UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

mr Dragan Jočić

Distributivnost operacija agregacije i njihova primena u teoriji korisnosti

-doktorska disertacija-

Novi Sad, 2014.

Predgovor

Predmet istraživanja predložene doktorske disertacije, u svetlu postojećih otvorenih problema, je karakterizacija parova raznih klasa operacija agregacije koji zadovoljavaju jednačine distributivnosti, te primena dobijenih rezultata u teoriji korisnosti pri modeliranju ponašanja donosioca odluka.

Proces objedinjavanja i sjedinjavanja više numeričkih vrednosti u jednu reprezentativnu je agregacija, a numerička funkcija koja obavlja ovaj proces je operacija agregacije. Ovako jednostavna definicija ukazuje na širok spektar primene operacija agregacije kako u teorijskoj tako i u primenjenoj matematici, informatičkim i tehničkim naukama, ekonomiji i finansijama, i mnogim drugim prirodnim i društvenim naukama. Posebno se ističe njihova uloga u modeliranju problema odlučivanja. Poslednjih godina velika pažnja se poklanja karakterizaciji parova operacija agregacije koje zadovoljavaju zakone distributivnosti, upravo zbog njihove uloge u teoriji korisnosti, što je i bila glavna motivacija ove disertacije.

Tokom rada na disertaciji dobijeni rezultati su dali odgovor na neka otvorena pitanja u vezi predmeta istraživanja. Aktuelnost i savremenost operacija agregacije, pre svega zbog sve veće primene, dovodi do brojnih novih problema pa samim tim i do potrebe za daljim istraživanjem ove oblasti.

Jedan od mogućih pravaca za budući rad je opis strukture uninormi u opštem slučaju što je i dalje otvoren problem. Pošto su uninorme specijalne (simetrične i asocijativne) operacije agregacije sa neutralnim elementom, mogla bi se detaljnije istraživati i struktura opštih operacija agregacije sa neutralnim elementom, tj. oslabljenih uninormi. Takođe, mi smo u disertaciji razmatrali uslovnu distributivnost nulanormi, koje predstavljaju specijalne operacije agregacije sa absorbujućim elementom, u odnosu na t-konorme i neke klase uninormi. Sledeći mogući pravac za dalji rad je rešavanje problema uslovne distributivnosti opštih operacija agregacije sa absorbujućim elementom u odnosu na t-konorme, kao i implikacija dobijenih rešenja na teoriju korisnosti. Otvoren je i problem pronalaženja odgovarajuće aksiomatske zasnovanosti za hibridnu funkciju korisnosti kao što je to učinjeno za klasičnu i mogućnosnu teoriju korisnosti.

Posebnu zahvalnost dugujem svojoj mentorki dr Ivani Štajner-Papugi na ukazanom poverenju i razumevanju, posvećenom vremenu i podršci, korisnim idejama i savetima tokom izrade ove disertacije.

Zahvaljujem se i članovima komisije za ocenu i odbranu doktorske disertacije dr Tijani Levajković, dr Petru Markoviću, dr Arpadu Takačiju i dr Aleksandru Peroviću na sugestijama koje su ovu disertaciju učinile kvalitetnijom.

I na kraju, neizmerno hvala mojoj supruzi, roditeljima i sestri na strpljenju, razumevanju i podršci tokom rada na ovoj disertaciji.

Novi Sad, 15.11.2014. Dragan Jočić

Sadržaj

Predgovor **i**

Uvod **1**

1 Operacije agregacije **5**

1.1 Osnovne definicije i primeri 5

1.2 Matematičke osobine operacija agregacije 8

1.2.1 Neprekidnost 8

1.2.2 Simetrija (komutativnost) 10

1.2.3 Idempotentnost 10

1.2.4 Položaj na realnoj osi 11

1.2.5 Parcijalna agregacija po grupama 12

1.2.6 Invarijantne osobine 13

1.2.7 Neutralni i absorbujući element 13

1.3 Konjuktivne i disjunktivne operacije agregacije 15

1.3.1 Trougaone norme 16

1.4 Operacije agregacije bazirane na t-normama i t-konormama 23

1.5 Operacije agregacije sa neutralnim elementom 25

1.5.1 Osnovne osobine uninormi 26

1.5.2 Poznate klase uninormi 27

1.5.3 Oslabljene uninorme 32

1.6 Operacije agregacije sa absorbujućim elementom 33

1.6.1 Osnovne osobine i struktura nulanormi 33

1.6.2 Oslabljene nulanorme 36

2 Distributivnost operacija agregacije **37**
2.1 Jednačine distributivnosti 37
2.2 Distributivnost između GM-operacija agregacije i oslabljenih nulanormi 39
2.2.1 Leva distributivnost oslabljene nulanorme u odnosu na GM-operaciju 39
2.2.2 Distributivnost GM-operacije u odnosu na oslabljenu nulanormu 40
2.3 Distributivnost između GM-operacija agregacije i oslabljenih uninormi 44
2.3.1 Leva distributivnost oslabljene uninorme u odnosu na GM-operaciju 44
2.3.2 Distributivnost GM-operacije u odnosu na oslabljenu uninormu 46
2.4 Distributivnost između operacija agregacije koje ne poseduju neutralni i absorbujući element 47
2.5 Uslovna distributivnost 49
2.5.1 Uslovna distributivnost operacija agregacije sa neutralnim elementom u odnosu na t-konormu 50
2.5.2 Uslovna distributivnost operacija agregacije sa absorbujućim elementom u odnosu na t-konormu 53
2.5.3 Uslovna distributivnost operacija agregacije sa absorbujućim elementom u odnosu na uninormu 56

3 Primena operacija agregacije u teoriji korisnosti **66**
3.1 Dekompozabilne mere 66
3.2 Problem odlučivanja 69
3.3 von Neumann Morgenstern-ova teorija očekivane korisnosti 71
3.4 Proširene mešavine 73
3.5 Mogućnosna teorija korisnosti 74
3.6 Hibridne mešavine i hibridna funkcija korisnosti 77
3.7 Hibridna funkcija korisnosti sa pragom 78
3.8 Ponašanje donosioca odluke u odnosu na funkciju korisnosti U_F 82
3.9 Separabilni događaji 84
3.10 Dekompozicija $S-$mere u binarna stabla 87

Zaključak **93**

Prilog **95**

Literatura **99**

Biografija **106**

Uvod

Mnoga istraživanja u matematici, kako ona vrlo apstraktna a posebno ona za praktičnu primenu, vezana su za razne operacije sa realnim brojevima. Jedna od često zahtevanih osobina tih operacija je monotonost, tj. da odgovarajući rast argumenata prati i odgovarajući rast rezultata primenom operacije na te argumente. Upravo ova osobina je fundamentalna za operacije agregacije. Proces objedinjavanja i sjedinjavanja više (najčešće numeričkih) vrednosti u jednu reprezentativnu je agregacija, a funkcija koja obavlja ovaj proces je funkcija (operacija) agregacije. Možda najstariji primer operacije ovog tipa je aritmetička sredina koja je jedna od najčešće korišćenih operacija agregacije kako u svakodnevnom životu tako i u nauci. U novije vreme operacije agregacije imaju važnu ulogu u teorijskoj matematici (funkcionalne jednačine, teorija sredina i proseka, teorija mere i integrala), primenjenoj matematici (teorija verovatnoće i statistike, teorija fazi skupova i fazi logike), informatičkim i tehničkim naukama (veštačka inteligencija, operaciona istraživanja, teorija informacija, raspoznavanje oblika i analiza slike, inženjersko projektovanje i sl.), ekonomiji i finansijama (teorija igara, teorija izbora, teorija odlučivanja) i mnogim drugim društvenim i prirodnim naukama.

Ovde poseban akcenat stavljamo na ulogu operacija agregacije u raznim pristupima problemu odlučivanja [3, 29, 31, 32, 41]. Poslednjih godina velika pažnja se poklanja karakterizaciji parova operacija agregacije koji zadovoljavaju zakon distributivnosti. Ispostavilo se da ovakvi parovi imaju značajnu ulogu u teoriji korisnosti [21, 23, 24, 35] koja je osnov teorije odlučivanja. Upravo ova primena bila je glavna motivacija ovog istraživanja.

Problem distributivnosti prvi je razmatrao Aczél u [1] i u poslednjih dvadesetak godina rešavan je za razne klase operacija agregacije kao što su trougaone norme i konorme [29, 41], kvazi-aritmetičke sredine i GM-operacije agregacije [6], fazi implikacije [2, 61, 62], pseudo-aritmetičke operacije [4], uninorme i nulanorme [15, 27, 46, 47, 57, 59, 70]. Takođe, mnogi autori razmatraju i distributivne nejednačine [16, 17], kao i distributivne jednačine na ograničenom domenu [5, 34, 41, 42, 60, 63] (oslabljenu distributivnost, uslovnu distibutivnost) jer se pokazalo da ovaj pristup daje veći broj rešenja, te i veću mogućnost primene.

Karakterizacija ovih parova operacija i dalje predstavlja aktuelnu oblast istraživanja [57, 70] koja je interesantna ne samo sa teoretskog aspekta, nego i zbog mnogobrojnih primena. Pored već spomenute teorije korisnosti, parovi operacija agregacije koje zadovoljavaju zakon distributivnosti imaju važnu primenu u teoriji integracije [4, 42, 51, 63, 67, 68], kao i u teoriji fazi skupova i fazi logike [39]. U nastavku ćemo ilustrovati ulogu operacija agregacije u teoriji korisnosti koja se bavi relacijama preferiranja kojima se modelira ponašanje donosioca odluke.

Jedan od savremenih problema, sveprisutan u svakodnevnici, koji zauzima centralnu ulogu u teoriji odlučivanja jeste i odlučivanje u uslovima neizvesnosti. Klasičan pristup ovom problemu pretpostavlja da je neizvesnost modelovana verovatnoćom. Ovaj pristup odgovara klasičnoj teoriji korisnosti koja se bazira na pojmu matematičkog očekivanja. Njena aksiomatska zasnovanost data od strane von Neumanna i Morgensterna u [52] oslanja se na pojam verovatnosne mešavine Herstein, Milnora [33]. Ellsbergov paradoks [32] pokazuje da σ-aditivnost, osnovna osobina u definiciji verovatnoće, može biti suviše kruta pri modelovanju ponašanja donosioca odluke. Da bi proširili teoriju odlučivanja na ne verovatnosnu neizvesnost Dubois, Fodor, Prade i Roubens su u [21] proširili pojam mešavine na dekompozabilne (pseudo-aditivne) mere [25, 69], koje su vrlo bliske klasičnoj meri, gde je operacija sabiranja zamenjena opštijom realnom operacijom. Kako ova klasa skupovnih funkcija obuhvata dobro poznate mere verovatnoće i mere mogućnosti [74], ona predstavlja prirodno okruženje za slabljenje verovatnosnih pretpostavki u pogledu modeliranja neizvesnosti. Ispostavilo se da u aksiomatskoj zasnovanosti ovih proširenih mešavina ključnu ulogu imaju t-norme i t-konorme koje zadovoljavaju zakon distributivnosti. Upravo ova činjenica je dovela do nove vrste mešavina tzv. mogućnosnih mešavina koje čine temelj mogućnosne teorije korisnosti [22, 26]. Koristeći rezultat iz [41] o karakterizaciji parova t-normi i t-konormi koje zadovoljavaju oslabljeni uslov distributivnosti Dubois, Pap, Prade su u [23] pokazali da se osim verovatnosne i mogućnosne mešavine može pojaviti samo neka vrsta hibridizacije tako da je ispod nekog nivoa a, $0 \leq a \leq 1$, ona mogućnosna a iznad tog nivoa verovatnosna. Koristeći ove hibridne mešavine u [23] je konstruisana hibridna funkcija korisnosti koju karakteriše veća prilagodljivost ponašanju donosioca odluke. Sa ovim rezultatom je i tesno povezan problem nezavisnosti događaja za dekompozabilne mere. U [23, 24] je pokazano da isti uslov oslabljene distributivnosti mora biti zadovoljen između t-norme koja izražava nezavisnost i t-konorme koja karakteriše dekompozabilnu meru. Mešavine i uopštena nezavisnost (separabilnost) su međusobno tesno povezane u teoriji korisnosti [20, 23]. Ova veza omogućava konstrukciju algoritma za izračunavanje vrednosti mera u složenoj lutriji a odatle i algoritma za izračunavanje hibridne mešavine. Takođe, isti parovi operacija pokazali su se korisnim u [10] gde su dokazane poznate Borel-Kantelijeve leme za dekompozabilne mere.

Prema tome glavni zadatak ove disertacije je da rašavamo funkcionalne jednačine oblika

$$F(x, G(y, z)) = G(F(x, y), F(x, z)) \text{ i } F(G(y, z), x) = G(F(y, x), F(z, x)),$$

pri čemu funkcije F i G pripadaju nekim poznatim klasama operacija agregacije, i da dobijena rešenja primenimo u teoriji korisnosti u cilju modeliranja ponašanja donosioca odluke. Pri tome ograničićemo se na binarne operacije agregacije definisane na jediničnom intervalu $[0, 1]$, što je u skladu sa našom primenom, a zbog prirodnog izomorfizma između intervala $[0, 1]$ i bilo kog realnog zatvorenog intervala $[a, b]$ svaki rezultat za operacije definisane na $[0, 1]$ možemo transformisati u rezultat na operacije definisane na $[a, b]$. Prema tome rad na $[0, 1]$ ne umanjuje opštost ni sa teoretskog aspekta. Sama disertacija je podeljena u tri glave.

U prvoj glavi pod nazivom Operacije agregacije dajemo pregled osnovnih pojmova vezanih za operacije agregacije, sa posebnim osvrtom na matematičke osobine, njihovo tumačenje i moguću primenu. U zavisnosti od prirode vrednosti koje treba objediniti operacije agregacije, pored monotonosti i rubnih uslova, mogu posedovati i druge matematičke osobine kao što su: neprekidnost, simetrija, idempotentnost, položaj na realnoj osi, parcijalna agregacija po grupama, invarijantne osobine, postojanje neutralnog i absorbujućeg elementa, i druge. Zatim, predstavljamo neke poznate klase operacija agregacije koje su bitne u daljem radu kao što su t-norme, t-konorme i operacije agregacije bazirane na njima. Nakon toga biće predstavljene operacije agregacije sa netrivijalnim neutralnim elementom (uninorme i oslabljene uninorme) kao i operacije agregacije sa netrivijalnim absorbujućim elementom (nulanorme i oslabljene nulanorme).

Druga glava sadrži originalne rezultate koji se odonose na rešenja jednačina distributivnosti za neke poznate klase operacija agregacije. Kao što je već spomenuto problem distributivnosti operacija agregacije poslednje decenije dobija sve više na značaju i njegovo rešavanje je rezultovalo velikim brojem radova. Pored značajnih rezultata dobijenih u ovoj oblasti javljaju se i brojna otvorena pitanja. T. Calvo je u [6] rešavala jednačine distributivnosti gde je jedna nepoznata funkcija GM-operacija agregacije, a druga t-norma ili t-konorma kod kojih su neutralni i absorbujući elementi rubne tačke jediničnog intervala. U [37] je rešen problem distributivnosti između GM-operacija agregacije i operacija agregacije sa absorbujućim ili neutralnim elementom iz otvorenog jediničnog intervala. Takođe je razmatran i slučaj kada druga operacija ne poseduje ni neutralni ni absorbujući element. U cilju kompletiranja postojećih istraživanja u [36] su rešavane jednačine distributivnosti na ograničenom domenu za neprekidne nulanorme i neprekidne t-konorme, te za neprekidne nulanorme i posebne klase uninormi. Dosadašnja istraživanja su razmatrala uslovnu distributivnost t-norme prema t-konormi [41], uninorme prema t-konormi [34], pseudo-množenja prema t-konormi [63]. Zajednička osobina za prethodna tri slučaja je to da prva operacija poseduje neutralni element. Pitanje je šta se dešava kada umesto operacije sa neutralnim elementom u jednačinu uslovne distributivnosti stavimo operaciju agregacije sa netrivijalnim absorbujućim elementom (nulanormu i oslabljenu nulanormu). Isto tako treba naglasiti da su do sada u [46] i [15] rešavane distributivne jednačine koje obuhvataju pomenute operacije agregacije na čitavom domenu.

Treća glava je posvećena primeni operacija agregacije u teoriji korisnosti, i tom cilju dajemo pregled najpoznatih rezultata koje smo naveli u prethodnom delu. Takođe, ova glava sadrži i originalne rezultate. Kao što je već napomenuto, u [23] je konstruisana hibridna funkcija korisnosti korišćenjem hibridnih mešavina na sledeći način:

$$U(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = S(T(u_1, \mu_1), T(u_2, \mu_2)),$$

gde je T neprekidna t-norma uslovno distributivna u odnosu na neprekidnu t-konormu S, dok su u_1, u_2 korisnosti, a μ_1, μ_2 stepeni verodostojnosti. Postavlja se pitanje kako se ponaša donosilac odluke kada u funkciji korisnosti U t-normu T zamenimo sa neprekidnom nulanormom F, sa absorbujućim elementom $k \in (0, 1)$, koja je uslovno distributivna u odnosu na t-konormu S. Odgovor na ovo pitanje čini originalni deo disertacije. Koristeći rezultat iz [36] koji daje karakterizaciju parova (F, S) koji zadovoljavaju zakon distributivnosti na ograničenom domenu, u [35, 38] su detaljno ispitane osobine novodobijene funkcije korisnosti i analizirano je ponašanje donosioca odluke u odnosu na tu funkciju korisnosti.

Glava 1

Operacije agregacije

U ovoj glavi dajemo pregled osnovnih pojmova koji se odnose na operacije agregacije pri čemu poseban akcenat stavljamo na njihove matematičke osobine i mogućnosti praktične primene. Takođe predstavićemo i neke poznate klase operacija agregacije koje su značajne za dalji rad kao što su t-norme, t-konorme, kompenzatorne operacije, GM-operacije, uninorme i nulanorme. Detaljnije informacije o ovoj tematici mogu se naći u [3, 7, 13, 29, 30, 31, 40, 41, 45, 48, 49, 64, 71, 72, 73, 75].

1.1 Osnovne definicije i primeri

Sa $\mathbb{I}$ ćemo označiti neprazni realni interval, ograničen ili neograničen, i koristiti oznaku $\mathbf{x}$ za $(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in N$. Dajemo opštu definiciju operacije agregacije nad proizvoljnim intervalom $\mathbb{I}$.

Definicija 1 *([31]) Operacija agregacije na $\mathbb{I}^n$ je funkcija $A^{(n)} : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ koja je*

(i) neopadajuća po svim promenljivima, tj. za sve $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{I}^n$ sa osobinom $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}'(x_i \leq x_i'$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\})$, povlači $A^{(n)}(\mathbf{x}) \leq A^{(n)}(\mathbf{x}')$,

(ii) zadovoljava rubne uslove

$$\inf_{x \in \mathbb{I}^n} A^{(n)}(\mathbf{x}) = \inf \mathbb{I} \quad i \quad \sup_{x \in \mathbb{I}^n} A^{(n)}(\mathbf{x}) = \sup \mathbb{I}.$$

Broj n predstavlja broj vrednosti koje se agregiraju. U slučaju da nema zabune operaciju agregacije ćemo označiti sa A umesto sa $A^{(n)}$. Specifičan je slučaj agregacija jednočlanog skupa, tj. unarna operacija $A^{(1)} : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$. Agregacija jednočlanog skupa nije prava agregacija, pa se usvaja konvencija $A^{(1)}(x) = x$ $(x \in \mathbb{I})$.

Pretpostavka da je operacija agregacije A neopadajuća funkcija predstavlja nenegativni odgovor na rast argumenata. Drugim rečima, povećavanjem vrednosti bilo kog ulaza ne može se smanjiti vrednost izlaza. Rubni uslovi dati u prethodnoj definiciji pokazuju da operacija agregacije ne može biti definisana bez specifikovanja domena. Može se lako pokazati sledeća propozicija.

Propozicija 2 *([31]) Neopadajuća funkcija $F : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$ je operacija agregacije na $\mathbb{I}^n$ ako i samo ako važi*

$$\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \inf \mathbb{I} \ \textit{i} \ \sup_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = \sup \mathbb{I},$$

gde je $\delta_F(x) = F(x, \ldots, x)$ dijagonalni deo funkcije F.

Sledeći rezultat omogućava nam da jednostavno odredimo subdomen $\mathbb{J}^n$ od $\mathbb{I}^n$, sa $\mathbb{J} \subseteq \mathbb{I} \subseteq R$ na kome je data neopadajuća funkcija $F : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$ operacija agregacije.

Propozicija 3 *([31]) Neka je $F : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$ neopadajuća funkcija, $a = \inf \mathbb{I}$ i $b = \sup \mathbb{I}$. Tada važi*

$$\inf_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_F(a) = a & \textit{ako } a \in \mathbb{I} \\ \lim_{x\to a^+} \delta_F(x) = a & \textit{ako } a \notin \mathbb{I} \end{cases}$$

i

$$\sup_{x\in\mathbb{I}} \delta_F(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_F(b) = b & \textit{ako } b \in \mathbb{I} \\ \lim_{x\to b^-} \delta_F(x) = b & \textit{ako } b \notin \mathbb{I}. \end{cases}$$

Primer 4 *Posmatrajmo proizvod $\Pi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i$ na domenu $\mathbb{I}^n = [0, \infty]^n$ uz konvenciju $0 \cdot \infty = 0$. Rešenja jednačine $\delta_\Pi(x) = x$ na $[0, \infty]$ su $0, 1$ i ∞. Prema tome na osnovu prethodne propozicije proizvod kada se ograničimo na $[0, \infty]^n$ je operacija agregacije jedino na subdomenima $|0, 1|^n, |1, \infty|^n, |0, \infty|^n$, gde $|a, b|$ označava bilo koji realni interval sa sa rubnim tačkama a i b. Na isti način možemo zaključiti da je zbir $\sum : \overline{R}^n \to \overline{R}$ dat sa $\sum(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$ operacija agregacije na domenima $|-\infty, \infty|^n, |-\infty, 0|^n, |0, \infty|^n$.*

Pošto operacije agregacije posmatramo za razne dimenzije promenljivih uvodimo sledeći pojam.

Definicija 5 *([31]) Proširena operacija agregacije je proširena funkcija $A : \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ čija restrikcija $A^{(n)} = A|_{\mathbb{I}^n}$ na $\mathbb{I}^n$ je operacija agregacije na $\mathbb{I}^n$ za sve $n \in N$.*

Drugim rečima proširena operacija agregacije je niz $(A^{(n)})_{n\geq 1}$, čiji je $n-$ti član operacija agregacije $A^{(n)} : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$.

Primer 6 *Navešćemo neke od dobro poznatih i često upotrebljavanih operacija agregacije.*

(i) Aritmetička sredina $AM : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ i geometrijska sredina $GS : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ su respektivno definisane sa

$$AM(\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad GS(\mathbf{x}) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1/n}.$$

(ii) Za neki težinski vektor $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in [0,1]^n$, takav da je $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, aritmetička sredina sa težinama $WAM_w : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ i uređena aritmetička sredina sa težinama $OWA_w : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ pridružena $\boldsymbol{w}$, su respektivno definisane sa

$$WAM_w(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i, \quad OWA_w(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_{(i)}$$

gde je $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$.

(iii) Za $k \in \{1, \ldots, n\}$, projekcija po koordinati $P_k : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ i uređena statistika $OS_k : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ pridružena k-tom argumentu, su respektivno definisane sa

$$P_k(\mathbf{x}) = x_k, \quad OS_k(\mathbf{x}) = x_{(k)}.$$

(iv) Ekstremne uređene statistike $x_{(1)}$ i $x_{(n)}$ su respektivno operacije minimuma i maksimuma

$$Min(\mathbf{x}) = OS_1(\mathbf{x}) = \min(x_1, \ldots, x_n),$$

$$Max(\mathbf{x}) = OS_n(\mathbf{x}) = \max(x_1, \ldots, x_n).$$

(v) *Medijana od neparnog broja* $(x_1, \ldots, x_{2k-1})$ *je definisana sa*

$$Med(x_1, \ldots, x_{2k-1}) = x_{(k)}.$$

(vi) *Ako je* $\mathbb{I} = [a, b]$ *zatvoren interval. Najmanja i najveća operacija agregacije na* $[a, b]^n$ *su respektivno definisane sa*

$$A_\perp(\mathbf{x}) = \begin{cases} b & \textit{ako je } x_i = b \textit{ za sve } i \in \{1, \ldots, n\} \\ a & \textit{inače,} \end{cases}$$

$$A_\top(\mathbf{x}) = \begin{cases} a & \textit{ako je } x_i = a \textit{ za sve } i \in \{1, \ldots, n\} \\ b & \textit{inače.} \end{cases}$$

1.2 Matematičke osobine operacija agregacije

Proučavanje problema agregacije je pokazalo da izbor odgovarajuće operacije agregacije ne može biti proizvoljan, već zavisi od konkretne primene. Za izbor odgovarajuće operacije agregacije koristi se aksiomatski pristup, te se odabir vrši na osnovu izbora grupe osobina iz opšte kolekcije matematičkih osobina. Ove osobine su diktirane prirodom vrednosti koje treba objediniti. Na primer, ako posmatramo agregaciju mišljenja u procesu glasanja i ako su glasači anonimni, onda operacija agregacije mora biti simetrična. Stoga, navodimo sada neke od bitnih i često korišćenih osobina operacija agregacije sa posebnim osvrtom na njihovo tumačenje.

1.2.1 Neprekidnost

Neprekidnost tražimo kada ne želimo haotični odgovor na male promene promenljive. Na primer, kada ulazni podaci predstavljaju približne vrednosti podataka, neprekidnost operacije agregacije garantuje da male greške neće prouzrokovati velike promene izlaza. Za operacije agregacije (zbog monotonosti) neprekidnost se može okarakterisati sledećim rezultatom (videti [31, 41]).

Teorema 7 *([31]) Za neopadajuću funkciju* $F : \mathbb{I}^n \to R$ *sledeći uslovi su ekvivalentni*

(i) F *je neprekidna*

(ii) *F je neprekidna u svakoj promenljivoj, tj. za sve* $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ *i sve* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *unarna funkcija*

$$u \to F(x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

je neprekidna

(iii) *F ima osobinu da za sve* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{I}^n$ *takve da je* $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ *i sve* $c \in [F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y})]$, *postoji* $\mathbf{z} \in \mathbb{I}^n$ *da je* $\mathbf{x} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{y}$, *tako da važi* $F(\mathbf{z}) = c$.

Posmatraju se i drugi jači oblici neprekidnosti (kao što su uniformna neprekidnost, apsolutna neprekidnost, Lipschitz neprekidnost) i slabiji oblici neprekidnosti (kao što su poluneprekidnost odole i odgore, neprekidnost na rubu). Svakako najbolji jači oblik neprekidnosti koji eksplicitno opisuje vezu između ulaznih i izlaznih grešaka je Lipschitz neprekidnost (ili Lipschitz-ova osobina). Operacije AM, Min, Max su primeri neprekidnih operacija koje imaju i Lipschitz-ovu osobinu, dok je GS primer neprekidne operacije agregacije koja nema Lipschitz-ovu osobinu. Generalno važi sledeći odnos.

Lipschitz neprekidnost $\Rightarrow$ apsolutna neprekidnost$\Rightarrow$
uniformna neprekidnost $\Rightarrow$neprekidnost.

U nekim primenama, kao na primer u verovatnosnim metričkim prostorima, više vrednosnoj logici ili dekompozabilnim merama, često su dovoljni slabiji oblici neprekidnosti. U nastavku dajemo definiciju poluneprekidnosti odole i odgore, pri čemu uzimamo da je $\mathbb{I} = [0, 1]$ i $n = 2$.

Definicija 8 *([41]) Za funkciju* $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ *kažemo da je odole (odgore) poluneprekidna ako za sve* $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ *i svako* $\epsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da, respektivno, važi*

$$F(x, y) > F(x_0, y_0) - \epsilon \ \text{ kada } (x, y) \in (x_0 - \delta, x_0] \times (y_0 - \delta, y_0],$$
$$F(x, y) < F(x_0, y_0) + \epsilon \ \text{ kada } (x, y) \in [x_0, x_0 + \delta) \times [y_0, y_0 + \delta).$$

Kao i u slučaju neprekidnosti, za operacije agregacije poluneprekidnost odole (odgore) može se okarakterisati sledećom propozicijom.

Propozicija 9 *([41]) Neopadajuća funkcija* $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je poluneprekidna odole (odgore) ako i samo ako je F levo (desno)-neprekidna u svakoj promenljivoj.*

Propozicija 9 nam dozvoljava da govorimo o levoj-neprekidnosti i desnoj-neprekidnosti operacija agregacije, što ćemo u daljem radu koristiti, umesto o poluneprekidnosti odole i poluneprekidnosti odgore.

1.2.2 Simetrija (komutativnost)

Uobičajena komutativnost za binarne operacije $x * y = y * x$, lako se može uopštiti na n-arnu funkciju, za $n > 2$, na sledeći način.

Definicija 10 *([31]) $F : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$ je simetrična funkcija ako za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ i sve permutacije σ skupa $\{1, \dots, n\}$ važi*

$$F(\mathbf{x}) = F([\mathbf{x}]_\sigma), \text{ gde je } [\mathbf{x}]_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Osobina simetrije znači da agregirana vrednost ne zavisi od redosleda argumenata. Ovo se zahteva kada se kombinuju kriterijumi jednake važnosi ili mišljenja anonimnih eksperata. Sledeći rezultat, poznat u teoriji grupa [58], pokazuje da se osobina simetrije može proveriti samo sa dve jednakosti.

Teorema 11 *([58]) $F : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$ je simetrična funkcija ako i samo ako za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ važi*

(i) $F(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

(ii) $F(x_2, x_3, \dots, x_n, x_1) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$

U situacijama kada kriterijumi ili pojedinačna mišljenja nisu jednake važnosti osibina simetrije se mora izostaviti. Mnoge od navedenih operacija agregacije su simetrične kao na primer AM, GS, OWA_w. Karakterističan primer nesimetrične operacije agregacije je WAM_w.

Postoje razni pokušaji da se ubace težine (ponderi) u simetrične funkcije, na primer ponavljanjem argumenata. Nasuprot tome, moguće je nesimetričnu funkciju $F(\mathbf{x})$ simetrizovati tako što ćemo je zameniti sa $F(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$. Na ovaj način, na primer od WAM_w dobijamo OWA_w. Detaljnije o ovome se može videti u [31].

1.2.3 Idempotentnost

Kao i u slučaju komutativnosti, i idempotentnost za binarne operacije $x*x = x$ možemo proširiti na n-arne funkcije na sledeći način.

Definicija 12 *$F : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$ je idempotentna funkcija ako je $F(x, \dots, x) = x$ za sve $x \in \mathbb{I}$.*

Definicija 13 *Element $x \in \mathbb{I}$ je idemotentan za funkciju $F : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$ ako je $F(x, \ldots, x) = x$.*

Idempotentnost je u nekim oblastima osnovna osobina operacije agregacije, kao na primer u višekriterijumskom odlučivanju (videti [29]), gde je uobičajeno da ako su svi kriterijumi zadovoljeni sa istim stepenom x tada i globalni rezultat treba da je x. Ova osobina se često naziva u zavisnosti od oblasti primene i sporazum, refleksivnost, nema neprijateljstva. Očigledno je da su $AM, WAM_w, OWA_w, Max, Min, Med$ idempotentne operacije dok Π i Σ nisu. Na ovom mestu posebno ističemo operacije Min i Max koje, što ćemo videti u nastavku, predstavljaju jedine primere idempotentnih t-normi i t-konormi.

1.2.4 Položaj na realnoj osi

Operacije agregacije delimo u tri važne klase: konjuktivne, disjunktivne i internalne (sredine).

Definicija 14 *([31]) Operacija agregacije $A : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ je*

(i) konjuktivna ako je $A(\mathbf{x}) \leq \min(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n)$

(ii) disjunktivna ako je $A(\mathbf{x}) \geq \max(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n)$

(iii) internalna ako je $\min(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{x}) \leq \max(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n)$

Konjuktivne operacije objedinjuju vrednosti kao da su povezane logičkom operacijom "i", tj. rezultat agregacije može biti velik samo ako su vrednosti svih ulaza visoke. Prema tome, niska vrednost ne može nikad biti kompenzovana visokom vrednosti. Najpoznatije konjuktivne operacije agregacije su trougaone norme.

Disjunktivne operacije objedinjuju vrednosti kao da su povezane logičkom operacijom "ili", tj. rezultat agregacije je bar velik koliko i najveći ulaz. Prema tome, visoka vrednost ne može nikad biti kompenzovana niskom vrednosti. Najpoznatije disjunktivne operacije agregacije su trougaone konorme.

