UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Suzana Simić

Okviri i translaciono invarijantni prostori

- doktorska disertacija -

Novi Sad, *2011*.

Sadržaj

Predgovor **1**

1 Uvod **2**

2 Teorija distribucija i *Fourier*-ova analiza **5**

2.1 Prostor test funkcija 6

2.2 Definicija distribucija i osnovne osobine 8

2.3 Regularne distribucije 11

2.4 Operacije na prostoru distribucija 12

2.5 Prostor temperiranih distribucija 16

2.6 Periodične distribucije 20

2.7 Konvolucija distribucija 23

2.8 *Fourier*-ova analiza 26

2.9 *Fourier*-ova transformacija 26

2.10 Osnovni operatori 29

2.11 *Fourier*-ova transformacija brzo opadajućih funkcija 31

2.12 *Fourier*-ova transformacija temperiranih distribucija 33

2.13 Konvolucija sa temperiranom distribucijom 36

2.14 *Fourier*-ov red i *Poisson*-ova formula 37

3 Ultradistribucije **39**

3.1 Niz $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i njegove osnovne osobine 40

3.2 Ultradiferencijabilne funkcije i ultradistribucije *Beurling*-ovog i *Roumieu*-ovog tipa 41

3.3 Ultradiferencijabilne funkcije ultrapolinomnog rasta 43

3.4 Temperirane ultradistribucije 47

3.5 Periodične ultradistribucije 49

4 Teorija okvira **52**

4.1 Osnovni pojmovi i definicije 53

4.2 Okviri u *Hilbert*-ovim prostorima 55

4.3 Okviri i baze 59

4.4 Atomi u *Hilbert*-ovim prostorima 64

4.5 Okviri i atomi u *Banach*-ovim prostorima 66

4.6 Okviri za *Fréchet*-ove prostore 74

5 Okviri za translaciono invarijantne prostore sa težinama **79**

5.1 Translaciono invarijantni prostori 80

5.2 Prostori sa težinama i osnovne osobine 82

5.3 Okvir za translaciono invarijantni potprostor od L^p 87

5.4 Translaciono invarijantni prostori sa težinama generisani jednom funkcijom 90

5.5 Karakterizacija prostora $V^p_\mu(\Phi)$ 92

5.6 Veza sa periodičnim distribucijama i ultradistribucijama 107

5.7 Konstrukcija p-okvira 109

5.7.1 Okvir $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, r\}$ za koji su funkcije $\widehat{\phi}_i$, $i = 1, \dots, r$, sa kompaktnim nosačima; jednodimenzioni slučaj 110

5.7.2 d-dimenzioni slučaj, $d \geqslant 2$ 114

5.7.3 Konstrukcija okvira generisanog funkcijama sa kompaktnim nosačima; jednodimenzioni slučaj 116

Literatura **119**

Biografija **128**

Predgovor

Ova doktorska disertacija je deo rezultata, objedinjenih u celinu, dobijenih tokom višegodišnjeg rada pod mentorstvom profesora dr Stevana Pilipovića. Oblast istraživanja ove disertacije je teorijsko razmatranje okvira za translaciono invarijantne potprostore prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ i primena dobijenih rezultata pri konstrukciji odgovarajućih okvira i *Riesz*-ovih baza.

Koristim ovu priliku da se zahvalim mentoru akademiku dr Stevanu Pilipoviću na stručnoj pomoći i velikoj podršći koju mi je svakodnevno pružao tokom izrade doktorske disertacije. S obzirom da je on inicijator velikog dela ovog istraživanja, njegove sugestije su prisutne u mnogim delovima rada. Zahvaljujem se i dr Nenadu Teofanovu na konstantnoj saradnji, stručnoj pomoći i velikoj podršci. Diskusije sa njim su uvek bile veoma korisne i značajno su mi pomogle u razumevanju ideja i prevazilaženju teškoća. Takođe, zahvalila bih se profesorima dr Arpadu Takačiju i dr Ljubici Oparnici na detaljno pročitanom radu i korisnim sugestijama. Zahvaljujem se ovom prilikom profesorima dr Miroslavu Petroviću i dr Dragiću Bankoviću što su me upoznali sa profesorom dr Stevanom Pilipovićem i usmerili na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu. Prvenstveno od svog mentora, a potom i od drugih zaposlenih na Departmanu za matematiku i informatiku, naučila sam mnogo o profesionalnosti, požrtvovanosti, korektnosti i kolegijalnosti. Veliki doprinos pri tehničkoj izradi ovog rada dali su dr Nebojša Ikodinović i dr Marija Stanić, stoga im se zahvaljujem na uloženom trudu oko čitanja teksta i svim primedbama i sugestijama. Zahvalila bih se na pomoći, razumevanju i strpljenju svim svojim kolegama, prijateljima i porodici.

Novi Sad, 6. septembar 2011. Suzana Simić

Glava 1

Uvod

Uloga matematičkih istraživanja u rešavanju velikog broja problema u nauci i društvu je u zadivljujućem porastu, pri čemu vodeću ulogu ima upotreba harmonijske analize. Moderna harmonijska analiza uključuje različite matematičke oblasti, pre svega teoriju okvira, *Banach*-ovu algebru, *Fourier*-ovu analizu, vremensko-frekvencijsku analizu, geometriju fraktala, i razne druge.

Teorija okvira spada u granu savremene matematičke analize koja beleži nagli razvoj u poslednjoj deceniji. Tome je prvenstveno doprinelo široko polje primena, pre svega u signalnoj analizi.

U svom radu „Teorija komunikacija", *Gabor* je 1946. godine dao osnovni pristup dekompoziciji signala u terminima elementarnih signala. Ukazujući na neke probleme u teoriji neharmonijskih *Fourier*-ovih redova, *Duffin* i *Schaeffer* [41] su 1952. godine iskoristili *Gabor*-ov metod da bi definisali okvire za *Hilbert*-ov prostor. Predstavili su ih kao alternativu za ortonormiranu ili *Riesz*-ovu bazu u *Hilbert*-ovom prostoru. Tek nakon skoro 30 godina, *Young* u svojoj knjizi [123] daje osnovne činjenice vezane za okvire, ali ih i dalje koristi u kontekstu neharmonijskih *Fourier*-ovih redova. Godine 1986. *Daubechies*, *Grossmann* i *Meyer* [38] ukazuju na činjenicu da se okvirima mogu dobiti razvoji funkcija iz $L^2(\mathbb{R})$ veoma slični onima sa ortonormiranom bazom. Smatra se da je tada teorija okvira otvorila svoje prvo poglavlje u velikoj knjizi harmonijske analize i započela „era vejvleta", sa kojom je uspostavljen zajednički matematički jezik između različitih disciplina primenjene i teorijske matematike. Najznačajnija uloga teorije okvira u savremenim matematičkim istraživanjima je povezivanje srodnih ideja iz različitih oblasti nauke, odnosno upotreba zajedničkog jezika za teorije i tehnike koje su na prvi pogled nepovezane, a koristile su se i pre uvođenja pojma okvir.

Posebno interesantna oblast istraživanja je teorija okvira u prostorima koji nisu *Hilbert*-ovi. *Gröchenig* uvodi pojam *Banach*-ovog okvira [54], a nakon toga mnogi matematičari upotpunjuju ovu teoriju ([4, 24, 25, 30, 31, 44, 103]). Razvijena teorija *Banach*-ovi okvira iskorišćena je da bi se dobile reprezentacione teoreme u projektivnoj i induktivnoj granici *Banach*-ih prostora i da bi se uveo pojam *Fréchet*-ovog okvira za dati *Fréchet*-ov prostor u odnosu na *Fréchet*-ov prostor nizova ([91, 92]).

Do sredine devedesetih godina prošlog veka, teorija okvira je postala značajno oruđe u raznim granama nauke i tehnike, sa uveliko razvijenom softverskom podrškom. Kao prednosti upotrebe okvira u raznim algoritmima navode se brzina, efikasnost, kompresija podataka, brzina numeričkih izračunavanja, otklanjanje šuma. Pri prenosu podataka internetom, koriste se koeficijenti razlaganja nekog signala i odgovarajući aparat linearne algebre i numeričke matematike za izradu brzih i pouzdanih algoritama koji dati signal razlažu, obrađuju, prenose, skladište i rekonstruišu. Uslov ortogonalnosti onemogućava da se izgubljeni koeficijenti rekonstruišu iz dobijenih, tako da se deo informacija koje oni nose zauvek gubi. Pri prenosu slike ili zvuka, ispostavlja se da algoritmi zasnovani na rezultatima linearne algebre, numeričke analize, teorije operatora postaju efikasniji ako se odustane od uslova jedinstvenosti. Na taj način najznačajnije osobine ortonormiranih baza, linearna nezavisnost i ortogonalnost, dovode do ozbiljnih poteškoća. Sa druge strane, okviri se mogu konstruisati tako da ispune izvesne specifičnosti koje priroda problema nameće. Danas se teorija okvira koristi za kompresiju snimaka otisaka prstiju koji čine kartoteku FBI-a, otklanjanje šuma kod audio signala, belog šuma sa fotografija snimljenih pomoću satelita, određivanje nivoa različitih slojeva zemlje na osnovu refleksije akustičnih talasa emitovanih sa površine, itd.

Veliki značaj *Laplace*-ove i *Fourier*-ove transformacije u inženjerstvu doveo je do potrebe da se definišu najšire klase prostora u kojima su navedene transformacije dobro definisane. Pokazalo se da pojam funkcije u klasičnom smislu nije dovoljan da se postave i rešavaju matematički modeli koji opisuju pojave iz prirode. Tridesetih godina XX veka, čuveni fizičar *Dirac* je definisao *Dirac*-ovu delta funkciju. U radu na teoriji parcijalnih integralnih jednačina *Sobolev* je izvršio generalizaciju pojma funkcije uvodeći pojam slabog izvoda i uopštene funkcije preko dualnosti. Međutim, sredinom prošlog veka, *Schwartz* je dao kompletan teorijski prikaz teorije distribucija, pa se smatra osnivačem teorije uopštenih funkcija. Zbog invarijantnosti u odnosu na *Fourier*-ovu transformaciju od velikog značaja je prostor temperiranih distribucija. Činjenica da je rast temperiranih distribucija polinomno ograničen čini prostor temperiranih distribucija neodgovarajućim za primenu u problemima u kojima se posmatraju funkcije skoro eksponencijalnog rasta. Teorija ultradistribucija predstavlja sastavni deo teorije distribucija i proširuje rezultate o *Schwartz*-ovim distribucijama na širu klasu objekata ([72, 73, 74, 75]). Ultradistribucije se koriste za proučavanje evolucionih jednačina i imaju primenu u kvantnoj teoriji polja i mikrolokalnoj analizi. Uvedene su u želji da se u kvantnoj teoriji polja proučavaju pojave koje umesto polinomnog imaju skoro eksponencijalno opadanje u vremensko-frekvencijskoj ravni. Posebno su istraživane temperirane ultradistribucije kao uopštenje temperiranih distribucija ([70, 86, 87, 88, 110, 112]). U disertaciji je pokazana povezanost između dualnih prostora odgovarajućih *Fréchet*-ovih prostora i prostora temperiranih distribucija i ultradistribucija.

Disertacija se sastoji od pet glava. Prva glava je uvodnog karaktera. Daje se motivacija za rad sa translaciono invarijantnim prostorima i ukazuje na veliki značaj teorije okvira. U drugoj glavi su navedeni osnovni pojmovi teorije distribucija i *Fourier*-ove analize. Zbog važne uloge i široke lepeze primena, u prvoj glavi dajemo osnovne pojmove i važne rezultate ovih matematičkih oblasti. U trećoj glavi su date definicije i svojstva ultradistribucija. Osnovni pojmovi i rezultati iz teorije ultradistribucija su navedeni zbog kompletnosti izlaganja, mada se pri prvom čitanju ova glava može preskočiti. Smatramo da će rezultati poglavlja 5.6 biti jasniji ako se poznaju osnovna svojstva ultradistribucija. U četvrtoj glavi prikazani su osnovni rezultati teorije okvira u *Hilbert*-ovim, *Banach*-ovim i *Fréchet*-ovim prostorima, ukazujući na to da je teorija okvira veoma moćno sredstvo u analizi velikog broja prostora i distribucija. Navedene su prednosti, ali i nedostaci okvira u odnosu na baze i uspostavljena veza između baza, ortonormiranih baza, *Riesz*-ove baze i okvira.

U petoj glavi posmatraćemo konkretne translaciono invarijantne prostore. Njihova prednost se ogleda u tome što se zadržava jednostavnost i struktura prostora, pa su samim tim fleksibilniji za aproksimaciju realnog podatka. Koriste se u metodi konačnih elemenata, teoriji aproksimacija, za konstrukciju multirezolucijskih aproksimacija i teoriji vejvleta ([3, 4, 5, 6, 7, 21, 29, 32, 33, 35, 63, 85, 115]). Izloženi su svi dosadašnji rezultati o okvirima u translaciono invarijantnim prostorima, i dati originalni rezultati o karakterizaciji prostora generisanim translacijama funkcija koje čine okvir za potprostor prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pokazano je da takav okvir predstavlja moćno sredstvo u analizi prostora temperiranih distribucija i ultradistribucija. Data je konstrukcija p-okvira i p-*Riesz*-ovih baza za različite zatvorene potprostore prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ generisane translacijama funkcija koje čine okvir. Originalni rezultati ove glave (poglavlje 5.4; poglavlja 5.5 i 5.6) prihvaćeni su za štampanje ([107], [89], respektivno). Takođe, pregled osnovnih rezultata koji su opisani u poglavlju 5.4 izložen je na naučnom skupu „Approximation & Computation 2008”, Niš, 2008. U radu [90] su prikazani rezultati poglavlja 5.7.

Glava 2

Teorija distribucija i *Fourier*-ova analiza

Da bi se lakše pratilo izlaganje osnovnih rezultata u disertaciji u ovoj glavi se navode osnovne oznake, definicije i alatke koje će se koristiti u nastavku. U poglavlju 2.1 navodimo osnovne pojmove lokalno konveksnih vektorsko topoloških prostora. U poglavljima 2.2-2.4 uvode se prostori distribucija i navode osnovne osobine i operacije nad njima. S obzirom da je za dalje izlaganje potrebno poznavanje prostora temperiranih i periodičnih distribucija, u poglavljima 2.5 i 2.6 se navode osnovni pojmovi i osobine ovih potprostora prostora distribucija. Poslednjih sedam poglavlja ove glave biće posvećeno teoriji *Fourier*-ove transformacije koja zajedno sa teorijom distribucija čini veoma moćan matematički aparat, korišćen pri dobijanju osnovnih rezultata disertacije.

Teorija uopštenih funkcija je nastala u želji da se matematičkim modelima raznih procesa, koji nisu bili matematički jasno zasnovani, nađe pravilan matematički pristup i omoguće rešenja koja će imati prirodan smisao.

Uopštene funkcije su prvi put uvedene od strane *Sobolev*-a 1930. godine, ali je u monografiji „Teorija distribucija" [100] *Schwartz* prvi objavio sistematizovanu teoriju jedne klase uopštenih funkcija, distribucija.

U klasičnoj analizi neprekidne funkcije ne moraju biti diferencijabilne. Distribucije su, grubo govoreći, generalizacija koncepta funkcija tako da svaka neprekidna funkcija bude diferencijabilna. Njen izvod, pri tom, nije funkcija, već distribucija. Štaviše, svaka distribucija je diferencijabilna i njen izvod je distribucija.

Naziv distribucija se koristi za elemente *Schwartz*-ovog prostora $\mathcal{D}'$ ili nekog njegovog potprostora, dok se za neprekidne linearne funkcionele nad proizvoljnim prostorom osnovnih (test) funkcija koristi naziv uopštena funkcija. Teorija uopštenih funkcija je matematički aparat matematičke fizike, teorije linearnih i nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, harmonijske analize, teorije pseudodiferencijalnih i *Fourier*-ovih integralnih operatora.

2.1 Prostor test funkcija

U ovom poglavlju biće izložene definicije i osobine osnovnih struktura koje ćemo koristiti u daljem radu.

Sa $\mathbb{R}^d$ ćemo označavati d-dimenzioni prostor čiji su elementi uređene d-torke realnih brojeva $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, snabdeven uobičajenom topologijom, a sa $\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva. Skup uređenih d-torki $(k_1, k_2, \ldots, k_d)$ nenegativnih celih brojeva označavaćemo sa $\mathbb{Z}_+^d$ i pod $|k|$ podrazumevati $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_d$. Ako je $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ i $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, tada je $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_d^{\alpha_d}$. Za $\mathbb{Z}_+^1$ ćemo koristiti kraću oznaku $\mathbb{Z}_+$. Sa Ω ćemo označavati otvoren podskup od $\mathbb{R}^d$.

Za funkciju $f : \Omega \to \mathbb{R}$ komplement najvećeg otvorenog skupa Ω' na kome je f identički jednaka nuli nazivamo nosačem funkcije f i označavamo sa $\operatorname{supp} f$.

Uvešćemo neke prostore funkcija potrebne za definisanje pojma distribucija.

Definicija 2.1. *$C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{Z}_+$ ili $m = \infty$, je skup svih funkcija koje su definisane na Ω i imaju sve neprekidne izvode do reda m, gde je k-ti izvod označen sa*

$$f^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|}}{\partial {x_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial {x_d}^{k_d}} f(x) = \partial^k f(x), \quad k = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d.$$

$C_0^m(\Omega)$ je podskup od $C^m(\Omega)$ onih elemenata čiji u nosači kompaktni u Ω.

Funkcije $f \in C^\infty(\Omega)$ nazivamo glatkim funkcijama.

Primer 2.1. *Funkcija* $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$ $|x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_d|^2$, *je element prostora $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ i njen nosač je sadržan u zatvorenoj kugli $B[\mathbf{0}, 1]$ sa centrom u $\mathbf{0}$ i poluprečnika 1.*

Neka je K kompaktan podskup od Ω. Prostor $C_0^\infty(K)$ je lokalno konveksan prostor[1] sa nizom normi $p_{K,m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, datim sa

$$p_{K,m}(\phi) = \sum_{|j| \leqslant m} \sup_{x \in K} \left| \partial^j \phi(x) \right|. \tag{2.1}$$

Jednu bazu okolina nule čine skupovi

$$U_{K,m,n} = \left\{ \phi \in C_0^\infty(K) \mid p_{K,m}(\phi) < \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}_+.$$

[1]Vektorsko topološki prostor (X, τ) je lokalno konveksan prostor ako ima bazu okolina nule sastavljenu od konveksnih skupova.

Definicija 2.2. *Vektorski prostor $C_0^\infty(K)$ snabdeven navedenom topologijom je lokalno konveksan prostor $\mathcal{D}(K)$.*

U ovoj topologiji niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{D}(K)$ konvergira ka $\phi \in \mathcal{D}(K)$ ako i samo ako $\{\phi_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno na K ka $\phi^{(j)}$, za svako $j \in \mathbb{Z}_+^d$.

Neka su K_1 i K_2 dva kompaktna skupa takva da je $K_1 \subset K_2$. Tada je $C_0^\infty(K_1) \subset C_0^\infty(K_2)$ i topologija u $\mathcal{D}(K_1)$ se poklapa sa topologijom koju $\mathcal{D}(K_2)$ indukuje na $\mathcal{D}(K_1)$. Za otvoren neprazan skup $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ može se konstruisati niz kompaktnih skupova K_n, $n \in \mathbb{N}$, takvih da je

$$K_n \subset K_{n+1}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega.$$

Niz lokalno konveksnih prostora $\{\mathcal{D}(K_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ u odnosu na identička preslikavanja $i_s^n : \mathcal{D}(K_n) \to \mathcal{D}(K_s)$, $n \leqslant s$, obrazuje striktni induktivni spektar u odnosu na koji uvodimo u $C_0^\infty(\Omega)$ topologiju striktne induktivne granice. Ova topologija je najfinija lokalno konveksna topologija u $C_0^\infty(\Omega)$ za koju su identička preslikavanja $i^n : \mathcal{D}(K_n) \to C_0^\infty(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, neprekidna.

Definicija 2.3. *Vektorski prostor $C_0^\infty(\Omega)$ koji je snabdeven definisanom topologijom striktne induktivne granice je prostor $\mathcal{D}(\Omega)$. Ovaj prostor se naziva prostor osnovnih ili test funkcija.*

Primer 2.2. *Neka je $\psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$. Tada $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, jer su parcijalni izvodi neprekidne funkcije i teže nuli kad $x \to 0$. Za funkciju $\phi(x) = \psi(x)\psi(1-x)$, $x \in \mathbb{R}$, važi $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ i $\phi(x) = 0$, $x \notin (0,1)$, pa $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ili $\phi \in \mathcal{D}(a,b)$, $a < 0$ i $b > 1$.*

Sledeći primer ilustruje konvergenciju u $\mathcal{D}(\Omega)$.

Primer 2.3. *Neka je dat niz $g_n(x) = f(x)/n$, $n \in \mathbb{N}$, gde je f funkcija iz primera* 2.1. *Svi članovi niza imaju isti nosač $B[\mathbf{0}, 1]$, koji je kompaktan skup u $\mathbb{R}^d$. Niz $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira u $\mathcal{D}(B[\mathbf{0},1])$ ka nuli, pa samim tim konvergira u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Međutim, niz $f_n(x) = (1/n)f(x/n)$, $n \in \mathbb{N}$, ne konvergira u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ jer je $\operatorname{supp} f_n(x) = B[\mathbf{0}, n]$, pa ne postoji kompaktan skup K u kome leže nosači svih članova niza $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Teorema 2.1 ([106])**.** *Prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ je kompletan.*

Dokazaćemo jednu osobinu prostora test funkcija koja će nam biti važna za dalji rad.

Teorema 2.2. *Linearno preslikavanje prostora $\mathcal{D}(\Omega)$ u lokalno konveksan prostor je neprekidno ako i samo ako je neprekidno na $\mathcal{D}(K)$ za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$.*

Dokaz. Neka je K proizvoljan kompaktan podskup od Ω i neka je $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih skupova koji zadaje induktivnu granicu. Postoji bar jedan član ovog niza, npr. K_{n_0}, takav da je $K \subset K_{n_0}$. Posmatrajmo niz $K, K_{n_0}, K_{n_0+1}, \ldots$. Ovaj niz je sačuvao tražene osobine i daje istu induktivnu granicu kao niz $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pa je i preslikavanje na $\mathcal{D}(K)$ neprekidno. □

2.2 Definicija distribucija i osnovne osobine

U fizici se nailazi na veličine koje imaju vrlo veliku vrednost, pa i beskonačno veliku vrednost na vrlo malom domenu, a izvan njega su jednake nuli. U jednodimenzionom slučaju, taj domen je u stvari vrlo mali segment, a u trodimenzionom mali zapreminski element. Na primer, prilikom difrakcije svetlosti intenzitet može biti jako veliki na vrlo malom domenu, a da ostali maksimumi difrakcione slike praktično budu jednaki nuli (videti [66]).

U ovom odeljku ćemo definisati pojam distribucija, navesti bitne osobine i ukazati na prirodnu potrebu njihovog uvođenja.

Definicija 2.4. *Neprekidna linearna funkcionela nad prostorom $\mathcal{D}(\Omega)$ naziva se distribucija.*

Za distribucije koristimo iste oznake kao i za funkcije, npr. f, g, i to su preslikavanja iz $\mathcal{D}(\Omega)$ u $\mathbb{C}$, što simbolički označavamo sa

$$f : \phi \to (f, \phi).$$

Neprekidnost linearne funkcionele f na $\mathcal{D}(\Omega)$ je okarakterisana teoremom 2.2, dok pod linearnošću podrazumevamo

$$(f, a_1\phi_1 + a_2\phi_2) = a_1(f, \phi_1) + a_2(f, \phi_2), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{C},\ \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Neka $f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Tada, za svako $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, važi:

1° $(f_1 + f_2, \phi) = (f_1, \phi) + (f_2, \phi)$,

2° $(cf, \phi) = c\,(f, \phi), \quad c \in \mathbb{C}$,

pa je skup distribucija vektorski prostor, dualni prostor od $\mathcal{D}(\Omega)$ i označavamo ga sa $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dirac je 1926. godine uveo u kvantnu mehaniku, i fiziku uopšte, matematičku oznaku za takve slučajeve definišući δ-distribuciju, koja se naziva i *Dirac*-ova delta distribucija.

Primer 2.4. 1) *Neka je $x_0 \in \Omega$. Dirac-ova distribucija data je sa*

$$(\delta(x-x_0), \phi(x)) := \phi(x_0), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Kako za $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ i $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi

$$\begin{aligned} a_1(\delta(x-x_0), \phi_1(x)) + a_2(\delta(x-x_0), \phi_2(x)) &= a_1\phi_1(x_0) + a_2\phi_2(x_0) \\ &= (\delta(x-x_0), (a_1\phi_1 + a_2\phi_2)(x)), \end{aligned}$$

zaključujemo da je $\delta(\cdot - x_0)$ linearna funkcionela. Dokažimo da je neprekidna. Neka je $U = B(\phi(x_0), \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, proizvoljna okolina od $\phi(x_0) \in \mathbb{C}$. Tada je $V = \{\psi \in \mathcal{D}(K) \mid p_{K,0}(\psi - \phi) < 1/n,\ 1/n < \varepsilon\}$ okolina u $\mathcal{D}(K)$ koja se preslikava u U, gde je $p_{K,0}$ definisano sa (2.1). *Dakle, $\delta(\cdot - x_0)$ je neprekidna na svakom kompaktnom skupu K. Na osnovu teoreme* 2.2, *zaključujemo da je $\delta(\cdot - x_0)$ neprekidna linearna funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$, tj. distribucija.*

2) *Neka je $n \in \mathbb{Z}_+^d$ i Ω otvoren skup koji sadrži nulu. Sa $\delta^{(n)}(x) : \phi \to \phi^{(n)}(0)$ definisana je neprekidna linearna funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$, jer za nju važi*

$$|(\delta^{(n)}, \phi)| = |\phi^{(n)}(0)| \leqslant p_{K,|j|}(\phi), \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),\ \operatorname{supp}\phi \subset K.$$

Već smo pomenuli da modelirajući razne procese u prirodi dobijamo diferencijalne jednačine čija su rešenja funkcije koje u opštem slučaju ne moraju da budu diferencijabilne u svim tačkama. U nekim slučajevima moguće je zanemariti tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna i posmatrati dobijenu funkciju kao rešenje date parcijalne diferencijalne jednačine. Međutim, ako u $\mathbb{R}^2$ posmatramo *Laplace*-ovu jednačinu

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0,$$

njeno rešenje u $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ je $u(x_1, x_2) = c_1 \ln(x_1^2 + x_2^2) + c_2$, gde su c_1 i c_2 konstante. Pri tome, $\triangle u(\mathbf{0})$ nije definisana. Međutim, ako rešenje $u = \ln(x_1^2 + x_2^2)$ posmatramo kao distribuciju u $\mathbb{R}^2$, ono ne zadovoljava *Laplace*-ovu jednačinu, već jednačinu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = c\delta,$$

gde je c constanta, a δ *Dirac*-ova distribucija. Ove činjenice su korisne za rešavanje *Poisson*-ove jednačine $\triangle u = f$.

Sledeće teoreme daju važne karakteristike distribucija. Dokaz prve teoreme može se naći u [106].

Teorema 2.3. *$f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ako i samo ako za svaki niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{D}(\Omega)$ koji konvergira ka nuli sledi da niz $\{(f, \phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka nuli u skupu kompleksnih brojeva.*

Uslovi dati u narednoj teoremi često se uzimaju za definiciju distribucija.

Teorema 2.4. *Potreban i dovoljan uslov da linearna funkcionela* $f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *bude distribucija jeste da za svaki kompaktan skup* $K \subset \Omega$ *postoji konstanta* $C > 0$ *i postoji* $n \in \mathbb{Z}_+$ *tako da za svako* $\phi \in \mathcal{D}(K)$ *važi*

$$|(f, \phi)| \leqslant C p_{K,n}(\phi). \tag{2.2}$$

Dokaz. Ako niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergira ka nuli, iz nejednakosti (2.2) sledi da niz $\{(f, \phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka nuli u polju kompleksnih brojeva. Koristeći teoremu 2.3, zaključujemo da $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Pretpostavimo da $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i da uslov (2.2) ne važi. Tada postoji niz funkcija $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{D}(K)$ takav da za neki kompaktan skup K važi

$$|(f, \phi_n)| > n p_{K,n}(\phi_n). \tag{2.3}$$

Posmatrajmo niz $\psi_n = \dfrac{\phi_n}{(f, \phi_n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Koristeći nejednakost (2.3), imamo da je

$$p_{K,n}(\psi_n) = \frac{p_{K,n}(\phi_n)}{|(f, \phi_n)|} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Dakle, niz $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka nuli u $\mathcal{D}(K)$ jer za svako $j \in \mathbb{N}$ važi

$$p_{K,j}(\psi_n) \leqslant p_{K,n}(\psi_n) \leqslant \frac{1}{n}, \quad n \geqslant j.$$

Sa druge strane je $(f, \psi_n) = 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$, pa niz $\{(f, \psi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne može da konvergira ka nuli. To je u kontradikciji sa pretpostavkom da $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. □

Ako se broj n u teoremi 2.4 može izabrati tako da ne zavisi od K, za distribuciju kažemo da je konačnog reda. Najmanje takvo n naziva se red distribucije.

Nosač distribucije $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, u oznaci $\operatorname{supp} u$, je komplement unije svih otvorenih skupova u Ω nad kojim je $u = 0$. Sledeća teorema govori da svaka distribucija sa kompaktnim nosačem mora biti konačnog reda.

Teorema 2.5 ([96])**.** *Neka je* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *i neka je* $\operatorname{supp} u$ *kompaktan skup. Tada postoji* $C > 0$ *i* $n \in \mathbb{Z}_+$ *tako da je* $|(u, \phi)| \leqslant C p_{K,n}(\phi)$, *za svako* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *(tj.* C *ne zavisi od* ϕ*).*

Obrnuto tvrđenje u teoremi 2.5 ne važi. Zaista, ako pretpostavimo da je $u(x) = c \neq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$, tada je $\operatorname{supp} u = \mathbb{R}$ koji nije kompaktan. Međutim, za neki kompaktan skup K i svako $\phi \in C_0^\infty(K)$ imamo:

$$|(u, \phi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} c\, \phi(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant |c| \operatorname{diam} K \|\phi\|_\infty.$$

Dakle, u je reda nula, ali njen nosač nije kompaktan skup.

U prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$ slaba topologija definisana je familijom seminormi $\|f\|_\phi = |(f, \phi)|$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a jaka familijom seminormi $\|f\|_B = \sup\limits_{\phi\in B}\{|(f, \phi)|\}$, gde je B ograničen podskup od $\mathcal{D}(\Omega)$.

2.3 Regularne distribucije

Dve različite funkcije mogu da definišu jednu istu distribuciju ako su jednake skoro svuda. Na primer, funkcija $f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ i nula funkcija određuju istu distribuciju, nula distribuciju, jer je $\int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = 0$ za svaku funkciju ϕ iz $\mathcal{D}(\Omega)$. Funkcija f za koju integral $\int_\Omega f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$ apsolutno konvergira za svaku funkciju $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ naziva se lokalno integrabilna funkcija. Skup svih lokalno integrabilnih funkcija označavamo sa $L^1_{loc}(\Omega)$. Svaka integrabilna funkcija je i lokalno integrabilna, ali obrnuto nije tačno. Na primer, funkcija $f \equiv 1$ je lokalno integrabilna, ali nije integrabilna na $\mathbb{R}^d$. Svakoj lokalno integrabilnoj funkciji f pridružujemo distribuciju f datu sa

$$(f, \phi) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Definicija 2.5. *Distribucije definisane lokalno integrabilnim funkcijama sa* (2.4) *nazivaju se regularne distribucije.*

Sledeća teorema pokazuje da je $L^1_{loc}(\Omega)$ izomorfan sa potprostorom regularnih distribucija. Dokaz ove teoreme nećemo navoditi i može se naći u [106].

Teorema 2.6. *Ako $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ i ako je $(f,\phi) = (g,\phi)$ za svako ϕ iz $\mathcal{D}(\Omega)$, tada su f i g jednake skoro svuda, tj. različitim elementima iz $L^1_{loc}(\Omega)$ su generisane različite distribucije.*

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da je $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, pa identifikujemo regularne distribucije i odgovarajuće funkcije iz $L^1_{loc}(\Omega)$. Međutim, nisu sve distribucije regularne što se vidi u sledećem primeru.

Primer 2.5. *Dokažimo da Dirac-ova δ-distribucija nije regularna. Pretpostavimo da je regularna. Tada postoji lokalno integrabilna funkcija δ takva da je*

$$\phi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \delta(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \phi(x) \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Posmatrajmo $\phi_\varepsilon(x) = f(\varepsilon^{-1}x_1, \dots, \varepsilon^{-1}x_d)$, gde je

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases} \qquad |x|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_d|^2.$$

Kako je $\phi_\varepsilon(0) = \mathrm{e}^{-1}$ i $|\phi_\varepsilon(x)| \leqslant 1$, $\phi_\varepsilon(x) = 0$, $|x| \geqslant \varepsilon$, dobijamo

$$\mathrm{e}^{-1} = \int\limits_{|x|<\varepsilon} \delta(x)\,\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon^2}{|x|^2-\varepsilon^2}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{|x|<\varepsilon} \delta(x)\,\mathrm{d}x.$$

Poslednji integral teži nuli kad $\varepsilon \to 0$, što daje kontradikciju, pa zaključujemo da δ-distribucija nije regularna.

Prostori $L^p(\Omega)$, $C_0(\Omega)$ i $L^p_{loc}(\Omega)$ su potprostori od $L^1_{loc}(\Omega)$ koji sadrže gust skup $C_0^\infty(\Omega)$, i mogu se identifikovati sa odgovarajućim podskupovima u skupu regularnih distribucija.

2.4 Operacije na prostoru distribucija

U ovom poglavlju videćemo koje operacije nad test funkcijama mogu biti proširene na prostor distribucija, a koje ne mogu biti definisane na čitavom prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$. Time će se dobiti jasnija slika o samom prostoru distribucija.

Neka je dat niz funkcija $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sa $f_n(x) = 0$, $|x| > \frac{1}{n}$, i $\int\limits_{-1/n}^{1/n} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Za niz regularnih distribucija

$$(f_n, \phi) = \int\limits_{-1/n}^{1/n} f_n(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

važi da je $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n,\phi) = \phi(0) = (\delta,\phi)$. Dakle, δ-distribucija se može posmatrati kao granična vrednost niza test funkcija. Ako posmatramo $f_n(x - x_0)$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, tada smenom promenljivih dobijamo

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f_n(x - x_0)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\phi(x + x_0)\,\mathrm{d}x,$$

i prema tome

$$(\delta(\cdot - x_0), \phi) = (\delta, \phi(\cdot + x_0)) = \phi(-x_0).$$

S obzirom na to da za svaku distribuciju $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ postoji niz test funkcija $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji teži ka f u smislu distribucija (videti teoremu 2.17), zaključujemo da bi svaka operacija T nad test funkcijama, ako postoji $\lim\limits_{n\to\infty} T\phi_n$, trebalo da bude proširena na prostor distribucija sa $Tf := \lim\limits_{n\to\infty} T\phi_n$.

Uvešćemo sada nekoliko važnih operacija u $\mathcal{D}'(\Omega)$ koje prirodno proističu iz odgovarajućih operacija u skupu $L^1_{loc}(\Omega)$.

Neka je $x = Ay + b$, gde je A regularna linearna transformacija skupa Ω_1 u Ω i $b \in \mathbb{R}^d$. Za svako $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ posmatrajmo preslikavanje

$$(f(Ay + b), \phi(y)) := \Big(f(x), \frac{\phi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|}\Big), \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega_1). \tag{2.5}$$

Kako je $\phi(y) \mapsto \phi(A^{-1}(y-b))$ neprekidno preslikavanje iz $\mathcal{D}(\Omega_1)$ u $\mathcal{D}(\Omega)$, imamo da $f(Ay+b) \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$.

Sledeće operacije se mogu dobiti iz (2.5) nad čitavim $\mathcal{D}(\Omega)$.

1° Translacija se dobija za $A = I$, $b = -h = (-h_1, \dots, -h_d)$, tj.

$$(f(x-h), \phi(x)) := (f(x), \phi(x+h)).$$

2° Transpozicija se dobija za $A = -I$, $b = 0$, tj. $(f(-x), \phi(x)) := (f(x), \phi(-x))$.

3° Za homotetiju je $A = aI$, $b = 0$, čime dobijamo

$$(f(ax), \phi(x)) := \big(f(x), |a|^{-d}\phi(xa^{-1})\big).$$

4° Ako je ψ regularna distribucija generisana glatkom funkcijom, onda je moguće definisati proizvod distribucije ψ i bilo koje druge distribucije f sa

$$(\psi(x)f(x), \phi(x)) := (f(x), \psi(x)\phi(x)).$$

Da bi ova definicija bila korektna, pokazaćemo da je $\psi\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i da je ψf linearna neprekidna funkcionela na $\mathcal{D}(\Omega)$.

Za svako $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, funkcija $\psi\phi$ je glatka svuda i nula u onim tačkama u kojima je ϕ nula. Dakle, $\psi\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Lako se pokazuje da je ψf linearna funkcionela. Za niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ test funkcija koje teže nuli, niz $\{\psi\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takođe konvergira ka nuli u $\mathcal{D}(\Omega)$. Pošto je f linearna funkcionela, niz $\{(\psi f, \phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(f, \psi\phi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ teži nuli, što implicira neprekidnost funkcionele ψf.

Postoje, međutim, operacije koje nisu definisane na čitavom $\mathcal{D}'(\Omega)$. To su operacije navedene pod 5° i 6°.

5° Najveći problemi kvantne teorije polja poističu iz nemogućnosti definisanja množenja distribucija za proizvoljne elemente prostora $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Na primer, ako u jednodimenzionom slučaju posmatramo $f(x) = \big(\sqrt{|x|}\big)^{-1}$, onda je f lokalno integrabilna funkcija kao i regularna distribucija. Ali $(f(x))^2$ je funkcija koja je definisana za svako $x \neq 0$ i nije integrabilna ni na jednom intervalu koji sadrži nulu. Ovo znači da ona ne određuje distribuciju izrazom

$$\big(|x|^{-1}, \phi\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)|x|^{-1}\,\mathrm{d}x,$$

pošto integral ne konvergira za svako $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dakle, proizvod ove distribucije sa samom sobom ne postoji kao distribucija.

Moguće je definisati proizvod distribucija u specijalnim slučajevima. Videli smo da je uvek moguće definisati proizvod regularne distribucije ψ generisane glatkom funkcijom i bilo koje distribucije f. Takođe, ako su f i g lokalno integrabilne funkcije na $\mathbb{R}^d$ i ako je njihov proivod fg lokalno integrabilana funkcija, tada proizvod odgovarajućih regularnih distribucija postoji kao regularna distribucija data sa

$$(fg, \phi) := \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Kada bi bilo moguće uvesti multiplikativnu operaciju u $\mathcal{D}'(\Omega)$, onda ne bi mogao da postoji element $g \neq \mathbf{0}$, takav da je $fg = \mathbf{0}$ za svako $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Međutim, u prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$ δ-distribucija ima osobinu da je različita od nule i postoji $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tako da je $f\delta = \mathbf{0}$.

6° Ako postoji konstanta C takva da za svako $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ važi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f(x_0+\varepsilon x), \phi(x)) = (C, \phi),$$

ili

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^n}\Big(f(x), \phi\Big(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\Big)\Big) = C\int\limits_{\mathbb{R}^d}\phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

onda distribucija f ima vrednost u tački $x = x_0$ i označavamo $f(x)|_{x=x_0} = C$.

Primer 2.6. *Svaka tačka $x_0 \neq 0$ Heaviside-ove funkcije $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ je regularna tačka i vrednost u x_0 u distribucionom smislu ista je kao u uobičajenom. Tačka $x_0 = 0$ je singularna pošto granična vrednost $\lim_{\varepsilon\to 0}(H(\varepsilon x), \phi(x))$ ne postoji. Dirac-ova δ-distribucija ima vrednost 0 u svakoj tački $x_0 \neq 0$, ali u $x_0 = 0$ nema vrednost. Kada bi postojala granična vrednost $\lim_{\varepsilon\to 0}(\delta(\varepsilon x), \phi(x))$, tada bi δ bila identički jednaka nuli.*

Kako ne postoji vrednost *Heaviside*-ove funkcije i δ-distribucije u tački $x = 0$ u distribucionom smislu, zaključujemo da se operacija određivanja vrednosti distribucije u tački ne može preneti na čitav $\mathcal{D}'(\Omega)$. Međutim, ako je f regularna distribucija određena neprekidnom funkcijom za koju je $f(x_0) = C$, tada je $f(x)|_{x=x_0} = C$.

7° Diferenciranje je neprekidno preslikavanje iz $\mathcal{D}'(\Omega)$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ u odnosu na slabe (jake) topologije u $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dakle, svaka distribucija ima sve parcijalne izvode prvog reda date sa

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_i}f, \phi\Big) := -\Big(f, \frac{\partial}{\partial x_i}\phi\Big), \quad i = 1, \dots, d.$$

Za proizvoljno $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ važi $(\partial^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \phi^{(\alpha)})$. Time je u $\mathcal{D}'(\Omega)$ definisan proizvoljan mešoviti izvod koji ne zavisi od reda parcijalnih izvoda u njemu.

Navešćemo neke primere diferenciranja u $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Primer 2.7. *Odredimo izvod Heaviside-ove funkcije H. Na osnovu definicije diferenciranja, za svako $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, je*

$$
\begin{aligned}
(H'(x), \phi(x)) &= -(H(x), \phi'(x)) = -\int_0^\infty \phi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{\varepsilon\to\infty}[\phi(\varepsilon) - \phi(0)] = \phi(0) = (\delta(x), \phi(x)).
\end{aligned}
$$

Dakle, izvod Heaviside-ove funkcije je δ-distribucija.

Primer 2.8. *Primenom pravila diferenciranja, za svako $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ dobijamo da je $(\delta^{(j)}(x - x_0), \phi(x)) = (-1)^{(j)}\phi(x_0)$, gde je Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^d$ koji sadrži x_0 i $j \in \mathbb{Z}_+^d$.*

Kao i u slučaju glatkih funkcija, može se pokazati da za svako $k \in \mathbb{Z}_+^d$ važi *Lajbnic*-ova formula

$$
\partial^k(a(x)f(x)) = \sum_{\alpha\leqslant k}\binom{k}{\alpha}a^{(\alpha)}(x)f^{(k-\alpha)}(x), \quad a \in C^\infty(\Omega),\ f \in \mathcal{D}'(\Omega).
$$

Pošto svaka neprekidna funkcija može biti posmatrana kao distribucija, na ovaj način teorija distribucija uključuje čitavu klasičnu analizu. U slučaju lokalno integrabilnih funkcija sve, osim diferenciranja, može biti preneto na uobičajeni način. Što se diferenciranja tiče, može se desiti da oba izvoda postoje, i klasični izvod lokalno integrabilne funkcije i distribucioni, i ne moraju biti jednaki. Na primer, običan izvod *Heaviside*-ove funkcije jedne realne promenljive je nula distribucija, dok je distribucioni izvod δ-distribucija. U teoriji distribucija klasično diferenciranje igra minornu ulogu.

Pokazaćemo da važi sledeća teorema.

Teorema 2.7. *Jednačina $g' = f$, gde je $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ima rešenja u $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Dokaz. Neka je g funkcionela na $C_0^\infty(\Omega)$ data sa

$$
(g(x), \phi(x)) := -(f(x), \psi(x)), \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega),
$$

gde je

$$
\psi(x) = \int_{-\infty}^{x}\Big[\phi(t) - \Big(\int_{-\infty}^{\infty}\phi(u)\,du\Big)\alpha(t)\Big]\,\mathrm{d}t,
$$

i $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ takvo da je $\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Za proizvoljno $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ važi:

$$
(g', \phi) = -(g, \phi') = \Big(f(x), \int_{-\infty}^{x}\Big[\varphi'(t) - \Big(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(u)\mathrm{d}u\Big)\alpha(t)\Big]\mathrm{d}t\Big) = (f(x), \varphi(x)).
$$

Zaključujemo da je $g' = f$. $\square$

Distribuciju $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ nazivamo primitivna distribucija za $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, a skup svih primitivnih funkcija za distribuciju f naziva se neodređeni integral.

Kao posledicu dobijamo sledeće tvrđenje koje se može naći, na primer, u [106].

Teorema 2.8. *Neka je f proizvoljan element iz $\mathcal{D}'(\Omega)$. Za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tako da je $g^{(n)}(x) = f$. Distribucija g je jednoznačno određena do na polinom stepena manjeg ili jednakog $n-1$.*

Primer 2.9. *Primetimo da je Dirac-ova δ-distribucija drugi distribucioni izvod neprekidne funkcije* $G(x) = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Skup distribucija, dakle, proširuje skup lokalno integrabilnih funkcija na Ω i pri tome je operacija diferenciranja neprekidna operacija na $\mathcal{D}'(\Omega)$. Skup distribucija je najmanji takav skup, tj. postoji izvod svakog njegovog elementa i time je proširen pojam klasičnog izvoda (pogledati [106, Teorema 5.12.]).

2.5 Prostor temperiranih distribucija

Zbog kompletnosti izlaganja daćemo karakterizaciju prostora temperiranih distribucija i navesti neke osnovne osobine. Počećemo sa uvođenjem i osobinama prostora brzo opadajućih funkcija, test prostora prostora temperiranih distribucija.

Definicija 2.6. *Funkcija $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ se naziva brzo opadajuća ako za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ važi*

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| \right\} < \infty.$$

Skup brzo opadajućih funkcija označavamo sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ili kraće $\mathcal{S}$.

Ovo je šira klasa funkcija od $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, jer npr. e^{-x^2} pripada prostoru $\mathcal{S}$, a ne pripada prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Prostor $\mathcal{S}$ je vektorski prostor i važi $C_0^\infty \subset \mathcal{S} \subset C^\infty$. Dakle, elementi prostora $\mathcal{S}$ su funkcije iz C^∞ sa odgovarajućim osobinama koje navodimo u sledećoj teoremi.

Teorema 2.9 ([106])**.** *Za funkciju $\phi \in C^\infty$ važe sledeća ekvivalentna tvrđenja:*

1° $\phi \in \mathcal{S}$,

2° *za svako $n \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ važi da je* $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ (1+|x|^2)^{n/2} |\partial^\beta \phi(x)| \right\} < \infty$,

3° $P(x)(Q(\partial)\phi(x)) \in \mathcal{S}$,

4° $Q(\partial)(P(x)\phi(x)) \in \mathcal{S}$, *gde su $P(x)$, $Q(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, proizvoljni polinomi sa konstantnim koeficijentim, a $Q(\partial)$ je parcijalni diferencijalni operator koji se dobija kada se u polinomu $Q(x)$ zameni x_j sa $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, d$.*

Definicija 2.7. *Niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{S}$ konvergira ka $\phi \in \mathcal{S}$ ako za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ važi $\|\phi_n - \phi\|_{\alpha,\beta} \to 0$, $n \to \infty$. Niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{S}$ je Cauchy-jev niz u $\mathcal{S}$ ako $\|\phi_n - \phi_m\|_{\alpha,\beta} \to 0$, $n, m \to \infty$, za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$.*

Teorema 2.10 ([106]). *Niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{S}$ konvergira u $\mathcal{S}$ ako i samo ako:*

1° za svako $p \in \mathbb{Z}_+$ postoji $C_p > 0$ tako da je za svako $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d, |\alpha|\leqslant p} \left\{(1 + |x|^2)^{p/2} |\partial^\alpha \phi_n(x)|\right\} \leqslant C_p,$$

2° niz $\left\{\phi_n^{(\alpha)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira za svako $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, na svakom kompaktnom skupu $K \subset \mathbb{R}^d$.

Teorema 2.11. *Prostor $\mathcal{S}$ je kompletan, tj. svaki Cauchy-jev niz iz $\mathcal{S}$ konvergira u $\mathcal{S}$.*

Teorema 2.12. *Prostor C_0^∞ je gust u $\mathcal{S}$.*

Dokazi prethodne dve teoreme mogu se naći, na primer, u [122].

Definicija 2.8. *Prostor neprekidnih linearnih funkcionela na $\mathcal{S}$ predstavlja prostor temperiranih distribucija ili distribucija sporog rasta i označava se sa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ ili $\mathcal{S}'$.*

Vidimo da $f \in \mathcal{S}'$ ako i samo ako je $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ linearna funkcionela i za svaki niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira ka ϕ u $\mathcal{S}$, važi da $(f, \phi_n) \to (f, \phi)$, $n \to \infty$, u $\mathbb{C}$.

Primer 2.10. *Fiksirajmo $a \in \mathbb{R}^d$. Neka je $\delta_a : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ dato sa $\delta_a : f \to f(a)$. Tada $\delta_a \in \mathcal{S}'$.*

Napomena 2.1. *Pošto je $(f, \phi_n) - (f, \phi) = (f, \phi_n - \phi)$ i $\phi_n \to \phi$ u $\mathcal{S}$ ako i samo ako $\phi_n - \phi \to \mathbf{0}$ u $\mathcal{S}$, vidimo da je linearno preslikavanje na $\mathcal{S}$ neprekidno ako i samo ako je neprekidno u $\mathbf{0} \in \mathcal{S}$.*

Preciznija karakterizacija prostora temperiranih distribucija data je sledećim teoremama.

Teorema 2.13 ([122]). *Ako je $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ linearno preslikavanje i ako postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ i $C > 0$ takvi da je $|(f, \phi)| \leqslant C\|\phi\|_{\alpha,\beta}$ za svako $\phi \in \mathcal{S}$, tada $f \in \mathcal{S}'$.*

Dokaz. Prema napomeni 2.1, treba samo dokazati neprekidnost u nuli. Ako niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $\mathbf{0}$ u $\mathcal{S}$, sledi da $\|\phi_n\|_{\alpha,\beta} \to 0$ i $|(f, \phi_n)| \leqslant C\|\phi_n\|_{\alpha,\beta}$, $n \to \infty$. Zaključujemo da je f neprekidno preslikavanje u $\mathbf{0}$. $\square$

Da bismo dokazali da važi i obrnuto tvrđenje u teoremi 2.13, uvešćemo u $\mathcal{S}$ još jednu familiju normi.

Definicija 2.9. *Za svako $k, m \in \mathbb{Z}_+$ i svako $\phi \in \mathcal{S}$ uvedimo $\|\phi\|_{k,m}$ sa*

$$\|\phi\|_{k,m} = \sum_{\substack{|\alpha|\leqslant k \\ |\beta|\leqslant m}} \|\!|\phi|\!\|_{\alpha,\beta}.$$

Jasno je da $\|\!|\phi_n-\phi|\!\|_{\alpha,\beta} \to 0$ za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ ako i samo ako $\|\phi_n - \phi\|_{k,m} \to 0$ za svako $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Dakle, linearna funkcionela f na $\mathcal{S}$ je temperirana distribucija ako i samo ako $(f, \phi_n) \to 0$ kad god $\|\phi_n\|_{k,m} \to 0$ za sve $k, m \in \mathbb{Z}_+$.

Teorema 2.14. *Linearna funkcionela f na $\mathcal{S}$ je temperirana distribucija ako i samo ako postoji $C > 0$ i neki $k, m \in \mathbb{Z}_+$ tako da je $|(f, \phi)| \leqslant C\|\phi\|_{k,m}$ za svako $\phi \in \mathcal{S}$.*

Dokaz. Ako data nejednakost važi, tada f pripada prostoru $\mathcal{S}'$. Pretpostavimo sada da $f \in \mathcal{S}'$ i da nejednakost ne važi. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$ ne važi da je $|(f, \phi)| \leqslant n\|\phi\|_{n,n}$, za svako $\phi \in \mathcal{S}$. Drugim rečima, postoji niz $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{S}$ da je $|(f, \psi_n)| > n\|\psi_n\|_{n,n}$. Ako je $\phi_n = \frac{\psi_n}{n\|\psi_n\|_{n,n}}$, tada je $|(f, \phi_n)| > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Međutim,

$$\|\phi_n\|_{k,m} = \frac{\|\psi_n\|_{k,m}}{n\|\psi_n\|_{n,n}} \leqslant \frac{1}{n},$$

kad god je $n \geqslant \max\{k, m\}$. Sledi da $\phi_n \to \mathbf{0}$ u $\mathcal{S}$, što je kontradikcija jer $(f, \phi_n) \nrightarrow 0$, $n \to \infty$. □

Distribucije uvek imaju slabe izvode. Sada ćemo pokazati da je slabi izvod temperirane distribucije takođe temperirana distribucija.

