UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Branka V. Budimirović

MREŽNO VREDNOSNI IDENTITETI I NEKE KLASE MREŽNO VREDNOSNIH PODALGEBRI

- doktorska disertacija –

Novi Sad, 2011.

Želim da izrazim veliku zahvalnost profesoru dr Andreji Tepavčević na stručnoj pomoći i ohrabrenjima koja su me podsticala da istrajem u radu.

Zahvalnost dugujem i profesorima dr Branimiru Šešelji, dr Miroslavu Ćiriću i dr Ivici Bošnjaku na korisnim sugestijama koje su poboljšale rad.

Posebno se zahvaljujem mojim sinovima Nenadu i Nebojši i suprugu Vjekoslavu na nesebičnoj pomoći i podršci.

Sadržaj

Uvod

Od ideje uvođenja rasplinutih (fuzzy, fazi) skupova od strane Zadeha 1965., pa do danas, svedoci smo neverovatnog razvoja i primene rasplinutih struktura. Ta, na izgled, jednostavna, ali veoma smela ideja da se odstupi od uobičajenog (klasičnog) matematičkog pristupa i da se napravi pristup koji je bliži stvarnom životu, bazirana na ljudskom ponašanju i odlučivanju, u kome nije sve crno-belo, tačno-netačno, dobro-loše..., već između dve krajnosti, postoji više nivoa pripadanja skupu sa datim svojstvom, izazvala je burne reakcije. Ovakav pristup podstakao je istraživanje rasplinutih algebarskih struktura koje su dobijene iz klasičnih (crisp) struktura, a koje su našle veliku primenu, prvenstveno u svim granama informacionih nauka.

Mrežno vrednosni rasplinuti (fuzzy, fazi) skup (prvo uveden od strane Goguen-a [**37**]) je preslikavanje $\mu : G \to L$, gde je G neki neprazan skup i L kompletna mreža. Često se uzima da je L neki specijalan tip mreže npr. [0,1] interval realnih brojeva, Bulova mreža, rezidualna mreža itd. Ako su u skupu G definisane neke operacije i relacije, onda dobijamo specijalne rasplinute skupove (rasplinute ili fuzzy algebre), čiji naziv odgovara nazivu u klasičnoj algebri, samo je nazivu klasične (crisp) algebre dodat prefiks rasplinuti (fuzzy).

Mrežno vrednosne algebre se istražuju od samog nastanka rasplinutih struktura. Prvo su nastale rasplinute grupe (Rosenfeld [**72**] i Das [**24**]), zatim polugrupe, prsteni i ostale posebne strukture (počevši od Malika i Mordesona, videti [**66**] i reference date u njima). Za rasplinute polugrupe, monografija [**65**] daje sažet prikaz svih rezultata do 2003. Među brojnim rezultatima, možemo pomenuti rad [**36**], gde su ispitivane strukture rasplinutih podgrupa grupa .

Usledilo je pojavljivanje rasplinute univerzalne algebre (videti Di Nola, Gerla [**32**] i takođe Šešelja, Tepavčević [**76**], [**78**]). Svi pomenuti rade sa rasplinutim podalgebrama, tj. univerzum algebre je fazifikovan, dok su operacije ostale klasične (crisp). Razlika postoji u kodomenu rasplinute strukture kao funkcije, bilo da je to jedinični interval ili kompletna mreža (u novije vreme rezidualna). Takođe je rađeno uopštenje u smislu da kodomen bude poset ili relacioni sistem [**76**].

U poslednje dve decenije najčešći predmet istraživanja univerzalnih algebri u ovom kontekstu je bilo ispitivanje u smislu rasplinutog preslikavanja na opisani način, ali takođe sa različitim pristupima. Bez većeg ulaska u široko polje fazi logike, pomenućemo samo neke posebne doprinose algebri, relevantne za istraživanja u ovom radu. Pojam rasplinute jednakosti je uveden u radu Höhle [**41**] i onda korišćen od strane mnogih drugih autora. U nekoliko radova, videti npr. [**27**], [**29**] Demirci razmatra specijalne algebarske strukture u kojima postoje rasplinute relacije jednakosti.

Bělohlávek (videti knjigu [**2**], i knjigu sa Vychodilom [**5**]), samostalno, i u saradnji sa drugim matematičarima uvodi i istražuje algebre sa rasplinutim jednakostima. One su definisane kao klasične algebre u kojima je obična jednakost zamenjena rasplinutom jednakošću koja je kompatibilna sa osnovnim operacijama algebre. U ovom okviru, Bělohlávek razvija i istražuje najvažnije algebarske teme (kongruencije, podalgebre, proizvode, kao i varijetete). Kodomen ovih rasplinutih struktura je obično neka rezidualna mreža. Razlog za uzimanje rezidualne mreže kao kodomena u ovom kontekstu je to što se u rezidualnoj mreži uspešno može modelirati logika (kad je potrebna i upotreba implikacije). Nedostatak ovog pristupa je to što tada nivoi raspinutih struktura ne zadovoljavaju uvek svojstva analogna običnim strukturama. U okviru istraživanja rasplinutih algebri, Šešelja i Tepavčević

[**89**] uvode slabe mrežno vrednosne ekvivalencije i jednakosti preko oslabljene refleksivnosti.

Jedna od značajnih tema istraživanja u ovom radu su različiti aspekti rasplinutih polugrupa. Ova oblast ima široku primenljivost u teoriji automata i drugim oblastima. Preciznije, strukturna teorija automata je bazirana na polugrupama prelaza automata, tako da teorija razvijena u ovom radu u tom kontekstu može imati značajnu primenu.

Nedavno su u svetu već sprovedena neka istraživanja vezana za mogućnosti primene polugrupa i sa njima povezanih struktura, u pristupu vezanom za rasplinute skupove (videti monografiju [**65**]). Široko se istražuju rasplinuti automati (videti [**64**]). Rasplinuti automati sa vrednostima iz kompletne rezidualne mreže se takođe ispituju u skorije vreme (videti [**43**]).

Vrlo često, osobine rasplinutih struktura su ispitivane korišćenjem mogućnosti prenosa osobina samih struktura (rasplinutih skupova, rasplinutih relacija, rasplinutih algebri, itd.) na njihove nivo ("cut") strukture (koje su odgovarajuće klasične strukture). One su poznate kao "cut-worthy" osobine. Termin "cut-worthy" se prvi put pojavljuje u [**1**], videti takođe [**55**], a za mrežno vrednosni "cut-worthy" pristup videti [**39, 81, 105**]. Neki delovi ovog rada su nastali tako što je nastojano da bude ispoštovan "cut-worthy" pristup.

Koristan alat za karakterizaciju različitih tipova polugrupa i rasplinutih polugrupa su različiti tipovi rasplinutih ideala. U [**65**] je dat prikaz veze između ideala i polugrupa. Posebno, kompletno regularne polugrupe su okarakterisane preko različitih tipova rasplinutih ideala i relacijskih struktura. U skorije vreme dobijeno je nekoliko novih rezultata o karakterizaciji rasplinutih polugrupa preko rasplinutih ideala. Među mnogim drugim, regularne polugrupe su okarakterisane upotrebom (α, β)-rasplinutih ideala [**110**] i novi rezultati o rasplinutim idealima i poluprostim rasplinutim idealima u polugrupama su dobijeni u [**54**].

Podgrupa polugrupe je važan pojam u klasičnoj algebri (videti [**22**]). Posebno, dobro poznat rezultat je particija nekih klasa polugrupa na familiju grupa. Dobijene faktor strukture su često polumreže.

Rasplinute ekvivalencije, kongruencije i jednakosti spadaju u najvažnije pojmove u algebarskim istraživanjima. Prvobitno su ovi pojmovi definisani na klasičnoj algebri, a kodomen je bila obična mreža sa nulom i jedinicom ili pak rezidualna mreža. U skorije vreme je došlo do novog pristupa, u smislu da je oslabljena refleksivnost, t.j. uslov $\rho(x, y) = 1$, zamenjen sa $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x)$, gde je sa ρ označena rasplinuta relacija.

U ovom radu su pomenuti pojmovi definisani na rasplinutoj podstrukturi tako što je dodat uslov $\rho(x, y) \leqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$, gde je ρ uvedena relacija na rasplinutom podskupu (podalgebri) μ, i zato je refleksivnost zamenjena sa $\rho(x, x) = \mu(x)$. Dalje, u skladu sa ovim definicijama, su uvedeni pojmovi podalgebre rasplinute podalgebre, rasplinutog homomorfizma rasplinute podalgebre u rasplinutu podalgebru i direktnog proizvoda rasplinutih podalgebri. Pojam zadovoljenja rasplinutog identiteta je razmatran tako što je rasplinuta jednakost na algebri zamenjena sa rasplinutom jednakošću na rasplinutoj podalgebri.

U radu su ispitivane i neke posebne klase mrežno vrednosnih podalgebri. Nov pristup u ovim razmatranjima je taj što je jedna mrežno vrednosna algebarska struktura definisana na drugoj klasičnoj ili rasplinutoj algebarskoj strukturi, umesto na istoj, kao što je do sada bio slučaj. Npr. rasplinuta podgrupa je definisana na polugrupi, ali i na rasplinutoj polugrupi. U radu je ispitivana i povezanost različitih rasplinutih struktura.

Rad se sastoji iz Uvoda i pet celina (glava odnosno poglavlja), od kojih prve dve sadrže prikaz poznatih pojmova i rezultata, a poslednje tri sadrže originalni naučni doprinos.

U prvom poglavlju dati su osnovni pojmovi iz teorije mreža i univerzalne algebre. To poglavlje sadrži poznate pojmove i rezultate na kojima se baziraju novo-uvedeni pojmovi i rezultati. U izučavanju osobina koje su zajedničke za sve algebarske strukture (poput grupa, prstena itd.), ili osobina koje odvajaju jednu klasu algebri od druge, mreže igraju važnu ulogu. Ovde su posebno značajne mreže kongruencija, kao i mreže podalgebri, kao što su podgrupe ili podprsteni. Mnogi rezultati iz teorije rasplinutih skupova inspirisani su rezultatima iz teorije mreža. Pored toga, u definiciji rasplinutih (fuzzy) skupova koja se koristi u ovom radu mreže imaju ključnu ulogu. Iz tog razloga, u prvom delu ovog poglavlja dati su neki osnovni univerzalno-algebarski pojmovi vezani za mreže, kao pojmovi podmreže, homomorfizma i kongruencije. Na kraju su navedeni neki specijalni tipovi mreža, Bulove, distributivne i rezidualne mreže. Navedene su važne teoreme vezane za navedene pojmove. Izbor definicija i teorema je dat u skladu sa pojmovima koji će biti korišćeni u ovom radu.

U drugom delu ovog poglavlja dati su osnovni pojmovi univerzalne algebre, kao i neke osnovne teoreme potrebne u ovom radu. Date su definicije algebre, podalgebre, količničke algebre, direktnog proizvoda algebri, izomorfizma, kongruencije, terma, identiteta i drugih, jer su to pojmovi koji se u ovom radu uopštavaju u okviru teorije rasplinutih struktura.

Neke definicije iz ovog poglavlja mogle su biti izostavljene u slučaju da smatramo da su opšte poznate i da ih ne treba navoditi. Međutim, kako je ovo uvodni deo iz klasične teorije, da bi ovaj doktorat predstavljao jednu celinu, navedene su i neke dobro poznate definicije.

U drugom poglavlju su prvo dati osnovni pojmovi i rezultati iz mrežno vrednosnih struktura. Definisan je rasplinuti podskup prvo na običnoj mreži sa nulom i jedinicom, a zatim i na rezidualnoj mreži. Takođe su definisani presek i unija proizvoljne kolekcije rasplinutih podskupova. Dat je i pojam skupa nivoa p, gde je p proizvoljan element mreže koja se koristi kao kodomen rasplinutog podskupa.

Zatim je definisana rasplinuta relacija i njene važnije osobine kao sto su rasplinuta refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost. Posebno su istaknute rasplinute relacije ekvivalencije, koje u ovom radu imaju jednu od centralnih uloga, naročito njihov specijalan slučaj rasplinuta jednakost.

Sledi uvođenje pojma rasplinutog preslikavanja i rasplinute operacije na datom rasplinutom podskupu kao preslikavanja posebnog oblika.

Pored rasplinutog preslikavanja koje je definisano kao klasično preslikavanje rasplinutog skupa u rasplinuti skup koje zadovoljava date uslove, u ovom poglavlju je rasplinuto preslikavanje definisano i kao rasplinuta binarna relacija koja zadovoljava određene uslove. Izloženi su i osnovni principi ovakvog pristupa koji je razvio M. Demirci ([**26, 28, 29**]).

Mrežno vrednosna podalgebra date algebre je definisana, kako u slučaju kada je kodomen kompletna mreža sa nulom i jedinicom, tako i u slučaju kada je kodomen rezidualna mreža.

Posebno su istaknute rasplinute kongruencije i rasplinute kompatibilne jednakosti na datoj algebri. Slede definicije podalgebre date rasplinute podalgebre, rasplinutog homomorfizma rasplinute podalgebre u rasplinutu podalgebru i direktnog proizvoda rasplinutih podalgebri.

Pored rasplinute ekvivalencije i rasplinute jednakosti, slabljenjem osobine refleksivnosti, uvedeni su i pojmovi slabe rasplinute ekvivalencije i slabe rasplinute jednakosti. U daljim razmatranjima korišćena mreža skoro uvek je kompletna. Data je veza između mrežno vrednosne slabe jednakosti na skupu, odnosno podalgebri neke algebre i nivo skupova te relacije.

Uveden je i pojam mrežno vrednosnog identiteta i pojam njegovog zadovoljenja, odnosno tačnosti na nekoj rasplinutoj podalgebri date algebre. Osnovne osobine mrežno vrednosnih identiteta su prikazane, pre svega, preko rezultata iz [**105**].

U ovom poglavlju se razmatraju i tzv. L-algebre kao obične algebre kojima je pridružena rasplinuta jednakost koja je kompatibilna sa funkcijama ove algebre. Za kodomen je uzeta rezidualna mreža. Detaljan prikaz ovih algebri dat je u knjizi [**5**].

Svi pojmovi u ovom pristupu su definisani na L-algebri. Tako se uvode pojmovi podalgebre, kongruencije, homomorfizma i direktnih proizvoda na klasičnoj algebri sa rasplinutom jednakošću. Naravno, ove definicije i rezultati se razlikuju od sličnih rezultata i definicija ovih pojmova na rasplinutoj podalgebri.

Takođe su izložene i osnove rasplinute jednakosne logike, koje su poslužile kao osnova za uvođenje pojma jednakosne klase. Uveden je i pojam varijeteta i na kraju teorema koja je uopštenje poznate teoreme Birkhoff-a (klasa algebri varijetet ako i samo ako je jednakosna klasa).

U ovom poglavlju su takođe navedeni primeri rasplinutih struktura u slučaju grupoida, polugrupe, grupe i poluprstena.

U trećem poglavlju je na rasplinutoj podpolugrupi definisana rasplinuta podgrupa i razmatrane su particije rasplinute podpolugrupe. Postoje brojni radovi u kojima su ispitivane rasplinute podgrupe grupa. Među mnogobrojnim rezultatima, možemo pomenuti rad [**36**], gde su ispitivane strukture rasplinutih podgrupa; rad [**114**], gde je pokazano da rasplinut podgrupoid grupe ne mora biti rasplinuta grupa, slično kao u klasičnom slučaju i rad [**111**] u kom su ispitivane rasplinute regularne podpolugrupe.

Rasplinute particije su istraživali mnogi autori (npr. [**36**]), i posebno rasplinute $\delta - \varepsilon$-particije (pristup koji je korišćen u ovom radu) koje su uvedene i ispitivane u [**61**].

Treće poglavlje (kao i četvrto i peto) sadrži originalne rezultate. U ovom delu, neki od gore spomenutih pojmova i rezultata su uvedeni u kontekstu rasplinutih skupova, i ispitani korišćenjem delimično "cut-worthy" pristupa. Dva nova koncepta su definisana i istražena: rasplinuta (G, ϵ)-podgrupa polugrupe i rasplinuta (G, ϵ)-podgrupa rasplinute polugrupe. Kao glavni rezultat u ovom delu, dokazano je da rasplinuta polugrupa može biti prikazana kao particija (korišćenjem specijalnih tipova rasplinutih particija) familije rasplinutih (G, ϵ)-podgrupa ako i samo ako je ona kompletno regularna rasplinuta polugrupa. Ovako dobijene particije su $1 - \varepsilon$-particije [**61**]. Otuda se dobija karakterizacija rasplinutih kompletno regularnih polugrupa preko familije rasplinutih ε-podgrupa.

Prednosti uvođenja nove definicije rasplinute ε-podgrupe rasplinute polugrupe je što omogućava predstavljanje rasplinute kompletno regularne polugrupe preko rasplinute particije familije takvih rasplinutih struktura (rasplinutih ε-podgrupa). Reprezentacija nije moguća ako koristimo samo klasične rasplinute podgrupe. Drugi pojam koji omogućava ovo istraživanje je koncepcija $1 - \varepsilon$-particija.

Podsetimo da smo koristili kompletne mreže kao kodomen, umesto realnog intervala $[0, 1]$, zato što je takav pristup opštiji, a i dalje važi i saglasnost sa nivoima. Pored toga, u nekim delovima rada zahteva se da mreža bude kompletno distributivna, a u nekim delovima da bude linearno uređena.

U četvrtom poglavlju razmatramo rasplinute kongruencije na rasplinutim podalgebrama obične (crisp) algebre. Rasplinute jednakosti su specijalne rasplinute kongruencije i one su uvedene umesto običnih jednakosti. Skup vrednosti je kompletna rezidualna mreža, koja u nekim slučajevima ima i dodatna svojstva.

Posle uvodnog razmatranja su uvedene rasplinute kongruencije kao rasplinute relacije na rasplinutim podalgebrama obične algebre. Rasplinute kongruencije su povezane sa rasplinutim podalgebrama preko prikladne definicije refleksivnosti. Dokazano je da je kolekcija svih rasplinutih kongruencija na rasplinutoj podalgebri neke algebre kompletna mreža u kojoj rasplinute jednakosti formiraju kompletnu i-polumrežu. Dalje je definisan rasplinuti identitet kao formula u kojoj su termi povezani preko rasplinute jednakosti umesto obične. Rasplinuti identitet može biti zadovoljen na rasplinutoj podalgebri (u odnosu na neku rasplinutu jednakost), dok obična nosač algebra ne mora zadovoljavati odgovarajući običan identitet. Dokazano je da, ako rasplinuta podalgebra algebre zadovoljava rasplinuti identitet u odnosu na neku rasplinutu jednakost, onda postoji najmanja rasplinuta jednakost takva da odgovarajući rasplinuti identitet važi na istoj rasplinutoj podalgebri. Glavni rezultat u ovom delu je da obična algebra zadovoljava običan identitet ako i samo ako odgovarajuća rasplinuta podalgebra zadovoljava odgovarajući identitet za sve odgovarajuće rasplinute jednakosti.

Zatim su proučavane specijalne rasplinute kongruencije na običnoj algebri, koje su nazvane slabe rasplinute kongruencije. Dokazano je da je, pod određenim uslovima, svaka slaba rasplinuta kongruencija na algebri takođe i rasplinuta kongruencija na rasplinutoj podalgebri. Obrnuto, svaka rasplinuta kongruencija na rasplinutoj podalgebri neke algebre je slaba rasplinuta kongruencija na nekoj običnoj (crisp) algebri. U zaključku objašnjavamo značaj naseg pristupa, koji je sadržan u suštini rasplinutosti novo-definisanih rasplinutih struktura, koristeći rasplinute identitete. Kao primer, dajemo novu definiciju rasplinute podpolugrupe običnog (crisp) grupoida.

Napomenimo da je naš pristup rasplinutim identitetima na rasplinutim podalgebrama potekao od ideje iz rada [**105**]. Međutim, u tom radu nisu korišćene rasplinute kongruencije i rasplinute jednakosti na rasplinutim podalgebrama. Sve ovo bilo je definisano sa fiksiranom dijagonalom (sa 1 na dijagonali) i otuda je bilo povezano sa algebrom nosačem, a ne sa njenom rasplinutom podalgebrom.

U petom poglavlju se nastavljaju istraživanja iz prethodnog poglavlja uvođenjem novih pojmova i uopštavanjem postojećih rezultata. Ovde je kao kodomen rasplinutih struktura ponovo uzeta kompletna mreža

U ovom delu rada se definiše rasplinuta algebra kao rasplinuta podalgebra univerzalne algebre na kojoj je data kompatibilna rasplinuta jednakost. Znači rasplinuta podalgebra ima ulogu algebre, a jednakost je zamenjena sa rasplinutom jednakošću na toj podalgebri. Zatim je definisana rasplinuta jednakosna klasa tako uvedenih rasplinutih algebri.

Na primeru rasplinutog podgrupoida je ilustrovana primena rasplinutih kompatibilnih jednakosti. Rasplinuta podpolugrupa je definisana na rasplinutom podgrupoidu (ne na polugrupi) u odnosu na kompatibilnu rasplinutu jednakost datu na tom rasplinutom podgrupoidu. Dobijeni rezultati su uopštenja poznatih rezultata iz klasične algebre.

Dalje su definisane podalgebre rasplinute podalgebre i dokazano da, ako rasplinuta algebra pripada nekoj jednakosnoj klasi, onda i njena podalgebra pripada toj jednakosnoj klasi.

Takođe je definisan rasplinut homomorfizam jedne rasplinute algebre u drugu, definisana homomorfna slika prve rasplinute algebre i dokazano da, ako rasplinuta algebra pripada nekoj jednakosnoj klasi, onda i njena homomorfna slika pripada toj jednakosnoj klasi.

Zatim je definisan direktan proizvod rasplinutih algebri i dokazano da, ako kolekcija rasplinutih algebri pripada nekoj jednakosnoj klasi, onda i njihov direktan proizvod pripada toj jednakosnoj klasi.

Kao posledica prethodnih teorema se dobija teorema, koja odgovara jednom pravcu teoreme Birkhoff-a u klasičnoj algebri, kao i jednom pravcu odgovarajuće teoreme, kada je rasplinuta jednakost definisana na običnoj algebri.

GLAVA 1

Algebarske strukture

Glavna oblast istraživanja u ovom radu su mrežno vrednosne strukture. Zato u ovoj uvodnoj glavi navodimo osnovne pojmove i tvrđenja iz mreža i opštih algebarskih struktura koji će se koristiti u daljem radu ili sa njima čine jedinstvenu celinu. Osvrt je podeljen na dve glavne celine: Mreže i Univerzalne algebre.

1. Mreže

1.1. Definicije i osnovne osobine mreža. Poseban značaj među uređenim skupovima imaju oni čiji svi konačni podskupovi (ili svi podskupovi), imaju infimum i supremum. Tako dolazimo do pojma **mreže** kao uređenog skupa $(L, \leqslant)$ u kome za svaka dva elementa a i b postoji $inf\{a,b\}$ i $sup\{a,b\}$. Lako se dokazuje da, ako je $(L, \leq)$ mreža, onda $infM$ i $supM$ postoje za svaki neprazan konačan podskup M skupa L. Često koristimo naziv **mrežno uređeni skup** za uređeni skup koji je mreža. Ako u uređenom skupu svaki podskup (ne samo konačan i neprazan) ima infimum i supremum, onda se on zove **potpuna (kompletna) mreža**. U potpunoj mreži infimum i supremum skupa L su redom najmanji (0) i najveći (1) element, dok je za prazan skup infimum (1), a supremum (0). Mreža je **ograničena**, ako je ograničena kao uređeni skup, tj. ako poseduje najmanji

(0), i najveći (1) element. Jasno je da je svaka potpuna mreža ograničena, a svaka konačna mreža je potpuna i ograničena.

U uređenom skupu infimum i supremum su, ako postoje, jedinstveni. Kako je mreža uređeni skup u kome infimum i supremum postoje za svaka dva elementa, mogu se definisati dve binarne operacije na sledeći način:

$$x \wedge y := inf\{x, y\} \quad , \quad x \vee y := sup\{x, y\}$$

Ako je M podskup mreže L, uvodimo oznake:

$$\bigwedge M := infM \quad , \quad \bigvee M := supM$$

U mreži je $x \leq y$ ekvivalentno sa svakom od jednakosti:

$$x \wedge y = x \quad , \quad x \vee y = y$$

Napomenimo da uređeni podskup mreže ne mora i sam biti mreža, jer u njemu ne mora postojati infimum i supremum.

Sledeća tvrđenja govore o uslovima pod kojima je uređeni skup potpuna mreža.

Uređeni skup $(A, \leq)$ *u kome svaki podskup ima infimum je potpuna mreža.*

Uređeni skup $(A, \leq)$ *u kome svaki neprazan podskup ima infimum i koji ima najveći element, je potpuna mreža.*

Kako je mreža svih podskupova nepraznog skupa (u odnosu na inkluziju) potpuna, infimum je skupovni presek, a supremum skupovna unija. Većina potpunih mreža koje se ispituju u algebri sastavljena je od skupova. U njima je obično infimum presek, ali supremum nije uvek unija. Na konstrukciju takvih mreža upućuje sledeća teorema.

Neka je $\mathcal{F}$ *familija podskupova nepraznog skupa* A*, zatvorena u odnosu na skupovni presek i koji sadrži skup* A*. Tada je* $(\mathcal{F}, \subseteq)$ *kompletna mreža.*

Supremum proizvoljne kolekcije podskupova ovako konstruisane potpune mreže je presek svih skupova koji sadrže uniju te kolekcije:

$$\bigvee\{\mathcal{F}_1 \mid \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}\} = \bigcap\{\mathcal{B} \in \mathcal{F} | \cup \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{B}\}.$$

Pored definicije mreže kao uređenog skupa, ona se može definisati i kao algebarska struktura.

Neka je L neprazan skup, a $\vee$ i $\wedge$ binarne operacije na njemu. Tada je uređena trojka $(L, \vee, \wedge)$ **mreža** *(mreža kao algebarska struktura), ako su obe operacije komutativne i asocijativne i važe zakoni apsorpcije.*

Na mreži $(L, \wedge, \vee)$ važe i zakoni idempotentnosti:

$$x \vee x = x \quad , \quad x \wedge x = x.$$

Iz definicije mreže kao algebarske strukture sledi da je svaki uređeni skup $(L, \leq)$ koji je mreža, istovremeno i mreža kao algebarska struktura $(L, \wedge, \vee)$. Binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ su redom infimum i supremum. Takođe, na mreži $(L, \wedge, \vee)$ može se definisati relacija poretka $\leq$ tako da je $(L, \leq)$ mreža:

$$x \leq y \text{ ako i samo ako je } x \wedge y = x. \quad (1)$$

Dakle, svaka mreža $(L, \wedge, \vee)$ je istovremeno i mrežno uređen skup $(L, \leq)$ u odnosu na poredak $\leq$ definisan sa (1).

Svaki mrežno uređen skup $(L, \leq)$ jeste mreža i kao algebarska struktura $(L, \wedge, \vee)$, gde su operacije $\wedge$ i $\vee$ redom infimum i supremum.

Mrežni termi *(kraće: termi) definišu se na sledeći način:*

(i) *promenljive $x, y, z, ..., x_1, x_2, x_3, ...$ su termi;*

(ii) *ako su A i B termi, onda su $(A \wedge B)$ i $(A \vee B)$ termi;*

(iii) *termi su samo oni izrazi koji se obrazuju konačnim brojem primena prethodna dva pravila.*

Sa $t(x_1, ..., x_n)$ označava se tzv. $n-$**arni term**, u kome učestvuju samo promenljive iz skupa $\{x_1, ..., x_n\}$. Svaki $n-$arni term određuje $n-$arnu operaciju, tzv. **term funkciju** na datoj mreži L. Ta funkcija preslikava L^n

u L. Ako je $t(x_1, ..., x_n)$ $n-$arni term i $a_1, ..., a_n$ elementi proizvoljne mreže L, onda je i $t(a_1, ..., a_n)$ element iz L koji je vrednost term funkcije za te konkretne elemente. **Mrežni identitet** (kraće identitet) je formula $s = t$, gde su s i t termi. Kažemo da je identitet zadovoljen na mreži L ako su jednake funkcije koje na toj mreži određuju termi s i t.

Mrežna nejednakost je formula oblika $s \leq t$ gde su s i t termi, a $\leq$ relacijski znak koji se interpretira kao relacija poretka u mreži. Ova formula je ekvivalentna identitetu $s \wedge t = s$, tj. nejednakost je ispunjena ako i samo ako važi odgovarajući identitet.

Neka je L proizvoljna mreža i
$a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \in L$. *Ako je* $a_1 \leqslant b_1, ..., a_n \leqslant b_n$, *onda je za proizvoljan n-arni term t,*

$$t(a_1, ..., a_n) \leq t(b_1, ..., b_n).$$

U svakoj mreži za proizvoljan n-arni term t važi:

$$x_1 \wedge ... \wedge x_n \leq t(x_1, ..., x_n) \leq x_1 \vee ... \vee x_n$$

Identiteti:

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad (d_1)$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad (d_2)$$

se zovu **zakoni distributivnosti** *i oni ne važe na svakoj mreži. Mreža je* **distributivna** *ako na njoj važe distributivni zakoni d_1 i d_2.*

Identiteti d_1 i d_2 su ekvivalentni, tj. ako u mreži važi jedan od njih, onda važi i drugi.

U svakoj mreži važi tzv. **minimaks** princip:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\Big(\bigvee_{j=1}^{m} x_{ij}\Big) \geq \bigvee_{j=1}^{m}\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} x_{ij}\Big)$$

Mreža $(L, \leq)$ kao uređeni skup može imati najmanji i (ili) najveći element. Ako se ona posmatra kao algebra $(L, \wedge, \vee)$, onda se ti elementi definišu kao **nula** (0) i **jedinica** (1), na sledeći način: za sve x iz L

$$0 \vee x = x \quad \text{i} \quad 1 \wedge x = x.$$

Nula i jedinica (ako postoje) su redom najmanji i najveći element u mreži u odnosu na poredak $\leq$. Takođe, ako postoje nulti i jedinični element, onda, za sve x iz L, važi:

$$0 \wedge x = 0 \quad \text{i} \quad 1 \vee x = 1.$$

Već smo naveli da je mreža ograničena ako ima nulti (0) i jedinični (1) elemenat. U ograničenoj mreži definišemo **komplement** x' elementa x preko jednakosti:

$$x \wedge x' = 0 \quad \text{i} \quad x \vee x' = 1.$$

Lako se proverava da su 0 i 1 uzajamno komplementi. Postoje mreže u kojim, osim 0 i 1, nema drugih elemenata sa komplementima. Napomenimo da jedan element može imati više od jednog komplementa.

Mreža je **komplementirana** *ako u njoj svaki element ima komplement, a* **jednoznačno komplementirana** *ako svaki njen element ima tačno jedan komplement.*

Mreža $(L_1, \wedge, \vee)$ *je* **podmreža** *mreže* $(L, \wedge, \vee)$, *ako je* $L_1 \subseteq L$, *a operacije na* L_1 *su restrikcije operacija iz* L.

Poredak se na podmreži poklapa sa poretkom na samoj mreži. Obratno ne važi; uređeni podskup iz L može i sam biti mreža u odnosu na postojeći poredak, ali ne mora biti podmreža mreže L. Zato se pojam podmreže definiše isključivo za mrežu kao algebru $(L, \wedge, \vee)$.

Presek dve podmreže mreže L, *koje nisu disjunktne, je podmreža u* L.

Ovo tvrđenje može se uopštiti na proizvoljno mnogo podmreža koje imaju neprazan presek. U tom smislu, ako je M neprazan podskup mreže L, onda je presek svih podmreža koje sadrže skup M, u oznaci $\langle M \rangle$, podmreža mreže L. Kažemo da je $\langle M \rangle$ podmreža **generisana** skupom M. Može se dokazati da je to najmanja podmreža mreže L koja sadrži skup M.

Opštije tvrđenje dato je u sledećoj teoremi.

Ako je M neprazan podskup mreže L i $a \in L$, onda $a \in \langle M \rangle$ ako i samo ako je $a = t(m_1, ..., m_n)$ za neki n-arni mrežni term t i neke elemente $m_1, ..., m_n$ iz M.

Kao i svaka mreža i podmreža može biti **potpuna** tj. sadržati infimum i supremum svakog svog podskupa. Za mrežu i njenu podmrežu može se dogoditi da svaka od njih bude (ili ne bude) potpuna, nezavisno od one druge.

Homomorfizam *mreže $(L_1, \wedge, \vee)$ u mrežu $(L_2, \wedge, \vee)$ je funkcija $f : L_1 \to L_2$ koja je saglasna sa operacijama $\wedge$ i $\vee$: ako su x i y iz L_1, onda je*

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \quad i \quad f(x \vee y) = f(x) \vee f(y).$$

Ako je f bijekcija, preslikavanje se zove **izomorfizam .**

Sledeće tvrđenje daje bitnu osobinu homomorfne slike.

Ako je f homomorfizam iz mreže L u mrežu M, onda je $f(L)$ podmreža u M.

Kako je homomorfizam saglasan sa operacijama u mreži, to znači da očuvava konačne infimume i supremume. Važi sledeći stav:

Neka je f homomorfizam mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(M, \wedge, \vee)$ i $L_1 \subseteq L$.

Tada je

$$f\big(\bigwedge L_1\big) \leq \bigwedge f(L_1) \quad i \quad f\big(\bigvee L_1\big) \geq \bigvee f(L_1)$$

pod uslovom da navedeni infimumi, odnosno supremumi postoje.

Specijalno, ako je f izomorfizam, onda u oba slučaja važi jednakost.

Važi i sledeće: Bijekcija $f : L_1 \to L_2$ je izomorfizam mreža ako i samo ako za sve $x, y \in L_1$ važi:

$$x \leq y \quad \text{ako i samo ako} \quad f(x) \leq f(y).$$

Kongruencija (relacija kongruencije) na mreži $(L, \wedge, \vee)$ je relacija ekvivalencije θ na L, koja je saglasna sa mrežnim operacijama, tj.

$$iz \quad x\theta y \quad i \quad u\theta v \quad sledi \quad (x \wedge u)\theta(y \wedge v) \quad i \quad (x \vee u)\theta(y \vee v).$$

Sledeća tvrđenja daju vezu između homomorfizama i relacija kongruencije.

Ako je $f : L \to M$ *homomorfizam mreže* $(L, \wedge, \vee)$ *u mrežu* $(M, \wedge, \vee)$, *onda je relacija* θ *na* L *definisana sa*

$$x\theta y \longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

za $x, y \in L$, *kongruencija na* $(L, \wedge, \vee)$.

Ovako definisana kongruencija zove se **jezgro** homomorfizma f.

Neka je θ kongruencija na mreži $(L, \wedge, \vee)$ i L/θ odgovarajuća particija skupa L. Mreža $(L/\theta, \wedge, \vee)$ se zove **faktor-mreža** ili **količnička** mreža mreže L po kongruenciji θ.

Ideal *u mreži* L *je njen neprazan podskup* I *koji ispunjava uslove:*

(1) *iz* $a, b \in I$ *sledi* $a \vee b \in I$;

(2) *iz* $a \in I$ *i* $c \leq a$ *sledi* $c \in I$.

Glavni ideal *u mreži* L, *generisan elementom* $a \in L$ *je*

$$\downarrow a = \{x \in L \quad | \quad x \leq a\}.$$

Filter *u mreži* L *je njen neprazni podskup* F *koji ispunjava uslove:*

(1) *iz* $a, b \in F$ *sledi* $a \wedge b \in F$;

(2) *iz* $a \in F$ *i* $a \leq c$ *sledi* $c \in F$.

