xi}{|\xi|})$, $\phi_1 = \varphi(x)\frac{\partial \phi_j}{\partial \lambda}$, $\phi_2 = \varphi$, i dobijemo da

$$\int_{\mathbf{R}^d} \mathcal{F}(V_\lambda^k \frac{\partial \phi_j}{\partial \lambda})(\xi) \cdot \overline{\mathcal{F}(V_q^k)(\xi)} \frac{\xi_j}{|\xi|} \psi(\frac{\xi}{|\xi|}) d\xi \to \langle \mu^{\lambda q}, \varphi^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial \lambda} \frac{\xi_j}{|\xi|} \psi(\frac{\xi}{|\xi|}) \rangle. \tag{1.33}$$

Sumiramo (1.33) po $j = 1, ..., d$, a zatim integralimo po $\lambda \in [p, M]$. Tako dobijena desna strana, zbog (1.32), teži nuli kad $k \to \infty$, pa je leva strana (granica) jednaka nuli, tj.

$$\int_p^M \langle \mu^{\lambda q}, \frac{1}{|\xi|} \varphi^2 \psi \sum_{j=1}^d \xi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial \lambda} \rangle d\lambda = 0.$$

Sada diferenciramo po p i dobijemo

$$\langle \mu^{\lambda q}, \varphi^2 \psi A(x, p, \xi) \rangle = 0,$$

tj.

$$\langle A(x, p, \xi) \mu^{\lambda q}, \varphi^2 \psi \rangle = 0, \ \text{odnosno} \ A(x, p, \xi) \mu^{\lambda q} = 0.$$

❑

Prekompaktnost niza meroznačnih rešenja kvazi-linearne jednačine

Sada nam je cilj da rezultate o lokalizaciji H-mere primenimo na niz uopštenih meroznačnih rešenja jednačine (1.13). Pretpostavljamo da važi sledeći uslov prirodne nelinearnosti. Za sve $\xi \in S$ i skoro sve $x \in \Omega$, funkcija

$$\lambda \mapsto A(x, \xi, \lambda) = \sum_{j=1}^d \xi_j \frac{\partial \phi_j(x, la)}{\partial \lambda} \neq 0$$

na svakom netrivijalnom intervalu.

Teorema 25. *Neka je ν_x^k niz uopštenih meroznačni rešenja jednačine* (1.13)*. Ako $\nu_x^k \rightharpoonup \nu_x^0$, onda $\nu_x^k \to \nu_x^0$.*[5]

Dokaz: Neka je $E = \{\lambda_0 \in \mathbf{R} : u_0(x,\lambda) \to u_0(x,\lambda_0), \lambda \to \lambda_0 \text{ u } L^1_{\text{loc}}(\Omega)\}$ i $\{\mu^{pq}\}_{p,q\in E}$ H-mera koja odgovara nizu meroznačnih rešenja $\{\nu_x^k\}_k$. Dokazaćemo da je za $p \in E$, $\mu^{pp} = 0$.

Neka je $p \in E$, $\varepsilon > 0$ i $K \subset \Omega$ kompaktan skup. Preslikavanje $\mu^{pq} : E\times E \to Z(\Omega\times S)$ je neprekidno iz $E\times E$ u prostor lokalno ograničenih mera $Z(\Omega \times S)$ sa topologijom generisanom polunormama $\|\mu\|_K = Var(\mu)(K)$, Teorema 20, što znači da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da

$$|\lambda - p| < \delta \implies Var(\mu^{\lambda p} - \mu^{pp})(K) < \varepsilon. \tag{1.34}$$

Neka je

$$f(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} 0, & A(x,\xi,\lambda) = 0, \\ 1, & A(x,\xi,\lambda) \neq 0 \end{cases}.$$

Tada iz Teoreme 24 sledi da je za $\lambda \in E$,

$$\int_{K\times S} f(x,\xi,\lambda) d\mu^{\lambda p}(x,\xi) = 0. \tag{1.35}$$

Sada iz (1.34) i (1.35) sledi da

$$\begin{aligned}|\lambda - p| < \delta \implies \int_{K\times S} & f(x,\xi,\lambda) d\mu^{pp}(x,\xi) = \\ &= \int_{K\times S} f(x,\xi,\lambda) d(\mu^{pp} - \mu^{\lambda p})(x,\xi) \le \varepsilon.\end{aligned}$$

Sada integralimo prethodni izraz po λ od $p-\delta$ do $p+\delta$ i podelimo sve sa 2δ,

$$\int_{K\times S} \frac{1}{2\delta}\int_{p-\delta}^{p+\delta} f(x,\xi,\lambda) d\lambda d\mu^{pp}(x,\xi) \le \frac{\varepsilon}{2\delta}(p+\delta-p+\delta) = \varepsilon,$$

odnosno,

$$\int_{K\times S} F(x,\xi) d\mu^{pp}(x,\xi) \le \varepsilon,$$

[5] Uopšteno meroznačno rešenje je definisano u Definiciji 11 relacijom (1.14), a slaba i jaka konvergencija u Definiciji 10.

za

$$F(x,\xi) := \frac{1}{2\delta}\int_{p-\delta}^{p+\delta} f(x,\xi,\lambda)d\lambda.$$

Neka je P takav skup za koji važi da je $A = 0$ na $P \times S$ i $A \neq 0$ na $(P \times S)^C$. Jasno je da je meas$(P) = 0$. Tada je i $F = 0$ na $P \times S$, odnosno,

$$\mu^{pp} = 0 \text{ na } (K \times S) \cap (P \times S)^C. \tag{1.36}$$

Iz definicije H-mere, (1.22), za $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ i $\psi = 1$, imamo da je za sve $\phi \in C_0(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\langle \mu^{pp}\,,\, \phi^2(x)\rangle &= \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}(\phi U_p^r)(\xi)|^2 d\xi = \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d} |\phi U_p^r(x)|^2 dx\\ &\leq \lim_{r\to\infty}\|U_p^r\|_{L^\infty}\int_{\mathbf{R}^d}|\phi|^2dx \leq c\int_{\mathbf{R}^d}|\phi|^2dx,\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je $proj_\Omega \mu^{pp}$ apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesque-ovu meru, tj.

$$proj_\Omega \mu^{pp} \leq c \cdot \text{meas}. \tag{1.37}$$

Sada sledi da je

$$\begin{aligned}\mu^{pp}(K\times S) &= \mu^{pp}\left((K\times S)\cup(P\times S)\right) + \mu^{pp}\left((K\times S)\cup(P\times S)^C\right)\\ &=^{(1.36)} proj_\Omega\mu^{pp}(K\cup P) =^{(1.37)} 0,\end{aligned}$$

jer je meas$(P) = 0$, pa i meas$(K \cup P) = 0$. Dakle, $\mu^{pp} = 0$, svuda, tj. za sve $p \in E$. Sada možemo zaključiti i da je za sve $\phi \in C_0(\Omega)$,

$$0 = \langle \mu^{pp}\,,\, \phi^2(x)\rangle = \lim_{r\to\infty}\int_{\mathbf{R}^d}|\phi U_p^r(x)|^2dx,$$

tj. da U_p^r konvergira ka 0 jako u $L^2_{\rm loc}(\Omega)$ (pa i u $L^1_{\rm loc}(\Omega)$).

Stoga za $p \in E$, možemo zaključiti da

$$\int \theta(\lambda - p)d\nu_x^k(\lambda) \to \int \theta(\lambda - p)d\nu_x^0(\lambda), \tag{1.38}$$

kad $k \to \infty$, u $L^2_{\rm loc}$, gde je θ Heavyside-ova funkcija. Kako proizvoljnu neprekidnu funkciju $p \in C(\mathbf{R})$ možemo aproksimirati konačnom linearnom kombinacijom $p(\lambda) \approx \sum_{s=1}^{n} C_s\theta(\lambda - p_s)$, na svakom $K \subset\subset \Omega$ uniformno, imamo i da

$$\int p(\lambda) d\nu_x^k(\lambda) \to \int p(\lambda) d\nu_x^0(\lambda), \quad k \to \infty,$$

u $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, pa i u $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$), što znači da podniz ν_x^k konvergira jako ka ν_x^0. Konačno, kako je granična meroznačna funkcija jedinstvena za bilo koji izbor podniza ν_x^k, i početni niz ν_x^k konvergira jako ka ν_x^0. ❑

Glava 2

Difuziono-disperziona granica u heterogenim sredinama

U uvodnom poglavlju opisali smo problem difuziono–disperzione granice i dali smo kratak pregled postojećih rešenja u homogenim sredinama. Sada ćemo prikazati naše rezultate na rešavanju pomenutog problema u heterogenim sredinama. Ako pretpostavimo slabiji odnos parametara ε i δ nego u [13], onda se možemo osloniti na rad [6] (kao što je urađeno u [19]), da bismo tvrdili da familija $(u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$ rešenja problema (1.2)–(1.3) konvergira ka jedinstvenom entropijski dopustivom slabom rešenju jednačine (1.1). Takođe u jednodimenzionalnom slučaju problema (1.2)–(1.3), pod pretpostavkom da je odnos ε i δ isti kao u [13], možemo koristiti metod kompenzovane kompaktnosti, i čak pretpostaviti da je fluks $f = f(t, x, \lambda)$ iz (1.1) prekidan po $(t, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, da bismo dobili rezultat o konvergenciji (vidi [12]).

U cilju da dobijemo analogan rezultat rezultatu iz [13] (višedimenzionalan prostor, optimalni difuziono-disperzioni odnos) oslonićemo se na teoriju Lema o usrednjenju (engl. averaging lemma) (isto je urađeno u [13]).

Jedini rezultat vezan za Leme o usrednjenju za transportnu jednačinu sa fluksom koji eksplicitno zavisi od vremena i prostora dat je u [9]. Tamo je pokazano da za niz rešenja $(h_n)_n \in L^2(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$ transportne jednačine

$$\mathrm{div}_x f(x,\lambda) h_n(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \partial_\lambda^k g_n^k(x,\lambda), \quad x \in \mathbf{R}^d,\ \lambda \in \mathbf{R},$$

i svako $\rho \in C_0^1(\mathbf{R})$, niz usrednjenih veličina

$$\left(\int_{\mathbf{R}^d} \rho(\lambda) h_n(x,\lambda) d\lambda\right)_n \text{ je jako prekompaktan u } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d), \tag{2.1}$$

ako su za svako $k = 1, ..., N$ nizovi $(g_n^k(x,\lambda))_n$ jako prekompaktni u $H^{-1}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$.

Dalje, rezultat iz [9] je slabiji nego rezultat iz [35], koji se koristi u [13]. Stoga, trebamo poboljšati rezultat iz [9]. To ćemo postići koristeći poboljšanu varijantu iz [33] tehnika iz [9] (H-mere), i oslanjajući se na regularnije pretpostavke o nizu $(h_n)_n$ iz (2.10), čiju konvergenciju želimo da pokažemo.

Prvi rezultat o difuziono-disperzionoj granici u heterogenim sredinama dat je u [12]. Tamo je pokazano da za fluks $f = f(t,x,\lambda)$, $(t,x,\lambda) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$ koji je Caratheodory-vektor, tj. prekidan je po $(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ i neprekidan po λ, familija rešenja odgovarajućeg skalarnog zakona održanja perturbivanog disperzionim i difuzionim parametrom konvergira ka slabom rešenju odgovarajućeg skalarnog zakona održanja ako su parametri ε i δ u odnosu $\delta = o(\varepsilon^2)$, kad $\varepsilon \to 0$. Rezultat je dobijen oslanjajući se na [33], koji je baziran na tehnikama H-mera datim u [9, 42], a kasnije razvijen u [31, 32].

Poboljšaćemo odnos parametara iz [12], po ceni lepšeg fluksa. Preciznije, za razliku od [12], pretpostavićemo da je fluks $f = f(t,x,u)$ Lipschitz-neprekidan po $(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ i neprekidno diferencijabilan po $u \in \mathbf{R}$.

2.1 Difuziono-disperziona granica sa neprekidnim fluksom

Zbog precizne i jasne slike navešćemo na jednom mestu sve pretpostavke pod kojima smo radili na rešavanju ovog problema. Neke su tehničke prirode.

1. Pretpostavke o rešenju $u^{\varepsilon,\delta}$ i početnom uslovu:

Pretpostavljamo da je familija rešenja $(u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$ dovoljno regularna kako bi formalni račun koji sledi bio ispravan. Pored toga pretpostavljamo da funkcije $u^{\varepsilon,\delta}$, kao i njihovi izvodi $\partial_{x_i} u^{\varepsilon,\delta}$ i $\partial_{x_i x_j} u^{\varepsilon,\delta}$ teže nuli kad $|x| \to \infty$.

Pretpostavljamo da početni uslovi ispunjavaju sledeće uslove:

$$\begin{aligned}
&u_0 \in L^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mathbf{R}^d),\\
&u_0^\varepsilon \in H^1(\mathbf{R}^d) \text{ i } \varepsilon \nabla u_0^\varepsilon \in H^1(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d), \text{ za svako fiksirano } \varepsilon > 0,\\
&u_0^\varepsilon \to u_0, \text{ kad } \varepsilon \to 0, \text{ jako u } L^2(\mathbf{R}^d) \cap L^1(\mathbf{R}^d).
\end{aligned}$$

Primetimo da iz poslednje pretpostavke dobijamo da je familija $(u_0^\varepsilon)_\varepsilon$ uniformno ograničena u $L^2(\mathbf{R}^d)$.

2. Pretpostavke o difuzionom članu $b(\lambda) = (b_1(\lambda), ..., b_d(\lambda))$:

(H1) Postoji $r \geq 1$ i konstante C_1, C_2 tako da

$$C_1|\lambda|^{1+r} \leq \lambda \cdot b(\lambda) \leq C_2|\lambda|^{1+r}, \text{ za sve } \lambda \in \mathbf{R}^d.$$

(H2) Matrica $Db(\lambda)$ je pozitivno definitna uniformno po $\lambda \in \mathbf{R}^d$, tj. za sve $\lambda, \xi \in \mathbf{R}^d$ postoji pozitivna konstanta C_3 tako da

$$\xi^T Db(\lambda)\xi \geq C_3|\xi|^2.$$

3. Pretpostavke o fluksu $f = (f_1, ..., f_d) : \Pi \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d$:

(H3) Funkcije $f = f(t, x, u)$ i $f_u(t, x, u)$ su neprekidne, a njihovi izvodi po t i x su lokalno integrabilne funkcije i još važi sledeće:

- Ako je $r > 1$, koje se pojavljuje u (H1), onda $\partial_u f \in L^{\frac{2(r+1)}{r-1}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$; ako je $r = 1$, onda $\partial_u f \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$.
- $D_{x_i} f_i \in L^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$ i $|D_{x_i} f_j(t, x, v)| \leq |\zeta_{i,j}(t, x)||v|$, za neke funkcije $\zeta_{i,j} \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$, $i, j = 1, \ldots, d$.

4. Uslov prirodne nelinearnosti:

Pretpostavićemo da je vektorska funkcija fluksa f prirodno nelinearna (engl. genuinely nonlinear), tj. da za sve $\xi = (\xi_1, ...\xi_d) \in S^{d-1}$ i skoro sve $(t, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ preslikavanje

$$\lambda \mapsto \langle \xi \, , \, f_i(t, x, \lambda) \rangle \quad \text{nije linearno po } \lambda \tag{2.2}$$

na bilo kom netrivijalnom intervalu.

U ovom poglavlju, glavno tvrđenje je sledeće:

Teorema 26. *Familija glatkih rešenja* $(u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$ *Košijevog problema* (1.2)–(1.3) *je jako prekompaktana u* $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ *ako su* ε *i* δ *iz* (1.2) *u odnosu*

$$\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}}), \text{ kad } \varepsilon \to 0.$$

Da bismo pokazali ovu teoremu, kombinovaćemo metodologije iz [13] i [36]. Prvo redukujemo jednačinu (1.2) na familiju transportnih jednačina (2.30), a onda koristimo tehnike H-mera, date u [36], da bismo pokazali jaku prekompaktnost familije rešenja problema (2.30). Ukratno, to radimo na sledeći način. Prvo dokazujemo a priori ocene za familiju $(u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$. Zatim dokazujemo potrebni rezultat o prekompaktnosti familije rešenja odgovarajuće transportne jednačine. Onda ih povezujemo, tj. pokazujemo kako da redukujemo jednačinu (1.2) u transportnu jednačinu (2.30), pa za tako dobijenu transportnu jednačinu (2.30) dokažemo da familija njenih rešenja, kao i sama jednačina (2.30), zadovoljavaju uslove potrebne za rezultat o prekompaktnosti familije rešenja, da bismo zaključili jaku prekompaktnost familije $(u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$.

Primedba 27. Osim u ovom poglavlju, Teorema 26 je jedan od dva najvažnija rezultata ove disertacije, stoga ćemo, pre no što počnemo da je dokazujemo, precizno uporediti dat rezultat sa postojećim rezultatima u literaturi koje želimo da poboljšamo, [4, 12, 13]. Da bismo pojednostavili diskusiju, pretpostavićemo da je $|\partial_u f| < \infty$.

Jednačina (1.2) je uvedena u radu [4] u slučaju kada je sredina homogena, tj. $f = f(u) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d$. Tamo je pokazano da ako je $\delta = o(\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}})$, $\varepsilon \to 0$, onda familija rešenja $(u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$ konvergira u $L^s((0,T); L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^d))$ za sve $s < \infty$ i $T > 0$, ka jedinstvenom entropijskom rešenju $u \in L^\infty((0,T); L^1(\mathbf{R}^d))$ jednačine (1.1).

Isti problem sa istim pretpostavkama kao u [4] posmatran je u radu [13]. Tamo je pokazano da ako je $\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}})$ tada familija rešenja $(u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$ konvergira u $L^s((0,T); L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^d))$ za sve $s < \infty$ i $T > 0$, ka slabom rešenju $u \in L^\infty((0,T); L^1(\mathbf{R}^d))$ jednačine (1.1). Mi dobijamo isti odnos parametara, ali za fluks koji zavisi i od vremena i prostora i to koristeći drugačiju metodologiju.

2.1.1 A priori ocene

Izvešćemo sada a priori ocene za rešenja problema (1.2)–(1.3). Zbog jednostavnosti, u daljem radu pisaćemo u^ε, $\varepsilon \in (0,1)$, umesto $u^{\varepsilon,\delta}$.

Lema 28. *Pod pretpostavkama (H1) i (H3), familija rešenja (u^ε) problema* (1.2)–(1.3)*, za svako $t \in [0,T]$ zadovoljava sledeću nejednakost*

$$\int_{\mathbf{R}^d} |u^\varepsilon(t,x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u^\varepsilon(t',x)|^{r+1} dx dt' \leq c, \tag{2.3}$$

pri čemu konstanta $c > 0$ ne zavisi od ε.

Dokaz: Neka je $\eta = \eta(u)$, $u \in \mathbf{R}$, data glatka funkcija. Definišemo entropijski fluks sa

$$q_i(t,x,u) = \int_0^u \eta'(v)\partial_v f_i(t,x,v)dv, \quad i = 1,...,d, \quad q = (q_1,...,q_d). \tag{2.4}$$

Kako je entropijski par (η, q) povezan relacijom

$$\eta'(u)\partial_u f_i(t,x,u) = \partial_u g_i(t,x,u),$$

zaključujemo je entropijski fluks dobro definisan u (2.4) ako je

$$\eta'(0)\partial_u f_i(t,x,0) = 0. \tag{2.5}$$

Izbor entropije $\eta(u) = u^2/2$, daje nam da je $\eta'(0) = 0$, što, uz pretpostavku da je $|\partial_u f_i(t,x,0)| \leq c$, obezbeđuje dobro definisan entropijski fluks.

Kada pomnožimo (1.2) sa $\eta'(u^\varepsilon)$ dobijemo

$$\begin{aligned}
&\partial_t \eta(u^\varepsilon) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} q_i(t,x,u^\varepsilon) \\
&\quad - \sum_{i=1}^d \int^{u^\varepsilon} D_{x_i v} f_i(t,x,v)\eta'(v)dv + \sum_{i=1}^d \eta'(u^\varepsilon) D_{x_i} f_i(t,x,u^\varepsilon) \\
&= \varepsilon \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}\big(\eta'(u^\varepsilon) b_i(\nabla u^\varepsilon)\big) - \varepsilon \eta''(u^\varepsilon) \sum_{i=1}^d b_i(\nabla u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i} \\
&\quad + \delta \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}\big(\eta'(u^\varepsilon)\partial_{x_i x_i} u^\varepsilon\big) - \frac{\delta}{2}\eta''(u^\varepsilon) \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(u^\varepsilon_{x_i})^2.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Uzimajući za $\eta(u) = \frac{u^2}{2}$ i integraleći nad $[0,t) \times \mathbf{R}^d$, uz pomoć (H1) i parcijalne integracije, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|u^\varepsilon(t,x)|^2dx+\varepsilon C_1\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon(t',x)|^{1+r}dxdt'\\
&\quad\leq^{(\mathrm{H1})}\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|u^\varepsilon(t,x)|^2dx+\varepsilon\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}\nabla u^\varepsilon(t',x)\cdot b(\nabla u^\varepsilon(t',x))dxdt'\\
&=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|u_0^\varepsilon(x)|^2dx+\sum_{j=1}^d\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}\int^{u^\varepsilon(t',x)}vD_{x_jv}f_j(t',x,v)dvdxdt' \qquad (2.7)\\
&-\sum_{i=1}^d\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}u^\varepsilon D_{x_i}f_i(t',x,u^\varepsilon)dxdt'\\
&=^{\mathrm{p.i.}}\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|u_0^\varepsilon(x)|^2dx-\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}\int^{u^\varepsilon(t',x)}\mathrm{div}_x\, f(t',x,v)dvdxdt'.
\end{aligned}
$$

Za izvođenje ove ocene potrebno nam je i da je $\lim_{x_i\to\pm\infty}q_i(t,x,u^\varepsilon(t,x))=0$, što osim (2.5) zahteva još i da je

$$
\lim_{x_i\to\pm\infty}u^\varepsilon(t,x)f_i(t,x,u^\varepsilon(t,x))=0 \text{ i } \lim_{x_i\to\pm\infty}\int_0^{u^\varepsilon(t,x)}f_i(t,x,u)\,du=0,
$$

što pokrivamo pretpostavkama da se rešenja u_ε anuliraju u besknačnosti i da nam je fluks ograničen. Iz (2.7), koristeći (H3) odmah dobijamo (2.3). ❑

Lema 29. *Pod pretpostavkama (H2) i (H3), za* $|D^2u|^2=\sum\limits_{i,k=1}^d|\partial_{x_ix_k}u|^2$*, familija rešenja* (u^ε) *problema* (1.2)-(1.3)*, za svako* $t\in[0,T]$*, zadovoljava sledeću nejednakost*

$$
\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}}\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon(t,x)|^2dx+\varepsilon^{\frac{2(r+2)}{r+1}}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}|D^2u^\varepsilon(t',x)|^2dxdt'\leq c, \qquad (2.8)
$$

pri čemu konstanta $c>0$ *ne zavisi od parametra* ε*.*

Dokaz: Diferenciramo (1.2) po x_k i množimo dobijeni izraz sa $u^\varepsilon_{x_k}$. Integraleći nad $\mathbf{R}^d$, koristeći parcijalnu integraciju i sumirajući po $k=1,...,d$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}\partial_t|\nabla u^\varepsilon|^2dx-\sum_{k=1}^d\int_{\mathbf{R}^d}\nabla u^\varepsilon_{x_k}\cdot\left(D_{x_k}f(t,x,u^\varepsilon)+\partial_u f\cdot u^\varepsilon_{x_k}\right)dx\\
&=-\varepsilon\sum_{k=1}^d\int_{\mathbf{R}^d}(\nabla u^\varepsilon_{x_k})^T Db(\nabla u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon_{x_k}dx\leq^{(\mathrm{H2})}-\varepsilon C_3\sum_{k=1}^d\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon_{x_k}|^2dx.
\end{aligned}
$$

Integraleći dobijeno nad $[0,t]$ i koristeći Cauchy-Schwartz-ovu nejednakost, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon(\,\cdot\,,t)|^2dx+\varepsilon C_3\sum_{k=1}^d\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon_{x_k}|^2dxdt'\\
&\leq\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon_0|^2dx\\
&\quad+\sum_{k=1}^d\|\nabla u^\varepsilon_{x_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)}\|D_{x_k}f(\,\cdot\,,\,\cdot\,,u^\varepsilon)+\partial_u f\cdot u^\varepsilon_{x_k}\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)}.
\end{aligned}
$$

Zatim, koristeći Young-ovu nejednakost (C_3 je ista konstanta kao i ranije),

$$
ab\leq\frac{C_3\varepsilon}{2}a^2+\frac{C_6}{\varepsilon}b^2,\quad a,b\in\mathbf{R},
$$

za konstante C_3, C_6 koje ne zavise od ε, smemo pisati

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon(\,\cdot\,,t)|^2dx+\varepsilon C_3\sum_{k=1}^d\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon_{x_k}|^2dxdt'\\
&\leq\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon_0|^2dx+C_3\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^d\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}|\nabla u^\varepsilon_{x_k}|^2dxdt'\\
&\quad+\frac{C_6}{\varepsilon}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^d}\sum_{k=1}^d\left|D_{x_k}f(t',x,u^\varepsilon(t',x))+\partial_u f\cdot u^\varepsilon_{x_k}\right|^2dxdt'.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Dalje ćemo izvoditi dokaz odvojeno za $r>1$ i $r=1$. Koristeći nekednakost

$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ i Hölder-ovu nejednakost, za $r > 1$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u^\varepsilon(\,\cdot\,,t)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} C_3 \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u^\varepsilon_{x_k}|^2 dx dt' \\
&\le \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u^\varepsilon_0|^2 dx + \frac{2C_6}{\varepsilon} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{k=1}^{d} \Big| D_{x_k} f(t,x,u^\varepsilon(t,x)) \Big|^2 dx dt' \\
&+ \frac{2C_6}{\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}}} \sum_{k=1}^{d} \|(\partial_u f)^2(t,x,u_\varepsilon(x,t))\|_{L^{\frac{r+1}{r-1}}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)} \\
&\quad \cdot \left(\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} (u^\varepsilon_{x_k})^{r+1}(x,t') dx dt' \right)^{\frac{2}{r+1}} .
\end{aligned}
$$

Množimo prethodni izraz sa $\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}}$ i koristimo posledicu ocene (2.3) da su

$$
\int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |u^\varepsilon(s,x)|^2 dx ds \le c \text{ i } \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u(s,x)|^{r+1} dx ds \le c,
$$

da bismo dobili (2.8).

