UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Vanja Stepanović

Problem reprezentacije mreže slabih kongruencija

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2012.

Ovaj rad posvećujem Željku i Nataši

Predgovor

Mreža slabih kongruencija algebre o strukturi algebre govori više nego mnoge druge mreže povezane s njom, kao što su, na primer, mreža podalgebri i mreža kongruencija, koje se, zapravo, sadrže u njoj. Takođe, mreža slabih kongruencija sadrži i mrežu kongruencija svake podalgebre polazne algebre.

Problem predstavljanja mreže mrežom slabih kongruencija nadovezuje se na poznate probleme reprezentacije, kao što su problem reprezentacije zadate algebarske mreže mrežom podalgebri ili mrežom kongruencija neke algebre. Kao mreže podalgebri i kongruencija, tako i mreža slabih kongruencija predstavlja jednu algebarsku mrežu. Zato u formulaciji problema reprezentacije zadate mreže mrežom slabih kongruencija neke algebre polazimo od proizvoljne algebarske mreže. U slučaju da svaki element mreže može biti predstavljen dijagonalnom relacijom na nosaču algebre, problem je trivijalno rešiv, tj. svodi se na rešeni problem predstavljanja algebarske mreže mrežom kongruencija. Zato ćemo, osim algebarske mreže, zadati i jedan element iz nje, koji će biti predstavljen dijagonalnom relacijom. Time smo odredili i mrežu kongruencija i mrežu podalgebri tražene algebre, kao i mrežu kongruencija svih podalgebri tražene algebre; štaviše, zadali smo i sve incidencije između kongruencija različitih podalgebri tražene algebre. Kako je broj ulaznih podataka ovde mnogo veći nego kod sličnih problema reprezentacije, zadatak predstavljanja mreže i elementa u njoj mrežom slabih kongruencija neke algebre i dijagonalnom relacijom na njoj višestruko je složeniji. Primera radi, problem reprezentacije algebarske mreže mrežom podalgebri neke algebre rešen je još daleke 1948. godine. Nešto složeniji problem predstavljanja zadate algebarske mreže mrežom kongruencija rešen je 1963. Ove rezultate uopštio je Lampe 1972. godine, dokazavši da je za dve date algebarske mreže, moguće naći algebru čije su mreže podalgebri i kongruencija izomorfne zadatim mrežama; štaviše, ta algebra može biti izabrana tako da je i njena grupa automorfizama izomorfna nekoj unapred zadatoj grupi. Time je dokazano da su ova tri objekta nezavisna: mreža kongruencija, mreža podalgebri i grupa automorfizama algebre.

U mnogim slučajevima moguće je dokazati da ne postoji algebra koja bi predstavljala zadatu mrežu svojom mrežom slabih kongruencija. Ti slučajevi povezani su sa nekim osobinama dijagonalnog elementa. Zbog toga problem reprezentacije u opštem slučaju nije rešiv. Istraživanja se vode u tri smera: s jedne strane, tražimo specijalne klase mreža za koje bi se dokazalo da su netrivijalno predstavljive mrežom slabih kongruencija neke algebre; s druge strane, tražimo neke neophodne uslove da bi dati element u zadatoj mreži bio predstavljiv dijagonalnom relacijom neke algebre čija je mreža slabe kongruencija izomorfna datoj mreži; najzad, pomenuta dva problema možemo rešavati i ako ograničimo spektar "dozvoljenih" algebri, tj. onih algebri čijim mrežama slabih kongruencija možemo predstaviti zadatu mrežu. Krajnji cilj istraživanja je, svakako, pronalaženje ne samo potrebnih uslova, i ne samo dovoljnih uslova koje moraju ispuniti zadata mreža i njen izabrani element, već uslova koji će u isto vreme biti i potrebni i dovoljni uslovi predstavljivosti zadate mreže i elementa i njoj mrežom slabih kongruencija neke algebre i dijagonalnom relacijom na nosaču te algebre, pri čemu algebra može biti proizvoljna, ili pripadati nekoj unapred zadatoj klasi.

U radu su predstavljeni postojeći rezultati u vezi sa predstavljivošću algebarske mreže mrežama relacija povezanih sa algebrom. Navedeni su i neki novi rezultati u vezi sa predstavljivošću pomoću mreže slabih kongruencija. Uveden je i jedan novi pravac istraživanja, u kome se predstavljivost nekih mreža izvodi iz predstavljivosti drugih mreža. Materijal je organizovan u tri poglavlja.

U prvom poglavlju razmatraju se razne relacije saglasne sa operacijama algebre, kao i mreže koje oni formiraju. Predstavljeni su postojeći rezultati u vezi sa predstavljivošću algebarske mreže nekom od tih mreža. Problem reprezentacije zadate algebarske mreže mrežom slabih kongruencija ovde je precizno formulisan. Naveden je i jedan poznati specijalan slučaj mreže za koju je problem predstavljivosti pozitivno rešen. Predstavljeni su i neki poznati uslovi koje mora zadovoljavati izabrani element u mreži da bi mogao biti predstavljen dijagonalnom relacijom, kao i neki specijalni dodatni uslovi koje mora zadovoljiti taj izabrani element, ako se ograničimo na neke klase algebri.

Polazeći od poznatih uslova koje zadovoljava element koji može biti predstavljen dijagonalom u mreži slabih kongruencija, a koji su nabrojani u prvom poglavlju, kao i razmatranjem osobina dijagonalnog elementa u mreži slabih kongruencija, u drugom poglavlju dolazimo do još nekih uslova koje mora zadovoljiti taj element, koji predstavljaju uopštenje dosadašnjih uslova. Rezultati izloženi u ovom poglavlju su originalni.

U trećem poglavlju uvodi se novi pravac istraživanja problema predstavljivosti. Naime, predstavljivost nekih mreža, odnosno podesnost nekih elemenata u mreži da budu predstavljeni dijagonalnom relacijom u mreži slabih kongruencija, može se u nekih slučajevima izvesti iz predstavljivosti nekih drugih mreža, odnosno podesnosti nekih elemenata u njima. Pitamo se kada će ideal, filter, konveksna ili neka druga podmreža netrivijalno predstavljive mreže biti predstavljiva; takođe, kada će podurеđenje predstavljive mreže koje i samo formira mrežu biti predstavljivo; bavimo se i pitanjem kada je homomorfna slika, otvorenje ili zatvorenje predstavljive mreže biti predstavljiva, i da li je direktan proizvod predstavljivih mreža predstavljiv, kao i direktan proizvod predstavljive i proizvoljne algebarske mreže. Svi dokazani slučajevi izvedene predstavljivosti, kao i neki kontraprimeri kojima dolazimo do negativnih odgovora, predstavljaju nove rezultate. Koristeći neke od tih rezultata, ali i nezavisno od njih, u ovom poglavlju razmatram i pitanje (ne)predstavljivosti nekih posebnih mreža. Predstavljene su neke klase mreža za koje smo po prvi put dokazali da su netrivijalno predstavljive, tj. da postoji element različit od nule koji može predstavljati dijagonalu u predstavljanju mreže mrežom slabih kongruencija neke algebre; među njima su i sve kompletne atomarne Bulove algebre.

Kao što priliči na kraju perioda koji je prethodio izradi i završetku ovog rada, želim da se setim svih onih koji su na razne načine pomogli da ovaj posao bude započet, donese rezultate i da ti rezultati budu uobličeni u doktorsku disertaciju. Zahvaljujem posebno mentorki Andreji Tepavčević za pokazanu dobrotu, predusretljivost i veliku pomoć u upućivanju u problem reprezentacije mreže pomoću mreže slabih kongruencija, u literaturu koja se bavi ovom oblašću, kao i u otvorene probleme. Zahvalna sam joj, kao i Branimiru Šešelji, i za saradnju i angažovanje u otkrivanju i objavljivanju novih rezultata. Zahvaljujem i ostalim članovima komisije, Petru Đapiću, što je naročito detaljno pregledao rad, ukazao na greške i dao sugestije koje su učinile ovaj rad kvalitetnijim i pristupačnijim, kao i Miroslavu Ćiruću, koji je pažljivo pregledao nove rezultate, i dao korisne primedbe. Sećam se i svih kolega na poslu i svih vernih prijatelja, koji su pokazali interesovanje za posao kojim se bavim. Zahvalna sam za svaku pomoć, savet i ohrabrenje. Zahvaljujem Bogu, od koga dolazi svaki dobri dar i svaka vredna misao, za priliku da se bavim ovom zanimljivom temom, i za sve dobre ideje koje su ugrađene u ovaj rad.

Novi Sad, 30. 01. 2012. Vanja Stepanović

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

1.1 Razvoj problema povezanih sa relacijama slabih kongruencija

Slabe kongruencije predstavljaju poseban slučaj tzv. **saglasnih relacija**. Ovaj pojam definišu 1988. godine Gradimir Vojvodić i Branimir Šešelja, nazivajući slabim kongruencijama neke algebre relacije na nosaču algebre koje su simetrične, tranzitivne, saglasne sa svim operacijama te algebre i uz to **slabo refleksivne**, što znači da je svaka konstanta te algebre u relaciji sa sobom, [71]. Andreja Tepavčević i Branimir Šešelja 1990. nastavljaju istraživanje slabih kongruencija, navodeći pri tom unekoliko jednostavniju definiciju slabih kongruencija, ekvivalentnu prethodnoj; naime, saglasnost relacije ρ sa konstantnom operacijom c može biti određena uslovom $c\rho c$, pa možemo izostaviti uslov slabe refleksivnosti, podudaran sa zahtevom da je relacija saglasna sa svakom konstantom, jer je ovaj uslov obuhvaćen traženom saglasnošću relacije sa svim operacijama algebre, [58]. Zajedno sa Ivanom Chajdom, Šešelja i Tepavčević istraživali su, između ostalog, i osobine varijeteta čije algebre imaju modularne mreže slabih kongruencija, kao i problem racionalizacije predstavljanja zadate algebarske mreže mrežom slabih kongruencija neke algebre, gde primenjuju metode koje su B. Jónsson i R. McKenzie razvili u vezi sa starijim problemom predstavljanja algebarske mreže mrežom kongruencija - vidi [11] and [13].

Polazeći od mreže slabih kongruencija, Gradimir Vojvodić 1992. godine definiše delimičnu algebru slabih kongruencija, proširujući skup operacija u mreži slabih kongruencija, tako da je, između ostalih, i slaganje relacija jedna delimična operacija te delimične algebre, [78]. Istraživanjem ove delimične algebre, kao i njenog odnosa sa mrežom slabih kongruencija, bavila se, pored

Vojvodića, i Rozálija Madarász-Silágyi, koja je dala značajne rezultate u vezi sa ovim, [43].

Jedno rešenje problema tzv. konkretnog predstavljanja daje Miroslav Ploščica 1994. godine, [49]. Andreja Tepavčević 1997. godine rešava problem predstavljanja algebarske mreže mrežom slabih kongruencija algebre u jednom specijalnom slučaju, [74].

Vera Lazarević i Andreja Tepavčević 2001. godine definišu jednu relaciju poretka na skupu slabih kongruencija algebre, koja se razlikuje od inkluzije. Neke osobine algebri se mogu videti na mreži slabih kongruencija, određenoj pomoću ovog novog poretka - vidi [42] i [41].

Mrežama slabih kongruencija grupa i primenama istih bavili su se Gábor Czédli, Branimir Šešelja, Andreja Tepavčević i Marcel Erné. Doprinos rešavanju problema u vezi sa mrežama slabih kongruencija dali su i Andrzej Walendziak i Günther Eigenthaler, [21] i [24].

1.2 Uvodni pojmovi i tvrđenja

1.2.1 Posebne podmreže

Sa $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ i sl. obeležavaćemo mreže sa nosačima L, M... Ako posmatramo mrežu kao poset, ona je **ograničena** ako ima najveći i najmanji element, tj. ograničena je ona mreža čiji nosač ima supremum i infimum.

Osobina mreže da svaka dvočlani podskup nosača ima supremum i infimum u mreži može se indukcijom proširiti na svaki konačan, ali ne i na bilo koji podskup nosača. Mreža $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ je **kompletna**, ako svaki podskup od L ima supremum i infimum u $\mathcal{L}$.

Ukoliko radimo sa kompletnom mrežom $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, infimum i supremum proizvoljnog podskupa X skupa L označavaćemo sa $infX$ i $supX$, kao i sa $\bigwedge X$ i $\bigvee X$, što je prirodno s obzirom na to da su u slučaju kada je $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, infimum i supremum upravo jednaki $x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n$ i $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n$.

Kompletna mreža ima najveći element, koji je supremum čitavog nosača L, a takođe i najmanji, koji je infimum od L u njoj. Najveći element u mreži obeležavamo sa **1**, a najmanji sa **0**.

Atom u mreži je element $x \neq 0$, takav da ne postoji nijedno y, za koje bi važilo $0 < y < x$. Mreža je **atomarna**, ako je svaki nenulti element u njoj iznad nekog atoma (tj. veći od njega ili jednak njemu).

Podmreža mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ je njena podalgebra, tj. skup M zatvoren za operacije u mreži $\mathcal{L}$, zajedno sa operacijama koje su restrikcije operacija $\vee$ i $\wedge$ na skup M. Te restrikcije ćemo, jednostavnosti radi, obeležavati istim oznakama $\vee$ i $\wedge$, tako da ćemo podmrežu obeležavati sa $\mathcal{M} = (\mathbf{M}, \vee, \wedge)$.

Ukoliko je $\mathcal{L}$ kompletna mreža, skup M koji je zatvoren za proizvoljne infimume i supremume, zajedno sa operacijama koje su restrikcije operacija u mreži $\mathcal{L}$, čini podmrežu od $\mathcal{L}$ koju nazivamo **kompletna podmreža** od $\mathcal{L}$. Takva podmreža $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ je očigledno kompletna i kao samostalna mreža.

Neka je $a \in L$. Uočimo skupove $\{x \in L \mid x \leqslant a\}$ i $\{x \in L \mid a \leqslant x\}$. Oni su zatvoreni za operacije u $\mathcal{L}$. Obeležimo te skupove, kao i odgovarajuće podmreže od $\mathcal{L}$ sa $\downarrow a$ i $\uparrow a$. Ukoliko je $\mathcal{L}$ kompletna mreža, skupovi $\downarrow a$ i $\uparrow a$ su zatvoreni i za infimume i supremume u $\mathcal{L}$ proizvoljnih podskupova, tako da predstavljaju kompletne podmreže mreže $\mathcal{L}$. Ove podmreže predstavljaju posebne slučajeve tzv. **ideala** i **filtera**.

Ideal mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ je skup $I \subseteq L$ koji zadovoljava uslove:
(i) Ako $x \in I$ i $y \leqslant x$, tada $y \in I$;
(ii) I je usmeren skup, tj. $(\forall x, y \in I)(\exists z)(x \leqslant z \text{ i } y \leqslant z)$.

Filter mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ je skup $F \subseteq L$ koji zadovoljava uslove:
(i) Ako $x \in F$ i $y \geqslant x$, tada $y \in F$;
(ii) $(\forall x, y \in F)(\exists z)(x \geqslant z \text{ i } y \geqslant z)$.

Iz definicije ideala i filtera zaključujemo da su u pitanju dualni pojmovi. U pitanju su specijalni slučajevi njenih podmreža. Podmreža $\mathcal{I} = (I, \vee, \wedge)$ je ideal mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, ako i samo ako važi: $x \in I \Rightarrow \downarrow x \subseteq I$. Podmreža $\mathcal{F} = (F, \vee, \wedge)$ je filter mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, ako i samo ako važi: $x \in F \Rightarrow \uparrow x \subseteq F$.

Pod idealom, odnosno filterom mreže $\mathcal{L}$ podrazumevaćemo i skupove i odgovarajuće mreže, koje su podmreže od $\mathcal{L}$.

Kažemo da je filter, odnosno ideal u mreži **glavni**, ukoliko je oblika $\uparrow a$, odnosno $\downarrow a$, za bilo koje $a \in L$.

Zatvoreni intervali u mreži, tj. skupovi oblika $[a, b] = \{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ za neke $a, b \in L$, zatvoreni su za operacije u $\mathcal{L}$. Zato ćemo sa $[a, b]$ obeležavati i odgovarajuću podmrežu od $\mathcal{L}$. Ukoliko je $\mathcal{L}$ kompletna, tada je $[a, b]$ njena kompletna podmreža. Zatvoreni interval je specijalan slučaj tzv. **konveksne** podmreže, tj. podmreže za koju važi: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{M} \Rightarrow [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subseteq \mathbf{M}$.

1.2.2 Posebni elementi u mreži

Element a mreže $\mathcal{L}$ je **distributivan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$\mathbf{a} \vee (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = (\mathbf{a} \vee \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{y}).$$

Pojam distributivnosti uveo je O. Ore 1935. godine. Dualno ovom definišemo kodistributivnost: za element a mreže $\mathcal{L}$ reći ćemo da je **kodistributivan**, ako je distributivan u dualnoj mreži, tj. ako zadovoljava identitet:

$$a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y).$$

G. Gratzer 1959. godine uvodi u teoriju mreža pojam standardnog elementa. Element a mreže $\mathcal{L}$ je **standardan** ako za sve $x, y \in L$ važi:

$$x \wedge (a \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge y).$$

Element u mreži je **kostandardan** ako je standardan u dualnoj mreži. Element a mreže je **modularan**, ako za sve $x, y \in L$ važi implikacija:

$$a \leqslant y \Rightarrow a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge y.$$

$a \in L$ je **skrativ** ako jednakosti $a \vee x = a \vee y$ i $a \wedge x = a \wedge y$ povlače $x = y$ za sve $x, y \in L$.

Svaki kodistributivan element a u mreži definiše jednu relaciju na nosaču mreže:

$$x \rho_a y \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge y.$$

Ova relacija je refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. predstavlja relaciju ekvivalencije, zbog čega je skup L tom relacijom podeljen u klase. Obeležimo klasu elementa x sa L_x. Sada dobijemo:

$$L_x = \{y \in L \mid a \wedge y = a \wedge x\} = \{y \in L \mid a \wedge y = a \wedge (a \wedge x)\} = L_{x \wedge a}.$$

Svaka, dakle, klasa L_x može se videti kao klasa nekog elementa b iz $\downarrow a$. Za svako $x \in L_b$, važi $a \wedge x = a \wedge b = b$, pa imamo da je $b \leqslant x$. Stoga je $b \in \downarrow a$ najmanji element u svojoj klasi, a nosač L možemo predstaviti kao disjunktnu uniju klasa elemenata iz $\downarrow a$:

$L = \bigcup\{L_b \mid b \in\downarrow \mathrm{a}\}$.

Jednostavno je proveriti da su ove klase zatvorene za operacije mreže, tako da čine podmreže polazne mreže. One imaju najmanji element, ali ne moraju imati najveći. Najveći element u klasi elementa x ako postoji obeležavaćemo sa $\overline{x}$. U tom slučaju je $L_x = [a \wedge x, \overline{x}]$.

Element $a \in L$ se naziva **neutralnim** ako je skrativ, distributivan i kodistributivan. Ova definicija je ekvivalentna definiciji G. Birkhoff-a, koji je uveo ovaj pojam 1940. godine. Prema toj definiciji, element a mreže $\mathcal{L}$ je neutralan, ako i samo ako je za sve elemente x i y te mreže zadovoljena jednakost:

$$(a \vee x) \wedge (a \vee y) \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y) \vee (x \wedge y).$$

Neka je sada $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ ograničena mreža, tj. mreža koja ima najveći i najmanji element (1 i 0). **Centar** mreže je podskup od L koji sadrži sve elemente koji su neutralni i imaju komplement. Elementi 0 i 1 su uvek u centru. Ako je $a \neq 0$ u centru, onda se mreža može predstaviti kao direktan proizvod dve netrivijalne mreže:

Tvrđenje 1.1 *Element a je u centru ograničene mreže $\mathcal{L}$ ako i samo ako je $\mathcal{L} \cong \downarrow a \times \uparrow a$. Preslikavanje $f : L \to \downarrow a \times \uparrow a$ određeno sa $f(x) = (a \wedge x, a \vee x)$ je izomorfizam ako i samo ako je a u centru mreže.*

Tvrđenje 1.2 *Svaki element Bulove mreže nalazi se u njenom centru.*

1.2.3 Kodistributivan element u algebarskoj mreži

Kod različitih mreža koje se pojavljuju u vezi sa algebrama i relacijama značajni su pojmovi algebarske mreže i kompaktnog elementa.

U mreži $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ element c naziva se **kompaktnim** ako zadovoljava jedan od sledećih ekvivalentnih uslova:

(i) za svaki podskup D od L, koji poseduje supremum i usmeren je, tj. $(\forall d, e \in D)(\exists f \in D)(f \geqslant d \wedge f \geqslant e)$, ako je $c \leqslant supD$, tada $c \leqslant d$ za neko $d \in D$;

(ii) za svaki ideal I mreže $\mathcal{L}$, ako I ima supremum i $c \leqslant supI$, tada $c \in I$.

Mreža je **algebarska** ako je kompletna i svaki njen element je supremum nekog skupa kompaktnih elemenata mreže.

Primer algebarske mreže je bilo koja konačna mreža, takođe mreža podskupova bilo kog skupa, zatim mreže poduniverzuma i kongruencija bilo koje algebre i mnoge druge. Takođe, svaka kompletna i atomarna Bulova mreža je algebarska, na osnovu sledeće teoreme:

Teorema 1.3 ([14])*Kompletna atomarna Bulova mreža je izomorfna Bulovoj algebri skupova, tj. mreži koju čine svi podskupovi nekog skupa, uređeni inkluzijom.*

Svaki kodistributivan element a u algebarskoj mreži je ujedno i **beskonačno kodistributivan**, tj. za svaki podskup $\{x_i \mid i \in I\}$ nosača mreže važi:

$$a \wedge \bigvee\{x_i \mid i \in I\} = \bigvee\{a \wedge x_i \mid i \in I\}.$$

Iz ove činjenice izvodimo sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 1.4 ([67]) *Ako je a kodistributivan element algebarske mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i $b \in \downarrow a$, skup $\{x \in L \mid a \wedge x = b\}$ ima najveći element.*

Videli smo da kodistributivan element u proizvoljnoj mreži $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ razbija mrežu, tj. njen nosač na uniju disjunktnih podskupova oblika $L_b = \{x \in L \mid a \wedge x = b\}$ za neko $b \in L$, koji su klase ekvivalencije $x \rho_a y \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$. Svaka klasa ima najmanji element. Ukoliko je mreža $\mathcal{L}$ algebarska, tada na osnovu prethodnog tvrđenja svaka klasa ima i najveći element (obeležen sa $\overline{x}$, gde je x bilo koji element u klasi), tako da je mreža kodistributivnim elementom a razbijena na uniju disjunktnih zatvorenih intervala:

$$L = \bigcup\{[b, \overline{b}] \mid b \in \downarrow a\}.$$

Takođe, svaki kodistributivni element a u algebarskoj mreži određuje i skup

$$M_a = \{\overline{b} \mid b \in \downarrow a\}.$$

Elementi ovog skupa zadovoljavaju uslove:

(i) $b \leqslant c \leqslant a \Rightarrow \overline{b} \leqslant \overline{c}$;
(ii) $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x \wedge y}$, za svaka dva $x, y \in L$.

Naime, ako je $b \leqslant c \leqslant a$, dobijemo: $a \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) = (a \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{c}) = b \vee c = c$, odakle je $\overline{b} \vee \overline{c} \leqslant \overline{c}$, pa važi $\overline{b} \leqslant \overline{c}$, tako da važi (i). Na osnovu (i) sad važi $\overline{x} \geqslant \overline{x \wedge y}$ i $\overline{y} \geqslant \overline{x \wedge y}$, odakle $\overline{x} \wedge \overline{y} \geqslant \overline{x \wedge y}$; s druge strane $a \wedge \overline{x} \wedge \overline{y} = a \wedge \overline{x} \wedge a \wedge \overline{y} = x \wedge y$, pa važi i obrnuta nejednakost $\overline{x} \wedge \overline{y} \leqslant \overline{x \wedge y}$.

1.2.4 Mreže relacija na skupu

Svaki podskup ρ od A^2 čini jednu **relaciju** skupa A. Umesto $(x, y) \in \rho$ često pišemo $\mathbf{x\rho y}$. Najviše izučavane relacije zadovoljavaju neke od osobina:

-refleksivnost (R): $x\rho x$ za svaki element $x \in A$;
-simetričnost (S): $x\rho y$ povlači $y\rho x$ za sve $x, y \in A$;
-antisimetričnost (AS): ako $x\rho y$ i $y\rho x$, onda $x = y$, za sve $x, y \in A$;
-tranzitivnost (T): ako $x\rho y$ i $y\rho z$, onda $x\rho z$, za sve $x, y, z \in A$.

Definisaćemo još tri osobine relacija:

-slaba refleksivnost (SR): $x\rho y$ povlači $x\rho x$ i $y\rho y$, za sve $x, y \in A$;
-dijagonalnost (D): $x\rho y$ povlači $x = y$, za sve $x, y \in A$;
-bijektivnost (B): $(\forall x \in A)(\exists_1 y)x\rho y$ i $(\forall y \in A)(\exists_1 x)x\rho y$.

Relaciju koja zadovoljava (R), (S) i (T) zovemo **ekvivalencija**, dok onu koja zadovoljava (R), (AS) i (T) zovemo **relacija poretka**. Par $(X, \leqslant)$, gde je X skup, a $\leqslant$ relacija poretka na tom skupu zovemo **uređeni skup**, ili **poset**. Relaciju koja zadovoljava (S) i (T) zovemo **slaba ekvivalencija**. Ona je povezana sa relacijom ekvivalencije sledećim jednostavnim stavom:

Tvrđenje 1.5 *Relacija ρ skupa A je slaba ekvivalencija ako i samo ako predstavlja ekvivalenciju na nekom $B \subseteq A$.*

Pojam slabe ekvivalencije u teoriju mreža uveo je O. Boruvka 1946. godine, [3]. Slabu ekvivalenciju on je nazvao **ekvivalencija u skupu**. Mreža tako definisanih ekvivalencija u skupu izomorfna je mreži tzv. **particija u skupu**, tj. mreži svih particija podskupova tog skupa. Ovu mrežu opisala je H. Draškovičová 1970. godine, dokazujući da je ona neprekidna odozgo i semimodularna, [23].

Definišemo **dijagonalnu relaciju** $\mathbf{\Delta}$ u skupu A na sledeći način:

$\mathbf{\Delta = \{(x, x) \mid x \in A\}}$.

Takođe, ako je $B \subset A$:

$\mathbf{\Delta_B = \{(x, x) \mid x \in B\}}$.

Osobina dijagonalnosti povlači svaku od osobina (S), (T) i (AS), ali ne i refleksivnost. Svaka dijagonalna relacija u skupu A je oblika Δ_B za neko $B \subseteq A$; obrnuto, svaka relacija Δ_B za $B \subseteq A$ je dijagonalna. Stoga svaka dijagonalna relacija ρ sa skupom A određuje jedan **anti-lanac**, tj. poset kod koga različiti elementi nisu u relaciji. Postoji uzajamno jednoznačna korespondencija između skupa svih dijagonalnih relacija u skupu A, i skupa $\mathcal{P}(A) = 2^A$ svih podskupova od A, pri čemu se Δ_B slika u B.

Neka je 2^{A^2} skup svih relacija skupa A. Bavićemo se različitim podskupovima od 2^{A^2}, tj. skupovima relacija na zadatom skupu A. Budući da su relacije skupovi, one mogu biti uređene inkluzijom, tj. relacijom "$\subseteq$". Sama relacija "$\subseteq$" na skupu 2^{A^2} predstavlja jednu relaciju poretka, tako da je svako $X \subseteq 2^{A^2}$, zajedno sa inkluzijom, jedan poset, uređen skup. Pod određenim uslovima, ovaj skup će predstavljati algebarsku mrežu.

Neka je $X \in 2^{A^2}$ i $\rho \in X$. Kažemo da je relacija ρ **generisana** u X sa $\tau \subseteq A^2$, ako je ρ najmanji element iz X koji sadrži τ. Takođe kažemo da τ **generiše** ρ i pišemo $\rho = \langle \tau \rangle$. Kažemo da je relacija $\rho \in X$ **konačno generisana** u X ako postoji konačna relacija $\tau \subseteq A^2$ koja generiše ρ.

Ako je element X iz 2^{A^2} zatvoren za preseke, tj. za svako $Y \subseteq X$ važi $\bigcap Y \in X$, i još ako $A^2 \in X$ onda svako $\tau \in 2^{A^2}$ generiše neko $\rho \in X$, jer $\langle \tau \rangle = \bigcap \{\rho \in X \mid \rho \supseteq \tau\}$.

