

UNIVERZITET U BEOGRADU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET

Bojan D. Banjac

SISTEM ZA AUTOMATSKO DOKAZIVANJE  
NEKIH KLASA ANALITIČKIH  
NEJEDNAKOSTI

doktorska disertacija

Beograd, 2019

UNIVERSITY OF BELGRADE  
SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING

Bojan D. Banjac

SYSTEM FOR AUTOMATIC PROVING  
OF SOME CLASSES OF ANALYTIC  
INEQUALITIES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2019

Mentor:

dr Branko Malešević, redovni profesor  
Katedra za primenjenu matematiku,  
Elektrotehnički fakultet,  
Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

dr Tatjana Lutovac, redovni profesor  
Katedra za primenjenu matematiku,  
Elektrotehnički fakultet,  
Univerzitet u Beogradu

dr Predrag Janičić, redovni profesor  
Katedra za računarstvo i informatiku,  
Matematički fakultet,  
Univerzitet u Beogradu

dr Jelica Protić, redovni profesor  
Katedra za računarsku tehniku i informatiku,  
Elektrotehnički fakultet,  
Univerzitet u Beogradu

dr Ratko Obradović, redovni profesor  
Katedra za animaciju u inženjerstvu,  
Departman za opšte discipline u tehnici,  
Fakultet tehničkih nauka,  
Univerzitet u Novom Sadu

# Apstrakt

U okviru ovog doktorata razvijen je sistem *SimTheP* (Simple Theorem Prover) za automatsko dokazivanje nekih klasa analitičkih nejednakosti. Kao osnovna klasa nejednakosti posmatrana je klasa MTP (miksovano trigonometrijsko polinomskih) nejednakosti. U doktoratu su navedene još neke klase analitičkih nejednakosti na koje se, uz određene dodatne korake, može primeniti prikazani sistem. Za potrebe sistema je kreirano više originalnih algoritama poput algoritma za traženje prve pozitivne nule polinomske funkcije koji je baziran na Šturmovoj teoremi, algoritma za traženje najmanjeg odgovarajućeg stepena aproksimacija Tejlorovim razvojem, algoritma sortiranja aproksimacija i sličnih. Svi algoritmi su prikazani pseudokodom i detaljnim objašnjenjem slučajeva upotrebe. Rad sistema i korišćenih algoritama ilustrovani su na većem broju konkretnih analitičkih nejednakosti od kojih su neke bile otvoreni problemi, a koji su potom rešeni metodama sistema i publikovani u renomiranim časopisima. U okviru doktorata dat je detaljan prikaz oblasti i problematike vezane za dokazivanje i automatske dokazivače. Razmotreni su osnovni problemi sa kojima se sreću korisnici većine automatskih dokazivača, ali su takođe analizirani i neki problemi vezani u vezi sa implementacijom automatskih dokazivača teorema. Razvijena je jedna implementacija sistema *SimTheP*, a u cilju procene performansi ovog sistema urađena je uporedna analiza sa dokazivačem *MetiTarski*.

**Ključne reči:** automatsko dokazivanje; analitičke nejednakosti;  
miksovano trigonometrijsko polinomske nejednakosti;

**Naučna oblast:** Elektrotehnika i računarstvo

**Uža naučna oblast:** Primenjena matematika

**UDK:** 510.266

# Abstract

In this doctoral thesis was developed *SimTheP* (Simple Theorem Prover), system for automatic proving of some classes of analytical inequalities. MTP (mixed trigonometric polynomial) inequalities were considered as basic class of studied inequalities. Some additional classes of analytical inequalities, on which shown system can be applied with some additional steps, were presented in this thesis. Several original algorithms, such as algorithm for seeking first positive root of polynomial function based on Sturms theorem, algorithm for seeking smallest appropriate degree of approximation by Taylor series, algorithm for sorting of approximations and similar others, were created for use in system. All algorithms were shown by pseudo-code and detailed use case scenarios. Inner workings of system and application of stated algorithms was illustrated on great number of concrete analytical inequalities, of which some were open problems later solved by methods from system and published in renown journals. In this thesis was also given detailed image of area of research and problematic of theorem proving and automatic theorem provers. Some basic problems with which users of most automatic theorem provers deal were considered, but also some problems of implementation of automatic theorem proving were analysed. One implementation of system *SimTheP* was developed, and to assess performance of this system, side by side comparison with MetiTarski was conducted.

**Keywords:** automatic proving; analytical inequalities;  
mixed trigonometric polynomial inequalities;

**Scientific field:** Electrotechnics and Computer science

**Area of research:** Applied mathematics

**UDC:** 510.266

## *Zahvalnica*

*Ovaj doktorat rezultat je veoma dugog istraživanja i zahtevao je upoznavanje čitavog novog sveta nauke. Tako nešto bilo bi apsolutno nemoguće bez ogromne podrške ljudi iz mog života. Mada ću ovde spomenuti samo neke od njih, želim da se zahvalim i svima ostalima što su mi omogućili da se odvažim i kročim u taj za mene strani svet.*

*Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici. Otac D Mitar, majka Slobodanka i brat Dejan bili su mi oslonac tokom celog ovog putovanja i uvek tu da me bodre u momentima kada bih klonuo. Bez njihove bezrezervne podrške, razumevanja i strpljenja ovaj doktorat verovatno nikada ne bi ugledao svetlost dana.*

*Mentoru, profesoru Branku Maleševiću, dugujem izuzetnu zahvalnost. Svojom posvećenošću i razumevanjem uveo me je u nauku i približio mi do tada nepoznatu i zastrašujuću matematiku.*

*Iako su brojni prijatelji pokazali veliko strpljenje za moju sklonost da se izgubim u radu, želeo bih da izdvojim neke od njih, kojima sam dodatno zahvalan. Dragana Došena, koji je bio podrška tokom celih studija, i pokazao beskrajno strpljenje za moje beskrajno otkazivanje planova. Jelenu Sučević, koja je uvek dozvoljavala da pun entuzijazma pričam o svojim istraživanjima, a kada bih ostajao bez istog, podsećala koliko volim nauku. Jelenu Krtinić, koja je uvek verovala da naučnici zaslužuju balove.*

*Na kraju bih želeo da se zahvalim članovima komisije. Bez vašeg predanog rada i brojnih sugestija ovaj doktorat ne bi mogao na pravi način da prikaže lepotu koja se otkriva ovim istraživanjem.*

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	O sadržaju doktorata . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Odlučivost, sistemi računarske algebre, automatski dokazivači i MTP funkcije</b>	<b>5</b>
2.1	Neki odlučivi problemi elementarne analize . . . . .	5
2.1.1	Odlučivost . . . . .	7
2.2	Sistemi računarske algebre . . . . .	8
2.3	Automatski dokazivači teorema . . . . .	12
2.3.1	Značaj automatskih dokazivača . . . . .	13
2.3.2	Neki problemi modernih dokazivača . . . . .	18
	Sagledivost i čitljivost . . . . .	18
	Problem početne hipoteze . . . . .	18
	Podela . . . . .	19
	Vreme izvršavanja . . . . .	19
2.4	Miksovano trigonometrijsko polinomske funkcije i neke nejednakosti u vezi s njima . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Sistem SimTheP</b>	<b>23</b>
3.1	Problemi dokazivanja MTP nejednakosti . . . . .	24
3.2	Algoritmi . . . . .	35
3.2.1	Algoritam za traženje prve nule polinomske funkcije na intervalu $(a, b)$ . . . . .	35
3.2.2	Algoritam za skraćivanje decimalnog zapisa . . . . .	39
3.2.3	Algoritam za traženje minimalnog stepena navišnih i nanižnih razvoja . . . . .	42
3.2.4	Algoritam transformacije na višestruke uglove . . . . .	47
3.2.5	Algoritmi za sortiranje $k$ -vektora . . . . .	53
	Leksikografski poredak . . . . .	54
	Gradirano leksikografski poredak . . . . .	55
	Euklidsko leksikografski poredak . . . . .	56
	Čebišev leksikografski poredak . . . . .	57
3.3	Osnovni algoritam sistema SimTheP . . . . .	58

3.3.1	Jednostrano dokazivanje MTP nejednakosti . . . . .	59
3.3.2	Dvostrano dokazivanje MTP nejednakosti . . . . .	63
3.3.3	Proširenja osnovnog algoritma . . . . .	66
	Logaritamsko miksovano polinomsko trigonometrijske funkcije .	66
	Proširena klasa MTP funkcija . . . . .	67
	Proširenja algoritma smene Tejlorovim razvojjima . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Primer upotrebe sistema SimTheP</b>	<b>71</b>
4.1	Primer I . . . . .	71
4.2	Primer II . . . . .	76
4.3	Rešenja nekih otvorenih problema primenom sistema SimTheP . . . . .	80
4.3.1	Neke napomene u vezi sa metodom dokazivanja nejednakosti računarom [1] . . . . .	80
4.3.2	Rešenje dva otvorena problema Čao-Ping Čena za inverzno trigonometrijske funkcije [2] . . . . .	81
	Otvoreni problem 1 . . . . .	82
	Otvoreni problem 2 . . . . .	84
4.3.3	Rešenje otvorenog problema Jusuke Nišizave za stepene funkcije [5] . . . . .	86
4.3.4	Neke primene $\lambda$ -metoda na pribavljanje aproksimacija u dizajnu filtera [4] . . . . .	91
4.4	Nejednakosti u radovima autora Linga Zhua . . . . .	93
4.5	Nejednakosti u radovima autora Fenga Qia . . . . .	98
4.6	Nejednakosti u radovima autora Cristinela Morticia . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Implementacija sistema SimTheP</b>	<b>110</b>
5.1	Korisnički zahtevi . . . . .	110
5.2	Arhitektura i dizajn . . . . .	114
5.3	Grafički korisnički interfejs . . . . .	121
5.4	Performanse sistema . . . . .	124
5.4.1	Automatski dokazivači primenjivi nad MTP problemima . . . . .	124
5.4.2	Sistem za poređenje . . . . .	125
5.4.3	Performanse prikazane implementacije . . . . .	127
5.4.4	Poređenje sa sistemima računarske algebre . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Zaključak i dalji pravci istraživanja</b>	<b>133</b>



# Glava 1

## Uvod

*Now we can see what makes mathematics unique. Only in mathematics is there no significant correctiononly extension. Once the Greeks had developed the deductive method, they were correct in what they did, correct for all time. Euclid was incomplete and his work has been extended enormously, but it has not had to be corrected. His theorems are, every one of them, valid to this day.*

*Isaac Asimov - A history of mathematics*

*Sada možemo videti šta čini matematiku jedinstvenom. Samo u matematici nema značajnih ispravki - samo unapređenja. Nakon što su Grci razvili deduktivni metod, bili su u pravu sa time što su radili, u pravu za sva vremena. Euklid je bio nekompletan i njegov rad je proširen drastično, ali nikada nije ispravljan. Njegove teoreme su, svaka od njih, validne do dana današnjeg.*

*Isak Asimov - Istorija matematike*

Reči Isaka Asimova (Isaac Asimov), pisca ali i naučnika, istinite su danas koliko i u vreme kada su zapisane. Oslanjanje na tačnost matematike je osnov mnogih nauka koje su se tokom istorije odvajale od filozofije. Veliki problemi u inženjerskim naukama se često smatraju rešenim tek kada se matematikom pokaže ispravnost pristupa. U prirodnim naukama modeli se zasnivaju na matematičkim principima i nikada ne dovode u pitanje matematiku, na kojoj su zasnovani.

Ovo dovodi do pitanja šta je potrebno da bi se matematička teorija smatrala tačnom. Kod većine prirodnih nauka se dozvoljava empirijsko posmatranje kao metoda istraživanja, a formiranjem neke zakonitosti koja važi na velikom broju slučajeva se zaključuje pravilo koje važi dok se ne nađe protivprimer. Dozvoljena tolerancija greške je uvek prisutan parametar kod inženjerskih nauka. Mada deluje kao da je to prevelika sloboda koju su ove nauke sebi uzele, rad sa realnim sistemima dovodi do prevelikog broja parametara koji mogu uticati na eksperimente i posmatranja, te je određena fleksibilnost neophodna. Matematika, kao nauka koja radi sa apstrakcijama i sistemima apsolutno odvojenim od spoljašnjih uticaja, ne dozvoljava sebi ni najmanju toleranciju greške. To za istraživače znači odsustvo velikog broja oruđa dostupnih drugim naukama, ali i teže izazove kako bi svoje teorije dokazali.

U okviru ovog doktorata autor je sebi postavio dva zadatka: da definiše sistem za automatsko dokazivanje klase miksovano trigonometrijsko polinomskih nejednakosti i da prikaže neophodne elemente za implementaciju jednog takvog sistema. Aplikacije poput ove uvek se nalaze u oblasti sistema računarske algebre, ali ih takođe prevazilaze u nekim aspektima. Klasa nejednakosti ovog tipa ima veoma veliku ulogu u elektrotehnici, kontrolnim sistemima, procesiranju slika, robotici i mnogim drugim naukama.

Dodatni izazov koji je autor predstavio jeste formiranje sistema koji je ljudima razumljiv. Posmatrajući veliki broj rešenja za automatsko dokazivanje koja su trenutno dostupna, može se videti da veliki broj njih daje dokaze koji ne imitiraju način funkcionisanja ljudskog razmišljanja. Mada su ovakvi dokazi tačni, ne daju uvid u razloge tačnosti, što svakako smanjuje njihovu upotrebnost vrednost.

Krajnji cilj doktorata je formiranje aplikacije koja bi korisnicima automatski generisala i prikazivala dokaze zadatih analitičkih nejednakosti.

Motivacija za izradu ovog doktorata proističe iz brojnih realnih potreba za automatskim dokazivačima. Proučavajući računarstvo i elektrotehniku nailazi se na veliki broj situacija gde bi ovakva aplikacija u velikoj meri ubrzala i olakšala rad istraživača. Brojni otvoreni problemi koji se mogu naći u literaturi u vezi sa klasama problema koje bi ovakva aplikacija mogla rešavati dodatno podstiču njen razvoj.

## 1.1 O sadržaju doktorata

Ovaj doktorat sastoji se iz šest glava. Nakon uvodne, u drugoj glavi se daje pregled oblasti u vezi sa izradom automatskog dokazivača. Prvo poglavlje proučava probleme elementarne analize i problematiku u vezi sa odlučivošću. U drugom poglavlju su razmatrani razni sistemi računarske algebre, njihove razlike u odnosu na tradicionalne sisteme za numerička izračunavanja, koju ulogu imaju za moderno istraživanje, ali i koliko je moguće pouzdati se u njih. Naredno poglavlje posvećeno je oblasti automatskog dokazivanja. Poslednje poglavlje u ovoj glavi se bavi miksovano trigonometrijsko polinomskim nejednakostima i njihovim istorijatom.

Treća glava doktorata je primarno posvećena sistemu *SimTheP* za dokazivanje klase miksovano trigonometrijsko polinomskih analitičkih nejednakosti. U prvom poglavlju su data četiri primera problema koji se pojavljuju prilikom dokazivanja MTP nejednakosti. Drugo poglavlje namenjeno je prikazu najbitnijih originalnih algoritama koje je autor ovog doktorata kreirao za potrebe sistema *SimTheP*. Algoritam za traženje prve pozitivne nule polinomskih funkcija koji se bazira na Šturmovoj teoremi je prvi predstavljen. Naredni algoritam koji je prikazan jeste algoritam za skraćivanje decimalnog zapisa, koji se takođe u ovoj podsekciji generalizuje u algoritam za traženje nanižne aproksimacije pozitivne polinomske funkcije. U trećem poglavlju je prikazan algoritam za traženje minimalnog stepena nanižnih i navišnih razvoja za ispravne aproksimacije MTP funkcije. Podsekcija koja sledi je posvećena algoritmu za transformaciju stepenih sinusnih i kosinusnih funkcija u oblik višestrukih uglova, ali takođe uključuje i opis algoritma za izbor odgovarajuće aproksimacije, navišne ili nanižne. Poslednja podsekcija je posvećena različitim metrikama za sortiranje aproksimacija MTP funkcije.

U narednom poglavlju je prikazan sistem *SimTheP*. Na početku glave prikazane su početne provere u algoritmu i uslovi za grananje u algoritme prikazane u narednim podsekcijama. Prva podsekcija se bavi algoritmom kreiranim za jednostrano dokazivanje MTP funkcija. U okviru nje su prikazani i algoritmi kreirani za generisanje polinomskih aproksimacija na osnovu vektora stepena Tejlorovih razvoja, generisanje svih dozvo-

ljenih varijacija vektora stepena Tejlorovih razvoja i proveru da li je polinomska funkcija za tačku  $x = 0$  pozitivna ili jednaka nuli a rastuća. Naredna podsekcija je posvećena kreiranom algoritmu za dvostrano dokazivanje MTP funkcija. Poslednja podsekcija prikazuje nova proširenja prethodno opisanih algoritama. Prvo je opisana procedura za primenu sistema *SimTheP* na logaritamsko miksovano polinomske trigonometrijske funkcije, potom na proširenu klasu MTP funkcija, a na kraju glave je prikazan i prošireni algoritam smene funkcija Tejlorovim razvojima, koji funkcioniše i nakon uvođenja novih klasa realnih analitičkih funkcija pored sinusne i kosinusne funkcije.

Naredna glava doktorata se fokusira na primere upotrebe sistema *SimTheP*. Prva dva poglavlja detaljno analiziraju postupak upotrebe sistema na dva primera iz literature koji su dokazani primenom sasvim drugačijih metoda. Nakon toga sledi poglavlje koje prikazuje rezultate iz četiri rada [1] - [4] gde se primenom sistema *SimTheP*, ili algoritama koji ga sačinjavaju, rešavaju neki otvoreni problemi iz literature. Poslednja tri poglavlja proučavaju rezultate iz literature tri eminentna istraživača iz oblasti dokazivanja analitičkih nejednakosti, koji se mogu takođe verifikovati korišćenjem sistema *SimTheP* uz neke neznatne transformacije.

Peta glava je posvećena jednoj implementaciji sistema *SimTheP* koja je kreirana u okviru ovog doktorata, pod radnim imenom *PAINT*. U prvom poglavlju proučava korisničke zahteve prilikom izrade implementacije i na koji način su oni ispunjeni. Naredna dva poglavlja se primarno bave arhitekturom i dizajnom aplikacije, što uključuje i korisnički interfejs. Poslednje poglavlje ove glave posvećeno je proučavanju performansi sistema i implementacije. U te svrhe je prikazan način funkcionisanja aplikacije *MetiTarski* a potom i rezultati uporedne analize te aplikacije i posmatrane implementacije. Takođe je urađena analiza mogućnosti tri sistema računarske algebre u svrhe dokazivanja klase MTP nejednakosti.

Poslednja glava je posvećena sumiranju rezultata iz prethodnih glava, ali takođe daje uvid u nove pravce istraživanja na kom je zasnovan ovaj doktorat.

Neki od rezultata koji se razmatraju u tekstu doktorata su publikovani u radovima [1] - [8]. Ostali rezultati iz doktorata biće publikovani u budućim radovima.

## Glava 2

# Odlučivost, sistemi računarske algebre, automatski dokazivači i MTP funkcije

U okviru ove glave dat je prikaz nekoliko oblasti istraživanja u vezi sa problematikom dokazivanja MTP nejednakosti. Prvo poglavlje je posvećeno problemima odlučivosti. U drugom poglavlju se razmatraju sistemi računarske algebre i problematika u vezi sa izradom ovakvih sistema. Naredno poglavlje je posvećeno automatskim dokazivačima. Poslednje poglavlje se bavi istorijom miksovano trigonometrijsko polinomskih funkcija.

### 2.1 Neki odlučivi problemi elementarne analize

Kao jedina nauka koja nije dozvoljavala nimalo prostora za slobodu interpretacija, matematika je kroz istoriju civilizacije propagirala preciznost i sveobuhvatnost svojih ideja. Dok su mnoge primenjene nauke dozvoljavale određenu toleranciju za greške, matematika se uvek držala principa konzistentnosti rezultata. Ono što se menjalo u samoj matematici je način dokazivanja ideja. Ukoliko pogledamo dokaze koje su pružali u doba drevne grčke kulture, ponegde vidimo veliku intuitivnost dokaza, a veoma malo formalizma. Međutim, sa pojavom sve apstraktnijih i složenijih koncepata u matematici došlo je i do potrebe da se način dokazivanja teorija izmeni. Lajbnic (Gottfried Wilhelm von Leibniz) jedan je od prvih značajnijih zagovornika ideje da

matematički dokazi moraju da se udalje od "onoga što je vidljivo" i da moraju sadržati određenu strukturu koja bi olakšala proveru i tumačenje ([9], str. 25-26). Iako se zalagao i za interdisciplinarnost, smatrao je da zadržavanje na merljivim rezultatima ograničava širenje matematike.

Krajem 19. veka možemo videti rađanje novih ideja o samoj prirodi dokazivanja. Javlja se pokreti poput formalista, logičara i intuitivaca u matematici [10],[11],[12]. Ono za šta su se zalagali Lajbnic i Njutn (Isaac Newton) postaje napokon izvodljivo sa razvijanjem logike kao matematičke discipline, stvarajući nešto što će kasnije biti prozvano "*doba rigoroznosti*" (Age of rigor) [13]. Nastaje polemika, koja će potrajati još pola veka, oko toga šta je neophodno da sadrži matematički dokaz. Neki autori zastupaju mišljenje Bertranda Rasela (Bertrand Arthur William Russell), pripadnika škole logičara, koji u svojoj *Principia Mathematica* zastupa stav da je matematika deo logike ([14], [15], [16], [11], str. 87). Dok se jedni zalažu da bi matematika trebalo da se izvodi iz vrlo ograničenog početnog skupa aksioma, poput Davida Hilberta (David Hilbert) [12], drugi poput Gedela (Kurt Gödel) smatraju da je ovo neizvodljivo (Gedelova teorema o nekompletnosti koja kaže da dovoljno konzistentan sistem ne može sam sebe da verifikuje) ([17]).

Poznato je da se u tom dobu javlja ideja da bi kompletna matematika morala da bude dokaziva putem mašinski proverivog niza koraka (Hilbertov program). Sve ovo je bio veoma veliki podstrek za razvijanje matematičkih osnova za današnje računare (Tjuringova mašina, Fon Nojmanova arhitektura...). Gedel je u jednom momentu dao sledeću izjavu: "*Matematika je ili previše velika za ljudski mozak ili ljudski um prevazilazi prostu mašinu.*" Neki od matematičara poput Tjuringa (Alan Turing) [18], Fon Nojmana (John von Neumann) i Vinera (Norbert Wiener) ([19], str. 367-368) učinili su velike doprinose oko praktičnih problema u vezi sa računarstvom. Za problematiku toga šta je moguće postići pomoću računara značajni koraci su učinjeni početkom 20. veka. Ono što je ostalo upečatljivo jeste činjenica da su računari tek posle četrdeset godina svog razvoja počeli direktno da utiču na matematiku. Danas matematika dobija velike rezultate upotrebom računara.

### 2.1.1 Odlučivost

Problem odlučivosti možemo definisati na sledeći način ([20], str. 233, [21], str. 596, [22], str. 113-114):

**Definicija 2.1.** Posmatrajmo problem odlučivanja  $P$ . Ukoliko postoji algoritam koji za svaki ulazni podatak problema  $P$  daje odgovor o tačnosti sa  $Da$  ili  $Ne$ , onda kažemo da je problem  $P$  odlučiv problem.

Drugim rečima, ako posmatramo Turingovu mašinu ([22], str. 114), za neodlučive probleme nije moguće napisati program koji će se uvek završiti za sve ulaze sa odgovorom da li ne. Primere nekih odlučivih problema je vrlo lako naći:

- Da li je zbir dva cela broja pozitivna vrednost
- Da li je uneta vrednost veća od druge unete vrednosti
- Da li je moguće formirati trougao sa stranicama dužine unetih vrednosti

Poznat je veliki broj neodlučivih problema u literaturi. U svojoj knjizi "*Undecidable theories*" [23] Tarski (Alfred Tarski), Mostovski (Andrzej Mostowski) i Robinson (Raphael M. Robinson) pokazali su da je većina neodlučivih problema posledica samoreferenciranja i rekurzivnosti.

Jedan primer neodlučivog problema je Hilbertov deseti problem: *Za proizvoljnu polinomsku jednakost  $P = 0$ , sa celobrojnim koeficijentima, potrebno je odlučiti da li ima rešenje među celobrojnim vrednostima* ([24], str. 102). Za ovaj Hilbertov problem, koji je ostavio kao izazov za buduće matematičare, 1971. godine Dejvis (Martin Davis), Putnam (Hilary Putnam), Robinson (Julia Robinson) i Matijašević (Yuri Matiyashevich) pokazali su da je neodlučiv.

Doprinos ovoj oblasti dao je i Čerč (Alonzo Church), koji je u svojim radovima [25],[26] diskutovao "Entscheidungsproblem" - naziv za problem izračunljivosti (odlučivosti). Jedan od primera koje je on prikazao jeste *naći da li za proizvoljni prirodni*

broj  $n$  postoje prirodne vrednosti  $x$ ,  $y$  i  $z$ , takve da važi  $x^n + y^n = z^n$ . Koristeći termin efektivne izračunljivosti on pokazuje da je prethodno neodlučiv problem.

U literaturi možemo pronaći da je Ričardson (Daniel Richardson) u svom radu *Some Undecidable Problems Involving Elementary Functions of a Real Variable* [27] pokazao da je problem traženja da li je neka realna analitička funkcija pozitivna na određenom intervalu generalno neodlučiv. Oslanjajući se na radove Ričardsona i Vanga (Paul S. Wang) [28] Mikloš Lacković (Miklós Laczkovich) je dokazao da je za njegovu klasu funkcija problem da li je funkcija pozitivna na definisanom intervalu neodlučiv [29]. Klasa koju je Lacković koristio je definisana na sledeći način:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} (\sin x^{m_i})^{q_i} (\sin (x \sin x^{n_i}))^{r_i} \quad (2.1)$$

gde je  $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ ,  $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$  i  $m_i, n_i \in \mathbb{N}$ .

Oslanjajući se na radove Ričardsona, Vanga i Lackovića, u radu [1] pokazano je da neke numeričke metode poput Remezovog algoritma nisu podesne u generalnom slučaju za dokazivanje analitičkih nejednakosti. Naime, za rad Remezovog algoritma je neophodno odrediti maksimum funkcije, što se određuje nulama izvodne funkcije, a problem određivanja nule analitičke funkcije je neodlučiv.

## 2.2 Sistemi računarske algebre

Razvoj računarstva je sa sobom neumitno nosio napredak drugih nauka. Kao što su nauke poput matematike, fizike, hemije i brojne druge donosile otkrića koja su unapređivala računarstvo, tako su i računari omogućavali brži i efikasniji rad istraživača u drugim poljima, često im omogućavajući da rade na problemima koji zbog svog obima proračuna prevazilaze mogućnosti jednog istraživača za nekoliko redova veličine. Već pedesetih godina se uvideo značaj računara ne samo kao prostih računskih mašina koje mogu da obavljaju numerička izračunavanja, već kao naprednih sistema koji mogu da se bave algebrom na simboličkom nivou [30]. Šezdesetih godina su se pojavili prvi sistemi računarske algebre (CAS - Computer algebra system) [31]. Jedan od najranijih



je svakako Saint (Symbolic Automatic Integration). Ovaj sistem, koji je kreirao MIT 1961. godine u programskom jeziku Lisp, većinom se oslanjao na heurističke algoritme. Nakon ove aplikacije su sledili sve ozbiljniji proboji u ovom polju poput programa Fromac (IBM laboratorija), ALPAK (Bell laboratorije), PM i Matlab, koji je prvi interaktivni program ovog tipa.

Osnovna razlika sistema računarske algebre u odnosu na standardne aplikacije za numerička izračunavanja se zasniva na ideji da se izbegnu numeričke aproksimacije koliko god je to moguće. Ukoliko je proračun moguće izvršiti na simboličkom nivou, radi očuvanja preciznosti se on vrši u takvom obliku. Uzmimo primer računanja vrednosti

$$a = (\sqrt{2})^2 \cdot 10^{50} - 2 \cdot 10^{50}$$

Kod većine sistema za numerička izračunavanja, koji vrlo retko imaju mogućnost definisanja preciznosti numeričkih proračuna, vrednost  $a$  neće biti jednaka 0. Ovo je posledica greške pri zaokruživanju, i na većem broju proračuna ova greška akumulacijom može dovesti do sasvim iskrivljene slike o problemu koji se rešava.

Danas je dostupan veliki broj aplikacija koji su sistemi računarske algebre. Neki od njih (poput aplikacija Maple i Mupad) predstavljaju generalna rešenja predviđena za upotrebu u raznim oblastima istraživanja, a neka od njih (poput aplikacija EinS, Lie i Albert) namenjena su samo za vrlo ograničen skup funkcionalnosti. Lista aplikacija koja je ovde data predstavlja neke od češće korišćenih, ali svakako nije potpuna.

### **Komercijalne**

- Maple (Maplesoft) [32], [33]
- Mathematica (Wolfram)[34]
- WolframAlpha (Wolfram) [35]
- Symbolic Math Toolbox - Mupad (MathWorks) [36]
- Magma (University of Sydney) [37]

## Besplatne

- Axiom [38]
- CoCoA [39]
- Fermat
- GAP [40]
- KASH/KANT [41]
- Macaulay2 [42]
- Maxima [43]
- Reduce
- SageMath [44]
- SINGULAR [45]
- PARI/GP

## Specijalizovane i/ili biblioteke postojećih programa

- ACE [46]
- Albert [47]
- ANUNQ
- ANUPQ
- CALI
- CASA [48]
- CHEVIE [49]
- EinS [50]
- Felix [51]
- FeynArts
- GiNaC
- GRAPE [52]
- GUAVA [53]
- LiDIA [54]
- LiE [55]
- MOLGEN [56]
- ORME [57], [58]
- SONATA [59]

Vrlo je lako uvideti kako su aplikacije računarske algebre izmenile način istraživanja mnogih inženjerskih grana. Uzmimo za primer matematičke probleme koji se javljaju u oblasti izrade kontrolnih sistema i komunikacionih protokola koji su prikazani u knjizi [60]. Istraživači su pored rešavanja problema iz svog domena morali da poseduju veliko matematičko znanje kako bi mogli da dođu do novih rezultata. Danas se istraživačima daje moćan alat za sve aspekte matematičkog modelovanja [61], što se veoma obilato koristi u praksi [62].

CAS aplikacije su našle veliku primenu u nastavi matematike [63]. Prolazeći kroz iskustva mnogih predavača, autori rada [64] su analizirali koliko je zapravo zastupljenost ovakvih aplikacija u edukaciji. Pored zaključka da je širom sveta došlo do promene u obrazovanju usmeravajući učenike ka samostalnom radu uz upotrebu CAS aplikacija

kao alata i smanjenju broja izračunavanja koji se rade ručno, njihovo mišljenje je da je potrebno uključiti upotrebu CAS aplikacija već u nižim razredima osnovnog obrazovanja. Po mišljenju autora knjige [65], kao što su logaritmari istisnuti pojavom džepnih kalkulatora, tako će i ovi biti istisnuti upotrebom džepnih CAS sistema, koji pružaju daleko veću preciznost i fleksibilnost u radu.

Izrada sistema računarske algebre je veoma kompleksan izazov. U knjizi [66] autor prikazuje veliki broj algoritama koji su neophodni za funkcionisanje modernih CAS aplikacija. Mada programiranje ovakvog tipa aplikacije može pomoći boljem poznavanju algebre [67], kreiranje CAS aplikacije može sadržati veliki broj prepreka. Tačnost i stabilno funkcionisanje su od kritičnog značaja. U radu [68] autori navode nekoliko problema na koje su naišli prilikom korišćenja CAS aplikacija. Prvi primer je da su prilikom proračuna determinante za veliku matricu sa velikim vrednostima korišćenjem aplikacije Mathematica kompanije Wolfram (veoma ozbiljan CAS sa dugom tradicijom) dobijali pogrešne rezultate. Ono što je još više zabrinjavajuće jeste da su prilikom ponavljanja proračuna svaki put dobijali drugi rezultat. Drugi primer je da računanjem određenog integrala

$$\int_0^2 \sqrt{(2t)^2 + (4 - 3t^2)^2}$$

upotrebom CAS aplikacije Mathematica se dobija vrednost  $0.881679 + 1.17073i$  iako je  $(2t)^2 + (4 - 3t^2)^2 > 0$  za  $0 \leq t \leq 2$ . Autori su prijavili greške u aplikaciji razvojnom timu kompanije Wolfram, ali tokom više godina do objavljivanja ovog rada nije došlo do promene koja ih ispravlja. Autori rada [69] navode čitav niz problema sa kojima se određene CAS aplikacije mogu izboriti dok druge ne. Uporednom analizom se može uočiti da osim pitanja da li je određeni proračun moguće izvršiti korišćenjem posmatrane CAS aplikacije, vreme izvršavanja se može drastično razlikovati između različitih aplikacija. Ovo je svakako razlog zašto je rad na algoritmima dizajniranim za ovaj tip aplikacija i dalje popularna oblast istraživanja, što se može primetiti na osnovu velikog broja radova poput [70] - [81] ali i mnogih drugih koji nisu navedeni u okviru ovog doktorata.

## 2.3 Automatski dokazivači teorema

Kreiranje automatskih dokazivača teorema je ideja koja se javlja još u vreme Lajbnica [82], [83], [84]. On je u svojim razmatranjima o ovoj tematici zaključio da je za kreiranje automatskog dokazivača neophodno postojanje tri elementa:

- Formalni jezik
- Formalni skup pravila zaključivanja
- Znanje

Mada je bila zastupljena ideja da će doći do razvoja generalnog dokazivača koji će moći da izade na kraj sa svakom teoremom koja se može postaviti, Čurč i Tjuring su ovo osporili na osnovu Godelovog rada, pokazavši postojanje neodlučivih problema. Od pedesetih godina počinje razvoj automatskih dokazivača na računarima koji pokušavaju da automatizuju proces u što većoj meri. Ovi dokazivači ispunjavaju uslove koje je Lajbnic postavio, ali i druge koji su kasnije razmatrani. Neki od dokazivača koji su danas dostupni (mnogi od njih se razvijaju preko 30 godina) jesu sledeći [82], [84], [85]-[94] :

- |                 |                 |                |
|-----------------|-----------------|----------------|
| • PVS           | • Lego          | • TAME         |
| • IMPS          | • Matemath      | • Sledgehammer |
| • EVES          | • Mililog       | • E            |
| • ACL2          | • Mizar         | • SPASS        |
| • Alfa/Agda     | • Nuprl/MetaPRL | • Vampire      |
| • B prover      | • Omega         | • CVC3         |
| • Coq           | • Otter         | • Yices        |
| • HOL           | • PhoX          | • Z3           |
| • Isabelle/Isar | • Theorema      | • MetiTarski   |

- PL
- Lean
- JSCoq
- Metis
- AgroCLP
- HERBY
- THEO
- ITP
- Gandalf
- Setheo
- Kiv
- NqThm
- GeoGebra  
(modifikovana)

### 2.3.1 Značaj automatskih dokazivača

Mada su trenutne mogućnosti automatskih dokazivača porasle, oni i dalje imaju svoja ograničenja. Potreba za njima je sve veća. Dok se u prošlosti mogla potkrasti greška u naučnim radovima (a često i da ne bude ispravljena poput grešaka koje su klasifikovane u knjizi "Erreurs de mathematiciens" [83], [95]), danas postoji velika potreba za pomoć istraživačima da se makar deo ovog procesa automatizuje, a samim tim i dovede van sumnji. Mada sistemi računarske algebre mogu da pomognu kao alat prilikom istraživanja, dokazivanje korišćenjem ovakvih alata je sporije i podložnije grešci ljudskog faktora u odnosu na automatske dokazivače teorema. Većina alata za automatsko dokazivanje teorema ima implementirane algoritme koji se upotrebljavaju u sistemima računarske algebre, ali je odluka o pozivanju odgovarajućih procedura prepuštena automatizovanom procesu.

Pored toga što su postigli značajan doprinos u matematičkoj teoriji i obrazovanju [96], automatski dokazivači su pokazali važnost i u tehničkoj industriji. Jedan od najznačajnijih primera grešaka, koji je doveo do veoma široke upotrebe automatskih dokazivača u industriji mikroprocesora, jeste Intelov Pentium procesor iz 1994. godine [97], [98]. Ovaj procesor je u sebi sadržao grešku pri izvršavanju operacije deljenja. Opoziv procesora i nadoknada štete su na kraju kompaniju koštali oko 500 000 000 američkih dolara. Naknadno je utvrđeno da bi, u slučaju da je primenjeno formalno dokazivanje ispravnosti kola nekim od automatskih dokazivača, greška mogla biti uočena. Nakon ovog slučaja Intel korporacija, ali i većina drugih kompanija koje

projektuju mikroprocesore, počela je sa formalnom verifikacijom celokupne arhitekture pre puštanja u proizvodnju. Korišćenjem automatskih dokazivača je moguće iz prvog pokušaja proizvesti kvalitetan, ispravan čip. Neke trenutne procene su da ovakav postupak povećava cenu razvojnog procesa od dva do trideset puta [99], ali ukoliko pogledamo koliko štetu, finansijsku i reputacionu, neki značajan defekt može da dovede, proces je sasvim isplativ.

Automatsko dokazivanje se pokazalo od velikog značaja u situacijama gde neispravno funkcionisanje sistema može dovesti do značajnih gubitaka (u nekim slučajevima i ljudskog života [96], [97], [100] - [103]). Jedan od primera koji se navode u radovima su sistemi kontrole leta koji se veoma često pišu na osnovu specifikacije koja je prethodno verifikovana automatskim dokazivačima. Sistemi upozorenja u avionima veoma često prolaze strogu verifikaciju. Sistem za automatsko gašenje nuklearne centrale Darlington jedan je od prvih koji je morao da prođe kroz formalnu verifikaciju pre puštanja u rad. IBM-ov sistem za transakcije je takođe upotrebio ovakvu proveru. Cela verifikacija se sastojala od 250000 linija koda, ali je nakon procesa uklonjeno šezdeset procenata grešaka i smanjena je cena proizvodnog procesa za devet posto. Još neke grane industrije gde se upotrebljava ovakav tip verifikacije jesu komunikacioni protokoli, provera kontolera, autentifikacioni protokoli i drugi. NASA je značaj ovakvih provera uvidela još tokom sedamdesetih godina prošlog veka, gde je primenjivala dokazivače, koje su samostalno razvijali, na svoje proračune i dizajnerske odluke. Prvi pokušaji su bili neuspešni, ali su kasnije iteracije dokazivača dovele do znatnih poboljšanja u kvalitetu i smanjile broj grešaka. Čak i za neke situacije gde greška na čipu neće dovesti do dramatičnih posledica formalna verifikacija smanjuje mogućnost greške i poboljšava proizvodni proces. Primer ovoga je hardverski čip koji vrši Sobel filtriranje [104].

Industrija softvera je veoma brzo prihvatila potrebu za verifikacijom. Jedan od prvih istraživača koji su se bavili problematikom verifikacije ispravnosti programskog koda je Dajkstra (Edsger Wybe Dijkstra) ([105], str. 51). Njegovo mišljenje je bilo da su programi teški za izradu i da zbog njihove komplikovanosti vrlo lako je moguće napraviti grešku u izradi koja se ispoljava u retkim situacijama. Takođe je smatrao

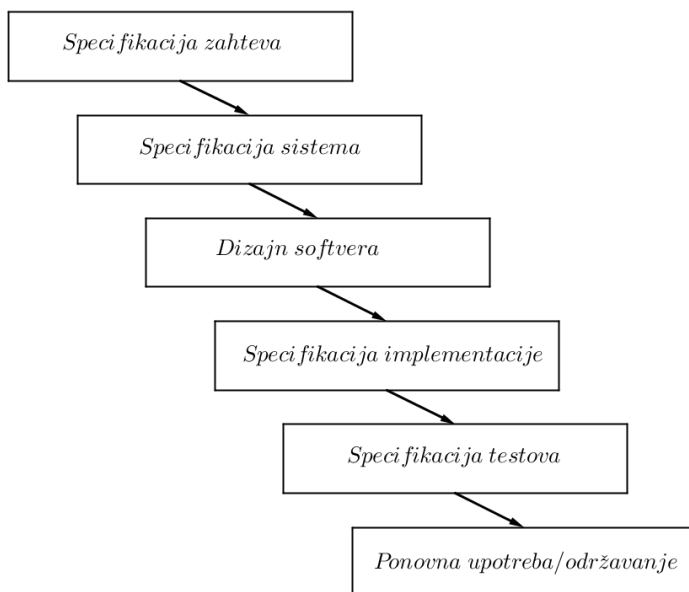
da testovi ”dokazuju postojanje grešaka, ali ne dokazuju njihovo odsustvo” ([105], str. 56). Za njega je rešenje bilo dokazivanje ispravnosti koda po uzoru na matematičke dokaze. Mada njegova istraživanja nisu dovela do rešenja za problem verifikacije koda, dovela su do pojave nove programske paradigme koja je smanjila mogućnosti za greške pri pisanju koda.

U radu [106] se razmatra metodologija razvoja softvera koja bi obavezno uključivala i formalnu verifikaciju radi kvalitetnijeg koda. Jedna od stvari koje se prikazuju jeste da je prilikom razvoja jako bitno da se kod podeli na izuzetno male celine kako bi se mogle propustiti kroz automatske dokazivače. Ideja o dokazivačima u izradi softvera uopšte nije nova. Šuman (Johann Schumann) [93] je na osnovu radova Rašbija (John Rushby) definisao četiri nivoa fleksibilnosti prilikom izrade specifikacije softvera.

0. Bez ikakve upotrebe formalnih metoda. Specifikacija se izrađuje isključivo koristeći govorni jezik.
1. Upotrebom koncepata i notacije iz diskretne matematike.
2. Upotreba formalizovanog jezika, uz dodatnu upotrebu alata za proveru u nekim sekcijama.
3. Izrada u nekom od jezika za formalne specifikacije pripremljena za upotrebu u dokazivaču.

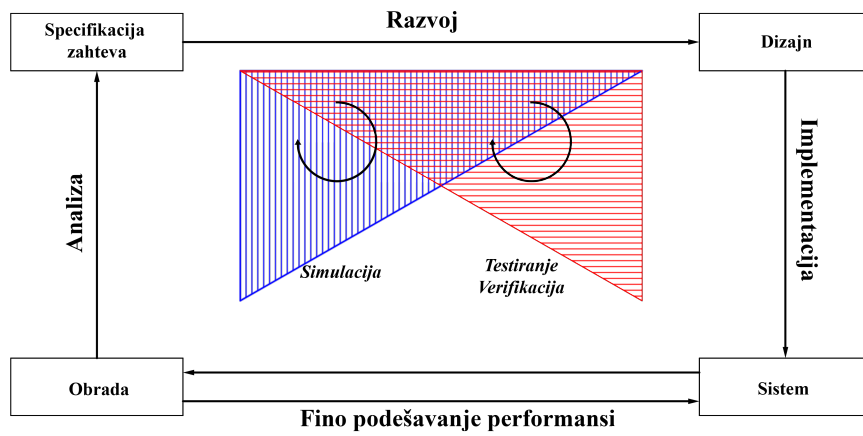
Bibel (Wolfgang Bibel) [107] je u svom radu daleko pre formalizovanja ove podele sugerisao da ništa manje od nivoa dva nije dovoljno za ispravnu ”sintezu programa”. Pod sintezom programa se razmatra program koji je većim delom automatski generisan iz ispravne i verifikovane specifikacije. Ideja o verifikaciji celokupnog programa za sada je nepraktična, usled nedovoljne razvijenosti dokazivača i resursa neophodnih za ovakav poduhvat, ali upotreba na kritičnim sekcijama je prihvatljiva. Uzmimo na primer kompajler za Prolog koji je prikazan u [108]. Mada okruženje koje poziva kompajler nije verifikovano, sam kompajler je optimizovan i testiran koristeći automatskog dokazivača KIV.

U okviru knjige [97] Šuman prikazuje i na koji način je moguće umetnuti verifikaciju aplikacije u standardne razvojne modele. Jedan od bitnih faktora kojima se vodio je cena ispravke greške u softveru, koja je šest puta veća u toku razvoja i do sto puta veća kao naknadna ispravka već objavljenog softvera (Slika 2.3). Njegova sugestija u Waterfall modelu razvoja (Slika 2.1) je vršenje verifikacije već u toku faze samog dizajna sistema kako bi se smanjili naknadni problemi. U iterativnom modelu razvoja (Slika 2.2) sugerise se verifikacija koda zajedno sa simulacijama za vreme razvoja specifikacije i za vreme testiranja u fazi dizajna sistema. Mada je danas vrlo retko dostupan Waterfall model razvoja, a nešto više Iterativni model, ovakva modifikacija se može učiniti i u ostalim razvojnim modelima koji se mogu naći u modernim radnim okruženjima.

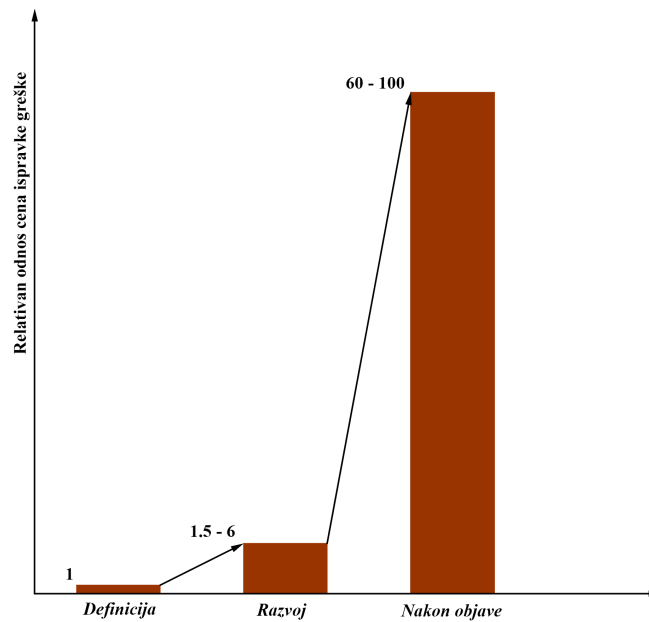


Slika 2.1: Waterfall model razvojnog ciklusa softvera [97]





Slika 2.2: Iterativni životni ciklus softvera [97]



Slika 2.3: Relativna cena ispravke greške u odnosu na vreme njenog uočavanja [97]

## 2.3.2 Neki problemi modernih dokazivača

### Sagledivost i čitljivost

Zbog svoje kompleksnosti, automatski sistemi za dokazivanje teorema uvode mnoge prepreke za istraživače. Složenost sintakse za unos i samog ispisa dokaza jedan su od problema na koji je obraćana veća pažnja u poslednje vreme ([109]). Jedan od razloga koji se često navodi za ovaj problem je što su dokazivači uglavnom kreirani od strane matematičara za druge matematičare. Drugi razlog je što aplikacije generalno ne razmatraju prečicama, jasnoći i estetskim vrednostima dokaza koje ljudi primenjuju. Ipak, ovo je predstavljalo prepreku za širu industrijsku upotrebu dokazivača. U radu [90] istraživači su smatrali ljudski način rezonovanja i čitljivost dokaza izuzetno bitnom smernicom za razvoj dokazivača TAME. Uzimali su u obzir i da dokaz mora biti ljudskih razmera - da koraci dokazivanja budu dovoljno mali da ljudsko biće može da ih sagleda. Veoma bitna stavka u prikazu dokaza se smatra i ostavljanje tačke za laku verifikaciju dokaza. Mada deluje kao trivijalan problem, ukoliko pogledamo primer Keplerovog otvorenog problema koji navode Marić i Harison ([83], [84]), vidimo sav značaj ovog problema. Dvanaest recenzenata koje je postavio časopis *Annals of Mathematics* proučavalo je T. Hales i S. Fergusonov dokaz Keplerovog otvorenog problema, predat u vidu 300 strana proračuna koje je ispisao program od oko 40000 linija koda. Nakon četiri godine recenziranja, predat je izveštaj gde su recenzenti bili 99 procenata sigurni u ispravnost dokaza, ali zbog obima nisu mogli u potpunosti da budu sigurni. Mada je kreiranje ljudima čitljivih dokaza bilo neizvodljivo u doba početaka ove oblasti, danas je sa porastom računarskih resursa postalo ne samo izvodljivo, već i sasvim neophodna komponenta u modernim dokazivačima. Na slikama 2.4, 2.5, 2.6 i 2.7 možemo videti primer interfejsa i sintakse nekih onlajn dostupnih automatskih dokazivača.

