

- УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ -
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јелена С. Ивановић

КОХЕРЕНЦИЈА И ПРОСТИ ПОЛИТОПИ

докторска дисертација

Београд, 2020

- UNIVERSITY OF BELGRADE -
FACULTY OF MATHEMATICS

Jelena S. Ivanović

COHERENCE AND SIMPLE POLYTOPES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2020

МЕНТОР:

др Зоран Петрић, научни саветник
МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ САНУ

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

др Зоран Петрић, научни саветник
МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ САНУ

др Александар Липковски, редовни професор
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ, МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

др Раде Живаљевић, научни саветник
МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ САНУ

Датум одбране:

*Посвећено Тати и Мами,
у знак захвалности за њихову бескрајну посвећеност,
снажну веру, неизмеран труд
и помоћ сваке врсте, уз много личних одрицања,
читав мој живот.*

Садржај

Садржај	ix
Захвалница	xi
Кохеренција и прости политопи – сажетак	xiii
Coherence and simple polytopes – abstract	xv
Списак слика	xvii
Увод	1
1 Политопи	5
1.1 Геометријска својства политопа	5
1.1.1 Дефиниције и примери политопа	5
1.1.2 Мрежа страна политопа	10
1.1.3 Прости политопи и зарубљивање	12
1.1.4 Суме Минковског	15
1.2 Комбинаторна својства политопа	21
1.2.1 Апстрактни политопи и симплицијални комплекси	21
1.2.2 Угњежђени скупови и фамилија нестоедара	25
1.2.3 Вишеструко угњежђени скупови и уопштавање фамилије нестоедара	32
2 Кохеренција	37
2.1 Теореме кохеренције	37
2.2 Тополошки докази кохеренције	42
2.3 Варирање генератора симетричних моноидалних категорија	46
3 Прост пермутаосоциедар	53
3.1 Апстрактни пермутаосоциедар	53
3.1.1 0-стране	56
3.1.2 1-стране	57
3.1.3 2-стране	59
3.2 Геометријска реализација задавањем граничних полупростора - PA_n	62
3.3 Геометријска реализација сумама Минковског	71
3.3.1 2-пермутаосоциедар	71
3.3.2 3-пермутаосоциедар	76
3.3.3 n -пермутаосоциедри $PA_{n,c}$	88

4	Хроматски број	107
4.1	Пермутодар	108
4.2	Асоциедар	108
4.3	Прост пермутоасоциедар	111
4.4	Циклоедар	112
4.5	Звездодар	115
A	Софтверска решења	117
A.1	Грасхопер (Rhinoceros/Grasshopper)	117
A.2	Полимејк (polymake/Perl)	119
A.3	Јава (Eclipse/Java)	124
	Литература	137
	Биографија	141

Захвалница

Неизмерну захвалност дугујем свом ментору, професору Зорану Петрићу. Његови савети, сугестије, усмеравања, несебично залагање и посвећеност, непроцењиво су допринели квалитету овог рада, али и генерално финалном обликовању мог математичког погледа и мишљења. Реч је о професору који је све ове године са једнаком посвећеношћу, пажњом и стрпљењем приступао свакој мојој математичкој дилеми, питању и закључку. Посебно сам му захвална на људскости, стрпљењу, подршци, вери и храбрењу у најтежим тренуцима током доказивања главног резултата. Изузетно сам поносна на наше заједничко време и резултате, јер је оно што он поседује и несебично несвесно шири, и као математичар, и као професор, али изнад свега као човек, засигурно велики раритет који нам је свима потребан.

Драгом колеги и искреном пријатељу Ђорђу Баралићу бих се захвалила на корисним стручним саветима, али пре свега на значајном доприносу заједничком раду који је ушао у састав ове тезе.

Захваљујем се и члановима комисије, уваженим професорима Радету Живаљевићу и Александру Липковском, који су пажљиво погледали овај рукопис и својим вредним сугестијама допринели да се он употпуни и заокружи.

Професору Живаљевићу посебну захвалност дугујем и због срдечног прихватања нас логичара међу чланове КГТА семинара. Сусрети семинара су представљали дивне прилике да се са великим познаваоцима и љубитељима политопа размене нови резултати, чују драгоцене коментари и стекну нова знања.

Јелена Ивановић

Кохеренција и прости политопи —

сажетак

У теорији категорија, кохеренција која је везана за одређени тип категорија, у најгрубљем смислу значи комутирање дијаграма састављених од канонских стрелица тих категорија. Ово комутирање може бити безусловно или условљено задатим претпоставкама. У савременом смислу, кохеренција, тачније теореме кохеренције, подразумевају постојање верног фуктора из слободно генерисане категорије датог типа у категорију која омогућава проверу једнакости стрелица. Такве су најчешће категорије чије су стрелице релације или дијаграми (многострукости, кобордизми).

Резултати кохеренције су од великог значаја за општу теорију доказа. Наиме, они обезбеђују формирање задовољавајућег критеријума за једнакост извођења у одређеним дедуктивним системима и на тај начин пружају могућност дефинисања основног појма којим се теорија доказа бави.

Предмет ове докторске дисертације је проучавање тополошких доказа кохеренције и формирање нових класа политопа које у таквим доказима кохеренције могу послужити. Садржај дисертације је, дакле, у највећој мери посвећен споменутих доказима кохеренције, односно разноврсним геометријским реализацијама специфичних апстрактних политопа који су задати комбинаторно.

Наиме, раних деведесетих година, Михаил Капранов је увео фамилију ћелијских комплекса под називом пермутоасоциедри која представља „хибрид” две значајне фамилије простих политопа—фамилије асоциедара и фамилије пермутоедара. Овај хибрид је представљао прву геометријску интерпретацију удруживања комутативности и асоцијативности. Капранов је показао да је датом ћелијском структуром произвео SW -лопту чиме је добио директан тополошки доказ кохеренције у симетричним моноидалним категоријама. Убрзо након тога, Виктор Рајнер и Гинтер Циглер су ове ћелијске комплексе реализовали као фамилију конвексних политопа. Међутим, добијена фамилија није фамилија простих политопа. С друге стране, и сви асоциедри и сви пермутоедри јесу прости. Они припадају нестоедарима—широко изучаваној фамилији простих политопа, како са комбинаторне стране, тако и са стране примена у турсној топологији.

Полазиште ове тезе је да је природно пронаћи прост хибрид ове две фамилије, тј. прост пермутоасоциедар. Користећи комбинаторну процедуру сличну оној која је произвела и саме асоциедри и пермутоедри, у овој дисертацији се уводи апстрактни политоп који одговара проблему кохеренције, а који се притом може реализовати као прост политоп. Прецизније, формиране су класе n -димензионалних простих пермутоасоциедара које дају тополошки доказ симетричне моноидалне кохеренције, а затим су те класе и геометријски реализоване експлицитним задавањем неједначина полупростора у \mathbf{R}^{n+1} који дефинишу политопе

у класама. Ова n -димензионална реализација је означена са PA_n . Поред тога, у тези је понуђена и алтернативна реализација исте фамилије уз помоћ сума Минковског. Наиме, уведена је фамилија n -димензионалних политопа, означена са $PA_{n,c}$, која је добијена сумирањем одређених политопа. Политоп $PA_{n,c}$ је нормално еквивалентан политопу PA_n за свако $c \in (0, 1]$. Реч је о специфичној реализацији, по угледу на реализацију нестоедара Александра Постњиков, која подразумева да сваки сабирак, грубо речено, доприноси настајању тачно једне пљосни резултујуће суме Минковског. Другим речима, сваки сабирак доводи до зарубљивања текуће парцијалне суме одсецањем једне њене стране. Постњиков је за сабирке користио симплексе, док ова дисертација показује да је, у аналогној реализацији простог пермutoасоциедра, за одређене сабирке неопходно узети политопе који не само да нису симплекси, већ нису нужно ни прости политопи. У случају формирања фамилије $PA_{n,1}$, сабирци су дефинисани као конвексни омотачи скупова тачака у \mathbf{R}^{n+1} што је значајна предност са становишта програмирања.

Осим што представља директан тополошки доказ теореме кохеренције у симетричним моноидалним категоријама, посебан значај ове алтернативне реализације је у успостављању јасне везе између операције сумирања Минковског и операције одсецања страна пермutoедра, тј. његовог зарубљивања. Из ове везе имплицитно следи процедура за аналогну реализацију шире класе простих политопа–фамилије простих пермutoнестоедара.

На крају, у тези су дате оцене хроматских бројева простог пермutoасоциедра и неких значајних нестоедара, са циљем проучавања могуће везе ових класа политопа са торусним и квазиторусним многострукостима.

