UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Milica Žigić

Primene polugrupa operatora u nekim klasama Košijevih početnih problema

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2014.

Predgovor

Doktorska disertacija je posvećena primeni teorije polugrupa operatora na rešavanje dve klase Cauchy-jevih početnih problema, te je podeljena u dva osnovna dela.

U prvom delu smo ispitivali parabolične stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine (SPDJ-ne), odredjene sa dva tipa operatora: linearnim zatvorenim operatorom koji generiše C_0-polugrupu i linearnim ograničenim operatorom kombinovanim sa Wick-ovim proizvodom. Svi stohastički procesi su dati Wiener-Itô-ovom haos ekspanzijom. Dokazali smo postojanje i jedinstvenost rešenja ove klase SPDJ-na. Posebno, posmatrali smo i stacionarni slučaj kada je izvod po vremenu jednak nuli.

U drugom delu smo konstruisali kompleksne stepene C-sektorijalnih operatora na sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorima. Konstruisane stepene operatora smo posmatrati kao integralne generatore uniformno ograničenih analitičkih C-regularizovanih rezolventnih familija, i upotrebili dobijene rezultate na izučavanje nepotpunih Cauchy-jevih problema višeg ili necelog reda.

$\diamondsuit \quad \diamondsuit \quad \diamondsuit$

Disertacija je podeljena u tri poglavlja. U prvom poglavlju smo izložili osnovne pojmove, oznake, definicije i važne teoreme, koje smo koristili u daljem radu. Uveli smo pojam uniformno neprekidne i jako neprekidne polugrupe ograničenih linearnih operatora (C_0-polugrupe). Predstavili osnovne osobine C_0-polugrupa i njihovih generatora. Ovi rezultati su kasnije korišćeni u drugom poglavlju. Zatim smo ukratko predstavili analitičke polugrupe i teoriju frakcionih stepena sektorijalnih operatora. Uveli smo i integrisane, konvolucione i $C-$regularizovane polugrupe operatora, kao motivacija za definisanje još opštijeg pojma $(a, k)-$ regularizovanih $C-$rezolventnih familja koje su tema treće glave disertacije.

U drugom poglavlju izučavali smo stohastičke Cauchy-jeve probleme oblika

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(t,x,\omega) &= \mathbf{A}U(t,x,\omega) + \mathbf{B}\lozenge U(t,x,\omega) + F(t,x,\omega)\\ U(0,x,\omega) &= U^0(x,\omega),\end{aligned}$$

gde je $t \in (0,T]$, $\omega \in \Omega$, i $U(t,\cdot,\omega)$ pripada nekom Banach-ovom prostoru X. Operator $\mathbf{A}$ je gusto definisan, generiše C_0-polugrupu, a $\mathbf{B}$ je ograničen linearan operator koji zajedno sa Wick-ovim prizvodom $\lozenge$ uvodi perturbaciju konvolucionog tipa u jednačinu. Za sve stohastičke procese je pretpostavljeno da su dati Wiener-Itô-ovom haos ekspanzijom. Za rešavanje datog Cauchy-jevog problema koristili smo metod propagacije. Ovom metodom mi smo sveli SPDJ na beskonačan trougaoni sistem PDJ-na, koji se može rešiti indukcijom. Sumirajuću sve koeficijente ekspanzije i dokazujući konvergenciju u odgovarajućim težinskim prostorima, dobili smo rešenje početne SPDJ. Na kraju smo posmatrali i stacionarnu jednačinu oblika $\mathbf{A}U + \mathbf{B}\lozenge U + F = 0$.

U trećem poglavlju smo prvo uveli razne tipove operatora $C-$regularizovanog tipa i istakli njihove osnovne strukturne osobine. Zatim smo predstavili metod za konstrukciju frakcionih stepena $C-$sektorijalnih operatora. Analizirali smo neprekidnost, aditivnost i teoremu o preslikavanju spektra za uvedene kompleksne stepene, kao i poznatu nejednakost momenta. U nastavku smo se bavili analizom generisanja uniformno ograničenih analitičkih $C-$regularizovanih rezolventnih familija frakcionim stepenima. Dobijeni rezultati su primenjeni na nepotpune Cauchy-jeve probleme višeg ili necelog reda, uglavnom sa Liouville-ovim desnim vremenskim frakcionim izvodima.

$\lozenge \quad \lozenge \quad \lozenge$

Na ovom mestu želim da izrazim svoju zahvalnost svima koji su me podržavali i pomagali mi tokom izrade doktorske disertacije.

Zahvaljujem se porodici i prijateljima na podršci koju su mi pružili tokom izrade doktorske disertacije.

Zahvaljujem se svim mojim bivšim profesorima i ujedno sadašnjim kolegama koji su probudili u meni interesovanje za matematiku i želju za naučnim radom.

Posebno sam zahvalna članovima komisija za ocenu i odbranu ove doktorske disertacije, vanrednom profesoru Dori Seleši, docentu Tijani Levajković, docentu Jeleni Aleksić, profesoru Marku Nedeljkovu, profesoru Stevanu

Pilipoviću i varednom profesoru Marku Kostiću, što su dali niz korisnih sugestija u cilju poboljšanja kvaliteta disertacije.

Na kraju, posebno bih želela da se zahvalim mentorima, akademiku Stevanu Pilipoviću i vanrednom profesoru Marku Kostiću, koji su mi uvek predstavljali neiscrpan izvor znanja i konstantno pružali snažnu podršku tokom izrade doktorske disertacije. Od njih sam puno naučila tokom proteklih godina i sigurna sam da bez njihovog usmeravanja ova disertacija ne bi imala sadašnji oblik. Oni su i najzaslužniji za sam početak mog bavljenja ovom disciplinom.

♢ ♢ ♢

Doktorska disertacija je izradjena u okviru projekta 174024 MPNTR Metode funkcionalne i harmonijske analize i PDJ sa singularitetima.

Novi Sad, 28.8.2014.

Milica Žigić

Sadržaj

Glava 1

Uvod

Teorija polugrupa ograničenih linearnih operatora se veoma brzo razvijala nakon što su E. Hille [37] i K. Yosida [112] 1948. godine nezavisno objavili prvu važnu teoremu teorije polugrupa operatora, teoremu o karakterizaciji infinitezimalnih generatora. Sem pomenitih autora, teoriju su razvijali medju ostalima i sledeći autori N. Dunford, W. Feller, I. Gelfand, T. Kato, I. Miyadera, R. S. Phillips, L. Schwartz, E. Segal, H. Tanabe, H. F. Trotter, i drugi. Trenutno, broj monografija i naučnih radova iz ove oblasti je toliko velik da je teško sve ih navesti, te ćemo mi navesti samo nekoliko istaknutih referenci. Apstraktna teorija polugrupa linearnih operatora je deo funkcionalne analize i kao takva opisana je u jednoj od klasičnih knjiga ove oblasti [38]. Dobar uvod u apstraknu teoriju kao i neke njene primene je dat u monografijama [27], [30], [86] i [113]. I danas, teorija polugrupa opratora je standardni alat u teoriji verovatnoće, harmonijskoj analizi, teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina, funkcionalnoj analizi, matematičkoj fizici, a posredno i u drugim prirodnim naukama fizici, hemiji, biologiji, genetici.

Uopšteno govoteći, dinamički sistem je jednoparametarska familija $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ operatora na X koja zadovoljava uslove:

$$\begin{aligned} &T(t+s) = T(t)T(s) \quad \text{za sve} \;\; t,s \geq 0, \;\; \text{i} \\ &T(0) = I. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Skup X sadrži sva moguća stanja dinamičkog sistema, $t \in [0, \infty)$ predstavlja vreme, a $T(t)$ je preslikavanje koje opisuje tok promene sistema od stanja $x \in X$ u momentu $t = 0$ do stanja $T(t_0)x$ u momentu $t = t_0$. U terminima teorije polugrupa operatora, prostor stanja X je vektorski prostor, svi operatori $T(t)$ su linearni nad prostorom X, a $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ se naziva (jednoparametarska) polugrupa operatora.

Standardni modeli u kojima se prirodno pojavljuju polugrupe operatora su apstraktni Cauchy-jevi problemi

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) \quad \text{za } t > 0, \\ &u(0) = x, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gde je A linearan operator na Banach-ovom prostoru X. Pitanje koje se ovde postavlja je kako naći diferencijabilnu funkciju u na $[0, \infty)$ tako da važi (1.2). Ako za svako $x \in X$ postoji jedinstveno rešenje $u(\cdot, t)$, onda

$$T(t)x = u(t, x), \quad x \in X, \ t \geq 0,$$

definiše polugrupu operatora. Obrnuti problem, takodje ima smisla: pod kojim uslovima za datu polugrupu operatora $T(t)$, $t \geq 0$ (tj. dinamički sistem) postoji aprstraktni Cauchy-jev poblem (1.2) koji ga opisuje, i kako možemo naći operator A.

U nekim jednostavnim i konkretnim situacijama, relacija izmedju polugrupe operatora $T(t)$, $t \geq 0$ i operatora (infinitezimalnog generatora) A je data sledećim jednačinama:

$$T(t) = e^{tA} \quad \text{ i } \quad A = \frac{d}{dt}T(t)|_{t=0}.$$

U ovom paraglafu izložićemo organizaciju poglavlja. Prvo uvodno poglavlje je podeljeno u tri sekcije. U prvoj sekciji utvrdjena je osnovna notaciju koja će biti upotrebljavana u celoj disertaciji. Takodje, navedene su i osnovne definicije i svojstva pojmova funkcionalne analize koji će biti korišćéni u nastavku rada. U celoj disertaciji X će biti proizvoljan Banach-ov prostor. Posebno su predstavljene funkcije sa vrednostima u proizvoljom Banach-ovom prostoru; izložena je teorija integracije i diferenciranja takvih funkcija. U drugoj sekciji definisane su uniformno neprekidne i jako neprekidne polugrupe ograničenih linearnih operatora (C_0-polugrupe). Predstavljene su osnovne osobine polugrupa i njihovih generatora. I kao najznačajnija se ističe teorema Hille-Yosida koja daje potreban i dovoljan uslov da linearan operator A bude generator polugrupe linearnih operatora $T(t)$, $t \geq 0$. Rezultati ove sekcije biće posebno korišćeni u drugoj glavi disertacije. Zatim smo ukratko predstavili analitičke polugrupe i teoriju frakcionih stepena sektorijalnih operatora, kao uvod u rezultate iz treće glave disertacije. Treća sekcija u uvodnom poglavlju je posvećena prvim uopštenjima teorije C_0-polugrupa operatora. Naime, predstavljene su integrisane, konvolucione i $C-$regularizovane polugrupe operatora, kao motivacija za uvodjenje još opštijeg pojma $(a, k)-$ regularizovanih $C-$rezolventnih familja koje su tema treće glave disertacije.

1.1 Osnovni pojmovi, definicije i oznake

1.1.1 Notacija i osnovne definicije.

Označimo sa $\mathbb{K}$ polje realnih $\mathbb{R}$ ili kompleksnih $\mathbb{C}$ brojeva. Sa X ćemo označavati Banach-ov prostor, sa $\| \ \|$ normu na prostoru X, sa H Hilbert-ov prostor i sa $(\ , \ )$ skalarni proizvod na H. Pretpostavićemo da su X i H realni vektorski prostori, što uključuje i kompleksne vektorske prostore na uobičajen način. Notacije lim i $\to$ upućuju na konvergenciju u jakoj (norm) topologiji.

Neka je A linearna operator nad vektorskim prostorom X, tada se domen i rang operatora A označavaju sa $D(A)$ i $R(A)$, redom. Neka je $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i neka su A i B linearni operatori. Tada definišemo αA, $A + B$ i AB na sledeći način: $D(\alpha A) =: D(A)$, $D(A+B) := D(A) \cap D(B)$ i $D(AB) := \{x \in D(B) : Bx \in D(A)\}$, $(\alpha A)x := \alpha Ax$, $x \in D(\alpha A)$, $(A + B)x := Ax + Bx$, $x \in D(A + B)$ i $(AB)x := A(Bx)$, $x \in D(AB)$.

Neka su $(X, \| \ \|_X)$ i $(Y, \| \ \|_Y)$ normirani vektorski prostori nad istim vektorskim poljem $\mathbb{F}$. Skup svih linearnih i neprekidnih preslikavanja iz X u Y označićemo sa $L(X, Y)$; dodatno, $L(X, X) = L(X)$. Standardnu normu na $L(X, Y)$ definisanu sa

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|A(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|A(x)\|_Y, \ A \in L(X, Y),$$

ćemo nazivati i uniformna operatorska norma, a odgovarajuću topologiju uniformna operatorska topologija. Normiran vektorski prostor $(L(X, Y), \| \ \|)$ je Banach-ov ako je $(Y, \| \ \|_Y)$ Banach-ov prostor.

Linearan operator $A : D(A) \to E$ se naziva zatvoren ako je grafik operatora A, definisan sa $G_A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$, zatvoren podskup od $X \times X$. Potreban i dovoljan uslov da linearan operator $A : D(A) \to X$ bude zatvoren je da za svaku mrežu $(x_\tau)_{\tau \in I}$ u $D(A)$ takvu da je $\lim_{\tau \to \infty} x_\tau = x$ i $\lim_{\tau \to \infty} Ax_\tau = y$, važi sledeće: $x \in D(A)$ i $Ax = y$. Sledeća teorema je poznata kao Teorema o zatvorenom preslikavanju.

Teorema 1.1.1 *Neka su $(X, \| \ \|_X)$ i $(Y, \| \ \|_Y)$ Banach-ovi prostori i neka je $A : X \to Y$ linearan operator takav da je skup $\{(x, Ax) : \ x \in X\} = G(A)$, grafik preslikavanja A, zatvoren u $X \times Y$. Tada je $A \in L(X, Y)$.*

Za linearan operator $A : X \to X$ (ograničen ili neograničen), rezolventni skup je $\rho(A) = \{\lambda : \ \lambda \in \mathbb{C}, \ (\lambda - A)^{-1} \in L(X)\}$. Spektar operatora A je $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Preslikavanje iz $\rho(A)$ u $L(X)$, $\lambda \to (\lambda - A)^{-1}$ se naziva rezolventa operatora A. Za ograničen linearan operator rezolventni skup je uvek otvoren.

Teorema 1.1.2 *Ako je A linearan operator i $\lambda, \mu \in \rho(A)$, tada važi*

$$(\lambda - A)^{-1} - (\mu - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\mu - A)^{-1} \quad \textit{(rezolventna jednakost).}$$

Teorema 1.1.3 *Neka je $A \in L(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ i neka je $\|A\| < |\lambda|$. Tada je $\lambda - A$ invertibilan i važi $(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ i*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Stepene operatora A definišemo rekurzivno uzimajući da je: $A^0 =: I$, $D(A^n) := \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\}$ i $A^n x := A(A^{n-1}x)$, $x \in D(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $D(A^n) = D((A - \lambda)^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

1.1.2 Funkcije sa vrednostima u Banach-ovim prostorima.

Neka je Ω interval (konačan ili beskonačan) u $\mathbb{R}$. Opisaćamo kako se izračunavaju integral i izvod funkcije koja uzima vrednosti u Banach-ovom prostoru X a za domen ima Ω.

Počećemo sa definicijom Bochner-ovog integrala. Neka je $\mathfrak{M}$ klasa svih Lebesgue merljivih skupova sadržanih u Ω, i označiti Lebesgue-ovu meru skupa $A \in \mathfrak{M}$ sa $m(A)$. Funkcija $x : \Omega \to X$ se naziva jednostavna funkcija ako postoji prebrojivo mnogo skupova $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, ...)$ koji su medjusobno disjunktni, takvi da je $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i x je konstanta na svakom A_n.

Definicija 1.1.1 *Neka je data funkcija $x : \Omega \to X$. Ako postoji niz jednostavnih funkcija $\{x_n\}$ takvih da je $x(s) = \lim_{n\to\infty} x_n(s)$ za skoro sve s, tada kažemo da je funkcija x merljiva. Dakle, svaka jednostavna funkcija je merljiva.*

Iz definicije se vidi da je funkcija $\|x\| : \Omega \to \mathbb{R}$ merljiva.

Funkcije koje se dobijaju kao linearne kombinacije merljivih funkcija, proizvod realne (ili kompleksne) merljive funkcije koja uzima konačne vrednosti za skoro sve $s \in \Omega$ i merljive funkcije, i limit niza merljivih funkcija su sve merljive funkcije.

Definicija 1.1.2 *(1) Neka je $x : \Omega \to X$ jednostavna funkcija. Tada na osnovu definicije postoji niz $\{a_n\} \subseteq X$ i niz medjusobno disjunktnih skupova $\{A_n\}$ tako da je $x(s) = a_n$, $s \in A_n$ i $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ako je*

$\|x(s)\|$, $s \in \Omega$, *Lebesgue integrabilna na* Ω, *kažemo da je* $x(s)$, $s \in \Omega$, *Bochner integrabilna i definišemo Bochner-ov integral sa*

$$\int_\Omega x\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} a_n m(A_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n m(A_n).$$

(Iz $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| m(A_n) = \int_\Omega \|x\| dm < \infty$, *sledi da* $\sum_{n=1}^{k} a_n m(A_n)$ *konvergira ka elementu iz* X *kada* $k \to \infty$, *i limit ne zavisi od reprezentacije funkcije* x. *Dakle, definicija ima smisla.)*

(2) Neka je $x : \Omega \to X$. *Ako postoji niz* $\{x_n\}$ *Bochner integrabilnih jednostavnih funkcija na* Ω *takvih da je*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(s) = x(s), \quad \textit{za skoro sve } s$$

i

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|x - x_n\| dm = 0,$$

kažemo da je x *Bochner integrabilna na* Ω. *Bochner-ov integral funkcije* x *definišemo sa*

$$\int_\Omega x\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega x_n\, dm. \tag{1.3}$$

(Kako se može pokazati da limit na desnoj strani ove jednačine postoji, i da limit ne zavisi od izbora niza Bochner integrabilnih jednostavnih funkcija koje aproksimiraju x, *definicija (1.3) ima slisla.) Dalje, ako je* $\Omega = (a, b)$ *ili* $\Omega = [a, b]$, *integral* $\int_\Omega x\, dm$ *ćemo zapisivati sa* $\int_a^b x(s) ds$.

Poznata je sledeća činjenica.

Teorema 1.1.4 *Potreban i dovoljan uslov da funkcija* $x : \Omega \to X$ *bude Bochner integrabilna na* Ω *je da je* x *merljiva i da je* $\|x\|$ *Lebesgue integrabilna na* Ω.

Teorema 1.1.5 *Ako je* $x : \Omega \to X$ *Bochner integrabilna na* Ω, *onda za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji niz* $\{A_n\}$ *merljivih skupova koji su medjusobno disjunktni takvi da je* $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *i važi sledeće tvrdjenje:*

Neka su s_n *proizvoljni elementi u* A_n *Definišimo* $x_\varepsilon(s) = x(s_n)$, $s \in A_n$, $n = 1, 2, \ldots$ *Tada je* x_ε *Bochner integrabilna jednostavna funkcija na* Ω *i važi da je* $\int_\Omega \|x - x_\varepsilon\| dm \le \varepsilon$.

Označimo skup svih Bochner integrabilnih funkcija na Ω sa $L^1(\Omega; X)$. Sledeća tvrdjenja važe isto kao i u slučaju Lebesgue-ovog integrala:

(1) $\left\| \int_\Omega x \, dm \right\| \leq \int_\Omega \|x\| dm, \quad$ za sve $x \in L^1(\Omega; X)$.

(2) Ako je $x_i \in L^1(\Omega; X)$ i $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2$, onda je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in L^1(\Omega; X)$ i

$$\int_\Omega \Big(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\Big) dm = \alpha_1 \int_\Omega x_1 \, dm + \alpha_2 \int_\Omega x_2 \, dm.$$

(3) (Teorema o dominantnoj konvergenciji) Neka je $x_n \in L^1(\Omega; X)$, $n = 1, 2, ...$ i neka je $\lim_{n\to\infty} x_n(s) = x(s)$ za skoro sve s. Ako postoji Lebesgue integrabilna funkcija $g(s)$, $s \in \Omega$, takva da je $\|x_n(s)\| \leq g(s)$ za skoro sve s i $n = 1, 2, ...$, onda je $x \in L^1(\Omega; X)$ i

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega x_n \, dm = \int_\Omega x \, dm.$$

(4) Definišimo $\|x\|_1 = \int_\Omega \|x\| dm$ za $x \in L^1(\Omega; X)$. Tada je $L^1(\Omega; X)$ Banach-ov prostor sa normom $\|x\|_1$.

(5) Neka je $x \in L^1(\Omega; X)$, onda je za skoro sve $s \in \Omega$

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \int_s^{s+h} \|x(t) - x(s)\| dt = 0$$

pa je

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \int_s^{s+h} x(t) dt = x(s).$$

Takodje, za funkcije dve promenljive $x : \Omega \times \Omega \to X$, Fubini-jeva teorema o zameni reda integracije važi pod istim uslovima kao i za Lebesgue-ove integrale.

Dalje, uvedimo koncepte neprekidnosti i diferencijabilnosti funkcije $x : \Omega \to X$.

Definicija 1.1.3 *Neka je Ω otvoren interval, $x : \Omega \to X$ i $s_0 \in \Omega$. Ako je $\lim_{s\to s_0} x(s) = x(s_0)$, tj. $\lim_{s\to s_0} \|x(s) - x(s_0)\| = 0$, onda kažemo da je funkcija x neprekidna u s_0.*

Neka je Ω zatvoren interval (na primer, $\Omega = [a, b]$). Kažemo da je x neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ ako je neprekidna na otvorenom intervali (a, b) i važi $\lim_{s\to a^+} x(s) = x(a)$ i $\lim_{s\to b^-} x(s) = x(b)$.

Napomenimo da ako je funkcija x neprekidna na ograničenom zatvorenom intervalu $[a, b]$, onda je x Bochner integrabilna na $[a, b]$. U tom slučaju, možemo definisati integral funkcije x na $[a, b]$ metodom Riemamm-a, i takav bi se integral poklopio sa Bochner-ovim integralom.

Definicija 1.1.4 *Neka je $x : (a, b) \to X$ i $s_0 \in (a, b)$. Ako važi da je $\lim_{h\to 0} h^{-1}[x(s_0 + h) - x(s_0)] = x_0$, onda kažemo da je funkcija x diferencijabilna u s_0 i x_0 zovemo izvod funkcije x u s_0.*

Izvod funkcije $x(s),\ s \in (a, b)$ označavamo sa $(d/ds)x(s)$ ili $x'(s)$ ili $dx(s)$ ili $Dx(s),\ s \in (a, b)$.

Dalje, ako je $\lim_{h\to 0^+} h^{-1}[x(s_0 + h) - x(s_0)] = x_0$, kažemo da je x_0 desni izvod funkcije x u s_0. Levi izvod definišemo slično. Desni (levi) izvod funkcije x označavamo sa $D^+x(s)$ $(D^-x(s))$ ili $d^+x(s)(d^-x(s)),\ s \in (a, b)$. Ako je $x : [a, b] \to X$ diferencijabilna na (a, b), i ima desni i levi izvodu u a i b, redom, onda kažemo da je funkcija x diferencijabilna na $[a, b]$.

Teorema 1.1.6 *Neka je $x : (a, b) \to X$ neprekidna na (a, b). Ako postoji desni izvod $D^+x(s)$ za svako $s \in (a, b)$, i funkcija D^+x je neprekidan na (a, b), onda je funkcija x diferencijabilna na (a, b).*

1.2 C_0-polugrupe operatora

Naša namera je da u ovoj sekciji izdvojimo najosnovnije karakteristike C_0-polugrupa operatora i njihovih generatora, koje će biti korišćene u narednim poglavljima disertacije. Izlaganje je uglavnom bazirano na monografiji [86].

Definicija 1.2.1 *Neka je X Banach-ov prostor. Jednoparametarska familija $T(t),\ 0 \leq t < \infty$, ograničenih linearnih operatora iz X u X je polugrupa ograničenih linearnih operatora na X ako važi*

(1) $T(0) = I$, (I je identičko preslikavanje na X).

(2) $T(t + s) = T(t)T(s)$ za sve $t, s \geq 0$ (osobina polugrupe).

Polugrupa ograničenih linearnih operatora, $T(t)$, je uniformno neprekidna ako je

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0.$$

Linearni operator A definisan sa

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ postoji} \right\}$$

i

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+ T(t)x}{dt}\Big|_{t=0} \quad \text{za } x \in D(A)$$

je infinitezimalni generator polugrupe $T(t)$, $D(A)$ je domen od A.

Iz definicije je jasno da ako je $T(t)$ uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora onda je

$$\lim_{t \to s} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Teorema 1.2.1 *Linearni operator A je infinitezimalni generator uniformno neprekidne polugrupe ako i samo ako je A ograničen linearan operator.*

Iz definicije 1.2.1 jasno je da polugrupa $T(t)$ ima jedinstveni infinitezimalni generator. Ako je $T(t)$ uniformno neprekidna njen infinitezimalni generator je ograničen linearan operator. S druge strane, svaki ograničen linearan operator A je infinitezimalni generator jedinstvene uniformno neprekidne polugrupe $T(t)$.

Lema 1.2.1 *Neka je $T(t)$ uniformno neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora. Tada*

(1) Postoji konstanta $\omega \geq 0$ tako da je $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$.

(2) Postoji jedinstven ograničen linearan operator A tako da je $T(t) = e^{tA}$.

(3) Operator A iz dela (2) je infinitezimalni generator od $T(t)$.

(4) $t \to T(t)$ je diferencijabilno u normni i važi da je

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Definicija 1.2.2 (C_0- polugrupe operatora) *Polugrupa $T(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, ograničenih linearnih operatora na X je jako neprekidna polugrupa ograničenih linearnih operatora ako je*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x, \quad \text{za sve } x \in X.$$

Jako neprekidnu polugrupu ograničenih linearnih operatora na X ćemo zvati polugrupa klase C_0 ili kratko C_0-polugrupa.

Napomenimo ovde da ćemo tokom celokupnog izlaganja koristiti nekoliko uobičejnih načina za navodjenje C_0-polugrupe; standardno $T(t),\ 0 \leq t \leq \infty$ ili, skraćeno, $T(t)$ ako je iz konteksta jasan domen parametra t; $\{T(t),\ 0 \leq t \leq T\}$, $0 < T \leq \infty$; zatim $(T_t)_{t\geq 0}$ ili skraćeno (T_t); i $(T(t))_{t\geq 0}$ ili skraćeno $(T(t))$.

Teorema 1.2.2 *Neka je $T(t)$ polugrupa klase C_0. Tada postoje konstante $\omega \geq 0$ i $M \geq 1$ tako da je*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \text{za } 0 \leq t < \infty.$$

Lema 1.2.2 *Ako je $T(t)$ C_0-polugrupa onda je za sve $x \in X$, preslikavanje $t \to T(t)x$ neprekidna funkcija iz $[0,\infty)$ u X.*

Teorema 1.2.3 *Neka je $T(t)$ polugrupa klase C_0 i neka je A njen infinitezimalni generator. Tada*

(1) Za $x \in X$, važi da je

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds = T(t)x.$$

(2) Za $x \in X$, važi da je $\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$ i

$$A\Big(\int_0^t T(s)x\,ds\Big) = T(t)x - x.$$

(3) Za $x \in D(A)$, važi da je $T(t)x \in D(A)$ i

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(4) Za $x \in D(A)$, važi da je

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\,d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\,d\tau.$$

Lema 1.2.3 *Ako je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $T(t)$ onda je $D(A)$, domen od A, gust u X i A je zatvoren linearan operator.*

Ako je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe onda na osnovu leme 1.2.3 važi da je $\overline{D(A)} = X$. Zapravo, mnogo jače tvrdjenje važi.

Teorema 1.2.4 *Neka je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $T(t)$. Ako je $D(A^n)$ domen od A^n, onda je $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ gust u X.*

Primer 1.2.1 *Neka je $X = BU(\mathbb{R})$ Banach-ov prostor ograničenih uniformno neprekidnih funkcija na $\mathbb{R}$ sa supremom normom. Za $f \in X$ definišimo*

$$(T(t)f)(s) = f(t+s).$$

Lako je proveriti da je $T(t)$ polugrupa klase C_0 koja zadovoljava da je $\|T(t)\| \leq 1$ za sve $t \geq 0$. Infinitezimalni generator od $T(t)$ je definisan na $D(A) = \{f \in X : f' \text{ postoji i } f' \in X\}$ i $(Af)(s) = f'(s)$ za sve $f \in D(A)$.

Hille-Yosida-ina teorema

Neka je $T(t)$ polugrupa klase C_0. Teorema 1.2.2 kaže da postoje konstante $\omega \geq 0$ i $M \geq 1$ tako da je $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ za sve $t \geq 0$. Ako je $\omega = 0$, polugrupa $T(t)$ se naziva uniformno ograničena, a ako je još i $M = 1$ onda se naziva C_0-polugrupa kontrakcija.

Teorema 1.2.5 (Hille-Yosida [37] i [112]) *Linearni (neograničen) operator A je infinitezimalni generator C_0-polugrupe kontrakcija $T(t)$, $t \geq 0$ ako i samo ako je*

(1) A zatvoren i $\overline{D(A)} = X$.

(2) Rezolventni skup $\rho(A)$ od A sadrži realnu polupravu $(0, \infty)$ i za svako $\lambda > 0$ važi da je

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Zapravo može se pokazati da je rezolventi skup i mnogo veći.

Lema 1.2.4 *Neka je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe kontrakcija $T(t)$. Rezolventni skup od A sadrži otvorenu desnu poluravan, tj. $\rho(A) \supseteq \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ i za takve λ važi*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}.$$

Za operator A koji zadovoljava uslove (1) i (2) može se pokazati da ima i sledeće osobine.

Lema 1.2.5 *Neka A zadovoljava uslove (1) i (2) iz teoreme 1.2.5. Tada je*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda - A)^{-1}x = x \quad \text{za sve } x \in X.$$

Sada, definišimo, za svako $\lambda > 0$, Yosida-inu aproksimaciju za A sa

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda - A)^{-1} = \lambda^2(\lambda - A)^{-1} - \lambda I.$$

A_λ je aproksimacija za A u sledećem smislu:

Lema 1.2.6 *Neka A zadovoljava uslove (1) i (2) iz teoreme 1.2.5. Ako je A_λ Yosida-ina aproksimacija od A, onda je*

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax \quad \text{za sve } x \in D(A).$$

Sledeći primer pokazuje da rezolventni skup infinitezimalnog generatora C_0-polugrupe kontrakcija ne mora da sadrži ništa više od desne poluravni.

Primer 1.2.2 *Neka je $X = BU(0, \infty)$, prostor svih ograničenih i uniformno neprekidnih funkcija na $[0, \infty)$ sa supremum normom. Definišimo*

$$(T(t)f)(s) = f(t + s).$$

$T(t)$ je C_0-polugrupa kontrakcija na X. Njen infinitezimalni generator je dat sa

$$D(A) = \{f : \ f, f' \in X\}$$

i

$$(Af)(s) = f'(s) \quad \text{za sve } f \in D(A).$$

Na osnovu leme 1.2.4 znamo da je $\rho(A) \supseteq \{\lambda : \ \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$. Za svako kompleksno λ jednačina $(\lambda - A)\varphi_\lambda = 0$ ima netrivijalno rešenje $\varphi_\lambda(s) = e^{\lambda s}$. Ako je $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$, $\varphi_\lambda \in X$, pa je zato zatvorena leva poluravan u spektru $\sigma(A)$ operatora A.

Sada ćemo dati teoremu Hille-Yosida-inog tipa o karakterizaciji infinitezimalnog generatora uopštene C_0-polugrupe ograničenih operatora. Na osnovu teoreme 1.2.2 znamo da za takve polugrupe postoje realne konstante $M \geq 1$ i ω takve da je $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Naredna teorema je skoro istovremeno bila dokazana od strane W. Feller-a [28], I. Miyadera-e [82] i R.S. Phillips-a [89].

Teorema 1.2.6 *Linearni operator A je infinitezimalni generator C_0-polugrupe $T(t)$ koja zadovoljava da je $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, ako i samo ako*

(1) A je zatvoren i $D(A)$ je gust u X.

(2) Rezolventni skup $\rho(A)$ od A sadrži polupravu (ω, ∞) i

$$\|((\lambda - A)^{-1})^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \quad \text{za sve} \;\; \lambda > \omega, \; n = 1, 2, ... \tag{1.4}$$

Lema 1.2.7 *Uslov da je svako λ, $\lambda > \omega$, u rezolventnom skupu od A zajedno sa ocenom (1.4) implicira da svako kompleksno λ takvo da je $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ pripada rezolventnom skupu i važi da je*

$$\|((\lambda - A)^{-1})^n\| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n} \quad \text{za svako} \;\; \mathrm{Re}\,\lambda > \omega, \; n = 1, 2, ...$$

Inverzna Laplace-ova transformacija

Jedan od osnovnih problema u teoriji polugupa operatora je relacija izmedju polugrupe i njenog infinitezimalnog generatora. Za datu polugrupu $T(t)$ infinitezimalni generator je dat sa

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{za } x \in D(A).$$

Drugi način za odedjivanje operatora A, ili tačnije rezolvente operatora A, je iz jednakosti

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \quad \text{za sve} \;\; x \in X, \; \mathrm{Re}\,\lambda > \omega. \tag{1.5}$$

Sa tačke gledišta primene u rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina, mnogo je važnije odrediti polugrupu $T(t)$ iz njenog infinitezimalnog generatora. Razlog za to je što je za $x \in D(A)$, $T(t)x$ rešenje početnog problema

$$\frac{du}{dt} - Au = 0, \quad u(0) = x.$$

Dakle, ako $T(t)$ zadovoljava da je $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ onda rezolventa od A zadovoljava (1.5), tj. rezolventa od A je Laplace-ova transformacija polugrupe. Zato mi očekujemo da ćemo dobiti polugrupu $T(t)$ iz rezolvente od A primenom inverzne Laplace-ove transformacije. Sledeća teorema daje dovoljan (ali ne i potreban) uslov da operator A bude infinitezimalni generator C_0-polugrupe. Za razliku od uslova u teoremi 1.2.6, uslovi sledeće teoreme su često lakši za proveru u konkretnim primerima.

Teorema 1.2.7 *Neka je A gusto definisan operator na X koji zadovoljava sledeće uslove.*

(1) Za neko $0 < \delta < \pi/2$, $\rho(A) \supseteq \Sigma_\delta = \{\lambda : \; |\arg\lambda| < \pi/2 + \delta\} \cup \{0\}$.

(2) Postoji konstanta M *tako da je*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \le \frac{M}{|\lambda|} \qquad \text{za sve } \; \lambda \in \Sigma_\delta, \; \lambda \neq 0.$$

Onda je A *infinitezimalni generator* C_0-*polugrupe* $T(t)$ *koja zadovoljava da je* $\|T(t)\| \le C$ *za neku konstantu* C. *Dalje,*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} \, d\lambda \tag{1.6}$$

gde je Γ *glatka kriva u* Σ_δ *koja ide od* $\infty e^{-i\vartheta}$ *do* $\infty e^{i\vartheta}$ *za* $\pi/2 < \vartheta < \pi/2 + \delta$. *Integral (1.6) konvergira za* $t > 0$ *u uniformnoj operatorskoj topologiji.*

Perturbacije linearnim ograničenim operatorima

Teorema 1.2.8 *Neka je* X *Banach-ov prostor i neka je* A *infinitezimalni generator* C_0-*polugrupe* $T(t)$ *na* X, *takve da je* $\|T(t)\| \le Me^{\omega t}$. *Ako je* B *ograničen linearan operator na* X *onda je* $A + B$ *infinitezimalni generator* C_0-*polugrupe* $S(t)$ *na* X, *takve da je* $\|S(t)\| \le Me^{(\omega + M\|B\|)t}$.

Apstraktni Cauchy-jevi problemi

Neka je X Banach-ov prostor i neka je A linearan operator iz $D(A) \subseteq X$ u X. Za dato $x \in X$, apstraktni Cauchy-jev problem koji odgovara operatoru A sa početnim uslovom x predstavlja odredjivanje rešenja u početnog problema

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= x, \end{aligned} \tag{1.7}$$

gde pod rešenjem podrazumevamo funkciju $u(t)$ sa vrednostima u Banach-ovom prostoru X takvu da je $u(t)$ neprekidna za $t \ge 0$, neprekidno diferencijabilna za $t > 0$, $u(t) \in D(A)$, $t > 0$ i u zadovoljava (1.7). Primetimo da uslovi $u(t) \in D(A)$, $t > 0$ i u je neprekidna u $t = 0$ impliciraju da (1.7) ne može imati rešenje za $x \notin \overline{D(A)}$. Jasno je da ako je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $T(t)$, onda apstraktni Cauchy-jev problem odredjen operatorom A ima rešenje dato sa $u(t) = T(t)x$, za svako $x \in D(A)$ (videti Teoremu 1.2.3). Nije teško pokazati da je to i jedino rešenje od (1.7).

Teorema 1.2.9 *Neka je A gusto definisan linearan operator sa nepreznim rezolventnim skupom $\rho(A)$. Početni problem (1.7) ima jedinstveno rešenje $u(t)$, koje je neprekidno diferencijabilno na $[0,\infty)$, za svako $x \in D(A)$ ako i samo ako je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $T(t)$.*

Posmatrajmo nehomogeni početni problem

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= Au(t) + f(t), \quad t > 0, \\ u(0) &= x \end{aligned} \tag{1.8}$$

gde je $f : [0,T) \to X$. Pretpostavimo da je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $T(t)$ tako da odgovarajući homogeni početni problem, tj. jednačina gde je $f \equiv 0$, ima jedinstveno rešenje za svaki početni uslov $x \in D(A)$.

Definicija 1.2.3 *Funkcija $u : [0,T) \to X$ je (klasično) rešenje početnog problema (1.8) na intervalu $[0,T)$ ako je u neprekidna na $[0,T)$, neprekidno diferencijabilna na $(0,T)$, $u(t) \in D(A)$, $t \in (0,T)$ i (1.8) je zadovoljeno na $[0,T)$.*

Napomenimo da, ako je $T(t)$ C_0-polugrupa generisana operatorom A i ako je u rešenje početnog problema (1.8), onda je funkcija g sa vrednostima u X, data sa $g(s) = T(t-s)u(s)$, diferencijabilna za $s \in (0,t)$ i važi da je

$$\begin{aligned} \frac{dg}{ds} &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)u'(s) \\ &= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\ &= T(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Ako je $f \in L^1((0,T),X)$ onda je $T(t-s)f(s)$ integrabilna funkcija, pa integraleći prethodnu jednakost nad intervalom $(0,t)$ dobijamo da je

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Teorema 1.2.10 *Neka je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $T(t)$, neka je $f \in L^1((0,T),X)$ neprekidna nad $(0,T]$ i neka je*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0,T].$$

Početni problem (1.8) ima rešenje u na $[0,T)$ za svako $x \in D(A)$ ako je zadovoljen jedan od sledećih uslova:

1. *$v(t)$ je neprekidno diferencijabilna na $(0, T)$.*

2. *$v(t) \in D(A),\ t \in (0, T)$ i $Av(t)$ je neprekidna na $(0, T)$.*

Ako (1.8) ima rešenje u na $[0, T)$ za neko $x \in D(A)$ tada v zadovoljava oba uslova (1) i (2).

Posledica 1.2.1 *Neka je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe $T(t)$. Ako je f neprekidno diferencijabilna na $[0, T]$ onda početni problem (1.8) ima rešenje u na $[0, T]$ za svako $x \in D(A)$.*

Napomena 1.2.1 *Ako je $f \in C^1([0, T], X),\ x \in D(A)$ i ako je u rešenje početnog problema (1.8) onda je $u \in C^1([0, T], X)$ i $\frac{du}{dt}(0) = Ax + f(0)$.*

Analitičke polugrupe

Do sad smo radili sa polugrupama čiji je domen pozitivni deo $x-$ose. Sad ćemo razmotriti mogućnost proširivanja domena parametra na oblast u kompleksnoj ravni koji sadrži pozitivan deo $x-$ose. Jasno je da ako hoćemo da očuvamo strukturu polugrupe, domen u kom je promenljiva kompleksan broj mora biti aditivna polugrupa kompleksnih brojeva.

Definicija 1.2.4 *Neka je $\Sigma_{\varphi_1,\varphi_2} = \{z : \ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$ i za $z \in \Sigma_{\varphi_1,\varphi_2}$ neka je $T(z)$ ograničen linearan operator. Familija $T(z),\ z \in \Sigma_{\varphi_1,\varphi_2}$ je analitička polugrupa na $\Sigma_{\varphi_1,\varphi_2}$ ako je*

(1) $z \to T(z)$ analitička na $\Sigma_{\varphi_1,\varphi_2}$.

(2) $T(0) = I$ i $\lim_{z\to 0,\ z\in\Sigma_{\varphi_1,\varphi_2}} T(z)x = x$ za sve $x \in X$.

(3) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ za sve $z_1, z_2 \in \Sigma_{\varphi_1,\varphi_2}$.

Polugrupu $T(t)$ ćemo nazivati analitička ako je analitička na nekom sektoru $\Sigma_{\varphi_1,\varphi_2}$ koji sadrži realni deo $x-$ose.

Jasno, restrikcija analitiče polugrupe na realnu osu je C_0-polugrupa. Mi ćemo u nastavku biti zainteresovani za mogućnost produženja date C_0-polugrupe do analitiče polugrupe na nekom sektoru $\Sigma_{\varphi_1,\varphi_2}$ oko pozitivnog dela $x-$ose.

Kako množenje C_0-polugrupe $T(t)$ sa $e^{\omega t}$ ne utiče na mogućnost ili nemogućnost proširenja do analitičke polugrupe na nekom sektoru $\Sigma_{\varphi_1,\varphi_2}$, mi ćemo se u ovom poglavlju ograničiti na ispitivanje uniformno ograničenih C_0-polugrupa, tj. onih polugrupa $T(t)$ za koje postoji $M > 0$ tako da je $\|T(t)\| \leq M,\ t \geq 0$. Rezultati za uopštene C_0-polugrupe će iz odgovarajućih teorema za uniformno ograničene C_0-polugrupe slediti na očigledan način. Zbog jednostavnosti ćemo još najčešće pretpostavljati da je $0 \in \rho(A)$ gde je A infinitezimalni generator polugrupe $T(t)$. Ovo se opet, uvek može prevazići množenjem uniformno ograničene C_0-polugrupe $T(t)$ za $e^{-\varepsilon t}$ za $\varepsilon > 0$. Označimo sa $\Sigma_\delta = \{z : \ |\arg z| < \delta\}$.

Teorema 1.2.11 *Neka je $T(t)$ uniformno ograničena C_0-polugrupa. Neka je A infinitezimalni generator od $T(t)$ i pretpostavimo da je $0 \in \rho(A)$. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(1) $T(t)$ se može proširiti do analitičke polugrupe na sektor $\Sigma_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\}$ i $\|T(z)\|$ je uniformno ograničen na svakom zatvorenom podsektoru $\overline{\Sigma}_{\delta'}$, $\delta' < \delta$, od Σ_δ.

(2) Postoji konstanta C tako da je za sve $\sigma > 0$, $\tau \neq 0$

$$\|(\sigma + i\tau - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(3) Postoje $0 < \delta < \pi/2$ i $M > 0$ tako da je

$$\rho(A) \supseteq \Sigma = \left\{\lambda : \ |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}$$

i

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{za } \lambda \in \Sigma, \ \lambda \neq 0.$$

(4) $T(t)$ je diferencijabilna za $t > 0$ i postoji konstanta C tako da je

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t} \quad \text{za } t > 0.$$

Frakcioni stepeni zatvorenih operatora

U ovom poglavlju ćemo definisati frakcione stepene odredjenih neograničenih linearnih operatora i ispitati neke od njihovih osobina. Uglavnom ćemo se koncentrisati na frakcione stepene operatora A za koji je $-A$ infinitezimalni generator analitičke polugrupe.

Koristićemo sledeći uslov.

(H) Neka je A gusto definisan zatvoren linearan operator za koji je

$$\rho(A) \supseteq \Sigma^+ = \{\lambda : \ 0 < \omega < |\arg \lambda| \leq \pi\} \cup V$$

gde je V okolina 0, i

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{1+|\lambda|} \quad \text{za} \;\; \lambda \in \Sigma^+.$$

Ako je $M = 1$ i $\omega = \pi/2$ onda je $-A$ infinitezimalni generator C_0-polugrupe. Ako je $\omega < \pi/2$ onda je, na osnovu teoreme 1.2.11, $-A$ infinitezimalni generator analitičke polugrupe. Uslov da $0 \in \rho(A)$ i da je zato i cela okolina V od nule u $\rho(A)$ su uzeti radi pojednostavljenja. Većina rezultata vezana za frakcione stepene važe i kada $0 \notin \rho(A)$.

Za operator A koji zadovoljava uslov (H) i $\alpha > 0$ definišemo

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_C z^{-\alpha}(A-z)^{-1}dz \tag{1.9}$$

gde putanja C ide kroz rezolventni skup od A od $\infty e^{-i\vartheta}$ do $\infty e^{i\vartheta}$, $\omega < \vartheta < \pi$, izbegavajući negativni deo $x-$ose i koordinatni početak i $z^{-\alpha}$ uzimamo da je pozitivno za ralne vrednosti z. Integral (1.9) konvergira u uniformnoj operatorskoj toplogiji za sve $\alpha > 0$ i definiše ograničeni linearan operator $A^{-\alpha}$. Ako je $\alpha = n$ podintegralna funkcija je analitička na Σ^+ i lako je proveriti da se putanja integracije C može zameniti malim krugom oko koordinatnog početka. Tada koristeći teoremu o rezidijumu dobijamo da je integral jednak A^{-n}, pa kada α uzima vrednosti prirodnih brojeva, definicija (1.9) se poklapa sa klasičnom definicijom od $(A^{-1})^n$.

Za $0 < \alpha < 1$ možemo, koristeći Fubini-jevu teoremu i teoremu o rezidijumu, dobiti da je integral (1.9) jednak sa

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty t^{-\alpha}(t+A)^{-1}dt \quad 0 < \alpha < 1.$$

Ako je $\omega < \pi/2$, tj. ako je $-A$ infinitezimalni generator analitičke polugrupe $T(t)$ koristićemo i sledeću reprezentaciju kao definiciju frakcionih stepena $A^{-\alpha}$ za $\alpha > 0$.

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}T(t)\,dt \tag{1.10}$$

gde integral konvergira u uniformnoj operatorskoj toplogiji za sve $\alpha > 0$. Definišimo $A^{-0} = I$.

Lema 1.2.8 *Za $\alpha, \beta \geq 0$ važi da je*

$$A^{-(\alpha+\beta)} = A^{-\alpha} \cdot A^{-\beta}.$$

Lema 1.2.9 *Postoji konstanta C tako da je*

$$\|A^{-\alpha}\| \leq C \quad \text{za } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Lema 1.2.10 *Za sve $x \in X$ imamo da je*

$$\lim_{\alpha \to 0} A^{-\alpha} x = x.$$

Kombinujući prethodne rezultate dobijamo da je

Lema 1.2.11 *Ako A zadovoljava uslov (H) gde je $\omega < \pi/2$ onda je A^{-t} C_0-polugrupa ograničenih linearnih operatora.*

Lema 1.2.12 *$A^{-\alpha}$ definisano u (1.10) je injektivno.*

Definicija 1.2.5 *Neka A zadovoljava uslov (H) gde je $\omega < \pi/2$. Za svako $\alpha > 0$ definišemo*

$$A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1}.$$

Za $\alpha = 0$, $A^{\alpha} = I$.

U nastavku ćemo pretpostaviti da A zadovoljava uslov (H) gde je $\omega < \pi/2$ i prezentovati neke osnovne osobine A^{α}.

Teorema 1.2.12 *Neka je A^{α} dato definicijom 1.2.5. Onda važi da je*

(1) A^{α} zatvoren operator sa domenom $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$.

(2) $\alpha \geq \beta > 0$ implicira $D(A^{\alpha}) \subseteq D(A^{\beta})$.

(3) $\overline{D(A^{\alpha})} = X$ za sve $\alpha \geq 0$.

(4) Ako su α, β realni, onda je

$$A^{\alpha+\beta} x = A^{\alpha} \cdot A^{\beta} x$$

za sve $x \in D(A^{\gamma})$ gde je $\gamma = \max(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$.

U definiciji 1.2.5 definišemo A^{α} na indirektan način. Za $x \in D(A) \subseteq D(A^{\alpha})$, $0 < \alpha < 1$, imamo da važi sledeća eksplicitna formula za $A^{\alpha} x$.

Teorema 1.2.13 *Neka je $0 < \alpha < 1$. Ako je $x \in D(A)$ onda je*

$$A^{\alpha} x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} A(t+A)^{-1} x \, dt.$$

Teorema 1.2.14 *Neka je $0 < \alpha < 1$. Tada postoji konstanta $C_0 > 0$ tako da za sve $x \in D(A)$ i $\rho > 0$, imamo da je*

$$\|A^\alpha x\| \leq C_0(\rho^\alpha \|x\| + \rho^{\alpha-1}\|Ax\|)$$

i

$$\|A^\alpha x\| \leq 2C_0 \|x\|^{1-\alpha}\|Ax\|^\alpha.$$

Može se pokazati da ako A zadovoljava uslov (H) bez ikakvih restrikcija na ω, onda je $-A^\alpha$ za $\alpha \leq 1/2$ infinitezimalni generator C_0-polugrupe ograničenih linearnih operatora. Ako je $\omega < \pi/2$ kao što smo pretpostavili, onda je $-A^\alpha$ infinitezimalni genearator analitičke polugrupe za sve $0 < \alpha \leq 1$.

Završićemo ovo poglavlje nekim rezultatima vezanim za A^α i analitičkim polugrupama $T(t)$ generisanim sa $-A$.

Teorema 1.2.15 *Neka je $-A$ infinitezimalni generator analitičke polugrupe $T(t)$. Ako je $0 \in \rho(A)$ onda je*

(1) $T(t) : X \to D(A^\alpha)$ za sve $t > 0$ i $\alpha \geq 0$.

(2) Za sve $x \in D(A^\alpha)$ imamo da je $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$.

(3) Za sve $t > 0$ operator $A^\alpha T(t)$ je ograničen i važi

$$\|A^\alpha T(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}.$$

(4) Neka je $0 < \alpha \leq 1$ i $x \in D(A^\alpha)$ onda je

$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

1.3 Integrisane, konvolucione i $C-$regularizovane polugrupe

U nastavku ovog uvodnog poglavlja definisaćemo tri klase polugrupa operatora: integrisane, konvolucione i $C-$regularizovane polugrupe i dati njihove osnovne osobine. Naše izlaganje u ovoj sekciji će biti rukovodjeno monografijom [80].

1.3.1 Integrisane polugrupe

Poznato je da apstraktni Cauchy-jev problem (1.7) gde je A generator C_0-polugrupe, ima jedinstveno rešenje za sve početne uslove $x \in D(A)$. Sada ćemo posmatrati familije ograničenih operatora koje odgovaraju početnom problemu (1.7) a koji nema jedinstveno rešenje za sve $x \in D(A)$. Prvi tip ovakvih familija su $n-$puta integrisane polugrupe. One odgovaraju početnom problemu (1.7) koji ima jedinstveno rešenje za sve $x \in D(A^{n+1})$. Ako A generiše C_0-polugrupu $T(t)$, onda je $n-$puta integrisana polugrupa generisana sa A primitivna funkcija $n-$tog reda familije $T(t)$. Nasuprot C_0-polugrupama, integrisane polugrupe mogu da ne budu eksponencijalno ograničene, mogu biti lokalno definisane na $[0,T)$ i njihovi generatori mogu da ne budu gusto definisani. U ovom poglavlju ćemo posmatrati nedegenerisane eksponencijalno ograničene i lokalno integrisane polugrupe.

Eksponencijalno ograničene integrisane polugrupe

Definicija 1.3.1 *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Jedno parametarska familija ograničenih linearnih operatora $\{V(t) : \ t \geq 0\}$ se naziva eksponencijalno ograničena $n-$puta integrisana polugrupa ako važe sledeći uslovi*

(V1) $V(t)V(s) = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\int_0^s \Big((s-r)^{n-1}V(t+r) - (t+s-r)^{n-1}V(r)\Big)dr,$ *za sve* $s, t \geq 0$*;*

(V2) $V(t)$ *je jako neprekidna u odnosu na* $t \geq 0$*;*

(V3) $\exists\, K > 0,\ \omega \in \mathbb{R} :\ \|V(t)\| \leq Ke^{\omega t},\ t \geq 0.$

Polugrupa $V(t)$ se naziva nedegenerisana ako

(V4) $V(t)x = 0$ *za sve* $t \geq 0$ *implicira da je* $x = 0$

C_0-polugrupa se naziva $0-$puta integrisana polugrupa.

