UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

α - PUTA INTEGRISANE POLUGRUPE OPERATORA SA PRIMENAMA U REŠAVANJU KOŠIJEVOG PROBLEMA

Doktorska disertacija

KANDIDAT:
MR MILORAD MIJATOVIĆ

MENTOR:
PROF. DR STEVAN PILIPOVIĆ

Novi Sad, 1996. godine

Sadržaj

Glava 0

Uvod

0.1 Uvodne napomene

U doktorskoj disertaciji će biti proučavani problemi u okviru teorije integrisanih polugrupa, njihove veze sa distribucionim polugrupama i primene u rešavanju diferencijalnih jednačina. Izložićemo ukratko razvoj teorije integrisanih polugrupa.

Intenzivniji razvoj integrisanih polugrupa počeo je radom Wolfganga Arendta, 1987. godine (cf. [3]). Osnovna ideja sastoji se u sledećem: Neka je $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0 - polugrupa na Banahovom prostoru E i neka je A njen generator. Za $n\in\mathbb{N}$, stavimo

$$S_n(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}T(s)\,ds, \qquad t\geq 0.$$

Tada familija $(S_n(t))_{t\geq 0}$ ima sledeće osobine:

(i) $S_n(0)=0$,

(ii) $t\to S_n(t)$ je jako neprekidna,

(iii) $S_n(t)S_n(s)=\frac{1}{(n-1)!}\left[\int\limits_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}S_n(r)dr-\int\limits_0^s(t+s-r)^{n-1}S_n(r)dr\right]$, t,s≥0.

Medjutim, Arendt je u ([3]) otišao korak dalje i posmatrao je proizvoljnu familiju jako neprekidnih operatora S: $[0,\infty)\to L(E)$, za koju je ispunjeno $R(\lambda)=\lambda^n\mathcal{L}(S)(\lambda)$ ($\mathcal{L}$ - Laplasova transformacija). Ako ta familija zadovoljava (i), (ii) i (iii) onda se ona naziva n-puta integrisana polugrupa. Posmatrano na ovaj način, familija jako neprekidnih operatora $(S(t))_{t\geq 0}$ je n-puta integrisana polugrupa, a nije nastala formalnom integracijom C_0 - polugrupe, ili neke druge polugrupe. Takodje, smatralo se da su integrisane polugrupe eksponencijalno ograničene, tj. da postoje konstante $M\geq 0$ i $\omega\geq 0$, takve, da je ispunjeno

$$\|S(t)\|\leq Me^{\omega t},\ t\geq 0.$$

Medjutim, Kelerman je, 1989. godine, u svom radu ([33]) konstruisao integrisanu polugrupu koja nije eksponencijalno ograničena. Ipak, Lipšicove integrisane polugrupe su uvek eksponencijalno ograničene (videti odeljak 2.3).

Dalji tok istraživanja integrisanih polugrupa išao je u smeru traženja odgovora na pitanje: da li je eksponencijalno ograničena, integrisana polugrupa, u smislu definicije Arendta, ipak nastala integracijom C_0 - polugrupe? Nojbrander i Time su, u svojim radovima ([51], [67]), pokazali da je odgovor na ovo pitanje pozitivan i da je svaka eksponencijalno ograničena integrisana polugrupa nastala integracijom C_0 - polugrupe, ali na podprostoru sa jačom normom. Dalje, Time i Lumer ([67], [39]) su dokazali da je svaka eksponencijalno ograničena integrisana polugrupa ustvari restrikcija integrisane C_0 - polugrupe na većem prostoru, ali sa slabijom normom.

Distribucione polugrupe uveo je Lions ([38]). Vezu izmedju distribucionih polugrupa i integrisanih polugrupa otkrio je Arendt ([3]), koristeći rezultat Sove ([65]). Naime, on je pokazao da je linearni operator A, koji je gusto definisan u Banahovom prostoru E, infinitezimalni generator n-puta integrisane polugrupe operatora ako i samo ako je A generator eksponencijalne distribucione polugrupe.

Polugrupe operatora veliku primenu imaju u rešavanju linearnih i nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Naime, ako je familija $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0 - polugrupa i ako je linearni operator A njen infinitezimalni generator, tada je rešenje apstraktnog Košijevog problema

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t),$$

$$u(0) = x,$$

za $x \in D(A)$, jednako $u(t) = T(t)x$. Zato u rešavanju apstraktnog Košijevog problema veliki značaj ima istraživanje veza izmedju infinitezimalnog generatora polugrupe i integrisane polugrupe. Posebno, te veze su istraživane u radovima [2], [3], [33], [24], [25], [51], [67]. Na kraju ovog kratkog pregleda napomenimo da je teorija polugrupa operatora, distribucionih polugrupa i integrisanih polugrupa prihvaćena kod većeg broja svetski priznatih matematičara, pa je i danas vrlo aktuelna u primenama u teoriji diferencijalnih jednačina, a i šire, u drugim naučnim disciplinama (biologija, fizika, hemija itd.).

Prva dva poglavlja teze posvećena su proučavanju osnova teorije uniformno neprekidnih polugrupa operatora i C_0 - polugrupa (glava 1) i n-puta integrisanih polugrupa ($n \in \mathbb{N}$) (glava2) i uglavnom su preuzeta iz poznatih monografija [21], [28], [57] i već pomenutih radova [3], [33], [51], [67].

Ostala poglavlja sadrže originalne rezultate koji su nastali zajedničkim radom M. Mijatovića, S. Pilipovića i F. Vajzovića [41], i M. Mijativića i S. Pilipovića [42], [43], [44], [45] i [46]. U glavi 3 je, teorija n-puta integrisanih polugrupa, proširena na α-puta integrisane polugrupe, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Napomenimo da je do sličnog rezultata istovremeno došao i M. Hieber [26]. U glavi 4 uvedene su 0-puta integrisane polugrupe i $\tilde{0}$-puta integrisane polugrupe, u glavi 5 neguste distribucione polugrupe, a u glavi 6 uvedene su α-puta integrisane polugrupe, $\alpha \in \mathbb{R}^-$.

0.2 Raspored izlaganja

U prvoj glavi su dati osnovi teorije uniformno neprekidnih polugrupa i C_0 - polugrupa, koji su od značaja za dalja izlaganja u ovom radu. To se posebno odnosi na veze izmedju C_0 - polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$ i njenog infinitezimalnog generatora A. Dalje, date su karakterizacije infinitezimalnog generatora A (Hile - Jošidina teorema).

U drugoj glavi uveden je pojam n-puta integrisanih polugrupa, $n\in\mathbb{N}$, u smislu definicije Arendta ([3]) i date su veze izmedju infinitezimalnog generatora A i n-puta integrisanih polugrupa. Takodje, u ovoj glavi je pokazano da su eksponencijalno ograničene integrisane polugrupe nastale integracijom C_0 - polugrupe na podprostoru (prema [67]) sa jačom normom, odnosno restrikcijom C_0 - polugrupe na podprostor sa slabijom normom ([67]). Na kraju ove glave je izložena teorija integrisanih polugrupa, primenjena na rešavanje odgovarajućeg Košijevog nehomogenog problema ([3]).

U trećoj glavi uveden je pojam α-puta integrisanih polugrupa, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, date su veze izmedju infinitezimalnog generatora A i α- puta integrisanih polugrupa i data je karakterizacija generatora te polugrupe. Dobijena teorija α-puta integrisanih polugrupa, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, primenjena je na rešavanje odgovarajućeg Košijevog nehomogenog problema. Takodje, dati su primeri α-puta integrisanih polugrupa. Rezultati u ovoj glavi izloženi su prema [41].

U četvrtoj glavi uveden je pojam 0-puta integrisanih polugrupa za znatno širu klasu operatora nego što je to uradjeno u [3], [23], [39], [33], [67] i dokazno je da su one eksponencijalne distribucione polugrupe ako je infinitezimalni generator A gusto definisan. U slučaju da infinitezimalni generator A nije gusto definisan, uveden je pojam $\tilde{0}$-puta integrisane polugrupe. Takodje, u ovoj glavi, pomoću

C_0 - polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$, uvedena je odgovarajuća distribuciona polugrupa $\mathcal{T}(\varphi,x) = \left(T*\check{\varphi}\right)(0)(x)$ i istraživane su njene osobine. Dobijena teorija $\tilde{0}$-puta integrisanih polugrupa primenjena je na rešavanje odgovarajućeg apstraktnog Košijevog nehomogenog problema. Rezultati u ovoj glavi izloženi su prema [42].

U petoj glavi uveden je pojam negustih distribucionih polugrupa i date su veze izmedju njih i n-puta integrisanih polugrupa. Takodje, data je veza izmedju infinitezimalnog generatora A i n-puta integrisanih polugrupa $(S_n(t))_{t\geq 0}$ koje nisu nastale integracijom C_0 - polugrupe. Rezultati u ovoj glavi izloženi su prema [43], [44] i [45].

U šestoj glavi uvode se i analiziraju α-puta integrisane polugrupe, $\alpha\in\mathbb{R}^{-}$. Takodje, istražuju se veze izmedju infinitezimalnog generatora A i α-puta integrisanih polugrupa i daje se karakterizacija infinitezimalnog generatora A. Dalje, istražuju se veze izmedju α-puta integrisanih polugrupa i distribucionih polugrupa. Dobijena teorija primenjena je na rešavanje apstraktnog Košijevog problema. Rezultati u ovoj glavi su izloženi prema [46].

Zahvaljujem se mentoru prof. dr Stevanu Pilipoviću na velikoj pomoći u izradi disertacije, koja je inače i bazirana na našem zajedničkom radu u ovoj oblasti.

Takodje, zahvaljujem se prof. dr Fikretu Vajzoviću, koji me je usmerio u ovu naučnu oblast i sa kojim sam započeo prva istraživanja.

Glava 1
Polugrupe ograničenih linearnih operatora

U ovoj glavi razmatrani su pojmovi i činjenice iz teorije polugrupa.

U prvom odeljku razmatrane su polugrupe ograničenih linearnih operatora koje su neprekidne u uniformnoj operativnoj topologiji u $t = 0$, ili, što je ekvivalentno, polugrupe koje su generisane ograničenim linearnim operatorima.

U drugom odeljku razmotrene su jako neprekidne polugrupe operatora ili C_0 - polugrupe.

U trećem odeljku data je karakterizacija generatora C_0 - polugrupa, prvo za polugrupe kontrakcija (Hille - Yosida teorema), a zatim proširenje na bilo koje C_0 - polugrupe. Inače, teorema 3.1 (Hille - Yosida), koja je dokazana 1948. godine, doprinela je kasnijem burnom razvoju teorije polugrupa i njenim primenama, posebno u teoriji linearnih i nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Razmatranje u ovoj glavi će ići prema [21], [57], [28], [7].

1.1 Uniformno neprekidne polugrupe ograničenih linearnih operatora

Neka je E Banahov prostor sa normom $\|\cdot\|$, i neka je $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ Banahov prostor ograničenih linearnih operatora iz E u E.

Definicija 1.1 Familija $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ ograničenih linearnih operatora iz E u E je *polugrupa ograničenih linearnih operatora* na E ako je ispunjeno:

(i) $T(0) = I$ (I je identički operator na E).

(ii) $T(t + s) = T(t)\, T(s)$, $t,s \geq 0$ (polugrupovna relacija).

Polugrupa ograničenih linearnih operatora $(T(t))_{t\geq 0}$ je *uniformno neprekidna* ako je

$$\lim_{t\downarrow 0}\|T(t) - I\| = 0 . \tag{1.1}$$

Na osnovu prethodne definicije, sledi da je, za uniformno neprekidnu polugrupu ograničenih operatora $(T(t))_{t\geq 0}$, ispunjeno:

$$\lim_{t\to s}\|T(t) - T(s)\| = 0 . \tag{1.2}$$

Linearan operator A, definisan na sledeći način:

$$D(A) := \left\{ x \in E;\ \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x - x}{t} \text{ postoji} \right\} \tag{1.3}$$

i

$$Ax := \lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)x - x}{t} \equiv \left.\frac{d^{+}T(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \qquad x \in D(A), \tag{1.4}$$

naziva se *infinitezimalni generator* (kraće *generator*), polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$, gde je D(A) domen operatora A.

Teorema 1.1 *Linearan operator* A *je generator uniformno neprekidne polugrupe ako i samo ako je* A *ograničen linearan operator.*

Dokaz. Neka je A ograničeni linearni operator na E. Stavimo

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}, \qquad A^0 = I \tag{1.5}$$

Desna strana (1.5) konvergira u normi za svako $t \geq 0$ i definiše ograničeni linearni operator. Takodje, iz (1.5) sledi $T(0) = I$. Da bi dokazali polugrupovnu relaciju, stavimo

$$T_n(t) = \sum_{j=0}^{n}\frac{(tA)^j}{j!} \quad , \quad T_n(s) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(sA)^i}{i!} .$$

Tada je

$$T_n(t)\,T_n(s)=\left[\sum_{j=0}^{n}\frac{(tA)^j}{j!}\right]\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{(sA)^i}{i!}\right]$$

i nakon množenja i sredjivanja, dobijamo

$$T_n(t)\,T_n(s)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{j=0}^{r}\frac{t^j s^{r-j}}{j!(r-j)!}A^r+\sum_{r=n+1}^{2n}\sum_{j=r-n}^{n}\frac{t^j s^{r-j}}{j!(r-j)!}A^r .$$

Sa druge strane imamo

$$T_n(t+s)=\sum_{r=0}^{n}\frac{(t+s)^r}{r!}A^r=\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}\left[\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}t^j s^{r-j}\right]A^r$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\sum_{j=0}^{r}\frac{t^j s^{r-j}}{j!(r-j)!}A^r .$$

Prema tome, imamo

$$T_n(t)\,T_n(s)-T_n(t+s)=\sum_{r=n+1}^{2n}\left[\sum_{j=r-n}^{n}\frac{t^j s^{r-j}}{j!(r-j)!}\right]A^r,$$

odnosno,

$$\|T_n(t)\,T_n(s)-T_n(t+s)\|\le\sum_{r=n+1}^{2n}\left[\sum_{j=r-n}^{n}\frac{|t|^j|s|^{r-j}}{j!(r-j)!}\right](\|A\|)^r \tag{1.6}$$

$$\le\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{1}{r!}\left[\sum_{j=0}^{r}\frac{r!}{j!(r-j)!}|t|^j|s|^{r-j}\right](\|A\|)^r=\sum_{r=n+1}^{2n}\frac{(|t|+|s|)^r}{r!}(\|A\|)^r$$

$$\le\sum_{r=n+1}^{\infty}\frac{(|t|+|s|)^r}{r!}(\|A\|)^r\le\frac{(|t|+|s|)^{n+1}}{(n+1)!}\|A\|^{n+1}e^{(|t|+|s|)\|A\|}.$$

Pustimo u (1.6) da $n\to\infty$. Tada dobijamo

$$T(t+s)=T(t)\,T(s).$$

Takodje, iz (1.5) dobijamo

$$\|T(t)-I\|\le t\|A\|e^{t\|A\|}, \tag{1.7}$$

$$\left\|\frac{T(t)-I}{t}-A\right\|\le\|A\|\,\|T(t)-I\|. \tag{1.8}$$

Puštajući u (1.7), odnosno (1.8) da $t\downarrow 0$, dobijamo da je $(T(t))_{t\ge0}$ uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora na E i da je A njen generator.

Pretpostavimo sada da je $(T(t))_{t\geq 0}$ uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora na E. Neka je ρ fiksno, dovoljno malo, takvo da je

$$\left\| I - \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} T(s)\,ds \right\| < 1.$$

Iz poslednje nejednakosti sledi da je $\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} T(s)\,ds$ invertibilan, odnosno, da je $\int_0^{\rho} T(s)\,ds$ invertibilan. Tada je

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{\rho} T(s)\,ds = \frac{1}{h}\left(\int_0^{\rho} T(h+s)\,ds - \int_0^{\rho} T(s)\,ds\right) = \left| \begin{matrix} h+s=u \\ ds = du \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{h+\rho} T(u)\,du - \int_0^{\rho} T(s)\,ds\right) = \frac{1}{h}\left(\int_{\rho}^{h+\rho} T(s)\,ds - \int_0^{h} T(s)\,ds\right),$$

odnosno,

$$\frac{T(h)-I}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\rho}^{h+\rho} T(s)\,ds - \int_0^{h} T(s)\,ds\right)\left(\int_0^{\rho} T(s)\,ds\right)^{-1}. \tag{1.9}$$

U (1.9) pustimo da $h \downarrow 0$. Tada $\frac{T(h)-I}{h}$ konvergira u normi ka ograničenom linearnom operatoru $\left(T(\rho)-I\right)\left(\int_0^{\rho} T(s)\,ds\right)^{-1}$ koji je generator polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$.

Iz same definicije polugrupe ograničenih linearnih operatora na E, jasno je, da polugrupa ima jedinstven generator. Takodje, teorema 1.1 ukazuje da uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora na E ima za generator ograničen linearan operator. Tačno je, takodje, da je svaki ograničen linearan operator na E, generator jedne uniformno neprekidne polugrupe ograničenih linearnih operatora. Sledeća teorema ukazuje da je tako dobijena polugrupa jedinstvena.

Teorema 1.2 *Neka su* $(T(t))_{t\geq 0}$ *i* $(S(t))_{t\geq 0}$ *uniformno neprekidne polugrupe ograničenih linearnih operatora na* E. *Ako je*

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)-I}{t} \tag{1.10}$$

tada je $T(t) = S(t)$ *za* $t \geq 0$.

Dokaz. Uzmimo fiksno $t_0 > 0$. Dokažimo da je $T(t) = S(t)$ za $0 \leq t \leq t_0$. Kako su $t \to \|T(t)\|$ i $t \to \|S(t)\|$ neprekidne funkcije, to postoji konstanta $C > 0$, takva da je $\|T(t)\|\,\|S(s)\| < C$ za $0 \le t,s \le t_0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada iz (1.10) neposredno sledi da postoji $\delta > 0$, takvo da je ispunjeno:

$$\frac{1}{h}\|T(h) - S(h)\| \le \frac{\varepsilon}{t_0 C}, \qquad 0 \le h \le \delta. \tag{1.11}$$

Neka je $0 \le t \le t_0$ i neka je $n \ge 1$, takvo da je $\frac{t}{n} < \delta$. Tada iz polugrupovne relacije i (1.11) dobijamo

$$\|T(t) - S(t)\| = \left\|T\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right)\right\|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)\right\|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1}\left\|T(n-k-1)\frac{t}{n}\right\|\left\|T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right\|\left\|S\left(\frac{kt}{n}\right)\right\|$$

$$\le Cn\cdot\frac{\varepsilon}{t_0 C}\cdot\frac{t}{n} \le \varepsilon.$$

Otuda je $T(t) = S(t)$ za $0 \le t \le t_0$.

Teorema 1.3 *Neka je* $(T(t))_{t\ge 0}$ *uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora na* E. *Tada*

(i) *Postoji konstanta* $\omega \ge 0$, *takva da je*

$$\|T(t)\| \le e^{\omega t}, \quad t \ge 0.$$

(ii) *Postoji jedinstven ograničen linearni operator* A, *takav da je* $T(t)=e^{tA}$, $t\ge 0$.

(iii) *Operator* A *iz (ii) je generator polugrupe* $(T(t))_{t\ge 0}$.

(iv) *Postoji* $\lim\limits_{h\downarrow 0}\frac{T(t+h) - T(t)}{h}$, *obeležavamo ga sa* $\frac{dT(t)}{dt}$ *i*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A, \quad t \ge 0.$$

Dokaz. Sva tvrdjenja teoreme 1.3 slede neposredno iz (ii). Zato ćemo dokazati samo tvrdjenje pod (ii).

Neka je $(T(t))_{t\ge 0}$ uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora na E. Iz teoreme 1.1 sledi egzistencija A. Neka je ograničeni linearni operator A generator polugrupe $(T(t))_{t\ge 0}$. Tada je A, takodje, generator polugrupe e^{tA}. Zaista,

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{e^{tA} - I}{t} = \lim_{t\downarrow 0}\frac{Ae^{tA}}{1} = A.$$

Na osnovu teoreme 1.2, tada je $T(t) = e^{tA}$, $t \ge 0$.

1.2 C_0 - polugrupe

Definicija 1.2 Polugrupa $(T(t))_{t\geq 0} \subset L(E)$ je *jako neprekidna* polugrupa ograničenih linearnih operatora ako je

(1.12) $$\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x, \qquad (\forall x \in E).$$

Jako neprekidnu polugrupu ograničenih linearnih operatora na E nazivamo *polugrupa klase* C_0, ili, kraće C_0 - *polugrupa.*

Teorema 1.4 *Neka je* $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0 - *polugrupa. Tada postoje konstante* $\omega \geq 0$, *i* $M \geq 1$, *takve da vredi*

(1.13) $$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t \geq 0.$$

Dokaz. Dokažimo da je, za proizvoljno $\eta > 0$, $\|T(t)\|$ ograničeno za $0 \leq t \leq \eta$. Ako to nije ispunjeno onda postoji niz $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(t_n \geq 0)$, takav da je $\lim\limits_{t\downarrow 0} t_n = 0$ i $\|T(t_n)\| \geq n$. Tada, na osnovu teoreme o uniformnoj konvergenciji, za $x \in E$ je $\|T(t_n)x\|$ neograničeni operator, što je suprotno (1.12). Prema tome je $\|T(t)\| \leq M$ za $0 \leq t \leq \eta$. Kako je $\|T(0)\| = 1$, to je $M \geq 1$. Neka je $\omega = \frac{1}{\eta}\ln M \geq 0$. Odavde je $M = e^{\omega\eta}$. Uzmimo $t \geq 0$ i stavimo $t = n\eta + \delta$, gde je $0 \leq \delta \leq \eta$. Tada, koristeći polugupovnu relaciju, imamo

$$\begin{aligned}\|T(t)\| &= \|T(n\eta+\delta)\| = \|T(n\eta)\cdot T(\delta)\| \\ &= \left\|T(\eta)^n \cdot T(\delta)\right\| \leq M^n \cdot M = M\cdot M^{\frac{t-\delta}{\eta}} \leq M\cdot M^{\frac{t}{\eta}} \\ &= Me^{\omega\eta\frac{t}{\eta}} = Me^{\omega t}.\end{aligned}$$

Teorema 1.5 *Neka je* $(T(t))_{t\geq 0} \subset L(E)$, C_0 - *polugrupa i neka je* A *njen generator. Tada za* $t \geq 0$,

(i) *za* $x \in E$, $t \to T(t)x$ *je neprekidna funkcija:* $\mathbb{R}_0^+ \to E$, gde je $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

(ii) *za* $x \in E$ *je*

(1.14) $$\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds = T(t)x.$$

(iii) *za* $x \in E$ je $\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ i

(1.15) $$A\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right) = T(t)x - x.$$

(iv) *za* $x \in D(A)$ *je* $T(t)x \in D(A)$ *i*

$$\frac{d\,T(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax. \tag{1.16}$$

(v) *za* $x \in D(A)$ *je*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(u)\,Ax\,du = \int_s^t A\,T(u)\,x\,du. \tag{1.17}$$

Dokaz.

(i) Neka je $x \in E$ i $t \geq 0$, $s > 0$. Tada

$$\|T(t+s)x - T(t)x\| \leq \|T(t)\|\,\|T(s)x - x\|$$
$$\leq Me^{\omega t}\,\|T(s)x - x\|,$$

i za $t \geq s \geq 0$

$$\|T(t-s)x - T(t)x\| \leq \|T(t-s)\|\,\|x - T(s)x\|$$
$$\leq Me^{\omega t}\|x - T(s)x\|.$$

Ako u prethodnim nejednakostima $s \downarrow 0$, dobijamo da je $t \to T(t)x$ ($x \in E$) neprekidna funkcija.

(ii) Neposredno sledi iz neprekidnosti $t \to T(t)x$.

(iii) Neka je $x \in E$ i $s > 0$. Tada je

$$\frac{T(s)-I}{s}\int_0^t T(u)\,x\,du = \frac{1}{s}\left(\int_0^t T(s+u)\,x\,du - \int_0^t T(u)\,x\,du\right) = \begin{vmatrix} s+u=v \\ du=dv \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{s}\int_s^{s+t} T(v)\,x\,dv - \frac{1}{s}\int_0^t T(v)\,x\,dv = \frac{1}{s}\int_t^{s+t} T(v)\,x\,dv - \frac{1}{s}\int_0^s T(v)\,x\,dv.$$

Pustimo sada da $s \downarrow 0$. Tada dobijamo $\int_0^t T(s)\,x\,ds \in D(A)$ i

$$A\left(\int_0^t T(s)\,x\,ds\right) = T(t)x - x.$$

(iv) Neka je $x \in D(A)$ i $s > 0$. Tada je

$$\frac{T(s)-I}{s}T(t)x = T(t)\,\frac{T(s)-I}{s}\,x \to T(t)\,Ax \tag{1.18}$$

kada $s \downarrow 0$. No, (1.18) takodje implicira

$$\frac{d^+\,T(t)x}{dt} = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Dokažimo da postoji levi izvod od $T(t)x$ i da je jednak $T(t)Ax$.

Zaista,

$$\lim_{s\downarrow 0}\left[\frac{T(t)x - T(t-s)x}{s} - T(t)Ax\right]$$

$$= \lim_{s\downarrow 0} T(t-s)\left[\frac{T(s)x - x}{s} - Ax\right] + \lim_{s\downarrow 0}\left[T(t-s)Ax - T(t)Ax\right].$$

Oba izraza na desnoj strani teže ka nuli kada $s \downarrow 0$. Prvi zato jer je $x\in D(A)$ i $\|T(t-s)\|$ ograničen za $0 \le s \le t$, a drugi zbog jake neprekidnosti $T(t)$.

(v) Integracijom (1.16) dobijamo

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(u)Ax\,du = \int_s^t A\,T(u)x\,du.$$

Teorema 1.6 *Neka je operator* A *generator* C_0 *- polugrupe* $(T(t))_{t\ge 0} \subset L(E)$. *Tada je* $D(A)$ *gust u* E *i* A *zatvoren linearan operator.*

Dokaz. Neka je $x\in E$. Stavimo

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,ds.$$

Tada je na osnovu teoreme 1.5 $x_t\in D(A)$ i $\lim_{t\downarrow 0} x_t = x$. Prema tome je $\overline{D(A)} = E$. Linearnost operatora A je očigledna. Dokažimo njegovu zatvorenost. Neka je $x_n\in D(A)$ i

$$\begin{aligned} x_n &\to x \\ Ax_n &\to y \end{aligned} \qquad (n\to\infty).$$

Tada, na osnovu teoreme 1.5, imamo

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(u)Ax_n\,du. \tag{1.19}$$

Integrand na desnoj strani (1.19) konvergira uniformno na ograničenom intervalu ka $T(u)y$. Neka u (1.19) $n\to\infty$. Tada imamo

$$T(t)x - x = \int_0^t T(u)y\,du. \tag{1.20}$$

Podelimo (1.20) sa $t > 0$, tj.

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(u)y\,du. \tag{1.21}$$

Neka u (1.21) $t \downarrow 0$. Tada, na osnovu teoreme 1.5, dobijamo $x\in D(A)$ i $Ax = y$.

Slično kao i za uniformno neprekidne polugrupe ograničenih operatora, tako i za C_0 - polugrupe, generator A generiše jedinstvenu polugrupu.

Teorema 1.7 *Neka su* $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ *i* $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$, C_0 *- polugrupe i neka su* A *i* B *njihovi generatori, respektivno. Ako je* A=B *tada je* $T(t) = S(t)$, $t \geq 0$.

Dokaz. Neka je $x \in D(A)=D(B)$. na osnovu teoreme 1.5 neposredno sledi da je funkcija $s \to T(t-s)S(s)x$ diferencijabilna. Tada je

$$\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x = -A\,T(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x$$

$$= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.$$

Otuda je funkcija $s \to T(t-s)S(s)x$ konstantna i prema tome su njene vrednosti u $s=0$ i $s=t$ jednake, tj. $T(t)x = S(t)x$, gde je $x \in D(A)=D(B)$. Budući da je $D(A)$ gust u E (teorema 1.6) i operatori $T(t)$ i $S(t)$ su ograničeni, tada je $T(t)x = S(t)x$ za svako $x \in E$.

1.3 Karakterizacija generatora C_0 - polugrupa

Neka je $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$, C_0 - polugrupa. Tada, na osnovu teoreme 1.4, postoje konstante $\omega \geq 0$ i $M \geq 1$, takve da je $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$. Ako je $\omega = 0$, tada je

$$\|T(t)\| \leq M, \quad t \geq 0$$

i kažemo da je polugrupa *uniformno ograničena.* Ako je, pak, još i $M = 1$, odnosno ako je

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad t \geq 0,$$

tada kažemo da je $(T(t))_{t\geq 0}$ *polugrupa kontrakcija.*

Neka je A linearan operator definisan u E. U teoriji polugrupa, jedno od osnovnih pitanja je, koji su to potrebni i dovoljni uslovi da bi operator A bio generator C_0 - polugrupe? Odgovor na ovo pitanje daćemo prvo za C_0 - polugrupu kontrakcija $(T(t))_{t\geq 0}$. Napomenimo da operator A nije obavezno ograničen. Takodje, podsetimo se da je rezolventni skup $\rho(A)$ operatora A, skup svih kompleksnih brojeva λ za koje $\lambda I - A$ ima inverzan elemenat, definisan gotovo svuda i za koje je $R(\lambda,A) = (\lambda I - A)^{-1}$ ograničeni linearni operator. Familija $R(\lambda,A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ naziva se *rezolventa* operatora A.

Inače, u primenama, posebno u parcijalnim diferencijalnim jednačinama, odnos izmedju polugrupe $(T(t))_{t \geq 0}$ i njenog generatora A je vrlo značajan. Naime, za $x \in D(A)$, $T(t)x$ je rešenje Košijevog problema

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t)$$

$$u(0) = x.$$

Teorema 1.8 (Hille-Yosida) *Linearni operator* A *je generator* C_0 *- polugrupe kontrakcija* $(T(t))_{t\geq 0} \subset L(E)$, *ako i samo ako je*

(i) A *zatvoren operator i* $\overline{D(A)} = E$;

(ii) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ *i za svako* $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda > 0$, *je*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{1.22}$$

Dokaz. (Potreban uslov) Neka je operator A generator C_0 - polugrupe kontrakcija $(T(t))_{t\geq 0}$. Tada je, na osnovu teoreme 1.6, $\overline{D(A)} = E$. Za $\lambda > 0$ i $x \in E$, stavimo

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt. \tag{1.23}$$

Integral odredjen sa (1.23) postoji kao nesvojstveni Rimanov integral jer je funkcija $t \to T(t)x$ neprekidna i uniformno ograničena. Na taj način je sa (1.23) odredjen ograničen linearan operator $R(\lambda)$, koji zadovoljava,

$$\|R(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \|T(t)x\|\,dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|. \tag{1.24}$$

Takodje, za $s > 0$, imamo

$$\begin{aligned} \frac{T(s)-I}{s} R(\lambda)x &= \frac{T(s)-I}{s} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt \\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(s+t)x\,dt - \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt = \left| \begin{matrix} s+t=u \\ dt=du \end{matrix} \right| \\ &= \frac{1}{s}\int_s^\infty e^{-\lambda(u-s)}\, T(u)x\,du - \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt \\ &= \frac{e^{\lambda s}}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda u} T(u)x\,du - \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt - \frac{e^{\lambda s}}{s}\int_0^s e^{-\lambda u} T(u)x\,du \\ &= \frac{e^{\lambda s}-1}{s}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt - \frac{e^{\lambda s}}{s}\int_0^s e^{-\lambda t} T(t)x\,dt. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Neka u (1.25) $s \downarrow 0$. Tada izraz na desnoj strani teži $\lambda R(\lambda)x - x$. Prema tome imamo za $x \in E$ i $\lambda > 0$ da je $R(\lambda)x \in D(A)$ i

$$A R(\lambda)x = \lambda R(\lambda)x - x.$$

Otuda je

$$(\lambda I - A)R(\lambda)x = x. \tag{1.26}$$

Takodje, za $x \in D(A)$, imamo

$$(1.27) \qquad R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(t)Ax\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,AT(t)x\,dt$$

$$= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(t)x\,dt\right) = AR(\lambda)x\,.$$

Iz (1.26) i (1.27) sledi, za $x \in D(A)$

$$(1.28) \qquad R(\lambda)(\lambda I - A)x = x\,,$$

odnosno operator $R(\lambda)$ je inverzan operator operatora $\lambda I - A$ i postoji za $\lambda > 0$ i zadovoljava (1.22).