Током свих споменутих истраживања, за потребе ове дисертације је развијено неколико софтверских решења (програма и апликација) уз помоћ разноврсних програмских језика и пакета (Java, polymake/Perl, Rhinoceros/Grasshopper). Најзначајнија међу њима описана су у додатку тезе програмским кодом и одговарајућим илустративним примерима.

Кључне речи: кохеренција, симетрична моноидална категорија, комутативност, асоцијативност, геометријска реализација, прости политопи, зарубљивање.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Логика - Теорија категорија

Coherence and simple polytopes – abstract

In category theory, the term “coherence of a particular type of the category” indicates in the broadest sense that the diagrams composed of its canonical arrows commute. This commutativity must usually satisfy some additional assumptions, but it might also be unconditional. In modern categorical (or categorial) proof theory, the notion of “coherence” (or more precisely – “coherence theorems”), implies the existence of a faithful functor from a freely generated category, built out of syntactic material, into the category that offers a possibility for determining equality of arrows. The most common examples of such categories are those whose arrows represent certain relations and diagrams (manifolds, cobordisms).

Coherence results are considered to be of paramount importance within the framework of general proof theory because they provide satisfactory identity criteria for proofs in deductive systems. The solution to the problem of proof identity criteria would consequently lead to the definition of the concept of “proof”, which is the most fundamental question within the realm of general proof theory.

Bearing in mind the aforementioned, this dissertation aims to examine topological proofs of coherence theorems with the major focus on the constructions of new polytope families which could be used as topological proofs. Hence, the dissertation is predominantly dedicated to the coherence proofs mentioned above, that is — the various geometrical realisations of specific abstract polytopes that are given combinatorially.

In the early nineties, the Russian mathematician Mikhail Kapranov introduced a family of combinatorial cell-complexes named permutohedron-based-associahedra (shortened to permutoassociahedra). This family of abstract polytopes arises as a “hybrid” from two significant polytope families – permutohedra and associahedra. This hybrid represents the first geometrical interpretation of the interaction between commutativity and associativity. In his seminal work, Kapranov showed that this cell structure had been constructed as a CW -ball, which further resulted in the topological proof for the coherence of symmetrical monoidal categories. Shortly afterwards, all these CW -complexes were realised as a family of convex polytopes in the study carried out by Victor Reiner and Grunter Ziegler. However, the polytopes of this family do not appear to be simple even though associahedra and permutohedra are proved to be simple polytopes in all dimensions. More specifically, they belong to a family of simple polytopes, called nestohedra, which has been widely examined from both combinatorial and topological point of view.

Therefore, the starting point for this thesis seems to be very natural: to search for a simple hybrid of these two families (i.e. a simple permutoassociahedron), which would still be adequate for a topological proof of symmetric monoidal coherence. The initial hypothesis underlying this research is that such a polytope should exist in all dimensions. By applying a procedure similar to the one by which nestohedra is produced, the abstract polytope that corresponds to the coherence problem, and can be realised geometrically as a simple polytope,

is described. In other words, a family of simple permutoassociahedra is defined and subsequently, a topological proof of symmetric monoidal coherence is presented. More accurately, an explicit realisation of an n -dimensional simple permutoassociaheron, denoted by PA_n , is given by the systems of inequalities representing halfspaces in \mathbf{R}^{n+1} . As an alternative, a geometrical realisation of the family constructed by Minkowski sums is also offered. A family of n -dimensional simple polytopes $PA_{n,c}$ is defined as Minkowski sum of certain polytopes such that $PA_{n,c}$ is normally equivalent to PA_n , for every $c \in (0, 1]$. This specific realisation has its roots in the realisation of nestohedra, defined by Alexander Postnikov, according to which every Minkowski summand in the representation yields to the appropriate facet of the resulting sum, i.e. produces the appropriate truncation of the currently obtained partial sum. It should also be noted that each summand in Postnikov's representation of nestohedra is a simplex. On the other hand, this dissertation shows that, in the case of analogous representation of simple permutoassociahedra, both simplices and their sums cannot be taken as summands. Moreover, some of these summands are not even simple polytopes. With reference to the polytope $PA_{n,1}$, the summands are defined as convex hulls of certain points in \mathbf{R}^{n+1} , which is particularly beneficial from a computational perspective.

As a result, a clear correlation between Minkowski sums and truncations of permutohedron is established, which implicitly contributes to creating a general procedure for geometrical realisation of the analogous hybrid formed from the permutohedron and an arbitrary nestohedron (permutohedron-based-nestohedron). In such realisation, every summand produces exactly one truncation of the permutohedron, i.e. yields to the appropriate facet of the resulting Minkowski sum.

In the final part of the dissertation, in order for potential correlations between some family of simple polytopes and toric and quasitoric manifolds to be explored, the chromatic numbers of the simple permutoassociahedron and several significant nestohedra are either defined or estimated.

To address all the research questions mentioned above, several computer programmes were developed. Depending on the nature of the tasks and exercises that are solved or presented by these programmes, various software packages and programme languages were employed, e.g. Java, polymake/Perl and Rhinoceros/Grasshopper. A brief sketch of these programmes, including their source codes and adequate testing examples, can be found in the appendix.

Key words: coherence, symmetric monoidal category, commutativity, associativity, geometrical realisation, simple polytopes, truncations.

Scientific field: Mathematics

Scientific subfield: Logic - Category Theory

Списак слика

1.1	2-политоп у \mathbf{R}^2	6
1.2	2-политоп у \mathbf{R}^3	7
1.3	3-политопи у \mathbf{R}^3	7
1.4	Стандардни симплекси $\Delta_{\{1\}}, \Delta_{\{1,2\}}, \Delta_{\{1,2,3\}}$ и $\Delta_{\{1,2,3,4\}}$	8
1.5	Хасеови дијаграми шестоугла и 3-симплекса	11
1.6	Темени зарубак 3-политопа [49, Пододељак 2.1]	12
1.7	Сума Минковског шестоугла и дужи	19
1.8	Пермутоедри $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ и \mathbf{P}_4	22
1.9	Асоциедри $\mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4$ и \mathbf{K}_5	23
1.10	Геометријска реализација комплекса	25
1.11	Зарубљени 3-симплекси који нису нестоедри	29
1.12	3-нестоедар посматран локално [36, Увод]	30
1.13	Графови који, за $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, одговарају нестоедрима $\mathbf{P}_{n+1}, \mathbf{K}_{n+2},$ $\mathbf{C}y_n$ и $\mathbf{S}t_n$	31
1.14	Циклоедри $\mathbf{C}y_1, \mathbf{C}y_2$ и $\mathbf{C}y_3$	32
1.15	Звездоедри $\mathbf{S}t_1, \mathbf{S}t_2$ и $\mathbf{S}t_3$	32
1.16	Правилно означен 3-политоп проширеног интервала нестоедара	34
2.1	Визуелизација кохеренције моноидалних категорија по угледу на [33, Одељак 3]	43
2.2	2-пермутаасоциедри KP_3 и PA_2	49
2.3	3-пермутаасоциедри KP_4 [40, Пододељак 9.3] и PA_3	49
3.1	Прости пермутаасоциедри PA_1, PA_2 и PA_3	70
3.2	Правилно означавање пљосни простог 2-пермутаасоциедра	72
3.3	$\Delta_{\{1,2,3\}} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{1,2\}}$	74
3.4	Сума $\Delta_{\{1,2,3\}} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{1,2\}} + T_1T_2T_3$	74
3.5	Означавање пљосни које су суседне петоуглу $\{\{2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{3\}\}$	77
3.6	Прост 3-пермутаасоциедар	77
3.7	Дефинисање $\varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1\}\})$	79
3.8	Сума $S_0 + \text{conv}\{T_1, \dots, T_7\}$	79
3.9	Дефинисање $\varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}\})$	83
3.10	Сума $S'_0 + \text{conv}\{T_1, \dots, T_6\}$	83
3.11	Дефинисање $\varphi(\{\{1, 2\}, \{1\}\})$	85
3.12	Сума $S''_0 + \text{conv}\{T_1, \dots, T_8\}$	85
3.13	Нормални конуси и лезе у \mathbf{R}^2	90
3.14	Политопи $P_{\mathcal{B}_\beta}$ и N_β за $\beta = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}\}$	95
3.15	Сума $P_{\mathcal{B}_\beta} + N_\beta$ за $\beta = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}\}$	95
3.16	Политопи $P_{\mathcal{B}_\beta}$ и N_β за $\beta = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$	96
3.17	Сума $P_{\mathcal{B}_\beta} + N_\beta$ за $\beta = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$	96
4.1	Правилно бојење пљосни 3-асоциедра и 3-пермутаасоциедра	112

A.1	Структура и детаљ дефиниције	117
A.2	Тродимензионални модели асоциедара	118
A.3	Тродимензионални модели пермутоасоциедра	118
A.4	Тродимензионални модели нестоедара	119
A.5	JavaView визуелизација пермутоасоциедара PA_2 и M_2	124

Увод

Наслов тезе везује два појма потекла из изворно потпуно различитих математичких светова, појам кохеренције и појам политопа. Такав наслов, ма колико наизглед деловао широко постављен, ипак на најконцизнији начин каже да је овај рад посвећен улози простих политопа у теоремама кохеренције. Још прецизније речено, предмет проучавања су тополошки докази кохеренције и дефинисање нових фамилија простих политопа које у таквим доказима могу послужити.

