UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Mr MIROLJUB MILOJEVIĆ

DVODIMENZIONALNA EP GEOMETRIJA U SMISLU KELI-KLAJNA

DOKTORSKA DISERTACIJA

NIŠ, 1989.

SADRŽAJ

Glava 3.

TRANSFORMACIJE PODUDARNOSTI EP RAVNI

Glava 4.

DOKAZ LOGIČKE NEPROTIVUREČNOSTI EP GEOMETRIJE

U V O D

Ovaj rad posvećen je jednoj od devet dvodimenzionalnih geometrija u smislu Keli-Klajna. Naime, poznato je da prema osnovnoj zamisli[1)] Keli-Klajna postoji devet dvodimenzionalnih metričkih geometrija koje se izmedju ostalog razlikuju prema projektivnoj metrici[2)] na pravoj i pramenu pravih. Kako projektivna metrika na pravoj i pramenu pravih može biti eliptična (u oznaci E), hiperbolična (u oznaci H) i parabolična (u oznaci P), to se sve ove geometrije mogu kratko simbolički označiti:

1° EE geometrija - eliptična geometrija,

2° HE geometrija - geometrija Lobačevskog,

3° EH geometrija - dualna geometriji Lobačevskog,

4° HH geometrija - hiperbolična geometrija,

5° PH geometrija - pseudoeuklidska geometrija,

6° HP geometrija - dualna pseudoeuklidskoj geometriji,

7° PP geometrija - parabolična geometrija,

. . . .

---

1) *Videti Keli A. (Cayley A.) [15], Klein F. [14] i Kagan V.F. [17], t. II, § 70 i 71.*

2) *Videti Jaglom I.M., Rozenfeed B.A. i Jasinskaja E.U. [46]; Kagan V.F. [17], t. II, § 70, 71, 77, 78; Makarova N.M. [25].*

8° PE geometrija - euklidska geometrija,

9° EP geometrija - dualna euklidskoj geometriji,

gde prvo slovo označava[1] vrstu projektivne metrike na pravoj a drugo - vrstu projektivne metrike u pramenju pravih.

Za sve geometrijske sisteme u smislu Keli-Klajna sam Klajn je više puta ukazivao (v. Kagan [17], tom II, § 78, t. 8.) da za svaku od tih geometrija treba ustanoviti sistem aksioma i iz njega deduktivnim putem izvesti samu geometriju. Kada je reč o napred navedenim dvodimenzionalnim geometrijama dobro su poznati Hilbertov sistem aksioma[2] PE geometrije, tj. geometrije Euklida, zatim sistem aksioma HE geometrije, tj. geometrije Lebačevskog, koji se sastoji od I do IV grupe Hilbertovog sistema i aksiome Lobačevskog (v. na primer Prvanović M. [30], glava VII) i sistem aksioma EE geometrije, tj. eliptične geometrije koji je dat u Osnovama geometrije Bogomolova S.A. [6], str. 271-297. Takodje je sovjetski matematičar Parnaskij I.V. u svom radu [33], 1956. godine dao aksiomatiku trodimenzionalne parabolične geometrije, te prema tome i dvodimenzionalne PP geometrije. Godine 1970. sovjetski autor Proskurina R.G. u svom radu [34], dala je aksiomatiku PH geometrije, tj. pseudoeuklidske geometrije, a iste godine Aleksandrova G.A. u svom radu [1], dala je aksiomatiku HP geometrije, tj. dualne geometrije pseudoeuklidskoj geometriji. No, i ako su HP i PH dualni geometrijski sistemi, Aleksandrova nije sistem aksioma HP geometrije izvela iz sistema aksioma Proskurine koristeći princip dualnosti, već su to dva nezavisna sistema aksioma. Parnaskij, Proskurina i Aleksandrova nisu se samo zadržali na sistemu aksioma odgovarajuće geometrije

---

1) *Oznake projektivnih metrika E (eliptična), H (hiperbolična), P (parabolična) i navedenih geometrija EE, HE, EH, HH, PH, HP, PP, PE, EP predložene su kod Kagana u radu [17], t. II, glava XV, § 77 i 78. EP geometrija koja je predmet izučavanja u ovom radu kod Rozenfeeda u radu [42], glava V, § 2, označena je sa* R_2^*.

2) *Ovaj sistem aksioma može se videti kod Hilberta D. u radu [12], ili kod Prvanović M. [30], ili kod Pogorelova A.V. [37].*

već su sintetičkim putem izgradjivali navedene geometrije. Medjutim, Parnaskaja O.E. u svom radu [39], 1973. godine dala je aksiomatiku trodimenzionalne geometrije koja je dualna geometriji Lebačevskog, a to znači i dvodimenzionalne EH geometrije, ali se nije zadržala detaljnije na izgradjivanju same geometrije na osnovu date aksiomatike. Cvetković D. je u prvom delu svoje doktorske disertacije [9], dao jednu vrstu zajedničkog aksiomatskog jezgra za svih devet geometrija. Medjutim, za geometrije EP i HH, koliko je nama poznato prema izučenoj literaturi, nisu ustanovljeni odgovarajući sistemi aksioma, a samim tim ove geometrije nisu ni izgradjivane sintetičkim putem.

U ovom radu predmet istraživanja je aksiomatičko zasnivanje dvodimenzionalne EP geometrije a zatim izradjivanje sintetičkim putem same geometrije na osnovu izloženog sistema aksioma. Poznato je da se jedan sistem aksioma EP geometrije, može dobiti iz Hilbertovog sistema aksioma euklidske geometrije koristeći princip dualnosti. Medjutim, u radu je dat sistem aksioma dvodimenzionalne EP geometrije koji nije dobijen primenom principa dualnosti, već je to nezavistan sistem od Hilbertovog sistema aksioma.

Rad je podeljen u četiri poglavlja i pritom: Glava 1. sastoji se od tačaka 1.1. do 1.4; Glava 2. - od tačaka 2.1 i 2.2; Glava 3. - od tačaka 3.1. do 3.3. i Glava 4. - od tačaka 4.1 i 4.2. Ukratko izložićemo sadržaj svakog od ovih poglavlja.

Glava 1. po obimu je najveća a u njoj izloženo je aksimatičko zasnivanje dvodimenzionalne EP geometrije, tj. EP ravni. Pri tom polazimo od proizvoljnog nepraznog skupa α. Skup α nazivamo EP ravan, a njegove elemente tačkama EP ravni. U skupu α uočavamo zatim klasu C_p podskupova. Elemente klase C_p nazivamo pravama EP ravni. Dakle, za osnovne objekte EP ravni uzimamo tačke i prave, a za osnovne relacije nad skupom α uzimamo relacije: "... je incidentno ...", za tačke i prave; razdvojenost dva para tačaka koji su incidentni sa istom pravom i relaciju "... je podudarno ..." u skupu svih duži. Osnovni objekti i osnovne relacije EP ravni okarakterisane su sa četiri grupe aksioma.

U tački 1.1. izložena je prva grupa od 5 aksioma incidencije i date njihove važnije posledice. Kako u ovoj geometriji, prema aksiomi I_1, svake dve tačke nisu incidentne sa jednom pravom, to prema definiciji 1.1.2, dve tačke P i Q nazivamo paralelnim ako ne postoji prava koja je sa njima incidentna. Paralelne tačke P i Q simbolički označavamo: $P \mid Q$[1]. Otuda u EP ravni definicijom 1.1.2. definišemo izotropni niz tačaka (izotropna prava) sa osnovom A koja čini zadata tačka A i sve tačke koje su joj paralelne. Izotropni niz tačaka sa osnovom A označavamo: $\tilde{a}$[2]. Prema definiciji 1.1.1. tačke A i B EP ravni nazivamo kolinearnim ako postoji prava m koja je sa njima incidentna. Kolinearne tačke A i B označavamo: A — B. Kako prema aksiomi I_3 postoji prava m i tačka M koje nisu incidentne, onda prema definiciji 1.1.3. tačku $P \in m$ i $P \mid M$, nazivamo projekcijom tačke M na pravu m i označavamo: $P = pr_m M$.

Na osnovu aksioma incidencije dokazane su:

TEOREMA 1.1.2. - Ako su A, B i C tri razne tačke onda važi implikacija:

$$(A \mid B \wedge B — C) \implies A — C .$$

TEOREMA 1.1.5. - Za ma koji izotropni niz tačaka $\tilde{a}$ i ma koju pravu m postoji jedna i samo jedna tačka incidentna sa svakom od njih.

TEOREMA 1.1.7. - Ako su $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ dva različita izotropna niza tačaka onda je $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \emptyset$.

---

1) *Oznaku za paralelnost tačaka srećemo u radu Parnaskija [33] i Aleksandrove [1].*

2) *Oznaku za izotropni niz tačaka predložila je Aleksandrova u [1], str. 104.*

U tački 1.2. data je druga grupa od 7 aksioma rasporeda i važnije posledice aksioma incidencije i rasporeda. U ovom delu rada definisani su: duž, ugao, izotropni poluniz, izotropna duž, trotemenik, trougao i jednougao.

Jednougao EP ravni (v. definiciju 1.2.16) je neka vrsta "specijalnog trougla" te ravni čija su dva temena paralelne tačke a svako od njih kolinearna sa trećom. Naime, ako za tri razne tačke O, P i Q važi: $P \mid Q$ i $P — O$, onda prema teoremi 1.1.2, sledi da je $Q — O$. Ovim tačkama odredjena su dva jednougla sa zajedničkom izotropnom duži $\widetilde{PQ}$ (koju nazivamo katetom jednougla[1]), istim uglom $\angle POQ$, a druge dve strane (koje nazivamo hipotenuzama) predstavljaju dopunske duži na pravama p(O,P) i p(O,Q). Jednougao sa uglom kod temena O označavamo: $\tilde{\Delta}$ POQ.

Na osnovu aksioma incidencije i rasporeda, izmedju ostalog, dokazani su: Pašov stav (v. teoremu 1.2.7) i njemu dualan (v. teoremu 1.2.8), kao i

TEOREMA 1.2.9. - Za svaki trougao važi da je projekcija jednog i samo jednog temena unutrašnja tačka naspramne stranice trougla.

Prema definiciji 1.2.17, teme o kome se govori u teoremi 1.2.9, naziva se središnje teme trougla, a naspramna strana osnovom trougla. Preostale dve strane nazivaju se bočnim stranama. Ugao čije se teme poklapa sa ovim temenom naziva se spoljašnji ugao, a uglovi čija se temena poklapaju sa preostala dva temena trougla - unutrašnji uglovi trougla. Ističemo da u ovoj geometriji dve prave koje se uvek seku odredjuju samo jedan ugao.

U tački 1.3. data je samo jedna aksioma treće grupe. To je Dedekindova aksioma neprekidnosti za duž na pravoj u EP ravni.

---

1) *Naziv za strane jednougla i oznaku uzeli smo kao kod Aleksandrove u [1], str. 109.*

U tački 1.4. data je zadnja četvrta grupa od 10 aksioma podudarnosti kojima je okarakterisana relacija "... je podudarno ..." u skupu svih duži i skupu svih izotropnih duži. Nakon toga dat je niz teorema (48 teorema) koje predstavljaju neposredne posledice izloženog sistema aksioma. Navedimo neke važnije teoreme:

TEOREMA 1.4.9. - Ako za tri tačke O, P i Q važi da je O — P i P | Q, onda je $[OP] \cong [OQ]$.

Na osnovu ove važne teoreme neposredno sledi:

TEOREMA 1.4.10. - Hipotenuze jednougla su podudarne.

U podtački 1.4.2. na osnovu podudarnosti duži i izotropnih duži definisana je relacija podudarnosti za uglove (v. definiciju 1.4.3).

Na osnovu definicije 1.4.3. i aksiome IV_{10} neposredno su dokazane teoreme 1.4.15,16,17. u kojima se tvrdi: Ako su od tri elementa (hipotenuza, kateta, ugao) jednog jednougla podudarna dva sa odgovarajućim elementima drugog jednougla, onda su podudarni i treći.

U podtački 1.4.3. definisane su poredbene relacije "... manje od ..." i "... veće od ..." u skupu svih duži i dokazane važnije teoreme vezane za ove relacije. U podtačkama 1.4.5. i 1.4.6. učinjeno je to isto u skupu svih izotropnih duži i skupu svih uglova.

U podtački 1.4.4. dokazana je važna teorema:

TEOREMA 1.4.23. - Osnova trougla jednaka je zbiru njenih bočnih strana.

Dokazano je i više teorema koje se odnose na trouglove u EP ravni, kao što su teoreme od 1.4.24. do 1.4.27.

U zadnjoj podtački 1.4.7. dokazane su teoreme 1.4.45. i 1.4.46. koje govore o egzistenciji središta duži i središta izotropne duži.

U Glavi 2. izložena je simetrija u EP ravni. Naime, u tački 2.1. definisali smo centralnu simetriju EP ravni sa centrom u tački P te ravni i označili je σ_P. Potom su dokazane važnije osobine:

TEOREMA 2.1.2. - Ako je σ_P centralna simetrija sa centrom P, onda u EP ravni postoji izotropni niz tačaka $\tilde{p}_0$ čije su sve tačke dvojne.

Zatim su dokazane teoreme 2.1.3. (2.1.5) kojima se tvrdi da centralna simetrija duž (izotropnu duž) preslikava na podudarnu duž (izotropnu duž). Teoremom 2.1.4. dokazano je da je centralna simetrija kolineacija, tj. kolinearne tačke preslikava u kolinearne, a teoremom 2.1.6. - da paralelne tačke preslikava na paralelne.

U tački 2.2. definisali smo osnu simetriju EP ravni čija je osa prava p i označili je σ_p. Zatim su dokazane teoreme 2.2.2. i 2.2.3, kojima se tvrdi da osna simetrija duž (izotropnu duž) preslikava na podudarnu duž (izotropnu duž).

U Glavi 3. obradjene su transformacije podudarnosti u EP ravni.

U tački 3.1. definisali smo transformaciju podudarnosti EP ravni α kao bijektivno preslikavanje $f : \alpha \to \alpha$, tako da transformacija f duž (izotropnu duž) preslikava na podudarnu duž (izotropnu duž). Nakon toga, teoremom 3.1.3, dokazano je da skup svih transformacija podudarnosti EP ravni predstavlja grupu u odnosu na kompoziciju (proizvod) preslikavanja. Na osnovu definicije transformacije podudarnosti i teorema iz drugog poglavlja odmah se zaključuje: centralna i osna simetrija predstavljaju transformacije podudarnosti EP ravni.

Dokazane su i sledeće važne teoreme:

TEOREMA 3.1.8. - Kompozicija dve centralne simetrije čiji su centri kolinearne i pritom suprotne tačke, predstavlja osnu simetriju.

TEOREMA 3.1.16. - Svaka transformacija podudarnosti EP ravni može da se prikaže kao kompozicija najviše tri centralne simetrije.

U tački 3.2. pomoću transformacije podudarnosti definisana je relacija podudarnosti bilo kojih figura u EP ravni. Potom su dokazane teoreme koje govore o uslovima kojima se utvrdjuje podudarnost pojedinih geometrijskih figura (ugao, trougao, jednougao), jer ti uslovi nisu uvek na idealan način dati postojanjem transformacije podudarnosti koja jednu figuru preslikava na drugu.

U tački 3.3. razmatrane su neke specijalne vrste transformacija podudarnosti EP ravni, kao minimalne simetrijske reprezentacije. Naime, ispitana su svojstva transformacija podudarnosti koja se dobijaju kao kompozicija dve centralne simetrije, pri čemu su centri kolinearne ali ne i suprotne tačke, odnosno - dve paralelne tačke. Prvu transformaciju nazvali smo translacija u EP ravni (v. definiciju 3.3.1), a drugu centralna rotacija (v. definiciju 3.3.2).

Transformaciju podudarnosti EP ravni koja se dobija kao kompozicija centralne simetrije i centralne rotacije, čiji se centri poklapaju, odnosno kao kompoziciju tri centralne simetrije čiji su centri temena jednougla, nazvali smo klizajuća simetrija u EP ravni.

Glava 4. posvećena je dokazu logičke neprotivurečnosti EP geometrije.

Naime, u tački 4.1. izgradjen je jedan model EP geometrije u realnoj projektivnoj ravni koja je odredjena aksiomatski na sledeći način. U projektivnoj ravni zadata je degenerisanja imaginarna kriva drugog reda koja se sastoji od para konjugovanja kompleksnih pravih $\bar{p}$ i $\bar{q}$ i realne tačke S njihovog preseka. U pramenu projektivnih pravih sa središtem u tački S konjugovano kompleksnim pravama $\bar{p}$ i $\bar{q}$ zadata je eliptična involucija, koju još nazivamo i apsolutna involucija, a središte pramena S nesvojstvenom tačkom EP geometrije. Nesvojstvenu tačku S i apsolutnu involuciju nazivamo apsolutnom EP ravni.

U podtačkama 4.1.1. i 4.1.2. objektima i relacijama projektivne ravni realizovani su osnovni objekti i osnovne relacije EP geometrije.

Nakon toga, u tački 4.2. interpretiran je sistem aksioma EP ravni izložen u prvom poglavlju ovog rada.

U ovom radu nismo se bavili pitanjima nezavisnosti i potpunosti izloženog sistema aksioma.

*
* *

Na kraju, čini mi posebnu čast da se zahvalim akademiku prof.dr Milevi Prvanović na svestranoj i nesebičnoj pomoći koju mi je pružala u toku izrade ovog rada. Ona je za svo vreme pratila tok izrade rada dajući korisne predloge i sugestije.

Zahvaljujem se istovremeno i prof.dr Zagorki Šnajder na predlozima i sugestijama koji su mi koristili u toku rada.

Takodje dugujem zahvalnost i Andjelki Milinčić, daktilografu iz Niša, koja je svojim trudom doprinela da rad dobije ovakvu estetsku formu.

A u t o r

Glava 1.

Aksiomatičko zasnivanje dvodimenzionalne EP geometrije u u smislu Keli - Klajna

1.0. UVOD

Pri aksiomatičkom zasnivanju EP geometrije polazimo od proizvoljnog nepraznog skupa α. Skup α nazivamo EP ravan, a njegove elemente tačkama EP ravni koje označavamo velikim latinskim slovima A, B, C, ... Uočimo zatim klasu C_p podskupova skupa α. Elemente klase C_p nazivamo pravama EP ravni i obeležavamo malim latinskim slovima a, b, c, ... Dakle, *osnovni objekti* EP geometrije su *tačke* i *prave*. Za *osnovne relacije* nad skupom α uzimamo relacije: "... *je incidentno* ...", za tačke i prave; *razdvojenost dva para tačaka* koje su incidentni sa istom pravom; "... *je podudarno* ..." u skupu svih duži. Osnovni objekti i osnovne relacije čine *osnovne pojmove* EP geometrije.

Osnovni geometrijski pojmovi EP geometrije okarakterisani su:

I Aksiomama incidencije,

II Aksiomama rasporeda,

III Aksiomama neprekidnosti, i

IV Aksiomama podudarnosti.

U narednim tačkama ovog poglavlja izložićemo ove grupe aksioma i izvesti neke njihove važnije posledice.

1.1. AKSIOME INCIDENCIJE I NJIHOVE NEPOSREDNE POSLEDICE

Osnovni geometrijski objekti tačke i prave nalaze se u izvesnom medjusobnom odnosu koji nazivamo: "... je incidentno ...". Naime, ako je tačka A incidentna sa pravom m onda još kažemo: *tačka A je element prave* m (u oznaci $A \in m$), ili: *prava* m *sadrži tačku* A. Ako tačka A i prava m nisu incidentne onda to simbolički zapisujemo: $A \notin m$.

Osnovni objekti tačke i prave i osnovna relacija "... je incidentno..." zadovoljavaju sledeće *aksiome incidencije:*

AKSIOMA I_1. - Svake dve tačke incidentne su sa najviše jednom pravom.

DEFINICIJA 1.1.1. - Tačke A i B nazivamo *kolinearnim* ako postoji prava m sa kojom su one incidentne, tj. $A, B \in m$. Kolinearne tačke A i B simbolički označavamo: $A — B$.

Ako su tačke A i B kolinearne i pritom incidentne sa nekom pravom m, onda tu pravu možemo simbolički označiti i sa $p(A,B)$ $(m = p(A,B))$.

DEFINICIJA 1.1.2. - Tačke P i Q nazivamo *paralelnim* ako ne postoji prava koja je sa njima incidentna. Paralelne tačke P i Q simbolički označavamo: $P \mid Q$.

AKSIOMA I_2. - Svaka prava incidentna je sa najmanje tri razne tačke.

AKSIOMA I_3. - Postoji prava m i tačka M koje nisu incidentne.

AKSIOMA I_4. - Ako tačka M nije incidentna sa pravom m onda postoji jedna i samo jedna tačka P incidentna sa pravom m, tako da je P paralelna sa M.

DEFINICIJA 1.1.3. - Ako tačka $M \notin m$ a tačka $P \in m$ tako da je $P \mid M$, onda tačku P nazivamo *projekcijom* tačke M na pravu m, i to simbolički označavamo:

$$P = pr_m M \ .$$

Ako je tačka $M \in m$, onda je njena projekcija na pravu m sama tačka M.

AKSIOMA I_5. - Ma kakve bile dve prave postoji tačka koja je incidentna sa svakom od njih.

DEFINICIJA 1.1.4. - Skup koji čini zadata tačka A i sve tačke koje su joj paralelne nazivamo *izotropni niz tačaka* (izotropna prava) sa osnovom A, i označavamo ga sa $\tilde{a}$.

Na osnovu aksioma incidencije mogu se dokazati teoreme:

TEOREMA 1.1.1. - Ako je

(1a,b) $\qquad A|B \wedge B|C \ ,$

onda je i

(2) $\qquad A \mid C \ .$

Dokaz. - Pretpostavimo da su ispunjene relacije (1a,b). Prema aksiomi I_1, za tačke A i C postoji prava m tako da je

(3a,b) $\qquad$ ili $A,C \in m$, $\quad$ ili $A,C \notin m$.

Ako je tačna relacija (3a), onda na osnovu pretpostavki (1a,b), sledi da tačka $B \in m$ i postoje dve tačke A i C incidentne sa pravom m koje su paralelne sa tačkom B, što je protivurečno aksiomi I_4.

Dakle, ostaje da je tačna relacija (3b), što prema definiciji 1.1.2, dokazuje egzistenciju relacije (2). Q.E.D.

TEOREMA 1.1.2. - Ako je

(1a,b) $\qquad A \mid B \wedge B — C \ ,$

onda je

(2) $\qquad A — C \ .$

Dokaz. - Neka su zadovoljene relacije (1a,b), a pretpostavimo da relacija (2) nije tačna, tj. da je

(3) $A \not| C$.

Medjutim, relacije (1a) i (3) su protivurečne aksiomi I_4, te zaključujemo da je relacija (2) tačna. Q.E.D.

TEOREMA 1.1.3. - Tačka B incidentna je sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{a}$ onda i samo onda ako je tačka B paralelna proizvoljnoj tački $M \in \tilde{a}$. Bilo koja tačka M može biti uzeta za osnovu izotropnog niza tačaka $\tilde{a}$.

Dokaz. - Neka je dat izotropni niz tačaka $\tilde{a}$ sa osnovom A. Uočimo proizvoljnu tačku M tog niza, za koju prema definiciji 1.1.4, važi

(1) $M \mid A$.

Pretpostavimo da je tačka $B \in \tilde{a}$. Prema definiciji 1.1.4, to znači da je tačka B paralelna sa osnovom A, tj.

(2) $B \mid A$.

Na osnovu relacija (1) i (2), prema teoremi 1.1.1, sledi da je

(3) $B \mid M$,

što je trebalo i dokazati.

Pretpostavimo zatim obrnuto, tj. da je ispunjena relacija (3). Kako je M proizvoljna tačka izotropnog niza tačaka $\tilde{a}$ to znači važi relacija (1). Na osnovu relacija (3) i (1), prema teoremi 1.1.1, sledi da je $B|A$, a što prema definiciji 1.1.4, znači da je tačka $B \in \tilde{a}$.

Obzirom na teoremu 1.1.1, bilo koja tačka M izotropnog niza tačaka $\tilde{a}$ može biti uzeta za osnovu. Q.E.D.

TEOREMA 1.1.4. - Bilo koja tačka A odredjuje jedan i samo jedan izotropni niz tačaka sa kojim je ona incidentna.

Dokaz. - Neka je data proizvoljna tačka A i neka su A_i tačke tako da je

(1) $A_i \mid A, \quad i=1,2,\ldots$

Prema definiciji 1.1.4, time je zadat izotropni niz tačaka $\tilde{a}$ sa osnovom A. Prema teoremi 1.1.3, bilo koja tačka A_i može biti osnova izotropnog niza tačaka $\tilde{a}$.

Ako bi tačka A bila incidentna i sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{b}$ različitim od $\tilde{a}$, onda bi prema teoremi 1.1.3, tačka A bila paralelna sa proizvoljnom tačkom $M \in \tilde{b}$, tj.

(2) $A \mid M$.

Iz relacija (1) i (2), prema teoremi 1.1.1, sledi

(3) $A_i \mid M$.

Relacija (3) znači da je proizvoljna tačka M izotropnog niza tačaka $\tilde{b}$ paralelna sa proizvoljnom tačkom A_i izotropnog niza tačaka $\tilde{a}$, tj. sa osnovom $\tilde{a}$, što prema definiciji 1.1.4, znači da su tačke izotropnog niza tačaka $\tilde{b}$ istovremeno i tačke izotropnog niza tačaka $\tilde{a}$. Dakle, izotropni niz tačaka $\tilde{a}$ je jedini, što je trebalo i dokazati. Q.E.D.

TEOREMA 1.1.5. - Za ma koji izotropni niz tačaka $\tilde{a}$ i ma koju pravu m postoji jedna i samo jedna tačka incidentna sa svakim od njih.

Dokaz. - Neka je m proizvoljna prava. Prema aksiomi I_3, postoji tačka A tako da

(1) $A \notin m$.

Tačkom A, prema teoremi 1.1.4, odredjen je jedan i samo jedan izotropni niz tačaka $\tilde{a}$ incidentan sa tačkom A. Dokažimo da postoji jedna i samo jedna tačka P, tako da je

(2) $m \cap \tilde{a} = \{P\}$.

Na osnovu relacije (1), prema aksiomi I_4, postoji jedna i samo jedna tačka P, tako da je

(3a,b) $P \in m \wedge P \mid A$.

Iz relacije (3b), prema teoremi 1.1.3, tačka P je incidentna sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{a}$, tj.

(4) $P \in \tilde{a}$.

Na osnovu relacija (3a) i (4), sledi relacija (2), što je trebalo i dokazati. Q.E.D.

TEOREMA 1.1.6. - Svaki izotropni niz tačaka incidentan je sa najmanje dve tačke. Postoje bar tri tačke koje nisu incidentne sa jednim izotropnim nizom tačaka.

Dokaz. - Neka je m proizvoljna prava. Prema aksiomi I_2, postoje najmanje tri razne tačke P, Q i R, tako da je

(1) $P, Q, R \in m$.

Na osnovu aksiome I_3 postoji tačka $A \notin m$. Tačkom A, prema teoremi 1.1.4, odredjen je izotropni niz tačaka $\tilde{a}$, tako da je

(2) $A \in \tilde{a}$.

Prema teoremi 1.1.5, sledi

(3) $(\exists B)\ (B \in \tilde{a} \wedge B \in m)$

Neka je tačka B identična sa jednom od tačaka prave m , recimo, neka je $B \equiv P$. Dakle, prema relacijama (2) i (3), sledi

(4) $A, P \in \tilde{a}$.

Da je tačan i drugi deo teoreme, neposredno se zaključuje iz relacija (1) i (4), tj. postoje tri tačke A, P i Q (ili A, P i R) koje nisu incidentne sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{a}$. Q.E.D.

TEOREMA 1.1.7. - Ako su $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ dva razna izotropna niza tačaka, onda je

(1) $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \emptyset$.

Dokaz. - Neka su prema uslovu teoreme $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ dva različita izotropna niza tačaka. Pretpostavimo suprotno, tj. da nije tačna relacija (1). To znači da

(2) $(\exists P)\ (P \in \tilde{a} \ \wedge \ P \in \tilde{b})$.

Medjutim, prema teoremi 1.1.4, tačkom P je odredjen jedan i samo jedan izotropni niz tačaka, te je

(3) $\tilde{a} \equiv \tilde{b}$.

No, relacija (3) je protivurečna pretpostavci da su $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ različiti izotropni nizovi tačaka. Prema tome ostaje da je relacija (1) tačna. Q.E.D.

1.2. AKSIOME RASPOREDA. NEPOSREDNE POSLEDICE AKSIOMA INCIDENCIJE I RASPOREDA

U uvodnoj tački 1.0, rečeno je da je u EP geometriji jedna od osnovnih relacija kojom se ustanovljava raspored tačaka koje su incidentne sa istom pravom relacija: *razdvojenost dva para tačaka*. Ova relacija okarakterisana je sledećim *aksiomama rasporeda:*

AKSIOMA II_1. - Za tri razne tačke A, B i C incidentne sa jednom pravom, postoji tačka D incidentna sa tom pravom, tako da par A, B razdvaja par C, D, što simbolički zapisujemo:

$$A,B \;//\; C,D .$$

AKSIOMA II_2. - Ako

$$A,B \;//\; C,D ,$$

tada su A, B, C i D četiri razne kolinearne tačke. Razdvojenost parova tačaka je uzajamna i ne zavisi od reda tačaka u svakom paru.

AKSIOMA II_3. - Ako su A, B, C i D četiri razne kolinearne tačke, onda

$$\text{ili } A,B \;//\; C,D \quad \text{ili } A,C \;//\; B,D \quad \text{ili } A,D \;//\; B,C.$$

AKSIOMA II_4. - Ako su A, B, C, D i E pet kolinearnih tačaka, tako da

$$C,D \;//\; A,B \;\wedge\; C,E \;//\; A,B ,$$

onda par D,E ne razdvaja par A,B, što zapisujemo:

$$\neg(D,E \;//\; A,B).$$

AKSIOMA II_5. - Ako su A, B, C, D i E pet kolinearnih tačaka, tada važi implikacija

$$\rceil (C,D \parallel A,B) \wedge \rceil (C,E \parallel A,B) \Longrightarrow \rceil (D,E \parallel A,B).$$

AKSIOMA II_6. - Neka su m i m' dve razne prave, A,B,C,D tačke incidentne sa pravom m, a A', B', C', D' tačke incidentne sa pravom m' tako da je

$$p(A,A') \cap p(B,B') \cap p(C,C') \cap p(D,D') = \{S\} .$$

Tada važi:

$$A,B \parallel C,D \Longrightarrow A',B' \parallel C',D' .$$

AKSIOMA II_7. - Ako su $M_i \in m$ i $P_i = pr_p M_i$, $i=1,2,3,4$, tada važi

$$M_1,M_2 \parallel M_3,M_4 \Longrightarrow P_1,P_2 \parallel P_3,P_4 ,$$

za bilo koju pravu p .

Neka su A i B dve kolinearne tačke EP ravni. To, prema definiciji 1.1.1, znači postoji prava m koja je sa njima incidentna, tj. $A,B \in m$. Prema aksiomi I_2, postoji još jedna tačka C incidentna sa pravom m . Za $A, B, C \in m$, na osnovu aksiome II_1, sledi

(1) $\qquad (\exists M)(M \in m \wedge B,M \parallel A,C)$.

Iz (1), na osnovu aksiome II_3, imamo da

(2) $\qquad \rceil (A,B \parallel C,M)$.

Primenom aksiome II_1, na tačke $A, B, M \in m$, sledi

(3) $\qquad (\exists N)(N \in m \wedge B,N \parallel A,M)$.

Iz relacije (3), na osnovu aksiome II_3, dobijamo

(4) $\qquad \rceil (A,B \parallel M,N)$.

Iz relacija (2) i (4), na osnovu aksiome II_5, sledi da

$$\rceil(A,B \;//\; C,N).$$

Ako ovaj postupak nastavimo dolazimo do:

TEOREME 1.2.1. - Ma kakve bile tri kolinearne tačke A, B i C, postoji bezbroj tačaka X, takvih da

$$\rceil(A,B \;//\; C,X).$$

Sada možemo definisati duž:

DEFINICIJA 1.2.1. - Duž je skup od tri kolinearne tačke A, B i C i svih tačaka X, tako da

$$\rceil(A,B \;//\; C,X).$$

A i B su *krajnje tačke duži*, a ostale tačke su njene *unutrašnje tačke*. Ovu duž označavamo ACB ili AB ako znamo šta su njene unutrašnje tačke.

Pretpostavimo, zatim, da za četiri kolinearne tačke A, B, C i D incidentne sa pravom m, važi

(5) $$A,B \;//\; C,D.$$

Ako napred opisani postupak primenimo na tačke A, B i D, tj. u prethodnom postupku tačku C zamenimo tačkom D, dolazimo do još jedne duži čije su krajnje tačke A i B. Naime, to je skup od tri kolinearne tačke A, B, D i svih tačaka Y, tako da

$$\rceil(A,B \;//\; D,Y).$$

Pokažimo da ni jedna unutrašnja tačka prve duži ne može istovremeno biti i unutrašnja tačka druge duži i obrnuto. U tom cilju dovoljno je dokazati da par D,X uvek razdvaja par A,B.

Pretpostavimo suprotno, tj. da

(6) $$\rceil(D,X \;//\; A,B).$$

Po definiciji unutrašnjih tačaka prve duži imamo da je

(7) $\neg(C,X \,//\, A,B)$.

Na osnovu relacija (6) i (7), prema aksiomi II_5, sledi da

(8) $\neg(A,B \,//\, C,D)$.

No, relacija (8), protivrečna je pretpostavci (5). Prema tome, dobijena protivrečnost pokazuje da

$$A,B \,//\, D,X,$$

što prema definiciji unutrašnjih tačaka druge duži, znači da proizvoljna tačka X, kao unutrašnja tačka prve duži, nije istovremeno i unutrašnja tačka druge duži.

Analognim postupkom pokazuje se da i proizvoljna unutrašnja tačka Y druge duži, nije istovremeno i unutrašnja tačka prve duži. Prema tome, uočene duži sa istim krajnjim tačkama nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Time je dokazana:

TEOREMA 1.2.2. - Dve tačke prave odredjuju na toj pravoj dve duži koje nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka.

DEFINICIJA 1.2.2. - Za duži, koje odredjuju dve tačke jedne prave, kažemo da *dopunjuju jedna drugu.*

Analogno kao u projektivnoj i eliptičnoj geometriji, da bismo duž razlikovali od njene dopunske duži, pored krajnjih tačaka navodimo još i neku unutrašnju tačku te duži. Tako napred uočenu prvu duž označavamo AXB, a drugu AYB (A i B - krajnje tačke, X i Y - unutrašnje tačke ovih duži). Medjutim, ako smo jednu od dopunskih duži uočili i označimo je samo sa AB, onda njenu dopunsku duž možemo označiti $\overline{AB}$.

DEFINICIJA 1.2.3. - Ako su tačke A, B i M incidentne sa pravom m , onda skup tačaka X prave m i tačke M, za koje važi

$$\neg(M,X \,//\, A,B),$$

nazivamo *otvorena duž*, i označavamo je:]AMB[=]AB[. Skup

$$]AMB[\cup A \cup B,$$

nazivamo *zatvorena duž*, i označavamo je: $[AMB] = [AB]$.

Neka je uočena duž AB na pravoj m čije su krajnje tačke A i B i njena dopuna $\overline{AB}$. Ako označimo sa $[AB]$ zatvorenu koja odgovara duži AB, onda je njena dopuna otvorena duž $]\overline{AB}[$.

TEOREMA 1.2.3. - Svaka tačka incidentna je bar sa tri prave i jednim izotropnim nizom tačaka.

Dokaz. - Uočimo proizvoljnu tačku S. Prema aksiomi I_3, sledi postoji prava m, tako da $S \notin m$. Na pravoj m, prema aksiomi I_2, postoje tačke $A,B,C \in m$, a na osnovu aksiome I_4, sledi

(1a,b) $$(\exists M)(M \in m \wedge M|S).$$

Kako je M i jedina tačka incidentna sa pravom m i paralelna sa tačkom S, to prema teoremi 1.1.2, sledi

(2) $$S — A, \quad S — B, \quad S — C$$

Dakle, iz relacija (1b) i (2), prema definiciji 1.1.4 i 1.1.1, sledi da postoji izotropan niz tačaka $\tilde{s}$ sa osnovom S i prave $p(A,S)$, $p(B,S)$, $p(C,S)$ incidentne sa tačkom S.

Da uočene prave nisu jedine prave, zaključuje se na osnovu teoreme 1.2.1. Q.E.D.

DEFINICIJA 1.2.4. - Skup pravih koje su incidentne sa tačkom O, nazivamo *pramen pravih* sa središtem O.

Ako su prave p, q, r, ... elementi pramena pravih sa središtem O, onda taj pramen simbolički označavamo:

$$O(p,q,r,\ldots) .$$

Neka su prave p,q,r,s elementi pramena pravih sa središtem O, a m prava, tako da $O \notin m$, pri čemu je

$$p \cap m = \{P\} , \quad q \cap m = \{Q\} ,$$

$$r \cap m = \{R\} , \quad s \cap m = \{S\} .$$

Tačke P, Q, R i S nazivamo presečnim tačkama pramena pravih

$O(p,q,r,s)$ i prave m.

DEFINICIJA 1.2.5. - Za par pravih p,q, pramena $O(p,q,r,s)$, kažemo da *razdvaja* par pravih r,s tog pramena, tj.

$$p,q \;//\; r,s \;,$$

ako par presečnih tačaka P,Q, ovog pramena i prave m, $O \notin m$, razdvaja par presečnih tačaka R,S, tj.

$$P,Q \;//\; R,S \;.$$

Prema aksiomi II_6, razdvojenost parova pravih nekog pramena ne zavisi od izbora prave m.

Neka je zadat pramen pravih sa središtem O. Prema teoremi 1.2.3, u tom pramenju postoje najmanje tri prave p,q,r i izotropni niz tačaka $\tilde{o}$ sa osnovom O. Prema aksiomi I_3, postoji prava m, $O \notin m$, a prema aksiomi I_5 i teoremi 1.1.5:

$$p \cap m = \{P\} \;, \quad q \cap m = \{Q\} \;,$$

$$r \cap m = \{R\} \;, \quad \tilde{o} \cap m = \{M\} \;.$$

Za tačke P,Q,R i M incidentne sa pravom m, prema aksiomi II_3, sledi

$$\text{ili } P,Q \;//\; R,M \quad \text{ili} \quad P,R \;//\; Q,M \quad \text{ili} \quad Q,R \;//\; P,M \;,$$

tj. na jedan jedini način mogu se obrazovati dva razdvojena para.

Sada smo u mogućnosti, analogno definiciji 1.2.5, da iskažemo definiciju:

DEFINICIJA 1.2.6. - Za tri prave p,q,r pramena pravih sa središtem O i izotropni niz tačaka $\tilde{o}$ sa osnovom O, kažemo da

$$p,q \;//\; r, \tilde{o},$$

ako za tačke P,Q,R i M dobijene respektivno u preseku pravih p,q,r, izotropnog niza tačaka $\tilde{o}$ i proizvoljne prave m, koja nije incidentna sa tačkom O, važi

$$P,Q \,//\, R,M \,.$$

Jasno je, dakle, da se od tri prave pramena i izotropnog niza tačaka čija je osnova središte pramena, na jedinstven način mogu obrazovati dva para koji jedan drugog razdvajaju.

DEFINICIJA 1.2.7. - Ako za tri prave p,q,r pramena sa središtem O i izotropni niz tačaka $\tilde{o}$ sa osnovom O, važi da

$$p,q \,//\, r,\tilde{o} \,,$$

onda još kažemo da je prava r *izmedju* pravih p i q (u oznaci: (p - r - q)), odnosno prave p i q nalaze se *sa raznih strana* prave r ; medjutim, ako važi

$$\neg(p,q \,//\, r,\tilde{o}\,),$$

onda za prave p i q kažemo da se nalaze *sa iste strane* prave r .

Sada možemo definisati ugao.

DEFINICIJA 1.2.8. - *Ugao* je skup koji se sastoji od pravih p i q i svake prave m koja je incidentna sa njihovom presečnom tačkom i pritom nalazi se izmedju pravih p i q .

Ako je $p \cap q = \{O\}$, tačku O nazivamo *teme ugla*, a prave p i q *kracima ugla*. Za pravu m , $O \in m$, koja je izmedju pravih p i q , tj.

$$p,q \,//\, m,\tilde{o} \,,$$

kažemo da je *unutrašnja prava ugla*. Tačke koje su incidentne sa unutrašnjim pravama ugla su *unutrašnje tačke ugla*. Ugao čiji su kraci prave p i q označavamo: $\angle\, pq$; ako je $P \in p$ i $Q \in q$, onda pišemo: $\angle\, P\,O\,Q$.

Neka je zadat izotropni niz tačaka $\tilde{p}$. Prema teoremi 1.1.6, sledi

$$(\exists P,Q \in \tilde{p}) \wedge (\exists O \notin \tilde{p}).$$

Uočimo pramen pravih sa središtem u tački O. Neka su $p(O,P)$, $p(O,Q)$ i m prave tog pramena, a $\tilde{o}$ izotropan niz tačaka sa osnovom O. Označimo

$$m \cap \tilde{p} = \{M\}\,.$$

Za tačke $P, Q, M \in \tilde{p}$ možemo iskazati definiciju:

DEFINICIJA 1.2.9. - Za tačku M izotropnog niza tačaka $\tilde{p}$ kažemo da *je izmedju* tačaka P i Q tog niza, ako je

$$p(O,P),\ p(O,Q)\ //\ m,\ \tilde{o},$$

tj. ako je prava m, pramena $O(p(O,P),\ p(O,Q),m)$, $O \in \tilde{p}$, izmedju pravih $p(O,P)$ i $p(O,Q)$.

Ako je tačka M izmedju tačaka P i Q izotropnog niza tačaka $\tilde{p}$, onda to simbolički zapisujemo: $(P \sim M \sim Q)$.

DEFINICIJA 1.2.10. - Ako su tačke P, P', Q i M incidentne sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}$, tako da je

$$(P \sim M \sim P') \wedge \urcorner (P \sim M \sim Q)\,,$$

onda kažemo da su na izotropnom nizu tačaka $\tilde{p}$ tačke P i P' *sa raznih strana* tačke M, a tačke P i Q *sa iste strane* tačke M.

DEFINICIJA 1.2.11. - Skup svih tačaka izotropnog niza tačaka $\tilde{p}$ koje se nalaze sa iste strane tačke $P \in \tilde{p}$, nazivamo *izotropni poluniz* sa početnom tačkom P.

Ako je tačka M incidentna sa izotropnim polunizom čija je početna tačka P, onda taj poluniz simbolički označavamo: $i\tilde{p}([PM)$.

DEFINICIJA 1.2.12. - Skup tačaka koji se sastoji od para paralelnih tačaka P i Q i svih paralelnih tačaka izmedju njih nazivamo *izotropna duž*, i označavamo je: $\tilde{PQ}$. Tačke P i Q su incidentne sa jednim izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}$, a nazivamo ih *krajnjim tačkama izotropne duži*. Tačke izotropnog niza tačaka $\tilde{p}$ koje leže izmedju tačaka A i B nazivamo *unutrašnje tačke izotropne duži* $\tilde{PQ}$. Sve ostale tačke izotropnog niza tačaka $\tilde{p}$ nazivamo *spoljašnjim* u odnosu na izotropnu duž $\widetilde{PQ}$.

DEFINICIJA 1.2.13. - Skup svih tačaka izotropnog niza tačaka koje se nalaze izmedju tačaka P i Q tog niza nazivamo *otvorena izotropna duž* (u oznaci $]\widetilde{PQ}[$). Skup

$$]\widetilde{PQ}[\ \cup P \cup Q\ ,$$

je *zatvorena izotropna duž* (u oznaci $[\widetilde{PQ}]$).

DEFINICIJA 1.2.14. - Ako za tri razne tačke EP ravni važi da je

$$A \text{ — } B,\quad B \text{ — } C,\quad A \text{ — } C\ ,$$

i istovremeno nisu incidentne sa jednom pravom, kažemo da obrazuju *trotemenik* ABC.

TEOREMA 1.2.4. - Neka je ABC trotemenik, a m i m' dve prave koje nisu incidentne ni sa jednom od tačaka A, B i C. Neka je, dalje

$$m \cap p(A,B)=\{M\},\quad m \cap p(B,C)=\{N\},\quad m \cap p(A,C)=\{P\}\ ,$$

$$m' \cap p(A,B)=\{M'\},\quad m' \cap p(B,C)=\{N'\},\quad m' \cap p(A,C)=\{P'\}\ .$$

Ako

$$\urcorner(M,M' \,/\!/\, A,B) \wedge \urcorner(N,N' \,/\!/.\, B,C)\ ,$$

sledi da

$$\urcorner(P,P' \,/\!/\, A,C)\ .$$

Dokaz ove teoreme analogan je dokazu odgovarajuće teoreme u eliptičnoj i projektivnoj geometriji (v. [29], str. 163; [13], str. 292).

TEOREMA 1.2.5. - Neka je ABC trotemenik, a $\tilde{m}$ i $\tilde{m}'$ dva izotropna niza tačaka, tako da

$$(1)\qquad A,B,C \notin \tilde{m} \wedge A,B,C \notin \tilde{m}'\ ,$$

i

$$\tilde{m} \cap p(A,B)=\{X\}, \quad \tilde{m} \cap p(B,C)=\{Y\}, \quad \tilde{m} \cap p(A,C)=\{Z\} ,$$

(2)

$$\tilde{m}' \cap p(A,B)=\{X'\}, \quad \tilde{m}' \cap p(B,C)=\{Y'\}, \quad \tilde{m}' \cap p(A,C)=\{Z'\}.$$

Ako važi da

(3a,b) $\quad \rceil(X,X' \,//\, A,B) \wedge \rceil(Y,Y' \,//\, B,C)$,

sledi da

(4) $\quad \rceil(Z,Z' \,//\, A,C)$.

Dokaz. - Neka su zadati trotemenik ABC i izotropni nizovi tačaka $\tilde{m}$ i $\tilde{m}'$, tako da važi (1), (2) i (3a,b). Za tačke A,B,X,X' incidentne sa pravom p(A,B), prema definiciji 1.1.3, sledi da su njihove projekcije na pravu p(A,C):

(5) $\quad A=pr_{p(A,C)} A, \quad D=pr_{p(A,C)} B, \quad Z=pr_{p(A,C)} X, \quad Z'=pr_{p(A,C)} X'$.

Iz pretpostavke (3a), na osnovu aksiome II_3, sledi

(6) $\quad A,X \,//\, B,X'$.

Prema aksiomi II_7, iz relacija (6) i (5), imamo da

$$A,Z \,//\, D,Z' ,$$

odnosno, prema aksiomi II_3:

(7) $\quad \rceil(A,D \,//\, Z,Z')$.

Takodje, ako uočimo tačke B,C,Y,Y' incidentne sa pravom p(B,C), onda su njihove projekcije na pravu p(A,C):

(8)

$$D = pr_{p(A,C)} B, \quad C = pr_{p(A,C)} C ,$$

$$Z = pr_{p(A,C)} Y, \quad Z' = pr_{p(A,C)} Y' .$$

Iz pretpostavke (3b) i relacije (8), prema aksiomi II_3 i II_7, dobijamo da

(9) $\neg(C,D \;//\; Z,Z')$.

Konačno, iz relacija (7) i (9), prema aksiomi II_5, sledi relacija (4), što je trebalo dokazati. Q.E.D.

TEOREMA 1.2.6. - Neka je ABC trotemenik, a m prava i $\tilde{o}$ izotropni niz tačaka, tako da

(1) $A,B,C \notin m \;\wedge\; A,B,C \notin \tilde{o}$

i

$$m \cap p(A,B)=\{M\},\quad m \cap p(B,C)=\{N\},\quad m \cap p(A,C)=\{P\}\ ,$$
(2)
$$\tilde{o} \cap p(A,B)=\{M'\},\quad \tilde{o} \cap p(B,C)=\{N'\},\quad \tilde{o} \cap p(A,C)=\{P'\}\ .$$

Ako

(3a,b,c) $\neg(M,M' \;//\; A,B) \wedge \neg(N,N' \;//\; B,C) \wedge P \neq P'$,

onda i

(4) $\neg(P,P' \;//\; A,C)$.

Dokaz. - Pretpostavimo da je zadat trotemenik ABC, prava m i izotropni niz tačaka $\tilde{o}$, tako da važi (1), (2) i (3a,b,c). Za pravu m i izotropni niz tačaka $\tilde{o}$, prema teoremi 1.1.5, postoji jedinstvena tačka O, tako da je

(5) $m \cap \tilde{o} = \{O\}$.

Uočimo pramen pravih sa središtem O. S obzirom da je tačkom O odredjen jedan i samo jedan izotropni niz tačaka, to se on poklapa sa zadatim $\tilde{o}$. Kako iz (3a,b,c), sledi da je $M \neq M'$, $N \neq N'$, $P \neq P'$, to s obzirom na (2) i (5), sledi da:

$$O \notin p(A,B) \;\wedge\; O \notin p(B,C) \;\wedge\; O \notin p(A,C)\ .$$

Neka su p(A,O), p(B,O) i m=p(M,O) tri prave pramena sa središtem O. Za pramen O (p(A,O),p(B,O),m,$\tilde{o}$), na osnovu pretpostavke (3a), prema definiciji 1.2.6, sledi

(6) $\quad \rceil(m, \tilde{o} \,/\!/\, p(A,O),\ p(B,O))$.

Označimo

(7) $\quad p(B,O) \cap p(A,C) = \{D\}$.

Iz relacija (2) i (7), sledi da su A,D,P,P′ tačke incidentne sa pravom p(A,C) i istovremeno dobijene u preseku ove prave i uočenih pravih pramena sa središtem O i izotropnog niza tačaka $\tilde{o}$. Za ove tačke iz relacije (6), prema definiciji 1.2.6, dobija se da

(8) $\quad \rceil(P,P' \,/\!/\, A,D)$.

Na analogan način, za tačke C,D,P,P′ incidentne sa pravom p(A,C), i istovremeno dobijene u preseku ove prave i pramena O(p(B,O), p(C,O), m,$\tilde{o}$), na osnovu pretpostavke (3b), dobijamo da i

(9) $\quad \rceil(P,P' \,/\!/\, C,D)$.

Konačno, iz relacija (8) i (9), prema aksiomi II_5, sledi relacija (4). Q.E.D.

Uočimo trotemenik ABC, a zatim na pravama p(A,B), p(B,C), p(A,C), redom, duži AB, BC, AC i njihove dopunske duži $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$. Izaberimo od ovih šest duži, recimo, duži AB i BC. Neka su X i Y proizvoljne tačke tako da $X \in \overline{AB}$ a $Y \in \overline{BC}$. Za ove tačke važi

$$\text{ili } (\exists m)(X,Y \in m), \quad \text{ili } X \mid Y .$$

Ako postoji prava m incidentna sa tačkama X i Y, onda prema aksiomi I_5:

$$(\exists Z)(m \cap p(A,C) = \{Z\}) .$$

Ako tačke X i Y prolaze dopunske duži $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, tako da su uvek kolinearne, onda će, prema teoremi 1.2.4, tačka Z prolaziti jednu od duži AC ili $\overline{AC}$.

Takodje, ako su X i Y paralelne, tj. ako su incidentne sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{x}$ sa osnovom X, onda prema teoremi 1.1.5, imamo

$$(\exists\, Z')(\tilde{x} \cap p(A,C) = \{Z'\}) .$$

Kako, prema definiciji 1.1.4, imamo da

$$(\forall X \in \overline{AB})(\exists\, \tilde{x})(\tilde{x} \cap p(B,C) = \{Y\} \wedge \tilde{x} \cap p(A,C) = \{Z'\})$$

to, prema teoremi 1.2.5, dobijamo da

$$\text{ili } Z' \in AC, \quad \text{ili } Z' \in \overline{AC} .$$

Dakle, i tačka Z′ prolaz jednu duži AC ili $\overline{AC}$, kod X i Y prolaze dopunske duži $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$.

Pretpostavimo da su $Z, Z' \in \overline{AC}$. Prema tome, ako su izabrane dve duži AB i BC, od mogućih šest koje odredjuje trotemenik ABC, onda je i treća duž AC jednoznačno odredjena.

Sada možemo dati definiciju:

DEFINICIJA 1.2.15. - Ako su tri razne tačke A,B,C po parovima kolinearne, tj.

$$A — B, \quad B — C, \quad A — C ,$$

i istovremeno nisu incidentne sa istom pravom, onda

$$[AB] \cup [BC] \cup [AC] ,$$

nazivamo *trougao*, pod uslovom da

$$(\exists\, \tilde{m})(A,B,C \notin \tilde{m} , \quad \tilde{m} \cap p(A,B) = \{X\} ,$$

$$\tilde{m} \cap p(B,C) = \{Y\} , \ \tilde{m} \cap p(A,C) = \{Z\}) ,$$

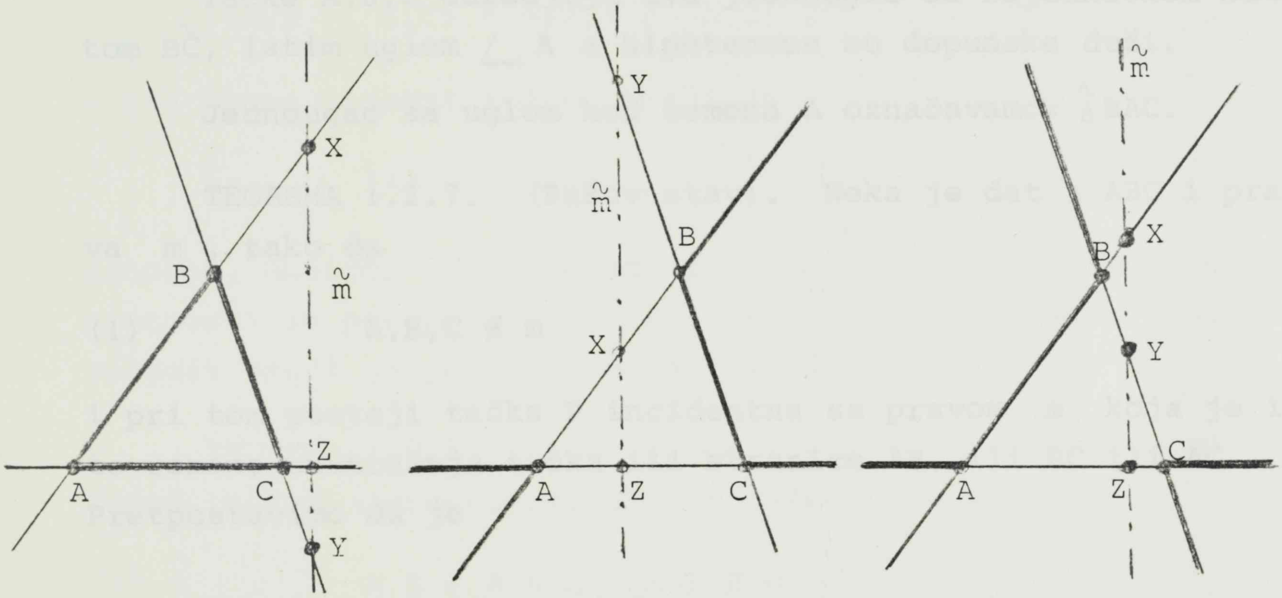
tako da je

$$X \in \overline{AB}\ ,\quad Y \in \overline{BC}\ ,\quad Z \in \overline{AC}\ .$$

Tačke A,B,C nazivamo *temenima trougla*, a duži AB, BC, AC - *stranicama trougla.*

Prave p(A,B), p(B,C) i p(A,C) kod svakog temena odredju- ju po jedan ugao od kojih su dva unutrašnja i jedan spoljašnji ugao trougla.

Nije teško zaključiti da jedan trotemenik ABC odredjuje *tri* trougla sa zajedničkim temenima A,B,C, koje respektivno prema slici 1.1. označavamo: Δ ABC gde su uglovi kod temena



Slika 1.1.

A i C unutrašnji, a kod temena B spoljašnji ugao trougla; Δ ACB - sa unutrašnjim uglovima kod temena A i B i spoljašnjim uglom kod temena C; Δ BAC - sa unutrašnjim uglovima kod temena B i C i spoljašnji uglom kod temena A.

DEFINICIJA 1.2.16. - Ako su A,B,C tri razne tačke, tako da je

$$A \text{ —— } B,\quad B \mid C\ ,$$

onda

$$[AB] \cup [AC] \cup [\tilde{BC}]\ ,$$

nazivamo *jednougao* pod uslovom da

$$(\exists \tilde{m})(A,B,C \notin \tilde{m})$$

i

$$\tilde{m} \cap p(A,B)=\{X\}, \quad \tilde{m} \cap p(A,C)=\{Y\},$$

tako da je

$$X \in \overline{AB} \ , \quad Y \in \overline{AC} \ .$$

Tačke A,B,C nazivamo *temenima jednougla*, duži AB i AC — *hipotenuzama jednougla*[1], a izotropnu duž $\tilde{BC}$ — *katetom jednougla*, ugao $\angle$ p(A,B) p(A,C) = $\angle$ A — *uglom jednougla.*

Tačke A,B,C odredjuju dva jednougla sa zajedničkom katetom $\tilde{BC}$, istim uglom $\angle$ A a hipotenuze su dopunske duži.

Jednougao sa uglom kod temena A označavamo: $\tilde{\Delta} BAC$.

TEOREMA 1.2.7. (Pašov stav). Neka je dat Δ ABC i prava m , tako da

(1) $\qquad A,B,C \notin m$

i pri tom postoji tačka P incidentna sa pravom m koja je istovremeno unutrašnja tačka ili stranice AB, ili BC ili AC. Pretpostavimo da je

(2) $\qquad m \cap \,]AB[\, = \{P\}$,

onda postoji tačka M $\in$ m , tako da je

(3) $\quad$ ili $m \cap \,]BC[\, = \{M\}$, $\quad$ ili $m \cap \,]AC[\, = \{M\}$.

Dokaz. - Neka je zadat trougao ΔABC, čije ćemo stranice označiti AB, BC, AC, i prava m tako da važe relacije (1) i (2). Na osnovu definicije trougla 1.2.15, sledi postoji izotropni niz tačaka $\tilde{m}$, tako da je

$$A,B,C \notin \tilde{m} \ , \quad \tilde{m} \cap p(A,B) = \{X\} \ ,$$

$$\tilde{m} \cap p(B,C) = \{Y\} \ , \quad \tilde{m} \cap p(A,C) = \{Z\} \ ,$$

i

(4a,b,c) $\qquad X \in \overline{AB}, \quad Y \in \overline{BC}, \quad Z \in \overline{AC}$.