Pre nego što dokažemo da su pretpostavke (i) i (ii) iz prethodne teoreme dovoljne da bi operator A bio generator C_0 - polugrupe kontrakcija, dokažimo nekoliko lema.

Lema 1.9 *Neka linearni operator* A *zadovoljava pretpostavke (i) i (ii) iz teoreme 1.8. Tada je*

$$(1.29) \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x\,, \qquad x \in E.$$

Dokaz. Neka je $x \in D(A)$. Tada je

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|AR(\lambda, A)x\|$$

$$= \|R(\lambda, A)Ax\| \le \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0, \quad \lambda \to \infty\,.$$

Medjutim, $D(A)$ je gust u E i $\|\lambda R(\lambda, A)\| \le 1$ i tada

$$\lambda R(\lambda)x \to x,$$

kad $\lambda \to \infty$ i $x \in E$.

Za $\lambda > 0$ definišimo *Jošidinu (Yosida) aproksimaciju* operatora A sa

$$(1.30) \qquad A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

Lema 1.10 *Neka linearni operator* A *zadovoljava pretpostavke (i) i (ii) iz teoreme 1.8. Ako je* A_λ *Jošidina aproksimacija operatora* A *tada je*

$$(1.31) \qquad \lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax$$

za $x \in D(A)$.

Dokaz. Neka je $x \in D(A)$. Tada, prema lemi 1.9 i definiciji A_λ, imamo

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax\,.$$

Lema 1.11 *Neka linearni operator* A *zadovoljava pretpostavke (i) i (ii) iz teoreme 1.8. Ako je* A_λ *Jošidina aproksimacija operatora* A *tada je* A_λ *generator uniformno neprekidne polugrupe kontrakcija* e^{tA_λ}. *Osim toga, za svako* $x \in E$, $\lambda, \mu \geq 0$, *ispunjeno je*

$$\left\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|. \tag{1.32}$$

Dokaz. Iz (1.30) jasno je, da je A_λ ograničeni linearni operator, i prema teoremi 1.2 je generator uniformno neprekidne polugrupe e^{tA_λ} ograničenih operatora. Takodje je

$$\left\| e^{tA_\lambda} \right\| = \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda,A) - \lambda t} \right\| = e^{-\lambda t} \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)} \right\|$$

$$\leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda,A)\|} \leq e^{-\lambda t} e^{t\lambda^2 \frac{1}{\lambda}} = 1$$

i prema tome, e^{tA_λ} je polugrupa kontrakcija. Jasno je, na osnovu definicije, da e^{tA_λ}, e^{tA_μ}, A_λ, A_μ komutiraju jedan sa drugim. Prema tome je

$$\left\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \right\| = \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x \right) ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^1 t e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x) ds \right\|$$

$$\leq \int_0^1 t \left\| e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} (A_\lambda x - A_\mu x) \right\| ds \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\|.$$

Dokaz teoreme 1.8 (Dovoljan uslov) Neka je $x \in D(A)$. Tada je

$$\left\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \right\| \leq t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| \tag{1.33}$$

$$\leq t \left\| A_\lambda x - Ax \right\| + t \left\| Ax - A_\mu x \right\|.$$

Iz leme 1.11 i (1.33) sledi, da za $x \in D(A)$, $e^{tA_\lambda} x$ konvergira kada $\lambda \to \infty$ i konvergencija je uniformna na ograničenom intervalu. Budući da je D(A) gust u E i $\left\| e^{tA_\lambda} \right\| \leq 1$, sledi

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x = T(t) x, \quad x \in E. \tag{1.34}$$

Konvergencija u (1.34) je uniformna na ograničenom intervalu. Iz (1.34) jednostavno se dobija da T(t) zadovoljava polugrupovnu relaciju, da je T(0) = I i $\|T(t)\| \leq 1$. Isto tako, $t \to T(t)x$ je neprekidna funkcija za $t \geq 0$ kao uniformna konvergencija neprekidne funkcije $t \to e^{tA_\lambda} x$. Prema tome $(T(t))_{t \geq 0}$ je C_0 - polugrupa kontrakcija. Dokažimo da je A generator polugrupe $(T(t))_{t \geq 0}$. Neka je $x \in D(A)$. Tada, iz (1.34) i na osnovu teoreme 1.5, imamo

$$(1.35)\qquad T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty}\left(e^{tA_\lambda}x - x\right)$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x\,ds = \int_0^t T(s)Ax\,ds.$$

Poslednja relacija sledi iz uniformne konvergencije $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ ka $T(t)Ax$ na konačnom intervalu. Neka je B generator polugrupe $T(t)$ i neka je $x\in D(A)$. Podelimo (1.35) sa $t > 0$, tj.

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\,ds$$

i pustimo da $t \downarrow 0$. Tada je $x\in D(B)$ i $Bx = Ax$. Prema tome je $A \subseteq B$. Kako je B generator polugrupe $T(t)$ sledi, iz potrebnog uslova, da je $1\in\rho(B)$. Sa druge strane, pretpostavljamo (pretpostavka (ii)) da je $1\in\rho(A)$. Kako je $A \subseteq B$, $(I-B)D(A) = (I-A)D(A) = E$, imamo $D(B) = (I-B)^{-1}E = D(A)$ i, prema tome, $A = B$.

Posledica 1.12 *Neka je* A *generetor* C_0 - *polugrupe kontrakcija i neka je* A_λ *Jošidina aproksimacija operatora* A. *Tada je*

$$(1.36)\qquad T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x.$$

Dokaz. Na osnovu dokaza teoreme 1.8 sledi da desna strana (1.36) definiše C_0 - polugrupu kontrakcija $S(t)$ čiji je generator A. Tada, na osnovu teoreme 1.7, sledi $T(t) = S(t)$, $t \geq 0$.

Posledica 1.13 *Neka je* A *generator* C_0 - *polugrupe kontrakcija* $(T(t))_{t\geq 0}$. *Rezolventni skup operatora* A *sadrži skup* $\{\lambda\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ *i*

$$(1.37)\qquad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}.$$

Dokaz. Neka je

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt.$$

Tada je $R(\lambda)x$ dobro definisan za sve λ koji zadovoljavaju $\mathrm{Re}\lambda > 0$. Iz dokaza potrebnog uslova u teoremi 1.8 sledi da je $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ i prema tome je $\{\lambda;\ \mathrm{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$. Takodje, (1.37) neposredno sledi iz definicije $R(\lambda)$.

Neka je $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0 - polugrupa koja zadovoljava $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ $(\omega \geq 0)$. Stavimo $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$. Tada je $(S(t))_{t\geq 0}$ C_0 - polugrupa kontrakcija jer je

$$\|S(t)\| = \left\|e^{-\omega t}T(t)\right\| \leq e^{-\omega t}\|T(t)\| \leq e^{-\omega t}e^{\omega t} = 1.$$

Ako je A generator C_0 - polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$ tada je $A - \omega I$ generator polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$. Zaista, imamo za $x\in D(A)$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{S(t)x-x}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\frac{e^{-\omega t}T(t)x-x}{t}=\lim_{t\downarrow 0}\left[\frac{e^{-\omega t}T(t)x-e^{-\omega t}x}{t}+\frac{e^{-\omega t}x-x}{t}\right]$$

$$=Ax-\omega x=(A-\omega I)x\,.$$

Takodje, ako je A generator C_0 - polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ tada je $A+\omega I$ generator polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Ustvari, prethodna primedba nam omogućava da damo karakterizaciju generatora C_0 - polugrupe koja zadovoljava $\|T(t)\|\leq e^{\omega t}$ $(t\geq 0)$.

Posledica 1.14 *Linearni operator* A *je generator* C_0 - *polugrupe koja zadovoljava* $\|T(t)\|\leq e^{\omega t}$ *ako i samo ako je ispunjeno*

(i) A *je zatvoren operator i* $\overline{D(A)}=E$.

(ii) $\{\lambda\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}\lambda=0,\ \mathrm{Re}\lambda>\omega\}\subset\rho(A)$ *i*

$$\|R(\lambda,A)\|\leq\frac{1}{\lambda-\omega}\,. \tag{1.38}$$

Na osnovu prethodnih rezultata, može se dati karakterizacija generatora proizvoljne C_0 - polugrupe ograničenih linearnih operatora. Prethodno, dokažimo sledeću lemu.

Lema 1.15 *Neka je* A *lineran operator za koji je* $(0,\infty)\subset\rho(A)$ *i neka je*

$$\left\|\lambda^n R(\lambda,A)^n\right\|\leq M,\quad n\in\mathbb{N},\ \lambda>0. \tag{1.39}$$

Tada postoji norma $|\cdot|$ *na* E *koja je ekvivalentna sa originalnom normom* $\|\cdot\|$ *na* E *i zadovoljava*

$$\|x\|\leq|x|\leq M\|x\|,\qquad x\in E \tag{1.40}$$

i

$$|\lambda R(\lambda,A)x|\leq|x|,\qquad x\in E,\ \lambda>0. \tag{1.41}$$

Dokaz. Za $\mu>0$ stavimo

$$\|x\|_\mu=\sup_{n\geq 0}\left\|\mu^n R(\mu,A)^n x\right\|. \tag{1.42}$$

Tada je

$$\|x\|\leq\|x\|_\mu\leq M\|x\| \tag{1.43}$$

i

$$\|\mu R(\mu,A)\|_\mu\leq 1\,. \tag{1.44}$$

Dokažimo da je

$$\|\lambda R(\lambda,A)\|_\mu\leq 1\quad \text{za } 0<\lambda\leq\mu. \tag{1.45}$$

Zaista, ako je $y=R(\lambda,A)x$, tada na osnovu rezolventne jednakosti sledi

$$y = R(\lambda, A)x = R(\mu, A)[x + (\mu - \lambda)y],$$

odnosno, koristeći (1.44), imamo

$$\|y\|_\mu \le \frac{1}{\mu}\|x\|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\|y\|_\mu .$$

Otuda je $\lambda\|y\|_\mu \le \|x\|_\mu$. Takodje se iz (1.40) i (1.45) dobija

(1.46) $$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \le \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_\mu \le \|x\|_\mu, \quad 0 < \lambda \le \mu.$$

Uzmimo u (1.46) supremum za $n \ge 0$. Tada dobijamo $\|x\|_\lambda \le \|x\|_\mu$, $0 < \lambda \le \mu$. Definišimo

(1.47) $$|x| = \lim_{\mu\to\infty}\|x\|_\mu .$$

Tada iz (1.43) dobijamo

$$\|x\| \le |x| \le M\|x\|, \qquad x \in E.$$

U (1.46) stavimo $n = 1$. Tada dobijamo

$$\|\lambda R(\lambda, A)x\|_\mu \le \|x\|_\mu .$$

U prethodnoj jednakosti pustimo da $\mu \to \infty$. Tada dobijamo

$$|\lambda R(\lambda, A)x| \le |x|, \qquad x \in E, \ \lambda > 0.$$

Teorema 1.16 *Linearni operator* A *je generator* C_0 *- polugrupe* $(T(t))_{t\ge 0}$ *koja zadovoljava* $\|T(t)\| \le M$ $(M \ge 1)$ *ako i samo ako je*

(i) A *zatvoren i* D(A) *gust u* E.

(ii) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$

(1.48) $$\|R(\lambda, A)^n\| \le \frac{M}{\lambda^n}, \quad \lambda > 0, \ n \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Neka je $(T(t))_{t\ge 0}$ C_0 - polugrupa u Banahovom prostoru E i neka je A njen generator. Ako iz originalne norme $\|\cdot\|$ predjemo na ekvivalentnu normu $|\cdot|$, $(T(t))_{t\ge 0}$ ostaje C_0 - polugrupa na E sa novom normom i istim generatorom A. Takodje, operator A je zatvoren i D(A) je gust u E jer su sve to topologijske osobine koje se ne menjaju pri prelasku na ekvivalentne norme na prostoru E.

Neka je operator A generator C_0 - polugrupe koja zadovoljava $\|T(t)\| \le M$. Stavimo

(1.49) $$|x| = \sup_{t\ge 0}\|T(t)x\| .$$

Tada je

$$\|x\| \le |x| \le M\|x\|$$

i prema tome $|\cdot|$ je norma u E koja je ekvivalentna normi $\|\cdot\|$ u E. Takodje je

$$|T(t)x| = \sup_{s\geq 0}\|T(s)T(t)x\| \leq \sup_{s\geq 0}\|T(s)x\| = |x| \tag{1.50}$$

i $(T(t))_{t\geq 0}$ je polugrupa kontrakcija u E sa datom normom $|\cdot|$. Na osnovu teoreme 1.8 (Hille - Yosida) A je zatvoren, D(A) je gust u E i $|R(\lambda, A)| \leq \frac{1}{\lambda}$ za $\lambda > 0$. Tada, iz (1.49) i (1.50), imamo

$$\|R(\lambda, A)^n x\| \leq |R(\lambda, A)^n x| \leq \frac{1}{\lambda^n}|x| \leq \frac{M}{\lambda^n}\|x\|, \quad x \in E$$

i prema tome, pretpostavke (i) i (ii) su potrebne.

Neka su pretpostavke (i) i (ii) zadovoljene. Na osnovu leme 1.15 postoji norma $|\cdot|$ koja zadovoljava (1.40) i (1.41). Posmatrajmo prostor E sa novom normom $|\cdot|$. U odnosu na novu normu A je zatvoren operator i D(A) je gust u E i

$$|R(\lambda, A)| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \text{za } \lambda > 0 \text{ i } (0,\infty) \subset \rho(A).$$

Na osnovu teoreme 1.8 linearni operator A je generator C_0 - polugrupe kontrakcija na E sa novom normom $|\cdot|$. Vratimo se na originalnu normu u E. Tada linearni operator A ostaje generator C_0 - polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$ i

$$\|T(t)x\| \leq |T(t)x| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad x \in E.$$

Otuda je $\|T(t)\| \leq M$.

Neka je sada $(T(t))_{t\geq 0}$ proizvoljna C_0 - polugrupa na E. Tada postoje konstante $\omega \geq 0$ i $M \geq 1$ (teorema 1.4), takve da je ispunjeno

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Posmatrajmo polugrupu $S(t) = e^{-\omega t}\,T(t)$. Tada je

$$\|S(t)\| = \|e^{-\omega t}\,T(t)\| \leq e^{-\omega t}\,Me^{\omega t} = M.$$

Takodje, ako je A generator C_0 - polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$, tada je $A - \omega I$ generator C_0 - polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$.

Prethodna činjenica nam omogućava da damo sledeću teoremu:

Teorema 1.17 *Linearni operator* A *je generator* C_0 *- polugrupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *koja zadovoljava* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ *ako i samo ako je*

(i) A *zatvoren i* D(A) *gust u* E.

(ii) $(\omega,\infty) \subset \rho(A)$ *i*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega, \; n \in \mathbb{N}. \tag{1.51}$$

Dokaz. Definišimo

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt.$$

Budući da je $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$, $R(\lambda)$ je dobro definisan za sve λ koji zadovoljavaju $\mathrm{Re}\lambda>\omega$. Slično dokazu teoreme 1.8, može se dokazati da je $R(\lambda) = R(\lambda,A)$. Pretpostavimo da je $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Tada je

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda,A)x = \frac{d}{d\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt = \int_0^\infty (-t)e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt.$$

Nastavljajući proces dalje, indukcijom dobijamo

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda,A)x = (-1)^n\int_0^\infty t^n\, e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt. \tag{1.52}$$

Sa druge strane, iz rezolventne jednačine

$$R(\lambda)-R(\mu) = (\mu-\lambda)R(\lambda,A)R(\mu,A)$$

sledi da je za svako $\lambda\in\rho(A)$, $\lambda \to R(\lambda,A)$ holomorfna funkcija i

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda,A) = -R(\lambda,A)^2.$$

Nastavljajući proces dalje, indukcijom dobijamo

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda,A) = (-1)^n\, n!R(\lambda,A)^{n+1}. \tag{1.53}$$

Iz (1.52) i (1.53) dobijamo

$$R(\lambda,A)^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-\lambda t}\, T(t)x\,dt. \tag{1.54}$$

Zato je

$$\left\|R(\lambda,A)^n x\right\| \le \frac{M}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{(\omega-\mathrm{Re}\lambda)t}\,\|x\|\,dt = \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n}\|x\|.$$

Napomenimo da smo u prethodnoj nejednakosti iskoristili činjenicu da je svaki realan λ, $\lambda > \omega$, u $\rho(A)$, što zajedno za (1.51) implicira da je svaki kompleksan λ, koji zadovoljava $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, u $\rho(A)$, i

$$\left\|R(\lambda,A)^n\right\| \le \frac{M}{(\mathrm{Re}\lambda-\omega)^n},\quad \mathrm{Re}\lambda > \omega,\ n\in\mathbb{N}. \tag{1.55}$$

Teorema 1.18 *Neka je* A *generator* C_0 *- polugrupe* $(T(t))_{t\ge0}$ *na* E *i neka je* $A_\lambda = \lambda AR(\lambda,A)$ *Jošidina aproksimacija. Tada je*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x. \tag{1.56}$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $\|T(t)\| \le M$. U dokazu teoreme 1.16 dokazali smo, da je u odnosu na novu normu $|||\cdot|||$ koja je ekvivalentna sa originalnom normom $\|\cdot\|$ na E, $(T(t))_{t\ge 0}$ je C_0 - polugrupa kontrakcija. Iz posledice 1.12 neposredno sledi da $|||e^{tA_\lambda}x - T(t)x||| \to 0$ kada $\lambda \to \infty$ za svako $x\in E$. Budući da je norma $|||\cdot|||$ ekvivalentna normi $\|\cdot\|$ to (1.56) sledi u E. U opštem slučaju kada je $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$ uzmimo prvo da je $\omega \le 0$. Tada je $\|T(t)\| \le M$ i dokaz je proveden. Preostaje još da se dokaže slučaj $\omega > 0$.

Neka je $\omega > 0$. Tada je $\lambda \to \|e^{tA_\lambda}\|$ ograničeno za $\lambda > 2\omega$. Zaista,

$$\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-\lambda t}\left\|e^{\lambda^2 R(\lambda,A)t}\right\| \le e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}t^k\|R(\lambda,A)^k\|}{k!} \tag{1.57}$$

$$\le Me^{\frac{\lambda\omega}{\lambda-\omega}t} \le Me^{2\omega t}.$$

Posmatrajmo uniformno neprekidnu polugrupu $S(t) = e^{-\omega t}T(t)$. Njen generator je $A-\omega I$. Iz prvog dela dokaza imamo

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(A-\omega I)_\lambda + \omega t}x, \quad x\in E. \tag{1.58}$$

Imamo

$$(A-\omega I)_\lambda + \omega I = A_{\lambda+\omega} + H(\lambda),$$

gde je

$$H(\lambda) = 2\omega I - \omega(\omega + 2\lambda)R(\lambda+\omega, A)$$

$$= \omega\left[\omega R(\lambda+\omega,A) - 2AR(\lambda+\omega,A)\right].$$

Tada je

$$\|H(\lambda)\| \le 2\omega + \left(2\omega + \frac{\omega^2}{\lambda}\right)M$$

i za $x\in D(A)$ je

$$\|H(\lambda)x\| \le \frac{M}{\lambda}\left(\omega^2\|x\| + 2\omega\|Ax\|\right) \to 0, \quad \lambda\to\infty.$$

Stoga $H(\lambda)x \to 0$ kad $\lambda\to\infty$ za $x\in E$.

Kako je

$$\|e^{tH(\lambda)}x - x\| \le te^{t\|H(\lambda)\|}\|H(\lambda)x\|$$

dobijamo

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tH(\lambda)}x = x, \quad x\in E. \tag{1.59}$$

Operatori $H(\lambda)$ i $A_{\lambda+\omega}$ komutiraju i ispunjeno je

$$\|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| \le \|e^{tA_\lambda + tH(\lambda-\omega)}x - T(t)x\| + \|e^{tA_\lambda}\|\|e^{tH(\lambda-\omega)}x - x\|. \tag{1.60}$$

Kada $\lambda \to \infty$ prvi deo desne strane u (1.60) teži nuli na osnovu (1.58), a drugi deo na osnovu (1.57) i (1.59). Prema tome je

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x = T(t)x, \quad x\in E.$$

Definicija 1.3 Neka je $\Delta \subset \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva). Familija $(R(\lambda))_{\lambda\in\Delta}$ ograničenih linearnih operatora na E koja zadovoljava

(1.61) $$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda)\, R(\mu), \quad \lambda,\mu \in \Delta.$$

naziva se *pseudorezolventa* na Δ.

Neka je dat operator $R: (\omega,\infty) \to L(E)$ $(\omega\in\mathbb{R})$. Reći ćemo da je R *Laplasova transformacija,* ili kraće, *$\mathcal{L}$ - transformacija* ako postoji jako neprekidan operator $S: [0,\infty) \to L(E)$ koji zadovoljava $\|S(t)\| \le Me^{\omega t}$ $(t \ge 0)$ za neko $M \ge 0$, takav da

$$R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt \quad (\mathrm{Re}\lambda > \omega).$$

U ovom slučaju $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt$ $(x\in E,\ \mathrm{Re}\lambda > \omega)$ predstavlja Bohnerov integral koji koincidira sa nesvojstvenim Rimanovim integralom. Pod $\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt \in L(E)$ podrazumevamo operator $x \to \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt$.

Teorema 1.19 *Neka je* $T: [0,\infty) \to L(E)$ *jako neprekidan operator, takav da je* $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$ $(t \ge 0)$, $M \in \mathbb{R}^+, \omega \in \mathbb{R}$. *Neka je* $R(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt$, $(\mathrm{Re}\lambda > \omega)$. *Tada je* $(R(\lambda))_{\mathrm{Re}\lambda>\omega}$ *pseudorezolventa ako i samo ako je*

(1.62) $$T(t)\,T(s) = T(t + s) \quad (t,s \ge 0).$$

Dokaz. Neka je $(R(\lambda))_{\mathrm{Re}\lambda>\omega}$ pseudorezolventa i neka je $\mathrm{Re}\lambda, \mathrm{Re}\mu > \omega$. Tada je

(1.63) $$R(\lambda)R(\mu) = \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-\mu s} T(s)\,ds\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s} T(t)\,T(s)\,ds\,dt.$$

Sa druge strane, imamo

(1.64) $$\frac{1}{\mu - \lambda}[R(\lambda) - R(\mu)] = \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} R(\lambda)\,dt - \int_0^\infty \frac{1}{\mu - \lambda} e^{(\lambda-\mu)t} e^{-\lambda t} T(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)\,ds\,dt - \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)\,ds\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_t^\infty e^{-\lambda s} T(s)\,ds\,dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_t^\infty e^{-\lambda(s-t)} T(s)\,ds\,dt$$

$$= \begin{vmatrix} s-t=u \\ ds=du \end{vmatrix} = \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^\infty e^{-\lambda u} T(u+t)\,du\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s} T(t+s)\,ds\,dt.$$

Na osnovu jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije [72] iz (1.63) i (1.64), imamo

$$T(t)\,T(s) = T(t+s), \quad (t,s \geq 0).$$

Teorema 1.20 *Linearan operator* A *na* E *je generator* C_0 *- polugrupe* $(T(t))_{t\geq 0}$ *ako i samo ako postoji* $\omega \in \mathbb{R}$, *takav da je* $(\omega,\infty) \subset \rho(A)$ *i da je* R: $(\omega,\infty) \to L(E)$, *definisan sa* $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ $\mathcal{L}$ *- transformacija polugrupe generisane sa* A.

Dokaz. Neka je

$$R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,\lambda > \omega),$$

gde je $T:[0,\infty) \to L(E)$. Tada je, na osnovu teoreme 1.19, $T(t+s) = T(t)T(s)$ $(t,s \geq 0)$. Takodje je $T(0) = I$. Zaista, ako je $T(0)x = 0$ tada je $T(t)x = T(t)T(0)x = 0$ i $R(\lambda)x=0$ $(\mathrm{Re}\lambda > \omega)$. Medjutim, odavde je $x = 0$. Otuda je $T(0) = I$. Dokažimo da je $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0 - polugrupa. Neka je B njen generator. Tada je

$$(\lambda I - B)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt = (\lambda I - A)^{-1} \qquad (\mathrm{Re}\lambda > \omega).$$

Tada je $A = B$. Otuda je $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0 - polugrupa.

Glava 2
Integrisane polugrupe

Integrisane polugrupe uveo je Arendt [3] 1987. godine, a dalje su ih razvijali Nojbrander [51], Kelerman i Hiber [33], Time [67] i mnogi drugi.

U prvom odeljku, ove glave, izložena je teorija n - puta integrisanih polugrupa prema [3] i [51]. Napomenimo da je slična teorija data u [33], i [67] samo što su definicije i osnovne osobine date za 1 - put integrisane polugrupe. Takodje, teorija n - puta integrisanih polugrupa je izložena u [39], [40] nešto drugačije nego u [3] i [51] preko generalisanih evolucionih operatora pri rešavanju odgovarajućeg nehomogenog Košijevog problema.

U drugom odeljku data je karakterizacija generatora A, n - puta integrisanih polugrupa.

U trećem odeljku posmatrane su Lipšicove 1 - put integrisane polugrupe i dokazano je da su one uvek eksponencijalno ograničene.

U četvrtom odeljku dokazano je da je svaka eksponencijalno ograničena integrisana polugrupa u stvari integrisana C_0 - polugrupa na odgovarajućem podprostoru.

U petom odeljku dokazano je da je svaka eksponencijalno ograničena integrisana polugrupa u stvari restrikcija integrisane C_0 - polugrupe, na većem prostoru, ali sa slabijom normom.

U šestom odeljku posmatran je Košijev nehomogeni problem sa operatorom A generatorom n - puta integrisane polugrupe.

2.1 n - puta integrisane polugrupe ($n \in \mathbb{N}$)

Osnovna ideja integrisanih polugrupa sastoji se u sledećem. Neka je $(T(t))_{t \geq 0}$ C_0 - polugrupa na Banahovom prostoru E i neka je A njen generator. Stavimo za $n \in \mathbb{N}$

$$(2.1) \qquad S_n(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} T(s)\,ds, \qquad t \geq 0.$$

Familija $(S_n(t))_{t \geq 0}$ definisana sa (2.1) ima sledeće osobine:

(i) $S_n(0) = 0$,

(ii) $t \to S_n(t)$ je jako neprekidna,

(iii) $S_n(t)S_n(s) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s} (t+s-r)^{n-1} S_n(r)dr - \int_0^s (t+s-r)^{n-1} S_n(r)dr\right]$, $t,s \geq 0$.

Kako je $(T(t))_{t \geq 0} \subset L(E)$, C_0 - polugrupa, to postoje konstante $M \geq 1$, $\omega \geq 0$, takve da ja ispunjeno $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ $(t \geq 0)$. Takodje, ispunjeno je i

$$(2.2) \qquad R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt, \quad (\mathrm{Re}\lambda > \omega).$$

Integrišući (2.2) parcijalno, n - puta, dobijamo:

$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt = \left| \begin{array}{ll} e^{-\lambda t} = u & dv = T(t)\,dt \\ -\lambda e^{-\lambda t}\,dt = du & v = \int_0^t T(s)\,ds = S_1(t) \end{array} \right|$$

$$= e^{-\lambda t} S_1(t)\Big|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_1(t)\,dt$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_1(t)\,dt = \cdots = \lambda^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_n(t)\,dt, \qquad (\mathrm{Re}\lambda > \omega).$$

Otuda je

$$(2.3) \qquad \frac{R(\lambda, A)}{\lambda^n} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_n(t)\,dt, \qquad (\mathrm{Re}\lambda > \omega).$$

Upravo je (2.3) motivisalo Arendta da u radu [3] posmatra klasu operatora $\lambda \to \frac{R(\lambda)}{\lambda^n}$ koja je $\mathcal{L}$ - transformacija jako neprekidnih operatora $S: [0, \infty) \to L(E)$.
Slično kao i u teoremi (1.19) (glava 1.), može se očekivati da se preko rezolventne jednakosti dobije neka funkcionalna jednakost za $(S(t))_{t \geq 0}$.

Teorema 2.1 *Neka je* S: $[0, \infty) \to L(E)$ *jako neprekidna familija operatora i neka je* $\|S(t)\| \le Me^{\omega t}$, $t \ge 0$. *Neka je* $n \in \mathbb{N}$ *i*

$$\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt, \quad (\mathrm{Re}\lambda > \omega). \tag{2.4}$$

Tada je $(R(\lambda))_{\mathrm{Re}\lambda > \omega}$ *pseudorezolventa ako i samo ako je ispunjeno*

$$S(t)S(s) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}S(r)dr - \int_0^s (t+s-r)^{n-1}S(r)dr\right], \quad t,s \ge 0. \tag{2.5}$$

Dokaz. Neka su $\mathrm{Re}\lambda > \mathrm{Re}\mu > \omega$. Iz rezolventne jednakosti dobijamo

$$\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}\cdot\frac{R(\mu)}{\mu^n} = \frac{1}{\lambda^n}\cdot\frac{1}{\mu^n}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}[R(\lambda)-R(\mu)] \tag{2.6}$$

Leva strana (2.6) daje

$$\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}\cdot\frac{R(\mu)}{\mu^n} = \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-\mu s} S(s)\,dt\right) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s} S(t)S(s)\,ds\,dt. \tag{2.7}$$

Transformišimo desnu stranu (2.6) u oblik

$$\frac{1}{\lambda^n}\cdot\frac{1}{\mu^n}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}[R(\lambda)-R(\mu)] \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{\mu^n}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} - \frac{R(\mu)}{\mu^n}\right] + \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu^n}-\frac{1}{\lambda^n}\right)\frac{R(\mu)}{\mu^n}.$$

Izračunajmo

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda^n} - \frac{R(\mu)}{\mu^n}\right] = \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}dt - \frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^\infty e^{-\mu t} S(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)\,ds\,dt - \int_0^\infty \frac{1}{\mu-\lambda}e^{(\lambda-\mu)t}e^{-\lambda t} S(t)\,dt$$

$$\overset{(*)}{=} \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)\,ds\,dt - \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{-\lambda s} S(s)\,ds\,dt$$

(*)

$$\int_0^\infty \frac{1}{\mu-\lambda}e^{(\lambda-\mu)t}e^{-\lambda t}S(t)\,dt = \left|\begin{matrix} e^{(\lambda-\mu)t} = u, & dv = e^{-\lambda t}S(t)\,dt \\ (\lambda-\mu)e^{(\lambda-\mu)t}dt = du, & v = \int_0^t e^{-\lambda s}S(s)\,ds \end{matrix}\right| = \frac{1}{\mu-\lambda}e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{-\lambda s}S(s)\,ds\Big|_0^\infty$$

$$+\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{-\lambda s}S(s)\,ds\,dt = \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{-\lambda s}S(s)\,ds\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_t^\infty e^{-\lambda s}\,S(s)\,ds\,dt=\int_0^\infty e^{-\mu t}\int_t^\infty e^{-\lambda(s-t)}\,S(s)\,ds\,dt$$

$$=\begin{vmatrix} s-t=u\\ ds=du\end{vmatrix}=\int_0^\infty e^{-\mu t}\int_0^\infty e^{-\lambda u}\,S(u+t)\,du\,dt=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\,S(t+s)\,ds\,dt.$$

Dakle, ispunjeno je

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}-\frac{R(\mu)}{\mu^n}\right]=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\,S(t+s)\,ds\,dt. \tag{2.9}$$

Parcijalnom integracijom n - puta, integrala $\int_0^\infty e^{-\mu s}\,S(t+s)\,ds$, dobijamo

$$\int_0^\infty e^{-\mu s}\,S(t+s)\,ds=\begin{vmatrix} e^{-\mu s}=u\,, & dv=S(t+s)ds\\ -\mu e^{-\mu s}\,ds=du, & v=\int_0^s S(t+u)\,du\end{vmatrix}$$

$$=e^{-\mu s}\int_0^s S(t+u)\,du\Big|_0^\infty+\mu\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s S(t+u)\,du\,dv=\mu\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s S(t+u)\,du\,dv$$

$$=\begin{vmatrix} e^{-\mu s}=u\,, & dv=\int_0^s S(t+u)du\\ -\mu e^{-\mu s}\,ds=du, & v=\int_0^s\int_0^r S(t+\xi)\,d\xi\,dr=\int_0^s S(t+\xi)\int_\xi^s dr\,d\xi=\int_0^s (s-\xi)S(t+\xi)\,d\xi\end{vmatrix}$$

$$=\mu e^{-\mu s}\int_0^s (s-\xi)S(t+\xi)\,d\xi\Big|_0^\infty+\mu^2\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s (s-r)S(t+r)\,dr\,ds$$

$$=\mu^2\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s (s-r)S(t+r)\,dr\,ds=\cdots=\mu^n\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s \frac{(s-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(t+r)\,dr\,ds.$$

Otuda je

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}-\frac{R(\mu)}{\mu^n}\right]=\mu^n\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s \frac{(s-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(t+r)\,dr\,ds\,dt,$$

odnosno,

$$\frac{1}{\mu^n}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}-\frac{R(\mu)}{\mu^n}\right]=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s \frac{(s-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(t+r)\,dr\,ds\,dt$$

$$=\begin{vmatrix} t+r=v\\ dr=dv\end{vmatrix}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_t^{t+s} \frac{(t+s-v)^{n-1}}{(n-1)!}S(v)\,dv\,ds\,dt.$$

Prema tome, ispunjeno je

$$\text{(2.10)}\qquad \frac{1}{\mu^n}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}-\frac{R(\mu)}{\mu^n}\right]=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_t^{t+s}\frac{(t+s-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(r)\,dr\,ds\,dt\,.$$

Izračunajmo sada drugi deo desne strane relacije (2.8). Imamo,

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu^n}-\frac{1}{\lambda^n}\right)\frac{R(\mu)}{\mu^n}=-\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\frac{1}{\mu^{n-k}}\right)\frac{R(\mu)}{\mu^n}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\frac{1}{\mu^{n-k}}\int_0^\infty e^{-\mu s}S(s)\,ds=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\int_0^\infty e^{-\mu s}S(s)\int_0^\infty\frac{e^{-\mu r}}{(n-k-1)!}r^{n-k-1}\,dr\,ds$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\int_0^\infty S(s)\int_0^\infty\frac{e^{-\mu(s+r)}}{(n-k-1)!}r^{n-k-1}\,dr\,ds$$

$$=\begin{vmatrix}s+r=v\\ dr=dv\end{vmatrix}=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\int_0^\infty S(s)\int_s^\infty\frac{e^{-\mu v}}{(n-k-1)!}(v-s)^{n-k-1}\,dv\,ds$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\int_0^\infty e^{-\mu v}\int_0^v\frac{(v-s)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}S(s)\,ds\,dv=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{k+1}}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s\frac{(s-r)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}S(r)\,dr\,ds$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda t}}{k!}t^k\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s\frac{(s-r)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}S(r)\,dr\,ds\,dt$$

$$=-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(s-r)^{n-k-1}t^k}{(n-k-1)!k!}S(r)\,dr\,ds\,dt$$

$$=-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(s-r)^{n-k-1}t^k S(r)\,dr\,ds\,dt$$

$$=-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s\frac{(t+s-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(r)\,dr\,ds\,dt\,.$$

Imamo,

$$\text{(2.11)}\qquad \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu^n}-\frac{1}{\lambda^n}\right)\frac{R(\mu)}{\mu^n}=-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s\frac{(t+s-r)^{n-1}}{(n-1)!}S(r)\,dr\,ds\,dt\,.$$

Iz (2.10) i (2.11) dobijamo

$$\text{(2.12)}\qquad \frac{1}{\lambda^n}\cdot\frac{1}{\mu^n}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}[R(\lambda)-R(\mu)]$$

$$=-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}S(r)dr-\int_0^s(t+s-r)^{n-1}S(r)\,dr\right]ds\,dt\,.$$

Na osnovu (2.6), (2.7) i (2.12) i jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije, dobijamo

$$S(t)S(s)=\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}S(r)dr-\int_0^s(t+s-r)^{n-1}S(r)dr\right],\quad (t,s\geq 0).$$

Iz (2.5) neposredno se dobija

(2.13) $\qquad S(t)\,S(s)=S(s)\,S(t)\quad (t,s\geq 0)$

(2.14) $\qquad S(t)\,S(0)=0\,.$

Definicija 2.1 Neka je $n\in\mathbb{N}$. Jako neprekidna familija operatora $(S(t))_{t\geq 0}\subset L(E)$ naziva se *n - puta integrisana polugrupa* ako je (2.5) ispunjeno i $S(0)=0$. Osim toga $(S(t))_{t\geq 0}$ je *nedegenerisana* ako $S(t)x=0$, $t\geq 0$, povlači $x=0$. Konačno $(S(t))_{t\geq 0}$ je *eksponencijalno ograničena* ako postoje konstante $M\geq 0$, $\omega\in\mathbb{R}^+$ takve da je $\|S(t)\|\leq Me^{\omega t}$, $t\geq 0$.