Između konjuktivnih i disjunktivnih operacija nalaze se internalne operacije. Tipičan primer ovih operacija su sredine i funkcije proseka (eng. means, averaging functions, videti [31]). U višekriterijumskom odlučivanju, ove operacije se još zovu i kompenzatorne operacije jer se loša vrednost jednog kriterijuma može kompenzovati sa dobrom vrednošću drugog kriterijuma i obrnuto. Sledeći rezultat pokazuje da su idempotentnost i internalnost ekvivalentne osobine za operacije agregacije.

Propozicija 15 *([31]) Neka je data funkcija* $F : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$.

(i) Ako je F *internalna onda je i idempotentna.*

(ii) Ako je F *idempotentna i neopadajuća onda je internalna.*

1.2.5 Parcijalna agregacija po grupama

Pretpostavimo da je moguća particija argumenata na disjunktne podgrupe, te parcijalna agregacija po svakoj podgrupi i dobijanje globalne agregacije na osnovu ovih parcijalnih agregacija. Najpoznatiji načini grupisanja su: asocijativnost, dekompozabilnost, autodistributivnost, bisimetrija i samo identičnost. S obzirom na klase operacija agregacije koje ćemo u nastavku razmatrati osvrnućemo se samo na asocijativnost, dok se ostale osobine mogu pogledati u [3, 31]. Asocijativnost za binarnu operaciju $*$ znači da $(x*y)*z = x*(y*z)$. U sledećoj definiciji vidimo da se asocijativnost može proširiti i na svaki konačan broj argumenata.

Definicija 16 *([31]) Proširena funkcija* $A : \cup_{n\geq 1}\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ *je asocijativna ako je* $A(x) = x$ *za sve* $x \in \mathbb{I}$ *i ako važi*

$$A(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = A(A(x_1, \ldots, x_k), A(x_{k+1}, \ldots, x_n))$$

za sve $0 \leq k \leq n$, *gde* $n \in N$ *i sve* $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$.

Na osnovu asocijativnosti, možemo ući u proces agregacije i pre nego što znamo sve ulaze, jer se novi dodatni ulaz jednostavno agregira sa prethodno dobijenim agregiranim izlazom. Prema tome svaka asocijativna proširena funkcija A je potpuno određena sa njenom binarnom funkcijom $A^{(2)}$ na sledeći način

$$A(x_1, \ldots, x_{n+1}) = A(A(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}).$$

Lako je primetiti da asocijativnost u paru sa idempotentnošću poništava efekat ponavljanja argumenata u procesu agregacije. Na primer, imamo

$$A(x, y, \ldots, y) = A(x, A(y, \ldots, y)) = A(x, y),$$

bez obzira od broja argumenata y. Istaknuti primeri operacija agregacije koje nisu asocijativne su AM i GS, pa se zato traže funkcionalne jednačine, slične asocijativnim, koje bi kao rešenje imale neku sredinu. Najpoznatija je dekompozabilnost.

1.2.6 Invarijantne osobine

U zavisnosti koja vrsta skale se koristi, dobijaju se ograničenja na klase opracija agregacije koje se mogu koristiti. Pretpostavimo da su $x_1, \ldots, x_n$, x_{n+1} promenljive i da je

$$x_{n+1} = A(x_1, \ldots x_n) \tag{1.1}$$

za neku nepoznatu operaciju agregacije. Problem je pronaći opšti oblik funkcije A kada znamo tip skale ulaznih i izlaznih promenljivih. Na primer, agregacija na ordinalnoj skali se ograničava na operacije koje uključuju samo poređenje, kao što su medijana i uređena statistika, dok na primer aritmetička sredina nije dozvoljena.

Preciznije, *skala merenja* (eng. scale of measurement) je preslikavanje koje pridružuje realne brojeve objektima koji se mere. *Tip skale* (eng. scale type) promenljive x_i je definisan klasom dozvoljenih transformacija, kao što je na primer transformacija iz inča u centimetre, kilograma u funte i slično, koje dovode od jedne prihvatljive skale do druge. U tom kontekstu razlikujemo više tipova skale kao što su *ratio, difference, interval, ordinal* skala. Detaljnije o teoriji tipa skale se može videti u [43]. Lucev princip poznat pod imenom *princip teorije konstrukcije* je baziran na zahtevu da dozvoljene tranformacije ulaznih promenljivih moraju voditi do dozvoljene transformacije izlazne promenljive. Na primer, ako su ulazne promenljive nezavisne skale, tada operacija A mora zadovoljavati sledeći uslov: Za sve dozvoljene transformacije $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ ulaznih promeljivih, postoji dozvoljena transformacija ψ_φ izlazne promenljive tako da je

$$A(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)) = \psi_\varphi(A(x_1, \ldots, x_n)).$$

Rešenja ove funkcionalne jednačine konstituišu skup mogućih operacija agregacije A iz jednačine (1.1) koje ne zavise od skala merenja koje su izabrane za promenljive, već samo od tipa skale promenljivih (detaljnije videti [31]).

1.2.7 Neutralni i absorbujući element

Postojanje neutralnog elementa je poznati pojam za binarne operacije. Ovaj pojam se može proširiti i za opšti slučaj.

Definicija 17 *([31]) Neka je $A : \cup_{n\geq 1}\mathbb{I}^n \to \overline{R}$ proširena funkcija. Element $e \in \mathbb{I}$ je prošireni neutralni element za A ako za svako $i \in \{1,\ldots,n\}$ i svako $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ tako da je $x_i = e$ važi*

$$A(x_1,\ldots,x_n) = A(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n).$$

Prema tome, prošireni neutralni element se može izostaviti iz agregacije ulaznih vrednosti, i to nema nikakav uticaj na krajnji rezultat. To znači da u višekriterijumskom odlučivanju pridruživanjem vrednosti koja je jednaka proširenom neutralnom elementu (ako postoji) nekom od kriterijuma, samo su drugi kriterijumi relevantni za globalnu ocenu.

Za $n-$arne funkcije postoji alternativni pristup dat u sledećoj definiciji.

Definicija 18 *([31]) Element $e \in \mathbb{I}$ je neutralni element za funkciju $A : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$ ako za sve $i \in \{1,\ldots,n\}$ i svako $x \in \mathbb{I}$ imamo $A(x_{\{i\}}e) = x$, gde $x_{\{i\}}e$ označava $n-$torku čija je $i-$ta koordinata x, a ostale su e.*

Naravno, ako je e prošireni neutralni element proširene operacije agregacije $A : \cup_{n\geq 1}\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$, onda je on neutralni element (jer je $A(x) = x$ za sve $x \in \mathbb{I}$) i svake operacije agregacije $A^{(n)}$, $n \in N$.

Definicija 19 *([31]) Element $a \in \mathbb{I}$ je anihilator (absorbujući) element za funkciju $A : \mathbb{I}^n \to \overline{R}$ ako za sve $\mathbf{x} \in \mathbb{I}^n$ tako da $a \in \{x_1,\ldots,x_n\}$ važi $A(\mathbf{x}) = a$.*

Za razliku od neutralnog elementa, absorbujući element (ako postoji) ima dominantan i odlučujući uticaj na rezultat agregacije. Prema tome, absorbujući element možemo koristiti kao neku vrstu veta ili eliminišuće vrednosti. U tom kontekstu operacije agregacije sa absorbujućim elementom pojavljuju se u proučavanju problema racionalnog odlučivanja koji su povezani sa Arovom teoremom nemogućnosti (eng.*Arrows impossibility theorems*). Sledeće propozicije pokazuju tesnu vezu između konjuktivnih (disjunktivnih) operacija agregacije i postojanja neutralnog i absorbujućeg elementa.

Propozicija 20 *([31]) Neka je $A : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ operacija agregacije sa neutralnim elementom $e \in \mathbb{I}$. A je konjuktivna i $b = \sup\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ ako i samo ako $e = b$. Dualno, A je disjunktivna i $a = \inf\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ ako i samo ako $e = a$.*

Propozicija 21 *([31]) Neka je $A : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ operacija agregacije. Ako je A konjuktivna i $a = \inf\mathbb{I} \in \mathbb{I}$, onda je a absorbujući element. Dualno, ako je A disjunktivna i $b = \sup\mathbb{I} \in \mathbb{I}$ onda je b absorbujući element.*

Prema tome konjuktivna operacija agregacije $A : [a,b]^n \to [a,b]$ ima obavezno a kao absorbujući element, a ako ima neutralni element e, onda je obavezno $e = b$. Iz ovog možemo jednostavno zaključiti da ako posmatramo konjuktivnu (ili disjunktivnu) operaciju agregacije na otvorenom intervalu (a,b), onda ona ne poseduje ni neutralni ni absorbujući element.

1.3 Konjuktivne i disjunktivne operacije agregacije

U daljem radu razmatraćemo operacije agregacije definisane na jediničnom intervalu, tj. $\mathbb{I} = [0,1]$. Kao što smo već napomenuli najistaknutiji predstavnici konjuktivnih i disjunktivnih operacija agregacije su respektivno trougaone norme i trougaone konorme. U ovoj sekciji predstavićemo njihove najvažnije osobine, dok se detaljniji prikaz može videti u [41, 64]. Pre toga navodimo jedan rezultat koji pokazuje vezu između konjuktivnih i disjunktivnih operacija agregacije.

Propozicija 22 *([31]) Neka je $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ opadajuća bijekcija. Proširena operacija agregacije A je konjuktivna ako i samo ako njena $\varphi-$transformacija A_φ data sa*

$$A_\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{-1}(A(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)))$$

je disjunktivna.

Ukoliko je funkcija φ iz prethodne propozicije i involucija, tj. važi $\varphi(\varphi(x)) = x$ za sve $x \in [0,1]$, onda se operacija A_φ zove $\varphi-$dualna od A (detaljnije je dato u [31]). Za funkciju A kažemo da je $\varphi-$samo-dualna ako je $A_\varphi = A$. Najistaknutija involutivna opadajuća bijekcija N (ova oznaka je uzeta iz fazi logike gde se zove standardna negacija) na $[0,1]$ je data sa $N(x) = 1 - x$. $N-$dualnost agregacionih funkcija na $[0,1]$ zovemo jednostavno dualnost sa oznakom $A_N = A^d$, tj.

$$A^d(\mathbf{x}) = 1 - A(1 - x_1, \ldots, 1 - x_n),$$

dok se samo-dualne operacije agregacije još zovu i simetrične sume. Prema tome, na osnovu Propozicije 22 zaključujemo da su disjunktivne operacije agregacije dualne funkcije konjuktivnim operacijama agregacije, što znači da sve njihove osobine možemo izvesti iz odgovarajućih osobina konjuktivnih operacija agregacije. Zbog ove dualnosti u daljem radu veću pažnju poklanjamo konjuktivnim operacijama agregacije, tj. trugaonim normama.

Primedba 23 *Ako je u Propoziciji 22 preslikavanje $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ rastuća bijekcija onda je funkcija A_φ takođe konjuktivna operacija agregacije. Tada kažemo da su funkcije A i A_φ izomorfne, a preslikavanje φ zovemo izomorfizmom između A i A_φ.*

1.3.1 Trougaone norme

Trougaone norme (t-norme) originalno su uvedene (u opštijoj formi) 1942 od strane K. Mengera u [50] i one su bile korišćene prilikom generalizacije nejednakosti trougla iz klasičnih metričkih u statističke metričke prostore (danas poznate kao verovatnosne metričke prostore). Naime, teorija verovatnosnih metričkih prostora je nastala iz potrebe da se modelira neodređenost merenja tako što će se rastojanju umesto broja dodeliti funkcija raspodele verovatnoće. Današnje aksiome t-normi dali su Schweizer i Sklar (videti [64]) zahtevajući još asocijativnost i neutralni element $e = 1$. Ove operacije osim u pomenutoj teoriji verovatnosnih metričkih prostora danas se pojavljuju i u teoriji fazi skupova i fazi logike, teoriji informacija, fazi kontrolerima, neuralnim mrežama, teoriji igara, nelinearnim jednačinama, neaditivnim merama i integralima.

Definicija 24 *([64]) t-norma T je operacija agregacije $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja je asocijativna, simetrična i poseduje neutralni element 1.*

Definicija 25 *([64]) Dualna operacija agregacije t-normi T, tj. asocijativna, simetrična operacija agregacije $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ sa neutralnim elementom 0 zove se t-konorma.*

Imajući u vidu ove dve definicije jednostavno se pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija 26 *([41])*

(i) Operacija $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je t-norma ako i samo ako je trojka $([0,1], T, \leq)$ potpuno uređena komutativna semigrupa sa neutralnim elementom 1 i anihilatorom 0.

(ii) Operacija $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ je t-konorma ako i samo ako je trojka $([0,1], S, \leq)$ potpuno uređena komutativna semigrupa sa neutralnim elementom 0 *i anihilatorom* 1.

Postoji neprebrojivo mnogo t-normi a najintersantnije su sledeće četiri bazične t-norme.

(i) $T_M(x,y) = \min(x,y),$ (minimum)

(ii) $T_P(x,y) = xy,$ (proizvod)

(iii) $T_L(x,y) = \max(x+y-1, 0),$ (Lukasiewich t-norma)

(iv) $T_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ako } (x,y) \in [0,1)^2 \\ \min(x,y) & \text{inače.} \end{cases}$ (drastični proizvod)

Sada navodimo četiri bazične t-konorme:

(i) $S_M(x,y) = \max(x,y),$ (maksimum)

(ii) $S_P(x,y) = x+y-xy,$ (verovatnosna suma)

(iii) $T_L(x,y) = \min(x+y, 1),$ (Lukasiewich t-konorma)

(iv) $S_D(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ako } (x,y) \in (0,1]^2 \\ \max(x,y) & \text{inače.} \end{cases}$ (drastična suma)

Lako se primećuje da su $(T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L)$ i (T_D, S_D) parovi međusobno dualnih t-normi i t-konormi. Sledeća poređenja koja uključuju bazične t-norme jednostavno se pokazuju.

Za svaku t-normu T važi da je $T_D \leq T \leq T_M$, što znači da je T_D najslabija a T_M najjača t-norma. Takođe imamo sledeći poredak bazičnih t-normi

$$T_D < T_L < T_P < T_M.$$

Jasno je da zbog asocijativnosti možemo svaku t-normu T proširiti na $[0,1]^n$, na sledeći način

$$T_{i=1}^{n} x_i = T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n) = T(x_1, \ldots, x_n).$$

Dodatno ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$ pišemo $x_T^{(n)} = T(x, x, \ldots, x)$, uz konvenciju $x_T^{(0)} = 1$ i $x_T^{(1)} = x$ za svako $x \in [0, 1]$. Takođe, kako je svaka t-norma slabija od T_M možemo je proširiti na prebrojivo beskonačnu operaciju uzimajući za bilo koji niz $(x_n)_{n \in N}$ iz $[0, 1]$ vrednost

$$T_{i=1}^{\infty} x_i = \lim_{n \to \infty} T_{i=1}^{n} x_i.$$

Činjenica da je niz $(T_{i=1}^{n} x_i)_{n \in N}$ monotono opadajući ograničen od dole garantuje postojanje granice.

Sada ćemo reći nešto o algebarskim osobinama t-normi.

Definicija 27 *([41]) Neka je T t-norma.*

(i) Element $x \in (0, 1)$ je nilpotentan element za T ako postoji $n \in N$ tako da je $x_T^{(n)} = 0$.

(ii) Element $a \in (0, 1)$ je delitelj nule za T ako postoji neko $b \in (0, 1)$ tako da je $T(a, b) = 0$.

(iii) T je striktno monotona (SM) ako za svako $x \in (0, 1]$ i za sve $y, z \in [0, 1]$ tako da je $y < z$ važi $T(x, y) < T(x, z)$.

(iv) T zadovoljava zakon kancelacije (CL) ako $T(x, y) = T(x, z)$ implicira $x = 0$ ili $y = z$.

(v) T zadovoljava zakon uslovne kancelacije (CCL) ako $T(x, y) = T(x, z) > 0$ implicira $y = z$.

(vi) T je Arhimedova (AP) ako za sve $x, y \in (0, 1)$ postoji $n \in N$ tako da važi $x_T^{(n)} < y$.

(vii) T ima osobinu granice (LP) ako za sve $x \in (0, 1)$ važi $\lim_{n \to \infty} x_T^{(n)} = 0$.

Primedba 28 *([41]) U odnosu na bazične t-norme lako se pokazuje sledeće:*

(i) Svaki element $a \in [0, 1]$ je idempotentan element za T_M i ona je jedina idempotentna t-norma, dok T_L, T_P, T_D poseduju samo trivijalne idempotentne elemente $\{0, 1\}$.

(ii) Svaki element $a \in (0, 1)$ je i nilpotentan element i delitelj nule za T_L i T_D, dok T_M i T_P ne poseduju ni nilpotentne elemente ni delitelje nule.

(iii) T_P *zadovoljava (SM), (CL), (CCL), (AP), (LP), dok* T_M *ne zadovoljava ni jednu od pomenutih osobina.* T_L *i* T_D *zadovoljavaju (AP), (CCL) i (LP).*

Primedba 29 *([41]) Neka je* T *t-norma. Tada važi sledeće:*

(i) Svaki nilpotentni element a *od* T *je i delitelj nule, dok obrnuto ne važi. Može se pokazati da za svaku t-normu postojanje nilpotentnih elemenata je ekvivalentno postojanju delitelja nule.*

(ii) Ako je $a \in (0,1)$ *nilpotentan element (delitelj nule) od* T*, onda je i svaki broj* $b \in (0,a)$ *takođe nlpotentan element (delitelj nule), što znači de je skup nilpotentnih elemenata (delitelja nule) ili prazan (kao kod* T_M *i* T_P*) ili interval oblika* $(0,c)$ *ili* $(0,c]$.

(iii) Ako T *zadovoljava (CL), onda očigledno zadovoljava (CCL) dok obrnuto ne važi (primer je* T_L*).*

Sledeća propozicija pokazuje vezu striktne monotonosti i ostalih osobina.

Propozicija 30 *([41]) Neka je* T *t-norma. Tada imamo:*

(i) T *je striktno monotona ako i samo ako zadovoljava (CL).*

(ii) Ako je T *striktno monotona onda ona ima samo trivijalne idempotentne elemente.*

(iii) Ako je T *striktno monotona onda ona nema delitelja nule.*

U odnosu na Arhimedovu osobinu (AP) imamo sledeći rezultat.

Propozicija 31 *([41]) Neka je* T *t-norma. Tada imamo:*

(i) T *je Arhimedova ako i samo ako ima osobinu granice (LP).*

(ii) Ako je T *Arhimedova, onda ona ima samo trivijalne idempotentne elemente.*

(iii) Ako je T *neprekidna, ona je Arhimedova ako i samo ako ima samo trivijalne idempotentne elemente.*

Kombinujući neprekidnost sa nekim algebarskim osobinama dobijamo dve veoma važne klase t-normi.

Definicija 32 *([41]) Neka je T t-norma.*

(i) T je striktna ako je neprekidna i striktno monotona.

(ii) T je nilpotentna ako je neprekidna i svaki element $a \in (0,1)$ je nilpotentan element za T.

Istaknut primer striktne t-norme je T_P, dok je T_L primer nilpotentne t-norme. Ono što pokazuje sledeći rezultat, čiji dokaz je dat u Prilogu, je da su sve striktne t-norme izomorfne sa T_P, dok su sve nilpotentne t-norme izomorfne sa T_L.

Propozicija 33 *([41]) Neka je T t-norma.*

(i) T je striktna ako i samo ako postoji rastuća bijekcija $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ tako da je $T(x,y) = \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y))$ za sve $(x,y) \in [0,1]^2$.

(ii) T je nilpotentna ako i samo ako postoji rastuća bijekcija $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ tako da je $T(x,y) = \varphi^{-1}(\max(\varphi(x)+\varphi(y)-1,0))$ za sve $(x,y) \in [0,1]^2$.

Sledeći rezultat pokazuje da među neprekidnim Arhimedovim t-normama postoje samo dve disjunktne klase: nilpotentne i striktne t-norme.

Teorema 34 *([41]) Neka je T neprekidna Arhimedova t-norma. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) T je nilpotentna.

(ii) Postoji neki nilpotentan element za T.

(iii) Postoji neki delitelj nule za T.

(iv) T nije striktna.

Sada ćemo se pozabaviti konstrukcijom t-normi. U tom cilju prvo uvodino pojam pseudo-inverzne funkcije koja predstavlja uopštenje inverzne funkcije.

Definicija 35 *([41]) Neka su* $[a,b]$ *i* $[c,d]$ *dva zatvorena podintervala od* $[-\infty,+\infty]$ *i neka je* $f:[a,b]\to[c,d]$ *monotona funkcija koja nije konstanta. Pseudo-inverzna funkcija* $f^{(-1)}:[c,d]\to[a,b]$ *je definisana sa*

$$f^{(-1)}(y)=\sup\{x\in[a,b]|(f(x)-y)(f(b)-f(a))<0\}.$$

Sledeća teorema pokazuje kako se može konstruisati nova t-norma koristeći datu t-normu i monotonu funkciju.

Teorema 36 *([41]) Neka je* $f:[0,1]\to[0,1]$ *monotono rastuća funkcija i* T *t-norma tako da* $T(f(x),f(y))\in Ran(f)\cup[0,f(0^+)],(f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x))$*, za sve* $x,y\in[0,1)$*, i za sve* $(x,y)\in[0,1]^2$ *sa* $T(f(x),f(y))\in Ran(f)$ *važi* $f\circ f^{(-1)}(T(f(x),f(y)))=T(f(x),f(y))$*. Funkcija* $T_{[f]}$ *data sa*

$$T_{[f]}(x,y)=\begin{cases} f^{(-1)}(T(f(x),f(y))) & \textit{ako } (x,y)\in[0,1)^2,\\ \min(x,y) & \textit{inače}\end{cases}$$

je t-norma.

Sledeći rezultat pokazuje kako možemo konstruisati t-normu koristeći samo realnu funkciju jedne promenljive.

Teorema 37 *([41]) Neka je* $f:[0,1]\to[0,\infty]$ *striktno opadajuća funkcija sa* $f(1)=0$ *tako da* $f(x)+f(y)\in Ran(f)\cup[f(0^+),\infty]$ *za sve* $(x,y)\in[0,1]^2$*. Funkcija* $T:[0,1]^2\to[0,1]$ *data sa*

$$T(x,y)=f^{(-1)}(f(x)+f(y))$$

je t-norma.

Ako je funkcija f iz prethodne teoreme još i neprekidna sa desna u 0 onda je zovemo aditivni generator od T i njega najčešće označavamo sa t. Može se pokazati da je t-norma konstruisana pomoću aditivnog generatora uvek Arhimedova. Obrnuto tvrđenje u opštem slučaju ne važi.

Primedba 38 *Neka je* $t:[0,1]\to[0,\infty]$ *aditivni generator t-norme* T *i ako definišemo striktno rastuću funkciju* $\theta:[0,1]\to[0,1]$ *sa* $\theta(x)=e^{-t(x)}$*, onda je očigledno da je za sve* $(x,y)\in[0,1]^2$ $T(x,y)=\theta^{(-1)}(\theta(x)\theta(y))$*. Funkciju* θ *zovemo multiplikativni generator od* T *i ona zadovoljava* $\theta(1)=1$ *i za sve* $(x,y)\in[0,1]^2$ *važi* $\theta(x)\theta(y)\in Ran(\theta)\cup[0,\theta(0)]$*.*

Sledeći metod konstrukcije nove t-norme koristeći familiju datih t-normi dolazi iz algebre i baziran je na rezultatu iz [11] koji se odnosi na ordinalne sume semigrupa.

Teorema 39 *([41]) Neka je $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ familija t-normi i $((a_\alpha, e_\alpha))_{\alpha\in A}$ familija disjunktnih nepraznih podintervala od $[0,1]$. Funkcija $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa*

$$T(x,y) = \begin{cases} a_\alpha + (e_\alpha - a_\alpha) T_\alpha \left(\frac{x-a_\alpha}{e_\alpha - a_\alpha}, \frac{y-a_\alpha}{e_\alpha - a_\alpha} \right) & \textit{ako } (x,y) \in [a_\alpha, e_\alpha]^2, \\ \min(x,y) & \textit{inače} \end{cases}$$

je t-norma.

Ovako konstruisana t-norma se zove ordinalna suma sumanda $< a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha >$ i pišemo $T = (< a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha >)_{\alpha\in A}$.

Postoji tesna veza između ordinalnih suma i netrivijalnih idempotentnih elemenata što vidimo u sledećoj propoziciji (dokaz je u Prilogu), koju ćemo koristiti u sledećoj glavi ove disertacije.

Propozicija 40 *([41]) Neka je T t-norma i $a \in (0,1)$ tako da za sve $x \in [0,1]$ važi $T(a,x) = \min(a,x)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni.*

(i) a je netrivijalni idempotentni element za T.

(ii) Postoje t-norme T_1 i T_2 tako da je $T = (< 0, a, T_1 >, < a, 1, T_2 >)$.

Inače, idempotentni elementi t-norme mogu se okarakterisati na sledeći jednostavan način.

Propozicija 41 *([41]) Neka je T t-norma.*

(i) Element $a \in [0,1]$ je idempotentan za T ako i samo ako za sve $x \in [a,1]$ važi $T(a,x) = \min(a,x)$.

(ii) Ako je T neprekidna, $a \in [0,1]$ je idempotentan element za T ako i samo ako za sve $x \in [0,1]$ imamo $T(a,x) = \min(a,x)$.

Prema tome, ako je t-norma T iz Propozicije 40 neprekidna ne moramo pretpostavljati da za sve $x \in [0,1]$ važi $T(a,x) = \min(a,x)$, jer je to ekvivalentno sa činjenicom da je a idempotentan element.

Sada ćemo nešto reći o reprezentaciji t-normi. Prvo dajemo rezultat koji se odnosi na neprekidne Arhimedove t-norme.

Teorema 42 *([41]) Za funkciju $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ sledeći uslovi su ekvivalentni.*

(i) T je neprekidna Arhimedova t-norma.

(ii) T ima neprekidan aditivni generator koji je jedinstveno određen do na pozitivnu multiplikativnu konstantu.

Jasno je da zbog pređašnje priče prethodna teorema važi i za multiplitativni generator. Osim toga može se pokazati (videti[41]) da je t-norma T striktna ako i samo ako $t(0) = \infty$ ($\theta(0) = 0$), odnosno nilpotentna ako i samo ako $t(0) < \infty$ ($\theta(0) > 0$).

Na kraju predstavljamo teoremu koja govori o reprezentaciji neprekidnih t-normi (dokaz je u Prilogu).

Teorema 43 *([41]) Za funkciju $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) T je neprekidna t-norma.

(ii) T je jedinstveno predstavljena kao ordinalna suma neprekidnih Arhimedovih t-normi, tj. postoji jedinstveno određen kao konačan ili prebrojivo beskonačan skup A i familija disjunktnih otvorenih podintervala $((a_\alpha, e_\alpha))_{\alpha\in A}$ od $[0,1]$ kao i jedinstveno određena familija neprekidnih Arhimedovih t-normi $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ tako da je $T = (< a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha >)_{\alpha\in A}$.

1.4 Operacije agregacije bazirane na t-normama i t-konormama

Kao sto smo videli u sekciji 1.2.4, razmatrajući konjuktivne i disjunktivne operacije agregacije, da ako se dve veličine objedinjavaju pomoću t-norme onda nema kompenzacije između malih i velikih vrednosti. Nasuprot tome objedinjavanje bazirano na t-konormi daje punu kompenzaciju. Nijedan od ovih slučajeva ne pokriva pravu situaciju prilikom odlučivanja. Da bi se izbegli ovi nedostaci t-normi i t-konormi u odnosu na kompenzaciju, uvode se tzv. kompenzatorne operacije koje su i dalje u tesnoj vezi sa t-normama i t-konormama. Tako su Zimmermann i Zysno u [75] uveli dve vrste kompenzatornih operacija. Prva od njih su $\gamma-$operacije, tj. parametrizovana familija operacija $(\Gamma_\gamma)_{\gamma\in[0,1]}$, gde parametar γ označava stepen kompenzacije, definisana sa

$$\Gamma_\gamma(\mathbf{x}) = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{1-\gamma}(1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)^\gamma).$$

ako je $\gamma = 1$ onda je $\Gamma_1 = S_P$ (puna kompenzacija), dok ako je $\gamma = 0$ onda je $\Gamma_0 = T_P$ (potpun nedostatak kompenzacije). Za sve $\gamma \in [0,1]$ imamo

$$T_P(\mathbf{x}) \le \Gamma_\gamma(\mathbf{x}) \le S_P(\mathbf{x}).$$

Primetimo da su $\gamma-$operacije specijalna klasa eksponencijalnih kompenzatornih operacija $E_{T,S,\gamma}$ gde umesto T_P i S_P stoji proizvoljna t-norma T i t-konorma S (ne obavezno dualna za T). Druga klasa kompenzatornih operacija uvedena u [75] su konveksno-linearne kompenzatorne operacije $(L_{T,S,\gamma})_{\gamma\in[0,1]}$ definisane kao konveksne kombinacije t-norme T i t-konorme S na sledeći način

$$L_{T,S,\gamma}(\mathbf{x}) = (1-\gamma)T(\mathbf{x}) + \gamma S(\mathbf{x}).$$

Lako se vidi da su sve ove kompenzatorne operacije komutativne operacije agregacije, koje su pozicionirane između t-norme i t-konorme, dok asocijativnost generalno ne važi za $\gamma \in (0,1)$. Takođe parametar γ ako fiksiramo, ostaje konstantan nezavisno od ulaznih vrednosti koje se agregiraju.

Klasa asocijativnih kompenzatornih operacija uvedena je u [40] od strane Klementa, Mesiara i Papa. Stepen kompenzacije se kontroliše sa dva parametra, sa neutralnim elementom e i kompenzacionim faktorom p. O njima ćemo nesto vise reći u nastavku budući da oni predstavljavlju reprezentabilne uninorme.

Yager i Filev u [72] su uveli konveksno nelinearne kombinacije t-norme T i t-konorme S gde parametar $\gamma \in [0,1]$ zavisi od datog ulaza. Za neprekidnu t-normu T^* (koja može biti različita od T) bez delitelja nule, za parametar je predložena simetrična suma

$$\gamma^*(\mathbf{x}) = \frac{T^*(\mathbf{x})}{T^*(\mathbf{x}) + T^*(1-x_1,\ldots,1-x_n)}.$$

Konvekno nelinearna kompenzatorna operacija $L_{T,S}^{(T^*)}$ je onda definisana sa

$$L_{T,S}^{(T^*)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} a & \text{ako } \{0,1\} \in \{x_1,\ldots,x_n\} \\ (1-\gamma^*)T(\mathbf{x}) + \gamma^* S(\mathbf{x}) & \text{inače,} \end{cases}$$

gde je $a \in [0,1]$.

Na kraju ovog dela predstavljamo operacije agregacije, tesno povezane sa t-normama i t-konormama, uvedene u [49] od strane G. Mayora koje ćemo jednostavno zvati GM-operacije.

Definicija 44 *([49]) GM-operacija F je operacija agregacije $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja je simetrična i zadovoljava sledeće granične uslove za sve $x \in [0,1]$:*

$$F(0,x) = F(0,1)x \quad i \quad F(x,1) = (1 - F(0,1))x + F(0,1).$$

Ovi granični uslovi pokazuju da je vrednost $F(x,0)$ težinska aritmetička sredina x i 0, dok je $F(x,1)$ težinska aritmetička sredina x i 1. Sledeći rezultat (dokaz je u Prilogu) pokazuje neke osobine GM-operacija koje ćemo koristiti u sledećoj glavi ove disertacije.

Teorema 45 *([49]) Neka je F GM-operacija. Tada važi sledeće:*

(i) *F je asocijativna ako i samo ako je t-norma ili t-konorma.*

(ii) $F = \min$ *ili* $F = \max$ *ako i samo ako* $F(0,1) = 0$ *ili* $F(0,1) = 1$ *i F je idempotentna.*

(iii) *F je idempotentna ako i samo ako* $\min \leq F \leq \max$.