### Problem početne hipoteze

Još jedna problematika sa kojom se dokazivači susreću jeste pogrešna početna hipoteza. Veliki broj dokazivača ima poteškoća da detektuje situaciju kada je uneta hipoteza netačna i zbog dugog vremena čekanja na dokaz mogu dugo vreme rada programa

da pogrešno protumače. Kako bi se ovo izbeglo neki dokazivači pribegavaju taktici korišćenje slabijih, ali bržih algoritama da bi detektovali da li je došlo do ovakve situacije. Mada ovakvi algoritmi ne dolaze uvek do rešenja, često su sposobni da veoma brzo dođu do negativnih rezultata. Drugo rešenje koje se može primeniti jeste uvođenje vremenskog ograničenja na vreme pretrage za dokazom.

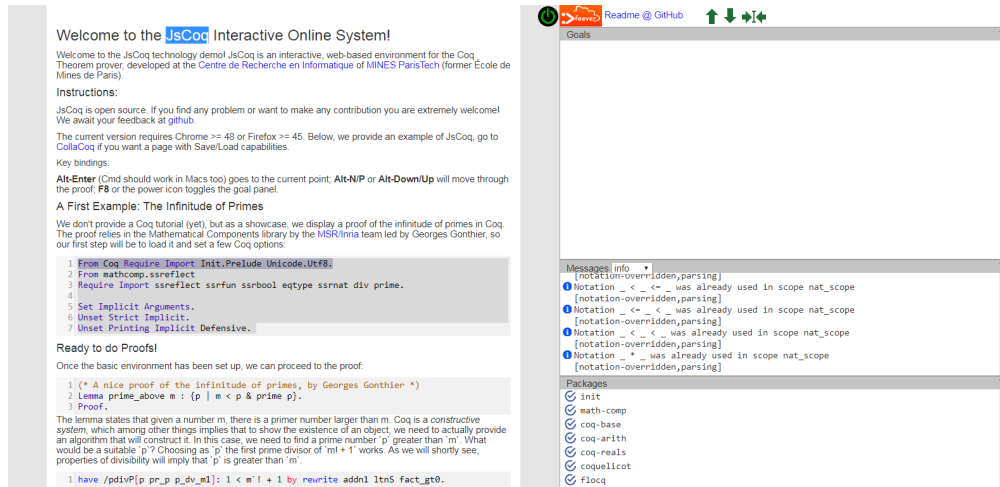
## **Podela**

U radu [82] su prikazane podele dokazivača na automatske dokazivače i interaktivne dokazivače teorema, kao i podela na generalne i specijalizovane dokazivače. Automatski dokazivači su sposobni za kompletno samostalno izvođenje dokaza, dok su interaktivni dokazivači namenjeni samo kao pomoćno sredstvo za rad ljudskog istraživača. Generalni dokazivači su sposobni za rešavanje veoma širokog spektra problema, dok specijalizovani dokazivači rešavaju samo uzak spektar problema. Ono što se može primetiti u praksi je da generalni dokazivači zbog veoma raznovrsnih putanja kojim moraju da idu veoma često ne mogu da reše sve probleme koje mogu da prihvate kao ulaz ([83]), dok se specijalizovani dokazivači fokusiraju na kompletno rešavanje svoje problematike. Ovo je dovelo do toga da se generalni dokazivači često oslanjaju na specijalizovane za rešavanje podsekcija analiziranog problema ([85], [89], [91], [110]).

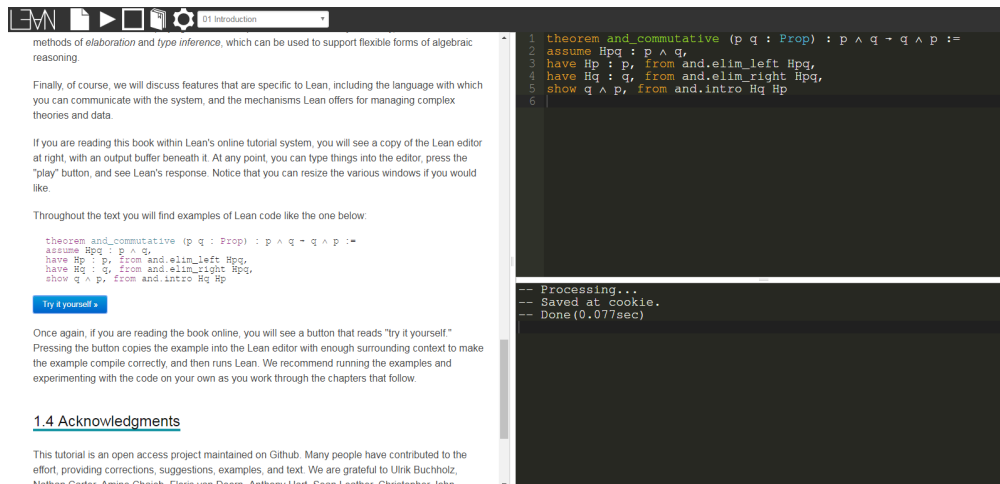
## **Vreme izvršavanja**

Mada problem vremena koje je neophodno da bi automatski dokazivač došao do dokaza ne deluje kao prioritet, u nekim slučajevima ovo je od velikog značaja. Performanse računara su drastično porasle od vremena kada je počeo razvoj većine modernih automatskih dokazivača, ali i dalje predstavljaju ograničenje. Većina algoritama koji se mogu sresti u ovoj oblasti ne pružaju priliku za iskorišćavanje paralelizacije proračuna koja je osnov većine tehnika za ubrzanje programa u poslednjoj deceniji [111], [112]. U situacijama izvršavanja programa na serverskoj strani, višestruki korisnici mogu brzo dovesti do zagušenja i obaranja servera. Usled ovoga se često mogu naći vremenska ograničenja za pokušaje dokazivanja kod većine dokazivača dostupnih kao *web* ap-

likacije. Mada bi se ovaj problem mogao rešiti i izvršavanjem na klijentskoj strani, veoma malo istraživača je voljno da na takav način učini kod dostupnim, uz takođe značajan pad performansi.



Slika 2.4: Onlajn dokazivač JSCoq (<https://x80.org/rhino-coq/>)



Slika 2.5: Onlajn dokazivač Lean (<https://leanprover.github.io/tutorial/>)

**Automated Theorem Prover for Classical Predicate Logic**

Other programs - Feedback - Deutsche Fassung

This is a beta version. The tableau algorithm always terminates, but (a) there is a bug hidden in them, and (b) there are valid arguments they are not able to derive. The algorithm from Benson Mates' book "Elementary Logic" is complete, but it leads to lengthy proofs, is rather slow and does not generally terminate on invalid arguments. There are a number of [examples](#) showing the syntax. Please note that the lower-case letter "v" denoting disjunction must be preceded and followed by at least one blank character. Please note also that the upper-case letter "E" may be used as an abbreviation for the existential quantifier. For this reason, "E" must not be used as a predicate letter.

```

exist(x,all(y,F(x,y))) -> all(x,exist(y,F(y,x)))

```

Algorithm: Benson Mates

Output format: Jaskowsky/Gentzen style

Timeout after: 30 seconds

Prove Reset

You are visitor number 893517

© Christian Gottschall / gottschall@gmx.de / 2012-03-31 01:19:53

**PL-derivation**

Back...

Automated theorem prover (Ch. Gottschall 1993) starting at 16.08.2017, 07:36.48

Task:  
 using Benson Mates' calculus  
 Jaskowsky/Gentzen style derivation  
 beautified output  
 allow modus tollendo ponens  
 debug mode 1  
 input from stdin

Input:  
 exist(x,all(y,F(x,y))) -> all(x,exist(y,F(y,x)))  
 (The first expression is the conclusion.)

There are 1 predicates.  
 predicate F: arity=2

There are 2 bound variables and individual constants.  
 bound variable x  
 bound variable y

```

* (1) ~(exist(x,all(y,F(x,y))) -> all(x,exist
      (y,F(y,x)))) A
* (2) exist(#1,all(#2,exist(#3,all(#4,F(#1,#2)
      & ~F(#4,#3)))) IPNF
** (3) all(#2,exist(#3,all(#4,F($1,#2) & ~F(#4,
      #3)))) A
** (4) exist(#3,all(#4,F($1,$1) & ~F(#4,#3))) 3UE
*** (5) all(#4,F($1,$1) & ~F(#4,$2)) A
*** (6) exist(#3,all(#4,F($1,$2) & ~F(#4,#3))) 3UE
*** (7) F($1,$1) & ~F($1,$2) 3UE
*** (8) F($1,$1) & ~F($2,$2) 3UE
**** (9) all(#4,F($1,$2) & ~F(#4,$3)) A
**** (10) exist(#3,all(#4,F($1,$3) & ~F(#4,#3))) 3UE
**** (11) F($1,$1) & ~F($3,$2) 3UE
**** (12) F($1,$2) & ~F($1,$3) 3UE
**** (13) FALSUM 7,12T
**** (14) FALSUM 9,13&E
*** (15) FALSUM 6,9,14&E
*** (16) FALSUM 5,15&E
** (17) FALSUM 4,5,16&E
** (18) FALSUM 3,17&I
* (19) FALSUM 2,3,18&E
* (20) exist(x,all(y,F(x,y))) -> all(x,exist(y,
      F(y,x))) 1,19&AA Q.E.D.

```

Terminating normally at 16.08.2017, 07:36.48 (cpu time 0.00s)

CPU time: 0.00s user, 0.00s system, 0 major page faults.

Back to the form / Back to the main page / My homepage

Powered by Linux

© Christian Gottschall / christian.gottschall@posteo.de / 2017-03-27

Slika 2.6: Onlajn dokazivač PL (<https://logik.phl.univie.ac.at/~chris/cgi-bin/cgi-ableitung>)

**z3** Research

Is this formula satisfiable?

```

1 ; This example illustrates basic arithmetic and
2 ; uninterpreted functions
3
4 (declare-fun x () Int)
5 (declare-fun y () Int)
6 (declare-fun z () Int)
7 (assert (>= (* 2 x) (x y z)))
8 (declare-fun f (Int) Int)
9 (declare-fun g (Int Int) Int)
10 (assert (< (F x) (g x x)))
11 (assert (< (f y) (g x x)))
12 (check-sat)
13 (get-model)
14 (unsat)
15 (assert (= x y))
16 (check-sat)
17 (pop)
18 (exit)
19

```

tutorial home video permalink

```

sat
(model
  (define-fun y () Int
    3)
  (define-fun x () Int
    2)
  (define-fun z () Int
    1)
  (define-fun g ((x1 Int) (x12 Int)) Int
    (ite (and (= x1 2) (= x12 2)) 0
        0))
  (define-fun f ((x1 Int)) Int
    (ite (= x1 2) (- 1)
        (- x1 3) 1))
)
unsat

```

samples  
 smt\_arith  
 doc\_examples  
 smt\_core  
 smt\_datatypes  
 strategy  
 smt\_arrays  
 smt\_bv  
 bit-count

about Z3 - efficient Theorem Prover  
 Z3 is a high-performance theorem prover. Z3 supports arithmetic, fixed-size bit-vectors, extensional arrays, datatypes, uninterpreted functions, and quantifiers.

tools developer about

rise4fun © 2017 Microsoft Corporation · terms of use · privacy & cookies · code of conduct

Slika 2.7: Onlajn dokazivač Z3 (<http://rise4fun.com/z3>)

## 2.4 Miksovano trigonometrijsko polinomske funkcije i neke nejednakosti u vezi s njima

U okviru ove teze biće pre svega posvećena pažnja klasi miksovano trigonometrijsko polinomskih funkcija (MTP funkcije). Ova klasa realno analitičkih funkcija je definisana na sledeći način:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x \quad (2.2)$$

gde su  $\alpha \in R$  i  $p_i, q_i, r_i \in N \cup \{0\}$ .

Termin miksovano trigonometrijsko polinomskih funkcija potiče iz radova Jua (Bo Yu) i Donga (Bo Dong) ([113],[114]), ali u donekle izmenjenoj verziji pošto se MTP funkcija u pomenutim radovima razmatra po više promenljivih. Ipak, potrebno je napomenuti da su se MTP funkcije javljale daleko pre ovih radova. Već u radovima Nikolasa De Kuze, koji je živio od 1401. do 1464, vidimo neke proste nejednakosti poput  $\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} < x$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  koje se mogu svesti na dokaz MTP nejednakosti  $f(x) = -3 \sin x + x \cos x + 2x > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  ([115],[116]). Precizan dokaz ove nejednakosti je kasnije dao Hajgens [117].

U okviru ovog doktorata biće prikazan algoritam koji se oslanja na radove Tarskog [118], koji govori da je dokazivanje pozitivnosti za definisani interval realnih polinomskih funkcija odlučiv problem. Postupak za dokazivanje da je  $P(x) \neq 0$  dat je u knjizi Katlanda [119], koristeći Štrumov (Jacques Charles Franois Sturm) algoritam. Jedan od rezultata disertacije jeste da za MTP funkcije (iako su delom u klasi Lackovića) postoji algoritam za dokazivanje njihove pozitivnosti na unapred definisanom segmentu upotrebom Tejlorovih razvoja ([120], str. 81-108) radi generisanja nanižne aproksimacije funkcije.

# Glava 3

## Sistem SimTheP

U okviru ove glave su predstavljeni algoritmi kreirani u okviru sistema *SimTheP*. Osim algoritma primene Šturmove teoreme, svi algoritmi su nastali kao originalno istraživanje i rešavali su pojedinačne probleme koji su se pojavljivali kao potencijalne prepreke u dokazivanju. Kako bi ilustrovali pomenute probleme, u prvom poglavlju ove glave su prikazani neki primeri i metode njihovog rešavanja.

Polazimo od MTP funkcije  $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x$ , gde je  $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$ . Primetimo da ako je  $q_i = r_i = 0$  za svako  $i = 1..n$ , tada je  $f(x)$  polinomska funkcija, a u suprotnom  $f(x)$  nazivamo *pravom MTP funkcijom*. Za MTP funkciju  $f(x)$  svaka polinomska funkcija  $P(x)$  takva da važi

$$f(x) > P(x)$$

za  $x \in (0, \delta)$  naziva se *nanižna aproksimacija MTP funkcije*. Za MTP funkciju  $f(x)$  svaka polinomska funkcija  $P(x)$  takva da važi

$$P(x) > f(x)$$

za  $x \in (0, \delta)$  naziva se *navišna aproksimacija MTP funkcije*. Osnovni problem u okviru ove disertacije je dokazivanje MTP nejednakosti oblika:

$$f(x) > 0$$

za  $x \in (0, \delta)$ . Za dokaz prethodne nejednakosti dovoljno je odrediti nanižnu polinomsku

aproksimaciju  $P(x)$  MTP funkcije  $f(x)$  takvu da je

$$P(x) > 0$$

za  $x \in (0, \delta)$ . U ovoj glavi se pokazuje postupak za određivanje nanižne aproksimacije koja ispunjava prethodni uslov.

### 3.1 Problemi dokazivanja MTP nejednakosti

U ovom poglavlju dajemo nekoliko primera dokazivanja MTP nejednakosti. Posebno ćemo se osvrnuti na problematične situacije koje se javljaju prilikom dokazivanja MTP nejednakosti.

#### Primer 1

Uzmimo primer dokazivanja MTP nejednakosti

$$f(x) = \cos 4x + 2 > 0$$

za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

Jedan jednostavan dokaz, uz poznavanje elementarne trigonometrije, bio bi sledeći

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 4x + 2 > 0 \\ \iff \cos^2 2x - \sin^2 2x + 2 &> 0 \\ \iff 2 \cos^2 2x - 1 + 2 &> 0 \\ \iff 2 \cos^2 2x + 1 &> 0. \end{aligned}$$

Cilj nam je da metod dokazivanja koji se izlaže u disertaciji ilustrujemo korišćenjem odgovarajućih nanižnih aproksimacija kosinusne funkcije. Nažalost, nije moguće upotrebiti bilo koju nanižnu aproksimaciju, što će biti prikazano u ovom primeru. Nanižne aproksimacije funkcije  $\cos 4x$  su Tejlorove aproksimacije  $T_2^{\cos,0}(4x)$ ,  $T_6^{\cos,0}(4x)$ ,  $T_{10}^{\cos,0}(4x)$  i  $T_{14}^{\cos,0}(4x)$

Primetimo da jednakost

$$T_2^{\cos,0}(4x) = T_6^{\cos,0}(4x)$$



ima prvi pozitivan koren za  $c = \frac{\sqrt{30}}{4} = 1.3693\dots$ . Za tako određenu vrednost  $c$  važi

$$\begin{cases} T_2^{\cos,0}(4x) < T_6^{\cos,0}(4x) < f(x) & : x \in (0, c) \\ T_6^{\cos,0}(4x) < T_2^{\cos,0}(4x) < f(x) & : x \in (c, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Iz ovoga zaključujemo da poredak nanižnih aproksimacija zavisi od intervala na kome se vrši posmatranje. U opštem slučaju za  $x \in (0, c)$  se može pokazati da važi poredak

$$0 < T_2^{\cos,0}(4x) < T_6^{\cos,0}(4x) < T_{10}^{\cos,0}(4x) < T_{14}^{\cos,0}(4x) < f(x)$$

Primetimo da važi

$$T_2^{\cos,0}(4c) = T_6^{\cos,0}(4c) = -12 < 0$$

Navedeno dokazuje da  $T_2^{\cos,0}(4x)$  i  $T_6^{\cos,0}(4x)$  nisu dovoljno dobri za dokaz početne hipoteze. Do istog zaključka smo mogli da dođemo određujući prve pozitivne korene za nanižnu aproksimaciju koja koristi  $T_2^{\cos,0}(4x)$  koji iznosi

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = 0.612\dots$$

i za za nanižnu aproksimaciju koja koristi  $T_6^{\cos,0}(4x)$  koji iznosi

$$x = \frac{\sqrt{2\sqrt[3]{35 + 15\sqrt{6}} \left( (35 + 15\sqrt{6})^{2/3} + 5\sqrt[3]{35 + 15\sqrt{6}} - 5 \right)}}{4\sqrt[3]{35 + 15\sqrt{6}}} = 0.9969\dots$$

Prethodno rešenje je određeno simbolički korišćenjem Kardanovih (Girolamo Cardano) formula.

Za nanižnu aproksimaciju koja koristi  $T_{10}^{\cos,0}(4x)$  prvi pozitivan koren možemo numerički odrediti sa vrednošću

$$x = 1.467\dots$$

Takođe za nanižnu aproksimaciju  $P_{14}(x) = T_{14}^{\cos,0}(4x) + 2$  prvi pozitivan koren možemo numerički odrediti sa vrednošću

$$x = 1.8207\dots$$

Prethodna dva korena se mogu dobiti oslanjajući se na algoritam prikazan u poglavlju 3.2.1. Dokaz da je  $P_{14}(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  je moguće dobiti upotrebom Šturmove

teoreme (Jacques Charles François Sturm) kao što je prikazano u narednom primeru. Na kraju ovog primera primetimo da je dokazano da

$$f(x) > P_{14}(x) > 0$$

za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

## Primer 2

Šturмова teorema je prikazana u poglavlju 3.2.1. Primenom te teoreme na  $P_{14}(x)$  dobijamo sledeći Šturmov niz

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= T_{14}^{\cos,0}(4x) + 2 \\
&= -\frac{131072}{42567525}x^{14} + \frac{16384}{467775}x^{12} - \frac{4096}{14175}x^{10} + \frac{512}{315}x^8 - \frac{256}{45}x^6 + \frac{32}{3}x^4 - 8x^2 + 3 \\
p_1(x) &= p_0'(x) \\
&= -\frac{262144}{6081075}x^{13} + \frac{65536}{155925}x^{11} - \frac{8192}{2835}x^9 + \frac{4096}{315}x^7 - \frac{512}{15}x^5 + \frac{128}{3}x^3 - 16x \\
p_2(x) &= -rem(p_0, p_1) = -\frac{16384}{3274425}x^{12} + \frac{8192}{99225}x^{10} - \frac{512}{735}x^8 + \frac{1024}{315}x^6 - \frac{160}{21}x^4 + \frac{48}{7}x^2 - 3 \\
p_3(x) &= -rem(p_1, p_2) = \frac{65536}{225225}x^{11} - \frac{16384}{5265}x^9 + \frac{4096}{273}x^7 - \frac{2048}{65}x^5 + \frac{640}{39}x^3 - \frac{128}{13}x \\
p_4(x) &= -rem(p_2, p_3) = -\frac{77824}{2679075}x^{10} + \frac{8704}{19845}x^8 - \frac{512}{189}x^6 + \frac{4160}{567}x^4 - \frac{1264}{189}x^2 + 3 \\
p_5(x) &= -rem(p_3, p_4) = -\frac{1974272}{1540539}x^9 + \frac{53248}{4389}x^7 - \frac{570368}{13585}x^5 + \frac{412288}{8151}x^3 - \frac{54896}{2717}x \\
p_6(x) &= -rem(p_4, p_5) = -\frac{144896}{885675}x^8 + \frac{3335168}{1897875}x^6 - \frac{783232}{126525}x^4 + \frac{262744}{42175}x^2 - 3 \\
p_7(x) &= -rem(p_5, p_6) = \frac{562294784}{344188845}x^7 - \frac{106640384}{16389945}x^5 - \frac{1945088}{1092663}x^3 - \frac{1200352}{364221}x \\
p_8(x) &= -rem(p_6, p_7) = -\frac{170770816}{154438875}x^6 + \frac{65570624}{10295925}x^4 - \frac{20248028}{3431975}x^2 + 3 \\
p_9(x) &= -rem(p_7, p_8) = -\frac{8307018752}{2861745315}x^5 + \frac{3234978176}{308187957}x^3 - \frac{1517980736}{1335481147}x \\
p_{10}(x) &= -rem(p_8, p_9) = -\frac{1211295248}{511076349}x^4 + \frac{931323284}{170358783}x^2 - 3 \\
p_{11}(x) &= -rem(p_9, p_{10}) = -\frac{4320947687296}{1136724884295}x^3 - \frac{961524078848}{378908294765}x \\
p_{12}(x) &= -rem(p_{10}, p_{11}) = -\frac{237957753332}{33757403807}x^2 + 3 \\
p_{13}(x) &= -rem(p_{11}, p_{12}) = \frac{1237241163473184}{297744638856665}x \\
p_{14}(x) &= -rem(p_{12}, p_{13}) = -3 \\
p_{15}(x) &= -rem(p_{13}, p_{14}) = 0
\end{aligned}$$

Računajući redom vrednosti polinoma koji se javljaju u Šturmovom nizu za argumente

$x = 0$  i  $x = \frac{\pi}{2}$  dobijamo sledeće vrednosti:

$$\begin{array}{lll}
 p_0(0) = 3 & p_6(0) = -3 & p_{12}(0) = 3 \\
 p_1(0) = 0 & p_7(0) = 0 & p_{13}(0) = 0 \\
 p_2(0) = -3 & p_8(0) = 3 & p_{14}(0) = -3 \\
 p_3(0) = 0 & p_9(0) = 0 & p_{15}(0) = 0 \\
 p_4(0) = 3 & p_{10}(0) = -3 & \\
 p_5(0) = 0 & p_{11}(0) = 0 & 
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 p_0\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2.750\dots \\
 &= 3 - 2\pi^2 + \frac{2}{3}\pi^4 - \frac{4}{45}\pi^6 + \frac{2}{315}\pi^8 - \frac{4}{14175}\pi^{10} + \frac{4}{467775}\pi^{12} - \frac{8}{42567525}\pi^{14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -2.499\dots \\
 &= -8\pi + \frac{16}{3}\pi^3 - \frac{16}{15}\pi^5 + \frac{32}{315}\pi^7 - \frac{16}{2835}\pi^9 + \frac{32}{155925}\pi^{11} - \frac{32}{6081075}\pi^{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -3.031\dots \\
 &= -\frac{4}{3274425}\pi^{12} + \frac{8}{99225}\pi^{10} - \frac{2}{735}\pi^8 + \frac{16}{315}\pi^6 - \frac{10}{21}\pi^4 + \frac{12}{7}\pi^2 - 3
 \end{aligned}$$

$$p_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = -38.523\dots = \frac{32}{225225}\pi^{11} - \frac{32}{5265}\pi^9 + \frac{32}{273}\pi^7 - \frac{64}{65}\pi^5 + \frac{80}{39}\pi^3 - \frac{64}{13}\pi$$

$$p_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4.071\dots = -\frac{76}{2679075}\pi^{10} + \frac{34}{19845}\pi^8 - \frac{8}{189}\pi^6 + \frac{260}{567}\pi^4 - \frac{316}{189}\pi^2 + 3$$

$$p_5\left(\frac{\pi}{2}\right) = -25.545\dots = -\frac{3856}{1540539}\pi^9 + \frac{416}{4389}\pi^7 - \frac{17824}{13585}\pi^5 + \frac{51536}{8151}\pi^3 - \frac{27448}{2717}\pi$$

$$p_6\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4.981\dots = -\frac{566}{885675}\pi^8 + \frac{52112}{1897875}\pi^6 - \frac{48952}{126525}\pi^4 + \frac{65686}{42175}\pi^2 - 3$$

$$p_7\left(\frac{\pi}{2}\right) = -35.749\dots = \frac{4392928}{344188845}\pi^7 - \frac{3332512}{16389945}\pi^5 - \frac{243136}{1092663}\pi^3 - \frac{600176}{364221}\pi$$

$$p_8\left(\frac{\pi}{2}\right) = 10.604\dots = -\frac{2668294}{154438875}\pi^6 + \frac{4098164}{10295925}\pi^4 - \frac{5062007}{3431975}\pi^2 + 3$$

$$p_9\left(\frac{\pi}{2}\right) = 11.138\dots = -\frac{259594336}{2861745315}\pi^5 + \frac{404372272}{308187957}\pi^3 - \frac{758990368}{1335481147}\pi$$

$$p_{10}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3.940\dots = -\frac{75705953}{511076349}\pi^4 + \frac{232830821}{170358783}\pi^2 - 3$$

$$p_{11}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -18.718\dots = -\frac{540118460912}{1136724884295}\pi^3 - \frac{480762039424}{378908294765}\pi$$

$$p_{12}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -14.392\dots = -\frac{59489438333}{33757403807}\pi^2 + 3$$

$$p_{13}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6.527\dots = \frac{618620581736592}{297744638856665}\pi$$

$$p_{14}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$$

$$p_{15}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Za  $x = 0$  i  $x = \frac{\pi}{2}$  ima 8 promena znaka. Ovo znači da za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  nema nula polinomske funkcije.

### Primer 3

Navedimo još jedan primer iz literature. U radu [121] se javlja sledeća polinomska funkcija koja ima koeficijente sa veoma složenim simboličkim zapisom.

$$H_1 = \rho_{1,14}x^{14} + \rho_{1,13}x^{13} + \rho_{1,12}x^{12} + \rho_{1,11}x^{11} + \rho_{1,10}x^{10} + \rho_{1,9}x^9 + \rho_{1,8}x^8 + \rho_{1,7}x^7 \\ + \rho_{1,6}x^6 + \rho_{1,5}x^5 + \rho_{1,4}x^4 + \rho_{1,3}x^3 + \rho_{1,2}x^2 + \rho_{1,1}x + \rho_{1,0}$$

gde su

$$\rho_{1,0} = 118609920 (2 \pi^{10} - 177 \pi^8 + 4935 \pi^6 - 85050 \pi^4 + 831600 \pi^2 - 3175200) \pi^{23}$$

$$\rho_{1,1} = 5265 (40981 \pi^{19} + 8062512 \pi^{17} - 1200402000 \pi^{15} + 10812049920 \pi^{13} \\ + 1876776249600 \pi^{11} - 245548461312000 \pi^9 + 20600900812800 \pi^8 \\ + 16840163450880000 \pi^7 - 7416324292608000 \pi^6 - 541159913226240000 \pi^5 \\ + 736688213065728000 \pi^4 + 6619069431152640000 \pi^3 \\ - 12459424811581440000 \pi^2 - 26649325291438080000 \pi \\ + 58143982454046720000) \pi^{13}$$

$$\rho_{1,2} = -21060 (484 \pi^{21} - 1799 \pi^{19} - 31876698 \pi^{17} + 7133539980 \pi^{15} \\ - 859925324160 \pi^{13} + 60601122187200 \pi^{11} - 27467867750400 \pi^{10} \\ - 2219580715968000 \pi^9 + 2419747474636800 \pi^8 + 41725676095488000 \pi^7 \\ - 63759788015616000 \pi^6 - 423071687098368000 \pi^5 + 769031627341824000 \pi^4 \\ + 2296485418106880000 \pi^3 - 4672284304343040000 \pi^2 \\ - 5450998355066880000 \pi + 12113329677926400000) \pi^{12}$$

$$\rho_{1,3} = 810 (3287 \pi^{21} - 9411072 \pi^{19} + 1953992280 \pi^{17} - 104047433280 \pi^{15} \\ - 4486871592000 \pi^{13} + 792548506713600 \pi^{11} - 115307819827200 \pi^{10} \\ - 41557678312550400 \pi^9 + 48741731323084800 \pi^8 + 730819102261248000 \pi^7 \\ - 3383354610155520000 \pi^6 - 538971067514880000 \pi^5 \\ + 61377087827607552000 \pi^4 - 77611833722142720000 \pi^3 \\ - 404931306376396800000 \pi^2 + 440925200276520960000 \pi \\ + 818861086227824640000) \pi^{11}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,4} = & 42120 (7155 \pi^{21} - 3921548 \pi^{19} + 897324984 \pi^{17} - 94307498880 \pi^{15} \\
& + 3633527540160 \pi^{13} - 7030466150400 \pi^{12} + 28926516326400 \pi^{11} \\
& + 617046029107200 \pi^{10} - 5729151646310400 \pi^9 - 15296168853504000 \pi^8 \\
& + 163845831131136000 \pi^7 + 158438094667776000 \pi^6 \\
& - 2245772867272704000 \pi^5 - 381528683053056000 \pi^4 \\
& + 15718487320166400000 \pi^3 - 5595204660756480000 \pi^2 \\
& - 44819319808327680000 \pi + 33917323098193920000) \pi^{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,5} = & -324 (3013 \pi^{23} - 1983240 \pi^{21} + 462480560 \pi^{19} - 40847734080 \pi^{17} \\
& - 668523878400 \pi^{15} + 303913241049600 \pi^{13} - 85019590656000 \pi^{12} \\
& - 14955232900608000 \pi^{11} + 33853738254336000 \pi^{10} + 452685482016768000 \pi^9 \\
& - 1559110508347392000 \pi^8 - 12135218135040000000 \pi^7 \\
& + 37422223023144960000 \pi^6 + 196234567389020160000 \pi^5 \\
& - 506271257654722560000 \pi^4 - 1522241762859417600000 \pi^3 \\
& + 3494407199470387200000 \pi^2 + 4409252002765209600000 \pi \\
& - 9448397148782592000000) \pi^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,6} = & -5616 (523 \pi^{23} - 103800 \pi^{21} - 73486320 \pi^{19} + 32685822720 \pi^{17} \\
& - 4913000467200 \pi^{15} - 1798491340800 \pi^{14} + 336334858675200 \pi^{13} \\
& + 147670445260800 \pi^{12} - 11847491453952000 \pi^{11} - 167995441152000 \pi^{10} \\
& + 267060636057600000 \pi^9 - 118249170665472000 \pi^8 \\
& - 4235673962741760000 \pi^7 + 3896145366220800000 \pi^6 \\
& + 43348415490293760000 \pi^5 - 59726131636469760000 \pi^4 \\
& - 242050284099993600000 \pi^3 + 430888441400524800000 \pi^2 \\
& + 545099835506688000000 \pi - 1162879649080934400000) \pi^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,7} = & 6 (4603 \pi^{17} - 1561248 \pi^{15} + 172972800 \pi^{13} - 1793381990400 \pi^9 \\
& + 144666147225600 \pi^7 - 114776447385600 \pi^6 - 4787134326374400 \pi^5 \\
& + 5624045921894400 \pi^4 + 74317749682176000 \pi^3 - 128549621071872000 \pi^2 \\
& - 385648863215616000 \pi + 819503834333184000) (\pi^4 - 180 \pi^2 + 1680)^2 \pi^7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,8} = & 312 (199 \pi^{17} - 31680 \pi^{15} + 766402560 \pi^{11} - 116876390400 \pi^9 \\
& + 7035575500800 \pi^7 - 4782351974400 \pi^6 - 204560507289600 \pi^5 \\
& + 231760134144000 \pi^4 + 3051508432896000 \pi^3 - 5253229707264000 \pi^2 \\
& - 15759689121792000 \pi + 33373459316736000) (\pi^4 - 180 \pi^2 + 1680)^2 \pi^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,9} = & -12 (37 \pi^{19} - 11232 \pi^{17} + 484323840 \pi^{13} - 94650716160 \pi^{11} \\
& + 8146603745280 \pi^9 - 3188234649600 \pi^8 - 396337419878400 \pi^7 \\
& + 267811710566400 \pi^6 + 11398735930982400 \pi^5 - 12854962107187200 \pi^4 \\
& - 168721377656832000 \pi^3 + 289236647411712000 \pi^2 + 867709942235136000 \pi \\
& - 1831832100274176000) (\pi^4 - 180 \pi^2 + 1680)^2 \pi^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,10} = & -624 (\pi^{19} - 95040 \pi^{15} + 30412800 \pi^{13} - 4523904000 \pi^{11} \\
& + 353311580160 \pi^9 - 132843110400 \pi^8 - 16491067084800 \pi^7 \\
& + 11036196864000 \pi^6 + 467704826265600 \pi^5 - 525322970726400 \pi^4 \\
& - 6875550646272000 \pi^3 + 11742513463296000 \pi^2 + 35227540389888000 \pi \\
& - 74163242926080000) (\pi^4 - 180 \pi^2 + 1680)^2 \pi^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,11} = & 4 (\pi^{21} - 224640 \pi^{17} + 87429888 \pi^{15} - 16109383680 \pi^{13} \\
& + 1712015585280 \pi^{11} - 347807416320 \pi^{10} - 119419314094080 \pi^9 \\
& + 44635285094400 \pi^8 + 5512856238489600 \pi^7 - 3672846316339200 \pi^6 \\
& - 155062980417945600 \pi^5 + 173541988447027200 \pi^4 \\
& + 2265687071391744000 \pi^3 - 3856488632156160000 \pi^2 \\
& - 11569465896468480000 \pi + 24295878382583808000) (\pi^4 - 180 \pi^2 \\
& + 1680)^2 \pi^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,12} = & 4992 (\pi^{19} - 597 \pi^{17} + 175968 \pi^{15} - 29516400 \pi^{13} + 3012992640 \pi^{11} \\
& - 603832320 \pi^{10} - 206228151360 \pi^9 + 76640256000 \pi^8 + 9423877478400 \pi^7 \\
& - 6253844889600 \pi^6 - 263144318976000 \pi^5 + 293562836582400 \pi^4 \\
& + 3824042213376000 \pi^3 - 6489283756032000 \pi^2 - 19467851268096000 \pi \\
& + 40789783609344000) (\pi^4 - 180 \pi^2 + 1680)^2 \pi^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,13} = & -48 (\pi^{21} - 740 \pi^{19} + 257768 \pi^{17} - 52788672 \pi^{15} + 7093975680 \pi^{13} \\
& -743178240 \pi^{12} - 678927674880 \pi^{11} + 135258439680 \pi^{10} \\
& +45959564851200 \pi^9 - 17003918131200 \pi^8 - 2082714284851200 \pi^7 \\
& +1377317368627200 \pi^6 + 57780376554700800 \pi^5 - 64274810535936000 \pi^4 \\
& -835572536967168000 \pi^3 + 1414045831790592000 \pi^2 \\
& +4242137495371776000 \pi - 8869923853959168000) (\pi^4 - 180 \pi^2 + 1680)^2 \pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{1,14} = & 64 (\pi^9 - 576 \pi^7 + 145152 \pi^5 - 15482880 \pi^3 + 464486400 \pi \\
& -1021870080) (\pi^{12} - 468 \pi^{10} + 85800 \pi^8 - 8648640 \pi^6 + 467026560 \pi^4 \\
& -11416204800 \pi^2 + 74724249600) (\pi^4 - 180 \pi^2 + 1680)^2
\end{aligned}$$

Numeričkom evaluacijom dobijamo polinom

$$\begin{aligned}
H_1(x) = & -19945933.2563454758691578812086113542108729 \dots x^{14} \\
& +964370620.473447074167835306589115110956599 \dots x^{13} \\
& +4370945545.55986622131306891066056800549854 \dots x^{12} \\
& -160485825088.541781282355590724529284268962 \dots x^{11} \\
& -573930689337.957543842813981433872279034341 \dots x^{10} \\
& +15508907796829.8773825508408583398283547541 \dots x^9 \\
& +52356436359713.2271496264380474616878827604 \dots x^8 \\
& -1000976484261168.14923781137908353922171597 \dots x^7 \\
& -3271672501933391.56698604574204647071493263 \dots x^6 \\
& +42473932584023336.2357523381761130180192833 \dots x^5 \\
& +396541337493821324870.849529167704869395862 \dots x^4 \\
& -1123933526427357909.95154048552823472002567 \dots x^3 \\
& -3756486176693506213.72510284034282547653401 \dots x^2 \\
& +15351770378654043978.8033899859548154330268 \dots x \\
& +51698279089249782659.6016620963430482210768 \dots
\end{aligned}$$

Greška kod numeričke evaluacije ovako složenog izraza će biti veoma visoka i dovodi u pitanje pouzdanost dokaza dobijenog upotrebom takvog polinoma. Kako bi se ovo izbeglo upotrebljava se nanižna aproksimacija polinomske funkcije dobijene numeričkom evaluacijom. Jedan polinom koji je nanižna aproksimacija polinoma  $H_1(x)$  za  $x > 0$

može se odrediti decimalnim zaokruživanjem na 5 decimala:

$$\begin{aligned}
H_{1,s}(x) = & -19945933.25635 x^{14} \\
& +964370620.47344 x^{13} \\
& +4370945545.55986 x^{12} \\
& -160485825088.54179 x^{11} \\
& -573930689337.95755 x^{10} \\
& +15508907796829.87738 x^9 \\
& +52356436359713.22714 x^8 \\
& -1000976484261168.14924 x^7 \\
& -3271672501933391.56699 x^6 \\
& +42473932584023336.23575 x^5 \\
& +396541337493821324870.84952 x^4 \\
& -1123933526427357909.95155 x^3 \\
& -3756486176693506213.72511 x^2 \\
& +15351770378654043978.80338 x \\
& +51698279089249782659.60166
\end{aligned}$$

Napomenimo da se prethodno skraćivanje vrši po pravilima definisanim u poglavlju 3.2.2. Prethodni polinom se može zapisati kao polinom sa racionalnim koeficijentima

$$\begin{aligned}
H_{1,s}(x) = & -\frac{398918665127}{20000} x^{14} + \frac{6027316377959}{6250} x^{13} + \frac{218547277277993}{50000} x^{12} \\
& -\frac{16048582508854179}{100000} x^{11} - \frac{11478613786759151}{20000} x^{10} + \frac{775445389841493869}{50000} x^9 \\
& +\frac{1047128727194264543}{20000} x^8 - \frac{25024412106529203731}{25000} x^7 - \frac{327167250193339156699}{100000} x^6 \\
& +\frac{169895730336093344943}{4000} x^5 + \frac{4956766718672766560885619}{12500} x^4 \\
& -\frac{22478670528547158199031}{20000} x^3 - \frac{375648617669350621372511}{100000} x^2 \\
& +\frac{767588518932702198940169}{50000} x + \frac{2584913954462489132980083}{50000}
\end{aligned}$$

Numeričkim metodama se može odrediti prvi pozitivni koren polinoma sa realnim koeficijentima  $H_1(x)$  kao sledeća vrednost

$$x^{H_1} = 49.39655993284147770977821899244114459976189 \dots$$



Numeričkim metodama se takođe može odrediti prvi pozitivni koren polinoma sa racionalnim koeficijentima  $H_{1,s}(x)$  kao sledeća vrednost

$$x^{H_{1,s}} = 49.39655993282936625902127235794779372626916 \dots$$

Napomenimo da se  $x^{H_{1,s}}$  može dobiti korišćenjem rekurzivnog algoritma baziranog na Šturmovoj teoremi, kao što je izloženo u poglavlju 3.2.1.

Primetimo da je

$$x^{H_1} > x^{H_{1,s}}$$

i pri tom je

$$x^{H_1} - x^{H_{1,s}} = 0.12111450756946634493350873492731193003255109 \dots 10^{-10}.$$

#### Primer 4

Posmatrajmo nanižnu aproksimaciju  $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$  kosinusne funkcije  $y = \cos x$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Evidentno je da je sledeća implikacija

$$\cos x > T_2(x) \implies \cos^2 x > T_2(x)^2$$

matematički korektna za  $x \in (0, \sqrt{2})$ . Ovo pokazuje da direktno poređenje parnih stepena kosinusne funkcije sa istim tim parnim stepenima Tejlrove nanižne aproksimacije ne daje korektne rezultate na  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Zbog toga se javlja potreba da se parni stepeni kosinusne funkcije prikažu preko kosinusa višestrukih uglova (koji ostaju prvog stepena). Navedeno ilustrujemo sa sledećim primerom dokazivanja MTP nejednakosti

$$f(x) = \cos^2 x + 1 > 0$$

za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Ilustrujemo postupak direktnog poređenja funkcije  $f(x)$  sa nanižnom aproksimacijom  $P_1(x) = (T_6^{\cos,0}(x))^2 + 1$  za  $x \in (0, x_1)$  gde je  $x_1 = 1.569 \dots < \frac{\pi}{2}$  prvi pozitivan koren  $T_6^{\cos,0}(x)$ . Konkretno

$$\begin{aligned} P_1(x) &= (T_6^{\cos,0}(x))^2 + 1 \\ &= \frac{1}{518400}x^{12} - \frac{1}{8640}x^{10} + \frac{1}{320}x^8 - \frac{2}{45}x^6 + \frac{1}{3}x^4 - x^2 + 2. \end{aligned}$$

Primetimo da  $P_1(x) > 0$  za  $x \in (0, x_1)$ , što nije dovoljno za korektan dokaz za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . U cilju dobijanja korektnog dokaza transformišemo funkciju  $f(x)$  koristeći formule višestrukih uglova opisane u poglavlju 3.2.4

$$f(x) = \cos^2 x + 1 = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{2}$$

Formirajmo upotrebom Tejlorovih razvoja aproksimaciju

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2} T_6^{\cos, 0}(2x) + \frac{3}{2} \\ &= -\frac{2}{45} x^6 + \frac{1}{3} x^4 - x^2 + 2. \end{aligned}$$

Upotrebom Šturmove teoreme se može dobiti da za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  nema nula polinomske funkcije  $P_2(x)$ . Na osnovu toga što je  $f(x) > P_2(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  smatramo da  $P_2(x)$  dokazuje da je  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

## 3.2 Algoritmi

### 3.2.1 Algoritam za traženje prve nule polinomske funkcije na intervalu $(a, b)$

U ovom poglavlju je izložen jedan algoritam za nalaženje prve pozitivne nule, ukoliko postoji, za polinomsku funkciju  $P(x)$  nad intervalom  $(a, b)$ . U algoritmu koji ćemo opisati koristi se procedura Šturm koja je data sa sledećim pseudokodom (1).

---

**Algoritam 1** Šturmov algoritam (1827)

---

```
1: procedure STURM( $P(x), a, b$ )
2:    $\backslash\backslash$ P(x)-polinomska funkcija
3:    $\backslash\backslash$ a,b-Granice intervala na kome se proučava da li funkcija ima nule
4:
5:    $p_0(x) = P(x), p_1(x) = P'(x)$ 
6:    $i = 1$ 
7:   while  $p_i(x) \neq 0$  do
8:      $p_i(x) = -rem(p_{i-2}(x), p_{i-1}(x)) = p_{i-1}(x) \cdot q(x) - p_{i-2}(x)$ 
9:      $\backslash\backslash q(x) = \frac{p_{i-2}(x)}{p_{i-1}(x)}$ 
10:     $i = i + 1$ 
11:  end while
12:  SignChangeA = 0
13:  SignChangeB = 0
14:  for i=1 to length(p) do
15:    if  $signum(p_i(a)) \cdot signum(p_{i-1}(a)) = -1$  then
16:      SignChangeA = SignChangeA + 1
17:    end if
18:    if  $signum(p_i(b)) \cdot signum(p_{i-1}(b)) = -1$  then
19:      SignChangeB = SignChangeB + 1
20:    end if
21:  end for
22:  return  $|SignChangeA - SignChangeB|$ 
23: end procedure
```

---

Rezultat ove procedure je broj različitih realnih nula za polinom  $P(x)$  sa racionalnim koeficijentima nad intervalom  $(a, b)$  ( $a < b$  za  $a, b \in Q$ ).

**Primer 3.2.1.** Način funkcionisanja ovog algoritma možemo videti na primeru računanja broja realnih nula polinoma  $P(x) = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720$

za  $x \in (0, 6)$ . Prvo se formira Šturmov niz.

$$p_0(x) = P(x) = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720$$

$$p_1(x) = P(x)' = 5x^5 - 105x^4 + 700x^3 - 2205x^2 + 3248x - 1764$$

$$p_2(x) = -\text{rem}(p_0(x), p_1(x)) = \frac{35}{12}x^4 - \frac{245}{6}x^3 + \frac{2443}{12}x^2 - \frac{1274}{3}x + 309$$

$$p_3(x) = -\text{rem}(p_1(x), p_2(x)) = \frac{64}{5}x^3 - \frac{672}{5}x^2 + \frac{15584}{35}x - \frac{2304}{5}$$

$$p_4(x) = -\text{rem}(p_2(x), p_3(x)) = \frac{81}{16}x^2 - \frac{567}{16}x + \frac{117}{2}$$

$$p_5(x) = -\text{rem}(p_3(x), p_4(x)) = \frac{1024}{63}x - \frac{512}{9}$$

$$p_6(x) = -\text{rem}(p_4(x), p_5(x)) = \frac{225}{64}$$

Nakon ovoga se računaju vrednosti u tačkama  $x = 0$  i  $x = 6$ .

$$\begin{array}{ll} p_0(0) = 720 & p_0(6) = 0 \\ p_1(0) = -1764 & p_1(6) = 120 \\ p_2(0) = 309 & p_2(6) = 50 \\ p_3(0) = -\frac{2304}{5} & p_3(6) = \frac{960}{7} \\ p_4(0) = \frac{117}{2} & p_4(6) = \frac{225}{8} \\ p_5(0) = -\frac{512}{9} & p_5(6) = \frac{2560}{63} \\ p_6(0) = \frac{225}{64} & p_6(6) = \frac{225}{64} \end{array}$$

Brojanjem promena znaka za izračunate vrednosti dolazimo do toga da za  $x = 0$  postoji 6 promena znaka, a za  $x = 6$  ne postoje promene znaka. Ovo dovodi do zaključka da postoji ukupno 6 realnih nula za početni polinom  $P(x)$  što je tačno pošto je  $P(x) = x^6 - 21x^5 + 175x^4 - 735x^3 + 1624x^2 - 1764x + 720 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$

□

Ovde dajemo algoritam za nalaženje prve realne nule polinomske funkcije  $P(x)$  nad intervalom  $x \in (a, b)$ . U okviru algoritma koji navodimo  $k$  predstavlja broj ekvidistantnih podintervala na koji se svaki interval deli. Algoritam se rekurzivno samopoziva dok ne dođe do postavljene tolerancije greške. Primer rada algoritma je dat u 3.2.2.

