

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ПРИЈАВЉЕНО:	19-03-2012
ОПШТИНСКА ЈЕД	БРО
0603	176/5

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

Природно-математички факултет

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Проблем репрезентације мреже слабих конгруенција

<b>I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ</b>
<p>1. Датум и орган који је именовао комисију Одлуку о именовању комисије донело је Научно-наставно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду на XXVIII седници одржаној 8.3.2012. године</p> <p>2. Састав комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:</p> <p>1. др Бранимир Шешеља, редовни професор ПМФ у Новом Саду, математика, 27.3.1992 – председник</p> <p>2. др Андреја Тепавчевић, редовни професор ПМФ у Новом Саду, алгебра и математичка логика, 1.12.2003 – ментор</p> <p>3. др Петар Ђапић, доцент ПМФ у Новом Саду, алгебра и математичка логика, 1.6.2009. – члан</p> <p>4. др Мирослав Ћирић, редовни професор ПМФ у Нишу, математика, 1.9.2000 – члан</p>
<b>II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ</b>
<p>1. Име, име једног родитеља, презиме: Вања, Радојица, Степановић</p> <p>2. Датум рођења, општина, држава: 26.03.1972, Савски Венац, Београд, Србија</p> <p>3. Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив Универзитет у Београду, Математички факултет, теоријска математика и примене, дипломирани математичар</p> <p>4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија</p> <p>5. Назив факултета, назив магистарске тезе, научна област и датум одбране: Универзитет у Београду, Математички факултет, Аналитичка класификација сингуларитета равних алгебарских кривих, Алгебра, 15.07.2003.</p> <p>6. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука: Математика</p>
<b>III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b> Проблем репрезентације мреже слабих конгруенција
<b>IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b> Навести кратак садржај са знаком броја страна, поглавља, слика, шема, графикона и сл. Докторска дисертација има 81 страну, 85 цитата (библиографске јединице), 20 табела и 24 слике. Рад се састоји из три поглавља од којих прво садржи приказ познатих појмова и резултата, а друго и треће садрже оригинални научни допринос. Дисертација се састоји следећих делова: Поглавље 1. Увод 1.1 Развој проблема повезаних са релацијама слабих конгруенција 1.2 Уводни појмови и тврђења 1.2.1 Посебне подмреже

- 1.2.2 Посебни елементи у мрежи
- 1.2.3. Кодистрибутиван елемент у алгебарској мрежи
- 1.2.4. Мреже релација на скупу
- 1.2.5. Релације сагласне са структуром алгебре
- 1.2.6. Мрежа слабих конгруенција
- 1.3. Репрезентације мрежом сагласних релација
- 1.3.1. Симултане репрезентације
- 1.4. Репрезентација мреже слабих конгруенција
- 1.4.1. Специјалан случај представљивости
- 1.4.2. Представљивост посебним алгебрама
- 1.4.3. Проблем конкретног представљања
- Поглавље 2. Делта-подесан елемент - услови
- Поглавље 3. Посебни случајеви представљивости
- 3.1. Изведена представљивост
- 3.1.1. Представљивост подмрежа и подуређења мреже
- 3.2. Хомоморфне слике, отворења, затворења
- 3.3. Представљивост директног производа
- 3.4. Представљивост посебних мрежа
- Литература