---

1) *Uzeto kao kod G.A. Aleksandrove u* [1] , *str. 109.*

Prema aksiomi I_5, postoje tačke $M,N \in m$, tako da je

$$m \cap p(B,C) = \{M\} \wedge m \cap p(A,C) = \{N\} .$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da nije ispunjena relacija (3), već da je

(5a,b) $\qquad M \in \overline{BC} \wedge N \in \overline{AC}$.

Iz relacija (4b,c) i (5a,b), imamo da

$$\neg(M,X \,//\, B,C) \wedge \neg(N,Z \,//\, A,C) ,$$

a što prema teoremi 1.2.6, znači da

$$\neg(P,X \,//\, A,B) ,$$

odnosno, obzirom na relaciju (4a), da je $P \in \overline{AB}$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom (2). Prema tome, dobijena protivurečnost znači da je tačka relacija (3). Q.E.D.

TEOREMA 1.2.8. - Neka prave a,b i c nisu incidentne sa istom tačkom (nekonkurentne) i P tačka tako da

(1) $\qquad P \notin a \wedge P \notin b \wedge P \notin c$.

Ako je tačka P incidentna sa pravom koja je izmedju pravih a i b , ona je incidentna i sa pravom koja je ili izmedju pravih b i c , ili sa pravom koja je izmedju pravih a i c .

Dokaz. - Neka su a,b i c tri prave koje nisu incidentne sa istom tačkom, pri čemu je

$$a \cap b = \{C\} , \quad a \cap c = \{B\} , \quad b \cap c = \{A\} ,$$

a P tačka za koju po uslovu teoreme važi relacija (1) i pritom

(2a,b) $\qquad P \in a_1 \wedge (b — a_1 — c)$.

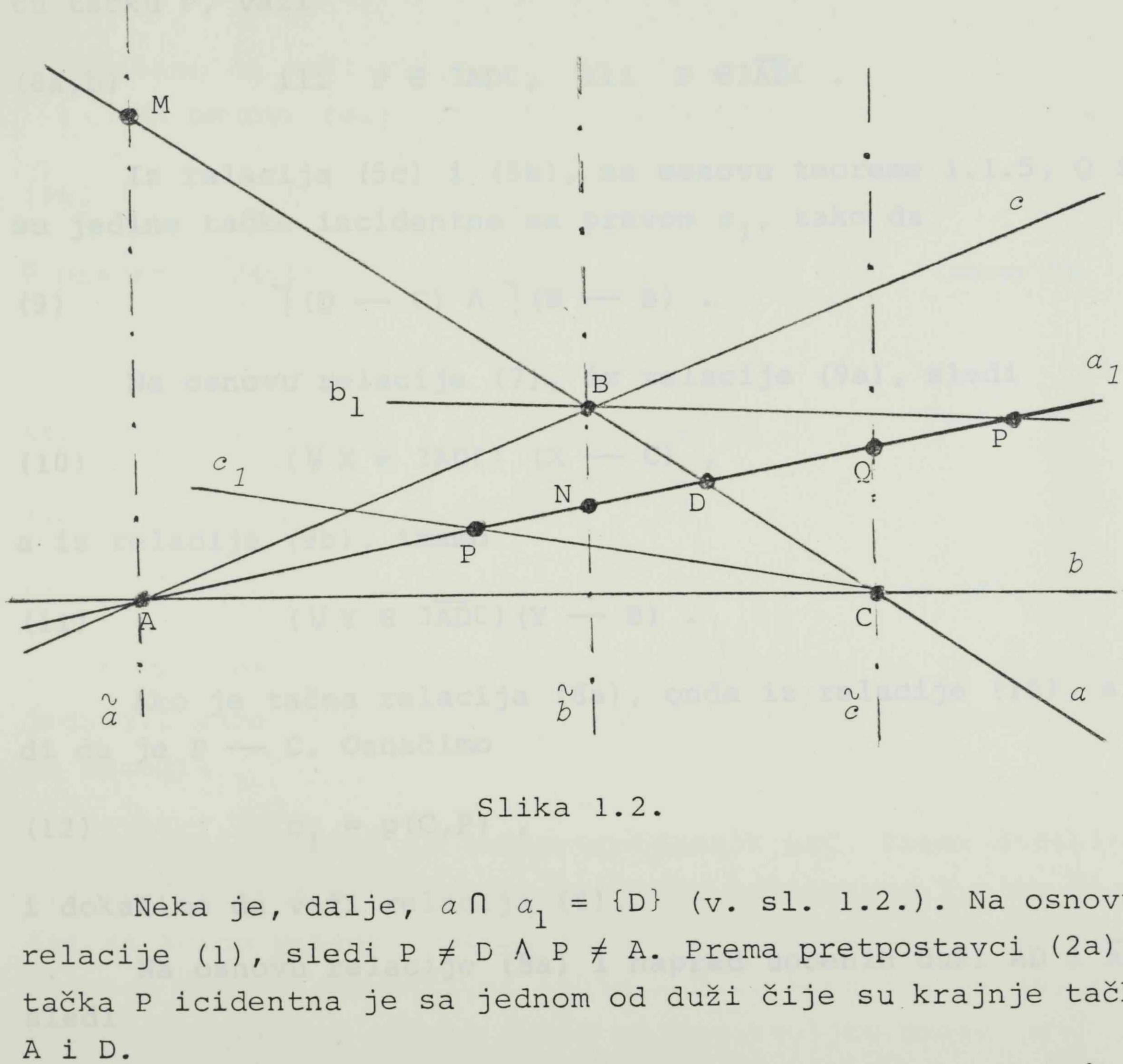
Dokažimo da je

(3) $\quad$ ili $P \in b_1 \wedge (a — b_1 — c)$,

(4) ili $P \in c_1 \wedge (a — c_1 — b)$.

Uočimo izotropne nizove tačaka $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ i $\tilde{c}$ čije su osnove, redom, tačke A, B i C. Označimo

(5a,b,c) $\tilde{a} \cap a = \{M\}$, $\tilde{b} \cap a_1 = \{N\}$, $\tilde{c} \cap a_1 = \{Q\}$.



Slika 1.2.

Neka je, dalje, $a \cap a_1 = \{D\}$ (v. sl. 1.2.). Na osnovu relacije (1), sledi $P \neq D \wedge P \neq A$. Prema pretpostavci (2a), tačka P icidentna je sa jednom od duži čije su krajnje tačke A i D.

Uočimo pramen pravih sa središtem A, tj. $A(b,c,a_1,\tilde{a})$, iz pretpostavke (2b), prema definiciji 1.2.7, sledi

$$b,c \;//\; a_1,\tilde{a} \;,$$

te prema definiciji 1.2.6, na pravoj a , $A \notin a$, za tačke B,C,D i M, važi

(6) $C,B \;//\; D,M$.

Kako su na osnovu relacija (5a,b,c), tačke A,N,D i Q projekcije, redom, tačaka M,B,D i C na pravoj a_1, to prema aksiomi II_7, iz relacije (6), dobijamo da

(7) $\qquad Q,N \,//\, D,A$.

Na osnovu relacije (6), na pravoj a_1 možemo uočiti dopunske duži AND = AD i AQD = $\overline{AD}$, a na osnovu napred rečenog, za zadatu tačku P, važi

(8a,b) $\qquad$ ili $P \in]AD[$, ili $P \in]\overline{AD}[$.

Iz relacija (5c) i (5b), na osnovu teoreme 1.1.5, Q i N su jedine tačke incidentne sa pravom a_1, tako da

(9) $\qquad \rceil(Q — C) \wedge \rceil(N — B)$.

Na osnovu relacije (7), iz relacije (9a), sledi

(10) $\qquad (\forall X \in]AD[)\ (X — C)$,

a iz relacije (9b), imamo

(11) $\qquad (\forall Y \in]\overline{AD}[)(Y — B)$.

Ako je tačna relacija (8a), onda iz relacije (10), sledi da je P — C. Označimo

(12) $\qquad c_1 = p(C,P)$,

i dokažimo da važi relacija (4).

Na osnovu relacije (8a) i napred uočenih duži AD i $\overline{AD}$, sledi

(13) $\qquad A,D \,//\, P,Q$.

Na osnovu relacije (13) i definicije 1.2.6, u pramenu pravih sa središtem C, tj. u pramenu C $(a,b,c_1,\tilde{c})$, koji je presečen pravom a_1, $C \notin a_1$, imamo da

$$a,b \,//\, c_1,\tilde{c} ,$$

a što, prema definiciji 1.2.7, znači da je

(14) $(a — c_1 — b)$.

Iz relacija (12) i (14), sledi relacija (4).

Medjutim, ako je tačna relacija (8b), onda iz relacije (11), sledi da je P — B. Označimo

(15) $b_1 = p(B,P)$,

i dokažimo da važi relacija (3).

Na osnovu relacije (8b) i uočenih duži AD i $\overline{AD}$, sledi

(16) A,D // N,P .

U pramenu pravih $B(a,c,b_1,\tilde{b})$ s obzirom na (16), imamo da

$a,c \,//\, b_1,\tilde{b}$,

što prema definiciji 1.2.7, znači da je

(17) $(a — b_1 — c)$.

Konačno, iz relacija (15) i (17), sledi relacija (3). Q.E.D.

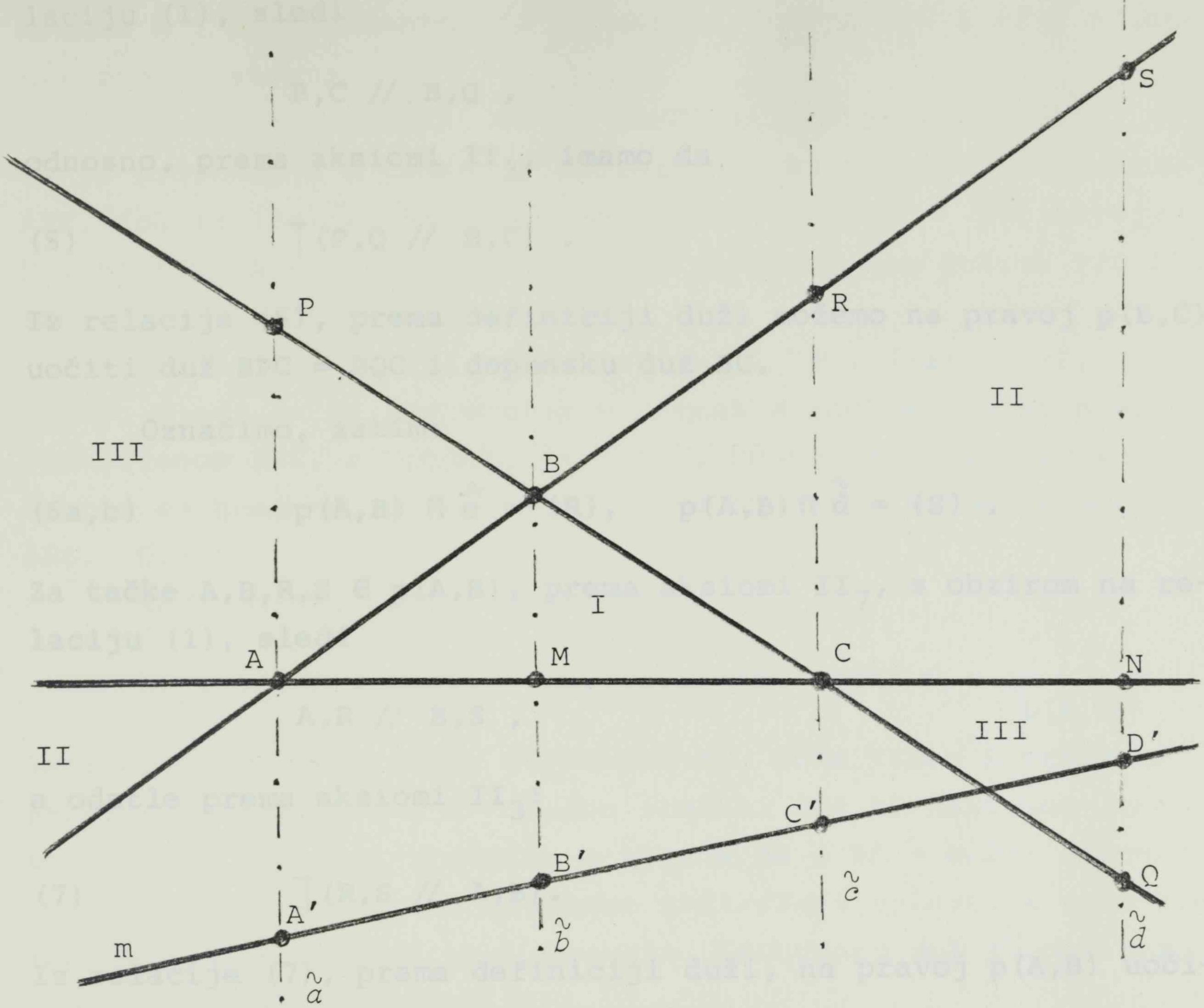
TEOREMA 1.2.9. - Za svaki trougao važi da je projekcija jednog i samo jednog temena unutrašnja tačka naspramne stranice trougla.

Dokaz. - Neka je zadat trotemenik ABC. Prema definiciji 1.2.14, tačke A,B i C su po parovima kolinearne i nisu incidentne sa istom pravom. Uočimo izotropne nizove tačaka $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ čije su osnove respektivno tačke A,B,C. Neka su, dalje, A′, B′, C′ projekcije tačaka A,B,C na proizvoljnu pravu m .

Za tačke A′, B′, C′ ∈ m , na osnovu aksiome II_1, postoji tačka D′ ∈ m , tako da

(1) A′, C′ // B′, D′ .

Uočimo, zatim, izotropni niz tačaka $\tilde{d}$ sa osnovom D′ . Na osnovu teoreme 1.1.5, postoje tačke M,N ∈ p(A,C), tako da je



Slika 1.3.

(2a,b) $\quad p(A,C) \cap \tilde{b} = \{M\}\ , \quad p(A,C) \cap \tilde{d} = \{N\}\ .$

Za tačke $A,C,M,N \in p(A,C)$ iz relacije (1), prema aksiomi II_7, dobijamo da

(3) $\quad A,C \,//\, M,N\ .$

Na osnovu relacije (3), prema definiciji 1.2.1, na pravoj $p(A,C)$ uočimo dopunske duži sa krajnjim tačkama A i C. Označimo jednu sa AMC, a njenu dopunu sa AC.

Označimo, dalje, prema teoremi 1.1.5:

(4a,b) $\quad p(B,C) \cap \tilde{a} = \{P\}, \quad p(B,C) \cap \tilde{d} = \{Q\}\ .$

Za tačke $B,C,P,Q \in p(B,C)$, prema aksiomi II_7 s obzirom na relaciju (1), sledi

$$P,C \parallel B,Q \ ,$$

odnosno, prema aksiomi II_3, imamo da

(5) $$\rceil(P,Q \parallel B,C) \ .$$

Iz relacije (5), prema definiciji duži možemo na pravoj p(B,C) uočiti duž BPC = BQC i dopunsku duž BC.

Označimo, zatim:

(6a,b) $$p(A,B) \cap \tilde{c} = \{R\}, \quad p(A,B) \cap \tilde{d} = \{S\} \ .$$

Za tačke $A,B,R,S \in p(A,B)$, prema aksiomi II_7, s obzirom na relaciju (1), sledi

$$A,R \parallel B,S \ ,$$

a odatle prema aksiomi II_3:

(7) $$\rceil(R,S \parallel A,B).$$

Iz relacije (7), prema definiciji duži, na pravoj p(A,B) uočimo duž ARB = ASB i njenu dopunu AB.

Na osnovu napred uvedenih oznaka za duži koje su odredjene temenima trotemenika ABC, označimo trouglove koje ovaj trotemenik odredjuje na sledeći način:

I $\triangle ABC \overset{def}{\Longleftrightarrow} [AMC] \cup [AB] \cup [BC]$,

II $\triangle ABC \overset{def}{\Longleftrightarrow} [ARB] \cup [BC] \cup [AC]$,

III $\triangle ABC \overset{def}{\Longleftrightarrow} [BPC] \cup [AB] \cup [AC]$.

Za I $\triangle ABC$, iz relacije (2a) i (3), sledi

$$M = pr_{p(A,C)} B \wedge M \in \,]AMC[\ ,$$

gde je AMC naspramna stranica temenu B. Medjutim, iz relacija (4a) i (5), odnosno (6a) i (7), sledi da su projekcije P i R, temena A i C, incidentne sa dopunskim dužima BPC i ARB, njihov naspramnih strana.

Na analogan način, za II ΔABC zaključujemo iz (6a) i (7), da je projekcija R temena C incidentna, sa naspramnom stranom ARB, dok iz (4a) i (5), odnosno iz (2a) i (3), projekcije P i M, temena A i B, incidentne su sa dopunskim dužima BPC i AMC, njihovih naspramnih strana.

I konačno, za III ΔABC, iz (4a) i (5), (2a) i (3), (6a) i (7), sledi da je projekcija P temena A incidentna sa naspramnom stranom BPC, a projekcije M i R, temena B i C, nisu incidentne sa naspramnim stranama već sa njihovim dopunama AMC i ARB. Q.E.D.

Sada možemo dati definiciju:

DEFINICIJA 1.2.17. - Ako je u ΔABC tačka $D = pr_{p(A,C)} B$ incidentna sa naspramnom stranicom AC, onda tačku B nazivamo *središnje teme*, a A i C - *bočna temena*. Duž AC nazivamo *osnovna strana* (osnova) trougla, a strane AB i BC - *bočne strane*. Uglove kod temena A i C nazivamo *unutrašnji uglovi*, a ugao kod temena B - *spoljašnji ugao* trougla. Izotropnu duž $\widetilde{BD}$ nazivamo *visina* trougla iz temena B.

1.3. AKSIOME NEPREKIDNOSTI. NEPOSREDNE POSLEDICE AKSIOMA INCIDENCIJE, RASPOREDA I NEPREKIDNOSTI

Treću grupu aksioma EP geometrije čini jedna aksioma, to je Dedekindova aksioma neprekidnosti.

AKSIOMA III_1. - Ako su sve unutrašnje tačke duži $[AB]$ podeljene na dve klase K_1 i K_2, pri čemu:

(i) Klase K_1 i K_2 su neprazni skupovi tačaka;

(ii) Za svaku tačku $P \in K_1$ i svaku tačku $Q \in K_2$, važi relacija

$$A, Q \,//\, P, B \;;$$

tada u jednoj od klasa K_1 i K_2 postoji tačka M, takva da za svaku tačku $P \in K_1 \setminus \{M\}$ i svaku tačku $Q \in K_2 \setminus \{M\}$, važe relacije

$$A,M \,//\, P,B \;\wedge\; A,Q \,//\, M,B \,.$$

TEOREMA 1.3.1. - Ako su sve unutrašnje prave $\angle\, ab$ podeljene na dve klase U_1 i U_2, pri čemu:

(i) Klase U_1 i U_2 su neprazni skupovi pravih;

(ii) Za svaku pravu $p \in U_1$ i svaku pravu $q \in U_2$, važi relacija

$$a, q \,//\, p, b \;;$$

tada u jednoj od klasa U_1 i U_2 postoji prava m, takva da za svaku pravu $p \in U_1 \setminus \{m\}$ i svaku pravu $q \in U_2 \setminus \{m\}$, važe relacije

$$\text{(1a,b)} \qquad a, m \,//\, p, b \;\wedge\; m, b \,//\, a, q \,.$$

Dokaz. - Neka je zadat $\angle\, ab$ kod koga su sve unutrašnje prave podeljene u dve klase U_1 i U_2 i pritom ispunjeni uslovi (i) i (ii). Označimo teme zadatog ugla sa O, tj. $a \cap b = \{O\}$. Prema aksiomi I_3, za tačku O postoji prava c, tako da $O \notin c$.

Označimo:

(2a,b) $\quad a \cap c = \{A\}\ ,\quad b \cap c = \{B\}\ .$

Tačkom O, prema teoremi 1.1.4, odredjen je izotropni niz tačaka $\tilde{o}$. Označimo: $\tilde{o} \cap c = \{C\}$. Na pravoj c uočimo duž $]ACB[$ i njenu dopunu koju ćemo označiti $[AB]$. Unutrašnje tačke duži $[AB]$ incidentne su sa unutrašnjim pravama $\angle ab$. Ako označimo da je

(3a,b) $\quad p \cap c = \{P\}\ ,\quad q \cap c = \{Q\}\ ,$

(4a,b) $\quad U_1 \cap\ ]AB[\ = K_1,\quad U_2 \cap\ ]AB[\ = K_2\ ,$

onda c obzirom na uslov teoreme (ii), sledi da $P \in K_1$ i $Q \in K_2$, gde su K_1 i K_2 dve klase unutrašnjih tačaka duži $[AB]$. Prema definiciji 1.2.5 s obzirom na uslov teoreme (ii) i relacije (2a,b) i (3a,b), sledi

(5) $\quad A,Q \,//\, P,B\ .$

Na osnovu aksiome III_1 s obzirom na (4a,b) i (5), postoji tačka M koja je incidentna sa jednom od klasa K_1 i K_2, tako da važi

(6a,b) $\quad A,M \,//\, P,B \ \wedge\ M,B \,//\, A,Q\ .$

Unutrašnjom tačkom M ugla $\angle ab$ i njegovim temenom O odredjena je unutrašnja prava $p(O,M) = m$, koja je c obzirom na (4a,b), incidentna sa jednom od klasa U_1 i U_2 unutrašnjih pravih $\angle ab$. Prema definiciji 1.2.5 s obzirom na (2a,b), (3a,b) i (6a,b), sledi (1a,b). Q.E.D.

1.4. AKSIOME PODUDARNOSTI

1.4.1 Aksiome podudarnosti i njihove neposredne posledice

Kao što je rečeno u tački 1.0, relacija "... je podudarno..." predstavlja jednu od osnovnih relacija EP geometrije kako u skupu svih duži tako i u skupu svih izotropnih duži. Ona je okarakterisana aksiomama:

AKSIOMA IV_1. - Svaka duž podudarna je sama sebi, tj.

$$AB \cong AB \ , \quad AB \cong BA \ .$$

AKSIOMA IV_2. - Za svaku izotropnu duž $\tilde{MN}$ i svaki izotropni poluniz $\tilde{m}'$ sa početnom tačkom M', postoji jedinstvena tačka $N' \in \tilde{m}'$, takva da je

$$\tilde{MN} \cong \tilde{M'N'} \ .$$

AKSIOMA IV_3. - $(A'B' \cong AB \wedge A''B'' \cong AB) \Longrightarrow A'B' \cong A''B''$;

$$(\tilde{M'N'} \cong \tilde{MN} \wedge \tilde{M''N''} \cong \tilde{MN}) \Longrightarrow \tilde{M'N'} \cong \tilde{M''N''} \ .$$

LEMA 1.4.1. - U skupu izotropnih duži relacija "... je podudarno..." predstavlja refleksivnu relaciju.

Dokaz. - Neka je $\tilde{MN}$ izotropna duž i $\tilde{m}'$ izotropni poluniz sa početnom tačkom M'. Na osnovu aksiome IV_2, postoji jedinstvena tačka $N' \in \tilde{m}'$, takva da je

$$(1) \qquad \tilde{MN} \cong \tilde{M'N'} \ .$$

Ako se tačka M'' poklapa sa tačkom M, a tačka N'' - sa tačkom N, izotropne duži $\tilde{MN}$ i $\tilde{M''N''}$ su istovetne, te je na osnovu aksiome IV_2:

$$(2) \qquad \tilde{M''N''} \cong \tilde{M'N'} \ .$$

Na osnovu drugog dela aksiome IV_3 s obzirom na (1) i (2), sledi

$$\tilde{MN} \tilde{=} \tilde{M''N''} \text{ , tj. } \tilde{MN} \tilde{=} \tilde{MN} \text{ ,}$$

jer je $\tilde{MN}$ i $\tilde{M''N''}$ jedna ista izotropna duž. Q.E.D.

LEMA 1.4.2. - U skupu duži i skupu izotropnih duži relacija "... je podudarno..." predstavlja simetričnu relaciju.

Dokaz. - Neka je

$$\text{(1a,b)} \qquad AB \tilde{=} A'B' \quad \text{i} \quad \tilde{MN} \tilde{=} \tilde{M'N'} \text{ ,}$$

a dokažimo da je

$$\text{(2a,b)} \qquad A'B' \tilde{=} AB \quad \text{i} \quad \tilde{M'N'} \tilde{=} \tilde{MN} \text{ .}$$

Prema aksiomi IV_1 i lemi 1.4.1, za duž $A'B'$ i izotropnu duž $\tilde{M'N'}$, važi

$$\text{(3a,b)} \qquad A'B' \tilde{=} A'B' \quad \text{i} \quad \tilde{M'N'} \tilde{=} \tilde{M'N'} \text{ .}$$

Iz (3a) i (1a), prema prvom delu aksiome IV_3, sledi (2a); iz (3b) i (1b) prema drugom delu aksiome IV_3, sledi relacija (2b). Q.E.D.

LEMA 1.4.3. - U skupu duži i skupu izotropnih duži relacija "... je podudarno..." predstavlja tranzitivnu relaciju.

Dokaz. - Neka je

$$\text{(1a,b)} \qquad AB \tilde{=} A'B' \wedge A'B' \tilde{=} A''B'' \text{ ,}$$

$$\text{(2a,b)} \qquad \tilde{MN} \tilde{=} \tilde{M'N'} \wedge \tilde{M'N'} \tilde{=} \tilde{M''N''} \text{ ,}$$

a dokažimo da važi

$$\text{(3a,b)} \qquad AB \tilde{=} A''B'' \quad \text{i} \quad \tilde{MN} \tilde{=} \tilde{M''N''} \text{ .}$$

Prema lemi 1.4.2, iz pretpostavke (1b), odnosno (2b), važi

(4) $\quad A'B' \overset{\sim}{=} A''B'' \Longrightarrow A''B'' \overset{\sim}{=} A'B'$,

i

(5) $\quad \tilde{M}'\tilde{N}' \overset{\sim}{=} \tilde{M}''\tilde{N}'' \Longrightarrow \tilde{M}''\tilde{N}'' \overset{\sim}{=} \tilde{M}'\tilde{N}'$.

Prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na (1a) i (4), sledi (3a); medjutim, na osnovu drugog dela aksiome IV_3 s obzirom na (2a) i (5), sledi (3b). Q.E.D.

Na osnovu aksiome IV_1 i lema 1.4.2,3, važi:

TEOREMA 1.4.1. - Podudarnost duži je relacija ekvivalencije.

S obzirom na leme 1.4.1,2,3, važi:

TEOREMA 1.4.2. - Podudarnost izotropnih duži je relacija ekvivalencije.

AKSIOMA IV_4. - Ako je M unutrašnja tačka duži AB, ni jedna od duži

$$AM \subset AB \quad i \quad MB \subset AB ,$$

nije podudarna duži AB, tj.

$$\neg(AM \overset{\sim}{=} AB) \wedge \neg(MB \overset{\sim}{=} AB).$$

AKSIOMA IV_5. - Ako je

$$AB \overset{\sim}{=} A'B',$$

a M unutrašnja tačka duži AB, postoji unutrašnja tačka M' duži A'B' , tako da je

$$AM \overset{\sim}{=} A'M' \wedge MB \overset{\sim}{=} M'B' ,$$

gde je $AM, MB \subset AB$ i $A'M', M'B' \subset A'B'$.

TEOREMA 1.4.3. - Tačka M' o kojoj se govori u aksiomi IV_5 je jedinstvena.

Dokaz. - Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje dve razne unutrašnje tačke M' i M'' duži $A'B'$, tako da je zadovoljena aksioma IV_5, tj. važi

(1a,b) $$AM \cong A'M' \wedge MB \cong M'B',$$

i

(2a,b) $$AM \cong A'M'' \wedge MB \cong M''B',$$

gde je $AM, MB \subset AB$; $A'M', M'B', A'M'', M''B' \subset A'B'$. Za četiri razne kolinearne tačke A', B', M', M'', prema aksiomi II_3, na jedinstven način jedan par razdvaja drugi. Neka su unutrašnje tačke M' i M'' duži $A'B'$ takve da par A', M' razdvaja par M'', B'. Otuda na pravoj $p(A',B')$ možemo uočiti duž $A'M''M'$ koju kratko označavamo $A'M' = A'M''M'$. Kako je tačka M'' unutrašnja tačka duži $A'M'$, to za duž $A'M''$ koja predstavlja dopunu duži $A'B'M''$, važi:

(3) $$A'M'' \subset A'M'.$$

Prema prvom delu aksiome IV_3, iz (1a) i (2a), sledi $A'M' \cong A'M''$, a što je s obzirom na (3), protivurečno aksiomi IV_4. Dakle, pretpostavka da su M'' i M' dve različite tačke dovodi do protivurečnosti, te je $M'' = M'$, tj. M' je jedinstvena tačka. Q.E.D.

AKSIOMA IV_6. - Ako su dve duži podudarne i dopune tih duži su podudarne, tj. važi:

$$AB \cong A'B' \Longrightarrow \overline{AB} \cong \overline{A'B'}.$$

AKSIOMA IV_7. - Za svaku tačku M incidentnu sa pravom m postoji tačka $M_o \in m$, tako da su duž MM_o i duž $\overline{MM_o}$ koja je dopunjuje podudarne, tj.

$$(\forall M \in m)(\exists M_o \in m)(MM_o \cong \overline{MM_o}).$$

DEFINICIJA 1.4.1. - Za tačke M i M_o o kojima se govori u aksiomi IV_7 kažemo da su *suprotne tačke* prave m, a za duži MM_o i $\overline{MM}_o$ - da su *poluprave* te prave.

AKSIOMA IV_8. - Ma koje dve poluprave su podudarne.

TEOREMA 1.4.4. - Za svaku tačku $M \in m$, postoji jedinstvena suprotna tačka $M_o \in m$.

Dokaz. - Pretpostavimo suprotno, tj. da za tačku $M \in m$ postoje dve razne tačke M_o, $M'_o \in m$ tako da su M_o i M'_o suprotne tačke tački M. Za tri razne kolinearne tačke M, M_o i M'_o, prema aksiomi II_1 postoji tačka $M' \in m$, tako da par M, M_o razdvaja par M'_o, M'. Prema tome, na pravoj m možemo uočiti duž MM'_oM_o, koju ćemo kratko označiti sa MM_o i njenu dopunu $MM'M_o$, koju kratko označavamo sa $\overline{MM}_o$. Dakle, tačka M'_o je unutrašnja tačka duži MM_o, tj. $M'_o \in \,]MM_o[$, a to znači da za duž MM'_o koja predstavlja dopunu duži $MM'M'_o$, važi

$$(1) \qquad MM'_o \subset MM_o .$$

Kako su M_o i M'_o po pretpostavci suprotne tačke tački M na pravoj m, to su duži MM'_o i MM_o, prema definiciji 1.4.1, poluprave. Ma koje dve poluprave, prema aksiomi IV_8, su podudarne, te je

$$(2) \qquad MM'_o = MM_o .$$

Medjutim, relacija (2) s obzirom na (1) je protivrečna aksiomi IV_4. Dakle, $M'_o = M_o$, tj. postoji jedinstvena suprotna tačka M_o tački M. Q.E.D.

TEOREMA 1.4.5. - Ako su M i M_o suprotne tačke na pravoj m a MM_o i $\overline{MM}_o$ poluprave te prave, onda je suprotna tačka svakoj tački jedne poluprave incidentna sa drugom.

Dokaz. - Neka je proizvoljna tačka $X \in m$ unutrašnja tačka poluprave MM_o, tj.

$$(1) \qquad X \in \,]MM_o[.$$

Prema aksiomi IV_7 i teoremi 1.4.4, za tačku X postoji jedinstvena suprotna tačka $X_o \in m$. Tačkama X i X_o na pravoj m odredjene su dve poluprave XX_o i $\overline{XX_o}$. Treba dokazati da je tačka X_o unutrašnja tačka poluprave $\overline{MM_o}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je i tačka X_o unutrašnja tačka poluprave MM_o, odnosno

(2) $$X_o \in]MM_o[\ .$$

Na osnovu (1) i (2), sledi da je jedna od polupravih XX_o i $\overline{XX_o}$ sadržana u polupravi MM_o. Recimo, neka je

(3) $$XX_o \subset MM_o \ .$$

Prema aksiomi IV_8, sledi da je $XX_o \cong MM_o$, a što je s obzirom na (3), protivurečno aksiomi IV_4. Dakle, tačka $X_o \in]\overline{MM_o}[$, što je trebalo i dokazati. Q.E.D.

AKSIOMA IV_9. - Ako je $\tilde{\Delta}$ MON jednougao a M'O i N'O podudarne duži incidentne respektivno sa hipotenuzama MO i NO tog jednougla, onda je tačka M' paralelna tački N', tj.

$$M' \,|\, N' \ .$$

AKSIOMA IV_{10}. - Ako je kod jednouglova $\tilde{\Delta}$ MON i $\tilde{\Delta}$ M'O'N':

$$MO \cong M'O' \wedge \tilde{MN} \cong \tilde{M'N'} \ ,$$

a podudarne duži

$$OP \cong O'P' \cong OQ \cong O'Q' \ ,$$

incidentne respektivno sa hipotenuzama MO, M'O' , NO i N'O' ovih jednouglova, onda je

$$\tilde{PQ} \cong \tilde{P'Q'} \ .$$

U tački 1.2. definicijama 1.2.3. i 1.2.13. pokazano je da svakoj uočenoj duži AB odgovara [AB] i obrnuto; a svakoj izotropnoj duži $\tilde{MN}$ odgovara [MN] i obrnuto.

DEFINICIJA 1.4.2. - $[AB] \cong [A'B'] \overset{def}{\iff} AB \cong A'B'$,

$$[\tilde{MN}] \cong [\tilde{M'N'}] \overset{def}{\iff} \tilde{MN} = \tilde{M'N'} \ .$$

Sve što je u ovoj tački rečeno za duži, zadovoljeno je i za zatvorene duži. Nadalje, po pravilu, koristićemo zatvorene duži i zatvorene izotropne duži.

Navedimo neke od posledica datog sistema aksioma.

TEOREMA 1.4.6. - Ako je duž $[AB]$ različita od poluprave, a A' tačka incidentna sa a', na pravoj a' postoje dve i samo dve tačke B' i B'', tako da je jedna od duži $[A'B']$ i jedna od duži $[A'B'']$ podudarna duži $[AB]$.

Dokaz. - Neka je zadata duž $[AB]$ različita od poluprave i tačka $A' \in a'$. Na pravoj $p(A,B)$, prema aksiomi IV_7, postoji tačka A_o, tako da je $[AA_o] \cong [\overline{AA}_o]$. Analogno na pravoj a' postoji tačka A'_o, tako da je $[A'A'_o] \cong [\overline{A'A'_o}]$. Kako je duž $[AB]$ različita od poluprave, to za ovu duž i polupravu $[\overline{AA}_o]$, važi

$$\text{(1a,b)}\quad \text{ili }]AB[\cap]\overline{AA}_o[= \emptyset \text{ , ili }]AB[\cap]\overline{AA}_o[\neq \emptyset \text{ .}$$

Pretpostavimo da je tačna relacija (1a). To znači da je tačka $B \in]AA_o[$ tj. $[AB] \subset [AA_o]$. Polupravu $[AA_o]$ možemo označiti: $[ABA_o]$. Prema aksiomi IV_8, poluprava $[ABA_o]$ podudarna je sa svakom od polupravih $[A'A'_o]$ i $[\overline{A'A'_o}]$, tj. važi

$$\text{(2a,b)}\qquad [ABA_o] \cong [A'A'_o] \land [ABA_o] \cong [\overline{A'A'_o}] .$$

Kako je tačka B unutrašnja tačka duži $[ABA_o]$, to s obzirom na relacije (2a,b), prema aksiomi IV_5, sledi

$$\text{(3a,b)}\quad (\exists B' \in]A'A'_o[)([AB] \cong [A'B'] \land [BA_o] \cong [B'A'_o]) \text{ ,}$$

$$\text{(4a,b)}\quad (\exists B'' \in]\overline{A'A'_o}[)([AB] \cong [A'B''] \land [BA_o] \cong [B''A'_o]) \text{ .}$$

Prema teoremi 1.4.3, tačke B' i B'' su jedinstvene, a tvrdjenje teoreme sledi iz relacija (3a) i (4a).

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (1b). Neka je $[\overline{AB}]$ dopunska duž zadatoj duži $[AB]$. S obzirom na relaciju (1b), važi

$$]\overline{AB}[\cap]AA_o[= \emptyset .$$

Na način, koji je napred izložen, dokazuje se da je teorema tačna za duž $[\overline{AB}]$. A zatim, prema aksiomi IV_6, zaključujemo da je teorema tačna i za dopunsku duž $[AB]$. Q.E.D.

TEOREMA 1.4.7. - Neka su $[AB]$ i $[BC]$ dve duži prave m, tako da je

(1) $$]AB[\cap]BC[= \emptyset ,$$

a $[A'B']$ i $[B'C']$ dve duži te iste ili neke druge prave m', za koje, takodje, važi

(2) $$]A'B'[\cap]B'C'[= \emptyset .$$

Tada ako je

(3a,b) $$[AB] \cong [A'B'] \wedge [BC] \cong [B'C'] ,$$

onda je i

(4) $$\text{duž } [ABC] \cong \text{ duži } [A'B'C'].$$

Dokaz. - Neka su zadate duži $[AB]$ i $[BC]$ prave m, a $[A'B']$ i $[B'C']$ prave m', gde je $m = m'$ ili $m \neq m'$, tako da važe uslovi (1), (2) i (3a,b). Uočimo tačke $B_o \in m$ i $B'_o \in m'$, respektivno suprotne tačkama B i B'. Iz pretpostavke (1), odnosno (2), sledi da za duži $[AB]$ i $[BC]$, odnosno $[A'B']$ i $[B'C']$, važi da je bar jedna različita od poluprave, ili da su sve poluprave.

Pretpostavimo da je, recimo, duž $[BC]$, odnosno duž $[B'C']$ različita od poluprave. Onda za tačke C i C', važi

(5) $$C \in]BB_o[\wedge C \notin [\overline{BB_o}] ,$$

(6) $$C' \in]B'B'_o[\wedge C' \notin [\overline{B'B'_o}] ,$$

gde su BB_o, $\overline{BB_o}$, $B'B'_o$ i $\overline{B'B'_o}$ poluprave.

Iz pretpostavke (3a), prema aksiomi IV_6, sledi da su i dopunske duži podudarne, tj. važi

$$(7) \qquad \text{duž}[ACB] \cong \text{duži } [A'C'B'].$$

Kako je tačka C unutrašnja tačka duži [ACB], to s obzirom na relaciju (7), prema aksiomi IV_5, postoji unutrašnja tačka C" duži [A'C'B'], tako da je

$$(8a,b) \qquad [AC] \cong [A'C''] \wedge [BC] \cong [B'C''] .$$

S obzirom na relaciju (5), tačka C je istovremeno i unutrašnja tačka poluprave $[BB_o]$. Otuda prema relaciji (8b), tačka C" je unutrašnja tačka poluprave $[B'B_o']$, tj.

$$(9) \qquad C'' \in \,]B'B_o'[\, \wedge \, C'' \notin \overline{[B'B_o']} .$$

Iz pretpostavke (3b) i relacije (8b), prema prvom delu aksiome IV_3, sledi

$$(10) \qquad [B'C'] \cong [B'C''] .$$

Kako su prema (6) i (9), tačke C' i C" unutrašnje tačke poluprave $[B'B_o']$, to prema teoremi 1.4.6, s obzirom na relaciju (10), sledi da se tačke C' i C" poklapaju. Prema tome, za C" = C' iz relacije (8a), sledi $[AC] \cong [A'C']$, a odatle prema aksiomi IV_6, podudarne su i njihove dopune, tj. važi relacija (4).

Ako, zatim, pretpostavimo da su duži [AB], [BC], [A'B'] i [B'C'] poluprave, onda prema aksiomi IV_8, sledi

$$(11) \qquad [AB] \cong [BC] \cong [A'B'] \cong [B'C'] .$$

Kako su A, B, C $\in$ m i A', B', C $\in$ m', to s obzirom na (11), dobijamo da je A = C i A' = C' . Duži u relaciji (4), možemo sada označiti:

$$(12) \qquad \text{duž } [ABC] = \text{duž } [CBC] = 2[BC] ,$$

(13) duž $[A'B'C']$ = duži $[C'B'C'] = 2[B'C']$.

Prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na relacije (11), (12) i (13), sledi relacija (4). Q.E.D.

TEOREMA 1.4.8. - Neka su M i M′ unutrašnje tačke respektivno duži $[AB]$ i $[A'B']$. Tada ako je

(1a,b) $$[AB] \cong [A'B'] \wedge [AM] \cong [A'M'],$$

onda je i

(2) $$[MB] \cong [M'B'],$$

gde je

(3a,b) $$[AM], [M,B] \subset [AB] \wedge [A'M'], [M'B'] \subset [A'B'].$$

Dokaz. - Na osnovu aksiome IV_6 s obzirom na pretpostavku (1a), sledi

(4) $$[\overline{AB}] \cong [\overline{A'B'}].$$

Kako prema teoremi 1.2.2, dopunske duži odredjene tačkama A i B, odnosno tačkama A′ i B′ nemaju zajedničkih tačaka, to s obzirom na (3a,b), imamo da je

(5a,b) $$]\overline{AB}[\cap]AM[= \emptyset \wedge]\overline{A'B'}[\cap]A'M'[= \emptyset .$$

Na osnovu teoreme 1.4.7. s obzirom na pretpostavku (1b) i relacije (4) i (5a,b), sledi da je

(6) $$\text{duž}[BAM] \cong \text{duži}[B'A'M'].$$

Kako duži iz relacije (2) predstavljaju dopune duži iz relacije (6), to na osnovu aksiome IV_6 s obzirom na relaciju (6), sledi relacija (2). Q.E.D.

TEOREMA 1.4.9. - Ako za tri razne tačke O, P i Q važi da je

$$(1a,b) \qquad O — P \wedge P \mid Q ,$$

onda je

$$(2) \qquad [OP] \overset{\sim}{=} [OQ] .$$

Dokaz. - Neka su zadate tri razne tačke O, P i Q tako da važe relacije (1a,b). Iz (1a,b), prema teoremi 1.1.2, sledi da je O — Q. Dakle, možemo uočiti prave p(O,P) i p(O,Q) koje su incidentne sa tačkom O. Neka su $P_o \in p(O,P)$ i $Q_o \in p(O,Q)$ suprotne tačke tački O. Duž [OP] je ili različita od poluprave, ili poluprava, tj. važi

$$(3a,b) \qquad \text{ili} \quad \neg([OP] \overset{\sim}{=} [OP_o]), \quad \text{ili} \quad [OP] \overset{\sim}{=} [OP_o].$$

Pretpostavimo da je tačna relacija (3a). Tada je duž [OP] ili njena dopuna $[\overline{OP}]$ sadržana u jednoj od polupravih $[OP_o]$ ili $[\overline{OP}_o]$ na pravoj p(O,P). Neka je, recimo, uočena duž $[OP] \subset [OP_o]$, a M unutrašnja tačka dopune duži $[POP_o]$ i $\tilde{m}$ izotropni niz tačaka sa osnovom M. Ako označimo $\tilde{m} \cap p(O,Q) = \{N\}$, onda je

$$(4a,b) \qquad O — M \wedge M \mid N .$$

Tačka N je različita od tačke Q, tj. $N \neq Q$. Zaista, ako bi $N = Q$, onda prema (1b) i (4b), postoje dve razne tačke M i P paralelne sa tačkom Q, što je protivurečno aksiomi I_4. Tačkom P, kao osnovom, zadat je izotropni niz tačaka $\tilde{p}$. S obzirom na pretpostavku (1b), sledi $Q \in \tilde{p}$. Otuda na osnovu definicije 1.2.16. s obzirom na (4a,b), možemo uočiti jednougao $\tilde{\Delta}$ MON čije su hipotenuze duž $[MP_oO]$ i duž $[NQ_oO]$ kako su poluprave $[\overline{OP}_o]$ i $[\overline{OQ}_o]$, koje predstavljaju dopune polupravama $[OPP_o]$ i $[OQQ_o]$, prema aksiomi IV_8 podudarne i istovremeno incidentne sa hipotenuzama uočenog jednougla, to na osnovu aksiome IV_9, sledi da je

(5) $\quad P_o \,|\, Q_o$.

Ako sa $\tilde{p}_o$ označimo izotropni niz tačaka sa osnovom P_o, onda možemo uočiti jednougao $\tilde{\Delta}$ MON čije su hipotenuze duži [OPM] i [OQN]. Ako ove hipotenuze kratko označimo sa [OM] i [ON], onda imamo da je

(6a,b) $\quad [OP] \subset [OM] \wedge [OQ] \subset [ON]$.

S obzirom da je duž [OP] različita od poluprave, to prema teoremi 1.4.6, na pravoj p(O,Q) postoje dve i samo dve tačke Q′ i Q" tako da je za jednu od duži [OQ′] i jednu od duži [OQ"], važi

(7a,b) $\quad [OP] \cong [OQ'] \wedge [OP] \cong [OQ'']$.

Iz (6a) i (7a,b), sledi da je

(8a,b) $\quad$ ili $[OQ'] \subset [ON]$, $\quad$ ili $[OQ''] \subset [ON]$.

Neka je, recimo, tačna relacija (8a). Prema aksiomi IV_9 s obzirom na (7a), (6a) i (8a), sledi da je

(9) $\quad P \,|\, Q'$.

Na osnovu (1b) i (9), prema aksiomi I_4, sledi da je $Q' = Q$. Otuda iz (7a) sledi relacija (2).

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (3b), tj. da je duž [OP] poluprava. Kako je prema teoremi 1.4.2, na pravoj p(O,P) suprotna tačka tački O jedinstvena, to je tačka $P = P_o$. A s obzirom na (1b) i (5) prema aksiomi I_4, sledi da je $Q = Q_o$. Dakle, i duž [OQ] je poluprava, te je prema aksiomi IV_8, ona podudarna polupravi [OP], tj. i u ovom slučaju važi relacija (2). Q.E.D.

Na osnovu teoreme 1.4.9. neposredno sledi teorema:

TEOREMA 1.4.10. - Hipotenuze jednougla su podudarne.

TEOREMA 1.4.11. - Neka su m i m′ dve razne prave i tačke M, N $\in$ m , M′, N′ $\in$ m′ , tako da je

(1a,b) $M \mid M' \wedge N \mid N'$.

Ako je [MN] jedna od duži prave m , onda je ona podudarna sa jednom od duži [M′N′] na pravoj m′ .

Dokaz. - Pretpostavimo da su m i m′ dve razne prave i sa njima respektivno incidentne tačke M, N i M′, N′, tako da važi (1a,b). Kako su tačke M, N $\in$ m , one su prema definiciji 1.1.1. kolinearne, tj.

(2) $M — N$.

Prema teoremi 1.1.2, na osnovu (1a) i (2), sledi

(3) $M' — N$.

S obzirom na relacije (1a) i (3), odnosno (1b) i (3), prema teoremi 1.4.9, sledi

(4a,b) $[MN] \cong [M'N] \wedge [M'N] \cong [M'N']$,

gde je [M′N′] jedna od duži prave m′ čije su krajnje tačke M′ i N′. Prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na (4a,b), sledi $[MN] \cong [M'N']$, što je trebalo i dokazati. Q.E.D.

Neposredna posledica teoreme 1.4.11. je:

POSLEDICA 1.4.11. - Duži sa paralelnim krajnjim tačkama su podudarne ako se svaka tačka jedne od njih dobija kao projekcija druge.

TEOREMA 1.4.12.- Ako je $\tilde{\Delta}$ MOM′ jednougao a P i P′ unutrašnje tačke hipotenuza [MO] i [M′O], tako da je

(1) $[MP] \cong [M'P']$,

gde je $[MP] \subset [MO]$ i $[M'P'] \subset [M'O]$, onda je $P \mid P'$.

Dokaz. - Za hipotenuze jednougla $\tilde{\Delta}$ MOM′, prema teoremi 1.4.10, sledi

(2) $[MO] \cong [M'O]$.

Na osnovu teoreme 1.4.8. s obzirom na (1) i (2), imamo

$$[OP] \cong [OP'], \quad [OP] \subset [MO], \quad [OP'] \subset [M'O],$$

a što prema aksiomi IV_9 znači da je $P|P'$. Q.E.D.

1.4.2. Relacija "... je podudarno..." za uglove

Polazne relacije podudarnosti duži i izotropnih duži okarakterisane aksiomama podudarnosti omogućavaju da u skupu svih uglova EP ravni definišemo relaciju podudarnosti za uglove.

DEFINICIJA 1.4.3. - Ako su O i O′ temena uglova $\angle pq$ i $\angle p'q'$, a P, Q i P′,Q′ dva para tačaka incidentnih respektivno sa kracima p,q i p′,q′ ovih uglova, tako da je

$$P|Q, \quad P'|Q', \quad [OP] \cong [O'P'], \quad [PQ] \cong [P'Q'],$$

onda kažemo da je $\angle pq$ *podudaran* $\angle p'q'$ i to zapisujemo:

$$\angle pq \cong \angle p'q' .$$

Dokažimo da važi teorema koja govori o egzistenciji podudarnih uglova.

TEOREMA 1.4.13. - Ako je p′ proizvoljna prava i tačka O′ ∈ p′ , a $\angle pq$ proizvoljan ugao, tada postoje dve i samo dve prave q′ i q" incidentne sa tačkom O′ , tako da je

(1a,b) $$\angle pq \cong \angle p'q' \wedge \angle pq \cong \angle p'q'' .$$

Dokaz. - Neka su u EP ravni uočeni: proizvoljna prava p′ , tačka O′ ∈ p′ i $\angle pq$ sa temenom O. Prema aksiomi IV_7 i teoremi 1.4.4, za tačku O ∈ p postoji jedinstvena suprotna tačka $P_o \in p$; takodje, za tačku $O \in q$ - postoji jedinstvena suprotna tačka $Q_o \in q$, a prema aksiomama IV_8 i IV_9 sledi

(2a,b) $[OP_o] \stackrel{\sim}{=} [OQ_o]$ i $P_o | Q_o$.

Označimo, dalje, sa $P'_o \in p'$, suprotnu tačku tački $O' \in p'$. Na osnovu aksiome IV_8 s obzirom na relaciju (2a), sledi da je

(3) $[OP_o] \stackrel{\sim}{=} [O'P'_o]$.

Tačkom P'_o, prema teoremi 1.1.4, odredjen je jedinstven izotropni niz tačaka. Označimo ga sa $\tilde{p}'_o$. Tačkom P'_o na izotropnom nizu tačaka $\tilde{p}'_o$ odredjena su dva izotropna poluniza. Prema aksiomi IV_2 za izotropnu duž $[P_o \tilde{Q}_o]$ i izotropne polunizove sa početnom tačkom P'_o, postoje jedinstvene tačke Q'_o i Q''_o incidentne respektivno sa tim izotropnim polunizovima, tako da je

(4a,b) $[P_o \tilde{Q}_o] \stackrel{\sim}{=} [P'_o \tilde{Q}'_o] \wedge [P_o \tilde{Q}_o] \stackrel{\sim}{=} [P'_o \tilde{Q}''_o]$.

Kako je

$$(O' \text{ — } P'_o \wedge P'_o | Q'_o), \ (O' \text{ — } P'_o \wedge P'_o | Q''_o),$$

to prema teoremi 1.1.2, sledi da je

$$O' \text{ — } Q'_o \wedge O' \text{ — } Q''_o ,$$

a to znači da postoje dve i samo dve prave $q' = p(O', Q'_o)$ i $q'' = p(O', Q''_o)$ incidentne sa tačkom O' i pritom sa pravom p' obrazuju uglove:

$$\angle\, p'q' \quad \text{i} \quad \angle\, p'q'' .$$

I konačno s obzirom na činjenice da je $P'_o | Q'_o$ i $P'_o | Q''_o$ i relacije (2b), (3) i (4a,b), na osnovu definicije 1.4.3, slede relacije (1a,b). Q.E.D.

Na osnovu aksiome IV_{10}, sledi da definicija podudarnosti uglova pq i p'q' ne zavisi od izbora podudarnih duži [OP] i [O'P'] na kracima p i p'.

Dalje, na osnovu aksiome IV_1, leme 1.4.1. i definicije 1.4.3, odmah možemo iskazati lemu:

LEMA 1.4.4. - U skupu svih uglova relacija "... je podudarno..." predstavlja refleksivnu relaciju.

Takodje, na osnovu lema 1.4.2,3. i definicije 1.4.3, neposredno se pokazuje da važe leme:

LEMA 1.4.5. - U skupu svih uglova relacija "... je podudarno..." predstavlja simetričnu relaciju.

LEMA 1.4.6. - U skupu svih uglova relacija "... je podudarno..." predstavlja tranzitivnu relaciju.

Koristeći leme 1.4.4,5,6, dokazuje se:

TEOREMA 1.4.14. - Podudarnost uglova je relacija ekvivalencije.

Na osnovu definicije 1.4.3. i aksiome IV_{10} neposredno se dokazuju teoreme:

TEOREMA 1.4.15. - Neka su dati jednouglovi $\tilde{\Delta}$ POQ i $\tilde{\Delta}$P'O'Q'. Ako je

$$[OP] \cong [O'P'] \wedge [P\tilde{Q}] \cong [P'\tilde{Q}'] ,$$

onda je i

$$\angle POQ \cong \angle P'O'Q'.$$

TEOREMA 1.4.16. - Ako su hipotenuza i ugao jednog jednougla podudarni hipotenuzi i uglu drugog jednougla, onda su podudarne i njihove katete.

TEOREMA 1.4.17. - Ako su kateta i ugao jednog jednougla podudarni kateti i uglu drugog jednougla, onda su podudarne i njihove hipotenuze.

Napomena: Za dva jednougla čija se temena, katete i ugao poklapaju a hipotenuze jednog od njih su dopunske duži hipotenuzama drugog jednougla, teorema 1.4.17. zadovoljena je samo u slučaju kad su hipotenuze ovih jednouglova poluprave.

1.4.3. Relacije "... manje od ..." i "... veće od ..." za duži

Pojmovi koji se, takodje, mogu izvesti iz relacije podudarnosti duži jesu poredbene relacije nad skupom duži koje izražavamo rečima: "... manji od ..." i "... veći od ...". Poredbene relacije za duži u EP ravni imaju smisla za dve duži od kojih je bar jedna različita od poluprave.

DEFINICIJA 1.4.4. - Ako su $[AB]$ i $[CD]$ dve duži od kojih je bar jedna različita od poluprave i pritom

$$(\exists M \in \,]CD[)([AB] \cong [CM] \wedge [CM] \subset [CD]) ,$$

tada kažemo da je duž $[AB]$ *manja od* duži $[CD]$, i to simbolički obeležavamo:

$$[AB] < [CD] .$$

TEOREMA 1.4.18. - U skupu svih duži relacija "... manje od ..." je relacija strogog poretka.

Dokaz. - Da bismo dokazali tvrdjenje teoreme treba dokazati:

(1) $\quad \neg([AB] < [AB]) ,$

(2) $\quad ([AB] < [CD]) \Longrightarrow \neg([CD] < [AB]) ,$

(3) $\quad ([AB] < [CD] \wedge [CD] < [EF]) \Longrightarrow [AB] < [EF] .$

Relacija (1) je posledica definicije 1.4.4.

Dokažimo implikaciju (2). Iz pretpostavke $[AB] < [CD]$, prema definiciji 1.4.4, sledi

(4) $\quad (\exists M \in]CD[)([AB] \cong [CM] \wedge [CM] \subset [CD])$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da je

$$[CD] < [AB] ,$$

a to prema definiciji 1.4.4, znači

(5) $\quad (\exists N \in]AB[)([AN] \cong [CD] \wedge [CD] \subset [AB])$.

Tačkama N i B na pravoj p(A,B) odredjena je duž $[NB]$, tako da je $[NB] \subset [AB]$. Uočena duž $[NB]$ je ili različita od poluprave, ili je poluprava, tj.

(6a,b) $\quad$ ili $\neg([NB] \cong [\overline{NB}])$, ili $[NB] \cong [\overline{NB}]$.

Ako je tačna relacija (6a), onda prema teoremi 1.4.6. za uočenu duž $[NB]$ i tačku $D \in p(C,D)$ postoje dve i samo dve tačke $B', B'' \in p(C,D)$, tako da je

(7a,b) $\quad [NB] \cong [DB'] \wedge [NB] \cong [DB'']$.

Za duži $[CD]$, $[DB']$ i $[DB'']$ prave p(C,D), važi

$$]CD[\cap]DB'[= \emptyset \wedge]CD[\cap]DB''[\neq \emptyset ,$$

ili obrnuto. Stoga prema teoremi 1.4.7. s obzirom na (5) i (7a), sledi

(8) $\quad$ duž $[ANB] \cong$ duži $[CDB'] \iff [AB] \cong [CB']$.

Dakle, s obzirom na (4) postoji unutrašnja tačka M duži $[CB']$ i pritom prema prvom delu aksiome IV_3, na osnovu (4) i (8), sledi da je duž $[CM] \subset [CB']$ podudarna duži $[CB']$, a što je protivurečno aksiomi IV_4. Prema tome, time je indirektnim putem dokazana egzistencija implikacije (2).

U slučaju da je tačna relacija (6b), tj. da je duž $[NB] \subset [AB]$ poluprava onda na pravoj $p(C,D)$ za tačku D prema aksiomi IV_7 i teoremi 1.4.4, postoji jedinstvena tačka $D_o \in p(C,D)$, tako da je $[DD_o] \cong [D\overline{D}_o]$. Presek jedne od otvorenih polupravih odredjene tačkom D i tačkom D_o i uočene duži $]CD[$ je prazan skup. Neka je, recimo

$$]CD[\cap]DD_o[= \emptyset \ .$$

Kako je prema aksiomi IV_8 poluprava $[NB]$ podudarna polupravi $[DD_o]$, to s obzirom na (5), prema teoremi 1.4.7, sledi da je

(9) $$\text{duž}[ANB] \cong \text{duži } [CDD_o] \Longleftrightarrow [AB] \cong [CD_o] \ .$$

Na isti način kao u slučaju (6a), s obzirom na (4) i (9), dolazi se do protivurečnosti sa aksiomom IV_4. Dakle, i u ovom slučaju važi implikacija (2).

Ostaje da dokažemo implikaciju (3). Pretpostavimo da je tačna leva strana ove implikacije a dokažimo da važi desna. S obzirom na pretpostavku da je $[AB] < [CD]$, prema definiciji 1.4.4, važi (4).