Po dogovoru uzimaćemo da je C_0 - polugrupa 0 - *puta integrisana polugrupa.*

Primer 2.1

(i) Neka je $(T(t))_{t\geq 0}\subset L(E)$, C_0 - polugrupa. Tada

$$S(t):=\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}T(s)ds,\qquad (t\geq 0)$$

definiše n - puta integrisanu polugrupu na E.

(ii) Neka je ponovo $(T(t))_{t\geq 0}\subset L(E)$, C_0 - polugrupa. Tada

$$S(t):=\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}T^*(s)ds,\qquad (t\geq 0)$$

definiše (n+1) - puta integrisanu polugrupu na E*. Ovde je T*(s) adjungovani operator operatora T(s), a E* adjungovani prostor prostora E.

(iii) Neka je $E=C_0(-\infty,0]=\{f\in C(-\infty,0]:\ f(0)=0\}$. Definišimo

$$(T(t)f)(x)=\begin{cases}f(x+t), & x\leq -t\\ 0\quad , & x>-t,\ t\geq 0.\end{cases}$$

Tada je $(T(t))_{t\geq 0}$, C_0 - polugrupa. Takodje,

$$(S(t)f)(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{x+t}\frac{(t+x-u)^{n-1}}{(n-1)!}f(u)du, & t\leq x\\ \displaystyle\int_x^{0}\frac{(t+x-u)^{n-1}}{(n-1)!}f(u)du\ , & t>-x\end{cases}$$

je n - puta integrisana polugrupa ($n\in\mathbb{N}$). Njen generator A je dat sa $Af = f'$ na $D(A) = \{f\in E \cap C^1(-\infty, 0];\ f(0) = 0\}$, gde je $C^n: = \{x\in E;\ t \to S(t)x$, n-puta jako neprekidno diferencijabilna, $t \geq 0\}$.

Neka je familija $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(E)$ n-puta integrisana polugrupa ($n\in\mathbb{N}$). Pretpostavimo da je $(S(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena i definišimo $R(\lambda) = \lambda^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt$, ($\mathrm{Re}\lambda > \omega$). Prema rezolventnoj jednakosti $\ker R(\lambda)$ ne zavisi od $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Zato, na osnovu jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije $R(\lambda)$ je injektivno ako i samo ako je $(S(t))_{t\geq 0}$ nedegenerisano. U tom slučaju postoji jedinstveni operator A koji zadovoljava $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ i $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$. Operator A se naziva *generator* n - puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$. Tačnije,

Definicija 2.2 Neka je A linearan operator na E. Tada, za $n\in\mathbb{N}_0$, operator A je *generator* n-puta integrisane polugrupe ako je $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ za neko $\omega\in\mathbb{R}$ i funkcija $\lambda \to \dfrac{R(\lambda, A)}{\lambda^n}$ je $\mathcal{L}$ - transformacija od $S(t)$.

Ako je A generator n - puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(E)$, tada je ona jedinstvena. Zaista, iz

$$\frac{R(\lambda, A)}{\lambda^n} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_1(t)x\,dt,$$

na osnovu jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije imamo $S(t) = S_1(t)$, $t \geq 0$. Takodje, ako je A generator n - puta integrisane polugrupe ($n\in\mathbb{N}_0$), tada je operator A generator k - puta integrisane polugrupe, $k > n$.

Isto tako, poznata je činjenica da ako $\mathcal{L}$ - transformacija neprekidne funkcije postoji za neko $\lambda_0\in\mathbb{C}$, tada ona postoji za svako $\lambda\in\mathbb{C}$, takvo da je $\mathrm{Re}\lambda > \mathrm{Re}\lambda_0$. Prema tome, ako je A generator n - puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$, tada je $\dfrac{R(\lambda, A)}{\lambda^n} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\,dt$, za svako $x\in E$ i $\mathrm{Re}\lambda > \omega$.

Propozicija 2.2 *Neka je* $n\in\mathbb{N}_0$ *i neka je* A *generator n-puta integrisane, eksponencijalno ograničene polugrupe. Tada, za* $x\in D(A)$ i $t\geq 0$, *imamo*

$$S(t)x \in D(A), \qquad AS(t)x = S(t)Ax \tag{2.15}$$

i

$$S(t)x = \frac{t^n}{n!}x + \int_0^t S(s)Ax\,ds. \tag{2.16}$$

Osim toga je $\int_0^t S(s)x\,ds \in D(A)$ *za svako* $x\in E$, $t \geq 0$, *i*

$$(2.17)\qquad A\int_0^t S(s)x\,ds = S(t)x - \frac{t^n}{n!}x.$$

Dokaz. Neka su $M \geq 0$, $\omega\in\mathbb{R}^+$ takvi da je $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $(t \geq 0)$. Stavimo $R(\lambda, A) = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} S(t)\,dt$, $(\mathrm{Re}\lambda > \omega)$. Uzmimo fiksno $\mu\in\rho(A)$. Tada je

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)R(\mu, A)x\,dt = \frac{R(\lambda, A)}{\lambda^n} R(\mu, A)x$$

$$= \frac{1}{\lambda^n} R(\mu, A)R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R(\mu, A)S(t)x\,dt,$$

za $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ i $x\in E$. Tada, na osnovu jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije, dobijamo

$$(2.18)\qquad R(\mu,A)\, S(t)x = S(t)\, R(\mu,A)x, \qquad \mu\in\rho(A),\ x\in E.$$

Množeći (2.18), prvo s leva sa $\mu I-A$, pa zatim s desna sa $\mu I-A$, uzimajući da je $x\in D(A)$, dobijamo

$$S(t)\,(\mu I-A)x = (\mu I-A)\, S(t)x, \qquad t \geq 0.$$

Otuda je $S(t)x \in D(A)$ i

$$AS(t)x = S(t)\, Ax, \qquad t \geq 0,\ x\in D(A).$$

Neka je $x\in D(A)$. Tada, za $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, imamo

$$(2.19)\qquad \int_0^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n!} x\,dt = x.$$

Takodje je

$$(2.20)\qquad x = R(\lambda,A)\,(\lambda I-A)x = \lambda R(\lambda,A)x - R(\lambda,A)Ax$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t} S(t)x\,dt - \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} S(t)Ax\,dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t} S(t)x\,dt - \int_0^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t} \int_0^t S(t)Ax\,ds\,dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t} \left[S(t)x - \int_0^t S(s)Ax\,ds \right] dt.$$

Iz (2.19) i (2.20), na osnovu jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije, dobijamo

$$S(t)x = \frac{t^n}{n!}x + \int_0^t S(s)Ax\,ds.$$

Neka je $x\in E$, $t \geq 0$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, tada iz (2.15), (2.16) i (2.18) imamo

$$\int_0^t S(s)x\,ds = (\lambda I - A)R(\lambda, A)\int_0^t S(s)x\,ds$$

$$= \lambda R(\lambda, A)\int_0^t S(s)x\,ds - \int_0^t S(s)AR(\lambda, A)x\,ds$$

$$= \lambda R(\lambda, A)\int_0^t S(s)x\,ds - S(t)R(\lambda, A)x + \frac{t^n}{n!}R(\lambda, A)x\,.$$

Otuda je $\int_0^t S(s)x\,ds \in D(A)$ i

$$(\lambda I - A)\int_0^t S(s)x\,ds = \lambda\int_0^t S(s)x\,ds - S(t)x + \frac{t^n}{n!}x\,,$$

odnosno,

$$A\int_0^t S(s)x\,ds = S(t)x - \frac{t^n}{n!}x\,.$$

Posledica 2.3 *Za svako* $x \in E$ *je* $S(t)x \in \overline{D(A)}$, $t \geq 0$. *Neka je* $x \in E$. *Tada je* $S(\cdot)x$ *desno diferencijabilna za* $t \geq 0$ *ako i samo ako je* $x \in D(A)$. *U tom slučaju je*

(2.21) $$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x\,, \quad n > 0$$

i

(2.22) $$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax, \quad n = 0.$$

Dokaz. Za $x \in E$, $t \geq 0$ imamo, na osnovu propozicije 2.2

$$S(t)x = \lim_{h \downarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(s)x\,ds \in \overline{D(A)}.$$

Drugo tvrdjenje direktno sledi iz (2.17) budući da je A zatvoren, tj.

$$AS(t)x = \frac{d}{dt}S(t)x - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x\,,$$

odnosno,

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}x\,,$$

za $n > 0$ i $t \geq 0$. Ako je $n = 0$, tada (2.17) dobija oblik

$$A\int_0^t S(s)x\,ds = S(t)x - x$$

i dobijamo (2.22), tj.

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

2.2 Karakterizacija generatora n - puta integrisanih polugrupa

Arendt je u radu [3] dao sledeću karakterizaciju generatora n - puta integrisanih polugrupa ($n\in\mathbb{N}_0$).

Teorema 2.4 *Neka je* $n\in\mathbb{N}_0$ *i neka su* $\omega \geq 0$, $M \geq 0$. *Linearni operator* A *je generator (n+1) - puta integrisane polugrupe,* $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(E)$, *koja zadovoljava,*

$$\limsup_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\|S(t+h)-S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \tag{2.23}$$

onda i samo onda ako postoji $a \geq \max(\omega,0)$, *takav da je* $(a,\infty) \subset \rho(A)$, *i*

$$\left\| (\lambda-\omega)^{k+1}\frac{1}{k!}\left(\frac{R(\lambda,A)}{\lambda^n}\right)^{(k)} \right\| \leq M, \qquad \mathrm{Re}\lambda > a,\ k\in\mathbb{N}_0. \tag{2.24}$$

Posledica 2.5 *Ako operator* A *zadovoljava ekvivalentne pretpostavke (2.23) i (2.24) tada je deo operatora* A *u* $\overline{D(A)}$ *generator n - puta integrisane polugrupe* $(T(t))_{t\geq 0}$, ($n\in\mathbb{N}_0$).

Dokaz. Neka su pretpostavke (2.23) i (2.24) zadovoljene. Na osnovu (2.23), skup F_1 svih $x\in E$, za koje je $S(\cdot)x \in C^1([0,\infty), E)$, je zatvoreni podprostor prostora E. Stavimo F: = $\overline{D(A)}$. Na osnovu propozicije 2.2 je $F \subset F_1$. Za $x\in F$ stavimo $T(t)x = \frac{d}{dt}S(t)x$, $t \geq 0$. Tada je $T(t)x \in F$ (prema posledici 2.3). Na taj način dobijamo jako neprekidnu familiju operatora $(T(t))_{t\geq 0}$ na F. Neka je A_F deo od A u F, tj. $A_F x = Ax$ za $x\in D(A_F)$: = $\{x\in D(A);\ Ax\in F\}$. Tada je $(a,\infty) \subset \rho(A_F)$ i $R(\lambda,A)=R(\lambda,A_F)$, ($\mathrm{Re}\lambda > a$). Osim toga

$$R(\lambda,A_F)x = \int_0^\infty \lambda^{n+1}e^{-\lambda t}S(t)x\,dt = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \quad (\mathrm{Re}\lambda > a,\ x\in F).$$

Ako je D(A) gust u E tada dobijamo sledeću karakterizaciju generatora n-puta integrisanih polugrupa.

Teorema 2.6 *Neka je* A *linearni operator u* E *i neka je skup* D(A) *gust u* E, *takav da je* $(a,\infty) \subset \rho(A)$ *za neki* $a \geq 0$. *Neka je* $n\in\mathbb{N}_0$, $M \geq 0$, $\omega\in(-\infty, a]$. *Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(i) A *generiše n - puta integrisanu polugrupu* $(T(t))_{t\geq 0}$ *koja zadovoljava* $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$.

(ii) $$\left\| (\lambda-\omega)^{k+1} \frac{1}{k!}\left(\frac{R(\lambda,A)}{\lambda^n}\right)^{(k)} \right\| \le M, \qquad \mathrm{Re}\lambda > a,\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Primedba. Ako je n = 0 dobijamo Hile - Jošidinu teoremu.

Posledica 2.7 *Neka je* A *linearan operator i neka je skup* D(A) *gust u* E. *Neka je* A *generator n - puta integrisane polugrupe* $(S(t))_{t\ge0}$, $(n\in\mathbb{N}_0)$. *Tada je adjungovani operator* A* *operatora* A *generator (n+1) - puta integrisane polugrupe* $(S^*(t))_{t\ge0}$ u E*.

Dokaz. Neposredno sledi iz teoreme 2.6, uzimajući u obzir činjenicu $R(\lambda,A)^*=R(\lambda,A^*)$.

2.3 Lokalne Lipšic neprekidne integrisane polugrupe

Za definiciju generatora A, n - puta integrisanih polugrupa operatora $(S(t))_{t\ge0}$, u prethodnom odeljku smo pretpostavili da su one eksponencijalno ograničene, tj. da postoje konstante $M \ge 0$ i $\omega \ge 0$, takve da je $\|S(t)\| \le Me^{\omega t}$, $(t \ge 0)$. Medjutim, integrisane polugrupe nemaju uvek tu osobinu. U radu [33] konstruisana je sledeća 1-put integrisana polugrupa $(S(t))_{t\ge0}$ koja nije eksponencijalno ograničena.

Primer 2.2 Neka je $E = \ell^2$, $S(t)\colon (x_n) \to \left(\int_0^t e^{a_n s}\, ds\, x_n\right)$, gde je $a_n := n + 2^{n^2}\pi i$.

Ovako konstruisana polugrupa $(S(t))_{t\ge0}$ je 1 - put integrisana, ali nije eksponencijalno ograničena.

U tom pogledu značajne su lokalne Lipšic neprekidne integrisane polugrupe koje su uvek eksponencijalno ograničene. U prikazu ovih integrisanih polugrupa uglavnom je korišćen rad [33] gde su tvrdjenja data za 1 - put integrisane polugrupe, što ne ograničava opštost, jer je moguće prebacivanje tvrdjenja na n - puta integrisane polugrupe. Takodje, ova materija je obradjena i u radovima [39], [40].

Definicija 2.3 Integrisana polugrupa $(S(t))_{t\ge0} \subset L(E)$ je *lokalno Lipšic neprekidna* ako za svako $b > 0$ postoji konstanta L, takva da je $\|S(t)-S(s)\| \le L|t-s|$, za svako $t,s \in [0,b]$.

Propozicija 2.8 *Neka je* $(S(t))_{t\ge0}$ *nedegenerisana lokalno Lipšic neprekidna 1 - puta integrisana polugrupa. Tada je*

$$\limsup_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}\|S(t+h)-S(t)\| \le Me^{\omega t}, \qquad t \ge 0$$

za proizvoljne konstante M *i* ω.

Dokaz. Neka je $E_1 = \{x \in E;\ t \to S(t)x$ je neprekidno diferencijabilna na $[0,\infty)\}$. Tada je E_1 zatvoreni podprostor. Neka je $b > 0$. Posmatrajmo prostor $C_0^1 := \{f \in C^1[0,b],\ f(0)=0\}$ koji je zatvoren u Banahovom prostoru $Lip_0 := \{f \in Lip\,[0,b];\ f(0)=0\}$, snabdevenim sa Lipšicovom normom $\|f\|_{Lip} = \sup\limits_{\substack{t,s\in[0,b]\\ t\neq s}} \dfrac{\|f(t)-f(s)\|}{|t-s|}$. Neka je $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ u E, gde je $x_n \in E_1$. Tada funkcija $f_n \in C_0^1$, definisana sa $f_n(t) := S(t)x_n$, konvergira ka $f \in Lip_0$ koja je data sa $f(t) = S(t)x$.

Neka je $x \in E_1$. Diferencirajmo

$$S(t)S(s) = \int_0^{t+s} S(r)x\,dr - \int_0^{t} S(r)x\,dr - \int_0^{s} S(r)x\,dr .$$

Tada dobijamo

$$S'(t)\,S(s) = \frac{d}{dt} S(t)\,S(s)\,x = S(t+s)x - S(t)x, \qquad x \in E_1.$$

Diferencirajmo još jednom

$$S'(t)\,S'(s)x = S'(t+s)x, \qquad x \in E_1,\ t,s \geq 0.$$

Dobijamo

$$S'(t)S'(0)x = S'(t)x, \qquad x \in E_1,$$

odnosno, $S'(0) = I$ na E_1. Prema tome $(S'(t))_{t\geq 0}$ je jako neprekidna polugrupa na E_1. Zato postoje konstante $M \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, takve da je

$$\|(S'(t)\,x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|.$$

Iz $\|S(t) - S(s)\| \leq L\,|t-s|$ za $s = 0$ imamo

$$\|S(t)\| \leq L|t|.$$

Neka je $h \in [0,b]$ i neka je L Lipšicova konstanta za interval $[0,b]$. Tada je

$$\|S(t+h) - S(t)\| = \|S'(t)\,S(h)\| \leq Me^{\omega t}\,Lh.$$

Posledica 2.9 *Svaka lokalna Lipšic neprekidna integrisana polugrupa je eksponencijalno ograničena.*

Koristeći teoremu 2.4 i propoziciju 2.8 može se dati sledeća karakterizacija generatora A 1-puta integrisane lokalne Lipšic neprekidne polugrupe (bez pretpostavke da je D(A) gust u E).

Posledica 2.10 *Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna*

(i) A *je generator lokalne Lipšic neprekidne integrisane polugrupe,*

(ii) *Postoje konstante* $M \geq 0$, $\omega \in \mathbb{R}^+$, *takve da je* $(\omega,\infty) \subset \rho(A)$ *i*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \qquad \mathrm{Re}\lambda > \omega,\ n \in \mathbb{N}.$$

2.4 Integrisane polugrupe i C_0 - polugrupe na podprostoru

Nojbrander [51] je pokazao da se svaka integrisana polugrupa može dobiti integracijom C_0 - polugrupe, ali na odgovarajućem prostoru.

U ovom odeljku, pokazana je upravo ta činjenica, ali na drugačiji način nego što je to uradjeno u [51]. Pri tome, pod pojmom integrisane polugrupe podrazumeva se 1-put integrisana polugrupa. Medjutim, ta činjenica neće umanjiti opštost izlaganja jer za n-puta integrisane polugrupe ($n\in\mathbb{N}$) ideje dokaza ostaju iste ali sa znatno složenijom tehnikom.

Generator A integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ koja nije eksponencijalno ograničena može se definisati na sledeći način:

Definicija 2.4 Generator $A: D(A) \subseteq E\to E$ nedegenerisane integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ se definiše na sledeći način:

$$x\in D(A) \text{ i } Ax = y \text{ ako i samo ako je } x\in C^1, \text{ i}$$

(2.25) $$S'(t)x - x = S(t)y, \quad t \geq 0.$$

Ekvivalentno prethodnoj definiciji, možemo staviti $x\in D(A)$ i $Ax = y$, ako i samo ako je

(2.26) $$S(t)x - tx = \int_0^t S(r)y\,dr, \quad t \geq 0.$$

Prethodna definicija ne zahteva da je integrisana polugrupa $(S(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena, kako je to utvrdjeno u odeljku 2.1. Može se dokazati da je A zatvoren linearni operator i da je ispunjeno:

(2.27) (i) $C^2 \subseteq D(A) \subseteq C^1$.

(ii) $Ax = S''(0)x,\ x\in C^2$.

(iii) $A\int_0^t S(r)x\,dr = S(t)x - tx, \quad t \geq 0.$

(iv) $R(\lambda, A) = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ (u ovom slučaju pretpostavljamo da je $(S(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalno ograničena nedegenerisana, 1-put integrisana polugrupa).

Neka je $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(E)$ eksponencijalno ograničena, nedegenerisana 1-put integrisana polugrupa operatora i neka je linearni operator A njen generator.

Neka je

(2.28) $$\omega_0 = \inf\{\omega > 0;\ \|S(t)\| \leq Me^{\omega t},\ t \geq 0,\ M > 0\}$$

Kako smo već ranije videli $(S'(t))_{t\geq 0}$ formira na C^1 jako neprekidnu polugrupu koja nije eksponencijalno ograničena. Za $x \in C^1$ uvedimo novu normu

(2.29) $$\|x\|_\omega = \sup_{t\geq 0} e^{-\omega t} \|S'(t)x\|, \quad \tilde{E}_\omega = \left\{x \in C^1; \|x\|_\omega < \infty\right\}.$$

Tada je $\tilde{E}_\omega$ Banahov prostor

$$\|S'(t)x\|_\omega \leq e^{\omega t} \|x\|_\omega, \quad x \in \tilde{E}_\omega.$$

Medjutim, ovom procedurom izgubljena je jaka neprekidnost. Zato, da bi smo ostvarili jaku neprekidnost, posmatrajmo prostor $E_\omega \subset \tilde{E}_\omega$, takav da je

(2.30) $$E_\omega = \{x \in \tilde{E}_\omega;\ \|S'(t)x - x\|_\omega \to 0,\ t \downarrow 0\}.$$

Tada je E_ω zatvoreni podprostor prostora $\tilde{E}_\omega$ sa ω - normom. Dalje S', ostavlja E_ω invarijantno i formira jako neprekidnu polugrupu na E_ω u odnosu na ω - normu. Postavlja se pitanje da li je nakon dve restrikcije prostora E dobijeni prostor E_ω dovoljno velik da sadrži D(A). Ako našu pretpostavku ograničimo na $\omega > \omega_0 \geq 0$, sledi da je $D(A) \subset E_\omega$ bez pretpostavke da je D(A) gust u E.

Teorema 2.10 *Neka je* $(S(t))_{t\geq 0}$ *nedegenerisana eksponencijalno ograničena integrisana polugrupa. Tada za* $\omega > \omega_0$ *sledi*

(i) E_ω *sa* ω *- normom je Banahov prostor. Takodje,*

$$D(A) \subseteq E_\omega \subseteq C^1$$

i $$\|x\| < \|x\|_\omega, \quad x \in E_\omega,$$

$$\|x\|_\omega \leq \tilde{M}\ \|x\|_A, \quad x \in D(A).$$

Ovde $\|\cdot\|_A$ *označava graf normu operatora* A *i* $\tilde{M}$ *je pozitivna konstanta.*

(ii) E_ω *je invarijantno u odnosu na* $S'(t)$ *i restrikcija* T_ω *operatora* S' *na* E_ω *je jako neprekidna polugrupa na* $(E_\omega, \|\cdot\|_\omega)$. T_ω *je generisano od dela* A_ω *od* A *ili* $S''(0)$ *u* E_ω, *tj.*

$$D(A_\omega) = \{x \in C^2;\ Ax \in E_\omega\}$$

$$A_\omega = A = S''(0) \quad na \quad D(A_\omega).$$

Dokaz. Dokažimo prvo tvrdjenja

(1) $D(A) \subset E_\omega$ i $\|x\|_\omega \leq \tilde{M}\ \|x\|_A$, $x \in D(A)$.

(2) T_ω je generisano delom A_ω operatora A u E_ω.

Dokaz tvrdjenja (1). Neka je $x \in D(A)$. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\omega > 0$. Tada je na osnovu (2.25)

$$e^{-\omega r} \|S'(t+r)x - S'(r)x\| = e^{-\omega r} \|(S(t+r) - S(t))Ax\|.$$

Kako je $S(t)Ax$ neprekidno u t i $\|S(t)\| \leq \tilde{M} e^{-\omega t}$ za neki $\omega_0 < \tilde{\omega} < \omega$, to iz (2.28) i (2.29) sledi $x \in E_\omega$ i tvrdjenje (1) je dokazano.

Dokaz tvrdjenja (2). Neka je A_ω generator $S'(t)$ na E_ω. Za $x \in D(A_\omega)$ imamo

$$S'(t)x - x = \int_0^t S'(r)A_\omega x dr = S(t)A_\omega x.$$

Tada je na osnovu (2.25), $x \in D(A)$ i $Ax = A_\omega x \in E_\omega$. Obratno, neka je $x \in D(A)$ i $Ax \in E_\omega$. Posebno $Ax \in C^1$ i na osnovu (2.25) je $x \in C^2$, $Ax = S''(0)x$. Zato je

$$S'(t)x - x = S(t)Ax = \int_0^t S'(r)A_\omega x dr = S(t)A_\omega x.$$

Kako je $Ax \in E_\omega$, $x \in D(A_\omega)$ i $A_\omega x = S''(0)x = Ax$.

Takodje je tačna i obratna teorema prethodne teoreme.

Teorema 2.11 *Neka je* A *linearni operator u* E. *Tada* A *generiše nedegenerisanu eksponencijalno ograničenu integrisanu polugrupu na* E *ako i samo ako je ispunjeno:*

(i) *Postoji* $\lambda \in \mathbb{R}$ *takav da* $R(\lambda, A)$ *postoji i gotovo svuda definiše ograničeni linearni operator na* E.

(ii) *Postoji norma* $\|\cdot\|_\omega$ *na* $D(A)$, *takva da*

(a) $\|x\| \leq c_1 \|x\|_\omega \leq c_2 \|x\|_A, \quad x \in D(A)$

(b) *Deo* A_ω *operatora* A *u* $E_\omega = \overline{D(A)}^\omega$ *generiše jako neprekidnu polugrupu* T_ω na E_ω.

(Ovde $\overline{D(A)}^\omega$ označava zatvorenje u odnosu na ω - normu.)

Primedba 1. Integrisana polugrupa na E je povezana sa jako neprekidnom polugrupom T_ω na E_ω, formulama:

$$S_\omega(t) = \int_0^t T_\omega(s) ds, \quad \text{na } E_\omega, \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned} S(t) &= (\lambda I - A_\omega) S_\omega(t) R(\lambda, A) \\ &= \lambda S_\omega(t) R(\lambda, A) - T_\omega R(\lambda, A) + R(\lambda, A), \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$S(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} S_\omega(t) \lambda R(\lambda, A) x. \tag{2.33}$$

Osim toga, $S(t)$ preslikava E neprekidno na $(E_\omega, \|\cdot\|_\omega)$.

Primedba 2. Neka je bez ograničenja

$$\|T_\omega(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Tada je prostor $E_\omega = \overline{D(A)}^\omega$ sadržan u prostoru E_ω iz teoreme 2.10. Medjutim, mi ne znamo da li se prostor E_ω , dobijen u teoremi 2.11 podudara sa bilo kojim prostorom E_ω dobijenim u teoremi 2.10.

2.5 Integrisane polugrupe kao restrikcija integrisanih C_0 - polugrupa

U prethodnom odeljku je pokazano da je svaka eksponencijalno ograničena integrisana polugrupa ustvari integrisana C_0 - polugrupa na odgovarajućem podprostoru sa jačom normom. Medjutim, svaka integrisana eksponencijalno ograničena polugrupa je u stvari restrikcija integrisane C_0 - polugrupe na većem prostoru, ali sa slabijom normom.

Za prikaz ove problematike uglavnom je korišćen rad [67], a sličan rezultat, ali za Lipšic neprekidne integrisane polugrupe može se naći u radu [10].

Neka je $(S(t))_{t\geq 0}$ nedegenerisana eksponencijalno ograničena integrisana polugrupa na Banahovom prostoru E i neka je A njen generator. Tada je, na osnovu teoreme 2.11, $(S(t))_{t\geq 0}$ integrisana C_0 - polugrupa na podprostoru $E_0 \subset E$ sa normom $\|\cdot\|_0$ koja je jača od norme $\|\cdot\|$ u E a slabija od graf norme na D(A). Pretpostavimo da je

$$\|R(\lambda, A)\|_0 \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad (\mathrm{Re}\,\lambda > \omega)$$

i

$$\|T_0(t)\|_0 \leq e^{\omega t}, \qquad t \geq 0.$$

Ovde je $T_0(t) = S'(t)$, $t \geq 0$ C_0 - polugrupa na $E_0 \subset E$. Uvedimo normu $\|\cdot\|_\lambda$ na E sa

$$\|x\|_\lambda = \|R(\lambda, A)x\|_0, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega\,.$$

Lema 2.12 *Ako su* $\mathrm{Re}\lambda$, $\mathrm{Re}\mu > \omega$, *tada su norme* $\|\cdot\|_\lambda$ *i* $\|\cdot\|_\mu$ *ekvivalentne.*

Dokaz. Iz rezolventne jednakosti imamo

$$R(\lambda,A)x = R(\mu,A)x + (\mu-\lambda)\, R(\lambda,A)\, R(\mu,A)x,$$

odnosno

$$\|R(\lambda, A)x\|_0 \leq \|R(\mu, A)x\|_0 + |\mu - \lambda| \|R(\lambda, A_0)R(\mu, A)x\|_0$$

$$\leq \|R(\mu, A)x\|_0 + \frac{|\mu - \lambda|}{\lambda - \omega}\|R(\mu, A)x\|_0 .$$

Lema 2.13

(i) $\|x\|_\lambda \le c\|x\|, \quad x\in E, \ c > 0.$

(ii) $D(A)$ *je gust u* $(E, \|\cdot\|_\lambda)$.