Osobine (R), (S), (T), (A) i (D) su zatvorene za preseke relacija, tj. ako svi elementi skupa $X \subseteq 2^{A^2}$ zadovoljavaju neku (istu) osobinu (R), (S), (T), (A) i (D), tada i $\bigcap X$ zadovoljava tu osobinu. Naravno, ako elementi skupa X zadovoljavaju više osobina sa ovog spiska, onda sve te osobine zadovoljava i $\bigcap X$. Ova osobina je značajna s obzirom na sledeće tvrđenje i posledicu:

Tvrđenje 1.6 *Ako je X podskup partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$ koji je zatvoren za preseke i ima najveći element u odnosu na inkluziju, tada X predstavlja* *algebarsku mrežu u odnosu na inkluziju. Skupovni presek predstavlja infimum u toj mreži, dok je sup*$Y = \bigcap\{B \in X \mid (\forall C \in Y) B \supseteq C\}$*. Kompaktni elementi u* X *su svi elementi oblika* $\bigcap\{B \in X \mid B \supseteq C\}$*, za neki konačan podskup* C *skupa* A*, i samo oni.*

Posledica 1.7 *Ako je* X *iz* 2^{A^2} *zatvoren za preseke i ako postoji najveći element u* X*, tada* X *predstavlja algebarsku mrežu u odnosu na inkluziju. Skupovni presek predstavlja infimum u toj mreži, dok je sup*$Y = \bigcap\{\rho \in X \mid (\forall \tau \in Y)\rho \supseteq \tau\}$*. Kompaktni elementi u* X *su konačno generisane relacije u* X *i samo one.*

Obeležimo sa $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ skup svih refleksivnih, sa $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ skup svih simetričnih, sa $\mathcal{T}(\mathbf{A})$ skup svih tranzitivnih, sa $\mathcal{A}\mathbf{s}(\mathbf{A})$ skup svih antisimetričnih, i sa $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ skup svih dijagonalnih relacija u skupu A. Neka je, dalje, $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ skup svih ekvivalencija u A, $\mathcal{E}\mathbf{w}(\mathbf{A})$ skup svih relacija slabe ekvivalencije, a $\mathcal{P}\mathbf{s}(\mathbf{A})$ skup svih poseta na A. Skupovi $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{S}(A)$ i $\mathcal{T}(A)$ sadrže A^2 i stoga imaju najveći element. Zato i skupovi $\mathcal{E}(A)$ i $\mathcal{E}w(A)$ imaju najveći element A^2. Dijagonalna relacija Δ je najveći element u skupu $\mathcal{D}(A)$. Na osnovu svega toga zaključujemo:

Tvrđenje 1.8 *Skup* $\mathcal{E}(A)$ *svih ekvivalencija, skup* $\mathcal{E}w(A)$ *svih relacija slabe ekvivalencije, i skup* $\mathcal{D}(A)$ *svih dijagonalnih relacija u skupu* A*, predstavljaju algebarske mreže u odnosu na inkluziju.*

Primetimo da je mreža $(\mathcal{D}(A), \subseteq)$ izomorfna sa $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$. Zanimljivo je da Δ istovremeno predstavlja i najveći element u skupu $\mathcal{D}(A)$, i najmanji element u skupu $\mathcal{E}(A)$. Takođe, dokazano je da je Δ jedan neutralan element u skupu $\mathcal{E}w(A)$ ([67]).

Kako skup $\mathcal{A}s(A)$ svih antisimetričnih relacija nema najveći element, ukoliko A ima bar dva elementa, prethodno tvrđenje se ne može primeniti na skup $\mathcal{A}s(A)$, niti na skup $\mathcal{P}s(A)$ svih poseta na A. Pošto je posedovanje najvećeg elementa neophodan uslov da bi mreža bila kompletna, to je taj uslov neophodan i da bi mreža bila algebarska. Tako, ako skup A sadrži bar dva elementa, skup svih poseta na A ne predstavlja algebarsku mrežu; štaviše, skup $\mathcal{P}s(A)$ tada ne predstavlja nikakvu mrežu, jer ne postoji npr. supremum relacija $\rho_{ab} = \{(a, b)\}$ i $\rho_{ba} = \{(b, a)\}$, kad god $a \neq b$.

Neka je $\mathcal{B}(A)$ skup svih bijekcija u skupu A. On nije zatvoren za preseke, štaviše, u skupu $\mathcal{B}(A)$ ne postoji ni infimum, ni supremum dva elementa ρ

i τ, $\rho \neq \tau$. $\mathcal{B}(A)$, dakle, ne predstavlja mrežu; štaviše, $\mathcal{B}(A)$ je totalno neuređen skup. Međutim, $\mathcal{B}(A)$ je zatvoren za operaciju $\circ$ slaganja relacija:

$$\rho \circ \tau = \{(x, y) \in A^2 \mid (\exists z \in A)[(x, z) \in \rho \text{ i } (z, y) \in \tau]\}.$$

Štaviše, ako je ρ^{-1} inverzna relacija relaciji ρ, tj. ako je $\rho^{-1} = \{(x, y) \in A^2 \mid (y, x) \in \rho\}$, tada $(\mathcal{B}(A), \circ, \Delta, ^{-1})$ čini grupu, tj. važi:

$$(\rho \circ \phi) \circ \psi = \rho \circ (\phi \circ \psi);$$
$$\rho \circ \Delta = \Delta \circ \rho = \rho;$$
$$\rho \circ \rho^{-1} = \Delta.$$

1.2.5 Relacije saglasne sa strukturom algebre

Neka je f jedna operacija u skupu A dužine n ($n \in \mathbb{N}_0$), a $\rho \subseteq A^2$ jedna relacija na A. Kažemo da je relacija ρ **saglasna sa operacijom** f, ako važi:

$$(S_f) \ (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) \in \rho \Rightarrow f(x_1, x_2, ..., x_n) \rho f(y_1, y_2, ..., y_n).$$

Ukoliko je f nularna operacija, tj. $f = c$, gde je $c \in A$, tada uslov S_f postaje $c\rho c$, tj. relacija ρ je saglasna sa konstantnom operacijom c u skupu A ako $c\rho c$.

Neka je $\mathcal{A} = (A, H)$ algebra sa nosačem A i skupom H operacija na njoj. Relacija ρ je **saglasna sa strukturom algebre** $\mathcal{A}$, ako važi:

$$(S_{\mathcal{A}}) \ (\forall f \in H)[\rho \text{ zadovoljava } S_f].$$

Primetimo da je relacija ρ saglasna sa algebrom, ako i samo ako ona predstavlja poduniverzum od $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, jer osobina S_f je ekvivalentna sa zatvorenošću ρ kao podskupa od A^2 za operaciju f.

Definišemo neke relacije saglasne sa strukturom algebre $\mathcal{A}$:

Relaciju ekvivalencije u skupu A saglasnu sa strukturom algebre $\mathcal{A}$ zovemo **kongruencija** algebre $\mathcal{A}$.

Relaciju $\rho \subseteq A^2$ koja je refleksivna, simetrična i saglasna sa strukturom algebre $\mathcal{A}$ nazivamo **tolerancija** algebre $\mathcal{A}$. Skup svih tolerancija algebre $\mathcal{A}$ obeležavamo sa $U(\mathcal{A})$.

Relaciju u skupu A koja je refleksivna, antisimetrična, tranzitivna i saglasna sa strukturom algebre $\mathcal{A}$ nazivamo **saglasno uređenje** algebre $\mathcal{A}$.

Relaciju $\rho \subseteq A^2$ koja je refleksivna, tranzitivna i saglasna sa strukturom algebre $\mathcal{A}$ nazivamo **kvaziuređenje** algebre $\mathcal{A}$.

Relaciju $\rho \subseteq A^2$ koja je simetrična, tranzitivna i saglasna sa strukturom algebre $\mathcal{A}$ nazivamo **slaba kongruencija** algebre $\mathcal{A}$. Ovaj pojam uvode Branimir Šešelja i Gradimir Vojvodić 1988. godine (vidi [71]).

Slabu kongruenciju algebre $\mathcal{A}$ možemo odrediti i kao slabu ekvivalenciju u skupu A saglasnu sa strukturom algebre $\mathcal{A}$. Skup svih kongruencija na $\mathcal{A}$ obeležavamo sa **Con**$\mathcal{A}$, dok skup svih slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$ obeležavamo sa $\mathcal{C}$**w**$\mathcal{A}$.

Osobina S_f, a samim tim i osobina $S_{\mathcal{A}}$ je zatvorena za preseke, tj. ako sve relacije iz skupa $X \in 2^{A^2}$ zadovoljavaju $S_{\mathcal{A}}$, onda i $\bigcap X$ zadovoljava tu osobinu. S druge strane, A^2 je refleksivna, simetrična, tranzitivna relacija saglasna sa algebrom $\mathcal{A}$, tako da $A^2 \in Con\mathcal{A}$, $A^2 \in Cw\mathcal{A}$, a takođe, A^2 predstavlja toleranciju algebre $\mathcal{A}$, tako da skupovi $A^2 \in Con\mathcal{A}$, $A^2 \in Cw\mathcal{A}$, kao i skup svih tolerancija algebre $\mathcal{A}$, imaju najveći element. Na osnovu toga možemo zaključiti:

Teorema 1.9 *Skupovi $\mathcal{C}w\mathcal{A}$, $Con\mathcal{A}$ i $U(\mathcal{A})$ predstavljaju algebarske mreže u odnosu na inkluziju. Kompaktni elementi u tim mrežama su oni, i samo oni, koji su konačno generisani.*

Jednostavnosti radi, ove algebarske mreže obeležavaćemo istim simbolima kao njihove nosače, tj. sa $\mathcal{C}$**w**$\mathcal{A}$ obeležićemo mrežu slabih kongruencija, a sa **Con**$\mathcal{A}$ mrežu kongruencija algebre $\mathcal{A}$.

Od značaja za naša istraživanja je sledeća teorema koja povezuje mrežu $Con\mathcal{A}$ sa mrežom $\mathcal{E}(A)$ svih ekvivalencija na nosaču A algebre $\mathcal{A}$:

Teorema 1.10 ([4]) *Mreža $Con\mathcal{A}$ je kompletna podmreža mreže $\mathcal{E}(A)$.*

Videli smo da je mreža dijagonalnih relacija skupa A, $(\mathcal{D}(A), \subseteq)$, izomorfna mreži $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, gde je $\mathcal{P}(A)$ partitivan skup od A. Primetimo da je jedna dijagonalna relacija ρ ujedno i saglasna sa algebrom $\mathcal{A}$, ako i samo ako je ona oblika Δ_B, gde je B jedan poduniverzum algebre $\mathcal{A}$. Postoji, dakle, uzajamno jednoznačna korespondencija između skupa svih podalgebri od

$\mathcal{A}$, $Sub\mathcal{A}$, i skupa svih dijagonalnih operacija saglasnih sa algebrom $\mathcal{A}$. Ta korespondencija je ujedno i izomorfizam odgovarajućih poseta (u odnosu na inkluziju). S druge strane, na osnovu posledice 1.7, skup svih dijagonalnih relacija saglasnih sa algebrom predstavlja jednu algebarsku mrežu u odnosu na inkluziju, jer je određen osobinama (D) i ($S_{\mathcal{A}}$), zatvorenim za preseke. Odatle zaključujemo:

Tvrđenje 1.11 *Poset* $(Sub\mathcal{A}, \subseteq)$ *je algebarska mreža. Kompaktni elementi u njoj su konačno generisane podalgebre, i samo one.*

Mrežu svih podalgebri algebre $\mathcal{A}$ obeležavaćemo sa **Sub**$\mathcal{A}$, kao i skup svih podalgebri te algebre.

Automorfizmom algebre $\mathcal{A} = (A, H)$ zovemo funkciju $f : A \to A$, koja je bijekcija i predstavlja homomorfizam algebre $\mathcal{A}$ u nju samu. Uočimo da tada i f^{-1} predstavlja homomorfizam. Ako ovu funkciju vidimo kao relaciju $\rho_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$, ona predstavlja jednu bijekciju saglasnu sa strukturom algebre. Tako je skup automorfizama $\mathcal{A}ut(\mathcal{A})$ podskup skupa svih bijekcija $\mathcal{B}(A)$ i stoga totalno neuređen, te ne predstavlja mrežu. Međutim, poput skupa $\mathcal{B}(A)$, skup $\mathcal{A}ut(\mathcal{A})$ predstavlja grupu u odnosu na operaciju $\circ$ slaganja relacija.

1.2.6 Mreža slabih kongruencija

Slabe kongruencije algebre $\mathcal{A} = (A, H)$ su, dakle, simetrične i tranzitivne relacije saglasne sa strukturom algebre $\mathcal{A}$, tj. saglasne sa svim operacijama u skupu H, uključujući i nularne operacije - konstante.

Saglasnost sa operacijama dužine nula svodi se na tzv. slabu refleksivnost u odnosu na algebru $\mathcal{A}$. Naime, relacija ρ je saglasna sa konstantom $c \in H$ ako $(c, c) \in \rho$. Za relaciju ρ kažemo da je **slabo refleksivna u odnosu na algebru** $\mathcal{A}$ ako je saglasna sa njenim konstantama, tj. (c, c) za svaku konstantu c iz H.

Skup svih slabih kongruencija $\mathcal{C}w\mathcal{A}$ predstavlja algebarsku mrežu u odnosu na inkluziju. Ova mreža govori o strukturi algebre $\mathcal{A}$ više nego mreža $Sub\mathcal{A}$ svih podalgebri od $\mathcal{A}$ i mreža $Con\mathcal{A}$ svih kongruencija od $\mathcal{A}$ zajedno. Naime, mreža $Con\mathcal{A}$ je kompletna podmreža - filter u mreži $\mathcal{C}w\mathcal{A}$, a jedan ideal u mreži $\mathcal{C}w\mathcal{A}$ je izomorfan sa $Sub\mathcal{A}$.

Dijagonala $\Delta = \{(x,x) \mid x \in A\}$ pripada skupu $\mathcal{C}w\mathcal{A}$, i ima važnu ulogu u mreži slabih kongruencija. Ideal $\downarrow\Delta$ može sadržati samo dijagonale podskupova od A, dakle samo dijagonalne relacije na A, koje još moraju biti i saglasne sa strukturom algebre $\mathcal{A}$. S druge strane, dijagonalne relacije su simetrične i tranzitivne, pa ako su još i saglasne sa strukturom algebre, one predstavljaju slabe kongruencije, koje su podskupovi od Δ. Zato $\rho \in\downarrow\Delta$ ako i samo ako je ρ dijagonalna i saglasna sa strukturom algebre $\mathcal{A}$. No, već smo videli da skup dijagonalnih relacija saglasnih sa strukturom algebre $\mathcal{A}$ čini mrežu u odnosu na inkluziju, izomorfnu sa $Sub\mathcal{A}$, u izomorfizmu π u kojem podalgebri $\mathcal{B} = (B, H|_B)$ odgovara skup $\Delta_B = \{(x,x) \mid x \in B\}$. Ideal $\downarrow\Delta$ je dakle jednak sa $(\{\Delta_B \mid B \text{ je poduniverzum algebre } \mathcal{A}\}, \subseteq)$ i izomorfan mreži $Sub\mathcal{A}$.

Filter $\uparrow\Delta$ sadrži one i samo one slabe kongruencije koje su refleksivne, to jest one saglasne relacije koje zadovoljavaju osobine (R),(S) i (T), a to su upravo kongruencije, tako da je $\uparrow\Delta = Con\mathcal{A}$.

Proizvoljni infimum u mreži $\mathcal{C}w\mathcal{A}$ je jednak skupovnom preseku, dok je $SupX = \langle\bigcup X\rangle$.

Uočimo da je element Δ kodistributivan. Kako je $\mathcal{C}w\mathcal{A}$ algebarska mreža, element Δ je i beskonačno kodistributivan. On razbija skup $\mathcal{C}w\mathcal{A}$ na disjunktnu uniju skupova oblika:

$$\mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B} = \{\rho \in \mathcal{C}w\mathcal{A} \mid \rho \cap \Delta = \Delta_B\},\ B \text{ je poduniverzum od } \mathcal{A}.$$

Uočimo da je $\mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B} = [\Delta_B, B^2]$. Naime, ako $\rho \in [\Delta_B, B^2]$, jasno je da $\rho \cap \Delta = \Delta_B$. Sada neka je $\rho \in \mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B}$. Ako $x\rho y$, onda $y\rho x$, na osnovu simetričnosti, a $x\rho y$ i $y\rho x$ povlači $x\rho x$ i $y\rho y$, na osnovu tranzitivnosti, pa $(x,x),(y,y) \in \rho\cap\Delta$; pošto $\rho \in \mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B}$, dobijemo da $(x,x),(y,y)$ leže u Δ_B, pa $(x,y) \in B^2$. S druge strane, $\rho \in \mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B}$ povlači $\rho \geqslant \Delta_B$, tako da ako $x \in \mathcal{C}w\mathcal{A}_{\Delta_B}$, onda $x \in [\Delta_B, B^2]$. Dakle,

$$\mathcal{C}w\mathcal{A} = \bigcup\{[\Delta_B, B^2] \mid B \text{ je poduniverzum od } \mathcal{A}\}.$$

No, relacije u skupu $[\Delta_B, B^2]$ koje su simetrične, tranzitivne i saglasne sa strukturom algebre $\mathcal{A}$ su upravo kongruencije algebre $\mathcal{B} = (B, H)$. Tako,

$$\mathcal{C}w\mathcal{A} = \bigcup\{Con\mathcal{B} \mid \mathcal{B} < \mathcal{A}\}.$$

Mreža slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$, dakle, sadrži mreže kongruencija svih podalgebri od $\mathcal{A}$ kao svoje kompletne podmreže - intervale. Zato ona u sebi nosi mnogo više informacija o algebri od mreža $Sub\mathcal{A}$ i $Con\mathcal{A}$, pa čak i od mreža kongruencija svih podalgebri od $\mathcal{A}$, zajedno sa mrežom $Sub\mathcal{A}$, jer sadrži i odnose - incidencije - između kongruencija različitih podalgebri od $\mathcal{A}$.

1.3 Reprezentacija mrežom saglasnih relacija

Ako je zadata mreža $\mathcal{L}$, da li je ona izomorfna mreži svih relacija u nekom skupu A, koje zadovoljavaju neke unapred zadate osobine i koje su saglasne sa strukturom neke algebre $\mathcal{A} = (A, H)$? Ukoliko je taj skup relacija zatvoren za preseke i ima najveći element, tada zadata mreža $\mathcal{L}$ mora biti algebarska, da bi ovaj problem reprezentacije mogao biti pozitivno rešen, na osnovu posledice 1.7.

Videli smo da je mreža $Sub\mathcal{A}$ svih podalgebri od $\mathcal{A}$ izomorfna mreži svih dijagonalnih relacija saglasnih sa strukturom algebre $\mathcal{A}$, tako da se problem reprezentacije zadate mreže $\mathcal{L}$ mrežom podalgebri algebre $\mathcal{A}$ takođe može videti kao problem reprezentacije zadate mreže mrežom saglasnih relacija. Mreža $\mathcal{L}$ mora biti algebarska, na osnovu tvrđenja 1.11. Birkhoff i Frink su 1948. godine dokazali da je to i dovoljan uslov da bi mreža $\mathcal{L}$ bila predstavljiva mrežom podalgebri neke algebre:

Teorema 1.12 ([1]) *Algebarska mreža je izomorfna mreži svih podalgebri neke algebre.*

Mreža $Con\mathcal{A}$ svih kongruencija neke algebre $\mathcal{A}$ je mreža svih relacija sa osobinama (R), (S) i (T), koje su saglasne sa strukturom te algebre. Da bi mreža $\mathcal{L}$ bila njoj izomorfna, potrebno je da bude algebarska, na osnovu 1.9. Da je to i dovoljan uslov, dokazali su Grätzer i Schmidt 1963. godine:

Teorema 1.13 ([27]) *Svaka algebarska mreža izomorfna je mreži $Con\mathcal{A}$ svih kongruencija neke algebre.*

U radovima [1] i [27] date su i konstrukcije algebri čije su mreže podalgebri, odnosno kongruencija izomorfne zadatim mrežama.

Problem može biti postavljen i opštije: za određenu klasu algebarskih mreža i specifičnu klasu algebri, možemo sa pitati da li je svaka mreža iz zadate klase predstavljiva nekom mrežom saglasnih relacija algebre iz date klase. Na primer, poznat je problem predstavljanja distributivne mreže mrežom kongruencije neke druge mreže, i on je nedavno negativno rešen ([84]).

1.3.1 Simultane reprezentacije

Možemo li dve ili više zadatih mreža predstaviti mrežama relacija, koje su sve povezane sa jednom istom algebrom? Godine 1972. Lampe je dokazao da je to moguće uraditi pomoću mreže kongruencija i mreže podalgebri:

Teorema 1.14 ([38]) *Ako su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ dve zadate algebarske mreže, takve da $\mathcal{L}_2$ sadrži bar dva elementa, tada postoji algebra $\mathcal{A}$, takva da je $Sub\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_1$, a $Con\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_2$.*

Ovim je praktično dokazano da su mreže kongruencija i podalgebri nezavisne jedna od druge. Videli smo da su automorfizmi bijektivne relacije saglasne sa strukturom algebre. No, kako oni ne čine mrežu u odnosu na inkluziju, već grupu u odnosu na operaciju slaganja relacija, problem njihove nezavisnosti u odnosu na podalgebre ili kongruencije treba postaviti ovako: ako je zadata mreža $\mathcal{L}$ i grupa $\mathcal{G}$, da li postoji algebra $\mathcal{A}$ takva da je njena mreža podalgebri (ili kongruencija) izomorfna sa $\mathcal{L}$, a grupa automorfizama izomorfna sa $\mathcal{G}$. Odgovor je pozitivan u slučaju podalgebri, a i u slučaju kongruencija pod uslovom da je $|L| \geqslant 2$, tj. da mreža $\mathcal{L}$ ima bar dva elementa (vidi [37]). Najzad, Lampe je dokazao i da su sve tri strukture nezavisne:

Teorema 1.15 ([39]) *Ako su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ dve zadate algebarske mreže, takve da $\mathcal{L}_2$ sadrži bar dva elementa, a $\mathcal{G}$ zadata grupa, tada postoji algebra $\mathcal{A}$, takva da je $Sub\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_1$, $Con\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_2$ i $Aut\mathcal{A} \cong \mathcal{G}$.*

Najzad, možemo se pitati da li dve zadate algebarke mreže možemo predstaviti mrežama kongruencije algebre i njene podalgebre. Jedan dovoljan uslov dao je Lampe 2005. godine:

Teorema 1.16 ([40]) *Ako su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_0$ dve algebarske mreže s kompaktnim najvećim elementom, pri čemu $\mathcal{L}_1$ ima bar elementa, postoji grupoid $\mathcal{A}$ takav da $Con\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_1$ i $Con\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{L}_0$, za neki podgrupoid $\mathcal{A}_0$ grupoida $\mathcal{A}$.*

Kako su konačne mreže algebarske i, štaviše, sastoje se isključivo od kompaktnih elemenata, ovim je rešen problem simultanog predstavljanja dve konačne mreže mrežama kongruencije algebre i neke njene podalgebre:

Posledica 1.17 *Ako su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_0$ dve konačne mreže, takve da $\mathcal{L}_1$ sadrži bar dva elementa, postoji grupoid $\mathcal{A}$ takav da $Con\mathcal{A} \cong \mathcal{L}_1$ i $Con\mathcal{A}_0 \cong \mathcal{L}_0$, za neki podgrupoid $\mathcal{A}_0$ grupoida $\mathcal{A}$.*

1.4 Reprezentacija mreže slabih kongruencija

Ako je $\mathcal{L}$ unapred zadata algebarska mreža, da li postoji algebra $\mathcal{A}$ takva da je mreža $Cw\mathcal{A}$ izomorfna sa $\mathcal{L}$? Ako ovako postavimo problem reprezentacije pomoću mreže slabih kongruencija, struktura tražene algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ bi mogla veoma varirati u zavisnosti od elementa u mreži $\mathcal{L}$ koji u izomorfizmu odgovarala elementu Δ. Takođe, u tom slučaju bismo postojanje tražene algebre mogli neposredno dokazati na osnovu teoreme 1.13 koja dokazuje predstavljivost proizvoljne algebarske mreže mrežom kongruencija algebre. Naime, ako je $\mathcal{L}$ zadata mreža, i ako je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra takva da je $Con\mathcal{A}$ izomorfno sa $\mathcal{L}$, tada ako skupu F operacija dodamo sve elemente skupa A kao konstante, tada bi mreža $\mathcal{L}$ bila izomorfna mreži $Cw\mathcal{A}'$, gde je $\mathcal{A}' = (A, F \cup A)$ novodobijena algebra. Iz tih razloga problem reprezentacije algebarske mreže mrežom slabih kongruencija definišemo na specifičan način:

Ako je $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ algebarska mreža i $a \in L$. Da li postoji algebra takva da je njena mreža slabih kongruencija izomorfna mreži $\mathcal{L}$ u izomorfizmu koji slika a u dijagonalnu relaciju?

Ukoliko je $\mathcal{L}$ predstavljiva na ovaj način, onda kažemo da je element a **Δ-podesan** element mreže $\mathcal{L}$. Kažemo i da je mreža $\mathcal{L}$, zajedno sa elementom a predstavljiva pomoću mreže slabih kongruencija.

Pojam Δ-podesnog elementa uvode Branimir Šešelja i Gradimir Vojvodić 1989. godine, određujući ga uslovom kodistributivnosti i uslovima (1)-(3) tvrđenja 1.19, [83]. Ti uslovi se pokazuju neophodnim da bi element bio Δ-podesan prema sadašnjoj definiciji. Izučavanje ovih elemenata nastavljaju Branimir Šešelja i Andreja Tepavčević, [65], [67]. Monografija [67] sadrži detaljan pregled osobina Δ-podesnih elemenata, u opštem slučaju i pod određenim ograničenjima u pogledu algebre kojom predstavljamo zadatu mrežu.

Svaka mreža ima bar jedan element koji je Δ-podesan, i to je najmanji element, na osnovu gornjeg razmatranja. Ovako postavljen problem reprezentacije je veoma zahtevan, jer su sada mrežom $\mathcal{L}$ određene i mreža svih kongruencija tražene algebre, koja je jednaka filteru $\uparrow a$, i mreža svih podalgebri tražene algebre, koja je izomorfna sa idealom $\downarrow a$. Štaviše, zadate su i mreže kongruencija svih podalgebri tražene algebre, kao i odnosi incidencije među relacijama koje su kongruencije različitih podalgebri. Tako je ovaj problem sličan problemima simultane reprezentacije, gde se više zadatih mreža predstavlja različitim mrežama povezanim sa istom algebrom.

Dijagonalna relacija Δ je uvek kodistributivna u mreži $Cw\mathcal{A}$. Zato važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 1.18 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, on je kodistributivan.*

Na osnovu ovoga možemo u mnogim slučajevim neposredno dati negativan odgovor na pitanje o predstavljivosti, tj. kad god a nije kodistributivno. Ako je, pak, a kodistributivan element, on je u algebarskoj mreži i beskonačno kodistributivan, i važi, na osnovu tvrđenja 1.4, da klase ekvivalencije ρ_a imaju najveći element. Obeležavaćemo ga, kao i dosada sa $\overline{x}$, gde je x bilo koji element u klasi pomenute ekvivalencije. Neki poznati uslovi koje mora zadovoljivi kodistributivan element algebarske mreže da bi bio Δ-podesan dati su u radovima [83] i [65], dok je detaljan pregled poznatih rezultata rezultata dat u monografiji [67]:

Tvrđenje 1.19 ([67]) *Δ-podesan element mreže zadovoljava sledeće uslove:*

(1) *ako je $x \wedge y \neq \mathbf{0}$, onda je $\overline{x \vee y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;*

(2) *ako je $x \neq \mathbf{0}$ i $\overline{x} < y$, tada $\overline{y \wedge a} \neq y \wedge a$;*

(3) *ako je $\overline{x} \neq 0$ i $x \prec a$, tada $\bigvee\{y \in {\uparrow}a \mid y \vee \overline{x} < \mathbf{1}\} \neq \mathbf{1}$;*

(4) *ako $y \in {\downarrow}a$ i $x \prec y$, tada postoji $z \in [y, \overline{y}]$, tako da*

- za svako $t \in [x, \overline{x}]$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid c \leqslant z\}$ je ili prazan ili ima najveći element, i

- za svako $t \in [x, \overline{x}]$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid c \nleqslant z\}$ je totalno neuređen skup (može biti i prazan).

Ovde je

$$\mathrm{Ext}_x^y(t) := \{w \in [y, \overline{y}] \mid w \wedge \overline{x} = t\}.$$

Kao posledicu uslova (2) navedenog tvrđenja, ili neposredno, dobijemo sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 1.20 ([67]) *U mreži sa više od dva elementa, najveći element nije Δ-podesan.*

Obeležimo sa $[0]_{\rho_a}$ klasu najmanjeg elementa u relaciji ρ_a, određenoj sa $x \rho_a y \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$.

Tvrđenje 1.21 ([67]) *Ako je a Δ-podesan i element mreže $\mathcal{L}$ i $|[0]_{\rho_a}| > 1$, tada je $M_a = \{\overline{b} \mid b \in {\downarrow}a\}$ poduniverzum mreže $\mathcal{L}$.*

Ovo tvrđenje se može izvesti neposredno, na osnovu osobina mreže slabih kongruencija, ali sledi i iz uslova (1) tvrđenja 1.19. Naime, videli smo da je skup M_a uvek zatvoren za infimum u mreži, a ako važi uslov (1) tvrđenja 1.19, imamo $\overline{x} \vee \overline{y} = \overline{\overline{x}} \vee \overline{\overline{y}} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ (jer važi $\overline{x} \wedge \overline{y} = \overline{x \wedge y} \geqslant \overline{0} > 0$ - videti deo 1.2.3); takođe $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \geqslant \overline{x \vee y}$, jer $\overline{x} \vee \overline{y} \geqslant x \vee y$; tako $\overline{x} \vee \overline{y} \geqslant \overline{x \vee y}$, obrnuta nejednakost $\overline{x} \vee \overline{y} \leqslant \overline{x \vee y}$ važi jer $x \leqslant x \vee y$, pa $\overline{x} \leqslant \overline{x \vee y}$, tako i $\overline{y} \leqslant \overline{x \vee y}$.

Pošto se tvrđenja 1.20 i 1.21 izvode iz tvrđenja 1.19, ta dva tvrđenja ne predstavljaju suštinsku novinu, tj. svi navedeni kriterijumi za Δ-podesan element svode se na uslove (1)-(4) tvrđenja 1.19.