**Primer 3.2.2.** Rad algoritma će biti prikazan na primeru pretrage za nulama polinoma  $P(x) = x^4 + 4.3x^3 - 1.44x^2 - 7.452x + 1.5120$  na intervala  $(a, b) = (0, 1.5)$ . Za vrednost

parametra  $k$  će biti odabrana vrednost 5. Dozvoljena tolerancija greške će biti  $\epsilon = 0.01$

**Korak 1.** Upotrebljava se Šturмова teorema. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0, 1.5)$  postoje dva korena polinomske funkcije. Interval se deli na 5 delova i rekurzivno se vrši pretraga.

---

**Algoritam 2** Algoritam traženje prvog korena polinomske funkcije u okviru zadatog intervala

---

```
1: procedure FIRSTROOT( $f(x), a, b, \epsilon$ )
2:    $\backslash\backslash f(x)$  - Polinomska funkcija oblika  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i}$ 
3:    $\backslash\backslash a, b$  - Granice intervala pretrage
4:    $\backslash\backslash \epsilon$  - dozvoljena greška pri utvrđivanju nule
5:
6:    $bn = Sturm(f(x), a, b)$ 
7:   if  $bn = 0$  then
8:     return {}
9:   else
10:    if ( $bn = 1$ ) and  $|a - b| < \epsilon$  then
11:      return  $\{\frac{a+b}{2}\}$ 
12:    else
13:      for  $i = 1$  to  $k$  do
14:        if  $firstRoot(f(x), \frac{(i-1) \cdot |b-a|}{k} + a, \frac{i \cdot |b-a|}{k} + a) \neq \{\}$  then
15:          return  $firstRoot(f(x), \frac{(i-1) \cdot |b-a|}{k} + a, \frac{i \cdot |b-a|}{k} + a)$ 
16:        end if
17:      end for
18:    end if
19:  end if
20: end procedure
```

---

**Korak 1.1** Upotrebljava se Šturмова teorema. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0, 0.3)$  postoji jedan koren polinomske funkcije. Interval je veći od tolerancije greške pa se interval deli na 5 delova i rekurzivno se vrši pretraga.

**Korak 1.1.1** Upotrebljava se Šturмова teorema. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0, 0.06)$  ne postoji nijedan koren polinomske funkcije.

**Korak 1.1.2** Upotrebljava se Šturмова теорема. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0.06, 0.12)$  ne postoji nijedan koren polinomske funkcije.

**Korak 1.1.3** Upotrebljava se Šturмова теорема. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0.12, 0.18)$  ne postoji nijedan koren polinomske funkcije.

**Korak 1.1.4** Upotrebljava se Šturмова теорема. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0.18, 0.24)$  postoji jedan koren polinomske funkcije. Interval je veći od tolerancije greške pa se interval deli na 5 delova i rekurzivno se vrši pretraga.

**Korak 1.1.4.1** Upotrebljava se Šturмова теорема. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0.18, 0.192)$  ne postoji nijedan koren polinomske funkcije.

**Korak 1.1.4.2** Upotrebljava se Šturмова теорема. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0.192, 0.204)$  postoji jedan koren polinomske funkcije. Interval je veći od tolerancije greške pa se interval deli na 5 delova i rekurzivno se vrši pretraga.

**Korak 1.1.4.2.1** Upotrebljava se Šturмова теорема. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0.192, 0.1944)$  ne postoji nijedan koren polinomske funkcije.

**Korak 1.1.4.2.2** Upotrebljava se Šturмова теорема. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0.1944, 0.1968)$  ne postoji nijedan koren polinomske funkcije.

**Korak 1.1.4.2.3** Upotrebljava se Šturмова теорема. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0.1968, 0.1992)$  ne postoji nijedan koren polinomske funkcije.

**Korak 1.1.4.2.4** Upotrebljava se Šturмова теорема. Dolazi se do zaključka da za  $x \in (0.1992, 0.2016)$  postoji jedan koren ove polinomske funkcije. Kako je interval

manji od tolerancije greške rekurzivno se vraća aritmetička sredina granica intervala  $\frac{0.1992+0.2016}{2} = 0.2004$  kao prva nula polinomske funkcije na definisanom intervalu. Kako je prava nula bila  $1/5 = 0.2$ , a tolerancija greške 0.01 greška rezultata od 0.0004 je prihvatljiva.  $\square$

### 3.2.2 Algoritam za skraćivanje decimalnog zapisa

---

**Algoritam 3** Algoritam skraćivanja decimalnog zapisa

---

```

1: procedure SHORTENNUMBER( $r, m$ )
2:    $\backslash\backslash r$  - razlomak u obliku  $\frac{p}{q}$ 
3:    $\backslash\backslash m$  - broj cifara koje se koriste
4:
5:    $rr = \frac{r \cdot p}{r \cdot q}$ 
6:    $ceoDeo = int(rr) \cdot 10^m$   $\backslash\backslash int(a)$  - celobrojni deo od  $a$ 
7:    $decDeo = frac(rr) \cdot 10^m$   $\backslash\backslash frac(a)$  - decimalni deo od  $a$ 
8:    $p_{new} = ceoDeo + int(decDeo)$ 
9:   if  $signum(rr) = -1$  then
10:      $p_{new} = -p_{new}$ 
11:     if ( $frac(decDeo) \neq 0$ ) then
12:        $p_{new} = p_{new} - 1$ 
13:     end if
14:   end if
15:   return ( $p_{new}, 10^m$ )
16: end procedure

```

---

U okviru ovog poglavlja biće prikazan algoritam za skraćivanje decimalnog zapisa racionalnih koeficijenata polinomske funkcije  $P(x)$ . Polazimo od polinoma

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

gde je  $a_i \in Q$  i  $a_n \neq 0$ . Rezultat decimalnog skraćivanja je polinom

$$Q(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$$

gde je  $\alpha_i \in Q$  i  $\alpha_i \neq 0$ . Racionalni koeficijent  $\alpha_i$  nazivamo *decimalno skraćen koeficijent* i određujemo ga po sledećim pravilima. Koeficijent  $\alpha_i$  se dobija od koeficijenta  $a_i$

korišćenjem algoritma 3. Prema prethodnom algoritmu koeficijent

$$a_i = d_0.d_1 \dots d_m d_{m+1} d_{m+2} \dots d_{m+k}$$

decimalno skraćujemo u sledeći oblik

$$\alpha_i = \begin{cases} d_0.d_1 \dots d_m & : a \geq 0 \\ d_0.d_1 \dots d_m & : a < 0 \wedge d_{m+1} \dots d_{m+k} = 0 \\ d_0.d_1 \dots d_m - 10^{-m} & : a < 0 \wedge d_{m+1} \dots d_{m+k} \neq 0 \end{cases}$$

Primer upotrebe ovog algoritam je dat u tabeli 3.1.

Tabela 3.1: Primer rada algoritma skraćivanja decimalnih vrednosti

Ulazna vrednost	Broj decimala	Izlazna vrednost
$\frac{1}{3} = 0.333 \dots$	3	$\frac{333}{1000} = 0.333$
$-\frac{1}{3} = -0.333 \dots$	3	$-\frac{334}{1000} = -0.334$
$\pi \approx \frac{3141592654}{1000000000} = 3.141592654$	3	$\frac{3141}{1000} = 3.141$
$\pi \approx \frac{3141592654}{1000000000} = 3.141592654$	4	$\frac{31415}{10000} = 3.1415$
$\pi \approx \frac{3141592654}{1000000000} = 3.141592654$	5	$\frac{314159}{100000} = 3.14159$
$\pi \approx \frac{3141592654}{1000000000} = 3.141592654$	6	$\frac{392699}{125000} = 3.141592$
$-\pi \approx -\frac{3141592654}{1000000000} = -3.141592654$	3	$-\frac{3142}{1000} = -3.141$
$-\pi \approx -\frac{3141592654}{1000000000} = -3.141592654$	4	$-\frac{31416}{10000} = -3.1416$
$-\pi \approx -\frac{3141592654}{1000000000} = -3.141592654$	5	$-\frac{314160}{100000} = -3.14160$
$-\pi \approx -\frac{3141592654}{1000000000} = -3.141592654$	6	$-\frac{3141593}{1000000} = -3.141593$

Algoritam za skraćivanje koeficijenata polinoma je prikazan pseudokodom 4. Algoritam kao ulazne vrednosti prima polinomsku funkciju i maksimalni broj decimala koje koeficijenti mogu da imaju. Kao rezultat algoritma se vraća niz nanižnih aproksimacija koje sadrže koeficijente sa progresivno sve većim brojem decimalnih cifara. Vrednost  $\kappa$  je minimalni broj decimala koje dozvoljavamo.



---

**Algoritam 4** Generisanje polinoma sa skraćenim decimalnim zapisom koeficijenata

---

```
1: procedure SHORTENPOLY( $P(x), m$ )
2:   \\  $P(x)$  - Polinom oblika  $P(x) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot x^i$ 
3:   \\  $m$  - Maksimalan broj decimala koji je korišćen za polinome  $P_i(x)$ 
4:
5:    $ml = \min(-\kappa, \log_{10}(P(x).r_0))$ 
6:   for  $i = 1$  to  $\text{degree}(P(x))$  do
7:      $ml = \min(ml, \log_{10}(P(x).r_i))$ 
8:   end for
9:    $border = \lceil -ml \rceil$ 
10:  if  $border > m$  then
11:    return Greška (preniska granica broja decimala)
12:  end if
13:  for  $i = border$  to  $m$  do
14:     $P_i(x) = 0$ 
15:    for  $j = 1$  to  $\text{degree}(P(x))$  do
16:       $P_i(x) = P_i(x) + \text{shortenNumber}(P(x).r_j, i) \cdot x^j$ 
17:    end for
18:  end for
19:  return  $[P_{border}(x), P_{border+1}(x), \dots, P_m(x)]$ 
20: end procedure
```

---

Rad ovog algoritma možemo videti u narednom primeru.

**Primer 3.2.3.** Uzmimo primer polinomske funkcije

$$P(x) = 0.055243566x^4 + 36.404885824x^2 - 377.848985245$$

za koju se generišu aproksimacije na do  $m = 5$  decimala. Za minimalni broj decimala korišćemo vrednost  $\kappa = 1$ ;

Prvi korak algoritma je da utvrdi koji je najmanji broj decimalnih cifara koje se smeju koristiti a da se nijedna vrednost koeficijenta ne zaokruži na vrednost nula.

$$\begin{aligned} ml &= \min(\log_{10}(0.055243566), \log_{10}(36.404885824), \log_{10}(-377.848985245), -\kappa) \\ &= \min(-1.257718295 \dots, 1.561159673 \dots, 2.577318260 \dots, -1) \\ &= -1.257718295 \dots \end{aligned}$$

Na osnovu prethodnog se utvrđuje da je minimalan broj decimalnih cifara neophodan za očuvanje svih sabiraka polinomske funkcije

$$border = \lceil -ml \rceil = \lceil -(-1.257718295 \dots) \rceil = 2$$

Nakon ovoga se generišu polinomske funkcije sa skraćenim koeficijentima.

$$\begin{aligned} P_j(x) = & shortenNumber(0.055243566, j)x^4 \\ & + shortenNumber(36.404885824, j)x^2, \\ & + shortenNumber(-377.848985245, j) \end{aligned}$$

gde je  $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Konkretno za  $j = 2 \dots 5$  dobijamo

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{20}x^4 + \frac{182}{5}x^2 - \frac{7557}{20} \\ P_3(x) &= \frac{11}{200}x^4 + \frac{9101}{250}x^2 - \frac{377849}{1000} \\ P_4(x) &= \frac{69}{1250}x^4 + \frac{22753}{625}x^2 - \frac{377849}{1000} \\ P_5(x) &= \frac{1381}{25000}x^4 + \frac{455061}{12500}x^2 - \frac{37784899}{100000} \end{aligned}$$

Kao rezultat rada algoritma se vraća niz  $[P_2(x), P_3(x), P_4(x), P_5(x)]$

□

### 3.2.3 Algoritam za traženje minimalnog stepena navišnih i nanižnih razvoja

Algoritam za određivanje minimalnog stepena polinomskih funkcija koje su navišni ili nanižni razvoji sinusne i kosinusne funkcije se oslanja na sledeće dve leme prikazane u radu [122].

**Lema 3.1. (i)** Za polinomsku funkciju  $T_n(t) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}$ , gde je  $n = 4k+1$   $k \in \mathbb{N}_0$ ,

važi:

$$\left( \forall t \in [0, \sqrt{(n+3)(n+4)}] \right) \bar{T}_n(t) \geq \bar{T}_{n+4}(t) \geq \sin t, \quad (3.1)$$

$$\left( \forall t \in [-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0] \right) \underline{T}_n(t) \leq \underline{T}_{n+4}(t) \leq \sin t. \quad (3.2)$$

Za  $t = 0$  nejednakosti (3.1) i (3.2) postaju jednakosti. Za vrednosti  $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$  jednakosti  $\bar{T}_n(t) = \bar{T}_{n+4}(t)$  i  $\underline{T}_n(t) = \underline{T}_{n+4}(t)$  su tačne.

(ii) Za polinomsku funkciju  $T_n(t) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^i t^{2i+1}}{(2i+1)!}$ , gde je  $n = 4k + 3$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , važi:

$$\left( \forall t \in [0, \sqrt{(n+3)(n+4)}] \right) \underline{T}_n(t) \leq \underline{T}_{n+4}(t) \leq \sin t, \quad (3.3)$$

$$\left( \forall t \in [-\sqrt{(n+3)(n+4)}, 0] \right) \bar{T}_n(t) \geq \bar{T}_{n+4}(t) \geq \sin t. \quad (3.4)$$

Za  $t = 0$  nejednakosti (3.3) i (3.4) postaju jednakosti. Za vrednosti  $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$  jednakosti  $\underline{T}_n(t) = \underline{T}_{n+4}(t)$  i  $\bar{T}_n(t) = \bar{T}_{n+4}(t)$  su tačne.

**Lema 3.2.** (i) Za polinomsku funkciju  $T_n(t) = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}$ , gde je  $n = 4k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , važi:

$$\left( \forall t \in [-\sqrt{(n+3)(n+4)}, \sqrt{(n+3)(n+4)}] \right) \bar{T}_n(t) \geq \bar{T}_{n+4}(t) \geq \cos t. \quad (3.5)$$

Za  $t = 0$  nejednakost (3.5) postaje jednakost. Za vrednosti  $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$  jednakost  $\bar{T}_n(t) = \bar{T}_{n+4}(t)$  je tačna.

(ii) Za polinomsku funkciju  $T_n(t) = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{(-1)^i t^{2i}}{(2i)!}$ , gde je  $n = 4k + 2$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , važi:

$$\left( \forall t \in [-\sqrt{(n+3)(n+4)}, \sqrt{(n+3)(n+4)}] \right) \underline{T}_n(t) \leq \underline{T}_{n+4}(t) \leq \cos t. \quad (3.6)$$

Za  $t = 0$  nejednakost (3.6) postaje jednakost. Za vrednost  $t = \pm\sqrt{(n+3)(n+4)}$  jednakost  $\underline{T}_n(t) = \underline{T}_{n+4}(t)$  je tačna.

**Primer 3.2.4.** Razmotrimo sledeće nejednakosti

$$T_{4k+1}^{\sin,0}(9x) > \sin(9x)$$

$$\sin(9x) > T_{4k+3}^{\sin,0}(9x)$$

$$T_{4k}^{\cos,0}(9x) > \cos(9x)$$

$$\cos(9x) > T_{4k+2}^{\cos,0}(9x)$$

za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Prema lemi 3.1 i 3.2 odredimo  $n = 4k + i$ , ( $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ), za koje su prethodne nejednakosti ispunjenje, pri čemu je  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  i pri tom:

$$9x \in \left[ 0, \sqrt{(n+3)(n+4)} \right].$$

Odatle možemo da procenimo vrednost parametra  $n$

$$\begin{aligned}
& 81x^2 < (n+3)(n+4) \\
\implies & n^2 + 7n + 12 - 81x^2 > 0 \\
\implies & n \in \left(-\infty, \frac{-7-\sqrt{1+324x^2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{1+324x^2}}{2}, \infty\right) \\
\implies & n > \frac{1}{2}(\sqrt{1+324x^2} - 7), \text{ za } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\
\implies & n > \frac{1}{2}(\sqrt{1+162\pi^2} - 7) \\
\implies & n > 16.49933\dots
\end{aligned}$$

Konačno  $n = 4k + i$  biramo za prirodne brojeve za  $n \geq 17$ . □

U prethodne dve leme prirodan broj  $n$  je oblika  $n = 4k + 1$  za  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Ovde dajemo algoritam kojim određujemo najmanji prirodan broj  $k$  takav da prethodne leme važe bez obzira na vrednost  $i$ . Razmatramo ulazne funkcije oblika

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} \beta_i x \cos^{r_i} \beta_i x$$

gde su  $\beta_i \in N$  i  $q_i, r_i \in \{0, 1\}$ . Takve funkcije se javljaju kao rezultat algoritma iz narednog poglavlja.

U razmatranju koje navodimo pretpostavimo da se u funkciji  $f(x)$  javljaju sabirci oblika  $\alpha_i \sin \beta x$  ili  $\alpha_i \cos \beta x$  ili  $\alpha_i \sin \beta x \cos \beta x$ . Cilj algoritma je da se odredi prirodan broj  $n_0$ , za svaki od sabiraka, takav da za  $n \geq n_0$  Tejlorove aproksimacije  $P(x) = T_n(x)$  iz prethodnih lema ispunjavaju uslov da je  $P(x)$  stalno navišna ili stalno nanižna aproksimacija za funkcije  $\sin \beta x$  ili  $\cos \beta x$  za  $x \in (0, \delta)$  ( $\delta > 0$ ), i  $\beta \in N$ .

Primetimo da važi sledeći niz implikacija za prirodan broj  $n \in N_0$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{(n+3)(n+4)}}{\beta} > \delta \\
\implies & \sqrt{n^2 + 7n + 12} > \delta\beta \\
\implies & n^2 + 7n + (12 - \delta^2\beta^2) > 0 \\
\implies & n \in \left(-\infty, \frac{-7-\sqrt{1+4\delta^2\beta^2}}{2}\right) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{1+4\delta^2\beta^2}}{2}, \infty\right) \\
\implies & n \in \left(\frac{-7+\sqrt{1+4\delta^2\beta^2}}{2}, \infty\right) \\
\implies & n \geq \eta_0 = \max\left(0, \frac{-7+\sqrt{1+4\delta^2\beta^2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Dovoljno je uzeti  $n_0 = 4k_0 + i$ , gde je  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ , za vrednost

$$k_0 = \max\left(0, \left\lceil \frac{\eta_0}{4} \right\rceil\right).$$

Algoritam za računanje minimalnih vrednosti  $k$  indeksa, koji vraća niz minimalnih vrednosti parametra  $k$  za sabirake funkcije, dat je u obliku algoritma 5.

---

**Algoritam 5** Algoritam traženja minimalnog reda Tejlorovih razvoja

---

```

1: procedure CALCULATEMINIMALTL( $f(x), \delta$ )
2:   \\\mathit{f}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} \beta_i x \cos^{r_i} \beta_i x
3:   \\\gde su  $\beta_i \in N$  a  $q_i, r_i \in \{0, 1\}$ 
4:   \\\mathit{\delta} - Granice intervala na kome su Tejlorovi razvoji nanižne aproksimacije
5:
6:    $n = \text{length}(f(x))$ 
7:   for  $i = 0$  to  $n$  do
8:      $\text{minTl}_i = 0$ 
9:     if  $f(x).q_i = 1$  or  $f(x).r_i = 1$  then
10:        $\text{minTl}_i = \max\left(\left\lceil \frac{\sqrt{4\delta^2 f(x).\beta_i^2 + 1} - 7}{8} \right\rceil, 0\right)$ 
11:     end if
12:   end for
13:   return  $\text{minTl}$ 
14: end procedure

```

---

Rad algoritma je prikazan na narednom primeru.

**Primer 3.2.5.** Posmatrajmo rad algoritma na funkciji

$$f(x) = \sin 2x + 4 \sin x \cos x + x \cos 9x$$

za granicu  $\delta = \frac{\pi}{2}$ .

**Korak 1.** Pristupa se prvom sabirku MTP funkcije -  $\sin 2x$ . Pošto je dostupna sinusna funkcija u ovom elementu vrši se proračun:

$$\begin{aligned}
\text{minTl}_1 &= \max\left(\left\lceil \frac{\sqrt{4\delta^2 f[1].\beta^2 + 1} - 7}{8} \right\rceil, 0\right) \\
&= \max\left(\left\lceil \frac{\sqrt{4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 2^2 + 1} - 7}{8} \right\rceil, 0\right) \\
&= \max\left(\left\lceil \frac{\sqrt{4\pi^2 + 1} - 7}{8} \right\rceil, 0\right) \\
&= \max(\lceil -0.0797 \dots \rceil, 0) = \max(0, 0) = 0
\end{aligned}$$

Za ovaj element je utvrđeno da je bilo koja pozitivna vrednost indeksa  $k$  odgovarajuća i to se beleži za ovaj element.

**Korak 2.** Pristupa se drugom sabirku MTP funkcije -  $4 \sin x \cos x$ . Pošto je dostupna sinusna funkcija u ovom elementu vrši se proračun:

$$\begin{aligned}
 \min Tl_2 &= \max \left( \left[ \frac{\sqrt{4\delta^2 f[2] \cdot \beta^2 + 1 - 7}}{8} \right], 0 \right) \\
 &= \max \left( \left[ \frac{\sqrt{4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 1^2 + 1 - 7}}{8} \right], 0 \right) \\
 &= \max \left( \left[ \frac{\sqrt{\pi^2 + 1 - 7}}{8} \right], 0 \right) \\
 &= \max \left( \lceil -0.9257 \dots \rceil, 0 \right) = \max(0, 0) = 0
 \end{aligned}$$

Dolazimo ponovo do zaključka da je i za ovaj element bilo koja pozitivna vrednost indeksa  $k$  odgovarajuća.

**Korak 3.** Pristupa se trećem sabirku MTP funkcije -  $x \cos 9x$ . Pošto je dostupna kosinusna funkcija u ovom elementu vrši se proračun:

$$\begin{aligned}
 \min Tl_3 &= \max \left( \left[ \frac{\sqrt{4\delta^2 f[3] \cdot \beta^2 + 1 - 7}}{8} \right], 0 \right) \\
 &= \max \left( \left[ \frac{\sqrt{4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot 9^2 + 1 - 7}}{8} \right], 0 \right) \\
 &= \max \left( \left[ \frac{\sqrt{81\pi^2 + 1 - 7}}{8} \right], 0 \right) \\
 &= \max \left( \lceil 2.66150 \dots \rceil, 0 \right) = \max(3, 0) = 3
 \end{aligned}$$

Ovaj element je imao dosta visok koeficijent uz promenjivu  $x$  unutar kosinusne funkcije, pa je proračunato da je neophodno da vrednosti  $k$  indeksa bude minimalno 3 kako bi se dobila ispravna aproksimacija na intervalu  $x \in (0, \delta)$ .

**Kraj algoritma** Kao rezultat rada algoritma se vraća niz  $[0, 0, 3]$

□

### 3.2.4 Algoritam transformacije na višestruke uglove

#### I Trigonometrijske transformacije

Algoritam za transformaciju funkcije iz oblika  $f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \sin^{p_i} x \cos^{q_i} x$ , za  $\alpha \in R$  a  $p_i, q_i \in N_0$ , u oblik  $f(x) = \sum_{j=0}^m \alpha_j x^{p_j} \sin^{s_j} \beta_j x \cos^{c_j} \gamma_j x$ , gde je  $\alpha_j \in R$ ,  $p_j, s_j, c_j \in N_0$ ,  $\beta, \gamma \in N$ , zasniva se na narednim opštepoznatim formulama (Tabela 3.2).

Tabela 3.2: Smena stepena sinusnih i kosinusnih funkcija metodom višestrukih uglova

$\sin^m \alpha x \cos^n \alpha x$		
$m$	$n$	Smena
Parno	Parno	$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 1} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{m}{2} + k + j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \cos((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$ $+ \sum_{j=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2}} \frac{(-1)^{m + \frac{n}{2} + j} \binom{n}{j} \binom{m}{\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - j}}{2^{n+m}}$
Parno	Neparno	$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{m}{2} + k + j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \cos((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$
Neparno	Parno	$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{m}{2} + k + j - \frac{1}{2}} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \sin((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$
Neparno	Neparno	$\sum_{k=0}^{\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 1} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{\frac{m}{2} + k + j - \frac{1}{2}} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \sin((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$

Primeri rada prethodnog algoritma su dati u narednoj tabeli.

Tabela 3.3: Primer rada algoritma smena metodom višestrukih uglova

$f(x)$	Generisana smena
$\sin^2 x \cos^4 x$	$-\frac{\cos 6x}{32} - \frac{\cos 4x}{16} + \frac{\cos 2x}{32} + \frac{1}{16}$
$\sin^2 x \cos^3 x$	$-\frac{\cos 5x}{16} - \frac{\cos 3x}{16} + \frac{\cos x}{8}$
$\sin^3 x \cos^2 x$	$-\frac{\sin 5x}{16} + \frac{\sin 3x}{16} + \frac{\sin x}{8}$
$\sin^3 x \cos^3 x$	$-\frac{\sin 6x}{32} + \frac{3 \sin 2x}{32}$
$\sin^3 x \cos^3 x + \sin^3 x \sin^2 x$	$-\frac{\sin 6x}{32} - \frac{\sin 5x}{16} + \frac{\sin 3x}{16} + \frac{3 \sin 2x}{32} + \frac{\sin x}{8}$

Algoritam je prikazan narednim pseudokodom.

---

**Algoritam 6** Transformacija trig. funkcija iz oblika  $\sin^{q_i} x \cos^{r_i} x$  u višestruke uglove

---

```
1: procedure TRANSFORMMULTIPLEANGLES( $f(x)$ )
2:    $\backslash\backslash f(x)$  - MTP funkcija oblika  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x$ 
3:
4:    $g(x) = 0$ 
5:   for  $i = 1$  to  $\text{length}(f(x))$  do
6:      $m = f(x).p_i$ ,  $n = f(x).q_i$ ,  $\alpha = f(x).\alpha_i$             $\backslash\backslash f(x).p_i$  - vraća  $p_i$  za  $f(x)$ 
7:     if  $\text{parno}(m)$  and  $\text{parno}(n)$  then
8:       for  $k=0$  to  $\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 1$  do
9:         for  $j=0$  to  $k$  do
10:           $g(x) = g(x) + \frac{\alpha(-1)^{\frac{m}{2}+k+j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \cos((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$ 
11:        end for
12:      end for
13:      for  $j = 0$  to  $\frac{n}{2} + \frac{m}{2}$  do
14:         $g(x) = g(x) + \frac{\alpha(-1)^{m+\frac{n}{2}+j} \binom{n}{j} \binom{m}{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}-j}}{2^{(n+m)}}$ 
15:      end for
16:    end if
17:    if  $\text{parno}(m)$  and  $\text{neparno}(n)$  then
18:      for  $k=0$  to  $\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}$  do
19:        for  $j=0$  to  $k$  do
20:           $g(x) = g(x) + \frac{\alpha(-1)^{\frac{m}{2}+k+j} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \cos((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$ 
21:        end for
22:      end for
23:    end if
24:    if  $\text{neparno}(m)$  and  $\text{parno}(n)$  then
25:      for  $k=0$  to  $\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - \frac{1}{2}$  do
26:        for  $j=0$  to  $k$  do
27:           $g(x) = g(x) + \frac{\alpha(-1)^{\frac{m}{2}+k+j-\frac{1}{2}} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \sin((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$ 
28:        end for
29:      end for
30:    end if
31:    if  $\text{neparno}(m)$  and  $\text{neparno}(n)$  then
32:      for  $k=0$  to  $\frac{n}{2} + \frac{m}{2} - 1$  do
33:        for  $j=0$  to  $k$  do
34:           $g(x) = g(x) + \frac{\alpha(-1)^{\frac{m}{2}+k+j-\frac{1}{2}} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \sin((n+m-2k)x)}{2^{n+m-1}}$ 
35:        end for
36:      end for
37:    end if
38:  end for
39:  return  $g(x)$ 
40: end procedure
```

---



## II Smena klasama Tejlorovim razvojjima

Posmatrajmo MTP funkciju zapisanu kao:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n s_i$$

gde je

$$s_i(x) = \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x,$$

za  $\alpha_i \neq 0$ , i  $p_i, q_i, r_i \in N_0$ . Uvedimo oznaku

$$m_i = \begin{cases} \frac{q_i+r_i}{2} - 1, & \text{kada su } q_i \text{ i } r_i \text{ iste parnosti} \\ \frac{q_i+r_i-1}{2}, & \text{kada su } q_i \text{ i } r_i \text{ različite parnosti.} \end{cases}$$

Na osnovu lema 3.1 i 3.2 rezultati prethodno opisanog algoritma mogu dovesti do sledeće 3 varijacije za  $s_i$ :

1. Neka su  $q_i$  i  $r_i$  neparni ili neka je  $q_i$  parno a  $r_i$  neparno. U oba slučaja važi:

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x \\ &= \frac{\alpha_i x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} (-1)^{\frac{r_i-1}{2}+k} \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \sin((q_i+r_i-2k)x) \\ &= \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \left( \sum_{r=0}^k \alpha_i (-1)^{\frac{r_i-1}{2}+k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \right) \sin((q_i+r_i-2k)x). \end{aligned}$$

Označimo  $\beta_k = \sum_{r=0}^k \alpha_i (-1)^{\frac{r_i-1}{2}+k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r}$ . Tada za svaki podsabirak  $\beta_k \sin((q_i+r_i-2k)x)$ , u zavisnosti od znaka  $\beta_k$ , postoje dve mogućnosti:

1) za  $\beta_k > 0$ :

$$\beta_k \sin((q_i+r_i-2k)x) > \beta_k \underline{T}_{4l_k^{(i)}+3}^{\sin,0}((q_i+r_i-2k)x),$$

2) za  $\beta_k < 0$ :

$$\beta_k \sin((q_i+r_i-2k)x) > \beta_k \overline{T}_{4l_k^{(i)}+1}^{\sin,0}((q_i+r_i-2k)x).$$

Neka je sabirak  $s_i(x)$  zapisan u obliku:

$$s_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \beta_k \sin((q_i+r_i-2k)x).$$

Onda važi:

$$s_i(x) > \tau_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \beta_k T_{4l_k^{(i)}+u}^{\sin,0}((q_i+r_i-2k)x),$$

gde je  $u = \begin{cases} 3, & \beta_k > 0, \\ 1, & \beta_k < 0 \end{cases}$ ,  $l_k^{(i)} \in \mathbb{N}_0$  and  $T \in \{\bar{T}, \underline{T}\}$ .

2. Neka je  $q_i$  neparno i  $r_i$  parno. Tada važi:

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \alpha_i x^{p_i} \cos^{q_i} x \sin^{r_i} x \\ &= \frac{\alpha_i x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} (-1)^{\frac{r_i}{2}+k} \sum_{r=0}^k (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \cos((q_i+r_i-2k)x) \\ &= \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \left( \sum_{r=0}^k \alpha_i (-1)^{\frac{r_i}{2}+k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \right) \cos((q_i+r_i-2k)x). \end{aligned}$$

Označimo  $\gamma_k = \sum_{r=0}^k \alpha_i (-1)^{\frac{r_i}{2}+k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r}$ . Tada, za svaki podsabirak  $\gamma_k \cos((q_i+r_i-2k)x)$ , u zavisnosti od znaka  $\gamma_k$ , postoje dve mogućnosti:

1) za  $\gamma_k > 0$ :

$$\gamma_k \cos((q_i+r_i-2k)x) > \gamma_k \underline{T}_{4l_k^{(i)}+2}^{\cos,0}((q_i+r_i-2k)x),$$

2) za  $\gamma_k < 0$ :

$$\gamma_k \cos((q_i+r_i-2k)x) > \gamma_k \bar{T}_{4l_k^{(i)}+0}^{\cos,0}((q_i+r_i-2k)x).$$

Neka je sabirak  $s_i(x)$  zapisan kao:

$$s_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \gamma_k \cos((q_i+r_i-2k)x).$$

Tada važi:

$$s_i(x) > \tau_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \sum_{k=0}^{m_i} \gamma_k T_{4l_k^{(i)}+v}^{\cos,0}((q_i+r_i-2k)x),$$

gde je  $v = \begin{cases} 2, & \gamma_k > 0, \\ 0, & \gamma_k < 0 \end{cases}$ ,  $l_k^{(i)} \in \mathbb{N}_0$  i  $T \in \{\bar{T}, \underline{T}\}$ .

3. Neka su  $q_i$  i  $r_i$  parni. Tada na osnovu prethodnih slučajeva (pod 2.) važi:

$$\begin{aligned}
s_i(x) &= \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \left( \sum_{k=0}^{m_i} \left( \sum_{r=0}^k \alpha_i (-1)^{\frac{r_i}{2}+k+r} \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{k-r} \right) \cos((q_i+r_i-2k)x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (-1)^{\frac{2r_i+q_i}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{q_i+r_i}{2}} (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{\frac{q_i+r_i}{2}-r} \right) \\
&> \tau_i(x) = \frac{x^{p_i}}{2^{q_i+r_i-1}} \left( \sum_{k=0}^{m_i} \gamma_k T_{4l_k^{(i)}+v}^{\cos,0}((q_i+r_i-2k)x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (-1)^{\frac{2r_i+q_i}{2}} \sum_{r=0}^{\frac{q_i+r_i}{2}} (-1)^r \binom{q_i}{r} \binom{r_i}{\frac{q_i+r_i}{2}-r} \right),
\end{aligned}$$

gde je  $v = \begin{cases} 2, & \gamma_k > 0, \\ 0, & \gamma_k < 0 \end{cases}$ ,  $l_k^{(i)} \in \mathbb{N}_0$  i  $T \in \{\overline{T}, \underline{T}\}$ .

Obradom svih sabiraka  $s_i$  iz sume  $f(x) = \sum_{i=0}^n s_i$  na osnovu gore navedenih slučajeva se generiše polinom

$$P(x) = \sum_{i=1}^n \tau_i(x)$$

koji je nanižna aproksimacija funkcije  $f(x)$ . Tada važi:

$$f(x) > P(x).$$

za  $x \in (0, \epsilon)$  gde je  $\epsilon \in R$ .

Algoritam za prethodno prikazano generisanje klasa polinoma je dat kao algoritam 7.

Primer ovakvih smena je dat u tabeli 3.4.

Zaključak ovog poglavlja je da na osnovu sekcije (I) MTP funkcije

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x \quad (3.7)$$

se može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$f(x) = \sum_{j=1}^m a_j x^{b_j} \cos^{c_j} \beta_j x \sin^{d_j} \gamma_j x \quad (3.8)$$

gde je  $0 \leq c_j + s_j \leq 1$ . Odatle formiramo algoritam zamene klasama Tejlorovih razvoja za ulaznu funkciju oblika (3.8).

---

**Algoritam 7** Algoritam za transformaciju iz trig. funkcija u Tejlorove razvoje

---

```
1: procedure SETUPTRANSFORMATIONS( $f(x)$ )
2:   \\  $f(x)$  - Funkcija oblika  $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} \beta_i x \cos^{r_i} \beta_i x$ 
3:   \\      gde su  $\beta_i \in N$  a  $q_i, r_i \in \{0, 1\}$  i  $0 \leq q_i + r_i \leq 1$ 
4:
5:    $g(x) = 0$ 
6:    $j = 0$ 
7:   for  $i = 1$  to  $\text{length}(f(x))$  do
8:      $t = f(x).\alpha_i \cdot x^{f(x).p_i}$ 
9:      $q = f(x).q_i$ 
10:     $r = f(x).r_i$ 
11:     $\beta = f(x).\gamma_i$ 
12:    if  $\alpha > 0$  then
13:      if  $q \neq 0$  then
14:         $t = t \cdot T_{4k_j+3}^{0, \sin x}(\beta x)$ 
15:         $j = j + 1$ 
16:      end if
17:      if  $r \neq 0$  then
18:         $t = t \cdot T_{4k_j+2}^{0, \cos x}(\gamma x)$ 
19:         $j = j + 1$ 
20:      end if
21:    else
22:      if  $q \neq 0$  then
23:         $t = t \cdot T_{4k_j+1}^{0, \sin x}(\beta x)$ 
24:         $j = j + 1$ 
25:      end if
26:      if  $r \neq 0$  then
27:         $t = t \cdot T_{4k_j}^{0, \cos x}(\gamma x)$ 
28:         $j = j + 1$ 
29:      end if
30:    end if
31:     $g(x) = g(x) + t$ 
32:  end for
33:  return  $g(x)$ 
34: end procedure
```

---

Tabela 3.4: Primer rada algoritma zamene Tejlorovim razvoji

$f(x)$	Generisana smena
$5 \sin x$	$5T_{4k+3}^{0,\sin}(x)$
$-5 \sin x$	$-5T_{4k+1}^{0,\sin}(x)$
$5 \cos x$	$5T_{4k+2}^{0,\cos}(x)$
$-5 \cos x$	$-5T_{4k}^{0,\cos}(x)$
$2 \cos x + 3 \sin 2x - 7 \sin 5x$	$2T_{4k+2}^{0,\cos}(x) + 3T_{4k+3}^{0,\sin}(2x) - 7T_{4k+1}^{0,\sin}(5x)$

### 3.2.5 Algoritmi za sortiranje $k$ -vektora

Neka je  $f(x)$  MTP funkcija oblika

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j x^{p_j} \sin^{s_j} \beta_j x \cos^{c_j} \gamma_j x,$$

gde je  $\alpha_j \in R$ ,  $p_j, s_j, c_j \in N_0$ ,  $\beta, \gamma \in N$  i  $0 \leq s_j + c_j \leq 1$ .

Definišimo nanižnu polinomsku aproksimaciju funkcije  $f(x)$  na sledeći način

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^{p_i} T_{k_i}^{\sin,0}(x) + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j x^{p_j} T_{k_j}^{\cos,0}(x)$$

Vektor vrednosti  $\vec{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$  nazivamo *vektor  $k$  indeksa* polinomske funkcije  $P(x)$ , pri čemu  $k_1, \dots, k_n \in N_0$ .

Poređenje vektora  $k$  indeksa može se vršiti na više načina. Neke od njih navodimo u nastavku ovog poglavlja. Redosled vektora  $k$  indeksa može da utiče na performanse glavnog algoritma.

## Leksikografski poredak

Za dve polinomske aproksimacije  $P_a(x)$  i  $P_b(x)$  definišimo vektore  $k$  indeksa

$$\vec{k}_a = [k_{a,1}, k_{a,2}, \dots, k_{a,n}]$$

i

$$\vec{k}_b = [k_{b,1}, k_{b,2}, \dots, k_{b,n}].$$

Operaciju leksikografskog poretka definišemo preko razlike vektora.

$$\vec{k}_c = \vec{k}_a - \vec{k}_b$$

Ako je  $\vec{k}_c = [0, 0, \dots, 0]$ , onda možemo reći da su dva vektora jednaka. Ako je prvi nenulti član  $\vec{k}_c$  pozitivan  $\vec{k}_a >_{lex} \vec{k}_b$ . U suprotnom je  $\vec{k}_b >_{lex} \vec{k}_a$ .

---

### Algoritam 8 Leksikografsko poređenje

---

```
1: procedure LEX( $\vec{k}_a, \vec{k}_b$ )
2:    $\backslash\backslash \vec{k}_a, \vec{k}_b$  - vektori k indeksa
3:    $\backslash\backslash$  Kao rezultat poređenja se vraćaju sledeće vrednosti
4:    $\backslash\backslash 1$  - ako je  $\vec{k}_a >_{lex} \vec{k}_b$ 
5:    $\backslash\backslash 0$  - ako je  $\vec{k}_a =_{lex} \vec{k}_b$ 
6:    $\backslash\backslash -1$  - ako je  $\vec{k}_a <_{lex} \vec{k}_b$ 
7:
8:   for i=1 to length( $\vec{k}_a$ ) do
9:      $c = \vec{k}_a[i] - \vec{k}_b[i]$ 
10:    if signum( $c$ )  $\neq 0$  then
11:      return signum( $c$ )
12:    end if
13:  end for
14:  return 0
15: end procedure
```

---

## Gradirano leksikografski poredak

Za dve polinomske aproksimacije  $P_a(x)$  i  $P_b(x)$  definišimo vektore  $k$  indeksa

$$\vec{k}_a = [k_{a,1}, k_{a,2}, \dots, k_{a,n}]$$

i

$$\vec{k}_b = [k_{b,1}, k_{b,2}, \dots, k_{b,n}].$$

Definišimo Taksikab normu vektora kao

$$\|\vec{k}\|_1 = \sum_{i=1}^n k_i$$

Ako je  $\|\vec{k}_a\|_1 > \|\vec{k}_b\|_1$ , kažemo da je  $\vec{k}_a >_{gradLex} \vec{k}_b$ . Ukoliko je  $\|\vec{k}_b\|_1 > \|\vec{k}_a\|_1$ , kažemo da je  $\vec{k}_b >_{gradLex} \vec{k}_a$ . Ukoliko je  $\|\vec{k}_a\|_1 = \|\vec{k}_b\|_1$ , vrši se leksikografsko poređenje vektora.

---

### Algoritam 9 Gradirano leksikografsko poređenje

---

```
1: procedure GRADLEX( $\vec{k}_a, \vec{k}_b$ )
2:    $\|\vec{k}_a, \vec{k}_b$  - vektori k indeksa
3:    $\|\$ Kao rezultat poređenja se vraćaju sledeće vrednosti
4:    $\|\$ 1 - ako je  $\vec{k}_a >_{gradLex} \vec{k}_b$ 
5:    $\|\$ 0 - ako je  $\vec{k}_a =_{gradLex} \vec{k}_b$ 
6:    $\|\$ -1 - ako je  $\vec{k}_a <_{gradLex} \vec{k}_b$ 
7:
8:    $sum_a = 0$ 
9:    $sum_b = 0$ 
10:  for  $i=1$  to  $length(\vec{k}_a)$  do
11:     $sum_a = sum_a + \vec{k}_a[i]$ 
12:     $sum_b = sum_b + \vec{k}_b[i]$ 
13:  end for
14:  if  $sum_a > sum_b$  then
15:    return 1
16:  end if
17:  if  $sum_a < sum_b$  then
18:    return -1
19:  end if
20:  return  $lex(\vec{k}_a, \vec{k}_b)$ 
21: end procedure
```

---

## Euklidsko leksikografski poredak

Za dve polinomske aproksimacije  $P_a(x)$  i  $P_b(x)$  definišimo vektore  $k$  indeksa

$$\vec{k}_a = [k_{a,1}, k_{a,2}, \dots, k_{a,n}]$$

i

$$\vec{k}_b = [k_{b,1}, k_{b,2}, \dots, k_{b,n}].$$

Definišimo Euklidsku normu vektora kao

$$\|\vec{k}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n k_i^2}$$

Ako je  $\|\vec{k}_a\|_2 > \|\vec{k}_b\|_2$ , kažemo da je  $\vec{k}_a >_{euclidLex} \vec{k}_b$ . Ukoliko je  $\|\vec{k}_b\|_2 > \|\vec{k}_a\|_2$ , kažemo da je  $\vec{k}_b >_{euclidLex} \vec{k}_a$ . Ukoliko je  $\|\vec{k}_a\|_2 = \|\vec{k}_b\|_2$ , vrši se leksikografsko poređenje vektora.

---

### Algoritam 10 Euklidsko leksikografsko poređenje

---

```
1: procedure EUCLIDLEX( $\vec{k}_a, \vec{k}_b$ )
2:    $\backslash\backslash \vec{k}_a, \vec{k}_b$  - vektori k indeksa
3:    $\backslash\backslash$  Kao rezultat poređenja se vraćaju sledeće vrednosti
4:    $\backslash\backslash$  1 - ako je  $\vec{k}_a >_{euclidLex} \vec{k}_b$ 
5:    $\backslash\backslash$  0 - ako je  $\vec{k}_a =_{euclidLex} \vec{k}_b$ 
6:    $\backslash\backslash$  -1 - ako je  $\vec{k}_a <_{euclidLex} \vec{k}_b$ 
7:
8:    $sum_a = 0$ 
9:    $sum_b = 0$ 
10:  for  $i=1$  to  $length(\vec{k}_a)$  do
11:     $sum_a = sum_a + \vec{k}_a[i]^2$ 
12:     $sum_b = sum_b + \vec{k}_b[i]^2$ 
13:  end for
14:  if  $sum_a > sum_b$  then
15:    return 1
16:  end if
17:  if  $sum_a < sum_b$  then
18:    return -1
19:  end if
20:  return  $lex(\vec{k}_a, \vec{k}_b)$ 
21: end procedure
```

---



## Čebišev leksikografski poredak

Za dve polinomske aproksimacije  $P_a(x)$  i  $P_b(x)$  definišimo vektore  $k$  indeksa

$$\vec{k}_a = [k_{a,1}, k_{a,2}, \dots, k_{a,n}]$$

i

$$\vec{k}_b = [k_{b,1}, k_{b,2}, \dots, k_{b,n}].$$

Definišimo Čebišev normu vektora kao

$$\|\vec{k}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n k_i^p} = \max(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

Ako je  $\|\vec{k}_a\|_\infty > \|\vec{k}_b\|_\infty$ , kažemo da je  $\vec{k}_a >_{\text{chebLex}} \vec{k}_b$ . Ukoliko je  $\|\vec{k}_b\|_\infty > \|\vec{k}_a\|_\infty$ , kažemo da je  $\vec{k}_b >_{\text{chebLex}} \vec{k}_a$ . Ukoliko je  $\|\vec{k}_a\|_\infty = \|\vec{k}_b\|_\infty$ , vrši se leksikografsko poređenje vektora.