Теза је организована у четири поглавља. У првом се бавимо политопима, у другом кохеренцијом, док је треће поглавље посвећено тополошким доказима кохеренције симетричних моноидалних категорија, тј. геометријским реализацијама специфичног апстрактног политопа који је задат комбинаторно. У четвртом поглављу дајемо оцене хроматских бројева неких познатих фамилија простих политопа.

Прво поглавље, поред познатих чињеница и тврђења која се тичу политопа, садржи и нова тврђења која су од велике користи у трећем поглављу, нарочито Пододељку 3.3.3. Бавимо се политопима и као геометријским и као комбинаторним објектима, тј. и из угла конвексне геометрије и из угла комбинаторике и дискретне геометрије.

Друго поглавље отпочиње увођењем категоријских појмова који су неопходни за наше бављење кохеренцијом и кратким прегледом Меклејнових резултата кохеренције моноидалних и симетричних моноидалних категорија. Након тога, у наредном одељку, детаљно образлажемо шта тачно подразумева један тополошки доказ кохеренције одређеног типа категорија, чиме у потпуности оправдавамо чињеницу да једна дисертација из области теорије категорија главну улогу ипак додељује политопима. Последњи одељак реконструира Капрановљев приступ који је довео до фамилије апстрактних пермутоасоциедара, а који су касније и геометријски реализовани као фамилија политопа. Иако је реч о политопима који нису прости, њихово постојање обезбеђује тополошки доказ кохеренције симетричних моноидалних категорија. Један од главних резултата ове тезе је формирање фамилије симплицијалних комплекса, тј. класе апстрактних политопа, која се геометријски може реализовати као фамилија простих политопа. Разлика између нашег приступа који води до фамилије простих пермутоасоциедара и Капрановљевог приступа, формализована је у последњем одељку другог поглавља.

У Одељку 3.1 дефинишемо поменути класу простих апстрактних пермутоасоциедара и доказујемо да она заиста служи у доказу кохеренције којом се бавимо. Други важан резултат, дат у Одељку 3.2, је експлицитна геометријска реализација формирањем неједнакости полупростора који задају политопа у класи. Ова фамилија простих пермутоасоциедара означена је са PA_n . Остали одељци трећег поглавља посвећени су алтернативној реализацији која користи сумирање

Минковског. Наиме, водећи се Постњиковљевим представљањем нестоедара сумом одговарајућих симплекса, првобитна хипотеза је била да се прост пермутоасоциедар може дефинисати као сума пермутоедара одговарајућих димензија, или евентуално неких других нестоедара. Међутим, већ у тродимензионалном случају се показује да већина сабирака који формирају циљани политоп, не само да нису пермутоедри, већ нису ни суме симплекса. Многи чак нису ни прости политопи. Уведен је појам деформације политопа (Дефиниција 3.3.1) који омогућава да све поменуте сабирке дефинишемо као деформације одговарајућих нестоедара. У Пододељку 3.3.3, суму одговарајућег избора оваквих сабирака означавамо са $PA_{n,c}$ и доказујемо да су, за свако n , политопи PA_n и $PA_{n,c}$ нормално еквивалентни. Параметром $c \in (0, 1]$ смо успели да за свако n обезбедимо заправо читаву колекцију простих n -пермутоасоциедара. Ову реализацију истичемо као најзначајнији резултат овог рада, јер она нуди процедуру којом би се могли геометријски реализовати и остали чланови фамилије политопа којој припада наш пермутоасоциедар. Реч је о проширеном интервалу нестоедара, тј. класи простих политопа који настају одсецањем страна (зарубљивањем) пермутоедра и других простих политопа. Ову процедуру имплицитно испоручују Тврђење 3.3.7, Лема 3.3.14 и Теорема 3.3.12.

Поглавље посвећено хроматским бројевима неких значајних класа простих политопа, укључујући и прости пермутоасоциедри, према свом садржају се могло наћи и као пододељак првог поглавља. Остављено је за крај јер није у директној вези са кохеренцијом. Ово комбинаторно својство смо испитивали у намери да пронађемо још неку класу простих n -политопа, која, уз n -симплексе и n -пермутоедри, има хроматски број n или $n + 1$, што би са становишта торусне топологије био значајан резултат. Наиме, сви прости политопи чије смо хроматске бројеве оцењивали, појављују се као простори орбита неких квазиторусних многострукости. Било је природно очекивати да ће њихови хроматски бројеви бити ниски имајући у виду да је то довољан услов за допуштање квазиторусне многострукости. Међутим, на наше изненађење, испоставило се да су хроматски бројеви испитиваних политопа значајно већи. Чињеница да је реч о простим политопима високих хроматских бројева који ипак допуштају квазиторусну структуру, овај резултат чини интересантним.

Најзначајнији резултати ове дисертације објављени су у [3] и [27].

Све ауторске леме, тврђења и теореме су комплетно и детаљно доказане, док су позната тврђења других аутора наведена уз реферирање на место где читалац може наћи оригиналне формулације тих тврдњи уз комплетне доказе. За неколицину таквих тврђења, понудили смо алтернативне доказе прилагођене садржају ове тезе.

Елементарни математички појмови који нису из директног домена ове дисертације (векторски (пот)простор, норма вектора, линеарна независност вектора, матрица, (хипер)раван, (отворени) полупростор, афини омотач итд.) нису експлицитно дефинисани. Подразумевано је њихово класично геометријско или алгебарско значење.

Што се тиче нотације, празан скуп је означен са \emptyset , кардиналност скупа X са $|X|$, а скуп $\{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbf{N}$, записујемо кратко $[m]$. Скуповне операције уније, пресека и разлике означене су редом симболима \cup , \cap и $-$. Релације подскуп (инклузија) и *прави* подскуп означене су редом симболима \subseteq и \subset . Ако другачије није наглашено, *упоредивост* подразумева упоредивост у односу на релацију инклузије. Ознака \mathbf{R}^n представља n -димензионални реални Еуклидски простор, $\mathbf{0}$ означава тачку $(0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$, а крајње тачке вектора стандардне базе

простора означене су са e_i , $i \in [n]$. За дуални простор векторског простора V користимо ознаку V^* , а за еуклидску норму вектора v , ознаку $\|v\|$. Ознака $\langle a, b \rangle$ је резервисана за скаларни производ два вектора $a, b \in \mathbf{R}^n$. Ако је са π означена једначина $\langle a, x \rangle = c$, тада су π^{\geq} , π^{\leq} , $\pi^>$ и $\pi^<$ ознаке неједначина које се добијају од једначине π заменом знака „ $=$ ” редом знацима „ \geq ”, „ \leq ”, „ $>$ ” и „ $<$ ”. Наравно, ако π дефинише хиперраван, тада π^{\geq} и π^{\leq} ($\pi^>$ и $\pi^<$) дефинишу одговарајуће полупросторе (отворене полупросторе). Важи и обрнуто. На пример, ако је π^{\geq} ознака неједначине $\langle a, x \rangle \geq c$, тада π означава једначину $\langle a, x \rangle = c$, што у случају када π^{\geq} дефинише полупростор значи да π дефинише граничну хиперраван тог полупростора.

На крају, теза садржи и додатак који приказује неколико занимљивих и корисних ауторских софтверских решења, која су претежно настала у раној фази истраживања. Допатак је организован у три целине у зависности од коришћеног алата. Целини која се односи на `polymake`, софтверски пакет специјализован за рад са политопима, посвећено је највише пажње. За разлику од осталих целина, поред илустративних примера који су директно служили нашем истраживању, она нуди и мали приручник који би, верујемо, почетницима био од велике помоћи.

Глава 1

Политопи

Најзначајнији резултати који проистичу из ове докторске дисертације, тичу се појма кохеренције теорије категорија, односно припадају математичкој логици. Ипак, почетак дисертације је посвећен конвексним политопима, изворно геометријском појму, јер ће управо егзистенција одређених политопа гарантовати споменуте резултате, тј. обезбедити потребне тополошке доказе теорема кохеренције.