Glavni filter *u mreži* L, *generisan elementom* $a \in L$ *definiše se na sledeći način :*

$$\uparrow a = \{x \in L \quad | \quad a \leq x\}.$$

Ideal (filter) u mreži L *je* **pravi** *ako se ne poklapa sa* L.

O svim idealima neke mreže govori sledeće tvrđenje.

Skup $\mathcal{I}d(L)$ *svih ideala proizvoljne mreže* L, *uređen inkluzijom je potpuna mreža.*

Uvodimo još neke pojmove iz teorije uređenih skupova. Uređen skup $(L, \leqslant)$ zove se **i-polumreža** ako svaki dvoelementni podskup ima infimum;

dualno, $(L, \leqslant)$ je **ili-polumreža** ako svaki dvoelementni podskup ima supremum. Ekvivalentno, u algebarskoj terminologiji, polumreža je *idempotentna, komutativna polugrupa*.

Polu-ideal u uređenom skupu $(P, \leqslant)$ je njegov podskup I koji ispunjava: za svako $x \in P$ i $y \in I$, ako je $x \leqslant y$ onda je $x \in I$.

1.2. Rezidualne mreže. Kao što je uobičajeno, u dvovalentnoj logici, istinitosne vrednosti formula označavamo sa 0 i 1 (redom, netačno i tačno). U toj logici su definisane osnovne logičke operacije i data su logička pravila zaključivanja. Pored dvovalentne logike mogu se posmatrati i više-vrednosne (polivalentne) logike. Jedna od poznatijih više-vrednosnih logika, koja je usko povezana sa teorijom rasplinutih skupova, za skup vrednosti formula ima specijalnu mrežu sa najvećim elementom (1) i najmanjim elementom (0).

Jan Lukasiewicz, poljski matematičar je prvi sistematski ispitivao polivalentnu logiku 1920-tih godina. Pored ostalih logičara koji su se ovom oblašću bavili, M. Wajsberg je 1935. godine dao svoj doprinos u razvoju beskonačno vrednosne iskazne logike. Dvadeset tri godine kasnije, 1958., C.C.Chang je uveo MV-algebre. Decenijama je polivalentna logika bila na marginama matematičkih istraživanja, sve do 1965. godine kada se pojavio Zadeh-ov rad "Fuzzy sets". On je pokrenuo široko interesovanje za fazi pristup i razvoj fazi skupova, fazi logike i njihove primene. Skup istinitosnih vrednosti, predložen od Zadeh-a, bio je jedinični interval $[0, 1]$ realnih brojeva (Zadeh je i sam pominjao da se može uzeti parcijalno uređen skup, ali nije razvijao taj pravac). 1979. godine češki matematičar Jan Pavelka uvodi fazi pravila zaključivanja, fazi dokaze, itd.

Rezidualna mreža, uvedena od strane Ward-a i Dilworth-a (1939.godine) prvobitno je definisana drugačije (pomoću tri operacije) od definicije koju navodimo u nastavku. Međutim, lako se dokazuje da obe definicije određuju istu strukturu.

Ideja da se koriste kompletne rezidualne mreže kao strukture istinitosnih vrednosti potiče od Goguen-a. U svojim radovima Goguen je potpuno raspravio i dao glavne smernice razvoja logike preko rasplinutog pristupa. Njegove ideje formalno je razvio Pavelka.

Höhle [**41**] je proučavao rezidualne mreže sa tačke gledišta rasplinute logike. Rezidualne mreže daju mogućnost sinteze rasplinute logike i rasplinutih skupova.

Prilikom uvođenja rasplinute logike početna ideja je bila da se na mreži uvedu operacije koje će biti uopštenja osnovnih logičkih operacija (jer sama mreža je bila siromašna struktura da bi odgovorila svim zahtevima rasplinute logike). Pri tome je posebna pažnja posvećena važnim zakonima zaključivanja (kao Modus ponens) u smislu procene stepena istinitosti zaključka ako su poznati stepeni istinitosti premisa. Te mrežne operacije treba da poseduju bitna svojstva osnovnih logičkih operacija i da se u slučaju mreže, koja ima samo 0 i 1, poklapaju sa uobičajenim operacijama. Prvo je uvedeno uopštenje konjunkcije i nova operacija je označena sa $\otimes$. Zahtevano je da ima bitna svojstva konjunkcije, kao što su komutativnost i asocijativnost, kao i da je 1 jedinični element, tj. da je $(L, \otimes, 1)$ komutativni monoid. Takođe se zahteva i da je za bilo koje elemente mreže, ispunjen uslov:

$$x_1 \leqslant x_2 \ \text{ i } \ y_1 \leqslant y_2 \ \text{ implicira } \ x_1 \otimes y_1 \leqslant x_2 \otimes y_2.$$

Uopštenje implikacije iz dvovalentne logike je označeno sa $\to$ i uvedeno je kao operacija pridružena operaciji $\otimes$ na sledeći način:

$$x \leqslant y \to z \ \text{ ako i samo ako } \ x \otimes y \leqslant z.$$

Na taj način je proširena mrežna struktura i dobijena specijalna vrsta mreže sa operatorima, koja je pogodna kao osnova za ovaj tip logike.

U nastavku dajemo preciznu definiciju rezidualne mreže.

Rezidualna mreža *je algebra*

$$\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$$

u kojoj je

(i) $(L, \wedge, \vee)$ *je mreža,*

(ii) *najmanji element je* 0*, a najveći element je* 1*,*

(iii) $(L, \otimes, 1)$ *je komutativni monoid, tj.* $\otimes$ *je asocijativna i komutativna operacija sa jedinicom, tj.* $x \otimes 1 = x$ *za sve* $x \in L$*.*

(iv) $x \leqslant y \rightarrow z$ *ako i samo ako* $x \otimes y \leqslant z$ *važi za sve* $x, y, z \in L$ *(*$\leqslant$ *je mrežno uređenje).*

Rezidualna mreža je kompletna ako je $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ kompletna mreža.

Operacije $\otimes$ i $\rightarrow$ zovemo pridruženim, jer, ako je data jedna od njih, druga je pomoću nje jedinstveno određena.

Neka je data rezidualna mreža $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ i neka je $L_1 \subseteq L$. Kažemo da je L_1 skup bez delitelja nule, ako je $\bigotimes_{i \in I} p_i = 0$, gde su $p_i \in L_1$ $(i \in I)$, samo ako je za neko $i \in I$, $\;p_i = 0$.

Rezidualna mreža kod koje je

$$x \otimes y = x \wedge y$$

zove se *Heyting* - ova algebra.

Navodimo osnovne osobine rezidualnih mreža.

Na svakoj rezidualnoj mreži su ispunjeni sledeći uslovi:

- $x \otimes (x \rightarrow y) \leqslant y,\ \ y \leqslant x \rightarrow (x \otimes y),\ \ x \leqslant (x \rightarrow y) \rightarrow y$
- $x \leqslant y$ *akko* $x \rightarrow y = 1$
- $x \rightarrow x = 1,\ \ x \rightarrow 1 = 1,\ \ 0 \rightarrow x = 1$
- $1 \rightarrow x = x$
- $x \otimes 0 = 0$
- $x \otimes y \leqslant x,\ \ x \leqslant y \rightarrow x$
- $x \otimes y \leqslant x \wedge y$
- $(x \otimes y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z)$

- $(x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant (x \to z)$

Dalje navodimo osobine koje govore o saglasnosti operacija $\otimes$ i $\to$ sa relacijom poretka na mreži.

Na svakoj rezidualnoj mreži su ispunjeni sledeći uslovi:

- $y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow x \otimes y_1 \leqslant x \otimes y_2$
- $y_1 \leqslant y_2 \Rightarrow x \to y_1 \leqslant x \to y_2$
- $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow x_2 \to y \leqslant x_1 \to y$

Sledeća svojstva su u vezi sa distributivnošću operacija $\otimes$ i $\to$ prema $\wedge, \vee$.

Na svakoj rezidualnoj mreži za bilo koji skup indeksa I su ispunjeni sledeći uslovi:

- $x \otimes (\bigvee_{i \in I} y_i) = \bigvee_{i \in I} (x \otimes y_i)$
- $x \to (\bigwedge_{i \in I} y_i) = \bigwedge_{i \in I} (x \to y_i)$
- $\bigvee_{i \in I} x_i \to y = \bigwedge_{i \in I} (x_i \to y)$
- $x \otimes (\bigwedge_{i \in I} y_i) \leqslant \bigwedge_{i \in I} (x \otimes y_i)$
- $\bigvee_{i \in I} (x \to y_i) \leqslant x \to \bigvee_{i \in I} y_i$
- $\bigvee_{i \in I} (x_i \to y) \leqslant \bigwedge_{i \in I} x_i \to y$

Takođe na svakoj rezidualnoj mreži, za bilo koje skupove indeksa I i J, je tačno sledeće tvrđenje

$$\bigotimes_{j \in J} \Big(\bigwedge_{i \in I} x_i^j \Big) \leqslant \bigwedge_{i \in I} \Big(\bigotimes_{j \in J} x_i^j \Big).$$

2. Univerzalne algebre

Neprazan skup zajedno sa nekim operacijama koje su definisane na tom skupu čini algebru. Umesto algebra često srećemo pojam univerzalna algebra ili algebarska struktura. Jedan od ciljeva univerzalne algebre je da izdvoji, kad god je to moguće, zajedničke osobine nekoliko prividno različitih algebarskih struktura. Tako otkrivajući uopštene ideje, konstrukcije i osobine poznatih specijalnih struktura, dolazimo do pojmova koji su na višem nivou apstrakcije, koji sa druge strane mogu biti primenjeni u potpuno novoj situaciji, dajući značajne informacije o novoj strukturi. Definicija algebre, koju ćemo dati, uključuje većinu dobro poznatih algebarskih struktura kao i mnogo manje poznatih algebri koje se ispituju u skorije vreme. Na potrebu za ovakvom definicijom ukazalo je nekoliko matematičara kao što su Whitehead(1898), Noether i Birkhoff(1933).

Jezik ili tip algebri *je uređen par* $(\mathcal{F}, Ar)$*, gde je* $\mathcal{F}$ *skup nekih simbola (tzv. operacijskih simbola), a* Ar *funkcija koja preslikava* $\mathcal{F}$ *u skup prirodnih brojeva sa nulom. Ako je* $Ar(f) = n$*, kažemo da je* f n*-arni operacijski simbol.* $\mathcal{F}_n$ *je oznaka za skup svih operacijskih simbola iz* $\mathcal{F}$ *arnosti* n*.*

Po dogovoru umesto "jezik $\langle \mathcal{F}, Ar \rangle$" kažemo kraće "jezik $\mathcal{F}$" ili "tip $\mathcal{F}$ " i podrazumevamo da je svakom simbolu f dodeljena njegova "arnost". U nekim slučajevima se tip algebri zadaje navođenjem redom arnosti operacijskih simbola ("tip $(n_1, ..., n_i, ...)$").

Neka je $\mathcal{F}$ *neki tip algebri i* $A \neq \phi$*.* **Algebra tipa** $\mathcal{F}$ *je svaki uređen par* $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A \rangle$*, gde je* $\mathcal{F}^A = \langle f^A \ : \ f \in \mathcal{F} \rangle$ *preslikavanje koje proizvoljni* n*-arni operacijski simbol* $f \in \mathcal{F}$ *preslikava na* n*-arnu operaciju* f^A *skupa* A*. Kažemo da je* f^A *interpretacija operacijskog simbola* f *u algebri* $\mathcal{A}$*. Skup* A *je nosač algebre* $\mathcal{A}$*, a operacije* f^A *zovemo fundamentalne operacije od* $\mathcal{A}$*.*

Često ćemo pisati f umesto f^A. Ako je $\mathcal{F}$ konačan skup, odnosno $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_n\}$, obično pišemo

$(A, f_1, ..., f_n)$ umesto (A, F), prihvatajući dogovor da:

$$ar(f_1) \geq ar(f_2) \geq ... \geq ar(f_n).$$

Algebra $\mathcal{A}$ je unarna ako su sve njene operacije unarne i mono-unarna ako ima samo jednu unarnu operaciju. $\mathcal{A}$ je grupoid ako ima samo jednu binarnu operaciju.

Algebra $\mathcal{A}$ je konačna ako je nosač A konačan skup i trivijalna ako nosač A ima jedan element.

Koncepcije homomorfizma i izomorfizma u teoriji grupa, teoriji prstena i teoriji mreža su specijalni slučajevi analognih pojmova na proizvoljnoj algebri.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dve algebre istog tipa $\mathcal{F}$. Funkcija $\alpha : A \to B$ je **homomorfizam** *$\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako za svaku n-arnu operaciju ($n \geq 1$) $f \in \mathcal{F}$, za $a_1, ..., a_n \in A$, važi*

$$\alpha f^A(a_1, ..., a_n) = f^B(\alpha a_1, ..., \alpha a_n), \qquad (*)$$

i za svaku nularnu operaciju $c^A \in A$ i odgovarajuću nularnu operaciju $c^B \in B$, važi: $\alpha(c^A) = c^B$.

Ako u prethodnoj definiciji, umesto preslikavanje, kažemo bijekcija, dobijamo definiciju **izomorfizma**.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ istog tipa. Preslikavanje $\alpha : A \to B$ je **utapanje** *$\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ ako je α ''jedan-jedan'' i važi (*), (ovakvo preslikavanje se zove i monomorfizam). Kažemo da $\mathcal{A}$ može biti utopljeno u $\mathcal{B}$ ako postoji utapanje $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$.*

Ima nekoliko načina za konstruisanje nove algebre preko datih algebri. Neki od najpoznatijih načina su preko konstrukcije podalgebri, homomorfnih slika i direktnih proizvoda.

Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ dve algebre istog tipa. Algebra $\mathcal{B}$ je **podalgebra** *od $\mathcal{A}$ ako $B \subseteq A$ i svaka fundamentalna operacija od $\mathcal{B}$ je restrikcija odgovarajuće operacije iz $\mathcal{A}$, tj. za svaki operacijski simbol f, f^B je restrikcija od f^A na $\mathcal{B}$; kraće pišemo $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$. Poduniverzum od $\mathcal{A}$ je podskup B od A koji je* *zatvoren za osnovne operacije iz $\mathcal{A}$, tj., ako je f osnovna n-arna operacija iz $\mathcal{A}$ i $a_1, ..., a_n \in B$ sledi da $f(a_1, ..., a_n) \in B$.*

Prazan skup može biti poduniverzum, ali nije nosač neke algebre. Ako $\mathcal{A}$ ima nularnu operaciju, onda svaki poduniverzum takođe sadrži tu operaciju.

Ako je $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam istotipnih algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, onda je $h(A)$ podalgebra algebre $\mathcal{B}$.

Važno pitanje u ovom kontekstu može se formulisati na sledeći način: Neka je K klasa algebri i neka je K_1 prava podklasa od K.

(1) Da li je svaki član iz K izomorfan sa nekim članom iz K_1 ?

(2) Da li se svaki član iz K može potopiti u neki član iz K_1 ?

Kongruencija, količnička algebra i homomorfizam su veoma usko povezani. Normalne podgrupe koje je uveo Galoa početkom devetnaestog veka, imaju ključnu ulogu u definiciji količničkih grupa i u takozvanim teoremama o homomorfizmu i izomorfizmu koje su osnova za razvoj teorije grupa. Ideali, uvedeni u drugoj polovini devetnaestog veka od strane Dedekinda, imaju analognu ulogu u definiciji količničkog prstena i u odgovarajućim teoremama o homomorfizmu i izomorfizmu.

Slede definicije i neke važnije teoreme vezane za kongruenciju, količničku algebru i homomorfizam.

Neka je A neprazan skup, $\rho \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije skupa A i $x \in A$. Klasa ekvivalencije elementa x, u oznaci x/ρ, data je na sledeći način:

$$x/\rho := \{y \in A \mid x\rho y\}.$$

Skup A/ρ, čiji su elementi sve klase ekvivalencije relacije ρ, zove se količnički skup.

Relacija ekvivalencije ρ na algebri $\mathcal{A}$, koja je saglasna sa svim osnovnim operacijama

$$(x_i \rho y_i,\ i = 1, ..., n \textit{ povlači } f(x_1, ..., x_n)\ \rho f(y_1, ..., y_n))$$

je **kongruencija** *na $\mathcal{A}$.*

Neka je θ kongruencija na algebri $\mathcal{A}$. Onda je **količnička algebra** *od $\mathcal{A}$ u odnosu na θ, koju označavamo sa $\mathcal{A}/\theta$, algebra čiji je univerzum A/θ i čije su operacije definisane sa:*

$$f^{A/\theta}(a_1/\theta, ..., a_n/\theta) = f^A(a_1, ..., a_n)/\theta$$

gde su $a_1, ..., a_n \in A$ i f je n-arni operacijski simbol iz $\mathcal{F}$.

Ako je ρ kongruencija na $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ podalgebra od $\mathcal{A}$, onda uvodimo oznaku $\rho(B) = \rho \cap B^2$. Relacija $\rho(B)$ je kongruencija na $\mathcal{B}$.

Ako je $\mathcal{A} = (A, F_A)$ algebra, a φ njen homomorfizam na algebru $\mathcal{B} = (B, F_B)$ istog tipa, $\varphi(A) = B$, onda u A postoji takva kongruencija π, da je algebra $\mathcal{B}$ izomorfna sa količničkom algebrom A/π.

Više od toga, postoji takvo izomorfno preslikavanje $\psi : B \to A/\pi$ da se proizvod $\varphi\psi$ podudara sa prirodnim homomorfizmom A na A/π.

Ako je $f : I \to X$ preslikavanje, tada za svako $\alpha \in I$ imamo element $x_\alpha = f(\alpha) \in X$. Preslikavanje $f : I \to X$ može se predstaviti i u obliku $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ i tada se zove **familija**. *Elementi $x_\alpha \in X$ su* **članovi ili komponente familije** *f, a skup I je* **skup indeksa** *te familije.*

Neka je data familija nepraznih skupova $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Tada se skup $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ svih preslikavanja $f : I \to X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ za koja je $(\forall \alpha \in I) f(\alpha) \in X_\alpha$ zove **direktni proizvod** *familije $\{X_\alpha \mid \alpha \in I\}$.*

Preslikavanje $\pi_i : \prod_i A_i \to A_i$ određeno sa $\pi_i(g) = g(i)$ za $g \in \prod_i A_i$, naziva se **i-tom projekcijom**.

Neka je $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ familija istotipnih algebri. **Direktan proizvod** *$\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ je algebra određena na sledeći način: $A = \prod_{i \in I} A_i$; ako je f operacijski znak dužine n i $g_1, ..., g_n$ iz $\prod_{i \in I} A_i$, onda*

$$f^A(g_1, ..., g_n)(i) = f^{A_i}(g_1(i), ..., g_n(i));$$

ako je c simbol konstante tada $c^A(i) = c^{A_i}$.

Projekcija $\pi_i : \prod_i A_i \to A_i$ je homomorfizam algebre $\prod_i \mathcal{A}_i$ na $\mathcal{A}_i$.

Neprazna klasa algebri K tipa $\mathcal{F}$ zatvorena za podalgebre, homomorfne slike i direktne proizvode zove se **varijetet.**

Neka je X skup simbola, tzv. **promenljivih**, *$\mathcal{F}$ neki tip algebri. Skup* **terma tipa $\mathcal{F}$ nad** *X je najmanji skup $T_{\mathcal{F}}(X)$ takav da*

i) $X \cup \mathcal{F}_0 \subseteq T_{\mathcal{F}}(X)$,

ii) $t_1, ..., t_n \in T(X)$ *i* $f \in \mathcal{F}_n$ *onda* $f(t_1, ..., t_n) \in T_{\mathcal{F}}(X)$.

Ako je iz konteksta jasno o kom tipu je reč, onda umesto $T_{\mathcal{F}}(X)$ pišemo jednostavno $T(X)$.

Ako je $X = \{x_1, x_2 ...\}$ skup promenljivih, term tipa $\mathcal{F}$, arnosti n zapisujemo ovako

$$t = t(x_1, ..., x_n)$$

Term arnosti n algebre $\mathcal{A}$ indukuje preslikavanje

$$t_{\mathcal{A}} : A^n \to A,$$

koje preciznije objašnjava sledeća definicija.

Neka je $t(x_1, ..., x_n)$ term tipa $\mathcal{F}$ i neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$. **Termovsko preslikavanje (ili term funkcija) indukovano sa t u algebri** *$\mathcal{A}$, u oznaci t^A, definiše se na sledeći način:*

(1) $t = c \in \mathcal{F}_0$ *onda* $t^A = c^A$

(2) $t = x_i$ *onda* $t^A(a_1, ..., a_n) = a_i$,

(3) $t = f(t_1, ..., t_m)$ *onda*

$$t^A(a_1, ..., a_n) = f^A(t_1^A(a_1, ..., a_n), ..., t_m^A(a_1, ..., a_n)).$$

Dalje navodimo neka korisna svojstva term funkcija.

Za neki tip algebre $\mathcal{F}$ i algebre A, B tipa $\mathcal{F}$ važi sledeće:

(a) *Neka je t n-arni term tipa $\mathcal{F}$, θ relacija kongruencije, i neka $(a_i, b_i) \in \theta$ za $1 \leqslant i \leqslant n$. Onda*

$$t^A(a_1, ..., a_n) \theta t^A(b_1, ..., b_n).$$

(b) *Ako je* t *n-arni term tipa* $\mathcal{F}$ *i* $\alpha : A \to B$ *homomorfizam, onda*

$$\alpha t^A(a_1, ..., a_n) = t^B(\alpha a_1, ..., \alpha a_n)$$

za $a_1, ..., a_n \in A$.

(c) *Neka je* S *podskup od* A. *Onda je podalgebra generisana skupom* S

$$Sg(S) = \{t^A(a_1, ..., a_n) : t \text{ je n-arni term tipa } \mathcal{F} \text{ i } a_1, ..., a_n \in S\}.$$

Skup $T(X)$ se može na prirodan način transformisati u algebru.

Za dato $\mathcal{F}$ *i* X, *ako je* $T(X) \neq \emptyset$, *onda* **term algebra** *tipa* $\mathcal{F}$ *nad* X, *u oznaci* $\mathbf{T(X)}$, *ima za univerzum skup* $T(X)$ *i fundamentalne operacije se definišu:*

$$f^{\mathbf{T(X)}} : (t_1, ..., t_n) \to f(t_1, ..., t_n)$$

za $f \in \mathcal{F}_n$ *i* $t_i \in T(X), 1 \leqslant i \leqslant n$.

Ako je data algebra tipa $\mathcal{F}$ *i ako je* X *skup promenljivih te algebre, onda* **identitet tipa** $\mathcal{F}$ **nad** X *je svaki izraz oblika*

$$p \approx q$$

gde su $p, q \in T(X)$. *Obeležićemo sa* $Id_{\mathcal{F}}(X)$ *skup svih identiteta tipa* $\mathcal{F}$ *nad* X.

Ako je jasno o kom tipu algebre je reč izostavljamo indeks $\mathcal{F}$.

Neka je data algebra $\mathcal{A}$ *tipa* $\mathcal{F}$ *i neka je* X *skup njenih promenljivih. Ako su* $p = p(x_1, ..., x_n)$ *i* $q = q(x_1, ..., x_n)$ *termi tipa* $\mathcal{F}$ *i* Σ *skup identiteta tipa* $\mathcal{F}$, *kažemo da:*

(1) *Algebra* $\mathcal{A}$ **zadovoljava identitet** $p \approx q$ *(ili,* $p \approx q$ **važi** *na* $\mathcal{A}$ *) ako* p *i* q *indukuju istu term funkciju u algebri* $\mathcal{A}$ *tj. za sve* $a_1, ..., a_n$ *iz* A *važi*

$$p^A(a_1, ..., a_n) = q^A(a_1, ..., a_n)$$

U tom slučaju pišemo

$$\mathcal{A} \models p \approx q.$$

i kažemo da je $\mathcal{A}$ **model** *identiteta* $p \approx q$.

(2) *Algebra* $\mathcal{A}$ **zadovoljava** Σ *(ili,* Σ **važi** *na* $\mathcal{A}$ *), u oznaci*

$$\mathcal{A} \models \Sigma,$$

ako $\mathcal{A} \models p \approx q$*, za sve* $p \approx q \in \Sigma$*.* $\mathcal{A}$ *se zove* **model skupa identiteta** Σ.

Sada možemo definisati jednakosnu klasu algebri.

Neka je Σ *skup identiteta tipa* $\mathcal{F}$*. Neka je*

$$V(\Sigma) = \{\mathcal{A} \quad \textit{algebra tipa } \mathcal{F} : \quad \mathcal{A} \models \Sigma\}.$$

Klasa algebri $\mathfrak{M}$ *je* **jednakosna klasa** *ako postoji skup identiteta* Σ *tako da je* $\mathfrak{M} = V(\Sigma)$*. Kažemo da* Σ *definiše ili* **aksiomatizuje** $\mathfrak{M}$*.*

Jednakosna klasa je trivijalna ako i samo ako sadrži jedino trivijalne algebre jezika $\mathcal{F}$*.*

Neka je $\mathfrak{M}$ *klasa algebri jezika* $\mathcal{F}$ *i* X *neki skup. Algebra* $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$ *je* **slobodna algebra** *za* $\mathfrak{M}$*, nad skupom slobodnih generatora* X *akko* $X \subseteq A$ *i za svaku algebru* $\mathcal{B} \in \mathfrak{M}$*, svako preslikavanje* $f : X \to B$*, postoji jedinstven homomorfizam* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *takav da* $f \subseteq h$*.*

Neka je $\mathcal{F}$ *algebarski jezik,* $\mathfrak{N}$ *jednakosna klasa skupa identiteta* $\Sigma = \emptyset$ *jezika* $\mathcal{F}$ *i* X *skup promenljivih. Slobodna algebra* $\mathcal{A}$ *za* $\mathfrak{N}$*, nad skupom slobodnih generatora* X *zove se* **apsolutno slobodna algebra.**

Term algebra je apsolutno slobodna algebra.

Za svaki algebarski jezik $\mathcal{F}$*, svaku klasu identiteta* Σ *jezika* $\mathcal{F}$*, netrivijalan varijetet* $\mathfrak{M}$ *klase identiteta* Σ *i skup* X*, postoji jedinstvena (do na izomorfizam) slobodna algebra* $\mathcal{A}$ *sa skupom slobodnih generatora* X*.*

Neka je $\mathcal{A}$ *slobodna algebra za jednakosnu klasu* $\mathfrak{M}$ *sa slobodnim generatorima* $a_1, ..., a_n$*. Ako je* $u^A(a_1, ..., a_n) = v^A(a_1, ..., a_n)$*, tada* $u = v$ *važi na svim algebrama jednakosne klase* $\mathfrak{M}$*.*

Ako je $\mathfrak{M}$ klasa istotipnih algebri zatvorena za homomorfizme, podalgebre i direktne proizvode, onda $\mathfrak{M}$ sadrži slobodnu algebru nad svakim skupom X slobodnih generatora.

Teorema Birkhoff-a *Klasa istotipnih algebri je varijetet ako i samo ako je jednakosna klasa.*

Dobro poznate algebre poput polugrupe, grupe, Abelove grupe itd. čine jednakosne klase.

Klasa svih **polugrupa** jeste jednakosna klasa na jeziku $\mathcal{F} = \{\cdot\}$ koji zadovoljava zakon asocijativnosti ($G1$).

(G1) $\quad x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$

Klasa svih **grupa** jeste jednakosna klasa na jeziku $\mathcal{F} = \{\cdot, ^{-}1, e\}$ koji zadovoljava skup identiteta:

(G1) $\quad x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$

(G2) $\quad x \cdot e \approx x$

(G3) $\quad x \cdot x^{-1} \approx e.$

Grupa je **komutativna (Abelova)** ako važi još i identitet:

(G4) $\quad x \cdot y \approx y \cdot x$

Klasa svih **komutativnih (abelovih) polugrupa** jeste jednakosna klasa na jeziku $\mathcal{F} = \{\cdot\}$ koja zadovoljava zakone asocijativnosti ($G1$) i komutativnosti ($G4$). Polumreža je komutativnu polugrupu u kojoj važi zakon idempotentnosti $x \cdot x \approx x$.

GLAVA 2

Rasplinute strukture

Pošto su istraživanja u ovom radu iz oblasti rasplinutih struktura, to je, pored mreža i klasičnih algebarskih struktura, u pregledu poznatih rezultata potrebno navesti osnovne definicije i tvrđenja iz te oblasti. Dakle, u ovom poglavlju su navedeni rezultati iz ove oblasti koji se koriste kao osnova za originalne rezultate u nastavku.

1. Osnovni pojmovi i osobine

Pokazalo se da klasične matematičke discipline, kojima je u osnovi teorija skupova i dvovalentna logika, ne mogu na zadovoljavajući način da posluže za razmatranje sistema baziranih na ljudskom ponašanju. U takvim sistemima nije uvek jasna pripadnost elemenata skupu sa određenim svojstvom. Zato je L.A. Zadeh 1965. godine uveo fazi (rasplinute) skupove (fuzzy sets), proširivši pojam pripadanja na stepen pripadanja elemenata nekom skupu.

U klasičnoj matematici pojam karakteristične funkcije je u tesnoj vezi sa pojmom podskupa: Ako je A neprazan skup i $B \subseteq A$, onda je karakteristična funkcija $k_B : A \longrightarrow \{0,1\}$ data sa

$$k_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x \in B \\ 0, & \text{za } x \notin B \text{ (tj. } x \in A \setminus B). \end{cases}$$

Između svih podskupova datog skupa A i svih karakterističnih funkcija na skupu A ($k : A \longrightarrow \{0,1\}$) postoji bijekcija: funkciji k odgovara $B \subseteq A$, takav da $x \in B$ akko je $k(x) = 1$.

Definicija 2.1. *Neka je A neprazan skup i $\mathcal{L} = (L, \leq)$ proizvoljna ograničena mreža. Svako preslikavanje*

$$\bar{A} : A \longrightarrow L$$

zovemo **rasplinut podskup** *od A (ili* **rasplinut skup***).*

Skup A se naziva univerzum za $\bar{A}$. Za $a \in A$, $\bar{A}(a)$ se zove stepen pripadanja elementa a rasplinutom skupu $\bar{A}$. Rasplinut skup identifikovan je sa preslikavanjem - uopštenjem karakteristične funkcije. Ako je $L = \{0,1\}$, rasplinut skup je upravo jedna karakteristična funkcija.

Neka su dati neprazan skup S i mreža $\mathcal{L}$.

Za rasplinute skupove $\bar{A}, \bar{B} : S \longrightarrow L$ kažemo da su jednaki ($\bar{A} = \bar{B}$), ako su jednaki kao funkcije, tj. akko važi: Za svako $x \in S$, $\bar{A}(x) = \bar{B}(x)$.

Kolekciju svih rasplinutih skupova na S zovemo **rasplinutim partitivnim skupom** skupa S (u odnosu na datu mrežu) i označavamo sa $\overline{P(S)}$. Dakle,

$$\overline{P(S)} := \{\bar{X} | \bar{X} : S \longrightarrow L\}.$$

Ako su $\bar{A}$ i $\bar{B}$ rasplinuti skupovi na S, tj. $\bar{A}, \bar{B} : S \longrightarrow L$, kažemo da je $\bar{A}$ **rasplinut podskup od** $\bar{B}$, u oznaci $\bar{A} \subseteq \bar{B}$, akko je za svako $x \in S$, $\bar{A}(x) \leqslant \bar{B}(x)$ (u smislu poretka na mreži $\mathcal{L}$).

Ako su $\bar{A}$ i $\bar{B}$ rasplinuti skupovi na S, tj. $\bar{A}, \bar{B} : S \longrightarrow L$, onda je $\bar{A} \cap \bar{B} : S \longrightarrow L$ **presek** rasplinutih skupova, pri čemu je za svako x iz S

$$\bar{A} \cap \bar{B}\ (x) := \bar{A}(x) \wedge \bar{B}(x).$$

Slično, $\bar{A} \cup \bar{B} : S \longrightarrow L$ je **unija** rasplinutih skupova

$$\bar{A} \cup \bar{B}\ (x) := \bar{A}(x) \vee \bar{B}(x).$$

Unarna operacija, koja odgovara skupovnom komplementu se ne može uvek definisati na zadovoljavajući način i zavisi od izbora mreže $\mathcal{L}$.

Ako je mreža $\mathcal{L}$ jedinstveno komplementirana **komplement rasplinutog skupa** $\bar{A}$ na S definiše se na sledeći način:

$$\bar{A}' : S \to L,\ \bar{A}'(x) = (\bar{A}(x))',$$

za sve $x \in S$.

Ako je $L = [0,1]$, komplement se definiše na sledeći način: Za $\bar{A} : S \longrightarrow [0,1]$,

$$\bar{A}' : S \longrightarrow [0,1],\ \bar{A}'(x) = 1 - \bar{A}(x)$$

za sve $x \in S$.

Definicija 2.2. *Neka je dat skup $S \neq \emptyset$ i proizvoljna mreža $\mathcal{L} = (L, \leqslant)$ sa nulom i jedinicom. Svaki rasplinuti podskup $\bar{\rho}$ direktnog stepena S^n ($n \in N,\ n > 1$) je jedna n-**arna rasplinuta relacija** na S. Dakle,*

$$\rho : S^n \longrightarrow L.$$

U ovom radu se uglavnom bavimo binarnim rasplinutim relacijama (za $n = 2$).

Definicija 2.3. *Neka je $\bar{A} : S \to L$ i neka je $p \in L$.* **Skup nivoa** *p (p-nivo skup, p-cut skup) je podskup od S izdvojen na sledeći način: za $x \in S$*

$$x \in A_p \text{ ako i samo ako } \bar{A}(x) \geqslant p.$$

Kolekcija svih nivoa rasplinutog skupa $\bar{A}$ se označava sa $\bar{A}_L$:

$$\bar{A}_L := \{A_p \mid p \in L\}.$$

Ova kolekcija je kompletna mreža u odnosu na inkluziju.

Navodimo nekoliko tvrđenja o nivoima rasplinutih skupova.

Ako su p i q iz L i $p \leqslant q$, onda je $A_q \subseteq A_p$.

Ako je $\bar{A} : S \to L$ rasplinuti skup na S, onda je

$$\bar{A}(x) = \bigvee_{p \in L} p \cdot k_{A_p}(x),$$

gde je za $p \in L$, k_{A_p} karakteristična funkcija skupa nivoa p i $p \cdot k_{A_p}(x)$ je 0 iz mreže ako je $k_{A_p}(x)$ jednako 0, a $p \cdot k_{A_p}(x) = p$, ako je $k_{A_p}(x) = 1$.

Ako je $\bar{A} : S \to L$ rasplinuti skup na S i $K \subseteq L$, onda važi:

$$\bigcap_{p \in K \subseteq L} A_p = A_{\bigvee_{p \in K} p}$$

i

$$\bigcup_{p \in L} A_p = S.$$

Sledeća teorema se naziva Teorema sinteze za rasplinute skupove i govori o tome kada je kolekcija podskupova nekog skupa odgovara kolekciji nivoa nekog rasplinutog skupa.