Koristeći iste argumente, u slučaju kada je $r = 1$, množimo (2.9) sa ε^2, da bismo dobili

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u^\varepsilon(t,x)|^2 dx + C_3 \frac{\varepsilon^3}{2} \int_{\mathbf{R}^d}\int_0^t |D^2 u^\varepsilon|^2 dx dt \\
&\le \varepsilon^2 C_5 \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u^\varepsilon_0|^2 dx dt' + C_7 \|\partial_u f\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R})} \\
&+ \varepsilon C_6 \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} \sum_{k=1}^{d} |D_{x_k} f(t',x,u^\varepsilon(t',x))|^2 dx dt' \le \varepsilon^2 C_5 \|\nabla u^\varepsilon_0\|^2_{L^2(\mathbf{R}^d)} \\
&+ C_7 \|\partial_u f\|^2_{L^\infty} + \varepsilon C_6 \sum_{i,j=1}^{d} \|\zeta_{i,j}\|^2_{L^\infty} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |u^\varepsilon(t',x)|^2 dx dt',
\end{aligned}
$$

sa odgovarajućim konstantama. Iz (2.3) i poslednje nejednakosti dobijamo (2.8). ❑

2.1.2 Rezultati o konvergenciji

Da bismo pokazali jaku prekompaktnost familije $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ rešenja problema (1.2)–(1.3) koristićemo teoriju H-mera [9, 31, 42].

Iz prethodnog odeljka imamo da je niz $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ uniformno ograničen u $L^2(\Pi)$. Stoga, na osnovu Teoreme o Young-ovim merama, postoji njegov podniz $(u^k)_k$ i Young-ova mera $\nu = (\nu_{t,x})$, $\nu_{t,x} \in \mathrm{Prob}(\mathbf{R})$, tako da za sve neprekidne funkcije $f(\lambda) = o(|\lambda|^2)$, u smislu distribucija, važi

$$\lim_{k\to\infty} f(u^k) = \int_{\mathbf{R}} f(\lambda)\, d\nu_{t,x}(\lambda), \text{ kad } |\lambda| \to \infty.$$

Pokazaćemo da je niz $(h_k)_k$ oblika

$$h_k(t,x,\lambda) = \begin{cases} 1, & 0 < \lambda \leq u^k(t,x), \\ -1, & 0 > \lambda \geq u^k(t,x), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.10}$$

koji zadovoljava transportnu jednačinu

$$\begin{aligned} &\partial_t h_k(t,x,\lambda) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(\partial_\lambda f_i(t,x,\lambda) h_k(t,x,\lambda)) \\ &= \partial_\lambda m_k(t,x,\lambda) + \bar{m}_k(t,x,\lambda) + \sum_{i=1}^d \partial_\lambda \partial_{x_i} g_k(t,x,\lambda) + \bar{g}_k(t,x,\lambda), \end{aligned} \tag{2.11}$$

pekompaktan u $L^p_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, $p \in [1,\infty)$. Ovde su $(g_k(t,x,\lambda))_k$ i $(\bar{g}_k(t,x,\lambda))_k$ prekompaktni u $L^{1+\frac{1}{r}}(\Pi)$, uniformno po $\lambda \in \mathbf{R}$, tj. postoji funkcija $\bar{g}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\lambda)$ i $g(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\lambda)$ u $L^{1+\frac{1}{r}}(\Pi)$, tako da, do na podniz,

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} \|g_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\lambda) - g(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\lambda)\|_{L^{1+\frac{1}{r}}(\Pi)} \to 0, \quad \text{kad} \quad k \to \infty, \\ &\sup_{\lambda\in\mathbf{R}} \|\bar{g}_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\lambda) - \bar{g}(\,\cdot\,,\,\cdot\,,\lambda)\|_{L^{1+\frac{1}{r}}(\Pi)} \to 0, \quad \text{kad} \quad k \to \infty. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Dalje pretpostavljamo da su m_k, $\bar{m}_k$ lokalno ograničene Radon-ove mere na $\Pi \times \mathbf{R}_\lambda$. Pisaćemo $m_k, \bar{m}_k \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Pi \times \mathbf{R}_\lambda)$. Iz lokalne ograničenosti mera m_k i $\bar{m}_k$ zaključujemo da postoji mera $m, \bar{m} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Pi \times \mathbf{R}_\lambda)$ tako da (do na podniz)

$$m_k \rightharpoonup m \quad \text{i} \quad \bar{m}_k \rightharpoonup \bar{m}, \quad \text{slabo}-* \text{ u } \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\Pi \times \mathbf{R}_\lambda), \quad \text{kad} \quad k \to \infty. \tag{2.13}$$

Zbog uniformne ograničenosti niza $(h_k)_k$, postoji funkcija $h \in L^\infty(\Pi \times \mathbf{R}_\lambda)$, tako da, do na podniz,

$$h_k \rightharpoonup h, \quad \text{kad} \quad k \to \infty, \quad \text{slabo}-* \text{ u } L^\infty(\Pi \times \mathbf{R}_\lambda). \tag{2.14}$$

S druge strane, za $\phi_2 \in C^\infty(\mathbf{R}_\lambda)$, dobijamo da

$$\int_{\mathbf{R}_\lambda} \phi_2' h_k \, d\lambda = \phi_2(u^k(t,x)) \rightharpoonup \int_{\mathbf{R}_\lambda} \phi_2 \, d\nu_{t,x}(\lambda), \tag{2.15}$$

u $\mathcal{D}'(\Pi)$, kad $k \to \infty$. Koristeći notaciju Stieltjes-ove parametrizovane mere, možemo pisati $d\nu_{t,x}(\lambda) = \partial_\lambda g(t,x,\lambda)$, gde je $g(t,x,\lambda) = \int_{\mathbf{R}_\lambda} \chi_{\{s:s\leq\lambda\}} d\nu_{t,x}(s)$ funkcija distribucije Young-ove mere ν. Tada možemo granicu u (2.15) zapisati kao

$$-\int_{\mathbf{R}_\lambda} \phi_2'(\lambda) g(t,x,\lambda) \, d\lambda$$

i zaključiti da je

$$h(t,x,\lambda) = -\int_{\mathbf{R}} \chi_{\{s:\, s\leq\lambda\}} d\nu_{t,x}(s) = -g(t,x,\lambda).$$

Pretstavljena preko Young-ove mere, granična funkcija h iz (2.14) je monotona po λ. Stoga je skup tačaka prekida λ funkcije h, tj. komplement skupa

$$\mathcal{E} := \{\lambda_o \in \mathbf{R} \,|\, h(\cdot,\cdot,\lambda) \to h(\cdot,\cdot,\lambda_0), \text{ jako u } L^1_{\text{loc}}(\Pi), \text{ kad } \lambda \to \lambda_0\},$$

najviše prebrojiv. Stoga, za svako fiksirano $\lambda \in \mathcal{E}$, imamo da

$$h_k(\cdot,\cdot,\lambda) \rightharpoonup h(\cdot,\cdot,\lambda), \text{ kad } k \to \infty, \quad \text{slabo}-* \quad \text{u } L^\infty(\Pi), \tag{2.16}$$

i tada niz $(h_k(\lambda) - h(\lambda))_{\lambda\in\mathcal{E}}$, definiše H-meru μ (videti i [31, lema 4]), tj. postoji H-mera $(\mu^{pq})_{p,q\in\mathcal{E}}$ na $\Pi \times S^d$, tako da za proizvoljne test funkcije $\phi_1, \phi_2 \in C_0(\Pi)$ i $\psi \in C(S^d)$,

$$\begin{aligned} &\int_{\Pi\times S^d} \phi_1(t,x)\bar{\phi}_2(t,x)\psi(y)\, d\mu^{pq}(t,x,y) = \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{R}^{d+1}} \mathcal{F}[\phi_1 U_k^p](\xi)\overline{\mathcal{F}[\phi_2 U_k^q](\xi)}\psi(\frac{\xi}{|\xi|})\, d\xi \end{aligned} \tag{2.17}$$

važi za svako $p, q \in \mathcal{E}$, gde je $U_k^\lambda(t,x) = h_k(t,x,\lambda) - h(t,x,\lambda)$ i $\mathcal{F}$ je Fourierova transformacija.

Da bismo koristili tehnike H-mera, potrebne su nam sledeće osobine pseudodiferencijalnih operatora nultog reda i Riesz-ovih potencijala, [38].

Definicija 30. *Riesz-ov potencijal* $\mathcal{J}_\alpha$, $0 < \alpha < d$, *je definisan formulom*

$$\mathcal{F}[\mathcal{J}_\alpha[\varphi]](\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\alpha}\mathcal{F}[\varphi](\xi),$$

za sve $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{d+1})$.

Pseudodiferencijalni operator nultog reda $\mathcal{A}$ *sa simbolom* $\psi \in C(S^d)$ *definisan je formulom*

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[\varphi]](\xi) = \psi(\xi/|\xi|)\mathcal{F}[\varphi](\xi).$$

Pseudodiferencijalni operator nultog reda $\mathcal{R}_j$, $j = 0, ..., d$, *sa simbolom* $i\xi_j/|\xi|$ *se zove Riesz-ova transformacija.*

Navešćemo osnovne osobine pseudodiferencijalnih operatora nultog reda, [38],

$$(\mathcal{J}_\alpha \circ \mathcal{J}_\beta)[\varphi] = \mathcal{J}_{\alpha+\beta}[\varphi]$$
$$\mathcal{J}_1[\partial_{x_j}\varphi] = \mathcal{R}_j[\varphi], \quad j = 0, ..., d, \ x_0 := t.$$

Riesz-ove potencijale $\mathcal{J}_1$ karakteriše sledeća lema.

Lema 31. *Za* $p > d$, *Riesz-ov potencijal* $\mathcal{J}_1$ *je kompaktni operator iz* $L^p(\mathbf{R}^d)$ *u* $C(\mathbf{R}^d)$.

Za $1 < p \leq d$, *Riesz-ov potencijal* $\mathcal{J}_1$ *je kompaktni operator iz* $L^p(\mathbf{R}^d)$ *u* $L^p(\mathbf{R}^d)$, *za proizvoljno* $q \in [1, pd(d-p)^{-1}]$.

Posledica Hörmander-Mikhlin teoreme, [30], je sledeća osobina pokazana u [38, Sect. 3.2, Example 2].

Lema 32. *Za sve* $p \in (1, \infty)$,

$$\|\mathcal{A}[\varphi]\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \leq c_p\|\varphi\|_{L^p(\mathbf{R}^d)} \quad \forall\varphi \in L^p(\mathbf{R}^d), \tag{2.18}$$

pri čemu je $\mathcal{A}$ *pseudo-diferencijalni operator nultog reda sa simbolom* $\psi \in C^\kappa(S^{d-1})$ *i* $\mathbf{N} \ni \kappa > \frac{d}{2}$.

Sada ćemo pokazati osnovnu osobinu H-mere μ, definisane u (2.17).

Teorema 33. *Za H-meru* μ *važi sledeće*

$$\int_{\mathbf{R}_\lambda}\Big(\int_{\Pi\times S^d}\Big(y_0 + \sum_{i,j=1}^d \partial_\lambda f_i(t,x,\lambda)y_i\Big)\beta(t,x,\lambda,y)d\mu^{\lambda\lambda}(t,x,y)\Big)d\lambda = 0, \tag{2.19}$$

za proizvoljnu funkciju $\beta \in C_0(\Pi \times \mathbf{R}_\lambda; C(S^d_y))$.

Dokaz: Posmatramo jednačinu (2.11)u $\mathcal{D}'(\Pi \times \mathbf{R}_\lambda)$,

$$\begin{aligned}&\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}\Big(\phi_t+\sum_{i=1}^d\Big(\phi_{x_i}\partial_\lambda f_i(t,x,\lambda)\Big)\Big)h_k(t,x,\lambda)\,dxdtd\lambda\\&-\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}\phi_\lambda dm_k(t,x,\lambda)+\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}\phi\,d\bar m_k(t,x,\lambda)+\\&+\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}g_k(t,x,\lambda)\sum_{i=1}^d\phi_{\lambda x_i}\,dxdtd\lambda+\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}\phi\bar g_k(t,x,\lambda)\,dxdtd\lambda=0,\end{aligned}\tag{2.20}$$

za svako $\phi \in C_0^2(\Pi\times\mathbf{R}_\lambda)$. Koristeći (2.12), (2.13)) i (2.14), iz (2.20) dobijamo

$$\begin{aligned}&\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}U_k^\lambda(t,x)\Big(\phi_t+\sum_{i=1}^d\phi_{x_i}\partial_\lambda f_i(t,x,\lambda)\Big)\,dxdtd\lambda\\&\qquad-\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}\phi_\lambda dM_k(t,x,\lambda)+\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}G_k(t,x,\lambda)\sum_{i=1}^d\phi_{\lambda\,x_i}\,dxdtd\lambda\\&\qquad+\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}\phi\,d\bar M_k(t,x,\lambda)+\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}\phi\bar G_k(t,x,\lambda)\,dxdtd\lambda=0,\end{aligned}\tag{2.21}$$

pri čemu je

$$\begin{gathered}U_k^\lambda(t,x):=h_k(t,x,\lambda)-h(t,x,\lambda),\\M^k:=m^k-m,\quad \bar M^k:=\bar m^k-\bar m,\\G_k(t,x,\lambda)=g_k(t,x,\lambda)-g(t,x,\lambda),\quad \bar G_k(t,x,\lambda)=\bar g_k(t,x,\lambda)-\bar g(t,x,\lambda),\end{gathered}$$

i g i $\bar g$ su definisani u (2.12). Sada množimo (2.21) sa $\int_{\mathbf{R}_p}\phi_0(p)\,dp$, pri čemu je $\phi_0\in C_0^2(\mathbf{R})$.

Znajući da je skup

$$\{\phi(t,x,\lambda)\cdot\phi_0(p):\phi\in C_0^2(\Pi\times\mathbf{R}_\lambda),\phi_0\in C_0^2(\mathbf{R}_p)\}$$

gust u $C_0^2(\Pi\times\mathbf{R}_\lambda\times\mathbf{R}_p)$, dobijamo da

$$\begin{aligned}&\int_{\Pi\times\mathbf{R}^2_{\lambda,p}}U_k^\lambda(t,x)\Big(\phi_t+\sum_{i=1}^d\phi_{x_i}\partial_\lambda f_i(t,x,\lambda)\Big)\,dxdtd\lambda dp-\\&-\int_{\mathbf{R}_p}\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}\phi_\lambda\,dM_k(t,x,\lambda)\,dp+\int_{\Pi\times\mathbf{R}^2_{\lambda,p}}G_k(t,x,\lambda)\sum_{i=1}^d\phi_{\lambda\,x_i}\,dxdtd\lambda dp+\\&+\int_{\mathbf{R}_p}\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda}\phi\,d\bar M_k(t,x,\lambda)dp+\int_{\Pi\times\mathbf{R}^2_{\lambda,p}}\phi\bar G_k(t,x,\lambda)\,dxdtd\lambda dp=0,\end{aligned}\tag{2.22}$$

važi za sve $\phi \in C_0^2(\Pi \times \mathbf{R}^2_{\lambda,p})$. Prateći [36], u ostatku dokaza zamenićemo ϕ u (2.22) odgovarajućim test funkcijama. Za test funkciju prvo biramo $\phi \in C_0^2(\Pi \times \mathbf{R}^2_{\lambda,p})$ oblika

$$\phi(t,x,\lambda,p) := \phi_1(t,x,\lambda,p) \cdot (\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{A})[\phi_2(t,x) \cdot U_k^p], \tag{2.23}$$

pri čemu je $\phi_1 \in C_0^2(\Pi \times \mathbf{R}^2_{\lambda,p})$, $\phi_2 \in C_0^2(\Pi)$, $\mathcal{J}_1$ je Riesz-ov potencijal i $\mathcal{A}$ je pseudodiferencijalni operator nultog reda na $\mathbf{R}^{d+1}$ sa simbolom $\psi \in C(S^d)$.

Dakle, zamenimo ϕ u (2.22) test funkcijom oblika (2.23). Koristimo činjenicu da svi pseudodiferencijalni operatori nultog reda komutiraju uzajamno i sa parcijalnim izvodima, kao i jednakost $\mathcal{J}_1[\partial_{x_j}\phi] = \mathcal{R}_j[\phi]$, $j = 0, ..., d$, $x_0 \equiv t$, iz (2.22) dobijamo sledeće

$$\begin{aligned}
0 = &\int_{\Pi\times\mathbf{R}^2} \Big(\phi_{1_t}(\mathcal{J}_1 \circ \mathcal{A})[\phi_2 U_k^p] + \phi_1(\mathcal{A}\circ\mathcal{R}_0)[\phi_2 U_k^p]\Big) U_k^\lambda \, dxdtd\lambda dp \\
&+ \int_{\Pi\times\mathbf{R}^2} \sum_{i=1}^d \Big(\phi_{1_{x_i}}(\mathcal{J}_1\circ\mathcal{A}) + \phi_1(\mathcal{A}\circ\mathcal{R}_i)\Big)[\phi_2 U_k^p] U_k^\lambda a_{i_\lambda}\, dxdtd\lambda dp \\
&- \int_{\mathbf{R}_p}\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda} \phi_{1_\lambda}(\mathcal{J}_1\circ\mathcal{A})[\phi_2 U_k^p]\, dM_k(t,x,\lambda)\, dp \\
&+ \int_{\mathbf{R}_p}\int_{\Pi\times\mathbf{R}_\lambda} \phi_1(\mathcal{J}_1\circ\mathcal{A})[\phi_2 U_k^p]\, d\bar{M}_k(t,x,\lambda)\, dp \\
&+ \int_{\Pi\times\mathbf{R}^2} \phi_1(\mathcal{J}_1\circ\mathcal{A})[\phi_2 U_k^p]\bar{G}_k(t,x,\lambda)\, dxdtd\lambda dp + \\
&\int_{\Pi\times\mathbf{R}^2} G_k \sum_{i=1}^d \Big(\phi_{1_{\lambda x_i}}(\mathcal{J}_1\circ\mathcal{A})[\phi_2 U_k^p] + \phi_{1_\lambda}(\mathcal{A}\circ\mathcal{R}_i)[\phi_2 U_k^p]\Big)\, dxdtd\lambda dp.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Sada smo spremni da pustimo $k \to \infty$. Koristeći kompaktnost Riesz-ovog potencijala kao preslikavanja iz $L^p(\mathbf{R}^{d+1})$ u $C(\mathbf{R}^{d+1})$, za $p > d+1$ (lema 31) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\Big[&\int_{\Pi\times\mathbf{R}^2} (\phi_1 U_k^\lambda(\mathcal{A}\circ\mathcal{R}_0)[\phi_2 U_k^p])\, dxdtd\lambda dp \\
&+ \int_{\Pi\times\mathbf{R}^2} \sum_{i=1}^d (\phi_1 U_k^\lambda a_{i_\lambda}(\mathcal{A}\circ\mathcal{R}_i)[\phi_2 U_k^p])\, dxdtd\lambda dp\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Zaista, svaki izraz u (2.24) koji sadrži $\mathcal{J}$ konvergira ka nuli, dok za preostali izraz u (2.24) imamo

$$\left|\int_{\Pi\times\mathbf{R}^2} G_k \sum_{i=1}^{d} \phi_{1_\lambda}(\mathcal{A}\circ\mathcal{R}_i)[\phi_2 U_k^p]\,dxdtd\lambda dp\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{d} \|G_k\|_{L^{1+\alpha}(\mathbf{R}^{d+1})}\,\|\phi_{1_\lambda}(\mathcal{A}\circ\mathcal{R}_i)[\phi_2 U_k^p]\|_{L^\beta(\mathbf{R}^{d+1}}$$

$$\leq^{(2.18)} c\|\phi_1\|_{L^\infty(\Pi\times\mathbf{R}^2)}\,\|G_k\|_{L^{1+\alpha}(\Pi)}\,\mathrm{meas}(\mathrm{supp}\phi_1)\,\|\phi_2 U_k^p\|_{L^\beta(\Pi)} \to^{(2.12)} 0,$$

pri čemu je $\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$.

Koristimo sada sledeću prezentaciju H-mere preko pseudodiferencijalnog operatora nultog reda

$$\int_{\Pi\times S^d} \phi_1\phi_2\psi\,d\mu^{pq}(t,x,y) = \lim_{k\to\infty}\int_\Pi (\phi_1 U_k^p)\mathcal{A}[\phi_2 U_k^q]\,dxdt, \tag{2.26}$$

pri čemu je $\mathcal{A}$ pseudodiferencijalni operator nultog reda sa simbolom $\psi \in C(S^d)$ ([9, 36]). Primenimo (2.26) u (2.25) i dobijemo

$$\int_{\mathbf{R}^2}\int_{\Pi\times S^d} \phi_1\phi_2\psi\Big(y_0+\sum_{i=1}^{d} a_{i_\lambda} y_i\Big)\,d\mu^{\lambda p}(t,x,y)d\lambda dp = 0, \tag{2.27}$$

pri čemu je $y=\xi/|\xi|\in S^d$. Zamenimo test funkciju $\phi_1(t,x,\lambda,p)\phi_2(t,x)\psi(y)\in C_0^2(\Pi\times\mathbf{R}^2;C(S_y^d))$, test funkcijom (zove se Kruškovljeva test funkcija, [20]),

$$\frac{1}{\varepsilon}\phi_5(t,x,y)\phi_6\Big(\frac{\lambda-p}{\varepsilon}\Big)\phi_7\Big(\frac{\lambda+p}{2}\Big),$$

pri čemu je ϕ_6 parna funkcija sa jediničnom srednjom vrednosti ($\int\phi_6=1$), ϕ_6, $\phi_7\in C_0^2(\mathbf{R})$ i $\phi_5\in C_0^2(\Pi;C(S_y^d))$. Zatim uvodimo smenu promenljivih $p=\varepsilon\kappa+\lambda$, i puštamo da $\varepsilon\to 0$. Dobijamo sledeće

$$\int_{\mathbf{R}_\lambda}\int_{\Pi\times S^d} \phi_5(t,x,y)\phi_7(\lambda)\Big(y_0+\sum_{i=1}^{d} a_{i_\lambda} y_i\Big)\,d\mu^{\lambda\lambda}(t,x,y)d\lambda = 0,$$

koristeći da je preslikavanje $(p,q)\mapsto\mu^{pq}$ neprekidno iz $\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to Z(\Pi\times S^d)$ (videti Teoremu 20). Dokaz zaključujemo činjenicom da su test funkcije oblika $\phi_5(t,x,y)\phi_7(\lambda)$ guste u $C_0^2(\Pi\times\mathbf{R}_\lambda;C(S_y^d))$. ❑

Posledica 34 (princip lokalizacije). *Nosač H-mere $\mu^{\lambda\lambda}$, za skoro sve $\lambda \in \mathbf{R}$, leži u skupu*

$$\Big\{(t,x,y) \in \Pi \times S^d \,:\, y_0 + \sum_{i,j=1}^{d} \partial_\lambda f_i(t,x,\lambda) y_i = 0\Big\}. \tag{2.28}$$

Dokaz. Kao što je urađeno u [36], možemo namestiti da nam podintegralna funkcija u (2.19) bude nenegativna koristeći test funkciju

$$\beta(t,x,\lambda,y) = \Big(y_0 + \sum_{i,j=1}^{d} \partial_\lambda f_i(t,x,\lambda) y_i\Big)\beta_1^2(t,x,\lambda),$$

pri čemu je $\beta_1 \in C_0(\Pi \times \mathbf{R}_\lambda)$ proizvoljna funkcija. Kad ubacimo ovu test funkciju u (2.19) i iskoristimo da je β_1 proizvoljna, dobijamo trvrđenje posledice.

