

Извештај је сачињен.  
Слађана Шимић-Јевтић



**Наставно-научном већу  
Природно-математичког факултета**

**Већу за природно-математичке науке  
Универзитета у Крагујевцу**

На седници Наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Крагујевцу одржаној 29.01.2020. године (број одлуке 80/VIII-2) и на седници Већа за природно-математичке науке Универзитета у Крагујевцу одржаној 12.02.2020. године (број одлуке IV-01-90/14) одређени смо за чланове Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације под насловом „Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског” кандидата Милице Грбовић. Милица Грбовић је поднела рукопис своје докторске дисертације Наставно-научном већу Природно-математичког факултета у Крагујевцу на оцену. Чланови Комисије детаљно су прегледали рукопис, проценили научни квалитет дисертације и указали кандидату на потребне корекције. Милица Грбовић је усвојила све предлоге Комисије и уградила их у коначну верзију дисертације, чиме су се стекли сви услови да Комисија поднесе следећи Извештај.

**Извештај о оцени докторске дисертације**

**„Неке специјалне врсте кривих, репера и површи  
у просторима Минковског”**

**кандидата Милице Грбовић**

**1. Опис докторске дисертације**

Теорија Риманових и семи-Риманових многострукости и њихових подмногострукости је једна од најважнијих области истраживања у Диференцијалној геометрији. Докторска дисертација „Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског” Милице Грбовић припада области Геометрије која се назива Диференцијална геометрија подмногострукости у простору Минковског  $\mathbb{R}_1^n$ . Прецизније, тема ове докторске дисертације се односи на

специјалне врсте кривих, репера и површи у 3–димензионалном и 4–димензионалном простору Минковског.

Текст рукописа докторске дисертације написан је на укупно 122 стране и састоји се од Садржаја, Листе слика, Сажетка (на српском и енглеском језику), Предговора, четири главе и одељка Литература који садржи 82 референце. У рукопису дисертације се налази 8 слика. Саставни делови дисертације су и биографија кандидата и насловне стране научних радова у којима су резултати дисертације објављени.

Дисертација је подељена у 4 главе - прва глава је уводног карактера и обухвата материју чије је познавање неопходно за представљање оригиналних резултата кандидата, приказаних у другој, трећој и четвртој глави.

У првој глави дате су дефиниције основних појмова и истакнуте најважније особине семи–Риманове геометрије. У оквиру ове главе, дата је дефиниција семи–Риманове многострукости, уведен појам каузалног карактера многострукости и одговарајућих подмногострукости, са нагласком на криве као једнодимензионалне многострукости. Приказане су Френеове и Картанове формуле просторних, временских и нул кривих у просторима Минковског  $\mathbb{R}_1^3$  и  $\mathbb{R}_1^4$ , описани Бишопови репери кривих у еуклидском простору и просторима Минковског. Изложена је елементарна геометрија површи у простору  $\mathbb{R}_1^3$ . Такође су описане и неке специјалне класе кривих и површи у тим просторима.

У другој глави су приказани оригинални резултати кандидата. Посматране су ректификационе и нормалне криве у простору Минковског  $\mathbb{R}_1^3$  и испитане релације између таквих кривих. У односу на изабрани преградни сноп светлосне равни са једначином  $x = y$ , доказано је да су праве једине ректификационе криве које се пројектују на нормалну криву и одређене су експлицитне параметарске једначине просторне нормалне криве која се пројектује у псеудо нул ректификациону  $W$ –криву.

Такође су разматране и Манхајмове криве у просторима Минковског. У овој глави дефинисане су уопштене нул, уопштене псеудо нул и уопштене парцијално нул Манхајмове криве у простору  $\mathbb{R}_1^4$  и добијене везе између репера кривих које чине пар уопштених Манхајмових кривих. Дата је карактеризација уопштених нул Манхајмових кривих у  $\mathbb{R}_1^4$  и доказано је да не постоје уопштене псеудо нул и парцијано нул Манхајмове криве у овим просторима. У простору Минковског

$\mathbb{R}_1^3$  је доказано да не постоје нул Манхајмове криве, као и да су једине псеудо нул Манхајмове криве са првом кривином различитом од нуле, псеудо нул кружнице.