---

### Algoritam 11 Čebišev leksikografsko poređenje

---

```
1: procedure CHEBKLEX( $\vec{k}_a, \vec{k}_b$ )
2:    $\backslash\backslash \vec{k}_a, \vec{k}_b$  - vektori k indeksa
3:    $\backslash\backslash$  Kao rezultat poređenja se vraćaju sledeće vrednosti
4:    $\backslash\backslash 1$  - ako je  $\vec{k}_a >_{\text{chebLex}} \vec{k}_b$ 
5:    $\backslash\backslash 0$  - ako je  $\vec{k}_a =_{\text{chebLex}} \vec{k}_b$ 
6:    $\backslash\backslash -1$  - ako je  $\vec{k}_a <_{\text{chebLex}} \vec{k}_b$ 
7:
8:    $max_a = 0$ 
9:    $max_b = 0$ 
10:  for  $i=1$  to  $length(\vec{k}_a)$  do
11:     $max_a = \max(max_a, \vec{k}_a[i])$ 
12:     $max_b = \max(max_b, \vec{k}_b[i])$ 
13:  end for
14:  if  $max_a > max_b$  then
15:    return 1
16:  end if
17:  if  $max_a < max_b$  then
18:    return -1
19:  end if
20:  return  $lex(\vec{k}_a, \vec{k}_b)$ 
21: end procedure
```

---

### 3.3 Osnovni algoritam sistema SimTheP

---

**Algoritam 12** Algoritam Natural approach

---

```

1: procedure NATURALAPPROACH( $f(x)$ ,  $\delta$ ,  $\mathfrak{I}$ ,  $precision$ )
2:   \\  $f(x)$  - MTP funkcija oblika  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x$ 
3:   \\  $\delta$  - Granica za dokaz:  $f(x) > 0$ ,  $x \in (0, \delta)$ 
4:   \\  $\mathfrak{I}$  - Granica stepena Tejlorovih razvoja
5:   \\  $precision$  - Minimalni broj decimala tačnosti za aritmetičke proračune
6:
7:   if  $f(0) < 0$  then
8:     return Greška početne hipoteze
9:   end if
10:  if  $f(0) = 0$  and  $f^i(0) < 0$  then           \\  $f^i(0)$  - Prvi nenulti izvod  $f(x)$  u 0
11:    return Greška početne hipoteze
12:  end if
13:  if  $f(\delta) < 0$  then
14:    return Greška početne hipoteze
15:  end if
16:  if  $f(\delta) = 0$  and  $f^j(\delta) > 0$  then
17:    return Greška početne hipoteze
18:  end if
19:
20:  if  $f(\delta) > 0$  then
21:    return natApprSingleSide( $f(x)$ ,  $\delta$ ,  $\mathfrak{I}$ ,  $precision$ )
22:  else
23:    if  $f(0) > 0$  then
24:      return natApprSingleSide( $f(\delta - x)$ ,  $\delta$ ,  $\mathfrak{I}$ ,  $precision$ )
25:    else
26:      return natApprDoubleSided( $f(x)$ ,  $\delta$ ,  $\mathfrak{I}$ ,  $precision$ )
27:    end if
28:  end if
29: end procedure

```

---

Rezultat izvršavanja ovog algoritma može biti poruka "Greška početne hipoteze" ili rezultat jedne od funkcija *natApprSingleSide*, odnosno *natApprDoubleSided*. Poruka o grešci se može javiti u jednom od četiri slučaja koji su analizirani u lemi 2.4 u okviru rada [122]. U okviru funkcija *natApprSingleSide* i *natApprDoubleSided* se mogu javiti nove poruke o grešci, ali će one naknadno biti detaljnije analizirane.

### 3.3.1 Jednostrano dokazivanje MTP nejednakosti

U okviru ovog algoritma upotrebljavaće se sledeći prethodno opisani algoritmi:

- *transformMultipleAngles* - opisan u poglavlju 3.2.4
- *calculateMinimalTl* - opisan u poglavlju 3.2.3
- *setupTransformations* - opisan u poglavlju 3.2.3
- *shortenPoly* - opisan u poglavlju 3.2.2
- *Sturm* - opisan u poglavlju 3.2.1
- *firstRoot* - opisan u poglavlju 3.2.1

Takođe su korišćeni sledeći algoritmi:

#### **setupIterations**

Neka je dat vektor minimalnih vrednosti  $k$  indeksa  $\vec{k}_{min} = [k_{min,1}, k_{min,2} \dots k_{min,n}]$ .

Neka je data i maksimalna vrednost  $k$  indeksa  $maxTl$ . Neka su

$$\begin{aligned} k_1 &\in \{k_{min,1}, k_{min,1} + 1, \dots, maxTl\} \\ k_2 &\in \{k_{min,2}, k_{min,2} + 1, \dots, maxTl\} \\ &\vdots \\ k_n &\in \{k_{min,n}, k_{min,n} + 1, \dots, maxTl\} \end{aligned}$$

i neka je  $\vec{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ . Algoritam `setupIterations` generiše sve moguće varijacije vektora  $\vec{k}$  na osnovu ulaznog vektora  $\vec{k}_{min}$  i  $maxTL$ . Ove varijacije se sortiraju prema jednom od algoritama sortiranja prikazanih u poglavlju 3.2.5

#### **generatePolynomial**

Neka je data funkcija definisana sa  $f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^{p_i} T_{l_i+q_i}^{sin,0} + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j x^{p_j} T_{l_j+q_j}^{cos,0}$  gde su  $T_{l_i+q_i}^{sin,0}$  i  $T_{l_j+q_j}^{cos,0}$  određene klase Tejlorovih razvoja. Neka je dat vektor  $\vec{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ . Smenom vrednosti  $l_i = k_i$  se generišu konkretni Tejlorovi razvoji umesto

klasa Tejlorovih razvoja koji su se javljali. Algoritam za ulazno  $f(x)$  i  $\vec{k}$  definiše polinomsku funkciju  $P(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i x^{p_i} T_{k_i+q_i}^{\sin,0} + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j x^{p_j} T_{k_j+q_j}^{\cos,0}$  koja se vraća kao rezultat rada algoritma.

## posOrInc

### Slučaj I

Neka je dat polinom  $P(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ . Neka je  $x = 0$ . Ako je  $\alpha_0 \neq 0$  sledi da  $P(0) = \alpha_0$ . Samim tim  $P(0) > 0$  ako i samo ako  $\alpha_0 > 0$ .

### Slučaj II

Neka je dat polinom  $P(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$  i neka je  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ . Neka je  $x = 0$ . Iz slučaja I poznato je da je  $f(0) = 0$ . Prvih  $m$  izvoda funkcije  $P(x)$  za  $x = 0$  su:

$$\begin{aligned} P(x) &= \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_m x^m \\ P(0) &= 0 \\ P'(x) &= n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + \dots + m\alpha_m x^{m-1} \\ P'(0) &= 0 \\ P^{(2)}(x) &= n(n-1)\alpha_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)\alpha_{n-1} x^{n-3} + \dots + m(m-1)\alpha_m x^{m-2} \\ P^{(2)}(0) &= 0 \\ &\vdots \\ P^{(m)}(x) &= \frac{n!}{(n-m)!} \alpha_n x^{n-m} + \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!} \alpha_{n-1} x^{n-m-1} + \dots + \frac{(m+1)!}{2} \alpha_{m+1} x + (m)! \alpha_m \\ P^{(m)}(0) &= m! \alpha_m \end{aligned}$$

Na osnovu prethodnog se dolazi do zaključka da u slučaju da je  $P(0) = 0$  polinomska funkcija rastuća ako i samo ako je koeficijent uz term najnižeg stepena čiji koeficijent je različit od nule pozitivan.

Oslanjajući se na slučaj I i II algoritam *posOrInc* utvrđuje da li je polinomska funkcija pozitivna u tački  $x = 0$  ili rastuća u desnoj okolini tačke  $x = 0$  u slučaju da je  $P(0) = 0$ .

---

**Algoritam 13** Algoritam Natural approach za jednostruku aproksimaciju

---

```
1: procedure NATAPPRSIDE( $f(x)$ ,  $\delta$ ,  $\mathfrak{I}$ ,  $precision$ )
2:    $\backslash\backslash f(x)$  - Miksovano trigonometrijsko polinomska funkcija
3:    $\backslash\backslash \delta$  - Granica.  $f(x) > 0, x \in (0, \delta)$ 
4:    $\backslash\backslash \mathfrak{I}$  - Granica stepena Tejlorovih razvoja zamene
5:    $\backslash\backslash precision$  - Minimalni broj decimala tačnosti za aritmetičke proračune
6:
7:    $g(x) = transformMultipleAngles(f(x))$ 
8:    $minTl = calculateMinimalTl(g(x), \delta)$   $\backslash\backslash$  Vraća niz
9:   if  $max(minTl) > \mathfrak{I}$  then
10:     return Greška preniskog stepena Taylorovih razvoja
11:   end if
12:    $h(x) = setupTransformations(g(x))$ 
13:    $iterations = setupIterations(h(x), minTl, \mathfrak{I})$   $\backslash\backslash$  Vraća niz
14:    $maxX = 0$ 
15:    $maxT(x) = 0$ 
16:   for all  $it$  from  $iterations$  do
17:      $T(x) = generatePolynomial(h(x), it)$ 
18:     if  $posOrInc(T(x))$  then
19:        $T_s = shortenPoly(T(x), precision)$   $\backslash\backslash$  Vraća niz
20:       for all  $T_m$  from  $T_s$  do
21:         if  $Sturm(T_m(x), 0, \delta)$  then
22:           return  $(T_m(x), \delta)$ 
23:         end if
24:          $x_0 = firstRoot(T_m(x), 0, \delta)$ 
25:         if  $x_0 > maxX$  then
26:            $maxX = x_0$ 
27:            $maxT(x) = T_m(x)$ 
28:         end if
29:       end for
30:     end if
31:   end for
32:   return  $(maxT(x), maxX)$ 
33: end procedure
```

---

Opišimo izvršavanje prethodno prikazanog algoritma 13 sa posebnim osvrtom na korektnost pojedinih koraka. U prvom koraku MTP funkciju  $f(x)$  transformišemo iz oblika stepena sinusnih i kosinusnih funkcija u oblik višestrukih uglova. Sledeći korak je utvrđivanje minimalnih stepena Tejlorovih razvoja za sinusne i kosinusne funkcije koji su neophodni za ispravnu aproksimaciju za  $x \in (0, \delta)$ . Kao rezultat ovog koraka se

vraća niz nenegativnih celobrojnih vrednosti  $minTl$ . Korektnost ovog koraka je analizirana u poglavlju 3.2.3. Posle ovog koraka sledi provera da li neka vrednost iz niza  $minTl$  prevazilazi vrednost  $\mathfrak{I}$  koja je prosleđena algoritmu kao ulazni podatak kojim određujemo maksimalni stepen Tejlorovog polinoma koji aplikacija može da koristi. U ovom koraku postoji mogućnost da  $\mathfrak{I}$  nema dovoljno veliku vrednost, pa se u tom slučaju vraća poruka o neophodnosti povećanja vrednosti  $\mathfrak{I}$ , što obezbeđuje korektnost ovog koraka. U sledećem koraku se vrši smena sinusnih i kosinusnih funkcija sa odgovarajućim klasama Tejlorovih razvoja korišćenjem funkcije *setupTransformations*. Smena se vrši prema postupku opisanom u poglavlju 3.2.4, čime je obezbeđena korektnost ovog koraka. Sledi korak u kom se poziva funkcija *setupIterations* kojom se generišu sve moguće varijacije indeksa koji će se primenjivati na klase Tejlorovih razvoja definisanih u prethodnom koraku:  $k_1 \in \{k_{min,1}, k_{min,1} + 1, \dots, maxTl\}$ ,  $k_2 \in \{k_{min,2}, k_{min,2} + 1, \dots, maxTl\}$ ,  $\dots$ ,  $k_n \in \{k_{min,n}, k_{min,n} + 1, \dots, maxTl\}$ . Pre razmatranja svih dostupnih varijacija  $k$  indeksa, postavljaju se inicijalne vrednosti  $maxX = 0$  i  $maxT(x) = 0$ .

Za svaku pojedinačnu iteraciju  $it$  iz niza varijacija  $k$  indeksa *iterations* prolazimo kroz niz koraka koje opisujemo. Prvi korak je formiranje polinomske funkcije  $T(x)$  uvođenjem konkretnih vrednosti indeksa iz  $it$  u klase Tejlorovih razvoja koje su definisane u  $h(x)$ . Nakon ovoga sledi provera korišćenjem algoritma *posOrInc* da li je polinomska funkcija  $T(x)$  za  $x = 0$  pozitivna ili rastuća u desnoj okolini tačke  $x = 0$ . Ukoliko ovaj uslov nije ispunjen, polinomska funkcija  $T(x)$  se dalje ne razmatra, što obezbeđuje korektnost da se razmatraju samo nanižne aproksimacije MTP funkcije koje su u desnoj okolini tačke  $x = 0$  pozitivne. Za takve polinomske funkcije se generiše niz polinoma skraćenih koeficijenata  $T_s(x)$  na osnovu algoritma *shortenPoly* za  $T(x)$  i ulazni podatak *precision*. Ovako dobijene aproksimacije su nanižne (kao što je prikazano u poglavlju 3.2.2), što obezbeđuje korektnost ovog koraka. Nadalje se izvršavaju isti koraci za svaki polinom  $T_m(x)$  koji je element niza  $T_s(x)$ .

Polinom  $T_m(x)$  je polinom sa racionalnim koeficijentima. Samim tim, moguće je pozivom algoritma *Sturm* odrediti da li polinom za  $x \in (0, \delta)$  nema nula. Ukoliko je

prethodni uslov ispunjen, polinomska funkcija  $T_m(x)$  ispunjava nejednakost

$$f(x) \geq T_m(x) \geq 0$$

za  $x \in (0, \delta)$ , što dokazuje pozitivnost posmatrane MTP funkcije na tom intervalu. U slučaju kada prethodni uslov nije ispunjen, prvi korak je traženje prve pozitivne nule  $x_0$  na ovom intervalu prema algoritmu *firstRoot* čije je korektnost razmatrana u poglavlju 3.2.1. Nakon računanje vrednosti  $x_0$  vrši se provera da li je vrednosti  $x_0$  veća od najveće do tada određene vrednosti za  $x_0$ . U slučaju kada je nova vrednosti  $x_0$  veća od prethodno dobijene, ona se beleži kao novi do sada najbolji dobijeni rezultat, a polinomska funkcija  $T_m(x)$  kao najbolji dobijeni parcijalni dokaz nejednakosti

$$f(x) > T_m(x) > 0$$

za  $x \in (0, x_0) \subset (0, \delta)$ . Ukoliko se prolaskom kroz sve varijacije vektora  $k$  indeksa ne nađe na potpun dokaz za  $x \in (0, \delta)$ , kao rezultat rada algoritma se vraća najbolji pronađeni parcijalni dokaz.

### 3.3.2 Dvostrano dokazivanje MTP nejednakosti

Algoritam za dvostrano dokazivanje MTP nejednakosti (prikazan kao algoritam 14) koristi u toku izvršavanja iste algoritme kao i algoritam za jednostrano dokazivanje MTP nejednakosti (13).

Tok ovog algoritma je veoma sličan koracima algoritma opisanog u prethodnoj sekciji. Prvi korak čini definisanje funkcije za desnu stranu dokaza kao  $f_r(x) = f(\delta - x)$ . Nakon definisanja funkcije desne strane dokaza, za obe funkcije se vrši transformacija na višestruke uglove korišćenjem algoritma opisanog u poglavlju 3.2.4. Sledeći korak je utvrđivanje minimalnih stepena Tejlorovih razvoja za sinusne i kosinusne funkcije koji su neophodni za ispravnu aproksimaciju za  $x \in (0, \delta)$ . Kao rezultat ovog koraka se vraća niz nenegativnih celobrojnih vrednosti *minTl*. Posle ovog koraka sledi provera da li neka vrednost iz niza *minTl* prevazilazi vrednost  $\mathfrak{U}$  koja je prosleđena algoritmu kao ulazni podatak kojim određujemo maksimalni stepen Tejlorovog polinoma koji aplikacija može da koristi.

---

**Algoritam 14** Algoritam Natural approach za dvostruku aproksimaciju

---

```
1: procedure NATAPPRDOUBLESIDED( $f(x)$ ,  $\delta$ ,  $\mathfrak{I}$ ,  $precision$ )
2:    $\backslash\backslash f(x)$  - Miksovano trigonometrijsko polinomska funkcija
3:    $\backslash\backslash \delta$  - Granica.  $f(x) > 0, x \in (0, \delta)$ 
4:    $\backslash\backslash \mathfrak{I}$  - Granica stepena Tejlorovih razvoja zamene
5:    $\backslash\backslash precision$  - Minimalni broj decimala tačnosti za aritmetičke proračune
6:
7:    $f_r(x) = f(\delta - x)$ 
8:    $g_l(x) = transformMultipleAngles(f(x))$ 
9:    $g_r(x) = transformMultipleAngles(f_r(x))$ 
10:   $minTl = calculateMinimalTl(g_l(x), g_r(x), \delta)$   $\backslash\backslash$  Vraća niz
11:  if  $max(minTl) > \mathfrak{I}$  then
12:    return Greška preniskog stepena Taylorovih razvoja
13:  end if
14:   $h_l(x) = setupTransformations(g_l(x))$ 
15:   $h_r(x) = setupTransformations(g_r(x))$ 
16:   $iterations = setupIterations(h_l(x), h_r(x), minTl, \mathfrak{I})$   $\backslash\backslash$  Vraća niz
17:   $maxArea = 0$ 
18:   $maxX_l = 0, maxX_r = 0$ 
19:   $maxT_l(x) = 0, maxT_r(x) = 0$ 
20:  for all  $it$  from  $iterations$  do
21:     $T_l(x) = generatePolynomial(h_l(x), it)$ 
22:     $T_r(x) = generatePolynomial(h_r(x), it)$ 
23:    if  $posOrInc(T_{l,m}(x))$  and  $posOrInc(T_{r,m}(x))$  then
24:       $T_{l,s}(x) = shortenPoly(T_l(x), n), T_{r,s}(x) = shortenPoly(T_r(x), n)$ 
25:       $\backslash\backslash$  Vraća niz
26:      for all  $T_{l,m}(x)$  from  $T_{l,s}(x)$  do
27:        for all  $T_{r,m}(x)$  from  $T_{r,s}(x)$  do
28:           $x_{l,0} = firstRoot(T_{l,m}(x), 0, \delta), x_{r,0} = firstRoot(T_{r,m}(x), 0, \delta)$ 
29:          if  $x_{l,0} + x_{r,0} > \delta$  then
30:            return  $(T_{l,m}(x), x_{l,0}, T_{r,m}(x), x_{r,0})$ 
31:          else
32:            if  $x_{l,0} + x_{r,0} > maxArea$  then
33:               $maxArea = x_{l,0} + x_{r,0}$ 
34:               $maxX_l = x_{l,0}, maxX_r = x_{r,0}$ 
35:               $maxT_l(x)(x) = T_{l,x}(x), maxT_r(x)(x) = T_{r,x}(x)$ 
36:            end if
37:          end if
38:        end for
39:      end for
40:    end if
41:  end for
42:  return  $(maxT_l(x), maxX_l, maxT_r(x), maxX_r)$ 
43: end procedure
```

---



U ovom koraku postoji mogućnost da  $\mathfrak{I}$  nema dovoljno veliku vrednost, pa se u tom slučaju vraća poruka o neophodnosti povećanja vrednosti  $\mathfrak{I}$ , što obezbeđuje korektnost ovog koraka. U sledećem koraku se vrši smena sinusnih i kosinusnih funkcija sa odgovarajućim klasama Tejlorovih razvoja korišćenjem funkcije *setupTransformations*. Sledi korak u kom se poziva funkcija *setupIterations* kojom se generišu sve moguće varijacije indeksa koji će se primenjivati na klase Tejlorovih razvoja definisanih u prethodnom koraku:  $k_1 \in \{k_{min,1}, k_{min,1} + 1, \dots, maxTl\}$ ,  $k_2 \in \{k_{min,2}, k_{min,2} + 1, \dots, maxTl\}$ ,  $\dots$ ,  $k_n \in \{k_{min,n}, k_{min,n} + 1, \dots, maxTl\}$ . Pre razmatranja svih dostupnih varijacija  $k$  indeksa, postavljaju se inicijalne vrednosti  $maxArea = 0$ ,  $maxX_l = 0$ ,  $maxX_r = 0$ ,  $maxT_l(x) = 0$  i  $maxT_r(x) = 0$ .

Za svaku pojedinačnu iteraciju  $it$  iz niza varijacija  $k$  indeksa *iterations* prolazimo kroz niz koraka koje opisujemo. Prvi korak je formiranje polinomskih funkcija  $T_l(x)$  i  $T_r(x)$  uvođenjem konkretnih vrednosti indeksa iz  $it$  u klase Tejlorovih razvoja koje su definisane u  $h_l(x)$  i  $h_r(x)$ . Nakon ovoga sledi provera korišćenjem algoritma *posOrInc* da li su polinomske funkcije  $T_l(x)$  i  $T_r(x)$  za  $x = 0$  pozitivne ili rastuće u desnoj okolini tačke  $x = 0$ . Ukoliko ovaj uslov nije ispunjen, polinomske funkcije  $T_l(x)$  i  $T_r(x)$  se dalje ne razmatraju, što obezbeđuje korektnost da se razmatraju samo nanižne aproksimacije MTP funkcije koje su u desnoj okolini tačke  $x = 0$  pozitivne. Za takve polinomske funkcije se generišu nizovi polinoma skraćenih koeficijenata  $T_{l,s}(x)$  i  $T_{r,s}(x)$  na osnovu algoritma *shortenPoly* za  $T_l(x)$ ,  $T_r(x)$  i ulaznog podatka *precision*. Nadalje se izvršavaju isti koraci za svaku kombinaciju polinoma  $T_{l,m}(x)$  i  $T_{r,m}(x)$  koji su elementi nizova  $T_{l,s}(x)$  i  $T_{r,s}(x)$ .

Prvi korak je traženje prvih pozitivnih nula  $x_{l,0}$  i  $x_{r,0}$  za polinome  $T_{l,s}(x)$  i  $T_{r,s}(x)$  za  $x \in (0, \delta)$  prema algoritmu *firstRoot*. Nakon toga se vrši provera da li je zbir  $x_{l,0}$  i  $x_{r,0}$  veći od granice  $\delta$ . Ukoliko jeste, to je dokaz postojanja tačke  $x = c$  gde je

$$T_{l,s}(c) = T_{r,s}(\delta - c)$$

$$c < x_{l,0}$$

$$c > \delta - x_{r,0}$$

pri čemu

$$f(x) > T_{l,s}(x) > 0$$

za  $x \in (0, c)$  i

$$f(x) > T_{r,s}(\delta - x) > 0$$

za  $x \in (c, \delta)$ . Iz ovog razloga se vrednosti  $T_{l,m}(x)$ ,  $x_{l,0}$ ,  $T_{r,m}(x)$ ,  $x_{r,0}$  vraćaju kao rezultat rada algoritma.

Ako prethodni uslov nije ispunjen, vrši se provera da li je zbir  $x_{l,0}$  i  $x_{r,0}$  veći od najveće do tada određene vrednosti zbira. U slučaju kada je nova vrednosti  $x_{l,0} + x_{r,0}$  veća od prethodno dobijene, ona se beleži kao novi do sada najbolji dobijeni rezultat, a polinomske funkcije  $T_{l,s}(x)$  i  $T_{r,s}(x)$ , i vrednosti  $x_{l,0}$  i  $x_{r,0}$  kao najbolji dobijeni parcijalni dokazi nejednakosti

$$f(x) > T_{l,s}(x) > 0$$

za  $x \in (0, x_{l,0}) \subset (0, \delta)$  i

$$f(x) > T_{r,s}(\delta - x) > 0$$

za  $x \in (\delta - x_{r,0}, \delta) \subset (0, \delta)$ . Ukoliko se prolaskom kroz sve varijacije vektora  $k$  indeksa ne naiđe na potpun dokaz za  $x \in (0, \delta)$ , kao rezultat rada algoritma se vraća najbolji pronađeni parcijalni dokaz.

### 3.3.3 Proširenja osnovnog algoritma

U okviru ovog poglavlja će biti razmatrana neka proširenja osnovnog algoritma. Ova proširenja su nastala u praksi prilikom upotrebe algoritma na neke otvorene probleme i prilikom implementacije algoritma u računarskoj aplikaciji. Dalja proširenja će biti predmet budućih istraživanja.

#### Logaritamsko miksovano polinomske trigonometrijske funkcije

U okviru rada [5] je prikazana klasa logaritamsko miksovano polinomske trigonometrijske funkcija (LogMTP klasa) definisana kao

$$F(x) = f(x) + \sum_{j=1}^m P_j(x) \ln(f_j(x)) > 0,$$

gde je  $P_j(x)$  realna polinomska funkcija stepena  $k_j$  a  $f(x)$  i  $f_j(x)$  MTP funkcije takve da  $f(x) > 0$  i  $f_j(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . U navedenom radu je definisan postupak za dokazivanje LogMTP nejednakosti oblika

$$F(x) > 0$$

za  $x \in (0, \delta)$ . Ako se pretpostavi da je stepen nula polinoma -1 pokazano je da je  $F^{(K+1)}(x)$  izvod funkcije  $F(x)$  količnik dve MTP funkcije, gde je  $K = \max\{k_j | j = 1, \dots, m\}$ . Odatle se definiše dokazivanje MTP funkcija kao sledeće

Neka je  $\Phi : (0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\delta > 0$ ),  $(K+1)$ -puta diferencijabilna funkcija ( $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) takva da

- (i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) \geq 0$ ,
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi^{(j)}(x) \geq 0$  važi za svako  $j \in \{1, 2, \dots, K\}$ ,
- (iii)  $\Phi^{(K+1)}(x) > 0$  za  $0 < x < c$  gde je  $c \in (0, \delta]$ .

Onda za  $0 < x < c$  važi nejednakost

$$\Phi(x) > 0$$

Dokazivanje  $F(x) > 0$  se odavde oslanja na dokazivanje MTP funkcija koje je već prikazano u okviru ove glave.

### Proširena klasa MTP funkcija

Osnovna klasa MTP funkcija je definisana sa

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \sin^{q_i} x \cos^{r_i} x. \quad (3.9)$$

gde su  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $p_i, q_i, r_i \in \mathbb{N}_0$ . U praksi i radovima je moguće pronaći širu klasu funkcija

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \prod_{j=1}^m \sin^{q_{ij}} \beta_{ij} x \cos^{r_{ij}} \beta_{ij} x.$$

za  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $p_i, q_{ij}, r_{ij} \in \mathbb{N}_0$  i  $\beta_{ij} \in \mathbb{N}$ , koja je klasa realnih analitičkih funkcija. Koristeći opštepoznate formule

$$\sin n\theta = \sum_{i=0, k=2i+1}^{n/2} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k} \cos^{n-k} \theta \sin^k \theta$$

i

$$\cos n\theta = \sum_{i=0, k=2i}^{n/2} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \cos^{n-k} \theta \sin^k \theta$$

moгуће je izvršiti transformaciju funkcije iz ove proširene klase MTP funkcija u standardni oblik MTP funkcije.

---

**Algoritam 15** Algoritam transformacije u MTP funkciju

---

```
1: procedure TRANSFORMTOMTP( $f(x)$ )
2:   \\ $f(x)$  - Funkcija iz proširene klase MTP funkcija
3:   \\ $\text{oblika } \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \prod_{j=1}^m \sin^{q_{ij}} \beta_{ij} x \cos^{r_{ij}} \beta_{ij} x$ 
4:
5:    $g(x) = 0$ 
6:    $n = \text{length}(f(x))$                                \\ $\text{Broj sabiraka funkcije } f(x)$ 
7:   for  $i = 1$  to  $n$  do
8:      $t(x) = f_i(x)$                                    \\ $\text{Vraća } i\text{-ti sabirak funkcije } f(x)$ 
9:      $h(x) = t \cdot \alpha_i x^{t \cdot p_i}$ 
10:     $m = \text{length}(t(x))$                                \\ $\text{Vraća broj umnožaka } i\text{-tog sabirka}$ 
11:                                           \\ $\text{funkcije } f(x) \text{ pored } \alpha_i \text{ i } x^{p_i}$ 
12:    for  $j = 1$  to  $m$  do
13:      if  $t \cdot q_j \neq 0$  then
14:         $H(x) = 0$ 
15:        for  $k = 1$  to  $t \cdot \beta_j$  by 2 do
16:           $H(x) = H(x) + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{t \cdot \beta_j}{k} \cos^{t \cdot \beta_j - k} x \sin^k x$ 
17:        end for
18:         $h(x) = h(x) H(x)^{t \cdot q_j}$ 
19:      end if
20:      if  $t \cdot r_j \neq 0$  then
21:         $H(x) = 0$ 
22:        for  $k = 0$  to  $t \cdot \beta_j$  by 2 do
23:           $H(x) = H(x) + (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{t \cdot \beta_j}{k} \cos^{t \cdot \beta_j - k} x \sin^k x$ 
24:        end for
25:         $h(x) = h(x) H(x)^{t \cdot r_j}$ 
26:      end if
27:    end for
28:     $g(x) = g(x) + h(x)$ 
29:  end for
30:  return  $g(x)$ 
31: end procedure
```

---

## Proširenja algoritma smene Tejlorovim razvojjima

---

**Algoritam 16** Algoritam za transformaciju analitičkih funkcija u Tejlorove razvoje

---

```

1: procedure SETUPTRANSFORMATIONSEXTENDED( $f(x)$ )
2:   \\ $f(x)$  - Funkcija oblika  $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \prod_{j=1}^m h_{ij}(x)$ 
3:   \\ $\quad$  gde su  $\alpha_i \in R$ ,  $p_i \in N_0$ ,  $\beta_{ij} \in N$  i gde je  $g_{ij}(x)$  neka analitička funkcija.
4:
5:    $g(x) = 0$ 
6:    $l = 1$ 
7:   for  $i = 1$  to  $\text{length}(f(x))$  do
8:      $t(x) = f_i(x)$            \\ $\quad$  \\ $\quad$  Vraća i-ti sabirak funkcije  $f(x)$ 
9:      $h(x) = t \cdot \alpha x^{t \cdot p_i}$ 
10:    for  $j = 1$  to  $\text{length}(t(x))$  do
11:      if  $j = 1$  and  $t \cdot \alpha < 0$  then
12:         $h(x) = h(x) \cdot A_{kl}^{0, h_j(x)}(t \cdot \beta_j x)$ 
13:      else
14:         $h(x) = h(x) \cdot \underline{A_{kl}^{0, h_j(x)}(t \cdot \beta_j x)}$ 
15:      end if
16:    end for
17:     $g(x) = g(x) + h(x)$ 
18:  end for
19:  return  $g(x)$ 
20: end procedure

```

---

U oviru poglavlja 3.2.4 je opisan algoritam *setupTransformations* koji vrši smenu sinusnih i kosinusnih funkcija sa odgovarajućim Tejlorovim razvojjima radi formiranja nanižne aproksimacije MTP funkcije. Ulaz algoritma koji je opisan u tom poglavlju je funkcija koja je rezultat algoritma transformacije stepenih sinusnih i kosinusnih funkcija u oblik višestrukih uglova. Izlaz iz ovog algoritma ima oblik

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} g(x)$$

gde je  $g(x) = \sin \beta_i x$  ili  $g(x) = \cos \beta_i x$  za  $\alpha_i \in R$ ,  $p_i \in N_0$  i  $\beta_i \in N$ .

Radi budućih proširenja prikazanog glavnog algoritma u ovom poglavlju je prikazan modifikovan algoritam (16) sa širom klasom funkcija od MTP funkcija. Ova šira klasa

funkcije ima oblik

$$h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{p_i} \prod_{j=1}^m h_{ij}(\beta_{ij} x)$$

za  $\alpha_i \in R$ ,  $p_i \in N_0$ ,  $\beta_{ij} \in N$  i gde je  $h_{ij}(x)$  neka realna analitička funkcija koja ima navišnu i nanižnu polinomsku aproksimaciju.

# Glava 4

## Primer upotrebe sistema SimTheP

U okviru ove glave su prikazane primene sistema *SimTheP* na većem broju radova iz literature. Prva dva poglavlja detaljno analiziraju funkcionisanje sistema na dva primera iz literature. Naredno poglavlje prikazuje radove gde je sistem (ili njegovi delovi) između ostalog upotrebljen za rešavanje nekih otvorenih problema iz literature. Poslednja poglavlja se fokusiraju na veliki broj radova iz literature u kojima su nejednakosti dokazivane korišćenjem veoma velikog broja metoda, a koje su se sve mogle zameniti sistemom *SimTheP*.

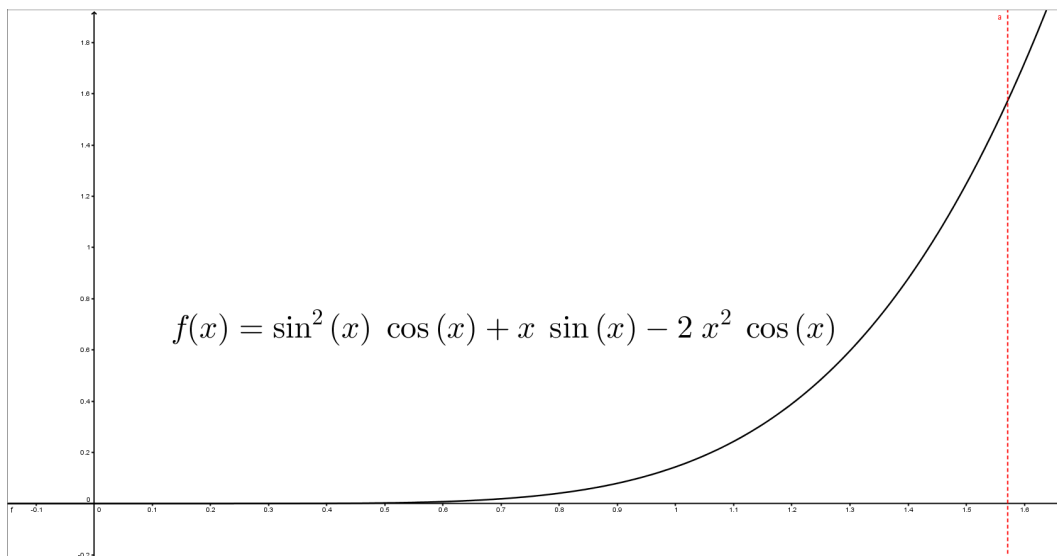
### 4.1 Primer I

Za prvi primer primene algoritma će biti upotrebljena Teorema 1. iz rada Linga Zhua: *A new simple proof of Wilkerson's inequality* [123].

**Teorema 1.**

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > 2$$

za  $0 < x < \frac{\pi}{2}$



Slika 4.1: Grafik funkcije  $f(x) = x \sin x - \cos^3 x + \cos x - 2x^2 \cos x$

Prvo transformišimo nejednakost

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{\sin x}{x \cos x} - 2 > 0$$

$$\frac{\sin^2 \cos x + x \sin x - 2x^2 \cos x}{x^2 \cos x} > 0$$

Dovoljno je dokazati da je

$$f(x) = \sin^2 x \cos x + x \sin x - 2x^2 \cos x > 0.$$

Funkciju  $f(x)$  možemo napisati kao

$$f(x) = (1 - \cos^2 x) \cos(x) + x \sin x - 2x^2 \cos x$$

$$f(x) = x \sin x - \cos^3 x + \cos x - 2x^2 \cos x$$

Kako bi uklonili  $\cos^3 x$  iz  $f(x)$  koristimo smenu  $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$ .

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cos 3x + \left(\frac{1}{4} - 2x^2\right) \cos x + x \sin x$$

Koristeći Tejlorove razvoje umesto funkcija  $\sin x$  i  $\cos x$ , dolazimo do

$$P_{k_1, k_2, k_3, k_4}(x) = -\frac{1}{4} T_{4k_1}^{3x, \cos x}(x) + \frac{1}{4} T_{4k_2+2}^{x, \cos x}(x) - 2x^2 T_{4k_3}^{x, \cos x}(x) + x T_{4k_4+3}^{x, \sin x}(x)$$



Neophodno je utvrditi koje su minimalne vrednosti  $k$ -indeksa koje možemo koristiti za dobijanje kvalitetnih aproksimacija. Koristeći opisani algoritam vraća se niz  $(1, 0, 0, 0)$ . Ovo znači da za  $k_1$  vrednost ne sme biti ispod 1 kako bi se koristila ispravna aproksimacija.

Pošto je  $f(x) \geq P(x)$ , dovoljno je dokazati da je  $P_{k_1, k_2, k_3, k_4}(x) \geq 0$  za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  da bi pokazali da je  $f(x) \geq 0$  za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Vrednosti  $k_1, k_2, k_3, k_4$  koje ispunjavaju uslov da je  $P_{k_1, k_2, k_3, k_4}(x) > 0$  za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  dobijamo pretragom.

Pretragu krećemo za vrednosti  $k_1 = 1$ , i  $k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1\}$ .

Tabela 4.1: Pretraga vrednosti za  $k_1 = 1$ , i  $k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1\}$

Pretraga vrednosti $k_1, k_2, k_3, k_4$			
$k_1, k_2, k_3, k_4$	$P_{k_1, k_2, k_3, k_4}(x)$	Nule funkcije $P_{k_1, k_2, k_3, k_4}(x)$	Kontrolna vrednost za znak : $P_{k_1, k_2, k_3, k_4}(0.1)$
1, 0, 0, 0	$-97/96x^4$	0	$-0.000101041667$
1, 0, 0, 1	$-1/5040x^8 + 1/120x^6 - 97/96x^4$	0	$-0.000101033336$
1, 0, 1, 0	$-1/12x^6 - 1/96x^4$	0	$-0.1124997 \cdot 10^{-5}$
1, 0, 1, 1	$-1/5040x^8 - 3/40x^6 - 1/96x^4$	0	$-0.1116666 \cdot 10^{-5}$
1, 1, 0, 0	$-1/2880x^6 - x^4$	0	$-0.000100000347$
1, 1, 0, 1	$-1/5040x^8 + 23/2880x^6 - x^4$	0	$-0.000099992016$
1, 1, 1, 0	$-241/2880x^6$	0	$-0.83677 \cdot 10^{-7}$
1, 1, 1, 1	$-1/5040x^8 - 217/2880x^6$	0	$-0.75346 \cdot 10^{-7}$

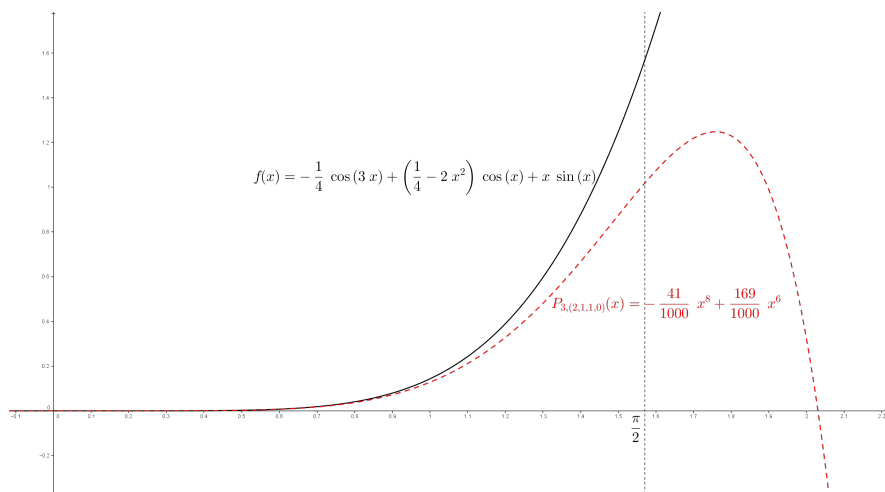
Možemo videti da pretraga nije dala nijedan pozitivan rezultat, pa proširujemo pretragu na  $k_1 \in \{1, 2\}$ ,  $k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1, 2\}$ .

Tabela 4.2: Pretraga vrednosti za  $k_1 \in \{1, 2\}$ ,  $k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1, 2\}$

Pretraga vrednosti $k_1, k_2, k_3, k_4$			
1, 0, 0, 2	$-1/39916800x^{12} + 1/362880x^{10}$ $-1/5040x^8 + 1/120x^6 - 97/96x^4$	0	$-0.000101033336$
1, 0, 1, 2	$-1/39916800x^{12} + 1/362880x^{10}$ $-1/5040x^8 - 3/40x^6 - 1/96x^4$	0	$-0.1116666 \cdot 10^{-5}$
1, 0, 2, 0	$-1/20160x^{10} + 1/360x^8$ $-1/12x^6 - 1/96x^4$	0	$-0.1124977 \cdot 10^{-5}$
1, 0, 2, 1	$-1/20160x^{10} + 13/5040x^8$ $-3/40x^6 - 1/96x^4$	0	$-0.1116646 \cdot 10^{-5}$
1, 0, 2, 2	$-1/39916800x^{12} - 17/362880x^{10}$ $+13/5040x^8 - 3/40x^6 - 1/96x^4$	0	$-0.1116646 \cdot 10^{-5}$
1, 1, 0, 2	$-1/39916800x^{12} + 1/362880x^{10}$ $-1/5040x^8 + 23/2880x^6 - x^4$	0	$-0.000099992016$
1, 1, 1, 2	$-1/39916800x^{12} + 1/362880x^{10}$ $-1/5040x^8 - 217/2880x^6$	0	$-0.75346 \cdot 10^{-7}$
1, 1, 2, 0	$-1/20160x^{10} + 1/360x^8$ $-241/2880x^6$	0	$-0.83657 \cdot 10^{-7}$
1, 1, 2, 1	$-1/20160x^{10} + 13/5040x^8$ $-217/2880x^6$	0	$-0.75326 \cdot 10^{-7}$
1, 1, 2, 2	$-1/39916800x^{12} - 17/362880x^{10}$ $+13/5040x^8 - 217/2880x^6$	0	$-0.75326 \cdot 10^{-7}$

1, 2, 0, 0	$\frac{-1/14515200x^{10} + 1/161280x^8}{-1/2880x^6 - x^4}$	0	-0.000100000347
1, 2, 0, 1	$\frac{-1/14515200x^{10} - 31/161280x^8}{+23/2880x^6 - x^4}$	0	-0.000099992016
1, 2, 0, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} + 13/4838400x^{10}}{-31/161280x^8 + 23/2880x^6 - x^4}$	0	-0.000099992016
1, 2, 1, 0	$\frac{-1/14515200x^{10} + 1/161280x^8}{-241/2880x^6}$	0	$-0.83677 \cdot 10^{-7}$
1, 2, 1, 1	$\frac{-1/14515200x^{10} - 31/161280x^8}{-217/2880x^6}$	0	$-0.75346 \cdot 10^{-7}$
1, 2, 1, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} + 13/4838400x^{10}}{-31/161280x^8 - 217/2880x^6}$	0	$-0.75346 \cdot 10^{-7}$
1, 2, 2, 0	$\frac{-103/2073600x^{10} + 449/161280x^8}{-241/2880x^6}$	0	$-0.83657 \cdot 10^{-7}$
1, 2, 2, 1	$\frac{-103/2073600x^{10} + 139/53760x^8}{-217/2880x^6}$	0	$-0.75326 \cdot 10^{-7}$
1, 2, 2, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} - 227/483840x^{10}}{+139/53760x^8 - 217/2880x^6}$	0	$-0.75326 \cdot 10^{-7}$
2, 0, 0, 0	$\frac{-729/17920x^8 + 81/320x^6}{-97/96x^4}$	0	-0.000100788957
2, 0, 0, 1	$\frac{-6593/161280x^8 + 251/960x^6}{-97/96x^4}$	0	-0.000100780626
2, 0, 0, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} + 1/362880x^{10}}{-6593/161280x^8 + 251/960x^6}$ $-97/96x^4$	0	-0.000100780626
2, 0, 1, 0	$\frac{-729/17920x^8 + 163/960x^6}{-1/96x^4}$	-2.027677244, -0.2495575967, 0, 0.2495575967, 2.027677244	$-0.872279 \cdot 10^{-6}$
2, 0, 1, 1	$\frac{-6593/161280x^8 + 57/320x^6}{-1/96x^4}$	-2.073176915, -0.2434875382, 0, 0.2434875382, 2.073176915	$-0.863948 \cdot 10^{-6}$
2, 0, 1, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} + 1/362880x^{10}}{-6593/161280x^8 + 57/320x^6}$ $-1/96x^4$	-2.073469697, -0.2434875313, 0, 0.2434875313, 2.073469697	$-0.863948 \cdot 10^{-6}$
2, 0, 2, 0	$\frac{-1/20160x^{10} - 6113/161280x^8}{+163/960x^6 - 1/96x^4}$	-2.095665797, -0.2494269388, 0, 0.2494269388, 2.095665797	$-0.872259 \cdot 10^{-6}$
2, 0, 2, 1	$\frac{-1/20160x^{10} - 1229/32256x^8}{+57/320x^6 - 1/96x^4}$	-2.141968160, -0.2433721480, 0, 0.2433721480, 2.141968160	$-0.863928 \cdot 10^{-6}$
2, 0, 2, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} - 17/362880x^{10}}{-1229/32256x^8 + 57/320x^6}$ $-1/96x^4$	-2.142309265, -0.2433721412, 0, 0.2433721412, 2.142309265	$-0.863928 \cdot 10^{-6}$
2, 1, 0, 0	$\frac{-729/17920x^8 + 91/360x^6 - x^4}{-6593/161280x^8 + 47/180x^6 - x^4}$	0	-0.000099747627
2, 1, 0, 1	$\frac{-729/17920x^8 + 91/360x^6 - x^4}{-6593/161280x^8 + 47/180x^6 - x^4}$	0	-0.000099739296
2, 1, 0, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} + 1/362880x^{10}}{-6593/161280x^8 + 47/180x^6 - x^4}$	0	-0.000099739296
2, 1, 1, 0	$\frac{-729/17920x^8 + 61/360x^6}{-6593/161280x^8 + 8/45x^6}$	-2.040886748, 0, 2.040886748	$0.169041 \cdot 10^{-6}$
2, 1, 1, 1	$\frac{-6593/161280x^8 + 8/45x^6}{-1/39916800x^{12} + 1/362880x^{10}}$ $-6593/161280x^8 + 8/45x^6$	-2.085390814, 0, 2.085390814	$0.177372 \cdot 10^{-6}$
2, 1, 1, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} + 1/362880x^{10}}{-6593/161280x^8 + 8/45x^6}$	-2.085684550, 0, 2.085684550	$0.177372 \cdot 10^{-6}$
2, 1, 2, 0	$\frac{-1/20160x^{10} - 6113/161280x^8}{+61/360x^6}$	-2.108226772, 0, 2.108226772	$0.169061 \cdot 10^{-6}$
2, 1, 2, 1	$\frac{-1/20160x^{10} - 1229/32256x^8}{+8/45x^6}$	-2.153579297, 0, 2.153579297	$0.177392 \cdot 10^{-6}$
2, 1, 2, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} - 17/362880x^{10}}{-1229/32256x^8 + 8/45x^6}$	-2.153921325, 0, 2.153921325	$0.177392 \cdot 10^{-6}$
2, 2, 0, 0	$\frac{-1/14515200x^{10}}{-41/1008x^8 + 91/360x^6 - x^4}$	0	-0.000099747627
2, 2, 0, 1	$\frac{-1/14515200x^{10} - 103/2520x^8}{+47/180x^6 - x^4}$	0	-0.000099739296
2, 2, 0, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} + 13/4838400x^{10}}{-103/2520x^8 + 47/180x^6 - x^4}$	0	-0.000099739296
2, 2, 1, 0	$\frac{-1/14515200x^{10} - 41/1008x^8}{+61/360x^6}$	-2.041035096, 0, 2.041035096	$0.169041 \cdot 10^{-6}$

2, 2, 1, 1	$\frac{-1/14515200x^{10} - 103/2520x^8 + 8/45x^6}{+8/45x^6}$	-2.085541339, 0, 2.085541339	$0.177372 \cdot 10^{-6}$
2, 2, 1, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} + 13/4838400x^{10} - 103/2520x^8 + 8/45x^6}{+8/45x^6}$	-2.085835177, 0, 2.085835177	$0.177372 \cdot 10^{-6}$
2, 2, 2, 0	$\frac{-103/2073600x^{10} - 191/5040x^8 + 61/360x^6}{+61/360x^6}$	-2.108388827, 0, 2.108388827	$0.169061 \cdot 10^{-6}$
2, 2, 2, 1	$\frac{-103/2073600x^{10} - 4/105x^8 + 8/45x^6}{+8/45x^6}$	-2.153743532, 0, 2.153743532	$0.177392 \cdot 10^{-6}$
2, 2, 2, 2	$\frac{-1/39916800x^{12} - 227/4838400x^{10} - 4/105x^8 + 8/45x^6}{+8/45x^6}$	-2.154085684, 0, 2.154085684	$0.177392 \cdot 10^{-6}$



Slika 4.2: Grafik funkcije  $f(x) = -\frac{1}{4} \cos 3x + \left(\frac{1}{4} - 2x^2\right) \cos x + x \sin x$  i aproksimacije  $P_{3,(2,1,1,0)}(x) = -\frac{41}{1000}x^8 + \frac{169}{1000}x^6$

Prva polinomska aproksimacija koja je prošla uslov da je  $P(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  je  $-\frac{729}{17920}x^8 + \frac{61}{360}x^6$  za kombinaciju  $k$  indeksa  $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (2, 1, 1, 0)$ . Procedura za utvrđivanje da li je polinomska aproksimacija  $P(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  počinje generisanjem polinoma skraćenih koeficijenata na osnovu  $P(x)$ . Prvi polinom skraćenih koeficijenata za  $P_{2,1,1,0}(x)$  je sa koeficijentima skraćenim na 3 decimale  $P_{3,(2,1,1,0)}(x) = -\frac{41}{1000}x^8 + \frac{169}{1000}x^6$ . Korišćenjem Šturmove teoreme, kao što je prikazano ispod, dolazi se do toga da postoji samo jedna nula ovog polinoma za  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$  (pošto znamo da je  $f(x) = 0$ , lako dolazimo do zaključka da je ovo i nula polinoma).

$$\begin{aligned}
p_1 &= P_{3,(2,1,1,0)}(x) = -\frac{41}{1000}x^8 + \frac{169}{1000}x^6 & p_1(0) &= 0 & p_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1.019020794 \\
p_2 &= P'_{3,(2,1,1,0)}(x) = -\frac{41}{125}x^7 + \frac{507}{500}x^5 & p_2(0) &= 0 & p_2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 1.957497364 \\
p_3 &= -rem(p_1, p_2) = -\frac{169}{4000}x^6 & p_3(0) &= 0 & p_3\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -0.6346670853 \\
p_4 &= -rem(p_2, p_3) = -\frac{507}{500}x^5 & p_4(0) &= 0 & p_4\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -9.696998768
\end{aligned}$$

Sledi provera da li je  $P_{3,(2,1,1,0)}(0)$  veće od nule ili je funkcija za  $x = 0$  rastuća. Posmatrajući koeficijent uz term sa najmanjim stepenom možemo videti da je pozitivan, i samim tim je funkcija rastuća u desnoj okolini tačke  $x = 0$ . Na osnovu toga i činjenice da je

$$f(x) > P_{2,1,1,0}(x) > P_{3,(2,1,1,0)}(x)$$

dolazimo do toga da  $P_{3,(2,1,1,0)}(x) = -\frac{41}{1000}x^8 + \frac{169}{1000}x^6$  dokazuje da je  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

## 4.2 Primer II

U svom radu Ling Zhu: *On Shafer-Fink inequalities* [124] navodi Teoremu 2.