Posledica 35. *Pretpostavimo da je vektorska funkcija fluksa prirodno nelinearna (vidi* (2.2)*). Tada je niz $(h_k(t,x,\lambda))_k$ jako prekompaktan u $L^p_{\rm loc}(\Pi \times \mathbf{R})$, $p \in [1,+\infty)$.*

Dokaz: Iz Posledice 34 i uslova prirodne nelinearnosti zaključujemo da je meas(supp$\mu^{\lambda\lambda}$) $= 0$, tj. $\mu^{\lambda\lambda} = 0$, za skoro sve $\lambda \in \mathbf{R}$. Prema teoriji H-mera, [42], imamo da je $\mu^{\lambda\lambda} = 0$, za skoro sve $\lambda \in \mathbf{R}$, ako i samo ako $h^k(\cdot,\cdot,\lambda) \to h(\cdot,\cdot,\lambda)$, jako u $L^2_{\rm loc}(\Pi)$, za $\lambda \in \mathcal{E}$. Koristeći Lebegue-ovu teoremu o dominantnoj konvergenciji zaključujemo i da $h^k(\cdot,\cdot,\lambda) \to h(\cdot,\cdot,\lambda)$ jako u $L^p_{\rm loc}(\Pi)$, za sve $p \in [1,+\infty)$, jer je niz $(h_k)_k$ ograničen. ❑

2.1.3 Dokaz glavne teoreme

Dokazaćemo Teoremu 26.

Dokaz Teoreme 26: Pratimo postupak iz [13]. Delimo dokaz na pet koraka:

1. korak: Neka je η proizvoljna glatka konveksna funkcija. Preko funkcija

$$h_\varepsilon(t,x,\lambda) = \begin{cases} 1, & 0 < \lambda \le u^\varepsilon(t,x), \\ -1, & 0 > \lambda \ge u^\varepsilon(t,x), \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

možemo zapisati (2.6) kao

$$\begin{aligned}
&\partial_t \int_{\mathbf{R}_\lambda} h_\varepsilon(t,x,\lambda)\eta'(\lambda)d\lambda + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} \int_{\mathbf{R}_\lambda} h_\varepsilon(t,x,\lambda)\partial_\lambda f_i(t,x,\lambda)\eta'(\lambda)d\lambda \\
&\quad - \sum_{i=1}^d \int^{u^\varepsilon(t',x)} D_{x_i v} f_i(t,x,\lambda)\eta'(\lambda)d\lambda + \sum_{i=1}^d \eta'(u^\varepsilon) D_{x_i} f_i(t,x,u^\varepsilon) \\
&= \varepsilon \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(\eta'(u^\varepsilon) b_i(\nabla u^\varepsilon)) - \varepsilon\eta''(u^\varepsilon) \sum_{i=1}^d b_i(\nabla u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i} \\
&\quad + \delta \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(\eta'(u^\varepsilon)\partial_{x_i x_i} u^\varepsilon) - \delta\eta''(u^\varepsilon) \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} u^\varepsilon \partial_{x_i x_i} u^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Testirajući poslednju jednakost na test funkciji $\varphi \in C_0^\infty(\Pi)$, dobijamo

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Pi\times\mathbf{R}} h_\varepsilon(t,x,\lambda)\eta'(\lambda)\varphi_t(t,x)\, d\lambda dx dt \\
&- \sum_{i=1}^d \int_{\Pi\times\mathbf{R}} h_\varepsilon(t,x,\lambda)\partial_\lambda f_i(t,x,\lambda)\eta'(\lambda)\varphi_{x_i}(t,x)\, d\lambda dx dt \\
&+ \sum_{i=1}^d \int_{\Pi\times\mathbf{R}} h_\varepsilon(t,x,\lambda) D_{x_i\lambda} f_i(t,x,\lambda)\eta''(\lambda)\varphi(t,x) d\lambda dx dt \\
&= - \int_\Pi \sum_{i=1}^d \left(\varepsilon b_i(\nabla u^\varepsilon) + \delta \partial_{x_i x_i} u^\varepsilon\right) \eta'(u^\varepsilon)\varphi_{x_i}(t,x) dx dt \\
&- \sum_{i=1}^d \int_\Pi \left(\varepsilon b_i(\nabla u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i} + \delta u^\varepsilon_{x_i} \partial_{x_i x_i} u^\varepsilon\right) \eta''(u^\varepsilon)\varphi(t,x) dx dt.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Kao u [13], posmatramo jednačinu (2.29) u smislu distribucija $\mathcal{D}'_{\Pi\times\mathbf{R}}$. Označimo sa

$$\begin{aligned}
H_i^\varepsilon(t,x) = \varepsilon b_i(\nabla u^\varepsilon), \quad \bar{H}_i^\varepsilon(t,x) = \delta \partial_{x_i x_i} u^\varepsilon, \\
G_i^\varepsilon(t,x) = \varepsilon b_i(\nabla u^\varepsilon) u^\varepsilon_{x_i}, \quad \bar{G}_i^\varepsilon(t,x) = \delta u^\varepsilon_{x_i} \partial_{x_i x_i} u^\varepsilon,
\end{aligned}$$

i primetimo da su sve familije $(H_i^\varepsilon)_\varepsilon$, $(\bar{H}_i^\varepsilon)_\varepsilon$, $(G_i^\varepsilon)_\varepsilon$ i $(\bar{G}_i^\varepsilon)_\varepsilon$, uniformno ograničene u $L^1_{\rm loc}(\Pi \times \mathbf{R})$ (zbog (H1)-(H3) i Lema 28 i 29).

Neka je $\delta(\lambda-u)$ Dirac-ova delta funkcija definisana sa $\langle\delta(\lambda-u),\eta(\lambda)\rangle = \eta(u)$. Tada su funkcionele

$$\begin{aligned}
&m_i^\varepsilon = \delta(\lambda-u^\varepsilon)G_i^\varepsilon, \quad k_i^\varepsilon = \delta(\lambda-u^\varepsilon)\bar{G}_i^\varepsilon,\\
&\pi_i^\varepsilon = \delta(\lambda-u^\varepsilon)H_i^\varepsilon, \quad \bar{\pi}_i^\varepsilon = \delta(\lambda-u^\varepsilon)\bar{H}_i^\varepsilon, \quad i=1,...,d,
\end{aligned}$$

definisane kao distribucije u $\mathcal{D}'(\Pi\times\mathbf{R})$ preko sledećih tenzorskih proizvoda:

$$\begin{aligned}
\langle m_i^\varepsilon,\varphi\otimes\eta'\rangle &= \int_\Pi G_i^\varepsilon(t,x)\varphi(t,x)\eta'(u^\varepsilon(t,x))dxdt,\\
\langle k_i^\varepsilon,\varphi\otimes\eta'\rangle &= \int_\Pi \bar{G}_i^\varepsilon(t,x)\varphi(t,x)\eta'(u^\varepsilon(t,x))dxdt,\\
\langle \pi_i^\varepsilon,\varphi\otimes\eta'\rangle &= \int_\Pi H_i^\varepsilon(t,x)\varphi(t,x)\eta'(u^\varepsilon(t,x))dxdt\\
\langle \bar{\pi}_i^\varepsilon,\varphi\otimes\eta'\rangle &= \int_\Pi \bar{H}_i^\varepsilon(t,x)\varphi(t,x)\eta'(u^\varepsilon(t,x))dxdt.
\end{aligned}$$

Kako je preslikavanje $\eta(\lambda)\mapsto G_i^\varepsilon(t,x)\eta'(u^\varepsilon(t,x))$ neprekidno, prva prezentacija sledi iz Schwartz-ove teoreme o jezgru. Stoga se (2.29) može zapisati kao jednačina u $\mathcal{D}'(\Pi\times\mathbf{R})$ na sledeći način:

$$\partial_t h_\varepsilon(t,x,\lambda) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(h_\varepsilon(t,x,\lambda)\partial_\lambda f_i(t,x,\lambda)) = \tag{2.30}$$

$$\sum_{i=1}^d \partial_\lambda(h_\varepsilon(t,x,\lambda)D_{x_i}f_i(t,x,\lambda)) + \sum_{i=1}^d \left(\partial_{x_i}(\pi_i^\varepsilon+\bar{\pi}_i^\varepsilon) + \partial_\lambda(m_i^\varepsilon+k_i^\varepsilon)\right).$$

2. Korak: U ovom koraku ocenjujemo izraz sa desne strane jednačine (2.30), kako bismo primenili rezultate iz prethodno podpoglavlja. Prvo ćemo pokazati da se π_i^ε i $\bar{\pi}_i^\varepsilon$ mogu pretstaviti u sledećem obliku:

$$\pi_i^\varepsilon = \bar{g}_i^\varepsilon + \partial_\lambda g_i^\varepsilon, \quad \bar{\pi}_i^\varepsilon = \bar{p}_i^\varepsilon + \partial_\lambda p_i^\varepsilon, \quad i=1,...,d, \tag{2.31}$$

za neke $\bar{g}_i^\varepsilon$, g_i^ε, $\bar{p}_i^\varepsilon$ i p_i^ε za koje važi da

$$\bar{g}_i^\varepsilon, g_i^\varepsilon \to 0, \quad \text{kad} \quad \varepsilon\to 0, \quad \text{u} \quad L^{\frac{r+1}{r}}(\Pi\times\mathbf{R}),$$

i

$$\bar{p}_i^\varepsilon, p_i^\varepsilon \to 0, \quad \text{u} \quad L^2(\Pi\times\mathbf{R}).$$

Pokažimo da važi (2.31). Za proizvoljno $\theta(t,x,\lambda) \in C_0^\infty(\Pi \times \mathbf{R})$, koristeći (H1), Lemu 28 i Hölder-ovu nejednakost, dobijamo

$$\begin{aligned}
|\langle \pi_i^\varepsilon, \theta\rangle| &\le C_3\varepsilon \int_\Pi |\nabla u^\varepsilon|^r |\theta|\, dxdt \\
&\le C_3 \varepsilon^{1-\frac{r}{r+1}} \left(\varepsilon \int_\Pi |\nabla u^\varepsilon|^{r+1} dxdt\right)^{\frac{r}{r+1}} \|\theta(t,x,u^\varepsilon(t,x))\|_{L^{r+1}(\Pi)} \\
&\le c\varepsilon^{1-\frac{r}{r+1}} \|\theta\|_{L^{r+1}(\Pi;W^{1,r+1}(\mathbf{R}))}.
\end{aligned}$$

Odavde zaključujemo da $\pi_i^\varepsilon \to 0$ u $L^{\frac{r+1}{r}}(\Pi; W^{-1,r+1}(\mathbf{R}))$, pa se može pretstaviti u obliku (2.31). Zatim, koristeći Schwartz-ovu nejednakost i Lemu 29, dobijamo da za $\bar{\pi}_i^\varepsilon$ važi

$$|\langle \bar{\pi}_i^\varepsilon, \theta\rangle| \le C\frac{\delta}{\varepsilon^{\frac{r+2}{r+1}}} \|\theta\|_{L^2(\Pi;H^1(\mathbf{R}))}.$$

Odavde zaključujemo da ako je $\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}})$, onda $\bar{\pi}_i^\varepsilon \to 0$ u $L^2(\Pi; H^{-1}(\mathbf{R}))$, pa se može pretstaviti u obliku (2.31).

Pokažimo sad da za sve $i = 1, ..., d$

$$\begin{aligned} m_i^\varepsilon, k_i^\varepsilon &\text{ leži u ograničenom podskupu} \\ &\text{prostora ograničenih mera } \mathcal{M}(\Pi \times \mathbf{R}). \end{aligned} \tag{2.32}$$

Naime, iz (H1) i Leme 28 dobijamo da je

$$|\langle m_i^\varepsilon, \theta\rangle| \le \varepsilon \int_\Pi |\nabla u^\varepsilon|\, |b_i(u^\varepsilon)|\, |\theta(t,x,u^\varepsilon)| dxdt \le C \sup_{\Pi\times\mathbf{R}} |\theta(t,x,\lambda)|.$$

Iz Lema 28-29 i nejednakosti

$$ab\theta \le \varepsilon a^2\theta + \varepsilon^{-1} b^2 \theta,$$

dobijamo ocenu

$$|\langle k_i^\varepsilon, \theta\rangle| \le C\frac{\delta}{\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}}} \sup_{\Pi\times\mathbf{R}} |\theta(t,x,\lambda)|$$

odakle možemo zaključiti da važi (2.32).

Konačno posmatrajmo preostali sabirak na desnoj strani jednačine (2.30). Označimo sa

$$\Pi_i^\varepsilon = D_{\lambda x_i} f_i(t,x,\lambda) H(u_\varepsilon - \lambda), \quad i = 1, ..., d.$$

Za proizvoljno $\theta(t,x,\lambda) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$ i svako $i = 1,...,d$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\langle \Pi_i^\varepsilon, \theta \rangle =& |\int_{\Pi\times\mathbf{R}} h_\varepsilon(t,x,\lambda) D_{x_i} f_i(t,x,\lambda)\theta_\lambda(t,x,\lambda) dtdxd\lambda| \\
&\leq \|\theta_\lambda\|_{C^0(\Pi\times\mathbf{R})} \int_{\mathrm{supp}\theta} |D_\lambda f_i(t,x,\lambda)| dtdxd\lambda \leq C\|\theta_\lambda\|_{C^0(\Pi\times\mathbf{R})},
\end{aligned}$$

pri čemu je C konstanta koja zavisi samo od nosača test funkcije θ. Stoga za svako $i = 1,...,d$, familija Π_i^ε leži u lokalno ograničenom podskupu Radon-ovih mera $\mathcal{M}(\Pi \times \mathbf{R})$.

3. Korak: Iz prethodnog koraka zaključujemo da se (2.30) može zapisati kao

$$\begin{aligned}
&\partial_t h_\varepsilon(t,x,\lambda) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(h_\varepsilon(t,x,\lambda)\partial_\lambda f_i(t,x,\lambda)) \\
&= \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}\left(\partial_\lambda Q_i^\varepsilon(t,x,\lambda) + \bar{Q}_i^\varepsilon(t,x,\lambda)\right) + \sum_{i=1}^d \left(\partial_\lambda P_i^\varepsilon + \bar{P}_i^\varepsilon\right),
\end{aligned}$$

pri čemu, zbog $2 \geq \frac{r+1}{r}$, imamo da su Q_i^ε i $\bar{Q}_i^\varepsilon$, $i = 1,...,d$, prekompaktni u $L_{\mathrm{loc}}^{\frac{r+1}{r}}(\Pi \times \mathbf{R})$, dok su P_i^ε i $\bar{P}_i^\varepsilon$, $i = 1,...,d$, lokalno ograničeni u prostoru Radon-ovih mera $\mathcal{M}(\Pi \times \mathbf{R})$.

Stoga možemo da primenimo Posledicu 35 na familiju $(h_\varepsilon)_\varepsilon$ da bismo zaključili da postoji podniz $(h_k)_k \subset (h_\varepsilon)_\varepsilon$ takav da za sve $R \in \mathbf{N}$, važi

$$\left(\int_{-R}^R h_k(t,x,\lambda)d\lambda\right)_{k\in\mathbf{N}} \text{ je konvergentan u } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d). \tag{2.33}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
&\left|u^\varepsilon - \int_{-R}^R h_\varepsilon(t,x,\lambda)d\lambda\right| = \left|\int_\lambda h_\varepsilon(t,x,\lambda)d\lambda - \int_{-R}^R h_\varepsilon(t,x,\lambda)d\lambda\right| \\
&= \left|\int_R^\infty h_\varepsilon(t,x,\lambda)d\lambda + \int_{-\infty}^{-R} h_\varepsilon(t,x,\lambda)d\lambda\right| \\
&= H(u^\varepsilon - R)(u^\varepsilon - R) + H(-u^\varepsilon - R)(-u^\varepsilon - R).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Iz Leme 28 zaključujemo da postoji konstanta $K_1 > 0$ koja ne zavisi od ε tako da je

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{\mathbf{R}} [H(u^\varepsilon - R)(u^\varepsilon - R) + H(-u^\varepsilon - R)(-u^\varepsilon - R)] dxdt \\
&\leq \int_{|u^\varepsilon|>R} |u^\varepsilon| dxdt \leq \frac{1}{R} \int_0^t \int_x |u^\varepsilon|^2 dxdt \leq \frac{K_1}{R},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

jer je

$$\int_{|u^\varepsilon|>R} R|u^\varepsilon| dxdt \leq \int_{|u^\varepsilon|>R} |u^\varepsilon|^2 dxdt < \tilde{K}_1.$$

Stoga iz (2.34) i (2.35) sledi da je

$$\int_0^t \int_{\mathbf{R}} \left| u^\varepsilon - \int_{-R}^R h_\varepsilon(t,x,\lambda) d\lambda \right| dtdx \leq \frac{K_1}{R}. \tag{2.36}$$

Sada je lako pokazati da je niz $(u^k)_k$, indeksiran kao u (2.33), Cauchy-ev niz u $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$. Za svaki kompaktan skup $K \subset\subset \Pi$, dobijamo ocenu

$$\begin{aligned}
&\int_K |u^{k_1} - u^{k_2}| dxdt \\
&\leq \int_K \left| u^{k_1} - \int_{-R}^R h_{k_1}(t,x,\lambda) d\lambda \right| dxdt + \int_K \left| u^{k_2} - \int_{-R}^R h_{k_2}(t,x,\lambda) d\lambda \right| dxdt \\
&+ \int_K \left| \int_{-R}^R h_{k_1}(t,x,\lambda) d\lambda - \int_{-R}^R h_{k_2}(t,x,\lambda) d\lambda \right| dxdt \leq \frac{2K_1}{R} + \gamma(k_1, k_2),
\end{aligned}$$

pri čemu se $\frac{2K_1}{R}$ pojavljuje zbog (2.36), i γ je funkcija koja konvergira ka nuli kad $k_i \to \infty$, $i = 1, 2$, i sve je tako jer je $(h_k)_k$ konvergentan u $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi \times \mathbf{R})$.

Stoga vidimo da je podniz $(u^k)_k \subset (u^\varepsilon)_\varepsilon$ Cauchy-ev niz u $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$, što implicira $L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi)$-prekompaktnost familije $(u^\varepsilon)_\varepsilon$. ❑

Primetimo da ako je $\delta = o(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$, $(u_n)_n$ konvergira ka jedinstvenom entropijskom rešenju jednačine (1.1).

2.2 Difuziono-disperziona granica sa prekidnim fluksom

U slučaju kada radimo sa prekidnim fluksom imamo još jednu dodatnu aproksimaciju. Naime, prekidan fluks je potrebno aproksimirati nizom "lepših" funkcija, te se zbog toga uvodi pojam "difuziono-disperzione-uglačavajuće granica" (engl. zero diffusion-dispersion-smoothing limits).

U radu [12] posmatran je višedimenzionalni zakon održanja sa prekidnim fluksom, regularizovan difuzijom i disperzijom, čiji je fluks dodatno regularizovan uglačavanjem prekida funkcije fluksa. Tačnije, posmatra se konvergencija glatkih rešenja $u = u^{\varepsilon}(t,x)$, $(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x f_\varrho(t,x,u) = \varepsilon \operatorname{div}_x b(\nabla u) + \delta \sum_{j=1}^{d} \partial^3_{x_j x_j x_j} u, \tag{2.37}$$

kada $\varepsilon \to 0$, pri čemu i $\delta = \delta(\varepsilon), \varrho = \varrho(\varepsilon) \to 0$. Prekidan fluks $f \in C(\mathbf{R}; BV(\mathbf{R}^+_t \times \mathbf{R}^d_x))$ aproksimiran je nizom funkcija $\{f_\varrho\}$ koje su glatke po svim promenljivama, na sledeći način

$$\sup_{u \in \mathbf{R}} \|f_\varrho(t,x,u) - f(t,x,u)\|_{L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)} \to 0, \quad \varrho \to 0, \quad p > 2.$$

Kao i do sad, cilj je pokazati da slaba rešenja problema (2.37), $u_{\varepsilon,\delta} \in L^\infty([0,T]; H^4(\mathbf{R^d}))$, konvergiraju ka rešenju hiperboličnog zakona održanja,

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x f(t,x,u) = 0, \quad u = u(t,x),\ x \in \mathbf{R}^d,\ t \geq 0. \tag{2.38}$$

Posmatra se i početni uslov

$$u_{\varepsilon,\delta}(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{2.39}$$

kao i isti početni uslov pri čemu u_0 zavisi od ε. Pretpostavke o difuziji $b(\lambda) = (b_1(\lambda), \dots, b_n(\lambda))$ su slične kao u prethodnom poglavlju , ali ćemo ih navesti zbog kompletosti.

(H1) Postoje konstante $C_1, C_2 > 0$ za koje važi

$$C_1|\lambda|^2 \leq \lambda \cdot b(\lambda) \leq C_2|\lambda|^2 \text{ za sve } \lambda \in \mathbf{R}^d.$$

(H2) Matrica $Db(\lambda)$ je pozitivno definitna, uniformno po $\lambda \in \mathbf{R}^d$, tj. za sve $\lambda, \varrho \in \mathbf{R}^d$, postoji konstanta $C_3 > 0$ tako da je

$$\varrho^T Db(\lambda)\varrho \geq C_3|\varrho|^2.$$

Dodatna pretpostavka na fluks f je sledeća:

(H3) Postoje konstante $C, \alpha > 0$ takve da je

$$\sum_{i=1}^{d} |\partial_u f_i(t,x,u)| \leq C,$$

$$\sum_{i,j=1}^{d} |\partial_{x_i} f_j(t,x,u)| \leq \frac{\mu(t,x)}{1+|u|^{1+\alpha}},$$

gde je $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ ograničena mera, pa se stoga gornja nejednakost tumači u smislu mera.

Dobijene a priori ocene date su u sledećoj teoremi.

Teorema 36. *Neka je fluks $f = f(t,x,u)$ Lipschitz-neprekidan na $\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R}$ i neka važi (H3). Neka je početni uslov $u_0 \in L^2(\boldsymbol{R}^d)$. Pod pretpostavkama (H1)–(H2), niz rešenja $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ problema* (2.37)–(2.39) *za svako $t \in [0,T]$ zadovoljava sledeće:*

$$\begin{aligned}\int_{\boldsymbol{R}^d} |u_\varepsilon(t,x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^d} |\nabla u_\varepsilon(t',x)|^2 dx dt' \\ \leq C_4 \left(\int_{\boldsymbol{R}^d} |u_0(x)|^2 dx - \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^d} \int_0^{u_\varepsilon(t',x)} \operatorname{div}_x f(t',x,v) dv dx dt' \right),\end{aligned} \tag{2.40}$$

i

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 \int_{\boldsymbol{R}^d} |\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2 dx + \varepsilon^3 \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^d} |D^2 u_\varepsilon(t',x)|^2 dx dt' \\ \leq C_5 \Big(\varepsilon^2 \int_{\boldsymbol{R}^d} |\nabla u_0(x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\boldsymbol{R}^d} \sum_{k=1}^{d} |\partial_{x_k} f(t',x,u_\varepsilon(t',x))|^2 dx dt' \\ + \|\partial_u f\|^2_{L^\infty(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R})} \Big),\end{aligned} \tag{2.41}$$

za konstante C_4 i C_5.

Dokaz ove teoreme je sličan dokazu Lema 28 i 29, stoga ćemo ga ovde izostaviti.

Sada posmatrajmo problem (2.38)-(2.39), gde je početni uslov $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^d)$, uz sledeće pretpostavke o fluksu $f = f(t,x,u)$, $(t,x,u) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$, **(H4)**:

(H4a) Pretpostavimo da je fluks $f \in C(\mathbf{R}; BV(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d))$ i da za svako $l \in \mathbf{R}^+$ važi

$$\max_{u\in[-l,l]} f(t,x,u) \in L^p_{\rm loc}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d), \quad p>2.$$

(H4b) Postoji niz $f_\varrho = (f_{1\varrho}, \dots, f_{d\varrho})$, $\varrho \in (0,1)$, $f_\varrho = f_\varrho(t,x,u) \in C^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R})$, koji za neko $p>2$ i svako $l \in \mathbf{R}^+$ zadovoljava sledeće:

$$\lim_{\varrho\to 0} \max_{z\in[-l,l]} \|f_\varrho(t,x,z) - f(t,x,z)\|_{L^p(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)} = 0, \tag{2.42a}$$

$$\sum_{i=1}^d |\partial_{x_i} f_{i\varrho}(t,x,u)| \le \frac{\mu_1(t,x)}{1+|u|^{1+\alpha}}, \tag{2.42b}$$

$$\varrho^3 \sum_{i=1}^d |\partial_{x_i} f_{i\varrho}(t,x,u)|^2 \le \mu_2(t,x), \tag{2.42c}$$

$$\sum_{i=1}^d |\partial_u f_{i\varrho}(t,x,u)| \le \frac{C}{\beta(\varrho)}, \tag{2.42d}$$

$$\sum_{i=1}^d |\partial^2_{x_i u} f_{i\varrho}(t,x,u)| \le \frac{\mu_3(t,x)}{1+|u|^{1+\alpha}}, \tag{2.42e}$$

gde su $\mu_i \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$, $i=1,2,3$, ograničene mere.