Елементарни примери конвексних политопа, конвексни полигони и нека тродимензионална тела, препознати су и изучавани још у античко време. Први математичар који је проучавао политопе већих димензија био је Лудвиг Шлефли који је средином XIX века описао правилне четвородимензионалне политопе. Његов рад, укључујући и нотацију конвексних политопа помоћу заграда и зареза која по њему и носи назив, откривен је и систематизован тек постхумно (видети [42]). Након тога, средином XX века, најзаслужнији за даљи развој теорије правилних политопа произвољних димензија, био је Херолд Коксетер (видети [10]), чији је рад двадесет година касније, надоградио Бранко Гринбаум дајући немерљив допринос теорији конвексних политопа генерално. Гринбаумова монографија „Конвексни политопи” [24], већ педесет година је инспирација за многе велике резултате у овој области. Први математичари који су посматрали политопе из угла дискретне геометрије, били су Лудвиг Данцер и Егон Шулте. Они су, раних осамдесетих година XX века, поставили основе теорије комбинаторних објеката које данас зовемо апстрактним политопима.

Теорија конвексних политопа данас представља важну спону између геометрије, алгебре, комбинаторике, логике, топологије и других поља математике, те се широко проучава са различитих математичких становишта. У наредном поглављу излажемо основе ове теорије које су неопходне за предмет дисертације. Претежно се ослањају на споменуту монографију Гринбаума, али и на монографију Гинтера Циглера „Лекције о политопима” [49], која се сматра најпрегледнијим уводом у комбинаторну теорију политопа и као таква се користи као основни уџбеник Дискретне геометрије широм света.

1.1 Геометријска својства политопа

1.1.1 Дефиниције и примери политопа

Дефиниција 1.1.1. *Конвексни политоп* P је конвексни омотач коначног скупа

тачака $V = \{v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbf{R}^n$, тј.

$$P = \text{conv}V = \left\{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_k \mid \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ за свако } i \in [k] \right\}.$$

Конвексни политоп се може дефинисати и као ограничени пресек коначно много полупростора, тј. на начин који прописује следећа дефиниција.

Дефиниција 1.1.2. *Конвексни политоп* P је ограничен скуп решења система од $m \in \mathbf{N}$ линеарних неједначина

$$P = P(A, b) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a_i, x \rangle \geq b_i, i \in [m]\},$$

при чему је $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ матрица са врстама a_i , а $b \in \mathbf{R}^m$ вектор реалних бројева b_i . Овде ограниченост подразумева да је P ограничени подскуп простора \mathbf{R}^n , односно да постоји константа M таква да је $\|x\| \leq M$ за свако $x \in P$.

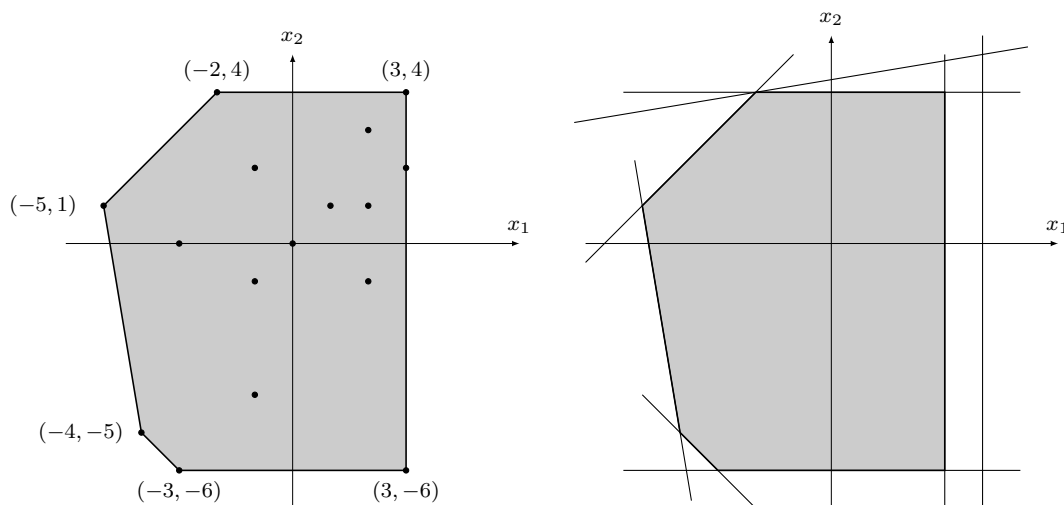
Иако су еквивалентне (видети доказ Теореме 1.1. у [49] или Теореме 3.1.1. у [2]), ове две дефиниције се алгоритамски есенцијално разликују, па ће се као такве кроз тезу користити равноправно. Како посматрамо само конвексне политопе, реч „конвексан” ће се изостављати и подразумеваће се. Колекцију свих политопа у \mathbf{R}^n означавамо са \mathcal{M}_n по узору на [7].

Дефиниција 1.1.3. *Димензија* политопа P , у ознаци $\dim(P)$, је димензија његовог афиног омотача.

Политоп $P \in \mathcal{M}_n$ димензије d зовемо још и *d-политоп*. Из претходних дефиниција следи да је $-1 \leq d \leq n$. Политоп димензије -1 је \emptyset , 0-политопи су тачке, 1-политопи су дужи, док су 2-политопи *полигони* или *многоуглови*.

Пример 1.1.1. Нека је

$$V = \{(-2, 4), (0, 0), (2, 3), (-3, -6), (-1, -4), (3, -6), (2, -1), (2, 1), (-1, 2), (3, 2), (3, 4), (-4, -5), (-1, -1), (-3, 0), (-5, 1), (1, 1)\}.$$



Слика 1.1: 2-политоп у \mathbf{R}^2

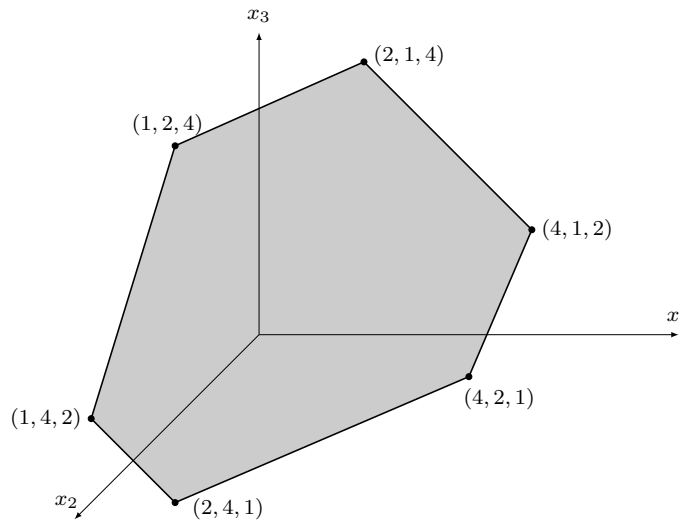
Политоп $P_1 = \text{conv}V$ је полигон приказан на Слици 1.1 лево. С друге стране, ако посматрамо скуп полупростора

$$H = \{-x_1 \geq -4, \quad x_2 \geq -6, \quad x_1 + x_2 \geq -9, \quad x_1 - 6x_2 \geq -26, \\ -x_1 \geq -3, \quad -x_2 \geq -4, \quad x_1 - x_2 \geq -6, \quad 6x_1 + x_2 \geq -29\},$$

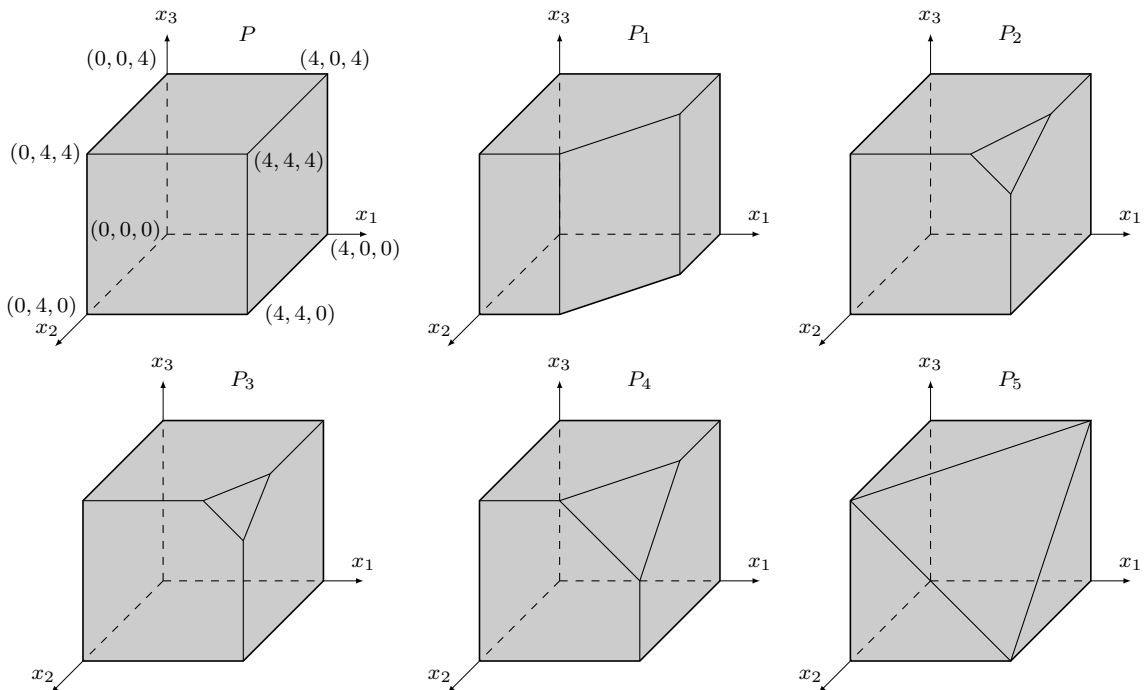
тада је политоп $\bigcap\{h \mid h \in H\}$ такође политоп P_1 (Слика 1.1 десно). Приметимо да нису сви елементи скупа H неопходни за дефинисање P_1 . Наиме,