Iz (V1) i (V4) sledi da je $V(0) = 0$.
Pretpostavimo da je $T(t)$ C_0-polugrupa. Posmatrajmo integrale

$$V_1(t) = \int_0^t T(s)\, ds, ...$$
$$V_n(t) = \int_0^t V_{n-1}(s)\, ds = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}T(s)\, ds, \quad t \geq 0.$$

Tada za generator A imamo da važi

$$\lambda^{-1}(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} V_1(t)\, dt, ...$$
$$\lambda^{-n}(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} V_n(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega$$

tj.

$$(\lambda - A)^{-1} = R_A(\lambda) = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} V_n(t)\, dt.$$

Pokazaćemo da operator $R_A(\lambda)$, koji je definisan gornjom jednakosti, zadovoljava rezolventnu jednakost ako i samo ako V_n zadovoljava (V1) i (V3).

Propozicija 1.3.1 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $V(t)$ strogo neprekidna operatorska funkcija takva da*

$$\exists\, K > 0,\ \omega \in \mathbb{R} :\ \|V(t)\| \leq K e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Neka je

$$R(\lambda) = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda t} V(t)\, dt, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > \omega.$$

Tada $R(\lambda)$ zadovoljava rezolventnu jednakost

$$(\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu) = R(\lambda) - R(\mu)$$

za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ takve da je $\mathrm{Re}\,\lambda$, $\mathrm{Re}\,\mu > \omega$ ako i samo ako $V(t)$ zadovoljava (V1).

Ako je polugrupa $\{V(t) :\ t \geq 0\}$ nedegenerisana, onda je operator $R(\lambda)$ invertibilan. Iz rezolventne jednakosti sledi da $\lambda I - R(\lambda)^{-1}$ ne zavisi od λ, tj. da postoji jedinstven operator A takav da je $R(\lambda)^{-1} = \lambda I - A$ za $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$. Ovaj operator $A = \lambda I - R(\lambda)^{-1}$ se naziva generator $n-$puta integrisane polugrupe $\{V(t) :\ t \geq 0\}$.

Sada ćemo utvrditi vezu izmedju integrisanih polugrupa i Cauchy-jevog problema (1.7).

Propozicija 1.3.2 *Neka je A generator $n-$puta integrisane polugrupe $\{V(t) : t \geq 0\}$ (gde je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Tada važi da je*

1) za $x \in D(A)$, $t \geq 0$

$$V(t)x \in D(A), \quad AV(t)x = V(t)Ax,$$

i

$$V(t)x = \frac{t^n}{n!}x + \int_0^t V(s)Ax\, ds;$$

2) za $x \in \overline{D(A)},\ t \geq 0$

$$\int_0^t V(s)x\, ds \in D(A),$$

i

$$A\int_0^t V(s)x\, ds = V(t)x - \frac{t^n}{n!}x;$$

3) za $x \in D(A^n),\ n \in \mathbb{N}$

$$V^{(n)}(t)x = V(t)A^n x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}A^k x;$$

4) za $x \in D(A^{n+1})$

$$\frac{d}{dt}V^{(n)}(t)x = AV^{(n)}(t)x = V^{(n)}(t)Ax.$$

Slede teoreme Hille-Yosida-inog tipa za integrisane polugrupe.

Teorema 1.3.1 *Neka je* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \omega \in \mathbb{R},\ K > 0$. *Linearni operator* A *je generator* $(n+1)-$*puta integrisane polugrupe* $V(t)$ *koja zadovoljava uslov*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{h \leq \delta} h^{-1}\|V(t+h) - V(t)\| \leq Ke^{\omega t},\ t \geq 0,$$

ako i samo ako postoji $a \geq \max\{\omega, 0\}$ *tako da je* $(a, \infty) \subset \rho(A)$ *i*

$$\Big\|\Big(\frac{(\lambda - A)^{-1}}{\lambda^n}\Big)^{(k)}\Big\| \leq \frac{Kk!}{(\lambda - \omega)^{k+1}}$$

za sve $\lambda > a$ *i* $k = 0, 1, \ldots$. *U ovom slučaju*

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty \lambda^{n+1} e^{-\lambda t} V(t)\, dt, \quad \lambda > a.$$

Na prvi pogled, ekvivalencija je slabija nego kod C_0-polugrupa, ali činjenica je da integrisane polugrupe, za razliku od C_0-polugrupa, mogu da nemaju gusto definisane generatore. Ako je $\overline{D(A)} = X$, onda imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.3.2 *Neka je* A *gusto definisan linearan operator takav da je* $(a, \infty) \subseteq \rho(A)$, *gde je* $a \geq 0,\ K > 0,\ \omega \in (-\infty, a]$. *Tada je uslov (1.3.1) ekvivalentan tvrdjenju:* A *je generator* $n-$*puta integrisane polugrupe* $\{V(t):\ t \geq 0\}$, *takve da je*

$$\|V(t)\| \leq Ke^{\omega t}.$$

1.3.2 $\kappa-$konvolucione polugrupe

Poznato je da se $n-$puta integrisana polugrupa sa gusto definisanim generatorom A može definisati kao familija ograničenih linearnih operatora $\{V(t) : t \in [0,T)\}$ koja zadovoljava da je

$$V(t)x - \frac{t^n}{n!}x = \int_0^t V(s)Ax\, ds = \int_0^t AV(s)x\, ds, \quad 0 \leq t < T,\ x \in D(A),$$

i

$$V(t)x - \frac{t^n}{n!}x = A\int_0^t V(s)x\, ds, \quad x \in X.$$

Sličan pristup koristićemo i ovde za definisanje $\kappa-$konvolucionih polugrupa.

Generatori $\kappa-$konvolucionih polugrupa

Definicija 1.3.2 *Neka je A zatvoren operator i $\kappa(\cdot)$ neprekidna funkcija na $[0,T)$, $T \leq \infty$. Ako postoji jako neprekidna operatorska familija $\{S_\kappa(t) : t \in [0,T)\}$ tako da je $S_\kappa(t)Ax = AS_\kappa(t)x$ za $x \in D(A)$, $t \in [0,T)$ i za sve $x \in X$*

$$\int_0^t S_\kappa(s)x\, ds \in D(A)$$

i

$$S_\kappa(t)x = A\int_0^t S_\kappa(s)x\, ds + \Theta(t)x, \quad 0 \leq t < T, \tag{1.11}$$

gde je $\Theta(t) = \int_0^t \kappa(s)\ ds$, tada $S_\kappa(t)$ zovemo $\kappa-$konvoluciona polugrupa generisana sa A, i A nazivamo generator familije $S_\kappa(t)$.

Specijalno, ako je $\Theta(t) = t^n/n!$, $\kappa-$konvoluciona polugrupa $S_\kappa(t)$ je $n-$puta integrisana polugrupa. Ako je A generator C_0-polugrupe $T(t)$, onda je

$$S_\kappa(t)x = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}T(s)x\, ds$$

$n-$puta integrisana polugrupa i $\kappa-$konvoluciona polugrupa. Ovo je razlog zašto $S_\kappa(t)$ zovemo $\kappa-$konvoluciona polugrupa, a ne $\Theta-$konvoluciona polugrupa.

Odgovarajući Cauchy-jev problem

$$v'(t) = Av(t) + \Theta(t)x, \quad 0 \leq t < T,\ v(0) = 0 \tag{1.12}$$

se naziva $\Theta-$konvolucioni Cauchy-jev problem. Ako postoji rešenje Cauchy-jevog problema

$$u'(t) = Au(t), \quad 0 \le t < T,\ u(0) = x,$$

onda, kao što je uobičajeno za nehomogene jednačine, imamo da je rešenje od (1.12) dato sa $v = \Theta * u$.

Sledeći rezultat povezuje postojanje $\kappa-$konvolucione polugrupe sa ponašanjem rezolvente $(\lambda - A)^{-1}$. U odnosu na eksponencijalno ograničene i lokalno $n-$puta integrisane polugrupe, gde je rezolventa polinomijalno ograničena u poluravni ili logaritamski ograničenoj oblasti, redom, u "konvolucionom" slučaju rezolventa postoji u nešto manjoj oblasti i može rasti eksponencijalno:

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \le Ke^{M(\lambda)}.$$

Ovde, realna funkcija $M(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, raste ne brže od λ i odredjena je stepenom opadanja funkcije $\widetilde{\kappa}(\lambda)$, Laplace-ova tansformacija od $\kappa(t)$.

Teorema 1.3.3 *Neka je $\kappa(\cdot)$ eksponencijalno ograničena funkcija tako da je*

$$|\widetilde{\kappa}(\lambda)| = \mathcal{O}(e^{-M(\lambda)}), \quad \textit{kada} \quad |\lambda| \to \infty.$$

Pretpostavimo da je A generator $\kappa-$konvolucione polugrupe $\{S_\kappa(t) :\ 0 \le t < T\}$, onda postoji oblast

$$\Lambda = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda > \frac{M(\lambda)}{T} + \beta\Big\}$$

tako da je $\|(\lambda - A)^{-1}\| \le Ke^{M(\lambda)}$ za sve $\lambda \in \Lambda$ i neko $K > 0$.

Napomena 1.3.1 *Ako, umesto uslova*

$$|\widetilde{\kappa}(\lambda)| = \mathcal{O}(e^{-M(\lambda)}), \quad \textit{kada} \quad |\lambda| \to \infty.$$

uzmemo da je

$$|\widetilde{\kappa}(\lambda)| = \mathcal{O}(e^{-M(\alpha\lambda)}), \quad \textit{kada} \quad |\lambda| \to \infty.$$

za neko α, tada za svako

$$\lambda \in \Lambda_{T,\alpha,\beta} = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}\lambda > \frac{M(\alpha\lambda)}{T} + \beta\Big\}$$

imamo da je

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \le Ke^{M(\alpha\lambda)}.$$

Napomena 1.3.2 *Primetimo da je jednakost (1.11) posmatrana na celom X, a ne na $D(A)$. To je razlog zašto u ovoj teoremi, u odnosu na slučaj integrisanih polugrupa, nemamo uslov da je $\overline{D(A)} = X$.*

Teorema 1.3.4 *Pretpostavimo da*

$$\forall \lambda \in \Lambda_{\gamma,\alpha,\beta} \quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq Ke^{M(\alpha\lambda)}$$

za neke $K, \gamma, \alpha, \beta > 0$, i da je

$$|\widetilde{\kappa}(\lambda)| = \mathcal{O}(e^{-M(\varsigma\lambda)}), \quad kada \quad |\lambda| \to \infty$$

za neko $\varsigma > 0$ tako da je $(\varsigma/\alpha - 1) > 0$. Tada je A generator $\kappa-$konvolucione polugrupe na $[0, T_1) = [0, \gamma(\varsigma/\alpha - 1))$.

Kombinujući ove rezultate dobijamo potrebne i dovoljne uslove da A bude generator $\kappa-$konvolucione polugrupe.

Teorema 1.3.5 *Neka je $M(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, realna funkcija koja u beskonačnosti ne raste brže od λ^p, $p < 1$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(K) A je generator $\kappa-$konvolucione polugrupe na $[0, T)$ za neko $T > 0$, gde je κ takva da je

$$|\widetilde{\kappa}(\lambda)| = \mathcal{O}(e^{-M(\varsigma\lambda)}), \quad kada \quad |\lambda| \to \infty, \quad za\ neko \quad \varsigma > 0;$$

(R) $\exists\, \gamma, \alpha, \beta > 0 : \ \forall\, \lambda \in \Lambda_{\gamma,\alpha,\beta}, \quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq Ke^{M(\alpha\lambda)}$;

(K1) za svako $T > 0$, A je generator $\kappa-$konvolucione polugrupe na $[0, T)$, gde je κ takva da je

$$|\widetilde{\kappa}(\lambda)| = \mathcal{O}(e^{-M(\varsigma\lambda)}), \quad kada \quad |\lambda| \to \infty, \quad za\ neko \quad \varsigma > 0;$$

(R1) $\forall\, \gamma > 0\ \exists\, \alpha, \beta > 0 : \ \forall\, \lambda \in \Lambda_{\gamma,\alpha,\beta}, \quad \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq Ke^{M(\alpha\lambda)}$.

U ovom slučaju $\Theta-$konvolucioni Cauchy-jev problem ima jedinstveno rešenje $v(t) = \int_0^t S_\kappa(s)x\, ds$, $t \in [0, T)$ za svako $x \in X$.

Koristeći jedinstvenost rešenja $\theta-$konvolucionog Cauchy-jevog problema možemo dobiti za $\kappa-$konvolucionu polugrupu njeno "polugrupovno" svojstvo za sve $t, s \in [0, T)$:

$$\begin{aligned} S_\kappa(t)S_\kappa(s) &= S_\kappa(s)S_\kappa(t) \\ &= \int_s^{t+s} \kappa(t + s - r)S_\kappa(r)\, dr - \int_s^t \kappa(t + s - r)S_\kappa(r)\, dr. \end{aligned}$$

1.3.3 $C-$regularizovane polugrupe

Nastavićemo izlaganje uvodjenjem familije ograničenih operatora koja se naziva $C-$regularizovana polugrupa. Ona odgovara apstraktnom Cauchy-jevom problemu (1.7) koji ima jedinstveno rešenje za $x \in CD(A)$, gde je C neki invertibilan ograničen operator.

Generatori $C-$regularizovanih polugrupa

Pretpostavimo da je C injektivan, ograničen operator na Banach-ovom prostoru X.

Definicija 1.3.3 *Jedno-parametarska familija ograničenih linearnih operatora* $\{S(t):\ t \geq 0\}$ *se naziva eksponencijalno ograničena $C-$regularizovana polugrupa ako važi da je*

(C1) $S(t+h)C = S(t)S(h), \quad t,h \geq 0,\ S(0)=C;$

(C2) $S(t)$ *je jako neprekidna u odnosu na* $t \geq 0$*;*

(C3) $\exists K > 0,\ \omega \in \mathbb{R}:\ \|S(t)\| \leq Ke^{\omega t}, \quad t \geq 0.$

Iz (C1) za $t=0$ dobijamo da $S(h)$ komutira sa C za sve $h \geq 0$:

(C4) $S(h)C = CS(h), \quad h \geq 0.$

Ako je $C = I$, onda $C-$regularizovana polugrupa postaje C_0-polugrupa.

Definišimo operator

$$L(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x\, dt, \quad x \in X.$$

Ako je $C = I$, onda je $L(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}$, gde je A generator odgovarajuće C_0-polugrupe.

Osobina (C3) implicira da je $L(\lambda)$ ograničen operator za sve $\lambda \in C$ takve da je $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Pokazaćemo da je ovaj operator, koji se naziva $C-$rezolventa, invertibilan i da zadovoljava "regularizovanu" rezolventnu jednakost.

Propozicija 1.3.3 *Neka je* $\{S(t):\ t \geq 0\}$ *eksponencijalno ogranišena $C-$regularizovana polugrupa. Tada za sve* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *takve da je* $\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu > \omega$ *važi da je*

$$(\lambda - \mu)L(\lambda)L(\mu) = L(\mu)C - L(\lambda)C,$$

i postoji zatvoren operator Z definisan sa

$$\begin{aligned} Zx &= (\lambda I - L(\lambda)^{-1}C)x, \\ D(Z) &= \{x \in X:\ Cx \in R(L(\lambda))\}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Definicija 1.3.4 *Operator Z definisan sa (1.13) se naziva generator $C-$regularizovane polugrupe $\{S(t):\ t\geq 0\}$.*

Pored generatora Z uvedimo i infinitezimalne generatore A i G na sledeći način

$$\begin{aligned} Ax &= C^{-1}\lim_{t\to 0} t^{-1}(S(t)x - Cx), \\ D(A) &= \{x\in X:\ \exists \lim_{t\to 0} t^{-1}(S(t)x - Cx)\in R(C)\}; \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} Gx &= \lim_{t\to 0} t^{-1}(C^{-1}(S(t)x - Cx)), \\ D(G) &= \{x\in R(C):\ \exists \lim_{t\to 0} t^{-1}(C^{-1}(S(t)x - Cx))\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Propozicija 1.3.4 *Neka je $\{S(t):\ t\geq 0\}$ eksponencijalno ograničena $C-$regularizovana polugrupa. Tada operatori G, A i Z zadovoljavaju sledeću relaciju*

$$G\subseteq A = Z.$$

Ako je $\overline{R(C)} = X$, onda je $\overline{D(G)} = X$.

Definicija 1.3.5 *Zatvaranje operatora G definisanog sa (1.14) se naziva kompletan infinitezimalni generator $C-$regularizovane polugrupe $\{S(t):\ t\geq 0\}$.*

Za kompletan infinitezimalni generator imamo inkluziju $\overline{G}\subseteq Z = A$.

Propozicija 1.3.5 *Neka je $\{S(t):\ t\geq 0\}$ eksponencijalno ograničena $C-$regularizovana polugrupa. Ako je $\rho(\overline{G})\neq\emptyset$, onda je $\overline{G} = A = Z$.*

Sledeća teorema daje jasnu vezu izmedju generatora $C-$regularizovane polugrupe i Cauchy-jevog problema (1.7).

Teorema 1.3.6 *Neka je Z generator eksponencijalno ograničene $C-$regularizovane polugrupe $\{S(t):\ t\geq 0\}$. Tada je*

$$S(t)x - Cx = Z\int_0^t S(\tau)x\,d\tau, \quad x\in X;$$

$$S(t)x - Cx = \int_0^t S(\tau)Zx\,d\tau, \quad x\in D(Z);$$

$$\frac{dS(t)}{dt}x = S(t)Zx = ZS(t)x, \quad S(0)x = Cx, \quad x\in D(Z);$$

$$\frac{dU(t)}{dt}x = ZU(t)x, \quad U(0)x = x, \quad x\in CD(Z),$$

gde je $U(t)x = C^{-1}S(t)x$.

Sada ćemo formulisati teoremu Hille-Yosida-inog tipa za $C-$regularizovane polugrupe.

Teorema 1.3.7 *Neka je Z generator eksponencijalno ograničene $C-$regularizovane polugrupe $\{S(t):\ t\geq 0\}$, tada je Z zatvoren. Ako je, dodatno, $\overline{R(C)}=X$, onda je Z gusto definisan. Za sve $\lambda\in\mathbb{C}$ takve da je $\operatorname{Re}\lambda>\omega$ važe sledeće osobine*

(Z1) $(\lambda I-Z)^{-1}Cx=C(\lambda I-Z)^{-1}x$ *za sve* $x\in R(\lambda I-Z)$*;*

(Z2) $\exists K>0,\ \|(\lambda I-Z)^{-m}C\|\leq \dfrac{K}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^m},\quad m=1,2,....$

Sledeća teorema se odnosi na $C-$regularizovane polugrupe takve da je $\overline{R(C)}=X$.

Teorema 1.3.8 *Neka je Z gusto definisan zatvoren linearan operator koji zadovoljava uslove (Z1) i (Z2) za $\lambda\in\mathbb{C}$ takve da je $\operatorname{Re}\lambda>\omega$. Tada postoji eksponencijalno ograničena $C-$regularizovana polugrupa $\{S(t):\ t\geq 0\}$ takva da joj je Z generator.*

Integrisane polugrupe i $C-$regularizovane polugrupe

Sledeće dve teoreme utvrdjuju vezu izmedju $C-$regularizovanih polugrupa i integrisanih polugrupa.

Teorema 1.3.9 *Neka je A linearan operator na X za koji važi $\rho(A)\neq\emptyset$. Neka je $\mu\in\rho(A)$ i $n\geq 0$ ceo broj. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(I) A je generator (n+1)-puta integrisane polugrupe $\{V(t):\ t\geq 0\}$ na X, koja zadovoljava da je

$$\exists K>0,\ \omega\in\mathbb{R}:\ \|V(t+h)-V(t)\|\leq Khe^{\omega(t+h)}$$

za sve $t,h\geq 0$;

(II) A je generator $C-$regularizovane polugrupe $\{S(t):\ t\geq 0\}$ gde je operator $C=((\mu-A)^{-1})^{n+1}$, koja zadovoljava da je

$$\exists K>0,\ \omega\in\mathbb{R}:\ \|S(t+h)-S(t)\|\leq Khe^{\omega(t+h)}$$

za sve $t,h\geq 0$.

U slučaju kada je A gusto definisan operator, dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 1.3.10 *Neka je A gusto definisani linearan operator na X, $\mu \in \rho(A)$ i $n \in \mathbb{N}$. Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(I) A je generator n-puta integrisane eksponencijalno ograničene polugrupe $\{V(t) : \ t \geq 0\}$;

(II) A je generator eksponencijalno ograničene $C-$regularizovane polugrupe $\{S(t) : \ t \geq 0\}$ gde je operator $C = (\mu - A)^{-n}$.

Glava 2

Evolucione jednačine sa stohastičkom perturbacijom

Osnovni cilj ove glave je izučavanje stohastičkih Cauchy-jevih problema oblika

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(t,x,\omega) &= \mathbf{A}U(t,x,\omega) + \mathbf{B}\lozenge U(t,x,\omega) + F(t,x,\omega)\\ U(0,x,\omega) &= U^0(x,\omega),\end{aligned} \tag{2.1}$$

gde $t \in (0,T]$, $\omega \in \Omega$, i $U(t,\cdot,\omega)$ pripada nekom Banach-ovom prostoru X. Operator $\mathbf{A}$ je gusto definisan, generiše C_0-polugrupu, a $\mathbf{B}$ je ograničen linearan operator koji zajedno sa Wick-ovim prizvodom $\lozenge$ uvodi perturbaciju konvolucionog tipa u jednačinu. Za sve stohastičke procese se pretpostavlja da su dati Wiener-Itô-ovom haos ekspanzijom. Detaljno objašnjenje delovanja operatora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ u ovakvoj postavci će biti demonstrirano u Poglavlju 2.2.

Naša istraživanja su inspirisana radom [71] gde su autori dali detaljna objašnjenja jednačine oblika

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t,x,\omega) &= \mathbf{A}u(t,x,\omega) + \delta(\mathbf{M}u(t,x,\omega))\\ &= \mathbf{A}u(t,x,\omega) + \int \mathbf{M}u(t,x,\omega)\lozenge W(x,\omega)\,dx,\end{aligned}$$

gde δ označava Skorokhod-ov integral a W označava proces prostornog belog šuma. U Propoziciji 2.2.2 ćemo dokazati da za svaki operator $\mathbf{M}$ postoji odgovarajući operator $\mathbf{B}$ tako da je $\mathbf{B}\lozenge u = \delta(\mathbf{M}u)$. S druge strane, klasa operatora $\mathbf{B}$ je mnogo veća. Ovo je takodje tačno i za klasu operatora $\mathbf{A}$ koje posmatramo (detaljnja analiza svih operatora je data u Polgavlju 2.2.1). Dakle, uopštili smo rezultate date u [71] i [72] na veću klasu stohastičkih diferencijalnih jednačina koje su date sa dva multiplikativna linearna operatora: $\mathbf{A}$ koji deluje kao uobičajena multiplikacija, dok $\mathbf{B}\lozenge$ deluje kao Wick-ov prizvod konvolucionog tipa.

Neke klase stohastičkih parcijalnih diferencijalnih jednačina, tačnije stohastički Dirichlet-ovi problemi oblika $\mathbf{L}\lozenge u + f = 0$, posmatrani su u nekim ranijim radovima [91], [92], [63]. Kao prirodan sled ovog niza radova u ovoj glavi ćemo dati i analizu parabolične SPDJ-ne oblika (2.3). Ove jednačine takodje uključuju kao specijalne slučajeve i jednačine oblika $\frac{d}{dt}u = \mathbf{L}u + f$ i $\frac{d}{dt}u = \mathbf{L}\lozenge u + f$, gde je L strogo eliptični parcijalni diferencijalni operator drugog reda. Ove jednačine opisuju provodjenje toplote u slučajnoj sredini (nehomogenoj ili anizotropnoj sredini), gde su osobine materijala modelovane pozitivno definitnom stohastičkom matricom.

Medju ostalim specijalnim slučajevima jednačine (2.3) su jednačina provodjenja toplote sa slučajnim potencijalom $\frac{d}{dt}u = \Delta u + \mathbf{B}\lozenge u$, Schrödinger-ova jednačina $(i\hbar)\frac{d}{dt}u = \Delta u + \mathbf{B}\lozenge u + f$, transportna jednačina $\frac{d}{dt}u = \frac{d^2}{dx^2}u + W\lozenge\frac{d}{dx}u$ odredjena belim šumom kao sto je dato u [94], uopštena Langevin-ova jednačina $\frac{d}{dt}u = \mathbf{J}u + \mathbf{C}(Y')$, gde je Y Lévy-jev proces, $\mathbf{J}$ infinitezimalni generator C_0-polugrupe i $\mathbf{C}$ ograničen operator, kao što je izučavano u [3], kao i jednačina $\frac{d}{dt}u = \mathbf{L}u + W\lozenge u$, gde je $\mathbf{L}$ strogo eliptični parcijalni diferencijalni operator kao što je posmatrano u [13] i [40].

Jednačine oblika $\frac{d}{dt}u = \mathbf{A}u + \mathbf{B}W$ su posmatrane u [78] i [79], gde $\mathbf{A}$ ne generiše obavezno C_0-polugrupu, već r-integrisanu ili konvolucionu polugrupu.

Da bismo rešili početni problem (2.3) primenićemo metod Wiener-Itô-ove haos ekspanzije, takodje poznat kao metod propagacije. Ovom metodom mi svodimo SPDJ na beskonačan trougaoni sistem PDJ-na, koij se može rešiti indukcijom. Sumirajuću sve koeficijente ekspanzije i dokazujući konvergenciju u odgovarajućim težinskim prostorima, dobijamo rešenje početne SPDJ.

Takodje smo posmatrali i stacionarnu jednačinu $\mathbf{A}U + \mathbf{B}\lozenge U + F = 0$. Do sada, eliptične SPDJ-ne su izučavane u [63], [72], [91] i [92]. Metod haos ekspanzije takodje možemo primeniti na parabolične SPDJ-ne [43] i SPDJ-ne sa singularitetima [98]. Jedana od njegovih prednosti je što može da da eksplicitno rešenje u terminima razvoja u red, koji se lako može implementirati i primeniti u numeričkim aproksimacijama i računarskima simulacijama.

U nastavku glave uvek ćemo pretpostavljati da je X Banach-ov prostor. Koristićemo i poznate nejednakosti:

$$(a_1 + \cdots + a_n) \leq n(a_1^2 \cdots + a_n^2), \quad n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

Cauchy-Schwartz-ovu nejednakost

$$\sum_i |a_i b_i| \leq \Big(\sum_i a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_i b_i^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

kao i uopštenu nejednakost Minkowski-og:

$$\sum_k \Big(\sum_{i+j=k} a_i b_j\Big)^2 \leq \Big(\sum_i a_i\Big)^2 \Big(\sum_j b_j^2\Big).$$

2.1 Osnovni pojmovi, definicije i oznake

2.1.1 Uopšteni stohastički procesi

Široku klasu slučajnih procesa koji se na prirodan način javljaju u primenama, nemoguće je definisati na klasičan način. Izvod Brown-ovog kretanja, odnosno proces belog šuma je možda najpoznatiji od njih. Koncept belog šuma se pokazao kao odličan model naglih i velikih fluktuacija u dinamičkim sistemima, ali ga je matematički korektno moguće definisati jedino u okviru teorije uopštenih funkcija (distribucija). Uopšteni stohastički procesi su prvi put uvedeni 1955. u radovima I. M. Gel'fanda, N. Vilenkina i K. Urbanika, a zatim je osmdesetih godina ova teorija doživela snažan razvoj u K. Itô-vim i T. Hida-inim radovima. Tokom poslednjih decenija za razvoj ove teorije prvenstveno su zaslužni T. Hida, Y. Kondratiev, H. Kuo i B. Øksendal.

U nastavku ovog poglavlja ćemo u izuzetno sažetom obliku, samo koliko je neophodno, izložiti najosnovnije činjenice o uopštenim stohastičkim procesima za više informacija videti iscrpne monografije [35], [39], zatim [97], [61], kao i reference koje su tu navedene.

Definicija 2.1.1 *Hermite-ov polinom $n-$tog reda, $n \in \mathbb{N}_0$, je definisan sa*

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}}).$$

Prvih nekoliko Hermite-ovih polinoma su: $h_0(x) = 1,\ h_1(x) = x,\ h_2(x) = x^2 - 1,\ h_3(x) = x^3 - 3x,\ h_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, \ldots$
Dobro je poznata činjenica da:

Propozicija 2.1.1 *Familija $\{\frac{1}{\sqrt{n!}} h_n(x) :\ n \in \mathbb{N}\}$ čini ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, gde je $d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ Gauss-ova mera.*

Definicija 2.1.2 *Hermite-ova funkcija* $(n+1)-$*og reda,* $n \in \mathbb{N}_0$*, je definisana sa*
$$\xi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{x^2}{2}} h_n(\sqrt{2}x).$$

Prvih nekoliko Hermite-ovih funkcija su: $\xi_1(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\xi_2(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\xi_3(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\xi_4(x) = \frac{2x^3-3x}{\sqrt{3}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \ldots$
Takodje, dobro je poznata činjenica da:

Propozicija 2.1.2 *Hermite-ove funkcije čine ortonormiranu bazu prostora* $L^2(\mathbb{R}, dx)$*, gde je* dx *Lebesgue-ova mera.*

Schwartz-ov prostor brzo opadajućih funkcija je prostor
$$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ \forall n, m \in \mathbb{N}_0, \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)| < \infty\},$$
gde je topologija na $S(\mathbb{R})$ data familijom seminormi
$$\|f\|_{n,m} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^n f^{(m)}(x)|, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Prostor $S(\mathbb{R})$ je nuklearan prebrojiv Hilbert-ov prostor. Schwartz-ov prostor sporo rastućih (temperiranih) distribucija, označen sa $S'(\mathbb{R})$, je dualni prostor od $S(\mathbb{R})$. Za Schwartz-ove prostore je dobro poznata činjenica da grade Gel'fand-ovu trojku, $S(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R}) \subseteq S'(\mathbb{R})$, kao i da su date inkluzije neprekidne. Takodje, dobro je poznata i sledeća činjenica:

Teorema 2.1.1

1. *Funkcija* f *pripada prostoru* $S(\mathbb{R})$ *ako i samo ako je oblika*
$$f = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \xi_k, \ \textit{gde je} \ \sum_{k\in\mathbb{N}} k^p |a_k|^2 < \infty \ \textit{za sve} \ p \in \mathbb{N}$$
i koeficijenti su dati sa $a_k = \langle f, \xi_k \rangle \in \mathbb{C}$.

2. *Funkcija* f *pripada prostoru* $S'(\mathbb{R})$ *ako i samo ako je oblika*
$$f = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \xi_k, \ \textit{gde je} \ \sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-p} |a_k|^2 < \infty \ \textit{za neko} \ p \in \mathbb{N}$$
i koeficijenti su dati sa $a_k = \langle f, \xi_k \rangle \in \mathbb{C}$.

Neka je E nuklearan prebrojiv Hilbert-ov prostor topologizovan nizom seminormi $|\cdot|_n$. Borelova $\sigma-$algebra $\mathcal{B}(E')$ je $\sigma-$algebra generisana slabom topologijom prostora E'.

Definicija 2.1.3 *Funkcija $C : E \to \mathbb{C}$ se naziva karakteristična funkcija ako ima osobine*

1. *C je neprekidna na E,*
2. *$C(0) = 1$,*
3. *C je pozitivno definitna, tj. za proizvoljne $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ i $\phi_1, \dots, \phi_n \in E$ važi*
$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z_k} C(\phi_j - \phi_k) \geq 0.$$

Teorema 2.1.2 (Bochner - Milnos) *Neka je E nuklearan prostor i C karakteristična funkcija na njemu. Tada postoji jedinstvena mera μ_C na prostoru $(E', \mathcal{B}(E'))$ takva da je za svako $\phi \in E$*

$$\int_{E'} e^{i\langle \omega, \phi \rangle} d\mu_C(\omega) = C(\phi),$$

gde $\langle \ , \ \rangle$ oznachava dejstvo distribucije $\omega \in E'$ na test funkciju $\phi \in E$.

Prostor verovatnoće ćemo označiti sa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i u nastavku ove glave uvek ćemo pretpostavljati da je to Gauss-ovski prostor belog šuma $(S'(\mathbb{R}), \mathcal{B}, \mu)$, gde $S'(\mathbb{R})$ označava prostor temperiranih distribucija, $\mathcal{B}$ je Borel-ova $\sigma-$algebra generisana slabom topologijom na $S'(\mathbb{R})$ i μ je mera Gauss-ovog belog šuma koja odgovara karakterisitičnoj funkciji

$$\int_{S'(\mathbb{R})} e^{i\langle \omega, \phi \rangle} d\mu(\omega) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right], \qquad \phi \in S(\mathbb{R}),$$

data Bochner-Minlos-ovom teoremom.

Koristićemo i sledeću notaciju za kvadratno integrabilne slučajne promenljive nad $S'(\mathbb{R})$ u odnosu na meru μ, tj. sučajne promenljive sa konačnim drugim momentom, $L^2(\Omega, \mu)$ (videti [39]), gde je $\Omega = S'(\mathbb{R})$ i μ mera Gauss-ovog belog šuma. $L^2(\Omega, \mu)$ je Hilbert-ov prostor.

Definišimo skup multi-indeksa $\mathcal{I}$ sa $(\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}})_c$, tj. skup svih nizova nenegativnih celih brojeva koji imaju samo konačno mnogo nenula komponenti. Posebno, označimo da $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots)$ multi-indeks kojem su sve komponente nula; i označimo sa $\varepsilon_k = (0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots)$, $k \in \mathbb{N}$, multi-indeks koji ima 1 na $k-$tom mestu, dok su mu sve ostale komponente jednake nuli. Dužina multi-indeksa je $|\alpha| = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathcal{I}$, i uvek je konačna. Slično, $\alpha! = \prod_{i=1}^{\infty} \alpha_i!$, i sve ostale operacije se takodje izvode po komponentama. Koristićemo i sledeću konvenciju da je $\alpha - \beta$ definisano ako je $\alpha_n - \beta_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. ako je $\alpha - \beta \geq \mathbf{0}$, i ostaviti $\alpha - \beta$ nedefinisano ako je $\alpha_n < \beta_n$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Za multi-indekse $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ uvodimo oznaku $\alpha^\beta = \alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\ldots$ i specijalnu oznaku koju su uveli autori u [39]

$$(2\mathbb{N})^\alpha = \prod_{n=1}^{\infty}(2n)^{\alpha_n}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N, 0, 0\ldots) \in \mathcal{I}.$$

Propozicija 2.1.3 (Zhang, 1992) *Suma* $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(2\mathbb{N})^{-p\alpha}$ *konvergira ako i samo ako je* $p > 1$.

Označimo se H_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, Fourier-Hermite-ove polinome,

$$H_\alpha(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} h_{\alpha_n}(\langle\omega, \xi_n\rangle), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \ldots) \in \mathcal{I}, \quad \omega \in \Omega = S'(\mathbb{R}),$$

definisane pomoću Hermite-ovih ortogonalnih polinoma h_n i Hermite-ovih funkcija ξ_n. Poznato je da $\{H_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ obrazuju ortogonalnu bazu Hilbert-ovog prostora $L^2(\Omega, \mu)$. Važi i $E_\mu(H_\alpha H_\beta) = \alpha!\delta_{\alpha\beta}$, gde $\delta_{\alpha\beta}$ označava Kronecker-ov delta simbol. Wiener-Itô-ova teorema (ponekad takodje nazivana i Cameron-Martin-ova teorema) daje reprezentaciju svake slučajne promenljive u ortogonalnoj bazi.

Teorema 2.1.3 (Wiener-Itô-ova haos ekspanzija) *Proizvoljan element* $F \in L^2(\Omega, \mu)$ *ima jedinstvenu reprezentaciju oblika*

$$F(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha(\omega), \quad \omega \in S'(\mathbb{R}), \quad f_\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathcal{I},$$

tako da važi

$$\|F\|^2_{L^2(\Omega,\mu)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} |f_\alpha|^2\alpha! < \infty,$$

gde se koeficijenti f_α *dati sa* $f_\alpha = (F, H_\alpha)_{L^2(\Omega,\mu)} = E_\mu(f \times H_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{I}$.

Označimo sa $\mathcal{H}_m$ prostor haosa $m-$tog reda, tj. zatvaranje linearnog potprostora razapetog nad ortogonalnim polinomima $H_\alpha(\cdot)$ gde je $|\alpha| = m$, $m \in \mathbb{N}_0$. Tada iz Wiener-Itô-ove haos ekspanzije dobijamo da je $L^2(\Omega, \mu) = \bigoplus_{m=0}^{\infty}\mathcal{H}_m$, gde je $\mathcal{H}_0$ skup konstanti u $L^2(\Omega, \mu)$. Dakle, svako $F \in L^2(\Omega, \mu)$ se može predstaviti u obliku

$$F(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{|\alpha|=n} f_\alpha\, H_\alpha(\omega).$$

Napomenimo da je haos prostor prvog reda $\mathcal{H}_1$ potprostor od $L^2(\Omega,\mu)$, razapet nad polinomima $H_{\varepsilon_k}(\omega) = \langle \omega, \xi_k \rangle$, $k \in \mathbb{N}$. Potprostor $\mathcal{H}_1$ sadrži Gauss-ove stohastičke procese, npr. Brown-ovo kretanje je dato haos ekspanzijom

$$B(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \xi_k(s) ds \; H_{\varepsilon_k}(\omega).$$

Dobro je poznato da vremenski izvod Brown-ovog kretanja (proces belog šuma) ne postoji u klasičnom smislu. Medjutim, uzimajući slabiju topologiju na $L^2(\Omega,\mu)$, T. Hida [35] je definisao prostor uopštenih slučajnih procesa koji sadrži beli šum kao izvod Brown-ovog kretanja. Upućujemo čitaoca na [35], [39] za više činjenica o analizi belog šuma (kao beskonačno dimenzionalnom analogonu Schwartz-ove teorije determinističkih uopštenih funkcija).

Prateći ideju o konstrukciji Schwartz-ovih temperiranih distribucija $S'(\mathbb{R})$ kao induktivnog limita nad prostorom $L^2(\mathbb{R})$ sa odgovarajućim težinama, može se definisati prostor stohastičkih uopštenih slučajnih promenljivih nad prostorom $L^2(\Omega,\mu)$ dodavanjem odgovarajućih težina u uslove konvergencije slučajnih promenljivih datih Wiener-Itô-ovim haos ekspanzijama. Kao primere prostora uopštenih stohastičkih funkcija predstavljamo Hida-ine prostore i prostore Kondratiev-a.

Definišimo Banach-ove prostore, za svako $p \in \mathbb{N}_0$, $\rho \in [0,1]$, sa

$$(S)_{\rho,p} = \{F = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha \in L^2(\Omega,\mu) : \|F\|^2_{(S)_{\rho,p}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (\alpha!)^{1+\rho} f_\alpha^2 \, (2\mathbb{N})^{p\alpha} < \infty\}.$$

Njihovi topološki dualni prostori su dati, za svako $p \in \mathbb{N}_0$, $\rho \in [0,1]$, sa

$$(S)_{-\rho,-p} = \{F = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha : \|F\|^2_{(S)_{-\rho,-p}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} (\alpha!)^{1-\rho} f_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty\}.$$

Definicija 2.1.4 *Kondratiev prostor uopštenih slučajnih promenljivih je*

$$(S)_{-\rho} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}_0} (S)_{-\rho,-p}$$

snabdeven induktivnom topologijom. On je jak dual prostora

$$(S)_\rho = \bigcap_{p\in\mathbb{N}_0} (S)_{\rho,p},$$

koji se naziva Kondratiev prostor test slučajnih promenljivih koji je snabdeven projektivnom topologijom.

Za $\rho = 0$ prostori se nazivaju Hida-ini, a za $\rho = 1$ dobija se najveći Kondratiev prostor uopštenih slučajnih promenljivih $(S)_{-1}$. Važi

$$(S)_1 \subset \cdots \subset (S)_0 \subset L^2(\Omega, \mu) \subset (S)_{-0} \subset \cdots \subset (S)_{-1}.$$

Beli šum živi u $(S)_{-0}$. U nastavku uvek ćemo raditi u prostoru Kondratiev-a $(S)_{-1}$. Dodatno,

$$(S)_1 \subseteq L^2(\Omega, \mu) \subseteq (S)_{-1}$$

formiraju Gel'fand-ovu trojku sa neprekidnim inkluzijama.

Primer 2.1.1 *Vremenski izvod Brown-ovog kretanja postoji u uopštenom smislu i pripada Kondratiev-om prostoru* $(S)_{-0,-p}$ *za* $p \geq \frac{5}{12}$. *Mi ćemo ga nazivati beli šum i njegova formalna ekspanzija je data sa*

$$W(t, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) H_{\varepsilon_k}(\omega).$$

Poznato je da u opštem slučaju nije moguće definisati množenje uopštenih funkcija koje predstavlja proširenje klasičnoh množenja realnih brojeva. Problem množenja uopštenih stohastičkih funkcija se prevazilazi uvodjenjem Wick-ovog proizvoda. Wick-ov proizvod je dobro definisan u prostorima test i uopštenih funkcija Hida-e i Kondratiev-a (videti [35], [39]).

Definicija 2.1.5 *Neka je* $\rho \in [0, 1]$ *i neka su* $F, G \in (S)_{-\rho}$ *dati svojim haos ekspanzijama* $F(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha(\omega)$, $G(\omega) = \sum_{\beta \in \mathcal{I}} g_\beta H_\beta(\omega)$, *za jedinstvene* $f_\alpha, g_\beta \in \mathbb{R}$. *Wick-ov proizvod* F *i* G *je element* $F \lozenge G$ *definisan sa*

$$F \lozenge G(\omega) = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \left(\sum_{\alpha + \beta = \gamma} f_\alpha g_\beta \right) H_\gamma(\omega). \tag{2.2}$$

Specijalno, za $\rho = 1$ važi $G \lozenge G \in (S)_{-1}$, tj. Kondratiev prostor uopštenih slučajnih promenljivih je zatvoren za Wick-ov proizvod.

U radu [90] proširena je definicija stohastičkih procesa na procese koji imaju haos ekspanziju oblika

$$U(t, \omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha(t) H_\alpha(\omega),$$

gde su koeficijenti u_α elementi nekog Banach-ovog prostora X. Kažemo da je U uopšten stohastički proces sa vrednostima u Banach-ovom prostoru X, tj. $U(t, \omega) \in X \otimes (S)_{-1}$ ako postoji $p > 0$ tako da je

$$\|U\|^2_{X \otimes (S)_{-1,-p}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \|u_\alpha\|^2_X (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty.$$

Wick-ov proizvod uopštenih stohastičkih procesa se definiše na sličan način kao i za uopštene slučajne promenljive. Pretpostavimo da je u Banach-ovom prostoru X definisano množenje elemenata. Tada se Wick-ov proizvod uopštenih stohastičkih procesa definiše tačkasto.

Definicija 2.1.6 *Wick-ov proizvod uopštenih stohastičkih procesa* $F(t) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha(t)H_\alpha$, $G(t) = \sum_{\beta\in\mathcal{I}} g_\beta(t)H_\beta \in X \otimes (S)_{-1}$, $t \geq 0$, *je dat sa*

$$F(t)\lozenge G(t) = \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} f_\alpha(t)g_\beta(t)H_\gamma = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{\beta\leq\alpha} f_\beta(t)g_{\alpha-\beta}(t)H_\alpha.$$

Slično, $n-$ti Wick-ov stepen je definisan sa $F^{\lozenge n} = F^{\lozenge(n-1)}\lozenge F$, $F^{\lozenge 0} = 1$. Primetimo da je $H_{n\varepsilon_k} = H_{\varepsilon_k}^{\lozenge n}$ za $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$.

Na primer, neka je $X = C^k[0,T]$, $k \in \mathbb{N}$. U radu [91] pokazano je da se diferenciranje stohastičkog procesa može izvršiti diferenciranjem koeficijenata haos ekspanzije, tj. na osnovu toga što je $(S)_{-1}$ nuklearan prostor dobijamo da je $C^k([0,T],(S)_{-1}) = C^k[0,T] \otimes (S)_{-1}$. To znači da je stohastički proces $U(t,\omega)$ $k-$puta neprekidno diferencijabilan ako i samo ako su svi njegovi koeficijenti $u_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{I}$, u prostoru $C^k[0,T]$.

Isto važi i za stohastičke procese sa vrednostima u Banach-ovom prostoru, tj. elemente iz $C^k([0,T],X)\otimes(S)_{-1}$, gde je X proizvoljan Banach-ov prostor. Na osnovu nuklearnosti prostora $(S)_{-1}$, ovi procesi se mogu posmatrati kao elementi tenzorskog prizvoda prostora, te važi

$$C^k([0,T], X \otimes (S)_{-1}) = C^k([0,T],X) \otimes (S)_{-1} = \bigcup_{p=0}^{\infty} C^k([0,T],X) \otimes (S)_{-1,-p}.$$

2.1.2 Fredholm-ova alternativa

Radi lakšeg praćenja i kompletnosti izlaganja, u nastavku ćemo ukratko predstaviti dobro poznatu Fredholm-ovu alternativu, prateći pristup dat u [29].

Neka su X_1 i X_2 normirani vektorski prostori. Preslikavanje $T : X_1 \to X_2$ se naziva kompaktno (ili kompletno neprekidno) ako T preslikava ograničene skupove iz X_1 na relativno kompaktne skupove u X_2, ili ekvivalentno, ako T preslikava svaki ograničen niz iz X_1 na niz u X_2 takav da ima bar jedan konvergentan podniz. Iz ovoga sledi da je kompaktno linearno preslikavanje takodje i neprekidno, ali obrnuto nije tačno u opštem slučaju, sem ako je X_2 konačno-dimenzionalni prostor.

Fredholm-ova alternativa (ili Riesz-Schauder teorija) posmatra kompaktne linearne operatore koji preslikavaju prostor X na samog sebe i proširenje je teorije linearnih preslikavanja konačno-dimenzionalnih prostora.

Teorema 2.1.4 *Neka je T kompaktno linearno preslikavanje normiranog vektorskog prostora X na samog sebe. Tada važi tačno jedno od tvrdjenja:*

1. *Homogena jednačina*
$$x - Tx = 0$$
ima netrivijalno rešenje $x \in X$.

2. *Za svako $y \in X$, jednačina*
$$x - Tx = y$$
ima jedinstveno odredjeno rešenje $x \in X$.

Dodatno, u slučaju 2., operator $(I - T)^{-1}$, čije postojanje je tu takodje pretpostavljeno, je ograničen operator.

Neki aspekti spektralnog ponašanja kompaktnog linearnog operatora slede iz Teoreme 2.1.4. Broj λ se naziva sopstvena vrednost operatora T ako postoji nenula element x iz X (koji se naziva sopstveni vektor) tako da važi $Tx = \lambda x$. Jasno je da sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima moraju biti linearno nezavisni. Dimenzija jezgra operatora $S_\lambda = \lambda I - T$ se naziva višestrukost sopstvene vrednosti λ. Ako $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ nije sopstvena vrednost operatora T, na osnovu Teoreme 2.1.4, rezolventni operator $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ je dobro definisan, ograničen linearan operator na prostoru X.

Teorema 2.1.5 *Kompaktno linearno preslikavanje T normiranog vektorskog prostora na samog sebe ima prebrojiv skup sopstvenih vrednosti koje nemaju tačku nagomilavanja sem možda tačke $\lambda = 0$. Svaka nenula sopstvena vrednost ima konačnu višestrukost.*

2.2 Stohastički operatori

Definicija 2.2.1 *Neka je X Banach-ov prostor i $\mathbf{O} : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ operator koji deluje nad prostorom stohastičkih procesa. Operator $\mathbf{O}$ ćemo nazivati koordinatni operator ako postoji familija operatora $o_\alpha : X \to X$, $\alpha \in \mathcal{I}$, takva da je $\mathbf{O}(\sum_{\alpha \in \mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} o_\alpha(f_\alpha) H_\alpha$ za sve $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha \in X \otimes (S)_{-1}$.*

Jasno, nisu svi operatori koordinatni, na primer $\mathbf{O}(F) = F^{\lozenge 2}$ ne može biti zapisan u ovoj formi.

Definicija 2.2.2 *Potklasa jednostavnih koordinatnih operatora se sastoji od onih operatora za koje važi da je $o_\alpha = o_\beta = o$, $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$, što znači, da oni mogu biti zapisani u formi $\mathbf{O}(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha H_\alpha) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} o(f_\alpha)H_\alpha$ za neki operator $o : X \to X$.*

Na primer, operator diferenciranja [91] i Fourier-ova transformacija [98] su jednostavni koordinatni operatori. Ornstein-Uhlenbeck-ov operator je koordinatni operator ali nije jednostavan koordinatni operator.

Primetimo da čak i ako su svi o_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, ograničeni linearni operatori, koordinatni operator $\mathbf{O}$ sam ne mora biti ograničen. Ako su o_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, uniformno ograničeni za neko $C > 0$, tada je $\mathbf{O}$ takodje ograničen operator. Ovo sledi iz

$$\begin{aligned}\|\mathbf{O}(F)\|^2_{X\otimes(S)_{-1,-p}} &\le \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|o_\alpha\|^2_{L(X)}\|f_\alpha\|^2_X(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\le C^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|^2_X(2\mathbb{N})^{-p\alpha} = C^2\|F\|^2_{X\otimes(S)_{-1,-p}} < \infty,\end{aligned}$$

za $F \in X \otimes (S)_{-1,-p}$.

Pomenuti uslov je dovoljan, ali nije potreban, i može biti oslabljen primenom potapanja $(S)_{-1,-p} \subseteq (S)_{-1,-q}$, $q \ge p$.

Lema 2.2.1 *Neka je $\mathbf{O}$ koordinatni operator za koji su svi o_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, polinomno ograničeni, tj. $\|o_\alpha\|_{L(X)} \le R(2\mathbb{N})^{r\alpha}$ za neke $r, R > 0$. Tada, postoji $q \ge p$ tako da je $\mathbf{O} : X \otimes (S)_{-1,-p} \to X \otimes (S)_{-1,-q}$ ograničen.*

Dokaz. Neka je $q \ge p + 2r$. Tada,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{O}(F)\|^2_{X\otimes(S)_{-1,-q}} &\le R^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(2\mathbb{N})^{2r\alpha}\|f_\alpha\|^2_X(2\mathbb{N})^{-q\alpha} = R^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|f_\alpha\|^2_X(2\mathbb{N})^{-(q-2r)\alpha}\\ &\le R^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|f_\alpha\|^2_X(2\mathbb{N})^{-p\alpha} = R^2\|F\|^2_{X\otimes(S)_{-1,-p}} < \infty.\end{aligned}$$

Dakle, $\|\mathbf{O}\|_{L(X)\otimes(S)_{-1}} \le R$. □

Primetimo da je uslov $\|o_\alpha\|_{L(X)} \le R(2\mathbb{N})^{r\alpha}$ za neke $r, R > 0$ zapravo ekvivalentan tvrdjenju da postoji $r > 0$ tako da je $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|o_\alpha\|^2_{L(X)}(2\mathbb{N})^{-r\alpha} < \infty$.