Dobar način da se aproksimira fluks je sledeći. Neka je $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$ i $\varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ proizvoljna nenegativna funkcija sa kompaktnim nosačem, čiji je integral (totalna masa) jednak jedinici. Označimo sa

$$\varphi_\varrho(z,u) = \frac{1}{\varrho^{d+1}} \varphi_1(\frac{z}{\varrho}) \frac{1}{\beta(\varrho)} \varphi_2(\frac{u}{\beta(\varrho)}),$$

$z \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ i $u \in \mathbf{R}$, gde je β realna funkcija koja teži ka nuli kad $\varrho \to 0$. U slučaju kada je fluks $f \in C(\mathbf{R}; BV(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)) \cap BV(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d))$ lokalno ograničen, direktan račun nam daje da niz $f_\varrho = f \star \varphi_\varrho = (f_{1\varrho}, \dots, f_{d\varrho})$ zadovoljava **(H4b)** sa $\beta(\varrho) = \varrho$.

Uslov prirodne nelinearnosti u ovom slučaju je sledeći: za sve $(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ i sve $\xi \in \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$, preslikavanje

$$\mathbf{R} \ni \lambda \mapsto \sum_{i=1}^d f_i(t,x,\lambda) \frac{\xi_i}{|\xi|} \tag{2.43}$$

nije konstantno ni na jednom netrivijalnom intervalu realne prave.

Sada možemo posmatrati problem za početni uslov koji zavisi od ε, tj.

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x f_\varrho(t,x,u) = \varepsilon \operatorname{div}_x b(\nabla u) + \delta \sum_{j=1}^{d} \partial^3_{x_j x_j x_j} u, \tag{2.44}$$

$$u(x,0) = u_{0,\varepsilon}(x), \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{2.45}$$

pri čemu fluks f_ϱ zadovoljava pretpostavku (H4b). Pretpostavljamo da rešenje problema (2.44)-(2.45), $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t,x)$, zadovoljava sledeće:

$$\|u_{0,\varepsilon} - u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \to 0 \text{ i } \|u_{0,\varepsilon}\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} + \varepsilon \|u_{0,\varepsilon}\|_{H^1(\mathbf{R}^d)} \leq C. \tag{2.46}$$

Takođe pretpostavljamo da $\varrho = \varrho(\varepsilon) \to 0$ i $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$, kad $\varepsilon \to 0$. U ovom slučaju dobijene su sledeće a priori ocene date u sledećoj teoremi, čiji ćemo dokaz takođe izostaviti.

Teorema 37. *Neka fluks $f(t,x,u)$ zadovoljava (H4) i neka početni uslov u_0 zadovoljava* (2.46)*. Tada niz glatkih rešenja $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ problema* (2.44)-(2.45) *zadovoljava sledeće nejednakosti, za sve $t \in [0,T]$,*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}^d} |u_\varepsilon(t,x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u_\varepsilon(x,s)|^2 dx ds \\ &\qquad \leq C_3 \left(\int_{\mathbf{R}^d} |u_{0,\varepsilon}(x)|^2 dx + C_{10} \right), \end{aligned} \tag{2.47}$$

i

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u_\varepsilon(t,x)|^2 dx + \varepsilon^3 \int_0^t \int_{\mathbf{R}^d} |D^2 u_\varepsilon(t',x)|^2 dx dt' \\ &\qquad \leq C_4 \left(\varepsilon^2 \int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u_{0,\varepsilon}(x)|^2 dx + \frac{\varepsilon}{\varrho} C_{11} + \frac{C_{12}}{\beta(\varrho)^2} \right), \end{aligned} \tag{2.48}$$

za konstante C_{10}, C_{11}, C_{12}, pri čemu su konstante C_3, C_4 iz Teoreme 36.

Specijalan slučaj: linearna difuzija $b(\lambda_1,\ldots,\lambda_d) = (\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$

Ovakav oblik difuzije nije esencijalna restrikcija problema, ali mnogo pojednostavljuje rešavanje problema. Za dobijanje konvergencije rešenja problema (2.44)-(2.45), u ovom slučaju, koristi se sledeća teorema, [33].

Teorema 38. *Neka je vektor $f(t,x,u)$ prirodno nelinearan u smislu* (2.43). *Tada svaki niz $(v_\varepsilon(t,x))_{\varepsilon>0} \subset L^\infty(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^d)$ za koji važi da je za sve $c \in \boldsymbol{R}$,*

$$\partial_t(\theta(v_\varepsilon - c)(v_\varepsilon - c)) + \mathrm{div}_x\,(\theta(v_\varepsilon - c)(f(t,x,v_\varepsilon) - f(t,x,c))) \tag{2.49}$$

prekompaktan u H^{-1}_{loc}, sadrži podniz koji konvergira u $L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^d)$.

Dobija se sledeći rezultat.

Teorema 39. *Neka je vektor f prirodno nelinearan u smislu* (2.43) *i neka zadovoljava (H4). Dalje pretpostavimo da*

$$\varrho^3 = \varepsilon, \qquad \delta = \varepsilon^2\rho^2(\varepsilon), \qquad \frac{\rho(\varepsilon)}{(\beta(\varepsilon^3))^2} \to 0, \ kad\ \varepsilon \to 0, \tag{2.50}$$

i da $u_{0,\varepsilon}$ zadovoljava (2.46). *Tada postoji podniz rešenja $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ problema* (2.44)–(2.45) *koji konvergira ka slabom rešenju problem* (2.38)–(2.39).

Dokaz ove teoreme je koristan jer sadrži mnoštvo korisnih ideja. Zbog toga ćemo navesti značajne korake u dokazu.

Dokaz: Uzmimo proizvoljnu C^2-funkciju $S = S(u)$, $u \in \mathbf{R}$, i pomnožimo jednačinu (2.44) sa $S'(u_\varepsilon)$. Definišimo i entropijski fluks,

$$q(t,x,u) = \int_0^u S'(v)\partial_u f_\varrho\, dv, \qquad q = (q_1, \dots, q_d).$$

Dobijamo,

$$\begin{aligned}
&\partial_t S(u_\varepsilon) + \mathrm{div}_x\, q(t,x,u_\varepsilon) - \mathrm{div}_x\, q(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} + S'(u_\varepsilon)\,\mathrm{div}_x\, f_\varrho(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} \\
&\qquad = \varepsilon\,\mathrm{div}_x\big(S'(u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\big) - \varepsilon S''(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^2 \\
&\qquad\quad + \delta\sum_{j=1}^d D_{x_j}(S'(u_\varepsilon)\partial^2_{x_jx_j}u_\varepsilon) - \delta\sum_{j=1}^d S''(u_\varepsilon)\partial_{x_j}u_\varepsilon\partial^2_{x_jx_j}u_\varepsilon.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Ova formula je značajna jer se različitim izborom funkcije $S(u)$, dobijaju mnogi rezultati.

Kako niz rešenja $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ problema (2.44)–(2.45) nije uniformno ograničen, što je potrebna osobina za primenu Teoreme 38, taj niz modifikujemo funkcijom otsecanja T_l,

$$T_l(u) = \begin{cases} -l, & u \le -l, \\ u, & -l \le u \le l, \\ l, & u \ge l, \end{cases} \tag{2.52}$$

$l \in \mathbf{N}$, i pravimo niz $(T_l(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$.

Pokazaćemo da je niz $(T_l(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ prekompaktan za svako fiksirano l. Označimo sa u_l granicu podniza (u L^1_{loc}) niza $(T_l(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$, što nas dovodi do novog niza $(u_l)_{l>1}$ za koji pokazujemo da konvergira ka slabom rešenju problema (2.38)–(2.39). Da bismo to pokazali moramo regularizovati T_l, C^2-regularizacijom $T_{l,\sigma}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Definišimo $T_{l,\sigma}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ kao $T_{l,\sigma}(0) = 0$ i

$$T'_{l,\sigma}(u) = \begin{cases} 1, & |u| < l - \sigma, \\ \frac{l-|u|}{\sigma}, & l - \sigma < |u| < l, \\ 0, & |u| > l. \end{cases} \tag{2.53}$$

Primetimo da kad $\sigma \to 0$, dobijamo da $T_{l,\sigma}(u) \to T_l(u)$ u L^p_{loc}, za svako $p < \infty$, gde je T_l definisano u (2.52).

Da bismo ocenili $\|T''_{l,\sigma}(u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)}$, ubacimo nove funkcije $T^{\pm}_{l,\sigma}$ umesto S u jednačinu (2.51), pri čemu su $T^{\pm}_{l,\sigma}$ definisani na sledeći način,

$$\begin{aligned} &T^{\pm}_{l,\sigma}(0) = 0, \\ &(T^{+}_{l,\sigma})'(u) = \begin{cases} 1, & u < l, \\ \frac{l+\sigma-u}{\sigma}, & l < u < l + \sigma, \\ 0, & u > l + \sigma, \end{cases} \\ &(T^{-}_{l,\sigma})'(u) = \begin{cases} 1, & u > -l, \\ \frac{l+\sigma+u}{\sigma}, & -l - \sigma < u < -l, \\ 0, & u < -l - \sigma. \end{cases} \end{aligned}$$

Primetimo da je

$$\begin{aligned} &(T^{\pm}_{l,\sigma}(u))' \le 1, \quad |T^{\pm}_{l,\sigma}(u)| \le |u|, \\ &T^{+}_{l,\sigma}(u) = T^{-}_{l,\sigma}(u), \quad \text{za} \quad -l \le u \le l. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Ako ubacimo $S(u) = -T^+_{l,\sigma}(u)$, $q = q_+(t,x,u) = -\int_0^u (T^+_{l,\sigma})'(v)\partial_u f_\varrho\, dv$ u (2.51) i integralimo po $\Pi_t = [0,t]\times \mathbf{R}^d$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\mathbf{R}^d} T^+_{l,\sigma}(u_\varepsilon)dx + \int_{\mathbf{R}^d} T^+_{l,\sigma}(u_0)dx + \frac{\varepsilon}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{l<u_\varepsilon<l+\sigma\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 dxdt\\
&\quad= \iint_{\Pi_t} \operatorname{div}_x q_+(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} dxdt + \iint_{\Pi_t} (T^+_{l,\sigma})'(u_\varepsilon)\operatorname{div}_x f_\varrho(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} dxdt\\
&\quad\quad -\frac{\delta}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{l<u_\varepsilon<l+\sigma\}} \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} u_\varepsilon \partial^2_{x_j x_j} u_\varepsilon dxdt.
\end{aligned}\tag{2.55}
$$

Slično za $S(u) = T^-_{l,\sigma}(u)$, $q = q_-(t,x,u) = \int_0^u (T^-_{l,\sigma})'(v)\partial_u f_\varrho\, dv$ iz (2.51) dobijamo,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^d} T^-_{l,\sigma}(u_\varepsilon)dx - \int_{\mathbf{R}^d} T^-_{l,\sigma}(u_0)dx + \frac{\varepsilon}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{-l-\sigma<u_\varepsilon<-l\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 dxdt\\
&\quad= \iint_{\Pi_t} \operatorname{div}_x q_-(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} dxdt - \iint_{\Pi_t} (T^-_{l,\sigma})'(u_\varepsilon)\operatorname{div}_x f_\varrho(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} dxdt\\
&\quad\quad +\frac{\delta}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{-l-\sigma<u_\varepsilon<-l\}} \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} u_\varepsilon \partial^2_{x_j x_j} u_\varepsilon dxdt.
\end{aligned}\tag{2.56}
$$

Sumirajući (2.55) i (2.56) dobijamo,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{l<|u_\varepsilon|<l+\sigma\}} |\nabla u_\varepsilon|^2 dxdt =\\
&-\int_{\mathbf{R}^d} \left(T^-_{l,\sigma}(u_\varepsilon) - T^+_{l,\sigma}(u_\varepsilon)\right) dx + \int_{\mathbf{R}^d} \left(T^-_{l,\sigma}(u_0) - T^+_{l,\sigma}(u_0)\right) dx\\
&+\iint_{\Pi_t} \operatorname{div}_x q_-(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} dxdt - \iint_{\Pi_t} \operatorname{div}_x q_+(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} dxdt\\
&-\iint_{\Pi_t} (T^-_{l,\sigma})'(u_\varepsilon)\operatorname{div}_x f_\varrho(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} dxdt + \iint_{\Pi_t} (T^+_{l,\sigma})'(u_\varepsilon)\operatorname{div}_x f_\varrho(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon} dxdt\\
&-\frac{\delta}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{-l-\sigma<u_\varepsilon<-l\}} \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} u_\varepsilon \partial^2_{x_j x_j} u_\varepsilon dxdt\\
&-\frac{\delta}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{l<u_\varepsilon<l+\sigma\}} \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} u_\varepsilon \partial^2_{x_j x_j} u_\varepsilon dxdt.
\end{aligned}
$$

Iz (2.54) i definicije funkcija q_- i q_+ sledi da je

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{l<|u_\varepsilon|<l+\sigma\}}|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt &\leq \int_{|u_\varepsilon|>l}2|u_\varepsilon|dx+\int_{|u_0|>l}2|u_0|dx\\&+2\iint_{\Pi_t}\int_{\mathbf{R}}\sum_{i=1}^d|D^2_{x_iv}f_{i\varrho}(t,x,v)|dvdxdt\\&+2\iint_{\Pi_t}\sum_{i=1}^d|\partial_{x_i}f_{i\varrho}(t,x,u_\varepsilon)|dxdt\\&+2\frac{\delta}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{l-\sigma<|u_\varepsilon|<l\}}\sum_{j=1}^d|\partial_{x_j}u_\varepsilon\partial^2_{x_jx_j}u_\varepsilon|dxdt.\end{aligned}\tag{2.57}$$

Bez gubitka opštosti, možemo pretpostaviti da je $l>1$. Imajući to na umu, iz (H4) i (2.57) dobijamo,

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{l<|u_\varepsilon|<l+\sigma\}}|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt\\&\leq\int_{|u_\varepsilon|>l}2|u_\varepsilon|^2dx+\int_{|u_0|>l}2|u_0|^2dx\\&\quad+2\iint_{\Pi_t}\int_{\mathbf{R}}\sum_{i=1}^d\frac{\mu_3(t,x)}{1+|v|^{1+\alpha}}dvdxdt\\&\quad+2\iint_{\Pi_t}\sum_{i=1}^d|\partial_{x_i}f_{i\varrho}(t,x,u_\varepsilon)|dxdt\\&\quad+2\frac{\delta}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{l<|u_\varepsilon|<l+\sigma\}}\sum_{j=1}^d|\partial_{x_j}u_\varepsilon\partial^2_{x_jx_j}u_\varepsilon|dxdt\\&\leq\int_{\mathbf{R}^d}2\left(|u_\varepsilon(x,t)|^2+|u_0(x,t)|^2\right)dx\\&\quad+K_1+K_2+2\frac{\delta}{\sigma\varepsilon^2}\sum_{i=1}^d\|\varepsilon\partial_{x_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)}\|\varepsilon^2\partial_{x_ix_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)}\\&\leq K_5+\left(\frac{\delta^2}{\sigma^2\varepsilon^2(\beta(\varrho))^2}+\frac{\delta^2}{\sigma^2\varepsilon^4}\right)^{1/2}K_3K_4,\end{aligned}\tag{2.58}$$

gde su K_i, $i = 1, \dots, 5$, konstante takve da je (pogl. (2.47) i (2.48)):

$$
\begin{aligned}
&2\iint_{\Pi_t}\int_{\mathbf{R}}\sum_{i=1}^{d}\frac{\mu_3(t,x)}{1+|v|^{1+\alpha}}dvdxdt \le K_1,\\
&2\iint_{\Pi_t}\sum_{i=1}^{d}|\partial_{x_i} f_{i\varrho}(t,x,u_\varepsilon)|dxdt \le K_2,\\
&\sum_{i=1}^{d}\|\varepsilon\partial_{x_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)} \le K_3,\\
&\sum_{i=1}^{d}\|\varepsilon^2\partial_{x_ix_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)} \le \left(\frac{1}{(\beta(\varrho))^2}+\frac{\varepsilon}{\varrho}\right)^{1/2}K_4,\\
&\int_{\mathbf{R}^d} 2\left(|u_\varepsilon(x,t)|^2+|u_0(x,t)|^2\right)dx + K_1 + K_2 \le K_5,\\
&2\frac{\delta}{\sigma\varepsilon^2}\|\varepsilon\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)}\sum_{i=1}^{d}\|\varepsilon^2\partial_{x_ix_i}u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)} \le\\
&\qquad\qquad \le \left(\frac{\delta^2}{\sigma^2\varepsilon^4\beta^2(\varepsilon)}+\frac{\delta^2}{\sigma^2\varepsilon^4}\right)^{1/2}K_3K_4,
\end{aligned}
$$

pri čemu smo u poslednjoj formuli koristili pretpostavku da je $\varepsilon = \varrho$ iz (2.50). Ove ocene slede iz (H4) i a priori ocena, (2.47) i (2.48). Stoga, iz (2.58) dobijamo

$$
\frac{\varepsilon}{\sigma}\iint_{\Pi_t\cap\{l<|u_\varepsilon|<l+\sigma\}}|\nabla u_\varepsilon|^2dxdt \le K_5 + \left(\frac{\delta^2}{\sigma^2\varepsilon^2\beta^2(\varepsilon)}+\frac{\delta^2}{\sigma^2\varepsilon^4}\right)^{1/2}K_3K_4, \quad (2.59)
$$

što je i traženo za ocenu $\|T''_{l,\sigma}(u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)}$.

Uzmimo sad funkciju $U_\rho(z)$ koja zadovoljava $U_\rho(0) = 0$ i

$$
U'_\rho(z) = \begin{cases} 0, & z < 0,\\ \frac{z}{\rho}, & 0 < z < \rho,\\ 1, & z > \rho. \end{cases}
$$

Jasno, U_ρ je konveksna i važi $U'_\rho(z) \to \theta(z)$, u $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$, kad $\rho \to 0$, za sve $p < \infty$. Kao i dosad, θ je Heaviside-ova funkcija. Ubacimo $S(u_\varepsilon) =$

$U_\rho(T_{l,\sigma}(u_\varepsilon)-c)$ u (2.51), da bismo dobili

$$\begin{aligned}\partial_t\Big(\theta(T_l(u_\varepsilon)-c)(T_l(u_\varepsilon)-c)\Big)& \\ +\operatorname{div}_x\Big(\theta(T_l(u_\varepsilon)-c)(f(t,x,T_l(u_\varepsilon))-f(t,x,c))\Big)& \\ =\Gamma_{1,\varepsilon}+\Gamma_{2,\varepsilon}+\Gamma_{3,\varepsilon}+\Gamma_{4,\varepsilon}+\Gamma_{5,\varepsilon}+\Gamma_{6,\varepsilon}+\Gamma_{7,\varepsilon}&\end{aligned} \tag{2.60}$$

pri čemu su

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,\varepsilon}&=\partial_t\Big(\theta(T_l(u_\varepsilon)-c)(T_l(u_\varepsilon)-c)-U_\rho(T_{l,\sigma}(u_\varepsilon)-c)\Big),\\
\Gamma_{2,\varepsilon}&=\operatorname{div}_x\Big(\theta(T_l(u_\varepsilon)-c)(f(t,x,T_l(u_\varepsilon))-f(t,x,c))\\
&\qquad-\int^{u_\varepsilon}U'_\rho(T_{l,\sigma}(v)-c)T'_{l,\sigma}(v)\partial_v f_\varrho(t,x,v)dv\Big),\\
\Gamma_{3,\varepsilon}&=\int^{u_\varepsilon}U'_\rho(T_{l,\sigma}(v)-c)T'_{l,\sigma}(v)\operatorname{div}_x\partial_v f_\varrho(t,x,v)dv\\
&\quad-U'_\rho(T_{l,\sigma}(u_\varepsilon)-c)T'_{l,\sigma}(u_\varepsilon)\operatorname{div}_x f_\varrho(t,x,v)|_{v=u_\varepsilon},\\
\Gamma_{4,\varepsilon}&=\varepsilon\Delta_x U_\rho(T_{l,\sigma}(u_\varepsilon)-c)\\
&\quad+\delta\sum_{i=1}^d D_{x_i}\left(D_u[U_\rho(T_{l,\sigma}(u_\varepsilon)-c)]\partial^2_{x_ix_i}u_\varepsilon\right),\\
\Gamma_{5,\varepsilon}&=-\varepsilon U'_\rho(T_{l,\sigma}(u_\varepsilon)-c)T''_{l,\sigma}(u_\varepsilon)|\nabla u_\varepsilon|^2,\\
\Gamma_{6,\varepsilon}&=-\delta\sum_{i=1}^d D^2_{uu}\left[U_\rho(T_{l,\sigma}(u_\varepsilon)-c)\right]\partial_{x_i}u_\varepsilon\partial^2_{x_ix_i}u_\varepsilon\\
\Gamma_{7,\varepsilon}&=-\varepsilon U''_\rho(T_{l,\sigma}(u_\varepsilon)-c)(T'_{l,\sigma}(u_\varepsilon))^2|\nabla u_\varepsilon|^2.
\end{aligned}$$

U nastavku pretpostavimo da σ zavisi od ε na sledeći način:

$$\sigma=\beta^2(\varepsilon^3). \tag{2.61}$$

Sada možemo pokazati da niz $(T_l(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ zadovoljava uslove Teoreme 38. Stoga treba pokazati da je leva strana jednakosti (2.60) prekompaktna u $H^{-1}_{\rm loc}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$. Za dokaz prekompaktnosti trebaće nam Murat-ova lema, tj. treba da pokažemo sledeće:

(i) Kada levu stranu jednakosti (2.60) zapišemo u obliku div Q_ε, dobijemo $Q_\varepsilon \in L^p_{\rm loc}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ za $p > 2$, i

(ii) Desna strana jednakosti (2.60) je oblika $\mathcal{M}_{\rm loc,B} + H^{-1}_{\rm loc,c}$, gde je $\mathcal{M}_{\rm loc,B}$ skup familija koje su lokalno ograničene u prostoru mera, a $H^{-1}_{\rm loc,c}$ je skup familija prekompaktnih u $H^{-1}_{\rm loc}$.

Prvo, kako je $T_l(u_\varepsilon)$ uniformno ograničen jedinicom, vidimo da je (i) zadovoljeno. Da bismo pokazali (ii), posmatramo svaki sabirak sa desne strane jednakosti (2.60). Precizna ocena funkcija $\Gamma_{i,\varepsilon}$, $i = 1, \dots, 7$, iz (2.60) može se naći u [12] gde je data na šest kucanih stranica. Zaključak tog detaljnog ocenjivanja je da je

$$\begin{aligned}&\partial_t \theta(T_l(u_\varepsilon) - c)(T_l(u_\varepsilon) - c)\\ &\qquad + \mathrm{div}_x\, \theta(T_l(u_\varepsilon) - c)(f(t, x, T_l(u_\varepsilon)) - f(t, x, c)) \in \mathcal{M}_{\rm loc,B} + H^{-1}_{\rm loc,c},\end{aligned}$$

odnosno da (ii) važi i možemo iskoristiti Murat-ovu lemu da bismo zaključili sledeće:

$$\begin{aligned}&\partial_t \theta(T_l(u_\varepsilon) - c)(T_l(u_\varepsilon) - c)\\ &\qquad\qquad + \mathrm{div}_x\, \theta(T_l(u_\varepsilon) - c)(f(t, x, T_l(u_\varepsilon)) - f(t, x, c)) \in H^{-1}_{\rm loc,c}.\end{aligned}$$

Stoga su uslovi Teoreme 38 zadovoljeni, pa sledi da je za sve $l > 0$ niz $(T_l(u_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ prekompaktan u $L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$. Kako je niz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ uniformno ograničen u $L^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$, iz [7, Lemma 7], zaključujemo da je niz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ prekompaktan u $L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$. ❏

Jednodimenzionalni slučaj

Sada ćemo analizirati konvergenciju niza $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ rešenja problema (2.44), (2.45) u jednodimenzionalnom slučaju. Za razliku od višedimenzionalnog slučaja, pretpostavićemo da je fluks neprekidno-diferencijabilan po promenljivoj u. To će nam omogućiti da optimiziramo odnos δ/ε^2. Radićemo pod sledećim pretpostavkama o fluksu $f = f(t, x, u)$, **(H4')**:

(H4a') pretpostavimo da je fluks $f \in C^1(\mathbf{R}; BV(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}_x)) \cap L^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}_x)$ i $\partial_u f \in L^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}_x)$.

(H4b') Postoji niz $(f_\varrho)_{\varrho>0}$ na $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, glatkih funkcija po $(t, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ i neprekidno-diferencijabilnih po promenljivoj $u \in \mathbf{R}$, koji za neko

$p > 2$ zadovoljava sledeće:

$$\lim_{\varrho\to 0}\max_{z\in\mathbf{R}}\|f_\varrho(t,x,z)-f(t,x,z)\|_{L^p_{\rm loc}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})}=0,$$

$$|\partial_x f_\varrho(t,x,u)|\le\frac{\mu_1(t,x)}{1+|u|^{1+\alpha}},\quad \varrho^3|\partial_x f_\varrho(t,x,u)|^2\le\mu_2(t,x),$$

$$|\partial^2_{xu} f_\varrho(t,x,u)|\le\frac{\mu_3(t,x)}{1+|u|^{1+\alpha}},$$

$$|\partial_u f(t,x,u)|\le C,$$

gde su $\mu_i\in\mathcal{M}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$, $i=1,2,3$, ograničene mere (stoga, gornje nejednakosti interpretiramo u smislu mera).