$$P_1 = \bigcap\{h \mid h \in H - \{x_1 - 6x_2 \geq -26, -x_1 \geq -4\}\}.$$

Пример 1.1.2. Ако је $V = \{(1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 4, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1)\}$, онда је $P_2 = \text{conv}V$ је полигон приказан на Слици 1.2.



Слика 1.2: 2-политоп у \mathbb{R}^3



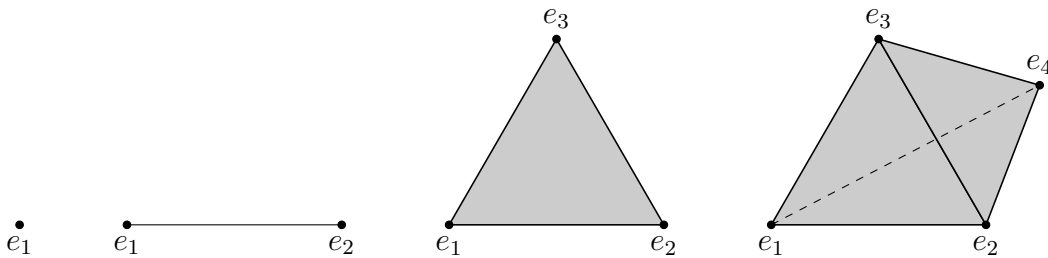
Слика 1.3: 3-политопи у \mathbb{R}^3

Пример 1.1.3. Нека је $H = \{x_i \geq 0, -x_i \geq -4 \mid i \in \{1, 2, 3\}\} \subset \mathbf{R}^3$ скуп полупростора и нека су $\pi_1^{\geq}, \pi_2^{\geq}, \pi_3^{\geq}, \pi_4^{\geq}$ и π_5^{\geq} полупростори дефинисани редом неједначинама $-x_1 - x_2 \geq -6, -2x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -18, -x_1 - x_2 - x_3 \geq -11, -x_1 - x_2 - x_3 \geq -10$ и $-x_1 - x_2 - x_3 \geq -8$. Слика 1.3 редом илуструје 3-политоп $P = \bigcap \{h \mid h \in H\}$ и 3-политопе $P_i = P \cap \pi_i^{\geq}, i \in [5]$.

Пример 1.1.4. Најједноставнији n -политоп у \mathcal{M}_n је n -симплекс—конвексни омотач произвољних $n + 1$ афино независних тачака. Директно следи да је и конвексни омотач произвољног непразног подскопа оваквих $n + 1$ тачака такође симплекс одговарајуће димензије. Ако је I произвољан непразан подскуп скупа $[n]$, тада је политоп

$$\Delta_I = \text{conv}\{e_i \mid i \in I\}$$

један $(|I| - 1)$ -симплекс. Специјално, политоп $\Delta_{[d+1]}, 0 \leq d \leq n$, се назива *стандардни d -симплекс*.



Слика 1.4: Стандардни симплекси $\Delta_{\{1\}}, \Delta_{\{1,2\}}, \Delta_{\{1,2,3\}}$ и $\Delta_{\{1,2,3,4\}}$

Пример 1.1.5. Нека је π хиперраван простора \mathbf{R}^{n+1} дефинисана једначином

$$x_1 + \dots + x_{n+1} = 3^{n+1},$$

и нека је за свако $i \in [n + 1]$, π_i^{\geq} полупростор дефинисан неједначином $x_i \geq 3$. Политоп

$$\left(\bigcap \{\pi_i^{\geq} \mid i \in [n + 1]\}\right) \cap \pi,$$

дефинисан у [15, Одељак 9], је пример n -симплекса у простору \mathbf{R}^{n+1} .

Дефиниција 1.1.4. Неједначина $\langle a, x \rangle \geq b$ је *валидна* за политоп $P \in \mathcal{M}_n$ када важи за свако $x \in P$. Када је неједначина π^{\geq} валидна за политоп P , тада је скуп $F = P \cap \pi$ *страна* политопа P .

Очигледно, ако нека неједначина дефинише полупростор и валидна је за неки политоп, онда цео политоп лежи у том полупростору и пресек политопа са граничном хиперравни тог полупростора дефинише једну страну тог политопа.

Нека су π_0 и π_{-1} редом једначине $\langle \mathbf{0}, x \rangle = 0$ и $\langle \mathbf{0}, x \rangle = -1$. Приметимо да су, за сваки политоп P , π_0^{\geq} (цео простор) и π_{-1}^{\geq} (празан скуп) валидне неједначине, па су и $P \cap \pi_0$ и $P \cap \pi_{-1}$ стране политопа P , односно и сам политоп P и \emptyset су стране политопа P . Страна F политопа P , таква да је $F \neq \emptyset$ и $F \neq P$, је његова *права* страна.

У складу са Дефиницијом 1.1.2 и Дефиницијом 1.1.4, свака страна политопа је такође политоп. Страна димензије k , назива се *k -страном*. *Темена*, *ивице* и *плосни d -политопа* су његове стране димензија редом 0, 1 и $d - 1$. Полигони носе назив према броју темена, односно ивица (четвороуглови, петоуглови и сл.). Скуп свих темена политопа P обележавамо са $\mathcal{V}(P)$, а скуп свих његових плосни са $\mathcal{F}(P)$. Унија свих плосни зове се *граница* и обележава ознаком ∂P .

Дефиниција 1.1.5. *Граф* или *1-скелет* политопа је граф чија су темена и ивице у 1-1 кореспонденцији са теменима и ивицама тог политопа уз очување релације инциденције.

Дефиниција 1.1.6. Нека је f_i број i -страна d -политопа P . Целобројни вектор $\mathbf{f}(P) = (f_0, f_1, \dots, f_{d-1})$ је f -вектор политопа P .

Пример 1.1.6. Вектор $(6, 6)$ је f -вектор шестоуглова P_1 и P_2 из Примера 1.1.1 и Примера 1.1.2. Очигледно, (k, k) је f -вектор сваког полигона са k темена. За политопа из Примера 1.1.3 важи

$$\mathbf{f}(P) = (8, 12, 6), \quad \mathbf{f}(P_1) = \mathbf{f}(P_2) = \mathbf{f}(P_3) = \mathbf{f}(P_4) = (10, 15, 7) \quad \text{и} \quad \mathbf{f}(P_5) = (7, 12, 7).$$

Дефиниција 1.1.7. *Ослонац* или *носач* политопа $P \in \mathcal{M}_n$ је хиперраван π за коју је $F = P \cap \pi$ непразна страна политопа P .

Дефиниција 1.1.8. Нека је $P = P(A, b) \in \mathcal{M}_n$ и π_i^{\geq} полупростор дефинисан i -том неједначином $\langle a_i, x \rangle \geq b_i$. Полупростор π_i^{\geq} је *гранични полупростор* политопа P када π_i дефинише неку његову пљосан. Дакле, у том случају је $-a_i$, *спољашњи вектор нормале* граничног полупростора π_i^{\geq} , и *спољашњи вектор нормале* пљосни $P \cap \pi_i$.

Тврђење 1.1.1. [24, Теорема 2.2.4] *За сваку страну политопа постоји носач који је садржи.*

Приметимо да када је $P \in \mathcal{M}_n$ n -политоп, тада је хиперраван која садржи одређену пљосан јединствена.