Teorema 2.1. *Neka je F kolekcija podskupova nepraznog skupa X koja je zatvorena u odnosu na preseke i koja sadrži X. Neka je rasplinuti skup $\bar{A} : X \to F$ definisan sa:*

$$\bar{A}(x) = \bigcap (p \in F \mid x \in p).$$

Tada je $\bar{A}$ rasplinuti skup na skupu X sa kodomenom F, gde je $(F, \leq)$ kompletna mreža dualna sa $(F, \subseteq)$, takav da je njegova familija p-nivoa baš F, i za svako $p \in F$, važi: $p = A_p$.

Narednih nekoliko definicija i tvrđenja se odnose na binarne rasplinute relacije.

Definicija 2.4. *Neka je $\rho : S^2 \to L$ i neka je $p \in L$.* **Relacija nivoa** p *je podskup od S^2 izdvojen na sledeći način: za $(x, y) \in S^2$*

$$(x, y) \in \rho_p \text{ ako i samo ako } \rho(x, y) \geqslant p.$$

Kolekcija svih nivo relacija takođe obrazuje kompletnu mrežu u odnosu na inkluziju. Navodimo osobinu relacija nivoa p koja sledi iz analogne teoreme za rasplinute skupove.

Za sve $x, y \in S$ važi:

$$\rho(x,y) = \bigvee_{p \in L} p \cdot k_{\rho_p}(x,y),$$

gde je $k_{\rho_p}(x,y)$ karakteristična funkcija relacije nivoa p i $p \cdot k_{\rho_p}(x,y)$ je 0 iz mreže ako je $k_{\rho_p}(x,y)$ jednako 0, a $p \cdot k_{\rho_p}(x,y) = p$, ako je $k_{\rho_p}(x,y) = 1$.

Analogna teorema teoremi sinteze za rasplinute skupove, važi takođe i za rasplinute relacije.

Definicija 2.5. *Ako je dat neprazan skup S i kompletna mreža $\mathcal{L}$, onda se na skupu $\overline{\mathcal{R}(S)} = \{\rho \mid \rho : S^2 \to L\}$ svih binarnih rasplinutih relacija na S definiše binarna operacija, u oznaci $\circ$, (***kompozicija relacija***) na sledeći način:*

$$\rho \circ \sigma : S^2 \to L \quad i \quad \rho \circ \sigma(x,y) := \bigvee_{z \in S} \Big(\rho(x,z) \wedge \sigma(z,y)\Big)$$

za $\rho, \sigma \in \overline{\mathcal{R}(S)}$ *i* $x, y \in S$.

Možemo primetiti da je ova definicija ispravna i u slučaju kad za neke x i y ne postoji z tako da $\rho(x,z)$ i $\sigma(z,y)$. U tom slučaju dobijamo $\bigvee \emptyset$, što je po definiciji jednako 0, jer je mreža kompletna.

Inverzna rasplinuta relacija $\rho^{-1} : S^2 \to L$ date binarne rasplinute relacije $\rho : S^2 \to L$, definiše se tako da je za sve x, y iz S

$$\rho^{-1}(x,y) := \rho(y,x).$$

Definicija 2.6. *Rasplinuta relacija $\rho : S^2 \to L$ je*

(R) **refleksivna** *ako je* $\rho(x,x) = 1$

(S) **simetrična** *ako je* $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(T) **tranzitivna** *ako je* $\rho(x,y) \geqslant \rho(x,z) \wedge \rho(z,y)$

(A) **antisimetrična** *ako važi: Iz* $x \neq y$ *i* $\rho(x, y) > 0$, *sledi* $\rho(y, x) = 0$,

za sve x, y, z *iz* S.

Ovo su klasične definicije ovih osobina, a u nekim izvorima se mogu naći i drugačije definicije refleksivnosti, tranzitivnosti i antisimetričnosti.

Može se dokazati da i nivo relacije imaju analogne osobine (nivoi rasplinutih refleksivnih relacija su i sami refleksivne relacije, itd.)

Ako je mreža $\mathcal{L}$ kompletna, tranzitivnost se može definisati na ekvivalentan način sa:

$$\rho(x, y) \geqslant \bigvee_{z} (\rho(x, z) \wedge \rho(z, y))$$

za sve x, y, z iz S.

Refleksivne i simetrične rasplinute relacije na S zovu se relacije približnosti.

Definicija 2.7. *Refleksivne, simetrične i tranzitivne rasplinute relacije na* S *zovu se* **rasplinute relacije ekvivalencije** *na* S *ili* **relacije sličnosti**.

Definicija 2.8. *Rasplinutu ekvivalenciju* ρ *na* S, *za koju važi*

$$\rho(x, y) = 1 \text{ akko } x = y,$$

zovemo **rasplinuta jednakost**.

Refleksivna, antisimetrična i tranzitivna rasplinuta relacija na S zove se **rasplinut poredak** na S.

Rasplinuto preslikavanje uvodimo sledećom definicijom.

Definicija 2.9. *Neka je* $\mathcal{L}$ *proizvoljna mreža sa nulom i jedinicom, a* S *i* T *neprazni skupovi i neka su* $\bar{A} : S \to L$ *i* $\bar{B} : T \to L$ *rasplinuti skupovi.* **Rasplinuto preslikavanje** *ili* **rasplinuta funkcija** $f : \bar{A} \to \bar{B}$ *je funkcija* $f : S \to T$, *takva da je za svako* $x \in S$

$$\bar{A}(x) \leqslant \bar{B}(f(x)).$$

2. Rasplinute funkcije

U prethodnom delu smo definisali rasplinuto preslikavanje rasplinutog skupa $\bar{A} : S \to L$ u rasplinuti skup $\bar{B} : S \to L$ kao klasičnu funkciju $f : S \to T$, takvu da je $\bar{A}(x) \leqslant \bar{B}(f(x))$ za sve $x \in S$. Takođe je definisana n-arna rasplinuta relacija na skupu S kao preslikavanje $\rho : S^n \to L$.

Kako je u klasičnom slučaju funkcija definisana kao specijalna binarna korespondencija, moguće je, takođe, i rasplinuto preslikavanje definisati kao rasplinutu binarnu korespondenciju koja ispunjava određene uslove. Binarna rasplinuta korespondencija se definiše kao preslikavanje $\rho : A \times B \to L$ (u nekim izvorima se ovaj pojam zove takođe rasplinuta relacija). Pomenuti pristup rasplinute funkcije kao specijalne rasplinute korespondencije nalazimo u radovima Demirci-a ([**26, 28, 29, 30, 31**]). U nastavku dajemo osnovne karakteristike ovakvog pristupa.

Prvo su na uobičajeni način definisane rasplinute jednakosti na klasičnom skupu. Zatim je definisana restrikcija rasplinute jednakosti nekog skupa na neprazan klasičan podskup na sledeći način.

Definicija 2.10. *Za rasplinutu jednakost E_X na X i običan neprazan podskup Z od X,* **restrikcija** *od E_X na $Z \times Z$, u oznaci E_X^Z, je data sa*

$$E_X^Z(x, y) = E_X(x, y), \qquad \text{za sve} \quad x, y \in Z.$$

Dalje se definiše rasplinuto preslikavanje koje preslikava klasičan skup na kome je data rasplinuta jednakost u neki drugi skup na kome je data druga rasplinuta jednakost.

Definicija 2.11. *Neka su E_X i E_Y dve rasplinute jednakosti na X i Y, redom. Tada se rasplinuta korespondencija f na $X \times Y$ (rasplinuti podskup f od $X \times Y$) zove* **rasplinuto preslikavanje iz X u Y u odnosu na**

rasplinute jednakosti E_X **i** E_Y, *u oznaci* $f : X \to Y$ *ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(1) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y) f(x,y) > 0$

(2) $(\forall x, y \in X)(\forall z, w \in y) f(x,z) \wedge f(y,w) \wedge E_X(x,y) \leqslant E_Y(z,w)$.

Takođe se definiše i slika rasplinutog podskupa pri nekom rasplinutom preslikavanju.

Definicija 2.12. *Neka je* $f : X \to Y$ *rasplinuto preslikavanje u odnosu na rasplinute jednakosti* E_X *na* X *i* E_Y *na* Y. *Onda, za rasplinuti podskup* A *od* X, **slika rasplinutog podskupa** A *pri rasplinutom preslikavanju* f, *u oznaci* $f(A)$, *je rasplinuti podskup od* Y *određen sa*

$$f(A)(y) = \sup_{x \in X}\{A(x) \wedge f(x,y)\} \textit{za sve} \;\; y \in Y.$$

Osnovne vrste rasplinutih preslikavanja su uvedene sledećom definicijom.

Definicija 2.13. *Za klasične skupove* X *i* Y *neka je* $f : X \to Y$ *rasplinuto preslikavanje u odnosu na rasplinute jednakosti* E_X *na* X *i* E_Y *na* Y. *Tada*

(a) $f : X \to Y$ *je* **strogo** *akko* $(\forall x \in X)(\exists y \in Y) f(x,y) = 1$.

(b) $f : X \to Y$ *je* **sirjektivno** *akko* $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) f(x,y) > 0$.

(c) $f : X \to Y$ *je* **strogo sirjektivno** *akko* $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) f(x,y) = 1$.

(d) $f : X \to Y$ *je* **injektivno** *akko* $(\forall x, y \in X)(\forall z, w \in Y) f(x,z) \wedge f(y,w) \wedge E_Y(z,w) \leqslant E_X(x,y)$.

(e) $f : X \to Y$ *je* **bijektivno** *akko je sirjektivno i injektivno.*

(f) $f : X \to Y$ *je* **strogo bijektivno** *akko je strogo sirjektivno i strogo injektivno.*

3. Direktni proizvod rasplinutih skupova, podalgebre i kongruencije

U ovom delu se navode poznate definicije i rezultati vezani za osnovne algebarske pojmove na rasplinutim skupovima.

DEFINICIJA 2.14. **Direktan proizvod rasplinutih skupova** $\bar{A}_i : S \to L,\ i = 1, .., n$ *definišemo kao preslikavanje* $\bar{A}_1 \times \cdots \times \bar{A}_n : S^n \to L$*, takvo da je za* $x_1, ..., x_n \in S$

$$\bar{A}_1 \times \cdots \times \bar{A}_n(x_1, ..., x_n) := \bigwedge_{i=1}^{n} \bar{A}_i(x_i).$$

DEFINICIJA 2.15. *Neka je* $\mathcal{L}$ *proizvoljna mreža sa nulom i jedinicom,* S *neprazan skup i* $\bar{A} : S \to L$ *rasplinut podskup od* S*. Kažemo da je*

$$f_n : \underbrace{\bar{A} \times \bar{A} \times \cdots \times \bar{A}}_{n} \to \bar{A},$$

n**-arna rasplinuta operacija** *na* $\bar{A}$ *ako*

$$(\bar{A} \times \bar{A} \times \cdots \times \bar{A})(x_1, .., x_n) \leqslant \bar{A}(f_n(x_1, .., x_n)),\ \ \textit{odnosno}$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bar{A}(x_i) \leqslant \bar{A}(f_n(x_1, .., x_n)).$$

U nastavku se definiše rasplinuta podalgebra.

DEFINICIJA 2.16. *Neka je data algebra* $\mathcal{A} = (A, F)$*, kompletna mreža* $\mathcal{L}$ *i rasplinut podskup* $\mu : A \to L$*. Kažemo da je* μ **rasplinuta podalgebra** *algebre* $\mathcal{A}$ *ako je za sve operacije* $f_n \in F$ *i sve* $x_1, ..., x_n \in A$

$$\mu(f_n(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu(x_i).$$

i ako za svaku nularnu operaciju (konstantu) $c \in F$*, važi* $\mu(c) = 1$*, gde je* 1 *najveći element u* $\mathcal{L}$*.*

Umesto $\mu(c) = 1$ u nekim definicijama rasplinute algebre se zahteva da važi slabiji uslov: za svako $x \in A$, $\mu(x) \leqslant \mu(c)$, gde se uopštava činjenica da konstantni element koji odgovara nularnoj operaciji pripada svakoj podalgebri.

Međutim pošto je jedan od osnovnih zahteva u ovom pristupu da svaki nivo rasplinute algebre μ, pa otuda i 1-nivo, bude obična podalgebra algebre $\mathcal{A}$ i pošto konstantni elementi pripadaju svim podalgebrama, oni moraju pripadati i nivou 1 i njihova vrednost će biti 1. Tako da je zahtev $\mu(c) = 1$ u ovom kontekstu prirodan.

Navedimo definicije još nekih pojmova koje ćemo koristiti u daljem radu.

Definicija 2.17. *Neka je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra, $\mathcal{L}$ kompletna mreža i neka su $\mu_i : A \to L, i = 1, ..., n$ rasplinute podalgebre algebre $\mathcal{A}$. Ako je $f \in F$, onda ovoj funkciji odgovara rasplinut podskup $f_{\mu_1,...,\mu_n} : A \to L$, algebre $\mathcal{A}$ određen na sledeći način*

$$f_{\mu_1,...,\mu_n}(x) = \begin{cases} 0, & \textit{ako ne postoje } x_1, x_2, \ldots x_n \textit{ takvi da je } x = f(x_1, ..., x_n) \\ \bigvee\limits_{x_1,x_2,\ldots x_n | x = f(x_1,...,x_n)} \Big(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \mu_i(x_i) \Big), & \textit{inače.} \end{cases}$$

Neka je dat skup S i mreža $\mathcal{L}$. Ako je f n-arna operacija definisana na L, tj. $f : L^n \to L$, onda je možemo proširiti na n-arnu operaciju na skupu svih rasplinutih skupova na S:

$$\bar{f} : (\overline{P(S)})^n \to \overline{P(S)}$$

na sledeći način:

$$(\bar{f}(\bar{A}_1, ..., \bar{A}_n))(x) := f(\bar{A}_1(x), ..., \bar{A}_n(x))$$

U narednom delu ćemo definisati još neke pojmove koji će imati veoma značajnu ulogu u daljem radu. Pre svega je to pojam kompatibilnosti neke relacije i pojmovi u čijoj se definiciji pojavljuje pojam kompatibilnost relacije.

DEFINICIJA 2.18. *Neka je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra, L mreža i ρ rasplinuta relacija na skupu A. Kažemo da je relacija ρ* **kompatibilna** *ako je*

$$\rho(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i).$$

za sve $f \in F$ i $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in A$.

DEFINICIJA 2.19. *Kompatibilna rasplinuta relacija ekvivalencije zove se* **rasplinuta kongruencija** .

Kompatibilne rasplinute relacije jednakosti ćemo, kad god to ne dovodi do zabune, kraće zvati rasplinuta jednakost.

Nivo relacije kompatibilne rasplinute relacije su obične kompatibilne relacije, a takođe su i nivo kongruencije i same kongruencije na algebri nosaču.

4. Rasplinute podalgebre na rezidualnoj mreži

Rezidualne mreže su izučavane, sa tačke gledišta rasplinute logike, od strane Höhle [**41**]. One daju mogućnost sinteze rasplinute logike i rasplinutih skupova. Rezidualna mreža se uzima za oblast istinitosnih vrednosti rasplinute logike u kojoj se operacija $\otimes$ shvata kao uopštenje konjunkcije, a operacija $\rightarrow$ kao uopštenje implikacije. U specijalnom slučaju se koristi Heytingova algebra, kod koje se operacija $\otimes$ poklapa sa infimumom.

DEFINICIJA 2.20. *Neka je dat skup S, rezidualna mreža $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ i rasplinuti partitivni skup $\overline{P(S)}$. Tada operacijama $\otimes$ i $\rightarrow$ odgovaraju redom operacije $\otimes$ i $\rightarrow$ na skupu $\overline{P(S)}$ definisane na sledeći način:*

$$(A \otimes B)(x) := A(x) \otimes B(x)$$

$$(A \to B)(x) := A(x) \to B(x)$$

dok su operacije $\wedge$ i $\vee$ definisane isto kao u običnoj mreži.

Ako je za svako $x \in S$, $A(x) = 1$, onda takav rasplinut skup A označavamo sa S. Dakle, $S(x) = 1$ *i* $S \in \overline{P(S)}$. Ako je za svako $x \in S$, $A(x) = 0$, onda A označavamo sa $\emptyset$. Dakle, $\emptyset(x) = 0$ *i* $\emptyset \in \overline{P(S)}$.

Poredak na $\overline{P(S)}$ uvodimo analogno onom na običnoj mreži.

Strukturu $(\overline{P(S)}, \cap, \cup, \otimes, \to, \emptyset, S)$ označimo sa $\overline{\mathbf{P(S)}}$. Važi sledeća teorema.

Teorema 2.2. *Za bilo koju rezidualnu mrežu $\mathcal{L}$ i bilo koji skup $S \neq \emptyset$*

$$\overline{\mathbf{P(S)}} = (\overline{P(S)}, \cap, \cup, \otimes, \to, \emptyset, S)$$

je kompletna rezidualna mreža.

Dakle, rasplinuti partitivni skup rasplinutog skupa nad rezidualnom mrežom obrazuje takođe rezidualnu mrežu.

Refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost rasplinutih relacija na mreži, koja ne mora biti rezidualna, su uvedeni definicijom 2.6. Isti pojmovi se mogu definisati i kod rasplinutih relacija kod kojih je kodomen rezidualna mreža. Refleksivnost i simetričnost su definisani na isti način. Razlika je samo u definiciji tranzitivnosti. Umesto infimuma se koristi operacija $\otimes$.

Rasplinuta relacija $\rho : S^2 \to L$ je

(1) **tranzitivna** *ako je $\rho(x, y) \geqslant \rho(x, z) \otimes \rho(z, y)$*

za sve x, y, z iz S.

Ako je mreža $\mathcal{L}$ kompletna, tranzitivnost se može zadati ekvivalentnom definicijom sa:

$$\rho(x, y) \geqslant \bigvee_z (\rho(x, z) \otimes \rho(z, y))$$

za sve x, y, z iz S.

Definicijom 2.18 je uvedena kompatibilnost rasplinute relacije neke algebre na mreži. Ako je mreža rezidualna, onda, umesto infimuma koristimo operaciju $\otimes$.

DEFINICIJA 2.21. *Neka je $\mathcal{A} = (A, F)$ algebra, $\mathcal{L}$ rezidualna mreža i ρ rasplinuta relacija na skupu A. Kažemo da je relacija ρ* **kompatibilna** *ako je*

$$\rho(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \rho(x_i, y_i).$$

za sve $f \in F$ i $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in A$.

Takođe se i definicija rasplinute podalgebre može uvesti u kontekstu rezidualne mreže.

DEFINICIJA 2.22. *Neka je data algebra $\mathcal{A} = (A, F)$, kompletna rezidualna mreža $\mathcal{L}$ i rasplinut podskup $\mu : A \to L$. Kažemo da je μ* **rasplinuta podalgebra** *algebre $\mathcal{A}$ ako je za sve operacije $f \in F$ i sve $x_1, ..., x_n \in A$*

$$\mu(f(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i).$$

i za svaku nularnu operaciju (konstantu) $c \in F$, je $\mu(c) = 1$, gde je 1 najveći element u L.

U ovoj definiciji rasplinute podalgebre, se umesto infimuma koristi operaciju $\otimes$, jer ona u ovom kontekstu zamenjuje logičku konjunkciju.

5. Rasplinuti identiteti

U ovom delu su izloženi rezultati o rasplinutim identitetima B. Šešelje i A. Tepavčević [**105**]. Originalni rezultati u ovom radu se nadovezuju na te rezultate. U radu se, dalje, razmatraju algebre na kojima je data rasplinuta podalgebra i kompatibilna rasplinuta relacija jednakosti. Zatim je definisan rasplinut identitet, kao uopštenje klasičnog identiteta. Na taj način razmatramo algebre u kojima važi rasplinut identitet i ne mora da važi klasični identitet. Ova definicija daje uopštenje klasičnog identiteta, jer je svaki klasični identitet istovremeno i rasplinuti identitet.

Definicija 2.23. *Neka je data algebra $\mathcal{A} = (A, F)$, kompletna mreža L, rasplinut podskup $\mu : A \to L$ i $E : A^2 \to L$ rasplinuta relacija jednakosti na A. Ako su $t_1(x_1, .., x_n)$ i $t_2(x_1, .., x_n)$ termi u jeziku od $\mathcal{A}$, onda izraz $E(t_1, t_2)$ zovemo* **rasplinuti identitet** *u odnosu na E, ili kraće rasplinuti identitet, ako je E fiksirano.*

Definicija 2.24. *Uzmimo da su $x_1, .., x_n$ promenljive koje se pojavljuju u termima t_1 i t_2. Kažemo da rasplinuta podalgebra μ od $\mathcal{A}$* **zadovoljava rasplinut identitet** $E(t_1, t_2)$ *(ili da je rasplinut identitet tačan na rasplinutoj podalgebri μ) ako je za sve $x_1, .., x_n \in A$*

$$E(t_1, t_2) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu(x_i).$$

Trivijalan rasplinut identitet $E(t_1, t_1)$ je zadovoljen na bilo kojoj rasplinutoj podalgebri. Dalje, ako je rasplinut identitet $E(t_1, t_2)$ zadovoljen u rasplinutoj podalgebri, onda je na toj podalgebri zadovoljen i identitet $E(t_2, t_1)$. Ako rasplinuta algebra zadovoljava identitete $E(t_1, t_2)$ i $E(t_2, t_3)$, onda ona zadovoljava i identitet $E(t_1, t_3)$.

Pomoću sledećih teorema dajemo osnovna svojstva rasplinutih identiteta.

Teorema 2.3. *Neka su dati termi $t_1(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n)$ i $t_2(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n)$ na jeziku algebre $\mathcal{A}$. Ako rasplinuta podalgebra zadovoljava identitet*

$$E(t_1(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n), t_2(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n)),$$

onda ona takođe zadovoljava identitet

$$E(t_1(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_n),t_2(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_n)),$$

TEOREMA 2.4. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra u kojoj važi identitet $t_1 = t_2$ čije su promenljive $x_1,..,x_n$. Neka je L kompletna mreža i E rasplinuta jednakost na $\mathcal{A}$. Tada, bilo koja rasplinuta podalgebra $\mu : A \to L$ zadovoljava rasplinut identitet $E(t_1,t_2)$.*

Na kraju navodimo teoreme koje daju vezu rasplinute relacije jednakosti i skupa nivoa p te jednakosti.

TEOREMA 2.5. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra, L kompletna mreža, $\mu : A \to L$ rasplinuta podalgebra od $\mathcal{A}$ i E rasplinuta jednakost na $\mathcal{A}$. Tada za sve $p \in L$:*

(i) *Nivo μ_p od μ je poduniverzum od $\mathcal{A}$.*
(ii) *Nivo E_p od E je relacija kongruencije na $\mathcal{A}$.*

TEOREMA 2.6. *Neka je $\mathcal{A}$ algebra, L kompletna mreža, $\mu : A \to L$ rasplinuta podalgebra od $\mathcal{A}$ i E rasplinuta jednakost na $\mathcal{A}$. Neka takođe μ zadovoljava rasplinut identitet $E(t_1,t_2)$. Tada, za svako $p \in L$, ako je μ_p neprazan, onda količnička algebra $\mu_p/E_p(\mu_p)$ zadovoljava identitet $t_1 = t_2$.*

Iz poslednje dve teoreme možemo videti da ako rasplinuta podalgebra μ zadovoljava rasplinuti identitet $E(t_1,t_2)$ i ako je nivo μ_p neprazan, onda je μ_p podalgebra i E_p kongruencija algebre $\mathcal{A}$ i količnička algebra $\mu_p/E_p(\mu_p)$ zadovoljava identitet $t_1 = t_2$.

Ako bismo umesto kompletne mreže uzeli rezidualnu mrežu, onda bismo umesto

$$\mu(f(x_1,...,x_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu(x_i)$$

imali

$$\mu(f(x_1,...,x_n)) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i).$$

U tom slučaju da bi neprazan skup nivoa p, u oznaci μ_p bio podalgebra algebre $\mathcal{A}$, mora biti ispunjen sledeći uslov:

Ako je $x_i \in \mu_p$, tj. $\mu(x_i) \geqslant p,\ i = 1, ..., n$, onda je $\mu(f(x_1, ..., x_n)) \geqslant p$, tj. $f(x_1, ..., x_n) \in \mu_p$. Prema prethodnom je

$$\mu(f(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} p.$$

Kako operacija $\otimes$ nije idempotentna, ne možemo zaključiti da je $\bigotimes_{i=1}^{n} p = p$, pa u slučaju rezidualne mreže ne dobijaju se rezultati kao u poslednje dve teoreme.

6. Specijalne rasplinute strukture

Mrežno vrednosne algebre se istražuju od samog početka fazi ere. Prvo su nastale rasplinute grupe (Rosenfeld [**72**] i Das [**24**]), zatim polugrupe, prsteni i ostale specijalne strukture, a dosta su izučavane i njihove primene (počevši od Malik-a i Mordeson-a, videti [**57, 65, 66, 72, 82, 111**]). Prikaz rezultata rasplinutih grupa dat je u knjizi [**66**], a rasplinutih polugrupa u knjizi [**65**].

U nastavku navodimo osnovne osobine rasplinutih podalgebri najpoznatijih algebarskih struktura.

Polazimo od definicije rasplinutog grupoida i rasplinute polugrupe. Ove definicije su saglasne sa definicijom rasplinute podalgebre.

Definicija 2.25. *Ako je $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ proizvoljan grupoid, onda je $(\mu, \cdot)$* **rasplinut podgrupoid** *na $\mathcal{G}$ ako važi:*

(1) *$\mu : G \to L$ je rasplinut podskup od G.*

(2) *" $\cdot$ " je rasplinuta operacija na μ,*

tj.

$$\mu(x \cdot y) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y),$$

za sve $x, y \in S$.

Definicija 2.26. *Neka je* $(S, \cdot)$ *polugrupa i* $\mathcal{L}$ *kompletna mreža. Kažemo da je* $\mu : S \to L$ **rasplinuta podpolugrupa** *polugrupe* $(S, \cdot)$ *ako je za sve* $x, y \in S$

$$\mu(x \cdot y) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y),$$

tj. ako je μ *rasplinut podgrupoid.*

Dajemo neke od osnovnih osobina ovih rasplinutih struktura.

1. Neka je $(G, \cdot)$ grupoid i $\mu : G \to L$ rasplinut skup na G. Onda je μ rasplinut podgrupoid od $(G, \cdot)$ ako i samo ako za svako $p \in L$, svaki neprazan nivo μ_p je podgrupoid od $(G, \cdot)$.

2. Neka je $(G, \cdot)$ polugrupa i $\mu : G \to L$ rasplinut skup na G. Onda je μ rasplinuta podpolugrupa od $(G, \cdot)$ ako i samo ako za svako $p \in L$, svaki neprazan nivo μ_p je podpolugrupa od $(G, \cdot)$.

Dalje, moguće je konstruisati rasplinut podgrupoid (rasplinutu podpolugrupu) tako da data (specijalna) kolekcija podgrupoida (podpolugrupa) od datog grupoida (polugrupe) bude upravo kolekcija nivoa konstruisane rasplinute strukture. Rezultati prethodno pomenuti se obično zovu teoreme sinteze i njih sada navodimo (videti [**81**]):

3. Neka je $(G, \cdot)$ grupoid i $\mathcal{F}$ familija podgrupoida od $(G, \cdot)$ koja je zatvorena za presek i sadrži G. Onda, postoji rasplinut podgrupoid μ tako da je $\mathcal{F}$ familija nivoa od μ.

Zaista, pošto je ta familija zatvorena za preseke i sadrži G, ona je mreža u odnosu na inkluziju. Ako je $(\mathcal{F}, \leq)$ mreža dualna sa $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tada je rasplinuti podgrupoid $\mu : G \to \mathcal{F}$ definisan sa:

$$\mu(x) = \bigcap \{f \in \mathcal{F} \mid x \in f\}.$$

Pokazuje se da je familija nivoa od μ baš $\mathcal{F}$, preciznije

$$\mu_f = f, \quad \text{za sve} \quad f \in \mathcal{F}.$$

4. Neka je $(G, \cdot)$ polugrupa i $\mathcal{F}$ familija podpolugrupa od $(G, \cdot)$ koja je zatvorena za presek i sadrži G. Onda, postoji rasplinuta podpolugrupa μ tako da je $\mathcal{F}$ familija nivoa od μ. Ta podpolugrupa se konstruiše isto kao i rasplinuti podgrupoid pod 3.

Drugi važan pojam je pojam rasplinute podgrupe (često se kaže i rasplinuta grupa).

Kao i za druge rasplinute strukture, u nastojanju da dobijemo rasplinutu podgrupu, polazimo od grupe $(G, \cdot)$. U grupi se obično neutralni element označava sa e, a inverzni element od $x \in G$ sa x^{-1}.

Rasplinuta podgrupa grupe $(G, \cdot)$ je rasplinut podgrupoid $\mu : G \to L$ u kome važi $\mu(x^{-1}) \geqslant \mu(x)$.

Ovde ne zahtevamo uvek (kao u nekim radovima) da uslov $\mu(e) = 1$ bude ispunjen u definiciji rasplinute grupe (ovakav pristup je korišćen u [**66**]). U slučaju ako bi se grupa posmatrala kao algebra sa jednom binarnom, unarnom i nularnom operacijom, tada bi se po definiciji rasplinute algebre morao zahtevati i ovaj uslov.

Lako dolazimo do zaključka da je:

5. $\mu(x) = \mu(x^{-1})$, za sve $x \in G$
6. $\mu(e) \geq \mu(x)$, za sve $x \in G$.

TEOREMA 2.7. *Rasplinut podskup μ grupe G je rasplinuta podgrupa od G ako i samo ako je $\mu(xy^{-1}) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$, za sve $x, y \in S$.*

Slično kao za grupoide i polugrupe, imamo da su svi neprazni nivoi rasplinute grupe podgrupe od $(G, \cdot)$. Tvrđenja analogna gore pomenutim su takođe tačna.

7. (videti npr.[**66**]) Neka je $(G, \cdot)$ grupa i neka je $\mu : G \to L$ rasplinut skup na G. Onda, μ je rasplinuta podgrupa od $(G, \cdot)$ ako i samo ako za svako $p \in L$, ako μ_p nije prazan, on je podgrupa od $(G, \cdot)$.

8. (videti npr.[**81**]) Neka je $(G, \cdot)$ grupa i $\mathcal{F}$ familija podgrupa od $(G, \cdot)$ koja je zatvorena za presek i sadrži G. Onda postoji rasplinuta podgrupa μ takva da je $\mathcal{F}$ familija nivoa od μ (slično kao pod 3. i 4.).

Sledeća definicija i rezultati vezani za nju mogu se naći u [**65**].

Neka je $(G, \cdot)$ polugrupa i L kompletna mreža. Neka su $\mu : G \to L$ i $\nu : G \to L$ rasplinuti podskupovi polugrupe G. Tada je **proizvod** $\mu \circ \nu$ *rasplinut skup polugrupe G definisan sa:*

$$(\mu \circ \nu)(x) = \begin{cases} \bigvee\limits_{y,z|x=y\cdot z} \{\mu(y) \wedge \nu(z)\}, & \textit{ako postoje } \ y, z \textit{ takvi da } \ x = y \cdot z \\ 0, & \textit{inače} \ . \end{cases}$$

Ako je L beskonačna distributivna mreža, onda je gore definisani proizvod asocijativan. U nekim specijalnim slučajevima, proizvod dve rasplinute polugrupe je opet rasplinuta polugrupa (videti [**65**]).

Neka je $(G, \cdot)$ polugrupa. Prema klasičnoj notaciji i terminologiji (videti [**22**]) $(G, \cdot)$ je polumreža grupa ako je unija familije $\{G_i, i \in I\}$ međusobno disjunktnih podgrupa, takvih da su za sve $j, k \in I$, proizvodi $G_j \circ G_k$ i $G_k \circ G_j$ sadržani u istoj podgrupi G_l za neko $l \in I$.

$$(\{G_i, i \in I\}, \circ)$$

je polumreža u kojoj je operacija $\circ$ definisana sa:

$$G_j \circ G_k := G_l$$

gde je G_l grupa u kojoj su sadržani $G_j \circ G_k$ i $G_k \circ G_j$. Ova operacija je dobro definisana, pošto familija $\{G_i, i \in I\}$ čini particiju polugrupe G. Šta više, ona je idempotentna (pošto je za svako i, G_i zatvoren za operaciju $\circ$, i tako $G_i \circ G_i := G_i$). Ona je takođe asocijativna i komutativna.

Neka je $\sim$ relacija kongruencije na G određena pomenutom particijom (definisana sa: $x \sim y$ ako i samo ako postoji $i \in I$, tako da je $x, y \in G_i$).

Faktor grupa $(G/\sim)$ je polumreža (zato je zovemo polumreža grupa).

Ove klasične koncepte uopštavamo u glavi 3 na slučaj rasplinutih struktura. U tom cilju nam je potreban pojam rasplinutih particija koji uvodimo u nastavku.

Neka je $\mu : A \to L$ rasplinut skup. Prema jednoj od klasičnih definicija, rasplinuta particija od μ je familija rasplinutih podskupova rasplinutog skupa μ, $\{\mu_i : A \to L \mid i \in I\}$, takvih da $\mu = \bigcup_{i \in I} \mu_i$ i za sve $i, j \in I$, ako je $i \neq j$, $\mu_i \cap \mu_j = \emptyset$ gde je $\emptyset$ prazan rasplinut skup (onaj koji ima vrednost 0 za sve $x \in A$).

Definicija 2.27. [**61**] **Rasplinuta $\delta - \varepsilon$-particija** *rasplinutog skupa* $\mu : A \to L$, *(*$\delta, \varepsilon \in L, \delta > \varepsilon$*) je familija rasplinutih skupova* $\{\mu_i | i \in I\}$*, takvih da za sve* $p \in (\varepsilon, \delta)$*,*

$$\Big(\bigcup_{i \in I} \mu_i\Big)_p = \mu_p,$$

i za sve $i, j \in I, i \neq j$*,*

$$(\mu_i \cap \mu_j)_p = \emptyset.$$

Ova definicija je uvedena i korišćena do sada uglavnom za $[0, 1]$-vrednosne rasplinute skupove. Glavna ideja je bila da svojstva particije budu zadovoljena na nivoima za neke "srednje" vrednosti, niti za one bliske 0, niti za one bliske 1. U slučaju kada mreža $\mathcal{L}$ nije linearno uređena, zavisno od izbora parametara, definicija nije uvek odgovarajuća. Međutim, mi u glavi 4 koristimo interval $[\varepsilon, 1]$, tako da su osobine particije zadovoljene za sve elemente u neposrednoj blizini najvećeg elementa 1. Zbog toga, ova definicija je ovde pogodna za odgovarajući izbor mreže $\mathcal{L}$ i parametra ε.

U nastavku se bavimo rasplinutim podpolugrupama, pa dajemo neka svojstva klasičnih polugrupa koja će nam kasnije biti potrebna.

Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa. Neprazan podskup A od S zovemo **levi (desni) ideal** od S ako $SA \subseteq A$ $(AS \subseteq A)$, gde je $SA = \{x \cdot y \mid x \in S, y \in A\}$. Slično se definiše i AS. Dalje, A se zove **ideal** od S ako je i levi i desni ideal.

Polugrupa S je regularna ako za svaki element a iz S, postoji element $x \in S$ takav da $a = axa$.

Sledećim definicijama uvodimo pojam rasplinutog (levog, desnog) ideala na polugrupi.

Definicija 2.28. *Rasplinut podskup $\mu : S \to L$ na polugrupi S zove se* **rasplinut levi ideal** *od S ako*

$$\mu(ab) \geqslant \mu(b)$$

za sve $a, b \in S$.