Dokaz.

(i) Na osnovu teoreme 2.11 b) je

$$\|x\|_\lambda = \|R(\lambda, A)x\|_0 \le c_2 \|R(\lambda, A)x\|_A$$

$$\le c_2\big(\|R(\lambda, A)x\| + \|A R(\lambda, A)x\|\big) \le c_2\big(\|R(\lambda, A)x\| + \|x\| + \|\lambda R(\lambda, A)x\|\big)$$

$$\le c_2\big[1 + (1+\lambda)\|R(\lambda, A)\|\big]\|x\|.$$

(ii) $\|\mu R(\mu, A)x - x\|_\lambda = \|\mu R(\mu, A)R(\lambda, A)x - R(\lambda, A)x\|_0 \to 0, \qquad \mu \to \infty$

Neka je $\overline{E}^\lambda$ kompletno proširenje prostora E u odnosu na normu $\|\cdot\|_\lambda$. Na osnovu leme 2.12 kompletno proširenje prostora E ne zavisi od izbora $\lambda > \omega$.

Posledica 2.14 *Prostor* $(E, \|\cdot\|_\lambda)$ *se neprekidno proširuje na prostor* $(\overline{E}^\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ *i* E_0 *je gust skup u* $\overline{E}^\lambda$.

Naš sledeći korak sastoji se u proširenju polugrupe T_0 na E_0 na polugrupu T na $\overline{E}^\lambda$. Dokažimo da je T_0 polugrupa ograničenih linearnih operatora na $(E_0, \|\cdot\|_\lambda)$.

Lema 2.15 $\|T_0(t)x\|_\lambda \le e^{\omega t}\|x\|_\lambda, \quad x\in E_0.$

Dokaz. Imamo

$$\|T_0(t)x\|_\lambda = \|R(\lambda, A)T_0(t)x\|_0$$

$$= \|T_0(t)R(\lambda, A)x\|_0 \le e^{\omega t}\|R(\lambda, A)x\|_0$$

$$\le e^{\omega t}\|x\|_\lambda.$$

Na osnovu leme 2.13 (ii) i kompletiranja prostora $\overline{E}^\lambda$ možemo, za svaki $x\in \overline{E}^\lambda$, naći niz $x_n\in E_0$, takav da

$$\|x_n - x\|_\lambda \to 0, \quad (n \to \infty).$$

Na osnovu leme 2.15, za fiksno $t \ge 0$, $(T_0(t)x_n)_{n\in N}$ je Košijev niz u $\overline{E}^\lambda$ i zato ima graničnu vrednost. Takodje, na osnovu leme 2.15, granična vrednost ne zavisi od izbora niza $(x_n)_{n\in N}$. Stavimo

(2.34) $$T(t)x = \lambda \sim \lim_{n\to\infty} T_0(t)x_n$$

gde $\lambda \sim \lim$ označava da graničnu vrednost uzimamo u $\overline{E}^\lambda$.

Posebno, na osnovu dokaza leme 2.13 (ii), imamo

(2.35) $$T(t)x = \lambda \sim \lim_{\mu\to\infty} T_0(t)\mu R(\mu, A)x, \quad x\in E.$$

Propozicija 2.16 *Familija* $(T(t))_{t\geq 0}$ *formira jako neprekidnu polugrupu na* $\overline{E}^{\lambda}$.

Dokaz. Na osnovu (2.34) i leme 2.15, $(T(t))_{t\geq 0}$ je polugrupa ograničenih linearnih operatora. Osim toga je $\|T(t)\|_{\lambda} \leq e^{\omega t}$. To implicira da je granična vrednost u (2.34) uniformna po t na kompaktnom intervalu. Zato, jaka neprekidnost T_0 na $(E_0, \|\cdot\|_0)$ i takodje na $(E_0, \|\cdot\|_{\lambda})$ implicira jaku neprekidnost T na $\overline{E}^{\lambda}$.

Neposredno iz (2.33) i (2.35) sledi da je integrisana polugrupa $(S(t))_{t\geq 0}$ dobijena integracijom polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$ i uzimajući restrikciju na E.

Teorema 2.17 $$S(t)x = \int_0^t T(s)x\,ds, \qquad x\in E.$$

Primetimo da je integral uzet u $\overline{E}^{\lambda}$.

Teorema 2.18 *Neka je* A *generator polugrupe* $(T(t))_{t\geq 0}$. *Tada*

(i) $R(\lambda,A_\lambda)$ *je proširenje* $R(\lambda,A)$.

(ii) A *je deo operatora* A_λ *u* E.

(iii) $D(A_\lambda) = E_0$.

Dokaz.

(i) Za $x\in E$, na osnovu teoreme 2.17 i (2.27)(iv), imamo

$$R(\lambda, A_\lambda)x = \lambda\int_0^t e^{-\lambda t}\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right)dt$$

$$= \lambda\int_0^t e^{-\lambda t} S(t)x\,dt = R(\lambda, A)x.$$

(ii) Neposredno sledi iz (i).

(iii) Dovoljno je dokazati da je $R(\lambda,A_\lambda)\overline{E}^{\lambda} = E_0$. Dokažimo prvo da je $R(\lambda,A_\lambda)\overline{E}^{\lambda} \subseteq E_0$. Neka je $x = \lambda \sim \lim_{n\to\infty} x_n$ gde je $x_n\in E$. Zato

$$\|x_n - x_m\|_{\lambda} = \|R(\lambda, A)x_n - R(\lambda, A)x_m\|_0 \to 0, \qquad (n, m\to\infty).$$

Na osnovu (i), imamo

$$R(\lambda,A)x_n \to R(\lambda,A)x, \qquad n\to\infty$$

u E_0. Zato je $R(\lambda,A_\lambda)x \in E_0$.

Dokažimo $E_0 \subseteq R(\lambda,A_\lambda)\overline{E}^\lambda$. Neka je $x \in E_0$. Tada $\|x - R(\lambda, A)y_n\|_o \to 0$, $n \to \infty$, gde je $y_n \in E$. Kako je $(R(\lambda, A)y_n)_{n\in N}$ Košijev niz u E_0, $(y_n)_{n\in N}$ je Košijev niz u $\overline{E}^\lambda$ i zato ima graničnu vrednost $y \in \overline{E}^\lambda$. Tada je

$$x = \lambda \sim \lim_{n\to\infty} R(\lambda, A_\lambda)y_n = R(\lambda, A_\lambda)y.$$

Teorema 2.19 *Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(i) T *se može suziti na polugrupu ograničenih linearnih operatora na* E.

(ii) $S(t)$ *preslikava* E *na* $D(A)$.

(iii) $D(A)$ *je invarijantno u odnosu na* $T_0(t)$, $t \geq 0$.

Primedba. Ovoga puta ne možemo očekivati da ćemo na E dobiti eksponencijalno ograničene ili jako neprekidne polugrupe.

Dokaz.

(i)$\Rightarrow$(ii) Na osnovu teorema 2.17 i 2.18 znamo da je $S(t)x \in E_0 = D(A_\lambda)$ i

$$A_\lambda S(t)x = T(t)x - x, \quad x \in E.$$

Ako $T(t)$ ostavlja E invarijantno, znamo da je $S(t)x \in D(A)$ jer je operator A deo operatora A_λ u E na osnovu teoreme 2.18 (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i) Na osnovu teoreme 2.17 je

$$T(t)x - x = A_\lambda S(t)x, \quad x \in E.$$

Ako je $S(t)x \in D(A)$ tada je $T(t)x \in E$. Osim toga, ako $S(t)$ preslikava E na $D(A)$, linearan operator A je zatvoren i definisan gotovo svuda i zato je ograničen. To implicira da je $T(t)$ ograničen.

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) Neposredno sledi iz druge formule u (2.31).

2.6 Košijev problem

U ovom odeljku posmatra se Košijev nehomogeni početni problem, tj. traže se rešenja jednačine

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \qquad (t \in [0,b]) \tag{2.36}$$

gde je A linearan operator: $E \to E$, $u_0 \in E$, $f \in C([0,b], E)$, $(b > 0)$. *Rešenjem* jednačine (2.36) smatraćemo funkciju $u = u(t) \in C^1([0,b],E)$ koja zadovoljava (2.36) i $u(t) \in D(A)$, $(t \in [0,b])$.

Košijev nehomogeni početni problem, pod pretpostavkom da je operator A generator n-puta integrisane polugrupe, razmatran je u [3], [51], [39], [40], a da je operator A generator 1-put integrisane polugrupe, razmatran je u [33], [67]. U ovom odeljku sledićemo razmatranje dato u [3] i [51].

Neka je operator A generator n-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ $(n\in\mathbb{N}_0)$. Pokazaćemo prvo da postoji najviše jedno rešenje jednačine (2.36).

Neka je funkcija $v\in C([0,b],E)$ data u obliku

$$v(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t)f(t-s)\,ds. \tag{2.37}$$

Propozicija 2.20 *Ako postoji rešenje* $u = u(t)$, *Košijevog problema* (2.36), *tada je* $v\in C^{n+1}([0,b],E)$ *i* $u = v^{(n)}$.

Dokaz. Neka je $t\in[0,b]$. Za $s\in[0,t]$ neka je $w(s) = S(t-s)\,u(s)$. Budući da je $u(s)\in D(A)$ prema pretpostavci, imamo iz (2.16)

$$w'(s) = \big(S(t-s)u(s)\big)'$$

$$= -\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s) - S(t-s)\,Au(s) + S(t-s)\,u'(s)$$

$$= -\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s) + S(t-s)\,\big(u'(s) - Au(s)\big)$$

$$= -\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s) + S(t-s)\,f(s), \quad s\in[0,t].$$

Medjutim,

$$S(t)u_0 = w(0) - w(t) = -\int_0^t w'(s)\,ds$$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,ds - \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds, \quad t\in[0,b].$$

Dakle, imamo

$$v(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,ds - \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds$$

$$= \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}u(s)\,ds, \quad t\in[0,b].$$

Otuda je $v\in C^{n+1}([0,b],E)$ i $u = v^{(n)}$.

Teorema 2.21 *Ako je* $v\in C^{n+1}([0,b],E)$ *tada* $u := v^{(n)}$ *rešenje Košijevog problema (2.36).*

Dokaz teoreme 2.21 zasniva se na sledećoj lemi:

Lema 2.22 *Za svako* $t\geq 0$ je $\int_0^t v(s)\,ds \in D(A)$ *i*

$$A\int_0^t v(s)\,ds = v(t) - \frac{t^n}{n!}u_0 - \int_0^t \frac{(t-r)^n}{n!}f(r)\,dr, \quad t\in[0,b]. \tag{2.38}$$

Dokaz leme 2.22 Iz (2.37) imamo

$$A\int_0^t v(s)\,ds = A\int_0^t S(s)u_0\,ds + A\int_0^t\int_0^s S(r)f(s-r)\,dr\,ds. \tag{2.39}$$

Koristeći (2.17) i Fubinijevu teoremu dobijamo

$$A\int_0^t S(s)u_0\,ds = -\frac{t^n}{n!}u_0 + S(t)u_0$$

i

$$A\int_0^t\int_0^s S(r)f(s-r)\,dr\,ds = A\int_0^t\int_r^t S(r)f(s-r)\,ds\,dr$$

$$= A\int_0^t\int_0^{t-r} S(r)f(u)\,du\,dr = A\int_0^t\left(\int_0^{t-u} S(r)f(u)\,dr\right)du$$

$$= \int_0^t\left[S(t-u)f(u) - \frac{(t-u)^n}{n!}f(u)\right]du = \int_0^t S(t-u)f(u)\,du - \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!}f(u)\,du.$$

Tada je

$$A\int_0^t v(s)\,ds = S(t)u_0 - \frac{t^n}{n!}u_0 + \int_0^t S(t-u)f(u)\,du - \int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!}f(u)\,du$$

$$= v(t) - \int_0^t S(s)f(t-s)\,ds - \frac{t^n}{n!}u_0 + \int_0^t S(s)f(t-s)\,ds - \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}f(s)\,ds$$

$$= v(t) - \frac{t^n}{n!}u_0 - \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}f(s)\,ds.$$

Dokaz teoreme 2.21 Prema pretpostavci je $v \in C^{n+1}([0,b],E)$ i, budući da je A zatvoren, (2.38) se može diferencirati (n+1)- puta. Tada dobijamo

$$Av^{(k)}(t) = v^{(k+1)}(t) - \frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!}u_0 - \int_0^t \frac{(t-r)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}f(u)\,du \tag{2.40}$$

za $k = 0, 1, \dots, n-1$ i $v^{(n)}(t) \in D(A)$, i

$$A\,v^{(n)}(t) = v^{(n+1)}(t) - f(t), \qquad t \in [0,b]. \tag{2.41}$$

Stavljajući u (2.41) $u := v^{(n)}$ dobijamo da je funkcija $u = u(t)$ rešenje Košijevog problema (2.36). Osim toga, ako je $n = 0$, tada je $S(0) = I$ i $u(0) = v(0) = u_0$. Ako je $n > 0$ tada je $S(0) = 0$ i, takodje $v(0) = 0$. Naime, iz (2.40), imamo $v^{(k)}(0) = 0$, $k<n$ i za $k = n-1$ dobija se $v^{(n)}(0) = u_0 + Av^{(n-1)}(0) = u_0$. Takodje, $u(0) = u_0$ u svakom slučaju.

Propozicija 2.23 *Ako je* $f \in C^{n+1}([0,b],E)$ *i* $u_0 \in D(A)$, $u_1 := Au_0 + f(0) \in D(A)$, $u_2 := Au_1 + f'(0) \in D(A), \dots, u_{k+1} := Au_k + f^{(k)}(0) \in D(A), \dots, u_n := Au_{n-1} + f^{(n)}(0) \in D(A)$, *tada Košijev problem (2.36) ima jedinstveno rešenje.*

Dokaz. Iz (2.16) dobijamo da je $v \in C^1$ i

$$v'(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u_o + S(t) A u_0 + S(t) f(0) + \int_0^t S(s) f'(t-s)\, ds.$$

Koristeći pretpostavku $Au_0 + f(0) \in D(A)$ dobijamo, na osnovu (2.16) da je $v \in C^2$. Nastavljajući postupak dobijamo na kraju da je $v \in C^{n+1}([0,b],E)$ i tvrdjenje sledi na osnovu teoreme 2.21.

Glava 3

α - puta integrisane polugrupe ($\alpha \in \mathbb{R}^+$)

U ovoj glavi uvode se i analiziraju α - puta integrisane polugrupe operatora ($\alpha \in \mathbb{R}^+$). Relacije koje se dobijaju za α - puta integrisane polugrupe operatora slične su relacijama u slučaju da je $\alpha = n \in \mathbb{N}$, medjutim, dokazi se znatno razlikuju. U teoremi 3.1 dati su potrebni i dovoljni uslovi da bi familija $(R(\lambda))_{Re\lambda>\omega}$ bila pseudorezolventa.

U drugom odeljku date su relacije izmedju generatora A i α - puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$, zatim karakterizacija generatora A, α - puta integrisane polugrupe (odnosno $(\alpha+1)$ - puta) ako je domen D(A) gust u E (odnosno domen D(A) nije gust u E).

U trećem odeljku je izložena teorija α - puta integrisanih polugrupa ($\alpha \in \mathbb{R}^+$), primenjena na rešavanje Košijevog nehomogenog problema.

U četvrtom odeljku dati su primeri α - puta integrisanih polugrupa ($\alpha \in \mathbb{R}^+$). Posebno, važan primer koji je razmatran u [33], posmatran je u okviru teorije α - puta integrisanih polugrupa, proširen je rezultat iz teoreme 4.1 u [33] i pokazano je da diferencijalni operator $p(D) = \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{d^j}{dx^j}$, $\sup(p(x)) < \infty$, generiše

α - puta integrisanu polugrupu $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ na prostorima $C_0(\mathbb{R})$, $C_b(\mathbb{R})$, $\cup C_b(\mathbb{R})$, $L^r(\mathbb{R})$, $r\in[1,\infty]$.

Rezultati u ovoj glavi su originalni rezultati Mijatovića, Pilipovića i Vajzovića [41] i Mijatovića i Pilipovića [44].

3.1 α - puta integrisane polugrupe ($\alpha\in\mathbb{R}^+$)

Neka je $T:[0,\infty)\to L(E)$ jako neprekidan operator, integrabilan u okolini nule, tj. integrabilan na $(0,\varepsilon)$ za neki $\varepsilon>0$ i eksponencijalno ograničen, tj.

$$\|T(t)\|\le Me^{\omega t},\quad t\ge 0 \tag{3.1}$$

za neko $M\ge 0$ i $\omega\in\mathbb{R}$. Operator R: $\{\lambda\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\lambda>\omega\}\to L(E)$, definisan

$$R(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(t)\,dt,\quad \mathrm{Re}\lambda>\omega,$$

gde integral posmatramo u Bohnerovom smislu, je Laplasova transformacija operatora T (kraće $\mathcal{L}$ - transformacija).

Neka je $(T(t))_{t\ge0}$, C_0 - polugrupa i neka je operator A njen generator. Uvedimo familiju uopštenih funkcija

$$f_\alpha(t)=\begin{cases}\dfrac{H(t)\,t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha\in\mathbb{R}^+=(0,\infty),\\ f_{\alpha+n}^{(n)}(t), & \alpha\le 0,\ \alpha+n>0,\ n\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{R}^+,\end{cases} \tag{3.2}$$

gde je H(t) Hevisajdova (Heaviside) funkcija.

Stavimo

$$S_\alpha(t)=\big(T(s)*f_\alpha(s)\big)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,T(s)\,ds,\quad t\ge0,\ \alpha\in\mathbb{R}^+, \tag{3.3}$$

gde je integral uzet u Bohnerovom smislu. Tada dobijamo

$$\mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda)=\mathcal{L}(T)(\lambda)\cdot\mathcal{L}(f_\alpha)(\lambda)=\frac{1}{\lambda^\alpha}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(t)\,dt,\quad \mathrm{Re}\lambda>\omega,$$

što daje

$$\mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda)=\frac{1}{\lambda^\alpha}R(\lambda,A),\quad \mathrm{Re}\lambda>\omega.$$

Sledeću teoremu dokazao je Arendt [3] za $\alpha = n\in\mathbb{N}$. Naš dokaz je različit jer je $\alpha\in\mathbb{R}^+$ i ne koristi se binomna formula kao u [3].

Teorema 3.1 *Neka je* $\alpha\in\mathbb{R}^+$, $S: (0,\infty) \to L(E)$ *jako neprekidna, eksponencijalno ograničena i neka postoji integral*

$$R(\lambda) = \lambda^\alpha \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt, \qquad \mathrm{Re}\lambda > \omega.$$

Tada je $(R(\lambda))_{\mathrm{Re}\lambda>\omega}$ *pseudorezolventa ako i samo ako je*

$$(3.4)\quad S(t)S(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{\alpha-1}S(r)\,dr - \int_0^s (t+s-r)^{\alpha-1}S(r)\,dr\right],\quad t,s\ge 0.$$

Posebno, ako je $(S(t))_{t\ge 0}$, C_0 *- polugrupa, tada* S_α, *definisano sa (3.3) za* $\alpha\in\mathbb{R}^+$ *zadovoljava (3.4).*

Dokaz. Lako se proverava da je (3.4) potreban uslov. Dokažimo dovoljan uslov.

Neka su $\mathrm{Re}\lambda$, $\mathrm{Re}\mu > \omega$ i $\lambda\neq\mu$. Tada, iz rezolventne jednačine, imamo

$$(3.5)\qquad \frac{1}{\lambda^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\left[R(\lambda)-R(\mu)\right] = \frac{R(\lambda)}{\lambda^\alpha}\cdot\frac{R(\mu)}{\mu^\alpha}$$

Iz desne strane relacije (3.5) dobijamo

$$(3.6)\qquad \frac{R(\lambda)}{\lambda^\alpha}\cdot\frac{R(\mu)}{\mu^\alpha} = \mathcal{L}(S(t))(\lambda)\cdot\mathcal{L}(S(s))(\mu) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s} S(t)S(s)\,ds\,dt.$$

Da bi dokazali (3.4) treba da dokažemo

$$(3.7)\qquad \frac{1}{\lambda^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\left[R(\lambda)-R(\mu)\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{\alpha-1}S(r)\,dr - \int_0^s (t+s-r)^{\alpha-1}S(r)\,dr\right]ds\,dt.$$

Podjimo od jednakosti

$$\frac{1}{\lambda^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\left[R(\lambda)-R(\mu)\right] = \frac{1}{\mu^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda^\alpha}-\frac{R(\mu)}{\mu^\alpha}\right] + \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu^\alpha}-\frac{1}{\lambda^\alpha}\right)\frac{R(\mu)}{\mu^\alpha}$$

koja se neposredno proverava. Izračunajmo prvo

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda^\alpha}-\frac{R(\mu)}{\mu^\alpha}\right] = \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\,\frac{R(\lambda)}{\lambda^\alpha}\,dt - \frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^\infty e^{-\mu t}S(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)\,ds\,dt - \frac{1}{\mu-\lambda}\int_0^\infty e^{-\mu t} S(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t} \int_t^\infty e^{-\lambda s} S(s)\,ds\,dt = \int_0^\infty e^{-\mu t} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s+t)\,ds\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s} S(s+t)\,ds\,dt\ .$$

Tada

$$(3.8)\quad \frac{1}{\mu^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\left[\frac{R(\lambda)}{\lambda^\alpha}-\frac{R(\mu)}{\mu^\alpha}\right] = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty S(t+s)\int_0^\infty \frac{e^{-\mu(s+v)}}{\Gamma(\alpha)}\, v^{\alpha-1}\,dv\,ds\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu r}\int_0^r \frac{(r-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S(t+s)\,ds\,dr\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_t^{t+s} \frac{(t+s-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S(r)\,dr\,ds\,dt.$$

Izračunajmo

$$(3.9)\qquad \frac{1}{\mu^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\cdot\frac{R(\mu)}{\mu^\alpha} = \int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^\infty e^{-\mu s} S(s)\int_0^\infty \frac{e^{-\mu v}}{\Gamma(\alpha)}\, v^{\alpha-1}\,dv\,ds\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{\lambda t}\int_0^\infty S(s)\int_{t+s}^\infty \frac{e^{-\mu r}}{\Gamma(\alpha)}(r-t-s)^{\alpha-1}\,drdsdt = \int_0^\infty e^{\lambda t}\int_t^\infty e^{-\mu r}\int_0^{r-t} \frac{(r-t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S(s)\,dsdrdt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_{-t}^0 e^{-\lambda r}\int_0^{t+r} \frac{(t+r-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S(s)\,ds\,dr\,dt\ ,$$

Takodje, izračunajmo

$$(3.10)\qquad \frac{1}{\lambda^\alpha}\cdot\frac{1}{\mu-\lambda}\cdot\frac{R(\mu)}{\mu^\alpha} = \frac{1}{\lambda^\alpha}\int_0^\infty e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{-\lambda s} S(s)\,ds\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_0^t S(s)\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda(s+v-t)}}{\Gamma(\alpha)}\, v^{\alpha-1}\,dv\,ds\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_{-t}^0 e^{-\lambda r}\int_0^{t+r} \frac{(t+r-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S(s)\,ds\,dr\,dt + \int_0^\infty e^{-\mu t}\int_0^\infty e^{-\lambda r}\int_0^t \frac{(r+t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S(s)\,ds\,dr\,dt.$$

Koristeći (3.9) i (3.10) dobijamo

$$(3.11)\quad \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{1}{\mu^\alpha}-\frac{1}{\lambda^\alpha}\right)\frac{R(\mu)}{\mu^\alpha} = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-\mu s}\int_0^s \frac{(t+s-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S(r)\,dr\,ds\,dt.$$

Tada (3.8) i (3.11) impliciraju (3.7). Tvrdjenje (3.4) sledi iz (3.6) i (3.7) i jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije.

Posebno, ako je $(S(t))_{t \geq 0}$ dobijeno pomoću C_0 - polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) date sa (3.3), tvrdjenje neposredno sledi.

Definicija 3.1 Neka je $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(E)$ jako neprekidna, eksponencijalno ograničena familija operatora i neka je $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Tada se $(S(t))_{t \geq 0}$ naziva *α - puta integrisana polugrupa* ako je (3.4) ispunjeno i ako je $S(0) = 0$. Familija $(S(t))_{t\geq 0}$ je *nedegenerisana* ako $S(t)x = 0$ za svako $t \geq 0$ implicira $x = 0$.

Neka je $(S(t))_{t\geq 0}$, α - puta integrisana polugrupa ($\alpha \in \mathbb{R}^+$), eksponencijalno ograničena i neka je $R(\lambda)=\lambda^\alpha \mathcal{L}(S)$, gde je $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Tada, na osnovu rezolventne jednakosti, $\ker R(\lambda)$ ne zavisi od $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Zato, na osnovu teoreme o jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije, $R(\lambda)$ je injektivno ako i samo ako je $(S(t))_{t\geq 0}$ nedegenerisana. U tom slučaju postoji jedinstveni operator A, koji zadovoljava $(\omega,\infty) \subset \rho(A)$, takav da je $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Taj operator se naziva *generetor α - puta integrisane polugrupe* $(S(t))_{t\geq 0}$.

Definicija 3.2 Neka je $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Operator A je *generator* α - puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ ako je $(\omega,\infty) \subset \rho(A)$ za neki $\omega \in \mathbb{R}$ i funkcija $\lambda \to \dfrac{(\lambda I - A)^{-1}}{\lambda^\alpha} = \mathcal{L}(S)(\lambda)$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, je injektivna.

3.2 Relacije izmedju generatora A i α - puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$). Karakterizacija generatora α - puta integrisane polugrupe

Propozicija 3.2 *Neka je* A *generator α - puta integrisane eksponencijalno ograničene polugrupe* $(S(t))_{t\geq 0}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. *Tada je, za* $x \in D(A)$ *i* $t \geq 0$

(3.12) $$S(t)x \in D(A)\,,\ AS(t)x = S(t)Ax,$$

(3.13) $$S(t)x = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x + \int_0^t S(s)Ax\,ds\,.$$

Osim toga je, $\int_0^t S(s)x\,ds \in D(A)$ *za* $x \in E$ i $t \geq 0$ *i*

(3.14) $$A\int_0^t S(s)x\,ds = S(t)x - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x.$$

Dokaz. Po pretpostavci postoje $M > 0$, $\omega \geq 0$ ($M,\omega \in \mathbb{R}$), takvi da je $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, ($t \geq 0$). Neka je $R(\lambda)=\lambda^\alpha \mathcal{L}(S)$, ($\mathrm{Re}\lambda > \omega$). Uzmimo fiksno $\mu \in \rho(A)$. Tada je

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)R(\mu,A)x\,dt = \lambda^{-\alpha} R(\lambda,A)R(\mu,A)x$$

$$= \lambda^{-\alpha} R(\mu,A)R(\lambda,A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R(\mu,A)S(t)x\,dt,$$

za svako $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ i $x \in E$. Na osnovu teoreme o jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije, sledi

(3.15) $$R(\mu,A)\,S(t) = S(t)\,R(\mu,A)\,,\quad \mu \in \rho(A),\ t \geq 0.$$

Tada (3.15) implicira tvrdjenja u (3.12).

Neka je $x \in D(A)$. Tada za $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ imamo

$$\int_0^\infty \lambda^{\alpha+1} e^{-\lambda t} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} x\,dt = x$$

$$= R(\lambda,A)(\lambda I - A)x = \lambda R(\lambda,A)x - R(\lambda,A)Ax$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{\alpha+1} e^{-\lambda t} S(t)x\,dt - \int_0^\infty \lambda^{\alpha+1} e^{-\lambda t} \int_0^t S(s)Ax\,ds\,dt.$$

Tada, na osnovu teoreme o jedinstvenosti $\mathcal{L}$ - transformacije, dobijamo (3.13).

Neka je $x \in E$, $t \geq 0$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Tada, na osnovu (3.12), (3.13) i (3.15), dobijamo

$$\int_0^t S(s)x\,ds = \lambda R(\lambda,A)\int_0^t S(s)x\,ds - \int_0^t S(s)AR(\lambda,A)x\,ds$$

$$= \lambda R(\lambda,A)\int_0^t S(s)x\,ds - S(t)R(\lambda,A)x + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}R(\lambda,A)x.$$

Zato je $\int_0^t S(s)x\,ds \in D(A)$ i

$$(\lambda I - A)\int_0^t S(s)x\,ds = \lambda\int_0^t S(s)x\,ds - S(t)x + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}x.$$

Poslednja jednakost implicira (3.14).

Posledica 3.3 *Neka je* $\alpha\in\mathbb{R}^+$. *Tada je* $S(t)x\in\overline{D(A)}$ *za* $x\in E$ i $t\geq 0$. *Neka je* $x\in E$. *Tada je* $S(\cdot)x$ *desno diferencijabilna u* $t\geq 0$, *ako i samo ako je* $S(t)x\in D(A)$. *U tom slučaju je*

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}x,\quad t\geq 0,\, x\in E.$$

Dokaz. Za $x\in E$, $t\geq 0$ imamo

$$S(t)x=\lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}S(s)x\,ds\in\overline{D(A)},$$

na osnovu propozicije 3.2. Drugo tvrdjenje sledi neposredno iz (3.14), budući da je operator A zatvoren.

Arendt [3] je dao karakterizaciju generatora A, (n+1)-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$, u slučaju da operator A nije gusto definisan u E. U slučaju da je $\alpha\in\mathbb{R}^+$ dobijamo:

Teorema 3.4

a) *Neka je* $\alpha\in\mathbb{R}^+$ *i* $M\geq 0$. *Neka je* A *(ne gusto definisan) linearan operator u Banahovom prostoru* E, *takav da je* $(a,\infty)\subset\rho(A)$, *za neko* $a\geq 0$. *Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(i) A *generiše* $(\alpha+1)$ *- puta integrisanu polugrupu* $(S(t))_{t\geq 0}$, *koja zadovoljava*

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\|S(t+h)-S(t)\|\leq Me^{\omega t},\quad t\geq 0,\ \omega\in(-\infty,a].$$

(ii) $$\left\|\frac{1}{k!}\left(\frac{R(\lambda,A)}{\lambda^{\alpha}}\right)^{(k)}\right\|\leq M\left(\frac{1}{\lambda-\omega}\right)^{k+1},$$ *za sve* $\mathrm{Re}\lambda>a$, $k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

b) *Ako operator* A *zadovoljava ekvivalentne pretpostavke iz* a) *tada je deo operatora* A *na* $\overline{D(A)}$, *generator* α *- puta integrisane polugrupe* ($\alpha\in\mathbb{R}^+$).

c) *Neka je linearan operator* A *u* a) *gusto definisan. Tada je (ii) u* a) *ekvivalentno sledećoj pretpostavci:*

A *generiše* α *- puta integrisanu polugrupu* $(S(t))_{t\geq 0}$, *koja zadovoljava*

$$\|S(t)\|\leq Me^{\omega t},\qquad t\geq 0.$$

Primedba. Ako u teoremi 3.4 c) stavimo $\alpha=0$ dobijamo Hile-Jošidinu teoremu (teorema 1.8).

Posledica 3.5 *Neka je* A *linearan operator i neka je* $D(A)$ *gust u* E. *Ako operator* A *generiše* α *- puta integrisanu polugrupu* ($\alpha\in\mathbb{R}^+$), *tada adjungovani operator* A^* *generiše* $(\alpha+1)$ *- puta integrisanu polugrupu u* E^*.

Posledica 3.5 neposredno sledi iz teoreme 3.4 budući da je $R(\lambda,A)^*=R(\lambda,A^*)$.

Neka je

$$(3.16)\qquad S_n(t)=\big(T(s)*f_n(s)\big)(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}\,T(s)\,ds\,,\quad t\ge 0,\ n\in\mathbb{N},$$

n - puta integrisana C_0 - polugrupa $(T(t))_{t\ge0}$ i f_n funkcija definisana u (3.2) za $\alpha=n\in\mathbb{N}$. Tada se generator A, n - puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\ge0}$ može predstaviti preko te integrisane polugrupe.