U ovoj glavi ćemo posmatrati početni problem

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}U(t,\omega) = \mathbf{A}U(t,\omega) + \mathbf{B}\lozenge U(t,\omega) + F(t,\omega), \quad t \in (0,T],\ \omega \in \Omega,\\ &U(0,\omega) = U^0(\omega),\end{aligned} \tag{2.3}$$

takav da su i $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ koordinatni operatori, tj. da su sačinjeni od familija operatora $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$, $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$, redom. Za operatore A_α, $\alpha\in\mathcal{I}$, ćemo pretpostaviti da su infinitezimalni generatori C_0-polugrupa sa zajedničkim domenom D gustim u X, a delovanje operatora $\mathbf{A}$ je dato sa

$$\mathbf{A}(U)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}A_\alpha(u_\alpha)H_\alpha,$$

za $U=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}u_\alpha H_\alpha\in Dom(\mathbf{A})\subseteq D\otimes(S)_{-1}$, gde je

$$Dom(\mathbf{A})=$$
$$=\{U=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}u_\alpha H_\alpha\in D\otimes(S)_{-1}:\ \exists p_U>0,\ \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|A_\alpha(u_\alpha)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p_U\alpha}<\infty\}.$$

Za operatore B_α, $\alpha\in\mathcal{I}$, ćemo pretpostaviti da su ograničeni linearni operatori na X, a delovanje operatora $\mathbf{B}\Diamond: X\otimes(S)_{-1}\to X\otimes(S)_{-1}$ je definisiano sa

$$\mathbf{B}\Diamond(U)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sum_{\beta\leq\alpha}B_\beta(u_{\alpha-\beta})H_\alpha=\sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\sum_{\alpha+\beta=\gamma}B_\alpha(u_\beta)H_\gamma.$$

U naredne dve leme ćemo dati dovoljne uslove koji obezbedjuju da je operator $\mathbf{B}\Diamond$ dobro-definisan. Oba uslova su zapravo ekvivalentna činjenici da je familija B_α, $\alpha\in\mathcal{I}$, polinomno ograničena, ali daju finije ocene stohastičkog reda (Kondratiev-ih težina) domena i kodomena od $\mathbf{B}\Diamond$.

Lema 2.2.2 *Ako su operatori B_α, $\alpha\in\mathcal{I}$, takvi da je*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|B_\alpha\|^2_{L(X)}(2\mathbb{N})^{-r\alpha}<\infty\quad \textit{za neko } r>0,$$

onda je $\mathbf{B}\Diamond$ dobro-definisano preslikavanje

$$\mathbf{B}\Diamond: X\otimes(S)_{-1,-p}\to X\otimes(S)_{-1,-(p+r+m)},\quad m>1.$$

Dokaz. Za $U\in X\otimes(S)_{-1,-p}$ i $q=p+r+m$ važi da je

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\|\sum_{\alpha+\beta=\gamma}B_\alpha(u_\beta)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-q\gamma}\leq\sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\Big[\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\|B_\alpha\|_{L(X)}\|u_\beta\|_X\Big]^2(2\mathbb{N})^{-(p+r+m)\gamma}$$
$$\leq\sum_{\gamma\in\mathcal{I}}(2\mathbb{N})^{-m\gamma}\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\|B_\alpha\|^2_{L(X)}(2\mathbb{N})^{-r\gamma}\right)\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\|u_\beta\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\gamma}\right)$$
$$\leq M\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|B_\alpha\|^2_{L(X)}(2\mathbb{N})^{-r\alpha}\right)\left(\sum_{\beta\in\mathcal{I}}\|u_\beta\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\beta}\right)<\infty,$$

gde je $M=\sum_{\gamma\in\mathcal{I}}(2\mathbb{N})^{-m\gamma}<\infty$, za $m>1$. $\square$

Lema 2.2.3 *Ako su operatori B_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, takvi da je*

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|B_\alpha\|_{L(X)} (2\mathbb{N})^{-\frac{r}{2}\alpha} < \infty \quad \textit{za nekor} > 0,$$

onda je $\mathbf{B}\Diamond$ *dobro-definisano preslikavanje*

$$\mathbf{B}\Diamond : X \otimes (S)_{-1,-r} \to X \otimes (S)_{-1,-r}.$$

Dokaz. Za $U \in X \otimes (S)_{-1,-r}$, koristeći uopštenu nejednakost Minkowski-og, imamo da važi

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \| \sum_{\alpha+\beta=\gamma} B_\alpha(u_\beta)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-r\gamma} &\le \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \Big[\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \|B_\alpha\|_{L(X)} \|u_\beta\|_X \Big]^2 (2\mathbb{N})^{-r\gamma} \\ &\le \sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \Big[\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \|B_\alpha\|_{L(X)} (2\mathbb{N})^{-\frac{r}{2}\alpha} \|u_\beta\|_X (2\mathbb{N})^{-\frac{r}{2}\beta} \Big]^2 \\ &\le \left(\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|B_\alpha\|_{L(X)} (2\mathbb{N})^{-\frac{r}{2}\alpha} \right)^2 \sum_{\beta\in\mathcal{I}} \|u_\beta\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-r\beta} < \infty. \quad \square\end{aligned}$$

2.2.1 Specijalni slučajevi stohastičkih operatora

Jedni od najznačajnijih operatora stohastičkog računa su operatori Malliavin-ovog računa. Podestimo se njihovih definicija u uopštenom $S'(\mathbb{R})$ slučaju [62].

- Malliavin-ov izvod, $\mathbb{D}$, kao stohastički gradijent u pravcu belog šuma, je linearno i neprekidno preslikavanje $\mathbb{D} : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes S'(\mathbb{R}) \otimes (S)_{-1}$ dato sa

  $$\mathbb{D}u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \, u_\alpha \otimes \xi_k \otimes H_{\alpha-\varepsilon_k}, \qquad \text{za } u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha \otimes H_\alpha.$$

  U terminima kvantne teorije on odgovara operatoru anihilacije koji smanjuje red prostora haosa ($\mathbb{D} : \mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_{m-1}$).

- Skorokhod-ov integral, δ, kao proširenje Itô-vog integrala na neadaptirane procese, je linearno i neprekidno preslikavanje $\delta : X \otimes S'(\mathbb{R}) \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ dato sa

  $$\delta(F) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sum_{k\in\mathbb{N}} f_\alpha \otimes v_{\alpha,k} \otimes H_{\alpha+\varepsilon_k}, \qquad \text{za } F = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} f_\alpha \otimes \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} v_{\alpha,k}\, \xi_k \right) \otimes H_\alpha.$$

  On je adjungovni operator za operator Malliavin-ovog izvoda i u terminima kvantne teorije odgovara operatoru kreacije povećavajući red prostora haosa ($\delta : \mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_{m+1}$).

- Ornstein-Uhlenbeck-ov operator, $\mathcal{R}$, kao kompozicija prethodna dva $\delta \circ \mathbb{D}$, je stohastički analogon Laplace-ovog operatora. On je linearno i neprekidno preslikavanje $\mathcal{R} : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ dato sa

$$\mathcal{R}(u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} |\alpha| u_\alpha \otimes H_\alpha, \qquad \text{za } u = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha \otimes H_\alpha.$$

U terminima kvantne teorije on odgovara operatoru broja. On je samo-adjungovan operator $\mathcal{R} : \mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_m$ sa sopstvenim vektorima jednakim baznim vektorima H_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, tj. $\mathcal{R}(H_\alpha) = |\alpha| H_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{I}$. Dakle, Gauss-ovski procesi sa očekivanjem nula su zapravo fiksne tačke Ornstein-Uhlenbeck-ovog operatora.

Primetimo da je Ornstein-Uhlenbeck-ov operator koordinatni operator, dok Malliavin-ov izvod i Skorokhod-ov integral nisu koordinatni operatori.

Ornstein-Uhlenbeck-ov operator je infinitezimalni generator polugrupe $T_t = e^{t\mathcal{R}}$, $t \geq 0$, date sa $T_t(u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} e^{-|\alpha| t} u_\alpha \otimes H_\alpha$, za $u = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha \otimes H_\alpha \in X \otimes (S)_{-1}$. On je takodje usko povezan sa Ornstein-Uhlenbeck-ovim procesom. Ornstein-Uhlenbeck-ov proces je rešenje stohastičke diferencijalne jednačine $du(t,\omega) = -u(t,\omega)dt + dB(t,\omega)$, $u(0,\omega) = u_0(x,\omega)$, i dat je sa $u(t,\omega) = e^{-t} u_0(\omega) + \int_0^t e^{t-s} dB(s,\omega)$. On je proces Markov-a sa tranzicionom polugrupom $\{T_t\}_{t \geq 0}$ [12]. Rešenje uopštene jednačine provodjenja toplote $\frac{d}{dt} u + \mathcal{R}(u) = 0$, $u(0) = u_0$, je dato sa $u = T_t(u_0)$, tj. $u(t,x) = (T_t u_0)(x)$ i $(T_t \varphi)(x) = E(\varphi(u(t,x))$ za svako $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ i u je Ornstein-Uhlenbeck-ov proces.

Vratimo se sada našoj jednačini

$$\frac{d}{dt} U(t,\omega) = \mathbf{A} U(t,\omega) + \mathbf{B} \Diamond U(t,\omega) + F(t,\omega), \tag{2.4}$$

gde su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ koordinatni operatori, kao što je opisano u Poglavlju 2.2, sačinjeni od familija operatora $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$, redom, gde su A_α infinitezimalni generatori na X a B_α ograničeni linearni operatori X, obe familije su polinomno ograničene, i njihova delovanja su data sa

$$\mathbf{A} U = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha(u_\alpha) H_\alpha, \qquad \text{za } U = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{B} \Diamond U = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{\beta \leq \alpha} B_\beta(u_{\alpha - \beta}) H_\alpha, \qquad \text{za } U = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha. \tag{2.6}$$

Neki od važnih specijalnih slučajeva su navedeni kao što sledi:

I) Specijalni slučajevi za $\mathbf{A}$:

1) $\mathbf{A}$ je jednostavan koordinatni operator, tj. $A_\alpha = A$, $\alpha \in \mathcal{I}$, gde je A infinitezimalni generator C_0-polugrupe na X. Takvi operatori su, su na primer Laplace-ov operator Δ na $X = W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ ili bilo koji strogo eliptični linearan parcijalni diferencijalni operator parnog reda $P(x, D) = \sum_{|\iota|\leq 2m} a_\iota(x) D^\iota$. Na primer, eliptični operator drugog reda može da se napiše u divergentnoj formi kao $L = \nabla \cdot (Q\nabla \cdot +b) + c\nabla\cdot$, gde je Q pozitivno definitna funkcionalna matrica.

2) $A_\alpha = A + R_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$, gde je A kao u 1), dok su $R_\alpha, \alpha \in \mathcal{I}$, ograničeni linearni operatori na X takvi da je $\mathbf{R}$ koordinatni operator

$$\mathbf{R}U(t, \omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} R_\alpha u_\alpha(t) H_\alpha(\omega).$$

Posebno, ako uzmemo da je $A = 0$ i R_α da je multiplikativni operator $R_\alpha(x) = r_\alpha \cdot x$, $x \in X$, tada je rezultujući operator $\mathbf{R}$ samo-adjungovan operator sa sopstvenim vrednostima r_α koje odgovaraju sopstvenim vektorima H_α, pa predstavlja prirodno uopštenje Ornstein-Uhlenbeck-ovog operatora. Za $r_\alpha = |\alpha|$, $\alpha \in \mathcal{I}$, dobijamo Ornstein-Uhlenbeck-ov operator $\mathcal{R}$.

Konačno, primetimo da se svaki ograničen linearan koordinatni operator $\mathbf{R}$ može zapisati u formi $\mathbf{R}u = \delta(\mathbf{M}u)$, gde je $\mathbf{M}$ uopštenje Malliavin-ovog izvoda. Ovo će biti dokazano u Propoziciji 2.2.1.

II) Specijalni slučajevi za $\mathbf{B}$:

1) $\mathbf{B}$ je operator koji deluje kao multiplikativni operator determinističkom funkcijom, tj. $B_\alpha = b$ za $\alpha = (0, 0, 0, 0, \ldots)$ i $B_\alpha = 0$ za sve ostale $\alpha \in \mathcal{I}$. Tada je njegovo delovanje dato sa

$$\mathbf{B}\Diamond U(t, \omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} b \cdot u_\alpha(t) H_\alpha(\omega).$$

Na primer, možemo uzeti da je $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ i da je $b = b(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, esencijalno ograničena funkcija b.

2) $\mathbf{B}$ je multiplikacija sa prostornim belim šumom na $X = L^2(\mathbb{R}^n)$. Neka je $B_k := B_{\varepsilon_k} = \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$, i $B_\alpha = 0$ za $\alpha \neq \varepsilon_k$, tj. $B_k(v(x)) = \xi_k(x) \cdot v(x)$, $k \in \mathbb{N}$. Tada,

$$\mathbf{B}\Diamond U(t, \omega) = W(x, \omega)\Diamond U(t, \omega).$$

Jasno,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\lozenge U &= \sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\sum_{k\in\mathbb{N}} B_k(u_{\alpha-\varepsilon_k})H_\gamma = \sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{\alpha-\varepsilon_k}\xi_k H_\gamma \\ &= \sum_{\gamma\in\mathcal{I}}\sum_{\alpha+\varepsilon_k=\gamma} u_\alpha \xi_k H_\gamma = W\lozenge U. \end{aligned}$$

Multiplikacija sa prostornim belim šumom je važan podslučaj jer opisuje stacionarne perturbacije.

3) $\mathbf{B}$ je oblika $B_{\varepsilon_k} = B_k$, $k \in \mathbb{N}$, i $B_\alpha = 0$ za $\alpha \neq \varepsilon_k$, gde su $B_k : X \to X$, $k \in \mathbb{N}$, ograničeni linearni operatori.

   Primetimo da u ovom slučaju imamo jedan-na-jedan korespondenciju izmedju operatora oblika $\mathbf{B}\lozenge$ i operatora oblika $\delta(\mathbf{M}u)$ gde je $\mathbf{M}$ jednostavan koordinatni operator. Ovo će biti dokazano u Propoziciji 2.2.2.

4) $\mathbf{B}$ je jednostavan koordinatni operator, tj. $B_\alpha = B, \alpha \in \mathcal{I}$, gde je B ograničen linearan operator na X. Alternativno, možemo posmatrati operatore kao preslikavanja $B : X \to X'$ da bi ih učinili ograničenima; takav operator je na primer operator divergencije $\nabla\cdot$ kao preslikavanje iz $X = W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ u $X' = W^{-1,2}(\mathbb{R}^n)$.

5) $\mathbf{B}\lozenge = \nabla\cdot\lozenge(Q\lozenge\nabla\cdot + b\lozenge) + c\lozenge\nabla\cdot$ kao strogo eliptični operator drugog reda sa slučajnim koeficijentima. Ovaj operator se dobija ako je $B_\alpha = \nabla\cdot(Q_\alpha\nabla\cdot + b_\alpha) + c_\alpha\nabla\cdot$, $\alpha \in \mathcal{I}$, i izučavan je u [91] i [92].

Propozicija 2.2.1 *Neka je $\mathbf{R} : X\otimes(S)_{-1} \to X\otimes(S)_{-1}$ ograničen linearan koordinatni operator definisan sa $\mathbf{R}u(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} R_\alpha u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$.*

1. *Tada postoji operator $\mathbf{M} : X\otimes(S)_{-1} \to X\otimes S'(\mathbb{R})\otimes(S)_{-1}$ oblika*

$$\mathbf{M}u = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}_k u \otimes \xi_k, \quad u \in X\otimes(S)_{-1},$$

   za neke koordinatne operatore $\mathbf{M}_k : X\otimes(S)_{-1} \to X\otimes(S)_{-1}$, $k\in\mathbb{N}$, tako da važi

$$\mathbf{R}u = \delta(\mathbf{M}u).$$

2. *Specijalno, ako je $\mathbf{R}$ samo-adjungovan operator, onda je $\mathbf{M}$ uopštenje Malliavin-ovog izvoda.*

Dokaz. a) U [62] je dokazano da je Skorokhod-ov integral invertabilan, tj. da postoji jedinstveno rešenje jednačine oblika $\delta(v) = f$. Posmatrajući jednačinu $\delta(\mathbf{M}u) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} R_\alpha u_\alpha\, H_\alpha$ i primenjujući rezultat iz [62], dobijamo da je $\mathbf{M}u$ oblika

$$\mathbf{M}u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sum_{k\in\mathbb{N}}(\alpha_k+1)\frac{R_{\alpha+\varepsilon_k}(u_{\alpha+\varepsilon_k})}{|\alpha+\varepsilon_k|}\otimes\xi_k\otimes H_\alpha.$$

Uzimajući da je

$$\mathbf{M}_k u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(\alpha_k+1)\frac{R_{\alpha+\varepsilon_k}(u_{\alpha+\varepsilon_k})}{|\alpha+\varepsilon_k|}\otimes H_\alpha,\quad k\in\mathbb{N},$$

dobijamo traženo tvrdjenje.

b) Neka je $\mathbf{R}$ samo-adjungovan operator sa sopstvenim vrednostima r_α i sopstvenim vektorima H_α, $\alpha\in\mathcal{I}$, tj. operator oblika $\mathbf{R}u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_\alpha u_\alpha H_\alpha$. Pretpostavimo da je $r_\alpha = \sum_{k\in\mathbb{N}} r_{k,\alpha}$, za neko $r_{k,\alpha}\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathcal{I}$, proizvoljna dekompozicija vrednosti r_α.

Definišimo

$$\mathbf{M}_k u = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_{k,\alpha}u_\alpha\otimes H_{\alpha-\varepsilon_k}.$$

Tada je $\mathbf{M}u = \sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbf{M}_k u\otimes\xi_k = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_{k,\alpha}u_\alpha\otimes H_{\alpha-\varepsilon_k}\otimes\xi_k$ i

$$\delta(\mathbf{M}u) = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_{k,\alpha}u_\alpha\otimes H_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} r_\alpha u_\alpha\otimes H_\alpha.$$

□

Napomena 2.2.1 *Obrnuto tvrdjenje nije tačno. Čak i ako su svi $\mathbf{M}_k$, $k\in\mathbb{N}$, jednostavni koordinatni operatori (pa bi to bio i $\mathbf{M}$), $\mathbf{R} := \delta\circ\mathbf{M}$ ne mora biti koordinatni operator. Da je to slučaj, sistem $R_\alpha(u_\alpha) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m_k(u_{\alpha-\varepsilon_k})$, $\alpha\in\mathcal{I}$, bi morao biti rešiv po $R_\alpha(\cdot)$ za date funkcije $m_k(\cdot)$, $k\in\mathbb{N}$, što u opštem slučaju nije tačno.*

Propozicija 2.2.2 *Neka je $\mathbf{M} : X\otimes(S)_{-1}\to X\otimes S'(\mathbb{R})\otimes(S)_{-1}$ oblika*

$$\mathbf{M}u = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}_k u\otimes\xi_k,\quad u\in X\otimes(S)_{-1},\tag{2.7}$$

za neke jednostavne koordinatne operatore $\mathbf{M}_k : X\otimes(S)_{-1}\to X\otimes(S)_{-1}$, $k\in\mathbb{N}$. Tada, postoji koordinatni operator $\mathbf{B}$ takav da je $B_\alpha = 0$ za $\alpha\neq\varepsilon_k$, $k\in\mathbb{N}$, i važi

$$\delta(\mathbf{M}u) = \mathbf{B}\lozenge u.$$

Obrnuto, za svaki koordinatni operator $\mathbf{B}$ takav da je $B_\alpha = 0$ za $\alpha\neq\varepsilon_k$, $k\in\mathbb{N}$, postoji operator $\mathbf{M}$ oblika $\mathbf{M}u = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{M}_k u\otimes\xi_k$ za neke jednostavne koordinatne operatore $\mathbf{M}_k$, $k\in\mathbb{N}$, tako da važi $\delta(\mathbf{M}u) = \mathbf{B}\lozenge u$.

Dokaz. Neka je $\mathbf{M}$ operator kao što je navedeno gore. Kako su $\mathbf{M}_k$ jednostavni koordinatni operatori, možemo ih napisati u formi

$$\mathbf{M}_k(u) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} m_k(u_\alpha) H_\alpha, \qquad u = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u_\alpha H_\alpha,$$

za neke operatore $m_k : X \to X$, $k \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$\mathbf{M}u = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} m_k(u_\alpha) H_\alpha \otimes \xi_k$$

što dalje implicira da je

$$\delta(\mathbf{M}u) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} m_k(u_\alpha) H_{\alpha+\varepsilon_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} m_k(u_{\alpha-\varepsilon_k}) H_\alpha. \tag{2.8}$$

Sa druge strane, ako je $\mathbf{B}$ takav da je $B_\alpha = 0$ za $\alpha \neq \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$, i označimo sa $B_k := B_{\varepsilon_k}$, $k \in \mathbb{N}$, operatore koji deluju na X, tada je

$$\mathbf{B}\Diamond u = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^{\infty} B_k(u_{\alpha-\varepsilon_k}) H_\alpha. \tag{2.9}$$

Iz (2.8) i (2.9) sledi da je $\delta(\mathbf{M}u) = \mathbf{B}\Diamond u$ ako i samo ako je $m_k = B_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Dakle, postoji jedan-na-jedan korespodencija izmedju operatora $\mathbf{B}\Diamond$ i $\delta \circ \mathbf{M}$. $\square$

Napomena 2.2.2 *U [71] i [72] Rozovskii i Lototsky posmatraju jednačinu* $\frac{d}{dt}u = \mathbf{A}u + \delta(\mathbf{M}u) + f$, *gde je* $\mathbf{M}$ *oblika* (2.7). *Oni su implicitno pretpostavili da su njihovi operatori* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{M}_k$, $k \in \mathbb{N}$, *jednostavni koordinatni operatori. Ovo odgovaran našim specijalnim slučajevima I-1) i II-3).*

U nastavku ćemo dati neke specijalne slučajeve stohastičkih diferencijalnih jednačina koje su obuhvaćene sa (2.4):

- Jednačina provodjenja toplote sa slučajnim potencijalom

  $$\frac{d}{dt}u = \Delta u + \mathbf{B}\Diamond u.$$

  Posebno, ako je slučajni potencijal modelovan stacionarnom perturbacijom, kao model možemo uzeti prostorni beli šum i tako dobijamo $\frac{d}{dt}u = \Delta u + W\Diamond u$. To odgovara našim specijalnim sličajevima za operatore I-1) i II-2).

- Jednačina provodjenja toplote u slučajnoj (nehomogenoj i anisotropnoj) sredini, gde su fizičke karakterisitike sredine modelovane stohastičkom matricom Q. Ovo odgovara sličaju I-1) gde je $\mathbf{A}=0$ i II-5), što nas dovodi do jednačine

$$\frac{d}{dt}u = \nabla\cdot\Diamond(Q\Diamond\nabla\cdot u + b\Diamond u) + c\Diamond\nabla\cdot u + f.$$

- Uzimajući da je $\mathbf{A}=0$ i $B_k := B_{\varepsilon_k} = \xi_k\nabla\cdot$, $k\in\mathbb{N}$, (pogledati specijalni slučaj II-2) i II-4)) dobijamo transportnu jednačinu odredjenu belim šumom

$$\frac{d}{dt}u = \Delta u + W\Diamond\nabla\cdot u.$$

- Langevin-ova jednačina

$$\frac{d}{dt}u = -\lambda u + W(t),$$

  $\lambda > 0$, odgovara slučaju I-1) gde je $A=-\lambda$, $f=W$ i $\mathbf{B}=0$. Njeno rešenje je Ornstein-Uhlenbeck-ov proces koji opisuje prostornu poziciju Brownian-ove čestice u fluidu viskoznosti λ.

  U [3] autori su posmatrali uopštenu Langevin-ovu jednačinu koja ovodi do uopštenih Ornstein-Uhlenbeck-ovih operatora datih Lévy-jevim procesima

$$\frac{d}{dt}u = Ju + C(\frac{d}{dt}Y),$$

  gde je Y Lévy-jev proces, J infinitezimalni generator C_0-polugrupe i C ograničen operator. Svi procesi su sa vrednostima u Hilbert-ovom prostoru. Ovo odgovara našoj jednačini kada je X Hilbert-ov prostor, $\mathbf{A}=J$, $\mathbf{B}=0$ i $f=C(Y')$.

- Jednačina $\frac{d}{dt} = \mathbf{A}u + \delta(\mathbf{M}u) + f$, je intenzivno izučavana u radovima [71] i [72]. Ona odgovara našim specijalnim slučajevima I-1) i II-3).

- Jednačina

$$\frac{d}{dt}u = Lu + W\Diamond u,$$

  gde je L strogo eliptični parcijalni diferencijalni operator je izučavana u [13] i [40]. Ona odgovara našem specijalnom slučaju I-1) i II-2).

2.3 Stohastičke evolucione jednačine

Vratimo se našem opštem slučaju stohastičkog Cauchy-jevog problema oblika $\frac{d}{dt}U(t,\omega) = \mathbf{A}U(t,\omega) + \mathbf{B}\lozenge U(t,\omega) + F(t,\omega)$, $t \in (0,T]$, $\omega \in \Omega$, sa početnom vrednosti $U(0,\omega) = U^0(\omega)$, $\omega \in \Omega$, gde su svi procesi X-značni, X Banach-ov prostor.

Definicija 2.3.1 *Kaže se da je U rešenje od (2.3) ako $U \in C([0,T],X) \otimes (S)_{-1} \cap C^1((0,T],X) \otimes (S)_{-1}$ i U zadovoljava (2.3).*

Teorema 2.3.1 *Neka je $\mathbf{A}$ koordinatni operator oblika (2.5), gde su operatori A_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, definisani na zajedničkom domenu D gustom u X, infinitezimalni generatori C_0-polugrupa $(T_t)_\alpha$, $t \geq 0$, $\alpha \in \mathcal{I}$, uniformno ograničenih sa*

$$||(T_t)_\alpha\|_{L(X)} \leq Me^{wt},\ t \geq 0, \quad \text{za neke } M, w > 0. \tag{2.10}$$

Neka je $\mathbf{B}\lozenge$ oblika (2.6), gde su B_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, ograničeni linearni operatori na X takvi da postoji $p > 0$ tako da je

$$K := \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \|B_\alpha\|(2\mathbb{N})^{-p\frac{\alpha}{2}} < \infty. \tag{2.11}$$

Neka je početna vrednost $U^0 \in X \otimes (S)_{-1}$ takva da je $U^0 \in Dom(\mathbf{A})$ tj.

$$\begin{aligned} &U^0(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} u^0_\alpha H_\alpha(\omega) \in X \otimes (S)_{-1,-p}, \\ &\text{tako da zadovoljava} \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \|u^0_\alpha\|^2_X (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty; \end{aligned} \tag{2.12}$$

i da je

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}U^0(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha u^0_\alpha H_\alpha(\omega) \in X \otimes (S)_{-1,-p}, \\ &\text{tako da zadovoljava} \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \|A_\alpha u^0_\alpha\|^2_X (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dodatno, neka je

$$\begin{aligned} &F(t,\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} f_\alpha(t) H_\alpha(\omega) \in C^1([0,T],X) \otimes (S)_{-1}, \\ &t \mapsto f_\alpha(t) \in C^1([0,T],X),\ \alpha \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

tako da je

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|f_\alpha\|^2_{C^1([0,T],X)}(2\mathbb{N})^{-p\alpha}$$
$$= \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sup_{t\in[0,T]} \|f_\alpha(t)\|_X + \sup_{t\in[0,T]} \|f'_\alpha(t)\|_X\Big)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty. \tag{2.14}$$

Tada, stohastički Cauchy-jev problem (2.3) ima jedinstveno rešenje U u $C^1([0,T],X)\otimes(S)_{-1,-p}$.

Dokaz. Tražimo rešenje u obliku $U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$. Tada je Cauchy-jev problem (2.3) ekvivalentan beskonačnom sistemu:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,u_\alpha(t) &= A_\alpha u_\alpha(t) + \sum_{\beta\leq\alpha} B_\beta u_{\alpha-\beta}(t) + f_\alpha(t), \quad t\in(0,T],\\ u_\alpha(0) &= u^0_\alpha \in D, \quad \alpha\in\mathcal{I}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Neka je $\mathbf{0}$ multi-indeks $\mathbf{0}=(0,0,...)$. Sada možemo (2.15) napisati kao

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,u_\alpha(t) &= (A_\alpha + B_{\mathbf{0}})u_\alpha(t) + \sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} B_\beta u_{\alpha-\beta}(t) + f_\alpha(t), \quad t\in(0,T],\\ u_\alpha(0) &= u^0_\alpha \in D, \quad \alpha\in\mathcal{I}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Dalje, na osnovu Teoreme 1.2.8, $A_\alpha + B_{\mathbf{0}}$ su infinitezimalni generatori C_0-polugrupa $(S_t)_\alpha$ u X takvih da je

$$||(S_t)_\alpha\| \leq Me^{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)t}, \; t\geq 0, \; \alpha\in\mathcal{I}. \tag{2.17}$$

Na osnovu Teoreme 1.2.10, ako f_α, $\alpha\in\mathcal{I}$, zadovoljava uslov (i) ili (ii), nehomogeni početni problem (2.16) ima rešenje $u_\alpha(t)\in C([0,T],X)\cap C^1((0,T],X)$, $\alpha\in\mathcal{I}$, dato sa

$$\begin{aligned} u_{\mathbf{0}}(t) &= (S_t)_{\mathbf{0}}u^0_{\mathbf{0}} + \int_0^t (S_{t-s})_{\mathbf{0}} f_{\mathbf{0}}(s)ds, \quad t\in[0,T]\\ u_\alpha(t) &= (S_t)_\alpha u^0_\alpha + \int_0^t (S_{t-s})_\alpha \Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} B_\beta u_{\alpha-\beta}(s) + f_\alpha(s)\Big)ds, \quad t\in[0,T]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Kako je $f_\alpha\in C^1([0,T],X)$, inducijom po α se može pokazati da je

$$\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} B_\beta u_{\alpha-\beta}(s) + f_\alpha(s) \in C^1([0,T],X), \quad \text{za sve} \quad \alpha\in\mathcal{I}.$$

Dakle, $u_\alpha \in C^1([0,T],X)$ (videti Napomenu 1.2.1) i

$$\frac{d}{dt}u_\alpha(0) = (A_\alpha + B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0 + \sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} B_\beta u_{\alpha-\beta}^0 + f_\alpha(0),\ \alpha \in \mathcal{I}.$$

Primetimo da za svako fiksirano $\alpha \in \mathcal{I}$, $u_\alpha(t)$ postoji za sve $t \in [0,T]$ i ono je jedinstveno (klasično) rešenje na celom intervalu $[0,T]$. Ostaje da se pokaže da $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$ konvergira u $C^1([0,T],X) \otimes (S)_{-1,-p}$.

Prvo ćemo pokazati da je $U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega) \in C^1([0,T_0],X) \otimes S_{-1,-p}$ za odgovarajuće $T_0 \in (0,T]$, tj. pokazaćemo da je

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha\|^2_{C^1([0,T_0],X)}(2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X + \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X \Big)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty. \tag{2.19}$$

Kasnije ćemo dokazati da isto važi i ako u (2.19) uzmemo supremume nad intervalima $[T_0, 2T_0]$, $[2T_0, 3T_0]$, ... itd. Kako $[0,T]$ može da se prekrije sa konačno mnogo intervala oblika $[kT_0, (k+1)T_0]$, $k \in \mathbb{N}_0$, zaključujemo da važi

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha\|^2_{C^1([0,T],X)}(2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sup_{t\in[0,T]} \|u_\alpha(t)\|_X + \sup_{t\in[0,T]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X \Big)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty. \tag{2.20}$$

Da bismo to uradili, uvešćemo notaciju za podskupove multi-indeksa

$$\mathcal{I}_{n,m} = \{\alpha \in \mathcal{I} :\ |\alpha| \leq n \wedge \mathrm{Index}(\alpha) \leq m\},\ n,m \in \mathbb{N},$$

gde, za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, 0, 0, \dots) \in \mathcal{I}$, imamo da je $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$ i $\mathrm{Index}(\alpha)$ je mesto poslednje koordinate od α koja je ne-nula. Za kasniju upotrebu, uvedimo i funkciju

$$C(t) = \frac{M^2}{(w + M\|B_{\mathbf{0}}\|)^2}\Big(e^{(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)t} - 1\Big)^2 \tag{2.21}$$

i fiksirajmo $T_0 \in (0,T]$ tako da važi $C(T_0) < \frac{1}{5K^2}$.

Prvo ćemo pokazati da je

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|u_\alpha(t)\|^2_{C([0,T_0],X)}(2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|^2_X (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty,$$

tako što ćemo za parcijalne sume $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha},\ n,m\in\mathbb{N}$, naći gornje ograničenje.

Koristeći (2.18) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} \leq &\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha}\|B_\beta u_{\alpha-\beta}(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\|f_\alpha(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}.\end{aligned}$$

Prvi izraz sa desne strane, za sve $t\in[0,T_0]$, imajući u vidu (2.12) i (2.17), je ograničen sa

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\leq \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\leq M^2e^{2(w+M\|B_\mathbf{0}\|)T_0}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}:=Q_1<\infty.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Slično, za sve $t\in[0,T_0]$, koristeći (2.14) i (2.17), treći izraz je ograničen sa

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\|f_\alpha(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\leq\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\|f_\alpha(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\leq\Big[\int_0^t Me^{(w+M\|B_\mathbf{0}\|)(t-s)}ds\Big]^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{s\in[0,t]}\|f_\alpha(s)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\ &\leq\frac{M^2}{(w+M\|B_\mathbf{0}\|)^2}\Big(e^{(w+M\|B_\mathbf{0}\|)T_0}-1\Big)^2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T]}\|f_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}:=G<\infty.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Primetimo da smo u (2.23) posmatrali supremum nad celim intervalom $[0,T]$.

Drugi izraz, koristeći (2.11), (2.17), (2.21) i koristeći upštenu nejednakost Minkowski-og, se može oceniti sa

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \Big[\int_0^t \|(S_{t-s})_\alpha\| \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \|B_\beta\| \|u_\gamma(s)\|_X ds\Big]^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq C(t) \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \Big[\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sup_{s\in[0,t]} \|B_\beta\| \|u_\gamma(s)\|_X\Big]^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq C(T_0)\Big(\sum_{\beta\in\mathcal{I}_{n,m}} \|B_\beta\|(2\mathbb{N})^{-p\frac{\beta}{2}}\Big)^2 \Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\gamma(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma}\Big) \\
&\leq C(T_0)K^2 \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha}. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Konačno, za sve $n, m \in \mathbb{N}$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\qquad \leq Q_1 + G + C(T_0)K^2 \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha}.
\end{aligned}
$$

Kako je $\frac{1}{3} - C(T_0)K^2 > \frac{1}{5} - C(T_0)K^2 > 0$, imamo da je

$$
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \leq \frac{Q_1 + G}{\frac{1}{3} - C(T_0)K^2}. \qquad (2.25)
$$

Neka je $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz pozitivnih brojeva koji teži u beskonačno. Tada,

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m_n}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq \frac{Q_1 + G}{\frac{1}{3} - C(T_0)K^2},
\end{aligned}
$$

jer je to niz pozitivnih brojeva pa ne zavisi od redosleda sumiranja.

Sada ćemo pokazati da je

$$
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|^2_{C([0,T_0],X)} (2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty.
$$

Da bismo to uradili, diferenciraćemo (2.18) po t, i dobiti beskonačan sistem

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}u_{\mathbf{0}}(t) &= (S_t)_{\mathbf{0}}(A_{\mathbf{0}}+B_{\mathbf{0}})u_{\mathbf{0}}^0+\int_0^t (S_{t-s})_{\mathbf{0}}\frac{d}{ds}f_{\mathbf{0}}(s)ds+(S_t)_{\mathbf{0}}f(0), \quad t\in[0,T],\\
\frac{d}{dt}u_{\alpha}(t) &= (S_t)_{\alpha}(A_{\alpha}+B_{\mathbf{0}})u_{\alpha}^0+\int_0^t (S_{t-s})_{\alpha}\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha}B_\beta\frac{d}{ds}u_{\alpha-\beta}(s)+\frac{d}{ds}f_\alpha(s)\Big)ds\\
&\quad+(S_t)_\alpha\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha}B_\beta u_{\alpha-\beta}(0)+f_\alpha(0)\Big), \quad t\in[0,T], \quad \alpha\in\mathcal{I}.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

U nastavku ćemo oceniti parcijalne sume od $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}$. Imamo da je

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{5}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\leq \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|(A_\alpha+B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha}\|B_\beta\frac{d}{ds}u_{\alpha-\beta}(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\Big[\int_0^t\|(S_{t-s})_\alpha\|\|\frac{d}{ds}f_\alpha(s)\|_X ds\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\Big[\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha}\|B_\beta u_{\alpha-\beta}(0)\|_X\Big]^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&+\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|f_\alpha(0)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}.
\end{aligned}
$$

Imajući u vidu (2.12) i (2.13), dobijamo da je $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}(A_\alpha+B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0H_\alpha(\omega)\in X\otimes(S)_{-1,-p}$. Na osnovu toga dobijam da se prvi izraz sa desne strane može oceniti na sledeći način

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}}&\|(S_t)_\alpha\|^2\|(A_\alpha+B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&\leq\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|(S_t)_\alpha\|^2\|(A_\alpha+B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\\
&\leq M^2e^{2(w+M\|B_{\mathbf{0}}\|)T_0}\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\|(A_\alpha+B_{\mathbf{0}})u_\alpha^0\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}:=Q_1'<\infty.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Treći izraz, za sve $t \in [0, T_0]$, je ograničen sa

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \Big[\int_0^t \|(S_{t-s})_\alpha\| \|\frac{d}{ds} f_\alpha(s)\| ds\Big]^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big[\int_0^t \|(S_{t-s})_\alpha\| \|\frac{d}{ds} f_\alpha(s)\|_X ds\Big]^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq \frac{M^2}{(w+M\|B_\mathbf{0}\|)^2}\Big(e^{(w+M\|B_\mathbf{0}\|)T_0}-1\Big)^2 \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|\frac{d}{ds} f_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&:= G' < \infty. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Četvrti izraz, koristeći (2.11), (2.12), (2.17) i uopštenu nejednakost Minkowski-og, može da se oceni sa

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \|(S_t)_\alpha\|^2 \Big[\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} \|B_\beta u_{\alpha-\beta}(0)\|_X\Big]^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|(S_t)_\alpha\|^2 \Big[\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \|B_\beta u_\gamma^0\|_X\Big]^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq M^2 e^{2(w+M\|B_\mathbf{0}\|)t} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big[\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \|B_\beta\| \|u_\gamma^0\|_X\Big]^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq M^2 e^{2(w+M\|B_\mathbf{0}\|)T_0} \Big(\sum_{\beta\in\mathcal{I}} \|B_\beta\| (2\mathbb{N})^{-p\frac{\beta}{2}}\Big)^2 \Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{I}} \|u_\gamma^0\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma}\Big) := H_1' < \infty. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Peti izraz, koristeći (2.14) i (2.17), je ograničen sa

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \|(S_t)_\alpha\|^2 \|f_\alpha(0)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \leq \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \|(S_t)_\alpha\|^2 \|f_\alpha(0)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\qquad \leq M^2 e^{2(w+M\|B_\mathbf{0}\|)T_0} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T]} \|f_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} := N' < \infty. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

Konačno, za drugi izraz, koristeći (2.11), (2.17), (2.21) i uopštenu nejednakost Minkowski-og, važi

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \Big[\int_0^t \|(S_{t-s})_\alpha\| \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \|B_\beta\| \|\frac{d}{ds}u_\gamma(s)\|_X ds\Big]^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&C(t) \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \Big[\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \sup_{s\in[0,t]} \|B_\beta\| \|\frac{d}{ds}u_\gamma(s)\|_X\Big]^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq C(t)\Big(\sum_{\beta\in\mathcal{I}_{n,m}} \|B_\beta\|(2\mathbb{N})^{-p\frac{\beta}{2}}\Big)^2 \Big(\sum_{\gamma\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{s\in[0,t]} \|\frac{d}{dt}u_\gamma(s)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma}\Big) \\
&\leq C(T_0)K^2 \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha}. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Konačno, za sve $n, m \in \mathbb{N}$, imamo da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} &\leq Q_1' + G' + H_1' + N' \\
&+ C(T_0)K^2 \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha}.
\end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{5} - C(T_0)K^2 > 0$, dobijamo da je

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \leq \frac{Q_1' + G' + H_1' + N'}{\frac{1}{5} - C(T_0)K^2}. \qquad (2.32)$$

Ponovo, uzimajući da je $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ poizvoljan niz pozitivnih brojeva koji teže u beskonačno, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\alpha\in\mathcal{I}_{n,m_n}} \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \\
&\leq \frac{Q_1' + G' + H_1' + N'}{\frac{1}{5} - C(T_0)K^2}.
\end{aligned}$$

Na osnovu svega pomenutog, imamo da je

$$\begin{aligned}
&U(t,\omega) \in C^1([0,T_0], X) \otimes (S)_{-1,-p}, \text{ tj.} \\
&\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X + \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X\Big)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} \leq \\
&2\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \Big(\sup_{t\in[0,T_0]} \|u_\alpha(t)\|_X^2 + \sup_{t\in[0,T_0]} \|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2\Big)(2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty.
\end{aligned} \qquad (2.33)$$

U nastavku, ćemo posmatrati (2.33) sa supremumima nad intervalom $[T_0, 2T_0]$. Nad intervalom $[T_0, 2T_0]$ sistem početnih problema (2.15) se može zapisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\, v_\alpha(t) &= A_\alpha v_\alpha(t) + \sum_{\beta\le\alpha} B_\beta v_{\alpha-\beta}(t) + f_\alpha(T_0+t), \quad t\in(0,T_0] \\ v_\alpha(0) &= v_\alpha^0 := u_\alpha(T_0), \quad \alpha\in\mathcal{I}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Polugrupa koja odgovara infinitezimalnom generatoru $A_\alpha + B_{\mathbf{0}}$ u (2.34) je ponovo polugrupa $(S_t)_\alpha$, $t\ge 0$. Koristeći (2.15) i (2.33), dobijam da je $U(t,\omega)\in Dom(\mathbf{A})$, za sve $t\in[0,T_0]$, i važi $\mathbf{A}U(t,\omega)\in X\otimes(S)_{-1,-p}$, $t\in[0,T_0]$. Koristeći tu činenicu imamo da je $V^0(\omega) = U(T_0,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} v_\alpha^0 H_\alpha(\omega)\in Dom(\mathbf{A})$ i $\mathbf{A}V^0(\omega)\in X\otimes(S)_{-1,-p}$. Dakle,

$$v_\alpha(t) = (S_t)_\alpha v_\alpha^0 + \int_0^t (S_{t-s})_\alpha \Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\le\alpha} B_\beta v_{\alpha-\beta}(s) + f_\alpha(T_0+s)\Big) ds, \quad t\in[0,T_0],$$

i jasno važi $v_\alpha(t) = u_\alpha(T_0+t)$, $t\in[0,T_0]$, $\alpha\in\mathcal{I}$.

Sada ćemo oceniti parcijalne sume od $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|v_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}$. U odnosu na prethodne ocene za $u_\alpha(t)$, jedino će konstanta Q_1 biti drugačija, i ovde, ćemo je označiti sa Q_2, i ponovo dobiti

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|v_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[T_0,2T_0]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} \le \frac{Q_2+G}{\frac{1}{3}-C(T_0)K^2}.$$

Slično, za izvod $\frac{d}{dt}V(t,\omega)$ dobijamo da je

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T_0]}\|\frac{d}{dt}v_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} \le \frac{Q_2'+G'+H_2'+N'}{\frac{1}{5}-C(T_0)K^2},$$

gde su, u odnosu na ocene za $\frac{d}{dt}U(t,\omega)$, jedino konstante Q_1' i H_1' promenjene i ovde smo ih označili sa Q_2' i H_2'.

Za prizvoljno $T>0$, interval $[0,T]$ se može prekriti intervalima $[kT_0,(k+1)T_0]$, $k\in\mathbb{N}_0$, u konačno mnogo koraka (recimo u l koraka). Na taj način dobijamo da je

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T]}\|u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha} \le \frac{Q+G}{\frac{1}{3}-C(T_0)K^2},$$

gde je $Q = \max_{1\le k\le l}\{Q_k\}$. Dakle,

$$U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)\in C([0,T],X)\otimes(S)_{-1,-p}.$$

Takodje,

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\sup_{t\in[0,T]}\|\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\|_X^2(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\leq\frac{Q'+G'+H'+N'}{\frac{1}{5}-C(T_0)K^2},$$

gde je $Q'=\max_{1\leq k\leq l}\{Q'_k\}$, $H'=\max_{1\leq k\leq l}\{H'_k\}$. Kako je

$$\frac{d}{dt}u_\alpha(t)\in C([0,T],X),\ \alpha\in\mathcal{I},$$

imamo da je

$$\frac{d}{dt}U(t,\omega)=\sum_{\alpha\in\mathcal{I}}\frac{d}{dt}u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)\in C([0,T],X)\otimes(S)_{-1,-p}.$$

Na osnovu svega do sad pokazanog, $U(t,\omega)\in C^1([0,T],X)\otimes(S)_{-1,-p}$ pa je U rešenje (2.3) u smislu Definicije 2.3.1.

Rešenje U je jedinstveno na osnovu jedinstvenosti koordinatnih (klasičnih) rešenja u_α u (2.18) i na osnovu jedinstvenosti Wiener-Itô-ove haos ekspanzije. □

Primetimo da na osnovu prethodne teoreme rešenje U ostaje u prostoru istog stohastičkog reda $(S)_{-1,-p}$ gde se nalaze početni uslov U^0, $\mathbf{A}U^0$ i gde pripada F.

Primer 2.3.1 *U nastavku, ćemo predstaviti tri primera jednačine* (2.3) *gde je* $\mathbf{A}$ *uniformno ograničen (ne jednostavan) koordinatni operator. Posmatrajmo Banach-ov prostor* $X=L^p(\mathbb{R})$, $1\leq p<\infty$, *i stohastički Cauchy-jev problem*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}U(t,x,\omega)&=\mathbf{A}U(t,x,\omega)+W\Diamond U(t,x,\omega)+F(t,x,\omega),\\ U(0,x,\omega)&=U^0(x,\omega),\end{aligned}\tag{2.35}$$

gde je $\mathbf{A}:Dom(\mathbf{A})\to X\otimes(S)_{-1}$ *koordinatni operator sačinjen od familje zatvorenih operatora* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ *oblika* $A_\alpha=a_\alpha D$, $\alpha\in\mathcal{I}$, *takvih da su funkcije* $a_\alpha\in L^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha\in\mathcal{I}$, *uniformno ograničene, tj.* $\sup_{x\in\mathbb{R}}|a_\alpha(x)|\leq M$, $\alpha\in\mathcal{I}$, *za neko* $M>0$, *a* D *je jedan od sledećih diferencijalnih operatora:* $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ *ili* $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}$, *i* $W=\sum_{k\in\mathbb{N}}\xi_kH_{\varepsilon_k}$ *predstavlja prostorni beli šum. Tada, (2.35) je ekvivalentno beskonačnom sistemu:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_\alpha(t,x)&=A_\alpha u_\alpha(t,x)+\sum_{k\in\mathbb{N}}\xi_k(x)u_{\alpha-\varepsilon_k}(t,x)+f_\alpha(t,x)\\ u_\alpha(0,x)&=u_\alpha^0(x),\quad\alpha\in\mathcal{I}.\end{aligned}$$

C_0-polugrupe koja odgovaraju zatvorenim operatorima D, oznčene sa T_t, $t \geq 0$, su, redom,

$$
\begin{aligned}
T_t g(x) &= g(t+x), \quad g \in L^p(\mathbb{R}), \qquad za \;\; D = \frac{\partial}{\partial x},\\
T_t g(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-\frac{y^2}{4t}} dy, \quad g \in L^p(\mathbb{R}), \qquad za \;\; D = \frac{\partial^2}{\partial x^2},\\
T_t g(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} g(x-y) e^{-\frac{(y+t)^2}{4t}} dy, \quad g \in L^p(\mathbb{R}), \qquad za \;\; D = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

U svakom od slučajeva, imam da je, koristeći Young-ovu nejednakost, $\|T_t\| \leq 1$, $t \geq 0$. C_0-polugrupe koje odgovaraju operatorima A_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, su oblika $(S_t)_\alpha = a_\alpha T_t$. Dakle, $\|(S_t)_\alpha\| \leq M$, $\alpha \in \mathcal{I}$. Operatori B_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, su dati sa $B_{\varepsilon_k} = \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$ i $B_\alpha = 0$, $\alpha \neq \varepsilon_k$. Pa je $\|B_\alpha\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\xi_k\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$, $\alpha \in \mathcal{I}$. Sad, na osnovu Teoreme 2.3.1, početni problem (2.35) *ima jedinstveno rešenje $U(t,x,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t,x) H_\alpha(\omega)$, gde je*

$$
u_\alpha(t,x) = (S_t)_\alpha u_\alpha^0(x) + \int_0^t (S_{t-s})_\alpha (\sum_k \xi_k(x) u_{\alpha-\varepsilon_k}(s,x) + f_\alpha(s,x)) ds, \; \alpha \in \mathcal{I}.
$$

Primer 2.3.2 *Posmatrajmo Cauchy-jev problem*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} U(t,\omega) &= \mathbf{A} U(t,\omega) + \mathbf{B} \Diamond U(t,\omega) + F(t,\omega)\\
U(0,\omega) &= U^0(\omega),
\end{aligned}
$$

gde je $\mathbf{A}$ *jednostavan koordinatni operator $A_\alpha = A$, $\alpha \in \mathcal{I}$, koji generiše C_0-polugrupu, $B_\alpha \neq 0$ samo za $\alpha = \varepsilon_k$, $k \in \mathbb{N}$, su takvi da je $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|B_{\varepsilon_k}\| (2k)^{-\frac{p}{2}} < \infty$, i U^0 i F su determinističke funkcije, tj. $u_\alpha^0 = 0$ i $f_\alpha = 0$ za sve $\alpha \in \mathcal{I} \setminus \{\mathbf{0}\}$.*

Rešenje sistema, prema Teoremi 2.3.1, je

$$
\begin{aligned}
u_{\mathbf{0}}(t) &= T_t u_{\mathbf{0}}^0 + \int_0^t T_{t-s} f_{\mathbf{0}}(s) ds,\\
u_\alpha(t) &= \int_0^t T_{t-s} \Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} B_{\varepsilon_k} u_{\alpha-\varepsilon_k}(s) \Big) ds, \quad \alpha \in \mathcal{I} \setminus \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

istog oblika kao što je dobijeno i u radu [71].

U nastavku ćemo dati dva uopštenja Teoreme 2.3.1: jedna mogućnost je da dopustimo da operatori B_α zavise od vremenske promenljive t (sem operatora $B_{\mathbf{0}}$ koji mora biti nezavisan od t). Na taj način bismo pokrili

SPDJ-ne u kojima figurišu prostorno-vremenski šumovi koji imaju očekivanje nula (pa su samim tim nezavisni od t). Druga mogućnost je da dozvolimo da $B_{\mathbf{0}}$ bude neograničen ali da zadovoljava neke druge osobine kako bi $A_\alpha + B_{\mathbf{0}}$ bili infinitezimalni generatori C_0-polugrupa. Na primer, ako je $A_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ i $B_{\mathbf{0}} = \frac{\partial}{\partial x}$, tada, iako je B_0 neograničen, $A_\alpha + B_{\mathbf{0}}$ generiše polugrupu kontrakcija. Prateći [27] navešćemo neke dovoljne uslove koji obezbedjuju da $A_\alpha + B_{\mathbf{0}}$ generiše C_0-polugrupu.