Teorema 2.15. *Za svako $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, $\partial^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ je neprekidno preslikavanje. Specijalno, za svako $f \in \mathcal{S}'$ važi da je $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}'$.*

Dokaz. Ako niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $\mathbf{0}$ u $\mathcal{S}$, tada za svako $\gamma, \nu \in \mathbb{Z}_+^d$ važi $\|\!|\partial^\alpha\phi_n|\!\|_{\gamma,\nu} = \|x^\gamma\partial^\nu\partial^\alpha\phi_n\|_\infty = \|x^\gamma\partial^{\nu+\alpha}\phi_n\|_\infty = \|\!|\phi_n|\!\|_{\gamma,\alpha+\nu} \to 0$, $n \to \infty$. Dakle, $\partial^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ je neprekidno preslikavanje.

Ako $f \in \mathcal{S}'$, onda je $\partial^\alpha f$ dobro definisano i linearno preslikavanje na $\mathcal{S}$. Za niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, takav da $\phi_n \to \mathbf{0}$ u $\mathcal{S}$, na osnovu prvog dela važi da $\partial^\alpha\phi_n \to \mathbf{0}$ u $\mathcal{S}$. Stoga, $(\partial^\alpha f, \phi_n) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha\phi_n) \to 0$, $n \to \infty$, pa $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}'$. □

Sledeći rezultat pokazuje da je svaka temperirana distribucija zapravo distribucija.

Teorema 2.16. *Ako $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, tada $f_{|C_0^\infty} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\phi_n \to \phi$, $n \to \infty$, u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tada postoji kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^d$ takav da $\operatorname{supp}\phi_n \subset K$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d$ je $\|\!|\phi_n - \phi|\!\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha\partial^\beta(\phi_n - \phi)\|_\infty = \sup_{x\in K}|x^\alpha\partial^\beta(\phi_n - \phi)| \leqslant C_\alpha \sup_{x\in K}|\partial^\beta(\phi_n - \phi)| \to 0$, $n \to \infty$, gde je C_α konstanta takva da je $|x^\alpha| < C_\alpha$ za svako $x \in K$. Sledi da $\phi_n \to \phi$, $n \to \infty$, u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ i $(f, \phi_n) \to (f, \phi)$, $n \to \infty$. Dobijamo da je preslikavanje $\phi \mapsto (f, \phi)$ neprekidno na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Nije svaka distribucija i temperirana distribucija. Na primer, funkcija e^{x^2}, $x \in \mathbb{R}$, definiše distribuciju $(\mathrm{e}^{x^2}, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x^2} \phi(x) \mathrm{d}x$. Trebalo bi da sa funkcijom $\phi(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ bude zadata temperirana distribucija, što nije tačno, jer je

$$\left(\mathrm{e}^{x^2}, \mathrm{e}^{-x^2/2}\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{e}^{-x^2/2} \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{x^2/2} \mathrm{d}x = \infty.$$

Primer 2.11. *Neka je p polinom na $\mathbb{R}^d$. Sa $\phi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^d} p(x)\phi(x) \mathrm{d}x$, $\phi \in \mathcal{S}$, je određena temperirana distribucija.*

Definicija 2.10. *Funkcija $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ je sporo rastuća ako i samo ako je*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|(1 + |x|^2)^{-m/2} \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Primer 2.12. *Za sporo rastuću funkciju f sa*

$$\phi \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi(x) \,\mathrm{d}x, \quad \phi \in \mathcal{S}, \tag{2.6}$$

zadajemo temperiranu distribuciju. Ako je temperirana distribucija određena funkcijom $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, tada se naziva regularna temperirana distribucija.

Temperirana distribucija ne mora biti zadata samo u obliku (2.6). Na primer, $f(x) = \mathrm{e}^x \cos \mathrm{e}^x$, $x \in \mathbb{R}$, je izvod funkcije $g(x) = \sin \mathrm{e}^x$. Na osnovu definicije diferenciranja u $\mathcal{S}'$ imamo da je

$$(f, \phi) = (g', \phi) = -(g, \phi') = -\int\limits_{\mathbb{R}} \sin \mathrm{e}^x \, \phi'(x) \,\mathrm{d}x, \quad \phi \in \mathcal{S},$$

temperirana distribucija koja nije oblika (2.6).

Teorema 2.17 ([106])**.** *a) Prostor $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ je gust u prostoru $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, tj. za svako $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ postoji niz $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takav da $\varphi_n \to f$, $n \to \infty$, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

b) Prostor $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ je gust u prostoru $\mathcal{S}'$, tj. za svako $f \in \mathcal{S}'$ postoji niz $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{S}$ takav da $\varphi_n \to f$, $n \to \infty$, u $\mathcal{S}'$.

Teorema 2.17 nam omogućava drugačiji pristup teoriji distribucija. Za $f \in \mathcal{S}'$ i niz $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{S}$ koji konvergira ka f u $\mathcal{S}'$, f se može posmatrati kao niz $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (grubo govoreći, klasa ekvivalencije takvog niza kojom se omogućuje da različiti nizovi iz $\mathcal{S}$ konvergiraju ka istoj distribuciji u $\mathcal{S}'$). Ovo je „u istom duhu” kao posmatranje realnih brojeva kroz klase evivalencije *Cauchy*-jevih nizova racionalnih brojeva.

2.6 Periodične distribucije

U poglavlju 5.6 biće data karakterizacija potprostora prostora periodičnih temperiranih distribucija, pa je u skladu sa tim ovo poglavlje posvećeno osnovnim definicijama i osobinama periodičnih distribucija. Pri prvom čitanju disertacije, ovo poglavlje se može izostaviti.

Za distribuciju $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, kažemo da je periodična (sa periodom 2π) ako je $f(x+2\pi) = f(x)$.

Teorema 2.18 ([9])**.** *Integral* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ *postoji za bilo koju periodičnu distribuciju* f.

Teorema 2.19. *Za svaki konvergentan red periodičnih distribucija važi jednakost*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Svaka periodična distribucija je neki izvod neke neprekidne periodične funkcije.

Teorema 2.20. *Ako se za periodičnu distribuciju* f *integral* $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ *anulira, onda postoji periodična distribucija* ψ *takva da je* $\psi'(x) = f(x)$ *i* $\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Teorema 2.21 ([9])**.** *Svaka periodična distribucija* f *se na jedinstven način može predstaviti kao suma trigonometrijskog reda*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{2.7}$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos nt\,\mathrm{d}t, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\sin nt\,\mathrm{d}t, \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{2.8}$$

Pri tome, red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.9}$$

konvergira u distribucionom smislu ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{Z}$ *tako da je* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^k} = 0$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^k} = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da jednakost (2.7) važi i da red konvergira. Množeći obe strane jednakost (2.7) sa $\cos mx$, integracijom dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos mt\,\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\,\mathrm{d}t + \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\cos mt\,\mathrm{d}t + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\cos mt\,\mathrm{d}t\right).$$

Koristeći teoremu 2.19 lako se nalazi da je $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\cos mt\,\mathrm{d}t = \pi a_m$. Sličnim postupkom dobijamo i formulu za b_m. Iz ovoga zaključujemo da reprezentacija f u obliku (2.7) postoji i jedinstvena je.

Neka je f neka periodična distribucija. Za distribuciju $g(x) = f(x) - a_0/2$ imamo da je $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Primenjujući k puta teoremu 2.20, zaključujemo da postoji periodična distribucija G_0 takva da je $G_0^{(k)}(x) = g(x)$. S druge strane, za dovoljno veliko k postoji neprekidna funkcija G tako da je $G^{(k)}(x) = g(x)$. Možemo pretpostaviti da G ima neprekidan izvod. Distribucije G_0 i G se razlikuju za polinom stepena manjeg od k, pa je G_0 periodična funkcija sa neprekidnim izvodom. Na osnovu teorije *Fourier*-ovih redova, G_0 je suma uniformno konvergentnih trigonometrijskih redova

$$G_0 = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx), \tag{2.10}$$

gde je $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$. Primenjujući distribucioni izvod k puta u (2.10) i dodajući $\frac{a_0}{2}$ na obe strane, dobijamo jednakost

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}}(n^k\alpha_n\cos nx + n^k\beta_n\sin nx),$$

gde se konvergencija podrazumeva u distribucionom smislu. Pošto je reprezentacija f u obliku (2.7) jedinstvena, sledi da je $a_n = n^k\alpha_n$, $b_n = n^k\beta_n$, $n\in\mathbb{N}$, gde su a_n i b_n dati sa (2.8).

Ako je $k_0 > k+1$, onda redovi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{a_n}{n^{k_0}}$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{b_n}{n^{k_0}}$ apsolutno konvergiraju. Stoga, red

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\frac{a_n}{n^{k_0}}\cos nx + \frac{b_n}{n^{k_0}}\sin nx\right)$$

uniformno konvergira. Diferencirajući poslednji red k_0 puta dobijamo red (2.9) koji konvergira u distribucionom smislu. □

Definicija 2.11. *Distribucija $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ je periodična distribucija sa periodom $T = (T_1,\dots,T_d)$, $T_i > 0$, $i = 1,\dots,d$, ako je periodična po svakoj promenljivoj, tj.*

$$f(x_1,\dots,x_i+T_i,\dots,x_d) = f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_d),\quad i = 1,\dots,d.$$

Skup svih periodičnih distribucija sa periodom T označavamo sa $\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^d)$ ili kraće $\mathcal{D}'_T$.

$\mathcal{D}'_T$ je vektorski prostor. Važi sledeća teorema (pogledati [125]).

Teorema 2.22. *Periodične distribucije su temperirane distribucije.*

Navešćemo sada jedan karakterističan primer 2π-periodične distribucije na $\mathbb{R}$ i istaći neke njene osobine. Naročito ćemo uočiti razliku između konvergencije u običnom i distribucionom smislu.

Primer 2.13. *Sa $\delta_{2\pi}(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(x+2k\pi)$ data je 2π-periodiča distribucija, tj. $\delta_{2\pi} \in \mathcal{D}'_{2\pi}$. Ova distribucija je izvod funkcije $E\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)$ gde je*

$$E\Big(\frac{x}{2\pi}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} H(x-2n\pi) + \sum_{n=-\infty}^{0} (H(x-2n\pi)-1),$$

za Heaviside-ovu funkciju $H(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Koristeći teoremu 2.21, dobijamo

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta_{2\pi}(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(t)\cos nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\cos 0 = \frac{1}{\pi}, \quad n\in\mathbb{N},$$
$$b_n = 0, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Dobijamo da je $\delta_{2\pi}(x) = \dfrac{1}{\pi}\Big(\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots\Big)$. Na ovaj način smo dobili sumu

$$\cos x + \cos 2x + \cdots = \pi\delta_\pi(x) - \frac{1}{2}.$$

Red $\sum_{n\in\mathbb{N}} \cos nx$ ne konvergira ni u jednoj tački u običnom smislu, dok u distribucionom smislu konvergira na osnovu teoreme 2.21.

Vidimo da se prostor periodičnih distribucija može posmatrati kao dualni prostor za prostor periodičnih glatkih funkcija sa periodom T.

Ako je $\omega = (T_1^{-1},\dots,T_d^{-1})$, familija funkcija $e_k = (T_1\cdot\ldots\cdot T_d)^{-1}\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k\omega\cdot x}$, $k\in\mathbb{Z}^d$, čini ortonormiranu familiju funkcija, pri čemu se svaka periodična distribucija može razviti u red po ovoj ortogonalnoj familiji. Ako $f\in\mathcal{D}'_T(\mathbb{R}^d)$, pridružujemo joj red

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k(f)e_k, \qquad a_k(f) = \int_0^T f(x)e_k^{-1}\mathrm{d}x. \tag{2.11}$$

Ako $f\in L^1_{loc}\cap\mathcal{D}'_T$, tada se *Fourier*-ov red koji pridružujemo funkciji f svodi na klasičan *Fourier*-ov red. Taj red konvergira ka f skoro svuda. Sledeća teorema pokazuje da isto važi za $f\in\mathcal{D}'_T$.

Teorema 2.23 ([106]). *Fourier-ov red* (2.11) *proizvoljne periodične distribucije* f *konvergira u* $\mathcal{S}'$ *ka* f.

Potreban i dovoljan uslov koji koeficijenti u redu $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k\omega\cdot x}$ treba da zadovoljavaju da bi taj red predstavljao *Fourier*-ov red neke periodične distribucije je

$$|a_k| < C\widetilde{k}^r, \quad k \in \mathbb{Z}^d,\ C > 0,\ r \in \mathbb{Z}^d_+,\ \widetilde{k} = (\widetilde{k}_1, \ldots, \widetilde{k}_d),\ \widetilde{k}_i = \max\{1, |k_i|\}.$$

Ovaj kompleksan oblik trigonometrijskog reda je često veoma koristan.

2.7 Konvolucija distribucija

Konvolucija predstavlja jednu od najvažnijih alatki u teoriji *Fourier*-ovih transformacija. U ovom poglavlju navešćemo neke njene važnije osobine.

U prostoru lokalno integrabilnih funkcija na $\mathbb{R}^d$ uvodi se konvolucija na sledeći način.

Definicija 2.12. *Neka su* f *i* g *dve lokalno integrabilne funkcije na* $\mathbb{R}^d$. *Ako integral*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

postoji za skoro svako $x \in \mathbb{R}^d$ *i predstavlja lokalno integrabilnu funkciju, onda se taj integral naziva konvolucija funkcija* f *i* g *i označava sa* $f * g$.

Navešćemo, najpre, neke važnije osobine konvolucije.

Teorema 2.24 ([98]). (*Young*) *Neka* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *i* $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \in [1, \infty]$. *Tada integral*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

postoji za skoro svako $x \in \mathbb{R}^d$. *Ako označimo ovaj integral sa* $(f * g)(x)$, *tada funkcija* $f * g$ *pripada prostoru* $L^p(\mathbb{R}^d)$ *i važi* $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1 \|g\|_p$.

Definicija konvolucije može biti proširena na druge funkcijske prostore.

Teorema 2.25 ([53]). *Ako* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ *i* $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, *tada* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ *i važi* $\|f * g\|_r \leqslant (A_p A_q A_{r'})^d \|f\|_p \|g\|_q$, *gde je* $A_p = \sqrt{p^{1/p} {p'}^{-1/p'}}$.

Jasno se vidi da konvolucija nije definisana za sve parove lokalno integrabilnih funkcija.

Dokaz sledeće leme nećemo navoditi (videti [120] i [122]).

Lema 2.1. *Za fiksirano $f \in \mathcal{S}$, preslikavanje $g \mapsto f * g$ je neprekidno iz $\mathcal{S}$ u $\mathcal{S}$.*

Definicija 2.13 ([122])**.** *Za $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, konvolucija $f * \varphi$ je funkcija $(f * \varphi)(x) = (f, \varphi(x - \cdot))$. Za $g \in \mathcal{S}'$ i $\psi \in \mathcal{S}$, konvolucija $g * \psi$ je funkcija $(g * \psi)(x) = (g, \psi(x - \cdot))$.*

Primetimo da (f, φ) može biti predstavljeno kao konvolucija $(f * \check{\varphi})(0)$, gde je $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$.

Navešćemo leme koje će nam biti potrebne za dokazivanje važnijih svojstava konvolucije sa distribucijama.

Lema 2.2 ([122])**.** *Za $f \in \mathcal{S}$ i $k \neq 0$, neka je $f_k(x) = \frac{f(x+ke_j)-f(x)}{k}$, gde su $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_d = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vektori standardne baze prostora $\mathbb{R}^d$. Tada $f_k \to \partial_j f$, $k \to 0$, u $\mathcal{S}$.*

Lema 2.3. *Ako $f \in \mathcal{S}$, onda $f(\cdot - a) \to f$ u $\mathcal{S}$ kad $a \to 0$ u $\mathbb{R}^d$.*

Posledica 2.1 ([122])**.** *Ako $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ i f_k, $k \neq 0$, dati u lemi* 2.2*, tada:*

i) $f_k \to \partial_j f$ *u* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *kad* $k \to 0$,

ii) $f(\cdot - a) \to f$ *u* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *kad* $a \to 0$.

Neke osobine operacije konvolucije biće date sledećim teoremama.

Teorema 2.26 ([122])**.** *Ako $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, tada $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $\partial^\alpha (f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi = f * (\partial^\alpha \varphi)$, za svako $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$. Pri tom je $\operatorname{supp}(f * \varphi) \subseteq \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} \varphi$.*

Dokaz. Na osnovu posledice 2.1 *ii*), sledi da $\varphi(y - \cdot) \to \varphi(x - \cdot)$ u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ kad $y \to x$ u $\mathbb{R}^d$. Stoga $(f, \varphi(y - \cdot)) \to (f, \varphi(x - \cdot))$, tj. $(f * \varphi)(y) \to (f * \varphi)(x)$, $y \to x$, čime je pokazano da je $f * \varphi$ neprekidno na $\mathbb{R}^d$. Korišćenjem posledice 2.1 *i*), dobija se da parcijalni izvod $\partial_j (f * \varphi)(x)$ postoji za svako $x \in \mathbb{R}^d$ i jednak je $(f * \partial_j \varphi)(x)$. Dalje, za fiksirano $x \in \mathbb{R}^d$, imamo

$$\begin{aligned} (f * \partial_j \varphi)(x) &= (f, -\partial_j \varphi(x - \cdot)) = -(f, \partial_j \varphi(x - \cdot)) = (\partial_j f, \varphi(x - \cdot) \\ &= (\partial_j f * \varphi)(x). \end{aligned}$$

Opšti slučaj se dokazuje indukcijom.

Primetimo da je $(f * \varphi)(x) = 0$ ako je $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi(x - \cdot) = \varnothing$. Stoga je

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}(f * \varphi) &\subseteq \{x \in \mathbb{R}^d \mid \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} \varphi(x - \cdot) \neq \varnothing\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid (\exists y \in \operatorname{supp} f)\ x - y \in \operatorname{supp} \varphi\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d \mid x \in \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} \varphi\}. \end{aligned}$$

□

Iz prethodne teoreme izvodimo sledeću posledicu.

Posledica 2.2. *Za $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ konvolucija $f * \varphi$ pripada prostoru $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.*

Analogan rezultat teoremi 2.26 važi za prostore $\mathcal{S}'$ i $\mathcal{S}$.

Teorema 2.27 ([122])**.** *Neka je $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tada $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $\partial^\alpha (f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi = f * (\partial^\alpha \varphi)$ za svako $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$. Pošto je $f * \varphi$ polinomno ograničena, određuje temperiranu distribuciju.*

Dokaz. Prvi deo tvrđenja se analogno dokazuje kao za $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pokažimo da je $f * \varphi$ polinomno ograničena. Pošto $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, postoji konstanta $C > 0$ i $k, n \in \mathbb{Z}$ tako da je $|(f, g)| \leqslant C\|g\|_{k,n}$ za sve $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Za $x \in \mathbb{R}^d$ imamo da je

$$\begin{aligned} |(f * \varphi)(x)| = |(f, \varphi(x - \cdot))| \leqslant C\|\varphi(x - \cdot)\|_{k,n} &= C \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ |\beta| \leqslant n}} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |y^\alpha| |\partial_y^\beta \varphi(x - y)| \\ &= C \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ |\beta| \leqslant n}} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} |(-y + x)^\alpha| |\partial^\beta \varphi(y)|. \end{aligned}$$

□

Navešćemo neke uslove pod kojima je konvolucija asocijativna operacija.

Teorema 2.28 ([122])**.** *Ako $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ i $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, tada je $(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$.*

Teorema 2.29 ([122])**.** *Za distribuciju $f \in \mathcal{S}'$ i funkcije $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ važi $(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$.*

U opštem slučaju, konvolucija nije asocijativna operacija.

Primer 2.14. *Za funkcije $f(x) = 1$, $g(x) = -x\mathrm{e}^{-x^2}$ i $h(x) = \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $x \in \mathbb{R}$, lako se pokazuje da je $f * g = 0$, pa je $(f * g) * h = 0$. Sa druge strane, $g * h = 1/2\sqrt{\pi/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$, a $f * (g * h) = \pi/2$. Jasno je da je $(f * g) * h \neq f * (g * h)$.*

U prostoru distribucija važi $(1 * \delta') * H = 1' * H = 0$ i $1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1$, pa zaključujemo da konvolucija nije asocijativna operacija u $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Napomena 2.2. *Ako postoje konvolucije $f^{(\alpha)} * g$ i $f * g^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, $|\alpha| \geqslant 1$, ne znači da postoji $f * g$. Na primer, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je $H'(x) * 1 = \delta * 1 = 1$ i $H(x) * 1' = 0$, međutim, $H(x) * 1$ ne postoji.*

Operacija diferenciranja je, u stvari, konvolucija sa odgovarajućim izvodom δ-distribucije $f^{(k)} = \delta^{(k)} * f$, a za translaciju važi $f(x - x_0) = \delta(x - x_0) * f$. Iz tog razloga se mnoge parcijalne diferencijalne jednačine, diferencijalno-diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima, integralne i integralno-diferencijalne jednačine mogu se zapisati u obliku konvolucionih jednačina u čemu se ogleda veliki značaj konvolucije.

2.8 *Fourier*-ova analiza

U narednim poglavljima ove glave daćemo kratak pregled najvažnijih svojstava *Fourier*-ove transformacije koja će predstavljati osnovi matematički alat korišćen u glavi 5. Za šire proučavanje *Fourier*-ove analize, čitalac se upućuje, na primer, na [13, 40, 52, 60, 71].

Teorija distribucija je veoma moćan matematički aparat koji dobija još veći značaj kada se koristi zajedno sa teorijom *Fourier*-ovih transformacija. Glavna oblast njihove primene je teorija integralnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Integralne transformacije imaju važnu ulogu pri rešavanju brojnih matematičkih modela. Međutim, njihova upotreba u klasičnoj analizi je organičena s obzirom na to da nisu uvek neprekidne operacije. Teorija distribucija je omogućila dalji razvoj integralnih transformacija. Prostori na kojima se primenjuju uopštene integralne transformacije su širi od onih koje nam daje klasična analiza i pri tom su integralne transformacije neprekidne operacije na tim prostorima.

U poslednja dva veka *Fourier*-ova analiza ima veliki uticaj na razvoj matematike, na razumevanje i na rešavanje brojnih problema u matematici i nauci, uopšte. Osnovni zadatak *Fourier*-ove analize je opisati komplikovanu pojavu, kao npr. zvučni talas, pomoću jednostavnih komponenti od kojih je sastavljena.

2.9 *Fourier*-ova transformacija

U ovom poglavlju biće izložena teorija *Fourier*-ove transformacije. Teoreme koje su navedene bez dokaza preuzete su iz [53, 96, 106, 108, 120].

U eseju „Analitička teorija toplote” objavljenom 1822. godine, *Joseph Fourier* je zasnovao teoriju koju danas zovemo *Fourier*-ova analiza. Suština je da funkciju predstavimo kao sumu sinusnih i kosinusnih talasa različitih frekvencija i amplituda i, poznajući njihova ponašanja, dobijemo informacije i o samoj funkciji.

Dugo godina je *Fourier*-ova analiza bila glavni alat u obradi signala. Signal je fizička veličina koja se menja u prostoru, vremenu ili u zavisnosti od neke druge veličine. Ako signal zavisi od vremena, njegov grafik će biti predstavljen u koordinatnom sistemu vreme-amplituda, gde x-osa označava vreme, a y-osa amplitudu, tj. vrednost predstavljene fizičke veličine u datom vremenskom trenutku. Međutim, da bi se utvrdila brzina promene neke fizičke veličine, signal se zapisuje u frekvencijskom domenu, tj. u koordinatnom sistemu frekvencija-amplituda. Grafik tada pokazuje sa kojim intezitetom se svaka frekvencija pojavljuje u signalu. Frekvencijski sadržaj signala se određuje pomoću *Fourier*-ove analize.

Fourier je 1807. godine postavio tvrđenje da se svaka dovoljno glatka funkcija može predstaviti *Fourier*-ovim redom

$$f(x) = a_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

tj. kao zbir njene srednje vrednosti i harmonika različite frekvencije k. Ako su po apsolutnoj vrednosti veći koeficijenti uz sinusoide malih perioda, tj. velikih frekvencija, onda je i sam signal vrlo promenljiv (oscilatoran). Ako dominiraju koeficijenti uz sinusoide velikih perioda, tj. malih frekvencija, onda se i sam signal sporo menja (malo osciluje u odnosu na srednju vrednost).

Definicija 2.14. *Fourier-ova transformacija funkcije* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *se definiše sa*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, x\cdot\xi}\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

Iz prethodnog se lako dobija da je $\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Lema 2.4. (*Riemann-Lebesque*) *Ako* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *tada je* $\widehat{f}$ *uniformno neprekidna i* $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0$.

Drugim rečima, *Fourier*-ova transformacija $\mathcal{F}$ slika prostor $L^1(\mathbb{R}^d)$ u $C_0(\mathbb{R}^d)$.

Jednakosti $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, $\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta})$ i $\sin\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta})$ nam govore kako da zapišemo kompleksne eksponente preko sinusa i kosinusa, i obrnuto. Dakle, vrednosti funkcije $\widehat{f}$ u tačkama ξ i $-\xi$ ne govore samo o intenzitetu frekvencijske komponente sa frekvencijom ξ, već i o fazi. Ako je originalna funkcija $f(x)$ realna, tada je $\widehat{f}(-\xi)$ kompleksno konjugovana sa $\widehat{f}(\xi)$. Gustina energije za određenu vrednost promenljive ξ je definisana kao kvadrat amplitude $|\widehat{f}(-\xi)|$. Integraljenjem ove veličine dobijamo ukupnu energiju koja odgovara frekvencijama u tom intervalu. Uobičajen način za prikaz frekvencijskog spektra realnih vrednosti signala je da se prikaže amplituda i faza od $\widehat{f}(\xi)$, za pozitivne vrednosti promenljive ξ. U polarnim koordinatama možemo $\widehat{f}(\xi)$ zapisati kao $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, gde je $r = |\widehat{f}(\xi)|$ amplituda odgovarajuće frekvencijske komponente i θ faza. Dakle, r je uvek nenegativno, a θ je između $-\pi$ i π. Kako je $\widehat{f}(-\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\xi}$, imaćemo i informacije o negativnim vrednostima promenljive ξ. Faza se smatra manje bitnom i zato je frekvencijski spektar često prikazan kao grafik od $|\widehat{f}(\xi)|$ za $\xi > 0$.

Sledeća teorema nam daje uslove pod kojima funkcija $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ može biti rekonstruisana ako znamo njenu *Fourier*-ovu transformaciju.

Teorema 2.30. (*Fourier-ova inverzna formula*) *Ako* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *i* $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *i ako je*

$$g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x\cdot t}\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

tada $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *i* $f(x) = g(x)$ *s.s.*

Kao posledicu prethodne teoreme navodimo sledeću teoremu jedinstvenosti.

Teorema 2.31. *Ako* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *i* $\widehat{f}(t) = 0$ *za svako* $t \in \mathbb{R}^d$*, tada je* $f(x) = 0$ *s.s.*

Definicija *Fourier*-ove transformacije ne može se direkno primeniti na $L^2(\mathbb{R}^d)$, ali kao posledicu sledeće teoreme imaćemo proširenje $\mathcal{F}$ do unitarnog operatora na $L^2(\mathbb{R}^d)$. Važan rezultat je sledeća teorema kojom se u analizi signala tvrdi da se *Fourier*-ovom transformacijom čuva energija signala.

Teorema 2.32. *Ako* $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$*, tada* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *i* $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

Izometrija iz $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ na $L^2(\mathbb{R}^d)$ se može proširiti do izometrije iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ na $L^2(\mathbb{R}^d)$ i pri tome ekstenzija definiše *Fourier*-ovu transformaciju za svako $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Neka je $X \subseteq L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ gust podskup od $L^2(\mathbb{R}^d)$ i izaberimo niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz X takav da $\|f_n - f\|_2 \to 0$, $n \to \infty$. Pošto $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$, za sve $n, m \in \mathbb{N}$ važi $\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|f_n - f_m\|_2$. Zaključujemo da je $\{\widehat{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy*-jev niz u $L^2(\mathbb{R}^d)$, pa samim tim postoji jedinstvena granična vrednost $\widehat{f}$ data sa $\widehat{f} := \lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f_n}$.

Vidimo da važne informacije o signalu daje njegov frekvencijski spektar, koji je određen *Fourier*-ovim koeficijentima. Spektar ukazuje na promenljivost posmatrane veličine, a preko *Parseval*-ove jednakosti[2] u obliku

$$(\text{energija}_f)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2),$$

govori o energiji signala. Dakle, ukupna energija signala jednaka je ukupnoj energiji u njegovom spektru.

L^2-teorija daje mnogo više simetrije nego L^1-teorija. U L^2-teoriji funkcije f i $\widehat{f}$ imaju gotovo istu ulogu, što najbolje prikazuje sledeća teorema (videti [98]).

Teorema 2.33. *Svakoj funkciji* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *možemo pridružiti funkciju* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *tako da važe sledeća tvrđenja.*

a) Ako $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$*, tada je* $\widehat{f}$ *Fourier-ova transformacija funkcije* f.

b) Za svako $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *je* $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

c) Za svako $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *važi Plancherel-ova formula* $\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle$.

d) Ako je

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot t}\mathrm{d}x \quad i \quad \psi_A(t) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(t)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot t}\mathrm{d}t,$$

tada $\|\varphi_A - \widehat{f}\|_2 \to 0$ *i* $\|\psi_A - f\|_2 \to 0$ *kad* $A \to \infty$.

[2] Ako je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirani sistem u $\mathcal{H}$, tada za $f \in \mathcal{H}$ važi $\|f\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n\rangle|^2$.

Fourier-ova transformacija može biti proširena i na neke druge L^p prostore.

Teorema 2.34 ([81])**.** (*Hausdorff-Young*) *Neka je* $1 \leqslant p \leqslant 2$ *i neka je* p' *takvo da je* $1/p + 1/p' = 1$*. Tada* $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ *i* $\|\widehat{f}\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$.

2.10 Osnovni operatori

Osnovni alat u *Fourier*-ovoj analizi su operatori translacije i modulacije.

Definicija 2.15. *Neka* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *i* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$*. Translacija za* x*,* $T_x f$*, definisana je sa* $T_x f(t) = f(t-x)$*, a modulacija za* x *sa* $M_x f(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x \cdot t} f(t)$*.*

Teorema 2.35. *Ako funkcija* f *pripada prostoru* $L^1(\mathbb{R}^d)$*, tada funkcije* $T_x f$ *i* $M_x f$*, takođe, pripadaju prostoru* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *i važi:*
a) $(T_x f)\hat{}(\xi) = (M_{-x}\widehat{f}\,)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$
b) $(M_x f)\hat{}(\xi) = (T_x \widehat{f}\,)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$

Dokaz. Lako se pokazuje da za $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, funkcije $M_x f$ i $T_x f$ pripadaju prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$.

a) Prema definiciji *Fourier*-ove transformacije, imamo

$$\begin{aligned}
(T_x f)\hat{}(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t \cdot \xi} (T_x f)(t) \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t \cdot \xi} f(t-x) \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(t+x)\cdot \xi} \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t \cdot \xi} \mathrm{d}t = M_{-x}\widehat{f}\,(\xi).
\end{aligned}$$

b) $$(M_x f)\hat{}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x \cdot t} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi \cdot t} \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi - x)\cdot t} \mathrm{d}t = \widehat{f}(\xi - x) = T_x \widehat{f}\,(\xi).$$

□

Kako su modulacija i translacija pomeranja u vremenu i frekvenciji, respektivno, možemo definisati vremensko-frekvencijsko pomeranje kao kompoziciju ova dva operatora. Vremensko-frekvencijsko pomeranje je dato sa

$$M_\xi T_x f(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi \cdot t} f(t-x).$$

Jednostavnim računom dobijamo

$$\begin{aligned}
T_x M_\xi f(t) &= (M_\xi f)(t-x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi \cdot (t-x)} f(t-x) \\
&= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \xi \cdot t} f(t-x) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \cdot \xi} M_\xi T_x f(t).
\end{aligned}$$

Iz prethodne jednakosti zaključujemo da je $T_x M_\xi = M_\xi T_x$ ako i samo ako $x\cdot\xi \in \mathbb{Z}$.

Lako se dokazuju i sledeće osobine vremensko-frekvencijskih pomeranja.

1) $T_x M_\xi$ i $M_\xi T_x$ su izometrije na $L^p(\mathbb{R}^d)$ za $p \in [1,\infty]$, odnosno $\|T_x M_\xi f\|_p = \|f\|_p$.

2) $(T_x M_\xi f)\widehat{} = M_{-x} T_\xi \widehat{f} = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\, T_\xi M_{-x} \widehat{f}$.

Sledeća teorema govori o vezi *Fourier*-ove transformacije i konvolucije.

Teorema 2.36. *Ako funkcije f i g pripadaju prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$, tada*

1) $(f * g)\widehat{} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$,

2) $(f \cdot g)\widehat{} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

Dokaz. 1) Prema definiciji konvolucije i *Fourier*-ove transformacije, primenjujući *Fubini*-jevu teoremu imamo

$$\begin{aligned}
(f * g)\widehat{}(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) \mathrm{d}y \Big) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} y\cdot\xi} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x-y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(x-y)\cdot\xi} \mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y \\
&= \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

2) Tvrđenje sledi iz dela 1) primenom inverzne *Fourier*-ove formule. □

Definicija 2.16. *Involucija funkcije f je funkcija f^* data sa $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, a refleksija je $\check{f}(x) = f(-x)$.*

Bitnije osobine ovih operatora su $\widehat{f^*} = \overline{\widehat{f}}$ i $\widehat{\check{f}} = \check{\widehat{f}}$.

Koristeći translaciju i involuciju možemo konvoluciju funkcija zapisati na sledeći način: $(f * g)(x) = \langle f, T_x g^* \rangle$.

Navešćemo još neke operatore koji će nam biti potrebni za dalji rad sa okvirima.

Parcijalne *Fourier*-ove transformacije su date sa

$$\mathcal{F}_1 F(x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} F(t,\xi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x\cdot t} \mathrm{d}t, \qquad \mathcal{F}_2 F(x,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} F(x,t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, \xi\cdot t} \mathrm{d}t.$$

Glavni koncept klasične *Fourier*-ove analize je da poveže osobine funkcije ili distribucije f sa osobinama $\widehat{f}$. Na taj način glatkost f implicira opadanje $\widehat{f}$. O tome govori sledeća lema.

Lema 2.5. *$D^\alpha f$ pripada prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$ za svako $|\alpha| \leqslant n$ ako i samo ako je $\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^n \mathrm{d}\xi < \infty$.*

2.11 *Fourier*-ova transformacija brzo opadajućih funkcija

U ovom poglavlju definisana je *Fourier*-ova transformacija na prostoru brzo opadajućih funkcija i navedene neke njene osobine. Zbog lakšeg rada, koristićemo oznake $D_j = -\mathrm{i}\partial_j$, $D^\alpha = (-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$, $|\alpha| = \sum\limits_{k=1}^{d} \alpha_k$ i $\xi^\alpha = \prod\limits_{k=1}^{d} \xi_k^{\alpha_k}$.

Pošto je $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, *Fourier*-ova transformacija na $\mathcal{S}$ data definicijom 2.14, odnosno

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ f \in \mathcal{S}.$$

Teorema 2.37. *Za funkciju $f \in \mathcal{S}$ važi:*

a) $\big(D_x^\alpha f\big)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi \mathrm{i}\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi),\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d,$

b) $\big(D_\xi^\beta \widehat{f}\,\big)(\xi) = \big((-2\pi \mathrm{i}x)^\beta f\big)\widehat{\ }(\xi),\ \beta \in \mathbb{Z}_+^d,$

c) $\widehat{f} \in \mathcal{S}.$

Dokaz. *a*) Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\big(D_x^\alpha f\big)\widehat{\ }(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big(D_x^\alpha f\big)(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (2\pi \mathrm{i}\xi)^\alpha f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x,$$

odakle sledi tvrđenje.

b) Pošto $(-2\pi \mathrm{i}x)^\beta f \in \mathcal{S}$, moguće je izvršiti promenu redosleda diferenciranja i integracije. Imamo da je

$$\begin{aligned}\big(D_\xi^\beta \widehat{f}\,\big)(\xi) &= D_\xi^\beta\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x\Big) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (-2\pi \mathrm{i}x)^\beta f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x \\ &= \big((-2\pi \mathrm{i}x)^\beta f\big)\widehat{\ }(\xi).\end{aligned}$$

c) Neka su α i β iz $\mathbb{Z}_+^d$. Primenom *a*) i *b*), imamo da je $\big|\xi^\alpha\big(D_\xi^\beta \widehat{f}\,\big)(\xi)\big| = \big|\xi^\alpha\big((-2\pi \mathrm{i}x)^\beta f\big)\widehat{\ }(\xi)\big| = C\big|\big(D^\alpha((-x)^\beta f)\big)\widehat{\ }(\xi)\big|$ za neko $C > 0$. Pošto $D^\alpha\big((-x)^\beta f\big)$ pripada prostoru $\mathcal{S}$, a samim tim i prostoru $L^1(\mathbb{R}^d)$, sledi da je

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \big|\xi^\alpha\big(D^\beta \widehat{f}\,\big)(\xi)\big| = C \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} \big|\big(D^\alpha\big((-x)^\beta f\big)\big)\widehat{\ }(\xi)\big| \leqslant C\big\|D^\alpha\big((-x)^\beta f\big)\big\|_1 < \infty.$$

□

Primer 2.15. *Fourier-ova transformacija funkcije $f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$ iz prostora $\mathcal{S}$ je funkcija $\widehat{f}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi\xi^2}$.*

Sada ćemo dokazati teoremu koja omogućuje uvođenje *Fourier*-ove transformacije na prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$. U analizi signala ova teorema govori da se *Fourier*-ovom transformacijom čuva energija signala.

Teorema 2.38. *Preslikavanje* $f \mapsto \hat{f}$ *definisano na* $\mathcal{S}$ *može se jedinstveno proširiti do unitarnog operatora na* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Dokaz. Koristeći da je $\mathcal{S}$ gust u $L^2(\mathbb{R}^d)$ i *Fourier*-ovu inverznu formulu, dovoljno je dokazati da je $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$ za svako $f \in \mathcal{S}$.

Neka je funkcija φ data sa $\varphi(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Tada $\varphi \in \mathcal{S}$ i

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi} \mathrm{d}x = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Stoga je

$$\|f\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(-x)\mathrm{d}x = (f * \varphi)(0). \tag{2.13}$$

Na osnovu teoreme 2.26, imamo da $f * \varphi \in \mathcal{S}$. Na osnovu *Fourier*-ove inverzne formule i teoreme 2.36, dobijamo da je

$$(f * \varphi)(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (f * \varphi)\widehat{\ }(\xi)\mathrm{d}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)}\mathrm{d}\xi = \|\widehat{f}\|_2^2. \tag{2.14}$$

Iz (2.13) i (2.14) je $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$, $f \in \mathcal{S}$. □

Sledeći rezultat je jedan od najvažnijih rezultata u teoriji *Fourier*-ovih transformacija.

Teorema 2.39. *Za funkciju* $f \in \mathcal{S}$ *važi* $|\widehat{f}|_k \leqslant (8\pi)^n (k+1)! |f|_{2n+k}$ (*neprekidnost Fourier-ove transformacije*). *Takođe, važi:*

a) $\langle \widehat{u}, f\rangle = \langle \check{u}, \widehat{f}\,\rangle$, $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$,

b) (*Fourier-ova inverzna formula*) $\widehat{\widehat{f}} = \check{f}$ *ili drugim rečima*

$$\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}(x) = f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi,$$

c) (*Plancherel-ova formula*) $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\,\rangle = \langle f, g\rangle$, $g \in \mathcal{S}$.

Dokaz. a) Ako $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ i $f \in \mathcal{S}$, tada $u(x)\overline{f}(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ i prema *Fubini*-jevoj teoremi i zamenom $y = -x$ dobijamo

$$\langle \widehat{u}, f\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} u(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\cdot\xi}\mathrm{d}x\Bigg)\overline{f}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^d} u(-y)\overline{\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} y\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\Bigg)}\mathrm{d}y = \langle \check{u}, \widehat{f}\,\rangle.$$

b) S obzirom da $e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}f(y)$ ne pripada prostoru $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ kao funkcija po y i ξ, koristimo funkciju $\psi(\xi)=e^{-\pi\xi^2}$. Dalje, uvodeći smenu $y=x+\varepsilon z$ i $\xi=t/\varepsilon$, je

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi(\varepsilon\xi)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^{2d}}\psi(\varepsilon\xi)f(y)e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}dy\,d\xi\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^{2d}}\psi(t)f(x+\varepsilon z)e^{-2\pi i z\cdot t}dz\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{\psi}(z)f(x+\varepsilon z)dz.\end{aligned}$$

Puštajući da $\varepsilon\to 0$, dobijamo $\psi(0)\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}d\xi = f(x)\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{\psi}(z)dz = f(x)\widehat{\widehat{\psi}}(0)$, a samim tim i tvrđenje.

c) Na osnovu *a*) i *b*), lako dobijamo $\langle\widehat{f},\widehat{g}\rangle=\langle\check{f},\widehat{\widehat{g}}\rangle=\langle\check{f},\breve{g}\rangle=\langle f,g\rangle$. □

Neposredna posledica *Fourier*-ove inverzne formule jeste da je *Fourier*-ova transformacija $f\mapsto\hat{f}$ injektivno preslikavanje iz $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$.

2.12 *Fourier*-ova transformacija temperiranih distribucija

Ukazaćemo sada na neke osobine *Fourier*-ove transformacije definisane na prostoru temperiranih distribucija.

Videli smo da ako $\varphi\in\mathcal{S}$, tada $\widehat{\varphi}\in\mathcal{S}$. Međutim, za $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ ne mora $\widehat{\varphi}$ da pripada prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ (ispostavlja se da ako obe funkcije φ i $\widehat{\varphi}$ pripadaju $\mathcal{D}(\Omega)$, tada je $\varphi=0$). To znači da se *Fourier*-ova transformacija ne može definisati na čitavom prostoru distribucija. Najveći potprostor distribucija na kome je moguće definisati *Fourier*-ovu transformaciju je prostor temperiranih distribucija.

Ako distribucija f pripada prostoru $\mathcal{S}'$, tada, na osnovu Fubinijeve teoreme, imamo

$$\begin{aligned}(\widehat{f}(t),\varphi(t)) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)\varphi(t)\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-2\pi i\,x\cdot t}\,dx\Bigg)\varphi(t)\,dt\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(t)e^{-2\pi i\,x\cdot t}\,dt\Bigg)f(x)\,dx = (f(x),\widehat{\varphi}(x)),\quad \varphi\in\mathcal{S}.\end{aligned}$$

Definicija 2.17. *Ako distribucija f pripada prostoru $\mathcal{S}'$, tada je njena Fourier-ova transformacija, $\mathcal{F}f=\widehat{f}$, data sa $(\widehat{f}(t),\phi(t)):=(f(x),\widehat{\phi}(x))$.*

Drugim rečima, $\widehat{f}$ je funkcionela na $\mathcal{S}$ koja funkciji φ dodeljuje vrednost $(f,\widehat{\varphi})$. Ako $f\in\mathcal{S}$, tada je $\widehat{f}$ temperirana distribucija koju ćemo identifikovati sa funkcijom $\widehat{f}(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$.

Teorema 2.40. *Ako je f temperirana distribucija, tada je $\widehat{f}$ takođe temperirana distribucija.*

Dokaz. Neka je $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz iz $\mathcal{S}$ koji konvergira nuli u $\mathcal{S}$. Treba dokazati da i niz $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira nuli u $\mathcal{S}$. Neka su α i β iz $\mathbb{Z}_+^d$. Na osnovu teoreme 2.37, imamo

$$\begin{aligned}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\big\{|\xi^\alpha(D^\beta\widehat{\varphi}_n)(\xi)|\big\} &= \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\big\{|\xi^\alpha((-x)^\beta\varphi_n)\widehat{\ }(\xi)|\big\} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^d}\big\{|(D^\alpha((-x)^\beta\varphi_n))\widehat{\ }(\xi)|\big\}\\ &\leqslant \|D^\alpha((-x)^\beta\varphi_n)\|_1.\end{aligned}$$

Pošto $\varphi_n \to \mathbf{0}$, $n\to\infty$, u $\mathcal{S}$, postoji pozitivan broj N takav da

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\big\{(1+|x|)^N|(D^\alpha((-x)^\beta\varphi_n))(x)|\big\} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Za svaki pozitivan broj $N > n$, imamo

$$\|D^\alpha((-x)^\beta\varphi_n)\|_1 \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^d}\big\{(1+|x|)^N|(D^\alpha((-x)^\beta\varphi_n))(x)|\big\}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(1+|x|)^{-N}\mathrm{d}x,$$

za svako $n\in\mathbb{N}$. Zaključujemo da $\widehat{\varphi}_n \to \mathbf{0}$, $n\to\infty$, u $\mathcal{S}$. $\square$

Primetimo da je *Plancherel*-ova formula jednostavna posledica identiteta

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d}f(x)\widehat{\varphi}(x)\mathrm{d}x. \tag{2.15}$$

Za $f(x) = \overline{\widehat{\varphi}(x)}$, imamo da je

$$f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\overline{\varphi(y)}\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot y}\mathrm{d}y = \mathcal{F}^{-1}\overline{\varphi}(x), \quad \widehat{f}(x) = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\overline{\varphi} = \overline{\varphi(x)}.$$

Zamenom u (2.15), jednostavno se dobija $\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\varphi(x)|^2\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d}|\widehat{\varphi}(x)|^2\mathrm{d}x$.

Teorema 2.41. *Preslikavanje $\mathcal{F}:\mathcal{S}'\to\mathcal{S}'$ je injektivno.*

Dokaz. Pretpostavimo da su f i g različite temperirane distribucije za koje važi $\widehat{f} = \widehat{g}$. Neka je funkcija $\varphi\in\mathcal{S}$ takva da je $(f,\varphi)\neq(g,\varphi)$ i neka je $\varphi = \widehat{\psi}$ za $\psi\in\mathcal{S}$ (funkcija ψ postoji na osnovu sirjektivnosti preslikavanja $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$). Kako je $0 = (\widehat{f}-\widehat{g},\psi) = (f-g,\widehat{\psi})\neq 0$, dolazimo do kontradikcije. $\square$

Inverzna *Fourier*-ova transformacija za temperirane distribucije je istog oblika kao i za funkcije iz $\mathcal{S}$, tj. $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$ i $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$ sa $\mathcal{F}^{-1}f = \check{\widehat{f}}$, gde operacija $\check{\ }$ za distribucije odgovara operaciji $\check{f}(x) = f(-x)$ za funkcije i data je sa $(\check{f},\varphi) = (f,\check{\varphi})$. Pošto je $\varphi = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi$ za $\varphi\in\mathcal{S}$, imamo

$$\begin{aligned}(f,\varphi) = (f,\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi) &= (\mathcal{F}f,\mathcal{F}^{-1}\varphi) = (\widehat{f},\check{\widehat{\varphi}}) = (\check{\widehat{f}},\widehat{\varphi})\\ &= (\mathcal{F}^{-1}f,\mathcal{F}\varphi) = (\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f,\varphi).\end{aligned}$$

Dakle, $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$. Slično se dokazuje da je $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$.

Koristeći prethodne jednakosti, injektivnost i neprekidnost preslikavanja $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{-1}$, dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 2.42. *Preslikavanja $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{-1}$ iz $\mathcal{S}'$ u $\mathcal{S}'$ su homeomorfizmi u odnosu na slabe i jake topologije u $\mathcal{S}'$, respektivno.*

Primer 2.16. *Ako je $f = \delta$, tada je $(\widehat{f}, \varphi) = (\widehat{\delta}, \varphi) = (\delta, \widehat{\varphi}) = \widehat{\varphi}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mathrm{d}x = (1, \varphi)$. Dakle, $\widehat{\delta} = 1$.*

Teorema 2.43. *Za distribuciju $f \in \mathcal{S}'$ važe sledeća tvrđenja:*

a) $\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(-x)$,

b) $\mathcal{F}\big(\frac{\partial}{\partial x_k} f\big) = -2\pi \mathrm{i} x_k \widehat{f}$,

c) $\mathcal{F}(2\pi \mathrm{i} x_j f(x)) = \frac{\partial}{\partial y_j}\widehat{f}(y)$,

d) $\mathcal{F}(f(x - x_0))(y) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y \cdot x_0}\mathcal{F}(f(x))(y)$,

e) $\mathcal{F}(f(x))(y + y_0) = \mathcal{F}(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} y_0 \cdot x} f(x))(y)$,

f) *ako je A regularna linearna transformacija prostora $\mathbb{R}^d$ u $\mathbb{R}^d$, tada je*

$$\mathcal{F}(f(Ax))(y) = |\det A|^{-1}\mathcal{F}(f(x))((A^{-1})^T y),$$

gde je A^T transponovana matrica matrice A.

Dokaz. Pošto su dokazi ovih tvrđenja slični i koriste iste tehnike, navodimo samo dokaz tvrđenja *b*).

b) Prema definicijama 2.17 je

$$\Big(\mathcal{F}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} f\Big), \varphi\Big) = \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} f\Big), \widehat{\varphi}\Big) = -\Big(f, \Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\widehat{\varphi}\Big)\Big).$$

Za $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ je $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\widehat{\varphi} = \mathcal{F}(2\pi \mathrm{i} x_k \varphi)$. Dalje je

$$\begin{aligned}\Big(\mathcal{F}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} f\Big), \varphi\Big) &= -\Big(f, \Big(\frac{\partial}{\partial x_k}\widehat{\varphi}\Big)\Big) = -\big(f, \mathcal{F}(2\pi \mathrm{i} x_k \varphi)\big) = -(\widehat{f}, 2\pi \mathrm{i} x_k \varphi) \\ &= (-2\pi \mathrm{i} x_k \widehat{f}, \varphi).\end{aligned}$$

□

Teorema 2.44. *Ako $f \in \mathcal{S}'$, tada $\widehat{f}(\xi) = (f(x), \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, x \cdot \xi}) \in C^{\infty}$.*

Kao posledicu ove teoreme imamo da ako su $f, g \in \mathcal{S}'$, tada $f * g \in \mathcal{S}'$ i $\widehat{(f * g)} = \widehat{f}\,\widehat{g} \in \mathcal{S}'$. Ovaj rezultat važi za širu klasu distribucija, distribucije sa kompaktnim nosačem, koju mi nećemo razmatrati.

2.13 Konvolucija sa temperiranom distribucijom

U primenama *Fourier*-ove transformacije pri rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina vodi ka konvoluciji gde je jedna funkcija temperirana distribucija. S obzirom na to da za $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ je $\varphi * \psi \in \mathcal{S}$ i $\mathcal{F}(\varphi * \psi) = \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi}$, ne možemo očekivati da možemo definisati konvoluciju proizvoljne dve temperirane distribucije. Međutim, ako je jedna od funkcija iz $\mathcal{S}$, npr. $\psi \in \mathcal{S}$, tada, da bismo definisali $\psi * f$ za $f \in \mathcal{S}'$, treba naći jedan adjungovani identitet. Pošto je

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (\psi * \varphi_1)(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x = \iint\limits_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)\varphi_1(y)\varphi_2(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_1(y)(\check{\psi} * \varphi_2)(y)\mathrm{d}y,$$

možemo konvoluciju $\psi * f$ definisati sa

$$(\psi * f, \varphi) = (f, \check{\psi} * \varphi), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}.$$

Kako je $(\mathcal{F}(\psi * f), \varphi) = (\psi * f, \widehat{\varphi}\,) = (f, \check{\psi} * \widehat{\varphi}\,) = (\widehat{f}, \mathcal{F}^{-1}(\check{\psi} * \widehat{\psi}\,))$, $\mathcal{F}^{-1}(\check{\psi} * \widehat{\varphi}) = \mathcal{F}^{-1}\check{\psi} \cdot \varphi$ i $\mathcal{F}^{-1}\check{\psi} = \widehat{\psi}$, to je $(\mathcal{F}(\psi * f), \varphi) = (\widehat{f}, \widehat{\psi} \cdot \varphi) = (\widehat{\psi} \cdot \widehat{f}, \varphi)$, tj. $\mathcal{F}(\psi * f) = \widehat{\psi} \cdot \widehat{f}$.

Ako konvoluciju funkcija f i ψ iz $\mathcal{S}$ zapišemo u obliku $(\psi * f)(x) = (f, T_{-x}\check{\psi})$, tada ovo ima smisla za temperiranu distribuciju f, jer definiše $\psi * f$ kao glatku funkciju, koja određuje temperiranu distribuciju i saglasna je sa prethodnom definicijom. Dakle, ako krenemo od neke temperirane distribucije, kakva god ona bila, konvolucijom sa test funkcijom možemo dobiti glatku funkciju. Pokazaćemo ovo na najjednostavnijem primeru. Ako je $f = \delta$, tada

$$(\psi * \delta)(x) = (\delta, T_{-x}\check{\psi}) = \psi(x-y)\Big|_{y=0} = \psi(x), \tag{2.16}$$

pa je $\psi * \delta = \psi$. Ovo je konzistentno sa $\mathcal{F}(\psi * \delta) = \widehat{\psi} * \widehat{\delta} = \widehat{\psi}$, jer je $\widehat{\delta} = 1$. Diferenciranjem (2.16) dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\psi(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\psi * \delta) = \psi * \frac{\partial}{\partial x_k}\delta,$$

odakle se vidi da je diferenciranje specijalni slučaj konvolucije (sa izvodom δ funkcije).