## V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

У првом поглављу дат је кратак историјат проблема повезаних са релацијама слабих конгруенција. Такође, уведени су основни појмови повезани са проблемом репрезентације мреже слабих конгруенција: наведене су дефиниције неких посебних елемената у мрежи, као што су дистрибутиван, кодистрибутиван, модуларан, стандардан, костандардан, неутралан, компактан, као и дефиниције посебних мрежа и подмрежа као што су комплетна мрежа и подмрежа, алгебарска мрежа, идеал и филтер. Дефинисана је и нарочито значајна релација еквиваленције у мрежи, одређена било којим кодистрибутивним елементом мреже, која дели мрежу на класе које представљају подмреже у мрежи, а у случају алгебарске мреже представљају затворене интервале. Наведене су и неке нарочито изучаване релације на алгебрама сагласне са операцијама тих алгебри које формирају алгебарске мреже у односу на инклузију. У оквиру тога дата је и дефиниција слабе конгруенције, као симетричне и транзитивне релације на алгебри сагласне са операцијама те алгебре. Описана је структура мреже слабих конгруенција, која је посебно значајна за проблем представљања мреже слабих конгруенција. Наведени су и неки познати и решени проблеми представљања алгебарских мрежа мрежама сагласних релација, проблем представљања алгебарске мреже помоћу мреже подалгебри неке алгебре, који су позитивно решили Биркоф и Фринк 1948. године, као и сложенији проблем представљања алгебарске мреже помоћу мреже конгруенција неке алгебре, који су решили Грецер и Шмит 1963. године, такође позитивно. Ови проблеми су сродни са проблемом представљања алгебарске мреже помоћу мреже слабих конгруенција, будући да мрежа слабих конгруенција алгебре у себи садржи мрежу конгруенција, као и подмрежу изоморфну мрежи подалгебри исте алгебре. Још ближи предмету ове дисертације је проблем такозваног симултаног представљања, где се две или више задатих мрежа представљају различитим мрежама релација, повезаних са једном истом алгебром. У вези са овим, наведени су неки резултати Лампеа, од којих је најзначајнија теорема по којој се две алгебарске мреже могу представити мрежом подалгебри и мрежом конгруенција једне исте алгебре. Дефинисан је и проблем репрезентације алгебарске мреже мрежом слабих конгруенција неке алгебре, специфичан по томе што је одређен не само избором мреже, већ и избором елемента у њој који треба да буде представљен дијагоналном релацијом. Наведени су и неки познати услови које мора задовољавати тај елемент да би био „Делта-подесан“, тј. представљив дијагоналном релацијом, као и један довољан услов, а такође и неки потребни услови да би мрежа била представљива мрежом слабих конгруенција алгебре која припада неким задатим класама алгебри. Најзад, наведен је и проблем тзв. „конкретног представљања“, као и једно решење истог. Ово поглавље садржи опис и анализу до сада познатих резултата на које се надовезују оригинални резултати докторске дисертације који су наведени у другом и трећем поглављу.

У другом поглављу наведени су неки нови услови које мора задовољити кодистрибутиван елемент у алгебарској мрежи да би био представљив дијагоналном релацијом у неком представљању те мреже мрежом слабих конгруенција. При томе се полази од познатих неопходних

услова, наведених у радовима Б. Шешеље, Г. Војводића, М. Плошчице и А. Тепавчевић, од којих се два баве односима класа на које посматрани кодистрибутивни елемент дели мрежу. Један од тих услова, који повезује класу којој припада тај кодистрибутивни елемент и класу којој припада елемент непосредно испод њега, уопштен је помоћу леме, по којој су одређени идеали у представљивој мрежи представљиви, због чега се и на њих може применити познати неопходан услов, који у односу на полазну мрежу и задати кодистрибутивни елемент у њој даје један нов неопходан услов, који представља уопштење полазног, и дефинише извештан однос између класа узастопних елемената, мањих или једнаких изабраном кодистрибутивном елементу, при чему већи од њих не мора више бити једнак задатом кодистрибутивном елементу. Примером је доказано да је ово уопштење право, тј. да постоји случај када новодобијени услов није задовољен, иако је задовољен полазни. И овај услов је даље уопштен, тако што је пронађена веза између класа које су репрезентоване елементима из неког сегмента оивиченог елементима мањим или једнаким од задатог кодистрибутивног елемента. Ова веза следи из одговарајуће везе која постоји у самој мрежи слабе конгруенције, а која је овде доказана. Наведен је и пример мреже и кодистрибутивног елемента у њој, који задовољава све неопходне услове осим овог последњег, што доказује његову независност у односу на све претходне. Полазећи од другог познатог услова, који дефинише одређени однос између две класе на које задати кодистрибутивни елемент дели мрежу, а које су представљене двама узастопним елементима мањим или једнаким од задатог кодистрибутивног елемента, доказана су два уопштења – прво само појачава везу између поменуте две класе, док друго уопштење проширује тај однос на било које две класе представљене двама упоредивим, али не нужно узастопним елементима мањим или једнаким од задатог кодистрибутивног елемента. Ово уопштење следи, као и првобитни критеријум, из одговарајуће особине мреже слабих конгруенција, која је доказана сличним методама, које је користио М. Плошчица да докаже мање општу особину из које следи првобитни критеријум. Наведен је и пример мреже који доказује неопходност овог новог критеријума, јер се само на основу њега може доказати непредстављивост те мреже, која се не види на основу досадашњих критеријума. После свих уопштења, наведен је нови списак критеријума, где су досад познати услови замењени својим уопштењима. Доказано је и да су сви ти услови међусобно независни. Овај списак критеријума побољшава досадашње резултате и може помоћи у решавању проблема репрезентације којим се дисертација бави.