Pod ovim pretpostavkama dokazaćemo sledeće:

- Bez pretpostavke prirodne nelinearnosti na fluks, niz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ konvergira do na podniz ka rešenju problema (2.38)–(2.39) u smislu distribucija kad je $\delta=\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ i $\varrho=\mathcal{O}(\varepsilon)$ (blaže pretpostavke nego u multidimenzionalnom slučaju).
- Ako dodatno pretpostavimo $f\in C^2(\mathbf{R};BV(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}_x))\cap L^\infty(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}_x)$, i da je f prirodno nelinearan u smislu (2.64), onda je niz rešenja $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ problema (2.44)–(2.45) jako prekompaktan u $L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$ za $\delta=\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Primedba 40. Dokaz se oslanja na a priori ocene (2.47) i (2.48). Primetimo da u nejednakosti (2.48) možemo uzeti da je $\beta(\varrho)=1$ zbog (H4a').

Trebaće nam sledeći oblik Teoreme o Young-ovim merama.

Teorema 41. [34] *Neka je niz (u_{ε_k}) uniformno ograničen u $L^\infty(\boldsymbol{R}^+;L^p(\boldsymbol{R}^d))\cap L^r(\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^d)$, $p,r\ge 1$. Tada postoji njegov podniz (u_{ε_k}) i niz probabilističkih mera*

$$\nu_{(t,x)}\in\mathcal{M}(\boldsymbol{R}),\quad (t,x)\in\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^d$$

tako da granica

$$\bar g(t,x):=\lim_{k\to\infty}g(t,x,u_{\varepsilon_k}(t,x))$$

postoji u smislu distribucija za sve funkcije g merljive po $(t,x)\in\boldsymbol{R}^+\times\boldsymbol{R}^d$, neprekidne po $u\in\boldsymbol{R}$ i za uniformno sve (t,x) zadovoljavaju sledeće:

$$|g(t,x,u)|\le C(1+|u|^q)$$

za konstante C, M i q, takve da je $0 \leq q < p$. Granica je pretstavljena preko očekivanja

$$\bar{g}(t,x) = \int_{\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^d} g(t,x,\lambda) d\nu_{(t,x)}(\lambda),$$

za skoro sve $(t,x) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^d$.

Takav niz mera $\nu = (\nu_{(t,x)})$ zove se Young-ova mera asocirana nizu $(u_{\varepsilon_k})_{k\in\mathbf{N}}$.

Dalje,

$$u_{\varepsilon_k} \to u \quad \text{u} \quad L^r_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^d),\ 1 \leq r < p$$

ako i samo ako

$$\nu_y = \delta_{u(y)} \quad \textit{skoro svuda.}$$

Takođe će nam trebati i tzv. Div-Curl lema.

Lema 42 (Div-Curl)**.** *Neka je $Q \subset \boldsymbol{R}^2$ ograničeni domen. Pretpostavimo da je*

$$\begin{aligned} v^1_\varepsilon &\rightharpoonup \overline{v}^1, \quad v^2_\varepsilon \rightharpoonup \overline{v}^2, \\ w^1_\varepsilon &\rightharpoonup \overline{w}^1, \quad w^2_\varepsilon \rightharpoonup \overline{w}^2, \end{aligned}$$

u $L^2(Q)$, kad $\varepsilon \to 0$. Pretpostavimo takođe da dva niza $\{\mathrm{div}\,(v^1_\varepsilon, v^2_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ i $\{\mathrm{curl}\,(w^1_\varepsilon, w^2_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ leže u kompaktnom podskupu prostora $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(Q)$, gde je

$$\mathrm{div}\left(v^1_\varepsilon, v^2_\varepsilon\right) = \partial_{x_1} v^1_\varepsilon + \partial_{x_2} v^2_\varepsilon \quad i \quad \mathrm{curl}\left(w^1_\varepsilon, w^2_\varepsilon\right) = \partial_{x_1} w^2_\varepsilon - \partial_{x_2} w^1_\varepsilon.$$

Tada, do na podniz, važi

$$\left(v^1_\varepsilon, v^2_\varepsilon\right) \cdot \left(w^1_\varepsilon, w^2_\varepsilon\right) \to \left(\overline{v}^1, \overline{v}^2\right) \cdot \left(\overline{w}^1, \overline{w}^2\right), \quad u\ \mathcal{D}'(Q),\ kad\ \varepsilon \downarrow 0.$$

Lema 43. *Neka niz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in L^2(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R})$ slabo konvergira u $L^2(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R})$ ka funkciji $u \in L^2(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R})$. Pretpostavimo da je $\eta(t,x,\lambda)$, $(t,x,\lambda) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^2$ funkcija takva da je $\eta \in C^2(\boldsymbol{R}_\lambda; L^\infty \cap BV(\boldsymbol{R}^+_t \times \boldsymbol{R}_x))$.*

Označimo sa η_n odsecanje funkcije η,

$$\eta_n(t,x,\lambda) = \begin{cases} \eta(t,x,\lambda), & |\lambda| < n, \\ 0, & |\lambda| > 2n \end{cases}, \quad (t,x) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}, \tag{2.62}$$

i sa $q_n(t,x,\lambda)$ odgovarajući entropijski fluks.

Ako za sve $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\mathrm{div}(\eta_n(u_\varepsilon), q_n(t,x,u_\varepsilon)) \in H^{-1}_{\mathrm{loc,c}}(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}), \tag{2.63}$$

tada je granična funkcija u slabo rešenje jednačine (2.38).

Dalje ako je fluks $f = f(t, x, \lambda)$ dvaput diferencijabilan po λ, i prirodno nelinearan, tj. za sve $(t, x) \in \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^d$ preslikavanje

$$\boldsymbol{R} \ni \lambda \mapsto \partial_\lambda f(t, x, \lambda) \text{ nije konstantno} \tag{2.64}$$

na netrivijalnim intervalima, tada niz $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \to u$, jako u $L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R})$.

Dokaz: Primenićemo metod kompenzovane kompaktnosti kao u [37]. Prvo primetimo da iz Teoreme 41 imamo da postoji podniz $(u_{\varepsilon_k}) \subset (u_\varepsilon)$ i niz probabilističkih mera

$$\nu_{(t,x)} \in \mathcal{M}(\mathbf{R}), \quad (t, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$$

tako da limes

$$\bar{g}(t, x) := \lim_{k\to\infty} g(t, x, u_{\varepsilon_k}(t, x))$$

postoji u smislu distribucija za sve funkcije g merljive po $(t, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, neprekidne po $u \in \mathbf{R}$, koje uniformno, za sve (t, x), zadovoljavaju uslov

$$|g(t, x, u)| \leq C(1 + |u|^q),$$

za konstante C, M i q, takve da je $0 \leq q < p$, i pretstavljen je preko

$$\bar{g}(t, x) = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}} g(t, x, \lambda) d\nu_{(t,x)}(\lambda),$$

za skoro sve $(t, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$. Odavde, zbog (H4), zaključujemo da za fluks $f(t, x, v)$ važi

$$\lim_{k\to\infty} f(t, x, u_{\varepsilon_k}(t, x)) = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}} f(t, x, \lambda) d\nu_{(t,x)}(\lambda).$$

Primetimo da je

$$u(t, x) = \int \lambda \, d\nu_{(t,x)}(\lambda). \tag{2.65}$$

Izaberimo $\eta(u) = I(u) = u$ u (2.62), i posmatrajmo vektorsko polje

$$(I_n(u_\varepsilon), f_n(t, x, u_\varepsilon)),$$

gde je $f_n(t, x, u_\varepsilon) = I'_n(v)\partial_\lambda f(t, x, u_\varepsilon)$, i $(-\psi_n(t, x, u_\varepsilon), \phi_n(u_\varepsilon))$, pri čemu je $\phi \in C^1(\mathbf{R})$ proizvoljna entropija, a ψ_n je entropijski fluks koji odgovara ϕ_n.

Ovde I_n i ϕ_n označavaju glatke funkcije odsecanja za I i ϕ, redom, vidi (2.62).

Zbog (2.63) možemo primeniti Div-Curl lemu na dato vektorsko polje. Stavimo da $\varepsilon \to 0$ i, do na podniz, dobijemo da je

$$\begin{aligned} &\int \big(I_n(\lambda)\psi_n(t,x,\lambda) - \phi_n(\lambda) f_n(t,x,\lambda)\big) d\nu_{(t,x)}(\lambda) \\ &= \int \big(\bar{u}_n(t,x)\psi_n(t,x,\lambda) - \bar{f}_n(t,x)\phi_n(\lambda)\big) d\nu_{(t,x)}(\lambda), \end{aligned} \tag{2.66}$$

gde je

$$\bar{f}_n(t,x) = \int f_n(t,x,\lambda) d\nu_{(t,x)}(\lambda), \quad \bar{u}_n(t,x) = \int I_n(\lambda) d\nu_{(t,x)}(\lambda).$$

Dalje, izaberemo $\phi(\lambda) = |\lambda - u(t,x)|$. Primetimo da za $|\lambda| < n$ važi $\psi_n(t,x,\lambda) = \operatorname{sgn}(\lambda - u(t,x))(f(t,x,\lambda) - f(t,x,u(t,x)))$. Stoga iz (2.66) dobijamo sledeće

$$\begin{aligned} &\int_{-n}^{n} \Big[\lambda \operatorname{sgn}(\lambda - u(t,x))(f(t,x,\lambda) - f(t,x,u(t,x))) \\ &\qquad - |u(t,x) - \lambda| f(t,x,\lambda)\Big] d\nu_{(t,x)}(\lambda) \\ &- \int_{-n}^{n} \Big[u(t,x) \operatorname{sgn}(\lambda - u(t,x))(f(t,x,\lambda) - f(t,x,u(t,x))) \\ &\qquad - |u(t,x) - \lambda| \bar{f}_n\Big] d\nu_{(t,x)}(\lambda) \\ &= - \left(\int_{-\infty}^{-n} + \int_{n}^{\infty}\right) \big(I_n(\lambda)\psi_n(t,x,\lambda) - \phi_n(\lambda) f_n(t,x,\lambda)\big) d\nu_{(t,x)}(\lambda) \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{-n} + \int_{n}^{\infty}\right) \big(u(t,x)\psi_n(t,x,\lambda) - \bar{f}_n \phi_n(\lambda)\big) d\nu_{(t,x)}(\lambda) \\ &\quad + \left(\int_{-\infty}^{-n} + \int_{n}^{\infty}\right) (I_n(\lambda) - \lambda) d\nu_{(t,x)}(\lambda) \int \psi_n(t,x,\lambda) d\nu_{(t,x)}(\lambda). \end{aligned} \tag{2.67}$$

Jasno je da za sve fiksirane $(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ desna strana jednakosti (2.67) teži ka nuli kad $n \to \infty$, što implicira

$$\begin{aligned}&\int \big(\lambda \mathrm{sgn}(\lambda - u(t,x))(f(t,x,\lambda) - f(t,x,u(t,x)))\\ &\qquad - |u(t,x)-\lambda| f(t,x,\lambda)\big) d\nu_{(t,x)}(\lambda)\\ &- \int \big(u(t,x)\mathrm{sgn}(\lambda - u(t,x))(f(t,x,\lambda) - f(t,x,u(t,x)))\\ &\qquad - |u(t,x)-\lambda| \bar{f}(t,x)\big) d\nu_{(t,x)}(\lambda) = 0.\end{aligned}$$

Odavde lako dobijamo da je

$$(f(t,x,u(t,x)) - \bar{f}(t,x)) \int |\lambda - u(t,x)| d\nu_{(t,x)}(\lambda) = 0, \tag{2.68}$$

gde je $\bar{f}(t,x) = \int f(t,x,\lambda) d\nu_{(t,x)}(\lambda)$, odakle sledi da je u slabo rešenje jednačine (2.38). Time smo pokazali prvi deo leme. Detaljniji dokaz može se naći npr. u [37].

Sada pretpostavimo da je $f \in C^2(\mathbf{R}; BV(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}_x)) \cap L^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}_x)$, i da je prirodno nelinearan u smislu (2.64).

Uzmimo proizvoljno $\eta_1(t,x,u) \in C^1((\mathbf{R}; L^\infty \cap BV(\mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x)))$ i $\eta_2 \in C^1(\mathbf{R})$; stoga $\partial_u \eta_1$ zavisi ekspilcitno od (t,x), dok η_2' ne zavisi. Označimo sa $\eta_{1,n}$ i $\eta_{2,n}$ odgovarajuća glatka odsecanja , vidi (2.62), i sa $q_{1,n}$ i $q_{2,n}$ odgovarajuće entropijske flukseve, tj.

$$\begin{aligned} q_{1,n}(t,x,\lambda) &= \int^\lambda \partial_z \eta_{1,n}(t,x,z) \partial_z f(t,x,z) dz,\\ q_{1,n}(t,x,\lambda) &= \int^\lambda \partial_z \eta_{2,n}(z) \partial_z f(t,x,z) dz.\end{aligned}$$

Zbog (2.63) i Div-Curl leme imamo sledeće

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}} (\eta_{1,n}(t,x,\lambda) q_{2,n}(t,x,\lambda) - \eta_2(\lambda) q_{1,n}(t,x,\lambda))\, d\nu_{(t,x)} \qquad (2.69)\\ &= \int_{\mathbf{R}} \eta_{1,n}(t,x,\lambda) d\nu_{(t,x)} \int_{\mathbf{R}} q_{2,n}(t,x,\lambda) d\nu_{(t,x)}\\ &\qquad - \int_{\mathbf{R}} \eta_{2,n}(\lambda) d\nu_{(t,x)} \int_{\mathbf{R}} q_{1,n}(t,x,\lambda) d\nu_{(t,x)}.\end{aligned}$$

Puštamo $n \to \infty$ kao u (2.67), i dobijamo da je

$$\int_{\mathbf{R}} (\eta_1(t,x,\lambda)q_2(t,x,\lambda) - \eta_2(\lambda)q_1(t,x,\lambda))\, d\nu_{(t,x)} \tag{2.70}$$
$$= \int_{\mathbf{R}} \eta_1(t,x,\lambda)d\nu_{(t,x)} \int_{\mathbf{R}} q_2(t,x,\lambda)d\nu_{(t,x)} - \int_{\mathbf{R}} \eta_2(\lambda)d\nu_{(t,x)} \int_{\mathbf{R}} q_1(t,x,\lambda)d\nu_{(t,x)}.$$

Dalje, prateći [17], ubacujemo u (2.70) sledeće:

$$\eta_1(t,x,\lambda) = f(t,x,\lambda) - f(t,x,u(t,x)), \qquad \eta_2(\lambda) = \lambda - u(t,x),$$
$$q_1(t,x,\lambda) = \int_{u(t,x)}^{\lambda} (\partial_v f(t,x,v))^2 dv, \qquad q_2(t,x,\lambda) = f(t,x,\lambda) - f(t,x,u(t,x)),$$

što nas dovodi do sledeće relacije:

$$\left(\int_{\mathbf{R}} (f(t,x,\lambda) - f(t,x,u(t,x)))d\nu_{(t,x)}\right)^2 + \int_{\mathbf{R}} \Bigg((\lambda - u(t,x)) \tag{2.71}$$
$$\cdot \int_{u(t,x)}^{\lambda} (\partial_\varrho f(t,x,\varrho))^2 d\varrho - (f(t,x,\lambda) - f(t,x,u))^2\Bigg) d\nu_{(t,x)}(\lambda) = 0.$$

Zbog Cauchy–Schwarz-ove nejednakosti, imamo

$$(f(t,x,\lambda) - f(t,x,u))^2 = \left(\int_{u(t,x)}^{\lambda} \partial_\varrho f(t,x,\varrho)d\varrho\right)^2$$
$$\leq (\lambda - u(t,x)) \int_{u(t,x)}^{\lambda} [\partial_\varrho f(t,x,\varrho)]^2 d\varrho d\nu_{(t,x)}(\lambda),$$

sa jednakošću samo ako je $f_\varrho(t,x,\varrho)$ konstanta za sve ϱ između $u(t,x)$ i λ. Ipak, zbog prirodne nelinearnosti (2.64), to nije moguće. Stoga odavde i iz (2.71) zaključujemo da je

$$(\lambda - u(t,x)) \int_{u(t,x)}^{\lambda} [\partial_\varrho f(t,x,\varrho)]^2 d\varrho d\nu_{(t,x)}(\lambda) = 0,$$

skoro svuda, pa je i $\nu_{(t,x)} = \delta_{u(t,x)}$ skoro svuda na $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$, što implicira jaku $L^1_{\rm loc}$-konvergenciju niza $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, do na podniz (vidi Teoremu 41). ❑

Sada možemo dokazati glavnu teoremu u jednodimenzionalnom slučaju.

Teorema 44. *Neka je*

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \varrho = \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0, \tag{2.72}$$

i $u_0 \in H^1(\boldsymbol{R})$. *Pretpostavimo da fluks* f *iz jednačine* (2.38), *sa* $d = 1$, *zadovoljava (H4'). Pretpostavimo takođe da funkcija* b *iz* (2.44) *zadovoljava (H1) i (H2). Tada postoji podniz* $(u_{\varepsilon_k}) \subset (u_\varepsilon)$ *rešenja problema* (2.44)–(2.45), *koji konvergira u smislu distribucija ka slabom rešenju problema* (2.38)–(2.39).

Ako je fluks $f \in C^2(\boldsymbol{R}; BV(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}_x)) \cap L^\infty(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}_x)$, *prirodno nelinearan u smislu* (2.64), *tada postoji podniz rešenja* $(u_{\varepsilon_k}) \subset (u_\varepsilon)$ *problema* (2.44)–(2.45), *koji konvergira jako u* $L^1(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R})$ *ka slabom rešenju problema* (2.38)–(2.39).

Dokaz: Neka je funkcija $\eta(t, x, \lambda)$, $(t, x, \lambda) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2$ takva da $\eta \in C^2(\mathbf{R}; L^\infty \cap BV(\mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x))$. Označimo sa η_n odsecanje definisano u (2.62), i neka je entropijski fluks koji odgovara entropiji η_n i fluksu f,

$$q_n(t, x, u) = \int^u \partial_v \eta_n(t, x, v) \partial_v f(t, x, v) dv. \tag{2.73}$$

Iz Leme 43 sledi da je dovoljno pokazati da za sve fiksirane $n \in \mathbf{N}$, niz $\operatorname{div}(\eta_n(t, x, u_\varepsilon(t, x)), q_n(t, x, u_\varepsilon(t, x)))$ je prekompaktan u $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$.

Da bismo to pokazali, uzmimo sledeće molifajere

$$\eta_{n,\varepsilon}(t, x, u) = \eta_n(\cdot, \cdot, u) * \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \omega(\frac{t}{\varepsilon^{1/4}}) \omega(\frac{x}{\varepsilon^{1/4}}),$$

gde je ω nenegativna realna funkcija čiji je integral jednak jedinici. Entropijski fluks koji odgovara entropiji η_n i fluksu f označićemo sa

$$q_{n,\varepsilon}(t, x, u) = \int^u \partial_v \eta_{n,\varepsilon}(t, x, v) \partial_v f_\varrho(t, x, v) dv. \tag{2.74}$$

Ovde i u buduće pretpostavljamo da je $\varrho = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Ustvari, možemo uzeti da je $\varrho = \varepsilon$ bez gubitka opštosti. Primetimo da zbog pretpostavki o η i zbog izbora molifajera $\eta_{n,\varepsilon}$ imamo da je

$$\begin{aligned} |\partial_t \eta_{n,\varepsilon}(t, x, u)|, \ |\partial_x \eta_{n,\varepsilon}(t, x, u)|, \ |\partial_{xv} \eta_{n,\varepsilon}(t, x, u)| &\leq \mu(t, x), \\ |\partial_x \eta_{n,\varepsilon}(t, x, u)|^2, \ |\partial^2_{xv} \eta_{n,\varepsilon}(t, x, u)|^2 &\leq \frac{\mu(t, x)}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{2.75}$$

za lokalno ograničenu Radonovu meru $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$.

Zatim primenimo jednačinu (2.51) pri čemu je S zamenjeno sa $\eta_{n,\varepsilon}$. Dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&D_t\eta_n(t,x,u_\varepsilon) + D_x q_n(t,x,u_\varepsilon)\\
&\quad= \int^{u_\varepsilon} \big(\partial^2_{xv} f_\varrho(t,x,v)\partial_v\eta_{n,\varepsilon}(t,x,v) + \partial_v f_\varrho(t,x,v)\partial^2_{xv}\eta_{n,\varepsilon}(t,x,v)\big)\,dv\\
&\quad- \partial_v\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon)\partial_x f_\varrho(t,x,u_\varepsilon) - \partial_t\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon)\\
&\quad+ \varepsilon D_x(\partial_v\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon)b(\partial_x u_\varepsilon)) - \varepsilon\partial^2_{vv}\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon)b(\partial_x u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon\\
&\quad- \varepsilon\partial_x b(u_\varepsilon)\partial^2_{xv}\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) - \delta\partial^2_{xx}u_\varepsilon\partial^2_{xv}\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon)\\
&\quad+ \delta D_x(\partial_v\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon)\partial^2_{xx}u_\varepsilon) - \frac{\delta}{2}\partial^2_{vv}\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon)D_x(\partial_x u_\varepsilon)^2\\
&\quad+ D_x(-q_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) + q_n(t,x,u_\varepsilon))\\
&\quad+ D_t(-\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) + \eta_n(t,x,u_\varepsilon)).
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Sada primenjujemo sličnu proceduru kao i u višedimenzinalnom slučaju. Iz (H4b') i (2.75) dobijamo da postoji konstanta C_1 koja zavisi samo od η_n takva da važi

$$\begin{aligned}
\Big|\int^{u_\varepsilon} \Big(\partial^2_{xv} f_\varrho(t,x,v)\partial_v\eta_n(t,x,v) + \partial_v f_\varrho(t,x,v)\partial_v\eta_n(t,x,v)\Big)dv\Big| &\leq\\
\leq C_1(\mu_3(t,x) + \mu(t,x)),&
\end{aligned} \tag{2.77}$$

odakle sledi ograničenost u smislu mera.

Slično, postoji konstanta C_2, tako da je

$$\begin{aligned}
|-\partial_v\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon)\partial_x f_\varrho(t,x,u_\varepsilon) - \partial_t\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon)|&\\
\leq C_2(\mu_1(t,x) + \mu(t,x)),&
\end{aligned} \tag{2.78}$$

odakle sledi ograničenost u smislu mera.

Zatim iz (2.75), (2.47) i (2.48) zaključujemo da je

$$-\varepsilon\partial_x b(u_\varepsilon)\partial^2_{xv}\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) - \delta\partial^2_{xx}u_\varepsilon\partial^2_{xv}\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) \tag{2.79}$$

ograničen u $\mathcal{M}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$ (videti ocene za $\Gamma_{6\varepsilon}$).

Još je i

$$D_x\left(\varepsilon\partial_v\eta_n(t,x,u_\varepsilon)b(\partial_x u_\varepsilon) + \delta\partial_v\eta_n(t,x,u_{\varepsilon_k})\partial^2_{xx}u_{\varepsilon_k}\right) \tag{2.80}$$

prekompaktan u $H^{-1}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$, jer je $|\eta_n'| < C$, $\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\varrho = \mathcal{O}(\varepsilon)$, i iz (2.47) i (2.48) (pogledati i primedbu 40) sledi da je

$$\varepsilon b(\partial_x u_\varepsilon) + \delta \partial_{xx}^2 u_\varepsilon \to 0, \text{ kad } \varepsilon \to 0, \text{ u } L^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}).$$

Slično iz (2.47) i (2.48) (videti ocene za $\Gamma_{6\varepsilon}$) sledi da je

$$\varepsilon \partial_{vv} \eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) b(\partial_x u_\varepsilon) \partial_x u_\varepsilon + \frac{\delta}{2} \partial_{vv} \eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) D_x (\partial_x u_\varepsilon)^2 \tag{2.81}$$

ograničen u $\mathcal{M}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$.