1.4.1 Specijalan slučaj predstavljivosti

Sledeća teoreme daje rešenje problema predstavljivosti u jednom posebnom slučaju:

Teorema 1.22 ([74]) *Neka je $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ algebarska mreža i a element koji pripada centru mreže, takav da filter $\uparrow a$ ima koatom veći od svih drugih elemenata osim 1 (ili $\uparrow a$ ima tačno jedan koatom i jedinicu koja je kompaktan element). Tada postoji algebra $\mathcal{A}$, čija je mreža slabih kongruencija $Cw\mathcal{A}$ izomorfna sa $\mathcal{L}$ u nekom preslikavanju f, takvom da $f(\Delta) = a$.*

Iz dokaza ove teoreme proizilazi i algoritam konstrukcije algebre $\mathcal{A}$, čija je mreža slabih kongruencija izomorfna sa $\mathcal{L}$: prvo konstruišemo algebru $\mathcal{B} = (B, F)$, takvu da je $Sub\mathcal{B} \cong \downarrow a$ - na osnovu konstrukcije Birkhoffa i Frinka - zatim konstruišemo algebru $\mathcal{C} = (C, G)$, takvu da je $Con\mathcal{C} \cong \downarrow a \setminus \{1\}$ - prema konstrukciji Grätzera i Schmidta. Sada za nosač tražene algebre $\mathcal{A} = (A, H)$ uzmemo $B \cup C$; operacije algebre $\mathcal{B}$ proširimo na skup A na sledeći način:

$$f^*(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_2, ..., x_n), & x_1, x_2, ..., x_n \in B \\ x_1, & \text{inače;} \end{cases}$$

na isti način proširimo i operacije algebre $\mathcal{C}$ na skup A:

$$g^*(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} g(x_1, x_2, ..., x_n), & x_1, x_2, ..., x_n \in C \\ x_1, & \text{inače;} \end{cases}$$

uvedemo operaciju s dužine 4 u skup A na sledeći način:

$$s(x,y,z,t) = \begin{cases} z, & \text{ako je } x = y \text{ i } x \in B \\ t, & \text{ako je } x \neq y \text{ i } x \in B \\ x, & \text{ako je } x \in C; \end{cases}$$

i, najzad, elemente skupa C uzmemo za konstante algebre $\mathcal{A}$. Dakle, ako je $\mathcal{A} = (A, H)$, gde je $H = \{f^* \mid f \in F\} \cup \{g^* \mid g \in G\} \cup C \cup \{s\}$, tada iz dokaza teoreme 1.22 proizilazi da je $Cw\mathcal{A}$ izomorfno sa $\mathcal{L}$, u izomorfizmu koji preslikava Δ u a.

1.4.2 Predstavljivost posebnim algebrama

Problem predstavljivosti zadate mreže mrežama slabih kongruencija nekih posebnih klasa algebri možemo postaviti dvojako. Možemo se pitati koji su neophodni ili dovoljni uslovi da bi neka mreža sa svojim elementom a bila predstavljiva kao mreža slabih kongruencija algebre koja zadovoljava neke zadate osobine, tj. pripada nekoj zadatoj klasi algebri. Takođe, ako je zadata mreža $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i element $a \in L$, koje osobine mora zadovoljavati algebra $\mathcal{A}$, da bi mogla predstaviti mrežu $\mathcal{L}$ i element a svojom mrežom slabih kongruencija i elementom Δ.

Definisaćemo neke osobine algebri i videćemo kako one utiču na strukturu mreže slabih kongruencija, a time i na pomenuti problem predstavljivosti.

Algebru $\mathcal{A}$ nazivamo **CIP algebra** ako zadovoljava sledeći uslov: ako je $\rho \in Con\mathcal{B}$ i $\tau \in Con\mathcal{C}$, gde su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ neke podalgebre od $\mathcal{A}$, tada važi:

$$\rho_{\mathcal{A}} \cap \tau_{\mathcal{A}} = (\rho \cap \tau)_{\mathcal{A}}, \text{ gde je } \rho_{\mathcal{A}} = \cap\{\phi \in Con\mathcal{A} \mid \rho \subseteq \phi\}.$$

Ovaj pojam uvode Branimir Šešelja i Gradimir Vojvodić 1986. godine, [81]. Uočimo da je $\rho_{\mathcal{A}}$ najmanja kongruencije algebre $\mathcal{A}$ koja sadrži kongruenciju ρ podalgebre $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}$. Dakle, preslikavanje $\rho \to \rho_{\mathcal{A}}$ u slučaju CIP algebri "komutira" sa presekom relacija. Ova osobina algebre $\mathcal{A}$ odgovara sledećoj osobini mreže $Cw\mathcal{A}$:

$$(\Delta \vee \rho) \wedge (\Delta \vee \phi) = \Delta \vee (\rho \wedge \phi),$$

tj. važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 1.23 *Da bi mreža $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ bila izomorfna mreži slabih kongruencija neke CIP algebre $\mathcal{A}$, u izomorfizmu koji slika $a \in L$ u Δ,* *neophodno je da a bude distributivno u $\mathcal{L}$. Takođe, ako je a distributivan, mreža $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a može biti predstavljiva samo mrežom slabih kongruencije CIP algebre.*

B. H. Neumann 1954. godine uvodi pojam **CEP-podgrupe**, kao podgrupe čija se svaka kongruencija može proširiti na kongruenciju grupe, [45]. Iz ove definicije prirodno izrasta definicija **CEP-grupe**, kao grupe čije su sve podgrupe CEP-podgrupe, kao i opštija definicija **CEP-algebre**.

CEP algebra je ona algebra $\mathcal{A}$ u kojoj svaka kongruencija podalgebre ima svoje proširenje na kongruenciju čitave algebre $\mathcal{A}$, tj. ako za svako $\mathcal{B} < \mathcal{A}$ važi:

$$(\forall \rho \in Con\mathcal{B})(\exists \tau \in Con\mathcal{A})\tau \cap B^2 = \rho.$$

Ova osobina neposredno utiče na strukturu mreže slabih kongruencija. Ona je očigledno ekvivalentna sledećem zahtevu: ako $\mathcal{B} < \mathcal{A}$ i $\rho \in Con\mathcal{B}$, tada $(\Delta \vee \rho) \cap B^2 = \rho$. Takođe, jednostavno je proveriti da je u CEP algebri, i samo u njoj, element Δ skrativ u mreži slabih kongruencija. Kako je Δ i kodistributivan, sledeće tvrđenje daje još neke ekvivalentne uslove:

Tvrđenje 1.24 ([67]) *Ako je a kodistributivan element mreže $\mathcal{L}$, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*
(*i*) *a is skrativ;*
(*ii*) *a je s-modularan;*
(*iii*) *a je kostandardan;*
(*iv*) *za sve $x, y \in L$, ako je $x \leqslant \overline{y}$, tada $x \vee (a \wedge \overline{y}) = (x \vee a) \wedge \overline{y}$;*
(*v*) *za svako $x \in L$ postoji $y \in \uparrow a$ takvo da $y \wedge \overline{x} = x$.*

Na osnovu ovoga dobijamo potreban uslov da bi neka mreža bila predstavljiva mrežom slabih kongruencija neke CEP algebre:

Posledica 1.25 *Ako je mreža $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a predstavljiva pomoću CEP algebre, u njoj važe sledeći uslovi:*
(*i*) *a je skrativ;*
(*ii*) *a je s-modularan;*
(*iii*) *a je kostandardan;*
(*iv*) *za sve $x, y \in L$, ako je $x \leqslant \overline{y}$, tada $x \vee (a \wedge \overline{y}) = (x \vee a) \wedge \overline{y}$;*
(*v*) *za svako $x \in L$ postoji $y \in \uparrow a$ takvo da $y \wedge \overline{x} = x$.*

Obrnuto, ako je zadovoljen neki od uslova (i)-(v) (samim tim i svi ostali), tada mreža ne može biti predstavljena mrežom slabih kongruencija algebre koja nije CEP.

Još jedna klasa algebri, čije se osobine neposredno odražavaju na mrežu slabih kongruencija, i koje se na osnovu te mreže lako identifikuju, je klasa tzv. **Hamiltonovih algebri**. Algebra $\mathcal{A}$, čija je svaka podalgebra klasa neke njene kongruencije $\rho \in Con\mathcal{A}$ zove se **Hamiltonova algebra**.

Tvrđenje 1.26 ([58]) *Algebra $\mathcal{A}$ je Hamiltonova ako i samo ako je funkcija $f : Sub\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\} \to Con\mathcal{A}$ određena sa $f(\mathcal{B}) = B^2 \vee \Delta$ injektivna (1-1) i čuva poredak.*

Na osnovu ovoga je moguće ograničiti predstavljivost nekih mreža mrežama slabih kongruencija Hamiltonovih algebri:

Posledica 1.27 *Ako je a element mreže $\mathcal{L}$ takav da važi: preslikavanje $\phi : \downarrow a \to \uparrow a$ definisano sa $\phi(x) = a \vee \overline{x}$ je 1-1 i čuva poredak, tada mreža $\mathcal{L}$, zajedno sa elementom a, može biti predstavljena samo mrežom slabih kongruencija neke Hamiltonove algebre.*

Klasa tzv. **kvazi-Hamiltonovih** algebri je nešto šira. Prema definiciji K. A. Kearns-a, koji uvodi ovaj pojam 1997. godine, algebra je **kvazi-Hamiltonova** ako su njeni maksimalni poduniverzumi klase kongruencija te algebre, [32]. Pod **maksimalnim poduniverzumom** ovde podrazumevamo neprazan, pravi poduniverzum, maksimalan u odnosu na inkluziju. Konačne nilpotentne grupe predstavljaju primer kvazi-Hamiltonovih algebri.

Teorema 1.28 ([67]) *Algebra $\mathcal{A}$ je kvazi-Hamiltonova ako i samo ako za svaki poduniverzum B te algebre važi: ako je $B \prec A$, tada je $B^2 \vee \Delta < A^2$.*

Posledica 1.29 *Ako je a kodistributivan element mreže $\mathcal{L}$ takav da važi $a \vee \overline{b} < 1$ za svako $b \prec a$, tada mreža $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a može biti predstavljena samo mrežom slabih kongruencija neke kvazi-Hamiltonove algebre.*

Ako element a mreže $\mathcal{L}$ sa više od dva elementa ima komplement a_1, tada je i $\overline{a_1}$ takođe komplement, jer $a \wedge \overline{a_1} = a \wedge a_1 = 0$, a $1 \geqslant a \vee \overline{a_1} \geqslant a \vee a_1 = 1$, pa $a \vee \overline{a_1} = 1$. Zato pretpostavimo da je komplement a_1 najveći u svojoj klasi, tj. da je $\overline{a_1} = a_1$. Ako je a Δ-podesan, a je različit od jedinice i postoji predstavljanje mreže $\mathcal{L}$ u kojem je a_1 predstavljen sa C^2 (jer ako je predstavljen nulom, tada $a \vee a_1 = a \neq 1$); $0 = a \wedge a_1$, pa je nula predstavljena sa $\Delta \cap C^2 = \Delta_C$. C je, dakle, minimalni poduniverzum od $\mathcal{A}$; kako je $a \vee a_1 = 1$, to je $\Delta \vee C^2 = A^2$, pa za bilo koji poduniverzum B imamo $\Delta \vee B^2 \geqslant \Delta \vee C^2 = A^2$, tako da nijedan poduniverzum od $\mathcal{A}$ nije klasa neke kongruencije algebre $\mathcal{A}$. Tako dobijemo jedan neophodan uslov koji mora zadovoljiti algebra čija će dijagonalna relacija u mreži slabih kongruencija predstavljati element a mreže $\mathcal{L}$, koji ima komplement; jednostavno je dobiti i uslov koji mora zadovoljiti mreža $\mathcal{L}$ predstavljena takvom algebrom.

Tvrđenje 1.30 *Ako element a mreže $\mathcal{L}$ ima komplement, mreža $\mathcal{L}$ može biti predstavljena samo algebrom koja nema poduniverzum koji je klasa neke kongruencije te algebre. Takođe, algebra koja nema poduniverzum koji je klasa kongruencije te algebre, a ima bar jednu konstantu, može predstavljati samo mrežu $\mathcal{L}$ sa elementom a koji ima komplement.*

Sledeće tvrđenje predstavlja sistematizaciju do sada navedenih rezultata:

Tvrđenje 1.31 ([67]) *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, važi sledeće:*

(i) $x \wedge a < y \wedge a$ povlači $\overline{x} \vee a < \overline{y} \vee a$ za sve $x, y \in L$ ako i samo ako je svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a Hamiltonova algebra;

(ii) a je skrativi element mreže $\mathcal{L}$ ako i samo ako je svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a CEP algebra;

(iii) a je distributivan element mreže $\mathcal{L}$ ako i samo ako je svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a CIP algebra;

(iv) $\overline{x} \vee a = \mathbf{1}$ za svako $x \in L$ ako i samo ako nijedna kongruencija algebre koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a nema klasu koja je pravi poduniverzum te algebre;

(v) $x \prec a$ povlači $\overline{x} \vee a < 1$ za svako $x \in L$ ako i samo ako je svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a kvazi-Hamiltonova;

(vi) a ima komplement u mreži $\mathcal{L}$ ako i samo ako svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a ima bar jednu konstantu i nema nijednu kongruenciju čija je klasa pravi poduniverzum te algebre.

Neki potrebni uslovi koje mora zadovoljiti algebra koja predstavlja mreže sa određenim osobinama dati su u [67] i zasnivaju se na osobinama mreže slabih kongruencija pojedinih algebri.

Teorema 1.32 ([67]) *Ako je a Δ-podesan element koji pripada centru mreže $\mathcal{L}$, tada svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ zadovoljava sledeće:*

- *$\mathcal{A}$ ima najmanje jednu konstantu;*
- *$\mathcal{A}$ je CEP i CIP algebra;*
- *za svaku podalgebru $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$, Con$\mathcal{B}$ je izomorfno sa Con$\mathcal{A}$;*
- *$\mathcal{A}$ nije Hamiltonova algebra, štaviše, nijedna kongruencija algebre $\mathcal{A}$ nema klasu koja je njen poduniverzum.*

Teorema 1.33 ([67]) *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$ i $M_a = \{\overline{b} \mid b \in B\}$ poduniverzum od $\mathcal{L}$, tada svaka kongruencija algebre koja predstavlja $\mathcal{L}$ ima najviše jednu klasu koja je poduniverzum od $\mathcal{A}$.*

Kažemo da algebra $\mathcal{A}$ ima $\mathcal{A}_m$-skrative kongruencije, ako njena minimalna netrivijalna podalgebra $\mathcal{A}_m$ ima jedan element, i svake dve kongruencije se poklapaju kad god se njihove klase koje sadrže A_m poklapaju.

Tvrđenje 1.34 ([67]) *Neka je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, koja ima jedan atom i dve jednoelementne klase ekvivalencije ρ_a. Pretpostavimo da je preslikavanje $x \to a \vee \overline{x}$ surjekcija iz $\downarrow a$ na $\uparrow a$. Tada svaka algebra koja predstavlja $\mathcal{L}$ ima $\mathcal{A}_m$-skrative kongruencije.*

Obeležimo sa $\mathcal{M}_n$ ograničenu mrežu sa $n+2$ elementa, od kojih su n međusobno neuporedivi, a sa $\mathcal{M}_\infty$ beskonačnu ograničenu mrežu, čiji su svi elementi, osim 0 i 1, međusobno neuporedivi.

Teorema 1.35 ([67]) *Neka je $L = \downarrow a \cup \uparrow a$, $a \in L$. Ako je a Δ-podesan, tada:*

(i) $\downarrow a$ je dvoelementni lanac, ili $\mathcal{M}_n$ za neko $n \in \mathbb{N}$ ili $\mathcal{M}_\infty$;

(ii) bilo koja algebra koja predstavlja mrežu $\mathcal{L}$ je CEP, CIP i Hamiltonova algebra koja ima najviše jednoelementne podalgebre, i ako $\downarrow a$ nije dvočlani lanac, $\mathcal{A}$ nema konstante.

1.4.3 Problem konkretnog predstavljanja

Problem predstavljanja proizvoljne algebarske mreže sa elementom a mrežom slabih kongruencija neke algebre, pri čemu je a predstavljeno dijagonalom u toj mreži, zovemo i **problem apstraktnog predstavljanja**. U širem smislu, problem predstavljanja pomoću mreža slabih kongruencija uključuje i tzv. **problem konkretnog predstavljanja**.

Videli smo da je mreža slabih kongruencija neke algebre podskup mreže slabih ekvivalencija na nosaču te algebre. Ovde se prirodno javlja pitanje: kada je podskup mreže slabih ekvivalencija nekog skupa ujedno i mreža svih slabih kongruencija neke algebre na tom skupu? Problem srodan ovome

- problem predstavljanja zadate mreže particija nekog skupa mrežom kongruencija neke algebre nad tim skupom rešio je H. Werner 1976. godine, [85].

Polazeći od ovog Wernerovog rešenja, u [49] M. Ploščica daje rešenje pomenutog problema predstavljanja podskupa mreže slabih ekvivalencija mrežom slabih kongruencija neke algebre. Pri tom koristi nešto modifikovani pojam grafičke kompozicije, koji su pre njega uveli B. Jónsson i H. Werner - videti [85] i [31].

Neusmereni graf je par (V, E), gde je V skup **temena** i E skup **ivica**, zajedno sa preslikavanjem $\nu : E \longrightarrow \mathcal{P}_1(V) \cup \mathcal{P}_2(V)$, pri čemu je $\mathcal{P}_i(V)$ skup svih i-elementnih podskupova skupa V, za $i = 1, 2$. Ako je $\nu(e) = \{x, y\}$, za $x \neq y$, kažemo da je e **ivica koja spaja x i y**. Ako je $\nu(e) = \{x\}$, tada je e **petlja oko x**.

Neka je $G = (V, E)$ graf i $\varphi : E \longrightarrow Rel(X)$ neko preslikavanje iz E u skup $Rel(X)$ svih relacija na skupu X. Funkciju $f : V \longrightarrow X$ zovemo φ-**saglasno etiketiranje** ako za svako $e \in E$ i $\nu(e) = \{x, y\}$,

$$(f(x), f(y)) \in \varphi(e).$$

Sada, za svaka dva fiksirana temena $0, 1 \in V$ definišemo jednu relaciju:

$$S_{G,0,1}(\varphi) :=$$

$$\{(a, b) \in X^2 \mid a = f(0), b = f(1) \ \text{ za neko } \varphi\text{-saglasno etiketiranje } f\}.$$

Preko $S_{G,0,1}$ definišemo jedno preslikavanje:

$$P_{G,0,1} : \mathcal{E}w(X)^E \longrightarrow \mathcal{E}w(X),$$

gde je $P_{G,0,1}(\varphi)$ slaba ekvivalencija generisana sa $S_{G,0,1}(\varphi)$, tj. simetrično i tranzitivno zatvorenje restrikcije relacije $S_{G,0,1}(\varphi)$ na domen te relacije, tj. na najveći skup A, takav da je $\Delta_A \subseteq S_{G,0,1}(\varphi)$. Uočimo da je $P_{G,0,1}$ jedna $|E|$-arna operacija na $\mathcal{E}w(X)$ koju određuje graf sa svoja dva temena. Svaku takvu operaciju nazivamo **grafička kompozicija**.

Teorema 1.36 ([49]) *Skup $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}w(A)$ je skup svih slabih kongruencija neke algebre ako i samo ako je $\mathcal{F}$ zatvoreno za svaku grafičku kompoziciju i svaku uniju familije slabih ekvivalencija koja je usmerena na gore, tj. takva da za svake dve slabe ekvivalencije iz te familije postoji u istoj familiji jedna veća od njih.*

Poglavlje 2

Delta-podesan element - neophodni uslovi

Polazeći od nekih poznatih uslova koje zadovoljava Δ-podesan element, u ovom poglavlju dolazimo do novih, opštijih kriterijuma. Prisetimo se da je element a algebarske mreže $\mathcal{L}$ Δ-podesan, ako može predstavljati element Δ, tj. dijagonalu u mreži slabih kongruencija neke algebre, tj. ako je $\mathcal{L}$ izomorfna sa mrežom $Cw\mathcal{A}$, za neku algebru $\mathcal{A}$, u izomorfizmu koji slika element a u Δ.

Videli smo da element Δ u mreži $Cw\mathcal{A}$ zadovoljava neke uslove, samim tim i Δ-podesan element a mora zadovoljavati te iste uslove. Npr. Δ je uvek kodistributivan u mreži $Cw\mathcal{A}$, tako i Δ-podesan element bilo koje algebarske mreže mora biti kodistributivan u njoj. Tvrđenje 1.19 daje još neke potrebne uslove, koje mora zadovoljiti kodistributivan element u algebarskoj mreži da bi bio Δ-podesan, takođe polazeći od osobina elementa Δ u mreži slabih kongruencija. U tvrđenjima 1.18 i 1.19 dati su svi dosad poznati kriterijumi, koje Δ-podesan element mora zadovoljiti.

Uslov (3) tvrđenja 1.19 može se uopštiti pomoću sledeće leme:

Lema 2.1 *Ako je a Δ-podesan element u mreži $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i x element od L, takav da je $x = \overline{x}$, tada je $a \wedge x$ Δ-podesan u mreži $\downarrow x$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A, H)$ algebra za koju važi da je $Cw\mathcal{A}$ izomorfno sa $\mathcal{L}$ u mrežnom izomorfizmu π, koji preslikava Δ u a. Budući da je $a \wedge x \leqslant a$, $a \wedge x$ odgovara relaciji Δ_B, za neku podalgebru $\mathcal{B} = (B, H)$ algebre $\mathcal{A}$. Sada je mreža $Sub\mathcal{B}$ izomorfna sa $\downarrow a \wedge x$ u izomorfizmu $\pi|_{\downarrow \Delta_B}$, dok je mreža $Cw\mathcal{B}$ izomorfna mreži $\downarrow x$ u izomorfizmu $\pi|_{\downarrow B^2}$ koje preslikava dijagonalnu relaciju

Δ_B u $a \wedge x$. Dakle, $a \wedge x$ je Δ-podesan u mreži $\downarrow x$. ∎

Podsetimo se da je $x \prec y$, ako $x < y$ i $(x, y) \neq \emptyset$. Dokažimo sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 2.2 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$ i $x, y \in L$, tako da važi $x \prec y \leq a$ i $\bar{x} \neq 0$, tada interval $[\bar{x}, \bar{y})$ ima najveći element.*

Dokaz: Ako je $(\overline{x}, \overline{y}) = \emptyset$, tada $[\overline{x}, \overline{y}) = \{\overline{x}\}$, i $\overline{x}$ je najveći element intervala. Zato pretpostavimo da je $(\overline{x}, \overline{y}) \neq \emptyset$ i neka je $t \in (\overline{x}, \overline{y})$. Pošto je

$$x = a \wedge \overline{x} \leqslant a \wedge t \leqslant \overline{y} \wedge a = y,$$

važi da je $x \leqslant t \wedge a \leqslant y$.

Kako je $x \prec y$, imamo da je $t \wedge a = x$ ili $t \wedge a = y$. Ako $t \wedge a = x$, dobijemo $t \leqslant \overline{x}$, što je nemoguće, zato je $t \wedge a = y$ i $t \in [y, \overline{y}]$. Pošto je $t \vee \overline{x} = t < \overline{y}$, imamo:

$$t \in \{z \in \uparrow y \mid z \vee \overline{x} < \overline{y}\} \text{ i } \{z \in \uparrow y \mid z \vee \overline{x} < \overline{y}\} \neq \emptyset.$$

Na osnovu prethodne leme, y je Δ-podesan u mreži $\downarrow \overline{y}$. Kako je $x \prec y$, $\overline{x} \neq 0$, na osnovu uslova (3) tvrđenja 1.19 dobijemo:

$$\bigvee\{z \in \uparrow y \mid z \vee \overline{x} < \overline{y}\} \neq \overline{y};$$

Pošto je $\{z \in \uparrow y \mid z \vee \overline{x} < \overline{y}\} \supseteq [\overline{x}, \overline{y}) \cap \uparrow y$, dobijamo:

$$\bigvee\{z \in \uparrow y \mid z \vee \overline{x} < \overline{y}\} \geqslant \bigvee[\overline{x}, \overline{y}).$$

Iz ovoga, kao i iz činjenice da $z \in (\overline{x}, \overline{y})$ povlači $y \geqslant z \wedge a > x$ i $y = z \wedge a$, dobijamo sledeće:

$$\bigvee[\overline{x}, \overline{y}) = \bigvee(\overline{x}, \overline{y}) = \bigvee(\overline{x}, \overline{y}) \cap \uparrow y \leqslant \bigvee\{z \in \uparrow y \mid z \vee \overline{x} < \overline{y}\} < \overline{y}$$
$$\Rightarrow \bigvee[\overline{x}, \overline{y}) \in [\overline{x}, \overline{y}).$$

Tako interval $[\overline{x}, \overline{y})$ ima najveći element. ∎

Primedba: Uslov tvrđenja 2.2 je uopštenje uslova (3) tvrđenja 1.19.

Zaista, ako $x \prec a$ i važi tvrđenje 2.2, tada $[\overline{x}, 1)$ ima najveći element t. Ako je $t = \overline{x}$, tada $y \vee \overline{x} = 1$ za sve $y \in \uparrow a$ i skup $\{y \in \uparrow a \mid y \vee \overline{x} < 1\}$ je prazan, zbog čega je:

$$\bigvee\{y \in \uparrow a \mid y \vee \overline{x} < 1\} = 0 < 1.$$

Ako je $t > \overline{x}$, t je veći ili jednak supremumu $\bigvee\{y \in \uparrow a \mid y \vee \overline{x} < 1\}$; naime, ako je $s \in \{y \in \uparrow a \mid y \vee \overline{x} < \mathbf{1}\}$ imamo: $s \vee \overline{x} \in [\overline{x}, 1)$; tako za svaki element skupa $\{y \in \uparrow a \mid y \vee \overline{x} < \mathbf{1}\}$, postoji od njega veći ili jednak element skupa $[\overline{x}, 1)$. Tako

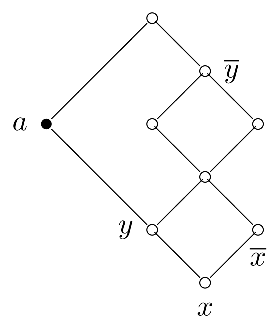
$$\bigvee\{y \in \overline{a} \mid y \vee \overline{x} < 1\} \leqslant \bigvee[\overline{x}, 1) = t < 1$$

i zadovoljen je uslov (3).

Uslov iz prethodnog tvrđenja predstavlja neophodan dodatak uslovima datim u tvrđenju 1.19, jer ga nije moguće izvesti iz uslova (1)-(4) tog tvrđenja, što dokazuje naredni primer.

Primer 2.3 *Uočimo mrežu na slici 2.1, i element a te mreže.*

Element a ispunjava uslove tvrđenja 1.19, ali ne i uslov tvrđenja 2.2. Naime, za elemente x i y na slici važi da je $x \prec y \leqslant a$, a skup $[\overline{x}, \overline{y})$ nije prazan i ne poseduje najveći element. Stoga zaključujemo da element a na slici 2.1 nije Δ-podesan, na osnovu novog kriterijuma.



Slika 2.1

Sledeća teorema predstavlja dalje uopštenje prethodnog tvrđenja:

Teorema 2.4 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, $x, y \in L$, $\overline{x} \neq 0$ i $x < y \leqslant a$, tada je skup $[y \vee \overline{x}, \overline{y}) \setminus \bigcup_{z \in (x,y)} [y \vee \overline{z}, \overline{y})$ ili prazan, ili ima najveći element.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ algebra čija je mreža slabih kongruencija izomorfna sa $\mathcal{L}$ u izomorfizmu koji preslikava a u Δ. Tako izomorfizam preslikava x, y, z redom u Δ_B, Δ_C i Δ_D, za neke neprazne poduniverzume B, C i D algebre $\mathcal{A}$.