У овој глави приказани су и оригинални резултати који се односе на Баклундове трансформације псеудо нул и нул Картанових кривих. Применом Да Риосове једначине вртложног влакна, добијен је вектор брзине вртложног влакна псеудо нул криве који је у правцу главне нормале и вектор брзине нул Картанове криве који је у правцу тангенте. Такође су добијене просторне, временске и светлосне Хашимото површи, које представљају решења једначине вртложног влакна псеудо нул и нул Картанове криве у простору  $\mathbb{R}_1^3$ .

У трећој глави дисертације приказани су оригинални резултати кандидата који се односе на добијање Бишопових репера псеудо нул и нул Картанових кривих у простору Минковског  $\mathbb{R}_1^3$ . Доказано је да постоје две могућности за Бишопов репер псеудо нул криве и једна могућност за Бишопов репер нул Картанове криве, осим ако је она нул Картанова кубна крива у ком случају је доказано да таква крива има два Бишопова репера, од којих се један поклапа са њеним Картановим репером.

У четвртој глави такође су изложени оригинални резултати ове докторске дисертације. Уведена је нова класа увијених површи у простору Минковског  $\mathbb{R}_1^3$  које се називају увијене површи друге врсте и које могу бити просторне, временске или светлосне и извршена је њихова класификација. Доказано је да светлосне увијене површи друге врсте у  $\mathbb{R}_1^3$  могу бити светлосни конуси или светлосне преносне површи. Показано је да не постоје минималне недегенеративне увијене површи друге врсте. У односу на изабрани светлосни трансверзални векторски сноп, дате су експлицитне параметризације  $B$ -скролова и псеудосфера које представљају недегенеративне увијене површи друге врсте са константном Гаусовом и средњом кривином. Доказано је да су светлосне увијене површи друге врсте светлосни конуси, светлосне преносне површи и светлосне бинормалне површи.

## **2. Значај и допринос докторске дисертације са становишта актуелног стања у Геометрији, посебно Диференцијалној геометрији семи-Риманових многострукости**

Докторска дисертација „Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског” кандидата Милице Грбовић припада научној области

Математика, ужој научној области Геометрија, прецизније области Диференцијална геометрија семи-Риманових многострукости.

Истраживања која су обављена и резултати добијени у овој докторској дисертацији посебно припадају Диференцијалној геометрији подмногострукости у просторима Минковског, области која је последњих година дала многе нове резултате, нарочито у теорији светлосних површи које су модел коначног, Кошијевог и Крускаловог хоризонта и општој теорији релативности. Проучавање ових простора захтева посебну пажњу с обзиром да многи појмови и особине одступају од случаја Риманових многострукости. То се односи чак и на основне делове као што су дефиниције, формулације и значења добијених резултата.

Кандидат Милица Грбовић је у својој докторској дисертацији проучавала неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског  $\mathbb{R}_1^3$  и  $\mathbb{R}_1^4$ . Као комбинација теорије семи-Риманове геометрије са истраживањима из теорије кривих и површи у еуклидским просторима, у дисертацији су ова проучавања проширена на одговарајућу теорију кривих, репера и површи у просторима Минковског. Истраживање је базирано на класичним знањима Риманове и семи-Риманове геометрије као и на савременим методама теорије подмногострукости ових многострукости. Уведене су нове класе кривих и површи у просторима Минковског и извршене одговарајуће класификације.

На основу увида у научне резултате истраживања у докторској дисертацији кандидата Милице Грбовић, Комисија је закључила да ова докторска дисертација представља значајан допринос у области Геометрије, посебно у Диференцијалној геометрији семи-Риманових многострукости.

