UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

TAKAČI A. ARPAD

KONVOLUCIONE JEDNAČINE NA NEKIM PROSTORIMA UOPŠTENIH FUNKCIJA

DOKTORSKA DISERTACIJA

NOVI SAD, 1981.

S A D R Ž A J

O Z N A K E

a) SKUPOVI BROJEVA

N, R, C - skup prirodnih, realnih i kompleksnih brojeva

N_o, R_o^+, R^+ - skup nenegativnih celih, nenegativnih realnih i pozitivnih realnih brojeva

b) PROSTORI FUNKCIJA

C^q - prostor q - puta ($1 \leq q \leq \infty$)neprekidno diferencijabilnih funkcija nad R

L_1 - prostor Lebeg - integrabilnih funkcija nad R snabdeven sa topologijom datom sa $\|f\|_{L_1} := \int_R |f(x)|dx$

L_∞ - prostor ograničenih funkcija nad R snabdeven sa topologijom datom sa $\|f\|_{L_\infty} :=$ es.sup. $\{|f(x)|, x\epsilon R\}$

D - prostor glatkih funkcija kompaktnog nosača nad R snabdeven induktivnom topologijom kao u [13]

S - prostor brzo opadajućih funkcija nad R snabdeven topologijom kao u [13]

E - prostor svih glatkih funkcija nad R snabdeven toplogijom kao u [13]

D_K^q - prostor q - puta neprekidno diferencijabilnih funkcija sa nosačem u kompaktnom skupu $K \subset R$

D_K - prostor glatkih funkcija sa nosačem u kompaktnom skupu $K \subset R$

U - prostor celih analitičkih funkcija nad C

c) PROSTORI DISTRIBUCIJA

$\mathcal{D}'$ prostor distribucija = prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{D}$

$\mathcal{D}'_F$ distribucije konačnog reda

$\mathcal{S}'$ prostor temperiranih distribucija = prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{S}$

$\mathcal{E}'$ prostor distribucija kompaktnog nosača = prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{E}$

d) SIMBOLI

$H(\cdot)$ Hevisajdova funkcija = karakteristična funkcija R^+

δ Dirakova delta funkcija

δ_τ Dirakova delta funkcija sa nosačem u $\tau \in R$

χ_E karakteristična funkcija skupa E

$M^*(\cdot)$ dualna funkcija po Jungu za $M(\cdot)$

supp nosač distribucije ili funkcije

D operator distribucionoh izvoda

$*$ konvolucija u smislu distribucija

Δ kraj dokaza

UVOD

Teorija distribucija ima korene u većem broju radova iz matematike i fizike tokom prve polovine dvadesetog veka. P. Dirak (Dirac) je 1926. godine u svojim istraživanjima iz kvantne mehanike uveo tzv. "δ - funkciju" na sledeći način :

$$\delta(x) = 0 \;,\; x \neq 0 \quad \text{i} \quad \int_{R^n} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

za proizvoljnu neprekidnu funkciju $\phi(x)$. Ispitujući Košijev problem za hiperbolične jednačine S.L.Soboljev je tražeći način da proširi skup rešenja uveo tzv. "uopšteni izvod". Lokalno - integrabilna funkcija f_i je "uopšteni izvod" po promenljivoj x_i $(1 \leq i \leq n)$ lokalno - integrabilne funkcije f ako za sve funkcije $\phi(x)$ koje su ograničenog nosača i imaju uobičajeni parcijalni izvod po x_i važi

$$\int_{R^n} (f \cdot \frac{\partial\phi}{\partial x_i} - f_i \cdot \phi)dx = 0$$

Jasno je da ako je f neprekidno diferencijabilna po x_i da se tada klasičan i uopšteni izvod poklapaju, medjutim, može se desiti da lokalno-integrabilna funkcija f ima uopšteni a nema klasičan izvod.

Već je samom Diraku bilo jasno da je "δ - funkcija" u stvari funkcionela nad prostorom neprekidnih funkcija. Ipak, trebalo je da prodju još dve i po decenije da se u čuvenoj monografiji L.Švarca (Schwartz) objedine ideje spomenutih i još mnogih drugih autora i lokalno konveksni prostori iskoriste za zasnivanje teorije distribucija. Tako su distribucije u [26] definisane kao neprekidne linearne funkcionele nad prostorom glatkih funkcija kompaktnog nosača snabdevenog topologijom induktivnog limesa. Tek tada počinje intenzivan razvoj teorije distribucija koja ubrzo donosi veliki napredak u različitim oblastima, a naročito u onima iz kojih je potekla : parcijalnim diferencijalnim jednačinama i kvantnoj fizici.

Jedno od bitnih uopštenja koje je teorija L.Švarca donela bilo je proširenje klasične konvolucije , a odatle do konvolucionih jednačina nije bilo daleko.

Konvoluciona jednačina na nekom potprostoru distribucija X' je jednačina oblika

$$T * U = V \tag{1}$$

gde " $*$ " označava konvoluciju u smislu distribucija, V je data distribucija iz X' , a rešenje U tražimo u X'. Distribucija T je konvolutor na X', tj. preslikavanje $T * : U \to T * U$ je neprekidno preslikavanje prostora X' u sama sebe.

Značaj konvolucionih jednačina dovoljno ilustruju posebni slučajevi jednačine (1) , odnosno konvolutora T :

a) Ako je

$$T(x) := \sum_{|k|=0}^{m} a_{k_1,k_2,\dots,k_n} \cdot \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \delta(x)$$

gde je $x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \in R^n$, $(k_1,k_2,\dots,k_n) \in N_o^n$,$m \in N$ $|k|:=k_1+k_2+\dots+k_n$ i $a_{k_1,k_2,\dots k_n} \in C$, tada se (1) svodi za $n > 1$ na parcijalnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

b) Ako je

$$T(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \cdot \delta_{b_k}(x)$$

gde $m \in N$, $a_k \in C$ i $b_k \in R$, tada jednačina (1) postaje diferentna jednačina.

c) Ako se posmatraju regularni elementi iz X', tj. takvi da su U,V funkcije (npr. iz L_1), tada se za

$$T(x) := \lambda \cdot K(x) + \delta(x) \quad , \lambda \in R, K(x) \in L_1$$

dobija integralna jednačina

$$\lambda \cdot \int_R K(x-t)U(t)dt + U(x) = V(x) \quad , \quad x \in R \ ,$$

a ako se izostavi pretpostavka o regularnosti distribucija U,V i jezgra K, dobija se "uopštena" integralna jednačina.

d) Različitim kombinacijama prethodna tri slučaja dobijaju se diferencijalno - diferentne, integro - diferencijalne jednačine, itd.

Konvolucione jednačine na različitim prostorima distribucija i uopštenih funkcija se ispituju, kao što smo već primetili, od početka pedesetih godina pa sve do današnjih dana. Prve duboke rezultate dali su L.Erenprajs (Ehrenpreis) u [5] L.Hermander (Hörmander) u [14],[15],[16] i B.Malgranž (Malgrange) u [19].

Ispitivanja spomenutih autora odnosila su se na rešivost i hipoeliptičnost konvolucione jednačine u prostoru D' svih distribucija i D'_{F} distribucija konačnog reda. Kasnije su ova ispitivanja proširena na neke druge poznate prostore distribucija (npr. temperirane u [37],[29]), a takodje i na neke nove prostore distribucija , kao što su eksponencijalne distribucije ([12]) i prostori $K'(M)$ ([34]) o kojima će biti govora malo kasnije. Smisao ovih ispitivanja je u činjenici da je potrebno poznavati uslova da konvoluciona jednačina (1) ima rešenje koje poseduje unapred zadano ponašanje u beskonačnosti. Pod ponašanjem distribucije u beskonačnosti podrazumeva se ponašanje neprekidne funkcije u beskonačnosti čiji je konačan distribucioni izvod baš ta funkcija ; jasno, ova definicija ima smisla samo za distribucije konačnog reda.

U radu [21] S.Pilipović i ja smo definisali prostor $H'\{M_p\}$ koji je opštiji od prostora K'_s i $K'(M)$. Na taj način se ranije dobijeni rezultati dobijaju kao poseban slučaj naših. Prostor $H'\{M_p\}$ je prostor tipa $\mathcal{H}'\{\exp(M_p(x))\}$ iz [7] , s tim što su funkcije $M_p(x)$ konačne za sve $p\in N$ i pored ostalog zadovoljavaju uslov (A), gde je

(A) Za svako $p\in N$ postoje $X_p>0$ i $p'\in N$ tako da za $|x|\geq X_p$ važi $M_p(px) \leq M_{p'}(x)$

Ovaj uslov koji daje brži rast funkcije $M_{p'}(x)$ od $M_p(x)$ ne mora biti zadovoljen u opštem slučaju prostora tipa $\mathcal{H}'\{\exp M_p(x)\}$ iz [7] . Sa druge strane on je zadovoljen u do sada ispitivanim slučajevima prostora $H'\{M_p\}$. Naime, prostori eksponencijalnih distribucija K'_s , $s\in N$, koje je pored Hasumija u [12] najviše ispitivao Z.Železni (Zielezny) sa saradnicima u [37] [38],[27],[28],[24],[29], a takodje i J.Čoranesku (Cioranescu) u [2] i O.Grudzinski u [9],[10] , mogu se dobiti za $M_p(x) := p\cdot|x|^s$, $p\in N$,i $|x|\geq 1$ .kao prostor tipa $H'\{M_p\}$. Jasno je da je uslov (A) zadovoljen. Prostor $K'(M)$ koji su ispitivali J.Vloka (Wloka) u [34] i O.Grudzinski u [11] u okvirima Berlingovih distribucija, može se dobiti za $M_p(x):=M(px)$, $p\in N, x\in R$ kao prostor tipa $H'\{M_p\}$ u kome važi uslov (A) .

Glavni deo ove teze (druga do peta glava) posvećen je ispitivanju konvolucionih jednačina na prostoru $H'\{M_p\}$; većina rezultata je iz [21],[22],[23] koje sam radio zajedno sa dr. S. Pilipovićem.

Doktorska disertacija sadrži šest glava. U prvoj glavi izložene su neke osobine konveksnih funkcija, pošto one igraju važnu ulogu u definiciji prostora $H'\{M_p\}$.

U drugoj glavi data je definicija prostora $H'\{M_p\}$([21]) .

Prostor $H'\{M_p\}$ se dobija kao dualan prostor za prostor $H\{M_p\}$ gde se niz $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ definiše slično kao u [34] . Prostor $H'\{M_p\}$ je izomorfan sa jednim potprostorom distribucija D', a sadrži prostor temperiranih distribucija S'. Pokazano je da se $H'\{M_p\}$ može dobiti kao induktivna granica prostora $K'(M_p)$ $p\in N$, i to u skupovnom i topološkom smislu. Na osnovu karakterizacije konvolutora na $H'\{M_p\}$ pokazuje se da je prostor konvolutora na $H'\{M_p\}$ skupovno jednak sa presekom prostora konvolutora na $K'(M_p)$, $p=1,2,\ldots$.

Treća glava je posvećena Furijeovoj transformaciji na prostoru $H'\{M_p\}$. Osnovni rezultat te glave je teorema koja daje potreban i dovoljan uslov da cela analitička funkcija bude Furijeova transformacija konvolutora na $H'\{M_p\}$.

U četvrtoj glavi razmatra se rešivost konvolucione jednačine na prostoru $H'\{M_p\}$,[22].Glavna teorema iz [11] koja daje potreban i dovoljan uslov za rešivost konvolucione jednačine nad $K'(M)$ (a to je tzv. "M - sporo opadanje" Furijeove transformacije konvolutora T iz (1)) je dokazana na drugi način nego u [11]. Da je uslov potreban pokazuje se kao u [5] i [2], a dovoljnost tog uslova sledi iz jednog opštijeg tvrdjenja koje se oslanja na lemu Hermandera iz [18]. U poglavlju 4.3 dati su potrebni i dovoljni uslovi ze rešivost konvolucione jednačine (1) nad $H'\{M_p\}$. Izmedju ostalog, dobija se jedno uopštenje jedne teoreme iz [10] .

U petoj glavi dati su potrebni i dovoljni uslovi za hipoeliptičnost konvolucione jednačine nad $H'\{M_p\}$([23]).Teorema 5.5 je glavni rezultat te glave i u uvodu pete glave je detaljno izložena šema dokaza te teoreme. Napomenimo ovde da za razliku od prethodnih rezultata, koji se bez teškoća prevode na više dimenzionalan slučaj, leme 5.5 i 5.6 se u tom slučaju ne bi mogle dokazati na izloženi način.

U dodatku ilustrovani su na jednoj diferencijalno-diferentnoj jednačini pitanja rešivosti i hipoeliptičnosti konvolucione jednačine u prostoru H'_∞ , koji je ispitivan u [20] .

Šesta glava se izdvaja od prethodnih u tom smislu što se posmatra tzv. "μ - asimptotika" distribucija iz [30] i [31] primenjene na prostor K_1' (eksponencijalnih distribucija definisanih u [12]). Dokazano je tvrdjenje koje daje asimptotiku distribcije $V := T * U$ ako je poznato ponašanje T i U u spomenutom smislu. Obrnuto pitanje, tj. na osnovu ponašanja T i V dati asimptotsko ponašanje rešnja je važnije i (čini se)bez naknadnih uslova se to ne može rešiti. Delimičan odgovor je ponašanje Laplasove transformacije rešenja na osnovu ponašanja Laplasove transformacije T i V.

Prijatna mi je dužnost da se zahvalim akademiku dr Bogoljubu Stankoviću, prof. dr Endre Papu i dr Stevanu Pilipoviću na primedbama i savetima u toku rada na ovoj tezi. Dr Stevanu Pilipoviću se zahvaljujem na saradnji iz koje su dobijeni neki rezultati ove teze.

GLAVA I

KONVEKSNE FUNKCIJE

Pošto konveksne funkcije imaju važnu ulogu u sledeće tri glave, u prvoj glavi ćemo izložiti one osobine konveksnih funkcija koje su neophodne za dalji rad. Tvrdjenja neće biti data u najopštijem obliku pre svega zbog posebnog oblika konveksne funkcije koji je nama potreban. Naglasak je na osobinama dualne funkcije po Jungu za datu konveksnu funkciju. Više o konveksnim funkcijama može se naći u [7] i [3] odakle su uglavnom i uzeta ova tvrdjenja.

U celoj glavi je $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija koja je parna, strogo rastuća za $x>0$ i zadovoljava sledeće uslove :

(1) $\quad M(0) = 0$,

(2) $\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{M(x)}{x} = \infty$.

Definicija 1.1. Funkcija $M(x)$ je konveksna ako i samo ako za sve $x,y \in \mathbb{R}$ i $t \in [0,1]$ važi

(3) $\quad M(tx+(1-t)y) \leq t\cdot M(x) + (1-t)\cdot M(y)$.

Neke jednostavne osobine konveksnih funkcija daje

Lema 1.1. Ako je $M(x)$ konveksna funkcija, za nju važe sledeće nejednakosti :

(4) $\quad k\cdot M(x) \leq M(kx)\ ,\ k \geq 1,\ x \in R$

(5) $\quad M(x) + M(y) \leq M(x+y)\ ,\ x\cdot y \in R^+$

Dokaz. Relacija (4) sledi ako u (3) stavimo $t=1/k$, $y=0$ i zamenimo $x/_k$ sa x. Relaciju (5) ćemo dokazati za $x>y>0$; zbog parnosti M i simetričnosti (5) prema x i y ostali slučajevi tada slede. Ako u (4) stavimo $k=1+t$, $t=y/x$ dobijamo

(4') $\quad (1+t)M(x) \leq M(x+tx) = M(x+y)$

Relacija (3) daje $M(tx) \leq tM(x)$, i ako stavimo $t=y/x$ u ovu nejednakost, dobijamo

$$M(\tfrac{y}{x}\cdot x) \leq \tfrac{y}{x}\cdot M(x) = t\cdot M(x)\ .$$

Sabiranjem ove nejednakosti sa (4') dobija se relacija (5) .Δ

U daljem tekstu pretpostavljamo pored već spomenutih osobina da je $M(x)$ konveksna funkcija. Primetimo da je tada $M(x)$ ograničena odozgo, prema tome ograničena, na svakom ograničenom intervalu. U stvari, ako je (a,b) neki otvoreni interval u R, tada za svaku tačku $x \in (a,b)$ postoji $t \in (0,1)$ tako da je $x = ta + (1-t)b$. Uslov (3) daje

$$M(x) \leq \max(M(a),M(b)) < \infty \quad \text{za sve } x \in (a,b)\ .$$

Tvrdjenje 1.1. Konveksna funkcija je neprekidna.

Dokaz. Dovoljno je ispitati tačku $x=0$. Prema prethodnom razmatranju, za svaku ograničenu okolinu nule V postoji konstanta $K=K(V)$ tako da važi $M(x) \leq K$ za sve $x \in V$. Ako tvrdjenje nije tačno, postoji niz $\{x_k\}$ u V tako da je $\lim x_k = 0$, i $\lim M(x_k) = p > 0$. Izaberimo $q \varepsilon N$ tako da je $2^q . p > K$. Na osnovu (4) je $\liminf M(2x_k) \geq 2p$ i induktivno $\liminf M(2^q x_k) \geq 2^q p$, što je kontradikcija . Δ

Primedba. Ako je neprekidna funkcija "centralno konveksna",tj. ako relacija (3) važi za $t=0,5$ i svako $x,y \in R$, tada je ona konveksna. △

Lako je videti da je zbir konačno mnogo konveksnih funkcija i supremum familije konveksnih funkcija (ako je konačan) konveksna funkcija.

Definicija 1.2. Funkcija $M^* : R \to R$ definisana sa

(6) $$M^*(y) := \sup \{ |x||y| - M(x) \; ; \; x \in R \}$$

naziva se dualna funkcija za M(x) po Jungu (Young).

Jasno je da je $M^*(y)$ parna i za $y \geq 0$ strogo monotono rastuća funkcija. Zbog relacije (1) je $M^*(0)=0$, a zbog relacije (2) je $M^*(y)$ konačna za sve $y \in R$. (Uslov (2) je zapravo potreban i dovoljan da bi $M^*(y)$ bila konačna funkcija.) Pošto je za fiksirano x funkcija $|x||y| - M(x)$ linearna po y za $y \geq 0$, dakle konveksna, to je $M^*(y)$ konveksna funkcija kao supremum familije konveksnih funkcija. Prema tome, funkcija $M^*(y)$ zadovoljava iste uslove kao i M(x). Pokažimo sada opravdanost naziva "dualna".

Tvrdjenje 1.2. Dualna funkcija po Jungu za $M^*(y)$ je funkcija M(x) ($M^*(y)$ je definisana relacijom (6)).

Dokaz. Neka je $C_M := \{(x,z) \in R^2 \; ; \; z \geq M(x) \}$. Očevidno je skup C_M konveksan, a pošto je po tvrdjenju 1.1 M(x) neprekidna funkcija, to je skup C_M zatvoren skup u R^2. Ako je data tačka x_o, $x_o \in R$, tada je tačka $(x_o, z_o - d)$ van C_M ako je $z_o := M(x_o)$ i $d > 0$. Jedna od posledica teoreme Hana - Banaha je da postoji neprekidna linearna funkcionela $L(x,z)$ nad R^2 tako da je $L(x_o, z_o - d) < \inf \{L(x,z) \; ; \; (x,z) \in C_M\}$. Opšti oblik neprekidne linearne funkcionele nad R^2 je $L(x,z) = ax + bz$ za neke $a, b \in R$ nezavisne od $(x,z) \in R^2$. Dakle

(7) $$ax_o + b(z_o - d) < ax + bz \quad \text{za sve} \quad (x,z) \in C_M .$$

Ako stavimo $(x,z) := (x_o, z_o)$ u relaciju (7), dobijamo $b > 0$; posle deljenja sa b i smene $z := M(x)$, $c := -a/b$ dobijamo

$$c(x - x_o) < d + M(x) - M(x_o) .$$

Pošto je $d>0$ proizvoljno, to je $cx - M(x) \leq cx_o - M(x_o)$ za sve $x \in R$. Dakle, po definiciji 1.2 je

$$M^*(c) = cx_o - M(x_o) \quad \text{i} \quad M^{**}(x_o) \geq cx_o - M^*(c) = M(x_o) .$$

Budući da se nejednakost $M^{**}(x_o) \leq M(x_o)$ neposredno dobija iz definicije 1.2, to sledi $M^{**}(x_o) = M(x_o)$. Δ

Neposredna posledica definicije 1.2 je sledeća lema koju ćemo kasnije često koristiti.

Lema 1.2. Dualna funkcija po Jungu funkcije $aM(bx)$ je $aM^*(y/ab)$, $a,b>0$.

O odnosu konveksnih i njihovih dualnih po Jungu funkcija govori

Lema 1.3 Ako su $M_1(x)$ i $M_2(x)$ dve konveksne funkcije za koje važe osobine (1) i (2) i ako je $M_1(x) \leq M_2(x)$ za $|x|>x_o$, tada je $M_1^*(y) \geq M_2^*(y)$ za dovoljno veliko $|y|$

Dokaz. Pretpostavićemo da je $x>x_o$ i $y>0$. Na osnovu pretpostavke je $xy - M_1(x) \geq xy - M_2(x)$ i uzimajući supremum po x dobijamo $M_1^*(y) \geq M_2^*(y)$ za dovoljno veliko y . Ostali slučajevi se dokazuju na isti način. Δ

Može se pokazati da je konveksna funkcija diferencijabilna skoro svuda i da je njen prvi izvod neopadajuća funkcija za $x \geq 0$. Ako se pretpostavi da je funkcija $M(x)$ neprekidno diferencijabilna na R , tada je $m(x) := M'(x) > 0$ za $x>0$. Primetimo da je $m(0)=0$ zbog parnosti funkcije $M(x)$ i $m(\infty)=\infty$ na osnovu uslova (2). Po osnovnoj teoremi integralnog računa i uslova (1) je

$$M(x) = \int_0^x m(t)dt \quad , \quad x \geq 0 . \tag{8}$$

Pretpostavimo još da da je funkcija $m(x)$ strogo rastuća za $x>0$; njena inverzna funkcija $m^{-1} : R_o^+ \to R_o^+$ je u tom slučaju surjektivna funkcija. Njen značaj pokazuje sledeće

Tvrdjenje 1.3. Ako je funkcija $M(x)$ neprekidno diferencijabilna na R sa strogo rastućim izvodom $m(x)$ za $x>0$, tada je

$$(9) \qquad M^*(y) = \int_0^y m^{-1}(t)dt \quad , \; y>0 \; ,$$

gde je $m^{-1}(x)$ inverzna funkcija za $m(x)$.

Dokaz. Neka je $y_o>0$ dato; tada je

$$(10) \qquad xy_o - M(x) \leq M^*(y_o) \quad \text{za sve} \quad x>0 \, .$$

Posledica uslova (2) i monotonosti funkcije $M(x)$ je da postoji $x_o=x_o(y_o)>0$ tako da važi

$$(11) \qquad x_oy_o = M(x_o) + M^*(y_o)$$

Sa druge strane, geometrijski je očevidno da važi

$$(12) \qquad xy_o \leq \int_0^x m(t)dt + \int_0^{y_o} m^{-1}(t)dt \quad , \; x>0.$$

Relacije (11) i (12) za $x:=x_o$ povlače $M^*(y_o) \leq \int_0^{y_o} m^{-1}(t)dt$

Surjektivnost funkcije $m^{-1}(x)$ daje egzistenciju broja $x_o'>0$ sa osobinom $m^{-1}(y_o)=x_o'$. Ako stavimo tu vrednost za x u (10) i (12), dobijamo :

$$\int_0^{y_o} m^{-1}(t)dt \leq M^*(y_o) \, .$$

Prema tome važi (9) i mora biti $x_o=x_o'$. Δ

Primedba. Lako je pokazati da ako je funkcija $m : R_o^+ \to R_o^+$, sa osobinama : $m(0)=0$, $m(\infty)=\infty$, strogo rastuća za

$x>0$, da je tada funkcija $M(x)$ definisana integralom (8) konveksna i ako se parno proširi na ceo skup realnih brojeva zadovoljava i uslove (1) i (2) . Ovakav prilaz je korišćen u [7] i [24], a i mi ćemo ga koristiti u sledećoj glavi.

U četvrtoj glavi ćemo koristiti funkciju $M^{*-1}(y)$, $y>0$, tj. inverznu funkciju dualne funkcije po Jungu za funkciju $M(x)$ (tačnije, njene restrikcije na R_0^+). Pretpostavićemo da je funkcija $M(x)$ pored ranije datih uslova još i neprekidno diferencijabilna. Tada je prema tvrdjenju 1.3 funkcija $M^*(y)$ neprekidno diferencijabilna za $y>0$, i pošto je $M^*(y)$ strogo monotono rastuća za $y>0$, to $M^{*-1}(y)$ postoji i monotono teži u beskonačnost.

Sledeća lema će se koristiti kod ispitivanja konvolucionih jednačina.

Lema 1.4. Za $y>0$ je

$$y/M^{-1}(y) \leq M^{*-1}(y) \leq 2y/M^{-1}(y) \quad . \tag{13}$$

gde je $M^{-1}(x)$ inverzna funkcija za restrikciju funkcije $M(x)$ na R_0^+.

Dokaz. Zbog monotonosti nad R^+ funkcija $M(x)$, $M^*(y)$ i njihovih inverznih funkcija je prva nejednakost u (13) ekvivalentna sa

$$M^*(M(x)/x) \leq M(x) \ , \ x:=M^{-1}(y),\ y>0 \ , \text{ ili}$$

$$tM(x)/x \leq M(t) + M(x) \quad \text{za sve } t\geq 0 \ . \tag{14}$$

Za $t\leq x$ relacija (14) je trivijalna, a za $t>x$ ona sledi zbog monotonosti funkcije $M(x)/x$ za $x>0$.(Ovo se može pokazati pomoću prvog izvoda te funkcije.)

Desna nejednakost u relaciji (13) je ekvivalentna sa

$$M(x) \leq \sup \{ \ t\,\frac{2M(x)}{x} - M(t) \ ; \ t\geq 0 \ \} \ . \tag{15}$$

Sa druge strane je $M(x) = x\cdot\frac{2M(x)}{x} - M(x)$, a to nije veće od supremuma u relaciji (15). Δ

GLAVA II

PROSTORI TIPA $H'\{M_p\}$

U ovoj glavi ćemo definisati prostor $H'\{M_p\}$, koji je uveden u radu [21]. $H'\{M_p\}$ je prostor tipa $\mathcal{K}'\{\exp(M_p(x))\}$ (videti [7], a način definicije je sličan kao u [34]. Posebni slučajevi prostora tipa $H'\{M_p\}$ su ispitivani u [34], [27], [28], [11], [20] u svim tim prostorima je ispunjen uslov (A) (videti poglavlje 2.1), koji je glavna pretpostavka o nizu funkcija $\{M_p(x)\}_{p\in N}$. To znači da će rezultati ove glave sadržavati ranije dobijene rezultate, a sa druge strane oni mogu dovesti do novih prostora ovog tipa.

Naš zadatak je ispitivanje konvolucionih jednačina na prostoru $H'\{M_p\}$, i u tom cilju ćemo u ovoj glavi definisati konvolucione operatore - konvolutore na prostoru $H'\{M_p\}$ i dokazati njihove glavne osobine. Ti rezultati će nam omogućiti da u sledećoj glavi ispitamo Furijeovu transformaciju konvolutora, pomoću koje se daju uslovi za rešivost i hipoeliptičnost konvolucione jednačine (četvrta odnosno peta glava).

2.1. PROSTORI $H\{M_p\}$ i $H'\{M_p\}$

Neka je $\{m_p(x)\}_{p\varepsilon N}$ niz strogo rastućih neprekidnih funkcija na R_o^+ sa sledećim osobinama

(1) $m_p(0) = 0$, $m_p(\infty) = \infty$ za svako $p\varepsilon N$ i

(2) $m_p(x) \leq m_{p+1}(x)$ za svako $p\varepsilon N$ i $x\varepsilon R_o^+$.

Definišimo funkcije $M_p(x)$ na sledeći način :

(3) $M_p(x) := \int_0^{|x|} m_p(t)dt$, $p\varepsilon N$, $x\varepsilon R$.

Funkcija $M_p(x)$ za fiksirano $p\varepsilon N$ je konveksna,za $x>0$ rastuća i teži beskonačnosti brže nego proizvoljna linearna funkcija. To znači da je uslov (2) prve glave ispunjen, a budući da je uslov (1) prve glave trivijalno ispunjen, to za funkciju $M_p(x)$ možemo primeniti rezultate prve glave. Pre svega je funkcija $M_p^*(y)$, dualna po Jungu za $M_p(x)$, konačna za svako $y\varepsilon R$.

Pretpostavićemo da za niz funkcija $\{M_p(x)\}_{p\varepsilon N}$ važi sledeći uslov :

(A) Za svako $p\varepsilon N$ postoje $p'\varepsilon N$ i $X_p>0$ tako da važi
$M_p(px) \leq M_{p'}(x)$ za $|x| \geq X_p$.

Kao što je već rečeno u uvodu glave, ovaj uslov je ispunjen u svim do sada ispitivanim slučajevima prostora tipa $H'\{M_p\}$. Sa druge strane, pokazaćemo da uslov (A) povlači uslov (N),gde je

(N) Za svako $p\varepsilon N$ postoji $p''\varepsilon N$ tako da je funkcija $M_{pp''}(x) := \exp(M_p(x) - M_{p''}(x))$ sumabilna na realnoj pravoj R i funkcija $M_{pp''}(x)$ teži nuli kada $|x|$ teži u beskonačnost.

Lema 2.1. Ako za niz funkcija $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ definisanih relacijom (3) važi uslov (A), tada za njega važi uslov (N).