**Teorema 2.**

$$\frac{3x}{2 + \sqrt{1-x^2}} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi x}{2 + \sqrt{1-x^2}}$$

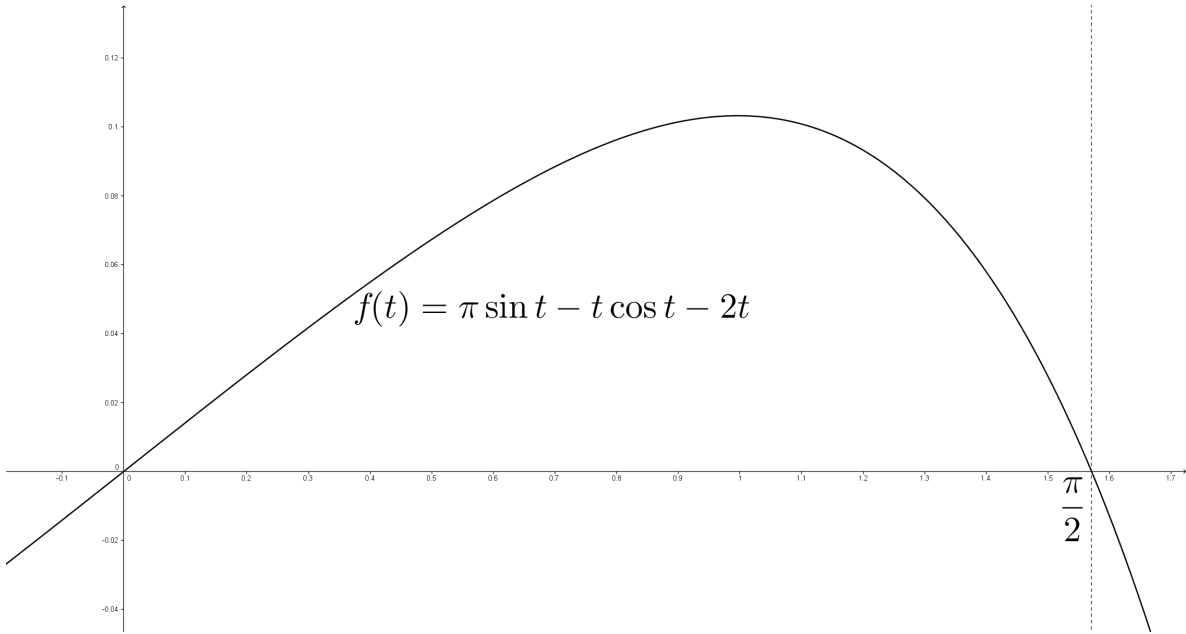
za  $0 < x < 1$

Prvo uvodimo smenu  $x = \sin t, t \in (0, \frac{\pi}{2})$

$$\frac{3 \sin t}{2 + \cos t} \leq t \leq \frac{\pi \sin t}{2 + \cos t}$$

Dokazaćemo desnu stranu nejednakosti

$$D(x) = \frac{\pi \sin t - t(2 + \cos t)}{2 + \cos t} \geq 0$$



Slika 4.3: Grafik funkcije  $f(t) = \pi \sin t - t \cos t - 2t$

Dovoljno je dokazati

$$f(t) = \pi \sin t - t \cos t - 2t \geq 0$$

Pošto je  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , aproksimacije  $f(t)$  ne mogu da ispunjavaju uslov  $P\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$  pa se formira

$$g(t) = f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \pi \cos t - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \sin t - \pi + 2t$$

Koristeći Tejlorove razvoje umesto funkcija  $\sin x$  i  $\cos x$ , dolazi se do

$$P_L(t) = P_{f,k_1,k_2}(x) = \pi T_{4k_1+3}^{t, \sin t}(t) - t T_{4k_2}^{0, \cos t}(t) - 2t$$

$$P_D(t) = P_{g,k_3,k_4}(x) = \pi T_{4k_3+2}^{0, \cos t}(t) - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) T_{4k_4+1}^{t, \sin t}(t) - \pi + 2t$$

Kako bi bili sigurni koje su minimalne vrednosti  $k$  indeksa koji očuvavaju kvalitet aproksimacije, koristi se za to definisani podalgoritam. Pošto algoritam vraća niz  $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (0, 0, 0, 0)$ , može se zaključiti da je svaka pozitivna vrednost  $k$  indeksa odgovarajuća.

Vršimo pretragu vrednosti  $k_1, k_2, k_3, k_4$  takvih da su  $t_l$  i  $t_d$  prve pozitivne nule  $P_L(t)$  i  $P_D(t)$ , i da je  $t_l + t_d \geq \frac{\pi}{2}$ . Takođe pretražujemo za  $P_L(t)$  i  $P_D(t)$  takvih da je prvi nenulti izvod pozitivna vrednosti u  $t = 0$  za obe funkcije.

Tabela 4.3: Pretraga vrednosti za  $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1\}$

Pretraga vrednosti $k_1, k_2, k_3, k_4$				
$k_1, k_2, k_3, k_4$	$P_{f,k_1,k_2}(t)$	Nule od $P_{f,k_1,k_2}(t)$	$P_{f,k_1,k_2}(0.1)$	Zbir prve pozitivnenenule $P_{f,k_1,k_2}(t)$ i $P_{g,k_3,k_4}(t)$
	$P_{g,k_3,k_4}(t)$	Nule od $P_{g,k_3,k_4}(t)$	$P_{g,k_3,k_4}(0.1)$	
0, 0, 0, 0	$-1/6\pi t^3 + (\pi - 3)t$ $(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-0.5200212009, 0, 0.5200212009 0, 0.7519383933	0.0136356666 0.0372124040	1.2719595942
0, 0, 0, 1	$-1/6\pi t^3 + (\pi - 3)t$ $1/120t^6 - 1/240\pi t^5$ $-1/6t^4 + 1/12\pi t^3$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-0.5200212009, 0, 0.5200212009 -4.757581283, 0, 0.9046039668, 4.860200935	0.0136356666 0.0374574142	1.4246251677
0, 0, 1, 0	$-1/6\pi t^3 + (\pi - 3)t$ $-1/720\pi t^6 + 1/24\pi t^4$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-0.5200212009, 0, 0.5200212009 -4.857828137, -2.717556036, 0, 0.9325042648, 1.577464032, 5.065415876	0.0136356666 0.0372254897	1.4525254657
0, 0, 1, 1	$-1/6\pi t^3 + (\pi - 3)t$ $(-1/720\pi + 1/120)t^6 - 1/240\pi t^5$ $+ (1/24\pi - 1/6)t^4 + 1/12\pi t^3$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-0.5200212009, 0, 0.5200212009 -4.340708077, 0, 1.552193373, 2.944705602	0.0136356666 0.0374704999	2.0722145739
0, 1, 0, 0	$-1/24t^5 + (-1/6\pi + 1/2)t^3$ $+ (\pi - 3)t$ $(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-1.257722676, 0, 1.257722676 0, 0.7519383933	0.0141352499 0.0372124040	2.0096610693
0, 1, 0, 1	$-1/24t^5 + (-1/6\pi + 1/2)t^3$ $+ (\pi - 3)t$ $1/120t^6 - 1/240\pi t^5$ $-1/6t^4 + 1/12\pi t^3$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-1.257722676, 0, 1.257722676 -4.757581283, 0, 0.9046039668, 4.860200935	0.0141352499 0.0374574142	2.1623266428
0, 1, 1, 0	$-1/24t^5 + (-1/6\pi + 1/2)t^3$ $+ (\pi - 3)t$ $-1/720\pi t^6 + 1/24\pi t^4$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-1.257722676, 0, 1.257722676 -4.857828137, -2.717556036, 0, 0.9325042648, 1.577464032, 5.065415876	0.0141352499 0.0372254897	2.1902269408
0, 1, 1, 1	$-1/24t^5 + (-1/6\pi + 1/2)t^3$ $+ (\pi - 3)t$ $(-1/720\pi + 1/120)t^6 - 1/240\pi t^5$ $+ (1/24\pi - 1/6)t^4 + 1/12\pi t^3$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-1.257722676, 0, 1.257722676 -4.340708077, 0, 1.552193373, 2.944705602	0.0141352499 0.0374704999	2.809916049
1, 0, 0, 0	$-1/5040\pi t^7 + 1/120\pi t^5$ $-1/6\pi t^3 + (\pi - 3)t$ $(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-0.5235986848, 0, 0.5235986848 0, 0.7519383933	0.0136359283 0.0372124040	1.2755370781
1, 0, 0, 1	$-1/5040\pi t^7 + 1/120\pi t^5$ $-1/6\pi t^3 + (\pi - 3)t$ $1/120t^6 - 1/240\pi t^5$ $-1/6t^4 + 1/12\pi t^3$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-0.5235986848, 0, 0.5235986848 -4.757581283, 0, 0.9046039668, 4.860200935	0.0136359283 0.0374574142	1.4282026516
1, 0, 1, 0	$-1/5040\pi t^7 + 1/120\pi t^5$ $-1/6\pi t^3 + (\pi - 3)t$ $-1/720\pi t^6 + 1/24\pi t^4$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-0.5235986848, 0, 0.5235986848 -4.857828137, -2.717556036, 0, 0.9325042648, 1.577464032, 5.065415876	0.0136359283 0.0372254897	1.4561029496
1, 0, 1, 1	$-1/5040\pi t^7 + 1/120\pi t^5$ $-1/6\pi t^3 + (\pi - 3)t$ $(-1/720\pi + 1/120)t^6 - 1/240\pi t^5$ $+ (1/24\pi - 1/6)t^4 + 1/12\pi t^3$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-0.5235986848, 0, 0.5235986848 -4.340708077, 0, 1.552193373, 2.944705602	0.0136359283 0.0374704999	2.0757920578
1, 1, 0, 0	$-1/5040\pi t^7 + (1/120\pi - 1/24)t^5$ $+(-1/6\pi + 1/2)t^3 + (\pi - 3)t$ $(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-1.509626822, 0, 1.509626822 0, 0.7519383933	0.0141355116 0.0372124040	2.2615652153
1, 1, 0, 1	$-1/5040\pi t^7 + (1/120\pi - 1/24)t^5$ $+(-1/6\pi + 1/2)t^3 + (\pi - 3)t$ $1/120t^6 - 1/240\pi t^5$ $-1/6t^4 + 1/12\pi t^3$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-1.509626822, 0, 1.509626822 -4.757581283, 0, 0.9046039668, 4.860200935	0.0141355116 0.0374574142	2.4142307888
1, 1, 1, 0	$-1/5040\pi t^7 + (1/120\pi - 1/24)t^5$ $+(-1/6\pi + 1/2)t^3 + (\pi - 3)t$ $-1/720\pi t^6 + 1/24\pi t^4$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-1.509626822, 0, 1.509626822 -4.857828137, -2.717556036, 0, 0.9325042648, 1.577464032, 5.065415876	0.0141355116 0.03722548970	2.4421310868
1, 1, 1, 1	$-1/5040\pi t^7 + (1/120\pi - 1/24)t^5$ $+(-1/6\pi + 1/2)t^3 + (\pi - 3)t$ $(-1/720\pi + 1/120)t^6 - 1/240\pi t^5$ $+ (1/24\pi - 1/6)t^4 + 1/12\pi t^3$ $+(-1/2\pi + 1)t^2 + (2 - 1/2\pi)t$	-1.509626822, 0, 1.509626822 -4.340708077, 0, 1.552193373, 2.944705602	0.0141355116 0.0374704999	3.061820195

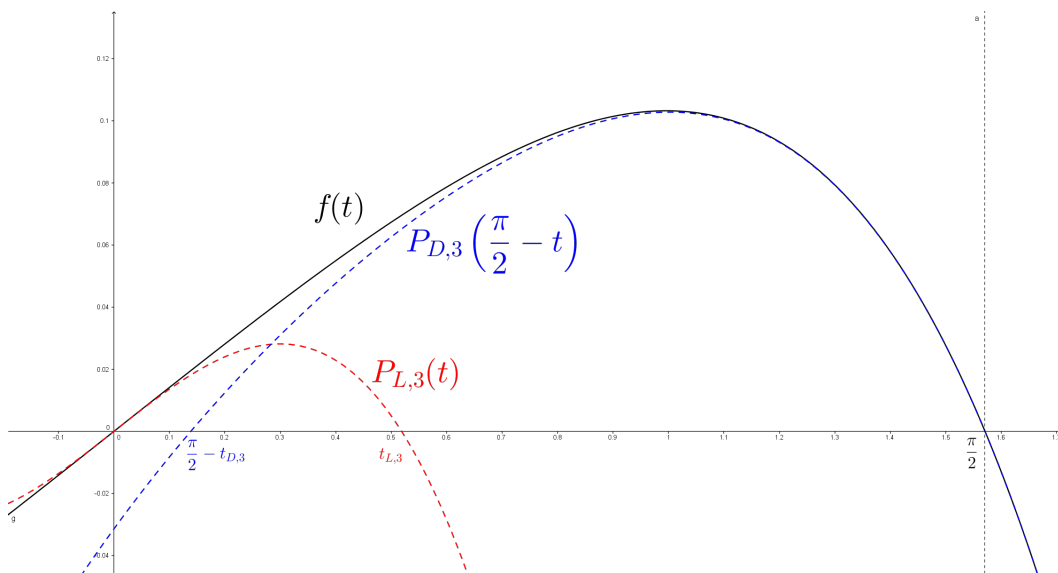
Možemo primetiti da se za  $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (0, 0, 1, 1)$  javljaju prvi  $P_L(t) = -\frac{\pi t^3}{6} + (\pi - 3)t$  i  $P_D(t) = \left(-\frac{\pi}{720} + \frac{1}{120}\right)t^6 - \frac{\pi t^5}{240} + \left(\frac{\pi}{24} - \frac{1}{6}\right)t^4 + \frac{\pi t^3}{12} + \left(-\frac{\pi}{2} + 1\right)t^2 + \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)t$  koji ispunjavaju pomenute uslove. Provera je izvršena tako što su generisani polinomi skraćenih koeficijenata za obe polinomske aproksimacije. Već kod aproksimacija sa koeficijentima skraćenim na 3 decimale ( $P_{L,3} = -\frac{131}{250}t^3 + \frac{141}{1000}t$  i  $P_{D,3} = \frac{3}{1000}t^6 - \frac{7}{500}t^5 - \frac{9}{250}t^4 + \frac{261}{1000}t^3 - \frac{571}{1000}t^2 + \frac{429}{1000}t$ ) možemo primetiti da je zbir vrednosti prve dve nule  $t_{L,3} \approx 0.5187\dots$  i  $t_{D,3} \approx 1.4321\dots$ , koje su dobijene prethodno opisanim algoritmom, daleko prevažišao neophodnu vrednost  $t_{L,3} + t_{D,3} = 0.5187\dots + 1.4321\dots = 1.950\dots > \frac{\pi}{2}$ . Kako važi da

$$f(t) > P_L(t) > P_{L,3}(t), t \in (0, t_{L,3})$$

i

$$f(t) > P_D\left(\frac{\pi}{2} - t\right) > P_{D,3}\left(\frac{\pi}{2} - t\right), t \in \left(\frac{\pi}{2} - t_{D,3}, \frac{\pi}{2}\right)$$

pri čemu  $t_{L,3} > \frac{\pi}{2} - t_{D,3}$  može se smatrati da su  $P_{L,3}(t) = -\frac{131}{250}t^3 + \frac{141}{1000}t$  i  $P_{D,3}(t) = \frac{3}{1000}t^6 - \frac{7}{500}t^5 - \frac{9}{250}t^4 + \frac{261}{1000}t^3 - \frac{571}{1000}t^2 + \frac{429}{1000}t$  dokazuju početnu hipotezu da je  $f(t) > 0$  za  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  i samim tim  $\frac{\pi x}{2 + \sqrt{1-x^2}} - \arcsin x \geq 0$  za  $x \in (0, 1)$ .



Slika 4.4: Grafik funkcije  $f(t)$  i aproksimacija  $P_L(t)$  i  $P_D(\frac{\pi}{2} - t)$

## 4.3 Rešenja nekih otvorenih problema primenom sistema SimTheP

U okviru ovog poglavlja biće prikazani neki radovi u kojima je upotrebljen prikazani sistem *SimTheP*. Radovi [125] - [133] upotrebljavaju prikazane algoritme, ali će pažnja biti posvećena radovima gde je autor ovog doktorata jedan od koautora, poput radova [5], [1] - [4].

### 4.3.1 Neke napomene u vezi sa metodom dokazivanja nejednakosti računalom [1]

U okviru rada [1] su prikazane neke osnovne ideje dokazivanja nejednakosti sa elementima klase MTP funkcija upotrebom Tejlorovih razvoja. Jedna od teorema prikazanih u ovom radu je i teorema 2.7 koja je navedena na sledeći način

**Teorema 2.7** Za  $0 < x < \pi/2$  važe sledeće nejednakosti:

$$\left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4x^2}\right)^\alpha < \frac{\left(\frac{\pi^2}{18} - \frac{2}{3}\right)x^4 + \left(\frac{\pi^2}{3} - 4\right)x^2 + \pi^2}{\pi^2 - 4x^2} < \frac{\tan x}{x}$$

i

$$\frac{\tan x}{x} < \frac{-\frac{1}{\pi^2}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{\pi^2}{16}x^2 + \pi^2}{\pi^2 - 4x^2} < \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 - 4x^2}\right)^\beta$$

sa konstantama  $\alpha = \frac{\pi^2}{12} = 0.822467 \dots$  i  $\beta = 1$ .

Ne zalazeći u detalje dokaza, koji su prikazani u ovom radu, tvrđenje je dokazano na osnovu sledećih stavova.



Uvedimo sledeće oznake

$$f_1(x) = \left( \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4x^2} \right)^{\frac{\pi^2}{12}}$$

$$f_2(x) = \frac{\left( \frac{\pi^2}{18} - \frac{2}{3} \right) x^4 + \left( \frac{\pi^2}{3} - 4 \right) x^2 + \pi^2}{\pi^2 - 4x^2}$$

$$f_3(x) = \frac{\tan x}{x}$$

$$f_4(x) = \frac{-\frac{1}{\pi^2} x^6 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{\pi^2}{16} x^2 + \pi^2}{\pi^2 - 4x^2}$$

$$f_5(x) = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4x^2}$$

1. Nejednakost  $f_2(x) > f_1(x)$  ekvivalentna sa  $\ln f_2(x) > \ln f_1(x)$  (pošto za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  važi  $f_2(x), f_1(x) > 0$ ). Dalje se dokazivanje da je  $\ln f_2(x) > \ln f_1(x)$  svodi na dokaz da je ispunjeno

$$\begin{aligned} & (\ln f_2(x) - \ln f_1(x))' \\ &= \frac{2(\pi^4 - 144)x^5}{3((\pi^2 - 12)x^4 + (6\pi^2 - 72)x^2 + 18\pi^2)(\pi^2 - 4x^2)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , što se lako proverava na nivou polinomskih nejednakosti.

2. Nejednakost  $f_3(x) > f_2(x)$  je tačna na osnovu algoritma prikazanog u okviru ovog doktorata.
3. Nejednakost  $f_4(x) > f_3(x)$  je tačna na osnovu algoritma prikazanog u okviru ovog doktorata.
4. Nejednakost  $f_5(x) > f_4(x)$  predstavlja proveru znaka polinomske funkcije.  $\square$

### 4.3.2 Rešenje dva otvorena problema Čao-Ping Čena za inverzno trigonometrijske funkcije [2]

U radu [2] su razmatrana dva otvorena problema koje je prethodno definisao Čao-Ping Čen (Chao-Ping Chen) u svom radu.

## Otvoreni problem 1

Ako je  $0 < x < 1$ , onda

$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 + \frac{\arctan x}{x} < 2 + \frac{\pi^2 + \pi - 8}{\pi} x^3 \arctan x$$

gde je konstanta  $\frac{\pi^2 + \pi - 8}{\pi}$  najbolja moguća za klasu

$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 + \frac{\arctan x}{x} < 2 + c x^3 \arctan x$$

## Dokaz Otvorenog problema 1

Prvi korak u dokazu Otvorenog problema 1 je transformacija nejednakosti u oblik

$$f(x) = 2 + \frac{\pi^2 + \pi - 8}{\pi} x^3 \arctan x - \frac{\arctan x}{x} - \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 > 0$$

za  $x \in (0, 1)$ . Potom sledi uvođenje smene  $x = \sin t$  za  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

$$2 + \frac{(\pi^2 + \pi - 8) \sin^4 t - \pi}{\pi \sin t} \arctan(\sin t) - \frac{t^2}{\sin^2 t} > 0.$$

Na osnovu ovoga je dovoljno dokazati nejednakost

$$\begin{aligned} g(t) &= 2\pi \sin^2 t + (\pi^2 + \pi - 8) \sin^5 t \arctan(\sin t) \\ &\quad - \pi \sin t \arctan(\sin t) - \pi t^2 > 0 \end{aligned}$$

Kako je  $g(0) = 0$  i  $g(\frac{\pi}{2}) = 0$  potrebno je dvostrano dokazivanje nejednakosti, pa se dalje dokazivanje deli na dokaz da je  $g(t) > 0$  za  $t \in (0, 1.1]$  i  $t \in [1.1, \frac{\pi}{2})$

**I**  $t \in (0, 1.1]$

Dokaz za  $t \in (0, 1.1]$  počinje definisanjem Tejlorovih razvoja za arkus tangensnu funkciju.

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Smenom  $x = \sin t$  i uvođenjem razvoja za arkus tangensnu funkciju u izraz se definiše nanižna aproksimacija funkcije  $g(x) > h(x)$  kao

$$\begin{aligned} h(x) &= 2\pi \sin^2 t + (\pi^2 + \pi - 8) \sin^5 t \underline{T}_3^{\arctan, 0}(\sin t) \\ &\quad - \pi \sin t \overline{T}_5^{\arctan, 0}(\sin t) - \pi t^2, \\ &= 2\pi \sin^2 t + (\pi^2 + \pi - 8) \sin^5 t \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t\right) \\ &\quad - \pi \sin t \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + \frac{1}{5} \sin^5 t\right) - \pi t^2 \end{aligned}$$

U daljem delu dokaza se koristeći algoritme opisane u poglavlju 3 dokazuje MTP nejednakost  $h(x) > 0$  za  $x \in (0, 1.1]$ . Dolazi se do polinomske funkcije

$$P_{16}(t) = \frac{t^6}{30648618000} P_{10}(t)$$

gde je

$$\begin{aligned} P_{10}(t) = & (-1073741824 \pi^2 - 1073741824 \pi + 8589934592) t^{10} \\ & + (4026531840 \pi^2 + 4026531840 \pi - 32212254720) t^8 \\ & + (-12901283850 \pi^2 - 12030783492 \pi + 103210270800) t^6 \\ & + (27921503610 \pi^2 + 24692768100 \pi - 223372028880) t^4 \\ & + (-40801986225 \pi^2 - 32614832250 \pi + 326415889800) t^2 \\ & + (29768889150 \pi^2 + 16629713100 \pi - 238151113200). \end{aligned}$$

Kako je

$$g(t) > h(t) > P_{16}(t) > 0$$

za  $t \in (0, 1.1]$  polinomska funkcija  $P_{16}(t)$  dokazuje originalnu nejednakost za  $x \in (0, 0.832 \dots]$ .

**II**  $t \in [1.1, \frac{\pi}{2}]$  U dokazu za  $t \in [1.1, \frac{\pi}{2}]$  prvi korak je definisanje funkcije

$$\begin{aligned} g_2(t) = g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = & \left( (\pi^2 + \pi - 8) \cos^4 t - \pi \right) \cos t \arctan(\cos t) \\ & - \pi \left( \frac{\pi}{2} - t \right)^2 + 2 \pi \cos^2 t > 0 \end{aligned}$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2} - 1.1] = (0, 0.470 \dots]$ . Dodatno se uvodi nanižna aproksimacija funkcije  $\arctan(\cos t)$  kao sledeće

$$\arctan(\cos t) \geq \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \tag{4.1}$$

za  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Na osnovu prethodnog se formira nanižna aproksimacija

$$\begin{aligned} g_2(t) > h_2(t) = & \left( (\pi^2 + \pi - 8) \cos^4 t - \pi \right) \cos t \left( \frac{\pi}{4} - \frac{t}{2} \right) \\ & - \pi \left( \frac{\pi}{2} - t \right)^2 + 2 \pi \cos^2 t, \end{aligned}$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2} - 1.1]$ . Koristeći transformacije višestrukih uglova se dobija novi oblik

funkcije

$$\begin{aligned}
h_2(t) = & \left( \left( -\frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{32} + \frac{1}{4} \right) t + \frac{\pi^3}{64} + \frac{\pi^2}{64} - \frac{\pi}{8} \right) \cos 5t \\
& + \left( \left( -\frac{5\pi^2}{32} - \frac{5\pi}{32} + \frac{5}{4} \right) t + \frac{5\pi^3}{64} + \frac{5\pi^2}{64} - \frac{5\pi}{8} \right) \cos 3t \\
& + \pi \cos 2t + \left( \left( -\frac{5\pi^2}{16} + \frac{3\pi}{16} + \frac{5}{2} \right) t + \frac{5\pi^3}{32} - \frac{3\pi^2}{32} - \frac{5\pi}{4} \right) \cos t \\
& - \pi t^2 + \pi^2 t - \frac{\pi^3}{4}.
\end{aligned}$$

nad kojim možemo primeniti algoritme prikazane u ovom doktoratu. Kao rezultat rada se dobija

$$P_3(t) = \left( \frac{35\pi^2}{32} + \frac{35\pi}{32} - \frac{35}{4} \right) t^3 + \left( -\frac{35\pi^3}{64} - \frac{35\pi^2}{64} + \frac{11\pi}{8} \right) t^2 + \left( \frac{\pi^2}{2} + 4 \right) t$$

takvo da važi

$$g_2(t) > h_2(x) > P_3(t) > 0$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2} - 1.1]$ . Polinomske funkcije  $P_{16}(x)$  i  $P_3(x)$  zajedno dokazuju da  $g(t) > 0$  za  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Ovime je dokazano i da je  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, 1)$ .  $\square$

## Otvoreni problem 2

Ako je  $0 < x < 1$ , onda

$$2 \left( \frac{\arcsin x}{x} \right) + \frac{\arctan x}{x} < 3 + \frac{5\pi - 12}{\pi} x^3 \arctan x,$$

gde je konstanta  $\frac{5\pi - 12}{\pi}$  najbolja moguća za klasu

$$2 \left( \frac{\arcsin x}{x} \right) + \frac{\arctan x}{x} < 3 + c x^3 \arctan x,$$

## Dokaz Otvorenog problema 2

Prvi korak u dokazu Otvorenog problema 2 je transformacija nejednakosti u oblik

$$f(x) = 3 + \frac{(5\pi - 12)x^3 \arctan x}{\pi} - \frac{\arctan x}{x} - 2 \left( \frac{\arcsin x}{x} \right) > 0$$

Uvodeći smenu  $x = \sin t$  za  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$  se dobija oblik

$$f(x) = 3 + \frac{((5\pi - 12)\sin^4 t - \pi) \arctan(\sin t)}{\pi \sin t} - \frac{2t}{\sin t}$$

Na osnovu prethodnog je dovoljno dokazati da

$$g(t) = 3\pi \sin t + ((5\pi - 12) \sin^4 t - \pi) \arctan(\sin t) - 2\pi t > 0$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Kako je  $g(0) = 0$  i  $g(\frac{\pi}{2}) = 0$  neophodno je dvostrano dokazivanje. U ovom slučaju će se vršiti dokazivanje za  $t \in (0, 1.3]$  i  $t \in [1.3, \frac{\pi}{2})$ .

I  $t \in (0, 1.3]$

Kao i u slučaju Otvorenog problema 1 prvi korak je uvođenje Tejlorovih razvoja za arkus tangensnu funkciju, i time generisanje nanižne aproksimacije funkcije  $g(x)$ .

$$g(t) > h(t) = 3\pi \sin t + (5\pi - 12) \sin^4 t \underline{T}_3^{\arctan, 0}(\sin t) - \pi \overline{T}_5^{\arctan, 0}(\sin t) - 2\pi t,$$

za  $t \in (0, 1.3]$ . Od ove tačke se vrši dokazivanje MTP nejednakosti  $h(x) > 0$  gde je

$$h(t) = 3\pi \sin t + (5\pi - 12) \sin^4 t \left( \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) - \pi \left( \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + \frac{1}{5} \sin^5 t \right) - 2\pi t > 0,$$

za  $t \in (0, 1.3]$ . Koristeći metode prikazane u ovom doktoratu se dolazi do polinomske funkcije

$$P_{19}(t) = \frac{t^5}{23355859278495744000} P_{14}(t)$$

gde je

$$\begin{aligned} P_{14}(t) = & (-56994475926865715\pi + 136786742224477716)t^{14} \\ & + (397798178918123970\pi - 954715629403497528)t^{12} \\ & + (-2272344207942188160\pi + 5469977974061251584)t^{10} \\ & + (10002584016180806400\pi - 24143557388833935360)t^8 \\ & + (-33492109086208281600\pi + 81238161686899875840)t^6 \\ & + (81120783386638195200\pi - 198524461941501696000)t^4 \\ & + (-131515731413434368000\pi + 326982029898940416000)t^2 \\ & + 108604745645005209600\pi - 280270311341948928000. \end{aligned}$$

Pošto važi

$$g(x) > h(x) > P_{19}(x) > 0,$$

za  $t \in (0, 1.3]$ , polinomska funkcija  $P_{19}(t)$  dokazuje da  $g(t) > 0$  za  $t \in (0, 1.3]$ , odnosno  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, 0.9151\dots)$ .

**II**  $t \in [1.3, \frac{\pi}{2})$  Prvi korak dokaza je transformacija

$$g_2(t) = g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = ((5\pi - 12)\cos^4 t - \pi)\arctan(\cos t) + 3\pi\cos t - 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - t\right) > 0.$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2} - 1.3]$ . Uvodeći nanižnu aproksimaciju 4.1 dobija se

$$g_2(t) > h_2(t) = ((5\pi - 12)\cos^4 t - \pi)\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) + 3\pi\cos t - 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - t\right),$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2} - 1.3]$ . Ostatak dokaza se svodi na primenu prethodno opisanih algoritama na MTP nejednakost  $g_2(x) > 0$  za  $t \in (0, \frac{\pi}{2} - 1.3]$ . Ovim putem se dobija polinomska funkcija

$$P_3(t) = (5\pi - 12)t^3 + \left(-\frac{5\pi^2}{2} + \frac{9\pi}{2}\right)t^2 + 6t > 0$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2} - 1.3]$ . Kako važi

$$g_2(t) > h_2(t) > P_3(t) > 0$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2} - 1.3]$ , polinomska funkcija  $P_3(t)$  zajedno sa  $P_{19}(t)$  dokazuje da  $g(t) > 0$  za  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ , odnosno  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, 1)$ .

### 4.3.3 Rešenje otvorenog problema Jusuke Nišizave za stepene funkcije [5]

U radu [5] se razmatra sledeći otvoreni problem koji je definisao Jusuke Nišizava (Yusuke Nishizawa) u radu [134]:

Za  $0 < x < \pi/2$  važi

$$\frac{\sin x}{x} > \left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2)\right)^{\theta(x)}$$

gde je  $\theta(x)$  funkcija po  $x$  i  $\theta(x) = -\frac{(\pi^3 - 24\pi + 48)x^3}{3(\pi - 2)\pi^3} + \frac{\pi^3}{24(\pi - 2)}$ .

## Dokaz otvorenog problema Jusuke Nišizave

Dokaz prikazan u ovom radu se oslanja na metod dokazivanja LogMTP nejednakosti koji je prikazan u glavi Algoritmi. Osnova jedednakost

$$\frac{\sin x}{x} > \left( \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) \right)^{\theta(x)}$$

za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  i  $\theta(x) = -\frac{(\pi^3 - 24\pi + 48)x^3}{3(\pi - 2)\pi^3} + \frac{\pi^3}{24(\pi - 2)}$  je ekvivalentna nejednakosti

$$\ln \frac{\sin x}{x} - \theta(x) \ln \left( \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) \right) > 0,$$

Uzmimo da je

$$F(x) = \ln \sin x - \ln x - \theta(x) \ln \left( \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) \right) > 0$$

za  $x \in (0, \pi/2)$  i  $\theta(x) = -\frac{(\pi^3 - 24\pi + 48)x^3}{3(\pi - 2)\pi^3} + \frac{\pi^3}{24(\pi - 2)}$ . Uzmimo takođe nejednakost

$$F_1(x) = \ln \sin x - \ln x - \theta_1(x) \ln \left( \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) \right)$$

gde je  $\theta_1(x) = \frac{(\pi^3 - 60\pi + 120)}{720(\pi - 2)}x^2 + \frac{\pi^3}{24(\pi - 2)}$ .

Jasno je da

$$F(x) - F_1(x) \geq 0$$

$$\iff \theta(x) - \theta_1(x) \geq 0$$

$$\iff -\frac{1}{3(\pi - 2)} \left( \frac{\pi^3 - 60\pi + 120}{240} + \frac{\pi^3 - 24\pi + 48}{\pi^3} x \right) x^2 \geq 0.$$

Poslednja nejednakost važi za  $x \in (0, c]$ , gde je  $c = -\frac{(\pi^3 - 60(\pi - 2))\pi^3}{240(\pi^3 - 24(\pi - 2))} = 1.34237\dots$ , pa se dokaz deli na slučajeve  $x \in (0, c]$  i  $x \in (c, \pi/2)$ , dokazivanje da je  $F_1(x) > 0$ .

**I**  $x \in (0, c)$  Na osnovu opisanog metoda za dokazivanje LogMTP nejednakosti dovoljno je dokazati nejednakost

$$F_1'''(x) = \frac{2A(x)\sin^3 x + B(x)\cos x}{45x^3 C(x)\sin^3 x}$$

za  $x \in (0, c)$  gde su

$$\begin{aligned} C(x) &= -64(\pi - 2)^3 x^6 + 48\pi^3(\pi - 2)^2 x^4 - 12\pi^6(\pi - 2)x^2 + \pi^9 \\ &= (\pi^3 - 4(\pi - 2)x^2)^3, \end{aligned}$$

$$B(x) = 90x^3 (\pi^3 - 4(\pi - 2)x^2)^3 = 90x^3 C(x)$$

i

$$\begin{aligned} A(x) &= 8(\pi - 2)^2(\pi^3 - 60\pi + 120)x^8 \\ &\quad - 6(\pi - 2)(\pi^6 - 100\pi^4 + 200\pi^3 - 480(\pi - 2)^2)x^6 \\ &\quad + 3\pi^3(\pi^6 - 720(\pi - 2)^2)x^4 \\ &\quad + 540\pi^6(\pi - 2)x^2 \\ &\quad - 45\pi^9. \end{aligned}$$

Dalje se korišćenjem opisanog metoda za dokazivanje MTP funkcija dobija polinomska funkcija

$$\begin{aligned} P_{14}(x) &= \sum_{i=0}^{14} a_i x^i \\ &= 8(\pi^3 - 60\pi + 120)(\pi - 2)^2 x^{14} \\ &\quad - 6(\pi - 2)(\pi^6 - 20\pi^4 + 40\pi^3 - 5280\pi^2 + 21120\pi - 21120) x^{12} \\ &\quad + 3(\pi^9 + 40(\pi - 2)(3\pi^6 - 214\pi^4 + 428\pi^3 - 7680\pi^2 + 30720\pi - 30720)) x^{10} \\ &\quad - 20(9\pi^9 + (\pi - 2)(441\pi^6 - 44320\pi^4 + 88640\pi^3 - 762240\pi^2 + 3048960\pi - 3048960)) x^8 \\ &\quad + 15(309\pi^9 + 400(\pi - 2)(17\pi^6 - 2552\pi^4 + 5104\pi^3 - 24576\pi^2 + 98304\pi - 98304)) x^6 \\ &\quad - 300(215\pi^9 + 72(\pi - 2)(13\pi^6 - 6880\pi^4 + 13760\pi^3 - 34560\pi^2 + 138240\pi - 138240)) x^4 \\ &\quad + 5400(91\pi^9 - 80(\pi - 2)(13\pi^6 + 1744\pi^4 - 3488\pi^3 + 1920\pi^2 - 7680\pi + 7680)) x^2 \\ &\quad - 36000\pi^3(47\pi^6 - 1440(\pi - 2)(\pi^3 + 20\pi - 40)). \end{aligned}$$

Kako je  $P_{14}(x) > 0$  za  $x \in (0, c)$ , polinomska funkcija  $P_{14}(x)$  dokazuje da je  $F_1'''(x) > 0$  za  $x \in (0, c)$ . Kako je  $F_1'''(x) > 0$  i  $\lim_{x \rightarrow +0} F_1''(x) = \lim_{x \rightarrow +0} F_1'(x) = \lim_{x \rightarrow +0} F_1(x) = 0$  na osnovu prikazanog za dokazivanje LogMTP funkcije znamo da  $F_1(x) > 0$  za  $x \in (0, c)$



**II**  $x \in (c, \frac{\pi}{2})$

Prvi korak je formiranje funkcije

$$G(x) = F\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \ln \cos x - \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \omega(x) \ln\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi-2}{\pi^3} \left(\pi^2 - 4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2\right)\right),$$

gde je  $\omega(x) = \theta\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{(\pi^3 - 24\pi + 48)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3}{3(\pi - 2)\pi^3} + \frac{\pi^3}{24\pi - 48}$  i  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Dokazuje se nejednakost

$$G(x) > 0$$

za  $x \in (0, c_1)$  gde je  $c_1 = \frac{\pi}{2} - c = 0.22842\dots$ . Kao nanižna aproksimacija  $G(x)$  se formira

$$G_1(x) = \ln \cos x - \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \omega_1(x) \ln\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi-2}{\pi^3} \left(\pi^2 - 4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2\right)\right),$$

gde je  $\omega_1(x) = \frac{x}{5} + 1$  i  $x \in (0, c_1)$ .

Slično prethodnom dokazu poznato je da

$$\begin{aligned} G(x) &> G_1(x) \\ \iff \omega(x) &> \omega_1(x) \\ \iff \frac{x}{(\pi - 2)\pi^3} &\left( (20\pi^3 - 480\pi + 960)x^2 \right. \\ &+ (-30\pi^4 + 720\pi^2 - 1440\pi)x \\ &\left. + 15\pi^5 - 12\pi^4 - 336\pi^3 + 720\pi^2 \right) > 0. \end{aligned}$$

Potrebno je dokazati da

$$G_1(x) > 0$$

za  $x \in (0, c_1)$ .

Krenimo od

$$G_1''(x) = \frac{P(x) \cos^2 x - \sin^2 x Q(x)}{Q(x) \cos^2 x}$$

gde je

$$\begin{aligned}
P(x) &= (-80\pi^2 + 320\pi - 320)x^6 \\
&+ (240\pi^3 - 992\pi^2 + 1088\pi - 128)x^5 \\
&+ (-260\pi^4 + 1216\pi^3 - 1344\pi^2 - 576\pi + 960)x^4 \\
&+ (120\pi^5 - 728\pi^4 + 720\pi^3 + 1472\pi^2 - 1920\pi)x^3 \\
&+ (-20\pi^6 + 212\pi^5 - 132\pi^4 - 1184\pi^3 + 1440\pi^2)x^2 \\
&+ (-24\pi^6 - 16\pi^5 + 408\pi^4 - 480\pi^3)x \\
&+ 11\pi^6 - 52\pi^5 + 60\pi^4
\end{aligned}$$

i

$$Q(x) = 5(\pi - 2x)^2((-2\pi + 4)x^2 + (2\pi^2 - 4\pi)x + \pi^2).$$

Koristeći metode za dokazivanje MTP nejednakosti dobija se polinom

$$\begin{aligned}
T_{10}(x) &= (-20\pi^2 + 80\pi - 80)x^{10} \\
&+ (60\pi^3 - 248\pi^2 + 272\pi - 32)x^9 \\
&+ (-65\pi^4 + 304\pi^3 - 336\pi^2 - 144\pi + 240)x^8 \\
&+ (30\pi^5 - 182\pi^4 + 180\pi^3 + 400\pi^2 - 608\pi + 128)x^7 \\
&+ (-5\pi^6 + 53\pi^5 - 33\pi^4 - 392\pi^3 + 424\pi^2 + 896\pi - 1280)x^6 \\
&+ (-6\pi^6 - 4\pi^5 + 190\pi^4 + 200\pi^3 - 2464\pi^2 + 3008\pi - 128)x^5 \\
&+ (960 + 2400\pi^3 - 2784\pi^2 - 576\pi - 413\pi^4 + 11/4\pi^6 - 45\pi^5)x^4 \\
&+ (4\pi^6 + 196\pi^5 - 1136\pi^4 + 1200\pi^3 + 1472\pi^2 - 1920\pi)x^3 \\
&+ (-36\pi^6 + 264\pi^5 - 192\pi^4 - 1184\pi^3 + 1440\pi^2)x^2 \\
&+ (-24\pi^6 - 16\pi^5 + 408\pi^4 - 480\pi^3)x \\
&+ 11\pi^6 - 52\pi^5 + 60\pi^4.
\end{aligned}$$

Kako je  $T_{10}(x) > 0$  za  $x \in (0, c_1)$ , polinomska funkcija  $T_{10}(x)$  dokazuje da je  $G_1''(x) > 0$  za  $x \in (0, c_1)$ . Kako je

$$\begin{aligned}
G_1'(0) &= \frac{1}{5} \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2\pi-6}{\pi} = \frac{1}{5} \ln\left(1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) - \frac{2\pi-6}{\pi} \\
&> \frac{1}{5} \sum_{k=1}^4 \left( \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^{2k-1}}{2k-1} - \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^{2k}}{2k} \right) - \frac{2\pi-6}{\pi} \\
&= -\frac{\pi^8}{10240} + \frac{\pi^7}{560} - \frac{7\pi^6}{480} + \frac{7\pi^5}{100} - \frac{7\pi^4}{32} + \frac{7\pi^3}{15} - \frac{7\pi^2}{10} + \frac{4\pi}{5} - \frac{3561}{1400} + \frac{6}{\pi} > 0
\end{aligned}$$

i

$$G_1(0) = 0.$$

Slično prethodnom dokazu na osnovu ovoga znamo da je  $G_1(x) > 0$  za  $x \in (0, c_1)$ . Iz ovoga i prethodnog dela dokaza se zaključuje da je  $F(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

#### **4.3.4 Neke primene $\lambda$ -metoda na pribavljanje aproksimacija u dizajnu filtera [4]**

U okviru rada [4] je prikazan  $\lambda$  metod Mitrinović-Vasića. Uzmimo realnu analitičku funkciju  $f(x)$   $k$  puta diferencijabilnu u tački  $x = a$  i  $l$  puta diferencijabilnu u tački  $x = b$ . Primenom  $\lambda$  metoda je moguće generisati racionalnu polinomsku aproksimaciju funkcije  $f(x)$  koja će do  $f^{(k)}(x)$  biti jednaka  $f(x)$  za  $x = a$  i do  $f^{(l)}(x)$  biti jednaka  $f(x)$  za  $x = b$ . Primenom ovog metoda su dobijene aproksimacije u tabeli 4.4 nekih funkcija vezanih za kardinalni sinus  $sinc(x)$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Kardinalni sinus i funkcije vezane za njega imaju veliku primenu u telekomunikaciji i od značaja je znati da li je aproksimacija navišna ili nanižna. Nakon definisanja aproksimacija dokazi da je aproksimacija navišna ili nanižna su dobijeni korišćenjem metoda koji je prikazan u okviru ovog doktorata dokazujući za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  nejednakosti  $f(x) - \psi(x) > 0$  u slučaju nanižne aproksimacije ili  $\psi(x) - f(x) > 0$  za navišne aproksimacije.