Definicija 2.29. *Rasplinut podskup $\mu : S \to L$ zove se* **rasplinut desni ideal** *od S ako*

$$\mu(ab) \geqslant \mu(a)$$

za sve $a, b \in S$.

Rasplinut podskup $\mu : S \to L$ je rasplinut ideal od S ako je rasplinut levi i rasplinut desni ideal od S.

Dalje navodimo osnovne osobine rasplinutog ideala na polugrupi (videti [**65**]).

Teorema 2.8. *Neka je μ rasplinut podskup od polugrupe S, i $\circ$ proizvod rasplinutih skupova, onda važe sledeća tvrđenja:*

(1) *μ je rasplinuta podpolugrupa od S akko $\mu \circ \mu \subseteq \mu$.*
(2) *μ je rasplinut levi ideal od S akko $S \circ \mu \subseteq \mu$.*
(3) *μ je rasplinut desni ideal od S akko $\mu \circ S \subseteq \mu$.*
(4) *μ je rasplinut ideal od S akko $S \circ \mu \subseteq \mu$ i $\mu \circ S \subseteq \mu$.*

Teorema 2.9. *Polugrupa S je regularna akko $\mu \cap \nu = \nu \circ \mu$ za svaki rasplinut desni ideal μ i svaki rasplinut levi ideal ν od S, gde je $\circ$ proizvod rasplinutih podskupova.*

Teorema 2.10. *Neka je S polugrupa. Onda važe sledeća tvrđenja:*

(1) *Neka su* μ *i* ν *rasplinute podpolugrupe od* S*. Onda je* $\mu \cap \nu$ *takođe rasplinuta podpolugrupa od* S*.*

(2) *Neka su* μ *i* ν *rasplinut levi (desni, obostrani) ideal od* S*. Onda je* $\mu \cap \nu$ *takođe rasplinut levi (desni, obostrani) ideal od* S*.*

Podsetimo se da je **poluprsten** uređena trojka $(S, +, \cdot)$, gde su $(S, +)$ i $(S, \cdot)$ polugrupe i operacija $\cdot$ je distributivna prema operaciji $+$.

Rasplinut poluprsten uvodimo sledećom definicijom, koje je takođe u skladu sa definicijom rasplinute algebre.

DEFINICIJA 2.30. *Neka je* $(S, +, \cdot)$ *poluprsten i* $\mathcal{L}$ *kompletna mreža. Kažemo da je* $\mu : S \to L$ **rasplinut podpoluprsten** *poluprstena* S *ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(1) $\mu(x + y) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$

(2) $\mu(x \cdot y) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$,

za sve $x, y \in S$*.*

7. Rasplinute ekvivalencije i rasplinute jednakosti

U ovom delu razmatramo pojam skupa sa rasplinutom jednakošću koji je koristio Belohlavek sa saradnicima u radovima i knjigama ([**2**]) i ([**5**]). Kao što smo već spomenuli, Belohlavek i saradnici su razradili veliki broj pojmova i rezultata iz rasplinute univerzalne algebre koristeći taj pojam. Ovde detaljno uvodimo taj pristup, da bismo ga uporedili sa našim pristupom.

Polazimo od pojmova rasplinute ekvivalencije, rasplinute jednakosti i rasplinutog homomorfizma skupa sa rasplinutom jednakošću u skup sa rasplinutom jednakošću. Više o tome se može videti u [**2**].

Rasplinuta ekvivalencija i rasplinuta jednakost se definišu na običnom skupu U kao preslikavanja $U \times U$ u rezidualnu mrežu $\mathcal{L}$ na sledeći način.

Definicija 2.31. **Rasplinuta relacija ekvivalencije** *(rasplinuta ekvivalencija) θ na skupu U je preslikavanje*

$$\theta : U \times U \to L$$

koje zadovoljava uslove:

(1) $\theta(u,u) = 1$ *(refleksivnost)*
(2) $\theta(u,v) = \theta(v,u)$ *(simetričnost)*
(3) $\theta(u,v) \otimes \theta(v,w) \leqslant \theta(u,w)$ *(tranzitivnost)*

za sve $u, v, w \in U$.

Rasplinuta ekvivalencija θ na skupu U za koju $\theta(u,v) = 1$ povlači $u = v$ zove se **rasplinuta jednakost***.*

Rasplinuta ekvivalencija se često zove i rasplinuta sličnost. Tako kažemo da $\theta(u,v)$ izražava stepen sličnosti $u, v \in U$. Uobičajena oznaka za ovu relaciju je E.

Skup nivoa a relacije θ se uvodi na uobičajeni način:

$$a_\theta = \{(x,y) \mid \theta(x,y) \geqslant a\}.$$

Neka je θ rasplinuta ekvivalencija na U. Tada važi:

(i) Za svako $a \in L$, θ_a je refleksivna i simetrična relacija. Ako je $a \otimes a = a$, onda je θ_a relacija ekvivalencije.
(ii) Nivo 1, θ_1 je relacija ekvivalencije. Ako je θ rasplinuta jednakost, onda je θ_1 jednakost na U.

Vidimo da su u ovom pristupu nivoi relacije ekvivalencije obične relacije ekvivalencije samo u specijalnom slučaju.

Ako je E rasplinuta jednakost na skupu U, onda uređeni par (U, E) zovemo **skup sa rasplinutom jednakošću**.

Definicija 2.32. *Kažemo da je funkcija* $f : U^n \to U$ **kompatibilna** *sa rasplinutom jednakošću* E *na* U *ako za sve* $u_1, v_1, ..., u_n, v_n \in U$ *imamo*

$$E(f(u_1, ..., u_n), f(v_1, ..., v_n)) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} E(u_i, v_i)$$

Kažemo da je n*-arna rasplinuta relacija* r *na* U *kompatibilna sa rasplinutom jednakošću* E *na* U *ako za sve* $u_1, v_1, ..., u_n, v_n \in U$ *imamo*

$$r(v_1, ..., v_n) \geqslant \Big(\bigotimes_{i=1}^{n} E(u_i, v_i) \Big) \otimes r(u_1, ..., u_n)$$

Iz prethodne definicije i veze između operacija u rezidualnoj mreži dobijamo

$$r(u_1, ..., u_n) \longrightarrow r(v_1, ..., v_n) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} E(u_i, v_i).$$

Rasplinuta ekvivalencija θ je kompatibilna sa rasplinutom jednakošću E na U akko $E \subseteq \theta$, tj.

$$\theta(a, b) \otimes E(a, a') \otimes E(b, b') \leqslant \theta(a', b')$$

za sve $a, a', b, b' \in U$.

Ako su (U, E_U) i (V, E_V) skupovi sa rasplinutom jednakošću, u nastavku definišemo preslikavanje $h : U \to V$ koje je kompatibilno sa rasplinutom jednakošću i koje zovemo E-homomorfizam.

Definicija 2.33. *Za skupove sa rasplinutom jednakošću* (U, E_U) *i* (V, E_U) *preslikavanje* $h : U \to V$ *zove se* **E-homomorfizam** *ako*

$$E_U(u_1, u_2) \leqslant E_V(h(u_1), h(u_2))$$

za sve $u_1, u_2 \in U$.

Za E-homomorfizam $h : U \to V$ označimo sa θ_h binarnu rasplinutu relaciju na U za koju je

$$\theta_h(u_1, u_2) = E_V(h(u_1), h(u_2)).$$

θ_h se zove **jezgro E-homomorfizma** h. Ako je $h : U \to V$ preslikavanje (U, E_U) u (V, E_V), onda je h E-homomorfizam akko $E_U \subseteq \theta_h$.

Analogno klasičnom slučaju, jezgro E-homomorfizma je rasplinuta ekvivalencija kompatibilna sa rasplinutom jednakošću E_U. Jezgro E-homomorfizma je i rasplinuta jednakost ako i samo ako je h injektivna funkcija.

8. Apstraktna rasplinuta logika

Pavelka [**67**] 1979 godine uvodi koncept apstraktne rasplinute logike, koja je kasnije nastavila da se razvija i sada se naziva fazi logika Pavelkinog stila. Za skup svih formula nekog jezika koristi se oznaka Fml. Uvodi se vrednovanje formula, tj. dodeljuje se svakoj formuli apstraktnog skupa Fml njen stepen istinitosti. U opštem slučaju za skup svih stepena istinitosti formira kompletnu mrežu $\mathcal{L}$ (koja ne mora biti rezidualna), sa nosačem L. Stepen istinitosti u $\mathcal{L}$ može biti interpretiran kao stepen istinitosti u smislu rasplinute logike, ali su moguće i neke druge interpretacije. Postupak dodeljivanja stepeni istinitosti formulama ima dva "ulaza" i jedan "izlaz". Prvi ulaz je formula $\varphi \in Fml$. Drugi ulaz je semantička komponenta S u kojoj se može izraziti vrednost formule. Izlaz je stepen istinitosti $|| \varphi ||_S \in L$ od φ iz S. Na ovaj način preslikavanje

$$V : Fml \to L,$$

tj. rasplinuti skup V od Fml je uveden sa $V(\varphi) = || \varphi ||_S$.

Semantičke komponente S se mogu i zanemariti i uvedena preslikavanja V se mogu posmatrati kao jednostavan način za opisivanje semantike ove logike.

Definicija 2.34. **Rasplinuta semantika** *za skup formula* Fml *je skup* S, *rasplinutih skupova od* Fml, *tj.* $S \subseteq L^{Fml}$, *gde je*

$$L^{Fml} = \{V \mid V : Fml \to L\}.$$

Elementi $V \in S$ *se zovu* **evaluacije** *a* $V(\varphi)$ *je* **stepen istinitosti** φ *u* V.

Koristi se oznaka $\| \varphi \|_V$ umesto $V(\varphi)$.

Klasična predikatska logika je specijalan slučaj ove logike za dvoelementnu mrežu.

Uvedimo još neke važne pojmove apstraktne logike.

Definicija 2.35. **Rasplinuta teorija** *nad* Fml *i* L *je bilo koji rasplinuti skup* $T \in L^{Fml}$. *Uzimajući neku rasplinutu semantiku* S *za* Fml, *kažemo da* $V \in S$ *je model teorije* T *nad* Fml *i* L *ako je* $T \subseteq V$.

Definicija 2.36. *Za rasplinutu semantiku semantiku* S *za* Fml, *rasplinutu teoriju* T *i formulu* $\varphi \in Fml$, *stepen* $\| \varphi \|_T^S$ *u kom* φ *semantički sledi iz* T *je definisan sa*

$$\| \varphi \|_T^S = \bigwedge \{\| \varphi \|_V \mid V \in S \text{ je model od } T\}.$$

Definicija 2.37. *n-arno* **pravilo zaključivanja** *za* Fml *i* L *je uređen par* $R = (R_{syn}, R_{sem})$ *čije su komponente parcijalna funkcija*

$$R_{syn} : Fml^n \to Fml \quad \text{(sintaktički deo) i funkcija}$$

$$R_{sem} : L^n \to L \quad \text{(semantički deo).}$$

To možemo vizuelno predstaviti na sledeći način

$$\frac{(\varphi_1, a_1), ..., (\varphi_n, a_n)}{(R_{syn}(\varphi_1, ..., \varphi_n), R_{sem}(a_1, ..., a_n))}$$

Pravilo R omogućava nam da zaključimo da je formula $R_{syn}(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ tačna sa stepenom (najmanje) $R_{sem}(a_1, ..., a_n)$ ako znamo da je svako φ_i tačno sa stepenom najmanje a_i $(i = 1, ..., n)$.

DEFINICIJA 2.38. **Apstraktna logika** *je uređena petorka*

$$\mathcal{A}L = (Fml, \mathcal{L}, S, A, \mathcal{R}),$$

gde je Fml skup formula, $\mathcal{L}$ kompletna mreža, S je L-semantika za Fml, A je teorija (logičkih aksioma) nad Fml i $\mathcal{L}$, i $\mathcal{R}$ je skup pravila zaključivanja.

Ako je $2^S = \{V \ | \ V : S \to \{0,1\}\}$, u nastavku definišemo preslikavanja Md i Th.

$$Md : L^{Fml} \to 2^S \quad \text{i} \quad Th : 2^S \to L^{Fml}.$$

Za rasplinuti skup T nad skupom formula Fml definišemo skup $Md(T)$ evaluacija iz S sa

$$Md(T) = \{V \in S \ | \ V \text{ je model od } T\}.$$

Za skup K evaluacija iz S, definišemo rasplinuti skup $Th(K)$ sa

$$(Th(K))(\varphi) = \bigwedge\{V(\varphi) \mid V \in K\}.$$

$Md(T)$ je skup svih modela od T, a $Th(K)$ je rasplinuta teorija od K.

Primetimo da, korišćenjem funkcija Md i Th, stepen $|| \ \varphi \ ||_T^S$ u kom φ semantički sledi iz T se može prikazati na sledeći način

$$|| \ \varphi \ ||_T^S = \ (Th(Md(T)))(\varphi).$$

9. Algebre sa rasplinutom jednakošću

Pojmovi iz ovog dela su takođe iz knjige [**2**]. Algebra sa rasplinutom jednakošću je skup sa rasplinutom jednakošću i sa funkcijama koje su kompatibilne sa ovom jednakošću. Ako rasplinutu jednakost shvatimo kao sličnost, kompatibilnost funkcija nam govori da funkcija preslikava slične elemente u slične elemente. Sa ove tačke gledišta, algebra sa rasplinutom jednakošću može biti shvaćena kao kolekcija funkcija koje čuvaju sličnost.

Definišimo sada osnovne pojmove vezane za algebre sa rasplinutim jednakostima.

Tip je uređena trojka (E, F, σ), gde $E \notin F$ i σ je preslikavanje

$$\sigma : F \cup \{E\} \to N_0$$

sa $\sigma(E) = 2$. Svaki $f \in F$ je **funkcijski simbol**, E je relacijski simbol koji se zove **simbol rasplinute jednakosti**. Preslikavanje σ označava arnost $\sigma(f)$ svakog funkcijskog simbola $f \in F$. Ako nema opasnosti od zamene, (E, F, σ) zamenjujemo sa F.

DEFINICIJA 2.39. **Algebra sa sa rasplinutom jednakošću** *tipa* (E, F, σ) *je uređena trojka* $\mathbf{M} = (M, E_M, F_M)$ *takva da* (M, F_M) *je algebra tipa* (F, σ) *i* E_M *je rasplinuta jednakost na* M *takva da* $f_M \in F_M$ *je kompatibilna sa* E_M*. Algebru* (M, F_M) *označavamo sa* $Ske(M)$ *i zovemo skeletom od* $\mathbf{M}$.

Algebru sa rasplinutom jednakošću kraće zovemo L**-algebra**.

Ako je jasno koja mreža $\mathcal{L}$ je u pitanju, kažemo i algebra sa rasplinutom jednakošću, pa je često označavamo $(M, E_M, f_M^1, ..., f_M^n)$. Ponekad izostavljamo M iz E_M, F_M i f_M. Često $E_M(a, b)$ zovemo stepenom sličnosti između a i b.

Ako je $L = \{0, 1\}$ dobijamo teoriju običnih univerzalnih algebri, pa proizvoljnu L-algebru možemo shvatiti kao uopštenje pojma algebre.

10. Podalgebre, kongruencije, homomorfizmi i direktni proizvodi L-algebri

Ovaj deo je takođe preuzet uz knjige [**2**].

Dalje definišemo osnovne algebarske konstrukcije kao što su podalgebre, homomorfizmi, kongruencije i direktni proizvodi.

Može se shvatiti da svaka L-algebra $\mathbf{M} = (M, E_M, F_M)$ ima dva dela, funkcijski deo $Ske(M)$ i skup sa rasplinutom jednakošću (M, E_M) (relacijski deo), koji su povezani preko uslova kompatibilnosti.

Analogno definicijama iz klasične algebre, podalgebru i poduniverzum L-algebre uvodimo na sledeći način.

Definicija 2.40. *Neka je $\mathbf{M} = (M, E_M, F_M)$ L-algebra tipa F. L-algebra $\mathbf{N} = (N, E_N, F_N)$ se zove* **podalgebra** *od M ako je $\emptyset \neq N \subseteq M$, svaka funkcija $f_N \in F_N$ restrikcija od f_M na N i E_N je restrikcija od E_M na N. Poduniverzum od M je podskup $N \subseteq M$ koji je zatvoren za sve funkcije iz F_M.*

Kažemo da je L-algebra $\mathbf{M} = (M, E_M, F_M)$ **trivijalna** ako je $M = \{a\}$.

Kongruenciju na L-algebri uvodimo sledećom definicijom.

Definicija 2.41. *Neka je $\mathbf{M}$ L-algebra tipa F. Rasplinuta relacija θ na $\mathbf{M}$ zove se* **kongruencija** *na M ako:*

(i) *θ je rasplinuta relacija ekvivalencije na M*
(ii) *θ je kompatibilna sa E_M*
(iii) *Sve funkcije $f_M \in F_M$ su kompatibilne sa θ.*

Homomorfizam L-algebre definiše se kao preslikavanje koje čuva operacije f_M i rasplinutu jednakost E_M.

Definicija 2.42. *Neka su $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ L-algebre tipa F. Preslikavanje $h : M \to N$ zove se* **homomorfizam L-algebre $\mathbf{M}$** *u L-algebru $\mathbf{N}$ ako*

(i) $h(f_M(a_1, ..., a_n)) = f_N(h(a_1), ..., h(a_n))$ *za svaku n-arnu funkciju $f \in F$ i proizvoljne $a_1, ..., a_n \in M$*

(ii) *h je E-homomorfizam od (M, E_M) u (N, E_N).*

Neka su $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ L-algebre tipa F. Ako je $h : M \to N$ homomorfizam, onda je homomorfna slika $h(M)$ podalgebra L-algebre N.

Direktne proizvode uvodimo na sledeći način.

Definicija 2.43. *Neka je I skup indeksa.* **Direktan proizvod** *familije $\{M_i \mid i \in I\}$ L-algebri $\mathbf{M_i} = \{M_i, E_{M_i}, F_{M_i}\}$ je L-algebra $\prod_{i \in I} M_i$ tipa F tako da $M = \prod_{i \in I} M_i$ i za svaku n-arnu funkciju $f_{\prod_{i \in I} M_i} \in F_{\prod_{i \in I} M_i}$ i $a_1, ..., a_n \in M$ imamo*

$$f_{\prod_{i \in I} M_i}(a_1, ..., a_n)(i) = f_{M_i}(a_1(i), ..., a_n(i))$$

za sve $i \in I$ i rasplinutu jednakost $E_{\prod_{i \in I} M_i}$ definišemo sa

$$E_{\prod_{i \in I} M_i}(a, b) = \bigwedge_{i \in I} E_{M_i}(a(i), b(i)),$$

za sve $a, b \in M$.

Za klasu $\mathcal{K}$ L-algebri nekog tipa definišemo sledeće operatore:

$$H(\mathcal{K}) = \{h(M) \ \mid M \in \mathcal{K},\ h \quad \text{je homomorfizam}\}$$

$$S(\mathcal{K}) = \{M \ \mid M \text{ je podalgebra od nekog } \ N \in \mathcal{K}\}$$

$$P(\mathcal{K}) = \{M \ \mid M \text{ je direktan proizvod neke familije } P \subseteq \mathcal{K}\}$$

To znači da je $H(\mathcal{K})$ klasa svih homomorfnih slika L-algebri iz $\mathcal{K}$. $S(\mathcal{K})$ je klasa svih podalgebri od L-algebri iz $\mathcal{K}$. $P(\mathcal{K})$ je klasa svih direktnih proizvoda familija L-algebri iz $\mathcal{K}$.

Definicija 2.44. *Klasa $\mathcal{K}$ L-algebri tipa F zove se* **varijetet** *ako je zatvorena za homomorfne slike, podalgebre i direktne proizvode, tj. ako je $H(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, $S(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$ i $P(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.*

Ako je $\mathcal{K}$ klasa L-algebri nekog tipa sa $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ označimo najmanji varijetet koji sadrži $\mathcal{K}$. Tada kažemo da je $\mathcal{V}(\mathcal{K})$ **varijetet generisan sa $\mathcal{K}$**.

Pored navedene definicije varijeteta L-algebri u nekim radovima (videti [**84**] se uvodi pojam rasplinutog podvarijeteta na sledeći način.

Definicija 2.45. *Neka je* $\mathcal{V}$ *varijetet i* $\mathcal{L}$ *mreža. Preslikavanje* $\bar{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to L$ *kažemo da je* **rasplinuti podvarijetet** *od* $\mathcal{V}$ *ako svaki nivo od* $\bar{\mathcal{V}}$ *je (običan) podvarijetet od* $\mathcal{V}$ *.*

11. Rasplinuta jednakosna logika

Dalje nastavljamo sa prikazom jednakosne logike Pavelkinog tipa u rasplinutom okruženju, prema knjizi [**5**]. U rasplinutoj jednakosnoj logici formule su identiteti koji se interpretiraju u algebrama sa rasplinutim jednakostima (algebre sa rasplinutim jednakostima su semantičke strukture za rasplinutu jednakosnu logiku).

Definicija 2.46. *Neka je* (E, F, σ) *tip.* **Identitet tipa** F *nad* X *je izraz* $E(t, t')$*, gde je* $t, t' \in T(X)$ *(*$T(X)$ *je skup terma tipa* F *nad skupom promenljivih* X*).*

Predstavimo sada osnovne koncepte semantike rasplinute jednakosne logike.

Definicija 2.47. *Neka je* $\mathbf{M}$ L*-algebra tipa* F*,* $v : X \to M$ *valuacija i* t *term. Vrednost* $\| t \|_{M,v}$ *terma* t *u* M *pri valuaciji* v *definiše se na sledeći način:*

(i) *Ako je* t *promenljiva* x*, onda* $\| t \|_{M,v} = v(x)$

(ii) *Ako je* t *oblika* $f(t_1, ..., t_n)$*, onda*
$\| t \|_{M,v} = f_M(\| t_1 \|_{M,v}, ..., \| t_n \|_{M,v})$.

Sada možemo da definišemo stepen istinitosti identiteta.

Definicija 2.48. *Neka je* $\mathbf{M}$ *L-algebra tipa* F, $v : X \to M$ *valuacija i* $E(t,t')$ *identitet. Stepen istinitosti* $\| E(t,t') \|_{M,v}$ *identiteta* $E(t,t')$ *u* M *u odnosu na* v *definišemo na sledeći način*

$$\| E(t,t') \|_{M,v} = E_M(\| t \|_{M,v}, \| t' \|_{M,v})$$

Stepen istinitosti $\| E(t,t') \|_M$ *od* $\| E(t,t') \|$ *u* M *se definiše sa*

$$\| t \|_M = \bigwedge_{v:X\to M} \| E(t,t') \|_{M,v} \ .$$

Ako je $\mathcal{K}$ *klasa L-algebri tipa* F, *onda se stepen istinitosti na klasi* K *definiše kao:*

$$\| E(t,t') \|_K = \bigwedge_{M\in\mathcal{K}} \| E(t,t') \|_M$$

Podsetimo se da je apstraktna logika uređena petorka $\mathcal{A}L = (Fml, \mathcal{L}, S, A, \mathcal{R})$, gde je Fml skup formula, $\mathcal{L}$ je struktura stepena istinitosti, S je rasplinuta semantika za Fml, A je teorija logičkih aksioma i $\mathcal{R}$ skup pravila izvođenja.

Rasplinutu jednakosnu logiku definišemo kao posebnu apstraktnu logiku u kojoj u nastavku definišemo $Fml, \mathcal{L}, S, A$ i $\mathcal{R}$.

Za skup Fml formula uzimamo skup svih identiteta, tj.

$$Fml = \{E(t,t') \mid \quad t, t' \in T(X)\}$$

Za $\mathcal{L}$ uzimamo proizvoljnu kompletnu rezidualnu mrežu.

Za S uzimamo rasplinutu semantiku S za Fml definisanu sa:

$$S = \{V \in L^{Fml} \mid \text{za neku } L\text{–algebru } M\text{: } V(E(t,t')) = \| E(t,t') \|_M, E(t,t') \in Fml\}$$

Za A uzimamo prazan rasplinuti skup formula, tj. $A(E(t,t')) = 0$ za svaki identitet $E(t,t')$.

Za $\mathcal{R}$ uzimamo skup pravila izvođenja $(ERef) - (ESub)$ za Fml i $\mathcal{L}$, koja navodimo u nastavku.

$$
\begin{aligned}
(ERef) &: \quad \frac{}{(E(t,t),1)} \quad \text{(refleksivnost)}\\
(ESym) &: \quad \frac{(E(t,t'),a)}{(E(t',t),a)} \quad \text{(simetričnost)}\\
(ETra) &: \quad \frac{(E(t,t'),a),(E(t',t''),b)}{(E(t,t''),a\otimes b)} \quad \text{(tranzitivnost)}\\
(ERep) &: \quad \frac{(E(t,t'),a)}{(E(s',s),a)} \quad \text{(zamena)}\\
(ESub) &: \quad \frac{(E(t,t'),a)}{(E(t(x/r),t'(x/r)),a)} \quad \text{(substitucija)},
\end{aligned}
$$

gde $t, t', t'', r, s \in T(X);\ a, b \in L;\ x \in X;\ t$ je podterm terma s i s' je term dobijen od s zamenom jednog pojavljivanja t sa t'.

Tako je definisana posebna apstraktna logika. Međutim, cilj nam je da radimo sa L-algebrama umesto sa evaluacijama i sa klasama L-algebri umesto sa odgovarajućim skupovima evaluacija.

Između L-algebri i evaluacija iz S postoji sledeća veza. Svaka L-algebra M indukuje evaluaciju $V_M \in S$ na sledeći način

$$V_M(E(t,t')) = ||\ E(t,t')\ ||_M$$

za svaki identitet $E(t,t')$.

Za evaluaciju $V \in S$, međutim, može postojati više L-algebri M takvih da je $V = V_M$.

Upotrebljavajući ranije definisana preslikavanja Md i Th, možemo definisati preslikavanja Mod i Id na sledeći način.

$$
\begin{aligned}
Mod(\sum) &= \{M \mid V_M \in Md(\sum)\} \quad \text{i}\\
Id(\mathcal{K}) &= Th(\{V_M \mid M \in \mathcal{K}\})
\end{aligned}
$$

gde $\sum \in L^{Fml}$ je rasplinuta teorija i $\mathcal{K}$ je klasa L-algebri.

Sada možemo reći da je L-algebra M model za rasplinutu teoriju $\sum$ ako je $M \in Mod(\sum)$ (tj. ako je V_M model od $\sum$). Lako je videti da je M model od $\sum \in L^{Fml}$ akko

$$\sum E(t,t') \leq || E(t,t') ||_M$$

za svaki identitet $E(t,t') \in Fml$. Otuda je $Mod(\sum)$ klasa L-algebri i $Id(\mathcal{K})$ je rasplinuti skup identiteta nad X za koje imamo:

$$\begin{aligned} Mod(\sum) &= \{M \mid M \quad \text{je model od } \sum\} \\ (Id(\mathcal{K}))(E(t,t')) &= \bigwedge(|| E(t,t') ||_M \mid M \in \mathcal{K}) \end{aligned}$$

za svaki identitet $E(t,t')$.

Ako želimo da istaknemo skup promenljivih, pišemo $Id_X(\mathcal{K})$ umesto $Id(\mathcal{K})$. Takođe pišemo $Id(M)$ umesto $Id(\{M\})$.

Slično, kao u apstraktnoj rasplinutoj logici možemo definisati stepen $|| E(t,t') ||_{\sum}$ u kom $E(t,t')$ semantički sledi iz $\sum \in L^{Fml}$ na sledeći način

$$|| E(t,t') ||_{\sum} = (Id(Mod(\sum)))\ (E(t,t')).$$

Možemo uočiti da su svi koncepti rasplinute jednakosne logike jedinstveno određeni izborom tipa (E,F,σ) i kompletne rezidualne mreže $\mathcal{L}$. Sledeća definicija ukratko daje semantički koncept rasplinute jednakosne logike date sa (E,F,σ) i $\mathcal{L}$.

Definicija 2.49. **Rasplinuta teorija** *je rasplinuti skup* $\sum$ *identiteta, tj.* $\sum \in L^{Fml}$ *. L-algebra M je model teorije* $\sum$ *ako* $M \in Mod(\sum)$*. Stepen* $|| E(t,t') ||_{\sum}$ *u kome* $E(t,t')$ *semantički sledi iz teorije* $\sum$ *je definisan sa*

$$|| E(t,t') ||_{\sum} = (Id(Mod(\sum)))\ (E(t,t')).$$

Za klasu $\mathcal{K}$ *L-algebri, stepen istinitosti* $|| E(t,t') ||_{\mathcal{K}}$ *od* $E(t,t')$ *u* $\mathcal{K}$ *je definisan sa*

$$|| E(t,t') ||_{\mathcal{K}} = (Id(\mathcal{K}))\ (E(t,t')),$$

Prethodnu definiciju možemo modifikovati na sledeći način.

M je model od $\sum$ akko za svaki $E(t,t')$:

$$\sum(E(t,t')) \leqslant \|\, E(t,t') \,\|_M$$

$$\|\, E(t,t') \,\|_{\mathcal{K}} = \bigwedge_{M\in\mathcal{K}} \|\, E(t,t') \,\|_M = \bigwedge_{M\in\mathcal{K}} \bigwedge_{v:X\to M} \|\, E(t,t') \,\|_{M,v}$$

$$\|\, E(t,t') \,\|_{\sum} = \|\, E(t,t') \,\|_{Mod(\sum)} = \bigwedge_{M\in mod(\sum)} \|\, E(t,t') \,\|_M =$$

$$= \bigwedge_{M\in mod(\sum)} \bigwedge_{v:X\to M} \|\, E(t,t') \,\|_{M,v}$$

Navedeni koncepti su neposredna uopštenja običnih logičkih koncepata. Zapravo, M je model od $\sum$ ako je svaki identitet tačan u M najmanje u stepenu u kome on pripada $\sum$. Dalje, $\|\, E(t,t') \,\|_{\mathcal{K}}$ može biti shvaćeno kao stepen u kome je $E(t,t')$ istinito u svakoj L-algebri koja je model od $\sum$.

Definicija 2.50. *Za rasplinutu teoriju $\sum \in L^{Fml}$, $\mathfrak{M} = Mod(\sum)$ se zove* **jednakosna klasa** *od $\sum$. Za klasu $\mathcal{K}$ od L-algebri, $Id(\mathcal{K})$ se zove* **jednakosna teorija** *od $\mathcal{K}$. Klasa $\mathcal{K}$ L-algebri se zove jednakosna klasa ako je $\mathcal{K} = Mod(\sum)$ za neku teoriju $\sum$.*

Rasplinuti skup $\sum$ identiteta se zove jednakosna teorija ako $\sum = Id(\mathcal{K})$ za neku klasu $\mathcal{K}$ od L-algebri.

Dakle, jednakosna klasa teorije $\sum$ se sastoji od svih L-algebri koje su modeli od $\sum$. Teorija klase $\mathcal{K}$ L-algebri sadrži identitete od kojih je svaki sa stepenom pripadanja u kom je istinit u $\mathcal{K}$. Klasa L-algebri je jednakosna ako se može definisati pomoću rasplinutog skupa identiteta.

Ako je $\mathcal{K}$ klasa L-algebri istog tipa, onda u ovom kontekstu važi sledeća teorema, koja je analogna teoremi Birkofa za univerzalne algebre.

Teorema 2.11. *Klasa $\mathcal{K}$ L-algebri istog tipa je jednakosna klasa ako i samo ako je varijetet.*

* * *

Pored navedene definicije varijeteta L-algebri u nekim radovima (videti [**84**]) se uvodi pojam rasplinutog podvarijeteta na sledeći način.

Definicija 2.51. *Neka je* $\mathcal{V}$ *varijetet i* $\mathcal{L}$ *mreža. Preslikavanje* $\bar{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to L$ *kažemo da je* **rasplinuti podvarijetet** *od* $\mathcal{V}$ *ako je svaki nivo od* $\bar{\mathcal{V}}$ *(običan) podvarijetet od* $\mathcal{V}$ *.*

U ovom pristupu se kao kodomen koristi kompletna mreža. Karaktersan je samo varijetet, pokazane njegove osnovne osobine, ali nisu definisani identiteti niti jednakosna klasa, pa ni veza jednakosne klase i varijeteta.

GLAVA 3

Rasplinute ε-podgrupe

1. Uvod

U ovom poglavlju razmatramo poznati problem klasične algebre, problem particije polugrupe na familiju grupa u slučaju mrežno-vrednosnih (rasplinutih) struktura i u tom kontekstu uvodimo i ispitujemo dva tipa rasplinutih podgrupa i to rasplinute podgrupe rasplinute polugrupe i rasplinute podgrupe obične polugrupe. Kao glavni rezultat dokazujemo da rasplinuta polugrupa može biti predstavljena kao particija (uzimajući specijalan tip rasplinutih particija) familije rasplinutih ε-podgrupa ako i samo ako je rasplinuta kompletno regularna polugrupa. Otuda su rasplinute kompletno regularne polugrupe okarakterisane prvenstveno kao particija specijalnog tipa rasplinutih podgrupa (analogno kao u standardnom slučaju). Novouvedene rasplinute ε-podgrupe imaju značaj u daljim istraživanjima, u svim problemima gde se koriste podgrupe polugrupa. Rasplinute strukture koje u ovom poglavlju koristimo su mrežno-vrednosne, gde je ko-domen proizvoljna kompletna mreža. Taj pristup nam omogućava rezultate koji se analogni klasičnim rezultatima kad se posmatraju nivo skupovi rasplinutih skupova.

2. Rasplinuta podgrupa obične polugrupe

U klasičnoj algebri jedan od važnijih pojmova je pojam podgrupe polugrupe. U ovom delu uvodimo pojam specijalnog tipa rasplinute podgrupe polugrupe i dajemo karakterizaciju preko nivoa.

Definicija 3.1. *Neka je* $(S,\cdot)$ *polugrupa,* G *podgrupa polugrupe* S*,* L *kompletna mreža i* $\varepsilon \in L$*. Preslikavanje* $\mu : S \to L$ *je* **rasplinuta** (G,ε)**-podgrupa polugrupe** S*, ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(1) $(\forall x \in S)(\forall y \in S)\mu(x \cdot y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

(2) $(\forall x \in G)(\forall y \in S \setminus G)\mu(x) \geq \varepsilon \geq \mu(y)$

(3) $(\forall x \in G)\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

U ovoj definiciji ε je element mreže čija je uloga da bude granični parametar koji razdvaja vrednosti rasplinute podgrupe od ostalih vrednosti iz skupa koji je nosač polugrupe S.

Iz ove definicije lako se dolazi do sledećih posledica:

- *preslikavanje* μ *je rasplinut podgrupoid (otuda i rasplinuta podpolugrupa).*

  Ova posledica neposredno sledi iz uslova (1) u definiciji.

- $(\forall x \in G)$ $\mu(e) \geq \mu(x)$, *gde je* e *neutralni element od* G*.*

  Koristeći uslove (1) i (3) definicije ova posledica se dobija iz sledećeg niza jednakosti i nejednakosti:

  $\mu(e) = \mu(x \cdot x^{-1}) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(x^{-1}) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(x) = \mu(x)$.

- $(\forall x \in G)$ $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

  Kako je x inverzni element od x^{-1}, to je $\mu(x) \geqslant \mu(x^{-1})$, što zajedno sa uslovom (3) daje $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

Dakle, restrikcija rasplinute (G,ε)-podgrupe μ na G je rasplinuta podgrupa na $(G,\cdot)$.