Dokaz. Neka je $p\in N$ dato i uzmimo $X_p>0$ i $p'\in N$ kao u uslovu (A); specijalno za $p=1$ stavićemo $p':=2$. Za ovo p' postoje $X_{p'}\geq X_p$ i $p''\in N$ tako da važi $M_{p'}(p'x)\leq \leq M_{p''}(x)$ za $|x|\geq X'_{p'}$. Na osnovu nejednakosti

$$2M_{p'}(x)\leq M_{p'}(p'x)\leq M_{p''}(x)\leq M_{p''}(px) \quad \text{za} \quad |x|\geq X'_{p'},$$

dobijamo

$$\int_{pX_{p'}}^{\infty}\exp(M_p(x)-M_{p''}(x))dx = p\cdot\int_{X_{p'}}^{\infty}\exp(M_p(pt)-M_{p''}(pt))dt\leq$$

$$\leq p\cdot\int_{X_{p'}}^{\infty}\exp(M_{p'}(t)-2M_{p'}(t))dt\leq p\cdot\int_{X_{p'}}^{\infty}\exp(-t)dt<\infty .$$

Pošto je funkcija $\exp(M_p(x)-M_{p''}(x))$ parna i neprekidna na R, to je na osnovu prethodnog i sumabilna na R. Dalje, ta funkcija je pozitivna i monotono opadajuća nad R^+, jer je za $x>0$ njen izvod negativan. Prema tome postoji $\lim\limits_{x\to\infty}\exp(M_p(x)-M_{p''}(x))$ koji je zbog dokazane sumabilnosti na R te funkcije jednak nuli. Δ

Zbog monotonosti niza $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ po p moguće je za dato p izabrati takav najmanji prirodan broj $r(p)$ (koji nije veći od maksimuma brojeva p' iz uslova (A) i p'' iz uslova (N)) da važe i uslov (A) i uslov (N) za to $r(p)$.

Definicija 2.1. Vektorski prostor glatkih funkcija $\phi(x)$ na R takvih da za svako $p\in N$ važi

$$(4) \qquad \gamma_p(\phi):=\sup\{|\phi^{(j)}(x)|\exp(M_p(x))\ ;\ x\in R, 0\leq j\leq p\}<\infty$$

obeležićemo sa $H\{M_p\}$. Topologija na $H\{M_p\}$ je definisana sa prebrojivom familijom normi $\{\gamma_p\}_{p\in N}$.

Prostor $H\{M_p\}$ je tipa $\mathcal{K}'\{\exp(M_p(x))\}$ iz [7] , dakle pre svega je kompletan u odnosu na uvedenu topologiju. Dalje, uslov (*N*) povlači da je $H\{M_p\}$ nuklearan, a tim pre i perfektan (Montelov) prostor (videti [7]). Pošto su funkcije $M_p(x)$ po pretpostavci konačne, to nuklearnost $H\{M_p\}$ povlači da je prostor D svuda gust u $H\{M_p\}$. Jasno je da je topologija u D finija od inducirane topologije iz $H\{M_p\}$; prema tome je prostor $H'\{M_p\}$ (dualan prostor za $H\{M_p\}$) izomorfan sa jednim podskupom od D'. Primetimo da je sa druge strane $H\{M_p\}\subset S$ i da prostor $H'\{M_p\}$ sadrži prostor temperiranih distribucija S' . Kao što je uobičajeno, $H'\{M_p\}$ ćemo snabdeti sa jakom topologijom ; zbog perfektnosti prostora $H\{M_p\}$ se slaba i jaka konvergencija u $H'\{M_p\}$ poklapaju. Pokažimo sada dve bitne osobine prostora $H\{M_p\}$; sada i ubuduće pretpostavljamo da uslov (A) važi.

Tvrdjenje 2.1. Protor $H\{M_p\}$ je zatvoren u odnosu na operaciju izvoda $D : \phi(x) \to \phi'(x)$ i operaciju translacije $\tau_y : \phi(x) \to \phi(x-y)$ za svaki realan broj y .

Dokaz. Neka je $\phi\in H\{M_p\}$. Ako je $p\in N$ dato, tada je

$$\gamma_p(\phi') = \sup\{|\phi^{(j+1)}(x)|\exp(M_p(x)) \;;\; x\in R, 0\le j\le p\} \le$$

$$\le \gamma_{p+1}(\phi) < \infty.$$

Neka je sada $(y,p)\in R\times N$ dato. Tada postoji $p_1=p_1(y,p)\in$ $\in N$, tako da je $p_1-1 \ge \max\{|y|,p\}$ i obeležimo $p_2 :=$ $= r(p_1) + 1$. Tada je

$$\gamma_p(\phi(x-y)) \le \sup\{|\phi^{(j)}(x)|\exp(M_p(x+y)) \;;\; x\in R, 0\le j\le p\} \le$$

$$\le \sup\{|\phi^{(j)}(x)|\exp(M_{p_2}(x)) \;;\; x\in R, 0\le j\le p_2\} \cdot$$

$$\cdot \sup\{\exp(M_p(x+y))-M_{p_2}(x)) \;;\; x\in R\} \le \gamma_{p_2}(\phi) \cdot$$

$$\cdot\Big[\sup\{\exp(M_p(x+y)-M_{p_2}(x))\ ;\ |x|\leq X_{p_1}\}+$$

$$+\sup\{\exp(M_p(x+y)-M_{p_2}(x))\ ;\ |x|>X_{p_1}\}\Big].$$

Pokažimo ograničenost drugog supremuma. Na osnovu uslova (A) je

$$\exp(M_p(x+y)-M_{p_2}(x)) \leq \exp(M_{p_1}(p_1 x)-M_{p_2}(x)) \leq$$

$$\leq \exp(M_{r(p_1)}(x)-M_{p_2}(x)) \leq 1\ ,\ \text{za sve } |x|\geq X_{p_1}\ .$$

Pošto se prvi supremum uzima po kompaktnom skupu, postoji $K=K(y,p)>0$ tako da važi

$$\gamma_p(\phi(x-y)) \leq K\gamma_{p_2}(\phi)\ . \qquad \Delta$$

Iz dokaza tvrdjenja 2.1 neposredno sledi da su operacije izvoda i translacije (naravno, pod pretpostavkom da važi uslov (A)) neprekidna preslikavanja prostora $H\{M_p\}$ u sama sebe.

2.2 EKVIVALENTNI NIZOVI FUNKCIJA

Funkcije $M_p(x)$ uvedene relacijom (3) su diferencijabilne, ali u opštem slučaju nisu glatke. Pokazaćemo da se niz $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ može zameniti sa ekvivalentnim nizom glatkih funkcija $\{N_p(x)\}_{p\in N}$, koje inače zadovoljavaju iste uslove kao i funkcije $M_p(x)$. Ekvivalentnost nizova objašnjava

Definicija 2.2. Nizovi funkcija $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ i $\{N_p(x)\}_{p\in N}$ su ekvivalentni ako definišu isti prostor u smislu definicije 2.1.

Sledeća lema je očevidna.

<u>*Lema 2.2.*</u> Neka za svako $p\in N$ postoje p_1 i p_2 iz skupa prirodnih brojeva, tako da važe nejednakosti :

$$(5) \qquad M_p(x) \le N_{p_1}(x) + K_{p_1}$$

$$(6) \qquad N_p(x) \le M_{p_2}(x) + K_{p_2}$$

za neke $K_{p_1}, K_{p_2} \ge 0$ i sve $x\in R$. Tada su nizovi $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ i $\{N_p(x)\}_{p\in N}$ ekvivalentni. Δ

Sada ćemo dati konstrukciju niza glatkih funkcija $\{N_p(x)\}_{p\in N}$ koji je ekvivalentan sa zadanim nizom funkcija $\{M_p(x)\}_{p\in N}$. Neka je $w(x)$ glatka nenegativna funkcija na R koja zadovoljava sledeće uslove : $\operatorname{supp} w \subset [0,1]$, $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)dx = 1$ (poznato je da takva funkcija postoji).Neka je

$$(7) \qquad \bar{N}_p(x) := \int_{-\infty}^{\infty} M_p(t)w(x-t)dt \quad , x\ge 1 \quad \text{i}$$

$$(8) \qquad N_p(x) := \bar{N}_p(|x|) \quad \text{za} \quad |x|\ge 1 , \quad p\in N \quad .$$

Funkcija $N_p(x)$ je glatka za $|x|\ge 1$ i rastuća za $x\ge 1$. Poznato je da se ona može naknadno definisati na intervalu $[0,1]$ tako da bude parna, pozitivna i glatka na R , i, najzad, rastuća na R_o^+ . Ubuduće će $N_p(x)$ uvek označavati funkciju definisanu sa relacijom (8)za $|x|\ge 1$ koja ima spomenute osobine.

Dokazaćemo sada dve leme i jedno tvrdjenje o odnosu nizova $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ i $\{N_p(x)\}_{p\in N}$.

<u>*Lema 2.3.*</u> Važe sledeće nejednakosti :

$$(9) \qquad N_p(x) \le M_p(x) \quad \text{za} \quad |x|\ge 1 \; ;$$

$$(10) \qquad M_p(x) \le N_{p_1}(x) + K_p \qquad \text{za neko } p_1=p_1(p) \text{ i } K_p \ge 0, x\in R \; .$$

Dokaz. Neka je $x \geq 1$. Tada je

$$N_p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} M_p(t)w(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} M_p(x-t)w(t)dt =$$

$$= \int_0^1 M_p(x-t)w(t)dt \leq M_p(x)\cdot\int_0^1 w(t)dt = M_p(x) ,$$

što dokazuje relaciju (9).

Za dovoljno veliko $x>1$ i $p>1$ koristeći uslov (A) dobijamo :

$$(11)\quad M_p(x) \leq M_p(2(x-1)) \leq M_p(p(x-1)) \leq M_{r(p)}(x-1) .$$

Ako pokažemo nejednakost

$$(12)\qquad M_p(x-1) \leq N_p(x) \quad \text{za} \quad x \geq 1 \quad \text{i} \quad \text{svako } p\in N$$

relacija (10) sledi na osnovu relacija (11) i (12) (za $p:=p_1:= =r(p)$) za $p>1$. Za $p=1$ relacija (10) sledi iz $M_1(x) \leq M_2(x)$. Primetimo da egzistencija broja K_p sledi iz neprekidnosti funkcija $M_p(x)$ i $N_{r(p)}(x)$.

Ostaje da se dokaže relacija (12) :

$$M_p(x-1) = M_p(x-1)\cdot\int_0^1 w(t)dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} M_p(x-t)w(t)dt = N_p(x). \ \Delta$$

Posledica ove leme je da uslov (A) (sa eventualno drugim p' i X_p za dato p) važi za niz funkcija $\{N_p(x)\}_{p\in N}$.

Zbog jednostavnosti ćemo ubuduće za dato $p\in N$ sa $r(p)$ ćemo označavati najmanji prirodan broj takav da uslov (A) važi za oba niza $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ i $\{N_p(x)\}_{p\in N}$. Leme 2.2 i 2.3 daju

Tvrdjenje 2.2. Prostori $H\{M_p\}$ i $H\{N_p\}$ su ekvivalentni u smislu definicije 2.2.

Sledeća lema se koristi u dokazima nekih tvrdjenja.

Lema 2.4. Funkcija $N_p^{(k)}(x)\exp(-N_{r(p)}(x))$, $p\in N$, $k\in N_0$, teži nuli kada $|x|\to\infty$.

Dokaz. Neka je $x>1$. Tada je

$$|N_p^{(k)}(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} M_p(t)|w^{(k)}(x-t)|dt \leq$$

$$\leq M_p(x)\cdot \int_0^1 |w^{(k)}(t)|dt \quad \text{ili}$$

$$(13) \qquad |N_p^{(k)}(x)| \leq C_k M_p(x) \quad \text{za neko } C_k>0 \text{ i } x\in R.$$

Na osnovu relacije (10) za $p_1:=r(p)$ (što je prema dokazu leme 2.3 moguće uzeti) dobijamo :

$$|N_p^{(k)}(x)|\exp(-N_{r(p)}(x)) \leq C_{k,p} M_p(x)\cdot\exp(-M_p(x))$$

za neko $C_{k,p}>0$. Tvrdjenje leme 2.4 sada sledi iz činjenice da funkcija $M_p(x)$ monotono teži ka $+\infty$ kada $|x|$ teži ka $+\infty$. Δ

2.3 REPREZENTACIJA FUNKCIONELA NAD $H\{M_p\}$

Teorema 2.1. ([7], s. 142) Svaka neprekidna linearna funkcionela nad prostorom $H\{N_p\} = \mathcal{K}\{\exp(N_p(x))\}$ ima reprezentaciju

$$(14) \qquad \langle f,\phi\rangle = \sum_{k=0}^{p_1} (-1)^k \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(k)}(x) f_k(x)\exp(N_{p_1}(x))dx$$

za neko $p_1\in N_o$ i ograničene merljive funkcije $f_k(x)$, $0\leq k\leq p_1$, koje ne zavise od $\phi\in H\{N_p\}$.

Izraz (14) se može interpretirati kao

$$(15) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{p_1} D^k(f_k(x)\cdot\exp(N_{p_1}(x)))$$

gde D pretstavlja distribucioni izvod. Sada ćemo izraz

(15) uprostiti. Primetimo da je funkcija $\int_0^x f_k(t)\exp(N_p(t))dt$ $0\leq k\leq p_1$, neprekidna . Uslov (A) za niz funkcija $\{N_p(x)\}_{p\varepsilon N}$ implicira da je funkcija

$$\exp(-N_{r(p)}(x))\cdot\int_0^x f_k(t)\exp(N_p(t))dt \quad \text{ograničena, jer je}$$

$$\sup\{\exp(-N_{r(p)}(x))\cdot|\int_0^x f_k(t)\exp(N_p(t))dt|;\ x\varepsilon R\} \leq$$

$$\leq \sup\{\exp(N_p(x)-N_{r(p)}(x))\cdot|x|;\ x\varepsilon R\}\cdot \operatorname{ess\,sup}\{|f_k(t)|;\ t\varepsilon R\} < \infty.$$

To znači da integraleći k-ti sabirak u (15) p_1-k+1 puta, $0\leq k\leq p_1$, dobijamo

Tvrdjenje 2.3. Svaka neprekidna linearna funkcionela nad $H\{N_p\}$ ima reprezentaciju

$$f(x) = D^{m_2}(F_2(x)\exp(N_{p_2}(x))) \tag{16}$$

za neko $m_2\varepsilon N_0$, $p_2\varepsilon N$ i ograničenu neprekidnu funkciju $F_2(x)$.

Tvrdjenja 2.2 i 2.3 daju sledeću teoremu.

Teorema 2.2. Svaka neprekidna linearna funkcionela nad $H\{M_p\}$ ima reprezentaciju

$$f(x) = D^m(F(x)\exp(M_p(x))) \tag{17}$$

za neko $m\varepsilon N_0$, $p\varepsilon N$ i ograničenu neprekidnu funkciju $F(x)$.

2.4 PROSTOR $K'\{M_p\}$ KAO INDUKTIVNA GRANICA

U ovom poglavlju ćemo pokazati da je prostor $K'\{M_p\}$ topološki izomorfan sa induktivnom granicom prostora $K'(M_p)$. Prostor $K(M_p)$ je ispitivan u [34] i [11] pri čemu u ovom drugom za slučaj Berlingovih distribucija (videti [1]).

Definicija 2.3. Vektorski prostor glatkih funkcija $\phi(x)$ nad R takvih da za svako $k\in N_o$ važi

$$(18) \qquad \rho_{p,k}(\phi) := \sup \{|\phi^{(j)}(x)| \exp(M_p(kx)) \ ; \ x\in R, \ 0\leq j\leq k\} < \infty$$

obeležićemo sa $K(M_p)$; p je fiksiran prirodan broj. Topologija na $K(M_p)$ je definisana sa prebrojivom familijom normi $\{\rho_{p,k}\}_{k\in N_o}$.

U navedenim radovima je pokazano da je $K(M_p)$ kompletan, prema tome Frešeov prostor. (Ovo se može dokazati i koristeći činjenicu da je $K(M_p)$ prostor tipa $\mathfrak{K}\{\exp(M_p(kx))_{k\in N_o}\}$. Dalje, prostor D je svuda gust u $K(M_p)$ za sve $p=1,2,..$ jer je funkcija $\exp(M_p(kx))$ konačna za sve $x\in R$, $p\in N$ i $k\in N_o$. Pokazaćemo da je $K(M_p)$ Švarcov prostor. To znači da za svaku okolinu nule U u $K(M_p)$ postoji okolina nule V u $K(M_p)$ tako da je V totalno ograničen u odnosu na U (tj. V je sadržan u linearnoj obvojnici od U i za svako $d>0$ postoji konačan skup $A=A(d)$ sadržan u U tako da je $V\subset A+dU$). Prostor $K(M_p)$ je projektivna granica spektra normiranih prostora $\{K_k(M_p)\}_{k\in N}$, gde je $K_k(M_p)$ skup glatkih funkcija $\phi(x)$ sa osobinom $\rho_{p,k}(\phi)<\infty$. Ako je taj spektar kompaktan tada je $K(M_p)$ Švarcov prostor([39],1.5), a dovoljan uslov za to je

$$(19) \qquad \lim_{|x|\to\infty} \frac{\exp(M_p(kx))}{\exp(M_p(k+1))} = 0 \quad \text{za sve} \quad k\in N_o \ .$$

U stvari, pošto je $M_p(x)$ konveksna funkcija, to je $M_p((k+1)x) \geq M_p(kx) + M_p(x)$, a iz ove nejednakosti sledi relacija (19). Prema tome, $K(M_p)$ je Freše-Švarcov prostor za sve $p=1,2,\ldots$.

Prostor $K(M_{p+1})$ je podskup od prostora $K(M_p)$, jer je

(20) $$|\phi^{(j)}(x)|\exp(M_p(kx)) \le |\phi^{(j)}(x)|\exp(M_{p+1}(kx))$$

za sve $0 \le j \le k$ i $k \in N_o$. Nejednakost (20) pokazuje i da je konvergencija u $K(M_{p+1})$ finija od inducirane iz $K(M_p)$. Koristeći simbol $\hookrightarrow$ za neprekidnu inkluziju možemo pisati $K(M_{p+1}) \hookrightarrow K(M_p)$ i ima smisla definisati $\operatorname{proj}_{p\to\infty} K(M_p)$. Naravno, u skupovnom smislu je

$$\operatorname{proj}_{p\to\infty} K(M_p) = \bigcap_{p=1}^{\infty} K(M_p)$$. Pokažimo sada

Tvrdjenje 2.4. Prostori $H\{M_p\}$ i $\operatorname{proj}_{p\to\infty} K(M_p)$ su topološki izomorfni.

Dokaz. Neka je $\phi \in \operatorname{proj}_{p\to\infty} K(M_p)$. Tada je

$\gamma_p(\phi) \le \rho_{p,p}(\phi)$ za sve $p \in N$, dakle $\phi \in H\{M_p\}$.

Obrnuto, ako je $\psi \in H\{M_p\}$, tada je

$$\rho_{p,k}(\psi) \le C_{p,k}\cdot\gamma_{r(p+k)}(\psi) \quad \text{za sve } (p,k) \in N\times N_o$$, tj.

$\psi \in \operatorname{proj}_{p\to\infty} K(M_p)$. Medjutim , ove nejednakosti pokazuju ne samo skupovnu, nego i topološku jednakost prostora $H\{M_p\}$ i $\operatorname{proj}_{p\to\infty} K(M_p)$. Δ

Mnogo složenije pitanje je odnos prostora $H'\{M_p\}$ i $\operatorname{ind}_{p\to\infty} K'(M_p)$, gde je $K'(M_p)$ dualan prostor za $K(M_p)$ snabdeven sa jakom topologijom. Na osnovu ranije rečenog je $K'(M_p) \hookrightarrow K'(M_{p+1})$. Važi

Teorema 2.3. Prostori $H'\{M_p\}$ i $\operatorname{ind}_{p\to\infty} K'(M_p)$ su topološki izomorfni, ako su $H'\{M_p\}$ i $K'(M_p)$ snabdeveni sa jakom topologijom.

Dokaz. Koristićemo oznake i tvrdjenje 4.4.b) iz rada [39] Neka je P prebrojiva familija lokalno koneveksnih prostora X_p, $p\in N$, takvih da je $X_p \hookrightarrow Y$ za sve $p\in N$; Y je fiksiran lokalno konveksan prostor. Neka je

$$\vec{P} := \bigcap_{p\in N} X_p \quad \text{i} \quad \vec{P} := \text{lh}(\bigcup_{p\in N} X_p)$$

gde lh označava linearnu obvojnicu. Ako u $\vec{P}$ ($\vec{P}$) uvedemo najslabiju (najjaču) lokalno konveksnu topologiju, tako da su inkluzije $\vec{P}\subset X_p$ ($\vec{P}\supset X_p$) neprekidne, tada ćemo odgovarajući lokalno konveksni prostor označiti sa

$\bigwedge_{p=1}^{\infty} X_p$ ($\bigvee_{p=1}^{\infty} X_p$). Ako su X_p Freše - Švarcovi prostori tada važi prema tvrdjenju 4.4.b iz [39]

$(\bigwedge_{p=1}^{\infty} X_p)' = \bigvee_{p=1}^{\infty} X_p'$ gde X' označava jaki dual lokalno konveksnog prostora X.

Ako ovu skupovnu i topološku jednakost primenimo na prostore $X_p := K(M_p)$, dobijamo

$$E'\{M_p\} = (\text{proj}_{p\to\infty} K(M_p))' = (\bigwedge_{p=1}^{\infty} K(M_p))' = \bigvee_{p=1}^{\infty} K'(M_p) = \text{ind}_{p\to\infty} K'(M_p) \;. \;\Delta$$

Posledica teoreme 2.3 je da ne može postojati distribucija iz $E'\{M_p\}$ koja nije istovremeno neprekidna linearna funkcionela nad prostorom $K(M_p)$ za sve $p\geq p_0$, za neko $p_0\in N$.

Jasno je da je prostor D_F' distribucija konačnog reda nadskup za svaki prostor $E'\{M_p\}$. U [11] je pokazano da važi

$$D_F' = \bigcup K'(M) \tag{21}$$

gde se unija pravi po svim konveksnim funkcijama oblika (3). Postavlja se pitanje da li je moguće konstruisati niz funkcija koji bi bio dovoljno"brz" tako da se neprebrojiva unija u (21) zameni sa prebrojivom, tj. prema teoremi 2.3 sa $E'\{M_p\}$. Odgovor je negativan, kao što pokazuje sledeća

Lema 2.5. Neka je dat niz funkcija $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ koje zadovoljavaju uslove poglavlja 2.1. i neka je $M(x)$ neprekidna neopadajuća funkcija nad R tako da važi

$$M(x) := M_p(x) \quad \text{za} \quad p-1 \le x \le p-0{,}5,\ p=1,2,\ldots \quad \text{i} \quad M(x):=0$$

za $x\le 0$. Tada regularna distribucija definisana funkcijom $M(x)$ *ne* pripada prostoru $H'\{M_p\}$, ako za niz $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ važi uslov(A).

Dokaz. Ako bi funkcija $M(x)$ posmtrana kao regularna distribucija pripadala nekom prostoru $K(M_{p_o})$, tada bi moralo biti

(21a) $\quad M(x) \le M_{p_o}(kx) \quad$ za neko $k\in N_o$ i $|x|$ dovoljno veliko.

Medjutim, prema uslovu (A) postoji p_1 tako da je

$$M_{p_o}(kx) \le M_{p_1}(x) \quad (\text{npr. za } p_1 := r(p_o+k)) \text{ za dovoljno}$$

veliko $|x|$, a to je kontradikcija sa nejednakosti (21a). Prema tome $M(x) \notin \bigcup_{p\in N} K'(M_p)$, pa na osnovu teoreme 2.3 sledi tvrdjenje leme. Δ

2.5 KONVOLUTORI NA PROSTORU $H'\{M_p\}$

Cilj ovog poglavlja je da se da karakterizacija konvolutora na prostoru $H'\{M_p\}$. Pre toga moramo definisati konvoluciju izmedju $T\in H'\{M_p\}$ i $\phi\in H\{M_p\}$.

Definicija 2.4. Neka je $T\in H'\{M_p\}$ i $\phi\in H\{M_p\}$. Konvoluciju izmedju T i ϕ definišemo relacijom

(22) $\quad (T*\phi)(x) := \langle T(y),\phi(x-y)\rangle \quad , x\in R .$

Na osnovu tvrdjenja 2.1 (sa promenjenim ulogama za x i y) izraz na desnoj strani jednakosti (22) ima smisla za za sve $x \in R$. U stvari, može se pokazati mnogo više.

<u>*Tvrdjenje 2.5.*</u> Neka je $T \in H'\{M_p\}$ i $\phi \in H\{M_p\}$. Tada je konvolucija $(T*\phi)(x)$ glatka funkcija nad R za koju važi

$$(23) \qquad |(T*\phi)^{(j)}(x)| \leq C \cdot \exp(M_{p_1}(x))$$

za $j=0,1,\ldots$, $C = C(j)>0$ i $p_1 \in N$ koje ne zavisi od j.

<u>*Dokaz.*</u> Na osnovu teoreme 2.2 postoje $m \in N_o$, $p \in N$ i neprekidna funkcija $F(x)$ koja je ograničena nad R i važi $T(x) = D^m(F(x)\exp(M_p(x)))$. Prema relaciji (22) je

$$(T*\phi)(x) = (-1)^m \cdot \int_R F(y)\exp(M_p(y) \cdot \phi^{(m)}(x-y) \cdot dy .$$

Pokažimo da integral

$$(24) \qquad \int_R F(y) \cdot \exp(M_p(y) \cdot \phi^{(m+j)}(x-y) \cdot dy$$

uniformno konvergira po x dok x pripada proizvoljnom kompaktnom skupu K za sve $j=0,1,\ldots$.

Neka je $p_1 := r(p)$ i $p_2 := r(p_1)+m+j$. Tada je prema uslovu (A)

$$(25) \qquad M_p(y) \leq M_{p_1}(y/2) + k \leq M_{p_1}(x) + M_{p_1}(x-y) + c'$$

gde je $c' = c'(p) \geq 0$. Pošto po pretpostavci $\phi \in H\{M_p\}$, to je

$$(26) \qquad |\phi^{(m+j)}(x)| \leq c''\exp(-M_{p_2}(x)) , \quad c''=c''(p,m,j)>0.$$

Na osnovu (25) i (26) sledi da je integral u (24) po apsolutnoj vrednosti manji od

$$(27) \qquad c''' \cdot \exp(M_{p_1}(x)) \cdot \int_R \exp(M_{p_1}(y)-M_{p_2}(y)) \cdot dy \leq$$

$$\leq c \cdot \exp(M_{p_1}(x)) , \quad c>0 .$$

Konstanta c prema prethodnom zavisi od p,m,j, tj. u krajnjoj liniji od T,ϕ i j. Odavde sledi uniformna konvergencija po x za sve $j=0,1,\ldots$ integrala u (24) dok je $x \in K$. Pošto je K proizvoljan kompaktan skup, na osnovu poznate teoreme o diferenciranju po parametru pod znakom integrala je

$$(T*\phi)^{(j)}(x) = (-1)^m \cdot \int_{R} F(y)\cdot \exp(M_p(y))\cdot \phi^{(m+j)}(x-y)\cdot dy \quad .$$

Relacija (23) sledi sada iz (27), naime funkcija u (27) majorira integral u (24). Δ

Tvrdjenje 2.5 se može formulisati i na sledeći način: Preslikavanje

(26) $\quad T*: \phi \to T*\phi$

definisano relacijom (26) prevodi prostor $\mathcal{H}\{M_p\}$ u skup $\mathcal{H}'\{M_p\} \cap C^\infty$. Iz skupa preslikavanja (26) posebno ćemo istaknuti ona koja preslikavaju prostor $\mathcal{H}\{M_p\}$ u sama sebe, iz razloga koji će ubrzo biti jasni.

Definicija 2.5. Distribucija $T \in \mathcal{H}'\{M_p\}$ je konvolucioni operator - konvolutor nad $\mathcal{H}'\{M_p\}$ ako i samo ako je preslikavanje (26) neprekidno preslikavanje prostora $\mathcal{H}\{M_p\}$ u sama sebe.

Skup konvolutora nad $\mathcal{H}'\{M_p\}$ obeležićemo sa $O_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$. Očevidno je da je skup konvolutora vektorski potprostor u $\mathcal{H}'\{M_p\}$. Sam izraz "konvolutor" opravdava

Tvrdjenje 2.6. Neka je $S \in \mathcal{H}'\{M_p\}$ i $T \in O_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$. Tada konvolucija $S*T$ (definisana na uobičajeni način u teoriji distribucija) postoji i definiše elemenat iz $\mathcal{H}'\{M_p\}$.

Dokaz. Po definiciji konvolucije distribucija je

$$\langle S*T,\phi\rangle := \langle S(x),\langle T(y),\phi(x+y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle S(x),\langle T(-y),\phi(x-y)\rangle\rangle = \langle S(x),\psi(x)\rangle$$

gde je stavljeno $\psi(x) := \langle T(-y),\phi(x-y)\rangle$. Jasno je da je distribucija $T(-y)$ (definisana na uobičajen način) takodje konvolutor, te prema definiciji 1.5 sledi da je $\psi(x)\varepsilon$ $\varepsilon\mathcal{H}\{M_p\}$. To znači da izraz $\langle S,\psi\rangle$ ima smisla, odnosno $S*T$ je funkcionela nad $\mathcal{H}\{M_p\}$. Linearnost te funkcionele je očevidna, a neprekidnost sledi iz pretpostavki o S i T. Δ

Iz dokaza ovog tvrdjenja sledi da je preslikavanje $T* : S \to S*T$ neprekidno preslikavanje prostora $\mathcal{H}'\{M_p\}$ u sama sebe.

Ako su S i T kao u tvrdjenju 2.6, lako se pokazuje da je

(26 a) $$D^n S * T = S * D^n T = D^n(S * T) \quad , n\varepsilon N$$

Karakterizaciju konvolutora daje

Teorema 2.4. Neka je $T\varepsilon\mathcal{H}'\{M_p\}$. Distribucija T je *konvolutor na* $\mathcal{H}'\{M_p\}$ ako i samo ako za svako $p\varepsilon N$ postoje $m\varepsilon N_o$ i neprekidna funkcija $F(x)$ sa osobinom $F(x) = O(\exp(-M_p(x)))$ kada $|x|\to\infty$, tako da je $T(x) = D^m F(x)$.

Dokaz. Uslov je potreban. Koristićemo ideju Hasumija iz rada [12]. Ako je $\phi\varepsilon\mathcal{H}\{M_p\}$ tada je za $y\varepsilon R$

$$\langle T(y+x),\phi(y)\rangle = \langle T(y),\phi(x-y)\rangle = (T*\phi)(x)\varepsilon\mathcal{H}\{M_p\}$$

te prema tvrdjenju 2.2 važi $\langle T(y+x),\phi(y)\rangle\varepsilon\mathcal{H}\{N_p\}$. Na osnovu teoreme XXII u [26] sledi da je skup distribucija

$$\{\exp(N_p(x))\cdot T(y+x) \ ; \ x\varepsilon R\}$$

ograničen u $\mathcal{D}'$ za svako $p\varepsilon N$. Sa druge strane, ovo je ekvivalentno sa postojanjem kompaktne okoline nule K u R, tako da za sve $\phi\varepsilon\mathcal{D}^n_K$, $n=0,1,\ldots$, važi da je funkcija $(T*\phi)(x)\cdot\exp(N_p(x))$ neprekidna i ograničena.