У првом делу трећег поглавља уводи се нови правац у истраживању проблема представљивости алгебарске мреже помоћу мреже слабих конгруенција. Доказује се, наиме, да у неким случајевима представљивост мреже следи из представљивости неке друге, с њом повезане мреже, или из представљивости више других мрежа. Наводе се довољни услови да би идеал, односно филтер, односно интервал представљиве мреже био представљив. Примерима се доказује да у општем случају представљивост идеала и филтера не следи из представљивости полазне мреже. При томе користимо неопходне услове за представљивост разматране у другом поглављу. Представљено је и више случајева, када је подуређење задате представљиве мреже представљиво. Дскази су изведени конструкцијама тражених представљања, које се надовезују на било која представљања полазних мрежа. Наведени су и одређени услови да би ова подуређења представљала и подалгебре. Наведен је и један негативан резултат, када подмрежа задате представљиве мреже није представљива, иако та подмрежа чува структуру класа, на које елемент представљен дијагоналном дели мрежу. Разматрана је и представљивост хомоморфне слике представљиве мреже, при чему се за дијагонални елемент узима слика елемента који је у полазној мрежи био представљен дијагоналом. Доказано је да, у општем случају, представљивост хомоморфне слике не следи из представљивости полазне мреже, јер хомоморфна слика елемента који представља дијагоналу не мора испуњавати ниједан од неопходних услова, разматраних у другом поглављу. Исто важи и за нека карактеристична прсликавања мреже у њу саму, као што су отворења и затворења. Наведена су и два једноставна случаја, када је отворење, односно затворење представљиве мреже представљиво. Полазећи од произвољног скупа представљивих мрежа, доказано је да је њихов директан производ, мало проширен, такође представљив, при чему је, природно, дијагоналном представљен елемент састављен од елемената које представљају дијагоналу у полазним мрежама. Дсказана је и представљивост мреже која је директан производ једне представљиве мреже, нешто проширене, и произвољне алгебарске мреже. Овај резултат представља уопштење једног познатог резултата, наведеног у првом поглављу, који даје довољан услов представљивости. У другом делу трећег поглавља разматра се представљивост неких посебних мрежа. Доказано је да сваки атомарни ланац представљив, и да под одређеним условом има чак два нетривијална представљања, док

проста мрежа има само тривијално представљање – у коме дијагонална релација одговара најмањем елементу у мрежи. Такође је доказано да је директан производ два коначна ланца нетривијално представљив, као и свака атомарна, а самим тим и свака коначна Булова мрежа кардиналности веће од један.

#### **VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ**

Таксативно навести називе радова, где и када су објављени. Прво навести најмање један рад објављен или прихваћен за објављивање у часопису са ISI листе односно са листе министарства надлежног за науку када су у питању друштвено-хуманистичке науке или радове који могу заменити овај услов до 01. јануара 2012. године. У случају радова прихваћених за објављивање, таксативно навести називе радова, где и када ће бити објављени и приложити потврду о томе.

1. B. Šešelja, V. Stepanović, A. Tepavčević, A note on representation of lattices by weak congruences, прихваћен за штампу у часопису Algebra Universalis, биће објављен на интернету 2012, M23
2. V. Stepanović, A. Tepavčević, On Delta-suitable elements in algebraic lattices, прихваћен за штампу у часопису Filomat, биће објављен 2012, M23
3. V. Stepanović, The weak congruence representability of sublattices and suborders of representable lattices, прихваћен за штампу у часопису Novi Sad Journal of Mathematics, биће објављен 2012, M52.