Пример 1.1.7. У Примеру 1.1.1, скуп $H = \{x_1 - 6x_2 \geq -26, -x_1 \geq -4\}$ је скуп граничних полупростора шестоугла P_1 . Хиперраван $x_1 - 6x_2 = -26$ јесте носач шестоугла, док хиперраван $x_1 = 4$ то није (Слика 1.1 десно).

Пример 1.1.8. У Примеру 1.1.3, скуп H , односно скупови $H \cup \{\pi_i^{\geq}\}$, $i \in [5]$, су скупови граничних полупростора политопа P , односно политопа P_i .

Следе позната тврђења која се тичу страна политопа. Изворно се појављују у [24, стр. 18-19].

Тврђење 1.1.2. [49, Тврђење 2.2 и Тврђење 2.3] *За политоп P и његову страну F важе следећи искази.*

- (i) P је конвексни омотач скупа својих темена, тј. $P = \text{conv}\mathcal{V}(P)$.
- (ii) Ако је $P = \text{conv}V$, онда је $\mathcal{V}(P) \subseteq V$.
- (iii) Пресек произвољних страна политопа P је такође страна политопа P .
- (iv) Темена политопа F су темена политопа P садржана у политопу F , тј. $\mathcal{V}(F) = F \cap \mathcal{V}(P)$.
- (v) Стране политопа F су стране политопа P садржане у политопу F .

Ако је $P = \text{conv}V$ d -симплекс, где је V скуп од $d+1$ афино независних тачака, тада је, према претходном тврђењу, $\mathcal{V}(P) = V$.

Последица 1.1.3. [24, Теорема 4.1.2] *Произвољних $k+1$ темена d -симплекса чине једну његову k -страну. И обрнуто, свака k -страна d -симплекса је k -симплекс.*

Тврђење 1.1.4. [24, Теорема 3.1.6 и Теорема 3.1.7] *Свака $(d-2)$ -страна F d -политопа је садржана у тачно две пљосни F_1 и F_2 тог политопа и важи $F = F_1 \cap F_2$. За $0 \leq h < k \leq d-1$, свака h -страна политопа је пресек бар $k-h+1$ његових k -страна које ту страну садрже.*

Последица 1.1.5. *За $0 \leq h < d-1$, свака h -страна d -политопа је пресек бар $d-h$ пљосни које је садрже. Специјално, свако теме је пресек бар d пљосни којима припада.*

Претходна тврђења пружају могућност успостављања релације инклузије на скупу свих страна једног политопа чему је у потпуности посвећен наредни одељак.

1.1.2 Мрежа страна политопа

За проучавање скупа страна политопа, потребна нам је терминологија која се тиче *уређених скупова*, тј. *уређења*. Дефинисаћемо неопходне појмове, а за више детаља о теорији уређених скупова упућујемо на [43].

Дефиниција 1.1.9. Ако је \leq релација поретка на коначном скупу A (рефлексивна, транзитивна и антисиметрична), тада уређени пар (A, \leq) представља *уређени скуп* A или *уређење* над скупом A . Елемент $a \in A$ је *минималан* ако за сваки елемент $x \in A$, $x \leq a$ повлачи $x = a$. Елемент $a \in A$ је *максималан* ако за сваки елемент $x \in A$, $a \leq x$ повлачи $x = a$. *Доња граница* скупа $B \subseteq A$ је елемент $a \in A$ такав да за сваки елемент $x \in B$ важи $a \leq x$. Слично, елемент $a \in A$ је *горња граница* скупа $B \subseteq A$ ако за сваки елемент $x \in B$ важи $x \leq a$.

Минималних и максималних елемената у једном уређењу може бити више јер међусобно не морају бити упоредиви релацијом \leq . Приметимо још да су минимални и максимални елементи скупа A редом његове доње и горње границе. Уређени скуп је *ограничен* када има јединствени минимални елемент, у ознаци $\hat{0}$, и јединствени максимални елемент, у ознаци $\hat{1}$.

Два уређења (A, \leq_A) и (B, \leq_B) су *изоморфна* када постоји бијекција $\phi : A \rightarrow B$ која чува релацију поретка, тј. $x \leq_A y$ ако и само ако $\phi(x) \leq_B \phi(y)$.

Подскуп уређеног скупа је такође уређење са индукованом релацијом поретка. *Интервал* између два елемента $x, y \in A$ уређења (A, \leq) , при чему је $x \leq y$, је уређење над скупом $[x, y] = \{a \in A \mid x \leq a \leq y\}$. Интервал је *буловско уређење* ако је за неко k тај интервал изоморфан уређењу над свим подскуповима скупа од k елемената.

За свако уређење (A, \leq) постоји њему *дуално уређење* $(A, \leq)^{op}$ над истим скупом тако да $x \leq y$ важи у $(A, \leq)^{op}$ ако и само ако $y \leq x$ важи у (A, \leq) .

Дефиниција 1.1.10. Уређење је \vee -*полумрежа* када има јединствени максимални елемент и свака два елемента имају јединствену најмању горњу границу. Уређење је \wedge -*полумрежа* када има јединствени минимални елемент и свака два елемента имају јединствену највећу доњу границу. Уређење је *мрежа* када је и \vee -полумрежа и \wedge -полумрежа.

Очигледно, уклањањем минималног (максималног) елемента из мреже настаје \vee -полумрежа (\wedge -полумрежа). Такође, (A, \leq) је \vee -полумрежа (\wedge -полумрежа) ако и само ако је $(A, \leq)^{op}$ \wedge -полумрежа (\vee -полумрежа).

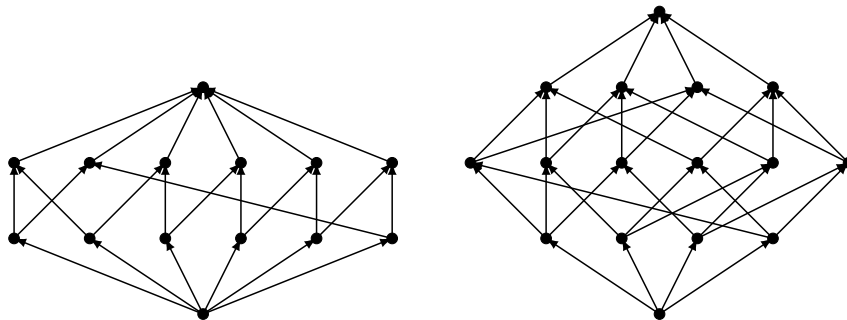
Тврђење 1.1.6. *Скуп свих страна политопа уређен релацијом инклузије је мрежа.*

Доказ: У складу са Тврђењем 1.1.4, скуп страна произвољног политопа P , уређен релацијом инклузије, чини један уређени скуп. Како он садржи празну страну као јединствени минимални елемент и P као јединствени максимални елемент, реч је о ограниченом уређењу.

Нека су F_1 и F_2 две стране политопа P . Према исказима (iii) и (v) Тврђења 1.1.2, $F_1 \cap F_2$ је страна политопа P , али и страна политопа F_1 и F_2 . Све остале стране политопа P садржане у F_1 и F_2 , садржане су и у њиховом пресеку, па је $F_1 \cap F_2$ јединствена највећа доња граница за F_1 и F_2 . Слично, њихова најмања горња граница је пресек свих оних страна политопа P које садрже и F_1 и F_2 . \square

Мрежу страна политопа P означавамо са (P, \subseteq) . Она се често шематски представља *Хасеовим дијаграмом*, оријентисаним графом чија су темена елементи мреже, тј. стране политопа. Од темена F_1 до темена F_2 постоји ивица ако и само ако је $[F_1, F_2] = \{F_1, F_2\}$.

Пример 1.1.9. Мреже страна шестоугла P_1 из Примера 1.1.1 и стандардног 3-симплекса дефинисаног у Примеру 1.1.4 илустроване су на наредној слици. Приметимо да дијаграм лево одговара и шестоуглу P_2 из Примера 1.1.2, а и сваком другом шестоуглу. Слично, дијаграм десно одговара произвољном 3-симплексу.



Слика 1.5: Хасеови дијаграми шестоугла и 3-симплекса

Уведимо релацију еквиваленције међу политопима која ће поистоветити све политопе чијим мрежама страна одговара исти Хасеов дијаграм.

Дефиниција 1.1.11. Политопи P и Q су *комбинаторно еквивалентни*, у ознаци $P \sim Q$, када су њихове мреже страна изоморфне.

Пример 1.1.10. Све тачке су комбинаторно еквивалентне; све дужи су комбинаторно еквивалентне. Два полигона су комбинаторно еквивалентна ако и само ако имају једнак број темена, па су шестоуглови P_1 (Слика 1.1) и P_2 (Слика 1.2), комбинаторно еквивалентни.