Zatim iz (H4b') i definicije $q_{n,\varepsilon}$ i q_n sledi da važi

$$\begin{aligned} &|q_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) - q_n(t,x,u_\varepsilon)| \\ &\quad \le 4nC \max_{-2n<v<2n} |f_\varrho(t,x,v) - f(t,x,v)| \to 0, \end{aligned}$$

u $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$, kad $\varepsilon \to 0$, za proizvoljno $p > 0$ i neku konstantu $C > 0$, odakle sledi prekompaktnost u H^{-1}_{loc} niza

$$D_x(q_{n,\varrho}(t,x,u_\varepsilon) - q_n(t,x,u_\varepsilon)). \tag{2.82}$$

Na isti način možemo zaključiti da

$$\max_{-2n<v<2n} (-\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) + \eta_n(t,x,u_\varepsilon)) \to 0 \quad \text{u} \quad L^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}),$$

i stoga je

$$D_t(-\eta_{n,\varepsilon}(t,x,u_\varepsilon) + \eta_n(t,x,u_\varepsilon)) \in H_c^{-1}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}). \tag{2.83}$$

Iz (2.77)–(2.83) i činjenice da je $(\eta_n(t,x,u_\varepsilon), q_n(t,x,u_\varepsilon)) \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$, koristeći Murat-ovu lemu zaključujemo da je

$$\operatorname{div}(\eta_n(t,x,u_\varepsilon), q_n(t,x,u_\varepsilon)) \in H^{-1}_{\text{loc,c}}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}). \tag{2.84}$$

Konačno iz Leme 43 sledi tvrđenje teoreme. ❑

Glava 3

Novi uslov prirodne nelinearnosti za dvodimenzionalni zakon održanja u heterogenim sredinama

Almost all natural phenomena, and social and economic charges, are governed by nonlinear equations and attempts to understand them using linearized equations turn out to be futile. Analysis and solution of nonlinear equations is more difficult than linear as most of the scientists, students and mathematicians are aware. However, they may not be aware of the fact that there is a special type of nonlinearity called *genuine nonlinearity* which distinguishes itself from other nonlinearities due to very spacial properties...

Phoolan Prasad, Indijski matematičar

3.1 Opis problema

U ovom poglavlju izučavamo dvodimenzionalni skalarni zakon održanja sa prekidnim fluksom i sa početnim uslovom ograničene varijacije. Prekidan fluks aproksimiramo familijom glatkih funkcija, a zakon održanja aproksimiramo tzv. regularizacijom preko viskoznosti (engl. vanishing viscosity). Naš rezultat je novi, slabiji nego u dosadašnjim radovima, uslov prirodne nelinearnosti, koji obezbeđuje jaku prekompaktnost u $L^1_{\rm loc}$ familije rešenja regularizacije posmatranog zakona održanja.

Preciznije, posmatramo sledeći Košijev problem za dvodimenzionalani skalarni zakon održanja

$$\begin{aligned} u_t + \operatorname{div} f(x,y,u) &= 0, \\ u(x,y,0) &= u_0(x,y), \end{aligned} \tag{3.1}$$

gde je $u = u(x,y,t)$, $x,y \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}^+$ i $f = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ (divergenciju posmatramo u odnosu na promenljive x i y). Pretpostavke o početnom uslovu u_0 su sledeće:

$$u_0 \in (BV \cap L^\infty)(\mathbf{R}^2), \quad a \le u_0(x,y) \le b, \quad x,y \in \mathbf{R}. \tag{3.2}$$

Pretpostavljamo da fluks $f = (f_1, f_2)$ ima sledeće osobine:

$$f_i(\cdot,\cdot,\lambda) \in (BV \cap L^\infty)(\mathbf{R}^2), \text{ za sve } \lambda \in \mathbf{R}, \tag{3.3}$$

$$f_i(x,y,\cdot) \in C(\mathbf{R}), \text{ za sve } (x,y) \in \mathbf{R}^2 \tag{3.4}$$

$$0 = f_i(\cdot,\cdot,b) = f_i(\cdot,\cdot,a), \ i = 1,2, \text{ za sve } (x,y) \in \mathbf{R}^2. \tag{3.5}$$

Ako su funkcije f_1 i f_2 glatke, tada je postojanje i jedinstvenost entropijskih rešenja moguće pokazati poznatom Kružkov-ljevom metodom dupliranja promenljivih (engl. of doubling of variables), [20], ili koristeći DiPerna-in koncept meroznačnih rešenja, [6]. Poznato je da za Lipshitz-neprekidan fluks, familija rešenja vanishing-viscosity-regularizacije problema (3.1) konvergira ka rešenju problema (3.1) u jakoj topologiji prostora $L^1(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+)$, [5, 20]. Ali ako je fluks prekidan po promenljivama x, y, ne možemo primeniti klasične rezultate.

Postojanje rešenja problema tipa (3.1) pokazano je nedavno u radu [17]. Dokaz je baziran na dvodimenzionalnoj varijanti, [16], poznate metode kompenzovane kompaktnosti, [41]. Slučaj kada je prostor proizvoljne dimenzije je kompletirao Panov, [33], koristeći drugi Tartar-ov metod, H-mere, [42] (koje je nezavisno od Tartar-a uveo Gerard, [9], pod nazivom mikrolokalne defekt-mere, engl. "microlocal defect measures").

U oba rada, [17, 33], korišćena je sledeća regularizacija problema (3.1) (oznaka Δ označava tzv. Laplasov operator, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$):

$$\partial_t u^{\varepsilon,\delta} + \operatorname{div} f^\delta(x, y, u^{\varepsilon,\delta}) = \varepsilon \Delta u^{\varepsilon,\delta}, \tag{3.6}$$

$$u^{\varepsilon,\delta}|_{t=0} = u_0^\delta, \tag{3.7}$$

gde su aproksimacije f_i^δ i u_0^δ konstruisane na sledeći način. Neka je $\omega : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ proizvoljna glatka funkcija takva da je $\omega(\xi) = 0$ za $|\xi| \geq 1$, i $\int_{\mathbf{R}} \omega(\xi)\, d\xi = 1$. Definišimo

$$f_i^\delta(x, y, \lambda) = \frac{1}{\delta^3} \iiint_{\mathbf{R}^3} f_i(\xi, \eta, \zeta)\omega\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right)\omega\left(\frac{y-\eta}{\delta}\right)\omega\left(\frac{\lambda-\zeta}{\delta}\right) d\xi d\eta d\zeta$$

i

$$u_0^\delta(x, y) = \frac{1}{\delta^2} \iint_{\mathbf{R}^2} u_0(\xi, \eta)\omega\left(\frac{x-\xi}{\delta}\right)\omega\left(\frac{y-\eta}{\delta}\right) d\xi d\eta.$$

Primetimo da iz (3.3), za sve $\lambda \in \mathbf{R}$, važi

$$f_i^\delta(\cdot, \cdot, \lambda) \in (L^\infty \cap BV)(\mathbf{R}^2) \tag{3.8}$$

i $f_i^\delta(\cdot, \cdot, \lambda) \to f_i(\cdot, \cdot, \lambda)$, kad $\delta \to 0$, u $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$, za sve λ.

U radovima [17, 33], autori su dobili egzistenciju rešenja pokazavši da je familija rešenja jednačine (3.6) (tj. jednačine (3.1) regularizovane nestajućom viskoznosti i uglačanjem fluksa) jako prekompaktna u $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+)$. Da bi to pokazali koristili su sledeći uslov prirodne nelinearnosti (ovo je slabija varijanta korišćena u radu [33]; ostale možete naći u [17, 18, 40]): Neka je $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ jedinična sfera. Kažemo da fluks (f_1, f_2) zadovoljava uslov prirodne nelinearnosti ako važi

$$\begin{gathered}\text{za skoro sve } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \text{ i sve } \xi \in S^2 \text{ preslikavnje} \\ \lambda \mapsto \xi_0\lambda + f_1(x, y, \lambda)\xi_1 + f_2(x, y, \lambda)\xi_2 \\ \text{nije konstantno po } \lambda \text{ na bilo kom netrivijalnom intervalu.}\end{gathered} \tag{3.9}$$

Naglasimo da u jednodimenzionalnom slučaju uslov prirodne nelinearnosti nije neophodan za dokaz egzistencije slabog rešenja skalarnog zakona održanja sa fluksom prekidnim po prostornim promenljivama. Preciznije, ako posmatramo familiju rešenja jednodimenzionalne varijante problema (3.6), koristeći argumente kompenzovane kompaktnosti, [12, 18], nije teško pokazati da familija entropijskih rešenja, [17, 33], problema (3.6) slabo konvergira, do na podniz, ka rešenju jednodimenzionalne varijante problema (1.1). Ipak, ne možemo ništa da tvrdimo o jakoj $L^1_{\rm loc}$-prekompaktnosti. Međutim ako oslabimo uslov prirodne nelinearnosti (vidi (3.10) ispod), familija rešenja problema (3.6) je jako prekompaktna u $L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^+)$.

Kao posledicu, u jednodimenzionalnom slučaju, možemo pokazati jaku $L^1_{\rm loc}$-prekompaktnost familije $(u^{\varepsilon,\delta})$, praktično samo pod pretpostavkom da je početni uslov ograničene varijacije. U cilju dobijanja tog rezultata, koristićemo varijante ocena izvedenih u radu [17], i sledeću teoremu:

Teorema 45 ([33], Posledica 2)**.** *Neka je $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ otvoren skup i neka je vektor $\phi(x,u) \in (C(\boldsymbol{R}_u; BV(\Omega)))^n$ prirodno nelinearan u smislu da za skoro sve $x \in \Omega$ i sve $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, $\xi \neq 0$, preslikavanje $(a,b) \ni u \mapsto (\xi, \phi(x,u))$ nije konstantno ni na jednom netrivijalnom intervalu.*

Tada svaki odgraničen niz $(u_k(x))_k \in L^\infty(\Omega)$, $a \le u_k(x) \le b$, koji zadovoljava uslov da je niz

$$\mathrm{div}_x \Big[H(u_k(x) - p)(\phi(x, u_k(x)) - \phi(x,p)) \Big]$$

prekompaktan u $W^{-1,2}_{\rm loc}(\Omega)$, sadrži podniz konvergentan u $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ (H je oznaka za Heaviside-ovu funkciju).

Grubo govoreći, ključni podatak u našoj analizi je je taj da smo dobili da je izvod $u_t(\cdot,\cdot,t)$ ograničen u $L^1(\mathbf{R}^2)$, za svako $t > 0$. To nam omogućava da u_t zamenimo funkcijom $(h(x,y,u))_t$, a u_t prebacimo na desnu stranu jednačine, a da ne pokvarimo argumente potrebne za prekompaktnost. To znači da možemo da zamenimo $\xi_0\lambda$ u (3.9) sa $\xi_0 h(x,y,\lambda)$, pri čemu h biramo tako da važi (3.10) (ovo je ustvari (3.9) pri čemu je $\xi_0\lambda$ zamenjeno sa $\xi_0 h(x,y,\lambda)$). Tada možemo primeniti Teoremu 45 da bismo dobili $L^1_{\rm loc}$-prekompaktnost familije $(u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$.

U sledećem odeljku, prvo ćemo izvesti potrebne a priori ocene, tj. daćemo tri leme potrebne za primenu Teoreme 45, a zatim ćemo i pokazati glavni rezultat ovog poglavlja, Teoremu 49. U poslednjem odeljku ovog poglavlja, primenićemo naš rezultat na jednodimenzioni slučaj i daćemo primer gde možemo primeniti naš novi uslov prirodne nelinearnosti, jer standardni uslov ne može da se primeni.

3.2 A priori ocene i dokaz prekompaktnosti

Da bismo iskoristli Teoremu 45, moramo dobiti sledeće a priori ocene (Leme 46-48).

Lema 46. *Postoji konstanta $c > 0$ tako da za sve $t \in (0, T)$,*

$$\|u^{\varepsilon,\delta}(\cdot,\cdot,t)\|_{L^\infty(\boldsymbol{R}^2)} \le c.$$

Dokaz: Ovo je klasičan rezultat stabilnosti rešenja Košijevog problema za paraboličnu jednačinu. Iz (3.2) i (3.5) sledi da i rešenje $u^{\varepsilon,\delta}$ ostaje ograničeno istim konstantama kao i početni uslov, a i b iz (3.2). ❑

Lema 47. *Ako je $\delta = c\varepsilon$, za neku konstantu $c > 0$, onda postoji konstanta c_0, koja ne zavisi od ε, δ tako da za sve $t > 0$,*

$$\iint_{\boldsymbol{R}^2} |\partial_t u^{\varepsilon,\delta}(\cdot,\cdot,t)|\, dxdy \le c_0.$$

Dokaz: Uvedimo oznaku $w^{\varepsilon,\delta} = \partial_t u^{\varepsilon,\delta}$. Diferenciranjem (3.6) po t dobijamo da $w^{\varepsilon,\delta}$ zadovoljava jednačinu

$$w_t^{\varepsilon,\delta} + \left(\partial_u f_1^\delta(x,y,u^{\varepsilon,\delta}) \cdot w^{\varepsilon,\delta}\right)_x + \left(\partial_u f_2^\delta(x,y,u^{\varepsilon,\delta}) \cdot w^{\varepsilon,\delta}\right)_y = \varepsilon \Delta w^{\varepsilon,\delta}.$$

Kada pomnožimo dobijenu jednačinu sa $\operatorname{sign} w^{\varepsilon,\delta}$ dobijemo da

$$\begin{aligned}|w^{\varepsilon,\delta}|_t &+ \left(\partial_u f_1^\delta(x,y,u^{\varepsilon,\delta}) \cdot |w^{\varepsilon,\delta}|\right)_x + \left(\partial_u f_2^\delta(x,y,u^{\varepsilon,\delta}) \cdot |w^{\varepsilon,\delta}|\right)_y \\ &= \varepsilon\left(\Delta|w^{\varepsilon,\delta}| - \operatorname{sign}' w^{\varepsilon,\delta}\left((w_x^{\varepsilon,\delta})^2 + (w_y^{\varepsilon,\delta})^2\right)\right),\end{aligned}$$

važi u distributivnom smislu. Zatim integralimo dobijeno po $\mathbf{R}^2$ i koristimo (3.8) da bismo dobili

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}&\iint_{\mathbf{R}^2} |w^{\varepsilon,\delta}|(x,y,\cdot)dxdy = \\ &-\iint_{\mathbf{R}^2} \partial_x\left(\partial_u f_1^\delta(x,y,u^{\varepsilon,\delta}) \cdot |w^{\varepsilon,\delta}|\right) + \partial_y\left(\partial_u f_2^\delta(x,y,u^{\varepsilon,\delta}) \cdot |w^{\varepsilon,\delta}|\right) dxdy \\ &+\varepsilon\iint_{\mathbf{R}^2} |w^{\varepsilon,\delta}|_{xx} + |w^{\varepsilon,\delta}|_{yy}\, dxdy \\ &-\varepsilon\iint_{\mathbf{R}^2} \left((w_x^{\varepsilon,\delta})^2 + (w_y^{\varepsilon,\delta})^2\right)\operatorname{sign}'(w^{\varepsilon,\delta})dxdy \\ &= -\varepsilon\iint_{\mathbf{R}^2} \left((w_x^{\varepsilon,\delta})^2 + (w_y^{\varepsilon,\delta})^2\right)\operatorname{sign}'(w^{\varepsilon,\delta})dxdy \le 0,\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je $\iint_{\mathbf{R}^2} |w^{\varepsilon,\delta}|(x,y,\cdot)dxdy$ ne rastuća funkcija po vremenskoj promenljivoj t, tj. da za sve $t>0$, važi

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbf{R}^2} |w^{\varepsilon,\delta}|(x,y,t)dxdy \leq \iint_{\mathbf{R}^2} |w^{\varepsilon,\delta}|(x,y,0)dxdy \\
&= \iint_{\mathbf{R}^2} \left|-\partial_x f_1^\delta(x,y,u_0^\delta) - \partial_y f_2^\delta(x,y,u_0^\delta) + \varepsilon\big((u_0^\delta)_{xx} + (u_0^\delta)_{yy}\big)\right| dxdy \\
&\leq C + \varepsilon \|(u_0^\delta)_{xx} + (u_0^\delta)_{yy}\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \leq C + \frac{\varepsilon}{\delta} \iint_{\mathbf{R}^2} |(u_0^\delta)_x| + |(u_0^\delta)_y|\, dxdy \\
&\leq C + \frac{\varepsilon}{\delta}\|u_0\|_{BV(\mathbf{R}^2)},
\end{aligned}$$

pri čemu se konstanta C dobija iz (3.8) i (3.2). Sada iz uslova $\delta = c\varepsilon$ i ponovo (3.2) možemo zaključiti dokaz tvrđenja leme. ❑

Lema 48. *Postoji konstanta $c>0$ koja ne zavisi od ε i δ takva da važi*

$$\varepsilon \iint_{\boldsymbol{R}^2} \big(u_x^{\varepsilon,\delta}(\cdot,\cdot,t)\big)^2 + \big(u_y^{\varepsilon,\delta}(\cdot,\cdot,t)\big)^2\, dxdy \leq c,$$

za sve $t>0$.

Dokaz: Pomnožimo (3.6) sa $u^{\varepsilon,\delta}$ i integralimo po $\mathbf{R}^2$, da bismo dobili

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \iint_{\mathbf{R}^2} \big(u_x^{\varepsilon,\delta}(\cdot,\cdot,t)\big)^2 + \big(u_y^{\varepsilon,\delta}(\cdot,\cdot,t)\big)^2\, dxdy \\
&= -\iint_{\mathbf{R}^2} \Bigg[u^{\varepsilon,\delta}u_t^{\varepsilon,\delta} + \left(\int_0^{u^{\varepsilon,\delta}} f_1^\delta(x,y,v)dv\right)_x - \int_0^{u^{\varepsilon,\delta}} \big(f_1^\delta(x,y,v)\big)_x dv \\
&+ \left(\int_0^{u^{\varepsilon,\delta}} f_2^\delta(x,y,v)dv\right)_y - \int_0^{u^{\varepsilon,\delta}} \big(f_2^\delta(x,y,v)\big)_y dv\Bigg]dxdy \\
&\leq c\Bigg(\|u_t^{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;L^1(\mathbf{R}^2))} + \iint_{\mathbf{R}^2}\left|\int_0^{u^{\varepsilon,\delta}} \partial_x(f_1^\delta(x,y,v))dv\right| \\
&\qquad + \left|\int_0^{u^{\varepsilon,\delta}} \partial_y(f_2^\delta(x,y,v))dv\right|\Bigg) \\
&\leq c\Bigg(\|u_t^{\varepsilon,\delta}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^+;L^1(\mathbf{R}^2))} + \\
&\qquad \max_{a\leq v\leq b}\|f_1^\delta(x,y,v)\|_{BV(\mathbf{R}^2)} + \max_{a\leq v\leq b}\|f_2^\delta(x,y,v)\|_{BV(\mathbf{R}^2)}\Bigg).
\end{aligned}$$

Sada iz leme 47 i (3.8) sledi dokaz tvrđenja. ❑

Uvešćemo sada uopštenje uslova (3.9) koji ćemo koristiti u dokazu Teoreme 49. Pretpostavljamo da

$$\begin{gathered}\text{postoji funkcija } h(x,y,\lambda)\in C^1(\mathbf{R}_\lambda;L^\infty(\mathbf{R}_x\times\mathbf{R}_y))\\ \text{tako da za sve } \xi\in S^2,\text{ preslikavanje}\\ \lambda\mapsto \xi_0\cdot h(x,y,\lambda)+\xi_1\cdot f_1(x,y,\lambda)+\xi_2\cdot f_2(x,y,\lambda)\\ \text{nije konstantno po } \lambda \text{ ni na jednom netrivijalnom intervalu.}\end{gathered}\tag{3.10}$$

Da bismo koristili uslov (3.10), zapisaćemo jednačinu (3.6) u obliku

$$\begin{aligned}h(x,y,u^{\varepsilon,\delta})_t+f_1^\delta(x,y,u^{\varepsilon,\delta})_x+f_2^\delta(x,y,u^{\varepsilon,\delta})_y&\\ =h(x,y,u^{\varepsilon,\delta})_t-u_t^{\varepsilon,\delta}+\varepsilon(u^{\varepsilon,\delta}_{xx}+u^{\varepsilon,\delta}_{yy}).&\end{aligned}\tag{3.11}$$

Označimo sa $\eta'(\lambda)=H(\lambda-k)$, za neku konstantu k (oznaka H označava Heaviside-ovu funkciju) i definišimo odgovarajuće entropijske flukseve:

$$\begin{aligned}q_0(x,y,\lambda)&=H(\lambda-k)(h(x,y,\lambda)-h(x,y,k)),\\ q_i(x,u,\lambda)&=H(\lambda-k)(f_i(x,y,\lambda)-f_i(x,y,k)),\quad i=1,2,\\ q_i^\delta(x,y,\lambda)&=H(\lambda-k)(f_i^\delta(x,y,\lambda)-f_i^\delta(x,y,k)),\quad i=1,2.\end{aligned}$$

Pomnožimo jednačinu (3.11) sa $\eta'(u^{\varepsilon,\delta})$ i dodajmo joj na obe strane jednakosti $\partial_x q_1(x,y,u^{\varepsilon,\delta})$ i $\partial_y q_2(x,y,u^{\varepsilon,\delta})$. Tako dobijemo da

$$\begin{aligned}&\partial_t q_0(x,y,u^{\varepsilon,\delta})+\partial_x q_1(x,y,u^{\varepsilon,\delta})+\partial_y q_2(x,y,u^{\varepsilon,\delta})=H(u^{\varepsilon,\delta}-k)\cdot\\ &\quad\cdot\Big(\partial_t h(x,y,u^{\varepsilon,\delta})-D_x f_1^\delta(x,y,k)-D_y f_2^\delta(x,y,k)-u_t^{\varepsilon,\delta}\Big)+\\ &\quad+\varepsilon\Big[\partial_x(u_x^{\varepsilon,\delta}\eta'(u^{\varepsilon,\delta}))-(u_x^{\varepsilon,\delta})^2\eta''(u^{\varepsilon,\delta})+\partial_y(u_y^{\varepsilon,\delta}\eta'(u^{\varepsilon,\delta}))-\\ &\quad-(u_y^{\varepsilon,\delta})^2\eta''(u^{\varepsilon,\delta})\Big]+\partial_x(q_1-q_1^\delta)(x,y,u^{\varepsilon,\delta})+\partial_y(q_2-q_2^\delta)(x,y,u^{\varepsilon,\delta})\\ &\quad\le H(u^{\varepsilon,\delta}-k)\cdot\\ &\quad\cdot\Big(\partial_t h(x,y,u^{\varepsilon,\delta})-D_x f_1^\delta(x,y,k)-D_y f_2^\delta(x,y,k)-u_t^{\varepsilon,\delta}\Big)+\\ &\quad+\varepsilon(\partial_x(u_x^{\varepsilon,\delta}\eta'(u^{\varepsilon,\delta}))+\partial_y(u_y^{\varepsilon,\delta}\eta'(u^{\varepsilon,\delta})))+\\ &\quad+\partial_x(q_1-q_1^\delta)(x,y,u^{\varepsilon,\delta})+\partial_y(q_2-q_2^\delta)(x,y,u^{\varepsilon,\delta})\end{aligned}\tag{3.12}$$

važi u $\mathcal{D}'((0,T)\times\mathbf{R}^2)$. Dobijenu nejednakost iskoristićemo u dokazu sledeće teoreme.

Teorema 49. *Neka funkcije f_1, f_2 iz* (3.1) *zadovoljavaju uslove* (3.3)-(3.5) *i* (3.10). *Ako je $\varepsilon = c\delta$, tada je familija rešenja $(u^\varepsilon)_\varepsilon \equiv (u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$ jednačine* (3.6) *jako prekompaktna u $L^1((0,T)\times\boldsymbol{R}^2)$.*

Dokaz: Neka je $\Omega = (0,T)\times\mathbf{R}^2$ i neka $W^{-1,2}_{\mathrm{c,loc}}(\Omega)$ označava familije funkcija koje su prekompaktne u $W^{-1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, dok $\mathcal{M}_{\mathrm{b,loc}}(\Omega)$ označava familije funkcija koje su lokalno ograničene u prostoru Radonovih mera $\mathcal{M}(\Omega)$.