Posmatrajmo sada jednačinu

$$(27) \qquad D^m E = \delta \quad , \; m\varepsilon N \; .$$

Distribucija E naziva se fundamentalnim rešenjem jednačine (27) , i poznato je da E postoji za proizvoljno $m\varepsilon N$. Na primer za $m:=2$ opšte rešenje jednačine (27) je $E(x) = xH(x) - xH(-x) + C_1 x + C_2$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Integraljenjem ove neprekidne funkcije dovoljno mnogo puta, vidimo da se za dato $n\varepsilon N$ može odrediti $m\varepsilon N$ tako da je rešenje jednačine (27) klase C^n. Ako je sada $g\varepsilon D_K$((tj. g je glatka funkcija sa nosačem u kompaktnom skupu K) i $g\equiv 1$ u nekoj okolini nule, tada je $gE\varepsilon D_K^n$ i važi

$$D^m(gE) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot D^j g \cdot D^{m-j} E = \delta - h$$

gde je $h\varepsilon D_K \subset D_K^n$. Ovo povlači

$$T = \delta * T = (h + D^m(gE)) * T = h * T + D^m((gE) * T) \; .$$

Obe konvolucije postoje po konstrukciji i zapravo su funkcije klase C^n ; pošto je $\{h, gE\} \subset D_K^n$, to su prema ranije rečenom $h*T$ i $gE*T$ funkcije sa osobinom da su $O(\exp(-N_p(x)))$ kada $|x|\to\infty$ za svako $p=1,2,..$. Da je uslov potreban sada sledi iz sledeće leme tehničke prirode i tvrdjenja 2.2.

Lema 2.6. Neka je $\phi(x)$ neprekidna funkcija za $x \geq x_0$ i neka je $\phi(x)=O(\exp(-N_p(x)))$ kada $x\to\infty$ za svako $p=1,2,..$ Tada za funkciju

$$\psi(x) := - \int_x^\infty \phi(t)dt$$

važi da je $O(\exp(-N_p(x)))$ kada $x\to\infty$ za $p=1,2,..$.

Dokaz leme 2.6. Neka je $p\varepsilon N$ dato. Tada je za $x \geq X_p$ i neko $M_p > 0$

$$\exp(N_p(x))|\psi(x)| \le \exp(N_p(x))\cdot\int_x^\infty |\phi(t)|dt \le$$

$$\le K_p\cdot\int_x^\infty \exp(N_p(t))\exp(-N_{r(p)}(t))dt \le K_p\cdot\int_{X_p}^\infty \exp(N_p(t)-N_{r(p)}(t))d$$

Prema lemi 2.1 poslednji integral konvergira, tj. $\psi(x) = O(\exp(-N_p(x)))$ kada $x\to\infty$. Δ

Uslov teoreme 2.4 je dovoljan. Neka za svako $p\in N$ postoje $m\in N_0$ i neprekidna funkcija $F(x)$ sa osobinom da je $L_F := \sup\{|F(x)|\exp(M_p(x))\ ;\ x\in R\} < \infty$ i $D^m F = T$. Neka je $\phi\in H\{M_p\}$. Na osnovu očevidne nejednakosti

$$-M_{r(p)}(x-t) \le -M_{r(p)}(x/2) + M_{r(p)}(t) \quad \text{za} \quad x,t\in R$$

dobijamo za svako $j, 0\le j\le p$:

$$|(T*\phi)^{(j)}(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} F(x-t)\phi^{(m+j)}(t)dt\right| \le$$

$$\le L_F\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-M_{p_1}(x-t))|\phi^{(m+j)}(t)|dt \le L_F\cdot\exp(-M_{r(p)}(x/2))\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|\phi^{(m+j)}(t)|\exp(M_{r(p)}(t))dt \le$$

$$\le L'\cdot\exp(-M_p(x))\cdot\gamma_{p_1}(\phi)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\exp(M_{r(p)}(t)-M_{p_1}(t))dt$$

gde je $p_1 := r(r(p))+m$. Prema tome je $\gamma_p(T*\phi) \le L\cdot\gamma_{p_1}(\phi)$, $L=L(p)>0$ što znači da je $(T*\phi)^{(j)}(x) = O(\exp(-M_p(x)))$, $j\le p$ za svako $p\in N$ i preslikavanje $T* : \phi \to T*\phi$ je neprekidno preslikavanje prostora $H\{M_p\}$ u sama sebe. Δ

U [11] data je karakterizacija konvolutora na prostoru $K'(M)$, gde je $M(x)$ fiksirana konveksna funkcija tipa (3) (videti definiciju 2.3) . Obeležimo sa $E(M)$ skup glatkih funkcija $\phi(x)$ nad R sa osobinom da postoji $k\in N_0$ tako da je

$$\phi^{(j)}(x) = O(\exp(M(kx))) \quad \text{kada} \quad |x|\to\infty \quad \text{za svako } j\in N_0 .$$

Tvrdjenje 2.7. ([11],s.2) Dualni prostor $E'(M)$ prostora $E(M)$ poklapa se sa skupom konvolutora prostora $K'(M)$. Δ

Na osnovu poznatih tvrdjenja o reprezentaciji funkcionela ([7]), važi da je $E'(M_1) \supset E'(M_2)$ ako je $M_1(x) \leq M_2(x)$ i naravno, funkcije $M_1(x)$ i $M_2(x)$ su tipa (3) . Imajući ovo u vidu, tvrdjenje 2.7 zajedno sa teoremom 2.3 daje

(28) $$\bigcap_{p=1}^{\infty} E'(M_p) \subset O_c'(H'\{M_p\})$$

Teorema 2.4 implicira da se inkluzija u (28) može zameniti sa jednakošću, tj. da važi

Teorema 2.5. Važi skupovna jednakost :

$$O_c'(H'\{M_p\}) = \bigcap_{p=1}^{\infty} O_c'(K'\{M_p\}) .$$

— — — — —

Dalja karakterizacija konvolutora može se dati povezivanjem sa temperiranim distribucijama. Važi

Tvrdjenje 2.7. Ako je $T\varepsilon\mathcal{O}'_c(\mathcal{H}'(M_p))$, tada su distribucije $T(x)\exp(N_p(x))$ temperirane za svako $p=1,2,\ldots$.

Dokaz. Prema teoremi 2.4 za svako $p_1\varepsilon\mathcal{N}$, postoje $m\varepsilon\mathcal{N}_o$, neprekidna funkcija $F(x)$, $F(x)=O(\exp(-M_{p_1}(x)))$ kada $|x|\to\infty$ tako da važi $T(x)=D^mF(x)$. Ako je $p>1$ dato, uzmimo da je $p_1:=r(r(p))$. Na osnovu Lajbnicove formule za distribucioni izvod (koja važi jer $\exp(N_p(x))\varepsilon\mathcal{E}^*$) dobijamo :

$$T(x)\exp(N_p(x)) = D^mF(x)\cdot\exp(N_p(x)) = D^m(F(x)\exp(N_p(x)) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}D^i(\exp(N_p(x))D^{m-i}F(x) = D^m(F(x)\exp(N_p(x)) -$$

$$- \sum_{i=0}^{m} D^i(\sum_{j=0}^{i} c_{i,j}F(x)D^j(\exp(N_p(x))) \quad \text{za neke konstante } c_{i,j} \,.$$

Primetimo da je $D^j(\exp(N_p(x)) = (\exp(N_p(x))^{(j)} =$

$$= \sum_n c'_{k,l}(N_p^{(k_1)}(x))^{(l_1)}\ldots(N_p^{(k_n)}(x))^{(l_n)}\exp(N_p(x)) \,,$$

$j=0,1,.m$, gde se sumira po svim mogućim nenegativnim brojevima n tako da postoje $k=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$, $l=(l_1,l_2,\ldots,l_n)$ iz $\mathcal{N}_o^n$ i $k_1l_1+\ldots+k_nl_n = j$; $c'_{k,l}$ su konstante. Na osnovu leme 2.4 dobijamo

$$|D^j(\exp(N_p(x))| \leq \sum_n c''_{k,l}(M_p(x))^j\cdot\exp(N_p(x))$$

za neke $c''_{k,l} \geq 0$. Prema tome je

$$|D^j(\exp(N_p(x))| \leq C_j\cdot\exp(N_{p_1}(x)) \quad \text{za neko } C_j \geq 0,\ j=0,$$

$1,2,\ldots,m$. To znači da je distribucija $T(x)\exp(N_p(x))$ konačan zbir distribucionih izvoda ograničenih funkcija jer je po pretpostavci $F(x)=O(\exp(-N_{p_1}(x)))$ kada $|x|\to\infty$, a to je dovoljan uslov uslov da distribucija bude temperirana. Za $p=1$ tvrdjenje važi jer važi za (na primer) $p=2$. ⊥

Obrnuto tvrdjenje nije tačno u opštem slučaju. Jedan dovoljan uslov daje sledeće

Tvrdjenje 2.8. Ako je zadovoljen uslov

(E) Za dato $q\in N$ postoji $d_q\in(0,1)$ tako da za dovoljno veliko $|x|$ važi $(M_p(x))^q \leq \exp(M_p((1-d_q)x))$ za $p=1,2,..$ (d_q <u>ne</u> zavise od p) ;

i ako su distribucije $T(x)\exp(N_p(x))$ temperirane za svako $p=1,2,..$, tada je $T\in O_c'(H'\{M_p\})$.

Primedba. Uslov (E) u suštini ograničava suviše brz rast funkcije $M_p(x)$ za fiksirano $p\in N$. Videćemo u sedmom poglavlju ove glave da je taj uslov ispunjen u slučaju tzv. eksponencijalnih distribucija.

Dokaz tvrdjenja 2.8. *Neka je $p\in N$* dato i neka je $p_1 :=$ $= r(p) + [1/d_q'] + 1$, gde je $0<d_q'<d_q$. Pošto je $T(x)\exp(N_{p_1}(x))$ temperirana distribucija, postoji neprekidna funkcija sporog rasta $G(x)$ tako da je $T(x) = \exp(-N_{p_1}(x))\cdot D^m G(x)$ za neko $m\in N_o$. Prema tome

$$T(x) = D^m(G(x)\exp(-N_{p_1}(x))) - \sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}D^i(\exp(-N_{p_1}(x)))D^{m-i}(G(x))$$

$$(29)\qquad = D^m(G(x)\exp(-N_{p_1}(x))) - \sum_{i=1}^{m} D^i(\sum_{n=0}^{i} c_{n,i}G(x)D^n(\exp(-N_{p_1}(x)))$$

Nadjimo sada majoraciju za $\int_{|x|}^{\infty}(\exp(-N_{p_1}(t)))^{(n)}G(t)dt$

za fiksirano $n\in N_o$ i $x\in R$:

$$\Big|\int_{|x|}^{\infty}(\exp(-N_{p_1}(t))^{(n)}G(t)dt\Big| =$$

$$= \Big|\int_{|x|}^{\infty}\Big(\sum_{l} c''_{j,k}(N_{p_1}^{(j_1)}(t))^{k_1} \colon\ldots (N_{p_1}^{(j_l)}(t))^{k_l}\exp(-N_{p_1}(t))G(t)dt\Big| \leq$$

$$\leq \sum_{l} |c''_{j,k}| \cdot \int_{|x|}^{\infty}|N_{p_1}(t)|^{n}\exp(-N_{p_1}(t))|G(t)|dt \leq$$

$$\leq C'_n(M_{p_1}(x))^{q_n}\int_{|x|}^{\infty}\exp(-N_{p_1}(t))dt \leq C''_n(M_{p_1}(x))^{q'_n}\exp(-N_{p_1}(x))$$

za neko $C''_n > 0$ i $q'_n \in \mathbb{N}$. U navedenim sumama se sabira kao u sličnoj sumi u dokazu tvrdjenja 2.7, Pretposlednja majoracija sledi na osnovu pretpostavke o funkciji $|G(x)|$ da je funkcija sporog rasta, te se može majorirati sa $C(M_p(x))^{q'}$ za neko $C>0$ i $q' \in \mathbb{N}$ koji zavise od $p \in \mathbb{N}$. Najzad, poslednja majoracija sledi na osnovu granične vrednosti

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\int_{|x|}^{\infty}\exp(-N_p(t))dt}{(M_p(x))^{s}\exp(-N_p(x))} = 0 \quad \text{za dovoljno veliko } s \in \mathbb{N}\ ,$$

koja se lako dokazuje. Prema tome, integraleći svaki od sabiraka u izrazu (29) dovoljno mnogo puta, dobijamo koristeći prethodno razmatranje

$$T(x) = D^{m}(\exp(-N_{p_1}(x))\cdot K(x)) \tag{30}$$

gde je $K(x)$ neprekidna funkcija za koju važi

$$|K(x)| \leq C(M_{p_1}(x))^{q} \quad \text{za neko } C>0 \text{ i } q \in \mathbb{N}.$$

Dalje, za dovoljno veliko $|x|$ je

$$\exp(M_p(x)-N_{p_1}(x))\cdot|K(x)| \leq \exp(M_p(x)-M_{p_1}(|x|-1))\cdot C\cdot(M_{p_1}(x))^{q} \leq$$

$$\leq C\cdot\exp(-M_{p_1}((1-d_q)x)-M_{p_1}(d'_q x)+M_p(x))(M_{p_1}(x))^{q}$$

jer je $N_{p_1}(x) \geq M_{p_1}(|x|-1) \geq M_{p_1}((1-d_q x)) + M_{p_1}(d'_q x)$

Uslov (E) daje

$$\exp(M_p(x)-N_{p_1}(x))\cdot|K(x)| \le C\cdot\exp(M_p(x)-M_{p_1}(d'_q x)) .$$

Pošto je $M_p(t/d'_q) \le M_{r(p)+[1/d'_q]+1}(t) = M_{p_1}(t)$

za dovoljno veliko $|t|$, to je za dovoljno veliko $|x|$

$M_p(x) \le M_{p_1}(d'_q x)$. Prema tome je

$$\exp(-N_{p_1}(x))\cdot|K'(x)| = O(\exp(-M_p(x))) \quad \text{kada } |x|\to\infty \text{ za } p=1,2,..$$

tj. imajući u vidu relaciju (30) i teoremu 2.4 dobijamo da je T konvolutor na prostoru $\mathcal{H}'\{M_p\}$. Δ

Navedene osobine konvolutora će nam omogućiti da u trećoj glavi damo karakterizaciju Furijeove transformacije konvolutora . Pošto je naš cilj ispitivanje konvolucione jednačine

$$T*U = V \quad , \quad T\in\mathcal{O}'_c(\mathcal{H}'\{M_p\}),\ U,V\in\mathcal{H}'\{M_p\}$$

to se prelaskom na Furijeovu transformaciju(naravno, sada samo formalno) dobija jednačina

$$\hat{T}\cdot\hat{U} = \hat{V}$$

što pokazuje značaj ponašanja Furijeove transformacije $\hat{T}$ konvolutora T ; videćemo da je $\hat{T}$ zapravo cela analitička funkcija.

Za kraj ove glave ostavili smo neke primere prostora tipa $\mathcal{H}'\{M_p\}$).

2.6 PRIMERI PROSTORA TIPA $H'\{M_p\}$

Primer 1. ([34],[11]) $K'(M)$

Prostor $K'(M)$ je uveo J.Vloka (Joseph Wloka) 1965. godine, a njegove rezultate je produbio i prebacio na Berlingove distribucije O.Grudzinski u većem broju radova, koji čine sadržaj njegovog habilitacionog rada iz 1980. godine.

Neka je $M(x)$ fiksirana konveksna funkcija oblika (3) i neka je $K(M)$ prostor osnovnih funkcija dat u definiciji 2.3. Ako stavimo $M_p(x) := M(px)$, $p=1,2,..$ vidimo da je $K(M)$ prostor tipa $H\{M_p\}$. Uslov (A) je ispunjen, jer možemo uzeti $p':=p^2$. Uslov (E) dobija oblik

(E') $\quad M^q(x) \leq C_q \cdot \exp(M((1-d_q)x))$ za dovoljno veliko $|x|$.

Za razliku od uslova (A), uslov (E') nije ispunjen u opštem sučaju.

U poglavlju 2.4 pokazana je veza izmedju prostora $K'(M)$ (tj. dualnog prostora za $K(M)$) i prostora $H'\{M_p\}$. Primetimo još samo da teorema 2.4 daje potreban i dovoljan uslov da distribucija $T\varepsilon K'(M)$ bude konvolutor na prostoru $K'(M)$, i taj kriterijum ne sledi iz inače dubokih ispitivanja dvojice spomenutih autora.

Primer 2. ([27],[28],[24]) K'_s

U radovima Z.Železnog (Zbigniew Zielezny) i njegovih saradnika u prvoj polovini sedamdesetih godina ispitivani su prostori eksponencijalnih distribucija K'_s , $s\varepsilon N$ .Prostor K'_s se može dobiti kao konačan distribucioni izvod neprekidne funkcije koja je $O(\exp(k|x|^s))$ kada $|x|\to\infty$ za neko $k\varepsilon N_o$. Ako stavimo $M_p(x):=p|x|^s$, vidimo da odgovarajući prostor $H\{M_p\}$ postaje baš K_s' ,tj. prostor osnovnih funkcija za K_s' . Uslov (A) je zadovoljen, jer možemo uzeti $p':=p^{s+1}$, a uslov (E) se svodi na

$$p^q \cdot |x|^{s1} \leq \exp(p(1-d_q)^s|x|^s) \qquad \text{za dovoljno veliko } |x|$$

što je tačno na primer za $d_q:=0,5$ za sve $q\in N_o$.

<u>*Primer 3.*</u> ([20]) $\underline{H_\infty'}$

U spomenutom radu S.Pilipović i A.Takači su ispitivali prostor H_∞' , koji je u stvari prostor tipa $H'\{M_p\}$ za $M_p(x) := |x|^p$, $p\in N$. Jasno je da su uslovi (A) i (E) ispunjeni.

GLAVA III

FURIJEOVA TRANSFORMACIJA I PROSTOR $\mathcal{H}'\{M_p\}$

U teoriji distribucija, a naročito u njenoj primeni na parcijalne diferencijalne jednačine, Furijeova transformacija igra nezamenjivu ulogu. Velika je zasluga L.Švarca (Laurent Schwartz) da je klasičnu Furijeovu transformaciju preneo u teoriju distribucija ; svakako su u pravu autori koji tu uopštenu integralnu transformaciju nazivaju "transformacija Furije - Švarca".

Kao što je poznato, Furijeova transformacija distribucije sa kompaktnim nosačem je cela analitička funkcija. Videćemo da to važi i za Furijeovu transformaciju konvolutora na prostoru $\mathcal{H}'\{M_p\}$. Imajući to u vidu, sasvim je prirodno da ćemo potrebne i dovoljne uslove za različite osobine konvolucione jednačine dati za spomenutu analitičku funkciju. Za početak, moramo ispitati Furijeovu transformaciju osnovnih funkcija. Za niz funkcija $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ stalno pretpostavljamo da važi uslov (A).

3.1 FURIJEOVA TRANSFORMACIJA PROSTORA $\mathcal{H}\{M_p\}$

Furijeova transformacija funkcije $\phi\in \mathcal{H}\{M_p\}$ se definiše integralom

(1) $$\psi(\zeta) := F(\phi(x))(\zeta) := \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ix\zeta)\phi(x)dx \ , \ \zeta=\xi+i\eta \in C$$

Za $\zeta:=\xi \in R$, $\psi(\xi)$ je glatka funkcija nad R jer je $\phi(x)=O(\exp(-M_p(x)))$ kada $|x|\to\infty$ za $p=1,2,\ldots$. Pokažimo sada

Tvrdjenje 3.1. Funkcija $\psi(\zeta)$ definisana integralom (1) je cela analitička funkcija.

Dokaz. Pre svega, važi majoracija

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial\zeta^j}\exp(-ix\zeta)\cdot\phi(x)\right| \le |x|^j \exp(|x|\cdot|\eta|)\cdot|\phi(x)| \le$$

$$\le C_p\cdot|x|^j\cdot\exp(|x|\cdot|\eta|-M_p(x))$$ za $j=0,1,\ldots$. Pretpostavke o nizu funkcija $\{M_p(x)\}_{p\in N}$ pokazuju da je funkcija na kraju ove produžene nejednakosti integrabilna nad R za sve $p=1,2,\ldots$. Na osnovu poznate teoreme o regularnosti funkcije definisane nesvojstvenim integralom, sledi da je funkcija $\psi(\xi+i\eta)$ cela analitička funkcija i važi

$$\frac{d^j}{d\zeta^j}\psi(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ix\zeta)(-ix)^j\phi(x)dx \ , \ j=0,1,2,\ldots \ . \qquad \Delta$$

Pošto iz $\phi\in H\{M_p\}$ sledi da je $\phi\in S$, to važi ([3],s.140)

(2) $$(FF\phi)(x) = 2\pi\phi(-x) \ , \ x\in R \ .$$

Obeležimo sa $H\{M_p\}$ skup celih analitičkih funkcija $\psi(\zeta)$ nad C za koje postoji funkcija $\phi\in H\{M_p\}$, tako da je $F\phi=\psi$. Skup $H\{M_p\}$ ćemo okarakterisati u teoremi 3.1 ; pre toga moramo definisati neke prostore tipa W ([8]), dokazati dve leme i jedno tvrdjenje.

Obeležimo sa $H(M_p)$, p fiksiran prirodan broj, skup glatkih funkcija $\phi(x)$ nad R sa osobinom da je $\gamma_p(\phi)<\infty$. $H(M_p)$ je normiran prostor koji nije Banahov. U radu [34] definisani su sledeći normirani prostori :

$$W^{q}_{M,A} := \{\phi\varepsilon C^{\infty} \mid \sup\{|\phi^{(j)}(x)| \exp(M(x/A)) \; ; \; x\varepsilon R, 0\leq j\leq q\} < \infty\}$$

$$W^{N,B}_{k} := \{\psi\varepsilon U \mid \sup\{(1+|x|)^{k}|\psi(x+iy)|\exp(-N(By)); x+iy \;\varepsilon C\}<\infty\}$$

gde je $M(x)$ konveksna funkcija oblika (3) iz glave 1, $N(x)$ je dualna funkcija po Jungu neke konveksne funkcije spomenutog oblika, q i k su nenegativni celi brojevi, a A i B su pozitivni brojevi. Primetimo da je

(3) $\quad H(M_p) = W^{p}_{M_p,1}$,za sve $p=1,2,\ldots$.

U [8] je pokazano da važi

(4) $\quad F(W^{q}_{M,A}) \subset W^{M^*,A+d}_{q}$ i

(5) $\quad F(W_{k+2}) \subset W^{k}_{N^*,B+d}$ za svako $d>0$.

Sledeće dve leme će biti korišćene u dokazu tvrdjenja 3.2.

Lema 3.1 Za svako $d\varepsilon(0,1)$ važi u skupovnom smislu

(6) $$\bigcap_{p=1}^{\infty} W_p^{M_p^*,1+d} = \bigcap_{p=1}^{\infty} W_p^{M_p^*,1} .$$

Dokaz. Jasno je da je $W_p^{M_p^*,1} \subset W_p^{M_p^*,1+d}$, te odmah sledi $\bigcap_{p=1}^{\infty} W_p^{M_p^*,1} \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} W_p^{M_p^*,1+d}$. Obrnuto, za dato $p\varepsilon N$ postoji

$p_1=p_1(p,d)\varepsilon N$ i $x_o=x_o(p,d)>0$ tako da je za $|x|\geq x_o$

$M_p((1+d)x) \leq M_{p_1}(x)$ (ovo je posledica uslova (A))

Ako sada iskoristimo osobine dualnih funkcija po Jungu (videti glavu 1) dobijamo :

$M_p^*(x/(1+d)) \geq M_{p_1}^*(x)$ ili $M_p^*(y) \geq M_{p_1}^*((1+d)y)$ za dovoljno veliko $|y|$. Neka je $\psi\varepsilon \bigcap_{p=1}^{\infty} W_p^{M_p^*,1+d}$. Tada je

$$(1+|x|)^k|\psi(x+iy)|\exp(-M_p^*(y)) \leq (1+|x|)^k|\psi(x+iy)|\exp(-M_p^*((1+d)y))$$

i uzimanjem supremuma po $x+iy$ sledi $\psi\varepsilon \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} W_p^{M_p^*,1}$ Δ

Sličnom metodom se može pokazati

Lema 3.2. Za svako $d\varepsilon(0,1)$ važi u skupovnom smislu

$$\bigcap_{p=1}^{\infty} W^p_{M_{p+2},1+2d} = \bigcap_{p=1}^{\infty} W^p_{M_p,1} \tag{7}$$

Primedba. U lemama 3.1 i 3.2 bez teškoća se može pokazati da jednakosti (6) i (7) važe i u topološkom smislu, ako se sva četiri spomenuta prostora snabdeju sa projektivnom topologijom. Primetimo da zbog pretpostavke o monotonosti po p niza $\{M_p(x)\}_{p\varepsilon N}$ slede inkluzije

$$W_{p+1}^{M_{p+1}^*,B} \subset W_p^{M_p^*,B} \quad \text{i} \quad W^{p+1}_{M_{p+1},A} \subset W^p_{M_p,A} \quad \text{za} \quad A,B > 1$$

pa ima smisla definisati projektivne topologije u spomenutim prostorima.

Pošto je u skupovnom smislu $H\{M_p\} = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} H(M_p)$ to neposredno dobijamo ;

$$H\{M_p\} = F(\bigcap_{p=1}^{\infty} H(M_p)) \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} F(H(M_p)) . \tag{8}$$

Pokazaćemo da se u (8) inkluzija može zameniti sa jednakošću.

Tvrdjenje 3.2. $\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} F(H(M_p)) = F(H\{M_p\})$

Dokaz. Neka je $\psi(\xi+i\eta)\varepsilon \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} F(H(M_p))$; prema relaciji (4) znamo da je $\psi(\zeta)$ cela analitička funkcija i da po ξ - osi opada brže nego bilo koji stepen od $1/|\xi|$. Inverzna Furijeova transformacija funkcije $\psi(\xi)$

(9) $$\phi(x) := F^{-1}(\psi(\xi))(x) := \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ix\xi)\psi(\xi)d\xi \quad , \; x\varepsilon R$$

je glatka funkcija na R. Primetimo da opravdanost naziva inverzna sledi iz relacije (2). Prema relacijama (2) i (5) sledi

$$2\pi\cdot\phi(x) = F(\psi(-\xi))(x) \; \varepsilon \; \bigcap_{p=1}^{\infty} W^{p}_{M_{p+2},1+2d}$$

Familija normi $\{\gamma'_p\}_{p\varepsilon N}$, gde je

$$\gamma'_p(\phi) := \sup\{|\phi^{(j)}(x)|\exp(M_{p+2}(x)) \; ; \; 0\leq j\leq p, \; x\varepsilon R\} \; , \; p\varepsilon N \; ,$$

je ekvivalentna familiji normi $\{\gamma_p\}_{p\varepsilon N}$ (videti relaciju (4) druge glave), jer je $\gamma_p(\phi) \leq \gamma'_p(\phi)$ i $\gamma'_p(\phi) \leq \gamma_{(p+2)}(\phi)$, $\phi(x)\varepsilon H\{M_p\}$, što se lako proverava. Koristeći lemu 3.2 i ekvivalentnost navedenih familija normi, dobijamo

$$2\pi\cdot\phi(x) \; \varepsilon \; \bigcap_{p=1}^{\infty} W^{p}_{M_p,1} = H\{M_p\} \; , \text{ odnosno}$$

$$F(\phi(x))(\xi+i\eta) = \psi(\xi+i\eta) \; \varepsilon \; F(H\{M_p\}) \; . \qquad \Delta$$

Skup $H\{M_p\} := F(H\{M_p\})$ je očevidno vektorski prostor u odnosu na uobičajene operacije ; topologiju na prostoru $H\{M_p\}$ ćemo definisati pomoću *prebrojive familije normi*

(10) $$h_p(\psi) := \sup\{(1+|\xi|)^p|\psi(\xi+i\eta)|\exp(-M^*_p(\eta)) \; ; \; \xi+i\eta \; \varepsilon \; C\}$$

gde je $p=1,2,\ldots$, a $M^*_p(\eta)$ je dualna funkcija po Jungu za $M_p(x)$.

Teorema 3. 1. a) Cela analitička funkcija $\psi(\xi+i\eta)$ pripada prostoru $H\{M_p\}$ ako i samo ako je $h_p(\psi)<\infty$, za sve $p=1,2,\ldots$.

b) Furijeova transformacija je topološki izomorfizam prostora $H\{M_p\}$ na $H\{M_p\}$.

Dokaz. a) Prema tvrdjenju 3.2 je

$$H\{M_p\} = \bigcap_{p=1}^{\infty} F(H(M_p)) \quad \text{te je na osnovu relacije (4)}$$

$H\{M_p\} \subset \bigcap_{p=1}^{\infty} W_p^{M_p^*,1+d}$. Koristeći lemu 3.1 dobijamo $H\{M_p\} \subset$

$\subset \bigcap_{p=1}^{\infty} W_p^{M_p^*,1}$, tj. $\psi(\zeta) \varepsilon H\{M_p\}$ povlači

$|\psi(\xi+i\eta)| \leq C_p \cdot (1+|\xi|)^{-p} \cdot \exp(M_p^*(\eta))$, $\xi+i\eta \varepsilon \mathcal{C}$ ili $h_p(\psi)<\infty$

za sve $p=1,2,\ldots$.