Inverzna *Fourier*-ova formula može biti interpretirana kao konvoluciona jednačina. Naime, kako je

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x-y)\cdot\xi}\mathrm{d}\xi\Big)\mathrm{d}y,$$

možemo ovo posmatrati kao konvoluciju f sa $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi$, koja je inverzna *Fourier*-ova transformacija od 1. S obzirom da je $\widehat{\delta} = 1$, to je $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\cdot\xi}\mathrm{d}\xi = \delta(x)$ (u distribucionom smislu), pa je $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) = f * \delta = f$.

Identitet $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}\xi = \delta(x)$ predstavlja inverznu *Fourier*-ovu transformaciju za δ-distribuciju iz koje se izvodi inverzna *Fourier*-ova transformacija za svaku temperiranu distribuciju.

2.14 *Fourier*-ov red i *Poisson*-ova formula

U ovom poglavlju navodimo *Poisson*-ovu formulu koja predstavlja glavnu vezu između *Fourier*-ove transformacije i *Fourier*-ovog reda. Ovu vezu ćemo iskoristiti kako bismo periodičnu distribuciju razvili u *Fourier*-ov red.

Lema 2.6. *Za δ-distribuciju važi Poisson-ova formula data sa*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \delta(x-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\, k\cdot x}.$$

Koristeći ovaj rezultat dolazimo do uopštene *Poisson*-ove formule.

Posledica 2.3. *Ako $f \in \mathcal{S}'$, tada je* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x-k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(2\pi k)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\, k\cdot x}$.

Iskoristićemo prethodni rezultat da dobijemo razvoj u *Fourier*-ov red periodične distribucije.

Teorema 2.45. *Neka je $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ periodična distribucija. Tada $f \in \mathcal{S}'$ i*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\, k\cdot x},$$

gde su $\widehat{f}_k$ kompleksni brojevi takvi da za neke $C, N \geqslant 0$ važi: $|\widehat{f}_k| \leqslant C(1+|k|)^N$.

Dokaz. Neka je $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ nenegativna funkcija takva da je $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} T_k\psi = 1$. Tada je

$$f = f\cdot 1 = f\cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_k\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f\cdot T_k\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} T_k(f\cdot\psi),$$

pa je $f = f * \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} T_k\delta$. Zaključujemo da $f \in \mathcal{S}'$. *Poisson*-ova formula nam daje

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}_k \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\, k\cdot x}, \quad \widehat{f}_k = (f\psi)\widehat{\ }(2\pi k) = \big(f(x)\psi(x), \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\, k\cdot x}\big).$$

□

Vidimo da $\widehat{f}$ možemo zapisati u obliku $\widehat{f} = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}_k \delta_{2\pi k}$.

Sledeća teorema pokazuje da važi i obrnuto tvrđenje tvrđenja datog teoremom 2.45.

Teorema 2.46. *Neka je $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ niz kompleksnih brojeva takvih da je $|a_k| \leqslant C(1+|k|)^N$ za neko $C > 0$, $N \leqslant 0$. Red $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} a_k \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\, k\cdot x}$ konvergira u $\mathcal{S}'$ i predstavlja periodičnu distribuciju.*

S obzirom na to da elementi trigonometrijskih sistema neprigušeno osciluju nad skupom realnih brojeva, mala promena u signalu f za posledicu ima promenu svih koeficijenata. Drugim rečima, ako imamo trenutni zvučni signal u vremenskom intervalu od, recimo, par minuta, za njegovu „rekonstrukciju" potrebno je poznavanje svih *Fourier*-ovih koeficijenata, isto kao i da je u tih par minuta sviran deo nekog gudačkog kvarteta. Jednom rečju, *Fourier*-ova analiza nije najpogodnija za ispitivanje lokalnih osobina objekata, koje mogu biti od značaja u primenama. Postojalo je nekoliko međusobno nezavisnih pokušaja da se navedeni nedostatak prevaziđe. Najznačajnija uloga teorije okvira u savremenim matematičkim istraživanjima je povezivanje srodnih ideja iz različitih oblasti nauke, odnosno upotreba zajedničkog jezika za teorije i tehnike koje su na prvi pogled nepovezane, a koristile su se i pre uvođenja pojma okvir. O teoriji okvira biće reči u četvrtoj glavi ove disertacije.

Glava 3

Ultradistribucije

U ovoj glavi posmatrani su prostori ultradiferencijabilnih funkcija i njihovog dualnog prostora ultradistribucija. Sadržaj ove glave je za prvo čitanje disertacije više informativnog karaktera. Cilj je da se kratkim prikazom osnovnih osobina prostora ultradistribucija omogući lakše razumevanje rezultata dobijenih u poglavlju 5.6. U prva dva poglavlja ove glave definišu se test prostori koji sadrže ultradiferencijabilne funkcije i njihovi duali, prostori *Beurling*-ovih i *Roumieu*-ovih ultradistribucija. U poglavlju 3.3 uvedeni su prostori *Gelfand-Shilov*-a i time omogućeno da se u narednim poglavljima definišu prostori temperiranih i periodičnih ultradistribucija, o kojima će biti reči u glavi 5. Za šire proučavanje prostora ultradistribucija i njegovih potprostora, čitalac se upučuje na [17, 20, 22, 23, 51, 70, 72, 86, 97, 112].

Teorija distribucija je osnova za razumevanje i rešavanje problema koji se modeliraju linearnim parcijalnim jednačinama, a teorija ultradistribucija predstavlja „uopštenje" prostora distribucija. Ultradistribucije su okvir za proučavanje evolucionih jednačina i imaju primenu u kvantnoj teoriji polja i mikrolokalnoj analizi. Kao proširenje prostora temperiranih distribucija proučavani su u radovima *Gelfand-Shilov*-a ([51]), *Grudzinski*-og ([58]), *Pilipović*-a ([86]). Uvedeni su u želji da se u kvantnoj teoriji polja opiše rast brži od polinomnog, tj. za proučavanje onih objekata koji umesto polinomnog imaju skoro eksponencijalno opadanje u vremensko-frekvencijskoj ravni. Prirodan izbor za takve prostore je modifikacija prostora *Gelfand-Shilov*-og tipa. Prostori *Gelfand-Shilov*-a čiji su elementi ultradiferencijabilne funkcije ultrapolinomnog rasta su test prostori za prostore temperiranih ultradistribucija. Navešćemo definicije prostora $\mathcal{S}^{(p_n)}$ i $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$ i dualnih prostora $\mathcal{S}'^{(p_n)}$ i $\mathcal{S}'^{\{p_n\}}$ temperiranih distribucija *Beurling*-ovog i *Roumieu*-ovog tipa, respektivno. Prostori temperiranih ultradistibucija očuvavaju sve dobre osobine prostora temperiranih distribucija. Rezultati ove glave preuzeti su iz [23, 87, 88, 110, 111].

3.1 Niz $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i njegove osnovne osobine

U ovom poglavlju ćemo uvesti neke potprostore *Schwartz*-ovog prostora test funkcija korišćenjem nizova pozitivnih realnih brojeva koji zadovoljavaju određene uslove. Odgovarajući dualni prostori će tada sadržati *Schwartz*-ove uopštene funkcije.

Sa $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ćemo označavati niz pozitivnih realnih brojeva koji zadovoljava neki od sledećih uslova:

$(p.1)$ (logaritamska konveksnost) $p_n^2 \leqslant p_{n-1}p_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$,

$(p.2)$ (stabilnost u odnosu na operator ultradiferenciranja) postoje pozitivne konstante A i C tako da je $p_n \leqslant AC^n \min\{p_{n-n_0}p_{n_0} \mid 0 \leqslant n_0 \leqslant n\}$, $n, n_0 \in \mathbb{N}_0$,

$(p.3)$ (jaka ne-kvazi-analitičnost) postoji pozitivna konstanta A takva da je

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{p_n} < An_0\frac{p_{n_0+1}}{p_{n_0}}, \quad n_0 \in \mathbb{N}.$$

Ponekad se uslovi $(p.2)$ i $(p.3)$ mogu zameniti, respektivno, slabijim uslovima:

$(p.2')$ (stabilnost u odnosu na operator diferenciranja) postoje pozitivne konstante A i C tako da je $p_{n+1} \leqslant AC^np_n$, $n \in \mathbb{N}_0$,

$(p.3')$ (ne-kvazi-analitičnost) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{p_{n-1}}{p_n} < \infty$.

Nizovi $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ koji zadovoljavaju neke ili sve navedene osobine su osnova za proučavanje prostora ultradistribucija (videti [73]). *Gevrey*-ovi nizovi $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ dati sa $p_n = n!^{1/\gamma}$, $p_n = n^{n/\gamma}$ i $p_n = \Gamma(1 + n/\gamma)$, gde je $\gamma \in (0, 1)$ i Γ gama funkcija, su osnovni primeri nizova koji zadovoljavaju neke od gore pomenutih uslova. Obično se pretpostavlja da je $p_0 = 1$.

Pored nizova $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posmatraćemo i višedimenzioni slučaj, tj. p_α za $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ gde je $p_\alpha = p_{\alpha_1+\dots+\alpha_d}$.

Lema 3.1 ([23])**.** *Ako je* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *niz pozitivnih realnih brojeva koji zadovoljava uslov* $(p.1)$*, tada je* $p_kp_n \leqslant p_0p_{k+n}$*,* $k, n \in \mathbb{N}_0$.

Možemo pretpostaviti da su konstante A i C iz uslova $(p.2)$, $(p.2')$ i $(p.3)$ veće od 1. Uslov $(p.2)$, tada, može biti zapisan u ekvivalentnom obliku:

$(p.2)$ postoje pozitivne konstante A i C (veće od 1) takve da je

$$p_n^2 \leqslant AC^np_{n-1}p_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lema 3.1 zajedno sa uslovom $(p.2)$ povlači slabiju verziju uslova $(p.1)$, datu sa:

$(p.1')$ postoje pozitivne konstante A i C (veće od 1) takve da je

$$p_n^2 \leqslant AC^n p_{n-1}p_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Neka su $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ nizovi pozitivnih realnih brojeva koji zadovoljavaju uslov $(p.1)$. Pisaćemo $p_n \subset q_n$ ako postoje pozitivne konstante B i L, koje ne zavise od n, tako da je $p_n \leqslant BL^n q_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Oznaku $p_n \prec q_n$ ćemo koristiti ako za svako $L > 0$ postoji konstanta $B > 0$, nezavisna od n, tako da važi $p_n \leqslant BL^n q_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Komatsu je u radu [73] pokazao da za svaki niz $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ koji zadovoljava uslove $(p.1)$ i $(p.3')$ važi da je $n! \prec p_n$, $n^n \prec p_n$ i $\Gamma(s+n) \prec p_n$ za svako $s > 0$.

Neki od uslova niza $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mogu biti zadati preko pridružene funkcije $P(\rho)$ date sa $P(\rho) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \log_+(\rho^n p_0/p_n)$, $\rho \in (0,\infty)$, gde je $\log_+ \rho = \max\{\log\rho, 0\}$.

3.2 Ultradiferencijabilne funkcije i ultradistribucije *Beurling*-ovog i *Roumieu*-ovog tipa

U ovom poglavlju uvešćemo ultradiferencijabilne funkcije i različite tipove prostora test funkcija i ultradistribucija u smislu elemenata odgovarajućih dualnih prostora.

Neka je Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^d$ i $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz pozitivnih realnih brojeva koji ispunjava sve ili neke od uslova iz poglavlja 3.1. Sa $\mathcal{D}^{(p_n)}(\Omega)$ (respektivno, $\mathcal{D}^{\{p_n\}}(\Omega)$), označavaćemo skup svih beskonačno diferencijabilnih funkcija f, koje imaju kompaktne nosače u Ω, takve da postoji $N > 0$ za koje je

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^d} \left|\partial^\alpha f(t)\right| \leqslant N h^\alpha p_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \tag{3.1}$$

za svako $h > 0$ (respektivno, za neko $h > 0$). Konstante N i h zavise samo od f, ne zavise od α. Neka je $\mathcal{D}^h(K)$ prostor svih glatkih funkcija za koje važi (3.1) i imaju nosače sadržane u kompaktnom skupu K i neka su $\mathcal{D}^{(p_n)}(K)$ i $\mathcal{D}^{\{p_n\}}(K)$ potprostori prostora $\mathcal{D}^{(p_n)}(\Omega)$ i $\mathcal{D}^{\{p_n\}}(\Omega)$, respektivno, sa elementima čiji su nosači sadržani u K. Tada je

$$\mathcal{D}^{(p_n)}(\Omega) := \operatorname*{ind\,lim}_{K\subset\subset\Omega} \operatorname*{proj\,lim}_{h\to 0} \mathcal{D}^h(K) = \operatorname*{ind\,lim}_{K\subset\subset\Omega} \mathcal{D}^{(p_n)}(K)$$

i

$$\mathcal{D}^{\{p_n\}}(\Omega) := \operatorname*{ind\,lim}_{K\subset\subset\Omega} \operatorname*{ind\,lim}_{h\to 0} \mathcal{D}^h(K) = \operatorname*{ind\,lim}_{K\subset\subset\Omega} \mathcal{D}^{\{p_n\}}(K).$$

Dualne prostore prostora $\mathcal{D}^{(p_n)}(\Omega)$ i $\mathcal{D}^{\{p_n\}}(\Omega)$ označavaćemo sa $\mathcal{D}'^{(p_n)}(\Omega)$ i $\mathcal{D}'^{\{p_n\}}(\Omega)$, respektivno, i nazivamo ih prostorima *Beurling*-ovih i *Roumieu*-ovih ultradistribucija.

Neka je $\mathcal{D}^{(p_n)}(L^s)$, $s \in [1,\infty]$, (respektivno, $\mathcal{D}^{\{p_n\}}(L^s)$) prostor svih beskonačno diferencijabilnih funkcija f takvih da postoji pozitivna konstanta N za koju je $\left\|\partial^\alpha f\right\|_{L^s} \leqslant N h^\alpha p_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, za svako $h > 0$ (respektivno, za neko $h > 0$). Važi:

$$\mathcal{D}^{(p_n)}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}^{(p_n)}(L^s) \subset \mathcal{D}^{\{p_n\}}(L^s), \quad \mathcal{D}^{\{p_n\}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}^{\{p_n\}}(L^s), \quad s \in [1,\infty].$$

Uvedimo u $\mathcal{D}^{(p_n)}(L^s)$, $s \in [1,\infty]$, niz normi $\|f\|_{s,h} := \sup\limits_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d} \dfrac{\|\partial^\alpha f\|_{L^s}}{h^\alpha p_\alpha}$ za svako $h > 0$. Neka je $\mathcal{D}_h^{(p_n)}(L^s) = \left\{f \in C^\infty : \|f\|_{s,h} < \infty\right\}$ za svako $h > 0$. Pošto je $\mathcal{D}_{h_1}^{(p_n)}(L^s) \subset \mathcal{D}_{h_2}^{(p_n)}(L^s)$ kad god je $0 < h_1 < h_2$, imamo da je

$$\mathcal{D}^{(p_n)}(L^s) := \operatorname*{proj\,lim}_{h \to 0} \mathcal{D}_h^{(p_n)}(L^s), \quad \mathcal{D}^{\{p_n\}}(L^s) := \operatorname*{ind\,lim}_{h \to 0} \mathcal{D}_h^{(p_n)}(L^s).$$

Prostor $\mathcal{D}'^{(p_n)}(L^s)$ (respektivno, $\mathcal{D}'^{\{p_n\}}(L^s)$) nazivamo prostor ultradistribucija klase (p_n) ili *Beurling*-ovog tipa (respektivno, klase $\{p_n\}$ ili *Roumieu*-ovog tipa).

Za niz $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata iz $\mathcal{D}^{(p_n)}(L^s)$ kažemo da konvergira ka $\varphi \in \mathcal{D}^{(p_n)}(L^s)$ kad $n \to \infty$, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\right\|_{L^s} = 0$, za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, tj. ako postoji konstanta $N > 0$, koja ne zavisi od n, tako da je

$$\left\|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\right\|_{L^s} \leqslant N h^\alpha p_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d,\ h > 0. \tag{3.2}$$

Niz $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata iz $\mathcal{D}^{\{p_n\}}(L^s)$ konvergira ka $\varphi \in \mathcal{D}^{\{p_n\}}(L^s)$ kad $n \to \infty$, ako postoje konstante $N > 0$ i $h > 0$, koje ne zavise od n i α, tako da važi (3.2).

Sledeća teorema daje karakterizaciju prostora $\mathcal{D}'^*(L^s)$, gde $*$ zamenjuje (p_n) ili $\{p_n\}$. Takođe, ona pokazuje da prostori ultradistribucija predstavljaju uopštenje prostora *Schwartz*-ovih uopštenih funkcija.

Teorema 3.1 ([88])**.** *Neka je $1 \leqslant s < \infty$ i $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}$ niz funkcija u prostoru L^r, $1/s + 1/r = 1$, tako da za svako $k > 0$ (respektivno, za neko $k > 0$) važi*

$$\|g_\alpha\|_{L^r} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{k^\alpha M_\alpha}\Big), \quad |\alpha| \to \infty. \tag{3.3}$$

Tada

$$V = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d} \partial^\alpha g_\alpha \tag{3.4}$$

pripada prostoru $\mathcal{D}'^{\{p_n\}}(L^s)$ (respektivno, prostoru $\mathcal{D}'^{(p_n)}(L^s)$). Obrnuto, ako V pripada prostoru $\mathcal{D}'^{\{p_n\}}(L^s)$, tada je V oblika (3.4), *gde je $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}$ niz funkcija u L^r koji zadovoljava* (3.3) *za svako $k > 0$ (respektivno, za neko $k > 0$).*

Lokalno konveksan topološki prostor je (FS) prostor (respektiveno, (LS) prostor) ako je projektivna (respektivno, induktivna) granica prebrojivog, kompaktnog spektra prostora. Ako je spektar nuklearan, tada je (FN) prostor (respektivno, (LN)).

3.3 Ultradiferencijabilne funkcije ultrapolinomnog rasta

Prostori *Gelfand-Shilov*-a, čiji elementi su ultradiferencijabilne funkcije ultrapolinomnog rasta, predstavljaju test prostore prostora temperiranih ultradistribucija. Ovi prostori su proučavani u [51, 23, 58, 110, 112, 94, 76, 86] i u mnogim drugim radovima.

Posmatraćemo, prvo, jednodimenzioni slučaj i dati karakterizaciju specijalnog prostora *Gelfand-Shilov*-og tipa.

Definicija 3.1 ([110]). *Neka je $\gamma \in (0,1)$. Prostor $\mathcal{S}_h^\gamma$, $h \geqslant 0$, je prostor funkcija $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ takvih da je*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0} \frac{h^{\alpha+\beta}|x^\alpha f^{(\beta)}(x)|}{\alpha!^{1/\gamma}\beta!^{1/\gamma}} < \infty$$

i $\mathcal{S}^{(h)} = \operatorname*{proj\,lim}_{h\to\infty} \mathcal{S}_h^\gamma$.

Prostor $\mathcal{S}^{(h)}$ je *Fréchet*-ov prostor sa topologijom datom prebrojivom familijom normi. Sledeća teorema daje karakterizaciju prostora $\mathcal{S}^{(h)}$.

Teorema 3.2. *Za $\gamma \in (0,1)$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

a) $f \in \mathcal{S}^{(h)}$,

b) $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\mathrm{e}^{s|x|^\gamma} < \infty$ *i* $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|\mathrm{e}^{s|\xi|^\gamma} < \infty$, *za svako* $s \geqslant 0$,

c) $f \in H^{s,\gamma}$ *i* $f \in L^{s,\gamma}$ *za svako* $s \geqslant 0$, *gde su*

$$H^{s,\gamma} = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ \int |\widehat{f}(t)|^2 \mathrm{e}^{2s|t|^\gamma} \mathrm{d}t < \infty \Big\},$$
$$L^{s,\gamma} = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \ : \ \int |f(x)|^2 \mathrm{e}^{2s|x|^\gamma} \mathrm{d}x < \infty \Big\}.$$

Dokaz. Ekvivalencija tvrđenja *a*) i *b*) dokazana je u [94] za opšti slučaj kada niz $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljava uslove $(p.1)$, $(p.2)$ i $(p.3')$.

Ekvivalencija tvrđenja *b*) i *c*) data je u [110]. Kako je

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{e}^{2s|x|^\gamma} \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}} \Big| \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{e}^{(s+1)|x|^\gamma} \Big|^2 \mathrm{e}^{-2|x|^\gamma} \mathrm{d}x \leqslant M \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2|x|^\gamma} \mathrm{d}x,$$

sledi da *b*) implicira *c*). Jasno je da je $\mathcal{F}L^{s,\gamma} = H^{s,\gamma}$ i $\mathcal{F}H^{s,\gamma} = L^{s,\gamma}$. Dokazaćemo da za svako $s \geqslant 0$ važi da je

$$\big\| f'(x)\mathrm{e}^{s|x|^\gamma} \big\|_{L^2} < \infty \quad \text{i} \quad \big\| \widehat{f'}(\xi)\mathrm{e}^{s|\xi|^\gamma} \big\|_{L^2} < \infty. \tag{3.5}$$

Za $s \geqslant 0$ i $f \in H^{s,\gamma}$, iz konvergencije integrala $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 \mathrm{e}^{2s|\xi|^\gamma} \mathrm{d}\xi$ dobijamo konvergenciju integrala $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^p \mathrm{d}\xi$ za svako $p \in \mathbb{N}$. Dakle, funkcija f pripada *Sobolev*-om prostoru H^p, za svako $p \in \mathbb{N}$. Na osnovu *Sobolev*-e teoreme o potapanju, imamo $f \in C^\infty$. Analogno, $\widehat{f} \in C^\infty$. Na osnovu *Cauchy-Schwartz*-ove nejednakosti, imamo da funkcije $f\mathrm{e}^{s|x|^\gamma}$ i $\widehat{f}\mathrm{e}^{s|\xi|^\gamma}$ pripadaju prostoru $L^1(\mathbb{R})$, za svako $s \geqslant 0$. Na osnovu *Riemann-Lebesque*-ove leme, $f^{(\alpha)}$ i $\widehat{f}^{(\alpha)}$ su ograničene funkcije na $\mathbb{R}$ i iščezavaju u beskonačnosti za svako $\alpha \in \mathbb{N}$. Pošto je

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \sup_{t \in [x-c, x+c]} \{|f''(t)|\} \mathrm{e}^{2s|x|^\gamma} \mathrm{d}x \leqslant \sup_{t \in \mathbb{R}} \{|f''(t)|\} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \mathrm{e}^{2s|x|^\gamma} \mathrm{d}x,$$

primenom *Landau*-ove nejednakosti[1] dobijamo da je $\left\| f' \mathrm{e}^{s|x|^\gamma} \right\|_{L^2} < \infty$, za svako $s \geqslant 0$. Analogno je $\left\| \widehat{f}' \mathrm{e}^{s|\xi|^\gamma} \right\|_{L^2} < \infty$ za svako $s \geqslant 0$. Zaključujemo da (3.5) važi.

Neka je θ_s glatka funkcija data sa

$$\theta_s(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{s|x|^\gamma}, & |x| \geqslant 1, \\ 1, & |x| \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Funkcija θ_s' je glatka i postoji $A > 0$ tako da je $|\theta_s'(x)| \leqslant A\mathrm{e}^{s|x|^\gamma}$, $x \in \mathbb{R}$. Na osnovu (3.5), *Cauchy-Schwartz*-ove nejednakosti i c), zaključujemo da je

$$\begin{aligned}
\left| f(x) \mathrm{e}^{s|x|^\gamma} \right| &\leqslant \left| f(x)(\theta_s(x) + C) \right| \leqslant \left| \int_{-\infty}^{x} \big(f(t)\theta_s(t) \big)' \mathrm{d}t \right| + C \left| \int_{-\infty}^{x} f'(t) \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int \left| f'(t)\theta_s(t) \right| \mathrm{d}t + \int \left| f(t)\theta_s'(t) \right| \mathrm{d}t + C \int \left| f'(t) \right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant 3 \Big(\int \left| f'(t) \right|^2 A \mathrm{e}^{2(s+1)|t|^\gamma} \mathrm{d}t \Big)^{1/2} \Big(\int \mathrm{e}^{-2|t|^\gamma} \mathrm{d}t \Big)^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

□

Kao direktnu posledicu teoreme 3.2 i definicije 3.1 navodimo sledeće tvrđenje.

Posledica 3.1. *Za prostor $S^{(\gamma)}$ važi da je $S^{(\gamma)} = \operatorname{proj}\lim_{s \to \infty} (H^{s,\gamma} \cap L^{s,\gamma})$.*

Dualni prostor od $S^{(\gamma)}$ je prostor temperiranih ultradistribucija *Beurling*-ovog tipa i označavamo ga sa $\mathcal{S}'^{(h)}$.

Pretpostavimo sada da je $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ proizvoljan niz pozitivnih realnih brojeva za koji važe uslovi (p.1) i (p.3′). Zbog lakšeg zapisivanja, u ovom poglavlju ćemo sa $\langle x \rangle^\beta$ označavati $(1+|x|^2)^{\beta/2}$.

[1] $|f'(x)|^2 \leqslant \frac{1}{c^2}|f(x)|^2 + 2|f(x)|^2 \sup_{t \in [x-c, x+c]} \{|f''(t)|\},\ x \in \mathbb{R},\ c > 0.$

Definicija 3.2 ([23]). *Neka je $k > 0$ i $h \in [1, \infty)$ dato. Sa $\mathcal{S}_h^{(p_n),k} = \mathcal{S}_h^{(p_n),k}(\mathbb{R}^d)$ označavamo prostor glatkih funkcija f na $\mathbb{R}^d$ takvih da je*

$$\sigma_{k,h}(f) := \Big[\sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \Big| \frac{k^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta} \langle x \rangle^\beta f^{(\alpha)}(x) \Big|^h \mathrm{d}x \Big]^{1/h} < \infty,$$

dok sa $\mathcal{S}_\infty^{(p_n),k} = \mathcal{S}_\infty^{(p_n),k}(\mathbb{R}^d)$ prostor glatkih funkcija f na $\mathbb{R}^d$ takvih da je

$$\sigma_{k,\infty}(f) := \sup_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d} \frac{k^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta} \big\| \langle x \rangle^\beta f^{(\alpha)} \big\|_{L^\infty} < \infty.$$

Prostori $\mathcal{S}_h^{(p_n),k}$ i $\mathcal{S}_\infty^{(p_n),k}$ su snabdeveni topologijama indukovanim normama $\sigma_{k,h}$ i $\sigma_{k,\infty}$, respektivno. Važi da su $\mathcal{S}_h^{(p_n),k}$, $h \in [1, \infty]$, *Banach*-ovi prostori, dok je $\mathcal{S}_2^{(p_n),k}$ *Hilbert*-ov prostor sa skalarnim proizvodom

$$\langle f, g \rangle := \sum_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^d} \Big(\frac{k^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta} \Big)^2 \int_{\mathbb{R}^d} \langle x \rangle^{2\beta} f^{(\alpha)}(x) \, \overline{g^{(\alpha)}(x)} \, \mathrm{d}x, \quad f, g \in \mathcal{S}_2^{(p_n),k}.$$

Sledeća definicija je osnovna u teoriji temperiranih ultradistribucija *Beurling*-ovog i *Roumieu*-ovog tipa.

Definicija 3.3 ([23]). *Prostori $\mathcal{S}^{(p_n)}$ i $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$ dati su sa*

$$\mathcal{S}^{(p_n)} = \mathcal{S}^{(p_n)}(\mathbb{R}^d) := \operatorname*{proj\,lim}_{k \to \infty} \mathcal{S}_2^{(p_n),k}(\mathbb{R}^d),$$
$$\mathcal{S}^{\{p_n\}} = \mathcal{S}^{\{p_n\}}(\mathbb{R}^d) := \operatorname*{ind\,lim}_{k \to \infty} \mathcal{S}_2^{(p_n),k}(\mathbb{R}^d).$$

Ako niz $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ zadovoljava uslov $(p.2')$, tada je prostor $\mathcal{S}^{(p_n)}$ projektivna granica (kad $k \to \infty$), a prostor $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$ induktivna granica (kad $k \to 0$) ne samo prostora $\mathcal{S}_2^{(p_n),k}$, već i $\mathcal{S}_h^{(p_n),k}$ za $h \in [1, \infty]$. Ako je $p_n = n!^{1/\gamma}$, tada je $\mathcal{S}^{(\gamma)} = \mathcal{S}^{(p_n)}$.

Označimo sa $\mathcal{R}$ familiju svih nizova $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ pozitivnih brojeva koji su rastući i nisu ograničeni sa gornje strane, tj. $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$. Ovaj skup je parcijalno uređen relacijom $\preceq$ takvom da je $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \preceq \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ako postoji n_0 za koju je $a_n \leqslant b_n$ za svako $n > n_0$.

Za niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}$ i $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$, uvodimo niz $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d}$ sa $A_0 = 1$, $A_\alpha := \prod_{j=1}^{|\alpha|} a_j$, gde je $\alpha \neq 0$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

Sledeće teoreme opisuju strukturu prostora test funkcija za prostore ultradistribucija.

Teorema 3.3 ([23]). *Neka niz $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava uslove (p.1) i (p.3′). Prostor $\mathcal{S}^{(p_n)}_{\{a_n\},\{b_n\}}$ je skup svih glatkih funkcija f takvih da je*

$$\sigma_{\{a_n\},\{b_n\},2}(f) := \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\|\langle x\rangle^\beta f^{(\alpha)}\|_{L^2}}{p_\alpha A_\alpha p_\beta B_\beta} < \infty,$$

gde su A_α i B_β pridruženi nizovi proizvoda elemenata nizova $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, respektivno. Tada je

$$\mathcal{S}^{\{p_n\}} = \operatorname*{proj\,lim}_{\{a_n\},\{b_n\}\in\mathcal{R}} \mathcal{S}^{(p_n)}_{\{a_n\},\{b_n\}}.$$

Dokaz. Funkcija $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pripada prostoru $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$ ako i samo ako važi da je $\sigma_{\{a_n\},\{b_n\},2}(f) < \infty$ za proizvoljne nizove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}$. Norma $\sigma_{\{a_n\},\{b_n\},2}$ je neprekidna na prostoru $\mathcal{S}^{(p_n)}_h$, $h > 0$, pa samim tim i na $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$. Pošto je prostor $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$ refleksivan, tada svaka neprekidna seminorma p je ograničena sa seminormom p^B datom sa $p^B(f) = \sup_{\varphi\in B} \big|\langle f, \varphi\rangle\big|$, gde je B ograničen skup u $\mathcal{S}'^{\{p_n\}}$. Korišćenjem [23, Lemma 2.2.1], postoje nizovi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}$ tako da za neko $C > 0$ imamo da je $p^B(f) \leqslant C\sigma_{\{a_n\},\{b_n\}}(f)$. □

Definicija 3.4. *Za nizove $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}$, $\mathcal{S}^{(p_n)}_{\{a_n\},\{b_n\},\infty}$ je prostor svih glatkih funkcija f na $\mathbb{R}^d$ takvih da je*

$$\sigma_{\{a_n\},\{b_n\},\infty}(\varphi) := \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\|\langle x\rangle^\beta f^{(\alpha)}\|_{L^\infty}}{p_\alpha A_\alpha p_\beta B_\beta} < \infty,$$

snabdeven topologijom indukovanom normom $\sigma_{\{a_n\},\{b_n\},\infty}$.

Posmatrajmo u prostoru $\mathcal{S}^{(p_n)}_{\{a_n\},\{b_n\},\infty}$ već uvedene norme $\sigma_{k,h}$, za $k > 0$, $h \in [1,\infty]$, kao i sledeće norme:

$$\sigma'_{k,h}(f) := \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d} \frac{k^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta}\|\vartheta f^{(\alpha)}\|_{L^h}, \qquad \sigma'_{k,\infty}(f) := \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d} \frac{k^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta}\|\vartheta f^{(\alpha)}\|_{L^\infty},$$

$$\sigma_{\{a_n\},\{b_n\},h}(f) := \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\|\langle x\rangle^\beta f^{(\alpha)}\|_{L^h}}{p_\alpha A_\alpha p_\beta B_\beta},$$

$$\sigma'_{\{a_n\},\{b_n\},h}(f) := \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\|\vartheta f^{(\alpha)}\|_{L^h}}{p_\alpha A_\alpha p_\beta B_\beta}, \qquad \sigma'_{\{a_n\},\{b_n\},\infty}(f) := \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^d} \frac{\|\vartheta f^{(\alpha)}\|_{L^\infty}}{p_\alpha A_\alpha p_\beta B_\beta},$$

gde je $k > 0$, $h \in [1,\infty)$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljni nizovi iz $\mathcal{R}$ i $\vartheta(x) = x^\beta$.

Uvedimo za $h \in [1,\infty]$ familije $S_h := \{\sigma_{k,h} \mid k > 0\}$, $S'_h := \{\sigma'_{k,h} \mid k > 0\}$, $\widetilde{S}_h := \{\sigma_{\{a_n\},\{b_n\},h} \mid \{a_n\},\{b_n\} \in \mathcal{R}\}$, $\widetilde{S}'_h := \{\sigma'_{\{a_n\},\{b_n\},h} \mid \{a_n\},\{b_n\} \in \mathcal{R}\}$.

Prostor $\mathcal{S}^{(p_n)}_{\{a_n\},\{b_n\},\infty}$ snabdeven topologijom indukovanom bilo kojom gornjom familijom normi poklapa se sa prostorom $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$.

Teorema 3.4 ([23]). *a) Familije normi S_∞ i S'_∞ (respektivno, $\widetilde{S}_\infty$ i $\widetilde{S}'_\infty$) u prostoru $\mathcal{S}^{(p_n)}$ (respektivno, $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$) su ekvivalentne.*

b) Ako važi uslov $(p.2')$, onda su familije normi S_h, S'_h i S (respektivno, $\widetilde{S}_h$, $\widetilde{S}'_h$ i $\widetilde{S}$) u prostoru $\mathcal{S}^{(p_n)}$(respektivno, $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$) ekvivalentne za svako $h \in [1, \infty]$.

Dokaz. a) Dokazaćemo tvrđenje a) u slučaju kada je $d = 1$. Za svaku glatku funkciju f i $m > 0$ važi da je $\sigma'_{k,\infty}(f) \leqslant \sigma_{k,\infty}(f)$. Uslov $(p.3')$, za svako $k > 0$, povlači da $\dfrac{k^n n!}{p_n} \to 0$, $n \to \infty$, pa postoji konstanta $C_k \geqslant 1$ takva da je $\dfrac{k^n}{p_n} \leqslant C_k$ za svako $n \in \mathbb{N}_0$. Pošto je $\langle x\rangle^\beta \leqslant 2^{\beta/2} \max\{1, |x|^\beta\} \leqslant 2^\beta \max\{1, |x|^\beta\}$, $x \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{N}_0$, za svako $k > 0$ postoji $C_k > 0$ tako da za svaku glatku funkciju f i $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ imamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{k^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta}\left\|\langle x\rangle^\beta f^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty} &\leqslant \frac{k^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta} 2^\beta \max\left\{\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty}, \left\|\vartheta f^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty}\right\} \\
&\leqslant \max\left\{C_k \frac{(2k)^\alpha}{p_\alpha}\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty}, \frac{(2k)^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta}\left\|\vartheta f^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty}\right\} \\
&\leqslant C_k \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0} \frac{(2k)^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta}\left\|\vartheta f^{(\alpha)}\right\|_{L^\infty} = C_k \sigma'_{2k,\infty}(f).
\end{aligned}$$

Dakle, za svako $k > 0$ postoji C_k tako da je $\sigma_{k,\infty}(f) \leqslant C_k \sigma'_{2k,\infty}(f)$ za svaku funkciju $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zaključujemo da su familije normi S_∞ i S'_∞ ekvivalentne.

Dokaze ostalih tvrđenja nećemo navoditi, mogu se naći u [23]. □

Posledica 3.2. *Za prostor $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$ važi da je $\mathcal{S}^{\{p_n\}} = \operatorname{proj}\lim_{\{a_n\},\{b_n\} \in \mathcal{R}} \mathcal{S}^{(p_n)}_{\{a_n\},\{b_n\},\infty}$.*

3.4 Temperirane ultradistribucije

U ovom poglavlju uvedeni su dualni prostori od $\mathcal{S}^{(p_n)}$ i $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$. Njih označavamo sa $\mathcal{S}'^{(p_n)}$ i $\mathcal{S}'^{\{p_n\}}$ i zovemo prostori temperiranih ultradistribucija *Beurling*-ovog i *Roumieu*-ovog tipa, respektivno. Proučavani su u [34, 70, 72, 86]. U ovim radovima se može naći razvoj elemenata prostora $\mathcal{S}^{(p_n)}$, $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$ i njihovih duala preko *Hermite*-skih funkcija, kao i njihova karakterizacija preko *Fourier*-ove transformacije, *Wigner*-ove distribucije i *Bergman*-ove transformacije.

Prostor $\mathcal{S}^{(p_n)}$ je projektivna granica *Banach*-ovih prostora, pa je samim tim i *Fréchet*-ov prostor. Važe sledeće inkluzije[2]:

$$\mathcal{D}^{(p_n)}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}^{(p_n)}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'^{(p_n)}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}'^{(p_n)}(\mathbb{R}).$$

Navešćemo jedan netrivijalan primer temperirane ultradistribucije.

[2] „$A \hookrightarrow B$” označava da je A gust u skupu B i da je inkluziono preslikavanje neprekidno.

Primer 3.1. *Za* $P(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{N}^d} a_k\xi^k$, $\xi\in\mathbb{R}^d$, *kažemo da je ultrapolinom klase* (p_n) *ako postoje pozitivne konstante* A *i* C *takve da je* $|a_k|\leqslant CA^{|k|}p_{|k|}^{-1}$, $k\in\mathbb{N}_0$. *Lokalno konveksna integrabilna funkcija* f *ultrapolinomnog rasta je temperirana ultradistribucija, tj.* $f\in\mathcal{S}'^{(p_n)}$*, ako postoji ultrapolinom* P *klase* (p_n) *takav da je* $|f(x)|\leqslant P(x)$*, za svako* $x\in\mathbb{R}$.

Teorema 3.5. *a) Prostori* $\mathcal{S}^{(p_n)}$ *i* $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$ *su* $(F\widetilde{S})$ *i* (LS) *prostori, respektivno.*

b) Ako za niz $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *važi uslov* $(p.2')$*, tada*

$$\mathcal{D}^*\hookrightarrow\mathcal{S}^*\hookrightarrow\mathcal{E}^*,\quad \mathcal{S}^*\hookrightarrow\mathcal{S},\quad \mathcal{E}'^*\hookrightarrow\mathcal{S}'^*\hookrightarrow\mathcal{D}'^*,\quad \mathcal{S}'\hookrightarrow\mathcal{S}'^*,$$

gde $*$ *menja* (p_n) *za Beurling-ov tip, a* $\{p_n\}$ *za Roumieu-ov tip.*

Dokaz. a) Tvrđenje važi, jer je inkluziono preslikavanje $i:\mathcal{S}_2^{(p_n),\widetilde{m}}\to\mathcal{S}_2^{(p_n),m}$, $m<\widetilde{m}$, kompaktno, pošto je skup $\{f\mid\sigma_{\widetilde{m},2}(f)\leqslant 1\}$ relativno kompaktan (videti [23, Theorem 2.5.3]).

b) Neka je $\phi\in\mathcal{D}^{(p_n)}$ i $\operatorname{supp}\phi\subset[-m,m]$, $m>1$. Iz uslova $(p.3')$ za niz $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ za svako $k>0$ postoji $C>0$ tako da je

$$\sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0}\frac{k^{\alpha+\beta}}{p_\alpha p_\beta}\left\|\langle x\rangle^\beta\phi^{(\alpha)}\right\|_\infty=\sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0}\frac{(km)^\beta m^\alpha}{p_\beta p_\alpha}\left\|\phi^{(\alpha)}\right\|_\infty\leqslant C\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0}\frac{k^\alpha}{p_\alpha}\left\|\phi^{(\alpha)}\right\|_\infty.$$

Zaključujemo da je $i:\mathcal{D}^{(p_n)}\to\mathcal{S}^{(p_n)}$ neprekidno preslikavanje.

Neka je niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definisan sa $\phi_n:=\rho(x/n)\phi(x)$, $n\in\mathbb{N}$, gde je ρ funkcija iz klase $\mathcal{D}^{(p_\alpha)}$ takva da je $\rho=1$ u okolini nule. Niz $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka funkciji ϕ u prostoru $\mathcal{S}^{(p_\alpha)}$, pošto $k^{\alpha+\beta}{p_\alpha}^{-1}{p_\beta}^{-1}|x^\beta\phi^{(\alpha)}(x)|$ konvergira uniformno kad $|x|\to\infty$ za proizvoljno fiksirano $\phi\in\mathcal{S}^{(p_n)}$ i $k>0$. Zaključujemo da je $\mathcal{D}^{(p_n)}$ gust u $\mathcal{S}^{(p_n)}$.

Analogno se dokazuje za *Roumieu*-ov tip. □

Definicija 3.5. *Operator* $P(D)=\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d}c_\alpha D^\alpha$, $c_\alpha\in\mathbb{C}$, *je ultradiferencijalni operator klase* (p_n) *(respektivno, klase* $\{p_n\}$*) ako postoje pozitivne konstante* A *i* h *(respektivno, za svako* $h>0$ *postoji* $A>0$*) tako da je* $|c_\alpha|\leqslant Ah^\alpha/p_\alpha$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$.

Teorema 3.6. *Neka je ispunjen uslov* $(p.2')$, $r\in(1,\infty]$ *i* $f\in\mathcal{D}'^{(p_n)}(\mathbb{R}^d)$ *(respektivno,* $f\in\mathcal{D}'^{\{p_n\}}(\mathbb{R}^d)$*).*

a) Tada $f\in\mathcal{S}'^{(p_n)}$ *(respektivno,* $f\in\mathcal{S}'^{\{p_n\}}$*) ako i samo ako je* f *oblika*

$$f=\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0}\left(\langle x\rangle^\beta F_{\alpha,\beta}\right)^{(\alpha)},$$

u smislu konvergencije u $\mathcal{S}'^{(p_n)}$ *(respektivno,* $\mathcal{S}'^{\{p_n\}}$*), gde je* $\{F_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0}$ *niz elemenata iz* L^r *takvih da za neko (respektivno, za svako)* $m>0$ *važi da je*

$$\Big(\sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}}\Big|\frac{p_\alpha p_\beta}{m^{\alpha+\beta}}F_{\alpha,\beta}(x)\Big|^r \mathrm{d}x\Big)^{1/r} < \infty, \quad \textit{ako je } r\in(1,\infty),$$

$$\sup_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0\\ x\in\mathbb{R}}}\frac{p_\alpha p_\beta}{m^{\alpha+\beta}}\big|F_{\alpha,\beta}(x)\big| < \infty, \quad \textit{ako je } r=\infty.$$

b) Neka za $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ važe uslovi (p.2) i (p.3). Tada $f\in\mathcal{S}'^*$ ako i samo ako je $f=P(D)F$, gde je P ultradiferencijalni operator klase $*$ i F neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$ ultrapolinomnog rasta klase $*$.

Prostori $\mathcal{S}^*$ mogu biti okarakterisani pomoću članova *Hermite*-ovog razvoja.

Teorema 3.7. *Ako važi uslov (p.2), tada su prostori $\mathcal{S}^{(p_n)}$, $\mathcal{S}^{\{p_n\}}$ (FN) prostori i $\mathcal{S}'^{(p_n)}$, $\mathcal{S}'^{\{p_n\}}$ su (LN) prostori.*

3.5 Periodične ultradistribucije

Daćemo sada reprezentacione teoreme za elemente prostora $\mathcal{D}'\{p_n\}$ i $\mathcal{D}'(p_n)$, tj. periodične ultradistribucione prostore *Roumier*-ovog i *Beurling*-ovog tipa, respektivno. Rezultati ovog poglavlja su preuzeti iz [87].

Neka je $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz pozitivnih brojeva za koji važe uslovi $(p.1)$, $(p.2)$ i uslov

$(p.2^*)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p_n}=\infty$.

Primetimo da je uslov $(p.2')$ sekcije 3.3 zamenjen uslovom $(p.2^*)$. S obzirom na to da je $p_n=p_0(p_1/p_0)\cdot\ldots\cdot(p_n/p_{n-1})$, zaključujemo da $(p.2')$ povlači $(p.2^*)$. Međutim, za niz $p_n=(n!)^\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, važi $(p.2^*)$, ali ne i $(p.2)$.

Sa $\mathcal{D}(p_n,L)$ označavamo prostor svih glatkih funkcija na jediničnom krugu[3] tako da $\phi\in\mathcal{D}(p_n,L)$ ako i samo ako

$$\|\phi\|_{L,\infty}:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big\{\frac{\|\phi^{(n)}\|_\infty}{L^n p_n}\Big\}<\infty.$$

Prostor $\mathcal{D}(p_n,L)$ je *Banach*-ov prostor i u topološkom smislu je

$$\mathcal{D}\{p_n\}=\operatorname*{ind\,lim}_{L\to\infty}\mathcal{D}(p_n,L),\quad \mathcal{D}(p_n)=\operatorname*{proj\,lim}_{L\to 0}\mathcal{D}(p_n,L).$$

Neka je $\mathcal{P}$ prostor svih polinoma oblika $\sum\limits_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, gde su c_k, $k\in\mathbb{Z}$, kompleksni brojevi. Lako se proverava da je uslov $(p.2^*)$ ekvivalentan uslovu da je prostor $\mathcal{P}$ potprostor prostora $\mathcal{D}(p_n)$, a samim tim i prostora $\mathcal{D}\{p_n\}$.

[3] $\|\phi\|_\infty=\sup\{|\phi(t)|\ :\ t\in[0,2\pi]\}$

Prostor $\mathcal{A}$ predstavlja sve elemente prostora $L^2(0,2\pi) \cap C^\infty(0,2\pi)$ za koje je $\sup\big\{\|D^i\phi\| \,:\, i \leqslant p\big\} < \infty$, $p \in \mathbb{N}$, i $\big\langle D^k\phi, \mathrm{e}^{int}\big\rangle = (-\mathrm{i}n)^k \langle \phi, \mathrm{e}^{int}\rangle$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, (videti [126]). U radu [87] ukazano je na to da prostori $\mathcal{D}\{p_n\}$ i $\mathcal{D}(p_n)$ predstavljaju potprostore prostora $\mathcal{A}$, jer funkcija ϕ pripada $\mathcal{D}\{p_n\}$ ili $\mathcal{D}(p_n)$ ako *Fourier*-ovi koeficijenti $c_k(\phi) = \langle \phi, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, opadaju brže nego bilo koji stepen od $|n|$ kad $|n| \to \infty$. Identifikacija ovih prostora sa prostorom $\mathcal{A}$ data je sledećom teoremom.

Teorema 3.8 ([87])**.** *Prostori $\mathcal{D}\{p_n\}$ i $\mathcal{D}(p_n)$ mogu se identifikovati sa $\mathcal{A}\{p_n\}$ i $\mathcal{A}(p_n)$ respektivno, gde je*

$$\mathcal{A}\{p_n\} = \operatorname*{ind\,lim}_{L\to\infty} \mathcal{A}(p_n, L), \quad \mathcal{A}(p_n) = \operatorname*{proj\,lim}_{L\to 0} \mathcal{A}(p_n, L),$$

i

$$\mathcal{A}(p_n, L) = \Big\{\phi \in \mathcal{A} \;:\; \|\phi\|_{L,2} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|\phi^{(n)}\|_2}{L^n p_n} < \infty\Big\}.$$

Sledeće dve teoreme predstavljaju glavne rezultate rada [87]. U slučaju da je $p_n = n!$, $n \in \mathbb{N}$, dokazi teorema su trivijalni.

Teorema 3.9 ([87])**.** *Ako $f \in \mathcal{D}'(p_n)$, tada postoji niz funkcija f_m, $m \in \mathbb{N}_0$, na $(0,2\pi)$ i prirodan broj n tako da je*

a) $f_m \in L^2(0,2\pi)$, $m \in \mathbb{N}_0$,

b) $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}_0} \|f_m\|_2 < \infty$,

c) $f(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{n^m}{p_m} f_m^{(m)}(t)$.

Obrnuto, ako je f_m, $m \in \mathbb{N}_0$, niz funkcija na $(0,2\pi)$ za koje važi a) i b), tada red $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{n^m}{p_m} f_m^{(m)}(t)$ određuje jedinstven element prostora $\mathcal{D}'(p_n)$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}(p_k, 1/n)$ potprostor od $\mathcal{A}$ takav da $\phi \in \mathcal{A}(p_n, 1/n)$ ako i samo ako je $\|\phi\|_{1/n,2} < \infty$ za fiksiran prirodan broj n. Neka je $\{\phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ *Cauchy*-ev niz iz $\mathcal{A}(p_k, 1/n)$. Pošto je $\mathcal{A}$ kompletan, postoji $\phi_0 \in \mathcal{A}$ tako da je

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k \big\|\phi_\nu^{(k)} - \phi_0^{(k)}\big\|_2}{p_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{p^k} \lim_{\mu\to\infty} \big\|\phi_\nu^{(k)} - \phi_\mu^{(k)}\big\|_2 \leqslant \liminf_{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{p_k} \big\|\phi_\nu^{(k)} - \phi_\mu^{(k)}\big\|_2.$$

Zaključujemo da je $\mathcal{A}(p_k, 1/n)$ kompletan. Ako ϕ pripada prostoru $\mathcal{A}(p_k, 1/n)$ i $\phi(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, tada niz $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $n \in \mathbb{N}_0$, konvergira ka ϕ po normi $\|\cdot\|_{1/n,2}$. Pošto je $\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ element prostora $\mathcal{A}(p_k)$ za svako n, imamo da je $\mathcal{A}(p_k, 1/n)$ kompletiranje prostora $\mathcal{A}(p_n)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_{1/n,2}$. Niz normi $\|\cdot\|_{1/n,\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, je ekvivalentan sa nizom normi $\|\cdot\|_{1/n,2}$ na prostoru $\mathcal{A}(p_k)$.

Ako sa $\overline{\mathcal{A}}(p_k, 1/n)$ označimo kompletiranje prostora $\mathcal{A}(p_k)$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_{1/n,\infty}$, onda je ovaj prostor identičan sa $\mathcal{D}(p_k, 1/n)$.

Na osnovu teoreme 3.8, za svako n_0 postoje n_1, n_2 i n_3, $n_0 < n_1 < n_2 < n_3$, takvi da su preslikavanja $\mathcal{A}(p_k, 1/n_3) \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}(p_k, 1/n_2) \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}(p_k, 1/n_1) \hookrightarrow \mathcal{A}(p_k, 1/n_0)$ neprekidna. Preslikavanje $\overline{\mathcal{A}}(p_k, 1/n_2) \hookrightarrow \overline{\mathcal{A}}(p_k, 1/n_1)$ je kompaktno (teorema *Arcela-Ascoli*), pa je i $\mathcal{A}(p_k, 1/n_3) \hookrightarrow \mathcal{A}(p_k, 1/n_0)$ kompakno preslikavanje. Stoga, $\mathcal{D}'(p_k) \equiv \mathcal{A}'(p_k) = \Big(\operatorname{proj}\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}(p_k, 1/n)\Big)' = \operatorname{ind}\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}(p_k, 1/n)$, u smislu jake topologije na ovim prostorima. To znači da ako $f \in \mathcal{D}'(p_k)$, tada se f može jedinstveno produžiti na $\mathcal{A}(p_k, 1/n)$ tako da $f \in \mathcal{A}'(p_k, 1/n)$. Obrnuto, ako $f \in \mathcal{A}'(p_k, 1/n)$, tada $f \in \mathcal{A}'(p_k)$. Dovoljno je dati reprezentaciju za elemente prostora $\mathcal{A}'(p_k, 1/n)$ za fiksirano n.