### **3. Оцена да је урађена докторска дисертација резултат оригиналног научног рада кандидата у области Геометрије, посебно у области Диференцијалне геометрије семи-Риманових многострукости**

На основу увида у постојећа истраживања и научне доприносе из области Геометрије, посебно Диференцијалне геометрије семи-Риманових многострукости, Комисија сматра да је докторска дисертација кандидата Милице Грбовић оригинално научно дело чија тема није била предмет досадашњих истраживања. То је потврђено објављеним научним радовима у часописима SCI листе, на основу резултата до којих је Милица Грбовић дошла у својој докторској дисертацији.

#### 4. Преглед остварених резултата кандидата у области Геометрије, посебно у области Диференцијалне геометрије семи–Риманових многострукости

Милица Грбовић до сада има 9 објављених научних радова, од којих 5 са SCI листе и то 1 категорије M21, 1 категорије M22 и 3 категорије M23, 4 рада објављена у часописима националног значаја категорије M51 и 2 саопштења са међународних научних скупова штампана у изводу, што чини 11 библиографских јединица.

#### Библиографија Милице Грбовић

##### Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20):

1. M. Grbović, E. Nešović, Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space, **Math. Commun.** Vol. 17, No. 2, (2012) 655–664, ISSN: 1331-0623, IF(2012)=0.447 **M23**.
2. M. Grbović, E. Nešović, On Backlund transformation and vortex filament equation for pseudo null curves in Minkowski 3-space, **Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.** Vol. 13, No. 6 (2016) 1650077 (14 pages), doi: 10.1142/S0219887816500778, ISSN: 0219-8878, IF(2016)=1.068 **M23**.
3. M. Grbović, E. Nešović, On Backlund transformation and vortex filament equation for null Cartan curve in Minkowski 3-space, **Math. Phys. Anal. Geom.** Vol. 19, No. 4, (2016) 1-15, doi: 10.1007/s11040-016-9231-z, ISSN: 1385-0172, IF(2015)=0.787 **M22**.
4. M. Grbović, K. Parslan, E. Nešović, On generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time, **Publ. Inst. Math.**, Nouvelle serie, tome 99 (113), (2016) 77-98, doi: 10.2298/PIM1613077G, ISSN: 0350-1302, IF(2014)=0.270 **M23**.
5. M. Grbović, E. Nešović, On the Bishop frames of pseudo null and null Cartan curves in Minkowski 3-space, **J. Math. Anal. Appl.**, Vol. 461 (2018) 219-233, doi: 10.1016/j.jmaa.2018.01.014, ISSN: 0022-247X, IF(2017)=1.138 **M21**.

##### Научни радови објављени у научним часописима националног значаја (M50):

6. M. Grbović, K. Parslan, E. Nešović, On null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space, **J. Geom.** Vol. 105, No. 1 (2014) 177–183, ISSN: 0047-2468, **M51**.

7. M. Grbović, E. Nešović, A. Pantić, On the second kind twisted surfaces in Minkowski 3-space, *Int. Elec. J. Geom.*, Vol. 8, No. 2 (2015) 9-20, ISSN: 1307-5624, M51.
8. M. Grbović, E. Nešović, On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time, *Novi Sad J. Math.* Vol. 46, No. 1 (2016) 159-170, ISSN: 1450-5444, M51.
9. M. Grbović, E. Nešović, On generalized Bishop frame of null Cartan curve in Minkowski 3-space, *Kragujevac J. Math.* Vol. 43, No. 4 (2019) 559-573, ISSN: 1450-9628, M51.