Посматрајмо 3-политопе дефинисане у Примеру 1.1.3 (Слика 1.3). Политоп P је комбинаторно еквивалентан политопу приказаном на Сlici 3.7 лево. Политопи P_2 , P_3 и P_4 су међусобно комбинаторно еквивалентни, а истој класи припада и политоп илустрован на Сlici 3.8. Приметимо да директно из дефиниција следи да је једнакост f -вектора неопходан услов за комбинаторну еквиваленцију. Да није и довољан сведочи политоп P_1 који није у истој класи са политопима P_2 , P_3 и P_4 (видети Пример 1.1.6).

Пример 1.1.11. [24, Теорема 4.1.1] Сви d -симплекси су комбинаторно еквивалентни.

Понедге се комбинаторно еквивалентни политопи називају и *изоморфним* или политопима *истог комбинаторног типа*. Више о политопима исте класе комбинаторне еквиваленције биће изложено у Пододељку 1.2.1.

Променом оријентације свих ивица Хасеовог дијаграма који одговара мрежи страна датог политопа P настаје дијаграм који одговара дуалној мрежи $(P, \subseteq)^{op}$.

Дефиниција 1.1.12. Политопи P и Q су (*комбинаторно*) *поларни* или *полар* један другоме када је мрежа $(P, \subseteq)^{op}$ изоморфна мрежи (Q, \subseteq) .

Сваки политоп има свој полар. d -симплекси су међусобно поларни. Једна од конструкција политопа који је полар задатом је изложена у [49, Одељак 2.3].

1.1.3 Прости политопи и зарубљивање

Имајући у виду Последицу 1.1.5, политопе из наслова ове дисертације дефинишемо као политопе у чијим се теменим сустиче минималан број пљосни.

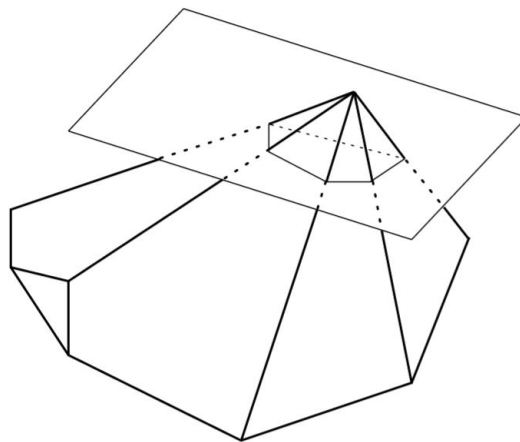
Дефиниција 1.1.13. Теме d -политопа је *просто* када постоји тачно d пљосни (или еквивалентно ивица) којима припада. Политоп је *прост* када је свако његово теме просто.

Очигледно, политоп комбинаторно еквивалентан простом политопу је такође прост. У наставку је понуђено још еквивалентних начина да се прост политоп дефинише.

Тврђење 1.1.7. [49, Тврђење 2.16] *d -политоп је прост ако и само ако је за свако $0 \leq h < d - 1$ свака његова h -страна садржана у тачно $d - h$ пљосни.*

Пример 1.1.12. Сви полигони и сви симплекси су прости политопи. Изузев политопа P_5 , сви 3-политопи на Слици 1.3 су прости. На Слици 3.7 и Слици 3.11 приказана су по два 3-политопа од којих су само политопи лево прости. Прост је и 3-политопи на Слици 2.3 десно.

Нека је $P \in \mathcal{M}_n$ и $v \in \mathcal{V}(P)$. За полупростор π^{\geq} кажемо да је *изнад* темена v када $v \in \pi^>$. Такође, кажемо да је π^{\geq} *испод* темена v када $v \notin \pi^{\geq}$.



Слика 1.6: Темени зарубак 3-политопа [49, Пододељак 2.1]

Дефиниција 1.1.14. *Темени зарубак* политопа у темену v је пресек тог политопа са граничном хиперравни полупростора који је испод v , а изнад свих осталих темена тог политопа.

Дакле, темени зарупци d -политопа су $(d - 1)$ -политопи.

Тврђење 1.1.8. [49, Тврђење 2.16] *Политоп је прост ако и само ако је темени зарубак у сваком његовом темену симплекс.*

Тврђење 1.1.9. [49, Тврђење 2.16] *Политоп P је прост ако и само ако је за сваку непразну страну F интервал $[F, \hat{1}] \subseteq (P, \subseteq)$ буловско уређење.*

Дефинишимо и политопе комбинаторно поларне простим политопима.

Дефиниција 1.1.15. Политоп је *симплицијалан* када је свака његова пљосан симплекс.

Пример 1.1.13. Поред тачака и дужи, једини политопи који су и прости и симплицијални су полигони и симплекси [8, Тврђење 1.8]. Симплицијални политопи су и *октаедар* [49, Слика на стр.15] и *икосаедар* [25, Слика на стр.7]. Наравно, политоп комбинаторно еквивалентан симплицијалном политопу је такође симплицијалан.

Као и у случају простих политопа, постоје и други еквивалентни начини да се дефинишу симплицијални политопи.

Тврђење 1.1.10. [49, Тврђење 2.16] *Ако је P d -политоп, тада су следећи искази еквивалентни.*

- (i) *P је симплицијалан политоп.*
- (ii) *Свака права страна политопа P је симплекс.*
- (iii) *Свака пљосан политопа P има тачно d темена.*
- (iv) *Свака k -страна, $0 \leq k \leq d - 1$, политопа P има тачно $k + 1$ темена.*
- (v) *За сваку праву страну F интервал $[\hat{0}, F] \subseteq (P, \subseteq)$ је буловско уређење.*

Тврђење 1.1.11. [49, Тврђење 2.16] *Политоп је симплицијалан ако и само ако је његов полар прост политоп. Политоп је прост ако и само ако је његов полар симплицијалан политоп.*

Дакле, класе симплицијалних и простих политопа су међусобно поларне и треба увек имати на уму да се свако тврђење које се односи на једну од њих може преформулисати у дуално тврђење које би важило за другу класу. Иако су, дакле, суштински равноправни, некада је лакше баратати са простим, а некада са симплицијалним политопима. Разлози због којих у тези дајемо предност простим политопима биће јасни у Поглављу 2.

Дефинишимо операцију зарубљивања политопа уз помоћ које се од простог политопа може формирати нови прост политоп.

Дефиниција 1.1.16. Ако је F права страна политопа $P \in \mathcal{M}_n$ и $\pi \succcurlyeq$ полупростор који је изнад свих оних темена политопа P која нису садржана у F , а испод свих оних која јесу садржана у F , тада политоп $P \cap \pi \succcurlyeq$ зовећемо *зарубљеним политопом*, означавамо са $\text{tr}_F P$ и кажемо да је настао *зарубљивањем политопа P одсецањем стране F* . Страна F представља *одсечену страну*, а $\pi \succcurlyeq$ и π редом *полупростор* и *хиперраван одсецања*.

Дефиниција 1.1.17. Зарубљени политоп $\text{tr}_F P$ је *паралелно зарубљен* када постоји хиперраван која дефинише страну F паралелна хиперравни одсецања. Паралелно зарубљени политоп настао је *паралелним зарубљивањем*.

Дакле, свако зарубљивање политопа одсецањем неког темена је паралелно.

Пример 1.1.14. Политопи P_i , $i \in [4]$, из Примера 1.1.3, су настали паралелним зарубљивањем политопа P (Слика 1.3). Прецизније,

$$\text{tr}_{AB}P = P \cap \pi_1^{\triangleright} \quad \text{и} \quad \text{tr}_AP = P \cap \pi_i^{\triangleright}, i \in \{2, 3, 4\},$$

за $A = (4, 4, 4)$ и $B = (4, 4, 0)$. Политоп P_5 није настао зарубљивањем политопа P . Ако је π хиперраван дефинисана једначином

$$-2x_1 - 2x_2 - x_3 = -14,$$

тада је $P \cap \pi^{\triangleright}$ зарубљени политоп настао зарубљивањем политопа P одсецањем ивице AB , али ово зарубљивање није паралелно.

Пример 1.1.15. Нека су P_1 , P_2 и P_3 политопи редом приказани лево на Слици 3.7, Слици 3.9 и Слици 3.11, и нека су Q_1 , Q_2 и Q_3 политопи приказани редом на Слици 3.8, Слици 3.10 и Слици 3.12. Тада је $Q_1 = \text{tr}_DP_1$, $Q_2 = \text{tr}_{KJ}P_2$ и $Q_3 = \text{tr}_{LJ}P_3$ и сви ови политопи су паралелно зарубљени.