Prostor $\mathcal{A}(p_k, 1/n)$ je izometričan zatvorenom potprostoru Λ prostora $(\Gamma, \|\cdot\|_\Gamma)$, gde je Γ prostor nizova $\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}_0} \in \prod\limits_{m=0}^{\infty} L^2(0, 2\pi)$ takvih da važi $\big\|\{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}}\big\|_\Gamma := \sum\limits_{m=0}^{\infty} \|\psi_m\|_2 < \infty$. Izometrija je data preslikavanjem iz $\mathcal{A}(p_k, 1/n)$ u Λ sa $\phi \mapsto \{(-1)^m n^m p_m^{-1} \phi^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}_0}$. Pošto $f \in \Lambda'$, označićemo ga sa f_1. Na osnovu *Han-Banach*-ove teoreme, f_1 možemo produžiti (neka je F produženje) sa Λ na Γ tako da $F \in \Gamma'$. Tada postoji niz $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ iz $L^2(0, 2\pi)$ takav da je

$$\big\langle F, \{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}\big\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle f, \psi_m\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} f_m(t)\psi_m(t)\mathrm{d}t, \quad \{\psi_m\}_{m\in\mathbb{N}_0} \in \Gamma,$$

i $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}_0} \|f_m\|_2 < \infty$. Ako $\phi \in \mathcal{A}(p_k, 1/n)$, imamo da je

$$\begin{aligned}\langle f, \phi\rangle &= \Big\langle f_1, \Big\{(-1)^m \frac{n^m}{p_m}\phi^{(m)}\Big\}_{m\in\mathbb{N}_0}\Big\rangle = \Big\langle F, \Big\{(-1)^m \frac{n^m}{p_m}\phi^{(m)}\Big\}_{m\in\mathbb{N}_0}\Big\rangle \\ &= \Big\langle \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\frac{n^m}{p_m} f_m\Big)^{(m)}, \phi\Big\rangle.\end{aligned}$$

Pošto za bilo koju funkciju $F \in L^2(0, 2\pi)$ možemo definisati element iz $\mathcal{D}'(p_k)$ sa $\phi \mapsto \int\limits_0^{2\pi} F(t)\phi(t)\mathrm{d}t$, $\phi \in \mathcal{D}(p_k)$, drugi deo teoreme trivijalno važi. □

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema 3.10 ([87])**.** *Ako $f \in \mathcal{D}'\{p_n\}$, tada postoji niz funkcija f_m, $m \in \mathbb{N}_0$, na $(0, 2\pi)$ tako da: 1) $f_m \in L^2(0, 2\pi)$, $m \in \mathbb{N}_0$, 2) $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \|n^m p_m f_m\|_2 < \infty$ za svaki prirodan broj n, 3) $f(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m^{(m)}(t)$.*

Obrnuto, ako je $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}_0}$ niz funkcija na $(0, 2\pi)$ za koje važi 1) i 2), tada red $\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m^{(m)}(t)$ određuje jedinstven element prostora $\mathcal{D}'\{p_n\}$.

Glava 4

Teorija okvira

U ovoj glavi prikazani su osnovni rezultati teorije okvira u *Hilbert*-ovim, *Banach*-ovim i *Fréchet*-ovim prostorima, ukazujući na to da je teorija okvira veoma moćno sredstvo u analizi velikog broja prostora i distribucija. Navedene su prednosti, ali i nedostaci okvira u odnosu na baze i uspostavljena veza između baza, ortonormiranih baza, *Riesz*-ovih baza i okvira. Ova glava se sastoji od šest poglavlja. U prvom poglavlju navedene su osnovne definicije i osobine baza u *Banach*-ovim i *Hilbert*-ovim prostorima. U poglavlju 4.2 data je definicija okvira u *Hilbert*-ovom prostoru i uvedeni osnovni operatori koji će biti korišćeni u daljem radu. U trećem poglavlju je data veza okvira i baza i ukazano na, možda najznačajniju osobinu okvira, jednostavnost njegovih osnovnih pojmova i konstrukcija. U poglavlju 4.4 će biti razmatran dualni koncept okvira koji je uveden od strane *Gröchenig*-a. Cilj ovog poglavlja je ukazati na vezu između okvira i *Gröchenig*-ovog skupa atoma u *Hilbert*-ovom prostoru nizova. U petom poglavlju dato je uopštenje pojama okvira na *Banach*-ove prostore i karakterizacija prostora kod kojih postoji *Banach*-ov okvir. Okviri na *Fréchet*-ovim prostorima ispitivani su u [91, 92] i ovi rezultati su prikazani u poglavlju 4.6.

Okviri su uvedeni 1952. godine od strane *Duffin*-a i *Schaeffer*-a [41] pri proučavanju neharmonijskih *Fourier*-ovih redova. *Young*-ov rad [124], koji se prvi put pojavljuje 1980. godine, nastavlja razvoj teorije okvira i njihovu primenu u teoriji neharmonijskih *Fourier*-ovih redova. Okvire za $L^2(\mathbb{R})$ konstruisali su *Daubechies, Grossmann* i *Meyer* u [38], a zatim *Daubechies* [36] nastavlja intenzivno proučavanje ovih okvira. Od tog trenutka počinje veliko interesovanje za teoriju okvira, čime je ubrzan njen razvoj i ona postaje značajno oruđe u raznim granama nauke i tehnike. Do 1991. godine postojalo je vrlo malo rezultata iz teorije okvira. Danas je teško u jednoj knjizi obuhvatiti sve važne i interesantne rezultate ove oblasti. Za kompletnije proučavanje teorije okvira čitalac se upućuje na sledeće reference: [37, 53, 28, 62, 60].

4.1 Osnovni pojmovi i definicije

U ovom poglavlju navedene su bitnije definicije i osobine baza u *Banach*-ovim i *Hilbert*-ovim prostorima.

Definicija 4.1 ([60]). *Neka je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz elemenata Banach-ovog prostora X.*

a) Niz vektora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se naziva potpunim ako je nula vektor jedini ortogonalan na sve njih, tj. ako je $\langle x, x_n\rangle = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, tada je $x = \mathbf{0}$.

b) Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je baza ako za svako $x \in X$ postoje jedinstveni skalari $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, tako da je $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)x_n$.

c) Baza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je bezuslovna ako red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)x_n$ konvergira bezuslovno za svako $x \in X$.[1]

d) Baza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je ograničena ako je $0 < \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \leqslant \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$.

Ako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ baza prostora X, tada činjenica da se svako $x \in X$ može jedinstveno predstaviti u obliku $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)x_n$ povlači da je $x_n \neq 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Dakle, baza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ određuje jedinstvenu kolekciju linearnih funkcionela $f_n : X \to \mathbb{K}$ $(K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\})$ koje ćemo nazivati koeficijent-funkcionele.

Definicija 4.2. *Baza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se naziva Schauder-ova baza ako je svaka koeficijent-funkcionela f_n, $n \in \mathbb{N}$, neprekidna.*

Napomena 4.1. *a) Svaka baza je Schauder-ova baza.*

b) Ako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ baza, tada su $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ biortonormirani, tj. $f_m(x_n) = \delta_{mn}$, gde je δ_{mn} Kronecker-ov simbol.

Lema 4.1 ([60]). *Neka je $\{x_j\}_{j\in J}$ niz elemenata Banach-ovog prostora. Ako $\sum\limits_{j\in J} x_j$ konvergira apsolutno, tada konvergira i bezuslovno.*

Teorema 4.1 ([109]). *Neka je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, potpun niz u Banach-ovom prostoru X. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna.*

a) Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je bezuslovna baza za X.

b) Postoji konstanta $C > 0$ tako da za sve skalare $c_1, \dots, c_N$ i $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in \{-1, 1\}$, važi

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \sigma_n c_n x_n \right\| \leqslant C \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\|.$$

[1]Red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ u *Banach*-ovom prostoru X je bezuslovno konvergentan ako za svaku permutaciju $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_{\beta(n)}$ konvergira.

c) Postoji konstanta $C_1 > 0$ tako da za sve skalare $b_1, \dots, b_N$ i $c_1, \dots, c_N$ za koje je $|b_n| \leqslant |c_n|$, važi

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\| \leqslant C_1 \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\|.$$

d) Postoje konstante $C_2, C_3 > 0$ takve da za sve skalare $c_1, \dots, c_N$ važi

$$C_2 \Big\| \sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \Big\| \leqslant C_3 \Big\| \sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n \Big\|.$$

Definicija 4.3 ([61]). *Dve baze $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ za Banach-ov prostor X su ekvivalentne ako postoji topološki izomorfizam $U : X \to X$ tako da je $Ux_n = y_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, ili, ekvivalentno, ako $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$ konvergira ako i samo ako $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n y_n$ konvergira.*

Definicija 4.4 ([99]). *Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata Hilbert-ovog prostora $\mathcal{H}$ je ortonormirana baza ako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormiran, tj. $\langle x_n, x_m\rangle = \delta_{mn}$, i važi Parseval-ova formula, tj. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2 = \|x\|^2$ za svako $x \in \mathcal{H}$.*

Skup svih konačnih linearnih kombinacija vektora $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tj. skup

$$\Big\{ \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \ \Big|\ N > 0,\ \ c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{K} \Big\},$$

označavaćemo sa $\operatorname{span}\{x_n\}$, a sa $\overline{\operatorname{span}}\{x_n\}$ njegovo zatvorenje u X.

Teorema 4.2 ([99]). *Za svaki ortonormirani sistem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$ sledeći uslovi su međusobno ekvivalenti.*

a) $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}}\{x_n\}$.

b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je potpun sistem vektora.

c) Za svako $x \in \mathcal{H}$ važi $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle x_n$.

d) Za svako $x \in \mathcal{H}$ je $\|x\|^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2$.

e) Za svako $x, y \in \mathcal{H}$ skalarni proizvod je dat sa $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle \overline{\langle y, x_n\rangle}$.

Definicija 4.5. *Baza za Hilbert-ov prostor $\mathcal{H}$ se naziva Riesz-ova baza ako je ekvivalentna nekoj ortonormiranoj bazi za $\mathcal{H}$.*

Definicija 4.6 ([60]). *Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$ je Bessel-ov niz ako za svako $x \in \mathcal{H}$ važi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty$.*

Ako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Bessel*-ov niz, tada postoji konstanta $B > 0$ takva da je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2$ za svako $x \in \mathcal{H}$.

Sledeća teorema daje ekvivalenciju *Riesz*-ovih i ograničenih bezuslovnih baza.

Teorema 4.3 ([60]). *Neka je dat niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$. Sledeća tvrđenja su međusobno ekvivalentna.*

a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je Riesz-ova baza za* $\mathcal{H}$.

b) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je ograničena bezuslovna baza za* $\mathcal{H}$.

c) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je baza za* $\mathcal{H}$ *i* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$ *konvergira ako i samo ako* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2$ *konvergira.*

d) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je potpun i postoje konstante* $A, B > 0$ *tako da za sve skalare* $c_1, \dots, c_N$ *važi*

$$A\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\| \leqslant B\sum_{n=1}^{N}|c_n|^2.$$

e) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je potpuni Bessel-ov niz i poseduje biortonormirani sistem* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *koji je, takođe, potpun Bessel-ov niz.*

Teorema 4.4 ([109]). *Neka je dat niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$. Ako $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konvergira bezuslovno, tada brojni red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|^2$ konvergira.*

U teoremi 4.4 obrnuto tvđenje u opštem slučaju ne važi.

4.2 Okviri u *Hilbert*-ovim prostorima

U ovom poglavlju ćemo definisati i opisati osnovne osobine okvira u *Hilbert*-ovom prostoru $\mathcal{H}$.

Definicija 4.7. *Niz $\{x_j\}_{j\in J}$ u (separabilnom) Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$ naziva se okvir ako postoje pozitivne konstante $A, B > 0$ tako da za svako $x \in \mathcal{H}$ važi*

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{j\in J} \left|\langle x, x_j\rangle\right|^2 \leqslant B\|x\|^2. \tag{4.1}$$

Konstante A i B za koje važe nejednakosti (4.1) nazivaju se granice okvira. Ako je $A = B$, onda se $\{x_j\}_{j\in J}$ naziva čvrst okvir. Okvir je egzaktan ako izbacivanjem bilo kog njegovog elementa ne dobijamo okvir.

Primer 4.1. *Posmatrajmo ortonormiranu bazu $\vec{e}_1 = (0,1)$ i $\vec{e}_2 = (1,0)$ na $\mathbb{C}$, i vektore $\vec{u}_1 = (0,1)$, $\vec{u}_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ i $\vec{u}_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. Poznato je da za proizvoljan vektor $\vec{x} \in \mathbb{C}$ važi $\vec{x} = \sum\limits_{n=1}^{2}\langle \vec{x}, \vec{e}_n\rangle \vec{e}_n$. Lako se dobija da važi $\vec{x} = \frac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{3}\langle \vec{x}, \vec{u}_n\rangle \vec{u}_n$.*

Koristeći *Parseval*-ovu formulu, zaključujemo da je svaka ortonormirana baza okvir za koji je $A = B = 1$. Bilo koji ortonormirani niz koji zadovoljava *Parseval*-

ovu formulu je ortonormirana baza i samim tim daje dekompoziciju u *Hilbert*-ovom prostoru u terminima baznih elemenata. Pokazaćemo da će i nejednakosti (4.1) davati dekompoziciju preko elemenata okvira, mada ta reprezentacija neće biti jedinstvena.

Da bismo bolje razumeli okvire i rekonstrukcione metode, proučićemo neke važne operatore koje ćemo koristiti u daljem radu.

Definicija 4.8. *Operator analize C definišemo sa $Cx = \{\langle x, x_j\rangle\}_{j\in J}$, $x \in \mathcal{H}$, za svaki podskup $\{x_j\}_{j\in J}$ Hilbert-ovog prostora $\mathcal{H}$, dok je operator sinteze definisan za konačan niz $c = \{c_j\}_{j\in J}$, tj. niz sa konačno nenula elemenata, sa*

$$Dc = \sum_{j\in J} c_j x_j \in \mathcal{H}.$$

Operator okvira na prostoru $\mathcal{H}$ dat je sa $Sx = \sum_{j\in J} \langle x, x_j\rangle x_j$, $x \in \mathcal{H}$.

Navešćemo neke elementarne osobine ovih operatora.

Teorema 4.5. *Neka je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir u $\mathcal{H}$ i A, B granice tog okvira.*

a) Operator analize $C : \mathcal{H} \to \ell^2(J)$ je ograničen sa zatvorenim rangom.

b) Operator sinteze D je adjungovani operator operatora C, tj. $D = C^*$. Posledica toga je da je $D : \ell^2(J) \to \mathcal{H}$ ograničen operator i važi

$$\left\| \sum_{j\in J} c_j x_j \right\| \leqslant \sqrt{B}\, \|c\|_2. \tag{4.2}$$

c) Operator okvira $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ $(S = C^*C = DD^*)$ je pozitivan, invertibilan i važi $Ai_{\mathcal{H}} \leqslant S \leqslant Bi_{\mathcal{H}}$ i $B^{-1}i_{\mathcal{H}} \leqslant S^{-1} \leqslant A^{-1}i_{\mathcal{H}}$. Specijalno, $\{x_j\}_{j\in J}$ je čvrst okvir ako i samo ako je $S = Ai_{\mathcal{H}}$.

d) Optimalne granice okvira su $B_{opt} = \|S\|$ i $A_{opt} = \|S^{-1}\|^{-1}$.

Dokaz. $a)$ Kako je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir u $\mathcal{H}$, važi nejednakost (4.1), koja je ekvivalentna sa tvrđenjem $a)$.

$b)$ Neka je $c = \{c_j\}_{j\in J}$ konačan niz. Tada je

$$\langle C^*c, x\rangle = \langle c, Cx\rangle = \sum_{j\in J} c_j \overline{\langle x, x_j\rangle} = \left\langle \sum_{j\in J} c_j x_j, x \right\rangle = \langle Dc, x\rangle.$$

Pošto je C ograničen operator na $\mathcal{H}$ i iz nejednakosti (4.1) je $\|C\| \leqslant \sqrt{B}$, sledi da je $D = C^*$ ograničen operator sa istom normom.

$c)$ Kako je $S = C^*C = DD^*$, imamo da je S samoadjungovan, samim tim i pozitivan. Pošto je $\langle Sx, x\rangle = \sum_{j\in J} |\langle x, x_j\rangle|^2$, nejednakost $Ai_{\mathcal{H}} \leqslant S \leqslant Bi_{\mathcal{H}}$ se lako dobija iz nejednakosti (4.1). Množenjem sa pozitivnim komutativnim operatorom, dobijamo traženu nejednakost za S^{-1}.

d) Tvrđenje sledi iz nejednakosti (4.1) i činjenice da je norma pozitivnog operatora data sa $\|S\| = \sup\{\langle Sx, x\rangle \mid \|x\| \leqslant 1\}$. □

S obzirom na to da vektori okvira nisu, u opštem slučaju, ortogonalni za dalju analizu potrebno je objasniti konvergenciju neortogonalnih redova.

Posledica 4.1. *Neka je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir u $\mathcal{H}$. Ako je $x = \sum_{j\in J} c_j x_j$, za neki niz $c = \{c_j\}_{j\in J}$ iz $\ell^2(J)$, onda za svako $\varepsilon > 0$ postoji konačan podskup $F_0 = F_0(\varepsilon) \subseteq J$ tako da je*

$$\Big\| x - \sum_{j\in F} c_j x_j \Big\| < \varepsilon,$$

za sve konačne nadskupove $F \supseteq F_0$. Tada kažemo da red $\sum_{j\in J} c_j x_j$ konvergira bezuslovno ka $x \in \mathcal{H}$.

Dokaz. Neka je $F_0 \subseteq J$ takav da $\sum_{j\notin F} |c_j|^2 < \varepsilon/\sqrt{B}$ za svako $F \supseteq F_0$ i neka je $c_F = c \cdot \chi_F \in \ell^2(J)$ konačan niz dat sa $c_{F,j} = c_j$, $j \in F$, i $c_{F,j} = 0$, u suprotnom. Tada je $\sum_{j\in F} c_j x_j = Dc_F$, pa koristeći nejednakost (4.2) dobijamo

$$\Big\| x - \sum_{j\in F} c_j x_j \Big\| = \|Dc - Dc_F\| = \|D(c - c_F)\| \leqslant \sqrt{B}\, \|c - c_F\|_2 < \varepsilon.$$

□

Napomena 4.2. *Bezuslovna konvergencija nije samo pogodna za utvrđivanje konvergencije neortogonalnih redova u Hilbert-ovom prostoru, već i kao najznačajniji tip konvergencije u Banach-ovom prostoru.*

Ako je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir, tada je $\sum_{j\in J} |\langle x, x_j\rangle|^2$ apsolutno konvergentan red nenegativnih realnih brojeva, pa konvergira bezuslovno. Kao posledicu, izvodimo tvrđenje da svaka „premetačina” okvira ponovo daje okvir i zato možemo koristiti prebrojiv skup indeksa okvira kad god to želimo.

Sada ćemo dobiti prvu rekonstrukcionu formulu za f iz koeficijenata okvira $\langle x, x_j\rangle$, $j \in J$.

Posledica 4.2. *Ako je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir sa granicama $A, B > 0$, onda je familija $\{S^{-1}x_j\}_{j\in J}$, takođe, okvir sa granicama $B^{-1}, A^{-1} > 0$, tzv. dualni okvir. Svako $x \in \mathcal{H}$ ima neortogonalni razvoj*

$$x = \sum_{j\in J} \langle x, S^{-1}x_j\rangle x_j, \tag{4.3}$$

i

$$x = \sum_{j\in J} \langle x, x_j\rangle S^{-1}x_j. \tag{4.4}$$

Obe sume konvergiraju bezuslovno u $\mathcal{H}$.

Dokaz. Uočimo da je

$$\Big|\sum_{j\in J}\langle x, S^{-1}x_j\rangle\Big|^2 = \Big|\sum_{j\in J}\langle S^{-1}x, x_j\rangle\Big|^2 = \langle S(S^{-1}x), S^{-1}x\rangle = \langle S^{-1}x, x\rangle.$$

Iz teoreme 4.5 imamo da je $B^{-1}\|x\|^2 \leqslant \langle S^{-1}x, x\rangle = \sum\limits_{j\in J}\Big|\langle x, S^{-1}x_j\rangle\Big|^2 \leqslant A^{-1}\|x\|^2$. Dakle, familija $\{S^{-1}x_j\}_{j\in J}$ predstavlja okvir sa granicama B^{-1} i A^{-1}. Ako iskoristimo da je $i_{\mathcal{H}} = S^{-1}S = SS^{-1}$, dobijamo razvoj u red, tj.

$$x = S(S^{-1}x) = \sum_{j\in J}\langle S^{-1}x, x_j\rangle x_j = \sum_{j\in J}\langle x, S^{-1}x_j\rangle x_j$$

i

$$x = S^{-1}(Sx) = \sum_{j\in J}\langle x, x_j\rangle S^{-1}x_j.$$

Pošto su $\{\langle x, x_j\rangle\}_{j\in J}$ i $\{\langle x, S^{-1}x_j\rangle\}_{j\in J}$ nizovi iz prostora $\ell^2(J)$, na osnovu posledice 4.1 oba reda konvergiraju bezuslovno. □

Ovi razvoji su od koristi ako je moguće eksplicitno odrediti dualni okvir. Najefikasniji rekonstrukcioni metod je iterativni rekonstrukcioni metod, tzv. algoritam za okvire. On je u praksi od velike primene u kombinaciji sa različitim metodama numeričke analize (videti [56]).

Primer 4.2. *Neka su $a, b > 0$ fiksirani. Familija $\{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} mbx}g(x-na)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ vremensko-frekvencijskih translacija od $g \in L^2(\mathbb{R})$ čini okvir za $L^2(\mathbb{R})$ koji se naziva Gabor-ov okvir. Slično, kolekcija $\{a^{n/2}g(a^n x - mb)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ za $g \in L^2(\mathbb{R})$ formira okvir koji nazivamo vejvlet.*

Dalje ćemo navesti neke rezultate koji se odnose na jedinstvenost razvoja (4.3) i (4.4). Sledeća teorema pokazuje da među svim izborima koeficijenata $\{c_j\}_{j\in J}$ za koje je $x = \sum\limits_{j\in J} c_j x_j$, skalari $c_j = \langle x, S^{-1}x_j\rangle$, $j \in J$, imaju minimalnu ℓ^2-normu, tj. objašnjava zašto su $\langle x, S^{-1}x_j\rangle$, $j \in J$, „najekonomičniji" koeficijenti.

Teorema 4.6 ([26])**.** *Neka je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$ i $x \in \mathcal{H}$. Ako je $x = \sum\limits_{j\in J} c_j x_j$ za neke skalare c_j, $j \in J$, tada*

$$\sum_{j\in J}|c_j|^2 = \sum_{j\in J}|\langle x, S^{-1}x_j\rangle|^2 + \sum_{j\in J}|\langle x, S^{-1}x_j\rangle - c_j|^2.$$

Specijalno, niz $\{\langle x, S^{-1}x_j\rangle\}_{j\in J}$ ima minimalnu ℓ^2-normu među svim nizovima $\{c_j\}_{j\in J}$.

Dokaz. Na osnovu razvoja (4.4) imamo da je $x = \sum\limits_{j\in J} a_j x_j$, gde je $a_j = \langle x, S^{-1}x_j\rangle$, $j \in J$. Neka je $c = \{c_j\}_{j\in J}$ niz skalara takav da je $x = \sum\limits_{j\in J} c_j x_j$. Pošto je $\sum\limits_{j\in J}|a_j|^2 < \infty$, bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je $\sum\limits_{j\in J}|c_j|^2 < \infty$. Tada $c \in \ell^2$ i za $a = \{a_j\}_{j\in J}$ važi

$$\langle x, S^{-1}x\rangle = \Big\langle \sum_{j\in J} a_j x_j, S^{-1}x \Big\rangle = \sum_{j\in J} a_j \langle S^{-1}x_j, x\rangle = \sum_{j\in J} a_j \overline{a}_j = \langle a, a\rangle_{\ell^2}$$

i

$$\langle x, S^{-1}x\rangle = \Big\langle \sum_{j\in J} c_j x_j, S^{-1}x \Big\rangle = \sum_{j\in J} c_j \langle S^{-1}x_j, x\rangle = \sum_{j\in J} c_j \overline{a}_j = \langle c, a\rangle_{\ell^2}.$$

Dakle, $\langle a, a\rangle = \langle c, a\rangle$, pa je

$$\begin{aligned}\|c\|_2^2 &= \|c - a + a\|_2^2 = \|c-a\|_2^2 + \|a\|_2^2 + \langle c-a, a\rangle + \langle a, c-a\rangle \\ &= \|c-a\|_2^2 + \|a\|_2^2 \geqslant \|a\|_2^2.\end{aligned}$$

Jednakost važi ako je $c = a$. $\square$

4.3 Okviri i baze

Vektori koji čine okvir, u opštem slučaju, nisu ortogonalni i linearno nezavisni. U tome se sastoji i najznačajnija razlika između vektora koji čine okvir i onih koji čine bazu. Međutim, iz posledice 4.2 vidimo da na jednoj strani imamo neortogonalan zapis elementa $x \in \mathcal{H}$ vektorima x_j, $j \in J$, koji čine okvir, a skalarni proizvod x sa dualnim okvirom nam daje koeficijente, dok sa druge strane imamo razvoj preko koeficijenata okvira i vektora koji čine dualni okvir. Ovde već uviđamo neke sličnosti sa razvojem elemenata preko ortonormirane baze. Naime, u oba slučaja imamo skup vektora i pravimo skalarne proizvode elemenata sa vektorima iz tog skupa.

Navešćemo neke osobine okvira koje bi mogle da im istaknu prednost u odnosu na baze prostora.

1) Okviri su fleksibilniji i prirodniji.

2) Okviri su robusniji.

3) Koristeći primer 4.1, ako izvršimo perturbaciju koeficijenata koji učestvuju u razvoju, rekonstrukcione greške korišćenjem ortonormirane baze i datog okvira se odnose kao 3 : 2.

Za razliku od ortonormirane baze, koeficijenti u razvoju pomoću vektora koji čine okvir, iako imaju neke lepe osobine, u opštem slučaju, nisu jedinstveni.

Da vidimo, konačno, u kakvom odnosu stoje okviri, čvrsti okviri i ortonormirane baze.

Napomena 4.3. *Ako je $\{x_j\}_{j\in J}$ ortonormirana baza, tada za svako $x \in \mathcal{H}$ važi $\sum_{j\in J} |\langle x, x_j\rangle|^2 = \|x\|^2$, pa je svaka ortonormirana baza čvrst okvir sa $A = B = 1$. Međutim, čvrst okvir sa granicama $A = B = 1$ ne mora da bude ortonormirana baza.*

Primer 4.3. *Neka je* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ortonormirana baza za* $\mathcal{H}$. *Posmatrajmo sistem vektora* $\mathcal{F} = \left\{e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \ldots\right\}$. *Lako se pokazuje da je* $\mathcal{F}$ *čvrst okvir sa granicama* $A = B = 1$, *ali očigledno nije ortonormirana baza jer smo izgubili linearnu nezavisnost.*

Svaka ortonormirana baza $\{x_j\}_{j\in J}$ je egzaktan okvir, jer ako za neko $k \in J$ izbrišemo x_k, tada je $\sum\limits_{\substack{j\neq k\\ j\in J}} |\langle x_k, x_j\rangle|^2 = 0$ i zato $\{x_j \mid j \in J, j \neq k\}$ ne može da bude okvir.

Sledećom teoremom ćemo pokazati da su čvrstoća i egzaktnost okvira različiti pojmovi.

Lema 4.2 ([60]). *Neka je* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ortonormirana baza za separabilan Hilbert-ov prostor* $\mathcal{H}$.

a) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je čvrst egzaktan okvir u* $\mathcal{H}$ *sa granicama* $A = B = 1$.

b) $\{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \ldots\}$ *je čvrst neegzaktan okvir sa granicama* $A = B = 1$, *ali nije ortogonalan, pa nije baza, već samo sadrži bazu. Slično, ako je* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *neka druga ortonormirana baza za* $\mathcal{H}$, *tada je* $\{e_n \cup f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *čvrst neegzaktan okvir.*

c) $\{e_1, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{3}, \ldots\}$ *je potpun ortogonalan niz i baza u* $\mathcal{H}$, *ali nema donju granicu* A, *pa ne može da bude okvir.*

d) $\{e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \ldots\}$ *je čvrst neegzaktan okvir sa granicama* $A = B = 1$, *ali nijedan neredundantan podniz nije okvir.*

e) $\{2e_1, e_2, e_3, \ldots\}$ *je nečvrst egzaktan okvir sa granicama* $A = 1$, $B = 2$.

Lema 4.3 ([26]). *Ako je* $\{x_j\}_{j\in J}$ *okvir u Hilbert-ovom prostoru* $\mathcal{H}$, *tada je* $\{x_j\}_{j\in J}$ *potpun u* $\mathcal{H}$.

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{H}$ takvo da je $\langle x, x_j\rangle = 0$ za sve $j \in J$. Tada je $A\|x\|^2 \leqslant \sum\limits_{j\in J} |\langle x, x_j\rangle|^2 = 0$. S obzirom da je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir u $\mathcal{H}$, imamo da je $x = \mathbf{0}$. □

Posledica prethodnih rezultata je da ako $\mathcal{H}$ poseduje okvir $\{x_j\}_{j\in J}$, onda je on separabilan prostor jer je skup svih konačnih linearnih kombinacija $\sum\limits_{j\in J} c_j x_j$ sa racionalnim koeficijentima c_j (ili sa racionalnim realnim i imaginarnim delom ako je c_j kompleksan broj) najviše prebrojiv svuda gust u njemu. Obrnuto, svaki separabilan *Hilbert*-ov prostor ima okvir pošto u njemu postoji ortonormirana baza, koja je čvrst egzaktan okvir.

Definicija 4.9. *Niz* $\{x_j\}_{j\in J}$ *u Hilbert-ovom prostoru* $\mathcal{H}$ *je Bessel-ov ako za svako* $x \in \mathcal{H}$ *važi* $\sum\limits_{j\in J} |\langle x, x_j\rangle|^2 < \infty$.

Lema 4.4. *Ako je* $\{x_j\}_{j\in J}$ *Bessel-ov niz, tada je preslikavanje* $Cx = \{\langle x, x_j\rangle\}_{j\in J}$ *neprekidno i linearno iz* $\mathcal{H}$ *u* ℓ^2. *Drugim rečima, postoji konstanta* $B > 0$ *tako da je* $\sum\limits_{j\in J} |\langle x, x_j\rangle|^2 < B\|x\|^2$, *za svako* $x \in \mathcal{H}$.

Broj B se naziva *Bessel*-ova granica ili gornja granica okvira $\{x_j\}_{j\in J}$. Proizvoljan *Bessel*-ov niz ne mora biti okvir, jer ne mora da postoji donja granica za okvir. Za okvire koji se koriste u praksi, lako je utvrditi da li su *Bessel*-ovi nizovi, dok je donju granicu često teže proceniti.

Sledeći rezultat ima važnu ulogu u karakterizaciji klase egzaktnih okvira.

Teorema 4.7 ([60]). *Neka je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir za Hilbert-ov prostor $\mathcal{H}$.*

a) Ako je $\langle x_m, S^{-1}x_m\rangle = 1$ za neko $m \in J$, tada je $\langle x_m, S^{-1}x_n\rangle = 0$ za sve $n \neq m$, $n, m \in J$.

b) Uklanjanjem vektora x_m, za neko $m \in J$, iz okvira, ostaje ili okvir ili nepotpun skup. U stvari, ako je $\langle x_m, S^{-1}x_m\rangle \neq 1$, tada je $\{x_j \mid j \in J, j \neq m\}$ okvir, a ako je $\langle x_m, S^{-1}x_m\rangle = 1$, tada je $\{x_j \mid j \in J, j \neq m\}$ nepotpun niz.

Kao posledicu teoreme 4.7 dobijamo da je okvir egzaktan ako i samo ako je biortogonalan sa svojim dualnim okvirom.

Posledica 4.3 ([60]). *Ako je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna.*

a) $\{x_j\}_{j\in J}$ je egzaktan okvir.

b) $\{x_j\}_{j\in J}$ i $\{S^{-1}x_j\}_{j\in J}$ su biortogonalni.

c) $\langle x_j, S^{-1}x_j\rangle = 1$ za sve $j \in J$.

Posledica gornjeg tvrđenja: Ako je okvir čvrst sa granicama $A = B$, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna.

a′) $\{x_j\}_{j\in J}$ je egzaktan okvir.

b′) $\{x_j\}_{j\in J}$ je ortogonalan niz.

c′) $\|x_j\|^2 = A$ za sve $j \in J$.

Svi okviri imaju normu ograničenu sa gornje strane i jedino neegzaktni okviri mogu imati normu koja nije ograničena sa donje strane.

Teorema 4.8 ([60]). *Neka je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada važe sledeća tvrđenja.*

a) Za okvir $\{x_j\}_{j\in J}$ je $\sup\limits_{j\in J} \|x_j\|^2 \leqslant B$, tj. norma-ograničen je sa gornje strane.

b) Ako je $\{x_j\}_{j\in J}$ egzaktan okvir, tada je $A \leqslant \inf\limits_{j\in J} \|x_j\|^2$, tj. norma-ograničen je sa donje strane.

Dokaz. a) Neka je $m \in J$ fiksirano. Za svako $j \in J$ važi da je

$$\|x_m\|^4 = |\langle x_m, x_m\rangle|^2 \leqslant \sum_{j\in J} |\langle x_j, x_j\rangle|^2 \leqslant B\|x_j\|^2.$$

b) Ako je $\{x_j\}_{j\in J}$ egzaktan okvir, tada su $\{x_j\}_{j\in J}$ i $\{S^{-1}x_j\}_{j\in J}$ biortogonalni, pa za fiksirano $m \in J$ važi

$$A\|S^{-1}x_m\|^2 \leqslant \sum_{j\in J} |\langle S^{-1}x_m, x_j\rangle|^2 = |\langle S^{-1}x_m, x_m\rangle|^2 \leqslant \|S^{-1}x_m\|^2 \|x_m\|^2.$$

Pošto je $\{x_j\}_{j\in J}$ egzaktan, važi da je $x_m \neq \mathbf{0}$. S obzirom da je S topološki izomorfizam, to je $S^{-1}x_m \neq \mathbf{0}$, pa deljenjem sa $\|S^{-1}x_m\|^2$ dobijamo traženu nejednakost. $\square$

Već smo videli da ako je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir i red $\sum\limits_{j\in J} |c_j|^2$ konvergira, tada i red $\sum\limits_{j\in J} c_j x_j$ konvergira. Sledeći primeri pokazuju da obrnuto tvrđenje nije tačno.

Primer 4.4 ([61])**.** 1) *Neka je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ okvir koji sadrži beskonačno mnogo elemenata jednakih nuli. Neka je $c_n = 1$ kad god je $x_n = \mathbf{0}$, i neka je $c_n = 0$ kad god je $x_n \neq \mathbf{0}$. Tada je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n = \mathbf{0}$, iako je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 = \infty$.*

2) *Ako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$, definišimo $f_n = n^{-1}x_n$ i $g_n = \sqrt{1-n^{-2}}\, x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\{f_n \cup g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ čvrst okvir sa granicama $A = B = 1$. Neka je $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^{-1}x_n$. Ovaj element pripada prostoru $\mathcal{H}$ jer red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^{-2}$ konvergira. Međutim, koristeći okvir $\{f_n \cup g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, imamo $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (1\cdot f_n + 0\cdot g_n)$, iako je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (1^2+0^2) = \infty$.*

Videli smo da ako $\{c_j\}_{j\in J}$ pripada prostoru ℓ^2, tada red $\sum\limits_{j\in J} c_j x_j$ konvergira bezuslovno. Prethodni primer pokazuje da obrnuto ne mora da važi. Međutim, pokazaćemo da ako je okvir $\{x_j\}_{j\in J}$ norma-ograničen sa donje strane, tada $\sum\limits_{j\in J} c_j x_j$ konvergira bezuslovno upravo za $\{x_j\}_{j\in J}$ iz ℓ^2.

Teorema 4.9. *Ako je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir norma-ograničen sa donje strane, tada red $\sum\limits_{j\in J} |c_j|^2$ konvergira ako i samo ako red $\sum\limits_{j\in J} c_j x_j$ konvergira bezuslovno.*

Primer 4.5 ([61])**.** *Moguće je da okvir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bude norma-ograničen sa donje strane i za niz skalara $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$ da konvergira, ali da je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 = \infty$. Neka je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $\{e_1, e_1, e_2, e_2, \ldots\}$ okvir koji je norma-ograničen sa donje strane. Red $e_1 - e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{2}} - \frac{e_2}{\sqrt{2}} + \frac{e_3}{\sqrt{3}} - \frac{e_3}{\sqrt{3}} + \cdots$ jako konvergira ka nuli u $\mathcal{H}$. Međutim, red $e_1 + e_1 + \frac{e_2}{\sqrt{2}} + \frac{e_2}{\sqrt{2}} + \frac{e_3}{\sqrt{3}} + \frac{e_3}{\sqrt{3}} + \cdots$ ne konvergira. Zato gornji red konvergira uslovno. Pošto $\{n^{-1/2}\} \notin \ell^2$, uslovna konvergencija sledi i iz predhodne teoreme.*

Dolazimo do tvrđenja koja potpuno određuju vezu okvira i baza.

Teorema 4.10. *Neegzaktan okvir ne može da bude baza.*

Teorema 4.11 ([79]). *Neka je $\{x_j\}_{j\in J}$ niz u Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je $\{x_j\}_{j\in J}$ egzaktan okvir za $\mathcal{H}$ ako i samo ako je ograničena bezuslovna baza za $\mathcal{H}$ tj. ako i samo ako je Riesz-ova baza za $\mathcal{H}$.*

Pošto je operator okvira pozitivan, on je topološki izomorfizam iz $\mathcal{H}$ u samog sebe. Operator S ima definisan $S^{1/2}$ koji je, takođe, pozitivan topološki izomorfizam iz $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$. Slično, S^{-1} ima kvadratni koren $S^{-1/2}$ i lako se proverava da je $(S^{1/2})^{-1} = S^{-1/2}$. Pošto je $\{x_j\}_{j\in J}$ egzaktan okvir, imamo da su $\{x_j\}_{j\in J}$ i $\{S^{-1}x_j\}_{j\in J}$ biortogonalni. Zato važi

$$\langle S^{-\frac{1}{2}}x_j, S^{-\frac{1}{2}}x_k\rangle = \langle x_j, S^{-\frac{1}{2}}S^{-\frac{1}{2}}x_k\rangle = \langle x_j, S^{-1}x_k\rangle = \delta_{jk}.$$

Stoga je $\{S^{-1/2}x_j\}_{j\in J}$ ortonormirani niz. On je potpun, pošto topološki izomorfizam čuva potpunost nizova. Zato je $\{S^{-1/2}x_j\}_{j\in J}$ ortonormirana baza za $\mathcal{H}$ i topološki izomorfizam $T = S^{1/2}$ slika ortonormiranu bazu u okvir $\{x_j\}_{j\in J}$. Možemo posmatrati niz $\{S^{-1/2}x_j\}_{j\in J}$ ne samo za egzaktan okvir, već za bilo koji okvir. Ako je $\{e_j\}_{j\in J}$ neegzaktan okvir, tada $\{S^{-1/2}x_j\}_{j\in J}$ neće biti ortonormirana baza za $\mathcal{H}$, ali ćemo pokazati da će biti čvrst okvir za $\mathcal{H}$.

Posledica 4.4 ([60]). *Svaki okvir je ekvivalentan čvrstom okviru, tj. ako je $\{x_j\}_{j\in J}$ okvir sa operatorom okvira S, tada je $S^{-1/2}$ pozitivan topološki izomorfizam iz $\mathcal{H}$ u $\mathcal{H}$ i $\{S^{-1/2}x_j\}_{j\in J}$ je čvrst okvir sa granicama $A = B = 1$.*

Dokaz. Pošto je $S^{-1/2}$ topološki izomorfizam, onda je $\{S^{-1/2}x_j \mid j \in J\}$ okvir za $\mathcal{H}$. Za svako $x \in \mathcal{H}$ važi $\sum_{j\in J}\langle x, S^{-\frac{1}{2}}x_j\rangle S^{-\frac{1}{2}}x_j = S^{-\frac{1}{2}}SS^{-\frac{1}{2}}x = x = i_{\mathcal{H}}x$. Zaključujemo da je okvir čvrst sa granicama $A = B = 1$. □

Napomena 4.4. *Ako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ egzaktan okvir, tada je on Riesz-ova baza za $\mathcal{H}$. Iz svega navedenog smo imali ekvivalenciju tvrđenja: $\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2$ konvergira, $\sum_{n\in\mathbb{N}}c_nx_n$ konvergira i $\sum_{n\in\mathbb{N}}c_nx_n$ konvergira bezuslovno.*

Primer 4.6 ([61]). *Neka je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza u separabilnom Hilbert-ovom prostoru $\mathcal{H}$ i posmatrajmo okvir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{e_1, e_1, e_2, e_3, \ldots\}$. Pošto je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dobijen iz ortonormirane baze dodavanjem jednog elementa, onda red $\sum_{n\in\mathbb{N}}c_nx_n$ konvergira ako i samo ako je $\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2 < \infty$. Kako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ norma-ograničen sa donje strane, na osnovu teoreme 4.9, red $\sum_{n\in\mathbb{N}}|c_n|^2$ konvergira ako i samo ako red $\sum_{n\in\mathbb{N}}c_nx_n$ konvergira bezuslovno.*

Napomena 4.5. *Videli smo da ekvivalencija ovih konvergencija ne važi ako je okvir neegzaktan.*

U ovom primeru okvir je dobijen dodavanjem jednog elementa ortonormiranoj bazi. *Holub* je posmatrao okvire dobijene kada se *Riesz*-ovoj bazi dodaje konačno mnogo elemenata (videti [65]).

Napomena 4.6 ([113])**.** *Jedan od otvorenih problema je Feichtinger-ova pretpostavka da je svaki ograničen okvir konačna unija Riesz-ovih baznih nizova. Videli smo da je okvir* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ograničen ako je* $0 < \inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$*. Sa druge strane, Riesz-ov bazni niz* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *u* $\mathcal{H}$ *je familija* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *koja je Riesz-ova baza za zatvaranje skupa konačnih linearnih kombinacija svojih elemenata u* $\mathcal{H}$*.*

Feichtinger-ova pretpostavka je ekvivalentna Bourgain-ovoj i Tzafriri-jevoj "Restricted-Invertibility" teoremi iz 1987. *godine, a u radu* [27] *se pokazuje da je ovaj problem u tesnoj vezi sa Kadison-Singer-ovim problemom o* C^* *algebrama iz* 1959. *godine.*

Više o ovome se može pročitati na http://www.aimath.org/WWN/kadisonsinger/.

4.4 Atomi u *Hilbert*-ovim prostorima

U prethodnim poglavljima je pokazano da u *Hilbert*-ovom prostoru $\mathcal{H}$ niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ čini okvir ako postoji ekvivalencija normi između $\|x\|_{\mathcal{H}}$ i $\|\{\langle x, x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}$. Za takav niz postoje koeficijenti $\{a_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ da je $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x)x_n$. U specijalnom slučaju je $a_n(x) = \langle x, S^{-1}x_n\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Pošto je $\{S^{-1}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takođe okvir, postoji ekvivalencija normi između $\|x\|_{\mathcal{H}}$ i $\|\{a_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}$. U ovom poglavlju ćemo razmotriti dualni koncept okvira uvedenog od strane *Gröchenig*-a. On polazi od postojanja koeficijenata koji reprodukuju x i zadovoljavaju ekvivalenciju norme. Cilj je da u *Hilbert*-ovom prostoru nizova ukažemo na vezu između okvira i *Gröchenig*-ovog skupa atoma.

Definicija 4.10 ([54])**.** *Dat je niz* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *u Hilbert-ovom prostoru* $\mathcal{H}$ *i niz linearnih funkcionela* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *na* $\mathcal{H}$*. Ako je*

1° $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)x_n$ *za svako* $x \in \mathcal{H}$*,*

2° *postoje konstante* $A, B > 0$ *tako da za svako* $x \in \mathcal{H}$

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|^2 \leqslant B\|x\|^2,$$

tada je $\{x_n; f_n\}$ *skup atoma za* $\mathcal{H}$*. Konstante* A *i* B *su granice atoma i funkcionele* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *se nazivaju koeficijent-funkcionele atoma.*

S obzirom da je $|f_k(x)|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|^2 \leqslant B\|x\|^2$, svaka funkcionela f_n, $n \in \mathbb{N}$, je neprekidna i određena sa $f_n(\cdot) = \langle \cdot, y_n\rangle$, gde je $y_n \in \mathcal{H}$ jedinstveno određen. Na taj način, funcionele f_n možemo identifikovati sa elementima y_n i smatrati $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ koeficijent-funkcionelama atoma. Na osnovu ovoga i definicije 4.10 dobijamo sledeće tvrđenje.

Teorema 4.12. *Ako je $\{x_n; y_n\}$ skup atoma i A, B granice atoma, tada je $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ okvir za koji su konstante A i B granice okvira.*

Ako $\{x_n; f_n\}$ čini skup atoma za $\mathcal{H}$, tada familija $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne mora da bude okvir. Na primer, ako posmatramo ortonormiranu bazu $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ prostora $\mathcal{H}$, tada $\{e_n, ne_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nije okvir jer nema gornju granicu okvira. Međutim, on čini skup atoma za $\mathcal{H}$ ako definišemo koeficijent-funkcionele sa $\{e_n, 0\}_{n\in\mathbb{N}}$ ili $\{\frac{e_n}{2}, \frac{e_n}{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Ako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ okvir, tada je $\{x_n; S^{-1}x_n\}$ skup atoma, gde je S operator okvira za $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 4.13. *Neka je $\{x_n; y_n\}$ skup atoma sa granicama A i B. Tada važe sledeća tvrđenja.*

a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava nejednakost $B^{-1}\|x\|^2 \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2$ za svako $x \in \mathcal{H}$.

b) Ako je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Bessel-ov niz sa gornjom granicom C, tada je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ okvir za koji su B^{-1} i C granice okvira. Štaviše, u tom slučaju je $\{y_n; x_n\}$ skup atoma gde su B^{-1}, C granice atoma.

Dokaz. *a*) Neka je $\{x_n; y_n\}$ skup atoma. Za $x, y \in \mathcal{H}$ imamo

$$
\begin{aligned}
|\langle x, y\rangle|^2 &= \left|\left\langle x, \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle y, y_n\rangle x_n \right\rangle\right|^2 = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n \langle y, y_n\rangle x_n\rangle\right|^2 \\
&\leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle y, y_n\rangle|^2\right) \leqslant B\|y\|^2 \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2.
\end{aligned}
$$

Dobijamo da je $\|x\|^2 = \sup\limits_{\|y\|=1} |\langle x, y\rangle|^2 \leqslant B \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, x_n\rangle|^2$, pa niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima donju granicu B^{-1}.

b) Pretpostavimo da je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Bessel*-ov niz. On ima gornju granicu okvira, a na osnovu dela *a*) poseduje i donju granicu okvira, pa je samim tim okvir.

Dokažimo da je $\{y_n; x_n\}$ skup atoma. Pošto je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ okvir, ekvivalencija normi je zadovoljena, pa je potrebno još pokazati da je $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle y_n$ za svako x. Nizovi $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ su *Bessel*-ovi nizovi, pa su preslikavanja $U, V : \mathcal{H} \to \ell^2$ data sa $Ux = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $Vx = \{\langle x, y_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ linearna i neprekidna. Njihova adjungovana preslikavanja $U^*, V^* : \ell^2 \to \mathcal{H}$, data su sa $U^*(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$, $V^*(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n y_n$. Kako je $\{y_n; x_n\}$ skup atoma, imamo da je $U^*Vx = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, y_n\rangle x_n = x$, tj. $U^*V = i_{\mathcal{H}}$. Odatle $V^*U = (U^*V)^* = i^*_{\mathcal{H}} = i_{\mathcal{H}}$, pa je $x = V^*Ux = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, x_n\rangle y_n$. □

Na osnovu ove teoreme zaključujemo da su svi okviri skupovi atoma i da svi atomi koji su *Bessel*-ovi nizovi ujedno i okviri. Takođe smo videli da atomi koji nisu *Bessel*-ovi nizovi ne moraju biti okviri.

Sledeći primer pokazuje da čak i u slučaju *Bessel*-ovih nizova koeficijenti atoma nisu jedinstveni.

Primer 4.7. *Neka je* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ortonormirana baza za Hilbert-ov prostor* $\mathcal{H}$. *Tada je* $\{e_1, e_1, e_2, e_2, e_3, e_3, \ldots\}$ *okvir sa granicama* $A = B = 2$, *samim tim i Bessel-ov niz. Njegov dualni okvir* $\{\frac{e_1}{2}, \frac{e_1}{2}, \frac{e_2}{2}, \frac{e_2}{2}, \frac{e_3}{2}, \frac{e_3}{2}, \ldots\}$ *određuje jedan izbor koeficijenata atoma. Međutim, sa* $\{e_1, 0, e_2, 0, e_3, 0, \ldots\}$ *su, takođe, dati koeficijenti atoma, pa zaključujemo da njihov izbor nije jedinstven.*

Sledeća teorema daje uslove pod kojima će koeficijent-funkcionele atoma, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, biti dualni okvir za $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 4.14 ([61])**.** *Dat je skup atoma* $\{x_n; y_n\}$ *gde je* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Bessel-ov niz. Neka su operatori* $U, V : \mathcal{H} \to \ell^2$ *dati sa* $Ux = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $Vx = \{\langle x, y_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Ako je* $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(V)$, *tada je* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dualni okvir za* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Dokaz. Koristeći dokaz teoreme 4.13 *b*) imamo da je $U^*V = V^*U = i_{\mathcal{H}}$. Neka je $K = \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(V)$. Pošto je $UV^*U = Ui_{\mathcal{H}} = U$, to je $(UV^*)_{|K} = i_K$. Dalje, $UV^*V = i_{|K}V = V$, jer je $K = \mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(V)$. Sada, $V^*Vx = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, y_n\rangle y_n = Sx$, gde je S operator okvira za $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Za $x \in \mathcal{H}$ je

$$\{\langle x, y_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} = Vx = UV^*Vx = USx = \{\langle Sx, x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\langle x, Sx_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Zaključujemo da je $y_n = Sx_n$, tj. $x_n = S^{-1}y_n$. Dakle, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je dualni okvir za $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

4.5 Okviri i atomi u *Banach*-ovim prostorima

Godine 1989. *Gröchenig* uopštava pojam okvira na *Banach*-ove prostore i naziva ih dekompozicije atomima.

U ovom poglavlju koristimo oznake $(X, \|\cdot\|)$ za *Banach*--ov prostor, $(X^*, \|\cdot\|^*)$ za njegov dual, $(\Theta, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ za *Banach*-ov prostor nizova i $(\Theta^*, |\!|\!|\cdot|\!|\!|^*)$ za dual od Θ.

Prostor $(\Theta, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ nazivamo čvrstim ako iz uslova $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ i $|d_n| \leqslant |c_n|$, $n \in \mathbb{N}$, sledi da $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ i $|\!|\!|\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_\Theta \leqslant |\!|\!|\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_\Theta$.

Za *Banach*-ov prostor nizova kažemo da je BK-prostor ako su koordinatne funkcionele neprekidne, tj.

$$\left(x_n = \{\alpha_j^{(n)}\}_{j\in\mathbb{N}},\ \ x = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}},\ \ \lim_{n\to\infty} x_n = x\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_j^{(n)} = \alpha_j,\ j \in \mathbb{N}.$$

Jedinični vektori u BK-prostoru Θ su vektori $e_i(j) = \delta_{ij}$, gde je δ_{ij} *Kronecker*-ov delta simbol. BK-prostor koji sadrži sve kanoničke vektore e_i i za koji postoji konstanta $\lambda \geqslant 1$ takva da je

$$\Big|\!\Big|\!\Big| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \Big|\!\Big|\!\Big|_\Theta \leqslant \lambda |\!|\!|\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}|\!|\!|_\Theta, \quad n \in \mathbb{N},\ \{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \Theta,$$

naziva se λ-BK-prostor.

BK-prostor Θ se naziva CB-prostor ako skup kanoničkih vektora $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ čini *Schauder*-ovu bazu, koja se zove kanonička baza za CB-prostor Θ. Neka je $S_N : \Theta \to \Theta$ dat sa $S_N(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$, $N \in \mathbb{N}$. Za CB-prostor Θ važi $1 \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\| < \infty$ (videti [60]) i broj $\sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\|$ se naziva kanonička bazna konstanta. Zaključujemo da je svaki CB-prostor i λ-BK-prostor, gde je λ jednako kanoničkoj baznoj konstanti. Prostori ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, i c_0 su primeri čvrstih CB-prostora i 1-BK-prostora. Međutim, nije svaki λ-BK-prostor ujedno i CB-prostor, na primer c i ℓ^∞.