**Саопштења са међународних скупова штампана у изводу (M34):**

10. M. Grbović, On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time, *XVIII Geometrical Seminar*, Vrnjačka Banja, Serbia, May 25-28, 2014, Book of Abstracts, p. 44.
11. M. Grbović, E. Nešović, On generalized Bishop frame of null Cartan curve in Minkowski 3-space, *XIV Serbian Mathematical Congress (14 SMAK 2018)*, Kragujevac, Serbia, May 16-19, 2018, Book of Abstracts, p. 141, ISBN 978-86-6009-055-5.

**5. Оцена о испуњености обима и квалитета у односу на пријављену тему**

Планирани обим истраживачког рада, циљеви, методолошки приступ у остваривању резултата истраживања, који су прецизирани у оквиру поступка предлагања теме докторске дисертације, су реализовани.

**6. Научни резултати докторске дисертације**

Милица Грбовић на основу резултата из докторске дисертације има објављених 8 научних радова, од којих је 5 са SCI листе и то један категорије M21, један категорије M22 и три категорије M23, три рада објављена у часописима националног значаја категорије M51 и једно саопштење на међународном научном скупу штампано у изводу M34, што чини 9 библиографских јединица.

**Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20):**

1. M. Grbović, E. Nešović, Some relations between rectifying and normal curves in Minkowski 3-space, *Math. Commun.* Vol. 17, No. 2, (2012) 655-664, ISSN: 1331-0623, IF(2012)=0.447 M23.

2. M. Grbović, E. Nešović, On Backlund transformation and vortex filament equation for pseudo null curves in Minkowski 3-space, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* Vol. 13, No. 6 (2016) 1650077 (14 pages), doi: 10.1142/S0219887816500778, ISSN: 0219-8878, IF(2016)=1.068 **M23**.
3. M. Grbović, E. Nešović, On Backlund transformation and vortex filament equation for null Cartan curve in Minkowski 3-space, *Math. Phys. Anal. Geom.* Vol. 19, No. 4, (2016) 1-15, doi: 10.1007/s11040-016-9231-z, ISSN: 1385-0172, IF(2015)=0.787 **M22**.
4. M. Grbović, K. Ilarslan, E. Nešović, On generalized null Mannheim curves in Minkowski space-time, *Publ. Inst. Math., Nouvelle serie*, tome 99 (113), (2016) 77-98, doi: 10.2298/PIM1613077G, ISSN: 0350-1302, IF(2014)=0.270 **M23**.
5. M. Grbović, E. Nešović, On the Bishop frames of pseudo null and null Cartan curves in Minkowski 3-space, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 461 (2018) 219-233, doi: 10.1016/j.jmaa.2018.01.014, ISSN: 0022-247X, IF(2017)=1.138 **M21**.

**Научни радови објављени у научним часописима националног значаја (M50):**

6. M. Grbović, K. Ilarslan, E. Nešović, On null and pseudo null Mannheim curves in Minkowski 3-space, *J. Geom.* Vol. 105, No. 1 (2014) 177-183, ISSN: 0047-2468, **M51**.
7. M. Grbović, E. Nešović, A. Pantić, On the second kind twisted surfaces in Minkowski 3-space, *Int. Elec. J. Geom.*, Vol. 8, No. 2 (2015) 9-20, ISSN: 1307-5624, **M51**.
8. M. Grbović, E. Nešović, On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time, *Novi Sad J. Math.* Vol. 46, No. 1 (2016) 159-170, ISSN: 1450-5444, **M51**.

**Саопштења са међународних скупова штампана у изводу (M34):**

9. M. Grbović, On generalized partially null Mannheim curves in Minkowski space-time, *XVIII Geometrical Seminar*, Vrnjačka Banja, Serbia, May 25-28, 2014, Book of Abstracts, p. 44.

## **7. Применљивост резултата у теорији и пракси**

Добијени резултати ове докторске дисертације су од општег и веома специфичног карактера, дајући многе експлицитне примере нових класа кривих и

површи у просторима Минковског који ће свакако играти значајну улогу у будућем развоју семи-Риманове геометрије и такође у теорији светлосних подмногострукости. Истраживања која су извођена су веома актуелна како са разних аспеката Диференцијалне геометрије семи-Риманових многострукости и подмногострукости тако и са разних аспеката примене. Резултати добијени у овој докторској дисертацији могу се проширити и на друге врсте кривих и површи простора Минковског, као и на просторе већих димензија.