Da bismo iskoristili Teoremu 45, treba da pokažemo da je

$$\operatorname{div}_{(t,x,y)}\left[\big(q_0,q_1,q_2\big)(x,y,u^\varepsilon)\right] \in W^{-1,2}_{\mathrm{c,loc}}(\Omega). \tag{3.13}$$

Iz nejednakosti (3.12) i Schwartz-ove leme o nenegativnim distribucijama sledi da postoji ograničena mera $\mu_k \in \mathcal{M}(\Omega)$, takva da je

$$\begin{aligned}
&\partial_t q_0(x,y,u^\varepsilon) + \partial_x q_1(x,y,u^\varepsilon) + \partial_y q_2(x,y,u^\varepsilon)\\
&\quad = H(u^\varepsilon - k)\left(\partial_t h(x,y,u^{\varepsilon,\delta}) - D_x f_1^\delta(x,y,k) - D_y f_2^\delta(x,y,k) - u_t^\varepsilon\right)\\
&\quad + \partial_x(q_1 - q_1^\delta)(x,y,u^\varepsilon) + \partial_y(q_2 - q_2^\delta)(x,y,u^\varepsilon)\\
&\quad + \varepsilon(\partial_x(u_x^\varepsilon\eta'(u^\varepsilon)) + \partial_y(u_y^\varepsilon\eta'(u^\varepsilon))) + \mu_k(t,x,y),
\end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
&\partial_t H(u^\varepsilon - k)(h(x,y,u^\varepsilon) - h(x,y,k)) + \partial_x H(u^\varepsilon - k)(f_1(x,y,u^\varepsilon) - f_1(x,y,k))\\
&\quad + \partial_y H(u^\varepsilon - k)(f_2(x,y,u^\varepsilon) - f_2(x,y,k))\\
&\quad = \partial_x(q_1(x,y,u^\varepsilon) - q_1^\delta(x,y,u^\varepsilon)) + \partial_y(q_2(x,y,u^\varepsilon) - q_2^\delta(x,y,u^\varepsilon))\\
&\quad + H(u^\varepsilon - k)\left(\partial_u h(x,y,u^\varepsilon)\partial_t u^\varepsilon - D_x f_1^\delta(x,y,k) - D_y f_2^\delta(x,y,k)\right)\\
&\quad + \varepsilon(\partial_x(u_x^\varepsilon\eta'(u^\varepsilon)) + \partial_y(u_y^\varepsilon\eta'(u^\varepsilon))) + \mu_k(t,x,y).
\end{aligned}$$

Da bismo pokazali (3.13) koristićemo Murat-ovu lemu koja tvrdi da

$$(\operatorname{div} Q_\varepsilon)_\varepsilon \in W^{-1,2}_{\mathrm{c,loc}} \;\text{ ako je }\; \operatorname{div} Q_\varepsilon = p_\varepsilon + q_\varepsilon,$$

i pri tom $(q_\varepsilon)_\varepsilon \in W^{-1,2}_{\mathrm{c,loc}}(\Omega)$ i $(p_\varepsilon)_\varepsilon \in \mathcal{M}_{\mathrm{b,loc}}(\Omega)$. Iz Leme 47 dobijamo

$$H(u^\varepsilon - k)\,(\partial_\lambda h(x,y,u^\varepsilon)\partial_t u^\varepsilon - \partial_t u^\varepsilon) \in \mathcal{M}_{\mathrm{b,loc}}(\Omega). \tag{3.14}$$

Lema 48 implicira

$$\partial_x(\varepsilon\partial_x u^\varepsilon H(u^\varepsilon - k)) + \partial_y(\varepsilon\partial_y u^\varepsilon H(u^\varepsilon - k)) \in W^{-1,2}_{\mathrm{c,loc}}(\Omega), \tag{3.15}$$

jer

$$\varepsilon\partial_x u^\varepsilon H(u^\varepsilon - k) \to 0, \text{ u } L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

i

$$\int_\Omega |\varepsilon\partial_x u^\varepsilon H(u^\varepsilon - k)|^2\, dxdydt \le \varepsilon^2 \int_\Omega |\partial_x u^\varepsilon|^2 dxdydt \le Tc\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Važi i

$$\left(D_x f_1^\delta(x,y,k) + D_y f_2^\delta(x,y,k)\right) H(u^\varepsilon - k)) \in \mathcal{M}_{\mathrm{b,loc}}(\Omega), \tag{3.16}$$

jer je $f_i^\delta \in BV(\Omega)$. Konačno, važi i

$$\partial_x(q_1 - q_1^\delta), \partial_y(q_2 - q_2^\delta) \in W^{-1}_{\mathrm{c,loc}}(\Omega), \tag{3.17}$$

jer je

$$\begin{aligned} |q_i - q_i^\delta| &\le |f_i^\delta(x,y,u^\varepsilon) - f_i(x,y,u^\varepsilon)| + |f_i^\delta(x,y,k) - f_i(x,y,k)| \\ &\le 2 \max_{a\le p\le b} |f_i^\delta(x,y,p) - f_i(x,y,p)| \to 0, \text{ u } L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2). \end{aligned}$$

Dobijeni rezultati, (3.14)–(3.17), nam omogućuju da primenimo Murat-ovu lemu i dobijemo (3.13). Sada samo primenimo Teoremu 45 da bismo završili dokaz. ❑

3.3 Jednodimenzionalan slučaj i primeri

Sada ćemo primeniti dokazanu teoremu na jednodimenzionalni slučaj posmatranog problema

$$\begin{aligned} u_t + (f(x,u))_x &= 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x) &\in (BV \cap L^\infty)(\mathbf{R}) \quad a \le u_0 \le b, \end{aligned}$$

pri čemu pretpostavljamo da su ispunjeni uslovi (3.3)-(3.5) (sa $\mathbf{R}$ umesto $\mathbf{R}^2$). Pretpostavićemo da za skoro sve $x \in \mathbf{R}$, preslikavanje

$$[a,b] \ni \lambda \mapsto f(x,\lambda), \tag{3.18}$$

nije konstantno ni na jednom netrivijalnom intervalu.

Posledica 50. *Familija rešenja* $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ *problema*

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon + (f^\varepsilon(x,u^\varepsilon))_x =&\varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{t=0} =&u_0^\varepsilon(x,y), \end{aligned}$$

pri čemu smo notaciju preuzeli iz (3.6)-(3.7), *je jako prekompaktna u* $L^1_{\rm loc}(\boldsymbol{R}^+\times \boldsymbol{R})$.

Dokaz: Prema prethodnoj teoremi, dovoljno je naći funkciju $h(x,\lambda)$ takvu da preslikavanje

$$\lambda \mapsto h(x,\lambda)\xi_0 + f(x,\lambda)\xi_1 \tag{3.19}$$

nije konstantno ni na jednom netrivijalnom intervalu. Stoga biramo funkciju

$$h(x,\lambda) = f^2(x,\lambda)$$

da bismo zaključili da uslov (3.19) neće biti zadovoljen samo u slučaju da postoji netrivijalan skup $\Omega \subset \mathbf{R}$takav da za sve $x \in \Omega$ postoje $(\xi_0,\xi_1) \in \mathbf{R}^2\backslash\{0\}$ koji zadovoljavaju

$$f(x,\lambda) = \frac{-\xi_1 \pm \sqrt{\xi_1^2 + 4\xi_0 c}}{2\xi_0},$$

za neku konstantu c, što je u kontradikciji sa (3.18). ❑

Primer 51. *Posmatrajmo sledeći Caushy-ev problem*

$$\begin{aligned} &u_t + (k(x)g(u))_x + (l(y)f(u))_y = 0 \\ &u|_{t=0} = u_0(x,y) \in BV(\boldsymbol{R}^2) \end{aligned}$$

gde je

$$-1 \le u_0(x,y) \le 1$$

$$g(u) = \begin{cases} 0, & |u| \ge 1 \\ u+1, & -1 < u < 0 \\ 1-u^2, & 0 < u < 1 \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} 3, & x \ge 0 \\ 1, & x < 0, \end{cases}$$

i

$$f(u) = \begin{cases} 0, & |u| \geq 1 \\ 1 - u^2, & -1 < u < 0 \\ 1 - u, & 0 < u < 1 \end{cases}$$

$$l(y) = \begin{cases} 4, & y \geq 0 \\ 2, & y < 0, \end{cases}$$

Jasno je da fluks $(k(x)g(u), l(x)f(u))$ *ne zadovoljava klasični uslov prirodne nelinearosti* (3.9). *Stoga na osnovu dosadašnjih reultata nije bilo moguće da niz rešenja* $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ *jednačine*

$$u^\varepsilon_t + (k_\varepsilon(x)g(u^\varepsilon))_x + (l(y)f(u_\varepsilon))_y = \varepsilon(u^\varepsilon_{xx} + u^\varepsilon_{yy})$$

gde je

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} 3, & x \geq \varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon} + 2, & -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 1, & x \leq -\varepsilon, \end{cases}$$

i

$$l_\varepsilon(y) = \begin{cases} 4, & x \geq \varepsilon \\ \frac{x}{\varepsilon} + 3, & -\varepsilon < x < \varepsilon \\ 2, & x \leq -\varepsilon, \end{cases}$$

je jako prekompaktan u $L^1_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^+ \times \boldsymbol{R}^2)$. *Ali koristeći Teoremu 49 to možemo da zaključimo izborom funkcije* $h(x,u) = u^3$ *u uslovu* (3.10). *U tom slučaju vektorska funkcija* $(h(x,u), k(x)g(u), l(y)f(u))$ *zadovoljava uslove Teoreme 49, jer* $k \in BV$. *Stoga nam Teorema 49 daje* L^1_{loc}*-prekompaktnost familije* $(u^\varepsilon)_\varepsilon$.

Glava 4

Kolomboovska rešenja zakona održanja u heterogenim sredinama

U ovom poglavlju proučavamo rešenja zakona održanja u heterogenim sredinama u algebri uopšenih funkcija, [1, 3, 10, 29]. Takva rešenja se nazivaju *uopštena ili Kolomboovska rešenja.* U homogenim sredinama, uopštena rešenja su izučavana u radu [29]. Posmatramo hiperbolični jednodimenzionalni zakon održanja

$$\begin{aligned} &u_t + (f(x,u))_x = 0, \qquad x \in \mathbf{R},\ t \in \mathbf{R}^+, \\ &u|_{t=0} = u_0(x), \qquad x \in \mathbf{R}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

i njegovu paraboličnu aproksimaciju

$$\begin{aligned} &u_t + (f(x,u))_x = \mu u_{xx}, \\ &u|_{t=0} = u_0(x), \end{aligned} \tag{4.2}$$

gde je $\mu > 0$. Izučavaćemo rešenja u Kolomboovoj algebri $\mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$, gde je $\mathbf{R}^2_+ = \mathbf{R} \times (0, \infty)$. Bitno je da algebra $\mathcal{G}_g(\mathbf{R})$ sadrži prostor ograničenih distribucija $\mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbf{R})$, tako da u ovim algebrama možemo raditi i sa singularnim početni uslovima. Osim jednakosti, u Kolomboovim algebrama definiše se i relacija asociranosti, u oznaci $\approx$, koja će biti definisana u sledećem odeljku. Ako uopštena Kolomboova funkcija $u \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$, zadovoljava jednačinu (4.1) sa asociranošću umesto jednakosti, tj. važi

$$\begin{aligned} &u_t + (f(x,u))_x \approx 0, \\ &u|_{t=0} = u_0(x), \end{aligned}$$

onda se u zove *aproksimativno (uopšteno) rešenja* zakona održanja (4.1).

U ovom poglavlju, izučavaćemo uopštena i aproksimativna rešenja zakona održanja (4.1), kao i ista rešenja u slučaju kada je μ uopšten pozitivan broj, kao i njihov odnos sa klasičnim, slabim rešenjima zakona odražanja. U prvom odeljku ovog poglavlja daćemo osnovne defunicije i osobine Kolomboovih uopštenih funkcija.

4.1 Kolomboova algebra $\mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$

Definišimo sada najvažnije pojmove Kolomboove teorije uopštenih funkcija u slučaju algebre $\mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$. Za $\mathbf{R}^2_+ = (0,\infty)\times\mathbf{R}$ i $\overline{\mathbf{R}^2_+} = [0,\infty)\times\mathbf{R}$, označimo sa $C^\infty_b(\mathbf{R})$ (resp. $C^\infty_b(\mathbf{R}^2_+)$) algebru glakih funkcija na $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{R}^2_+$), čiji su svi izvodi ograničeni. Primetimo da se svaki element iz $C^\infty_b(\mathbf{R}^2_+)$ može glatko produžiti na $\{t=0\}$, tako da je $C^\infty_b(\mathbf{R}^2_+) = C^\infty_b(\overline{\mathbf{R}^2_+})$. Isto važi i za $C^\infty_{\bar b}(\mathbf{R}^2_+) := \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^2_+)\ :\ u|_{(0,T)\times\mathbf{R}} \in C^\infty_b((0,T)\times\mathbf{R}),\ \text{za sve } T>0\}$.

Za familiju $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)} \in (C^\infty_{\bar b}(\mathbf{R}^2_+))^{(0,1)}$ kažemo da je *umerena* (engl. *moderate*) ako zadovoljava sledeću osobinu: za sve $(\alpha,\beta)\in\mathbf{N}^2$ i sve $T>0$ postoji $N\in\mathbf{N}$ tako da je

$$\sup_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}} |\partial^\alpha_x\partial^\beta_t u^\varepsilon(t,x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}),\ \ \text{kad } \varepsilon\to 0.$$

Skup umerenih familija obeležavamo $\mathcal{E}_{M,g}(\mathbf{R}^2_+)$.

Za umerenu familiju $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ kažemo da je *zanemarljivo mala* (engl. *negligible*) ako važi: za sve $(\alpha,\beta)\in\mathbf{N}^2$, $q\in\mathbf{N}$ i sve $T>0$

$$\sup_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}} |\partial^\alpha_x\partial^\beta_t u^\varepsilon(t,x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{q}),\ \ \text{kad } \varepsilon\to 0.$$

Skup zanemarljivo malih familija obeležavamo $\mathcal{N}_g(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Jasno je da je $\mathcal{E}_{M,g}(\mathbf{R}^2_+)$ diferencijalna algebra, u kojoj se operacije definišu po komponentama, dok je $\mathcal{N}_g((\mathbf{R}^2_+))$ njen ideal, zatvoren u odnosu na diferenciranje. Kolomboova algebra definisana je kao faktor algebra $\mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+) = \mathcal{E}_{M,g}(\mathbf{R}^2_+)/\mathcal{N}_g(\mathbf{R}^2_+)$. Analogno se definiše i Kolomboova algebra $\mathcal{G}_g(\mathbf{R})$.

Kako je, kao što smo pomenuli, $C^\infty_{\bar b}(\mathbf{R}^2_+) = C^\infty_{\bar b}(\overline{\mathbf{R}^2_+})$, možemo definisati *restrikciju* Kolomboove funkcije $u\in\mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$ na $\{t=0\}$, $u|_{t=0}\in\mathcal{G}_g(\mathbf{R})$, kao klasu familije $\{u^\varepsilon(x,0)\}_\varepsilon$, gde je $\{u^\varepsilon(x,t)\}_\varepsilon$ pretstavnik uopštene funkcije u.

Sada ćemo definisati *kompoziciju* $f(x,u)$ nelinearne funkcije $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ i uopštene funkcije $u\in\mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$, tako da je $f(x,u)\in\mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$.

Za glatku funkciju $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, kažemo da *sporo raste u beskonačnosti* ako za sve $\alpha \in \mathbf{N}^2$, postoji $N_\alpha \in \mathbf{N}$ i konstanta $c_\alpha > 0$, tako da je $|\partial_\xi^{\alpha_1}\partial_\lambda^{\alpha_2} f(\xi,\lambda)| \le c_\alpha(1+|\lambda|)^{N_\alpha}$, za sve $\xi, \lambda \in \mathbf{R}$. Broj $N_{0,0}$ se zove *red funkcije* f.

Ako je f glatka funkcija koja sporo raste u beskonačnosti, onda kompoziciju $f(x, u(t,x))$ možemo definisati preko pretstavnika $f(x,u(t,x)) = [\{f(x,u^\varepsilon(t,x))\}_\varepsilon] \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$. Stoga su sve operacije iz problema (4.1) dobro definisane u $\mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$.

Već smo napomenuli da je prostor ograničenih distribucija $\mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbf{R})$ potopljen u $\mathcal{G}_g(\mathbf{R})$. Sada ćemo opisati to *potapanje*. Neka je $\rho \in S(\mathbf{R})$, proizvoljna brzo opadajuća funkcija, takva da je

$$\int_{\mathbf{R}} \rho(x)dx = 1, \quad \int_{\mathbf{R}} x^n \rho(x)dx = 0, \; n = 1,2,... \tag{4.3}$$

i neka je

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \; x \in \mathbf{R}, \; \varepsilon > 0. \tag{4.4}$$

Potapanje prostora ograničenih distribucija $\mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbf{R})$ u $\mathcal{G}_g(\mathbf{R})$, može se definisati kao preslikavanje

$$\iota_\rho : \; w \mapsto [\{w * \rho_\varepsilon\}_\varepsilon]_{\mathcal{N}_g} .$$

Preslikavanje ι_ρ komutira sa izvodima. Štaviše, ako je $w \in C_b^\infty(\mathbf{R})$, onda je w pretstavnik uopštene funkcije $\iota_\rho(w)$, stoga je $\iota_\rho\left[C_b^\infty\right]$ podalgebra algebre uopštenih funkcija $\mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$.

Za uopštenu funkciju $u \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$, kažemo da je *asocirana* distribuciji $w \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2_+)$, ako za nekog, pa samim tim i svakog, pretstavnika funkcije $u \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$, $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$, važi da $u^\varepsilon \to w$ u $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2_+)$, kad $\varepsilon \to 0$. U tom slučaj pišemo $u \approx w$.

Za uopštenu funkciju $\mu \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R})$, kažemo da je *uopštena konstanta*, ako ima pretstavnika $\{\mu_\varepsilon\}_\varepsilon$ koji je konstanta za sve ε. Ako je μ_ε ograničena van nule, preciznije ako postoji $N \in \mathbf{N}$ tako da je

$$\varepsilon^N \le \mu_\varepsilon \le \varepsilon^{-N}, \quad \varepsilon \to 0,$$

tada kažemo da je μ *uopšten pozitivan broj.* Ako je μ uopšten pozitivan broj, onda je i $1/\mu$ takođe uopšten pozitivan broj. Jasno je da su svi pozitivni realni brojevi takođe i uopšteni realni brojevi. Uopšten pozitivan broj μ je asociran nuli, u oznaci $\mu \approx 0$, ako i samo ako $\mu_\varepsilon \to 0$, kad $\varepsilon \to 0$.

Za uopštenu funkciju $u \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$, kažemo da je $\sqrt[r]{\log}$-*tipa* ako ima pretstavnika $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$, takvog da za sve $T > 0$,

$$\sup_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}} |u^\varepsilon(t,x)| = \mathcal{O}(\sqrt[r]{|\log\varepsilon|}), \quad \text{kad } \varepsilon \to 0,$$

a kažemo da je *ograničenog tipa* ako ima pretstavnika $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$, takvog da za sve $T > 0$,

$$\sup_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}} |u^\varepsilon(t,x)| = \mathcal{O}(1), \quad \text{kad } \varepsilon \to 0.$$

Slično se definišu isti pojmovi za $\mathcal{G}_g(\mathbf{R})$. Primetimo da ako je $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$, tada je $\iota_\rho(u_0)$ ograničenog tipa. S druge strane, preslikavanje

$$(\varepsilon, x) \mapsto \sqrt[r]{|\log\varepsilon|}\,\rho(\sqrt[r]{|\log\varepsilon|}x)$$

je $\sqrt[r]{\log}$-tipa, pa definiše uopštenu funkciju iz $\mathcal{G}_g(\mathbf{R})$, asociranu Dirac-ovoj meri.

Iz definicije $\sqrt[r]{\log}$-tipa možemo zaključiti da ako je f glatka funkcija, koja sporo raste u beskonačnosti, reda r, i ako je $u \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$ $\sqrt[r]{\log}$-tipa, tada je i $\mathrm{e}^{f(x,u)} \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$, ili preciznije

$$\sup_{(t,x)\in(0,T)\times\mathbf{R}} \mathrm{e}^{|f(x,u^\varepsilon(t,x))|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad \text{kad } \varepsilon \to 0, \ \text{za sve } T > 0.$$

4.2 Uopštena rešenja

Posmatrajmo problem (4.2) sa glatkim početnim uslovom $u_0 \in C_b^\infty(\mathbf{R})$, čiji su svi izvodi ograničeni. Problem možemo zapisati u obliku integralne jednačine (koristeći Duhamel-ov princip i fundamentalno rešenje jednačine provođenja toplote[1])

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2} u_0(x - 2\sqrt{\mu t} y) dy + \tag{4.5}$$
$$+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi \mu s}} \int_{-\infty}^{+\infty} y \mathrm{e}^{-y^2} f(x - 2\sqrt{\mu s} y, u(t-s, x - 2\sqrt{\mu s} y)) dy ds.$$

Ovaj oblik nam omogućava da zaključimo da jednačina (4.2) u klasičnom smislu ima jedinstveno rešenje $u \in (C_{\bar{b}}^{\infty} \cap L^{\infty})(\mathbf{R}_+^2)$, za koje važi i princip maksimuma

$$\|u\|_{L^{\infty}(\mathbf{R}_+^2)} \leq \|u_0\|_{L^{\infty}(\mathbf{R})}. \tag{4.6}$$

Jednačinu (4.5) koristićemo da pokažemo postojanje uopštenih rešenja.

Teorema 52. *Neka funkcija f sporo opada u beskonačnosti i neka je $|f_u|$ ograničen.*

Tada za $u_0 \in \mathcal{G}_g(\boldsymbol{R})$, postoji jedinstveno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\boldsymbol{R}_+^2)$ problema (4.2).

Dokaz: Uzmimo proizvoljnog pretstavnika $\{u_0^{\varepsilon}\}_{\varepsilon}$ početnog uslova u_0, i posmatrajmo problem

$$\begin{aligned} &\partial_t u^{\varepsilon} + (f(x, u^{\varepsilon}))_x = \mu u_{xx}^{\varepsilon}, \\ &u^{\varepsilon}|_{t=0} = u_0^{\varepsilon}(x). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Iz (4.5) imamo da postoji jedinstveno rešenje $u^{\varepsilon} \in C_{\bar{b}}^{\infty}(\mathbf{R}_+^2)$ problema (4.7). Kako je $u_0^{\varepsilon} \in \mathcal{E}_{M,g}(\mathbf{R})$, princip maksimuma (4.6) implicira da postoji $N_0 \in \mathbf{N}$ tako da je

$$\sup_{(t,x) \in \mathbf{R}_+^2} |u^{\varepsilon}(t,x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N_0}), \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.8}$$

[1] Takozvano "jezgro provođenja toplote", ili fundamentalno rešenje jednačine provođenja toplote je $E(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \mu t}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\mu t}}$, gde je μ konstanta uz u_{xx}, pa Duhamel-ov princip kaže da se onda problem (4.2) može zapisati u obliku

$$u(t,x) = E(t,\cdot) * u_0(\cdot) - \int_0^t E(s,\cdot) * (f_x)(t-s,\cdot)\, ds.$$

Sada ocenimo u^ε_x. Zamenimo u sa u^ε i u_0 sa u^ε_0 u (4.5) i diferencirajmo po x. Dobijamo

$$\begin{aligned} u^\varepsilon_x(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-y^2}(u^\varepsilon_0)'(x-2\sqrt{\mu t}y)dy+ \\ &+\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\mu s}}\int_{\mathbf{R}} y\mathrm{e}^{-y^2}\Big[D_x f(x-2\sqrt{\mu s}y, u^\varepsilon(t-s,x-2\sqrt{\mu s}y))+ \\ &+\partial_u f(x-2\sqrt{\mu s}y, u^\varepsilon(t-s,x-2\sqrt{\mu s}y))u^\varepsilon_x(t-s,x-2\sqrt{\mu s}y)\Big]dyds, \end{aligned} \tag{4.9}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} |u^\varepsilon_x(t,x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-y^2}|(u^\varepsilon_0)'(x-2\sqrt{\mu t}y)|dy+ \\ &+\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\mu s}}\int_{\mathbf{R}} |y|\mathrm{e}^{-y^2}\Big[c_{1,0}(1+|u^\varepsilon(t-s,x-2\sqrt{\mu s}y)|)^{N_{1,0}}+ \\ &+|\partial_u f(x-2\sqrt{\mu s}y, u^\varepsilon(t-s,x-2\sqrt{\mu s}y))|\,|u^\varepsilon_x(t-s,x-2\sqrt{\mu s}y)|\Big]dyds, \end{aligned} \tag{4.10}$$

Sada uzimamo supremum po $x \in \mathbf{R}$ i dobijemo

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon_x(t,\cdot)\|_{L^\infty} &\leq \|(u^\varepsilon_0)'\|_{L^\infty} + c_1(1+\|u^\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^\infty})^{N_{1,0}}\sqrt{\frac{t}{\mu}}+ \\ &\frac{c}{\sqrt{\mu}}\|f_u\|_{L^\infty}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}\|u^\varepsilon_x(s,\cdot)\|_{L^\infty}ds, \end{aligned} \tag{4.11}$$

Sada ćemo na (4.11) primeniti Gronwall-ovu nejednakost. Naime, ako za nenegativnu, neprekidnu funkciju, $w(t)$ važi nejednakost

$$w(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)w(s)ds, \quad t \in I,$$

gde su $a, b \geq 0$, nenegativne, onda je

$$w(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t b(r)dr}ds, \quad t \in I.$$

Za

$$a(t) = \|(u^\varepsilon_0)'\|_{L^\infty} + c_1(1+\|u^\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^\infty})^{N_{1,0}}\sqrt{\frac{t}{\mu}}$$

i

$$b(s) = \frac{c\|f_u\|_{L^\infty}}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{\sqrt{t-s}}$$

iz (4.11), kada primenimo Gronwall-ovu nejednakost, dobijamo

$$\|u_x^\varepsilon(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq C_1 + C_2\sqrt{t} + C_3 \mathrm{e}^{\frac{2c\|f_u\|\sqrt{t}}{\sqrt{\mu}}}. \tag{4.12}$$

Odavde dobijamo da za sve $T > 0$, postoji $N_1 \in \mathbf{N}$ tako da je

$$\sup_{(t,x)\in\mathbf{R}\times[0,T]} |u_x^\varepsilon(t,x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N_1}), \quad \varepsilon \to 0. \tag{4.13}$$

Na sličan način možemo oceniti i ostale izvode od u^ε, tj. zaključiti da $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,g}(R_+^2)$, odnosno da je $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ pretstavnik klase u $\mathcal{G}_g(R_+^2)$, koja definiše uopšteno rešenje problema (4.2).