Pretpostavimo da je

$$[y \vee \overline{x}, \overline{y}) \setminus \bigcup_{z \in (x,y)} [y \vee \overline{z}, \overline{y}) \neq \emptyset;$$

tada je odgovarajući podskup skupa $Cw\mathcal{A}$ takođe neprazan, tj.

$$[\Delta_C \vee B^2, C^2) \setminus \bigcup_{D \in (B,C)} [\Delta_C \vee D^2, C^2) \neq \emptyset.$$

Neka je $\rho \in [\Delta_C \vee B^2, C^2) \setminus \bigcup_{D \in (B,C)} [\Delta_C \vee D^2, C^2)$. Očigledno $\rho \in Con\mathcal{C}$. Ako $B[\rho]$ odredimo na sledeći način:

$$B[\rho] = \{x \in C \mid x\rho y \text{ za neko } y \in B\},$$

$B[\rho]$ je poduniverzum od $\mathcal{C}$ koji sadrži B, tj. važi:

$$B \leqslant B[\rho] \leqslant C.$$

Ako je $s, t \in B[\rho]$, imamo da je $s\rho p$ i $t\rho r$ za neke $p, r \in B$. Pošto je $\rho \supset B^2$, važi i da je $p\rho r$, tako da je $(s,t) \in \rho$. Kako to važi za sve $s, t \in B[\rho]$, dobijemo

$$C^2 \supset \rho \supseteq B[\rho]^2.$$

Ali ρ se ne sadrži u $[\Delta_C \cup D^2, C^2)$ ni za jedno $D \in (B, C]$, zato

$$B[\rho] = B \text{ i } \rho \subseteq B^2 \cup (C \setminus B)^2.$$

Budući da to važi za svako $\rho \in [\Delta_C \vee B^2, C^2) \setminus \bigcup_{D \in (B,C)} [\Delta_C \vee D^2, C^2)$ i $B^2 \cup (C \setminus B)^2$ predstavlja jednu ekvivalenciju u skupu C, supremum θ ovog skupa u skupu svih ekvivalencija u C je takođe sadržan u skupu $B^2 \cup (C \setminus B)^2$. Na osnovu teoreme 1.10, imamo da je θ takođe supremum skupa

$$[\Delta_C \vee B^2, C^2) \setminus \bigcup_{D \in (B,C)} [\Delta_C \vee D^2, C^2)$$

u skupu svih kongruencija algebre $\mathcal{C}$. Kako je $\theta \subseteq B^2 \cup (C \setminus B)^2$, imamo $B[\theta] = B$. Sada je lako uočiti da

$$\theta \in [\Delta_C \vee B^2, C^2) \setminus \bigcup_{D \in (B,C)} [\Delta_C \vee D^2, C^2),$$

jer svaki element skupa $[\Delta_C \vee B^2, C^2)$ sadrži $\Delta_C \vee B^2$; takođe

$$\theta \subseteq B^2 \cup (C \setminus B)^2$$

i zato $\theta < C^2$ i $\theta \in [\Delta_C \vee B^2, C^2)$. Pošto $\theta \subseteq B^2 \cup (C \setminus B)^2$, imamo da $\theta \not\supseteq D^2$ ako je $D \in (B, C)$, tako da važi

$$(\forall D \in (B,C))\ \theta \notin [\Delta_C \vee D^2, C^2).$$

Stoga $\theta \in [\Delta_C \vee B^2, C^2) \setminus \bigcup_{D \in (B,C)} [\Delta_C \vee D^2, C^2)$, i θ je najveći element tog skupa. Zbog toga i odgovarajući podskup od L ima najveći element. ∎

Primedba: Neposredno sledi da je uslov naveden u tvrđenju 2.2 posledica uslova datog u teoremi 2.4. Naime, ako je $x \prec y$, tada $(x, y) = \emptyset$, pa imamo

$$[y \vee \overline{x}, \overline{y}) \setminus \bigcup_{z \in (x,y)} [y \vee \overline{z}, \overline{y}) = [y \vee \overline{x}, \overline{y}).$$

Ako $[\overline{x}, \overline{y}) = \{\overline{x}\}$, tvrđenje 2.2 važi. Ako $[\overline{x}, \overline{y}) \neq \{\overline{x}\}$, tada postoji $t \in (\overline{x}, \overline{y})$. Sada imamo

$$\overline{y} \wedge a \geqslant t \wedge a \geqslant \overline{x} \wedge a, \text{ tj. } y \geqslant t \wedge a \geqslant x;$$

ali $t \wedge a \neq x$, jer u protivnom $t \leqslant \overline{x}$, što nije tačno; zato imamo:

$$a \wedge t = y, \text{ pa } t \in [y \vee \overline{x}, \overline{y}), \text{ tako da } [y \vee \overline{x}, \overline{y}) \neq \emptyset,$$

pa na osnovu teoreme 2.4 skup $[y \vee \overline{x}, \overline{y})$ ima najveći element. Kako smo dokazali da je proizvoljan element t skupa $(\overline{x}, \overline{y})$ ujedno i element skupa $[y \vee \overline{x}, \overline{y})$, dobijemo da je

$$(\overline{x}, \overline{y}) = [y \vee \overline{x}, \overline{y}),$$

budući da je obrnuta inkluzija $(\overline{x}, \overline{y}) \supseteq [y \vee \overline{x}, \overline{y})$ očigledna. Tako je najveći element skupa $[y \vee \overline{x}, \overline{y})$ ujedno i najveći element skupa $(\overline{x}, \overline{y})$, kao i skupa

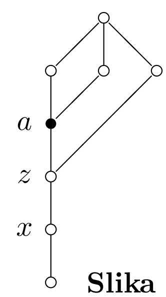
$[\overline{x}, \overline{y})$.

Sledeći primer dokazuje da je uslov teoreme 2.4 opštiji od uslova 2.2, i predstavlja neophodan dodatak dosadašnjim uslovima.

Primer 2.5 *Element a mreže na slici 2.2 ispunjava sve uslove iz tvrđenja 1.19, kao i uslov tvrđenja 2.2, ali nije Δ-podesan. Naime, $x < a \leqslant a$ i $(x, a) = \{z\}$; sada imamo:*

$$[a \vee \overline{x}, \overline{a}) \setminus \bigcup_{z \in (x,a)} [a \vee \overline{z}, \overline{a}) = [a \vee x, 1) \setminus [1, 1) = [a, 1) \setminus \emptyset = [a, 1).$$

Kako ne postoji najveći element $[a, 1)$, to nije ispunjen uslov teoreme 2.4.



Slika 2.2

U nastavku navodimo uopštenje uslova (4) tvrđenja 1.19, koje je u isto vreme uopštenje tvrđenja 2.2.

Koristimo ideje iz dokaza teoreme M. Ploščice, navedene u monografiji ([67]). (teorema 2.22)

Lema 2.6 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra, a $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ dve podalgebre od $\mathcal{A}$, takve da je $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$. Tada skup*

$$\Gamma^{B,C} = \{\rho \in \mathrm{Con}\,\mathcal{C} \mid \text{ ne postoje } x \in B, y \in C \setminus B, \text{ takvi da } x \rho y\}$$

ima najveći element.

Dokaz: $\Gamma^{B,C}$ je neprazan, jer $\Delta_C \in \Gamma^{B,C}$. Neka je γ supremum skupa $\Gamma^{B,C}$ u skupu $Con\mathcal{C}$. Taj supremum pripada skupu $\Gamma^{B,C}$ jer se, prema teoremi 1.10, poklapa sa supremumom od $\Gamma^{B,C}$ u mreži svih ekvivalencija u skupu C, koji je manji ili jednak $B^2 \cup (C \setminus B)^2$. ■

Tvrđenje 2.7 *Ako je a $\Delta-$ podesan element mreže $\mathcal{L}$, tada za svaka dva elementa x i y ideala $\downarrow a$, takva da $\overline{x} \neq 0$ i $x \prec y$, postoji $z \in [y, \overline{y})$, tako da važi:*

- za svako $t \in [x, \overline{x}]$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid c \leqslant z\}$ je ili prazan ili ima najveći element, i

- za svako $t \in [x, \overline{x}]$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid c \nleqslant z\}$ je anti-lanac (eventualno prazan), pri čemu je

$$\mathrm{Ext}_x^y(t) := \{w \in [y, \overline{y}] \mid w \wedge \overline{x} = t\}.$$

Dokaz: Pošto je a Δ-podesan element, tada postoji algebra $\mathcal{A}$ čija je mreža slabih kongruencija izomorfna sa $\mathcal{L}$ u izomorfizmu f koji preslikava a u Δ. Pošto su x i y u idealu $\downarrow a$, postoje podalgebre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ algebre $\mathcal{A}$, takve da Δ_B i Δ_C odgovaraju redom elementima x i y u preslikavanju f, a $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$ u mreži $Sub\mathcal{A}$. Neka je $\Gamma^{B,C}$ skup kongruencija iz $Con\mathcal{C}$ definisan u lemi 2.6. Prema lemi 2.6, $\Gamma^{B,C}$ ima najveći element γ. Kako je $\gamma \in \Gamma^{B,C}$, važi da je:

$$\gamma \leqslant B^2 \cup (C \setminus B)^2 < C^2 \text{ i } \gamma \in Con\mathcal{C} \setminus \{C^2\} = [\Delta_C, C^2).$$

γ bi bila relacija koja odgovara elementu z u ovom tvrđenju. Neka je $\alpha \in Con\mathcal{B}$; posmatrajmo skup relacija:

$$\Upsilon = \{\rho \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\alpha) \mid \rho \leqslant \gamma\}.$$

Pretpostavimo da ovaj skup nije prazan. Za svako $\beta \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\alpha)$ imamo $\beta \cap B^2 = \alpha$, pa kako je $\beta \leqslant \gamma$, imamo da svako $\rho \in \Upsilon$ pripada skupu $\Gamma^{B,C}$. Zato, na osnovu teoreme 1.10 dobijemo:

$$\bigvee \Upsilon \in \Gamma^{B,C} \text{ i } \bigvee \Upsilon \cap B^2 = \alpha.$$

$\bigvee \Upsilon$ je, dakle, traženi najveći element.

Da bismo dokazali drugi deo tvrđenja, pretpostavimo sledeće:

$$\alpha \in Con\mathcal{B},\ \Phi = \{\rho \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\alpha) \mid \rho \nleqslant \gamma\} \neq \emptyset.$$

Ako $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi$, tada $\alpha_1 \cap B^2 = \alpha_2 \cap B^2 = \alpha$.

Pošto $\alpha_1 \nleqslant \gamma$ i $\alpha_2 \nleqslant \gamma$, važi sledeće:

$(\exists x_1, x_2 \in B)(\exists y_1, y_2 \in C \setminus B)(x_1 \alpha_1 y_1 \text{ i } x_2 \alpha_2 y_2)$.

Pošto su $B[\alpha_1]$ i $B[\alpha_2]$ podalgebre od $\mathcal{C}$, i $\mathcal{B} \prec \mathcal{C}$, imamo:

$B[\alpha_1] = C$, $B[\alpha_2] = C$.

Ako $\alpha_1 \subsetneq \alpha_2$, neka $(x, y) \in \alpha_2 \setminus \alpha_1$. Postoje $x_0, y_0 \in B$, takvi da $x_0 \alpha_1 x$ i $y_0 \alpha_1 y$ i, samim tim, $x_0 \alpha_2 x$ i $y_0 \alpha_2 y$. Sada, očigledno $(x_0, y_0) \in \alpha_2 \setminus \alpha_1$, tako da dobijemo kontradikciju:

$\alpha_2 \cap B^2 \neq \alpha_1 \cap B^2$.

Stoga α_1 i α_2 nisu uporedivi u odnosu na relaciju $\subseteq$ i Φ je anti-lanac. ■

Primedba: Ovo je uopštenje uslova (4) tvrđenja 1.19, osim u trivijalnom slučaju kada je $\overline{x} = 0$. Zaista, u uslovu (4) imamo $z \in [y, \overline{y}]$, a ovde dobijamo, preciznije, da $z \in [y, \overline{y})$.

Uslov tvrđenja 2.2 takođe sledi iz prethodnog tvrđenja: neka su x i y takvi da $x \prec y \leqslant a \in L$ i neka je $z \in [y, \overline{y})$ element, čije postojanje sledi iz prethodnog tvrđenja. Uočimo da je $(\overline{x}, \overline{y}] = [y \vee \overline{x}, \overline{y}]$, jer ako $t \in (\overline{x}, \overline{y}]$, onda

$$y = \overline{y} \wedge a \geqslant t \wedge a \geqslant \overline{x} \wedge a = x,$$

ali $t \wedge a \neq x$ - jer je $\overline{x}$ najveći u skupu $\{s \in L \mid s \wedge a = x\}$ - tako dobijemo

$$y \geqslant t \wedge a > x \Rightarrow t \wedge a = y \Rightarrow t \geqslant y.$$

Skup $(\overline{x}, \overline{y}] = [y \vee \overline{x}, \overline{y}] = Ext_x^y(\overline{x})$ je ili jednak $\{\overline{y}\}$, ili ima bar dva uporediva elementa (jer $\overline{y} \in Ext_x^y(\overline{x})$). U prvom slučaju $[\overline{x}, \overline{y}) = \{\overline{x}\}$, pa važi tvrđenje 2.2. U slučaju da $Ext_x^y(\overline{x})$ sadrži dva uporediva elementa, iz prethodnog tvrđenja sledi da jedan od njih mora biti manji ili jednak z, zato neka je $u \leqslant z$ jedan od njih. Sada

$$\overline{x} \geqslant z \wedge \overline{x} \geqslant u \wedge \overline{x} = \overline{x},$$

i tako $z \wedge \overline{x} = \overline{x}$, tj. $z \in Ext_x^y(\overline{x})$.

Uočimo da je z najveći element skupa $Ext_x^y(\overline{x}) \setminus \{\overline{y}\}$: ako $s \in Ext_x^y(\overline{x}) \setminus \{\overline{y}\}$, prema prethodnom tvrđenju imamo da je $s \leqslant z$, pošto skup $\{c \in$

$\mathrm{Ext}_x^y(\overline{x}) \mid c \nleqslant z\}$ već sadrži $\overline{y}$ i $z < \overline{y}$. Pošto je

$$[\overline{x}, \overline{y}) = \{x\} \cup (Ext_x^y(\overline{x}) \setminus \{\overline{y}\}),$$

z je takođe najveći element skupa $[\overline{x}, \overline{y})$.

Uopštenje tvrđenja 2.7 je dato u sledećoj teoremi:

Teorema 2.8 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i $x, y \in L$, takvi da $\overline{x} \neq 0$, $x < y \leqslant a$, tada postoji preslikavanje $\varphi : [x, y) \to [y, \overline{y})$, takvo da:*

- za svako $t \in [x, \overline{x}]$ i svako $u \in [x, y)$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid c \leqslant \varphi(u)\}$ je ili prazan ili ima najveći element i

- za svako $t \in [x, \overline{x}]$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid (\forall u \in [x, y))c \nleqslant \varphi(u)\}$ je totalno neuređen (pri čemu može biti i prazan); ovde je

$$\mathrm{Ext}_x^y(t) := \{w \in [y, \overline{y}] \mid w \wedge \overline{t} = t\}.$$

Dokaz: Neka je $\mathcal{A}$ algebra koja predstavlja mrežu $\mathcal{L}$ zajedno sa elementom a, tj. neka je $\mathcal{A}$ algebra izomorfna mreži $\mathcal{L}$ u izomorfizmu f, koji preslikava Δ u a. Elementi x i y odgovaraju elementima Δ_B i Δ_C, gde su $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in Sub\mathcal{A}$, a interval $[B, C)$ u mreži $Sub\mathcal{A}$ je

$$[B, C) = \{A_i \mid i \in I\}.$$

Za $i \in I$ neka je $\Gamma^{A_i, C}$ podskup $Con\mathcal{C}$ određen na sledeći način:

$$\Gamma^{A_i, C} = \{\rho \in Con\mathcal{C} \mid \rho \subseteq A_i^2 \cup (C \setminus A_i)^2\}.$$

Neka je γ_i supremum skupa $\Gamma^{A_i, C}$ u mreži $Con\mathcal{C}$ za $i \in I$, koji pripada skupu $\Gamma^{A_i, C}$ (prema lemi 2.6), zbog čega je $\gamma_i \neq C^2$ za $i \in I$. Sada definišemo preslikavanje $\overline{\varphi} : [B, C) \to Con\mathcal{C}$ na sledeći način:

$$\overline{\varphi}(A_i) = \gamma_i,$$

i traženo preslikavanje $\varphi : [x, y) \to [y, \overline{y})$ je određeno sa

$$\varphi = f^{-1} \circ \overline{\varphi} \circ f.$$

Neka je ρ kongruencija algebre $\mathcal{C}$. Važi sledeće:

(i) $\rho \in \Gamma^{A_i,C} \Rightarrow \rho \leqslant \gamma_i$ za $i \in I$;
(ii) $[(\forall i \in I)\rho \notin \Gamma^{A_i,C}] \Rightarrow B[\rho] = C$.

Tvrdnja (ii) sledi iz činjenice da je $B[\rho]$ poduniverzum $\mathcal{C}$ koji sadrži B, tj. jednak je A_i za neko $i \in I$ ili je $B[\rho] = C$. Ako je $B[\rho] = A_i$, onda $\rho \subseteq A_i^2 \cup (C \setminus A_i)^2$ i tako $\rho \in \Gamma^{A_i,C}$. Zato $B[\rho] = C$.

Sada, neka je $\phi \in Con\mathcal{B}$, i $\theta \in Ext_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\phi)$. Ako je $B[\theta] = A_i$, tada $\theta \in \Gamma^{A_i,C}$ i $\theta \leqslant \gamma_i$. Na isti način kao i ranije dobijemo da je

$$\rho = \bigvee\{\theta \in Ext_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\phi) \mid \theta \leqslant \gamma_i\} \in \Gamma^{A_i,C}.$$

Takođe važi da je $\rho \in Ext_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\phi)$, tako da $\{\theta \in Ext_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\phi) \mid \theta \leqslant \gamma_i\}$ ima najveći element τ_i.

Neka je
$$\rho, \psi \in \{\tau \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\phi) \mid (\forall i \in I)(\tau \nleqslant \gamma_i)\}.$$
Prema (ii) imamo da je $B[\rho] = B[\psi] = C$. Ako $\rho < \psi$ i $(d,e) \in \psi \setminus \rho$, tada $(b,d) \in \rho$ i $(c,e) \in \rho$ za neke $b,c \in B$. Sada iz $(b,d) \in \psi$ i $(c,e) \in \psi$ sledi $(b,c) \in \psi$ (jer $(d,e) \in \psi$). Ako $(b,c) \in \rho$, tada $(d,e) \in \rho$, što nije tačno; zato $(b,c) \notin \rho$, zbog čega
$$\rho \cap B^2 \neq \psi \cap B^2,$$
što opet daje kontradikciju. Stoga, svaka dva elementa skupa

$$\{\tau \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\phi) \mid (\forall i \in I)(\tau \nleqslant \gamma_i)\}$$

su neuporediva. ■

U nastavku dajemo primer koji dokazuje da je teorema 2.8 uopštenje prethodnih uslova.

Primer 2.9 *Element a mreže na slici 2.3 ispunjava sve uslove tvrđenja 1.19,2.2,2.7, kao i teoreme 2.4, ali nije Δ-podesan, jer ne ispunjava uslove teoreme 2.8. Naime, uočimo da u mreži na slici 2.3 važi sledeće:*

$0 < a \leqslant a$; $[0,a) = \{0,z\}$;
$Ext_0^a(0) = \{a, b_1, b_2\}$;
$Ext_0^a(c) = \{c_1, c_2\}$;
$Ext_0^a(d) = \{d_1, d_2\}$.

Ako bi postojalo preslikavanje φ iz teoreme 2.8 tada bi postojali $\varphi(0), \varphi(z) \in [a,1)$ (ne nužno različiti), takvi da je za svako $t \in [0,\overline{0}]$, sledeći skup totalno *neuređen (pri čemu može biti i prazan):*

$$\{c \in \mathrm{Ext}_0^a(t) \mid c \nleqslant \varphi(0) \text{ } i \text{ } c \nleqslant \varphi(z)\}.$$

Uočimo da važi sledeće:

$(\forall i)(b_i \notin \{\varphi(0), \varphi(z)\})$ *ili* $(\forall i)(c_i \notin \{\varphi(0), \varphi(z)\})$ *ili* $(\forall i)(d_i \notin \{\varphi(0), \varphi(z)\})$.

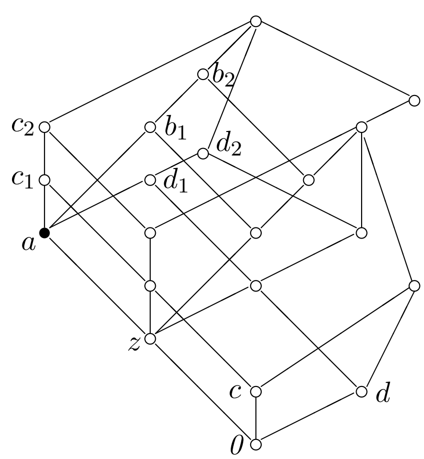
Zbog pravilnosti intervala $[a, 1)$, *bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti:*

$$(\forall i)(b_i \notin \{\varphi(0), \varphi(z)\}).$$

No tada:

$$\{c \in \mathrm{Ext}_0^a(0) \mid c \nleqslant \varphi(0) \text{ } i \text{ } c \nleqslant \varphi(z)\} \supseteq \{b_1, b_2\}.$$

Kako je $b_1 < b_2$, *skup* $\{c \in \mathrm{Ext}_0^a(0) \mid c \nleqslant \varphi(0) \text{ } i \text{ } c \nleqslant \varphi(z)\}$ *nije totalno neuređen; dakle, nisu zadovoljeni uslovi teoreme 2.8.*



Slika 2.3

Nakon ovih uopštenja poznatih kriterijuma, tj. neophodnih uslova da bi element bio Δ-podesan, možemo objediniti sve rezultate u sledećoj teoremi:

Teorema 2.10 *Δ-podesan element $a \in L$ zadovoljava sledeće:*

(1) *ako* $x \wedge y \neq \mathbf{0}$, *tada* $\overline{x \vee y} = \overline{x} \vee \overline{y}$;

(2) *ako* $\overline{x} \neq \mathbf{0}$ *i* $\overline{x} < y$, *tada* $\overline{y \wedge a} \neq y \wedge a$;

(3) ako $\overline{x} \neq 0$ i $x < y \leqslant a$, tada je skup $[y \vee \overline{x}, \overline{y}) \setminus \bigcup_{z \in (x,y)} [y \vee \overline{z}, \overline{y})$ ili prazan, ili ima najveći element;

(4) ako $\overline{x} \neq 0$, $x < y \leqslant a$, tada postoji preslikavanje $\varphi : [x, y) \to [y, \overline{y})$, takvo da važi:

- za svako $t \in [x, \overline{x}]$ i svako $u \in [x, y)$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid c \leqslant \varphi(u)\}$ je ili prazan ili ima najveći element, i

- za svako $t \in [x, \overline{x}]$, skup $\{c \in \mathrm{Ext}_x^y(t) \mid (\forall u \in [x, y))(c \nleqslant \varphi(u))\}$ je anti-lanac (pri čemu može biti i prazan), gde je

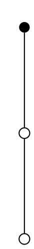
$$\mathrm{Ext}_x^y(t) := \{w \in [y, \overline{y}] \mid w \wedge \overline{t} = t\}.$$

Primedba: Ova teorema uključuje sve dosad poznate kriterijume, date u tvrđenju 1.19: uslov (3) je uopštenje tvrđenja 2.2 i stoga uopštenje uslova (3) tvrđenja 1.19; uslov (4) je očigledno uopštenje tvrđenja 2.7, samim tim i uopštenje uslova (4) tvrđenja 1.19.

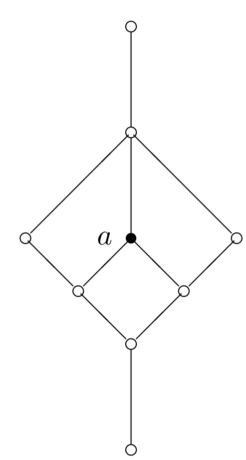
Primedba: Možemo postaviti pitanje da li su ova četiri uslova nezavisna. Mreža na slici 2.3 dokazuje da se uslov (4) ne može izvesti iz ostala tri uslova. Mreža na slici 2.2 dokazuje da je uslov (3) nezavisan. U sledećem primeru dajemo mreže koje dokazuju nezavisnost uslova (1) i (2).

Primer 2.11 *Mreža na slici 2.4 zadovoljava uslove (1), (3) i (4) prethodne teoreme, ali ne i uslov (2).*

Mreža na slici 2.5 zadovoljava uslove (2), (3) i (4) prethodne teoreme, ali ne ispunjava uslov (1).



Slika 2.4



Slika 2.5

Poglavlje 3

Posebni slučajevi predstavljivosti

3.1 Izvedena predstavljivost

U nekim slučajevima predstavljivost jedne mreže povlači sa sobom predstavljivost neke druge, s njom povezane mreže. To može biti njena podmreža, ili mreža koja predstavlja podurеđenje polazne mreže, a može biti i na neki drugi način povezana s polaznom mrežom. Razmotrićemo neke slučajeve.

3.1.1 Predstavljivost podmreža i podurеđenja mreže

Predstavljivost filtera i ideala predstavljive mreže

Filteri i ideali mreže predstavljaju posebne slučajeve podmreže. Najpre ćemo postaviti pitanje: ako je jedna mreža predstavljiva kao mreža slabih kongruencija neke algebre, da li je neki njen filter takođe predstavljiv. Podsetimo se da je filter u mreži glavni, ako je oblika $\uparrow f$, za neki element f te mreže. Da bi bio predstavljiv, sam taj filter mora biti algebarska mreža, a samim tim i kompletna mreža. Zbog toga samo glavni filter može biti predstavljiv: ako je F nosač filtera $\mathcal{F}$ u mreži $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i f infimum skupa F u $\mathcal{F}$, on je jednak infimumu f_1 skupa F u polaznoj mreži; naime, $f \leqslant f_1$, jer je svako donje ograničenje skupa F u $\mathcal{F}$ ujedno i donje ograničenje u $\mathcal{L}$. No $f \in F \Rightarrow f_1 \in F$, pa $f_1 \leqslant f$, dakle $f_1 = f$ i $\mathcal{F} =\uparrow f$. Dakle, svaki filter algebarske mreže koji je i sam algebarska mreža je glavni filter. Obrnuto, svaki glavni filter algebarske mreže i sam predstavlja algebarsku mrežu: neka je $\mathcal{F} =\uparrow f$ filter algebarske mreže $\mathcal{L}$ i $x \in F$; $x = \sup X$ za neki podskup X skupa L čiji su elementi kompaktni u $\mathcal{L}$; sada je $x = \sup Y$, pri čemu je

$Y = \{y \vee f \mid y \in X\} \subseteq F$ i elementi skupa Y su kompaktni u $\mathcal{F}$.

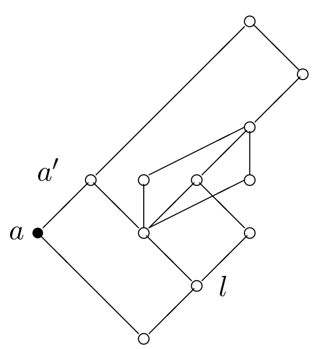
Dakle, problem predstavljivosti filtera $\mathcal{F}$ predstavljive mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ svodi se na pitanje: za koje $f \in L$ je filter $\uparrow f$ predstavljiva mreža? Kako predstavljivost zavisi od izbora elementa koji predstavlja dijagonalu, preciznije pitanje bi bilo sledeće: ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, za koji bi se element filtera $\uparrow f$ moglo zaključiti da je Δ-podesan? Ako je $l \leqslant a$, jedino pitanje koje ima smisla postaviti je da li a mora biti Δ-podesan u mreži $\uparrow l$, budući da se klase u ekvivalenciji skupa L definisanoj sa: $x \sim y \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$ mogu drastično promeniti ako zamenimo a bilo kojim drugim elementom. Odgovor na ovo pitanje je potvrdan:

Tvrđenje 3.1 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, on je Δ-podesan i u mreži $\uparrow b$, kad god je $b \leqslant a$, tj. kad je b najmanji element neke klase ekvivalencije definisane sa: $x \sim y \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$.*

Dokaz: Ako je b najmanji element u mreži, tvrđenje je trivijalno, pa možemo pretpostaviti da je $b \neq 0$.

Neka je $\mathcal{A} = (A, H)$ algebra, čija je mreža slabih kongruencija izomorfna sa $\mathcal{L}$ u izomorfizmu ϕ koji preslikava Δ u a. Isti izomorfizam slika Δ_B u b, za neki poduniverzim B algebre $\mathcal{A}$. Ako je $\mathcal{A}' = (A, F)$, pri čemu je $F = H \cup B$ (F se dobija dodavanjem svih elemenata skupa B kao konstanti skupu H svih operacija algebre $\mathcal{A}$), tada je $Sub\mathcal{A}' \cong [b, a]$ i $Cw\mathcal{A}' \cong \uparrow b$. ■

Sada pretpostavimo da je a Δ-podesan element u mreži $\mathcal{L}$, ali da $l \not\leqslant a$, tj. $a \notin \uparrow l$. Ovde bi imalo smisla postaviti sledeće pitanje: da li podesnost elementa $l \vee a$ proizilazi iz podesnosti elementa a? Ovde je odgovor negativan. Uočimo mrežu na slici 3.1. Ona je predstavljiva, tj. element a u njoj je Δ-podesan: Neka je $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, a $\mathcal{A} = (A, \{*, e, f\})$, gde je operacija * definisana tablicom:



Slika 3.1

$*$	a	b	c	d	e	f	g
a	b	a	c	d	d	d	g
b	b	b	c	d	d	d	g
c	c	c	c	d	d	d	g
d	d	d	d	c	a	a	c
e	e	e	e	c	b	a	d
f	f	f	f	c	a	b	e
g	c	a	b	d	e	f	f

Sada je:
$Sub\mathcal{A} = \{A, B\}$, gde je $B = A \setminus \{g\}$;
$Con\mathcal{A} = \{\Delta, A^2, \{a,b,c\}^2 \cup \Delta\}$;
$Con\mathcal{B} = \{\Delta_B, B^2, \{a,b\}^2 \cup \Delta_B, \{a,b,c\}^2 \cup \Delta_B, \{a,b\}^2 \cup \{e,f\}^2 \cup \Delta_B,$
$\{a,b,c\}^2 \cup \{d,e\}^2 \cup \Delta_B, \{a,b,c\}^2 \cup \{e,f\}^2 \cup \Delta_B, \{a,b,c\}^2 \cup \{d,f\}^2 \cup \Delta_B\}$.

Tako je mreža $Cw\mathcal{A}$ izomorfna mreži na Slici 3.1, pri čemu dijagonala odgovara elementu a te mreže, dakle a je Δ-podesan. Ali to ne važi za element $a' = a \vee l$ u mreži $\uparrow l$, jer uslov (4) teoreme 2.10 nije zadovoljen.

Dakle, u opštem slučaju, podesnost elementa a u mreži $\mathcal{L}$ ne povlači predstavljivost mreže $\uparrow l$ u slučaju kada $l \notin \downarrow a$. Ovo se može pripisati činjenici da se klase u ekvivalenciji skupa L definisanoj sa: $x \sim y \Leftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$, presečene sa $\uparrow l$, u opštem slučaju menjaju čak i ako zamenimo a sa $a' = a \vee l$, kao što pokazuje i navedeni primer u kojem smo, prelazeći sa a na a', dobili jednu klasu ekvivalencije više - od dve klase, dobili smo tri. Ovo se neće dešavati u analognoj situaciji sa glavnim idealima, kao što ćemo videti kasnije. Ukoliko umesto $a \vee l$ izaberemo neki drugi element za a', klase ekvivalencije mogu se u tolikoj meri promeniti, da nema smisla razmatrati, u opštem slučaju, da li će predstavljivost filtera proizići iz predstavljivosti polazne mreže, na način na koji smo gore opisali.