#### **VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА**

У овом раду уопштени су неки познати резултати у вези са неопходним условима представљивости алгебарске мреже мрежом слабих конгруенција, доказани су и неки сасвим нови специјални случајеви поменуте представљивости (довољни услови), а развијена је и нова методологија истраживања овог проблема, која нам омогућава да, полазећи од мрежа за које знамо да су представљиве – јер нам је нпр. позната нека њихова репрезентација, добијемо неке нове, такође представљиве мреже, а од ових опет неке треће представљиве мреже.

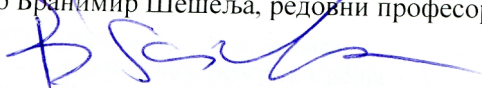
Најважнији резултати другог поглавља су уопштења два позната критеријума која мора задовољавати кодистрибутивни елемент у мрежи који је представљив дијагоном у неком представљану те мреже мрежом слабих конгруенција. Прво уопштење је значајно јер открива по први пут да извесна повезаност мора постојати и између више од двеју класа еквиваленције мреже, дефинисаних посматраним кодистрибутивним елементом. Друго уопштење је значајно јер открива повезаност која постоји између две класе поменуте еквиваленције, које нису неопходно представљене узастопним елементима, што је до сада био случај.

Најважније резултате првог дела трећег поглавља представљају многобројни примери тзв. изведене представљивости, представљивости која следи из представљивости неке друге мреже или скупа других мрежа. Значајно је разматрање представљивости филтера, идеала и конвексне мреже представљиве мреже, као и доказ представљивости неких подуређења и подмрежа представљиве мреже, доказ представљивости проширеног директног производа представљивих мрежа, као и директног производа једне представљиве, нешто проширене мреже, и једне произвољне алгебарске мреже. Најважније резултате другог дела трећег поглавља представљају докази представљивости појединих специјалних случајева мрежа: атомарног ланца, атомарне Булове мреже и друге.

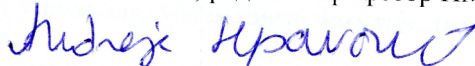
<p><b>VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА</b>          Експлицитно навести позитивну или негативну оцену начина приказа и тумачења резултата истраживања.</p> <p>Комисија позитивно оцењује начин приказа и тумачење резултата истраживања у овој докторској дисертацији. Резултати су приказани јасно, стандардним методама (лема, тврђење, теорема), сви оригинални резултати су и доказани. Дат је и изванредан број примера који илуструју резултате. Резултати су упоређени са претходним резултатима других аутора, систематизовани и стављени у контекст савремених истраживања из ове области.</p>
<p><b>IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b>          Експлицитно навести да ли дисертација јесте или није написана у складу са наведеним образложењем, као и да ли она садржи или не садржи све битне елементе. Дати јасне, прецизне и концизне одговоре на 3. и 4. питање:</p>
<p>1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме  <b>Дисертација је написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме.</b></p>
<p>2. Да ли дисертација садржи све битне елементе  <b>Дисертација садржи све битне елементе.</b></p>
<p>3. По чему је дисертација оригиналан допринос науци  <b>Дисертација представља оригинални допринос науци по томе што представља оригинални наставак истраживања у области која је актуелна у свету и даје значајан напредак у решавању проблема репрезентације алгебарских мрежа мрежама слабих конгруенција. У дисертацији се уопштавају познати резултати. Доказано је неколико нових и значајних тврђења и теорема. Уведен је и један нови правац у истраживању ове области.</b></p>
<p>4. Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања  <b>Дисертација нема недостатака.</b></p>
<p><b>X ПРЕДЛОГ:</b>          На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже:  <b>да се докторска дисертација прихвати, а кандидату одобри одбрана.</b></p>

НАВЕСТИ ИМЕ И ЗВАЊЕ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ  
 ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

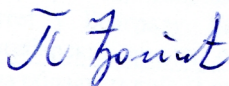
др Бранимир Шешеља, редовни професор ПМФ у Новом Саду – председник



др Андреја Тепавчевић, редовни професор ПМФ у Новом Саду – ментор



др Петар Ђапић, доцент ПМФ у Новом Саду – члан.



др Мирослав Ђирић, редовни професор ПМФ у Нишу – члан



Нови Сад, 19. март 2012.

НАПОМЕНА: Члан комисије који не жели да потпише извештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије, дужан је да унесе у извештај образложење, односно разлоге због којих не жели да потпише извештај.