Neposredno je jasno, da je rasplinuta podpolugrupa μ od $(S,\cdot)$ rasplinuta (G,ε)-podgrupa polugrupe S ako i samo ako je zadovoljen uslov (2) i restrikcija μ na G je obična rasplinuta podgrupa od $(G,\cdot)$.

Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov da rasplinuta podpolugrupa polugrupe S bude rasplinuta (G,ε)-podgrupa polugrupe u slučaju kada je L linearno uređena mreža.

Teorema 3.1. *Neka je $(S,\cdot)$ polugrupa, G podgrupa polugrupe S, L kompletna linearno uređena mreža i $\mu : S \to L$ rasplinuta podpolugrupa polugrupe S. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) *μ je rasplinuta (G,ε)-podgrupa polugrupe S.*

(2) *$G \subseteq \mu_\varepsilon$ i za bilo koje $t \in L,\ t > \varepsilon$ važi da je μ_t obična podgrupa od G*

Dokaz. Neka je $\mu : S \to L$ rasplinuta (G,ε)-podgrupa polugrupe S, i neka je t element iz L, takav da je $t > \varepsilon$. Jasno je da, $\mu_t \subseteq G$. Ako $x, y \in \mu_t$, prema definiciji nivoa je, $\mu(x) \geq t$ i $\mu(y) \geq t$, odakle $\mu(x\cdot y) \geq \mu(x)\wedge\mu(y) \geq t$. Dakle, $x \cdot y \in \mu_t$.

Ako je $x \in \mu_t$, onda je $\mu(x) \geq t > \varepsilon$. Kako je za $(\forall y \in S \setminus G)\mu(y) \leq \varepsilon$, to je $x \in G$. Pošto je $x^{-1} \in G$, imamo $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \geq t$, pa je $x^{-1} \in \mu_t$.

Dakle, μ_t je podgrupa grupe G.

Ako je $x \in G$, onda je $\mu(x) \geq \varepsilon$, pa je $x \in \mu_\varepsilon$. Dakle, $G \subseteq \mu_\varepsilon$.

Da bismo dokazali obrat, pretpostavimo da su svi nivoi μ_t za $\varepsilon < t$, podgrupe grupe G i $G \subseteq \mu_\varepsilon$.

Ako je $x \in G$, onda je $x \in \mu_\varepsilon$, pa je $\mu(x) \geq \varepsilon$. Neka je $y \in S \setminus G$ i $\mu(y) = t$. Ako bi bilo $t > \varepsilon$, onda bi bilo $y \in \mu_t$, gde je μ_t podgrupa grupe G. To bi značilo da je $y \in G$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $y \in S \setminus G$. Dakle, $\mu(y) \leq \varepsilon$, pošto je L linearno uređena mreža.

Tako dobijamo $(\forall x \in G)(\forall y \in S \setminus G)(\mu(x) \geq \varepsilon \geq \mu(y))$.

Na osnovu prethodnog je $\mu(x) \geq \varepsilon$ za sve $x \in G$. Uzmimo dalje da je $\mu(x) = t > \varepsilon$. Tada je $x \in \mu_t$. Kako je μ_t podgrupa grupe G, to je $x^{-1} \in \mu_t$, pa je $\mu(x^{-1}) \geq t = \mu(x)$. Uzmimo sada da je $\mu(x) = \varepsilon$. Kako je $x^{-1} \in G$ i $G \subseteq \mu_\varepsilon$, to je $x^{-1} \in \mu_\varepsilon$. Zato je $\mu(x^{-1}) \geq \varepsilon = \mu(x)$.

Dakle, $(\forall x \in G)\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$, pa je μ rasplinuta (G, ε)-podgrupa polugrupe S. $\square$

3. Rasplinuta podgrupa rasplinute podpolugrupe

U ovom delu uvodimo pojam rasplinute podgrupe rasplinute podpolugrupe. Ponovo polazimo od obične polugrupe. Obe rasplinute strukture su specijalni rasplinuti skupovi na nosaču polazne polugrupe.

Definicija 3.2. *Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa i G podgrupa polugrupe S. Neka je još L kompletna mreža, $\varepsilon \in L$ i $\mu : S \to L$, rasplinuta podpolugrupa polugrupe S. Kažemo da je $\mu_G : S \to L$* **rasplinuta** (G, ε)**-podgrupa rasplinute podpolugrupe** μ *ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(1) $(\forall x \in S)\mu_G(x) \leq \mu(x)$
(2) $(\forall x \in S)(\forall y \in S)\mu_G(x \cdot y) \geq \mu_G(x) \wedge \mu_G(y)$
(3) $(\forall x \in G)(\forall y \in S \setminus G)\mu_G(x) \geq \varepsilon \geq \mu_G(y)$
(4) $(\forall x \in G)\mu_G(x^{-1}) \geq \mu_G(x)$.

Ponekad (G, ε)-podgrupu zovemo jednostavno ε-podgrupa, kada je grupa G određena, ili radi pojednostavljenja, kada razmatramo familiju nekoliko ovakvih struktura na različitim grupama.

Iz definicije možemo zaključiti da su μ i μ_G dve rasplinute podpolugrupe polugrupe $(S, \cdot)$, tako da je $\mu_G \subseteq \mu$ u smislu inkluzije rasplinutih skupova, i da je μ_G rasplinuta (G, ε)-podgrupa polugrupe S.

U nastavku definišemo pojam rasplinute kompletno regularne podpolugrupe.

Definicija 3.3. *Neka je $(S,\cdot)$ polugrupa i L kompletna mreža . Kažemo da je rasplinuta podpolugrupa $\mu : S \to L$* **rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa** *polugrupe S, ako je ispunjen sledeći uslov:*

$$(1)\ (\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = a \cdot x \cdot a \ \ i \ \ a \cdot x = x \cdot a \ \ i \ \ \mu(x) \geq \mu(a)).$$

Iz ove definicije lako se zaključuje: da bi rasplinuta podpolugrupa bila kompletno regularna, polugrupa $(S,\cdot)$ mora biti kompletno regularna.

Definicija rasplinute kompletno regularne podpolugrupe može se naći u [**65**] za klasične rasplinute skupove. Pojam rasplinute kompletno regularne podpolugrupe takođe se prenosi na nivo polugrupe, što je pokazano u Tvrđenju 3.7.4 iz [**65**] za rasplinute skupove čiji je kodomen interval $[0,1]$, a u narednom tvrđenju analogni rezultat pokazujemo u slučaju kada je kodomen proizvoljna kompletna mreža.

Tvrdjenje 3.1. *Neka je $(S,\cdot)$ polugrupa i $\mu : S \to L$ rasplinuta podpolugrupa od S. Tada je μ rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa od S ako i samo ako je za sve $p \in L$, μ_p kompletno regularna podpolugrupa od S ako je $\mu_p \neq \emptyset$.* □

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je μ rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa od S i $p \in L$. Ako je $a \in \mu_p$, onda postoji $x \in S$ tako da je $a = a \cdot x \cdot a$, $a \cdot x = x \cdot a$ i $\mu(x) \geq \mu(a)$. Kako je $\mu(x) \geqslant \mu(a)$ i $\mu(a) \geqslant p$, to je $x \in \mu_p$. Dakle, svaki nivo je kompletno regularna polugrupa.

Pretpostavimo sada da je svaki nivo kompletno regularna polugrupa. Kako je mreža kompletna, ona ima najmanji element 0. Jasno da je $\mu_0 = S$. Dakle, polugrupa S je kompletno regularna. Neka je a proizvoljan element polugrupe S i neka je $\mu(a) = p$. Nivo μ_p je kompletno regularna polugrupa, pa postoji $x \in \mu_p$, tako da je $a = a \cdot x \cdot a$ i $a \cdot x = x \cdot a$. Pošto je $x \in \mu_p$, to je $\mu(x) \geqslant p = \mu(a)$, pa je μ rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa. □

U daljem radu nam je potreban pojam disjunktnih rasplinutih skupova u odnosu na neki dati rasplinut skup.

Definicija 3.4. *Neka je S skup, L kompletna mreža i neka su $\mu : S \to L$, $\mu_1 : S \to L$ i $\mu_2 : S \to L$ rasplinuti skupovi, takvi da $\mu_1 \subseteq \mu$ i $\mu_2 \subseteq \mu$. Rasplinuti skupovi μ_1 i μ_2 su* **disjunktni** *u odnosu na μ, ako za sve $x \in S$,*

$$\mu_1(x) \wedge \mu_2(x) \leq \bigwedge_{y \in S} \mu(y).$$

Sledeća definicija rasplinute polumreže ε-podgrupa je uvedena analogno odgovarajućem klasičnom pojmu.

Definicija 3.5. *Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa, L distributivna kompletna mreža i $\varepsilon \in L$. Rasplinuta podpolugrupa $\mu : S \to L$ je* **rasplinuta polumreža rasplinutih ε-podgrupa** *ako postoji familija ε-podgrupa rasplinute podpolugrupe μ, $\mathcal{F} = \{\mu_i \mid i \in I\}$, tako da familija odgovarajućih grupa $\{G_i \mid i \in I\}$ čini particiju od S, μ je unija familije $\mathcal{F}$, svaka dva rasplinuta skupa iz $\mathcal{F}$ su disjunktna u odnosu na μ i za sve μ_i i μ_j iz $\mathcal{F}$ postoji $\mu_k \in \mathcal{F}$, tako da $\mu_i \circ \mu_j \subseteq \mu_k$ i $\mu_j \circ \mu_i \subseteq \mu_k$.*

Sledeća teorema pokazuje da svaka rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa je rasplinuta polumreža rasplinutih ε-podgrupa.

Teorema 3.2. *Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa i L kompletna distributivna mreža. Ako je $\mu : S \to L$ rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa, onda postoji $\varepsilon \in L$ i familija rasplinutih ε-podgrupa od μ, $\mathcal{F} = \{\mu_i \mid i \in I\}$, tako da su ispunjeni sledeći uslovi.*

(1) *Ako je $i \neq j$, onda su rasplinute ε-podgrupe μ_i i μ_j disjunktne u odnosu na μ.*

(2) $\bigcup_{i \in I} \mu_i = \mu$

(3) $\mu_i \circ \mu_j \subseteq \mu$ *za sve* $i, j \in I$

(4) $\mu_i \circ \mu_i = \mu_i$ *za sve* $i \in I$

(5) $(\forall i, j \in I)(\exists k \in I)(\mu_i \circ \mu_j \subseteq \mu_k \text{ i } \mu_j \circ \mu_i \subseteq \mu_k)$

Dokaz. Ako je $\mu : S \to L$ rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa, onda je polugrupa $(S, \cdot)$ kompletno regularna. Ako je polugrupa kompletno regularna, onda je S unija familije disjunktnih grupa $\{G_i \mid i \in I\}$, takvih da za sve $i, j \in I$ postoji $k \in I$ tako da $G_i \circ G_j \subseteq G_k$ i takođe $G_j \circ G_i \subseteq G_k$ [**22**].

Neka je $\mathcal{F} = \{\mu_i : S \to L \mid i \in I\}$ familija rasplinutih skupova definisanih na sledeći način: za $i \in I$,

$$\mu_i(z) = \begin{cases} \mu(z), & z \in G_i \\ \varepsilon, & z \notin G_i \end{cases}$$

gde je ε fiksiran element iz L, takav da $\varepsilon \leq \bigwedge\limits_{z \in S} \mu(z)$.

Jasno je da je $\mu_i \subseteq \mu$.

Sada ćemo dokazati da je za svako $i \in I$, μ_i rasplinuta (G_i, ε)-podgrupa od μ. Prvo pokazujemo da važi:

$$\mu_i(x \cdot y) \geq \mu_i(x) \wedge \mu_i(y),\ i \in I.$$

Razlikujemo dva slučaja.

(1) Ako $x \cdot y \in G_i$, onda

$$\mu_i(x \cdot y) = \mu(x \cdot y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq \mu_i(x) \wedge \mu_i(y)$$

(2) Neka je $x \cdot y \notin G_i$. Tada $x \notin G_i$ ili $y \notin G_i$, i tako $\mu_i(x) = \varepsilon$ ili $\mu_i(y) = \varepsilon$. Dakle,

$$\mu_i(x \cdot y) = \varepsilon = \mu_i(x) \wedge \mu_i(y).$$

Dokazaćemo da

$$(\forall x \in G_i)(\forall y \in S \setminus G_i)\ \mu_i(x) \geq \varepsilon \geq \mu_i(y).$$

Kako je $x \in G_i$, po definiciji μ_i imamo $\mu_i(x) = \mu(x)$. Po istoj definiciji je $\varepsilon = \mu_i(y)$, jer $y \notin G_i$. Pošto je $\varepsilon \leq \bigwedge\limits_{z \in S} \mu(z)$, mora biti $\mu(x) \geq \varepsilon$. Dakle,

$$\mu_i(x) = \mu(x) \geq \varepsilon = \mu_i(y)$$

U nastavku dokazujemo da za svako $x \in G_i$ i njegov inverzni element x^{-1}, $\mu_i(x^{-1}) \geq \mu_i(x)$. Sa e_i označimo neutralni element grupe G_i.

Kako je μ kompletno regularna rasplinuta polugrupa, imamo da

$$(\forall x \in S)(\exists y \in S)(x = x \cdot y \cdot x \ \text{ i } \ x \cdot y = y \cdot x \ \text{ i } \ \mu(y) \geq \mu(x)).$$

Neka je y proizvoljan element iz S, koji zadovoljava $x = x \cdot y \cdot x$, $x \cdot y = y \cdot x$ i $\mu(y) \geq \mu(x)$. Neka je $y \in G_j$.

Iz $x = x \cdot y \cdot x$ i $x \cdot y = y \cdot x$ imamo da je $x = x \cdot x \cdot y$. Pošto je $x \cdot x \in G_i$ i $(x \cdot x) \cdot y \in G_i$, i familija $\{G_i \mid i \in I\}$ čini particiju od S, onda $G_i \circ G_j \subseteq G_i$. Otuda, $x \cdot y \in G_i$ i $x \cdot y = e_i$.

Dakle, $y \cdot x \cdot y \in G_i$ i $y \cdot x \cdot y$ je inverzni element od x u G_i. Zaista, $x \cdot y \cdot x \cdot y = x \cdot y = e_i$ i $y \cdot x \cdot y \cdot x = y \cdot x = e_i$. Inverzni element u grupi je jedinstven, dakle $x^{-1} = y \cdot x \cdot y$.

Tako, $\mu_i(x^{-1}) = \mu(x^{-1}) = \mu(y \cdot x \cdot y) \geq \mu(y) \wedge \mu(x) \wedge \mu(y) \geq \mu(x) = \mu_i(x)$ (pošto $\mu(y) \geq \mu(x)$).

Otuda, je μ_i rasplinuta (G_i, ε)-podgrupa rasplinute kompletno regularne podpolugrupe μ.

U nastavku dokazujemo tvrđenja (1)-(5).

(1) Dokazaćemo da su rasplinute ε-grupe μ_i i μ_j za $i \neq j$ disjunktne u odnosu na μ. Kako su grupe G_i i G_j disjunktne, neki element $x \in S$ ne može pripadati obema grupama G_i i G_j, otuda $\mu_i(x) = \varepsilon$ ili $\mu_j(x) = \varepsilon$. Dakle, $\mu_i(x) \wedge \mu_j(x) = \varepsilon$, i tako su rasplinute ε-grupe μ_i i μ_j disjunktne u odnosu na μ.

(2) Sada dokazujemo da

$$\mu = \bigcup_{i \in I} \mu_i.$$

Neka je $z \in S$. Onda, $z \in G_j$ za neko $j \in I$. Nadalje, imamo

$$\Big(\bigcup_{i \in I} \mu_i\Big)(z) = \bigvee_{i \in I} \mu_i(z) = \mu_j(z) \vee \bigvee_{i \in I \setminus \{j\}} \mu_i(z) = \mu(z) \vee \bigvee \varepsilon = \mu(z).$$

(3) Neka je $x \in S$,

$$\begin{aligned}(\mu_i \circ \mu_j)(x) &= \bigvee_{x=p\cdot q} (\mu_i(p) \wedge \mu_j(q)) \\ &\leq \bigvee_{x=p\cdot q} (\mu(p) \wedge \mu(q)) \\ &\leq \bigvee_{x=p\cdot q} \mu(p \cdot q) \\ &= \bigvee_{x=p\cdot q} \mu(x) \\ &= \mu(x)\end{aligned}$$

U gornjem dokazu koristili smo činjenicu da za svako x uvek postoji takav par $p, q \in S$ tako da je $x = p \cdot q$. Zaista, pošto je S kompletno regularna polugrupa, ona je jednaka uniji grupa. Otuda, za sve x postoji grupa G_i, takva da $x \in G_i$, i $x = x \cdot e_i$, gde je e_i neutralni element od G_i.

(4) Prvo dokazujemo da je $\mu_i \circ \mu_i \subseteq \mu_i$.

$$(\mu_i \circ \mu_i)(x) = \bigvee_{x=p\cdot q} (\mu_i(p) \wedge \mu_i(q)) \leq \bigvee_{x=p\cdot q} (\mu_i(p \cdot q)) = \bigvee_{x=p\cdot q} \mu_i(x) = \mu_i(x).$$

Zatim dokazujemo da je $\mu_i \circ \mu_i \supseteq \mu_i$.

Ako $x \in G_i$, onda imamo

$$(\mu_i \circ \mu_i)(x) = \bigvee_{x=p\cdot q} (\mu_i(p) \wedge \mu_i(q)) \geq \mu_i(x) \wedge \mu_i(e_i) = \mu_i(x),$$

gde je e_i neutralni element od G_i.

Ako $x \notin G_i$, onda imamo

$$(\mu_i \circ \mu_i)(x) = \bigvee_{x=p\cdot q} (\mu_i(p) \wedge \mu_i(q)) \geq \mu_i(x) \wedge \mu_i(e_k) = \varepsilon \wedge \varepsilon = \varepsilon = \mu_i(x),$$

gde je e_k neutralni element grupe G_k kojoj pripada x.

Dakle, $\mu_i \circ \mu_i = \mu_i$.

(5) U nastavku dokazujemo da

$$(\forall i, j \in I)(\exists k \in I)(\mu_i \circ \mu_j \subseteq \mu_k \text{ i } \mu_j \circ \mu_i \subseteq \mu_k).$$

$\mu_i(x) \leq \mu(x)$ sledi direktno iz definicije od $\mu_i(x)$. Neka su μ_i i μ_j proizvoljne rasplinute ε-podgrupe, koje odgovaraju grupama G_i i G_j, redom. Onda, postoji grupa G_k, takva da je $G_i \circ G_j \subseteq G_k$ i $G_j \circ G_i \subseteq G_k$.

Za $x \in G_k$, imamo da

$$\begin{aligned}
(\mu_i \circ \mu_j)(x) &= \bigvee_{x=p\cdot q} (\mu_i(p) \wedge \mu_j(q)) \\
&\leq \bigvee_{x=p\cdot q} (\mu(p) \wedge \mu(q)) \\
&\leq \bigvee_{x=p\cdot q} \mu(p \cdot q) \\
&= \bigvee_{x=p\cdot q} \mu(x) \\
&= \mu(x) \\
&= \mu_k(x),
\end{aligned}$$

i u ovom slučaju, $(\mu_i \circ \mu_j)(x) \leq \mu_k(x)$.

Ako $x \notin G_k$, onda ne postoje $p \in G_i$ i $q \in G_j$ takvi da $x = p \cdot q$.

$$\begin{aligned}
(\mu_i \circ \mu_j)(x) &= \bigvee_{x=p\cdot q} (\mu_i(p) \wedge \mu_j(q)) \\
&= \bigvee_{x=p\cdot q} \varepsilon \\
&= \varepsilon \\
&= \mu_k(x),
\end{aligned}$$

jer je $\mu_i(p) = \varepsilon$ ili $\mu_j(q) = \varepsilon$.

Dakle, u svim slučajevima $(\mu_i \circ \mu_j)(x) \leq \mu_k(x)$, t.j., $\mu_i \circ \mu_j \subseteq \mu_k$.

Slično, imamo $\mu_j \circ \mu_i \subseteq \mu_k$.

□

Sledi formulacija i dokaz najvažnije teoreme u ovom delu. Pokazano je da je rasplinuta podpolugrupa kompletno regularna ako i samo ako je ona rasplinuta polumreža rasplinutih ε-podgrupa. Ova teorema je potpuno analogna klasičnoj poznatoj teoremi iz teorije semigrupa.

TEOREMA 3.3. *Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa i L kompletna mreža. Sledeći uslovi su ekvivalentni za rasplinutu podpolugrupu $\mu : S \to L$:*

(1) *$\mu : S \to L$ je rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa od $(S, \cdot)$.*
(2) *$\mu : S \to L$ je rasplinuta polumreža rasplinutih ε-podgrupa, za neko $\varepsilon \in L$.*

DOKAZ. Neka je $\mu : S \to L$ rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa od $(S, \cdot)$. Prema teoremi 3.2, postoji $\varepsilon \in L$ tako da je $\mu : S \to L$ rasplinuta polumreža rasplinutih ε-podgrupa.

Da bismo dokazali obrat, pretpostavimo da je $\mu : S \to L$ rasplinuta polumreža rasplinutih ε-podgrupa. Onda, postoji $\varepsilon \in L$ i familija rasplinutih ε-podgrupa $\mathcal{F} = \{\mu_i \mid i \in I\}$, tako da je μ unija familije $\mathcal{F}$, svaka dva rasplinuta skupa iz $\mathcal{F}$ su disjunktna u odnosu na μ i za sve μ_i i μ_j iz $\mathcal{F}$ postoji $\mu_k \in \mathcal{F}$, tako da je $\mu_i \circ \mu_j \subseteq \mu_k$ i $\mu_j \circ \mu_i \subseteq \mu_k$.

Prema definiciji rasplinutih ε-podgrupa rasplinute podpolugrupe, za sve $i \in I$ postoje G_i, podgrupe od S, koje čine particiju od S, tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) $(\forall x \in S)(\forall y \in S)\mu_i(x \cdot y) \geq \mu_i(x) \wedge \mu_i(y)$
(2) $(\forall x \in G_i)(\forall y \in S \setminus G_i)\mu_i(x) \geq \varepsilon \geq \mu_i(y)$
(3) $(\forall x \in G_i)\mu_i(x^{-1}) \geq \mu_i(x)$.

Treba samo da dokažemo da $(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = a \cdot x \cdot a \text{ i } a \cdot x = x \cdot a \text{ i } \mu(x) \geq \mu(a))$. Neka je $a \in S$. Onda, $a \in G_j$ za neko $j \in I$ i postoji $x = a^{-1} \in G_j$ tako da $a = a \cdot x \cdot a, a \cdot x = x \cdot a$ i $\mu_j(x) \geq \mu_j(a)$.

Dalje, imamo

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= (\bigvee_{i\in I}\mu_i)(x)\\
&= \mu_j(x)\vee\bigvee_{i\in I\setminus\{j\}}\mu_i(x)\\
&\geq \mu_j(a)=\mu_j(a)\vee\bigvee_{i\in I\setminus\{j\}}\mu_i(a)\\
&= \bigvee_{i\in I}\mu_i(a)\\
&= \mu(a),
\end{aligned}$$

jer je $\bigvee_{i\in I\setminus\{j\}}\mu_i(x)\leq\varepsilon$, $\bigvee_{i\in I\setminus\{j\}}\mu_i(a)\leq\varepsilon$ i $\mu_j(a)\geq\varepsilon$.

Dakle, $\mu : S\to L$ je rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa. □

POSLEDICA 3.1. *Neka je $(S,\cdot)$ polugrupa i L kompletna distributivna mreža. Ako je $\mu : S\to L$ rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa, onda postoji $\varepsilon\in L$ i familija rasplinutih ε-podgrupa od μ, $\mathcal{F}=\{\mu_i \mid i\in I\}$, koja je polumreža u odnosu na operaciju $*$ definisanu sa: $\mu_i*\mu_j:=\mu_k$, gde je k određeno grupom G_k, tako da $G_i\circ G_j=G_k$.*

DOKAZ. Familija $\mathcal{F}=\{\mu_i \mid i\in I\}$ je familija koja ispunjava uslove Teoreme 3.2. Operacija $*$ je dobro definisana, pošto je $\circ$ dobro definisana operacija na familiji grupa koje čine particiju polugrupe, i μ_k je jedinstveno određena sa G_k. Lako je proveriti da je $*$ idempotentna, komutativna i asocijativna operacija. □

POSLEDICA 3.2. *Ako je $(S,\cdot)$ polugrupa, L kompletna distributivna mreža i $\mu : S\to L$ rasplinuta kompletno regularna podpolugrupa, tada je odgovarajuća (prema Teoremi 3.2) familija $\mathcal{F}=\{\mu_i \mid i\in I\}$ $1-\varepsilon$-particija od μ.*

DOKAZ. Neka je $\varepsilon<p<1$. Kako je $\cup_{i\in I}\mu_i=\mu$, jednakost je tačna za sve p-nivoe dva rasplinuta skupa. Ako $i\neq j$, onda su rasplinute ε-podgrupe

μ_i i μ_j disjunktne u odnosu na μ. Po definiciji, ovo znači da je

$$\mu_i(x) \wedge \mu_j(x) \leq \varepsilon.$$

Sada je, $x \in (\mu_i \cap \mu_j)_p$ ako i samo ako $\mu_i(x) \wedge \mu_j(x) \geq p > \varepsilon$.
Dakle, $(\mu_i \cap \mu_j)_p = \emptyset$ □

Na kraju navodimo primer rasplinute podpolugrupe koja je rasplinuta polumreža rasplinutih ε-podgrupa koji ilustruje prethodne rezultate.

Primer 3.1. *Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa, gde je $S = \{f, d, g, e, a, b, c\}$ i $\cdot$ je definisana tabelom:*

$\cdot$	f	d	g	e	a	b	c
f	f	d	g	e	a	b	c
d	d	g	f	e	a	b	c
g	g	f	d	e	a	b	c
e	e	e	e	e	a	b	c
a	a	a	a	a	e	c	b
b	b	b	b	b	c	e	a
c	c	c	c	c	b	a	e

Tabela 3.1

Definišimo rasplinute skupove $\mu : S \to L$, $\mu_1 : S \to L$ i $\mu_2 : S \to L$, gde je S gore navedeni skup i mreža L je realni interval $[0, 1]$, na sledeći način:

$$\mu : \begin{pmatrix} f & d & g & e & a & b & c \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix},$$

$$\mu_1 : \begin{pmatrix} f & d & g & e & a & b & c \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

$$\mu_2 : \begin{pmatrix} f & d & g & e & a & b & c \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Tada su μ_1 i μ_2 rasplinute $\frac{1}{7}$-podgrupe rasplinute polugrupe μ. Odgovarajuće obične podgrupe od S su $G_1 = \{f, d, g\}$ i $G_2 = \{e, a, b, c\}$.

Lako je proveriti da su $\mu = \mu_1 \cup \mu_2$ i μ_1 i μ_2 disjunktne u odnosu na μ. Šta više, $\mu_1 \circ \mu_2 \subseteq \mu_2$, $\mu_2 \circ \mu_1 \subseteq \mu_2$, $\mu_1 \circ \mu_1 \subseteq \mu_1$ i $\mu_2 \circ \mu_2 \subseteq \mu_2$. Dakle, μ je rasplinuta polumreža rasplinutih $\frac{1}{7}$-podgrupa.

Po Teoremi 3.3 zaključujemo da je μ rasplinuta kompletno regularna polugrupa.

GLAVA 4

Kompatibilne rasplinute jednakosti i rasplinuti identiteti

U ovoj glavi razmatramo rasplinute relacije, posebno rasplinute jednakosti. Rasplinute jednakosti su definisane na rasplinutom podskupu sa ciljem da se uvedu i ispitaju rasplinuti identiteti. Kao i glava 3 i glava 6, ova glava sadrži originalne rezultate.

Umesto tačnosti relacije u klasičnoj algebri, uvodi se stepen tačnosti relacije na nekoj rasplinutoj podalgebri. Kako je rezidualna mreža uopštenje klasične logike, to je ona pogodna za oblast vrednosti rasplinutih relacija. Operaciju $\otimes$ možemo shvatiti kao uopštenje konjunkcije. Kao što je slučaj sa svakim uopštenjem i ovde se ne mogu dobiti uopštenja svih pojedinačnih rezultata o klasičnim relacijama. Neka uopštenja tih posebnih rezultata se mogu dobiti u slučaju ako je operacija $\otimes$ jednaka infimu, tj. u Heytingovoj algebri. Naravno, pretpostavlja se da su sve mreže kompletne. Tako u rezidualnoj mreži operacija $\otimes$ nije idempotentna, dok konjunkcija jeste, pa neki rezultati, u kojima je bitna idempotentnost konjunkcije, ne mogu biti uopšteni na rezidualnoj mreži, ali mogu na običnim kompletnim mrežama.

1. Rasplinute relacije

Neka je $(L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, 0, 1)$ kompletna rezidualna mreža.

Preslikavanje $\rho : A^2 \to L$ je rasplinuta relacija na A. Kao što je već istaknuto u glavi 2, rasplinuta relacija ρ on A koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna zove se **rasplinuta ekvivalencija** na A. Ako, uz to ρ ispunjava još i uslov

$$\rho(x, y) = 1 \text{ ako i samo ako } x = y, \tag{1}$$

onda se zove **rasplinuta jednakost** na A.

Za refleksivnu relaciju, uslov (1) je ekvivalentan sa:

$$\text{za sve } \ x, y \in A, \ \text{ iz } x \neq y, \ \text{ sledi } \ \rho(x, x) > \rho(x, y) \ \text{ i } \ \rho(x, x) > \rho(y, x).$$

Preciznije, važi sledeće tvrđenje.

TVRDJENJE 4.1. *Neka je ρ rasplinuta relacije ekvivalencije na skupu A. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni.*

(i) $\rho(x, y) = 1 \Longleftrightarrow x = y$

(ii) *Ako $x \neq y$, onda $\rho(x, x) > \rho(x, y)$ i $\rho(x, x) > \rho(y, x)$.*

DOKAZ. Neka važi uslov (i). Ako je $x \neq y$, onda je $\rho(x, y) < 1$ i $\rho(y, x) < 1$, jer bi u protivnom sledilo $x = y$. Kako je $\rho(x, x) = 1$, to je $\rho(x, x) > \rho(x, y)$ i $\rho(x, x) > \rho(y, x)$.

Uzmimo sada da važi uslov (ii). Ako je $x = y$, to je po definiciji rasplinute ekvivalencije, $\rho(x, y) = 1$.

Neka je, dalje, $\rho(x, y) = 1$. Ako bi bilo $x \neq y$, onda bi bilo $1 = \rho(x, x) > \rho(x, y) = 1$, što nije moguće. Dakle, $\rho(x, y) = 1 \Longleftrightarrow x = y$ □

Jasno je, ako (1) nije zadovoljeno, tj., ako ρ jeste rasplinuta ekvivalencija i nije obavezno rasplinuta jednakost, onda kao varijantu refleksivnosti možemo posmatrati i sledeći slabiji uslov.

$$\rho(x, x) \geqslant \rho(x, y) \ \text{ i } \ \rho(x, x) \geqslant \rho(y, x) \ \text{ za sve } \ x, y \in A.$$

Ako je ρ simetrična i tranzitivna rasplinuta relacija na skupu A i L kompletna rezidualna mreža u kojoj je operacija $\otimes$ idempotentna, onda imamo:

$$\begin{aligned}\rho(x,x) &\geqslant \rho(x,y)\otimes\rho(y,x)\\ &= \rho(x,y)\otimes\rho(x,y)\\ &= \rho(x,y)\\ &= \rho(y,x)\end{aligned}$$

Dakle, ako je operacija $\otimes$ idempotentna, onda je osobina

$$\rho(x,x)\geqslant\rho(x,y)\ \text{ i }\ \rho(x,x)\geqslant\rho(y,x)\ \text{ za sve }\ x,y\in A,$$

posledica simetričnosti i tranzitivnosti relacije ρ.

2. Rasplinute kompatibilne relacije i rasplinute podalgebre

Rasplinute relacije se mogu razmatrati ne samo na običnim skupovima (univerzumima), već takođe i na njihovim rasplinutim podskupovima.

U ovom poglavlju razmatramo rasplinute relacije na rasplinutim podalgebrama neke algebre $\mathcal{A}$. To je originalan pristup uveden u ovom radu.

Neka je A neprazan skup, L kompletna rezidualna mreža i $\mu : A\to L$ rasplinuti skup na A. Za rasplinutu relaciju $\rho : A^2\to L$ na A kažemo da je **rasplinuta relacija na** μ ako za sve $x,y\in A$

(2) $$\rho(x,y)\leqslant\mu(x)\otimes\mu(y).$$

Ovaj uslov je uopštenje sledeće osobine relacije R na skupu A:

R (posmatran kao skup uređenih parova) je binarna relacija i na podskupu M od A, ako xRy povlači $x,y\in M$.

Prema uslovu (2) nije pogodno definisati refleksivnost sa $\rho(x,x) = 1$, zato što u rezidualnoj mreži važi za sve x, y: $x \otimes y \leq x$. Dakle, za rasplinutu relaciju koja bi bila refleksivna na skupu A po klasičnoj definiciji, i istovremeno i rasplinuta relacija na μ, važilo bi $1 = \rho(x,x) \leq \mu(x) \otimes \mu(x) \leq \mu(x)$ za svako $x \in A$. Ovo bi moglo da važi samo za rasplinuti skup koji je jednak 1 za sve x.

Otuda, mi uvodimo potpuno novi koncept refleksivne relacije na rasplinutom skupu, bez restrikcije za rasplinuti skup μ; tj. na svakom rasplinutom skupu se mogu posmatrati refleksivne relacije, kao što sledi u nastavku.

Rasplinuta relacija ρ na rasplinutom skupu μ je **refleksivna** ako za sve $x, y \in A$,

$$\rho(x,x) = \mu(x). \tag{3}$$

U narednom tvrđenju pokazujemo da iz refleksivnosti relacije ρ na rasplinutom skupu μ, slede neke specijalne osobine tog rasplinutog skupa.

TVRDJENJE 4.2. *Ako je ρ refleksivna rasplinuta relacija na rasplinutom skupu μ na A, onda za sve $x, y \in A$,*

- *(i)* $\mu(x) \otimes \mu(x) = \mu(x)$;
- *(ii)* $\rho(x,x) \geqslant \rho(x,y)$ *i* $\rho(x,x) \geqslant \rho(y,x)$.

DOKAZ. (i) Prema (2), (3) je

$$\mu(x) = \rho(x,x) \leqslant \mu(x) \otimes \mu(x)$$

Kako je $a \otimes b \leqslant a$ za sve elemente rezidualne mreže, to je

$$\mu(x) \otimes \mu(x) \leqslant \mu(x)$$

Iz prethodnih nejednakosti dobijamo:

$$\mu(x) \otimes \mu(x) = \mu(x)$$

(ii) Koristeći (2), (3) i navedenu osobinu operacije $\otimes$ dobijamo:

$$\rho(x,y) \leqslant \mu(x) \otimes \mu(y) \leqslant \mu(x) = \rho(x,x)$$

$$\rho(y,x) \leqslant \mu(y) \otimes \mu(x) \leqslant \mu(x) = \rho(x,x).$$

□

PRIMEDBA. Iz prethodnog tvrđenja možemo da zaključimo da uslov $\mu(x) \otimes \mu(x) = \mu(x)$ za sve $x \in A$, važi za rasplinuti skup μ, ako postoji bilo kakva refleksivna rasplinuta relacija na njemu. Dakle, na skupu slika važi idempotentni zakon. □

PRIMEDBA. Kao što je već spomenuto, samo ako se μ poklapa sa karakterističnom funkcijom od A, tj. ima vrednost 1 na celom skupu A, onda je rasplinuta refleksivna relacija na μ refleksivna na A i u klasičnom smislu: $\rho(x,x) = 1$, za sve $x \in A$. □

Rasplinuta relacija ρ na μ je simetrična i tranzitivna ako zadovoljava odgovarajuće zakone kao i rasplinuta relacija na A.

