

Наставно научно већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Одлуком Наставно научног већа Математичког факултета, Универзитета у Београду, донетој на седници одржаној 6. октобра 2017. године, именовани смо у комисију за преглед и оцену рукописа *Кохеренција и прости политопи*, који је предат као докторска теза Јелене Ивановић.

ИЗВЕШТАЈ

1. БИОГРАФИЈА КАНДИДАТА

Јелена Ивановић је рођена 12.01.1985. године у Смедереву. Основне студије Математичког факултета Универзитета у Београду, на смеру Рачунарство и информатика, завршила је 2010. године са просечном оценом 9.79. Школске 2010/11. године, уписала је докторске студије Математичког факултета Универзитета у Београду на смеру Математика. Положила је све испите предвиђене планом и програмом са просечном оценом 10.0. Веће научних области природно-математичких наука Универзитета у Београду, 5. фебруара 2018. године одобрава предлог теме њене докторске дисертације под називом *Кохеренција и прости политопи*.

Од 2010. године Јелена Ивановић је ангажована у настави на Архитектонском факултету Универзитета у Београду, где је 2016. године изабрана у звање асистента за ужу научну област Геометрија архитектонске форме. У оквиру Кабинета за математику, архитектонску геометрију и СААД тренутно држи вежбе на предметима: Математика у архитектури, Параметарско моделовање (основне студије); Параметарско моделовање 1, Параметарско моделовање 2, Примењена математика у области конструктивних система (мастер студије). У оквиру Кабинета, за потребе наставе и науке је реализовала више софтверских апликација. Модератор је електронске платформе коју Архитектонски факултет Универзитета у Београду користи за рад и наставу на даљину.

Носилац је неколико годишњих признања Математичког факултета најуспешнијим студентима. Добитник је Светосавске повеље за стваралаштво младих града Смедерева, награде која се додељује за најуспешније ученичке и студентске резултате остварене у дужем временском периоду. Била је стипендиста Министарства просвете, науке и технолошког развоја за студенте докторских студија, све до избора у звање асистента.

Осим наведеног ангажовања, Јелена је члан организационог одбора удружења *Млади математичар* и централне комисије за реализацију такмичења из математике за ученике основних школа, гимназија и средњих стручних школа, у организацији овог удружења. Учесник је националног пројекта Ш 44006 (Развој нових информационо-комуникационих технологија, коришћењем напредних математичких метода, са применама у медицини, телекомуникацијама, енергетици, заштити националне баштине и образовању). Члан је Друштва за чисту и примењену логику Републике Србије и Српског друштва за геометрију и графику SUGIG.

Области научног истраживања Јелене Ивановић су Теорија доказа, Конвексна геометрија, Дискретна геометрија, објектно-орјентисано и логичко програмирање, параметарско моделовање геометријских форми и примена математичких концепата и генеричких алгоритама у архитектури. Јелена је објавила 3 рада у часописима са SCI листе, од којих је један самосталан.

Радови у врхунским међународним часописима (M21):

- 1 Ivanović, J: Geometrical realisations of the simple permutoassociahedron by Minkowski sums, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2020, Volume 14, Issue 1, ISSN 1452-8630, IF 2019: 1.500
<https://doi.org/10.2298/AADM19\0414011I>
http://www.doiserbia.nb.rs/Article.aspx?ID=1452-86302000011I#.Xr7g38BS_cs

Радови у истакнутим међународним часописима (M22):

- 1 Baralić, Dj., Ivanović, J., Petrić, Z. : A simple permutoassociahedron, *Discrete mathematics*, 2019, Volume 342, Issue 12, 111591, ISSN 0012-365X, IF 2019: 0.770, <https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.07.007>
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X19302456>)

Радови у међународним часописима (M23):

- 1 Curien, P.-L., Obradović, J., Ivanović, J. : Syntactic aspects of hypergraph polytopes, *Journal of Homotopy and Related Structures*, 2019, Volume 14, Issue 1, pp. 235-279, DOI 10.1007/s40062-018-0211-9, ISSN 2193-8407, IF 2019: 0.537

Радови у националним часописима међународног значаја верификовани посебним одлукама (M24):