Teorema 3.6 *Neka je* $(S_n(t))_{t\ge0}\subset L(E)$ n - *puta integrisana, eksponencijalno ograničena polugrupa, definisana sa (3.16). Neka je* A *generator* $(S_n(t))_{t\ge0}$. *Tada je*

$$(3.17)\qquad Ax=(n+1)!\,\lim_{h\downarrow0}\frac{S_n(h)x-\dfrac{h^n}{n!}x}{h^{n+1}}\,,\qquad x\in D(A).$$

Dokaz. Neka je $x\in D(A)$. Dokažimo

$$A\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}x=\lambda\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}x-\frac{1}{\lambda^n}x,$$

gde je $\dfrac{R(\lambda)}{\lambda^n}x=\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,S_n(t)x\,dt$, $\mathrm{Re}\lambda>\omega$.

Imamo,

$$(n+1)!\,\frac{S_n(h)-\dfrac{h^n}{n!}}{h^{n+1}}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,S_n(t)x\,dt$$

$$=\frac{(n+1)!}{h^{n+1}}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,S_n(h)S_n(t)x\,dt-\frac{n+1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,S_n(t)x\,dt$$

$$=\frac{(n+1)!}{h^{n+1}}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_h^{h+t}(h+t-r)^{n-1}S_n(r)dr-\int_0^t(h+t-r)^{n-1}S_n(r)dr\right]x\,dt-\frac{n+1}{h}\frac{R(\lambda)}{\lambda^n}$$

$$=\frac{(n+1)n}{h^{n+1}}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_h^{h+t}(h+t-r)^{n-1}S_n(r)x\,dr\,dt$$

$$-\frac{(n+1)n}{h^{n+1}}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t(h+t-r)^{n-1}S_n(r)x\,dr\,dt-I_3$$

$$=I_1-I_2-I_3\,.$$

Tada je

$$I_1=\frac{(n+1)n}{h^{n+1}}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_h^{h+t}(h+t-r)^{n-1}S_n(r)x\,dr\,dt$$

$$= \frac{(n+1)n}{h^{n+1}} \int_h^\infty S_n(r) \int_{r-h}^\infty (h+t-r)^{n-1} e^{-\lambda t} x \, dt \, dr$$

$$= \begin{vmatrix} h+t-r=u \\ dt = du \end{vmatrix} = \frac{(n+1)n}{h^{n+1}} \int_h^\infty S_n(r) \int_0^\infty u^{n-1} \; e^{-\lambda(u+r-h)} x \, du \, dr$$

$$= \frac{(n+1)n}{h^{n+1}} e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda r} S_n(r) \int_0^\infty u^{n-1} e^{-\lambda u} x \, du dr = \frac{(n+1)n \, e^{\lambda h}}{h^{n+1}} \cdot \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \int_h^\infty e^{-\lambda r} S_n(r) x \, dr.$$

$$I_2 = \frac{(n+1)n}{h^{n+1}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t (h+t-r)^{n-1} S_n(r) x \, dr dt$$

$$= \frac{(n+1)n}{h^{n+1}} \int_0^\infty S_n(r) \int_r^\infty (h+t-r)^{n-1} \; e^{-\lambda t} x \, dt dr = \begin{vmatrix} h+t-r=u \\ dt = du \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(n+1)n}{h^{n+1}} \int_0^\infty S_n(r) \int_h^\infty u^{n-1} \; e^{-\lambda(u-h+r)} x \, du dr = \frac{(n+1)n}{h^{n+1}} e^{\lambda h} \int_0^\infty e^{-\lambda r} S_n(r) \int_h^\infty u^{n-1} e^{-\lambda u} x \, du dr$$

$$= \frac{(n+1)n \, e^{\lambda h}}{h^{n+1}} \frac{R(\lambda)}{\lambda^n} \int_h^\infty u^{n-1} \; e^{-\lambda u} x \, du \, .$$

Prema tome je,

$$(n \; +1)! \; \frac{S_n(h) - \dfrac{h^n}{n!}}{h^{n+1}} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_n(t) x \, dt$$

$$= \frac{(n+1)! \, e^{\lambda h}}{h^{n+1}} \frac{1}{\lambda^n} \int_h^\infty e^{-\lambda r} S_n(r) x \, dr - \frac{(n+1)n \, e^{\lambda h}}{h^{n+1}} \frac{R(\lambda)}{\lambda^n} \int_h^\infty u^{n-1} e^{-\lambda u} x \, du - \frac{n+1}{h} \frac{R(\lambda)}{\lambda^n}$$

$$= \frac{(n+1)! e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda r} S_n(r) x \, dr - (n+1) n \, e^{\lambda h} R(\lambda) \int_h^\infty u^{n-1} e^{-\lambda u} x \, du - (n+1) h^n R(\lambda) x}{h^{n+1} \lambda^n}$$

Sada, nakon primene L´Hospital-ovog pravila, ako $h \downarrow 0$, dobijamo

$$A \frac{R(\lambda)}{\lambda^n} x = \lambda \frac{R(\lambda)}{\lambda^n} x - \frac{1}{\lambda^n} x \, ,$$

i A je generator n-puta integrisane polugrupe $(S_n(t))_{t \geq 0} \subset L(E)$.

Prethodna teorema može se posmatrati i u slučaju da je $(S_n(t))_{t \geq 0}$ n - puta integrisana polugrupa u smislu definicije 3.1, $n \in \mathbb{N}_0$, ali da integrisana polugrupa nije nastala direktnom integracijom C_0 - polugrupe. To će biti uradjeno kasnije.

3.3 Košijev problem

Neka je A linearan operator na Banahovom prostoru E, $u_0\in E$ i $\bar{f}\in C([0,b],E)$ (gde je $b > 0$). Tada je funkcija $u\in C^1([0,b],E)$ rešenje Košijevog problema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \bar{f}(t), & t\in[0,b] \\ u(0) = u_0 \end{cases}, \tag{3.18}$$

ako je $u(t)\in D(A)$ i (3.18) je ispunjeno za svako $t\in[0,b]$.

Teorema 3.7 *Neka je operator* A *u (3.18) generator* α *- puta integrisane polugrupe* $(S(t))_{t\geq 0}$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$.

a) *Neka je* $u_0\in E$, $\bar{f}\in C([0,b],E)$, $b > 0$ *i*

$$v(t) = S(t)\, u_0 + \int_0^t S(s)\, \bar{f}(t-s)\,ds = S(t)\, u_0 + (S * \bar{f})(t). \tag{3.19}$$

Ako postoji rešenje $u = u(t)$ *jednačine (3.18) tada je* $v * f_{-\alpha}\in C^1([0,b],E)$, $\alpha > 0$ *i* $u = v * f_{-\alpha}$.

b) *Neka je* $v = v(t)$ *u obliku (3.19). Ako je* $v * f_{-\alpha}\in C^1([0,b],E)$, *tada je* $u = v^{(\alpha)} = v * f_{-\alpha}$ *rešenje jednačine (3.18).*

Dokaz.

a) Neka je $t\in[0,b]$, $b > 0$ i $w(s) = S(t-s)\, u(s)$, $s\in[0,t]$. Budući da je $u(s)\in D(A)$, tada, prema propoziciji 3.2, imamo

$$\begin{aligned} w'(s) &= \big(S(t-s)\, u(s)\big)' \\ &= -\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(s) + S(t-s)\, u'(s) - S(t-s)\, Au(s) \\ &= -\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(s) + S(t-s)\, [u'(s) - Au(s)] \\ &= -\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(s) + S(t-s)\, \bar{f}(s). \end{aligned}$$

Zato je

$$S(t)\, u_0 = w(0) - w(t)$$

$$= -\int_0^t w'(s)\,ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(s)\,ds - \int_0^t S(t-s)\, \bar{f}(s)\,ds.$$

Tada imamo

$$v(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(s)\,ds - \int_0^t S(t-s)\,\bar{f}(s)\,ds + \int_0^t S(s)\,\bar{f}(t-s)ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)\,ds = (u * f_\alpha)(t),$$

što daje $v * f_{-\alpha} \in C^1([0,b],E)$ i

$$u(t) = (v * f_{-\alpha})(t), \quad t \in [0,b].$$

b) Dokaz se zasniva na sledećoj lemi.

Lema 3.8 *Za svako* $t \geq 0$ *je* $\int_0^t v(s)ds \in D(A)$ *i*

$$A\int_0^t v(s)ds = v(t) - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}u_0 - \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\bar{f}(s)\,ds. \tag{3.20}$$

Dokaz. Iz (3.19) dobijamo

$$\int_0^t v(s)ds = \int_0^t S(s)u_0\,ds + \int_0^t\int_0^s S(r)\,\bar{f}(s-r)drds.$$

Koristeći propoziciju 3.2 i Fubinijevu teoremu dobijamo

$$A\int_0^t S(s)u_0\,ds = S(t)\,u_0 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}u_0$$

i

$$A\int_0^t\int_0^s S(r)\,\bar{f}(s-r)drds = A\int_0^t\int_r^t S(r)\,\bar{f}(s-r)drds$$

$$= \int_0^t S(t-s)\,\bar{f}(s)ds - \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\bar{f}(s)\,ds.$$

Tada je

$$A\int_0^t v(s)ds = S(t)\,u_0 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}u_0 + \int_0^t S(t-s)\,\bar{f}(s)ds - \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\bar{f}(s)\,ds$$

$$= v(t) - \int_0^t S(t-s)\,\bar{f}(s)ds - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}u_0 + \int_0^t S(t-s)\,\bar{f}(s)ds - \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\bar{f}(s)\,ds$$

$$= v(t) - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}u_0 - \int_0^t \frac{(t-s)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\bar{f}(s)\,ds.$$

Dokaz teoreme 3.7 b)

Pretpostavimo da je $v * f_{-\alpha} \in C^1([0,b],E)$. Budući da je operator A zatvoren, diferencirajmo (3.20) (α+1)-puta. Tada dobijamo

(3.21) $\quad A\,v^{(\alpha)}(t) = v^{(\alpha+1)}(t) - \bar{f}(t), \qquad t\in[0,b].$

Stavimo $u(t) := v^{(\alpha)}(t) = (v * f_{-\alpha})(t)$. Tada (3.21) pokazuje da $u = u(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$Au(t) = u'(t) - \bar{f}(t), \qquad t\in[0,b].$$

Da bi dokazali drugo tvrdjenje u (3.18) diferencirajmo (3.20) α-puta. Tada dobijamo

$$A\int_0^t u(s)\,ds = u(t) - u_0 - \int_0^t \bar{f}(s)\,ds$$

i za $t = 0$, imamo

$$0 = u(0) - u_0\,.$$

3.4 Primeri α - puta integrisanih polugrupa ($\alpha\in\mathbb{R}^+$)

Sledeću α - puta integrisanu polugrupu konstruisaćemo koristeći (3.3). Neka je $E = C_0(-\infty,0] = \{f\in C(-\infty,0]\,;\ f(0)=0\}$. Definišimo

$$\big(T(t)f\big)(x) = \begin{cases} f(x+t) & \text{ako je } x \le -t \\ 0 & \text{ako je } x > -t,\ t\ge 0. \end{cases}$$

Tada je $(T(t))_{t\ge 0}$ C_0 - polugrupa.

Neka je $\alpha\in\mathbb{R}^+$. Tada, $(S(t))_{t\ge 0}$ dato sa

$$\big(S(t)f\big)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_x^{x+t}(t+x-u)^{\alpha-1}f(u)\,du, & \text{za } t\le -x, \\[2ex] \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_x^{0}(t+x-u)^{\alpha-1}f(u)\,du, & \text{za } t> -x, \end{cases}$$

definiše α-puta integrisanu polugrupu na E. Njen generator A, dat je sa $Af = f'$ na $D(A) := \{f\in E\cap C^1(-\infty,0];\ f(0)=0\}$.

Značajan primer α-puta integrisane polugrupe, koja nije dobijena integracijom C_0 - polugrupe, daćemo u sledećoj teoremi. Naime, koristeći ideje Kelermana i Hibera [33] konstruisaćemo α - puta integrisanu polugrupu $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right]$

odredjenu diferencijalnim operatorom. U ovom delu, koristićemo Furijeovu transformaciju (kraće $\mathcal{F}$ - transformacija) i označavaćemo je sa $\hat{\ }$, tj.

$$\hat{f}(y):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iyt}\,dt.$$

Inverznu $\mathcal{F}$ - transformaciju funkcije f označavaćemo $\tilde{f}$.

Neka je $A=\sum_{j=0}^{k}a_j\left(\frac{d}{dx}\right)^j$ diferencijalni operator sa koeficijentima iz $\mathbb{C}$, $p(x) = \sum_{j=0}^{k}a_j(ix)^j$, $k\geq 1$ i neka je E jedan od poznatih prostora

(3.22) $\qquad C_0(\mathbb{R}),\ C_b(\mathbb{R}),\ \cup C_b(\mathbb{R}),\ L^r(\mathbb{R}),\ r\in[1,\infty].$

($\cup C_b(\mathbb{R})$ je prostor uniformno neprekidnih i ograničenih funkcija.) Preciznije, posmatramo operator A: D(A)→E, gde je

$$D(A):=\left\{f\in E;\sum_{j=0}^{k}a_j D^j f\in E \text{ u distributivnom smislu}\right\},$$

$$Af:=\sum_{j=0}^{k}a_j D^j f.$$

Pretpostavimo da je $\omega = \sup_{x\in\mathbf{R}}\operatorname{Re}(p(x)) < \infty$. Tada imamo sledeće proširenje teoreme 4.1 iz [33].

Teorema 3.9 *Operator* A: D(A) → E, *gde je* E *jedan od prostora datih u (3.22), generiše, neprekidnu u normi,* α *- puta integrisanu polugrupu za* $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, *koja je data u obliku*

$$S(t,f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{\phi}_{t\alpha}*f \quad za \quad \phi_{t\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}e^{p(x)s}ds,\ t\geq 0.$$

Dokaz. Teorema 4.1 u [33] dokazana je za $\alpha = 1$. Uzmimo da je $\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$. Tada imamo

$$\mathcal{L}(S(t,f))(\lambda)=\frac{1}{\lambda^{\alpha}}R(\lambda,f),\qquad \lambda>\omega,\qquad \text{gde je}$$

$$R(\lambda,f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{r}_{\lambda}*f,\quad \lambda>\omega\quad za\quad r_{\lambda}=(\lambda-p(x))^{-1}.$$

U teoremi 4.1 u [33] dokazano je da je $R(\lambda,f)$ pseudorezolventa.

Izaberimo m > 2, takvo da je $\alpha > 1 - \frac{1}{m}$. Može se dokazati za $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$$\phi_{t\alpha} \in H^1(\mathbb{R}), \ \|\phi_{t\alpha}\|_{H^1} \le C_m \left(1 + t^{2\left(\frac{m(\alpha-1)+1}{m}\right)}\right) e^{\omega t}$$

i preslikavanje $[0,\infty) \to H^1(\mathbb{R})$, $t \to \phi_{t\alpha}$ je neprekidno gde je $H^1(\mathbb{R})$ prostor Soboljeva sa normom $\| \ \|_{H^1}$.

Dokažimo da je preslikavanje $t \to \phi_{t\alpha}$ neprekidno. Neka je $\ell = \frac{m}{m-1}$. Tada, pomoću Helderove (Hölder) nejednakosti, dobijamo

$$\|\phi_{t\alpha} - \phi_{s\alpha}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_s^t \frac{(t-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{p(x)r}\, dr \right|^2 dx \le$$

$$\left(\int_{-\infty}^{-L} + \int_{-L}^{L} + \int_{L}^{\infty}\right)\left(\int_s^t \left(\frac{(t-r)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right)^m dr\right)^{\frac{2}{m}} \left(\int_s^t \left|e^{p(x)r}\right|^{\ell} dr\right)^{\frac{2}{\ell}} dx$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{-L} + \int_{-L}^{L} + \int_{L}^{\infty}\right)\left(\frac{(t-s)^{(m(\alpha-1)+1)\frac{2}{m}}}{[\Gamma(\alpha)]^2 [m(\alpha-1)+1]^{\frac{2}{m}}} \left(\frac{e^{\ell \mathrm{Re}(p(x))t} - e^{\ell \mathrm{Re}(p(x))s}}{\ell \mathrm{Re}(p(x))}\right)^{\frac{2}{\ell}}\right) dx \le$$

$$\left(\int_{-\infty}^{-L} + \int_{L}^{\infty}\right)\left(\frac{(t-s)^{(m(\alpha-1)+1)\frac{2}{m}}}{[\Gamma(\alpha)]^2 [m(\alpha-1)+1]^{\frac{2}{m}}} \cdot \frac{2e^{2\omega t}}{(\ell \mathrm{Re}(p(x)))^{\frac{2}{\ell}}}\right) dx + 2L \frac{(t-s)^{(m(\alpha-1)+1)\frac{2}{m}}}{[\Gamma(\alpha)]^2 [m(\alpha-1)+1]^{\frac{2}{m}}} e^{2\omega t}$$

Budući da $[m(\alpha-1)+1]^{\frac{2}{m}} > 0$, sledi $\|\phi_{t\alpha} - \phi_{s\alpha}\|_2^2 \to 0$ kad $|t-s| \to 0$.

Slično je ispunjeno i za $\left\|\frac{d}{dx}\phi_{t\alpha} - \frac{d}{dx}\phi_{s\alpha}\right\|_2^2$, gde je iskorišćena činjenica da je $\left(\frac{p'(x)}{p(x)}\right)^{\frac{2}{\ell}}$ integrabilno u okolini $-\infty$ i $+\infty$ budući da je $\ell < 2$.

Primetimo da je $r_\lambda \in H^1(\mathbb{R})$ ([33], Lema 4.3). Kako je $R(\lambda, f)$ pseudorezolventa, $S(t,f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\phi}_{t\alpha} * f$ zadovoljava (3.4). Sada, koristeći činjenicu da je $\tilde{\phi}_{t\alpha} \in L^1$, dokazano je da je $S(t,f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\phi}_{t\alpha} * f$ α-puta integrisana polugrupa na E, neprekidna u operatorskoj normi i

$$\| S(t,\cdot) \|_{L(E)} \leq \left(a + bt^{\frac{2}{m}(m(\alpha-1)+1)} \right) e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Koristeći teoriju distribucija, pokazuje se da A generiše $(S(t,\cdot))_{t\geq 0}$ ([33], Lema 4.6).

Proširenje teoreme 3.9 na višedimenzionalan slučaj može se primeniti na eliptičke operatore ([33], teorema 4.9). Posebno se ovo proširenje može se primeniti i na Šredingerov (Schrödinger) operator $i\Delta$.

Glava 4
0 - puta integrisane polugrupe

U ovoj glavi se uvodi pojam 0-puta integrisanih polugrupa za znatno širu klasu operatora na Banahovom prostoru E, nego što je to uradjeno u radovima [3], [51], [39], [40], [33], [67]. Naime, pomenuti autori uvode pojam n-puta integrisanih polugrupa ($n \in \mathbb{N}$) ili 1-put integrisanih polugrupa i naglašavaju da je C_0 - polugrupa, po dogovoru, 0-puta integrisana polugrupa. Medjutim, mi dokazujemo da postoji šira klasa polugrupa koje nisu C_0 - polugrupe, ali koje zadovoljavaju uslove 0-puta integrisanih polugrupa. Takve polugrupe $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{K}'_{1+}(L(E))$ su karakterizirane

$$\langle S(t+s,x), \varphi(t,s)\rangle = \langle S(t, S(s,x)), \varphi(t,s)\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2),\ t,s \geq 0,\ x \in E.$$

Takodje, dokazano je da je 0-puta integrisana polugrupa, čiji je generator gusto definisan u E, eksponencijalna distribuciona polugrupa ili SGDE (u smislu definicije 6.1 u [38]). Takodje je tačno i obratno tvrdjenje, tj. SGDE je 0-puta integrisana polugrupa pod pretpostavkom da je njen generator A gusto definisan u E. Ako generator A 0-puta integrisane polugrupe nije gusto definisan u E, tada ona ispunjava sve uslove za SGDE, izuzev da je skup $\{\mathcal{T}_0(\varphi,x);\ \varphi \in \mathcal{D}_0,\ x \in E)\}$ gust u E. Zato uvodimo $\tilde{0}$-puta integrisane polugrupe koje su SGDE na skupu $\overline{D(A)}$. Takodje, konstruišemo Banahov prostor $E_0 \subset E$, takav da 0-puta integrisana polugrupa sa generatorom A, koji nije gusto definisan u E, ima suženje na E_0 koje je SGDE.

U prvom odeljku uvedeni su prostori test funkcija $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_+$, $\mathcal{K}_{1+}$ kao i odgovarajući prostori distribucija $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{K}_1'(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_+'$, $\mathcal{K}_{1+}'$. Takodje, uvedeni su prostori $\mathcal{S}'(E) = L(\mathcal{S}(\mathbb{R}),E)$, $\mathcal{K}_1'(E) = L(\mathcal{K}_1,E)$, $\mathcal{K}_{1+}'(E) = L(\mathcal{K}_{1+},E)$ i data je karakterizacija prostora $\mathcal{K}_{1+}'(E)$.

U drugom odeljku uveden je pojam 0-puta integrisanih polugrupa kao i medjusobni odnosi generatora n-puta integrisanih polugrupa ($n\in\mathbb{N}$) i 0-puta integrisanih polugrupa.

U trećem odeljku, pomoću C_0 - polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$, uvedena je klasa eksponencijalnih distribucionih polugrupa (kraće SGDE)

$$\mathcal{T}(\varphi,x) = \left(T * \check{\varphi}\right)(0)(x) = \langle T(t,x), \varphi(t)\rangle, \quad \varphi\in\mathcal{K}_1,\ x\in E$$

i dati su odnosi izmedju SGDE i njenog generatora.

U četvrtom odeljku posmatrane su 0-puta integrisane polugrupe čiji generatori nisu gusti u E i uveden je pojam $\tilde{0}$-puta integrisanih polugrupa.

U petom odeljku su uvedeni pojmovi, 0-puta integrisanih polugrupa i $\tilde{0}$-puta integrisanih polugrupa, primenjeni na rešavanje Šredingerove jednačine

$$\frac{\partial u}{\partial t} - iH(\partial)u = f \quad , \quad f\in\mathcal{K}_1'(D(A)),$$

gde je $H(\partial)$ pseudodiferencijalni operator $i(\Delta)^{\frac{m}{2}}$, $m > 0$.

Rezultati u ovoj glavi su originalni rezultati M. Mijatovića i S. Pilipovića [43].

4.1 Distribucione polugrupe

Neka su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, poznati prostori test funkcija i neka su $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, njihovi prostori distribucija (za njihove potpunije definicije upućujemo na [62], [63], [70]). Takodje, neka je $\mathcal{S}'(E) = L(\mathcal{S}(\mathbb{R}),E)$. Neka je $\mathcal{S}_+ = \{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R});\ |\ t^k\varphi^{(\nu)}(t)\ | < C_{k,\nu},\ t\in[0,\infty),\ k,\nu\in\mathbb{N}_0\}$ i neka je $\mathcal{S}_+'$ prostor temperiranih distribucija čiji se nosači nalaze u $[0,\infty)$ ([70]). Uvedimo prostor eksponencijalno opadajućih test funkcija $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ na sledeći način: $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}) = \{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R});\ |\ e^{k|t|}\varphi^{(\nu)}(t)\ | < C_{k,\nu},\ t\in\mathbb{R},\ k,\nu\in\mathbb{N}_0\}$ ([22]). Takodje se na sličan način može uvesti prostor $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2)$. Primetimo da prostori $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ i $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2)$ imaju iste topologijske osobine kao i $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Takodje, ispunjeno je

(4.1) $f\in\mathcal{K}_1'(\mathbb{R})$ ako i samo ako je $e^{-r|x|} f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ za neki $r\in\mathbb{R}$.

Dualni prostor prostora $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ je prostor eksponencijalnih distribucija $\mathcal{K}_1'(\mathbb{R})$. Koristićemo prostor $\mathcal{K}_{1+} = \{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R});\ | e^{k|t|}\varphi^{(\nu)}(t) | < C_{k,\nu},\ t\in[0,\infty),\ k,\nu\in\mathbb{N}_0\}$ koji ima iste topologijske osobine kao i $\mathcal{S}_+$. Njegov dualni prostor $\mathcal{K}_{1+}' \subset \mathcal{K}_1'(\mathbb{R})$ je prostor eksponencijalnih distribucija čiji su nosači u $[0,\infty)$.

Uvedimo familiju distribucija

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{H(t)\,t^{n-1}}{(n-1)!}, & n\in\mathbb{N}, \\ f_{n+n_1}^{(n_1)}(t), & -n\in\mathbb{N}_0,\ n_1\in\mathbb{N},\ n+n_1>0,\ t\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

gde je H Hevisajdova funkcija.

Neka $\mathcal{K}_1'(E) = \mathcal{L}(\mathcal{K}_1,E)$ označava prostor neprekidnih linearnih funkcija $\mathcal{K}_1\to E$ u odnosu na topologiju uniformne konvergencije na ograničenim skupovima u $\mathcal{K}_1$. Označimo prostor $\mathcal{K}_{1+}'(E) = \mathcal{L}(\mathcal{K}_{1+},E)$, koji se sastoji od elemenata prostora $\mathcal{K}_1'(E)$ čiji su nosači u $[0,\infty)$. Takodje je ispunjeno $\mathcal{K}_1'(E) = \mathcal{K}_1'(\mathbb{R})\hat{\otimes} E = \mathcal{L}(\mathcal{K}_1, E)$gde simbol $\hat{\otimes}$ označava kompletiranje u odnosu na ε - topologiju, koja je ekvivalentna π - topologiji, budući da je $\mathcal{K}_1'(\mathbb{R})$ jezgro (nuclear) ([68]). Slično je i $\mathcal{K}_{1+}'(E) = \mathcal{K}_{1+}'\hat{\otimes} E$.

Konvolucija elemenata $f\in\mathcal{K}_{1+}'(E)$ i $g\in\mathcal{K}_{1+}'$ definisana je sa $\langle f * g,\varphi\rangle = \langle f, \check{g} * \varphi\rangle$, gde je $\varphi\in\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$, $(\check{g}(t) = g(-t))$. Takodje je $f * g = g * f \in \mathcal{K}_{1+}'(E)$.

Neka je $T: [0,\infty) \to \mathcal{L}(E)$ jako neprekidna, eksponencijalno ograničena, tj. postoje konstante $M \geq 0$ i $\omega \geq 0$, takve da je

(4.2) $$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \qquad t\geq 0.$$

Tada $\varphi \to \int_0^\infty T(t)\varphi(t)\,dt$, $\varphi\in\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ definiše elemenat prostora $\mathcal{K}_{1+}'(E)$.

Elementi prostora $\mathcal{K}_{1+}'(E)$ imaju sledeću reprezentaciju.

Propozicija 4.1 *Neka je* $f\in\mathcal{K}_{1+}'(E)$. *Tada postoji* $n_0\in\mathbb{N}$, *takav da za svako* $n \geq n_0$ *postoji jako neprekidna funkcija* $F_n : \mathbb{R}\to E$, $\operatorname{supp} F_n \subset [0,\infty)$ *i pozitivne konstante* m_n *i* C_n, *takve da je*

$$\|F_n(t)\| \leq C_n e^{m_n t},\quad t\geq 0,\quad f = F_n^{(n)} \quad \textit{(u distribucionom smislu).}$$

Dokaz. Neka je $\varphi \in C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, takvo da je $\lim\limits_{|x|\to\infty} \sup\limits_{i\le k} \left\{ e^{k|x|} \left|\varphi^{(i)}(x)\right| \right\} = 0$. Označimo prostor takvih funkcija sa $\mathcal{K}_{1,k}(\mathbb{R})$. Tada je

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{R}) = \operatorname{proj} \lim_{k\to\infty} \mathcal{K}_{1,k}(\mathbb{R}) \quad \text{i} \quad \mathcal{K}'_1(E) = \operatorname{ind} \lim_{k\to\infty} \mathcal{K}'_{1,k}(E)$$

u smislu jake topologije. Tada postoji $n_1 \in \mathbb{N}$, takav da je $f \in \mathcal{K}'_{1,n_1}(E)$. Takodje, tada postoji n_0 takvo da za svako $t \in \mathbb{R}$, $f_{n_0}(t-\cdot)\theta(\cdot) \in \mathcal{K}_{1,n_1}(\mathbb{R})$, gde je $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\theta(x)=0$ za $x \le -1$, $\theta(x) = 1$, za $x \ge -\dfrac{1}{2}$. Takodje, ispunjeno je

$$\left(f * f_{n_0}\right)(t) = \left\langle f(u), \frac{(t-u)^{n_0-1}}{(n_0-1)!} H(t-u)\,\theta(u) \right\rangle, \qquad t \in \mathbb{R},$$

i funkcija je neprekidna, sa nosačem u $[0,\infty)$, eksponencijalno ograničena i $\left(f * f_{n_0}\right)^{(n_0)} = f$. Ovo implicira tvrdjenje za svako $n \ge n_0$.

Koristeći (4.1) može se dokazati

(4.3) $\quad f \in \mathcal{K}'_{1+}(E)$ ako i samo ako je za neko $r \ge 0$, $e^{-r|x|} f \in \mathcal{S}'_+(E)$.

Neka je za funkciju f (4.3) ispunjeno. Tada je $\mathcal{L}$ - transformacija funkcije f definisana sa

$$(\mathcal{L} f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \left\langle f(t), e^{-\lambda t}\eta(t) \right\rangle, \ \operatorname{Re}\lambda > r,$$

gde je $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\eta = [-\varepsilon,\infty), \varepsilon > 0$ i $\eta \equiv 1$ na $[0,\infty)$. Kao i u slučaju Schwartz-ovih distribucija, pokazuje se da definicija ne zavisi od η ([70]). Ako je $f \in L^1([0,\infty),E)$ (odnosno $\left\| \int f(t)\,dt \right\|_E < \infty$), tada je

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\,dt = \left\langle f(t), e^{-\lambda t} \right\rangle, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0,$$

gde je integral uzet u Bohnerovom smislu.

Neka je $\mathcal{D}_0$ podprostor prostora C_0^∞ koji se sastoji od elemenata čiji su nosači u $[0,\infty)$. J. Lions [38] je uveo distribucione polugrupe. Reći ćemo da je distribucija $\mathcal{G}$ sa vrednostima u $L(E)$ distribuciona polugrupa ili SGD, ako je ispunjeno

(D.1) $\quad \mathcal{G} \in \mathcal{D}'_+(L(E))$,

(D.2) $\quad \mathcal{G}(\varphi * \psi, \cdot) = \mathcal{G}(\varphi, \mathcal{G}(\psi, \cdot))$, $\quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_0$,

(D.3) $\quad \bigcap\limits_{\varphi\in\mathcal{D}_0} N(\mathcal{G}(\varphi, \cdot)) = \{0\}$,

(D.4) $\quad$ Linearni omotač $\mathfrak{R}$ skupa $\bigcup\limits_{\varphi\in\mathcal{D}_0} R(\mathcal{G}(\varphi, \cdot))$ je gust u E, (D.5) Za svako $x \in \mathfrak{R}$ postoji funkcija u: $\mathbb{R} \to E$, takva da je supp $u \subset [0,\infty)$, $u(0)=x$ i u je neprekidna za $t \geq 0$ i $\mathcal{G}(\varphi, x) = \int_0^\infty \varphi(t)\,u(t)\,dt$ za svako $\varphi \in \mathcal{D}_0$.

Ako postoji $\xi_0 \in \mathbb{R}$, takvo da je ispunjeno

(D.6) $e^{-\xi t}\,\mathcal{G} \in \mathcal{S}'_+(L(E))$, za $\xi > \xi_0$,

tada se $\mathcal{G}$ naziva *eksponencijalna distribuciona polugrupa* ili SGDE.

4.2 0-puta integrisane polugrupe

Neka je $(S(t))_{t\geq 0} \subset L(E)$ jako neprekidna familija operatora na $[0,\infty)$, eksponencijalno ograničena i neka je $n \in \mathbb{N}$. Prema definiciji 2.1 familija $(S(t))_{t\geq 0}$ je n-puta integrisana polugrupa ako je ispunjeno $S(0,x) = 0$ i

(4.4) $$S(t,S(s,x))$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s} (t+s-r)^{n-1} S(r,x)dr - \int_0^s (t+s-r)^{n-1} S(r,x)dr\right], \quad t,s \geq 0,\ x \in E.$$

Propozicija 4.2 *Pretpostavimo da je* $S \in \mathcal{K}'_{1+}(L(E))$.

a) *Tada, postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je* $S_{n_0} = S * f_{n_0} \in C(\mathbb{R}, L(E))$ *sa nosačem u* $[0,\infty)$, *eksponencijalno ograničena i*

(4.5) $$\langle S(t, \langle S(s,x), \psi(s)\rangle), \varphi(t)\rangle$$

$$= \int S_{n_0}\big(t, S_{n_0}(s,x)\big)\,\psi^{(n_0)}(s)\,\varphi^{(n_0)}(t)\,ds\,dt, \quad \psi, \varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}).$$

b) *Neka je* $\varphi(t,s) \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2)$ *i neka su* $\varphi_\nu(t)$, $\psi_\nu(s)$ *nizovi u* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *koji konvergiraju* φ *u* $\mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2)$ *kad* $\nu \to \infty$. *Tada postoji granična vrednost* $\lim_{\nu\to\infty} \langle S(t,\langle S(s,x), \psi_\nu(s)\rangle), \varphi_\nu(t)\rangle$, $\varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2)$ *i definiše elemenat prostora* $\mathcal{K}_1'(\mathbb{R}^2)$ *koji ćemo označavati* $S(t, S(s,x))$, tj.