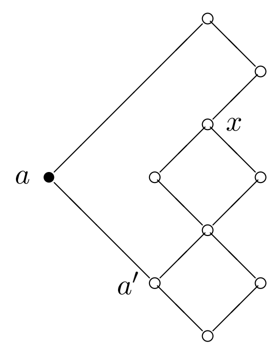
Ideal predstavljive mreže mora, kao i u slučaju sa filterom, biti glavni, da bi mogao biti predstavljiv: svaka predstavljiva mreža, budući algebarska, mora biti kompletna i imati najveći element, koji je ujedno i supremum ideala u polaznoj mreži. Obrnuto, svaki glavni ideal predstavljive (i stoga algebarske) mreže mora biti algebarski. Tako se pitanje predstavljivosti ideala predstavljive mreže svodi na sledeće: za koji element x mreže $\mathcal{L}$ predstavljivost ideala $\downarrow x$ proizilazi iz predstavljivosti mreže $\mathcal{L}$. Ili, preciznije: ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, koji element ideala $\downarrow x$ može biti Δ-podesan? Ako izaberemo da $a \wedge x$ predstavlja dijagonalnu relaciju, za razliku od slične situacije s filterom $\uparrow x$, klase ekvivalencije elemenata iz L koji su manji ili jednaki od x - u ekvivalenciji definisanoj sa $y \sim z \Leftrightarrow a \wedge y = a \wedge z$ - presečene sa $\downarrow x$ su upravo klase ekvivalencije skupa $\downarrow x$ - u ekvivalenciji definisanoj sa $y \sim z \Leftrightarrow (a \wedge x) \wedge y = (a \wedge x) \wedge z$. Bilo koji drugi izbor elementa koji bi predstavljao dijagonalu mogao bi dovesti do drastične promene klasa ekvivalencije polazne mreže, tako da se na ovaj način teško može govoriti o predstavljivosti ideala $\downarrow x$ u opštem slučaju.

Zbog svega rečenog, jedino pitanje koje ćemo razmatrati je sledeće: ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i $x \in L$, da li je $a \wedge x$ Δ-podesan u mreži $\downarrow x$? Odgovor je pozitivan, ako je element x najveći u klasi, tj. ako je $x = \overline{x} = \overline{x \wedge a}$; naime, već smo dokazali u drugom delu (lema 2.1) da važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 3.2 *Ako je a Δ-podesan element u mreži $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i x element od L, takav da je $x = \overline{x}$, tada je $a \wedge x$ Δ-podesan u mreži $\downarrow x$.*

Međutim, ako element x nije najveći u klasi, tj. za njega ne važi da je $\overline{x} = x$, element $a \wedge x$ ne mora, u opštem slučaju biti Δ-podesan u mreži $\downarrow x$. Uočimo, naime, mrežu na slici 3.2. Ona je predstavljiva, tj. element a je Δ-podesan: neka je $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ i $\mathcal{A} = (A, \{*, b\})$, pri čemu je operacija * definisana tablicom:

$*$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	b	b	a	f
b	b	a	a	b	b	a
c	d	d	e	e	e	f
d	d	d	e	e	e	a
e	d	d	c	c	e	a
f	b	d	a	a	c	f



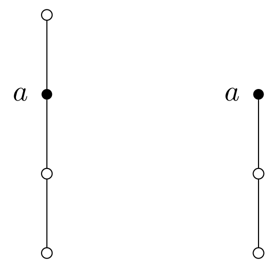
Slika 3.2

Uočimo da je $Sub\mathcal{A} = \{A, \{a, b\}, \{a, b, c, d, e\}\}$. Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ podalgebre od $\mathcal{A}$ sa nosačima $B = \{a, b, c, d, e\}$ i $C = \{a, b\}$. Sada imamo:

$$Con\mathcal{B} = \{\Delta_B, B^2, C^2 \cup \Delta_B, C^2 \cup \{c, e\}^2 \cup \Delta_B, C^2 \cup \{c, d\}^2 \cup \Delta_B, C^2 \cup \{c, d, e\}^2\};$$

$$Con\mathcal{C} = \{\Delta_C, C^2\}.$$

Dobijemo da je mreža $Cw\mathcal{A}$ izomorfna mreži na slici 3.2, i da je element a na slici Δ-podesan, jer odgovara dijagonalnoj relaciji u tom izomorfizmu. U isto vreme $a \wedge x$ nije Δ-podesan element u mreži $\downarrow x$, jer uslov tvrdjenja 2.2 nije zadovoljen u tom slučaju. Samim tim, ni uslovi (3) i (4) teoreme 2.10 nisu zadovoljeni, budući da ta dva uslova predstavljaju uopštenja tvrđenja 2.2. Dakle, uslovi (3) i (4) teoreme 2.10 ne moraju biti sačuvani prelaskom sa mreže na njen ideal $\downarrow x$, ako $x \neq \overline{x}$.



$*$	a	b
a	a	b
b	b	a

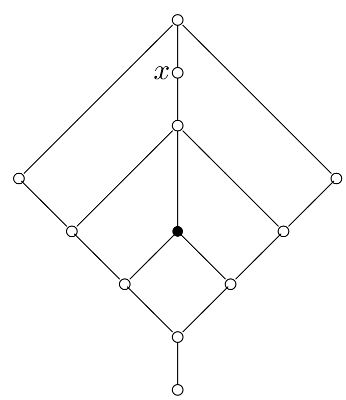
Slika 3.3

Ni uslov (2) teoreme 2.10 ne mora biti očuvan u idealu $\downarrow x$, kao što se vidi na slici 3.3: prikazana mreža je predstavljiva, npr. pomoću grupoida $\mathcal{A} = (A, *)$, gde je $A = \{a, b\}$, a $*$ je zadata tablicom na istoj slici; međutim, ideal $\downarrow a$ ove mreže nije predstavljiv, tj. a nije Δ-podesno u ovom idealu, jer ne zadovoljava uslov (2) teoreme 2.10.

Na kraju, ni uslov (1) teoreme 2.10 ne mora ostati očuvan u idealu $\downarrow x$, kada je $x \neq \overline{x}$. Uočimo mrežu na slici 3.4. Ona je predstavljiva algebrom $\mathcal{A} = (A, *, f)$, gde je $A = \{a, b, c, d, e\}$ a operacije $*$ i f su predstavljene tablicama:

$*$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	b	c	c	e	d
c	c	b	b	e	e
d	e	b	b	d	d
e	e	c	b	e	d

f	a	b	c	d	e
	a	a	a	a	a



Slika 3.4

Međutim, ideal $\downarrow x$ nije predstavljiv, jer u njemu nije zadovoljen uslov (1) teoreme 2.10.

Dakle, ne samo da ideal $\downarrow x$ predstavljive mreže ne mora biti predstavljiv, nego ne mora sačuvati nijedan od kriterijuma sadržanih u teoremi 2.10, ako je $x \neq \overline{x}$.

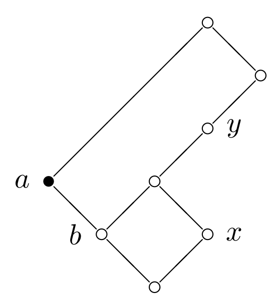
Sada se možemo pozabaviti pitanjem predstavljivosti konveksne podmreže $\mathcal{M}$ predstavljive mreže $\mathcal{L}$. Da bi jedna takva mreža bila predstavljiva, mora biti algebarska i imati najveći i najmanji element. Ako je b najmanji, a c najveći element of $\mathcal{M}$, imamo da je $\mathcal{M} = [b, c]$, tako da je problem predstavljivosti konveksne podmreže predstavljive mreže $\mathcal{L}$ ekvivalentan problemu predstavljivosti intervala u predstavljivoj mreži $\mathcal{L}$. Na osnovu tvrđenja 3.1 i 3.2 dobijamo sledeće:

Tvrđenje 3.3 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, $b \in \downarrow a$ i $c \in \uparrow b$, takav da je $c = \overline{c}$, tada je $a \wedge c$ Δ-podesan element podmreže [b,c].*

Dokaz: Na osnovu tvrđenja 3.1 zaključujemo da je a Δ-podesan element filtera $\mathcal{B} = \uparrow b$. Kako je $c = \overline{c}$ u mreži $\mathcal{L}$, a time i u podmreži $\mathcal{B}$, na osnovu tvrđenja 3.2 imamo da je $a \wedge c$ Δ-podesan element ideala $\downarrow c$ u mreži $\mathcal{B}$. Taj ideal je upravo interval [b,c] mreže $\mathcal{L}$, iz čega sledi ovo tvrđenje. ■

Na osnovu gornjih razmatranja o (ne)predstavljivosti filtera i ideala možemo neposredno zaključiti da ni za jedan drugi tip intervala, osim onog iz tvrđenja 3.3, ne važi u opštem slučaju da njegova predstavljivost proizilazi iz predstavljivosti polazne mreže. To naravno ne znači da bilo koji drugi interval predstavljive mreže neće biti predstavljiv, već prosto da njegovo predstavljanje, ako postoji, nije povezano sa predstavljanjem polazne mreže. Uzmimo npr. bilo koji podinterval predstavljive mreže koji je konačan lanac. On će, na osnovu posledice 3.21 i teoreme 3.23 imati bar dva netrivijalna predstavljanja. Uočimo mrežu na slici 3.5 i njen interval $[x, y]$. Mreža je predstavljiva, tj. element a je Δ-podesan. Naime, a predstavlja dijagonalu u mreži $Cw\mathcal{A}$, gde je $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d, e\}, \{a, *\})$, gde je $*$ operacija zadata tablicom na slici 3.5. Interval $[x, y]$ je predstavljiv, štaviše svi elementi su mu Δ-podesni, iako niti je x najmanji, niti je y najveći element u svojoj klasi (u ekvivalenciji $x \rho y \Leftrightarrow x \wedge a = y \wedge a$).

$*$	a	b	c	d	e
a	b	b	c	c	d
b	a	a	c	c	e
c	c	c	d	d	b
d	d	d	c	c	e
e	a	d	b	a	c



Slika 3.5

Neki slučajevi predstavljivih podurećenja i podmreža

Izvesnim pojednostavljivanjem predstavljive mreže možemo dobiti mrežu koja će takođe biti predstavljiva:

Teorema 3.4 *Ako je a* Δ*-podesan element mreže* $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$*, a b kompaktan element ideala* $\downarrow a$*, tada je a* Δ*-podesan element mreže* $\mathcal{L}' = (L', \vee, \wedge)$*, gde je* $L' = L \setminus \cup\{(c, \bar{c}) \mid c \in [b, a]\}$*, a poredak u mreži* $\mathcal{L}'$ *je isti kao u mreži* $\mathcal{L}$ *(*$\mathcal{L}'$*, viđen kao poset je potposet mreže* $\mathcal{L}$*, viđene kao poset).*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A, H)$ algebra čija je mreža slabih kongruencija izomorfna sa $\mathcal{L}$ u izomorfizmu koji preslikava Δ u a, a Δ_B u b. Pošto je b kompaktan, algebra $\mathcal{B} = (B, H)$ je generisana nekim konačnim skupom $X = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Neka je $\mathcal{A}' = (A, H \cup \{f_a \mid a \in A\})$, pri čemu je f_a operacija dužine $(n + 2)$ definisana na sledeći način:

$$f_a(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = \begin{cases} a, & X \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\} \wedge (x_1 = a) \\ x_2, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Sada neka je $\mathcal{A}' = (A, H \cup \{g_f \mid f \in F\})$. Dokazujemo da je $Cw\mathcal{A}' \cong \mathcal{L}'$:

Primetimo da je bilo koji podskup od A zatvoren za svaku od operacija f_a, tako da je svaki poduniverzum od $\mathcal{A}$ ujedno i poduniverzum od $\mathcal{A}'$, i obrnuto. Takođe, važi sledeće

$$[\Delta_C, C^2]_{Cw\mathcal{A}} = [\Delta_C, C^2]_{Cw\mathcal{A}'},$$

za sve poduniverzume C algebre $\mathcal{A}$ takve da $C \not\supseteq B$.

Neka je C nadskup od B i ujedno poduniverzum algebre $\mathcal{A}$, sa $f|_C$ obeležićemo restrikciju preslikavanja proizvoljne funkcije f na C, a sa $F|_C$ skup restrikcija funkcija iz skupa F na skup C. Neka je $\rho \in Con\mathcal{C}'$, gde je

$$\mathcal{C}' = (C, H|_C \cup \{f_a|_C \mid a \in A\}),$$

tada je $\rho = \Delta_C$ ili $\rho = C^2$. Naime, ako je $\rho \neq \Delta_C$, tada postoje $x, y \in C$, takvi da je $x \neq y$ i $x\rho y$. Ali tada je $\rho = C^2$, jer $b_1, b_2, \ldots, b_n \in C$ i za svako $z \in C$ važi:

$$f_x(x, z, b_1, b_2, \ldots, b_n)\rho f_x(y, z, b_1, b_2, \ldots, b_n), \text{ tj. } x\rho z.$$

Dakle, $\mathcal{L}' \cong Cw\mathcal{A}'$. ■

Ako u prethodnoj teoremi izaberemo $b = a$, dobijemo sledeću posledicu:

Posledica 3.5 *Ako je a Δ-podesan i kompaktan element ideala $\downarrow a$ u mreži $\mathcal{L}$, tada je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}' = (L', \vee, \wedge)$ koja je podurеđenje od $\mathcal{L}$, a $L' = L \setminus (a, \bar{a})$.*

Ova posledica je značajna jer je povezana sa predstavljivošću algebarske mreže pomoću proste algebre. Naime, da bi neka algebarska mreža bila predstavljiva kao mreža slabih kongruencija neke proste algebre, pri čemu je element a u njoj Δ-podesan, potrebno je da interval $(a, 1)$ bude prazan. Na osnovu prethodne posledice dobijemo i jedan dovoljan uslov da bi neka algebarska mreža $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ bila predstavljiva pomoću proste algebre: dovoljno je da postoji predstavljiva mreža $\mathcal{L}' = (L', \vee, \wedge)$, takva da je $L' \supseteq L$ i $L' \setminus (a, 1) = L$, a poredak na L je isti kao na L'. Ovo je ujedno i potreban uslov, jer ako je mreža $\mathcal{L}$ predstavljiva pomoću proste algebre, onda za $L' = L$ dobijemo predstavljivu mrežu $\mathcal{L}'$, gde je $L' \setminus (a, 1) = L' = L$.
Prethodnu teoremu, kao i njenu posledicu moguće je uopštiti. Da dokažemo narednu teoremu definišimo ρ-projekciju:

Ako je f preslikavanje $f : S \to S$ i ρ relacija ekvivalencije u skupu S, kažemo da je f ρ-projekcija, ako zadovoljava uslov:

$(\forall x, y \in S)[x\rho y \Rightarrow (f(y) = f(x) \text{ i } f(x)\rho x)]$.

Teorema 3.6 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, b kompaktan element ideala $\downarrow a$ i $d \in [b, \bar{b}]$, tada skup $L' = L \setminus \cup\{(c, \bar{c}) \setminus [d \vee c, \bar{c}] \mid c \in [b, a]\}$ čini mrežu u odnosu na poredak iz $\mathcal{L}$, a element a je Δ-podesan u toj mreži.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A, H)$ algebra, čija je mreža slabih kongruencija izomorfna sa $\mathcal{L}$, u izomorfizmu u kome se Δ preslikava u a, Δ_B u b, a neko $\rho \in ConB$ u d. Pošto je b kompaktan element mreže $\downarrow a$, algebra $\mathcal{B}$ je generisana nekim konačnim skupom $X = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$.

Neka je $F = \{f : A \to A \mid f_{|B}$ je ρ-projekcija i $f(x) = x$ za $x \in A \setminus B\}$

Za $f \in F$ definišemo operaciju na A dužine $n + 3$ na sledeći način:

$$g_f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+3}) = \begin{cases} f(x_1), & X \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+3}\} \wedge (x_2 = x_3) \\ x_1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada, neka je $\mathcal{A}' = (A, H \cup \{g_f \mid f \in F\})$. Dokazujemo da je $Cw\mathcal{A}' = \mathcal{L}'$:

Primetimo da je bilo koji poduniverzum od $\mathcal{A}$ zatvoren za sve operacije g_f, jer bilo koji poduniverzum koji sadrži X sadrži i B i zatvoren je za sve ρ-projekcije, i za bilo koje $f \in F$. Stoga je svaka podalgebra od $\mathcal{A}$ takođe i podalgebra od $\mathcal{A}'$, i obrnuto. Takođe, važi sledeće

$$[\Delta_C, C^2]_{Cw\mathcal{A}} = [\Delta_C, C^2]_{Cw\mathcal{A}'},$$

za sve poduniverzume C algebre $\mathcal{A}$, takve da $C \not\supseteq B$.

Ako je $C \supseteq B$ poduniverzum od $\mathcal{A}$, i $\tau \in Con\mathcal{C}'$, pri čemu je

$$\mathcal{C}' = (C, H|_C \cup \{g_f|_C \;\mid f \in F\}),$$

tada $\tau = \Delta_C$ ili $\tau \supseteq \rho$; naime, ako $\tau \neq \Delta_C$, onda postoje $x, y \in C$, takvi da je $x \neq y$ i $x\tau y$; ali tada $\tau \supseteq \rho$:

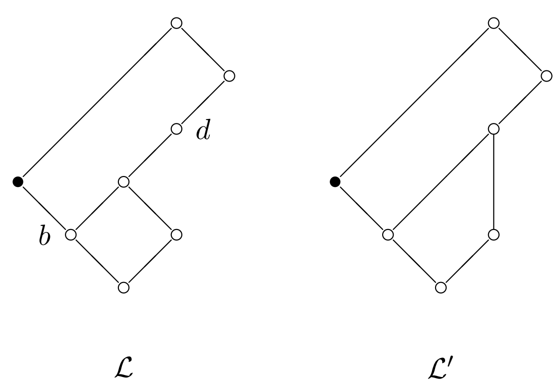
$$c\rho d \Rightarrow f(c) = d \text{ za neko } f \in F \Rightarrow$$

$$(\exists f \in F) g_f(c, x, y, b_1, \ldots, b_n) \tau g_f(c, x, x, b_1, \ldots, b_n) \Rightarrow c\tau d.$$

Obrnuto, ako je $\tau \in Con\mathcal{C}$ i $\tau \supseteq \rho$, tada je τ saglasno sa svim operacijama na F, tako da je $\tau \in Con\mathcal{C}'$.

Dakle, $\mathcal{L}' \cong Cw\mathcal{A}'$. ■

Ovde nismo dokazivali, kao ni u teoremi 3.4, da je $\mathcal{L}'$ mreža, jer to sledi iz činjenice da su odgovarajuće slabe kongruencije algebre $\mathcal{A}$ upravo slabe kongruencije iz $Cw\mathcal{A}'$, koje čine mrežu u odnosu na isti poredak. Time smo dokazali da je $\mathcal{L}'$, viđen kao poset, jedan potposet od $\mathcal{L}$, čija predstavljivost kao mreže sledi iz predstavljivosti $\mathcal{L}$. U opštem slučaju, ova mreža ne mora biti podmreža od $\mathcal{L}$. Pogledajmo, na primer mrežu $\mathcal{L}$ na slici 3.6, i njoj odgovarajuću mrežu $\mathcal{L}'$, prema prethodnoj teoremi:



Slika 3.6

Mreža $\mathcal{L}'$ je kao uređen skup podUređenje od mreže $\mathcal{L}$, viđene kao uređen skup, ali nije njena podmreža. Međutim, ukoliko iz mreže $\mathcal{L}'$ uklonimo sve intervale oblika $[c, \overline{c}]$, gde je $c \in \downarrow a \backslash \uparrow b$, dobićemo jednu predstavljivu mrežu, koja je podmreža od $\mathcal{L}$. Naime, iz prethodne teoreme izvodimo sledeću posledicu:

Posledica 3.7 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, $b \leqslant a$ i $d \in [b, \bar{b}]$, tada je a Δ-podesan i u podmreži $\mathcal{L}' = (L', \vee, \wedge)$ mreže $\mathcal{L}$, gde je $L' = [b, a] \cup \uparrow d$.*

Dokaz: Ako je $\mathcal{A}' = (A, H \cup B)$, tada je, na osnovu tvrđenja 3.1, element a Δ-podesan u filteru $\uparrow b$. Sada primenimo prethodnu teoremu na mrežu $\mathcal{L}_1$, koja je jednaka filteru $\uparrow b$, i elemente a i b. Pošto je b najmanji element mreže $\mathcal{L}_1$, on je kompaktan u njoj, pa ako je $d \in [b, \bar{b}]$, a je Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}'$ sa nosačem

$$L' = L_1 \setminus \{(c, \bar{c}) \setminus [d \vee c, \bar{c}] \mid c \in [b, a]\}$$

- gde je L_1 nosač mreže $\mathcal{L}_1$ - i poretkom jednakim poretku u $\mathcal{L}_1$.

Primetimo da je $L' = [b, a] \cup \uparrow d$: ako je $x \in L'$, tada je $x \in L_1$, tj. $x \geqslant b$, ali

$$x \notin (x \wedge a, \overline{x}) \setminus [d \vee (x \wedge a), \overline{x}];$$

kako je $x \in [x \wedge a, \overline{x}]$, mora biti

$$x = x \wedge a \leqslant a,\ x = \overline{x} \text{ ili } x \in [d \vee (x \wedge a), \overline{x}],$$

a u svakom od tih slučajeva $x \in [b, a] \cup \uparrow d$; obrnuto, ako je $x \in [b, a] \cup \uparrow d$, tada je $x \in [b, a]$ ili $x \in \uparrow d$; ako $x \in [b, a]$, tada

$$x \in \uparrow b = L_1,\ \text{ali } x \notin (c, \overline{c}) \text{ ni za jedno } c \in [b, a],\ \text{pa } x \in L';$$

ako $x \in \uparrow d$, tada $x \in L'$, jer $x \geqslant d \geqslant b$, pa

$$x \in L_1 \text{ i } x \in [(a \wedge x) \vee d, \overline{x}],\ \text{pa } x \notin (a \wedge x, \overline{x}) \setminus [(a \wedge x) \vee d, \overline{x}];$$

sa druge strane, $x \in [c, \overline{c}]$ samo ako $c = x \wedge a$; zato

$$x \notin \{(c, \bar{c}) \setminus [d \vee c, \bar{c}] \mid c \in [b, a]\},$$

pa $x \in L'$.

Skup L' je zatvoren za operacije $\vee$ i $\wedge$ mreža $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}$, tako da je $\mathcal{L}'$ podmreža mreža $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}$. ■

Još jedan slučaj kada se predstavljivost podurеđenja neke mreže izvodi iz predstavljivosti polazne mreže opisan je u narednoj teoremi:

Teorema 3.8 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i $d \in \uparrow a$. Skup $L' = \downarrow d \cup \{\bar{b} \mid b \leqslant a\}$ predstavlja mrežu u odnosu na poredak nasleđen iz mreže $\mathcal{L}$, a element a je Δ-podesan i u toj mreži.*

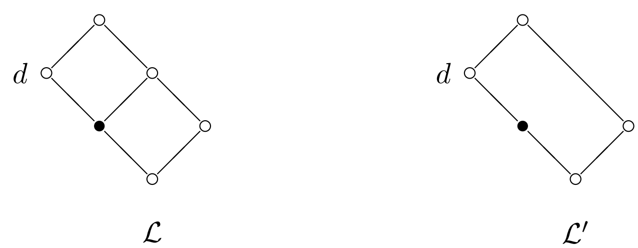
Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A, H)$ algebra takva da je $Cw\mathcal{A} \cong \mathcal{L}$ u izomorfizmu koji slika Δ i ρ u a i d. Neka je $\mathcal{O} = \{O_i \mid i \in I\}$ skup klasa kongruencije ρ. Za svako $i \in I$ definišemo operaciju dužine 3 na sledeći način:

$$f_i(x, y, z) = \begin{cases} y & x \in O_i \\ z & x \notin O_i. \end{cases}$$

Sada, neka je $\mathcal{A}' = (A, H \cup \{f_i \mid i \in I\})$. Dokažimo da je $Cw\mathcal{A}' \cong \mathcal{L}'$.

Ako je $\tau \in Cw\mathcal{A}$, neka je $B = \{x \in A \mid x\tau y$ za neko $y \in A\}$. Ako $\tau \subseteq \rho$, tada je τ saglasna sa operacijom f_i za svako $i \in I$, zato $\tau \in Cw\mathcal{A}'$. Ako, pak, $\tau \nsubseteq \rho$, tada postoje x, x' takvi da je $(x, x') \in \tau \setminus \rho$. Ako je $x \in O_i$, tada $x' \notin O_i$. Ako je τ kompatibilna sa operacijama f_i, tada za svaka dva $y, z \in B$ imamo $f_i(x, y, z)\tau f_i(x', y, z)$, tj. $(\forall y, z \in B) y\rho z$, dakle $\tau = B^2$. ■

U prethodnoj teoremi nismo dokazivali da je zadati skup L' u odnosu na poredak iz $\mathcal{L}$ mreža, jer to sledi iz dokaza, jer smo dobili da je $Cw\mathcal{A}' \cong \mathcal{L}'$. Ova mreža, u oznaci $\mathcal{L}'$, ne mora biti podmreža polazne mreže, kao što se vidi iz primera mreže i odgovarajućeg potporetka na slici 3.7:



Slika 3.7

Poset $(L', \leqslant)$ predstavlja mrežu u odnosu na poredak nasleđen iz mreže $\mathcal{L}$, ali nije podmreža od $\mathcal{L}$. Pod određenim uslovima, ipak, skup L' iz prethodne teoreme biće zatvoren za operacije u mreži $\mathcal{L}$, tako da će $\mathcal{L}'$ biti podmreža polazne mreže. Tako dolazimo do jednog slučaja kada se predstavljivost podmreže izvodi iz predstavljivosti polazne mreže.

Posledica 3.9 *Neka je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i $d \in L$ takav da je $d \geq a$. Neka $\mathcal{L}$ zadovoljava sledeći uslov: ako je $b \in [c, a]$ i $b \vee \bar{c} < \bar{b}$, tada $\bar{c} \leqslant d$. Skup $L' = \downarrow d \cup \{\bar{b} \mid b \leqslant a\}$ je zatvoren za operacije u mreži $\mathcal{L}$, i element a je Δ-podesan element podmreže $\mathcal{L}' = (L', \vee, \wedge)$ mreže $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Na osnovu prethodne teoreme bilo bi dovoljno dokazati da je skup L' zatvoren za operacije u mreži $\mathcal{L}$.

Neka su $l, m \in L'$.

Ako $l \leqslant d$ i $m \leqslant d$, tada $l \wedge m \leqslant l \vee m \leqslant d$, tako da $l \wedge m$ i $l \vee m$ leže u skupu L'.

Ako je $l = \bar{c}$, $(c \leqslant a)$, neka je $b = m \vee l = m \vee \bar{c}$. Važi sledeće:

(*) $\bar{b} \geq b \geq \bar{c} \vee (b \wedge a)$

$b \geq \bar{c} \geq c \Rightarrow (b \wedge a) \geq c \Rightarrow \bar{c} \vee (b \wedge a) \leqslant \bar{b}$

Sada, imamo dva podslučaja:

ako $\bar{c} \vee (b \wedge a) = \bar{b}$, na osnovu (*) imamo $\bar{b} \geq b \geq \bar{c} \vee (b \wedge a) = \bar{b} \Rightarrow b = \bar{b} \Rightarrow b \in L'$;

ako, pak, $\bar{c} \vee (b \wedge a) < \bar{b}$, tada $\bar{c} \leqslant d$, na osnovu datog uslova; ako $m \leqslant d$, tada $m \vee l = m \vee \bar{c} \leqslant d$; ako $m \nleqslant d$, tada $m = \bar{p}$, pa na isti način dobijemo da je $b = \bar{b} \in L'$ ili $\bar{p} \leqslant d$. Stoga je $m \vee l \in L'$ u svakom slučaju.

S druge strane, $l \wedge m \leqslant d$ kadgod $l \leqslant d$ ili $m \leqslant d$. Ako $l \nleqslant d$ ili $m \nleqslant d$, tada $l = \bar{c}$ i $m = \bar{b}$, stoga $m \wedge l = \bar{n} \in L'$, $n = b \wedge c$. ■

Sledeća posledica predstavlja opštiji rezultat od rezultata iz prethodne teoreme i posledice, jer u njoj ne pretpostavljamo da je $d \geq a$.