1.5 Operacije agregacije sa neutralnim elementom

U ovoj sekciji razmatraćemo binarne operacije agregacije definisane na $[0,1]$ koje poseduju neutralni element $e \in [0,1]$ i tesno su povezane sa t-normama i t-konormama. Najpoznatiji primer takvih operacija su uninorme koje su uveli Yager i Rybalov u [73]. Motivacija za njihovo uvođenje dolazi iz teorije odlučivanja kada neku alternativu ocenjujemo sa različitih tačaka gledišta. Neka je svaka ocena broj iz jediničnog intervala i neka je $e \in (0,1)$ nivo zadovoljenja. Ukoliko su sve ocene iznad e onda želimo toj alternativi dodeliti visoku vrednost, a ako su sve ocene ispod e, onda joj želimo dodeliti nisku vrednost. U slučaju da su neke ocene ispod a neke iznad e, onda joj želimo dodeliti agregiranu vrednost negde između. Ovakve situacije nisu se mogle modelirati t-normama i t-konormama, jer su njihovi neutralni elementi rubne tačke intervala $[0,1]$.

1.5.1 Osnovne osobine uninormi

Definicija 46 *([73]) Uninorma U je operacija agregacije $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja je asocijativna, simetrična i ima neutralni element $e \in [0,1]$.*

Jasno je da ako stavimo $e = 1$ u prethodnu definiciju dobijamo t-normu, a ako stavimo $e = 0$ dobijamo t-konormu. Prema tome, uninorme predstavljaju generalizaciju t-normi i t-konormi.

Propozicija 47 *([31]) Neka je U uninorma sa neutralnim elementom $e \in (0,1)$, i neka je $a_U = U(0,1)$. Važi sledeće:*

(i) a_U je anihilator za U.

(ii) $a_U \in \{0,1\}$.

(iii) U nije neprekidna.

Ukoliko je $a_U = 0$ uninormu U zovemo konjuktivna, a ako je $a_U = 1$ onda je disjunktivna. Klasa svih uninormi je zatvorena u odnosu na dualnost. Ako je U konjuktivna (respektivno, disjunktivna) uninorma sa neutralnim elementom e, dualna operacija U^d je disjunktivna (respektivno, konjuktivna) uninorma sa neutralnim elementom $1-e$. Takođe, na osnovu prethodne propozicije vidimo da ne možemo nikad imati neprekidnost uninorme U na celom jediničnom kvadratu. Moguće je, što ćemo videti u nastavku da u slučaju reprezentabilnih uninormi, imamo neprekidnost svuda osim u dve tačke $(0,1)$ i $(1,0)$. Prekid u tim tačkama je neizbežan, kao posledica prekidnosti množenja (ako ga posmatramo kao binarnu operaciju agregacije na $[0,\infty]$) u $(0,\infty)$ i $(\infty,0)$.

Struktura uninorme na $[0,e]^2$ i $[e,1]^2$ je tesno povezana sa t-normama i t-konormama. Za uninormu U sa neutralnim elementom $e \in (0,1)$ funkcije T_U i S_U definisane sa

$$T_U(x,y) = \frac{U(ex,ey)}{e},\ (x,y) \in [0,1]^2 \tag{1.2}$$

i

$$S_U(x,y) = \frac{U(e+(1-e)x, e+(1-e)y) - e}{1-e},\ (x,y) \in [0,1]^2 \tag{1.3}$$

su respektivno t-norma i t-konorma. Prema tome lako se pokazuje sledeća propozicija.

Propozicija 48 *([30]) Neka je U uninorma sa neutralnim elementom $e \in (0,1)$. Tada postoji t-norma T i t-konorma S tako da je*

$$U(x,y) = \begin{cases} eT(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}) & \text{ako } (x,y) \in [0,e]^2 \\ e + (1-e)S(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}) & \text{ako } (x,y) \in [e,1]^2. \end{cases} \tag{1.4}$$

t-norma T iz prethodne propozicije se zove noseća (*eng. underlying*) t-norma, a t-konorma S noseća t-konorma od U. Na ostatku jediničnog kvadrata, tj. na skupu $D_e = [0,1]^2 \setminus ([0,e]^2 \cup [e,1]^2)$ važi sledeći rezultat.

Lema 49 *([30]) Neka je U uninorma sa neutralnim elementom $e \in (0,1)$. Za $(x,y) \in D_e$ imamo*

$$\min(x,y) \leq U(x,y) \leq \max(x,y).$$

Drugim rečima na D_e uninorma U je simetrična sredina H (spominjali smo ih u sekciji 1.2.4). Propozicija 48 i Lema 49 daju potreban ali ne i dovoljan uslov za reprezentaciju uninorme pomoću t-normi, t-konormi i simetričnih sredina. Za datu t-normu T, t-konormu S i neutralni element $e \in (0,1)$, pronaći odgovarajuću uninormu U svodi se na pronalaženje simetrične sredine H. Glavni problem je osigurati asocijativnost operacije U konstruisane na taj način.

Prema tome, karakterizacija uninormi svodi se na razmatranje njihove strukture na skupu D_e. Ovo je još uvek otvoren problem. Za poznate klase uninormi ovaj problem je rešen, naravno uz neke dodatne pretpostavke. Ovim pitanjem pozabavićemo se u nastavku.

1.5.2 Poznate klase uninormi

Prva poznata klasa uninormi su uninorme gde je $H = \min$ ili $H = \max$ (videti [30]).

Teorema 50 *([3, 31]) Neka je T proizvoljna t-norma, S proizvoljna t-konorma i $e \in (0,1)$.*

(i) Funkcija $U_{e,T,S}$ data sa

$$U_{e,T,S}(x,y) = \begin{cases} eT(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}) & \text{ako } (x,y) \in [0,e]^2 \\ e + (1-e)S(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}) & \text{ako } (x,y) \in [e,1]^2 \\ \min(x,y) & \text{inače} \end{cases} \tag{1.5}$$

je konjuktivna uninorma sa neutralnim elementom e.

(ii) Funkcija $U_{T,S,e}$ data sa

$$U_{T,S,e}(x,y) = \begin{cases} eT(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}) & \textit{ako } (x,y) \in [0,e]^2 \\ e + (1-e)S(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}) & \textit{ako } (x,y) \in [e,1]^2 \\ \max(x,y) & \textit{inače} \end{cases} \tag{1.6}$$

je disjunktivna uninorma sa neutralnim elementom e.

(iii) Za svaku uninormu U sa neutralnim elementom e, nosećom t-normom T i nosećom t-konormom S, imamo

$$U_{e,T,S} \leq U \leq U_{T,S,e}.$$

Sa U_{min} označavaćemo klasu uninormi oblika (1.5), a sa U_{max} klasu uninormi oblika (1.6). Teorema 50 nam omogućava da konstruišemo najslabiju i najjaču uninormu za dati neutralni element e.

Propozicija 51 *([30]) Za svaku uninormu U sa neutralnim elementom $e \in (0,1)$ važi*

$$\underline{U_e}(x,y) \leq U(x,y) \leq \overline{U_e}(x,y),$$

gde je

$$\underline{U_e}(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{ako } (x,y) \in [0,e)^2 \\ \max(x,y) & \textit{ako } (x,y) \in [e,1]^2 \\ \min(x,y) & \textit{inače,} \end{cases}$$

i

$$\overline{U_e}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{ako } (x,y) \in [0,e]^2 \\ 1 & \textit{ako } (x,y) \in (e,1]^2 \\ \max(x,y) & \textit{inače.} \end{cases}$$

Ovde smo koristili i činjenicu da je T_D najslabija a T_M najjača t-norma, kao i da je S_M najslabija a S_D najjača t-konorma.

Primedba 52 *Uninorme iz klasa $U_{min} \cup U_{max}$ imaju sledeće osobine (videti [30]).*

- *Ako $U \in U_{min}$ onda je funkcija $x \to U(x,1)$ neprekidna na $[0,e)$.*
- *Ako $U \in U_{max}$ onda je funkcija $x \to U(x,0)$ neprekidna na $(e,1]$.*

Sledeća važna klasa uninormi su idempotentne uninorme. Prve uninorme koje su uveli Yager i Rybalov u [73] su uninorme iz klasa U_{min} i U_{max} date sa:

$$U_c(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{ako } (x,y) \in [e,1]^2, \\ \min(x,y) & \text{inače}, \end{cases} \tag{1.7}$$

i

$$U_d(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{ako } (x,y) \in [0,e]^2, \\ \max(x,y) & \text{inače}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ove uninorme su jedini poznati eksplicitni primeri idempotentnih uninormi. Sve idempotentne uninorme mogu se implicitno opisati sledećim rezultatom Czogale i Drewniaka.

Teorema 53 *([12]) Neka je U operacija agregacije $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja je idempotentna, asocijativna sa neutralnim elementom $e \in [0,1]$. Tada postoji monotono opadajuća funkcija $g : [0,1] \to [0,1]$ sa $g(e) = e$ tako da je za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ U dato sa:*

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{ako je } y < g(x), \\ \max(x,y) & \textit{ako je } y > g(x), \\ x \textit{ ili } y & \textit{inače}. \end{cases}$$

Ova teorema daje potreban uslov da asocijativna operacija agregacije sa neutralnim elementom e bude idempotentna. Kompletiranje prethodnog rezultata dali su Martin, Mayor i Torrens u [44].

Teorema 54 *([44]) $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ je asocijativna, idempotentna operacija agregacije sa neutralnim elementom $e \in [0,1]$ ako i samo ako postoji monotono opadajuća funkcija $g : [0,1] \to [0,1]$ sa $g(e) = e$, $g(x) = 0$ za sve $x > g(0)$, $g(x) = 1$ za sve $x < g(1)$ i koja zadovoljava za sve $x \in [0,1]$*

$$\inf\{y|g(y) = g(x)\} \leq g(g(x)) \leq \sup\{y|g(y) = g(x)\},$$

tako da je za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ U dato sa:

$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{ako je } y < g(x) \textit{ ili } y = g(x) \textit{ i } x < g(g(x)), \\ \max(x,y) & \textit{ako je } y > g(x) \textit{ ili } y = g(x) \textit{ i } x > g(g(x)), \\ x \textit{ ili } y & \textit{inače}. \end{cases}$$

Jasno je da da U mora biti komutativna na $[0,1]^2$ osim možda u tačkama (x,y) tako da je $y = g(x)$ i $x = g(g(x))$. Ukoliko u prethodnoj teoremi zahtevamo komutativnost i u tim tačkama dobićemo karakterizaciju svih idempotentnih uninormi. U ovom kontekstu spominjemo i rezultat De Baetsa iz [13] gde je data karakterizacija svih levo (desno)-neprekidnih idempotentnih uninormi.

Primedba 55 *([13]) Za uninorme U_c i U_d date sa (1.7) i (1.8) odgovarajuće funkcije g_{U_c} i g_{U_d} su sledećeg oblika:*

$$g_{U_c}(x) = \begin{cases} 1, & ako\ x \in [0,e) \\ e, & ako\ x \in [e,1] \end{cases}, \quad g_{U_d}(x) = \begin{cases} e, & ako\ x \in [0,e] \\ 0, & ako\ x \in (e,1] \end{cases}.$$

Sledeća važna klasa uninormi su reprezentabilne uninorme tj. uninorme koje možemo predstaviti preko realne funkcije jedne promenljive (aditivnog ili multiplikativnog generatora) po uzoru na neprekidne Arhimedove t-norme i t-konorme. Ovu klasu uninormi pod nazivom asocijativni kompenzatorni uveli su Klement, Mesiar i Pap u [40]. Sledeći rezultat daje potreban i dovoljan rezultat da uninorma U ima aditivni generator (videti [31, 40, 41]).

Teorema 56 *([41]) Neka je $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ funkcija i $e \in (0,1)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) U je uninorma sa neutralnim elementom e koja je striktno monotona na $(0,1)^2$ i neprekidna na $[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$.

(ii) Postoji rastuća bijekcija $u : [0,1] \to [-\infty, \infty]$ sa $u(e) = 0$ tako da za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ važi

$$U(x,y) = u^{-1}(u(x) + u(y)), \tag{1.9}$$

gde u slučaju konjuktivne uninorme U koristimo konvenciju $\infty + (-\infty) = -\infty$, dok u disjunktivnom slučaju koristimo $\infty + (-\infty) = \infty$.

Funkcija u je jedinstveno određena do na pozitivnu multiplikativnu konstantu, i zovemo je aditivni generator za U.

Naravno, lako je izvesti i multiplikativni oblik prethodne teoreme stavljajući $v(x) = e^{u(x)}$. Očigledno, $v : [0,1] \to [0,\infty]$ je rastuća bijekcija tako da za sve $(x,y) \in [0,1]^2$ važi $U(x,y) = v^{-1}(v(x)v(y))$. Koristeći prethodni rezultat mogu se konstruisati interesantni primeri reprezentabilnih uninormi.

Primer 57 *[40, 41] Neka je za sve* $\lambda \in (0, \infty)$, $u_\lambda : [0,1] \to [0,\infty]$ *rastuća bijekcija definisana sa* $u_\lambda(x) = \log(\frac{\lambda x}{1-x})$. *Koristeći (1.9) dobijamo familiju uninormi* $(U_\lambda)_{\lambda \in (0,\infty)}$ *koja je data sa*

$$U_\lambda(x,y) = \frac{\lambda xy}{\lambda xy + (1-x)(1-y)},$$

(uz konvenciju $\frac{0}{0} = 0$ *u konjuktivnom slučaju, i* $\frac{0}{0} = 1$ *u disjunktivnom slučaju) čiji neutralni element je* $e_\lambda = \frac{1}{1+\lambda}$.

Kod reprezentabilnih uninormi noseća t-norma i t-konorma su uvek striktne. Za odgovarajuće aditivne generatore u, t, s od U, T, S važe sledeće veze

$$u(x) = \begin{cases} -t(\frac{x}{e}) & \text{ako } x \in [0,e], \\ s(\frac{x-e}{1-e}) & \text{ako } x \in (e,1], \end{cases}$$

$t(x) = -u(ex)$ i $s(x) = u(e + (1-e)x)$ za $x \in [0,1]$. Činjenica da su aditivni generatori noseće t-norme T i t-konorme S jedinstveno određeni do na pozitivnu multiplikativnu konstantu, na osnovu Teoreme 42, omogućava nam da konstruišemo parametrizovanu klasu (konjuktivnih ili disjunktivnih) reprezentabilnih uninormi koje se na $[0,e]^2 \cup [e,1]^2$ podudaraju dok se na skupu D_e razlikuju. Sledeći primer pokazuje efekte tih razlika kada su T, S, e fiksirani unapred (videti [31, 41]).

Primer 58 *Neka je* $t : [0,1] \to [0,\infty]$ *jedinstven aditivni generator striktne t-norme* T *sa* $t(0.5) = 1$ *i* $s : [0,1] \to [0,\infty]$ *sa* $s(0.5) = 1$ *jedinstven aditivni generator striktne t-konorme* S. *Za dati parametar* $p \in (0,\infty)$ *definišimo aditivni generator* $u_p : [0,1] \to [-\infty,\infty]$ *reprezentabilne konjuktivne uninorme* U_p *na sledeći način,*

$$u_p(x) = \begin{cases} -t(\frac{x}{e}) & \textit{ako } x \in [0,e], \\ ps(\frac{x-e}{1-e}) & \textit{ako } x \in (e,1]. \end{cases}$$

Jasno, da za svako $p \in (0,\infty)$ U_p *je na kvadratu* $[0,e]^2$ *t-norma* T *a na kvadratu* $[e,1]^2$ *t-konorma* S *na osnovu Propozicije 48. Na ostatku jediničnog kvadrata za male vrednosti parametra* p *vrednosti* U_p *opadaju dok za velike vrednosti parametra* p *rastu, tj. familija* $(U_p)_{p \in (0,\infty)}$ *je rastuća sa grnicama*

$$U_0 = \lim_{p \to 0^+} U_p = U_{e,T,S}$$

i

$$U_\infty = \lim_{p\to\infty} U_p$$

gde se U_∞ *poklapa na* $(0,1]^2$ *sa* $U_{T,S,e}$.

Prema tome, zaključujemo da se stepen kompenzacije može kontrolisati sa dva parametra, sa neutralnim elementom e i kompenzacionim faktorom p.

Primedba 59 *Pored ove tri najpoznatije klase uninormi (reprezentabilne, idempotentne, i uninorme iz klase* $U_{\min} \cup U_{\max}$*) gde je u potpunosti rešena njihova struktura, aktuelan je problem opisa strukture uninormi na skupu* D_e*. Tako je P. Drygaś u [18] opisao strukturu na* D_e *kada je* $U(x,y) \in \{x,y\}$ *za sve* $(x,y) \in D_e$*, dok je u [19] okarakterisao sve uninorme neprekidne na* $(0,1)^2$*. Kao što smo već napomenuli opis strukture uninormi u opštem slučaju na skupu* D_e *je otvoren problem.*

1.5.3 Oslabljene uninorme

Na kraju ove sekcije predstavićemo jednu klasu operacija agregacije sa neutralnim elementom e koje dobijamo izostavljanjem pretpostavki simetričnosti i asocijativosti iz definicije uninormi. Ove operacije su uveli Drewniak, Drygaś i Rak u [15] i mi ćemo ih zvati oslabljene uninorme. Sa N_e označavamo klasu tih operacija. Sledeći rezultat daje dekompoziciju ove klase operacija agregacije.

Teorema 60 *([15]) Neka* $e \in [0,1]$ *i* $F : [0,1]^2 \to [0,1]$. $F \in N_e$ *ako i samo ako važi*

$$F = \begin{cases} A & \text{na } [0,e]^2, \\ B & \text{na } [e,1]^2, \\ C & \text{inače,} \end{cases}$$

gde su $A : [0,e]^2 \to [0,e]$, $B : [e,1]^2 \to [e,1]$ *operacije agregacije sa neutralnim elementom e, dok je* C *internalna operacija agregacije.*

Označimo sa $N_e^{\max}(N_e^{\min})$ klasu operacija $F \in N_e$ koje zadovoljavaju dodatne uslove

$$\forall x \in (e,1]\ F(x,0) = F(0,x) = x \ \ (\forall x \in [0,e)\ F(x,1) = F(1,x) = x).$$

Za ovu familiju operacija važi sledeća dekompozicija.

Teorema 61 *([15]) Neka $e \in [0,1]$ i $F : [0,1]^2 \to [0,1]$.*

$$F \in N_e^{min} \Leftrightarrow F = \begin{cases} A & na\ [0,e]^2 \\ B & na\ [e,1]^2 \\ \min & inače \end{cases}, \quad F \in N_e^{max} \Leftrightarrow F = \begin{cases} A & na\ [0,e]^2 \\ B & na\ [e,1]^2 \\ \max & inače \end{cases},$$

gde su $A : [0,e]^2 \to [0,e]$, $B : [e,1]^2 \to [e,1]$ operacije agregacije sa neutralnim elementom e.

Dajemo primer operacije agregacije koja nije idempotentna iz klase N_e^{max}.

Primer 62 *([17]) Funkcija $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ data sa*

$$F(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & ako\ (x,y) \in [0,\frac{1}{16}] \times [\frac{3}{16},\frac{3}{4}] \cup (\frac{1}{16},\frac{3}{4}] \times [0,\frac{3}{4}] \\ xy & ako\ (x,y) \in [0,\frac{1}{16}] \times [0,\frac{3}{16}) \\ 1 & ako\ (x,y) \in (\frac{13}{16},1]^2 \\ \max(x,y) & inače \end{cases}$$

pripada klasi $N_{\frac{3}{4}}^{max}$.

1.6 Operacije agregacije sa absorbujućim elementom

U ovoj sekciji predstavićemo binarne operacije agregacije definisane na $[0,1]$ koje poseduju absorbujući elemenat $k \in [0,1]$ i u tesnoj su vezi sa t-normama i t-konormama. Najpoznatiji primer takvih operacija su nulanorme koje su uveli T. Calvo, B. De Baets i J. Fodor u [7] kao rešenja Frankove funkcionalne jednačine za uninorme tj.

$$U(x,y) + V(x,y) = x + y,$$

gde je U uninorma.

1.6.1 Osnovne osobine i struktura nulanormi

Definicija 63 *([7]) Nulanorma V je operacija agregacije $V : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja je asocijativna, simetrična i za koju postoji element $k \in [0,1]$ tako da*

$$V(x,0) = x \text{ za sve } x \le k \quad i \quad V(x,1) = x \text{ za sve } x \ge k.$$

Očigledno je da je k iz prethodne definicije absorbujući element za V. Takođe ako stavimo $k = 0$ u prethodnu definiciju dobijamo t-normu, dok za $k = 1$ dobijamo t-konormu. Prema tome i nulanorme predstavljaju generalizaciju t-normi i t-konormi. U literaturi se pored nulanormi koristi i pojam t-operacija koje su uvedene u [45].

Definicija 64 *([45]) t-operacija F je operacija agregacije $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja je asocijativna, simetrična i važi da su preslikavanja $x \to F(x,0)$ i $x \to F(x,1)$ neprekidna na $[0,1]$.*

Lako se proverava da su ova dva pojma ekvivalentna, tj. ako je F t-operacija element $k = F(1,0)$ je absorbujući element tako da važi $F(x,0) = x$ za sve $x \le k$ i $F(x,1) = x$ za sve $x \ge k$. Isto tako lako se pokazuje da je svaka nulanorma takođe i t-operacija. Stoga u daljem radu koristimo pojam nulanorme. Sledeći rezultat je od velike važnosti za celu oblast jer daje dekompoziciju svih nulanormi na t-norme i t-konorme. Dokaz je dat u Prilogu.

Teorema 65 *([7]) Neka $k \in (0,1)$. Operacija $V : [0,1]^2 \to [0,1]$ je nulanorma sa absorbujućim elementom k ako i samo ako postoji t-norma T i t-konorma S tako da je V data sa*

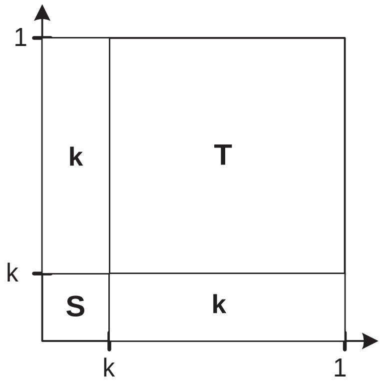
$$V(x,y) = \begin{cases} kS(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}) & \text{ako } (x,y) \in [0,k]^2, \\ k + (1-k)T(\frac{x-k}{1-k}, \frac{y-k}{1-k}) & \text{ako } (x,y) \in [k,1]^2, \\ k & \text{inače.} \end{cases} \tag{1.10}$$

Prema tome kada je u pitanju struktura nulanormi, za razliku od uninormi, imamo potpuno jasnu situaciju. Takođe, ovde nemamo problem sa neprekidnošću, tj. nulanorma je neprekidna ako je neprekidna t-norma T i t-konorma S iz Teoreme 65. Isto tako, nulanorma je Arhimedova ako je Arhimedova t-norma T i t-konorma S iz Teoreme 65. Kao i uninorme, klasa nulanormi je zatvorena u odnosu na dualnost. Ako je V nulanorma sa absorbujućim elementom k, dualna operacija V^d je nulanorma sa absorbujućim elementom $1-k$. Koristeći prethodnu teoremu na neke poznate t-norme i t-konorme možemo konstruisati interesantne primere nulanormi.

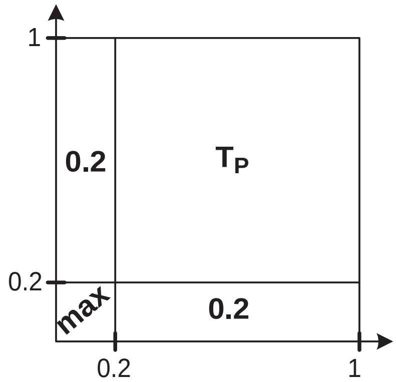
Primer 66 *Funkcija $V : [0,1]^2 \to [0,1]$ data sa*

$$V(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{ako } (x,y) \in [0,\frac{1}{5}]^2, \\ \frac{5xy-x-y+1}{4} & \text{ako } (x,y) \in [\frac{1}{5},1]^2, \\ \frac{1}{5} & \text{inače,} \end{cases}$$

je neprekidna nulanorma gde je t-norma $T = T_P$, t-konorma $S = S_M$ i anihilator $k = \frac{1}{5}$.



Slika 1. Nulanorma sa $k \in (0, 1)$.



Slika 2. Nulanorma iz Primera 66.

Primer 67 *Neka je $k \in (0, 1)$. Nulanorme V_k date sa*

$$V_k(x, y) = \begin{cases} \max(x, y) & \textit{ako } (x, y) \in [0, k]^2, \\ \min(x, y) & \textit{ako } (x, y) \in [k, 1]^2, \\ k & \textit{inače,} \end{cases}$$

predstavljaju sve idempotentne nulanorme za koje je $T = T_M$, $S = S_M$.

Lako je primetiti da je $V_k(x, y)$ je standardna medijana x, y i k (videti [12]). Takođe i svaka nulanorma V sa absorbujućim elementom k može se predstaviti u obliku $V = Med(k, T, S)$ za neku t-normu T i t-konormu S (viteti [31]), tj.

$$V(x, y) = Med(k, T(x, y), S(x, y)) \text{ za sve } (x, y) \in [0, 1]^2.$$

Sledeći rezultat pokazuje vezu neprekidnih nulanormi i asocijativnih operacija agregacije.

Propozicija 68 *([31]) Neka je $A : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ neprekidna asocijativna operacija agregacije i neka je $A(0, 1) = A(1, 0) = k$. Tada važi sledeće.*

(i) Ako je $k = 0$ onda je A t-norma.

(ii) Ako je $k = 1$ onda je A t-konorma.

(iii) Ako $k \in (0,1)$ onda je A nulanorma sa absorbujućim elementom k.

Nulanorme su specijalne simetrične, asocijativne operacije agregacije sa absorbujućim elementom $k \in (0,1)$. Istraživanje opštih simetričnih, asocijativnih operacija agregacije sa absorbujućim elementom k je dato u [48].

1.6.2 Oslabljene nulanorme

Kao i u slučaju uninormi i nulanorme se mogu razmatrati u oslabljenom obliku, tj. bez pretpostavki simetrije i asocijativnosti. Ove operacije su takođe uveli Drewniak, Drygaś i Rak u [15] i mi ćemo ih zvati oslabljene nulanorme. Klasu ovih operacija označavamo sa Z_k. Sledeći rezultat daje dekompoziciju svih oslabljenih nulanormi.

Teorema 69 *([15]) Neka $k \in [0,1]$ i $G : [0,1]^2 \to [0,1]$. $G \in Z_k$ ako i samo ako važi*

$$G = \begin{cases} A & \textit{na } [0,k]^2, \\ B & \textit{na } [k,1]^2, \\ k & \textit{inače,} \end{cases} \tag{1.11}$$

gde je $A : [0,k]^2 \to [0,k]$ operacija agregacije sa neutralnim elementom 0 i $B : [k,1]^2 \to [k,1]$ operacija agregacije sa neutralnim elementom 1.

Navodimo sada jedan primer operacije iz klase Z_k.

Primer 70 *([15]) Funkcija $G : [0,1]^2 \to [0,1]$ data sa*

$$G(x,y) = \begin{cases} x + y - 2xy & \textit{ako } (x,y) \in [\frac{1}{2}(1-y), \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}) \\ \max(x,y) & \textit{ako } (x,y) \in [0, \frac{1}{2}(1-y)] \times [0, \frac{1}{2}) \\ \min(x,y) & \textit{ako } (x,y) \in (\frac{1}{2}, 1]^2 \\ \frac{1}{2} & \textit{inače} \end{cases}$$

je operacija agregacije sa absorbujućim elementom $\frac{1}{2}$ koja nije ni idempotentna ni simetrična ni asocijativna.

Glava 2

Distributivnost operacija agregacije

U ovoj glavi rešavamo funkcionalne jednačine, koje ćemo zvati levi i desni distributivni zakon, gde nepoznate funkcije pripadaju klasama operacija agregacije koje smo predstavili u prethodnoj glavi. U tom cilju prvo dajemo definiciju zakona distributivnosti za operacije agregacije, kao i kratak pregled najpoznatijih rešenja ovih jednačina. Nakon toga dajemo originalne rezultate koji predstavljaju rešenja jednačina distributivnosti za neke klase operacija agregacije. Generalno, ove rezultate možemo podeliti u dve grupe. Prvu grupu čine rezultatii iz [37] gde su zakoni distributivnosti važili na celom domenu, a nepoznate funkcije su GM-operacije agregacije, oslabljene uninorme, oslabljene nulanorme i operacije agregacije bez neutralnog i absorbujućeg elementa. Drugu grupu čine rezultati iz [36] gde je razmatrana uslovna distributivnost, tj. zakon distributivnosti važi na ograničenom domenu, operacija agregacije sa netrivijalnim absorbujućim elementom u odnosu na t-konorme i uninorme iz klasa $U_{min} \cup U_{max}$.

2.1 Jednačine distributivnosti

Definicija 71 *([1]) Neka su F i G binarne operacije agregacije definisane na jediničnom intervalu* $[0,1]$. *Kažemo da je F distributivna u odnosu na G, ako važe sledeća dva zakona:*

(LD)

$$F(x, G(y, z)) = G(F(x, y), F(x, z)), \quad \textit{za sve } x, y, z \in [0, 1],$$

i

(RD)

$$F(G(y,z),x) = G(F(y,x),F(z,x)), \quad \textit{za sve } \ x,y,z \in [0,1],$$

odnosno F je levo i desno distributivna u odnosu na G.

Naravno, kada je F komutativna operacija levi i desni distributivni zakon se podudaraju. Pošto su rezultati za (RD) analogni rezultatima za (LD), u daljem radu fokusiraćemo se na slučaj (LD) kada F nije komutativna operacija agregacije. Za operaciju F kažemo da je uslovno distributivna u odnosu na G ako važe zakoni (LD) i (RD) uz neka ograničenja. Ovom tematikom pozabavićemo se kasnije.

Kao što smo već napomenuli u Uvodu, problem distributivnosti prvi je razmatrao J. Aczél u [1] pri čemu je F bila proizvoljna funkcija ograničena od dole, a G nilpotentna t-konorma. Svakako da je taj rezultat primenjiv i kada je F binarna operacija agregacija. Distributivnost između t-normi i t-konormi je razmatrana u [29]. Uvođenje u matematičku literaturu uninormi, nulanormi i drugih operacija tesno povezanih sa t-normama i t-konormama, dovelo je do niza radova gde su rešavane jednačine distributivnosti (zakoni (LD) i (RD)) za novouvedene operacije agregacije. Tako je T. Calvo u [6] rešavala jednačine distributivnosti za GM-operacije, t-norme, t-konorme i kvazi-aritmetičke sredine. Ruiz, Torrens su u [59] rešavali problem distributivnosti gde obe nepoznate funkcije pripadaju klasi idempotentnih uninormi. Benvenuti, Mesiar u [4] su razmatrali distributivnost pseudo-množenja (operacija agregacije sa neutralnim elementom) u odnosu na pseudo-sabiranje (t-konorma). Feng, Bin u [27] su rešavali jednačine distributivnosti između nulanormi i idempotentnih uninormi. Mas, Mayor, Torrens u [46, 47] su rešavali problem distributivnosti za t-operacije (nulanorme) i uninorme iz klasa $U_{min} \cup U_{max}$. Drewniak, Drygaś, Rak, u [15] su generalizovali prethodni rezultat na oslabljene nulanorme i oslabljene uninorme iz klasa $N_e^{\max} \cup N_e^{\min}$. Xie, Liu u [70] su rešavali jednačine distributivnosti između nulanormi i uninormi koje su neprekidne na $(0,1)^2$ ili su reprezentabilne, čime je kompletirano istraživanje problema distributivnosti za nulanorme i poznate klase uninormi.

Na kraju ove sekcije, dajemo jednu jednostavnu lemu koju ćemo u nastavku često koristiti, i direktna je posledica monotonosti operacija agregacije. Dokaz je dat u Prilogu.

Lema 72 *Svaka operacija agregacije* $F : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je distributivna u odnosu na* min *i* max *operaciju.*

2.2 Distributivnost između GM-operacija agregacije i oslabljenih nulanormi

U ovoj sekciji sa F označavaćemo GM-operaciju agregacije a sa G oslabljenu nulanormu sa absorbujućim elementom $s \in (0,1)$, odnosno $G \in Z_s$. Prema tome, rezultati koje ćemo dobiti proširuju istraživanje iz [6] na nekomutativne i neasocijativne operacije agregacije sa netrivijalnim absorbujućim elementom. Razlikovaćemo dva slučaja: levu distributivnost G u odnosu na F i distributivnost F u odnosu na G.

2.2.1 Leva distributivnost oslabljene nulanorme u odnosu na GM-operaciju

U [6] je razmatrana distributivnost t-norme (t-konorme) u odnosu na GM-operaciju, odnosno dobijen je sledeći rezultat.