Obrnuto, ako je $h_p(\psi)<\infty$,za $p=1,2,\ldots$, tj. $\psi(\zeta) \varepsilon \bigcap_{p=1}^{\infty} W^{M_p^*,1}$

tada prema dokazu tvrdjenja 3.2 postoji glatka funkcija $\phi(x)$ $\phi \varepsilon \mathcal{H}\{M_p\}$ tako da je $\mathcal{F}(\phi(x))(\zeta) = \psi(\zeta)$.

b) Na osnovu prvog dela teoreme 3.1 prostor $H\{M_p\}$ je prostor tipa $\mathcal{Z}\{(1+|\xi|)^p \cdot \exp(-M_p^*(\eta))\}$ (videti [7]) te, izmedju ostalog, on je Frešeov prostor. Pošto je po samoj definiciji prostora $H\{M_p\}$ Furijeova transofrmacija surjektivna, a oba prostora $\mathcal{H}\{M_p\}$ i $H\{M_p\}$ kompletna, ispunjeni su uslovi teoreme o otvorenom preslikavanju. Prema toj teoremi i sledi da je Furijeova transformacija topološki izomorfizam (homeomorfizam) prostora $\mathcal{H}\{M_p\}$ na prostor $H\{M_p\}$. Δ

3.2 FURIJEOVA TRANSFORMACIJA DISTRIBUCIJA IZ $\mathcal{H}'\{M_p\}$ I $\mathcal{O}_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$

Sa $H'\{M_p\}$ ćemo obeležiti dualan prostor za $H\{M_p\}$. Na osnovu teoreme 3.1.b) sledi da je preslikavanje

$$\mathcal{F}_1 : \mathcal{H}'\{M_p\} \to H'\{M_p\} ,$$

definisano tzv. Parsevalovom formulom

(11) $\quad < \mathcal{F}_1(f) , \mathcal{F}(\phi) > := 2\pi < f , \check{\phi} >$ gde je $f \varepsilon \mathcal{H}'\{M_p\}$

$\phi \in H\{M_p\}$ i $\check{\phi}(x) := \phi(-x)$, topološki izomorfizam prostora $H'\{M_p\}$ na prostor $H'\{M_p\}$. (Preslikavanje F_1 je inverzno preslikavanje adjungovanog preslikavanja za Furijeovu transformaciju.) Ako je $f \in S'$ ($\subset H'\{M_p\}$), tada formula (11) daje uobičajenu definiciju Furijeove transformacije temperirane distribucije ; iz tog razloga ćemo ubuduće preslikavanje F_1 takodje zvati Furijeovom transformacijom i pisaćemo prosto F umesto F_1 .

Ovako definisana Furijeova transformacija zadržava neke poznate osobine Furijeove transformacije, na primer

(12) $$F(D^m f(x))(\xi) = (i\xi)^m \cdot F(f(x))(\xi)$$

(13) $$D_\xi^m F(f(x))(\xi) = F((-ix)^m f(x))(\xi)$$

gde je $f \in H'\{M_p\}$, $\xi \in R$ i $m \in N$.

Iz same definicije prostora $H'\{M_p\}$ sledi da su njegovi elementi ultradistribucije u smislu S.Silve,tj. Furijeova transformacija proizvoljne distribucije iz $H'\{M_p\}$ nije distribucija. Medjutim, kao što smo već rekli, o Furijeovoj transformaciji konvolutora se može reći mnogo više.

<u>*Tvrdjenje 3.3.*</u> Furijeova transformacija konvolutora $T \in O_c'(H'\{M_p\})$ je funkcija $\hat{T}(\xi)$,$\xi \in R$, koja se može analitički produžiti na celu kompleksnu ravan.

<u>*Dokaz.*</u> Prema teoremi 2.4 za dato $p \in N$ postoje $m \in N_o$ i neprekidna funkcija nad R sa osobinom $F(x) = O(\exp(-M_p(x)))$ kada $|x| \to \infty$ tako da je $T(x) = D^m F(x)$. Na osnovu relacije (12) je

(14) $$\hat{T}(\xi) = (i\xi)^m \hat{F}(\xi) \ ; \qquad \hat{F}(\xi) := F(F(x))(\xi),$$

ponašanje funkcije $F(x)$ u beskonačnosti pokazuje da je $\hat{F}(\xi)$ glatka funkcija realne promenljive ξ .Ako sada u relaciji (14) zamenimo ξ sa kompleksnom promenljivom $\zeta = \xi + i\eta$,analognim razmatranjem kao u dokazu tvrdjenja 3.1 dobijamo da je funkcija $\hat{T}(\zeta) := (i\zeta)^m \cdot F(F(x))(\zeta)$ cela analitička funkcija. Δ

Sledeća teorema daje fundamentalnu karakterizaciju Furijeove transformacije konvolutora.

Teorema 3.2. Cela analitička funkcija $\hat{T}(\zeta)$ je Furijeova transformacija distribucije $T \in \mathcal{O}'_c(\mathcal{H}'\{M_p\})$ ako i samo ako za svako $\bar{p} \in \mathbb{N}$ postoje $\bar{N}>0$ i $\bar{C}>0$ tako da važi

$$(15) \qquad |\hat{T}(\xi+i\eta)| \leq \bar{C}\cdot(1+|\xi|)^{\bar{N}}\cdot \exp(M^*_{\bar{p}}(\eta)) .$$

Dokaz. *Uslov je potreban.* Pokažimo prvo da za dato $d\in(0,1)$ i $p\in\mathbb{N}$ postoji $\bar{p}\in\mathbb{N}$ tako da je

$$(16) \qquad M^*_{\bar{p}}((1+d)\eta) \leq d\cdot M^*_p(\eta) \quad \text{za dovoljno veliko } |\eta| .$$

Stavimo $p_1 := \max\{[1/d]+2, p\}$ i $\bar{p} := r(p_1)$. Tada je

$$d\cdot M_p((1+d)\eta/d) \leq M_p((\eta/d)+\eta) \leq M_{p_1}(p_1\eta)$$

i prema uslovu (A) je

$$(17) \quad d\cdot M_p((1+d)\eta/d) \leq M_{\bar{p}}(\eta) \quad \text{za dovoljno veliko } |\eta| .$$

Ako sada η' zamenimo sa $\eta/(1+d)$ i predjemo na dualne funkcije po Jungu, dobijamo relaciju (16) .

Neka je $d\in(0,1)$ utvrdjeno. Kada p prolazi skup prirodnih brojeva, $\bar{p}$ prolazi jedan skup $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$. Uslov (A) pokazuje da skup $\mathbb{N}_1$ ima osobinu da za svaki prirodan broj postoji elemenat iz $\mathbb{N}_1$ koji je od njega veći. (Skup $\mathbb{N}_1$ se tada naziva konfinalan za skup $\mathbb{N}$.) Vidimo da izmedju skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_1$ postoji korespodencija u tom smislu da ako je $\bar{p}$ dato i zadovoljava uslov $\bar{p} \geq \min \mathbb{N}_1$, postoji $p\in\mathbb{N}$ tako da važi relacija (16) za dovoljno veliko $|\eta|$.

Neka je sada $T \in \mathcal{O}'_c(\mathcal{H}'\{M_p\})$ i neka je $\bar{p}$ dato, tako da je $\bar{p} \geq \min \mathbb{N}_1$(videti prethodno razmatranje). Ako je p prirodan broj koji odgovara broju $\bar{p}$, za to p postoje $m\in\mathbb{N}_0$ i neprekidna funkcija $F(x)$, $F(x)=O(\exp(-M_p(x)))$

kada $|x|\to\infty$ sa osobinom $T(x)=D^{m}F(x)$. Relacije (12) prelaskom na kompleksnu promenljivu ζ daje

$$(18)\qquad \hat{T}(\zeta) = (i\zeta)^{m}\cdot\hat{F}(\zeta)\ ,\quad \hat{F}(\zeta):=\mathcal{F}(F(x))(\zeta)\ .$$

Poznato je da važi ([6], s.28)

$$|\hat{F}(\xi+i\eta)| \le C_1\cdot\exp(M_p^*((1+d)\eta))\quad ,\ d\in(0,1)$$

za neko $C_1=C_1(d,p)>0$. Prema izboru broja p i relaciji (16) je

$$(19)\qquad |\hat{F}(\xi+i\eta)| \le C_2\cdot\exp(d\cdot M_{\bar{p}}^*(\eta) + K)$$

za sve $\xi+i\eta\in C$, a $K=K(d,p)\ge 0$ je konstanta. Dakle, prema relacijama (18) i (19) je

$$|\hat{T}(\zeta)| \le C_3\cdot(1+|\zeta|)^{m}\cdot\exp(d\cdot M_{\bar{p}}^*(\eta)) \le$$
$$\le C_3\cdot(1+|\xi|)^{m}\cdot(1+|\eta|)^{m}\cdot\exp(d\cdot M_{\bar{p}}^*(\eta))$$

za neko $C_3>0$. Ako je d_1 takvo da je $d<d_1\le 1$, tada je

$$(20)\qquad |\hat{T}(\zeta)| \le \bar{C}\cdot(1+|\xi|)^{m}\cdot\exp(d_1\cdot M_{\bar{p}}^*(\eta))$$

što za $\bar{N}:=m$ i $d_1:=1$ daje relaciju (15).

Ako primetimo da ako (15) važi za neki prirodan broj $\bar{p}$ tada važi i za sve $p<\bar{p}$, to sledi neophodnost uslova (15).

__Uslov je dovoljan.__ Ako cela analitička funkcija $\hat{T}(\zeta)$ zadovoljava relaciju (15), tada ista nejednakost važi i za $\hat{T}(-\zeta)$. U radu [34], Bemerkung IV.2 pokazano je da je distribucija

$$T(x) := \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\mathcal{F}(\hat{T}(-\xi))(x)\qquad \text{oblika}$$

$$(21)\qquad T(x) = \sum_{j=1}^{m} D^{j}F_j(x)\qquad \text{gde su } F_j(x)\ ,\ j=1,2,\ldots,m$$

neprekidne funkcije nad R za koje važi $F_j(x)=O(\exp(-M_{\bar{p}}(kx)))$

kada $|x| \to \infty$ za $k>0$ koje ne zavisi od j . Na osnovu uslova (A) postoji prirodan broj $p_1 \le \bar{p}$ tako da je

$$F_j(x) = O(\exp(-M_{p_1}(x))) \quad \text{kada } |x| \to \infty .$$

Integraleći, ako je potrebno, svaku od funkcija $F_j(x)$ dovoljno mnogo puta, možemo svesti izraz (21) na

$$T(x) = D^m F(x) \quad , \text{ gde je } F(x) \text{ neprekidna funkcija}$$

nad R za koju važi $F(x) = O(\exp(-M_p(x)))$ kada $|x| \to \infty$ i $p \le p_1$. Isto kao u prvoj polovini dokaza ove teoreme, možemo izabrati prirodne brojeve $\bar{p}$ tako da odgovarajući prirodni brojevi p prolaze konfinalnim skupom za skup prirodnih brojeva.
Δ

Pokazaćemo sada da važi tzv. "exchange formula" , tj. da Furijeova transformacija konvolucije prelazi u proizvod odgovarajućih Furijeovih transformacija, ako u konvoluciji učestvuje bar jedan konvolutor.

Lema 3.3. Neka je $T \in O_c'(H'\{M_p\})$ i $\hat{T}(\zeta)$ njegova Furijeova transformacija. Tada je preslikavanje

$$\hat{T}\cdot \; : \; \psi \to \hat{T}\cdot\psi \quad \text{linearno i neprekidno preslikavanje}$$

prostora $H\{M_p\}$ u sama sebe.

Dokaz. Neka je $p \in N$ dato ; pokazaćemo da je $h_p(\hat{T}\cdot\psi) \le C_p \cdot h_{p_1}(\psi)$ za pogodno izabrano $p_1 = p_1(p,T) \in N$ i $C_p = C_p(p,T) > 0$. Neka je $\bar{p} := r(p)$, $\bar{N}$ prirodan broj čija egzistencija sledi iz teoreme 3.2 i najzad neka je $p_1 := \bar{p} + p + \bar{N}$. Koristeći relaciju (15) i definiciju seminorme h_p (relacija (10)) dobijamo

$$(1+|\xi|)^p \cdot |\psi(\xi+i\eta)| \cdot |\hat{T}(\xi+i\eta)| \cdot \exp(-M_p^*(\eta)) \le$$

$$\le \bar{C} \cdot (1+|\xi|)^{p+\bar{N}} \cdot |\psi(\xi+i\eta)| \cdot \exp(M_{\bar{p}}^*(\eta) - M_p^*(\eta))$$

Uslov (A) daje

$$M_p^*(x/p) \geq M_{r(p)}^*(x) \quad \text{ili} \quad M_p^*(\eta) \geq M_{r(p)}^*(p\eta) \geq p\cdot M_{r(p)}^*(\eta)$$

za dovoljno veliko $|x|$ odnosno $|\eta|$. Zbog toga je

$$\sup\{2\cdot M_{\bar p}^*(\eta) + M_{p_1}^*(\eta) - M_p^*(\eta)\ ;\ \eta\in R\} \leq$$

$$\leq \sup\{p\cdot M_{r(p)}^*(\eta) - M_p^*(\eta)\ ;\ \eta\in R\} < \infty .$$

Dakle, $h_p(\hat{T}\cdot\psi) \leq C_p'\cdot h_{\bar p_1}(\psi)\cdot\sup\{\exp(M_{\bar p}^*(\eta) - M_p^*(\eta) + M_{p_1}^*(\eta)\ ;$

$\eta\in R\} \leq C_p\cdot h_{p_1}(\psi)$. Δ

Ako je $T\in O_c'(H'\{M_p\})$ i $S\in H'\{M_p\}$, tada se proizvod $\hat{S}\cdot\hat{T}$, gde je $FS:=\hat{S}$, $FT:=\hat{T}$ definiše formulom :

$$(22) \qquad <\hat{S}\cdot\hat{T}\ ,\ \psi> := <\hat{S}\ ,\ \hat{T}\cdot\psi> \quad ,\quad \psi\in H\{M_p\} .$$

Lema 3.3 pokazuje da izraz na desnoj strani ove jednakosti ima smisla, tj. da je ova definicija korektna. Relacijom (22) smo definisali jedan elemenat prostora $H'\{M_p\}$; sledeće tvrdjenje pokazuje da je to baš $F(S*T)$.

__Tvrdjenje 3.4.__ Neka je $S\in H'\{M_p\}$ i $T\in O_c'(H'\{M_p\})$. *Tada je*

$$(23) \qquad F(S * T) = FS\cdot FT .$$

__Dokaz.__ Na osnovu Parsevalove formule je

$$<F(S*T),F\phi> = 2\pi\cdot<S*T,\check{\phi}> = 2\pi\cdot<S(x),<T(y),\phi(x-y)>> =$$

$$= 2\pi\cdot<S,T*\phi> = <FS,F(T*\phi)> .$$

Ako dokažemo da je

$$(24) \qquad F(T * \phi) = FT\cdot F\phi$$

na osnovu definicije (22) slediće odmah relacija (23). Medjutim, relacija (24) očevidno važi za $T(x)=F(x)$, ako je $F(x)$ neprekidna funkcija nad R za koju važi $F(x)=O(\exp(-M_p(x)))$ kada $|x|$ teži u beskonačnost. Ako primenimo teoremu 2.4 i relaciju (26 a) druge glave, dobijamo relaciju (24) . Δ

GLAVA IV

REŠIVOST KONVOLUCIONIH JEDNAČINA NA $\mathcal{B}'\{M_p\}$

Rešivost konvolucione jednačine

$$(1) \qquad T * U = V$$

gde je $T \in \mathcal{O}'_C(X')$, $U,V \in X'$, gde je X' neki prostor distribucija ili uopštenih funkcija, prvi su ispitivali L.Erenprajs u [5] , L.Hermander u [14] i B.Malgranž u [19] krajem pedesetih godina. Oni su ispitivali slučaj $X' = \mathcal{D}'$ i $X' = \mathcal{D}'_F$ tj. $T \in \mathcal{E}'$, jer je skup konvolutora na $\mathcal{D}'$ i $\mathcal{D}'_F$ baš prostor distribucija sa kompaktnim nosačem. Za navedene slučajeve potreban i dovoljan uslov za rešivost jednačine (1) jeste da je $\hat{T} := \mathcal{F}T$ (koja je cela *analitička funkcija*) "*veoma sporo opadajuća*" (very slowly decreasing). To znači da postoji neprekidna funkcija $\rho : \mathbb{R}^+_o \to \mathbb{R}^+_o$ sa osobinom $\rho(x) = o(x)$ kada $x \to \infty$ i pozitivne konstante C i N tako da je

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\sup \{|\hat{T}(x+w)| \; ; \; |w| \leq \rho(\log(1+|x|))\} \geq \\ &\geq C(1+|x|)^{-N} \quad \text{za sve} \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ovaj uslov je ekvivalentan sa postojanjem fundamentalnog rešenja u prostoru $\mathcal{D}'$, odnosno $\mathcal{D}'_F$ (rešenje jednačine (1) za $V := \delta$ *naziva se fundamentalnim* za jednačinu (1) i konvolutor T).

Ako je funkcija $\rho(x) = O(x)$ kada $x \to \infty$, tada je uslov (2) ekvivalentan sa rešivosti jednačine (1) u prostoru E ; u tom se slučaju $\hat{T}$ naziva "sporo opadajuća" (slowly decreasing).

Razumljivo, od interesa su uslovi za rešivost jednačine tipa (1) u užim prostorima od D' i D'_F. To se može i ovako formulisati : ako poznajemo "brzinu rasta" distribucije ili uopštene funkcije V , pod kojim uslovima na konvolutor T (odnosno njegovu Furijeovu transformaciju) se za rešenje U može tvrditi da postoji i da poseduje istu brzinu rasta kao i V . Pod "brzinom rasta" jedne distribucije ili uopštene funkcije podrazumeva se ponašanje u beskonačnosti neprekidne funkcije čiji je konačan distribucioni izvod baš ta distribucija ili uopštena funkcija; jasno , ovde se podrazumeva da je spomenuta distribucija ili uopštena funkcija konačnog reda.

Prve rezultate u važnom slučaju tzv. eksponencijalnih distribucija (videti primer 2 poglavlja 2.6) dali su Z.Železni sa saradnicima ([27],[28],[29]), O.Grudzinski ([9]), J.Ćoranesku (Ioana Cioranescu)([2]). U svim ovim radovima pojavljuju se neke verzije sporog opadanja funkcije $\hat{T}$, odnosno uslov tipa (2) za različito ponašanje u beskonačnosti funkcije $\rho(x)$. Još dalje je otišao O.Grudzinski u [11], gde je dotadašnje rezultate proširio na prostore koje je uveo i ispitivao J.Vloka (Joseph Wloka) u [34] , dakle i na prostor $K'(M)$ (videti primer 1 poglavlja 2.6). O.Grudzinski je svoje rezultate dobio u okvirima tzv. Berlingovih distribucija, koje je 1960. godine uveo Berling (Beurling), a prvi sistematski ispitao G.Bjork (Goran Björck) u [1] . U stvari, Bjork je gotovo celu knjigu [17] o parcijalnim diferencijalnim jednačinama "preveo" sa jezika distribucija na jezik Berlingovih distribucija.

U prvom poglavlju ove glave ćemo izložiti najvažniji rezultat O.Grudzinskog o rešivosti jednačine (1) u slučaju $X'=K'(M)$ a u drugom i trećem poglavlju ćemo dati dovoljne i potrebne uslove za rešivost (1) u prostoru $H'\{M_p\}$. Teoreme 2.3 i 2.4 će imati fundamentalnu ulogu u tom poglavlju , zapravo one će nam omogućiti da pokažemo da je jednačina (1) rešiva po U u $H'\{M_p\}$ ako i samo ako je rešiva u svakom prostoru $K'(M_p)$, ili, što je isto, za sve $p \geq p_0(V)$

Recimo još na kraju ovog uvoda glave da je u važnom slučaju $X'=S'$ pitanje rešivosti jednačine (1) otvoreno. Postoji samo hipoteza Z.Železnog data u [29].

Hipoteza. Ako je distribucija $T \in O'_C(S')$ i ako je red nula njene Furijeove transformacije $\hat{T}$ ograničen, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

a) Za svako $k \in N_0$ postoje $m \in N_0$ i pozitivne konstante N i N' tako da važi

$$\sup \{ |\hat{T}^{(j)}(w)| \ ; \ 0 \leq j \leq m, \ |w-x| \leq (1+|x|)^{-k} \} \geq |x|^{-N} \quad \text{za} \quad |x| \geq N' .$$

b) $T * S' = S'$.

4.1 REŠIVOST KONVOLUCIONE JEDNAČINE U PROSTORU $K'(M)$

U celom poglavlju $M(x)$ je fiksirana, parna, neprekidno diferencijabilna, konveksna funkcija sa osobinom da je monotono rastuća za $x>0$ i $M(0)=0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = \infty$. $K(M)$ je prostor osnovnih funkcija iz definicije 2.3 , a $K'(M)$ njegov jaki dual. U primeru 1. poglavlja 2.6 pokazano je da za prostor $K(M)$ uslov (A) važi, ako se uzme $M_p(x) := M(px)$, $p=1,2,\ldots$.

U [11] data je sledeća

Definicija 4.1. Funkcija $\hat{T} : C \to C$ naziva se M - sporo opadajuća funkcija, ako relacija (2) važi za

(3) $$\rho(x) = A \cdot \frac{|x|}{M^{-1}(x)} \quad \text{za neko } A>0 .$$

Funkcija $\hat{T} : C \to C$ se naziva ekstremno sporo opadajuća, ako relacija (2) važi za $\rho(x) = \text{const}$.

Funkcija $M^{-1}(x)$ u relaciji (3) je inverzna funkcija restrikcije $M(x)$ na R_o^+.

Sada ćemo formulisati i dokazati glavni rezultat O.Grudzinskog iz |11|. Dokaz implikacije (b) => (c) je kao u |5| ,a implikacija (c) => (a) sledi iz opštijeg tvrdjenja 4.1.

Teorema 4.1. Neka je $T \varepsilon O_c'(K'(M))$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni :

(a) Preslikavanje $T* : K'(M) \to K'(M)$ je surjektivno ;

(b) $T*$ ima fundamentalno rešenje u $K'(M)$;

(c) FT je M - sporo opadajuća funkcija.

Drugim rečima, jednačina (1) ima rešenje u $K'(M)$ za sve $V \varepsilon K'(M)$ ako i samo ako je FT M - sporo opadajuća.

Dokaz. Jasno je da (a) => (b) jer je dovoljno staviti $V:=\delta \varepsilon K'(M)$ i zbog surjektivnosti sledi postojanje distribucije $U \varepsilon K'(M)$ tako da je $T*U=\delta$. Distribucija U i jeste traženo fundamentalno rešenje.

Implikacija (c) => (a) će slediti iz tvrdjenja 4.1 koje ćemo dokazati u drugom poglavlju ove glave. U stvari, kao što će se videti, to tvrdjenje je uopštenje implikacije (c) => (a) ali sa zamenom prostora $K'(M)$ sa $H'\{M_p\}$.

Dokažimo sada implikaciju (b) => (c) ; ovaj dokaz po ideji sledi iz [5] . Neka je $E \varepsilon K'(M)$ fundamentalno rešenje za konvolutor T , ali neka funkcija $\hat{T}(\xi+i\eta)$ nije M - sporo opadajuća. To znači da za svaki par $(A,N) \varepsilon R\times N$ postoniz $\{\xi_n\}_{n\varepsilon N}$ sa osobinom da $|\xi_n| \to \infty$ i

$$(4) \quad \sup \{|\hat{T}(\xi_n+w)| \; ; \; |w| \leq A \frac{|\xi_n|}{M^{-1}(\xi_n)} \; , \; w \varepsilon C\} \leq \frac{1}{(1+|\xi_n|)^N}$$

Sa druge strane, prema Poasonovoj sumacionoj formuli ([18],s.69, relacija (52)), važi za $\phi \varepsilon D_{K_d}$, gde je K_d krug poluprečnika $d>0$ sa centrom u koordinatnom početku :

$$(5) \qquad \phi(0) = \frac{1}{2\pi d} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\zeta+\frac{k}{d}) \quad , \; \zeta \varepsilon C \; ,$$

gde je $\hat{\phi} := F\phi$ cela analitička funkcija. Konvergencija reda na desnoj strani jednakosti (5) sledi iz teoreme Peli - Vinera (videti npr. teoremu 1.7.7. u [17]).

Ako je ϕ izabrano tako da je $\hat{\phi}(\xi) \geq 0$ za $\xi \varepsilon R$, tada postoji $\xi_o \varepsilon R$ tako da je

$$\| \hat{\phi} \|_{L_\infty} := \sup \{ |\hat{\phi}(\xi)| \, , \, \xi \varepsilon R \} = \hat{\phi}(\xi_o)$$

Na osnovu (5) i poslednje jednakosti je

$$(6) \quad \| \hat{\phi} \|_{L_\infty} \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\xi_o + \frac{k}{d}) \leq 2\pi d \cdot \phi(0)$$

Ako je $\hat{E} := FE$, tada prema tvrdjenju 3.4 važi $\hat{E} \cdot \hat{T} = 1$. Pošto je

$$2\pi \cdot \phi(0) = 2\pi < \delta(x), \phi(-x) > = < \hat{E} \cdot \hat{T}, \hat{\phi} > = < \hat{E}, \hat{T} \cdot \hat{\phi} >$$

to relacija (6) daje

$$(7) \quad \| \hat{\phi} \|_{L_\infty} \leq d \cdot | < \hat{E}, \hat{T} \cdot \hat{\phi} > |$$

Funkcionela E pripada prostoru $K'(M) := F(K'(M))$. Prema teoremi 3.1 ako je topologija na $K(M) := F(K(M))$ data prebrojivom familijom normi $\{k_p\}_{p \varepsilon N}$, gde je za $\psi \varepsilon U$

$$(8) \quad k_p(\psi) := \sup \{ (1+|\xi|)^p \cdot \exp(-M_p^*(\eta/p)) \cdot |\psi(\xi+i\eta)| \; ; \; \xi+i\eta \; \varepsilon C \}$$

tada je Furijeova transformacija topološki izomorfizam prostora $K(M)$ na $K(M)$. Primetimo da prema lemi 3.3 izraz na desnoj strani (7) ima smisla. Medjutuim, iz $\hat{E} \varepsilon K'(M)$ sledi postojanje $p \varepsilon N$ sa osobinom

$$(9) \quad | < \hat{E}, \hat{T} \cdot \hat{\phi} > | \leq C \cdot k_p(\hat{T} \cdot \hat{\phi})$$

za sve $\hat{\phi}$ sa navedenim osobinama i neko $C = C(p) > 0$. Relacije (7) i (9) daju

$\|\hat{\phi}\|_{L_\infty} \le C\cdot d\cdot k_p(\hat{T}\cdot\hat{\phi})$ ili

(10) $\|\hat{\phi}\|_{L_\infty} \le C\cdot d\cdot \sup\{(1+|\xi|)^p \exp(-M^*(\eta/p))\cdot|\hat{T}(\zeta)\cdot\hat{\phi}(\zeta)|\ ;\ \xi+i\eta\ \varepsilon\, \mathbb{C}\}$

Sledeća etapa dokaza je konstrukcija niza funkcija $\{\phi_{\xi_n}(x)\}_{n\varepsilon N} \subset D_{K_d}$ sa osobinom $\lim_{n\to\infty} k_p(\hat{T}\cdot\hat{\phi}_{\xi_n}) = 0$, ali $\hat{\phi}_{\xi_n}(\xi_n) = 1$, što će biti u kontradikciji sa (10).

Neka je $\phi\ \varepsilon\ D_{K_1}$ sa osobinom $\int_R \phi(x)dx = 1$. Očito je $\operatorname{supp}(\phi^*)^k \subset D_{K_k}$, $(\phi^*)^k := \underbrace{\phi*\phi*..*\phi}_{k\text{ - puta}}$ i $\int_R (\phi^*(x))^k dx = 1$ za $k=1,2,\ldots$. Na osnovu toga je $\|\phi^{*k}\|_{L_\infty} \ge 1$.