(4.6) $$\langle S(t, S(s,x)), \varphi(t,s)\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \langle S(t,\langle S(s,x), \psi_\nu(s)\rangle), \varphi_\nu(t)\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2).$$

c) *Takodje, imamo*

(i) $$\left\langle \frac{\partial^r}{\partial t^r} S(t, S(s,x)), \varphi(t,s)\right\rangle = (-1)^r \left\langle S(t, S(s,x)), \frac{\partial^r}{\partial t^r}\varphi(t,s)\right\rangle;$$

(ii) $$\left\langle \frac{\partial^p}{\partial s^p} S(t, S(s,x)), \varphi(t,s)\right\rangle = \left\langle S\Big(t, \frac{\partial^p}{\partial s^p} S(s,x)\Big), \varphi(t,s)\right\rangle$$

$$= (-1)^p \left\langle S(t, S(s,x)), \frac{\partial^p}{\partial s^p} \varphi(t,s) \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2), \quad r,p \in \mathbb{N}.$$

Dokaz.

a) Propozicija 4.1 implicira prvo tvrdjenje. Pretpostavimo da su φ i ψ sa nosačima u $[\alpha,\beta]$. Tada imamo

$$\langle S(s,x), \psi(s) \rangle = (-1)^{n_0} \int_\alpha^\beta S_{n_0}(s,x)\, \psi^{(n_0)}(s)\, ds$$

$$= (-1)^{n_0} \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=0}^{\nu} S_{n_0}(s_i, x)\, \psi^{(n_0)}(s_i)\, \Delta s_i \,.$$

Neprekidnost operatora S_{n_0} implicira

$$(-1)^{n_0} \int_\alpha^\beta S_{n_0}\Big(t, \Big\langle S_{n_0}(s,x), \psi^{(n_0)}(s)\Big\rangle\Big)\, \varphi^{(n_0)}(t)\, dt$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=0}^{\nu} \int_\alpha^\beta S_{n_0}\big(t, S_{n_0}(s_i, x)\big)\, \psi^{(n_0)}(s_i)\, \varphi^{(n_0)}(t)\, \Delta s_i\, dt$$

$$= \int_\alpha^\beta S_{n_0}\big(t, S_{n_0}(s,x)\big)\, \psi^{(n_0)}(s)\, \varphi^{(n_0)}(t)\, ds\, dt \,.$$

Primetimo $\| S_{n_0}(t, S_{n_0}(s,x)) \| \le e^{k|t|} e^{k|s|} \|x\|$, $x \in E$. Stoga obe strane u (4.5) postoje za $\varphi,\psi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$. Uzimajući nizove φ_ν i ψ_ν test funkcija u $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ koje konvergiraju u $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ ka φ i ψ respektivno, dobijamo da je (4.5) ispunjeno za $\varphi,\psi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$.

b) Direktno sledi iz **a)** korišćenjem integralne forme date u (4.5).

c) (i) Propozicija 4.2 a) i (4.6) impliciraju

$$\left\langle \frac{\partial^r}{\partial t^r} S(t, S(s,x)), \psi(s)\, \varphi(t) \right\rangle$$

$$= (-1)^r \int S_{n_0}\big(t, S_{n_0}(s,x)\big)\, \psi^{(n_0)}(s)\, \varphi^{(n_0+r)}(t)\, ds\, dt\,, \qquad \varphi,\psi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$$

što dokazuje tvrdjenje.

(ii) Takodje

$$\left\langle \frac{\partial^p}{\partial s^p} S(t, S(s,x)), \psi(s)\, \varphi(t) \right\rangle$$

$$= (-1)^p \int S_{n_0}\big(t, S_{n_0}(s,x)\big)\, \psi^{(n_0+p)}(s)\, \varphi^{(n_0)}(t)\, ds\, dt$$

$$= \Big\langle S_{n_0}\Big(t, \Big\langle S_{n_0}(s,x), \psi^{(n_0+p)}(s)\Big\rangle\Big), \varphi^{(n_0)}(t)\Big\rangle, \qquad \varphi,\psi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}).$$

Neka je S: $(0,\infty) \to L(E)$ jako neprekidna, integrabilna u okolini nule i neka zadovoljava (4.2) za neko $M > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$ i

$$(4.7) \qquad R(\lambda) = \lambda^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\,dt, \qquad \mathrm{Re}\lambda > \omega,\ n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $(R(\lambda))_{\mathrm{Re}\lambda > \omega}$ pseudorezolventa ako i samo je (4.4) ispunjeno.

Teorema 4.3 *Neka je* $S \in \mathcal{K}_{1+}'(L(E))$ *i* $R(\lambda, \cdot) = \mathcal{L}(S)(\lambda, \cdot)$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. *Tada je* $(R(\lambda, \cdot))_{\mathrm{Re}\lambda \geq \omega}$ *pseudorezolventa ako i samo ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$, *takav da je* $S_{n_0}(t,\cdot) = (S * f_{n_0})(t,\cdot)$, $t \in \mathbb{R}$ *neprekidna*, supp $S_{n_0} \subset [0,\infty)$ *i zadovoljava*

$$(4.8) \qquad \langle S(t, S(s,x)), \varphi(t)\,\psi(s)\rangle = \langle (S_{n_0}(t, S_{n_0}(s,x)))^{(n_0,n_0)}, \varphi(t)\,\psi(s)\rangle$$

$$= \left\langle \left(\frac{1}{(n_0-1)!} \left(\int_t^{t+s} (t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr - \int_0^s (t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr \right) \right)^{(n_0,n_0)}, \varphi(t)\,\psi(s) \right\rangle,$$

za svaki $\varphi, \psi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$. *Osim toga, (4.8) je ispunjeno za* $S_n = S * f_n$ *za svaki* $n \geq n_0$. *Takodje, (4.8) je ekvivalentno*

$$\langle S(t, S(s,x)), \varphi(t,s)\rangle = \langle S(t+s,x), \varphi(t,s)\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2).$$

Dokaz. Imamo $S = S_{n_0}^{(n_0)}$. Neka je $x \in E$. Relacija (4.8) implicira

$$\left(S_{n_0}\left(t, S_{n_0}(s,x)\right)\right)^{(n_0,n_0)}$$
$$= \left(\frac{1}{(n_0-1)!} \left[\int_t^{t+s} (t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr - \int_0^s (t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr \right] \right)^{(n_0,n_0)},$$

u distribucionom smislu. Budući da obe strane imaju nosače u $[0,\infty) \times [0,\infty)$ sledi da je

$$S_{n_0}\left(t, S_{n_0}(s,x)\right)$$
$$= \frac{1}{(n_0-1)!} \left[\int_t^{t+s} (t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr - \int_0^s (t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr \right]$$

ispunjeno za svako $t,s \geq 0$. Tada je $R(\lambda,\cdot) = \lambda^{n_0} \mathcal{L}(S_{n_0})(\lambda,\cdot)$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, pseudorezolventa. Neka je $n \geq n_0$. Tada je, $S_{n_0} = S_{n_0+(n-n_0)}^{(n-n_0)}$, $(S_n = S * f_n,\ n \in \mathbb{N})$ što dokazuje da je (4.8) ispunjeno za svako $n > n_0$.

Takodje, (4.8) i (4.5) impliciraju

$$\langle S(t, S(s,x)), \varphi(t,s)\rangle = \langle S_{n_0}(t, S_{n_0}(s,x)), \varphi^{(n_0,n_0)}(t,s)\rangle$$

$$= \left\langle D_t^{n_0} D_s^{n_0}\left(\frac{1}{(n_0-1)!}\left[\int_0^{t+s}(t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr - \int_0^{t}(t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \int_0^{s}(t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr\right]\right), \varphi(t,s)\right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2),$$

gde je $D_t^{n_0} = \dfrac{\partial^{n_0}}{\partial t^{n_0}}$. Tada je

$$\langle S(t, S(s,x)), \varphi(t,s)\rangle$$

$$= \left\langle D_t^{n_0} D_s^{n_0}\left(\frac{1}{(n_0-1)!}\left[\int_0^{t+s}(t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr - \int_0^{t}(t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \int_0^{s}(t+s-r)^{n_0-1} S_{n_0}(r,x)\,dr\right]\right), \varphi(t,s)\right\rangle$$

$$= \left\langle D_t^{n_0}\left(S_{n_0}(t+s,x) - S_{n_0}(s,x) - \sum_{j=1}^{n_0-2}\frac{t^j}{j!} S_{n_0}{}^{(j+1)}(s,x)\right), \varphi(t,s)\right\rangle$$

$$= \langle S(t+s,x), \varphi(t,s)\rangle.$$

Otuda je

$$\langle S(t, S(s,x)), \varphi(t,s)\rangle = \langle S(t+s,x), \varphi(t,s)\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}^2).$$

Definicija 4.1 Neka je $S \in \mathcal{K}_{1}{}'_{+}(L(E))$. Tada se S naziva *0-puta integrisana polugrupa* ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da je $S_{n_0} = S * f_{n_0}$ neprekidna na $\mathbb{R}$, sa nosačem u $[0,\infty)$, eksponencijalno ograničena i zadovoljava (4.8). 0-puta integrisana polugrupa je *nedegenerisana* ako $\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = 0$, za svako $\varphi \in \mathcal{K}_1$, povlači $x = 0$.

Jasno je, da je C_0 - polugrupa 0-puta integrisana polugrupa.

Neka je $(S(t))_{t\geq 0}$ 0-puta integrisana polugrupa i neka je $R(\lambda) = \mathcal{L}(S)(\lambda)$, gde je $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Tada, na osnovu rezolventne jednakosti $\ker R(\lambda)$ ne zavisi od $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Zato, na osnovu teoreme o jedinstvenosti $\mathcal{L}$-transformacije, $R(\lambda)$ je injektivno ako i samo ako je $(S(t))_{t\geq 0}$ nedegenerisano. U tom slučaju postoji jedinstveni operator A: $D(A) \to E$, $(D(A) \subset E)$ koji zadovoljava $(\omega,\infty) \subset \rho(A)$, takav da je $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ za sve $\mathrm{Re}\lambda > \omega$. Taj operator naziva se *generator* 0-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$.

Definicija 4.2 Operator A je *generator* 0-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$ ako je $(\omega,\infty) \subset \rho(A)$ za neko $\omega\in\mathbb{R}$ i fukncija $\lambda \mapsto (\lambda I-A)^{-1} = \mathcal{L}(S)(\lambda)$, $\mathrm{Re}\lambda>\omega$, je injektivna.

Teorema 4.3 i prethodna definicija direktno impliciraju sledeću propoziciju.

Propozicija 4.4 *Neka je* S_n, $n\in\mathbb{N}$, *n-puta integrisana polugrupa. Tada je* S_n*f_{-n} *0-puta integrisana polugrupa. Ako je* S *0-puta integrisana polugrupa tada je, za* $n_0\in\mathbb{N}$, $S*f_n$, *n-puta integrisana polugrupa za svako* $n \geq n_0$.

Takodje, operator A *je generator n-puta integrisane polugrupe ako i samo ako je operator* A *generator 0-puta integrisane polugrupe.*

Medjusobni odnosi izmedju 0-puta integrisane polugrupe i njenog generatora A su slični relacijama za n-puta integrisane polugrupe. Medjutim, u dokazu se koriste rezultati za n-puta integrisane polugrupe a kasnije se primenjuju na n-puta distribucione izvode.

Propozicija 4.5 *Neka je* A *generator 0-puta integrisane polugrupe* $(S(t))_{t\geq 0}$, $S\in\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$.

a) *Za svako* $x\in D(A)$, $\varphi\in\mathcal{K}_1$, *imamo*

(4.9) $$A\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle S(t,Ax), \varphi(t)\rangle.$$

b) *Za svako* $x\in D(A)$, $\varphi\in\mathcal{K}_1$, *imamo* $\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle \in D(A)$.

c) *Za svako* $x\in D(A)$, $\varphi\in\mathcal{K}_1$, *imamo*

(4.10) $$\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle f_1(t,x), \varphi(t)\rangle + \langle (f_1 * S)(t,Ax), \varphi(t)\rangle$$

i

(4.11) $$A\,\langle (f_1 * S)(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle S(t,x), \varphi(t)\rangle - \langle f_1(t,x), \varphi(t)\rangle.$$

Posebno, $A\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle S(t,x),\varphi'(t)\rangle - \varphi(0)x$.

Primedba. Takodje ćemo koristiti relaciju $A\,\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle AS(t,x), \varphi(t)\rangle$, koja je pogodna za Košijev problem.

Dokaz.

a) Neka je $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ i $x\in D(A)$. Tada,

$$\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = (-1)^{n_0}\langle S_{n_0}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle, \qquad n_0\in\mathbb{N}$$

i (2.15) iz propozicije 2.2 implicira $S_{n_0}(t,x)\in D(A)$ i $AS_{n_0}(t,x) = S_{n_0}(t,Ax)$.

Ovo i neprekidnost operatora A implicira

$$A\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = (-1)^{n_0} A\langle S_{n_0}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= (-1)^{n_0} A \int S_{n_0}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\,dt = (-1)^{n_0} A \lim_{\nu\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu} S_{n_0}(t_j,x), \varphi^{(n_0)}(t_j)\,\Delta t_j$$

$$= (-1)^{n_0} \lim_{\nu\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu} A\, S_{n_0}(t_j,x), \varphi^{(n_0)}(t_j)\,\Delta t_j$$

$$= (-1)^{n_0} \langle A\, S_{n_0}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle = \langle S(t,Ax), \varphi(t)\rangle, \qquad x\in E,\ \varphi\in\mathcal{D},$$

gde je $\left(\sum_{j=1}^{\nu} S_{n_0}(t_j,x)\varphi^{(n_0)}(t_j)\Delta t_j\right)$ niz integralnih suma $\int S_{n_0}(t,x)\,\varphi^{(n_0)}(t)dt$.

Neka je $\varphi\in\mathcal{K}_1$ i neka je φ_ν niz u $\mathcal{D}$ koji konvergira ka φ u $\mathcal{K}_1$. Tada,

$$A\,\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \langle S(t,Ax), \varphi_\nu(t)\rangle = \langle S(t,Ax), \varphi(t)\rangle.$$

Ovo implicira (4.9).

b) Propozicija 2.2 implicira $\langle f_1 * S(\cdot,x), \varphi\rangle \in D(A)$ za svako $\varphi\in\mathcal{K}_1$ i $x\in E$. Stoga, stavljajući φ' umesto φ, dobijamo $\langle S(\cdot,x), \varphi\rangle \in D(A)$ za svako $\varphi\in\mathcal{K}_1$.

c) Na osnovu (2.15), imamo

$$\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = (-1)^{n_0}\langle S_{n_0}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= (-1)^{n_0}\langle f_{n_0+1}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle + (-1)^{n_0}\langle (f_1 * S_{n_0})(t,Ax), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= \langle f_1(t,x), \varphi(t)\rangle + \langle (f_1 * S_{n_0}^{(n_0)})(t,Ax), \varphi(t)\rangle$$

$$= \langle f_1(t,x), \varphi(t)\rangle + \langle (f_1 * S)(t,Ax), \varphi(t)\rangle, \qquad x\in D(A),\ \varphi\in\mathcal{K}_1,$$

što daje (4.10). Koristeći (2.17) dobijamo

$$A\,\langle (f_1 * S)(t,x), \varphi(t)\rangle = (-1)^{n_0}\langle A(f_1 * S_{n_0})(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= (-1)^{n_0}\langle S_{n_0}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle - (-1)^{n_0}\langle f_{n_0+1}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= \langle S_{n_0}^{(n_0)}(t,x), \varphi(t)\rangle - \langle f_1(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle S(t,x), \varphi(t)\rangle - \langle f_1(t,x), \varphi(t)\rangle,$$

što daje (4.11). Poseban slučaj sledi stavljajući φ' u (4.11).

4.3 Relacije sa distribucionim polugrupama

Neka je $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0 - polugrupa. Tada funkcija

$$\varphi \to \left\{ \left(T * \check{\varphi} \right)(0) \,;\, x \to \left(\int_0^\infty T(u) \check{\varphi}(0-u)du \right) x = \left(\int_0^\infty T(u)\varphi(u)du \right) x \right\}, \; \varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}),$$

definiše elemenat prostora $\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$. Označimo ga sa $\mathcal{T}$. Prema tome je

$$\mathcal{T}(\varphi, x) = \left(T * \check{\varphi} \right)(0)(x) = \langle T(t,x), \varphi(t) \rangle, \quad x \in E, \; \varphi \in \mathcal{K}_1.$$

Stavimo $\mathcal{D}_0 = \{\varphi \in C_0^\infty \,;\, \operatorname{supp} \varphi \subset [0,\infty)\}$. Tada je

$$\left(T * \left(\varphi \check{*} \psi \right) \right)(0)(x) = \left(\left(T * \check{\psi} \right) * \check{\varphi} \right)(0)\,(x), \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$$

i ovo implicira $\mathcal{T}(\varphi * \psi, x) = \mathcal{T}(\varphi, \mathcal{T}(\psi, x))$, $x \in E$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$.

Neka je $y = \mathcal{T}(\psi, x)$, gde je $\psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ i $x \in E$ je fiksno. Tada je distribucija

$$\varphi \mapsto \mathcal{T}(\varphi, y)$$

odredjena neprekidnom funkcijom $u: \mathbb{R} \to E$, za koju je $\operatorname{supp} u \subset [0,\infty)$. Ustvari, imamo $u(t) = \left(T * \check{\psi} \right)(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ako je $\mathcal{T}(\varphi, x) = 0$ za svako $\varphi \in \mathcal{D}_0$, tada je $x = 0$ ili $x \neq 0$ i $T = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha \delta^{(\alpha)}$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Medjutim, operator T nije ovog oblika i prema tome je $x = 0$. Dokažimo da je skup $\{\langle T(t,x), \varphi(t) \rangle \,;\, \varphi \in \mathcal{D}_0, x \in E\}$ gust u E. Za svako $t_0 \in [0,\infty)$ i svako $x \in E$,

$$\langle T(t,x), \delta_n(t - t_0) \rangle \text{ konvergira u E ka } T(t_0, x) \text{ kad } n \to \infty,$$

gde je $\delta_n(t - t_0)$ δ-niz. Na primer, možemo uzeti $\delta_n(t - t_0) = n\varphi\,(n(t - t_0))$ gde je $\varphi \in C_0^\infty$, $\int \varphi = 1$. Budući da je skup $\{T(t_0, x);\, t_0 \in [0,\infty), x \in E\}$ gust u E, tvrdjenje je ispunjeno.

Na ovaj način dokazano je da je $\mathcal{T}$ ustvari SGDE (vidi 4.1).

Kao što je uradjeno u [38], definišimo $\mathcal{T}(T, \cdot)$ za $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ za koji postoji (u E) granična vrednost $\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}(T * \rho_n, x)$, $x \in D(\mathcal{T}(T))$, gde je $\rho_n \to \delta$, $n \to \infty$, δ-niz u $\mathcal{D}_0$, takav da $\mathcal{T}(\rho_n, x) \to x$, $n \to \infty$. Tada definišimo $\overline{\mathcal{T}(T, \cdot)}$ kao zatvorenje $\mathcal{T}(T, \cdot)$ na uobičajen način. Ako je A generator polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$ tada je A generator distribucione polugrupe $\mathcal{T}$, jer je $Ax = \overline{\mathcal{T}}(-\delta', x)$, $x \in D(A)$ ([38]) i

$$\overline{\mathcal{T}(-\delta', x)} = \left(T * \left(-\check{\delta'}\right)\right)(0)(x) = \left(T * \delta'\right)(0)(x) = T'(0)(x).$$

Propozicija 4.6 *Neka je* $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0 *- polugrupa i neka je* $\mathcal{T}$ *odgovarajuća SGDE. Tada*

$$A\mathcal{T}(\varphi,x) = \int_0^\infty T(t,x)\varphi'(t)dt + \langle \delta(t,x), \varphi(t)\rangle = \int_0^\infty T(t,x)\varphi'(t)dt + \varphi(0)x,\quad x\in E,\ \varphi\in\mathcal{K}_1.$$

Dokaz. Imamo,

$$A\,\mathcal{T}(\varphi,x) = \overline{\mathcal{T}(-\delta', \mathcal{T}(\varphi,x))} = \mathcal{T}(-\delta' * \varphi, x) = \mathcal{T}(-\varphi', x)$$

$$= \left(T * \left(-\check{\varphi}\right)'\right)(0)(x) = -\left(T' * \check{\varphi}\right)(0)(x) = -\int_0^\infty T'(t,x)\varphi(t)\,dt,\ \varphi\in\mathcal{K}_1,\ x\in E.$$

Na osnovu parcijalne integracije, imamo

$$A\,\mathcal{T}(\varphi,x) = -T(t,x)\,\varphi(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty T(t,x)\varphi'(t)\,dt$$

što implicira tvrdjenje.

Primetimo, $f_{-1}(t) = \delta'(t)$, $\delta'(-t) = -\delta'(t)$.

Teorema 4.7

a) *Neka je* S_n, $n\in\mathbb{N}_0$ *n-puta integrisana polugrupa i neka je generator* A *te polugrupe gusto definisan u* E. *Tada*

$$\mathcal{T}_n(\varphi, x) = \left(S_n * \check{\varphi}\right)(0)(x),\qquad \varphi\in\mathcal{K}_1, \tag{4.12}$$

definiše element prostora $\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$ *koji je SGDE, ako i samo ako je* $n = 0$.

b) *Neka je* S_0 *0-puta integrisana polugrupa i neka je* A *njen generator. Tada*

$$\mathcal{T}_0 : \varphi \to \langle S_0(t,\cdot), \varphi(t)\rangle,\ \varphi\in\mathcal{K}_1$$

definiše element prostora $\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$ *koji zadovoljava sve uslove za SGDE, izuzev da je skup* $\{\mathcal{T}_0(\varphi,x);\ \varphi\in\mathcal{D}_0,\ x\in E\}$ *gust u* E.

Dokaz.

a) Neka je $\mathcal{T}$ SGDE. Kao što je primetio Arendt, ([3], teorema 4.3) i Sova ([65], teorema 3.2), tada postoji n-puta integrisana polugrupa $(S_n(t))_{t\geq 0}$, $(n\in\mathbb{N})$, takva da je

$$\mathcal{T}(\varphi,x) = \langle S_n^{(n)}(t,x), \varphi(t)\rangle = \left(S_n^{(n)}(\cdot, x) * \check{\varphi}\right)(0),\qquad \varphi\in\mathcal{D},\ x\in E.$$

Ovo implicira $S_n^{(n)} = S_n * f_{-n} = S_0$, gde S_0 zadovoljava teoremu 4.3.

Neka je S_0 0-puta integrisana polugrupa i neka je njen generator A gusto definisan. Neka je $\mathcal{T}_0(\varphi,x)$, $\varphi\in\mathcal{K}_1$, $x\in E$ definisano na sledeći način

$$(4.13)\qquad \mathcal{T}_0(\varphi,x)=\left(S_0(\cdot,x)*\check{\varphi}\right)(0)=\langle S_0(t,x),\varphi(t)\rangle,\qquad \varphi\in\mathcal{K}_1,\ x\in E.$$

Za $\varphi,\psi\in\mathcal{D}_0$ imamo,

$$(S_0(\cdot\,,x)*(\varphi\check{*}\psi))(0)=\langle S_0(t,x),(\varphi*\psi)(t)\rangle$$

$$=\langle S_0(t+s,x),\varphi(t)\psi(s)\rangle=\langle S_0(t,\langle S_0(s,x),\psi(s)\rangle),\varphi(t)\rangle\,.$$

Ovo implicira

$$\mathcal{T}_0(\varphi*\psi,x)=\mathcal{T}_0(\varphi,\mathcal{T}_0(\psi,x)),\qquad x\in E,\ \varphi,\psi\in\mathcal{D}_0.$$

Jasno je, da je za fiksirano $\psi\in\mathcal{D}_0$ i $x\in E$, $\mathcal{D}_0\ni\varphi\to\mathcal{T}_0(\varphi,\mathcal{T}_0(\psi,x))$ je odredjeno sa $u(t)=(S_0(\cdot,x)*\check{\psi})(t)$, neprekidno je i ima nosač $[0,\infty)$.

Budući da S_0 nije degenerisano i nije u obliku $\sum_{\alpha=0}^{m}a_\alpha\delta^{(\alpha)}$, sledi

$$(\mathcal{T}_0(\varphi,x)=0 \text{ za svako } \varphi\in\mathcal{K}_1)\Rightarrow(x=0).$$

Na isti način kao i u ([38], strana 157-158) dokazuje se da je skup $\{\mathcal{T}_0(\varphi,x);\ \varphi\in\mathcal{D}_0,\ x\in E\}$ gust u E. Prema tome, (4.13) definiše SGDE.

Dokažimo da za $n\in\mathbb{N}$, (4.12) ne odredjuje SGDE. Naime, ako bi se to desilo za neku SGDE, S_n, tada bi S_n i $S_n^{(n)}$ odredjivale SGDE, što je nemoguće na osnovu jedinstvenosti SGDE za dati generator A.

b) Budući da je $\overline{D(A)}\neq E$, dokaz sledi kao u slučaju a).

Neka je S_0 0-puta integrisana polugrupa i neka je njen generator A gusto definisan u E. Definišimo $A_0x=\mathcal{T}_0(-\delta',x)$. Tada je $A_0=A$. Ovo sledi iz činjenice da je $R(\lambda,A_0)=\mathcal{L}(S_0)(\lambda)$, $\mathrm{Re}\lambda>\omega$, ([38]), a što je takodje ispunjeno za operator A.

4.4 $\tilde{0}$ -puta integrisane polugrupe

Neka je S_0 0-puta integrisana polugrupa i neka je A njen generator takav da skup D(A) nije gust u E. Primetimo,

ako je za neko $x \in E$

$$(4.14) \qquad \mathcal{T}_0(\varphi,x) = \int S_0(t,x)\varphi(t)\,dt = 0 \quad \text{za svako } \varphi \in \mathcal{D}_0,$$

tada je $x = 0$.

Kao i u [38], proširimo S_0 na $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, supp $T \subset [0,\infty)$ koristeći δ niz $\{\rho_\nu\}$ $(\rho_\nu \to \delta)$ u $\mathcal{D}_0$. Označimo sa $D(S_0(T))$ skup svih $x \in E$ za koje je

(i) $S_0(\rho_\nu, x) \to x$, $\nu \to \infty$.

(ii) $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_0(T * \rho_\nu, x)$ postoji i ne zavisi od ρ_ν za koje vredi (i).

To znači, ako je $\tilde{\rho}_\nu$ drugi δ niz u $\mathcal{D}_0$ za koji je (i) ispunjeno, tada $S_0(T * \tilde{\rho}_\nu, x) - S_0(T * \rho_\nu, x) \to 0$ kad $\nu \to \infty$. Na taj način definiše se operator $S_0(T,x)$.

Zbog (4.14) može se definisati zatvorenje od $S_0(T,\cdot)$ koje ćemo označiti sa $\overline{S_0(T,\cdot)}$. Teorema 4.7 b) implicira da 0-puta integrisana polugrupa ima sve uslove za SGDE izuzev da je skup $\{\mathcal{T}_0(\varphi,x);\ \varphi \in \mathcal{D}_0,\ x \in E\}$ gust u E.

Definicija 4.3 0-puta integrisana polugrupa S_0 sa generatorom A naziva se $\tilde{0}$*-puta integrisana polugrupa* ako je skup $E_A = \{\mathcal{T}_0(\varphi,x);\ x \in D(A),\ \varphi \in \mathcal{D}_0\}$ gust u $\overline{D(A)}$.

Teorema 4.8 *Neka je* S_0 $\tilde{0}$*-puta integrisana polugrupa i neka je* A *njen generator. Tada restrikcija operatora* S_0 na $\overline{D(A)} \times \mathcal{K}_1$, $S_0|_{\overline{D(A)} \times \mathcal{K}_1}$, je SGDE.

Uopšte, za 0-puta integrisanu polugrupu na Banahovom prostoru E *postoji zatvoren podprostor* E_0, *takav da je ta polugrupa ustvari SGDE na* E_0.

Propozicija 4.9 *Neka je* E_0 *zatvorenje u* E *skupa* $\tilde{E} = \{\mathcal{T}_0(\varphi,x);\ x \in E,\ \varphi \in \mathcal{D}_0\}$. *Neka je* S_0 *0-puta integrisana polugrupa, neka je* A *njen generator i neka je* $\mathcal{T}_0$ *definisano sa (4.13). Tada je*

a) *Skup* $\{\mathcal{T}_0(\varphi,x);\ x \in E_0,\ \varphi \in \mathcal{D}_0\}$ *je gust u* E_0.

b) $\mathcal{T}_0|_{E_0 \times \mathcal{K}_1}$ *definiše SGDE sa generatorom* $A = A_{|D(A) \cap E_0}$, *koji je posebno gust u* E_0.

Dokaz.

a) Neka je $y \in E_0$ i $y_n = \mathcal{T}_0(\varphi_n, x_n) \in \tilde{E} \subset E_0$ niz koji konvergira ka y u E_0. Imamo, $\mathcal{T}_0(\varphi_n, x_n) = \lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{T}_0(\varphi_n * \rho_m, x_n)$, gde je ρ_m δ-niz u $\mathcal{D}_0$. Budući da je

$$\mathcal{T}_0(\varphi_n * \rho_m, x_n) = \mathcal{T}_0(\rho_m, (\mathcal{T}_0(\varphi_n, x_n)) = \mathcal{T}_0(\rho_m, y_n), \quad m,n \in \mathbb{N},$$

dobijamo tvrdjenje.

b) Sledi iz a)

4.5 Primene

Neka je A operator definisan na Banahovom prostoru E i $u_0 \in E$. Neka je $T \in \mathcal{K}'_{1+}(E)$. Tada je $u \in \mathcal{K}'_{1+}(E)$ rešenje diferencijalne jednačine

$$u' = Au + T, \quad u \quad \mathcal{K}'_1(E), \tag{4.15}$$

ako je $\langle u(t), \varphi(t)\rangle \in D(A)$ za svako $\varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ i (4.15) je ispunjeno.

Neka je $U \in \mathcal{K}'_{1+}(L(E, D(A)))$, $V \in \mathcal{K}'_{1+}(L(D(A), E))$. Tada su $U * V$ i $V * U$ definisani kao i u [63] . Osim toga, oni su elementi prostora $\mathcal{K}'_{1+}(L(D(A)))$ i $\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$.

Teorema 4.10

a) *Neka je* $S_0 \in \mathcal{K}'_{1+}$ $\tilde{0}$*-puta integrisana polugrupa i neka je operator* A *njen generator. Tada*

$$\left(-A + \frac{\partial}{\partial t}\right) * S_0 = \delta \otimes I_{\overline{D(A)}} \quad , \quad S_0 * \left(-A + \frac{\partial}{\partial t}\right) = \delta \otimes I_{D(A)},$$

gde je $-A + \dfrac{\partial}{\partial t} = -\delta \otimes A + \delta' \otimes I$.

Neka je $T \in \mathcal{K}'_{1+}(\overline{D(A)})$ *i* $\operatorname{supp} T \subset [a, \infty)$ za neki $a \in \mathbb{R}$. *Tada je* $u = S_0 * T$ *jedinstveno rešenje jednačine (4.15).*

b) *Neka je operator* A *generator 0-puta integrisane polugrupe* S_0. *Tada je* S_0 *SGDE sa generatorom* A *na* $E_0 \times \mathcal{K}_1$, *gde je* $E_0 = \{\mathcal{T}_0(\varphi, x)\,;\ \varphi \in \mathcal{D}_0, x \in E\}$ i

$$\left(-A + \frac{\partial}{\partial t}\right) * S_0 = \delta \otimes I_{E_0} \quad , \quad S_0 * \left(-A + \frac{\partial}{\partial t}\right) = \delta \otimes I_{D(A)\cap E_0}.$$

Neka je $T\in\mathcal{K}_{1}{}'_{+}(E_0)$ *i* $\operatorname{supp} T \subset [a,\infty)$ *za neko* $a > 0$. *Tada je* $u = S_0 * T$ *jedinstveno rešenje jednačine*

$$u' = Au + T \quad \text{u} \quad \mathcal{K}_1'(L(E_0)).$$

Dokaz teoreme 4.10 je sličan dokazu teoreme 4.1 u [38] i zato ga izostavljamo.