Posledica 3.10 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, a $d \in L$, tada je $d \wedge a$ Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}'$, čiji nosač je $L' = \downarrow d \cup \{\bar{b} \mid b \leqslant d \wedge a\}$, a poredak u $\mathcal{L}'$ je isti kao u mreži $\mathcal{L}$. Mreža $\mathcal{L}'$ je takođe podmreža od $\mathcal{L}$, ako sledeća implikacija važi u mreži $\mathcal{L}$: ako je $b \in [c, a \wedge d]$ i $b \vee \bar{c} < \bar{b}$, onda $\bar{c} \leqslant d$.*

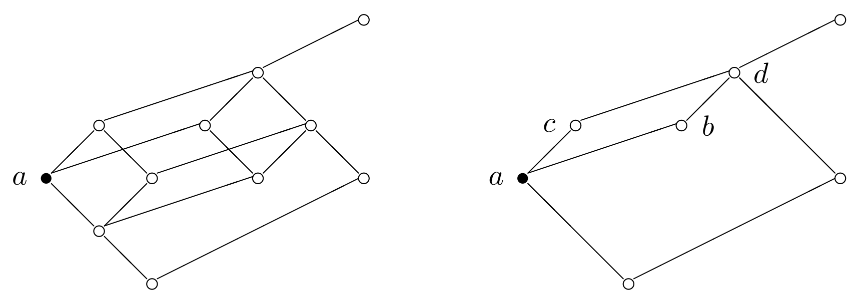
Dokaz: Na osnovu tvrđenja 3.2, $d \wedge a$ je Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}_1 = \downarrow \bar{d}$. Sada, primenjujući teoremu 3.8 na mrežu $\mathcal{L}_1$ i njene elemente $d \wedge a$ i $d \geq d \wedge a$, dobijemo da je $d \wedge a$ Δ-podesan u mreži $\mathcal{L}'$, čiji je nosač skup $L' = \{x \in L_1 \mid x \leqslant d\} \cup \{\bar{b} \mid b \leqslant d \wedge a\} = \{x \in L \mid x \leqslant d\} \cup \{\bar{b} \mid b \leqslant d \wedge a\}$, a poredak u $\mathcal{L}'$ je isti kao poredak u mrežama $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}$.

Primenom prethodne posledice, dokazujemo drugo tvrđenje ove posledice. ■

Kombinacijom teoreme 3.6 i posledice 3.10 dobijemo sledeću opštiju posledicu:

Posledica 3.11 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i $b, c, d, e \in L$, takvi da je $c \leqslant b \leqslant a$, $d \leqslant e$, $d \in [c, \bar{c}]$ i $e \in [b, \bar{b}]$, tada skup $\mathcal{L}' = [d, e] \cup [c, b] \cup \{\bar{x} \mid x \in [c, b]\}$ čini mrežu u odnosu na poredak nasleđen iz $\mathcal{L}$,* *a b je Δ-podesan element u toj mreži. Ta mreža je ujedno i podmreža od $\mathcal{L}$, ukoliko važi sledeća implikacija: ako je $t \in [c, b]$ i $t \vee \overline{c} < \overline{t}$, onda je $\overline{c} \leqslant e$.*

Ako je $\mathcal{L}$ predstavljiva mreža i a Δ-podesan element u njoj, mogli bismo se pitati da li je njena podmreža, koja se sastoji od nekih blokova ekvivalencije (koja je ujedno i kongruencija mreže mreže zadate sa $x \sim y \Leftrightarrow x \wedge a = y \wedge a$) takođe predstavljiva. Ovo bi se moglo očekivati, budući da se klase u ovoj podmreži ne razlikuju od klasa polazne mreže, tako da je čitava struktura očuvana. Ipak, u opštem slučaju, predstavljivost polazne mreže ne povlači predstavljivost ovakve podmreže. Uočimo npr. mrežu $\mathcal{L}$ na slici 3.8:



mreža $\mathcal{L}$ **mreža $\mathcal{L}'$**

Slika 3.8

Element a u mreži 3.8 je Δ-podesan: Neka je $\mathcal{A} = (A, \{f, g, h\})$, pri čemu je $A = \{a, b, c, d, e\}$, a f, g i h su unarne operacije zadate tablicama:

f	a	b	c	d	e
	c	c	a	c	e

g	a	b	c	d	e
	c	b	b	c	e

h	a	b	c	d	e
	a	b	c	d	d

Mreža $Cw\mathcal{A}$ je izomorfna mreži na slici 3.8, pre čemu dijagonalnoj relaciji Δ odgovara element a. Dakle, a je Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$. Ali a nije Δ-podesan u podmreži $\mathcal{L}'$ na slici 3.8 koju čine klase ekvivalencije najvećeg i najmanjeg elementa u idealu $\downarrow a$, jer uslov (4) teoreme 2.10 nije zadovoljen u toj mreži: naime, $Ext_0^a(0) = \{x \in [a, 1] \mid x \wedge \overline{0} = 0\} = \{a, b, c\}$, $Ext_0^a(\overline{0}) = \{x \in [a, 1] \mid x \wedge \overline{0} = 0\} = \{d, 1\}$ a prema uslovu (4) te teoreme morao bi postojati element t intervala $[a, 1)$ takav da skupovi $\{x \in Ext_0^a(0) \mid x \leqslant t\}$ i

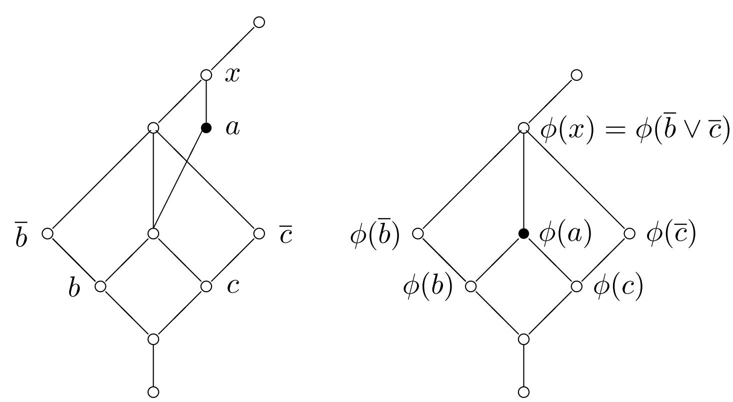
$\{x \in Ext_0^a(\overline{0}) \mid x \leqslant t\}$ imaju najveći element; takvo t, međutim, ne postoji.

Dakle, ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i mreža $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ podmreža ideala $\downarrow a$, on ne mora biti Δ-podesan u podmreži $\mathcal{K} = (K, \vee, \wedge)$ mreže $\mathcal{L}$, takvoj da je $K = \{[b, \overline{b}] \mid b \in M]\}$.

3.2 Homomorfne slike, zatvorenja, otvorenja

Kada ispitujemo da li je homomorfna slika predstavljive mreže predstavljiva, najprirodnije je problem postaviti ovako: ako je a Δ-podesan element neke mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ proizvoljna mreža i $\phi : L \mapsto M$ mrežni epimorfizam, da li je $\phi(a)$ Δ-podesan u mreži $\mathcal{M}$?

Homomorfna slika mreže, kao i homomorfna slika bilo koje algebre je, na neki način, jednostavnija od polazne mreže i pravilnija je od nje. To bi nas moglo navesti na pretpostavku da je homomorfna slika predstavljive mreže predstavljiva. Međutim, to nije pravilo. Teško je naći bilo kakvo opštije pravilo kada bi mrežni homomorfizam proizvodio predstavljivu mrežu od polazne predstavljive mreže. Mrežni homomorfizam ne mora, osim kodistributivnosti, sačuvati ni jedan do sada poznati uslov koji mora zadovoljavati Δ-podesan element u mreži. Pogledajmo, na primer, mreže na slici 3.9. Element koji je Δ-podesan, ili za koji ispitujemo da li je Δ-podesan, obeležavaćemo na slikama nadalje ispunjenim kružićem.



Slika 3.9

Desna mreža je homomorfna slika leve mreže u homomorfizmu određenom sa $\Phi(a) = b \vee c$; $\Phi(x) = \overline{b} \vee \overline{c}$; $\Phi(z) = z$ za sve $z \neq x, a$. Element a u mreži sleva zadovoljava sve dosad poznate uslove za Δ-podesan element, štaviše možemo dokazati da je Δ-podesan, jer odgovara elementu Δ u mreži $Cw\mathcal{A}$, gde je $\mathcal{A} = (A, *)$, $A = \{a, b, c, d\}$, a $*$ je binarna operacija zadata tablicom:

$*$	a	b	c	d
a	a	a	c	d
b	a	a	b	d
c	c	a	a	d
d	b	c	a	c

Međutim, element $\phi(a)$ u mreži zdesna ne zadovoljava uslov (1) teoreme 2.10. Ovu mrežu možemo posmatrati i kao podurеđenje mreže sleva, a ϕ kao preslikavanje te mreže u sebe samu. Sada je jednostavno proveriti da ϕ predstavlja ne samo homomorfizam, već i otvorenje, tj. zadovoljava sledeće uslove:

(i) $\phi(x) \leqslant x$;
(ii) $x \leqslant y \Rightarrow \phi(x) \leqslant \phi(y)$;
(iii) $\phi(\phi(x)) = \phi(x)$.

Ovo otvara interesantno pitanje predstavljivosti podurеđenja neke mreže, koje ujedno predstavlja sliku te mreže u nekom otvorenju. Isto pitanje možemo postaviti i za zatvorenje, preslikavanje definisano dualno otvorenju, tj. ono preslikavanje ψ koja zadovoljavaju uslove:

(i) $\psi(x) \geqslant x$;
(ii) $x \leqslant y \Rightarrow \psi(x) \leqslant \psi(y)$;
(iii) $\psi(\psi(x)) = \psi(x)$.

Razmotrićemo da li je slika predstavljive mreže u nekom otvorenju predstavljiva. Ovaj problem ima dodirnih tačaka sa problemom predstavljivosti homomorfne slike, u meri u kojoj su otvorenja povezana sa homomorfizmima. Zato ćemo istražiti i tu vezu, sličnost između otvorenja i homomorfizma. Ako je $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ polazna mreža, slika te mreže u otvorenju, u odnosu na poredak nasleđen iz $\mathcal{L}$, predstavlja mrežu $\mathcal{L}' = (L', \underline{\vee}, \underline{\wedge})$, pri čemu je $L' = \{x \in L \mid \phi(x) = x\}$, a $\underline{\wedge}$ i $\underline{\vee}$ su povezane sa operacijama u polaznoj mreži na sledeći način:

$$\mathbf{x} \underline{\wedge} \mathbf{y} = \phi(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \text{ (jer } z \in L' \text{ i } z \leqslant x, y \Rightarrow z \leqslant x \wedge y \Rightarrow z = \phi(z) \leqslant \phi(x \wedge y));$$

$$\mathbf{x} \underline{\vee} \mathbf{y} = \mathbf{x} \vee \mathbf{y} \text{ (jer } z \geqslant x, y \Rightarrow z \geqslant x \vee y, \text{ a } x \vee y \in L', \text{ jer}$$

$$\phi(x \vee y) \leqslant x \vee y = \phi(x) \vee \phi(y) \leqslant \phi(x \vee y), \text{ pa } \phi(x \vee y) = x \vee y)$$

.

Preslikavanje koje je otvorenje ne mora u opštem slučaju biti i mrežni homomorfizam (kao što je to u primeru na slici 3.9). Međutim, ako otvorenje posmatramo kao preslikavanje L na L', ono predstavlja $\wedge$-homomorfizam, tj. saglasno je sa operacijom $\wedge$:

$$\phi(x \wedge y) \leqslant \phi(x), \phi(y), \text{ pa } \phi(x \wedge y) \leqslant \phi(x) \wedge \phi(y);$$

zato

$$\phi(\phi(x \wedge y)) \leqslant \phi(\phi(x) \wedge \phi(y)), \text{ tj. } \phi(x \wedge y) \leqslant \phi(\phi(x) \wedge \phi(y));$$

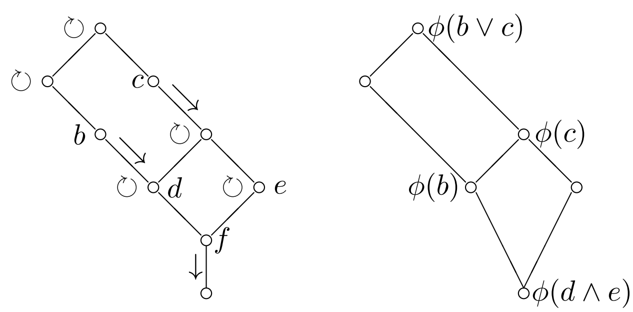
obrnuta nejednakost važi zato što

$$\phi(x) \wedge \phi(y) \leqslant x \wedge y, \text{ pa } \phi(x \wedge y) \geqslant \phi(\phi(x) \wedge \phi(y)),$$

tako da dobijemo jednakost:

$$\phi(x \wedge y) = \phi(x) \underline{\wedge} \phi(y).$$

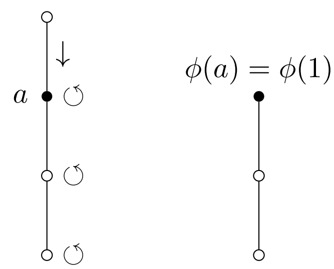
Ako, pak, otvorenje posmatramo kao preslikavanje mreže $\mathcal{L}$ u nju samu, tada ono ne mora biti $\wedge$-homomorfizam; u svakom slučaju, ne mora biti $\vee$-homomorfizam - bez obzira da li se radi o preslikavanju $\mathcal{L}$ u $\mathcal{L}$, ili $\mathcal{L}$ u $\mathcal{L}'$; to se sve može uočiti na slici 3.10 - na njoj je petljom označeno kada se element preslikava u sebe, dok je strelicama prikazano preslikavanje elementa u susedni element. Mreža zdesna predstavlja sliku u ovom preslikavanju, koje je otvorenje. Primetimo da ϕ, kao preslikavanje mreže u samu sebe, nije saglasno sa $\wedge$: $0 = \phi(d \wedge e) \neq \phi(d) \wedge \phi(e) = d \wedge e = f$; takođe, bez obzira da li ϕ posmatramo kao preslikavanje u $\mathcal{L}$ ili u $\mathcal{L}'$, ono nije saglasno sa $\vee$: $1 = b \vee c = \phi(b \vee c) \neq \phi(b) \vee \phi(c) = \phi(c)$.



Slika 3.10

Vratimo se na pomenuti primer na slici 3.9. On pokazuje da slika predstavljive mreže u otvorenju, u odnosu na poredak nasleđen iz polazne mreže, ne mora biti predstavljiva mreža, tačnije da je slika Δ-podesnog elementa u otvorenju ne mora biti Δ-podesan element u pomenutoj slici te mreže, jer uslov (1) teoreme 2.10 ne mora biti pri tom sačuvan.

Homomorfizam, kao ni otvorenje, ne mora sačuvati ni uslov (2) teoreme 2.10, kao što se vidi na slici 3.11:



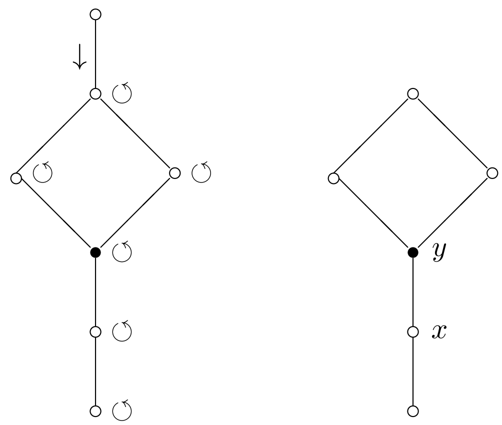
$\circ$	a	b
a	a	a
b	a	a

Slika 3.11

Preslikavanje je obeleženo kao na slici 3.10 - petljama su obeleženi oni elementi koji se preslikavaju u sebe, dok je strelicom označeno preslikavanje elementa u susedni element. Mreža sa desne strane je slika mreže sleva u prikazanom preslikavanju, koje je otvorenje.

Element a u mreži sleva na slici 3.11 zadovoljava sve uslove teoreme 2.10 i on je Δ-podesan, što dokazuje algebra $\mathcal{B} = (B, \circ)$, gde je $B = \{a, b\}$, a $\circ$ je zadato tablicom na slici 3.11. Međutim, element $\phi(a)$ u mreži koja je homomorfna slika prethodne, na sredini iste slike, ne zadovoljava uslov (2) teoreme 2.10, tako da $\phi(a)$ nije Δ-podesan, uprkos činjenici da je raspored klasa u tom homomorfizmu ostao nepromenjen. Taj homomorfizam možemo videti i kao preslikavanje mreže sleva u nju samu, i to preslikavanje je otvorenje, tako da uslov (2) ne mora biti sačuvan ni u otvorenju.

Homomorfizam ne mora sačuvati ni uslov (3), ni uslov (4) teoreme 2.10. Oba ova uslova, naime, povlače uslov dat u tvrđenju 2.2: ako $x \prec y \leqslant a$, tada interval $[\overline{x}, \overline{y})$ ima najveći element. To nije zadovoljeno u mreži $\mathcal{L}'$ na slici 3.12, koja je homomorfna slika mreže $\mathcal{L}$ na istoj slici. Međutim, mreža $\mathcal{L}$ zadovoljava sve uslove teoreme 2.10 i ona je predstavljiva algebrom $\mathcal{A} = (A, *)$, gde je $A = \{a, b, c, d\}$, a $(*)$ je prikazana tablicom:



mreža $\mathcal{L}$ mreža $\mathcal{L}'$

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	c
b	d	a	a	a
c	d	a	a	a
d	b	a	a	a

Slika 3.12

Mrežu $\mathcal{L}'$ možemo videti kao poduređenje (štaviše podmrežu) mreže $\mathcal{L}$ i ujedno kao sliku te mreže u otvorenju. Tako ovaj primer pokazuje da uslovi (3) i (4) ne moraju u opštem slučaju biti sačuvani ni u preslikavanju koje predstavlja otvorenje.

Dakle, homomorfizam, kao ni otvorenje, ne čuva u opštem slučaju ni jedan od dosad poznatih uslova koje zadovoljava Δ-podesan element.

Jedno mrežno preslikavanje koje čuva strukturu klasa u ekvivalenciji $x\rho_a y \Leftrightarrow x \wedge a = y \wedge a$ proizvoljne algebarske mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ sa kodistributivnim elementom a je preslikavanje $\phi : L \mapsto L$ definisano sa

$$\phi(x) = (x \vee a) \wedge \overline{x}.$$

Ovo preslikavanje ima zanimljive osobine. Naime, primetimo da je $x \leqslant \phi(x)$. Takođe, ovo preslikavanje čuva uređenje. Pošto je

$$a \wedge x = a \wedge \overline{x} = a \wedge (a \vee x) \wedge \overline{x} = a \wedge \phi(x),$$

važi

$$\overline{x} = \overline{\phi(x)}.$$

Zato

$$\phi(\phi(x)) = (a \vee \phi(x)) \wedge \overline{\phi(x)} = (a \vee \phi(x)) \wedge \overline{x} =$$

$$(a \vee ((x \vee a) \wedge \overline{x})) \wedge \overline{x} \leqslant (x \vee a) \wedge (a \vee \overline{x}) \wedge \overline{x} = (x \vee a) \wedge \overline{x} = \phi(x).$$

Pošto $x \leqslant \phi(x)$, važi i obrnuta nejednakost $\phi(x) \leqslant \phi(\phi(x))$, pa

$$\phi(\phi(x)) = \phi(x).$$

Da sumiramo, važe sledeće tri osobine:

(i) $x \leqslant \phi(x)$;
(ii) $x \leqslant y \Rightarrow \phi(x) \leqslant \phi(y)$;
(iii) $\phi(x) = \phi(\phi(x))$.

Dakle, ϕ predstavlja zatvorenje u algebarskoj mreži sa kodistributivnim elementom a. Kako proizvoljno zatvorenje u nekoj mreži $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ predstavlja otvorenje u dualnoj mreži $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$, dualno dokazu kod otvorenja dokažemo da je slika mreže u proizvoljnom zatvorenju mreža u odnosu na isti poredak; pri tom su infimum ($\overline{\wedge}$) i supremum ($\overline{\vee}$) povezani sa istima iz polazne mreže na sledeći način:

$x \overline{\wedge} y = x \wedge y$;
$x \overline{\vee} y = \phi(x \vee y)$.

Takođe, može se dokazati, dualno otvorenju, da proizvoljno zatvorenje, viđeno kao preslikavanje na mrežu $\mathcal{L}' = (\{x \in L \mid \phi(x) = x\}, \vee, \wedge)$, predstavlja $\vee$-homomorfizam, tj. da je saglasno sa operacijom $\vee$, tj. važi:

$\phi(x \vee y) = \phi(x) \overline{\vee} \phi(y)$.

Dualnim zaključivanjem dobijemo da, ako zatvorenje posmatramo kao preslikavanje mreže $\mathcal{L}$ u nju samu, tada ono ne mora biti $\vee$-homomorfizam, a u svakom slučaju ne mora biti $\wedge$-homomorfizam - bez obzira da li se radi o preslikavanju L u L, ili L u L'.

Iako ovo zatvorenje čuva strukturu klasa u ekvivalenciji $x \rho_a y \Leftrightarrow x \wedge a = y \wedge a$, ono ne mora sačuvati i Δ-podesnost elementa a, jer ne mora sačuvati uslove (3) i (4) teoreme 2.10. Naime, neka je $\mathcal{A} = (A, \{*, +, \alpha, \beta\})$, gde je $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, $*$ i $+$ su dve binarne operacije, a α i β unarne operacije na A su definisane tablicama:

$*$	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	a	d	e	d	e	f	g	h	i
b	a	d	e	d	e	f	g	h	h
c	a	d	e	d	e	f	g	h	i
d	a	d	e	d	e	f	g	h	h
e	a	d	e	d	e	f	g	h	i
f	a	d	e	d	e	f	g	h	h
g	a	d	e	d	e	f	g	h	i
h	a	b	c	f	g	f	g	h	i
i	a	c	c	g	g	g	g	h	i

$+$	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	a	a	a	a	a	a	a	a	f
b	a	a	a	a	a	a	a	a	f
c	a	a	a	a	a	a	a	a	f
d	a	a	a	a	a	a	a	a	f
e	a	a	a	a	a	a	a	a	f
f	a	a	a	a	a	a	a	a	f
g	a	a	a	a	a	a	a	a	f
h	a	h	h	a	a	a	a	a	f
i	a	h	h	a	a	a	a	a	f

α	a	b	c	d	e	f	g	h	i
	a	c	b	e	d	g	f	a	f

β	a	b	c	d	e	f	g	h	i
	a	b	c	b	c	f	g	h	h

Uočimo podalgebre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ algebre $\mathcal{A}$, određene skupovima $B = \{a\}$ i $C = \{a, b, c, d, e\}$. Važi

$$\mathcal{B} \prec \mathcal{C} < \mathcal{A},$$

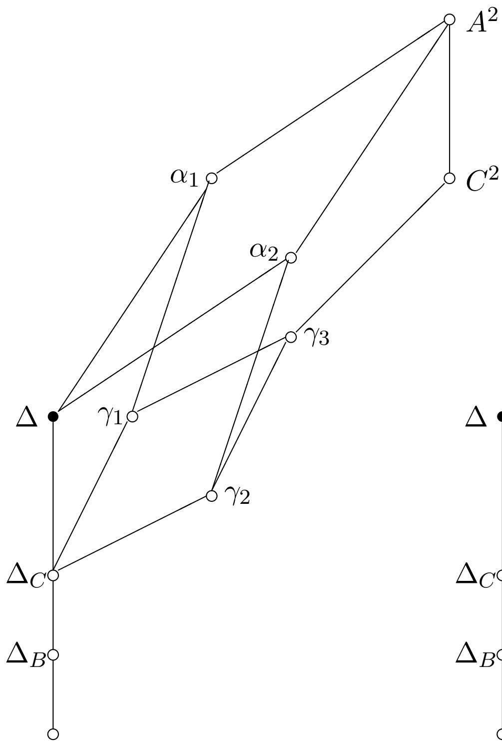
tako da mreža $Cw\mathcal{A}$ sadrži podmrežu prikazanu na slici 3.13, koja se sastoji iz $Con\mathcal{C}$, $Con\mathcal{A}$ i $Con\mathcal{B} = \{(a, a)\}$. Ovde je

$$\gamma_1 = \{a\}^2 \cup \{b, c\}^2 \cup \{d, e\}^2,\ \gamma_2 = \{a\}^2 \cup \{b, d\}^2 \cup \{c, e\}^2,\ \gamma_3 = \{a\}^2 \cup \{b, c, d, e\}^2,$$

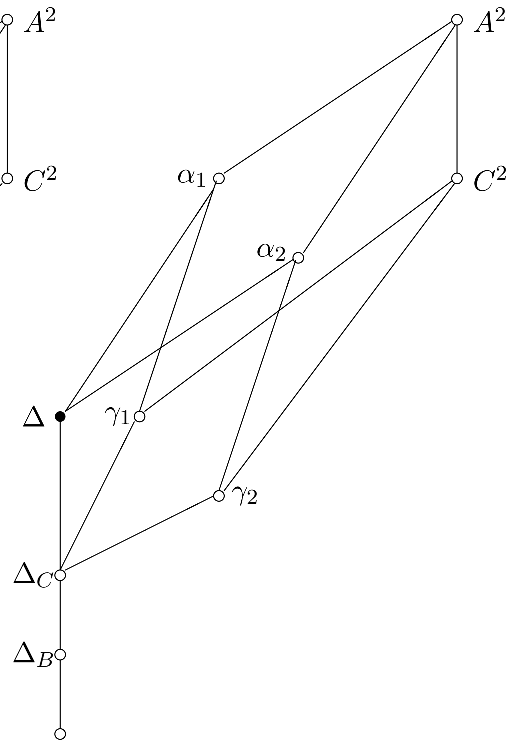
$$\alpha_1 = \{a, f, g\}^2 \cup \{b, c\}^2 \cup \{d, e\}^2 \cup \{h, i\}^2,$$

$$\alpha_2 = \{a, h\}^2 \cup \{b, d, f\}^2 \cup \{c, e, g\}^2 \cup \{i\}^2.$$

Sada posmatramo sliku ove podmreže u preslikavanju $\phi(\rho) = (\Delta \vee \rho) \wedge D^2$, gde je $D = \{x \in A \mid (x, x) \in \rho\}$. Svi se elementi u tom preslikavanju slikaju u sebe, osim elementa γ_3, koji se slika u C^2, tako da slika ove podmreže, prikazana na slici 3.14 sadrži sve elemente, osim γ_3. Primetimo da u ovoj podmreži $\Delta_B \prec \Delta_C$, a skup $[B^2, C^2) = [\Delta_B, C^2)$ nema maksimum, tako da u ovoj mreži nisu zadovoljeni uslovi (3) i (4) teoreme 2.10.



Slika 3.13



Slika 3.14

Zatvorenje, dakle, u opštem slučaju, ne mora sačuvati Δ-podesnost, čak ni u slučaju kada se Δ-podesni element a slika u sebe, a svaki drugi element u element iz iste klase u odnosu na a. Zatvorenje ne mora sačuvati ni jedan od uslova teoreme 2.10, čak ni pod pretpostavkom predstavljivosti polazne mreže: mreža na slici 3.15 levo zadovoljava uslov (1) teoreme 2.10 i predstavljiva je algebrom $\mathcal{A} = (\{a,b,c,d,e,f\}, \{a,*,\alpha\})$, gde su operacije $*$ i α zadate tabelama ispod slike; ovde je $Sub\mathcal{A} = \{\{a\}, F, H, G, A\}$, gde je $F = \{a,b,c\}$, $G = \{a,d,e\}$ i $H = F \cup G$. Sada je mreža 3.9 mreža $Cw\mathcal{A}$, pri čemu je:

$$x \wedge y = \Delta_{\{a\}},\ x \wedge a = \Delta_F,\ y \wedge a = \Delta_G,\ z \wedge a = \Delta_H;$$

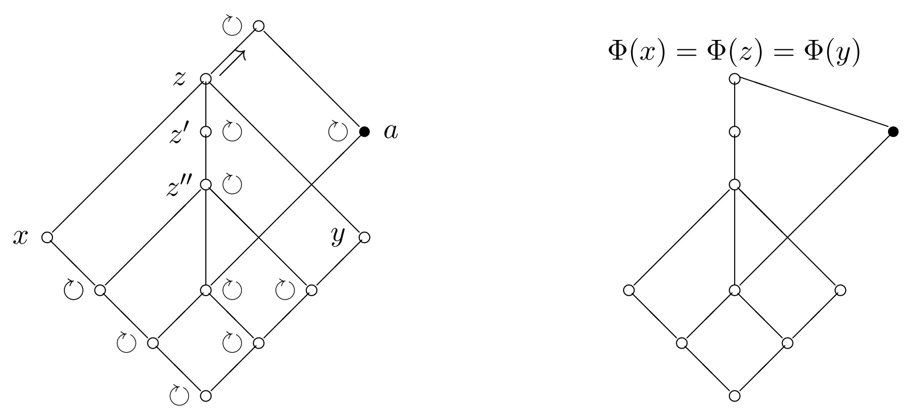
$$x \wedge z'' = \Delta_F \cup \{b,c\}^2,\ y \wedge z'' = \Delta_G \cup \{d,e\}^2,\ x = F^2,\ y = G^2;$$

$$z' = \Delta_H \cup \{b,c,d,e\}^2,\ z'' = \Delta_H \cup \{b,c\}^2 \cup \{d,e\}^2,\ z = H^2.$$

Međutim, slika te mreže u zatvorenju zadatom sa

$$\Phi(t) = \begin{cases} 1, & t \in \{x, y, z\} \\ t, & \text{inače.} \end{cases}$$

prikazana na istoj slici zdesna, ne zadovoljava uslov (1) teoreme 2.10, te nije predstavljiva mreža.



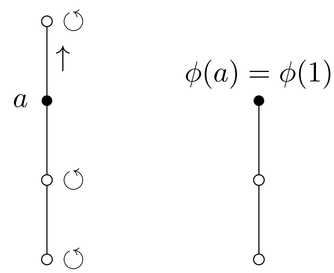
Slika 3.15

$*$	a	b	c	d	e	f
a	a	c	b	e	d	b
b	b	c	b	b	c	e
c	c	c	b	c	b	f
d	e	d	e	e	d	d
e	d	e	d	d	d	c
f	d	f	e	c	b	e

α	a	b	c	d	e	f
	a	a	a	a	a	b

Mreža na slici 3.16 levo zadovoljava uslov (1) i predstavljiva je algebrom $\mathcal{A} = (A, \{\circ\})$, gde je $A = \{a, b\}$, a $\circ$ je binarna operacija data u tabeli na istoj slici. Međutim, slika te mreže u datom zatvorenju ne zadovoljava isti uslov.