Tabela 4.4: Neke aproksimacije vezane za funkciju  $\text{sinc}(x)$

Funkcija	Tip	Klasa	Aproksimacija $\psi(x)$
$\text{sinc}(x)$	Navišna	$\alpha_1 x^{10} + \alpha_2 x^8 + \alpha_3 x^6 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^2 + \alpha_6$	$\psi(x) = -\frac{\pi^4 - 60\pi^2 + 495}{120\pi^{10}} x^{10} + \frac{3\pi^4 - 160\pi^2 + 1290}{120\pi^8} x^8 - \frac{\pi^4 - 40\pi^2 + 305}{40\pi^6} x^6 + \frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$
$\text{sinc}(x)$	Navišna	$\frac{\alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3}{\beta_1 x^4 + \beta_2 x^2 + \beta_3}$	$a(x) = (-7\pi^4 + 720)x^4 + (3\pi^6 - 180\pi^4 + 1440\pi^2)x^2 - 60\pi^6 + 720\pi^4$ $b(x) = (-17\pi^4 + 240\pi^2 - 720)x^4 + (3\pi^6 - 180\pi^4 + 1440\pi^2)x^2 + 60\pi^6 - 720\pi^4$ $\psi(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$
$\text{cosc}(x)$	Nanižna	$\alpha_1 x^{11} + \alpha_2 x^9 + \alpha_3 x^7 + \alpha_4 x^5 + \alpha_5 x^3 + \alpha_6 x$	$\psi(x) = \frac{x}{840\pi^{12}} ((-6\pi^6 + 84\pi^4 - 1785\pi^2 + 10395)x^{10} + (3\pi^8 - 224\pi^6 + 4410\pi^4 - 24570\pi^2)x^8 + (3\pi^{10} + 168\pi^8 - 2905\pi^6 + 15015\pi^4)x^6 + \pi^{12}x^4 - 28\pi^{12}x^2 + 280\pi^{12})$
$\text{cosc}(x)$	Nanižna	$\frac{\alpha_1 x^5 + \alpha_2 x^3 + \alpha_3 x}{\beta_1 x^5 + \beta_2 x^3 + \beta_3 x}$	$a(x) = (-27\pi^6 + 1210\pi^4 - 11760\pi^2 + 25200)x^5 + (81\pi^8 - 3500\pi^6 + 31080\pi^4 - 50400\pi^2)x^3 + 1540\pi^8 - 16800\pi^6 + 25200\pi^4$ $b(x) = 3((-18\pi^8 - 485\pi^6 + 4480\pi^4 - 16800\pi^2 + 25200)x^4 + (235\pi^8 - 5180\pi^6 + 33600\pi^4 - 5040\pi^2)x^2 + 1540\pi^8 - 16800\pi^6 + 25200\pi^4)$ $\psi(x) = -\frac{a(x)}{b(x)}$
$\text{sinc}(x)\text{sinc}\left(\frac{x}{\pi}\right)$	Nanižna	$\alpha_1 x^{10} + \alpha_2 x^8 + \alpha_3 x^6 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^2 + \alpha_6$	$\psi(x) = -6.428 \dots 10^{-8} x^{10} + 6.550 \dots 10^{-6} x^8 - 3.523 \dots 10^{-4} x^6 + 1.123 \dots 10^{-2} x^4 - 0.183 \dots x^2 + 0.999 \dots$
$\text{sinc}(x)\text{sinc}\left(\frac{x}{\pi}\right)$	Navišna	$\frac{\alpha_1 x^4 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3}{\beta_1 x^4 + \beta_2 x^2 + \beta_3}$	$a(x) = 3.435 \dots 10^{-3} x^4 - 1.352 \dots x^2 + 1$ $b(x) = 1.072 \dots 10^{-3} x^4 + 4.832 \dots 10^{-2} x^2 + 1$ $\psi(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$

## 4.4 Nejednakosti u radovima autora Linga Zhua

Ling Zhu : *A new simple proof of Wilkerson's inequality* [123]

**Teorema 1.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} > 2$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$f(x) = \sin^2 x \cos x + x \sin x - 2x^2 \cos x > 0 \quad (4.2)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ling Zhu: *On Shafer-Fink inequalities* [124]

**Teorema 2.** Za  $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{3x}{2 + \sqrt{1-x^2}} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi x}{2 + \sqrt{1-x^2}}$$

Transformacija  $x = \sin t$

$$\frac{3 \sin t}{2 + \cos t} \leq t \leq \frac{\pi \sin t}{2 + \cos t}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(t) &= t(2 + \cos t) - 3 \sin t \geq 0 && \text{leva strana} \\ g(t) &= \pi \sin t - t \cos t - 2t \geq 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \quad (4.3)$$

za  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ling Zhu: Sharpening Jordans inequality and the  
Yang Le inequality [135]

**Teorema 3.** Za  $0 \leq x \leq 1$

$$\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2) \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{2}{\pi} + \frac{\pi - 2}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2)$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\pi^2 x - x(\pi^2 - 4x^2) + \pi^3 \sin x \geq 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= 2\pi^2 x + x(\pi - 2)(\pi^2 - 4x^2) - \pi^3 \sin x \geq 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \tag{4.4}$$

za  $x \in [0, 1]$ .

Ling Zhu: Sharpening Jordans inequality and  
Yang Le inequality, II [136]

**Teorema 5.** Za  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2) + \frac{12 - \pi^2}{16\pi^5}(\pi^2 - 4x^2)^2 \\ \leq \frac{\sin x}{x} \leq \\ \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2) + \frac{\pi - 3}{\pi^5}(\pi^2 - 4x^2)^2 \end{aligned}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= -32\pi^4 x - 16\pi^2 x(\pi^2 - 4x^2) \\ &\quad - x(12 - \pi^2)(\pi^2 - 4x^2)^2 + 16\pi^5 \sin x \geq 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= 2\pi^4 x + \pi^2 x(\pi^2 - 4x^2) \\ &\quad + x(\pi - 3)(\pi^2 - 4x^2)^2 - \pi^5 \sin x \geq 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \tag{4.5}$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 6.** Za  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2) + \frac{4(\pi - 3)}{\pi^3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ \leq \frac{\sin x}{x} \leq \\ \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3}(\pi^2 - 4x^2) + \frac{12 - \pi}{\pi^3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -2\pi^2 x - x(\pi^2 - 4x^2) && \text{leva strana} \\
 -4x(\pi - 3) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \pi^3 \sin x &\geq 0 && \\
 g(x) &= (-4\pi + 32)x^3 + (4\pi^2 - 48\pi)x^2 && \text{desna strana} \\
 + (-\pi^3 + 24\pi^2)x - 4\pi^3 \sin x &\geq 0 && 
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Ling Zhu: A solution of a problem of Oppenheim [137]**

**Teorema 8.** Za  $0 \leq t \leq 1$

$$\frac{8(\pi^2 - 4)}{\pi^3} \frac{\pi t}{\pi + 2\sqrt{1-t^2}} \leq \arcsin t \leq \left(\frac{2}{\pi} + 1\right) \frac{\pi t}{\pi + 2\sqrt{1-t^2}}$$

Transformacija  $t = \sin u, u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
 u - \frac{8(u\pi^2(\pi + 2\cos u) - \pi^2 - 4)\sin u}{\pi^2(\pi + 2\cos u)} &\geq 0 \\
 \frac{(2 + \pi)\sin u - u(\pi - 2\cos u)}{\pi - 2\cos u} - u &\geq 0
 \end{aligned}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 f(u) &= 8\pi(\pi^2 - 4)\sin u - u\pi^3(\pi + 2\cos u) \geq 0 && \text{leva strana} \\
 g(u) &= (2 + \pi)\sin u - u(\pi - 2\cos u) \geq 0 && \text{desna strana}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

za  $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 9.** Za  $0 \leq t \leq 1$

$$\frac{\pi}{2} \frac{t}{1 + \sqrt{1-t^2}} \leq \arcsin t \leq 2 \frac{t}{1 + \sqrt{1-t^2}}$$

Transformacija  $t = \sin u, u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 f(u) &= 2u(1 + \cos u) - \pi \sin u \geq 0 && \text{leva strana} \\
 g(u) &= 2\sin u - u(1 + \cos u) \geq 0 && \text{desna strana}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

za  $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Lu Zhang and Ling Zhu: A new elementary proof  
of Wilkers inequalities [138]**

**Teorema 1.** Za  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{16}{\pi^4} x^3 \tan x < \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 + \frac{\tan x}{x} - 2 < \frac{8}{45} x^3 \tan x$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\pi^4 \cos^3 x + (-2x^2 + 1)\pi^4 \cos x + (\pi^4 x - 16x^5) \sin x > 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= 8x^5 \sin x - 45 \cos x \sin^2 x - 45x \sin x + 90x^2 \cos x > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \tag{4.9}$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Ling Zhu and Jiukun Hua: Sharpening the Becker-Stark Inequalities [139]**

**Teorema 1.3** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\frac{\pi^2 + x^2 \left( \frac{4(8 - \pi^2)}{\pi^2} \right)}{\pi^2 - 4x^2} < \frac{\tan x}{x} < \frac{\pi^2 + x^2 \left( \frac{\pi^2}{3} - 4 \right)}{\pi^2 - 4x^2}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x(4(-\pi^2 + 8)x^2 + \pi^4) \cos x && \text{leva strana} \\ &- (4\pi^2 x^2 - \pi^4) \sin x > 0 && \\ g(x) &= -x((-\pi^2 + 12)x^2 - 3\pi^2) \cos x && \text{desna strana} \\ &- (3\pi^2 - 12x^2) \sin x > 0 && \end{aligned} \tag{4.10}$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Zhengjie Sun and Ling Zhu: Some Refinements of Inequalities  
for Circular Functions [140]**

**Otvoreni problem** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\frac{\frac{2\pi^4}{3} x^3 + \left( \frac{8\pi^4}{15} - \frac{16\pi^2}{3} \right) x^5}{(\pi^2 - 4x^2)^2} < x \sec^2 x - \tan x < \frac{\frac{2\pi^4}{3} x^3 + \left( \frac{256}{\pi^2} - \frac{8\pi^2}{3} \right) x^5}{(\pi^2 - 4x^2)^2}$$



Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ((-8\pi^4 + 80\pi^2)x^5 - 10\pi^4x^3)\cos^2x \\
&- 240\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2\sin x \cos x && \text{leva strana} \\
&+ 240x^5 - 120\pi^2x^3 + 15\pi^4x > 0 \\
g(x) &= -(2\pi^6x^3 - 8x^5\pi^4 + 768x^5)\cos^2x \\
&- 48\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2\sin(x)\pi^2\cos x && \text{desna strana} \\
&+ 48x^5\pi^2 - 24\pi^4x^3 + 3\pi^6x > 0
\end{aligned} \tag{4.11}$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Dokaz iz ovog otvorenog problema je prikazan u radu Branko Maleševića i Milice Makragić "A method of proving a class of inequalities of mixed trigonometric polynomial functions"[122].

### Ling Zhu: A Refinement of the Becker-Stark Inequalities [141]

**Teorema 3.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\frac{8}{\pi^2 - 4x^2} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{\pi^2 - 9}{6\pi^4}(\pi^2 - 4x^2) < \frac{\tan x}{x} < \frac{8}{\pi^2 - 4x^2} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{10 - \pi^2}{\pi^4}(\pi^2 - 4x^2)$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\pi^6x + (-8x^3 - 69x)\pi^4 + (16x^5 + 120x^3)\pi^2 \\
&- 144x^5)\cos x + (-4\pi^4x^2 + \pi^4)\sin x > 0 && \text{leva strana} \\
g(x) &= -(-\pi^6x + 8\pi^4x^3 + (-16x^5 - 72x^3)\pi^2 \\
&- 160x^5)\cos(x) - (\pi^6 - 4\pi^4x^2)\sin(x) > 0 && \text{desna strana}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

## 4.5 Nejednakosti u radovima autora Fenga Qia

Feng Qi and Da-Wei Niu : *Refinements, generalizations*

*and applications of Jordan's inequality and related problems* [142]

Neke poznate nejednakosti po ovom preglednom radu su:

**Žordanova nejednakost** Za  $0 < |x| \leq \frac{\pi}{2}$  važi

$$\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x} < 1$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi \sin x - 2x \geq 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= x - \sin x > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \tag{4.13}$$

za  $x \in \left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

**Koberova nejednakost** Za  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  važi

$$1 - \frac{2}{\pi}x \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{\pi}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x + \frac{2}{\pi}x - 1 \geq 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= 1 - \frac{x^2}{\pi} - \cos x \geq 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \tag{4.14}$$

za  $|x| \in \left(\frac{\pi}{2}\right)$ .

**Redhefer-Wiliamsova nejednakost** Za  $x \neq 0$  važi

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{\pi^2 - x^2}{\pi^2 + x^2}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$f(x) = (\pi^2 + x^2) \sin x - x(\pi^2 - x^2) \geq 0 \tag{4.15}$$

za  $|x| \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  (dovoljan je dokaz na ovom intervalu kao što je pokazano u [143]).

**Merser-Kasiaova nejednakost** Za  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  važi

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x + \frac{1}{12\pi}x(\pi^2 - 4x^2)$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x - \frac{1}{12\pi}x(\pi^2 - 4x^2) \geq 0 \quad (4.16)$$

za  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Prestinova nejednakost** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  važi

$$\frac{x}{\sin x} \leq 1 + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)x$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$f(x) = \left(1 + \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)x\right)\sin x - x \geq 0 \quad (4.17)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Kuza-Hajgensova nejednakost** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{\sin x}{x} \leq \frac{2 + \cos x}{3}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$f(x) = 2x + x \cos x - 3 \sin x \geq 0 \quad (4.18)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

## Neke trigonometrijske nejednakosti

**Teorema 1** Za  $x \in (0, 1)$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{1-x^2} < \frac{1}{\pi x} - \cot \pi x < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{1-x^2}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(t) &= (\pi^2 - 3t^2) \sin t + (-\pi^2 t + t^3) \cos t > 0 && \text{leva strana} \\ g(t) &= (\pi^2 t^2 - 2\pi^2 + 2t^2) \sin t + t(2\pi^2 - 2t^2) \cos t > 0, && \text{desna strana} \end{aligned} \quad (4.19)$$

za  $t \in (0, \pi)$

**Teorema 2** Za  $x \in (0, 1)$

$$\frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{x^2}{1-x^2} < \sec \frac{\pi x}{2} - 1 < \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{1-x^2}$$

Transformacija  $x = \frac{2t}{\pi}$

$$\frac{t^2 \pi^2}{2\pi^2 - 8t^2} < \frac{1}{\cos t} - 1 < \frac{8t}{\pi^2 - 4t^2}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(t) &= -((t^2 + 2)\pi^2 - 8t^2) \cos t - 8t^2 + 2\pi^2 > 0, && \text{leva strana} \\ g(t) &= (\pi^2 - 4t^2 + 8t) \cos t - \pi^2 + 4t^2 > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \quad (4.20)$$

za  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 3** Za  $x \in (0, 1)$

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{x}{1-x^2} < \csc \pi x - \frac{1}{\pi x} < \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{1-x^2}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(t) &= ((-\pi^2 + 6)t^2 - 6\pi^2) \sin t - 6t^3 + 6t\pi^2 > 0, && \text{leva strana} \\ g(t) &= (\pi^2 + t^2) \sin t - t\pi^2 + t^3 > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \quad (4.21)$$

za  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Wei-Dong Jiang, Qiu-Ming Luo, and Feng Qi: *Refinements and sharpening of some Huygens and Wilker type inequalities* [144]**

**Teorema 1.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$2\frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} > 2\frac{x}{\sin x} + \frac{x}{\tan x} > 3$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 2\cos(x)^3 + (x^2 - 1)\cos(x)^2 + (-2x^2 + 2)\cos(x) > 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= 2x - x\cos x + 3\sin x > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \tag{4.22}$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Wei-Dong Jiang, Qiu-Ming Luo, Feng Qi: *Refinements and Sharpening of some Huygens and Wilker Type Inequalities*[145]**

**Teorema 3.1** Za  $|x| \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$3 + \frac{1}{60}x^3 \sin x < 2\frac{x}{\sin x} + \frac{x}{\tan x} < 3 + \frac{8\pi - 24}{\pi^3}x^3 \sin x$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 \cos^2 x + x^3 + 60x \cos x - 180 \sin x + 120x > 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= -8\pi x^3 \cos^2 x - \pi^3 x \cos x + 24x^3 \cos^2 x \\ &+ 3\pi^3 \sin x - 2\pi^3 x + 8\pi x^3 - 24x^3 > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \tag{4.23}$$

za  $|x| \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 3.2** Za  $|x| \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$2 + \frac{17}{270}x^3 \sin x < \frac{x}{\sin x} + \left[ \frac{x/2}{\tan(x/2)} \right]^2 < 2 + \frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{2\pi^3}x^3 \sin x$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= -136t^3 \sin t \cos^4 t - (135t^2 + 270) \cos^3 t \\
 &+ 136t^3 \sin t \cos^2 t + 270 \cos t - 135t \sin t > 0 \quad , \quad \text{leva strana} \\
 g(t) &= -8t^3 \sin t (\pi^2 + 8\pi - 32) \cos^4 t \\
 &+ 8t^3 \sin t (\pi^2 + 8\pi - 32) \cos^2 t \\
 &- \pi^3 (t^2 + 2) \cos^3 t + 2\pi^3 \cos t - t\pi^3 \sin t > 0 \quad , \quad \text{desna strana}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

za  $t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ .

## 4.6 Nejednakosti u radovima autora Cristinela Morticia

Cristinel Mortici: *The Natural Approach of Wilker–Cusa–Huygens Inequalities* [146]

**Teorema 1.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$-\frac{x^4}{15} < \cos x - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 < -\frac{x^4}{15} + \frac{23x^6}{1890}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^7 + 15x^3 \cos x - 15 \sin^3 x > 0 \quad \text{leva strana} \\
 g(x) &= -126x^7 + 23x^9 - 1890x^3 \cos x + 1890 \sin^3 x > 0 \quad \text{desna strana}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 2.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$-\frac{1}{180}x^4 < \frac{\sin x}{x} - \frac{2 + \cos x}{3} < -\frac{1}{180}x^4 + \frac{1}{3780}x^6$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 60x \cos x + 180 \sin x - 120x > 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= x^7 - 21x^5 + 1260x \cos x - 3780 \sin x + 2520x > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \quad (4.26)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 3.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$3 + \left(\frac{3x^4}{20} - \frac{3x^6}{140}\right) \frac{1}{\cos x} < 2 \frac{\sin x}{x} + \frac{\tan x}{x} < 3 + \frac{3x^4}{20 \cos x}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^7 - 21x^5 + 280 \sin x \cos x - 420x \cos x + 140 \sin x > 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= 3x^5 - 40 \sin x \cos x + 60x \cos x - 20 \sin x > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \quad (4.27)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 4.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$2 + \left(\frac{8x^4}{45} - \frac{4x^6}{105}\right) \frac{1}{\cos x} < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} < 2 + \frac{8x^4}{45 \cos x}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^8 - 56x^6 - 315 \cos^3 x - 630x^2 \cos x \\ &\quad + 315x \sin x + 315 \cos x > 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= 8x^6 + 45 \cos^3 x + 90x^2 \cos x - 45x \sin x - 45 \cos x > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \quad (4.28)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 5.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 + \frac{x}{\tan x} > 2 + \frac{2}{45}x^4$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$f(x) = (2x^4 + 90) \cos^2 x + 45x \cos x \sin x - 2x^4 + 45x^2 - 90 > 0 \quad (4.29)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 6.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$3 \frac{x}{\sin x} + \cos x > 4 + \frac{x^4}{10} + \frac{x^6}{210}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= (-x^6 - 21x^4 + 210 \cos(x) \\ &\quad - 840) \sin(x) + 630x > 0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Cristinel Mortici: *A subtly analysis of Wilker inequality* [147]**

**Teorema 1.** Za  $x \in (0, 1)$  važi

$$\begin{aligned} &2 + \left(\frac{8}{45} - \frac{8}{945}x^2\right)x^3 \tan x \\ &\quad < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} < \\ &2 + \left(\frac{8}{45} - \frac{8}{945}x^2 + \frac{16}{14175}x^4\right)x^3 \tan x \end{aligned}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= 945 \cos^3 x - (945 - 1890x^2) \cos x \\ &\quad - 8x \sin x \left(x^5 - 21x^3 + \frac{945}{8}\right) > 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{leva strana} \\ \end{array} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (16x^7 - 120x^5 + 2520x^3 - 14175x) \sin x \\ &\quad + 14175 \cos^3 x + 28350x^2 \cos x - 14175 \cos x > 0 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{desna strana} \\ \end{array}$$

za  $x \in (0, 1)$ .

**Ling Zhu and Cristinel Mortici: *Inequalities Becker-Stark at extreme points*[148]**

**Teorema 1.** Za  $x \in \left(0.373, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\begin{aligned} &\frac{8 + a(x)}{\pi^2 - 4x^2} < \frac{\tan x}{x} < \frac{8 + b(x)}{\pi^2 - 4x^2} \\ &a(x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \left(\frac{16}{\pi^2} - \frac{8}{3}\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \\ &b(x) = a(x) + \left(\frac{32}{\pi^3} - \frac{8}{3\pi}\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3 \end{aligned}$$



Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 9\pi^4 x (\pi - x) \cos x + (-\pi^5 + 11\pi^4 x - 18\pi^3 x^2 - 96\pi^3 \\
 &\quad + 192\pi^2 x + 288\pi - 576x) \sin x > 0 && \text{leva strana} \\
 g(x) &= -((-6\pi^3 + 72\pi) x^4 + (3\pi^4 - 36\pi^2) x^3 + 18\pi^3 x^2 \\
 &\quad + (-11\pi^4 - 192\pi^2 + 576) x + \pi^5 + 96\pi^3 - 288\pi) \sin x && \text{desna strana} \\
 &\quad - (-9\pi^5 x + 9\pi^4 x^2) \cos x > 0
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} - 0.373\right)$ .

**Teorema 2.** Za  $x \in (0, 1.371)$  važi

$$\frac{\tan x}{x} < \frac{\pi^2 - \left(4 - \frac{1}{3}\pi^2\right)x^2 - \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{15}\pi^2\right)x^4}{\pi^2 - 4x^2}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (-15\pi^2 + 60x^2) \sin x + (2\pi^2 x^5 + 5\pi^2 x^3 \\
 &\quad - 20x^5 + 15\pi^2 x - 30x^3) \cos x > 0
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

za  $x \in (0, 1.371)$ .

**Cristinel Mortici: *A subtly analysis of Wilker inequality* [149]**

**Teorema 1.** Za  $x \in (0, 1)$  važi

$$\begin{aligned}
 &2 + \left(\frac{8}{45} - \frac{8}{945}x^2\right) x^3 \tan x \\
 &< \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} < \\
 &2 + \left(\frac{8}{45} - \frac{8}{945}x^2 + \frac{16}{14175}x^4\right) x^3 \tan x
 \end{aligned}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 f(x) &=> (8x^7 - 168x^5 + 945x) \sin x && \text{leva strana} \\
 &\quad - 945 \cos^3 x + (-1890x^2 + 945) \cos x > 0 \\
 g(x) &= -(16x^9 - 120x^7 + 2520x^5 - 14175x) \sin x && \text{desna strana} \\
 &\quad - 14175 \cos^3 x - (28350x^2 - 14175) \cos x > 0
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

za  $x \in (0, 1)$ .

**Teorema 2.** Za  $x \in \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$2 + \left(\frac{16}{\pi^4} + \left(\frac{160}{\pi^5} - \frac{16}{\pi^3}\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) x^3 \tan x$$

$$< \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 + \frac{\tan x}{x} <$$

$$2 + \left(\frac{16}{\pi^4} + \left(\frac{160}{\pi^5} - \frac{16}{\pi^3}\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \left(\frac{960}{\pi^6} - \frac{96}{\pi^4}\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2\right) x^3 \tan x$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$f(x) = 4\pi^5 \cos^2 x \sin x + (2\pi^7 x - 20\pi^6 x^2 + 80\pi^5 x^3 - 160\pi^4 x^4 + 160\pi^3 x^5 - 64\pi^2 x^6 - 4\pi^5 x + 120\pi^4 x^2 - 640\pi^3 x^3 + 1440\pi^2 x^4 - 1536\pi x^5 + 640x^6) \cos x + (-2\pi^7 + 8\pi^6 x - 8\pi^5 x^2) \sin x > 0$$

*leva strana*

$$g(x) = -4\pi^6 \cos^2 x \sin x + (-2\pi^8 x + 8\pi^7 x^2 + 40\pi^6 x^3 - 320\pi^5 x^4 + 800\pi^4 x^5 - 896\pi^3 x^6 + 384\pi^2 x^7 + 4\pi^6 x - 560\pi^4 x^3 + 3360\pi^3 x^4 - 8064\pi^2 x^5 + 8960\pi x^6 - 3840x^7) \cos x + (2\pi^8 - 8\pi^7 x + 8\pi^6 x^2) \sin x > 0$$

*desna strana*

(4.35)

za  $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ .

**Cristinel Mortici and H. M. Srivastava: *Estimates for the Arctangent Function Related to Shafers Inequality* [150]**

**Teorema 1.** Za  $x > 0$  važi

$$\frac{3x}{1 + 2\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{180}x^5 - \frac{13}{1512}x^7 < \arctan x < \frac{3x}{1 + 2\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{180}x^5$$

Uvodimo smenu  $x = \tan t$

$$\frac{3 \sin t}{2 + \cos t} + \frac{\sin^5 t}{180 \cos^5 t} - \frac{13 \sin^7 t}{1512 \cos^7 t} < t < \frac{3 \sin t}{2 + \cos t} + \frac{\sin^5 t}{180 \cos^5 t}$$

za  $t > 0$ . Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$f(t) = 7560t \cos^8 t - 22787 \sin t \cos^7 t + 15120t \cos^7 t - 214 \cos^6 t \sin t + 279 \cos^5 t \sin t + 558 \cos^4 t \sin t - 237 (\cos t)^3 \sin t - 474 (\cos t)^2 \sin t + 65 \sin t \cos t + 130 \sin t > 0$$

*leva strana*

$$g(t) = -180t \cos^6 t + 541 \sin t \cos^5 t - 360t \cos^5 t + 2 \sin t \cos^4 t - 2 \sin t \cos^3 t - 4 \sin t \cos^2 t + \sin t \cos t + 2 \sin t > 0$$

*desna strana*

(4.36)

za  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 2.** Za  $x > 0$

$$\frac{3x + \frac{x^5}{60} - \frac{17x^7}{840}}{1 + 2\sqrt{1+x^2}} < \arctan x < \frac{3x + \frac{x^5}{60}}{1 + 2\sqrt{1+x^2}}$$

Uvodimo smenu  $x = \tan t$

$$\frac{3 \tan t + \frac{\tan^5 t}{60} - \frac{17 \tan^7 t}{840}}{1 + \frac{2}{\cos t}} < t < \frac{3 \tan t + \frac{\tan^5 t}{60}}{1 + \frac{2}{\cos t}}$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(t) &= 840t \cos^7 t - 2551 \cos^6 t \sin t + 1680t \cos^6 t && \text{leva strana} \\ &+ 79 \cos^4 t \sin t - 65 \cos^2 t \sin t + 17 \sin t > 0 \\ g(t) &= -60t \cos^5 t + 181 \cos^4 t \sin t - 120t \cos^4 t && \text{desna strana} \\ &- 2 \cos^2 t \sin t + \sin t > 0 \end{aligned} \tag{4.37}$$

za  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

**Lokenath Debnath, Cristinel Mortici and Ling Zhu:**

**Refinements of Jordan–Stečkin and Becker–Stark Inequalities [151]**

**Teorema 1.** Za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  važi

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) + \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^3}\right) x^2 \\ < \frac{\sin x}{x} < \\ \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi^3} (\pi^2 - 4x^2) + \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^3}\right) x^2 + \frac{1}{120} x^4 \end{aligned}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= +\sin(x) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) > 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \sin x > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \tag{4.38}$$

za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

**Teorema 2.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi^5} (\pi^4 - 16x^4) + \left(1 + \frac{5}{2\pi}\right) - \frac{1}{6}x^2 \\ < \frac{\sin x}{x} < \\ \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2\pi^5} (\pi^4 - 16x^4) + \left(1 + \frac{5}{2\pi}\right) - \frac{1}{6}x^2 + \left(\frac{8}{\pi^5} + \frac{1}{120}\right) x^4 \end{aligned}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\pi^5 x^3 - 6\pi^5 \sin x + 6\pi^5 x + 30\pi^4 x - 48x^5 > 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= \pi^5 x^5 - 20\pi^5 x^3 - 120\pi^5 \sin x + 120x\pi^5 + 600x > 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \quad (4.39)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 3.** Za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq \tan x - \frac{4x}{\pi(\pi - 2x)} \leq \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= (4\pi - 8x) \sin x + (\pi^2 - 4\pi x + 4x^2 - 8) \cos x \geq 0 && \text{leva strana} \\ g(x) &= (-6\pi + 12x) \sin x + (-\pi^2 + 4\pi x - 4x^2 + 12) \cos x \geq 0 && \text{desna strana} \end{aligned} \quad (4.40)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Teorema 4.** Za  $x \in (0, 1)$  važi

$$\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) x - \frac{8}{\pi^3} x^2 \leq \tan x - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{x}{\pi - 2x} \leq \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) x$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= (-\pi^4 x + 2\pi^3 x^2 - 16x^3) \cos x && \text{leva strana} \\ &- 2(-\pi/2 + x) \pi^3 \sin x \geq 0 \\ g(x) &= -(2\pi^2 x - \pi^3 +) \sin x && \text{desna strana} \\ &- (\pi^3 x - 2\pi^2 x^2 - 8\pi x + 8x^2) \cos x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

za  $x \in (0, 1)$ .

**Teorema 5.** Za  $x \in \left(0.373, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\frac{8 + a(x)}{\pi^2 - 4x^2} < \frac{\tan x}{x}$$

i za  $x \in \left(0.301, \frac{\pi}{2}\right)$  važi

$$\frac{\tan x}{x} < \frac{8 + b(x)}{\pi^2 - 4x^2}$$

gde su

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{8}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \left(\frac{16}{\pi^2} - \frac{8}{3}\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \\ b(x) &= a(x) + \left(\frac{32}{\pi^3} - \frac{8}{3\pi}\right) \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3 \end{aligned}$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi^3 x^2 - 4\pi^2 x^3 - 6\pi^3 + 6\pi^2 x + 24x^3) \sin x \\ &+ (6\pi^3 x - 6\pi^2 x^2) \cos x > 0 \end{aligned} \quad \text{leva strana}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (-2\pi^4 x^2 + 4\pi^3 x^3 - 2\pi^3 x^2 + 4\pi^2 x^3 + 6\pi^4 \\ &- 6\pi^3 x - 24\pi x^3 + 24\pi x^2 - 48x^3) \sin(x) \\ &+ (-6\pi^4 x + 6\pi^3 x^2) \cos(x) > 0 \end{aligned} \quad \text{desna strana} \quad (4.42)$$

za  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} - 0.373\right)$  za  $f(x) > 0$  i  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2} - 0.301\right)$  za  $g(x)$ .

**Yue Hu and Cristinel Mortici:**

***A Lower Bound on the Sinc Function and Its Application [152]***

**Teorema 1.** Za  $x \in [0, \pi]$  važi

$$\text{sinc } x \geq \frac{16\pi^4}{(3\pi^2 + x^2)^2} - 1$$

Dokaz prethodne nejednakosti svodi se na dokaz MTP nejednakosti:

$$f(x) = (3\pi^2 + x^2)^2 \sin x + x^5 + 6\pi^2 x^3 - 7\pi^4 x \geq 0 \quad (4.43)$$

za  $x \in [0, \pi]$ .

# Glava 5

## Implementacija sistema SimTheP

U okviru ove glave razmatra se jedna realizovana implementacija prikazanog sistema koja je deo ovog doktorata. Pored korisničkih zahteva, arhitekture i dizajna sistema, razmatraju se i njegove performanse uporednom analizom sa aplikacijom *MetiTarski*. Aplikacija pod radnim imenom *PAINT* (Prover of AnalYTic Inequality Theorems) namenjena je za generisanje dokaza iz proširene klase MTP funkcija. Cilj je bio da se razvije aplikacija koja se može upotrebiti u teorijskoj matematici, ali i u inženjerskim problemima. Ovo je usmerilo implementaciju ka čitljivim i jasnim koracima izvršavanja i korisničkom interfejsu koji može da se upotrebljava bez potrebe da se vrši detaljna obuka korisnika. Krajnji rezultat je aplikacija razumljivog interfejsa za učitavanje problema, ali i za prezentovanje rezultata.

### 5.1 Korisnički zahtevi

Prilikom kreiranja aplikacije obraćana je velika pažnja na sledeću listu korisničkih zahteva:

- Portabilnost
- Proširivost
- Prost korisnički interfejs
- Brzo izvršavanje

- Očuvanje preciznosti korišćenjem simboličkog računa
- Generisanje dokaza koji su čitljivi
- Generisanje dokaza koji se mogu verifikovati
- Čuvanje dokaza u opšteprihvaćenom formatu

Aplikacija je predviđena za izvršavanje na različitim operativnim sistemima i različitim konfiguracijama računara. Kako bi se izbeglo generisanje različitih verzija aplikacije za različite operativne sisteme, aplikacija je napisana u programskom jeziku Java. Ovaj programski jezik visokog nivoa je omogućavao brz razvoj i pokretanje istog koda na različitim sistemima upotrebom Java runtime environment tehnologije. Iako performanse skript jezika i jezika koji ne vrše direktno prevođenje za specifičnu arhitekturu umeju značajno da opadnu, ovo nije slučaj kod Jave. Ukoliko pogledamo rezultate u radovima [153],[154] i [155], možemo videti da su performanse pri bazičnim proračunima 90-98% onih koje se postižu sa identičnim kodom pisanim u C i Fortran jezicima (koji važe za jezike najboljih performansi u ovoj oblasti). U radovima [111] i [112] je prikazano da se u nekim implementacijama MPI sistema za Java programski jezik postižu bolje performanse pri distribuiranom izvršavanju naspram implementacija za C. U svom radu Kredel (Heinz Kredel)[156] prikazuje da je Java programski jezik veoma pogodan za pisanje CAS (Computer algebra system) aplikacija, zbog svojih svojstava vezanih za nasleđivanja, interfejse, tipove podataka i sličnog. Kako bi se izbegli problemi sa digitalnim potpisima i potencijalnom nekompatibilnošću sa nekim sistemima, ukoliko u budućnosti aplikacija bude postavljena za korišćenje putem interneta, za proračun su izbegnute spoljašnje biblioteke i korišćene su samo one koje čine JDK. Jedina biblioteka koja je dodata je biblioteka *JLatexMath*, koja je korišćena za iscertavanje matematičkog teksta formatiranog na čitljiviji način upotrebom *Latexa*.

Proširivost je drugi najznačajniji zahtev. Iako aplikacija u ovom momentu pokriva veoma široku klasu nejednakosti koje je sposobna da dokaže, u okviru budućih istraživanja je predviđeno dodavanje novih klasa realnih analitičkih funkcija koje učestvuju

u izrazima. Iz tog razloga je parser napisan tako da bude veoma prost za izmenu, a klase koje rukuju izrazima i vrše transformaciju su tako realizovane da se dodavanjem odgovarajućih metoda za željene realne analitičke funkcije dobijaju dodatni Tejlorovi razvoji koji učestvuju u formiranju aproksimacija. Treba napomenuti da su sinus i kosinus, kao funkcije koje se odlikuju periodičnošću, predstavljale najveći izazov, i očekuje se da neće biti neophodni dodatni koraci ili transformacije u algoritmu.

Prost korisnički interfejs je bio jedan od ciljeva izrade aplikacije. Mada postoje automatski dokazivači koji mogu da verifikuju određene elemente klase MTP funkcija, svi oni su imali kompleksan interfejs za koji je neophodan određeni period obuke. GUI (Graphical User Interface - grafičko korisničko okruženje) koji je kreiran u okviru ove implementacije algoritma se sastoji iz polja za unos u kom se funkcija upisuje standardnim matematičkim zapisom (nije neophodna obuka u jeziku), a potom se u poljima ispod funkcije upisuju granica do koje se dokazuje, broj decimala preciznosti i granica do koje da se kreću vrednosti  $k$  indeksa. Ovo omogućava da korisnici koji se prvi put susreću sa aplikacijom u roku od nekoliko minuta dobiju dokaze teorema koje su želeli. Cilj ovakvog uprošćavanja, unosa ali i ispisa, jeste da omogući korisnicima koji nisu familijarni sa jezicima automatskih dokazivača da i dalje mogu da imaju funkcionalan alat. Detaljniji prikaz i slike su dati u okviru poglavlja 5.3

Naravno, kao i kod svih kompleksnih matematičkih aplikacija, vreme vršenja proračuna je od značaja. U toku rada algoritma se vrši čitav niz procesorski zahtevnih operacija, koje mogu da potraju veoma dugo. Primera radi, vreme izvršavanja operacije traženja nula polinomske funkcije raste eksponencijalno sa porastom preciznosti ili stepenom polinoma koji se upotrebljava. Kako bi se ovo vreme u što većoj meri smanjilo primenjivan je čitav niz optimizacija, od kojih su neke računarske prirode, a neke zasnovane na matematičkim principima. Treba napomenuti da je tokom izrade predviđena bila paralelizacija proračuna u kritičnim sekcijama, ali je na kraju odbačena pošto nije donela do značajne promene u performansama usled velikog broja elemenata za sinhronizaciju.

Kako bi se očuvala preciznost prilikom transformacija u okviru algoritma koriste



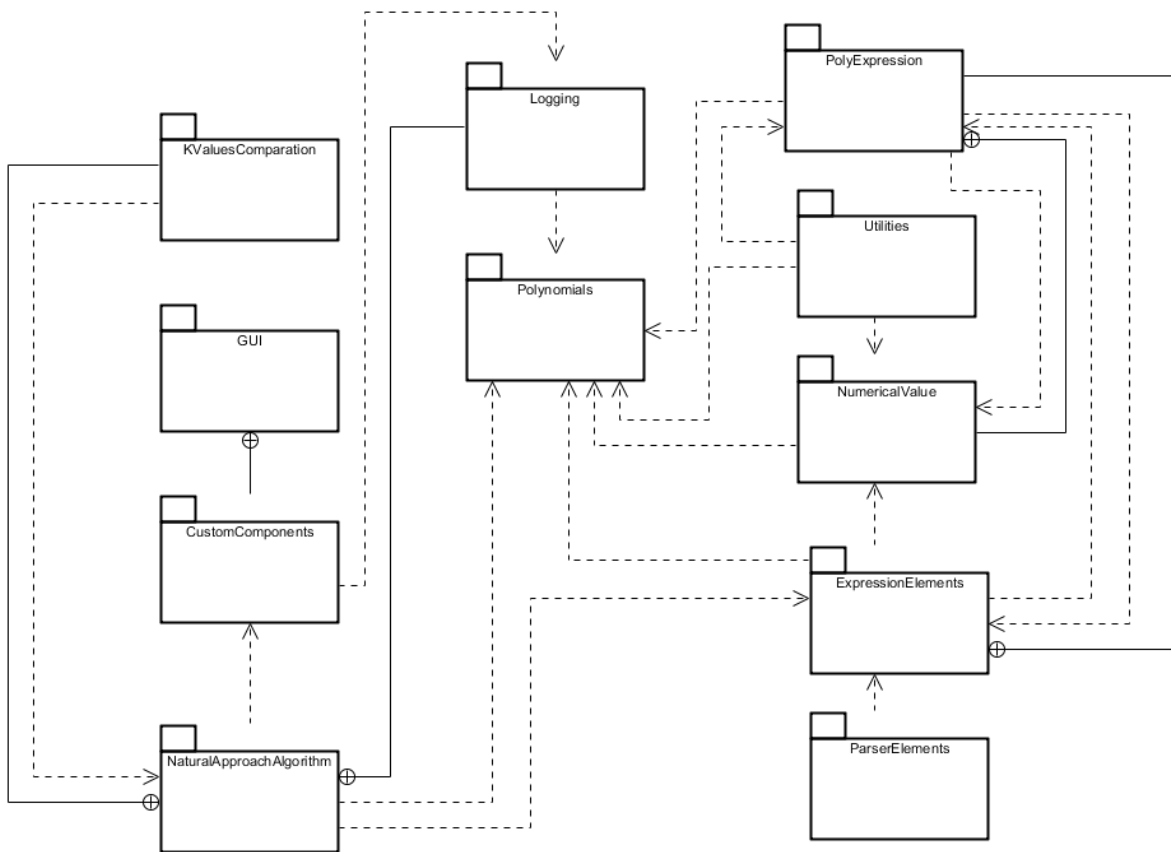
se metode simboličkog računa. Sve vrednosti se čuvaju u svom izvornom obliku (ne vrši se numerička aproksimacija vrednosti poput  $\pi$ ) kroz većinu koraka. Ipak, pošto je određivanje nula polinomskih funkcija za sada rešeno samo za polinome nižih stepena, potrebno je koristiti numeričke metode, pa se u finalnim fazama algoritma koriste numeričke aproksimacije vrednosti. Da bi izbegli akumuliranje greške u ovim fazama algoritma, sve vrednosti su aproksimirane kao racionalne vrednosti. Ovim putem ne dolazi do greške usled zaokruživanja koja je veoma čest izvor problema u matematičkim aplikacijama.

Generisanje dokaza koji su čitljivi i koje je moguće verifikovati je postalo od interesa u oblasti automatskih dokazivača teorema tek u poslednjoj deceniji. Iako ovaj problem deluje trivijalno, čitljivost dokaza je veoma teška za postizanje. U slučaju implementacije algoritma koji je prikazan u okviru ovog doktorata, velika doza čitljivosti potiče iz samog algoritma. Kako je način kojim je pristupljeno problemu dokazivanja veoma sličan ljudskom načinu rezonovanja, dovoljno je bilo da se koraci na pravi način prikažu. Verifikacija koraka je takođe moguća usled veoma jasnog načina funkcionisanja algoritma, i ostavljenih prelaza između faza rada kako bi se ispravnost rada mogla verifikovati. Radi bolje vizuelizacije rezultata implementirani su i grafički prikazi predloženih dokaza i greške aproksimacije. Nakon generisanja, dokazi se mogu sačuvati kao *Latex* kod, koji predstavlja standard u naučnoj zajednici. *Latex* kod takođe omogućava zapis korišćenjem matematičkih simbola, te samim tim nije potrebno učenje novog jezika zapisa kako bi se razumeli rezultati dobijeni ovom aplikacijom.

## 5.2 Arhitektura i dizajn

Aplikacija je organizovana na sledeći način (+ paket, - klasa ili interfejs):

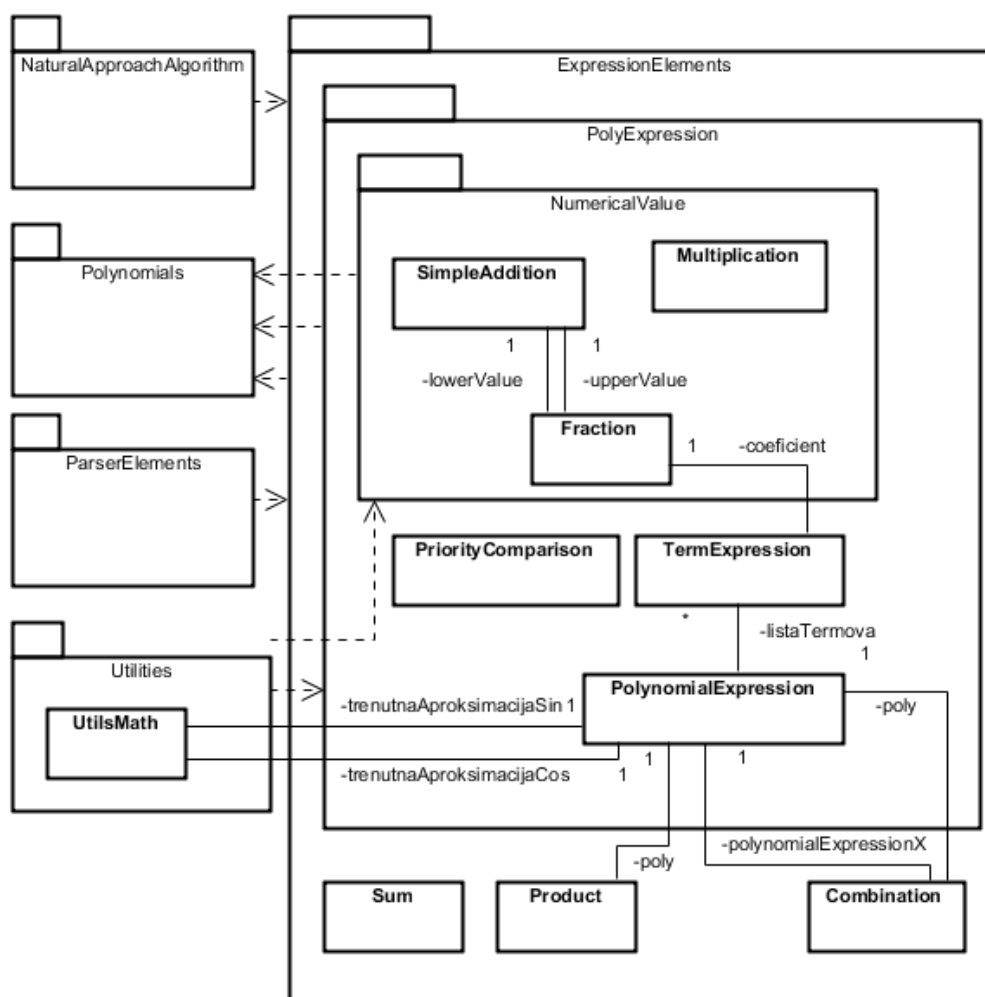
- + *ExpressionElements*
  - Combination
  - Product
  - Sum
- + *PolyExpression*
  - PolynomialExpression
  - PriorityComparison
  - TermExpression
- + *NumericalValue*
  - Fraction
  - Multiplication
  - SimpleAddition
- + *GUI*
  - GuiMain
- + *CustomComponents*
  - FunctionPlot
  - PanelCompleteCalculation
  - PanelIteration
  - PanelSubiteration
  - RCMenueCompleteProof
  - RCMenueIteration
  - RCMenueSubIteration
  - TexImageView
- + *NaturalApproachAlgorithm*
  - KValues
  - KValuesControler
  - NaturalApproach
- + *KValuesComparation*
  - ChebLexicographic
  - EuclidLexicographic
  - GradedLexicographic
  - Lexicographic
- + *Logging*
  - Iteration
  - ProcessLogger
  - SubIteration
- + *ParserElements*
  - Parser
- + *Polynomials*
  - Bounds
  - CalculationWorkerThread
  - ComplexValue
  - Par
  - SimpleFraction
  - SimplePolynomial
- + *Utilities*
  - UtilsMath



Slika 5.1: UML dijagram paketa u aplikaciji

Osnovna povezanost paketa je prikazana u okviru UML dijagrama (5.1). U okviru paketa se mogu primetiti neke od klasa koje nisu u upotrebi. Ove klase su kreirane za lakše proširivanje aplikacije u okviru budućih istraživanja, ili predstavljaju manje funkcionalna rešenja koja su iz istih razloga ostavljena da i dalje budu dostupna. Prilikom posmatranja sastava sistema uočljivo je da su aktivne dve implementacije polinomskih izraza. Implementacija u okviru paketa *ExpressionElements* je kreirana da simbolički čuva vrednosti koeficijenata. Prilikom kreiranja izraza od strane parsera polinomske funkcije se predstavljaju objektima ove klase. Sve postojeće transformacije vrše sa izrazima koji su predstavljeni objektima ovog paketa. Razlog zbog kog je kreirana još jedna implementacija polinomskih izraza u okviru paketa *Polynomials* je vreme izvršavanja numeričkih izračunavanja. Svojstva klasa iz paketa *ExpressionEle-*

ments koja su omogućila čuvanje izraza u simboličkom obliku zahtevaju komplikovanu strukturu za čuvanje numeričkih vrednosti koja je spora za pristup i manipulaciju. Implementacija u okviru paketa *Polynomials* je kreirana sa ciljem za upotrebu u numeričkim izračunavanjima, i cilj je bio da se skрати vreme izvršavanja. Mada se u okviru načela dizajna softvera ovakvo duplo implementiranje sličnog skupa funkcionalnosti ne preporučuje, u okviru ove aplikacije je dovelo do drastičnog poboljšanja performansi.