Научни радови кандидата Милице Грбовић настали на основу резултата ове докторске дисертације до сада су цитирани у 18 научних радова без аутоцитата (извор SCOPUS). Прецизније, применљивост резултата ове дисертације огледа се у чињеници да је Бишопов репер псеудо нул криве употребљен при класификацији псеудо нул хелиса типа  $k$  (AIMS Mathematics, Vol. 5, 2020), уведене су нормалне криве у еуклидском простору димензије  $n$  (Advances in Difference equations, Vol. 2018, 2018), Бишопов репер нул Картанове криве је дефинисан у простор-времену Минковског  $\mathbb{E}_1^4$  (Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. Vol. 15, 2018), ректификационе криве су проучаване на 3-димензионалном хиперболичком простору  $\mathbb{H}_0^3$  (Mediterranean J. Math. Vol. 13, 2016) и на 3-димензионалној псеудосфери  $\mathbb{S}_1^3$  (J. Math. Anal. Appl. Vol. 421, 2015), изведени су услови интегралности једначине вртложног влакна псеудо нул криве (Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. Vol. 14, 2017), Манхајмове криве су проучаване на не-равним 3-димензионалним просторним формама (Advances in Math. Phys. Vol. 2015, 2015), проучаване су криве које леже на светлосном конусу (Open Phys. Vol. 15, 2017), испитани су сингуларитети нул хиперповрши одређених псеудо нул кривом (Journal of Function spaces, Vol. 2015, 2015), итд.

## 8. Начин презентовања резултата научној јавности

Научни резултати докторске дисертације презентовани су као саопштење једном међународном скупу, а објављено је пет радова у научним часописима међународног значаја и три рада у научним часописима националног значаја.



## ЗАКЉУЧАК

Поднети рукопис докторске дисертације кандидата Милице Грбовић под насловом „Неке специјалне врсте кривих, репера и површи у просторима Минковског” представља оригинални научни рад из области Диференцијалне геометрије урађен под менторством проф. др Емилије Нешовић, ванредног професора Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу. Приказани резултати су савремени и применљиви у семи-Римановој геометрији и теорији светлосних подмногострукости, као и у савременој математичкој физици, Математичкој анализи и теорији сингуларитета.

Квалитет научних резултата ове докторске дисертације верификован је њиховим публикавањем у виду пет радова у научним часописима међународног значаја од којих је један категорије М21, један категорије М22 и три категорије М23, три рада у научним часописима националног значаја и саопштењем на једном међународном скупу.

Узимајући у обзир прегледани рукопис докторске дисертације и све наведене чињенице, сматрамо да су испуњени сви формални и суштински услови за прихватање наведене докторске дисертације као оригиналног научног рада. Стога предлажемо Наставно–научном већу Природно–математичког факултета у Крагујевцу и Већу за природно–математичке науке Универзитета у Крагујевцу да кандидату Милици Грбовић одобри јавну одбрану докторске дисертације под наведеним насловом.

У Београду, Нишу и Крагујевцу,

06.03.2020. године

## КОМИСИЈА

*M. Petrović - Torgašev*

Проф. др Мирослава Петровић-Торгашев  
редовни професор у пензији (председник комисије)  
Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу  
ужа научна област: Геометрија

*Mirjana Boric*

Проф. др Мирјана Борић, редовни професор  
Математички факултет, Универзитет у Београду  
ужа научна област: Геометрија

*M. Stanković*

Проф. др Мића Станковић, редовни професор  
Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу  
ужа научна област: Математика

*Седлачев руководиоца  
докторских студија.*

*M. Sedlacek*