Slično kao i kod rasplinutih relacija na običnom skupu, kažemo da je refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija ρ na rasplinutom skupu μ **rasplinuta ekvivalencija** na μ. U nastavku uvodimo definiciju rasplinute jednakosti, koja je motivisana Tvrđenjem 4.1.

Kažemo da je rasplinuta relacija ekvivalencije ρ na μ, za koju važi da je za sve $x, y \in A$:

$$\text{(4)} \qquad \text{iz } \; x \neq y \; \text{ i } \; \rho(x,x) \neq 0, \; \text{sledi } \rho(x,x) > \rho(x,y) \; \text{ i } \; \rho(x,x) > \rho(y,x),$$

rasplinuta relacija jednakosti na rasplinutom skupu μ.

Do sada poznate i proučavane rasplinute relacije jednakosti na skupu A i novouvedena definicija rasplinute relacije jednakosti na rasplinutom skupu μ se razlikuju u definiciji refleksivnosti, uslovu (2) i uslovu (4).

Kompatibilna rasplinuta ekvivalencija na μ je **rasplinuta kongruencija** na ovoj rasplinutoj podalgebri.

Označimo sa $\mathsf{fCon}\,\mu$ i $\mathsf{fEq}\,\mu$ kolekcije svih rasplinutih kongruencija i svih kompatibilnih rasplinutih jednakosti (redom) na rasplinutoj podalgebri μ algebre $\mathcal{A}$. U nastavku pretpostavljamo da su ove kolekcije neprazne. Jasno je da je $\mathsf{fEq}\,\mu$ pod-kolekcija od $\mathsf{fCon}\,\mu$, i da obe kolekcije mogu biti prirodno uređene preko uređenja $\leqslant$, preuzetog iz L, tj. ako $\rho_1, \rho_2 \in fCon\mu$ $(fEq\mu)$, onda je

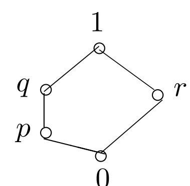
$$\rho_1 \leqslant \rho_2 \quad \text{akko} \quad (\forall x, y \in A)\rho_1(x,y) \leqslant \rho_2(x,y).$$

Navodimo primer kompatibilne rasplinute jednakosti.

Primer 4.1. *Neka su dati troelementni grupoid G i rasplinuta podalgebra μ u nastavku, i petoelementna mreža $\mathcal{L}$ na Slici 4.1.*

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	b	b	c

$$\mu : \begin{pmatrix} a & b & c \\ q & q & r \end{pmatrix}$$



Slika 4.1

Pokažimo da je na resplinutoj podalgebri μ moguće definisati samo dve kompatibilne rasplinute jednakosti. Kako je $E(x,x) = \mu(x)$, to je $E(a,a) = E(b,b) = q$ i $E(c,c) = r$. Za $x \neq y$ imamo da je $E(x,y) = E(y,x) < \mu(x)$ i $E(x,y) = E(y,x) < \mu(y)$. Zato je $E(x,c) = E(c,x) = 0$ ako je $x \neq c$. Imajući u vidu prethodne nejednakosti zaključujemo da je $E(a,b) = E(b,a) = p$ ili $E(a,b) = E(b,a) = 0$. Dakle jedini kandidati za kompatibilnu rasplinutu jednakost su

E_1	a	b	c
a	q	p	0
b	p	q	0
c	0	0	r

E_2	a	b	c
a	q	0	0
b	0	q	0
c	0	0	r

Neposrednom proverom se dobija da su za $i \in \{1,2\}$ ispunjeni sledeći uslovi:

(1) $E_i(x,y) \geqslant E_i(x,z) \wedge E_i(z,y)$

(2) $E_i(x,y) \leqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$

(3) $E_i(x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2) \geqslant E_i(x_1, y_1) \wedge E_i(x_2, y_2)$

za sve $x, y, z, x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$.

Dakle, E_1 *i* E_2 *su jedine kompatibilne rasplinute jednakosti na rasplinutoj podalgebri* μ.

Neposredno je jasno da je $E_2 \leqslant E_1$. *Kako je* $fEq\mu = \{E_1, E_2\}$, *to je* $(fEq\mu, \leqslant)$ *kompletna mreža.*

O uređenom skupu $(fEq\mu, \leqslant)$ preciznije govori sledeća teorema.

TEOREMA 4.1. *Poset* $(\mathsf{fCon}\mu, \leqslant)$ *je kompletna mreža, a poset* $(\mathsf{fEq}\mu, \leqslant)$ *je kompletna i-polumreža, polu-ideal od* $(\mathsf{fCon}\mu, \leqslant)$.

DOKAZ. Prvo pokazujemo da je poset $(\mathsf{fCon}\mu, \leqslant)$ kompletna mreža pokazujući da je on zatvoren za proizvoljne infimume i da sadrži najveći element.

Neka je $\{\rho_i \mid i \in I\}$ proizvoljan neprazan podskup od $\mathsf{fCon}\,\mu$ i neka

$$\underline{\rho}(x, y) := \bigwedge_{i \in I} \rho_i(x, y).$$

Dokazujemo da $\underline{\rho} \in \mathsf{fCon}\,\mu$. Zaista,

$$\underline{\rho}(x, y) = \bigwedge_{i \in I} \rho_i(x, y) \leqslant \bigwedge_{i \in I} (\mu(x) \otimes \mu(y)) = \mu(x) \otimes \mu(y),$$

što dokazuje da $\underline{\rho}$ zadovoljava (2), tj., da je to rasplinuta relacija na μ.

Sada pokazujemo da je $\underline{\rho}$ refleksivna, simetrična, tranzitivna i kompatibilna redom:

$$\begin{aligned}
&\underline{\rho}(x, x) = \bigwedge_{i \in I} \rho_i(x, x) = \bigwedge_{i \in I} \mu(x) = \mu(x);\\
&\underline{\rho}(x, y) = \bigwedge_{i \in I} \rho_i(x, y) = \bigwedge_{i \in I} \rho_i(y, x) = \underline{\rho}(y, x);\\
&\underline{\rho}(x, y) = \bigwedge_{i \in I} \rho_i(x, y) \geqslant \bigwedge_{i \in I} (\rho_i(x, z) \otimes \rho_i(z, y))\\
&\qquad \geqslant \Big(\bigwedge_{i \in I} (\rho_i(x, z)\Big) \otimes \Big(\bigwedge_{i \in I} \rho_i(z, y)\Big) = \underline{\rho}(x, z) \otimes \underline{\rho}(z, y);\\
&\underline{\rho}(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)) = \bigwedge_{i \in I} \rho_i(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n))\\
&\qquad \geqslant \bigwedge_{i \in I} \Big(\bigotimes_{j=1}^{n} \rho_i(x_j, y_j)\Big) \geqslant \bigotimes_{j=1}^{n} \Big(\bigwedge_{i \in I} \rho_i(x_j, y_j)\Big) = \bigotimes_{j=1}^{n} \underline{\rho}(x_j, y_j)
\end{aligned}$$

za sve $x, y, z, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in A$ i za svaku ne-nularnu operaciju $f \in F$.

Tako, $\underline{\rho} \in \mathsf{fCon}\,\mu$.

Sledeće što treba pokazati je da poset $(\mathsf{fCon}\,\mu, \leqslant)$ sadrži najveći element. Zaista, rasplinuta relacija $\rho^1 : A^2 \to L$, definisana sa

$$\rho^1(x, y) := \mu(x) \otimes \mu(y).$$

je rasplinuta kongruencija na μ, tj., pripada $(\mathsf{fCon}\,\mu, \leqslant)$:

- $\rho^1(x, x) = \mu(x) \otimes \mu(x) = \mu(x)$
- $\rho^1(x, y) = \mu(x) \otimes \mu(y) = \rho^1(y, x)$
- $\rho^1(x, y) = \mu(x) \otimes \mu(y) \geqslant (\mu(x) \otimes \mu(z)) \otimes (\mu(y) \otimes \mu(z))$
  $= \rho^1(x, z) \otimes \rho^1(z, y)$
- $\rho^1(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)) = \mu(f(x_1, ..., x_n)) \wedge \mu(f(y_1, ..., y_n))$
  $\geqslant \Big(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i)\Big) \wedge \Big(\bigotimes_{i=1}^{n} \mu(y_i)\Big) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n}(\mu(x_i) \wedge \mu(y_i)) = \bigotimes_{i=1}^{n} \rho^1(x_i, y_i)$
- $\rho^1(x, y) = \mu(x) \otimes \mu(y)$

Zaista, za svako $\rho \in \mathsf{fCon}\,\mu$, imamo da

$$\rho(x, y) \leqslant \mu(x) \otimes \mu(y) = \rho^1(x, y).$$

Primetimo da prema Tvrđenju 4.2 (i), $\rho^1(x, x) = \mu(x)$. Dakle, ρ^1 je najveći elemenat u posetu $(\mathsf{fCon}\,\mu, \leqslant)$, čime je završen dokaz da je to kompletna mreža.

Ostaje da dokažemo da je poset $(\mathsf{fEq}\,\mu, \leqslant)$ svih kompatibilnih rasplinutih jednakosti na μ i-polumreža, koja je i polu-ideal u $(\mathsf{fCon}\,\mu, \leqslant)$. Pošto je svaka kompatibilna rasplinuta jednakost i rasplinuta kongruencija na μ, jedini netrivijalni deo dokaza je da pokažemo da infimum proizvoljne neprazne kolekcije $\{E_i \mid i \in I\}$ kompatibilnih rasplinutih jednakosti na μ zadovoljava osobinu (4). Neka

$$\underline{E}(x, y) := \bigwedge_{i \in I} E_i(x, y).$$

Sada imamo

$$\underline{E}(x,x) = \bigwedge_{i\in I} E_i(x,x) = \mu(x) > \bigwedge_{i\in I} E_i(x,y) = \underline{E}(x,y),$$

i slično

$$\underline{E}(x,x) > \underline{E}(y,x).$$

Da bismo dokazali da je $(\mathsf{fEq}\,\mu, \leqslant)$ polu-ideal u $(\mathsf{fCon}\,\mu, \leqslant)$ ostaje još da dokažemo da je svaka rasplinuta kongruencija na μ koja je sadržana u proizvoljnoj kompatibilnoj rasplinutoj jednakosti na μ takođe kompatibilna rasplinuta jednakost na istoj rasplinutoj podalgebri:

Neka su ρ rasplinuta kongruencija i E kompatibilna rasplinuta jednakost na μ za koje važi uslov: $\rho \subseteq E$. Ako je $x \neq y$ i $\rho(x,x) \neq 0$, onda je

$$\rho(x,y) \leqslant E(x,y) < E(x,x) = \mu(x) = \rho(x,x)$$

□

Naredno tvrđenje opisuje najmanju rasplinutu relaciju na mreži $(\mathsf{fCon}\,\mu, \leqslant)$.

Tvrdjenje 4.3. *Najmanja rasplinuta kongruencija (kompatibilna rasplinuta jednakost) na rasplinutoj podalgebri μ algebre $\mathcal{A}$ je preslikavanje $E^0 : A^2 \to L$, dato sa*

$$E^0(x,y) := \begin{cases} \mu(x), & x = y \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Dokaz. Pošto smo pretpostavili da su $\mathsf{fCon}\,\mu$ i $\mathsf{fEq}\,\mu$ neprazni, iz Tvrđenja 4.2 sledi $\mu(x) = \mu(x) \otimes \mu(x)$ za sve $x \in A$.

Prvo pokazujemo da je E^0 rasplinuta relacija na rasplinutom skupu μ. $E^0(x,y) \leq \mu(x) \otimes \mu(y)$, sledi za $x = y$ iz $\mu(x) = \mu(x) \otimes \mu(x)$, a za $x \neq y$ iz $E^0(x,y) = 0 \leq \mu(x) \otimes \mu(y)$.

Dalje, pokazujemo refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost.

Za sve $x, y \in A$

- $E^0(x,x) = \mu(x)$ i

- $E^0(x,y) = E^0(y,x)$.

Neka su dalje x, y i z proizvoljni elementi skupa A. Ako je $x = y \neq z$, onda je $E^0(x,y) = \mu(x) \geqslant E^0(x,z) \otimes E^0(z,y) = 0$, što sledi iz osobine rezidualnih mreža $0 \otimes x = 0$ za svako $x \in L$. Ako je $x \neq y$, tada je svakako ili $x \neq z$ ili $y \neq z$, pa je opet $E^0(x,z) \otimes E^0(z,y) = 0$. Ako je $x = y = z$, tada je $E^0(x,y) = E^0(x,z) \otimes E^0(z,y)$, što sledi iz $\mu(x) = \mu(x) \otimes \mu(x)$ za sve $x \in A$.

Dakle, u svakom slučaju je $E^0(x,y) \geqslant E^0(x,z) \otimes E^0(z,y)$.

U nastavku pokazujemo da je E^0 rasplinuta jednakost.

Pretpostavimo da je $x \neq y$ i $E^0(x,x) \neq 0$. Iz $x \neq y$, sledi $E^0(x,y) = 0$. Kako je $x \neq y$, to je $E^0(x,y) = 0$ i $E^0(y,x) = 0$ pa je $E^0(x,y) < E^0(x,x)$ i $E^0(x,y) < E^0(y,y)$.

Na kraju pokazujemo kompatibilnost.

Uzmimo da je f proizvoljna operacija dužine n i $x_1, ..., x_n,\ y_1, ..., y_n \in A$. Ako je $x_i = y_i$ za sve $i = 1, ..., n$, onda je $E^0(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)) = \mu(f(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i) = \bigotimes_{i=1}^{n} E^0(x_i, x_i)$. U slučaju da je za neko $i,\ x_i \neq y_i$ imamo da je $\bigotimes_{i=1}^{n} E^0(x_i, y_i) = 0$, pa je i u ovom slučaju

$$E^0(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} E^0(x_i, y_i).$$

Dakle, E^0 je najmanja rasplinuta kongruencija (kompatibilna rasplinuta jednakost) na rasplinutoj podalgebri μ algebre $\mathcal{A}$.

$\square$

3. Rasplinute jednakosti i rasplinuti identiteti

U ovom radu se razvija nova teorija rasplinutih identiteta i rasplinutih algebri po analogiji na klasičan slučaj. Naime, mi koristimo rasplinutu jednakost umesto obične. U klasičnom slučaju, relacija jednakosti na podalgebri $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ je dijagonalna relacija na B. Jasno je da je to relacija kongruencije na $\mathcal{B}$ (to je takođe i posebna kongruencija na $\mathcal{A}$ koja se zove slaba kongruencija (videti knjigu [**89**])). U ovom radu, mi razvijamo analognu teoriju u okviru rasplinutih struktura. Naš glavni zadatak je da upotrebimo rasplinutu jednakost sa ciljem da uvedemo novi pojam rasplinutih identiteta, koji važe na rasplinutim podalgebrama, a ne važe obavezno na celoj algebri. U ovom delu takvi identiteti će biti proučavani.

Kao i do sada, razmatramo algebru $\mathcal{A} = (A, F)$ i kompletnu rezidualnu mrežu L. Neka je μ rasplinuta podalgebra od $\mathcal{A}$ i $E : A^2 \to L$ kompatibilna rasplinuta jednakost na μ. Prema definiciji, E je refleksivna u smislu $\rho(x, x) = \mu(x)$ za svako $x \in A$, simetrična, tranzitivna i kompatibilna sa operacijama i, kako je definisana na rasplinutom skupu μ, ona takođe zadovoljava osobinu

$$\rho(x, y) \leqslant \mu(x) \otimes \mu(y).$$

Ako su t_1, t_2 termi jezika od $\mathcal{A}$ i E fiksirana kompatibilna rasplinuta jednakost, tada izraz $E(t_1, t_2)$ nazivamo **rasplinuti identitet u odnosu na** E, ili (kraće) **rasplinuti identitet** . Uzmimo da su $x_1, \ldots, x_n$ promenljive koje se pojavljuju u termima t_1, t_2. Kažemo da rasplinuta podalgebra μ od $\mathcal{A}$ **zadovoljava** rasplinuti identitet $E(t_1, t_2)$ (ili da je rasplinuti identitet tačan na rasplinutoj podalgebri μ) ako za sve $x_1, \ldots, x_n \in A$

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i) \leqslant E(t_1, t_2). \tag{5}$$

Značenje formule (9) je uobičajeno: rasplinuta jednakost $E(t_1, t_2)$ je tačna na rasplinutoj podalgebri μ, ako za bilo koju zamenu promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ elementima iz A, nejednakost važi.

TVRDJENJE 4.4. *Neka je $\mu : A \to L$ rasplinuta podalgebra algebre $\mathcal{A}$ i $E : A^2 \to L$ kompatibilna rasplinuta jednakost na μ. Ako μ zadovoljava* *rasplinuti identitet $E(f,g)$, tada i μ takođe zadovoljava identitet $E_1(f,g)$, za svaku kompatibilnu rasplinutu jednakost E_1 na μ, za koju važi $E \leqslant E_1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da μ zadovoljava rasplinutu jednakost $E(f,g)$ i da su $x_1,\dots,x_n$ promenjljive koje se pojavljuju u f i g. Pošto $E_1 \geqslant E$ i $E(f,g) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i)$, prema pretpostavci, imamo takođe da $E_1(f,g) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i)$. Dakle, μ takođe zadovoljava identitet $E_1(f,g)$. □

Lema 4.1. *Neka je $\mu : A \to L$ rasplinuta podalgebra algebre $\mathcal{A}$, $\{E_i : A^2 \to L, i \in I\}$ familija rasplinutih jednakosti na μ i f i g termi na jeziku $\mathcal{A}$. Sada, ako μ zadovoljava identitet $E_i(f,g)$ za svako $i \in I$, onda μ takođe zadovoljava identitet $E(f,g)$, gde je $E = \bigwedge_{i\in I} E_i$, pri čemu se infimum posmatra po komponentama.*

Dokaz. Neka su $x_1,\dots,x_n$ promenljive koje se pojavljuju u f i g. Onda imamo sledeće:

$$E(f,g) = \bigwedge_{i\in I} E_i(f,g) \geqslant \bigwedge_{i\in I} \Big(\bigotimes_{j=1}^{n} \mu(x_j) \Big) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mu(x_j),$$

što dokazuje tvrđenje. □

Posledica 4.1. *Ako rasplinuta podalgebra μ od $\mathcal{A}$ zadovoljava identitet $E(f,g)$ za rasplinutu jednakost E, onda postoji najmanja rasplinuta jednakost na μ, označićemo je sa $E_{\mu(f,g)}$, takva da μ zadovoljava $E_{\mu(f,g)}(f,g)$.*

Dokaz. Neka je $\{E_i \mid i \in I\}$ familija svih rasplinutih jednakosti na μ, takvih da za svako $i \in I$, identitet $E_i(f,g)$ važi na μ. Ova familija nije prazna pošto po pretpostavci sadrži E. Prema Lemi 4.1, $E_{\mu(f,g)} = \bigwedge_{i\in I} E_i$. □

Ako algebru $\mathcal{A}$ posmatramo kao rasplinutu algebru (kada je poistovetimo sa njenom karakterističnom funkcijom), onda dobijamo sledeći specijalan slučaj Posledice 4.1.

Teorema 4.2. *Neka je L rezidualna mreža i $\mu : A \to L$ rasplinuta podalgebra algebre $\mathcal{A}$, tako da $\mu(x) \neq 0$ za svako $x \in A$ i skup $\{\mu(x) \mid x \in A\}$*

nema delitelja nule. Onda, $\mathcal{A}$ zadovoljava identitet $f = g$ ako i samo ako μ zadovoljava identitet $E(f, g)$ za svaku $E \in \mathsf{fEq}\,\mu$.

Dokaz. Prvo pretpostavimo da algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava identitet

$$f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n).$$

Ako $E \in \mathsf{fEq}\,\mu$, onda

$$E(f(x_1, ..., x_n), g(x_1, ..., x_n)) = \mu(f(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i),$$

i μ zadovoljava rasplinuti identitet $E(f, g)$.

Obrnuto, pretpostavimo da μ zadovoljava rasplinuti identitet $E(f, g)$ tj., da

$$E(f(x_1, ..., x_n), g(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i),$$

za sve $E \in \mathsf{fEq}\,\mu$. Gornja formula važi takođe i za minimalnu rasplinutu jednakost $E = E^0$ (Tvrđenje 4.3). Ako je $f(x_1, ..., x_n) \neq g(x_1, ..., x_n)$, onda $E(f(x_1, ..., x_n), g(x_1, ..., x_n)) = 0$. Dakle, $\bigotimes_{i=1}^{n} \mu(x_i) = 0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je skup $\{\mu(x) \mid x \in A\}$ bez delitelja nule, pošto je prema pretpostavci $\mu(x_i) \neq 0$ za sve $x_1, \ldots, x_n$. Posebno, za $n = 1$ imamo $\mu(x_1) = 0$, što je opet u kontradikciji sa pretpostavkom $\mu(x_1) \neq 0$.

Otuda, $f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n)$. □

Sledi detaljniji prikaz veze rasplinutih i običnih identiteta u slučaju rasplinutih jednakosti i nivo podalgebri. U tom cilju pretpostavimo da je L specijalna rezidualna mreža u kojoj se operacija $\otimes$ poklapa sa mrežnim infimumom $\wedge$ (Heytingova algebra). U takvom slučaju, svaki nivo skup rasplinutih podalgebri μ je obična podalgebra od $\mathcal{A}$, i svaka nivo relacija od E je kongruencija na odgovarajućoj običnoj nivo-podalgebri. Ovo je dobro poznata osobina nivoa, kao što je već spomenuto u glavi 2 (videti i npr., [**55, 78**]).

TEOREMA 4.3. *Neka je μ rasplinuta podalgebra algebre $\mathcal{A}$ takva da $\mu(x) > 0$ za svako $x \in A$ i neka je L rezidualna mreža u kojoj se $\otimes$ poklapa sa $\wedge$. Neka su, takođe f i g termi jezika algebre $\mathcal{A}$. Onda važi sledeće.*

Nivo podalgebra μ_p od μ za $p \in L$ i $p \neq 0$ zadovoljava običan identitet $f = g$ ako i samo ako je nivo-relacija $(E_{\mu(f,g)})_p$ najmanje jednakosti $E_{\mu(f,g)}$ obična jednakost na μ_p.

DOKAZ. Pretpostavimo da podalgebra μ_p zadovoljava identitet $f = g$.

Dokazaćemo da se u ovom slučaju najmanja rasplinuta jednakost $E_{\mu(f,g)}$ poklapa sa E^0, definisanoj u Tvrđenju 4.3. Kako za $x_1, ..., x_n \in \mu_p$ imamo $f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n)$, takođe je tačno da

$$E^0(f(x_1, ..., x_n), g(x_1, ..., x_n)) = \mu(f(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu(x_i).$$

Neka je $x, y \in \mu_p$, $(x, y) \in E^0_p$ i $p \neq 0$. Prema definiciji nivoa je $E^0(x, y) \geqslant p > 0$, dakle $E^0(x, y) = \mu(x)$ i $x = y$. Tako je E^0_p obična (crisp) jednakost.

Da bismo pokazali drugi pravac pretpostavimo da je $(E_{\mu(f,g)})_p$ obična jednakost. Neka $x_1, ..., x_n \in \mu_p$. Tada

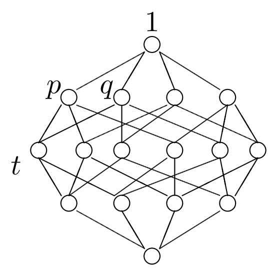
$$E_{\mu(f,g)}(f(x_1, ..., x_n), g(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu(x_i) \geqslant p,$$

dakle, $(f, g) \in (E_{\mu(f,g)})_p$. Kako je $(E_{\mu(f,g)})_p$ obična jednakost, konačno imamo $f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n)$. □

PRIMEDBA. Poslednja dva tvrđenja (Teoreme 4.2 i 4.3) možemo protumačiti i na sledeći način: Za rasplinutu podalgebru μ algebre A, minimalna rasplinuta jednakost $E_{\mu(f,g)}$ izražava "rasplinutost" jednakosti $f = g$ na μ. Što je ona manja, to smo bliže odgovarajućem običnom identitetu. □

PRIMER 4.2. *Neka je G četvoroelementni grupoid dat tabelom u nastavku i neka je L 16-elementna rezidualna (Bulova) mreža (Slika 4.2), u kojoj se, kao što je poznato, operacija $\otimes$ poklapa sa infimumom.*

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	b	c	c
b	b	a	d	d
c	c	c	d	d
d	d	d	d	c



Slika 4.2

Neka je $\mu : G \to L$ rasplinuti podgrupoid od G, definisan sa:

$$\mu(x) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ p & p & q & q \end{pmatrix}.$$

Ovo je rasplinuti podgrupoid jer su nivo grupoidi obični podgrupoidi grupoida G : $\mu_p = \{a, b\}$, $\mu_q = \{c, d\}$, $\mu_1 = \emptyset$, $\mu_t = \{a, b, c, d\}$, a ostali su jednaki nekom od već navedenih.

Razmatramo komutativan zakon $x \cdot y = y \cdot x$, koji očigledno ne važi na grupoidu G, jer je npr. $d = b \cdot c \neq c \cdot b = c$. Međutim, μ zadovoljava rasplinuti identitet $E(x \cdot y, y \cdot x)$ komutativnosti za sve rasplinute jednakosti E na μ veće od minimalne E_m, koja je data tabelom u nastavku.

E_m	a	b	c	d
a	p	0	0	0
b	0	p	0	0
c	0	0	q	t
d	0	0	t	q

Ovaj jednostavan primer ilustruje Posledicu 4.1 i preko kontrapozicije takođe i Teoremu 4.2.

Proverom se utvrđuje da je E_m rasplinuta relacija jednakosti i da rasplinuta podalgebra μ zadovoljava identitet $E_m(x \cdot y, y \cdot x)$, tj. za sve $x, y \in G$ je $E_m(x \cdot y, y \cdot x) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$.

Neka je E proizvoljna rasplinuta relacija jednakosti za koju rasplinuta podalgebra μ, zadovoljava identitet:

$$E(x \cdot y, y \cdot x) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Specijalno, mora biti $E(c \cdot b, b \cdot c) \geqslant \mu(b) \wedge \mu(c)$, odakle je $E(c, d) = t \geqslant p \wedge q = t$. Dakle, E_m je najmanja rasplinuta relacija jednakosti za koju rasplinuta podalgebra μ zadovoljava posmatrani identitet, što ilustruje Posledicu 4.1.

Tvrđenje u Teoremi 4.2 možemo na ovom primeru, koristeći simbole, kraće zapisati na sledeći način:

$$(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x) \text{ akko } (\forall E \in fEq\mu)(\forall x)(\forall y)E(x \cdot y, y \cdot x) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)$$

Kontrapozicijom dobijamo sledeći oblik:

$$(\exists x)(\exists y)(x \cdot y \neq y \cdot x) \text{ akko } (\exists E \in fEq\mu)(\exists x)(\exists y)(\neg(E(x \cdot y, y \cdot x) \geqslant \mu(x) \wedge \mu(y)))$$

Kako je

$$E^0(x, y) = \begin{cases} \mu(x), & x = y \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

iz skupa $fEq\mu$, za $x = b, y = c$, imamo:

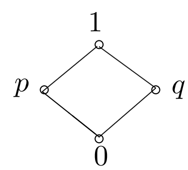
$$E^0(b \cdot c, c \cdot b) = E^0(d, c) = 0 < t = p \wedge q = \mu(b) \wedge \mu(c).$$

Iz tabele vidimo da je $b \cdot c = d \neq c = c \cdot b$.

Dakle, ovaj primer može poslužiti i kao ilustracija Teoreme 4.2.

Naredni primer ilustruje Teoremu 4.3.

Primer 4.3. *Neka je G troelementni grupoid dat tabelom u nastavku i neka je L 4-elementna mreža* (Slika 4.3).



Slika 4.3

$$\mu : \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & p & q \end{pmatrix}$$

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	b	b	c

Neposredno se proverava da rasplinuta podalgebra μ zadovoljava identitet $E^0(x \cdot y, y \cdot x)$, gde je E^0 rasplinuta relacija jednakosti, definisana na sledeći način:

$$E^0(x,y) = \begin{cases} \mu(x), & x = y \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

E^0 je minimalna rasplinuta relacija jednakosti takva da je na μ zadovoljen identitet $E(x \cdot y, y \cdot x)$.

Imamo da je $E_p = \{(a,a),(b,b)\}$ i $\mu_p = \{a,b\}$. Na nivo skupu μ_p važi identitet $x \cdot y = y \cdot x$, a nivo relacija $(E_{\mu(x \cdot y, y \cdot x)})_p$ najmanje jednakosti $E_{\mu(x \cdot y, y \cdot x)}$ je obična jednakost na μ_p, što ilustruje Teoremu 4.3.

U glavi 2 su izloženi rezultati R. Belohlavek-a i V. Vychodil-a o rasplinutim jednakostima. Rasplinuta jednakost je definisana na običnoj algebri. Naš pristup je opštiji u sledećem smislu. Mi definišemo rasplinutu jednakost na rasplinutoj podalgebri, umesto klasičnoj algebri. Znači koristimo oslabljenu refleksivnost: $E(x,x) = 1$ je zamenjeno sa $E(x,x) = \mu(x)$.

Pomenuti autori ne razmatraju rasplinute podalgebre date algebre, već rasplinute podalgebre definišu kao obične podalgebre sa rasplinutim jednakostima koje su restrikcija rasplinutih jednakosti na celoj algebri. Kada su u pitanju identiteti kod pomenutih autora se definiše stepen istinitosti identiteta, dok se u našem radu definiše kada neka rasplinuta podalgebra zadovoljava rasplinuti identitet.

4. Veza sa običnim algebrama

Rasplinute relacije na rasplinutoj podalgebri neke algebre su rasplinute relacije i na samoj algebri. U ovom delu analiziramo osobine rasplinutih relacija na običnim algebrama u tom kontekstu.

Krećemo od algebre $\mathcal{A} = (A, F)$ i rasplinute relacije na njoj, tj., preslikavanja iz A^2 na rezidualnu mrežu L.

Kažemo da je $\rho : A^2 \to L$ **slabo refleksivna** relacija na $\mathcal{A}$, ako važi

$$\rho(x,x) \geqslant \rho(x,y),\ \rho(x,x) \geqslant \rho(y,x) \tag{6}$$

$$\rho(c,c) = 1 \ \text{ za sve konstante } \ c \in F. \tag{7}$$

Rasplinuta relacija $\rho : A^2 \to L$ na algebri $\mathcal{A}$ koja je slabo refleksivna, simetrična i tranzitivna, zove se **slaba rasplinuta ekvivalencija** na $\mathcal{A}$. Ako, uz to, ρ takođe zadovoljava i (4) tj., uslov

$$\text{Za sve } \ x, y \in A,\ \rho(x,x) > \rho(x,y) \ \text{ i } \ \rho(x,x) > \rho(y,x),$$

onda, ρ je **slaba rasplinuta jednakost** na $\mathcal{A}$.

Poseban slučaj slabih rasplinutih ekvivalencija su rasplinute ekvivalencije (i jednakosti) koje zadovoljavaju klasičnu refleksivnost ($\rho(x,x) = 1$ za svako $x \in A$). U prisustvu slabe refleksivnosti (6)(7), uslov (1) je zamenjen slabijim, (4).

Primetimo takođe da je nula-relacija ($\rho(x,y) = 0$ za svako $x, y \in A$) slaba rasplinuta kongruencija na algebri bez konstanti. Zvaćemo je **trivijalna** slaba kongruencija na algebri bez konstanti.

Dalje, za slabe rasplinute ekvivalencije koje su i kompatibilne koristimo naziv **slabe rasplinute kongruencije** na $\mathcal{A}$. Podklasa slabih rasplinutih kongruencija su **kompatibilne slabe rasplinute jednakosti**.

Teorema 4.4. *Ako je $\rho : A^2 \to L$ netrivijalna slaba rasplinuta kongruencija na algebri $\mathcal{A}$, onda je preslikavanje $\mu_\rho : A \to L$, definisano sa*

$$\mu_\rho(x) := \rho(x,x) \tag{8}$$

rasplinuta podalgebra od $\mathcal{A}$.

Dokaz. Neka je f proizvoljna fundamentalna n-arna operacija na algebri $\mathcal{A}$ i neka su $x_1, ..., x_n$ elementi iz A. Onda imamo:

$$\begin{aligned} \mu_\rho(f(x_1,...,x_n)) &= \rho(f(x_1,...,x_n), f(x_1,...,x_n)) \\ &\geqslant \bigotimes_{i=1}^{n} \rho(x_i,x_i) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_\rho(x_i), \end{aligned}$$

a takođe je i $\rho(c,c) = 1$, pa je $\mu(c) = 1$ za svaku nularnu operaciju c, tako da je μ_ρ rasplinuta podalgebra od $\mathcal{A}$. □

Teorema 4.4 daje vezu između rasplinutih kongruencija na rasplinutim podalgebrama i slabih rasplinutih kongruencija na celoj algebri. U slučaju kada je kodomen specijalna rezidualna mreža u kojoj se $\otimes$ poklapa sa $\wedge$ (Heytingova algebra), ova dva pojma se poklapaju, kao što je pokazano u nastavku.

Teorema 4.5. *Neka je L rezidualna mrža u kojoj se $\otimes$ poklapa sa $\wedge$. Slaba rasplinuta kongruencija $\rho : A^2 \to L$ na algebri $\mathcal{A}$ je rasplinuta kongruencija na rasplinutoj podalgebri μ_ρ od $\mathcal{A}$.*

Obrnuto, rasplinuta kongruencija ρ na rasplinutoj podalgebri μ od $\mathcal{A}$ je slaba rasplinuta kongruencija na celoj algebri $\mathcal{A}$.

DOKAZ. Neka je $\rho : A^2 \to L$ slaba rasplinuta kongruencija na algebri $\mathcal{A}$ i μ_ρ rasplinuta podalgebra od $\mathcal{A}$, definisana sa $\mu_\rho(x) := \rho(x, x)$. Prema Tvrđenju (4.2), imamo $\rho(x, x) \geqslant \rho(x, y)$ i $\rho(y, y) \geqslant \rho(x, y)$ za sve $x, y \in A$. Odavde sledi $\rho(x, y) \leqslant \mu_\rho(x) \wedge \mu_\rho(y)$, pa je ρ rasplinuta kongruencija na μ_ρ.