Takodje, s obzirom na pretpostavku da je $[CD] < [EF]$, imamo

(10) $$(\exists N \in]EF[)([CD] \cong [EN] \wedge [EN] \subset [EF]) \ .$$

Na osnovu aksiome IV_5 s obzirom da je prema (4) tačka M unutrašnja tačka duži $[CD]$ a prema (10) - $[CD] \cong [EN]$ i $[EN] \subset [EF]$, to postoji unutrašnja tačka P duži $[EN]$, te prema tome i duži $[EF]$, tako da je

(11a,b) $$[CM] \cong [EP] \wedge [MD] \cong [PN] \ ,$$

pri čemu je duž $[EP] \subset [EN]$, a s obzirom na (10):

(12) $$[EP] \subset [EF].$$

Otuda prema prvom delu aksiome IV_3, na osnovu (4) i (11a), sledi da je

$$(13) \qquad [AB] \cong [EP].$$

Dakle, za unutrašnju tačku P duži [EF] na osnovu (13) i (12), možemo zapisati

$$(\exists P \in]EF[)([AB] \cong [EP] \wedge [EP] \subset [EF]) \;,$$

a što prema definiciji 1.4.4, dokazuje egzistenciju desne strane implikacije (3). Q.E.D.

DEFINICIJA 1.4.5. - Ako su [AB] i [CD] dve duži od kojih je bar jedna različita od poluprave za duž [CD] kažemo da je *veća od* duži [AB] ako je [AB] < [CD], i to simbolički zapisujemo:

$$[CD] > [AB] \,.$$

Kao i u euklidskoj geometriji tačna je sledeća važna teorema:

TEOREMA 1.4.19. - Za dve duži [AB] i [CD] zadovoljena je uvek jedna i samo jedna od relacija

$$\text{ili } [AB] \cong [CD], \quad \text{ili } [AB] < [CD], \quad \text{ili } [AB] > [CD] \,.$$

Dokaz. - Ako su duži [AB] i [CD] poluprave onda su one prema aksiomi IV_8, podudarne, tj. važi $[AB] \cong [CD]$.

Pretpostavimo, recimo, da je duž [AB] različita od poluprave i da je [CD] poluprava. Ako sa A_o označimo suprotnu tačku tački A na pravoj p(A,B), onda je

$$(1a,b) \qquad \text{ili } B \in]AA_o[, \qquad \text{ili} \quad A_o \in]AB[\,.$$

Prema definiciji 1.4.4. s obzirom na relaciju (1a), odnosno - (1b), sledi respektivno da je

(2a,b) $[AB] < [AA_o]$, odnosno $[AA_o] < [AB]$.

Kako je prema aksiomi IV_8 $[AA_o] \cong [CD]$, to s obzirom na (2a) imamo da je $[AB] < [CD]$; medjutim, u slučaju (2b), sledi $[CD] < [AB]$.

Pretpostavimo na kraju da su obe duži $[AB]$ i $[CD]$ različite od poluprave. Označimo sa A_o i C_o respektivno suprotne tačke tačkama A i C na pravama $p(A,B)$ i $p(C,D)$. Kako je duž $[AB]$ različita od poluprave $[AA_o]$, to prema prethodno razmatranom slučaju imamo da je

(3a,b) ili $[AB] < [AA_o]$, ili $[AA_o] < [AB]$.

Razmotrimo slučaj (3a). Prema teoremi 1.4.6, za duž $[AB]$ i tačku $C \in p(C,C_o)$ postoje jedinstvene tačke B' i B'' incidentne sa pravom $p(C,C_o)$, tako da je

(4a,b) $[AB] \cong [CB'] \wedge [AB] \cong [CB'']$.

Kako su poluprave $[AA_o]$ i $[CC_o]$ podudarne, to s obzirom na relacije (3a) i (4a), imamo da je $[CB'] < [CC_o]$, a što prema definiciji 1.4.4, znači da je

(5) $B' \in\,]CC_o[$.

Duž $[CD]$ je, takodje, različita od poluprave, a to znači da je njena krajnja tačka D različita od tačke C_o i pritom važi

(6a,b) ili $D \in\,]CC_o[$, ili $D \in\,]CC_o[$.

Pretpostavimo da je tačna relacija (6a). S obzirom na (5) i (6a) za unutrašnje tačke B' i D poluprave $[CC_o]$, važi

(7a,b) ili $B' = D$, ili $B' \neq D$.

Ako je tačna relacija (7a), onda s obzirom na (4a), sledi $[AB] \cong [CD]$. U slučaju da važi (7b), to na polupravi $[CC_o]$ možemo uočiti duži $[CD]$ i $[DC_o]$, tako da je

$$]CD[\cap\,]DC_o[= \emptyset .$$

S obzirom na (5) za unutrašnju tačku B′ ove poluprave, važi:

(8a,b) ili $B' \in]CD[$, ili $B' \in]DC_o[$.

Prema definiciji 1.4.4, na osnovu (4a) i (8a), odnosno (4a) i (8b), sledi da je

$$\text{ili } [AB] < [CD], \text{ ili } [CD] < [AB] .$$

Ako je tačna relacija (6b) i pritom $[CD] \subset [\overline{CC_o}]$, onda kao u slučaju (6a) koristeći relaciju (4b) i polupravu $[\overline{CC_o}]$ pokazuje se da važi tvrdjenje teoreme.

Medjutim, ako je tačna relacija (6b) i pritom $C_o \in]CD[$, onda je

(9) $$[CC_o] < [CD] .$$

Kako je $[AA_o] \cong [CC_o]$, to s obzirom na (3a) i (9), sledi $[AB] < [CD]$.

Na analogan način pokazuje se da je teorema tačna i u slučaju kad važi relacija (3b). Q.E.D.

Pokazali smo teoremom 1.4.1. da u skupu $\mathbb{D}$ svih duži EP ravni relacija $\cong$ predstavlja relaciju ekvivalencije. Otuda možemo posmatrati količnik skup skupa $\mathbb{D}$ s obzirom na relaciju $\cong$ i označimo ga: $\mathbb{D}/\cong$.

Svaki element d količnik skupa $\mathbb{D}/\cong$ predstavlja klasu ekvivalencije skupa $\mathbb{D}$, odnosno skup svih medju sobom podudarnih duži. Bilo koja duž skupa d predstavlja reprezentaciju tog skupa, odnosno reprezentaciju odgovarajuće klase ekvivalencije.

DEFINICIJA 1.4.6. - Ako su $[A'B']$ i $[A''B'']$ reprezentacije elemenata d′ i d″ količnik skupa $\mathbb{D}/\cong$, onda je

$$d' < d'' \overset{def}{\iff} [A'B'] < [A''B''] .$$

Može se pokazati da relacija "... manje od ..." u količnik skupu $\mathbb{D}/\cong$ ne zavisi od izabranih reprezentacija elemenata ovog skupa.

Važi teorema:

TEOREMA 1.4.20. - U količnik skupu $\mathbb{D}/\cong$ relacija "... manje od ..." je relacija strogog poretka.

U količnik skupu $\mathbb{D}/\cong$ može se definisati sabiranje.

DEFINICIJA 1.4.7. - Ako su $[AB]$, $[A'B']$ i $[A"B"]$ reprezentacije elemenata d, d', $d"$ količnik skupa $\mathbb{D}/\cong$ i postoji unutrašnja tačka M duži $[AB]$, tako da je

$$[AM] \cong [A'B'] \wedge [MB] \cong [A"B"] ,$$

onda kažemo da je d *zbir* elemenata d' i $d"$, i to zapisujemo

$$d = d' + d" .$$

Na osnovu teorema 1.4.6,7. i leme 1.4.3. sledi da d ne zavisi od izbora reprezentacija elemenata d' i $d"$, već od samih tih elemenata. Stoga kažemo i: duž $[AB]$ je zbir duži $[A'B']$ i $[A"B"]$, i to simbolički zapisujemo:

$$[AB] = [A'B'] + [A"B"] .$$

Neka su duži $[AB]$ i $[A_1B_1]$ dve reprezentacije elementa d iz količnik skupa $\mathbb{D}/\cong$. To znači da je

$$[AB] \cong [A_1B_1] .$$

Prema aksiomi IV_6 iz prethodne relacije sledi da su i dopune ovih duži podudarne, tj.

$$[\overline{AB}] \cong [\overline{A_1B_1}] .$$

Prema tome, u skupu $\mathbb{D}/\cong$ pored elementa d postoji i element, označimo ga sa $\overline{d}$, koji predstavlja skup svih duži koje su podudarne duži $[\overline{AB}]$.

Sada možemo dokazati teoremu:

TEOREMA 1.4.21. - Zbir $d'+d''$ elemenata $d', d'' \in \mathbb{D}/\cong$ postoji onda i samo onda kad je

(1) $$d'' < \bar{d}'.$$

Dokaz. - Pretpostavimo da je tačna relacija (1), a dokažimo da postoji zbir $d'+d''$. Ako označimo sa $[A'B']$ i $[A''B'']$ reprezentacije elemenata d' i d'' količnik skupa $\mathbb{D}/\cong$, tada je $[\overline{A'B'}]$ reprezentacija elementa $\bar{d}'$. Iz pretpostavke (1), prema definiciji 1.4.4, imamo

$$(\exists M \in]\overline{A'B'}[)([A''B''] \cong [A'M] \wedge [A'M] \subset [\overline{A'B'}]) .$$

Prema definiciji 1.4.7. duž $[B'A'M]$ je reprezentacija elementa $d'+d''$. Egzistencija reprezentacije dokazuje egzistenciju zbira $d'+d''$.

Pretpostavimo, obrnuto, da postoji zbir $d'+d''$, a dokažimo da važi relacija (1). Neka je duž $[B'A'M]$ jedna reprezentacija zbira $d'+d''$. Tada, prema definiciji 1.4.7. postoji unutrašnja tačka A' duži $[B'A'M]$, takva da su duži

(2a,b) $$[B'A'] \subset [B'A'M] \quad \text{i} \quad [A'M] \subset [B'A'M] ,$$

respektivno reprezentacije elemenata d' i d''. Kako je tačka A' unutrašnja tačka duži $[B'A'M]$, to je s obzirom na (2a) tačka M unutrašnja tačka duži $[\overline{A'B'}]$, tj.

(3) $$M \in]\overline{A'B'}[.$$

Polazeći od činjenice da je duž $[A'B']$ reprezentacija elementa d' količnik skupa $\mathbb{D}/\cong$, onda je njena dopuna $[\overline{A'B'}]$ reprezentacija elementa $\bar{d}' \in \mathbb{D}/\cong$. Za reprezentaciju $[A'M]$ elementa $d'' \in \mathbb{D}/\cong$ s obzirom na (2b), važi

(4) $$[A'M] \subset [\overline{A'B'}] .$$

Otuda na osnovu definicije 1.4.4. s obzirom na (3) i (4), sledi relacija (1). Q.E.D.

Važi i teorema:

TEOREMA 1.4.22. - Za svaki d, d′ $\in \mathcal{D}/\tilde{=}$ važi d′ < d ako i samo ako postoji d" $\in \mathcal{D}/\tilde{=}$, takvo da je d′ + d" = d .

Za d" kažemo da je razlika elemenata d i d′ , i to simbolički zapisujemo: d" = d - d′ .

1.4.4. Dalje teoreme koje se odnose na duži (neizotropne i izotropne) i uglove

Za stranice trougla važi sledeća važna teorema:

TEOREMA 1.4.23. - Osnova trougla jednaka je zbiru njegovih bočnih strana.

Dokaz. - Neka je zadat Δ ABC sa središnjim temenom B i neka je tačka D projekcija ovog temena na pravu p(A,C). Prema definiciji 1.2.17, sledi da je D unutrašnja tačka osnove [AC], a prema definiciji 1.1.3, tačka D je paralelna tački B, tj.

(1a,b) $$D \in]AC[\wedge D \mid B .$$

Ako sa [AB] i [BC] označimo bočne strane zadatog trougla, treba dokazati

(2) $$[AC] = [AB] + [BC] .$$

Na osnovu teoreme 1.4.9. s obzirom na (1a,b), sledi

(3a,b) $$[AD] \tilde{=} [AB] \wedge [DC] \tilde{=} [BC] .$$

Na osnovu definicije 1.4.7. s obzirom na relacije (1a) i (3a,b), sledi relacija (2). Q.E.D.

TEOREMA 1.4.24. - Ako su B i B′ središnja temena trouglova Δ ABC i Δ A′B′C′ i pritom

(1a,b) $$[AC] \cong [A'C'] \wedge [AB] \cong [A'B'],$$

onda je

(2) $$[BC] \cong [B'C'].$$

Dokaz. - Neka su zadati trouglovi Δ ABC i Δ A′B′C′, tako da su B i B′ središnja temena ovih trouglova i pritom važe relacije (1a,b). Označimo

$$D = pr_{p(A,C)}B \quad i \quad D' = pr_{p(A',C')}B' .$$

Kako su B i B′ središnja temena, to prema definiciji 1.2.17, sledi da je

(3a,b) $$D \in]AC[\wedge D' \in]A'C'[,$$

a prema defoniciji 1.1.3:

(4a,b) $$D \,|\, B \wedge D' \,|\, B' .$$

Prema teoremi 1.4.9. s obzirom na (3a) i (4a), sledi

(5a,b) $$[AD] \cong [AB] \wedge [DC] \cong [BC] ,$$

a s obzirom na (3b) i (4b):

(6a,b) $$[A'D'] \cong [A'B'] \wedge [D'C'] \cong [B'C'] .$$

Prema prvom delu aksiome IV_3, s obzirom na pretpostavku (1b) i relacije (5a) i (6a), sledi

(7) $$[AD] \cong [A'D'],$$

gde je $[AD] \subset [AC]$ i $[A'D'] \subset [A'C']$.
Prema teoremi 1.4.8, s obzirom na relacije (3a,b), (1a) i

(7), sledi

(8) $\quad [DC] \cong [D'C']$.

Konačno prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na relacije (5b), (8) i (6b), sledi relacija (2). Q.E.D.

TEOREMA 1.4.25. - Ako su bočne strane jednog trougla podudarne bočnim stranama drugog trougla, onda su podudarne i njihove osnove.

Dokaz. - Neka su zadati trouglovi Δ ABC i Δ A'B'C' kod kojih su središnja temena B i B' i pritom

(1a,b) $\quad [AB] \cong [A'B'] \wedge [BC] \cong [B'C']$.

Treba dokazati da su im i osnove podudarne, tj. da je

(2) $\quad [AC] \cong [A'C']$.

Označimo projekcije temena B i B' na osnove ovih trouglova tačkama D i D'. Prema teoremi 1.4.9, dobijamo da je

(3a,b) $\quad [AB] \cong [AD] \wedge [BC] \cong [DC]$,

odnosno

(4a,b) $\quad [A'B'] \cong [A'D'] \wedge [B'C'] \cong [D'C']$.

Prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na (1a), (3a) i (4a), odnosno - (1b), (3b) i (4b), sledi

(5a,b) $\quad [AD] \cong [A'D'] \wedge [DC] \cong [D'C']$.

Kako je

$$]AD[\cap]DC[= \emptyset \quad i \quad]A'D'[\cap]D'C'[= \emptyset ,$$

to prema teoremi 1.4.7. s obzirom na (5a,b), sledi relacija (2). Q.E.D.

TEOREMA 1.4.26. - Neka su Δ ABC i Δ A′B′C′ dva trougla sa središnjim temenima B i B′.

a) Ako su osnova [AC], bočna strana [AB] i unutrašnji ugao $\angle A$ Δ ABC, respektivno podudarni osnovi [A′C′], bočnoj strani [A′B′] i unutrašnjem uglu $\angle A'$ Δ A′B′C′, onda su i preostali odgovarajući elementi tih trouglova podudarni.

b) Ako su osnova, bočna strana i spoljašnji ugao Δ ABC, respektivno podudarni osnovi, odgovarajućoj bočnoj strani i spoljašnjem uglu Δ A′B′C′, onda su i preostali odgovarajući elementi tih trouglova podudarni.

c) Ako su bočne strane i spoljašnji ugao Δ ABC, respektivno podudarni odgovarajućim bočnim stranama i spoljašnjem uglu Δ A′B′C′, onda su i preostali odgovarajući elementi tih trouglova podudarni.

d) Ako su bočne strane i unutrašnji ugao Δ ABC respektivno podudarni odgovarajućim bočnim stranama i odgovarajućem unutrašnjem uglu Δ A′B′C′, onda su i preostali odgovarajući elementi tih trouglova podudarni.

Dokaz. - a) Neka su dati Δ ABC Δ A′B′C′ sa središnjim temenima B i B′ i neka je

(1a,b,c) $\quad [AC] \cong [A'C'], \; [AB] \cong [A'B'], \; \angle A \cong \angle A'$,

a dokažimo da važi

(2a,b,c) $\quad [BC] \cong [B'C'], \; \angle C \cong \angle C', \; \angle B \cong \angle B'$.

Na osnovu teoreme 1.4.24, s obzirom na pretpostavke (1a,b), sledi relacija (2a).

Ako označimo sa:

$$D = pr_{p(A,C)}B\,, \quad E = pr_{p(A,B)}C\,, \quad F = pr_{p(B,C)}A\,,$$

$$D' = pr_{p(A',C')}B'\,, \quad E' = pr_{p(A',B')}C'\,, \quad F' = pr_{p(B',C')}A'\,,$$

onda prema definiciji 1.1.1, sledi

(3a,b,c) $B|D$, $C|E$, $A|F$,

(4a,b,c) $B'|D'$, $C'|E'$, $A'|F'$.

Kako su po pretpostavci B i B′ središnja temena zadatih trouglova to prema definiciji 1.2.17, sledi da su njihove projekcije D i D′ unutrašnje tačke osnova ovih trouglova, tj.

(5a,b) $D \in]AC[$ i $D' \in]A'C'[$.

Na osnovu teoreme 1.2.9, projekcije ostalih temena incidentne su sa dopunama bočnih strana ovih trouglova. Prema tome, ako sa [AB] i [BC], odnosno [A′B′] i [B′C′] označimo bočne strane zadatih trouglova, onda su njihove dopune respektivno: duž [AEB] i duž [BFC], odnosno duž [A′E′B′] i duž [B′F′C′].

Ako sa $\tilde{c}$ i $\tilde{c}'$ označimo izotropne nizove respektivno sa osnovama C i C′, onda prema definiciji 1.2.16, s obzirom na (5a,b), (3a) i (4a), možemo uočiti jednouglove $\tilde{\Delta}$ BAD i $\tilde{\Delta}$ B′A′D′ čije su hipotenuze [AB] i [AD], odnosno [A′B′] i [A′D′] dopune: duži [AEB] i duži [ACD], odnosno duži [A′E′B′] i duži [A′C′D′]. Za uočene jednouglove, prema teoremi 1.4.16, na osnovu pretpostavki (1b,c), sledi da su im i katete podudarne, tj. da je

(6) $[\tilde{BD}] \cong [\tilde{B'D'}]$.

Označimo, zatim, sa $\tilde{a}$ i $\tilde{a}'$ izotropne nizove tačaka respektivno sa osnovama A i A′. Onda prema definiciji 1.2.16, s obzirom na (5a,b), (3a) i (4a), možemo uočiti jednouglove $\tilde{\Delta}$ BCD i $\tilde{\Delta}$ B′C′D′ čije su hipotenuze [BC] i [DC], odnosno [B′C′] i [D′C′] dopune: duži [BFC] i duži [DAC], odnosno duži [B′F′C′] i [D′A′C′]. Na osnovu teoreme 1.4.15, za uočene jednouglove s obzirom na (2a) i (6), sledi relacija (2b).

Kako su tačke A i C, odnosno A′ i C′ kolinearne kao temena zadatih trouglova, to s obzirom na (3b) i (4b), možemo uočiti jednouglove $\tilde{\Delta}$ CAE i $\tilde{\Delta}$ C′A′E′ čije su hipotenuze respektivno: duž [ADC], duž [ABE], duž [A′D′C′] i duž [A′B′E′]. Za uočenje jednouglova, prema teoremi 1.4.16, s obzirom na pretpostavke (1a,c), sledi

(7) $\quad [\widetilde{CE}] \,\widetilde{=}\, [\widetilde{C'D'}].$

Obzirom da su tačke B i C, odnosno B′ i C′ temena zadatih trouglova, to je

(8a,b) $\quad B — C \text{ i } B' — C'$.

Ako uočimo izotropne nizove tačaka $\tilde{a}$ i $\tilde{a}'$, onda prema definiciji 1.2.16, s obzirom na (8a,b), (3b) i (4b), možemo uočiti jednouglove $\tilde{\Delta}$ CBE i $\tilde{\Delta}$ C′B′E′ čije su hipotenuze [CB] i [EB], odnosno [C′B′] i [E′B′] dopune: duži [CFB] i duži [EAB], odnosno duži [C′F′B′] i duži [E′A′B′]. Za uočene jednouglove, na osnovu teoreme 1.4.15, s obzirom na relacije (2a) i (7), sledi relacija (2c).

b) Da je i druga bočna strana Δ ABC podudarna drugoj bočnoj strani Δ A′B′C′ dokazuje se na osnovu teoreme 1.4.24.

Ako na isti način kao u slučaju pod a) uočimo jednouglove $\tilde{\Delta}$ CBE i $\tilde{\Delta}$ C′B′E′, onda prema teoremi 1.4.16, s obzirom da je i druga bočna strana [BC] podudarna bočnoj strani [B′C′] i pretpostavke da je $\angle B = \angle B'$ dobijamo relaciju (7). Ako se, zatim, uoče jednouglovi $\tilde{\Delta}$ CAE i $\tilde{\Delta}$ C′A′E′, takodje na isti način kao u slučaju pod a), onda na osnovu teoreme 1.4.15, s obzirom na pretpostavku da je osnova [AC] podudarna osnovi [A′C′] i relacije (7), sledi da je

(9) $\quad \angle A \,\widetilde{=}\, \angle A'$.

Uočimo potom na isti način kao pod a) jednouglove $\tilde{\Delta}$ BAD i $\tilde{\Delta}$ B′A′D′. Na osnovu teoreme 1.4.16, s obzirom na pretpostavku da je bočna strana [AB] podudarna bočnoj strani [A′B′] i relaciju (9), sledi relacija (6). I konačno, uočavanjem na isti način kao pod a) jednouglove $\tilde{\Delta}$ BCD i $\tilde{\Delta}$ B′C′D′, onda prema teoremi 1.4.15, s obzirom na prvi deo dokaza da je bočna strana [BC] podudarna bočnoj strani [B'C'] i relacije (6), sledi da je

$$\angle C \cong \angle C' .$$

c) Da su i osnove zadatih trouglova podudarne, sledi na osnovu teoreme 1.4.25, s obzirom na pretpostavke.

Podudarnost odgovarajućih unutrašnjih uglova zadatih trouglova dobija se na osnovu slučaja b) ove teoreme.

d) Dokaz sledi na osnovu teoreme 1.4.25 i slučaja a) ove teoreme. Q.E.D.

TEOREMA 1.4.27. - Neka su Δ ABC i Δ A'B'C' trouglovi sa središnjim temenima B i B' a D i D' respektivne projekcije ovih temena na osnove [AC] i [A'C'].

a) Ako je

(1a,b,c) $\quad [AC] \cong [A'C'],\quad [AB] \cong [A'B'],\quad [BD] \cong [B'D'],$

onda je i

$$[BC] \cong [B'C'],\quad \angle B \cong \angle B' ,$$

(2a,b.c,d)

$$\angle A \cong \angle A' ,\quad \angle C \cong \angle C' .$$

b) Ako je

(3a,b.c) $\quad [AB] \cong [A'B'],\ [BC] \cong [B'C'],\quad [BD] \cong [B'D'],$

onda je i

$$[AC] \cong [A'C'],\quad \angle B \cong \angle B' ,$$

(4a,b,c,d)

$$\angle A \cong \angle A' ,\quad \angle C \cong \angle C' .$$

Dokaz. - a) Tačnost relacije (2a) sledi iz pretpostavki (1a,b), na osnovu teoreme 1.4.24.

Ako na isti način kao kod teoreme 1.4.26.a) uočimo jednouglove $\tilde{\Delta}$ BAD i $\tilde{\Delta}$ B'A'D', onda na osnovu teoreme 1.4.15. s obzirom na pretpostavke (1b,c), sledi relacija (2c).

Ako, zatim, uočimo jednouglove $\tilde{\Delta}$ BCD i $\tilde{\Delta}$ B'C'D' onda na osnovu pretpostavke (1c) i relacije (2a), prema teoremi 1.4.15, sledi relacija (2d).

I konačno, na osnovu teoreme 1.4.26.a) s obzirom na pretpostavke (1a,b) i relacija (2c), sledi relacija (2b).

b) Dokaz se izvodi na analogan način kao u slučaju a), s tom razlikom što za dokaz relacije (4a) koristimo teoremu 1.4.25. Q.E.D.

DEFINICIJA 1.4.8. - Trougao kod koga su bočne strane podudarne nazivamo *jednokraki*.

TEOREMA 1.4.28. - Ako su kod trougla Δ ABC podudarne bočne strane, tj.

(1) $\quad [AB] \cong [BC]$,

onda je i

(2) $\quad \angle BAC \cong \angle BCA$.

Dokaz. - Neka je zadat Δ ABC gde je B središnje teme i pritom važi relacija (1). Ako je D projekcija središnjeg temena B zadatog trougla na p(A,C), to prema definiciji 1.2.17, sledi da je D $\in$]AC[, a prema definiciji 1.1.3. - sledi da je B | D. Neka je $\tilde{m}$ izotropni niz tačaka sa osnovom M, tako da je M $\in$ [AC], gde je [AC] dopunska duž duži [ADC]. Ako označimo

$$\tilde{m} \cap p(A,B) = \{E\}, \quad \tilde{m} \cap p(B,C) = \{F\} ,$$

onda možemo uočiti jednouglove $\tilde{\Delta}$ BAD i $\tilde{\Delta}$ BCD koji imaju zajedničku katetu izotropnu duž $\widetilde{[BD]}$, a hipotenuze su respektivno dopune duži: [ACD], [AEB] i [CAD], [BFC], tj. duži [AD], [AB] i [CD], [BC]. Stoga na osnovu teoreme 1.4.15, s obzirom na pretpostavku (1), sledi relacija (2). Q.E.D.

TEOREMA 1.4.29. - Ako su unutrašnji uglovi trougla podudarni onda je taj trougao jednakokraki.

Dokaz. - Neka je dat trougao $\tilde{\Delta}$ ABC sa središnjim temenom B i neka je

(1) $\angle BAC \cong \angle BCA$.

Da bismo dokazali da je trougao jednakokraki, prema definiciji 1.4.8, treba dokazati da su mu bočne strane podudarne, tj. da je

(2) $[AB] \cong [BC]$.

Neka je tačka D projekcija temena B na osnovu [AC] . Na isti način kao u teoremi 1.4.28, uočavamo jednouglove $\tilde{\Delta}$ BAD i $\tilde{\Delta}$ BCD, koji imaju zajedničku katetu [BD]. Stoga na osnovu teoreme 1.4.17, s obzirom na pretpostavku (1), sledi relacija (2). Q.E.D.

Na osnovu teorema 1.4.21,23, dokazuje se da važi:

TEOREMA 1.4.30. - Bočna strana jednakokrakog trougla manja je od poluprave.

TEOREMA 1.4.31. - Neka je

(1) $\angle pq \cong \angle p'q'$,

a m prava incidentna sa temenom $\angle pq$ i sadržana u unutrašnjosti tog ugla. Tada postoji jedna i samo jedna prava m' incidentna sa temenom $\angle p'q'$ i sadržana u unutrašnjosti tog ugla, tako da je

(2a,b) $\angle pm \cong \angle p'm' \wedge \angle mq \cong \angle m'q'$.

Dokaz. - Neka su dati uglovi $\angle pq$ i $\angle p'q'$ tako da važi relacija (1) i neka je prava m incidentna sa temenom O $\angle pq$ sadržana u unutrašnjosti tog ugla. Označimo sa P i

P' suprotne tačke respektivno temenima O i O' na pravama p i p'. Prema aksiomi IV_8, sledi da je

(3) $$[OP] = [O'P'].$$

Sa Q i Q' označimo tačke incidentne respektivno sa pravama q i q', različite od suprotnih tačaka tačkama O i O', tako da je

(4) $$[OQ] \cong [O'Q'],$$

i pritom duži $[OQ]$ i $[O'Q']$ manje od poluprave. Uočimo trouglove $\Delta\ OQP$ i $\Delta\ O'Q'P'$ čije su osnove poluprave $[OP]$ i $[O'P']$ a bočne strane $[OQ]$ i $[PQ]$, odnosno $[O'Q']$ i $[P'Q']$, pri čemu je bočna strana $]PQ[$ sadržana u unutrašnjosti $\angle\ pq$, a bočna strana $]P'Q'[$ – u unutrašnjosti $\angle\ p'q'$. Za uočene trouglove, prema teoremi 1.4.26.a) s obzirom na (1), (3) i (4), sledi

(5a,b,c) $$[PQ] \cong [P'Q'],\ \angle\ P \cong \angle\ P',\ \angle\ Q \cong \angle\ Q'.$$

Označimo sa $\{M\} = m \cap p(P,Q)$. Kako su prava m i duž $]PQ[$ sadržane u unutrašnjosti $\angle\ pq$ to je M unutrašnja tačka ovog ugla i duži $[PQ]$. Prema aksiomi IV_5 s obzirom na relaciju (5a), za unutrašnju tačku M duži $[PQ]$ postoji unutrašnja tačka M' duži $[P'Q']$, tako da je

(6a,b) $$[PM] \cong [P'M'] \wedge [MQ] \cong [M'Q'] .$$

Prema teoremi 1.4.3, tačka M' je jedinstvena unutrašnja tačka duži $[P'Q']$ i istovremeno unutrašnja tačka $\angle\ p'q'$. Tačka M' je, dakle, kolinearna sa temenom O'. Prema definiciji 1.1.1, za kolinearne tačke O' i M' postoji jedinstvena prava incidentna sa ovim tačkama. Označimo je sa $m'=p(O',M')$. Neka su, dalje, $\tilde{m}$ i $\tilde{m}'$ izotropni nizovi tačaka sa osnovama M i M' i

$$\tilde{m} \cap p=\{R\},\quad \tilde{m}' \cap p'=\{R'\},\quad \tilde{m} \cap q=\{S\},\quad \tilde{m}' \cap q' =\{S'\}.$$

Tačke M i M′ su središnja temena trouglova Δ OMP i Δ O′M′P′. Za ove trouglove s obzirom na (3) i (6a), prema teoremi 1.4.24, sledi da je

(7) $$[OM] \overset{\sim}{=} [O'M'].$$

Uočimo jednouglove $\tilde{\Delta}$ MPR i $\tilde{\Delta}$ M′P′R′ čije su hipotenuze respektivno dopunske duži dužina: [MQP], [ROP], [M′Q′P′], [R′O′P′]. Za ove jednouglove prema teoremi 1.4.16, s obzirom na (5b) i (6a), sledi

(8) $$[\tilde{M}R] \overset{\sim}{=} [M'\tilde{R}'].$$

Označimo sa $\tilde{p}$ i $\tilde{p}'$ izotropne nizove tačaka sa osnovama P i P′ i

$$\tilde{p} \cap m=\{N\}, \quad \tilde{p}' \cap m'=\{N'\}, \quad \tilde{p} \cap q=\{T\}, \quad \tilde{p}' \cap q'=\{T'\}.$$

Uočimo, potom, jednouglove $\tilde{\Delta}$ MOR i Δ M′O′R′ čije su hipotenuze respektivno dopunske duži dužima: [MNO], [RPO], [M′N′O′], [R′P′O′]. Za ove jednouglove prema teoremi 1.4.15, s obzirom na relacije (7) i (8), sledi (2a).

Uočimo, zatim, jednouglove $\tilde{\Delta}$ MQS i $\tilde{\Delta}$ M′Q′S′ čije su hipotenuze respektivno dopunske duži dužima: [MPQ], [STQ], [M′P′Q′], [S′T′Q′]. Za njih prema teoremi 1.4.16, s obzirom na (5c) i (6b), sledi

(9) $$[\tilde{M}S] \overset{\sim}{=} [M'\tilde{S}'].$$

Na kraju uočimo jednouglove $\tilde{\Delta}$ MOS i $\tilde{\Delta}$ M′O′S′ čije su hipotenuze respektivno dopunske duži dužima: [MNO], [STO], [M′N′O′], [S′T′O′]. Prema teoremi 1.4.15, za ove jednouglove s obzirom na (7) i (9), dobija se relacija (2b). Q.E.D.

TEOREMA 1.4.32. - Neka su P,Q i M tri razne paralelne tačke incidentne sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}$, a P′ i Q′ dve razne paralelne tačke incidentne sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}'$, tako da je

(1) $$[\tilde{P}Q] \overset{\sim}{=} [P'\tilde{Q}'].$$

Tada na izotropnom nizu tačaka $\tilde{p}'$ postoji jedinstvena tačka M', tako da je

(2a,b) $$[\widetilde{PM}] \overset{\sim}{=} [\widetilde{P'M'}] \wedge [\widetilde{MQ}] \overset{\sim}{=} [\widetilde{M'Q'}] .$$

Štaviše

(i) ako je $(P \sim M \sim Q)$, tada je $(P' \sim M' \sim Q')$,

(ii) ako je $(P \sim Q \sim M)$, tada je $(P' \sim Q' \sim M')$,

(iii) ako je $(M \sim P \sim Q)$, tada je $(M' \sim P' \sim Q')$.

Dokaz. - (i) Neka je $P \,|\, M \,|\, Q$, $(P \sim M \sim Q)$ i $P' \,|\, Q'$, tako da važi (1). Kroz tačku P, odnosno P', uočimo proizvoljnu pravu p , odnosno p', i na njoj suprotnu tačku O tački P, odnosno suprotnu tačku O' tački P'. Prema aksiomi IV_8, sledi da je

(3) $$[OP] \overset{\sim}{=} [O'P'] .$$

Kako je $P \,|\, Q$ i $P \,\text{—}\, O$, odnosno $P' \,|\, Q'$ i $P' \,\text{—}\, Q'$, to je prema teoremi 1.1.2, $Q \,\text{—}\, O$, odnosno $Q' \,\text{—}\, O'$. A na osnovu teoreme 1.4.9, sledi

(4a,b) $$[OP] = [OQ] \wedge [O'P'] = [O'Q'].$$

Prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na (3) i (4a,b), sledi

(5) $$[OQ] = [O'Q'].$$

Označimo prave $p(O,Q)=q$, $p(O',Q')=q'$, a izotropne nizove tačaka sa osnovom P i P' sa $\tilde{p}$ i $\tilde{p}'$. Kako je $Q \,|\, P$ i $Q' \,|\, P'$, to su tačke $P, Q \in \tilde{p}$, a $P', Q' \in \tilde{p}'$. Izotropne duži $]\widetilde{PQ}[$ i $]\widetilde{P'Q'}[$, za koje važi relacija (1), sadržane su respektivno u unutrašnjosti $\angle\, pq$ i $\angle\, p'q'$. Na osnovu definicije 1.4.3, s obzirom na (1) i (3), sledi da je

(6) $$\angle\, pq \overset{\sim}{=} \angle\, p'q' .$$

Kako po pretpostavci imamo da je $(P \sim M \sim Q)$, to znači da je tačka M unutrašnja tačka $\angle pq$. Po pretpostavci tačka M je paralelna tački P, tj. $M \| P$ i $P — O$, te je prema teoremi 1.1.2, tačka M kolinearna sa tačkom O. Označimo pravu incidentnu sa tačkama M i O sa $p(M,O)=m$. Dakle, prava m je sadržana u unutrašnjosti $\angle pq$ i incidentna sa njegovim temenom O, te s obzirom na (6), na osnovu teoreme 1.4.31, postoji jedinstvena prava m' incidentna sa tačkom O' i sadržana u unutrašnjosti $\angle p'q'$, tako da je

$$\text{(7a,b)} \qquad \angle pm \overset{\sim}{=} \angle p'm' \land \angle mq \overset{\sim}{=} \angle m'q'.$$

Prema teoremi 1.1.5, za pravu m' i izotropni niz tačaka $\tilde{p}'$, postoji jedna i samo jedna tačka M' incidentna sa svakom od njih, tj.

$$m' \cap \tilde{p}' = \{M'\}.$$

Izotropna duž $]P'\tilde{Q}'[$ incidentna sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}'$ sadržana je u unutrašnjosti $\angle p'q'$. Kako je i prava m' jedinstvena prava sadržana u unutrašnjosti $\angle p'q'$ i pritom važi (7a,b), to je tačka M' unutrašnja tačka izotropne duži $[P'Q']$, tj.

$$(P' \sim M' \sim Q').$$

Uočimo jednouglove $\tilde{\Delta}\, POM$ i $\tilde{\Delta}\, P'O'M'$, odnosno - $\tilde{\Delta}\, QOM$ i $\tilde{\Delta}\, Q'O'M'$ čije su hipotenuze poluprave. Na osnovu teoreme 1.4.16, s obzirom na (3) i (7a), odnosno (5) i (7b), slede relacije (2a,b).

Slučajevi (ii) i (iii) dokazuju se analogno ili indirektnim postupkom. Q.E.D.

TEOREMA 1.4.33. - Neka su M i M' respektivno unutrašnje tačke izotropnih duži $[P\tilde{Q}]$ i $[P'Q']$, tj.

$$\text{(1a,b)} \qquad (P \sim M \sim Q) \land (P' \sim M' \sim Q').$$

Tada ako je

$$(2a,b) \qquad \widetilde{[PM]} \cong \widetilde{[P'M']} \wedge \widetilde{[MQ]} \cong \widetilde{[M'Q']},$$

onda je

$$(3) \qquad \widetilde{[PQ]} \cong \widetilde{[P'Q']}.$$

Takodje važi:

$$(\widetilde{[PQ]} \cong \widetilde{[P'Q']} \wedge \widetilde{[PM]} \cong \widetilde{[P'M']}) \Longrightarrow \widetilde{[MQ]} \cong \widetilde{[M'Q']}$$

Dokaz. - Neka su date izotropne duži $\widetilde{[PQ]}$ i $\widetilde{[P'Q']}$ i tačke M i M′ tako da važi (1a,b) i (2a,b). Pretpostavimo suprotno, tj. da relacija (3) nije zadovoljena. Onda na osnovu aksiome IV_2, na izotropnom polunizu sa početnom tačkom P′ koji je incidentan sa tačkom M′, postoji tačka Q_1, tako da je

$$(4) \qquad \widetilde{[PQ]} \cong \widetilde{[P'Q_1]}\ .$$

Na osnovu teoreme 1.4.32, s obzirom na relaciju (4), postoji tačka $M_1 \in \widetilde{]P'Q_1[}$, tako da je

$$(5a,b) \qquad \widetilde{[PM]} \cong \widetilde{[P'M_1]} \wedge \widetilde{[MQ]} \cong \widetilde{[M_1Q_1]}\ .$$

Kako su tačke M_1 i M′ incidentne sa istim izotropnim polunizom čija je početna tačka P′, to na osnovu aksiome IV_2 s obzirom (2a) i (5a), sledi da je

$$(6) \qquad M_1 = M'\ .$$

Na osnovu relacija (6) i (5b) i pretpostavke (2b) iz istih razloga, na osnovu aksiome IV_2, sledi da je i

$$(7) \qquad Q_1 = Q'\ .$$

Dakle, iz (4) i (7), sledi relacija (3). Q.E.D.

Primenom teorema 1.4.16,33,9. dokazuje se sledeća teorema:

TEOREMA 1.4.34. - Neka su O i O′ temena uglova $\angle\, pq$ i $\angle\, p'q'$, a m i m' prave incidentne respektivno sa tačkama O i O′ i istovremeno sadržane u unutrašnjosti ovih uglova. Tada važe implikacije:

$$(\angle\, pm \cong \angle\, p'm' \wedge \angle\, mq \cong \angle\, m'q') \Longrightarrow \angle\, pq \cong \angle\, p'q',$$

$$(\angle\, pq \cong \angle\, p'q' \wedge \angle\, pm \cong \angle\, p'm') \Longrightarrow \angle\, mq \cong \angle\, m'q'.$$

1.4.5. Relacija "... manje od ..." i "... veće od ..." za izotropne duži

Pomoću relacije podudarnosti izotropnih duži uvodimo poredbene relacije nad skupom izotropnih duži.

DEFINICIJA 1.4.9. - Ako su $\widetilde{[PQ]}$ i $\widetilde{[RS]}$ dve izotropne duži i pritom

$$(\exists\, M \in \widetilde{]RS[})(\widetilde{[PQ]} \cong \widetilde{[RM]} \wedge (R \sim M \sim S)),$$

tada kažemo da je izotropna duž $\widetilde{[PQ]}$ *manja od* izotropne duži $\widetilde{[RS]}$, i to simbolički obeležavamo:

$$\widetilde{[PQ]} < \widetilde{[RS]}\ .$$

TEOREMA 1.4.35. - U skupu svih izotropnih duži, relacija "... manje od ..." je relacija strogog poretka.

Dokaz ove teoreme izvodi se na osnovu aksiome IV_2 i teoreme 1.4.33, na isti način kako je dokazana odgovarajuća teorema u euklidskoj geometriji (v. [30], str. 23).

DEFINICIJA 1.4.10. - Izotropna duž $[\widetilde{RS}]$ je *veća od* izotropne duži $[\widetilde{PQ}]$ ako je $[\widetilde{PQ}] < [\widetilde{RS}]$, i to simbolički zapisujemo:

$$[\widetilde{RS}] > [\widetilde{PQ}] .$$

Kao što smo napred pokazali za duži tako je i za izotropne duži tačna sledeća važna teorema:

TEOREMA 1.4.36. - Za svake dve izotropne duži $[\widetilde{PQ}]$ i $[\widetilde{RS}]$ zadovoljena je uvek jedna i samo jedna od relacija

(1a,b,c) ili $[\widetilde{PQ}] \cong [\widetilde{RS}]$, ili $[\widetilde{PQ}] < [\widetilde{RS}]$, ili $[\widetilde{PQ}] > [\widetilde{RS}]$.

Dokaz. - Ako sa $\widetilde{ip}([RS)$ označimo izotropni poluniz sa početnom tačkom R koji sadrži tačku S, onda prema aksiomi IV_2 postoji jedna i samo jedna tačka M, tako da je

$$M \in \widetilde{ip}([RS) \wedge [\widetilde{RM}] \cong [\widetilde{PQ}] .$$

Za tačke M i S uočenog izotropnog poluniza, važi

(2a,b,c) ili M=S, ili $(R \sim M \sim S)$, ili $(R \sim S \sim M)$.

U slučaju da važi (2a), onda sledi (1a). Medjutim, ako je tačna relacija (2b), onda prema definiciji 1.4.9, sledi (1b), odnosno ako je tačna relacija (2c), onda sledi (1c). Q.E.D.

Teoremom 1.4.2 pokazano je da relacija $\widetilde{\cong}$ u skupu izotropnih duži predstavlja relaciju ekvivalencije. Ako sa $\widetilde{\mathbb{D}}$ označimo skup svih iztropnih duži EP ravni onda relacija $\widetilde{\cong}$ taj skup razbija na klase ekvivalencije. Dakle, može se posmatrati količnik skup $\widetilde{\mathbb{D}}/\widetilde{\cong}$ skupa $\widetilde{\mathbb{D}}$ s obzirom na relaciju $\widetilde{\cong}$.

Svaki element $\widetilde{d}$ količnik skupa $\widetilde{\mathbb{D}}/\widetilde{\cong}$ predstavlja skup svih medju sobom podudarnih izotropnih duži. Bilo koji element skupa $\widetilde{d}$ predstavlja reprezentaciju odgovarajuće klase ekvivalencije.

DEFINICIJA 1.4.11. - Ako su $[\widetilde{P'Q'}]$ i $[\widetilde{P''Q''}]$ reprezentacije elemenata $\tilde{d}'$ i $\tilde{d}''$ količnik skupa $\tilde{\mathcal{D}}/\cong$, onda je

$$\tilde{d}' < \tilde{d}'' \overset{def}{\iff} [\widetilde{P'Q'}] < [\widetilde{P''Q''}] .$$

Pokazuje se da relacija "... manje od ..." u količnik skupu $\tilde{\mathcal{D}}/\cong$ ne zavisi od izbora reprezentacije elemenata ovog skupa.

Važi teorema:

TEOREMA 1.4.37. - U količnik skupu $\tilde{\mathcal{D}}/\cong$ relacija "... manje od ..." je relacija strogog poretka.

DEFINICIJA 1.4.12. - Ako su $[\widetilde{PQ}]$, $[\widetilde{P'Q'}]$ i $[\widetilde{P''Q''}]$ reprezentacije elemenata $\tilde{d}$, $\tilde{d}'$, $\tilde{d}''$ količnik skupa $\tilde{\mathcal{D}}/\cong$ i postoji unutrašnja tačka M izotropne duži $[\widetilde{PQ}]$, tako da je

$$[\widetilde{PM}] \cong [\widetilde{P'Q'}] \wedge [\widetilde{MQ}] \cong [\widetilde{P''Q''}] ,$$

onda kažemo da je $\tilde{d}$ *zbir* elemenata $\tilde{d}'$ i $\tilde{d}''$, i to zapisujemo:

$$\tilde{d} = \tilde{d}' + \tilde{d}'' .$$

Na osnovu aksiome IV_2, teoreme 1.4.33. i leme 1.4.3, sledi da $\tilde{d} \in \tilde{\mathcal{D}}/\cong$ ne zavisi od izabranih reprezentacija elemenata $\tilde{d}'$ i $\tilde{d}''$ količnik skupa $\tilde{\mathcal{D}}/\cong$, već od samih tih elemenata. Stoga kažemo i: izotropna duž $[\widetilde{PQ}]$ je zbir izotropnih duži $[\widetilde{P'Q'}]$ i $[\widetilde{P''Q''}]$, i to simbolički zapisujemo:

$$[\widetilde{PQ}] = [\widetilde{P'Q'}] + [\widetilde{P''Q''}] .$$

Važe i teoreme:

TEOREMA 1.4.38. - Za svako $\tilde{d}', \tilde{d}'' \in \tilde{\mathcal{D}}/\cong$ postoji jedan i samo jedan $\tilde{d} \in \tilde{\mathcal{D}}/\cong$, takav da je $\tilde{d} = \tilde{d}' + \tilde{d}''$.

TEOREMA 1.4.39. - Za svaki $\tilde{d}, \tilde{d}' \in \tilde{\mathcal{D}}/\cong$ važi $\tilde{d}' < \tilde{d}$ ako i samo ako postoji $\tilde{d}'' \in \tilde{\mathcal{D}}/\cong$ tako da je $\tilde{d}' + \tilde{d}'' = \tilde{d}$.

Za $\tilde{d}''$ kažemo da je razlika elemenata $\tilde{d}$ i $\tilde{d}'$ i to simbolički zapisujemo: $\tilde{d}'' = \tilde{d} - \tilde{d}'$.

1.4.6. Relacija "... manje od ..." i "... veće od ..." za uglove

Relacija podudarnosti uglova omogućava da u skupu svih uglova uvedemo poredbene relacije.

DEFINICIJA 1.4.13. - Ako su $\angle\, pq$ i $\angle\, p'q'$ dva ugla i m' prava incidentna sa temenom ugla $p'q'$ koja je sadržana u unutrašnjosti tog ugla takva da je

$$\angle\, p'm' \cong \angle\, pq ,$$

onda kažemo da je $\angle\, pq$ *manji od* $\angle\, p'q'$, i to simbolički obeležavamo:

$$\angle\, pq < \angle\, p'q'.$$

Na osnovu definicija 1.4.3,13. i teorema 1.4.13,34,35, dokazuje se teorema:

TEOREMA 1.4.40. - U skupu svih uglova relacija "... manje od ..." je relacija strogog poretka.

DEFINICIJA 1.4.14. - $\angle\, p'q'$ *je veći od* $\angle\, pq$ ako je $\angle\, pq < \angle\, p'q'$, i to simbolički zapisujemo:

$$\angle\, p'q' > \angle\, pq .$$

TEOREMA 1.4.41. - Za dva ugla $\angle\, pq$ i $\angle\, p'q'$ zadovoljena je uvek jedna i samo jedna od tri relacije

$$\angle\, pq \cong \angle\, p'q', \quad \angle\, pq < \angle\, p'q', \quad \angle\, pq > \angle\, p'q' .$$

Dokaz ove teoreme izvodi se na osnovu teorema 1.4.13,36. i definicija 1.4.3,13.

U skupu $\mathbb{U}$ svih uglova, prema teoremi 1.4.14, relacija $\cong$ je relacija ekvivalencije. Dakle, možemo posmatrati količnik skup $\mathbb{U}/\cong$ skupa $\mathbb{U}$ s obzirom na relaciju $\cong$.

Svaki element u količnik skupa $\mathbb{U}/\cong$ predstavlja skup svih medju sobom podudarnih uglova. Bilo koji element skupa u predstavlja reprezentaciju tog skupa.

DEFINICIJA 1.4.15. - Ako su uglovi $\angle p'q'$ i $\angle p"q"$ reprezentacije elemenata u' i $u"$ količnik skupa $\mathbb{U}/\cong$, onda je

$$u' < u" \overset{def}{\Longleftrightarrow} \angle p'q' < \angle p"q" .$$

Pokazuje se da relacija "... manje od ..." u količnik skupu $\mathbb{U}/\cong$ ne zavisi od izbora reprezentacija elemenata ovog skupa.

Pokazuje se da važi:

TEOREMA 1.4.42. - U količnik skupu $\mathbb{U}/\cong$ relacija "... manje od ..." je relacija strogog poretka.

U količnik skupu $\mathbb{U}/\cong$ može da se definiše sabiranje.

DEFINICIJA 1.4.16. - Ako su $\angle pq$, $\angle p'q'$ i $\angle p"q"$ reprezentacije elemenata u, u', $u"$ količnik skupa $\mathbb{U}/\cong$ i postoji prava m incidentna sa temenom ugla pq, koja je sadržana u unutrašnjosti tog ugla, takva da je

$$\angle pm \cong \angle p'q' \wedge \angle mq \cong \angle p"q" ,$$

onda kažemo da je u *zbir* elemenata u' i $u"$, i to zapisujemo:

$$u = u' + u" .$$

Na osnovu teorema 1.4.13,34. i leme 1.4.6, sledi da $u \in \mathbb{U}/\cong$ ne zavisi od izbora reprezentacija elemenata u' i $u"$ količnik skupa $\mathbb{U}/\cong$, već od samih tih elemenata. S toga kažemo i: $\angle\, pq$ je zbir $\angle\, p'q'$ i $\angle\, p''q''$, i to zapisujemo:

$$\angle\, pq = \angle\, p'q' + \angle\, p''q'' .$$

Važe i teoreme:

TEOREMA 1.4.43. - Za svaki $u', u'' \in U/\tilde{=}$ postoji jedan i samo jedan $u \in U/\tilde{=}$, takav da je $u = u' + u''$.

TEOREMA 1.4.44. - Za svaki $u, u' \in U/\tilde{=}$ važi $u' < u$ ako i samo ako postoji $u'' \in U/\tilde{=}$ takvo da je $u' + u'' = u$.

Za u'' kažemo da je razlika elemenata u i u' i to zapisujemo: $u'' = u - u'$.

1.4.7. Još neke teoreme o dužima i uglovima

TEOREMA 1.4.45. - Za svaku duž $[AB]$ postoji jedna i samo jedna tačka S, takva da je

(1a,b) $$S \in\ ]AB[\ \wedge\ [AS] \tilde{=} [SB] ,$$

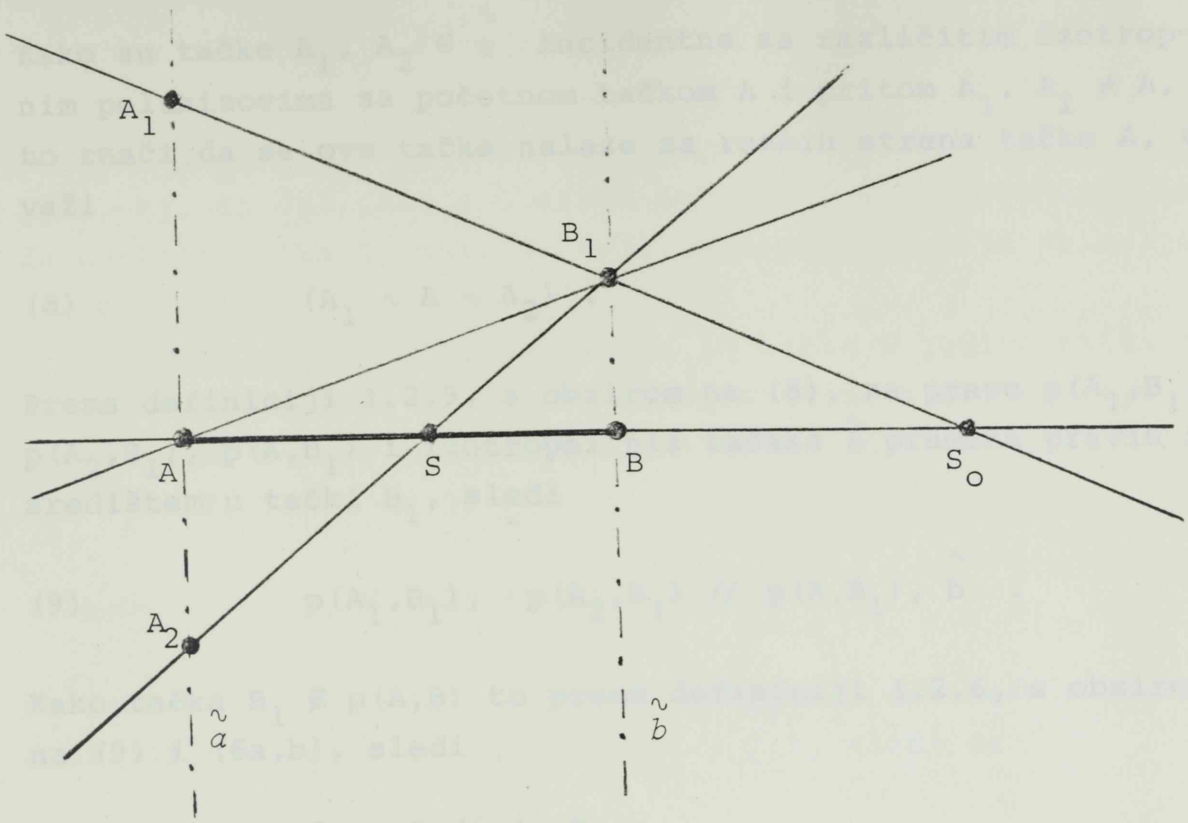
gde je $[AS], [SB] \subset [AB]$.

Dokaz. - Neka je data duž $[AB]$ i neka su $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ izotropni nizovi tačaka sa osnovama A i B. Neka je, dalje, $A_1 \in \tilde{a}$ i $A_1 \neq A$. Tačkom A na izotropnom nizu tačaka $\tilde{a}$ određena su dva izotropna poluniza. Tačka A_1 je incidentna sa jednim od njih. Na drugom izotropnom polunizu, prema aksiomi IV_2, postoji jedna i samo jedna tačka A_2, tako da je

(2) $$\widetilde{[AA_1]} \tilde{=} \widetilde{[AA_2]} .$$

Na jednom od izotropnih polunizova sa početnom tačkom B, takodje, prema aksiomi IV_2, postoji jedinstvena tačka B_1, tako da je

(3) $$\widetilde{[AA_1]} \tilde{=} \widetilde{[BB_1]}$$



Slika 1.4.

Kako je $B_1 | B$, B — A, onda prema teoremi 1.1.2, sledi

(4) A — B_1 ,

tj. postoji prava $p(A,B_1)$. Na osnovu iste teoreme s obzirom na (4) i činjenice da je A_2, A, $A_1 \in \tilde{a}$, tj. $A_2 | A$ i $A_1 | A$, sledi

(5a,b) A_2 — B_1 i A_1 — B_1 ,

tj. postoje prave $p(A_2,B_1)$ i $p(A_1,B_1)$. Prema aksiomi I_5 postoje tačke S i S_o, tako da je

(6a,b) $p(A,B) \cap p(A_2,B_1)=\{S\}$, $p(A,B) \cap p(A_1,B_1) = \{S_o\}$.

Tačkama A i B na pravoj $p(A,B)$ pored duži $[AB]$ odredjena je i njena dopunska duž $[\overline{AB}]$. Pokažimo da je

(7a,b) $S \in]AB[$ i $S_o \in]\overline{AB}[$.

Kako su tačke A_1, $A_2 \in \tilde{a}$ incidentne sa različitim izotropnim polunizovima sa početnom tačkom A i pritom A_1, $A_2 \neq A$, to znači da se ove tačke nalaze sa raznih strana tačke A, tj. važi

(8) $$(A_1 \sim A \sim A_2) .$$

Prema definiciji 1.2.9, s obzirom na (8), za prave $p(A_1,B_1)$, $p(A_2,B_1)$, $p(A,B_1)$ i izotropni niz tačaka $\tilde{b}$ pramena pravih sa središtem u tački B_1, sledi

(9) $$p(A_1,B_1),\ p(A_2,B_1)\ //\ p(A,B_1),\ \tilde{b} .$$

Kako tačka $B_1 \notin p(A,B)$ to prema definiciji 1.2.6, s obzirom na (9) i (6a,b), sledi

$$S_o\ ,\ S\ //\ A,\ B\ ,$$

a time su dokazane relacije (7a,b), te prema tome i relacija (1a). Ostaje da pokažemo da je tačna relacija (1b).

Kako je $A_2 \,|\, A$, A — S i $B_1 \,|\, B$, B — S, to možemo uočiti jednouglove $\tilde{\Delta}\ ASA_2$ i $\tilde{\Delta}\ BSB_1$ čije su hipotenuze $[AS]$, $[A_2S]$ i $[BS]$, $[B_1S]$ respektivno dopune dužima:

$$[ABS],\ [A_2B_1S] \quad \text{i} \quad [BAS],\ [B_1A_2S] .$$

Za ove jednouglove prema drugom delu aksiome IV_3 s obzirom na (2) i (3), sledi da su im i katete podudarne, tj. važi

(10) $$[\tilde{AA_2}] \tilde{=} [\tilde{BB_1}] .$$

Uočeni jednouglovi imaju i jednake uglove, tj. to je ugao koga obrazuje prave $p(A,B)$ i $p(A_2,B_1)$. Stoga prema teoremi 1.4.17, s obzirom na (10), sledi relacija (1b).

Na isti način uočavanjem jednouglova $\tilde{\Delta}\ AS_oA_1$ i $\tilde{\Delta}\ BS_oB_1$, čije su hipotenuze respektivno dopune dužima: $[ABS_o]$, $[A_1B_1S_o]$, $[BAS_o]$, $[B_1A_1S_o]$, dokazuje se da je

(11) $[AS_o] \cong [S_oB]$,

gde je $[AS_o]$, $[S_oB] \subset [\overline{AB}]$. Dakle, i za dopunsku duž duži $[AB]$, tj. za duž $[\overline{AB}]$ s obzirom na (7b) i (11), pokazali smo da postoji tačka S_o tako da važe analogne relacije relacijama (1a,b).