Teorema 73 *([6]) Neka je G t-norma ili t-konorma, a F GM-operacija agregacije tako da je $F(0,1) = 0$ ili $F(0,1) = 1$. G je distributivna u odnosu na F ako i samo ako je $F = \min$ ili $F = \max$.*

U sledećoj teoremi mi dajemo uopštenje Teoreme 73 tako što t-normu (t-konormu) zamenjujemo sa oslabljenom nulanormom, tj. znatno proširujemo klasu operacija koje posmatramo.

Teorema 74 *Neka je F GM-operacija agregacije tako da je $F(0,1) = k$, a $G \in Z_s$ gde je $0 < s < 1$. G je levo distributivna u odnosu na F ako i samo ako $F = \max$ za $k > s$ ili $F = \min$ za $k < s$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Pokažimo prvo da $k \in \{0,1\}$. Iz činjenice da važi zakon (LD), za $x = y = 0,\ z = 1$ imamo da je

$$G(0,k) = G(0,F(0,1)) = F(G(0,0),G(0,1)) = F(0,s) = F(0,1) \cdot s = k \cdot s.$$

Odavde dobijamo sledeće:

- ako je $k = s$, pošto je $G(0,s) = s$, sledi $s = s^2$, odnosno $s = 0$ ili $s = 1$ što je kontradikcija sa polaznom pretpostavkom,
- ako je $k < s$ sledi da je $G(0,k) = k$, i prema tome $k = ks$, odnosno $k = 0$,
- ako je $k > s$ sledi da je $G(0,k) = s$, i prema tome $s = ks$, odnosno $k = 1$.

Dakle, $k \in \{0,1\}$. Sada pokazujemo da je F idempotentna operacija agregacije.

- Ako je $x \leq s$, onda
$$x = G(x,0) = G(x, F(0,0)) = F(G(x,0), G(x,0)) = F(x,x),$$
- ako je $x \geq s$, onda
$$x = G(x,1) = G(x, F(1,1)) = F(G(x,1), G(x,1)) = F(x,x).$$

Prema tome $F(x,x) = x$ za sve $x \in [0,1]$ pa na osnovu Teoreme 45 dobijamo $F = \max$ ili $F = \min$.

($\Longleftarrow$) Ako $F \in \{\min, \max\}$ zakon (LD) važi na osnovu Leme 72. $\square$

Ono što se može primetiti, poredeći ova dva rezultata, je to da je Teorema 73, za razliku od Teoreme 74, dokazana sa startnom pretpostavkom da je $k = 0$ ili $k = 1$. Teorema 74 pokazuje da k mora pripadati skupu $\{0,1\}$ kada važi zakon (LD). Prema tome, može se zaključiti da zakon (LD) u kombinaciji sa GM-operacijom daje vrlo jak uslov, jer bez obzira na to što smo t-normu (t-konormu) zamenili sa opštijom operacijom (oslabljenom nulanormom), imamo istu situaciju kada je u pitanju struktura GM-operacije F.

2.2.2 Distributivnost GM-operacije u odnosu na oslabljenu nulanormu

Teorema 75 *Neka je F idempotentna GM-operacija agregacije tako da je $F(0,1) = k$, a $G \in Z_s$ gde je $0 < s < 1$. F je distributivna u odnosu na G ako i samo ako $F = \min$ ili $F = \max$, a G je idempotentna nulanorma.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Prvo pokazujemo da $k \in \{0,1\}$. Kako je $G(0,1) = s$, i iz činjenice da važi zakon distributivnosti, za $x = y = 1,\ z = 0$ dobijamo

$$(1-k)s+k = F(s,1) = F(1,s) = F(1,G(1,0)) = G(F(1,1),F(1,0)) = G(1,k).$$

Sada, kao u prethodnoj teoremi dobijamo:

- ako je $k = s$ sledi da je $s = 0$ ili $s = 1$ što je kontradikcija;
- ako je $k < s$ sledi da je $k = 0$;
- ako je $k > s$ sledi da je $k = 1$.

Ponovo na osnovu Teoreme 45 dobijamo $F = \max$ ili $F = \min$. Ostaje da pokažemo da je G idempotentna nulanorma.

- Ako je $k = 0$, tada za proizvoljno $x \in [0,1]$, zbog činjenice da važi (LD), imamo
$$x = F(x,1) = F(x,G(1,1)) = G(F(x,1),F(x,1)) = G(x,x).$$
- Ako je $k = 1$, onda za proizvoljno $x \in [0,1]$ imamo
$$x = F(x,0) = F(x,G(0,0)) = G(F(x,0),F(x,0)) = G(x,x).$$

Prema tome, G je idempotentna operacija iz Z_s, odnosno G je idempotentna nulanorma.

($\Longleftarrow$) Sa druge strane lako se pokazuje da $F \in \{\max, \min\}$ je distributivno u odnosu na idempotentnu nulanormu. $\square$

Primedba 76 *U [6] prethodni rezultat je dobijen sa startnom pretpostavkom da je G idempotentna nulanorma. Teorema 75 nam pokazuje koliko je zakon distributivnosti u kombinaciji sa GM-operacijom jak uslov, budući da znatno pojednostavljuje strukturu operacije G.*

Ako izostavimo pretpostavku da je F idempotentna GM-operacija iz prethodne teoreme, dobijamo rezultat koji nam dodatno razjašnjava strukturu GM-operacije koja je distributivna u odnosu na oslabljenu nulanormu. Pre toga navodimo rezultat iz [6] gde je razmatrana distributivnost GM-operacije u odnosu na t-normu ili t-konormu.

Teorema 77 *([6]) Neka je G t-norma ili t-konorma, a F GM-operacija agregacije. F je distributivno u odnosu na G ako i samo ako $G = \min$ ili $G = \max$.*

Teoremu 77 uopštavamo tako što t-normu (t-konormu) zamenjujemo sa oslabljenom nulanormom.

Teorema 78 *Neka je F GM-operacija agregacije tako da je $F(0,1) = k$ i $G \in Z_s$, sa $0 < s < 1$. F je distributivna u odnosu na G ako i samo ako G je idempotentna nulanorma i*

- *za $k > s$, F je data sa*

$$F = \begin{cases} A & \textit{na } [0,s]^2, \\ B & \textit{na } [s,1]^2, \\ \max & \textit{inače}, \end{cases} \tag{2.1}$$

  gde je $A : [0,s]^2 \to [0,s]$ komutativna operacija agregacije sa neutralnim elementom 0, a $B : [s,1]^2 \to [s,1]$ komutativna operacija agregacije sa neutralnim elementom s,

- *za $k < s$, F je data sa*

$$F = \begin{cases} C & \textit{na } [0,s]^2, \\ D & \textit{na } [s,1]^2, \\ \min & \textit{inače}, \end{cases} \tag{2.2}$$

  gde je $C : [0,s]^2 \to [0,s]$ komutativna operacija agregacije sa neutralnim elementom s, a $D : [s,1]^2 \to [s,1]$ komutativna operacija agregacije sa neutralnim elementom 1.

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Kao u prethodnoj teoremi pokazuje se da $k \in \{0,1\}$ i da je G idempotentna nulanorma. U daljem radu pretpostavićemo da je $k = 1$. Za $k = 0$ dokaz je sličan pa ga ne dajemo. Iz činjenice da važi zakon distributivnosti, za proizvoljno $x \in [0,1],\ y = 0,\ z = 1$ imamo

$$F(x,s) = F(x, G(0,1)) = G(F(x,0), F(x,1)) = G(x,1),$$

odakle dobijamo sledeće

$$F(x,s) = \begin{cases} s & \text{za } x \le s, \\ x & \text{za } x \ge s. \end{cases} \tag{2.3}$$

Prema tome s je idempotentan element za F, što implicira da za sve $(x, y) \in [0, s]^2$ imamo $0 \leq F(x, y) \leq F(s, s) = s$, i za sve $(x, y) \in [s, 1]^2$ važi $s = F(s, s) \leq F(x, y) \leq 1$. Stoga restrikcije $A = F \mid_{[0,s]^2}$ i $B = F \mid_{[s,1]^2}$ su operacije agregacije sa zahtevanim osobinama. Ostaje da vidimo strukturu operacije F na $[0, 1]^2 \setminus ([0, s]^2 \cup [s, 1]^2)$. Neka je $x > s$ i $y < s < z$. Na osnovu činjenice da važi zakon distributivnosti imamo

$$x = F(x, s) = F(x, G(y, z)) = G(F(x, y), F(x, z)).$$

Pošto je $s = F(s, y) \leq F(x, y), \;\; s < z = F(s, z) \leq F(x, z)$ i $G = \min$ na $[s, 1]^2$, zaključujemo

$$x = G(F(x, y), F(x, z)) = \min(F(x, y), F(x, z)) = F(x, y).$$

Prema tome, $F(x, y) = x = \max(x, y)$ za $y < s < x$.

($\Longleftarrow$) Neka je sada G idempotentna nulanorma a F data sa (2.1). Kad (y, z) pripada jednom od kvadrata $[0, s]^2$ ili $[s, 1]^2$ distributivni zakon važi na osnovu Leme 72 jer su A i B operacije agregacije a G je respektivno $\max$ i $\min$. Za $y < s < z$ imamo da je $G(y, z) = s$, pa je leva strana zakona distributivnosti $L = F(x, G(y, z)) = F(x, s)$ data sa (2.3). Razmatraćemo dva slučaja za ocenu desne strane $R = G(F(x, y), F(x, z))$ zakona distributivnosti.

- Ako je $x \leq s$, onda je $L = s$ i pošto je

  $$F(x, y) \leq F(s, y) = s = F(x, s) \leq F(x, z)$$

  dobijamo $R = G(F(x, y), F(x, z)) = s$.

- Ako je $x > s$, onda je $L = x$ i pošto je

  $$F(x, y) = \max(x, y) = x > s, \;\; F(x, z) \geq F(x, s) = x > s$$

  dobijamo $R = G(F(x, y), F(x, z)) = \min(x, F(x, z)) = x$.

Prema tome, u svim razmatranim slučajevima dobijamo $L = D$ što dokazuje da važi zakon distributivnosti. $\square$

Dakle, Teorema 78 je logičan nastavak rešavanja jednačina distributivnosti koji nam je obezbedio i dodatno razjašnjenje strukture GM-operacija agregacije u vidu dobro poznatih ordinalnih suma, za razliku od Teoreme 77 koja ne daje nikakvu informaciju o strukturi GM-operacije kada je zadovoljen zakon distributivnosti. Generalno u [6] rešavanjem jednačina distributivnosti koje uključuju GM-operacije i t-norme (ili t-konorme) ili su dobijena idempotentna rešenja za GM-operacije kao u Teoremi 73 ili se o njihovoj strukturi nije govorilo ništa kao u Teoremi 77. U tom smislu doprinos Teoreme 78 je dvostruk, bar u teoretskom smislu, jer je s jedne strane dovela do neidempotentnih rešenja jednačina distributivnosti, a sa druge strane je uopštena Teorema 77 i dobijen je interesantan primer GM-operacije.

2.3 Distributivnost između GM-operacija agregacije i oslabljenih uninormi

U ovoj sekciji rešavamo distributivne jednačime koje pored GM-operacija sadrže i operacije agregacije sa neutralnim elementom, tj. oslabljene uninorme iz klase $N_e^{min} \cup N_e^{max}$. Ona predstavlja logičan nastavak prethodnog istaživanja kada umesto oslabljenih nulanormi u jednačine distributivnosti stavimo oslabljene uninorme. Takođe rezultati dobijeni u ovoj sekciji proširuju istraživanje iz [6] na nekomutativne i neasocijativne operacije agregacije sa netrivijalnim neutralnim elementom. Kao i u prethodnoj sekciji razlikujemo dva slučaja: levu distributivnost oslabljene uninorme G u odnosu na GM-operaciju F, i distributivnost GM-operacije F u odnosu na oslabljenu uninormu G.

2.3.1 Leva distributivnost oslabljene uninorme u odnosu na GM-operaciju

Teorema 79 *Neka je F GM-operacija agregacije tako da je $F(0,1) = k$, a $G \in N_e^{max}$ sa $0 < e < 1$.*

(i) Ako je G levo distributivna u odnosu na F, onda $k \in \{0,1\}$ i $F(x,x) = x$ za sve $x > e$.

(ii) Ako je F desno-neprekidna u tački $x = e$, onda je G levo distributivna u odnosu na F ako i samo ako je $F = \min$ ili $F = \max$.

Dokaz. (i) Prvo pokazujemo da $k \in \{0,1\}$. Uzmimo proizvoljno $x \leq e$, $y = 0$, $z = 1$, i na osnovu činjenice da važi zakon (LD) dobijamo

$$G(x,k) = G(x,F(0,1)) = F(G(x,0),G(x,1)) = F(0,1) = k.$$

- Ako je $e = k$, onda je $x = G(x, e) = e$ za sve $x \leq k$, što je kontradikcija.
- Ako je $k < e$, onda je $k = G(0, k) \leq G(0, e) = 0$, odnosno $k = 0$.
- Ako je $k > e$, onda je $F(y, 1) \geq F(0, 1) = k > e$, za proizvoljno y. Sada, uzimajući $y \leq e$, dobijamo

  $$F(y, 1) = G(0, F(y, 1)) = F(G(0, y), G(0, 1)) = F(0, 1) = k.$$

  Na osnovu definicije GM-operacija sledi $F(y, 1) = (1 - k)y + k = k$, i prema tome $(1 - k)y = 0$ za sve $y \leq e$, odnosno, $k = 1$.

Ostaje da pokažemo da je $F(x, x) = x$ za sve $x > e$. Na osnovu (LD) za neko $x > e$, $y = z = 0$ dobijamo

$$x = G(x, 0) = G(x, F(0, 0)) = F(G(x, 0), G(x, 0)) = F(x, x)$$

što dokazuje (i).

(ii) ($\Longrightarrow$) Iz pretpostavke da je F desno neprekidna u tački $x = e$ imajući u vidu dokazano (i) dobija se da je $F(e, e) = e$, odnosno neutralni element operacije G je idempotentan element za GM-operaciju F. Sada primenjujući (LD) za proizvoljno $x \in [0, 1]$ i $y = z = e$ dobijamo da je

$$x = G(x, e) = G(x, F(e, e)) = F(G(x, e), G(x, e)) = F(x, x),$$

pa rezultat sledi iz Teoreme 45.

($\Longleftarrow$) Ako $F \in \{\min, \max\}$ (LD) sledi na osnovu Leme 72. $\square$

Sledeći rezultat je fokusiran na oslabljene uninorme iz klase N_e^{min}.

Teorema 80 *Neka je F GM-operacija agregacije tako da je $F(0, 1) = k$, a $G \in N_e^{min}$ gde je $0 < e < 1$.*

(i) Ako je G levo distributivna u odnosu na F, onda $k \in \{0, 1\}$ i $F(x, x) = x$ za sve $x < e$.

(ii) Ako je F levo neprekidna u tački $x = e$, onda je G levo distributivna u odnosu na F ako i samo ako je $F = \min$ ili $F = \max$.

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 79 pa ga ne dajemo. $\square$

Primedba 81 *Prethodna dva rezultata pod (i) daju nam potrebne uslove da oslabljene uninorme iz klasa $N_e^{min} \cup N_e^{max}$ budu levo distributivne u odnosu na GM-operaciju. Da bi imali i dovoljan uslov morali smo malo pojačati pretpostavke na GM-operaciju F po pitanju leve (desne) neprekidnosti u tački e.*

2.3.2 Distributivnost GM-operacije u odnosu na oslabljenu uninormu

Teorema 82 *Neka je F GM-operacija agregacije tako da je $F(0,1) = k$, i $G \in N_e^{max}$ gde je $0 < e < 1$. Ako je F distributivna u odnosu na G, onda $k \in \{0,1\}$ i $G = U_d$, odnosno G je idempotentna uninorma data sa (1.8).*

Dokaz. Dokažimo da $k \in \{0,1\}$. Na osnovu činjenice da važi distributivni zakon, za $x = y = 0,\ z = 1$ imamo

$$k = F(0,1) = F(0, G(0,1)) = G(F(0,0), F(0,1)) = G(0,k).$$

Ponovo razlikujemo tri slučaja.

- Ako je $e = k$, onda je $e = G(0,e) = 0$ što je kontradikcija sa pretpostavkom da $e \in (0,1)$.
- Ako je $k < e$, onda je $k = G(0,k) \leq G(0,e) = 0$, odnosno $k = 0$.
- Ako je $k > e$, onda je $F(1,z) \geq F(1,0) = k > e$ za proizvoljno z. Sada, za $z \leq e, x = 1, y = 0$ na osnovu zakona distributivnosti imamo

  $$k = F(1,0) = F(1, G(0,z)) = G(F(1,0), F(1,z))$$

  $$= G(k, F(1,z)) \geq G(e, F(1,z)) = F(1,z) \geq k.$$

  Prema tome, $F(1,z) = k$ za sve $z \leq e$. Kao u Teoremi 79, može se pokazati da je $k = 1$.

Dokaz da je G idempotentna uninorma, odnosno da je $G = U_d$, je analogan dokazu Teoreme 75. $\square$

Prethodna teorema daje nam jedino potreban uslov da GM-operacija bude distributivna u odnosu na oslabljenu uninormu iz klase $N_e^{\max}$. Sledeći primer nam pokazuje da taj uslov nije dovoljan.

Primer 83 *Neka je F GM-operacija agregacije sa $k = 0$ i $G = U_d$ gde je $0 < e < 1$. Za proizvoljno $0 < x < e$, $y = 0$ i $z = 1$ distributivnost operacije F u odnosu na G vodi do*

$$x = F(x,1) = F(x, G(0,1)) = G(F(x,0), F(x,1)) = G(0,x) = 0,$$

što je kondradikcija.

Na žalost, za razliku od Teoreme 75, prethodna teorema obezbeđuje samo potreban uslov čak ako pretpostavimo da je F idempotentna GM-operacija agregacije. Kao u prethodnom primeru može se pokazati da operacija min nije distributivana u odnosu na idempotentnu uninormu U_d.

Za operacije iz klase N_e^{min} imamo sledeće tvrđenje čiji je dokaz analogan dokazu prethodne teoreme pa ga ne dajemo.

Teorema 84 *Neka je F GM-operacija agregacije tako da je $F(0,1) = k$, i $G \in N_e^{min}$ gde je $0 < e < 1$. Ako je F distributivna u odnosu na G, onda $k \in \{0,1\}$ i $G = U_c$, odnosno G je idempotentna uninorma data sa (1.7).*

2.4 Distributivnost između operacija agregacije koje ne poseduju neutralni i absorbujući element

U ovoj sekciji razmatraćemo jednačine distributivnosti kada bar jedna od nepoznatih funkcija ne poseduje ni neutralni ni absorbujući element. Na ovaj način kompletiraće se i istraživanje problema distributivnosti za GM-operacije i operacije agregacije koje ne poseduju ni neutralni ni absorbujući element. U tom cilju prvo predstavljamo jedan poznati rezultat iz [6, 29, 31, 41] čiji jednostavni dokaz dajemo jer nam je bitan i zbog sledeće sekcije.

Teorema 85 *([41]) Neka je T t-norma, i S t-konorma, onda važi sledeće:*

(i) T je distributivna u odnosu na S ako i samo ako $S = S_M$,

(ii) S je distributivna u odnosu na T ako i samo ako $T = T_M$.

Dokaz. (i) Neka je T distributivna u odnosu na S. Ako stavimo proizvoljno $x \in [0,1]$, $y = z = 1$ u jednačinu distributivnosti dobijamo

$$x = T(x,1) = T(x,S(1,1)) = S(T(x,1),T(x,1)) = S(x,x),$$

odnosno $S = S_M$. Obrnuto sledi iz Leme 72.
(ii) Neka je S distributivna u odnosu na T. Ako stavimo proizvoljno $x \in [0,1]$, $y = z = 0$ u jednačinu distributivnosti dobijamo

$$x = S(x,0) = S(x,T(0,0)) = T(S(x,0),S(x,0)) = T(x,x),$$

odnosno $T = T_M$. Obrnuto takođe sledi iz Leme 72. $\square$

U daljem radu fokusiraćemo se na slučaju (i) budući da se rezultati koji se odnose na slučaj (ii) dobijaju analogno. Jednostavno se primećuje da Teorema 85 važi i kada izbacimo pretpostavke komutativnosti i asocijativnosti iz definicije t-norme T. Postavlja se sada pitanje šta se dešava ako iz osobina operacije T izostavimo i postojanje neutralnog i absorbujućeg elementa, odnosno ako umesto t-norme u jednačinu distributivnosti stavimo opštu operaciju agregacije A. Kao što će pokazati sledeći rezultat, operacija A ne može biti potpuno proizvoljna, tako da određena vrsta neprekidnosti mora biti zahtevana.

Teorema 86 *Neka je A operacija agregacije tako da je $A(0,1) = A(1,0) = k$, i neka su preslikavanja $A(\cdot,0)$ i $A(\cdot,1)$ neprekidna . A je levo distributivna u odnosu na t-konormu S ako i samo ako $S = \max$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je A levo distributivna u odnosu na S. Na osnovu činjenice da važi zakon (LD) za proizvoljno $x \in [0,1]$ imamo

$$A(x,0) = A(x, S(0,0)) = S(A(x,0), A(x,0)),$$

što znači da je $A(x,0)$ idempotentan element za S za svako $x \in [0,1]$. Iz neprekidnosti preslikavanja $A(\cdot,0)$ dobijamo da su svi elementi iz intervala $[0,k]$ idempotentni za S.

Sada za proizvoljno $x \in [0,1]$ na osnovu sličnih argumenata zaključujemo da je $A(x,1)$ idempotentan element za S. Ponovo na osnovu neprekidnosti preslikavanja $A(\cdot,1)$, dobijamo da su svi elementi iz intervala $[k,1]$ idempotentni za S.

Kako je $[0,1] = [0,k] \cup [k,1]$, dobijamo da su svi elementi iz jediničnog intervala $[0,1]$ idempotentni za S pa zaključujemo da je $S = S_M = \max$.

($\Longleftarrow$) Ako je $S = S_M$ (LD) zakon sledi na osnovu Leme 72. $\square$

Prethodna teorema se može jednostavno proširiti na GM-operacije agregacije. Sledeće tvrđenje daje potreban uslov.

Teorema 87 *Neka je A operacija agregacije tako da je $A(0,1) = A(1,0) = k$ i neka su preslikavanja $A(\cdot,0)$ i $A(\cdot,1)$ neprekidna . Neka je G GM-operacija agregacije. Ako je A levo distributivna u odnosu na G, onda je G idempotentna.*

Uz dodatne pretpostavke na GM-operaciju G dobijamo potreban i dovoljan uslov na osnovu Teoreme 45 što vidimo u sledećem rezultatu.

Teorema 88 *Neka je A operacija agregacije tako da je $A(0,1) = A(1,0) = k$ i neka su preslikavanja $A(\cdot,0)$ i $A(\cdot,1)$ neprekidna . Neka je G GM-operacija agregacije tako da je $G(0,1) \in \{0,1\}$. A je levo distributivna u odnosu na G ako i samo ako $G = \min$ ili $G = \max$.*

Primedba 89 *Lako se uočava sledeće:*

(i) rezultat Teoreme 87 važi i ako umesto GM-operacije koristimo bilo koju operaciju agregacije,

(ii) tvrđenja u ovoj sekciji važe ako pretpostavku $A(0,1) = A(1,0) = k$ zamenimo sa $A(1,0) \geq A(0,1)$.

2.5 Uslovna distributivnost

Iz dosadašnjeg razmatranja može se zaključiti da je zakon distributivnosti jak uslov budući da znatno pojednostavljuje strukturu involviranih operacija. Videli smo da je u većini slučajeva unutrašnja operacija idempotentna. U cilju dobijanja većeg broja rešenja jedna mogućnost je ograničenje domena i tako dolazimo do pojma uslovne (oslabljene) distributivnosti. Postavlja se pitanje kako da ograničimo domen važenja distributivnog zakona tako da pored idempotentnih rešenja dobijemo i neka druga. Svakako to ograničenje mora biti minimalno, ne sme biti potpuno proizvoljno jer zavisi od klasa operacija agregacije za koje posmatramo distributivne jednačine. U tom cilju, prvo dajemo definiciju iz [41] koja govori o uslovnoj distributivnosti t-norme prema t-konormi (videti dokaz Teoreme 85).

Definicija 90 *([41]) t-norma T je uslovno distributivna u odnosu na t-konormu S ako za sve $x, y, z \in [0,1]$ važi*

$$T\left(x, S(y,z)\right) = S\left(T(x,y), T(x,z)\right), \text{ kada je } S(y,z) < 1.$$

Korišćenjem dualnosti može se definisati i uslovna distributivnost t-konorme prema t-normi.

Definicija 91 *t-konorma S je uslovno distributivna u odnosu na t-normu T ako za sve $x, y, z \in [0,1]$ važi*

$$S\left(x, T(y,z)\right) = T\left(S(x,y), S(x,z)\right), \text{ kada je } T(y,z) > 0.$$

U daljem radu fokus će biti na Definiciji 90 koja se može proširiti na opštije operacije agregacije na sledeći način.

Definicija 92 *Neka su F i G operacije agregacije tako da $F \in Z_k$ a G je t-konorma ili $G \in U_{min} \cup U_{max}$. Kažemo da je F uslovno distributivna u odnosu na G (važi (CD) uslov), ako za sve $x, y, z \in [0,1]$ važe zakoni (LD) i (RD) kada je $G(y,z) < 1$.*

Zakone (LD), odnosno (RD) uz uslov $G(y,z) < 1$ označavamo respektivno sa (CLD) i (CRD). Naravno, kao i kod zakona distributivnosti na čitavom domenu, u slučaju komutativnosti operacije F (CLD) i (CRD) se podudaraju. Pošto su rezultati za (CRD) analogni rezultatima za (CLD), u daljem radu fokusiraćemo se na slučaj (CLD) kada F nije komutativna operacija agregacije.

2.5.1 Uslovna distributivnost operacija agregacije sa neutralnim elementom u odnosu na t-konormu

U Teoremi 85 smo videli da jedino rešenje jednačine distributivnsti je $S = S_M$. Sada ćemo predstaviti rezultat iz [41] koji daje rešenje iste jednačine na ograničenom domenu, pri čemu moramo za t-normu T i t-konormu S pretpostaviti da su neprekidne.

Teorema 93 *([41]) Neprekidna t-norma T je uslovno distributivna u odnosu na neprekidnu t-konormu S ako i samo ako je ispunjen tačno jedan od sledeća dva slučaja:*

(i) $S = S_M$;

(ii) postoji striktna t-norma T^* i nipotentna t-konorma S^* tako da je aditivni generator s od S^* koji zadovoljava $s(1) = 1$ istovremeno i multiplikativni generator od T^* i postoji $a \in [0,1)$ tako da za neku neprekidnu t-normu T^{**} imamo

$$T = (< 0, a, T^{**} >, < a, 1, T^* >) \text{ i } S = (< a, 1, S^* >).$$

Na osnovu Teoreme 93 vidimo da uz minimalno ograničenje domena zakona distributivnosti klasa parova operacija (T, S) koje zadovoljavaju (CD) uslov je znatno šira nego kada radimo na čitavom domenu kao u Teoremi 85. Takođe, lako se vidi da broj $a \in [0, 1)$ iz Teoreme 93 predstavlja najveći netrivijalni idempotentni element za t-konormu S i t-normu T. Ključna pretpostavka za dokaz Teoreme 93 je neprekidnost. Karakterizacija parova (T, S) koji zadovoljavaju (CD) uslov bez pretpostavke neprekidnosti je otvorem problem.

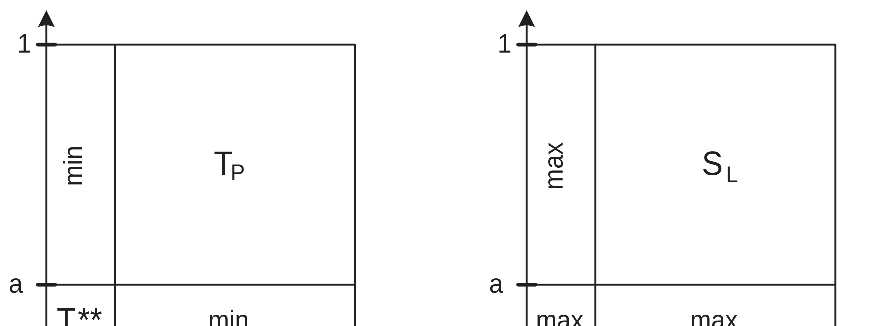
Primedba 94 *([41]) Kako je t-konorma S^* nilpotentna a t-norma T^* striktna na osnovu Propozicije 33 možemo umesto S^* staviti S_L a umesto T^* T_P, odnosno imamo*

$$S(x,y) = \begin{cases} a + (1-a)S_L\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [a,1]^2, \\ \max(x,y) & \textit{inače}, \end{cases} \tag{2.4}$$

i

$$T(x,y) = \begin{cases} aT^{**}\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [0,a]^2, \\ a + (1-a)T_P\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [a,1]^2, \\ \min(x,y) & \textit{inače}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ovo je posebno važno kod praktičnih primena (CD) uslova koje ćemo dati u sledećoj glavi disertacije.



Slika 3. Uslovna distributivnost: t-norma i t-konorma.

U nastavku predstavljamo rezultate koji generalizuju Teoremu 93. Prvi rezultat ([34]) daje karakterizaciju parova (U, S) koji zadovoljavaju (CD) uslov gde je U levo neprekidna uninorma sa neprekidnom nosećom t-normom i t-konormom i neutralnim elementom $e \in (0,1)$. Razlikujemo dva slučaja. Prvi slučaj je kad je neutralni element e uninorme U istovremeno i idempotentan element za t-konormu S, i tada nema potrebe da za operacije U i S pretpostavljamo neprekidnost.

Teorema 95 *([34]) Uninorma U sa neutralnim elementom $e \in (0,1)$ i t-konorma S za koju je e idempotentan element zadovoljavaju (CD) uslov ako i samo ako $S = S_M$.*

Drugi slučaj kad neutralni element e uninorme U nije idempotentan element za t-konormu S je znatno komplikovaniji.

Teorema 96 *([34]) Neka je U levo neprekidna uninorma sa neprekidnom nosećom t-normom i t-konormom i neutralnim elementom $e \in (0,1)$ i S neprekidna t-konorma za koju e nije idempotentan element. Ako par (U,S) zadovoljava (CD) uslov važi sledeće:*

(i) postoje $a, b \in [0,1]$ tako da je t-konorma S ordinalna suma samo jednog sumanda, tj. $S = (< a, b, S^* >)$,

(ii) $U(x,y) \in [a,b]$ za sve $x, y \in [a,b]$ gde su a, b iz (i).

Kada je t-konorma S^* nilpotentna onda mora biti $b = 1$, jer skup nilpotentnih elemenata za t-konormu je interval $(c,1)$ ili $[c,1)$ (videti Primedbu 29 (ii)). Kada je t-konorma S^* striktna može se pokazati da je $a = 0$ (videti [63]).

Prethodna teorema nam pokazuje da je i uslov (CD) jak uslov jer u strukturi t-konorme S imamo samo jedan sumand $< a, b, S^* >$ umesto prebrojivo mnogo i to kada neutralni element e uninorme U nije idempotentan za t-konormu.

Takođe prethodna teorema pokazuje da je uninorma U kompatibilna sa strukturom t-konorme S kada je (CD) uslov zadovoljen. Upravo, zbog ovih zaključaka možemo primeniti rezultat iz [4] (videti i [42]) koji daje karakterizaciju parova (U,S) koji zadovoljavaju (CD) uslov kada je S neprekidna Arhimedova t-konorma, a U levo neprekidna uninorma.

Teorema 97 *([42]) Neka je U levo neprekidna uninorma sa neutralnim elementom $e \in (0,1]$ a S neprekidna Arhimedova t-konorma tako da je zadovoljen (CD) uslov.*

(i) Ako je S striktna t-konorma sa aditivnim generatorom s, onda je U generisana sa $c \cdot s$ za neku konstantu $c \in (0, \infty)$ i ima neutralni element $e = s^{-1}(\frac{1}{c})$, odnosmo U je asocijativni kompenzatorni operator.

(ii) Ako je S nilpotentna t-konorma sa aditivnim generatorom s onda je U t-norma sa multiplikativnim generatorom s, tj. U je striktna t-norma.