Neka je $\xi\varepsilon R$ i uzmimo $k_\xi := [\log(1+|\xi|)]\ \varepsilon\ N_0$ i neka je $\alpha_\xi := M^{*-1}(k_\xi/p)$. Uzmimo dalje

$$\psi_\xi(x) := \exp(ix\xi)\cdot((\alpha_\xi\cdot\phi(\alpha_\xi x))^*)^{k_\xi} ,$$

pa je $\operatorname{supp}\psi_\xi(x) \subset K_{(k_\xi/\alpha_\xi)}$. Prelaskom na Furijeovu transformaciju je

(11) $\hat{\psi}_\xi(\xi+w) = (\hat{\phi}(w/\alpha_\xi))^{k_\xi}$

i lako se dobija

(12) $|\hat{\psi}_\xi(w)| \le 1$, $w\varepsilon R$

Ako iskoristimo (4) i konstrukciju funkcije $\psi_\xi(w)$ dobijamo

$$\sup\{|\hat{T}(w+\xi)|\cdot|\hat{\psi}_\xi(w+\xi)|\cdot(1+|w+\xi|)^p\ ;\ |w| \le \rho_1(\xi), w\varepsilon R\} \le$$

$$\le \sup\{|\hat{T}(w+\xi)|\ ;\ |w| \le \rho_1(\xi),\ w\varepsilon R\}\cdot(1+|\xi|)^p\cdot(1+\rho_1(\xi))^p \le$$

$$\le (1+|\xi|)^{p-N}\cdot(1+\rho_1(\xi))^p$$

gde je stavljeno $\rho_1(\xi) := A\cdot\frac{\log(1+|\xi|)}{M^{-1}(\log(1+|\xi|))}$

Prema lemi 1.4 funkcija $\rho_1(\xi)$ se može majorirati sa funkcijom $A\cdot M^{*-1}(\log(1+|\xi|))$, a pošto funkcija $M^{*-1}(x)$ raste sporije od linearne funkcije, to je

$$\sup\{|\hat{T}(w+\xi)|\cdot|\psi_\xi(w+\xi)|\cdot(1+|w+\xi|)^p\ ;\ |w|\le\rho_1(\xi), w\in R\}\le \tag{13}$$
$$\le C_1\cdot(1+|\xi|)^{2p-N}\ .$$

Ocenimo sada supremum na levoj strani relacije (13), ali za $|w|\ge\rho_1(\xi)$ i $w\in R$:

$$\sup\{|\hat{T}(w+\xi)|\cdot|\psi_\xi(w+\xi)|\cdot(1+|w+\xi|)^p\ ,\ |w|\ge\rho_1(\xi),\ w\in R\}\le$$
$$\le C_2\cdot(1+|\xi|)^{N_1}\cdot\sup\{(1+|w|)^p\cdot|\psi_\xi(w+\xi)|\ ;\ |w|\ge\rho_1(\xi),\ w\in R\}\cdot \tag{14}$$
$$\cdot(1+|\xi|)^p\le C_2\cdot(1+|\xi|)^{p+N_1}\cdot\ \sup\{(1+|w|)^{p+N_1}\cdot|\hat{\phi}(w/\alpha_\xi)|^{k_\xi},$$
$$|w|\ge\rho_1(\xi)\ ,w\in R\}$$

U prvoj nejednakosti je korišćena teorema 3.2, jer za dato p postoje C_2 i N_1 tako da važi relacija (15) treće glave, a u drugoj nejednakosti je korišćena relacija (11). Ostaje da se majorira poslednji supremum. Pošto je $\phi\in\mathcal{D}_{K_1}$, prema teoremi Peli - Vinera je

$$\sup\{(1+|w|)^{p+N_1}\cdot|\hat{\phi}(w/\alpha_\xi)|^{k_\xi}\ ;\ |w|\ge\rho_1(\xi),\ w\in R\}\le$$
$$\le C_3\cdot\sup\{(1+|w|)^{p+N_1}\cdot(1+|w|/\alpha_\xi)^{-k_\xi}\ ;\ |w|\ge\rho_1(\xi)\ ,\ w\in R\}\le$$
$$\le C_4\cdot\sup\{\alpha_\xi^{p+N_1}\cdot(1+|w|/\alpha_\xi)^{p+N_1-k_\xi}\ ;\ |w|\ge\rho_1(\xi), w\in R\}$$

Ako je $k_\xi > p+N_1$ (što je za veliko $|\xi|$ moguće postići), tada je na osnovu leme 1.4 poslednji supremum manji od

$$C_5\cdot\left(M^{*-1}\left(\frac{\log(1+|\xi|)+1}{p}\right)\right)^{p+N_1}\times$$
$$\times\ \left(1+A\cdot\frac{\log(1+|\xi|)}{M^{-1}(\log(1+|\xi|)\cdot(M^{*-1}(\frac{\log(1+|\xi|)+1}{p})}\right)^{p+N_1+k_\xi}\le$$

$$\leq C_6 (M^{*-1}(\log(1+|\xi|)+1))^{p+N_1+1} \cdot (2/A)^{\log(1+|\xi|)-p-N_1}$$

Ako je sada $A > 2e$, tada iz (14) sledi

$$\sup \{(1+|w|)^{p+N_1} \cdot |\hat{\phi}(w/\alpha_\xi)|^{k_\xi} \; ; \; |w| \geq \rho_1(\xi) \; , \; w \in R\} \leq$$

$\leq C_7 \cdot (1+|\xi|)^{-p-N_1-1}$ gde je $C_7 = C_7(A,N,p,N_1) > 0$. Prema tome je

$$\sup \{|\hat{T}(w+\xi)| \cdot |\hat{\psi}_\xi(w+\xi)| \cdot (1+|w+\xi|)^p \; , \; |w| \geq \rho_1(\xi) \; , \; w \in R\} \leq$$

$$\leq C_8 \cdot (1+|\xi|)^{-1} \quad , \quad C_8 = C_8(A,N,p,N_1) > 0 \; . \tag{15}$$

Primetimo da ako je p dato možemo uzeti $N > 2p+1$, te je prema (13) i (15)

$$\sup \{|\hat{T}(w)| \cdot |\hat{\psi}_\xi(w)| \; ; \; w \in R\} \leq C_9 \cdot (1+|\xi|)^{-1} \tag{16}$$

Ako je $\phi_{\xi_n}(x) := \psi_{\xi_n}(x)$, to je na osnovu (10) i (16)(za $n=0$)

$$\lim_{n\to\infty} \| \hat{\phi}_{\xi_n} \|_{L_\infty} = 0 \; . \tag{17}$$

Sa druge strane je po konstrukciji

$$\hat{\phi}_{\xi_n}(\xi_n) = \hat{\psi}_{\xi_n}(\xi_n) = \left(\hat{\phi}\left(\frac{\xi_n-\xi_n}{\alpha_{\xi_n}}\right)\right)^{k_{\xi_n}} = (\hat{\phi}(0))^{k_{\xi_n}} = 1$$

pa je $\liminf\limits_{n \to \infty} \| \hat{\psi}_{\xi_n}(\xi) \|_{L_\infty} \geq 1$, što je u kontradikciji sa relacijom (17). Δ

4.2 DOVOLJAN USLOV ZA REŠIVOST KONVOLUCIONE JEDNAČINE U $H'\{M_p\}$

U ovom poglavlju ćemo dokazati tvrdjenje 4.1 koje uopštava odgovarajuće rezultate iz [28] i [11]. Izmedju ostalog, iz tvrdjenja 4.1 sledi implikacija (c) $\Rightarrow$ (a) u teoremi 4.1, i time u stvari završavamo dokaz te teoreme. Važnije od toga je to što ovo tvrdjenje daje dovoljan uslov za rešivost konvolucione jednačine u prostoru $H'\{M_p\}$. Videćemo kasnije da je spomenuti uslov i potreban za rešivost jednačine (1) u $H'\{M_p\}$.

Tvrdjenje 4.1. Neka je $T \in O'_c(H'\{M_p\})$ i neka je $\hat{T} := FT$ M_{p_o} - sporo opadajuća funkcija za neko $p_o \in N$. Tada je preslikavanje $T* : U \to T*U$ prostora $H'\{M_p\}$ u sama sebe surjektivno.

Dokaz. Neka je $S := \check{T}$, tj. $\langle S,\phi\rangle := \langle T,\phi(-x)\rangle$ za $\phi \in H\{M_p\}$. Jasno je da je S takodje konvolutor na $H'\{M_p\}$ i da za $\hat{S} := FS$ važi da je M_{p_o} - sporo opadajuća funkcija. Preslikavanje $S*$ prostora $H\{M_p\}$ u sama sebe je transponovano preslikavanje za preslikavanje $T*$, ako je $S* : \phi \to S*\phi$. Tvrdjenje će biti dokazano ako pokažemo da je $S*$ izomorfizam prostora $H\{M_p\}$ na $S*(H\{M_p\})$, što sledi iz [32], strana 49, Cor. 4. Preslikavanje $S*$ neprekidno jer je S konvolutor, i injektivno, na osnovu relacije (24) koja se koristila u dokazu tvrdjenja 3.4. (T treba zameniti sa S). Na osnovu leme 3.3 dovoljno je dokazati da je preslikavanje $\hat{S}\cdot\hat{\phi} \to \hat{\phi}$ neprekidno. Suština dokaza je lema 3.2 iz rada [16] L.Hermandera.

Lema 4.1. Ako su F, G i F/G cele analitičke funkcije i $d>0$, tada je za $z,\zeta \in C$

$$|F(z)/G(z)| \leq \sup'\{|F(\zeta)| \; ; \; |\zeta - z|<4d\} \times$$

(18)

$$\times \sup'\{|G(\zeta)| \; ; |\zeta - z|<4d\} \; / \; (\sup'\{|G(\zeta)| \; ; \; |\zeta-z|<d\})^2$$

Neka je dat prirodan broj p, $p>p_o$; uzmimo p_1 tako da je $p_1>p$ i odredimo p_2 tako da je $p_2 > r(p_1(|4A_1|+1)$ i $p_2 > r(5p_1)$. Najzad, neka je $p_3 := r(p_2)$ i $\bar{p} := r(p_3)$ i stavimo

(19) $$d := |y| + A_{\prime} \cdot M_{p_o}^{*-1}(\log(1+|x|)) \; .$$

($A_{\prime}$ je iz relacije (3) ; primetimo da je na osnovu leme 1.4 $\rho(x) \leq A \cdot M_{p}^{*-1}(x)$ za $x>0$.)

Ocenimo prvo $\sup'\{|\hat{S}(\zeta)| \; ; \; |\zeta - z|<4d\} = \sup'\{|\hat{S}(\zeta+z)|; |\zeta|<4d\}$. Pošto je $S \in \mathcal{O}_c'(H'\{M_p\})$, za dato $\bar{p}$ postoje pozitivni brojevi $\bar{C}, \bar{N}$ tako da je

$$\sup'\{|\hat{S}(\zeta)| \; ; \; |\zeta - z|<4d\} \leq \bar{C} \cdot (1+|x|+4d)^{\bar{N}} \cdot \exp(M_{\bar{p}}^{*}(|y|+4d)) \; .$$

Koristeći ovu nejednakost, zatim (18),(19) osobine dualnih funkcija po Jungu i najzad uslov (A), dobijamo da je zadnji izraz manji od

$$C_1 \cdot (1+|x|)^{\bar{N}+1} \cdot (1+|y|)^{4\bar{N}} \cdot (1+4A \cdot M_{p_o}^{*-1}(\log(1+|x|)))^{\bar{N}} \times$$
$$\times \exp(M_{\bar{p}}(5|y|+4A \cdot M_{p_o}^{*-1}(\log(1+|x|)))) \leq$$
$$\leq C_2 \cdot (1+|x|)^{\bar{N}+1} \cdot (1+|y|)^{4\bar{N}} \cdot \exp(M_{p_3}^{*}(5y) + M_{p_3}^{*}(4A \cdot M_{p_o}^{*-1}(\log(1+|x|)))) \leq$$
$$\leq C_3 \cdot (1+|x|)^{\bar{N}+1} \cdot (1+|y|)^{4\bar{N}} \cdot \exp(M_{p_2}^{*}(5y)) \cdot \exp(M_{p_2}^{*}(M_{p_o}^{*-1}(\log(1+|x|)))$$

odnosno za neko $C_4>0$ važi

(20) $$\sup\{|\hat{S}(\zeta)| \; ; \; |\zeta - z|<4d\} \leq C_4 \cdot (1+|x|)^{\bar{N}+2} \cdot \exp(M_{p_1}^{*}(y))$$

Uslov tvrdjenja daje

$$\sup{}'\{|\hat{S}(\zeta)| \; ; \; |\zeta-z|<d\} = \sup{}'\{|\hat{S}(\zeta+z)| \; ; \; |\zeta|<d\} \geq$$

(21)

$$\geq \sup\{|\hat{S}(\zeta+z)| \; ; \; |\zeta|\leq A\cdot M^{*-1}_{p_o}(\log(1+|x|))\} \geq C'\cdot(1+|x|)^{-N'}$$

za neke C', $N' > 0$. Ako sada primenimo lemu 4.1 tako što stavimo $F:=\hat{S}\cdot\hat{\phi}$, $G:=\hat{S}$ i iskoristimo relacije (20) i (21) dobijamo

$$|\hat{\phi}(z)| \leq \sup{}'\{|\hat{S}(\zeta)\cdot\hat{\phi}(\zeta)| \; ; \; |\zeta-z|<4d\} \times \sup{}'\{|\hat{S}(\zeta)| \; ;$$

$$|\zeta-z|<4d\} / (\sup{}'\{|\hat{S}(\zeta)| \; ; |\zeta-z|<d\})^2 \leq$$

$$\leq \sup{}'\{|\hat{S}(\zeta)\cdot\hat{\phi}(\zeta)| \; ; |\zeta-z|<4d\} \cdot C_5\cdot(1+|x|)^{2N'+\bar{N}+2}\cdot\exp(M_{p_1}(y)) \; .$$

Dalje je

$$h_p(\hat{\phi}) = \sup{}'\{(1+|x|)^p\exp(-M^*_p(y))\cdot|\hat{\phi}(x+iy)| \; ; \; x+iy \in C\}$$

$$\leq \sup{}'\{|\hat{S}(\zeta)\cdot\hat{\phi}(\zeta)| \; ; \; |\zeta-z|<4d\} \cdot (1+|x|)^p\cdot\exp(-M^*_p(y)) \times$$

$$\times C_5\cdot(1+|x|)^{2N'+\bar{N}+2}\cdot\exp(M^*_{p_1}(y)) \; .$$

Neka je sada q priodan broj sa osobinama $q > r(p_1)$, $q > 2N'+\bar{N}+2$. Na osnovu prethodnog je

$$h_p(\hat{\phi}) \leq C_5\cdot h_q(\hat{S}\cdot\hat{\phi}) \cdot (1+|\xi+x|)^q\cdot\exp(M^*_q(\eta+y))\cdot(1+|x|)^{2N'+\bar{N}+2} \times$$

$$\times \exp(M^*_{p_1}(y) - M^*_p(y)) \leq C_6\cdot h_q(\hat{S}\cdot\hat{\phi})\cdot(1+|\xi|)^q\cdot(1+|x|)^{2N'+\bar{N}+2-q} \times$$

$$\times \exp(M^*_{p_1}(\eta) + 2M^*_{p_1}(y))\cdot\exp(-M^*_p(y))$$

Ako $|\xi|$ i $|\eta|$ majoriramo sa d iz relacije (19), dobijamo

(22) $\qquad h_p(\hat{\phi}) \leq C_7\cdot h_q(\hat{S}\cdot\hat{\phi})$ $\quad$ za neko $C_7>0$ koje ne zavisi

od $\hat{\phi}$. Medjutim (22) i znači da je preslikavanje $\hat{S}\cdot\hat{\phi} \to \hat{\phi}$ neprekidno. Δ

4.3 REŠIVOST KONVOLUCIONE JEDNAČINE U PROSTORU $\mathcal{H}'\{M_p\}$

Pod rešivosti konvolucione jednačine (1) u nekom prostoru podrazumevamo postojanje rešenja U za svako V iz tog prostora. Glavni rezultat ovog poglavlja glasi

Teorema 4.2. Neka je T konvolutor na prostoru $\mathcal{H}'\{M_p\}$ Konvoluciona jednačina (1) je rešiva u prostoru $\mathcal{H}'\{M_p\}$ ako i samo ako je rešiva u svakom prostoru $\mathcal{K}(M_p)$.

Ova teorema je posledica sledeće.

Teorema 4.3. Neka je $T \in \mathcal{O}_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$. Sledeći uslovi su ekvivalentni :

(a) Preslikavanje $T* : \mathcal{H}'\{M_p\} \to \mathcal{H}'\{M_p\}$ je surjektivno;

(b) T ima fundamentalno rešenje u $\mathcal{H}'\{M_p\}$;

(c) $\hat{T} := \mathcal{F}T$ je M_p - sporo opadajuća funkcija .

Dokaz teoreme 4.3. Jasno je da (a)$\Longrightarrow$(b) jer $\delta(x) \in \mathcal{H}'\{M_p\}$. Ako T ima fundamentalno rešenje E u $\mathcal{H}'\{M_p\}$,tada prema teoremi 2.3 postoji prirodan broj p_1 tako da je E u prostoru $\mathcal{K}(M_{p_1})$. Na osnovu teoreme 2.5 je $T \in \mathcal{O}_c'(\mathcal{K}'(M_{p_1}))$ a prema teoremi 4.1 je $\hat{T}$ M_{p_1} - sporo opadajuća, tj. važi (b)$\Longrightarrow$(c). Implikacija (c) $\Rightarrow$ (a) je zapravo sadržaj tvrdjenja 4.1. Medjutim, pošto je ono korišćeno u dokazu teoreme 4.1, važno je dati nezavistan dokaz implikacije (c) $\Rightarrow$ (a). U tu svrhu ćemo prvo dokazati dva tvrdjenja.

Tvrdjenje 4.2. Neka je $F(x+iy)$ cela analitička funkcija koja zadovoljava sledeće uslove :

(i) F je M_q - sporo opadajuća funkcija za neko $q \in \mathbb{N}$ tj. važi

(23) $$\sup\{|F(x+w)| \; ; \; |w| \le \rho(\log(1+|x|)) \; , \; w\in F\} \ge$$
$$\ge C\cdot(1+|x|)^{-N}$$

za neke konstante $C,N > 0$ i

(24) $$\rho(x) := A\cdot\frac{x}{M^{-1}(x)} \quad , \; x > 0 \; ;$$

(ii) Za neko $p\in N$ sa osobinom $p > r(\max\{[A],q\})$ važi

(25) $$|F(x+iy)| \le c(1+|x|)^n\cdot\exp(M_p^*(y))$$

za neke konstante $c,n > 0$.

Tada je $F(x+iy)$ ekstremno sporo opadajuća funkcija.

Dokaz. Posmatrajmo broj

$$A_1 := \sup\{\frac{M_p^*(x)}{M_q^*(x/A)} \; ; \; x \ge L_1\} + 1 \quad .$$

Na osnovu osobine p taj broj je konačan. Uzmimo $L \ge L_1$ tako veliko da važi $\rho(\log(1+|x|)) > 1$ za sve $|x| \ge L$. Uzmimo sada x takvo da je $|x|>L$ i definišimo

(26) $$\beta := \frac{\log\rho}{\log(M_p^{*-1}(A_1\cdot M_q^*(\rho/A))) - \log\rho}$$

gde je $\rho := \rho(\log(1+|x|)) > 1$. Definicija broja A_1 implicira da je $\beta>0$; stavimo najzad

(27) $$R := \rho^{\frac{\beta+1}{\beta}}$$

Kao u radu [10], primenićemo Adamarovu teoremu o tri kruga ([3] ,str.19) na funkciju $F(x+\lambda w)$, λ - kompleksna promenljiva i krugove poluprečnika $1,\rho,R$ (prema konstrukciji je $1<\rho<R$) za $\gamma := \log(R/\rho) / \log R = 1/(\beta+1)$. Tako dobijamo

$$(28) \qquad \sup\{|F(x+w)| \ ; \ |w| \le 1\} \ge$$

$$\ge (\sup\{|F(x+\rho w)| \ ; \ |w| \le 1\})^{1+\beta} \, / \, (\sup\{|F(x+Rw)| \ ; \ |w| \le 1\})^{\beta}$$

Na osnovu (25) je

$$|F(x+Rw)| = |F(x+R\cdot \mathit{Re}\,w + i\cdot R\cdot \mathit{Im}\,w)| \le$$

$$\le c\cdot(1+|x|)^n\cdot(1+R)^N\cdot\exp(M_p^*(R)) \le c'\cdot c\cdot(1+|x|)^n\cdot\exp(2\cdot M_p^*(R))$$

gde je stavljeno $c' := \sup\{(1+R)^n\cdot\exp(-M_p^*(R)) \ ; \ R \in \mathbb{R}\} < \infty$

Po konstrukciji je $M_p^*(R) = A_1\cdot M_q^*(\rho/A)$, što daje

$$(29) \qquad \sup\{|F(x+Rw)| \ ; \ |w| \le 1\} \le C_1\cdot(1+|x|)^{n+A_1}$$

za neko $C_1 > 0$. Na osnovu (23) i (28) sada sledi tvrdjenje za sve x sa osobinom $|x| \ge L$. Sa druge strane, za $|x| \le L$ je na osnovu principa maksimuma

$$\sup\{|F(x+w)| \ ; \ |w| \le 1\} \ge C_2 > 0 \ ,$$

što zajedno sa (29) daje tvrdjenje, jer dobijamo

$$\sup\{|F(x+w)| \ ; \ |w| \le 1\} \ge C_3\cdot(1+|x|)^{-(N+n+2A_1)} \qquad \Delta$$

Ovo tvrdjenje je uopštenje teoreme 3 u radu [10]. Ono u suštini pokazuje koji uslovi su dovoljni da cela analitička funkcija bude M_p - sporo opadajuća ako je M_q - sporo opadajuća, $p>q$. (Obrnuto tvrdjenje je uvek tačno, tj. M_p - sporo opadajuća funkcija je uvek M_q - sporo opadajuća za $p > q$.) Sledeće tvrdjenje pokazuje da iz prethodnog tvrdjenja sledi da ako je Furijeova transformacija konvolutora M_p - sporo opadajuća funkcija za neko $p>1$, tada je nužno i ekstremno sporo opadajuća funkcija.

Tvrdjenje 4.3. Ako je $T \in \mathcal{O}_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$ i ako je $\hat{T} := \mathcal{F}T$ M_p - sporo opadajuća funkcija za neko $p \in \mathbb{N}$, tada je $\hat{T}$ M_p - sporo opadajuća funkcija za sve $p \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Ako je T konvolutor na prostoru $H'\{M_p\}$, prema teoremi 3.2 važi relacija (15) treće glave za svako $p \in N$ pa i za dovoljno veliko da zadovolji nejednakost u (ii) tvrdjenja 4.2. Prema tom tvrdjenju je $\hat{T}$ ekstremno sporo opadajuća funkcija , pa je tim pre M_p - sporo opadajuća. Δ

Završetak dokaza teoreme 4.3. Ostala je da se dokaže implikacija (c) => (a) . Ako važi uslov (c), prema tvrdjenju 4.3 je $\hat{T}$ M_p - sporo opadajuća funkcija za svako $p=1,2,..$, pa je prema teoremi 4.1 4.1 preslikavanje $T* : U \to T*U$ surjektivno preslikavanje na svakom od prostora $K'(M_p)$. Medjutim prema teoremi 2.3 unija prostora $K'(M_p)$ po $p=1,2,..$ je baš $H'\{M_p\}$, tj. $T*$ je surjektivno preslikavanje prostora $H'\{M_p\}$ na sama sebe. Δ

GLAVA V

HIPOELIPTIČNOST KONVOLUCIONIH JEDNAČINA NA $\mathcal{E}'(M_p)$

Analiza diferencijalnih i drugih jednačina podrazumeva da treba dati odgovor na neka uobičajena pitanja. Jedno od najvažnijih problema koji se ispituje je glatkost rešenja. Analiziraćemo to na primeru konvolucione jednačine

$$T * U = V \tag{1}$$

gde je $T \in \mathcal{O}'_c(X')$ (skup konvolutora na X'), $U, V \in X'$ i X' jedan normalan prostor distribucija. Pretpostavićemo da je T surjektivan konvolutor (očito da bez te pretpostavke dalje ispitivanje u ovom smeru nema smisla). Sledeća definicija potiče od Z.Železnog ([37]).

Definicija 5.1 EX' je skup glatkih funkcija $U \in X'$ sa osobinom da za svako $T \in \mathcal{O}'_c(X')$ važi da je $T * U$ takodje glatka funkcija.

Lako je pokazati da je pod navedenim pretpostavkama $T * U \in EX'$ (videti tvrdjenje 5.2). Medjutim, obrnuto pitanje je daleko teže i ujedno važnije : pod kojim uslovima na T (tačnije na $\hat{T} := FT$) važi da je svako rešenje $U \in X'$ u EX' pod uslovom da je $V \in EX'$. Ako konvolutor T ima osobinu da za svako $V \in EX'$ sledi da je svako rešenje jednačine (1) u EX', tada se T i (1) nazivaju hipoeliptični . Primetimo da T ne može biti glatka funkcija. Problem hipoeliptičnosti je problem regularnosti rešenja,i, dalje posmatrano, odnosa klasičnih i uopštenih (distribucionih) rešenja date jednačine.

Prvi rezultati o hipoeliptičnosti jednačine (1) su bili dati u slučaju

$$(2) \qquad T(x) := P(D)\delta(x)$$

gde je $P(D)$ parcijalni diferencijalni operator sa konstantnim koeficijentima , tj. na parcijalnu diferencijalnu jednačisa konstantnim koeficijentima (ako je x n - dimenzionalna promenljiva).

Teorema 5.1. ([14]) Ako je $T \in E'$ oblika (2) , tada je on hipoeliptičan u D' ako i samo ako važi

$$(3) \qquad |Im\,\zeta| \to \infty \text{ kada } |\zeta| \to \infty \text{ na površi } \hat{T}(\zeta) = 0 .$$

U slučaju proizvoljne konvolucione jednačine u prostoru D' , važi

Teorema 5.2. ([5]) $T \in E'$ i jednačina (1) su hipoeliptični u D' ako i samo ako postoje konstante $a,A > 0$ tako da važe uslovi

$$(4) \qquad |\hat{T}(\xi)| \geq |\xi|^a \text{ za } \xi \in R^n \text{ i } |\xi| \geq A \text{ i}$$

$$(5) \qquad |Im\zeta|/\log|\zeta| \to \infty \text{ kada } |\zeta| \to \infty \text{ na površi } \hat{T}(\zeta) = 0.$$

Za prostor temperiranih distribucija važi

Teorema 5.3. ([37]) Ako je $T \in O_c'(S')$ (= prostor brzo opadajućih distribucija) , tada je uslov (4) za neke konstante $a,A > 0$ potreban i dovoljan za hipoeliptičnost T i jednačine (1) u prostoru S' .

U radovima [38] i [29] data je karakterizacija hipoeliptičnih konvolutora na prostoru K_1' odnosno K_p' , za $p > 1$.

Teorema 5.4. a) Neka je $T \in O_c'(K_1')$. Uslov

(6) Za svako $B > 0$, postoje konstante $a, A > 0$ tako da važi $|\hat{T}(\zeta)| \geq |\zeta|^a$ za $\zeta := \xi + i\eta \in C$ i $|\xi| \geq A$, $|\eta| \leq B$.

je potreban i dovoljan za hipoeliptičnost T i jednačine (1) u prostoru K_1'.

b) Neka je $T \in O_c'(K_p')$, $p > 1$. Uslovi (i) i (ii) su potrebni i dovoljni za hipoeliptičnost T i jednačine (1) :

(i) $|\hat{T}(\xi)| \geq |\xi|^{-B}$ za $\xi \in R$ i $|\xi| \geq M$;

(ii) $|Im\zeta|^q / \log|\zeta| \to \infty$ kada $|\zeta| \to \infty$ na površi $\hat{T}(\zeta) = 0$,

ovde je $q := p/(p-1)$.

U ovoj glavi ćemo uopštiti poslednji rezultat za prostor $H'\{M_p\}$, odnosno daćemo potreban i dovoljan uslov za hipoeliptičnost konvolutora T i jednačine u prostoru $H'\{M_p\}$. Formulisaćemo taj rezultat na ovom mestu :

Teorema 5.5. Neka je $T \in O_c'(H'\{M_p\})$. Sledeći uslovi (H_1), (H_2) i (H_3) su ekvivalentni :

(H_1) T je hipoeliptičan u $H'\{M_p\}$;

(H_2) Furijeova transformacija $\hat{T}$ konvolutora T zadovoljava uslove (a) i (b) :

(a) Postoje konstante $B, M > 0$ tako da važi :

$|\hat{T}(\xi)| \geq |\xi|^{-B}$ za $|\xi| \geq M$, $\xi \in R$;

(b) $\lim (M_p^*(\eta)/\log|\zeta|) = \infty$ kada $|\zeta| \to \infty$ na površi

$\hat{T}(\zeta) = 0$, $\zeta = \xi + i\eta \in C$, $p \in N$;

(H_3) Za svako $p \in N$ i $d > 0$ postoji konstanta $\bar{B} > 0$, (koja zavisi samo od p), tako da za svako $m \in N$

postoji konstanta $C_m > 0$ i važi :

$$|1/\hat{T}(\zeta)| \leq |\zeta|^{\bar{B}} \cdot \exp(d \cdot M_p^*(\eta)) \quad \text{za} \quad M_p^*(\eta) \leq m \cdot \log|\zeta|$$

$|\zeta| \geq C_m$, $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$.

Radi preglednosti daćemo kratak sadržaj ove glave. U prvom poglavlju ćemo okarakterisati prostor $\mathcal{EH}'\{M_p\}$ kao prostor glatkih funkcija $U(x)$ koje zajedno sa svojim izvodima $U^{(j)}(x)$ ne rastu brže nego funkcija $\exp(M_{p_o}(x))$ kada $|x| \to \infty$ za neko p_o koje ne zavisi od j, $j=0,1,2,\ldots$.

U drugom poglavlju pokazujemo da su uslovi (H_2a) i (H_2b) potrebni za hipoeliptičnost konvolutora T i (1) u $\mathcal{H}'\{M_p\}$. Prvi deo se pokazuje na isti način kao odgovarajuće tvrdjenje u [29] , gde je dato za temperirane distribucije. Drugi deo implikacije $(H_1) \Rightarrow (H_2)$, tj. $(H_1) \Rightarrow (H_2b)$ se dobija iz jednog opštijeg tvrdjenja. Naime, umesto jednačine (1) posmatra se homogena jednačina

$$T * U = 0$$

i pokazuje da ako su sva neprekidna rešenja $U(x)$ ove jednačine sa osobinom $U(x) = O(\exp(M_p(x)))$ kada $|x| \to \infty$, za neko p, u stvari neprekidno diferencijabilne funkcije, tada uslov (H_2b) mora biti zadovoljen. Medjutim, iz hipoeliptičnosti sledi da sva rešenja homogene jednačine moraju zadovoljavati uslov $U^{(j)}(x) = O(\exp(M_p(x)))$ kada $|x| \to \infty$ za neko $p \in \mathbb{N}$ i ,naravno, biti glatke funkcije.

U trećem poglavlju ćemo pokazati kako iz uslova (H_2) sle- (H_3) . Jedna lema Hermandera, data u [16] , koja se odnosi na harmonijske funkcije, se modifikuje tako da se dobija analogno tvrdjenje. U tom cilju smo niz $\{M_p(x)\}_{p \in \mathbb{N}}$ zamenili sa ekvivalentnim koji se "bolje" ponaša u okolini nule. Primena te modifikovane leme Hermandera i daje uslov (H_3) pod pretpostavkom da važi uslov (H_2) .

U poglavlju 5.4 definišemo tzv. "(p,q)-parametriks" za T, dakle distribuciju $P \in \mathcal{H}'\{M_p\}$ za koju važi da je konačan distribucioni izvod neprekidne funkcije koja se ponaša kao

$O(\exp(-N_p(x)))$ kada $|x|\to\infty$ i važi da je distribucija $W(x) := \delta(x) - T*P$ u stvari funkcija klase C^q nad R i zadovoljava uslov $W^{(j)}(x) = O(\exp(-N_p(x)))$ kada $|x|\to\infty$ za sve $j=0,1,..,q$.(Funkcije $N_p(x)$ su glatke funkcije definine u drugoj glavi.) Uslov (H_3) je ekvivalentan uslovu (H_3') , koji se dobija kada se u uslovu (H_3) $M_p^*(x)$ zameni sa $N_p^*(x)$ koja je glatka funkcija i ponaša se u beskonačnosti kao odgovarajuća funkcija $M_p^*(x)$. Posle ove pripreme pokazuje se da iz uslova (H_3') sledi postojanje parametriksa za konvolutor T i na osnovu toga se u poglavlju 5.5 pokazuje hipoeliptičnost T i jednačine (1) . Primetimo još da je poglavlje 5.4 jedini deo ove teze gde više - dimenzionalan slučaj nije prosta generalizacija jednodimenzionalnog slučaja. Ustvari, leme 5.5 i 5.6 bi (npr.) u dvodimenzionalnom slučaju imale neuporedivo komplikovaniji dokaz.

5.1. PROSTOR $EH'\{M_p\}$

Prema definiciji 5.1 prostor $EH'\{M_p\}$ je vektorski potprostor prostora $H'\{M_p\}$ čiji su elementi glatke funkcije. Sada ćemo taj prostor bliže okarakterisati.

Teorema 5.6. Glatka funkcija U pripada prostoru $EH'\{M_p\}$ ako i samo ako postoji prirodan broj p_o sa osobinom

$$(7) \qquad |U^{(j)}(x)| \le C_j \cdot \exp(M_{p_o}(x)) \quad \text{za } j=0,1,2,\ldots .$$

(Dakle broj p_o ne zavisi od j.)

Ova teorema sledi iz sledećeg tvrdjenja, koje je od interesa za sebe.