Ostaje još da se dokaže da je tačka S jedina tačka koja zadovoljava uslove (1a,b). Pretpostavimo suprotno, tj. da pored tačke S koja zadovoljava relacije (1a,b) postoji i tačka $S_1 \neq S$, takva da je

(12a,b) $S_1 \in]AB[\wedge [AS_1] \cong [S_1B]$

Na osnovu (7a) i (12a), sledi da su S_1 i S unutrašnje tačke duži $[AB]$. Stoga prema definiciji 1.2.1, sledi da

$$\neg(S_1, S \; // \; A, B) \; ,$$

a odatle prema aksiomi II_3, imamo da je

(13a,b) ili $A, S \; // \; S_1, B$, ili $A, S_1 \; // \; S, B$.

Pretpostavimo da je tačna relacija (13a). Ako uočimo duži: $[AS]$, $[AS_1]$, $[S_1B]$, $[SB] \subset [AB]$, onda je

(14,ab) $S \in]S_1B[\wedge S_1 \in]AS[$,

i pritom

(15a,b) $[SB] \subset [S_1B] \wedge [AS_1] \subset [AS]$.

Prema definiciji 1.4.4, s obzirom na (14a), (15a), (12b), (14b) i (15b), sledi

$$[SB] < [S_1B] \cong [AS_1] < [AS], \quad \text{tj. } [SB] < [AS],$$

a što je protivurečno pretpostavci (1b).

Na isti način pokazuje se da i relacija (13b) dovodi do protivurečnosti. Q.E.D.

DEFINICIJA 1.4.17. - Tačku S, o kojoj se govori u teoremi 1.4.35, nazivamo *središte* duži [AB].

TEOREMA 1.4.46. - Za svaku izotropnu duž $[\widetilde{PQ}]$ postoji jedna i samo jedna tačka S tako da je

(1a,b) $$(P \sim S \sim Q) \wedge [\widetilde{PS}] \cong [\widetilde{SQ}] .$$

Dokaz. - Neka je zadata izotropna duž $[\widetilde{PQ}]$. Uočimo proizvoljnu pravu, p incidentnu sa tačkom P i na njoj suprotnu tačku O tački P. Kako je O — P i P | Q, to prema teoremi 1.1.2, sledi da je O — Q, tj. postoji prava q=p(O,Q), a prema teoremi 1.4.9, sledi [OP] ≅ [OQ]. Stoga kako je [OP] poluprava to je i [OQ] poluprava te imamo da je

(2) $$[OP] \cong [\overline{OP}] \cong [OQ] \cong [\overline{OQ}] .$$

Neka su tačke P′, P" ∈ p , tako da je

(3a,b) $$[P'P] \cong [PP''] \wedge]P'P[\cap]PP''[= \emptyset ,$$

a Q′ i Q" projekcije tačaka P′ i P" na pravu q (v. sliku 1.5). Prema definiciji 1.1.3, sledi da je P′ | Q′ i P" | Q". Stoga s obzirom na pretpostavku da je i P | Q, prema teoremi 1.4.11, sledi

(4a,b,c) $$[P'P] \cong [Q'Q],\ [PP''] \cong [QQ''] \text{ i } [Q'Q[\cap]QQ''[= \emptyset .$$

Na osnovu prvog dela aksiome IV_3 s obzirom na (3a) i (4a,b), sledi

(5) $$[P'P] \cong [PP''] \cong [QQ'] \cong [QQ''] .$$

Prema teoremi 1.4.8 s obzirom na (3b), (4c), (2) i (5), sledi da je

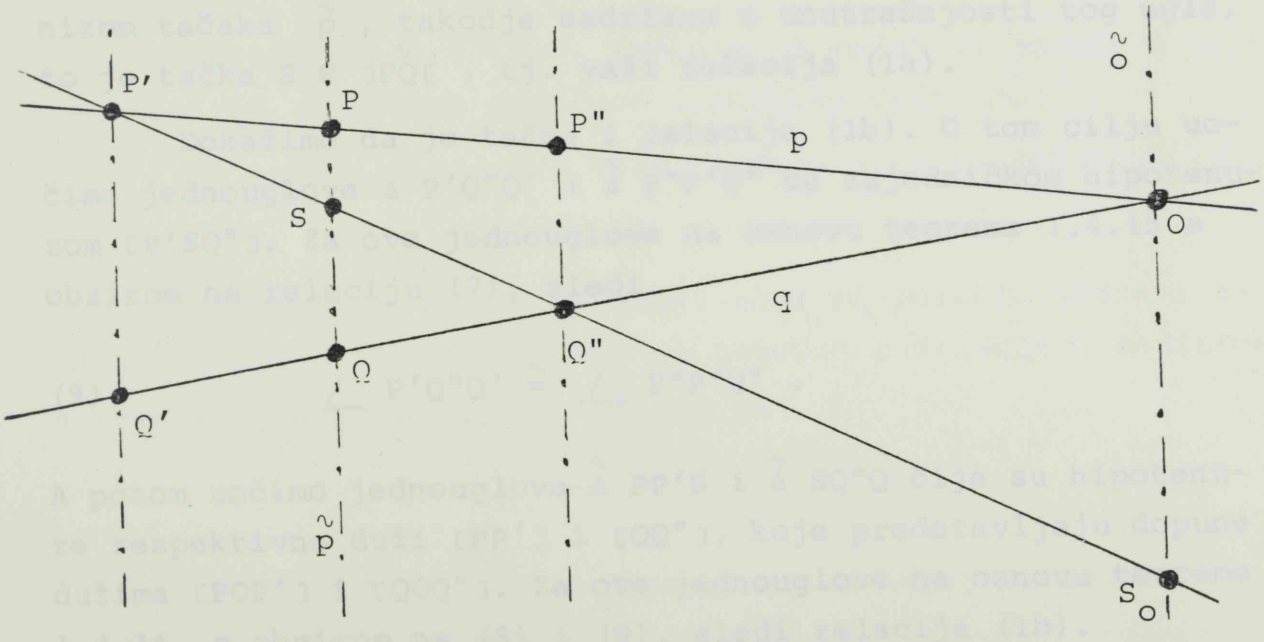
(6) $\qquad [OP'] \overset{\sim}{\cong} [OP''] \overset{\sim}{\cong} [OQ'] \overset{\sim}{\cong} [OQ'']$,

pri čemu je

$$]OP'[\,\cap\,]OP''[\,=\, \emptyset \ , \quad]OQ'[\,\cap\,]OQ''[\,=\, \emptyset \ .$$

Ako uočimo dva jednougla sa zajedničkim temenima P, O, Q i zajedničkom katetom $[\widetilde{PQ}]$, a hipotenuze jednog od njih su poluprave [OP] i [OQ], a drugog njihove dopune $[\overline{OP}]$ i $[\overline{OQ}]$, onda prema aksiomi IV_{10} s obzirom na (6), sledi

(7) $\qquad [\widetilde{P'Q'}] \overset{\sim}{\cong} [P''Q'']$.



Slika 1.5.

Kako je P′ — P" i P" | Q" , to prema teoremi 1.1.2, sledi da je P′ — Q", tj. postoji prava p(P′,Q"). Ako sa $\tilde{p}$ označimo izotropni niz tačaka tako da je P, Q $\in \tilde{p}$, a sa $\tilde{o}$ izotropni niz tačaka čija je osnova tačka O, onda prema teoremi 1.1.5, postoje tačke S i S_o, tako da je

$$p(P',Q'') \cap \tilde{p} = \{S\}, \quad p(P',Q'') \cap \tilde{o} = \{S_o\}.$$

Stoga projekcije tačaka P, O, P', $P'' \in p$ na pravu $p(P',Q'')$ predstavljaju respektivno tačke S, S_o, P', Q''. Na osnovu relacije (3b) za tačke P', $P'' \in p$ važi da je $P' \in]OP[$ a $P'' \in]\overline{OP}[$, te imamo da

$$P, O \,//\, P', P'' ,$$

a odatle na osnovu aksiome II_7, sledi da

(8) $$S, S_o \,//\, P', Q'' .$$

Na pravoj $p(P',Q'')$ uočimo duž $[P'Q'']$ koja je sadržana u $\angle pq$ i njenu dopunsku duž $[\overline{P'Q''}]$. Za ove duži s obzirom na (8), sledi da je tačka $S \in]P'Q''[$ a tačka $S_o \in]\overline{P'Q''}[$. Dakle, tačka $S \in \tilde{p}$ je unutrašnja tačka $\angle pq$, a s obzirom da je i izotropna duž $]\tilde{PQ}[$, koja je incidentna sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}$, takodje sadržana u unutrašnjosti tog ugla, to je tačka $S \in]\tilde{PQ}[$, tj. važi relacija (1a).

Dokažimo da je tačna i relacija (1b). U tom cilju uočimo jednouglove $\Delta P'Q''Q'$ i $\tilde{\Delta} P''P'Q''$ sa zajedničkom hipotenuzom $[P'SQ'']$. Za ove jednouglove na osnovu teoreme 1.4.15 s obzirom na relaciju (7), sledi

(9) $$\angle P'Q''Q' \tilde{=} \angle P''P'Q'' .$$

A potom uočimo jednouglove $\tilde{\Delta} PP'S$ i $\tilde{\Delta} SQ''Q$ čije su hipotenuze respektivno duži $[PP']$ i $[QQ'']$, koje predstavljaju dopune dužima $[POP']$ i $[QOQ'']$. Za ove jednouglove na osnovu teoreme 1.4.16. s obzirom na (5) i (9), sledi relacija (1b).

Da bismo pokazali da je S jedinstvena tačka, pretpostavimo suprotno. Naime, neka pored tačke S za koju važe relacije (1a,b) postoji i tačka $S_1 \neq S$, tako da je

(10a,b) $$(P \sim S_1 \sim Q) \wedge [PS_1] \tilde{=} [S_1Q] .$$

Za tačke $P, Q, S, S_1 \in \tilde{p}$ s obzirom na (1a) i (10a), važi

(11a,b) $$\text{ili } (P \sim S_1 \sim S) \wedge (S_1 \sim S \sim Q),$$

(12a,b) ili $(P \sim S \sim S_1) \wedge (S \sim S_1 \sim Q)$.

Pretpostavimo da važi (11a,b). Ako uočimo izotropne duži $[\widetilde{PS}]$, $[\widetilde{PS_1}]$, $[\widetilde{S_1Q}]$, $[\widetilde{SQ}]$, onda je

(13a,b) $S_1 \in \,]\widetilde{PS}[\; \wedge \; S \in \,]\widetilde{S_1Q}[$.

Na osnovu definicije 1.4.9, s obzirom na (10b) i (13a,b), sledi

$$[\widetilde{SQ}] < [\widetilde{S_1Q}] \cong [\widetilde{PS_1}] < [\widetilde{PS}], \text{ tj. } [\widetilde{SQ}] < [\widetilde{PS}] ,$$

a što je suprotno pretpostavci (1b).

Na isti način pokazuje se da i relacije (12a,b) dovode do protivurečnosti. Q.E.D.

DEFINICIJA 1.4.18. - Tačku S, o kojoj se govori u teoremi 1.4.46, nazivamo *središte* izotropne duži $[\widetilde{PQ}]$.

Na osnovu teoreme 1.4.46, jednostavno se dokazuje teorema.

TEOREMA 1.4.47. - Za svaki ugao pq postoji jedna i samo jedna prava s incidentna sa temenom ovog ugla i sadržana u unutrašnjosti tog ugla, tako da je

$$\angle \, ps \cong \angle \, sq .$$

DEFINICIJA 1.4.19. - Pravu s , o kojoj se govori u teoremi 1.4.47, nazivamo *simetrala* $\angle$ pq .

TEOREMA 1.4.48. - Spoljašnji ugao trougla veći je od bilo kog unutrašnjeg ugla.

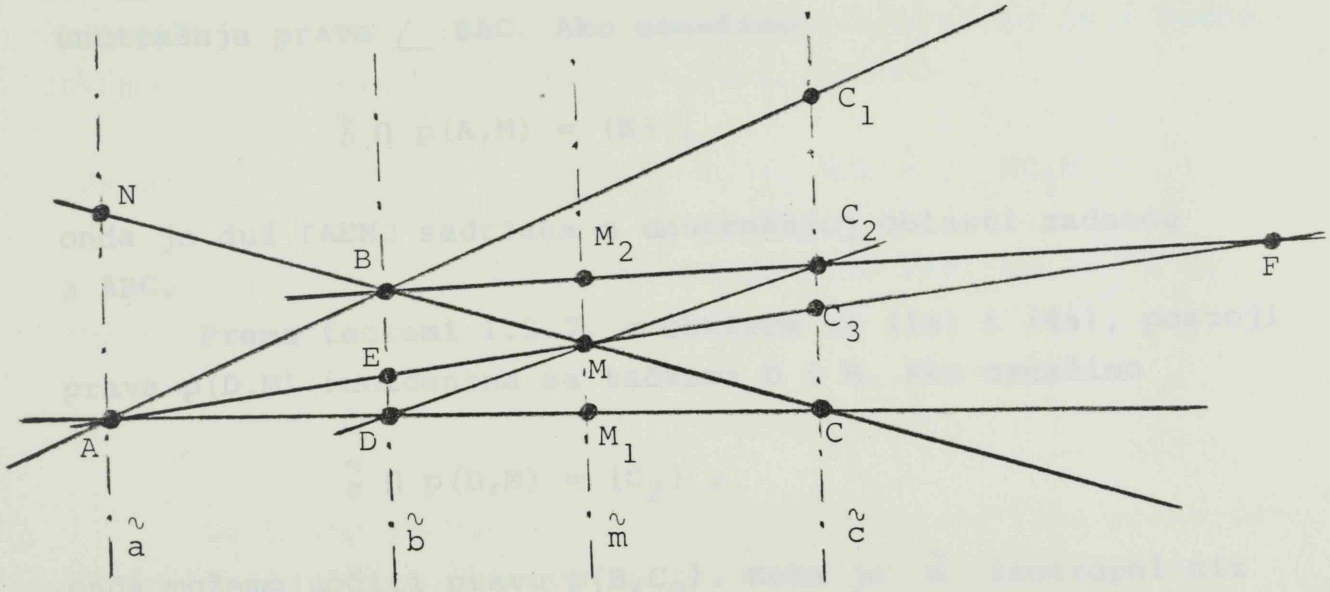
Dokaz. - Neka je zadat trougao Δ ABC sa središnjim temenom B. Temenima A, B i C, prema teoremi 1.1.4, odredjeni su respektivno jedinstveni izotropni nizovi tačaka $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ i $\tilde{c}$. Neka je

$$\tilde{a} \cap p(B,C) = \{N\}, \quad \tilde{b} \cap p(A,C) = \{D\}, \quad \tilde{c} \cap p(A,B) = \{C_1\}.$$

Prema teoremi 1.2.9, i definiciji 1.2.17, s obzirom da je teme B središnje teme zadatog trougla, sledi

(1a,b,c) $\quad D \in]AC[, \quad C_1 \in]\overline{AB}[, \; N \in]\overline{BC}[$,

gde je $[AC]$ osnova, a $[\overline{AB}]$ i $[\overline{BC}]$ dopune bočnih strana $[AB]$ i $[BC]$ zadatog trougla. Prema definiciji 1.2.17, ugao kod temena B, tj. $\angle\, CBC_1$ je spoljašnji ugao zadatog trougla, a uglovi $\angle\, BAC$ i $\angle\, ACB$ unutrašnji uglovi tog trougla (v. sliku 1.6).



Slika 1.6.

Dokažimo da je

(2) $\quad \angle\, CBC_1 > \angle\, ACB$.

Prema definiciji 1.4.14, relacija (2) je tačna ako je

(3) $\quad \angle\, ACB < \angle\, CBC_1$.

Prema teoremi 1.4.45, postoji unutrašnja tačka M bočne strane $[BC]$ zadatog trougla, tako da je

(4a,b) $M \in]BC[\wedge [BM] \cong [MC]$,

gde je $[BM]$, $[MC] \subset [BC]$. S obzirom na relacije (1c) i (4a), sledi

(5) $B, C \,//\, M, N$.

U pramenju pravih sa središtem u tački A na osnovu definicije 1.2.6, s obzirom na (5), sledi

(6) $p(A,B),\ p(A,C) \,//\, p(A,M),\ \tilde{a}$.

Na osnovu definicija 1.2.7,8. s obzirom na (6) prava $p(A,M)$ je unutrašnja prava $\angle$ BAC. Ako označimo

$$\tilde{b} \cap p(A,M) = \{E\} ,$$

onda je duž $[AEM]$ sadržana u unutrašnjoj oblasti zadatog $\triangle$ ABC.

Prema teoremi 1.2.7. s obzirom na (1a) i (4a), postoji prava $p(D,M)$ incidentna sa tačkama D i M. Ako označimo

$$\tilde{c} \cap p(D,M) = \{C_2\} ,$$

onda možemo uočiti pravu $p(B,C_2)$. Neka je $\tilde{m}$ izotropni niz tačaka sa osnovom M i

$$\tilde{m} \cap p(A,C) = \{M_1\} ,\quad \tilde{m} \cap p(B,C_2) = \{M_2\} .$$

Uočimo trouglove $\triangle$ DMC i $\triangle$ BMC_2 sa zajedničkim temenom M koje je istovremeno i središnje teme ovih trouglova. Duž $[DM_1C]$ je osnova a duži $[DM]$ i $[CM]$, koje predstavljaju dopune dužima $[DC_2M]$ i $[CBM]$, bočne strane $\triangle$ DMC. Duž $[BM_2C_2]$ je osnova a duži $[BM]$ i $[MC_2]$, koje predstavljaju dopune dužima $[BCM]$ i $[MDC_2]$, bočne strane $\triangle$ BMC_2.

Kako je $M — B,\ B \mid D$ i $M — C,\ C \mid C_2$, onda prema teoremi 1.4.9, sledi

(7a,b) $[DM] \cong [BM] \wedge [MC] \cong [MC_2]$.

Prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na (4b) i (7a,b), sledi da je

$$[DM] \cong [MC] \cong [BM] \cong [MC_2],$$

a što prema definiciji 1.4.8, znači da su uočeni trouglovi jednakokraki. Na osnovu teoreme 1.4.28, sledi

(8a,b) $\angle MDC \cong \angle MCD$ i $\angle MBC_2 \cong \angle MC_2B$.

Uočeni trouglovi imaju zajednički spoljašnji ugao kod temena M, a prema relacijama (7a,b), podudarne su im i bočne strane. Stoga prema teoremi 1.4.26.d), sledi

(9a,b) $\angle MDC \cong \angle MBC_2$ i $\angle MCD \cong \angle MC_2B$.

Na osnovu definicije 1.4.3, i drugog dela aksiome IV_3 s obzirom na relacije (8a) i (9a), sledi

(10) $\angle MCD \cong \angle MBC_2 \iff \angle ACB \cong \angle CBC_2$.

Da bismo dokazali egzistenciju relacije (3), prema definiciji 1.4.14, s obzirom na relaciju (10), treba dokazati da je prava $p(B,C_2)$ sadržana u unutrašnjosti spoljašnjeg $\angle CBC_1$ zadatog trougla, tj. da se prava $p(B,C_2)$ nalazi izmedju pravih $p(B,C)$ i $p(B,C_1)$. Prema definiciji 1.2.7, to znači da treba dokazati da važi

(11) $p(B,C),\ p(B,C_1) \ // \ p(B,C_2),\ \tilde{b}$.

Na osnovu relacije (6), napred je pokazano da je prava $p(A,M)$ sadržana u unutrašnjosti $\angle BAC$ a duž $[AEM]$ sadržana u unutrašnjosti zadatog ΔABC. Ako označimo:

$$p(A,M) \cap \tilde{c} = \{C_3\}, \quad p(A,M) \cap p(B,C_2) = \{F\} ,$$

onda su tačke C_3 i F unutrašnje tačke duži $[\overline{AM}]$ koja predstavlja dopunu duži [AEM]. Dakle, imamo

(12a,b) $E \in]AM[\wedge C_3, F \in]\overline{AM}[.$

Na osnovu aksiome II_7 s obzirom na relaciju (5), sledi

$$D, C \,//\, M_1, A ,$$

odakle ponovnom primenom aksiome II_7, imamo da

(13) $E, C_3 \,//\, M, A.$

Iz (13) s obzirom na (12b), sledi

(14) $M, A \,//\, E, F .$

Kako tačka $B \notin p(A,M)$ to relacija (14), prema definiciji 1.2.6, dokazuje egzistenciju relacije (11).

Na isti način pokazuje se da je spoljašnji ugao kod temena B veći od unutrašnjeg ugla kod temena A. Q.E.D.

DEFINICIJA 1.4.20. - Bilo koji izotropni niz tačaka (izotropnu pravu) i pravu (neizotropnu pravu) nazivamo *ortogonalnim*.

Glava 2.

Simetrija u EP ravni

2.1. CENTRALNA SIMETRIJA

Neka su P i X dve razne proizvoljne tačke EP ravni α. Za ove tačke važi

(1a,b) ili $X|P$, ili $X — P$.

Ako je tačna relacija (1a), postoji prema teoremi 1.1.4, jedinstven izotropni niz tačaka $\tilde{p}$, tako da je $X,P \in \tilde{p}$. Tačkama X i P na izotropnom nizu tačaka $\tilde{p}$ odredjena je izotropna duž $[\widetilde{XP}]$, a tačkom P dva izotropna poluniza tačaka od kojih jedan nije incidentan sa uočenom izotropnom duži. Na tom izotropnom polunizu tačaka, prema aksiomi IV_2, postoji jedinstvena tačka X', tako da je

(2) $[\widetilde{XP}] \cong [\widetilde{PX'}]$.

U slučaju da je tačna relacija (1b), postoji prava m , tako da je $P,X \in m$, tj. $m = p(X,P)$. Tačkama X i P odredjene su dve duži koje jedna drugu dopunjuju. Označimo jednu od njih sa $[XP]$. Ako je tačka X suprotna tački P, onda je duž $[XP]$ poluprava, te je prema aksiomi IV_7 , podudarna svojoj dopuni $[\overline{PX}]$, tj.

(3) $[XP] \cong [\overline{PX}]$.

Dakle, u ovom slučaju možemo reći da tački X odgovara ta ista tačka i pritom važi (3).

Ako tačka X nije suprotna tački P, uočena duž $[XP]$ je različita od poluprave. Duž $[XP]$ uočimo tako da je incidentna sa jednom od polupravih koje obrazuju tačka P i njena suprotna tačka P_o $(P_o \neq X)$. Prema teoremi 1.4.6, za duž $[XP]$ i tačku $P \in m$ postoji jedinstvena tačka $X' \in m$, tako da je

$$(4) \qquad [XP] \cong [PX'] \quad \text{i} \quad]XP[\cap]PX'[= \emptyset .$$

Na osnovu napred rečenog možemo zaključiti da svakoj tački $X \in \alpha$ i $X \neq P$, na jedinstven način možemo pridružiti tačku X', tako da važi ili (2), ili (3), ili (4). Prema tome možemo dati definiciju:

DEFINICIJA 2.1.1. - Bijektivno preslikavanje

$$\sigma_P : \alpha \to \alpha ,$$

za koje važi da je $\sigma_P(P) = P$,

$$(\forall X \in \tilde{p} \setminus \{P\})(\sigma_P(X)=X',\ X' | X,\ [\tilde{XP}] = [\tilde{X'P}]) ,$$

$$(\forall X \notin \tilde{p})(\sigma_P(X)=X', X' \in p(P,X),]XP[\cap]PX'[=\emptyset,\ [XP] \cong [PX']) ,$$

gde je $\tilde{p}$ izotropni niz tačaka sa osnovom P, nazivamo *centralna simetrija.*

Simetriju σ_P nazivamo još i simetrija u odnosu na tačku P, a tačku P - *centar simetrije.*

Iz definicije simatrije σ_P, zaključujemo da za svaku tačku $X \in \alpha$, postoji tačka $X' \in \alpha$, tako da je $\sigma_P(X)=X'$, kao i da je $\sigma_P(X')=X$, tj. inverzno preslikavanje σ_P^{-1} preslikava tačku X' u tačku X. Dakle, imamo da je

$$\sigma_P^{-1} = \sigma_P \ , \text{ odnosno } \ \sigma_P \circ \sigma_P^{-1} = I \ ,$$

gde je I identična transformacija EP ravni α.

Iz definicije 2.1.1, takodje, imamo da ako je $\tilde{p}$ izotropni niz tačaka sa osnovom P, onda

$$\sigma_P : \tilde{p} \to \tilde{p} ,$$

a ako je x proizvoljna prava incidentna sa tačkom P, onda

$$\sigma_P : x \to x ,$$

gde je $\sigma_P(P)=P$.

Na osnovu napred izloženog možemo iskazati teoremu:

TEOREMA 2.1.1. - Centralna simetrija σ_P jednoznačno je odredjena centrom simetrije P.

TEOREMA 2.1.2. - Ako je σ_P centralna simetrija sa centrom P, onda u EP ravni postoji izotropni niz tačaka $\tilde{p}_o$ čije su sve tačke dvojne.

Dokaz. - Neka je σ_P simetrija u odnosu na tačku P. Uočimo pramen pravih sa središtem P, tj.

$$P(x,y,z,\ldots).$$

Prema definiciji 2.1.1, svaka prava ovog pramenja preslikava se na samu sebe, a tačka P je dvojna tačka tog preslikavanja. Na proizvoljnoj pravoj x ovog pramenja, prema aksiomi IV_7, postoji suprotna tačka X_o tački P, tako da je

(1) $$[PX_o] \cong [\overline{PX}_o] .$$

Za poluprave PX_o i $\overline{PX}_o$, važi da je

(2) $$]PX_o[\cap]\overline{PX}_o[= \emptyset .$$

Prema definiciji 2.1.1, s obzirom na (1) i (2), imamo da je $\sigma_P(X_o)=X_o$. Dakle, na svakoj pravoj pramena sa središtem P osim tačke P i suprotna tačka toj tački je dvojna tačka preslikavanja σ_P.

Neka je y još jedna proizvoljna prava pramenja sa središtem P, različita od prave x, i neka je tačka $Y_o \in y$, tako da je $\sigma_P(Y_o)=Y_o$. Dokažimo da su tačke X_o i Y_o incidentne sa istim izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}_o$ sa osnovom X_o, tj. da je

(3) $$X_o \mid Y_o .$$

Uočimo na pravoj x tačku X_1, tako da $X_1 \notin \{P,X_o\}$. Označimo sa $Y_1 = pr_y X_1$. Kako su tačke X_1 i Y_1 paralelne to možemo uočiti jednougao $\overset{\sim}{\Delta}X_1PY_1$. Poluprave PX_o i PY_o su incidentne sa hipotenuzama, ili njihovim dopunama, uočenog jednougla, te prema aksiomi IV_9, dobijamo da važi relacija (3).

Kako je prava y izabrana proizvoljno to bilo koja tačka izotropnog niza tačaka $\tilde{P}_o$ predstavlja dvojnu tačku simetrije σ_P, tj.

$$(\forall X \in \tilde{p}_o)(\sigma_P(X) = X). \text{ Q.E.D.}$$

Na osnovu prethodne teoreme i definicije 2.1.1, centar simetrije P i izotropni niz tačaka $\tilde{p}_o$, koji predstavlja skup suprotnih tačaka centru P incidentnih sa pravama pramenja sa središtem P, predstavljaju dvojne elemente simetrije σ_P.

TEOREMA 2.1.3. - Ako su A i B dve razne kolinearne tačke a σ_P simetrija u odnosu na tačku P i pritom

(1a,b) $\sigma_P(A)=A'$, $\sigma_P(B)=B'$,

onda za jednu od duži sa krajnjim tačkama A i B i jednu od duži sa krajnjim tačkama A' i B', važi

(2) $[AB] \cong [A'B']$.

Dokaz. - Neka su zadate dve razne kolinearne tačke A i B i simetrija σ_P sa centrom P. Označimo sa m pravu, tako da je $A,B \in m$, za pravu m i tačku P imamo

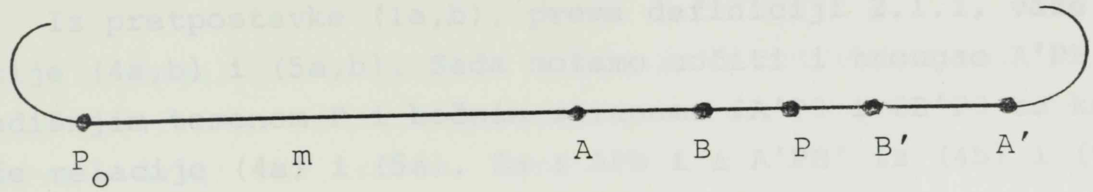
(3a,b) ili $P \in m$, ili $P \notin m$.

Neka je tačna relacija (3a). Označimo sa $P_o \in m$ suprotnu tačku centru simetrije P. Na osnovu definicije 2.1.1 i teoreme 2.1.2, imamo da su tačke P i P_o dvojne tačke simetrije σ_P i da

$$\sigma_P : m \to m .$$

Pretpostavimo da se date tačke A i B ne poklapaju sa centrom P i njenom suprotnom tačkom P_o. Onda imamo da su tačke A i B, ili unutrašnje tačke poluprave PP_o (odnosno njene dopune $\overline{PP}_o$), ili je $A \in PP_o$ i $B \in \overline{PP}_o$ (ili obrnuto).

Neka je $A,B \in \,]PP_o[$. Kako su tačke A,B i P tri razne tačke onda se može uočiti, recimo, duž AP i njena dopuna $\overline{AP}$. Tada je ili $B \in \,]AP[$, ili $B \in \,]\overline{AP}[$. Neka je B unutrašnja tačka duži $[AP]$.



Na osnovu (1a,b), prema definiciji 2.1.1, imamo da je

$$(4a,b) \qquad]AP[\cap \,]A'P[\, = \emptyset \wedge [AP] \cong [A'P] \, ,$$

i

$$(5a,b) \qquad]BP[\cap \,]B'P[\, = \emptyset \wedge [BP] \cong [B'P] \, .$$

Kako je tačka $B \in \,]AP[$ i $B' \in]A'P[$, to s obzirom na (4b) i (5b), prema teoremi 1.4.8, sledi relacija (2).

U slučaju da se jedna od tačaka A ili B poklapa sa centrom P, onda relacija (2) sledi neposredno iz definicije 2.1.1. Medjutim, ako se jedna od tačaka A ili B poklapa sa tačkom P_o, dokaz se izvodi analogno kao u prvom slučaju.

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (3b). Za kolinearne tačke A i B i tačke P, važi ili su tačke A i B kolinearne sa tačkom P, ili je jedna od njih paralelna sa tačkom P. Neka je A —— P i B —— P, onda prema definiciji 1.2.14, tačke A,B i P obrazuju trotemenik ABP. Ovaj trotemenik odredjuje tri trougla sa zajedničkim temenjima A,B i P. Uočimo jedan od tih trouglova čije ćemo strane označiti sa $[AB]$, $[AP]$ i $[BP]$, pri čemu je duž $[AB]$ dopuna duži $[AM_oB]$, duž $[AP]$ dopuna duži $[AA_oP]$ i duž $[BP]$ dopuna duži $[BB_oP]$, gde je

$$\{M_o\} = p(A,B) \cap \tilde{p}_o \, , \qquad \{A_o\} = p(A,P) \cap \tilde{p}_o \, ,$$

$$\{B_o\} = p(B,P) \cap \tilde{p}_o \, ,$$

a prema teoremi 2.1.2, $\tilde{p}_o$ izotropni niz tačaka koji ostaje invarijantan u simetriji σ_P. Ako je

$$\mathrm{pr}_{p(A,B)}\ P = C \in [AB] ,$$

onda je prema definiciji 1.2.17, teme P središnje teme uočenog trougla ΔAPB.

Iz pretpostavke (1a,b), prema definiciji 2.1.1, važe relacije (4a,b) i (5a,b). Sada možemo uočiti i trougao $A'PB'$ sa središnjim temenom P i bočnim stranama $[A'P]$ i $[B'P]$ za koje važe relacije (4a) i (5a). Za ΔAPB i $\Delta A'PB'$ iz (4b) i (5b), prema teoremi 1.4.25, sledi da su podudarne i njihove osnove, tj. da važi relacija (2).

Medjutim, ako je središnje teme ΔAPB, recimo, tačka B, relacija (2) sledi na osnovu teoreme 1.4.24.

Pretpostavimo, zatim, da je jedna od tačaka A ili B paralelna sa tačkom P. Neka je, recimo, $A — P$ i $B \mid P$, onda na osnovu teoreme 1.4.9, sledi da je

(6) $$[AB] \cong [AP] ,$$

a s obzirom na (1b) i teoreme 1.4.9, imamo da je

(7) $$[A'B'] \cong [A'P] .$$

Na osnovu (4b) i (6), prema aksiomi IV_3, sledi

(8) $$[AB] \cong [A'P].$$

I konačno s obzirom na (7) i (8), prema aksiomi IV_3, sledi relacija (2). Q.E.D.

Posledica ove teoreme je da centralna simetrija duž EP ravni preslikava na podudarnu duž.

TEOREMA 2.1.4. - Centralna simetrija je kolineacija, tj. kolinearne tačke preslikava u kolinearne.

Dokaz. - Neka je zadata centralna simetrija σ_P sa centrom simetrije P i tri razne kolinearne tačke A,B i C različite od tačke P. Pravu incidentnu sa tačkama A,B i C označimo sa m. Za pravu m i centar simetrije P važi:

(1a,b) $$\text{ili } P \in m , \quad \text{ili } P \notin m .$$

U slučaju da važi relacija (1a) neposredno iz definicije 2.1.1, sledi da su slike kolinearnih tačaka kolinearne.

Pretpostavimo da važi relacija (1b). Označimo sa $\tilde{p}$ izotropni niz tačaka sa osnovom P i $\tilde{p} \cap m = \{D\}$. Tačka D je ili različita od tačaka A,B i C, ili se sa jednom od njih poklapa. Pretpostavimo da je

$$D \neq A \ \wedge \ D \neq B \ \wedge \ D \neq C \ .$$

U tom slučaju, prema aksiomi II_3, za četiri razne kolinearne tačke A,B,C i D, važi da jedan par tačaka na jedinstven način razdvaja drugi par tačaka. Neka, recimo, važi

$$A,B \ // \ C,D \ .$$

Kako, prema teoremi 2.1.2, za centralnu simetriju σ_P postoji izotropni niz tačaka $\tilde{p}_o$ čije su sve tačke dvojne, to ćemo označiti

$$p(A,P) \cap \tilde{p}_o = \{A_o\}, \quad p(B,P) \cap \tilde{p}_o = \{B_o\} ,$$

$$p(C,P) \cap \tilde{p}_o = \{C_o\}.$$

Sada možemo uočiti Δ APB sa središnjim temenom P. Bočne strane ovog trougla su duži [AP] i [BP], koje predstavljaju dopune dužina $[AA_oP]$ i $[BB_oP]$, a osnova je duž [ADB]. Neka je, dalje, u centralnoj simetriji σ_P:

$$\sigma_P(A)=A', \quad \sigma_P(B)=B' , \quad \sigma_P(C)=C' , \quad \sigma_P(D)=D' ,$$

a prema definiciji 2.1.1, sledi

(2a,b) $\quad]AP[\ \cap \ ]A'P[\ = \emptyset \ \wedge \ [AP] \ \tilde{=} \ [A'P]$,

(3a,b) $\quad]BP[\ \cap \ ]B'P[\ = \emptyset \ \wedge \ [BP] \ \tilde{=} \ [B'P]$,

(4a,b) $\quad]CP[\ \cap \ ]C'P[\ = \emptyset \ \wedge \ [CP] \ \tilde{=} \ [C'P]$,

(5) $\quad [D\tilde{P}] \ \tilde{=} \ [D'\tilde{P}]$.

Dakle, centralnom simetrijom σ_P trotemenik APB preslikava se na trotemenik A'PB'. Uočimo Δ A'PB' sa središnjom temenom P čije su bočne strane duži [A'P] i [B'P], koje predstavljaju dopune dužima [A'AP] i [B'BP]. Kako trouglovi Δ APB i Δ A'PB' imaju zajednički ugao kod temena P, to s obzirom na (2b) i i (3b), prema teoremi 1.4.26.c), sledi da je unutrašnji ugao kod temena A podudaran unutrašnjem uglu kod temena A′, tj. važi

(6) $\angle\, p(A,B)p(A,A') \cong \angle\, p(A',B')p(A,A')$.

Označimo: $p(A',B') \cap \tilde{p} = \{D_1\}$. Tačke D_1 i D′ incidentne su sa istim izotropnim polunizom tačaka čiji je početak tačka P. Da bismo dokazali da se kolinearne tačke A, B i D centralnom simetrijom σ_P preslikavaju na kolinearne tačke, tj. da je $D' \in p(A',B')$, treba dokazati da je

(7) $D' = D_1$.

U tom cilju uočimo jednouglove $\tilde{\Delta}PAD$ i $PA'D_1$ čije su hipotenuze respektivno duži [AP] i [A′P] za koje važe relacije (2a,b). Za ove jednouglove prema teoremi 1.4.16 s obzirom na (2b) i (6), sledi

(8) $[D\tilde{P}] \cong [D_1\tilde{P}]$.

Na osnovu drugog dela aksiome IV_3 s obzirom na (5) i (8), sledi da je $[D'\tilde{P}] \cong [D_1\tilde{P}]$, a što prema aksiomi IV_2 dokazuje relaciju (7).

Uočimo, zatim, ΔAPC sa središnjim temenom P. Bočne strane ovog trougla su duži [AP] i [CP], koje predstavljaju dopune dužima $[AA_oP]$ i $[CC_oP]$, a osnova je duž [ADC]. Ovaj trougao u centralnoj simetriji σ_P preslikava se na $\Delta A'PC'$ sa središnjim temenom P. Bočne strane ovog trougla su duži [A′P] i [C′P], koje predstavljaju dopune dužina [A′AP] i [C′CP]. Trouglovi ΔAPC i $\Delta A'PC'$ imaju zajednički spoljašnji ugao kod temena P. Otuda na osnovu teoreme 1.4.26.c) s obzirom na (2b) i (4b), sledi da je

(9) $\angle\, p(A,C)p(A,A') \cong \angle\, p(A',C')p(A,A')$.

Označimo $p(A',C') \cap \tilde{p} = \{D_2\}$. Tačke D_2 i D′ incidentne su sa istim izotropnim polunizom tačaka sa početnom tačkom P. Da bismo dokazali da se kolinearne tačke A, C i D centralnom simetrijom σ_P preslikavaju u kolinearne tačke, tj. da je $D' \in p(A',C')$, treba dokazati da je

(10) $D' = D_2$.

Uočimo u tom cilju jednouglove $\tilde{\Delta}PAD$ i $\tilde{\Delta}PA'D_2$ čije su hipotenuze respektivno duži $[AP]$ i $[A'P]$ za koje važe relacije (2a,b). Za ove jednouglove prema teoremi 1.4.16 s obzirom na (2b) i (9), sledi

(11) $[D\tilde{P}] \stackrel{\sim}{=} [D_2\tilde{P}]$.

Na osnovu drugog dela aksiome IV_3 s obzirom na (5) i (11), sledi da je $[D'\tilde{P}] \stackrel{\sim}{=} [D_2\tilde{P}]$, a što prema aksiomi IV_2, dokazuje relaciju (10).

Prema tome, kako je $D' \in p(A',B')$ i $D' \in p(A',C')$, to znači da se prave $p(A',B')$ i $p(A',C')$ poklapaju, tj.

$$p(A',B') = p(A',C') = m' ,$$

odnosno da su slike kolinearnih tačaka $A,B,C \in m$ u centralnoj simetriji σ_P kolinearne tačke $A',B',C' \in m'$.

U slučaju da se tačka D poklapa sa jednom od tačaka A, B i C, recimo da je D=C, onda se dokaz svodi na prvi deo prethodnog dokaza. Q.E.D.

TEOREMA 2.1.5. - Neka su M i N dve paralelne tačke i σ_P centralna simetrija sa centrom P, tako da je

(1a,b) $\sigma_P(M) = M'$, $\sigma_P(N) = N'$,

onda je

(2) $[M\tilde{N}] \stackrel{\sim}{=} [M'\tilde{N}']$.

Dokaz. - Neka je $M|N$ i σ_P centralna simetrija sa centrom P tako da važi (1a,b). Označimo sa $\tilde{m}$ izotropni niz tačaka sa osnovom M. Za centar simetrije P i izotropni niz tačaka $\tilde{m}$ važi da je

(3a,b) ili $P \notin \tilde{m}$, ili $P \in \tilde{m}$.

Pretpostavimo da važi (3a). Prema teoremi 1.1.4, tačkom M odredjen je jedan i samo jedan izotropni niz tačaka sa kojom je ona incidentna. Prema tome, tačka M je kolinearna sa tačkom P. Kako je $M|N$ i $M — P$, to je prema teoremi 1.1.2, i $N — P$. Dakle, možemo uočiti jednougao $\tilde{\Delta}MPN$ čije su hipotenuze duži $[MP]$ i $[NP]$. Ove duži su ili poluprave ili različite od poluprave. Ako pretpostavimo da duži $[MP]$ i $[NP]$ nisu poluprave, onda na pravama $p(M,P)$ i $p(N,P)$ postoje respektivno suprotne tačke M_o i N_o tački P. Neka su hipotenuze $[MP]$ i $[NP]$ incidentne redom sa polupravama $[M_oP]$ i $[N_oP]$. Prema def. 2.1.1, s obzirom na (1a,b), imamo da je

$$(4a,b) \qquad]MP[\cap]M'P[= \emptyset \wedge [MP] \overset{\sim}{=} [M'P] ,$$

$$(5a,b) \qquad]NP[\cap]N'P[= \emptyset \wedge [NP] \overset{\sim}{=} [N'P] .$$

Iz (4a) i (5a), sledi da su duži $[M'P]$ i $[N'P]$ incidentne sa polupravama $\overline{[M_oP]}$ i $\overline{[N_oP]}$, odnosno sa dopunama hipotenuza $[MP]$ i $[NP]$ jednougla $\tilde{\Delta}MPN$. Za hipotenuze jednougla $\tilde{\Delta}MPN$, prema teoremi 1.4.10, sledi da je

$$(6) \qquad [MP] \overset{\sim}{=} [NP].$$

Prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na (4b), (5b) i (6) sledi

$$(7) \qquad [M'P] \overset{\sim}{=} [N'P].$$

Dakle, iz (7), prema aksiomi IV_9, dobijamo da je $M'|N'$, te prema definiciji 1.2.16, možemo uočiti jednougao $\tilde{\Delta}M'PN'$. Jednouglovi $\tilde{\Delta}MPN$ i $\tilde{\Delta}M'PN'$ imaju zajednički ugao kod temena P, a prema (4b) podudarne su im i hipotenuze, te prema teoremi 1.4.16, sledi da su im i katete podudarne, tj. važi relacija (2).

U slučaju da su tačke M i N na pravama $p(M,P)$ i $p(N,P)$ suprotne tačke tački P, onda je izotropna duž $[\tilde{MN}]$ incidentna sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}_o$ (v. teoremu 2.1.2) koji ostaje invarijantan u simetriji σ_P. Dakle, i sve tačke izotropne duži $[\tilde{MN}]$ su u simetriji σ_P invarijantne. Kako je, prema lemi 1.4.1, podudarnost izotropnih duži refleksivna, to i u ovom slučaju važi relacija (2).

Pretpostavimo, zatim, da važi relacija (3b). U tom slučaju za tačke M, N, P $\in \tilde{m}$ imamo da su ili tačke M i N sa iste strane tačke P, ili je $(M \sim P \sim N)$, tj. M i N su sa raznih strana tačke P.

Neka su M i N sa iste strane u odnosu na tačku P, i neka je, recimo, tačka N izmedju tačaka M i P, tj. $(M \sim N \sim P)$. U tom slučaju tačka N je unutrašnja tačka izotropne duži $[\widetilde{MP}]$. Prema definiciji 2.1.1, s obzirom na (1a,b) sledi da je M', N' $\in \tilde{m}$ i pritom važi

$$(8a,b) \qquad [\widetilde{MP}] \cong [\widetilde{M'P}] \wedge [\widetilde{NP}] \cong [\widetilde{N'P}] \,.$$

Prema teoremi 1.4.33, s obzirom na relacije (8a,b), sledi relacija (2).

Da je relacija (2) tačna i u slučaju kad je $(M \sim P \sim N)$ zaključujemo takodje na osnovu teoreme 1.4.33. Q.E.D.

TEOREMA 2.1.6. - Ako je σ_P centralna simetrija sa centrom P i L, M, N tri razne tačke, tako da je

$$(1a,b) \qquad L|M \quad i \quad M|N \,,$$

i

$$(2a,b,c) \qquad \sigma_P(L)=L' \,, \quad \sigma_P(M) = M', \quad \sigma_P(N) = N' \,,$$

onda je i

$$(3) \qquad L'|M'|N' \,.$$

Dokaz. - Neka je data simetrija σ_P i tri razne tačke L, M i N, tako da važi (1a,b) i (2a,b,c). Označimo sa $\tilde{m}$ izotropni niz tačaka sa osnovom M. Iz pretpostavke (1a,b), prema teoremi 1.1.3, sledi da je L, N $\in \tilde{m}$. Za centar simetrije P i izotropni niz tačaka $\tilde{m}$, važi

$$(4a,b) \qquad \text{ili } P \in \tilde{m} \,, \quad \text{ili } \quad P \notin \tilde{m} \,.$$

U slučaju da važi (4a), relacija (3) se neposredno dobija iz definicije 2.1.1 i teoreme 1.1.1.

Ako je tačna relacija (4b), onda iz pretpostavke (1a), (2a) i (2b), prema teoremi 2.1.5, sledi

(5) $\quad L' | M'$,

a iz pretpostavke (1b), (2b) i (2c), takodje prema teoremi 2.1.5, sledi

(6) $\quad M' | N'$.

Iz (5) i (6), prema teoremi 1.1.1, sledi relacija (3). Q.E.D.

TEOREMA 2.1.7. - Centralna simetrija preslikava ugao na podudaran ugao.

Dokaz. - Neka je data centralna simetrija σ_P sa centrom P i ugao $\angle ab$ sa temenom O, tj. $a \cap b = \{O\}$. Za centar simetrije P i teme ugla O, važi

(1a,b,c) $\quad$ ili $O — P$, ili $O | P$, ili $P = O$.

Neka je tačna relacija (1a), tj. neka su O i P dve razne kolinearne tačke. Za tačku P i prave a i b , onda važi

(2a,b) $\quad$ ili $(P \notin a \wedge P \notin b)$, ili $(P \in a \vee P \in b)$.

U slučaju da važi (2a), na osnovu teoreme 1.1.5, na pravama a i b postoje respektivno tačke A i B različite od tačke P, tako da je

$$\{A\} = a \cap \tilde{p} , \quad \{B\} = b \cap \tilde{p} ,$$

gde je $\tilde{p}$ izotropni niz tačaka sa osnovom P. Prema tome, možemo uočiti jednougao $\tilde{\Delta}AOB$. Za temena ovog jednougla u simetriji σ_P, imamo

$$\sigma_P(A) = A' , \quad \sigma_P(O) = O' , \quad \sigma_P(B) = B' ,$$

a za njegove hipotenuze, prema teoremi 2.1.3, važi

(3a,b) $\quad [AO] \cong [A'O'] \wedge [BO] \cong [B'O']$, a za katetu, prema teoremi 2.1.5, sledi

(4) $\qquad [AB] \overset{\sim}{=} [A'B']$.

Iz (3a) i (4), prema teoremi 1.4.15, za jednouglove $\tilde{\Delta}AOB$ i $\tilde{\Delta}A'O'B'$, važi

(5) $\qquad \angle AOB \overset{\sim}{=} \angle A'O'B'$,

pri čemu je $\angle AOB = \angle ab$.

Kako je, prema teoremi 2.1.4, simetrija σ_P kolineacija, to je

$$\sigma_P(a) = p(A',O') = a' , \quad \sigma_P(b) = p(B',O') = b' ,$$

odnosno

$$\sigma_P(\angle ab) = \angle a'b' ,$$

otuda s obzirom na (5), imamo

$$\angle ab \overset{\sim}{=} \angle a'b' ,$$

što je trebalo i dokazati.

U slučaju da važi (2b), recimo, da je tačka $P \in a$, onda se u prethodnom dokazu tačka A poklapa sa tačkom P, tj. A=P.

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (1b). Neka je $A \in a$ proizvoljna tačka ove prave različita od temena O i $\tilde{a}$ izotropni niz tačaka sa osnovom A. Na taj način može se uočiti jednougao $\tilde{\Delta}AOB$, gde je $\{B\} = \tilde{a} \cap b$, a zatim na analogan način kao u prethodnom slučaju dokazuje se tvrdjenje teoreme.

Pretpostavimo na kraju da je tačna relacija (1c). U centralnoj simetriji σ_P, gde se centar simetrije P poklapa sa temenom O, zadati $\angle ab$ preslikava se na taj isti u ugao. Kako je prema lemi 1.4.4, podudarnost uglova refleksivna relacija, to i u ovom slučaju važi tvrdjenje teoreme. Q.E.D.

TEOREMA 2.1.8. - Ako su bočne strane trougla ΔMAN podudarne, tj.

(1) $\qquad [AM] \overset{\sim}{=} [AN]$,

onda postoji tačka P, tako da je

(2a,b) $\sigma_P(M) = N$, $\sigma_P(A) = A$,

gde je σ_P centralna simetrija sa centrom P.

Dokaz. - Neka je dat ΔMAN sa središnjim temenom A za koji važi (1). Prema definiciji 1.4.8, dati trougao je jednakokraki. Označimo sa $\tilde{a}$ izotropni niz tačaka sa osnovom A i neka je

$$\tilde{a} \cap p(M,N) = \{B\} .$$

Kako su tačke A, B $\in \tilde{a}$, to je A|B, a po pretpostavci je A — M i A — N, to prema teoremi 1.4.9, imamo da je

(3a,b) $[AM] \cong [BM] \wedge [AN] \cong [BN]$.

Iz pretpostavke (1) i relacija (3a,b), prema prvom delu aksiome IV_3, sledi da je

(4) $[BM] \cong [BN]$.

Prema definiciji 1.4.17 s obzirom na relaciju (4), zaključujemo da je tačka B središte jedne od duži sa krajnjim tačkama M i N. Označimo tu duž sa $[MN]$ a njenu dopunu sa $[\overline{MN}]$. Na pravoj p(M,N), prema aksiomi IV_7, za tačku B postoji suprotna tačka P, pri čemu je

(5a,b,c) $[BP] \cong [\overline{BP}]$, $M \in]BP[$, $N \in]\overline{BP}[$.

Prema aksiomi IV_5 i teoremi 1.4.3, s obzirom na (5a,b) i (4), sledi

(6) $[MP] \cong [PN]$,

gde je $[MP]$, $[PN] \subset [\overline{BP}]$.

Kako je A|B i B — P, to prema teoremi 1.4.9 s obzirom na (5a), sledi da je i duž $[AP]$ polupravа, tj. da važi

(7) $[AP] \cong [\overline{AP}]$.

Prema teoremi 2.1.1. tačkom P zadata je centralna simetrija σ_P, a s obzirom na (6) i (7), slede relacije (2a,b). Q.E.D.

2.2. OSNA SIMETRIJA

U EP ravni prema aksiomi I_3 postoji prava p i tačka M, tako da $M \notin p$. Prema teoremi 1.1.4, tačkom M kao osnovom odredjen je jedinstven izotropni niz tačaka $\tilde{m}$. Za pravu p i izotropni niz tačaka $\tilde{m}$, prema teoremi 1.1.5, postoji jedinstvena tačka M_o, tako da je

$$p \cap \tilde{m} = \{M_o\}.$$

Tačkama M i M_o na izotropnom nizu tačaka $\tilde{m}$ odredjena je izotropna duž $[\widetilde{MM_o}]$, a tačkom M_o dva izotropna poluniza tačaka od kojih jedan nije incidentan sa izotropnom duži $[\widetilde{MM_o}]$. Prema aksiomi IV_2, za izotropnu duž $[\widetilde{MM_o}]$ i izotropni poluniz tačaka sa početnom tačkom M_o, koji ne sadrži ovu duž, postoji jedinstvena tačka M' incidentna sa ovim polunizom tačaka, tako da je

$$(1) \qquad [\widetilde{MM_o}] \tilde{=} [\widetilde{M_oM'}] .$$

Na osnovu napred rečenog za svaku tačku M na jedinstven način možemo odrediti tačku M' tako da je zadovoljena relacija (1). Prema tome možemo dati definiciju:

Neka je sa α označena EP ravan i neka je u njoj uočena proizvoljna prava p.

DEFINICIJA 2.2.1. - Bijektivno preslikavanje

$$\sigma_p : \alpha \to \alpha,$$

tako da je

$$(\forall X \in p)(\sigma_p(X)=X' , X'=X) ,$$

$$(\forall X \notin p)(\sigma_p(X)=X', X|X' , [\widetilde{XX_o}] \tilde{=} [\widetilde{X_oX'}]) ,$$

gde je $\{X_o\}=\tilde{x} \cap p$, a $\tilde{x}$ izotropni niz tačaka sa osnovom X, nazivamo *osna simetrija.*

Simetriju σ_p nazivamo još i simetrija u odnosu na pravu p, a pravu p - *osom simetrije.*

Iz definicije osne simetrije σ_p vidimo da za svaku tačku $X \in \alpha$, postoji tačka $X' \in \alpha$, tako da je $\sigma_p(X)=X'$, kao i da je $\sigma_p(X')=X$, tj. inverzno preslikavanje σ_p^{-1} preslikava tačku X′ u tačku X. Dakle, imamo da je

$$\sigma_p^{-1} = \sigma_p \ , \quad \text{odnosno} \quad \sigma_p \circ \sigma_p = I \ ,$$

gde je I identična transformacija EP ravni α. Prema tome, osna simetrija je involucija.

Iz definicije, takodje, imamo da za

$$(\forall X \in p)(\sigma_p(X) = X) \ ,$$

tj. simetrija σ_p sve tačke ose simetrije p ostavlja invarijante. Dakle, tačke ose simetrije su dvojne tačke preslikavanja σ_p.

Takodje se, na osnovu napred rečenog zaključuje, da ako je za svako $M \in \alpha$ i $M \notin p$, $\sigma_p(M)=M'$, $M, M' \in \tilde{m}$, onda

$$\sigma_p : \tilde{m} \to \tilde{m} \ ,$$

tj. osna simetrija izotropni niz tačaka preslikava na taj isti izotropni niz.

Na osnovu napred rečenog važi:

TEOREMA 2.2.1. - Osna simetrija jednoznačno je odredjena osom simetrije.

Tačna je i sledeća važna teorema.

TEOREMA 2.2.2. - Ako su A i B dve razne kolinearne tačke a σ_p osna simetrija sa osom p i pritom

$$\text{(1a,b)} \qquad \sigma_p(A)=A' \quad \text{i} \quad \sigma_p(B)=B' \ ,$$

onda za jednu od duži sa krajnjim tačkama A i B i jednu od duži sa krajnjim tačkama A′ i B′, važi da je

(2) $[AB] \overset{\sim}{=} [A'B']$.

Dokaz. - Neka su u EP ravni α uočene dve razne kolinearne tačke A i B i osna simetrija $\sigma_p : \alpha \to \alpha$, tako da važi (1a,b). Za pravu p(A,B) i osu p važi:

(3a,b) ili $p(A,B)=p$, ili $p(A,B) \cap p = \{P\}$.

U slučaju da važi (3a), onda su prema definiciji 2.2.1, duži $[AB]$ i $[A'B']$ identične, te su prema aksiomi IV_1, podudarne.

Pretpostavimo, zatim, da je tačno (3b). Za tačke A, B i P prave p(A,B), važi

(4) ili $(A \neq P \wedge B \neq P)$,

(5) ili $(A \neq P \wedge B = P)$, ili obrnuto.

Neka važi (4). Iz pretpostavke (1a,b), prema definiciji 2.2.1, imamo da je

(6a,b) $A|A'$ i $B|B'$.

A i B su po pretpostavci dve razne kolinearne tačke, tj. postoji prava p(A,B). Ovim tačkama su, kao osnovama, zadata i dva razna izotropna niza tačaka $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$. Iz relacije (6a,b), odmah sledi da je $A,A' \in \tilde{a}$ i $B,B' \in \tilde{b}$. Na osnovu teoreme 1.1.3, i tačka A', odnosno tačka B', mogu se smatrati osnovom izotropnog niza $\tilde{a}$, odnosno $-\tilde{b}$. Kako je prema teoremi 1.1.7, $\tilde{a} \cap \tilde{b} = \emptyset$, to su i tačke A' i B' dve različite tačke, tj. $A' \neq B'$. Tačkom A', odnosno tačkom B', prema teoremi 1.1.4, zadat je jedan i samo jedan izotropni niz tačaka $\tilde{a}$, odnosno $-\tilde{b}$. Prema tome, ostaje da su A' i B' dve razne kolinearne tačke, tj. postoji prava p(A',B') sa kojom su one incidentne. Otuda, prema teoremi 1.4.11, s obzirom na (6a,b), sledi (2).

I konačno neka važi (5), tj. neka je $B = B' = P \in p$. Ako označimo

$$\tilde{a} \cap p = \{A_o\} ,$$

onda prema definiciji 2.2.1, imamo da je

(7a,b) $A|A_o$ i $A_o|A'$.

Kako su A_o i P kolinearne tačke, tj. A_o — P, to iz (7a,b), prema teoremi 1.4.9, sledi da je

(8a,b) $[AP] \overset{\sim}{=} [A_oP] \wedge [A'P] \overset{\sim}{=} [A_oP]$.

Prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na (8a,b) i pretpostavku da je B = B' = P , sledi relacija (2). Q.E.D.

TEOREMA 2.2.3. - Neka je dat izotropni niz tačaka $\tilde{m}$ i dve razne tačke M, N $\in \tilde{m}$. Ako je σ_s simetrija u odnosu na pravu s , tako da je

(1a,b) $\sigma_s(M) = M'$, $\sigma_s(N) = N'$,

onda je

(2) $[\widetilde{MN}] \overset{\sim}{=} [\widetilde{M'N'}]$.

Dokaz. - Neka je $\tilde{m}$ izotropni niz tačaka i dve razne tačke M, N $\in \tilde{m}$, a σ_s simetrija u odnosu na pravu s , tako da važi (1a,b). Označimo:

(3) $\tilde{m} \cap s = \{P\}$.

Tačkom P na izotropnom nizu tačaka m odredjena su dva izotropna poluniza tačaka sa početnom tačkom P. Za tačke M, N i P, odnosno M', N' i P, prema definiciji 1.2.10, važi

(4a,b) $\neg(M \sim P \sim N) \vee (M \sim P \sim N)$,

odnosno

(4'a,b) $\neg(M' \sim P \sim N') \vee (M' \sim P \sim N')$.