Iz (i) prethodne teoreme vidimo da ne postoji t-norma koja je uslovno distributivna u odnosu na striktnu t-konormu. Ako sada Teoremu 97 (ii) primenimo na Teoremu 96 kada je S^* nilpotentna t-konorma, dobijamo da uninorma U mora biti t-norma oblika $U = (< 0, a, T^{**} >, < a, 1, T_P >)$, odnosno imamo istu situaciju kao u Teoremi 93. Ovo dalje znači da ne postoji uninorma sa neutralnim elementom $e \in (0, 1)$ koja je uslovno distributivna u odnosu na neprekidnu t-konormu oblika $S = (< a, 1, S_L >)$ ako $e \in (a, 1)$. Upravo ovaj zaključak je bio i ključna motivacija za proučavanje uslovne distributivnosti nulanorme u odnosu na t-konormu sa ciljem moguće primene u teoriji korisnosti što ćemo videti u sledećoj glavi ove disertacije.

Rezultati iz [63] takođe predstavlja generalizaciju Teoreme 93 kada je t-norma u (CD) uslovu zamenjena sa tzv. pseudo-množenjem F, odnosno sa neprekidnom operacijom agregacije koja poseduje neutralni element. Ovom prilikom predstavljamo jedan poseban slučaj koji ćemo u daljem radu koristiti.

Teorema 98 *([63]) Neprekidna operacija agregacije $F : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ sa neutralnim elementom 1 i neprekidna t-konorma S zadovoljavaju uslov (CLD) ako i samo ako je ispunjen jedan od sledeća dva uslova:*

(i) $S = S_M$;

(ii) postoji element $a \in [0, 1)$ tako da je $F(x, y) \in [a, 1]$ za sve $x, y \in [a, 1]$, i $F = T_P$ na kvadratu $[a, 1]^2$, dok je S data sa (2.4).

2.5.2 Uslovna distributivnost operacija agregacije sa absorbujućim elementom u odnosu na t-konormu

Sada dajemo originalne rezultate koji predstavljaju generalizaciju Teoreme 93 kada t-normu T u (CD) uslovu zamenjujemo sa operacijom agregacije F sa absorbujućim elementom $k \in (0, 1)$. Prvi slučaj je kada je F nulanorma.

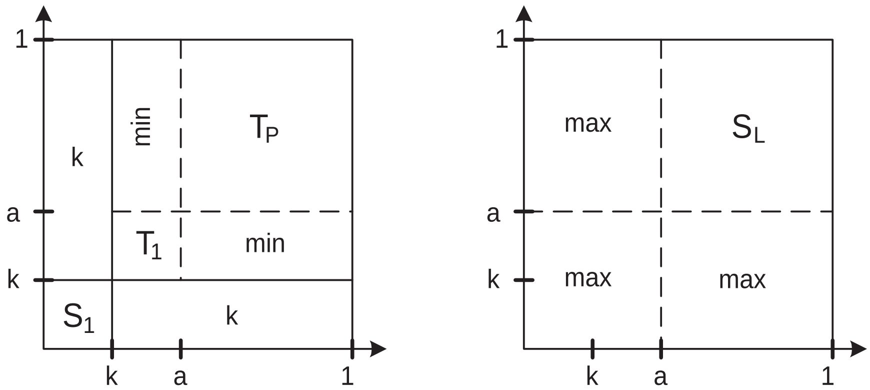
Teorema 99 *Neprekidna nulanorma F sa absorbujućim elementom k i neprekidna t-konorma S zadovoljavaju (CD) uslov ako i samo ako je ispunjen tačno jedan od sledeća dva slučaja:*

(i) $S = S_M$*;*

(ii) postoji element $a \in [k, 1)$ *tako da je* S *oblika (2.4) a* F *je data sa*

$$F(x,y) = \begin{cases} kS_1\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [0,k]^2, \\ k + (a-k)T_1\left(\frac{x-k}{a-k}, \frac{y-k}{a-k}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [k,a]^2, \\ a + (1-a)T_P\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [a,1]^2, \\ \min(x,y) & \textit{ako } k \le \min(x,y) \le a \le \max(x,y), \\ k & \textit{inače}, \end{cases} \tag{2.6}$$

gde je S_1 *neprekidna t-konorma, a* T_1 *neprekidna t-norma (videti Sliku 4).*



Slika 4. Uslovna distributivnost: nulanorma i t-konorma.

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je F uslovno distributivna u odnosu na S. Na osnovu ove činjenice imamo sledeće:

- Za $x \le k$ važi $x = F(x, S(0,0)) = S(F(x,0), F(x,0)) = S(x,x)$, odnosno, svi elementi $x \in [0,k]$ su idempotentni za S.

- Neka je sada $x \ge k$. Ako je $a \in [k,1)$ idempotentan element za S, onda za sve $x \in [k,1]$ važi

$$F(x,a) = F(x, S(a,a)) = S(F(x,a), F(x,a)),$$

odnosno $F(x,a)$ je takođe idempotentan element za S. Zbog neprekidnosti preslikavanja F, kodomen funkcije $F(.,a)$ za ulazne vrednosti iz intervala $[k,1]$ je $[k,a]$, odnosno svi elementi iz intervala $[k,a]$ su idempotentni za S. Odavde, na osnovu teoreme o reprezentaciji neprekidnih t-konormi, zaključujemo da ili su svi elementi iz $[0,1]$ idempotentni za S pa je $S = S_M$, odnosno imamo slučaj (i) ili postoji najveći netrivijalni idempotentni element $a \in [k,1)$ za S tako da je S oblika (2.4) na osnovu Teoreme 93. Jednakost (2.6) sledi na osnovu Teoreme 93 i Teoreme 65.

($\Longleftarrow$) Neka je sada S t-konorma oblika (2.4) a F nulanorma oblika (2.6). Lako se pokazuje da važi (CD) uslov. Na kvadratu $[a,1]^2$ problem se svodi na par (T_P, S_L) koji zadovoljava (CD) uslov, dok u ustalim slučajevima to sledi iz Leme 72. $\square$

Primedba 100 *Značaj dokazane teoreme ogleda se u sledećem:*

(i) Rezultat dobijen u Teoremi 99 omogućio je dalju nadogradnju hibridne funkcije korisnosti iz [23] i analizu ponašanja donosioca odluke u odnosu na nju, što je dato u sledećoj glavi disertacije.

(ii) Koristeći Teoremu 99 mogu se konstruisati brojni primeri neprekidnih nulanormi koji zadovoljavaju (CD) uslov.

Primer 101 *Operacija F data sa*

$$F(x,y) = \begin{cases} \min(x+y, \frac{1}{4}) & \textit{ako } (x,y) \in [0,\frac{1}{4}]^2, \\ \min(x,y) & \textit{ako } (x,y) \in [\frac{1}{4},1] \times [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \times [\frac{1}{4},1] \\ 2xy - x - y + 1 & \textit{ako } (x,y) \in [\frac{1}{2},1]^2, \\ \frac{1}{4} & \textit{inače,} \end{cases} \tag{2.7}$$

je neprekidna nulanorna dobijena sa (2.6) gde je $S_1 = S_L$, $T_1 = \min$, anihilator $k = \frac{1}{4}$ i $a = \frac{1}{2}$. Odgovarajuća t-konorma je oblika (2.4).

Sledeće teorema razmatra slučaj kada je F oslabljena nulanorma.

Teorema 102 *Neprekidna operacija $F \in Z_k$ i neprekidna t-konorma S zadovoljavaju (CLD) ako i samo ako je ispunjen tačno jedan od sledeća dva slučaja:*

(i) $S = S_M$,

(ii) postoji $a \in [k, 1)$ tako da je S data sa (2.4) i F data sa (1.11),

gde je $A : [0, k]^2 \to [0, k]$ neprekidna operacija agregacije neutralnim elementom 0, $B : [k, 1]^2 \to [k, 1]$ neprekidna operacija agregacije sa neutralnim elementom 1 tako da je $B(x, y) \in [a, 1]$ za sve $x, y \in [a, 1]$ i $B = T_P$ na $[a, 1]^2$.

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka par (F, S) zadovoljava (CLD) uslov. Za $x \leq k$ imamo

$$x = F(x, S(0, 0)) = S(F(x, 0), F(x, 0)) = S(x, x),$$

odnosno, svi elementi iz intervala $[0, k]$ su idempotentni za S. Sada koristeći Teoremu 98 na kvadratu $[k, 1]^2$, dobijamo ili (i) ili (ii).
($\Longleftarrow$) Dokazuje se kao u Teoremi 99. □

Ako u prethodne dve teoreme pretpostavimo da zakon distributivnosti važi na celom domenu imamo samo idempotentno rešenje za t-konormu, odnosno važi sledeći rezultat. Razmatraćemo samo slučaj kada je F oslabljena nulanorma, jer u slučaju nulanorme važi isti zaključak.

Teorema 103 *Operacija $F \in Z_k$ je levo distributivna u odnosu na t-konormu S ako i samo ako je $S = S_M$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je F levo distributivna u odnosu na S. Za $x \leq k$ na isti način kao u Teoremi 102 dobijamo da je $S(x, x) = x$. Za $x \geq k$ primenjujemo zakon (LD) za $y = z = 1$ i odmah dobijamo da je $S(x, x) = x$. Dakle za sve $x \in [0, 1]$ imamo da je $S(x, x) = x$, odnosno $S = S_M$.
($\Longleftarrow$) Sledi na osnovu Leme 72. □

Iz prethodne teoreme vidimo da kada zakon distributivnosti važi na celom domenu ne moramo za operacije F i S pretpostavljati neprekidnost. Prema tome ključna pretpostavka za karakterizaciju parova operacija agregacije koje zadovoljavaju zakone distributivnosti na ograničenom domenu, što ćemo i u nastavku videti, je neprekidnost.

2.5.3 Uslovna distributivnost operacija agregacije sa absorbujućim elementom u odnosu na uninormu

Rezultati u ovoj sekciji predstavljaju dalju generalizaciju Teoreme 93 kada je t-norma T u (CD) uslovu zamenjena sa operacijom agregacije F sa absorbujućim elementom $k \in (0, 1)$, a t-konorma S sa uninormom U, sa neutralnim elementom $e \in (0, 1)$, iz klase $U_{\min} \cup U_{\max}$.

Teorema 104 *Neprekidna nulanorma F sa absorbujućim elementom k i uninorma $U \in \mathcal{U}_{\max}$ sa neprekidnom nosećom t-normom i neprekidnom nosećom t-konormom zadovoljavaju (CD) uslov ako i samo ako je $e < k$ i ispunjen je tačno jedan od sledeća dva slučaja:*

(i) F, U su date kao u [46] (Propozicija 4.2.), odnosno $U = U_d$ tj. data je sa (1.8) i

$$F(x,y) = \begin{cases} eS_1\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (k-e)S_2\left(\frac{x-e}{k-e}, \frac{y-e}{k-e}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [e,k]^2, \\ k + (1-k)T\left(\frac{x-k}{1-k}, \frac{y-k}{1-k}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [k,1]^2, \\ \max(x,y) & \textit{ako } \min(x,y) \le e \le \max(x,y) \le k, \\ k & \textit{inače,} \end{cases}$$

gde su S_1 i S_2 neprekidne t-konorme a T je neprekidna t-norma.

(ii) Postoji $a \in [k, 1)$ tako da su F i U date sa

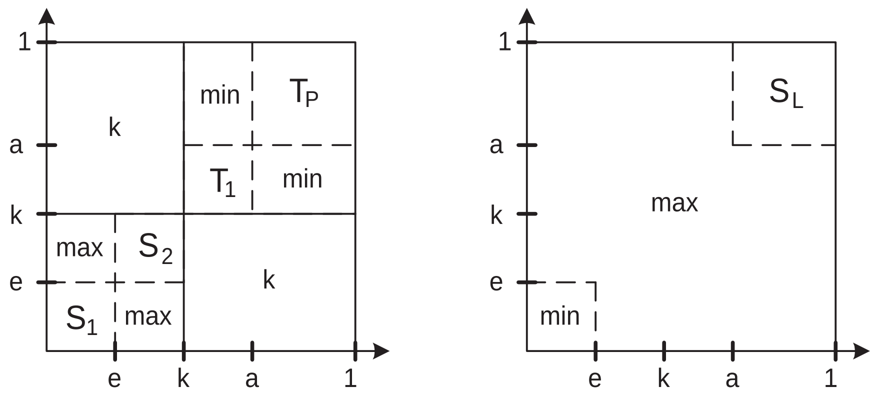
$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \textit{ako } (x,y) \in [0,e]^2, \\ a + (1-a)S_L\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [a,1]^2, \\ \max(x,y) & \textit{inače} \end{cases} \tag{2.8}$$

i

$$F(x,y) = \begin{cases} eS_1\left(\frac{x}{e}, \frac{y}{e}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [0,e]^2, \\ e + (k-e)S_2\left(\frac{x-e}{k-e}, \frac{y-e}{k-e}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [e,k]^2, \\ k + (a-k)T_1\left(\frac{x-k}{a-k}, \frac{y-k}{a-k}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [k,a]^2, \\ a + (1-a)T_P\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & \textit{ako } (x,y) \in [a,1]^2, \\ \max(x,y) & \textit{ako } \min(x,y) \le e \le \max(x,y) \le k, \\ \min(x,y) & \textit{ako } k \le \min(x,y) \le a \le \max(x,y), \\ k & \textit{inače,} \end{cases} \tag{2.9}$$

gde su S_1 i S_2 neprekidne t-konorme, a T_1 je neprekidna t-norma (videti Sliku 5).

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je F neprekidna nulanorma koja je uslovno distributivna u odnosu na uninormu $U \in \mathcal{U}_{\max}$.



Slika 5. Uslovna distributivnost: nulanorma i uninorma iz $U_{\max}$.

- Dokažimo prvo da je $e < k$. Pretpostavićemo suprotno.
  - Neka je $e > k$. Sada, za $x = e$, $z = 0$ i proizvoljno $y \in (e, 1)$, (CD) uslov je oblika
    $$F(e, U(y, 0)) = U(F(e, y), F(e, 0)).$$
    Pošto $y \in (e, 1)$ i $e > k$, imamo da je $U(y, 0) = y$ i $F(e, 0) = k$ pa dobijamo
    $$F(e, y) = U(k, F(e, y)). \tag{2.10}$$
    Zbog pretpostavljene neprekidnosti, (2.10) se može proširiti na $y = 1$ i imamo
    $$e = F(e, 1) = U(k, e) = k,$$
    što je kontradikcija sa pretpostavkom $e > k$.
  - Ako pretpostavimo da je $0 < e = k < 1$, onda za x, y tako da je $0 < x < e = k < y < 1$ i $z = 0$, iz (CD) uslova sledi
    $$k = F(x, y) = F(x, U(y, 0)) = U(F(x, y), F(x, 0))$$
    $$= U(k, x) = U(e, x) = x$$
    što je ponovo kontradikcija.

Prema tome $e < k$. Treba naglasiti da je u [46] pokazano samo $e \leq k$, tj. nije razmatrano da li može biti $e = k$. Ovde smo pokazali i da je $e \neq k$.

- Struktura nulanorme F na $[0,k]^2$ može da se dobije na isti način kao u Propoziciji 4.2 iz [46]. Ovde ćemo problem rešiti na jednostavniji način. Pošto mi radimo sa neprekidnom nulanormom dovoljno je da pokažemo da je e idempotentan element za F, pa na osnovu Propozicije 40 za t-konorme dobijamo da struktura nulanorme F na $[0,k]^2$ izgleda kao u (2.9). Ako u (CD) uslov stavimo $x=y=e,\ z=0$ i koristeći da je $e<k$ dobijamo

  $$e = F(e,0) = F(e,U(e,0)) = U(F(e,e),F(e,0)) = F(e,e).$$

  Struktura uninorme U na $[0,k]^2$ dobija se na osnovu sledećeg: ako $x \le k$ onda imamo

  $$x = F(x,0) = F(x,U(0,0)) = U(F(x,0),F(x,0)) = U(x,x),$$

  odnosno, svi elementi iz intervala $[0,k]$ su idempotentni za U. Pošto je $e<k$, operacija U na $[0,k]^2$ je oblika

  $$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{ako } (x,y)\in[0,e]^2, \\ \max(x,y) & \text{ako } (x,y)\in[0,k]^2\backslash[0,e]^2. \end{cases}$$

- Sada razmatramo strukturu F i U on $[k,1]^2$. Ako je $a\in[k,1)$ idempotentan element za U, onda za sve $x\in[k,1]$ važi

  $$F(x,a) = F(x,U(a,a)) = U(F(x,a),F(x,a)),$$

  odnosno, $F(x,a)$ je takođe idempotentan element za U. Ponovo, na osnovu neprekidnosti operacije F, kodomen funkcije $F(.,a)$ za ulazne vrednost iz $[k,1]$ je interval $[k,a]$. Stoga svi elementi iz $[k,a]$ su idempotentni za U.

Odavde, kao u Teoremi 99, zaključujemo da ili su svi elementi iz $[0,1]$ idempotentni za U, pa imamo istu situaciju kao u Propoziciji 4.2 iz [46], ili postoji najveći netrivijalni idempotentan element $a\in[k,1)$ za U. Sada (2.8) i (2.9) slede iz Teoreme 65 and Teoreme 93.

($\Longleftarrow$) Neka su sada uninorma U and nulanorma F oblika (2.8) i (2.9), respektivno, (CD) uslov se dokazuje kao u Teoremi 99. $\square$

Sledeća teorema je fokusirana na uninorme iz klase $\mathcal{U}_{\min}$.

Teorema 105 *Neprekidna nulanorma F sa absorbujućim elementom k i uninorma $U \in \mathcal{U}_{\min}$ sa neprekidnom nosećom t-normom i neprekidnom nosećom t-konormom zadovoljavaju (CD) uslov ako i samo ako je $e > k$ i ispunjen je tačno jedan od sledeća dva slučaja:*

(i) F, U sa date kao u [46] (Propozicija 4.3), odnosno $U = U_c$ tj. data je sa (1.7) i

$$F(x,y) = \begin{cases} kS_1\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) & \text{ako } (x,y) \in [0,k]^2, \\ k + (e-k)T_1\left(\frac{x-k}{e-k}, \frac{y-k}{e-k}\right) & \text{ako } (x,y) \in [k,e]^2, \\ e + (1-e)T\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right) & \text{ako } (x,y) \in [e,1]^2, \\ k & \text{ako } \min(x,y) \le k \le \max(x,y), \\ \min(x,y) & \text{inače,} \end{cases}$$

gde je S_1 neprekidna t-konorma, a T i T_1 su neprekidne t-norme.

(ii) Postoji $a \in [e, 1)$ tako da su F i U date sa

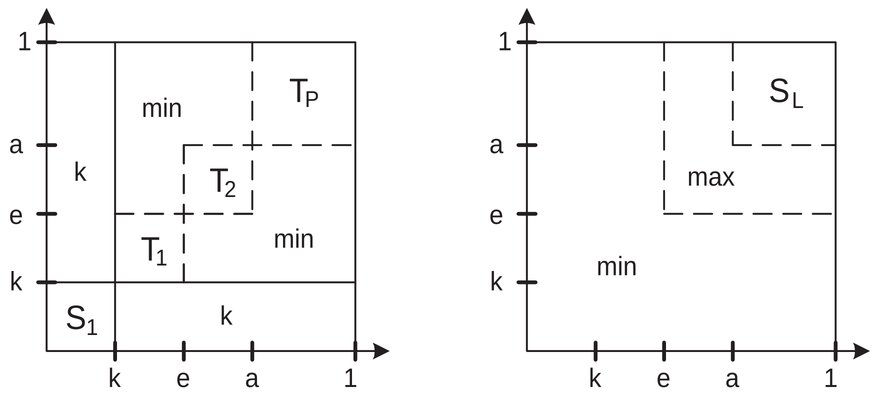
$$U(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & (x,y) \in [0,e] \times [0,1] \cup [0,1] \times [0,e], \\ a + (1-a)S_L\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right), & (x,y) \in [a,1]^2, \\ \max(x,y), & \text{inače,} \end{cases} \tag{2.11}$$

i

$$F(x,y) = \begin{cases} kS_1\left(\frac{x}{k}, \frac{y}{k}\right) & \text{ako } (x,y) \in [0,k]^2, \\ k + (e-k)T_1\left(\frac{x-k}{e-k}, \frac{y-k}{e-k}\right) & \text{ako } (x,y) \in [k,e]^2, \\ e + (a-e)T_2\left(\frac{x-e}{a-e}, \frac{y-e}{a-e}\right) & \text{ako } (x,y) \in [e,a]^2, \\ a + (1-a)T_P\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & \text{ako } (x,y) \in [a,1]^2, \\ k & \text{ako } \min(x,y) \le k \le \max(x,y), \\ \min(x,y) & \text{inače,} \end{cases} \tag{2.12}$$

gde je S_1 neprekidna t-konorma, a T_1 i T_2 su neprekidne t-norme (videti Sliku 6).

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je F neprekidna nulanorma koja je uslovno distributivna u odnosu na uninormu $U \in \mathcal{U}_{\min}$.



Slika 6. Uslovna distributivnost: nulanorma i uninorma iz $U_{\min}$.

- Na isti način kao u Propoziciji 4.3 iz [46] može se dokazati da je $k \leq e$ (Ako pretpostavimo da je $k > e$ i stavimo u (CD) uslov $x = e$, $y = 0$, $z = 1$ dobija se da je $e = k$). Pokazaćemo sada da kao i u prethodnoj teoremi mora biti $e \neq k$ (u [46] ova mogućnost nije razmatrana). Stavimo proizvoljno $x \in (k, 1)$, $y = 0$, $z = 1$ u (CD) uslov i dobijamo

$$e = k = F(x,0) = F(x, U(0,1)) = U(F(x,0), F(x,1)) = U(k,x) = x$$

  što je kontradikcija. Prema tome, $k < e$.

- Na isti način kao u prethodnoj teoremi može se pokazati da za sve $x \leq k$ važi $U(x,x) = x$, odnosno svi elementi iz $[0,k]$ su idempotentni za U. Prema tome, pošto je $k < e$ na $[0,k]^2$ imamo da je $U = \min$. Takođe, na osnovu pretpostavke da je F nulanorma, na $[0,k]^2$ važi da je $F = S_1$, gde je S_1 neprekidna t-konorma.

- Sada dokazujemo da je e idempotentan element za F. Za $x = e$, $z = e$, i proizvoljno $y \in (e, 1)$ na osnovu (CD) uslova sledi

$$F(e,y) = F(e, U(y,e)) = U(F(e,y), F(e,e)).$$

  Na osnovu pretpostavljene neprekidnosti, prethodna jednakost se može proširiti na $y = 1$ pa dobijamo $e = F(e,1) = U(e, F(e,e)) = F(e,e)$.

  Sada na osnovu Propozicije 40 nulanorma F na kvadratu $[k,1]^2$ je sledećeg oblika

$$F(x,y) = \begin{cases} k + (e-k)T_1\left(\frac{x-k}{e-k}, \frac{y-k}{e-k}\right), & (x,y) \in [k,e]^2, \\ e + (1-e)T\left(\frac{x-e}{1-e}, \frac{y-e}{1-e}\right), & (x,y) \in [e,1]^2, \\ \min(x,y), & (x,y) \in [k,1]^2 \backslash ([k,e]^2 \cup [e,1]^2), \end{cases} \tag{2.13}$$

gde su T_1, T neprekidne t-norme.

- Pošto je $U(e,e) = e < 1$, (CD) uslov garantuje sledeće

$$F(x,e) = F(x, U(e,e)) = U(F(x,e), F(x,e)),$$

  odnosno $F(x,e)$ je idempotentan element za U. Na osnovu neprekidnosti funkcije $F(.,e) : [k,1] \to [k,e]$, svi elementi iz $[k,e]$ su idempotentni za U. Pošto smo ranije dokazali da su svi elementi iz $[0,k]$ idempotentni za U, zaključujemo da su svi elementi iz intervala $[0,e]$ idempotentni za U. Budući da $U \in \mathcal{U}_{\min}$ dobijamo da je $U = \min$ na kvadratu $[0,e]^2$.

- Primenjujući sada Teoremu 93 na $[e,1]^2$, dobijamo da ili su svi elementi iz $[e,1]$ idempotentni za U, pa imamo istu situaciju kao u Propoziciji 4.3 iz [46], ili postoji najveći netrivijalni idempotentni element $a \in [e,1)$ za U, tako da su U i F dati sa (2.11) i (2.12), respektivno, odnosno t-norma T iz (2.13) je ordinalna suma T_2 i T_P.

($\Longleftarrow$) Neka su sada uninorma U and nulanorma F oblika (2.11) i (2.12), respektivno, (CD) uslov se dokazuje kao u Teoremi 99. $\square$

Primedba 106 *Teorema 104 i Teorema 105 su u [46] dokazane (Propozicija 4.2 i Propozicija 4.3) kada je zakon distributivnosti važio na celom domenu, odnosno bez ograničenja $U(y,z) < 1$, i bez pretpostavke neprekidnosti. Tada se dobija samo slučaj (i) iz Teoreme 104 i Teoreme 105, odnosno uninorma U je idempotentna. Prema tome, prethodna dva rezultata pored toga što predstavljaju generalizaciju Teoreme 93, oni predstavljaju i nadogradnju rezultata iz [46] jer dovode do neidempotentnih rešenja.*

Sada dajemo rezultate koji predstavljaju generalizaciju Teoreme 104 i Teoreme 105 kada je operacija F oslabljena nulanorma, tj. kad $F \in Z_k$. Oni takođe predstavljaju i nadogradnju rezultata iz [15], gde je zakon distributivnosti važio na celom domenu, kada se dobija isključivo idempotentno rešenje za unutrašnju operaciju.

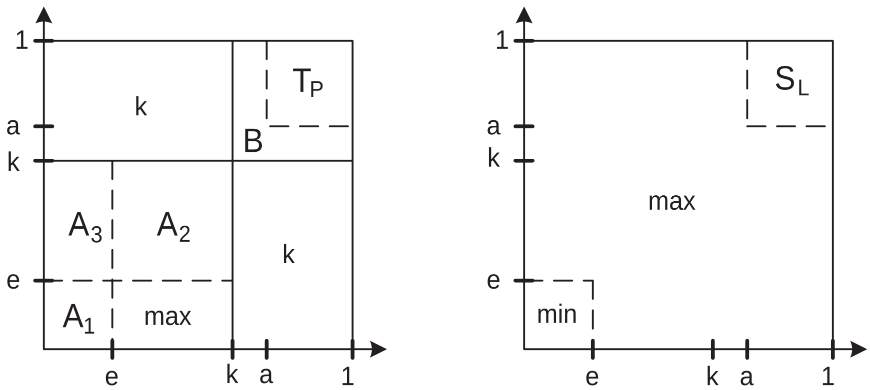
Teorema 107 *Neprekidna operacija* $F \in Z_k$ *i uninorma* $U \in U_{max}$ *sa neprekidnom nosećom t-normom i t-konormom zadovoljavaju (CLD) uslov ako i samo ako je* $e < k$ *i ispunjen je tačno jedan od sledeća dva slučaja:*

(i) F *i* U *su date kao u [15] (Teorema 16), odnosno* $U = U_d$ *i*

$$F = \begin{cases} A_1 & na\ [0,e]^2, \\ A_2 & na\ [e,k]^2, \\ A_3 & na\ [0,e] \times [e,k], \\ \max & na\ [e,k] \times [0,e], \\ B & na\ [k,1]^2, \\ k & inače, \end{cases} \tag{2.14}$$

gde je 0 *neutralni element operacije* A_1 *i levi neutralni element operacije* A_3, 1 *je neutralni element za* B, e *je desni neutralni element za* A_2 *i gde su* A_1, A_2, B *neprekidne operacije agregacije, a* $A_3 : [0,e]\times[e,k] \to [e,k]$ *neprekidna rastuća operacija.*

(ii) Postoji element $a \in [k,1)$ *tako da je* U *data sa (2.8) and* F *data sa (2.14) tako da je* $B(x,y) \in [a,1]$ *za sve* $x,y \in [a,1]$ *i* $B = T_P$ *na* $[a,1]^2$ *(videti Sliku 7).*



Slika 7. Uslovna distributivnost: oslabljena nulanorma i uninorma iz $U_{\max}$.

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Pošto je dokaz većim delom sličan dokazu Teoreme 104 dajemo njegovu skicu. Neka F i U zadovoljavaju (CLD) uslov. Kao u Teoremi 104 dokazuje se da je $e < k$. Isto tako, za $x \leq k$ dobija se $x = U(x,x)$.

Na $[0,k]^2$ struktura operacije F dobija se na isti način kao u ([15] Teorema 16). Radi kompletnosti dokaza, ovo ćemo u nastavku ispisati. Neka $x \in [e,k]$, $y = e$, $z = 0$. Koristeći (CLD) dobijamo

$$x = F(x,0) = F(x,U(e,0)) = U(F(x,e),F(x,0)) = U(F(x,e),x).$$

Pošto je $F(x,e) \geq \max(x,e)$ za sve $x \in [e,k]$, imamo da je

$$x = U(F(x,e),x) = \max(F(x,e),x) = F(x,e).$$

Prema tome, $F(x,e) = x$ za sve $x \in [e,k]$. Sada koristeći osobine operacije F dobijamo

$$x = F(x,0) \leq F(x,y) \leq F(x,e) = x \text{ za } x \in [e,k],\ y \in [0,e],$$

što znači da je $F = \max$ za $x \in [e,k]$, $y \in [0,e]$. Osim toga važi sledeće:
$0 \leq F(x,y) \leq F(e,e) = e$ za $x,y \in [0,e]$;
$e \leq x = F(x,e) \leq F(x,y) \leq F(k,k) = k$ za $x,y \in [e,k]$;
$e = F(0,e) \leq F(x,y) \leq F(e,k) = k$ za $x \in [0,e]$, $y \in [e,k]$;
$k = F(k,k) \leq F(x,y) \leq 1$ za $x,y \in [k,1]$.
Prema tome, restrikcije

$$A_1 = F|_{[0,e]^2},\ A_2 = F|_{[e,k]^2},\ A_3 = F|_{[0,e]\times[e,k]},\ B = F|_{[k,1]^2}$$

su operacije sa zahtevanim osobinama.

Na $[k,1]^2$ možemo primeniti Teoremu 98 tako da dobijamo ili slučaj (i) ako su svi elementi iz $[k,1]$ idempotentni za U, ili imamo najveći netrivijalni idempotentan element $a \in [k,1)$ za U pa imamo slučaj (ii).

($\Longleftarrow$) Neka su sada uninorma U i operacija F oblika kao u (ii) ove teoreme (CLD) uslov se dokazuje kao u Teoremi 99. $\square$

Za uninorme iz klase $U_{\min}$ analogno se dokazuje sledeća teorema.

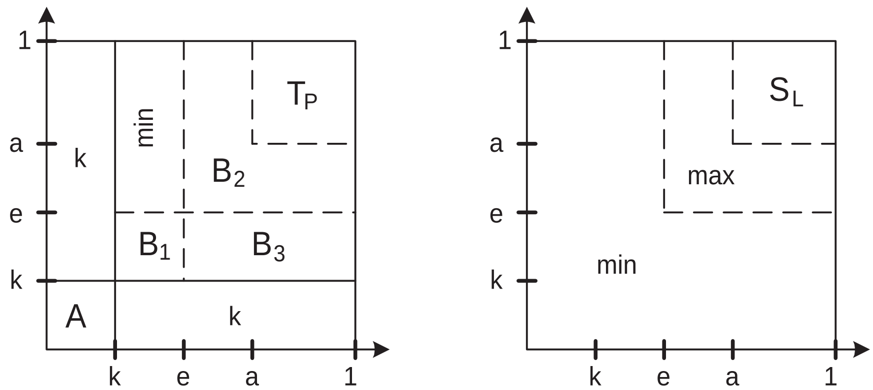
Teorema 108 *Neprekidna operacija $F \in Z_k$ i uninorma $U \in U_{min}$ sa neprekidnom nosećom t-normom i t-konormom zadovoljavaju (CLD) ako i samo ako je $k < e$ i ispunjen je tačno jedan od sledeća dva slučaja:*

(i) F, U sa date kao u [15] (Teorema 18), odnosno $U = U_c$ i

$$F = \begin{cases} A & \textit{na } [0,k]^2, \\ B_1 & \textit{na } [k,e]^2, \\ B_3 & \textit{na } [e,1]\times[k,e], \\ \min & \textit{na } [k,e]\times[e,1], \\ B_2 & \textit{na } [e,1]^2, \\ k & \textit{inače,} \end{cases} \tag{2.15}$$

gde je 0 neutralni element za A, 1 je neutralni element za B_2, i levi neutralni element za B_3, e je desni neutralni element za B_1 i gde su A, B_1, B_2 neprekidne operacije agregacije, a $B_3 : [e, 1] \times [k, e] \to [k, e]$ neprekidna rastuća operacija.