Tvrdjenje 5.1. Dualan prostor $O_c(\mathcal{H}'\{M_p\})$ za prostor konvolutora $O_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$ je prostor glatkih funkcija koje zadovoljavaju relaciju (7) za neko $p_0 \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Prema korolaru 4, str. 139 u [25], postoji algebarski izomorfizam tenzorskog proizvoda $\mathcal{H}\{M_p\} \times \mathcal{H}'\{M_p\}$ i duala $L_s'(\mathcal{H}\{M_p\})$ za prostor $L_s(\mathcal{H}\{M_p\})$ koji je prostor neprekidnih kidnih linearnih preslikavanja prostora $\mathcal{H}\{M_p\}$ u sama sebe snabdeven običnom konvergencijom. Prema tome svakom elementu $\sum_{j=1}^{N} \phi_j \otimes S_j \in \mathcal{H}\{M_p\} \otimes \mathcal{H}'\{M_p\}$ odgovara tačno jedan elemenat $Z \in L_s'(\mathcal{H}'\{M_p\})$ tako da važi

(8) $Z(u) = \sum_{j=1}^{N} \langle S_j, u(\phi_j)\rangle$ za sve $u \in L_s(\mathcal{H}\{M_p\})$ i

neki prirodan broj N. Medjutim, za $u := T \in O_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$ važi $u(\phi_j) = T*\phi_j$, tj. (8) daje

$$Z(T) = \sum_{j=1}^{N} \langle S_j, T*\phi_j\rangle$$. Prema definiciji konvolutora,

dobijamo

$$Z(T) = \sum_{j=1}^{N} \langle \check{T}, \check{S}_j*\phi_j\rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle T, (\check{S}_j*\phi_j)^{\vee}\rangle$$

što znači da je restrikcija preslikavanja Z na prostor $O_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$ konačna suma $\sum_{j=1}^{N} (\check{S}_j*\phi_j)^{\vee}$. Tvrdjenje 2.5 pokazuje da je svaka od funkcija $(\check{S}_j*\phi_j)^{\vee}$ glatka i da zadovoljava uslov (7) za neko $p_{0,j}$. Ako uzmemo $p_0 := \max\{p_{0,j}\ ;\ j=1,2,..,N\}$, vidimo da je svaki elemenat duala prostora $O_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$ glatka funkcija koja zadovoljava (7) za neko $p_0 \in \mathbb{N}$.

Obrnuto tvrdjenje, tj. da je glatka funkcija $U(x)$ koja zadovoljava (7) za neko $p_0 \in \mathbb{N}$ elemenat duala prostora

$O_c'(H'\{M_p\})$ sledi iz činjenice da je preslikavanje

$U_o : T \to (T(x)*U(-x))(0)$ prostora $O_c'(H'\{M_p\})$ u skup kompleksnih brojeva neprekidno. To preslikavanje je, u stvari kompozicija dva neprekidna preslikavanja : $U* : U(x) \to \to T(x)*U(-x)$ prostora $O_c'(H'\{M_p\})$ u prostor $H'\{M_p\} \cap C^\infty$ i preslikavanja $T(x)*U(-x) \to (T(x)*U(-x))(0)$ prostora $H'\{M_p\} \cap C^\infty$ u skup kompleksnih brojeva . Δ

Pokažimo sada da je $T * EH'\{M_p\} \subset EH'\{M_p\}$, ako je $T \varepsilon O_c'(H'\{M_p\})$.

Tvrdjenje 5.2. Neka je $T \varepsilon O_c'(H'\{M_p\})$ i $U \varepsilon EH'\{M_p\}$. Tada glatka funkcija $V := T*U$ takodje pripada prostoru $EH'\{M_p\}$.

Dokaz. Prema teoremi 5.1 postoji $p_o \varepsilon N$ tako da važi (7). Izaberimo $p_1 := r(r(p_o))$. Prema teoremi 2.4 za dato p_1 postoje $m \varepsilon N_o$ i neprekidna funkcija $F(x)$ nad R sa osobinom $|F(x)| \leq C \cdot \exp(-M_{p_1}(x))$, $x \varepsilon R$, za neko $C>0$, tako da važi $T(x) = D^m F(x)$. Dakle

$$|(T*U)^{(j)}(x)| = |\int_R F(y) \cdot U^{(m+j)}(x-y) \cdot dy| \leq$$

$$\leq \int_R C \cdot \exp(-M_{p_1}(y)) \cdot C_{m+j} \cdot \exp(M_{p_o}(x-y)) \cdot dy \leq$$

$$\leq C_j^{(1)} \cdot \int_R \exp(-M_{p_1}(x-y) + M_{p_o}(y)) \cdot dy \quad .$$

Na osnovu nejednakosti $M_{p_o}(y) \leq M_{r(p_o)}(y/2) + K \leq$

$\leq M_{r(p_o)}(x) + M_{r(p_o)}(x-y) + K$, $x,y \varepsilon R$ i neko $K=K(p_o)>0$ dobijamo

$$|(T*U)^{(j)}(x)| \leq C_j^{(2)} \cdot \exp(M_{r(p_o)}(x)) \times$$

$$\times \int_{R} \exp(M_{r(p_o)}(x-y) - M_{p_1}(x-y))\cdot dy \leq C_j^{(3)}\cdot \exp(M_{r(p_o)}(x)). \quad \Delta$$

U uvodu ove glave je data definicija hipoeliptičnosti u prostoru $EH'\{M_p\}$. Na osnovu teoreme 5.1 i tvrdjenja 5.2 možemo dati ekvivalentnu definiciju hipoeliptičnosti koja je pogodnija za dalji rad.

Definicija 5.2. Distribucija $T \in O_c'(H'\{M_p\})$ i jednačina (1) su hipoeliptični u $H'\{M_p\}$ ako i samo ako je svako rešenje jednačine (1) glatka funkcija koja zadovoljava (7) pod uslovom da je V glatka funkcija za koju važi (7) (naravno, ne obavezno za isto $p_o \in N$) .

U sledećim poglavljima ove glave dokazaćemo teoremu 5.5 u više etapa.

5.2 (H_2) JE POTREBAN USLOV ZA HIPOELIPTIČNOST

U uvodu smo već rekli da se nužnost uslova (H_2a) za hipoeliptičnost (1) i T pokazuje na isti način kao u [29] gde se dokazuje analogno tvrdjenje za prostor temperiranih distribucija. Ponovićemo taj dokaz.

Neka je $\{\xi_j\}_{j\in N}$ niz realnih brojeva sa osobinom

(9) $\quad |\xi_j| \geq 2\cdot|\xi_{j-1}| \geq 2^j \quad , \; j=1,2,\ldots$. Ako za niz kompleksnih brojeva $\{a_j\}_{j\in N}$ važi asimptotsko ponašanje

(10) $\quad a_j = O(|\xi_j|^{\mu})$ kada $j \to \infty$ za neko $\mu \in N$

tada red

(11) $$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot \delta_{\xi_j}$$

prema poznatoj teoremi konvergira u S'. Distribucija (11) za različite a_j poslužiće za kontraprimer koji će dati nužnost uslova (H_2a). Sledeća lema se odnosi na slučaj kada niz $\{a_j\}_{j\in N}$ veoma brzo teži nuli.

Lema 5.1. Neka je S temperirana distribucija čija je Furijeova transformacija $\hat{S}$ baš distribucija (11). Ako za svako $\nu \in N$ važi

(12) $$a_j = O(|\xi_j|^{-\nu}) \quad \text{kada} \quad j \to \infty$$

tada je S ograničena glatka funkcija nad R čiji su i svi izvodi ograničeni. Obrnuto, ako (12) ne važi, S ne može biti glatka funkcija.

Dokaz. Prvi deo leme sledi iz jednakosti $S(x) = = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sum_{j=1}^{\infty} a_j\cdot\exp(ix\xi_j)$ i pretostavke (12). Obrnuto, ako je $S(x)$ glatka funkcija, tada na osnovu Riman - Lebegove leme i Parsevalove jednakosti važi za svako $\nu \geq 0$ i $\phi \varepsilon D$:

(13) $$\langle\exp(-ixh)\cdot S^{(2\nu)}(x),\phi(-x)\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_j|\xi_j|^{2\nu}\cdot\hat{\phi}(\xi_j-h) \to 0$$

kada $|h|\to\infty$, $h\varepsilon R$. Ako uslov (10) nije zadovoljen, postoji $\rho>0$ i $\nu_o \varepsilon N$ tako da važi

(14) $$|\xi_j|^{2\nu_o}\cdot|a_j| \geq \rho$$

za neki podniz niza $\{a_j\}_{j\varepsilon N}$; da ne komplikujemo suviše oznake, uzećemo da (14) važi za ceo niz $\{a_j\}_{j\varepsilon N}$.

Pošto je $\hat{\phi} \varepsilon S$, to je

$$\hat{\phi}(\xi) = O(|\xi|^{-\mu-2\nu_o-1}) \quad \text{kada} \quad |\xi| \to \infty \quad , \quad \xi\varepsilon R$$

a ova relacija i relacije (9) i (10) daju

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} a_j \cdot |\xi_j|^{2\nu_0} \cdot \hat{\phi}(\xi_j - h_k) = O(2^{-k}) \quad \text{kada} \quad k\to\infty ,$$

gde je $h_k := \xi_k$, $k=1,2,\ldots$. Sa druge strane, možemo uzeti $\phi \in \mathcal{D}$ tako da je $|\hat{\phi}(0)| \geq 1$, a ovo zajedno sa (14) je u kontradikciji sa (13). Δ

Posledica ove leme je

Tvrdjenje 5.3. Ako je $T \in \mathcal{O}'_c(\mathcal{H}'\{M_p\})$ hipoeliptičan u $\mathcal{H}'\{M_p\}$, za $\hat{T} := \mathcal{F}T$ važi uslov (H_2a) .

Dokaz. Ako uslov (H_2a) ne važi, postoji niz $\{\xi_j\}_{j\in N}$ sa osobinom (9) tako da je

$$(15) \qquad |\hat{T}(\xi_j)| < |\xi_j|^{-j} .$$

Distribucija $\hat{U} := \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{\xi_j}$ je temperirana, ali prema lemi 5.1 nije glatka funkcija. Sa druge strane

$$\mathcal{F}(T * U) = \hat{T} \cdot \hat{U} = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{T}(\xi_j)\cdot\delta_{\xi_j} , \qquad U := \mathcal{F}^{-1}\hat{U}$$

a na osnovu (15) i leme 5.1 $T*U$ je u $\mathcal{E}\mathcal{H}'\{M_p\}$, tj. T nije hipoeliptičan u $\mathcal{H}'\{M_p\}$. Δ

Da bi dokazali implikaciju $(H_1) \Rightarrow (H_2)$, ostaje da se dokaže $(H_1) \Rightarrow (H_2b)$. Pokažimo prvo sledeće tvrdjenje, koje je od sopstvenog interesa.; videćemo kasnije da ono povlači poslednju implikaciju.

Tvrdjenje 5.4. Ako je svako neprekidno rešenje homogene jednačine

$$(16) \qquad T * U = 0$$

koje zadovoljava uslov

(17) $\quad U(x) = O(\exp(M_p(x)))$ kada $|x| \to \infty$

za neko $p \varepsilon N$ u stvari neprekidno diferencijabilna funkcija u nekoj okolini nule, tada za T važi uslov $(H_2 b)$.

Dokaz. Neka je $B := \{x \varepsilon R\ ,\ |x| \leq 1\}$ spomenuta okolina nule (to očevidno nije restrikcija). Obeležimo sa T_p prostor neprekidnih rešenja jednačine (16) koje zadovoljavaju uslov (17) i neka je $T_p^* := T_p \cap C^1(B)$. Prostori T_p i T_p^* postaju Banahovi ako se normiraju sa normama $\|\cdot\|_p$ i $\|\cdot\|_p^*$

$$\| U \|_p := \sup\{|U(x)|\exp(-M_p(x))\ ;\ x\varepsilon R\}\text{ ,odnosno}$$

$$\| U \|_p^* := \sup\{|U'(x)|\ ;\ x\varepsilon B\} + \| U \|_p\ .$$

Pošto je identičko preslikavanje $I : T_p \to T_p^*$ po definiciji prostora T_p i T_p^* surjektivno, iz teoreme o zatvorenom grafiku sledi da je I neprekidno. To znači da postoji konstanta C_p tako da je

(17') $\quad \| U \|_p^* \leq C_p \cdot \| U \|_p$ za sve $U \varepsilon T_p$; možemo uzeti da

je $C_p > 1$. Ako je $\hat{T}(\zeta) = 0$, $\zeta = \xi + i\eta \ \varepsilon\ C$, tada je funkcija $U_o(x) := \exp(ix\zeta)\ \varepsilon\ T_p^*$. Izračunajmo normu funkcije $U_o(x)$.

$$\| U_o \|_p = \sup\ \{\exp(-\eta x - M_p(x))\ ;\ x\varepsilon R\} =$$

$$= \sup\ \{\exp(|\eta|x - M_p(x))\ ;\ x \geq 0\} = \exp(M_p^*(\eta))\ \text{(videti definiciju 1.2).}$$

Na osnovu relacije (17') je

$$(C_p - 1)\cdot\exp(M_p^*(\eta)) \geq |\zeta| \quad \text{za sve } \zeta\ \varepsilon\ C \text{ za koje važi}$$

$\hat{T}(\eta) = 0$. Poslednju nejednakost možemo napisati u obliku

(18) $\quad M_p^*(\eta)\ /\ \log|\zeta| \geq 1$ za dovoljno veliko $|\zeta|$ i

$\hat{T}(\zeta) = 0$. Izaberimo prirodan broj $p' > p$, i uzmimo $p'' \in N$ tako da važi $M_p(p' \cdot x) \leq M_{p'}(p' \cdot x) \leq M_{p''}(x)$ za dovoljno veliko $|x|$ (uslov (A) nam garantuje egzistenciju broja p'' za dato p' sa tom osobinom). Na osnovu lema 1.2 i 1.3 sledi $M_p^*(x/p') \geq M_{p''}^*(x)$, tj.

$$M_p^*(x) \geq M_{p''}^*(p' \cdot x) \quad \text{za dovoljno veliko } |x|. \tag{19}$$

Relacije (18) (za $p := p''$) i (19) nam daju

$$\frac{M_p^*(\eta)}{\log|\zeta|} \geq \frac{M_p^*(\eta)}{M_{p''}^*(\eta)} \geq \frac{M_{p''}^*(p' \cdot \eta)}{M_{p''}(\eta)} \geq p' \tag{20}$$

(jer za $M_{p''}^*(\eta)$ važi relacija (4) prve glave) za dovoljno veliko $|\zeta|$ i $\hat{T}(\eta) = 0$. Medjutim, iz nejednakosti (20) neposredno sledi

$$\lim_{|\zeta| \to \infty} \frac{M_p^*(\eta)}{\log|\zeta|} = \infty \quad \text{kada } |\zeta| \to \infty \text{ na površi } \hat{T}(\zeta) = 0. \ \Delta \tag{21}$$

Pokažimo sada da ovo tvrdjenje povlači implikaciju $(H_1) \Rightarrow (H_2 b)$. Neka je $T \in \mathcal{O}_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$ hipoeliptičan u $\mathcal{H}'\{M_p\}$. Tada za $V := 0$ sledi da je svako rešenje U iz prostora $\mathcal{E}\mathcal{H}'\{M_p\}$, tj. važi relacija (7) za neko p_0 . To medjutim znači da je uslov tvrdjenja 5.4 ispunjen, te sledi da važi uslov $(H_2 b)$.

5.3 IMPLIKACIJA $(H_2) \Rightarrow (H_3)$

Glavnu ulogu u dokazu ove implikacije igra lema 5.3, koja je modifikovana lema 1 data u radu [15] . Da bi lemu 5.3 mogli dokazati, potrebno je niz $\{M_p(x)\}_{p \in N}$ zameniti sa ekvivalentnim, ali ovoga puta sa nizom funkcija koji se "bolje" ponaša u okolini nule. To će nam omogućiti da dokažemo nejednakost koja se pojavljuje u uslovu (H_3) za celu analitičku funkciju $\hat{T}(\zeta) := \mathcal{F}T$.

Primedba. Od interesa bi bio direktan dokaz implikacije $(H_2) \Rightarrow (H_1)$, dakle bez korišćenja uslova (H_3) .

Obeležimo sa $\{\underline{m}_p(x)\}_{p\in\mathbb{N}}$ niz neprekidnih funkcija nad $\mathbb{R}_o^+$ definisanih na sledeći način :

$$\underline{m}_p(x) := \begin{cases} m_p(x) & , k_p \le x \\ \dfrac{m_p(k_p)\cdot x}{k_p} & , 0 \le x \le k_p \end{cases}$$

gde je $\{m_p(x)\}_{p\in\mathbb{N}}$ niz funkcija definisan u poglavlju 2.1. a $\{k_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ proizvoljan, ali fiksiran niz pozitivnih brojeva koji monotono konvergira ka nuli. Obeležimo sa $\{\underline{M}_p(x)\}_{p\in\mathbb{N}}$ odgovarajući niz konveksnih funkcija (videti relaciju (3) druge glave). Jasno je da se funkcije $M_p(x)$ i $\underline{M}_p(x)$ jednako ponašaju u beskonačnosti, a ako sa $\underline{M}_p^*(x)$ obeležimo dualnu funkciju po Jungu za $\underline{M}_p(x)$ $(p\in\mathbb{N})$, i funkcije $M_p^*(x)$ i $\underline{M}_p^*(x)$ se jednako ponašaju u beskonačnosti. (Ova dva tvrdjenja se neposredno dobijaju iz reprezentacije dualne funkcije po Jungu pomoću integrala inverzne funkcije za $m_p(x)$, odnosno za $\underline{m}_p(x)$ - videti glavu 1.) . Štaviše, uslov (A) važi za niz $\{\underline{M}_p(x)\}_{p\in\mathbb{N}}$ ako važi za polazni niz $\{M_p(x)\}_{p\in\mathbb{N}}$. Glavni razlog uvodjenja niza $\{\underline{M}_p(x)\}_{p\in\mathbb{N}}$ je sledeća lema, čiji očevidan dokaz izostavljamo.

Lema 5.2. $\lim\limits_{y\to 0^+}(\underline{M}_p^*(xy) \,/\, \underline{M}_p^*(y)) = x^2/2$ za sve $x\in\mathbb{R}$.

Sada možemo preći na najavljenu lemu koja je analogna lemi Hermandera iz [15].

Lema 5.3. Za date konstante $A, \bar{B}, b > 0$ i dat prirodan broj p postoji $N > 0$ tako da za funkciju $u = u(x,y)$ koja je harmonijska u krugu sa centrom u nuli poluprečnika ρ i zadovoljava nejednakosti

(21) $\quad u(x,0) \leq 0 \quad$ za $\quad x^2 + y^2 \leq \rho^2 \quad$ i

(22) $\quad u(x,y) \geq -a\, \underline{M}_p^*(y) - \bar{B}\cdot M_p^*(R) \quad$ za $\quad x^2 + y^2 \leq \rho^2$

važi nejednakost

(23) $\quad u(x,y) \leq a\cdot\underline{M}_p^*(y) + (\bar{B} + b)\cdot\underline{M}_p^*(R) \quad$ za $\quad x^2 + y^2 < R^2$

pod uslovom da je $0<a<A$ i $0 < R < \rho/N$.

Dokaz. Ako lema nije tačna, rezonujući na isti način kao u [15] postoje nizovi $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{\rho_n\}_{n\in N}$ i $\{R_n\}_{n\in N}$ tako da je $0 <a_n< A$, $\rho_n > n\cdot R_n$ i niz harmonijskih funkcija $\{u_n(x,y)\}_{n\in N}$ sa osobinom

$$u_n(x,0) \leq 0 \ , \quad u_n(x,y) \geq -a_n\cdot\underline{M}_p^*(y) - \bar{B}\cdot\underline{M}_p^*(R_n)$$

za $x^2 + y^2 < R_n^2$ i $u_n(x_n,y_n) \geq a\cdot\underline{M}_p^*(y) + (\bar{B} + b)\cdot\underline{M}_p^*(R_n)$

za neko $(x_n,y_n) \in R^2$, $x_n^2 + y_n^2 \leq R_n^2$.

Ako definišemo $v_n(x,y)$, x_n' i y_n' na sledeći način

$$v_n(x,y) := \frac{u_n(R_n x, R_n y)}{\underline{M}_p^*(R_n)} \ , \quad x_n' := x_n/R_n \ , \ y_n' := y_n/R_n$$

dobijamo $v_n(x,0) \leq 0$, $v_n(x,y) \geq -a_n\cdot\underline{M}_p^*(y\cdot R_n)/\underline{M}_p^*(R_n) - \bar{B}$ za $x_n^2 + y_n^2 < n^2$ i $v_n(x,y) \geq a_n\cdot\underline{M}_p^*(y_n'\cdot R_n)/\underline{M}_p^*(R_n) + (\bar{B} + b)$ za $x_n'^2 + y_n'^2 < 1$.

Korišćenjem prethodne leme i metode Hermandera iz spomenutog rada pokazujemo da postoji harmonijska funkcija $v(x,y)$ i realni brojevi x_o, y_o i a_o za koje važi

$$(24)\qquad \begin{array}{l} v(x,0) \le 0\ ,\ v(x,y) \ge -a_o\cdot y^2/2 - \bar{B}\ , \\ v(x_o,y_o) \ge a_o\cdot y_o^2/2 + (\bar{B}+b) \end{array}$$

Harnakova nejednakost (*npr.* [3],str.46) povlači da je $v(x,y) = cy + d$ *za neke realne brojeve* c,d ; *prva nejednakost u (24) pokazuje da mora biti* $d \le 0$. Ako u drugu nejednakost u (24) *stavimo* $y:=y_o$, *dobijamo* $c\cdot y_o + d \ge -a_o\cdot y_o^2/2 - \bar{B}$, *dok treća nejednakost* u (24) daje $2d \ge b > 0$, što je *kontradikcija.* Δ

Sada možemo dokazati implikaciju $(H_2) \Rightarrow (H_3)$ teoreme 5.5. Neka su $p,m \in N$, $k > 0$ dati. Izaberimo najveće $p_1 \in N$ sa osobinom $r(p_1) + N \le p$; za svako p , sem možda za konačno mnogo, takvo p_1 postoji. Neka je $\zeta=\xi+i\eta$ kompleksan broj takav da je $0 < \underline{M}^*_{p_1}(\eta) < m\cdot\log|\zeta|$ i neka je $L > 0$ konstanta koju ćemo kasnije odrediti. Funkcija

$F_\zeta(z) := \hat{T}(\xi+z\cdot\frac{\eta}{|\eta|})$ je analitička funkcija kompleksne promenljive z u oblasti $\underline{M}^*_p(|z|) \le L\cdot\log|\xi|$. Ako za funkciju $\hat{T}(\zeta)$ važi uslov (H_2a) , tj.

(H_2a) Postoje konstante $B,M > 0$ tako da važi

$$|T(\xi)| \ge |\xi|^{-B} \quad \text{za} \quad |\xi| \ge M\ ,\ \xi\in R$$

tada za funkciju $F_\zeta(z)$ važi

$$(25)\qquad |F_\zeta(x)| \ge |\xi+x\tfrac{\eta}{|\eta|}|^{-B} \ge (2\cdot|\xi|)^{-B} \qquad \text{za } \underline{M}^*_p(x)\le L\cdot\log|\xi|$$

Vratimo se sada na momenat na teoremu 3.2. U dokazu relacije (15) treće glave , koja govori o ponašanju Furijeove transformacije konvolutora T došli smo do relacije (20) treće glave , koju možemo formulisati kao tvrdjenje :

Tvrđenje 5.5. Za dato $p\in N$ i $d>0$ postoji $\bar{N}>0$ tako da važi

(26) $$|\hat{T}(\zeta)| \leq |\xi|^{\bar{N}}\cdot\exp(d\cdot\underline{M}_p^*(\eta)) \quad \text{za dovoljno veliko } |\zeta|$$

(videti relaciju (20) treće glave) .

Ako analiziramo dokaz spomenute teoreme 3.2 , vidimo da se konstanta $\bar{N}$ u relaciji (26) može izabrati nezavisno od d .

Posledica relacije (26) je nejednakost

(27) $$|F_\zeta(z)| \leq (2\cdot|\xi|)^{\bar{N}}\cdot\exp(d\cdot\underline{M}_p^*(\eta))$$

za dovoljno veliko $|\zeta|$ i $\underline{M}_p^*(|z|) < L\cdot\log|\xi|$. Posmatrajmo funkciju

$$u_\zeta(z) := -\log((2\cdot|\xi|)^B\cdot|F_\zeta(z)|) \quad .$$

Ako za $\hat{T}(\zeta)$ važi uslov (H_2b) , tj.

(H_2b) $$\lim\,(M_p^*(\eta)/\log|\zeta|) = \infty \quad \text{kada } |\zeta|\to\infty \text{ na površi}$$

$$\hat{T}(\zeta)=0\ , \quad \text{za } p=1,2,\ldots\ .$$

tada je funkcija $u_\zeta(z)$ harmonijska za $\underline{M}_p^*(|z|) \leq L\cdot\log|\xi|$ i dovoljno veliko $|\zeta|$. Prema (25) i (27) je $u_\zeta(x) \leq 0$ za $\underline{M}_p^*(x) < L\cdot\log|\xi|$ i $u_\zeta(z) \geq -d\cdot\underline{M}_p^*(y) - (B + \bar{N})\cdot\log|\sqrt{2}\xi| \geq$ $\geq -d\cdot\underline{M}_p^*(y) - (B + \bar{N} + 1)\cdot\log|\xi|$ za $\underline{M}_p^*(|z|) < L\cdot\log|\xi|$ i dovoljno veliko $|\zeta|$. To znači da možemo primeniti lemu 5.3 za $A := 1+d$, $\bar{B} := (B+\bar{N}+1)/(m+1)$ i $b := 1/(m+1)$. Lema 5.3 daje egzistenciju broja $N>0$ sa osobinom da za $|z| \leq$ $\leq M_p^{*-1}(L\cdot\log|\xi|)/N$ važi nejednakost

(28) $$u_\zeta(z) \leq d\cdot\underline{M}_p^*(y) + (B+\bar{N}+2)\cdot\log|\xi|$$

Uvedimo sada pozitivne kostante L i $\dot{P}$ na sledeći način:

$L := \underline{M}^{*}_{p_1}(N)\cdot(m+1)$ i $\underline{M}^{*}_{p}(R) := (m+1)\cdot\log|\xi|$

Pokažimo prvo da je

(29) $\qquad R \leq M^{*-1}_{p}(L\cdot\log|\xi|)/N$.

Za veliko y je $\underline{M}_{p}(Ny) \geq \underline{M}_{p_1}(y)$, pa je $\underline{M}^{*}_{p}(Ny) \leq \underline{M}^{*}_{p_1}(y)$

Ako stavimo $y := \underline{M}^{*-1}_{p_1}((m+1)\cdot\log|\xi|)$ dobijamo

$$\underline{M}_{p}(N\cdot\underline{M}^{*-1}_{p_1}((m+1)\cdot\log|\xi|)) \leq \underline{M}_{p_1}(\underline{M}^{*-1}_{p_1}((m+1)\cdot\log|\xi|) \quad \text{ili}$$

$$N\cdot\underline{M}^{*-1}_{p_1}((m+1)\cdot\log|\xi|) \leq \underline{M}^{*-1}_{p}((m+1)\cdot\log|\xi|) \ .$$

To znači da je $\quad N\cdot R \leq \underline{M}^{*-1}_{p}((m+1)\cdot\log|\xi|) =$

$= \underline{M}^{*-1}_{p}(L\cdot\log|\xi|/\underline{M}^{*}_{p_1}(N)) \leq \underline{M}^{*-1}_{p}(L\cdot\log|\xi|)$ ako je

$M_{p_1}(N) \geq 1$, što sa eventualnim povećanjem N uvek možemo postići. Time smo dokazali relaciju (29) .

Za veliko $|\zeta|$ je

$$\underline{M}^{*}_{p}(\eta) \leq \underline{M}^{*}_{p_1}(\eta) \leq m\cdot\log|\zeta| \leq (m+1)\cdot\log|\xi| = \underline{M}^{*}_{p_1}(R)$$

tj. zbog monotonosti funkcije $\underline{M}^{*}_{p}(\eta)$ je

$|\eta| \leq R \leq \underline{M}^{*-1}_{p}(L\cdot\log|\xi|)/N$. To znači da u (28) možemo staviti $z := i\eta$ što daje

$$u_{\zeta}(i|\eta|) \leq d\cdot\underline{M}^{*}_{p}(\eta) + (B+\bar{N}+2)\cdot\log|\xi| \quad \text{ili}$$

$$-\log((2|\xi|)^{B}\cdot|\hat{T}(\xi+i\eta)|) \leq d\cdot\underline{M}^{*}_{p}(\eta) + (B+\bar{N}+2)\log|\xi| \ .$$

Posle sredjivanja dobijamo

$$(1/|\hat{T}(\xi+i\eta)|) \leq |\xi|^{2B+2\bar{N}+3}\cdot\exp(d\cdot M_{p}(\eta))$$

za dovoljno veliko $|\zeta|$, što je u stvari uslov (H_3) .

6.- PARAMETRIKSI

U ovom poglavlju ćemo prvo definisati funkcije $\bar{N}_p^*(x)$ koje su glatke i ponašaju se u beskonačnosti kao funkcije $M_p^*(x)$, tj. dualne funkcije po Jungu za $M_p(x)$. To će nam omogućiti da preformulišemo uslov (H_3) teoreme 5.5; radi preglednosti napisaćemo ga ponovo :

(H_3) Za svako $p \in N$ i $d>0$ postoji konstanta $B>0$ (koja zavisi samo od p), tako da za svako $m \in N$ postoji konstanta $C_m>0$ tako da važi

$$|1/\hat{T}(\zeta)| \leq |\zeta|^B \cdot \exp(d \cdot M_p^*(\eta)) \quad \text{za} \quad M_p^*(\eta) \leq m \cdot \log|\zeta|$$

$$|\zeta| \geq C_m \quad , \zeta=\xi+i\eta \in C .$$

Iz uslova (H_3'), dakle preformulisanog uslova (H_3) slediće postojanje parametriksa P za konvolutor T (zadanog tipa (p,q)), a u poglavlju 5.5 ćemo bez teškoća pokazati da iz postojanja parametriksa sledi hipoeliptičnost konvolutora T.