Napomena 2.3.1 *U Teoremi 2.3.1 može se pretpostaviti da operatori* $B_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{I} \setminus \{\mathbf{0}\}$, *zavise od* t, *tako da je* $B_\alpha \in C^1([0,T], L(X))$, $\alpha \in \mathcal{I} \setminus \{\mathbf{0}\}$, $B_{\mathbf{0}}(t) = B_{\mathbf{0}} \in L(X)$, *za sve* $t \in [0,T]$, *i da je*

$$K := \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{I},\\ \alpha>\mathbf{0}}} \|B_\alpha\|_{C^1([0,T],L(X))}(2\mathbb{N})^{-p\frac{\alpha}{2}}$$
$$= \sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{I},\\ \alpha>\mathbf{0}}} \Big(\sup_{t\in[0,T]} \|B_\alpha(t)\|_{L(X)} + \sup_{t\in[0,T]} \|\frac{d}{dt}B_\alpha(t)\|_{L(X)}\Big)(2\mathbb{N})^{-p\frac{\alpha}{2}} < \infty. \quad (2.36)$$

Zamenjujući (2.11) sa (2.36) i ostavljajući sve ostale pretpostavke Teoreme 2.3.1, može se ponovo pokazati da postoji jedinstveno rešenje U *iz prostora* $C^1([0,T],X) \otimes (S)_{-1,-p}$ *koje odgovara Cauchy-jevom problemu (2.3).*

Rešenje je $U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$, $u_\alpha(t) \in C^1([0,T],X)$, $\alpha \in \mathcal{I}$, *gde je (videti (2.18))*

$$u_{\mathbf{0}}(t) = (S_t)_{\mathbf{0}}u^0_{\mathbf{0}} + \int_0^t (S_{t-s})_{\mathbf{0}} f_{\mathbf{0}}(s)ds, \quad t \in [0,T],$$
$$u_\alpha(t) = (S_t)_\alpha u^0_\alpha + \int_0^t (S_{t-s})_\alpha\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} B_\beta(s)u_{\alpha-\beta}(s) + f_\alpha(s)\Big)ds, \quad t \in [0,T]. \quad (2.37)$$

Njegov izvod je $\frac{d}{dt}U(t,\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \frac{d}{dt}u_\alpha(t)H_\alpha(\omega)$, *gde je (videti (2.26))*

$$\frac{d}{dt}u_{\mathbf{0}}(t) = (S_t)_{\mathbf{0}}(A_{\mathbf{0}} + B_{\mathbf{0}})u^0_{\mathbf{0}} + \int_0^t (S_{t-s})_{\mathbf{0}}\frac{d}{ds}f_{\mathbf{0}}(s)ds + (S_t)_{\mathbf{0}}f(0), \quad t \in [0,T],$$
$$\frac{d}{dt}u_\alpha(t) = (S_t)_\alpha(A_\alpha + B_{\mathbf{0}})u^0_\alpha$$
$$+ \int_0^t (S_{t-s})_\alpha\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} \Big(B_\beta(s)\frac{d}{ds}u_{\alpha-\beta}(s) + \frac{d}{ds}B_\beta(s)u_{\alpha-\beta}(s)\Big) + \frac{d}{ds}f_\alpha(s)\Big)ds$$
$$+ (S_t)_\alpha\Big(\sum_{\mathbf{0}<\beta\leq\alpha} B_\beta(0)u_{\alpha-\beta}(0) + f_\alpha(0)\Big), \quad t \in [0,T], \quad \alpha \in \mathcal{I}. \quad (2.38)$$

Dokaz se može izvesti na isti način kao što je to učinjeno za Teoremu 2.3.1, sada uzimajući da je $T_0 \in (0,T]$ dovoljno malo tako da važi $C(T_0) < \frac{1}{6K^2}$, jer sad imamo šest sabiraka u (2.38) umesto pet koji su bili u (2.26).

Napomena 2.3.2 *U Teoremi 2.3.1 može se pretpostaviti da je $B_\mathbf{0}$ neograničen, gusto definisan na D (isti domen koji je zajednički i za sve A_α) tako da važi bar jedan od sledećih uslova:*

(i) A_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, *generišu polugrupe kontrakcija (tj. $M = 1$, $w = 0$), i $B_\mathbf{0}$ je disipativan, $A_\alpha-$ograničen sa $a^0_\alpha < 1$ (tj. postoje $a_\alpha, b_\alpha > 0$ tako da je $\|B_\mathbf{0}x\| \leq a_\alpha\|A_\alpha x\| + b_\alpha\|x\|$, $x \in D$, i $a^0_\alpha = \inf\{a_\alpha > 0 : \exists b_\alpha > 0, \forall x \in D, \|B_\mathbf{0}x\| \leq a_\alpha\|A_\alpha x\| + b_\alpha\|x\|\}$), za sve $\alpha \in \mathcal{I}$;*

(ii) $B_\mathbf{0}$ *je zatvorljiv, disipativan i $A_\alpha-$kompaktan (tj. $B : (D, \|\cdot\|_{A_\alpha}) \to X$ kompaktan, gde $\|\cdot\|_{A_\alpha}$ označava graf normu), za sve $\alpha \in \mathcal{I}$;*

(iii) A_α *generišu analitičke polugrupe (tj. $w < 0$), $\alpha \in \mathcal{I}$, i $B_\mathbf{0}$ je zatvorljiv i $A_\alpha-$kompaktan.*

Tada je $A_\alpha + B_\mathbf{0}$ infinitezimalni generator C_0-polugrupe (označimo je sa $(S_t)_\alpha$) za sve $\alpha \in \mathcal{I}$. Ako je polugrupa $(T_t)_\alpha$ koja odgovara A_α uniformno ograničena po α, tada će to biti i $(S_t)_\alpha$. Ostavljajući sve ostale pretpostavke Teoreme 2.3.1, možemo ponovo izvesti dokaz na isti način za polugrupe $(S_t)_\alpha$, $\|(S_t)_\alpha\| \leq \tilde{M}e^{\tilde{w}t}$, za neke $\tilde{M} \geq 1$, $\tilde{w} \in \mathbb{R}$, nezavisne od α.

Konačno, primetimo da za slučajeve (i) i (ii) $A_\alpha + B_\mathbf{0}$ generišu polugrupe kontakcija, dok u slučaju (iii) imamo da generišu analitičke polugrupe.

2.4 Stacionarne jednačine

U ovom poglavlju posmatraćemo stacionarnu jednačinu oblika

$$\mathbf{A}U + \mathbf{B}\Diamond U + F = 0, \tag{2.39}$$

gde su $\mathbf{A} : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ i $\mathbf{B}\Diamond : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ koordinatni operatori kao što je predstavljeno u (2.5) i (2.6). Pretpostavimo da su $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ i $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ ograničeni operatori i da su A_α oblika

$$A_\alpha = \widetilde{A}_\alpha + C_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{I},$$

gde su $B_\mathbf{0}$ i $\widetilde{A}_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{I}$ kompaktni operatori i da su C_α samo-adjungovani operatori za sve $\alpha \in \mathcal{I}$. Označimo sa r_α sopstvene vrednosti koje odgovaraju ortogonalnoj familiji sopstvenih vektora H_α, tj. $C_\alpha(H_\alpha) = r_\alpha H_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{I}$. Koristeći klasične rezultate za eliptične PDJ i Fredholm-ovu alternativu (videti [29] i Poglavlje 2.1.2) dokazaćemo postojanje i jedinstvenost rešenja od (2.39).

Teorema 2.4.1 *Neka je X Banach-ov prostor. Neka su $\mathbf{A} : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ i $\mathbf{B}\lozenge : X \otimes (S)_{-1} \to X \otimes (S)_{-1}$ koordinatni operatori, za koje važe sledeće pretpostavke:*

1. *$\mathbf{A}$ je oblika $\mathbf{A} = \widetilde{\mathbf{A}} + \mathbf{C}$, gde je $\widetilde{\mathbf{A}}(U) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \widetilde{A}_\alpha(u_\alpha) H_\alpha$ i $\widetilde{A}_\alpha : X \to X$ su kompaktni operatori za svako $\alpha \in \mathcal{I}$, $\mathbf{C}(U) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} r_\alpha u_\alpha H_\alpha$, $r_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathcal{I}$, i $\mathbf{B}$ je oblika (2.6), gde je $B_{\mathbf{0}} : X \to X$ kompaktni operator. Pretpostavimo da postoji $K > 0$ tako da:*

$$-\|\widetilde{A}_\alpha\| - \|B_{\mathbf{0}}\| - r_\alpha \geq 0, \quad \textit{za sve} \quad \alpha \in \mathcal{I}, \tag{2.40}$$

   i da je

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{I}} \left(\frac{1}{-r_\alpha - \|\widetilde{A}_\alpha\| - \|B_{\mathbf{0}}\|} \right) < K. \tag{2.41}$$

2. *$\mathbf{B}$ je oblika (2.6), gde su $B_\beta : X \to X$, $\beta \in \mathcal{I} \setminus \{\mathbf{0}\}$, ograničeni operatori i postoji $p > 0$ tako da je*

$$K \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{I} \\ \beta > \mathbf{0}}} \|B_\beta\| \, (2\mathbb{N})^{\frac{-p\beta}{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.42}$$

3. *Za svako $\alpha \in \mathcal{I}$*

$$\mathrm{Ker}\left(\widetilde{A}_\alpha + (1 + r_\alpha)\mathrm{Id} + B_{\mathbf{0}}\right) = \{0\}. \tag{2.43}$$

Tada, za svako $F \in X \otimes (S)_{-1,-p}$ postoji jedinstveno rešenje $U \in X \otimes (S)_{-1,-p}$ jednačine (2.39).

Dokaz. Jednačina (2.39) je ekvivalentna sa $U - (\widetilde{\mathbf{A}}(U) + \mathbf{C}U + U + \mathbf{B}\lozenge U) = F$, tj. sa

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \left(u_\gamma - \widetilde{A}_\gamma u_\gamma - (1 + r_\gamma)\, u_\gamma - \sum_{\alpha + \beta = \gamma} B_\alpha(u_\beta) \right) H_\gamma = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}} f_\gamma H_\gamma.$$

Na osnovu jedinstvenosti Wiener-Itô-ove haos ekspanzije ovo je ekvivalentno sa

$$u_\gamma - \left(\widetilde{A}_\gamma + (1 + r_\gamma) Id + B_{\mathbf{0}}\right) u_\gamma = f_\gamma + \sum_{\mathbf{0} < \beta \leq \gamma} B_\beta(u_{\gamma - \beta}), \quad \gamma \in \mathcal{I}. \tag{2.44}$$

Iz (2.43) dobijamo da za svako $\gamma \in \mathcal{I}$ homogena jednačina

$$u_\gamma - \left(\widetilde{A}_\gamma + (1+r_\gamma)Id + B_{\mathbf{0}}\right) u_\gamma = 0$$

ima samo trivijalno rešenje $u_\gamma = 0$. Kako je operator $\widetilde{A}_\gamma + (1+r_\gamma)Id + B_{\mathbf{0}}$ kompaktan, klasična Fredholm-ova alternativa implicira da za svako $\gamma \in \mathcal{I}$ postoji jedinstveno u_γ koje rešava (2.44) i ono je oblika

$$u_\gamma = (Id - ((r_\gamma + 1)\,Id + \widetilde{A}_\gamma + B_{\mathbf{0}}))^{-1}\left(f_\gamma + \sum_{\beta > \mathbf{0}} B_\beta(u_{\gamma-\beta})\right), \qquad \gamma \in \mathcal{I},$$

tako da je

$$\|u_\gamma\| \leq \frac{1}{-r_\gamma - \|\widetilde{A}_\gamma\| - \|B_{\mathbf{0}}\|} \cdot \left(\|f_\gamma\| + \sum_{\beta > \mathbf{0}} \|B_\beta\| \|u_{\gamma-\beta}\|\right), \quad \gamma \in \mathcal{I}.$$

Pokazaćemo da $\sum\limits_{\gamma \in \mathcal{I}} u_\gamma \otimes H_\gamma$ konvergira u $X \otimes (S)_{-1}$. Zaista,

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \|u_\gamma\|^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} &\leq K^2 \sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \left(\|f_\gamma\| + \sum_{\gamma = \alpha+\beta, \alpha > \mathbf{0}} \|B_\alpha\| \|u_\beta\|\right)^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} \\
&\leq 2K^2 \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \|f_\gamma\|^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} + \sum_{\gamma \in \mathcal{I}} (\sum_{\gamma = \alpha+\beta, \alpha > \mathbf{0}} \|B_\alpha\| \|u_\beta\|)^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma}\right) \\
&\leq 2K^2 \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \|f_\gamma\|^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} + (\sum_{\alpha > \mathbf{0}} \|B_\alpha\| (2\mathbb{N})^{-\frac{p\alpha}{2}})^2 \sum_{\beta \in \mathcal{I}} \|u_\beta\|^2 (2\mathbb{N})^{-p\beta}\right).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$(1 - 2K^2(\sum_{\alpha > \mathbf{0}} \|B_\alpha\| (2\mathbb{N})^{-\frac{p\alpha}{2}})^2) \cdot \sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \|u_\gamma\|^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} \leq 2K^2 \sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \|f_\gamma\|^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma}.$$

Na osnovu pretpostavke (2.42) dobijamo da je

$$M = 1 - 2K^2(\sum_{\alpha > \mathbf{0}} \|B_\alpha\| (2\mathbb{N})^{-\frac{p\alpha}{2}})^2 > 0.$$

Što sve zajedno implicira da je

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \|u_\gamma\|^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} \leq \frac{2K^2}{M} \sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \|f_\gamma\|^2 (2\mathbb{N})^{-p\gamma} < \infty.$$

□

Primer 2.4.1 U nastavku ćemo dati neke specijalne slučajeve jednačine (2.39).

1. Ako je $A_\alpha = 0$ za sve $\alpha \in \mathcal{I}$ i ako su B_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, strogo eliptični parcijalni diferencijalni operatori drugog reda u divergentnoj formi dati sa

$$B_\alpha = \sum_{i=1}^{n} D_i(\sum_{j=1}^{n} a_\alpha^{ij}(x) D_j + b_\alpha^i(x)) + \sum_{i=1}^{n} c_\alpha^i(x) D_i + d_\alpha(x) \qquad (2.45)$$

   sa esencijalno ograničenim koeficijentima, tada se jednačina (2.39) svodi na eliptičnu jednačinu

$$\mathbf{B} \Diamond U = F,$$

   koja je posmatrana u [91] i [92].

2. Neka je $\widetilde{A}_\alpha = 0$ za sve $\alpha \in \mathcal{I}$ i neka je B_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, strogo eliptični parcijalni diferencijalni operator drugog reda u divergentnoj formi dat sa (2.45). Neka je $\mathbf{C} = c\, P(\mathcal{R})$, za neko $c \in \mathbb{R}$, gde je $\mathcal{R}$ Ornstein-Uhlenbeck-ov operator, P polinom reda m sa realnim koeficijentima i $P(\mathcal{R})$ diferencijalni operator $P(\mathcal{R}) = p_m \mathcal{R}^m + p_{m-1}\mathcal{R}^{m-1} + ... + p_1 \mathcal{R} + p_0 Id$. Tada su odgovarajuće sopstvene vrednosti date sa $r_\alpha = cP(|\alpha|)$, $\alpha \in \mathcal{I}$. Dakle, jednačina (2.39) se svodi na eliptičnu jednačinu sa perturbacijom datom polinomom po Ornstein-Uhlenbeck-ovom operatoru

$$\mathbf{B} \Diamond U + cP(\mathcal{R})U = F,$$

   koja je rešena u [63].

Glava 3

Kompleksni stepeni $C-$sektorijalnih operatora u sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorima

Teorija frakcionih stepena operatora datira od rada E. Hilla (1939. godina) u kom se istražuju polugrupe operatora generisane frakcionim stepenima ograničenih linearnih operatora. Jedan od najznačajnijih radova u daljem razvoju teorije je 1960. godine napisao A. V. Balakrishnan [7]. U ovom radu, uvedena je metoda za konstrukciju frakcionih stepena široke klase zatvorenih linearnih operatora. Nakon 1960. razvijeni su i mnogi drugi pristupi za konstrukciju frakcionih stepena, tako da bi bilo teško ovde navesti sve relevantne reference. Iscrpne informacije u ovom pravcu, čitalac može naći u monografijama i naučnim radovima [4], [20], [21], [22], [23], [27], [32], [50], [53], [75]-[76], [87], [100] i [111]. U ovom poglavlju ćemo izložiti osnovne rezultate teorije frakcionih stepena $C-$sektorijalnih operatora koje ćemo nakon toga inkorporirati u analizi raznih tipova apstraktnih frakcionih diferencijalnih jednačina. Prvo ćemo konstruisati kompleksne stepene za $C-$sektorijalne operatore (videti [76] za skoro nenegativne operatore), a zatim istražiti mogućnosti njihove primene na rešavanje apstraktnih paraboličnih problema (videti monografiju [111]). Posmatrajući moguće primene na apstraktne frakcione diferencijalne jednačine, napomenimo da ćemo ispitati odredjene klase nepotpunih apstraktnih Cauchy-jevih problema sa Liouville-ovim desnim vremenskim frakcionim izvodima. Interesovanje za teoriju frakcionih deferencijalnih jednačina je stimulisano njenom primenom u mnogim poljima nauke i tehnologije, posebno fizike i hemije.

U ovom paragrafu ćemo ukratko opisati organizaciju našeg rada. U prvom poglavlju izložićemo notaciju i pripremni materijal koji je neophodan za dalji rad. Predstavićemo osnovne informacije o sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorima, zatim o zatvorenim linearnim operatorima. U nastavku ćemo ukratko izložiti kako je zasnovana teorija integracije i Laplace-ove transformacije u sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorim; predstavićemo i osnove teorije Riemann-Liouville-ovih i Caputo-vih frakcionih izvoda. U drugom poglavlju daćemo osnovne karakteristike $(a,k)-$regularizovanih $C-$rezolventnih familija. U trećem poglavlju uvešćemo razne tipove operatora $C-$regularizovanog tipa i istaći njihove osnovne strukturne osobine (Propozicija 3.3.1). Glavni cilj Leme 3.3.1 - Leme 3.3.3 je uopštenje nekoliko dobro poznatih rezultata iz teorije sektorijalnih operatora. U nastavku trećeg poglavlja predstavićemo metod za konstrukciju frakcionih stepena $C-$sektorijalnih operatora. U Teoremi 3.3.1, analiziramo neprekidnost, aditivnost i teoremu o preslikavanju spektra za uvedene kompleksne stepene sa eksponentnom koji ima nenula imaginarni deo. U nastavku trećeg poglavlja, posmatramo čisto imaginarne stepene $C-$sektorijalnih operatora. Preostali deo trećeg poglavlja je uglavnom kompletno posvećen izučavanju nejednakosti momenta (Teorema 3.3.3, Primer 3.3.1). Četvrto poglavlje ovog rada počinje analizom generisanja uniformno ograničenih analitičkih $C-$regularizovanih rezolventnih familija frakcionim stepenima (Teorema 3.4.1, Napomena 3.4.1). Dobijeni rezultati su primenjeni u Primeru 3.4.1 na klasu apstraktnih vremensko-prostornih PDJ u prostorima ultradistribucija. U Teoremi 3.4.2 i Teoremi 3.4.3, posmatramo nepotpune Cauchy-jeve probleme višeg reda, uglavnom sa Liouville-ovim desnim vremenskim frakcionim izvodima.

Tokom cele glave koristićemo sledeće oznake. Za unapred dat broj $n \in \mathbb{N}$, neka je $\mathbb{N}_n := \{1, \cdots, n\}$ i $\mathbb{N}_n^0 := \{0, 1, \cdots, n\}$. Za dato $s \in \mathbb{R}$, definišimo $\lfloor s \rfloor := \sup\{l \in \mathbb{Z} : s \geq l\}$ i $\lceil s \rceil := \inf\{l \in \mathbb{Z} : s \leq l\}$. Označimo $\Sigma_0 := (0, \infty)$. Ako je $\delta \in (0, \pi]$ i $d \in (0, 1]$, tada definišemo $\Sigma_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0,\ |\arg \lambda| < \delta\}$, $B_d := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq d\}$ i $\Sigma(\delta, d) := \overline{\Sigma_\delta \cup B_d}$. Neka je A linearan operator nad sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorom E. Rezolventni skup, spektar i rang linearnog operatora A na E su označeni sa $\rho(A)$, $\sigma(A)$ i $R(A)$, redom. Neka je $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, i neka su A i B linearni operatori. Tada definišemo αA, $A + B$ i AB na sledeći način: $D(\alpha A) =: D(A)$, $D(A + B) := D(A) \cap D(B)$ i $D(AB) := \{x \in D(B) : Bx \in D(A)\}$, $(\alpha A)x := \alpha Ax$, $x \in D(\alpha A)$, $(A + B)x := Ax + Bx$, $x \in D(A + B)$ i $(AB)x := A(Bx)$, $x \in D(AB)$. Gama funkciju ćemo označiti da $\Gamma(\cdot)$ i uvek ćemo koristiti njenu glavnu granu za konstrukciju stepena. Neka je, za svako $\alpha > 0$, $g_\alpha(t) := t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, $t > 0$ i $g_0(t) \equiv$ Dirac-ova delta distribucija.

3.1 Uvod

3.1.1 Osnovni pojmovi i oznake u sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorima

Sem ako nije drugačije naznačeno, u nastavku ove glave ćemo uvek pretpostaviti da je E Hausdorff-ov sekvencijalno kompletan lokalno konveksan prostor nad poljem kompleksnih brojeva, skraćeno SKLKP; skraćenica $\circledast$ označava fundamentalni sistem seminormi koji definiše topologiju na prostoru E. Ako je X takodje SKLKP, tada sa $L(E, X)$ označavamo prostor svih linearnih i neprekidnih preslikavanja iz E u X; $L(E) \equiv L(E, E)$. Neka je $\mathcal{B}$ familija ograničenih podskupova od E i neka je $p_B(T) := \sup_{x \in B} p(Tx)$, $p \in \circledast$, $B \in \mathcal{B}$, $T \in L(E)$. Tada je $p_B(\cdot)$ seminorma na $L(E)$ i sistem $(p_B)_{(p,B) \in \circledast \times \mathcal{B}}$ indukuje Hausdorff-ovu lokalno konveksnu topologiju na $L(E)$. Hausdorff-ovu lokalno konveksnu topologiju na E^*, dualnom prostoru od E, definiše sistem $(|\cdot|_B)_{B \in \mathcal{B}}$ seminormi na E^*, gde je $|x^*|_B := \sup_{x \in B} |\langle x^*, x \rangle|$, $x^* \in E^*$, $B \in \mathcal{B}$. Ovde $\langle\, ,\, \rangle$ označava dualnu zagradu izmedju E i E^*, ponekad ćemo takodje pisati $\langle x, x^* \rangle$ ili $x^*(x)$ da označimo vrednost kompleksnog broja $\langle x^*, x \rangle$. Podsetimo se da su prostori $L(E)$ i E^* sekvencijalno kompletni ako je E bačvast ([77]).

Linearan operator $A : D(A) \to E$ se naziva zatvoren ako je grafik operatora A, definisan sa $G_A := \{(x, Ax) : x \in D(A)\}$, zatvoren podskup od $E \times E$; kako to ne pravi nesporazum, mi ćemo identifikovati A sa njegovim grafikom. Potreban i dovoljan uslov da linearan operator $A : D(A) \to E$ bude zatvoren je da za svaku mrežu $(x_\tau)_{\tau \in I}$ u $D(A)$ takvu da je $\lim_{\tau \to \infty} x_\tau = x$ i $\lim_{\tau \to \infty} Ax_\tau = y$, važi sledeće: $x \in D(A)$ i $Ax = y$; videti [77] za notaciju. Neka je E Banach-ov prostor i A linearan operator na E, tada možemo uvesti graf normu na $D(A)$ sa $\|x\|_{[D(A)]} := \|x\| + \|Ax\|$, $x \in D(A)$. Tada je $(D(A), \|\cdot\|_{[D(A)]})$ Banach-ov prostor akko je A zatvoren. Potprostor $Y \subseteq D(A)$ se naziva jezgrom operatora A akko je Y gust u $D(A)$ u odnosu na graf normu. U opštem slučaju, Hausdorff-ova sekvencijalno kompletna lokalno konveksna topologija na $D(A)$ ($\overline{D(A)}$) može da se uvede sledećim sistemom seminormi: $p_A(x) =: p(x) + p(Ax)$, $x \in D(A)$, $p \in \circledast$ $((p_{|\overline{D(A)}})_{p \in \circledast})$. Mi ćemo sa $[D(A)]$ označiti prvi od gornjih prostora. Ako je $C \in L(E)$ injektivan, tada definišemo $C-$rezolventni skup od A, $\rho_C(A)$ skraćeno, sa

$$\rho_C(A) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A \text{ je injektivan i } (\lambda - A)^{-1} C \in L(E) \Big\}.$$

Na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku [77], važi sledeće: Ako je E paučinasti bornološki prostor (ovo, specijalno, važi ako je E Fréchet-ov prostor), tada se $C-$rezolventni skup od A sastoji tačno od onih kompleksnih brojeva

λ za koje je operator $\lambda - A$ injektivan i $R(C) \subseteq R(\lambda - A)$. Iz uopštene rezolventne jednakosti imamo da je

$$\begin{aligned}&\big(z-A\big)^{-1}C\big(\lambda-A\big)^{-k}C^kx\\&=\frac{(-1)^k}{(z-\lambda)^k}\big(z-A\big)^{-1}C^{k+1}x+\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{k-i}\big(\lambda-A\big)^{-i}C^{k+1}x}{\big(z-\lambda\big)^{k+1-i}},\end{aligned}\tag{3.1}$$

za svako $x \in E$, $k \in \mathbb{N}_0$ i $\lambda,\ z \in \rho_C(A)$ takve da je $z \neq \lambda$ (videti takodje jednakost [18, (18)]). Pretpostavimo da je F linearan potprostor od E. Tada je deo operatora A u F, označen sa $A_{|F}$, linearan operator definisan sa $D(A_{|F}) := \{x \in D(A) \cap F : Ax \in F\}$ i $A_{|F}x := Ax$, $x \in D(A_{|F})$. Dalje, linearan operator A je zatvoriv akko postoji zatvoren linearan operator B tako da je $A \subseteq B$. Može se lako pokazati da je linearan operator A zatvoriv akko za svaku mrežu $(x_\tau)_{\tau\in I}$ u $D(A)$ takvu da je $\lim_{\tau\to\infty} x_\tau = 0$ i $\lim_{\tau\to\infty} Ax_\tau = y$, imamo da je $y = 0$. Pretpostavimo da je A zatvoriv linearan operator. Zatvaranje operatora A, označeno sa $\overline{A}$, se definiše kao skup svih $(x, y) \in E\times E$ takvih da postoji mreža (x_τ) u $D(A)$ tako da je $\lim_{\tau\to\infty} x_\tau = x$ i $\lim_{\tau\to\infty} Ax_\tau = y$; tada je $\overline{A}$ zatvoren linearan operator i, za svaki drugi zatvoren linearan operator B koji sadrži A, važi $\overline{A} \subseteq B$. Pretpostavimo da je $A : D(A) \to E$ linearan operator. Stepene operatora A definišemo rekurzivno uzimajući da je: $A^0 =: I$, $D(A^n) := \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\}$ i $A^n x := A(A^{n-1}x)$, $x \in D(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $D(A^n) = D((A-\lambda)^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Neka je $D_\infty(A) := \bigcap_{n\geq 1} D(A^n)$. Za zatvoren linearan operator A, uvodimo poskup A^* od $E^* \times E^*$ na sledeći način

$$A^* := \Big\{\big(x^*, y^*\big) \in E^* \times E^* : x^*(Ax) = y^*(x) \text{ za sve } x \in D(A)\Big\}.$$

Ako je A gusto definisan, tada je A^* poznat kao adjungovani operator od A i on je zatvoren linearan operator na E^*. Možemo pomenuti i da je $D(A^*)$ slabo* gust u E^* čak i kada A nije gusto definisan u E (videti npr. [52, Lema 2.4] i [4, Propozicija B.10]).

Familija Λ neprekidnih linearnih operatora na E je uniformno ograničena ako za svako $p \in \circledast$ postoje $c_p > 0$ i $q_p \in \circledast$ tako da je

$$p(Ax) \leq c_p q_p(x), \quad x \in E,\ A \in \Lambda.$$

Integracija u sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorima

U preostalom delu ovog poglavlja, podsetićemo se osnovnih činjenica i definicija iz teorije integracije funkcija sa vrednostima u lokalno konveksnim prostorima. Sa Ω označavamo lokalno kompaktan i separabilan metrički prostor (na primer, za Ω može birati (ograničen ili neograničen) segment I u $\mathbb{R}^n$, gde je $n \in \{1,2\}$) a sa μ označavamo lokalno konačnu Borel-ovu meru definisanu na Ω.

Definicija 3.1.1 *(i) Kaže se da je funkcija $f : \Omega \to E$ jednostavna ako postoje $k \in \mathbb{N}$, elementi $z_i \in E$, $1 \leq i \leq k$ i u parovima disjunktni Borel merljivi podskupovi Ω_k, $1 \leq i \leq k$ od Ω, tako da je $\mu(\Omega_i) < \infty$, $1 \leq i \leq k$ i*

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} z_i \chi_{\Omega_i}(t), \quad t \in \Omega. \tag{3.2}$$

(ii) Kaže se da je funkcija $f : \Omega \to E$ (jako) $\mu-$merljiva, (jako) merljiva kraće, ako postoji niz (f_n) u E^Ω tako da je, za svako $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\cdot)$ jednostavna funkcija i $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ za s.s. $t \in \Omega$.

(iii) Funkcija $f : \Omega \to E$ je slabo $\mu-$merljiva, slabo merljiva kraće, akko je za svako $x^* \in E^*$, funkcija $t \mapsto x^*(f(t))$, $t \in \Omega$, merljiva.

(iv) Funkcija $f : \Omega \to E$ je $\mu-$merljiva seminormama, merljiva seminormama kraće, akko za svako $p \in \circledast$ postoji niz (f_n^p) u E^Ω tako da je $\lim_{n\to\infty} p(f_n^p(t) - f(t)) = 0$ za s.s. $t \in \Omega$.

Jasno je da je svaka jako merljiva funkcija takodje i slabo merljiva i da obratno tvrdjenje ne važi u opštem slučaju. Ako je E Fréchet-ov prostor, potreban i dovoljan uslov pod kojim je slabo merljiva funkcija sa vrednostima u prostoru E i jako merljiva može da se nadje u [44].

U lokalno konveksnim prostorima može se formulisati i Pettis-ijeva teorema merljivosti (videti [4], [15], [25] i [103] za više informacija).

Koncept Bochner integrabilnosti strogo merljivih funkcija $f : \Omega \to E$ može biti jednostavno proširen sa Banach-ovih prostora ([4, Glava 1]) na Fréchet-ove prostore; u opštem slučaju, situacija je malo komplikovanija i morali bismo koristiti ne-trivijalne adaptacije metoda korišćenih u Banach-ovim prostorima. Prvo, definišemo Bochner-ov integral jednostavne funkcije $f : \Omega \to E$, date sa (3.2), $\int_\Omega f\, d\mu := \sum_{i=1}^{k} z_i \mu(\Omega_i)$. Može se lako pokazati da definicija Bochner-ovog integrala ne zavisi od reprezentacije (3.2).

Neka je $1 \leq p < \infty$, neka je $(X, \|\cdot\|)$ kompleksan Banach-ov prostor, i neka je $(\Omega, \mathcal{R}, \mu)$ prostor mere. Tada se prostor $L^p(\Omega, X, \mu)$ sastoji od svih strogo $\mu-$merljivih funkcija $f : \Omega \to X$ takvih da je $\|f\|_p := (\int_\Omega \|f(\cdot)\|^p d\mu)^{1/p}$ konačno, takodje koristimo oznaku $L^p(\Omega, \mu)$ kada je $X = \mathbb{C}$. Prostor $L^\infty(\Omega, X, \mu)$ se sastoji od svih jako $\mu-$merljivih, esencijalno ograničenih funkcija i snabdeven je normom $\|f\|_\infty := ess \sup_{t\in\Omega} \|f(t)\|$, $f \in L^\infty(\Omega, X, \mu)$. Ovde mi identifikujemo sve funkcije koje su $\mu-$skoro svuda jednake na Ω; ako je μ Lebesgue-ova mera na realnoj pravoj, tada će, za svako $p \in [1, \infty]$, prostor $L^p(\Omega, X, \mu)$ biti označen sa $L^p(\Omega : X)$. Na osnovu Riesz–Fischer-ove teoreme, $(L^p(\Omega, X, \mu), \| \cdot \|_p)$ je Banach-ov prostor za sve $p \in [1, \infty]$, i više, zna se da je $(L^2(\Omega, X, \mu), \| \cdot \|_2)$ Hilbert-ov prostor. Ako je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ u $L^p(\Omega, X, \mu)$, tada posotji podniz (f_{n_k}) od (f_n) tako da je $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t) = f(t)$ $\mu-$skoro svuda. Ako je Banach-ov prostor X refleksivan, tada je $L^p(\Omega, X, \mu)$ refleksivan za sve $p \in (1, \infty)$ i njegov dual je izometrijski izomorfan sa $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega, X, \mu)$.

U nastavku ćemo koristi sledeću notaciju $\mu-$integrabilnosti, koja se pojavljuje u monografiji C. Martinez-a, M. Sanz-a [75, str. 99-102]; imajući u vidu sve koncepte, želeli bismo da izdvojimo koncept Gelfand integrabilnosti i integrabilnosti seminormama.

Definicija 3.1.2 *Neka je $K \subseteq \Omega$ kompaktan skup, i neka je funkcija $f : K \to E$ jako merljiva. Tada se kaže da je $f(\cdot)$ ($\mu-$)integrabilna ako postoji niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavnih funkcija tako da je $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ s.s. $t \in K$ i da za sve $\varepsilon > 0$ i za svako $p \in \circledast$ postoji broj $n_0 = n_0(\varepsilon, p)$ tako da je*

$$\int\limits_K p\big(f_n - f_m\big)\, d\mu \le \varepsilon \quad (m,\ n \ge n_0). \tag{3.3}$$

U ovom slučaju, definišemo

$$\int\limits_K f\, d\mu := \lim_{n\to\infty} \int\limits_K f_n\, d\mu. \tag{3.4}$$

Jednačina (3.3) pokazuje da je $(p(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-jev niz u prostoru $L^1(K, \mu)$, tako da je limit $p(f) = \lim_{n\to\infty} p(f_n)$ $\mu-$integrabilan. Na isti način se dobija da je funkcija $p(f_n - f)$ $\mu-$integrabilna i da niz odgovarajućih integrala teži ka nuli. Primetimo da definicija (3.4) ima smisla jer je E sekvencijalno kompletan. Može se lako pokazati da je svaka neprekidna funkcija $f : K \to E$ $\mu-$integrabilna.

Definicija 3.1.3 *(i) Funkcija $f : \Omega \to E$ je lokalno $\mu-$integrabilna ako je, za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$, restrikcija $f_{|K} : K \to E$ $\mu-$integrabilna.*

(ii) Funkcija $f : \Omega \to E$ je $\mu-$integrabilna ako je lokalno integrabilna i ako dodatno važi

$$\int\limits_\Omega p(f)\, d\mu < \infty, \quad p \in \circledast. \tag{3.5}$$

U ovom slučaju, definišemo

$$\int\limits_{\Omega} f\,d\mu := \lim_{n\to\infty} \int\limits_{K_n} f\,d\mu,$$

gde je $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rastući niz kompaktnih podskupova od* E *sa osobinom da je* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$.

Gornja definicija je dobra i ne zavisi od izbora niza $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dodatno,

$$p\Big(\int_{\Omega} f\,d\mu\Big) \leq \int_{\Omega} p(f)\,d\mu, \quad p \in \circledast.$$

Ako je funkcija $f : K \to E$, odnosno $f : \Omega \to E$, $\mu-$integrabilna, tada za svako $x^* \in E^*$ imamo da je

$$\Big\langle x^*, \int\limits_{K} f\,d\mu \Big\rangle = \int\limits_{K} \langle x^*, f\rangle\,d\mu, \text{ odnosno } \Big\langle x^*, \int\limits_{\Omega} f\,d\mu \Big\rangle = \int\limits_{\Omega} \langle x^*, f\rangle\,d\mu.$$

Pre nego što nastavimo, bilo bi važno da istaknemo da je Definicija 3.1.3 ekvivalentna sa definicijom Bochner-ovog integrala, kada je E Banach-ov prostor. Svaka neprekidna funkcija $f : \Omega \to E$ koja zadovoljava (3.5) je $\mu-$integrabilna i važi sledeće.

Teorema 3.1.1 *(i) (Teorema o dominantnoj konvergenciji) Pretpostavimo da je* (f_n) *niz* $\mu-$*integrabilnih funkcija iz* E^{Ω} *i da* (f_n) *konvergira tačkasto ka funkciji* $f : \Omega \to E$. *Pretpostavimo da, za svako* $p \in \circledast$, *postoji* $\mu-$*integrabilna funkcija* $F_p : \Omega \to [0,\infty)$ *tako da je* $p(f_n) \leq F_p$, $n \in \mathbb{N}$. *Tada je* $f(\cdot)$ $\mu-$*integrabilna funkcija i* $\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n\,d\mu = \int_{\Omega} f\,d\mu$.

(ii) Neka je Y *SKLKP, i neka je* $T : X \to Y$ *neprekidno linearno preslikavanje. Ako je* $f : \Omega \to X$ $\mu-$*integrabilno, onda je* $Tf : \Omega \to Y$ *takodje* $\mu-$*integrabilno i*

$$T\int\limits_{\Omega} f\,d\mu = \int\limits_{\Omega} Tf\,d\mu. \tag{3.6}$$

(iii) Neka je Y *SKLKP, i neka je* $T : D(T) \subseteq X \to Y$ *zatvoreno linearno preslikavanje. Ako je* $f : \Omega \to D(T)$ $\mu-$*integrabilno i* $Tf : \Omega \to Y$ *takodje* $\mu-$*integrabilno, tada je* $\int_{\Omega} f\,d\mu \in D(T)$ *i važi (3.6).*

Dalje informacije o integrabilnosti funkcija sa vrednostima u lokalno konveksnim prostorima mogu se naći konsultujući reference [33]-[34], [48], [74], [95], [99] i [102].

Prostori funkcija

Za osnovne informacije o apsolutno neprekidnim funkcijama sa vrednostima u Banach-ovom prostoru (funkcijama ograničene varijacije), upućujemo na [4, Glava 1] i [54, Glava 1]. Ako je X Banach-ov prostor, tada je prostor funkcija sa vrednostima u prostoru X koje su apsolutno neprekidne (ograničene varijacije) na bilo kom podintervalu od $[0,\infty)$ označen sa $AC_{loc}([0,\infty):X)$ $(BV_{loc}([0,\infty):X))$, dok je prostor $k-$puta neprekidno diferencijabilnih funkcija ($k \in \mathbb{N}_0$) iz nepraznog podskupa $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ u proizvoljan sekvencijalno kompletan lokalno konveksan prostor E označen sa $C^k(\Omega:E)$, $C(\Omega:E) \equiv C^0(\Omega:E)$. Ako je $X=\mathbb{C}$, tada takodje pišemo $AC_{loc}([0,\infty))$ $(BV_{loc}([0,\infty)))$ umesto $AC_{loc}([0,\infty):X)$ $(BV_{loc}([0,\infty):X))$; prostor $BV[0,T]$, $BV_{loc}([0,\tau))$, $BV_{loc}([0,\tau):X)$, kao i prostor $L^p_{loc}(\Omega:X)$ za $1\leq p\leq\infty$ su definisani na veoma sličan način ($T,\ \tau>0$); $L^p_{loc}(\Omega)\equiv L^p_{loc}(\Omega:\mathbb{C})$ i ne postoje razlike medju prostorima $L^p_{loc}([0,\tau))$ i $L^p_{loc}((0,\tau))$, za proizvoljno $\tau>0$ i $1\leq p\leq\infty$. Funkcija $k\in L^1_{loc}[(0,\tau))$ je kernel akko za svaku neprekidnu funkciju $t\mapsto u(t)$, $t\in[0,\tau)$, pretpostavka $\int_0^t k(t-s)u(s)\,ds=0$, $t\in[0,\tau)$ implicira $u(t)=0$, $t\in[0,\tau)$.

Ako je $(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ niz pozitivnih realnih brojeva takvih da je $M_0=1$, tada ćemo koristiti sledeće uslove iz teorije ultradistribucija:

(M.1): $M_p^2\leq M_{p+1}M_{p-1},\ p\in\mathbb{N}$,

(M.2): $M_p\leq AH^p\min\limits_{p_1,p_2\in\mathbb{N},p_1+p_2=p} M_{p_1}M_{p_2},\ n\in\mathbb{N},$ za neko $A>1$ i $H>1$,

(M.3)': $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{M_{p-1}}{M_p}<\infty$, i

(M.3): $\sup_{p\in\mathbb{N}}\sum_{q=p+1}^{\infty}\frac{M_{q-1}M_{p+1}}{pM_pM_q}<\infty$.

Podsetimo se da je uslov (M.3) nešto jači od (M.3)' i da, za svako $s>1$, Gevrey-ev niz $(p!^s)$ zadovoljava gornje uslove.

Sada ćemo navesti, zarad daljeg lakšeg čitanja, osnovne strukturne osobine prostora distribucija sa vrednostima u Banach-ovom prostoru. Pretpostavimo, za sad, da je $(X,||\cdot||)$ kompleksni Banach-ov prostor. Schwartz-ov prostor test funkcija $\mathcal{D}=C_0^\infty(\mathbb{R})$ i $\mathcal{E}=C^\infty(\mathbb{R})$ su snabdeveni uobičajenom induktivnom topologijom. Topologija prostora brzo opadajućih funkcija $\mathcal{S}$ se uvodi sledećim sistemom seminormi: $p_{m,n}(\psi)=:\sup_{x\in\mathbb{R}}|x^m\psi^{(n)}(x)|$, $\psi\in\mathcal{S}$, $m,\ n\in\mathbb{N}_0$. Sa $\mathcal{D}_0$ označavamo potprostor od $\mathcal{D}$ koji se sastoji od elemenata sa nosačem u $[0,\infty)$. Dalje, $\mathcal{D}'(X):=L(\mathcal{D},X)$, $\mathcal{E}'(X):=L(\mathcal{E},X)$ i $\mathcal{S}'(X):=L(\mathcal{S},X)$ su prostori neprekidnih linearnih funkcija $\mathcal{D}\to X$, $\mathcal{E}\to X$ i $\mathcal{S}\to X$, redom; $\mathcal{D}'_0(X)$, $\mathcal{E}'_0(X)$ i $\mathcal{S}'_0(X)$ označavaju potprostore od $\mathcal{D}'(X)$, $\mathcal{E}'(X)$ i $\mathcal{S}'(X)$, redom, koji sadrže elemente sa nosačem u

$[0, \infty)$. Označimo sa $\mathbf{B}$ familiju svih ograničenih podskupova od $\mathcal{D}$. Neka je $p_B(f) := \sup_{\varphi \in B} ||f(\varphi)||,\ f \in \mathcal{D}'(X),\ B \in \mathbf{B}$. Tada je $p_B,\ B \in \mathbf{B}$ seminorma na $\mathcal{D}'(X)$ i sistem $(p_B)_{B \in \mathbf{B}}$ indukuje topologiju na $\mathcal{D}'(X)$. Topologija na $\mathcal{E}'(X)$, odnosno, $\mathcal{S}'(X)$, se definiše na sličan način.

Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ i Ω je otvoren neprazan podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada se Sobolev prostor $W^{k,p}(\Omega : X)$ sastoji od onih distribucija $u \in \mathcal{D}'(\Omega : X)$ sa vrednostima u prostoru X (videti [54, Poglavlje 1.3]) takvih da, za svako $i \in \{0, \cdots, k\}$ i za svaki multi-indeks $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takav da je $|\alpha| \leq k$, važi $D^\alpha u \in L^p(\Omega, X)$. Ovde je izvod D^α uzet u distribucionom smislu. Primetimo da prostor $W^{k,p}((0, \tau) : X)$, gde je $\tau \in (0, \infty)$, može biti profilisan koristeći odgovarajući prostor apsolutno neprekidnih funkcija (videti na primer [9, Glava I, Poglavlje 2.2]). Sa $W^{k,p}_{loc}(\Omega : X)$ označavamo prostor onih distiribucija sa vrednostima u prostoru X, $u \in \mathcal{D}'(\Omega : X)$, takvih da, za svaki ograničen otvoren podskup Ω' od Ω, važi $u_{|\Omega'} \in W^{k,p}(\Omega' : X)$. Neka su $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to E$ merljive funkcije, tada se konvolucije $\varphi * \psi$ i $\varphi *_0 \psi$ definišu sa

$$\varphi * \psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-s)\psi(s)ds$$

i

$$\varphi *_0 \psi(t) = \int_0^t \varphi(t-s)\psi(s)ds,\ t \in \mathbb{R}.$$

Primetimo da je $\varphi * \psi = \varphi *_0 \psi,\ \varphi, \psi \in \mathcal{D}_0(E)$.

Cauchy-jeva integralna formula i analitička svojstva funkcija sa vrednostima u SKLKP-ima

Mogu se konsultovati [5], [10], [31], [42] i [49] za osobine analitičkih funkcija sa vrednostima u lokalno konveksnom prostoru. Kao što je dobro poznato, funkcija $f : \Omega \to E$, gde je Ω otvoren podskup od $\mathbb{C}$, je analitička ako se lokalno u okolini svake tačke $z \in \Omega$ može predstaviti kao uniformno konvergentan stepeni red sa koeficijentima u E. Kako je E SKLKP, pa samim tim i lokalno kompletan prostor [31], analitičnost funkcije $f(\cdot)$ je ekvivalentna sa slabom analitičnošću od $f(\cdot)$, tj., preslikavanje $\lambda \mapsto f(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$ je analitičko akko je preslikavanje $\lambda \mapsto \langle x^*, f(\lambda)\rangle$, $\lambda \in \Omega$ analitičko za svako $x^* \in E^*$. U kombinaciji sa jakom neprekidnosti preslikavanja $\lambda \mapsto f(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$, gornje osigurava da, za svaku zatvorenu konturu Γ u Ω takvu da je $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, važi sledeće: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda$, $z \in \Omega \setminus \Gamma$, $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$. Koristeći teoremu o dominantnoj konvergenciji i dokaz Cauchy-jeve integralne formule u skalarnom slučaju, dobija se da je preslikavanje $\lambda \mapsto f(\lambda)$, $\lambda \in \Omega$

beskonačno diferencijabilno i da je

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(\lambda)}{(\lambda-z)^{n+1}}\,d\lambda,\ z\in\Omega\setminus\Gamma,\ \mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)=1,\ n\in\mathbb{N}_0, \tag{3.7}$$

što jednostavno implicira da je

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\bigl(z-z_0\bigr)^n\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

u okolini tačke $z_0\in\Omega$. Takodje je vredno pomenuti da korišćenje bipolarne teoreme implicira da teorema o jednakosti za analitičke funkcije [4, Propozicija A.2, str. 456] ostaje validna i u slučaju kada je X proizvoljan lokalno konveksan prostor, što će biti korišćeno u nastavku.

Operatori frakcionog diferenciranja u prostorima funkcija sa vrednostima u SKLKP-ima, Mittag-leffler-ove i Wright-ove funkcije

U poslednje vreme, izražen interes za frakcioni račun i frakcione diferencijalne jednačine je stimulisan njihovom upotrebom u modeliranju raznih inženjerskih problema, kao i problema iz oblasti fizike, hemije, biologije i drugih nauka. Mittag-Leffler-ova i Wright-ova funkcija imaju značajnu ulogu u raznim primenama frakcionog kalkulusa. Za više informacija o ovoj temi, može se konsultovati monografije autora D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. Trujillo [8], K. Diethelm [24], A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo [45], J. Klafter, S. C. Lim, R. Metzler (Eds.) [47], F. Mainardi [73], K. S. Miller, B. Ross [81], K. B. Oldham, J. Spanier [85], I. Podlubny [93] i S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev [96].

Hronološki, teorija frakcionih izvoda kreće prepiskom W. Leibnitz i de L'Hospital (1695) u kojoj je diskutovano o smislu izvoda reda jedne polovine; u njegovoj kasnijoj prepisci sa J. Bernoulli (1695), pomenuti su i izvodi "opšteg reda." Iako su L. Euler, P. S. Laplace, J. L. Lagrange, J. B. J. Fourier, J. Wallis i S. F. Lacroix pominjali frakcione izvode, N. H. Abel (1823) je bio prvi koji je koristio frakcione operatore. Preciznije, N. H. Abel je primenio konačan konvolucioni proizvod

$$\int_0^x (x-t)^{1/2}f(t)\,dt$$

za formulaciju izohronog problema. Krajem devetnaestog veka, teorija frakcionih izvoda i integrala je dobila svoj skoro konačan oblik; pregled istorije frakcionog računa može da se nadje u [26], [81], [85] i [96].

Neka je $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$ i $I = (0,T)$ za neko $T > 0$. Riemann-Liouville-ov frakcioni integral reda α je definisan sa

$$J_t^\alpha f(t) := \big(g_\alpha * f\big)(t), \quad f \in L^1(I),\ t \in I.$$

Riemann-Liouville-ov frakcioni izvod reda α je definisan za one funkcije $f \in L^1(I)$ koje su takve da je $g_{m-\alpha} * f \in W^{1,m}(I)$, sa

$$D_t^\alpha f(t) := \frac{d^m}{dt^m} J_t^{m-\alpha} f(t), \quad t \in I.$$

Na osnovu [11, Teorema 1.5], znamo da je $D_t^\alpha J_t^\alpha f(\cdot) = f(\cdot)$, $f \in L^1(I)$ i, ako $f(\cdot)$ dodatno zadovoljava $g_{m-\alpha} * f \in W^{1,m}(I)$, tada je

$$J_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \big(g_{m-\alpha} * f\big)^{(k)}(0) g_{\alpha+1+k-m}(t).$$

U ovoj glavi, uglavnom koristimo Caputo-ove frakcione izvode; sem ako nije drugačije naznačeno. Caputo-ov frakcioni izvod $\mathbf{D}_t^\alpha u(t)$ je definisan za one funkcije $u \in C^{m-1}([0,\infty) : E)$ takve da je $g_{m-\alpha} * (u - \sum_{k=0}^{m-1} u_k g_{k+1}) \in C^m([0,\infty) : E)$, sa

$$\mathbf{D}_t^\alpha u(t) = \frac{d^m}{dt^m}\left[g_{m-\alpha} * \left(u - \sum_{k=0}^{m-1} u_k g_{k+1} \right) \right],$$

gde je $u_k = u^{(k)}(0)$. Pretpostavimo da je $\beta > 0,\ \gamma > 0$ i da je $\mathbf{D}_t^{\beta+\gamma} u(t)$ definisano. Tada je Caputo-ov frakcioni izvod $\mathbf{D}_t^\zeta u(t)$ definisan za sve brojeve $\zeta \in (0, \beta+\gamma)$ ali jednakost $\mathbf{D}_t^{\beta+\gamma} u = \mathbf{D}_t^\beta \mathbf{D}_t^\gamma u$ ne važi u opštem slučaju. Jednakost može da se pokaže ako je zadovoljen jedan od sledećih uslova:

1. $\gamma \in \mathbb{N}$,
2. $\lceil \beta + \gamma \rceil = \lceil \gamma \rceil$, ili
3. $u^{(j)}(0) = 0$ za $\lceil \gamma \rceil \leq j \leq \lceil \beta + \gamma \rceil - 1$.

Ako je $u \in C([0,\infty) : E)$, odnosno $u \in C^{m-1}([0,\infty) : E)$ i $g_{m-\alpha} * (u - \sum_{k=0}^{m-1} u_k g_{k+1}) \in C^m([0,\infty) : E)$, tada važe sledeće jednakosti:

$$\mathbf{D}_t^\alpha J_t^\alpha u(t) = u(t), \quad t \geq 0,\ \text{odnosno}$$
$$J_t^\alpha \mathbf{D}_t^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) g_{k+1}(t), \quad t \geq 0.$$

Pretpostavimo da je $\omega \geq 0$ i da za svako $p \in \circledast$ postoji $M_p > 0$ tako da je $p(u(t)) + p(\mathbf{D}_t^\alpha u(t)) \leq M_p e^{\omega t}$, $t \geq 0$. Tada se Laplace-ova transformacija funkcije $\mathbf{D}_t^\alpha u(t)$ može izračunati na sledeći način:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{D}_t^\alpha u(t)\,dt = \lambda^\alpha \tilde{u}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)\lambda^{\alpha-1-k}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega. \tag{3.8}$$

Neka je $\alpha > 0$ i $\beta \in \mathbb{R}$. Tada je Mittag-Leffler-ova funkcija $E_{\alpha,\beta}(z)$ definisana sa

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ovde pretpostavljamo da je $1/\Gamma(\alpha n + \beta) = 0$ ako je $\alpha n + \beta \in -\mathbb{N}_0$. Neka je, kraće, $E_\alpha(z) := E_{\alpha,1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Kao što funkcija $E_1(z) = e^z$, zadovoljava diferencijalnu relaciju $(d/dt)e^{\omega t} = \omega e^{\omega t}$, funkcija $E_\alpha(z)$ zadovoljava da je

$$\mathbf{D}_t^\alpha E_\alpha\big(\omega t^\alpha\big) = \omega E_\alpha\big(\omega t^\alpha\big).$$

Takodje, kao što je poznato, za svako $\alpha > 0$, postoji $c_\alpha > 0$ tako da je:

$$E_\alpha(t) \leq c_\alpha \exp\big(t^{1/\alpha}\big), \ t \geq 0. \tag{3.9}$$

Asimptotska ekspanzija cele funkcije $E_{\alpha,\beta}(z)$ je data sledećom važnom teoremom (videti npr. [104, Teorema 1.1]):

Teorema 3.1.2 *Neka je $0 < \sigma < \frac{1}{2}\pi$. Tada, za svako $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha}\sum_s Z_s^{1-\beta} e^{Z_s} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{z^{-j}}{\Gamma(\beta - \alpha j)} + O\big(|z|^{-m}\big), \ |z| \to \infty,$$

gde je Z_s definisano sa $Z_s := z^{1/\alpha} e^{2\pi i s/\alpha}$ i prva suma je uzeta po svim celim brojevima s koji zadovoljavaju $|\arg z + 2\pi s| < \alpha(\frac{\pi}{2} + \sigma)$.