- 1 Petruševski, Lj., Petrović, M., Devetaković, M., Ivanović, J. : Modeling of Focal-Directorial Surfaces for Application in Architecture, *FME Transactions*, *Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu*, 2017, Volume 45, No 2, 294-300, ISSN 1451-2092

Поглавља у монографијама националног значаја (M45):

- 1 Devetaković, M., Arsić, P., Petruševski, Lj., Kijanović, J., Nikolić, I.: Istraživanja mogućih unapredjenja u obrazovanju arhitekata—integriranje elektronskog učenja i parametarskog modelovanja u nastavu urbanog dizajna, *Monografija Savremeni pristupi urbanom dizajnu za održivi turizam Srbije*, *Arhitektonski fakultet Univerziteta u Beogradu*, 2013, ISBN 978-86-7924-064-4, 270-295

Радови у зборницима радова са међународних научних скупова објављени у целини (M33):

- 1 Petruševski, Lj., Petrović, M., Devetaković, M., Ivanović, J.: Modeling of Focal-Directorial Surfaces for Application in Architecture, In *Proceedings of 5th International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2016*, Beograd, Srbija, jun 2016, ISBN 978-86-7466-614-2, pp. 278-286.
- 2 Devetaković, M., Ivanović, J., Petruševski, Lj. : Pedagogic Potential of a Parametric System based on the Box-Packing Concept, In *Proceedings of 5th International Conference for Geometry and Graphics moNGeometrija 2016*, Beograd, Srbija, jun 2016, ISBN 978-86-7466-614-2, pp.305-319.

Радови у зборницима радова са националних научних скупова објављени у целини (M63):

- 1 Petruševski, Lj.; Devetaković, M.; Kijanović, J.; Arsić, P.; Nikolić, I.; Perić, A.: Parametarsko modelovanje urbanističkih sklopova korišćenjem grafičkog

algoritamskog editora, YU Info 2011, Kopaonik, mart 2011, ISBN: 978-86-85525-08-7, str.206.

Радови у зборницима радова са међународних научних скупова објављени у апстрактну (М34):

- 1 Baralić, Dj., Ivanović, J., Petrić, Z, Telebaković, S.: Facet colouring of nestohedra, SMSCG19 Mathematical Meeting of Serbia and Montenegro 2019, Budva, Montenegro, oktobar 2019, str. 5. <https://www.mathforum.me/wp-content/uploads/2019/10/knjiga-apstrakata-SMSCG.pdf>
- 2 Devetaković, M., Petruševski, Lj., Kijanović, J.: The Box Packing – A Mathematical Concept Interpreted Architecturally, MATEP Mathematics and Architecture Conference, Pecs, Hungary, maj 2011, ISBN 978-963-7298-42-4, pp. 41.
- 3 Petruševski, Lj., Kijanović, J.: Genetic algorithms - problem solving in architecture and urbanism, PHD and DLA Symposium, Pecs, Hungary, oktobar 2011, ISBN 978-963-7298-46-2, C71.
- 4 Devetaković, M., Petruševski, Lj., Mitrović, B., Kijanović, J.: Integration of E-learning Concepts in Architectural Geometry Courses, GeoGra Symposium, Budapest, Hungary, januar 2012, <http://www.asz.yymm.hu/geogra12/en/reglist>

2. САДРЖАЈ РУКОПИСА И ПРОБЛЕМАТИКА КОЈА СЕ ОБРАЂУЈЕ

Рукопис кандидата Јелене Ивановић под називом *Кохеренција и прости политопи* садржи четири поглавља, списак литературе, биографију и додатак са софтверским решењима. Цео рукопис има 142+xviii страна, а списак литературе садржи 49 библиографских јединица. Софтверска решења су дата везано за рад у Грасхоперу, Полимејку и Јави.

У теорији категорија, кохеренција која је везана за одређени тип категорија, у најгрубљем смислу значи комутирање дијаграма састављених од канонских стрелица тих категорија. Ово комутирање може бити безусловно или условљено задатим претпоставкама. У савременом смислу, кохеренција, тачније теореме кохеренције, подразумевају постојање верног функтора из слободно генерисане категорије датог типа у категорију која омогућава проверу једнакости стрелица. Такве су најчешће категорије чије су стрелице релације или дијаграми (многострукости, кобордизми).