Da bi dobili novi uslov (H_3') , moramo se vratiti na funkcije $N_p(x)$, p=1,2,.. , definisane u poglavlju 2.2 . Prema tvrdjenju 2.2 , nizovi funkcija $\{M_p(x)\}_{p \in N}$ su ekvivalentni. Uvedimo funkcije

$$\bar{N}_p^*(x) := \int_R M_p^*(t) \cdot w(x-t) \cdot dt \quad , p=1,2,.., x \geq 1$$

gde je $w(x)$ nenegativna glatka funkcija nad R sa nosačem u $[0,1]$; osim toga je $\int_R w(t) \cdot dt = 1$. Kao i u slučaju funkcija $N_p(x)$ (p - fiksirano), sa $\underline{N}_p^*(x)$ označićemo parnu funkciju koja se poklapa sa $\bar{N}_p^*(x)$ za $x>1$, a za $|x| \leq 1$ je definisana tako da je glatka , nenegativna i, najzad rastuća za $x>0$.

Naravno, $\underline{N}_p^*(x)$ nije nužno i dualna funkcija po Jungu za $N_p(x)$. Medjutim, pokazaćemo da su nizovi $\{M_p^*(x)\}_{p\in\mathbb{N}}$ i $\{\underline{N}_p^*(x)\}_{p\in\mathbb{N}}$ ekvivalentni u smislu definicije 2.2.

Lema 5.4. a) $\underline{N}_p^*(x) \leq M_p^*(x)$ za $|x|\geq 1$;

b) Ako je $p>r(1)$, tada postoji $p'=p'(p)<p$ tako da važi $M_p^*(x)\leq \underline{N}_{p'}^*(x)+K_{pp'}$ za sve $x\in\mathbb{R}$ i neko $K_{pp'}\geq 0$.

Dokaz. a) Poklapa se sa dokazom prve nejednakosti u lemi 2.3 (relacija (9)).

b) Neka je dato $p\in\mathbb{N}$ i neka je $p'>1$ najveći prirodan broj sa osobinom $r(p')\leq p$. Prema pretpostavci, takvo p' postoji. Pokažimo da je

$$M_p^*(x) \leq M_{p'}^*(x-1) \quad \text{za dovoljno veliko } x>1 . \tag{30}$$

Prema uslovu (A) je $M_{p'}(p'\cdot x) \leq M_p(x)$ ili $M_p^*(x) \leq M_{p'}^*(x/p')$ za dovoljno veliko $|x|$. Pošto funkcija $M_{p'}^*(x)$ raste za $x>0$ to je za dovoljno veliko $x>0$ desna strana ove nejednakosti manja od $M_{p'}^*(x-1)$, što i dokazuje relaciju (30). Sada je za dovoljno veliko $x>1$

$$M_p^*(x) \leq M_{p'}^*(x-1)\cdot\int_0^1 w(t)dt \leq \int_{\mathbb{R}} M_{p'}^*(x-t)\cdot w(t)\cdot dt = \underline{N}_{p'}^*(x)$$

i lema 3.b) sledi jer su funkcije $M_p^*(x)$ i $\underline{N}_{p'}^*(x)$ neprekidne. Δ

Neposredna posledica ove leme da u uslovu (H_3) možemo funkciju $M_p^*(x)$ zameniti sa glatkom funkcijom $\underline{N}_p^*(x)$. Napišimo to eksplicitno.

(H_3') Za svako $p\in\mathbb{N}$ i $d>0$ postoji konstanta $\bar{B}>0$ koja zavisi samo od p), tako da za svako $m\in\mathbb{N}$ postoji konstanta C_m tako da važi

$$|1/|\hat{T}(\zeta)| \leq |\zeta|^{\bar{B}}\cdot\exp(d\cdot\underline{N}_p^*(\eta)) \quad \text{za} \quad \underline{N}_p^*(\eta) \leq m\log|\zeta|$$

$|\zeta| \geq C_m$ i $\zeta=\xi+i\eta \in C$.

Sada možemo definisati parametriks tipa (p,q) za konvolutor T nad prostorom $H'\{M_p\}$.

Definicija 5.3. Neka je $T \in O_c'(H'\{M_p\})$ i $p,q \in N$. Distribucija $P \in H'\{M_p\}$ je (p,q) - parametriks za T ako zadovoljava sledeća dva uslova :

(p_1) Postoji $n \in N$ tako da je $P(x) = D^n F(x)$ za neku neprekidnu funkciju $F(x)$ nad R sa osobinom

(31) $$F(x) = O(\exp(-N_p(x))) \quad \text{kada} \quad |x| \to \infty$$

(p_2) Ako je $W(x) := \delta(x) - (T*P)(x)$, tada je $W \in C^q$ i zadovoljava sledeći uslov

$$W^{(j)}(x) = O(\exp(-N_p(x))) \quad \text{kada} \quad |x| \to \infty$$

za sve j , $0 \leq j \leq q$.

Tvrdjenje 5.6. Neka za $T \in O_c'(H'\{M_p\})$ važi uslov (H_3'). Tada za svako $(p,q) \in N^2$ postoji (p,q) - parametriks $P \in$ $\in H'\{M_p\}$ za T .

Dokaz. Posledica uslova (H_3') je da za dato $p \in N$ i $d>0$ postoji $B>0$, tako da za dato $m \in N$ (koje ćemo utvrditi kasnije) postoji $C_m>1$ tako da je funkcija

(32) $$F(x,\zeta) := \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\frac{\exp(ix\zeta)}{\hat{T}(\zeta)\cdot\zeta^{2\mu}}$$

analitička u oblasti $\underline{N}_p^*(\eta) \leq m\cdot\log|\zeta|$ i $|\zeta| \geq C_m \geq 1$; μ je prirodan broj. Ako je još μ paran broj za koji važi

$\mu > (B+1)/2$, tada je $F(x,\xi)$ integrabilna po ξ za svako $x \in R$ nad skupom

$I_m := \{\xi \in R,\ |\xi| \geq C_m\}$. Ako stavimo

(33) $$h(x) := \int_{I_m} F(x,\xi)\cdot d\xi \quad \text{i} \quad g(x) := D^{2\mu}h(x)$$

tada važi jednakost

$$T*g = \delta - \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot \int_{-C_m}^{C_m} \exp(ix\xi)\cdot d\xi \quad .$$

Dokažimo je :

$$(T*g)(x) = (T*D^{2\mu}h)(x) = (T*D_x^{2\mu}(\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot \int_{I_m} \frac{\exp(ix\xi)}{\hat{T}(\xi)\xi^{2\mu}}d\xi))(x)$$

$$= (T* \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot \int_{I_m} \frac{\exp(ix\xi)(-1)^{\mu}}{\hat{T}(\xi)}d\xi)(x) =$$

$$= (F^{-1}\hat{T} * F^{-1}(\frac{\chi_{I_m}(\xi)}{\hat{T}(\xi)}))(x) = F^{-1}(\chi_{I_m}(\xi))(x) = F^{-1}(\ 1 - \chi_{R\setminus I_m}) =$$

$$= \delta - F^{-1}(\chi_{R\setminus I_m}) = \delta - \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot \int_{-C_m}^{C_m} \exp(ix\xi)\cdot d\xi$$

gde je $\chi_E(x)$ karakteristična funkcija skupa E . Četvrta jednakost u prethodnom nizu jednakosti se pokazuje kao formula (23) u trećoj glavi (tvrdjenje 3.4) .

Pokažimo da za dato $p\in N$ i $k>1$ postoji $p_1\in N$ tako da za dovoljno veliko $|x|$ važi

(34) $$\underline{N}^*_{p_1}(kx) \leq k\cdot \underline{N}^*_p(x) \quad .$$

U stvari, na osnovu leme 5.4 , dovoljno je dokazati nejednakost

(35) $$M^*_{p_1}(kx) \leq k\cdot M^*_p(x)$$

Neka je

(36) $$p_1 := r(p+[k]+1) \quad .$$

Tada je $k \cdot M_p(x) \leq M_{p_1}(x)$ ili $k \cdot M_p^*(x/k) \geq M_{p_1}^*(x)$ za dovoljno veliko $|x|$,a to je ekvivalentno sa (35).

Neka je sada $a>0$, $k:=m \cdot a/2$ i p_1 kao u (36) . Neka je $\sigma(t)$ glatka funkcija nad R takva da je

$$\sigma(t) = C_m \text{ za } 0<t<C_m \quad \text{i} \quad \sigma(t) = C_m \cdot \exp(a \cdot N_{p_1}(t) \text{ za}$$

$t \geq 2 \cdot C_m$; osim toga, neka je $\sigma(t)$ neparna funkcija koja raste za $t>C_m$. Dalje, neka je $\sigma^*(t)$ glatka funkcija nad R koja je rastuća i važi $\sigma^*(t) = \sigma(t)$ za $|t| \geq C_m$; osim toga neka je $\sigma^{(j)}(0) = 0$ za $j=0,1,2,\ldots$. Sa $\tau(t)$ označićemo parnu glatku funkciju nad R sa osobinom

$$\tau(t) = 0 \text{ za } |t| \leq C_m \quad , \quad \tau(t) = c \cdot \underline{N}_p^{*-1}(N_{p_1}(t)) \text{ za } |t| \geq 2C_m$$

osim toga neka $\tau(t)$ raste za $t>C_m$. Konstantu $c>0$ odredićemo tako da važi

(37) $\quad c \leq m \cdot a/2$; u tom slučaju je

(38) $\quad \underline{N}_{p_1}^*(2 \cdot \tau(t)) \leq m \cdot \log|\sigma(t)|$ za $|t| \geq C_m$.

U stvari, ako je $2c \leq m \cdot a$, tada je

$$\underline{N}_{p_1}^*(2 \cdot \tau(t)) = \underline{N}_{p_1}^*(2c \cdot \underline{N}_p^{*-1}(N_{p_1}(t))) \leq$$

$$\leq 2c \cdot \underline{N}_p^*(\underline{N}_p^{*-1}(N_{p_1}(t))) \leq 2c \cdot N_{p_1}(t) \leq 2c \cdot \frac{1}{a} \cdot \log(\exp(a \cdot N_{p_1}(t)) \leq$$

$$\leq m \cdot \log|\sigma(t)|$$

(imajući u vidu definiciju funkcije $\sigma(t)$) , što dokazuje relaciju (38) .

Pomatrajmo krivu $L(x) \equiv \zeta(t) := \sigma(t) + i \cdot \tau(t) \cdot \operatorname{sgn} x$ gde $t \in I_m$. Zbog uslova (37) integral u (33) se može zameniti integralom po krivoj $L(x)$, tj.

$$h(x) = \int_{L(x)} F(x,\zeta)\cdot d\zeta = \int_{|t|\geq C_m} F(x,\zeta(t))\cdot\zeta'(t)\cdot dt .$$

Stavimo sada

(39) $$h_1(x) = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{L_1(x)} \frac{\exp(ix\zeta)d\zeta}{\hat{T}(\zeta)\cdot\zeta^{2\mu}} \qquad \text{za } |x|\geq C_m \text{ i}$$

(40) $$h_2(x) = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{L_2(x)} \frac{\exp(ix\zeta)d\zeta}{\hat{T}(\zeta)\cdot\zeta^{2\mu}} \qquad \text{za } |x|\geq C_m .$$

gde su $L_1(x)$ i $L_2(x)$ delovi krive $L(x)$ za vrednosti parametra t sa osobinom $|t|\geq|x|$, odnosno $C_m\leq|t|\leq|x|$.

Neka je dalje

(41) $$W(x) := (T*D^{2\mu}h_2)(x) + \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-C_m}^{C_m} \exp(ix\xi)\cdot d\xi \quad \text{i}$$

$P(x) := D^{2\mu}h_1(x)$. Pretpostavimo da za μ važi

(42) $$\mu > 1 + \frac{B+\frac{d\cdot m}{2}+1}{2} .$$

Distribucija P i jeste traženi (p,q) - parametriks za konvolutor T . To će slediti iz sledeće dve leme : iz leme 5.5 sledi uslov (p_1) (videti relaciju (31)), a iz leme 5.6 uslov (p_2) iz definicije 5.3 (parametriksa).

Lema 5.5. Funkcija $h_1(x)$ je $O(\exp(-c\cdot N_p(x)))$ kada $|x|\to\infty$($h_1(x)$ je definisano u (39)) .

Dokaz. Funkcija $h_1(x)$ se može napisati kao

(43) $$h_1(x) = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_E \frac{\exp(ix\zeta(t))\cdot\zeta'(t)\cdot dt}{\hat{T}(\zeta(t))\cdot(\zeta(t))^{2\mu}}$$

gde je $E := \{t , |t| \geq |x|\}$. Majoriraćemo sve četiri funkcije koje se pojavljuju u (43) . Pokažimo prvo

$$(44) \qquad |\exp(ix\zeta(t))| \leq \exp(-c \cdot N_{p_1}(x))$$ za dovoljno veliko $|x|$ i $|t| \geq |x|$ (p_1 je iz (36)) . Iz nejednakosti

$$M_p^{*-1}(x) \geq \frac{|x|}{M_p^{-1}(x)}$$ (videti lemu 1.4) i leme 5.4 sledi

$$\underline{N}_p^{*-1}(x) \geq \frac{|x|}{N_p^{-1}(x)},$$ za dovoljno veliko $|x|$ .Odavde sledi za $t>0$

$$c \cdot \underline{N}_p^{*-1}(N_{p_1}(t)) \geq c \cdot \underline{N}_p^{*-1}(N_p(t)) \geq \frac{c \cdot N_p(t)}{N_p^{-1}(N_p(t))} = \frac{c \cdot N_p(t)}{t}$$

Funkcija $N_p(t)/t$ je monotono rastuća za $t>0$ (videti glavu 2), pa je za $|t| \geq |x|$ njen minimum baš $N_p(x)/|x|$, tj.

$$c \cdot N_p^{*-1}(N_{p_1}(t)) \geq \frac{c \cdot N_p(x)}{|x|}$$, što neposredno daje (44).

Sledeća nejednakost

$$(45) \qquad \frac{1}{|\zeta(t)|^{2\mu}} \leq \exp(-2a\mu \cdot N_{p_1}(t))$$

sledi iz $|\zeta(t)| \geq |\sigma(t)| \geq \exp(a \cdot N_{p_1}(t))$.

Ocenimo sada $|\tau'(t)|$. Pre svega je

$$(46) \qquad |\tau'(t)| = \frac{c \cdot N'_{p_1}(t)}{N_p^{*}{}'(\tau(t)/c)} \leq c \cdot N'_{p_1}(t) \text{ , } t>0.$$

U dokazu leme 2.4 pokazano je da je $|N'_{p_1}(t)| \leq \bar{C}_1 \cdot N_{p_1}(t)$ pa je $|N'_{p_1}(t)| \leq \bar{C}_1 \cdot (a \cdot N_{p_1}(t))/a \leq \bar{C}_2 \cdot \exp(a\, N_{p_1}(t))$.

Iz ovih nejednakosti i (46) za dovoljno veliko $|t|$ sledi

$$|\tau'(t)| \leq \bar{C}_3 \cdot \exp(a \cdot N_{p_1}(t)) .$$

Iz poslednje nejednakosti sledi

$$|\zeta'(t)|^2 \leq C_m^2 \cdot \exp(2(1+d)a \cdot N_{p_1}(t)) + \bar{C}_3^2 \cdot (\exp(2a \cdot N_{p_1}(t)) \text{ ,tj.}$$

(47) $$|\zeta'(t)| \leq \bar{C}_4 \cdot \exp(a(1+d) \cdot N_{p_1}(t)) \quad \text{za neko} \quad \bar{C}_4 > 0 \; .$$

Lako je videti da je

(48) $$|\zeta(t)| \leq \bar{C}_5 \cdot \exp(a \cdot N_{p_1}(t)) \quad \text{za dovoljno veliko } |t| .$$

Na osnovu uslova (H_3') , relacija (44),(45),(47) i (48) je

$$|h_1(x)| \leq \bar{C}_6 \cdot \exp(-c \cdot N_p(x)) \times$$

$$\times \int_{|t| \geq |x|} \exp((a \cdot B + \frac{d \cdot a \cdot m}{2} + a(1+d) - 2a\mu)N_{p_1}(t)dt \; .$$

i imajući u vidu uslov (42) za $0<d<1$ zadnji integral se majorira sa integralom po R koji konvergira. To daje

$|h_1(x)| \leq \bar{C}_7 \cdot \exp(-c \cdot N_p(x))$ za sve $x \in R$ i neko $\bar{C}_7 = \bar{C}_7(a,c,d,p,p_1) > 0$. Δ

Lema 5,6. Za dato $(p,q) \in N^2$ postoje konstante d,a (dovoljno male) i konstante m,c (dovoljno velike) tako da važi

$$W^{(j)}(x) = O(\exp(-N_p(x))) \quad \text{kada} \quad |x| \to \infty$$

za sve j , $0 \leq j \leq q$ ($W(x)$ iz (41)) .

Dokaz. Funkcija $h_2(x)$ definisana relacijom (40) je glatka i očito jednaka nuli za $|x| \leq C_m$. Uzmimo da je $x>0$ (slučaj $x<0$ je analogan). Pokažimo prvo relaciju

(49) $$|h_2^{(j)}(x)| \leq C_{j,d} \cdot \exp(a(j+1+d) \cdot N_{p_1}(x)) \quad , \; j=0,1,..$$

za veliko x i svako $d>0$. Pre svega je

$$(50)\qquad h_2^{(j)}(x) = \left(\int_{-x}^{-C_m} + \int_{C_m}^{x}\right) \frac{\exp(i\zeta(t)x)(i\zeta(t))^j}{\hat{T}(\zeta(t))\cdot(\zeta(t))^{2\mu}}\cdot\zeta'(\tau)dt + R_j(x)$$

gde je $R_o(x) = 0$, $R_1(x) = \lambda(x)\cdot\exp(ix(\sigma(x)+i\tau(x))) -$
$- \lambda(-x)\cdot\exp(ix(\sigma(-x)+i\tau(-x)))$, $\lambda(x) := 1/(\tilde{\hat{T}}(\zeta(x))\cdot(\zeta(x))^{2\mu})$
i $R_j(x) = R'_{j-1}(x) + \lambda(x)\cdot(\exp(ix(\sigma(x)+i\tau(x)))(i\sigma(x)-\tau(x))^j -$
$- \lambda(-x)(\exp(ix(\sigma(-x)+i\tau(x)))\cdot(i\sigma(-x)-\tau(x))^j$ $j=2,3,..q$.

Integrali u (50) se mogu majorirati sa

$$2x\cdot\exp(a(j+1)\cdot N_{p_1}(x)) \leq K_{j,d}\cdot\exp(a(j+1+d)\cdot N_{p_1}(x))$$

za neke $K_{j,d}>0$, $j=0,1,..q$ .Ovde je korišćena činjenica da je funkcija $\lambda(z)$ integrabilna nad $\mathbb{C} \setminus \{z\varepsilon\mathbb{C}, |Re z|\leq C_m\}$ pa je ona (zajedno sa svojim izvodima do reda q) ograničena nad $\{z, |Re z| \geq C_m\}$.

Poslednja nejednakost pokazuje da će relacija (49) biti dokazana ako pokažemo nejednakost

$$|R_j(x)| \leq L_{j,d}\cdot\exp(a(j+1+d)\cdot N_{p_1}(x)) \quad \text{za} \quad x>C_m .$$

Imajući u vidu ograničenost funkcije $\lambda^{(j)}(x)$ za sve $j=0,1,2,..q$, to se dobija neposrednom proverom.

U lemi je implicitno rečeno da je $W(x)$ u stvari funkcija klase C^q, što je zbog glatkosti funkcije $h_2(x)$ i relacije (49) očito ispunjeno. U stvari je

$$W^{(j)}(x) = (T*h_2^{(j+2\mu)})(x) + \left(\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-C_m}^{C_m}\exp(ix\xi)d\xi\right)_x^{(j)} .$$

Pošto je T konvolutor, postoji neprekidna funkcija $G(x)$ sa osobinom $G(x) = O(\exp(-\rho\cdot N_{p_1}(x)))$ kada $|x|\to\infty$ tako da je $D^l G(x) = T(x)$ za neko $l \in \mathbb{N}_o$ i $\rho=\rho(l)>0$. Prema tome je

$$W^{(j)}(x) = (D^l G*h_2)^{(j+2\mu)}(x) + \left(\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-C_m}^{C_m}\exp(ix\xi)d\xi\right)_x^{(j)} =$$

$$= \langle D^l G(y), \frac{\partial^{j+2\mu}}{\partial y^{j+2\mu}}(\int_{C_m\le|t|\le|x-y|} F(x-y,\zeta(t))\zeta'(t)dt\rangle \;+$$

$$+ \left(\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-C_m}^{C_m} \exp(ix\xi)d\xi\right)^{(j)}_x .$$

Primetimo da je za dovoljno veliko x

$$\int_{C_m\le|t|\le|x-y|} \frac{\partial^{2\mu}F(x-y,\zeta(t))}{\partial y^{2\mu}}\,\zeta'(t)dt + \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-C_m}^{C_m}\exp(ix\xi)d\xi$$

$$= \int_{x\le|t|\le x-y|} + \int_{C_m\le|t|\le x} + \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{-C_m}^{C_m}$$

$$= \int_{x\le|t|\le|x-y|} + \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int_{L^*(x)}\frac{\exp(i(x-y)\zeta)\cdot d\zeta}{\hat{T}(\zeta)}$$

gde je $L^*(x)$ putanja koja se dobija spajanjem duži $[-C_m,C_m]$ sa krivom $\zeta^*(t) := \sigma^*(t)+i\tau(t)$ (uzeto je sgn x = = 1 jer je $x>0$), gde je $C_m\le|t|\le x$. Sada je na osnovu definicije $\sigma^*(t)$

(51) $$W^{(j)}(x) = \langle D^l G(y), \int_{x\le|t|\le|x-y|}\frac{\partial^{j+2\mu}F(x-y,\zeta(t))\zeta'(t)dt}{\partial y^{j+2\mu}}$$

$$+ \frac{1}{2\cdot\pi}\left(\int_{L^*(x)} \exp(ix\zeta)d\zeta\right)^{(j)}_x$$

Ako je a izabrano tako da je

(52) $a(2\mu+q+l+3) < \rho$ tada je

(53) $$|\langle D^l G(y), \int_{x\le|t|\le|x-y|} \rangle| \le$$

$$\le \int_R |G(y)|dy \cdot \left|\frac{\partial^{j+2\mu+1}}{\partial y^{j+2\mu+1}}\left(\int_{x\le|t|\le|x-y|} F(x-y,\zeta(t))\zeta'(t)dt\right)\right|.$$

Diferenciranjem pod znakom integrala (po y) dobija se

$$\int\limits_{x\leq|t|\leq|x-y|} \lambda(t)(i\zeta(t))^{j+2\mu+1}\exp(i(x-y)\zeta(t))\zeta'(t)dt + S_{j+2\mu+1}(x-y)$$

Pokazaćemo samo da je poslednji integral

$$\text{(54)}\qquad O(\exp((a(2\mu+q+1+3)-c)N_{p_1}(x)))\quad \text{kada } x\to\infty \text{ za } j\leq q$$

za "ostatke" $S_{j+2\mu+1}(x-y)$ se to pokazuje još lakše. U stvari, ako primenimo nejednakosti (44),(47),(48) i iskoristimo ograničenost funkcije $\lambda(x)$ sledi relacija (54).

Pošto je $G \in L_1$, to skalarni proizvod u (51) zadovoljava (54). Naš sledeći zadatak je da pokažemo

$$\text{(55)}\qquad \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_{L^*(x)}\exp(ix\zeta)d\zeta\Big)^{(j)} = O(\exp(a(q+3)-c)N_{p_1}(x))\text{kada } x\to\infty$$

za $j\leq q$. Na osnovu Košijeve teoreme o razmeni putanja je

$$\Big(\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int\limits_{L^*(x)}\exp(ix\zeta)d\zeta\Big)_x^{(j)} = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int\limits_{L^*(x)}(i\zeta)^j\cdot\exp(ix\zeta)d\zeta + S_j^*(x)$$

$$= \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int\limits_{L_1^*(x)}(i\zeta)^j\exp(ix\zeta)\cdot d\zeta + S_j^*(x)$$

gde je $L_1^*(x)$ putanja koja se dobija kao komplementarna putanji $L^*(x)$, tj. njena jednačina je $\zeta^*(t) := \sigma^*(t) + i\tau(t)\cdot\operatorname{sgn} x$ za $|t|\geq x$. Poslednji integral se može majorirati na sledeći način (ponavljamo da je $0\leq j\leq q$ i $x>0$) :

$$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\Big|\int\limits_{L_1^*(x)}(i\zeta)^j\cdot\exp(ix\zeta)\cdot d\zeta\Big| \leq$$

$$\leq K\cdot\int\limits_{|t|\geq x}\exp(-x\tau(t) + aq\cdot N_{p_1}(t) + 3a\cdot N_{p_1}(t) - a\cdot N_{p_1}(t))\cdot dt$$

Za dovoljno veliko x , dovoljno veliko c i $|t|\geq x$ je $-x\tau(t) + a(q+3)N_{p_1}(t) \leq (a(q+3) - c)\cdot N_{p_1}(x)$ što daje

$$\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot \int_{L^*(x)} (i\zeta)^j\cdot \exp(ix\zeta)\cdot d\zeta = O(\exp(a(q+3)-c)N_{p_1}(x)))$$

kada $x\to\infty$. Ostatak $S_j^*(x)$, $j=0,1,..,q$ se procenjuje na isti način i to dokazuje relaciju (55) .

Na osnovu (54) i (55) sada sledi

$$W^{(j)}(x) = O(\exp(a(2\mu+q+l+3)-c)\ N_{p_1}(x))) \tag{56}$$

kada $x\to\infty$ i $j\leq q$.

Uzmimo sada $c:=2p$ i eventualnim povećanjem $\rho\in N$ (i, naravno $l\in N_o$) možemo postići da je $\rho\geq c$. Uzmimo sada $\mu > 2+B/2$ (B je iz uslova (H_3)), $a>0$ dovoljno malo da važi $a < (\rho/(2\mu+l+q+3))$ i najzad $m\in N$ tako da važi $m>2c/a$. Ako $d>0$ zadamo tako da je $d<2/m$ vidimo da je lema 5.6 dokazana . Δ

Kao što smo već rekli, leme 5.5 i 5.6 završavaju dokaz tvrdjenja 5.6 . To znači da iz uslova (H_3) sledi postojanje parametriksa tipa (p,q) za svaki par prirodnih brojeva p,q.

5.5 USLOV (H_3) JE DOVOLJAN ZA HIPOELIPTIČNOST

U ovom poglavlju ćemo završiti dokaz teoreme 5.5. Videli smo da se uslov (H_3) može zameniti sa uslovom (H_3') , u kome su funkcije $M_p^*(x)$ zamenjene sa ekvivalentnim glatkim funkcijama $\underline{N}_p^*(x)$. Ponovo napominjemo da ovde $\underline{N}_p^*(x)$ ne označava dualnu funkciju po Jungu za $N_p(x)$ definisanu u drugoj glavi .

U sledećem tvrdjenju ćemo dokazati da je egzistencija parametriksa zadanog tipa dovoljna za hipoeliptičnost tog konvolutora.

Tvrdjenje 5.7. Ako za svako $(\bar{p},\bar{q}) \varepsilon \mathcal{N}^2$ postoji $(\bar{p},\bar{q})$-parametriks P za $T \varepsilon \mathcal{O}_c'(\mathcal{H}'\{M_p\})$, tada je T hipoeliptičan u prostoru $\mathcal{H}'\{M_p\}$.

Dokaz. Neka je data jednačina

$$(1) \qquad T * U = V \quad , \quad V \varepsilon \mathcal{H}'\{M_p\}$$

i pretpostavimo da postoji rešenje $U \varepsilon \mathcal{H}'\{M_p\}$. Treba pokazati da je $U \varepsilon \mathcal{EH}'\{M_p\}$.

Na osnovu teoreme 5.6 je za neko $p_1 \varepsilon \mathcal{N}$

$$|V^{(j)}(x)| \leq C_j \cdot \exp(M_{p_1}(x)) \qquad , \quad \text{za} \quad j=0,1,..$$

a na osnovu teoreme 2.2 je

$$U(x) = D^{k_1}(G(x)) \qquad \text{za neko } k_1 \varepsilon \mathcal{N}_o \text{ i neprekidnu}$$

funkciju $G(x)$ nad $\mathcal{R}$ za koju važi $|G(x)| \leq C_G \cdot \exp(M_{p_2}(x))$ za neko $p_2 \varepsilon \mathcal{N}$.

Neka je $j \varepsilon \mathcal{N}_o$ dato, i neka je $\bar{p} := r(r(r(p_1+p_2)))$ i $\bar{q} := j+k_1$. Za taj par $(\bar{p},\bar{q})$ postoji po pretpostavci parametriks P za konvolutor T , tako da važe uslovi $(p_1),(p_2)$ iz definicije 5.3. To znači da je

$$(57) \qquad \begin{aligned} U &= U*\delta = U*(T*P+W) = U*(T*P) + U*W = \\ &= (U*T)*P + U*W = V*P + U*W \end{aligned}$$

Primetimo da asocijativnost konvolucije sledi iz ponašanja distribucija U i P, a samo postojanje tih konvolucija na osnovu ponašanja U,P,W i činjenice da je T konvolutor. (Rekli smo već da pod ponašanjem jedne distribucije u beskonačnosti podrazumevamo ponašanje neprekidne funkcije čiji je konačan distribucioni izvod baš ta distribucija.)

Ostaje da se dokaže da su oba sabirka na kraju (57) u stvari glatke funkcije za koje važi da su $O(\exp(M_{p_o}(x)))$ kada $|x|\to\infty$ zajedno sa svojim izvodima. Drugim rečima da važi

(58) $$U^{(j)}(x) = O(\exp(M_{p_o}(x))) \quad \text{kada} \quad |x|\to\infty \quad \text{za sve} \quad j \in \mathbb{N}_o$$

za neko $p_o \in \mathbb{N}$ koje ne zavisi od j.

Pre svega je $V*P$ glatka funkcija, jer je

$$(V*P)(x) = (V*D^nF)(x) = (V^{(n)}*F)(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} V^{(n)}(x-y)\cdot F(y)\cdot dy \qquad \text{i uopšte}$$

$$(V*P)^{(j)}(x) = \int_{\mathbb{R}} V^{n+j)}(x-y)\cdot F(y)\cdot dy \qquad \text{za} \quad j \in \mathbb{N}_o .$$

Ocenimo zadnji integral :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} V^{(n+j)}(x-y)\cdot F(y)\cdot dy \right| \leq c(n,j) \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}} \exp(M_{p_1}(x-y))\cdot \exp(-N_p(y))\cdot dy \quad .$$

Imajući u vidu da važi

(59) $$M_{p_1}(x-y) - N_p(y) \leq M_{r(p_1)}(x) + M_{r(p_1)} + K - M_{r(r(p_1))}(y)$$

za neko $K=K(p_1)>0$ dobijamo

(60) $$|(V*P)^{(j)}(x)| \leq c\cdot \exp(M_{r(p_1)}(x))$$

za neko $c = c(j,n,p,p_1) > 0$.