Lema 4.5 ([25]). *Ako je Θ CB-prostor sa kanoničkom bazom $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tada je prostor $BK\Theta^* := \big\{\{g(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \mid g \in \Theta^*\big\}$ sa normom $|\!|\!|\{g(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_{BK\Theta^*} := \|g\|_{\Theta^*}$ BK-prostor, izometrički izomorfan sa Θ^*. Takođe, svaka neprekidna funkcionela g na Θ je oblika $g\big(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n d_n$, gde je $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in BK\Theta^*$ jedinstveno određeno sa $d_n = g(e_n)$ i $\|g\|_{\Theta^*} = |\!|\!|\{g(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_{BK\Theta^*}$.*

Ako je Θ refleksivan CB-prostor, tada funkcionele $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pridružene kanoničkoj bazi $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ čine *Schauder*-ovu bazu za Θ^*, pa je $BK\Theta^*$ CB-prostor. Ubuduće, kad god je Θ CB-prostor, identifikovaćemo Θ^* sa $BK\Theta^*$.

Teorema 4.15 ([25]). *Neka je Θ BK-prostor za koji kanonički jedinični vektori čine bazu. Tada niz $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz X^* čini Θ^*-Bessel-ov niz za X sa granicom B ako i samo ako je operator $T : \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n g_n$ dobro definisan, ograničen operator iz Θ u X^* i važi $\|T\| \leqslant B$.*

Sada ćemo dati *Gröchenig*-ovo uopštenje okvira za *Banach*-ove prostore.

Definicija 4.11 ([54]). *Neka je X Banach-ov prostor i Θ BK-prostor. Neka je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz elemenata iz X^* i $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz elemenata iz X. Ako važi:*

a) $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ *za svako* $x \in X$,

b) norme $\|x\|_X$ *i* $|\!|\!|\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_\Theta$ *su ekvivalentne,*

c) $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) x_n$ *za svako* $x \in X$,

tada $\{g_n; x_n\}$ čini atomsku dekompoziciju od X u odnosu na Θ. Kažemo da je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-okvir za X. Ako je ekvivalencija normi data sa

$$A\|x\|_X \leqslant |\!|\!|\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_\Theta \leqslant B\|x\|_X, \tag{4.5}$$

tada konstante A i B nazivamo granice (Banach-ovih) atoma $\{x_n; g_n\}$ ili granice Θ-okvira.

Definicija 4.12. *Neka je X Banach-ov prostor i Θ BK-prostor. Neka je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz elemenata iz X^* i operator $S : \Theta \to X$. Ako važi:*

a) $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ *za svako* $x \in X$,

b) norme $\|x\|_X$ *i* $|||\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}|||_\Theta$ *su ekvivalentne,*

c) S *je ograničen linearan operator i* $S(\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}) = x$ *za svako* $x \in X$, *tada je* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Banach-ov okvir za* X *u odnosu na* Θ. *Preslikavanje* S *se naziva rekonstrukcioni operator.*

Definicije atoma i okvira u *Hilbert*-ovom prostoru predstavljaju specijalan slučaj definicija 4.11 i 4.12, respektivno, uzimajući da je $X = \mathcal{H}$ i $\Theta = \ell^2$.

Ispostavlja se da postoji prirodna povezanost definicija 4.11 i 4.12. Naime, ova dva pojma su ekvivalentna ako i samo ako jedinični vektori formiraju bazu prostora Θ.

Teorema 4.16 ([24],[61])**.** *Neka je* X *Banach-ov prostor i* Θ *odgovarajući* BK*-prostor. Neka je* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz elemenata iz* X^* *i operator* $S : \Theta \to X$. *Sledeća tvrđenja su ekvivalentna.*

a) $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je Banach-ov okvir za* X *u odnosu na* Θ *i* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je Schauder-ova baza za* Θ.

b) $\{g_n; S(e_n)\}$ *je atomska dekompozicija za* X *u odnosu na* Θ.

Dokaz ovog tvrđenja izostavljamo (pogledati [24, Proposition 2.3]).

Sledeća teorema daje karakterizaciju *Banach*-ovih prostora koji imaju Θ-okvir u odnosu na dati BK-prostor Θ.

Teorema 4.17 ([25])**.** *Neka je* X *Banach-ov prostor i* Θ BK*-prostor. Postoji* Θ*-okvir za* X *ako i samo ako je* X *izomorfno sa potprostorom od* Θ.

Veza između Θ-okvira i *Banach*-ovih okvira data je i u sledećoj teoremi.

Teorema 4.18 ([25])**.** *Neka je* Θ BK*-prostor i niz* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *iz* X^* *koji je* Θ*-okvir za* X. *Sledeća tvrđenja su međusobno ekvivalentna.*

a) $\mathcal{R}(U)$ *ima komplement u* Θ.

b) Operator $U^{-1} : \mathcal{R}(U) \to X$ *može biti proširen do ograničenog linearnog operatora* $V : \Theta \to X$.

c) Postoji ograničeni linearni operator S *tako da je* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Banach-ov okvir za* X *u odnosu na* Θ.

Takođe, uslov d) implicira svaki od uslova a) $-$ *c).*

d) Postoji niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *iz* X *tako da red* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n x_n$ *konvergira za svako* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *iz* Θ *i važi da je* $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) x_n$, $x \in X$.

Ako pretpostavimo da je Θ *i* CB*-prostor, tada je d) ekvivalentno sa tvrđenjima a)* $-$ *c) i uslovom e).*

e) Postoji niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $X \subseteq X^{**}$ koji je Θ^*-Bessel-ov niz za X^* tako da je

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_i(x)x_n, \quad x \in X.$$

Ako su Θ i Θ^* CB-prostori tada su uslovi $a) - e)$ ekvivalentni sa uslovom $f)$.

f) Postoji niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz $X \subseteq X^{**}$ koji je Θ^*-Bessel-ov niz za X^* tako da je

$$g = \sum_{n\in\mathbb{N}} g(x_n)g_n, \quad g \in X^*.$$

U tvrđenjima e) i f), niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je u stvari Θ^*-okvir za X^*.

Dokaz. Dokaz $a) \Rightarrow b)$ je trivijalan. Pretpostavimo sada da je $V : \Theta \to X$ linearna ograničena ekstenzija operatora U^{-1}. Posmatrajmo ograničen operator $P : \Theta \to \mathcal{R}(U)$ definisan sa $P = UV$. Pošto je $VU = i_X$, dobijamo da je $P^2 = P$. Za svako $f \in X$, imamo da je $Uf = UVUf = P(Uf) \in \mathcal{R}(P)$. Zaključujemo da je $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(U)$, pa $\mathcal{R}(U)$ ima komplement u Θ.

Ekvivalencija $b) \Leftrightarrow c)$ je očigledna.

Pretpostavimo da $d)$ važi. Operator $V : \Theta \to X$, $V : \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n f_n$ je ograničen, na osnovu teoreme *Banach-Steinhaus*-a. Neka je $\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz elemenata iz $\mathcal{R}(U)$. Tada je

$$V\big(\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(f)f_n = f = U^{-1}Uf = U^{-1}\big(\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}\big),$$

tj. V je ekstenzija od U^{-1}. Stoga, važi $b)$, a na osnovu prethodno dokazanih ekvivalencija, važe tvrđenja $a)$ i $c)$.

Neka važi $b)$ i pretpostavimo da kanonički vektori $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ čine bazu za Θ. Neka je $f_n = Ve_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pošto je V linearan i ograničen, za sve $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ imamo da je

$$\sum_{n=1}^{N} c_n f_n = V\Big(\sum_{n=1}^{N} c_n e_n\Big) \to C\big(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big), \quad N \to \infty.$$

Red $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n f_n$ konvergira, i na osnovu konstrukcije, za svako $f \in X$ imamo da je $f = VUf = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(f)f_n$, pa važi tvrđenje $d)$.

Neka važi $d)$. Ako je $f_n = Ve_n$ $n \in \mathbb{N}$, tada je $f = VUf = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(f)f_n$, pa na osnovu leme 4.5, za svako $g \in X^*$, imamo $\{g(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{g(V(e_n))\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta^*$ i $\|\{g(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\Theta^*} = \|gV\| \leqslant \|V\|\|g\|_{X^*}$. Stoga, niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, posmatran kao niz u X^{**}, je Θ^*-*Bessel*-ov niz za X^*. Time je pokazano da važi $e)$. S druge strane, ako važi $e)$, tada je na osnovu teoreme 4.15 red $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n f_n$ konvergentan za svako $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$, pa važi tvrđenje $d)$.

Dokažimo ekvivalenciju tvrđenja $e)$ i $f)$. Neka kanonički vektori čine bazu za Θ i Θ^* i neka je B *Bessel*-ova granica za Θ-*Bessel*-ov niz $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Označimo kanoničku bazu za Θ sa $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, a kanoničku bazu za Θ^* sa $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Pretpostavimo da $e)$ važi. Za $g \in X^*$ imamo

$$\begin{aligned}\Big\|g-\sum_{n=1}^{N} g(f_n)g_n\Big\|_{\Theta^*} &= \sup_{f\in X,\|f\|=1}\Big|g(f)-\sum_{n=1}^{N} g(f_n)g_n(f)\Big| \\ &= \sup_{f\in X,\|f\|=1}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} g(f_n)g_n(f)-\sum_{n=1}^{N} g(f_n)g_n(f)\Big| \\ &= \sup_{f\in X,\|f\|=1}\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} g(f_n)g_n(f)\Big| \leqslant \Big\|\sum_{n=N+1}^{\infty} g(f_n)z_n\Big\| \to 0,\end{aligned}$$

kad $N\to\infty$. Dakle, tvrđenje $f)$ važi.

Neka važi $f)$ i neka je K Θ^*-*Bessel*-ova granica za $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Za svako $g \in X^*$, niz $\{g(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pripada prostoru Θ^*, koji je na osnovu leme 4.5 izometrički izomorfan prostoru $\big\{\{G(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}} : G \in \Theta^*\big\}$. Stoga, niz $\{g(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ može biti identifikovan sa $\{G_g(e_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ za jedinstveno $G_g \in \Theta^*$. Za svako $f \in X$, imamo

$$\begin{aligned}&\Big\|f-\sum_{n=1}^{N} g_n(f)f_n\Big\|_X = \sup_{g\in X^*,\|g\|=1}\Big|g(f)-\sum_{n=1}^{N} g(f_n)g_n(f)\Big| = \\ &= \sup_{g\in X^*,\|g\|=1}\Big|\sum_{n=1}^{\infty} g(f_n)g_n(f)-\sum_{n=1}^{N} g(f_n)g_n(f)\Big| = \sup_{g\in X^*,\|g\|=1}\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty} g(f_n)g_n(f)\Big| \\ &= \sup_{g\in X^*,\|g\|=1}\Big|G_g\Big(\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(f)e_n\Big)\Big| \leqslant \sup_{g\in X^*,\|g\|=1}\big\|G_g\big\|\Big\|\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(f)e_n\Big\| \\ &= \sup_{g\in X^*,\|g\|=1}\big\|\{g(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\big\|\Big\|\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(f)e_n\Big\| \leqslant K\Big\|\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(f)e_n\Big\| \to 0, \quad N\to\infty.\end{aligned}$$

Zaključujemo da $e)$ važi. Slično, za svako $g \in X^*$, imamo

$$\|g\| = \sup_{f\in X,\|f\|=1}\big|g(f)\big| = \sup_{f\in X,\|f\|=1}\Big|\sum_{n\in\mathbb{N}} g(f_n)g_n(f)\Big| \leqslant B\big\|\{g(f_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{\Theta^*}.$$

Sledi da je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ^*-okvir za X^*. □

Kao posledicu teoreme 4.18 dobijamo karakterizaciju *Banach*-ovih prostora kod kojih postoji *Banach*-ov okvir.

Teorema 4.19 ([25]). *Banach-ov prostor X ima Banach-ov okvir u odnosu na dati prostor Θ ako i samo ako je X izomorfan sa komplementiranim potprostorom od Θ.*

Navodimo sada glavni rezultat iz rada [103].

Teorema 4.20 ([103]). *Neka je Θ CB-prostor. Neka je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz elemenata iz X^* koji je Θ-Bessel-ov niz za X. Posmatrajmo sledeće uslove.*

($\mathcal{P}_1$) *$\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Banach-ov okvir za X u odnosu na Θ.*

($\mathcal{P}_2$) *Postoji Θ^*-Bessel-ov niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($x_n \in X \subseteq X^{**}, n \in \mathbb{N}$) za X^* tako da je $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)x_n$ za svako $x \in X$.*

($\mathcal{P}_3$) *Postoji Θ^*-Bessel-ov niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($x_n \in X \subseteq X^{**}, n \in \mathbb{N}$) za X^* tako da je $g = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g(x_n)g_n$ za svako $g \in X^*$.*

Važe sledeća tvrđenja.

a) $(\mathcal{P}_1) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_2)$.

b) Ako su Θ i Θ^* CB-prostori, tada je $(\mathcal{P}_1) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_2) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_3)$ i svaki od uslova $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$ implicira da je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ^*-okvir za X^*. Niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se naziva dualni Θ-okvir za $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Ako je Θ refleksivan CB-prostor, tada svaki od uslova $(\mathcal{P}_2)$, $(\mathcal{P}_3)$ implicira da je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Banach-ov okvir za X^* u odnosu na Θ^*.

Poznato je da u slučaju *Hilbert*-ovog prostora, uslovi okvira $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ i $A\|x\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2} \leqslant B\|x\|_{\mathcal{H}}$ mogu biti preneti sa gustog podskupa na čitav prostor $\mathcal{H}$. U radu [92] dobijen je analogan rezultat za *Banach*-ove prostore sa minimalnim uslovima na odgovarajućem *Banach*-ovom prostoru nizova.

Teorema 4.21 ([92]). *Neka je $(\Theta, |\!|\!| \cdot |\!|\!|)$ λ-BK-prostor. Neka je W gust podskup Banach-ovog prostora $(X, \|\cdot\|)$ i $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz iz X^*.*

a) Ako uslovi $\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ i $|\!|\!|\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!| \leqslant B\|f\|_X$, gde je B pozitivna konstanta, važe za svako $f \in W$, tada je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-Bessel-ov niz za X sa granicom λB.

b) Ako uslovi $\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ i $A\|f\|_X \leqslant |\!|\!|\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!| \leqslant B\|f\|_X$, gde su A i B pozitivne konstante, važe za svako $f \in W$, tada je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-okvir za X sa granicama A i λB.

Dokaz. a) Pretpostavimo da za niz $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i svako $f \in W$ važi $\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ i $|\!|\!|\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_\Theta \leqslant B\|f\|_X$. Dokazaćemo prvo da važi $\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ za svako $f \in X$. Fiksirajmo proizvoljno $f \in X \setminus W$ i pretpostavimo da postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da $\left|\!\left|\!\left| \sum\limits_{n=1}^{N} g_n(f)e_n \right|\!\right|\!\right| > \lambda B\|f\|$. Neka je $\delta = \left|\!\left|\!\left| \sum\limits_{n=1}^{N} g_n(f)e_n \right|\!\right|\!\right| - \lambda B\|f\| > 0$. Pošto je W gust u X, postoji niz $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ elemenata iz W takav da $f_k \to f$, $k \to \infty$. Samim tim postoji $N_1 \in \mathbb{N}$ tako da je $\|f_k\| - \|f\| < \delta/(2\lambda B)$ za svako $k > N_1$. Zbog neprekidnosti g_n, $n = 1, 2, \ldots, N$, sledi da postoji $N_2 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\left|\!\left|\!\left| \sum_{n=1}^{N} g_n(f)e_n \right|\!\right|\!\right| - \left|\!\left|\!\left| \sum_{n=1}^{N} g_n(f_k)e_n \right|\!\right|\!\right| < \frac{\delta}{2}, \quad k > N_2.$$

Za $k > \max\{N_1, N_2\}$ imamo da je

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} g_n(f_k)e_n\Big\| > \lambda B\|f\| + \frac{\delta}{2} \geqslant \lambda B\Big(\|f_k\| - \frac{\delta}{2\lambda B}\Big) + \frac{\delta}{2} = \lambda B\|f_k\|.$$

Pošto je Θ λ-BK-prostor, to je

$$|\!|\!|\{g_n(f_k)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!| \geqslant \frac{1}{\lambda}\Big\|\sum_{n=1}^{N} g_n(f_k)e_n\Big\| > B\|f_k\|,$$

što je u kontradikciji sa uslovom $|\!|\!|\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_\Theta \leqslant B\|f\|_X$ za svako $f \in W$. Zato za svako $N \in \mathbb{N}$ važi $\Big\|\sum\limits_{n=1}^{N} g_n(f)e_n\Big\| \leqslant \lambda B\|f\|$.

Za svako $N \in \mathbb{N}$, operator $S_N : X \to \Theta$, dat sa $S_N(f) = \sum\limits_{n=1}^{N} g_n(f)e_n$, je ograničen i važi $\|S_N\| \leqslant \lambda B$. Štaviše, niz $\{S_N(f)\}_{N\in\mathbb{N}}$ konvergira za svako f kad $N \to \infty$ u gustom podskupu W od X. Zato $\{S_N(f)\}_{N\in\mathbb{N}}$ konvergira za svako $f \in X$. Pošto je Θ BK-prostor, granična vrednost $\lim\limits_{N\to\infty} S_N(f)$ je niz $\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$, pa $\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pripada prostoru Θ za svako $f \in X$. Primenom *Banach-Steinhaus*-ove teoreme dobijamo da je $|\!|\!|\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!| \leqslant \lambda B\|f\|$ za svako $f \in X$, pa je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-*Bessel*-ov okvir za X sa granicom λB.

b) Pretpostavimo da za svako $f \in W$ važe uslovi: $\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pripada prostoru Θ i $A\|f\|_X \leqslant |\!|\!|\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!| \leqslant B\|f\|_X$, gde su A i B pozitivne konstante. Neka $f \in X \setminus W$ i neka je $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz iz W takav da $f_k \to f$, $k \to \infty$. Za svako $N \in \mathbb{N}$ imamo da je

$$\Big|\, |\!|\!|\{g_n(f_k)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!| - |\!|\!|\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!| \,\Big| \leqslant \lambda B\|f_k - f\|,$$

pa je

$$\lim_{n\to\infty} |\!|\!|\{g_n(f_k)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!| = |\!|\!|\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|.$$

Nejednakost $A\|f_k\| \leqslant |\!|\!|\{g_n(f_k)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|$ važi za svako $k \in \mathbb{N}$, pa kad $k \to \infty$ dobijamo $A\|f\| \leqslant |\!|\!|\{g_i(f)\}_{i=1}^{\infty}|\!|\!|$. Time smo pokazali da je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-okvir za X sa granicama A i λB. □

Sledeći rezultat je uopštenje tvrđenja sa *Hilbert*-ovog prostora na slučaj *Banach*-ovog prostora.

Teorema 4.22 ([92]). *Neka je* $(\Theta, |\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ BK*-prostor,* X *i* Y *refleksivni Banach-ovi prostori, operator* G *izomorfizam iz* X^* *na* Y^* *i* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz elemenata iz* X^*.

a) Ako je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ*-Bessel-ov niz (respektivno* Θ*-okvir) za* X*, tada je niz* $\{Gg_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ*-Bessel-ov niz (respektivno* Θ*-okvir) za* Y.

b) Ako je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Banach-ov okvir za* X *u odnosu na* Θ*, tada je* $\{Gg_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Banach-ov okvir za* Y *u odnosu na* Θ.

Dokaz. *a*) Neka je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-*Bessel*-ov niz za X. Zbog refleksivnosti prostora X, za sve $y \in Y$ imamo $\{Gg_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{g_n(G^*y)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta$ i važi

$$|||\{Gg_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}||| = |||\{g_n(G^*y)\}_{n\in\mathbb{N}}||| \leqslant B\|G^*y\|_X \leqslant B\|G\|\,\|y\|_Y.$$

Neka je sada $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-okvir za X. Dokazaćemo da $\{Gg_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava levu nejednakost za okvir. Za svako $y \in Y$ važi

$$|||\{Gg_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}||| = |||\{g_n(G^*y)\}_{n\in\mathbb{N}}||| \geqslant A\|G^*y\|_X \geqslant A\frac{1}{\|(G^*)^{-1}\|}\|y\|_Y.$$

b) Treba dokazati da operator $\widetilde{U} : Y \to \Theta$, $\widetilde{U}y = \{Gg_n(y)\}_{n\in\mathbb{N}}$, ima ograničen levi inverz. Pošto je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Banach*-ov okvir za X u odnosu na Θ, operator $U : X \to \Theta$, $Uf = \{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$, ima ograničen levi inverz $S : \Theta \to X$. Kako je $\widetilde{U} = UG^*$, imamo da je $(G^*)^{-1}S\widetilde{U} = i_Y$, pa je $(G^*)^{-1}S : \Theta \to Y$ ograničen levi inverz za $\widetilde{U}$. $\square$

Sledeća teorema govori koji *Banach*-ovi prostori uvek sadrže *Banach*-ov okvir.

Teorema 4.23 ([24])**.** *Svaki separabilan Banach-ov prostor ima Banach-ov okvir sa granicama $A = B = 1$.*

Da bismo izložili rezultate iz rada [25], kako dobiti *Banach*-ov okvir za separabilan *Banach*-ov prostor, uvešćemo prvo definicije potpunog niza u X i BKX^* prostora.

Ako je niz $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz X^* potpun u X, tj. ako je $g_n(x) = 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, onda je $x = \mathbf{0}$ i linearan prostor $BKX^* = \{\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \mid x \in X\}$ sa normom $\|\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{BKX^*} := \|x\|_X$ je BK-prostor, izometrički izomorfan sa X.

Lema 4.6. *Neka je niz $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz X^* potpun. Tada postoji operator $S : \Theta \to X$ takav da je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Banach-ov okvir za X u odnosu na BKX^*.*

Kako ne postoji baza za svaki separabilan *Banach*-ov prostor, dobro je znati da li postoji *Banach*-ov okvir.

Teorema 4.24 ([25])**.** *Za svaki separabilan Banach-ov prostor X postoji potpun sistem $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz X^* takav da je skup konačnih nizova gust u prostoru BKX^* i operator $S : BKX^* \to X$ takav da je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Banach-ov okvir za X u odnosu na BKX^*.*

Prethodna teorema je direktna posledica leme 4.6.

Ako X ima bazu, tada ima atomsku dekompoziciju. Obrnuto nije tačno, tj. postoje *Banach*-ovi prostori koji imaju atomsku dekompoziciju, ali nemaju bazu (videti [105]). Postoje *Banach*-ovi prostori koji imaju atomsku dekompoziciju, ali nemaju okvire. Najjednostavniji primeri su prostori $L^1[0,1]$ i $C[0,1]$.

Napomena 4.7 ([24]). *Postoji Banach-ov prostor X sa atomskom dekompozicijom takav da je X^* separabilan i nema atomsku dekompoziciju. Ako Banach-ov prostor ima okvir, ne mora da znači da X^* ima atomsku dekompoziciju. Ali, ako je X Banach-ov prostor koji ima okvir i X^* je separabilan, tada X^* ima okvir. Takođe, ako X^* ima atomsku dekompoziciju, ima je i X. Međutim, postoji Banach-ov prostor X takav da X^* ima okvir, ali X nema.*

Postoji *Banach*-ov prostor koji ima bazu, samim tim i atomsku dekompoziciju, i njegov dual je separabilan, ali nema atomsku dekompoziciju (videti [78], teorema 1.e.7). Prostor ℓ^1 ima bezuslovnu bazu, pa samim tim i okvir, ali njegov dual nije separabilan i stoga nema atomsku dekompoziciju.

U ovom poglavlju mogli smo da vidimo da *Banach*-ovi okviri nemaju sve „lepe" osobine koje imaju okviri u *Hilbert*-ovom prostoru. Sledeći primer pokazuje da postoji *Banach*-ov okvir za *Hilbert*-ov prostor koji nije (*Hilbert*-ov) okvir.

Primer 4.8 ([25]). *Neka je $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormirana baza separabilnog Hilbert-ovog prostora $\mathcal{H}$. Uočimo niz $\{e_n+e_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ koji je potpun, ali ne i okvir za $\mathcal{H}$. Naime, e_1 ne može biti predstavljeno u obliku $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} c_n(e_n+e_{n+1})$. Štaviše, ne postoji familija $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takva da je $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x, e_n+e_{n+1}\rangle x_n$ za svako $x \in \mathcal{H}$. Međutim, na osnovu leme* 4.6, *$\{e_n+e_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Banach-ov okvir za $\mathcal{H}$ u odnosu na BK-prostor*

$$BKX^* = \big\{\{\langle x, e_n+e_{n+1}\rangle\}_{n\in\mathbb{N}} \,:\, x\in\mathcal{H}\big\} = \big\{\{c_n+c_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \,:\, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2\big\},$$

$$\big\|\{c_n+c_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}\big\|_{BKX^*} = \|\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell^2}.$$

I dalje je otvoreno pitanje da li postoji *Banach*-ov prostor sa okvirom koji nema bezuslovnu bazu.

4.6 Okviri za *Fréchet*-ove prostore

Ovo poglavlje sadrži poznate rezultate teorije okvira dobijene za *Fréchet*-ove prostore. *Fréchet*-ovi okviri uvedeni su u radovima [91, 92] i veći deo ovog poglavlja oslanja se na te rezultate.

Neka je $\{Y_s, |\cdot|\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ familija *Banach*-ovih prostora takvih da je

$$\{\mathbf{0}\} \neq \bigcap_{s\in\mathbb{N}_0} Y_s \subseteq \cdots \subseteq Y_2 \subseteq Y_1 \subseteq Y_0, \tag{4.6}$$

$$|\cdot|_0 \leqslant |\cdot|_1 \leqslant |\cdot|_2 \leqslant \cdots, \tag{4.7}$$

$$Y_F := \bigcap_{s\in\mathbb{N}_0} Y_s \ \text{ je gust u } Y_s, \text{ za svako } s\in\mathbb{N}_0. \tag{4.8}$$

Prostor Y_F je *Fréchet*-ov prostor sa nizom normi $|\cdot|_s$, $s \in \mathbb{N}_0$. Gornji niz ćemo koristiti za *Banach*-ove prostore $Y_s = X_s$ sa normama $\|\cdot\|_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, i za *Banach*-ove prostore nizova $Y_s = \Theta_s$ sa normama $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_s$, $s \in \mathbb{N}_0$.

Ako je $\{\Theta_s, |\!|\!|\cdot|\!|\!|\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ familija CB-prostora koji zadovoljavaju uslove (4.6) i (4.7), tada konačni nizovi pripadaju Θ_F i čine gust podskup od Θ_s, pa je (4.8) zadovoljeno. U tom slučaju Θ_F ima kanoničku bazu u smislu da se svako $x \in \Theta_F$ može jedinstveno predstaviti u obliku $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ sa konvergencijom u Θ_s, za svako $s \in \mathbb{N}_0$.

U radu [91] uveden je pojam *Fréchet*-ov pred-okvira za *Fréchet*-ov prostor u odnosu na *Fréchet*-ov prostor nizova.

Definicija 4.13 ([91])**.** *Neka su* $\{X_s, \|\cdot\|_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ *i* $\{\Theta_s, |\!|\!|\cdot|\!|\!|_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ *nizovi Banach-ovih prostora, koji zadovoljavaju uslove* (4.6)–(4.8)*. Za fiksirano* $s \in \mathbb{N}_0$*, operator* $V : \Theta_F \to X_F$ *je* s*-ograničen, ako postoji konstanta* $K_s > 0$ *tako da je* $\|V(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}})\| \leqslant K_s |\!|\!|\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_s$ *za sve* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta_F$*. Ako je* V s*-ograničen za svako* $s \in \mathbb{N}_0$*, tada se* V *naziva* F*-ograničen.*

Ako je $V : \Theta_F \to X_F$ F-ograničen, tada je V neprekidan. Obrnuto, u opštem slučaju, ne važi.

Generalizacijom definicije *Banach*-ovih okvira na *Fréchet*-ov prostor uvedene su sledeće definicije.

Definicija 4.14 ([91])**.** *Neka je* $\{X_s, \|\cdot\|_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ *familija Banach-ovih prostora koji zadovoljavaju uslove* (4.6)–(4.8)*, i* $\{\Theta_s, |\!|\!|\cdot|\!|\!|_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ *familija* BK*-prostora sa uslovima* (4.6)–(4.8)*. Niz* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *elemenata iz* X_F^* *se naziva pred-Fréchet-ov okvir* (*pred-F-okvir*) *za* X_F *u odnosu na* Θ_F *ako za svako* $s \in \mathbb{N}_0$ *postoje konstante* $0 < A_s \leqslant B_s < \infty$ *tako da važi*

$$\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \Theta_F, \quad f \in X_F, \tag{4.9}$$

i

$$A_s\|f\|_s \leqslant |\!|\!|\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}|\!|\!|_s \leqslant B_s\|f\|_s, \quad f \in X_F. \tag{4.10}$$

Konstante B_s (*respektivno* A_s)*,* $s \in \mathbb{N}_0$*, se nazivaju gornje* (*respektivno donje*) *granice za* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Pred-*F*-okvir se naziva čvrst, ako je* $A_s = B_s$*,* $s \in \mathbb{N}_0$*.*

Ako postoji F*-ograničen operator* $V : \Theta_F \to X_F$ *takav da je* $V\big(\{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}\big) = f$ *za sve* $f \in X_F$*, tada se pred-*F*-okvir naziva Fréchet-ov okvir* (*skraćeno* F*-okvir*) *za* X_F *u odnosu na* Θ_F *i* V *se naziva operator* F*-okvira za* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Ako za svako $f \in X_F$ *važi* (4.9) *i desna nejednakost u* (4.10)*, tada se* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *naziva Fréchet-Besssel-ov niz* (*skraćeno F-Bessel-ov niz*) *za* X_F *u odnosu na* Θ_F*.*

Ako je $X = X_F = X_s$ i $\Theta = \Theta_F = \Theta_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, definicije pred-F-okvira, F-okvira i F-*Bessel*-ovog niza za X_F se poklapaju sa definicijama Θ-okvira, *Banach*-ovog okvira i Θ-*Bessel*-ovog niza za X, respektivno.

Ako je Θ refleksivan *Banach*-ov prostor i $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-okvir za *Banach*-ov prostor X, tada je X refleksivan, jer je izomorfan zatvorenom potprostoru od Θ.

Neka je $\{X_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ niz *Banach*-ovih prostora koji zadovoljava uslove (4.6)–(4.8), $\{\Theta_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ niz BK-prostora koji zadovoljava (4.6)–(4.8) i $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz elemenata iz X_F^* koji je F-*Bessel*-ov niz za X_F u odnosu na Θ_F. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$ i $s \in \mathbb{N}_0$. Pošto je Θ_s BK-prostor, tada je n-ta koordinatna funkcionela na Θ_s ograničena, pa postoji $K_{n,s} > 0$ tako da je $|g_n(f)| \leqslant K_{n,s} |\!|\!| \{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}} |\!|\!|_s$ za svako $f \in X_F$. Na osnovu desne nejednakosti u (4.10), g_n je ograničena u X_F u odnosu na normu $\|\cdot\|_s$. Na osnovu uslova (4.8), g_n ima jedinstvenu neprekidnu ekstenziju na X_s koju ćemo označavati sa g_n^s. Stoga, za svako $s \in \mathbb{N}_0$, važi $g_n^s \in X_s^*$, $n \in \mathbb{N}$, i $g^s_{n|X_t} = g_n^t$, $n \in \mathbb{N}$, za $t > s$.

Lema 4.7 ([92]). *Neka je $\{X_s, \|\cdot\|_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ familija Banach-ovih prostora koji zadovoljavaju uslove* (4.6)–(4.8) *i $\{\Theta_s, |\!|\!|\cdot|\!|\!|\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ familija λ_s-BK-prostora, sa osobinama* (4.6)–(4.8). *Ako je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz X_F^* F-Bessel-ov niz* (*respektivno pred-F-okvir*) *za X_F u odnosu na Θ_F sa granicama B_s* (*respektivno A_s, B_s*), *tada za svako $s \in \mathbb{N}_0$ familija $\{g_n^s\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Θ_s-Bessel-ov niz* (*respektivno Θ_s-okvir*) *za X_s sa granicom $\lambda_s B_s$* (*respektivno A_s, $\lambda_s B_s$*).

Ako su Θ_s, $s \in \mathbb{N}_0$, *Hilbert*-ovi prostori i $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (X_F^*)^{\mathbb{N}}$ pred-F-okvir za X_F u odnosu na Θ_F, tada $\{g_n^s\}_{n\in\mathbb{N}}$ predstavlja Θ_s-okvir za X_s za svako $s \in \mathbb{N}_0$ (lema 4.7). Zato je prostor X_s izomorfan sa zatvorenim potprostorom od Θ_s, pa je X_s *Hilbert*-ov za svako $s \in \mathbb{N}_0$.

U teoremi 4.20 niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ima dualne osobine u poređenju sa $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tj. za svako $n \in \mathbb{N}$ element f_n pripada X dok g_n pripada X^* i $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je Θ-*Bessel*-ov niz za X^* dok je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-*Bessel*-ov niz za X. Uzimajući ovo u obzir kao i teoremu 4.7, u radu [91] date su sledeće definicije.

Definicija 4.15. *Neka važe uslovi kao u definiciji* 4.7 *i neka su Θ_s, $s \in \mathbb{N}_0$, CB-prostori* (*njihovi duali su BK-prostori*). *Niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ elemenata iz X_F se naziva:*

- *DF-Bessel-ov niz za X_F^* u odnosu na Θ_F^* ako je Θ_s^*-Bessel-ov niz za X_s^* za svako $s \in \mathbb{N}_0$;*
- *pred-DF-okvir za X_F^* u odnosu na Θ_F^* ako je Θ_s^*-okvir za X_s^* za svako $s \in \mathbb{N}_0$;*
- *DF-okvir za X_F^* u odnosu na Θ_F^* ako je Banach-ov okvir za X_s^* u odnosu na Θ_s^* za svako $s \in \mathbb{N}_0$.*

Neka su dati neprekidni operatori

$$U_s : X_s \to \Theta_s, \quad U_s f = \{g_n^s(f)\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad s \in \mathbb{N}_0, \tag{4.11}$$

$$U : X_F \to \Theta_F, \quad Uf = \{g_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}, \tag{4.12}$$

i njihovi inverzni operatori $U_s^{-1} : \mathcal{R}(U_s) \to X_s$, $s \in \mathbb{N}_0$, i $U^{-1} : \mathcal{R}(U) \to X_F$. Za svako $s \in \mathbb{N}_0$, operator U_s^{-1} je ograničen i važi da je $\|U_s^{-1}\| \leqslant 1/A_s$.

Lema 4.8 ([91]). *Neka je* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *pred-*F*-okvir za* X_F *u odnosu na* Θ_F*. Tada je* $\mathcal{R}(U)$ *zatvoren u* Θ_F *i inverzni operator* U^{-1} *je* F*-ograničen.*

Ova lema pokazuje da ako *Fréchet*-ov prostor X_F nije *Banach*-ov, egzistencija pred-F-okvira $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ implicira da odgovarajući prostor nizova Θ_F mora biti *Fréchet*-ov prostor koji nije *Banach*-ov. Pred-F-okvir za X_F u odnosu na Θ_F je F-okvir za X_F u odnosu na Θ_F ako i samo ako postoji F-ograničena projekcija iz Θ_F na $\mathcal{R}(U)$. Prevođenje teoreme 4.20 na *Fréchet*-ov prostor i reprezentaciju preko *Fréchet*-ovog okvira i odgovarajućeg dualnog okvira daje sledeća teorema.

Teorema 4.25 ([91]). *Neka je* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ F*-okvir za* X_F *u odnosu na* Θ_F*. Važe sledeća tvrđenja.*

a) Za svako $s\in\mathbb{N}_0$*, niz* $\{g_n^s\}_{n\in\mathbb{N}}$ *je Banach-ov okvir za* X_s *u odnosu na* Θ_s*.*

b) Ako su Θ_s*,* $s\in\mathbb{N}_0$*, CB-prostori, tada postoji* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, niz elemenata iz* X_F *koji je DF-Bessel-ov niz za* X_F^* *u odnosu na* Θ_F^**, takav da je*

$$f=\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(f)f_n,\quad f\in X_F, \tag{4.13}$$

$$g=\sum_{n\in\mathbb{N}} g(f_n)g_n,\quad g\in X_F^*, \tag{4.14}$$

$$f=\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n^s(f)f_n,\quad s\in\mathbb{N}_0. \tag{4.15}$$

c) Ako su Θ_s *i* Θ_s^**,* $s\in\mathbb{N}_0$*, CB-prostori, tada postoji* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *niz elemenata iz* X_F *koji je pred-*F*-okvir za* X_F^* *u odnosu na* Θ_F^* *tako da jednakosti* (4.13)–(4.15) *važe. Štaviše,*

$$g=\sum_{n\in\mathbb{N}} g(f_n)g_n^s,\quad g\in X_s^*,\ \ s\in\mathbb{N}_0. \tag{4.16}$$

d) Ako su Θ_s*,* $s\in\mathbb{N}_0$*, refleksivni CB-prostori, tada postoji* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in(X_F)^{\mathbb{N}}$*, koji je DF-okvir za* X_F^* *u odnosu na* Θ_F^**, tako da jednakosti* (4.13)–(4.16) *važe.*

Da bismo dobili razvoj u X_F preko pred-F-okvira (ili F-*Bessel*-ovog niza) $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i DF-*Bessel*-ovog niza $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mora $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ da bude F-okvir. To je dokazano u sledećoj teoremi.

Teorema 4.26 ([91]). *Neka su* Θ_s*,* $s\in\mathbb{N}_0$*, CB-prostori i* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ F*-Bessel-ov niz za* X_F *u odnosu na* Θ_F*. Važe sledeća tvrđenja.*

a) Postoji $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in(X_F)^{\mathbb{N}}$ *takav da je DF-Bessel-ov niz za* X_F^* *u odnosu na* Θ_F^* *i zadovoljava jednakost* (4.13) *ako i samo ako je* $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ F*-okvir za* X_F *u odnosu na* Θ_F*.*

b) Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in(X_F)^{\mathbb{N}}$ *DF-Bessel-ov niz za* X_F^* *u odnosu na* Θ_F^* *koji zadovoljava* (4.13)*. Ako su* Θ_s *i* Θ_s^* *CB-prostori za svako* $s\in\mathbb{N}_0$ (*respektivno* Θ_s *je refleksivan CB-prostor za svako* $s\in\mathbb{N}_0$)*, tada je* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *pred-DF-okvir* (*respektivno DF-okvir*) *za* X_F^* *u odnosu na* Θ_F^**.*

Vidimo da je potrebno da prostor nizova bude CB-prostor da bismo imali razvoje u red. Ako je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in (X^*)^{\mathbb{N}}$ takav da postoji niz $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tako da za svako $f \in X$ važi $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(f)f_n$, tada postoji CB-prostor Θ takav da je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Banach*-ov okvir za X u odnosu na Θ. Tvrđenje za *Fréchet*-ove prostore dokazano je u [91] (Proposition 4.1). U istom radu konstruisan je niz $\{X_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ tako da za dati niz $\{\Theta_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ i Θ_0-okvir $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ za X_0, važi da je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ F-okvir za X_F u odnosu na Θ_F. Takođe, ispitivana je konstrukcija CB-prostora $\widetilde{\Theta}$ (respektivno niza $\{\Theta_s\}_{s\in\mathbb{N}_0}$ CB-prostora), tako da je $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Θ-okvir ili *Banach*-ov okvir za X u odnosu na $\widetilde{\Theta}$ (respektivno pred-F-okvir ili F-okvir za $X_F = \bigcap\limits_{s\in\mathbb{N}_0} X_s$ u odnosu na $\Theta_F = \bigcap\limits_{s\in\mathbb{N}_0} \Theta_s$) pod različitim uslovima datim za X (respektivno X_s, $s \in \mathbb{N}_0$) i Θ.

Glava 5

Okviri za translaciono invarijantne prostore sa težinama

U ovoj glavi posmatrani su težinski translaciono invarijantni prostori oblika

$$V_\mu^p(\Phi) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} c_i(j)\phi_i(\cdot - j) \;\middle|\; \{c_i(j)\}_{j \in \mathbb{Z}^d} \in \ell_\mu^p \right\}, \quad p \in [1, \infty],$$

generisani sa $\Phi = \Phi^r = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^T \in (W_\omega^1)^r$. Cilj ovog poglavlja je pokazati da se glavni rezultat rada [4] može preneti na slučaj težinskih translaciono invarijantnih prostora koji odgovaraju prostorima L_μ^p i ℓ_μ^p, tj. težinskim L^p i ℓ^p prostorima, respektivno. Prateći tehnike i metode iz [4] dokazana su tvrđenja koja su zahtevala dodatne pretpostavke zbog figurisanja težina. Pokazano je da pod odgovarajućim uslovima za vektore okvira, postoji ekvivalencija između koncepta p-okvira, *Banach*-ovih okvira u odnosu na ℓ_μ^p i zatvorenosti prostora koji generišu. Ovi teorijski rezultati su potkrepljeni konkretnim primerima. Naime, konstruisani su $V_\mu^p(\Phi^{2k+1})$ prostori generisani specijalno izabranim funkcijama, ϕ_0, ϕ_1, …, ϕ_{2k}, tako da čine *Banach*-ov okvir za translaciono invarijantan prostor $V_\mu^p(\Phi^{2k+1})$. Uočeno je da osobine konstruisanih okvira garantuju stabilnost i neprekidnost rekonstrukcionog algoritma u prostoru $V_\mu^p(\Phi)$. Takođe, navedeni su uslovi pri kojima će familija $\{\phi_i(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, r\}$ predstavljati *Riesz*-ovu bazu prostora $V_\mu^p(\Phi)$.

Ova glava se sastoji od sedam poglavlja. U prvom poglavlju data je motivacija za posmatranje težinskih translaciono invarijantnih prostora. Oni figurišu u mnogim oblastima primenjene matematike, prvenstveno u teoriji okvira i teoriji aproksimacija (videti, npr. [4, 35]). Poslednjih godina su intenzivno proučavani od strane velikog broja autora. Za više detalja o njihovoj primeni čitalac se upućuje na [5, 6, 7, 8, 14, 21, 29, 46, 47, 48, 68, 69, 101, 115]. U poglavlju 5.2 uvedeni su potprostori prostora L_μ^p i dokazane nejednakosti potrebne za dalji rad sa tim prostorima. Poglavlje 5.3 predstavlja kratak prikaz poznatih rezultata za p-okvire i p-*Riesz*-ove baze translaciono invarijantnih potprostora prostora L^p. U četvrtom poglavlju proučavani su translaciono invarijantni prostori generisani jednom funkcijom i utvrđena ekvivalencija zatvorenosti ovog prostora i p-okvira. U poglavlju 5.5 pokazano je da glavni rezultat iz [4] važi i u slučaju težinskih translaciono invarijantnih prostora $V_\mu^p(\Phi)$ generisanih sa $\Phi = \Phi^r = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^T \in (W_\omega^1)^r$. U šestom poglavlju ove glave utvrđena je veza između dualnog prostora *Fréchet*-ovog prostora $\bigcap_{s\in\mathbb{N}_0} V^p_{(1+|x|^2)^{s/2}}(\Phi)$ i prostora periodičnih distribucija. Periodične ultradistribucije su dobijene korišćenjem funkcija subeksponencijalnog rasta. U poglavlju 5.7, korišćenjem odgovarajućeg niza funkcija $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, konstruisan je niz p-okvira. Navedene su dobre osobine ovih okvira. Prva konstrukcija dobijena je funkcijama ϕ_i, $i = 1, \ldots, r$, za koje su *Fourier*-ove transformacije $\widehat{\phi_i}$, $i = 1, \ldots, r$, sa kompaktnim nosačima. Takođe su postavljeni uslovi tako da kolekcija $\{\phi_i(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, r\}$ čini *Riesz*-ovu bazu za $V_\mu^p(\Phi)$. Potom, ovi rezultati su generalizovani za translaciono invarijantne potprostore prostora $L_\mu^p(\mathbb{R}^d)$. Na kraju je konstruisana p-*Riesz*-ova baza korišćenjem funkcija ϕ_i, $i = 1, \ldots, r$, sa kompaktnim nosačima. Ovim konstrukcijama pokazana je konzistentnost teorijskih rezultata ove glave.

5.1 Translaciono invarijantni prostori

Moderna digitalna tehnologija zasniva se na rekonstrukciji funkcije (signala ili slike) korišćenjem diskretne verzije originalnog signala f dobijene uzorkovanjem f na diskretnom skupu. Međutim, pitanje je kada funkcija može biti rekonstruisana od takvih podataka. Problem uzorkovanja se deli na dva dela.

a) Za datu klasu V funkcija na $\mathbb{R}^d$, postaviti uslove tako da uzorkovani skup $X = \{x_j \in \mathbb{R}^d \mid j \in J\}$, gde je J prebrojiv indeksni skup, bude adekvatan da bi funkcija $f \in V$ jedinstveno i stabilno bila rekonstruisana pomoću svojih uzoraka $\{f(x_j) \mid x_j \in X\}$.

b) Odrediti efikasan i brz numerički algoritam za rekonstrukciju funkcije f iz skupa V pomoću njenih uzoraka na skupu X.

U praksi se ponekad zahteva da skup uzorkovanja $X = \{x_j \mid j \in J\}$ čini regularnu n-dimenzionu mrežu, tzv. uniformno uzorkovanje. Međutim, u mnogim realnim situacijama podaci su poznati na neuniformno uzorkovanom skupu. Neuniformnost nam onemogućava korišćenje standardnih metoda *Fourier*-ove analize.

Navešćemo nekoliko primera neuniformno uzorkovanih skupova koji se sreću u nauci i tehnici.

1) U teoriji komunikacija, u slučaju kada dođe do gubljenja nekih podataka iz uniformno uzorkovanog skupa. Ovo je isto kao parcijalno oštećenje skladišta

podataka, na primer ogrebotine na CD-u.

2) U astronomiji različiti nepovoljni vremenski uslovi onemogućavaju dobijanje uniformno uzorkovanog niza podataka ([116]).

3) Druge primene neuniformnog niza uzoraka javljaju se u medicinu, npr. CT i magnentna rezonanca ([16, 93]), u geofizici ([95]), kod procesiranja slike i zvuka ([18, 19, 114, 118]), u biomedicini ([15, 57, 93]). Više informacija o modernim tehnikama neunifornog uzorkovanja i njegovoj primeni može se naći u [14].

S obzirom na to da beskonačno mnogo funkcija može da ima isto uzorkovane vrednosti na skupu $X = \{x_j \mid j \in J\} \subset \mathbb{R}^d$, tehnika uzorkovanja dobija smisao tek kada funkciji nametnemo odgovarajuće uslove. Standardan uslov je da f pripada prostoru $\mathcal{B}_{[-\omega,\omega]}$ koji sadrži sve funkcije za koje je $\widehat{f}(\xi) = 0$, $\xi \notin [-\omega,\omega]^d$, za neko $\omega < \infty$ ([11, 50, 46, 55, 64, 77, 80, 119]). Razlog njegovog postavljanja je klasičan rezultat *Whittaker*-a ([121]) iz kompleksne analize kojim se tvrdi da u dimenziji $d = 1$ funkcija $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{B}_{[-1/2,1/2]}$ može biti potpuno (efikasno) rekonstruisana preko svojih uzoraka $\{f(k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ interpolacionom formulom

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\frac{\sin \pi(x-k)}{\pi(x-k)}. \tag{5.1}$$

Ovo čini osnovu digitalnog procesiranja signala, jer omogućava prevođenje signala u niz brojeva koji se digitalno obrađuje i konvertuje nazad u analogni signal pomoću (5.1).

Red u (5.1) pokazuje da se prostor $\mathcal{B}_{[-1/2,1/2]}$ može identifikovati sa prostorom

$$V^2(\phi) = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\phi(x-k) \;\Big|\; \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2 \right\}, \quad \phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

Pošto funkcija ϕ nema konačan nosač, prostor $\mathcal{B}_\Omega$ često nije pogodan za numeričke proračune. Zato je pogodnije posmatrati modele koji će zadržati jednostavnost i strukturu prostora $\mathcal{B}_\Omega$, a pri tom omogućiti numerička izračunavanja i biti fleksibilniji za aproksimaciju realnog podatka. Kao jedan od primera takvih modela su translaciono invarijantni prostori o kojima će biti reči u ovom poglavlju. Ovi prostori se koriste u metodi konačnih elemenata, teoriji aproksimacija, za konstrukciju multirezolucijskih aproksimacija i teoriji vejvleta. Intenzivno se proučavaju prethodnih godina (pogledati [3, 4, 5, 6, 7, 21, 29, 32, 33, 35, 63, 85, 115]).

Translaciono invarijantni prostor je prostor

$$V(\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_r) = \left\{ f \in \mathbb{R}^d \;\Big|\; f = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} c^i_j \phi_i(\cdot - j) \right\},$$

gde se $\{c^i_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, bira iz odgovarajućeg prostora nizova. Za funkcije ϕ_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, se zahteva ili da imaju kompaktne nosače ili da imaju *Fourier*-ovu transformaciju $|\widehat{\phi_i}(\xi)|$ koja glatko teži nuli kad $|\xi| \to \infty$.

U ovoj disertaciji proučavaćemo težinske translaciono invarijantne prostore oblika

$$V_\mu^p(\Phi) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} c_j^i \phi_i(x-j) \;\Big|\; c^i = \{c_j^i\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell_\mu^p \right\}, \quad \Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^T,$$

gde je μ težinska funkcija. U slučaju kada je $\mu = 1$, koristićemo oznaku $V^p(\Phi)$. Prostor $V^0(\Phi)$ biće prostor konačnih linearnih kombinacija translacija funkcije Φ i $V^{0,p}(\Phi)$ L^p zatvorenje od $V^0(\Phi)$. Važi da je $V^0(\Phi) \subset V^p(\Phi) \subset V^{0,p}(\Phi)$. Funkcija iz prostora $V^{0,p}(\Phi)$ ne mora biti generisana sa koeficijentima iz ℓ^p. Ako je $V^p(\Phi)$ zatvoren, tj. *Banach*-ov prostor, tada je $V^p(\Phi) = V^{0,p}(\Phi)$.

Translaciono invarijantni prostori sa težinama $V_\mu^p(\Phi)$, $p \in [1,\infty]$, uvedeni su za neuniformno uzorkovanje kao direktna generalizacija prostora $V^p(\Phi)$ ([5, 115]). Određivanje p i glatkosti signala su u skladu sa optimalnijom kompresijom i kodiranjem signala i slika (videti [39]).

U ovom poglavlju biće pokazano da teorema 5.1 važi u slučaju translaciono invarijantnih prostora sa težinama koji odgovaraju prostorima L_μ^p i ℓ_μ^p, tj. težinskim L^p i ℓ^p prostorima, respektivno. Dokazano tvrđenje zahtevalo je dodatne uslove koji zavise od težina. Pokazano je da pod odgovarajućim uslovima za vektore okvira, postoji ekvivalencija između koncepta p-okvira, *Banach*-ovog okvira u odnosu na ℓ_μ^p i zatvorenosti prostora koji oni generišu.

5.2 Prostori sa težinama i osnovne osobine

Težinske funkcije su nenegativne, lokalno integrabilne funkcije na $\mathbb{R}^d$ koje opisuju rast funkcija. U daljem radu koristićemo sledeće dve vrste težinskih funkcija.

1° Težinska funkcija ω je submultiplikativna je ako je $\omega(x+y) \leqslant \omega(x)\omega(y)$, za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$.

2° Težinska funkcija μ na $\mathbb{R}^d$ je ω-umerena ako je $\mu(x+y) \leqslant C\omega(x)\mu(y)$, za svako $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Za funkciju ω ćemo pretpostaviti da je neprekidna i simetrična, tj. za svako $x \in \mathbb{R}^d$ je $\omega(x) = \omega(-x)$. Funkcije μ i ω nazivaćemo težinama. Standardna klasa težina na $\mathbb{R}^d$ je težina polinomnog tipa $\omega_s(x) = (1+|x|)^s$, $s \geqslant 0$. Da bi se okarakterisalo brže opadanje funkcija koriste se subeksponencijalne težine $\omega(x) = \mathrm{e}^{\alpha|x|^\beta}$, za neko $\alpha > 0$ i $0 < \beta < 1$. Ako je $\omega(x) = (1+|x|)^\alpha$, tada je $\mu(x) = (1+|x|)^\beta$ ω-umerena ako i samo ako je $|\beta| \leqslant \alpha$.

Težinski prostori L^p sa ω-umerenom težinom μ su, ustvari, translaciono invarijantni prostori (videti [5]). Funkcija f pripada prostoru $L_\mu^p(\mathbb{R}^d)$ sa težinskom funkcijom μ ako μf pripada $L^p(\mathbb{R}^d)$. Ako se u prostoru $L_\mu^p(\mathbb{R}^d)$ uvede norma sa

$\|f\|_{L^p_\mu(\mathbb{R}^d)} = \|\mu f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$, on postaje *Banach*-ov prostor. Razmatraćemo, takođe, težinske prostore nizova $\ell^p_\mu(\mathbb{Z}^d)$, gde je μ ω-umerena težina. Za niz c reći ćemo da pripada prostoru $\ell^p_\mu(\mathbb{Z}^d)$ ako niz $c\mu$ pripada prostoru $\ell^p(\mathbb{Z}^d)$.