Da bismo pokazali jedinstvenost, pretpostavimo da su u_1 i u_2 dva uopštena rešenja problema (4.2). Tada postoje $N \in \mathcal{N}_g(\mathbf{R}_+^2)$ i $n \in \mathcal{N}_g(\mathbf{R})$ tako da je

$$\begin{aligned}(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)_t + f(x,u_1^\varepsilon)_x - f(x,u_2^\varepsilon)_x &= \mu\,(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)_{xx} + N_\varepsilon \\ (u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)_{t=0} &= n_\varepsilon.\end{aligned}$$

Koristeći ponovo (4.5), dobijamo da je

$$\begin{aligned}&(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-y^2} n_\varepsilon(x - 2\sqrt{\mu t}y)dy + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{\mathbf{R}} \mathrm{e}^{-y^2} N_\varepsilon(t-s, x - 2\sqrt{\mu t}y)dyds \\ &+ \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\mu s}} \int_{\mathbf{R}} y\mathrm{e}^{-y^2} \Big[f(x - 2\sqrt{\mu s}y, u_1^\varepsilon(t-s, x - 2\sqrt{\mu s}y)) - \\ &- f(x - 2\sqrt{\mu s}y, u_2^\varepsilon(t-s, x - 2\sqrt{\mu s}y))\Big]dyds,\end{aligned}$$

što implicira da je

$$\begin{aligned}&\|\,(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)\,(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq \|n_\varepsilon\|_{L^\infty} + t\|N_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R}\times[0,T])} + \\ &+ \frac{c}{\sqrt{\mu}}\|f_u\|_{L^\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)(s,\cdot)\|_{L^\infty} ds,\end{aligned}$$

gde opet primenjujemo Gronwall-ovu nejednakost i dobijamo

$$\|\left(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon\right)(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq \Big(\|n_\varepsilon\|_{L^\infty} + t\|N_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T]\times\mathbf{R})}\Big)\Big(1 + \frac{2c}{\sqrt{\mu}}\|f_u\|_{L^\infty}\sqrt{t}\Big)\mathrm{e}^{\dfrac{\pi c^2}{\mu}\|f_u\|^2 t}.$$

Odavde zaključujemo da je

$$\sup_{(t,x)\in[0,t]\times\mathbf{R}} |\left(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon\right)(t,x)| = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \quad \varepsilon \to 0,$$

za sve $T > 0$ i $M \in \mathbf{N}$, jer su $N \in \mathcal{N}_g(\mathbf{R}^2_+)$ i $n \in \mathcal{N}_g(\mathbf{R})$. Za izvode razlike $u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon$ izvodimo iste ocena na isti način kao u dokazu egzistencije, kako bismo zaključili da je $u_1 - u_2 \in \mathcal{N}_g(\mathbf{R}^2_+)$. ❑

Teorema 53. *Neka funkcija f sporo opada u beskonačnosti i neka je $|f_u|$ reda r.*

Tada za $u_0 \in \mathcal{G}_g(\boldsymbol{R})$, $\sqrt[2r]{\log}$-tipa, postoji jedinstveno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\boldsymbol{R}^2_+)$, $\sqrt[2r]{\log}$-tipa, problema (4.2).

Dokaz: Kako je $u_0 \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R})$, $\sqrt[2r]{\log}$-tipa, njegov pretstavnik u_0^ε zadovoljava sledeće $\|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq c\sqrt[2r]{|\log\varepsilon|}$. Koristeći princip maksimuma (4.6), zaključujemo da i za rešenje u^ε važi

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq c\sqrt[2r]{|\log\varepsilon|},$$

što implicira da je i

$$\|f_u(u^\varepsilon)\|_{L^\infty} \leq c_1\sqrt{|\log\varepsilon|}, \tag{4.14}$$

jer je f_u reda r.

Kao u dokazu prethodne teoreme, nejednakost (4.12) implicira da rešenje problema (4.7) zadovojava (4.13), odnosno zaključujemo da je familija $\{u^\varepsilon\}$ umerena. Za ostale izvode rešenja, iste ocene se izvode kao u dokazu prethodne teoreme, koristeći ocenu (4.14). To znači da je klasa familije $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$ $\sqrt[2r]{\log}$-tipa, i da je uopšteno rešenje problema (4.2).

Sada pokažimo jedinstvenost. Pretpostavimo da su $u_1, u_2 \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$ dva uopštena rešenja problema (4.2), čiji su pretstavnici $\{u_1^\varepsilon\}_\varepsilon$ i $\{u_2^\varepsilon\}_\varepsilon$, $\sqrt[2r]{\log}$-tipa. Tada postoje $N \in \mathcal{N}_g(\mathbf{R}^2_+)$ i $n \in \mathcal{N}_g(\mathbf{R})$ tako da je

$$\begin{aligned}(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)_t + f(x,u_1^\varepsilon)_x - f(x,u_2^\varepsilon)_x &= \mu\,(u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)_{xx} + N_\varepsilon\\ (u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon)_{t=0} &= n_\varepsilon.\end{aligned}$$

Kako su $\{u_1^\varepsilon\}_\varepsilon$ i $\{u_2^\varepsilon\}_\varepsilon$ $\sqrt[2r]{\log}$-tipa, znamo da za sve $T \geq 0$,

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}} \left| \int_0^1 f_u(x, \theta u_1^\varepsilon(t,x) + (1-\theta)u_2^\varepsilon(t,x))d\theta \right| \leq C_T \sqrt{|\log\varepsilon|}.$$

Stoga lako dobijamo, na isti način kao i u dokazu jedinstvenosti prethodne teoreme, da klasa familije $\{u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon\}_\varepsilon$ pripada idealu $\mathcal{N}_g(\mathbf{R}^2_+)$. ❑

Formalno puštajući u prethodnoj teoremi da $r \to \infty$, dobijamo sledeći jači rezultat za početni uslov ograničenog tipa.

Posledica 54. *Neka funkcija f sporo opada u beskonačnosti.*

Tada za $u_0 \in \mathcal{G}_g(\boldsymbol{R})$, ograničenog tipa, postoji jedinstveno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\boldsymbol{R}^2_+)$, ograničenog tipa, problema (4.2).

Dokaz: Kako je $u_0 \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R})$, ograničenog tipa, njegov pretstavnik $\{u_0^\varepsilon\}$ ima uniformnu granicu, tj. $\|u_0^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq M$, uniformno za sve $\varepsilon > 0$. Koristeći princip maksimuma (4.6), zaključujemo da je i rešenje $|u^\varepsilon|$ ograničeno konstantom M, pa je i $|f_u(u^\varepsilon)|$ uniformno ograničeno nezavisno od ε. Dalje se dokaz izvodi isto kao u prethodnoj teoremi. ❑

Primedba 55. Uopštena rešenja konstruisana u prethodnim teoremama i posledici su uopštenja klasičnih rešenja u smislu da ako je početni uslov $u_0 \in C_b^\infty(\mathbf{R})$, on se može posmatrati kao pretstavnik od $\iota_\rho(u_0) \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R})$, pa je klasično rešenje u $C_b^\cdot(\overline{\mathbf{R}^2_+})$ pretstavnik uopštenog rešenja.

Sada posmatramo problem (4.2) kada μ može biti i uopštena konstanta. Daćemo samo rezultat koji odgovara rezultatu poslednje posledice.

Teorema 56. *Neka je μ uopšteni pozitivni broj takav da je $1/\mu$* log-*tipa, tj. $1/\mu_\varepsilon = \mathcal{O}(|\log\varepsilon|)$, $\varepsilon \to 0$. Neka f slabo opada u beskonačnosti i neka je u_0 ograničenog tipa. Tada postoji jedinstveno $u \in \mathcal{G}_g(\boldsymbol{R}^2_+)$, ograničenog tipa, rešenje problema* (4.2).

Dokaz: Kao u prethodnoj posledici, dobijamo da je $|f_u(u^\varepsilon)|$ uniformno ograničeno nezavisno od ε. Ostatak sledi kao i u prethodnim dokazima, koristeći činjenicu da je $1/\mu_\varepsilon = \mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$ u nejednakostima oblika (4.12). ❑

Sada ćemo nastaviti poređenje dobijenih uopštenih rešenja sa klasičnim rešenjima započeto u prethodnoj primedbi. Klasična rešenja izučavana su davno u radu [21], gde je uvedena sledeća pseudo-norma, definisana na lokalno integrabilnim funkcijama g na $\mathbf{R}$,

$$|g|_* = \sup_{x\in\mathbf{R}} \left| \int_0^x g(\xi)d\xi \right|,$$

i pokazano je da ako su u_1 i u_2 dva klasična ršenja problema (4.2) sa početnim uslovima u_{01} i u_{02}, tada važi $|(u_1 - u_2)(t,\cdot)|_* \le 2|u_{01} - u_{02}|_*$, za sve $t > 0$. Primetimo da i ako $|r_\varepsilon|_* \to 0$, kad $\varepsilon \to 0$, onda i $g_\varepsilon \to 0$ u $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Dalje, ako je $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$ i ρ_ε kao u (4.3)-(4.4), sledi da i $|u_0 - u_0 * \rho_\varepsilon|_* \to 0$, kad $\varepsilon \to 0$.

Sada neka je $u_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$ i μ pozitivna konstanta ili uopštena pozitivna konstanta takva da je $1/\mu$ log-tipa. Prema poslednjoj teoremi i posledici imamo da problem

$$\begin{aligned} &\partial_t u + (f(x,u))_x = \mu u_{xx}, \\ &u|_{t=0} = \iota_\rho(u_0), \end{aligned} \tag{4.15}$$

ima jedinstveno rešenje $u \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^2_+)$ ograničenog tipa. Neka je $\{\mu_\varepsilon\}_\varepsilon$ pretstavnik uopštene pozitivne konstante μ i posmatrajmo problem

$$\begin{aligned} &\partial_t v_\varepsilon + (f(x,v_\varepsilon))_x = \mu_\varepsilon v_{\varepsilon xx}, \\ &v_\varepsilon|_{t=0} = u_0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Zbog jednostavnosti pretpostavićemo da je $u_0 \in C_b^\infty(\mathbf{R})$. Tada problem (4.16) ima jedinstveno klasično rešenje v_ε, a (4.15) ima uopšteno rešenje u čiji pretstavnik $\{u^\varepsilon\}$ rešava problem

$$\begin{aligned} &\partial_t u^\varepsilon + (f(x,u_\varepsilon))_x = \mu_\varepsilon u_{\varepsilon xx}, \\ &u_\varepsilon|_{t=0} = u_0 * \rho_\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Ova dva rešenja su bliska u smislu da razlika rešenja

$$u^\varepsilon - v_\varepsilon \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \text{ u } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2_+),$$

što je posledica prethodne analize o pseudo-normi $|\cdot|_*$, odnosno činjenice da je

$$\sup_{t\ge 0} |(v_\varepsilon - u^\varepsilon)(\cdot,t)|_* \le 2|u_0 - u_0 * \rho_\varepsilon| \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Dakle, možemo zaključiti da važe sledeće dve posledice.

Posledica 57. *Ako f sporo raste u beskonačnosti, μ je pozitivan realan broj i $u_0 \in C_b^\infty(\boldsymbol{R})$, onda je uopšteno rešenje, $u \in \mathcal{G}(\boldsymbol{R}_+^2)$, problema* (4.15), *asocirano sa klasičnim rešenjem v problema*

$$\partial_t v + (f(x,v))_x = \mu_\varepsilon v_{xx}, \qquad v|_{t=0} = u_0.$$

Posledica 58. *Ako f sporo raste u beskonačnosti, $\mu \approx 0$ je uopšten pozitivan broj, takav da je $1/\mu$* log-*tipa, i ako je $u_0 \in C_b^\infty(\boldsymbol{R}) \cup L^1(\boldsymbol{R})$, onda je uopšteno rešenje, $u \in \mathcal{G}(\boldsymbol{R}_+^2)$, problema* (4.15), *asocirano sa slabim entropijskim rešenjem $w \in L^\infty(\boldsymbol{R}_+^2)$ problema*

$$\partial_t w + (f(x,w))_x = \mu_\varepsilon v_{xx}, \qquad w|_{t=0} = u_0.$$

Kod poslednje posledice treba samo primetiti da rešenja v_ε problema (4.16) konvergiraju u $L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+^2)$ ka slabom entropijskom rešenju w, kad $\mu_\varepsilon \to 0$, pa kako i $u^\varepsilon - v_\varepsilon \to 0$, kad $\varepsilon \to 0$, u $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^2)$, onda i $u^\varepsilon \to w$, kad $\varepsilon \to 0$, u $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_+^2)$, što znači da je $u^\varepsilon \approx w$.

Primetimo da su uopštena rešenja iz poslednje posledice ograničenog tipa, pa kako je $\mu \approx 0$, to je i $\mu u_{xx} \approx 0$, odakle sledi da je u aproksimativno rešenje zakona održanja (4.1) u smislu da rešava problem (4.1) pri čemu je jednakost zamenjena asociranošću, tj.

$$u_t + f(x,u)_x \approx 0 \quad u|_{t=0} \approx u_0.$$

Literatura

[1] Aleksić, J.; Colombeau, J.-F.; Oberguggenberger, M.; Pilipović, S., Approximate generalized solutions and measure-valued solutions to conservation laws, ITSF, 2009, Vol 20, 163–170.

[2] Bachmann, F., Vovelle, J., Existence and uniqueness of entropy solution of scalar conservation laws with a flux function involving discontinuous coefficients, Comm. Partial Differential Equations 31 (2006), no. 1-3, 371–395.

[3] J.F. Colombeau, Elementary Introduction to New Generalized Functions. North-Holland Mathematics Studies (Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.), 1985.

[4] Correia, J. M. C., Lefloch, P. G., Nonlinear diffusive-dispersive limits for multidimensional conservation laws, in Advances in nonlinear partial differential equations and related areas (Beijing, 1997), World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1998), 103–123.

[5] Dafermos, C. M. Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 325. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[6] DiPerna, R. J., Measure-valued solutions to conservation laws, Arch. Rational Mech. Anal. 88 (1985), no. 3, 223–270.

[7] Dolzmann, G.; Hungerbuhler, N.; Muller, S., Nonlinear elliptic systems with measure valued right-hand side, Math. Z. 226 (1997), no. 4, 545–574.

[8] Evans, L.C., Weak convergence methods in nonlinear partial differential equations, AMS, Providence, Rhode Island, No 74, 1990.

[9] Gerard, P., Microlocal Defect Measures, Comm. Partial Differential Equations 16(1991), no. 11, 1761–1794.

[10] M. Grosser et al., Geometric Theory of Generalized Functions with Applications to General Relativity (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers), 2001.

[11] Hayes, B. T.; LeFloch, P. G., Non-classical shock waves and kinetic relations: scalar conservation laws, Arch. Rat. Mech. Anal. 39, 1 (1997).

[12] Holden, H.; Karlsen, K.H.; Mitrovic, D., Zero diffusion-dispersion-smoothing limits for scalar conservation law with discontinuous flux function, preprint.

[13] Hwang, S., Nonlinear diffusive-dispersive limits for scalar multidimensional conservation laws, J. Differential Equations 225 (2006), no. 1, 90–102.

[14] Hwang, S., Kinetic decomposition for kinetic models of BGK type, J. Differential Equations 190 (2003), 353-363.

[15] Hwang, S.; Tzavaras, A.E., Kinetic decomposition of approximate solutions to conservation laws: Applications to relaxation and diffusiondispersion approximations, Comm. Partial Differential Equations 27 (2002), 1229-1254.

[16] Karlsen, K. H.; Rascle, M.; Tadmor, E., On the existence and compactness of a two-dimensional resonant system of conservation laws, Commun. Math. Sci. 5 (2007), no. 2, 253–265.

[17] Karlsen, K. H.; Risebro, N. H.; Towers, J. D., On a nonlinear degenerate parabolic transport-diffusion equation with a discontinuous coefficient. Electron. J. Differential Equations 2002, No. 93, 23 pp. (electronic).

[18] Karlsen, K. H.; Risebro, N. H.; Towers, J. D., L^1 stability for entropy solutions of nonlinear degenerate parabolic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients. Skr. K. Nor. Vidensk. Selsk. 2003, no. 3, 1–49.

[19] Kondo, C. I.; LeFloch, P. G., Zero diffusion-disspersion limits for scalar conservation laws, SIAM J. Math. Anal., Vol. 33 (2002), No. 6, 1320–1329.

[20] Kruzhkov, S. N., First order quasilinear equations in several independent variables, Mat.Sb., 81 (1970), no. 11, 1309–1351.

[21] Lax, P. D., Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and thair numerical computation, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), 159–193.

[22] Lazar, M., Generalisation of H-measures and their applications, doktorska disertacija, University of Zagreb (2007).

[23] LeFloch, P. G., Hyperbolic Systems of Conservation Laws: The theory of classical and nonclassical shock waves, Lectures in Mathematics, ETH Zuerich, Birkhauser, 2002.

[24] LeFloch, P., Hyperbolic systems of conservation laws. The theory of classical and nonclassical shock waves. Lectures in Mathematics ETH Zrich. Birkhuser Verlag, Basel (2002).

[25] LeFloch, P. G.; Natalini, R., Conservation laws with vanishing nonlinear diffusion and dispersion, Nonlinear Analysis 36 (1999) no. 2, Ser. A: Theory Methods, 213–230.

[26] Lions, P-L, Rgularit optimale des moyennes en vitesses, (French) [Optimal regularity of velocity averages] C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 320 (1995), no. 8, 911–915.

[27] Mishra, S.; Gowda, G. D. V., Optimal entropy solutions for conservation laws with discontinuous flux-functions, J. Hyperbolic Differ. Equ. 2 (2005), no. 4, 783–837.

[28] Nedeljkov, M.; Pilipovic, S.; Scarpalzos, D. The linear theory of Colombeau generalized functions. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 385. Longman, Harlow, 1998.

[29] Oberguggenberger, M.; Wang, Y.-G., Generalised solutions to conservation laws, J. Anal. Appl. (1994), No.1, 7–18.

[30] Okikiolu, G. O., Aspects of the Theory of Bounded Integral operators in L^p-Spaces, Academic Press, London and new York, 1971.

[31] Panov, E. Yu., On sequences of measure-valued solutions of a first-order quasilinear equation, (Russian) Mat. Sb. 185 (1994), no. 2, 87–106; translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. 81 (1995), no. 1, 211–227.

[32] Panov, E. Yu., Property of strong precompactness for bounded sets of measure valued solutions for a first order quasilinear equation, Matem. Sbornik **190**, No.3 (1999), 109–128; Engl. transl. in Sbornik: Mathematics 190, No. 3 (1999), 427–446.

[33] Panov, E. Yu., Existence and strong precompactness properties for entropy solutions of a first-order quasilinear equation with discontinuous flux, preprint available on www.math.ntnu.no/conservation/2007/009.html.

[34] Pedregal,P., Parametrized measures and variational principles, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 30. Birkhuser Verlag, Basel, 1997.

[35] Perthame, B.; Souganidis, P. E., A limiting case for velocity averaging, Ann. Sci. cole Norm. Sup. (4) 31 (1998), no. 4, 591–598.

[36] Sazhenkov, S. A., The genuinely nonlinear Graetz-Nusselt ultraparabolic equation, (Russian. Russian summary) Sibirsk. Mat. Zh. 47 (2006), no. 2, 431–454; translation in Siberian Math. J. 47 (2006), no. 2, 355–375.

[37] Schonbek, M. E., Convergence of solutions to nonlinear dispersive equations, Comm. Partial Differential Equations 7 (1982), no. 8, 959–1000.

[38] Stein, E. M., Singular Integrals and Differential Properties of Functions, [Russian translation] Mir, Moscow 1973.

[39] Szepessy, A., An existence result for scalar conservation laws using measure valued solutions, Comm. Partial Differential Equations 14 (1989), no. 10, 1329–1350.

[40] Tadmor, E.; Tao, T., Velocity averaging, kinetic formulations, and regularizing effects in quasi-linear PDEs., Comm. Pure Appl. Math. 60 (2007), no. 10, 1488–1521.

[41] Tartar, L., Compensated compactness and applications to partial differential equations, Nonlinear analysis and mechanics: Heriot-Watt Symposium, Vol. IV, pp. 136–212, Res. Notes in Math., 39, Pitman, Boston, Mass.-London, 1979.

[42] Tartar, L., H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 115 (1990), no. 3-4, 193–230.

Biografija

Rođena sam 16. septembra 1979. godine, u Rumi, kao Jelena Pašić. Osnovnu kolu završila sam u Irigu, a gimnaziju "J.J.Zmaj", ogledno matematičko odeljenje, u Novom Sadu. Studije matematike sam započela šk.1998/99. na PMF-u u Novom Sadu, na smeru Diplomirani matematičar. Diplomirala sam u maju 2002. sa prosečnom ocenom 9,96 i nagradom "Najbolji student Departmana za matematiku", dodeljenom na "Danu Fakulteta", 22.5.02.

Postdiplomske studije sam upisala novembra 2002. godine iz oblasti Analiza i verovatnoća, u okviru kojih sam boravila jedan semestar u Innsbruck-u, Austrija. U toku studija položila sam sve ispite sa prosečnom ocenom 10,00. Magistarsku tezu pod naslovom "Kolomboovska i meroznačna rešenja nekih klasa nelinearnih jednačina" odbranila sam 7.2.2006.

Od januara 2003. godine sam zaposlena na Departmanu za matematiku i informatiku kao asistent pripravnik, a od januara 2007. kao asistent, gde držim ili sam držala, vežbe iz predmeta: Uvod u analizu, Analiza1, Analiza2, Metrički i normirani prostori, Kompleksna analiza, Parcijalne diferencijalne jednačine, Statističko modeliranje, Statistika, Primenjena analiza i Matematika 3 za studente fizike.

Izlagala sam na nekoliko internacionalnih konferenciji, kao i na Grupi za analizu, Deparmana za matematiku, PMF, Novi Sad. Koautor sam nekoliko naučnih radova (2 objavljena i 2 poslata).

Udata sam za Ljubomira Aleksića i imam sina Čedu.

Novi Sad, 2009.

Jelena Aleksić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: Jelena Aleksić
AU
Mentor: Akademik dr Stevan Pilipović
MN
Naslov rada: Zakoni održanja u heterogenim sredinama
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2009.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 4/118/42/0/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Analiza i verovatnoća
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: zakoni održanja, heterogene sredine, H-mere, prekompaktnost rešenja, difuziono-disperzivna granica, prirodna nelinearnost
PO
UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: Doktorska disertacija posvećena je rešavanju nelinearnih hiperboličnih skalarnih zakona održanja u heterogenim sredinama, proučavanjem osobina kompaktnosti rešenja familija aproksimativnih jednačina. Tačnije, u cilju dobijanja rešenja $u = u(t,x)$ problema

$$\begin{aligned}&\partial_t u + \mathrm{div}_x f(t,x,u) = 0,\\ &u|_{t=0} = u_0(x),\end{aligned}$$

gde su promenljive $x \in \mathbf{R}^d$ i $t \in \mathbf{R}^+$, posmatramo familije problema koji na neki način aproksimiraju početni problem, a koje znamo da rešimo, i ispitujemo familije dobijenih rešenja koja zovemo aproksimativna rešenja. Cilj nam je da pokažemo da je dobijena familija u nekom smislu prekompaktna, tj. da ima konvergentan podniz čija granica rešava početni problem.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 14.4.2009.
DP
Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
Predsednik: dr Mirjana Stojanović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Darko Mitrović, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Podgorici

Član: Akademik dr Teodor Atanacković, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Dušanka Perišić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Doctoral thesis
CC
Author: Jelena Aleksić
AU
Mentor: Academic Stevan Pilipović, PhD
MN
Title: Conservation laws in heterogeneous media
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2009.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Faculty of Science and Mathematics, Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 4/118/42/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Analysis and probability
SD
Subject / Key words: conservation laws, heterogeneous media, H-measures, precompactness, diffusion-dispersion limit, genuine nonlinearity.
SKW
UC:
Holding data: library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: Doctoral theses is dedicated to solving nonlinear hyperbolic scalar conservation laws in heterogeneous media, by studying compactness properties of the family of solutions to approximate problems. More precise, in order to obtain solution $u = u(t, x)$ to the problem

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \mathrm{div}_x f(t, x, u) = 0, \\ &u|_{t=0} = u_0(x), \end{aligned} \tag{4.18}$$

where $x \in \mathbf{R}^d$ and $t \in \mathbf{R}^+$, we study the solutions of the families of problems that, in some way, approximate previously mentioned problem, which we know how to solve. We call those solutions approximate solutions. The aim is to show that the obtained family is in some sense precompact, i.e. has convergent subsequence that solves the problem (4.18).
AB

Accepted by Scientific Board on: 14.4.2009.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
President: Mirjana Stojanović, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Academic Stevan Pilipović, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Darko Mitrović, PhD, Professor Assistent, Faculty of Science and Mathematics, University of Podgorica

Member: Academic Teodor Atanacković, PhD, Full Professor, Faculty of technical sciences, University of Novi Sad

Member: Dušanka Perišić, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
DB