(ii) Postoji element $a \in [e, 1)$ tako da je U data sa (2.11) i F data sa (2.15) tako da je $B_2(x, y) \in [a, 1]$ za sve $x, y \in [a, 1]$ i $B_2 = T_P$ na $[a, 1]^2$ (videti Sliku 8).



Slika 8. Uslovna distributivnost: oslabljena nulanorma i uninorma iz $U_{\min}$.

Primedba 109 *Teorema 107 i Teorema 108 su u [15] dokazane (Teorema 16 i Teorema 18) kada je zakon distributivnosti važio na celom domenu i bez pretpostavke neprekidnosti. Tada se dobija samo slučaj (i) iz Teoreme 107 i Teoreme 108. Prema tome prethodna dva rezultata predstavljaju nadogradnju odgovarajućih rezultata iz [15] jer dovode do neidempotentnih rešenja.*

Glava 3

Primena operacija agregacije u teoriji korisnosti

Fokus interesovanja u ovoj glavi, kao što i sam naslov ukazuje, je na jednoj od mnogobrojnih primena operacija agregacije što je i bila glavna motivacija ovog istraživanja. U tom cilju prvo predstavljamo neke poznate rezultate iz teorije korisnosti gde ključnu ulogu imaju operacije agregacije i zakoni distributivnosti kao što su [21, 22, 23, 24, 33, 52]. Takođe, ova glava sadrži i originalne rezultate koji predstavljaju dalju nadogradnju hibridne funkcije korisnosti definisane u [23] na osnovu rezultata o uslovnoj distributivnosti nulanorme u odnosu na t-konormu iz Glave 2. U [35, 38] su ispitivane osobine novodobijene funkcije korisnosti i analizirano je ponašanje donosioca odluke u odnosu na nju. Pozabavićemo se i problemom nezavisnosti događaja za $S-$mere, gde opet ključnu ulogu imaju operacije agregacije koje zadovoljavaju zakon distributivnosti, kao i vezom između separabilnosti (uopštene nezavisnosti) i mešavina u okviru teorije korisnosti.

3.1 Dekompozabilne mere

Aditivnost klasične mere pri modeliranju nekih realnih situacija ispostavila se previše restriktivnom. Tako na primer, u višekriterijumskom odlučivanju interakcija između kriterijuma je u kontradikciji sa aditivnošću. Za fiksiran skup $A \in \Sigma$ i klasičnu meru μ definisanu nad $\sigma-$algebrom Σ (videti [56]) važi $\mu(A \cup B) - \mu(B) = \mu(A)$ za svako $B \in \Sigma$ koje je disjunktno sa A. U današnje vreme javlja se potreba i za neaditivnim merama koje se pojavljuju u raznim procesima odlučivanja, teoriji igara, teoriji optimizacije, ekonomiji, fazi sistemima i sl. (videti [14, 32]). Kada je mera m neaditivna $m(A \cup B) - m(B)$ za $A \cap B = \varnothing$ zavisi od B i može se interpretirati kao efekat formiranja unije A i B. Jedan od prvih pokušaja da se ovo ostvari su bile maksitivne mere [66, 74], gde se umesto sabiranja koristi maksimum. Ovde ćemo ukratko predstaviti tzv. dekompozabilne mere [25, 69], koje su vrlo bliske klasičnoj meri, kod kojih je operacija sabiranja zamenjena opštijom realnom operacijom. U našem slučaju ta operacija je t-konorma, pa ćemo te dekomposabilne mere zvati S-mere. Detaljnije informacije o dekompozabilnim merama mogu se naći u [25, 53, 67, 69].

Definicija 110 *Neka je X neprazan konačan skup, S t-konorma i Σ $\sigma-$algebra podskupova od X. Preslikavanje $m : \Sigma \to [0,1]$ zovemo $S-$merom ako je $m(\varnothing) = 0, m(X) = 1$ i ako zadovoljava osobinu dekompozabilnosti (DP), tj.*

$$\forall A, B \in \Sigma,\ A \cap B = \varnothing \Rightarrow m(A \cup B) = S(m(A), m(B)). \qquad (DP)$$

Drugim rečima, uslov (DP) znači da je skupovna funkcija m dekompozabilna u odnosu na t-konormu S. Primetimo da ako u uslov (DP) stavimo da je $m(B) = 0$ dobijamo $m(A \cup B) = m(A)$, što znači da $S-$mere pripadaju jednoj vrlo opštoj klasi skupovnih funkcija, koja je poznata kao klasa nula-aditivnih skupovnih funkcija (videti [53]). Isto tako iz uslova (DP) vidimo da su $S-$mere i fazi (monotone) mere.

Primedba 111 *(i) Prethodna definicija je data kada je X konačan skup. U opštem slučaju kada je X proizvoljan neprazan skup (beskonačan) postoji dodatni uslov na m u Definiciji 110 da je neprekidna od dole. U tom slučaju, ako je S levo neprekidna t-konorma, onda je skupovna funkcija $m : \Sigma \to [0,1]$ koja zadovoljava $m(\varnothing) = 0, m(X) = 1$ $S-$mera ako i samo ako za svaki niz $(A_n)_{n \in N}$ disjunktnih skupova iz Σ imamo*

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = S_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

(ii) Svaka $S-$mera $m : P(X) \to [0,1]$ kada je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ u potpunosti je određena sa raspodelom vrednosti $m_1, m_2, \ldots, m_n$ gde je $m_i = m(\{x_i\})$ za sve $1 \leq i \leq n$.

Predstavićemo sada neke najpoznatije primere $S-$mera pri čemu pretpostavljamo da je $\Sigma = P(X)$.

- Kada je $S = S_M$, onda S_M-mera m zadovoljava uslov

$$m(A \cup B) = \max(m(A), m(B)), \quad \text{za sve } A, B \in P(X).$$

  U ovom slučaju nije potrebna pretpostavka da je $A \cap B = \varnothing$. Takođe napominjemo da jedino za konačan skup X pojam S_M-mere se poklapa sa pojmom mere mogućosti [74], koja se obično označava sa Π a odgovarajuća raspodela sa π. Mera mogućnosti je kompletno maksitivna mera $\Pi : P(X) \to [0,1]$ koja je normalizovana, tj. $\Pi(X) = 1$. Inače za skupovnu funkciju $m : P(X) \to [0, \infty]$ kažemo da je kompletno maksitivna mera ako za svaku familiju skupova $(E_i)_{i \in I}$ iz $P(X)$ imamo

$$m(\bigcup_{i \in I} E_i) = \sup_{i \in I} m(E_i).$$

  Pošto ćemo u nastavku isključivo raditi sa konačnim skupovima, možemo bez problema koristiti pojam mere mogućnosti. Za meru mogućnosti Π uslov normalizacije se svodi na $\max_{x_i \in X} \pi(x_i) = 1$. Za razliku od verovatnoće kod mere mogućnosti, zbog aksiome dekompozabilnosti, može se desiti da imamo $\Pi(A) = \Pi(\overline{A}) = 1$ gde je $\overline{A}$ komplement skupa A. Zahvljajujući ovoj činjenici mere mogućnosti imaju sposobnost reprezentacije neznanja. U ekstremnom slučaju kada je za sve $1 \leq i \leq n$, $\pi(x_i) = 1$ imamo totalno neznanje.

- Kada je $S = S_L$, tj. $S(x, y) = \min(x + y, 1)$ (ograničena suma), odgovarajuća $S-$mera m uključuje meru verovatnoće kada je

$$\sum_{x_i \in X} m(\{x_i\}) = 1.$$

  U opštijem slučaju kada je S nilpotentna t-konorma zbog poznatog izomorfizma sa S_L važi da je

$$S(x, y) = \varphi^{-1}(\min(1, \varphi(x) + \varphi(y)))$$

  gde je $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ rastuća bijekcija. U tom slučaju uslov normalizacije se svodi na

$$\varphi(m_1) + \varphi(m_2) + \ldots + \varphi(m_n) \geq 1.$$

U slučaju jednakosti skup vrednosti $\varphi(m_1), \ldots, \varphi(m_n)$ definiše raspodelu verovatnoće, i skupovna funkcija $P(A) = \varphi(m(A))$ je mera verovatnoće.

- Kada je S striktna t-konorma onda je

$$S(x, y) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y)),$$

gde je $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ rastuća bijekcija. U ovom slučaju uslov normalizacije je isti kao kod mera mogućnosti, tj. $\max_{1 \leq i \leq n} m_i = 1$. Ako je m $S-$mera pri čemu je S striktna t-konorma, lako se pokazuje da je $\varphi \circ m$ klasična beskonačna mera.

Kada je m $S-$mera, njena dualna skupovna funkcija $\overline{m}$ definisana sa $\overline{m}(A) = 1 - m(\overline{A})$ ne zadovoljava istu osobinu dekompozabilnosti. Lako se pokazuje da za $\overline{m}$ uslov (DP) je

$$\forall A, B \in P(X),\ A \cup B = X \implies \overline{m}(A \cap B) = T(\overline{m}(A), \overline{m}(B))$$

gde je t-norma T dualna t-konormi S. Tako dobijamo tzv. mere nužnosti kao dualne merama mogućnosti, za koje važi da je $\overline{m}(A \cap B) = \min(\overline{m}(A), \overline{m}(B))$ za sve $A, B \in P(X)$. U ovom slučaju uslov $A \cup B = X$ nije potreban. Mere nužnosti su kao i mere mogućnosti sposobne da predstavljaju neznanje. U slučaju kada je m S_L-mera funkcija $\overline{m}$ je samo-dualna ako se ne desi tzv. odsecanje sume. Naime, ako je $\sum_{x_i \in X} m(\{x_i\}) = 1$ onda je $\overline{m}(A) = m(A) = P(A)$ mera verovatnoće.

3.2 Problem odlučivanja

Neformalno govoreći, pod pojmom odlučivanja smatra se izbor među alternativama datog skupa, prema izvesnom kriterijumu podrazumevajući znanje o situaciji. Obično se problem odlučivanja matematički modeluje sledećom definicijom iz [32] (videti i [54]).

Definicija 112 *Problem odlučivanja je petorka $(A, \Theta, \phi, X, \succeq)$ u kojoj je:*

- *A skup alternativa ili akcija među kojima donosilac odluke mora da bira;*
- *X skup posledica ili rezultata koji dolaze na osnovu izbora alternative;*

- Θ *skup stanja sveta (zavisno od, obično nepoznatog, stanja sveta* $\theta \in \Theta$*, posledice izbora alternative* $a \in A$ *mogu se razlikovati);*

- $\phi : A \times \Theta \to X$ *određuje za svako stanje sveta* θ *i svaku alternativu* a *rezultujuću posledicu* $x = \phi(a, \theta)$*;*

- $\succeq$ *relacija totalnog predurеđenja (slabog poretka) na* X*, tj. binarna relacija koja ispunjava uslove:*

  (i) $\succeq$ *je kompletna, tj.* $x \succeq y$ *ili* $y \succeq x$*, za sve* $x, y \in X$

  (ii) $\succeq$ *je tranzitivna, tj.* $x \succeq y \ \wedge\ y \succeq z \ \Rightarrow x \succeq z$*, za sve* $x, y, z \in X$*.*

U nastavku ćemo koristiti termin slab poredak, jer se on upotrebljava u literaturi koja se bavi problemom odlučivanja. Relacija $\succeq$ je relacija preferiranja koja karakteriše donosioca odluke. Strogo preferiranje $x \succ y$ znači da važi $x \succeq y$ ali ne i $y \succeq x$. Indiferentnost $x \sim y$ znači da važi $x \succeq y$ i $y \succeq x$. Lako se pokazuje da je relacija indiferentnosti $\sim$ relacija ekvivalencije. Osnovna ideja teorije korisnosti je transformacija slabog poretka $\succeq$ na X u uobičajeni poredak $\geq$ nad realnim brojevima pomoću funkcije korisnosti $u : X \to R$ sa sledećim fundamentalnim svojstvom

$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y).$$

Postojanje funkcije koja ispunjava navedeni uslov, i time predstavlja relaciju $\succeq$, je fundamentalni problem u teoriji korisnosti.

Ovde postoje dva potproblema:

- **višekriterijumsko odlučivanje:** pretpostavlja se da je stanje sveta θ poznato, ali je X multidimenzionalno, tj. $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in X_i$ za sve $1 \leq i \leq n$ gde X_i predstavljaju kriterijume;

- **odlučivanje u uslovima neizvesnosti:** razmatra se jednodimenzionalni skup posledica kad je stvarno stanje sveta nepoznato, a mera neizvesnosti nad θ poznata ili postoji odsustvo takve informacije.

U daljem radu fokus je na drugom problemu, tj. na odlučivanju u uslovima neizvesnosti. U slučaju jednodimenzionalnog skupa posledica X i poznate mere neizvesnosti nad Θ, skup akcija A čine preslikavanja $f : \Theta \to X$ koja odgovaraju posledicama $\phi(f, .)$. Drugim rečima, odluka d je predstavljena sa funkcijom $d : \Theta \to X$. Relacija preferiranja se takođe definiše i nad skupom akcija i može je jedino izraziti donosilac odluka. U nastavku ćemo pretpostavljati da su skupovi Θ i X konačni.

3.3 von Neumann Morgenstern-ova teorija očekivane korisnosti

Klasičan pristup problemu odlučivanja u uslovima neizvesnosti pretpostavlja da je neizvesnost modelovana verovatnoćom. Naravno, ovde kad kažemo verovatnoća, mislimo na subjektivnu verovatnoću koja izražava subjektivno uverenje vezano za događaj koji se pojavio ili će se pojaviti kad se ne može definisati ponovljivi eksperiment i frekventna interpretacija je bez značaja.

Pojava klasične teorije očekivane korisnosti predstavlja presudan korak u teoriji odlučivanja jer je obezbeđena dobro postavljena naučna osnova za značenje subjektivne verovatnoće. Savage [32] postiže transformaciju slabog poretka $\succeq$ na skupu akcija A u poredak realnih brojeva uvodeći subjektivnu meru verovatnoće nad stanjima sveta. Pokazano je da postoji funkcija korisnosti $u : X \to R$ i jedinstvena mera verovatnoće P nad Θ tako da akcije $f : \Theta \to X$ mogu biti rangirane na osnovu očekivane vrednosti slučajne promenljive $u \circ f$ s obzirom na P. Dakle,

$$f \succeq g \Leftrightarrow E[u(f)] \geq E[u(g)],$$

gde je funkcija korisnosti E definisana sa $E[u(f)] = \sum_{\theta \in \Theta} P(\theta) \cdot u(f(\theta))$. Prema tome, relaciji preferiranja odgovara poredak očekivanih korisnosti odgovarajućih akcija s obzirom na sva stanja sveta i njihove verovatnoće. Funkcija u je ograničena i jedinstveno određena do na pozitivnu linearnu transformaciju, izražavajući subjektivnu percepciju posledice svake akcije.

Ovaj pristup odgovara poznatoj teoriji očekivane korisnosti za koju su von Neumann i Morgenstern u [52] dali aksiomatsku osnovu koja se oslanja na pojam verovatnosne mešavine Herstein, Milnora [33].

Označimo sa $\mathbb{P}(X)$ skup raspodela verovatnoće (verovatnosnih lutrija) na skupu posledica X, tj.

$$\mathbb{P}(X) = \{p : X \to [0,1] | \sum_{x_i \in X} p(x_i) = 1\}.$$

Verovatnosna mešavina (složena lutrija) je operacija definisana na $\mathbb{P}(X)$ koja objedinjuje dve raspodele verovatnoće p i q u novu, označava se sa $V(p, q; \alpha, \beta)$, gde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tako da je $\alpha + \beta = 1$, i definisana je kao:

$$V(p, q; \alpha, \beta) = \alpha \cdot p + \beta \cdot q.$$

Napomenimo da je $V(p, q; \alpha, \beta)$ raspodela verovatnoće na X i ovo je jedini način da od dve raspodele verovatnoće dobijemo novu (videti [21]). Takođe, lako se uočava da je operacija verovatnosne mešavine V ustvari aritmetička sredina sa težinama (ponderima) WAM_w (videti Primer 6 iz Glave 1). Sada navodimo jedan od mogućih sistema aksioma koji omogućava elegantno izvođenje von Neumann Morgenstern-ove funkcije korisnosti.

NM1 Skup $\mathbb{P}(X)$ je snabdeven sa relacijom slabog poretka $\succeq$.

NM2 (Neprekidnost). Ako $p, q, r \in \mathbb{P}(X)$ i

$$p \succeq q \succeq r \Rightarrow \exists \alpha \in [0,1] : q \sim V(p, r; \alpha, 1-\alpha).$$

NM3 (Nezavisnost, linearnost). Ako $p, q \in \mathbb{P}(X)$ i

$$p \sim q \Rightarrow V(p, r; \alpha, 1-\alpha) \sim V(q, r; \alpha, 1-\alpha),\ \forall \alpha \in [0,1],\ \forall r \in \mathbb{P}(X).$$

NM4 (Konveksnost). Ako $p, q \in \mathbb{P}(X)$ i

$$p \succ q \Rightarrow p \succ V(p, q; \alpha, 1-\alpha) \succ q, \forall \alpha \in (0,1).$$

Sledeća teorema iz [52] (videti i [33]) pokazuje da relacija slabog poretka $\succeq$ među raspodelama verovatnoće koja zadovoljava predložene četiri aksiome može uvek biti reprezentovana sa funkcijom korisnosti.

Teorema 113 *([52]) Relacija slabog poretka $\succeq$ na $\mathbb{P}(X)$ zadovoljava aksiome* ***NM1-NM4*** *ako i samo ako postoji funkcija korisnosti $E_u : \mathbb{P}(X) \to R$ tako da važi sledeće:*

(i) $\forall p, q \in \mathbb{P}(X),\ p \succeq q \Leftrightarrow E_u(p) \geq E_u(q)$.

(ii) E_u je linearna, tj. za svako $\alpha \in (0,1)$ i $\forall p, q \in \mathbb{P}(X)$ važi
$E_u(\alpha \cdot p + (1-\alpha) \cdot q) = \alpha \cdot E_u(p) + (1-\alpha) \cdot E_u(q)$.

(iii) Ako funkcija W zadovoljava islove (i) i (ii), onda postoje brojevi $c > 0$ i $d \in R$ tako da je $W = c \cdot E_u + d$.

Primedba 114 *(i) Može se pokazati da je linearnost funkcije korisnosti E_u ekvivalentna sa činjenicom da postoji funkcija $u : X \to R$, tako da je za sve $p \in \mathbb{P}(X)$, $E_u(p) = \sum_{x_i \in X} p(x_i) u(x_i)$. Zbog toga, funkcija E_u je poznata i pod nazivom funkcija očekivane korisnosti.*

(ii) Takođe, linearnost funkcije korisnosti E_u ukazuje da ona i održava (čuva) operaciju verovatnosne mešavine.

Jedan od problema von Neumann Morgenstern-ove teorije korisnosti je to da u primenama zahteva da su nam poznate verovatnoće svakog stanja sveta i korisnosti svih mogućih posledica. Ovo je teško ostvarivo u mnogim praktičnim situacijama kada su nam dostupne samo nekompletne i siromašne informacije. U tim slučajevima potreban nam je kvalitativniji pristup. Jedna mogućnost je da proširimo pojam mešavine na dekompozabilne mere i tako dolazimo do pojma proširenih mešavina [21].

3.4 Proširene mešavine

U ovoj sekciji predstavljamo rezultate iz [21] gde su proširene aksiome verovatnosnih mešavina Herstein Milnora iz [33] na dekompozabilne mere. Videli smo da $S-$mere sadrže i mere verovatnoće i mere mogućnosti, pa se time nameću kao prirodno okruženje za slabljenje verovatnosnih pretpostavki u pogledu modeliranja neizvesnosti. Aksiome koje su dali Dubois, Fodor, Prade i Roubens u [21] uzimaju u obzir prethodno dobijene rezultate iz [21] o agregaciji dekompozabilnih mera u odnosu na istu t-konormu S koja je neprekidna. U [28] su pokazali da agregacija dekompozabilnih mera u odnosu na različite t-konorme, koje su neprekidne, je smislena jedino ako su sve t-konorme izomorfne. Ovom prilikom predstavićemo rezultate iz [21] u nešto modifikovanoj verziji, u kojoj su korišćeni i u [23]. Uzimamo par (S, T) neprekidne t-konorme i t-norme, respektivno, umesto opštijih operacija agregacije $(\oplus, \otimes)$ koje su u [21] imenovane kao semisuma i semiproizvod, respektivno. Ovo ne umajuje opštost rezultata iz [21] jer je pokazano (Posledica 2, Sekcija 5 u [21]) da $\oplus$ mora biti t-konorma a $\otimes$ t-norma. Pre definisanja proširenih mešavina uvodimo skup Φ_S uređenih parova (α, β) na sledeći način

$$\Phi_S = \{(\alpha, \beta) | (\alpha, \beta) \in [0, 1]^2, S(\alpha, \beta) = 1\}.$$

Definicija 115 *([21]) Prošireni mešavina skup je četvorka (G, M, S, T) gde je G skup $S-$mera, $M : G^2 \times \Phi_S \to G$ operacija proširene mešavine definisana sa*

$$M(x, y; \alpha, \beta) = S(T(\alpha, x), T(\beta, y)) \tag{3.1}$$

tako da važi:

M1. $M(x, y; 1, 0) = x$;

M2. $M(x, y; \alpha, \beta) = M(y, x; \beta, \alpha)$;

M3. $M(M(x, y; \alpha, \beta), y; \gamma, \delta) = M(x, y; T(\alpha, \gamma), S(T(\beta, \gamma), T(\delta, 1)))$.

Jasno je da se originalne aksiome Herstein Milnora iz [33] dobijaju kada je $T(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta$ i $S(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$.

Može se pokazati (videti Lemu 1 iz [21]) da uslovi **M1-M3** impliciraju sledeći uslov

M4. $M(x, x; \alpha, \beta) = x$.

Takođe, u klasičnom poretku [33] uslovi **M1-M3** impliciraju još jednu važnu osobinu operacije mešavine. Ta osobina važi i za proširene mešavine uz dodatni uslov što vidimo iz sledeće leme (videti Lemu 1 iz [21]).

Lema 116 *Pretpostavimo da važe uslovi **M1-M3** za operaciju proširene mešavine. Onda imamo uslov*

M5. $M(M(x, y; \alpha, \beta), M(x, y; \gamma, \delta); \lambda, \mu)$
$= M(x, y; S(T(\alpha, \lambda), T(\gamma, \mu)), S(T(\beta, \lambda), T(\delta, \mu)))$

za sve $x, y \in G$ i sve $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta), (\lambda, \mu) \in \Phi_S$ ako i samo ako je t-norma T distributivna u odnosu na t-konormu S na skupu Φ_S.

Upravo ova lema (zbog distributivnosti) daje znatna ograničenja na moguće vrste proširenih mešavina.

Ukoliko je S nilpotentna t-konorma onda znamo na osnovu Teoreme 97 da je T striktna t-norma (videteti i Lemu 2 iz [21]), pa to znači da su ove proširene mešavime izomorfne sa verovatnosnim mešavinama. Isto tako, pošto znamo da ne postoji t-norma distributivna u odnosu na striktnu t-konormu, zaključujemo da ne postoje prošireme mešavine ako je S striktna.

U opštem slučaju kada je S proizvoljna t-konorma onda na osnovu Teoreme 85 znamo da je $S = S_M$. Ovo činjenica dovodi no nove vrste mešavina, koje zadovoljavaju uslove **M1-M5** kao i verovatnosne mešavine, a koje zovemo mogućnosne mešavine. One čine osnov mogućnosne (kvalitativne) teorije korisnosti što je pokazano u [22, 26].

3.5 Mogućnosna teorija korisnosti

U ovoj sekciji dajemo pandam von Neumann Morgenstern-ovoj funkciji korisnosti u okviru mogućnosne teorije. Dubois, Godo, Prade, Zapico su u

[22] konstruisali funkciju korisnosti koja reprezentuje relaciju slabog poretka između mogućnosnih raspodela. Videćemo da su, kao i u klasičnom slučaju, potrebne četiri aksiome u kojima ključnu ulogu imaju mogućnosne mešavine. Pri tome je uzeto da je t-norma T iz proširenih mešavina minimum operator. U [22] je razmatran i slučaj kada je T proizvoljna t-norma, a dobijena fukcija korisnosti je slična onoj koju dajemo ovde. Takođe, može se pokazati da se u ovom poretku rangiranje odluka svodi na rangiranje mogućnosnih raspodela definisanih na skupu posledica X sa vrednostima u linearno uređenom skupu V gde je $\inf(V) = 0$ a $\sup(V) = 1$. Sa $Pi(X)$ označavamo skup mogućnosnih raspodela (mogućnosnih lutrija) na X, tj.

$$Pi(X) = \{\pi : X \to V | \ \exists x \in X : \pi(x) = 1\}.$$

Operacija mogućnosne mešavine $P : Pi(X) \times Pi(X) \times \Phi_{\max} \to Pi(X)$ objedinjuje dve mogućnosne raspodele π i π' u novu na sledeći način

$$P(\pi, \pi'; \alpha, \beta) = \max(\min(\alpha, \pi), \min(\beta, \pi')),$$

gde je $\Phi_{\max} = \{(\alpha, \beta) \in V^2 | \max(\alpha, \beta) = 1\}$.

U [22] su predložene dve vrste funkcija korisnosti da bi predstavili relaciju slabog poretka među mogućnosnim raspodelama. Ideja je u sledećem. Potrebna nam je funkcija preferenci $u : X \to U$ koja dodeljuje svakoj posledici u X nivo prioriteta u linearno uređenom skupu U gde je $\inf(U) = 0$ a $\sup(U) = 1$. To znači da što je veće $u(x)$ to je posledica x prioritetnija. Sa druge strane mogućnosna raspodela π specifikuje koje su posledice verodostojne, pa tako veće $\pi(x)$ znači da je posledica x verodostojnija. Kao što smo videli, i neizvesnost i preference su ocenjene na ordinalnoj skali gde su jedino relevantne one operacije koje uključuju samo poređenje, kao što su na primer min i max. Upravo zbog ovog zahteva mogućnosna reprezentacija neizvesnosti je kvalitativna u prirodi. Ova kvalitativna priroda je u skladu sa činjenicom da su nam u mnogim praktičnim situacijama dostupne samo siromašne i nekompletne informacije. Takođe, mogućnosna teorija obezbeđuje i verodostojniju reprezentaciju neznanja u odnosu na klasičan prisup koji je baziran na verovatnoći. S druge strane, kvalitativna teorija korisnosti zbog disjunktivne prirode mera mogućnosti je manje odlučiva nego klasična teorija korisnosti.

Prema tome, pesimistični (konzervativni) kriterijum je da tražimo takve mogućnosne raspodele koje u određenoj meri prave da su sve loše posledice slabo verodostojne. Suprotno tome, optimističan kriterijum je traženje takvih mogućnosnih raspodela koje u određenoj meri prave da je bar jedna dobra posledica visoko verodostojna. Da bi definisali takve kriterijume potrebna je i pretpostavka uporedivosti između skale verodostojnosti V i skale preferenci U, što se postiže funkcijom $h : V \to U$ koja čuva poredak i važi da je $h(0) = 0$ i $h(1) = 1$.

Sada dajemo skup aksioma iz [22] koje omogućavaju konstrukciju optimističke kvalitativne funkcije korisnosti.

DP1 Skup $Pi(X)$ je snabdeven sa relacijom slabog poretka $\sqsupseteq$.

DP2 (Neprekidnost). $\forall \pi \in Pi(X), \exists \lambda \in V : \pi \sim P(\underline{\pi}, \overline{\pi}; 1, \lambda)$, gde su $\underline{\pi}$ i $\overline{\pi}$ minimalni i maksimalni element iz $Pi(X)$ u odnosu na $\sqsupseteq$ respektivno.

DP3 (Nezavisnost). Ako $\pi, \pi' \in Pi(X)$ i

$$\pi \sim \pi' \Rightarrow P(\pi, \pi''; \lambda, \mu) \sim P(\pi', \pi''; \lambda, \mu),\ \forall \pi'' \in Pi(X),\ \forall\ (\lambda, \mu) \in \Phi_{\max}.$$

DP4 (Sklonost ka neizvesnosti, tj. riziku). Ako $\pi, \pi' \in Pi(X)$ i

$$\pi' \geq \pi \Rightarrow \pi' \sqsupseteq \pi.$$

Sledeća teorema pokazuje da relacija slabog poretka $\sqsupseteq$ među mogućnosnim raspodelama koja zadovoljava predložene četiri aksiome može uvek biti reprezentovana sa optimističnom mogućnosnom funkcijom korisnosti.

Teorema 117 *([22]) Relacija slabog poretka $\sqsupseteq$ na $Pi(X)$ zadovoljava aksiome*
DP1-DP4 *ako i samo ako postoji:*

(i) *linearno uređena skala preferenci U sa $\inf(U) = 0$ i $\sup(U) = 1$;*

(ii) *funkcija preferenci $u : X \to U$ tako da je $u^{-1}(1) \neq \emptyset \neq u^{-1}(0)$;*

(iii) *funkcija $h : V \to U$ koja održava poredak tako da je $h(0) = 0,\ h(1) = 1$, i kvalitativna funkcija korisnosti $QU^+ : Pi(X) \to U$ definisana sa*

$$QU^+(\pi) = \max_{x \in X} \min(h(\pi(x)), u(x)),$$

tako da važi $\pi' \sqsupseteq \pi \Leftrightarrow QU^+(\pi') \geq QU^+(\pi)$.

Može se pokazati da je funkcija preferenci $u : X \to U$ restrikcija od QU^+ na skupu posledica X. Zbog aksiome **DP4** kvalitativna funkcija korisnosti QU^+ je optimistična. Naime, $\pi' \geq \pi$ (tj. $\forall x \in X, \pi'(x) \geq \pi(x)$) znači da je mogućnosna raspodela π' manje informativna nego π, jer svaka posledica x prema raspodeli π' je bar isto verodostojna kao i na prema π. Stoga, mišljenje predstavljeno mogućnosnom raspodelom π' je rizičije nego π. Potpuno neznanje je uvek najrizičnija situacija. Ako bi modifikovali aksiomu neprekidnosti i zamenili uslov **DP4** sa uslovom **DP4'** ($\pi' \geq \pi \Rightarrow \pi \sqsupseteq \pi'$.) koji možemo zvati averzija prema neizvesnosti, ili averzija prema riziku, tj. "preciznost je sigurnija", dolazimo do dualne pesimistične kvalitativne funkcije korisnosti (videti [22]).

Ukoliko pogledamo aksiome **DP1-DP4** i uporedimo ih sa **NM1-NM4** vidimo da je jedina razlika u četvrtoj aksiomi. Stoga verovatnosne mešavine još zovemo i konveksne, dok mogućnosne mešavine čine nekonveksnu strukturu.

Napomenimo na kraju da kvalitativna funkcija korisnosti (optimistička i pesimistička) osim što predstavlja relaciju slabog poretka među mogućnosnim raspodelama, ona i održava operaciju mogućnosne mešavine P u smislu da važi

$$QU^+(P(\pi, \pi'; \alpha, \beta)) = \max(\min(h(\alpha), QU^+(\pi)), \min(h(\beta), QU^+(\pi'))).$$

3.6 Hibridne mešavine i hibridna funkcija korisnosti

Koristeći rezultat Teoreme 93 Dubois, Pap, Prade su u [23] pokazali da osim verovatnosne i mogućnosne mešavine može se pojaviti samo neka vrsta hibridizacije, tako da je ispod nekog nivoa a, $0 \leq a \leq 1$, ona mogućnosna, a iznad tog nivoa verovatnosna. Neka je (S, T) par neprekidne t-konorme i t-norme, respektivno, koji zadovoljava (CD) uslov. Iz Teoreme 93 znamo da je $S = (< a, 1, S_L >)$ i $T = (< 0, a, T^{**} >, < a, 1, T_P >)$.

U [23] je definisan skup $\Phi_{S,a}$ uređenih parova (α, β) na sledeći način

$$\Phi_{S,a} = \{(\alpha, \beta) | (\alpha, \beta) \in (a, 1)^2, \alpha + \beta = 1 + a, \text{ili } \min(\alpha, \beta) \leq a, \max(\alpha, \beta) = 1\}.$$

Jasno je da je $\Phi_{S,a} \subseteq \Phi_S$, a zbog neprekidnosti T i S važi da je T distributivno u odnosu na S na skupu $\Phi_{S,a}$.

Sada možemo definisati hibridni mešavina skup, koji predstavlja proširenje mešavina iz [33] i [21].