Slika 5.2: UML dijagram paketa *ExpressionElements*

Na slici (5.2) je prikazan UML dijagram paketa *ExpressionElements*. U okviru ovog paketa su realizovane klase za simboličko beleženje numeričkih vrednosti, polinomskih izraza i same MTP funkcije. Objekti klasa iz ovog paketa su kreirani kako bi se transfor-

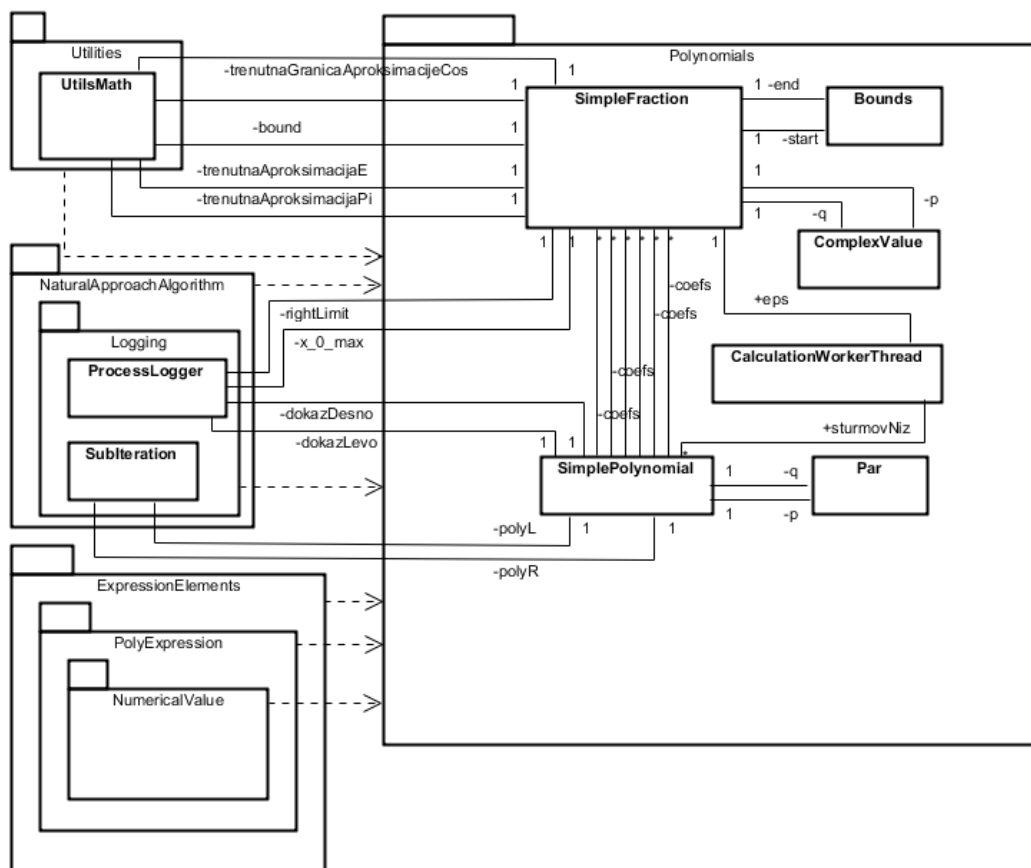
macije koje se vrše u okviru algoritma vršile sa potpuno očuvanom preciznošću. Kako bi se ovo postiglo, i pored vrlo česte upotrebe operacija deljenja, korišćeni su razlomci oblika

$$\alpha = \frac{\sum_{i=0}^n z_i \pi^i}{\sum_{j=0}^m \hat{z}_j \pi^j}$$

gde su  $z_i, \hat{z}_j \in Z$ . Ovim putem je omogućeno da se vrednost broja  $\pi$  aproksimira tek u završnoj fazi rada, pa samim tim se ne akumuliraju greške usled zaokruživanja. Prilikom implementacije je korišćena samo konstanta  $\pi$ , ali je kod pri kreiranju tako definisan da je uvođenje dodatnih konstanti ili korena vrednosti vrlo lako ostvariti. Klase *Sum*, *Product* i *Combination* realizuju rad sa elementima MTP funkcije na najvišem nivou. U okviru ovih klasa su realizovane matematičke transformacije, smene i obrade. Takođe se iz ovih klasa vrši transformacija iz ovog oblika koeficijenata polinoma, koji na kompleksan način čuva informacije, u daleko prostiji oblik polinoma sa racionalnim koeficijentima koji je implementiran u okviru paketa *Polynomials*.

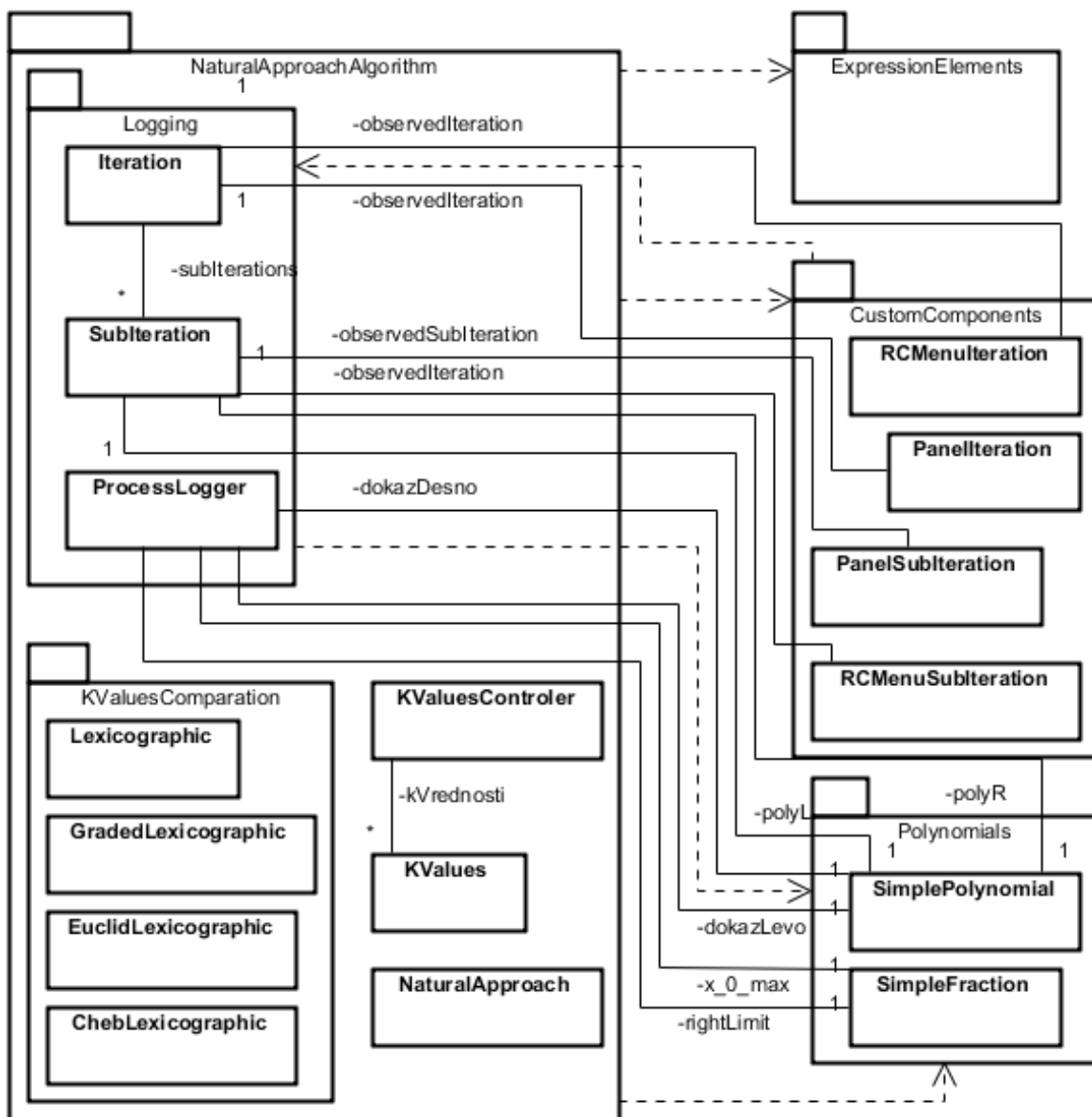
Paket *Polynomials*, koji je prikazan UML dijagramom (5.3), sadrži implementacije algoritama neophodnih za numerička izračunavanja veoma bitna za funkcionisanje algoritma. Implementacija polinomskih funkcija u okviru ovog paketa je kreirana sa širim spektrom mogućnosti od onog koji je neophodan za rad centralnog algoritma, za potrebe potencijalnih proširenja. Algoritmi poput Brentovog algoritma i Mulerovog metoda su implementirani kao moguće metode za traženje nula u proširenom skupu funkcionalnosti. Mada za potrebe prikazanog postupka dokazivanja koji je opisan u okviru ove doktorske disertacije nije neophodno određivanje nula kompleksnih vrednosti, klasa za kompleksne vrednosti je implementirana za potrebe Mulerovog metoda.

Na slici (5.4) je prikazan UML dijagram paketa *NaturalApproachAlgorithm*. Ovaj paket sadrži klase namenjene za tri uloge. Prva uloga je izvršavanje prikazanog algoritma. Ovo je realizovano kroz klasu *NaturalApproach*. Ona koristi objekte klasa *KValues* i *KValuesControler* za generisanje i skladištenje vektora  $k$  indeksa. Druga ulogu više objekti podpaketa *KValuesComparison* koji služe za implementacije raz-



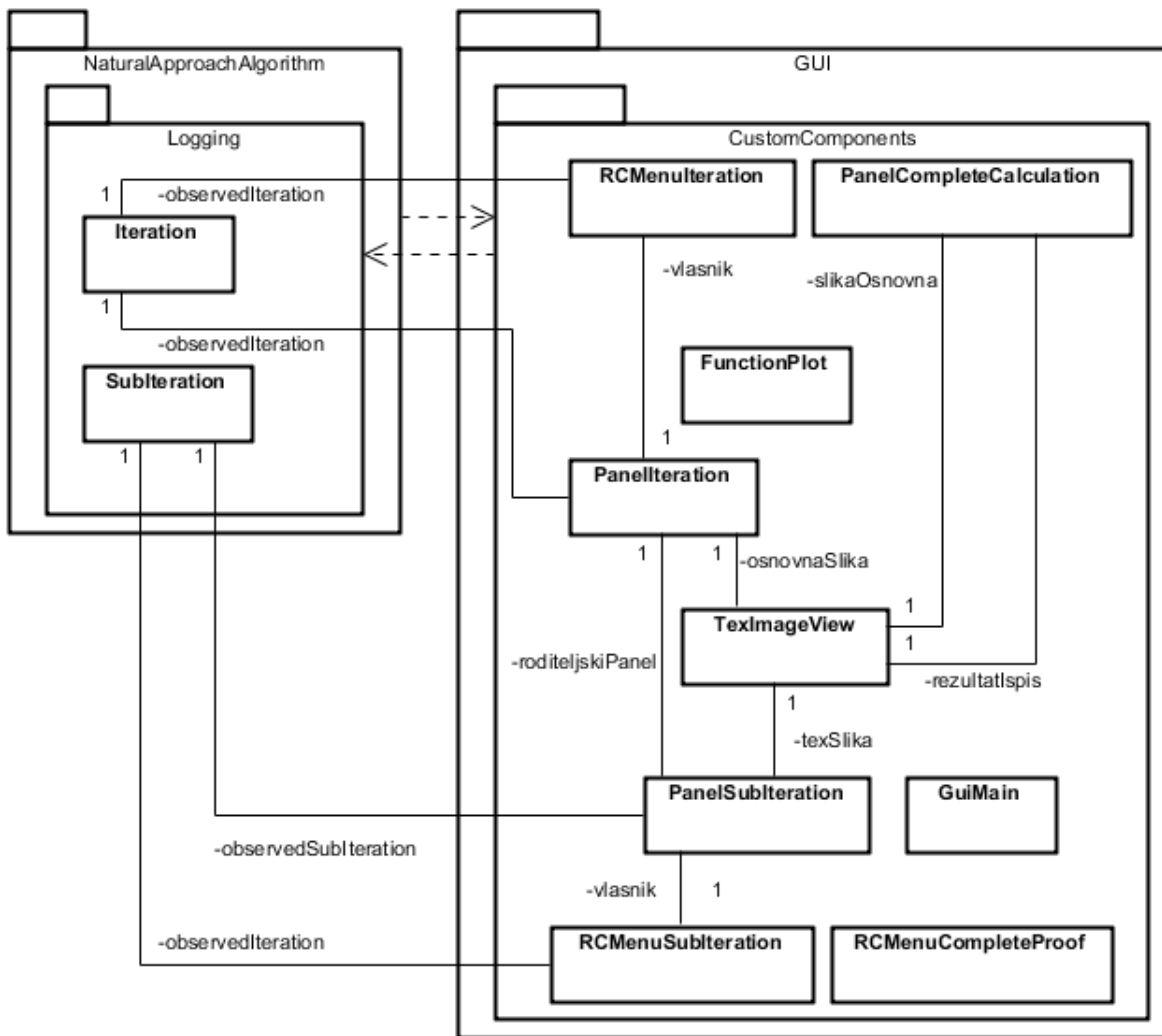
Slika 5.3: UML dijagram paketa *Polynomials*

ličityh poredaka koji su prethodno opisani. Poslednja uloga je beleženje rezultata rada algoritma. Objekti podpaketa *Logging* su kreirani da sačuvaju sve relevantne informacije o procesu dolaženja do dokaza početne hipoteze. Objekti ovih klasa su od izuzetnog značaja za grafički korisnički interfejs.



Slika 5.4: UML dijagram paketa *NaturalApproachAlgorithm*

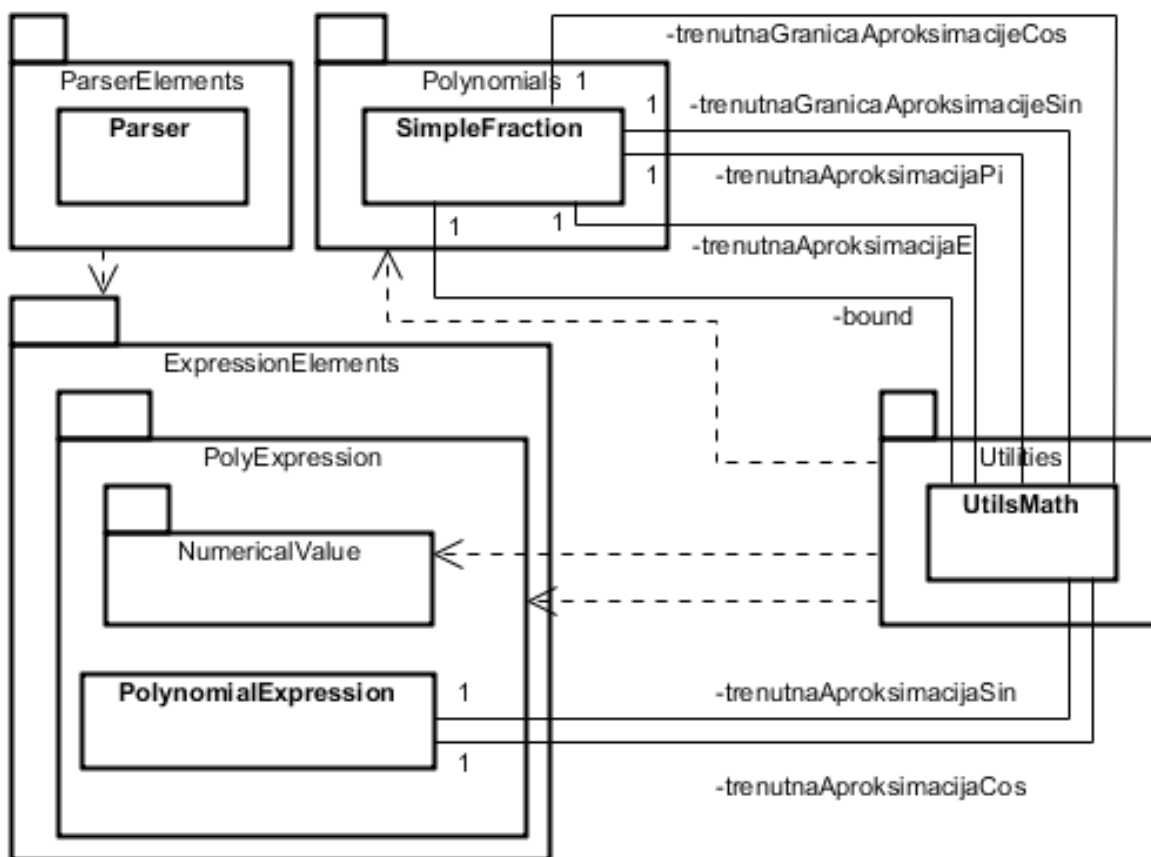
UML dijagram na slici (5.5) prikazuju paket *GUI* koji je namenjen za klase grafičkog korisničkog interfejsa (GUI - graphical user interface). *GUI* je baziran na *JavaFX* paketu. Većina klasa su izvedene iz standardnih panela ili menija za desni klik mišem uz dodatna proširenja kako bi omogućili prikaz matematičkih simbola prosleđenih u obliku Latex zapisa. Za to se pobrinula klasa *TexImageView* koja se oslanja na *JLatexMath* biblioteku.



Slika 5.5: UML dijagram paketa GUI

Poslednji paketi koji su prikazani slikom (5.6) su paketi *Utilities* i *Parser*. Mada ova dva paketa sadrže samo po jednu klasu, kreirani su kao paketi radi lakše organizacije i proširenja u budućim istraživanjima. Klasa *UtilsMath* sadrži neke matematičke konstante i često korišćene operacije. Klasa *Parser* je prvobitno razvijana korišćenjem biblioteke ANTLr, ali je naknadnim proučavanjem zaključeno da nije potrebno uvoditi dodatnu biblioteku za potrebe parsera koji ima veoma malu sintaksu.

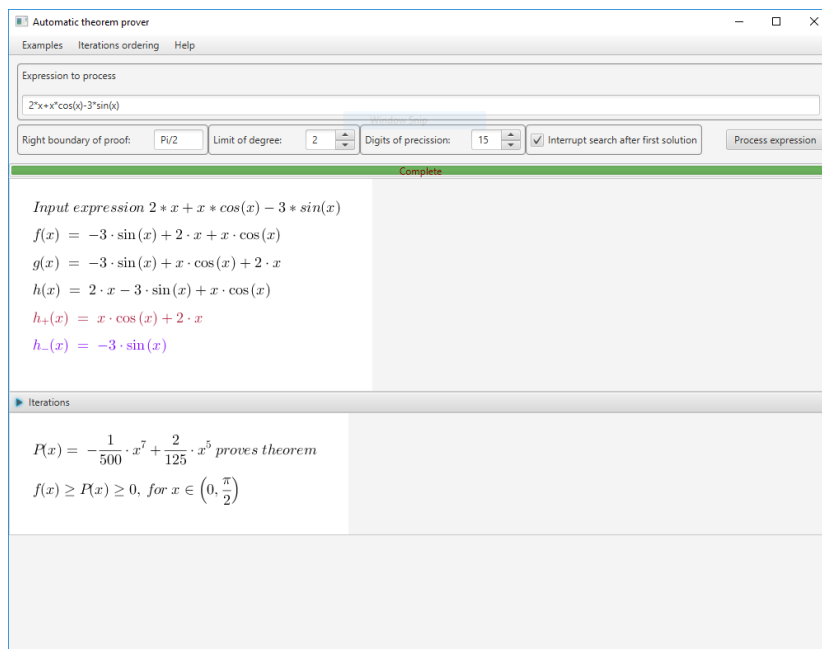




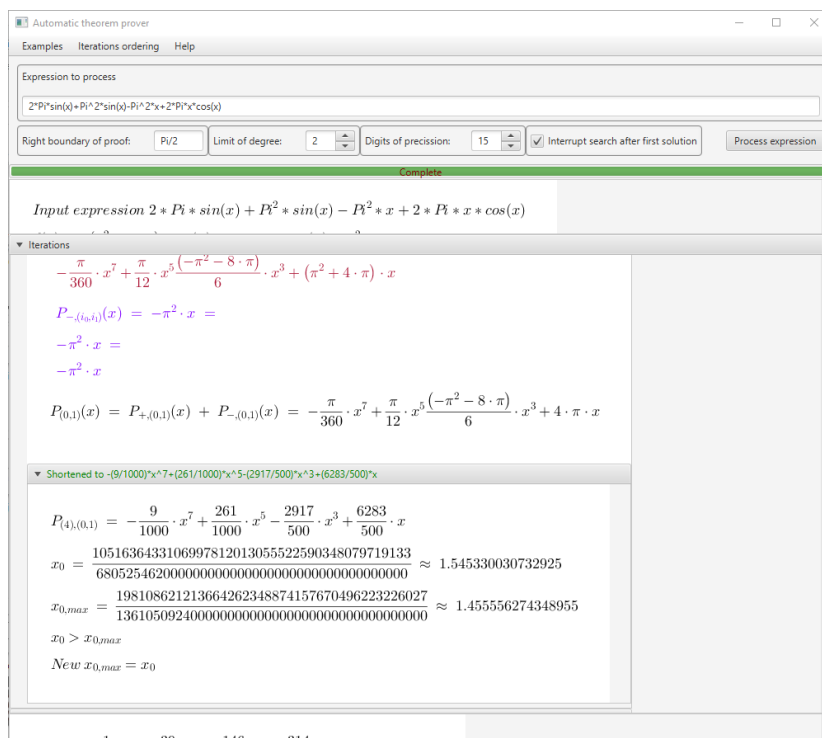
Slika 5.6: UML dijagram paketa *Utilities* i *Parser*

### 5.3 Grafički korisnički interfejs

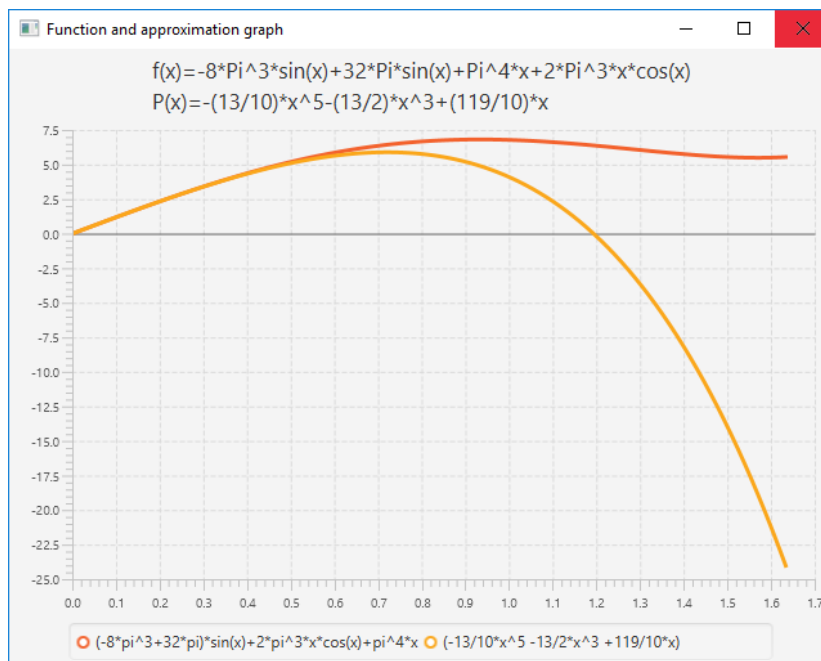
Slike 5.7, 5.8, 5.9, 5.8 prikazuju izgled grafičkog korisničkog okruženja aplikacije. Za korisnički interfejs je korišćen JavaFX kao dugoročno rešenje. Kontrole se sastoje iz polja upisa nejednakosti za koju se dokazuje  $f(x) > 0$  i kontrola za preciznost, granicu intervala dokaza, granicu Tejlorovih razvoja do kojih se vrši pretraga i polja koje odlučuje da li se pretraga prekida odmah nakon pronalaska dokaza. Ostatak grafičkih elemenata je realizovan kroz kolapsirajuće panele, kako bi se korisnicima smanjilo vizuelno zatrpavanje sadržajem ukoliko se neki od elemenata ne isčitava u tom momentu. Kodiranje informacija bojama je dodatno doprinelo čitljivosti dokaza. Ovo sve dovodi do toga da korisnici mogu lakše da koriste program čak i kada se prvi put sreću sa aplikacijom.



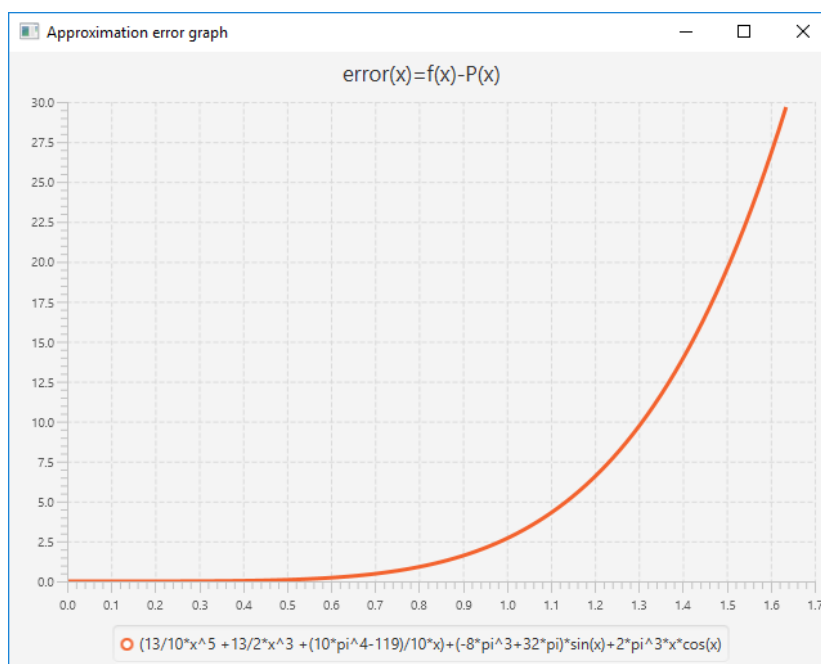
Slika 5.7: Glavni prozor aplikacije



Slika 5.8: Prikaz rezultata jedne poditeracije izvršavanja algoritma



Slika 5.9: Grafički prikaz aproksimacije i MTP funkcije



Slika 5.10: Grafički prikaz greške aproksimacije MTP funkcije

## 5.4 Performanse sistema

### 5.4.1 Automatski dokazivači primenjivi nad MTP problemima

U momentu pisanja ovog doktorata broj dokazivača koji su se bavili nejednakostima je bio vrlo ograničen. Ovo je posledica toga da je prostor pretrage za dokazom kod nejednakosti daleko širi nego za jednakosti. U primerima koji su prikazani u doktoratu [157] možemo videti da je za nejednakosti procedura daleko komplikovanija. Autori koji su radili na projektu dokazivanja Keplerovog otvorenog problema [158], koristeći dokazivač *HOL light*, prijavili su da im je bilo potrebno 5000 procesorskih sati za dokazivanje stotinak teorema koje su definisali, ali takođe da je bila neophodna dodatna upotreba aplikacije *Isabelle*. Neki automatski dokazivači teorema koji nisu kreirani za nejednakosti (poput spomenutog dokazivača *HOL*) mogu se upotrebljavati i za nejednakosti, ali je proces rada na njima onda u velikoj meri kompleksniji.

Jedan od ranijih automatskih dokazivača za nejednakosti je aplikacija *Bottema*. Ova aplikacija, koja je opisana u radovima [159]- [162], predviđena je za dokazivanje geometrijskih nejednakosti. Autori navode da su 1999. godine koristeći ovu aplikaciju rešili veliki broj otvorenih problema, ali i izveli čitav niz novih nejednakosti. Aplikacija je kreirana kao paket za sistem računarske algebre *Maple*, i nije samostalna aplikacija. Nažalost ova aplikacija nije javno dostupna, i projekat nije skoro objavljivao nove rezultate.

Sistem *Polya*, nazvan po Đorđu Polji (György Pólya), rezultat je master teze Roberta Luisa (Robert Y. Lewis) [163], [164]. Ovaj dokazivač koristi metode opisane u [157], kako bi dokazivao nejednakosti. Metod dokazivanja se veoma razlikuje od sistema *SimTheP*, ali je i klasa nejednakosti za koje je predviđen daleko šira. Kao osnova za koju se vrši poređenje performansi ovog dokazivača odabran je dokazivač *MetiTarski*, koji je za to korišćen i u okviru ovog doktorata. Sistem *Polya* ima svojih ograničenja koje je i sam autor dokumentovao, ali je javno dostupan (osnovna verzija pisana u programskom jeziku Python) i dobija rezultate koji su se mogli porediti sa *MetiTarskim*.

U momentu pisanja ovog doktorata, u oblasti automatskih dokazivača teorema za

MTP funkcije, najviše uspeha je pokazivao dokazivač *MetiTarski*. Ovaj program je razvijen u okviru dugoročnog istraživanja laboratorije univerziteta Kembridž. Lorens Polson (Lawrence C. Paulson), poznat po kreiranju automatskog dokazivača *Isabelle*, vođa je ovog projekta. Automatski dokazivač teorema *MetiTarski* je veoma dobar primer problematike sa kojom se sreću korisnici automatskih dokazivača. Jedna od najvećih mana, koju imaju *Polya* i *Bottema*, jeste da dokazi koji su dobijeni putem ovih aplikacija nisu ljudski čitljivi. Kako navodi autor rada [109] veoma često tumačenje dokaza dobijenih ovakvim tipom aplikacija zahteva jednaku količinu truda kao i dokazivanje bez upotrebe automatskih dokazivača.

## 5.4.2 Sistem za poređenje

Funkcionisanje dokazivača *MetiTarski* je detaljno opisano u radovima [165] - [171]. Osnovna ideja metoda po kojem funkcioniše *MetiTarski* je donekle slična principima funkcionisanja sistema prikazanog u ovom doktoratu. *MetiTarski* je automatski dokazivač teorema koji se oslanja na princip rezolucije, i pokušava da dođe do rešenja kontradikcijom. Može da funkcioniše nad ograničenim skupom specijalnih funkcija, i upotrebljava navišne i nanižne aproksimacije tih funkcija. Dokazivač je integracija nekoliko postojećih rešenja. Za prevod izraza se koristi kompajler *Poly/ML*. Kao osnova za rad se upotrebljava Metis, postojeća aplikacija, i neki od softvera za rad sa polinomima (koristi se teorija realnih zatvorenih polja) poput *Z3*, *QEPCAD* ili *Mathematica*. Dok su *Z3* i *QEPCAD* javno dostupni, *Mathematica* je komercijalna aplikacija što čini njenu upotrebu ograničenom. U radu [166] je naglašeno da se za upotrebu različitih softvera dobijaju različite mogućnosti, gde je za *Z3* moguće rešiti neke probleme koje nije moguće korišćenjem *QEPCAD* i obrnuto. Detalji razlika nisu definisani u literaturi.

Upotreba ove aplikacije je veoma komplikovana. Kako ne postoji grafički korisnički interfejs, već samo konzolno okruženje, već za prve pokušaje upotrebe neophodno je detaljno se upoznati sa sintaksom [167]. Dostupne su instalacije samo za *Linux* i *MacOS*. Pre toga je neophodno pripremiti prethodno navedene aplikacije na koje se *MetiTarski*

oslanja. Sintaksa koju korisnici moraju da koriste prilikom definisanja problema predstavlja opšte korišćen jezik TSTP. Mada ovaj način zapisa problema olakšava integraciju sa ostalim automatskim dokazivačima, ovo predstavlja prepreku za korisnike koji nisu detaljno zašli u oblast.

Još jedan problem na koji se nailazi pri upotrebi je potreba za definisanjem aksioma. Mada je jezik kojim se oni definišu sličan jeziku definisanja problema, korisnik mora poznavati koji aksiomi su mu neophodni za uspešno dokazivanje problema. Uz aplikaciju dolazi određeni skup aksioma koji su unapred pripremljeni, i korisnik može da ih uključi u svoje obrade. Mada skup aksioma zadovoljava osnovne potrebe, prilikom upotrebe je moguće pokušati da se dokaže nejednakosti za koju aksiomi nisu dovoljni. Uzmimo primer MTP funkcije  $f(x) = \sin(19x) + 2.5$ . Mada za ovu funkciju na osnovu definicije sinusne funkcije možemo dokazati da  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , na osnovu poglavlja 3.2.3 možemo znati da aksiomi koji idu uz *MetiTarski* nisu dovoljni za dokaz.

Dosta ograničenja programa prikazuju autori u radu [168]. Jedan primer je da, iako je realizovano dokazivanje nejednakosti koje sadrže funkcije poput sinusne i logaritamске funkcije, nejednakosti koje sadrže proizvod ovih funkcija nije moguće dokazati. *MetiTarski* takođe ima ograničenja numeričke prirode. Aplikacija je kreirana tako da ne očuvava simboličku prirodu vrednosti, već odmah po unosu vrši numeričku aproksimaciju. Po rečima autora, ako se želi dokazati da je  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, \pi)$ , najbolje je za ulaz staviti da  $f(x) > 0.0001$  za  $x \in (0, 3.141592)$ . Ovakva metoda dovodi u pitanje pouzdanost dokaza koji se oslanjaju na numeričku tačnost nakon čitavog niza transformacija i računskih operacija. Na osnovu dostupne literature o *MetiTarskom* možemo doći do zaključka da aplikacija nije uspešna za sve elemente neke određene klase funkcija poput klase MTP funkcija. Mada su navedene desetine problema na kojima je dokazivač dao rezultate, navedeno je i da neke probleme jednostavno ne može da reši zbog ograničenja aplikacija na kojima je baziran.

Problem koji se javlja nakon uspešnog dokazivanja neke nejednakosti je čitljivost rezultata. Uzmimo primer dokazivanja da  $f(x) = -(\pi^2 x^2 + 6\pi^2 - 6x^2) \sin x + 6x\pi^2 - 6x^3 > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Kao rezultat rada aplikacije *MetiTarski* dobijamo dokaz od

4393 linija teksta, koji je predviđen jedino za mašinsku verifikaciju. Ovo je posledica kombinacije metoda na kom je zasnovana aplikacija i namere za integraciji u veće i opštije dokazivače.

Iako je naveden veliki broj ograničenja aplikacije *MetiTarski*, ova aplikacija ima veoma veliku primenu. U radovima [172] i [173] možemo videti primenu ovakvog dokazivača na dizajn analognih električnih kola. U radu [174] je prikazano kako jedan kontrolni sistem može da se verifikuje sa dokazivačem ovog tipa. NASA je uvela u svoj razvojni proces i upotrebu *MetiTarskog*, kao što je vidljivo u [175]. Neki od većih sistema dokazivača poput *KeYmaera* i *PVS* su počeli sa upotrebom *MetiTarskog* za klase nejednakosti koje može da obradi [171], [176]. Čak i neki opšti sistemi računarske algebre (CAS) poput *Sage-a* su počeli sa integracijom *MetiTarskog* u svoj sistem.

### 5.4.3 Performanse prikazane implementacije

U aplikaciji koja je deo ovog doktorata uvedena su neka unapređenja u odnosu na *MetiTarski*. Dok je *MetiTarski* komplikovan za instalaciju zbog potrebe da se instalira više aplikacija, *PAINT* je kreiran u programskom jeziku Java, pa je dovoljno da je instalirano Java izvršno okruženje. Korisnički interfejs je kreiran da bude intuitivan, i ne zahteva nikakvo predznanje specijalnih jezika. Korisnici ne moraju da sami postavljaju neophodne aksiome. Dokazi su čitljivi i veoma lako se mogu verifikovati.

Većina transformacija se vrši sa očuvanjem simboličkog oblika vrednosti, i ne dovodi do sumnje u vrednosti proračuna. Algoritam funkcioniše na celokupnoj klasi MTP funkcija, i program će uz dovoljno vremena moći da dođe do dokaza za svaku ispravnu nejednakost sa MTP funkcijom. Aplikacija može da radi i sa širom klasom funkcija koje se mogu svesti na MTP funkcije (poglavlje 3.3.3). Ova šira klasa u sebi sadrži i proizvode specijalnih funkcija, koje *MetiTarski* ne dozvoljava.

U tabeli 5.1 su upoređeni rezultati rada aplikacija *MetiTarski* i *PAINT*. Može se primetiti da je vreme pretrage za dokazom *MetiTarskog* u proseku nekoliko stotina puta duže naspram aplikacije *PAINT* za isti problem. Sva testiranja su izvršena na Intel i7 8700k procesoru, sa 16Gb ram memorije.

Tabela 5.1: Poređenje aplikacija *PAINT* i *MetiTarski*

MTP funkcija $f(x)$	$x \in (0, \delta)$	VP	VMT	VMT/VP	IP	LMT
$\sin^2 x \cos x$ $+x \sin x - 2x^2 \cos x$	$(0, \pi/2)$	0.079	4.176	52.86	44	4345
$x(2 + \cos x) - 3 \sin x$	$(0, 1)$	0.004	0.969	242.25	4	1432
$-2\pi^2 x + \pi^3 \sin x$ $-x(\pi^2 - 4x^2)$	$(0, 1)$	0.006	2.306	384.33	1	202
$\pi^3 x - 4\pi x^3 + 8x^3 - \pi^3 \sin x$	$(0, 1)$	0.01	0.361	36.1	4	284
$8\pi(\pi^2 - 4) \sin x$ $-x\pi^3(\pi + 2 \cos x)$	$(0, \pi/2)$	0.008	1.613	201.625	4	1293
$(2 + \pi) \sin x - x(\pi - 2 \cos x)$	$(0, \pi/2)$	0.028	0.679	24.25	4	1160
$2 \sin x - x - x \cos x$	$(0, \pi/2)$	0.001	0.545	545	2	268
$8x^5 \sin x - 45 \cos x \sin x^2$ $-45x \sin x + 90x^2 \cos x$	$(0, \pi/2)$	0.127	37.640	296.37	212	9872
$x - \sin x$	$(0, \pi/2)$	0.0004	0.292	730	2	133
$\pi - x^2 - \pi \cos x$	$(0, \pi/2)$	0.001	0.335	335	2	155
$\pi^2 \sin x + x^2 \sin x - x\pi^2 + x^3$	$(0, \pi/2)$	0.001	0.0.475	475	1	341
$2x + x \cos x - 3 \sin x$	$(0, \pi/2)$	0.005	0.937	187.4	4	1432
$(\pi^2 - 3x^2) \sin x$ $+(-\pi^2 t + x^3) \cos x$	$(0, \pi/2)$	0.011	0.573	52.09	3	811
$(\pi^2 x^2 - 2\pi^2 + 2x^2) \sin x$ $+x(2\pi^2 - 2x^2) \cos x$	$(0, \pi/2)$	0.063	1.355	21.50	13	1418
$((-\pi^2 + 6)x^2 - 6\pi^2) \sin x$ $-6x^3 + 6x\pi^2$	$(0, \pi/2)$	0.005	0.375	75	2	361
$(\pi^2 + x^2) \sin x - x\pi^2 + x^3$	$(0, \pi/2)$	0.007	0.454	60.85	2	341
$2x - x \cos x + 3 \sin x$	$(0, \pi/2)$	0.002	0.993	496.5	4	1432

Vrši se provera da je  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, \delta)$

VP - vreme izvršavanja proračuna u sekundama u aplikaciji *PAINT*

VMT - vreme izvršavanja proračuna u sekundama u aplikaciji *MetiTarski*

IP - iteracija u predloženom programu do rešenja

LMT - broj linija koda rešenja *MetiTarskog*



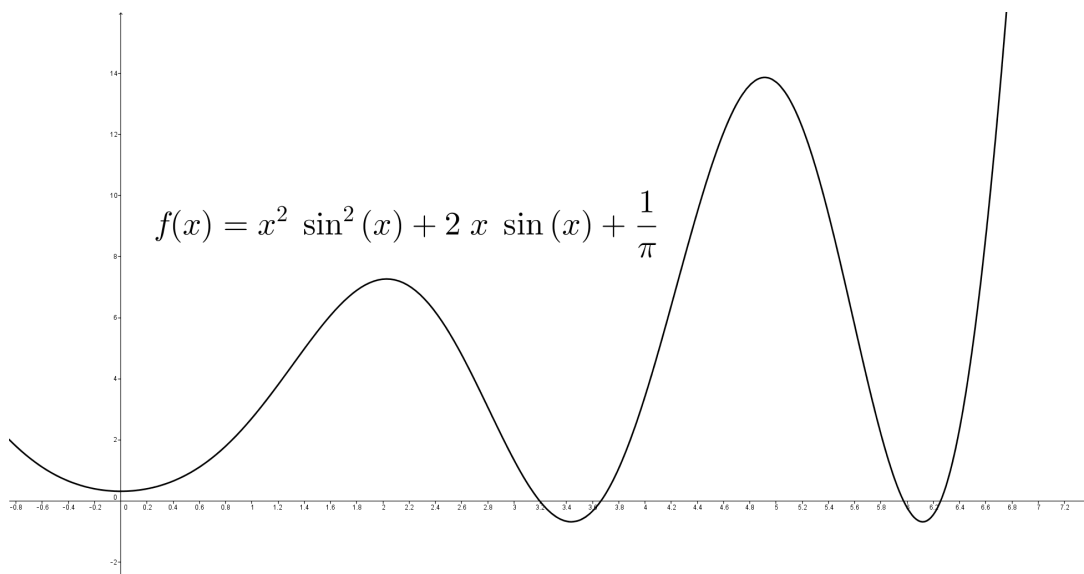
### 5.4.4 Poređenje sa sistemima računarske algebre

Nakon testiranja performansi sistema i poređenja sa rezultatima dobijenim upotrebom aplikacije *MetiTarski*, urađeno je i poređenje sa mogućnostima sistema računarske algebre. Kao sistemi sa kojima je izvršeno poređenje su uzeti *Wolfram Mathematica* [34], *WolframAlpha* [35] i *Maple* [32], veoma široko korišćeni sistemi na koje se pozivaju brojni autori. Nakon analize je zaključeno da ovaj tip aplikacija nije pogodan za dokazivanje MTP funkcija, što je ilustrovano sledećim primerom.

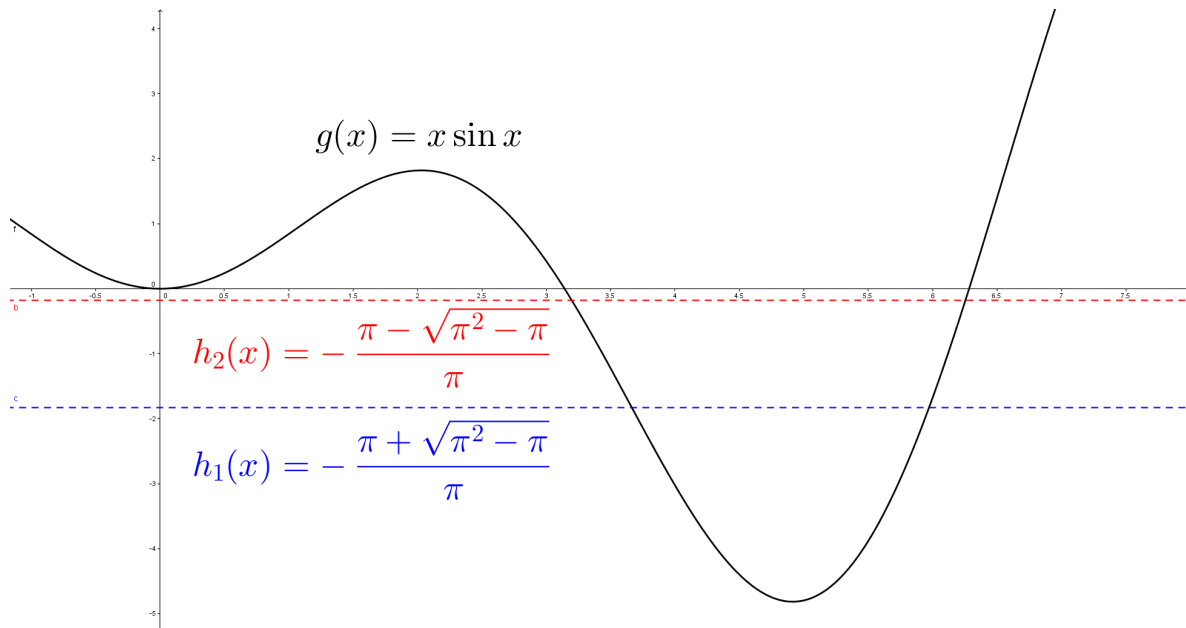
Pretpostavimo da želimo da dokažemo da je

$$f(x) = x^2 \sin^2 x + 2x \sin x + \frac{1}{\pi} > 0 \quad (5.1)$$

za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Na osnovu grafika 5.11 imamo hipotezu da je  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Ukoliko bi uveli smenu  $t = x \sin x$ , nejednakost 5.1 se može transformisati u  $f(t) = t^2 + 2t + \frac{1}{\pi} > 0$  za  $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Samim tim se može zaključiti da se nule funkcije  $f(x)$  iz 5.1 dobijaju u preseku funkcije  $t = g(x) = x \sin x$  sa  $t_1 = -\frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - \pi}}{\pi} \approx -1.87$  i  $t_2 = -\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - \pi}}{\pi} \approx -0.17$ , što je i prikazano na grafiku 5.12. Očigledno je  $g(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , čime je polazna nejednakost tačna.



Slika 5.11: Grafik funkcije  $f(x) = x^2 \sin^2 x + 2x \sin x + \frac{1}{\pi}$



Slika 5.12: Grafik funkcija  $g(x) = x \sin x$  sa  $t_1 = -\frac{\pi - \sqrt{\pi^2 - \pi}}{\pi}$  i  $t_2 = -\frac{\pi + \sqrt{\pi^2 - \pi}}{\pi}$

Ukoliko probamo da ovaj primer nejednakosti koja pripada klasi MTP nejednakosti dokažemo primenom aplikacije *Wolfram Mathematica*, nailazimo na poteškoće. Pokušaj dobijanja simboličkog oblika rešenja nejednakosti, kako bi bili sigurni u ispravnost bez mogućnosti numeričke greške, rezultuje time da nas aplikacija obaveštava da nije moguće da izvrši ovakav proračun metodama koje su njoj dostupne. U cilju da joj se olakša posao, moguće je redukovati opseg na kome aplikacija traži rešenje i da se samo vrši pretraga za realnim rešenjima. Ipak, u tom slučaju aplikacija vraća intervale važenja nejednakosti definisane kao numeričke vrednosti. Aplikacija ne nudi nikakve garancije u ispravnost opsega, ili mogućnost verifikacije rezultata.

Testiranje je izvršeno nad svim primerima iz 4.4 u sve tri aplikacije. Prvi način dokazivanja je da se od aplikacije traži da nađe podinterval u intervalu važenja nejednakosti za koji važi da  $f(x) \leq 0$  (ili  $f(x) < 0$  ako je u polaznoj nejednakosti  $f(x) \geq 0$ ). Pri tom, ako je  $f(x) > 0$  za  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , od razmatranih aplikacija se očekuje odgovor da ne važi  $f(x) \leq 0$  ni za jedno  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Drugi metod testiranja je pretraga za korenima funkcije  $f(x)$  nad intervalom važenja testirane nejednakosti. Aplikacija *Wolfra-*

*mAlpha* je upotrebom prvog metoda testiranja prikazala da nejednačina važi nad celim intervalom za 60 od 75 primera. Upotrebom aplikacije *Mathematica* se dobijaju bolji rezultati. Primenom oba metoda testiranja ova aplikacija je pokazala ispravnost nejednakosti u 65 od 75 slučajeva. Aplikacija *Maple* je prilagođenija za testiranje upotrebom drugog metoda, i dala je rezultate za sve nejednakosti, ali je u 10 slučajeva utvrdila netačnost posmatrane nejednakosti. Ovi slučajevi se mogu pripisati numeričkoj grešci koja se vezuje za preciznost proračuna koja se zahteva od aplikacije *Maple*.