Ako je tačno (4a), odnosno (4'a), onda su tačke M i N sa iste strane u odnosu na tačku P, tj. incidentne su sa istim izotropnim polunizom tačaka sa početnom tačkom P, a tačke M' i N' sa drugom. Za ove tačke onda imamo da je

(5a,b) ili $(M \sim N \sim P)$, ili $(N \sim M \sim P)$,

odnosno

(5'a,b) ili $(M' \sim N' \sim P)$, ili $(N' \sim M' \sim P)$.

Neka je tačno (5a) i (5'a), tj. neka je tačka N unutrašnja tačka izotropne duži $[\widetilde{MP}]$, a tačka N' — duži $[\widetilde{M'P'}]$. Prema definiciji simetrije σ_s iz (1a,b) i (3), sledi da je

(6a,b) $[\widetilde{MP}] \overset{\sim}{\cong} [\widetilde{M'P}]$ i $[\widetilde{NP}] \overset{\sim}{\cong} [\widetilde{N'P}]$.

Iz (6a,b), prema teoremi 1.4.33, sledi (2).

Dokaz se analogno izvodi i u slučaju kad je tačno (4b), odnosno (4'b). Q.E.D.

TEOREMA 2.2.4. - Ako su A, M i N tri razne tačke, tako da je

(1a,b) $M|N \wedge [AM] \overset{\sim}{\cong} [AN]$,

onda postoji prava a , takva da je

(2a,b) $\sigma_a(M) = N \wedge \sigma_a(A) = A$,

gde je σ_a osna simetrija sa osom a .

Dokaz. - Neka su date tačke A, M i N tako da važi (1a,b). Tačkama M i N zadata je izotropna duž $[\widetilde{MN}]$. Ako sa B označimo središte ove duži, onda je

(3) $[\widetilde{MB}] \overset{\sim}{\cong} [\widetilde{BN}]$.

Označimo sa $a = p(A,B)$. Pravom a , prema teoremi 2.2.1, zadata je osna simetrija σ_a. Iz (1a) i (3), na osnovu definicije 2.2.1, sledi (2a,b). Q.E.D.

Glava 3.

TRANSFORMACIJE PODUDARNOSTI EP RAVNI

3.1. DEFINICIJA I OPŠTA SVOJSTVA TRANSFORMACIJE PODUDARNOSTI EP RAVNI

Aksiome podudarnosti omogućavaju da se u EP ravni definiše posebna klasa transformacija te ravni koja ima široku primenu. Tu klasu transformacija nazivamo transformacije podudarnosti.

Označimo EP ravan sa α.

DEFINICIJA 3.1.1. - Bijektivno preslikavanje

$$f : \alpha \to \alpha ,$$

takvo da

$$(\forall A,B \in \alpha \wedge A — B)(f(A)=A',f(B)=B',\ A'—B',\ [AB] \cong [A'B']),$$

gde je $[AB]$ jedna od duži koju odredjuju tačke A i B, a $[A'B']$ jedna od duži koju odredjuju tačke A′ i B′, i

$$(\forall M,N \in \alpha \wedge M|N)(f(M)=M',f(N)=N',M'|N',\ [\tilde{MN}] \cong [\tilde{M'N'}]),$$

nazivamo *transformacija podudarnosti*, ili kratko *podudarnost*.

S obzirom da za svake dve kolinearne tačke A i B, na osnovu aksiome IV_1, važi da je svaka od duži koje obrazuju tačke A i B podudarna sama sebi, tj.

$$[AB] \cong [AB] \wedge [\overline{AB}] \cong [\overline{AB}],$$

i za svake dve paralelne tačke M i N, prema lemi 1.4.1, sledi

$$[\tilde{MN}] \cong [\tilde{MN}] ,$$

to prema definiciji 3.1.1, identična transformacija I, koja svaku tačku EP ravni preslikava u tu istu tačku, predstavlja transformaciju podudarnosti.

TEOREMA 3.1.1. - Kompozicija dveju transformacija podudarnosti predstavlja takodje transformaciju podudarnosti.

Dokaz. - Neka su f_1 i f_2 bilo koje dve transformacije podudarnosti EP ravni α. Ako sa X i Y označimo dve proizvoljne tačke EP ravni, onda je

(1a,b) ili $(X — Y)$, ili $X|Y$.

Pretpostavimo da za tačke X i Y važi (1a) i neka je

(2) $f_1(X)=X_1$, $f_1(Y)=Y_1$, a $f_2(X_1)=X_2$, $f_2(Y_1)=Y_2$,

onda prema definiciji 3.1.1, sledi da je

(3a,b) $[XY] \cong [X_1Y_1] \wedge [X_1Y_1] \cong [X_2Y_2]$.

Ako uočimo kompoziciju transformacija podudarnosti $f_2 \circ f_1$ iz (2), imamo da je

(4) $(f_2 \circ f_1)(X) = f_2(f_1(X)) = f_2(X_1) = X_2$,

(5) $(f_2 \circ f_1)(Y) = f_2(f_1(Y)) = f_2(Y_1) = Y_2$.

Na osnovu prvog dela aksiome IV_3 s obzirom na (3a,b), sledi

(6) $[XY] \cong [X_2Y_2]$.

Prema definiciji 3.1.1 s obzirom na (4), (5) i (6), sledi da kompozicija $f_2 \circ f_1$ predstavlja transformaciju podudarnosti.

Pretpostavimo, zatim, da za tačke X i Y važi relacija (1b), a za transformacije f_1 i f_2 relacija (2). Prema definiciji 3.1.1, onda imamo da je

(7a,b) $\quad [\widetilde{XY}] \cong [X_1\widetilde{Y}_1] \wedge [X_1\widetilde{Y}_1] \cong [X_2\widetilde{Y}_2]$.

Na osnovu leme 1.3.4, sledi

(8) $\quad [\widetilde{XY}] \cong [X_2\widetilde{Y}_2]$.

Konačno iz (4), (5) i (8), prema definiciji 3.1.1, sledi da kompozicija $f_2 \circ f_1$ predstavlja transformaciju podudarnosti. Q.E.D.

TEOREMA 3.1.2. - Inverzna transformacija transformacije podudarnosti EP ravni predstavlja takodje transformaciju podudarnosti te ravni.

Dokaz. - Neka je f transformacija podudarnosti EP ravni α. Označimo sa X i Y dve proizvoljne tačke EP ravni α, a $f(X)=X'$ i $f(Y)=Y'$. Za tačke X i Y, važi

(1a,b) $\quad$ ili $(X — Y)$, ili $X|Y$.

Prema definiciji 3.1.1, s obzirom na (1a), odnosno (1b), sledi

(2a,b) $\quad [XY] \cong [X'Y']$, odnosno $[\widetilde{XY}] \cong [X'\widetilde{Y}']$.

Kako je relacija podudarnosti duži i izotropnih duži u EP ravni, prema lemi 1.4.2, simetrična to iz (2a,b), sledi

$$[X'Y'] \cong [XY], \text{ odnosno } [X'\widetilde{Y}'] \cong [\widetilde{XY}] ,$$

te je i inverzna transformacija f^{-1}, takodje, transformacija podudarnosti. Q.E.D.

Na osnovu prethodne dve teoreme može se dokazati teorema:

TEOREMA 3.1.3. - Skup svih transformacija podudarnosti EP ravni predstavlja grupu u odnosu na kompoziciju (proizvod) preslikavanja.

Imajući u vidu definiciju transformacije podudarnosti 3.1.1, definiciju centralne simetrije 2.1.1 i teoreme 2.1.3 i 2.1.5, odnosno definiciju osne simetrije 2.2.1 i teoreme 2.2.2 i 2.2.3, možemo iskazati teoreme:

TEOREMA 3.1.4. - Centralna simetrija EP ravni je transformacija podudarnosti.

TEOREMA 3.1.5. - Osna simetrija EP ravni je transformacija podudarnosti.

TEOREMA 3.1.6. - Ako je σ_P centralna simetrija EP ravni i f bilo koja transformacija podudarnosti te ravni, pri čemu je

(1) $f(P) = P'$,

tada je

(2) $f \circ \sigma_P \circ f^{-1} = \sigma_{P'}$. [1)]

Dokaz. - Neka je σ_P centralna simetrija se centrom P. Prema definiciji 2.1.1, imamo za svaku pravu x incidentnu sa centrom P i izotropni niz tačaka $\tilde{p}$ sa osnovom P, važi da je

(3a,b) $\sigma_P(x) = x \wedge \sigma_P(\tilde{p}) = \tilde{p}$.

Neka je f bilo koja transformacija podudarnosti EP ravni tako da važi (1). Kako je $P \in x$ i $P \in \tilde{p}$, to su prava $x' = f(x)$ i izotropni niz tačaka $\tilde{p}' = f(\tilde{p})$ incidentni sa tačkom P' , tj. $P' \in x'$ i $P' \in \tilde{p}'$. Prema teoremi 3.1.2, inverzna transformacija f^{-1} transformaciji podudarnosti f takodje predstavlja transformaciju podudarnosti i pritom važi

(4a,b) $f^{-1}(x') = x$ i $f^{-1}(\tilde{p}') = \tilde{p}$.

---

1) $f \circ \sigma_P \circ f^{-1}$ *je transmutacija ili preobražavanje centralne simetrije* σ_P *transformacijom podudarnosti* f *(v. [20] , str. 68).*

Na osnovu (4a) i (3a), sledi

(5) $\sigma_P \circ f^{-1}(x') = x = f^{-1}(x')$,

a na osnovu (4b) i (3b):

(6) $\sigma_P \circ f^{-1}(\tilde{p}') = \tilde{p} = f^{-1}(\tilde{p}')$.

Ako relacije (5) i (6) pomnožimo s leva sa transformacijom podudarnosti f , dobijamo

$$f \circ \sigma_P \circ f^{-1}(x') = f \circ f^{-1}(x') = I(x') = x' ,$$

odnosno

$$f \circ \sigma_P \circ f^{-1}(\tilde{p}') = f \circ f^{-1}(\tilde{p}') = I(\tilde{p}') = \tilde{p}' .$$

Dakle, pokazali smo da kompozicija $f \circ \sigma_P \circ f^{-1}$ preslikava svaku pravu x' incidentnu sa tačkom P' u tu istu pravu i izotropni niz tačaka $\tilde{p}'$ sa osnovom P' u taj isti niz tačaka. Prema definiciji centralne simetrije, to dalje znači da ova kompozicija predstavlja centralnu simetriju sa centrom P' , tj. važi (2). Q.E.D.

TEOREMA 3.1.7. - Centralne simetrije σ_P i σ_Q sa različitim centrima P i Q su komutativne transformacije ako i samo ako P i Q obrazuju polupravu, tj. važi ekvivalencija

$$\sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_P \circ \sigma_Q \iff [PQ] \tilde{=} [\overline{PQ}] .$$

Dokaz. - Pretpostavimo najpre da važi

(1) $\sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_P \circ \sigma_Q$.

Nakon množenja prethodne relacije sa σ_Q^{-1} s desna, dobijemo

(2) $\sigma_Q \circ \sigma_P \circ \sigma_Q^{-1} = \sigma_P$.

Označimo sa P' tačku koja u centralnoj simetriji σ_Q odgovara tački P, tj.

(3) $\sigma_Q(P) = P'$.

Prema zakonu transmutacije centralne simetrije σ_P centralnom simetrijom σ_Q, imamo da je

(4) $\sigma_Q \circ \sigma_P \circ \sigma_Q^{-1} = \sigma_{P'}$.

Na osnovu relacija (2) i (4), dobijamo

$$\sigma_P = \sigma_{P'} \iff P = P',$$

te prema (3), imamo da je $\sigma_Q(P)=P$. Dalje, u simetriji σ_Q osim centra Q i tačka P je invarijantna tačka, a što prema teoremi 2.1.2, znači da su P i Q suprotne tačke, tj. obrazuju polupravu, te prema aksiomi IV_7, sledi

(5) $[PQ] = [\overline{PQ}]$.

Dokažimo obrnutu implikaciju. Pretpostavimo sada da je tačna relacija (5), tj. da su P i Q suprotne tačke na pravoj p(P,Q). Prema teoremi 2.1.2, u centralnoj simetriji σ_Q na pravoj p(P,Q) pored centra Q i tačka P je dvojna tačka, tj.

(6) $\sigma_Q(P) = P$.

Prema zakonu transmutacije centralne simetrije σ_P centralnom simetrijom σ_Q, na osnovu (6), imamo

$$\sigma_Q \circ \sigma_P \circ \sigma_Q^{-1} = \sigma_P \implies \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_P \circ \sigma_Q ,$$

a što je trebalo i dokazati. Q.E.D.

U prethodnoj teoremi utvrdili smo da su dve centralne simetrije sa centrima koji obrazuju polupravu komutativne i obrnuto, a sada ispitajmo šta predstavlja kompozicija takve dve centralne simetrije.

Neka su date dve proizvoljne centralne simetrije σ_P i σ_Q i neka su centri P i Q kolinearni, tj. postoji prava m sa kojom su te tačke incidentne i pritom P i Q su suprotne tačke. Dakle duž [PQ] i njena dopuna $[\overline{PQ}]$ su poluprave, te je

(1) $[PQ] \overset{\sim}{=} [\overline{PQ}]$.

Na osnovu definicije centralne simetrije 2.1.1, važi

(2) $$\sigma_Q \circ \sigma_P(P) = \sigma_Q(\sigma_P(P)) = \sigma_Q(P) = P ,$$

i

(3) $$\sigma_Q \circ \sigma_P(Q) = \sigma_Q(\sigma_P(Q)) = \sigma_Q(Q) = Q .$$

Prema teoremi 2.1.2 za centralnu simetriju σ_P postoji izotropni niz tačaka $\tilde{p}_o$ čije su sve tačke u toj simetriji invarijantne i $Q \in \tilde{p}_o$, a za centralnu simetriju σ_Q — izotropni niz tačaka $\tilde{q}_o$, gde je $P \in \tilde{q}_o$.

Neka je X proizvoljna tačka incidentna sa pravom $m = p(P,Q)$, tj. $X \in m$. Neka je tačka $X \in]PQ[$. Onda iz (1) na osnovu aksiome IV_5, sledi da postoji tačka $X' \in]\overline{PQ}[$, tako da je

(4a,b) $$[PX] \overset{\sim}{=} [PX'] \wedge [QX] \overset{\sim}{=} [QX'] ,$$

gde je $[PX], [XQ] \subset [PQ]$ a $[PX'], [X'Q] \subset [\overline{PQ}]$.

Na osnovu (4a), sledi da je

(5) $$\sigma_P(X) = X' ,$$

a na osnovu (4b):

(6) $$\sigma_Q(X') = X .$$

Iz (4) i (5), sledi da je

(7) $$\sigma_Q \circ \sigma_P(X) = X .$$

Do istog zaključka dolazi se i u slučaju da je $X \in]\overline{PQ}[$. Dakle, na osnovu (2), (3) i (7), imamo da je svaka tačka prave $m = p(P,Q)$ u kompoziciji $\sigma_Q \circ \sigma_P$ ostaje invarijantna, tj.

(8) $$(\forall X \in p(P,Q))(\sigma_Q \circ \sigma_P(X) = X) .$$

Pretpostavimo, zatim, da je tačka X proizvoljna tačka

EP ravni koja nije incidentna sa pravom $m = p(P,Q)$, tj. $X \notin m$. Za tačku X i centar P centralne simetrije σ_P, važi

(9a,b) ili X — P , ili $X|P$.

Neka je tačna relacija (9a). OZnačimo:

$$\tilde{p}_o \cap p(X,P) = \{P_o\}$$

Neka je tačka $X \neq P_o$. Tada duž $[XP]$ nije poluprava već je ona incidentna sa polupravom $[PP_o]$ ili njenom dopunom $[\overline{PP}_o]$, te je $\sigma_P(X)=X'$, $X' \in p(P,X)$ i pritom važi

(10a,b) $[XP] \tilde{=} [PX'] \wedge]XP[\cap]PX'[= \emptyset$,

a $\sigma_P(P_o)=P_o$. Dakle, tačka $X' \neq P_o$, pa je X' — Q. Neka je, dalje

$$\tilde{q}_o \cap p(Q,X') = \{Q_o\} .$$

Kako je $p(X,X') \cap \tilde{q}_o = \{P\}$, to je tačka $X' \neq Q_o$ te je

$$\sigma_Q(X')=X'', \ X'' \in p(Q,X'), \ \sigma_Q(Q_o)=Q_o \quad i \quad X'' \neq Q_o, \ a$$

(11a,b) $[X'Q] \tilde{=} [QX''] \wedge]X'Q[\cap]QX''[= \emptyset$.

Dakle, imamo da je

$$\sigma_Q \circ \sigma_P(X) = X'' .$$

Dokažimo da su tačke X i X" paralelne. Kako su $[QQ_o]$ i $[\overline{QQ}_o]$ poluprave, to prema aksiomi IV_5 s obzirom na (11a), sledi

(12) $[X'Q_o] \tilde{=} [Q_oX'']$.

Kako su $Q_o, P \in \tilde{q}_o$ i $X' \notin \tilde{q}_o$, to možemo uočiti jednougao $\tilde{\Delta}PX'Q_o$, za čije hipotenuze važi

(13) $[PX'] \tilde{=} [Q_oX']$.

Iz (10a), (12) i (13), prema prvom delu aksiome IV_3, sledi

(14) $[XP] \tilde{=} [Q_oX'']$.

Na osnovu teoreme 1.4.7, s obzirom na (13) i (14) sledi da je $[XX'] \cong [X''X]$, a prema aksiomi IV_6, i njihove dopune su podudarne, tj. važi

(15) $\quad \overline{[XX']} \cong \overline{[X''X']}$.

Ako uočimo jednougao $\tilde{\Delta}PX'Q_o$ čije su hipotenuze duži $[PXX']$ i $[Q_oX''X']$, onda su duži iz relacije (15) incidentne sa hipotenuzama ovog jednougla, te prema aksiomi IV_9, sledi da je

(16) $\quad X \mid X''$.

Označimo sa $\tilde{x}$ izotropni niz tačaka koji je incidentan sa tačkama X i X" . Neka je:

$$p(P,Q) \cap \tilde{x} = \{X_o\} .$$

Dokažimo da je tačka X_o središte izotropne duži $[X\tilde{X}'']$, tj. da je

(17) $\quad [X\tilde{X}_o] \cong [\tilde{X}_oX'']$.

Kako centralna simetrija, prema teoremi 2.1.7, ugao preslikava na podudaran ugao, to imamo da je

$$\begin{aligned}\sigma_Q \circ \sigma_P(\angle p(P,Q)p(P,X)) &= \sigma_Q(\sigma_P(\angle p(P,Q)p(P,X))) \\ &= \sigma_Q(\angle p(P,Q)p(P,X')) \\ &= \angle p(P,Q)p(P,X'') ,\end{aligned}$$

te je

(18) $\quad \angle p(P,Q)p(P,X) \cong \angle p(P,Q)p(P,X'')$.

Kako duž $[PX_o]$, koja nije incidentna sa tačkom Q, predstavlja zajedničku hipotenuzu jednouglova $\tilde{\Delta}XPX_o$ i $\tilde{\Delta}X''PX_o$, to prema teoremi 1.4.16 s obzirom na (18), sledi relacija (17).

Posmatrajmo sada slučaj kad je tačna relacija (9a), ali se tačka X poklapa sa tačkom P_o, tj. $X=P_o$. To, dalje znači, da su tačke $X, Q \in \tilde{p}_o$, te imamo

$$\sigma_\Omega \circ \sigma_P(X) = \sigma_\Omega(\sigma_P(X)) = \sigma_\Omega(X) = X',$$

gde je prema definiciji centralne simetrije

(19a,b) $\quad X|X' \quad i \quad [X\Omega] \cong [\Omega X']$.

Pretpostavimo na kraju da je tačna relacija (9b), tj. da je $X|P$. To, dalje znači, da je $X \in \tilde{\alpha}_o$, te je

$$\sigma_\Omega \circ \sigma_P(X) = \sigma_\Omega(\sigma_P(X)) = \sigma_\Omega(X') = X',$$

gde je

(20a,b) $\quad X|X' \quad i \quad [XP] \cong [PX']$.

Dakle, iz (16), (17), (19a,b) i (20a,b), sledi

(21) $(\forall X \notin p(P,\Omega))(\sigma_\Omega \circ \sigma_P(X) = X'', X|X'', [XX_o] \cong [X_oX''])$.

Prema tome, na osnovu definicije osne simetrije 2.2.1, s obzirom na (8) i (21), sledi da je kompozicija $\sigma_\Omega \circ \sigma_P$ osna simetrije sa osom $m=p(P,\Omega)$, tj.

$$\sigma_\Omega \circ \sigma_P = \sigma_m .$$

Na osnovu svega napred rečenog, dokazana je teorema:

TEOREMA 3.1.8. - Kompozicija dve centralne simetrije σ_P i σ_Ω čiji su centri P i Ω dve kolinearne i medjusobno suprotne tačke, predstavlja osnu simetriju $\sigma_{p(P,\Omega)}$ sa osom $p(P,\Omega)$, tj.

$$\sigma_\Omega \circ \sigma_P = \sigma_{p(P,\Omega)} .$$

Dokažimo da važi:

TEOREMA 3.1.9. - Ako je σ_m osna simetrija, onda postoje centralne simetrije σ_P i σ_Ω, tako da je

(1) $\quad \sigma_m = \sigma_\Omega \circ \sigma_P$

Dokaz. - Neka je data osna simetrija sa osom m . Neka su tačke $P, Q \in m$, tako da one čine par suprotnih tačaka te prave. Ako te tačke izaberemo za centre centralnih simetrija σ_P i σ_Q , prema teoremi 3.1.8, sledi da važi (1). Q.E.D.

Kako je prema teoremi 3.1.4, centralna simetrija transformacija podudarnosti, a na osnovu teoreme 3.1.1, kompozicija dve transformacije podudarnosti predstavlja takodje transformaciju podudarnosti, to zaključujemo da važi teorema:

TEOREMA 3.1.10. - Kompozicija konačnog broja centralnih simetrija EP ravni predstavlja transformaciju podudarnosti te ravni.

Da bismo pokazali da važi i teorema obrnuta teoremi 3.1.10, tj. da se svaka transformacija podudarnosti EP ravni može prikazati kao kompozicija centralnih simetrija, najpre dokažimo nekoliko pomoćnih teorema.

LEMA 3.1.1. - Ako su A i B dve razne kolinearne tačke i $[AB]$ jedna od duži na pravoj $p(A,B)$, koju odredjuje ove dve tačke, a A' i B' druge dve razne kolinearne tačke i $[A'B']$ jedna od duži na pravoj $p(A',B')$ koja je odredjena ovim tačkama i pritom važi

(1) $$[AB] \stackrel{\sim}{=} [A'B'] ,$$

onda postoji kompozicija od najviše tri centralne simetrije, označimo je sa ϕ, tako da je

(2) $$\phi([AB]) = [A'B'] .$$

Dokaz. - Neka su $p(A,B)$ i $p(A',B')$ prave incidentne respektivno sa kolinearnim tačkama A i B, odnosno A' i B' i neka su na njima uočene duži $[AB]$ i $[A'B']$ tako da važi (1). Označimo $p(A,B) \cap p(A',B') = \{C\}$.

Posmatraćemo prvo slučaj u kome se tačke A i A', odnosno B i B' ne poklapaju sa tačkom C. Za tačke A i A' onda važi

(3a,b) ili $A — A'$, ili $A|A'$.

Pretpostavimo da je tačna relacija (3a). Na pravoj $p(A,A')$ uočimo jednu od duži čije su krajnje tačke A i A' i označimo je sa $[AA']$. Ako sa tačkom P označimo središte ove duži, onda je

$$(4a,b) \qquad [AP] \cong [PA'] \wedge \,]AP[\, \cap \,]PA'[\, = \emptyset \, .$$

Tačkom P kao centrom, prema teoremi 2.1.1, zadata je centralna simetrija σ_P. Za tačke A i B s obzirom na (4a,b) i definiciju 2.1.1, sledi da je

$$\sigma_P(A) = A' \quad \text{i} \quad \sigma_P(B) = B_1 \, ,$$

odnosno

$$(5) \qquad \sigma_P([AB]) = [A'B_1] \, .$$

Prema teoremi 2.1.3, s obzirom na (5), sledi da je

$$(6) \qquad [AB] \cong [A'B_1] \, .$$

Iz (1) i (6), prema aksiomi IV_3, sledi

$$(7) \qquad [A'B'] \cong [A'B_1] \, .$$

Za tačke B' i B_1, važi

$$(8a,b) \qquad \text{ili } B' \text{ — } B_1 \, , \quad \text{ili } B' | B_1 \, .$$

Neka je tačna relacija (8a) i neka je $\tilde{a}'$ izotropni niz tačaka sa osnovom A'. Označimo $\tilde{a}' \cap p(B',B_1) = \{R\}$, a sa Q suprotnu tačku R na pravoj $p(B',B_1)$. Dalje, na osnovu (7) i (8a), možemo uočiti jednakokraki trougao $\Delta B'A'B_1$, a prema teoremi 2.1.8, postoji centralna simetrija σ_Q tako da je

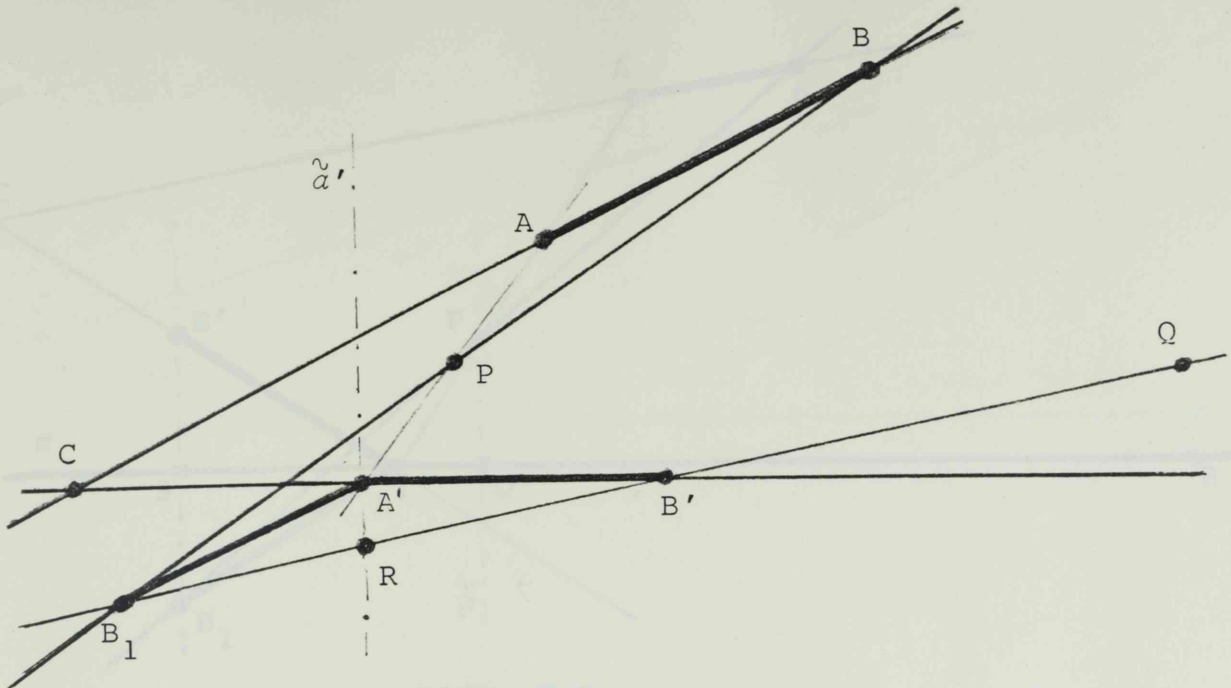
$$\sigma_Q(B_1) = B' \quad \text{i} \quad \sigma_Q(A') = A' \, ,$$

odnosno

$$(9) \qquad \sigma_Q([A'B_1]) = [A'B'] \, .$$

Iz (5) i (9), sledi da postoji kompozicija

$$(10) \qquad \phi = \sigma_Q \circ \sigma_P \, ,$$



Slika 3.1.

gde su centri P i Q kolinearne ali ne i suprotne tačke, tako da važi (2).

Neka je uz pretpostavku (3a) tačna relacija (8b), tj. neka je $B'|B_1$. Onda prema teoremi 2.2.4, s obzirom na relaciju (7), postoji osna simetrija σ_m, tako da je

$$\sigma_m(B_1) = B' \quad \text{i} \quad \sigma_m(A') = A' ,$$

odnosno

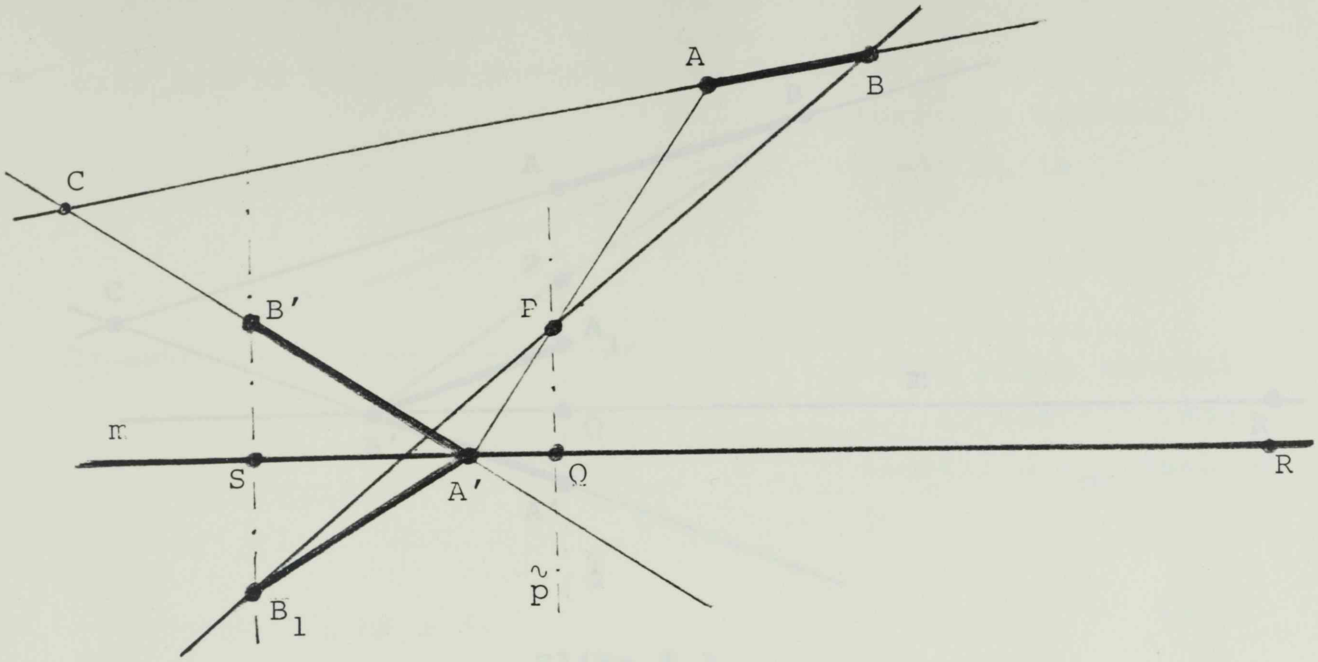
(11) $$\sigma_m([A'B_1]) = [A'B'] ,$$

gde je $m = p(A', S)$, a tačka S središte izotropne duži $[B'B_1]$. Ako sa $\tilde{p}$ označimo izotropni niz tačaka sa osnovom P, $\tilde{p} \cap m = \{Q\}$, a sa R suprotnu tačku tački Q na pravoj m, onda prema teoremi 3.1.9, osnu simetriju σ_m možemo iskazati

(12) $$\sigma_m = \sigma_R \circ \sigma_Q .$$

Na osnovu relacija (5), (11) i (12), sledi da postoji kompozicija

(13) $$\phi = \sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P ,$$



Slika 3.2.

gde je $P|Q$, $Q — R$ i $[QR] \tilde{=} [\overline{QR}]$, tako da važi relacija (2).

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (3b), tj. da je $A|A'$. Za tačke B i B' onda važi

(14a,b) ili $B — B'$, ili $B|B'$.

Neka je tačna relacija (14a). Označimo sa $\tilde{\alpha}$ izotropni niz tačaka sa osnovom A i $\{P\} = \tilde{\alpha} \cap p(B,B')$. Kako je $A — B$ i $A|P$, odnosno $A' — B'$ i $A'|P$, to prema teoremi 1.4.9, dobijamo da je

(15a,b) $[AB] \tilde{=} [BP] \wedge [A'B'] \tilde{=} [B'P]$.

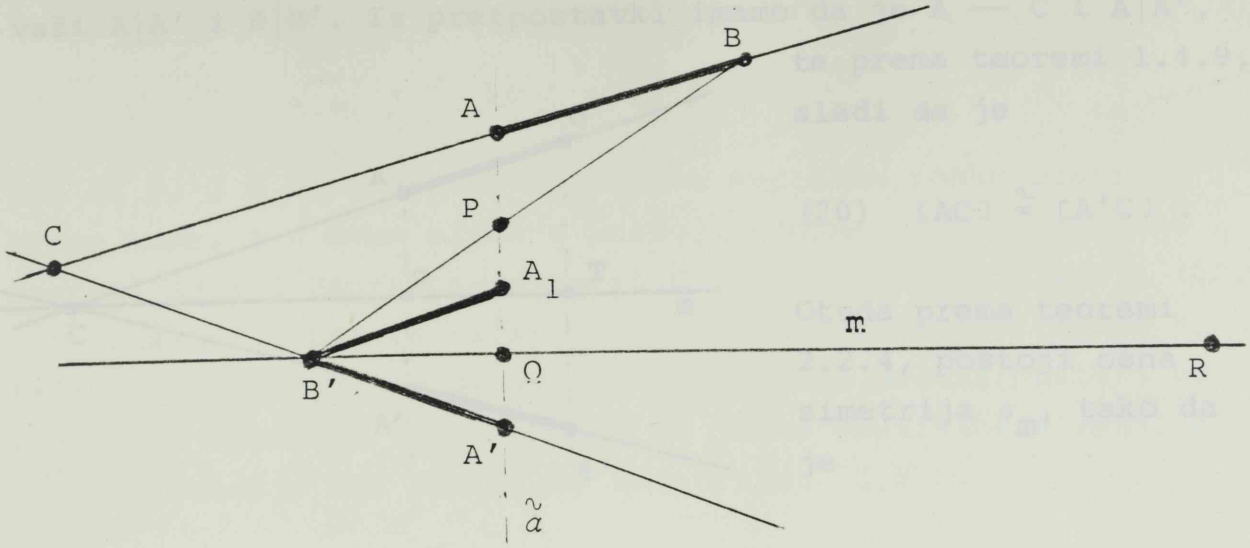
Na osnovu pretpostavke (1) i relacija (15a,b), prema aksiomi IV_3, sledi da je

(16) $[BP] \tilde{=} [PB']$,

tj. tačka P je središte jedne od duži čije su krajnje tačke B i B'.

Tačkom P kao centrom zadata je centralna simetrija σ_P, tako da za tačke A i B s obzirom na (16), važi

$\sigma_P(A)=A_1$, $A_1|A$, $[\tilde{AP}] \tilde{=} [P\tilde{A}_1]$ a $\sigma_P(B)=B'$,



Slika 3.3.

odnosno

(17) $\sigma_P([AB]) = [A_1B'] .$

Kako je $A|A'$ i $A|A_1$, to prema teoremi 1.1.1, sledi da je i $A'|A_1$. S obzirom da je $A' — B'$, to prema teoremi 1.4.9, sledi da je $[A'B'] \overset{\sim}{=} [A_1B']$. Otuda prema teoremi 2.2.4, postoji osna simetrija σ_m, tako da je

$$\sigma_m(A_1) = A' \quad i \quad \sigma_m(B') = B' ,$$

odnosno

(18) $\sigma_m([A_1B']) = [A'B'] ,$

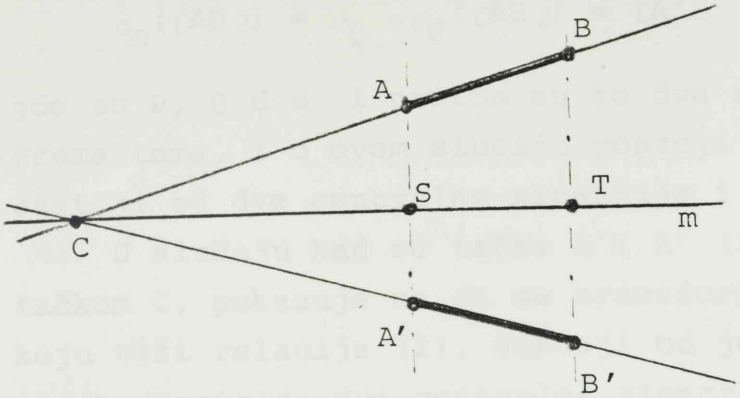
gde je $m = p(B',\Omega)$, a tačka Ω središte izotropne duži $[A'\tilde{A}_1]$. Ako označimo sa $\tilde{a} \cap m = \{\Omega\}$, a sa R suprotnu tačku tački Ω na pravoj m , onda prema teoremi 3.1.9, osnu simetriju σ_m možemo iskazati

(19) $\sigma_m = \sigma_R \circ \sigma_\Omega .$

Na osnovu (17), (18) i (19), sledi da postoji kompozicija centralnih simetrija ϕ iskazana relacijom (13), tako da važi relacija (2).

Neka je uz pretpostavku (3b) tačna i relacija (14b), tj.

važi $A|A'$ i $B|B'$. Iz pretpostavki imamo da je $A — C$ i $A|A'$,



te prema teoremi 1.4.9, sledi da je

(20) $[AC] \cong [A'C]$.

Otuda prema teoremi 2.2.4, postoji osna simetrija σ_m, tako da je

Slika 3.4.

(21a,b) $\sigma_m(A) = A'$ i $\sigma_m(C) = C$,

gde je $m = p(C,S)$, a tačka S središte izotropne duži $[A\tilde{A}']$, tj. važi

(22) $[A\tilde{S}] \cong [S\tilde{A}']$.

Označimo sa $\{T\} = m \cap \tilde{b}$, gde je $\tilde{b}$ izotropni niz tačaka sa osnovom B. Kako je $A|S|A'$ i $B|T|B'$, to prema teoremi 1.4.11, sledi

(23) $[AB] \cong [ST] \cong [A'B']$.

Iz (20) i (23), prema teoremi 1.4.7, sledi da je

duž$[BAC] \cong$ duži$[TSC] \cong$ duži$[B'A'C]$,

a prema aksiomi IV_6, podudarne su i njihove dopune, tj. važi

(24) $[BC] \cong [TC] \cong [B'C]$.

Uočimo jednouglove $\tilde{\measuredangle}ACS$ i $\tilde{\measuredangle}A'CS$ za zajedničkom hipotenuzom $[STC]$. Za ove jednouglove prema aksiomi IV_{10} s obzirom na (22) i (24), sledi da je $[B\tilde{T}] \cong [B'\tilde{T}]$, a što prema definiciji 2.2.1, znači da je

(25) $\sigma_m(B) = B'$.

Iz relacija (21a) i (25), sledi da je

$$\sigma_m([AB]) = \sigma_Q \circ \sigma_P([AB]) = [A'B'] ,$$

gde su P, Q $\in$ m i pritom su to dve suprotne tačke prave m . Prema tome, i u ovom slučaju postoji kompozicija ϕ, koja se sastoji od dve centralne simetrije i pritom važi relacija (2).

U slučaju kad se tačke A i A′ (ili B i B′) poklapaju sa tačkom C, pokazuje se da se transformacija podudarnosti ϕ za koju važi relacija (2), sastoji od jedne centralne simetrije ili kompozicije dve centralne simetrije. Q.E.D.

LEMA 3.1.2. - Ako za dva različita $\angle pq$ i $\angle p'q'$ sa zajedničkim temenom O, važi da je

(1) $$\angle pq \cong \angle p'q' ,$$

onda postoji kompozicija dve centralne simetrije koja prvi ugao preslikava na drugi.

Dokaz. - Neka su zadati uglovi pq i p′q′ sa zajedničkim temenom O, tako da važi (1). Uočimo na pravoj p suprotnu tačku P temenu O. Tačkom P kao osnovom odredjen je jedinstven izotropni niz tačaka $\tilde{p}$. Neka je

$$\tilde{p} \cap q = \{Q\}, \quad \tilde{p} \cap p' = \{P'\}, \quad \tilde{p} \cap q' = \{Q'\} .$$

Sada možemo uočiti jednouglove $\tilde{\Delta}POQ$ i $\tilde{\Delta}P'OQ'$ čije su hipotenuze poluprave, te prema aksiomi IV_8, sledi da je

(2) $$[OP] \cong [OP'] .$$

Prema teoremi 1.4.16 s obzirom na (1) i (2), sledi

(3) $$[P\tilde{Q}] \cong [P'\tilde{Q}'] .$$

Kako su po pretpostavci zadati uglovi različiti to znači da su i izotropne duži $[P\tilde{Q}]$ i $[P'\tilde{Q}']$ dve različite izotropne duži izotropnog niza tačaka $\tilde{p}$ za koje važi jedna od relacija:

(4a,b,c) $$[P\tilde{Q}] \cap [P'\tilde{Q}'] = \emptyset, \quad [P\tilde{Q}] \cap [P'\tilde{Q}'] = [P'\tilde{Q}] ,$$
$$[P\tilde{Q}] \cap [P'\tilde{Q}'] = \{Q\} .$$

Ako pretpostavimo da za uočenje izotropne duži važi relacija (4a), onda su tačke P' i Q' spoljašnje tačke izotropne duži $[P\tilde{Q}]$. Za tačke $P, Q, P', Q' \in \tilde{p}$, važi

(5) $(Q \sim P' \sim Q')(\text{ili } (P' \sim Q' \sim P))$,

ili

(6) $(Q \sim Q' \sim P')(\text{ili } (Q' \sim P' \sim P))$.

Neka je tačna relacija (5). Uočimo središte R izotropne duži $[Q\tilde{P}']$ (ili duži $[Q'\tilde{P}]$) i izaberimo za centar simetrije σ_R. U tom slučaju je

(7) $[Q\tilde{R}] \cong [R\tilde{P}']$.

Kako je $(P \sim Q \sim R)$ i $(R \sim P' \sim Q')$ to na osnovu teoreme 1.4.33, s obzirom na (3) i (7), sledi

(8) $[P\tilde{R}] \cong [R\tilde{Q}']$.

S obzirom da je tačka R suprotna tački O na pravoj $p(O,R)$, onda prema teoremi 2.1.2, sledi $\sigma_R(O)=O$. Na osnovu definicije centralne simetrije 2.1.1, s obzirom na (7) i (8), sledi $\sigma_R(Q)=P'$ i $\sigma_R(P)=Q'$. Dakle, na osnovu teorema 2.1.4 i 2.1.7, sledi

(9) $\sigma_R(\angle pq) = \angle q'p'$.

Ako, zatim, uočimo središte S izotropne duži $[P'\tilde{Q}']$ i izaberemo ga za centar simetrije σ_S, onda je

(10) $\sigma_S(\angle q'p') = \angle p'q'$.

Na osnovu (9) i (10), imamo da je

(11) $\sigma_S \circ \sigma_R(\angle pq) = \angle p'q'$,

gde je $R|S$ a R i S su suprotne tačke temenu O.

U slučaju da važi relacija (6), dovoljno je uočiti centralnu simetriju σ_R, gde je centar simetrije R središte izotropne duži $[Q\tilde{Q}']$ (ili duži $[P'\tilde{P}]$).

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (4b). To znači da je izotropna duž $[P'\tilde{Q}]$ incidentna istovremeno sa izotropnim dužima $[P\tilde{Q}]$ i $[P'\tilde{Q}']$ i pritom važi $(P' \sim Q \sim Q')$. Stoga s obzirom na (3), prema teoremi 1.4.33, sledi

(12) $[P\tilde{P}'] \cong [Q\tilde{Q}']$

Ako sa R označimo središte izotropne duži $[P'\tilde{Q}]$, onda je

(13) $[P'\tilde{R}] \cong [R\tilde{Q}]$.

Na osnovu teoreme 1.4.33, s obzirom na (12) i (13), sledi

(14) $[P\tilde{R}] = [R\tilde{Q}']$.

Centralna simetrija σ_R s obzirom na (13) i (14), preslikava $\angle\ pq$ na $\angle\ q'p'$, tj. važi relacija (9).

Ako, potom, kao u prethodnom slučaju uočimo središte S izotropne duži $[P'Q']$ i centralnu simetriju σ_S, onda važi (10). Na osnovu (9) i (10), sledi (11).

Na kraju razmotrimo slučaj kad se tačke Q i P' poklapaju i pritom važi relacija (4c) (ili je $Q=Q'$ i važi (4c)). Ako u ovom slučaju uočimo centralne simetrije σ_Q i σ_S, gde je tačka S središte izotropne duži $[Q\tilde{Q}']$, onda je

$$\sigma_S \circ \sigma_Q(\angle\ pq) = \angle\ p'q' .$$

U slučaju da važi (4c) i da je $Q=Q'$, dovoljno je uočiti simetriju σ_Q koja ugao pq preslikava na ugao p'q' . Q.E.D.

LEMA 3.1.3. - Ako za dva različita ugla važi da je

(1) $\angle\ pq \cong \angle\ p'q'$,

onda postoji kompozicija najviše tri centralne simetrije, označimo je sa ϕ, tako da je

(2) $\phi(\angle\ pq \cong \angle\ p'q'$.

Dokaz. - Neka su data dva različita ugla $\angle pq$ i $\angle p'q'$, tako da važi (1). Označimo sa

$$\{O\} = p \cap q \quad \text{i} \quad \{O'\} = p' \cap q' ,$$

temena ovih uglova. Ako se temena poklapaju, tj. $O = O'$, onda se ova lema svodi na lemu 3.1.2. Dakle, u ovom slučaju kompozicija ϕ za koju važi relacija (2) sastoji se od dve centralne simetrije (v. relaciju (11), leme 3.1.2).

Pretpostavimo da je $O \neq O'$. Za ove dve tačke imamo da je

(3a,b) ili $O — O'$, ili $O|O'$.

Neka je tačna relacija (3a). Uočimo u tom slučaju jednu od duži sa krajnjim tačkama O i O' i označimo je sa $[OO']$. Neka je tačka P središte te duži. Tačkom P kao centrom zadata je centralna simetrija σ_P, tako da je

$$\sigma_P(O) = O' , \quad \sigma_P(p) = p_1 , \quad \sigma_P(q) = q_1 ,$$

odnosno

(4) $\sigma_P(\angle pq) = \angle p_1q_1$.

Iz (4) prema teoremi 2.1.7, sledi

(5) $\angle pq \cong \angle p_1q_1$.

Na osnovu lema 1.4.5, 6. s obzirom na (1) i (5), sledi

(6) $\angle p_1q_1 \cong \angle p'q'$.

Kako uglovi $\angle p_1q_1$ i $\angle p'q'$ imaju zajedničko teme O', to s obzirom na relaciju (6) prema lemi 3.1.2, postoji kompozicija ψ od dve centralne simetrije, tako da je

(7) $\psi(\angle p_1q_1) = \angle p'q'$.

Ako stavimo da je

$$\psi = \sigma_R \circ \sigma_Q , \quad Q|R ,$$

i pritom su centri Q i R suprotne tačke temenu O', onda s obzirom na relacije (4) i (7), postoji kompozicija

(8) $\phi = \sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P$,

gde je $Q|R$ i $\neg([PQ] \cong [\overline{PQ}])$, tako da važi relacija (2).

U slučaju da je tačna relacija (3b) centar P simetrije σ_P predstavlja središte izotropne duži $[O\tilde{O}']$. Za centre P, Q i R iz relacije (8), onda važi da je $Q|R$ i $[PQ] \cong [\overline{PQ}]$, tj. Q i R su paralelne tačke a P i Q, odnosno P i R su suprotne tačke. Q.E.D.

LEMA 3.1.4. - Ako za dve izotropne duži $[M\tilde{N}]$ i $[M'\tilde{N}']$, važi

(1) $[M\tilde{N}] \cong [M'\tilde{N}']$,

onda postoji kompozicija najviše tri centralne simetrije, označimo je sa ϕ, tako da je

(2) $\phi([M\tilde{N}]) = [M'\tilde{N}']$.

Dokaz. - Neka su date dve razne izotropne duži $[M\tilde{N}]$ i $[M'\tilde{N}']$ tako da važi (1). Neka su, dalje, m i m' proizvoljne prave respektivno incidentne sa tačkama M i M'. Prema aksiomi IV_7 na pravama m i m' postoje suprotne tačke tačkama M i M'. Označimo te tačke sa $O \in m$ i $O' \in m'$. Kako je $M' — O'$, to prema teoremi 1.1.2, sledi da je $N — O$, odnosno $N' — O'$. Prema tome, možemo uočiti jednouglove $\tilde{\Delta}\, MON$ i $\tilde{\Delta}\, M'O'N'$ čije su hipotenuze poluprave, te prema aksiomi IV_8, sledi

(3) $[MO] \cong [M'O']$.

Iz (1) i (3), prema teoremi 1.4.14, sledi da je

(4) $\angle\, MON \cong \angle\, M'O'N'$.

Prema lemi 3.1.3, s obzirom na relaciju (4), postoji kompozicija ϕ od najviše tri centralne simetrije, tako da je

(5) $\phi(\angle MON) = \angle M'O'N'$.

Kako prema teoremi 2.1.6, centralna simetrija, a to znači i kompozicija konačno mnogo centralnih simetrija, paralelne tačke preslikava na paralelne tačke, to s obzirom na relaciju (5), sledi da kompozicija ϕ koja se sastoji od najviše tri centralne simetrije izotropnu duž $[\widetilde{MN}]$ preslikava na izotropnu duž $[M'\widetilde{N}']$, tj. važi relacija (2). Q.E.D.

LEMA 3.1.5. - Ako su B i B' respektivno središnja temena trouglova $\Delta\ ABC$ i $\Delta\ A'B'C'$, a

$$D = pr_{p(A,C)}B\ ,\quad D' = pr_{p(A'C')}B'\ ,$$

i pritom važi

(1a,b,c) $[AC] \stackrel{\sim}{=} [A'C']$, $[AB] \stackrel{\sim}{=} [A'B']$, $[\widetilde{BD}] \stackrel{\sim}{=} [B'\widetilde{D}']$,

onda postoji kompozicija najviše tri centralne simetrije, označimo je sa ψ, tako da je

(2) $\psi(\Delta\ ABC) = \Delta\ A'B'C'$.

Dokaz. - Neka su dati trouglovi $\Delta\ ABC$ i $\Delta\ A'B'C'$ tako da važi (1a,b,c). Kako su B i B' respektivno središnja temena ovih trouglova, to su prema definiciji 1.2.17 njihove projekcije D i D' na osnove $[AC]$ i $[A'C']$ respektivno incidentne sa tim osnovama, tj.

(3a,b) $D \in\ ]AC[$, $D' \in\ ]A'C'[$.

Na osnovu pretpostavke (1a), prema lemi 3.1.1, postoji kompozicija ϕ koja se sastoji od najviše tri centralne simetrije, takve da je

(4) $\phi([AC]) = [A'C']$.

Iz pretpostavke da je A —— B i $B|D$, odnosno A' —— B' i $B'|D'$, prema teoremi 1.4.9, sledi

(5a,b) $[AB] \overset{\sim}{=} [AD] \wedge [A'B'] \overset{\sim}{=} [A'D']$.

S obzirom na pretpostavku (1b), iz (5a,b), dobijamo da je

(6) $[AD] \overset{\sim}{=} [A'D']$.

Kako je prema teoremi 2.1.4. centralna simetrija, te prema tome i kompozicija centralnih simetrija kolineacija, a prema teoremi 2.1.3. - duž preslikava na podudarnu duž, to s obzirom na (3a,b), (4) i (6), imamo da je $\phi(D) = D'$. Dalje, ako označimo da je $\phi(B) = B_2$, onda imamo

(7a,b) $\phi([AB]) = [A'B_2]$ i $\phi([B\tilde{D}]) = [B_2\tilde{D}']$,

gde je

(8a,b) $A' — B_2$ i $B_2 | D'$.

Iz (7a) prema teoremi 2.1.3, sledi

(9) $[AB] \overset{\sim}{=} [A'B_2]$,

a iz (7b), prema teoremi 2.1.5, imamo

(10) $[B\tilde{D}] \overset{\sim}{=} [B_2\tilde{D}']$.

Iz pretpostavke (1b) i relacije (9), odnosno iz (1c) i (10), prema aksiomi IV_3, sledi

(11a,b) $[A'B'] \overset{\sim}{=} [A'B_2] \wedge [B'\tilde{D}'] \overset{\sim}{=} [B_2\tilde{D}']$.

Ako sa $\tilde{d}'$ označimo izotropni niz tačaka sa osnovom D', tada s obzirom na pretpostavku da je $D'|B'$ i relaciju (8b), prema teoremi 1.1.1, sledi da je $B'|B_2$. Dakle, imamo da je $B', B_2, D' \in \tilde{d}'$. Tačke B' i B_2 su incidentne sa istim izotropnim polunizom tačaka čija je početna tačka D', tj. važi

(12) $(B' \sim B_2 \sim D')$ (ili $(B_2 \sim B' \sim D')$) ,

ili je

(13) $(B' \sim D' \sim B_2)$.

Ako je tačna relacija (12), onda na osnovu aksiome IV_2 s obzirom na (11b), sledi da se tačke B_2 i B' poklapaju, tj. $B_2=B'$. Prema tome, na osnovu (4) i (7a,b), sledi da je relacija (2) tačna ako je $\psi=\phi$, pri čemu kako je napred rečeno kompozicija ϕ sastoji se od najviše tri centralne simetrije.

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (13). Kako je $B'|B_2$ to s obzirom na (11a,b), prema teoremi 2.2.4, postoji osna simetrija sa osom $p(A',D')$, takva da je

(14) $\sigma_{p(A',D')}(B_2) = B'$.

Ako na pravoj $p(A',D')$ tačkom N označimo suprotnu tačku tački A', onda prema teoremi 3.1.9, osnu simetriju u relaciji (14) možemo iskazati kao kompoziciju centralnih simetrija sa centrima A' i N, onda iz (14) imamo

(15) $\sigma_N \circ \sigma_{A'}(B_2) = B'$.

Svaka tačka prave $p(A',D')$ invarijantna je u ovoj kompoziciji, te je

(16a,b) $\sigma_N \circ \sigma_{A'}(A') = A'$ i $\sigma_N \circ \sigma_{A'}(C') = C'$.

Označimo kompoziciju ϕ iz relacije (4), s obzirom na relacije (12) i (13) leme 3.1.1. sa:

(17) $\phi = \sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_m \circ \sigma_P$,

gde je $P|Q$ a Q i R su suprotne tačke incidentne sa pravom m, koja je incidentna sa tačkom A'. Ako tačku R izaberemo tako da je $R=A'$, a sa M označimo suprotnu tačku tački A' na pravoj m , onda prema teoremi 3.1.9, s obzirom na (17), imamo da je

(18) $\phi = \sigma_{A'} \circ \sigma_M \circ \sigma_P$.

Konačno, iz (4), (7a,b), (15), (16a,b) i (18), sledi

$$\sigma_N \circ \sigma_{A'} \circ \sigma_{A'} \circ \sigma_M \circ \sigma_P(\Delta\ ABC) = \Delta\ A'B'C' ,$$

a s obzirom da je $\sigma_{A'} \circ \sigma_{A'} = I$, jer je centralna simetrija involucija, to imamo da i u ovom slučaju važi relacija (2), a da se kompozicija ψ sastoji od najviše tri centralne simetrije, tj.

$$(19) \qquad \psi = \sigma_N \circ \sigma_M \circ \sigma_P \ ,$$

gde je $M|N$, P — M , P — N i $\rceil(PM \overset{\sim}{=} \overline{PM})$ ako je A — A' , a $PM \overset{\sim}{=} \overline{PM}$ ako je $A|A'$. Q.E.D.

Na osnovu dokaza leme 1.3.5. može da se iskaže:

LEMA 3.1.6. - Ako za jednouglove $\tilde{\Delta}\ BAD$ i $\tilde{\Delta}\ B'A'D'$, važi da je

$$[AB] \overset{\sim}{=} [A'B'] \wedge [\tilde{BD}] \overset{\sim}{=} [B'\tilde{D}'],$$

onda postoji kompozicija najviše tri centralne simetrije, označimo je sa ϕ, tako da je

$$\phi(\tilde{\Delta}\ BAD) = \tilde{\Delta}\ B'A'D' \ .$$

Važi sledeća važna teorema:

TEOREMA 3.1.11. - Svaka transformacija podudarnosti f EP ravni je kompozicija konačnog broja centralnih simetrija.

Dokaz. - Neka je u EP ravni α uočena proizvoljna transformacija podudarnosti $f : \alpha \to \alpha$ i proizvoljan trougao $\Delta\ ABC$ sa središnjim temenom B. Označimo sa tačkom D projekciju tačke B na osnovu AC. Kako je A — C, A — B i B | D , to prema definiciji 3.1.1, imamo

$$(1a,b,c) \quad [f(A)f(C)]\overset{\sim}{=}[AC],[f(A)f(B)]\overset{\sim}{=}[AB],[f(B)\tilde{f}(D)]\overset{\sim}{=}[\tilde{BD}].$$

Za trouglove $\Delta f(A)f(B)f(C)$ i ΔABC iz (1a,b,c), prema lemi 3.1.5, postoji kompozicija (proizvod) centralnih simetrija, označena je sa ϕ, tako da je

$$\phi(\Delta f(A)f(B)f(C)) = \Delta\ ABC \ ,$$

tj. takva da je

(2a,b,c) $\phi\circ f(A)=A,\quad \phi\circ f(B)=B,\quad \phi\circ f(C)=C,$

a kako je tačka $D\in\,]AC[$, to je i

(3) $\phi\circ f(D) = D$.

Dokažimo da je

$$(\forall M\in\alpha)(\phi\circ f(M) = M)\ .$$

Pretpostavimo u tom cilju, prvo, da

(4a,b,c) $M\notin p(A,C),\quad M\notin p(A,B),\quad M\notin p(B,C)$

i

(5a,b,c) $M\notin\tilde{a},\quad M\notin\tilde{b},\quad M\notin\tilde{c},$

gde su $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ i $\tilde{c}$ izotropni nizovi tačaka respektivno sa osnovama A, B i C.

Na osnovu pretpostavki (4a,b,c) i (5a,b,c) prema definiciji 1.2.14, možemo uočiti trotemenike ACM, ABM i BCM. Svaki od ovih trotemenika odredjuje po tri trougla sa temenima ovih trotemenika. Na osnovu teoreme 1.2.9 i definicije 1.2.17 svaki trougao ima samo jedno središnje teme.