Neka je ω submultiplikativna težina, neprekidna i simetrična, a težina μ ω-umerena i $p \in [1,\infty)$. Uvešćemo neke prostore sa težinama koji predstavljaju potprostore prostora L^p_μ, a biće nam potrebni u nastavku.

$$\mathcal{L}^p_\omega := \left\{ f \mid \|f\|_{\mathcal{L}^p_\omega} := \left(\int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |f(x+j)|\omega(x+j) \Big)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} < \infty \right\};$$

$$\mathcal{L}^\infty_\omega := \left\{ f \mid \|f\|_{\mathcal{L}^\infty_\omega} := \sup_{x\in[0,1]^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |f(x+j)|\omega(x+j) < \infty \right\};$$

$$W^p_\omega := \left\{ f \mid \|f\|_{W^p_\omega} := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{x\in[0,1]^d} |f(x+j)|^p \omega(j)^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Očigledno važe inkluzije $W^1_\omega \subset W^p_\omega \subset W^q_\omega \subset \mathcal{L}^\infty_\omega \subset \mathcal{L}^q_\omega \subset \mathcal{L}^p_\omega \subset L^p_\omega$, $W^p_\omega \subset W^p_\mu \subset W^q_\mu \subset L^q_\mu$ i $L^p_\omega \subset L^p_\mu$, gde je $1 < p < q \leqslant \infty$. Za $p = 1$ i $\omega = 1$ imamo $\mathcal{L}^1 = L^1$. Takođe je $\ell^1_\omega \subset \ell^p_\omega \subset \ell^q_\omega \subset \ell^q_\mu$, za $1 < p < q \leqslant \infty$.

Navešćemo sad neke nejednakosti koje se mogu naći u [5].

Lema 5.1. *Neka je težina μ ω-umerena.*

a) Ako $f \in L^p_\mu$, $p \in [1,\infty]$, i $g \in L^1_\omega$, tada važi nejednakost

$$\big\|f * g\big\|_{L^p_\mu} \leqslant \|f\|_{L^p_\mu} \|g\|_{L^1_\omega}. \tag{5.2}$$

b) Ako $f \in L^p_\mu$, $p \in [1,\infty]$, i $g \in W^1_\omega$, tada važi nejednakost

$$\big\|f * g\big\|_{W^p_\mu} \leqslant \|f\|_{L^p_\mu} \|g\|_{W^1_\omega}. \tag{5.3}$$

c) Ako $c \in \ell^p_\mu$, $p \in [1,\infty]$, i $d \in \ell^1_\omega$, tada važi nejednakost

$$\|c * d\|_{\ell^p_\mu} \leqslant \|c\|_{\ell^p_\mu} \|d\|_{\ell^1_\omega}. \tag{5.4}$$

Za $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T$, neka je $\|\Phi\|_{\mathcal{H}} = \sum\limits_{i=1}^r \|\phi_i\|_{\mathcal{H}}$, gde je $\mathcal{H} = L^p_\omega$, $\mathcal{L}^p_\omega$ ili W^p_ω, $p \in [1,\infty]$.

Lema 5.2. *Neka je težina μ ω-umerena, $f \in L^p_\mu$, $p \in [1,\infty]$, i $g \in W^1_\omega$. Tada važi*

$$\left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x-j) \mathrm{d}x \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^p_\mu$$

i

$$\left\| \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x-j) \mathrm{d}x \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^p_\mu} \leqslant \|f\|_{L^p_\mu} \|g\|_{W^1_\omega}. \tag{5.5}$$

Dokaz. Ako $p \in [1,\infty)$, tada koristeći nejednakost (5.4) za fiksirano $x \in \mathbb{R}^d$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\left\| \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x-j)\mathrm{d}x \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^p_\mu} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x-j)\mathrm{d}x\, \mu(j) \right|^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left(\int_{[0,1]^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big|f(x+k)\big|\big|g(x+k-j)\mu(j)\big|\mathrm{d}x \right)^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \int_{[0,1]^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big|f(x+k)\big|\big|g(x+k-j)\mu(j)\big| \right)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int_{[0,1]^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big|f(x+k)\big|\big|g(x+k-j)\mu(j)\big| \right|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int_{[0,1]^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big|f(x+k)\mu(k)\big|^p \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \big|g(x-k)\omega(k)\big| \right)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&\leqslant \|f\|_{L^p_\mu} \|g\|_{W^1_\omega}.
\end{aligned}$$

U slučaju kada je $p = \infty$ dokaz je sličan. □

Za dokazivanje nekih teorema koje će nam biti potrebne u daljem radu, treba nam sledeća vrlo slična nejednakost.

Lema 5.3. *Neka je težina μ ω-umerena, $f \in L^p_\mu$ i $g \in W^p_\omega$, $p \in [1,\infty]$. Tada*

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x-j)\mathrm{d}x \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^p_\mu$$

i

$$\left\| \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x-j)\mathrm{d}x \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^p_\mu} \leqslant \|f\|_{L^p_\mu} \|g\|^{1/p}_{\mathcal{L}^1_\omega} \|g\|^{1-1/p}_{L^\infty_\omega}. \tag{5.6}$$

Za niz $c = \{c_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell^p_\mu$ i funkciju $f \in L^p_\omega$, $p \in [1,\infty]$, uvodimo semi-konvoluciju $f *' c$ sa

$$(f *' c)(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} c_j f(x-j), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Lema 5.4. *Ako $f \in \mathcal{L}^p_\omega$, $p \in [1,\infty]$, i $c \in \ell^1_\mu$, tada je $f*'\cdot$ neprekidno preslikavanje iz ℓ^1_μ u $\mathcal{L}^p_\mu$ i važi da je*

$$\|f *' c\|_{\mathcal{L}^p_\mu} \leqslant \|c\|_{\ell^1_\mu} \|f\|_{\mathcal{L}^p_\omega}. \tag{5.7}$$

Dokaz. Korišćenjem leme 2.6. [5] i primenom nejednakosti (5.4), za svako $x \in \mathbb{R}^d$, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\|f *' c\|_{\mathcal{L}^p_\mu} &= \left(\int\limits_{[0,1]^d} \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \big| f *' c \big| (x+j)\mu(x+j) \right)^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int\limits_{[0,1]^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k f(x+j-k)\mu(x+j) \right|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\int\limits_{[0,1]^d} \|c\|^p_{\ell^1_\mu} \big\| \{f(x+j)\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \big\|^p_{\ell^p_\omega} \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \leqslant \|c\|_{\ell^1_\mu} \|f\|_{\mathcal{L}^p_\omega}.
\end{aligned}$$

Dokaz je sličan za $p = \infty$. □

Lema 5.5. *Ako $f \in W^p_\omega$ i $c \in \ell^1_\mu$, tada je*

$$\|f *' c\|_{W^p_\mu} \leqslant \|c\|_{\ell^1_\mu} \|f\|_{W^p_\omega}, \tag{5.8}$$

i ako $f \in W^1_\omega$ i $c \in \ell^p_\mu$, tada je

$$\|f *' c\|_{W^p_\mu} \leqslant \|c\|_{\ell^p_\mu} \|f\|_{W^1_\omega}. \tag{5.9}$$

Dokaz. Primenjujući lemu 5.1 (nejednakost (5.4)) za fiksirano $x \in \mathbb{R}^d$, $p \in [1, \infty)$ (slično i za $p = \infty$), dobijamo

$$\begin{aligned}
\big\| f *' c \big\|_{W^p_\mu} &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{x\in[0,1]^d} \big| f *' c \big|^p (x+j)\mu(j)^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{x\in[0,1]^d} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k||f(x+j-k)| \right)^p \mu(j)^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k| \sup_{x\in[0,1]^d} |f(x+j-k)|\mu(j) \right|^p \right)^{1/p} \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k|\mu(k) \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left(\sup_{x\in[0,1]^d} |f(x+j)|\omega(j) \right)^p \right)^{1/p} \leqslant \|c\|_{\ell^1_\mu} \|f\|_{W^p_\omega}.
\end{aligned}$$

□

Označimo sa $\mathcal{WC}^p_\mu$, $p \in [1, \infty]$, prostor svih 2π-periodičnih distribucija čiji niz *Fourier*-ovih koeficijenata pripada prostoru ℓ^p_μ. Za vektor $T = (T_1, T_2, \dots, T_r)^T$ 2π-periodične distribucije, reći ćemo $T \in \mathcal{WC}^p_\mu$ ako $T_i \in \mathcal{WC}^p_\mu$ za svako $1 \leqslant i \leqslant r$. Proizvod dve 2π-periodične distribucije T_1 i T_2 je 2π-periodična distribucija. Njen niz *Fourier*-ovih koeficijenata, ako je definisan, predstavlja $D_1 * D_2$, gde su D_1

i D_2 nizovi *Fourier*-ovih koeficijenata za T_1 i T_2, respektivno. Za 2π-periodičnu distribuciju $T \in \mathcal{WC}_\mu^p$, sa $\|T\|_{\ell^p_{\mu,*}}$ označavaćemo ℓ^p_μ normu niza njenih *Fourier*-ovih koeficijenata.

U nastavku ćemo posmatrati translaciono invarijantne prostore

$$V_\mu^p(\Phi) = \left\{ f \in L_\mu^p \;\middle|\; f(\cdot) = \sum_{i=1}^r \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} c_j^i\, \phi_i(\cdot - j), \quad \{c_j^i\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^p_\mu,\ 1 \leqslant i \leqslant r \right\},$$

za $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T \in (\mathcal{L}_\omega^p)^r$.

Ako $\Phi \in (W_\omega^1)^r$ i težina μ ω-umerena, tada je prostor $V_\mu^p(\Phi)$ potprostor (ne mora biti zatvoren, videti napomenu 5.1) od L_μ^p i W_μ^p za neko $p \in [1, \infty]$.

Ako je $r = 1$ i $\{\phi(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d\}$ je p-okvir za $V_\mu^p(\phi)$, tada je $V_\mu^p(\phi)$ zatvoren potprostor od L_μ^p i W_μ^p za $p \in [1, \infty]$. Takođe, ℓ^p_μ i $V_\mu^p(\phi)$ su izomorfni *Banach*-ovi prostori. Ovi rezultati mogu se naći u [107].

Ako je funkcija $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r)^T$ takva da je $\widehat{\phi}_i(\xi)\overline{\widehat{\phi}_j(\xi)}$ integrabilno za svako $1 \leqslant i, j \leqslant r$, neka je $r \times r$ matrica $[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)$ za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$ data sa

$$[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi) = \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\phi}_i(\xi + 2k\pi)\overline{\widehat{\phi}_j(\xi + 2k\pi)} \right]_{1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant j\leqslant r}.$$

Pokazaćemo da ako $\Phi \in (\mathcal{L}_\omega^2)^r$, tada svi elementi matrice $[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)$ pripadaju klasi $\mathcal{WC}_\omega^1$. Korišćenjem *Poisson*-ove formule, za $\phi_i, \phi_j \in \mathcal{L}_\omega^2$ i sve $\xi \in \mathbb{R}^d$, važi

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\phi}_i(\xi + 2k\pi)\overline{\widehat{\phi}_j(\xi + 2k\pi)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}\phi_i)(\xi + 2k\pi)\overline{\int_{\mathbb{R}^d} \phi_j(t) \mathrm{e}^{-2\pi i(\xi+2k\pi)\cdot t} \mathrm{d}t} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}\phi_i)(\xi + 2k\pi) \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\phi}_j(t) \mathrm{e}^{2\pi i(\xi+2k\pi)\cdot t} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}\phi_i)(\xi + 2k\pi) \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\phi}_j(t) \mathrm{e}^{-2\pi i(-(\xi+2k\pi))\cdot t} \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}\phi_i)(\xi + 2k\pi)(\mathcal{F}\overline{\phi}_j)(-\xi - 2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{F}\phi_i)(\xi + 2k\pi)(\mathcal{F}\check{\overline{\phi}}_j)(\xi + 2k\pi) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{F}(\phi_i * \check{\overline{\phi}}_j)(\xi + 2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{F}\mathcal{F}(\phi_i * \check{\overline{\phi}}_j)(k) \mathrm{e}^{4\pi^2 i\xi\cdot k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \phi_i * \check{\overline{\phi}}_j(-k) \mathrm{e}^{4\pi^2 i\xi\cdot k}.
\end{aligned}$$

Pošto je $\phi_i * \check{\overline{\phi}}_j(-k) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_i(-k)\overline{\phi}_j(-k - x)\mathrm{d}k = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_i(t)\overline{\phi}_j(t - x)\mathrm{d}t$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\phi_i * \check{\overline{\phi}}_j|\check{}(k)\, \omega(k) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi_i(t)\overline{\phi}_j(t - k)\mathrm{d}t \right| \omega(k) \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\phi_i(t)| \left|\overline{\phi}_j(t - k)\right| \omega(t)\, \omega(t - k)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\leqslant \int\limits_{[0,1]^d} \sum_{s\in\mathbb{Z}^d} |\phi_i(t+s)|\,\omega(t+s) \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\phi_j(t+s-k)|\,\omega(t+s-k)$$
$$\leqslant \|\phi_i\|_{\mathcal{L}^2_\omega} \|\phi_j\|_{\mathcal{L}^2_\omega}.$$

Za $r\times\infty$ matricu $G = \big[g_i(j)_{j\in\mathbb{Z}^d}\big]_{1\leqslant i\leqslant r}$, neka je $G\overline{G^T} = \Big[\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d} g_i(j)\overline{g_{i'}(j)}\Big]_{1\leqslant i,i'\leqslant r}$. Tada je

$$\text{rang } G = \text{rang } G\overline{G^T}. \tag{5.10}$$

Na osnovu *Riemann-Lebesque*-ove leme, *Fourier*-ova transformacija integrabilnih funkcija je neprekidna, pa zaključujemo da su svi elementi matrice $[\widehat{\Phi},\widehat{\Phi}](\xi)$ neprekidne funkcije na $\mathbb{R}^d$.

Pošto je $[\widehat{\Phi},\widehat{\Phi}](\xi)$ neprekidna funkcija za svako $\Phi\in(\mathcal{L}^2_\omega)^r$ i $\xi\in\mathbb{R}^d$, onda je skup

$$\big\{\xi\in\mathbb{R}^d \;\big|\; \text{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi+2k\pi)\big]_{k\in\mathbb{Z}^d} > k_0\big\}$$

otvoren za svako $k_0>0$.

5.3 Okvir za translaciono invarijantni potprostor od L^p

Navešćemo rezultate za p-okvir translaciono invarijantnog potprostora prostora L^p dobijene u radu [4]. U poglavljima 5.4 i 5.5 biće pokazano da se ovi rezultati mogu preneti na težinske translaciono invarijantne potprostore prostora L^p_μ.

Posmatrajući p-okvir za translaciono invarijantni potprostor prostora L^p, *Aldroubi, Sun* i *Tang* [4] su dokazali da kada niz translacija konačnog skupa odgovarajućih funkcija $\varphi_1,\dots,\varphi_r$ za neko $p_0\in[1,\infty]$ čini ℓ^{p_0}-okvir za translaciono invarijantan prostor $V^{p_0}(\varphi_1,\dots,\varphi_r)\subseteq L^{p_0}$, tada je ovaj niz takođe ℓ^p-okvir za $V^p(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$ za sve vrednosti $p\in[1,\infty]$. Njihov rezultat dat je sledećom teoremom. Primetimo da je p-okvir ustvari Θ-okvir gde je $\Theta=\ell^p$. Prostori funkcija koji se javljaju u ovom odeljku su već definisani u prethodnom poglavlju (za težinske funkcije identički jednake 1 na $\mathbb{R}^d$).

Teorema 5.1 ([4]). *Neka $\Phi=(\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_r)^T\in(\mathcal{L}^\infty)^r$ ako $p\in(1,\infty)$ i $\Phi\in(W^1)^r$ ako je $p=1,\infty$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna.*

(*i*) *Prostor $V^p(\Phi)$ je zatvoren u L^p.*

(ii) Familija $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ je p-okvir za $V^p(\Phi)$, tj. postoji pozitivna konstanta A (koja zavisi od Φ i p) tako da je

$$A^{-1}\|f\|_{L^p} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \left\| \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\phi_i(x-j)}\mathrm{d}x \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^p} \leqslant A\|f\|_{L^p}, \quad f \in V^p(\Phi).$$

(iii) Postoji pozitivna konstanta C tako da za svako $\xi \in [-\pi,\pi]^d$ važi

$$C^{-1}[\widehat{\Phi},\widehat{\Phi}](\xi) \leqslant [\widehat{\Phi},\widehat{\Phi}](\xi)\overline{[\widehat{\Phi},\widehat{\Phi}](\xi)^T} \leqslant C[\widehat{\Phi},\widehat{\Phi}](\xi).$$

(iv) Postoji pozitivna konstanta B (koja zavisi od Φ i p) takva da je

$$B^{-1}\|f\|_{L^p} \leqslant \inf_{f=\sum\limits_{i=1}^{r}\phi_i *' D_i} \sum_{i=1}^{r} \|D_i\|_{\ell^p} \leqslant B\|f\|_{L^p}, \quad f \in V^p(\Phi).$$

(v) Postoji $\Psi = (\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_r)^T \in (\mathcal{L}^\infty)^r$ ako $p \in (1,\infty)$ i $\Psi \in (W^1)^r$ ako je $p = 1,\infty$, tako da za svako $f \in V^p(\Phi)$ važi

$$f = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \psi_i(\cdot - j)\rangle \phi_i(\cdot - j) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \phi_i(\cdot - j)\rangle \psi_i(\cdot - j).$$

Iz uslova (v) teoreme 5.1 imamo da je $V^p(\Psi) = V^p(\Phi)$. Ovo zajedno sa implikacijom $(v) \Rightarrow (ii)$ daje da je $\{\psi_i(\cdot - j) \mid 1 \leqslant i \leqslant r,\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ p-okvir za prostor $V^p(\Psi) = V^p(\Phi)$. Stoga, $\{\psi_i(\cdot - j) \mid 1 \leqslant i \leqslant r,\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ se može posmatrati kao dualni p-okvir za familiju $\{\phi_i(\cdot - j) \mid 1 \leqslant i \leqslant r,\ j \in \mathbb{Z}^d\}$. Zaključujemo da je p-okvir za $V^p(\Phi)$ ujedno i *Banach*-ov okvir za taj prostor.

Napomena 5.1. *Translaciono invarijatan prostor $V^p(\Phi)$, u opštem slučaju, ne mora biti zatvoren. Na primer, ako je $\Phi = \chi_{[0,1]} - \chi_{[1,2]}$ gde je χ_E karakteristična funkcija skupa E, tada prostor $V^p(\Phi)$ nije zatvoren.*

Kako uslov (iii) teoreme 5.1 ne zavisi od p, onda ekvivalencije tvrđenja obezbeđuju da su osobine (ii) i (iv) p-okvira, kao i osobina zatvorenosti prostora $V^p(\Phi)$, tj. tvrđenje (i), nezavisne od p. Navodimo posledicu datu u [4].

Posledica 5.1. *Neka $\Phi = (\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_r)^T \in (W^1)^r$ i $p_0 \in [1,\infty]$.*

a) Ako je familija $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ p_0-okvir za $V^{p_0}(\Phi)$, tada je $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ p-okvir za $V^p(\Phi)$ za bilo koje $p \in [1,\infty]$.

b) Ako je $V^{p_0}(\Phi)$ zatvoren u L^{p_0}, tada je prostor $V^p(\Phi)$ zatvoren u L^p za svako $p \in [1,\infty]$.

c) Ako uslov (iv) teoreme 5.1 važi za p_0, tada važi za bilo koje $p \in [1,\infty]$.

Definicija 5.1. *Neka je $p \in [1, \infty)$, B normiran linearan prostor i J prebrojiv indeksni skup. Familija $\{g_j \mid j \in J\} \subset B$ predstavlja p-Riesz-ovu bazu prostora B ako je preslikavanje $\ell^p \ni \{c_j\}_{j\in J} \mapsto \sum\limits_{j\in J} c_j g_j \in B$ ograničeno, tj. postoji pozitivna konstanta C tako da za sve $c = \{c_j\}_{j\in J} \in \ell^p$ važi $C^{-1}\|c\|_{\ell^p} \leqslant \Big\|\sum\limits_{j\in J} c_j g_j\Big\|_B \leqslant C\|c\|_{\ell^p}$.*

Prostor $V^p = \Big\{\sum\limits_{j\in J} c_j g_j \mid c = \{c_j\}_{j\in J} \in \ell^p\Big\}$ je kompletan potprostor od B. Stoga, V^p je *Banach*-ov čak iako B nije kompletan. Definicija 5.1 implicira da su V^p i $\ell^p(J)$ izomorfni *Banach*-ovi prostori.

Primetimo da p-*Riesz*-ova baza za translaciono invarijantni prostor $V^p(\Phi)$ može biti okarakterisana na sledeći način.

Teorema 5.2 ([67])**.** *Neka je $p \in [1, \infty)$ i vektor Φ dat kao u teoremi 5.1. Tada je $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ p-Riesz-ova baza prostora $V^p(\Phi)$ ako i samo ako postoji pozitivna konstanta C takva da je $C^{-1}I_r \leqslant [\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi) \leqslant CI_r$, za svako $\xi \in [-\pi, \pi]$, gde I_r označava jediničnu $r \times r$ matricu.*

Kao posledice teorema 5.1 i 5.2 dobijeni su sledeći rezultati.

Posledica 5.2 ([4])**.** *Neka $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^T \in (\mathcal{L}^\infty)^r$ ako $p \in (1, \infty)$ i $\Phi \in (W^1)^r$ ako je $p = 1$. Ako je $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ p-Riesz-ova baza za $V^p(\Phi)$, tada je $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ p-okvir za $V^p(\Phi)$.*

Imamo da je p-okvir za $V^p(\Phi)$ ujedno i p-*Riesz*-ova baza tog prostora ako postavimo neke dodatne uslove koje mora da zadovoljava funkcija Φ. Taj dodatan uslov je da matrica $[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)$ bude invertibilna za neko $\xi \in [-\pi, \pi]^d$. Očigledno je to uvek ispunjeno kada je $r = 1$ (izuzev u trivijalnom slučaju, tj. kada je $\Phi = \mathbf{0}$).

Posledica 5.3 ([4])**.** *Neka $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^T \in (\mathcal{L}^\infty)^r$ ako $p \in (1, \infty)$ i $\Phi \in (W^1)^r$ ako je $p = 1$. Neka je familija $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ p-okvir za $V^p(\Phi)$.*

a) Ako postoji $\xi_0 \in [-\pi, \pi]^d$ takvo da je $r \times r$ matrica $[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi_0)$ invertibilna, tada je $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ p-Riesz-ova baza za $V^p(\Phi)$.

b) Ako je $r = 1$ i $\phi_1 \neq 0$, tada je $\{\phi_1(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d\}$ p-Riesz-ova baza za $V^p(\phi_1)$.

Posledica 5.3 *b*) ističe da ako je $|\phi_1| \leqslant M < \infty$ i ima kompaktan nosač ili ako je ϕ_1 neprekidna funkcija i opada brže od $|x|^{-2}$ u beskonačnosti, tada je nemoguće konstruisati okvire oblika $\{\phi_1(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d\}$ koji nisu *Riesz*-ove baze. Dakle, u ovim slučajevima svaki okvir za $V^p(\phi_1)$ je i *Riesz*-ova baza za $V^p(\phi_1)$. Uslove koje treba da zadovoljava funkcija ϕ_1 tako da okvir $\{\phi_1(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d\}$ ne bude ujedno i *Riesz*-ova baza ispitivali su *Benedetto* i *Li* i za $p = 2$ konstruisali takav okvir ([10]).

5.4 Translaciono invarijantni prostori sa težinama generisani jednom funkcijom

U ovom poglavlju pokazano je da se teorema 5.1 može preneti na translaciono invarijantne prostore sa težinama generisane jednom odgovarajućom funkcijom φ. Za funkciju $\varphi \in W^1_{\omega_s}$ su posmatrani translaciono invarijantni prostori oblika

$$V^p_s(\varphi) = \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} c_j \varphi(\cdot - j) \mid c \in \ell^p_{\omega_s} \Big\}. \tag{5.11}$$

Ako je $s = 0$, tada dobijamo prostor $V^p(\varphi)$ koji je posmatran u [4].

Navešćemo, najpre, rezultat dokazan u [5] koji će nam biti ključan za dokazivanje teoreme 5.4.

Teorema 5.3. *Neka je $\varphi \in W^1_{\omega_s}$ i $\{\varphi(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d\}$ Riesz-ova baza za $V^2(\varphi)$. Tada dualni generator ψ pripada prostoru $W^1_{\omega_s}$.*

Teorema 5.4. *Ako funkcija φ pripada prostoru $\bigcap_{s\geqslant 0} W^1_{\omega_s}$, tada su sledeća tvrđenja međusobno ekvivalentna.*

i) Prostor $V^p_s(\varphi)$ je zatvoren u $L^p_{\omega_s}$ za svako $s \geqslant 0$ i $p \in [1,\infty]$.

ii) Za svako $s \geqslant 0$ i $p \in [1,\infty]$, familija $\{\varphi(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d\}$ je p-okvir za $V^p_s(\varphi)$, tj. postoje pozitivne konstante A_s, B_s (koje zavise od φ i s) tako da važi

$$A_s \|f\|_{L^p_{\omega_s}} \leqslant \left\| \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\varphi(x-j)}\mathrm{d}x \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^p_{\omega_s}} \leqslant B_s \|f\|_{L^p_{\omega_s}}, \quad f \in V^p_s(\varphi). \tag{5.12}$$

iii) Postoje pozitivne konstante C_1 i C_2 tako da je

$$0 < C_1 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(x+j)|^2 \leqslant C_2 < \infty, \quad s.s.\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{5.13}$$

iv) Postoje pozitivne konstante K^1_s i K^2_s (koje zavise od φ i s) tako da za svako $p \in [1,\infty]$ važi da je

$$K^1_s \|f\|_{L^p_{\omega_s}} \leqslant \inf_{c\in M} \|c\|_{\ell^p_{\omega_s}} \leqslant K^2_s \|f\|_{L^p_{\omega_s}}, \quad f \in V^p_s(\varphi), \tag{5.14}$$

gde je

$$M = \Big\{ c = \{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^p_{\omega_s} \mid f(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k \varphi(\cdot - k) \Big\}. \tag{5.15}$$

v) Postoji funkcija $\psi \in \bigcap_{s\geqslant 0} W^1_{\omega_s}$ takva da je za svako $f \in V^p_s(\varphi)$ ispunjeno

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \psi(\cdot - j)\rangle \varphi(\cdot - j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \varphi(\cdot - j)\rangle \psi(\cdot - j). \tag{5.16}$$

Dokaz. Dokazi $ii) \Leftrightarrow iv)$ i $iv) \Rightarrow i)$ su jednostavni, pa ih izostavljamo.

Dokaz $v) \Rightarrow iv)$.

Neka je $f = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \psi(\cdot - j)\rangle \varphi(\cdot - j)$ i neka je skup M dat sa (5.15). Korišćenjem nejednakosti (5.5) imamo da je

$$\inf_{c\in M} \|c\|_{\ell^p_{\omega_s}} \leqslant \left\| \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{\psi(x-j)}\mathrm{d}x \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^p_{\omega_s}} \leqslant \|f\|_{L^p_{\omega_s}} \|\psi\|_{W^1_{\omega_s}}.$$

Za $K_s^2 = \|\psi\|_{W^1_{\omega_s}}$ dobijamo desnu nejednakost.

Primenom nejednakosti (5.9) dobijamo da je

$$\|f\|_{L^p_{\omega_s}} \leqslant \|f\|_{W^p_{\omega_s}} = \|\varphi *' c\|_{W^p_{\omega_s}} \leqslant \|\varphi\|_{W^1_{\omega_s}} \|c\|_{\ell^p_{\omega_s}}.$$

Ako je $K_s^1 = \|\varphi\|^{-1}_{W^1_{\omega_s}}$ dokazali smo levu nejednakost u (5.14).

Dokaz $ii) \Rightarrow v)$.

Pošto $ii)$ važi za svako $s \geqslant 0$ i $p \in [1,\infty]$, za $s = 1$ i $p = 2$ dobijamo da familija $\{\varphi(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d\}$ predstavlja *Riesz*-ovu bazu prostora $V^2(\varphi)$. Na osnovu teoreme 5.3 dualni generator ψ pripada prostoru $W^1_{\omega_s}$. Kako $\varphi \in \bigcap\limits_{s\geqslant 0} W^1_{\omega_s}$, to $\psi \in \bigcap\limits_{s\geqslant 0} W^1_{\omega_s}$ i važe jednakosti (5.16).

Dokaz $iii) \Rightarrow iv)$.

Videli smo da za funkciju $\varphi \in W^1_{\omega_s}$ i niz $c \in \ell^p_{\omega_s}$, $p \in [1,\infty]$, važi nejednakost $\|\varphi *' c\|_{W^p_{\omega_s}} \leqslant \|c\|_{\ell^p_{\omega_s}} \|\varphi\|_{W^1_{\omega_s}}$. Kako je $\|\varphi *' c\|_{L^p_{\omega_s}} \leqslant \|\varphi *' c\|_{W^p_{\omega_s}}$ za sve $p \in [1,\infty]$, to za $K_s^1 = \|\varphi\|^{-1}_{W^1_{\omega_s}}$, dobijamo levu nejednakost u (5.12).

Pošto familija $\{\varphi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}$ sa uslovom (5.13) čini *Riesz*-ovu bazu prostora $V^2(\varphi)$ (videti [5]), tada postoji jedinstvena funkcija $\psi \in V^2(\varphi)$ takva da je $\{\psi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}$, takođe, *Riesz*-ova baza tog prostora. Pri tom, funkcije φ i ψ zadovoljavaju biortogonalne relacije, tj. $\langle\psi(x), \varphi(x)\rangle = 1$, $\langle\psi(x), \varphi(x-k)\rangle = 0$, $k \neq 0$. Koristeći teoremu 5.3, imamo $\psi \in \bigcap\limits_{s\geqslant 0} W^1_{\omega_s}$. Kako je

$$(\varphi *' c)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k \varphi(x-k) \in V^p_s(\varphi),$$

tada c_k, $k \in \mathbb{Z}^d$, može biti izražen u obliku $c_k = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\varphi *' c)(x)\overline{\psi(x-k)}\mathrm{d}x$. Za $p \in [1,\infty]$, imamo da je

$$\begin{aligned} \left|c_k(1+|k|)^s\right|^p &= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d} (\varphi *' c)(x)\, \overline{\psi(x-k)}\, (1+|k|)^s \,\mathrm{d}x \right|^p \\ &\leqslant \Bigg(\int\limits_{[0,1]^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\varphi *' c|(x+j)\, |\psi(x+j-k)|\, (1+|k|)^s \,\mathrm{d}x \Bigg)^p \end{aligned}$$

$$\leqslant \int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\varphi *' c|(x+j)\, |\psi(x+j-k)|\, (1+|k|)^s \Big)^p \mathrm{d}x,$$

sa uobičajenim promenama za $p=\infty$. Sumirajući po $k\in\mathbb{Z}^d$ dobijamo

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |c_k|^p (1+|k|)^{sp} \leqslant \int\limits_{[0,1]^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\varphi *' c|(x+j)\, |\psi(x+j-k)|\, (1+|k|)^s \Big)^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int\limits_{[0,1]^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\varphi *' c|^p (x+k)\, (1+|k|)^{sp} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\psi(x+j)|\, (1+|j|)^s \Big)^p \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \|\psi\|^p_{W^1_{\omega_s}} \|\varphi *' c\|^p_{L^p_{\omega_s}}.$$

Dobijamo da je $\|c\|_{\ell^p_{\omega_s}} \leqslant \|\psi\|_{W^1_{\omega_s}} \|\varphi *' c\|_{L^p_{\omega_s}}$. Za gornju granicu u nejednakosti (5.14) može se izabrati da je $K_s^2 = \|\psi\|_{W^1_{\omega_s}}$. Konačno je $\|c\|_{\ell^p_{\omega_s}} \leqslant K_s^2 \|f\|_{L^p_{\omega_s}}$.

Dokaz i) $\Rightarrow$ iii).

Pošto je prostor $V^p_s(\varphi)$ zatvoren u $L^p_{\omega_s}$ za svako $p\in[1,\infty]$ i svako $s\geqslant 0$, tada za $p=2$ i $s=1$ imamo standardnu ocenu generatora φ, tj. postoje konstante C_1 i C_2 takve da je $0 < C_1 \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |\widehat{\varphi}(x+j)|^2 \leqslant C_2 < \infty$, za skoro svako $x\in\mathbb{R}^d$. □

Posledica 5.4. *Ako $\varphi \in \bigcap_{s\geqslant 0} W^1_{\omega_s}$, tada je $V^p_s(\varphi) \subset V^q_s(\varphi)$, za svako $s\geqslant 0$ i sve $1\leqslant p<q\leqslant\infty$.*

Dokaz. Neka je $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\varphi(x-k)$, za neko $c=\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^p_{\omega_s}$, $p\in[1,\infty]$. Pošto je $\ell^p_{\omega_s} \subset \ell^q_{\omega_s}$, $1\leqslant p<q\leqslant\infty$, primenom teoreme 5.4 dobijamo da za svako $s\geqslant 0$ i $1\leqslant p<q\leqslant\infty$ važi da je $\|f\|_{L^q_{\omega_s}} \leqslant B_s\|c\|_{\ell^q_{\omega_s}} \leqslant B'_s\|c\|_{\ell^p_{\omega_s}} \leqslant \|f\|_{L^p_{\omega_s}}$. □

Iz nejednakosti (5.14) i (5.12) zaključujemo da su $\ell^p_{\omega_s}$ i $V^p_{\omega_s}$ izomorfni *Banach*-ovi prostiri za svako $s\geqslant 0$ i $p\in[1,\infty]$. Za svako $f\in V^p_s(\varphi)$ imamo ekvivalenciju između $\inf_{c\in M}\{\|c\|_{\ell^p_{\omega_s}}\}$ i $L^p_{\omega_s}$-norme od f.

Kao posledicu teoreme 5.4, zatim [5, Teorema 1] i činjenice da je $\ell^p_{s_1} \subset \ell^p_{s_2}$, za $0\leqslant s_2<s_1$, dobijamo sledeći rezultat.

Posledica 5.5. *Ako $\varphi \in \bigcap_{s\geqslant 0} W^1_{\omega_s}$, tada je $V^p_{s_1}(\varphi) \subset V^p_{s_2}(\varphi)$ za $0\leqslant s_2<s_1$ i svako $p\in[1,\infty]$.*

5.5 Karakterizacija prostora $V^p_\mu(\Phi)$

U ovom poglavlju naveden je i dokazan glavni rezultat disertacije, teorema 5.5. Za sam dokaz ove teoreme, potrebno je dokazati nekoliko pomoćnih tvrđenja, koja, takođe, navodimo u ovom poglavlju.

Teorema 5.5. *Neka* $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^T \in (W^1_\omega)^r$ *i* $p \in [1, \infty]$. *Sledeća tvrđenja su međusobno ekvivalentna.*

i) *Prostor* $V^p_\mu(\Phi)$ *je zatvoren u* L^p_μ.

ii) *Familija* $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d, 1 \leqslant i \leqslant r\}$ *je p-okvir za* $V^p_\mu(\Phi)$.

iii) *Postoji pozitivna konstanta* C *takva da je*

$$C^{-1}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi) \leqslant [\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)\overline{[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)^T} \leqslant C[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi), \quad \xi \in [-\pi, \pi]^d.$$

iv) *Postoji pozitivna konstanta* B *(koja zavisi od* Φ *i* ω*) takva da je*

$$B^{-1}\|f\|_{L^p_\mu} \leqslant \inf_{f = \sum_{i=1}^{r} \phi_i *' c^i} \sum_{i=1}^{r} \left\|\{c^i_j\}_{j \in \mathbb{Z}^d}\right\|_{\ell^p_\mu} \leqslant B\|f\|_{L^p_\mu}, \tag{5.17}$$

za svako $f \in V^p_\mu(\Phi)$.

v) *Postoji vektor* $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r)^T \in (W^1_\omega)^r$ *takav da za svako* $f \in V^p_\mu(\Phi)$ *važi*

$$f = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \psi_i(\cdot - j)\rangle \phi_i(\cdot - j) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \langle f, \phi_i(\cdot - j)\rangle \psi_i(\cdot - j).$$

Da bismo dokazali teoremu 5.5 navešćemo i dokazati nekoliko pomoćnih lema.

Lema 5.6. *Za* $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r)^T \in (\mathcal{L}^2_\omega)^r$ *sledeća tvrđenja su međusobno ekvivalentna.*

a) *Rang* $r \times \infty$ *matrice* $\left[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\right]_{j \in \mathbb{Z}^d}$ *ne zavisi od* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

b) *Rang kvadratne matrice* $\left[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}\right](\xi)$ *reda* r *ne zavisi od* $\xi \in \mathbb{R}^d$.

c) *Postoji pozitivna konstanta* C *(koja ne zavisi od* ξ*) tako da je za svako* $\xi \in [-\pi, \pi]^d$ *ispunjeno* $C^{-1}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi) \leqslant [\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)\, \overline{[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)^T} \leqslant C\, [\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)$.

Dokaz.

Dokaz a) $\Leftrightarrow$ *b).*

Ova ekvivalencija se direktno dobija iz jednakosti (5.10) zamenjujući matricu G sa matricom $\left[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\right]_{j \in \mathbb{Z}^d}$, ako je jedan od rangova konstantan na $\mathbb{R}^d$.

Dokaz b) $\Leftrightarrow$ *c).*

Neka su $\lambda_i(\xi)$, $i \in [1, r]$, sve sopstvene vrednosti matrice $[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)$ poređane u opadajući poredak, tj. $\lambda_1(\xi) \geqslant \lambda_2(\xi) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r(\xi)$. Pošto je $[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)$ pozitivna semi-definitna matrica, onda je $\lambda_i(\xi) \geqslant 0$ za sve $i \in [1, r]$ i postoji $r \times r$ matrica $A(\xi)$ takva da je $\overline{A(\xi)^T} A(\xi) = I_r$ i

$$\overline{A(\xi)^T}\, [\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi) A(\xi) = \operatorname{diag}(\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi)). \tag{5.18}$$

Kako $\Phi \in (\mathcal{L}_\omega^2)^r$, svi elementi matrice $[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)$ pripadaju klasi $\mathcal{WC}_\omega^1$ i tada su $\lambda_i(\xi)$ neprekidne 2π-periodične funkcije za sve $i \in [1, r]$. Ako važi *b*), tada je $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi) = k_1$. Stoga, $\lambda_i(\xi) > 0$ za sve $\xi \in \mathbb{R}^d$ i $1 \leqslant i \leqslant k_1$, i $\lambda_i(\xi) = 0$ za sve $\xi \in \mathbb{R}^d$ i $k_1 + 1 \leqslant i \leqslant r$. Iz neprekidnosti i periodičnosti funkcije $\lambda_i(\xi)$, sledi da postoji pozitivna konstanta C takva da je $C^{-1} \leqslant \lambda_i(\xi) \leqslant C$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, $1 \leqslant i \leqslant k_1$.

Pošto je $\lambda_i(\xi) \geqslant 0$ za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$ i $i \in [1, r]$, dobijamo da je $C^{-1}\lambda_i(\xi) \leqslant \lambda_i(\xi)^2 \leqslant C\lambda_i(\xi)$, $i \in [1, r]$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Dalje je

$$C^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi)) \leqslant \operatorname{diag}(\lambda_1^2(\xi), \dots, \lambda_r^2(\xi)) \leqslant C\operatorname{diag}(\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi)).$$

Primenom (5.18), dobijamo da je

$$C^{-1}\overline{A(\xi)^T}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)A(\xi) \leqslant \overline{A(\xi)^T}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)\overline{[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)^T}A(\xi) \leqslant C\overline{A(\xi)^T}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)A(\xi).$$

Kombinujući gornje rezultate dobijamo tvrđenje *c*).

Ako pretpostavimo da važi *c*), tada prema (5.18) važi da je

$$C^{-1}\overline{A(\xi)^T}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)A(\xi) \leqslant \overline{A(\xi)^T}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)\overline{[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)^T}A(\xi) \leqslant C\overline{A(\xi)^T}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)A(\xi),$$

pa je

$$C^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi)) \leqslant \operatorname{diag}(\lambda_1^2(\xi), \dots, \lambda_r^2(\xi)) \leqslant C\operatorname{diag}(\lambda_1(\xi), \dots, \lambda_r(\xi)),$$

za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$. Dakle, $C^{-1}\lambda_i(\xi) \leqslant \lambda_i(\xi)^2 \leqslant C\lambda_i(\xi)$, $i \in [1, r]$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Zaključujemo da je ili $\lambda_i(\xi) = 0$ ili $C^{-1} \leqslant \lambda_i(\xi) \leqslant C$ za svako $i \in [1, r]$. Na osnovu neprekidnosti i periodičnosti funkcija $\lambda_i(\xi)$, $i \in [1, r]$, dobijamo da rang matrice $[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi)$ ne zavisi od $\xi \in \mathbb{R}^d$. □

Sledeća lema nam omogućuje zamenu lokalnog generatora $\widehat{\Phi}$ veličine r sa lokalnim generatorom $\widehat{\Psi}_{1,\lambda}$ veličine $k_0 \in [1, r]$.

Lema 5.7. *Neka za* $\Phi \in (\mathcal{L}_\omega^2)^r$ *važi da je* $\operatorname{rang}\left[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\right]_{j \in \mathbb{Z}^d} = k_0 \geqslant 1$ *za sve* $\xi \in \mathbb{R}^d$*. Tada postoje konačan skup* Λ*,* $\eta_\lambda \in [-\pi, \pi]^d$*,* $\delta_\lambda \in [0, 1/4)$*, regularna* 2π*-periodična matrica* $P_\lambda(\xi)$ *reda* r *sa svim elementima iz klase* $\mathcal{WC}_\omega^1$ *i skup* $K_\lambda \subset \mathbb{Z}^d$ *kardinalnosti* k_0 *za svako* $\lambda \in \Lambda$ *sa sledećim osobinama:*

a)

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B(\eta_\lambda, \delta_\lambda/2) \supset [-\pi, \pi]^d, \tag{5.19}$$

gde sa $B(x_0, \delta)$ *označavamo otvorenu kuglu u* $\mathbb{R}^d$ *sa centrom u tački* x_0 *i polu-prečnika* δ*,*

b)

$$P_\lambda(\xi)\widehat{\Phi}(\xi) = \begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_{1,\lambda}(\xi) \\ \widehat{\Psi}_{2,\lambda}(\xi) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,\ \lambda \in \Lambda,$$

gde su $\Psi_{1,\lambda}$ i $\Psi_{2,\lambda}$ funkcije iz $\mathbb{R}^d$ u $\mathbb{C}^{k_0}$ i $\mathbb{C}^{r-k_0}$, respektivno, koje zadovoljavaju

$$\operatorname{rang}\Big[\widehat{\Psi}_{1,\lambda}(\xi+2k\pi)\Big]_{k\in K_\lambda}=k_0,\quad \xi\in B(\eta_\lambda,2\delta_\lambda)$$

i

$$\widehat{\Psi}_{2,\lambda}(\xi)=0,\quad \xi\in B(\eta_\lambda,8\delta_\lambda/5)+2\pi\mathbb{Z}^d.$$

Dokaz. Za svako $\eta_0\in[-\pi,\pi]^d$ postoje regularna matrica P_{η_0} reda r, regularna matrica A_{η_0} reda k_0 i skup $K_0\subset\mathbb{Z}^d$ kardinalnosti k_0 tako da je

$$P_{\eta_0}\big[\widehat{\Phi}(\eta_0+2j\pi)\big]_{j\in K_0}=\begin{bmatrix}A_{\eta_0}\\0\end{bmatrix}\ \text{ i }\ P_{\eta_0}\big[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)\big]_{j\in K_0}=\begin{bmatrix}A_{\eta_0}+R_1(\xi)\\R_2(\xi)\end{bmatrix}.$$

Koristeći neprekidnosti od $\widehat{\Phi}$, dobijamo da su funkcije $R_1(\xi)$ i $R_2(\xi)$ neprekidne i da je $R_1(\eta_0)=0$, $R_2(\eta_0)=0$. Dakle, $\sup\limits_{\xi\in B(\eta_0,4\delta)}\|R_1(\xi)\|+\|R_2(\xi)\|$ se može učiniti dovoljno malim za dovoljno malo pozitivno δ. Neka je H nenegativna glatka funkcija na $\mathbb{R}^d$ takva da je

$$H(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 4/5,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}\tag{5.20}$$

Ako je $\delta>0$ dovoljno malo, tada je $A_{\eta_0}+H((\xi-\eta_0)/4\delta)R_1(\xi)$ regularna matrica reda k_0 za svako $\xi\in\mathbb{R}^d$. Za $\xi\in\mathbb{R}^d$ neka je

$$\alpha_{\eta_0}(\xi)=A_{\eta_0}+\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}H\Big((\xi+2j\pi-\eta_0)/(4\delta)\Big)R_1(\xi+2j\pi)$$

i

$$\beta_{\eta_0}(\xi)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}H\Big((\xi+2j\pi-\eta_0)/(2\delta)\Big)R_2(\xi+2j\pi).$$

Imamo da je

$$\begin{aligned}\widehat{\alpha_{\eta_0}}(n)&=\int\limits_{[0,1]^d}\alpha_{\eta_0}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot n}\mathrm{d}\xi\\
&=\int\limits_{[0,1]^d}\Big(A_{\eta_0}+\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}H\Big(\frac{\xi+2j\pi-\eta_0}{4\delta}\Big)R_1(\xi+2j\pi)\Big)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot n}\mathrm{d}\xi\\
&\leqslant\int\limits_{[0,1]^d}A_{\eta_0}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot n}\mathrm{d}\xi+\int\limits_{[0,1]^d}H\Big(\frac{\xi}{4\delta}\Big)R_1(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot n}\mathrm{d}\xi\\
&\leqslant C_1+\int\limits_{[0,1]^d}H\Big(\frac{\xi}{4\delta}\Big)R_1(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot n}\mathrm{d}\xi\\
&\leqslant C_2+\int\limits_{[0,1]^d}H\Big(\frac{\xi}{4\delta}\Big)P_{\eta_0}\widehat{\Phi}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot n}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

$$\leqslant C' + \overline{C}\mathcal{F}^{-1}\Big(H\Big(\frac{\cdot}{4\delta}\Big)\widehat{\Phi}\Big)(n),$$

i

$$\widehat{\beta_{\eta_0}}(n) \leqslant C_1' + \int\limits_{[0,1]^d} H\Big(\frac{\xi}{2\delta}\Big)R_2(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot n}\mathrm{d}\xi \leqslant C_2' + \int\limits_{[0,1]^d} H\Big(\frac{\xi}{2\delta}\Big)P_{\eta_0}\widehat{\Phi}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\xi\cdot n}\mathrm{d}\xi$$
$$\leqslant \overline{C}\mathcal{F}^{-1}\Big(H\Big(\frac{\cdot}{2\delta}\Big)\widehat{\Phi}\Big)(n) + C'',$$

gde su C' i C'' pozitivne konstante za $n = 0$ i $C' = C'' = 0$ za $n \neq 0$. Pošto je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^d} \big|\widehat{\alpha_{\eta_0}}(n)\big|\omega(n) \leqslant \overline{C} \sum_{n\in\mathbb{N}^d} \Big|\mathcal{F}^{-1}\big(H\big(\cdot/(4\delta)\big)\widehat{\Phi}\big)\Big|\omega(n) + C'$$
$$\leqslant \overline{C} \sum_{n\in\mathbb{N}^d} \big|\mathcal{F}^{-1}\widehat{\Phi}\big|\omega(n) + C' \leqslant C\|\Phi\|_{L^1_\omega}$$

i

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^d} \big|\widehat{\beta_{\eta_0}}(n)\big|\omega(n) \leqslant C\|\Phi\|_{L^1_\omega},$$

dobijamo da su ℓ^1_ω norme nizova *Fourier*-ovih koeficijenata funkcija α_{η_0} i β_{η_0} ograničene sa gornje strane sa $C\|\Phi\|_{L^1_\omega}$, gde je C pozitivna konstanta. Dakle, svi elementi matrica $\alpha_{\eta_0}(\xi)$ i $\beta_{\eta_0}(\xi)$ pripadaju klasi $\mathcal{WC}^1_\omega$.

Neka je $P_{\eta_0}(\xi) = P_{\eta_0} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta_{\eta_0}(\xi)(\alpha_{\eta_0}(\xi))^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$. Tada je $P_{\eta_0}(\xi)$ 2π-periodična regularna matrica reda r i svi njeni elementi pripadaju klasi $\mathcal{WC}^1_\omega$. Pošto za svako $\xi \in B(\eta_0, 8\delta/5)$ važi da je $\alpha_{\eta_0}(\xi) = A_{\eta_0} + R_1(\xi)$ i $\beta_{\eta_0}(\xi) = R_2(\xi)$, to je

$$P_{\eta_0}(\xi)[\Phi(\xi + 2k\pi)]_{k\in K_0} = \begin{bmatrix} A_{\eta_0} + R_1(\xi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi \in B(\eta_0, 8\delta/5), \tag{5.21}$$

gde je $0 < \delta < 1/4$ dovoljno malo.

Neka su $\Psi_{1,\eta_0} = (\psi_{1,\eta_0,1}, \ldots, \psi_{1,\eta_0,k_0})^T$ i $\Psi_{2,\eta_0} = (\psi_{2,\eta_0,1}, \ldots, \psi_{2,\eta_0,r-k_0})^T$ dati sa

$$\begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_{1,\eta_0}(\xi) \\ \widehat{\Psi}_{2,\eta_0}(\xi) \end{bmatrix} = P_{\eta_0}(\xi)\Phi(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{5.22}$$

Kako svi elementi matrice $P_{\eta_0}(\xi)$ pripadaju klasi $\mathcal{WC}^1_\omega$, to $\Psi_{1,\eta_0} \in (\mathcal{L}^1_\omega)^{k_0}$ i $\Psi_{2,\eta_0} \in (\mathcal{L}^p_\omega)^{r-k_0}$ ako $\Phi \in (\mathcal{L}^p_\omega)^r$. Koristeći jednakosti (5.21) i (5.22), dobijamo da je

$$\widehat{\Psi}_{2,\eta_0}(\xi + 2k\pi) = 0, \quad \xi \in B(\eta_0, 8\delta/5), \quad k \in K_0. \tag{5.23}$$

Takođe, za $\xi \in B(\eta_0, 8\delta/5)$ imamo rang $\big[A_{\eta_0} + R_1(\xi)\big] = k_0$ i važi da je

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} A_{\eta_0} + R_1(\xi) & 0 \\ \widehat{\Psi}_{1,\eta_0}(\xi + 2k'\pi) & \widehat{\Psi}_{2,\eta_0}(\xi + 2k'\pi) \end{bmatrix}_{k'\in\mathbb{Z}^d\setminus K_0}$$
$$= \operatorname{rang}\begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_{1,\eta_0}(\xi + 2k\pi) \\ \widehat{\Psi}_{2,\eta_0}(\xi + 2k\pi) \end{bmatrix}_{k\in\mathbb{Z}^d} = \operatorname{rang}\Big[\Phi(\xi + 2k\pi)\Big]_{k\in\mathbb{Z}^d} = k_0.$$

Dakle, $\widehat{\Psi}_{2,\eta_0}(\xi+2k'\pi)=0$ za svako $\xi\in B(\eta_0,8\delta/5)$ i $k'\in\mathbb{Z}^d\setminus K_0$. Na osnovu jednakosti (5.23) dobijamo da je $\widehat{\Psi}_{2,\eta_0}(\xi)=0$, za svako $\xi\in B(\eta_0,8\delta/5)+2\pi\mathbb{Z}^d$.