Kao specijalni slučaj Teoreme 3.1.2, imamo sledeće asimptotske formule koje se pojavljuju u [11]. Neka je $\alpha \in (0, 2) \setminus \{1\}$, $\beta > 0$ i $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Tada važi sledeće:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha} z^{(1-\beta)/\alpha} e^{z^{1/\alpha}} + \varepsilon_{\alpha,\beta}(z), \ |\arg z| < \alpha\pi/2, \tag{3.10}$$

i

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \varepsilon_{\alpha,\beta}(z), \ |\arg(-z)| < \pi - \alpha\pi/2, \tag{3.11}$$

gde je

$$\varepsilon_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)} + O\big(|z|^{-N}\big), \ |z| \to \infty. \tag{3.12}$$

Mittag-Leffler-ova funkcija $E_{\alpha,\beta}(z)$ se može u integralnom obliku predstaviti sa

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_G \frac{\lambda^{\alpha-\beta} e^{\lambda}}{\lambda^{\alpha} - z}\, d\lambda, \quad z \in \mathbb{C},$$

gde je G kontura (Hankel-ova kriva) koja kreće i završava u $-\infty$ i obilazi oko diska $|\lambda| \geq |z|^{1/\alpha}$ u smeru obratnom od kazaljke na satu. Jedna od najinteresantnijih osobina Mittag-Leffler-ove funkcije je povezana sa sledećim identitetom:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}\big(\omega t^{\alpha}\big)\, dt = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{\lambda^{\alpha} - \omega}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega^{1/\alpha}, \ \omega > 0. \tag{3.13}$$

Vredno je pomenuti da je funkcija $t \mapsto E_{\alpha,\beta}(-t)$, $t \geq 0$ kompletno monotona (tj. da je $(-1)^n (d^n/dt^n) E_{\alpha,\beta}(-t) \geq 0$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$) ako je $\alpha \in (0,1]$ ili $\beta \geq \alpha$ ([73]).

Postoji veliki broj identiteta za Mittag-Leffler-ove funkcije a ovde ćemo navesti samo najvažnije:

(i) $E_{\alpha,\beta}(z) = \Gamma(\beta)^{-1} + z E_{\alpha,\alpha+\beta}(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

(ii) $E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Za svako $j \in \mathbb{N}$ i $\alpha > 0$, postoje jedinstveno odredjeni realni brojevi $c'_{l,j,\alpha}$ $(1 \leq l \leq j)$ tako da je:

$$E_{\alpha}^{(j)}(z) = \sum_{l=1}^{j} c'_{l,j,\alpha} E_{\alpha,\alpha j-(j-l)}(z), \ z \in \mathbb{C}. \tag{3.14}$$

(iv) $\frac{d^p}{dz^p}\Big[z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^{\alpha})\Big] = z^{\beta-p-1} E_{\alpha,\beta-p}(z^{\alpha})$, $p \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(v) $E_{1/q}(z) = e^z \Big[1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{\gamma(1-k/q,z)}{\Gamma(1-k/q)}\Big]$, $z \in \mathbb{C}$, $q = 2, 3, \cdots$, gde $\gamma(a,z) = \int_0^z e^{-u} u^{a-1}\, du$ označava nepotpunu Gama funkciju.

Neka je $\gamma \in (0,1)$. Tada je Wright-ova funkcija $\Phi_\gamma(\cdot)$ definisana sa

$$\Phi_\gamma(t) := \mathcal{L}^{-1}\big(E_\gamma(-\lambda)\big)(t), \quad t \geq 0.$$

Wright-ova funkcija $\Phi_\gamma(\cdot)$ se može analitički produžiti na celu kompleksnu ravan sa

$$\Phi_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!\Gamma(1-\alpha-\alpha n)} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{(n-1)!} \Gamma(n\alpha)\sin(n\pi\alpha), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dodatno, imamo da je:

(i) $\Phi_\gamma(t) \geq 0$, $t \geq 0$,

(ii) $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\gamma t^{-1-\gamma}\Phi_\gamma(t^{-\gamma})\,dt = e^{-\lambda^\gamma}$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, i

(iii) $\int_0^\infty t^r \Phi_\gamma(t)\,dt = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\gamma r)}$, $r > -1$.

Wright-ova funkcija $\Phi_\gamma(\cdot)$ ima integralnu reprezentaciju datu sa:

$$\Phi_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \lambda^{\gamma-1} \exp\bigl(\lambda - z\lambda^\gamma\bigr)\,d\lambda, \quad z \in \mathbb{C},$$

gde je G Hankel-ova kriva gore pomenuta. Asimptotska ekspanzija Wright-ove funkcije $\Phi_\gamma(\cdot)$, za $|z| \to \infty$ iz sektora $|\arg z| \leq \min((1-\gamma)3\pi/2, \pi) - \varepsilon$ je data sa

$$\Phi_\gamma(z) = Y^{\gamma-1/2}e^{-Y}\left(\sum_{m=0}^{M-1} A_m Y^{-M} + O\Bigl(|Y|^{-M}\Bigr)\right),$$

gde su $Y = (1-\gamma)(\gamma^\gamma z)^{1/(1-\gamma)}$, $M \in \mathbb{N}$ i A_m odredjeni realni brojevi ([105]).

3.1.2 Laplace-ova transformacija u sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorima

Autori W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber i F. Neubrander su u izvrsnoj monografiji [4] studiozno predstavili Laplace-ovu transformaciju funkcija sa vrednostima u Banach-ovom prostoru. Značajno manje činjenica je poznato o Laplace-ovoj transformaciji funkcija sa vrednostima u sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorima (videti T.-J. Xiao, J. Liang [107], [108], [106] i Y.-C. Li, S.-Y. Shaw [66]). Iako ne u potpuno uopštenom slučaju, sa teorijske tačke gledišta, pratićemo metod koji je dat u radu [107] (videti takodje [108, Poglavlje 1.1.1]). Kroz ovo poglavlje uvek ćemo pretpostavljati da je $\Omega = [0, \infty)$ i da je μ Lebesgue-ova mera na $[0, \infty)$. Ako je $-\infty < a < b < \infty$ i $f \in C([a, b] : E)$, tada se integral $\int_a^b f(t)\,dt$, definisan u smislu Riemann-ovih suma na isti način kao za numeričke funkcije, podudra sa integralom $\int_a^b f(t)\,dt$ koji je uveden u prethodnom poglavlju.

Neka je $a \in \mathbb{R}$. Slično kao u Definiciji 1.1.3 datoj u [108], kažemo da funkcija $h : (a, \infty) \to E$ pripada klasi $LT - E$ ako postoji funkcija $f \in C([0, \infty) : E)$ tako da za svako $p \in ⊛$ postoji $M_p > 0$ tako da je zadovoljeno $p(f(t)) \leq M_p e^{at}$, $t \geq 0$ i

$$h(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)\, dt, \quad \lambda > a. \tag{3.15}$$

Ako je ovo slučaj, $h(\lambda)$ se naziva Laplace-ova transformacija funkcije $f(t)$. Označimo sa $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}^{-1}$ Laplace-ovu transformaciju i njenu inverznu transformaciju, redom:

$$\mathcal{L}(f(t))(\lambda) = h(\lambda), \quad \lambda > a \ ; \ \mathcal{L}^{-1}(h(\lambda))(t) = f(t), \quad t \geq 0.$$

Ponekad pišemo $\tilde{f}(\lambda) := \mathcal{L}(f(t))(\lambda)$. Integral koji se pojavljuje sa desne strane jednakosti (3.15) konvergira za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ takve da je $\operatorname{Re}\lambda > a$ i definiše analitičku funkciju na ovoj oblasti, tj. funkcija $\lambda \to h(\lambda)$, $\lambda > a$ se može analitički produžiti na desnu poluravan $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > a\}$. Nije teško pokazati da je

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} h(\lambda) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n f(t)\, dt, \quad n \in \mathbb{N}, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}\lambda > a.$$

Sem ako nije drugačije naglašeno, skraćenica $*$ označava konačni konvolucioni proizvod (videti (3.16)). Pretpostavićemo sledeći uslov za skalarnu funkciju $K(\cdot)$:

(P1) $K(\cdot)$ je Laplace transformabilna, tj. $K \in L^1_{loc}([0, \infty))$ i postoji $\beta \in \mathbb{R}$ tako da

$$\tilde{K}(\lambda) := \mathcal{L}(K(t))(\lambda) := \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-\lambda t} K(t)\, dt := \int_0^\infty e^{-\lambda t} K(t)\, dt$$

postoji za sve $\lambda \in \mathbb{C}$ takve da je $\operatorname{Re}\lambda > \beta$.
Neka je $\operatorname{abs}(K) := \inf\{\operatorname{Re}\lambda : \tilde{K}(\lambda) \text{ postoji}\}$.

Laplace-ova transformacija ima sledeće osobine.

Teorema 3.1.3 *Neka za $f \in C([0, \infty) : E)$ važi da za svako $p \in ⊛$ postoji $M_p > 0$ tako da je $p(f(t)) \leq M_p e^{at}$, $t \geq 0$, neka je $z \in \mathbb{C}$ i $s \geq 0$, i neka važi (3.15).*

(i) *Neka je* $g(t) := e^{-zt}f(t)$, $t \geq 0$. *Tada je* $\tilde{g}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda + z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > a - \operatorname{Re} z$.

(ii) *Neka je* $f_s(t) := f(t+s)$, $t \geq 0$. *Tada je* $\tilde{f}_s(\lambda) = e^{\lambda s}(\tilde{f}(\lambda) - \int_0^s e^{-\lambda t} f(t)\, dt)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > a$.

(iii) *Pretpostavimo da je* $h \in L^1_{loc}([0,\infty))$ *Laplace transformabilna i da postoje konstante* M, $a' > 0$ *takve da je* $\int_0^t |h(s)|e^{\omega s}\, ds \leq Me^{a't}$, $t \geq 0$. *Neka je*

$$(h * f)(t) := \int_0^t h(t-s)f(s)\, ds, \quad t \geq 0. \tag{3.16}$$

Tada je preslikavanje $t \mapsto (h * f)(t)$, $t \geq 0$ *neprekidno i za svako* $p \in \circledast$ *postoji* $N_p > 0$ *tako da je* $p((h*f)(t)) \leq N_p e^{\omega' t}$, $t \geq 0$. *Dodatno,*

$$\widetilde{h * f}(\lambda) = \tilde{h}(\lambda)\tilde{f}(\lambda), \ \lambda \ \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}\lambda > \max\bigl(\operatorname{abs}(|h|), a', a\bigr).$$

(iv) *Neka je* $F(t) := \int_0^t f(s)\, ds$, $t \geq 0$. *Tada je* $\tilde{F}(\lambda) = \frac{\tilde{f}(\lambda)}{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > \max(0, a)$.

(v) *Neka je*

$$j(t) := \int_0^\infty \frac{e^{-s^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} f(s)\, ds \ \ i \ j(0) := f(0).$$

Tada je preslikavanje $t \mapsto j(t)$, $t \geq 0$ *neprekidno i za svako* $p \in \circledast$ *postoji* $m_p > 0$ *tako da je* $p(j(t)) \leq m_p e^{\max(a,0)^2 t}$, $t \geq 0$. *Dodatno,*

$$\tilde{j}(\lambda) = \frac{\tilde{f}(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} \ \ za \ sve \ \lambda \in \mathbb{C} \ gde \ je \ \operatorname{Re}\lambda > \max(a, 0)^2.$$

(vi) (Teorema o jedinstvenosti Laplace-ove transformacije) *Pretpostavimo da je* $\lambda_0 > a$ *i* $\tilde{f}(\lambda) = 0$ *za sve* $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$. *Tada je* $f(t) = 0$, $t \geq 0$.

(vii) *Neka za* f_1, $f_2 \in C([0,\infty) : E)$ *važi da za svako* $p \in \circledast$ *postoji* $M'_p > 0$ *tako da je* $p(f_1(t)) + p(f_2(t)) \leq M'_p e^{at}$, $t \geq 0$. *Pretpostavimo da je* A *zatvoren linearan operator na* E *takav da je za* $\lambda > a$,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f_1(t)\, dt \in D(A),$$

i

$$A\int_0^\infty e^{-\lambda t} f_1(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f_2(t)\, dt, \quad \lambda > a.$$

Tada, za svako $t \geq 0$, *imamo da je* $f_1(t) \in D(A)$ *i* $Af_1(t) = f_2(t)$.

(viii) (Post–Widder-ova inverzija) *Pretpostavimo* $t > 0$. *Tada važi sledeće:*

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \Big(\frac{n}{t}\Big)^{n+1} \tilde{f}^{(n)}\Big(\frac{n}{t}\Big),$$

uniformno na kompaktnim podskupovima od $(0, \infty)$.

(ix) *Za svako* $t \geq 0$, *imamo da je*

$$\int_0^t f(s)\, ds = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n!^{-1} e^{n\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-n\lambda r} f(r)\, dr.$$

Sada ćemo formulisati teoremu o inverziji Laplace-ove tansformacije sa vrednostima u sekvencijalno kompletnom lokalno konveksnom prostoru.

Teorema 3.1.4 *Pretpostavimo da je* $a > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $q : \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > a\} \to E$ *analitička, i da za svako* $p \in \circledast$ *postoji* $M_p > 0$ *tako da je*

$$p(q(\lambda)) \leq M_p |\lambda|^r, \quad \operatorname{Re}\lambda > a.$$

Tada za svako $\alpha > 1$ *postoji funkcija* $h_\alpha \in C([0, \infty) : E)$ *takva da je* $h_\alpha(0) = 0$ *i*

$$p\big(h_\alpha(t)\big) \leq M_\alpha M_p e^{at}, \quad p \in \circledast,\ t \geq 0,$$

$$q(\lambda) = \lambda^{\alpha+r} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} h_\alpha(t)\, dt, \quad \operatorname{Re}\lambda > a,$$

gde je M_α *nezavisno od* p *i* $q(\cdot)$.

Primetimo da je funkcija $h_\alpha(\cdot)$ data sa:

$$h_\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{a}-i\infty}^{\overline{a}+i\infty} e^{\lambda t} \lambda^{-r-\alpha} q(\lambda)\, d\lambda,\ t \geq 0,$$

i da prethodni nesvojstveni integral ne zavisi od izbora broja $\overline{a} > a$. Čuvena Arendt–Widder-ova teorema je blago uopštena u nizu radova (videti [54, Poglavlje 1.1] za više informacija); sledeću verziju su dokazali T.-J. Xiao i J. Liang u [107].

Teorema 3.1.5 *Neka je* $a \geq 0$, $r \in (0, 1]$, $\omega \in (-\infty, a]$, $M_p > 0$ *za svako* $p \in \circledast$, *i neka je* $q : (a, \infty) \to E$ *beskonačno diferencijabilna funkcija. Tada su tvrdjenja (i) i (ii) ekvivalentna, gde je:*

(i) Važi $p\big((\lambda-\omega)^{k+1}\frac{q^{(k)}(\lambda)}{k!}\big) \leq M, \quad p \in ⊛,\ \lambda > a,\ k \in \mathbb{N}_0.$

(ii) Postoji funkcija $F_r \in C([0,\infty) : E)$ *koja zadovoljava* $F_r(0) = 0$,

$$q(\lambda) = \lambda^r \int_0^\infty e^{-\lambda t} F_r(t)\, dt, \quad \lambda > a,$$

$$p\left(\int_0^{t+h} \frac{(t+h-s)^{-r}}{\Gamma(1-r)} F_r(s)\, ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{-r}}{\Gamma(1-r)} F_r(s)\, ds\right) \leq M_p h e^{\omega t} \max\big(e^{\omega h}, 1\big),$$

za svako $t \geq 0$, $h \geq 0$ *i* $p \in ⊛$, *ako je* $r \in (0,1)$, *i*

$$p\big(F_r(t+h) - F_r(t)\big) \leq M_p h e^{\omega t} \max\big(e^{\omega h}, 1\big), \ \ t \geq 0,\ h \geq 0,\ p \in ⊛,$$

ako je $r = 1$. *Dodatno, u ovom slučaju,*

$$p\big(F_r(t+h) - F_r(t)\big) \leq \frac{2M_p}{r\Gamma(r)} h^r \max\big(e^{\omega(t+h)}, 1\big), \ \ t \geq 0,\ h \geq 0,\ p \in ⊛.$$

Analiza analitičkih svojstava Laplace-ove transformacije u SKLKP-ima zasniva se na sledećim rezultatima [4, Teorema 2.6.1, Propozicija 2.6.3, Teorema 2.6.4]. Podsetimo se da je $\Sigma_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z)| < \alpha\}$ $(\alpha \in (0,\pi])$.

Teorema 3.1.6 *([56])*

(i) Neka je $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\omega \in \mathbb{R}$ *i* $q : (\omega,\infty) \to E$. *Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(a) Postoji analitička funkcija $f : \Sigma_\alpha \to E$ *takva da je* $q(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$, $\lambda \in (\omega,\infty)$ *i da je skup* $\{e^{-\omega z} f(z) : z \in \Sigma_\beta\}$ *ograničen za sve* $\beta \in (0,\alpha)$.

(b) Funkcija $q(\cdot)$ *ima analitičko produženje* $\hat{q} : \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\alpha} \to E$ *koje zadovoljava da je skup* $\{(\lambda-\omega)\hat{q}(\lambda) : \lambda \in \omega + \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\gamma}\}$ *ograničen za sve* $\gamma \in (0,\alpha)$.

Ako je ovo slučaj, tada imamo da je, za svako $k \in \mathbb{N}$ *i* $\beta \in (0,\alpha)$, *skup* $\{z^k e^{-\omega z} f^{(k)}(z) : z \in \Sigma_\beta\}$ *ograničen.*

(ii) Neka je $\alpha \in (0,\pi]$ *i neka je* $f : \Sigma_\alpha \to E$ *analitička funkcija takva da je, za sve* $\beta \in (0,\alpha)$, *skup* $\{f(z) : z \in \Sigma_\beta\}$ *ograničen. Neka je* $x \in E$. *Tada važi sledeće:*

(a) *Pretpostavka* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = x$ *implicira da je* $\lim_{z\to\infty, z\in\Sigma_\beta} f(z) = x$ *za sve* $\beta \in (0, \alpha)$.

(b) *Pretpostavka* $\lim_{t\to 0+} f(t) = x$ *implicira da je* $\lim_{z\to 0, z\in\Sigma_\beta} f(z) = x$ *za sve* $\beta \in (0, \alpha)$.

(iii) *Pretpostavimo da je* $x \in E$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\omega \in \mathbb{R}$, $q : (\omega, \infty) \to E$ *i neka važi (i)(a) iz ove teoreme. Tada:*

(a) $\lim_{t\to 0+} f(t) = x$ *akko* $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda q(\lambda) = x$.

(b) *Neka je* $\omega = 0$. *Tada* $\lim_{t\to+\infty} f(t) = x$ *akko* $\lim_{\lambda\to 0} \lambda q(\lambda) = x$.

Dobro je poznato da teoreme Trotter-Kato tipa daju efektivne metode ispitivanja konvergencije numeričkih aproksimacija rešenja PDJ-a. Sledeća teorema o aproksimaciji Laplace-ove transformacije omogućava izvodjenje nekoliko teorema Trotter-Kato tipa za $(a, k)-$regularizovane $C-$rezolventne familije; za više informacija u ovom pravcu, upućujemo na [1]-[2], [46], [67], [69], [70] i [83]. U slučaju kada je E Banach-ov prostor, gore pomenut rezultat je prvi put objavljen u radu [109] autora T.-J. Xiao i J. Lianga. Rezultati su prvi put dokazani u [56].

Teorema 3.1.7 *(Aproksimacija) Neka je* $f_n \in C([0, \infty) : E)$, $n \in \mathbb{N}$, *neka je skup* $\{e^{-\omega t} f_n(t) : n \in \mathbb{N},\ t \geq 0\}$ *ograničen za neko* $\omega \in \mathbb{R}$ *i neka je* $\lambda_0 \geq \omega$. *Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(i) *Niz* $(\tilde{f}_n)$ *tačkasto konvergira na* (λ_0, ∞) *i niz* (f_n) *je uniformno ograničen u svakoj tački* $t \geq 0$.

(ii) *Niz* (f_n) *konvergira uniformno nad kompaktnim podskupovima od* $[0, \infty)$.

Pretpostavljajući da važi (ii) i da je $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$, $t \geq 0$, *imamo da je* $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(\lambda) = \tilde{f}(\lambda)$, $\lambda > \lambda_0$.

Primetimo, na kraju, da se jednostavno može dokazati blago uopštenje Teoreme 3.1.7 prateći pristup M. Li-a i Q. Zheng-a [65, Propozicija 2.7].

3.2 Definicija i osnovne osobine $(a, k)-$regularizovanih $C-$rezolventnih familija

U ovoj sekciji, izložićemo pregled različitih strukturnih osobina $(a, k)-$regularizovanih $C-$rezolventnih familija i njihovih podgeneratora, zajedno sa teoremama Hille-Yosida-inog tipa.

Neka je E sekvencijalno kompletan lokalno konveksan prostor. Naredna definicija je prvi put uvedena u [56].

Definicija 3.2.1 *Neka je* $0 < \tau \leq \infty$, $k \in C([0,\tau))$, $k \neq 0$ *i neka je* $a \in L^1_{loc}([0,\tau))$, $a \neq 0$. *Pretpostavimo da je* $C \in L(E)$ *injektivan, da je* A *zatvoren linearan operator na* E, *i da je* $CA \subseteq AC$. *Tada je strogo neprekidna operatorska familija* $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ *(lokalna, ako je* $\tau < \infty$*)* $(a,k)-$*regularizovana* $C-$*rezolventna familija koja ima* A *kao podgenerator akko važi sledeće:*

(i) $R(t)A \subseteq AR(t),\ t \in [0,\tau)$ *i* $R(0) = k(0)C$,

(ii) $R(t)C = CR(t),\ t \in [0,\tau)$ *i*

(iii) $R(t)x = k(t)Cx + \int_0^t a(t-s)AR(s)x\,ds,\ t \in [0,\tau),\ x \in D(A)$.

$(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ *je nedegenerisana ako uslov* $R(t)x = 0,\ t \in [0,\tau)$ *implicira da je* $x = 0$, *i* $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ *je lokalno uniformno ograničena ako je, za svako* $t \in (0,\tau)$, *familija* $\{R(s) : s \in [0,t]\}$ *uniformno ograničena. U slučaju kada je* $\tau = \infty$, $(R(t))_{t\geq 0}$ *je eksponencijalno uniformno ograničena (uniformno ograničena) ako postoji* $\omega \in \mathbb{R}$ *(*$\omega = 0$*) tako da je familija* $\{e^{-\omega t}R(t) : t \geq 0\}$ *uniformno ograničena; za infimum ovih brojeva se kaže da je eksponencijalni tip familije* $(R(t))_{t\geq 0}$.

Ako je $k(t) \equiv g_{\alpha+1}(t)$, gde je $\alpha > 0$, tada se kaže da je $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ $\alpha-$puta integrisana $(a,C)-$rezolventna familija; na ovaj način, objedinjujemo notacije (lokalne) $\alpha-$puta integrisane $C-$polugrupe ($a(t) \equiv 1$) i kosinusne funkcije ($a(t) \equiv t$) u lokalno konveksnim prostorima. Dalje, u slučaju kada je $k(t) = \int_0^t K(s)\,ds,\ t \in [0,\tau)$, gde je $K \in L^1_{loc}([0,\tau))$ i $K \neq 0$, dobijamo objedinjujući koncept za (lokalne) $K-$konvolucione $C-$polugrupe i kosinusne funkcije; preciznije, u definiciji lokalne $K-$konvolucione $C-$polugrupe (kosinusne funkcije) i njenog podgeneratora dodatno pretpostavljamo da uslov (3.17) dat u nastavku važi za $a(t) \equiv 1$ ($a(t) \equiv t$). Integralni generator $K-$konvolucione $C-$polugrupe (kosinusne funkcije) uvodimo kao i u slučaju Banach-ovih prostora ([54]). Ako je $k(t) \equiv 1$, tada je $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ takodje i $(a,C)-$regularizovana rezolventna familija sa podgeneratorom A. Neka je $\Theta(t) := \int_0^t k(s)\,ds$, $t \in [0,\tau)$.

Definicija 3.2.2 *(i) Neka je* $\alpha \in (0,\pi]$, *i neka je* $(R(t))_{t\geq 0}$ $(a,k)-$*regularizovana* $C-$*rezolventna familija. Tada se kaže da je* $(R(t))_{t\geq 0}$ *analitička* $(a,k)-$*regularizovana* $C-$*rezolventna familija ugla* α, *ako postoji funkcija* $\mathbf{R} : \Sigma_\alpha \to L(E)$ *takva da je, za svako* $x \in E$, *preslikavanje* $z \mapsto \mathbf{R}(z)x$, $z \in \Sigma_\alpha$ *analitičko i da važi:*

(i) $\mathbf{R}(t) = R(t),\ t > 0$ *i*

(ii) $\lim_{z\to 0, z\in\Sigma_\gamma} \mathbf{R}(z)x = k(0)Cx$ *za svako* $\gamma \in (0,\alpha)$ *i* $x \in E$.

Kaže se da je $(R(t))_{t\geq 0}$ eksponencijalana uniformno ograničena, analitička $(a,k)-$regularizovana $C-$rezolventna familija ugla α, odnosno uniformno ograničena analitička $(a,k)-$regularizovana $C-$rezolventna familija ugla α, ako za svako $\gamma \in (0,\alpha)$, postoji $\omega_\gamma \geq 0$, odnosno $\omega_\gamma = 0$, tako da je operatorska familija $\{e^{-\omega_\gamma \operatorname{Re} z}\mathbf{R}(z) : z \in \Sigma_\gamma\}$ uniformno ograničena. Kako nema opasnosti od zabune, u nastavku ćemo identifikovati $R(\cdot)$ i $\mathbf{R}(\cdot)$.

(ii) $(a,k)-$regularizovana $C-$rezolventna familija $(R(t))_{t\geq 0}$ je cela, ako je, za svako $x \in E$, preslikavanje $t \mapsto R(t)x$, $t \geq 0$ moguće analitički proširiti na celu kompleksnu ravan.

Dodajmo još, da se u radovima [52] i [56], $(a,k)-$regularizovana $C-$rezolventna familija (analitička $(a,k)-$regularizovana $C-$rezolventna familija ugla β) gde je $k(t) = 1$ i $a(t) = g_\alpha(t)$ za neko $\alpha > 0$, naziva $(g_\alpha, C)-$regularizovana rezolventna familija $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ koja ima A kao podgenerator (analitička $(g_\alpha, C)-$regularizovana rezolventna familija ugla β). Svojstvo lokalne uniformne ograničenosti, kao i eksponencijalne uniformne ograničenosti (uniformne ograničenosti) je, takodje, definisano na isti način.

U nastavku ovog poglavlja, pretpostavićemo da su K, k, k_1, $k_2, \cdots$ skalarne funkcije koje su kerneli i da je $a \neq 0$ u $L^1_{loc}([0,\tau))$. Sem ako nije drugačije naznačeno, uvek ćemo pretpostavljati da je operator $C \in L(E)$ injektivan i da zadovoljava $CA \subseteq AC$.

U nastavku će biti korišćeni sledeći uslovi:

(U1): A je gusto definisan i $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ je lokalno uniformno ograničena.

(U2): $\rho(A) \neq \emptyset$.

(U3): $\rho_C(A) \neq \emptyset$, $\overline{R(C)} = E$ i $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ je lokalno uniformno ograničena.

(U3)': $\rho_C(A) \neq \emptyset$ i $C^{-1}AC = A$.

(U4): A je gusto definisan i $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ je lokalno uniformno ograničena, ili $\rho_C(A) \neq \emptyset$.

(U5): (U1) $\vee$ (U2) $\vee$ (U3) $\vee$ (U3)'.

Napomena 3.2.1 *Pretpostavimo da je E bačvast i da je $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{C}$. Koristeći princip uniformne ograničenosti [77, Propozicija 23.27, str. 273], dobijamo da je familija $\{A(z) : z \in \Omega\}$ u $L(E)$ uniformno ograničena akko je skup $\{A(z) : z \in \Omega\}$ (tačkasto) ograničen u $L(E)$. Isti argument pokazuje da je strogo neprekidna operatorska familija $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ u bačvastim prostorima lokalno uniformno ograničena (videti takodje T. Kōmura [51, Propozicija 1.1]).*

Propozicija 3.2.1 *([52], [56]) Neka je A podgenerator (lokalne) $(a,k)-$regularizovane $C-$rezolventne familije $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$. Tada pretpostavka $\rho_C(A)\neq\emptyset$ implicira da je $A\int_0^t a(t-s)R(s)x\,ds = R(t)x-k(t)Cx$, $t\in[0,\tau)$, $x\in R(C)$. Ako dodatno pretpostavimo (U5), imamo da je*

$$A\int_0^t a(t-s)R(s)x\,ds = R(t)x-k(t)Cx,\ t\in[0,\tau),\ x\in E. \tag{3.17}$$

Nadalje ćemo posmatrati samo nedegenerisane $(a,k)-$regularizovane $C-$rezolventne familije. Primetimo da je $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ nedegenerisana ako je $k(0)\neq 0$ ili ako važi (3.17). Skup koji sadrži sve podgeneratore familije $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$, označen sa $\wp(R)$, ne mora biti konačan. Lako se može proveriti da važi:

(i) $A\in\wp(R)$ implicira $C^{-1}AC\in\wp(R)$.

(ii) $R(t)(\lambda-A)^{-1}C=(\lambda-A)^{-1}CR(t)$, $t\in[0,\tau)$, ako je $A\in\wp(R)$ i $\lambda\in\rho_C(A)$.

(iii) Neka je $a(t)$ kernel. Tada se integralni generator $\hat{A}$ od $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ može definisati sa

$$\hat{A}:=\left\{(x,y)\in E\times E : R(t)x-k(t)Cx=\int_0^t a(t-s)R(s)y\,ds,\ t\in[0,\tau)\right\}.$$

Integralni generator $\hat{A}$ operatorske familije $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ je funkcija koja zadovoljava $C^{-1}\hat{A}C=\hat{A}$ i $B\subseteq\hat{A}$, $B\in\wp(R)$; pretpostavke $B\in\wp(R)$ i $\rho(B)\neq\emptyset$ impliciraju da je $\hat{A}=B=C^{-1}BC$. Neka je $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ lokalno uniformno ograničena. Tada:

(a) $\hat{A}$ je zatvoren linearan operator.

(b) $\hat{A}\in\wp(R)$, ako je $R(t)R(s)=R(s)R(t)$, $0\leq t,\ s<\tau$.

(c) $\hat{A}=C^{-1}BC$, ako je $B\in\wp(R)$ i važi (U5) gde je A zamenjeno sa B.

(iv) Neka je $a(t)$ kernel i neka je $\{A,B\}\subseteq\wp(R)$. Tada je $Ax=Bx$, $x\in D(A)\cap D(B)$, i $A\subseteq B\Leftrightarrow D(A)\subseteq D(B)$. Pretpostavimo takodje da važi (3.17) za A (B) i C. Tada:

(a) $C^{-1}AC=C^{-1}BC$ i $C(D(A))\subseteq D(B)$.

(b) A i B imaju iste sopstvene vrednosti.

(c) $A \subseteq B \Rightarrow \rho_C(A) \subseteq \rho_C(B)$.

(v) Neka je $a(t)$ kernel, neka je $C = I$ i neka važi (U5) za neko $A \in \wp(R)$. Tada je $\mathrm{card}(\wp(R)) = 1$.

Propozicija 3.2.2 *([68], [52] i [56])*

(i) Neka je A podgenerator $(a,k_i)-$regularizovane $C-$rezolventne familije $(R_i(t))_{t\in[0,\tau)}$, $i = 1,2$. Tada je $(k_2 * R_1)(t)x = (k_1 * R_2)(t)x,\ t \in [0,\tau)$, $x \in D(A)$; ako dodatno važi (U4), onda je gornja jednakost tačna za sve $t \in [0,\tau)$ i $x \in E$.

(ii) Neka je A podgenerator $(a,k)-$regularizovane $C-$rezolventne familije $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$. Ako je $k(t)$ apsolutno neprekidna i $k(0) \neq 0$, tada je A podgenerator $(a,C)-$regularizovane rezolventne familije na $[0,\tau)$.

(iii) Neka je $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ $(a,k)-$regularizovana $C-$rezolventna familija sa podgeneratorom A, i neka je $L^1_{loc}([0,\tau)) \ni b$ kernel. Tada je A podgenerator $(a,k*b)-$regularizovane $C-$rezolventne familije $((b*R)(t))_{t\in[0,\tau)}$.

(iv) Neka je $(R(t))_{t\in[0,\tau)}$ $(a,C)-$regularizovana rezolventna familija kojoj je A podgenerator. Tada je $((k*R)(t))_{t\in[0,\tau)}$ $(a,\Theta)-$regularizovana $C-$rezolventna familija kojoj je A podgenerator.

Teorema 3.2.1 *Neka $k(t)$ i $a(t)$ zadovoljavaju uslov (P1), i neka je $(R(t))_{t\geq 0}$ jako neprekidna operatorska familija za koju postoji $\omega \geq 0$ tako da je familija $\{e^{-\omega t}R(t) : t \geq 0\}$ uniformno ograničena. Dalje, definišimo broj* $\omega_0 := \max(\omega, abs(a), abs(k))$.

(i) Pretpostavimo da je A podgenerator globalne $(a,k)-$regularizovane $C-$rezolventne familije $(R(t))_{t\geq 0}$ koja zadovoljava (3.17). Tada je, za svako $\lambda \in \mathbb{C}$ takvo da je $\operatorname{Re}\lambda > \omega_0$ i $\tilde{k}(\lambda) \neq 0$, operator $I - \tilde{a}(\lambda)A$ injektivan, $R(C) \subseteq R(I - \tilde{a}(\lambda)A)$,

$$\tilde{k}(\lambda)\big(I - \tilde{a}(\lambda)A\big)^{-1}Cx = \int_0^\infty e^{-\lambda t}R(t)x\,dt,\ x \in E,\ \operatorname{Re}\lambda > \omega_0,\ \tilde{k}(\lambda) \neq 0, \tag{3.18}$$

$$\left\{\frac{1}{\tilde{a}(\lambda)} : \operatorname{Re}\lambda > \omega_0,\ \tilde{k}(\lambda)\tilde{a}(\lambda) \neq 0\right\} \subseteq \rho_C(A) \tag{3.19}$$

i $R(s)R(t) = R(t)R(s),\ t,\ s \geq 0$.

(ii) Pretpostavimo da važi (3.18)-(3.19). Tada je A podgenerator globalne $(a,k)-$regularizovane $C-$rezolventne familije $(R(t))_{t\geq 0}$ koja zadovoljava da je $R(s)R(t)=R(t)R(s),\ \ t,s\geq 0$.

Sledeća teorema Hille-Yosida-inog tipa može biti izvedena pomoću Teoreme 3.1.4, Teoreme Arendt-Widder-a u SKLKP-ima (Teorema 3.1.5), prethodne teoreme i principa analitičkog produženja u SKLKP-ima. Dokaz je standardan pa je stoga izostavljen.

Teorema 3.2.2 *(i) Neka je $\omega_0>\max(0, abs(a), abs(k))$, i neka $k(t)$ i $a(t)$ zadovoljavaju uslov (P1). Pretpostavimo da je, za svako $\lambda\in\mathbb{C}$ takvo da je $\operatorname{Re}\lambda>\omega_0$ i $\tilde{k}(\lambda)\neq 0$, operator $I-\tilde{a}(\lambda)A$ injektivan i da je $R(C)\subseteq R(I-\tilde{a}(\lambda)A)$. Ako postoji funkcija $\Upsilon:\{\lambda\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}\lambda>\omega_0\}\to L(E)$ koja zadovoljava:*

(a) $\Upsilon(\lambda)=\tilde{k}(\lambda)(I-\tilde{a}(\lambda)A)^{-1}C,\ \operatorname{Re}\lambda>\omega_0,\ \tilde{k}(\lambda)\neq 0,$

(b) preslikavanje $\lambda\mapsto\Upsilon(\lambda)x$, $\operatorname{Re}\lambda>\omega_0$ je analitičko za svako fiksirano $x\in E$, i

(c) postoji $r\geq -1$ tako da je familija $\{\lambda^{-r}\Upsilon(\lambda):\operatorname{Re}\lambda>\omega_0\}$ uniformno ograničena,

tada je, za svako $\alpha>1$, A podgenerator globalne $(a,k*g_{\alpha+r})-$regularizovane $C-$rezolventne familije $(R_\alpha(t))_{t\geq 0}$ koja je takva da je familija $\{e^{-\omega_0 t}R_\alpha(t):t\geq 0\}$ uniformno ograničena.

(ii) Pretpostavimo da je $\omega\in\mathbb{R}$, $k(t)$ i $a(t)$ zadovoljavaju (P1), i (U2) ili (U3). Pretpostavimo da je, dodatno, A podgenerator globalne $(a,\Theta)-$regularizovane $C-$rezolventne familije $(R(t))_{t\geq 0}$ takve da je familija

$$\left\{h^{-1}e^{-\omega t}\min\bigl(e^{\omega h},1\bigr)\bigl(R_r(t+h)-R_r(t)\bigr):t\geq 0,\ h>0\right\}$$

uniformno ograničena. (3.20)

Tada postoji $b\geq\max(0,\omega, abs(a), abs(k))$ tako da je:

$$\left\{\frac{1}{\tilde{a}(\lambda)}:\lambda>b,\ \tilde{k}(\lambda)\tilde{a}(\lambda)\neq 0\right\}\subseteq\rho_C(A), \tag{3.21}$$

preslikavanje $\lambda\mapsto H(\lambda):=\tilde{k}(\lambda)(I-\tilde{a}(\lambda)A)^{-1}C,\ \lambda>b,\ \tilde{k}(\lambda)\tilde{a}(\lambda)\neq 0$ je beskonačno diferencijabilno u $L(E)$, (3.22) *i familija*

$$\left\{k!^{-1}(\lambda-\omega)^{k+1}\frac{d^k}{d\lambda^k}H(\lambda) : k\in\mathbb{N}_0,\quad \lambda>b,\ \tilde{k}(\lambda)\tilde{a}(\lambda)\neq 0\right\}$$

je uniformno ograničena. (3.23)

(iii) *Pretpostavimo da je $\omega\in\mathbb{R}$, funkcije $k(t)$ i $a(t)$ zadovoljavaju (P1), $b\geq\max(0,\omega,abs(a),abs(k))$, važi (3.21), funkcija $H : D(H)\equiv\{\lambda> b : \tilde{a}(\lambda)\tilde{k}(\lambda)\neq 0\}\to L(E)$, data sa $H(\lambda)x=\tilde{k}(\lambda)(I-\tilde{a}(\lambda)A)^{-1}Cx$, $x\in E$, $\lambda\in D(H)$, je takva da je preslikavanje $\lambda\mapsto H(\lambda)x$, $\lambda\in D(H)$ beskonačno diferencijabilno za svako fiksirano $x\in E$ i, za svako $p\in\circledast$, postoje $c_p>0$ i $r_p\in\circledast$ tako da je:*

$$p\left(k!^{-1}(\lambda-\omega)^{k+1}\frac{d^k}{d\lambda^k}H(\lambda)x\right)\leq c_p r_p(x),\ x\in E,\ \lambda\in D(H),\ k\in\mathbb{N}_0. \tag{3.24}$$

Tada je, za svako $r\in(0,1]$, operator A podgenerator globalne $(a,k*g_r)-$regularizovane $C-$rezolventne familje $(R_r(t))_{t\geq0}$ koja zadovoljava (3.17) gde je $(R(t))_{t\geq0}$ zamenjeno sa $(R_r(t))_{t\geq0}$, kao i da je, za svako $p\in\circledast$,

$$p\big(R_r(t+h)x-R_r(t)x\big)\leq\frac{2c_pr_p(x)}{r\Gamma(r)}\max\big(e^{\omega(t+h)},1\big)h^r,$$
$$t\geq0,\ h>0,\ x\in E, \tag{3.25}$$

i da je, za svako $p\in\circledast$ i $B\in\mathcal{B}$, preslikavanje $t\mapsto p_B(R_r(t))$, $t\geq0$ lokalno Hölder neprekidno stepena r.

(iv) *Pretpostavimo da je $\omega\in\mathbb{R}$, $k(t)$ i $a(t)$ zadovoljavaju (P1), i da je A gusto definisan.*

(a) *Neka je A podgenerator globalne $(a,k)-$regularizovane $C-$rezolventne familije $(R(t))_{t\geq0}$ takve da je familija $\{e^{-\omega t}R(t) : t\geq0\}$ uniformno ograničena. Tada važe (3.21)-(3.23).*

(b) *Pretpostavimo da je $\omega\in\mathbb{R}$, $k(t)$ i $a(t)$ zadovoljavaju (P1), i A je gusto definisan. Neka je $b\geq\max(0,\omega,abs(a),abs(k))$ takvo da važi (3.21). Pretpostavimo da je preslikavanje $H : D(H)\to L(E)$, definisano u (i), takvo da je funkcija $\lambda\mapsto H(\lambda)x$, $\lambda\in D(H)$ beskonačno diferencijabilna za svako fiksirano $x\in E$. Ako važi (3.24), onda je A podgenerator globalne $(a,k)-$regularizovane $C-$rezolventne familje $(R(t))_{t\geq0}$ koja zadovoljava (3.17) i takve da je familija $\{e^{-\omega t}R(t) : t\geq0\}$ uniformno ograničena.*

3.3 Kompleksni stepeni operatora $C-$regularizovanog tipa

Naša namera je da u u ovoj sekciji damo, pod uslovom (H) navedenim kasnije, pojednostavljenu konstrukciju kompleksnih stepena operatora $C-$regularizovanog tipa u SKLKP-ima (radi poredjenja videti [22]-[23]).

Definicija 3.3.1 *Neka je $0 \leq \omega < \pi$. Tada se zatvoren linearan operator A na E naziva $C-$sektorijalanim ugla ω, skraćeno $A \in \mathrm{Sect}_C(\omega)$, ako je $\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\omega} \subseteq \rho_C(A)$ i ako je familija*

$$\left\{\lambda\bigl(\lambda - A\bigr)^{-1}C : \lambda \notin \Sigma_{\omega'}\right\}$$

uniformno ograničena za svako $\omega < \omega' < \pi$; u tom slučaju, $C-$sektorijalni ugao operatora A se definiše sa $\omega_C(A) := \inf\{\omega \in [0, \pi) : A \in \mathrm{Sect}_C(\omega)\}$.

U sledećoj definiciji, uvešćemo mnogo širu klasu operatora $C-$regularizovanog tipa.

Definicija 3.3.2 *Zatvoren linearan operator A na E je $C-$nenegativan ako $(-\infty, 0) \subseteq \rho_C(A)$ i ako je familija*

$$\left\{\lambda\bigl(\lambda + A\bigr)^{-1}C : \lambda > 0\right\}$$

uniformno ograničena; dalje, $C-$nenegativan operator A se naziva $C-$pozitivan ako je, dodatno, $0 \in \rho_C(A)$.

Napomena 3.3.1 *Jasno je da je $C-$sektorijalni operator A uvek i $C-$nenegativan; čak i u slučaju kada je E Fréchet-ov prostor i $C = I$, (identički operator na E), obratno tvrdjenje ne mora da važi, u opštem slučaju (videti [75, Poglavlje 1.4.1]). Primetimo takodje da $C-$pozitivan operator A na Banachovom prostoru E ne mora da bude $C-$sektorijalan sem ako je $C = I$. U cilju da to ilustrujemo, posmatrajmo operator $A := \xi\Delta^2 - i\varrho\Delta + \varsigma$ ($\xi > 0$, $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varsigma < 0$), koji deluje na $E := L^2(\mathbb{R}^n)$ sa svojim maksimalnim distribucionim domenom. Tada nije teško dokazati da $-A$ jeste $A^{-1}-$pozitivan, ali da $-A$ nije $A^{-1}-$sektorijalan (videti [54, Primer 3.5.30(ii)]). Konstrukcija frakcionih stepena $C-$nenegativnih operatora koji nisu $C-$sektorijalni je van razmatranja u ovom radu; takodje je vredno pomenuti ovde da se pretpostavka o $C-$sektorijalnosti, korišćena za konstrukciju frakcionih stepena operatora u ovom radu, može blago oslabiti (videti [54], [75]-[76] i Napomenu 3.3.3 za više informacija u ovom pravcu).*

Neke od osnovnih osobina o $C-$nenegativnim operatorima su sadržane u sledećoj propoziciji. Dokaz je standardan te je izostavljen (videti [75, Glava 1] za slučaj da je $C = I$ i [56, Napomena 2.2]).

Propozicija 3.3.1 *(i) Ako je $0 \in \rho(C)$, tada važi A je $C-$nenegativan akko je A nenegativan.*

(ii) Ako je A $C-$pozitivan, tada je familija $\{(\lambda + C)(\lambda + A)^{-1}C : \lambda > 0\}$ uniformno ograničena. Obratno, ako je prethodna familija uniformno ograničena i ako je

(ii.1) C je nenegativan, onda je A $C-$nenegativan;

(ii.2) C je pozitivan, onda je A $C-$pozitivan.

(iii) Neka je A $C-$nenegativan. Tada važe sledeći iskazi:

(iii.1) Familija $\{A(\lambda + A)^{-1}C : \lambda > 0\}$ je uniformno ograničena.

(iii.2) Ako je A injektivan, onda je $\lambda(\lambda + A^{-1})^{-1}C = A(\lambda^{-1} + A)^{-1}C$ za sve $\lambda > 0$. Dakle, A^{-1} je $C-$nenegativan.

(iii.3) $\lim_{\lambda\to\infty} A^n(\lambda + A)^{-n}Cx = 0 \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}Cx = Cx$, $n \in \mathbb{N}$.

(iii.4) $\lim_{\lambda\to 0} \lambda^n(\lambda + A)^{-n}Cx = 0 \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to 0} A^n(\lambda + A)^{-n}Cx = Cx$, $n \in \mathbb{N}$.

(iii.5) Neka je E bačvast i neka je E^*, dualni prostor od E, snabdeven jakom topologijom, tj., topologijom uniformne konvergencije nad ograničenim skupovima u E. Tada je adjungovani operator od A, označen sa A^*, C^*-nenegativan u E^*, pod uslovom da su, dodatno, $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E.

Neka je $0 \leq \omega < \varphi \leq \pi$ i $0 < d \leq 1$. U nastavku ovog poglavlja, pretpostavićemo da zatvoren linearan operator A uvek zadovoljava sledeći uslov.

(H): A je $C-$sektorijalan ugla ω, $B_{d_1} \subseteq \rho_C(-A)$ i familija $\{(z - A)^{-1}C : z \in B_{d_1}\}$ je uniformno ograničena za sve $d_1 \in (0, d)$, i preslikavanje $z \mapsto (z - A)^{-1}Cx$ je neprekidno na $\Lambda_{\omega,d} := ((\mathbb{C} \setminus \Sigma_\omega) \cup B_d)^\circ$ za sve $x \in E$.

Pre nego što nastavimo dalje, želeli bismo da napomenemo sledeću činjenicu: Ako su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E, i prostor E je bačvast, tada operator A^* zadovoljava uslov (H) sa C^*.

Za zatvoren linearan operator A koji zadovoljava (H), može se uvesti $H^{\infty}-$funkcionalni račun $f(A)$ za odgovarajuću holomorfnu funkciju f. Označimo sa $H(\Sigma_{\varphi})$ prostor svih holomorfnih funkcija na sektoru Σ_{φ} i sa $H^{\infty}(\Sigma_{\varphi})$ prostor onih funkcija $f \in H(\Sigma_{\varphi})$ koje zadovoljavaju

$$|f(z)| \leq M|z|^{-s} \quad (z \in \Sigma_{\varphi})$$

za neke konstante $M,\ s > 0$. Primetimo da [56, Propozicija 2.16(iii)] implicira da je preslikavanje $z \mapsto (z-A)^{-1}Cx$ analitičko na $\Lambda_{\omega,d}$ kao i da je $(z-A)^{-n}C \in L(E)$ i

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\big(z-A\big)^{-1}Cx = (-1)^{n-1}(n-1)!\big(z-A\big)^{-n}Cx, \quad x \in E,\ z \in \Lambda_{\omega,d},\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.26}$$

Sada smo u poziciji da definišemo $H^{\infty}-$funkcionalni račun $f_C(A)$ za operator A na sledeći način

$$f_C(A)x := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d'}} f(z)\big(z-A\big)^{-1}Cx\,dz, \quad x \in E, \tag{3.27}$$

gde je $\Gamma_{\omega',d'} = \partial(\Sigma_{\omega'}\backslash B_{d'})$, rub oblasti $\Sigma_{\omega'}\backslash B_{d'}$ orijentisana tako da $\operatorname{Im} z$ raste duž $\Gamma_{\omega',d'}$, gde su $\omega' \in (\omega,\varphi)$ i $d' \in (0,d)$ proizvoljni. Upotrebom Cauchy-jeve teoreme pokazuje se da prethodna definicija ne zavisi od izbora brojeva ω' i d'. Dodatno, jednostavno se pokazuje da je preslikavanje $f \mapsto f_C(A)$ homomorfizam iz $H^{\infty}(\Sigma_{\varphi})$ u $L(E)$ u sledećem smislu:

$$f_C(A)g_C(A) = \big(fg\big)_C(A)C, \quad f,\ g,\ fg \in H^{\infty}(\Sigma_{\varphi}). \tag{3.28}$$

Direktno iz (3.28) sledi da je

$$\begin{aligned}\big(z^{-b}\big)_C(A)\left(\frac{1}{\lambda+z^b}\right)_C(A) =& \left(\frac{z^{-b}}{\lambda+z^b}\right)_C(A)C \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d'}} \frac{z^{-b}}{\lambda+z^b}\big(z-A\big)^{-1}C^2\,dz,\end{aligned} \tag{3.29}$$

pod uslovom da je $0 < b < \pi/\varphi$ i $\lambda > 0$. Za dato $b \in \mathbb{C}$ takvo da je $\operatorname{Re} b > 0$, uzmimo da je $A_C^{-b} := (z^{-b})_C(A)$ i da je $A_C^{-0} := C$. Jasno, $A_C^{-n} = A^{-n}C$ $(n \in \mathbb{N})$, $A_C^{-b}C = CA_C^{-b}$ $(\operatorname{Re} b > 0)$, preslikavanje $b \mapsto A_C^{-b}x$, $\operatorname{Re} b > 0$ je analitičko za svako fiksirano $x \in E$, i važi sledeće:

$$\frac{d}{db}A_C^{-b}x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d'}} (\ln z)z^{-b}\big(z-A\big)^{-1}Cx\,dz, \quad x \in E,\ \operatorname{Re} b > 0.$$

Dalje, jednakost (3.28) implicira da je

$$A_C^{-b_1} A_C^{-b_2} = A_C^{-(b_1+b_2)} C, \quad \operatorname{Re} b_1,\ \operatorname{Re} b_2 > 0. \tag{3.30}$$

Primetimo takodje da je preslikavanje $z \mapsto z^{-b}$, $z \in \Sigma_\pi$ analitičko, što implicira, da za svako $b \in \mathbb{C}$ takvo da je $0 < \operatorname{Re} b < 1$, možemo uzeti da je $\omega' = \pi$ u integraciji koja se pojavljuje u (3.27). Na taj način, dobijamo da važi:

$$\begin{aligned} A_C^{-b} x &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pi,\varepsilon}} z^{-b} \big(z - A\big)^{-1} C x \, dz \\ &= - \frac{\sin \pi b}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-b} \big(\lambda + A\big)^{-1} C x \, d\lambda, \quad 0 < \operatorname{Re} b < 1, \quad x \in E. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Sada ćemo pokazati da je familija $\{A_C^{-b} : 0 < b < 1\}$ uniformno ograničena. Da bismo to uradili, primetimo da je familija $\{(1+\lambda)(\lambda + A)^{-1} C : \lambda > 0\}$ uniformno ograničena, tj. da za svaku seminormu $p \in \circledast$, postoji seminorma $q_p \in \circledast$ i konstanta $M_p > 0$ tako da je:

$$p\Big((1+\lambda)\big(\lambda + A\big)^{-1} C x\Big) \leq M_p q_p(x), \quad \lambda > 0,\ x \in E.$$

Kada poslednju ocenu primenimo na formulu (3.31) dobijamo da je:

$$\begin{aligned} p\big(A_C^{-b} x\big) \leq & \left|\frac{\sin \pi b}{\pi}\right| \int_0^\infty \frac{\lambda^{-b}}{1+\lambda} p\Big((1+\lambda)\big(\lambda + A\big)^{-1} C x\Big) \, d\lambda \\ = & \left|\frac{\sin \pi b}{\pi}\right| M_p q_p(x) \bigg(\int_0^1 \lambda^{-b} \, d\lambda + \int_1^\infty \lambda^{-b-1} \, d\lambda \bigg) \\ = & M_p q_p(x) \bigg(\left|\frac{\sin \pi(1-b)}{\pi(1-b)}\right| + \left|\frac{\sin \pi b}{\pi b}\right| \bigg) \\ \leq & 2 M_p q_p(x), \quad 0 < b < 1,\ x \in E. \end{aligned}$$

Lema 3.3.1 *Familija $\{A_C^{-b} : 0 < b < 1\}$ je uniformno ograničena. Dodatno, ako su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E, onda imamo:*

$$\lim_{b \to 0} A_C^{-b} x = C x, \quad x \in E. \tag{3.32}$$

Dokaz. Prvo primetimo da Lema 3.3.3, koja sledi, implicira da je skup $E_0 := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R((-n-A)^{-1} C)$ gust u E. Na osnovu uniformne ograničenosti familije $\{A_C^{-b} : 0 < b < 1\}$, dovoljno je pokazati da, za svako $n \in \mathbb{N}$ i $x \in E$, važi

$$\lim_{b \to 0} A_C^{-b} \big(-n - A\big)^{-1} C x = \big(-n - A\big)^{-1} C^2 x.$$

To je direktna posledica teoreme o rezidijumu i teoreme o dominantnoj konvergenciji. Zaista,

$$\begin{aligned}
A_C^{-b}\big(-n-A\big)^{-1}Cx =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d}} z^{-b}\big(z-A\big)^{-1}\big(-n-A\big)^{-1}C^2x\,dz\\
=& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d}} z^{-b}\frac{\big(-n-A\big)^{-1}-\big(z-A\big)^{-1}}{z+n}C^2x\,dz\\
=& \frac{(-1)}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d}} \frac{z^{-b}}{z+n}\big(z-A\big)^{-1}C^2x\,dz\\
\to& \frac{(-1)}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d}} \frac{1}{z+n}\big(z-A\big)^{-1}C^2x\,dz = \big(-n-A\big)^{-1}C^2x
\end{aligned}$$

kada $b \to 0$ $(x \in E)$. □

Lema 3.3.2 *Operator A_C^{-b} je injektivan za sve $b \in \mathbb{C}$ takve da je* $\operatorname{Re} b > 0$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\operatorname{Re} b > 0$ i $A_C^{-b}x = 0$. Tada iz (3.30) dobijamo da je $A_C^{-n}Cx = A_C^{-n+b}A_C^{-b}x = 0$, pod uslovom da je $n \in \mathbb{N}$ i $n > \operatorname{Re} b$. Kako je $A_C^{-n} = A^{-n}C$ injektivan za sve $n \in \mathbb{N}$, sledi da je $x = 0$ i da je operator A_C^{-b} injektivan. □

Primetimo da svojstvo $C-$regularizovane polugrupe (3.30) i Lema 3.3.1 zajedno impliciraju da je $(A_C^{-b})_{b\geq 0}$ $C-$regularizovana polugrupa na E, pod uslovom da su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E. Definišimo stepene sa negativnim imaginarnim delom.