Definicija 118 *([23]) Hibridni mešavina skup je četvorka* (G, M, T, S) *gde je* G *skup* $S-$*mera,* (S, T) *par neprekidne t-konorme i t-norme, respektivno, koji zadovoljava (CD) uslov i* $M : G^2 \times \Phi_{S,a} \to G$ *je operacija hibridne mešavine data sa (3.1).*

Lako se pokazuje da ovako definisana funkcija M zadovoljava aksiome **M1-M5** na $\Phi_{S,a}$.

Neka su sada u_1, u_2 dve korisnosti sa vrednostima iz $[0,1]$, a μ_1, μ_2 dva stepena verodostojnosti iz $\Phi_{S,a}$. Koristeći hibridne mešavine u [23] je definisana optimistička hibridna funkcija korisnosti U na sledeći način

$$U(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = S(T(u_1, \mu_1), T(u_2, \mu_2)). \tag{3.2}$$

U [23] je detaljno ispitana funkcija korisnosti U data sa (3.2) i analizirano je ponašanje donosioca odluke u odnosu na nju.

Koristeći optimističku funkciju korisnosti U dualno se može uvesti i pesimistička hibridna funkcija korisnosti $\overline{U}$ na sledeći način (videti [23])

$$\overline{U}(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = 1 - U(1 - u_1, 1 - u_2; \mu_1, \mu_2).$$

U daljem radu fokusiraćemo se na optimističku funkciju korisnosti U u cilju modeliranja ponašanja donosiona odluke kada umesto t-norme T u jednačinu (3.2) stavimo neku drugu operaciju agregacije.

Otvoren je problem pronalaženja odgovarajuće aksiomatske zasnovanosti za hibridnu korisnost kao što je to učinjeno za klasičnu teoriju korisnosti u [52] i mogućnosnu teoriju korisnosti u [22]. Jedna moguća aksiomatizacija je data u [55].

3.7 Hibridna funkcija korisnosti sa pragom

U ovoj sekciji fokus je na funkciji korisnosti U_F koja je dobijena tako što smo t-normu T iz jednačine (3.2) zamenili sa neprekidnom nulanormom F sa netrivijalnim absorbujućim elementom $k \in (0,1)$ koja je uslovno distributivna u odnosu sa t-konormu S iz (3.2). Prema tome

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = S(F(u_1, \mu_1), F(u_2, \mu_2)) \tag{3.3}$$

gde su u_1, u_2 dve korisnosti sa vrednostina iz $[0,1]$, a μ_1, μ_2 dva stepena verodostojnosti iz skupa $\Phi_{S,a}$.

U ispitivanju funkcije korisnosti U_F i analiziranju ponašanja donosioca odluke u odnosu na nju, ključnu ulogu imaće rezlultat Teoreme 99 iz prethodne glave gde je data karakterizacija parova (F,S) koji zadovoljavaju (CD) uslov.

Slučaj I Neka je $\mu_1 > a, \mu_2 > a$ tako da je $\mu_1 + \mu_2 = 1 + a$. Sledeći podslučaji mogu se pojaviti.

1. Ako je $u_1 > a,\ u_2 > a$. Onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = S(a + \frac{(u_1 - a)(\mu_1 - a)}{1 - a}, a + \frac{(u_2 - a)(\mu_2 - a)}{1 - a}).$$

   Pošto je $a + \frac{(u_i - a)(\mu_i - a)}{1 - a} > a$ za $i = 1, 2$ dobijamo

$$\begin{aligned} U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) &= a + \frac{(u_1 - a)(\mu_1 - a)}{1 - a} + \frac{(u_2 - a)(\mu_2 - a)}{1 - a} \\ &= \frac{u_1(\mu_1 - a) + u_2(1 - \mu_1)}{1 - a}. \end{aligned}$$

2. Ako je $u_2 > a \geq u_1$. Tada razlikujemo sledeće:

   (a) Ako je $u_1 \leq k$, onda je

$$\begin{aligned} U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) &= \max(k, a + \frac{(u_2 - a)(\mu_2 - a)}{1 - a}) \\ &= a + \frac{(u_2 - a)(\mu_2 - a)}{1 - a}. \end{aligned}$$

   (b) Ako je $k < u_1$, onda je

$$\begin{aligned} U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) &= \max(u_1, a + \frac{(u_2 - a)(\mu_2 - a)}{1 - a}) \\ &= a + \frac{(u_2 - a)(\mu_2 - a)}{1 - a}. \end{aligned}$$

3. Ako je $u_1 > a \geq u_2$. Kao u prethodnom slučaju imamo

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = a + \frac{(u_1 - a)(\mu_1 - a)}{1 - a}.$$

4. Ako je $u_1 \leq a,\ u_2 \leq a$. Tada razlikujemo sledeće:

   (a) Ako je $u_1 \leq k,\ u_2 \leq k$, onda je

   $$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = S(k, k) = \max(k, k) = k.$$

   (b) Ako je $u_2 \leq k < u_1$, onda je

   $$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = S(u_1, k) = \max(u_1, k) = u_1.$$

   (c) Ako je $u_1 \leq k < u_2$, onda je

   $$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = S(k, u_2) = \max(u_2, k) = u_2.$$

   (d) Ako je $k < u_1,\ k < u_2$, onda je

   $$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = S(u_1, u_2) = \max(u_1, u_2).$$

Slučaj II Neka je sada $\mu_1 \leq a,\ \mu_2 = 1$ (odgovarajuća analiza slučaja kada je $\mu_2 \leq a,\ \mu_1 = 1$ dobija se analogno). Sledeći podslučaji mogu se pojaviti.

1. Neka je prvo $\mu_1 \leq k$. Tada imamo sledeće mogućnosti.

   (a) Ako je $u_1 > a,\ u_2 > a$, onda je

   $$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(k, u_2) = u_2.$$

   (b) Ako je $u_1 \leq a,\ u_2 \leq a$, tada imamo:

      i. Ako je $u_1 \leq k,\ u_2 \leq k$, onda je

      $$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(S_1(u_1, \mu_1), k) = k.$$

      ii. Ako je $u_2 \leq k < u_1$, onda je

      $$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(k, k) = k.$$

iii. Ako je $u_1 \leq k < u_2$, onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(S_1(u_1, \mu_1), u_2) = u_2.$$

iv. Ako je $k < u_1,\ k < u_2$, onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(k, u_2) = u_2.$$

(c) Ako je $u_1 \leq a < u_2$. Tada imamo sledeće mogućnosti.

i. Ako je $u_1 \leq k$, onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(S_1(u_1, \mu_1), u_2) = u_2.$$

ii. Ako je $u_1 > k$, onda je $U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(k, u_2) = u_2$.

(d) Ako je $u_2 \leq a < u_1$, tada imamo:

i. Ako je $u_2 \leq k$, onda je $U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(k, k) = k$.

ii. Ako je $u_2 > k$, onda je $U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(k, u_2) = u_2$.

2. Neka je sada $\mu_1 > k$. Tada imamo sledeće mogućnosti.

(a) Ako je $u_1 > a,\ u_2 > a$, onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(\mu_1, u_2) = u_2.$$

(b) Ako je $u_1 \leq a,\ u_2 \leq a$, tada imamo:

i. Ako je $u_1 \leq k,\ u_2 \leq k$, onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(k, k) = k.$$

ii. Ako je $u_1 \leq k < u_2$, onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(k, u_2) = u_2.$$

iii. Ako je $u_2 \leq k < u_1$, onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(T_1(u_1, \mu_1), k) = T_1(u_1, \mu_1).$$

iv. Ako je $k < u_1,\ k < u_2$, onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(T_1(u_1, \mu_1), u_2).$$

(c) Ako je $u_1 \leq a < u_2$, tada:

i. Ako je $u_1 \leq k$, onda je $U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(k, u_2) = u_2$.

ii. Ako je $u_1 > k$, onda je

$$U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(T_1(u_1, \mu_1), u_2) = u_2.$$

(d) Ako je $u_2 \leq a < u_1$, tada:

i. Ako je $u_2 \leq k$, onda je $U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(\mu_1, k) = \mu_1$.

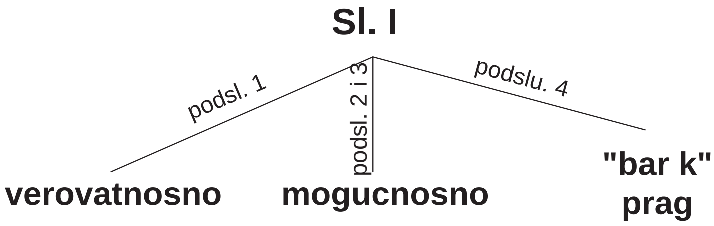
ii. Ako je $k < u_2$, onda je $U_F(u_1, u_2; \mu_1, \mu_2) = \max(\mu_1, u_2)$.

3.8 Ponašanje donosioca odluke u odnosu na funkciju korisnosti U_F

Sada smo u mogućnosti da analiziramo ponašanje donosioca odluke u odnosu na novouvedenu funkciju korisnosti U_F koja je detaljno ispitana u prethodnoj sekciji. Treba naglasiti da je u [23] detaljno analizirano ponašanje donosioca odluke u odnosu na funkciju korisnosti U datu sa (3.2).

Slučaj I opisuje situaciju kada je donosilac odluke veoma nesiguran o stanju sveta, jer su oba stepena verodostojnosti μ_1, μ_2 visoka što znači da oba involvirana stanja sveta x_1, x_2 imaju visok stepen verodostojnosti. U prva tri podslučaja imamo potpuno istu situaciju kao u slučaju optimističke hibridne funkcije korisnosti U (videti [23]). Tako je u podslučaju 1 ponašanje donosioca odluke verovatnosno, dok u podslučaju 2 i 3 donosilac odluke se raduje najboljem ishodu, tj. ponašanje je mogućnosno. Podsučaj 4 je od posebnog interesa za dalje istraživanje jer imamo četiri mogućnosti. Podslučaj 4a pokazuje da kada su nagrade manje od k u oba stanja vrednost funkcije korisnosti U_F je k. Podslučaj 4b (analogno se radi i 4c) je kada je nagrada veća od k u stanju x_1, a manja od k u drugom stanju. Tada se donosilac odluke raduje najboljem ishodu (nagradi u_1). U podslučaju 4d kada su nagrade veće od k u oba stanja, ponašanje donosioca odluke je mogućnosno. Iz prethodne analize vidimo da u najgorem podslučaju 4a kada su nagrade u oba stanja manje od k donosilac odluke se fokusira na k. Prema tome, funkcija korisnosti U_F u podslučaju 4 je mogućnosna sa minimalnom vrednosti k.

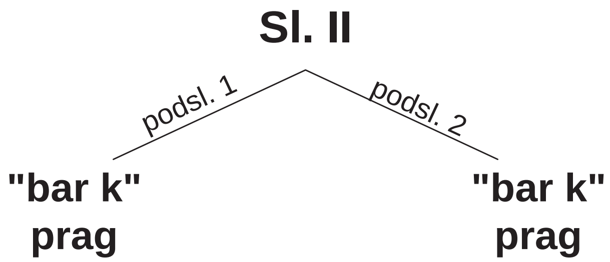
Ova osobina nam otvara vrata diskusije o hibridnim funkcijama funkcijama korisnosti sa prethodno zadatim pragom $k \in (0, 1)$, koji predstavlja absorbujući element nulanorme F iz jednačine (3.3).



Slika 9.

Slučaj II opisuje situaciju kada je stanje x_1 malo verovatno. Ovde, za razliku od [23], razlikujemo dva podslučaja u zavisnosti od stepena verodostojnosti μ_1. Iz podslučaja 1) kada je stepen verodostojnosti $\mu_1 \leq k$, može se videti da je vrednost funkcije korisnosti U_F ili u_2 ili k. Kada je verodostojna nagrada veća od k onda se donosilac odluke raduje toj nagradi u_2. Kada je verodostojna nagrada manja od k onda se donosilac odluke fokusira na prag k. Takođe iz podslučaja 1) može se videti da vrednost funkcije korisnosti U_F ne zavisi od stepena verodostojnosti $\mu_1 \leq k$. Stoga, može se pretpostaviti da je verodostojnost stanja x_1 bar k. Ovaj zaključak nam nameće da isti prag k koji se javlja u funkciji korisnosti U_F imamo i kod $S-$mere. Ovo dalje znači da ima smisla konstruisati $S-$meru (videti u nastavku Primer 121) sa zadatim pragom k. Podslučaj 2) se javlja kada je stepen verodostojnosti $k < \mu_1 \leq a$, tj. kada je stanje x_1 verodostojnije nego u podslučaju 1). Može se videti da kada je $u_2 > a$ (verodostojna nagrada je dobra) imamo istu situaciju kao u podslučaju 1) (videti podslučaj 2a, 2c). U podslučaju 2d kada je $u_2 > k$ donosilac odluke se nada da će stanje x_1 prevagnuti ako je njegova verodostojnost bolja od nagrade u_2. Kada je $u_2 \leq k$, tj. kada je nagrada u_2 manja od praga k pa samim tim i od μ_1, stanje x_1 je prevagnulo. U podslučaju 2b kada je $u_1 \leq k$, tj. kada je najmanje verodostojna nagrada manja od k imamo istu situaciju kao u podslučaju 1). Kada je $k < u_1 \leq a$ (podslučaj 2b) donosilac odluke se raduje nagradi koja je bolja nego u podslučaju 1).

Prema tome, i u ovom slučaju imamo da je funkcija korisnosti U_F mogućnosna sa minimalnom vrednosti k. Isto tako iz prethodne analize očigledan je optimistički stav donosioca odluke korišćenjem funkcije korisnosti U_F.



Slika 10.

3.9 Separabilni događaji

U prethodnim razmatranjima videli smo da osim verovatnosnih i mogućnosnih mešavina moguće su jedino hibridne mešavine koje ih objedinjuju preko nekog nivoa a. Sa ovim rezultatom je i tesno povezan problem nezavisnosti događaja za $S-$mere. Poznato je da je u teoriji verovatnoće jedan od osnovnih pojmova nezavisnost, odnosno postojanje događaja $A_1, \ldots, A_n$ tako da za meru verovatnoće P važi

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Ovakvi događaji se zovu nezavisni događaji, a verovatnosna nezavisnost se pokazala kao koristan instrument za pojednostavljenje računa u stohastičkom modeliranju. Koncept verovatnosne nezavisnosti je u [20] uopšten na verovatnosnu separabilnost korišćenjem opštijih binarnih operacija na intervalu $[0, 1]$ umesto množenja. Bulova struktura skupa događaja i aditivnosti mere verovatnoće nameću znatna ograničenja na izbor tih operacija. Pokazalo se da su jedini mogući kandidati za te operacije neke neprekidne t-norme. Takođe, koncept nezavisnosti je u [8, 9] proučavan i u okviru mogućnosne teorije.

Ako želimo da teorija dekompozabilnih mera bude korisna u praktičnim primenama za modeliranje neizvesnosti neka vrsta nezavisnosti mora biti i za njih zahtevana. U nastavku predstavljamo rezultate iz [23, 24] gde su okarakterisane t-norme koje mogu biti korišćene za proširenje pojama verovatnosne nezavisnosti na $S-$mere. Pošto termin nezavisnosti ima precizno značenje u teoriji verovatnoće, u poretku $S-$mera govorimo o separabilnosti što vidimo u sledećoj definiciji.

Definicija 119 *([23]) Za dva događaja A i B kažemo da su $T-$separabilni ako važi*

$$m(A \cap B) = T(m(A), m(B))$$

za t-normu T.

U [23] je pokazano da mora biti zadovoljen zakon distributivnosti između t-norme T koja izražava separabilnost i t-konorme S koja karakteriše $S-$meru. Neka su A, B, C tri događaja tako da važi $B \cap C = \emptyset$, a parovi (A, B) i (A, C) su sačinjeni od separabilnih događaja. Ako pretpostavimo da je m $S-$mera, jednačina

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

prouzrokuje jaka ograničenja na T kada je S fiksirano. Naime, tada imamo

$$m(A \cap (B \cup C)) = S(m(A \cap B), m(A \cap C)) = S(T(m(A), m(B)), T(m(A), m(C))).$$

Iz teorije verovatnoće znamo da ako su disjunktni skupovi B i C nezavisni od A, onda je i $B \cup C$ takođe nezavisna od A. Da bi poput nezavisnosti i separabilnost učinili atraktivnom osobinom za račun, pretpostavljamo da to i ovde važi, odnosno

$$m(A \cap (B \cup C)) = T(m(A), m(B \cup C)).$$

Odavde dobijamo sledeću jednakost

$$T(m(A), S(m(B), m(C))) = S(T(m(A), m(B)), T(m(A), m(C))) \tag{3.4}$$

Ako pretpostavimo da je u (3.4) $m(B \cup C) < 1$, onda se jednačina (3.4) poklapa sa (CD) uslovom. Rezultat Teoreme 93 daje moguće izbore za par (S, T). Na osnovu toga, za $a \in [0, 1]$ imamo da je $S-$mera hibridna skupovna funkcija $m : P(X) \to [0, 1]$ tako da za $A \cap B = \emptyset$ važi

$$m(A \cup B) = \begin{cases} a + (1-a)\min(\frac{m(A)-a}{1-a} + \frac{m(B)-a}{1-a}, 1) & \text{ako je } m(A), m(B) > a, \\ \max(m(A), m(B)) & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je $S-$mera m takva da je $m(B) + m(C) > 1 + a$ za neke događaje B, C koji su disjunktni, onda je narušen (CD) uslov, tj. nije zadovoljena jednačina distributivnosti (3.4). Ova činjenica nameće znatna ograničenja na izbor odgovarajuće $S-$mere. Prema tome, jedine moguće $S-$mere koje onemogućavaju ovu situaciju, a garantuju normalizaciju i dopuštaju koncept nezavisnosti su:

- mere verovatnoće, a $T = T_P$ $(a = 0)$;
- mere mogućnosti, a T je proizvoljna t-norma $(a = 1)$;
- hibridna mera m takva da postoji $a \in (0,1)$ koja za disjunktne skupove A i B daje

$$m(A \cup B) = \begin{cases} m(A) + m(B) - a & \text{ako je } m(A), m(B) > a, \\ \max(m(A), m(B)) & \text{inače,} \end{cases}$$

  a za separabilnost

$$m(A \cap B) = \begin{cases} a + \frac{(m(A)-a)(m(B)-a)}{1-a} & \text{ako je } m(A), m(B) > a, \\ a \cdot T^{**}(\frac{m(A)}{a}, \frac{m(B)}{a}) & \text{ako je } m(A), m(B) \leq a, \\ \min(m(A), m(B)) & \text{inače,} \end{cases}$$

  dok se uslov normalizacije svodi na

$$\sum_{\{x\}, m(\{x\}) > a} m(\{x\}) = 1 + (\mathrm{card}(\{x, m(\{x\}) > a\}) - 1) \cdot a. \tag{3.5}$$

Primedba 120 *S obzirom da na osnovu Teoreme 65 znamo da je nulanorma na* $[k,1]^2$ *t-norma, u slučaju* $S-$*mere sa zadatim pragom* k *možemo umesto t-norme* T *u Definiciji 119 koristiti neprekidnu nulanormu* F *sa absorbujućim elementom* k *koja je uslovno distributivna u odnosu na t-konormu* S.

U nastavku dajemo primer $S-$mere sa zadatim pragom k koju ćemo koristiti za konstrukciju hibridne funkcije korisnosti U_F sa istim pragom k.

Primer 121 *Neka je za parametre iz Teoreme 99 uzeto* $k = 0.15$, $a = 0.3$. *Za* $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ *definišimo* $S-$*meru* $m : P(X) \to [0,1]$ *za jednočlane skupove kao:*

$$m_1 = 0.75,\ m_2 = 0.45,\ m_3 = 0.4,\ m_4 = 0.24,\ m_5 = 0.15.$$

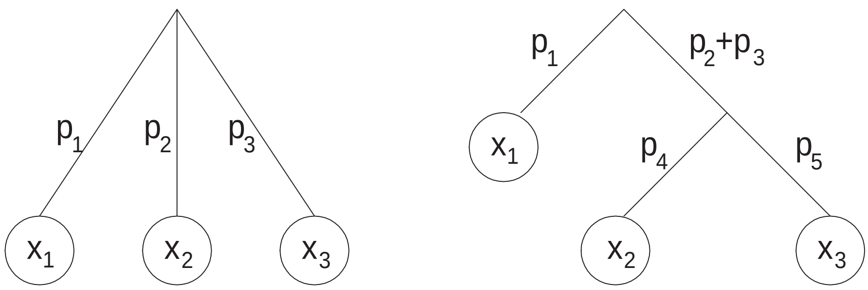
Naravno ovde smo morali vodili računa da bude zadovoljen uslov normalizacije (3.5), tj. da važi $m_1 + m_2 + m_3 = 1 + 2a = 1.6$. *Sada na jednostavan način dobijamo vrednosti* $S-$*mere za ostale skupove.*

Za dvočlane skupove imamo:

$m_{12} = 0.9,\ m_{13} = 0.85,\ m_{14} = m_{15} = 0.75,\ m_{23} = 0.55,$
$\quad m_{24} = m_{25} = 0.45,\ m_{34} = m_{35} = 0.4,\ m_{45} = 0.24.$
Za tročlane skupove imamo:
$m_{123} = 1,\ m_{124} = m_{125} = 0.9,\ m_{134} = m_{135} = 0.85,\ m_{145} = 0.75,$
$\quad m_{234} = m_{235} = 0.55,\ m_{245} = 0.45,\ m_{345} = 0.4.$
Za četvoročlane skupove imamo:
$m_{1234} = m_{1235} = 1,\ m_{1245} = 0.9,\ m_{1345} = 0.85,\ m_{2345} = 0.55.$
Naravno $m_{12345} = m(X) = 1,\ m(\emptyset) = 0.$

3.10 Dekompozicija $S-$mere u binarna stabla

Mešavine i separabilnost su međusobno tesno povezane u teoriji korisnosti. Poznato je (videti [65]) da se svaka raspodela verovatnoće p na konačnom skupu X može predstaviti kao niz binarnih lutrija. Binarna lutrija je četvorka (A, α, x, y) gde je $A \subset X,\ \alpha \in [0,1]$ tako da je $p(A) = \alpha$, i predstavlja slučajan događaj koji daje x ako se A ostvari, a y daje inače. Pretpostavimo da je p raspodela verovatnoće na na X tako da je $p_i = p(x_i), x_i \in X$. Ako je $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ onda se p može prikazati pomoću stabla na Slici 11. Binarno stablo se dobija na sledeći način. Prvo se vrši particija skupa X u $\{x_1\}$ i $\{x_2, x_3\}$ sa verovatnoćama p_1 i $p_2 + p_3$, respektivno. Zatim se vrši particija $X \setminus \{x_1\}$ u $\{x_2\}$ i $\{x_3\}$ sa verovatnoćama $p_4 = \frac{p_2}{p_2+p_3}$ i $p_5 = \frac{p_3}{p_2+p_3}$, respektivno. Ova dva stabla na Slici 11 su ekvivaletna pod uslovom da je verovatnoća $\{x_i\}$ računata množenjem verovatnoća na putanji od korena stabla do lista x_i.



Slika 11. Stablo verovatnoće i odgovarajuća binarna stabla

U nastavku predstavljamo generalizaciju ovog rezultata iz [23] na $S-$meru. Pretpostavimo da je m $S-$mera na $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ tako da je $m_i = m(\{x_i\}$. Želimo da dekomponujemo terarno stablo na Slici 12 u binarno stablo tako da budu ekvivaletna. Tada imamo sledeće jednačine:

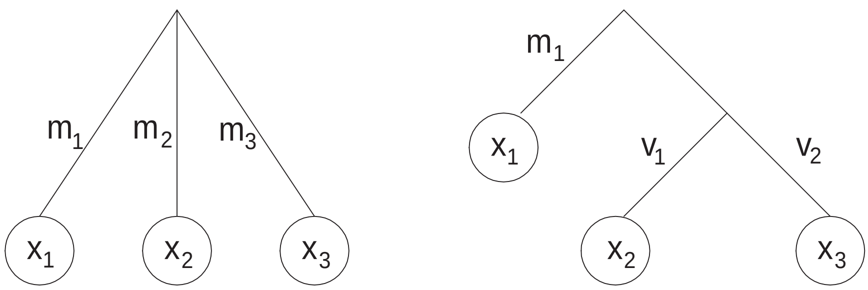
$$S(v_1, v_2) = 1, \quad T(\mu, v_1) = m_2, \quad T(\mu, v_2) = m_3,$$

gde je T t-norma koja izražava separabilnost za $S-$meru. Prvi uslov izražava da je (v_1, v_2) u mešavina skupu. Ako ove jednačine imaju jedinstvena rešenja ponavljajući ovaj postupak, svaku raspodelu $S-$mere možemo dekomponovati u niz binarnih lutrija.

Prema tome, transformacija $S-$mere u niz binarnih stabala dovodi do nužnosti rešavanja sledećeg sistema jednačina

$$T(\mu, v_1) = \alpha_1, \quad T(\mu, v_2) = \alpha_2, \quad S(v_1, v_2) = 1 \tag{3.6}$$

za date α_1 i α_2. Poznato je (videti [23]) da postoji jedinstveno rešenje (μ, v_1, v_2). Pretpostavićemo bez umanjivanja opštosti da je $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Takođe pretpostavljamo i da je t-norma T^{**} iz Teoreme 93 jednaka sa T_M. U [23] su razmatrana sledeća četiri slučaja.



Slika 12. Stablo $S-$mere i odgovarajuća binarna stabla

Slučaj I. Neka je $\alpha_1, \alpha_2 > a$. Onda se (3.6) svodi na

$$\alpha_1 = a + \frac{(\mu - a)(v_1 - a)}{1 - a}, \ \alpha_2 = a + \frac{(\mu - a)(v_2 - a)}{1 - a}, \ 1 = v_1 + v_2 - a.$$

Odavde se dobija jedinstveno rešenje

$$(\mu, v_1, v_2) = (\alpha_1 + \alpha_2 - a, a + \frac{(1 - a)(\alpha_1 - a)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2a}, a + \frac{(1 - a)(\alpha_2 - a)}{\alpha_1 + \alpha_2 - 2a}).$$

Slučaj II. Neka je $\alpha_1 > a \geq \alpha_2$. Odavde na osnovu (3.6) i na osnovu poznate činjenice da je $T_M \geq T$ sledi da je $\mu \geq \alpha_1 > a$, a pošto je $\alpha_2 \leq a$

zaključujemo da $\alpha_2 = T(\mu, v_2) = \min(\mu, v_2) = v_2$. Dalje iz $S(v_1, v_2) = 1$ dobijamo da je $v_1 = 1$, a iz $T(\mu, v_1) = \alpha_1$ sledi da je $\mu = \alpha_1$. Dakle trojka

$$(\mu, v_1, v_2) = (\alpha_1, 1, \alpha_2)$$

je jedinstveno rešenje (3.6).

Slučaj III. Neka je $\alpha_2 < \alpha_1 \leq a$. Prvo što možemo zaključiti je da je nemoguće da su $v_1 > a$ i $v_2 > a$, jer bi to na osnovu (3.6) značilo da je $\mu = \alpha_1 = \alpha_2$ što je kontradikcija. Ako pretpostavimo da je $v_1 = 1$, tada na osnovu prve jednačine u (3.6) imamo da je $\mu = \alpha_1$, a na osnovu druge jednačine u (3.6) dobijamo da je $v_2 = \alpha_2$. Prema tome dobijamo isto rešenje $(\alpha_1, 1, \alpha_2)$ kao u Slučaju II. Pretpostavka da je $v_2 = 1$, daje da je $\mu = \alpha_2$, pa na osnovu prve jednačine u (3.6) dobijamo $\alpha_1 = T(\alpha_2, v_1) \leq \alpha_2$ što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom.

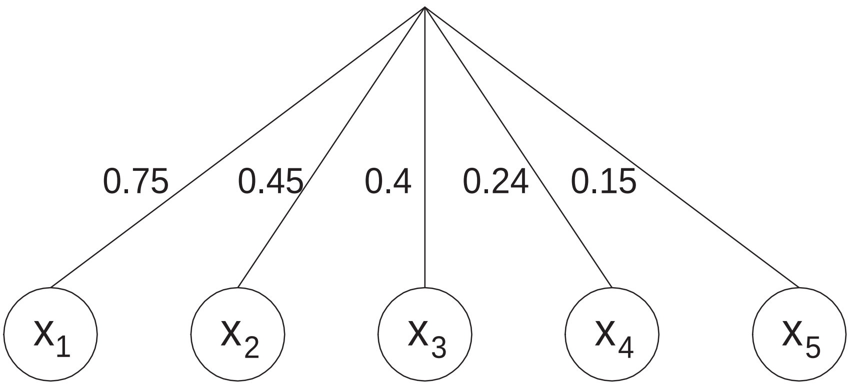
Slučaj IV. Neka je sada $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \leq a$. Ovde se mogu pojaviti dve mogućnosti.

- Ako je jedna od vrednosti v_1 ili v_2 jednaka 1 dobijamo da je $\mu = \alpha$. Lako se proverava da ako t-norma T nije $T_M = \min$ važi $v_1 = v_2 = 1$, odnosno rešenje (3.6) je $(\alpha, 1, 1)$. Međutim ovo rešenje nije jedinstveno ako je $T = \min$. Tada možemo izabrati bilo koju trojku $(\mu, \alpha_1, \alpha_2) = (\alpha, 1, v_2)$ sa $v_2 \in [\alpha, 1]$. Zbog simetrije prirodno je da zahtevamo $v_1 = v_2$, pa i u ovom slučaju imamo jedinstveno ješenje.

- Druga mogućnost koja može nastupiti je da $v_1 > a$, $v_2 > a$ tako da važi $v_1 + v_2 = 1 + a$, $T(\mu, v_1) = \alpha$ i $T(\mu, v_2) = \alpha$. Jasno je da je i u ovom slučaju $\mu = \alpha$ (pošto je $v_1, v_2 > a$ i $\alpha \leq a$). Ponovo zbog simetrije imamo pravo da zahtevamo da je $v_1 = v_2$ pa dobijamo $v_1 = v_2 = \frac{1+a}{2}$. Sa praktične tačke gledišta prigovor protiv ovog rešenja je da granica rešenja slučaja III kada se α_1 približava α_2 jeste $(\mu, v_1, v_2) = (\alpha, 1, 1)$ a nije $(\mu, v_1, v_2) = (\alpha, \frac{1+a}{2}, \frac{1+a}{2})$. Prema tome, možemo zaključiti da iako jednačina dekompozicije (3.6) ima više rešenja u ovom simetričnom slučaju, jedino verodostojno rešenje je $(\alpha, 1, 1)$.

Primedba 122 *Prethodna priča o dekompoziciji $S-$mere u niz bilarnih stabala svakako je primenjiva i u slučaju kada imamo $S-$meru za zadatim pragom k.*

Na Slici 13 je predstavljena $S-$mera iz Primera 121, a na Slici 14 odgovarajuća binarna stabla dobijena na osnovu njene dekompozicije. Koristeći dekompoziciju $S-$mere u niz binarnih stabala možemo, na isti način kao u [23], konstruisati algoritam za izračunavanje korisnosti n-arne (složene) lutrije primenjujući funkciju korisnosti U_F rekurzivno od dna do vrha binarnog stabla što vidimo u sledećem primeru.



Slika 13. Stablo $S-$mere iz Primera 121

Primer 123 *Neka je m $S-$mera iz Primera 121, F nulanorma uslovno distributivna u odnosu na t-konormu S i U_F odgovarajuća funkcija korisnosti data sa (3.3). Za sledećih pet korisnosti*

$$u_1 = 0.8,\ u_2 = 0.1,\ u_3 = 0.4,\ u_4 = 0.2,\ u_5 = 0.3$$

koristeći binarno stablo na Slici 14 i funkciju korisnosti U_F izračunaćemo odgovarajuću korisnost, a algoritam predstavljamo na Slici 15.