Da sumiramo: u opštem slučaju, slika u mrežnom preslikavanju koje je bilo homomorfizam, bilo otvorenje ili zatvorenje, ne mora u opštem slučaju čuvati podesnost elementa a polazne mreže. Štaviše, takvo preslikavanje ne mora sačuvati ni jedan od do sada poznatih uslova koji mora zadovoljavati Δ-podesan element.



$\circ$	a	b
a	a	a
b	a	a

Slika 3.16

Dosadašnji rezultati nam omogućavaju da u nekim posebnim slučajevima tvrdimo da preslikavanje koje je homomorfizam, ili otvorenje, ili zatvorenje, čuva predstavljivost mreže. Sledeći tvrđenje je neposredna posledica tvrđenja 3.1 koje govore o predstavljivosti filtera predstavljive mreže.

Tvrđenje 3.12 *Neka je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i $b \in L$. Ako je $b \leqslant a$, tada je $a = a \vee b$ Δ-podesan i u slici mreže $\mathcal{L}$ u zatvorenju ϕ_b zadatom sa $\phi_b(x) = b \vee x$.*

Primedba: Preslikavanje ϕ_b je $\vee$-homomorfizam, a u slučaju da je $b \in L$ distributivan, ϕ_b je i mrežni homomorfizam.

Tvrđenje 3.12 ne važi ako izostavimo uslov $b \nleqslant a$ - tada $a \vee b$ ne mora biti Δ-podesan u slici mreže $\mathcal{L}$ u preslikavanju ϕ_b - što dokazuje primer nepredstavljivosti filtera, dat na slici 3.1.

Kao posledicu tvrđenja 3.2 koje govori o predstavljivosti ideal predstavljive mreže, dobijemo sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 3.13 *Neka je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ i $x \in L$. Ako je $x = \overline{x}$, tada je $a \wedge x$ Δ-podesan u slici mreže $\mathcal{L}$ u preslikavanju ϕ_x, gde je ϕ_x otvorenje u mreži $\mathcal{L}$ zadato sa $\phi_x(c) = c \wedge x$.*

Primedba: Preslikavanje ϕ_x je $\wedge$-homomorfizam, a u slučaju da je $x \in L$ kodistributivan, i mrežni homomorfizam.

Tvrđenje 3.13 ne važi ako izostavimo uslov $x = \overline{x}$ - tada $a \wedge x$ ne mora biti Δ-podesan u slici mreže $\mathcal{L}$ u preslikavanju ϕ_x - što dokazuju primeri nepredstavljivosti ideala dati na slikama 3.2, 3.4 i 3.3. Ono ne važi ni ako pretpostavimo da je x kodistributivno, što povlači saglasnost preslikavanja ϕ_x odnosu na $\vee$, čime ovo preslikavanje postaje homomorfizam. Naime, u primeru na slici 3.2 x je kodistributivno, ali slika $\downarrow x$ u preslikavanju ϕ_x nije predstavljiva mreža.

3.3 Predstavljivost direktnog proizvoda

Možemo postaviti pitanje: da li je direktan proizvod predstavljivih mreža predstavljiv? Uzećemo bilo koji skup predstavljivih mreža, i od algebri koje predstavljaju te mreže načinićemo algebru koja će predstavljati direktan proizvod tih mreža, malo proširen.

Neka je $\Lambda = \{(\mathcal{L}_i, a_i) \mid i \in I\}$ familija parova takvih da je $\mathcal{L}_i$ mreža i a_i Δ-podesan element te mreže, za svako $i \in I$. Neka je $\mathcal{L}'$ mreža dobijena od direktnog proizvoda $\mathcal{L} = \Pi\mathcal{L}_i$ na sledeći način:

(i) Ako su bar dve mreže $\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j (i, j \in I, i \neq j)$, zajedno sa elementima a_i, odnosno a_j, predstavljene mrežama slabih kongruencija algebri, koje imaju bar po jednu konstantu, tada za svaki element b mreže $\mathcal{L}$, $b \leqslant a$ dodamo po jedan element b', takav da je $b' \wedge a = b$ i b' je veći od svih elementa skupa $\{x \in L \mid x \wedge a = b\}$, i da važe sledeće nejednakosti:

$$x \leqslant b' \Leftrightarrow x \wedge a \leqslant b;$$

$$b' \leqslant x \Leftrightarrow (x = c' \wedge c \geq b).$$

(ii) Ako postoji samo jedna mreža $\mathcal{L}_j$ u skupu mreža $\{\mathcal{L}_i \mid i \in I\}$ koja se može predstaviti, zajedno sa elementom a_j, mrežom slabih kongruencija neke algebre sa bar jednom konstantom, onda uzmemo mrežu $\mathcal{L}'$ kao u slučaju (i), bez elemenata oblika l', gde je $l = (l_i)_{i \in I}$, $l_j \leqslant a_j$ i $l_i = 0$ kad god je $i \neq j$.

(iii) Ako ne postoji nijedna mreža $\mathcal{L}_i$ koja je, zajedno sa elementom a_i, predstavljiva mrežom slabih kongruencija neke algebre sa najmanje jednom konstantom, onda uzmemo mrežu $\mathcal{L}'$ kao u slučaju (i) bez elemenata oblika l' gde je $l = (l_i)_{i \in I}$, $l \leqslant (a_i)_{i \in I}$ i postoji $j \in I$ takvo da je $l_i = 0$ kad god je $i \neq j$.

Mrežu $\mathcal{L}'$, ovako konstruisanu, zvaćemo **proširen direktan proizvod** familije $\Lambda = \{(\mathcal{L}_i, a_i) \mid i \in I\}$.

Teorema 3.14 *Ako je a_i Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}_i$, za svako $i \in I$, tada je $a = (a_i)_{i \in I}$ Δ-podesan element proširenog direktnog proizvoda familije $\Lambda = \{(\mathcal{L}_i, a_i) \mid i \in I\}$.*

Dokaz: Neka je, za svako $i \in I$, mreža $\mathcal{L}_i$ izomorfna sa $Cw\mathcal{A}_i$ u izomorfizmu koji slika a_i u Δ_{A_i}, gde je je A_i nosač algebre $\mathcal{A}_i$. Neka je $A_i \cap A_j = \emptyset$ kad god je $i \neq j$. Neka je $A = \cup\{A_i \mid i \in I\}$.

Neka je f operacija algebre $\mathcal{A}_i$, za neko $i \in I$. Ako je f dužine n, definišemo operaciju $\bar{f}$ na skupu A na sledeći način:

$$\bar{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} f(x_1, x_2, ..., x_n), & x_1, x_2, ..., x_n \in A_i \\ x_1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je g_i operacija na A definisana sledećim jednakostima:

$$g_i(x, y, z) = \begin{cases} y, & x \in A_i \\ z, & x \notin A_i. \end{cases}$$

Sada, neka je $H = \{g_i \mid i \in I\} \cup \{\bar{f} \mid f$ operacija algebre $\mathcal{A}_i,$ za neko $i \in I\}$ i neka je $\mathcal{A} = (A, H)$. Dokazujemo da je $Cw\mathcal{A} \cong \mathcal{L}'$:

Za svako $i \in I$ obeležimo sa π_i izomorfizam $\pi_i : Cw\mathcal{A}_i \to \mathcal{L}_i$ koji slika dijagonalnu relaciju Δ_{A_i} u a_i.

Primetimo da je svaki poduniverzum B algebre $\mathcal{A}$ unija poduniverzuma B_i algebri $\mathcal{A}_i$ i obrnuto, tj. $Sub\mathcal{A} = \{\mathcal{B} \mid B = \cup_{i \in I} B_i, \mathcal{B}_i \leqslant \mathcal{A}_i\}$. Neka je $\mathcal{B}$ neka podalgebra iz $Sub\mathcal{A}$, $B = \cup_{i \in I} B_i, \mathcal{B}_i \leqslant \mathcal{A}_i$. Primetimo da je bilo koje $\rho \in Con\mathcal{B}$ jednako ili sa B^2 ili sa $\cup_{i \in I} \rho_i$, za neko $\rho_i \in Con\mathcal{B}_i$.

Sada definišimo $\pi : Cw\mathcal{A} \to L'$. Ako je $\rho \in Con\mathcal{B}$, gde je $B = \cup_{i \in I} B_i, \mathcal{B}_i \leqslant \mathcal{B}$:

$$\pi(\rho) = \begin{cases} (\pi_i(\rho_i))_{i \in I}, & \rho = \cup_{i \in I} \rho_i \\ (\pi_i(\Delta_{B_i}))'_{i \in I}, & \text{u ostalim slučajevima } (\rho = B^2 \text{ za } B \neq B_i). \end{cases}$$

Sada, π je izomorfizam mreža i $\pi(\Delta) = \pi(\cup_{i \in I} \Delta_{A_i}) = (\pi_i(\Delta_{A_i}))_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} = a$, tako da imamo $Cw\mathcal{A} \cong \mathcal{L}'$, i $a = (a_i)_{i \in I}$ je Δ-podesan u mreži $\mathcal{L}'$. ∎

U vezi sa pitanjem da li je direktan proizvod predstavljive mreže i neke proizvoljne algebarske mreže predstavljiv, definišemo pojam **$\downarrow a$-proširenja** mreže.

Neka je $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ kompletna mreža i $a \in L$ kodistributivan element u njoj. Proširimo mrežu $\mathcal{L}$ do mreže $\mathcal{L}'$ na sledeći način:

$L' = L \cup S$, gde je $S \cap L = \emptyset$, $S = \{s_b \mid b \in L, b \leqslant a\}$; sada definišemo poredak $\leqslant'$ na L':

ako $x, y \in L$, tada $x \leqslant' y$ ako i samo ako $x \leqslant y$;

ako $x, y \in S$, i $x = s_b$, $y = s_c$, $b, c \in L$, tada $x \leqslant' y$ ako i samo ako $b \leqslant c$;

ako $x \in L$, $y \in S$, $y = s_b$, tada $y \nleqslant x$, dok je $x \leqslant' y$ ako i samo ako $x \wedge a \leqslant b$.

Sada L' u odnosu na relaciju $\leqslant'$ predstavlja mrežu, u oznaci $\mathcal{L}'$, koju zovemo $\downarrow a$**-proširenje** mreže $\mathcal{L}$.

Uočimo da je mreža $\mathcal{L}$ jedan ideal u svom $\downarrow a$-proširenju; skup S je, pak, filter u mreži $\mathcal{L}'$.

Ovako konstruisano proširenje mreže $\mathcal{L}$ predstavlja primer jedne opštije konstrukcije. Ako su $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ kompletne mreže sa nosačima K_1 i K_2, $\mathcal{E}_1$ kompletna $\wedge$-potpolumreža od K_1 (nosač E_1 je podskup od K_1 zatvoren za beskonačne infimume), $\mathcal{E}_2$ kompletna $\vee$-potpolumreža od $\mathcal{K}_2$ (nosač E_2 je podskup od K_2 zatvoren za beskonačne supremume), i $\kappa : E_1 \to E_2$ preslikavanje koje je izomorfizam poseta (u odnosu na poretke nasleđene iz mreža $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$). Za $x \in K_1$ neka je $x^* = \bigwedge(E_1 \cap \uparrow x)$ **zatvorenje od** x **u odnosu na** E_1, a $y_* = \bigvee(E_2 \cap \downarrow y)$ **otvorenje od** y **u odnosu na** E_2. Važi sledeće, [18, lema 2]:

$$\kappa(x^*) \leqslant y \Longleftrightarrow x \leqslant \kappa^{-1}(y_*) \Longleftrightarrow (\exists e \in E_1)(x \leqslant e \wedge \kappa(e) \leqslant y).$$

Ovo nam omogućava da definišemo jednu relaciju na disjunktnoj uniji $K = K_1 \cup K_2$ na prirodan način: neka je $x \leqslant y$ ako $x, y \in K_i$ i $x \leqslant_{K_i} y$, ili $x \in K_1$, $y \in K_2$ i važi bilo koji od gore navedenih ekvivalentnih uslova. Dokazano je da skup K u odnosu na ovako definisanu relaciju predstavlja kompletnu mrežu - [16, tvrđenje 1] - koja predstavlja jednu **Gracinski sumu** mreža $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$, vidi [25] i [26], u kojoj su sadržane mreže $\mathcal{K}_1$ i $\mathcal{K}_2$ kao podmreže, i to $\mathcal{K}_1$ kao ideal i $\mathcal{K}_2$ kao filter.

Ako je $\mathcal{L}$ kompletna mreža sa kodistributivnim elementom a, obeležićemo sa $S_a(L) = \{\overline{x} \mid x \in \downarrow a\}$, gde je $\overline{x} = max\{y \mid y \wedge a = x\}$. Sada primenimo prethodnu konstrukciju na mreže $\mathcal{L}$ i $\downarrow a$ sa potpolumrežama $S_a(L)$ i $\downarrow a$ - dobićemo $\downarrow a$-proširenje mreže $\mathcal{L}$. Kako se ovom konstrukcijom dobija kompletna mreža, važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 3.15 *Ako je $\mathcal{L}$ kompletna mreža i a kodistributivan element u njoj, tada $\downarrow a$-proširenje te mreže $\mathcal{L}'$ predstavlja kompletnu mrežu.*

Međutim, $\downarrow a$-proširenje algebarske mreže ne mora biti algebarska mreža; uzmimo npr. skup $Ew(A)$ slabih ekvivalencija nekog beskonačnog skupa A; $Ew(A)$ predstavlja, na osnovu tvrđenja 1.8, algebarsku mrežu u odnosu na inkluziju; dodajmo joj jedan element t veći od svih - dobijena mreža je takođe algebarska, pri čemu je t kompaktan element; zatim načinimo $\downarrow\Delta_A$-proširenje tako dobijene mreže; element t u novonastaloj mreži nije više kompaktan; naime, ako je $X = \{s_{\Delta_B} \mid B \text{ je konačan podskup od } A\}$, imamo da je $t \leqslant \bigvee X$, jer $\bigvee X = s_{\Delta_A} = 1$; međutim, za svaki konačan podskup X_0 skupa X imamo da je $\bigvee X_0 \in X$, pa $t \nleqslant \bigvee X_0$; element t nije ni supremum nekog skupa Y kompaktnih elemenata, jer ako Y ne sadrži ni jedan element oblika s_{Δ_B}, gde je $B \subseteq A$, tada $Y \subseteq Ew(A)$, pa $\bigvee Y \in Ew(A)$ i $t \neq \bigvee Y$; ako, pak, Y sadrži neki element oblika s_{Δ_B}, tada je $\bigvee Y$ istog oblika, pa opet $t \neq \bigvee Y$; mreža koju smo dobili, dakle, nije algebarska.

Sada primenimo teoremu 3.14 na direktan proizvod predstavljive mreže i proizvoljne algebarske mreže. Naime, videli smo da je najmanji element proizvoljne algebarske mreže uvek Δ-podesan, te da je algebarska mreža u odnosu na njega predstavljiva. Zato prethodnu teoremu možemo primeniti na dvočlanu familiju, koju čine jedna predstavljiva mreža, sa Δ-podesnim elementom a, i jedna algebarska mreža, sa najmanjim elementom ($\Lambda = \{(\mathcal{L}, a), (\mathcal{M}, 0)\}$).

Posledica 3.16 *Neka je je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, $\mathcal{M} = (M, \vee, \wedge)$ algebarska mreža i $\mathcal{L}'$ $\downarrow a$-proširenje mreže $\mathcal{L}$; neka je $K \subseteq L' \times M$, $K = (L \times M) \cup \{(s, 1) \mid s \in L' \setminus L\}$. Ako je $\mathcal{L}$ predstavljena algebrom sa najmanje jednom konstantom, tada je $(a, 0)$ Δ-podesan element mreže $\mathcal{K}$, koju čine skup K i poredak nasleđen iz $\mathcal{L}' \times \mathcal{M}$. Ako je $\mathcal{L}$ predstavljena algebrom bez konstante, tada je $(a, 0)$ Δ-podesan element mreže $\mathcal{K}_1$, gde je $K_1 = K \setminus \{(s_0, 1)\}$, a poredak na K_1 je nasleđen iz $\mathcal{L}' \times \mathcal{M}$.*

U vezi sa pitanjem da li je proizvod predstavljive mreže i proizvoljne algebarske mreže predstavljiv, možemo dokazati i sledeću teoremu:

Teorema 3.17 *Neka je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{L}'$ $\downarrow a$-proširenje mreže $\mathcal{L}$. Ako je $\mathcal{M}$ proizvoljna algebarska mreža, tada je $(a, 1)$ Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}' \times \mathcal{M}$.*

Dokaz: Neka je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra takva da je $Cw\mathcal{A}$ izomorfno sa $\mathcal{L}$ u izomorfizmu Ψ koji slika Δ u a. Neka je $\mathcal{B} = (B, G)$ algebra sa bar dve konstante, takva da je $Sub\mathcal{B}$ izomorfno sa $\mathcal{M}$ u izomorfizmu Φ (ako proizvoljnoj algebri čija je mreža podalgebri izomorfna sa $\mathcal{M}$ dodamo dve konstante, tada uz jednostavno proširenje operacija možemo dobiti željenu algebru $\mathcal{B}$). Nosače ovih algebri izaberemo tako da se ne seku, tj. da je $A \cap B = \emptyset$. Neka je $\mathcal{C} = (C, H)$ algebra takva da je:

$C = A \cup B$;
$H = F' \cup G' \cup \{t\}$;
$F' = \{f' \mid f \in F\}$;
$G' = \{g' \mid g \in G\}$.

Ovde su f', g' su operacije istih dužina kao operacije f, g, definisane na sledeći način: ako su $n(f)$ i $n(g)$ redom dužine operacija f i g, tada važi:

$$f'(x_1, x_2, ..., x_{n(f)}) = \begin{cases} f(x_1, x_2, ..., x_{n(f)}), & x_1, x_2, ..., x_{n(f)} \in A \\ x_1, & \text{u ostalim slučajevima;} \end{cases}$$

$$g'(x_1, x_2, ..., x_{n(g)}) = \begin{cases} g(x_1, x_2, ..., x_{n(g)}), & x_1, x_2, ..., x_{n(g)} \in B \\ x_1, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Neka je t operacija dužine 3, definisana na sledeći način:

$$t(x, y, z) = \begin{cases} z, & x = y \in B \\ x, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Sada je svaki poduniverzum C_0 od $\mathcal{C}$ oblika $B_0 \cup A_0$, pri čemu je B_0 poduniverzum algebre $\mathcal{B}$, a A_0 poduniverzum od $\mathcal{A}$. Svaka kongruencija τ algebre $\mathcal{C}_0 = (C_0, H)$, izuzev C_0^2, je oblika $\rho \cup \{(b, b) | b \in B_0\}$, gde je $\rho \in Con\mathcal{A}_0$ ($\mathcal{A}_0 = (A_0, F)$), pa $\rho \in Cw\mathcal{A}$. Sada, neka je $\Pi : Cw\mathcal{C} \to \mathcal{L}' \times \mathcal{M}$ preslikavanje definisano jednakostima:

$\Pi(\rho \cup \{(b, b) | b \in B_0\}) = (\Psi(\rho), \Phi(\mathcal{B}_0))$;
$\Pi(C_0^2) = (s_{\psi(\{(a,a)|a \in A_0\})}, \Phi(\mathcal{B}_0))$.

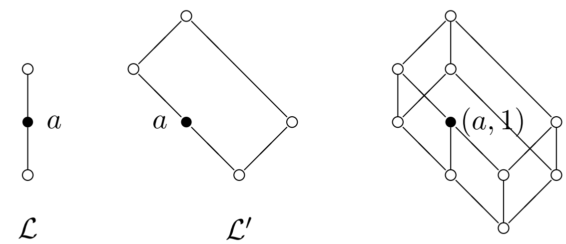
Jednostavno je dokazati da je Π izomorphizam, koji preslikava Δ_C u $(a, 1)$. $\blacksquare$

Za $\mathcal{M}$ možemo uzeti i jednoelementnu mrežu, tako da dobijamo:

Posledica 3.18 *Ako je a Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, on je Δ-podesan i u $\mathcal{L}'$.*

Posmatrajmo mrežu $\mathcal{L}$ na slici 3.17. Ona je, zajedno sa elementom a, predstavljiva pomoću algebre $\mathcal{A} = \{A, *\}$, gde je $A = \{e, f\}$, a * je zadata pomoću tabele na slici 3.17. Odatle proističe predstavljivost mreže $\mathcal{L}'$, koja je $\downarrow a$-proširenje mreže $\mathcal{L}$, a zatim i mreže $\mathcal{L}' \times \mathcal{M}$, gde je $\mathcal{M}$ dvočlana mreža, pri čemu je element $(a, 1)$ Δ-podesan.

$*$	e	f
e	f	f
f	e	e



Slika 3.17

Kada će neka mreža biti $\downarrow a$-proširenje neke mreže $\mathcal{N}$, tako da će ne samo njena predstavljivost, već i predstavljivost direktnog proizvoda te mreže sa bilo kojom algebarskom mrežom, slediti iz predstavljivosti $\mathcal{N}$? Odgovor daje sledeća teorema:

Teorema 3.19 *Neka je $\mathcal{L}$ algebarska mreža. Tada je $\mathcal{L} = \mathcal{N}'$, tj. za neku mrežu $\mathcal{N}$ i kodistributivni element a u njoj važi da $\mathcal{L}$ predstavlja $\downarrow a$-proširenje neke mreže $\mathcal{N}$, ako i samo ako postoji kodistributivni element a u mreži $\mathcal{L}$, takav da važi:*

(1) $\uparrow\overline{0}$ *izomorfno sa* $\downarrow a$ *u odnosu na preslikavanje definisano sa* $x \mapsto a \wedge x$;

(2) $L \backslash \uparrow\overline{0}$ *čini ograničenu podmrežu od* $\mathcal{L}$.

Dokaz: Jednostavno je uočiti da su ovi uslovi potrebni, jer u $\mathcal{N}'$ važi $\overline{0} = s_0$, $\uparrow s_0 = \{s_b \mid b \in \downarrow a\}$, $s_b \leqslant s_c \Leftrightarrow b \leqslant c$, a $L \backslash \uparrow s_0 = L \backslash \{s_b \mid b \in \downarrow a\} = N$, a N čini ograničenu podmrežu u $\mathcal{N}'$.

Pretpostavimo da je a kodistributivan element mreže $\mathcal{L}$, takav da važe uslovi (1) i (2). Neka je $N = L \backslash \uparrow\overline{0}$. Skup N u odnosu na poredak u $\mathcal{L}$ čini ograničenu podmrežu $\mathcal{N}$ od $\mathcal{L}$, na osnovu (2). Neka je $\phi : L \to N'$ određeno sa:

$$\phi(x) = \begin{cases} x, & x \in N \\ s_{a \wedge x} & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

Preslikavanje ϕ je $1-1$, jer ako $s_{a\wedge x} = s_{a \wedge y}$, tada $a \wedge x = a \wedge y$, pa na osnovu uslova (1) imamo $x = y$. Preslikavanje ϕ je "na" i saglasno sa operacijama mreže $\mathcal{L}$, takođe na osnovu uslova (1). Dakle, ϕ je izomorfizam, i mreža $\mathcal{L}$ je izomorfna sa $\mathcal{N}'$. ■

Dakle, kada je u pitanju predstavljivost direktnog proizvoda predstavljive i proizvoljne algebarske mreže, dokazali smo da, ukoliko je a Δ-podesan element neke mreže, tada su elementi $(a, 0)$ i $(a, 1)$ Δ-podesni u izvesnom proširenju direktnog proizvoda te mreže sa proizvoljnom algebarskom mrežom. Značajno je uočiti i da je poslednja teorema uopštenje teoreme 1.22. Naime, kako je najmanji element u algebarskoj mreži uvek Δ-podesan, to za Δ-podesan element prve mreže možemo uzeti najmanji element bilo koje algebarske mreže, i dobijamo sledeće: element $(0, 1)$ je Δ-podesan u proizvodu dve algebarske mreže, od kojih prva sadrži koatom veći od svih ostalih elemenata, osim sebe i najvećeg elementa te mreže. Ovo je sad ekvivalentno teoremi 1.22: naime, mreža sa elementom a, koji pripada njenom centru, izomorfna je sa $\uparrow a \times \downarrow a$, u izomorfizmu koji slika a u $(0, 1)$.

3.4 Predstavljivost posebnih mreža

Videli smo da je najmanji element bilo koje algebarske mreže Δ-podesan, tj. da je svaka algebarska mreža trivijalno predstavljiva kao mreža slabih kongruencija neke algebre $\mathcal{A}$. Stoga za zadatu mrežu $\mathcal{L}$ tražimo bar jednu netrivijalnu reprezentaciju pomoću slabih kongruencija, tj. bar jedan Δ-podesan element različit od nule.

Tvrđenje 3.20 *Ako je $\mathcal{L}$ algebarska mreža koja ima jedinstveni atom a, takav da je $L \setminus \uparrow a = \{0\}$, tada je $\mathcal{L}$ netrivijalno predstavljiva pomoću mreže slabih kongruencija; preciznije, a je Δ-podesan u takvoj mreži.*

Dokaz: Neka je a jedinstveni atom. Skup $L' = L \setminus \{0\}$ čini algebarsku mrežu $\mathcal{L}'$ u odnosu na poredak iz $\mathcal{L}$, stoga postoji algebra $\mathcal{A} = (A, F)$, takva da je $\mathcal{L}'$ izomorfna mreži njenih kongruencija. Da bismo predstavili $\mathcal{L}$, posmatramo algebru $\mathcal{A}_1 = (A, F, \{f_c \mid c \in A\})$, gde je $f_c : A \to A$ za svako $c \in A$, unarna operacija, definisana sa $f_c(x) = c$, za svako $x \in A$. Tada, jedini poduniverzumi su $\emptyset$ i A, pa je mreža slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$ izomorfna sa $\mathcal{L}$, pri čemu a predstavlja dijagonalnu relaciju. ■

Posledica 3.21 *Svaki atomaran algebarski lanac je netrivijalno predstavljiv, tj. njegov atom je Δ-podesan.*

U nastavku ćemo dokazati da u nekim slučajevima atomaran lanac ima i dva predstavljanja. Najpre uopštimo pojam ideala mreže na ideal bilo kog poseta:

Neka je $\mathcal{L} = (L, \leqslant)$ uređen skup. **Ideal** u $\mathcal{L}$ je skup I, takav da važi:

za svako $x \in I$, $y \leqslant x$ povlači $y \in I$;

I je usmeren skup, tj. za svaka dva $x, y \in I$, postoji z, tako da $x \leqslant z$, $y \leqslant z$.

Podsetimo se da kompaktan element l u mreži zadovoljava uslov: ako je I usmeren podskup nosača mreže i $l \leqslant supI$, tada $l \leqslant i$, za neko $i \in I$.

Lema 3.22 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ algebarska mreža. Skup L_k kompaktnih elemenata iz L zatvoren je za konačne supremume. Ako je K skup svih ideala poseta $(L_k, \leqslant)$, gde je $\leqslant$ poredak nasleđen iz $\mathcal{L}$, tada je $(K, \subseteq)$ poset izomorfan sa $(L, \leqslant)$, pa time predstavlja i mrežu izomorfnu sa $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Ako su $l, m \in L_k$ i $l \vee m \leqslant \bigvee I$, gde je I ideal mreže $\mathcal{L}$, tada $l \leqslant \bigvee I$ i $m \leqslant \bigvee I$, pa važi $l, m \in I$, što povlači, na osnovu jedne od definicija ideala, da je $l \vee m \in I$. Dakle, $l \vee m \leqslant \bigvee I$ povlači $l \vee m \in I$, pa je $l \vee m \in L_k$, kad god su $l, m \in L_k$. Indukcijom ovo možemo proširiti na sve konačene supremume kompaktnih elemenata, tako da prvo tvrđenje leme važi.