Uočimo, recimo, trotemenik ACM i trougao koji je odredjen ovim trotemenikom čije je središnje teme tačka M i označimo ga sa Δ AMC. Neka je $\tilde{m}$ izotropni niz tačaka sa osnovom M. Ako označimo

$$\tilde{m}\cap p(A,C) = \{M_1\}\ ,$$

onda je tačka M_1 incidentna sa osnovom $[AC]$ Δ AMC. Ako, dalje, označimo

$$\phi\circ f(\Delta\ AMC) = \Delta\ \phi\circ f(A)\phi\circ f(M)\phi\circ f(C)$$

i

$$\phi\circ f(M_1) = M_1\ ,$$

onda na osnovu (2a,c), imamo da je

$$\phi \circ f(\Delta\ AMC) = \Delta\ A\ \phi \circ f(M) C\ ,$$

te je

$$(6a,b) \qquad [A\ \phi \circ f(M)] \overset{\sim}{=} [AM] \wedge [\phi \circ \tilde{f}(M) M_1] \overset{\sim}{=} [M\tilde{M}_1] .$$

Iz (6b), sledi da su tačke $\phi \circ f(M)$, M i M_1 incidentne sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{m}$ i pritom važi

$$(7) \quad \text{ili } (\phi \circ f(M) \sim M \sim M_1)(M \sim \phi \circ f(M) \sim M_1) ,$$

$$(8) \qquad \text{ili } (\phi \circ f(M) \sim M_1 \sim M) .$$

Prema aksiomi IV_2 s obzirom na (7), odnosno prema teoremi 2.2.4, s obzirom na (6a) i (8), sledi

$$(9a,b) \qquad \text{ili } \phi \circ f(M)=M, \quad \text{ili } \sigma_{p(A,C)}(\phi \circ f(M)) = M ,$$

gde je $p(A,C) = p(A,M_1)$.

Uočimo, zatim, trotemenik ABM i trougao koji je određen ovim trotemenikom čije je središnje teme tačka M. Označimo tako uočen trougao Δ AMB, a

$$\tilde{m} \cap p(A,B) = \{M_2\} .$$

Tačka M_2 je incidentna sa osnovom [AB] ΔAMB. Neka je

$$\phi \circ f(\Delta\ AMB) = \Delta \phi \circ f(A) \phi \circ f(M) \phi \circ f(B)$$

i

$$\phi \circ f(M_2) = M_2 .$$

Na osnovu (2a,b), imamo da je

$$\phi \circ f(\Delta\ AMB) = \Delta\ A \phi \circ f(M) B\ ,$$

otuda odmah imamo

$$(10a,b) \qquad [A\phi \circ f(M)] \overset{\sim}{=} [AM] \wedge [\phi \circ \tilde{f}(M) M_2] \overset{\sim}{=} [M\tilde{M}_2] .$$

Iz (10b), sledi da su tačke $\phi \circ f(M)$, M i M_2 incidentne sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{m}$. Na analogan način kao u slučaju

Δ AMC, dobijamo da je

(11a,b) ili $\phi \circ f(M)=M$, ili $\sigma_{p(A,B)}(\phi \circ f(M)) = M$,

gde je $p(A,B)=p(A,M_2)$ osa osne simetrije $\sigma_{p(A,B)}$. Na osnovu činjenice da su prave p(A,C) i p(A,B) incidentne sa trotemenikom ABC, to je $p(A,C) \neq p(A,B)$, i pritom imajući u obzir pretpostavke (4a,b), na osnovu definicije osne simetrije, zaključujemo da ne može biti (9b) i (11b), tj. mora biti

(12) $$\phi \circ f(M) = M .$$

Ako neka od pretpostavki (4a,b,c) i (5a,b,c), nije ispunjena pri dokazivanju polazimo, umesto od Δ ABC, od novog trougla Δ PQR takvog da

$$M \notin p(P,Q), \quad M \notin p(P,R), \quad M \notin p(Q,R),$$

$$M \notin \tilde{p}, \quad M \notin \tilde{q}, \quad M \notin \tilde{r},$$

gde su $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ i $\tilde{r}$ respektivno izotropni nizovi tačaka sa osnovama P, Q i R.

Prema tome, relacija (12) je tačna za svaku tačku M EP ravni α, tj.

$$\phi \circ f = I \Longrightarrow f = \phi^{-1} ,$$

gde je I identična transformacija EP ravni. Q.E.D.

Na osnovu dokaza teoreme 3.1.11, sledi

TEOREMA 3.1.12. - Ako su tačke A, B i C temena trotemenika EP ravni α i trougao Δ ABC jedan od trouglova odredjen ovim trotemenikom i pritom

$$pr_{p(A,C)}B = D \in]AC[,$$

a tačke A′, B′ i C′ temena drugog trotemenika te iste ravni i Δ A′B′C′ jedan od trouglova odredjen ovim trotemenikom gde je

$$pr_{p(A',C')}B' = D' \in]A'C'[,$$

tako da je

$$[AC] \overset{\sim}{=} [A'C'],\ [AB] \overset{\sim}{=} [A'B'],\ [BD] \overset{\sim}{=} [B'D'],$$

tada postoji jedinstvena transformacija podudarnosti $f : \alpha \to \alpha$, takva da je

$$f(A) = A',\quad f(B) = B',\quad f(C) = C' .$$

POSLEDICA TEOREME 3.1.12. - Ako su temena trotemenika EP ravni α invarijantne tačke transformacije podudarnosti $f:\alpha\to\alpha$, onda je f identično preslikavanje EP ravni.

Do tvrdjenja teoreme 3.1.11, dolazimo i u slučaju ako u dokazu ove teoreme umesto Δ ABC koristimo jednougao $\tilde{\Delta}$ BAD, tj. ako se teme C ovog trougla poklapa sa tačkom $D = pr_{p(A,C)}B$ i primenimo lemu 3.1.6. Na osnovu tog dokaza sledi:

TEOREMA 3.1.13. - Ako za jednouglove $\tilde{\Delta}$ BAD i $\tilde{\Delta}$ B'A'D' EP ravni α važi da je

$$[AB] \overset{\sim}{=} [A'B'] \wedge [BD] \overset{\sim}{=} [B'D'] ,$$

onda postoji jedinstvena transformacija podudarnosti $f:\alpha\to\alpha$, tako da je

$$f(A)=A',\quad f(B)=B' ,\quad f(D)=D' .$$

Takodje, na osnovu teoreme 2.1.4, 2.1.6. i 3.1.11, možemo iskazati teoremu:

TEOREMA 3.1.14. - Transformacija podudarnosti EP ravni kolinearne i paralelne tačke preslikava respektivno na kolinearne i paralelne tačke, tj. pravu i izotropni niz tačaka preslikava na objekte iste vrste.

Dalje, na osnovu teoreme 2.1.7, i 3.1.11, može se iskazati teorema:

TEOREMA 3.1.15. - Transformacija podudarnosti EP ravni ugao preslikava na podudaran ugao.

Teoremom 3.1.11, pokazali smo da se svaka transformacija podudarnosti EP ravni može da iskaže kao kompozicija konačno mnogo centralnih simetrija. Narednom teoremom odredićemo broj tih centralnih simetrija u zavisnosti od toga da li transformacija podudarnosti poseduje najviše tri, dve, jednu ili ni jednu invarijantnu linearno nezavisnu tačku.

TEOREMA 3.1.16. - Svaka transformacija podudarnosti EP ravni može da se prikaže kao kompozicija najviše tri centralne simetrije.

Dokaz. - Kako smo napred rekli prema broju invarijantnih linearno nezavisnih tačaka transformacije podudarnosti f EP ravni α razlikujemo sledeće slučajeve:

1° Transformacija podudarnosti f poseduje najviše tri invarijantne linearno nezavisne tačke. Te tačke su temena trotemenika EP ravni. Označimo ga sa PQR. Prema posledici teoreme 3.1.12, takva transformacija podudarnosti predstavlja identično preslikavanje EP ravni, tj. $f \equiv I$. Kako je bilo koja centralna simetrija σ_M involucija, to možemo staviti da je

$$f = I = \sigma_M \circ \sigma_M ,$$

tj. transformacija podudarnosti f može da se prikaže kao kvadrat centralne simetrije σ_M, gde je M proizvoljna tačka EP ravni.

2° Pretpostavimo da je transformacija podudarnosti f takva da poseduje najviše dve invarijantne linearno nezavisne tačke, obeležimo ih sa P i Q. Za tačke P i Q važi: ili je $P — Q$, ili je $P \mid Q$.

U slučaju da su P i Q kolinearne tačke onda imamo

$$\text{(1a,b,c)} \qquad P — Q\ , \quad f(P) = P\ , \quad f(Q) = Q\ .$$

Tačke P i Q na pravoj $p(P,Q)$ obrazuju duž $[PQ]$ i njenu dopunu $[\overline{PQ}]$.

Pretpostavimo da važi $\neg([PQ] \cong [\overline{PQ}])$, tj. da tačke P i Q nisu suprotne tačke na pravoj $p(P,Q)$. Neka je tačka M središte duži $[PQ]$. Ako sa N označimo suprotnu tačku tački M na pravoj $p(P,Q)$, onda je tačka N središte dopune duži $[PQ]$, tj. središte duži $[\overline{PQ}]$. Zaista, kako je $[MN] \cong [\overline{MN}]$ i $P \in\ ]MN[$, prema aksiomi IV_5 i teoremi 1.4.3, postoji jedinstvena tačka $Q \in\ ]\overline{MN}[$, takva da je

$$[PM] \cong [MQ] \quad i \quad [PN] \cong [NQ] \ ,$$

i pritom

$$[PM],\ [PN] \subset [MN] \quad a \quad [MQ],\ [NQ] \subset [\overline{MN}] \ ,$$

tj. tačka N je središte duži $[\overline{PQ}]$.

Kako transformacija podudarnosti f nema invarijantnih tačaka van prave $p(P,Q)$, to imamo da je $f \neq I$, te postoji tačka $X \in P$ ravni tako da $X \notin p(P,Q)$, $X — P$, $X — Q$ i

(2a,b) $\qquad f(X) = X' \ , \quad X \neq X' \ .$

Na osnovu (1a,b) i (2a), s obzirom da je f transformacija podudarnosti, imamo

(3a,b) $\qquad [PX] \cong [PX'],\ [QX] \cong [QX'] \ ,$

i

(4) $\qquad \angle\ p(P,X)p(P,Q) \cong \angle\ p(P,X')p(P,Q) \ .$

Označimo sa P_o i P'_o suprotne tačke tački P respektivno na pravama $p(P,X)$ i $p(P,X')$. Dakle, $[PP_o] \cong [PP'_o]$, te možemo uočiti jednougao $\tilde{\Delta}\ P_oPP'_o$. U slučaju da je $X = P_o$, sledi da je $X' = P'_o$, te je $X \mid X'$. Ako je tačka $X \neq P_o$, onda prema aksiomi IV_9 s obzirom na relaciju (3a), imamo da je takodje $X \mid X'$. Označimo sa $\tilde{x}$ izotropni niz tačaka sa osnovom X i $p(P,Q) \cap \tilde{x} = \{R\}$. Iz (3a) i (4), prema teoremi 1.4.16, sledi da je

(5) $\qquad [\tilde{XR}] \cong [\tilde{X'R}] \ .$

Označimo sa $\tilde{m}$ i $\tilde{n}$ izotropne nizove tačaka respektivno sa osnovama M i N. Ako je tačka $X \in \tilde{m}$ (ili $X \in \tilde{n}$), onda i tačka $X' \in \tilde{m}$ ($X' \in \tilde{n}$), a tačka $R = M$ ($R = N$), te je prema (5):

$$[XM] \tilde{\cong} [X'M] \quad ([XN] \tilde{\cong} [X'N]).$$

Suprotnim tačkama M i N na pravoj p(P,Q) odredjene su respektivno centralne simetrije σ_M i σ_N. Za kompoziciju preslikavanja $\sigma_M \circ \sigma_M \circ f$, s obzirom na (1b,c), (2a) i teoreme 3.1.8, sledi

$$\sigma_N \circ \sigma_M \circ f(P)=P \ , \quad \sigma_N \circ \sigma_M \circ f(Q)=Q \ , \quad \sigma_N \circ \sigma_M \circ f(X)=X \ .$$

Dakle, kompozicija $\sigma_N \circ \sigma_M \circ f$ ima invarijantni trotemenik PQX, te ova kompozicija, prema posledici teoreme 3.1.12, predstavlja identično preslikavanje EP ravni, tj. važi

(6) $$\sigma_N \circ \sigma_M \circ f = I \implies f = \sigma_M \circ \sigma_N \ .$$

Kompozicija $\sigma_M \circ \sigma_N$, prema teoremi 3.1.8, predstavlja osnu simetriju, tj.

(7) $$\sigma_M \circ \sigma_N = \sigma_{p(M,N)} = \sigma_{p(P,Q)} .$$

Prema tome, iz (6) i (7), sledi da je

(6') $$f = \sigma_M \circ \sigma_N = \sigma_{p(P,Q)} \ .$$

Ako pretpostavimo, zatim, da za tačke P i Q važi (1a,b, c), i pritom su one istovremeno dve suprotne tačke prave p(P,Q), onda se ove tačke mogu uzeti za centre centralnih simetrija σ_P i σ_Q. Kako transformacija podudarnosti f nema invarijantnih tačaka van prave p(P,Q), to kao u prethodnom slučaju postoji tačka X EP ravni, tako da $X \notin p(P,Q)$, X — P, X — Q i pritom važi (2a,b). Na potpuno isti način kao u prethodnom slučaju proverava se da kompozicija $\sigma_P \circ \sigma_Q \circ f$ temena trotemenika PQX ostavlja invarijanta, to je ova kompozicija identično preslikavanje EP ravni, tj. važi

(8) $$\sigma_P \circ \sigma_Q \circ f = I \implies f = \sigma_Q \circ \sigma_P \ .$$

Kako su po pretpostavci tačke P i Q suprotne tačke prave p(P,Q), to prema teoremi 3.1.8, iz (8), sledi

(8′) $\qquad f = \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_{p(P,Q)}$.

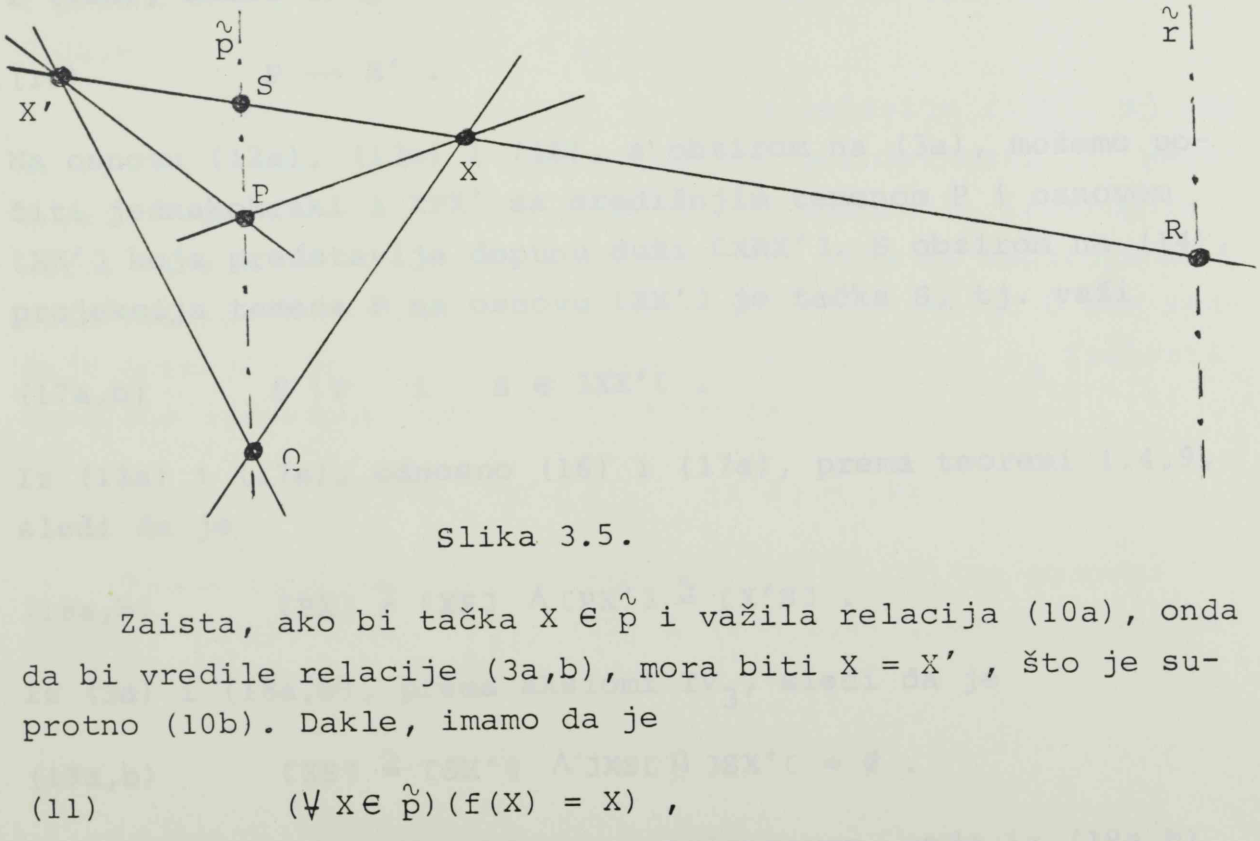
Razmotrimo, zatim, slučaj kad su invarijantne tačke P i Q transformacije podudarnosti f paralelne tačke, tj. važi

(9a,b,c) $\qquad P \mid Q \ , \quad f(P) = P \ , \quad f(Q) = Q$.

Neka je $\tilde{p}$ izotropni niz tačaka sa osnovom P. S obzirom da transformacija podudarnosti f nije identična transformacija EP ravni, to znači postoji tačka X te ravni tako da je

(10a,b) $\qquad f(X) = X' \quad i \quad X' \neq X$.

Kako je f transformacija podudarnosti to s obzirom na (9b,c) i (10a), važi (3a,b). Tačka X za koju važi (10a,b) nije incidentna sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}$.



Slika 3.5.

Zaista, ako bi tačka $X \in \tilde{p}$ i važila relacija (10a), onda da bi vredile relacije (3a,b), mora biti $X = X'$, što je suprotno (10b). Dakle, imamo da je

(11) $\qquad (\forall X \in \tilde{p})(f(X) = X)$,

a ako $X \notin \tilde{p}$, onda važi (10a,b) i pritom je

(12a,b) $\qquad X — P \quad i \quad X — Q$.

Za tačke X i X' iz relacije (10a), važi

(13a,b) ili je $X — X'$, ili je $X \mid X'$.

Pretpostavimo da važi (13a). Dakle, postoji prava, označimo je sa $p(X,X')$, incidentna sa tačkama X i X' . Označimo

(14) $p(X,X') \cap \tilde{p} = \{S\}$,

a sa R tačku incidentnu sa pravom $p(X,X')$, suprotnu tački S, tj. važi

(15) $[SR] \cong [\overline{SR}]$.

Označimo, dalje, sa $\tilde{r}$ izotropni niz tačaka sa osnovom R.

Kako prema teoremi 3.1.14, transformacija podudarnosti f kolinearne tačke preslikava na kolinearne to iz (9b), (10a) i (12a), sledi da je

(16) $P — X'$.

Na osnovu (12a), (13a) i (16), s obzirom na (3a), možemo uočiti jednakokraki $\Delta\, XPX'$ sa središnjim temenom P i osnovom $[XX']$ koja predstavlja dopunu duži $[XRX']$. S obzirom na (14), projekcija temena P na osnovu $[XX']$ je tačka S, tj. važi

(17a,b) $S \mid P$ i $S \in\,]XX'[$.

Iz (12a) i (17a), odnosno (16) i (17a), prema teoremi 1.4.9, sledi da je

(18a,b) $[PX] \cong [XS] \wedge [PX'] \cong [X'S]$.

Iz (3a) i (18a,b), prema aksiomi IV_3, sledi da je

(19a,b) $[XS] \cong [SX'] \wedge\,]XS[\, \cap\,]SX'[\, = \emptyset$.

Ako se duž $[XS]$ poklapa sa polupravom, onda iz (19a,b) sledi da se tačke X, X' i R poklapaju, tj. $X=X'=R$. No ako je duž $[XS]$ incidentna sa polupravom $[SR]$, onda je $X \in\,]SR[$, a s obzirom na (15), to prema aksiomi IV_5, postoji jedinstvena tačka X' $\in\ ]\overline{SR}[$, takva da s obzirom na (19a,b), imamo i

(20a,b) $\quad [XR] \overset{\sim}{=} [RX'] \ , \quad]XR[\cap]RX'[= \emptyset \ ,$

tj. tačka R je središte duži $[\overline{XX'}]$ koja predstavlja dopunu osnove $[XX']$ uočenog jednakokrakog trougla.

Kako je tačkom R, kao centrom, zadata centralna simetrija σ_R, to na osnovu (20a,b), važi

(21) $\quad \sigma_R(X') = X \ .$

Prema teoremi 2.1.2, svaka tačka izotropnog niza $\tilde{p}$ je invarijantna tačka centralne simetrije σ_R, tj. važi

(22) $\quad (\forall X \in \tilde{p})(\sigma_R(X) = X) \ .$

Za svaku drugu tačku X EP ravni kolinearnu sa tačkom R i pritom $X \notin \tilde{p}$, pokazuje se da s obzirom na (3a,b), važi (10a,b) i (21), gde je $X' \in p(X,R)$.

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (13b), tj. da su odgovarajuće tačke u transformaciji podudarnosti f paralelne, odnosno to su tačke koje su incidentne sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{r}$ i pritom važi (10a,b). Tada na izotropnom nizu tačaka $\tilde{r}$ možemo uočiti izotropnu duž $[\widetilde{XX'}]$. U tom slučaju dovoljno je za centar R centralne simetrije σ_R izabrati središte izotropne duži $[\widetilde{XX'}]$, tako da je

(23a,b,c) $\quad \sigma_R(X')=X, \quad X' \mid X \ , \quad [\widetilde{X'R}] \overset{\sim}{=} [\widetilde{RX}] \ .$

Prema tome, ako uočimo kompoziciju $\sigma_R \circ f$, na osnovu: (9b,c), (10a), (11), (21), (22) i (23a,b,c), imamo da za svaku tačku X EP ravni važi $\sigma_R \circ f(X)=X$, tj.

(24) $\quad \sigma_R \circ f = I \Longrightarrow f = \sigma_R \ .$

Konačno, na osnovu svega izloženog u slučaju 2° možemo zaključiti: ako je

$$f(P) = P \ , \quad f(Q) = Q \quad \text{i} \quad P — Q \ ,$$

onda se na osnovu (6') i (8'), transformacija podudarnosti f može iskazati kao kompozicija dve centralne simetrije $\sigma_N \circ \sigma_M$, gde su $M,N \in p(P,Q)$ i pritom predstavljaju suprotne tačke, odnosno kao osna simetrija sa osom $p(P,Q)$, tj. važi

(25) $$f = \sigma_N \circ \sigma_M = \sigma_{p(P,Q)} .$$

Medjutim, ako je

$$f(P) = P, \quad f(Q) = Q \quad \text{i} \quad P \mid Q ,$$

onda se, prema (24), transformacija podudarnosti f može da iskaže kao centralna simetrija σ_R, tj. važi

(26) $$f = \sigma_R ,$$

gde je centar R suprotna tačka proizvoljne tačke $S \in \tilde{p}$, a $\tilde{p}$ izotropni niz tačaka incidentan sa tačkama P i Q.

3° Pretpostavimo da transformacija podudarnosti f EP ravni poseduje samo jednu invarijantnu tačku. Ako tu tačku označimo sa P, onda je

(27) $$f(P) = P .$$

Kako transformacija podudarnosti f ima samo jednu invarijantnu tačku, to je ona različita od identične transformacije EP ravni. Prema tome, postoji tačka X EP ravni različita od tačke P, tj. $X \neq P$, tako da je

(28a,b) $$f(X) = X' \quad \text{i} \quad X \neq X' .$$

Za tačke X i P u EP ravni, važi

(29a,b) $$\text{ili je } X — P, \quad \text{ili je } X \mid P .$$

Pretpostavimo da je tačna relacija (29a). Za kolinearne tačke X i P, prema teoremi 3.1.14, važi da su i njihove slike $f(X)=X'$ i $f(P)=P$ kolinearne, tj. $X' — P$ i pritom važi

(30) $$[PX] \cong [PX'] .$$

Za tačke X i $X' = f(X)$, važi

(31a,b) ili je $X — X'$, ili je $X \mid X'$.

Pretpostavimo da je tačna relacija (31a). Za invarijantnu tačku P i pravu $p(X,X')$, važi

(32a,b) ili $P \notin p(X,X')$, ili $P \in p(X,X')$.

Razmotrimo slučaj kad su tačne pretpostavke (29a), (31a) i (32a). Za tri razne tačke EP ravni P, X i X' onda važi da je $X — P$, $X — X'$ i $P — X'$, tj. prema definiciji 1.2.14, ovim tačkama je odredjen trotemenik PXX'. Ovaj trotemenik odredjuje tri trougla: $\Delta\, XPX'$, $\Delta\, X'XP$ i $\Delta\, PX'X$. Na osnovu relacije (30) bočne strane [PX] i [PX'] $\Delta\, XPX'$ su podudarne, te je on prema definiciji 1.4.8. jednakokraki trougao EP ravni. Označimo sa $\tilde{p}$ izotropni niz tačaka sa osnovom P i

$$\tilde{p} \cap p(X,X') = \{S\}.$$

Dakle, tačka S je središte osnove [XX'] $\Delta\, XPX'$. Uočimo na pravoj $p(X,X')$ suprotnu tačku tački S. Tačka R je središte duži $[\overline{XX'}]$ koja predstavlja dopunu duži [XX'] (v. 2^o, relacije (20a,b)). Prema teoremi 2.1.8, postoji centralna simetrija σ_R, tako da je

(33a,b) $\sigma_R(P) = P$, $\sigma_R(X') = X$.

Iz relacija (27), (28a) i (33a,b) zaključujemo da kompozicija $\sigma_R \circ f$ poseduje dve različite invarijantne tačke P i X, tj. važi

(34a,b) $\sigma_R \circ f(P) = P$, $\sigma_R \circ f(X) = X$.

Ako bi kompozicija $\sigma_R \circ f$ imala invarijantnu tačku van prave $p(P,X)$, koja je kolinearna sa tačkama P i X, to bi transformacija $\sigma_R \circ f$ bila identična transformacija, tj.

$$\sigma_R \circ f = I \Longrightarrow f = \sigma_R,$$

a to prema definiciji 2.1.1, znači da transformacija f sem tačke P ima još i invarijantnu tačku R kao i svaku tačku izotropnog niza $\tilde{p}$ (v. teoremu 2.1.2), što je suprotno pretpostavci da transformacija f ima samo jednu invarijantnu tačku. Otuda s obzirom na (34a,b), prema prethodno razmatranom slučaju 2^o (v. relaciju (25)), sledi da je

$$(35) \qquad \sigma_R \circ f = \sigma_{p(P,X)} \, .$$

Osnu simetriju $\sigma_{p(P,X)}$, prema teoremi 3.1.9, možemo iskazati

$$(36) \qquad \sigma_{p(P,X)} = \sigma_Q \circ \sigma_P \, ,$$

gde su P i Q suprotne tačke na pravoj p(P,X). Kako su [RS] i [PQ] poluprave, to su one prema aksiomi IV_8 podudarne. S obzirom da je P | S , X —— P i X —— S, to možemo uočiti jednougao $\tilde{\Delta}$ PXS tako da su poluprave [RS] i [PQ] incidentne sa njegovim hipotenuzama, onda prema teoremi 1.4.12, sledi da je Q | R. Na osnovu teoreme 1.4.9, s obzirom da je P —— Q i Q | R , sledi da je [PQ] $\tilde{=}$ [PR], tj. duž [PR] predstavlja polupravu EP ravni. Otuda iz (35) i (36), imamo da je

$$(37) \quad \sigma_R \circ f = \sigma_Q \circ \sigma_P \implies f = \sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = \sigma_R \circ \sigma_{p(P,X)} \, ,$$

gde je P,Q ∈ p(P,X), [PQ] $\tilde{=}$ $[\overline{PQ}]$ i Q | R , tj. centri P, Q i R centralnih simetrija iz (37) predstavljaju temena jednougla $\tilde{\Delta}$ QPR čije hipotenuze predstavljaju poluprave.

Ako pretpostavimo, zatim, da su tačne relacije (29a), (31a) i (32b), onda osim relacije (30) važi i]XP[∩]PX'[= ∅. Stoga umesto centralne simetrije σ_R u relaciji (37), možemo staviti σ_P, pa imamo

$$(37') \qquad f = \sigma_P \circ \sigma_Q \circ \sigma_P = (\sigma_P \circ \sigma_P) \circ \sigma_Q = \sigma_Q \, .$$

Medjutim, transformacija podudarnosti f iskazana relacijom (37'), osim tačke P ima i njoj suprotnu tačku Q kao i svaku tačku izotropnog niza tačaka $\tilde{p}$, što je suprotno pretpostavci 3^o da f ima samo jednu invarijantnu tačku P.

Dakle, pretpostavke (29a), (31a) i (32b) dovode do kontradikcije, a to znači da tačku X EP ravni koja zadovoljava uslove (28a,b), ne možemo izabrati tako da važe ove pretpostavke.

Posmatrajmo, zatim, slučaj kad su tačne pretpostavke (29a) i (31b) i da pritom važi relacija (30). Iz pretpostavke (31b), sledi da možemo uočiti izotropni niz tačaka $\tilde{x}$ sa osnovom X i na njemu izotropnu duž $[X\tilde{X}']$. Označimo sa tačkom S središte ove duži, te je

$$(38) \qquad [X\tilde{S}] \cong [\tilde{S}X'] ,$$

a sa R suprotnu tačku tački S na pravoj p(P,S). Na osnovu teoreme 2.1.1, tačkama R i S zadate su centralne simetrije σ_R i σ_S. Uočimo kompoziciju preslikavanja $\sigma_S \circ \sigma_R \circ f$.

Kako su R i S suprotne tačke na pravoj p(P,S), to prema teoremi 3.1.8, važi da je

$$\sigma_S \circ \sigma_R = \sigma_{p(R,S)} ,$$

to uočenu kompoziciju možemo označiti

$$(39) \qquad \sigma_S \circ \sigma_R \circ f = \sigma_{p(R,S)} \circ f .$$

Na osnovu relacija (27), (28a) i (38), sledi da kompozicija $\sigma_S \circ \sigma_R \circ f$ poseduje invarijantne tačke P i X, tj. važi

$$(40a,b) \qquad \sigma_S \circ \sigma_R \circ f(P) = P , \quad \sigma_S \circ \sigma_R \circ f(X) = X .$$

Ako bi kompozicija $\sigma_S \circ \sigma_R \circ f$ sem tačaka P i X prave p(P,X) imala invarijantnu tačku van te prave kolinearnu sa tačkama P i X, onda bi ta kompozicija bila identično preslikavanje EP ravni, tj. važi

$$\sigma_S \circ \sigma_R \circ f = I \Longrightarrow f = \sigma_S \circ \sigma_R = \sigma_{p(R,S)} ,$$

a to zapravo znači da transformacija podudarnosti f ima sem tačke P i drugih invarijantnih tačaka (svaka tačka prave

$p(R,S))$, što je suprotno pretpostavci da f ima samo jednu invarijantnu tačku. Dakle, za uočenu kompoziciju postoje samo dve invarijantne tačke P i X, tj. važi (40a,b).

Iz relacija (40a,b), prema prethodno razmatranom slučaju 2^o (vidi relaciju (25)), imamo da je

$$\sigma_S \circ \sigma_R \circ f = \sigma_{p(P,X)} ,$$

a s obzirom na (39), iz prethodne relacije sledi

(41) $$f = \sigma_{p(R,S)} \circ \sigma_{p(P,X)} ,$$

gde je $p(P,X) \cap p(R,S) = \{P\}$.

Medjutim, ako je transformacija podudarnosti f iskazana kao u relaciji (41), onda ona osim invarijantne tačke P ima i drugih invarijantnih tačaka, što je suprotno polaznoj pretpostavci 3^o da transformacija f ima samo jednu invarijantnu tačku.

Zaista, ako uočimo izotropni niz tačaka $\tilde{p}$ sa osnovom u tački P, onda imamo da je za svaku tačku $Y \in \tilde{p}$, s obzirom na relaciju (41):

$$\begin{aligned} f(Y) &= \sigma_{p(R,S)} \circ \sigma_{p(P,X)}(Y) \\ &= \sigma_{p(R,S)}(\sigma_{p(P,X)}(Y)), \quad ([YP] \tilde{=} [PY_1]) \\ &= \sigma_{p(R,S)}(Y_1) = Y , \quad ([Y_1P] \tilde{=} [PY]) . \end{aligned}$$

Dakle, pretpostavke (29a) i (31b), dovode do kontradikcije. To znači da proizvoljnu tačku $X \in P$ ravni koja zadovoljava uslove (28a,b), ne možemo izabrati tako da važe pretpostavke (29a) i (31b).

Pretpostavimo na kraju da je tačna relacija (29b), tj. da je proizvoljna tačka $X \mid P$, i pritom važe relacije (27) i (28a,b). Kako prema teoremi 3.1.14, transformacija podudarnosti f paralelne tačke preslikava na paralelne tačke, to za paralelne tačke X i P imamo da su i njihove slike $X' = f(X)$ i $P = f(P)$ takodje paralelne, tj. važi

(42) $P \mid X'$,

i pritom

(43) $[\widetilde{XP}] \cong [\widetilde{X'P}]$.

Iz (29b) i (42), sledi da je

(44) $X \mid P \mid X'$,

i da su ove tačke incidentne sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{p}$. Na izotropnom nizu tačaka $\tilde{p}$, na osnovu relacije (43), sledi da je tačka P središte izotropne duži $[\widetilde{XX'}]$. Tačkom P zadata je centralna simetrija σ_P, za koju na osnovu (43(i (44), važi

(45) $\sigma_P(X') = X$.

Za kompoziciju preslikavanja $\sigma_P \circ f$, na osnovu relacija (27), (28a) i (45), imamo da je

(46a,b) $\sigma_P \circ f(P) = P$, $\sigma_P \circ f(X) = X$,

tj. ova kompozicija ima dve invarijantne paralelne tačke P i X. Prema tome, na osnovu prethodno razmatranog slučaja 2^o (v. relaciju (26)), iz (46a,b), sledi da je

(47) $\sigma_P \circ f = \sigma_R \Longrightarrow f = \sigma_P \circ \sigma_R$,

gde je centar simetrije R suprotna tačka proizvoljnoj tački $S \in \tilde{p}$, te prema tome i tački $P \in \tilde{p}$. Dakle, imamo P —— R i $[PR] \cong [\overline{PR}]$, te prema teoremi 3.1.8 s obzirom na (47), sledi

$$f = \sigma_R \circ \sigma_P = \sigma_{p(P,R)} .$$

Medjutim, transformacija podudarnosti f koja predstavlja osnu simetriju $\sigma_{p(P,R)}$, sem tačke P ima invarijantnu i svaku tačku ose simetrije $p(P,R)$, što je suprotno polaznoj pretpostavci da transformacija f ima samo invarijantnu tačku P. Prema tome, pretpostavka (29b), dovodi do protivurečnosti. To znači da za tačku X EP ravni koja zadovoljava (28a,b), ne možemo uzeti onu za koju važi pretpostavka (29b).

Na kraju slučaja 3° možemo da zaključimo: ako transformacija podudarnosti f EP ravni ima samo jednu invarijantnu tačku P, onda se prema relaciji (37), f može da iskaže kao kompozicija tri centralne simetrije, odnosno kao kompozicija osne simetrije čija je osa prava $p(P,X)$ i centralne simetrije čiji je centar R suprotna tačka invarijantnoj tački P i pritom $R \notin p(P,X)$.

4° Pretpostavimo da transformacija podudarnosti f EP ravni nema invarijantnih tačaka. Ako sa X označimo proizvoljnu tačku EP ravni onda je

(48a,b) $$f(X) = X' \wedge X \neq X' .$$

Za tačke X i X', važi

(49a,b) $$\text{ili je } X — X' , \text{ ili je } X \mid X' .$$

Pretpostavimo da je tačna relacija (49a). To znači da postoji prava, označimo je sa $p(X,X')$, koja je incidentna sa tačkama X i X'. Ovim tačkama na pravoj $P(X,X')$ odredjene su dve duži sa krajnjim tačkama X i X'. Uočimo jednu od njih i označimo je sa $[XX']$. Neka je tačka S središte ove duži. Prema tome, važi

(50a,b) $$[XS] \cong [SX'] \wedge \,]XS[\, \cap \,]SX'[\, = \emptyset .$$

Prema teoremi 2.1.1, tačkom S je jednoznačno odredjena centralna simetrija σ_S, za koju na osnovu (50,a,b), važi

(51) $$\sigma_S(X') = X .$$

Uočimo transformaciju podudarnosti EP ravni koja predstavlja kompoziciju preslikavanja $\sigma_S \circ f$. Na osnovu relacija (48) i (51), ova kompozicija ima invarijantnu tačku X, tj. važi

$$(52) \qquad \sigma_S \circ f(X) = X .$$

Kompozicija $\sigma_S \circ f$ ne može imati tri invarijantne linearno nezavisne tačke, tj. tri tačke koje obrazuju trotemenik i pritom ostaju invarijantne. Zaista, ako bismo pretpostavili suprotno, to prema posledici teoreme 3.1.12, znači da je ova kompozicija identično preslikavanje EP ravni, tj. važi

$$\sigma_S \circ f = I \Longrightarrow f = \sigma_S ,$$

a što, zapravo, znači da transformacija podudarnosti f ima invarijantnih tačaka (tačka S), što je suprotno polaznoj pretpostavci 4^o, da f nema invarijantnih tačaka.

Ako bi kompozicija $\sigma_S \circ f$ posedovala dve invarijantne linearno nezavisne tačke, tj. ako pored tačke X iz (52) poseduje i invarijantnu tačku Y, koja je kolinearna sa tačkom X, onda bi prema napred razmatranom slučaju 2^o (videti relaciju (25)), ova kompozicija mogla da se iskaže:

$$(53) \qquad \sigma_S \circ f = \sigma_{p(X,Y)} \Longrightarrow f = \sigma_S \circ \sigma_{p(X,Y)} .$$

Pretpostavimo da je u relaciji (53) centar S incidentan sa osom p(X,Y). U tom slučaju bi transformacija podudarnosti f iskazana relacijom (53) imala invarijantnu tačku S (videti definicije 2.1.1. i 2.2.1), što je suprotno polaznoj pretpostavci u slučaju 4^o, da f nema invarijantnih tačaka.

Pretpostavimo potom da $S \notin p(X,Y)$. Neka je $\tilde{s}$ izotropni niz tačaka sa osnovom S i $\tilde{s} \cap p(X,Y) = \{Q\}$, a P suprotna tačka tački Q na pravoj p(X,Y). Stoga prema teoremi 3.1.9, osnu simetriju $\sigma_{p(X,Y)}$ možemo iskazati

$$\sigma_{p(X,Y)} = \sigma_Q \circ \sigma_P ,$$

a transformaciju f iz relacije (53):

(53′) $\qquad f = \sigma_S \circ \sigma_Q \circ \sigma_P$,

gde je P — Q , $[PQ] \stackrel{\sim}{=} [\overline{PQ}]$ i $Q \mid S$. Prema prethodno razmatranom slučaju 3° ove teoreme (v. relaciju (37)) transformacija podudarnosti f iskazana relacijom (53′) ima invarijantnu tačku P, što je suprotno polaznoj pretpostavci u slučaju 4° da f nema invarijantnih tačaka. Dakle, transformacija f koja nema invarijantnih tačaka ne može se iskazati relacijom (53), odnosno (53′).

Ako bi kompozicija $\sigma_S \circ f$ pored tačke X posedovala i invarijantnu tačku Z, tako da je $X \mid Z$, onda prema napred razmatranom slučaju 2° (vidi relaciju (26)), ova kompozicija može da se iskaže:

(54) $\qquad \sigma_S \circ f = \sigma_R \Longrightarrow f = \sigma_S \circ \sigma_R$,

gde je centar R suprotna tačka proizvoljnoj tački izotropnog niza tačaka koji je incidentan sa paralelnim tačkama X i Z. Dakle, tačka R je suprotna tački i tački X na pravoj p(X,S), a R — S i pritom važi $\rceil([RS] \stackrel{\sim}{=} [\overline{RS}])$, tj. R i S su kolinearne ali ne i suprotne tačke.

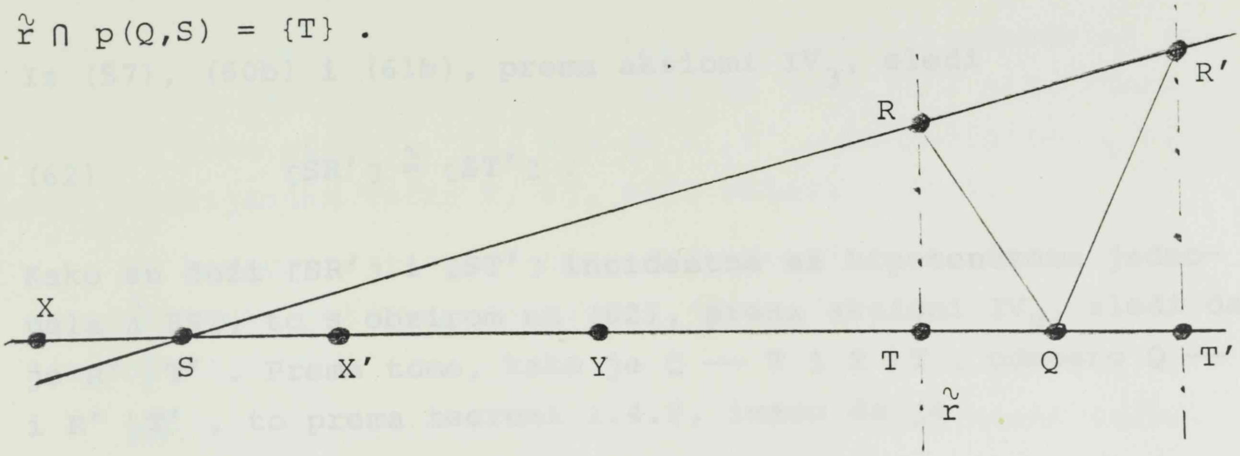
Najzad, ako bi kompozicija $\sigma_S \circ f$ imala samo jednu invarijantnu tačku, tj. važi relacija (52), onda prema prethodno razmatranog slučaja 3° (v. relaciju (37)), ova kompozicija može da se iskaže

(55) $\qquad \sigma_S \circ f = \sigma_R \circ \sigma_{p(X,Y)}$,

gde je prava p(X,Y) proizvoljna prava incidentna sa invarijantnom tačkom X kompozicije $\sigma_S \circ f$, a R suprotna tačka tački X i $R \notin p(X,Y)$. Ako pravu p(X,Y) izaberemo da se poklapa sa pravom p(X,X′), onda s obzirom na (50a,b), sledi da je centar $S \in p(X,Y)$. Ako označimo sa Q suprotnu tačku tački S na pravoj p(X,Y), onda na osnovu teoreme 3.1.9, iz relacije (55), dobijamo

(55′) $\quad \sigma_S \circ f = \sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_S \Longrightarrow f = \sigma_S \circ \sigma_R \circ \sigma_Q \circ \sigma_S$.

Označimo sa $\tilde{r}$ izotropni niz tačaka sa osnovom R i $\tilde{r} \cap p(Q,S) = \{T\}$.



Slika 3.6.

Kako je [RX] poluprava i R | T , to prema teoremi 1.4.9, sledi da je i duž [TX] poluprava. S obzirom da je $X \neq S$, to je tačka X incidentna sa polupravom [QS], a tačka T sa njenom dopunom $[\overline{QS}]$. Dakle, jedna od duži na pravoj p(X,Y) sa krajnjim tačkama S i T i jedna od duži sa krajnjim tačkama Q i T incidentne sa polupravom $[\overline{QS}]$, različite su od poluprave, odnosno važi

(56a,b) $\quad \neg([ST] \tilde{=} [\overline{ST}]) \wedge \neg([QT] \tilde{=} [\overline{QT}])$.

Kako je S — T i R | T , to prema teoremi 1.4.9, sledi da je

(57) $\quad [RS] \tilde{=} [ST]$,

a s obzirom na (56a), sledi da su i tačke R i S kolinearne ali ne i suprotne tačke. Otuda, ako uočimo centralnu simetriju sa središtem S, imamo

(58a,b) $\quad \sigma_S(R) = R'$, $R' \neq R$,

(59a,b) $\quad \sigma_S(T) = T'$, $T' \neq T$,

i pritom važi

(60a,b,c) $R' \in p(R,S)$, $[RS] \overset{\sim}{\cong} [SR']$, $]RS[\cap]SR[= \emptyset$,

(61a,b,c) $T' \in p(Q,S)$, $[TS] \overset{\sim}{\cong} [ST']$, $]TS[\cap]ST'[= \emptyset$.

Iz (57), (60b) i (61b), prema aksiomi IV_3, sledi

(62) $[SR'] \overset{\sim}{\cong} [ST']$.

Kako su duži $[SR']$ i $[ST']$ incidentne sa hipotenuzama jednougla $\tilde{\Delta}$ RST, to s obzirom na (62), prema aksiomi IV_9, sledi da je $R' | T'$. Prema tome, kako je Q — T i $R | T$, odnosno Q — T' i $R' | T'$, to prema teoremi 1.4.9, imamo da je

(63a,b) $[RQ] \overset{\sim}{\cong} [TQ] \wedge [R'Q] \overset{\sim}{\cong} [T'Q]$.

Dalje, kako su prema aksiomi IV_8 poluprave $[\overline{QS}]$ i $[QS]$ podudarne, to s obzirom na (61b,c) prema aksiomi IV_5, sledi da je

(64) $[TQ] \overset{\sim}{\cong} [QT']$, $[TQ] \subset [\overline{QS}]$, $[QT'] \subset [QS]$.

Iz (63a,b) i (64), prema aksiomi IV_3, imamo da je $[RQ] \overset{\sim}{\cong} [R'Q]$, a s obzirom na (56b), sledi da su tačke Q i R' kolinearne ali ne i suprotne tačke, tj. važi

(65a,b) Q — R' i $\neg(QR' \overset{\sim}{\cong} \overline{QR'})$.

Na osnovu teorema 3.1.7. i 3.1.6, s obzirom na relaciju (58a) iz (55'), dobijamo

(66) $f = (\sigma_S \circ \sigma_R \circ \sigma_S) \circ \sigma_Q = \sigma_{R'} \circ \sigma_Q$,

gde za centre Q i R' važi (65a,b).

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (49b), tj. ako je $f(X)=X'$ i $X \neq X'$, onda je $X | X'$. To znači da u ovom slučaju možemo uočiti izotropni niz tačaka $\tilde{x}$ sa osnovom X i na njemu izotropnu duž $[\widetilde{XX'}]$. Ako sa S označimo središte ove izotropne duži, onda imamo

(67) $$[\widetilde{XS}] \overset{\sim}{=} [\widetilde{SX'}] ,$$

a što prema definiciji 2.1.1, znači da postoji centralna simetrija sa centrom u tački S, tako da je $\sigma_S(X') = X$. Prema tome, i u ovom slučaju, tj. kad je $X \mid X'$, kompozicija $\sigma_S \circ f$ ima invarijantnu tačku X, tj. važi relacija (52).

Da kompozicija $\sigma_S \circ f$ nema tri invarijantne linearno nezavisne tačke pokazano je napred (vidi deo dokaza ove teoreme iza relacije (52)).

Ako bi kompozicija $\sigma_S \circ f$ imala dve invarijantne tačke, tj. da pored tačke X iz (52) postoji i tačka Y, tako da je

(68a,b,c) $$X — Y , \quad \sigma_S \circ f(X) = X \quad \text{i} \quad \sigma_S \circ f(Y) = Y ,$$

ili

(69a,b,c) $$X \mid Y , \quad \sigma_S \circ f(X) = X \quad \text{i} \quad \sigma_S \circ f(Y) = Y ,$$

onda prema napred razmatranom slučaju 2^o, tj. na osnovu relacije (25) i (68a,b,c), odnosno na osnovu relacije (26) i (69a,b,c), ova kompozicija može da se respektivno iskaže:

(70a,b) $$f = \sigma_S \circ \sigma_{p(X,Y)} \quad \text{i} \quad f = \sigma_S \circ \sigma_R \, .$$

Prema definiciji 2.2.1, svaka tačka ose p(X,Y) u osnoj simetriji $\sigma_{p(X,Y)}$ iz (70a) ostaje invarijantna, a za centralnu simetriju σ_S, prema teoremi 2.1.2, postoji izotropni niz tačaka $\tilde{s}_o$, čija je svaka tačka invarijantna tačka te simetrije. Ako označimo

$$\tilde{s}_o \cap p(X,Y) = \{P\} ,$$

onda je tačka P invarijantna tačka transformacije f iskazana relacijom (70a), a što je suprotno polaznoj pretpostavci slučaja 4^o, da f nema invarijantnih tačaka.

S obzirom na (49b), (69a) i (67), sledi da je $X,X',X,S \in \tilde{x}$. Centar R centralne simetrije σ_R u relaciji (70b), prema relaciji (26), predstavlja suprotnu tačku proizvoljne tačke izotropnog niza tačaka $\tilde{x}$ koji je incidentan sa invarijantnim tačkama X i Y o kojima je reč u relacijama (69a,b,c). Prema tome, R je suprotna tačka i centru S centralne simetrije σ_S iz (70b). Otuda, na osnovu teoreme 3.1.8, iz relacije (70b), imamo da je

$$(70'b) \qquad f = \sigma_S \circ \sigma_R = \sigma_{p(R,S)} .$$

Kako transformacija podudarnosti f EP ravni iskazana relacijom (70'b), predstavlja osnu simetriju sa osom $p(R,S)$, to je prema definiciji 2.2.1, svaka tačka ose $p(R,S)$ invarijantna tačka ove transformacije, a što je suprotno polaznoj pretpostavci u slučaju 4°, da f nema invarijantnih tačaka.

Najzad, ako kompozicija $\sigma_S \circ f$ ima samo jednu invarijantnu tačku X, tj. važi (52), onda prema prethodno razmatranom slučaju 3°, tj. prema relaciji (37), ova kompozicija može da se iskaže

$$(71) \qquad \sigma_S \circ f = \sigma_R \circ \sigma_{p(X,Y)} \implies f = \sigma_S \circ \sigma_R \circ \sigma_{p(X,Y)} .$$

Prema relaciji (37) osa $p(X,Y)$ osne simetrije iz (71) je proizvoljna prava incidentna sa invarijantnom tačkom X kompozicije $\sigma_S \circ f$, a centar R je suprotna tačka invarijantnoj tački X i pritom $R \notin p(X,Y)$, tj. važi

$$(72a,b) \qquad R \text{ — } X \wedge [RX] \overset{\sim}{=} [\overline{RX}] .$$

S obzirom na (67), centar S simetrije σ_S iz (71) je paralelan sa invarijantnom tačkom X, tj. $S \mid X$. Kako je R — X i $S \mid X$, to prema teoremi 1.4.9, sledi da je $[RX] \overset{\sim}{=} [RS]$, odnosno s obzirom na (72b) i $[RS]$ predstavlja polupravu EP ravni. Dakle, R i S su suprotne tačke na pravoj $p(R,S)$. Otuda s obzirom na teoremu 3.1.8, imamo da je

(73) $\sigma_S \circ \sigma_R = \sigma_{p(R,S)}$.

Iz (71) i (73), sledi

(74) $f = \sigma_{p(R,S)} \circ \sigma_{p(X,Y)}$.

Ako označimo $p(X,Y) \cap p(R,S) = \{T\}$, onda na osnovu definicije 2.2.1, transformacija podudarnosti f iskazana relacijom (74) ima invarijantnu tačku T, što je suprotno polaznoj pretpostavci u slučaju 4^o, da f nema invarijantnih tačaka.

Dakle, kako transformacija podudarnosti f iskazana pod pretpostavkom (49b) relacijama (70a,b) i (74) ima invarijantnih tačaka, a što je suprotno pretpostavci da f nema invarijantnih tačaka, to znači proizvoljnu tačku X EP ravni za koju važi (48a,b) ne možemo izabrati tako da važi pretpostavka (49b).

Na osnovu svega izloženog u slučaju 4^o možemo da zaključimo: ako transformacija podudarnosti f EP ravni nema invarijantnih tačaka, onda se prema (54) i (66), transformacija f može da iskaže kao kompozicija dve centralne simetrije čiji su centri kolinearne ali ne i suprotne tačke. Ovu kompoziciju ispitaćemo u tački 3.3. ovog poglavlja.

DEFINICIJA 3.1.2. - Svaku kompoziciju konačnog broja centralnih simetrija EP ravni kojom je predstavljena neka transformacija podudarnosti f te ravni nazivamo simetrijskom reprezentacijom te transformacije podudarnosti. Simetrijsku reprezentaciju transformacije podudarnosti f EP ravni sastavljenu iz najmanjeg mogućeg broja centralnih simetrija nazivamo minimalnom ili optimalnom simetrijskom reprezentacijom transformacije f .

3.2. RELACIJA PODUDARNOSTI GEOMETRIJSKIH FIGURA EP RAVNI

U prvoj glavi razmatrana je relacija "... je podudarno..." u skupu svih duži i skupu svih izotropnih duži. Naime, ova relacija okarąkterisana je aksiomama podudarnosti. Pritom je definisana relacija "... je podudarno ..." u skupu svih uglova. Medjutim, transformacije podudarnosti EP ravni omogućuju da definišemo relaciju podudarnosti bilo kojih figura u EP ravni.

DEFINICIJA 3.2.1. - Dve figure F i F' EP ravni nazivamo *podudarnim*, što simbolički zapisujemo

$$F \cong F',$$

ako postoji transformacija podudarnosti f te ravni, tako da je

$$f(F) = F' .$$

Od svojstava kojima se odlikuje definisana relacija podudarnosti geometrijskih figura EP ravni izdvajamo:

TEOREMA 3.2.1. - Podudarnost geometrijskih figura u EP ravni je relacija ekvivalencije.

Dokaz ove teoreme sledi na osnovu definicije 3.2.1, činjenice da identična transformacija EP ravni predstavlja transformaciju podudarnosti i teorema 3.1.2. i 3.1.1.

Teorema 3.2.1. omogućuje da skup svih geometrijskih figura EP ravni razvrstamo u klase ekvivalencije kojih ima beskonačno mnogo.

U narednim razmatranjima ove tačke biće reči o uslovima kojima se utvrdjuje podudarnost pojedinih geometrijskih figura u EP ravni jer oni nisu uvek dati na idealan način postojanjem transformacije podudarnosti koja jednu figuru preslikava na drugu.

U skupu svih uglova EP ravni relacija "... je podudarno ..." okarakterisana je definicijom 1.4.3. No, kako bilo koja transformacija podudarnosti f EP ravni proizvoljan ugao pq preslikava takodje na ugao p′q′ te ravni, tj. važi

$$f(\angle pq) = \angle p'q',$$

sada smo u mogućnosti da dokažemo teoremu koja daje uslove o podudarnosti uglova.

TEOREMA 3.2.2. - Dva ugla pq i p′q′ sa temenima O i O′ su podudarna ako i samo ako na kracima p, q, p′, q′ tih uglova postoje respektivno tačke P, Q, P′, Q′, takve da je

$$P \mid Q\ ,\quad P' \mid Q',\ [OP] \cong [O'P']\ \text{ i }\ [PQ] \cong [P'Q'].$$

Dokaz. - Neka su zadati $\angle$ pq i $\angle$ p′q′ sa temenima O i O′ i neka je

(1) $\qquad \angle pq \cong \angle p'q'$.

Na osnovu definicije 3.2.1, s obzirom na (1) postoji transformacija podudarnosti f EP ravni, takva da je

(2) $\qquad f(\angle pq) = \angle p'q'$.

Označimo sa P proizvoljnu tačku incidentnu sa pravom p, tj. $P \in p$ i pritom $P \neq O$. Ako je tačka Q projekcija tačke P na pravu q, onda je prema definiciji 1.1.3, $P \mid Q$. Na osnovu definicije 3.1.1, s obzirom na (2), sledi

(3a,b,c) $\qquad f(O) = O',\ \ f(P) = P',\ \ f(Q) = Q'$,

gde je $P' \in p'$, $Q' \in q'$, $P' \mid Q'$ i pritom važi

(4a,b) $\quad [OP] \tilde{=} [O'P'] \wedge [PQ] \tilde{=} [P'Q']$.

Obrnuto, neka na kracima p, q, p′ i q′ postoje respektivno tačke P, Q, P′ i Q′ takve da je $P | Q$ i $P' | Q'$ i pritom važe relacije (4a,b), a pokažimo da je tačna relacija (1). U tom cilju uočimo jednouglove $\tilde{\Delta}$ POQ i $\tilde{\Delta}$ P′O′Q′. Za ove jednouglove prema teoremi 3.1.13, s obzirom na (4a,b), postoji jedinstvena transformacija podudarnosti f EP ravni koja tačke O, P i Q prevodi u tačke O′, P′ i Q′, tj. važi (3a,b,c). Stoga na osnovu teoreme 3.1.15, transformacija podudarnosti f ugao pq preslikava na ugao p′q′, tj. važi relacija (2), a prema definiciji 3.2.1, to dokazuje egzistenciju relacije (1). Q.E.D.