Primenimo dobijene rezultate na Šredingerovu jednačinu

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - i\Delta^{\frac{m}{2}}u(x,t) = f(x,t), \qquad m > 0.$$

Za m = 2 ova jednačina je posmatrana u [4]. Mi koristimo rezultat [64] u pogledu prostora Furijeovih multiplikatora M_p. Naš prilaz je različit od ([4]). Primetimo da se prilaz u [4] ne može primeniti za slučaj $m\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$.

Podsetimo se definicije prostora M_p Furijeovih multiplikatora na $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ ([64]) ; $a\in M_p$, ako i samo ako je a temperirana distribucija i

$$\|a\|_{M_p} = \sup_{\|f\|_{L^p}=1}\left\|\mathcal{F}^{-1}(a\tilde{f})\right\|_{L^p} < \infty .$$

Ovde $\mathcal{F}$ označava Furijeovu transformaciju , a $\mathcal{F}^{-1}$ njenu inverznu transformaciju. Takodje, $\tilde{f}$ označava Furijeovu transformaciju funkcije f u $\mathbb{R}$, tj $\tilde{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} f(t)\,dt$.

Propozicija 4.11 *Neka je* $m > 0$, $k > 0$ *i* $H(\xi) = |\xi|^m$, $\xi\in\mathbb{R}^n$. *Tada je*

$$a_{H,k}(\xi,t) = \frac{k}{t^k}\int_0^t (t-s)^{k-1} e^{-isH(\xi)}\,ds \in M_p, \qquad t > 0,$$

ako je:

a)

(i) za $m \ne 1$, $\quad k \ge n\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$,

(ii) za $m = 1$, $\quad k \ge (n-1)\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$.

b) *Osim toga,* $a_{H,k}(\xi,t)$ *ne zavisi od t i označavamo ga sa* $a_{H,k}(\xi)$.

Definišimo sa $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$G_0(\varphi)u(\xi) = \mathcal{F}^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-itH(\xi)}\varphi(t)\,dt\,\tilde{u}(\xi)\right), \qquad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

Tada, za $\xi\in\mathbb{R}^n$,

$$G_0(\varphi)u(\xi) = \frac{(-1)^k}{k!}\mathcal{F}^{-1}\left(\int_{\mathbf{R}} t^k(f_k*\varphi)(t)a_{H,k}(\xi)\,dt\,\tilde{u}(\xi)\right)$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!}\int_{\mathbf{R}} t^k(f_k*\varphi)(t)\mathcal{F}^{-1}(a_{H,k}(\xi)\tilde{u}(\xi))\,dt.$$

Ovo implicira

$$\|G_0(\varphi)u\|_{L^p} \le C\|u\|_{L^p}, \ \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),\ u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

što pokazuje da se $G_0(\varphi)$ može proširiti na $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$ kao neprekidan linearan operator.

Neka $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i $\varphi\in\mathcal{D}_0$. Tada

$$G_0(\varphi)\,u\,(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\xi x}\left(\int \varphi(t)e^{-itH(\xi)}\,\tilde{u}(\xi)\,dt\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\left(\int e^{i\xi x}\,e^{-itH(\xi)}\,\tilde{u}(\xi)\,d\xi\right)\varphi(t)\,dt = \int U(t,u)\varphi(t)\,dt,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

i $U(0,u) = u$.

Neka je $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i neka je φ_ν δ-niz $(\rho_\nu\to\delta)$, $\rho_\nu\in\mathcal{D}_0$, $\nu\in\mathbb{N}$. Tada sledi

$$\int U(t,u)\rho_\nu(t)\,dt \to U(0,u) = u.$$

Ovo implicira da je $\{G_0(\varphi,u);\ \varphi\in\mathcal{D}_0,\ u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$ gusto u $L^p(\mathbb{R}^n)$. Imamo $A = \overline{G_0(-\delta',u)} = \mathcal{F}^{-1}(i\,|\xi|^m\,\mathcal{F}(u(\xi)))$, $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Označimo sa T zatvorenje skupa $\{|\xi|^m\,\hat{\varphi}(\xi);\ \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\}$ u $L^p(\mathbb{R}^n)$. Tada je $\overline{D(A)}$ jednako zatvorenju $\mathcal{F}^{-1}(T)$ u $L^p(\mathbb{R}^n)$ normi. Prema ranije rečenom, dobijamo da je $\{G_0(\varphi,u);\ \varphi\in\mathcal{D}_0,\ u\in\overline{D(A)}\}$ gusto u $\overline{D(A)}$. Prema tome G_0 je $\tilde{0}$-puta integrisana polugrupa. Stavimo da je

$$A = i\,H\,(\partial) = i\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^{\,2}}\right)^{\frac{m}{2}}.$$

Prema tome je $u = G_0 * f$ rešenje jednačine

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - iH(\partial)\,u(x,t) = f(x,t), \qquad x\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R},\ f\in\mathcal{K}_1'(D(A)),\ \text{supp } f\subset[a,\infty).$$

Glava 5

Distribucione polugrupe i n-puta integrisane polugrupe operatora

U ovoj glavi nastavljamo dalja istraživanja veza izmedju distribucionih polugrupa u smislu definicije Lionsa [38] i n-puta integrisanih polugrupa operatora. Osnovna ideja, koja je korišćena, je činjenica, da je linearni operator A, koji je gusto definisan u E, generator eksponencijalne distribucione polugrupe ako i samo ako je A generator n-puta integrisane, nedegenerisane, eksponencijalno ograničene polugrupe.

U prvom odeljku uveden je pojam negustih distribucionih polugrupa i date su veze izmedju njih i n-puta integrisanih polugrupa.

U drugom odeljku data je veza izmedju generatora A i n-puta integrisanih polugrupa $(S_n(t))_{t\geq 0}$ koje nisu nastale integracijom C_0-polugrupa. Ustvari, uopštavaju se tvrdjenja teoreme 3.6 korišćenjem tehnike teorije distribucija.

Rezultati u ovoj glavi su originalni rezultati M. Mijatovića i S. Pilipovića [42], [43], [44], [45].

5.1 Neguste distribucione polugrupe i n - puta integrisane polugrupe

Kao i u prethodnoj glavi uvodimo poznate Švarcove (Schwartz) prostore test funkcija $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$ na $\mathbb{R}$. Neka su $\mathcal{D}'$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$ njihovi prostori distribucija. Sa $\mathcal{D}_+$ označićemo podprostor prostora $\mathcal{D}$ koji se sastoji od test funkcija čiji su nosači u $[0,\infty)$. Njegov prostor distribucija označićemo sa $\mathcal{D}_+'$.

Neka $\mathcal{D}'(L(E)) = L(\mathcal{D},L(E))$, $\mathcal{E}'(L(E)) = L(\mathcal{E},L(E))$ i $\mathcal{S}'(L(E)) = L(\mathcal{S},L(E))$ označavaju prostore neprekidnih linearnih funkcija $\mathcal{D}\to L(E)$, $\mathcal{E}\to L(E)$ i $\mathcal{S}\to L(E)$ u odnosu na topologiju uniformne konvergencije na ograničenim skupovima u $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ i $\mathcal{S}$ respektivno. Neka je $\mathcal{S}_+'(L(E))$ podprostor prostora $\mathcal{S}'(L(E))$ čiji elementi imaju nosače u $[0,\infty)$. Takodje, za proizvoljni linearni operator A, sa N(A) odnosno R(A) označavaćemo njegov nula prostor, odnosno rang.

Distribucione polugrupe, ili SGD, kako je već navedeno u 4.1, uveo je Lions [38]. Podsetimo se, distribucije $\mathcal{G}$ čije su vrednosti u $L(E)$ nazivaju se distribucione polugrupe ili SGD, ako je ispunjeno

(D.1) $\mathcal{G} \in \mathcal{D}_+'(L(E))$,

(D.2) $\mathcal{G}(\varphi * \psi, \cdot) = \mathcal{G}(\varphi, \mathcal{G}(\psi, \cdot))$, $\varphi,\psi \in \mathcal{D}_0$,

(D.3) $\bigcap_{\varphi\in\mathcal{D}_0} N(\mathcal{G}(\varphi, \cdot)) = \{0\}$,

(D.4) Linearni omotač $\mathfrak{R}$ skupa $\bigcup_{\varphi\in\mathcal{D}_0} R(\mathcal{G}(\varphi, \cdot))$ je gust u E,

(D.5) Za svako $x\in\mathfrak{R}$ postoji funkcija u: $\mathbb{R}\to E$, takva da je supp $u\subset[0,\infty)$, $u(0)=x$, u je neprekidna funkcija i $\mathcal{G}(\varphi, x) = \int_0^\infty \varphi(t)u(t)dt$ za svako $\varphi\in\mathcal{D}_+$.

Ako postoji $\xi_0 \in\mathbb{R}$, takvo da je

(D.6) $e^{-\xi t}\mathcal{G} \in \mathcal{S}_+'(L(E))$, za $\xi > \xi_0$,

tada se polugrupa naziva *eksponencijalna distribuciona polugrupa* ili SGDE.

Primedba 1 Arendt je primetio da je gusto definisan linearan operator A generator eksponencijalne distribucione polugrupe ako i samo ako je A generator n-puta integrisane, nedegenerisane, eksponencijalno ograničene polugrupe za neko $n\in\mathbb{N}_0$. Ovo inače sledi iz teoreme 4.3 u [3] i rezultata iz [65]. Postavlja se pitanje šta će se desiti ako linearan operator A nije gusto definisan i integrisana polugrupa $(S(t))_{t\geq 0}$ nije eksponencijalno ograničena? Da bi dali odgovor na to pitanje uvedimo nove prostore test funkcija i distribucija.

Neka C_{0+}^{∞} označava skup svih restrikcija na $[0,\infty)$, funkcija iz skupa C_0^{∞}. Neka je K kompaktan skup u $[0,\infty)$. Tada $\tilde{\mathcal{D}}_{+K}$ označava prostor test funkcija iz C_{0+}^{∞} čiji su nosači u K sa projektivnom topologijom, koja je definisana na isti način kao u Švarcovom prostoru $\mathcal{D}_K$. Osim toga, definišimo $\tilde{\mathcal{D}}_+ = \operatorname{ind}\lim_{K_i} \mathcal{D}_{K_i}$, gde je $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = [0,\infty)$, $K_i \subset K_{i+1} \subset [0,\infty)$, K_i kompaktni skupovi u $[0,\infty)$, $i = 1, 2, \dots$.

Tada imamo $\left(\tilde{\mathcal{D}}_+\right)' = \mathcal{D}_+'$ gde je $\mathcal{D}_+'$ prostor Švarcovih distribucija čiji su nosači u $[0,\infty)$. U slučaju distribucija vektorskih vrednosti, imamo $L(\tilde{\mathcal{D}}_+, L(E)) = \tilde{\mathcal{D}}_+'(L(E)) = \mathcal{D}_+'(L(E))$.

Neka je $\mathcal{R}$ skup δ-nizova $\{\rho_n\}$, takvih da je $\rho_n \in \mathcal{D}_+'(L(E)) \cap \mathcal{E}'(L(E))$. Kao što smo već ranije napomenuli, Lions [38], je definisao proširenje $\overline{\mathcal{G}}(f)$ na skup $D(\mathcal{G}(f)) \subset E$, koje se sastoji od onih $x \in E$, za koje postoji $\rho_n \in \mathcal{R}$, takav da je ispunjeno:

(i) $\mathcal{G}(\rho_n, x) \to x, \quad n \to \infty$.

(ii) Za svako $x \in D(\mathcal{G}(f))$, $\mathcal{G}(\rho_n * f, x)$ konvergira u E.

To proširenje je definisano

$$\overline{\mathcal{G}}(f,x) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{G}(\rho_n * f, x), \quad x \in D(\mathcal{G}(f)).$$

Lions [38] je takodje dokazao da za svako $\varphi \in \mathcal{D}$, $\overline{\mathcal{G}}(H\varphi, x) = \mathcal{G}(\varphi, x)$, $x \in E$, gde je $H = H(t)$ Hevisajdova funkcija, koja omogućava da se definiše $\mathcal{G}$ na $\mathcal{D}_+$ pomoću ovog proširenja. Osim toga, teorema 2.1 u [38] implicira

$$\overline{\mathcal{G}}(\varphi * \psi, x) = \overline{\mathcal{G}}(\varphi, \mathcal{G}(\psi, x)), \quad \varphi, \psi \in \tilde{\mathcal{D}}_+, x \in E.$$

Mi ćemo koristiti notaciju $\overline{\mathcal{G}}(\varphi, x) = \mathcal{G}(\varphi, x)$, $\varphi \in \tilde{\mathcal{D}}_+$, $x \in E$.

Iz do sada rečenog, imamo sledeću teoremu:

Teorema 5.1 *Pretpostavke* ((D.1), (D.2), (D.3), (D.4), (D.5)) *ekvivalentne su pretpostavkama* ((D.1), $(D.2)_S$, (D.3), (D.4), (D.5)), *gde je*

$$(D.2)_S \qquad \mathcal{G}(\varphi * \psi, x) = \mathcal{G}(\varphi, \mathcal{G}(\psi, x)), \quad \varphi, \psi \in \tilde{\mathcal{D}}_+, x \in E.$$

Definicija 5 Ako su ispunjene pretpostavke (D.1), $(D.2)_S$, (D.3) i (D.5), tada se $\mathcal{G}$ naziva *negusta distribuciona polugrupa.*

Jasno je, da ako je $(S(t))_{t\geq 0}$ jako neprekidna familija operatora i $S(0) = 0$, tada je

$$(5.1) \qquad \langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = \int_0^\infty S(t,x)\varphi(t)\,dt, \qquad x\in E,$$

elemenat prostora $\mathcal{D}_+'(L(E))$, gde integral posmatramo u Bohnerovom smislu.

Teorema 5.2 *Neka je* $(S(t))_{t\geq 0}$, *n-puta integrisana, nedegenerisana polugrupa. Tada je, njen n-ti distribucioni izvod negusta distribuciona polugrupa.*

Obratno, ako je $\mathcal{G}$ *negusta distribuciona polugrupa, oblika* $\mathcal{G} = S^{(n)}$, *gde je* S *jako neprekidna i* $S(0) = 0$, *tada je* $(S(t))_{t\geq 0}$, *n-puta integrisana polugrupa.*

Primedba 2 Dokaz ove teoreme je potpuno drugačiji od dokaza tvrdjenja koja su data u primedbi 1. Osim toga, on se može uzeti i kao drugačiji dokaz Arendtovog tvrdjenja u toj primedbi.

Dokaz.

$\Rightarrow$ Jasno je da (5.1) implicira (D.1). Neka je $\langle S^{(n)}(t,x), \varphi(t)\rangle = 0$ za svako $\varphi\in\mathcal{D}_+$. Tada sledi da je $S^{(n)} = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha \delta^{(\alpha)} \otimes I$ za neki $a_\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha = 0, 1, \dots, m$. Ali, u tom slučaju imamo $S = \sum_{\alpha=0}^{m} a_\alpha f_{n+\alpha} \otimes I$, gde je $\{f_k\}$ niz distribucija uveden u 4.1,

$$f_k(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{k-1}H(t)}{(k-1)!}, & k\in\mathbb{N},\\[2mm] f_{k+\alpha}^{(\alpha)}, & k\leq 0,\ -k\in\mathbb{N}_0,\ \alpha\in\mathbb{N},\ k+\alpha>0,\ t\in\mathbb{R}\end{cases}$$

i S nije n-puta integrisana polugrupa. Zato je $x = 0$ i (D.3) je zadovoljeno.

Dokažimo (D.2). Imamo

$$S^{(n)}\big(\varphi, S^{(n)}(\psi, x)\big)$$

$$= \Big\langle S^{(n)}\big(t, \langle S^{(n)}(s,x), \psi(s)\rangle\big), \varphi(t)\Big\rangle = \big\langle S(t, S(s,x)), \varphi^{(n)}(t)\psi^{(n)}(s)\big\rangle$$

$$= \left\langle D_t^n D_s^n \left(\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s} (t+s-r)^{n-1} S(r,x)\,dr - \int_0^s (t+s-r)^{n-1} S(r,x)\,dr\right]\right), \varphi(t)\psi(s)\right\rangle$$

$$= \left\langle D_t^n \left(S(t+s,x) - S(s,x) - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{t^j}{j!} S^{(j+1)}(s,x)\right), \varphi(t)\psi(s)\right\rangle$$

$$=\left\langle S^{(n)}(t+s,x),\varphi(t)\,\psi(s)\right\rangle,\quad \text{gde je}\quad D_t^n=\frac{\partial^n}{\partial t^n}.$$

Sada, na osnovu

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(p-s_i)\,\psi(s_i)\,\Delta s_i\to\int\varphi(p-s)\,\psi(s)\,ds\quad \text{u } \tilde{\mathcal{D}}_+ \text{ kad } n\to\infty$$

i

$$\left\langle S^{(n)}(t+s,x),\varphi(t)\,\psi(s)\right\rangle=\left\langle\left\langle S^{(n)}(t+s,x),\ \psi(s)\right\rangle,\varphi(t)\right\rangle$$

$$=(-1)^{(n)}\left\langle\int S(t+s,x)\,\psi^{(n)}(s)\,ds,\varphi(t)\right\rangle=(-1)^{(n)}\int\int S(t+s,x)\,\psi^{(n)}(s)\ \varphi(t)\,ds\,dt$$

$$=\left\langle S^{(n)}(t,x),\ (\varphi*\psi)(t)\right\rangle.$$

Ovo implicira $(D.2)_S$. Budući da je

$$S^{(n)}\left(\varphi,S^{(n)}(\psi,x)\right)=\int\left((-1)^{(n)}\int S(t+s,x)\,\psi^{(n)}(s)\,ds\right)\varphi(t)\,dt,$$

(D.5) je ispunjeno.

$\Leftarrow$ Pretpostavke za S i (D.3) impliciraju da je $(S(t))_{t\geq 0}$ jako neprekidna i $S(0)=0$ i stoga je nedegenerisana. Takodje, (D.5) i $(D.2)_S$ impliciraju

$$\mathcal{G}(\varphi,\mathcal{G}(\psi,x))=\left\langle\mathcal{G}(t+s,x),\varphi(t)\,\psi(s)\right\rangle,\quad \varphi,\psi\in\tilde{\mathcal{D}}_+.$$

Na osnovu jednostavnog računa dobijamo

$$\mathcal{G}(\varphi,\mathcal{G}(\psi,x))$$

$$=\left\langle\left(\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}S(r,x)\,dr-\int_0^s(t+s-r)^{n-1}S(r,x)\,dr\right]\right)^{(n,n)},\varphi(t)\,\psi(s)\right\rangle$$

$$=\left\langle S(t,S(s,x))^{(n,n)},\varphi(t)\,\psi(s)\right\rangle,\qquad \varphi,\psi\in\tilde{\mathcal{D}}_+.$$

Obe distribucije imaju nosače $[0,\infty)\times[0,\infty)$, što implicira

$$\frac{1}{(n-1)!}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n-1}S(r,x)\,dr-\int_0^s(t+s-r)^{n-1}S(r,x)\,dr\right]=S(t,S(s,x)),\quad t,s\geq 0,$$

odnosno, $(S(t))_{t\geq 0}$ je n-puta integrisana nedegenerisana polugrupa.

5.2 O generatoru n-puta integrisane polugrupe

U glavi 3, teorema 3.6, data je veza izmedju generatora A i n-puta integrisane polugrupe $(S_n(t))_{t\geq 0}$, koja je nastala integracijom C_0 - polugrupe. Medjutim, dati problem se može uopštiti na jako neprekidnu familiju linearnih operatora $(S(t))_{t\geq 0}$ za koju je $S(0) = 0$ i koja je n-puta integrisana polugrupa (tačnije, zadovoljava (2.5)). Da bi smo to uradili koristićemo se distribucijama vektorskih vrednosti.

Kao i u prethodnom odeljku definišimo $T(f,x)$, $x\in D(T(f))$, gde je $f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset [0,\infty)$, na sledeći način: $D(T(f))\subset E$ je skup svih x za koje postoji niz $\{\rho_\nu\}$ u C_0^∞, $\operatorname{supp}\rho_\nu \subset [0,\infty)$, $\nu\in\mathbb{N}$, takav da

$$\rho_\nu\to\delta,\quad \nu\to\infty \text{ i } T(\rho_\nu,x)\to x,\quad T(f*\rho_\nu,x) \text{ konvergira kad } \nu\to\infty.$$

Jasno je, da $\lim\limits_{\nu\to\infty} T(f*\rho_\nu,x)$ ne zavisi od izbora niza $\{\rho_\nu\}$ i da je ta granična vrednost jednaka $T(f,\cdot)$ u x. Neka je $\overline{T(f,\cdot)}$ zatvorenje od $T(f,\cdot)$. Primetimo da je $D(T(f))$ gusto u E. Takodje,

$$\overline{T(-\delta',x)} = Ax,\ x\in D(A),\quad \overline{T(\delta,x)} = x,\ x\in D(T(\delta)).$$

Neka je $S_n(\cdot,x) = T(\cdot,x) * f_n$, $n\in\mathbb{N}$ definisano sa

$$\langle S_n(s,x), \varphi(s)\rangle = \langle T(s,x), (\check{f}_n*\varphi)(s)\rangle,\qquad \varphi\in\mathcal{D}_-,\ x\in E,$$

gde je

$$(\check{f}_n*\varphi)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_x^\infty (t-x)^{n-1}\varphi(t)\,dt,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Propozicija 5.3 *Postoji* $n_0\in\mathbb{N}$ *takvo da je, za* $n\geq n_0$, $t\mapsto S_n(t,\cdot)$ *neprekidno preslikavanje* $[0,\infty)$ *u* $L(E)$ *i*

$$S_n(t,x) = \lim_{\nu\to\infty}\langle S_n(s,x), \rho_\nu(t-s)\rangle,\quad t>0.$$

Kao i ranije, definišimo $D(S_n(f))$ za $f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f\subset[0,\infty)$.

Propozicija 5.4 *Imamo*

a) $S_n(\varphi^{(n)}, x) = (-1)^n T(\varphi,x)$, $\qquad \varphi\in\mathcal{D}_0$, $x\in E$.

b) *Neka je* $f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f\subset[0,\infty)$. *Tada je* $D(T(f)) = D(S_n(f^{(n)}))$ *i*

$$\overline{S_n(f^{(n)},x)} = (-1)^n\,\overline{T(f,x)},\ x\in D(T(f)).$$

Posebno

$$(-1)^n \overline{S_n(\delta^{(n)},x)} = x, \qquad x\in D(T(\delta)),$$

$$(-1)^n \overline{S_n(-\delta^{(n+1)},x)} = Ax, x\in D(A).$$

c) $S_n(h,x) = S_n(\delta(t-h), x), \quad x\in D(T(\delta)).$

Ranije smo napomenuli da je linearni operator A, koji je gusto definisan, generator eksponencijalne distribucione polugrupe ako i samo ako je A generator n-puta integrisane, nedegenerisane, eksponencijalno ograničene polugrupe za $n\in\mathbb{N}_0$.

Posmatrajmo sada uopšten slučaj.

Teorema 5.5 *Neka je* $(S_n(t))_{t\geq 0}$ *n-puta integrisana, eksponencijalno ograničena polugrupa,* $n\in\mathbb{N}_0$ *i neka je* A *njen generator. Tada*

$$Ax = (n+1)!\,\lim_{h\downarrow 0}\frac{S_n(h)x - \frac{h^n}{n!}x}{h^{n+1}}, \qquad x\in D(A).$$

Dokaz. Neka je $\varphi\in\mathcal{D}$. Budući da je

$$\frac{(n+1)!}{h^{n+1}}\left(\varphi(h) - \frac{h^n}{n!}\varphi^{(n)}(0)\right) \to \varphi^{(n+1)}(0), \quad \text{kad } h\to 0,$$

sledi

$$\frac{(n+1)!}{h^{n+1}}\left\langle \delta(t-h) - \frac{h^n}{n!}(-1)^n\delta^{(n)}(t),\ \varphi(t)\right\rangle \to (-1)^{n+1}\left\langle\delta^{(n+1)}(t),\ \varphi(t)\right\rangle, \varphi\in\mathcal{D} \text{ kad } h\to 0.$$

Tada, formalno, imamo,

$$(n+1)!\lim_{h\downarrow 0}\frac{S_n(h,x) - \frac{h^n}{n!}x}{h^{n+1}} = (n+1)!\,\lim_{h\downarrow 0}\frac{\overline{S_n(\delta(t-h),x)} - \overline{S_n\left(\frac{h^n}{n!}(-1)^n\delta^{(n)}(t),x\right)}}{h^{n+1}}$$

$$= (n+1)!\,\lim_{h\downarrow 0}\frac{\overline{S_n\left(\delta(t-h) - \frac{h^n}{n!}(-1)^n\delta^{(n)}(t),x\right)}}{h^{n+1}}$$

$$= \overline{S_n\left((-1)^{n+1}\delta^{(n+1)}(t),x\right)} = \overline{S_0\left(-\delta',x\right)} = Ax.$$

Glava 6

α - puta integrisane polugrupe ($\alpha \in \mathbb{R}^-$)

U ovoj glavi uvode se i analiziraju α - puta integrisane polugrupe operatora ($\alpha \in \mathbb{R}^-$). Relacije koje se dobijaju za α - puta integrisane polugrupe ($\alpha \in \mathbb{R}^-$) slične su relacijama koje se dobijaju za $\alpha \in \mathbb{R}^+$ i $\alpha = 0$

U prvom odeljku, u teoremi 6.1 dati su potrebni i dovoljni uslovi da bi familija $(R(\lambda))_{\mathrm{Re}\lambda > \omega}$ bila pseudorezolventa.

U drugom odeljku date su relacije izmedju generatora A i α - puta integrisanih polugrupa, $\alpha \in \mathbb{R}^-$. Takodje, data je karakterizacija generatora A, α - puta integrisanih polugrupa, $\alpha \in \mathbb{R}^-$, ako je D(A) gust u E, odnosno D(A) nije gust u E.

U trećem odeljku istraživane su veze izmedju α - puta integrisanih polugrupa ($\alpha \in \mathbb{R}^-$) i distribucionih polugrupa.

U četvrtom odeljku je teorija α - puta integrisanih polugrupa, $\alpha \in \mathbb{R}^-$, primenjena na rešavanje apstraktnog Košijevog problema.

Rezultati u ovoj glavi su originalni rezultati M. Mijatovića i S. Pilipovića [46].

6.1 α - puta integrisane polugrupe ($\alpha\in\mathbb{R}^-$)

Neka su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, kao i glavi 4, prostori test funkcija i neka su $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, njihovi prostori distribucija. Takodje, neka je $\mathcal{S}'(E) = L(\mathcal{S}(\mathbb{R}),E)$ i $\mathcal{S}_+ = \{\varphi\,;\ |\, t^k\varphi^{(\nu)}(t)\,| < C_{k,\nu},\ t\in[0,\infty),\ k,\nu\in\mathbb{N}_0\}$ i neka je $\mathcal{S}_+'$ prostor temperiranih distribucija čiji se nosači nalaze u $[0,\infty)$ ([70]).

Uvedimo, na isti način kao i u glavi 4, prostor eksponencijalno opadajućih test funkcija $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$, prostor eksponencijalnih distribucija $\mathcal{K}_1'(\mathbb{R})$ i $\mathcal{K}_1(E) = L(\mathcal{K}_1,E)$, kao i prostore $\mathcal{K}_{1+}$, $\mathcal{K}_{1+}'$ i $\mathcal{K}_{1+}'(E) = L(\mathcal{K}_{1+},E)$.

Osobine definisanih prostora, operacije sa elementima, kao i reprezentacija elemenata tih prostora dati su u glavi 4, kao i u [62], [63], [22], [70], [71].

Uvedimo familiju distribucija

$$(6.1)\qquad f_\alpha(t) = \begin{cases} \dfrac{H(t)\,t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \alpha>0,\\[2mm] f^{(n)}_{\alpha+n}, & \alpha\le 0,\ \alpha+n>0,\ n\in\mathbb{N},\ t\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

gde je $H = H(t)$ Hevisajdova funkcija.

Neka je $(T(t))_{t\ge0}$ C_0 - polugrupa i neka je operator A njen generator. Stavimo

$$(6.2)\qquad S_\alpha(t)=\big(T(s)*f_\alpha(s)\big)(t),\quad t\ge 0,\ \alpha\in\mathbb{R},$$

gde je konvolucija uzeta u distribucionom smislu ([38]).

Tada, u distribucionom smislu, imamo

$$\mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda) = \mathcal{L}(T)(\lambda)\cdot\mathcal{L}(f_\alpha)(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(t)\,dt,\quad \mathrm{Re}\lambda>\omega,$$

što daje

$$\mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}R(\lambda,A),\quad \mathrm{Re}\lambda>\omega.$$

Ako je $\alpha>0$, tada je

$$S_\alpha(t)=\big(T(s)*f_\alpha(s)\big)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,T(s)\,ds,\quad t\ge 0,$$

gde je integral uzet u Bohnerovom smislu.

Za $\alpha\le 0$, $\big(T*f_\alpha\big)(t,\cdot)$ je elemenat prostora $\mathcal{K}_{1+}'(L(E))$.

Primer 6.1 Neka je $\alpha=-n$, $n\in\mathbb{N}$. Tada je

$$\big\langle (T*f_{-n})(t,\cdot),\varphi(t)\big\rangle = (-1)^n\big\langle T(t,\cdot),\varphi^{(n)}(t)\big\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{K}_1.$$

U glavi 3 istraživali smo slučaj $\alpha\in\mathbb{R}^+$ i uveli pojam α-puta integrisanih polugrupa, a u glavi 4 istraživali smo slučaj $\alpha = 0$ i uveli pojam 0-puta integrisanih polugrupa. Uradimo to i za slučaj $\alpha\in\mathbb{R}^-$.

Teorema 6.1 *Neka je* $\alpha\in\mathbb{R}^-$, $S\in \mathcal{K}'_{1+}(L(E))$ *i*

$$R(\lambda,\cdot) = \lambda^{\alpha}\mathcal{L}(S)(\lambda),$$

Tada je $(R(\lambda))_{\mathrm{Re}\lambda>\omega}$ *pseudorezolventa ako i samo ako postoji* $n_0\in\mathbb{N}$, *takav da je* $n_0+\alpha > 0$ *i da je*

$$S_{n_0+\alpha}(t,\cdot) = \left(S * f_{n_0}\right)(t,\cdot),\ \ t\geq 0,$$

neprekidna, $\operatorname{supp} S_{n_0+\alpha}\subset[0,\infty)$ *i zadovoljava*

$$\langle S(t,S(s,x)),\varphi(t)\,\psi(s)\rangle = \left\langle \left(S_{n_0+\alpha}\left(t,S_{n_0+\alpha}(s,x)\right)\right)^{(n_0,n_0)},\varphi(t)\,\psi(s)\right\rangle \tag{6.3}$$

$$= \left\langle \frac{1}{\Gamma(n_0+\alpha)}\left(\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n_0+\alpha-1}S_{n_0+\alpha}(r,x)dr\right.\right.$$

$$\left.\left. -\int_0^{s}(t+s-r)^{n_0+\alpha-1}S_{n_0+\alpha}(r,x)dr\right)^{(n_0,n_0)},\varphi(t)\psi(s)\right\rangle$$

za svako $\varphi,\psi\in\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$.

Osim toga, (6.3) je ispunjeno za $S_n = S * f_n$, *za svako* $n\geq n_0$.

Dokaz. Imamo $S = S_{n_0+\alpha}^{(n_0)}$. Neka je $x\in E$. Relacija (6.3) implicira

$$\left(S_{n_0+\alpha}\left(t,S_{n_0+\alpha}(s,x)\right)\right)^{(n_0,n_0)} \tag{6.4}$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(n_0+\alpha)}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n_0+\alpha-1}S_{n_0+\alpha}(r,x)dr - \int_t^{t+s}(t+s-r)^{n_0+\alpha-1}S_{n_0+\alpha}(r,x)dr\right]\right)^{(n_0,n_0)},$$

u distributivnom smislu. Budući da obe strane imaju nosače u $[0,\infty)\times[0,\infty)$, sledi da je

$$S_{n_0+\alpha}\left(t,S_{n_0+\alpha}(s,x)\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n_0+\alpha)}\left[\int_t^{t+s}(t+s-r)^{n_0+\alpha-1}S_{n_0+\alpha}(r,x)dr - \int_t^{t+s}(t+s-r)^{n_0+\alpha-1}S_{n_0+\alpha}(r,x)dr\right]$$

ispunjeno za svako $t,s\geq 0$. Tada je

$$R(\lambda,\cdot) = \lambda^{n_0+\alpha}\mathcal{L}\left(S_{n_0+\alpha}\right)(\lambda,\cdot)$$

pseudorezolventa.