Definicija 3.3.3 *Neka je* $\operatorname{Re} b > 0$. *Tada je stepen A_{-b} definisan na sledeći način*

$$A_{-b} := C^{-1}A_C^{-b}. \tag{3.33}$$

Specijalno, $A_{-n} = C^{-1}A^{-n}C$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Evidentno je da je A_{-b} zatvoren i injektivan, pod uslovom da je $\operatorname{Re} b > 0$. Takodje, na osnovu Leme 3.3.2 možemo definisati stepene sa pozitivnim imaginarnim delom.

Definicija 3.3.4 *Neka je* $\operatorname{Re} b > 0$. *Tada je stepen A_b definisan na sledeći način*

$$A_b := \big(A_{-b}\big)^{-1} = \big(A_C^{-b}\big)^{-1}C. \tag{3.34}$$

Jasno, $A_n = C^{-1}A^nC$ za sve $n \in \mathbb{N}$, i A_b je zatvoren (injektivan) na osnovu zatvorenosti (injektivnosti) operatora A_{-b} $(\operatorname{Re} b > 0)$.

Lema 3.3.3 *Neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada su familije $\{\lambda^k(\lambda + A)^{-k}C : \lambda \geq 0\}$ i $\{A^k(\lambda + A)^{-k}C : \lambda \geq 0\}$ uniformno ograničene. Ako su, dodatno, $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E, onda je $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^k(\lambda + A)^{-k}Cx = Cx$.*

Dokaz. Uniformna ograničenost familije $\{\lambda^k(\lambda+A)^{-k}C : \lambda \geq 0\}$ je posledica jednakosti (3.26) i Cauchy-jeve integralne formule [56, (1)], dok se uniformna ograničenost familije $\{A^k(\lambda+A)^{-k}C : \lambda \geq 0\}$ može pokazati na sličan način. Ako su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E, onda jednakost $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^k(\lambda+A)^{-k}Cx = Cx$ sledi iz uniformne ograničenosti familije $\{\lambda^k(\lambda + A)^{-k}C : \lambda \geq 0\}$, zajedno sa identitetom

$$\lambda^k\big(\lambda + A\big)^{-k}Cx = Cx + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\big(\lambda + A\big)^{-j}A^jCx, \quad x \in D(A^k),$$

i činjenicom da je $D(A^k)$ gust u E (videti [22, Lema 2.13] za slučaj kada je E Banach-ov prostor). $\square$

U narednoj teoremi, navešćemo sve najvažnije osobine uvedenih stepena.

Teorema 3.3.1 *(i) Neka je $\operatorname{Re} b > 0$. Tada je $A_C^{-b} \in L(E)$ i $C^{-1}A_C^{-b}C = A_C^{-b}$. Dalje, operatori $A_{\pm b}$ su zatvoreni, injektivni i važi $C^{-1}A_{\pm b}C = A_{\pm b}$.*

(ii) Pretpostavimo da je $b_1,\ b_2 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} b_1 \neq 0$, $\operatorname{Re} b_2 \neq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ i:

(*) $k \geq \operatorname{Re} b_2$, ako je $\operatorname{Re} b_1 < 0$ i $\operatorname{Re} b_2 > 0$; i $k > \operatorname{Re} b_2$, ako je $\operatorname{Re} b_1 < 0$ i $\operatorname{Re} b_2 \in \mathbb{N}$,

(**) $k \geq \operatorname{Re} b_1 + \operatorname{Re} b_2$, ako $\operatorname{Re} b_1 + \operatorname{Re} b_2 \notin \mathbb{N}$; i $k > \operatorname{Re} b_1 + \operatorname{Re} b_2$, inače.

Tada važi sledeće:

$$\Lambda_{k,\omega,d} := C\big(D\big(A^k\big)\big) \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda_{\omega,d}} R\big(\big(\lambda - A\big)^{-k}C\big) \subseteq D\big(A_{b_1}A_{b_2}\big) \cap D\big(A_{b_1+b_2}\big), \tag{3.35}$$

$$A_{b_1}A_{b_2}x = A_{b_1+b_2}x,\ x \in \Lambda_{k,\omega,d}, \tag{3.36}$$

i

$$A_{b_1+b_2} = \big(\big(\lambda - A\big)^{-k}C\big)^{-1}A_{b_1}A_{b_2}\big(\lambda - A\big)^{-k}C, \quad \lambda \in \Lambda_{\omega,d}. \tag{3.37}$$

Dodatno, $A_{b_1}A_{b_2}$ je zatvoriv i $C^{-1}\overline{A_{b_1}A_{b_2}}C \subseteq A_{b_1+b_2}$, gde jednakost važi u slučaju kada je $\operatorname{Re} b_1 < 0$ i $\operatorname{Re} b_2 < 0$, ili kada su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E.

(iii)(iii.1) *Neka je* $\operatorname{Re} b > 0$. *Tada važi* $\lim_{b' \to b} A_{b'}x = A_b x$ *za sve* $x \in C(D(A^{1+\lfloor \operatorname{Re} b \rfloor}))$.

(iii.2) *Neka je* $\operatorname{Re} b < 0$ *i* $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Tada važi* $\lim_{b' \to b} A_{b'}x = A_b x$ *za sve* $x \in R(C)$. *Dodatno,* $\lim_{b' \to 0, b' \in \Sigma_\theta} A_{b'}x = x$ *za sve* $x \in R(C)$, *pod uslovom da su* $D(A)$ *i* $R(C)$ *gusti u* E.

(iv) *Pretpostavimo da je* $0 < b < \pi/\omega$. *Tada* A_b *zadovoljava uslov* (H) *gde su* ω *i* d *zamenjeni redom sa* $b\omega$ *i* bd. *Dalje,*

$$\big(A_b\big)_c = A_{bc}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{3.38}$$

Dokaz. (i): Dokazaćemo da je $C^{-1}A_bC = A_b$. Pretpostavka da $(x, y) \in A_b$, tj. da $(x, y) \in (A_C^{-b})^{-1}C$ (videti (3.34)) implicira da je $(A_C^{-b})^{-1}Cx = y$, $Cy = C(A_C^{-b})^{-1}Cx = (A_C^{-b})^{-1}CCx$ i $(x, y) \in C^{-1}[(A_C^{-b})^{-1}C]C = C^{-1}A_bC$. Pretpostavimo, obratno, da je $(x, y) \in C^{-1}A_bC = C^{-1}[(A_C^{-b})^{-1}C]C$. Tada važi $C^2x = A_C^{-b}Cy = CA_C^{-b}y$, $Cx = A_C^{-b}y$ i $(x, y) \in (A_C^{-b})^{-1}C = A_b$.

(ii): Jasno je da postoje četiri moguća slučaja:

(ii.1) $\operatorname{Re} b_1 < 0$ i $\operatorname{Re} b_2 < 0$, (ii.2) $\operatorname{Re} b_1 < 0$ i $\operatorname{Re} b_2 > 0$,

(ii.3) $\operatorname{Re} b_1 > 0$ i $\operatorname{Re} b_2 < 0$, (ii.4) $\operatorname{Re} b_1 > 0$ i $\operatorname{Re} b_2 > 0$.

Pretpostavimo prvo da važi (ii.1). Tada se iz (3.30) lako zaključuje da je $R(C) \subseteq D(A_{b_1}A_{b_2}) \cap D(A_{b_1+b_2})$ i da važi (3.36). Pretpostavimo da je $k \in \mathbb{N}$ i $x = (\lambda - A)^{-k}Cy$ za neko $y \in E$ i da je $\lambda \in \Lambda_{\omega,d}$. Neka je $\omega' \in (\omega, \pi)$ i $d' \in (0, d)$ tako da se λ nalazi levo od $\Gamma_{\omega',d'}$, i neka se $\Gamma_{\omega'',d''}$ nalazi levo od $\Gamma_{\omega',d'}$. Tada indukcijom dobijamo da, za svako $z \in \rho_C(A) \setminus \{\lambda\}$ važi:

$$\big(z-A\big)^{-1}C\big(\lambda-A\big)^{-k}Cy = \frac{(-1)^k}{(z-\lambda)^k}\big(z-A\big)^{-1}C^2y + \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k-i}\big(\lambda-A\big)^{-i}C^2y}{\big(z-\lambda\big)^{k+1-i}}, \tag{3.39}$$

što uz teoremu o rezidijumu i Fubini-jevu teoremu implicira da je:

$$\begin{aligned} &A_C^{b_1+b_2}\big(\lambda-A\big)^{-k}Cy \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{b_1+b_2}\Big[\frac{(-1)^k}{(z-\lambda)^k}\big(z-A\big)^{-1}C^2y \\ &+ \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{k-i}}{\big(z-\lambda\big)^{k+1-i}}\big(\lambda-A\big)^{-i}C^2y\Big]\,dz \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{b_1+b_2} \frac{\big(z-A\big)^{-1}C^2y}{\big(z-\lambda\big)^k}\, dz \tag{3.40}$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_{\omega'',d''}} \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \mu^{b_1} z^{b_2} \frac{\big(z-A\big)^{-1}C^2y - \big(\mu-A\big)^{-1}C^2y}{\big(z-\lambda\big)^k(\mu-z)}\, dz\, d\mu$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_{\omega'',d''}} \mu^{b_1}\big(\mu-A\big)^{-1}C \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{b_2} \frac{\big(z-A\big)^{-1}Cy}{\big(z-\lambda\big)^k}\, dz\, d\mu$$

$$= A_C^{b_1}A_{b_2}\big(\lambda-A\big)^{-k}Cy, \tag{3.41}$$

gde (3.41) sledi iz formule (3.40). Dakle, dobijamo da važi jednakost (3.36). Pretpostavimo sada da važi (ii.4) i da je $x = Cy$ za neko $y \in D(A^k)$. Pokazaćemo da važi (3.36) samo u netrivijalnom slučaju kada je $b_1b_2 > 0$. Da bismo to uradili, primetimo da teorema o rezidijumu zajedno sa (3.26) implicira da, za svako $r \in \mathbb{C}$ gde je $\operatorname{Re} r \in (0, \operatorname{Re} b_1 + \operatorname{Re} b_2]$ važi:

$$C^2y = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \frac{\big(z-A\big)^{-1}C^2A^{\lfloor \operatorname{Re} r+1\rfloor}y}{z^{\lfloor \operatorname{Re} r+1\rfloor}}\, dz.$$

Koristeći ovu jednakost, lako se može videti da, za tako izabran broj r, važi sledeće:

$$A_rCy = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{r-\lfloor \operatorname{Re} r\rfloor-1}\big(z-A\big)^{-1}CA^{\lfloor \operatorname{Re} r+1\rfloor}y\, dz. \tag{3.42}$$

Primetimo takodje da, za svako $n \in \mathbb{N}_0,\ z \in \rho_C(A) \setminus \{0\}$ i $x \in D(A^{n+1})$:

$$z^{-(n+1)}\big(z-A\big)^{-1}CA^{n+1}x = \big(z-A\big)^{-1}Cx - \sum_{i=0}^{n} z^{-(i+1)}A^iCx. \tag{3.43}$$

Imajući u vidu (3.42)-(3.43), metode korišćene u dokazu [54, Propozicija 1.4.4], i već izložene činjenice, dobijamo da važi $CA_{b_2}Cy = A_c^{-b_1}A_{b_1+b_2}Cy$ i (3.36). Uzmimo sada da je $x = (\lambda-A)^{-k}Cy$, za $y \in E$ i $\lambda \in \Lambda_{\omega,d}$. Tada je $Cx = C(\lambda-A)^{-k}Cy \in C(D(A^k))$ i, slično kao i ranije, $Cx \in D(A_r)$ gde je $A_rCx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d'}} \mu^{r-\lfloor \operatorname{Re} r\rfloor-1}(\mu-A)^{-1}CA^{\lfloor \operatorname{Re} r+1\rfloor}(\lambda-A)^{-k}Cy\, d\mu$. Zajedno sa

(3.43) i (3.39), prethodna jednakost implicira:

$$
\begin{aligned}
A_r C x &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \mu^{r-\lfloor \operatorname{Re} r \rfloor -1} \sum_{j=0}^{\lfloor \operatorname{Re} r \rfloor +1} (-1)^j \lambda^{\lfloor \operatorname{Re} r+1-j \rfloor} \\
&\times \binom{\lfloor \operatorname{Re} r \rfloor +1}{j} \bigl(\mu - A\bigr)^{-1} C \bigl(\lambda - A\bigr)^{j-k} C y \, d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \mu^{r-\lfloor \operatorname{Re} r \rfloor -1} \Biggl\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \operatorname{Re} r \rfloor +1} (-1)^j \lambda^{\lfloor \operatorname{Re} r+1-j \rfloor} \\
&\times \binom{\lfloor \operatorname{Re} r \rfloor +1}{j} \Biggl[\frac{(-1)^{k-j}}{(\mu-\lambda)^{k-j}} \bigl(\mu - A\bigr)^{-1} C^2 y \\
&+ \sum_{l=1}^{k-j} \frac{(-1)^{k-j-l}}{\bigl(\mu-\lambda\bigr)^{k-j-l+1}} \bigl(\lambda - A\bigr)^{-l} C^2 y \Biggr] \Biggr\} \, d\mu
\end{aligned}
$$

i $x \in D(C^{-1} A_r C) = D(A_r)$. Lako se pokazuje da je:

$$
A_C^{-b} A_r \subseteq A_r A_C^{-b}, \quad b > 0, \ r \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re} r \neq 0. \tag{3.44}
$$

Sada iz (3.30), (3.34) i (3.44) dobijamo da je $C A_{b_2} x = A_C^{-b_1} A_{b_1+b_2} x$ i da važi (3.36). Sada dokaz jednakosti (3.37), i dokaz jednakosti (3.36) u slučaju kada važe (ii.2) ili (ii.3), postaje standardan pa je izostavljen. Preostali deo dokaza (ii) nastavljamo pod uslovom da je $\operatorname{Re} b_1 > 0$ i $\operatorname{Re} b_2 > 0$. Pretpostavimo da je $A_{b_1} A_{b_2} x = y$. Tada je $A_{b_1} A_{b_2} (\lambda - A)^{-k} C x = (\lambda - A)^{-k} C y$, $(\lambda - A)^{-k} C A_{b_1} A_{b_2} x = (\lambda - A)^{-k} C y$ i $((\lambda - A)^{-k} C)^{-1} A_{b_1} A_{b_2} (\lambda - A)^{-k} C x = y$. Na osnovu (3.37), dobijamo da je $A_{b_1+b_2} x = y$ i da je $A_{b_1} A_{b_2} \subseteq A_{b_1+b_2}$, što implicira zatvorivost operatora $A_{b_1} A_{b_2}$ i

$$
C^{-1} \overline{A_{b_1} A_{b_2}} C \subseteq C^{-1} A_{b_1+b_2} C = A_{b_1+b_2}.
$$

Koristeći Lemu 3.3.3, dokaz inkluzije $A_{b_1+b_2} \subseteq C^{-1} \overline{A_{b_1} A_{b_2}} C$ izvodi se slično kao u dokazu [22, Teorema 4.1(5)].

(iii): Ako je $\operatorname{Re} b \notin \mathbb{N}$, tada (iii.1) sledi iz (3.42) i teoreme o dominantnoj konvergenciji. Pretpostavimo sada da je $\operatorname{Re} b \in \mathbb{N}$. Sada nije teško dokazati da je $\lim_{b' \to b, \operatorname{Re} b' \geq \operatorname{Re} b} A_{b'} x = A_b x$. Koristeći jednakost

$$
C^2 y = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \frac{\bigl(z - A\bigr)^{-1} C^2 A^{\operatorname{Re} b+1} y}{z^{\operatorname{Re} b+1}} \, dz,
$$

lako dobijamo da, za svako $b' \in \mathbb{C}$ gde je $\mathrm{Re}\, b' \in (\mathrm{Re}\, b - \varepsilon, \mathrm{Re}\, b)$, $\varepsilon > 0$ dovoljno malo, važi:

$$A_{b'}Cy = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{b'-\mathrm{Re}\, b-1}\big(z-A\big)^{-1} CA^{\mathrm{Re}\, b+1} y\, dz, \quad y \in D(A^{\mathrm{Re}\, b+1}). \tag{3.45}$$

Zajedno sa teoremom o dominantnoj konvergenciji i teoremom o rezidijumu, prethodno implicira da je $\lim_{b'\to b,\ \mathrm{Re}\, b'<\mathrm{Re}\, b} A_{b'}x = A_b x$. Jednakost $\lim_{b'\to b} A_{b'}x = A_b x$, $x \in R(C)$, $\mathrm{Re}\, b < 0$ sledi direktno iz definicije stepena, dok je druga granična vrednost u (iii.2) posledica Leme 3.3.1 i dokaza [111, Teorema 2.21, str. 93].

(iv): Uzmimo da je, za svako $\lambda \in \Lambda_{b\omega,bd}$,

$$R_b(\lambda)x := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \frac{\big(z-A\big)^{-1} Cx}{\lambda - z^b}\, dz, \quad x \in E,$$

gde je $\omega' \in (\omega, \pi)$ izabrano tako da se λ nalazi levo od $\Gamma_{d\omega',db}$. Tada se lako pokazuje da je, za svako $x \in E$, preslikavanje $\lambda \mapsto R_b(\lambda)x$, $\lambda \in \Lambda_{b\omega,bd}$ analitičko kao i da je preslikavanje $\lambda \mapsto R_b(\lambda) \in L(E)$, $\lambda \in \Lambda_{b\omega,bd}$ ne-degenerisana $C-$pseudorezolventa u smislu [66, Definicija 3.1]. Takodje, injektivnost operatora $R_b(\lambda)$ za $\lambda \in \Lambda_{b\omega,bd}$ se lako proverava. Na osnovu [66, Teorema 3.4(i)-(ii)], dobijamo da postoji zatvoren linearan operator B_b na E tako da važi sledeće: $D(B_b) = \{x \in E : R(R_b(\lambda))\}$ ($D(B_b)$ je nezavisan od $\lambda \in \Lambda_{b\omega,bd}$), $B_b x = (\lambda - R_b(\lambda)^{-1}C)x$, $x \in D(B_b)$, $\lambda - B_b$ je injektivan i $R_b(\lambda)(\lambda - B_b) \subseteq (\lambda - B_b)R_b(\lambda) = C$ ($\lambda \in \Lambda_{b\omega,bd}$). Uzimajući da je $\lambda = 0$, dobijamo da je $B_b \subseteq A_b$. Pretpostavka $x \in D(A_b)$ zajedno sa (3.34) implicira da je $Cx \in R(A_c^{-b}) = R(R_b(0))$, tako da je $A_b = B_b$, $\Lambda_{b\omega,bd} \subseteq \rho_C(A_b)$ i $R_b(\lambda) = (\lambda - A_b)^{-1}C$, $\lambda \in \Lambda_{b\omega,bd}$. Direktnim računanjem pokazuje se da je familija $\{(\lambda - A_b)^{-1}C : \lambda \in B_{bd_1}\}$ uniformno ograničena za sve $d_1 \in (0,d)$. Ostaje još da se pokaže da je, za sve $d_1 \in (0,d)$ i $\omega_1 \in (\omega,\pi)$, familija $\{R_b(\lambda) : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_{b\omega_1}},\ |\lambda| \geq bd_1\}$ uniformno ograničena i da važi (3.38). Ako je $b \in (0,1)$, tada prvo tvrdjenje važi na osnovu neznatne modifikacije dokaza [111, Teorema 2.23, str. 95–97], dok dokaz jednakosti (3.38) ostavljamo čitaocu. Pretpostavimo sada da je $1 < b < \pi/\omega$, $n \in \mathbb{N}$, $b = b_1 n$ za neko $0 < b_1 < 1$, i $b_1 n\omega_1 > n\omega' > b_1\omega$. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $b < \pi/\omega_1$. Označimo, za svako $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_{b\omega_1}}$ gde je $|\lambda| \geq b_1 n d_1$, sa $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ $n-$te korene od λ. Tada je $\lambda_j \in \Lambda_{\omega',d_1}$ $(1 \leq j \leq n)$ i, na osnovu svega do sada rečenog, imamo da je:

$$\big(\lambda - A_{b_1 n}\big)^{-1}Cx = \Big(\lambda - \big(A_{b_1}\big)_n\Big)^{-1}Cx = \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \frac{\big(z - A_{b_1}\big)^{-1}Cx}{\lambda - z^n}\,dz$$

$$= \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \Bigg[\frac{1}{\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)\cdots\big(\lambda_1 - \lambda_{n-1}\big)\big(z - \lambda_1\big)}$$

$$+ \cdots + \frac{1}{\big(\lambda_n - \lambda_1\big)\cdots\big(\lambda_n - \lambda_{n-1}\big)\big(z - \lambda_n\big)}\Bigg]\big(z - A_{b_1}\big)^{-1}Cx\,dz$$

$$= \frac{\big(\lambda_1 - A_{b_1}\big)^{-1}Cx}{\big(\lambda_1 - \lambda_2\big)\cdots\big(\lambda_1 - \lambda_{n-1}\big)} + \cdots + \frac{\big(\lambda_n - A_{b_1}\big)^{-1}Cx}{\big(\lambda_n - \lambda_1\big)\cdots\big(\lambda_n - \lambda_{n-1}\big)}.$$

Dokaz se sada završava uz standardne argumente. □

Pre nego što nastavimo dalje, primetimo sledeću činjenicu. Pretpostavimo da je $b_1,\ b_2 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ i da važi:

$(*')$ $k \geq b_2$, ako je $b_1 \leq 0$ i $b_2 \geq 0$,

$(*'*')$ $k \geq b_1 + b_2$, inače.

Tada (3.35)-(3.37) i dalje važe.

Slično kao u Definiciji 7.1.2 datoj u [75], uvešćemo i čisto imaginarne stepene operatora A na sledeći način.

Definicija 3.3.5 *Neka je $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Tada je stepen $A_{i\tau}$ definisan na sledeći način*

$$A_{i\tau} := C^{-2}\big(A+1\big)_2 A_{-1}A_{1+i\tau}\big(A+1\big)_{-2}C^2. \tag{3.46}$$

Iz definicije je jasno da je $A_{i\tau}$ linearan operator. Sada ćemo pokazati da je $A_{i\tau}$ i zatvoren. Uzimajući u obzir jednakosti (3.39), (3.42) i teoremu o rezidijumu, dobijamo da je $(A+1)A_{-1}A_{1+i\tau}(A+1)_{-2}C^2 \in L(E)$ i da je, za sve $x \in E$,

$$(A+1)A_{-1}A_{1+i\tau}\big(A+1\big)_{-2}C^2x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{-1+i\tau}\frac{z}{z+1}\big(z - A\big)^{-1}C^2x\,dz. \tag{3.47}$$

Koristeći da je $C^{-1}(A+1)_1C = (A+1)_1 = C^{-1}(A+1)C$, direktno dobijamo da je $x \in D(A_{i\tau})$ ako i samo ako $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{-1+i\tau}\frac{z}{z+1}(z-A)^{-1}Cx\,dz \in D(C^{-2}(A+$

$1)C)$. Ako je to slučaj, imamo sledeću jednakost:

$$A_{i\tau}x = C^{-2}(A+1)C\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{-1+i\tau}\frac{z}{z+1}\big(z-A\big)^{-1}Cx\,dz. \tag{3.48}$$

Zatvorenost operatora $A_{i\tau}$ sada sledi iz (3.48), zajedno sa zatvorenošću operatora $A+1$ i teoremom o dominantnoj konvergenciji. Primetimo da se operator $A_{i\tau}$ može ekvivalentno uvesti i sa:

$$A_{i\tau} = C^{-j}\big(A+\lambda\big)_q A_{-p}A_{p+i\tau}\big(A+\lambda\big)_{-q}C^j,$$

gde je $p,\ q,\ j \in \mathbb{N}$, $q > p$ i $\lambda > 0$.

Teorema 3.3.2 *Neka su $\tau,\ \tau_1,\ \tau_2 \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$. Tada važi sledeće:*

(i) $C(D(A^k)) \ \cup\ \bigcup_{\lambda\in\wedge_{\omega,d}} R((\lambda-A)^{-k}C) \subseteq D(A_{i\tau})$.

(ii) $C^{-1}A_{i\tau}C = A_{i\tau}$.

(iii) $A_{i\tau}$ *je injektivan i* $A_{i\tau} = (A_{-i\tau})^{-1}$.

(iv) $A_{i\tau_1}A_{i\tau_2} \subseteq A_{i(\tau_1+\tau_2)}$, $C(D(A^k)) \cup \bigcup_{\lambda\in\wedge_{\omega,d}} R((\lambda-A)^{-k}C) \subseteq D(A_{i\tau_1}A_{i\tau_2})$,

$$A_{i(\tau_1+\tau_2)} = \big(\big(\lambda-A\big)^{-k}C\big)^{-1}A_{i\tau_1}A_{i\tau_2}\big(\lambda-A\big)^{-k}C, \tag{3.49}$$

$A_{i\tau_1}A_{i\tau_2}$ *je zatvoriv,* $C^{-1}\overline{A_{i\tau_1}A_{i\tau_2}}C \subseteq A_{i(\tau_1+\tau_2)}$, *i jednakost važi ako su* $D(A)$ *i* $R(C)$ *gusti u* E.

(v) *Neka je* $\operatorname{Re} b < 0$ *i* $\tau \in \mathbb{R}$. *Tada važi sledeće:*

$$A_{i\tau}A_b \subseteq A_{b+i\tau}, \tag{3.50}$$

$$A_{i\tau}A_b \subseteq A_{i\tau+b}, \tag{3.51}$$

$$A_{b+i\tau} = \big(\big(\lambda-A\big)^{-k}C\big)\big)^{-1}A_bA_{i\tau}\big(\lambda-A\big)^{-k}C, \quad k\in\mathbb{N},\ \lambda\in\wedge_{\omega,d}, \tag{3.52}$$

$$A_{b+i\tau} = \big(\big(\lambda-A\big)^{-k}C\big)\big)^{-1}A_{i\tau}A_b\big(\lambda-A\big)^{-k}C, \quad k\in\mathbb{N},\ \lambda\in\wedge_{\omega,d}, \tag{3.53}$$

operatori $A_{i\tau}A_b$ *i* $A_bA_{i\tau}$ *su zatvorivi, važi i* $C^{-1}\overline{A_{i\tau}A_b}C \subseteq A_{b+i\tau}$ *i* $C^{-1}\overline{A_bA_{i\tau}}C \subseteq A_{b+i\tau}$. *Ako su* $D(A)$ *i* $R(C)$ *gusti u* E, *tada važi i obratne inkluzije.*

(vi) *Neka je* $\operatorname{Re} b > 0$ *i* $\tau \in \mathbb{R}$. *Tada važe* (3.50)-(3.51). *Kada je* $k \geq \lceil \operatorname{Re} b\rceil$, *važe* (3.52)-(3.53). *Dalje, operatori* $A_{i\tau}A_b$ *i* $A_bA_{i\tau}$ *su zatvorivi,* $C^{-1}\overline{A_{i\tau}A_b}C \subseteq A_{b+i\tau}$ *i* $C^{-1}\overline{A_bA_{i\tau}}C \subseteq A_{b+i\tau}$. *Ako su* $D(A)$ *i* $R(C)$ *gusti u* E, *onda važi i obratne inkluzije.*

(vii) *Pretpostavimo da je $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in E$ i $\lambda \in \wedge_{\omega,d}$. Tada važe sledeće granične vrednosti* $\lim_{b\to i\tau,\operatorname{Re} b\geq 0} A_b(\lambda - A)^{-1}Cx = A_{i\tau}(\lambda - A)^{-1}Cx$ *i* $\lim_{b\to i\tau,\operatorname{Re} b<0} A_C^b(\lambda - A)^{-1}Cx = A_{i\tau}(\lambda - A)^{-1}C^2x$.

Dokaz. Tvrdjenje (ii) je direktna posledica jednakosti (3.48) i činjenice da je $C^{-2}(A+1)C^2 = C^{-1}(A+1)C$. Pretpostavimo sada da je $x \in C(D(A))$ i $x = Cy$ za neko $y \in D(A)$. Tada (3.48) odmah implicira da je

$$A_{i\tau}x = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{-1+i\tau}\frac{z}{z+1}\big(z-A\big)^{-1}C(A+1)y\,dz.$$

Koristeći ovu jednakost, tvrdjenje (ii) i dokaz Teoreme 3.3.1, lako dobijamo da je $C(D(A^k)) \cup \bigcup_{\lambda\in\wedge_{\omega,d}} R((\lambda-A)^{-k}C) \subseteq D(A_{i\tau})$. Dakle, dobijamo da važi (i). Injektivnost operatora $A_{i\tau}$ sledi iz injektivnosti svakog pojedinačnog operatora koji učestvuje u njegovoj reprezentaciji (3.46). Neka je $x \in D(A_{i\tau})$ fiksirano. Za dokaz jednakosti u tvrdjenju (iii), dovoljno je pokazati da je $A_{-i\tau}A_{i\tau}x = x$. Koristeći Definiciju 3.3.5, imamo da je to ekvivalentno sa

$$C^{-2}\big(A+1\big)_2 A_{-1}A_{1-i\tau}A_{-1}A_{1+i\tau}\big(A+1\big)_{-2}C^2x = x. \tag{3.54}$$

Kako je $C(D(A)^2) \subseteq D(A_{1+i\tau})$ i $L(E) \ni A_{-1}C$ komutira sa $A_{1+i\tau}$, imamo ekvivalenciju (3.54) i sledeće jednakosti

$$C^{-2}\big(A+1\big)_2 A_{-1}A_{1-i\tau}A_{1+i\tau}A_{-1}\big(A+1\big)_{-2}C^2x = x,$$

čija tačnost sledi iz osobine polugrupe $A_{1-i\tau}A_{1+i\tau}y = A_2y$, $y \in C(D(A^3))$ i direktnog računanja. Inkluzija $A_{i\tau_1}A_{i\tau_2} \subseteq A_{i(\tau_1+\tau_2)}$ može da se dokaže na skoro isti način, što implicira da je operator $A_{i\tau_1}A_{i\tau_2}$ zatvoren, kao i da je $C^{-1}\overline{A_{i\tau_1}A_{i\tau_2}}C \subseteq A_{i(\tau_1+\tau_2)}$. Dalje, inkluzija $C(D(A)) \subseteq D(A_{i\tau_1}A_{i\tau_2})$ jednostavno sledi iz osobine polugrupe za stepene i činjenice da, za svako $y \in D(A)$, imamo da je $A_{i(\tau_1+\tau_2)}(A+1)_{-2}C^3y \in D(C^{-2}(A+1)_2)$. Koristeći sada jednakost (3.39), dokaz Teoreme 3.3.1 i $C(D(A^k)) \subseteq D(A_{i\tau_1}A_{i\tau_2})$, u jednom koraku se pokazuje da je $\bigcup_{\lambda\in\wedge_{\omega,d}} R((\lambda-A)^{-k}C) \subseteq D(A_{i\tau_1}A_{i\tau_2})$. Dokaz jednakosti (3.49) je standardan, pa će biti izostavljen. U slučaju kada su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E, jednakost $C^{-1}\overline{A_{i\tau_1}A_{i\tau_2}}C = A_{i(\tau_1+\tau_2)}$ sledi iz komutativnosti $A_{i\tau}$ i ograničenog linearnog operatora $(\lambda-A)^{-k}C$ $(\lambda \in \wedge_{\omega,d})$, i odgovarajućeg dokaza [22, Teorema 4.1(5)]. Sve ovo završava dokaz tvrdjenja (iv). Pretpostavimo sada da je $\operatorname{Re} b < 0$ i $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Na osnovu (3.48) i elementarne argumentacije, dobijamo da je

$$A_C^b A_{i\tau}x = A_C^{b+i\tau}x, \quad x \in D(A_{i\tau}). \tag{3.55}$$

Sada nije teško pokazati da važe (3.50)-(3.51). Takodje je jednostavno pokazati da je $A_{i\tau}A_C^b \in L(E)$ i da važe (3.52)-(3.53). Dakle, operatori $A_{i\tau}A_b$ i $A_bA_{i\tau}$ su zatvorivi, $C^{-1}\overline{A_{i\tau}A_b}C \subseteq A_{b+i\tau}$ i $C^{-1}\overline{A_bA_{i\tau}}C \subseteq A_{b+i\tau}$. Dokaz [22, Teorema 4.1(5)] pokazuje da jednakosti u poslednje dve inkluzije važe, ako su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E. Neka je $\operatorname{Re} b > 0$ i $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tada je $A_C^{-b}A_{-i\tau}x = A_C^{-b-i\tau}x$, $x \in D(A_{-i\tau})$. Zato važi i $A_{-i\tau}Cx = (A_C^{-b})^{-1}CA_C^{-b-i\tau}x$, $x \in D(A_{-i\tau})$ i $A_bA_C^{-b-i\tau}x = A_{-i\tau}Cx$, $x \in D(A_{-i\tau})$. Za svako $x \in D(A_b) \cap D(A_{-i\tau})$, prethodni identiteti impliciraju da je $A_C^{-b-i\tau}A_bx = CA_{-i\tau}x$ i da je $A_bx = A_{b+i\tau}A_{-i\tau}x$. Uzimajući da je $y = A_{-i\tau}x$ za takvo $x \in E$, dobijamo da je $A_bA_{i\tau}y = A_{b+i\tau}y$ i da važi (3.50). Na sličan način može se dobiti da je $A_C^{-b-i\tau}[A_{i\tau}A_bx] = A_C^{-b}A_bx = Cx$, $x \in D(A_{i\tau}A_b)$ i da važi (3.51). Jednakost (3.52) može biti dokazana kao i ranije pa ćemo jedino još dokazati jednakost

$$A_{i\tau}A_b\big(\lambda - A\big)^{-k}Cx = A_{b+i\tau}\big(\lambda - A\big)^{-k}Cx,$$

za $k \geq \lceil \operatorname{Re} b \rceil$, $\lambda \in \wedge_{\omega,d}$ i $x \in E$ date unapred (videti (3.53)). Na osnovu definicije stepena $A_{i\tau}$ i osobine polugrupe dokazane u Teoremi 3.3.1, jednostavno se može dobiti da je $A_b\big(\lambda - A\big)^{-k}Cx \in D(A_{i\tau})$ i

$$\begin{aligned}
&A_{i\tau}A_b\big(\lambda - A\big)^{-k}Cx \\
&\quad = C^{-2}\big(A+1\big)_2A_{-1}A_{1+i\tau}\big(A+1\big)_{-2}C^2A_b\big(\lambda - A\big)^{-k}Cx \\
&\quad = C^{-2}\big(A+1\big)_2A_{-1}A_{1+b+i\tau}\big(A+1\big)_{-2}C^2\big(\lambda - A\big)^{-k}Cx \\
&\quad = C^{-2}\big(A+1\big)_2A_{b+i\tau}\big(A+1\big)_{-2}C^2\big(\lambda - A\big)^{-k}Cx \\
&\quad = C^{-2}\big(A+1\big)_2\big(A+1\big)_{-2}C^2A_{b+i\tau}\big(\lambda - A\big)^{-k}Cx \\
&\quad = A_{b+i\tau}\big(\lambda - A\big)^{-k}Cx.
\end{aligned}$$

Konačno, dokazaćemo (vii). Na osnovu prethodnih argumenata, jednostavno se može proveriti da je

$$A_{i\tau}\big(\lambda - A\big)^{-1}Cx = \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \frac{z^{i\tau}}{z-\lambda}\big(z - A\big)^{-1}Cx\,dz, \qquad (3.56)$$

gde je λ levo u odnosu na konturu $\Gamma_{\omega',d'}$. Teorema o dominantnoj konvergenciji implicira da je $\lim_{\tau'\to\tau} A_{i\tau'}(\lambda-A)^{-1}Cx = A_{i\tau}(\lambda-A)^{-1}Cx$. Pretpostavimo sada da je $b \in \mathbb{C}$ i $\operatorname{Re} b \in (0,1)$. Tada imamo sledeće očigledne jednakosti

$$A_bCx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} z^{-1+ib}\frac{z}{z+1}\big(z - A\big)^{-1}Cx\,dz$$

i

$$A_b\big(\lambda - A\big)^{-1}Cx = \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \frac{z^b}{z-\lambda}\big(z-A\big)^{-1}Cx\,dz. \tag{3.57}$$

Na osnovu (3.57) i teoreme o dominantnoj konvergenciji, dobijamo da je

$$\lim_{b\to i\tau,\ \mathrm{Re}\,b>0} A_b(\lambda - A)^{-1}Cx = A_{i\tau}(\lambda - A)^{-1}Cx.$$

Dalje, dokaz Lema 3.3.1 implicira da je

$$\lim_{b\to i\tau,\ \mathrm{Re}\,b<0} A_C^b(\lambda - A)^{-1}Cx = \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \frac{z^{i\tau}}{z-\lambda}\big(z-A\big)^{-1}C^2x\,dz.$$

Takodje imamo i sledeću jednakost

$$A_{i\tau}(\lambda - A)^{-1}Cx = \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}} \frac{z^{i\tau}}{z-\lambda}\big(z-A\big)^{-1}Cx\,dz,$$

koja na kraju završava dokaz teoreme. $\square$

Napomena 3.3.2 *Neka je $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$. Koristeći Teoremu 3.3.1(ii) i Teoremu 3.3.2(iv)-(vi), dobijamo osobinu aditivnosti za stepene $A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$. Koristeći jednakosti (3.37) i (3.52), može se takodje jednostavno pokazati da je $D(A_\beta)\ \cap\ D(A_{\alpha+\beta}) \subseteq D(A_\alpha A_\beta)$ gde je $A_\alpha A_\beta x = A_{\alpha+\beta}x$, $x \in D(A_\beta)\ \cap\ D(A_{\alpha+\beta})$. Ako su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E, tada važi sledeće $C^{-1}\overline{A_\alpha A_\beta}C = A_{\alpha+\beta}$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ (videti takodje [75, Teorema 7.1.1]).*

Bilo bi preopširno sada posmatrati i neke druge osobine i primene čisto imaginarnih stepena $C-$sektorijalnih operatora. Za dalje informacije u ovom pravcu, čitalac može pogledati, medju mnogim radovima i monografijama, [75, Poglavlja 7-10], [111, str. 105-116] i reference koje su tu citirane.

Napomena 3.3.3 *(i) Za date $\beta \geq -1$, $\varepsilon \in (0,1]$ i $c \in (0,1)$, uzmimo da je $P_{\beta,\varepsilon,c} := \{\xi + i\eta : \xi \geq \varepsilon,\ \eta \in \mathbb{R},\ \ |\eta| \leq c(1+\xi)^{-\beta}\}$. Pretpostavimo da je $(E, ||\cdot||)$ Banach-ov prostor, $\alpha \geq -1$ i A zatvoren linearan operator na E takav da je:*

$$(0,\infty) \subseteq \rho(A) \ \ i\ \sup_{\lambda>0}\big(1+|\lambda|\big)^{-\alpha}\big\|\big(\lambda - A\big)^{-1}\big\| < \infty.$$

Na osnovu uobičajenog niza argumenata, imamo da postoje $d \in (0,1]$, $c \in (0,1)$ i $\varepsilon \in (0,1]$ tako da je $(\varepsilon, c(1+\varepsilon)^{-\alpha}) \in \partial B_d$,

$$P_{\alpha,\varepsilon,c} \cup B_d \subseteq \rho(A)\ \ i \sup_{\lambda\in P_{\alpha,\varepsilon,c}\cup B_d}\big(1+|\lambda|\big)^{-\alpha}\big\|\big(\lambda - A\big)^{-1}\big\| < \infty.$$

Uzmimo da je $n_\alpha := \lfloor \alpha \rfloor + 2$ *ako* $\alpha \notin \mathbb{Z}$, *i* $n_\alpha := \alpha + 1$, *inače. Označimo sa* $(-A)^b$ *(*$b \in \mathbb{C}$*) kompleksni stepen definisan u [54, Sekcija 1.4]. Želeli bismo da napomenemo da metod razvijen ovde, sa* $C = (-A)^{-n_\alpha}$, *daje definiciju stepena* $(-A)_b$. *Nije teško pokazati da je* $(-A)^b \subseteq (-A)_b$ *za sve* $b \in \mathbb{C}$. *Dodatno, skup koji se pojavljuje u [53, Napomena 4.1, str. 61, l -7], odnosno [53, Napomena 4.1, str. 61, l -6], se poklapa sa* $D((-A_{\omega+\sigma})_{\alpha+\varepsilon})$, *odnosno* $D((-A_\sigma)_{\alpha+\varepsilon})$, *i važi jednakost* $(-A)_b = (-A)^{k+n_\alpha}(-A)^b(-A)^{-(k+n_\alpha)}$ *pod uslovom da je* $\operatorname{Re} b \geq 0$ *i* $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Takodje je vredno pomenuti da se metod opisan u prethodnoj napomeni može primeniti i u mnogim drugim slučajevima. Neka je $\alpha \geq -1$, $\varepsilon \in (0,1]$, $c \in (0,1)$, $d \in (0,1]$ *i* n_α *kao u prvom delu napomene, i neka je* $\Omega_{\alpha,\varepsilon,c,d}$ *otvorena okolina oblasti* $P_{\alpha,\varepsilon,c} \cup B_d$. *Pretpostavimo da važi sledeći uslov:*

(H1): $\Omega_{\alpha,\varepsilon,c,d} \subseteq \rho_C(-A)$, *familija* $\{(1+|z|)^{-\alpha}(z+A)^{-1}C : z \in \Omega_{\alpha,\varepsilon,c,d}\}$ *je uniformno ograničena, i preslikavanje* $z \mapsto (z+A)^{-1}Cx$, $z \in \Omega_{\alpha,\varepsilon,c,d}$ *je neprekidno za svako* $x \in E$.

Tada postoji dovoljno mali broj $\kappa > 0$ *tako da je operator* $\mathcal{C} := (d+\kappa-A)^{-n_\alpha}C \in L(E)$ *injektivan i da komutira sa* A *(videti (3.26)). Koristeći (3.39) i inkluziju* $R(C) \subseteq R((z+A)^n)$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \Omega_{\alpha,\varepsilon,c,d}$, *može se lako videti da je, za sve* $z \in P_{\alpha,\varepsilon,c} \cup B_d$,

$$\big(z+A\big)^{-1}\mathcal{C}x = \frac{\big(z+A\big)^{-1}Cx}{\big(d+\kappa+z\big)^{n_\alpha}} + \sum_{i=1}^{n_\alpha} \frac{\big(d+\kappa-A\big)^{-i}Cx}{\big(d+\kappa+z\big)^{n_\alpha+1-i}},$$

i da je familija $\{z(z+A)^{-1}\mathcal{C} : z \in P_{\alpha,\varepsilon,c} \cup B_d\}$ *uniformno ograničena. Dakle, sada smo u poziciji da konstruišemo stepene* A_b *(*$b \in \mathbb{C}$*). Primetimo da ta konstrukcija ne zavisi od izbora brojeva* α, ε, c, d, κ *i* n_α, *i da tvrdjenje Teoreme 3.4.1, kasnije, može biti preformulisano u svetlu ove napomene (sa očiglednim dodatnim poteškoćama u slučaju kada je* $\alpha \notin \mathbb{Z}$*). Analiza postojanja i rasta blagog rešenja apstraktnog Cauchy-jevog problema datog preko frakcionih integrisanih* $C-$*polugrupa i kosinusnih funkcija u lokalno konveksnim prostorima je proučena u radu [57] (videti i [36], [84] i [53]).*

Napomena 3.3.4 *(i) U radu [16] konstruisani su frakcioni stepeni mnogo šire klase operatatora. Naime, posmatrana je sledeća klasa operatora. Neka je* $m \in \mathbb{R}$. *Operator* A *pripada klasi* $\mathcal{M}_{C,m}$ *ako* $(-\infty,0) \subseteq \rho_C(A)$ *i familija*

$$\Big\{\big(\lambda^{-1}+\lambda^m\big)^{-1}\big(\lambda+A\big)^{-1}C : \lambda > 0\Big\}$$

je uniformno ograničena. Dodatno, kaže se da je A skoro $C-$nenegativan ako postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da A pripada klasi $\mathcal{M}_{C,m}$. U pomenutom radu data je kompletna konstrukcija frakcionih stepena operatora $A \in \mathcal{M}_{C,m}$ za $m \geq -1$, dok za one operatore kod kojih je $m < -1$ konstrukcija zavisi od injektivnosti operatora A. U nastavku ćemo ukratko dati ideju konstrukcije stepena. Neka je A sada $C-$nenegativan operator, tada je sa J_C^α označen odgovarajući Balakrishnan-ov operator (videti [16, Definicija 2.2], [7] i [75, Glava 3]). Uvode se oznake $A_\infty = A_{|D_\infty(A)}$ i $C_\infty = C_{|D_\infty(A)}$ i sa $J_{\infty,\alpha}$ se označava odgovarajući Balakrishnan-ov operator. Zatim se pokazuje da je u prostoru $D_\infty(A)$, snabdevenog standardnom Fréchet-ovom topologijom, moguće definisati operator $A_{\infty,\alpha} := (A_\infty)_{C_\infty,\alpha} = C_\infty^{-1}\overline{J_{C_\infty}^\alpha}$ za $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Konačno uvode se frakcioni stepeni ([16, Definicija 3.1]) sa:
Neka je $m \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, $p = \lfloor m+2 \rfloor$, $A \in \mathcal{M}_{C,m}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$ i $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$. Tada je stepen A_α definisan sa

$$A_\alpha := C^{-2}\Big(\big(1+A\big)^{-1}C\Big)^{-n(p+1)-p}\overline{A_{\infty,\alpha}}\Big(\big(1+A\big)^{-1}C\Big)^{n(p+1)+p}C^2.$$

Dalje, neka je A injektivan, $m \geq -1$, $A \in \mathcal{M}_{C,m}$, $\alpha \in \mathbb{C}_+$ i $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Tada se ostali kompleksni stepeni definišu sa

$$A_{-\alpha} := \big(A_\alpha\big)^{-1},\ A_0 := I \ i$$

$$A_{i\tau} := C^{-3}\Big(\big(1+A\big)^{-1}C\Big)^{-(3p+3)}A^{-1}A_{1+i\tau}\Big(\big(1+A\big)^{-1}C\Big)^{3p+3}C^3.$$

Definicija se za injektivne operatore A proširuje i u slučaju kada je $m < -1$. Neka je A injektivan, $m < -1$, $A \in \mathcal{M}_{C,m}$ i $\alpha \in \mathbb{C}$. Tada važi da $A^{-1} \in \mathcal{M}_{C,-m-2}$, pa se stepeni A_α definišu sa

$$A_\alpha := \big(A^{-1}\big)_{-\alpha}.$$

Konačno, u [16, Napomena 3.11] pokazano je da, ako se sa ${}_bA$ označe stepeni definisani u našem radu (Definicija 3.3.3 i Definicija 3.3.4), važi ${}_bA = A_b,\ b \in \mathbb{C}$.

(ii) U [16, Sekcija 6] uvedena je i klasa $(a,b,C)-$nenegativnih operatora na sledeći način:

(a) Neka je $a,\ b \in \mathbb{R}$. Tada za zatvoren linearan operator A na E kažemo da je (a,b,C)-nenegativan (ili, ekvivalentno, da operator A pripada klasi $\mathcal{M}_C(a,b)$) ako $(-\infty,0) \subseteq \rho_C(A)$ i familija

$$\Big\{\big(\lambda^a+\lambda^b\big)^{-1}\big(\lambda+A\big)^{-1}C : \lambda > 0\Big\}$$

je uniformno ograničena. Definišimo $\mathcal{M}_C := \bigcup_{a,b\in\mathbb{R}}\mathcal{M}_C(a,b)$.

(b) *Neka je $0 \leq \omega < \pi$. Tada za zatvoren linearan operator A na E kažemo da je (a, b, C)-sektorijalan ugla ω (ili, ekvivalentno, da A pripada klasi $\mathcal{S}_{C,\omega}(a, b)$) ako $\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\omega} \subseteq \rho_C(A)$ i familija*

$$\left\{ \left(|\lambda|^a + |\lambda|^b\right)^{-1} \left(\lambda - A\right)^{-1} C : \lambda \notin \Sigma_{\omega'} \right\}$$

je uniformno ograničena za svako $\omega < \omega' < \pi$. Definišimo $\mathcal{S}_{C,\omega} := \bigcup_{a,b \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_{C,\omega}(a, b)$.