Na osnovu teoreme 3.1.14, i definicije 3.1.1, sledi da bilo koja transformacija podudarnosti f EP ravni trougao te ravni preslikava takodje na trougao. Stoga u skupu svih trouglova EP na osnovu leme 3.1.5, teoreme 3.1.16 i definicije 3.2.1, odmah može da se iskaže teorema:

TEOREMA 3.2.3. - Neka su Δ ABC i Δ A′B′C′ trouglovi sa središnjim temenima B i B′ i neka su D i D′ projekcije ovih temena na osnove [AC] i [A′C′]. Ako je

$$[AC] \tilde{=} [A'C'],\ [AB] \tilde{=} [A'B'],\ [BD] \tilde{=} [B'D'] ,$$

onda je

$$\Delta ABC \tilde{=} \Delta A'B'C' .$$

Na osnovu teorema 3.2.2, i 3.2.3, dokazuje se teorema:

TEOREMA 3.2.4. - Neka su zadati Δ ABC i Δ A′B′C′ sa središnjim temenima B i B′. Ako je

$$[AC] \tilde{=} [A'C'],\ [AB] \tilde{=} [A'B'],\ \angle BAC \tilde{=} \angle B'A'C' ,$$

onda je

$$\Delta ABC \tilde{=} \Delta A'B'C' .$$

Na osnovu teoreme 3.2.2, i teoreme 3.2.4, dokazuje se teorema:

TEOREMA 3.2.5. - Neka su zadati Δ ABC i Δ A′B′C′ sa središnjim temenima B i B′. Ako je

$$[AC] \cong [A'C'],\ [BC] \cong [B'C'],\ \angle B \cong \angle B',$$

onda je

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'.$$

Na osnovu teoreme 1.4.25, i teoreme 3.2.4, dokazuje se teorema:

TEOREMA 3.2.6. - Neka su zadati Δ ABC i Δ A′B′C′ sa središnjim temenima B i B′. Ako je

$$[AB] \cong [A'B'],\ [BC] \cong [B'C'],\ \angle BAC \cong \angle B'A'C',$$

onda je

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'.$$

Na osnovu teoreme 1.4.25, i teoreme 3.2.5, dokazuje se teorema:

TEOREMA 3.2.7. - Neka su zadati Δ ABC i Δ A′B′C′ sa središnjim temenima B i B′. Ako je

$$[AB] \cong [A'B'],\ [BC] \cong [B'C'],\ \angle B \cong \angle B',$$

onda je

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'.$$

Na osnovu teoreme 3.1.14, i definicije 3.1.1, takodje, sledi da jednougao EP ravni bilo koja transformacija podudarnosti f te ravni preslikava na jednougao. Stoga u skupu svih jednouglova EP ravni na osnovu leme 3.1.6, teoreme 3.1.16, i definicije 3.2.1, može da se iskaže teorema:

TEOREMA 3.2.8. - Ako za jednouglove $\tilde{\Delta}\,POQ$ i $\tilde{\Delta}\,P'O'Q'$, važi da je

$$[OP] \cong [O'P'] \quad \text{i} \quad [\widetilde{PQ}] \cong [\widetilde{P'Q'}] \,,$$

onda je

$$\tilde{\Delta}\,POQ \cong \tilde{\Delta}\,P'O'Q' \,.$$

Na osnovu teoreme 3.2.2, i teoreme 3.2.8, dokazuje se teoreme:

TEOREMA 3.2.9. - Ako za jednouglove $\tilde{\Delta}\,POQ$ i $\tilde{\Delta}\,P'O'Q'$, važi da je

$$[OP] \cong [O'P'] \quad \text{i} \quad \angle\,POQ \cong \angle\,P'O'Q' \,,$$

onda je

$$\tilde{\Delta}\,POQ \cong \tilde{\Delta}\,P'O'Q' \,.$$

TEOREMA 3.2.10. - Ako za jednouglove $\tilde{\Delta}\,POQ$ i $\tilde{\Delta}\,P'O'Q'$, važi da je

$$[\widetilde{PQ}] \cong [\widetilde{P'Q'}] \quad \text{i} \quad \angle\,POQ \cong \angle\,P'O'Q' \,,$$

onda je

$$\tilde{\Delta}\,POQ \cong \tilde{\Delta}\,P'O'Q' \,.$$

3.3. NEKE SPECIJALNE VRSTE TRANSFORMACIJA PODUDARNOSTI EP RAVNI

Već smo pokazali da centralna simetrija predstavlja transformaciju podudarnosti EP ravni, a u teoremi 3.1.16, dokazali da se svaka transformacija podudarnosti te ravni može da iskaže kao kompozicija najviše tri centralne simetrije. Otuda u izučavanju složenih vrsta transformacija podudarnosti EP ravni može se poći od razmatranja specifičnih vidova njihovih minimalnih simetrijskih reprezentacija. Teoremom 3.1.8, dokazano je da kompozicija dve centralne simetrije σ_P i σ_Q čiji su centri P i Q kolinearne i pritom suprotne tačke predstavlja osnu simetriju sa osom $p(P,Q)$.

Razmotrimo sada kompoziciju centralnih simetrija σ_P i σ_Q čiji su centri P i Q kolinearne ali ne i suprotne tačke, tj. važi

(1a,b) $\qquad P — Q \wedge \neg([PQ] \cong [\overline{PQ}])$.

Za centralne simetrije σ_P i σ_Q prema teoremi 2.1.2, postoje respektivno izotropni nizovi tačaka $\tilde{p}_o$ i $\tilde{q}_o$ čija je svaka tačka invarijantna. Označimo:

$$p(P,Q) \cap \tilde{p}_o = \{P_o\}, \quad p(P,Q) \cap \tilde{q}_o = \{Q_o\}.$$

Tačke P_o i Q_o predstavljaju respektivno suprotne tačke tačkama P i Q. Neka su $[PP_o]$ i $[\overline{PP}_o]$ poluprave prave $p(P,Q)$ odredjene suprotnim tačkama P i P_o. Na osnovu pretpostavke (1b), sledi da je tačka Q incidentna sa jednom od njih. Ako je recimo $Q \in\,]PP_o[$, onda je centrima P i Q centralnih simetrija σ_P i σ_Q odredjena duž koja predstavlja dopunu duži PP_oQ. Ako tu duž kratko označimo sa $[PQ]$, onda je

(2) $\qquad [PQ] \subset [PP_o]$,

a što prema definiciji 1.4.4, znači da je duž $[PQ]$ manja od poluprave.

Neka je X proizvoljna tačka incidentna sa pravom $p(P,Q)$. Prema definiciji 2.1.1, za simetrije σ_P i σ_Q važi:

(3) $(\forall X \in p(P,Q) \wedge X \notin \{P,P_o\})(\sigma_P(X) = X')$,

tako da je

(4a,b,c) $X' \in p(P,Q)$, $]XP[\cap]PX'[= \emptyset$, $[XP] \cong [PX']$,

dok je $\sigma_P(P) = P$ i $\sigma_P(P_o) = P_o$, a

(5) $(\forall X' \in p(P,Q) \wedge X' \notin \{Q,Q_o\})(\sigma_Q(X') = X")$,

tako da je

(6a,b,c) $X" \in p(Q,X')$, $]X'Q[\cap]QX"[= \emptyset$, $[X'Q] \cong [QX"]$,

dok je $\sigma_Q(Q) = Q$ i $\sigma_Q(Q_o) = Q_o$. Za kompoziciju $\sigma_Q \circ \sigma_P$ s obzirom na (3) i (5), sledi

(7) $(\forall X \in p(P,Q))(\sigma_Q \circ \sigma_P(X) = X")$,

gde je s obzirom na (1a), (4a,b) i (6a,b) tačka $X" \in p(P,Q)$.

Neka je proizvoljna tačka $X \in p(P,Q)$ izabrana tako da je $X \in]PQ[$. Onda prema definiciji 1.4.7, imamo da je

(8) $[PQ] = [PX] + [XQ]$.

Treba naglasiti da ovakav izbor tačke X ne utiče na opštost zaključivanja. Na osnovu pretpostavke $X \in]PQ[$ i relacije (4b), odnosno relacije (6b), možemo uočiti duž $[QX']$ tako da je $P \in]QX'[$, odnosno - duž $[XX"]$ tako da je $Q \in]XX"[$. Stoga na osnovu definicije 1.4.7, važi

(9) $[X'Q] = [X'P] + [PQ]$,

odnosno

(10) $[XX''] = [XQ] + [QX'']$,

gde je $[XX'']$ jedna od duži prave $p(P,Q)$ odredjena homologim tačkama X i X'' u kompoziciji $\sigma_Q \circ \sigma_P$. Kako se s obzirom na (6c) u relaciji (10) duž $[QX'']$ može zameniti podudarnom duži $[X'Q]$, a s obzirom na (4c) u relaciji (9) duž $[X'P]$ možemo zameniti podudarnom duži $[PX]$, to na osnovu (8), (9) i (10), dobijamo da je

(11) $[XX''] = [XQ]+[PX]+[PQ] = [PQ]+[PQ] = 2[PQ]$,

pri čemu za duž $[PQ]$ važi relacija (2).

Na osnovu relacija (6) i (11), sledi

$$(\forall X \in p(P,Q))(\sigma_Q \circ \sigma_P(X)=X'',\ X'' \in p(P,Q),\ [XX''] = 2[PQ]) .$$

Posmatrajmo, zatim, proizvoljnu tačku X EP ravni, tako da $X \notin p(P,Q)$. Ako označimo sa $\tilde{x}$ izotropni niz tačaka sa osnovom X i $\tilde{x} \cap p(P,Q) = \{R\}$, onda je

(12) $X \mid R$.

Za tačke P, Q, P_o, Q_o, $R \in p(P,Q)$, važi

(13) ili $R \notin \{P,Q,P_o,Q_o\}$,

ili se tačka R poklapa sa jednom od tačaka P, Q, P_o i Q_o. Za tačku $R \in p(P,Q)$ s obzirom na (6) i (11), sledi da je

(14a,b,c) $\sigma_Q \circ \sigma_P(R) = R''$, $R'' \in p(P,Q)$, $[RR''] = 2[PQ]$

Ako je tačna relacija (13), onda prema teoremi 1.1.2, s obzirom na relaciju (12), sledi

(15) $\qquad X — P$.

Prema definiciji 2.1.1, za centralnu simetriju σ_P s obzirom na (15), imamo da je

(16a,b) $\qquad \sigma_P(X) = X'$, $\quad X' \in p(X,P)$,

i pritom važi

$$]XP[\cap]PX'[= \emptyset \quad \wedge \quad [XP] \overset{\sim}{=} [PX'] \ ,$$

a to, zapravo, znači da tačka $X' \notin p(P,Q)$. Medjutim, na osnovu teoreme 2.1.6 s obzirom na (12), sledi da je

(17) $\qquad X' \mid R'$,

gde je $R' = \sigma_P(R)$ i $R' \in p(P,Q)$. Kako je $R' — Q$, to prema teoremi 1.1.2, s obzirom na (17), sledi da je $X' — Q$. Stoga prema definiciji 2.1.1, za centralnu simetriju σ_Q, važi

(18a,b) $\qquad \sigma_Q(X') = X''$, $\quad X'' \in p(Q,X')$,

i pritom važi

$$]X'Q[\cap]QX''[= \emptyset \quad \wedge \quad [X'Q] \overset{\sim}{=} [QX''] \ ,$$

a to, zapravo, znači da tačka $X'' \notin p(P,Q)$. No, prema teoremi 2.1.6, s obzirom na (17), sledi

(19) $\qquad X'' \mid R''$,

gde je $R'' = \sigma_Q(R')$ i $R'' \in p(P,Q)$.

Prema tome, iz (16a) i (18a), dobijamo da je

(20a,b) $\qquad \sigma_Q \circ \sigma_P(X) = X''$, $\quad X'' \notin p(P,Q)$.

Pokažimo da tačke X i X" nisu paralelne, tj. da važi

(21) $\neg(X \mid X")$.

Zaista, ako pretpostavimo da je tačna relacija suprotna relaciji (21), tj. da je $X \mid X"$, onda s obzirom na (12) prema teoremi 1.1.1, sledi $X" \mid R$, a s obzirom na (19), dobijamo da je $R" \mid R$, tj. da tačka $R" \in \tilde{x}$. Medjutim, to je protivurečno relaciji (14b) s obzirom da je $R" \neq R$.

Dakle, s obzirom na (20a) i (21), može se zaključiti da su tačka X i njoj odgovarajuća tačka X" u kompoziciji $\sigma_Q \circ \sigma_P$, dve kolinearne tačke, tj. važi

(22) $X — X"$,

odnosno postoji prava incidentna sa ovim tačkama. Označimo je sa p(X,X"). Na osnovu pretpostavke da tačka $X \notin p(P,Q)$ i relacije (20b), sledi da se prava p(X,X") ne poklapa sa pravom p(P,Q). Prema tome, na osnovu teoreme 1.4.11, s obzirom na relacije (12) i (19), sledi da je

$$[XX"] \cong [RR"],$$

a s obzirom na (14c), dobijamo da je

(23) $[XX"] = 2[PQ]$,

gde je [XX"] jedna od duži na pravoj p(X,X") odredjena homologim tačkama X i X" u kompoziciji $\sigma_Q \circ \sigma_P$, a [QP] duž za koju važi relacija (2).

Pokazuje se da relacije (22) i (23) važe i u slučaju kad se tačka R poklapa sa jednom od tačaka P, Q, P_o i Q_o.

Dakle, na osnovu dosadašnjih ispitivanja možemo zaključiti: kompozicija $\sigma_Q \circ \sigma_P$ centralnih simetrija σ_P i σ_Q čiji su centri P i Q kolinearne ali ne i suprotne tačke, prema teoremama 3.1.4 i 3.1.1, predstavlja transformaciju podudarnosti EP ravni, koja s obzirom na (7) svaku tačku $X \in p(P,Q)$ preslikava na tačku X" $\in p(P,Q)$ a s obzirom na (22), svaku tačku X $\notin p(P,Q)$ preslikava na kolinearnu tačku X", pri čemu s obzirom na (11) i (23), važi

$$[XX''] = 2[PQ] \ ,$$

gde je duž [PQ] manja od poluprave.

Prema tome ovim je dokazana teorema:

TEOREMA 3.3.1. - Neka su σ_P i σ_Q centralne simetrije EP ravni α gde su centri P i Q dve razne kolinearne ali ne i suprotne tačke prave p(P,Q). Kompozicija $\sigma_Q \circ \sigma_P$ predstavlja transformaciju podudarnosti EP ravni α za koju važi:

$$\sigma_Q \circ \sigma_P : p(P,Q) \to p(P,Q),$$

a

$$(\forall X \in \alpha)(\sigma_Q \circ \sigma_P(X)=X'', \ X'' \text{ — } X, \ [XX''] \overset{\sim}{=} 2[PQ]) \ ,$$

gde je duž [PQ] manja od poluprave.

Transformaciju podudarnosti EP ravni o kojoj se govori u teoremi 3.3.1, nazivamo translacija EP ravni.

Dakle, možemo dati definiciju:

DEFINICIJA 3.3.1. - Neka su σ_P i σ_Q dve centralne simetrije EP ravni α, tako da su centri P i Q kolinearne ali ne i suprotne tačke prave p(P,Q), i neka je

$$P' = \sigma_Q(P), \ [PP'] = 2[PQ],$$

gde je duž [PQ] manja od poluprave.

Pomeranje ili *translaciju* EP ravni α za duž PP', nazivamo transformaciju

$$\tau_{PP'} : \alpha \to \alpha \ ,$$

odredjenu relacijom

$$\tau_{PP'} = \sigma_Q \circ \sigma_P \ .$$

Na osnovu teoreme 3.3.1 i definicije 3.3.1, odmah možemo zaključiti da translacija $\tau_{PP'}$ nema invarijantnih tačaka, ali je prava $p(P,Q)$ invarijantna prava.

Pre nego što definišemo sledeću vrstu transformacije podudarnosti razmotrimo kompoziciju $\sigma_Q \circ \sigma_P$ čiji su centri P i Q paralelne tačke, tj. važi

(1) $$P \,|\, Q \,.$$

Ako označimo sa $\tilde{m}$ izotropni niz tačaka sa osnovom P, onda s obzirom na (1) tačka $Q \in \tilde{m}$. Prema teoremi 2.1.2, za centralnu simetriju σ_P postoji izotropni niz tačaka $\tilde{p}_o$ čija je svaka tačka invarijantna u odnosu na ovu simetriju, tj. važi

(2) $$(\forall P_o \in \tilde{p}_o)(\sigma_P(P_o) = P_o) \,.$$

Svaka tačka $P_o \in \tilde{p}_o$, zapravo predstavlja suprotnu tačku tački P, na pravoj pramena pravih sa središtem P, odnosno duž PP_o predstavlja polupravu na toj pravoj. Analogno tome, i za centralnu simetriju σ_Q postoji izotropni niz tačaka $\tilde{q}_o$, tako da je svaka tačka $Q_o \in \tilde{q}_o$ suprotna tačka tački Q na pravoj pramena pravih sa središtem Q, odnosno duž QQ_o predstavlja polupravu i pritom važi

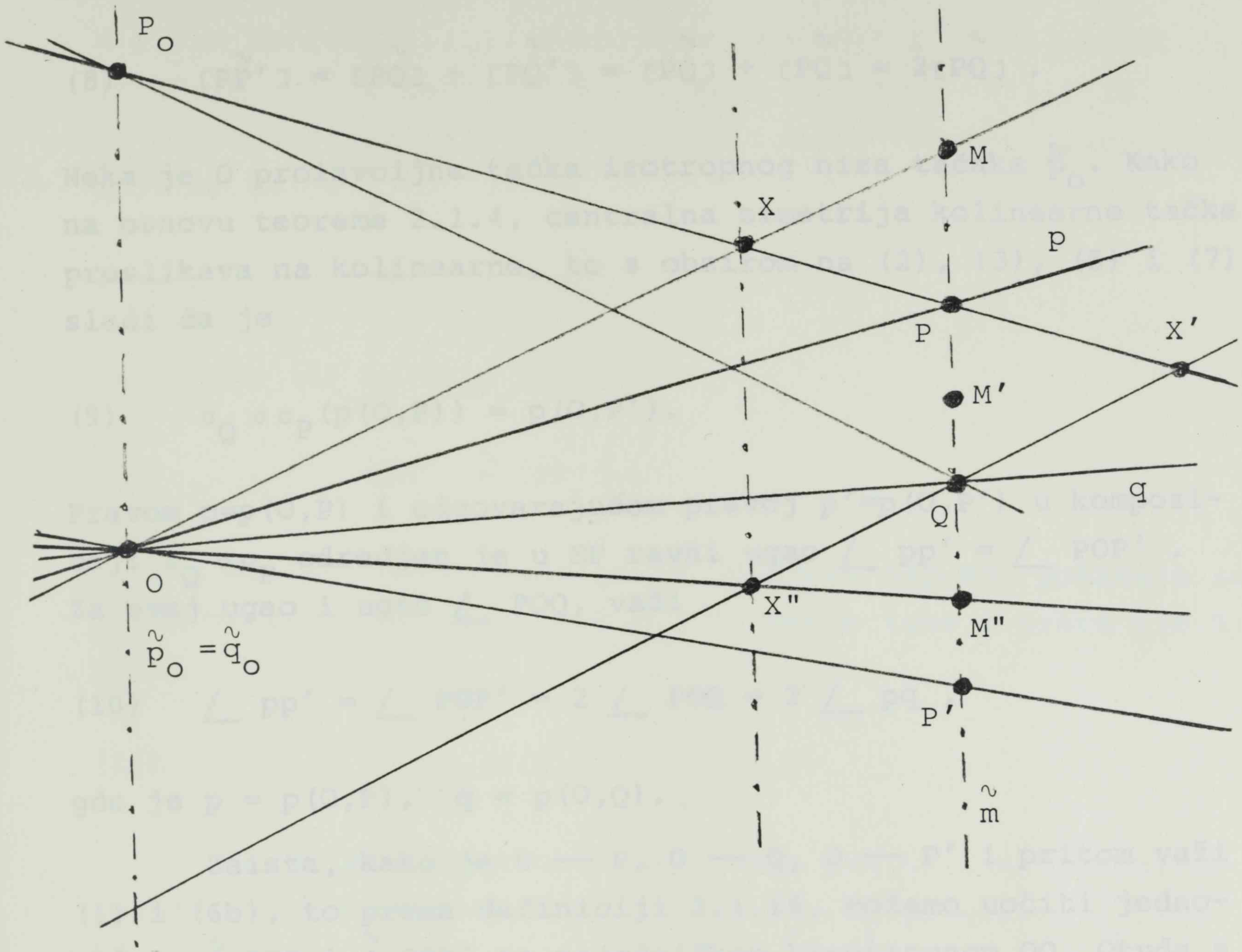
(3) $$(\forall Q_o \in \tilde{q}_o)(\sigma_Q(Q_o) = Q_o) \,.$$

Pokažimo da je svaka tačka $P_o \in \tilde{p}_o$ istovremeno incidentna i sa izotropnim nizom tačaka $\tilde{q}_o$. Zaista, kako je $P — P_o$ a po pretpostavci (1) $P \,|\, Q$, to prema teoremi 1.4.9, sledi da je

(4) $$[PP_o] \stackrel{\sim}{=} [QP_o].$$

Kako je duž $[PP_o]$ poluprava, to s obzirom na (4), sledi da je i duž $[QP_o]$, takodje poluprava, a to znači da je tačka P_o suprotna tački Q, tj. da $P_o \in \tilde{q}_o$. Prema tome, važi da se izotropni nizovi tačaka $\tilde{p}_o$ i $\tilde{q}_o$ poklapaju, tj. važi

(5) $$\tilde{p}_o \equiv \tilde{q}_o \,.$$



Slika 3.7.

Pretpostavimo da je proizvoljna tačka $M \in \tilde{m}$. Ako se tačka M poklapa sa centrom simetrije σ_P, tj. $M = P$, onda prema definiciji 2.1.1, imamo da je $\sigma_P(P) = P$. Prema toj istoj definiciji s obzirom na (1), za tačku P u centralnoj simetriji σ_Q, imamo da je

(6a,b,c) $\qquad \sigma_Q(P) = P', \quad P' \,|\, Q \,, \quad [PQ] \tilde{=} [QP'].$

Dakle, centar P kompozicija $\sigma_Q \circ \sigma_P$ preslikava se na tačku P', tj.

(7) $\qquad \sigma_Q \circ \sigma_P(P) = P' ,$

pri čemu je $(P \sim Q \sim P')$, to prema definiciji 1.4.12, s obzirom na (6c), imamo da je

(8) $\quad [\widetilde{PP'}] = [\widetilde{PQ}] + [\widetilde{PQ'}] = [\widetilde{PQ}] + [\widetilde{PQ}] = 2[PQ]$.

Neka je O proizvoljna tačka izotropnog niza tačaka $\tilde{p}_o$. Kako na osnovu teoreme 2.1.4, centralna simetrija kolinearne tačke preslikava na kolinearne, to s obzirom na (2), !3), (5) i (7), sledi da je

(9) $\quad \sigma_Q \circ \sigma_P(p(O,P)) = p(O,P')$.

Pravom p=p(O,P) i odgovarajućom pravoj p'=p(O,P') u kompoziciji $\sigma_Q \circ \sigma_P$ odredjen je u EP ravni ugao $\angle\, pp' = \angle\, POP'$. Za ovaj ugao i ugao $\angle\, POQ$, važi

(10) $\quad \angle\, pp' = \angle\, POP' = 2\, \angle\, POQ = 2\, \angle\, pq$,

gde je $p = p(O,P)$, $q = p(O,Q)$.

Zaista, kako je O — P, O — Q, O — P' i pritom važi (1) i (6b), to prema definiciji 2.1.16, možemo uočiti jednouglove $\tilde{\Delta}$ POQ i $\tilde{\Delta}$ QOP' sa zajedničkom hipotenuzom OQ. Otuda s obzirom na (6c), prema teoremi 1.4.15, sledi da je

$$\angle\, POQ \overset{\sim}{=} \angle\, QOP' ,$$

a kako je prava p(O,Q) unutrašnja prava ugla $\angle\, POP'$, to prema definiciji 1.4.16, sledi relacija (10).

Neka je, zatim, tačka $M \in \tilde{m}$ i pritom $M \neq P$, onda prema definiciji 2.1.1, s obzirom da je $M \mid P$ imamo

(11a,b,c) $\quad \sigma_P(M) = M', \quad M' \mid M, \ [\widetilde{MP}] \overset{\sim}{=} [\widetilde{PM'}],$

a

(12a,b,c) $\quad \sigma_Q(M') = M'' , \quad M'' \mid M' , \ [\widetilde{M'Q}] \overset{\sim}{=} [\widetilde{QM''}]$.

Na osnovu (11a) i (12a), sledi

(13) $\quad \sigma_Q \circ \sigma_P(M) = M''$,

a prema teoremi 1.1.1, s obzirom na (11b) i (12b), sledi da je M" $|$M, tj. i tačka M" $\in \tilde{m}$. Kako je $(M \sim P \sim M')$ i $(M' \sim Q \sim M'')$, to prema definiciji 1.4.12, s obzirom na (11c) i (12c), pokazuje se da je

(14) $$[\widetilde{MM''}] = 2[\widetilde{PQ}] .$$

Na osnovu (8) i (14), sledi

(15) $$[\widetilde{MM''}] \stackrel{\sim}{=} [\widetilde{PP'}] .$$

Na isti način kako je to učinjeno napred, pokazuje se da za proizvoljnu tačku $O \in \tilde{p}_o$, te prema tome i pravu p(M,O), važi

(16) $$\sigma_Q \circ \sigma_P(p(M,O)) = p(M'',O).$$

Da je ugao koga obrazuju prava p(M,O) i njoj odgovarajuća prava p(M",O) u kompoziciji $\sigma_Q \circ \sigma_P$ podudaran $\angle$ POP', tj.

(17) $$\angle\, MOM'' \stackrel{\sim}{=} \angle\, POP' ,$$

sledi na osnovu teoreme 1.4.15, s obzirom da se mogu uočiti jednouglovi $\tilde{\Delta}$ MOM" i $\tilde{\Delta}$ POP' čije su hipotenuze poluprave a za katete važi relacija (15). Na osnovu (17) i (10), sledi

(18) $$\angle\, p(M,O)p(M'',O) = \angle\, MOM'' = 2\angle\, pq .$$

Neka je X proizvoljna tačka EP ravni tako da je

(19a,b) $$X \notin \tilde{m} \wedge X \notin \tilde{p}_o .$$

Iz pretpostavke (19a), sledi X —— P, te prema definiciji 2.1.1, imamo da je

(20a,b) $$\sigma_P(X) = X' , \quad X' \in p(P,X) ,$$

i pritom važi

(21a,b) $]XP[\cap]PX'[= \emptyset$, $[XP] \overset{\sim}{=} [PX']$.

Na osnovu (21a), sledi da tačka $X' \notin \tilde{m}$ i X' — Q, te u simetriji σ_Q, imamo

(22a,b) $\sigma_Q(X') = X''$, $X'' \in p(Q,X')$.

i pritom važi

(23a,b) $]X'Q[\cap]QX''[= \emptyset \wedge [X'Q] \overset{\sim}{=} [QX'']$.

S obzirom na (20a) i (22a), sledi da je

(24) $\sigma_Q \circ \sigma_P(X) = X''$.

Dokažimo da je

(25) $X'' \,|\, X$.

U tom cilju uočimo tri razne tačke P, Q i X' . Kako $X' \notin \tilde{m}$, to je P — X'. Stoga prema teoremi 1.4.9, s obzirom na (1), sledi da je

(26) $[PX'] \overset{\sim}{=} [QX']$.

Prema prvom delu aksiome IV_3 s obzirom na (21b), (23b) i (26), sledi

(27) $[PX] \overset{\sim}{=} [QX'']$.

Ako uočimo jednougao $\tilde{\Delta}\, PX'Q$ čije su hipotenuze duži PXX' i $QX''X'$ (v. sliku 3.7), onda na osnovu teoreme 1.4.12, s obzirom na (27), sledi relacija (25).

Prema pretpostavci (19b) tačka $X \notin \tilde{p}_o$, to znači da je X kolinearna tačka sa proizvoljnom tačkom $O \in \tilde{p}_o$. Označimo sa $p(O,X)$ pravu incidentnu sa kolinearnim tačkama O i X i $p(O,X) \cap \tilde{m} = \{M\}$. Onda na osnovu (16), (24) i (18), sledi

$$(28) \qquad \sigma_Q \circ \sigma_P(p(O,X)) = p(O,X'') ,$$

i pritom važi

$$(29) \qquad \angle\, p(O,X)p(O,X'') = 2 \angle\, pq .$$

Dakle, na osnovu dosadašnjih ispitivanja možemo zaključiti: kompozicija $\sigma_Q \circ \sigma_P$ centralnih simetrija σ_P i σ_Q čiji su centri P i Q paralelne tačke, prema teoremama 3.1.4 i 3.1.1, predstavlja transformaciju podudarnosti EP ravni, koja s obzirom na (2), (3) i (5) svaku tačku izotropnog niza tačaka $\tilde{p}_o$, čija je osnova suprotna tačka tački P (tački Q), ostavlja invarijantnu, a s obzirom na (7), (10), (13), (18), (25), (28) i (29), svaku tačku $X \notin \tilde{p}_o$ preslikava na paralelnu tačku X", tako da je

$$\angle\, p(O,X)p(O,X'') = 2 \angle\, pq ,$$

gde je $O \in \tilde{p}_o$ a $\angle\, pq = \angle\, p(O,P)p(O,Q)$.

Prema tome, ovim je dokazana teorema:

TEOREMA 3.3.2. - Neka su σ_P i σ_Q centralne simetrije EP ravni čiji su centri P i Q dve razne paralelne tačke i $\tilde{p}_o$ izotropni niz tačaka čija je osnova tačka P_o, koja predstavlja suprotnu tačku tački P na proizvoljnoj pravoj, koja je incidentna sa tačkom P. Kompozicija $\sigma_Q \circ \sigma_P$ predstavlja transformaciju podudarnosti EP ravni za koju važi:

$$(\forall X \in \tilde{p}_o)(\sigma_Q \circ \sigma_P(X) = X) ,$$

a

$$(\forall X \notin \tilde{p}_o)(\sigma_Q \circ \sigma_P(X) = X'',\ \ X'' \mid X) ,$$

tako da je

$$\angle\, p(O,X)p(O,X'') = 2\,\angle\, pq\,,$$

gde je $O \in \tilde{p}_O$ a $\angle\, pq = \angle\, p(O,P)p(O,Q)$.

Transformacija podudarnosti o kojoj se govori u teoremi 3.3.2, nazivamo centralnom rotacijom EP ravni.

Dakle, možemo dati definiciju.

DEFINICIJA 3.3.2. - Neka je O proizvoljna tačka EP ravni α, a p i q dve proizvoljne prave te ravni tako da je $\{O\} = p \cap q$ i neka su σ_P i σ_Q centralne simetrije te ravni čiji su centri P i Q, respektivno suprotne tačke tački O na pravama p i q a to znači i $P \mid Q$, i pritom

$$p' = \sigma_Q(p)\,, \quad \omega = \angle\, pp' = 2\,\angle\, pq\,.$$

Centralnom rotacijom EP ravni α oko tačke O za ugao ω, nazivamo transformaciju

$$\rho_{O,\omega} : \alpha \to \alpha\,,$$

odredjenu relacijom

$$\rho_{O,\omega} = \sigma_Q \circ \sigma_P\,.$$

Tačku O nazivamo centar ili središte rotacije a ugao ω ugao rotacije.

Na osnovu teoreme 3.3.2. i definicije 3.3.2, sledi da rotacija $\rho_{O,\omega}$ EP ravni α ostavlja invarijantnu svaku tačku izotropnog niza tačaka $\tilde{\sigma}$ čija je osnova centar rotacije O, a svaki izotropni niz tačaka $\tilde{m}$, gde $O \notin \tilde{m}$, preslikava na taj isti niz tačaka $\tilde{m}$.

TEOREMA 3.3.3. - Transformacija podudarnosti f EP ravni predstavlja centalnu rotaciju te ravni ako i samo ako se može predstaviti kao kompozicija dveju raznih osnih simetrija te iste ravni.

Dokaz. - Pretpostavimo da transformacija podudarnosti f EP ravni predstavlja neku centralnu rotaciju $\rho_{O,\omega}$ te ravni, tj. važi

(1) $f = \rho_{O,\omega}$,

a dokažimo da se transformacija f može predstaviti kao kompozicija dve osne simetrije. Ako sa p i p′ označimo krake ugla ω, tj.

(2a,b) $\omega = \angle pp'$ i $p \cap p' = \{O\}$,

a sa q simetralu ovog ugla, onda je

(3) $\angle pq \cong \angle qp'$.

Na osnovu definicije 1.4.16, s obzirom na (2a) i (3), sledi

(4) $\omega = 2 \angle pq$.

Neka su, dalje, tačke P i Q suprotne tačke temenu O respektivno na pravama p i q , tj. imamo

(5a,b) $P, O \in p$ i $[PO] \cong [\overline{PO}]$,

(6a,b) $Q, O \in q$ i $[QO] \cong [\overline{QO}]$.

Tačkom Q, prema teoremi 2.1.1, zadata je centralna simetrija σ_Q. Kako prema teoremi 2.1.7, centralna simetrija ugao preslikava na podudaran ugao, to s obzirom na (3) i (6a,b), sledi da je

(7) $\sigma_Q(p) = p'$.

Kako su prema (5b) i (6b) PO i QO poluprave, to prema aksiomi IV_8, sledi da je $[PO] \cong [QO]$, a to dalje prema aksiomi IV_9, znači da je

(8) $P \mid Q$.

Na osnovu definicije 3.3.2, s obzirom na (4), (5a,b), (6a,b), (8) i (7), imamo da je

(9) $$\rho_{O,\omega} = \sigma_Q \circ \sigma_P \, .$$

Iz relacije (9), prema teoremi 3.1.8, s obzirom na (5a,b) i (6a,b), dobijamo

(10) $$\rho_{O,\omega} = (\sigma_Q \circ \sigma_O) \circ (\sigma_O \circ \sigma_P) = \sigma_q \circ \sigma_p \, .$$

Iz (1) i (10), sledi da je

(11) $$f = \sigma_q \circ \sigma_p \, ,$$

tj. f predstavlja kompoziciju dve osne simetrije.

Obrnuto, pretpostavimo da je transformacija podudarnosti f EP ravni predstavlja kompoziciju dveju raznih osnih simetrija, tj. neka važi na primer relacija (11), a dokažimo da f predstavlja centralnu rotaciju te ravni.

Ako je za prave p i q iz (11) $p \cap q = \{O\}$, a tačke P i Q respektivno suprotne tačke tački O na pravama p i q, onda su duži $[OP]$ i $[OQ]$ poluprave, te imamo da je

(12) $$[OP] \cong [OQ] \, ,$$

a na osnovu teoreme 3.1.9, osne simetrije iz relacije (11), možemo iskazati:

(13a,b) $$\sigma_p = \sigma_O \circ \sigma_P \quad \text{i} \quad \sigma_q = \sigma_Q \circ \sigma_O \, .$$

Na pravama p i q možemo izabrati redom tačke P_1 i Q_1, tako da je $P_1 \,|\, Q_1$, odnosno možemo uočiti jednougao $\overset{\sim}{\Delta}\, P_1OQ_1$ tako da su poluprave $[OP]$ i $[OQ]$ incidentne sa hipotenuzama tog jednougla. Onda na osnovu aksiome IV_9, s obzirom na (12), sledi da je

(14) $$P \,|\, Q \, .$$

Ako označimo sa p′ pravu koja u centralnoj simetriji σ_Q odgovara pravoj p , tj. ako je

(15) $$p' = \sigma_Q(p) ,$$

onda je

(16) $$\omega = \angle\, pp' = 2 \angle\, pq .$$

Koristeći činjenicu da je centralna simetrija involutarna, tj. da je

$$\sigma_O \circ \sigma_O = \sigma_O^2 = I ,$$

to iz pretpostavke (11) s obzirom na (13a,b), dobijamo

(17) $$\sigma_q \circ \sigma_p = (\sigma_Q \circ \sigma_O) \circ (\sigma_O \circ \sigma_P) = \sigma_Q \circ \sigma_P .$$

Konačno, na osnovu definicije 3.3.2, s obzirom na pretpostavku (11) i relacije (14), (15), (16) i (17), dobijamo da je

$$f = \sigma_Q \circ \sigma_P = \rho_{O,\omega} ,$$

što je trebalo i dokazati. Q.E.D.

Ovom teoremom uspostavljena je veza koja postoji izmedju centralne rotacije i osne simetrije EP ravni.

TEOREMA 3.3.4. - Ako je $\rho_{O,\omega}$ centralna rotacija i f bilo koja transformacija podudarnosti EP ravni, tako da je

(1a,b) $$f(O) = O' \quad \text{i} \quad f(\omega) = \omega' ,$$

tada važi relacija

(2) $$f \circ \rho_{O,\omega} \circ f^{-1} = \rho_{O',\omega'} .$$

Dokaz. - Neka je $\rho_{O,\omega}$ centralna rotacija a f bilo koja transformacija podudarnosti EP ravni, tako da važi (1a,b). Obeležimo sa p i q prave EP ravni, tako da je

(3a,b) $$p \cap q = \{O\} \text{ i } \angle pq = \frac{1}{2}\omega .$$

Ako sa P i Q označimo respektivno suprotne tačke tački O na pravama p i q, onda su s obzirom na aksiome IV_8 i IV_9 ove tačke paralelne, tj. $P \mid Q$. Uočimo centralne simetrije σ_P i σ_Q sa centrima P i Q. Neka je

$$\sigma_Q(p) = p_1 , \; \sigma_Q(q) = q , \; \sigma_Q(O) = O ,$$

onda prema teoremi 3.1.15, sledi

$$\sigma_Q(\angle pq) = \angle p_1 q ,$$

i pritom

(4) $$\angle pq \cong \angle p_1 q .$$

Kako je prava q unutrašnja prava $\angle pp_1$, to prema definiciji 1.4.16, s obzirom na (4) i (3b), sledi

$$\angle pp_1 = 2\angle pq = \omega .$$

Prema tome, na osnovu definicije 3.3.2, imamo da je

(5) $$\rho_{O,\omega} = \sigma_Q \circ \sigma_P .$$

Kako transformacija podudarnosti f, na osnovu teoreme 3.1.14, kolinearne i paralelne tačke preslikava respektivno na kolinearne i paralelne, to s obzirom na pretpostavke (1a,b), sledi

$$f(\angle pq) = \angle p'q' , \quad f(P) = P', \quad f(Q) = Q' ,$$

tako da je

$$p' \cap q' = \{O'\} \ , \quad \angle\ p'q' = \frac{1}{2}\,\omega' \quad \text{i} \quad P' \,|\, Q' \ ,$$

a P' i Q' su respektivno suprotne tačke tački O' na pravama p' i q'. Otuda na osnovu definicije 3.3.2, imamo da je

(6) $$\rho_{O',\omega'} = \sigma_{Q'} \circ \sigma_{P'} \ .$$

Stoga, primenom teoreme 3.1.6, dobijamo da je

$$\begin{aligned} f \circ \rho_{O,\omega} \circ f^{-1} &= f \circ (\sigma_Q \circ \sigma_P) \circ f^{-1} && \text{(Vidi (5))} \\ &= f \circ (\sigma_Q \circ f^{-1} \circ f \circ \sigma_P) \circ f^{-1} \\ &= (f \circ \sigma_Q \circ f^{-1}) \circ (f \circ \sigma_P \circ f^{-1}) \\ &= \sigma_{Q'} \circ \sigma_{P'} && \text{(Vidi (6))} \\ &= \rho_{O',\omega'} \ , \end{aligned}$$

a što zapravo dokazuje egzistenciju relacije (2). Q.E.D.

TEOREMA 3.3.5. - Rotacija $\rho_{O,\omega}$ i centralna simetrija σ_R EP ravni su komutativne transformacije ako i samo ako se centar O poklapa sa centrom R, odnosno

$$\sigma_R \circ \rho_{O,\omega} = \rho_{O,\omega} \circ \sigma_R \iff O = R \ .$$

Dokaz. - Pretpostavimo da je

(1) $$\sigma_R \circ \rho_{O,\omega} = \rho_{O,\omega} \circ \sigma_R \ ,$$

a dokažimo da je

(2) $$O = R \ .$$

Kako je centralna simetrija involucija, to množenjem s desna levu i desnu stranu relacije (1) sa σ_R, dobijamo

(3) $\sigma_R \circ \rho_{O,\omega} \circ \sigma_R = \rho_{O,\omega}$.

Ako je

(4a,b) $\sigma_R(O) = O'$ i $\sigma_R(\omega) = \omega'$,

onda prema teoremi 3.3.4, imamo da je

(5) $\sigma_R \circ \rho_{O,\omega} \circ \sigma_R = \rho_{O',\omega'}$.

Iz relacija (3) i (5), dobijamo da je

$$\rho_{O,\omega} = \rho_{O',\omega'} ,$$

a odatle sledi da je

(6a,b) $O = O' \wedge \omega \overset{\sim}{=} \omega'$.

Iz (6a,b) s obzirom na (4a,b), sledi (2).

Obrnuto, pretpostavimo da je tačna relacija (2), tj. da je $O = R$, a dokažimo da važi (1). Pod pretpostavkom (2) sledi da se teme O i ugao ω u centralnoj simetriji σ_R preslikavaju na same sebe, tj. $O' = 0$ i $\omega' = \omega$ pa je

$$\rho_{O,\omega} = \rho_{O',\omega'} .$$

S toga prema teoremi 3.3.4, dobijamo

$$\begin{aligned}\sigma_R \circ \rho_{O,\omega} &= (\sigma_R \circ \rho_{O,\omega}) \circ (\sigma_R \circ \sigma_R) \\ &= (\sigma_R \circ \rho_{O,\omega} \circ \sigma_R) \circ \sigma_R \\ &= \rho_{O',\omega'} \circ \sigma_R \\ &= \rho_{O,\omega} \circ \sigma_R ,\end{aligned}$$

tj. važi relacija (1). Q.E.D.

Proučavanju transformacija podudarnosti EP ravni čija se minimalna simetrijska reprezentacija, kako je pokazano u teoremi 3.1.16, sastoji od tri centralne simetrije, doprinećemo definisanjem specijalne vrste transformacije podudarnosti koju nazivamo klizajuća simetrija EP ravni.

DEFINICIJA 3.3.3. - *Klizajućom simetrijom* EP ravni nazivamo transformaciju podudarnosti te ravni koja predstavlja kompoziciju centralne rotacije $\rho_{O,\omega}$ i centralne simetrije σ_O, tj.

$$K_O = \sigma_O \circ \rho_{O,\omega} \ .$$

Tačku O nazivamo *centrom* klizajuće simetrije.

S obzirom na teoremu 3.3.5, iz definicije 3.3.3, imamo da je

$$K_O = \sigma_O \circ \rho_{O,\omega} = \rho_{O,\omega} \circ \sigma_O \ .$$

Glava 4.

DOKAZ LOGIČKE NEPROTIVUREČNOSTI EP GEOMETRIJE

Da bismo dokazali logičku neprotivurečnost EP geometrije daćemo realizaciju sistema aksioma ove geometrije izloženog u prvoj glavi. Naime, izgradićemo jedan model EP geometrije u projektivnoj ravni koja je odredjena aksiomatski. Objektima i relacijama projektivne ravni realizovaćemo osnovne objekte i relacije EP geometrije, a zatim interpretirati sistem aksioma.

4.1. REALIZACIJA EP GEOMETRIJE PREKO MODELA U PROJEKTIVNOJ RAVNI

Pretpostavimo da je zadata realna projektivna ravan π odredjena aksiomatski.[1] Neka je u toj ravni zadata degenerisana imaginarna kriva drugog reda koja se sastoji od para konjugovano kompleksnih pravih $\bar{p}$ i $\bar{q}$ i realne tačke S njihovog preseka. Projektivnom tačkom S kao središtem u projektivnoj ravni zadat je pramen projektivnih pravih. U tom pramenu parom konjugovano kompleksnih pravih $\bar{p}$ i $\bar{q}$ zadata je eliptična involucija, koju ćemo još nazvati i *apsolutna involucija*, a središte pramena S *nesvojstvenom tačkom* EP geometrije. Nesvojstvena tačku S i apsolutnu involuciju u projektivnom pramenu sa središtem u toj tački, nazivamo *apsolutnom* EP ravni.

---

[1] *Videti, na primer, aksiomatiku izloženu u udžbeniku Jefimova* [13] *ili M. Prvanović* [31].

4.1.1. Realizacija osnovnih objekata

DEFINICIJA 4.1.1. - Tačke projektivne ravni π različite od tačke S nazivamo tačkama geometrije EP ili kratko EP - *tačkama.*

DEFINICIJA 4.1.2. - Ako sa $\mathcal{P}$ označimo skup tačaka projektivne ravni π, onda skup $\mathcal{P} \setminus S$ čini EP - *ravan.*

DEFINICIJA 4.1.3. - Projektivnu pravu koja nije incidentna sa tačkom S nazivamo EP - *prava.*

DEFINICIJA 4.1.4. - EP - tačke A i B nazivamo EP - *kolinearnim* ako postoji EP - prava m , tako da je A, B $\in$ m i to simbolički označavamo: EP - (A — B).

EP - kolinearne tačke A i B odredjuju EP - pravu koju simbolički možemo označiti: EP - p(A,B).

DEFINICIJA 4.1.5. - EP - tačke M i N nazivamo EP - *paralelnim* ako ne postoji EP - prava sa kojom su one incidentne.

EP - paralelne tačke M i N označavamo: EP - (M | N).

Naime, ako su EP - tačke M i N EP - paralelne u modelu one su incidentne sa projektivnom pravom p(M,S).

DEFINICIJA 4.1.6. - Skup koji čini zadata EP - tačka A i sve EP - tačke koje su joj EP - paralelne nazivamo EP - *izotropni niz tačaka sa osnovom* A i označavamo ga sa: EP - izotropni niz $\tilde{a}$.

Prema tome, u modelu ako je A EP - tačka onda je $\tilde{a}$ = p(A,S)$\setminus$S EP - izotropni niz tačaka sa osnovom A. A kako je tačkom A i tačkom S u projektivnoj ravni odredjena jedinstvena projektivna prava p(A,S), to znači da je EP - tačkom A odredjen jedinstven EP - izotropni niz $\tilde{a}$.

EP - izotropni niz tačaka $\tilde{a}$ nazivamo još i EP - *izotropna prava* $\tilde{a}$ i označavamo je: EP - prava $\tilde{a}$.

DEFINICIJA 4.1.7. - Ako EP - tačka M nije incidentna sa EP - pravom m (misli se na incidenciju u projektivnom smislu) EP - *projekcija* tačke M na pravu m je EP - tačka P tako da je $P \in m$ i EP - $(P \mid M)$ i to zapisujemo:

$$P = EP - pr_m\, M .$$

No, ako je $M \in m$, onda je njena EP - projekcija na m sama tačka M.

4.1.2. Realizacija osnovnih relacija

DEFINICIJA 4.1.8. - Za dva EP - objekta kažemo da su EP - *incidentni* jedan sa drugim, ako su oni incidentni jedan sa drugim u smislu projektivne geometrije.

DEFINICIJA 4.1.9. - Za EP - kolinearne tačke A, B, C i D kažemo da par A, B EP - *razdvaja* par C, D ako ovi parovi razdvajaju jedan drugog u projektivnom smislu i to označavamo:

$$EP - (A, B \,//\, C, D).$$

DEFINICIJA 4.1.10. - EP - *duž* je projektivna duž one projektivne prave koja nije incidentna sa tačkom S.

Sa EP - duž $[AB]$, odnosno EP - duž $]AB[$ označavamo zatvorenu, odnosno otvorenu EP - duž sa krajnjim tačkama A i B.

DEFINICIJA 4.1.11. - Za EP - duži koje odredjuju dve EP - tačke incidentne sa jednom EP - pravom, kažemo da EP - *dopunjuju jedna drugu*, ako se dopunjuju projektivne duži kojima su ove EP - duži interpretirane.

Ako uočenu EP - duž sa krajnjim tačkama A i B označimo sa EP - duž AB, onda njenu EP - dopunu označavamo sa EP - duž $\overline{AB}$.

DEFINICIJA 4.1.12. - EP - *ugao* čiji su kraci EP - prave p i q je projektivni ugao koga odredjuju projektivne prave kojima su interpretirani kraci i koji pri tom ne sadrži projektivnu pravu incidentnu sa temenom i tačkom S.

Ako su EP - prave p i q kraci EP - ugla onda ga označavamo EP - $\angle$ pq. Medjutim, ako je $P \in p$, $Q \in q$ i $p \cap q = \{O\}$, onda pišemo: EP - $\angle$ POQ.

DEFINICIJA 4.1.13. - Za EP - tačku M EP - izotropnog niza tačaka $\tilde{m}$ kažemo da je EP - *izmedju* EP - tačaka A, B $\in \tilde{m}$, ako na projektivnoj pravoj p(M,S) par tačaka A, B razdvaja par tačaka M, S.

Ako je EP - tačka M EP - izmedju EP - tačaka A i B, onda to zapisujemo: EP - $(A \sim M \sim B)$.

DEFINICIJA 4.1.14. - EP - *izotropna duž* je ona projektivna duž, projektivne prave incidentne sa tačkom S, koja ne sadrži tačku S.

Ako su P i Q, EP - paralelne tačke, krajnje tačke EP - izotropne duži, onda tu duž označavamo: EP - duž $\tilde{PQ}$. Ako se radi o zatvorenoj, odnosno o otvorenoj duži onda pišemo:

$$\text{EP - duž } [\tilde{PQ}]\ , \quad \text{EP - duž }]\tilde{PQ}[\ .$$

DEFINICIJA 4.1.15. - EP - *izotropni poluniz tačaka* sa početnom EP - tačkom P koji je EP - incidentan sa EP - tačkom M, je projektivna duž PMS na projektivnoj pravoj p(P,S).

DEFINICIJA 4.1.16. - EP - *trotemenik* ABC je skup od tri razne EP - tačke A, B, C, od kojih su svake dve EP - kolinearne i pritom nisu istovremeno EP - incidentne sa jednom EP - pravom.

DEFINICIJA 4.1.17. - Ako su A, B i C tri EP - tačke tako da obrazuju EP - trotemenik i $\tilde{m}$ EP - izotropni niz tačaka, gde $A, B, C \notin \tilde{m}$, koji ima zajedničke EP - tačke X, Y, Z respektivno sa EP - dužima $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$, onda je

$$(\text{EP-duž}[AB]) \cup (\text{EP-duž}[BC]) \cup (\text{EP-duž}[AC])$$

EP - *trougao* koga označavamo: EP - Δ ABC.

DEFINICIJA 4.1.18. - Ako su A, B i C EP - tačke tako da su A, B i A, C EP - kolinearne, a B i C EP - paralelne i $\tilde{m}$ EP - izotropni niz tačaka, gde A, B, C $\notin \tilde{m}$, koji ima zajedničke EP - tačke X i Y sa EP - dužima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, onda je

$$(\text{EP-duž}[AB]) \cup (\text{EP-duž}[AC]) \cup (\text{EP-duž}[\widetilde{BC}])$$

EP - *jednougao* koga označavamo: EP - $\tilde{\Delta}$ BAC .

DEFINICIJA 4.1.19. - EP - *podudarnost* je kolineacija koja projektivnu ravan π preslikava na samu sebe i pritom nesvojstvenu tačku S i apsolutnu involuciju ostavlja invarijantne, tj. kolineacija koja apsolutnu EP ravni preslikava na samu sebe.

Dokažimo da važe teoreme.

TEOREMA 4.1.1. - Skup EP - podudarnosti predstavlja grupu u odnosu na proizvod preslikavanja.

Dokaz. - Označimo sa $\mathcal{G}$ skup svih kolineacija projektivne ravni π na samu sebe koje apsolutu EP - ravni ostavljaju invarijantnom. Neka su f i g dva proizvoljna preslikavanja tog skupa, tj. $f, g \in \mathcal{G}$. Dokažimo da i njihov proizvod (kompozicija) takodje element skupa $\mathcal{G}$, tj.

(1) $\quad g \circ f \in \mathcal{G}$.

Iz pretpostavke da kolineacija $f \in \mathcal{G}$, prema definiciji 4.1.19, sledi da transformacija f apsolutu EP - ravni ostavlja invarijantnom. To isto važi i za kolineaciju g . Prema tome, i proizvod kolineacija f i g jeste kolineacija koja apsolutu EP - ravni ostavlja invarijantnom, tj. važi (1).

Neka uredjeni par ($\mathcal{K}$, o) predstavlja grupu kolinearnih preslikavanja projektivne ravni na samu sebe.[1] Kao za proizvod kolineacija iz skupa $\mathbb{K}$ važi asocijativni zakon, to asocijativni zakon važi i za kolineacije koje pripadaju skupu $\mathbb{G} \subset \mathbb{K}$, tj. važi

(2) $(\forall f,g,h \in \mathbb{G})(f\circ(g\circ h) = (f\circ h)\circ h)$.

Neka je $I \in \mathbb{K}$ jedinični element grupe $(\mathbb{K},\circ)$. Poznato je da I zapravo predstavlja preslikavanje projektivne ravni koje sve tačke i sve prave projektivne ravni ostavlja invarijantne. Prema tome, identična transformacija I i apsolutu EP ravni ostavlja invarijantnom, tj. $I \in \mathbb{G}$, i pritom važi

(3) $(\exists I \in \mathbb{G})(\forall f \in \mathbb{G})(I\circ f = f\circ I = f)$.

Kako je $(\mathbb{K},\circ)$ grupa, to u odnosu na identično preslikavanje I za svaku kolineaciju $f \in \mathbb{K}$, postoji inverzno preslikavanje $f^{-1} \in \mathbb{K}$, tako da je

$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I .$$

Prema tome, i za svaku kolineaciju $g \in \mathbb{G} \subset \mathbb{K}$, postoji inverzna kolineacija $g^{-1} \in \mathbb{G}$, tako da je

(4) $(\forall g \in \mathbb{G})(g^{-1}\circ g = g\circ g^{-1} = I)$.

Dakle, iz relacija od (1) do (4), sledi da je $(\mathbb{G},\circ)$ grupa.
Q.E.D.

TEOREMA 4.1.2. - Harmonijska hormologija čiji su centar i osa incidentni respektivno sa parom homologih elemenata apsolutne involucije u projektivnom pramenu sa središtem S, predstavlja EP - podudarnost.

Dokaz. - Uočimo u projektivnoj ravni π nesvojstvenu tačku S i projektivni pramen pravih sa središtem u toj tački.

[1] *Vidi Četveruhin* [10], *str. 262.*

Neka je u tom pramenu pravih zadata eliptična involucija. Ovu involuciju kako je napred rečeno nazvali smo apsolutnom involucijom. Neka je p proizvoljna projektivna prava incidentna sa tačkom S, tj. $S \in p$. Projektivnoj pravoj p u apsolutnoj involuciji odgovara projektivna prava p', tako da je $S \in p'$. Uočimo tačku $P \in p' \setminus S$. Projektivnom pravom p kao osom i projektivnom tačkom P kao centrom zadata je u projektivnoj ravni π harmonijska homologija f . Transformacija f je involutarna kolineacija tako da

$$f\colon \pi \to \pi,\ f(P)=P\ ,\quad (\forall X \in p)(f(X)=X)\ .$$

Kako je tačka $S \in p$, to je $f(S) = S$. Dakle, harmonijska homologija nesvojstvenu tačku S ostavlja invarijantnu. Da harmonijska homologija f i apsolutnu involuciju preslikava na samu sebe, tj. par homologih elemenata preslikava na par homologih elemenata, sledi na osnovu dualne teoreme projektivnoj teoremi koja je data kod M. Prvanović [31] kao prva teorema na strani 223.

Prema tome, harmonijska homologija f apsolutu EP ravni preslikava na samu sebe, te prema definiciji 4.1.19, sledi da je f EP - podudarnost. Q.E.D.

Na osnovu teorema 4.1.1,2. može se dokazati i teorema:

TEOREMA 4.1.3. - Harmonijska homologija čiji je centar nesvojstvena tačka S, a osa proizvoljna projektivna prava koja nije incidentna sa tačkom S, predstavlja EP - podudarnost.

Dokaz. - Neka je zadata harmonijska homologija h sa centrom u nesvojstvenoj tački S i osom s , tako da $S \notin s$. Označimo sa m i m' homologe elemente u apsolutnoj involuciji projektivnog pramena sa središtem u tački S, a

$$m \cap s = \{M\}\ ,\quad m' \cap s = \{M'\}\ .$$

Neka je f harmonijska homologija sa centrom M i osom p(M',S), a g harmonijska homologija sa centrom M' i osom p(M,S). Prema teoremi 4.1.2, homologije f i g su EP - podudarnosti, tj. $f,g \in \mathfrak{G}$. Njihova kompozicija $g \circ f$ je harmonijska homologija[1)] čiji je centar tačka S ({S} =m ∩ m'), a osa projektivna prava s=p(M,M'), tj. važi

(1) $\quad h = g \circ f$.

Prema teoremi 4.1.1, s obzirom na (1), sledi $h = g \circ f \in \mathfrak{G}$, odnosno harmonijska homologija h je EP - podudarnost. Q.E.D.

U operativnom delu tačke 4.2, tj. pri interpretaciji aksioma EP geometrije često ćemo koristiti EP - podudarnosti o kojima je bilo reči u teoremama 4.1.2,3.

Na osnovu teoreme 4.1.1, sledi da proizvod EP - podudarnosti o kojima je bilo reči u teoremama 4.1.2,3. takodje predstavlja EP - podudarnost.

Dalje, možemo sada dati definicije:

DEFINICIJA 4.1.20. - EP - *centralna simetrija* je harmonijska homologija čija osa je incidentna sa nesvojstvenom tačkom S, a centar incidentan sa projektivnom pravom koja u apsolutnoj involuciji odgovara osi.

EP - centralnu simetriju sa centrom P(P ≠ S), označavamo: EP - σ_P.

DEFINICIJA 4.1.21. - EP - *osna simetrija* je harmonijska homologija čiji je centar nesvojstvena tačka S, a osa projektivna prava koja nije incidentna sa tačkom S.

Na osnovu teorema 4.1.2,3, sledi da su EP - centralna i EP - osna simetrija EP - podudarnosti.

DEFINICIJA 4.1.22. - Dve EP - figure su EP - *podudarne*, ako postoji EP - podudarnost koja jednu figuru preslikava na drugu.

---

1) *Vidi M. Prvanović* [31], *teorema 8, str. 85.*

Ako su EP - figure F i F' EP - podudarne, onda to zapisujemo:

$$\text{EP - figura } F \overset{EP}{=\!=} \text{ EP - figuri } F' \text{ .}$$

DEFINICIJA 4.1.23. - Ako su EP - tačke M i N EP - incidentne sa EP - pravom m i pritom

$$\text{EP - duž } MN \overset{EP}{=\!=} \text{ EP - duži } \overline{MN} \text{ ,}$$

onda EP - duži MN i $\overline{MN}$ nazivamo EP - *poluprave*, a tačke M i N EP - *suprotne tačke*.

Na osnovu definicija 4.1.20,22, odmah zaključujemo: ako je zadata EP - centralna simetrija σ_M i EP - prava m incidentna sa centrom simetrije M, onda je tačka N incidentna sa projektivnom pravom kojom je u modelu interpretirana EP - prava m i projektivnom pravom p(S,X) kojom je interpretirana osa EP - σ_M, EP - suprotna tačka tački M; projektivnom duži MN i njenom dopunom $\overline{MN}$ na projektivnoj pravoj p(M,N) u modelu interpretirane su EP - poluprave MN i $\overline{MN}$.

Pokazaćemo da ovako definisani EP - objekti i EP - relacije čine projektivni model geometrije EP, tj. dualne geometrije euklidskoj geometriji.

4.2. INTERPRETACIJA AKSIOMA EP GEOMETRIJE U PROJEKTIVNOM MODELU

Sistem aksioma EP geometrije dat u prvom poglavlju interpretiraćemo u projektivnom modelu izloženom u tački 4.1.

4.2.1. Interpretacija aksioma incidencije

AKSIOMA I_1. - Svake dve EP - tačke su EP - incidentne sa najviše jednom EP - pravom.