Za u_4' nalazimo se u slučaju II 1. (b) iv., odnosno

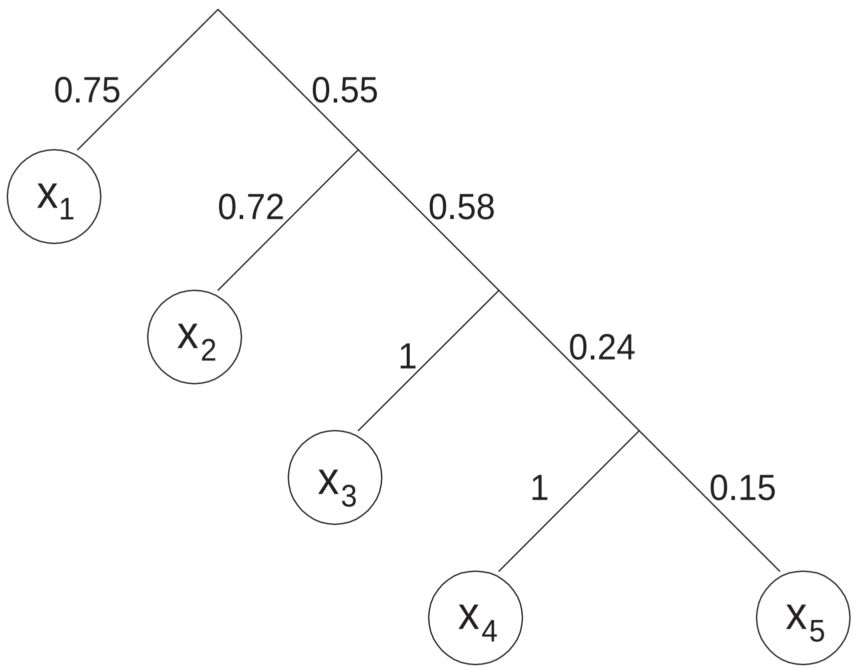
$$u_4' = \max(0.2, 0.15) = 0.2.$$

Za u_3' nalazimo se u slučaju II 2. (c) ii., odnosno

$$u_3' = \max(0.4, T_1(0.24, 0.2)) = 0.4.$$

Za u_2' nalazimo se u slučaju I 2. (a), odnosno

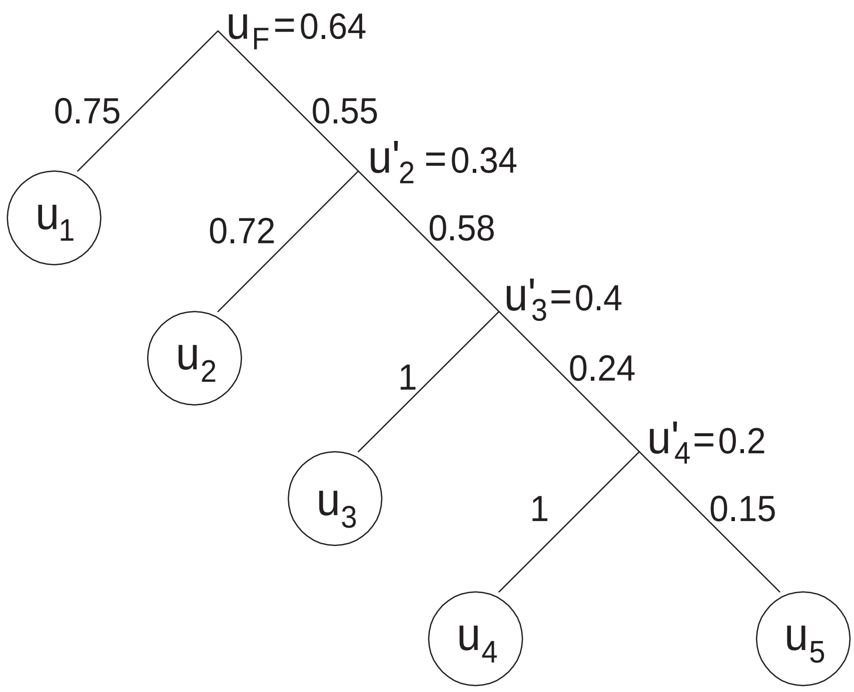
$$u_2' = 0.3 + \frac{(0.4 - 0.3)(0.58 - 0.3)}{1 - 0.3} = 0.34.$$



Slika 14. Binarna stabla $S-$mere iz Primera 121

I konačno za U_F nalazimo se u slučaju I 1., odnosno

$$U_F = \frac{0.8(0.75 - 0.3) + 0.34(1 - 0.75)}{1 - 0.3} = 0.64.$$



Slika 15.

Zaključak

Predložena disertacija je posvećena rešavanju jednačina distributivnosti gde nepoznate funkcije pripadaju nekim poznatim klasama operacija agregacije i primeni dobijenih rešenja u teoriji korisnosti. Dobijeni originalni rezultati se generalno mogu podeliti u tri grupe.

Prvu grupu čine rezultati iz Glave 2 dobijeni rešavanjem jednačina distributivnosti između GM-operacija agregacije i oslabljenih uninormi, GM-operacija agregacije i oslabljenih nulanormi, kao i GM-operacija agregacije i operacija agregacije bez neutralnog i absorbujućeg elementa. Dobijeni rezultati proširuju odgovarajuće rezultate iz [6] gde su korišćene t-norme i t-konorme umesto oslabljenih uninormi i oslabljenih nulanormi. Videli smo da je zakon distributivnosti u kombinaciji sa GM-operacijom, jak uslov jer znatno pojednostavljuje strukturu involviranih operacija.

Druga grupa rezultata, takođe iz Glave 2, je dobijena rešavanjem jednačina uslovne (oslabljene) distributivnosi neprekidne nulanorme (ili oslabljene nulanorme) u odnosu na neprekidnu t-konormu, i neprekidne nulanonorme (ili oslabljene nulanorme) u odnosu na uninorme iz klasa $U_{\min} \cup U_{\max}$. Iz ovih rezultata videli smo da rad na ograničenom domenu uz pretpostavku neprekidnosti dovodi do neidempotentnih rešenja, pa samim tim i do veće mogućnosti primene, što predstavlja napredak u odnosu na [15, 46] gde je zakon distributivnosti važio na celom domenu.

Treća grupa rezultata (Glava 3) je proistekla iz primene dobijenih rezultata o uslovoj distributivnosti nulanorme u odnosu na t-konormu u teoriji korisnosti. Videli smo da kada u definiciji funkcije hibridne korisnosti U iz [23] t-normu T zamenimo sa nulanormom F, sa absorbujućim elementom $k \in (0, 1)$, njena vrednost ne može biti manja od k.

Jedan od mogućih pravaca za budući rad je opis strukture uninormi u opštem slučaju što je i dalje otvoren problem. Pošto su uninorme specijalne (simetrične i asocijativne) operacije agregacije sa neutralnim elementom, mogla bi se detaljnije istraživati i struktura opštih operacija agregacije sa neutralnim elementom, tj. oslabljenih uninormi. Takođe, mi smo u disertaciji razmatrali uslovnu distributivnost nulanormi, koje predstavljaju specijalne operacije agregacije sa absorbujućim elementom, u odnosu na t-konorme i neke klase uninormi. Sledeći mogući pravac za dalji rad je rešavanje problema uslovne distributivnosti opštih operacija agregacije sa absorbujućim elementom u odnosu na t-konorme, kao i implikacija dobijenih rešenja na teoriju korisnosti. Otvoren je i problem pronalaženja odgovarajuće aksiomatske zasnovanosti za hibridnu funkciju korisnosti kao što je to učinjeno za klasičnu i mogućnosnu teoriju korisnosti.

Prilog

U cilju što boljeg približavanja čitaocima tehnike dokazivanja karakteristične za posmatranu oblast, navodimo neke od dokaza korišćenih rezultata. Kao što se može videti, izabrani dokazi su u rasponu od jednostavnijih do kompleksnih što uspešno ilustruje različite nivoe složenosti.

Dokaz Propozicije 33 ([41])

Dokaz ove propozicije može se izvesti na dva načina. Jedan je direktan, kao što je dato u Propoziciji 5.9 i 5.10 iz [41]. Ovom prilikom pokazaćemo sledeće (videti Propoziciju 5.6 iz [41]): Ako su T_1 i T_2 dve neprekidne Arhimedove t-norme. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

(i) T_1 i T_2 su izomorfne.

(ii) Ili su obe t-norme T_1 i T_2 striktne ili su obe nilpotentne.

Očigledno je da $(i) \Rightarrow (ii)$.
Pretpostavimo sada da su T_1 i T_2 dve striktne ili dve nilpotentne t-norme sa aditivnim generatorima t_1 i t_2, respektivno, tako da je $t_1(0) = t_2(0)$. Svakako da je ovaj uslov uvek zadovoljen kod striktnih t-normi ($t_1(0) = t_2(0) = \infty$), dok u slučaju nilpotentnih uvek je moguće naći odgovarajuće generatore, zbog Teoreme 42, koji zadovoljavaju $t_1(0) = t_2(0)$. U oba slučaja lako se pokazuje da funkcija $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ definisana sa $\varphi = t_1^{(-1)} \circ t_2$ je izomorfizam između T_1 i T_2. Sada, kao direktna posledica sledi Propozicija 33 $\square$

Dokaz Propozicije 40 ([41])

Jasno je da $(ii) \Rightarrow (i)$. Pokažimo sada da $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je T t-norma i $a \in (0,1)$ tako da je $T(a,x) = \min(a,x)$ za sve $x \in [0,1]$. Svakako da je a netrivijalni idempotentni element za t-normu T. Posmatrajmo sada rastuće bijekcije $\varphi_1 : [0,a] \to [0,1]$ i $\varphi_2 : [a,1] \to [0,1]$ date sa $\varphi_1(x) = \frac{x}{a}$ i $\varphi_2(x) = \frac{x-a}{1-a}$. Lako se pokazuje da operacije $T_1, T_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ date respektivno sa

$$T_1(x,y) = \varphi_1(T(\varphi_1^{-1}(x), \varphi_1^{-1}(y))),$$

$$T_2(x,y) = \varphi_2(T(\varphi_2^{-1}(x), \varphi_2^{-1}(y))),$$

su t-norme.
Na osnovu njihove konstrukcije ordinalna suma $(< 0, a, T_1 >, < a, 1, T_2 >)$ se podudara sa datom t-normom T na skupu $[0,a]^2 \cup [a,1]^2$. Na ostatku jediničnog kvadrata, tj. ako je $x < a < y$ imamo

$$x = \min(x,a) = T(x,a) \leq T(x,y) \leq T_M(x,y) = \min(x,y) = x.$$

Prema tome, na skupu $[0,1]^2 \setminus ([0,a]^2 \cup [a,1]^2)$ t-norma T je minimum. $\square$

Dokaz Teoreme 43 ([41])

Lako se može pokazati da je ordinalna suma neprekidnih t-norma neprekidna (videti Propoziciju 3.49 iz [41]), prema tome $(ii) \Rightarrow (i)$.

Neka je sada T neprekidna t-norma. Lako se može pokazati da je skup idempotentnih elemenata I_T neprekidne t-norme zatvoren. Ako je $(x_n)_{n\in N}$ niz idempotentnih elemenata od T tako da je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, zbog neprekidnosti T imamo $x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_n, x_n) = T(x,x)$, što znači da je x takođe idempotentan element za T. Prema tome, komplement skupa idempotentnih elemenata je ili prazan (u tom slučaju $T = T_M$) ili postoji najviše prebrojivo beskonačan skup indeksa A i familija disjunktnih otvorenih podintervala $((a_\alpha, e_\alpha))_{\alpha\in A}$ od $[0,1]$ tako da je

$$[0,1] \setminus I_T = \bigcup_{\alpha\in A} (a_\alpha, e_\alpha).$$

Naravno, za svako $\alpha \in A$ rubne tačke a_α i e_α su idempotentni elementi za T, dok nijedan element iz intervala (a_α, e_α) nije idempotentan za T. Pretpostavimo sada da je $A \neq \emptyset$ i fiksirajmo proizvoljno $\alpha \in A$. Dalje se pokazuje koristeći monotonost od T da za sve $(x,y) \in [a_\alpha, e_\alpha]^2$

$$a_\alpha = T(a_\alpha, a_\alpha) \leq T(x,y) \leq T(e_\alpha, e_\alpha) = e_\alpha.$$

Isto tako se može pokazati da je a_α absorbujući element za $T|_{[a_\alpha,1]^2}$. Zbog monotonosti i neprekidnosti T imamo $\{T(z, e_\alpha) \mid z \in [0,1]\} = [0, e_\alpha]$, što znači da za svako $x \in [0, e_\alpha]$ postoji $z \in [0,1]$ tako da je $x = T(z, e_\alpha)$. Stoga zbog asocijativnosti od T imamo

$$T(x, e_\alpha) = T(T(z, e_\alpha), e_\alpha) = T(z, T(e_\alpha, e_\alpha)) = T(z, e_\alpha) = x,$$

što znači da je e_α neutralni element za $T|_{[0,e_\alpha]^2}$.

Neka je sada $\varphi_\alpha : [0,1] \to [a_\alpha, e_\alpha]$ rastuća bijekcija data sa

$$\varphi_\alpha(x) = a_\alpha + (e_\alpha - a_\alpha) \cdot x,$$

onda je za svako $\alpha \in A$ operacija $T_\alpha : [0,1]^2 \to [0,1]$ definisana sa

$$T_\alpha(x,y) = \varphi_\alpha^{-1}(T(\varphi_\alpha(x), \varphi_\alpha(y))$$

neprekidna t-norma koja poseduje jedino trivijalne idempotentne elemente, pa je stoga i Arhimedova na osnovu Propozicije 31. Jednostavnim računom pokazuje se da za svako $\alpha \in A$ i sve $(x,y) \in [a_\alpha, e_\alpha]^2$ imamo

$$T(x,y) = a_\alpha + (e_\alpha - a_\alpha)T_\alpha\left(\frac{x - a_\alpha}{e_\alpha - a_\alpha}, \frac{y - a_\alpha}{e_\alpha - a_\alpha}\right).$$

Ukoliko $(x,y) \in [0,1]^2$ (bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $x \le y$) ne pripada ni jednom od kvadrata $[a_\alpha, e_\alpha]^2$, onda postoji neki idempotentan element $b \in [x,y]$ koji je neutralni element za $T|_{[0,b]^2}$ i absorbujući element za $T|_{[b,1]^2}$. Prema tome imamo

$$T(x,y) = T(T(x,b),y) = T(x,T(b,y)) = T(x,b) = x = \min(x,y),$$

što znači da je $T = (< a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha >)_{\alpha \in A}$. $\square$

Dokaz Teoreme 45 ([49])

(i) Jasno je da ako je GM-operacija F t-norma ili t-konorma onda je ona i asocijativna. Pokažimo obrnuto, tj. pretpostavimo da je F asocijativna GM-operacija. Tada imamo

$$F(0,1) = F(0, F(1,1)) = F(F(0,1),1) = (1 - F(0,1))F(0,1) + F(0,1).$$

Prema tome dobijamo $(1 - F(0,1))F(0,1) = 0$, pa zaključujemo da je $F(0,1) = 0$ ili $F(0,1) = 1$. Sada ako je $F(0,1) = 1$ na osnovu prvog graničnog uslova iz Definicije 44 dobijamo da je $F(x,0) = x$ za sve $x \in [0,1]$ pa zaključujemo da je F t-konorma. Isto tako, ako je $F(0,1) = 0$ na osnovu drugog graničnog uslova iz Definicije 44 dobijamo da je $F(x,1) = x$ za sve $x \in [0,1]$ pa zaključujemo da je F t-norma.

(ii) Očigledno je da ako je $F = \min$ ili $F = \max$, imamo $F(0,1) = 0$ ili $F(0,1) = 1$ i F je idempotentna. Pretpostavimo sada da je F idempotentna i da je $F(0,1) = 0$. Za $x \le y$ dobijamo

$$x = F(x,x) \le F(x,y) \le F(x,1) = x,$$

pa zaključujemo da je $F = \min$. Na sličan način se zaključuje da je $F = \max$ ako je $F(0,1) = 1$.

(iii) Sledi na osnovu Propozicije 15. $\square$

Dokaz Teoreme 65 ([7])

Neka je V nulanorma sa absorbujućim elementom k. Lako se proverava da funkcije S_V i T_V definisane sa

$$S_V(x,y) = \frac{V(kx,ky)}{k}, \ (x,y) \in [0,1]^2$$

$$T_V(x,y) = \frac{V(k+(1-k)x, k+(1-k)y) - k}{1-k}, \ (x,y) \in [0,1]^2$$

su respektivno t-konorma i t-norma. Prema tome, na $[0,k]^2$ i $[k,1]^2$ nulanorma V je data kao u (1.10). Na ostatku jediničnog kvadrata, tj. kada je $x < k < y$, zbog monotonosti V sledi

$$k = V(x,k) \le V(x,y) \le V(k,y) = k.$$

Prema tome, i na skupu $[0,1]^2 \setminus ([0,k]^2 \cup [k,1]^2)$ nulanorma V je data kao u (1.10).

Pokažimo sada obrnuto. Neka je operacija V data sa (1.10). Jedino što treba proveriti da bi V bila nulanorma je asocijativnost. Na $[0,k]^2$ i $[k,1]^2$ asocijativnost od V sledi iz asocijativnosti S i T. Neka je sada, na primer $x, y \le k \le z$. Imamo da je $V(x, V(y,z)) = V(x,k) = k$. Pošto je $V(x,y) \le k$, takođe dobijamo da je $V(V(x,y),z) = k$. Ostali slučaji se rade slično. $\square$

Dokaz Leme 72

Pokazaćemo da je proizvoljna operacija agregacije F levo distributivna u odnosu na min operciju. Slučaj distributivnosti u odnosu na max operaciju se radi analogno. Neka su $x, y, z \in [0,1]$ tako da je $y \le z$. Zbog monotonosti F imamo

$$F(x, \min(y,z)) = F(x,y) = \min(F(x,y), F(x,z)),$$

tj. F je levo distributivna u odnosu na $\min$. $\square$

Literatura

[1] J. Aczél, Lectures on Functional Equations and their Applications, Academic Press, New York 1966.

[2] M. Baczyński, On the distributivity, of fuzzy implications over continuous and Archimedean triangular conorms, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010), 1406-1419.

[3] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation Functions: a Guide for Practitioners, Springer, Heidelberg 2007.

[4] P. Benvenuti, R. Mesiar, Pseudo-arithmetical operations as a basis for the general measure and integration theory, Information Sciences 160 (2004), 1-11.

[5] C. Bertoluzza, V. Doldi, On the distributivity between t-norms and t-conorms, Fuzzy Sets and Systems 142 (2004), 85-104.

[6] T. Calvo, On some solutions of the distributivity equations, Fuzzy Sets and Systems 104 (1999), 85-96.

[7] T. Calvo, B. De Baets, J. Fodor, The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems 120 (2001), 385-394.

[8] L. M. de Campos, J. F. Huete, Independence concepts in possibility theory: Part 1, Fuzzy Sets and Systems 103 (1999), 127-152.

[9] L. M. de Campos, J. F. Huete, Independence concepts in possibility theory: Part 2, Fuzzy Sets and Systems 103 (1999), 487-505.

[10] B. Cavallo, L. D'Apuzzo, M. Squillante, Independence and convergence in non-additive settings, Fuzzy Optimization and Decision Making 8 (2009), 29-43.

[11] A.H. Clifford, Naturally totally ordered commutative semigroups, Amer. J. Math. 76 (1954), 631-646.

[12] E. Czogala, J. Drewniak, Associative monotonic operations in fuzzy sets theory, Fuzzy Sets and Systems 12 (1984), 249-269.

[13] B. De Baets, Idempotent uninorms, European J. Oper. Res. 118 (1999), 631-642.

[14] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1994.

[15] J. Drewniak, P. Drygaś, E. Rak, Distributivity between uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008), 1646-1657.

[16] J. Drewniak, E. Rak, Subdistributivity and superdistributivity of binary operations, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010), 189-201.

[17] J. Drewniak, E. Rak, Distributivity inequalities of monotonic operations, Fuzzy Sets and Systems 191 (2012), 62-71.

[18] P. Drygaś, Discussion of the structure uninirms, Kybernetika 41 (2005), 213-226.

[19] P. Drygaś, On the structure of continuous uninorms, Kybernetika 43 (2007), 183-196.

[20] D. Dubois, Generalized probabilistic indepedence and its implications for utility, Operations Res. Letters 5 (1986), 255-260.

[21] D. Dubois, J. Fodor, H. Prade, M. Roubens, Aggregation of decomposable measures with applications to utility theory, Theory and Decision 41 (1996), 59-95.

[22] D. Dubois, L. Godo, H. Prade, A. Zapico, Making decision in qualitative setting: from decision under uncertainty to case-based decision, (Eds. A.G. Cohn, L. Schurbet, S.C. Shapiro) Proceedings of the 6th Interational Conference, Principles of Knowledge Representation and Reasoning, San Francisko (1998), 594-605.

[23] D. Dubois, E. Pap, H. Prade, Hybrid probabilictic-possibilistic mixtures and utility functions, (Eds. J. Fodor, B. De Baets, P. Perny) Preferences and Decisions under Incomplete Knowledge, vol. 51 of Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer-Verlag (2000), 51-73.

[24] D. Dubois, E. Pap, H. Prade, Pseudo-additive measures and the independence of events, (Eds. B. Bouchon-Menuer, J. Gutierrez-Rios, L. Magdalena, R.R. Yager) Technologies for Constructing Intelligent Systems 1, vol. 89 of Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer-Verlag (2001), 179-191.

[25] D. Dubois, H. Prade, A class of fuzzy measures based on triangular norms, Inernat. J. Gen. System 8 (1982), 43-61.

[26] D. Dubois, H. Prade, Possibility theory: qualitative and quantitative aspects, (ed. Ph. Smets) The Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998), 169-226.

[27] Q. Feng, Z. Bin, The distributive equations for idempotent uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems 155 (2005), 446-458.

[28] J.C. Fodor, D. Dubois, H. Prade, M. Roubens, Consensus for decomposable measures, (Eds. J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, H. Nurmi) Consensus Under Fuzziness, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997), 191-210.

[29] J.C. Fodor, M. Roubens, Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1994.

[30] J.C. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov, Structure of uninorms, Internat. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 5 (1997), 411-427.

[31] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, Aggregations Functions, Cambridge Uviversity Press, Cambridge 2009.

[32] M. Grabisch, H.T. Nguen, E.A. Walker, Fundamentals of Uncertainty Calculi with Application to Fuzzy Inference, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1995.

[33] I.N. Herstein, J. Milnor, An axiomatic approach to measurable utility, Econometica 21 (1953), 291-297.

[34] D. Jočić, Uninorms and distributivity, Journal of Electrical Engineering, vol 56 (12/s)(2005), 101-103.

[35] D. Jočić, I. Štajner-Papuga, On restricted distributivity of nullnorm with respect to t-conorm and corresponding utility function, Proceedings of the IEEE 10th Jubilee International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica 2012 (SISY 2012), 511-514.

[36] D. Jočić, I. Štajner-Papuga, Restricted distributivity for aggregation operators with absorbing element, Fuzzy Sets and Systems 224 (2013), 23-35.

[37] D. Jočić, I. Štajner-Papuga, Distributivity equations and Mayor's aggregation operators, Knowledge-Based Systems 52 (2013), 194-200.

[38] D. Jočić, I. Štajner-Papuga, Some implications of the restricted distributivity for aggregation operators with an absorbing element on utility theory, submitted.

[39] G.J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Application, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, New Jersey 1995.

[40] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, On the relationship of associative compensatory operators to triangular norms and conorms, Interat. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4 (1996), 129-144.

[41] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers , Dordrecht 2000.

[42] E.P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Integration with respect to decomposable measures based on conditionally distributive semirings on the unit interval, Internat. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 8 (2000), 701-717.

[43] R.D. Luce, D.H. Krantz, P. Suppes, A. Tversky, Foundations of measurements, Academic Press, New York 1990.

[44] J. Martin, G. Mayor, J. Torrens, On locally internal monotonic operations, Fuzzy Sets and Systems 137 (2003), 27-42.

[45] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, t-operators, Internat. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 7 (1999), 31-50.

[46] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, The distributivity condition for uninorms and t- operators, Fuzzy Sets and Systems 128 (2002), 209-225.

[47] M. Mas, G. Mayor, J. Torrens, Corrigendum to "The distributivity condition for uninorms and t- operators" [Fuzzy Sets and Systems 128 (2002), 209-225], Fuzzy Sets and Systems 153 (2005), 297-299.

[48] M. Mas, R. Mesiar, M. Monserat, J. Torrens, Aggregation operations with annihilator, Internat. J. Gen. System 34 (2005), 1-22.

[49] G. Mayor, Contribuciò a l'estudi dels models matemàtics per a la lògica de la vaguetat, Ph.D. Thesis, Universitat de les Illes Balears, 1984.

[50] K. Menger, Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 8 (1942), 535-537.

[51] T. Murofushi, M. Sugeno, Fuzzy t-conorm integral with respect to fuzzy measures: Generalization of Sugeno integral and Choquet integral, Fuzzy Sets and Systems 42 (1991), 57-71.

[52] von Neumman, J. Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, Princeton Uviversity Press, Princeton 1944.

[53] E. Pap, Null-Aditive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1995.

[54] E. Pap, Fazi mere i njihova primena, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1999.

[55] E. Pap, M. Roca, An axiomatization of the hybrid probabilistic-possibilistic utility theory, Proceedings of the 4th Serbian-Hungarian Joint Symposium on Intelligent Systems, Subotica 2006 (SISY 2006), 229-235.

[56] S. Pilipović, D. Seleši, Mera i integral: fundamenti teorije verovatnoće, Zavod za udžbenike, Beograd 2012.

[57] E. Rak, The distributivity property of increasing binary operations, Fuzzy Sets and Systems 232 (2013), 110-119.

[58] J. J. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups, Springer-Verlag, New York 1995.

[59] D. Ruiz, J. Torrens, Distributive idempotent uninorms, Internat. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 11 (2003), 413-428.

[60] D. Ruiz, J. Torrens, Distributivity and conditional distributivity of uninorm and a continuous t-conorm. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14 (2) (2006), 180-190.

[61] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, Distributivity of strong implications over conjuctive and disjunnctive uninorms, Kibernetika 42 (2006), 319-336.

[62] D. Ruiz-Aguilera, J. Torrens, Distributivity of residual implications over conjuctive and disjunnctive uninorms, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007), 23-37.

[63] W. Sander, J. Siedekum, Multiplication, distributivity and fuzzy-integral I, II, III, Kybernetika 41 (2005), 397-422;469-496;497-518.

[64] B. Schweizer, A. Sklar, Probabilistic Metric Spaces, North-Holland, Amsterdam 1983.

[65] G. Shafer, The Art of Causal Conjecture, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London 1996.

[66] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indagatione Math. 33 (1971), 109-116.

[67] M. Sugeno, T. Murofushi, Pseudo-additive measures and integrals, J. Math. Anal. Appl. 122 (1987), 197-222.

[68] Z. Wang, G.J. Klir, Fuzzy Measure Theory, Plenum Press, New York 1992.

[69] S. Weber, $\perp$-decomposable measure and integrals for Archimedean t-conorms, J. Math. Anal. Appl. 101 (1984), 114-138.

[70] A. Xie, H. Liu, On the distributivity of uninorms over nullnorms, Fuzzy Sets and Systems 211 (2013), 62-72.

[71] R. R. Yager, Uninorms in fuzzy systems modelling, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001), 167-175.

[72] R.R. Yager, D. Filev, Essentials of Fuzzy Modelling and Control, J. Wiley and Sons, New York 1994.

[73] R. R. Yager, A. Rybalov, Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems 80 (1996), 111-120.

[74] L. Zadeh, Fuzzy sets as basis for theory of possibility, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978), 3-28.

[75] H.-J. Zimmermann, P. Zysno, Latent connectives in human decision making, Fuzzy Sets and Systems 4 (1980), 37-51.

Biografija

Rođen sam 23.01.1978. u Novom Sadu. Stanujem u Sremskim Karlovcima gde sam završio osnovnu školu. Prirodno-matematički smer gimnazije Jovan Jovanović Zmaj u Novom Sadu završio sam 1997. godine sa odličnim uspehom. Diplomirao sam na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu, na Departmanu za Matematiku i Informatiku 2002. godine sa prosečnom ocenom 9,64. Na istom fakultetu sam 2005. godine odbranio magistarsku tezu pod naslovom "Uslovno distributivni realni poluprsteni". Od 2012. godine student sam doktorskih studija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu u toku kojih sam sve ispite predviđene planom i programom položio sa prosečnom ocenom 10,00.

U periodu 2003-2005 bio sam stipendista Ministarstva nauke i zaštite životne sredine Republike Srbije i bio sam angažovan na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu na projektu "Matematički modeli nelinearnosti, neodređenosti i odlučivanja". Kao dobitnik međunarodne CEEPUS stipendije boravio sam tokom novembra 2004. u Austriji na Univerzitetu Johanes Kepler u Lincu, i u Slovačkoj na Slovačkom Tehnološkom Univerzitetu u Bratislavi aprila 2005.

Oblast mog naučnog istraživanja vezana je za operacije agregacije, i njihovu ulogu u različitim pristupima problemu odlučivanja. Rezultate svog dosadašnjeg naučnog rada izlagao sam na više međunarodnih konferencija i objavio sam ih u renomiranim međunarodnim časopisima.

U školskoj 2006/2007 godini radio sam kao profesor matematike u gimnaziji Laza Kostić u Novom Sadu. Od 2007. zaposlen sam na Visokoj poslovnoj školi strukovnih studija u Novom Sadu kao predavač za užu oblast Informatika, inženjering i kvantitativna analiza u ekonomiji.

Novi Sad, 15.11.2014. Dragan Jočić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni Broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: mr Dragan Jočić
AU
Mentor: dr Ivana Štajner-Papuga
MN
Naslov rada: Distributivnost operacija agregacije i njihova primena u teoriji korisnosti
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2014
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: (3, 105, 75, 0, 15, 0, 1)
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Analiza i verovatnoća
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: operacija agregacije, t-norma, t-konorma, GM-operacija, uninorma, nulanorma, distributivnost, uslovna distributivnost, funkcija korisnosti
PO
UDK
Čuva se: u biblioteci Departmana za Matematiku i Informatiku, Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Disertacija je posvećena rešavanju jednačina distributivnosti gde nepoznate funkcije pripadaju nekim poznatim klasama operacija agregacije i primeni dobijenih rešenja u teoriji korisnosti. Dobijeni rezultati se generalno mogu podeliti u tri grupe. Prvu grupu čine rezultati iz Glave 2 dobijeni rešavanjem jednačina distributivnosti između GM-operacija agregacije i oslabljenih uninormi, GM-operacija agregacije i oslabljenih nulanormi, kao i GM-operacija agregacije i operacija agregacije bez neutralnog i absorbujućeg elementa. Druga grupa rezultata, takođe iz Glave 2, je dobijena rešavanjem jednačina uslovne (oslabljene) distributivnosi neprekidne nulanorme u odnosu na neprekidnu t-konormu, i neprekidne nulanonorme u odnosu na uninorme iz klasa $U_{\min} \cup U_{\max}$. Treća grupa rezultata (Glava 3) je proistekla iz primene dobijenih rezultata o uslovoj distributivnosti nulanorme u odnosu na t-konormu u teoriji korisnosti.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 25.04.2014.
DP
Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:

Predsednik: dr Petar Marković, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Ivana Štajner-Papuga, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Arpad Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Aleksandar Perović, vanredni profesor, Saobraćajni fakultet, Univerzitet u Beogradu

Član: dr Tijana Levajković, docent, Saobraćajni fakultet, Univerzitet u Beogradu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code: PhD dissertation
CC
Author: Dragan Jočić, MSc
AU
Mentor: Ivana Štajner-Papuga, PhD
MN
Title: Distributivity of aggregation operators and their application in utility theory
XI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Novi Sad, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: (3, 105, 75, 0, 15, 0, 1)
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Analysis and probability
SD
Subject/Key words: aggregation operator, t-norm, t-conorm, GM-operation, uninorm, nullnorm, distributivity, conditional distributivity, utility function
SKW
UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstact: This dissertation is devoted to solving distributivity equations involving some well-known classes of aggregation operators, and application the obtained results to utility theory. In general, the obtained results can be divided into three groups. The first group are results from Chapter 2 obtained by solving distributivity equations between GM-aggregation operators and relaxed nullnorm, GM-aggregation operators and relaxed uninorms, as well as GM-aggregation operators and aggregation operators without neutral and absorbing element. The second group are results, also from Chapter 2, obtained by solving conditional (relaxed) distributivity of continuous nullnorm with respect to continuous t-conorm, as well as continuous nullnorm with respect to uninorms from the classes $U_{\min} \cup U_{\max}$. The third group are results (Chapter 3) arising from the application results on conditional distributivity of nullnorm with respect to t-conorm in utility theory.
AB

Accepted by the Scientific Board on: 25.04.2014
ASB
Defended:
DE

Thesis defended board:

President: Petar Marković, PhD, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Ivana Štajner-Papuga, PhD, Associate Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad, supervisor

Member: Arpad Takači, PhD, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Aleksandar Perović, PhD, Associate Professor, Faculty of Transport and Traffic Engineering, University of Belgrade

Member: Tijana Levajković, PhD, Assistant Professor, Faculty of Transport and Traffic Engineering, University of Belgrade
DB