Drugi sabirak koji čini U prema (57) je $U*W$. Prema pretpostavci, W je funkcija klase C^q i na osnovu izbora broja $\bar{p}$ sledi da to važi i za $U*W$. Dalje je

$$(U*W)^{(j)}(x) = (G*W^{(j+k_1)})(x) \qquad \text{pa je}$$

$$|(U*W)^{(j)}(x)| \leq c'\cdot\int_R \exp(M_{p_2}(y))\cdot\exp(-N_p(x-y))\cdot dy$$

za neko $c' = c'(j,k,p_2,p) > 0$, i na osnovu nejednakosti kao u (59) dobijamo

$$(61) \qquad |(U*W)^{(j)}(x)| \leq c''\cdot\exp(M_{r(p_2)}(x)) \ .$$

Relacije (57),(60) i (61) pokazuju da za $p_o := r(p_1) + r(p_2)$ važi relacija (58) ; važno je primetiti da p_o <u>ne</u> zavisi od j . Δ

D O D A T A K

U ovom dodatku ćemo prikazati kako se rezulati druge do pete glave mogu primeniti na rešavanje jedne diferencijalno-diferentne jednačine u prostoru $\mathcal{H}'_\infty$. Kao što je rečeno u uvodu, takve jednačine se mogu posmatrati kao konvolucione .

Neka je data jednačina

(1) $\quad U''(x) + U(x-1) = V(x)$, $V \in \mathcal{H}'_\infty$ (videti primer 3 poglavlja 2.6) , gde rešenje tražimo u prostoru $\mathcal{H}'_\infty$.

Jednačina (1) se može napisati u obliku

(2) $\quad T * U = V$, gde je

(3) $\quad T(x) = D^2(\delta(x)) + \delta_1(x)$

distribucija kompaktnog nosača i prema tome konvolutor na prostoru $\mathcal{H}'_\infty$. Na osnovu (3) je

(4) $\quad \hat{T}(\zeta) := (\mathcal{F}T)(\zeta) = -\zeta^2 + \exp(-i\zeta)$

gde je $\zeta := \xi + i\eta$ kompleksna promenljiva.

Za jednačinu (1) ćemo ispitati egzistenciju i hipoeliptičnost rešenja u prostoru $\mathcal{H}'_\infty$.

1. REŠIVOST JEDNAČINE (1)

Prema teoremi 4.3 primenjene na prostor $\mathcal{H}'_\infty$ rešivost jednačine (1) je ekvivalentna sa postojanjem fundamentalnog rešenja u prostoru H'_∞. Prema definiciji distribucije E i relacije (4) je

$\hat{E}(\xi) = \exp(i\xi)/(1 - \xi^2 \cdot \exp(i\xi))$, $\hat{E} := FE$, i prema tome

$$(5) \qquad E(x) = \frac{1}{2\cdot\pi} \int_R \frac{\exp(i\xi(x+1))}{1 - \xi^2\cdot\exp(i\xi)} \cdot d\xi \quad , \quad x\in R$$

Primetimo da integral u (5) konvergira za svako $x\in R$ i da u stvari definiše ograničenu neprekidnu funkciju , jer je

$$\int_R \left|\frac{\exp(i\xi(x+1))}{1 - \xi^2\cdot\exp(i\xi)}\right| d\xi \leq \int_R \left|\frac{1}{1 - \xi^2\cdot\exp(i\xi)}\right| d\xi < \infty$$

To znači da fundamentalno rešenje E konvolutora T pripada prostoru H'_∞ i prema teoremi 3.2 jednačina (1) ima rešenje u H'_∞ za svako $V \in H'_\infty$. To rešenje se može pretstaviti u obliku

$$U(x)=(E * V)(x) = \left(\frac{1}{2\cdot\pi} \int_R \frac{\exp(i\xi(x+1))d\xi}{1 - \xi^2\cdot\exp(i\xi)}\right) * D^m(F(x)\exp(|x|^p)$$

ako je $V(x) = D^m(F(x)\exp(|x|^p))$, $F(x)$ ograničena neprekidna funkcija (na osnovu teoreme 2.3 znamo da takvi m,p i F postoje) . Prema tome

$$U(x) = \frac{1}{2\cdot\pi} \int_{R_t} \int_{R_\xi} \frac{(i\xi)^m\exp(i\xi(t+1))}{1 - \xi^2\cdot\exp(i\xi)} \cdot F(x-t)\cdot\exp(|x-t|^p)d\xi dt$$

i konvergencija ovog dvostrukog integrala se uzima u smislu H'_∞.

2. HIPOELIPTIČNOST JEDNAČINE (1)

Ispitaćemo uslove teoreme 5.5 za celu analitičku funkciju $\hat{T}(\zeta)$ iz (4) . Pre svega je

$$\hat{T}(\xi) = -\xi^2 + \exp(-i\xi) \quad ,\xi\in R, \text{ i}$$

$$(6) \qquad |\hat{T}(\xi)| \geq \xi^2 - 1 \geq |\xi|$$

za $|\xi|$ dovoljno veliko. Uslov $\hat{T}(\zeta)=0$ je ekvivalentan sa

$$(7) \qquad \exp(\eta) = \xi^2 + \eta^2 \quad , \quad \zeta=\eta+i\xi \in C$$

Ako sada $|\zeta|\to\infty$ ostajući na površi $\hat{T}(\zeta)=0$, to je

$$(8) \qquad \lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{|\eta|^q}{\log|\zeta|} = \lim_{|\zeta|\to\infty} \frac{(\log|\zeta|^2)}{\log|\zeta|} = \infty$$

za svako $q > 1$.

Relacije (6) i (8) pokazuju da je jednačina (1) hipoeliptična u H'_∞ , tj. svako rešenje (1) je glatka funkcija ako je $V(x)$ na desnoj strani (1) glatka funkcija.

3. PRIMEDBE

U radu [6] ispitivan je primer sličan jednačini (1) sa gledišta operatora J.Mikusinskog. U tom radu data je efektivna konstrukcija rešenja odgovarajuće algebarske jednačine u polju operatora J.Mikusinskog.

U radu [35] za diferencijalno - diferentni operator

$$(10) \qquad T(x) := \sum_{k=1}^{m} P_k(D)\cdot\delta_{c_k}(x)$$

gde su $P_k(D)$ polinomi po operatoru distribucionog izvoda D za $k=1,2,..,m$, a c_k realni brojevi, data je reprezentacija rešenja homogene jednačine

$$T * U = 0$$

u jednom prostoru uopštenih funkcija. (Taj prostor se dobija kao dualni za projektivnu granicu niza prostora osnovnih funkcija, dakle slično kao prostor $H'\{M_p\}$.) U tom radu autor nije ispitivao hipoeliptičnost jednačine (10). Jednačina (1) je za $V(x)=0$ poseban slučaj jednačine (10), pa prethodna razmatranja daju odgovor na to pitanje u jednom specijalnom slučaju.

VI GLAVA

ASIMPTOTOSKO PONAŠANJE DISTRIBUCIJA IZ K_1'

U ovoj glavi ćemo se vratiti na prostor K_1' ([12],[38] videti primer 2 druge glave). Težište je na asimptotskom ponašanju rešenja konvolucione jednačine na prostoru K_1'. U prvom poglavlju ćemo dati definiciju μ - asimptotike distribucija (koja je uvedena u radu [30]), a njen poseban slučaj ispitan u radu [31]. U drugom poglavlju ćemo izložiti kakva je reprezentacija funkcionela nad K_1' i konvolutora na K_1'. To će omogućiti da μ - asimptotiku u spomenutom posebnom slučaju primenimo na one elemente prostora K_1' koji imaju nosače sadržane u $[0,\infty)$. U trećem poglavlju ćemo dati jedan dovoljan uslov , na osnovu koga i ponašanja konvolutora i distribucije V na desnoj strani konvolucione jednačine

(1) $\qquad T * U = V$

može da se odredi ponašanje rešenja U . (Taj rezultat je posledica tvrdjenja 1,§3 iz [4]). Takodje je dato ponašanje Laplasove transformacije rešenja jednačine (1) na osnovu ponašanja konvolutora T i distribucije V . Ovo je posledica teoreme 2.2 u [31].

6.1. NEKI POJMOVI I REZULTATI IZ [30]

Neka je $\mu : R \to R$ glatka funkcija koja zadovoljava sledeće uslove

(P_1) $\mu(x) \neq 0$ za sve $x \varepsilon R$;

(P_2) Za svako $p \varepsilon N_o$ postoji $C_p > 0$ tako da je $|\mu^{(p)}(x)| \leq C_p |\mu(x)|$ za sve $x \varepsilon R$.

Definicija 6.1. Vektorski prostor glatkih funkcija $\phi(x)$ nad R sa osobinom

$$\kappa_p(\phi) := \sup \{(1+|x|)^p \cdot |\mu(x)| \cdot |\phi^{(j)}(x)| \ ; \ 0 \leq j \leq p \ , \ x \varepsilon R\} < \infty$$

za svako $p = 0,1,2,..$ u kome je topologija data preko prebrojive familije seminormi $\{\kappa_p\}_{p \varepsilon N_o}$ obeležićemo sa $\mathcal{K}_\mu$.

Prostor $\mathcal{K}_\mu$ je kompletan lokalno konveksan prostor, čiji je pravi svuda gust potprostor D. Važno je

Tvrdjenje 6.1. (Theorem 1.1. u [30]) Linearno preslikavanje

(2) $\qquad M : \phi(x) \to \mu(x) \cdot \phi(x)$

je topološki izomorfizam prostora $\mathcal{K}_\mu$ na prostor brzo opadajućih funkcija S.

Posledica tog tvrdjenja je

Teorema 6.1. (Theorem 1.2 u [30]) Linearno preslikavanje M^* , adjungovano preslikavanju M iz (2), je topološki izomorfizam prostora S' na prostor $\mathcal{K}_\mu'$, ako su oba snabdevena sa jakom topologijom.

Ispitajmo malo bliže preslikavanje M^* i njegovo inverzno preslikavanje M^{*-1} . Ako je $S(x) \varepsilon S'$ neprekidna funkcija, tada je $M^*(S(x)) = \mu(x) \cdot S(x)$ takodje neprekidna funkcija, koja definiše regularni elemenat iz $\mathcal{K}_\mu'$. Sa druge strane, ako je $T(x) \varepsilon C^o \cap \mathcal{K}_\mu'$, tada je

(3) $$M^{*-1}(T(x)) = T(x)/\mu(x)$$

takodje regularan elemenat prostora $\mathcal{K}'_{\mu}$. Ovo nas navodi da pridružimo u opštem slučaju funkcioneli $T \in \mathcal{K}'_{\mu}$ funkcionelu S nad $\mathcal{S}$ relacijom

(4) $$\langle S(x),\psi(x)\rangle := \langle T(x),\psi(x)/\mu(x)\rangle \quad , \quad \psi \in \mathcal{S} \quad .$$

Prema tvrdjenju 6.1 izraz na desnoj strani (4) ima smisla a prema teoremi 6.1 funkcionela $S(x)$ je neprekidna . Pošto je linearnost očevidna, to je $S(x) \in \mathcal{S}'$. I u tom slučaju pisaćemo u skladu sa (4)

(5) $$S(x) = T(x)/\mu(x)$$

ako važi (4) za sve $\psi \in \mathcal{S}'$.

Kvaziasimptotiku (k.a.) temperiranih distribucija sa nosačem u $[0,\infty)$ definisali su sovjetski autori Drožinov i Zavijalov u [4] .

Definicija 6.2. Neka je $S(x) \in \mathcal{S}'_{+}$ (tj. $S \in \mathcal{S}'$ i $\operatorname{supp} S \subset [0,\infty)$) i neka postoji $\alpha \in R$ tako da je

$t^{-\alpha} \cdot S(tx) \to \gamma(x)$ u smislu $\mathcal{S}'$ kada $t \to \infty$. Ako je $\gamma(x) \not\equiv 0$, kaže se da $S(x)$ ima k.a. reda α .

U tom radu je pokazano da da je $\gamma(x) = C \cdot f_{\alpha+1}(x)$, gde je $C \neq 0$ konstanta, a $f_{\alpha}(x)$ su distribucije iz $\mathcal{S}'_{+}$ koje su definisane na sledeći način :

$f_{\alpha}(x) = H(x) \cdot x^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$ za $\alpha > 0$ i induktivno

$f_{\alpha+1}(x) = D(f_{\alpha}(x))$ za negativne vrednosti α . (H je Hevisajdova funkcija, a Γ je gama funkcija.)

Sada možemo definisati μ - asimptotiku uopštenih funkcija (μ -a.) :

Definicija 6.3. Distribucija $T(x) \in \mathcal{H}_\mu'^{+}$ (tj. supp $T \subset [0,\infty)$) ima μ-a. reda α ako i samo ako funkcionela $S(x)$ iz (4) i (5) ima k.a. reda α. U tom slučaju pišemo

(6) $$T(x) \sim C\cdot\mu(x)\cdot f_{\alpha+1}(x) \quad \text{kada} \quad x\to\infty, \quad C\neq 0 .$$

Glavna teorema koja daje karakterizaciju μ - a. je

Teorema 6.2. Distribucija $T(x) \in \mathcal{H}_\mu'^{+}$ ima μ-a. reda α kad $x\to\infty$ (tj. važi (6)) u smislu $\mathcal{H}_\mu'$ ako i samo ako postoji $n \in N_o$, $\alpha+n > 0$, i neprekidna funkcija $F(x)$ nad R tako da važi

(7) $$T(x) = D^n(F(x)) - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\cdot\mu^{(k)}(x)\cdot D^{n-k}(F(x)/\mu(x))$$

gde je $F(x) \sim C\cdot\mu(x)\cdot f_{\alpha+n+1}(x)$ kada $x\to\infty$ u običnom smislu.

6.2. PROSTOR K_1'

Prostor K_1' (= Λ_∞') uveo je M.Hasumi u [12] 1960. godine. Dajemo njegovu definiciju.

Definicija 6.4. K_1 je vektorski prostor glatkih funkcija $\phi(x)$ nad R sa osobinom da je funkcija $\exp(k\cdot|x|)|\phi^{(j)}(x)|$ ograničena za sve $(k,j) \in N_o^2$. Topologija na K_1 definisaje familijom seminormi

(8) $$\lambda_p(\phi) := \sup\{\exp(p|x|)\cdot|\phi^{(j)}(x)| \ , \ 0\leq j\leq p, \ x\in R\},$$

$p=0,1,\dots$.

Prostor K_1 je prostor tipa $\mathcal{K}\{M_p\}$ za $M_p(x) := px$. Na žalost, uslov (2) druge glave nije ispunjen, pa dualna funkcija po Jungu za $M_p(x)$ nije konačna za sve vrednosti promenljive. To znači da rezultate treće glave (o Furijeovoj transformaciji) ne možemo direktno primeniti. Ipak, K_1 je Frešeov nuklearan prostor.

Kao obično, neka je K_1' dualan prostor za K_1 snabdeven jakom topologijom. K_1' sadrži prostor temperiranih distribucija, i izomorfan je sa jednim pravim podskupom prostora $\mathcal{D}'$. Važi sledće tvrdjenje ([42],[22]) :

Tvrdjenje 6.2. Ako je $T(x) \in K_1'$, tada je distribucija $T(x)/ch(x)$ ograničena distribucija, tj. neprekidna funkcionela nad prostorom funkcija koje su ograničene zajedno sa svojim izvodima proizvoljnog reda snabdevenog sa familijom L_∞ normi na uobičajen način.

Posledica ovog tvrdjenja je da ako $T \in K_1'^{+}$, tj. $T \in K_1'$ i supp $[0,\infty)$, tada postoji $a \in \mathbb{R}$ tako da je $\exp(-ax)\cdot T(x) \in$ $\in S_+'$.

Karakterizaciju konvolutora na K_1' daje

Tvrdjenje 6.3. Distribucija $T(x) \in K_1'$ je konvolutor na prostoru K_1' ako i samo ako važi jedan od dva ekvivalentna uslova :

(k_1) Za svako $a \in \mathbb{R}$ distribucija $\exp(-ax)\cdot T(x)$ je ograničena ;

(k_2) Za svako $p \in \mathbb{N}$ postoji $m \in \mathbb{N}_0$ i neprekidne funkcije $F_j(x)$ $0 \le j \le m$, sa osobinom $F_j(x) = O(\exp(-p|x|)$ kada $x \to \infty$ tako da je
$$T(x) = \sum_{j=0}^{m} D^j(F_j(x)).$$

Iz uslova (k_1) sledi da je distribucija $\exp(-ax)\cdot T(x) \in S_+'$ ako je $T \in \mathcal{O}_C'(K_1')$ i proizvoljno $a \in \mathbb{R}$; naravno, mora biti supp $T \subset [0,\infty)$.

Sada ćemo definisati tzv. " a - eksponencijalnu asimptotiku" , aea ili skraćeno " a - e.a. " . Stavimo $\mu(x) = \exp(ax)$; uslovi (P_1) i (P_2) su očito zadovoljeni. Odgovarajući prostor $\mathcal{K}_\mu$ ćemo obeležiti sa $\Lambda(a)$. Na osnovu teoreme 6.1 prostor $\exp(-ax)\Lambda'(a)$ je izomorfan prostoru S'. Sa druge strane, iz $T(x) \in \mathcal{K}_1'^{+}$ sledi da je $T(x) \in \Lambda_+'(a)$ za neko $a \in R$ i prema tome za $\exp(-ax)\cdot T(x)$ se može definisati μ - asimptotika (definicija 6.3) koju ćemo zvati " a - eksponencijalna asimptotika " . Za kraj ovog poglavlja ostavili smo rezultat Abelovog tipa za uopštenu Laplasovu transformaciju (u oznaci L) u smislu [36]

Teorema 6.3. (Theorem 2.2 u [34]) Neka je $T(x) \in \Lambda_+'(a)$,tj. $T(x) \in \Lambda'(a)$ i $\operatorname{supp} T \subset [0,\infty)$. Ako $T(x)$ ima " a - e.a." reda α ,$\alpha \in R$: $T(x) \sim C\cdot f_{\alpha+1}(x)\cdot\exp(ax)$ kada $x\to\infty$ u smislu $\Lambda'(a)$, tada važi sledeće

$$L\{ T(x) \}(s) \sim C/(s-a)^{\alpha+1}$$

kada $s \to a$ ostajući na pravoj

$$L_{\psi,a} := \{s \in C \text{ , } \arg(s-a) = \psi, \ Re\ s > a\} \text{ ,}$$

gde je $\psi \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

6.3. ASIMPTOTSKO PONAŠANJE REŠENJA KONVOLUCIONE JEDNAČINE U K_1'

Neka je data konvoluciona jednačina

$$(9) \qquad T * U = V$$

gde je $T \in O_c'(K_1')$, $U,V \in K_1'$. Pretpostavićemo da su nosači ovih distribucija sadržani u $[0,\infty)$.

Pretpostavimo da $U(x)$ ima a - e.a. reda $\beta \in R$. To, izmedju ostalog, znači da je distribucija $\exp(-ax)\cdot T(x)$ temperirana. Pošto je $T(x)$ konvolutor na K_1' , prema tvrdjenju 6.3 sledida je $\exp(-ax)\cdot T(x) \in S_+'$. Dokažimo prvo jedno tvrdjenje o ponašanju distribucije V .

Tvrdjenje 6.4. Ako $T(x)$ ima a - e.a. reda α, a $U(x)$ a - e.a. reda β , tada $V(x)$ data sa (9) ima a - e.a. reda $\alpha+\beta+1$, $\alpha\ \beta \in R$.

Dokaz. Pre svega, distribucija $\exp(-ax)\cdot V(x) \in S_+'$, jer je konvolucija unutrašnja operacija u S_+', pa ima smisla ispitivati a - e.a. distribucije $V(x)$. Dokažimo prvo

$$(10) \qquad \exp(-ax)\cdot T(x) * \exp(-ax)\cdot U(x) = \exp(-ax)\cdot V(x) .$$

U stvari, za $\phi(x) \in S$ je

$$\langle \exp(-ax)\cdot T(x) * \exp(-ax)\cdot U(x) , \phi(x)\rangle =$$

$$= \langle \exp(-ax)\cdot T(x), \langle \exp(-ay)\cdot U(y), \phi(x+y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle T(x) \times U(y), \langle \exp(-a(x+y)), \phi(x+y)\rangle =$$

$$= \langle T(x) * U(x) , \exp(-ax)\phi(x)\rangle =$$

$$= \langle \exp(-ax)\cdot(T(x) * U(x)) \, , \, \phi(x)\rangle = \langle \exp(-ax)\cdot V(x), \phi(x)\rangle \, .$$

Izraz $T(x) \times U(y)$ označava direktan proizvod distribucija T i U. Primetimo da svi "skalarni" proizvodi imaju smisla zbog pretpostavke o nosačima T,U.

Na osnovu (8) i (10) sledi da ako je

$$T(x) \sim C_1\cdot\exp(ax)\cdot f_{\alpha+1}(x) \, , \quad x\to\infty, \quad C_1 \neq 0 \quad \text{u smislu} \quad \Lambda'(a)$$

i $\quad U(x) \sim C_2\cdot\exp(ax)\cdot f_{\beta+1}(x) \quad x\to\infty, \quad C_2\neq 0 \quad$ u smislu $\Lambda'(a)$

moraju biti $V(x) \sim C_1\cdot C_2\cdot\exp(ax)\cdot f_{\alpha+\beta+2}(x)$ kada $x\to\infty$ u smislu $\Lambda'(a)$ zbog poznate osobine funkcija $f_\alpha(x)$. To i znači da $V(x)$ ima a - e.a. reda $\alpha+\beta+1$. Δ

Na osnovu tvrdjenja 6.4 sledi

Tvrdjenje 6.5. Ako su T,U,V kao u tvrdjenju 6.4, tada je

$$L\{\, V(x) \,\} \sim C_1\cdot C_2/(s-a)^{\alpha+\beta+2}$$

kada $s \to a$ ostajući na pravoj $L_{\psi,a}$.($L_{\psi,a}$ kao u teoremi 6.3.)

Naravno, nas više interesuje ponašanje rešenja U jednačine (9), ako je poznato ponašanje distribucija T i V. Za to su potrebni rezultati Tauberovog tipa za uopštenu Laplasovu (ili Furijeovu transformaciju) . Bez naknadnih uslova ne može se dokazati tvrdjenje analogno prethodnom čak ni za $a=0$. U radu [4], tvrdjenje 1.,§3 dat je jedan takav dovoljan uslov, naime ograničenost argumenta u gornjoj poluravni Furijeove transformacije konvolutora T. Navešćemo to tvrdjenje.

Tvrdjenje 6.6. Neka su $T,U,V \in S'_+$ vezani jednačinom (9) . Ako $\hat{T} := \mathcal{F}T$ ima ograničen argumenat u gornjoj polu-

[illegible]ni. tj. postoji pozitivna konstanta M tako da je

$$|\arg \hat{T}(\zeta)| \leq M \quad za \ Im(\zeta) > 0 ,$$

tada, ako $T(x)$ ima k.a. reda α, $V(x)$ k.a. reda β, $U(x)$ ima k.a. reda $\alpha-\beta-1$.

Na osnovu ovog tvrdjenja, lako se dobija

Teorema 6.4. Neka su T,U,V vezani relacijom (9) i neka su to elementi $K_1'^{+}$. Ako T ima a - e.a. reda α, V a - e.a. reda β, i $\mathcal{F}(\exp(-ax)\cdot T(x))(\zeta)$ je cela funkcija sa ograničenim argumentom u gornjoj poluravni, tada rešenje ima a - e.a. reda $\alpha-\beta-1$.

Ako je dovoljno poznavati ponašanje Laplasove transformacije rešenja U , tada možemo koristiti sledeće

Tvrdjenje 6.7. Neka su $T,U,V \in K_1'^{+}$ iz (9) i neka $T(V)$ ima a - e.a. reda $\alpha(\beta)$, tj.

$T(x) \sim C_1\cdot\exp(ax)\cdot f_{\alpha+1}(x)$ kada $x\to\infty$ ($C_1 \neq 0$)
$V(x) \sim C_2\cdot\exp(ax)\cdot f_{\beta+1}(x)$ kada $x\to\infty$. Tada važi asimptotska relacija

$$\mathcal{L}\{\ U(x)\ \}(s) \sim (C_2/C_1)\cdot(s-a)^{\beta-\alpha} \quad \text{kada} \quad s\to a$$

ostajući na pravoj liniji $L_{\psi,a}$ za svako $0 \leq |\psi| < \pi/2$.

Dokaz. Na osnovu teoreme 6.3 važi

$\mathcal{L}\{\ T(x)\ \}(s) \sim C_1(s-a)^{-(\alpha+1)}$ kada $s\to a$ ostajući na pravoj liniji $L_{\psi,a}$ i $\mathcal{L}\{\ V(x)\ \}(s) \sim C_2/(s-a)^{-(\beta+1)}$ kada $s\to a$ ostajući na pravoj $L_{\psi,a}$. Pošto je

$\mathcal{L}\{\ T\ \}\cdot\mathcal{L}\{\ U\ \} = \mathcal{L}\{\ V\ \}$ to neposredno sledi tvrdjenje. Δ

LITERATURA

[1] Björck, G.: *Linear Partial Differential Operators and Generalized Distributions*, Ark.Mat., 6(1966), 351-407

[2] Cioranescu, J.: *Sur les solutions fondamentales d'ordre fini de croissance*, Math.Ann., 211(1974), 37-46

[3] Donoghue, W.H. jr.: *Distributions and Fourier Transforms*, Acad.Press, New York & London 1969

[4] Дрожжинов, Ю.Н. и Завьялов, Б.И.: Квазиасимптотика обобщенных функций и тауберовы теореми в комплексной области, Мат.Сборник т. 102(144), 3, 372-390 (1977)

[5] Ehrenpreis, L.: *Solutions of Some Problems of Division, IV* Amer.J.Math., 82, (1960), 522-588

[6] Fényes, T.: *Anwendung der Operatorenrechnung von Mikusinski zur Lösung gewonlichen Differential - differenzen Gleichungen*, Publ.Math.Inst.Hung.Acad.Sci., ser. A4, (1959), 191-196

[7] Гельфанд, И.М. и Шилов, Г.Е.: Пространства основних и обобщенных функции, Физматгиз, Москва 1958, в.2

[8] Гельфанд, И.М. и Шилов, Г.Е.: Пространства основних и обобщенных функции, Физматгиз, Москва 1958, в.3

[9] Grudzinski, O.v.: *Über Fundamentallösungen von Convolutoren und von Differential-Differenzen-Operatoren mit konstanten Koeffizienten*, Dissertation, Kiel 1974

[10] Grudzinski, O.v.: *Examples of Solvable and Non-Solvable Convolution Equations in* K_p', $p\geq 1$, Pac.J.Math, 80, (1979), 561-574

[11] Grudzinski, O.v.: *Convolutions Gleichungen in Räumen von Beurling-Distributionen endlicher Ordnung*, Habilitationschrift, Kiel 1980

[12] Hasumi, M.: *Note on the n - dimensional Tempered Ultra-Distributions*, Tohoku Math.J., 13 (1961), 94-104

[13] Hörvath,J:: *Topological Vector Spaces and Distributions*, Addison Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. 1966

[14] Hörmander,L.: *On the Theory of General Partial Differential Operators*, Acta Math.,94(1955), 162-248

[15] Hörmander,L.: *Hypoelliptic Convolution Equations*, Math. Scand.,9 (1961),178-184

[16] Hörmander,L.: *On the Range of Convolution Operators*, Ann. Math.,76(1962),148-169

[17] Hörmander,L.: *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, Berlin 1963

[18] Lighthill,M.J.: *Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge 1960

[19] Malgrange,B.: *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et det équations de convolution*, Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 6 (1955-56), 271-355

[20] Pilipović,S.and Takači,A.: *Convolution Equations in a Countable Union of Exponential Distributions*, Zbornik PMF 10, Novi Sad, 1980 (in print)

[21] Pilipović,S. and Takači,A.: *The Space* $H'\{M_p\}$ *and Convolutors* , Proc. of the Moscow Conference on Gen. Functions 1980, 415-426

[22] Pilipović,S. and Takači,A.: *Solvability of Convolution Equations in* $H'\{M_p\}$, (to appear)

[23] Pilipović,S. and Takači,A.: *Hypoelliptic Convolution Equations in* $H'\{M_p\}$ (to appear)

[24] Sampson,G. and Zielezny,Z.: *Hypoelliptic Convolution Equations in* K_p' , $p>1$,Trans.Amer.Math.Soc., 223(1976),133--154

[25] Schaefer,H.H.: *Topological Vector Spaces*,Mc Millan Co., New York 1966

[26] Schwartz,L.: *Théorie des distributions, I,II*, Herman,Paris 1950 - 1951

[27] Sznajder,S. and Zielezny,Z.: *Solvability of Convolution Equations in* K_1', Proc.Amer.Math.Soc., 57(1976),103-106

[28] Sznajder,S. and Zielezny,Z.: *Solvability of Convolution Equations in* K_p', $p>1$, Pac.J.Math.,63(1976),539-544

[29] Sznajder,S. and Zielezny,Z.: *On some Properties of Convolution Operators in* K_1' *and* S', J.of Math.An. and Appl., 65(1978), 543-554

[30] Takači,A.: *On a Class of Distributions and Assymptotic Behavior,* Zbornik PMF Novi Sad br. 9 (1979),75-81

[31] Takači,A.: *On the Abelian Theorems for the Distributional Laplace Transformation,* Zbornik PMF Novi Sad br. 9 83-90

[32] Treves,F.: *Locally Convex Spaces and Linear Partial Differential Equations,* Springer Verlag, Berlin 1967

[33] Treves,F.: *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York 1975

[34] Wloka,J.: *Über die Gurewič-Hörmanderschen Distributionsräume,* Math.Ann., 160(1965),321-362

[35] Wloka,J.: *Über das Fundamentalprinzip für Differenzial - differenzen Operatoren,* Oberwolvach 1978

[36] Земанян,А.Х.: Интегральные преобразования обобщенных функций, Наука,Москва 1974

[37] Zielezny,Z.: *Hypoelliptic and Entire Elliptic Convolution Equations in Subspaces of the Space of Distributions,* I St.math.,28(1967),317-332

[38] Zielezny,Z.: *Hypoelliptic and Entire Elliptic Convolution Equations in Subspaces of the Space of Distributions,* II St.math., 32(1969),47-59

[39] Маринов,В.В.: Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS, Успехи мат. наук, 34,в.4(208), 1979,97-131