Dokaz. - Neka su A i B dve proizvoljne EP - tačke. U projektivnoj ravni tačkama A i B odredjena je jedna i samo jedna projektivna prava p(A,B). Ako projektivna tačka S nije incidentna sa pravom p(A,B), onda je prema definiciji 4.1.3, to EP - prava incidentna sa tačkama A i B. Medjutim, ako je tačka S incidentna sa pravom p(A,B), onda prema definiciji 4.1.5, projektivnom pravom p(A,B) nije interpretirana ni jedna EP - prava, tj. EP - tačke A i B nisu incidentne ni sa jednom EP - pravom. U ovom slučaju EP - tačke A i B su EP - paralelne, odnosno prema definiciji 4.1.6, one su incidentne sa EP - izotropnim nizom tačaka $\tilde{a}$.

AKSIOMA I_2. - Svaka EP - prava je EP - incidentna sa najmanje tri EP - tačke.

Dokaz. - Neka je zadata proizvoljna EP - prava. Ona je prema definiciji 4.1.3, u modelu interpretirana projektivnom pravom koja nije incidentna sa tačkom S. Prema aksiomi I_3 projektivne geometrije, svaka projektivna prava je incidentna sa najmanje tri tačke, koje su prema definiciji 4.1.1. i EP - tačke. Dakle, u posmatranom modelu zadovoljena je aksioma I_2. No, ne samo ona, već i

AKSIOMA I_3. - Postoji EP - prava m i EP - tačka M koje nisu EP - incidentne.

AKSIOMA I_4. - Ako EP - tačka M nije EP - incidentna sa EP - pravom m , onda postoji jedna i samo jedna EP - tačka P incidentna sa pravom m i EP - paralelna sa tačkom M.

Dokaz. - Neka je zadata EP - tačka M i EP - prava m tako da $M \notin m$. U projektivnoj ravni tačkama M i S odredjena je jedna i samo jedna projektivna prava p(M,S). Projektivna prava kojom je u modelu interpretirana EP - prava m i prava p(M,S), prema projektivnoj aksiomi I_9, imaju jednu i samo jednu zajedničku tačku. Označimo tu tačku sa P. Projektivnom tačkom P interpretirana je EP - tačka P incidentna sa EP - pravom m . Prema definiciji 4.1.6, $p(M,S) \setminus S$ je EP - izotropni niz tačaka koji je incidentan sa EP - tačkama M i P. Dakle, tačka P je EP - paralelna tački M, tj. EP - $(P \mid M)$.

AKSIOMA I_5. - Ma kakve bile dve EP - prave postoji EP - tačka koja je EP - incidentna sa svakom od njih.

Da je ova aksioma takodje u modelu zadovoljena, neposredno zaključujemo na osnovu definicije 4.1.3, i projektivne aksiome I_9.

4.2.2. Interpretacija aksioma rasporeda

AKSIOMA II_1. - Za tri razne EP - tačke A,B i C EP - incidentne sa jednom EP - pravom, postoji EP - tačka D incidentna sa tom pravom, tako da par A,B EP - razdvaja par C,D, tj. važi

$$EP - (A,B \; // \; C,D).$$

Da je ova aksioma u projektivnom modelu, zadovoljena neposredno sledi na osnovu definicije 4.1.3, projektivne aksiome II_1 i definicije 4.1.9.

Na analogan način, na osnovu definicije 4.1.3, projektivnih aksioma II_2, II_3, II_4, II_5 i II_6 i definicije 4.1.9, zaključujemo da su, redom, aksioma II_2, II_3, II_4, II_5 i II_6

EP - geometrije, takodje zadovoljene u posmatranom modelu.

AKSIOMA II_7. - Ako su M_i EP - tačke EP - incidentne sa EP - pravom m i

(1) $$P_i = EP - pr_p\, M_i\ ,\quad i=1,2,3,4,$$

tada ako

(2) $$EP - (M_1,M_2 \mathbin{//} M_3,M_4)\ ,$$

onda i

(3) $$EP - (P_1,P_2 \mathbin{//} P_3,P_4),$$

za bilo koju EP - pravu p .

Dokaz. - Neka su EP - tačke M_i, $i=1,2,3,4$ EP - incidentne sa EP - pravom m i pritom važi (2), a p proizvoljna EP - prava tako da važi (1).

Pretpostavimo da se EP - prave m i p ne poklapaju. To znači da EP - tačke $M_i \notin p$, $i=1,2,3,4$. Označimo sa $p(M_1,M_2)$ i $p(P_1,P_2)$ respektivno projektivne prave kojima su u modelu interpretirane EP - prave m i p .

Prema prvom delu definicije 4.1.7, s obzirom na (1), sledi da su EP - $(M_i \mid P_i)$, $i=1,2,3,4$, a prema definiciji 4.I.5, da su projektivne prave $p(M_i,P_i)$, incidentne sa projektivnom tačkom S (S je nesvojstvena tačka EP - ravni). Dakle, projektivne prave $p(M_i,P_i)$, $i=1,2,3,4$, čine projektivni pramen sa središtem S. Projektivna prava $p(P_1,P_2)$ seče ovaj pramen pravih respektivno u tačkama P_i, $i=1,2,3,4$.

Na osnovu definicije 4.1.9, s obzirom na (2), sledi da za projektivne tačke M_i incidentne sa projektivnom pravom $p\ (M_1,M_2)$, imamo da

(4) $$M_1,\ M_2 \mathbin{//} M_3,\ M_4.$$

Na osnovu projektivne aksiome II_6, s obzirom na (4), sledi da

(5) $P_1, P_2 // P_3, P_4$.

Prema definiciji 4.1.9, s obzirom na (5), sledi relacija (3).

U slučaju da se EP - prave m i p poklapaju, onda na osnovu drugog dela definicije 4.1.7, s obzirom na (2), takodje sledi relacija (3). Q.E.D.

4.2.3. Interpretacija aksiome neprekidnosti

AKSIOMA III_1. - Ako su sve EP - tačke EP - duži]AB[podeljene na dve klase K_1 i K_2, pri čemu:

(i) Klase K_1 i K_2 su neprazni skupovi EP - tačaka;

(ii) Za svaku EP - tačku $P \in K_1$ i svaku EP - tačku $Q \in K_2$, važi relacija

$$EP - (A, Q // P, B) ,$$

tada u jednoj od klasa K_1 i K_2 postoji EP - tačka M, takva da za svaku EP - tačku $P \in K_1 \setminus \{M\}$ i svaku EP - tačku $Q \in K_2 \setminus \{M\}$, važe relacije

$$EP - (A,M // P,B) \wedge EP - (A,Q // M,B) .$$

Ova aksioma neprekidnosti zadovoljena je u posmatranom projektivnom modelu, što neposredno proizilazi iz definicije 4.1.10, i aksiome neprekidnosti[1] projektivne geometrije.

---

[1] *Videti na primer Četveruhin* [10], *str. 88.*

4.2.4. Interpretacija aksioma podudarnosti

Imajući u vidu definiciju 4.1.19, i nakon toga uočene harmonijske homologije koje predstavljaju EP - podudarnost, možemo dokazati teoreme.

TEOREMA 4.2.1. - EP - podudarnost preslikava EP - ravan na samu sebe.

Dokaz. - Neka je zadata EP - ravan. Uočimo u projektivnoj ravni π proizvoljnu tačku P različitu od nesvojstvene tačke S. Projektivnoj pravoj p(P,S) u apsolutnoj involuciji projektivnog pramena sa središtem S, odgovara prava tog pramena koju ćemo označiti sa p . Tačkom P kao centrom i pravom p kao osom u projektivnoj ravni zadata je harmonijska homologija f. Prema teoremi 4.1.2, harmonijska homologija f je EP - podudarnost. Neka je A proizvoljna EP - tačka. Prema definiciji 4.1.1, tačka A je različita od tačke S. Za ovu tačku važi: ili $A \in p$, ili $A \notin p$.

U slučaju da je EP - tačka $A \in p$, a inače je $A \neq S$, EP - podudarnost f tačku A preslikava u tu istu tačku, dakle, u EP - tačku.

Ako EP - tačka $A \notin p$ i $A \neq S$, onda EP - podudarnost f tačku A preslikava u tačku $f(A)$ incidentnu sa projektivnom pravom p(A,P), tako da je par tačaka A, $f(A)$ harmonijski konjugovan sa parom tačaka P, P_o, gde je $\{P_o\} = p \cap p(A,P)$. Tačka $P_o \in p$ je ili različita od tačke $S \in p$, ili se P_o poklapa sa tačkom S, tj. $P_o = S$.

Ako je $P_o \neq S$, to znači da projektivna tačka $S \notin p(A,P)$, te prema tome, tačka $f(A)$ se ne poklapa sa tačkom S, a to prema definiciji 4.1.1, znači da je $f(A)$ EP - tačka.

U slučaju da je $P_o = S$, onda je par tačaka A, $f(A)$ harmonijski konjugovan sa parom tačaka P, S, te se i u ovom slučaju tačka $f(A)$ ne poklapa sa tačkom S, tj. $f(A)$ je EP - tačka.

Dakle, EP - podudarnost f preslikava svaku EP - tačku na EP - tačku, odnosno EP - ravan na samu sebe. Do istog zaključka dolazimo i u slučaju da je EP - podudarnost bilo koji element grupe ($\mathcal{G}$,o). Q.E.D.

TEOREMA 4.2.2. - Svaka EP - podudarnost preslikava EP - pravu (EP - izotropni niz tačaka) na EP - pravu (na EP - izotropni niz tačaka).

Dokaz. - Neka je zadata EP - podudarnost. Prema definiciji 4.1.19, EP - podudarnost je kolineacija koja projektivnu ravan π preslikava na samu sebe i pritom nesvojstvenu tačku S i apsolutnu involuciju ostavlja invarijantne. Ovako zadata kolineacija projektivne prave preslikava na projektivne prave i to na sledeći način: ako projektivna prava nije incidentna (incidentna) sa tačkom S, ona se preslikava, takodje, na projektivnu pravu koja nije incidentna (je incidentna) sa tačkom S. Kako su po definiciji 4.1.3. (definiciji 4.1.6) EP - prave (EP - izotropni nizovi tačaka) u modelu interpretirane projektivnim pravama koje nisu incidentne (jesu incidentne) sa tačkom S, to EP - podudarnost EP - prave (EP - izotropne nizove tačaka) preslikava na EP - objekte iste vrste. Q.E.D.

POSLEDICE TEOREME 4.2.2. su:

EP - podudarnost preslikava EP - duž (EP - izotropnu duž) na EP - duž (na EP - izotropnu duž); EP - ugao na EP - ugao.

AKSIOMA IV_1. - EP - duž EP - podudarna je sama sebi, tj.

(1) EP - duž AB $\overset{EP}{\equiv}$ EP - duži AB.

Dokaz. - Neka je zadata EP - duž AB. Označimo sa p(A,B) projektivnu pravu koja je incidentna sa projektivnom duži AB kojom je u modelu interpretirana EP - duž AB. Neka je h harmonijska homologija čija je osa prava p(A,B), a centar nesvojstvena tačka S. Prema teoremi 4.1.3, harmonijska homologija h je EP - podudarnost, a pritom važi

$$h(\text{EP - duži AB}) \doteqdot \text{EP - duž AB},$$

a što prema definiciji 4.1.22, dokazuje egzistenciju relacije (1). Q.E.D.

AKSIOMA IV_2. - Za svaku EP - duž $\tilde{MN}$ i svaki EP - izotropni poluniz $\tilde{m}'$ sa početnom tačkom M′, postoji jedinstvena EP - tačka N′ ∈ $\tilde{m}'$, takva da je

(1) $$\text{EP - duž } \tilde{MN} \overset{EP}{\equiv} \text{EP - duži } \tilde{M'N'},$$

Dokaz. - Neka je zadata EP - duž $\tilde{MN}$ i EP - izotropni poluniz $\tilde{m}'$ sa početnom tačkom M′. Za EP - tačke M i M′, važi

(2a,b) $$\text{ili EP - (M — M')}, \quad \text{ili EP - (M | M')} .$$

Pretpostavimo da je tačna relacija (2a). To znači da su u modelu tačke M i M′ incidentne sa projektivnom pravom p(M,M′) koja nije incidentna sa nesvojstvenom tačkom S. Označimo sa m i m′ projektivne prave pramena sa središtem u tački S koje u apsolutnoj involuciji odgovaraju respektivno projektivnim pravama p(M,S) i p(M′,S). Neka je dalje:

$$p(M,M') \cap m = \{M_1\}, \quad p(M,M') \cap m' = \{M'_1\}.$$

Kako je apsolutna involucija u projektivnom pramenu S(p(M,S), m, p(M′,S), m′,...) eliptična, to na projektivnoj pravoj p(M,M′) za parove tačaka M, M_1 i M′, M'_1, važi

(3) $$M,M_1 \;//\; M', M'_1 .$$

Prema projektivnoj aksiomi II_3 s obzirom na relaciju (3), sledi

(4) $\rceil(M,M' \,//\, M_1,M_1')$.

S obzirom na relaciju (4), na projektivnoj pravoj $p(M,M')$ postoji jedan i samo jedan par projektivnih tačaka P, P_o koji je harmonijski konjugovan kako sa parom M,M', tako i sa parom M_1,M_1' [1]. Na slici 4.1. tačke P i P_o konstruisane su prema poznatoj konstrukciji.[2] Par tačaka P, P_o predstavlja par homologih elemenata eliptične involucije koju na projektivnoj pravoj $p(M,M')$ indukuje apsolutna involucija, te su projektivne prave $p(P,S)$ i $p(P_o,S)$ par homogenih pravih te involucije. Projektivnom tačkom P kao centrom i projektivnom pravom $p(P_o,S)$ kao osom zadata je harmonijska homologija f. Prema teoremi 4.1.2, sledi da je transformacija f EP - podudarnost i pritom je $f(M)=M'$, $f(S)=S$, te je

(5) $f(p(M,S)) = p(M',S)$.

Na projektivnoj pravoj $p(M',S)$ tačkama M' i S odredjene su dve projektivne duži koje jedna drugu dopunjuju. Jednom od njih, označimo je sa $M'S$, interpretiran je u modelu EP - izotropni poluniz sa početnom tačkom M'. Projektivnom duži MN koja je incidentna sa projektivnom pravom $p(M,S)$ i koja ne sadrži tačku S u modelu interpretirana je EP - duž $\widetilde{MN}$. Stoga s obzirom na (5), sledi da je

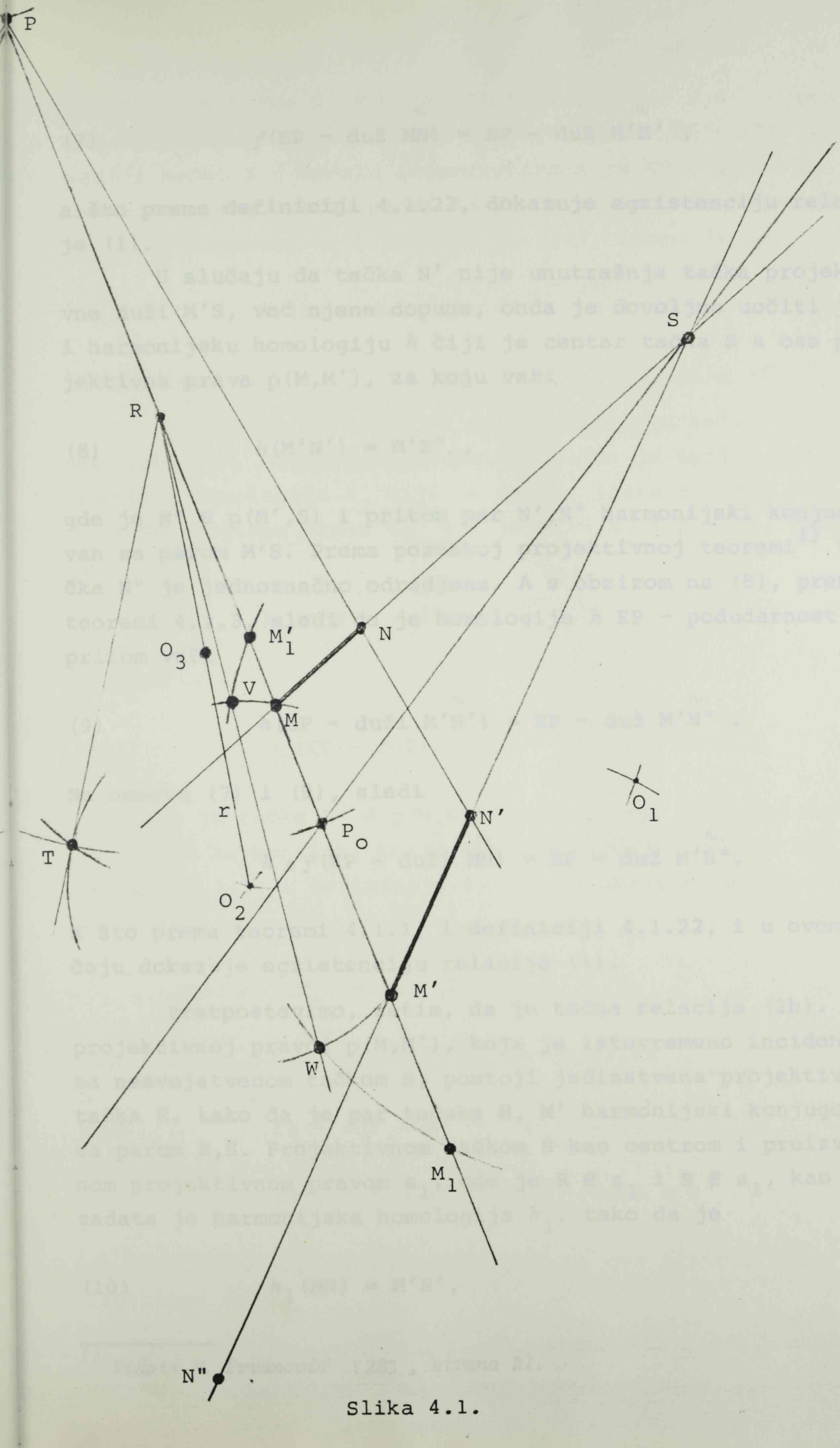
(6) $f(MN) = M'N'$,

gde je $\{N'\} = p(M',S) \cap p(N,P)$. Tačka N' je jednoznačno odredjena, a projektivna duž $M'N'$ projektivne prave $p(M',S)$ koja ne sadrži tačku S u modelu interpretirana je EP - duž $\widetilde{M'N'}$. Dakle, na osnovu relacije (6), sledi da je

---

1) *Videti M. Prvanović* [28], *strana 34.*

2) *Videti A. Matejev* [24], *strana 86 i R. Tošić* [43], *strana 40.*



Slika 4.1.

(7) $\quad f(\text{EP - duž } \tilde{MN}) = \text{EP - duž } \tilde{M'N'}$,

a što prema definiciji 4.1.22, dokazuje egzistenciju relacije (1).

U slučaju da tačka N′ nije unutrašnja tačka projektivne duži M′S, već njene dopune, onda je dovoljno uočiti još i harmonijsku homologiju h čiji je centar tačka S a osa projektivna prava p(M,M′), za koju važi

(8) $\quad h(M'N') = M'N''$,

gde je $N'' \in p(M',S)$ i pritom par N′,N" harmonijski konjugovan sa parom M′S. Prema poznatoj projektivnoj teoremi[1] tačka N" je jednoznačno odredjena. A s obzirom na (8), prema teoremi 4.1.3, sledi da je homologija h EP - podudarnost i pritom važi

(9) $\quad h(\text{EP - duži } \tilde{M'N'}) = \text{EP - duž } \tilde{M'N''}$.

Na osnovu (7) i (9), sledi

$$h \circ f(\text{EP - duži } \tilde{MN}) = \text{EP - duž } \tilde{M'N''},$$

a što prema teoremi 4.1.1, i definiciji 4.1.22, i u ovom slučaju dokazuje egzistenciju relacije (1).

Pretpostavimo, zatim, da je tačna relacija (2b). Na projektivnoj pravoj p(M,M′), koja je istovremeno incidentna sa nesvojstvenom tačkom S, postoji jedinstvena projektivna tačka R, tako da je par tačaka M, M′ harmonijski konjugovan sa parom R,S. Projektivnom tačkom S kao centrom i proizvoljnom projektivnom pravom s_1, gde je $R \in s_1$ i $S \notin s_1$, kao osom zadata je harmonijska homologija h_1, tako da je

(10) $\quad h_1(MN) = M'N'$,

1) *Videti M. Prvanović* [28] , *strana 21.*

pri čemu je tačka $N' \in p\ (M,M')$ i pritom par N,N' harmonijski konjugovan sa parom R,S, a projektivnom duži $M'N'$ koja ne sadrži tačku S u modelu interpretirana je EP - duž $M'\tilde{N}'$. Na osnovu teoreme 4.1.3, sledi da je harmonijska homologija h_1 EP - podudarnost, te s obzirom na (10), imamo da je

$$(11) \qquad h_1(\text{EP - duži } \tilde{MN}) = \text{EP - duž } M'\tilde{N}',$$

a što prema definiciji 4.1.22, dokazuje relaciju (1).

U slučaju da tačka N' nije unutrašnja tačka projektivne duži $M'S$, već njene dopune, dovoljno je uočiti još i harmonijsku homologiju h_2 čiji je centar tačka S a osa proizvoljna projektivna prava s_2, gde je $M' \in s_2$ i $S \notin s_2$, tako da je

$$h_2(M'N') = M'N",$$

odnosno

$$(12) \qquad h_2(\text{EP - duži } M'\tilde{N}') = \text{EP - duž } M'\tilde{N}" ,$$

pri čemu je tačka $N" \in p(M,M')$ i pritom par projektivnih tačaka M',S harmonijski konjugovan sa parom $N',N"$. Na osnovu teoreme 4.1.1, i definicije 4.1.22, s obzirom na (11) i (12), sledi relacija (1). Q.E.D.

AKSIOMA IV_3. - Ako je

$$(1) \qquad \text{EP - duž } A'B' \overset{EP}{\equiv} \text{EP - duži } AB ,$$

i

$$(2) \qquad \text{EP - duž } A"B" \overset{EP}{\equiv} \text{EP - duži } AB ,$$

onda je

$$(3) \qquad \text{EP - duž } A'B' \overset{EP}{\equiv} \text{EP - duži } A"B" .$$

Na analogan način formuliše se ova aksioma i za EP - izotropne duži.

Dokaz. - Iz (1) i (2), prema definiciji 4.1.22, sledi da postoje EP - podudarnosti f i g, tako da je

(4) f(EP - duži A′B′) = EP - duž AB ,

i

(5) g(EP - duži A"B") = EP - duž AB .

Za transformaciju g, prema teoremi 4.1.1, postoji inverzna transformacija g^{-1}, tako da s obzirom na (5), važi

(6) g^{-1}(EP - duži AB) = EP - duž A"B" .

Iz (4) i (6), dobijamo

$g^{-1} \circ f$(EP - duži A′B′) = EP - duž A"B" ,

što prema definiciji 4.1.22, dokazuje egzistenciju relacije (3).

Na analogan način pokazuje se da je ova aksioma zadovoljena i za EP - izotropne duži. Q.E.D.

AKSIOMA IV$_4$. - Ako je M unutrašnja tačka EP - duži AB ni jedna od EP - duži AM i MB koja je sadržana u EP - duži AB nije EP - podudarna EP - duži AB.

Dokaz. - Neka je data EP - duž AB i neka je M unutrašnja tačka te duži. Označimo sa p(A,B) projektivnu pravu koja je incidentna sa projektivnom duži AMB kojom je u modelu interpretirana EP - duž AB sa unutrašnjom tačkom M. Kako je EP - duž AM incidentna sa EP - duži AB to je ona interpretirana projektivnom duži koja predstavlja dopunu projektivne duži ABM na pravoj p(A,B). Ako ovu duž kratko označimo sa AM, onda imamo da je

(1) $]AM[\subset]AMB[$.

Pretpostavimo da tvrdjenje aksiome nije tačno, tj. da važi

(2) $\quad$ EP - duž AM $\overset{EP}{=\!=}$ EP - duž AB.

Iz pretpostavke (2), prema definiciji 4.1.22, sledi da postoji EP - podudarnost f, tako da je

(3) $\quad$ f(EP - duži AM) = EP - duž AB.

EP - podudarnost f, prema definiciji 4.1.19, je kolineacija projektivne ravni π na samu sebe koja nesopstvenu tačku S i apsolutnu involuciju ostavlja invarijantne. Prema tome, za kolineaciju f, važi

$$f(S) = S \ , \quad f(A) = A \quad \text{i} \quad f(M) = B \ ,$$

a to znači da EP - podudarnost f predstavlja harmonijsku homologiju koja je zadata osom $p(A,S)$ i parom homologih tačaka M i B. Centar transformacije f je projektivna tačka $P \in p(A,B)$ tako da je par tačaka A,P harmonijski konjugovan sa parom tačaka M,B.

Na osnovu relacije (3), i osobine harmonijske homologije sledi da harmonijska homologija f preslikava projektivnu duž]AM[kojom je u modelu interpretirana EP - duž AM na projektivnu duž]AMB[kojom je u modelu interpretirana EP - duž AB i pritom presek ovih duži je prazan skup, tj.

(4) $\quad$ $]AM[\cap]AMB[= \emptyset$.

Medjutim, relacija (4) je protivurečna relaciji (1). Dakle, pretpostavka (2) dovodi do kontradikcije, a to znači da je tvrdjenje aksiome tačno.

Na isti način pokazuje se da EP - duž MB nije EP - podudarna EP - duži AB. Q.E.D.

AKSIOMA IV$_5$. - Ako je

(1) $\quad$ EP - duž AB $\overset{EP}{=\!=}$ EP - duži A′B′,

a M unutrašnja tačka EP - duži AB, postoji unutrašnja tačka M′ EP - duži A′B′, tako da je

(2) EP - duž AM $\overset{EP}{\equiv}$ EP - duži A′M′,

i

(3) EP - duž MB $\overset{EP}{\equiv}$ EP - duži M′B′.

Dokaz. - Neka je data EP - duž AB i neka je M njena unutrašnja tačka. Projektivnom duži AMB u modelu interpretirana je ova EP - duž. Neka je A′B′ projektivna duž kojom je u modelu interpretirana EP - duž A′B′. Iz pretpostavke (1), sledi postoji EP - podudarnost f, tako da je

$$f(\text{EP - duži AB}) = \text{EP - duž A}'\text{B}' ,$$

odnosno, transformacija f projektivnu duž AMB preslikava na projektivnu duž A′M′B′. Kako je transformacija f prema definiciji 4.1.19, kolineacija to se pritom i projektivna prava p(A,B) preslikava na projektivnu pravu p(A′,B′), tj. važi

$$f(p(A,B)) = p(A',B').$$

Prema tome, i projektivna duž koja predstavlja dopunu duži ABM koju ćemo kratko označiti sa AM, odnosno projektivna duž koja predstavlja dopunu duži MAB koju, takodje, kratko označavamo sa MB, preslikava se transformacijom f na projektivnu duž A′M′, odnosno M′B′, tj. važi

(4) f(EP - duži AM) = EP - duž A′M′ ,

odnosno

(5) f(EP - duži MB) = EP - duž M′B′ ,

gde su projektivne duži A′M′ i M′B′, kojima su modelu interpretirane EP - duži A′M′ i M′B′, incidentne sa projektivnom duži A′B′ ≡ A′M′B′ , kojom je u modelu interpretirana EP - duž A′B′.

Iz (4), odnosno (5), prema definiciji 4.1.22, sledi egzistencija relacije (2) i (3). Q.E.D.

AKSIOMA IV_6. - Ako je

(1) $\quad$ EP - duž AB $\overset{EP}{\equiv}$ EP - duži A′B′ ,

onda su i njihove dopune EP - podudarne, tj.

(2) $\quad$ EP - duž $\overline{AB}$ $\overset{EP}{\equiv}$ EP - duži $\overline{A'B'}$.

Dokaz. - Neka su zadate EP - duži AB i A′B′ za koje važi relacija (1). Označimo sa p(A,B) i p(A′,B′) projektivne prave koje su incidentne sa projektivnim dužima AB i A′B′, kojima su u modelu interpretirane zadate EP - duži. Iz pretpostavke (1), sledi postoji EP - podudarnost f , tako da je

(3) $\quad$ f(EP - duži AB) = EP - duž A′B′ .

Iz (3), sledi da je $f(A) = A'$ i $f(B) = B'$. Prema tome, i projektivna prava p(A,B) kolineacijom f preslikava se na projektivnu pravu p(A′, B′), tj.

(4) $\quad$ $f(p(A,B)) = p(A',B')$.

Označimo sa $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ projektivne duži koje predstavljaju dopune projektivnim dužima AB i A′B′. Njima su u modelu interpretirane dopune EP - duži AB i A′B′, tj. EP - duži $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$. Iz relacija (3) i (4), sledi

f(EP - duži $\overline{AB}$) = EP - duž $\overline{A'B'}$,

a što prema definiciji 4.1.22, dokazuje egzistenciju relacije (2). Q.E.D.

AKSIOMA IV_7. - Za svaku EP - tačku M EP - incidentnu sa EP - pravom m postoji EP - tačka N ∈ m, tako da je

(1) $\quad$ EP - duž MN $\overset{EP}{\equiv}$ EP - duži $\overline{MN}$.

Dokaz. - Neka je zadata EP - prava m i proizvoljna tačka $M \in m$. Označimo sa $p(M,X)$ projektivnu pravu kojom je u modelu interpretirana EP - prava m . Prema definiciji 4.1.3, sledi da $S \notin p(M,X)$. Projektivnoj pravoj $p(M,S)$ u apsolutnoj involuciji projektivnog pramena sa središtem S odgovara prava $p(M'S)$. Označimo sa

$$p(M,X) \cap p(M',S) = \{N\} .$$

Tačkom M kao centrom i projektivnom pravom $p(M',S)$ kao osom zadata je harmonijska homologija f , koja prema teoremi 4.1.2, predstavlja EP - podudarnost. Na projektivnoj pravoj $p(M,X)$ tačkama M i N zadate su dve projektivne duži koje jedna drugu dopunjuju. Označimo jednu od njih sa MN, a drugu sa $\overline{MN}$. Za ove dve duži i harmonijsku homologiju f, važi

$$(\forall A \in]MN[)(f(A) \in]\overline{MN}[), \text{ tj. } f(MN) = \overline{MN} ,$$

odnosno

(2) $\quad$ f(EP - duži MN) = EP - duž $\overline{MN}$.

Prema definiciji 4.1.22, s obzirom na relaciju (2), sledi relacija (1). Q.E.D.

AKSIOMA IV_8. - Ma koje dve EP - poluprave su EP - podudarne.

Dokaz. - Neka su zadate dve proizvoljne EP - poluprave MN i M'N'. Označimo sa $p(M,N)$ i $p(M',N')$ projektivne prave incidentne sa projektivnim dužima MN i M'N' kojima su u modelu interpretiranje EP - poluprave MN i M'N'. Ove projektivne prave nisu incidentne sa nesvojstvenom tačkom S. Stoga ako pretpostavimo da su EP - poluprave MN i M'N' incidentne sa različitim EP - pravama, postoje projektivne tačke P i M", tako da je

$$p(M,N) \cap p(M',N') = \{P\}\ , \quad p(M,S) \cap p(M',N') = \{M''\}\ .$$

Na projektivnoj pravoj p(M,S) za tačke M,M" i S postoji četvrta harmonijska tačka S_o, tako da je par M,M" harmonijski konjugovan sa parom S, S_o. Projektivnom pravom $p(P,S_o)$ kao osom i projektivnom tačkom S kao centrom, zadata je harmonijska homologija h, tako da je (v. sliku 4.2)

$$h(P) = P, \quad h(M) = M''\ .$$

Kako je transformacija h istovremeno i kolineacija, to imamo da je

$$h(p(M,N)) = p(M'',N'')\ ,$$

gde je $\{N''\} = p(N,S) \cap p(M',N')$, a projektivna prava p(M",N") poklapa se sa projektivnom pravom p(M',N'). Dakle, harmonijska homologija h projektivnu duž MPN preslikava na projektivnu duž M"PN", kao i njihove dopune. Kako je prema teoremi 4.1.3, transformacija h i EP - podudarnost, to imamo da je

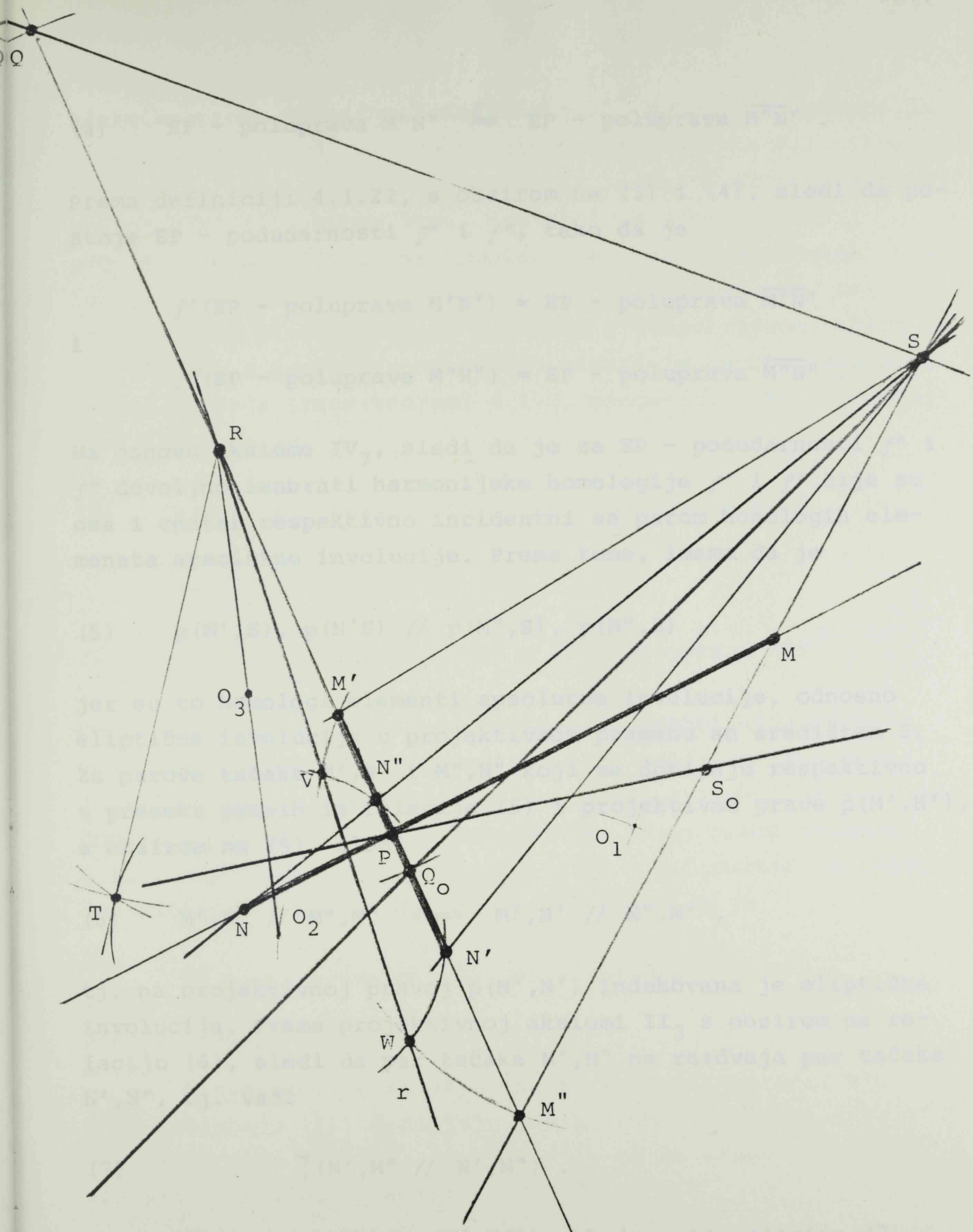
(1) h(EP - poluprave MN) = EP - poluprava M"N" ,

što prema definiciji 4.1.22, znači da je

(2) EP - poluprava MN $\overset{EP}{\equiv}$ EP - polupravom M"N" .

Dakle, na projektivnoj pravoj p(M',N') postoji projektivna duž M'N', kojom je u modelu interpretirana EP - poluprava M'N', i projektivna duž M"N", kojom je u modelu interpretirana EP - poluprava M"N". Na osnovu definicije 4.1.23, za uočene EP - poluprave važi:

(3) EP - poluprava M'N' $\overset{EP}{\equiv}$ EP - poluprava $\overline{M'N'}$, i



Slika 4.2.

(4) EP - poluprava M"N" $\overset{EP}{\equiv}$ EP - poluprava $\overline{M"N"}$.

Prema definiciji 4.1.22, s obzirom na (3) i (4), sledi da postoje EP - podudarnosti f' i f'', tako da je

f'(EP - poluprave M′N′) = EP - poluprava $\overline{M'N'}$

i

f''(EP - poluprave M"N") = EP - poluprava $\overline{M"N"}$.

Na osnovu aksiome IV_7, sledi da je za EP - podudarnosti f' i f'' dovoljno izabrati harmonijske homologije f' i f'' čije su osa i centar respektivno incidentni sa parom homologih elemenata apsolutne involucije. Prema tome, imamo da je

(5) p(M′,S), p(N′S) // p(M",S), p(N",S) ,

jer su to homologi elementi apsolutne involucije, odnosno eliptične involucije u projektivnom pramenu sa središtem S. Za parove tačaka M′,N′ i M",N" koji se dobijaju respektivno u preseku pravih iz relacije (5) i projektivne prave p(M′,N′), s obzirom na (5), sledi

(6) M′,N′ // M",N" $\Longleftrightarrow$ M′,N′ // N",M" ,

tj. na projektivnoj pravoj p(M′,N′) indukovana je eliptična involucija. Prema projektivnoj aksiomi II_3 s obzirom na relaciju (6), sledi da par tačaka M′,M" ne razdvaja par tačaka N′,N", tj. važi

(7) $\neg$(M′,M" // N′,N") .

Na projektivnoj pravoj p(M′,N′) s obzirom na relaciju (7), postoji jedan i samo jedan projektivni par tačaka Q, Q_o koji je harmonijski konjugovan kako sa parom tačaka M′,M", tako i sa parom tačaka N′,N".[1)] Na slici 4.2, tačke Q i Q_o konstru-

---

1) *Vidi M. Prvanović* [28], *str. 34.*

isane su prema poznatoj konstrukciji.[1] Može da se pokaže da je par tačaka Q, Q_o par homologih elemenata iste eliptične involucije koju apsolutna involucija indukuje na projektivnoj pravoj $p(M',N')$. Prema tome, projektivne prave $p(Q,S)$ i $p(Q_o,S)$ predstavljaju par homologih elemenata apsolutne involucije u projektivnom pramenu pravih sa središtem S. Dakle, projektivnom pravom $p(Q_o,S)$ kao osom i projektivnom tačkom Q kao centrom u projektivnoj ravni, zadata je harmonijska homologija g, koja prema teoremi 4.1.2, predstavlja EP - podudarnost, tako da je

(8) g(EP - poluprava M"N") = EP - poluprava M'N' .

Iz (1) i (8), sledi

(9) $g \circ h$(EP - poluprave MN) = EP - poluprava M'N' .

Prema poznatoj projektivnoj teoremi,[2] kompozicija $g \circ h$ predstavlja, takodje, harmonijsku homologiju sa osom koja je incidentna sa centrima homologija h i g i centrom koji se dobija u preseku osa ovih homologija. Stoga prema teoremi 4.1.2, ova kompozicija predstavlja EP - podudarnost a prema definiciji 4.1.22, s obzirom na (9) imamo da je

EP - poluprava MN $\overset{EP}{\equiv}$ EP - polupravoj M'N' ,

što je trebalo i dokazati.

U specijalnom slučaju kad se projektivne duži M'N' i M"N" poklapaju (ili dopunjuju jedna drugu), onda je M" = M' i N" = N' (ili M" = N' i N" = M'), te na osnovu relacije (2) sledi tvrdjenje teoreme. Q.E.D.

---

1) *Vidi A. Mateev* [24], *str. 86 i R. Tošić* [43], *str. 40.*

2) *Vidi M. Prvanović* [28] , *str. 51.*

AKSIOMA IV_9. - Ako su EP - duži M'O i N'O EP - incidentne sa hipotenuzama EP - $\tilde{\Delta}$ MON i pritom

(1) EP - duž M'O $\stackrel{EP}{\equiv}$ EP - duži N'O ,

onda je

(2) EP - (M' | N').

Dokaz. - Neka je dat EP - $\tilde{\Delta}$ MON i EP - duži M'O i N'O incidentne sa hipotenuzama ovog jednougla i pritom važi relacija (1). Prema definiciji 4.1.18, kod EP - $\tilde{\Delta}$ MON imamo da je

(3a,b,c) EP - (M | N), EP - (M — O), EP - (N — O).

Označimo sa p(M,N), p(M,O) i p(N,O) projektivne prave koje su incidentne respektivno sa projektivnim dužima MN, MO i NO kojima su u modelu interpretirane kateta i hipotenuze EP - $\tilde{\Delta}$ MON.

Na osnovu definicija 4.1.5. i 4.1.4. s obzirom na (3a,b,c), sledi da je

$$S \in p(M,N), \quad S \notin p(M,O), \quad S \notin p(N,O) .$$

Kako su po pretpostavci EP - duži M'O i N'O EP - incidentne sa EP - dužima MO i NO, to u posmatranom modelu za projektivne duži M'O, N'O, MO i NO kojima su ove EP - duži interpretirane važi

(4a,b) $M'O \subset MO \ \wedge \ N'O \subset NO$,

a projektivne duži MO i NO možemo označiti: MO = MM'O NO = NN'O.

Označimo na projektivnoj pravoj p(M,N) tačku S_o, tako da je par tačaka S, S_o harmonijski konjugovan sa parom tačaka M,N. Projektivnom pravom p(S_o,O) kao osom i projektivnom tačkom S kao centrom, u projektivnoj ravni zadata je harmonijska homologija *h* , tako da je

(5a,b) $h(p(M,O)) = p(N,O) \wedge h(S) = S$.

Prema teoremi 4.1.3, uočena harmonijska homologija h je EP - podudarnost.

S obzirom na (5a), sledi da se projektivna duž MM'O homologijom h preslikava na projektivnu duž NN'O. Ako označimo da je

(6) $h(M') = N_1'$,

onda je

(7) $N_1' \in p(M',S)$, tj. EP $-(M' \mid N_1')$,

i

h(EP - duži M'O) = EP - duž N_1' O .

Iz pretpostavke (1), sledi da postoji EP - podudarnost g , tako da je

(8) g(EP - duži M'O) = EP - duž N'O .

Kako je prema definiciji 4.1.19, EP - podudarnost g kolineacija koja nesvrstvenu tačku S ostavlja invarijantnu, to s obzirom na (4a,b) i (8), sledi

(9) $g(p(M,O)) = p(N,O)$,

i

(10a,b.c) $g(M') = N'$, $g(O) = O$, $g(S) = S$.

Za EP - podudarnost g , tj. kolineaciju projektivne ravni na samu sebe, prema projektivnoj teoremi[1)] koja govori čime je jednoznačno odredjena harmonijska homologija s obzirom na (9) i (10c), sledi da je kolineacija g harmonijska homologija

---

[1)] *Videti M. Prvanović* [31], *str. 83.*

koja je zadata centrom S i parom homologih pravih p(M,O) i p(N,O). Kako je, dalje, harmonijska homologija jednoznačno odredjena, to s obzirom na (5a,b), (9) i (10c), sledi da harmonijske homologije *g* i *h* predstavljaju jedno preslikavanje, tj. $g \equiv h$. Stoga s obzirom na (6) i (10a), sledi da je $N_1' = N'$, a što s obzirom na relaciju (7), dokazuje egzistenciju relacije (2). Q.E.D.

AKSIOMA IV_{10}. - Ako je kod EP - jednouglova $\tilde{\Delta}$ MON i $\tilde{\Delta}$ M'O'N'

(1) EP - duž MO $\overset{EP}{\equiv}$ EP - duži M'O'

i

(2) EP - duž $\widetilde{MN}$ $\overset{EP}{\equiv}$ EP - duži $\widetilde{M'N'}$

a EP - duži OP, O'P, OQ i O'Q' EP - incidentne respektivno sa EP - hipotenuzama MO, M'O', NO i N'O' ovih jednouglova i pritom važi

(3) EP-duž OP $\overset{EP}{\equiv}$ EP-duž O'P' $\overset{EP}{\equiv}$ EP-duži OQ $\overset{EP}{\equiv}$ EP-duži O'Q',

onda je

(4) EP - duž $\widetilde{PQ}$ $\overset{EP}{\equiv}$ EP - duži $\widetilde{P'Q'}$.

Dokaz. Neka su dati EP - $\tilde{\Delta}$ MON i EP - $\tilde{\Delta}$ M'O'N' i EP - duži OP, O'P', OQ i O'Q' EP - incidentne sa EP - hipotenuzama ovih jednouglova i pritom važi (1), (2) i (3). Na osnovu prethodne aksiome IV_9 s obzirom na pretpostavku (3), sledi

(5a,b) EP - (P | Q) ∧ EP - (P' | Q'),

a to, dalje, znači da postoje EP - duži $\widetilde{PQ}$ i $\widetilde{P'Q'}$. Označimo sa p(M,O), p(M',O'), p(N,O), p(N',O'), p(M,N), p(M',N'), p(P,Q) i p(P',Q') projektivne prave koje su incidentne respektivno sa projektivnim dužima MO, M'O', NO, N'O', MN, M'N', PQ i P'Q' kojima su u modelu interpretiranje EP - duži MO, M'O', NO, N'O', $\widetilde{MN}$, $\widetilde{M'N'}$, $\widetilde{PQ}$ i $\widetilde{P'Q'}$. Za nesvojstvenu tačku S i ove projektivne prave važi:

(6a,b,c,d) $S \notin p(M,O)$, $S \notin p(M',O')$, $S \notin p(N,O)$, $S \notin p(N',O')$,

a

(7a,b,c,d) $S \in p(M,N)$, $S \in p(M',N')$, $S \in p(P,Q)$, $S \in p(P',Q')$.

S obzirom da su EP - duži OP, O'P', OQ i O'Q' EP - incidentne respektivno sa EP - dužima MO, M'O', NO i N'O' to su u modelu EP - duži MO, M'O', NO i N'O' interpretirane projektivnim dužima MPO, M'P'O', NQO i N'Q'O'. Projektivne duži MN, M'N', PQ i P'Q' kojima su u modelu respektivno interpretirane EP - duži $\widetilde{MN}$, $M'\widetilde{N}'$, $\widetilde{PQ}$ i $P'\widetilde{Q}'$ ne sadrže projektivnu tačku S.

Iz pretpostavke (1), prema definiciji 4.1.22, sledi da postoji EP - podudarnost f, tako da je

$$f(\text{EP - duži } MO) = \text{EP - duž } M'O',$$

odnosno, s obzirom da je prema definiciji 4.1.19, transformacija f kolineacija, sledi

(8a,b) $f(p(M,O)) = p(M'O') \wedge f(S) = S$.

Za EP - podudarnost f s obzirom na pretpostavku (3) i relaciju (8a) sledi

(9a,b,c) $f(M)=M'$, $f(P) = P'$, $f(O) = O'$.

Na osnovu (8b) i (9a), odnosno (8a) i (9b) s obzirom na (7a,b.c,d), sledi

(10a,b) $f(p(M,S))=p(M'S) \wedge f(p(P,S))=p(P',S)$.

Ako za tačku $N \in p(M,S)$, označimo da je

(11) $f(N) = N_1$,

onda s obzirom na (10a), sledi da je

(12,a,b) $\quad N_1 \in p(M',S) \wedge f(\text{EP-duži } \tilde{MN}) = \text{EP-duž } M'\tilde{N}_1$,

gde je tačka N_1 incidentna sa projektivnom duži $M'N'S$ kojom je u modelu interpretiran jedan od EP - izotropnih polunizova sa početnom tačkom M'. Kako je f EP - podudarnost, to prema definiciji 4.1.22, s obzirom na (12b), sledi

$$\text{(13)} \qquad \text{EP - duž } \tilde{MN} \overset{EP}{=\!=} \text{EP - duži } M'\tilde{N}_1 .$$

Na osnovu aksioma IV_3 i IV_2 s obzirom na pretpostavku (2) i relaciju (13), sledi da se tačka N_1 poklapa sa tačkom N', tj. da je $N_1 = N'$. Stoga na osnovu (11), sledi

$$\text{(14)} \qquad f(N) = N' .$$

Na osnovu (9c) i (14), sledi

$$\text{(15)} \qquad f(p(N,O)) = p(N',O').$$

Kako se tačke Q i Q' dobijaju:

$$\{Q\} = p(N,O) \cap p(M,S), \quad \{Q'\} = p(N',O') \cap p(M',S),$$

to na osnovu (10b) i (15), sledi da je

$$\text{(16a,b)} \qquad f(Q) = Q' \wedge f(\text{EP-duži } \tilde{PQ}) = \text{EP-duž } P'\tilde{Q}' .$$

Prema definiciji 4.1.22 s obzirom na (16b), sledi relacija (4). Q.E.D.

Dakle, zadovoljene su sve aksiome geometrije EP, a samim tim dokazano da ovako definisan model predstavlja projektivni model te geometrije.

Medjutim, istovremeno je dokazano da je geometrija EP neprotivurečna ako je neprotivurečna projektivna geometrija. Naime, izloženi projektivni model je realizovan na objektima projektivne ravni iz koje je isključena jedna tačka, a osnovne relacije su izvesne projektivne relacije izmedju projektivnih objekata. U tom modelu svaka teorema geometrije EP ima svoju realizaciju. Ta realizacija je jedna teorema projektivne geometrije.

Prema tome, ako bi u EP geometriji postojala neka protivurečnost, ona bi se neizbežno pojavila i u posmatranom modelu, odnosno u projektivnoj geometriji.

OZNAKE

A — B	-	tačka A kolinearna sa tačkom B	str. 2
p(A,B)	-	prava odredjena tačkama A i B	str. 2
$P \mid Q$	-	tačka P paralelna sa tačkom Q	str. 2
$P = pr_m M$	-	tačka P je projekcija tačke M na pravu m	str. 3
$\tilde{a}$	-	izotropni niz tačaka sa osnovom A	str. 3
A,B // C,D	-	par tačaka A,B razdvaja par C,D	str. 8
$\neg$(D,E //A,B)	-	par tačaka D,E ne razdvaja par A,B	str. 8
$\overline{AB}$	-	duž sa krajnjim tačkama A,B koja predstavlja dopunu duži AB	str. 11
[AMB]	-	zatvorena duž čije su krajnje tačke A i B i koja sadrži tačku M	str. 12
O(p,q,r,...)	-	pramen pravih sa središtem u tački O	str. 12
p,q // r,s	-	par pravih p,q razdvaja par r,s	str. 13
(p - r - q)	-	prava r je izmedju pravih p i q	str. 14
$\angle$ pq	-	ugao sa kracima p i q	str. 14
$\angle$ POQ	-	ugao čije je teme tačka O a P i Q tačke na kracima	str. 14
$\angle$ A	-	ugao sa temenom A	str. 59
(P ~M ~Q)	-	tačka M je izmedju tačaka P i Q na izotropnom nizu tačaka $\tilde{p}$	str. 15
$\tilde{ip}$([PM)	-	izotropni poluniz tačaka sa početnom tačkom P koji je incidentan sa tačkom M	str. 15

$\widetilde{[PQ]}$	-	zatvorena izotropna duž sa krajnjim tačkama P i Q	str. 16
ABC	-	trotemenik sa temenima A,B i C	str. 16
$\tilde{\Delta}\ BAC$	-	jednougao sa uglom kod temena A	str. 22
$\Delta\ ABC$	-	trougao sa središnjim temenom B	str. 29
$\stackrel{\sim}{=}$	-	relacija "... je podudarno ..."	str. 32
$\neg(AM \stackrel{\sim}{=} AB)$	-	duž AM nije podudarna duži AB	str. 34
$MM_o \stackrel{\sim}{=} \overline{MM_o}$	-	duž MM_o podudarna svojoj dopuni $\overline{MM_o}$. Duži MM_o i $\overline{MM_o}$ su poluprave, a M i M_o suprotne tačke	str.35,36
σ_P	-	centralna simetrija	str. 88
σ_p	-	osna simetrija	str. 101
$\tilde{\tau}_{PP'}$	-	translacija	str. 165
$\rho_{O,\omega}$	-	centralna rotacija	str. 172
$\stackrel{EP}{=}$	-	podudarnost u projektivnom modelu EP ravni	str. 188

Literatura

[1] Александрова Г. А. : Аксиоматическое построение двумерной псевдокоевклидовой геометрии. Ученые записки Курский гос. пед. ин-та, I97o, 66, I03 - I4I.

[2] Александрова Г. А. : Аксиоматическое построение копсевдогалилеева пространства $^{100}S^{12}_{3}$. Сборник научных трудов Ярославския гос. пед. ин - та, I973, вып. I09, 23 - 28.

[3] Александрова Г. А. : Аксиоматическое построение геометрии квазигиперболического пространства $^{10}S^{1}_{3}$. В сб. Геометрия и топология, вып. 2, Ленинград, I974, I4 - 2I.

[4] Бахман Ф. : Построение геометрии на основе понятия симетрии. Издательство " Наука ", Москва, I969.

[5] Буземан Г.,Келли П. : Проективная геометрия и проективные метрики. Издательство иностранной литературы, Москва, I957.

[6] Богомолов С. А. : Основания геометрии. ГИЗ, Москва - Ленинград, I923.

[7] Coxeter H.S.M.: Non-Euclidean Geometry. University of Toronto Press, 1957.

[8] Coxeter H.S.M.: Projektivna geometrija. Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[9] Cvetković D. : Trajektorije pramenova pravih i snopova ravni u nekim neeuklidskim geometrijama (Doktorska disertacija). Prirodno-matematički fakultet, Beograd, 1985.

[10] Четверухин Н. Ф. : Проективная геометрия. Учпедгиз, Москва, I96I.

[11] Gans D. : An Introduction to Non-Euclidiean Geometry. Academic press, New York and London, 1973.

[12] Хилберт Д. : Основе геометрије. Матемвтички институт САНУ, Београд, I957.

[13] Јефимов Н. В. : Виша геометрија. Просвета, Београд, I949.

[14] Klein F. : Vorlesungen über nicht - euklidische geometrie. Berlin, 1928.

[15] Кели А. : Шестой мемуар о формах. Сборник Об основаниях геометрии, Москва, I956.

[16] Каган В. Ф. : Историческій очерќъ развитія ученія об́ъ основаніях́ъ геометр и, Одесса, I907.

[17] Каган В. Ф. : Основания геометрии. Госизд. Технико-Теоретической литературы, т. I, Москва, I949, т. II, Москва, I956.

[18] Кропина К. В. : Построение модели евклидовой плоскости на базе проективной геометрии. Уч. записки Новгородск. головн. пед. ин - та, I966, 7,I09-I26.

[19] Lisulov Dj. : Krive drugog reda u geometrijskim sistemima Cayley - Kleina (Magistarski rad). Prirodno-matematički fakultet, Beograd, 1980.

[20] Lopandić D. : Geometrija za III razred usmerenog obrazovanja matematičko-tehničke struke. Naučna knjiga, Beograd, 1981.

[21] Milojević M. : Projektivna ravan kao model neuklidskih geometrija u smislu Cayley - Kleina (Magistarski rad). Prirodno-matematički fakultet, Beograd, 1981.

[22] Milojević M. : Projektivni model dvodimenzionalne pseudoeuklidske geometrije. Matematički vesnik, 35, br. 4, Beograd, 1983, 371-388.

[23] Milojević M. : Projektivni model dvodimenzionalne geometrije koja je dualna pseudoeuklidskoj geometriji. Matematički vesnik, 36, br. 4, Beograd, 1984, 285-302.

[24] Матеев А. : Прективна геометрия. Наука и изкуство, София, 1977.

[25] Макарова Н. М. : Проективные мероопределения плоскости. Учение записки Моск. гос. пед. ин - та, 1965, № 243, 274 - 290.

[26] Niče V. : Uvod u sintetičku geometriju. Školska knjiga, Zagreb, 1956.

[27] Niče V. : Deskriptivna geometrija. Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[28] Prvanović M. : Projektivna geometrija. Naučna knjiga, Beograd, 1968.

[29] Prvanović M. : Neeuklidske geometrije. Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1971.

[30] Prvanović M. : Osnovi geometrije. Gradjevinska knjiga, Beograd, 1980.

[31] Prvanović M. : Projektivna geometrija. Naučna knjiga, Beograd, 1986.

[32] Palman D. : Projektivna geometrija. Školska knjiga, Zagreb, 1984.

[33] Парнасский И. В. : Аксиоматическое построение трехмерной параболической геометрии. Орловский гос. пед. ин - т, I956, том XI, вып. II, 3 - 40.

[34] Проскурина Р. Г. : Аксиоматическое построение двумерной псевдоевклидовой геометрии. Ученые записки Курский гос. пед. ин - та, I970, 66, I42 - I87.

[35] Проскурина Р. Г. : Аксиоматическое построение псевдоизотропной геометрии. Сб. науч. тр. Ярославскыи гос. пед. ин - та, I973, вып. I09, I33 - I38.

[36] Проскурина Р. Г. : Дуодуальные интерпретации трехмерного псевдоизотропного пространства. В сб. Геометрия, вып. 3, Ленинград, I975, II6 - I27.

[37] Погорелов А. В. : Основания геометрии. Москва " Наука ", I979.

[38] Парнасская О. Е. : Аксиоматическое построение псевдогиперболической геометрии. Ученые записки Курский гос. пед. ин - та, 1970, 66, 78 - 126.

[39] Парнасская О. Е. : Использование циклографического отображения при аксиоматическом построении когиперболической геометрии. Сб. науч. тр. Ярослав. гос. пед. ин - та, 1973, вып. 109, 118 - 123.

[40] Rossier P. : Géométries pseudo-euklidiennes. Archives des Sciences, 28, N° 2, 1975, 141-176.

[41] Розенфельд Б. А. : Неевклидовы геометрии. Государственное издательство, Москва, 1955.

[42] Розенфельд Б. А. : Неевклидовы пространства. Наука, Москва, 1969.

[43] Tošić R. : Zbirka rešenih zadataka iz neeuklidske geometrije. Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1971.

[44] Васильева М. В. : Лекции по проективной геометрии. МГПИ им. В. И. Ленина, Москва, 1973.

[45] Ввсильева М. В. : Проективная геометрия. МГПИ им. В. И. Ленина, Москва, 1981.

[46] Яглом И. М., Розенфельд Б. А. и Ясинская Е. У. : Проективные метрики. Успехи математических наук, 1964, т. 19, вып. 5/119/, 51 - 113.

[47] Яглом И. М. : Проективные мероопределения на плоскости и комплексные числа. Труд. сем. по век. и тенз. анвлизу сих прилож. к геом., мех. и физ., вып. 7, Москва - Ленинград, 1949, 276 - 318.