Obrnuto, pretpostavimo da je ρ rasplinuta kongruencija na rasplinutoj podalgebri μ od $\mathcal{A}$. Onda imamo da $\rho(c, c) = \mu(c) = 1$, i (6) važi pošto je $\wedge$ idempotentno. Sledi da je ρ slaba rasplinuta kongruencija na $\mathcal{A}$. $\square$

GLAVA 5

Rasplinute algebre

1. Uvodne napomene

U prethodnim poglavljima je definisana kompatibilna rasplinuta jednakost na rasplinutoj podalgebri neke univerzalne algebre. Ispitane su osnovne osobine tako uvedenih rasplinutih jednakosti i njihova veza sa kompatibilnim rasplinutim jednakostima na celoj algebri. Takođe su razmatrani rasplinuti identiteti na rasplinutoj podalgebri univerzalne algebre u odnosu na rasplinutu jednakost na rasplinutoj podalgebri.

U prethodnim istraživanjima je korišćena kompletna rezidualna mreža. U ovom poglavlju će glavna struktura biti obična kompletna mreža. Naravno, bilo je moguće upotrebiti i kompletnu rezidualnu mrežu, ali u tom slučaju se ne bi došlo do nekih važnih specifičnih rezultata.

Jedan od bitnih faktora je da iz razloga što operacija $\otimes$ nije idempotentna, nivo μ_p nije u opštem slučaju klasična podalgebra algebre $\mathcal{A}$, dok u slučaju kompletne mreže, μ_p jeste podalgebra te algebre.

U prethodno objavljenim radovima iz ove oblasti su razmatrana pitanja koja dovode do uopštenja poznate Birkhoff-ove teoreme u klasičnoj algebri (u glavi 2 su ti rezultati detaljno prikazani). U njima je razmatrana je klasična algebra tako što je na njoj definisana kompatibilna rasplinuta jednakost. Pomenuta jednakost je definisana na nosaču algebre i njena jedina veza sa operacijama algebre je kompatibilnost. U tim istraživanjima se ne koristi pojam rasplinute podalgebre. Naš pristup se razlikuje od svih dosadašnjih, što je objašnjeno u nastavku.

U ovom poglavlju se, za dobijanje sličnih rezultata, koristi prethodno definisana kompatibilna rasplinuta jednakost na rasplinutoj podalgebri, a ne na običnoj (crisp) algebri, kao što je do sada bio slučaj. Dakle, objedinjeni su koncepti rasplinutih podalgebri i kompatibilnih rasplinutih jednakosti. Na ovaj način prethodne rezultate drugih autora možemo shvatiti kao specijalan slučaj rezultata u ovom poglavlju uzimajući da je rasplinuta podalgebra karakteristična funkcija.

U ovom poglavlju se uvodi pojam rasplinute algebre kao uopštenje pojma algebre. Takođe se definišu i drugi važni pojmovi kao što su pojam podalgebre rasplinute algebre, rasplinuti homomorfizam i direktni proizvod rasplinutih algebri.

Prvo uvodimo rasplinutu algebru kao rasplinutu podalgebru obične algebra zajedno sa kompatibilnom rasplinutom jednakošću na rasplinutoj podalgebri.

Definicija 5.1. *Neka je data algebra $\mathcal{A} = (A, F_A)$ tipa (F, σ) i kompletna mreža L. Neka je $\mu_A : A \to L$ rasplinuta podalgebra od $\mathcal{A}$ i $E_A : A^2 \to L$ kompatibilna rasplinuta relacija jednakosti na μ_A. Tada uređenu trojku $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$ zovemo* **rasplinuta algebra** *tipa (F, σ).*

Ako u prethodnoj definiciji uzmemo da je $\mu_A : A \to L$ karakteristična funkcija, dobijamo algebru sa rasplinutom jednakošću na običnoj algebri koja je poznata i izložena u knjizi [**2**]. Ako je uz to i E_A obična jednakost, dobijamo klasičnu algebru.

Iz definicije rasplinute algebre zaključujemo da su rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$ i $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}, \mu_B, E_B)$ iste samo ako je $\bar{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{B}}, \mu_A = \mu_B$ i $E_A = E_B$.

Definicija 5.2. **Identitet** *tipa F nad X je izraz $E(t_1, t_2)$, gde je $t_1, t_2 \in T(X)$ ($T(X)$ je skup terma tipa F nad skupom promenljivih X).*

Ponavljamo pojam koji je uveden u glavi 4 u kontekstu rezidualnih mreža.

Kažemo da rasplinuta podalgebra μ od $\mathcal{A}$ **zadovoljava** rasplinuti identitet $E(t_1, t_2)$ (ili da je rasplinuti identitet tačan na rasplinutoj podalgebri μ) ako za sve $x_1, \ldots, x_n \in A$

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \mu(x_i) \leqslant E(t_1, t_2). \tag{9}$$

Jednakosnu klasu rasplinutih algebri uvodimo sledećom definicijom.

DEFINICIJA 5.3. *Neka je data kompletna mreža L. Ako je dat skup rasplinutih identiteta Σ tipa (F, σ), onda sve rasplinute algebre istog tipa, u kojima su zadovoljeni svi rasplinuti identiteti iz Σ, čine* **jednakosnu klasu rasplinutih algebri**.

2. Rasplinuti grupoidi i polugrupe

Pre nego što detaljno predstavimo ostale rezultate ove glave, kao ilustraciju novouvedenih pojmova dajemo rasplinuti grupoid i rasplinutu polugrupu i ispitujemo neke njihove osobine.

DEFINICIJA 5.4. *Neka je $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ grupoid, $\mu : G \to L$ rasplinut podgrupoid od $\mathcal{G}$ i E rasplinuta jednakost na μ. Tada kažemo da je $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \mu, E)$* **rasplinuti grupoid**.

Rasplinuti grupoidi čine jednakosnu klasu nad praznim skupom identiteta.

Sledi definicija rasplinute polugrupe.

Definicija 5.5. *Neka je* $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ *grupoid,* $\mu : G \to L$ *rasplinut podgrupoid od* $\mathcal{G}$ *i* E *rasplinuta jednakost na* μ*. Kažemo da je* $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \mu, E)$ **rasplinuta polugrupa** *ako važi:*

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z) \leqslant E(x \cdot (y \cdot z), (x \cdot y) \cdot z)).$$

U nastavku se dokazuju svojstva rasplinutih polugrupa, analogna svojstvima klasičnih polugrupa.

Lema 5.1. *Neka je* $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ *grupoid,* $\mu : G \to L$ *rasplinut podgrupoid od* $\mathcal{G}$ *i* E *rasplinuta jednakost na* μ*. Ako je* $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \mu, E)$ *rasplinuta polugrupa i* $a_i \in G \quad (i = 1, 2, ..., n)$*, onda je*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \mu(a_i) \leqslant E((a_1 \cdot ... \cdot a_m) \cdot (a_{m+1} \cdot ... \cdot a_n), a_1 \cdot ... \cdot a_n),$$

za svako $m < n$*, gde je*

$$a_1 \cdot ... \cdot a_n := \begin{cases} a_1, & n = 1 \\ (a_1 \cdot ... \cdot a_{n-1}) \cdot a_n, & n > 1 \end{cases}$$

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po n. Za $n = 2$ imamo

$$E(a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot a_2) = \mu(a_1 \cdot a_2) \geqslant \mu(a_1) \wedge \mu(a_2)$$

Pretpostavimo tačnost za n, tj.

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \mu(a_i) \leqslant E((a_1 \cdot ... \cdot a_m) \cdot (a_{m+1} \cdot ... \cdot a_n), a_1 \cdot ... \cdot a_n),$$

pa dokažimo za $n + 1$:

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \mu(a_i) \leqslant E((a_1 \cdot ... \cdot a_m) \cdot (a_{m+1} \cdot ... \cdot a_{n+1}), a_1 \cdot ... \cdot a_{n+1}),$$

Stavimo da je $a_1 \cdot a_2 = a'_1, a_3 = a'_2, ..., a_{n+1} = a'_n$. Tada imamo

$$
\begin{aligned}
& E((a_1 \cdot ... \cdot a_m) \cdot (a_{m+1} \cdot ... \cdot a_{n+1}), a_1 \cdot ... \cdot a_{n+1}) \\
= \; & E((a'_1 \cdot ... \cdot a'_{m-1}) \cdot (a'_m \cdot ... \cdot a'_n), a'_1 \cdot ... \cdot a'_n) \\
\geqslant \; & \bigwedge_{i=1}^{n} \mu(a'_i) \\
= \; & \mu(a_1 \cdot a_2) \wedge \Big(\bigwedge_{i=3}^{n+1} \mu(a_i) \Big) \\
\geqslant \; & \bigwedge_{i=1}^{n+1} \mu(a_i).
\end{aligned}
$$

Dakle, tvrđenje je tačno za svaki $n \in N$.

□

Teorema 5.1. *Neka je $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ grupoid, $\mu : G \to L$ rasplinut podgrupoid od $\mathcal{G}$ i E rasplinuta jednakost na μ. Neka je $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \mu, E)$ rasplinuta polugrupa , $a_i \in G \quad (i = 1, 2, ..., n)$ i neka je $t(x_1, ..., x_n)$ term u jeziku grupoida $\mathcal{G}$. Tada je*

$$\mu(a_1) \wedge ... \wedge \mu(a_n) \leqslant E(t(a_1, ..., a_n), a_1 \cdot ... \cdot a_n).$$

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po n. Za $n = 1$ je $t(a_1) = a_1 = a_1 \cdot ... \cdot a_n$, pa je u ovom slučaju

$$E(t(a_1), a_1 \cdot ... \cdot a_n) = E(a_1, a_1) = \mu(a_1).$$

Pretpostavimo tačnost za svako $j < n$ i dokažimo za n. Na osnovu definicije terma je

$$t(a_1, ..., a_n) = t_1(a_1, ..., a_m) \cdot t_2(a_{m+1}, ..., a_n),$$

gde su $t_1(a_1, ..., a_m)$ i $t_2(a_{m+1}, ..., a_n)$ neki termi.

Kako je relacija E saglasna sa operacijom grupoida, koristeći induktivnu pretpostavku imamo:

$$\begin{aligned}
& E(t(a_1,...,a_n),(a_1\cdot ...\cdot a_m)\cdot(a_{m+1}\cdot ...\cdot a_n)) \\
= \ & E(t_1(a_1,...,a_m)\cdot t_2(a_{m+1},...,a_n),(a_1\cdot ...\cdot a_m)\cdot(a_{m+1}\cdot ...\cdot a_n)) \\
\geqslant \ & E(t_1(a_1,...,a_m),a_1\cdot ...\cdot a_m)\wedge E(t_2(a_{m+1},...,a_n),a_{m+1}\cdot ...\cdot a_n) \\
\geqslant \ & \mu(a_1)\wedge ...\wedge \mu(a_m)\wedge \mu(a_{m+1})\wedge ...\wedge \mu(a_n) \\
= \ & \mu(a_1)\wedge ...\wedge \mu(a_n) \qquad\qquad (*)
\end{aligned}$$

Prema Lemi 5.1 je

$$\mu(a_1)\wedge ...\wedge \mu(a_n)\leqslant E((a_1\cdot ...\cdot a_m)\cdot(a_{m+1}\cdot ...\cdot a_n),a_1\cdot ...\cdot a_n) \qquad (**)$$

Iz (*) i (**) dobijamo:

$$\begin{aligned}
& \mu(a_1)\wedge ...\wedge \mu(a_n)\leqslant \\
\leqslant \ & E(t(a_1,...,a_n),(a_1\cdot ...\cdot a_m)\cdot(a_{m+1}\cdot ...\cdot a_n) \\
\wedge \ & E((a_1\cdot ...\cdot a_m)\cdot(a_{m+1}\cdot ...\cdot a_n),a_1\cdot ...\cdot a_n)
\end{aligned}$$

Kako je relacija E tranzitivna, to je

$$\begin{aligned}
& E(t(a_1,...,a_n),(a_1\cdot ...\cdot a_m)\cdot(a_{m+1}\cdot ...\cdot a_n)) \\
\wedge \ & E((a_1\cdot ...\cdot a_m)\cdot(a_{m+1}\cdot ...\cdot a_n),a_1\cdot ...\cdot a_n) \\
\leqslant \ & E(t(a_1,...,a_n),a_1\cdot ...\cdot a_n).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mu(a_1)\wedge ...\wedge \mu(a_n)\leq E(t(a_1,...,a_n),a_1\cdot ...\cdot a_n).$$

□

Teorema 5.2. *Neka je $\mathcal{G}=(G,\cdot)$ grupoid, $\mu: G\to L$ rasplinut podgrupoid od $\mathcal{G}$ i E rasplinuta jednakost na μ. Neka je $\bar{\mathcal{G}}=(\mathcal{G},\mu,E)$ rasplinuta polugrupa i neka su $t_1(x_1,...,x_n)$ i $t_2(x_1,...,x_n)$ termi u jeziku grupoida $\mathcal{G}$,* *kod kojih se promenljive javljaju tačno navedenim redom. Ako su* $a_1, ..., a_n$ *elementi grupoida* G*, onda je*

$$\mu(a_1) \wedge ... \wedge \mu(a_n) \leq E\Big(t_1(a_1, ..., a_n), t_2(a_1, ..., a_n)\Big).$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 5.1 dobijamo

$$\mu(a_1) \wedge ... \wedge \mu(a_n) \leqslant E(t_1(a_1, ..., a_n), a_1 \cdot ... \cdot a_n) \qquad i$$

$$\mu(a_1) \wedge ... \wedge \mu(a_n) \leqslant E(t_2(a_1, ..., a_n), a_1 \cdot ... \cdot a_n).$$

Koristeći simetričnost i tranzitivnost relacije E dobijamo

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i=1}^{n} \mu(a_i) &\leqslant E(t_1(a_1, ..., a_n), a_1 \cdot ... \cdot a_n) \wedge E(t_2(a_1, ..., a_n), a_1 \cdot ... \cdot a_n) \\
&= E(t_1(a_1, ..., a_n), a_1 \cdot ... \cdot a_n) \wedge E(a_1 \cdot ... \cdot a_n, t_2(a_1, ..., a_n)\Big) \\
&\leqslant E(t_1(a_1, ..., a_n), t_2(a_1, ..., a_n)).
\end{aligned}$$

□

Posledica 5.1. *Neka je* $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ *grupoid,* $\mu : G \to L$ *rasplinut podgrupoid od* $\mathcal{G}$ *i* E *rasplinuta jednakost na* μ*. Ako je* $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \mu, E)$ *rasplinuta polugrupa i* $a \in A$*, onda je*

$$\mu(a) \leq E(a^m \cdot a^n, a^{m+n}).$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 5.2 dobijamo

$$\begin{aligned}
E(a^m \cdot a^n, a^{m+n}) &= E((\underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{m}) \cdot (\underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{n}), (\underbrace{a \cdot ... \cdot a}_{m+n})) \\
&\geq \mu(a) \wedge ... \wedge \mu(a) \\
&= \mu(a).
\end{aligned}$$

□

Definicija 5.6. *Neka je* $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ *grupoid,* $\mu : G \to L$ *rasplinut podgrupoid od* $\mathcal{G}$ *i* E *rasplinuta jednakost na* μ. $c \in G$ *se zove* **nula element** *u rasplinutom grupoidu* $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \mu, E)$ *ako za svako* $x \in G$ *imamo*

$$\mu(x) \leqslant E(x \cdot c, c) \qquad i \qquad \mu(x) \leqslant E(c \cdot x, c).$$

Teorema 5.3. *Ako su* c_1 *i* c_2 *nule u rasplinutom grupoidu* $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}, \mu, E)$, *onda važi sledeće*

$$\mu(c_1) \wedge \mu(c_2) = E(c_1, c_2).$$

Dokaz. Ako su c_1 i c_2 nule u rasplinutom grupoidu $\bar{\mathcal{G}}$, onda je $\mu(c_1) \leqslant E(c_1 \cdot c_2, c_2)$, pošto je c_2 nula i slično $\mu(c_2) \leq E(c_1 \cdot c_2, c_1)$, pošto je c_1 nula u μ. Koristeći simetričnost i tranzitivnost od E imamo

$$\begin{aligned} \mu(c_1) \wedge \mu(c_2) &\leqslant E(c_1 \cdot c_2, c_1) \wedge E(c_1 \cdot c_2, c_2) \\ &= E(c_1, c_1 \cdot c_2) \wedge E(c_1 \cdot c_2, c_2) \\ &\leqslant E(c_1, c_2). \end{aligned}$$

Kako je po definiciji rasplinute jednakosti na μ, $\mu(c_1) \wedge \mu(c_2) \geqslant E(c_1, c_2)$, to je $\mu(c_1) \wedge \mu(c_2) = E(c_1, c_2)$.

□

3. Podalgebre rasplinute algebre

Sa ciljem uvođenja novog koncepta rasplinutih univerzalnih algebri u ovom okviru prvo definišemo podalgebru rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$, gde je $\mathcal{A} = (A, F_A)$ algebra. Da bismo imali uopštenje klasične podalgebre, prirodno je zahtevati da njena rasplinuta podalgebra $\bar{\mathcal{B}}$ ispunjava sledeće uslove:

(1) Da im nosači budu isti;

(2) $\mu_B(x) \leqslant \mu_A(x)$ za sve $x \in A$.

Ako su E_A i E_B obične jednakosti, onda pomoću ovih uslova možemo definisati podalgebru rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$. Postavlja se pitanje koji još prirodan uslov treba da zahtevamo da bi $\bar{\mathcal{B}}$ bila podalgebra rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$, kada E_A i E_B nisu obične jednakosti. Kao logičan se nameće sledeći uslov:

Ako je $x \neq y$, $\mu_B(x) \neq 0$ i $\mu_B(y) \neq 0$, onda treba uzeti $E_B(x,y) = E_A(x,y)$.

Po definiciji kompatibilne rasplinute jednakosti važi uslov:

Ako je $x \neq y$ i $\mu_B(x) \neq 0$, onda je $E_B(x,y) < \mu_B(x)$.

Iz poslednja dva uslova dobijamo da za $\mu_B(x) \neq 0$ i $\mu_B(y) \neq 0$, treba uzeti uslov $E_A(x,y) < \mu_B(x)$ i $E_A(x,y) < \mu_B(y)$.

Kako je po definiciji kompatibilne rasplinute jednakosti, $E_B(x,y) \leqslant \mu_B(x) \wedge \mu_B(y)$, to, u slučaju da je $\mu_B(x) = 0$ ili $\mu_B(y) = 0$, moramo uzeti da je $E_B(x,y) = 0$.

Takođe trebalo bi da važi još i $E_B(x,x) = \mu_B(x)$ i $\mu_B(c) = \mu_A(c)$, gde je c konstanta.

TEOREMA 5.4. *Neka je data algebra* $\mathcal{A} = (A, F_A)$, *kompletna mreža* L *i* $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$ *neka rasplinuta algebra. Neka je* $\mu_B : A \to L$ *rasplinuta podalgebra od* $\mathcal{A}$, *takva da su ispunjeni sledeći uslovi:*

(1) $\mu_B(x) \leqslant \mu_A(x)$ *za sve* $x \in A$.

(2) *Ako su* x *i* y *različiti elementi skupa* A *i* $\mu_B(x) > 0$, *onda je* $E_A(x,y) < \mu_B(x)$.

(3) $\mu_B(c) = \mu_A(c)$, *gde je* c *konstanta.*

Definišimo rasplinutu relaciju E_B *na* μ_B *na sledeći način:*

$$E_B(x,y) := E_A(x,y) \wedge \mu_B(x) \wedge \mu_B(y).$$

Tada je E_B *kompatibilna rasplinuta jednakost na rasplinutoj podalgebri* μ_B.

Dokaz: Potrebno je da dokažemo da su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) $E_B(x,x) = \mu_B(x)$

(2) $E_B(x,y) = E_B(y,x)$

(3) $E_B(x,y) \geqslant E_B(x,z) \wedge E_B(z,y)$

(4) $E_B(f_A(x_1,...,x_n), f_A(y_1,...,y_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} E_B(x_i,y_i)$

(5) $E_B(x,y) \leqslant \mu_B(x) \wedge \mu_B(y)$

(6) Ako je $x \neq y$ i $\mu_B(x) > 0$, onda je $E_B(x,y) < E_B(x,x)$

za sve $x, y, z, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n$ iz skupa A i sve $f_A \in F_A$.

Dakle imamo:

(1) $E_B(x,x) = E_A(x,x) \wedge \mu_B(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \mu_B(x)$

(2) $E_B(x,y) = E_A(x,y) \wedge \mu_B(x) \wedge \mu_B(y) = E_A(y,x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_B(x) = E_B(y,x)$

(3)

$$\begin{aligned}
E_B(x,y) &= E_A(x,y) \wedge \mu_B(x) \wedge \mu_B(y) \\
&\geqslant E_A(x,z) \wedge E_A(z,y) \wedge \mu_B(x) \wedge \mu_B(y) \wedge \mu_B(z) \\
&= (E_A(x,z) \wedge \mu_B(x) \wedge \mu_B(z)) \wedge (E_A(z,y) \wedge \mu_B(z) \wedge \mu_B(y)) \\
&= E_B(x,z) \wedge E_B(z,y)
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
& E_B(f_A(x_1,...,x_n), f_A(y_1,...,y_n)) \\
= \; & E_A(f_A(x_1,...,x_n), f_A(y_1,...,y_n)) \wedge \mu_B(f_A(x_1,...,x_n)) \wedge \mu_B(f_A(y_1,...,y_n)) \\
\geqslant \; & \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} E_A(x_i,y_i)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_B(x_i)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_B(y_i)\Big) \\
= \; & \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(E_A(x_i,y_i) \wedge \mu_B(x_i) \wedge \mu_B(y_i)\Big) \\
= \; & \bigwedge_{i=1}^{n} E_B(x_i,y_i)
\end{aligned}$$

(5) Neposredno je jasno da je $E_B(x,y) \leqslant \mu_B(x) \wedge \mu_B(y)$.

(6) Ako je $x \neq y$ i $\mu_B(x) > 0$, onda je $E_B(x,y) = E_A(x,y) \wedge \mu_B(x) \wedge \mu_B(y) \leqslant E_A(x,y) < \mu_B(x)$,

za sve $x, y, z, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in A, f \in F_A$. Dakle, relacija E_B je rasplinuta jednakost na rasplinutoj podalgebri μ_B. □

Definicija 5.7. *Neka je data algebra* $\mathcal{A} = (A, F_A)$, *kompletna mreža* L *i* $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$ *neka rasplinuta algebra. Neka je* $\mu_B : A \to L$ *rasplinuta podalgebra od* $\mathcal{A}$, *takva da su ispunjeni sledeći uslovi:*

(1) $\mu_B(x) \leqslant \mu_A(x)$ *za sve* $x \in A$.

(2) *Ako su* x *i* y *različiti elementi skupa* A *i* $\mu_B(x) > 0$, *onda je* $E_A(x,y) < \mu_B(x)$.

(3) $\mu_B(c) = \mu_A(c)$, *gde je* c *konstanta.*

(4) $E_B(x,y) := E_A(x,y) \wedge \mu_B(x) \wedge \mu_B(y)$.

Tada kažemo da je $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{A}, \mu_B, E_B)$ ***podalgebra rasplinute algebre*** $\bar{\mathcal{A}}$.

Teorema 5.5. *Neka je data algebra* $\mathcal{A} = (A, F_A)$, *kompletna mreža* L, *rasplinuta algebra* $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$ *i neka je* $\mathcal{B} = (B, F_B)$ *podalgebra algebre* $\mathcal{A}$. *Ako je*

$$\mu_B(x) := \begin{cases} \mu_A(x), & x \in B \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad i$$

$$E_B(x,y) := E_A(x,y) \wedge \mu_B(x) \wedge \mu_B(y),$$

onda je $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{A}, \mu_B, E_B)$ *podalgebra rasplinute algebre* $\bar{\mathcal{A}}$.

Dokaz: Dokažimo prvo da je μ_B rasplinuta podalgebra algebre $\mathcal{A}$, tj. da je $\mu_B(f_A(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_B(x_i)$ za sve $x_1, ..., x_n \in A$ i sve $f_A \in F_A$. U dokazu razlikujemo dva slučaja.

(1) Neka je $x_1, ..., x_n \in B$. Kako je $\mathcal{B}$ podalgebra algebre $\mathcal{A}$, to je $f_A(x_1, ..., x_n) \in B$, pa je $\mu_B(f_A(x_1, ..., x_n)) = \mu_A(f_A(x_1, ..., x_n))$.

Dalje imamo

$$\begin{aligned}\mu_B(f_A(x_1,...,x_n)) &= \mu_A(f_A(x_1,...,x_n)) \\ &\geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_A(x_i) \\ &= \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_B(x_i).\end{aligned}$$

(2) Ako neko x_i ne pripada B, onda je $\mu_B(x_i) = 0$, pa je $\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_B(x_i) = 0$.

Dakle, u svakom slučaju je $\mu_B(f_A(x_1,...,x_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_B(x_i)$.

Neposredno je jasno da je $\mu_B(x) \leqslant \mu_A(x)$ za sve $x \in A$. Kako svaka konstanta c pripada podalgebri $\mathcal{B}$, to je $\mu_B(c) = \mu_A(c)$.

Neka su, dalje, x i y različiti elementi skupa A i $\mu_B(x) > 0$. Tada je $\mu_B(x) = \mu_A(x)$, pa imamo $E_A(x,y) < \mu_A(x) = \mu_B(x)$. Na osnovu izloženog i prethodne teoreme sledi da je $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{A}, \mu_B, E_B)$ podalgebra rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$. $\square$

Teorema 5.6. *Neka je $\mathfrak{M}$ jednakosna klasa rasplinutih algebri. Ako rasplinuta algebra $\bar{\mathcal{A}} \in \mathfrak{M}$, gde je $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$ i $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{A}, \mu_B, E_B)$ je podalgebra rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$, onda $\bar{\mathcal{B}} \in \mathfrak{M}$.*

Dokaz: Neka je $\bar{\mathcal{A}} \in \mathfrak{M}$ i $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{A}, \mu_B, E_B)$ podalgebra rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$ i neka rasplinuta algebra $\bar{\mathcal{A}}$ zadovoljava identitet $E(u,v)$, tj.

$$E_A(u_A(x_1,...,x_n), v_A(x_1,...,x_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)$$

za sve $x_1,...,x_n \in A$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} & E_B(u_A(x_1,...,x_n), v_A(x_1,...,x_n)) \\ = \; & E_A(u_A(x_1,...,x_n), v_A(x_1,...,x_n)) \wedge \mu_B(u_A(x_1,...,x_n)) \wedge \mu_B(v_A(x_1,...,x_n)) \\ \geqslant \; & \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_B(x_i)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \mu_B(x_i)\Big) \\ = \; & \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_B(x_i)\end{aligned}$$

Dakle, rasplinuta algebra $\bar{\mathcal{B}}$, takođe zadovoljava identitet $E(u,v)$. $\square$

Iz definicije podalgebre rasplinute algebre neposredno sledi da je

$$u_A(x_1,...,x_n) = u_B(x_1,...,x_n)$$

za svaki term $u(x_1,...,x_n)$.

4. Rasplinuti homomorfizmi

Da bismo uveli novi koncept rasplinutog homomorfizma prvo ćemo definisati rasplinuto preslikavanje jedne rasplinute algebre u drugu.

Definicija 5.8. *Neka su $\mathcal{A} = (A, F_A)$ i $\mathcal{B} = (B, F_B)$ algebre istog tipa, L kompletna mreža i $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$, $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}, \mu_B, E_B)$ rasplinute algebre. Kažemo da je $f : A \to B$* **rasplinuto preslikavanje** *rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$ u rasplinutu algebru $\bar{\mathcal{B}}$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

1. $(\forall a \in A)\ \mu_B(f(a)) \geqslant \mu_A(a)$

2. Neka su $t_1(x_1,...,x_n)$, $t_2(x_1,...,x_n)$ termi u jeziku algebre $\mathcal{A}$, t_1^A, t_2^A odgovarajuće term operacije i $a_1,...,a_n$ iz skupa A. Ako je

$$E_A(t_1^A(a_1,...,a_n), t_2^A(a_1,...,a_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_A(a_i),$$

onda je

$$E_B(f(t_1^A(a_1,...,a_n)), f(t_2^A(a_1,...,a_n))) \geqslant \mu_B(f(t_1^A(a_1,...,a_n))) \wedge$$
$$\wedge\ \mu_B(f(t_2^A(a_1,...,a_n)))$$

U ovom delu rada razmatramo rasplinuto preslikavanje rasplinute podalgebre sa rasplinutom jednakošću definisanom na rasplinutoj podalgebri. Uporedimo ovu definiciju rasplinutog preslikavanja sa odgovarajućom definicijom Demirci-ja ([**26, 29**]). Demirci polazi od klasičnog skupa na kome definiše rasplinutu jednakost. Zatim definiše rasplinuto preslikavanje kao rasplinutu binarnu relaciju koja zadovoljava određene uslove.

Bitna razlika je u tome što se u navedenoj definiciji koristi rasplinuta jednakost na rasplinutoj podalgebri, a kod Demirci-ja na klasičnom skupu. U ovom radu je rasplinuto preslikavanje klasična funkcija definisana tako da preslikava rasplinutu podalgebru u rasplinutu podalgebru, dok je kod Demirci-ja rasplinuto preslikavanje definisano kao posebna rasplinuta binarna relacija na klasičnom skupu.

Teorema 5.7. *Neka su $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$, $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}, \mu_B, E_B)$ i $\bar{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}, \mu_C, E_C)$ rasplinute algebre istog tipa i $f : A \to B$ i $g : B \to C$ rasplinuta preslikavanja. Tada je $f \circ g : A \to C$ rasplinuto preslikavanje.*

Dokaz: (1) $\mu_C(g(f(a)) \geqslant \mu_B(f(a)) \geqslant \mu_A(a)$ za sve $a \in A$.

(2) Neka su $t_1(x_1, ..., x_n), t_2(x_1, ..., x_n)$ termi u jeziku algebri $\mathcal{A}, B, C$ i neka su t_1^A, t_2^A odgovarajuće term operacije i $a_1, ..., a_n$ iz skupa A. Ako je

$$E_A(t_1^A(a_1, ..., a_n), t_2^A(a_1, ..., a_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_A(a_i),$$

onda je

$$\begin{aligned} & E_B(f(t_1^A(a_1, ..., a_n)), f(t_2^A(a_1, ..., a_n))) \geqslant \\ \geqslant \ & \mu_B(f(t_1^A(a_1, ..., a_n))) \ \wedge \ \mu_B(f(t_2^A(a_1, ..., a_n))). \end{aligned}$$

Iz poslednje nejednakosti sledi

$$\begin{aligned} & E_C\Big(g\big(f(t_1^A(a_1, ..., a_n))\big), g\big(f(t_2^A(a_1, ..., a_n))\big)\Big) \geqslant \\ \geqslant \ & \mu_C\Big(g\big(f(t_1^A(a_1, ..., a_n))\big)\Big) \wedge \ \mu_C\Big(g\big(f(t_2^A(a_1, ..., a_n))\big)\Big), \end{aligned}$$

pa je $f \circ g$ rasplinuto preslikavanje. □

Definicija 5.9. *Neka su $\mathcal{A} = (A, F_A)$ i $\mathcal{B} = (B, F_B)$ algebre istog tipa, L kompletna mreža i $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$, $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}, \mu_B, E_B)$ rasplinute algebre.*

Kažemo da je rasplinuto preslikavanje $h : A \to B$ **rasplinuti homomorfizam** *rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$ u rasplinutu algebru $\bar{\mathcal{B}}$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(1) $(\forall f_A \in F_A)(\forall a_1, ..., a_n \in A)\ h(f_A(a_1, ..., a_n)) = f_B(h(a_1), ..., h(a_n))$.
(2) $h(c_A) = c_B$

Drugim rečima rasplinuti homomorfizam je rasplinuto preslikavanje koje je homomorfizam.

Kako je kompozicija rasplinutih preslikavanja rasplinuto preslikavanje i kompozicija homomorfizama homomorfizam, to je i kompozicija rasplinutih homomorfizama rasplinuti homomorfizam.

TEOREMA 5.8. *Neka su $\mathcal{A} = (A, F_A)$ i $\mathcal{B} = (B, F_B)$ algebre istog tipa, L kompletna mreža, $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$, $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}, \mu_B, E_B)$ rasplinute algebre i $h : A \to B$ rasplinuti homomorfizam. Tada je $\bar{\mathcal{D}} = (\mathcal{B}, \mu_D, E_D)$, gde je*

$$\mu_D(d) := \begin{cases} \mu_B(d), & d \in D = h(A) \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

i

$$E_D(x, y) = E_B(x, y) \wedge \mu_D(x) \wedge \mu_D(y)$$

podalgebra rasplinute algebre $\bar{\mathcal{B}}$.

Dokaz: Kako je $D = h(A)$ podalgebra algebre B, to je prema Teoremi 5.5, $\bar{\mathcal{D}}$ podalgebra rasplinute algebre $\bar{\mathcal{B}}$. □

Podalgebru $\bar{\mathcal{D}} = (\mathcal{B}, \mu_D, E_D)$ rasplinute algebre $\bar{\mathcal{B}}$, koja je uvedena u Teoremi 5.8, zovemo **homomorfna slika** rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$.

TEOREMA 5.9. *Neka su $\mathcal{A} = (A, F_A)$ i $\mathcal{B} = (B, F_B)$ algebre istog tipa, L kompletna mreža, $\bar{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}, \mu_A, E_A)$, $\bar{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}, \mu_B, E_B)$ odgovarajuće rasplinute algebre i $h : A \to B$ rasplinuti homomorfizam. Ako je $F(x_1, ..., x_n)$ term istog jezika i F^A, F^B odgovarajuće term operacije redom u algebrama*

$\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, onda je h rasplinuti homomorfizam rasplinute algebre $(\bar{\mathcal{A}}, F^A)$ u rasplinutu algebru $(\bar{\mathcal{B}}, F^B)$.

Dokaz: Teorema je neposredna posledica odgovarajuće teoreme iz klasične algebre. □

Teorema 5.10. *Neka je $\mathfrak{M}$ jednakosna klasa rasplinutih algebri. Tada važi: Ako $\bar{\mathcal{A}} \in \mathfrak{M}$ i $\bar{\mathcal{D}}$ je homomorfna slika rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$, tada $\bar{\mathcal{D}} \in \mathfrak{M}$.*

Dokaz: Neka su $\bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{B}}$ i $\bar{\mathcal{D}}$ rasplinute algebre date u Teoremi 5.8. Ako rasplinuta algebra $\bar{\mathcal{A}}$ zadovoljava identitet $E(u(x_1, ..., x_n), v(x_1, ..., x_n))$, dokažimo da i njena homomorfna slika $\bar{\mathcal{D}}$ zadovoljava taj identitet.

Dakle, pretpostavimo da je za sve $x_1, ..., x_n \in A$

$$E_A(u_A(x_1, ..., x_n), v_A(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)$$

Dokažimo da je za sve $d_1, ..., d_n \in B$

$$E_D(u_B(d_1, ..., d_n), v_B(d_1, ..., d_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_D(d_i).$$

Razlikujemo dva slučaja.