Neka je δ_0 izabrano tako da je $0<\delta_0<1/4$ i nesingularne matrice $P_{\eta_0}(\xi)$, $A_{\eta_0}+H((\xi-\eta_0)/(4\delta_0))R_1(\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^d$, i $A_{\eta_0}+R_1(\xi)$, $\xi\in B(\eta_0,4\delta_0)$, zadate kao u gornjem delu dokaza. Zbog kompaktnosti intervala $[-\pi,\pi]^d$ u $\mathbb{R}^d$, za familiju otvorenih kugli $\{B(\eta_0,\delta_0/2)\mid\eta_0\in[-\pi,\pi]^d\}$, koja pokriva $[-\pi,\pi]^d$, postoji konačan skup Λ takav da je $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B(\eta_\lambda,\delta_\lambda/2)\supset[-\pi,\pi]^d$. Za takvo konačno pokrivanje, odgovarajuće matrice $P_\lambda(\xi)$, $\Psi_{1,\lambda}$ i $\Psi_{2,\lambda}$, gore konstruisane, zadovoljavaju osobine ove leme. $\square$

Napomena 5.2. *Iz* (5.19) *direktno sledi da postoje 2π-periodične glatke funkcije h_λ, $\lambda\in\Lambda$, na $\mathbb{R}^d$ takve da je $\operatorname{supp}h_\lambda\subset B(\eta_\lambda,\delta_\lambda/2)+2\pi\mathbb{Z}^d$ i $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}h_\lambda(\xi)=1$ za svako $\xi\in\mathbb{R}^d$.*

Sledeći rezultat je o $\mathcal{L}^p_\omega$ i W^1_ω oceni funkcije ϕ u blizini tačke ξ_0 tako da je $\widehat{\phi}(\xi_0+2k\pi)=0$ za svako $k\in\mathbb{Z}^d$.

Lema 5.8. *Neka $\phi\in\mathcal{L}^p_{\omega_s}$ ako $p\in[1,\infty)$ i $\phi\in W^1_{\omega_s}$ ako je $p=\infty$. Pretpostavimo da je $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d}\phi(\cdot+j)=0$. Tada za sve funkcije h na $\mathbb{R}^d$ za koje je*

$$|h(x)|\leqslant C(1+|x|)^{-s-d-1}\tag{5.24}$$

i

$$|h(x)-h(y)|\leqslant C|x-y|(1+\min(|x|,|y|))^{-s-d-1},\tag{5.25}$$

važi da je $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-nd}\Big\|\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d}h(2^{-n}j)\phi(\cdot-j)\Big\|_{\mathcal{L}^p_{\omega_s}}=0.$

Dokaz. Za $\phi\in\mathcal{L}^p_{\omega_s}$, $p\in[1,\infty)$, važi da je

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}^p_{\omega_s}}=\bigg(\int\limits_{[0,1]^d}\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\big|\phi(x+j)\big|\,\omega_s(x+j)\Big)^p\mathrm{d}x\bigg)^{1/p}<\infty.$$

Na osnovu *Lebesque*-ove teoreme o dominantnoj konvergenciji za svako $\varepsilon>0$ postoji $N_0\geqslant 2$ tako da je

$$\bigg(\int\limits_{[0,1]^d}\Big(\sum_{|j|\geqslant N_0}\big|\phi(x+j)\big|\,\omega_s(x+j)\Big)^p\mathrm{d}x\bigg)^{1/p}\leqslant\varepsilon.$$

Neka je $\phi_1(x)=\phi(x)\chi_{\mathcal{O}_{N_0}}(x)+\sum\limits_{|j|\geqslant N_0}\phi(x+j)\chi_{[0,1]^d}(x)$, gde je χ_E karakteristična funkcija skupa $\mathcal{O}_{N_0}=\bigcup\limits_{|j|<N_0}(j+[0,1]^d)$. Tada je $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d}\phi_1(x+j)=\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d}\phi(x+j)=0$

i važi da je

$$
\begin{aligned}
\|\phi_1-\phi\|_{\mathcal{L}^p_{\omega_s}} &= \Big(\int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\phi_1-\phi|(x+k)\ \omega_s(x+k)\Big)^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \\
&\leqslant \int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Big| \phi(x+k)\ \chi_{\mathcal{O}_{N_0}}(x+k) \\
&\quad + \sum_{|j|\geqslant N_0} \phi(x+j+k)\ \chi_{[0,1]^d}(x+k) - \phi(x+k) \Big|\ \omega_s(x+k)\Big)^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \\
&\leqslant 2\Big(\int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{|j|\geqslant N_0} |\phi(x+j)|\ \omega_s(x+j)\Big)^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p} \leqslant 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Pošto je $\operatorname{supp}\phi_1 \subset \big\{x \mid |x| \leqslant N_0+d\big\}$, dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
&\Big\| 2^{-nd} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} h(2^{-n}j)\big(\phi(x-j)-\phi_1(x-j)\big)\Big\|_{\mathcal{L}^p_{\omega_s}} \\
&\leqslant 2^{-nd} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \Big\| h(2^{-n}j)\big(\phi(x-j)-\phi_1(x-j)\big)\Big\|_{\mathcal{L}^p_{\omega_s}} \\
&\leqslant 2^{-nd} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \big|h(2^{-n}j)\big| \|\phi-\phi_1\|_{\mathcal{L}^p_{\omega_s}} \leqslant C\varepsilon,
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&2^{-ndp} \int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} h(2^{-n}j)\phi_1(x-j+k)\Big| \omega_s(x+k)\Big)^p \mathrm{d}x \\
&= 2^{-ndp} \int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Big| \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \big(h(2^{-n}j)-h(2^{-n}k)\big)\phi_1(x-j+k)\Big| \omega_s(x+k)\Big)^p \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2^{-ndp} \int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \frac{C2^{-n}|j-k|}{\big(1+2^{-n}\min\{|j|,|k|\}\big)^{s+d+1}} \big|\phi_1(x-j+k)\big|\omega_s(x+k)\Big)^p \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2^{-ndp} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{C_1(N_0)2^{-n}\omega_s(k)}{\big(1+2^{-n}|k|\big)^{s+d+1}}\Big)^p \int\limits_{[0,1]^d} \Big(\sum_{|k-j|\leqslant N_1} \big|\phi_1(x-j+k)\big|\omega_s(x-j+k)\Big)^p \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2^{-np(d+1)} C_2(N_0) \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{\omega_s(k)}{\big(1+2^{-n}|k|\big)^{s+d+1}}\Big)^p \|\phi_1\|^p_{\mathcal{L}^p_{\omega_s}} \\
&\leqslant 2^{-np(d+1)} C_3(N_0) \big(\|\phi\|_{\mathcal{L}^p_{\omega_s}} + 2\varepsilon\big)^p \leqslant \big(\|\phi\|_{\mathcal{L}^p_{\omega_s}} + 2\varepsilon\big)^p \varepsilon^p,
\end{aligned}
$$

kada je $n > 1/p\ln(C_3(N_0)/\varepsilon)$, gde je $N_1 = N_0+d$ i $C_i(N_0)$, $i=1,2,3$, su pozitivne konstante koje zavise od N_0, d i konstante C iz nejednakosti (5.24) i (5.25).

Dokaz tvrđenja za $\phi \in W^1_{\omega_s}$ i $p=\infty$ je sličan prethodnom sa odgovarajućim modifikacijama za $p=\infty$. □

Lema 5.9. *Neka je $\mu(x)=\mathrm{e}^{\alpha|x|^\beta}$, $\alpha>0$, $0<\beta<1$, i $\phi\in\mathcal{L}^p_\mu$ ako $p\in[1,\infty)$ i $\phi\in W^1_\mu$ za $p=\infty$. Pretpostavimo da je $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d}\phi(\cdot+j)=0$. Tada za svaku funkciju h na $\mathbb{R}^d$ za koju je*

$$|h(x)|\leqslant C\mathrm{e}^{-(\alpha+d+1)|x|^\beta}\quad i\quad |h(x)-h(y)|\leqslant C|x-y|\mathrm{e}^{-(\alpha+d+1)(1+\min\{|x|^\beta,|y|^\beta\})},$$

važi da je $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-nd}\Big\|\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d}h(2^{-n}j)\phi(\cdot-j)\Big\|_{\mathcal{L}^p_\mu}=0.$

Dokaz. Neka $\phi\in\mathcal{L}^p_\mu$ za $p\in[1,\infty)$ i neka je ϕ_1 kao u prethodnom dokazu. Tada je $\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\phi_1(x+j)=\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\phi(x+j)=0$ i $\|\phi_1-\phi\|_{\mathcal{L}^p_\mu}\leqslant 2\varepsilon$. Pošto je $\operatorname{supp}\phi_1\subset\big\{x\mid |x|\leqslant N_0+d\big\}$, dobijamo da je

$$\Big\|2^{-nd}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}h(2^{-n}j)\big(\phi(x-j)-\phi_1(x-j)\big)\Big\|_{\mathcal{L}^p_\mu}\leqslant C\varepsilon$$

i

$$\begin{aligned}
&2^{-ndp}\int\limits_{[0,1]^d}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\Big|\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}h(2^{-n}j)\phi_1(x-j+k)\Big|\mu(x+k)\Big)^p\mathrm{d}x\\
&=2^{-ndp}\int\limits_{[0,1]^d}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\Big|\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\big(h(2^{-n}j)-h(2^{-n}k)\big)\phi_1(x-j+k)\Big|\mu(x+k)\Big)^p\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2^{-ndp}\int\limits_{[0,1]^d}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\frac{C2^{-n}|j-k|}{\mathrm{e}^{(\alpha+d+1)(1+2^{-n}\min\{|j|^\beta,|k|^\beta\})}}\big|\phi_1(x-j+k)\big|\mu(x+k)\Big)^p\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2^{-ndp}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{C_1(N_0)2^{-n}\mu(k)}{\mathrm{e}^{(\alpha+d+1)(1+2^{-n}|k|^\beta)}}\Big)^p\int\limits_{[0,1]^d}\Big(\sum_{|k-j|\leqslant N_1}\big|\phi_1(x-j+k)\big|\mu(x-j+k)\Big)^p\mathrm{d}x\\
&\leqslant 2^{-np(d+1)}C_2(N_0)\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\frac{\mu(k)}{\mathrm{e}^{(\alpha+d+1)(1+2^{-n}|k|^\beta)}}\Big)^p\|\phi_1\|^p_{\mathcal{L}^p_\mu}\\
&\leqslant 2^{-np(d+1)}C_3(N_0)\big(\|\phi\|_{\mathcal{L}^p_\mu}+2\varepsilon\big)^p\leqslant\big(\|\phi\|_{\mathcal{L}^p_\mu}+2\varepsilon\big)^p\varepsilon^p,
\end{aligned}$$

kada je $n>1/p\ln(C_3(N_0)/\varepsilon)$, gde je $N_1=N_0+d$, a $C_i(N_0)$, $i=1,2,3$, su pozitivne konstante koje zavise od N_0, d i konstante C. □

Lema 5.10 ([4]). *Neka je $(X\|\cdot\|_X)$ Banach-ov prostor, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ normiran linearan prostor i T linearan ograničen operator iz X u Y. Ako je $|\!|\!|y|\!|\!|=\inf\limits_{y=Tx}\|x\|_X$ za $y\in\mathcal{R}(T)$, tada je $(\mathcal{R}(T),|\!|\!|\cdot|\!|\!|)$ Banach-ov prostor.*

Dokaz. Koristeći osobine norme u prostoru X i osobine ograničenog linearnog operatora, lako se dokazuje da je $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ norma na $\mathcal{R}(T)$.

Neka je $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Cauchy*-jev niz u $\mathcal{R}(T)$. Bez gubljenja opštosti, pretpostavimo da je $|||y_{n+1}-y_n||| < 2^{-n}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Na osnovu definicije norme $|||\cdot|||$, postoji niz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $Tx_n = y_{n+1}-y_n$ i $\|x_n\|_X < 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Iz kompletnosti prostora $(X, \|\cdot\|)$ i činjenice da red $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X$ konvergira, imamo $z = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \in X$ i $y_1 + Tz \in \mathcal{R}(T)$. Kako je $|||Tx|||_Y \leqslant \|x\|_X$ za svako $x \in X$, dobijamo

$$|||y_n - y_1 - Tz||| = \left|\left|\left| T\left(\sum_{k=n}^{\infty} x_k\right)\right|\right|\right| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \|x_k\|_X \to 0, \quad n \to \infty.$$

Zaključujemo da svaki *Cauchy*-jev niz u prostoru $(\mathcal{R}(T), |||\cdot|||)$ konvergira u njemu, tj. $(\mathcal{R}(T), |||\cdot|||)$ je *Banach*-ov prostor. □

Kao posledicu prethodne leme dobijamo rezultat koji ujedno dokazuje implikaciju *iv)* ⇒ *i)* teoreme 5.5.

Teorema 5.6 ([4]). *Neka su $(X, \|\cdot\|_X)$ i $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dva Banach-ova prostora i T ograničen linearan operator iz X u Y. Ako postoji konstanta C takva da je $C^{-1}\|y\|_Y \leqslant \inf\limits_{y=Tx} \|x\|_X \leqslant C\|y\|_Y$ za svako $y \in \mathcal{R}(T)$, tada je $\mathcal{R}(T)$ zatvoren u Y.*

Sada možemo sprovesti čitav dokaz glavne teoreme.

Dokaz. (Dokaz teoreme 5.5)

Dokaz iv) ⇒ *i)*.

Ova implikacija je neposredna posledica leme 5.10 i teoreme 5.6.

Dokaz tvrđenja v) ⇒ *iv)*.

Ako važi *v)*, tada korišćenjem nejednakosti (5.5) imamo da je

$$\begin{aligned}\inf_{f=\sum\limits_{i=1}^{r}\phi_i *' c^i} \sum_{i=1}^{r} \left\|\{c_j^i\}_{j\in\mathbb{Z}^d}\right\|_{\ell_\mu^p} &\leqslant \sum_{i=1}^{r} \left\|\left\{\langle f, \psi_i(\cdot - j)\rangle\right\}_{j\in\mathbb{Z}^d}\right\|_{\ell_\mu^p} \\ &\leqslant \|f\|_{L_\mu^p} \sum_{i=1}^{r} \|\psi_i\|_{W_\omega^1} \leqslant B\|f\|_{L_\mu^p},\end{aligned}$$

gde je $B = \sum\limits_{i=1}^{r} \|\psi_i\|_{W_\omega^1}$ pozitivna konstanta.

Ako je $f = \sum\limits_{i=1}^{r} \phi_i *' c^i \in V_\mu^p(\Phi)$, tada primenom nejednakosti (5.9) važi da je

$$\|f\|_{L_\mu^p} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{r} \phi_i *' c^i\right\|_{W_\mu^p} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \|\phi_i\|_{W_\omega^1} \left\|\{c_j^i\}_{j\in\mathbb{Z}^d}\right\|_{\ell_\mu^p} \leqslant C \sum_{i=1}^{r} \left\|\{c_j^i\}_{j\in\mathbb{Z}^d}\right\|_{\ell_\mu^p}.$$

Dokaz tvrđenja v) ⇒ *ii)*.

Korišćenjem nejednakosti (5.9) dobijamo da je

$$\|f\|_{L^p_\mu} \leqslant \|f\|_{W^p_\mu} \leqslant C\sum_{i=1}^r \left\| \left\{ \langle f, \psi(\cdot - j)\rangle \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^p_\mu}.$$

Desnu stranu nejednakosti dobijamo primenom nejednakosti (5.5), tj.

$$\sum_{i=1}^r \left\| \left\{ \langle f, \psi_i(\cdot - j)\rangle \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^p_\mu} \leqslant B\|f\|_{L^p_\mu}.$$

Dokaz tvrđenja i) $\Rightarrow$ iii).

Neka je $k_0 = \min\{\text{rang}\,[\widehat{\Phi}(\xi + 2k\pi)]_{k\in\mathbb{Z}^d} \mid \xi \in \mathbb{R}^d\}$. Označimo sa Ω_{k_0} skup svih $\xi \in \mathbb{R}^d$ za koje je rang $[\widehat{\Phi}(\xi + 2k\pi)]_{k\in\mathbb{Z}^d} > k_0$. Tada je $\Omega_{k_0} \neq \mathbb{R}^d$. Dovoljno je pokazati da je $\Omega_{k_0} = \varnothing$ (videti lemu 5.6).

Ako pretpostavimo da je $\Omega_{k_0} \neq \varnothing$, tada prostor $V^p_\mu(\Phi)$ neće biti zatvoren u L^p_μ za $p \in [1, \infty]$, pa je dovoljno konstruisati funkciju F u L^p_μ zatvorenju od $V^p_\mu(\Phi)$ takvu da se F ne može napisati u obliku $\sum\limits_{i=1}^r \phi_i *' c^i$ za neko $c^i \in \ell^p_\mu$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Pošto je Ω_{k_0} otvoren skup, njegova granica $\partial\Omega_{k_0}$ je neprazan skup. Za svako $\xi_0 \in \partial\Omega_{k_0}$ je rang $[\widehat{\Phi}(\xi_0 + 2k\pi)]_{k\in\mathbb{Z}^d} = k_0$ i za svako $\delta > 0$ je

$$\max\left\{ \text{rang}\,[\widehat{\Phi}(\xi + 2k\pi)]_{k\in\mathbb{Z}^d} \mid \xi \in B(\xi_0, \delta)\right\} > k_0.$$

Na osnovu leme 5.7 postoje regularna 2π-periodična matrica $P_{\xi_0}(\xi)$ reda r sa svim elementima iz klase $\mathcal{WC}^1_\omega$, $\delta_0 > 0$ i skup $K_0 \subset \mathbb{Z}^d$ kardinalnosti k_0. Neka je Ψ_{ξ_0} dato sa

$$\widehat{\Psi}_{\xi_0}(\xi) = P_{\xi_0}(\xi)\widehat{\Phi}(\xi) = \begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}(\xi) \\ \widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

takvo da je

$$\text{rang}\,[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}(\xi + 2k\pi)]_{k\in K_0} = k_0, \quad \xi \in B(\xi_0, 2\delta_0) \tag{5.26}$$

$$\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi_0 + 2k\pi) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^d, \tag{5.27}$$

$$\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi + 2k\pi) = 0, \quad k \in K_0,\ \xi \in B(\xi_0, 2\delta_0), \tag{5.28}$$

$$\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi) \neq 0, \quad \xi \in B(\xi_0, \delta) + 2\pi\mathbb{Z}^d, \tag{5.29}$$

za sve $0 < \delta < 2\delta_0$.

Pošto $\Phi \in W^1_\omega$ i $P_{\xi_0}(\xi) \in \mathcal{WC}^1_\omega$, imamo da $\Psi_{\xi_0} \in W^1_\omega$. Neka je H nenegativna glatka funkcija zadata sa (5.20) i $H_{n,\xi_0}(\xi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^d} H(2^n(\xi + 2k\pi - \xi_0))$, $n \geqslant 2$, za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$. Primetimo da je

$$H_{n_1,\xi_0}(\xi)H_{n_2,\xi_0}(\xi) = H_{n_2,\xi_0}(\xi), \quad 2 \leqslant n_1 \leqslant n_2,\ \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{5.30}$$

Neka je operator $T_{n,\xi_0} : (\ell^p_\mu)^{r-k_0} \to L^p_\mu$ dat sa $T_{n,\xi_0} : c \mapsto \sum_{i=1}^{r-k_0} (\psi_{2,\xi_0,i} *' H_{n,\xi_0}) *' c^i$, gde je $c = (c^1, c^2, \dots, c^{r-k_0})^T \in (\ell^p_\mu)^{r-k_0}$. Označimo sa H_{n,ξ_0} niz *Fourier*-ovih koeficijenata 2π-periodične funkcije $H_{n,\xi_0}(\xi)$ i neka je $\Psi_{2,\xi_0} = (\psi_{2,\xi_0,1}, \dots, \psi_{2,\xi_0,r-k_0})^T$. Korišćenjem nejednakosti (5.7) imamo da je

$$\|T_{n,\xi_0} c\|_{L^p_\mu} \leqslant \sum_{i=1}^{r-k_0} \big\|\psi_{2,\xi_0,i} *' H_{n,\xi_0}\big\|_{\mathcal{L}^1_\omega} \sum_{i=1}^{r-k_0} \|c^i\|_{\ell^p_\mu}.$$

Pošto je

$$\begin{aligned}
\big(\psi_{2,\xi_0,i} *' H_{n,\xi_0}\big)(\cdot) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} H^j_{n,\xi_0}\, \psi_{2,\xi_0,i}\big(\cdot - j\big) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \bigg(\int_{[0,1]^d} H_{n,\xi_0}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} j\cdot\xi}\, \mathrm{d}\xi \bigg)\, \psi_{2,\xi_0,i}\big(\cdot - j\big) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \bigg(\int_{[0,1]^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} H\big(2^n(\xi + 2k\pi - \xi_0)\big)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} j\cdot\xi}\, \mathrm{d}\xi \bigg)\, \psi_{2,\xi_0,i}\big(\cdot - j\big) \\
&\leqslant 2^{-nd} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} H(2^{-n}t)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} 2^{-n} j\cdot t}\, \mathrm{d}t \bigg)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\xi_0\cdot(\,\cdot - j)}\, \psi_{2,\xi_0,i}\big(\cdot - j\big) \\
&\leqslant 2^{-nd} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathcal{F}^{-1} H(2^{-n}t)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\xi_0\cdot(\,\cdot - j)}\, \psi_{2,\xi_0,i}\big(\cdot - j\big),
\end{aligned}$$

iz jednakosti (5.27) i *Poisson*-ove sumacione formule imamo da je

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\xi_0\cdot(\cdot - j)}\, \psi_{2,\xi_0,i}\big(\cdot - j\big) = 0.$$

Ako je $h = \mathcal{F}^{-1}H$ u lemi 5.8, dobijamo da je $\lim_{n\to\infty} \big\|(\psi_{2,\xi_0,i} *' H_{n,\xi_0})\big\|_{\mathcal{L}^p_\omega} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant r - k_0$. Konačno je

$$\lim_{n\to\infty} \|T_{n,\xi_0}\| = 0. \tag{5.31}$$

Neka je $\widetilde{H}(x) = H(2x) - H(8x)$ i $\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{H}\big(2^n(\xi + 2k\pi - \xi_0)\big)$, $n \geqslant 2$. Imamo da je

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{H}\big(2^n(\xi + 2k\pi - \xi_0)\big) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Big(H\big(2 \cdot 2^n(\xi + 2k\pi - \xi_0)\big) - H\big(8 \cdot 2^n(\xi + 2k\pi - \xi_0)\big) \Big) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \Big(H\big(2^{n+1}(\xi + 2k\pi - \xi_0)\big) - H\big(2^{n+3}(\xi + 2k\pi - \xi_0)\big) \Big) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} H\big(2^{n+1}(\xi + 2k\pi - \xi_0)\big) - \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} H(2^{n+3}(\xi + 2k\pi - \xi_0)) \\
&= H_{n+1,\xi_0}(\xi) - H_{n+3,\xi_0}(\xi).
\end{aligned}$$

Korišćenjem jednakosti (5.30), dobijamo da je

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)H_{n,\xi_0}(\xi) &= \big(H_{n+1,\xi_0}(\xi) - H_{n+3,\xi_0}(\xi)\big)H_{n,\xi_0}(\xi)\\ &= H_{n+1,\xi_0}(\xi) - H_{n+3,\xi_0}(\xi) = \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi).\end{aligned}$$

Neka je operator $\widetilde{T}_{n,\xi_0} : (\ell_\mu^p)^{r-k_0} \to L_\mu^p$ zadat sa

$$\widetilde{T}_{n,\xi_0} : (c^1, c^2, \dots, c^{r-k_0})^T \to \sum_{i=1}^{r-k_0} (\psi_{2,\xi_0,i} *' \widetilde{H}_{n,\xi_0}) *' c^i, \tag{5.32}$$

gde je $\widetilde{H}_{n,\xi_0}$ niz *Fourier*-ovih koeficijenata za 2π-periodičnu funkciju $\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)$. Za 2π-periodične distribucije $H_{n,\xi_0}(\xi)$ i $\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)$ sa nizom *Fourier*-ovih koeficijenata H_{n,ξ_0} i $\widetilde{H}_{n,\xi_0}$, respektivno, proizvod $H_{n,\xi_0}(\xi)\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)$ je 2π-periodična distribucija sa nizom *Fourier*-ovih koeficijenata datim sa $H_{n,\xi_0} * \widetilde{H}_{n,\xi_0}$. Koristeći ovo, imamo da je

$$\begin{aligned}&\Big\|\psi_{2,\xi_0,i} *' \big(\widetilde{H}_{n,\xi_0} * H_{n,\xi_0}\big)\Big\|_{L_\mu^p} \leqslant \Big\|\psi_{2,\xi_0,i} *' \big(\widetilde{H}_{n,\xi_0} * H_{n,\xi_0}\big)\Big\|_{\mathcal{L}_\mu^p}\\
&= \Big\| \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \big(\widetilde{H}_{n,\xi_0} * H_{n,\xi_0}\big)(j)\, \psi_{2,\xi_0,i}(\,\cdot\, - j)\Big\|_{\mathcal{L}_\mu^p}\\
&= \Big\| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{H}_{n,\xi_0}(k) \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} H_{n,\xi_0}(j-k)\psi_{2,\xi_0,i}(\,\cdot\, - j)\Big\|_{\mathcal{L}_\mu^p}\\
&= \bigg(\int_{[0,1]^d} \bigg(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widetilde{H}_{n,\xi_0}(k) \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} H_{n,\xi_0}(j-k)\psi_{2,\xi_0,i}(x+\alpha-j)\Big|\mu(x+\alpha)\bigg)^p \mathrm{d}x\bigg)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant \|\widetilde{H}_{n,\xi_0}\|_{\ell_\mu^p} \big\|\psi_{2,\xi_0,i} *' H_{n,\xi_0}\big\|_{\mathcal{L}_\omega^p} \leqslant \|\widetilde{H}_{n,\xi_0}\|_{\ell_\mu^1} \big\|\psi_{2,\xi_0,i} *' H_{n,\xi_0}\big\|_{\mathcal{L}_\omega^p}.\end{aligned}$$

Na osnovu (5.31) i činjenice da postoji $C > 0$ takvo da je $\|\widetilde{H}_{n,\xi_0}\|_{\ell_\mu^1} \leqslant C$ za svako $n \in \mathbb{N}$, dobijamo da je $\|\widetilde{T}_{n,\xi_0}\| \leqslant \|\widetilde{H}_{n,\xi_0}\|_{\ell_\mu^1}\|T_{n,\xi_0}\|$ i i $\lim\limits_{n\to\infty} \|\widetilde{T}_{n,\xi_0}\| = 0$. Prema uslovima (5.29) i (5.31), postoji podniz $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ takav da je $n_{k+1} \geqslant n_k + 8$, $\|\widetilde{T}_{n_k,\xi_0}\| \neq 0$ i $\sum\limits_{l=0}^{5} \|T_{n_k+l,\xi_0}\| \leqslant 2^{-k}$. Neka je $c^{n_k} \in (\ell_\mu^p)^{r-k_0}$ izabrano tako da je

$$\|c^{n_k}\|_{\ell_\mu^p} = 1 \quad \text{i} \quad \|\widetilde{T}_{n_k,\xi_0} c^{n_k}\|_{L_\mu^p} \geqslant \frac{\|\widetilde{T}_{n_k,\xi_0}\|}{2}, \tag{5.33}$$

i neka je $c^{n_k}(\xi)$ *Fourier*-ov red sa nizom *Fourier*-ovih koeficijenata c^{n_k}. Za dovoljno veliko k_1, zadajmo F_s, $s \geqslant k_1$, sa

$$\begin{aligned}\widehat{F}_s(\xi) &= \sum_{k=k_1}^{s} k\big(H_{n_k,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+4,\xi_0}(\xi)\big)c^{n_k}(\xi)^T \widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi)\\ &= \sum_{k=k_1}^{s} k\big(H_{n_k,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+4,\xi_0}(\xi)\big) \left(0, c^{n_k}(\xi)^T\right) P_{\xi_0}(\xi)\widehat{\Phi}(\xi)\end{aligned}$$

i F sa $\widehat{F}(\xi) = \sum_{k=k_1}^{\infty} k\big(H_{n_k,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+4,\xi_0}(\xi)\big)c^{n_k}(\xi)^T\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi)$. Neka je $2^{-k_1} \leqslant \delta_0$. Dokažimo da F pripada L_μ^p zatvorenju prostora $V_\mu^p(\Phi)$ i da funkcija F ne može biti zapisana u obliku $\sum_{i=1}^{r} \phi_i *' c^i$ za neko $c^i \in \ell_\mu^p$, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Iz konstrukcije funkcija F_s i F, imamo da $F_s \in V_\mu^p(\Phi)$ za sve $s \geqslant k_1$ i da je

$$\begin{aligned}\|F_s - F\|_{L_\mu^p} &\leqslant \sum_{k=s+1}^{\infty} k\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\big(H_{n_k,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+4,\xi_0}(\xi)\big)c^{n_k}(\xi)^T\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi)\Big)\Big\|_{L_\mu^p}\\ &\leqslant \sum_{k=s+1}^{\infty} k\big(\|T_{n_k+4,\xi_0}\| + \|T_{n_k,\xi_0}\|\big) \to 0, \quad s \to \infty.\end{aligned}$$

Time je dokazano da F pripada L_μ^p zatvorenju od $V_\mu^p(\Phi)$.

Dokažimo sada da $F \notin V_\mu^p(\Phi)$. Ako pretpostavimo da $F \in V_\mu^p(\Phi)$, tada je $\widehat{F}(\xi) = A(\xi)^T\widehat{\Phi}(\xi)$ za neku 2π-periodičnu distribuciju $A(\xi) \in \mathcal{WC}_\mu^p$. Pošto $\widehat{F}_s(\xi)$ i $\widehat{F}(\xi)$ imaju nosače sadržane u $B(\xi_0, 2^{-k_1}) + 2\pi\mathbb{Z}^d$ za svako $s \leqslant k_1$, možemo pretpostaviti da je $\operatorname{supp} A(\xi) \subset B(\xi_0, \delta_0) + 2\pi\mathbb{Z}^d$ za dovoljno veliko k_1. Ako je $A(\xi)^T(P_{\xi_0}(\xi))^{-1} = (A_1(\xi)^T, A_2(\xi)^T)$, tada je

$$A_1(\xi)^T\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}(\xi) = \Big(-A_2(\xi)^T + \sum_{k=k_1}^{\infty} k\big(H_{n_k,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+4,\xi_0}(\xi)\big)c^{n_k}(\xi)^T\Big)\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi).$$

Pošto je $A_1(\xi)$ 2π-periodična distribucija u $\mathcal{WC}_\mu^1$ i $\operatorname{supp} A_1(\xi) \subset B(\xi_0, \delta_0) + 2\pi\mathbb{Z}^d$, iz (5.26), (5.28) i poslednje jednakosti sledi da je $A_1(\xi) \equiv 0$. Dobijamo da je

$$A_2(\xi)^T\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi) = \sum_{k=k_1}^{\infty} k(H_{n_k,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+4,\xi_0}(\xi))c^{n_k}(\xi)^T\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi). \tag{5.34}$$

Kako je $n_{k+1} \geqslant n_k + 8$ i važi (5.30), to je

$$\begin{aligned}&\widetilde{H}_{n_k,\xi_0}(\xi)(H_{n'_k,\xi_0}(\xi) - H_{n'_k+4,\xi_0}(\xi)) =\\ &= (H_{n_k+1,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+3,\xi_0}(\xi))H_{n'_k,\xi_0}(\xi) - (H_{n_k+1,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+3,\xi_0}(\xi))H_{n'_k+4,\xi_0}(\xi)\\ &= \begin{cases} H_{n_k+1,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+3,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+4,\xi_0}(\xi) + H_{n_k+4,\xi_0}(\xi) = \widetilde{H}_{n_k,\xi_0}(\xi), & k = k',\\ H_{n'_k,\xi_0}(\xi) - H_{n'_k,\xi_0}(\xi) - H_{n'_k+4,\xi_0}(\xi) + H_{n'_k+4,\xi_0}(\xi) = 0, & k < k',\\ H_{n_k+1,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+3,\xi_0}(\xi) - H_{n_k+1,\xi_0}(\xi) + H_{n_k+3,\xi_0}(\xi) = 0, & k > k'.\end{cases}\end{aligned}$$

Ovo zajedno sa uslovom (5.34) dâje

$$\widetilde{H}_{n_k,\xi_0}(\xi)A_2(\xi)^T\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi) = k\widetilde{H}_{n_k,\xi_0}(\xi)c^{n_k}(\xi)^T\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi). \tag{5.35}$$

Korišćenjem uslova (5.33) i činjenice da je $\|\widetilde{T}_{n_k,\xi_0}\| \neq 0$, dobijamo da je

$$\big\|\mathcal{F}^{-1}(k\widetilde{H}_{n_k,\xi_0}(\xi)c^{n_k}(\xi)^T\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi))\big\|_{L_\mu^p} \geqslant k\frac{\|\widetilde{T}_{n_k,\xi_0}\|}{2}$$

i

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\big(\widetilde{H}_{n_k,\xi_0}(\xi)A_2(\xi)^T\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi)\big)\right\|_{L^p_\mu} \leqslant \left\|\widetilde{T}_{n_k,\xi_0}\right\|\|A_2(\xi)\|_{\ell^p_{\mu,*}},$$

što je u kontradikciji sa uslovom (5.35).

Dokaz tvrđenja iii) $\Rightarrow$ v).

Neka je

$$B_\lambda(\xi) = H_\lambda(\xi)\overline{P_\lambda(\xi)^T}\begin{bmatrix} \big[\widehat{\Psi}_{1,\lambda},\widehat{\Psi}_{1,\lambda}\big](\xi)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}\end{bmatrix}P_\lambda(\xi),$$

gde su h_λ, $P_\lambda(\xi)$ and $\widehat{\Psi}_{1,\lambda}$ zadati kao u lemi 5.7. Funkcija $H_\lambda(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, je 2π-periodična glatka funkcija takva da je $H_\lambda(\xi) = 1$ na skupu $\operatorname{supp} h_\lambda$ i H_λ ima nosač sadržan u $B(\eta_\lambda, \delta_\lambda) + 2\pi\mathbb{Z}^d$. Tada, korišćenjem leme 5.7, imamo da $B_\lambda(\xi) \in \mathcal{WC}^1_\omega$. Zadajmo Ψ tako da je $\widehat{\Psi}(\xi) = \sum\limits_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda(\xi)B_\lambda(\xi)\widehat{\Phi}(\xi)$. Pošto $\Phi \in (W^1_\omega)^r$, onda $\Psi \in (W^1_\omega)^r$. Za svako $f \in V^p_\mu(\Phi)$ neka je

$$g(x) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\big\langle f, \psi_i(x-j)\big\rangle\phi_i(x-j), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Dokažimo da je $f = g$.

Za svako $f \in V^p_\mu(\Phi)$ postoji 2π-periodična distribucija $A(\xi) \in \mathcal{WC}^p_\mu$ takva da $\widehat{f}(\xi) = A(\xi)^T\widehat{\Phi}(\xi)$. Na osnovu leme 5.7 imamo da je

$$\widehat{g}(\xi) = A(\xi)^T\big[\widehat{\Phi},\widehat{\Psi}\big](\xi)\widehat{\Phi}(\xi) = A(\xi)^T\Big[\widehat{\Phi}, \sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda B_\lambda\widehat{\Phi}\Big](\xi)\widehat{\Phi}(\xi),$$

pa je

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda(\xi)\,A(\xi)^T\,\big[\widehat{\Phi},\widehat{\Phi}\big](\xi)\,\overline{B_\lambda(\xi)^T}\,\widehat{\Phi}(\xi) \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda(\xi)\,A(\xi)^T\,P_\lambda(\xi)^{-1}\begin{bmatrix}\widehat{\Psi}_{1,\lambda}(\xi) \\ 0\end{bmatrix}\big[\widehat{\Psi}_{1,\lambda}(\xi) \quad 0\big] \\
&\qquad \overline{P_\lambda(\xi)^T}^{\,-1}\,\overline{P_\lambda(\xi)^T}\begin{bmatrix} \big[\widehat{\Psi}_{1,\lambda},\widehat{\Psi}_{1,\lambda}\big](\xi)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{I}\end{bmatrix}^T P_\lambda(\xi)\widehat{\Phi}(\xi) \\
&= \sum_{\lambda\in\Lambda} h_\lambda(\xi)\,A(\xi)^T\,P_\lambda(\xi)^{-1}\begin{bmatrix}\widehat{\Psi}_{1,\lambda}(\xi) \\ 0\end{bmatrix} = A(\xi)^T\,\widehat{\Phi}(\xi) = \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

Dokaz tvrđenja ii) $\Rightarrow$ iii).

Neka je $k_0 = \min\big\{\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi+2k\pi)\big]_{k\in\mathbb{Z}^d} \mid \xi \in \mathbb{R}^d\big\}$ i Ω_{k_0} skup svih $\xi \in \mathbb{R}^d$ za koje je $\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi+2k\pi)\big]_{k\in\mathbb{Z}^d} > k_0$. Tada je $\Omega_{k_0} \neq \mathbb{R}^d$. Dovoljno je dokazati da je $\Omega_{k_0} = \varnothing$.

Pretpostavimo da je $\Omega_{k_0} \neq \varnothing$. Neka je n_0 takvo da je $2^{-n_0} < \delta_0$ i α_n dato sa $\alpha_n(\xi) = \big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi_0) + H_{n,\xi_0}(\xi)\Big(\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi) - \big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi_0)\Big)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, gde su δ_0, $\xi_0 \in \partial\Omega_{k_0}$, Ψ_{1,ξ_0}, $P_{\xi_0}(\xi)$, $H_{n,\xi_0}(\xi)$ i $\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)$ kao u dokazu $i) \Rightarrow iii)$. Kako je $\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)$ neprekidna funkcija po $\xi \in \mathbb{R}^d$, koristeći uslov (5.26), dobijamo egzistenciju i regularnost matrice α_n za svako $n \geqslant n_0$. Pošto je

$$\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi) H_{n,\xi_0}(\xi) = \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi),$$

imamo da je

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\alpha_n(\xi)\\
&= \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi_0) + \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)H_{n,\xi_0}(\xi)\big(\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi) - \big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi_0)\big)\\
&= \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi_0) + \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi) - \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi_0)\\
&= \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi).
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\alpha_n(\xi) = \big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)$, za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$. Za svaku 2π-periodičnu distribuciju $F \in \mathcal{WC}_\mu^p$, za $n \geqslant n_0 + 1$ neka je g_n dato sa

$$\widehat{g}_n(\xi) = \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\Big(-F(\xi)^T\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)(\alpha_n(\xi))^{-1}, F(\xi)^T\Big)\begin{bmatrix} \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}(\xi) \\ \widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi) \end{bmatrix}. \tag{5.36}$$

Primetimo da $g_n \in V_\mu^p(\Phi)$ i da je

$$\begin{aligned}
&\big[\widehat{g}_n, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)\\
&= \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\Big(-F(\xi)^T\big[\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)(\alpha_n(\xi))^{-1}, F(\xi)^T\Big)\begin{bmatrix} \big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi) \\ \big[\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi) \end{bmatrix}\\
&= \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\big(-F(\xi)^T\big)\big[\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)\big(\alpha_n(\xi)\big)^{-1}\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)\\
&\quad + \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)F(\xi)^T\big[\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)\\
&= -\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)F(\xi)^T\big[\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi) + \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)F(\xi)^T\big[\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi) = 0.
\end{aligned}$$

Koristeći nejednakost (5.32) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\big\|\big[\widehat{g}_n, \widehat{\Phi}\big](\xi)\big\|_{\ell^p_{\mu,*}} = \Big\|\Big[\widehat{g}_n, P_{\xi_0}^{-1}\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0} \quad \widehat{\Psi}_{2,\xi_0}\big]^T\Big](\xi)\Big\|_{\ell^p_{\mu,*}}\\
&\leqslant C\Big\|\Big[\widehat{g}_n, \big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0} \quad \widehat{\Psi}_{2,\xi_0}\big]^T\Big](\xi)\Big\|_{\ell^p_{\mu,*}} \leqslant C\Big\|\big[\widehat{g}_n, H_{n,\xi_0}\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}\big](\xi)\Big\|_{\ell^p_{\mu,*}}\\
&\leqslant C\|g_n\|_{L^p_\mu}\,\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(H_{n,\xi_0}(\xi)\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi)\big)\big\|_{\mathcal{L}^1_\omega}^{1/p}\,\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(H_{n,\xi_0}(\xi)\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi)\big)\big\|_{L^\infty_\omega}^{1-1/p}.
\end{aligned}$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to\infty}\big\|(\psi_{2,\xi_0,i} *' H_{n,\xi_0})\big\|_{\mathcal{L}^p_\omega} = 0$, $1 \leqslant i \leqslant r - k_0$, to je

$$\lim_{n\to\infty}\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(H_{n,\xi_0}(\xi)\widehat{\Psi}_{2,\xi 0}(\xi)\big)\big\|_{\mathcal{L}^1_\omega} = \lim_{n\to\infty}\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(H_{n,\xi_0}(\xi)\widehat{\Psi}_{2,\xi 0}(\xi)\big)\big\|_{L^\infty_\omega} = 0.$$

Zaključujemo da postoji niz ρ_n, $n \geqslant n_0$, takav da je $\|[\widehat{g}_n, \widehat{\Phi}](\xi)\|_{\ell^p_{\mu,*}} \leqslant \rho_n \|g_n\|_{L^p_\mu}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$. Kako je

$$\big\|\big[\widehat{g}_n, \widehat{\Phi}\big](\xi)\big\|_{\ell^p_{\mu,*}} = \left\| \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} g_n(\xi)\overline{\Phi(\xi - j)}\mathrm{d}x \right\}_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{\ell^p_\mu} \geqslant C\|g_n\|_{L^p_\mu},$$

dobijamo da je $g_n = 0$ za svako $n \geqslant n_0 + 1$. Uključujući ovo u jednakost (5.36), dobijamo da za svaku 2π-periodičnu distribuciju $F \in \mathcal{WC}^p_\mu$ i svako $n \geqslant n_0 + 1$ važi da je

$$\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)\big(\alpha_n(\xi)\big)^{-1}\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}(\xi) = \widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi). \tag{5.37}$$

Korišćenjem uslova (5.26) i (5.27), imamo da je

$$\widetilde{H}_{n,\xi_0}(\xi)\big[\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}, \widehat{\Psi}_{1,\xi_0}\big](\xi)\big(\alpha_n(\xi)\big)^{-1}\widehat{\Psi}_{1,\xi_0}(\xi) = 0, \quad \xi \in B(\xi_0, 2^{-n_0-1}) + 2\pi\mathbb{Z}^d.$$

Iz jednakosti (5.37) koja važi za svako $n \geqslant n_0 + 1$ dobijamo da je $\widehat{\Psi}_{2,\xi_0}(\xi) = 0$ za svako $\xi \in B(\xi_0, 2^{-n_0-3}) + 2\pi\mathbb{Z}^d$. Time smo dobili kontradikciju sa uslovom (5.29).

Ovim smo završili dokaz tvrđenja *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*, a samim tim i dokaz teoreme. □

Napomena 5.3. *U radu* [89] *iskorišćena je ℓ^p-stabilnost operatora sinteze* (*videti* [101, Corollary 3.3]) *i u skladu sa tim dat drugačiji dokaz teoreme* 5.5.

Sledeće tvrđenje je direktna posledica teoreme 5.5.

Posledica 5.6. *Za $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^T \in (W^1_\omega)^r$ važe sledeća tvrđenja.*

a) Prostor $V^p_\mu(\Phi)$ je zatvoren u W^p_μ za svako $p \in [1, \infty]$.

b) Ako je familija $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d, 1 \leqslant i \leqslant r\}$ p_0-okvir za $V^{p_0}_\mu(\Phi)$ za neko $p_0 \in [1, \infty]$, tada je $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d, 1 \leqslant i \leqslant r\}$ p-okvir za $V^p_\mu(\Phi)$ za svako $p \in [1, \infty]$.

c) Ako je $V^{p_0}_\mu(\Phi)$ zatvoren u $L^{p_0}_\mu$ za neko $p_0 \in [1, \infty]$, tada je $V^p_\mu(\Phi)$ zatvoren u L^p_μ za svako $p \in [1, \infty]$.

d) Ako važi (5.17) *za neko $p_0 \in [1, \infty]$, tada važi za svako $p \in [1, \infty]$.*

5.6 Veza sa periodičnim distribucijama i ultradistribucijama

U ovom poglavlju pokazano je u kakvoj su vezi dualni prostor *Fréchet*-ovog prostora $\bigcap\limits_{s\in\mathbb{N}_0} V^p_{(1+|x|^2)^{s/2}}(\Phi)$ i prostor periodičnih distribucija. Posmatrane su zatim funkcije subeksponencijalnog rasta i pri tom dobijena veza sa periodičnim ultradistribucijama o kojima je bilo reči u poglavlju 3.5.

Pošto su $\ell^p_{\omega_s}$ i V^p_s izomorfni *Banach*-ovi prostori za svako $s \geqslant 0$ i $p \in [1,\infty]$, imamo da je $V^p_{s_1}(\Phi) \subset V^p_{s_2}(\Phi)$ za $0 \leqslant s_2 < s_1$, $p \in [1,\infty]$. Neka je $X_{F,p}$, $p \in [1,\infty]$, *Fréchet*-ov prostor dat sa $X_{F,p} = \bigcap\limits_{s\in\mathbb{N}_0} V^p_s(\Phi)$. Jasno je da je $X_{F,p}$ gust u $V^p_s(\Phi)$ za svako $s \in \mathbb{N}_0$. Odgovarajući prostor nizova je $Q_{F,p} = \bigcap\limits_{s\in\mathbb{N}_0} \ell^p_{\omega_s}$, $p \in [1,\infty]$, tj. prostor brzo opadajućih nizova s. Na osnovu posledice 5.6 zaključujemo da definicija prostora $X_{F,p}$ ne zavisi od $p \in [1,\infty]$. Dakle, koristićemo oznake X_F i Q_F umesto $X_{F,p}$ i $Q_{F,p}$, respektivno. Familija $\{\Phi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}$ predstavlja F-okvir za X_F, jer je *Banach*-ov okvir za svaki prostor $V^p_s(\Phi)$, $s \in \mathbb{N}_0$.

Odgovarajući prostor funkcija za prostor s je prostor brzo opadajućih funkcija

$$\mathcal{S} = \Big\{ f \;\Big|\; \|f\|_m = \sup_{n\leqslant m,\, x\in\mathbb{R}^d} \big\{(1+|x|^2)^{m/2}|f^{(n)}(x)|\big\} < \infty \Big\}.$$

Njegov dual je $\mathcal{S}'$, tj. prostor temperiranih distribucija. Dakle, dualni prostor X'_F *Fréchet*-ovog prostora X_F je izomorfan sa komplementiranim potprostorom prostora temperiranih distribucija.

Označimo sa $\mathcal{P}(-\pi,\pi)^d$ prostor glatkih 2π-periodičnih funkcija na $\mathbb{R}^d$ sa familijom normi

$$|\theta|_k = \sup_{t\in(-\pi,\pi)^d} \{|\theta^{(k)}(t)|\}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ovaj prostor je *Fréchet*-ov prostor i njegov dual je prostor 2π-periodičnih temperiranih distribucija. Označimo sa $\mathcal{P}'(-\pi,\pi)^d$ prostor periodičnih temperiranih distribucija.

Teorema 5.7. *Neka* $\Phi = (\phi_1,\dots,\phi_r)^T \in \bigcap\limits_{s\geqslant 0}(W^1_s)^r$ *i* $\Psi = (\psi_1,...,\psi_r)^T$ *njegov dualni okvir* (*u skladu sa uslovom v*) *iz teoreme* 5.5). *Tada je*

$$X_F = \mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^r \hat{\phi}_i \cdot \mathcal{P}(-\pi,\pi)^d\Big), \qquad X'_F = \mathcal{F}^{-1}\Big(\sum_{i=1}^r \hat{\psi}_i \cdot \mathcal{P}'(-\pi,\pi)^d\Big),$$

u topološkom smislu. Neka je

$$f = \sum_{k=1}^r \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} c^k_p \phi_k(\cdot - p) \in X_F \;\; i \;\; F = \sum_{i=1}^r \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} d^i_j \psi_i(\cdot - j) \in X'_F.$$

Dualno uparivanje je dato sa

$$\langle F, f\rangle = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r \Big\langle \widehat{\psi}_i(\xi)\widehat{\phi}_k(-\xi) \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} d^i_j \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} j\cdot\xi}, \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} c^k_p \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p\cdot\xi} \Big\rangle, \tag{5.38}$$

gde je $f = \sum\limits_{k=1}^r \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}^d} c^k_p \phi_k(\cdot - p) \in X_F$ *i* $F = \sum\limits_{i=1}^r \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}^d} d^i_j \psi_i(\cdot - j) \in X'_F$.

Specijalno, imamo da je $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_i \psi_k \mathrm{d}t = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}_i(\xi)\widehat{\psi_k}(-\xi)\mathrm{d}\xi = \delta_{ik}$, $1 \leqslant i,k \leqslant r$.

Dokaz. Pošto $\sum\limits_{k=1}^{r}\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}^d} c_p^k e^{2\pi i p\cdot\xi} \in \mathcal{P}(-\pi,\pi)^d$, dobijamo strukturu $f \in X_F$ kao u teoremi. Isto obrazloženje važi za X_F'.

Na osnovu činjenice da je $\langle F(x), f(x)\rangle = \langle \widehat{F}(\xi), \widehat{f}(-\xi)\rangle$, važi jednakost (5.38).

Neka je $d_0^i = \delta_{ik}$, $i = 1,\ldots,r$, i $d_j^i = 0$, $j \neq 0$, i neka je $c_0^k = \delta_{ik}$ za $k = 1,\ldots,r$ i $c_p^k = 0$, $p \neq 0$. Dobijamo da je

$$\langle F(\xi), f(\xi)\rangle = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\langle \widehat{\psi}_i(\xi), \widehat{\phi}_k(-\xi) d_0^i, c_0^k\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}_{k_0}(\xi)\widehat{\phi}_{k_0}(-\xi)\mathrm{d}\xi,\ 1 \leqslant k_0 \leqslant r.$$

Sa druge strane, $f(x) = \langle f(x), \psi_{k_0}(x)\rangle \phi_{k_0}(x)$ i $f = \phi_{k_0}$ za neko $1 \leqslant k_0 \leqslant r$, pa je $\langle f, \psi_{k_0}\rangle = 1$. Pošto je $F = \psi_{k_0}$, važi da je $\langle F, f\rangle = \langle f, \psi_{k_0}\rangle = 1$. Konačno, dobijamo da je

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}_i(\xi)\widehat{\psi_k}(-\xi)\mathrm{d}\xi = \delta_{ik}, \quad 1 \leqslant i,k \leqslant r.$$

□

Možemo posmatrati i subeksponencijalne težine $\mu_k = e^{k|x|^\beta}$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in (0,1)$, i odgovarajuće prostore $V^p_{\mu_k}(\Phi)$ i njihov presek $X^{(\beta)}_{F,p} = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} V^p_{\mu_k}(\Phi)$. Kako je prostor $X^{(\beta)}_{F,p}$ *Fréchet*-ov i ne zavisi od $p \in [1,\infty]$, koristimo oznaku $X^{(\beta)}_F$. Odgovarajući prostor nizova je $s^{(\beta)} = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \ell^p_{\mu_k}$, tj. prostor subeksponencijalno brzo opadajućih nizova koji određuju prostor periodičnih temperiranih ultradistribucija preslikavanjem

$$s^{(\beta)} \ni (a_j)_{j\in\mathbb{Z}^d} \leftrightarrow \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} a_j e^{ij\cdot\xi} \in \mathcal{P}^{(\beta)}(-\pi,\pi)^d.$$

5.7 Konstrukcija p-okvira

U ovom odeljku date su dve konstrukcije prostora $V^p_\mu(\Phi^k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, sa specijalno izabranim funkcijama ϕ_1, ..., ϕ_k koje pod odgovarajućim uslovima generišu *Banach*-ov okvir za translaciono invarijantni prostor $V^p_\mu(\Phi^k)$.

U prvoj konstrukciji posmatrane su funkcije ϕ_i, $i \in \mathbb{Z}$, čiji je niz *Fourier*-ovih transformacija sa kompaktnim nosačima. Osobine konstruisanog okvira garantuju stabilnost i neprekidnost rekonstrukcionog algoritma u prostoru $V^p_\mu(\Phi^k)$ (videti [115]). Takođe, za odgovarajući izbor funkcija, familija $\{\phi_i(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}, i = 1,\ldots,r\}$ predstavlja *Riesz*-ovu bazu prostora $V^p_\mu(\Phi)$. Ovi rezultati su, zatim, uopšteni na višedimenzioni slučaj. Konstruisan je niz okvira za translaciono invarijantne potprostore prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Drugom konstrukcijom dobijena je *Riesz*-ova baza prostora $V^p_\mu(\Psi)$, za $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)^T$, gde su funkcije ψ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, konkretne funkcije sa kompaktnim nosačima.

5.7.1 Okvir $\{\phi_i(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, r\}$ za koji su funkcije $\widehat{\phi_i}$, $i = 1, \ldots, r$, sa kompaktnim nosačima; jednodimenzioni slučaj

Neka je θ glatka nenegativna funkcija takva da je $\operatorname{supp}\theta = [a, b]$, $b > a$, $a, b \in \mathbb{R}$. Neka je $\phi_k(x) = \mathcal{F}^{-1}(\theta(\cdot + k\pi))(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Na osnovu *Paley-Wiener*-ove teoreme, $\phi_k \in W^1_\mu(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{Z}$. Funkcije skupa $\{\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \ldots, \phi_{i_n}\}$ predstavljaju n uzastopnih funkcija ako je $i_r = i_{r-1} + 1$ za svako $r = 2, \ldots, k$.