Jasno je da zatvoren linearan operator A pripada klasi $\mathcal{M}_{C,m}$ ako i samo ako je (a, b, C)-nenegativan za $a = -1$ i $b = m$ ($m \in \mathbb{R}$), i da kompleksni stepeni uvedeni u prvom delu ove napomene sada mogu da se posmatraju i u slučaju kada C nije injektivan. Kompleksni stepeni (a, b, C)-nenegativnih operatora A za neke a, $b \in \mathbb{R}$, se konstruišu na sledeći način:

(a) *$a \geq -1$ i $b \geq -1$. Tada se stepeni A_α za eksponente $\alpha \in \mathbb{C}_+$ kao i stepeni A_α za sve eksponente $\alpha \in \mathbb{C}$ ako je, dodatno, operator A injektivan, definišu kao u prvom delu ove napomene.*

(b) *$a < -1$ i $b < -1$. Ovaj slučaj je nezanimljiv jer sledeći identitet pokazuje da prostor E mora biti trivijalan. Neka je $\lambda > 1$ i $x \in E$, tada je*

$$\lambda\left(\lambda + A\right)^{-1} C \left(1 + A\right)^{-1} Cx = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \left[\left(\lambda + A\right)^{-1} C^2 x - \left(1 + A\right)^{-1} C^2 x \right].$$

Kada $\lambda \to +\infty$, dobijamo da je $(1 + A)^{-1} C^2 x = 0$, $x \in E$, pa samim tim, i da je $E = \{0\}$.

(c) *$a > -1$ i $b < -1$ (zbog simetričnosti definicije, $a < -1$ i $b > -1$). Neka je $C_k = C((1 + A)^{-1} C)^k$, $k \in \mathbb{N}$. Ako pretpostavimo da je $C^{-1} AC = A$, imamo da je $C_k^{-1} AC_k = A$, $k \in \mathbb{N}$. Zatim se pokazuje da za svako $k \in \mathbb{N}$ takvo da je $k \geq \lceil a \rceil + 1$, operator A pripada klasi $\mathcal{M}_{C_k,b}$. Sada kompleksni stepeni A_α ($\alpha \in \mathbb{C}$) mogu da se definišu na isti način kao i u prvom delu ove napomene, uz očiglednu zamenu operatora C operatorom C_k za proizvoljno $k \geq \lceil a \rceil + 1$, takodje se pokazuje da definicija ne zavisi od izbora broja k.*

(d) *$a = -1$ i $b < -1$ (ili, simetrično, $a < -1$ i $b = -1$). Jasno je da se sada problem svodi na konstrukcju stepena operatora iz klase $\mathcal{M}_{C,m}$, $m < -1$. Ovde se nailazi na prepreke u slučaju kada A nije injektivan operator (videti [16, Napomena 6.3]).*

Sada ćemo se fokusirati na dokazivanje dobro poznate nejednakosti momenta za frakcione stepene.

Lema 3.3.4 *Neka su* $\alpha,\ \gamma \in \mathbb{C}$, $-\infty < \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\gamma < +\infty$ *i* $x \in D(A_\gamma)$. *Tada je* $Cx \in D(A_\alpha)$ *i* $A_\alpha Cx = A_C^{\alpha-\gamma}A_\gamma x$.

Dokaz. Pokazaćemo tvrdjenje leme samo u slučaju kada je $\operatorname{Re}\gamma > 0$ i $\alpha = i\tau$ za neko $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dokaz je u ostalim slučajevima jednostavan i zato neće biti dat. Primetimo da jednakost (3.48), definicija operatora $A_C^{i\tau-\gamma}$ i standardna argumentacija pokazuju da je $A_{-i\tau}A_C^{i\tau-\gamma}A_\gamma x = Cx$. Kako je $A_{i\tau} = (A_{-i\tau})^{-1}$, prethodna jednakost implicira da $Cx \in D(A_{i\tau})$ i da $A_{i\tau}Cx = A_C^{i\tau-\gamma}A_\gamma x$. □

Lema 3.3.5 *Neka je* $n \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{C}$ *i* $\operatorname{Re} b \in (0, n+1) \setminus \mathbb{N}$. *Tada, za svako* $x \in E$, *važi*

$$A_C^{-b}x = \frac{(-1)^n n!}{(1-b)(2-b)\cdots(n-b)}\frac{\sin\pi(n-b)}{\pi}\int_0^\infty t^{n-b}\big(t+A\big)^{-(n+1)}Cx\,dt, \tag{3.58}$$

gde je $(1-b)(2-b)\cdots(n-b) := 1$ *za* $n = 0$.

Dokaz. Ova lema može biti dokazana prateći dokaz [27, Teorema 5.27, str. 138]. Zapravo, dokaz citirane teoreme zajedno sa (3.26) implicira da je, za svako $x \in E$,

$$C^n A_C^{-b}x = \frac{(-1)^n n!}{(1-b)(2-b)\cdots(n-b)}\frac{\sin\pi(n-b)}{\pi}\int_0^\infty t^{n-b}\big(t+A\big)^{-(n+1)}C^{n+1}x\,dt.$$

Dokaz se završava primenom operatora C^{-n} na obe strane poslednje jednakosti. □

Lema 3.3.6 *Neka su* $\alpha_0,\ \beta_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha_0 > \operatorname{Re}\beta_0 > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ *i* $\operatorname{Re}\alpha_0 \in (n, n+1]$. *Tada, za svako* $p \in \circledast$, *postoji* $c_{p,\alpha_0,\beta_0} > 0$ *i* $q_p \in \circledast$ *tako da je:*

$$p\big(CA_C^{-\beta_0}x\big) \leq c_{p,\alpha_0,\beta_0}q_p\big(A_C^{-\alpha_0}x\big)^{\frac{\operatorname{Re}\beta_0}{\operatorname{Re}\alpha_0}}q_p\big(Cx\big)^{\frac{\operatorname{Re}\alpha_0-\operatorname{Re}\beta_0}{\operatorname{Re}\beta_0}}, \quad x \in E, \tag{3.59}$$

i da je

$$p\big(A_C^{-\beta_0}x\big) \leq c_{p,\alpha_0,\beta_0}q_p\big(A_{-\alpha_0}x\big)^{\frac{\operatorname{Re}\beta_0}{\operatorname{Re}\alpha_0}}q_p\big(x\big)^{\frac{\operatorname{Re}\alpha_0-\operatorname{Re}\beta_0}{\operatorname{Re}\beta_0}}, \quad x \in D(A_{-\alpha_0}). \tag{3.60}$$

Dokaz. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $\operatorname{Re}\beta_0 \notin \mathbb{N}$. Naša namera je da dokažemo da, za svako $p \in ⊛$, postoje $c'_p > 0$ i $q'_p \in ⊛$ tako da je:

$$p\big(s^{n+1-\alpha_0}C\big(s+A\big)^{-(n+1)}Cx\big) \leq c'_p q'_p\big(A_C^{-\alpha_0}x\big), \quad s > 0,\ x \in E. \tag{3.61}$$

Pretpostavimo prvo da je $\operatorname{Re}\alpha_0 \in (n, n+1)$. Na osnovu (3.36), imamo da je $A_{\alpha_0}C^{-1}A_C^{-\alpha_0}Cx = Cx$, $x \in E$, što jasno implicira da je $C^2x = CA_{\alpha_0}A_C^{-\alpha_0}x$, $x \in E$. Fiksirajmo, za trenutak, broj $s > 0$ i element $x \in E$. Koristeći (3.35) i inkluziju $((t+A)^{-(n+1)}C)A_{\alpha_0} \subseteq A_{\alpha_0}((t+A)^{-(n+1)}C)$, $t > 0$, dobijamo da je:

$$s^{n+1-\alpha_0}C\big(s+A\big)^{-(n+1)}Cx = s^{n+1-\alpha_0}A_{\alpha_0}\big(s+A\big)^{-(n+1)}C\big(A_C^{-\alpha_0}x\big).$$

Neka je $\omega' \in (\omega, \pi)$ i $d' \in (0, d)$. Uzimajući u obzir račun koji sledi iz formule (3.44), gornja jednakost implicira da je:

$$\begin{aligned} &s^{n+1-\alpha_0}C\big(s+A\big)^{-(n+1)}Cx \\ &= \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{n+1-j}\binom{n+1}{j}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}}\frac{z^{\alpha_0-(n+1)}s^{2n+2-j-\alpha_0}}{2\pi i\big(z+s\big)^{n+1-j}}\big(z+A\big)^{-1}C\big(A_C^{-\alpha_0}x\big)\,dz. \end{aligned}$$

Na osnovu binomne formule, imamo da je:

$$s^{n+1-\alpha_0}C\big(s+A\big)^{-(n+1)}Cx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega',d'}}\frac{z^{\alpha_0-1}s^{n+1-\alpha_0}}{\big(z+s\big)^{n+1}}z\big(z+A\big)^{-1}C\big(A_C^{-\alpha_0}x\big)\,dz. \tag{3.62}$$

Lako se proverava da $p-$vrednost gornjeg integrala, uzetog duž krive $\{d'e^{i\theta} : \theta \in [-\omega', \omega']\}$, može biti majorirana sa $c'_p q'_p(A_C^{-\alpha_0}x)$, za neko $c'_p > 0$ i $q'_p \in ⊛$, nezavisno od izbora $s > 0$ i $x \in E$. Isti zaključak važi za gornji integral i duž krivih $\Gamma_{\omega',d',\pm} := \{re^{\pm i\omega'} : r \geq d'\}$, i mi ćemo to pokazati za $s \geq 2d'$. Ako je to slučaj, tada integral

$$\int\limits_{d'}^{\infty}\frac{s^{n+1-\alpha_0}\big(re^{i\omega'}\big)^{\alpha_0-1}}{\big(re^{i\omega'}+s\big)^{n+1}}re^{i\omega'}\big(re^{i\omega'}+A\big)^{-1}C\big(A_C^{-\alpha_0}x\big)\,dr$$

može biti napisan kao suma odgovarajućih integrala duž intervala $[d', 2s]$ i $[2s, \infty)$, i za ocenu prvog (drugog) od ovih integrala, može biti korišćena nejednakost $\sup_{s>0, z\in\Gamma_{\omega',d',\pm}}|s/(z+s)| < \infty$ $((r/r-s)^{\alpha_0-1} \leq 2^{\alpha_0-1}$, $r \geq 2s)$. Dakle, pokazali smo (3.61). Argumentujući na sličan način, pokazuje se da za svako $p \in ⊛$ postoje $c''_p > 0$ i $q''_p \in ⊛$ tako da je:

$$p\big(s^{n+1-\alpha_0}\big(s+A\big)^{-(n+1)}Cx\big) \leq c''_p q''_p\big(A_{-\alpha_0}x\big), \quad s > 0,\ x \in D\big(A_{-\alpha_0}\big).$$

Dalje, Lema 3.3.3 implicira da, za svako $p \in \circledast$, postoje $c_p''' > 0$ i $q_p''' \in \circledast$ tako da je:

$$p\big(s^{n-\beta_0}\big(s+A\big)^{-(n+1)}Cx\big) \leq c_p''' s^{-\operatorname{Re}\beta_0-1} q_p'''(x), \quad s > 0,\ x \in E.$$

Neka je $c_p \geq \max(c_p', c_p'', c_p''')$ i neka je $q_p \in \circledast$ takvo da je $q_p \geq \max(q_p', q_p'', q_p''')$. Uzmimo da je $c_{p,\alpha_0,\beta_0} := c_p/(\alpha_0 - \beta_0) + c_p/\beta_0$ i primetimo da jednakost $q_p(A_C^{-\alpha_0}x)q_p(Cx) = 0$ ($q_p(A_{-\alpha_0}x)q_p(x) = 0$) za neko $x \in E$ ($x \in D(A_{-\alpha_0})$) implicira da je $p(C(s+A)^{-(n+1)}Cx) = 0$, $s > 0$ ($p((s+A)^{-(n+1)}Cx) = 0$, $s > 0$), i na osnovu Leme 3.3.5, imamo $p(CA_C^{-\beta_0}x) = 0$ ($p(A_C^{-\beta_0}x) = 0$). Preostali deo dokaza u slučaju kada je $\operatorname{Re}\alpha_0 < n+1$ sledi iz neznatne modifikacije odgovarajućeg dela dokaza [27, Teorema 5.34, str. 141-142]. U slučaju kada je $\operatorname{Re}\alpha_0 = n+1$, tada cela procedura predloženog citiranog dokaza i dalje važi ako zamenimo n sa $n+1$; na primer, u oceni vrednosti $p(A_C^{-\beta_0}x)$, koja se pojavljuje u dokazu citirane teoreme, treba krenuti od formule (3.58) gde je n zamenjeno sa $n+1$. $\square$

Sada smo sve pripremili za dokaz nejednakosti momenta $C-$sektorijalnih operatora.

Teorema 3.3.3 *Neka su $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$, $-\infty < \operatorname{Re}\alpha < \operatorname{Re}\beta < \operatorname{Re}\gamma < +\infty$. Tada, za svako $p \in \circledast$, postoje $c_{p,\alpha,\beta,\gamma} > 0$ i $q_p \in \circledast$ tako da je:*

$$p\big(CA_\beta Cx\big) \leq c_{p,\alpha,\beta,\gamma} q_p\big(A_\alpha Cx\big)^{\frac{\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\beta}{\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}} q_p\big(A_\gamma Cx\big)^{\frac{\operatorname{Re}\beta-\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}}, \quad x \in D(A_\gamma), \tag{3.63}$$

i da je

$$p\big(A_\beta Cx\big) \leq c_{p,\alpha,\beta,\gamma} q_p\big(A_\alpha x\big)^{\frac{\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\beta}{\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}} q_p\big(A_\gamma x\big)^{\frac{\operatorname{Re}\beta-\operatorname{Re}\alpha}{\operatorname{Re}\gamma-\operatorname{Re}\alpha}}, \quad x \in D(A_{\alpha-\gamma}A_\gamma). \tag{3.64}$$

Dokaz. Imajući na umu Lemu 3.3.4 i očiglednu jednakost $A_{\alpha-\gamma}A_\gamma x = A_\alpha x$ ($x \in D(A_{\alpha-\gamma}A_\gamma)$), rezultat odmah sledi kada ubacimo $\alpha_0 = \gamma - \alpha$ i $\beta_0 = \gamma - \beta$ u Lemu 3.3.6. $\square$

Sledeća lema nije korišćena u dokazu nejednakosti momenta, ali je interesantna nezavisno od toga (videti [27, Teorema 5.34, str. 141-142] za slučaj kada je $C = I$).

Lema 3.3.7 *Neka je $b \in (0,1)$. Tada je familija $\{C^{-1}\lambda^b A_C^{-b}A(\lambda+A)^{-1}C : \lambda > 0\}$ uniformno ograničena u $L(E)$.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon \in (0,1)$ proizvoljno izabran. Tada nije teško pokazati, koristeći (3.31), da važi sledeća jednakost:

$$C^{-1}\lambda^b A_C^{-b} A(\lambda+A)^{-1}Cx$$
$$= -\frac{\sin b\pi}{\pi}\int\limits_0^\infty s^{-b}\left[\frac{\lambda\big(\lambda+A\big)^{-1}Cx}{1-s} - \frac{s\lambda\big(s\lambda+A\big)^{-1}Cx}{1-s}\right] ds, \quad x \in E. \tag{3.65}$$

Kako je familija $\{\lambda(\lambda+A)^{-1}C : \lambda > 0\}$ uniformno ograničena u $L(E)$, odmah dobijamo da, za svako $p \in ⊛$, postoje $c_p > 0$ i $q_p \in ⊛$ tako da je, za svako $x \in E$:

$$\left(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^\infty\right) s^{-b}\left[\frac{\lambda\big(\lambda+A\big)^{-1}Cx}{1-s} - \frac{s\lambda\big(s\lambda+A\big)^{-1}Cx}{1-s}\right] ds \le c_p q_p(x). \tag{3.66}$$

Koristeći jednakost

$$\lambda\big(\lambda+A\big)^{-1}Cx - s\lambda\big(s\lambda+A\big)^{-1}Cx = \int\limits_\lambda^{s\lambda}\Big[\big(\xi+A\big)^{-1}Cx - \xi\big(\xi+A\big)^{-2}Cx\Big]\,d\xi, \ x \in E,$$

važi i nejednakost istog tipa za integral koji se pojavljuje u (3.66), uzet duž intervala $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. Ovime se završava dokaz leme. □

Sledeći primer ilustruje jednu primenu nejednakosti momenta.

Primer 3.3.1 *Neka je E neki od prostora $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$, $C_0(\mathbb{R}^n)$, $C_b(\mathbb{R}^n)$, $BUC(\mathbb{R}^n)$ i neka je $0 \le l \le n$. Neka je $\mathbb{N}_0^l := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : \alpha_{l+1} = \cdots = \alpha_n = 0\}$, podsetimo se da je prostor E_l $(0 \le l \le n)$ definisan sa $E_l := \{f \in E : f^{(\alpha)} \in E \text{ for all } \alpha \in \mathbb{N}_0^l\}$. Kalibracija $(q_\alpha(f) := ||f^{(\alpha)}||_E,\ f \in E_l;\ \alpha \in \mathbb{N}_0^l)$ indukuje Fréchet-ovu topologiju na E_l. Neka su $\mathbf{T_l}(\cdot)$ i $\mathbf{C_{r,l}}$ dati na isti način kao u [110], neka je $m \in \mathbb{N}$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $0 \le |\alpha| \le m$, i neka je operator $P(D)f = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha f^{(\alpha)}$ dat na maksimalnom distribucionom domenu. Uzmimo da je $P(x) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha i^{|\alpha|}x^\alpha,\ x \in \mathbb{R}^n$, i pretpostavimo da je $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\operatorname{Re}P(x) < 0$. Neka je $-\infty < \varsigma < \tau < \upsilon < +\infty$. Na osnovu [110, Teorema 2.2], operator $-P(D)$ je $\mathbf{C_{r,l}}-$sektorijalan i, kako važi uslov (H), možemo konstruisati stepene operatora $-P(D)$. Tada nejednakost momenta i argumenti korišćeni u njenom dokazu pokazuju da, za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^l$, postoji konstanta $M_\alpha < \infty$ tako da sledeća diferencijalna nejednakost važi za sve $f \in D((-P(D))_{\varsigma-\upsilon}(-P(D))_\upsilon)$:*

$$q_\alpha\Big(\big(-P(D)\big)_\tau \mathbf{C_{r,l}} f\Big) \le M_\alpha q_\alpha\Big(\big(-P(D)\big)_\varsigma f\Big)^{\frac{\upsilon-\tau}{\upsilon-\varsigma}} q_\alpha\Big(\big(-P(D)\big)_\upsilon f\Big)^{\frac{\tau-\varsigma}{\upsilon-\varsigma}}.$$

Sa (3.34) smo definisali A_b na indirektan način. Sada ćemo dati eksplicitnu formulu za izračunavanje $A_b x$ i time završiti ovu sekciju.

Propozicija 3.3.2 *Neka je $n \in \mathbb{N}$, i neka je $b \in \mathbb{C}$ tako da je $n-1 < \operatorname{Re} b < n$. Tada važi sledeće:*

$$A_b x = (-1)^n \frac{\sin \pi b}{\pi} C^{-1} \int_0^\infty \lambda^{b-n} A^n \big(\lambda + A\big)^{-1} C x \, d\lambda, \quad x \in C\big(D\big(A^n\big)\big). \tag{3.67}$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $0 < \operatorname{Re} b < 1$ i da je $x \in C(D(A))$. Tada odmah dobijamo na osnovu (3.31) i (3.34) da je

$$A_{b-1} x = -\frac{\sin \pi b}{\pi} C^{-1} \int_0^\infty \lambda^{b-1} \big(\lambda + A\big)^{-1} C x \, d\lambda.$$

Dalje, na osnovu jednakosti $A_b x = A_{b-1} A x$ i zatvorenosti opetora A_b imamo da je

$$A_b x = -\frac{\sin \pi b}{\pi} C^{-1} \int_0^\infty \lambda^{b-1} A \big(\lambda + A\big)^{-1} C x \, d\lambda. \tag{3.68}$$

Za opšti slučaj kada je $n-1 < \operatorname{Re} b < n$, primetimo da je $0 < \operatorname{Re} b - n + 1 < 1$ i da iz Teoreme 3.3.1(ii) sledi $A_b x = A_{b-n+1} A_{n-1} x = A_{b-n+1} A^{n-1} x$, $x \in C(D(A^n))$. Na osnovu zatvorenosti operatora A_b, odmah dobijamo (3.67) iz (3.68). $\square$

Kako je $C(D(A^n)) \subseteq R((\lambda - A)^{-n} C)$, $\lambda \in \wedge_{\omega,d}$, sledeća reprezentaciona formula može biti dokazana, za svako $\lambda \in \wedge_{\omega,d}$ i $x \in R((\lambda - A)^{-n} C)$:

$$\begin{aligned} A_b x = (-1)^n \frac{\sin \pi b}{\pi} &\big(\big(\lambda - A\big)^{-n} C\big)^{-1} C^{-1} \\ &\times \int_0^\infty \lambda^{b-n} A^n \big(\lambda + A\big)^{-1} C \big(\lambda - A\big)^{-n} C x \, d\lambda. \end{aligned}$$

3.4 Frakcioni stepeni kao generatori $C-$regularizovanih frakcionih rezolventnih familija

Ovo poglavlje ćemo početi formulacijom sledećeg rezultata koji pokazuje da operatori $-A_b$ generišu uniformno ograničene $C-$regularizovane frakcione rezolventne familije za odgovarajuće indekse b. Da bismo to uradili, pratićemo pristup sličan onom koji je dat u [64, Teorema 3.1(b)/(c)].

Teorema 3.4.1 *(i) Pretpostavimo da su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E, $0<\alpha<2$, $d\in(0,1]$, $\Sigma(\alpha\pi/2,d)\subseteq\rho_C(-A)$, $0<\gamma<2$, $b\in(0,(2-\gamma)/(2-\alpha))$ i $\omega\in(\pi-(\alpha\pi)/2,\min(\pi,(\pi-(\pi\gamma)/2)/b)]$. Neka je $\Gamma_{\omega,d}=\partial(\Sigma_\omega\setminus B_d)$ orijentisana tako da $\operatorname{Im}\lambda$ raste duž $\Gamma_{\omega,d}$ i neka je familija $\{(1+|\lambda|)(\lambda+A)^{-1}C:\lambda\subseteq\Sigma(\alpha'\pi/2,d)\}$ uniformno ograničena za svako $\alpha'\in(0,\alpha)$. Uzmimo da je $S^b_\gamma(0):=C$ i*

$$S^b_\gamma(t)x:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\omega,d}}E_\gamma\big(-\lambda^b t^\gamma\big)\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda,\ t>0,\ x\in E. \quad (3.69)$$

Tada je $-A_b$ gusto definisan generator uniformno ograničene analitičke $(g_\gamma,C)-$regularizovane rezolventne familije $(S^b_\gamma(t))_{t\geq0}$ ugla $\theta:=\min(\pi,(\pi(1-b)/\gamma)+\pi((\alpha b/\gamma)-1)/2)$.

(ii) Pretpostavimo da su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E, $0<\alpha<2$, $0<\gamma<2$, $b\in(0,(2-\gamma)/(2-\alpha))$, $\omega\in(\pi-(\pi\alpha)/2,\min(\pi,(\pi-(\pi\gamma)/2)/b)]$, i $-A$ podgenerator uniformno ograničene $(g_\alpha,C)-$regularizovane rezolventne familije $(S_\alpha(t))_{t\geq0}$. Definišimo

$$f^b_{\gamma,\alpha}(t,s):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\omega}E_\gamma\big(-\lambda^b t^\gamma\big)\big(-\lambda\big)^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-(-\lambda)^{\frac{1}{\alpha}}s}\,d\lambda, \quad (3.70)$$

gde je kontura Γ_ω orijentisana tako da $\operatorname{Im}\lambda$ raste duž Γ_ω. Uzmimo da je

$$S^b_\gamma(t)x:=\int\limits_0^\infty f^b_{\gamma,\alpha}(t,s)S_\alpha(s)x\,ds,\ t>0,\ x\in E\ i\ S^b_\gamma(0):=C. \quad (3.71)$$

Pretpostavimo, dodatno, da postoji $d\in(0,1]$ tako da je $B_d\subseteq\rho_C(-A)$ i da je familija $\{(\lambda+A)^{-1}C:\lambda\in B_d\}$ uniformno ograničena. Tada je $-A_b$ gusto definisan generator uniformno ograničene $(g_\gamma,C)-$regularizovane rezolventne familije $(S^b_\gamma(t))_{t\geq0}$ ugla θ.

Dokaz. (i): Pretpostavimo da je $\omega_1\in(\pi-(\pi\alpha)/2,\min(\pi,(\pi-(\pi\gamma)/2)/b)]$, $\omega_1<\omega$, $d_1\in(0,1]$ i da $\Gamma(\omega,d)$ leži desno od $\Gamma(\omega_1,d_1)$. Koristeći Lemu 3.1.2, [56, Propozicija 2.16(i)] i Cauchy-jevu teoremu (videti takodje [11, (1.28)]), lako se vidi da se integracija duž $\Gamma(\omega,d)$, koja se pojavljuje u (3.69), može zameniti sa $\Gamma(\omega_1,d_1)$. Uniformna ograničenost operatorske familije $(S^b_\gamma(t))_{t\geq0}\subseteq L(E)$ je posledica Leme 3.1.2 i izbora ω, dok se jaka neprekidnost $(S^b_\gamma(t))_{t\geq0}$ u $t=0$ može dokazati na sledeći način. Koristeći Lemu 3.3.3 i uniformnu ograničenost operatorske familije $(S^b_\gamma(t))_{t\geq0}$, dovoljno je pokazati da, za svako

$n \in \mathbb{N}$ i $x \in E$, $\lim_{t\to 0+} S^b_\gamma(t)(-n-A)^{-1}Cx = (-n-A)^{-1}C^2x$. Da bismo to izveli do kraja, primetimo da teorema o rezidijumu i teorema o dominantnoj konvergenciji, zajedno sa Lemom 3.1.2, impliciraju da je:

$$S^b_\gamma(t)\big(-n-A\big)^{-1}Cx - \big(-n-A\big)^{-1}C^2x =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\omega,d)} E_\gamma\big(-\lambda^b t^\gamma\big)\big(\lambda-A\big)^{-1}C\big(-n-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda - \big(-n-A\big)^{-1}C^2x$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\omega,d)} E_\gamma\big(-\lambda^b t^\gamma\big)\frac{\big(-n-A\big)^{-1}C^2x - \big(\lambda-A\big)^{-1}C^2x}{\lambda+n}\,d\lambda$$
$$- \big(-n-A\big)^{-1}C^2x$$
$$= \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\omega,d)} E_\gamma\big(-\lambda^b t^\gamma\big)\frac{\big(\lambda-A\big)^{-1}C^2x}{\lambda+n}\,d\lambda - \big(-n-A\big)^{-1}C^2x$$
$$\to \frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma(\omega,d)} \frac{\big(\lambda-A\big)^{-1}C^2x}{\lambda+n}\,d\lambda - \big(-n-A\big)^{-1}C^2x = 0,\ t\to 0+\,.$$

Sada ćemo pokazati da je:

$$\mathcal{L}(\lambda,x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}S^b_\gamma(t)x\,dt = \lambda^{\gamma-1}\big(\lambda^\gamma + A_b\big)^{-1}Cx, \quad \lambda>0,\ x\in E. \tag{3.72}$$

Gornja jednakost sledi primenom Laplace-ove transformacije i Fubini-jeve teoreme. Zaista, primetimo da je:

$$\begin{aligned} A_C^{-b} =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d}} z^{-b}\big(z-A\big)^{-1}C\,dz \\ =& \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d}} \frac{\lambda^\gamma z^{-b}+1}{\lambda^\gamma + z^b}\big(z-A\big)^{-1}C\,dz \\ =& \lambda^\gamma\left(\frac{z^{-b}}{\lambda^\gamma+z^b}\right)_C(A) + \left(\frac{1}{\lambda^\gamma+z^b}\right)_C(A),\ \lambda>0, \end{aligned}$$

i da (videti [11, (1.26), (1.28)] i (3.9)), za svako $z\in\Gamma(\omega',d)$, važi:

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}E_\gamma\big(-z^b t^\gamma\big)\,dt = \frac{\lambda^{\gamma-1}}{\lambda^\gamma+z^b},\ \lambda>0.$$

Na osnovu ove jednakosti i (3.29), dobijamo dalje da je:

$$\begin{aligned} C\mathcal{L}(\lambda,x) =& \frac{C}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',d}} \frac{\lambda^{\gamma-1}}{\lambda^\gamma+z^b}\big(z-A\big)^{-1}C\,dz = C\bigg(\frac{\lambda^{\gamma-1}}{\lambda^\gamma+z^b}\bigg)_C(A) \\ =& \lambda^{\gamma-1}CA_C^{-b} - \lambda^\gamma\bigg(\frac{\lambda^{\gamma-1}}{\lambda^\gamma+z^b}z^{-b}\bigg)_C(A)C \\ =& \lambda^{\gamma-1}CA_C^{-b} - \lambda^\gamma\bigg(\frac{\lambda^{\gamma-1}}{\lambda^\gamma+z^b}\bigg)_C(A)\big(z^{-b}\big)_C(A) \\ =& \lambda^{\gamma-1}CA_C^{-b} - \lambda^\gamma\mathcal{L}(\lambda)A_C^{-b}. \end{aligned}$$

Sada direktno dobijamo da je $(0,\infty)\subseteq\rho_C(-A_b)$ i da važi (3.72), što dalje, zajedno sa jednakošću $C^{-1}A_bC=A_b$, implicira da je $-A_b$ integralni generator uniformno ograničene $(g_\gamma,C)-$regularizovane rezolventne familije $(S_\gamma^b(t))_{t\geq0}$ (videti takodje [56, Teorema 2.7]). Jasno, Teorema 3.3.1(ii) implicira da je A_b gusto definisan u E. Koristeći nejednakost $b<(2-\gamma)/(2-\alpha)$, Teoremu 3.3.1(iv) i njen dokaz, dobijamo da je A_b $C-$sektorijalan ugla $b\pi(1-(\alpha/2))$ i da je preslikavanje $\lambda\mapsto(\lambda+A_b)^{-1}Cx$, $\lambda\in\Sigma_{\pi-b\pi(1-(\alpha/2))}$ analitičko za sve $x\in E$. Na osnovu [56, Teorema 3.7], dobijamo da je, za sve $b'\in(0,b)$, operator $-A_{b'}$ integralni generator uniformno ograničene analitičke $(g_{2(1-b'(1-(\alpha/2)))},C)-$regularizovane rezolventne familije ugla $\frac{\pi-b'(\pi-\frac{\alpha\pi}{2})}{2(1-b'(1-(\alpha/2)))}-\frac{\pi}{2}$. Uzmimo sada da je $b'\in(0,b)$ tako da je $2(1-b'(1-(\alpha/2)))>\gamma$. Tada se primenom [56, Teorema 3.9(ii)] pokazuje da je operator $-A_{b'}$ integralni generator uniformno ograničene analitičke $(g_\gamma,C)-$regularizovane rezolventne familije $(S_\gamma^{b'}(t))_{t\geq0}$ ugla $\min(\pi,(\pi(1-b')/\gamma)+\pi((\alpha b'/\gamma)-1)/2)$. Dokaz se kompletira puštanjem da $b'\to b-$. Dokaz dela teoreme pod (ii) sledi direktno iz dokaza [64, Teorema 3.1(c)] i prvog dela teoreme. $\square$

Napomena 3.4.1 *(i) U slučaju kada postoji $d\in(0,1]$ tako da je familija $\{(\lambda-A)^{-1}C:\lambda\in B_d\}$ uniformno ograničena, Teorema 3.4.1 proširuje tvrdjenje [64, Teorema 3.1]. Pretpostavimo sada da $D(A)$ i $R(C)$ nisu gusto definisani u E kao i da sve ostale pretpostavke date u formulaciji Teoreme 3.4.1 važe. Tada se može pokazati da je, za svako $\sigma>0$, operator $-A_b$ integralni generator analitičke $(g_\gamma,g_{\sigma+1})-$regularizovane $C-$rezolventne familije ugla θ i to podeksponencijalnog rasta (videti [56] za notaciju).*

(ii) Ako su $D(A)$ i $R(C)$ gusti u E, $0<b\leq2/(\alpha+2)$ i $\gamma=\alpha b$, tada tvrdjenje Teoreme 3.4.1 može biti dokazano bez upotrebe teoreme o preslikavanju spektra (u ovom slučaju, integralni generator je, definisan na uobičajeni način, $C^{-1}\overline{s-\lim_{\varepsilon\to0+}-(A+\varepsilon)_b}C$). Metod korišćen u

dokazu se zasniva na skorašnjim rezultatima o uopštenim subordiniranim kernelima ([19]), čija vrednost u postojećoj teoriji nije dovoljno analizirana do sad, i elementarnim argumentima realne analize.

Sledeći primer ilustruje primenu Teoreme 3.4.1.

Primer 3.4.1 *Pretpostavimo da je $(M_p)_{p\in\mathbb{N}_0}$ niz pozitivnih brojeva koji zadovoljavaju $M_0 = 1$, (M.1), (M.2) i (M.3') (videti [54, Poglavlja 1.3 i 3.5-3.6] i uvod za definicije i dodatne informacije). Uzmimo da je*

$$E := \Big\{ f \in C^{\infty}[0,1] \ ; \ \|f\| := \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{M_p} < \infty \Big\},$$

$A := -d/ds$, $D(A) =: \{f \in E : f' \in E,\ f(0) = 0\}$ i $E^{(M_p)}(A) := \{f \in D_\infty(A) : \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \frac{h^p\|f^{(p)}\|_\infty}{M_p} < \infty$ za sve $h > 0\}$. Tada A generiše ne-gustu ultradistribucionu polugrupu $(M_p)-$klase (videti [54, Definicija 3.5.2]), $\rho(A) = \mathbb{C}$ i postoji injektivni operator $C \in L(E)$ tako da je $E^{(M_p)}(A) \subseteq C(D_\infty(A))$,

$$C\big(g_\beta * f\big) = g_\beta * Cf, \quad \beta > 0,\ f \in E, \tag{3.73}$$

i tako da A generiše ograničenu $C-$regularizovanu polugrupu $(S(t))_{t\geq 0}$ na E (videti [54, Primer 3.5.15, (316), Teorema 3.6.4, Lema 3.6.5]). Dakle, u mogućnosti smo da definišemo frakcione stepene operatora $-A$. Koristeći (3.31), (3.37) i (3.73), direktno sledi da je, za $b > 0$, $(f, g) \in (-A)_b$ akko $C^2 f(t) = \int_0^t g_b(t-s)C^2 g(s)\,ds$, $t \in [0,1]$ (videti [16, Primer 5.6]). Pretpostavimo sada da je $1 < \gamma < 2$, $1 < b < 2 - \gamma$ i $f_0,\ f_1 \in E^{(M_p)}(A)$. Na osnovu Napomene 3.4.1(i), dobijamo da je za svako $\sigma > 0$ operator $-(-A)_b$ integralni generator analitičke $(g_\gamma, g_{\sigma+1})-$regularizovane $C-$rezolventne familije $(S^b_{\gamma,\sigma}(t))_{t\geq 0}$ ugla θ, gde je θ definisano u formulaciji Teoreme 3.4.1 za $\alpha = 1$. Dalje, $S^b_{\gamma,\sigma}(t)f = \int_0^t g_\sigma(t-s)S^b_\gamma(s)f\,ds$, $t \geq 0$, $f \in E$ i preslikavanje $t \mapsto S^b_\gamma(t)f$, $t \geq 0$ je neprekidno za svako $f \in \overline{D(A)}$ (videti (3.69)). Sada nije teško dokazati da postoji jedinstvena funkcija $u \in C([0,\infty) : [D((-A)_b)]) \cap C^1([0,\infty) : E)$ koja rešava problem:

$$\begin{gathered} u(t,x) + \int_0^x g_b(x-s)\mathbf{D}_t^\gamma u(t,s)\,ds = 0, \\ u(0,x) = f_0(x) \ i \ \frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = f_1(x), \quad t \geq 0,\ x \in [0,1]. \end{gathered} \tag{3.74}$$

Dalje, rešenje $u(t)$ je dato sa

$$u(t,\cdot) = S^b_\gamma(t)C^{-1}f_0 + \int_0^t S^b_\gamma(s)C^{-1}f_1\,ds, \quad t \geq 0,$$

i može biti analitički produženo na sektor Σ_θ (videti takodje [55, Propozicija 3.4] za nehomogene frakcione jednačine). Vredno je pomenuti da je problem (3.74) vrsta obratne difuzne jednačine sa prostorno-vremenskim frakcionim izvodima (videti [6] i [41] za neke primene u opisivanju mehanizama anomalnih difuzija u transportnim procesima).

Na osnovu prethodne analize, jasno je da rezultati dobijeni u ovom radu mogu biti primenjeni na klasu apstraktnih diferencijalnih jednačina posmatranih u prostorima ultradistribucija. Na primer, nije teško pokazati, uz pomoć Teoreme 3.3.1(iv) i [56, Teorema 3.15], da postoji injektivan operator $C_1 \in L(E)$ tako da operator $(-A)^{1/2}$, odnosno $-A$, generiše globalnu C_1-regularizivanu grupu, odnosno globalnu C_1-regularizovanu kosinusnu funkciju.

U preostalom delu rada, posmatraćemo konstruisane frakcione stepene kao integralne generatore $C-$regularizovanih polugrupa sa stepenom rasta $r > 0$ (videti [20], [88], [101] i [54]-[53]).

Definicija 3.4.1 *(i) Operatorska familija $(T(t))_{t>0} \subseteq L(E)$ je $C-$regularizovana polugrupa stepena rasta $r > 0$ akko važi sledeće:*

(a) $T(t+s)C = T(t)T(s), \quad t,\ s > 0,$

(b) za svako $x \in E$, preslikavanje $t \mapsto T(t)x$, $t > 0$ je neprekidno,

(c) familija $\{t^r T(t) : t \in (0,1]\}$ je uniformno ograničena, i

(d) $T(t)x = 0$ za sve $t > 0$ implicira $x = 0$.

(ii) Pretpostavimo da je $\gamma \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $(T(t))_{t>0}$ $C-$regularizovana polugrupa stepena rasta $r > 0$, i da preslikavanje $t \mapsto T(t)x$, $t > 0$ ima analitičko produženje na sektor Σ_γ, označno istim simbolom. Ako postoji $\omega \in \mathbb{R}$ tako da je, za svako $\delta \in (0,\gamma)$, familija $\{z^r e^{-\omega \operatorname{Re} z} T(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ uniformno ograničena, tada je $(T(t))_{t\in\Sigma_\gamma}$ analitička $C-$regularizovana polugurupa stepena rasta r.

Integralni generator $\hat{G}$, odnosno infinitezimalni generator G, od $(T(t))_{t>0}$ (videti [53] i [60]), je definisan sa

$$\hat{G} := \Big\{(x,y) \in E \times E : T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(r)y\,dr \text{ za sve } t \geq s > 0\Big\},$$

odnosno,

$$G := \Big\{(x,y) \in E \times E : \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - Cx}{t} = Cy\Big\}.$$

Integralni generator $\hat{G}$ je zatvoren linearan operator koji zadovoljava $C^{-1}\hat{G}C = \hat{G}$. Dalje, $G \subseteq \hat{G}$ i G je zatvoriv linearan operator. Zatvaranje operatora G, označeno sa $\overline{G}$, se naziva kompletan infinitezimalni generator, skraćeno, k.i.g. od $(T(t))_{t>0}$. Integralni generator $\hat{G}$ sadrži k.i.g. $\overline{G}$ i zadovoljava $\hat{G} = \{(x, y) \in E \times E : (T(s)x, T(s)y) \in G$ za sve $s > 0\}$. Skup $\{x \in E : \lim_{t \to 0+} T(t)x = Cx\}$, odnosno $\{x \in E : \lim_{z \to 0, z \in \Sigma_{\gamma'}} T_b(z)x = Cx$ za sve $\gamma' \in (0, \gamma)\}$ se naziva skup neprekidnosti operatorske familije $(T(t))_{t>0}$, odnosno $(T(z))_{z \in \Sigma_\gamma}$.

Sledeće tvrdjenje uopštava [53, Teorema 3.1/3.2]. Liouville-ov desni frakcioni izvod reda β (videti [45, (2.3.4)]) je definisan za one neprekidne funkcije $u : (0, \infty) \to E$ za koje postoji $\lim_{T \to \infty} \int_t^T g_{\lceil\beta\rceil-\beta}(s-t)u(s)\, ds = \int_t^\infty g_{\lceil\beta\rceil-\beta}(s-t)u(s)\, ds$ i definiše se kao $m-$puta neprekidno diferencijabilna funkcija na $(0, \infty)$, data sa

$$D_-^\beta u(t) := (-1)^{\lceil\beta\rceil} \frac{d^{\lceil\beta\rceil}}{dt^{\lceil\beta\rceil}} \int_t^\infty g_{\lceil\beta\rceil-\beta}(s-t)u(s)\, ds, \quad t > 0.$$

Napomenimo da je $D_-^n = (-1)^n D^n$ za $n \in \mathbb{N}$, gde je D^n uobičajeni operator diferenciranja reda n ([45, (2.3.5)]).

Teorema 3.4.2 *Pretpostavimo da je $b \in (0, 1/2)$ i da zatvoren linearan operator A zadovoljava* (H1) *gde je $\alpha > -1$. Označimo sa Γ granicu oblasti $-(P_{\alpha,\varepsilon,d} \cup B_d)$, orijentisanu tako da $\operatorname{Im}\lambda$ raste duž krive $\{z \in \mathbb{C} : |z| = d,\ z \in \partial(-(P_{\alpha,\varepsilon,d} \cup B_d))\}$. Definišimo $\gamma := \arctan(\cos(\pi b))$ i*

$$T_b(z)x := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-z\lambda^b} \bigl(\lambda - A\bigr)^{-1} Cx\, d\lambda, \quad x \in E,\ z \in \Sigma_\gamma. \tag{3.75}$$

(i) Tada je $(T_b(z))_{z \in \Sigma_\gamma}$ analitička $C-$regularizovana polugrupa stepena rasta $(\alpha+1)/b$, i integralni generator od $(T_b(z))_{z \in \Sigma_\gamma}$ je operator $\hat{G} = -A_b$. Označimo sa $\Omega_b(A)$, odnosno $\Omega_{b,\theta}(A)$, skup neprekidnosti od $(T_b(z))_{z \in \Sigma_\gamma}$, odnosno $(T_b(te^{i\theta}))_{t>0}$. Tada važi sledeće:

(a) Za svako $\delta \in (0, \gamma)$, familija $\{z^{(\alpha+1)/b} T_b(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ je uniformno ograničena.

(b) Preslikavanje $z \mapsto T_b(z)x,\ z \in \Sigma_\gamma$ je analitičko za svako $x \in E$, $\bigcup_{z \in \Sigma_\gamma} R(T_b(z)) \subseteq D_\infty(A)$, i za svako $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$ i $z \in \Sigma_\gamma$, važi sledeće:

$$\frac{d^n}{dz^n} T_b(z)x = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{nb} e^{-z\lambda^b} \bigl(\lambda - A\bigr)^{-1} Cx\, d\lambda \tag{3.76}$$

i

$$A^nT_b(z)x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{-z\lambda^b}\lambda^n\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda. \qquad (3.77)$$

(b') Neka je $\beta>0$, i neka je $|\theta|<\gamma$. Tada jednakost

$$D_-^{\beta}T_b\big(te^{i\theta}\big)x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\big(e^{i\theta}\lambda^b\big)^{\beta}e^{-te^{i\theta}\lambda^b}\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda \qquad (3.78)$$

važi za sve $t>0$ i $x\in E$, gde D_-^{β} označava Liouville-ov desni frakcioni izvod reda β; i

$$A_{b\beta}T_b\big(te^{i\theta}\big)x=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^{b\beta}e^{-te^{i\theta}\lambda^b}\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda \qquad (3.79)$$

za sve $t>0$ i $x\in R(C)$.

(c) Imamo da je $D(A^{\lfloor b+\alpha\rfloor+1})\subseteq\Omega_b(A)$, pod uslovom da je $\lfloor b+\alpha\rfloor\geq 0$.

(d) Ako je $\lfloor b+\alpha\rfloor\geq 0$, $x\in D(A^{\lfloor b+\alpha\rfloor+2})$ i $\gamma'\in(0,\gamma)$, tada je

$$\lim_{z\to 0,z\in\Sigma_{\gamma'}}\frac{T_b(z)x-Cx}{z}=\frac{(-1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(-\lambda)^{b-1}\big(\lambda-A\big)^{-1}CAx\,d\lambda. \qquad (3.80)$$

(e) Za svako $z\in\Sigma_\gamma$, $T_b(z)$ je injektivan operator.

(ii) Pretpostavimo da $n\in\mathbb{N}\backslash\{1,2\}$, $|\theta|<\arctan(\cos(\pi/n))$ i $x\in\Omega_{1/n,\theta}(A)$. Tada je funkcija $u:(0,\infty)\to E$, definisana sa $u(t):=T_{1/n}(te^{i\theta})x,\ t>0$, rešenje apstraktnog Cauchy-jevog problema

$$(P_n):\begin{cases} u\in C((0,\infty):D_\infty(A))\cap C^\infty((0,\infty):E),\\ \frac{d^n}{dt^n}u(t)=(-1)^ne^{in\theta}Au(t),\ t>0,\\ \lim_{t\to 0+}u(t)=Cx,\ \text{i skup } \{u(t):t>0\} \text{ je ograničen.}\end{cases}$$

Dalje, $u(\cdot)$ može biti analitički produžena na sektor $\Sigma_{\arctan(\cos(\pi/n))-|\theta|}$ i, za svako $\delta\in(0,\arctan(\cos(\pi/n))-|\theta|)$ i $j\in\mathbb{N}_0$, imamo da je skup $\{z^{j+n\alpha+n}u^{(j)}(z):z\in\Sigma_\delta\}$ ograničen. Prethodna tvrdjenja važe kada je $(1/n)+\alpha\geq 0$ i $x\in D(A^{\lfloor(1/n)+\alpha\rfloor+1})$.

(ii') Pretpostavimo da $\beta>0$, $|\theta|<\gamma$ i $x\in\Omega_{b,\theta}(A)\cap R(C)$. Tada je funkcija $u:(0,\infty)\to E$, definisana sa $u(t):=T_b(te^{i\theta})x,\ t>0$, rešenje frakcionog apstraktnog Cauchy-jevog problema

$$(P_\beta):\begin{cases} u\in C((0,\infty):D_\infty(A))\cap C^\infty((0,\infty):E),\\ D_-^{\beta}u(t)=e^{i\theta\beta}A_{b\beta}u(t),\ t>0,\\ \lim_{t\to 0+}u(t)=Cx,\ \text{i skup } \{u(t):t>0\} \text{ je ograničen.}\end{cases}$$

Dalje, $u(\cdot)$ može biti analitički produžena na sektor $\Sigma_{\arctan(\cos(b\pi))-|\theta|}$ i, za svako $\delta \in (0, \arctan(\cos(b\pi)) - |\theta|)$ i $j \in \mathbb{N}_0$, imamo da je skup $\{z^{j+(1+\alpha)/b}u^{(j)}(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ ograničen. Prethodna tvrdjenja važe kada je $b+\alpha \geq 0$ i $x \in D(A^{\lfloor b+\alpha\rfloor+1}) \cap R(C)$.

Dokaz. Dokazaćemo samo prvi deo teoreme. Na skoro isti način kao i u dokazu [53, Teorema 3.2] (videti takodje [56, Teoreme 3.15/3.16], [54, Teorema 1.4.15] i [100, Poglavlje 2]), može se pokazati da je $(T_b(z))_{z\in\Sigma_\gamma}$ analitička $C-$regularizovana polugrupa stepena rasta $(\alpha+1)/b$ kao i da važe (c), (e) i (3.76)-(3.80). Sada ćemo pokazati da je operator $-A_b$ (videti Napomenu 3.3.3(ii) za definiciju i notaciju korišćenu u nastavku) integralni generator $(T_b(z))_{z\in\Sigma_\gamma}$. Definišimo $S_b(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-z\lambda^b}(\lambda-A)^{-1}\mathcal{C}x\,d\lambda$, $x \in E$, $z \in \Sigma_\gamma$ i $S_{b,1}(z) := \int_0^z S_b(\sigma)x\,d\sigma$, $x \in E$, $z \in \Sigma_\gamma$. Na osnovu dokaza Teoreme 3.4.1, lako zaključujemo da je $(S_{b,1}(t))_{t\geq 0}$ jednom integrisana $C-$polugrupa kojoj je operator $-A_b$ integralni generator. Kako je $T_b(z)(d+\kappa-A)^{-n_\alpha}C = S_b(z)C$, $z \in \Sigma_\gamma$, odmah dobijamo da je $(x,y) \in \hat{G}$ akko

$$S_b(t)x - S_b(s)x = \int_s^t S_b(r)y\,dr \text{ za svako } t > s > 0 \text{ gde je } t \geq s. \qquad (3.81)$$

Koristeći činjenicu da je $\lim_{s\to 0+} S_b(s)(-n-A)^{-1}\mathcal{C}x = \mathcal{C}(-n-A)^{-1}\mathcal{C}x$, $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, i elementarnu argumentaciju, dobija se da je (3.81) ekvivalentno sa

$$\int_0^t S_b(\sigma)x\,d\sigma - t\mathcal{C}x = \int_0^t \Big(\int_0^r S_b(\sigma)y\,d\sigma\Big)\,dr, \quad t \geq 0,$$

što važi jer je integralni generator od $(S_{b,1}(t))_{t\geq 0}$ baš $-A_b$. Sada ćemo pokazati tvrdjenje (b') u netrivijalnom slučaju kada je $\beta \in (0,\infty)\setminus\mathbb{N}$. Kako je $0 < x + \arctan(\cos x) < \pi/2$, pod uslovom da je $0 < x < \pi/2$, imamo da je $|b\arg\lambda + \theta| < b\pi + \arctan(\cos(b\pi)) < \pi/2$, $\lambda \in \Gamma$, što implicira da je $\mathrm{Re}(e^{i\theta}\lambda^b) = |\lambda|^b\cos(b\arg\lambda+\theta) > 0$, $\lambda \in \Gamma$ i

$$\begin{aligned}\int_t^\infty g_{\beta-\lceil\beta\rceil}(s-t)e^{-se^{i\theta}\lambda^b}\,ds &= \Big(\int_0^\infty g_{\beta-\lceil\beta\rceil}(v)e^{-ve^{i\theta}\lambda^b}\,dv\Big)e^{-te^{i\theta}\lambda^b}\\ &= \big(e^{i\theta}\lambda^b\big)^{\beta-\lceil\beta\rceil}e^{-te^{i\theta}\lambda^b},\end{aligned}$$

za svako $\lambda \in \Gamma$. Na osnovu definicije D_-^β i $T_b(\cdot)$, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&D_-^\beta T_b\big(te^{i\theta}\big)x\\
=&\Big(-\frac{d}{dt}\Big)^{\lceil\beta\rceil}\int_t^\infty g_{\lceil\beta\rceil-\beta}(s-t)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-se^{i\theta}\lambda^b}\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda\Big)\,ds\\
=&\Big(-\frac{d}{dt}\Big)^{\lceil\beta\rceil}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\Big(\int_t^\infty g_{\lceil\beta\rceil-\beta}(s-t)e^{-se^{i\theta}\lambda^b}\,ds\Big)\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda\\
=&\Big(-\frac{d}{dt}\Big)^{\lceil\beta\rceil}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\big(e^{i\theta}\lambda^b\big)^{\beta-\lceil\beta\rceil}e^{-te^{i\theta}\lambda^b}\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda\\
=&(-1)^{\lceil\beta\rceil}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\big(e^{i\theta}\lambda^b\big)^{\beta-\lceil\beta\rceil}(-1)^{\lceil\beta\rceil}\big(e^{i\theta}\lambda^b\big)^{\lceil\beta\rceil}e^{-te^{i\theta}\lambda^b}\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\big(e^{i\theta}\lambda^b\big)^{\beta}e^{-te^{i\theta}\lambda^b}\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda,\quad t>0,\ x\in E.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je $b\beta \notin \mathbb{N}$. Imajući u vidu da je $\bigcup_{z\in\Sigma_\gamma} R(T_b(z)) \subseteq D_\infty(A)$, lako se pokazuje da je, za odgovarajući izbor konture Γ',

$$\begin{aligned}
&A_{b\beta}T_b\big(te^{i\theta}\big)x = A_{b\beta-\lceil b\beta\rceil}A^{\lceil b\beta\rceil}T_b\big(te^{i\theta}\big)x\\
=&A_{b\beta-\lceil b\beta\rceil}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-te^{i\theta}\lambda^b}\lambda^{\lceil b\beta\rceil}\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda\\
=&C^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\mu^{b\beta-\lceil b\beta\rceil}\big(\mu-A\big)^{-1}C\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-te^{i\theta}\lambda^b}\lambda^{\lceil b\beta\rceil}\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda\Big)\,d\mu\\
=&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-te^{i\theta}\lambda^b}\lambda^{b\beta}\big(\lambda-A\big)^{-1}Cx\,d\lambda,\quad x\in R(C).
\end{aligned}$$

Ovo dokazuje (3.78)-(3.79). $\square$

Teorema 3.4.3 *Pretpostavimo da je $d \in (0,1]$, $\gamma \in (0,\pi/2)$, $\alpha > -1$ i $b \in (0,\pi/(2(\pi-\gamma)))$. Uzmimo da je $\varphi := \arctan(\cos(b(\pi-\gamma)))$ i pretpostavimo da je $\Sigma(\gamma,d) \subseteq \rho_C(-A)$ i da je familija $\{(1+|\lambda|)^{-\alpha}(\lambda+A)^{-1}C : \lambda \in \Sigma(\gamma,d)\}$ uniformno ograničena.*

(i) Označimo sa Γ granicu oblasti $-\Sigma(\gamma,d)$, orijentisanu obratno od kazaljke na satu. Tada je $(T_b(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$ (videti (3.75)) analitička $C-$regularizovana polugrupa stepena rasta $(\alpha+1)/b$, i integralni generator od $(T_b(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$ je operator $\hat{G} = -A_b$. Označimo sa $\Omega_b(A)$, odnosno $\Omega_{b,\theta}(A)$, skup neprekidnosti od $(T_b(z))_{z\in\Sigma_\varphi}$, odnosno $(T_b(te^{i\theta}))_{t>0}$. Tada važi sledeće:

(a) *Za svako* $\delta \in (0, \varphi)$, *familija* $\{z^{(\alpha+1)/b} T_b(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ *je uniformno ograničena.*

(b) *Preslikavanje* $z \mapsto T_b(z)x$, $z \in \Sigma_\varphi$ *je analitičko za svako* $x \in E$, $\bigcup_{z \in \Sigma_\varphi} R(T_b(z)) \subseteq D_\infty(A)$, *i* (3.76)-(3.79) *važe ako se* γ *zameni sa* φ.