Резултати кохеренције су од великог значаја за општу теорију доказа. Наиме, они обезбеђују формирање задовољавајућег критеријума за једнакост извођења у одређеним дедуктивним системима и на тај начин пружају могућност дефинисања основног појма којим се теорија доказа бави.

Предмет ове докторске дисертације је проучавање тополошких доказа кохеренције и формирање нових класа политопа које у таквим доказима кохеренције могу послужити. Садржај дисертације је, дакле, у највећој мери посвећен споменутим доказима кохеренције, односно разноврсним геометријским реализацијама специфичних апстрактних политопа који су задати комбинаторно.

Прво поглавље овог текста се бави политопима, друго кохеренцијом, док је треће поглавље посвећено тополошким доказима кохеренције симетричних моноидалних категорија, тј. геометријским реализацијама специфичног апстрактног политопа који је задат комбинаторно. У четвртом поглављу су дате оцене хроматских бројева неких познатих фамилија простих политопа.

Прво поглавље, поред познатих чињеница и тврђења која се тичу политопа, садржи и нова тврђења која су од велике користи у даљем тексту. Ово поглавље

се бави политопима као геометријским и комбинаторним објектима, тј. проучава их и из угла конвексне геометрије и из угла комбинаторике и дискретне геометрије.

Друго поглавље отпочиње увођењем категоријалних појмова који су неопходни за бављење кохеренцијом као и кратким прегледом Меклејнових резултата кохеренције моноидалних и симетричних моноидалних категорија. Након тога, у наредном одељку је детаљно образложено шта тачно подразумева један тополошки доказ кохеренције одређеног типа категорија, чиме је у потпуности оправдана чињеница да једна дисертација из области теорије категорија главну улогу ипак додељује политопима. Последњи одељак реконструира Капрановљев приступ који је довео до фамилије апстрактних пермутоасоциедара, а који су касније и геометријски реализовани као фамилија политопа. Иако је реч о политопима који нису прости, њихово постојање обезбеђује тополошки доказ кохеренције симетричних моноидалних категорија. Један од главних резултата ове тезе је формирање фамилије симплицијалних комплекса, тј. класе апстрактних политопа, која се геометријски може реализовати као фамилија простих политопа. Разлика између приступа датог у овој тези који води до фамилије простих пермутоасоциедара и Капрановљевог приступа, формализована је у последњем одељку другог поглавља.

Треће поглавље почиње дефиницијом поменуте класе простих апстрактних пермутоасоциедара и доказује се да она заиста служи у доказу кохеренције којом се бави теза. Други важан резултат, дат у овом поглављу је експлицитна геометријска реализација политопа из ове фамилије. Она се добија формирањем неједнакости полупростора који задају прост n -димензионални пермутоасоциедар PA_n . Остали одељци трећег поглавља посвећени су алтернативној реализацији која користи сумирање Минковског. Наиме, водећи се Постњиковљевим представљањем нестоедара сумом одговарајућих симплекса, првобитна хипотеза је била да се прост пермутоасоциедар може дефинисати као сума пермутоедара одговарајућих димензија, или евентуално неких других нестоедара. Међутим, већ у тродимензионалном случају се показује да већина сабирака који формирају циљани политоп, не само да нису пермутоедри, већ нису ни суме симплекса. Многи чак нису ни прости политопи. Уведен је појам деформације политопа који омогућава да све поменуте сабирке дефинишемо као деформације одговарајућих нестоедара. Уз ознаку $PA_{n,c}$ за суму одговарајућег избора оваквих сабирака, доказано је да су за свако n , политопи PA_n и $PA_{n,c}$ нормално еквивалентни. Параметар $c \in (0, 1]$ обезбеђује за свако n заправо читаву колекцију простих n -пермутоасоциедара. Ова реализација се истиче као најзначајнији резултат тезе јер она нуди процедуру којом би се могли геометријски реализовати и остали чланови фамилије политопа којој припада овај пермутоасоциедар. Реч је о проширеном интервалу нестоедара, тј. класи простих политопа који настају одсецањем страна (зарубљивањем) пермутоедра и других простих политопа.