(1) Ako je $d_i \in D$ za sve $i \in \{1, ..., n\}$, onda postoje $a_i \in A$ takvi da je $h(a_i) = d_i$. Tada je

$$E_A(u_A(a_1, ..., a_n), v_A(a_1, ..., a_n)) \geqslant \bigwedge_{i=1}^{n} \mu_A(a_i).$$

Prema Teoremi 5.9 i definiciji rasplinutog homomorfizma je

$$\begin{aligned}
& E_B(h(u_A(a_1,...,a_n)),h(v_A(a_1,...,a_n))) \\
\geqslant\ & \mu_B(h(u_A(a_1,...,a_n)))\wedge\mu_B(h(v_A(a_1,...,a_n))) \\
=\ & \mu_B(u_B(h(a_1),...,h(a_n)))\wedge\mu_B(v_B(h(a_1),...,h(a_n))) \\
\geqslant\ & \bigwedge_{i=1}^{n}\mu_B(h(a_i)) \\
=\ & \bigwedge_{i=1}^{n}\mu_B(d_i).
\end{aligned}$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned}
& E_D(u_B(d_1,...,d_n),v_B(d_1,...,d_n)) = \\
=\ & E_B(u_B(d_1,...,d_n),v_B(d_1,...,d_n))\wedge\mu_D(u_B(d_1,...,d_n))\wedge\mu_D(v_B(d_1,...,d_n)) \\
\geqslant\ & E_B(u_B(h(a_1),...,h(a_n)),v_B(h(a_1),...,h(a_n)))\wedge\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\mu_D(d_i)\Big) \\
=\ & E_B(h(u_A(a_1,...,a_n)),h(v_A(a_1,...,a_n)))\wedge\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\mu_D(d_i)\Big) \\
\geqslant\ & \Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\mu_B(h(a_i))\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\mu_D(d_i)\Big) \\
=\ & \bigwedge_{i=1}^{n}\mu_D(d_i).
\end{aligned}$$

(2) Ako za neko $i\in\{1,...,n\}$ $d_i\notin D$, onda je $\mu_D(d_i)=0$, pa je

$$E_D(u_B(d_1,...,d_n),v_B(d_1,...,d_n))\geqslant\bigwedge_{i=1}^{n}\mu_D(d_i)=0.$$

Dakle, homomorfna slika rasplinute algebre takođe pripada jednakosnoj klasi $\mathfrak{M}$.

□

5. Direktni proizvod rasplinutih algebri

Poznato je da se za kolekciju istotipnih algebri $\{\mathcal{A}_i, i \in I\}$ definiše njihov direktni proizvod $\mathcal{A} = \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ koji je takođe algebra istog tipa. U nastavku ćemo definisati i direktni proizvod kolekcije rasplinutih algebri. Prvo dokažimo sledeću teoremu.

Teorema 5.11. *Neka je $\{\bar{\mathcal{A}}_i = (\mathcal{A}_i, \mu_i, E_i) \mid i \in I\}$ familija istotipnih rasplinutih algebri, $\mathcal{A} = \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ direktan proizvod algebri $\mathcal{A}_i$ i neka za sve $g_1, g_2 \in \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ važi sledeći uslov:*

Ako je $g_1 \neq g_2$ i $\bigwedge\limits_{i\in I} \mu_i(g_1(i)) \neq 0$, onda je

$$\bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i), g_2(i)) \neq \bigwedge_{i\in I} \mu_i(g_1(i)).$$

Tada važi: Ako je

(1) $\mu(g) := \bigwedge\limits_{i\in I} \mu_i(g(i)),\ g \in \prod\limits_{i\in I} A_i$

(2) $E(g_1, g_2) := \bigwedge\limits_{i\in I} E_i(g_1(i), g_2(i));\ g_1, g_2 \in \prod\limits_{i\in I} A_i,$

onda je $\bar{\mathcal{A}} = \prod\limits_{i\in I} \bar{\mathcal{A}}_i := (\mathcal{A}, \mu, E)$ rasplinuta algebra.

Dokaz: Potrebno je da dokažemo da su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) Za bilo koju operaciju F dužine n algebre $\mathcal{A}$ i bilo koje $g_1, ..., g_n \in \prod\limits_{i\in I} A_i$ važi $\mu(F(g_1, ..., g_n)) \geqslant \bigwedge\limits_{j=1}^{n} \mu(g_j)$

(2) Relacija E je rasplinuta jednakost.

$$
\begin{aligned}
1. \quad \mu(F(g_1,...,g_n)) &= \mu\Big(\prod_{i\in I} F_i(g_1(i),...,g_n(i))\Big)\\
&= \bigwedge_{i\in I}\mu_i\Big(F_i(g_1(i),...,g_n(i))\Big)\\
&\geqslant \bigwedge_{i\in I}\Big(\bigwedge_{j=1}^{n}\mu_i(g_j(i))\Big)\\
&= \bigwedge_{j=1}^{n}\Big(\bigwedge_{i\in I}\mu_i(g_j(i))\Big)\\
&= \bigwedge_{j=1}^{n}\mu(g_j)
\end{aligned}
$$

2. Dokažimo da je E rasplinuta jednakost.

a) $E(g,g) = \bigwedge_{i\in I} E_i(g(i),g(i)) = \bigwedge_{i\in I}\mu_i(g(i)) = \mu(g)$

b) $E(g_1,g_2) = \bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i),g_2(i)) = \bigwedge_{i\in I} E_i(g_2(i),g_1(i)) = E(g_2,g_1)$

c) $E(g_1,g_3) = \bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i),g_3(i)) \geqslant \bigwedge_{i\in I}\Big(E_i(g_1(i),g_2(i))\wedge E_i(g_2(i),g_3(i))\Big)$

$= \Big(\bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i),g_2(i))\Big)\bigwedge\Big(\bigwedge_{i\in I} E_i(g_2(i),g_3(i))\Big) = E(g_1,g_2)\wedge E(g_2,g_3)$

d) $E(F(g_1,...,g_n),F(f_1,...,f_n))$

$= \bigwedge_{i\in I} E_i\Big(F(g_1(i),...,g_n(i)),F(f_1(i),...,f_n(i))\Big)$

$\geqslant \bigwedge_{i\in I}\bigwedge_{j=1}^{n} E_i(g_j(i),f_j(i)) = \bigwedge_{j=1}^{n}\bigwedge_{i\in I} E_i(g_j(i),f_j(i)) = \bigwedge_{j=1}^{n} E(g_j,f_j)$

e) $E(f,g) = \bigwedge_{i\in I} E_i(f(i),g(i)) \leqslant \bigwedge_{i\in I}\Big(\mu_i(f(i))\wedge\mu_i(g(i))\Big)$

$= \Big(\bigwedge_{i\in I}\mu_i(f(i))\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{i\in I}\mu_i(g(i))\Big) = \mu(f)\wedge\mu(g).$

f) Neka je $g_1 \neq g_2$ i $\mu(g_1)\neq 0$. Kako je $E_i(g_1(i),g_2(i)) \leqslant \mu_i(g_1(i))$, to je

$$\bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i),g_2(i)) \leqslant \bigwedge_{i\in I}(\mu_i(g_1(i)).$$

Pošto je

$$\bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i), g_2(i)) \neq \bigwedge_{i\in I}(\mu_i(g_1(i),$$

dobijamo

$$\bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i), g_2(i)) < \bigwedge_{i\in I} \mu_i(g_1(i)).$$

tj. $E(g_1, g_2) < \mu(g_1)$

$\square$

Definicija 5.10. *Rasplinutu algebru* $\bar{\mathcal{A}} := (\mathcal{A}, \mu, E)$ *uvedenu u Teoremi 5.11 zovemo* **direktni proizvod rasplinutih algebri** $\bar{\mathcal{A}}_i, i \in I$.

U dokazu prethodne teoreme imamo

$$\bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i), g_2(i)) \leqslant \bigwedge_{i\in I}(\mu_i(g_1(i))).$$

Iz nejednakosti $E_i(g_1(i), g_2(i)) < \mu_i(g_1(i), i \in I$, ne možemo zaključiti

$$\bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i), g_2(i)) < \bigwedge_{i\in I}(\mu_i(g_1(i))),$$

pa je u Definiciji 5.10 neophodan uslov

$$\bigwedge_{i\in I} E_i(g_1(i), g_2(i)) \neq \bigwedge_{i\in I}(\mu_i(g_1(i))).$$

Kada su u pitanju obične jednakosti ovaj uslov je trivijalan.

Teorema 5.12. *Ako rasplinut identitet* $E(u(x_1, ..., x_n), v(x_1, ..., x_n))$ *važi u svim rasplinutim algebrama* $\bar{\mathcal{A}}_i$ $(i \in I)$ *nekog jezika, onda taj identitet važi i u proizvodu* $\bar{\mathcal{A}} = \prod_{i\in I} \bar{\mathcal{A}}_i$.

Dokaz: Neka su $u(x_1, ..., x_n), v(x_1, ..., x_n)$ termi nekog jezika i pretpostavimo da rasplinut identitet $E(u, v)$ važi u svim rasplinutim algebrama $\bar{\mathcal{A}}_i$, $i \in I$, tj.

$$E_i(u_i(x_1, ..., x_n), v_i(x_1, ..., x_n)) \geqslant \bigwedge_{j=1}^{n} \mu_i(x_j).$$

Neka su $f_1, ..., f_n$ proizvoljni elementi algebre $\mathcal{A}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
E_A(u_A(f_1, ..., f_n), v_A(f_1, ..., f_n)) &= \bigwedge_{i\in I} E_i(u_A(f_1, ..., f_n)(i), v_A(f_1, ..., f_n)(i)) \\
&= \bigwedge_{i\in I} E_i(u_i(f_1(i), ..., f_n(i)), v_i(f_1(i), ..., f_n(i))) \\
&\geqslant \bigwedge_{i\in I} \Big(\bigwedge_{j=1}^{n} \mu_i(f_j(i)) \Big) \\
&= \bigwedge_{j=1}^{n} \Big(\bigwedge_{i\in I} \mu_i(f_j(i)) \Big) \\
&= \bigwedge_{j=1}^{n} \mu_A(f_j)
\end{aligned}$$

Dakle, direktan proizvod rasplinutih algebri takođe zadovoljava rasplinut identitet $E(u, v)$. □

* * *

Teorema 5.13. *Neka je $\mathfrak{M}$ jednakosna klasa rasplinutih algebri. Tada važi:*

(1) *Ako $\bar{\mathcal{A}} \in \mathfrak{M}$ i $\bar{\mathcal{B}}$ je podalgebra rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$, tada $\bar{\mathcal{B}} \in \mathfrak{M}$.*
(2) *Ako $\bar{\mathcal{A}} \in \mathfrak{M}$ i $\bar{\mathcal{D}}$ je homomorfna slika rasplinute algebre $\bar{\mathcal{A}}$, tada $\bar{\mathcal{D}} \in \mathfrak{M}$.*
(3) *Ako za svaki $i \in I$ $\bar{\mathcal{A}}_i \in \mathfrak{M}$, tada $\prod_{i\in I} \bar{\mathcal{A}}_i \in \mathfrak{M}$.*

Dokaz: Tvrđenje sledi neposredno iz teorema 5.6, 5.10, 5.12. □

Ovim smo dokazali jedan smer Teoreme Birkhoff-a. Može se postaviti pitanje da li važi i obratna teorema, tj. da li je svaka klasa algebri zatvorena za H, S, P takođe jednakosna klasa. Drugi smer Teoreme Birkhoff-a u opštem slučaju ne važi, što se demonstrira u nastavku.

Na primer, klasa komutativnih grupoida sa običnom jednakošću posmatrana u ovom kontekstu je zatvorena za H, S, P, ali nije jednakosna klasa.

Tako, algebra u Primeru 4.2 u glavi 4 zadovoljava identitet $E(xy, yx)$, ali nije komutativna.

6. Zaključak

U ovom radu se razvija nova teorija rasplinutih identiteta i rasplinutih algebri po analogiji na klasičan slučaj. Naime, mi koristimo rasplinutu jednakost umesto obične. Naš glavni zadatak je da upotrebimo rasplinutu jednakost sa ciljem da uvedemo novi pojam rasplinutih identiteta, koji važe na rasplinutim podalgebrama, a ne važe obavezno na celoj algebri. U ovom radu su proučavani takvi identiteti.

U glavi 2 su izloženi rezultati R. Belohlavek-a i V. Vychodil-a o rasplinutim jednakostima. Rasplinuta jednakost je definisana na običnoj algebri. Naš pristup je opštiji u sledećem smislu. Mi definišemo rasplinutu jednakost na rasplinutoj podalgebri, umesto klasičnoj algebri. Pomenuti autori ne razmatraju rasplinute podalgebre date algebre, već uvode pojam L-algebre, pri čemu L-algebru definišu kao običnu podalgebru sa rasplinutom jednakošću koja je restrikcija rasplinute jednakosti na celoj algebri. Kada su u pitanju identiteti, kod pomenutih autora se definiše stepen istinitosti identiteta, dok se u ovom radu definiše kada neka rasplinuta podalgebra zadovoljava rasplinuti identitet.

U radovima Belohlavek-a i Vychodil-a su razmatrana pitanja koja dovode do uopštenja poznate Birkhoff-ove teoreme u klasičnoj algebri. Razmatrana je klasična algebra na kojoj je definisana kompatibilna rasplinuta jednakost. Pomenuta jednakost je definisana na nosaču algebre i njena jedina veza sa operacijama algebre je kompatibilnost. U tim istraživanjima se ne koristi pojam rasplinute podalgebre.

U ovom poglavlju se, za dobijanje sličnih rezultata, koristi prethodno definisana kompatibilna rasplinuta jednakost na rasplinutoj podalgebri, a ne na običnoj (crisp) algebri, kao što je do sada bio slučaj. Dakle, objedinjeni su koncepti rasplinutih podalgebri i kompatibilnih rasplinutih jednakosti. Na ovaj način prethodne rezultate drugih autora možemo shvatiti kao specijalan slučaj rezultata u ovom radu uzimajući da je rasplinuta podalgebra karakteristična funkcija.

R. Belohlavek i V. Vychodil dokazuju teoremu koja je uopštenje Teoreme Birkhoff-a. U ovom radu je dokazan jedan smer ove teoreme koristeći novouvedene koncepte. Može se postaviti pitanje da li važi i drugi smer, tj. da li je svaka klasa algebri zatvorena za H, S, P takođe jednakosna klasa.

Primer 4.2 pokazuje da drugi smer Teoreme Birkhoff-a u opštem slučaju ne važi. Logično se nameće pitanje da li pod nekim uslovima važi i drugi smer. Odgovor na to pitanje svakako je potvrdan. Npr. ako je rasplinuta podalgebra L-algebra, važi i drugi smer (Teorema 2.11). Da li se taj uslov može još oslabiti je otvoreno pitanje i biće predmet daljih istraživanja. Postoje indicije da može. Precizan odgovor na ovo pitanje nije trivijalan. Potrebno je na nov način (opštiji nego do sada) definisati pojmove kao što su: klasa rasplinute kongruencije, rasplinute operacije na rasplinutom količničkom skupu, rasplinuti prirodni homomorfizam, slobodna rasplinuta algebra, termovska rasplinuta algebra, itd. Nadamo se da će se, u dogledno vreme, naći odgovor i na ova pitanja.

Literatura

[1] W. Bandler, L.J. Kohout, *Cuts Commute with Closures*, in B. Lowen and M. Roubens (eds.): Fuzzy Logic: State of the Art, Kluwer Acad. Publ. 1993., 161-167.

[2] R. Belohlavek, *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002.

[3] R. Belohlavek, *Fuzzy equational logic*, Arch. Math. Log. 41(2002), 83-90.

[4] R. Belohlavek, *Birkhoff variety theorem and fuzzy logic*, Arch. Math. Log. 42(2003), 781-790.

[5] R. Bělohlávek, V. Vychodil, *Fuzzy Equational Logic*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[6] R. Bělohlávek, V. Vychodil, *Algebras with fuzzy equalities*, Fuzzy Sets and Systems 157(2)(2006), 161-201.

[7] R. Bělohlávek, J. Outrata, V. Vychodil, *Fast factorization by similarity of fuzzy concept lattices with hedges*, Int. Journal of Foundations of Computer Science 19(2)(2008), 255-269.

[8] R. Bělohlávek, M. Krupka, *Grouping fuzzy sets by similarity*, Information Sciences 179(15)(2009), 2656-2661.

[9] R. Bělohlávek, V. Vychodil, *Discovery of optimal factors in binary data via a novel method of matrix decomposition*, Journal of Computer and System Sciences 76(1)(2010), 3-20.

[10] B. Borchardt, A. Maletti, B. Šešelja, A. Tepavčević, H. Vogler, *Cut sets as recognizable tree languages*, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 1560-1571.

[11] I. Bošnjak, R. Madarasz, *Remarks on the lattices of fuzzy subsets of a groupoid*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 3007-3012.

[12] I. Bošnjak, R. Madarasz, *Algebras of fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 2979-2988

[13] N. Božović, Ž. Mijailović, *Uvod u teoriju grupa*, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[14] B. Budimirović, V. Budimirović, A. Tepavčević, *Fuzzy ε-subgroups*, Information Sciences 180(2010)4006-4014.

[15] S. Burris, H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, N.Y. 1981.

[16] M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, *Fuzzy equivalence relations and their equivalence classes*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007), 1295-1313.

[17] M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, *Uniform fuzzy relations and fuzzy functions*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 1054-1081.

[18] M. Ćirić, A. Stamenković, J. Ignjatović, T. Petković, *Fuzzy relation equations and reduction of fuzzy automata*, Journal of Computer and System Sciences 76 (2010), 609-633.

[19] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Lattice of compatible relations satisfying a set of formulas*, Algebra Universalis, 40(1998) 51-58.

[20] I. Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, *A Note on Triangular Schemes for Weak Congruences*, Czech. Math. J. 55, No.3 (2005), 683-690.

[21] M.K. Chakraborty, M. Das, *On fuzzy equivalence I*, Fuzzy Sets and Systems 11 (1983) 185-193.

[22] A.H. Clifford, G. B. Preston: *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I-II. Amer. Math. Sac., Providence, R. I. (1961; 1967).

[23] G. Czedli, B. Šešelja, A. Tepavčević, *On the semidistributivity of elements in weak congruence lattices of algebras and groups*, Algebra Universalis 58 (2008) 349-355.

[24] P.S. Das, *Fuzzy groups and level subgroups*, J. Math. Anal. Appl. 84 1981., 264-269.

[25] B.A. Davey, H.A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1992.

[26] M. Demirci, *Fuzzy Functions and Their Fundamental Properties*, Fuzzy Sets and Systems 106 (1999) 239-246.

[27] M. Demirci, *Vague Groups*, J. Math. Anal. Appl. 230,(1999) 142-156.

[28] M. Demirci, *Smooth Subgroups and Smooth Homomorphisms*, Fuzzy Sets and Systems 117 (2001) 439-446.

[29] M. Demirci, *Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations part I: fuzzy functions and their applications*, Int. J. General Systems 32 (3) (2003) 123155.

[30] M. Demirci, *Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, part II: vague algebraic notions*, Int. J. General Systems 32 (3) (2003) 157175.

[31] M. Demirci, *Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, part III: constructions of vague algebraic notions and vague arithmetic operations*, Int. J. General Systems 32 (3) (2003) 177201.

[32] A. Di Nola, G. Gerla, *Lattice valued algebras*, Stochastica 11 (1987) 137150.

[33] T.K. Dutta, B.K. Biswas, *Fuzzy Congruence and Quotient Semiring*, J. Fuzzy Math. 4 (1996), 737-748.

[34] G. Eigenthaler , Šešelja, A. Tepavčević, *Weak congruences of algebras with constants*, Novi Sad Journal of Mathematics, 36,1, 65-73 (2006).

[35] Marcel Erne, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Posets Generated by Irreducible Elements*, Order, 20, 2003, 79-89.

[36] L. Filep, *Structure and constructing of fuzzy subgroups of a group*, Fuzzy Sets and Systems 51 (1992) 105-109.

[37] J.A. Goguen, *L-fuzzy Sets*, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967) 145-174.

[38] M. Gorjanac Ranitović, A. Tepavčević, *General form of lattice valued intuitionistic fuzzy sets*, Bernd Reusch Ed., Computational Intelligence, Theory and Applications, Springer Series "Advances in Soft Computing", 375-381 (2006).

[39] M. Gorjanac Ranitović, A. Tepavčević, *General form of lattice valued fuzzy sets under the cutworthy approach*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1213-1216.

[40] U. Hebisch, H.J. Wwinert, *Semirings - Algebraic Theory and Applications in Computer Science*, World Scientific, Singapore-London-New Jersey-Hong Kong, 1999.

[41] U. Höhle, *Quotients with respect to similarity relations*, Fuzzy Sets and Systems 27 (1988) 3144.

[42] E. Horvath, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Cut approach to islands in rectangular fuzzy relations*, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010): 3114-3126

[43] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, *Determinization of fuzzy automata with membership values in complete residuated lattices*, Inf. Sci. 178(2008), 164-180.

[44] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, *Determinization of fuzzy automata with membership values in complete residuated lattices*, Information Sciences 178 (2008), 164-180.

[45] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, *Fuzzy homomorphisms of algebras*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 2345-2365.

[46] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, *On the greatest solutions to certain systems of fuzzy relation inequalities and equations*, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 3081-3113.

[47] J. Ignjatović, M. Ćirić, S. Bogdanović, T. Petković, *Myhill-Nerode type theory for fuzzy languages and automata*, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 1288-1324.

[48] J. Ignjatović, M. Ćirić, *Formal power series and regular operations on fuzzy languages*, Information Sciences 180 (2010) 1104-1120.

[49] V. Janiš, A. Tepavčević, *Metric in a Space with Fuzzy Compatibility*, Indian Journal in Pure and Applied Mathematics, 35(6): (2004) 737-745.

[50] V. Janis, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Non-standard cut classification of fuzzy sets*, Information Sciences 177 (2007) 161-169.

[51] Vladimir Janis, Magdalena Rencova, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Construction of fuzzy relation by closure systems*, S. Chaudhury et al. (Eds.): PReMI 2009, 116-121.

[52] Jorge Jimnez, Susana Montes, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Characterization of L-Fuzzy Semi-Filters and Semi-Ideals*, IFSA/EUSFLAT Conf. 2009: 1073-1078.

[53] Jorge Jimnez, Susana Montes, B. Šešelja, A. Tepavčević, *On lattice valued up-sets and down-sets*, Fuzzy Sets and Systems 161, 1699-1710, 2010.

[54] O. Kazanci, S. Yamak, *Fuzzy ideals and semiprime fuzzy ideals in semigroups*, Information Sciences, Vol. 179 , Issue 20 (September 2009) 3720-3731.

[55] G. Klir, B. Yuan, *Fuzzy sets and fuzzy logic*, Prentice Hall P T R, New Jersey, 1995.

[56] N. Kuroki, *Fuzzy bi-ideals in semigroups*, Comment. Math. Univ. St. Pauli XXVIII-1 (1979) 17-21.

[57] N. Kuroki, *On fuzzy semigroups*, Information Sciences, Volume 53, Issue 3, February 1991, Pages 203-236

[58] L. Kwuida, B. Šešelja, A. Tepavčević, *Negation in Contextual Logic*, ICCS 2004, LNAI 3127 (2004), 227-241.

[59] L. Kwuida, B. Šešelja, A. Tepavčević, *On the Mac Neille Completion of Weakly Dicomplemented Lattices*, LNAI 4390, 271-280 (2007).

[60] V. Lazarević, A.Tepavčević, *Weak congruences and a graphical composition*, Contributions to General Algebra 13, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt 2001, 199-205.

[61] S. Montes, I. Couso, P. Gil, *Fuzzy δ-ε partitions*, Information Sciences 152 (2003) 267-285.

[62] J. N. Mordeson, D. S. Malik, *Fuzzy Commutative Algebra*, World Scientific Publishing, 1998.

[63] J. N. Mordeson, *Fuzzy Commutative Algebra and Intersection Equations*, JCIS 2002: 26-28

[64] J. N. Mordeson, D. S. Malik, *Fuzzy Automata and Languages: Theory and Applications*, Chapman & Hall/CRC, 2002.

[65] J. N. Mordeson, D. S. Malik, N. Kuroki, *Fuzzy Semigroups*, Studies in Fuziness and Soft Computing, Vol. 131, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003.

[66] J. N. Mordeson, K. R. Bhutani, A. Rosenfeld, *Fuzzy Group Theory Studies in Fuzziness and Soft Computing*, Vol. 182, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.

[67] J. Pavelka, *On fuzzy logic I,II,III* , Math. Log. Grungl. Math.25,45-52, 119-134, 447-464 (1979)

[68] Y. Li, W. Pedrycz, *Fuzzy finite automata and fuzzy regular expressions with membersip values in lattice - ordered monoids*, Fuzzy Sets Syst., 156(2005), 68-92.

[69] Y. Li, W. Pedrycz, *Minimization of lattice finite automata and its application to the decomposition of lattice languages*, Fuzzy Sets Syst., 158(2007), 1423-1436.

[70] N. R. Reilly, *Complete regular semigroups as semigroups of partial transformations*, Semigr. Forum 48(1994) 50-62.

[71] J. Rhodes, B. Seinberg, *The q-theory of Finite Semigroups*, Springer, 2009.

[72] A. Rosenfeld, *Fuzzy groups*, J. Math. Anal. Appl., 35 (1971), 512-517. 7. B.

[73] B. Šešelja, *Matematika informatike*, Institut za matematiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 1985.

[74] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Fuzzy Boolean algebras*, Automated Reasoning, IFIP Transactions A-19, (North-Holland) 1992, 83-88.

[75] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Relational valued fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 52 (1992) 217-222.

[76] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Partially Ordered and Relational Valued Algebras and Congruences*, Review of Research, Faculty of Science, Mathematical Series 23 (1993), 273-287.

[77] B. Šešelja, A. Tepavčević, G. Vojvodić, *L-fuzzy sets and codes*, Fuzzy Sets and Systems 53 (1993) 217-222.

[78] B. Šešelja, A. Tepavčević, *On Generalizations of Fuzzy Algebras and Congruences*, Fuzzy Sets and Systems 65 (1994) 85-94.

[79] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Partially ordered and relational valued fuzzy relations I*, Fuzzy Sets and Systems 72 (1995) 205-213.

[80] B. Šešelja, *Lattice of partially ordered fuzzy subalgebras*, Fuzzy Sets and Systems 81 (1996) 265-269.

[81] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Fuzzy groups and collections of level subgoups*, Fuzzy Sets and Systems 83(1996) 85-91.

[82] B. Šešelja, A. Tepavčević, *A note on fuzzy groups*, YUJOR 7 (1997) 1 49-54.

[83] B. Šešelja, A. Tepavčević, *On a representation of posets by fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 98 (1998) 127-132

[84] B. Šešelja, *Poset valued varieties*, Novi Sad J.Math., 28,(1998), 65-73.

[85] B. Šešelja, A. Tepavčević, *On generation of finite posets by meet-irreducibles*, Discrete Mathematics, 186 (1998) 269-275.

[86] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Collection of finite lattices generated by a poset*, Order, 17 (2000) 129-139.

[87] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Posets via partial closure operators*, Contributions to General Algebra 12, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt 2000, 371-376.3.

[88] B. Šešelja, *Homomorphisms of Poset Valued Algebras*, Fuzzy Sets and Systems 121 (2001) 333-340

[89] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Weak Congruences in Universal Algebra*, Institute of Mathematics Novi Sad, 2001.

[90] B. Šešelja, A. Tepavčević, *A Note of CIP varieties*, Algebra Univers. 45 (2001) 349-351.

[91] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Completion of Ordered Structures by Cuts of Fuzzy Sets*, An Overview, Fuzzy Sets and Systems 136 (2003) 1-19.

[92] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Representing Ordered Structures by Fuzzy Sets*, An Overview, Fuzzy Sets and Systems 136 (2003) 21-39.

[93] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Posets Generated by Irreducible Elements*, Order 20 (2003) 79-89.

[94] B. Šešelja, A. Tepavčević, *A note on natural equivalence relation on fuzzy power set*, Fuzzy Sets and Systems 148 (2003) 201 - 210.

[95] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Cut equivalence of fuzzy relations*, EUSFLAT 2003 Proceedings, 270-273.

[96] B. Šešelja, A. Tepavčević, *A note on natural equivalence relation on fuzzy power set*, Fuzzy Sets and Systems, 148 (2004) 201-210.

[97] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Equivalent fuzzy sets*, Kybernetika 41 (2005), No.2, 115-128.

[98] B. Šešelja, *Teorija mreža*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2006.

[99] B. Šešelja, *Fuzzy Covering Relation and Ordering: An Abstract Approach, Computational Intelligence, Theory and Applications*, Bernd Reusch (Ed.), Springer, 2006, 295-300.

[100] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Fuzzifying Closure Systems and Fuzzy Lattices*, LNAI 4482, 111-118 (2007).

[101] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Fuzzy Ordering Relation and Fuzzy Poset*, LNCS 4815 (2007), 209-216.

[102] B. Šešelja, *L-fuzzy covering relation*, Fuzzy Sets and Systems 158 (22) (2007), 2456-2465.

[103] B. Šešelja, A. Tepavčević, *A note on atomistic weak congruence lattices*, Discrete Mathematics, 308 (2008), 2054-2057.

[104] B. Šešelja, A. Tepavčević, H. Vogler. *A note on cut-worthyness of recognizable tree series.* Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 3087-3090.

[105] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Fuzzy Identities.* In: Proceedings of FUZZ-IEEE 2009, pp. 1660-1663 (2009).

[106] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Weak fuzzy equivalence and equality relations*, S. Chaudhury et al. (Eds.): PReMI 2009, LNCS 5909, pp. 134-139, 2009.

[107] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Representation by Cuts in the Framework of Relational Valued Fuzzy Sets*, Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp 1656-1659. ISBN 978 1-4244 3597-52.

[108] B. Šešelja, D. Stojić, A. Tepavčević, *On existence of P-valued fuzzy sets with a given collection of cuts*, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 763-768.

[109] B. Šešelja, A. Tepavčević, *Diagrams of Fuzzy Orderings*, IPMU (1) 2010: 535-544

[110] M. Shabir, Y. B. Jun, Y. Nawaz, *Characterizations of regular semigroups by (α, β) -fuzzy ideals*, Computers & Mathematics with Applications 59 , Issue 1, 161-175, 2010.

[111] J. Shen, *On fuzzy regular subsemigroups of a semigroup*, Inf. Sci 51(1990) 111-120.

[112] A. Tepavčević, *On representation of lattices by weak congruences and weak tolerances*, Algebra and Model Theory, ed. by A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov, Novosibirsk, 1997, 173-181.

[113] A. Tepavčević, G. Trajkovski, *L-fuzzy lattices*, Fuzzy Sets and Systems 123, (2001), 209-216.

[114] G. Wen-Xiang, C. De-Gang, *A fuzzy subgroupoid which is not a fuzzy group*, Fuzzy Sets ans Systems 62, 115-116, 1994.

Branka Budimirović je rođena 1952. godine u Valjevu, Republika Srbija, gde je završila osnovnu školu i gimnaziju. Prirodno-matematički fakultet, grupa za matematiku, je završila u Beogradu. Poslediplomske studije, na grupi za algebru, je završila na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Magistarski rad pod naslovom "O jednoj klasi p-poluprstena" je odbranila na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu 2001. godine.

Radni odnos je zasnovala 1975. godine u Gimnaziji u Gornjem Milanovcu. Od 1976. do 1983. godine je radila u Pedagoškoj akademiji u Šapcu u zvanju predavača više škole. Od 1983. do 2008. godine je radila u Poljoprivrednoj školi u Šapcu. Od 2008. do 2010. godine je radila na Fakultetu za kompjuterske nauke Megatrend univerziteta u Beogradu na poslovima asistenta za užu naučnu oblast Matematika i užu naučnu oblast Računarstvo. Od 2010. godine radi na Visokoj školi strukovnih studija za vaspitače u Šapcu u zvanju predavača.

Novi Sad, 2011. Branka Budimirović

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija

VR

Autor: Branka Budimirović

AU

Mentor: prof. dr Andreja Tepavčević

MN

Naslov rada: Mrežno vrednosni identiteti i neke klase mrežno vrednosnih podalgebri

NR

Jezik publikacije: srpski(Latinica)

JP

Jezik izvoda: S/EN

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2011.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad

MA

Fizički opis rada: 5 poglavlja/142 strane/113 lit citata/1 tabele/8 slika/ 0 grafika/0 priloga

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Algebra

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: algebra, mreža, rasplinuti podskup, mrežno-vrednosna podalgebra, rasplinuta polugrupa, rasplinuta grupa, mrežno-vrednosni identitet, varijetet, rasplinuti homomorfizam

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Instituta za matematiku

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Neka je A neprazan skup i $\mathcal{L} = (L, \leq)$ proizvoljna mreža sa nulom i jedinicom. Svako preslikavanje $\bar{A} : A \longrightarrow L$ zovemo rasplinuti podskup od A. Uobičajeno je da se rasplinute podgrupe definišu na grupi. U radu su fazi podgrupe definisane na polugrupi kao i na rasplinutoj podpolugrupi. Jedan od glavnih rezultata je teorema o particiji rasplinutih kompletno regularnih polugrupa. Takođe su definisane rasplinute kongruencije i rasplinute jednakosti na rasplinutim podalgebrama neke algebre i ispitane njihove osobine. Uvedeni su pojmovi: podalgebre rasplinute podalgebre, rasplinutog homomorfizma rasplinute podalgebre na rasplinutu podalgebru i direktnog proizvoda rasplinutih podalgebri. Jedan od važnijih rezultata je teorema koja je uopštenje teoreme Birkhoff-a na rasplinutim strukturama.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća:
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
(Naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet)
KO

Predsednik: Dr Branimir Šešelja, redovni profesor Prirodno-matemati/v ckog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Miroslav Ćirić, redovni profesor Prirodno-matemati/v ckog fakulteta u Nišu
Član: Dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor Prirodno-matemati/v ckog fakulteta u Novom Sadu
Član: Dr Andreja Tepavčević, redovni profesor Prirodno-matemati/v ckog fakulteta u Novom Sadu, mentor

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monographic type

DT

Type of record: Text printed material

TR

Contents code: DSc degree thesis

CC

Author: Branka Budimirović

AU

Mentor: prof. dr Andreja Tepavčević

MN

Title: Lattice-valued Identities and an Classes of Lattice-valued Subalgebras

TI

Language of text: serbian (latinic)

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Srbija

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2011.

PY

Publisher:

PU

Publ. place: Novi Sad

PP

Physical description: 5 chapters/142 pages/113 literature/1 tables/8 pictures/ 0 graps/0 additional lists

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Algebra

SD

Subject/Key words: algebra, lattice, fuzzy subset, lattice valued algebra, fuzzy semigroup, fuzzy group, lattice valued identity, variety, fuzzy homomorphism

SKW

UC:

Holding data: Biblioteka Instituta za matematiku

HD

Note:

N

Abstract: Let A be nonemptu set, and let $\mathcal{L} = (L, \leqslant)$ be a lattice with 0 and 1. The mapping $\bar{A} : A \to L$ is called fuzzy subset of A. It is usual to define fuzzy subgroup on the group. In this work fuzzy semigroups are defined on the semigroup and on the fuzzy subsemigroup, too. As a main result is theorem about partition fuzzy completlu regular semigroup. Also, fuzzy congruences are defined, and fuzzy equolites on fuzzy subalgebras of an algebra and their propertes are investigated. We introduced some new notions: subalgebras of fuzzy subalgebras, fuzzy homomorphism of fuzzy subalgebra, and direct product of fuzzy subalgebras. One of the most important result is extension of Birkhoff's theorem on fuzzy structures.

AB

Accepted by the Scientific Board on:

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

(Degree/name/surname/title/faculty)

DB

President:Dr Branimir Šešelja, Full Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member: Dr Miroslav Ćirić, Full Professor, Faculty of Sciences, Niš
Member: Dr Ivica Bošnjak, Associate Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member:Dr Andreja Tepavčević, Full Professor, Faculty of Sciences, Novi Sad, menthor