Neka je $n \geq n_0$

$$S_{n_0+\alpha} = S^{(n-n_0)}_{n_0+\alpha+(n-n_0)}, \quad \left(S_{n+\alpha} = S * f_n,\ n+\alpha > 0\right)$$

što dokazuje da je (6.3) ispunjeno za svako $n > n_0$.

Definicija 6.1 Neka je $\alpha\in\mathbb{R}^-$ i $S\in\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$. Tada se S naziva *α-puta integrisana polugrupa* ako postoji $n_0\in\mathbb{N}$, takav da je $n_0 + \alpha > 0$, $S_{n_0+\alpha} = S * f_{n_0}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, sa nosačem u $[0,\infty)$, eksponencijalno ograničena i zadovoljava (6.3). Takodje, α-puta integrisana polugrupa je *nedegenerisana* ako $\langle S(t,x),\varphi(t)\rangle = 0$, za svako $\varphi\in\mathcal{K}_1$, povlači $x = 0$.

Definicija 6.2 Neka je $\alpha\in\mathbb{R}^-$. Operator A je *generator* α - puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq0}$, $S\in\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$, ako je za neko $\omega\in\mathbb{R}$, $(\omega,\infty)\subset\rho(A)$ i funkcija $\lambda\to\dfrac{(\lambda I - A)^{-1}}{\lambda^\alpha} = \mathcal{L}(S_\alpha)(\lambda)$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, je injektivna gde se $\mathcal{L}$ - transformacija podrazumeva u distribucionom smislu.

Teorema 6.1 i definicija 6.2 direktno impliciraju sledeću propoziciju.

Propozicija 6.2

a) *Neka je* $(S(t))_{t\geq0}$, $S\in\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$, *α - puta integrisana polugrupa* ($\alpha\in\mathbb{R}^-$). *Tada je* $S * f_{-\alpha}$, *0-puta integrisana polugrupa.*

b) *Linearni operator* A *je generator α-puta integrisane polugrupe* $(S(t))_{t\geq0}$, $S\in\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$, ($\alpha\in\mathbb{R}^-$), *ako i samo ako je* A *generator 0-puta integrisane polugrupe* $S * f_{-\alpha}$.

6.2 Relacije izmedju generatora A i α - puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq0}$ ($\alpha\in\mathbb{R}^-$). Karakterizacija generatora α - puta integrisane polugrupe

Propozicija 3.2 *Neka je linearni operator* A *generator α - puta integrisane polugrupe* $(S(t))_{t\geq0}$, $S\in\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$, ($\alpha\in\mathbb{R}^-$).

a) *Za svako* $x\in D(A)$, $\varphi\in\mathcal{K}_1$, *imamo*

(6.5) $$A\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle S(t,Ax), \varphi(t)\rangle.$$

b) *Za svako* $x\in D(A)$, $\varphi\in\mathcal{K}_1$, *imamo*

(6.6) $\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle \in D(A).$

c) *Za svako* $x \in D(A)$, $\varphi \in \mathcal{K}_1$, *imamo*

(6.7) $\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle f_{\alpha+1}(t,x), \varphi(t)\rangle + \langle (f_1 * S)(t,Ax), \varphi(t)\rangle$

i

(6.8) $A\langle (f_1 * S)(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle S(t,x), \varphi(t)\rangle - \langle f_{\alpha+1}(t,x), \varphi(t)\rangle.$

Dokaz.

a) Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ i $x \in D(A)$. Tada je

$$\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = (-1)^{n_0} \langle S_{n_0+\alpha}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle, \; n_0+\alpha > 0,$$

i (3.12) implicira

$$S_{n_0+\alpha}(t,x) \in D(A) \text{ i } A S_{n_0+\alpha}(t,x) = S_{n_0+\alpha}(t,Ax).$$

Ovo i neprekidnost operatora A implicira

$$A\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = (-1)^{n_0} A\langle S_{n_0+\alpha}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= (-1)^{n_0} A \int S_{n_0+\alpha}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\, dt = (-1)^{n_0} A \lim_{\nu\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu} S_{n_0+\alpha}(t_j,x), \varphi^{(n_0)}(t_j)\, \Delta t_j$$

$$= (-1)^{n_0} \lim_{\nu\to\infty} \sum_{j=1}^{\nu} A S_{n_0+\alpha}(t_j,x)\, \varphi^{(n_0)}(t_j)\, \Delta t_j$$

$$= (-1)^{n_0} \langle A S_{n_0+\alpha}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle = \langle S(t,Ax), \varphi(t)\rangle, \quad x \in E, \varphi \in \mathcal{D},$$

gde je $\left(\sum_{j=1}^{\nu} S_{n_0+\alpha}(t_j,x)\varphi^{(n_0)}(t_j)\Delta t_j\right)$ niz integralnih suma $\int S_{n_0+\alpha}(t,x)\varphi^{(n_0)}(t)dt.$

Neka je $\varphi \in \mathcal{K}_1$ i neka je φ_ν niz u $\mathcal{D}$ koji konvergira ka φ u $\mathcal{K}_1$. Tada,

$$A\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = \lim_{\nu\to\infty} \langle S(t,Ax), \varphi_\nu(t)\rangle = \langle S(t,Ax), \varphi(t)\rangle.$$

Ovo implicira (6.5).

b) Propozicija 3.2 implicira $\langle (f_1 * S)(t,x), \varphi(t)\rangle \in D(A)$ za svako $\varphi \in \mathcal{K}_1$ i $x \in E$. Stoga, stavljajući φ' umesto φ, dobijamo $\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle \in D(A)$ za svako $\varphi \in \mathcal{K}_1$.

c) Na osnovu (3.13), imamo

$$\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle = (-1)^{n_0} \langle S_{n_0+\alpha}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= (-1)^{n_0} \langle f_{n_0+\alpha+1}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle + (-1)^{n_0} \langle (f_1 * S_{n_0+\alpha})(t,Ax), \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= \langle f_{\alpha+1}(t,x), \varphi(t)\rangle + \langle (f_1 * S_{n_0+\alpha}^{(n_0)})(t,Ax), \varphi(t)\rangle$$

$$= \langle f_{\alpha+1}(t,x), \varphi(t)\rangle + \langle (f_1 * S)(t,Ax), \varphi(t)\rangle, \quad x\in D(A),\ \varphi\in\mathcal{K}_1,$$

što daje (6.7).

Takodje, koristeći (3.14) dobijamo

$$A\,\langle (f_1 * S)(t,x), \varphi(t)\rangle = (-1)^{n_0}\langle A(f_1 * S_{n_0+\alpha})(t,x),\ \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= (-1)^{n_0}\langle S_{n_0+\alpha}(t,x),\ \varphi^{(n_0)}(t)\rangle - (-1)^{n_0}\langle f_{n_0+\alpha+1}(t,x),\ \varphi^{(n_0)}(t)\rangle$$

$$= \langle S^{(n_0)}_{n_0+\alpha}(t,x), \varphi(t)\rangle - \langle f_{\alpha+1}(t,x), \varphi(t)\rangle = \langle S(t,x), \varphi(t)\rangle - \langle f_{\alpha+1}(t,x), \varphi(t)\rangle,$$

što daje (6.8).

Posledica 6.4 *Neka je* $\alpha\in\mathbb{R}^-$ i $(S(t))_{t\geq 0}$ *α-puta integrisana polugrupa,* $S\in\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$. *Tada je za svako* $x\in E$, $\varphi\in\mathcal{K}_1$, $\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle \in \overline{D(A)}$. *Neka je* $x\in E$, $\varphi\in\mathcal{K}_1$. *Tada je*

$$\left\langle \frac{d}{dt}S(t,x), \varphi(t)\right\rangle = \langle AS(t,x) + f_\alpha(t,x), \varphi(t)\rangle$$

ako i samo ako je $\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle \in D(A)$ *za svako* $\varphi\in\mathcal{K}_1$.

Dokaz. Za $x\in E$, $t\geq 0$ i $\varphi\in\mathcal{K}_1$, imamo

$$\langle S_{n_0+\alpha}(t,x),\ \varphi^{(n_0)}(t)\rangle = \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\left\langle S_{n_0+\alpha+1}(t+h,x) - S_{n_0+\alpha+1}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\right\rangle.$$

Prema tome je $\langle S(t,x), \varphi(t)\rangle \in D(A)$ jer je $\left\langle S_{n_0+\alpha+1}(t,x), \varphi^{(n_0)}(t)\right\rangle \in D(A)$. Ovo i (6.8) implicira drugo tvrdjenje.

Arendt [3] je dao karakterizaciju generatora A (n+1)-puta integrisane polugrupe $(S(t))_{t\geq 0}$, $n\in\mathbb{N}$, u slučaju da operator A nije gusto definisan. U slučaju $\alpha\in\mathbb{R}^+$ takvu karakterizaciju operatora dali smo u teoremi 3.4. U slučaju da je $\alpha\in\mathbb{R}^-$ imamo sledeću teoremu:

Teorema 6.5

a) *Neka je* $\alpha\in\mathbb{R}^-$, $\omega\in\mathbb{R}$, $M\geq 0$. *Neka je* A *(ne gusto definisan) linearan operator u Banahovom prostoru* E, *takav da je* $(a,\infty)\subset\rho(A)$, *za neko* $a\geq 0$. *Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna.*

(i) A *generiše (α+1)-puta integrisanu polugrupu* $(S(t))_{t\geq 0}$, $S\in\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$ *koja zadovoljava*

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup\|S(t+h) - S(t)\| \leq Me^{\omega t},\quad t\geq 0,\ \omega\in(-\infty, a],$$

(ii) $$\left\|\frac{1}{k!}\left(\frac{R(\lambda,A)}{\lambda^\alpha}\right)^{(k)}\right\| \leq M\left(\frac{1}{\lambda-\omega}\right)^{k+1},\quad \text{za svako } \mathrm{Re}\lambda > a,\ k\in\mathbb{N}_0.$$

b) *Ako operator* A *zadovoljava ekvivalentne pretpostavke iz* **a)**, *tada je deo operatora* A *na* $\overline{D(A)}$ *generator α-puta integrisane polugrupe.*

c) *Neka je linearni operator* A *u* **a)** *gusto definisan. Tada je (ii) u* **a)** *ekvivalentno sledećoj pretpostavci:*

A *generiše α-puta integrisanu polugrupu* $(S(t))_{t\geq 0}$, $S \in \mathcal{K}'_{1+}(L(E))$ *koja zadovoljava*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Posledica 6.6 *Neka je* A *linearan operator i neka je* D(A) *gust u* E. *Ako operator* A *generiše α-puta integrisanu polugrupu* $(S(t))_{t\geq 0}$, $S \in \mathcal{K}'_{1+}(L(E))$, $\alpha \in \mathbb{R}^-$, *tada adjungovani operator* A* *generiše (α+1)-puta integrisanu polugrupu u* E*.

6.3 Distribucione polugrupe i α-puta integrisane polugrupe $\alpha \in \mathbb{R}$

Distribucione polugrupe u smislu definicije Lionsa [38], povezane su sa α-puta integrisanim polugrupama $\alpha \in \mathbb{R}$ na isti način kao i u slučaju $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

Neka je $(T(t))_{t\geq 0}$ C_0 - polugrupa. Tada funkcija

$$\varphi \to \left\{ \left(T * \check{\varphi} \right)(0) \, ; \, x \to \left(\int_0^\infty T(u)\check{\varphi}(0-u)du \right) x = \left(\int_0^\infty T(u)\varphi(u)du \right) x \right\}, \ \varphi \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R}),$$

definiše elemenat prostora $\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$. Označimo ga sa $\mathcal{T}$. Prema tome je

$$\mathcal{T}(\varphi, x) = \left(T * \check{\varphi} \right)(0)(x) = \langle T(t, x), \varphi(t) \rangle$$
$$= \langle T(t), \varphi(t) \rangle (x), \quad x \in E, \ \varphi \in \mathcal{K}_1.$$

Tada je

$$\left(T * \left(\varphi \check{*} \psi \right) \right)(0)(x) = \left(\left(T * \check{\psi} \right) * \check{\varphi} \right)(0)\,(x), \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$$

i ovo implicira

$$\mathcal{T}(\varphi * \psi, x) = \mathcal{T}(\varphi, \mathcal{T}(\psi, x)), \ x \in E, \ \varphi, \psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}). \tag{6.9}$$

U odeljku 4.3 dokazano je da je $\mathcal{T}$ eksponencijalna distribuciona polugrupa ili SGDE. Za $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ definišimo $\overline{\mathcal{T}(T, \cdot)}$ i zatvorenje $\mathcal{T}(T, \cdot)$ na isti način kao u odeljku 4.3. Neka je A generator distribucione polugrupe $(T(t))_{t\geq 0}$. Tada je A generator distribucione polugrupe $\mathcal{T}$ i $Ax = \overline{\mathcal{T}(-\delta', x)}$, $x \in D(A)$.

Neka je $S_\alpha = T * f_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Definišimo

$$\mathcal{T}_\alpha(\varphi,x) = \left(S_\alpha(\cdot,x)*\check{\varphi}\right)(0) = \left((T*f_\alpha(\cdot,x))*\check{\varphi}\right)(0), \quad x\in E,\ \varphi\in\mathcal{K}_1.$$

Tada je

$$(6.10) \qquad \mathcal{T}_\alpha(\varphi,x) = \left(T*(f_\alpha*\check{\varphi})\right)(0)(x) = \mathcal{T}\left(\check{f}_\alpha*\varphi)\right)(0)(x), \quad x\in E,\ \varphi\in\mathcal{K}_1$$

elemenat prostora $\mathcal{K}_{1\,+}'(L(E))$. Budući da (6.9) nije ispunjeno za $\alpha\neq 0$, $\mathcal{T}_\alpha$ nije SGDE. Tačnije, ispunjena je sledeća teorema:

Teorema 6.7 *Neka je* $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ *α-puta integrisana polugrupa* $\alpha\in\mathbb{R}$ *i neka je* A *njen generator, takav da je* D(A) *gust u* E. *Tada*

$$(6.11) \qquad \mathcal{T}_\alpha(\varphi,x) = \left(S_\alpha*\check{\varphi}\right)(0)(x), \quad \varphi\in\mathcal{K}_1$$

definiše elemenat prostora $\mathcal{K}_{1\,+}'(L(E))$ *koji je* SGDE *ako i samo ako je* $\alpha = 0$.

6.4 Košijev problem

Neka je A linearan operator: $E\to E$, $u_0\in E$ i $T\in\mathcal{K}_{1\,+}'(E)$. Tada je $u\in\mathcal{K}_{1\,+}'(E)$ rešenje diferencijalne jednačine

$$(6.12) \qquad u' = Au + T, \quad u \quad \mathcal{K}_1'(E),$$

ako je $\langle u(t),\varphi(t)\rangle\in D(A)$ za svako $\varphi\in\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ i (6.12) je ispunjeno.

Neka je $U\in\mathcal{K}_{1\,+}'(L(E,D(A)))$, $V\in\mathcal{K}_{1\,+}'(L(D(A),E))$. Tada su $U*V$ i $V*U$ definisani kao i u [63] i elementi su prostora $\mathcal{K}_{1\,+}'(L(D(A)))$ i $\mathcal{K}_{1\,+}'(L(E))$.

Teorema 6.8 *Neka je* $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ *α-puta integrisana polugrupa* $S_\alpha\in\mathcal{K}_{1\,+}'$, $\alpha\in\mathbb{R}$ *i neka je linearni operator* A *njen generator, takav da je* $S_\alpha * f_{-\alpha}$ $\tilde{0}$*-puta integrisana polugrupa. Tada je*

a) $$\left(-A+\frac{\partial}{\partial t}\right)*S_\alpha = f_\alpha\otimes I_{\overline{D(A)}}, \quad S_\alpha*\left(-A+\frac{\partial}{\partial t}\right) = f_\alpha\otimes I_{D(A)},$$

gde je $-A+\dfrac{\partial}{\partial t} = -\delta\otimes A + \delta'\otimes I$.

b) *Neka je* $T\in\mathcal{K}'_{1+}(\overline{D(A)})$. *Tada je* $u = S_\alpha * f_{-\alpha} * T$ *jedinstveno rešenje jednačine (4.15).*

Primedba. Prethodna tvrdjenja dokazana su u [38] u slučaju kada je $S_\alpha * f_{-\alpha}$ SGDE.

Dokaz.

a) Stavimo $S_0 = S_\alpha * f_{-\alpha}$. Tada, kao u dokazu teoreme 4.1 u [38], imamo

$$\left(-A+\frac{\partial}{\partial t}\right) * S_0 = \delta \otimes I_{\overline{D(A)}} \tag{6.13}$$

Budući da D(A) nije gust u E, primenimo obe strane u (6.13) na $x\in D(A)$. Tada napravimo konvoluciju sa f_α i dobijamo tvrdjenje u a).

Na sličan način dobija se i drugo tvrdjenje.

b) Sledi iz a).

Teorema 6.9 *Neka je operator* A *generator* α*-puta integrisane polugrupe* $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$, $S_\alpha\in\mathcal{K}'_{1+}(L(E))$, $\alpha\in\mathbb{R}$. *Tada* $S_\alpha * f_{-\alpha}$ *definiše SGDE čiji je generator* A *na* $E_0\times\mathcal{K}_1$, *gde je*

$$E_0 = \{\, S_\alpha * f_{-\alpha}(\varphi,x)\ ;\ \varphi\in\mathcal{D}_0,\ x\in E\}$$

i

$$\left(-A+\frac{\partial}{\partial t}\right) * S_\alpha = f_\alpha \otimes I_{E_0} \quad,\quad S_\alpha * \left(-A+\frac{\partial}{\partial t}\right) = f_\alpha \otimes I_{D(A)\cap E_0}\,.$$

Neka je $T\in\mathcal{K}'_{1+}(E_0)$. *Tada je* $u = S_\alpha * f_{-\alpha} * T$ *jedinstveno rešenje jednačine*

$$u' = Au + T \quad u \quad \mathcal{K}'_1(L(E_0)).$$

Literatura

[1] F. Andreu, J. Martinez and J.M. Mazon, *A spectral mapping theorem for perturbed strongly continuous semigroups,* Math. Ann., **291** (1991), 453-462.

[2] W. Arendt, *Resolvent positive operators and integrated semigroups,* Proc. London Math. Soc., (3) **54** (1987), 321-349.

[3] W.Arendt, *Vector valued Laplace transforms and Cauchy problems,* Israel J. Math., **59** (1987), 327-352.

[4] M. Balabane and H. A. Emamirad, *Smooth distribution group and Schrödinger equation in* $L^p(\mathbb{R}^n)$, J. Math. Anal. Appl., **70**, No 1, (1979), 61-71.

[5] M. Balabane and H. A. Emamirad, *L^p estimates for Schrödinger evolution equations,* Trans. Amer. Math. Soc., **291** (1985), 357-373.

[6] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces,* Noordhoff Int. Publ. Leyde the Netherlands, 1976.

[7] A. Belleni - Morante, *Applied semigroups and evolution equations,* Clarendon Press, Oxford, 1979.

[8] R. Beals, *On the abstract Cauchy problem,* J. Func. Anal., **10** (1972), 281-299.

[9] J. Chazarian, *Probèmes de Cauchy abstraits et applications' a quelques problèmes mixtes,* J. Func. Anal., **7** (1971), 387-446.

[10] Ph. Clément, O. Diekmann, M. Gyllenberg, H.J.A.M. Hijemans and H.R. Thieme, *A. Hille-Yosida theorem for a class of weakly* continuous semigroups,* Semigroup Forum **38** (1989), 157-187.

[11] G. Da Prato and E. Sinestrari, *Differential operators with nondense domain,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **14** (1987), 285-344.

[12] G. Da Prato and U. Mosco, *Regolarizzazione dei semigruppi analitici,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **19** (1965), 563-576.

[13] G. Da Prato and U. Mosco, *Semigruppi distribuzioni analitici,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **19** (1965), 367-396.

[14] H.O. Fattorini, *The Cauchy Problem,* Addison-Wesley, London, 1983.

[15] H.O. Fattorini, *Second Order Differential Equations in Banach Spaces,* North-Holland, Amsterdam, 1985.

[16] C. Foias, *Remarques sur les semi-groupes distributions d' operérateurs normaux,* Portugal. Math. **19** (1960), 227-242.

[17] D. Fujiwara, *A characterization of exponential distribution semigroups,* J. Math. Soc., **18** (1966), 267-274.

[18] I.M. Gel'fand and G.E. Shilov, *Generalized Functions, vol III: Theory of Differential Equations (English translation),* Academic Press, New York, 1967.

[19] Y. Ginibre and G. Velo, *On a class of Nonlinear Schrödinger Equations. I The Cauchy Problem, General Case,* J. Func. Anal., **32** (1979), 1-32.

[20] Y. Ginibre and G. Velo, *On a class of Nonlinear Schrödinger Equations. II Scattering Theory, General Case,* J. Func. Anal., **32** (1979), 33-71.

[21] J.A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications,* Oxford Univ. Press, 1985.

[22] M. Hasumi, *Note on the n - dimensional tempered ultradistributions,* Tôhoku Math.J. **13** (1961), 94-104.

[23] M. Hieber, *Integrated semigroups and differential operators on L^p spaces,* Math. Ann. **291** (1991), 1-16.

[24] M. Hieber, *Integrated semigroups and the Cauchy problem for systems in L^p - spaces,* To appear in J. Math. Anal. Appl.

[25] M. Hieber, *Spectral theory and Cauchy problems on L^p - spaces,* Math. 2., **216** (1994), 613-628.

[26] M. Hieber, *Laplace transforms and α-times integrated semigroups,* To appear in Forum Math.

[27] M. Hieber, *L^p spectra of pseudodifferential operators generating integrated semigropus,* Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. **347**, Num. **10**, (1995), 4023-4035.

[28] E.Hille and R.S. Philips, *Functional analysis and semigroups,*Amer. Math. Soc.Colloquium Publications, vol. 31, Providence Rhode Island, 1957.

[29] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p - spaces,* Acta Math. **104** (1960), 93-140.

[30] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators,* I. Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1984.

[31] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators,* Springer-Verlag, New York, Berlin, 1966.

[32] T. Kato, *Superconvexity of the spectral radius, and convexity of the spectral bound and type*, Math. **2**. **180** (1982), 256-273.

[33] H. Kellermann and M. Hieber, *Integrated semigroups,* J. Func. Anal., **84**, (1989), 160-180.

[34] J. Kisynski, *Semi-groups of operators and some of their applications to partial differential equations, in Control Theory and Topics in Functional Analysis, vol II,* IAEA, Vienna, 1976.

[35] T. Komura, *Semi-groups of operators in a locally convex spaces,* J. Func. Anal., **2** (1968), 258-296.

[36] S.G. Krein and M.I. Khazan, *Differential Equations in a Banach Space,* J. Soviet. Math., **30** (1985), 2154-2239.

[37] S.G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Spaces,* Amer. Math. Soc. Transl., **29**, Providence (R.I.), 1971.

[38] J.L. Lions, *Semi-groupes distributions,* Portugal. Math. **19** (1960), 141-164.

[39] G. Lumer, *Solutions généralisees et semi-groupes intégrés,* C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, **310** (1990), 557-582.

[40] G.Lumer, *Evolution equations. Solutions for irregular evolution problems via generalized initial values. Applications to periodic shocks models,* Ann. Univ. Saraviensis, vol. 5, No 1. Saarbrücken , 1994.

[41] M. Mijatović, S. Pilipović, F. Vajzović, *α-times integrated semigroup ($\alpha \in \mathbb{R}^+$),* To appear in J. Math. Anal. Appl.

[42] M. Mijatović, S. Pilipović, *Integrated and non-dense distributional semigroups,* preprint.

[43] M. Mijatović, S. Pilipović, *0-times integrated semigroups,* preprint.

[44] M. Mijatović, S. Pilipović, *Integrated semigroups, relation with generators,* Zb. rad. Prir. Mat. Fak. Ser. za Mat., u štampi.

[45] M. Mijatović, S. Pilipović, *On the generator of n-times integrated semigroups,* preprint.

[46] M. Mijatović, S. Pilipović, *α-times integrated semigroups ($\alpha \in \mathbb{R}^-$),* preprint

[47] A. Miyachi, *On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$,* J. Fac. Sci. Univ., Tokyo, **27** (1980), 157-179.

[48] A. Miyachi, *On some singular Fourier multipliers,* J. Fac. Sci. Univ., Tokyo, **28** (1981), 267-315.

[49] I. Miyadera, S. Oharu and N. Okazawa, *Generation theorems of linear operators,* PRIMS, Kyoto, Univ., **8** (1973), 509-555.

[50] R. Nagel (ed.), *One-parameter Semigroups of Positive Operators,* Lect. Notes Math., **1184** (1986), Springer.

[51] F. Neubrander, *Integrated semigroups and thier applications to the abstract Cauchy problem,* Pac. J. Math. **135** (1988), 111-155.

[52] F. Neubrander, *Wellposedness of apstract Cauchy problems,* Semigroup Forum, **29** (1984), 75-85.

[53] F. Neubrander, *On the relation between the semigroup and its infinitesimal generator,* Proc. Amer. Math. Soc., **99** No4, 1987.

[54] F. Neubrander, *Wellposedness of higher order apstact Cauchy problems,* Trans. Amer. Math. Soc., **295** (1986), 257-290.

[55] S. Oharu, *Semigroups of linear operators in a Banach spaces,* PRIMS, Kyoto Univ., **7** (1971/72), 205-260.

[56] E. Pap and S. Pilipović, *Semigroups of Operators on the Space of Generalized Functions Exp $\mathcal{A}'^*$,* J. of Math. Anal. and Appl., 2 (1987), 501-515.

[57] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer - Verlag, Berlin, New York, 1983.

[58] J. Peetre, *Sur la théorie des semi-groupes distributions,* Collége de France, Séminaire E.D.P. II, Nov. 1963 - Mai 1964., pp 76-94.

[59] Peng-Fei Yao, *On the inversion of the Laplace transform of C_0 - semigroups and its applications,* SIAM J. Math. Anal., **5** (1995), 1331-1341.

[60] N. Sanekata, *Some remarks on the apstract Cauchy problem,* PRIMS, Kyoto Univ., **11** (1975), 51-65.

[61] H.H. Schaefer, *Topological Vector Spaces,* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[62] L. Schwartz, *Théorie des distributions,* 2 vols., Hermann, Paris, (1950-1951).

[63] L. Schwartz, *Théorie des distributions á valeurs vectorielles,* Annales Inst. Fourier, $1^{\text{ére}}$ partie: **7** (1957), 1-141; $2^{\text{éme}}$ partie: **8** (1958), 1-207.

[64] S. Sjöstrand, *On the Riesz means of solutions of Schrödinger equation,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **24** (1970), 331-348.

[65] M. Sova, *Problémes de Cauchy paraboliques abstraits de classes supérieurs et les semi-groupes distributions,* Ricerche Mat. **18** (1969), 215-238.

[66] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiablity properties of functions,* New Jersy, Prim. Univ. Press, 1970.

[67] H. Thieme, *Integrated semigroups and integrated solutions to abstract Cauchy problems,* J. Math. Anal. Appl. **152** (1990), 416-447.

[68] F. Treves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels,* Acad. Press, New-York, (1967).

[69] T. Ushijama, *Some properties of regular distribution semigroups*, Proc. Japan Acad., **45** (1969), 224-227.

[70] V.S. Vladimirov, *Generalized Functions in Mathematical Physics,* Mir, Moscow, (1979).

[71] V.S. Vladimirov, Y.N. Drožžinov, B.I. Zavialov, *Multidimensional Tauberian Theorems for Generalized Functions*, Nauk, Moscow, (1986) (In Russian).

[72] D.V. Widder, *An Introduction to Transform Theory,* Academic Press, New York, 1971.

[73] K. Yosida, *Functional Analysis,* Springer, Berlin, 1978.

[74] K. Yoshinaga, *Ultra-distributions and semi-group distributions*, Bull. Kyushu Inst. Tech. Math. Nat. Sci. **10** (1963), 1-24.

[75] Yoshinaga, *Values of vector-valued distributions and smootness semi-group distributions*, Bull. Kyushu Inst. Tech. Math. Nat. Sci. **12** (1965), 1-27.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR

Autor: mr Milorad Mijatović
AU

Mentor: Prof. dr Stevan Pilipović
MN

Naslov rada: α - puta integrisane polugrupe operatora sa primenama u rešavanju Košijevog problema
NR

Jezik publikacije: Srpski, latinica
JP

Jezik izvoda: Srpski, Engleski
JI

Zemlja publikovanja: Savezna Republika Jugoslavija
ZP

Uže geografsko područje: Srbija, Vojvodina, Novi Sad
UGP

Godina: 1996.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno - matematički fakultet
MA

Fizički opis rada: Rad se sastoji iz 6 glava, 102 strane, 75 citata u bibliografiji,
FO 0 tabela, 0 priloga

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Analiza
ND

Predmetna odrednica, ključne reči: C_0 - polugrupe, integrisane polugrupe, distribucione polugrupe
PO

UDK:

Čuva se: U biblioteci Instituta za matematiku
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: Dat je pregled osnovnih osobina C_0 - polugrupa i uniformno-neprekidnih polugrupa. Date su osobine n-puta integrisanih polugrupa ($n\in\mathbb{N}$), njihove veze sa infinitezimalnim generatorom i primene. Uveden je pojam α-puta integrisanih polugrupa ($\alpha\in\mathbb{R}^+$), istražene veze sa infinitezimalnim generatorom i primene. Proširen je pojam 0-puta integrisanih polugrupa i uveden pojam $\tilde{0}$-puta integrisanih polugrupa. Istražene su veze izmedju integrisanih polugrupa i distribucionih polugrupa. Uveden je pojam negustih distribucionih polugrupa. Uveden je pojam α-puta integrisanih polugrupa ($\alpha\in\mathbb{R}^-$), istražene veze sa infinitezimalnim generatorom i primene. Rešen je odgovarajući apstraktan Košijev problem.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane Nastavno - naučnog veća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: dr Olga Hadžić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Stevan Pilipović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor

Član: dr Bogoljub Stanković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, u penziji,

Član: dr Ilija Kovačević, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accesion number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Text print material
TR

Contens code: Doctoral thesis
CC

Author: mr Milorad Mijatović
AU

Mentor: Prof. dr Stevan Pilipović
MN

Title: α - times integrated semigroups of operators with applications to solutions
TI of Cauchy problem´s

Language of text: Serbian, latinic
LT

Language of abstract: Serbian, English
LA

Country of publication: Federal Republic of Yugoslavia
CP

Locality of publication: Serbia, Vojvodina, Novi Sad
LP

Publication year: 1996.
PY

Publisher: Author´s reprint
PU

Publ. place: University of Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics
PP

Phisical description: Thesis is made 6 chapters, 102 pages, 75 citations in literature,
PD 0 tables, 0 pictures, 0 graphs, 0 additional listis

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Analysis
SD

Subject, key words: C_0 - semigroups, integrated semigroups, distributional semigroups
SKW

UC:

Holding data: the library in Institute of Mathematics, Novi Sad, Yugoslavia
HD

Note:
N

Abstract:
AB

It is given a survey of basic definitions of C_0 - semigroups and uniform continuous semigroups. It is given a survey of n-times integrated semigroups ($n \in \mathbb{N}$), their connection with infinitesimal generator. It is given notion of α-times integrated semigroups ($\alpha \in \mathbb{R}^+$), investigated connection with infinitesimal generator and applications. Notion 0-times integrated semigroups has been enlarged and it is given notions $\tilde{0}$-times integrated semigroups. Connections betveen integrated semigroups and distributional semigroups has been investigated. It is given the notion nondense distributional semigroups. It is also given the notion of α-times integrated semigroups ($\alpha \in \mathbb{R}^-$). The connections with infinitesimal generator and applications were investigated. We have solved appropriate apstract Cauchy´s problem.

Acceptet by Scientific Board on:
ASB

Defended:
DE

Thesis defended board:: DB

President:	dr Olga Hadžić, full professor of PMF in Novi Sad
Member:	dr Stevan Pilipović, full professor of PMF in Novi Sad, mentor
Member:	dr Bogoljub Stanković, full professor of PMF in Novi Sad
Member:	dr Ilija Kovačević, full professor of FTS in Novi Sad