Поглавље посвећено хроматским бројевима неких значајних класа простих политопа, укључујући и прости пермутоасоциедри, према свом садржају се могло наћи и као пододељак првог поглавља али је с разлогом остављено за крај јер није у директној вези са кохеренцијом. Ово комбинаторно својство је испитивано с намером да се пронађе још нека класа простих n -политопа, која, уз n -симплексе и n -пермутоедри, има хроматски број n или $n + 1$, што би са становишта торусне топологије био значајан резултат. Наиме, сви прости политопи чији се хроматски бројеви оцењују у тези, појављују се као простори орбита неких квазиторусних многострукости. Било је природно очекивати да ће њихови хроматски бројеви бити ниски имајући у виду да је то довољан

услов за допуштање квазиторусне структуре. Међутим, у тези се показује да су хроматски бројеви испитиваних политопа значајно већи од очекиваних. Чињеница да је реч о простим политопима високих хроматских бројева који ипак допуштају квазиторусну структуру, овај резултат чини интересантним.

Најзначајнији резултати ове дисертације објављени су у [1] и [2].

3. МЕТОДЕ КОЈЕ СЕ КОРИСТЕ У ИСТРАЖИВАЊУ

Рад на овој тези захтевао је пре свега коришћење метода проистеклих из теорије категорија и теорије доказа као и оних везаних за конвексну геометрију. Методе које се стандардно користе у доказима теорема кохеренције су свођења на нормалне форме. Поред доброг познавања тих метода, основни циљ тезе је био да се све нормализације изведу што више на семантичком нивоу. То значи да се постигнутом геометријском реализацијом, у виду конвексног политопа, дате ћелијске структуре која на одређеном нивоу крије канонске стрелице датог типа категорија, а на другом основне једнакости између њих, омогућава да се закључи да *сви дијаграми комутирају* без анализе посебних случајева могућности рачвања у тим дијаграмима.

Један од приказаних начина геометријске реализације дате ћелијске структуре је био потпуно линеарно-алгебарски и дао је експлицитне неједнакости полупростора који у пресеку реализују ту структуру. Други приступ који носи пуну оригиналност је конвексно-геометријски и користи суме Минковског као једини алат који омогућава реализацију полазне ћелијске структуре.

РАДОВИ ПРОИСТЕКЛИ ИЗ ТЕЗЕ

- [1] D.J. BARALIĆ, J. IVANOVIĆ and Z. PETRIĆ, *A simple permutoassociahedron*, *Discrete Mathematics*, vol. 342 (2019), 111591
- [2] J. IVANOVIĆ, *Geometrical realisations of the simple permutoassociahedron by Minkowski sums*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, vol. 14 (2020), pp. 55-93

4. РЕЗИМЕ

Јелена Ивановић је у овом рукопису приказала неколико резултата који повезују више математичких области и веома су актуелни. Ти резултати су значајни за теорију доказа, теорију категорија, комбинаторику и конвексну геометрију. Импресивна је доза оригиналности коју је кандидаткиња унела у овај рад. Након првог читања јасно је да иза њега стоји дуготрајан истраживачки пут који није био утрт туђим радом.

Веома смо задовољни начином на који је овај текст написан. Стил је јасан и одличан педагошки приступ исказан многим примерима из нижих димензија је за сваку похвалу. Имали смо прилику да Јелену више пута слушамо на разним семинарима као и домаћим и међународним конференцијама на којима је излагала ове резултате али и неке друге који се налазе у области њених интересовања.

На основу свега наведеног и с обзиром да су испуњени сви формални услови предлажемо Наставно научног већу Математичког факултета, Универзитета у Београду да рукопис *Кохеренција и прости политопи* кандидата Јелене Ивановић прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за њену јавну одбрану.

У Београду, 7. јул 2020.

Комисија за преглед и оцену:

др Зоран Петрић, (ментор) научни саветник
Математички институт САНУ

др Александар Липковски, редовни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Раде Живаљевић, научни саветник
Математички институт САНУ