Preslikavanje $\pi : K \to L$ određeno sa $\pi(I) = supI$ predstavlja izomorfizam: saglasnost sa poretkom je očigledna; surjektivnost sledi iz algebraičnosti mreže, jer je svaki element supremum skupa svih kompaktnih elemenata manjih ili jednakih njemu, a oni čine jedan ideal od $(L_k, \leqslant)$; ako je $supI = l$, i $l_k \leqslant l$ kompaktan, pošto je I usmeren podskup od L, tada $l_k \leqslant l'$, za neko $l' \in I$; zato $l_k \in I$. Tako je $I = \downarrow l \cap L_k$, gde je $\downarrow l$ ideal u mreži $\mathcal{L}$; I je, dakle, jednoznačno određeno sa $\pi(I)$, pa je π i 1-1. ■

Teorema 3.23 *Neka je $\mathcal{L}$ atomaran algebarski lanac sa kompaktnim najvećim elementom, tako da i $L' = L \setminus \{0\}$ takođe čini atomaran lanac u odnosu na poredak iz $\mathcal{L}$. Tada $\mathcal{L}$ ima tačno dve netrivijalne reprezentacije pomoću mreža slabih kongruencija; preciznije, atom $0'$ lanca $\mathcal{L}$ i atom a lanca $\mathcal{L}'$ su Δ-podesni u $\mathcal{L}$.*

Dokaz: Na osnovu posledice 3.21 imamo da je $0'$ Δ-podesan. Sada dokažimo da je i a Δ-podesan: neka je L_k skup svih kompaktnih elemenata iz $L \setminus \{0, 0'\}$ i neka je F skup operacija na L_k:

$F = \{p_b \mid b \in L_k, b \neq 1\} \cup \{q_b \mid b \in L_k\} \cup \{r\} \cup \{s_b \mid b \in L_k\}$, gde je:

$$p_b(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } b < x \\ a, & \text{ako je } x \leqslant b; \end{cases}$$

$$q_b(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = 1 \\ b, & \text{ako je } b < x < 1 \\ x, & \text{ako je } x \leqslant b; \end{cases}$$

$r(x) = 1$, za svako $x \in L_k$;

$$s_b(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x = y = 1 \\ b, & \text{ako je } x = 1 \text{ i } y \neq 1 \\ x \vee y, & \text{ako je } x \neq 1 \text{ i } y \neq 1. \end{cases}$$

Sada neka je algebra $\mathcal{A} = (L_k, F)$. Kako je $r(x) \equiv 1$, to svaki neprazan poduniverzum M od $\mathcal{A}$ sadrži najveći element; ako $x \in M, x \neq 1$, onda za svako $b \in L_k$ imamo $s_b(1, x) = b$, pa $M = L_k$. Zato $Sub\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, L_k\}$. Ako je $\rho \in Con\mathcal{A}$ i $I = \{x \in L_k \mid x\rho a\}$, tada je I ideal poseta $(L_k, \subseteq)$: ako $x \in I$ i $y < x$, tada $q_y(x) = y$, a $q_y(a) = a$, pa iz $x\rho a$ sledi $y\rho a$, tako da je $y \in I$. Očigledno $\rho \supseteq I^2$, pa zbog refleksivnosti $\rho \supseteq \Delta \vee I^2$. Ako je $x < y$ i $x\rho y$, tada $p_x(x) = a$, $p_x(y) = y$, pa $y\rho a$ i $x\rho a$, tj. $x, y \in I$, tako da $\rho \backslash \Delta \subseteq I^2$, pa $\rho \subseteq I^2 \vee \Delta$. Sada $\rho \supseteq \Delta \vee I^2$ i $\rho \subseteq \Delta \vee I^2$ daje $\rho = \Delta \vee I^2$. S druge strane, svaka relacija oblika $\Delta \vee I^2$ je relacija ekvivalencije na skupu L_k koja je saglasna sa operacijama algebre $\mathcal{A}$. Zbog toga je $Con\mathcal{A} = \{I^2 \cup \Delta \mid I$ je ideal poseta $(L_k, \subseteq)\}$, pa je $Con\mathcal{A}$ izomorfan (kao poset) posetu $(K, \subseteq)$ svih ideala poseta $(L_k, \subseteq)$. Na osnovu leme 3.22, taj poset je izomorfan sa $(L \setminus \{0, 0'\}, \subseteq)$. Kako je $Cw\mathcal{A} = Con\mathcal{A} \cup \{\emptyset\} \cup \{(1, 1)\}$, to je $Cw\mathcal{A} \cong \mathcal{L}$ u izomorfizmu u kome dijagonali odgovara element a.

Osim elemenata 0, 0' i a ne može biti drugih Δ-podesnih elemenata u mreži $\mathcal{L}$, na osnovu uslova (2) tvrđenja 1.19. ■

Teorema 3.23 daje potpunu karakterizaciju elemenata algebarskog lanca sa kompaktnim najvećim elementom - koji su elementi Δ-podesni, koji ne. Podesni su samo atom i element neposredno iznad njega - ako postoje. Ako algebarski lanac ne poseduje atom, tada na osnovu uslova (2) tvrđenja 1.19, jedini Δ-podesni element je nula, tj. nema netrivijalnih reprezentacija - nezavisno od toga da li je najveći element kompaktan ili ne. Ako postoji atom, ali ne i element neposredno iznad njega, tada su Δ-podesni samo nula i atom, takođe na osnovu posledice 3.21 i uslova (2) tvrđenja 1.19. Ovo takođe važi nezavisno od toga da li je najveći element kompaktan ili nije. Međutim, za Δ-podesnost elementa koji je neposredno iznad atoma predstavljanje smo našli samo pod uslovom kompaktnosti najvećeg elementa. Ovaj uslov nam je neophodan u formulaciji teoreme 3.23, jer algebraičnost i atomarnost lanca, polaznog i onog iz kojeg je isključena nula, ne povlače kompaktnost najvećeg elementa. Uzmimo na primer lanac $(N, \leqslant)$, gde je N skup prirodnih brojeva, dodajmo mu jedan element veći od svih (obeležimo ga sa ∞), i dobićemo lanac koji zadovoljava sve uslove teoreme 3.23. Naime, elementi 2 i 3 su atomi polaznog lanca i lanca iz kojeg je isključen najmanji element; svi elementi u lancu su kompaktni, osim najvećeg (∞); najveći element je, međutim, supremum svih elemenata manjih od sebe, koji su kompaktni, tako da je lanac algebarski.

Podsetimo se da je algebra **prosta**, ukoliko nema kongruencija različitih od dijagonalne relacije i pune relacije. Tako je i mreža $\mathcal{L}$ prosta, ako je prosta kao algebra $(L, \vee, \wedge)$. Sledeće tvrđenje rešava problem predstavljivosti za proste mreže.

Tvrđenje 3.24 *Prosta algebarska mreža sa više od dva elementa ima samo trivijalno predstavljanje.*

Dokaz: Neka je a element proste algebarske mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ sa više od dva elementa, i $a \neq 0$.

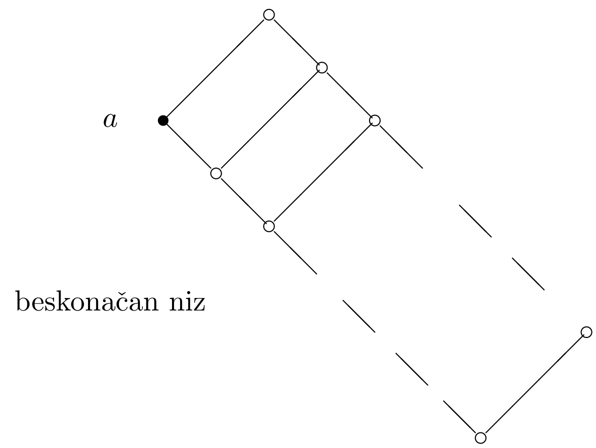
Pretpostavimo da je $a \neq 1$ kodistributivan. Relacija ρ_a definisana sa $x \rho_a y \Leftrightarrow x \wedge a = y \wedge a$ je kongruencija koja ima bar dve klase - klasu od a i klasu elementa 0, pri čemu je klasa od a jednaka $\uparrow a$, i sadrži bar dva elementa - a i 1, tako da $\rho_a \neq L^2$ i $\rho_a \neq \Delta_L$. To nije moguće, jer je mreža prosta.

Dobijena kontradikcija dokazuje da element $a \neq 1$ nije kodistributivan, pa na osnovu tvrđenja 1.18, nije Δ-podesan. Ako je $a = 1$, a nije Δ-podesno ukoliko mreža ima više od dva elementa, na osnovu tvrđenja 1.20. Zato je samo minimalan element mreže $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ Δ-podesan, tj. $\mathcal{L}$ ima samo trivijalno predstavljanje. ■

Problem predstavljivosti je pozitivno rešen u sledećem jednostavnom slučaju:

Tvrđenje 3.25 *Direktni proizvod proizvoljnog konačnog lanca i lanca dužine 1 je netrivijalno predstavljiv.*

Dokaz: Pođimo od mreže na slici 3.18:



Slika 3.18

Ona je predstavljena algebrom $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, \{f_i, i \in \mathbb{N}\}, \{\oplus_j, j \in \mathbb{N}\})$, gde je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva, a f_i, $\oplus_j$ niz unarnih, odnosno niz binarnih operacija, definisanih na sledeći način: za bilo koje $x, y \in \mathbb{N}$ i $i = 1, 2, 3, \ldots$, $j = 1, 2, 3, \ldots$,

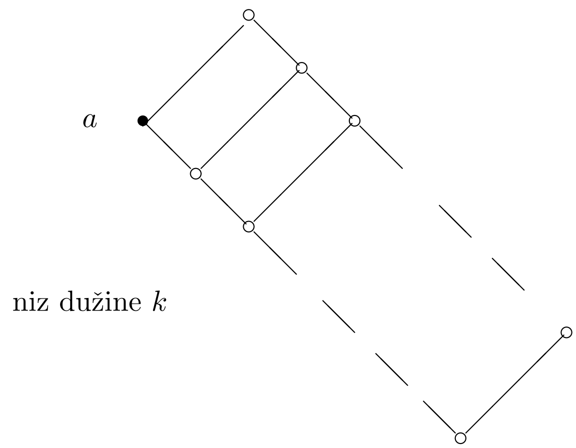
$$f_i(x) = \begin{cases} x & \text{ako} \quad x = i \\ x + 1 & \text{ako} \quad x \neq i; \end{cases}$$

$$x \oplus_j y = \begin{cases} j & \text{ako} \quad x \leqslant j, y \leqslant j \\ x + y - (j+1) & \text{ako} \quad x > j \text{ ili } y > j. \end{cases}$$

Neka je $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant k\}$. Uočimo da je $Sub\mathcal{A} = \{\mathbb{N}_k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$. Obeležimo sa $\mathcal{A}_k$ podalgebru od $\mathcal{A}$ sa nosačem $\mathbb{N}_k$. Sve podalgebre $\mathcal{A}_k$ su proste, tj. $Con\mathcal{A} = \{\emptyset, A^2\}$.

U ovom predstavljanju dijagonali odgovara element a na slici.

Da bismo predstavili proizvod konačnog lanca dužine k i lanca dužine 1, koristimo tvrđenje 3.1, pri čemu za b uzmemo onaj element iz $\downarrow a$, takav da je $|[b, a]| = k + 1$. Na taj način smo predstavili klasu mreža prikazanih na slici 3.19. ■



Slika 3.19

Posledica 3.26 *Direktan proizvod dva konačna lanca je netrivijalno predstavljiv.*

Dokaz: Neka je jedan lanac dužine k ($k \in \mathbb{N}$). Ako je drugi lanac dužine nule, tvrđenje sledi na osnovu posledice 3.21, ili teoreme 3.23. Ako to nije slučaj, dokazujemo indukcijom po dužini l drugog lanca, da je element $(1, 0)$ Δ-podesan. U slučaju kada je $l = 1$, tvrđenje sledi iz dokaza tvrđenja 3.25. Indukcijski korak sledi iz posledice 3.18: pretpostavimo da tvrđenje važi za $l = k$; ako sa $\mathcal{L}$ obeležimo dati direktan proizvod za $l = k$, i sa a obeležimo element $(1, 0)$, a je Δ-podesan element mreže $\mathcal{L}$, po pretpostavci; sada je a Δ-podesan i u mreži $\mathcal{L}'$, a i u njoj važi da je $a = (1, 0)$, pa tvrđenje važi i za $l = k + 1$. $\blacksquare$

Teorema 3.27 *Svaka algebarska Bulova mreža kardinalnosti veće od 1 koja ima bar jedan atom je netrivijalno predstavljiva.*

Dokaz: Na osnovu posledice 3.21, Bulovu mrežu sa dva elementa moguće je netrivijalno predstaviti. Neka je Bulova mreža kardinalnosti veće od dva. Ako je a komplement bilo kog njenog atoma, a je koatom različit od nule. Pošto se, na osnovu tvrđenja 1.2, svaki element Bulove mreže nalazi u njenom centru, ona je izomorfna sa $\downarrow a \times \uparrow a$, na osnovu tvrđenja 1.1. Ako u teoremi 3.17 uzmemo $L = \{a\}$, tada $L' = \{a, 1\} = \uparrow a$, pa ako za $\mathcal{M}$ uzmemo mrežu $\downarrow a$, dobijemo da je element (a, a) Δ-podesan u mreži $\downarrow a \times \uparrow a$. Njemu odgovara element a u izomorfizmu f iz tvrđenja 1.1. $\blacksquare$

Budući da je, na osnovu teoreme 1.3, svaka atomarna kompletna Bulova mreža ujedno i algebarska mreža, dobijemo sledeću posledicu:

Posledica 3.28 *Svaka atomarna kompletna Bulova mreža je netrivijalno predstavljiva.*

Konačna mreža je i algebarska, i atomarna, pa teorema 3.27 proizvodi još jednu posledicu:

Posledica 3.29 *Svaka konačna Bulova mreža kardinalnosti veće od 1 je netrivijalno predstavljiva.*

Literatura

[1] G. Birkhoff, O. Frink, Represantation of lattices by sets, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 299-316.

[2] S. Bogdanović, M. Ćirić, A note on congruences on algebras, in: Proc. of II Math. Conf. in Priština 1996, Lj.D. Kočinac ed., Priština (1997) 67-72.

[3] O. Boruvka, Theory of partitions in a set, (Czech.) Publ. Fac. Sci. Univ. Brno 278 (1946) 1-37.

[4] S. Burris, H. P. Sankappanavar, A Course in Universal Algebra, Springer-Verlag, New York, 1981.

[5] I. Chajda, Algebraic theory of tolerance relations, Monograph, Univerzita Palackého Olomouc, Olomouc, 1991.

[6] I. Chajda, Lattices of compatible relations, Arch. Math. (Brno) 13 (1977) 89-96.

[7] I. Chajda, Some Modifications of the Congruence Extension Property, Math. Slovaca, 45 (1995) 251-254.

[8] I. Chajda, G. Czédli, A note on representation of lattices by tolerances, J. of Algebra, 1991.

[9] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, A note on triangular schemes for weak congruences, Czech. Math. J. 55, 3 (2005) 683-690.

[10] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, Lattices of compatible relations satisfying a set of formulas, Algebra Univers. 40 (1998) 51-58.

[11] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, On weak congruence modular varieties, Filomat (Niš) 9:3 (1995) 633-638.

[12] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, Weak congruence identities at 0, Novi Sad J. Math. 32, 2 (2002) 77-85.

[13] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, Weak congruences in algebras having restricted similarity types, Discussiones Math. 18 (1998) 27-38.

[14] P. Crawley, RP Dilworth, Algebraic Theory of Lattices, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[15] B. Csákány, Subalgebras and Congruences, Annales Univ. Sci. Budapest, Sectio Math. 18 (1975) 37-44.

[16] G. Czédli, A Horn sentence in coalition lattices, Acta Math. Hungarica 72 (1996) 99–104.

[17] G. Czédli, Natural equivalences from lattice quasiorders to involution lattices of congruences, Proc. of the International Conference, General Algebra and Ordered Sets, Olomouc (1994) 33-44.

[18] G. Czédli, Sums of lattices and a relational category, Order 26 (2009) 309–318.

[19] G. Czédli, M. Erné, B. Šešelja, A. Tepavčević, Characteristic triangles of closure operators with applications in general algebra, Algebra Univers. 62, 4 (2009) 399–418.

[20] G. Czédli, B. Šešelja, A. Tepavčević, On the semidistributivity of elements in weak congruence lattices of algebras and groups, Algebra Univers. 58 (2008) 349–355.

[21] G. Czédli, A. Walendziak, Subdirect representation and semimodularity of weak congruence lattices, Algebra Univers. 44 (2000) 371-373.

[22] B. A. Davey, H. A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, 1990.

[23] H. Draškovičová, The lattice of partitions in a set, Acta F. R. N. Univ. Comen.-Mathematica 24 (1970) 37-65.

[24] G. Eigenthaler, B. Šešelja, A. Tepavčević, Weak congruences of algebras with constants, Novi Sad J. Math. 36, 1 (2006) 65-73.

[25] E. Graczyńska, On the sum of double systems of lattices, Contributions to universal algebra 17, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[26] E. Graczyńska, G. Grätzer, On double systems of lattices, Demonstratio Math. 13 (1980) 743–747.

[27] G. Gratzer, E. T. Schmidt, Characterizations of congruence lattices of abstract algebras, Acta Sci. Math. (Szeged) 24 (1963) 34-59.

[28] G. Grätzer, General Lattice Theory, Second edition, Birkhäuser Verlag, 2003.

[29] H. P. Gumm, Geometrical Methods in Congruence Modular Algebras, Memoirs of AMS 286 (1983).

[30] D. Hobby, R. McKenzie, The structure of finite algebras, Amer. Math. Soc. Contemporary Mathematics 76 (1988).

[31] B. Jónsson, Topics in universal algebra, Lecture Notes in Math. Vol. 250, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1972.

[32] K. A. Kearnes, A Hamiltonian property for nilpotent algebras, Algebra Univers. 37 (1997) 403-421.

[33] E. W. Kiss, M. A. Valeriote, Abelian algebras and the Hamiltonian property, Journal of Pure and Applied Algebra 87 (1993) 37-49.

[34] S. R. Kogalovskij, V. V. Soldatova, Notes on congruence lattice of universal algebras (in Russian), Studia Sci. Mat. Hung. 25 (1990) 33-43.

[35] W. A. Lampe, Results and problems on congruence lattice representations, Algebra univers. 55 (2006) 127-135.

[36] W. A. Lampe, The independence of certain related structures of a universal algebra, I, Algebra Univers. 2, 1 (1972) 99-112.

[37] W. A. Lampe, The independence of certain related structures of a universal algebra, II, Algebra Univers. 2, 1 (1972) 270-283.

[38] W. A. Lampe, The independence of certain related structures of a universal algebra, III, Algebra Univers. 2, 1 (1972) 286-295.

[39] W. A. Lampe, The independence of certain related structures of a universal algebra, IV, Algebra Univers. 2, 1 (1972) 296-302.

[40] W. A. Lampe, Simultaneous congruence representations: a special case, Algebra Univers. 54, 2 (2005) 249-255.

[41] V. Lazarević, A. Tepavčević, A new ordering relation on lattices applied to weak congruences, Filomat 15 (2001) 39-46.

[42] V. Lazarević, A. Tepavčević, Weak congruences and a graphical composition, Contributions to General Algebra 13 (2001) 199-205.

[43] R.Sz.Madarász, On the partial algebras of weak congruences, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 25, 1 (1995) 89-97.

[44] R. N. McKenzie, G. F. McNulty, W. F. Taylor, Algebras, Lattices, Varieties vol. I, Wadsworth and Brooks - Cole, Monterey, 1987.

[45] B. H. Neumann, An essay on free products of groups with amalgamations, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A. 246 (1954) 503-554.

[46] N. V. Obraztsov, Simple torsion-free groups in which the intersection of any two subgroups is non-trivial, J. Algebra 199 (1998) 337-343.

[47] O. Ore, Theory of equivalence relations, Duke Math. J. (1942) 573-627.

[48] A. G. Pinus, I. Chajda, On quasi-orders on universal algebras (in Russian), Algebra i logika 32, 3 (1993) 308-325.

[49] M. Ploščica, Graphical compositions and weak congruences, Publ. Inst. Math. Beograd 56, 70 (1994) 34-40.

[50] I.G. Rosenberg and D. Schweigert, Compatible Orderings and Tolerances of Lattices, Annals of Discrete Math. 23 (1984) 119-150.

[51] R. Schmidt, Subgroup Lattices of Groups, De Gruyter, Berlin, 1994.

[52] V. Stepanović, The weak congruence representability of sublattices and suborders of representable lattices, Novi Sad J. Math., rad prihvaćen za štampu.

[53] V. Stepanović, A. Tepavčević, On Delta-suitable elements in algebraic lattices, Filomat, rad prihvaćen za štampu.

[54] B. Šešelja, On some local properties of weak congruences, General Algebra 13 (2001) 305-308.

[55] B. Šešelja, A. Tepavčević, A note on atomistic weak congruence lattices, Discrete Mathematics 308 (2008) 2054-2057.

[56] B. Šešelja, A. Tepavčević, A note on cip varieties, Algebra Univers. 45 (2001) 349-351.

[57] B. Šešelja, A. Tepavčević, Filters in a weak-congruence lattice, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad, 23, 1 (1993) 235-243.

[58] B. Šešelja, A. Tepavčević, Infinitely distributive elements in the lattice of weak congruences, General Algebra 1988, Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland) (1990) 241-253.

[59] B. Šešelja, A. Tepavčević, On CEP and semimodularity in the lattice of weak congruences, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad, Math. Ser. 22, 1 (1992) 95-106.

[60] B. Šešelja, A. Tepavčević, On weak congruence lattices representation problem, Proc. of the 10th Congress of Yugoslav Mathematicians, Belgrade (2001) 177-184.

[61] B. Šešelja, A. Tepavčević, Relative complements in the lattice of weak congruences, Publ. Inst. Math. Beograd 67, 81 (2000) 7-13.

[62] B. Šešelja, A. Tepavčević, Special elements of the lattice and lattice identities, Rev Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 20 (1990) 21-29.

[63] B. Šešelja, V. Stepanović, A. Tepavčević, A note on representation of lattices by weak congruences, podnet za štampu u Algebru Universalis.

[64] B. Šešelja, A. Tepavčević, A Note on CIP Varieties, Algebra Univers. 45 (2001) 349–351.

[65] B. Šešelja, A. Tepavčević, On Weak Congruence Lattices Representation Problem, Proc. of the 10. Congress of Yugoslav Mathematicians, Beograd (2001) 177–184.

[66] B. Šešelja, A. Tepavčević, Weak congruences and homomorphisms, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 20, 2 (1990) 61-69.

[67] B. Šešelja, A. Tepavčević, Weak Congruences in Universal Algebra, Institute of Mathematics, Novi Sad, 2001.

[68] B. Šešelja, G. Vojvodić, A note on some lattice characterizations of Hamiltonian groups, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 19, 1 (1989) 179-184.

[69] B. Šešelja, G. Vojvodić, CEP and homomorphic images of algebras, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 19, 2 (1989) 75-80.

[70] B. Šešelja, G. Vojvodić, On the complementedness of the lattice of weak congruences, Studia Sci. Mat. Hung. 24 (1989) 289-293.

[71] B. Šešelja, G. Vojvodić, Weak congruences of a lattice, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 18, 2 (1988) 205-209.

[72] A. Tepavčević, Diagonal relation as a continuous element in a weak congruence lattice, Proc. of the International Conference General Algebra and Ordered Sets, Olomouc (1994) 156–163.

[73] A. Tepavčević, Diagonal relation as a continuous element in a weak congruence lattice, Proc. of the International Conference General Algebra and Ordered Sets, Olomouc (1994) 156-163.

[74] A. Tepavčević, On representation of lattices by weak congruences and weak tolerances, Algebra and Model Theory, ed.

by A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov, Novosibirsk (1997) 173-181.

[75] A. Tepavčević, On the continuous elements of a lattice, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 24, 2 (1994) 151-163.

[76] A. Tepavčević, B. Šešelja, V. Stepanović, Weak equivalences, weak congruences and applications, Symposium on Applications of Lattice Theory, Bolyai Institute, Szeged, 2011.

[77] G. Traustason, CIP-groups, Arch. Math. 65 (1995) 97-102.

[78] G. Vojvodić, A note on weak partial congruence algebras, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad, 22,1 (1992) 89-94.

[79] G. Vojvodić, On weak congruence algebras, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad, 24, 1 (1994) 277-280.

[80] G. Vojvodić, B. Šešelja, A note on the modularity of the lattice of weak congruences on a finite group, Contributions to General Algebra-5, Wien (1987) 415-419.

[81] G. Vojvodić, B. Šešelja, On CEP and CIP in the lattice of weak congruences, Proc. of the conf. "Algebra and logic", Cetinje (1986) 221-227.

[82] G. Vojvodić, B. Šešelja, On the lattice of weak congruence relations, Algebra Univers. 25 (1988) 121–130.

[83] G. Vojvodić, B. Šešelja, The diagonal relation in the lattice of weak congruences and the representation of lattices, Rev. of Res. Fac. Sci, Univ. Novi Sad 19, 1 (1989) 167–178.

[84] F. Wehrung, A solution to Dilworth's congruence lattice problem, Adv. Math. 216, 2 (2007) 610-625.

[85] H. Werner, Which partition lattices are congruence lattices?, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 14, North Holland (1976) 433–453.

Kratka biografija

Vanja Stepanović rođena je 1972. godine u Beogradu, gde je završila osnovnu i srednju školu, kao i Matematički fakultet, odsek za teorijsku matematiku i primene. Poslediplomske studije, smer algebra, završila je na Matematičkom fakultetu u Beogradu, odbranivši magistarski rad pod naslovom "Analitička klasifikacija singulariteta ravnih algebarskih krivih", 2003. godine.

Od 1994. godine radi na Poljoprivrednom fakultetu u Beogradu, gde je izabrana u zvanje asistenta-pripravnika 1995. godine, a 2004. godine prvi put je izabrana u zvanje asistenta.

Godine 2007. objavila je, u koautorstvu sa Aleksandrom Lipkovskim, rad pod naslovom "Analytic Equivalence of the Plane Curve Singularities $y^n + a(x)y + b(x) = 0$", u časopisu Publications de l'Institut Mathématique. U koautorstvu sa Andrejom Tepavčević pisala je rad pod nazivom "On Delta-suitable elements in algebraic lattices", koji je prihvaćen za štampu u časopisu Filomat, 2011. godine, dok je njen samostalni rad "The weak congruence representability of sublattices and suborders of representable lattices" prihvaćen za štampu u časopisu Novi Sad Journal of Mathematics, 2012. godine. Koautor je i dva saopštenja: "On analytic equivalence of some plane curve singularities", u Moskvi, 2008. godine, i "Weak equivalences, weak congruences and applications", u Segedinu, 2011. godine.

Novi Sad, 30. 01. 2012. Vanja Stepanović

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: Vanja Stepanović
AU
Mentor: Prof. dr Andreja Tepavčević
MN
Naslov rada: Problem reprezentacije mreže slabih kongruencija
NR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: S/EN
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2012
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 3
MA
Fizički opis rada: 3 poglavlja/81 stranica/85 lit. citata/20 tabela/24 slike/ 0 grafika/0 priloga
FO

Naučna oblast: Matematika (algebra i logika)
NO
Naučna disciplina: Teorija mreža
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: Slaba kongruencija, mreža slabih kongruencija, algebarska mreža, delta-podesni element, predstavljivost
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Slaba kongruencija algebre $\mathcal{A} = (A, H)$ je simetrična i tranzitivna relacija na skupu A koja je saglasna sa svim operacijama algebre $\mathcal{A}$, tj. operacijama iz skupa H. Skup svih slabih kongruencija algebre formira algebarsku mrežu u odnosu na inkluziju. Ta mreža sadrži mrežu kongruencija iste algebre, kao i mrežu izomorfnu mreži podalebri te algebre. Pitamo se kada je neka algebarska mreža predstavljiva mrežom slabih kongruencije neke algebre, odnosno, preciznije, kada za mrežu $\mathcal{L}$ i element a u njoj postoji algebra $\mathcal{A}$ takva da je mreža $\mathcal{L}$ izomorfna mreži slabih kongruencija algebre $\mathcal{A}$ u izomorfizmu u kojem se element a preslikava u dijagonalnu relaciju. Za neke specijalne mreže i elemente u njoj možemo dokazati da jesu predstavljivi, čime proširujemo skroman spisak dosadašnjih rezultata. S druge strane, istražujući osobine mreže slabih kongruencija i dijagonalne relacije, dolazimo do nekih potrebnih uslova koji mora zadovoljiti element a mreže $\mathcal{L}$ da bi mreža $\mathcal{L}$ zajedno s tim elementom bila predstavljiva; ti potrebni uslovi predstavljaju uopštenja do sad poznatih uslova. Najzad, dokazujemo da u nekim slučajevima predstavljivost neke mreže proizilazi iz predstavljivosti neke druge, ili nekog skupa drugih mreža.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 27. 01. 2011.
DP
Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
(Naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet)
KO

Predsednik: Dr Branimir Šešelja, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Miroslav Ćirić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu
Član: Dr Petar Đapić, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Andreja Tepavčević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF SCIENCES

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic type
DT
Type of record: Text printed material
TR
Contents code: Doctoral thesis
CC
Author: Vanja Stepanović
AU
Mentor: Prof. dr Andreja Tepavčević
MN
Title: Weak congruence lattice representation problem
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: S/EN
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2012
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: 3 chapters/81 pages/85 lit. quotations/20 tables/24 pictures/0 graphs/0 additional lists
PD

Scientific field: Mathematics (Algebra and Logics)
SF
Scientific discipline: Lattice theory
SD
Subject/Key words: Weak congruence, weak congruence lattice, algebraic lattice, delta-suitable element, representability
SKW

UC:

Holding data: Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:
N
Abstract: A weak congruence of an algebra $\mathcal{A} = (A, H)$ is a symmetric and transitive relation on A, compatible with the algebra, i.e. compatible with the operations in H. The collection $Cw\mathcal{A}$ of weak congruences on an algebra $\mathcal{A}$ is an algebraic lattice under inclusion. That lattice contains the congruence lattice of the same algebra, as well as a lattice isomorphic to the subalgebra lattice of the algebra. We are dealing with the problem: under which conditions is an algebraic lattice representable by the weak congruence lattice of an algebra or, more precisely, under which conditions is there for a lattice $\mathcal{L}$ and an element a in it an algebra $\mathcal{A}$ such that $\mathcal{L}$ is isomorphic to the weak congruence lattice $Cw\mathcal{A}$ under an isomorphism which maps a to the diagonal relation. For some special lattices and some elements in it we can prove the representability, expanding the small list of the existing results. On the other hand, by investigating some properties of the weak congruence lattice and the diagonal element, we come to some necessary conditions which an element a, together with the lattice to which it belongs, must fulfill in order to be representable; that new conditions are generalizations of the known ones. Finally, we prove that in some cases the representability of a lattice follows from the representability of another, or a set of other lattices.
AB
Accepted by the Scientific Board on: January 27th, 2011
ASB
Defended:
DE

Thesis defend board:
(Degree/name/surname/title/faculty)
DB

President: Dr Branimir Šešelja, Full Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member: Dr Miroslav Ćirić, Full Professor, Faculty of Sciences, Niš
Member: Dr Petar Đapić, Assistant Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member: Dr Andreja Tepavčević, Full Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad, mentor