U zavisnosti od nosača funkcije θ, razlikuje se rang matrice $[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}}$.

Slučaj 1. Ako je $0 < b - a \leqslant \pi$, važi sledeća lema.

Lema 5.11. *Neka je* $\Phi = (\phi_i, \phi_{i+1}, \ldots, \phi_{i+r})^T$, $i \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$. *Tada rang matrice* $[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}}$ *ne zavisi od* $\xi \in \mathbb{R}$ *i važi*

$$\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}} = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

gde $\lfloor \cdot \rfloor$ *označava* $n \in \mathbb{N}$ *za koje je* $n \leqslant \frac{r}{2} < n + 1$.

Dokaz. Neka je $\alpha = \theta(\xi_0)$, $\xi_0 \in (a, b)$.

Za svako $\xi \in \mathbb{R}$, matrica $[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi) = [\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}} \cdot [\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)]^T_{j\in\mathbb{Z}}$ je jednaka simetričnoj matrici

$$A_0(\xi) = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{r\times r}.$$

Zaključujemo da je $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}](\xi) = \operatorname{rang} A_0(\xi) = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$, za svako $\xi \in \mathbb{R}$. □

Slučaj 2. Ako je $b - a > \pi$, tada svaku funkciju $\theta(\cdot + k\pi)$ možemo podeliti sa sumom $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta(\cdot + k\pi)$ da bismo dobili particiju jedinice. Pošto je $b - a > \pi$, postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $k\pi < b - a \leqslant (k+1)\pi$. Svi mogući slučajevi su opisani sledećim lemama.

Podslučaj 2.1° Ako je $k = 1$, tj. $\pi < b - a \leqslant 2\pi$, tada ćemo razlikovati slučajeve u zavisnosti od broja izabranih uzastopnih funkcija.

2.1.1° Slučaj dve uzastopne funkcije.

Ako je $\Phi = (\phi_i, \phi_{i+1})^T$, $i \in \mathbb{Z}$, tada rang $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$, $\xi \in \mathbb{R}$, nije konstantna funkcija na $\mathbb{R}$. U ovom slučaju, za matricu $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ dobijamo $2 \times \infty$ matricu

$$A(\xi_0) = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \alpha_0^{\xi_0} & 0 & 0 \cdots \\ \cdots & 0 & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & 0 \cdots \end{bmatrix},$$

koja zavisi od $\xi_0 \in (-\pi, \pi)$, gde je $\alpha_{-1}^{\xi_0} = \theta(\xi_0 - \pi)$, $\alpha_0^{\xi_0} = \theta(\xi_0)$ i $\alpha_1^{\xi_0} = \theta(\xi_0 + \pi)$.

Za $\xi_0^1 = \pi/2$ imamo da je $\alpha_0^{\xi_0^1} \neq 0$, $\alpha_{-1}^{\xi_0^1} \neq 0$, a za $\xi_0^2 = -\pi/2$ je $\alpha_0^{\xi_0^2} \neq 0$, $\alpha_1^{\xi_0^2} \neq 0$. Pošto je $\operatorname{rang} A(\xi_0^1) = 1$ i $\operatorname{rang} A(\xi_0^2) = 2$, zaključujemo da za dve uzastopne funkcije ϕ_i, ϕ_{i+1}, $i \in \mathbb{Z}$, rang matrice $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ nije konstantan na $\mathbb{R}$.

2.1.2° Slučaj tri uzastopne funkcije.

Ako je $\Phi = (\phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2})^T$, $i \in \mathbb{Z}$, tada je rang $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ konstantna funkcija na $\mathbb{R}$. Imamo da je rang $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}} = 2$, za svako $\xi \in \mathbb{R}$. U stvari, matrica $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$, $\xi \in \mathbb{R}$, je $3 \times \infty$ matrica koja zavisi od $\xi_0 \in (-\pi, \pi)$ data sa

$$B(\xi_0) = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \alpha_0^{\xi_0} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \alpha_0^{\xi_0} & 0 & \cdots \end{bmatrix},$$

gde je $\alpha_{-1}^{\xi_0} = \theta(\xi_0 - \pi)$, $\alpha_0^{\xi_0} = \theta(\xi_0)$ i $\alpha_1^{\xi_0} = \theta(\xi_0 + \pi)$. Pošto je $\theta(\xi_0) \neq 0$ za svako $\xi_0 \in (-\pi, \pi)$, matrica $B(\xi_0)$ ima dve kolone nenula elemenata za svako $\xi_0 \in (-\pi, \pi)$. Dakle, $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}}$ je konstantna funkcija na $\mathbb{R}$ i važi da je $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}} = 2$, $\xi \in \mathbb{R}$.

2.1.3° Slučaj $r > 3$ uzastopne funkcije.

Posmatrajući uzastopne funkcije $\phi_i, \phi_{i+1}, \ldots, \phi_{i+r}$, $r > 2$, dobijamo različite situacije koje opisuje sledeća lema.

Lema 5.12. *a) Ako je $\Phi = (\phi_i, \phi_{i+1}, \ldots, \phi_{i+r})^T$, $i \in \mathbb{Z}$, $r \in 2\mathbb{N} + 1$, tada rang matrice $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ nije konstantna funkcija na $\mathbb{R}$.*

b) Ako je $\Phi = (\phi_i, \phi_{i+1}, \ldots, \phi_{i+r})^T$, $i \in \mathbb{Z}$, $r \in 2\mathbb{N}$, tada je rang $\big[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ *konstantna funkcija na $\mathbb{R}$ i važi* rang $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}} = n + 1$, *za svako $\xi \in \mathbb{R}$ i $r = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Pošto su nosači proizvoda $\widehat{\phi}_{i_1}(\xi + 2j_1\pi)\widehat{\phi}_{i_2}(\xi + 2j_2\pi)$, $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$, prazni skupovi ako su argumenti oblika $\xi - \pi$, ξ, $\xi + \pi$, po modulu $2j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$, imamo da jedino blokovi sa elementima

$$\begin{bmatrix} \theta(\xi) & \theta(\xi+2\pi) \\ \theta(\xi-\pi) & \theta(\xi+\pi) \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} \theta(\xi-\pi) & \theta(\xi+\pi) \\ \theta(\xi-2\pi) & \theta(\xi) \end{bmatrix}$$

mogu da određuju rang matrice $\big[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$. Za neki drugi izbor 2×2 matrica, determinanta je jednaka nuli.

a) Neka je $\Phi = (\phi_i, \phi_{i+1}, \dots, \phi_{i+(2n-1)})^T$, $n \in \mathbb{N}$. Matrica $\big[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ je $r \times \infty$ matrica

$$A_r(\xi_0) = \begin{bmatrix} \cdots & \alpha_0^{\xi_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \alpha_0^{\xi_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \alpha_0^{\xi_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0^{\xi_0} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & \cdots \end{bmatrix},$$

gde je $\alpha_{-1}^{\xi_0} = \theta(\xi_0 - \pi)$, $\alpha_0^{\xi_0} = \theta(\xi_0)$ i $\alpha_1^{\xi_0} = \theta(\xi_0+\pi)$ za neko $\xi_0 \in (-\pi, \pi)$.

Za $\xi_0^1 = \pi/2$ imamo da je $\alpha_0^{\xi_0^1} \neq 0$, $\alpha_{-1}^{\xi_0^1} \neq 0$, a za $\xi_0^2 = -\pi/2$ je $\alpha_0^{\xi_0^2} \neq 0$, $\alpha_1^{\xi_0^2} \neq 0$. Pošto je $\operatorname{rang} A_r(\xi_0^1) = n$ i $\operatorname{rang} A_r(\xi_0^2) = n+1$, zaključujemo da za paran broj uzastopnih funkcija $\phi_i, \phi_{i+1}, \dots, \phi_{i+(2n-1)}$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, rang matrice $\big[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ nije konstantna funkcija na $\mathbb{R}$.

b) Neka je $\Phi = (\phi_i, \phi_{i+1}, \dots, \phi_{i+2n})^T$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Matrica

$$\big[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}} = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \alpha_0^{\xi_0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \alpha_0^{\xi_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0^{\xi_0} & \cdots \end{bmatrix},$$

ima konstantan rang na $\mathbb{R}$. Zaista, pošto je $\alpha_0^{\xi_0} \neq 0$ za sve $\xi_0 \in (-\pi, \pi)$, matrica $[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)_{j\in\mathbb{Z}}]$ ima tačno $n+1$ kolonu sa nenula elementima za svako $\xi \in \mathbb{R}$ i $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}} = n+1$, za svako $\xi \in \mathbb{R}$. □

Kao posledicu teoreme 5.5 i leme 5.13 dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 5.8. *Ako je $\Phi = (\phi_i, \phi_{i+1}, \dots, \phi_{i+2n})^T$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, tada je prostor $V_\mu^p(\Phi)$ zatvoren u L_μ^p za svako $p \in [1, \infty]$ i $\{\phi_{i+s}(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant s \leqslant 2n\}$ je p-okvir za $V_\mu^p(\Phi)$ za svako $p \in [1, \infty]$.*

Na ovaj način dobijamo niz zatvorenih prostora $V_\mu^p(\phi_0,\phi_1,\phi_2)$, $V_\mu^p(\phi_1,\phi_2,\phi_3)$, $V_\mu^p(\phi_0,\phi_2,\ldots,\phi_6)$, itd. Takođe, zaključujemo da prostori generisani sa parnim brojem uzastopnih funkcija, na primer $V_\mu^p(\phi_0,\phi_1)$, $V_\mu^p(\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_5)$, nisu zatvoreni potprostori od L_μ^p.

Teorema 5.9. *Neka je* $\Phi = (\phi_{k_1},\phi_{k_2},\ldots,\phi_{k_r})^T$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$, $r \in \mathbb{N}$, $k_1,k_2,\ldots,k_r \in \mathbb{Z}$ *i* $V^p_{\mu,k_1,k_2,\ldots,k_r} = V_\mu^p(\Phi)$. *Pretpostavimo da važi jedan od sledećih slučajeva.*

a) Neka je $k_{i+1}-k_i > 1$ *za svako* $i = 1,\ldots,r-1$.

b) Ako je $k_{i_0+1}-k_{i_0} = 1$ *za neko* $i_0 \in \{1,2,\ldots,r\}$, *tada postoji* $n \in \mathbb{N}$ *tako da je* $2 \leqslant 2n \leqslant r$ *i* $k_{i_0}+2$, $k_{i_0}+3,\ldots,$ $k_{i_0}+2n$ *su elementi skupa* $\{k_1,\ldots,k_r\}$.

Važe sledeća tvrđenja.

i) Rang matrice $[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}}$ *ne zavisi od* $\xi \in \mathbb{R}$.

ii) Prostor $V_\mu^p(\Phi)$ *je zatvoren u* L_μ^p *za svako* $p \in [1,\infty]$.

iii) Familija $\{\phi_{k_i}(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant i \leqslant r\}$ *je p-okvir za* $V_\mu^p(\Phi)$ *za svako* $p \in [1,\infty]$.

Specijalno, ako važi tvrđenje a), tada je $\{\phi_{k_i}(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}, 1 \leqslant i \leqslant r\}$ *p-Riesz-ova baza prostora* $V_\mu^p(\Phi)$ *za svako* $p \in [1,\infty]$.

Podslučaj 2.2°. Ako je $2\pi < b-a \leqslant 3\pi$, tada važi sledeće tvrđenje.

Lema 5.13. *Neka je* $\Phi = (\phi_i,\phi_{i+1},\ldots,\phi_{i+n})^T$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada rang matrice* $\big[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ *nije konstantna funkcija na* $\mathbb{R}$.

Dokaz. Nosači proizvoda $\widehat{\phi}_{i_1}(\xi+2j_1\pi)\widehat{\phi}_{i_2}(\xi+2j_2\pi)$ biće neprazni jedino ako su argumenti oblika $\xi-2\pi$, $\xi-\pi$, ξ, $\xi+\pi$, $\xi+2\pi$ po modulu $2j\pi$. Vidimo da jedino blokovi sa elementima

$$\begin{bmatrix} \theta(\xi) & \theta(\xi+2\pi) \\ \theta(\xi-\pi) & \theta(\xi+\pi) \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} \theta(\xi-2\pi) & \theta(\xi) \\ \theta(\xi-3\pi) & \theta(\xi-\pi) \end{bmatrix},$$

mogu da određuju rang $\big[\Phi(\xi+2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$. Za bilo koji drugi izbor 2×2 matrica, dobijamo da je determinanta jednaka nuli.

Za paran broj uzastopnih funkcija, matrica $\big[\widehat{\Phi}(\xi+2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ je oblika

$$P(\xi_0) = \begin{bmatrix}
\cdots & 0 & \alpha_{-2}^{\xi_0} & \alpha_0^{\xi_0} & \alpha_2^{\xi_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & \alpha_{-2}^{\xi_0} & \alpha_0^{\xi_0} & \alpha_2^{\xi_0} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{-2}^{\xi_0} & \alpha_0^{\xi_0} & \alpha_2^{\xi_0} & 0 & \cdots \\
\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{-1}^{\xi_0} & \alpha_1^{\xi_0} & 0 & \cdots
\end{bmatrix},$$

gde je $\alpha_{-2}^{\xi_0} = \theta(\xi_0 - 2\pi)$, $\alpha_{-1}^{\xi_0} = \theta(\xi_0 - \pi)$, $\alpha_0^{\xi_0} = \theta(\xi_0)$, $\alpha_1^{\xi_0} = \theta(\xi_0 + \pi)$ i $\alpha_2^{\xi_0} = \theta(\xi_0 + 2\pi)$, za neko $\xi_0 \in (a,b)$. Ako je $\xi_0^1 = \frac{b+a}{2} \in (a,b)$, tada je $\alpha_0^{\xi_0^1} \neq 0$, $\alpha_1^{\xi_0^1} \neq 0$ i $\alpha_{-1}^{\xi_0^1} \neq 0$. Za $\xi_0^2 = \frac{a+3b}{4} \in (a,b)$, dobijamo da je $\alpha_0^{\xi_0^2} \neq 0$ i $\alpha_{-1}^{\xi_0^2} \neq 0$. Dakle, $\operatorname{rang} P(\xi_0^1) = n+1$ i $\operatorname{rang} P(\xi_0^2) = n$. Zaključujemo da $\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ nije konstantan na $\mathbb{R}$.

b) Ako je r neparan broj, dobijamo matricu $P^1(\xi_0)$, koju možemo posmatrati kao matricu $P(\xi_0)$ bez poslednje vrste. Analogno slučaju parnog broja funkcija, $\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ nije konstantna funkcija na $\mathbb{R}$. Zaista, ako je $\xi_0^4 = b - \lambda$, $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, tada je $\operatorname{rang} P^1(\xi_0^4) = n+2$, međutim $\operatorname{rang} P^1(\xi_0^1) = n+1$. $\square$

Podslučaj 2.3° Ako je $b - a > 3\pi$, dobijamo generalizaciju prethodne leme.

Teorema 5.10. *a*) *Neka je $\Phi = (\phi_i, \phi_{i+1}, \ldots, \phi_{i+r})^T$, $i \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$. Tada* rang *matrice $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ nije konstantna funkcija na $\mathbb{R}$.*

b) *Neka je $\Phi = (\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \ldots, \phi_{i_r})^T$, $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \mathbb{Z}$, gde $\{\phi_{i_{j_1}}, \phi_{i_{j_2}}\}$ nije par uzastopnih funkcija $j_1 \neq j_2$, $j_1, j_2 \in \{1, \ldots, r\}$. Tada je* $\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ *konstantna funkcija na $\mathbb{R}$ i* $\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}} = r$ *za svako $\xi \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. *a*) U ovom slučaju nosači proizvoda $\widehat{\phi}_{i_1}(\xi + 2j_1\pi)\widehat{\phi}_{i_2}(\xi + 2j_2\pi)$ su neprazni ako su argumenti oblika $\xi - k\pi$, $\xi - (k-1)\pi, \ldots, \xi - \pi$, ξ, $\xi + \pi, \ldots, \xi + (k-1)\pi$, $\xi + k\pi$ po modulu $2j\pi$. Možemo izabrati $\xi_0^1, \xi_0^2 \in (a,b)$ tako da $\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi_0^1 + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}} \neq \operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi_0^2 + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$. Zato, $\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ nije konstantna funkcija na $\mathbb{R}$.

b) Kako skup $\{\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \ldots, \phi_{i_r}\}$ ne uključuje parove uzastopnih funkcija, pozicija prvog nenula elementa u svakoj vrsti matrice $\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ je jedinstvena za svaku vrstu. Samim tim, $\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ je konstantna funkcija na $\mathbb{R}$ i $\operatorname{rang}\big[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}} = r$. Ovakvim izborom funkcija dobijamo *Riesz*-ovu bazu prostora $V_\mu^p(\Phi)$. $\square$

5.7.2 d-dimenzioni slučaj, $d \geqslant 2$

Rezultate prethodnog odeljka ćemo uopštiti na višedimenzioni slučaj. Neka je $\phi_t(x) = \mathcal{F}^{-1}(\theta(\cdot + t\pi))(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in I$, gde je I konačan podskup od $\mathbb{Z}^d$ i θ nenegativna glatka funkcija takva da je $\operatorname{supp}\theta = P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]$, $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant d$. Ponovo, primenom *Paley-Wiener*-ove teoreme, $\phi_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset W_\mu^1(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{Z}^d$.

Neka je $i^r = (i_1^r, i_2^r, \ldots, i_d^r) \in \mathbb{Z}^d$, $1 \leqslant r \leqslant d$. Tada je $\{\phi_{i^1}, \phi_{i^2}, \ldots, \phi_{i^n}\}$ skup od n uzastopnih funkcija ako je $\max\{|i_k^r|, 1 \leqslant k \leqslant d\} = \max\{|i_k^{r-1}|, 1 \leqslant k \leqslant d\} + 1$ za svako $r = 2, \ldots, n$.

Dokazi sledećih lema su vrlo slični odgovarajućim lemamama za jednodimenzioni slučaj.

Slučaj 1. $0 < \max\{|b_i - a_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant d\} \leqslant \pi$.

Lema 5.14. *Neka je* $\Phi = (\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \ldots, \phi_{i_r})^T$, $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \mathbb{Z}^d$, $r \in \mathbb{N}$, *gde je* $\{\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \ldots, \phi_{i_r}\}$ *skup od* r *uzastopnih funkcija. Tada* $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}$ *ne zavisi od* $\xi \in \mathbb{R}^d$*;*

$$\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d} = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor, \quad \xi \in \mathbb{R}^d,$$

gde $\lfloor\cdot\rfloor$ *označava* $n \in \mathbb{N}$ *takvo da je* $n \leqslant \frac{r}{2} < n+1$.

Slučaj 2. $\pi < \max\{|b_i - a_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant d\} \leqslant 2\pi$.

Lema 5.15. *a) Neka je* $\Phi = \{\phi_i, i \in I\}$, *gde je* I *skup svih* $i = (i_1, i_2, \ldots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ *za koje je* $\max\{|i_k|, 1 \leqslant k \leqslant d\} \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Rang matrice* $[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}$ *nije konstantna funkcija na* $\mathbb{R}^d$.

b) Neka je $\Phi = \{\phi_i, i \in I\}$, *gde je* I *skup svih* $i = (i_1, i_2, \ldots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ *za koje je* $\max\{|i_k|, 1 \leqslant k \leqslant d\} \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d} = \dfrac{|I|+1}{2}$, *za svako* $\xi \in \mathbb{R}^d$. *(Sa* $|I|$ *označavamo kardinalnost skupa* I.*)*

Dokaz. Pošto su nosači proizvoda $\widehat{\phi}_{i_1}(\xi + 2j_1\pi)\widehat{\phi}_{i_2}(\xi + 2j_2\pi)$ neprazni ako su argumenti oblika $\xi - k\pi$, ξ, $\xi + k\pi$, po modulu $2j\pi$, $j \in \mathbb{Z}^d$, gde je $k = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ i $\max\{|k_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant d\} = 1$, imamo da jedino blokovi sa elementima

$$\begin{bmatrix} \theta(\xi) & \theta(\xi + 2k\pi) \\ \theta(\xi - k\pi) & \theta(\xi + k\pi) \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} \theta(\xi - k\pi) & \theta(\xi + \pi) \\ \theta(\xi - 2k\pi) & \theta(\xi) \end{bmatrix},$$

mogu da određuju rang matrice $[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}$. Drugi izbori matrica reda 2 daju determinantu jednaku nuli.

a) Neka je $a = (a_1, \ldots, a_d)$ i $b = (b_1, \ldots, b_d)$. Za $\xi^1 = b - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}^d$, $|\lambda| = |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_d| < \frac{1}{4}$, i za $\xi^2 = a + \lambda$ imamo da je

$$\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi^1 + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d} \neq \operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi^2 + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d},$$

pa zaključujemo da $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}$ nije konstantna funkcija na $\mathbb{R}^d$.

b) Pošto je $\theta(\xi_0) \neq 0$ za svako $\xi_0 \in \operatorname{Int} P$, matrica $[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}$ ima $\dfrac{|I|+1}{2}$ kolona sa nenula elementima za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$. Zaključujemo da rang matrice $[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}$ ne zavisi od $\xi \in \mathbb{R}^d$ i ima vrednost $\dfrac{|I|+1}{2}$. □

Slučaj 3° $\max\{|b_i - a_i|,\ 1 \leqslant i \leqslant d\} \geqslant 3\pi$.

Teorema 5.11. *Neka je* $\Phi = (\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \dots, \phi_{i_n})^T$, $i_k \in \mathbb{Z}^d$, $k \in \mathbb{N}$. *Tada rang matrice* $[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}$ *nije konstantna funkcija na* $\mathbb{R}^d$.

Dokaz. Za proizvod $\widehat{\phi}_{i_1}(\xi + 2j_1\pi)\widehat{\phi}_{i_2}(\xi + 2j_2\pi)$ argumenti treba da budu oblika $\xi - k\pi$, ξ, $\xi + k\pi$ po modulu $2j\pi$ gde je $k = (k_1, k_2, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ i

$$\max\{|k_i|,\, 1 \leqslant i \leqslant d\} < \max\{|b_i - a_i|,\, 1 \leqslant i \leqslant d\}.$$

Možemo izabrati odgovarajuće $\xi_0^1, \xi_0^2 \in \operatorname{Int} P$ takve da je

$$\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi_0^1 + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d} \neq \operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi_0^2 + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}.$$

Samim tim, $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}$ nije konstantna funkcija na $\mathbb{R}^d$. □

Kao posledicu teoreme 5.5 i leme 5.15 (b) dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 5.12. *Neka je* $\Phi = \{\phi_i, i \in I\}$, *gde je* I *skup svih* $i = (i_1, i_2, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ *za koje je* $\max\{|i_k|, 1 \leqslant k \leqslant d\} \in \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada je prostor* $V_\mu^p(\Phi)$ *zatvoren u* L_μ^p *za svako* $p \in [1, \infty]$ *i familija* $\{\phi_i(\cdot - j) \mid i \in I, j \in \mathbb{Z}^d\}$ *čini* p*-okvir za* $V_\mu^p(\Phi)$ *za svako* $p \in [1, \infty]$.

Teorema 5.13. *Neka je* $\Phi = (\phi_{i_1}, \phi_{i_2}, \dots, \phi_{i_r})^T$, $i_t = (i_t^1, \dots, i_t^d) \in \mathbb{Z}^d$, $1 \leqslant t \leqslant r$, *gde je* $i_t^k \in 2\mathbb{Z}$, $1 \leqslant k \leqslant d$. *Važe sledeća tvrđenja.*

1° $\operatorname{rang}[\widehat{\Phi}(\xi + 2j\pi)]_{j\in\mathbb{Z}^d}$ *je konstantna funkcija na* $\mathbb{R}^d$.

2° *Prostor* $V_\mu^p(\Phi)$ *je zatvoren u* L_μ^p *za svako* $p \in [1, \infty]$.

3° *Familija* $\{\phi_{i_k}(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}^d, 1 \leqslant k \leqslant r\}$ *predstavlja* p*-Riesz-ovu bazu za* $V_\mu^p(\Phi)$ *za svako* $p \in [1, \infty]$.

5.7.3 Konstrukcija okvira generisanog funkcijama sa kompaktnim nosačima; jednodimenzioni slučaj

Sledećom konstrukcijom dobijena je *Riesz*-ova baza odgovarajućih zatvorenih potprostora prostora L_μ^2.

Neka je $H(x)$, $x \in \mathbb{R}$, karakteristična funkcija skupa $[0, \infty)$, tj. $H(x) = 0$ ako je $x < 0$ i $H(x) = 1$ za $x \geqslant 0$. Konstruisaćemo niz funkcija $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na sledeći način. Neka je $\psi_1(x) := (H(x) - H(x - a))/a$, $a > 0$, $\psi_2 := \psi_1 * \psi_1$, $\psi_3 := \psi_1 * \psi_1 * \psi_1$, ..., tj. $\psi_n := \underbrace{\psi_1 * \psi_1 * \cdots * \psi_1}_{n-1 \text{ puta}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Imamo da je

$$\psi_2(x) = \frac{1}{a^2}\Big(xH(x) - 2(x - a)H(x - a) + (x - 2a)H(x - 2a)\Big),$$

$$\begin{aligned}
\psi_3(x) = \frac{1}{2!a^3}\Big(&x^2H(x) - 3(x-a)^2H(x-a)\\
&+ 3(x-2a)^2H(x-2a) - (x-3a)^2H(x-3a)\Big),\\
\psi_4(x) = \frac{1}{3!a^4}\Big(&x^3H(x) - 4(x-a)^3H(x-a) + 6(x-2a)^3H(x-2a)\\
&- 4(x-3a)^3H(x-3a) + (x-4a)^3H(x-4a)\Big).
\end{aligned}$$

Nastavljajući dalje, za svako $n \in \mathbb{N}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\psi_n(x) = \frac{1}{a^n(n-1)!}\Bigg(&\binom{n}{0}x^{n-1}H(x) - \binom{n}{1}(x-a)^{n-1}H(x-a)\\
&+ \binom{n}{2}(x-2a)^{n-1}H(x-2a) - \binom{n}{3}(x-3a)^{n-1}H(x-3a)\\
&+ \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(x-(n-1)a)^{n-1}H(x-(n-1)a)\\
&+ (-1)^n\binom{n}{n}(x-na)^{n-1}H(x-na)\Bigg).
\end{aligned}$$

Računajući *Fourier*-ove transformacije funkcija ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_1(\xi) &= \frac{-\mathrm{i}}{a}\ v.p.\Big(\frac{1}{\xi}\Big)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi} - 1),\\
\widehat{\psi}_2(\xi) &= \frac{(-\mathrm{i})^2}{a^2}\ v.p.\Big(\frac{1}{\xi^2}\Big)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi} - 1)^2,\\
\widehat{\psi}_3(\xi) &= \frac{(-\mathrm{i})^3}{a^3}\ v.p.\Big(\frac{1}{\xi^3}\Big)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi} - 1)^3.
\end{aligned}$$

Dakle, $\widehat{\psi}_n(\xi) = \dfrac{(-\mathrm{i})^n}{a^n}\ v.p.\Big(\dfrac{1}{\xi^n}\Big)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\xi} - 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, gde je $v.p.$ *Cauchy*-jeva glavna vrednost.

Neka je $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r)^T$, $r \in \mathbb{N}$. Za svako $\xi \in \mathbb{R}$, matrica $\big[\widehat{\Psi}(\xi+2j\pi)\big]_{j\in\mathbb{Z}}$ ima isti rang kao i matrica

$$R(\xi) = \begin{bmatrix}
\cdots & \alpha_{-4\pi}\beta_{-4\pi} & \alpha_{-2\pi}\beta_{-2\pi} & \alpha_0\beta_0 & \alpha_{2\pi}\beta_{2\pi} & \alpha_{4\pi}\beta_{4\pi} & \cdots\\
\cdots & \alpha^2_{-4\pi}\beta^2_{-4\pi} & \alpha^2_{-2\pi}\beta^2_{-2\pi} & \alpha^2_0\beta^2_0 & \alpha^2_{2\pi}\beta^2_{2\pi} & \alpha^2_{4\pi}\beta^2_{4\pi} & \cdots\\
\cdots & \alpha^3_{-4\pi}\beta^3_{-4\pi} & \alpha^3_{-2\pi}\beta^3_{-2\pi} & \alpha^3_0\beta^3_0 & \alpha^3_{2\pi}\beta^3_{2\pi} & \alpha^3_{4\pi}\beta^3_{4\pi} & \cdots\\
\cdots & \alpha^4_{-4\pi}\beta^4_{-4\pi} & \alpha^4_{-2\pi}\beta^4_{-2\pi} & \alpha^4_0\beta^4_0 & \alpha^4_{2\pi}\beta^4_{2\pi} & \alpha^4_{4\pi}\beta^4_{4\pi} & \cdots\\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & \alpha^r_{-4\pi}\beta^r_{-4\pi} & \alpha^r_{-2\pi}\beta^r_{-2\pi} & \alpha^r_0\beta^r_0 & \alpha^r_{2\pi}\beta^r_{2\pi} & \alpha^r_{4\pi}\beta^r_{4\pi} & \cdots
\end{bmatrix},$$

gde je $\alpha_k^m = v.p.\Big(\dfrac{1}{\xi-k}\Big)^m$ i $\beta_k^m = \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}a(\xi-k)} - 1\big)^m$. Pošto je rang matrice $R(\xi)$ jednak r za svako $\xi \in \mathbb{R}$, dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 5.14. *Neka je* $\Psi = (\psi_k, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_{k+(r-1)})^T$*, za* $k \in \mathbb{Z}$*,* $r \in \mathbb{N}$*. Prostor* $V_\mu^p(\Psi)$ *je zatvoren potprostor od* L_μ^p *za svako* $p \in [1, \infty]$ *i familija* $\{\psi_{k+s}(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant s \leqslant r-1\}$ *predstavlja p-Riesz-ovu bazu za* $V_\mu^p(\Psi)$ *za svako* $p \in [1, \infty]$*.*

Napomena 5.4. *a) Neka je* $\phi_k(x) = \mathcal{F}^{-1}(\theta(\cdot - k\pi))(x)$*,* $x \in \mathbb{R}$*, gde je* $\theta \in C_0^\infty$ *i* $\operatorname{supp}\theta \subseteq [-\pi, \pi]$*. Koristeći oznake iz rada* [115]*, neka je* $\psi_{x_j} = \phi_{x_j}$*, gde je* $\{x_j \mid j \in J\}$ *γ-gust skup određen sa* $f \in V^2(\phi) = V^2(\mathcal{F}^{-1}(\theta))$*. Proveravajući uslove teorema* 3.1*,* 3.2 *i* 4.1 *u radu* [115]*, zaključujemo da važe nejednakosti*

$$c_p \|f\|_{L_\mu^p} \leqslant \Big(\sum_{j \in J} |\langle f, \psi_{x_j} \rangle \mu(x_j)|^p \Big)^{1/p} \leqslant C_p \|f\|_{L_\mu^p}.$$

Ovo garantuje stabilnost i neprekidnost rekonstrukcionog algoritma u prostoru signala $V_\mu^p(\Phi)$*.*

b) Pošto je spektar Gram-ove matrice $\big[\widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}\big](\xi)$*, za funkcije* Φ *date u teoremama* 5.9 *i* 5.14*, ograničen i ograničen sa donje strane nulom (videti* [35]*), dobijamo da familija* $\{\Phi(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ *čini p-Riesz-ovu bazu za* $V_\mu^p(\Phi)$*.*

c) Za odgovarajući izbor funkcije Φ*, na primer* Φ *dato u teorema* 5.9 *i* 5.14*, pridružena Gram-ova matrica zadovoljava uslov Munckenhoupt-a* A_2 *(videti* [85]*), pa je sistem* $\{\Phi(\cdot - j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ *stabilan u* $L_\mu^2(\mathbb{R})$*.*

d) Okviri gornjeg tipa mogu se koristiti u primeni pošto su uslovi teorema 3.1 *i* 3.2 *iz rada* [7] *zadovoljeni. Može se pokazati da je uzorkovanje u translaciono invarijantnom prostoru robusno u odnosu na adekvatan skup konstruisanih funkcija* $\phi_{k_1}, \ldots, \phi_{k_r}$*.*

Literatura

[1] A. Aldroubi, *Obique projections in atomic spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **124** (1996), 2051–2060.

[2] A. Aldroubi, *Exact iterative reconstruction algorithm for multivariate irregulaely sampled functions in spline-like space: the L^p theory*, Proc. Am. Math. Soc. **126** (1998), 2677–2686.

[3] A. Aldroubi, Q. Sun, W. Tang, *Finitely generated shift-invariant subspaces of $L^p(\mathbb{R})$*, SIAM Rev. **43** (2001), 585–620.

[4] A. Aldroubi, Q. Sun, W. Tang, *p-frames and shift invariant subspaces of L^p*, J. Fourier Anal. Appl. **7** (2001), 1–21.

[5] A. Aldroubi, K. Gröchenig, *Non-uniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces*, SIAM Rev. **43**(4) (2001), 585–620.

[6] A. Aldroubi, *Non-uniform weighted average sampling and reconstruction in shift-invariant and weighted spaces*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **13** (2002), 151–161.

[7] A. Aldroubi, I. Krishtal, *Robustness of sampling and reconstruction and Beurling-Landau type theorems for shift-invariant spaces*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **20**(2) (2006), 250–260.

[8] A. Aldroubi, M. Unser, *Sampling procedure in function spaces and asymptotic equivalence with Shannon's sampling theory*, Numer. Funct. Anal. Optim. **15** (1994), 1–21.

[9] P. Antosik, J. Mikusinski, R. Sikorski, *The Theory of Distributions* (*the sequential approach*), Warszawa, 1973.

[10] J.J. Benedetto, S. Li, *Multiresolution analysis frames with applications*, ICASSP'93, Minneapolis, April 26–30 (1993), III, 304–307.

[11] J.J. Benedetto, *Frame decomposition, sampling and uncertainty principle inequalities, in Wavelets: Mathematics and Applications*, Stud. Adv. Math., CRC, Boca Raton, FL, 1994.

[12] J.J. Benedetto, M.W. Frazier, *Wavelets: Mathematics and Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.

[13] J.J. Benedetto, *Harmonic Analysis and Applications*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.

[14] J.J. Benedetto, P.J.S.G. Ferreira, *Modern Sampling Theory*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[15] J.J. Benedetto, D. Walnut, *Gabor frames of L^2 and related spaces*, Wavelets Mathematics and Applications, J.J. Benedetto and M.W. Frazier, eds., CRC, Boca Raton, FL (1993), 247–304.

[16] J.J. Benedetto, H.C. Wu, *Non-uniform sampling and spiral MRI reconstruction*, Proc. SPIE–Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII **4119** (2000), 130–141.

[17] A. Beurling, *Quasi-analyticity and general distributions*, Lectures 4 and 5, AMS Summer Inst. Stanford, 1961.

[18] E. Beller, G. de Haan, *New algorithms for motion estimation on interlaced video*, Proc. SPIE–Visual Communication and Image Processing, **3309** (1998), 111–121.

[19] C.A. Berenstein, E.V. Patrick, *Exact deconvolution for multiple convolution operators an overview, plus performance characterizations for imaging sensors*, Proceedings in Multidimensional Signal Processing, IEEE, Piscataway, NJ, 1990, 723–734.

[20] G. Björk, *Linear partial differential operators and generalized distributions*, Ark. Math. **6** (1966), 351–407.

[21] M. Bownik, N. Kaiblinger, *Minimal generator sets for finitely generated shift-invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R}^n)$*, J. Math. Anal. Appl. **313**(1) (2006), 342–352.

[22] R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor, *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Results in Mathematics **17** (1990), 206–237.

[23] R.D. Carmichael, A. Kamiński, S. Pilipović, *Boundary Values and Convolution in Ultradistribution Spaces* (*Series on Analysis, Applications and Computation-Vol. 1*), World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai, 2007.

[24] P.G. Casazza, D. Han, D.R. Larson, *Frames for Banach spaces*, Contemp. Math. **247** (1999), 149–182.

[25] P.G. Casazza, O. Christensen, D.T. Stoeva, *Frame expansions in separable Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **307** (2005), 710–723.

[26] P.G. Casazza, *The art of frame theory*, Taiwanese Journal of Math. **4**(2) (2000), 129–202.

[27] P.G. Casazza, G. Kutyniok, D. Speegle, J. C. Tremain, *A decomposition theorem for frames and the Feichtinger conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 2043–2053.

[28] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[29] O. Christensen, Y.C. Eldar, *Generalized Shift-Invariant Systems and Frames for Subspaces*, J. Fourier Anal. Appl. **11**(3) (2005), 299–313.

[30] O. Christensen, C. Heil, *Perturbations of Banach frames and atomic decompositions*, Math. Nach. **185** (1997), 33–47.

[31] O. Christensen, D.T. Stoeva, *p-frames in separable Banach spaces*, Adv. Comp. Math. **18**(2-4) (2003), 117–126.

[32] O. Christensen, Y.C. Eldar, *Oblique dual frames and shift-invariant spaces*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **17**(1) (2004), 48–68.

[33] O. Christensen, H.O. Kim, R.Y. Kim, J.K. Lim, *Perturbation of frame sequences in shift-invariant spaces*, J. Geom. Anal. **15**(2) (2005), 181–192.

[34] J. Chung, S.Y. Chung, D. Kim, *Characterization of the Gelfand-Shilov spaces via Fourier transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. **124**(7) (1996), 2101–2108.

[35] C. de Boor, R.A. DeVore, A. Ron, *The structure of finitely generated shift-invariant spaces in* $L^2(\mathbb{R}^d)$, J. Funct. Anal. **119**(1) (1994), 37–78.

[36] I. Daubechies, *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*, IEEE Trans. Inform. Theory, **39** (1990), 961–1005.

[37] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[38] I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer, *Plainless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys. **27** (1986), 1271–1283.

[39] R. A. DeVore, B. Jawerth, B.J. Lucier, *Image compression through wavelet transform coding*, IEEE Trans. Inform. Theory **38** (1992), 719–746.

[40] H. Dym, H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New YorkLondon, 1972.

[41] R.J. Duffin, A.C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Am. Math. Soc. **72** (1952), 341–366.

[42] H.G. Feichtinger, *Banach convolution algebras of Wiener type*, in Functions, Series, Operators, Vols. I, II (Budapest, 1980), North-Holland, Amsterdam, (1983), 509–524.

[43] H.G. Feichtinger, K. Gröchening, *A unified approach to atomic decomposition via integrable group representations*, In:Proc. Conf. "Function Spaces and Applications", Lecture Notes in Maths, 1302, Berlin-Heidelberg-New York, Springer (1988), 52–73.

[44] H.G. Feichtinger, K. Gröchenig, *Banach spaces related to integrable group representations and their atomic decompositions I*, J. Funct. Anal. **86** (1989), 307–340.

[45] H.G. Feichtinger, *Generalized amalgams, with applications to Fourier transform*, Canad. J. Math. **42** (1990), 395–409.

[46] H.G. Feichtinger, K. Gröchenig, *Iterative reconstruction of multivariate band-limited functions from irregular sampling values*, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 244–261.

[47] H.G. Feichtinger, K. Gröchenig, *Theory and practice of irregular sampling, in Wavelets-Mathematics and Applications*, CRC, Boca Raton, FL, (1993), 305–363.

[48] H.G. Feichtinger, K. Gröchenig, T. Strohmer, *Efficient numerical methods in nonuniform sampling theory*, Numer. Math. **69** (1995), 423–440.

[49] H.G. Feichtinger, T. Strohmer, eds., *Gabor Analysis and Algorithms*, Birkhäuser, Boston, 1998.

[50] H.G. Feichtinger, *New results on regular and irregular sampling based on Wiener amalgams*, Proc. Conf. Function Spaces, K. Jarosz, ed., Lecture Notes in Math. 136, Springer- Verlag, New York, 1991, 107–121.

[51] I.M. Gelfand, G.E. Shilov, *Generalized Functions* II, III Academic press, 1967.

[52] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.

[53] K. Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[54] K. Gröchenig, *Describing functions: Atomic decomposition versus frames*, Monatsh. Math **112** (1991), 1–41.

[55] K. Gröchenig, *Reconstruction algorithms in irregular sampling*, Math. Comp. **59** (1992), 181–194.

[56] K. Gröchenig, *Accelaration of the frame algorithm*, IEEE Trans. Signal Proc. **41**(12) (1993), 3331–3340, Special Issue on Wavelets and Signal Processing.

[57] K. Gröchenig, T. Strohmer, *Numerical and theoretical aspects of nonuniform sampling of band-limited images*, Theory and Practice of Nonuniform Sampling, F. Marvasti, ed., Kluwer/Plenum, New York, 2001.

[58] V. O. Grudzinski, *Temperierte Beurling-distributions*, Math. Nachr. **91** (1979), 197–220.

[59] I. Gohberg, M. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*, American Mathematical Society, Providence, 1969.

[60] C. Heil, *A Basis Theory Primer,* Applied and Numerical Harmonic Analysis, Expanded Edition, Birkhäuser, 2010.

[61] C. Heil, *Wiener amalgam spaces in generalized harmonic analysis and wavelet theory*, Ph.D. thesis, University of Maryland, College Park, MD, 1990.

[62] C. Heil, D.F. Walnut, *Continuous and discrete wavelet transforms.* SIAM Review **31** (1989), 628–666.

[63] A.A. Hemmat, J.P. Gabardo, *The uniqueness of shift-generated duals for frames in shift-invariant subspaces*, J. Fourier Anal. Appl. **13**(5) (2007), 589–606.

[64] J.R. Higgins, *Sampling theory for Paley-Wiener spaces in the Riesz basis settings*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. **2** (1994), 219–235.

[65] J.R. Holub, *Pre-frame operators, Besselian frames, and near-Riesz bases in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 779–785.

[66] D.M. Ivanović, *Kvantna Mehanika*, Naučna knjiga, Beograd, 1974.

[67] R.Q. Jia, C.A. Micchelli, *Using the refinement equation for the construction of per-wavelets II: power of two, in Curve and Surface*, Academic Press, New York, (1991), 209–246.

[68] R.Q. Jia, C.A. Micchelli, *On linear independence of integer translates of a finite number of functions*, Proc. Edinb. Math. Soc. **36** (1992), 69–85.

[69] R.Q. Jia, *Stability of the shifts of a finite number of functions*, J. Approx. Theory **95** (1998), 194–202.

[70] A. Kamiński, D. Perišić, S. Pilipović, *On various integral transformations of tempered ultradistributions*, Demonstratio Math. **33**(3) (2000), 641–655.

[71] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Third Edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[72] H. Komatsu, *Ultradistributions* I, *structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 20 (1973), 25–105.

[73] H. Komatsu, *Ultradistributions* II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA **24** (1977), 607–628.

[74] H. Komatsu, *Ultradistributions, III, Vector Valued Ultradistributions and the Theory of Kernels*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA **29** (1982), 653–718.

[75] H. Komatsu, *An Introduction to the Theory of Generalized Functions*, Department of Math., Sci. Univ. Tokyo, 1999.

[76] D. Kovačević, S. Pilipović, *Structural Properties of the Spaces of Tempered Ultradistributions*, Complex Analysis and Generalized Functions, Varna, Publ. House of the Bulg. Acad. Sci. (Sofia) (1993), 169–184.

[77] H.P. Kramer,*A generalized sampling theorem*, J. Math. Phys. **38** (1959), 68-72.

[78] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces* I: *Sequence Spaces*, Springer-Verlag Heidelberg-New York, 1977.

[79] S.P. Leach, *Density conditions on Gabor frames*, Master thesis, School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, 2003.

[80] Y. Lyubarskiĭ, W.R. Madych, *The recovery of irregularly sampled band limited functions via tempered splines*, J. Funct. Anal. **125** (1994), 201–222.

[81] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[82] R.A. Komorowski, N. Tomczak-Jaegermann, *Banach spaces without local unconditional structure*, Isreal J. Math. **89** (1995), 205–226.

[83] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, New York, 1998.

[84] Y. Meyer, *Ondelettes*, Hermann, Paris, Editeurs des Science et des Arts, 1990.

[85] M. Nielsen, *On stability of finitely generated shift-invariant systems*, J. Fourier Anal. Appl. **16**(6) (2010), 901–920.

[86] S. Pilipović, *Tempered ultradistributions*, Boll. Un. Mat. Ital. **7**(2-B) (1988), 235–251.

[87] S. Pilipović, *Structural theorems for periodic ultradistributions*, Proc. Amer. Math. Soc. **98**(2) (1986), 261–266.

[88] S. Pilipović, *Hilbert transformation of Beurling ultradistributions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **77** (1987), 1–13.

[89] S. Pilipović, S. Simić, *Frames for weighted shift invariant spaces*, Mediterr. J. Math, DOI: 10.1007/s00009-011-0155-3. (preprint on Arxiv 2011, arXiv:1105.6105)

[90] S. Pilipović, S. Simić, *Construction of frames for shift-invariant spaces* , preprint.

[91] S. Pilipović, D.T. Stoeva, *Series expansions in Fréchet spaces and construction of Fréchet frames*, J. Approx. Theory (2011), doi:10.1016/j.jat.2011.06.010. (preprint on Arxiv 2008, arXiv:0809.4647)

[92] S. Pilipović, D.T. Stoeva, N. Teofanov, *Frames for Fréchet spaces*, Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. **32** (2007), 69–84.

[93] D. Potts, G. Steidl, *New Fourier reconstruction algorithms for computerized tomography*, Proc. Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII **4199** (2000), 13–23.

[94] A. Kaminski, D. Perišić, S. Pilipović, *On various integral transformations of tempered distributions*, Demonstratio Math. **33**(3) (2000), 641–655.

[95] M. Rauth, T. Strohmer, *Smooth approximation of potential fields from noisy scattered data*, Geophysics, **63** (1998), 85–94.

[96] X.S. Raymond, *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*, CRC Press, 1991.

[97] C. Roumieu, *Sur quelques extensions de la notion de distribution*, Ann. Sci. École Norm, Sup. **77**(3) (1960), 41–121.

[98] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, New York, 1974.

[99] W. Rudin, *Functional Analysis, Second Edition*, McGraw Hill, New York, 1991.

[100] L. Schwartz, *Theorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[101] C. E. Shin, Q. Sun, *Stability of localized operators*. J. Funct. Anal. **256**(8) (2009), 2417–2439.

[102] R.S. Strichartz, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, World Scientific, New Jersey, 1994.

[103] D.T. Stoeva, *X_d-frames in Banach spaces and their duals*, IJPAM **52**(1) (2009), 1–14.

[104] A. Szankowski, *A Banach lattice witout the approximation property*, Isreal J. Math. **24** (1976), 329–337.

[105] S. Szarek, *The finite dimensional basis problem with an appendix on nets of Grossman manifold*, Acta. Math. **151** (1983), 153–179.

[106] B. Stanković, S. Pilipović, *Teorija Distribucija*, PMF, Novi Sad (1988).

[107] S. Simić, *Fréchet frames for shift invariant weighted spaces*, Novi Sad J. Math. **39**(2) (2009), 119–128.

[108] R.S. Strichartz, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, World Scientific, New Jersey, 1994.

[109] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, New York, 1970.

[110] N. Teofanov, *Ultramodulation Spaces and Pseudodifferential Operators*, Endowment Andrejević, Beograd, 2003.

[111] N. Teofanov, *A note on ultrapolynomials and the Wigner distribution*, Novi Sad J. Math. **30** (1) (2000), 165–175.

[112] N. Teofanov, *Ultradistributions and time-frequency analysis*, Operator Theory, Advances and Applications **164**, Birkhäuser, 2006, 173–192.

[113] N. Teofanov, *Uvod u teoriju okvira*,
http://sites.dmi.rs/personal/teofanovn/pamphlets/teorija

[114] P. Thévenaz, T. Blu, M. Unser, *Image interpolation and resampling*, Handbook of Medical Image Processing, Processing and Analysis, I.N. Bankman, ed., Academic Press, San Diego, CA, 2000, 393–420.

[115] J. Xian, S. Li, *Sampling set conditions in weighted multiply generated shift-invariant spaces and their applications*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **23**(2) (2007), 171–180.

[116] R. Vio, T. Strohmer, W. Wamsteker, *On the reconstruction of irregularly sampled time series*, Publ. Astronom. Soc. Pac. **112** (2000), 74–90.

[117] V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Nauka, Moscow, 1981. (in Russian)

[118] M. Unser, A. Aldroubi, *Generalized sampling with application to the wavelet transform*, Proceedings of the Conference on Information Sciences and Systems, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1993.

[119] D. Walnut, *Nonperiodic sampling of bandlimited functions on union of rectangular*, J. Fourier Anal. Appl. **2** (1996), 436–451.

[120] M.W. Wong, *An Introduction to Pseudo-differential Operators*, World Scientific, 1999.

[121] J.M. Whittaker, *Interpolatory Function Theory*, Cambridge University Press, London, 1935.

[122] I.F. Wilde, *Distribution theory (generalized functions)*, notes, http://homepage.ntlworld.com/ivan.wilde/notes/.

[123] R. Young, *Interpolation in a classical Hilbert space of entire functions*, Tras. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 97–114.

[124] R. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Revised First Edition, Academic Press, San Diego, 2001.

[125] A.H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, Mc Graw-Hill, New York, 1965.

[126] A.H. Zemanian, *Generalized integral transformations*, Interscience, New York, 1968.

Biografija

Suzana Simić je rođena 14.03.1979. godine u Kruševcu. Osnovnu školu i gimnaziju je završila u Trsteniku. Diplomirala je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Kragujevcu 2001. godine na studijskoj grupi Matematika, smer teorijska matematika. Poslediplomske magistarske studije iz Matematičke analize upisala je školske 2001/02. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Kragujevcu pod rukovodstvom profesora Milutina Dostanića, redovnog profesora Matematičkog fakulteta u Beogradu. Magistarsku tezu pod naslovom "Ocene i asimptotika sopstvenih i singularnih vrednosti kompaktnih operatora" odbranila je 2006. godine. Doktorske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu upisala je 2007. godine, na Departmanu za matematiku i informatiku, iz oblasti Funkcionalne analize. Od 2001. godine zaposlena je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Kragujevcu.

Novi Sad, 6. septembar 2011. Suzana Simić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR

Ime i prezime autora: mr Suzana Simić
AU

Mentor: Akademik dr Stevan Pilipović
MN

Naslov rada: Okviri i translaciono invarijantni prostori
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: Srpski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2011.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 5/127/126/0/0/0
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza, Fourier-ova analiza, Teorija distribucija, Teorija okvira
ND

Ključne reči: Prostori distribucija, p-okvir, težinski prostori, translaciono invarijantni prostori, Fréchet-ov okvir
PO
UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: U disertaciji se daje pregled osnovnih pojmova i poznatih rezultata teorije okvira. Proučavani su translaciono inavarijantni prostori sa težinama i dati uslovi pod kojima kolekcija funkcija čini okvir u tom prostoru. Takođe, konstruisan je niz takvih prostora i prikazani uslovi pod kojima će odgovarajuće funkcije koje generišu taj prostor predstavljati ili Banach-ov okvir ili Riesz-ovu bazu, i samim tim ustanoviti zatvorenost takvog prostora.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 23. septembar 2010. godine
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO
Predsednik: dr Arpad Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Član: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, mentor

Član: dr Nenad Teofanov, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Član: dr Ljubica Oparnica, docent Učiteljskog fakulteta, Sombor, Novi Sad

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic documentation
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Doctoral thesis
CC

Author: Suzana Simić
AU

Mentor: Stevan Pilipović, Academic, Full Professor
MN

Title: Frames and translation invariant spaces
TI

Language of text: Serbian (latin)
LT

Language of abstract: Serbian
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2011
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 5/127/126/0/0/0
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical analysis, Fourier analysis, Theory of distributions, Theory of frames
SD

Subject, Key words: Space of distributions, p-frame, weighted spaces, translation-invariant spaces, Fréchet-frame
SKW

UC

Holding data: Library, Department of Mathematics and Informatics, PMF, Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB
The basic notions and known results from the theory of frames are given in thesis. We study translation-invariant weighted spaces and give the conditions for a collection of functions to form a frame. Further, we construct a sequence of such spaces and show when the appropriate chosen functions form a p-frame or Riesz basis, and according to that explain the closedness of the space generated with these functions.

Accepted on Scientific Board on: September 23, 2010
ASB

Defended:
DE

Thesis Defend Board:
DB

President: Arpad Takači, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, Novi Sad

Member: Stevan Pilipović, Academic, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, Novi Sad

Member: Nenad Teofanov, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, Novi Sad

Member: Ljubica Oparnica, Assistant Professor, Faculty of Education, Sombor, Novi Sad