(c) *Imamo da je* $D(A^{\lfloor b+\alpha \rfloor+1}) \subseteq \Omega_b(A)$, *za* $\lfloor b+\alpha \rfloor \geq 0$.

(d) *Ako je* $\lfloor b+\alpha \rfloor \geq 0$, $x \in D(A^{\lfloor b+\alpha \rfloor+2})$ *i* $\varphi' \in (0, \varphi)$, *tada važi* (3.80).

(ii) *Pretpostavimo da je* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $|\theta| < \arctan(\cos((\pi - \gamma)/n))$ *i* $x \in \Omega_{1/n,\theta}(A)$. *Tada je funkcija* $u : (0, \infty) \to E$, *definisana sa* $u(t) := T_{1/n}(te^{i\theta})x$, $t > 0$, *rešenje apstraktnog Cauchy-jevog problema* (P_n). *Uzmimo da je* $a_{n,\theta} := \arctan(\cos((\pi - \gamma)/n)) - |\theta|$. *Tada se rešenje* $u(\cdot)$ *može analitički produžiti na sektor* $\Sigma_{a_{n,\theta}}$ *i, za svako* $\delta \in (0, a_{n,\theta})$ *i* $i \in \mathbb{N}_0$, *imamo da je skup* $\{z^{i+n\alpha+n} u^{(i)}(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ *ograničen. Prethodna tvrdjenja važe kada je* $(1/n) + \alpha \geq 0$ *i* $x \in D(A^{\lfloor (1/n)+\alpha \rfloor+1})$.

(ii') *Pretpostavimo da je* $\beta > 0$, $|\theta| < \varphi$ *i* $x \in \Omega_{b,\theta}(A) \cap R(C)$. *Tada je funkcija* $u : (0, \infty) \to E$, *definisana sa* $u(t) := T_b(te^{i\theta})x$, $t > 0$, *rešenje apstraktnog Cauchy-jevog problema* (P_β). *Uzmimo da je* $a_{b,\theta} := \arctan(\cos((\pi - \gamma)b)) - |\theta|$. *Tada se rešenje* $u(\cdot)$ *može analitički produžiti na sektor* $\Sigma_{a_{b,\theta}}$ *i, za svako* $\delta \in (0, a_{b,\theta})$ *i* $i \in \mathbb{N}_0$, *imamo da je skup* $\{z^{i+(\alpha+1)/b} u^{(i)}(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ *ograničen. Prethodna tvrdjenja važe kada je* $b + \alpha \geq 0$ *i* $x \in D(A^{\lfloor b+\alpha \rfloor+1}) \cap R(C)$.

Tvrdjenja Teoreme 3.4.2 i Teoreme 3.4.3 mogu biti preformulisana, sa nekim očiglednim modifikacijama, i u slučaju kada je $\alpha = -1$. Takodje bismo želeli da napomenemo da jedinstvenost rešenja problema (P_β) može biti dokazana kada je $\beta = 2$, $n(A) \leq 1$, $C = I$ i kada je E Banach-ov prostor ([53]). Podsetimo se da se za zatvoren linearan operator A sa nepraznim rezolventnim skupom kaže da je stacionalarno gust ([59]) ako i samo ako je $n(A) = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : D(A^k) \subseteq \overline{D(A^{k+1})}\} < \infty$. Ostavljamo zainteresovanom čitaocu probleme:

(i) nalaženja opštih uslova pod kojim problem (P_β) ima jedinstveno rešenje (u ovom kontekstu, upućujemo čitaoca na [88, Propozicija 2, Teorema 3] za slučaj kada je $\beta = 2$),

(ii) opisivanja k.i.g. polugrupe $(T_b(t))_{t>0}$ koji se pojavljuje u Teoremi 3.4.2 i Teoremi 3.4.3.

3.5 Skoro $C-$sektorijalni i $CG-$sektorijalni operatori

U radu [16] (videti [17] i monografiju [58]) uvedena je sledeća definicija za skoro $C-$sektorijalne operatore.

Definicija 3.5.1 *Neka je $0 \leq \omega < \pi$. Zatvoren linearan operator A na E se naziva skoro $C-$sektorijalan ugla ω, ako $\mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\omega} \subseteq \rho_C(A)$ i postoji $m \in \mathbb{R}$ tako da je familija*

$$\Big\{ \big(|\lambda|^{-1} + |\lambda|^m\big)^{-1} \big(\lambda - A\big)^{-1} C : \lambda \notin \Sigma_{\omega'} \Big\} \tag{3.82}$$

uniformno ograničena za svako $\omega < \omega' < \pi$.

Uvedimo i sledeći uslov

(H)': Operator A je skoro $C-$sektorijalan ugla $\omega \in [0, \pi)$, preslikavanje $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} C x$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\omega}$ je neprekidno za svako fiksirano $x \in E$.

Jasno je da je klasa skoro $C-$sektorijalnih operatora šira od klase $C-$sektorijalnih operatora, ali uža od klase skoro $C-$nenegativnih operatora (videti Napomenu 3.3.4(i)).

U nastavku ćemo izložiti [16, Teorema 5.1] koja uopštava neka od tvrdjenja Teoreme 3.4.2 (pa i Teoreme 3.4.3) (videti [16, Napomena 5.2] i Napomenu 3.5.1) na skoro $C-$sektorijalne operatore koji zadovoljavaju uslov (H)'. Napominjemo da su ovde frakcioni stepeni operatora definisani na drugačiji način (videti Napomenu 3.3.4(i)) a da oznaka ${}_\gamma A$ odgovara našoj definiciji stepena.

Teorema 3.5.1 *Neka je $0 < \gamma < 1/2$, i neka je $A \in \mathcal{M}_{C,m}$ gde je $m+\gamma > -1$. Definišimo $S_\gamma(0) := C$, $S_{\gamma,\zeta}(t)x := \int_0^t g_\zeta(t-s) S_\gamma(s) x \, ds$, $x \in E$, $t \geq 0$, $\zeta > 0$, i $S_{\gamma,0}(t) := S_\gamma(t)$, $t \geq 0$. Tada je familija $\{(1 + t^{-(m+1)/\gamma})^{-1} S_\gamma(t) : t > 0\}$ uniformno ograničena, i postoji operatorska familija $(\mathbf{S}_\gamma(z))_{z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}}$ i $(\mathbf{S}_{\gamma,\zeta}(z))_{z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}}$ tako da je, za svako $x \in E$ i $\zeta > 0$, preslikavanje $z \mapsto \mathbf{S}_\gamma(z)x$, $z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}$ i $z \mapsto \mathbf{S}_{\gamma,\zeta}(z)x$, $z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}$ analitičko, kao i da je $\mathbf{S}_\gamma(t) = S_\gamma(t)$, $t > 0$ i $\mathbf{S}_{\gamma,\zeta}(t) = S_{\gamma,\zeta}(t)$, $t > 0$. Dodatno, važi sledeće:*

(i) *$S_\gamma(z_1) S_\gamma(z_2) = S_\gamma(z_1 + z_2) C$ za sve $z_1, \; z_2 \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}$.*

(ii) *Ako je $-1 - \gamma < m < -1$, onda je $\lim_{z \to 0, z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi-\varepsilon}} S_\gamma(z)x = Cx$, $x \in \overline{D(A)}$, $\varepsilon \in (0, (\pi/2) - \gamma\pi)$; ako je zadovoljen uslov (H)', onda gornja jednakost važi kada se broj $(\pi/2) - \gamma\pi$ zameni sa $(\pi/2) - \omega\gamma$.*

(iii) $S_\gamma(z)A_\alpha \subseteq A_\alpha S_\gamma(z)$, $z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}$, $\alpha \in \mathbb{C}_+$, *ovde smo pretpostavili da je operator* A *injektivan za* $-1-\gamma < m < -1$; *ako je zadovoljen uslov (H)', onda gornja inkluzija važi kada se broj* $(\pi/2)-\gamma\pi$ *zameni sa* $(\pi/2)-\omega\gamma$.

(iv)(iv.1) *Neka je* $m \geq -1$. *Tada je* $\lim_{z\to 0, z\in\Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi-\varepsilon}} S_\gamma(z)x = Cx$, $x \in D(A^p)$, $\varepsilon \in (0,(\pi/2)-\gamma\pi)$; *ako je zadovoljen uslov (H)', onda gornja jednakost važi kada se broj* $(\pi/2)-\gamma\pi$ *zameni sa* $(\pi/2)-\omega\gamma$. *Dodatno, operator* $-A_\gamma$ *je integralni generator uniformno ograničene analitičke* $C-$*regularizovane polugrupe* $(S_\gamma(z))_{z\in\Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}}$ *stepena rasta* $(m+1)/\gamma$, *za* $m > -1$. *Ako je, dodatno, zadovoljen uslov (H)', onda* $(S_\gamma(t))_{t>0}$ *može biti produžena uniformno ograničenom analitičkom* $C-$*regularizovanom polugrupom* $(\mathbf{S}_\gamma(z))_{z\in\Sigma_{(\pi/2)-\gamma\omega}}$ *stepena rasta* $(m+1)/\gamma$; *u ovom slučaju, jednakost data u (i) važi za svako* $z_1,\ z_2 \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\omega}$, *i jednakost data u (iii) važi za svako* $z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\omega}$.

(iv.2) *Neka je* $-1-\gamma < m < -1$ *i* $\zeta > 0$. *Tada je* $(S_{\gamma,\zeta}(t))_{t\geq 0}$ *eksponencijalno uniformno ograničena analitička* $\zeta-$*puta integrisana* $C-$*regularizovana polugrupa ugla* $(\pi/2)-\gamma\pi$; *dodatno, familija* $\{|z|^{-\zeta}(1+|z|^{-(m+1)/\gamma})^{-1}S_{\gamma,\zeta}(z) : z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi-\varepsilon}\}$ *je uniformno ograničena za svako* $\varepsilon \in (0,(\pi/2)-\gamma\pi)$. *Ako je, dodatno, zadovoljen uslov (H)', onda* $(S_{\gamma,\zeta}(t))_{t\geq 0}$ *može biti produžena eksponencijalnom uniformno ograničenom analitičkom* $\zeta-$*puta integrisanom* $C-$*regularizovanom polugrupom ugla* $(\pi/2)-\gamma\omega$, *i familija* $\{|z|^{-\zeta}(1+|z|^{-(m+1)/\gamma})^{-1}S_{\gamma,\zeta}(z) : z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\omega-\varepsilon}\}$ *je uniformno ograničena za svako* $\varepsilon \in (0,(\pi/2)-\gamma\omega)$.

(iv.3) *Neka je* $-1-\gamma < m < -1$ *i neka je* A *gusto definisan. Tada je* $(S_\gamma(t))_{t\geq 0}$ *eksponencijalna uniformno ograničena analitička* $C-$*regularizovana polugrupa ugla* $(\pi/2)-\gamma\pi$; *dodatno, familija* $\{(1+|z|^{-(m+1)/\gamma})^{-1}S_\gamma(z) : z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi-\varepsilon}\}$ *je uniformno ograničena za svako* $\varepsilon \in (0,(\pi/2)-\gamma\pi)$. *Ako je, dodatno, zadovoljen uslov (H)', onda* $(S_\gamma(t))_{t\geq 0}$ *može biti produžena eksponencijalnom uniformno ograničenom analitičkom* $C-$*regularizovanom polugrupom ugla* $(\pi/2)-\gamma\omega$, *i familija* $\{(1+|z|^{-(m+1)/\gamma})^{-1}S_\gamma(z) : z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\omega-\varepsilon}\}$ *je uniformno ograničena za svako* $\varepsilon \in (0,(\pi/2)-\gamma\omega)$.

(iv.4) *Neka je* $-1-\gamma < m < -1$ *i* A *injektivan. Tada je integralni generator od* $(S_{\gamma,\zeta}(t))_{t\geq 0}$, *odnosno* $(S_\gamma(t))_{t\geq 0}$, *operator* $-A_\gamma$ *(videti (iv.2)-(iv.3)).*

Označimo sa $-_\gamma A$ *integralni generator od* $(S_{\gamma,\zeta}(t))_{t\geq 0}$.

(v) *Neka je $m \geq -1$ i $z_0 \in \mathbb{C}_+$. Tada, za svako $x \in D(A^{\lfloor m+\gamma \rfloor+2})$ i $\varepsilon \in (0, (\pi/2) - \gamma\pi)$, važi:*

$$\begin{aligned}
&\lim_{z\to 0, z\in\Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi-\varepsilon}} \frac{S_\gamma(z)x - Cx}{z} \\
&= -z_0^\gamma Cx + \sum_{k=2}^{\lfloor m+\gamma\rfloor+2} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} H_{k-1}(0, z_0)\big(z_0 - A\big)^{k-1} Cx \\
&- \sin(\pi\gamma) \int_0^\infty \lambda^\gamma \frac{\big(\lambda + A\big)^{-1} C\big(z_0 - A\big)^{\lfloor m+\gamma\rfloor+2} x}{\big(\lambda + z_0\big)^{\lfloor m+\gamma\rfloor+2}}\, d\lambda; \qquad (3.83)
\end{aligned}$$

ako je zadovoljen uslov (H)', onda formula (3.83) važi za svako $x \in D(A^{\lfloor m+\gamma \rfloor+2})$, gde je broj $(\pi/2) - \gamma\pi$ zamenjen sa $(\pi/2) - \omega\gamma$.

(vi) *Operator ${}_\gamma A$ zadovoljava uslov (H)' za $\omega = \gamma\pi$ i $m' = ((m+1)/\gamma) - 1$; dodatno, ako A zadovoljava uslov (H)' (za ω i m), onda isti uslov važi i za ${}_\gamma A$ za $\gamma\omega$ i $m' = ((m+1)/\gamma) - 1$. Dodatno, pretpostavke $0 < \beta < 1/2$ i $m + \gamma\beta > -1$ impliciraju da je ${}_\beta({}_\gamma A) = {}_{\beta\gamma}A$.*

(vii) *$R(S_\gamma(z)) \subseteq D_\infty(A)$, $A^n S_\gamma(z) \in L(E)$ i formula*

$$A^n S_\gamma(z)x = (-1)^{n+1} \int_0^\infty \lambda^n f_z(\lambda)\big(\lambda + A\big)^{-1} Cx\, d\lambda,\ x \in E,\ z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}. \qquad (3.84)$$

važi za sve $x \in E$ i $z \in \Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}$.

(viii) *Neka je $l \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.*

(viii.1) *Neka je $A \in \mathcal{M}_{C,m}$, za $m > -1$. Označimo sa Ω_l, odnosno Ψ_l, skup neprekidnosti za $(S_{1/l}(t))_{t>0}$, odnosno $(S_{1/l}(z))_{z\in\Sigma_{(\pi/2)-(\pi/2l)}}$. Tada, za svako $x \in \Omega_l$, nepotpun apstraktni Cauchy-jev problem*

$$(P_l) : \begin{cases} u \in C^\infty\big((0,\infty) : E\big) \cap C\big((0,\infty) : D_\infty(A)\big), \\ u^{(l)}(t) = (-1)^l Au(t),\ t > 0, \\ \lim_{t\to 0+} u(t) = Cx, \\ \textit{skup } \{u(t) : t > 0\} \textit{ je ograničen u } E, \end{cases}$$

ima rešenje $u(t) = S_{1/l}(t)x$, $t > 0$, koje može biti analitički produženo na oblast $\Sigma_{(\pi/2)-(\pi/2l)}$. Ako, dodatno, $x \in \Psi_l$, za svako $\delta \in (0, (\pi/2) - (\pi/2l))$ i $j \in \mathbb{N}_0$, imamo da je skup $\{z^j u^{(j)}(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ ograničen u E. Ako je, dodatno, zadovoljen uslov (H)', gornje tvrdjenje važi kada se broj $(\pi/2)-(\pi/2l)$ zameni sa $(\pi/2)-(\omega/2l)$.

(viii.2) *Neka je* $x \in \overline{D(A)}$, *i* $A \in \mathcal{M}_{C,m}$, *gde je* $-1-l^{-1} < m < -1$. *Tada nepotpun apstraktni Cauchy-jev problem*

$$(P_{l,m}) : \begin{cases} u \in C^{\infty}\big((0,\infty) : E\big) \cap C\big((0,\infty) : D_{\infty}(A)\big), \\ u^{(l)}(t) = (-1)^l Au(t),\ t > 0, \\ \lim_{t\to 0+} u(t) = Cx, \\ \textit{skup } \Big\{\big(1+t^{-l(m+1)}\big)^{-1}u(t) : t > 0\Big\} \textit{ je ograničen u } E, \end{cases}$$

ima rešenje $u(t) = S_{1/l}(t)x$, $t > 0$, *koje može biti analitički produženo na oblast* $\Sigma_{(\pi/2)-(\pi/2l)}$. *Dodatno, za svako* $\delta \in (0,(\pi/2)-(\pi/2l))$ *i* $j \in \mathbb{N}_0$, *imamo da je skup* $\{|z|^j(1+|z|^{-l(m+1)})^{-1}u^{(j)}(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ *ograničen u* E. *Ako je, dodatno, zadovoljen uslov (H)', gornje tvrdjenje važi ako se broj* $(\pi/2)-(\pi/2l)$ *zameni sa* $(\pi/2)-(\omega/2l)$.

(ix)(ix.1) *Neka je* $\beta > 0$. *Označimo sa* $\Omega_{\theta,\gamma}$, *odnosno* Ψ_γ, *skup neprekidnosti od* $(S_\gamma(te^{i\theta}))_{t>0}$, *odnosno* $(S_\gamma(z))_{z\in\Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi}}$. *Tada, za svako* $x \in \Omega_{\theta,\gamma}$, *nepotpun apstrakni Cauchy-jev problem*

$$(FP_\beta) : \begin{cases} u \in C^{\infty}\big((0,\infty) : E\big) \cap C\big((0,\infty) : D_{\infty}(A)\big), \\ D_-^{\beta}u(t) = e^{i\theta\beta}A_{\gamma\beta}u(t),\ t > 0, \\ \lim_{t\to 0+} u(t) = Cx, \\ \textit{skup } \{u(t) : t > 0\} \textit{ je ograničen u } E, \end{cases}$$

ima rešenje $u(t) = S_\gamma(te^{i\theta})x$, $t > 0$, *koje može biti analitički produženo na oblast* $\Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi-|\theta|}$. *Ako je, dodatno,* $x \in \Psi_\gamma$, *za svako* $\delta \in (0,(\pi/2)-\gamma\pi)$ *i* $j \in \mathbb{N}_0$, *imamo da je skup* $\{z^j u^{(j)}(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ *ograničen u* E. *Ako je zadovoljen uslov (H)', gornje tvrdjenje važi ako se broj* $(\pi/2)-\gamma\pi$ *zameni sa* $(\pi/2)-\omega\gamma$.

(ix.2) *Neka je* $x \in \overline{D(A)}$, $\beta > (-1-m)/\gamma$, *i* $\theta \in (-((\pi/2)-\gamma\pi),(\pi/2)-\gamma\pi)$. *Tada nepotpun apstraktni Cauchy-jev problem*

$$(FP_{\beta,m}) : \begin{cases} u \in C^{\infty}\big((0,\infty) : E\big) \cap C\big((0,\infty) : D_{\infty}(A)\big), \\ D_-^{\beta}u(t) = e^{i\theta\beta}C^{-1}\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}(A+\varepsilon)_{\gamma\beta}Cu(t),\ t > 0, \\ \lim_{t\to 0+} u(t) = Cx, \\ \textit{skup } \Big\{\big(1+t^{-(m+1)/\gamma}\big)^{-1}u(t) : t > 0\Big\} \textit{je ograničen u } E, \end{cases}$$

ima rešenje $u(t) = S_\gamma(te^{i\theta})x$, $t > 0$, *koje može biti analitički produženo na oblast* $\Sigma_{(\pi/2)-\gamma\pi-|\theta|}$. *Dodatno, za svako* $\delta \in (0,(\pi/2)-\gamma\pi)$ *i* $j \in \mathbb{N}_0$, *imamo da je skup* $\{|z|^j(1+|z|^{-(m+1)/\gamma})^{-1}u^{(j)}(z) : z \in \Sigma_\delta\}$ *ograničen u* E. *Ako je, dodatno, zadovoljen uslov (H)', onda gornje tvrdjenje važi ako se broj* $(\pi/2)-\gamma\pi$ *zameni sa* $(\pi/2)-\omega\gamma$.

Napomena 3.5.1 *([16, Napomena 5.2])*

(i) *Kako je* $\arctan(\cos \pi\gamma) < (\pi/2) - \gamma\pi$ *za* $0 < \gamma < 1/2$*, zaključujemo da je u [16, Teorema 5.1] poboljšana ocena ugla analitičnosti* $C-$*regularizovane polugrupe stepena rasta* $r > 0$ *koji se pojavljuje u formulacijama tvrdjenja Teoreme 3.4.2 (i), (ii)-(ii)' i u formulaciji Teoreme 3.4.3 (i) za* $0 < b < 1/2$ *(videti i tvrdjenje (ii) ove teoreme za* $n \geq 3$*). Dodatno, pokazano je da limit koji se pojavljuje u formulaciji Teoreme 3.4.2 (i)-(d) postoji i u slučaju kada je* $\lfloor b + \alpha \rfloor < 0$.

(ii) *Iz dokaza [16, Teorema 5.1] se vidi da druga formula u formulaciji Teoreme 3.4.2(i)-(b)' važi za sve* $x \in E$ *(videti takodje Teoremu 3.4.3 (ii)' za* $0 < b < 1/2$*). Primetimo, konačno, da tvrdjenje Teoreme 3.4.3 nije moguće u potpunosti preformulisati u slučaju kad je* $b > 1/2$ *i da ne postoji* $d \in (0, 1]$ *tako da je familija* $\{(\lambda + A)^{-1}C : |\lambda| \leq d\}$ *uniformno ograničena.*

U Nastavku bismo želeli da istaknemo da je tehnikama koje su izložene u ovom poglavlju moguće uopštiti i pojam $G-$sektorijalnih operatora dat u [14]. Posmatrajmo sledeću klasu funkcija.

Definicija 3.5.2 *Funkcija* $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *pripada klasi* Ψ *ako zadovoljava sledeće uslove:*

- G *je nerastuća na* $[0, \infty)$;
- $G(t) \to 0,\ t \to \infty$;
- *funkcija* $\frac{1}{G}$ *je Lipschitz-ova na* $[0, \infty)$.

Tada se $CG-$sektorijalni operatori definišu na sledeći način. Neka je $(X, \|\ \|)$ Banach-ov prostor. Neka je A linearan zatvoren operator na X. Neka je $C \in L(X)$ injektivan i sa $\sigma_C(A)$ označen $C-$spektar operatora A.

Definicija 3.5.3 *Linearan zatvoren operator* $A : D(A) \subseteq X \to X$ *nazivamo* $CG-$*sektorijalan ako postoje konstante* $a \in \mathbb{R}$ *i* $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ *tako da skup*

$$S_{a,\varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \lambda \neq a,\ |\arg(\lambda - a)| < \varphi\},$$

zadovoljava sledeće uslove

- $\sigma_C(A) \subseteq S_{a,\varphi}$;
- $\exists M > 0\ \forall\lambda \notin S_{a,\varphi} :\ (\lambda - A)$ *je injektivan i* $\|(\lambda - A)^{-1}C\| \leq MG(|\lambda - a|)$.

Napomenimo da je svaki $C-$sektorijalni operator A i $CG-$sektorijalan ako se pretpostavi da je $G(t) = (t+1)^{-1},\ t \geq 0$.

U nastavku ćemo dati primer operatora A (videti [14, Teorema 1 i Primer 2]) koji nije sektorijalan; i više, koji je takav da ne zadovoljava uslov

$$\exists \alpha \in (0,1)\ \exists M > 0\ \forall \lambda \notin S_{a,\varphi},\ \lambda \neq a:\ \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|^{\alpha}}.$$

Primer 3.5.1 *(Sistem jednačina provodjenja topolote) Označimo sa* $X = L^2([0,\infty))$. *Pretpostavimo da su funkcije* $p_1, p_2, q_1, q_2 \in C^2([0,\infty),\mathbb{R}),\ r \in X,\ q_1, q_2 \geq 1,\ s \geq 0$. *Posmatrajmo sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina*

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t}(t,s) &= \frac{\partial}{\partial s}\Big(p_1(s)\frac{\partial x_1}{\partial s}\Big)(t,s) - q_1(s)x_1(t,s) - r(s)x_2(t,s) + u_1(t,s),\\ \frac{\partial x_2}{\partial t}(t,s) &= \frac{\partial}{\partial s}\Big(p_2(s)\frac{\partial x_2}{\partial s}\Big)(t,s) - q_2(s)x_2(t,s) + u_2(t,s), \quad t,s \geq 0,\end{aligned}$$

gde su u_1 i u_2 poznate funkcije neprekidne po t i po promenljivoj s pripadaju prostoru $L^2([0,\infty))$, a x_1 i x_2 su tražene funkcije. Tada se ovaj sistem može zapisati u obliku

$$x'(t) = -Ax(t) + u(t), \quad t \geq 0,$$

gde je $u(t) = (u_1(t), u_2(t)),\ t \geq 0$, poznata funkcija koja pripada klasi $C([0,\infty), X^2)$, funkcija $x(t) = (x_1(t), x_2(t)),\ t \geq 0$, je tražena funkcija iz klase $C([0,\infty), X^2) \cap C^1((0,\infty), X^2)$ i $A : D(A) \subseteq X^2 \to X^2$ linearan operator definisan sa

$$(Az)(s) = (-(p_1 z_1')'(s) + q_1(s)z_1(s) + r(s)z_2(s), -(p_2 z_2')'(s) + q_2(s)z_2(s)),$$

$$za\ s \geq 0\ i\ z \in D(A) = \{(z_1, z_2):\ z_j(0) = 0,\ j = 1,2,\ Az \in X^2\}.$$

Pretpostavimo dodatno da važe sledeći uslovi

1. $\limsup_{t\to\infty} |(p_j(t)q_j'(t))'|q_j^2(t) < 1,\ j = 1,2;$

2. $R := \sup_{s\geq 0} \frac{|r(s)|}{q_1(s)q_2(s)} < \infty.$

Definišimo

$$G(u) = \sup_{t\in[u,\infty)} \inf_{N\in\mathbb{N}} \left(\sup_{s\geq N} \frac{|r(s)|}{q_1(s)q_2(s)} + \frac{1}{t+1} + \frac{\sup_{s\in[0,N]} |r(s)|}{(t+1)^2} \right),\ u \geq 0.$$

Ako $G(u) \to 0,\ u \to \infty$, tada je operator A $G-$sektorijalan; dodatno, $a = 0$ i $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ je proizvoljno.

Specijalno, ako je $p_1(s) = p_2(s) = 1,\ q_1(s) = q_2(s) = s + 1$ *i*

$$r(s) = \frac{(s+1)^2}{\ln(s+2)},\ s \geq 0,$$

uzimajući da je $N = |\lambda|$, *dobijamo da je*

$$G(t) \leq \frac{2}{\ln(t+2)} + \frac{1}{t+1},\ t \geq 0.$$

Takodje, za ovako definisan operator A *može se pokazati da za svako* $\lambda,\ \arg\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$ *važi*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \geq \frac{M}{\ln(2 + |\lambda|)},$$

što potvrdjuje da A *nije sektorijalan operator.*

Literatura

[1] Albanese, A. A., Kühnemund, F.: Trotter-Kato approximation theorems for locally equicontinuous semigroups. *Riv. Mat. Univ. Parma* **1**, (2002), 19–53.

[2] Albanese, A. A., Mangino, E.: Trotter-Kato approximation theorems for bi-continuous semigroups and applications to Feller semigroups. *J. Math. Anal. Appl.* **289**, (2004), 477–492.

[3] Applebaum, D.: On the infinitesimal generators of Ornstein-Uhlenbeck processes with jumps in Hilbert spaces. *Potential Anal.* **26**, (2007), 79–100.

[4] Arendt, W., Batty, C. J. K., Hieber, M., Neubrander, F.: Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems. *Monographs in Mathematics, no. 96, Birkhäuser Verlag*, Basel, 2001.

[5] Arendt, W., Nikolski, N.: Vector-valued holomorphic functions revisited. *Math. Z.* **234**, (2000), 777–805.

[6] Baeumer, B., Meerschaert, M. M., Mortensen, J.: Space-time fractional derivative operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* **133(8)**, (2005), 2273–2282.

[7] Balakrishnan, A. V.: Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. *Pacific J. Math.* **10**, (1960), 419–437.

[8] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., Trujillo, J. J.: Fractional Calculus Models and Numerical Methods. *Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, World Scientific*, Singapore, 2012.

[9] Barbu, V.: Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces. *Noordhoff Int. Publ. Leyde the Netherlands*, 1976.

[10] Barletta, E., Dragomir, S.: Vector valued holomorphic functions. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* **52**, (2009), 211–226.

[11] Bazhlekova, E.: Fractional Evolution Equations in Banach Spaces. *PhD Thesis*, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, 2001.

[12] Bogachev, V. I.: Differentiable Measures and the Malliavin Calculus. *American Mathematical Society*, Providence, 2010.

[13] Catuogno, P., Olivera, C.: On stochastic generalized functions. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **14(2)**, (2011), 237–260.

[14] Chaikovs'kyi, A.V.: On the application of the theory of $G-$sectorial operators to partial differential equations. *J. Math. Sci.* **187(4)**, (2012), 524–534.

[15] Chakraborty, N. D., Ali, SK. J.: On strongly Pettis integrable functions in locally convex spaces. *Revista Math.* **6**, (1993), 241–262.

[16] Chen, C., Kostić, M., Li, M.: Complex powers of almost $C-$sectorial operators. *Cont. anal. Appl Math.* **2(1)**, (2014), 1–77.

[17] Chen, C., Kostić, M., Li, M.: Representation of complex powers of $C-$sectorial operators. *Fract. Calc. Appl. Anal.* **17(3)**, (2014), 827–854.

[18] Chen, C., Kostić, M., Li, M., Žigić, M.: Complex powers of $C-$sectorial operators. Part I. *Taiwanese J. Math.* **17**, (2013), 465–499.

[19] Chen, C., Li, M., Li, F.-B.: On boundary values of fractional resolvent families. *J. Math. Anal. Appl.* **384(2)**, (2011), 453–467.

[20] Da Prato, G.: Semigruppi di crescenza n. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **20(4)**, (1966), 753–782.

[21] deLaubenfels, R.: Existence Families, Functional Calculi and Evolution Equations. *vol. 1570 Lecture Notes in Mathematics, Springer,* New York, 1994.

[22] deLaubenfels, R., Yao, F., Wang, S.: Fractional powers of operators of regularized type. *J. Math. Anal. Appl.* **199(3)**, (1996), 910–933.

[23] deLaubenfels, R., Pastor, J.: Semigroup approach to the theory of fractional powers of operators. *Semigroup Forum* **76(3)**, (2008), 385–426.

[24] Diethelm, K.: The Analysis of Fractional Differential Equations. *Springer-Verlag*, Berlin, 2010.

[25] Dobrakov, I., Panchapagesan, T. V.: A generalized Pettis measurability criterion and integration of vector functions. *Studia Math.* **164**, (2004), 205–229.

[26] Dugowson, S.: Les Différentielles Métaphysiques: Historie et Philosophie de la Généralisation de l'Ordre de Dérivation. *Ph.D. Thesis*, University of Paris, 1994.

[27] Engel, K.-J., Nagel, R.: One–Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. *Springer-Verlag*, Berlin, 2000.

[28] Feller, W.: On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators. *Ann. of Math.* **58**, (1953), 166-174.

[29] Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. *Springer-Verlag*, Berlin, 1998.

[30] Goldstein, J.A.: Semi-Groups of Operators and Abstract Cauchy Problems. *Tulane Univ. Lecture notes*, 1970.

[31] Grosse-Erdmann, K.-G.: A weak criterion for weak holomorphy. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **136**, (2004), 399–411.

[32] Haase, M.: The Functional Calculi for Sectorial Operators. *no. 169, in Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag*, Basel, 2006.

[33] Haluška, J.: On integration in complete bornological locally convex spaces. *Czechoslovak Math. J.* **47**, (1997), 205–218.

[34] Haluška, J., Hutník, O.: On integrable functions in complete bornological locally convex space. *Mediterr. J. Math.* **9**, (2012), 165–186.

[35] Hida, T., Kuo, H.-H., Pothoff, J., Streit, L.: White Noise. An Infinite-Dimensional Calculus. *Kluwer Academic Publishers Group*, Dordrecht, 1993.

[36] Hieber, M.: Laplace transforms and $\alpha-$times integrated semigroups. *Forum Math.* **3(6)**, (1991), 595–612.

[37] Hille, E.: Functional Analysis and Semi-Groups. *Amer. Math. Soc. Colloq Publ. Vol. 31*, New York, 1948.

[38] Hille, E., Phillips, R.S.: Functional Analysis and Semi-Groups. *Amer. Math. Soc. Colloq Publ. Vol. 31*, Providence R.I., 1957.

[39] Holden, H., Øksendal, B., Ubøe, J., Zhang, T.: Stochastic Partial Differential Equations. A Modeling, White Noise Functional Approach. Second Edition. *Springer*, New York, 2010.

[40] Hu, Y.: Chaos expansion of heat equations with white noise potentials. *Potential Anal.* **16**, (2002), 45–66.

[41] Huang, F., Liu, F.: The space-time fractional diffusion equation with Caputo derivatives. *J. Appl. Math. Comp.* **19(1-2)**, (2005), 179–190.

[42] Jordá, E.: Vitali's and Harnack's type results for vector-valued functions. *J. Math. Anal. Appl.* **327**, (2007), 739–743.

[43] Kalpinelli, E., Frangos, N., Yannacopoulos, A.: A Wiener chaos approach to hyperbolic SPDEs. *Stoch. Anal. Appl.* **29**, (2011), 237–258.

[44] Khurana, S. S.: Strong measurability in Fréchet spaces. *Indian J. Pure Appl. Math.* **7**, (1979), 810–814.

[45] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J.: Theory and Applications of Fractional Differential Equations. *North-Holland Math. Stud.*, Amsterdam, 2006.

[46] Kim, M.: Trotter–Kato theorems for convoluted resolvent families. *Commun. Korean Math. Soc.* **19**, (2004), 293–305.

[47] Klafter, J., Lim, S. C., Metzler R. (Eds.): Fractional Dynamics in Physics: Recent Advances. *World Scientific*, Singapore, 2011.

[48] Klein, Ch., Rolowicz, S.: On Riemann integration of functions with values in topologically vector spaces. *Studia Math.* **80**, (1984), 109–118.

[49] Komatsu, H.: Semi-groups of operators in locally convex spaces. *J. Math. Soc. Japan* **16**, (1964), 230–262.

[50] Komatsu, H.: Fractional powers of operators. *Pacific J. Math.* **19(2)**, (1966), 285–346.

[51] Kōmura, T.: Semigroups of operators in locally convex spaces. *J. Funct. Anal.* **2**, (1968), 258–296.

[52] Kostić, M.: $(a, k)-$regularized $C-$resolvent families: regularity and local properties. *Abstr. Appl. Anal.* **2009**, Art. ID 858242, (2009), 27 pages.

[53] Kostić, M.: Complex powers of nondensely defined operators. *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.* **90(104)**, (2011), 47–64.

[54] Kostić, M.: Generalized Semigroups and Cosine Functions. *Mathematical Institute Belgrade*, 2011.

[55] Kostić, M.: Some contributions to the theory of abstract Volterra equations. *Int. J. Math. Anal. (Russe)* **5(31)**, (2011), 1529–1551.

[56] Kostić, M.: Abstract Volterra equations in locally convex spaces. *Sci. China Math.* **55**, (2012), 1797–1825.

[57] Kostić, M.: A note on the existance and growth of mild solutions of abstract Cauchy problems for generators of integrated $C-$semigroups and cosine functions. *Novi Sad J. Math.* **43(2)**, (2013), 157–165.

[58] Kostić, M.: Abstract Volterra Integro-Differential Equations. *Taylor and Francis Group/CRC Press*, accepted for publication.

[59] Kunstmann, P.C.: Stationary dense operators and generation of non-dense distribution semigroups. *J. Operator Theory.* **37**, (1997), 111–120.

[60] Kunstmann, P. C.: Regularization of semigroups that are strongly continuous for $t > 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.* **126(9)**, (1998), 2721–2724.

[61] Levajković, T.: Malliavin Calculus for Chaos Expansions of Generalized Stochastic Processes with Applications to Some Classes of Differential Equations. *Doktorska disertacija*, Novi Sad, 2011.

[62] Levajković, T., Pilipović, S., Seleši, D.: Fundamental equations with higher order Malliavin operators. Submitted for publication

[63] Levajković, T., Pilipović, S., Seleši, D.: The stochastic Dirichlet problem driven by the Ornstein-Uhlenbeck operator: Approach by the Fredholm alternative for chaos expansions. *Stoch. Anal. Appl.* **29**, (2011), 317-331.

[64] Li, M., Chen, C., Li, F.-B.: On fractional powers of generators of fractional resolvent families. *J. Funct Anal.* **259**, (2010), 2702–2726.

[65] Li, M., Zheng, Q.: On product formulas for $C-$semigroups. *Semigroup Forum* **78**, (2009), 536–546.

[66] Li, Y.-C., Shaw, S.-Y.: $N-$times integrated $C-$semigroups and the abstract Cauchy problem. *Taiwanese J. Math.* **1(1)**, (1997), 75–102.

[67] Lizama, C.: On the convergence and approximations of integrated semigroups. *J. Math. Anal. Appl.* **181**, (1994), 89–103.

[68] Lizama, C.: Regularized solutions for abstract Volterra equations. *J. Math. Anal. Appl* **243(22)**, (2000), 278–292.

[69] Lizama, C.: On approximation and representation of K$-$regularized resolvent families. *Integral Equations Operator Theory* **41**, (2001), 223–229.

[70] Lizama, C., Prado, H.: Rates of approximations and ergodic limits of regularized operator families. *J. Approx. Theory* **122**, (2003), 42–61.

[71] Lototsky, S., Rozovskii, B.: Stochastic partial differential equations driven by purely spatial noise. *SIAM J. Math. Anal.* **41(4)**, (2009), 1295–1322.

[72] Lototsky, S., Rozovskii, B.: Bilinear stochastic elliptic equations. *Quad. Mat.* **25**, (2010), 207–221.

[73] Mainardi, F.: Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. An Introduction to Mathematical Models. *Imperial College Press*, London, 2010.

[74] Marraffa, V.: Riemann type integrals for functions taking values in locally convex spaces. *Czechoslovak Math. J.* **56**, (2006), 475–490.

[75] Martinez, C., Sanz, M.: The Theory of Fractional Powers of Operators. *North-Holland Math. Stud.*, Amsterdam, 2001.

[76] Martinez, C., Sanz, M., Redondo, A.: Fractional powers of almost nonnegative operators. *Fract. Calculus Appl. Anal.* **8(2)**, (2005), 201–230.

[77] Meise, R., Vogt, D.: Introduction to Functional Analysis. Translated from the German by M. S. Ramanujan and revised by the authors. *Oxf. Grad. Texts Math.*, Clarendon Press, New York, 1997.

[78] Melnikova, I.V., Alshanskiy, M.A.: Regularized and generalized solutions of infinite-dimensional stochastic problems. *Sb. Math.* **202(11)**, (2011), 1565–1592.

[79] Melnikova, I.V., Alshanskiy, M.A.: Generalized solutions of abstract stochastic problems. *Oper. Theory Adv. Appl.* **231**, (2013), 341–352.

[80] Melnikova, I. V., Filinkov, A.: Abstract Cauchy Problems: Threen Approaches. *Chapman Hall/CRC*, 2001.

[81] Miller, K. S., Ross, B.: An Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. *Wiley*, New York, 1993.

[82] Miyadera, I.: Generation of a strongly continuous semi-group of operators. *Tohoku Math. J.* **4**, (1952), 109–114.

[83] Müller, C.: Approximation of local convoluted semigroups. *J. Math. Anal. Appl.* **269**, (2002), 401–420.

[84] van Neerven, J. M. A. M., Straub, B.: On the existence and growth of mild solutions of the abstract Cauchy problem for operators with polynomially bounded resolvent. *Houston J. Math.* **24(1)**, (1998), 137–171.

[85] Oldham, K. B., Spanier, J.: The Fractional Calculus. *Academic Press*, New-York-London, 1974.

[86] Pazy, A.: Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. *Springer-Verlag*, New York, 1983.

[87] Periago, F., Straub, B.: A functional calculus for almost sectorial operators and applications to abstract evolution equations. *J. Evol. Equ.* **2(1)**, (2002), 41–68.

[88] Periago, F., Straub, B.: On the existence and uniqueness of solutions for an incomplete second-order abstract Cauchy problem. *Studia Math* **155(2)**, (2003), 183–193.

[89] Phillips, R.S.: Perturbation theory for semi-groups of linear operators. *Trans. Amer. Math. Soc.* **74**, (1953), 199–221.

[90] Pilipović, S., Seleši, D.: Expansion theorems for generalized random processes, Wick products and applications to stochastic differential equations. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **10(1)**, (2007), 79–110.

[91] Pilipović, S., Seleši, D.: On the generalized stochastic Dirichlet problem - Part I: The stochastic weak maximum principle. *Potential Anal.* **32**, (2010), 363-387.

[92] Pilipović, S., Seleši, D.: On the generalized stochastic Dirichlet problem – Part II: Solvability, stability and the Colombeau case. *Potential Anal.* **33**, (2010), 263-289.

[93] Podlubny, I.: Fractional Differential Equations. *Academic Press*, New York, 1999.

[94] Proske, F.: The stochastic transport equation driven by Lévy white noise. *Commun. Math. Sci.* **2(4)**, (2004), 627–641.

[95] Rao, M. M.: Integration with vector valued measures. *Discrete Cont. Dyn. Sys.* **33**, (2013), 5429–5440.

[96] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I.: Fractional Derivatives and Integrals: Theory and Applications. *Gordon and Breach*, New York, 1993.

[97] Seleši, D.: Ekspanzija uopštenih stohastičkih procesa sa primenama u jednačinama. *Magistarska teza*, Novi Sad, 2003.

[98] Seleši, D.: Fundamental solutions of singular SPDEs. *Chaos Solitons Fractals* **44**, (2011), 526–537.

[99] Smith, W. V., Tucker, D. H.: Weak integral convergence theorems and operator measures. *Pacific J. Math.* **111**, (1984), 243–256.

[100] Straub, B.: Fractional powers of operators with polynomially bounded resolvent and the semigroups generated by them. *Hiroshima Math. J.* **24(3)**, (1994), 529–548.

[101] Tanaka, N.: Holomorphic $C-$semigroups and holomorphic semigroups. *Semigroup Forum* **38(1)**, (1989), 253–261.

[102] Thomas, G. E. F.: Integration of functions with values in locally convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **212**, (1975), 61–81.

[103] Venter, R. G.: Measures and Functions in Locally Convex Spaces. *Ph.D. Thesis*, University of Pretoria, 2010.

[104] Wong, R., Zhao, Y.-Q.: Exponential asymptotics of the Mittag-Leffler function. *Constr. Approx.* **18**, (2002), 355–385.

[105] Wright, E. M.: The generalized Bessel functions of order greater than one. *Quarterly J. Math.* (Oxford Ser.) **11**, (1940), 36–48.

[106] Xiao, T.-J., Liang, J.: Widder-Arendt theorem and integrated semigroups in locally convex space. *Sci. China Math.* **39**, (1996), 1121–1130.

[107] Xiao, T.-J., Liang, J.: Laplace transforms and integrated, regularized semigroups in locally convex spaces. *J. Funct. Anal.* **148**, (1997), 448–479.

[108] Xiao, T.-J., Liang, J.: The Cauchy Problem for Higher-Order Abstract Differential Equations. *Springer-Verlag*, Berlin, 1998.

[109] Xiao, T.-J., Liang, J.: Approximations of Laplace transforms and integrated semigroups. *J. Funct. Anal.* **172**, (2000), 202–220.

[110] Xiao, T.-J., Liang, J.: Abstract degenerate Cauchy problems in locally convex spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **259(2)**, (2001), 398–412.

[111] Yagi, A.: Abstract Parabolic Evolution Equations and Their Applications. *Springer-Verlag*, Berlin, 2010.

[112] Yosida, K.: On the differentiability and representation of one parameter semi-groups of linear operators. *J. Math. Soc. Japan* **1**, (1948), 15–21.

[113] Yosida, K.: Lectures on Semi-group Theory and Its Applications to Cauchy's Problem in Partial Differential Equations. *Tata Inst. Fund. Research*, 1957.

Biografija

Rodjena sam 23. decembra 1981. godine, u Novom Sadu. Osnovnu kolu "Žarko Zrenjanin" i gimnaziju "Laza Kostić" sam završila u Novom Sadu. Studije matematike sam započela šk.2000/01. na PMF-u u Novom Sadu, na smeru Profesor matematike - teorijsko usmerenje. Diplomirala sam u julu 2004. sa prosečnom ocenom 9,90. Nagradjena sam kao "Najbolji student Prirodno matematičkog fakulteta", nagradom dodeljenom na "Danu Fakulteta", 2005.

Magistarske studije sam upisala 2004. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu iz oblasti Analiza i verovatnoća, u okviru kojih sam boravila jedan semestar na Univerzitetu u Beču, Austrija, tokom 2008. godine. U toku magistarskih studija položila sam sve ispite sa prosečnom ocenom 10,00. Magistarsku tezu, pod nazivom "Snopovske osobine uopštenih funkcija na mnogostrukosti", sam odbranila 6. novembra 2009. godine. Doktorske studije sam upisala 2011. godine, takodje, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu iz oblasti Analiza i verovatnoća i položila sve ispite sa prosečnom ocenom 10,00.

Od februara 2005. do aprila 2012. godine sam bila zaposlena na Departmanu za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, u zvanju asistenta pripravnika, a od aprila 2012. u zvanju asistenta. Trenutno izvodim ili sam izvodila vežbe iz predmeta: Uvod u analizu, Analiza 1, Analiza 2, Kompleksna analiza, Metrički i normirani prostori, Projektivna geometrija, Diferencijalna geometrija, Optimizacija, Jednačine matematičke fizike, Verovatnoća i statistika, Matematika 1 i 2 za studente fizike i Matematika za studente hemije.

Autor sam na nekoliko radova objavljenih u časopisima sa medjunarodne ISI liste. Izlagala sam na više medjunarodnih konferencija. Trenutno sam saradnik na republičkom naučnom projektu MPNTR 174024 i pokrajnskom naučnom projektu APV 114-451-2167/2014-15. Član sam Srpskog matematičkog društva.

Novi Sad, 28.8.2014.

Milica Žigić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: Milica Žigić
AU
Mentor: Akademik dr Stevan Pilipović i dr Marko Kostić
MN

Naslov rada: Primene polugrupa operatora u nekim klasama Košijevih početnih problema
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2014.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 3/158/113/0/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Analiza i verovatnoća
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: uopšteni stohastički procesi, haos ekspanzija, stohastičke evolucione jednačine, Wick-ov proizvod, beli šum, C_0-polugrupe, infinitezimalni generator, stohastički operator; frakcioni stepeni operatora, C-regularizovane rezolventne familije, apstraktne vremensko-frakcione jednačine.
PO

UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: Doktorska disertacija je posvećena primeni teorije polugrupa operatora na rešavanje dve klase Cauchy-jevih početnih problema. U prvom delu smo ispitivali parabolične stohastičke parcijalne diferencijalne jednačine (SPDJ-ne), odredjene sa dva tipa operatora: linearnim zatvorenim operatorom koji generiše C_0-polugrupu i linearnim ograničenim operatorom kombinovanim sa Wick-ovim proizvodom. Svi stohastički procesi su dati Wiener-Itô-ovom haos ekspanzijom. Dokazali smo postojanje i jedinstvenost rešenja ove klase SPDJ-na. Posebno, posmatrali smo i stacionarni slučaj kada je izvod po vremenu jednak nuli. U drugom delu smo konstruisali kompleksne stepene C-sektorijalnih operatora na sekvencijalno kompletnim lokalno konveksnim prostorima. Kompleksne stepene operatora smo posmatrali kao integralne generatore uniformno ograničenih analitičkih C-regularizovanih rezolventnih familija, i upotrebili dobijene rezultate na izučavanje nepotpunih Cauchy-jevih problema višeg ili necelog reda.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 27.05.2014.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
Predsednik: dr Dora Seleši, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Marko Kostić, vanredni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Tijana Levajković, docent, Saobraćajni fakultet, Univerzitet u Beogradu

Član: dr Jelena Aleksić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents code: Doctoral dissertation
CC
Author: Milica Žigić
AU
Mentor: Academician Stevan Pilipović, PhD and Marko Kostić, PhD
MN

Title: Applications of Semigroups of Operators in Some Classes of Cauchy Problems
TI

Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014.
PY
Publisher: Author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Faculty of Science and Mathematics, Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 3/158/113/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Analysis and probability
SD
Subject / Key words: generalized stochastic process, chaos expansion, stochastic evolution equation, Wick product, white noise, C_0-semigroup, infinitesimal generator, stochastic operator; fractional powers of operators, C-regularized resolvent families, abstract time-fractional equations.
SKW
UC:
Holding data: library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: The doctoral dissertation is devoted to applications of the theory of semigroups of operators on two classes of Cauchy problems. In the first part, we studied parabolic stochastic partial differential equations (SPDEs), driven by two types of operators: one linear closed operator generating a C_0-semigroup and one linear bounded operator with Wick-type multiplication. All stochastic processes are considered in the setting of Wiener-Itô chaos expansions. We proved existence and uniqueness of solutions for this class of SPDEs. In particular, we also treated the stationary case when the time-derivative is equal to zero. In the second part, we constructed complex powers of $C-$sectorial operators in the setting of sequentially complete locally convex spaces. We considered these complex powers as the integral generators of equicontinuous analytic $C-$regularized resolvent families, and incorporated the obtained results in the study of incomplete higher or fractional order Cauchy problems.
AB

Accepted by Scientific Board on: May 27, 2014
ASB

Defended:
DE
Thesis defend board:
President: Dora Seleši, PhD, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Academician Stevan Pilipović, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Marko Kostić, PhD, Associate Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad

Member: Tijana Levajković, PhD, Assistant Professor, Faculty of Transport and Traffic Engineering, University of Belgrade

Member: Jelena Aleksić, PhD, Assistant Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
DB