Naknadno je urađeno testiranje da li aplikacije za nejednačine  $f(x) < 0$  može da utvrdi interval validnosti bez unapred definisanog intervala pretrage. Aplikacija *Mathematica* je za sve upite definisala da pokušani metodi ne mogu da reše postavljenu nejednačinu. Aplikacija *Maple* je prikazala rešenja u obliku MTP jednačine koju treba rešiti, dok je za određeni broj rešenja napomenula da je moguće da su neka rešenja propuštena. Aplikacija *WolframAlpha* je dala veliki broj ispravnih rezultata, ali je u pojedinim slučajevima davala netačne vrednosti. Primer toga je da ukoliko se traži od nje da dokaže primer 4.17 *WolframAlpha* tražeći intervale na kojima ova nejednakost ne važi, dobija se da ne postoji nijedan interval gde je  $f(x) < 0$  što nije tačno za  $x > \frac{\pi}{2}$ .

Potrebno je napomenuti da vremena izvršavanja ovih provera nisu beležena pošto su veoma podložna varijacijama. Takođe, sistemi koji se izvršavaju na serverskoj strani, poput *WolframAlpha* imaju ograničeno vreme za proračune i u slučaju da se ovo vreme prekorači vrši se prekid rada programa. Mada nije bilo proračuna dužih od petnaest sekundi, za većinu je bilo potrebno više sekundi, što u velikoj meri prevazilazi vreme potrebno aplikaciji *PAINT*. Koraci izvršavanja su takođe bili veoma retko dostupni, a čitljivost i mogućnost verifikacije dotičnih koraka izuzetno slaba, što je jedna od osnovnih prednosti upotrebe sistema *SimTheP*.

Napomenimo da je izbor MTP nejednakosti 5.1 takav da ona očigledno važi i na širem intervalu  $x \in (0, \pi)$  pošto je posmatrana MTP funkcija zbir tri funkcije pozitivne za  $x \in (0, \pi)$ . Ovu činjenicu aplikacija *Mathematica* ne prepoznaje, dok je aplikacija *PAINT* koja implementira sistem *SimTheP* dokazuje.

Ovo navodi na zaključak da su aplikacije poput aplikacije *Mathematica* veoma

dobro za verifikaciju rezultata dobijenih nekim od dokazivača, ali nisu upotrebljive za samostalno dokazivanje MTP klase nejednakosti. Ovo je i za očekivati na osnovu prethodno razmatranih rezultata Ričardsona, Vanga i Lackovića, koji proučavaju neodlučivost traženja nula nad generalnom klasom realnih analitičkih funkcija.

## Glava 6

# Zaključak i dalji pravci istraživanja

Dokazivanje nejednakosti je veoma popularna oblast istraživanja tokom prethodne dve decenije. Postojanje stručnih časopisa koji su specijalizovani za ovu oblast i velika industrijska primena je doprinela značajnijem istraživanju u ovoj oblasti. Kako postoji potreba za dokazima određenih nejednakosti i u industrijskom okruženju, gde nisu uvek dostupni eksperti iz ove oblasti, prirodno se javlja potreba za automatizovanim softverom koji rešava ovaj problem. Nažalost, većina aplikacija nije kreirana za ovakvu upotrebu već isključivo kao pomoćno sredstvo u teorijskoj matematici.

Glavni cilj ovog doktorata je definisanje celokupnog sistema dokazivanja jedne klase analitičkih nejednakosti. Klasa miksovano trigonometrijsko polinomskih funkcija predstavlja klasu koja se veoma često sreće u naučnim radovima. Definisanje metoda dokazivanja ove klase funkcija je imalo svoje izazove.

- Prvi problem koji je prikazan u ovom doktoratu je problem traženja nula polinomske funkcije sa koeficijentima oblika:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=0}^n z_i \pi^i}{\sum_{j=0}^m \hat{z}_j \pi^j}.$$

Mada su poznati algoritmi za pretragu za realnim rešenjima takvih polinomskih funkcija, numerički postupci koji daju realna rešenja često su neupotrebljivi u svrhu dokaza. Da bi se ovo izbeglo, i verifikovala sigurnost rada dokazivača u

ovom koraku, definisan je novi algoritam koji je zasnovan na upotrebi Šturmove teoreme nad nanižnom polinomskom aproksimacijom sa racionalnim koeficijentima zaokruženim od polaznih na manji broj decimala.

- Razmotren je i problem definisanja nanižne aproksimacije polinomske funkcije. Razmatrajući problem preciznosti aproksimacije nekih iracionalnih vrednosti prilikom prelaska sa simboličkih transformacija u numerička izračunavanja u okviru polinomskih funkcija, dolazi se do zaključka da je jedini način prevazilaženja ove problematike oslanjanje na nanižnu aproksimaciju polinomske funkcije. Ovo se postiže smanjivanjem broja decimala korišćenjem algoritma koji je za tu svrhu definisan.
- Problem koji je do sada zanemarivan u literaturi jeste definisanje intervala ispravnosti polinomskih aproksimacija Tejlorovih razvoja. U okviru doktorata je dat algoritam za definisanje minimalnog stepena Tejlorovog razvoja neophodnog za važenje aproksimacije nad celim intervalom dokazivanja. Takođe je prikazan algoritam koji prevazilazi probleme koji nastaju stepenovanjem Tejlorovih razvoja parnim stepenima.
- Definisana su i pravila za generisanje nanižne aproksimacije na osnovu miksovano trigonometrijsko polinomske funkcije.

Nakon svega ovoga je definisan glavni sistem za automatsko dokazivanje MTP nejednakosti. U okviru sistema je definisan niz slučajeva koji mogu da predstavljaju problem (poput netačne hipoteze, ili loše izabranih korisničkih podešavanja) kako bi se obezbedila stabilnost rada algoritma. Algoritam koji je definisan u okviru ovog doktorata je u prednosti na postojeća rešenja na osnovu činjenice da funkcioniše za kompletnu klasu miksovano trigonometrijsko polinomskih funkcija, ali i toga da u slučaju da nije moguće da se nađe dokaz zbog neispravnosti hipoteze, algoritam vraća parcijalni dokaz nad oblašću u kojoj hipoteza važi. Dodatno su prikazana neka proširenja osnovnih algoritama kako bi ceo sistem radio i na široj klasi funkcija.

Značaj jednog ovakvog sistema se ogleda u velikom broju naučnih radova koji se mogu verifikovati korišćenjem implementacije ovog sistema. U okviru ovog rada je dato sedamdeset pet primera nejednakosti koje se mogu dokazati primenom prikazanih algoritama. Zalazeći dublje u problematiku automatskih dokazivača teorema možemo primetiti da prikazano rešenje ima još neke prednosti. Pored bitno boljih performansi koje su jasno vidljive nakon poređenja sa trenutno vodećim automatskim dokazivačem u ovoj oblasti, može se primetiti da su dokazi dobijeni na ovakav način daleko lakši za verifikaciju i čitljiviji za korisnike. Umesto dokaza koji se sastoji od više hiljada mašinski generisanih koraka, dobija se niz od desetak koraka koji uglavnom predstavljaju transformacije trigonometrijskih funkcija ili prostih računskih operacija. Ovo čini ovakvo rešenje daleko prihvatljivijim za industrijske primene, ali i interdisciplinarnu naučnu primenu.

Mada je jedna faza ovog istraživanja zaokružena, postoji veliki broj pravaca za dalje unapređivanje. Sinusna i kosinusna funkcija su predstavljale izazov zbog svoje periodičnosti. Uzevši u obzir da je algoritam moguće proširiti da uključuje druge tipove realnih analitičkih funkcija, postoji veoma velika mogućnost za dalja istraživanja u tom pravcu. Uvođenje šire klase vrednosti za koeficijente

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n z_i \pi^{p_i} e^{q_i} \sqrt{y_i}}{\sum_{j=1}^m \hat{z}_j \pi^{\hat{p}_j} e^{\hat{q}_j} \sqrt{\hat{y}_j}}.$$

gde su  $z_i, \hat{z}_j \in Z$ ,  $y_i, \hat{y}_j \in N$  a  $p_i, \hat{p}_j, q_i, \hat{q}_j \in N_0$  svakako bi omogućilo širu upotrebu. Nešto kompleksniji pravac istraživanja je upotreba složenih analitičkih funkcija, iako su neki počeci tog istraživanja već prikazani u doktoratu. Na kraju, moguće je istraživanje usmeriti i na dokazivanje nejednakosti iz ovih klasa koje uključuju upotrebu više promenljivih. Pored proširenja mogućnosti sistema za dokazivanje, neki dalji pravac istraživanja predstavlja i povezivanje prikazanog sistema sa primenama u inženjerskoj struci. Do sada su razmatrane primene na dizajn filtera u telekomunikacijama, dizajnu električnih kola, ali i u robotici. Dalje primene će se tek prikazati u budućnosti.

Ceo sistem i aplikacija su kreirani sa ciljem da budu korisni za istraživače svih nauka. Istraživači iz teorijske matematike će u njemu moći da vide alat za lakše istraživanje, a istraživači van matematičkih disciplina će moći da postavljaju temelje svojih teorija uz daleko manje sumnje u ispravnost matematike koju upotrebljavaju.



# Literatura

- [1] B. Banjac, M. Makragić, B. Malešević: *Some notes on a method for proving inequalities by computer*, Results in Mathematics, Volume 69, Issue 1 (2016),pp. 161-176
- [2] B. Malešević, B. Banjac, I. Jovović: *A proof of two conjectures of Chao-Ping Chen for inverse trigonometric functions*, Journal of Mathematical Inequalities, Volume 11, Number 1 (2017), 151-162
- [3] Branko Malešević, Tatjana Lutovac, Bojan Banjac: *One method for proving some classes of exponential analytical inequalities*, Arxiv preprint, [arxiv.org/abs/1802.02082](https://arxiv.org/abs/1802.02082)
- [4] Banjac Bojan, Marija Nenezić, Branko Malešević: *Some applications of  $\lambda$ -method for obtaining approximation in filter design*, Zbornik radova sa 22. Telekomunikacionog foruma Telfor (2014), Beograd, pp. 1003-1006
- [5] B. Malešević, T. Lutovac, B. Banjac: *A proof of an open problem of Yusuke Nishizawa for a power-exponential function*, Journal of Mathematical Inequalities, Volume 12, Number 2 (2018),pp. 473-485, doi:10.7153/jmi-2018-12-35
- [6] Bojan Banjac, Tatjana Lutovac i Branko Malešević: *On Some Inequalities That Can Be Reduced To Proving Mixed Trigonometric Inequalities*, The First Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, Novi Sad (2016)

- [7] B. Banjac, T. Lutovac, B. Malešević i N. Marković: *Kuzina minimaks aproksimacija*, The Second Conference on Mathematics in Engineering: Theory and Applications, Novi Sad (2017)
- [8] Branko Malešević, Tatjana Lutovac, Marija Rašajski, Bojan Banjac: *Automated proving of some inequalities involving trigonometric, inverse trigonometric and exponential functions*, Srpski matematički kongres 2018
- [9] Norma B. Goethe, Philip Beeley, David Rabouin (editors): *G.W. Leibniz, Interrelations Between Mathematics and Philosophy*, Springer (2015), ISBN 978-94-017-9663-7, DOI 10.1007/978-94-017-9664-4
- [10] Roger L. Cooke: *The History Of Mathematics: A Brief Course*, John Wiley & Sons (2013), 3rd edition, ISBN 978-1-118-21756-6
- [11] Hardy Grant, Israel Kleiner: *Turning Points in the History of Mathematics*, Birkhäuser (2015), ISSN 2296-4568, ISBN 978-1-4939-3263-4, DOI 10.10.1007/978-1-4939-3264-1
- [12] Martin Davis: *Engines of logic: Mathematicians and the Origin of Computer*, W W Norton & Company, Inc.(2000), ISBN 0-393-04785-7
- [13] David M. Burton: *The History of Mathematics: An Introduction*, McGraw-Hill Book Company (2011), 7th edition, ISBN 978-0-07-338315-6
- [14] Alfred North Whitehead, Bertrand Russel: *Principia Mathematica, Volume I*, Cambridge University Press (1963), 2nd edition
- [15] Alfred North Whitehead, Bertrand Russel: *Principia Mathematica, Volume II*, Cambridge University Press (1963), 2nd edition
- [16] Alfred North Whitehead, Bertrand Russel: *Principia Mathematica, Volume III*, Cambridge University Press (1963), 2nd edition

- [17] Kurt Gödel: *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, Dover (1992), ISBN 0-486-66980-7
- [18] A. M. Turing: *On Computable Numbers, With An Application To The Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, Volume s2-42, Issue 1 (1937), DOI <https://doi.org/10.1112/plms/s2-42.1.230>
- [19] Carl B. Boyer and Uta Merzbach: *A history of mathematics*, John Wiley & Sons (2011), 3rd edition, ISBN 978-0-470-52548-7
- [20] Donald J. Monk: *Mathematical Logic*, Springer - Verlag (1976), ISBN 0-387-90170-1
- [21] Jon Barwise (editor): *Handbook Of Mathematical Logic*, North-Holland (1999), 9th edition, ISBN 0-444-86388-5
- [22] Edna E. Reiter, Clayton Matthew Johnson: *Limits of computation: An Introduction to the Undecidable and the Intractable*, CRC Press (2013), ISBN:978-1-4398-8206-1
- [23] Alfred Tarski, Andrzej Mostowski, Raphael M. Robinson: *Undecidable theories*, North-Holland publishing company (1971), 3rd edition, ISBN:0720422469
- [24] Martin Davis: *Computability & Unsolvability*, McGraw-Hill Book Company (1958)
- [25] Alonzo Church: *An Unsolvble Problem of Elementary Number Theory*, American Journal of Mathematics, Vol. 58, No. 2. (Apr., 1936), pp. 345-363
- [26] Alonzo Church: *A Note on the Entscheidungsproblem*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 1, No. 1. (Mar., 1936), pp. 40-41
- [27] Daniel Richardson: *Some Undecidable Problems Involving Elementary Functions of a Real Variable*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 33, No. 4 (Dec, 1968), pp. 514-520

- [28] Paul S. Wang: *The undecidability of the existence of zeros of real elementary functions*. J. Assoc. Comput. Mach. 21 (1974), pp. 586-589
- [29] Miklós Laczkovich: *The removal of  $\pi$  from some undecidable problems involving elementary functions*. Proceedings Of The American Mathematical Society 131 (2003), pp. 2235-2240
- [30] H.-W. Alten, A. Djafari Naini, M. Folkerts, H. Schlosser, K.-H. Schlote, H. Wuing: *4000 Jahre Algebra: Geschichte, Kulturen, Menschen*, Springer (2003), ISBN 978-33540-43554-9, DOI 10.1007/978-3-540-85551-4
- [31] Sándor Czirbusz: *Computer Algebra Systems: Introduction and Historical Review*, Lecture notes at Department of Computer algebra Informatics Institute, ELTE, <http://compalg.inf.elte.hu/~czirbusz/teaching/compalgsys/Introduction.pdf>
- [32] Michael B. Monagan Keith O. Geddes, K. Michael Heal, George Labahn, Stefan M. Vorkoetter, James McCarron, Paul DeMarco: *Maple 10 Programming Guide*, Maplesoft, Waterloo ON, Canada
- [33] André Heck: *Introduction to Maple*, 3rd edition, Springer (2003), ISBN 978-1-4612-6505-4
- [34] Stephen Wolfram: *The Mathematica Book*, Wolfram Research Inc. (2000)
- [35] Wolfram—Alpha (2019). retrieved January 4. 2019, from <http://www.wolframalpha.com/>
- [36] *Symbolic Math Toolbox version 8.0.0*, The MathWorks Inc. (2017), Natick, Massachusetts
- [37] Wieb Bosma, John J. Cannon, Catherine Playoust: *The Magma algebra system. I. The user language*, Journal of Symbolic Computation, vol. 24, Number 3–4, pp. 235–266

- [38] Richard D. Jenks, Robert S. Sutor: *Axiom - The Scientific Computation System*, Springer-Verlag (1992)
- [39] CoCoATeam, *CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra*, <http://cocoa.dima.unige.it>
- [40] The GAP Group: *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*, (2003), <http://www.gap-system.org>
- [41] M. E. Pohst et al: *The Computer Algebra System KASH/KANT*, <http://www.math.tu-berlin.de/kant>
- [42] Daniel R. Grayson, Michael E. Stillman: *Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry*, <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/>
- [43] David Joyner: *OSCAS: Maxima*, ACM Commun. Comput. Algebra, September-December 2006, vol. 40, number 3-4 (2006), pp. 108–111, ISSN 1932-2240, DOI 10.1145/1279721.1279726,
- [44] The Sage Developers: *SageMath, the Sage Mathematics Software System*, <http://www.sagemath.org>,
- [45] G.-M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann: *Singular 2.0*, Centre for Computer Algebra (2001), University of Kaiserslautern, <http://www.singular.uni-kl.de>
- [46] S. Veigneau: *ACE, an Algebraic Combinatorics Environment for the computer algebra system MAPLE*, Université de Marne-la-Vallée, Institut Gaspard-Monge, CNRS (1998)
- [47] D.P. Jacobs, *The Albert Nonassociative Algebra System: A Progress Report*, Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC-94), 41-44, Oxford, England (July, 1994)

- [48] R. Hemmecke, E. Hillgarter, F. Winkler: *CASA*, in "Handbook of Computer Algebra: Foundations, Applications, Systems", J.Grabmeier, E.Kaltofen, V.Weispfenning (eds.),pp. 356-359, Springer-Verlag (2003)
- [49] Geck Meinolf, Hiss Gerhard, Lübeck Frank, Malle Gunter, Pfeiffer Götz: *CHEVIE—a system for computing and processing generic character tables*, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, vol. 7 number 3. (1996), pp. 175–210
- [50] Klioner, S.A.: *New system for indicial computation and its applications in gravitational physics*, *Computer Physics Communications*, vol. 115 (1998), pp. 231-244
- [51] J. Apel and U. Klaus: *FELIX - an Assistent for Algebraists*, *Proc. ISSAC'91* , ACM-Press (1991), pp. 382 - 389
- [52] Leonard H. Soicher: *The GRAPE package for GAP*, <http://www.maths.qmul.ac.uk/~leonard/grape/>
- [53] Jasper Cramwinckel, Erik Roijackers, Reinald Baart, Eric Minkes, Lea Ruscio, David Joyner: *GUAVA, a GAP package for computing with error-correcting codes*, <http://www.gap-system.org/Packages/guava.html>
- [54] LiDIA-Group: *LiDIA – A Library for Computational Number Theory*, TU Darmstadt (2002), <http://www.informatik.tu-darmstadt.de/TI/LiDIA/Welcome.html>
- [55] Marc A. A. van Leeuwen, Arjeh M. Cohen, Bert Lisser: *LiE, A package for Lie group computations*, *Computer Algebra Nederland* (1992), Amsterdam
- [56] R. Grund, A. Kerber, R. Laue: *MOLGEN, ein Computeralgebra-System fr die Konstruktion molekularer Graphen. (MOLGEN - a computer algebra system for the construction of molecular graphs).*, *Match*, vol. 27 (1992), pp. 87-131

- [57] P. Lescanne: *Implementation of Completion by Transition Rules + Control: ORME*, Alp2 (1990), vol. 463, pp. 262-269
- [58] P. Lescanne: *ORME, an Implementation of Completion Procedures as Sets of Transitions Rules*, Cade10 (1990), pp. 661-662
- [59] E. Aichinger, F. Binder, J. Ecker, P. Mayr, C. Nöbauer: *SONATA - system of near-rings and their applications, GAP package, Version 2*, (2003), <http://www.algebra.uni-linz.ac.at/Sonata/>
- [60] Nigel Boston: *Applications of Algebra to Communications, Control, and Signal Processing*, Springer (2012), ISBN 978-1-4614-3862-5, DOI 10.1007/978-1-4614-3863-2
- [61] Richard H. Enns, George C. McGuire: *Computer Algebra Recipes An Advanced Guide to Scientific Modeling*, Springer (2007), ISBN 978-387-25768-6
- [62] N. P. Karampetakis, A. I. G. Vardulakis: *Special issue on the use of computer algebra systems for computer aided control system design*, Editorial, International Journal of Control, Vol. 79, No. 11, November 2006, pp. 13131320, DOI: 10.1080/00207170600882346
- [63] T. Güyer: *Computer Algebra Systems as the Mathematics Teaching Tool*, World Applied Sciences Journal (3:1)(2008), pp. 132-139
- [64] Neil Marshall, Chantal Buteau, Daniel H. Jarvis, Zsolt Lavicza: *Do mathematicians integrate computer algebra systems in university teaching? Comparing a literature review to an international survey study*, Computers and Education, Volume 58, Issue 1, January 2012, pp. 423-434, doi:10.1016/j.compedu.2011.08.020
- [65] Joachim von zur Gathen, Jürgen Gerhard: *Modern Computer Algebra*, Third Edition, Cambridge University Press (2013), ISBN 978-1-107-03903-2

- [66] Joel S. Cohen: *Computer algebra and symbolic computation: mathematical methods*, A. K. Peters (2003), ISBN 1-56881-159-4
- [67] Philip N. Klein: *Coding the Matrix: Linear Algebra through Applications to Computer Science*, Newtonian Press (2013), ISBN 978-0615880990
- [68] Antonio J. Duran, Mario Perez, Juan L. Varona: *The misfortunes of a trio of mathematicians using Computer Algebra Systems. Can we trust in them?*, Notices Amer. Math. Soc. 61 (2014),pp. 1249-1252
- [69] Michael Wester: *A Critique of the Mathematical Abilities of CA Systems*, Computer Algebra Systems: A Practical Guide, John Wiley & Sons (1999), United Kingdom, ISBN 0-471-98353-5
- [70] Hans J. Stetter: *Algebraic Predicates for Emirical Data*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 4th International Workshop, Springer (2001), ISBN 978-3-642-62684-5
- [71] Volker Weispfenning: *Solving Linear Differential Problems with Parameters*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 8th International Workshop, Springer (2005), ISBN 978-3-540-28966-6
- [72] Wilhelm Plesken and Daniel Robertz: *Some Elimination Problems for Matrices*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 10th International Workshop, Springer (2007), ISBN 978-3-540-75186-1
- [73] Natasha Malaschonok: *An Algorithm for Symbolic Solving of Differential Equations and Estimation of Accuracy*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 11th International Workshop, Springer (2009), ISBN 978-3-642-04102-0
- [74] Valentin Irtegov, Tatjana Titorenko: *An Algorithm for Symbolic Solving of Differential Equations and Estimation of Accuracy*, Computer Algebra in Scientific



- Computing, Proceedings from 12th International Workshop, Springer (2010), ISBN 978-3-642-15273-3
- [75] Sergey Abrahamyan, Melsik Kyureghyan: *A Recurrent Method for Constructing Irreducible Polynomials over Finite Fields*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 13th International Workshop, Springer (2011), ISBN 978-3-642-23567-2
- [76] Severin Neumann: *Parallel Reduction of Matrices in Gröbner Bases Computations*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 14th International Workshop, Springer (2012), ISBN 978-3-642-32972-2
- [77] Victor Y. Pan: *Polynomial Evaluation and Interpolation and Transformations of Matrix Structures*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 15th International Workshop, Springer (2013), ISBN 978-3-319-02296-3
- [78] Georg Grasegger, Alberto Lastra, J. Rafael Sendra, Franz Winkler: *On Symbolic Solutions of Algebraic Partial Differential Equations*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 16th International Workshop, Springer (2014), ISBN 978-3-319-10514-7
- [79] Doru Ştefănescu: *A New Polynomial Bound and Its Efficiency*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 17th International Workshop, Springer (2015), ISBN 978-3-319-24020-6
- [80] Amir Hashemi, Delaram Talaashrafi: *A Note on Dynamic Gröbner Bases Computation*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 18th International Workshop, Springer (2016), ISBN 978-3-319-45640-9
- [81] Lihong Zhi: *Computing Multiple Zeros of Polynomial Systems: Case of Breadth One*, Computer Algebra in Scientific Computing, Proceedings from 19th International Workshop, Springer (2017), ISBN 978-3-319-66319-7

- [82] Mili R. Castelló. : *Theorem Provers Survey*, The University of Texas at Dallas (1998), [http://www.cs.utexas.edu/~ragerdl/cs378/reading/Castello\\_-\\_Theorem\\_Provers\\_Survey.pdf](http://www.cs.utexas.edu/~ragerdl/cs378/reading/Castello_-_Theorem_Provers_Survey.pdf)
- [83] Filip Marić: *A Survey of Interactive Theorem Proving*, Zbornik radova 18(26) (2015), pp. 173-223. <http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/zr/26/zrn26p173-223.pdf>
- [84] John Harrison: *A Survey of Automated Theorem Proving*, PDMI Computer Science Club mini-course, lecture notes, St. Petersburg, Russia, <http://www.cl.cam.ac.uk/~jrh13/slidesstpetersburg-28sep13/slides.pdf>, 28-29 September 2013
- [85] J. C. B. In Kovács, A. L. Voronkov: *My life with an automatic theorem prover*, First and Second Vampire Workshops (Vampire 2014 and 2015), EPiC 38 (2016), pp. 1-7
- [86] Freek Wiedijk: *The Seventeen Provers of the World*, Springer Lecture Notes in Computer Science vol. 3600 (2006)
- [87] Monty Newborn: *Automated Theorem Proving-Theory and Practice*, Springer (2001), ISBN 978-1-4612-6519-1, DOI 10.1007/978-1-4613-0089-2
- [88] Sana Stojanović, Vesna Pavlović, and Predrag Janičić: *A Coherent Logic Based Geometry Theorem Prover Capable of Producing Formal and Readable Proofs*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 6877, Automated Deduction in Geometry, 8th International Workshop, ADG 2010, Munich, Germany, July 22-24, 2010., Springer, ISBN 978-3-642-25069-9, ISSN 0302-9743, DOI: 10.1007/978-3-642-25070-5
- [89] Lawrence C. Paulson: *Isabelle - A generic theorem prover*, Springer, Lecture Notes in Computer Science 828 (1994), ISBN 3-540-58244-4

- [90] M. Archer, C. L. Heitmeyer: *Human-Style Theorem Proving Using PVS*, Conference Paper from TPHOLs (1997), Murray Hill, New Jersey USA
- [91] Behzad Akbarpour and Lawrence Paulson: *MetiTarski: An automatic prover for the elementary functions*, In Serge Autexier et al., editors, Intelligent Computer Mathematics (2008), LNCS 5144, Springer, pp. 217-231
- [92] Jianguo Jiang, Jingzhong Zhang: *A review and prospect of readable machine proofs for geometry theorem*, J. Syst. Sci. Complex (2012) 25, DOI: 10.1007/s11424-012-2048-3, pp. 802-820
- [93] Johann Schumann: *Automated theorem proving in high-quality software design*, Intellectics and Computational Logic, Applied logic series vol. 19. (2000), Springer, ISBN 978-90-481-5438-8, DOI 10.1007/978-94-015-9383-0
- [94] Francisco Botana, Markus Hohenwarter, Predrag Janičić, Zoltan Kovacs, Ivan Petrović, Tomas Recio SimonWeitzhofer: *Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements*, J. Autom. Reasoning (2015), pp. 55:39-59, DOI: 10.1007/s10817-015-9326-4
- [95] Maurice Lecat: *Erreurs de mathématiciens des origines à nos Jours*, Bruxelles (1935)
- [96] Gada Kadoda, Roger Stone, Dan Diaper: *Desirable features of educational theorem provers - a Cognitive Dimensions viewpoint*, Conference: PPIG 1999 - 11th Annual Workshop, Leeds, United Kingdom, 5-7. January 1999
- [97] Johann M. Schumann: *Automated Theorem Proving in Software Engineering*, Springer (2001), ISBN 978-3-642-08759-2, DOI 10.1007/978-3-662-22646-9
- [98] Deepak Kapur, Mahadevan Subramaniam: *Using an induction prover for verifying arithmetic circuits*, Int J STTT (2000), Springer-Verlag, pp 32-65

- [99] Robert S. Boyer, J. Strother Moore: *Proof-Checking, Theorem-Proving, and Program Verification*, Contemporary Mathematics volume 29 (1983), ISBN 0-8218-6027-X
- [100] Thomas Kropf: *Benchmark-Circuits for Hardware -Verification*, Theorem Provers in Circuit Design: Theory, Practice and Experience, Lecture Notes in Computer Science 901 (1995), Springer, ISBN 3-540-59047-1
- [101] R.C. Sekar, M.K. Srivas, *Fonnal Verification of a Microprocessor Using Equational Techniques*, Current Trends in Hardware Verification and Automated Theorem Proving (1989), Springer-Verlag, ISBN-13: 978-1-4612-8195-5, DOI: 10.1007/978-1-4612-3658-0)
- [102] Ricky Butler: *Formal Methods at NASA Langley*, Theorem Proving in Higher Order Logics, Lecture Notes in Computer Science 2410 (2002), Springer, ISSN 0302-9743, ISBN 3-540-44039-9
- [103] William Denman, Mohamed H. Zaki, Sofiene Tahar, Luis Rodrigues: *Towards Flight Control Verification Using Automated Theorem Proving*, Nasa Formal Methods, Lecture Notes in Computer Science 6617, Springer, pp. 89-100, DOI [https://doi.org/10.1007/978-3-642-20398-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20398-5_8), ISBN 978-3-642-20397-8
- [104] Paliath Narendran, Jonathan Stillman: *Fonnal Verification of the Sobel Image Processing Chip*, Current Trends in Hardware Verification and Automated Theorem Proving (1989), Springer-Verlag, ISBN-13: 978-1-4612-8195-5, DOI: 10.1007/978-1-4612-3658-0)
- [105] Robert C. Martin: *Clean Architecture: A Craftsmans Guide To Software Structure and Design*, Prentice Hall (2018), ISBN: 978-0-13-449416-6
- [106] A. Azurat, I.S.W.B. Prasetya: *A survey on embedding programming logics in a theorem prover*, Utrecht University Repository (2002)

- [107] Wolfgang Bibel: *Automated Theorem Proving*, Second revised edition, Frieds. Vieweg und Sohn (1987), ISBN-13: 978-3-528-18520-6, DOI: 10.1007/978-3-322-90102-6
- [108] Gerhard Schellhorn, Wolfgang Ahrendt: *The Wam Case Study: Verifying compiler correctness for Prolog with KIV*, Automated Deduction - A Basis for Applications, Volume III, Applications Applied Logic Series, Volume 10 (1998), Springer, ISBN 978-90-481-5052-6, DOI 10.1007/978-94-017-0437-3
- [109] M. Ganesalingam, W. T. Gowers: *A Fully Automatic Theorem Prover with Human-Style Output*, J Autom Reasoning 58 (2017), DOI 10.1007/s10817-016-9377-1, pp. 253-291
- [110] Jasmin Christian Blanchette, Lukas Bulwahn, and Tobias Nipkow: *Automatic Proof and Disproof in Isabelle/HOL*, Frontiers of Combining Systems, 8th International Symposium, FroCoS 2011 Saarbrcken, Germany, October 5-7, 2011 Proceedings, Lecture Notes in Artificial Intelligence 6989, ISSN 0302-9743, ISBN 978-3-642-24363-9, DOI 10.1007/978-3-642-24364-6, pp. 12-27
- [111] Aamir Shafi, Bryan Carpenter, Mark Baker and Aftab Hussain: *A comparative study of Java and C performance in two large-scale parallel applications*, Concurrency and Computation: Practice and Experience: 2009; 21, pp. 1882-1906
- [112] Guillermo L. Taboada, Sabela Ramos, Roberto R. Expósito, Juan Touriño, Ramón Doallo: *Java in the High Performance Computing arena: Research, practice and experience*, Science of Computer Programming 78 (2013), pp. 425-444
- [113] Bo Yu, Bo Dong: *A Hybrid Polynomial System Solving Method for Mixed Trigonometric Polynomial Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics Journal of Numerical Analysis, Vol. 46, No. 3 (2008), pp. 1503-1518

- [114] Bo Dong, Bo Yu, Yan Yu: *A Symmetric Homotopy and Hybrid Polynomial System Solving Method For Mixed Trigonometric Polynomial Systems*, Mathematics of Computation, Volume 83, Number 288 (July 2014), Pages 1847-1868
- [115] G. Milovanović, M. Rassias (editors): *Analytic Number Theory, Approximation Theory and Special Functions*, Springer (2014), Chapter: G. D. Anderson, M. Vuorinen, X. Zhang: *Topics in Special Functions III*, pp. 297-345
- [116] D. S. Mitrinović: *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag (1970)
- [117] J. Sándor, M. Bencze: *On Huygen's trigonometric inequality*, RGMIA Res. Rep. Collection **8:3** (2005), 1-4
- [118] J. Kennedy (editor): *Interpreting Gödel: Critical Essays*; poglavlje: B. Poonen, *Undecidable Problems: A Sampler*, Cambridge University Press, Cambridge (2014), pp. 211-241. <http://www-math.mit.edu/~poonen/papers/sampler.pdf>
- [119] Nigel Cutland : *Computability: An introduction to recursive function theory*, Cambridge University Press (1980), ISBN 0-521-22384-9
- [120] Raymond P. Canale, Steven C. Chapra: *Numerical methods for engineers*, 7th ed., McGraw-Hill Education (2012), ISBN 9780073397924
- [121] Xiao-Diao Chen, Junyi Ma, Jiapei Jin and Yigang Wang: *A two-point-Padé-approximant-based method for bounding some trigonometric functions*, Journal of Inequalities and Applications (2018) 2018:140
- [122] Branko Malešević, Milica Makragić: *A Method for Proving Some Inequalities on Mixed Trigonometric Polynomial Functions*, Journal of Mathematical Inequalities 10(3) (2016), pp. 849-876
- [123] Ling Zhu: *A new simple proof of Wilkerson's inequality*, Mathematical Inequalities and Applications, Volume 8, Number 4 (2005), pp. 749-750

- [124] Ling Zhu: *On Shafer-Fink inequalities*, Mathematical Inequalities and Applications, Volume 8, Number 4 (2005), pp. 571-574
- [125] Marija Nenezić, Branko Malešević: *A Contribution To The Subtly Analysis Of Wilker Inequality*, Arxiv preprint, [arxiv.org/abs/1507.01904](https://arxiv.org/abs/1507.01904)
- [126] Tatjana Lutovac, Branko Malešević, Marija Rašajski: *A New Method For Proving Some Inequalities Related To Several Special Functions*, Results in Mathematics, 73:100 (2018), ISSN: 1420-9012
- [127] B. Malešević, T. Lutovac, M. Rašajski, C. Mortici: *Extensions of the natural approach to refinements, and generalizations of some trigonometric inequalities*, Advances in Difference Equations 2018:90 (2018),pp. 1-15
- [128] Branko Malešević, Marija Rašajski, Tatjana Lutovac: *Refined estimates and generalizations of inequalities related to the arctangent function and Shafer's inequality*, Arxiv preprint, [arxiv.org/abs/1711.03786](https://arxiv.org/abs/1711.03786)
- [129] Branko Malešević, Tatjana Lutovac: *Jedan doprinos automatskom dokazivanju nekih klasa analitičkih nejednakosti*, Simpozijum Matematika i Primene, Vol. VI (2015), Beograd
- [130] Marija Rašajski, Tatjana Lutovac, Branko Malešević: *About some exponential inequalities related to the sinc function*, Journal of Inequalities and Applications, 2018:150 (2018), ISSN 1029-242X
- [131] Marija Rašajski, Tatjana Lutovac, Branko Malešević: *Sharpening And Generalizations of Shafer-Fink and Wilker Type Inequalities: A New Approach*, The Journal of Nonlinear Sciences and Applications, Volume 11, Issue 7 (2018), pp 885-893
- [132] M. Nenezić, B. Malešević, C. Mortici: *New approximations of some expressions involving trigonometric functions*, Applied Mathematics and Computation, Volume 283 (2016), pp. 299-315

- [133] B. Malešević, M. Rašajski, T. Lutovac: *Refinements and generalizations of some inequalities of Shafer-Fink's type for the inverse sine function*, Journal of Inequalities and Applications 2017:275 (2017),pp. 1-9
- [134] Y. Nishizawa: *Sharpening of Jordan's type and Shafer-Fink's type inequalities with exponential approximations*, Appl. Math. Comput. 269 (2015),pp. 146-154
- [135] Ling Zhu: *Sharpening Jordans inequality and the Yang Le inequality*, Applied Mathematics Letters 19 (2006), pp. 240-243
- [136] Ling Zhu: *Sharpening Jordans inequality and Yang Le inequality, II*, Applied Mathematics Letters 19 (2006), 990-994
- [137] Ling Zhu: *A solution of a problem of Oppenheim*, Mathematical Inequalities and Applications, Volume 10, Number 1 (2007), pp. 57-61
- [138] Lu Zhang and Ling Zhu: *A new elementary proof of Wilkers inequalities*, Mathematical Inequalities and Applications, Volume 11, Number 1 (2007), 149-151
- [139] Ling Zhu and Jiukun Hua: *Sharpening the Becker-Stark Inequalities*, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2010, Article ID 931275, doi:10.1155/2010/931275
- [140] Zhengjie Sun and Ling Zhu: *Some Refinements of Inequalities for Circular Functions*, Journal of Applied Mathematics, Volume 2011, Article ID 869261, doi:10.1155/2011/869261
- [141] Ling Zhu: *A Refinement of the Becker-Stark Inequalities*, Mathematical Notes, Vol. 93, No. 3 (2013), pp. 421-425, ISSN 0001-4346, DOI: 10.1134/S0001434613030085
- [142] Feng Qi and Da-Wei Niu: *Refinements, generalizations and applications of Jordan's inequality and related problems*, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2009, Article ID 271923, pp 1-53. doi:10.1155/2009/271923



- [143] J. Sańdor, B.A. Bhayo: *On an Inequality of Redheffer*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 16, No. 1 (2015), pp. 475-482, ISSN: 1787-2413
- [144] Wei-Dong Jiang, Qiu-Ming Luo, and Feng Qi: *Refinements and sharpening of some Huygens and Wilker type inequalities*, arXiv:1201.6477v1 [math.CA] 31 Jan 2012
- [145] Wei-Dong Jiang, Qiu-Ming Luo, Feng Qi: *Refinements and Sharpening of some Huygens and Wilker Type Inequalities*, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2014, Vol. 2, No. 4, pp. 134-139, DOI:10.12691/tjant-2-4-6
- [146] Cristinel Mortici: *The Natural Approach of Wilker-Cusa-Huygens Inequalities*, Mathematical Inequalities and Applications, Volume 14, Number 3 (2011), 535-541
- [147] Cristinel Mortici: *A subtly analysis of Wilker inequality*, arXiv:1312.6277v1 [math.CA] 21 Dec 2013
- [148] Ling Zhu and Cristinel Mortici: *Inequalities Becker-Stark at extreme points*, arXiv:1312.6276v1 [math.CA] 21 Dec 2013
- [149] Cristinel Mortici: *A subtly analysis of Wilker inequality*, Applied Mathematics and Computation, 231 (2014), 516-520
- [150] Cristinel Mortici and Hary M. Srivastava: *Estimates for the Arctangent Function Related to Shafers Inequality*, Colloquium Mathematica Societatis Janos Bolyai 136 (2014), 263-270, doi:10.4064/cm136-2-8
- [151] Lokenath Debnath, Cristinel Mortici and Ling Zhu: *Refinements of Jordan-Stečkin and Becker-Stark Inequalities*, Results in Mathematics (2014), DOI 10.1007/s00025-014-0405-3

- [152] Yue Hu and Cristinel Mortici: *A Lower Bound on the Sinc Function and Its Application*, Scientific World Journal, Volume 2014., Article ID 571218, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/571218>
- [153] G.P. Nikishkov, Yu.G. Nikishkov, V.V. Savchenko: *Comparison of C and Java performance in finite element computations*, Computers and Structures 81 (2003) 2401-2408
- [154] J. E. Moreira, S. P. Midkiff, M. Gupta, P. V. Artigas, M. Snir, R. D. Lawrence: *Java programming for high-performance numerical computing*, IBM Systems Journal, Vol 39, No 1 (2000)
- [155] Vladimir Getov, Susan Flynn Hummel, Sava Mintchev: *High-performance parallel programming in Java: exploiting native libraries*, Concurrency: Practice And Experience, Vol. 10(11-13)(1998),pp. 863-872
- [156] Heinz Kredel: *On a Java computer algebra system, its performance and applications*, Science of Computer Programming 70 (2008), pp. 185-207
- [157] Alexey Solovyev: *Formal Computations and Methods*, PhD thesis (2007), St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
- [158] Jeremy Avigad: *Formal Methods in Mathematics and the Lean Theorem Prover*, Lecture notes (January 2017), Department of Philosophy and Department of Mathematical Sciences, Carnegie Mellon University
- [159] L. Yang: *Practical automated reasoning on inequalities: Generic programs for inequality proving and discovering*, Proc. of The Third Asian Technology Conference in Mathematics, Springer-Verlag (1998), pp. 24-35
- [160] Yang Lu: *Recent Advances in Automated Theorem Proving on Inequalities*, J. Comput. Sci. & Technol (1999), Vo1.14 No.5

- [161] L. Yang, W. Yu, R. Yuan: *Mechanical decision for a class of integral inequalities*, Science China Information Sciences (2010), vol. 53: 1800. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11432-010-4037-2>
- [162] Chen Shiping, Liu Zhong: *Taylor Expansion of trigonometric functions - Proof of purpose*, J. Sys. Sci. & Math. Scis. 38(8), (2016,8). pp. 1339-1348
- [163] J. Avigad, R.Y. Lewis, C. Roux: *A Heuristic Prover for Real Inequalities*, Interactive Theorem Proving. ITP 2014. Lecture Notes in Computer Science, vol 8558. Springer, Cham, pp 61-76
- [164] Robert Y. Lewis: *Polya: A Heuristic Procedure for Reasoning with Real Inequalities*, Master thesis (2014), Carnegie Mellon University
- [165] Behzad Akbarpour, L. C. Paulson: *Towards automatic proofs of inequalities involving elementary functions*, Urednici Byron Cook,Roberto Sebastiani: *PDPAR 2006: Pragmatics of Decision Procedures in Automated Reasoning*(2006), pp. 27-37
- [166] Grant O. Passmore, Lawrence C. Paulson and Leonardo de Moura: *Real algebraic strategies for MetiTarski proofs*, Urednik Johan Jeuring,Conferences on Intelligent Computer Mathematics — CICM 2012, Springer LNCS 7362 (2012),pp. 358-370
- [167] Behzad Akbarpour, Lawrence C. Paulson: *Extending a resolution prover for inequalities on elementary functions*, Urednici Nachum Dershowitz and Andrei Voronkov: *Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning LPAR 2007*, Springer LNCS 4790, pp. 47-61
- [168] Behzad Akbarpour, L. C. Paulson: *MetiTarski: An automatic prover for the elementary functions* Urednici Serge Autexier et al: *Intelligent Computer Mathematics* Springer LNCS 5144 (2008), pp. 217-231 (Proceedings of Calculemus 2008)

- [169] Lawrence C. Paulson: *MetiTarski: past and future*, Interactive Theorem Proving - ITP 2012, Princeton, New Jersey, August 2012
- [170] James P. Bridge and Lawrence C. Paulson: *Case Splitting in an automatic theorem prover for real-valued special functions*, Journal of Automated Reasoning vol.50 1 (2013), pp. 99-117
- [171] Lawrence C. Paulson: *MetiTarski's Menagerie of Cooperating Systems*, Urednici Pascal Fontaine, Christophe Ringeissen, Renate A. Schmidt, *Frontiers of Combining Systems*, 9th International Symposium, FroCoS (2013), ISBN 978-3-642-40884-7 Proceedings
- [172] William Denman, Behzad Akbarpour, Sofiene Tahar, Mohamed H. Zaki, Lawrence C. Paulson: *Formal Verification of Analog Designs using MetiTarski*, Formal methods in Computer Aided Design (2009), pp. 93-100, ISBN: 978-1-4244-4966-8, DOI:10.1109/FMCAD.2009.5351136
- [173] Rajeev Narayanan, Behzad Akbarpour, Mohamed H. Zaki, Sofiène Tahar and L. C. Paulson: *Formal verification of analog circuits in the presence of noise and process variation*, objavljeno u *DATE 2010: Design, Automation and Test in Europe*, pp. 1309-1312
- [174] Behzad Akbarpour, L. C. Paulson: *Applications of MetiTarski in the verification of control and hybrid systems*, Urednici Rupak Majumdar, Paulo Tabuada: *Hybrid Systems: Computation and Control*, Springer LNCS 5469 (2009), pp. 1-5
- [175] Lawrence C. Paulson: *Theorem Proving and the Real Numbers: Overview and Challenges*, Urednici Julia M. Badger, Kristin Yvonne Rozier: *NASA Formal Methods*, 6th International Symposium, NFM 2014, Houston, TX, USA, April 29 - May 1, 2014, Proceedings, pp. XVI-XVII

- [176] Lawrence C. Paulson: *Automated theorem proving for special functions: the next phase*, Keynote Lecture for SNC 2014 (Symbolic-Numeric Computation), Shanghai, China, July 2014

## Biografija

Bojan Banjac rođen je u Beogradu 24. 02. 1987. godine. Diplomirao je na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu 2010. godine na smeru Softversko inženjerstvo sa temom diplomskog rada "Realizacija simulatora procesora korišćenjem objektno orijentisanog pristupa" pod rukovodstvom prof. dr Jovana Đorđevića. Godine 2011. završio je master studije Softverskog inženjerstva odbranom master rada na temu "Java apleti za vizuelizacije u teoriji Gerbnerovih baza" pod rukovodstvom prof. dr Branka Maleševića.

U toku doktorskih studija bio je angažovan kao izvođač nastave na programima stručnog usavršavanja profesora i nastavnika matematike u osnovnim i srednjim školama u organizaciji Zavoda za unapređenje obrazovanja i vaspitanja. Od 2013. godine je zaposlen kao asistent na Katedri za animaciju u inženjerstvu, Fakulteta tehničkih nauka, Univerziteta u Novom Sadu. U decembru 2016. godine je postavljen za tehničkog urednika naučnog časopisa *Applicable Analysis and Discrete Mathematics (AADM)*, na JCR-SCI listi. Aktivni je član Srpskog udruženja za geometriju i grafiku i učestovao je u organizaciji međunarodne konferencije "MonGeometrija2016".

U svom dosadašnjem radu bio je autor četiri rada objavljena u međunarodnim časopisima (M21, M22, M23), dva rada u međunarodnim časopisima verifikovanim posebnom odlukom (M24), sedamnaest radova izloženih na skupovima od međunarodnog značaja (M30), dva rada u domaćim naučnim časopisima (M50), pet radova na domaćim naučnim skupovima (M60), pet tehničkih rešenja (M80) i animiranog filma izloženog na recenziranom festivalu od međunarodnog značaja (DU-21).

Oblast dosadašnjeg istraživanja obuhvata primenjenu matematiku, softversko inženjerstvo, veštačku inteligenciju, računarsku grafiku i geometriju, kompjutersku viziju, 3D modelovanje, veb dizajn, modelovanje fizičkih procesa i primena računarske tehnike i programiranja u matematici, arhitekturi, medicini i psihologiji.

## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Бојан Бањац

Број индекса 5018/2011

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

*Систем за аутоматско доказивање неких класа аналитичких неједнакости*

---

---

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

**Потпис аутора**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Бојан Бањац

Број индекса 5018/2011

Студијски програм Примењена математика

Наслов рада Систем за аутоматско доказивање неких класа аналитичких неједнакости

Ментор проф. др Бранко Малешевић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис аутора**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_



## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Систем за аутоматско доказивање неких класа аналитичких неједнакости

---

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.  
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

**Потпис аутора**

У Београду, \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

1. **Ауторство.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима.** Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.