Напомена 1.1.1. Посматрајмо мрежу страна политопа $\text{tr}_FP = P \cap \pi^{\triangleright}$ насталог одсецањем k -стране d -политопа P . У овом раду посматрамо искључиво зарубљивања код којих одсечене стране нису пљосни, па надаље подразумевамо да је $0 \leq k \leq d - 2$. Према Дефиницији 1.1.16 и Дефиницији 1.1.8,

$$\dim(\text{tr}_FP) = \dim(P) \quad \text{и} \quad |\mathcal{F}(\text{tr}_FP)| = |\mathcal{F}(P)| + 1,$$

при чему је сваки гранични полупростор политопа P уједно и гранични полупростор зарубљеног политопа, док „новонастала” пљосан политопа tr_FP лежи у хиперравни одсецања. Прецизније,

$$\text{ако је } \mathcal{F}(P) = \{f_i \mid i \in [m]\}, \quad \text{онда је } \mathcal{F}(\text{tr}_FP) = \{g_i \mid i \in \{0, \dots, m\}\},$$

при чему је $g_0 = P \cap \pi$, а за свако $i \in [m]$ пљосан g_i је или подударна пљосни f_i , или је зарубљени политоп настао одсецањем њене стране $f_i \cap F$ (овде се може догодити да је одсечена страна пљосан). Отуда, за сваки непразан подскуп $J \subset [m]$ важе следеће еквиваленције:

$$\bigcap \{g_j \mid j \in J\} \neq \emptyset \quad \text{ако и само ако} \quad \{f_j \mid j \in J\} \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \bigcap \{f_j \mid j \in J\} \not\subseteq F,$$

$$g_0 \cap \bigcap \{g_j \mid j \in J\} \neq \emptyset \quad \text{ако и само ако} \quad F \cap \bigcap \{f_j \mid j \in J\} \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \bigcap \{f_j \mid j \in J\} \not\subseteq F.$$

Тврђење 1.1.12. *Политопи настали зарубљивањем истог политопа одсецањем исте стране су комбинаторно еквивалентни.*

Доказ: Нека су $P_1 = P \cap \pi_1^{\triangleright}$ и $P_2 = P \cap \pi_2^{\triangleright}$ зарубљени политопи настали зарубљивањем политопа P одсецањем исте стране. Нека је $g_0^{P_1} = P \cap \pi_1$ и $g_0^{P_2} = P \cap \pi_2$, и нека су преостале пљосни зарубљених политопа, које одговарају пљоснима политопа P у складу са претходном напоменом, означене са $g_i^{P_1}$ и $g_i^{P_2}$, $i \in [m]$. У складу са Последицом 1.1.5, нека је пресликавање $\phi : (P_1, \subseteq) \rightarrow (P_2, \subseteq)$ дефинисано на следећи начин:

$$\phi\left(\bigcap \{g_j^{P_1} \mid j \in J\}\right) = \bigcap \{g_j^{P_2} \mid j \in J\} \quad \text{за сваки скуп } J \subset [m],$$

$$\phi\left(g_0^{P_1} \cap \bigcap \{g_j^{P_1} \mid j \in J\}\right) = g_0^{P_2} \cap \bigcap \{g_j^{P_2} \mid j \in J\} \quad \text{за сваки скуп } J \subset [m].$$

Према еквиваленцијама из претходне напомене, ϕ је изоморфизам између мрежа. \square

Тврђење 1.1.13. *Зарубљивањем простог политопа настаје прост политоп.*

Доказ: Нека је $\text{tr}_F P$ политоп настао зарубљивањем простог d -политопа P одсецањем k -стране F . Нека су им пљосни означене као у Напомени 1.1.1. Према Тврђењу 1.1.7, постоји скуп $I \subset [m]$ такав да је

$$F = \bigcap \{f_i \mid i \in I\} \quad \text{и} \quad 2 \leq |I| = d - k \leq d.$$

Претпоставимо да постоји теме v политопа $\text{tr}_F P$ које није просто. Како је P прост политоп, v није његово теме, тј. $v \in g_0$. Одатле, према Последици 1.1.5, постоји подскуп $J \subset [m]$, такав да је $v = g_0 \cap \bigcap \{g_j \mid j \in J\}$ и $|J| \geq d$, што заједно са другом еквиваленцијом Напомене 1.1.1 имплицира

$$G = F \cap \bigcap \{f_j \mid j \in J\} \neq \emptyset \quad \text{и} \quad \bigcap \{f_j \mid j \in J\} \not\subseteq F.$$

У складу са Тврђењем 1.1.2 (ii), G је непразна h -страна простог политопа саджана у тачно $|I \cup J|$ пљосни, односно према Тврђењу 1.1.7, у тачно $d - h \leq d$ пљосни. Како је $|I \cup J| \geq |J| \geq d$, закључујемо да је $|J| = d$ и $I \subseteq J$. Међутим, како

$$\bigcap \{f_j \mid j \in J\} \not\subseteq F \quad \text{ако и само ако} \quad I \not\subseteq J,$$

добили смо контрадикцију, па су сва темена политопа $\text{tr}_F P$ проста. \square

У наредним одељцима ће бити изложено још значајних тврђења која се тичу операције зарубљивања (простих) политопа.

1.1.4 Суме Минковског

Овај пододељак је посвећен сумама Минковског, једној од најелементарнијих операција над скуповима тачака, па и над политопима као конвексним омотачима својих темена. Сумирање Минковског је јако значајно, како генерално у конвексној геометрији, тако и конкретно у овој дисертацији јер ће управо оно послужити као алат за конструкцију одговарајуће фамилије простих политопа (Одељак 3.3). Претежно пратећи [7, Одељак 4 и Одељак 5], [49, Одељак 7.1] и [24, Одељак 15.1], излажемо познате базичне чињенице, али и нова тврђења која се тичу сума Минковског и нормалних лепеза политопа које су са овом операцијом блиско повезане. За друге операције над политопима, попут производа и повезаних сума, упућујемо на [2, Одељак 3.3].

Посматрајмо све носаче политопа P који садрже одређену страну. Према Тврђењу 1.1.1, барем један такав постоји. Скуп спољашњих нормала на све ове носаче разапиње један полиедарски конус—нормални конус политопа P у тој страни. Следи прецизнија дефиниција.

Дефиниција 1.1.18. *Функција ослонца политопа $P \in \mathcal{M}_n$ је функција*

$$s_P : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} : s_P(x) = \max_{y \in P} \langle x, y \rangle.$$

Дефиниција 1.1.19. *Нормални конус d -политопа $P \in \mathcal{M}_n$ у страни F је колекција линеарних функционала v у $(\mathbf{R}^d)^*$ који максимум на P достижу у тачкама стране F , тј.*

$$N_F(P) = \{v \in (\mathbf{R}^d)^* \mid (\forall y \in F) \langle v, y \rangle = s_P(v)\}.$$

Једнодимензионалне нормалне конусе називамо *зрацима*. Нормални конуси највеће димензије, максимални нормални конуси, одговарају теменима. Ако претпоставимо да је политоп максимално димензионалан, тада је, према Последици 1.1.5, нормални конус у некој страни разапет спољашњим нормалама на пљосни које ту страну садрже. Пресек два нормална конуса у странама F_1 и F_2 је заједничка страна тих конуса и представља нормални конус политопа у најмањој страни која садржи F_1 и F_2 .

Дефиниција 1.1.20. *Нормална лепеза $\mathcal{L}(P)$ политопа P је колекција*

$$\mathcal{L}(P) = \{N_F(P) \mid F \text{ је непразна страна од } P\}.$$

Нормална лепеза d -политопа P је *потпуна*. То значи да је унија свих њених елемената цео простор, тј.

$$\bigcup \mathcal{L}(P) = (\mathbf{R}^d)^*.$$

Посматраћемо само нормалне лепезе, па ће се реч „нормална” изостављати и подразумевати. Такође, произвољан конвексан конус димензије d писаћемо краће d -конус.

Пример 1.1.16. Лепеза дужи је скуп $\{\pi, \pi^{\geq}, \pi^{\leq}\}$, где је π хиперраван нормална на дату дуж. Слика 3.13 илуструје конструкцију лепеза полигона (троугла, четвороугла и петоугла), при чему је простор $(\mathbf{R}^2)^*$ идентификован са простором \mathbf{R}^2 .

Уведимо још једну релацију еквиваленције међу политопима.

Дефиниција 1.1.21. Политопи P и Q су *нормално еквивалентни*, у ознаци $P \simeq Q$, када су им лепезе исте, тј.

$$P \simeq Q \Leftrightarrow \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q).$$

Осим као „нормално еквивалентни” (normally equivalent у [24] и [49]), политопи са овим својством се у литератури неретко појављују и под разним другим именима: аналогни (analogous), јако изоморфни (strongly isomorphic), повезани (related) итд.

Тврђење 1.1.14. *Два политопа су нормално еквивалентна ако и само ако су им исти сви максимални нормални конуси.*

Доказ: \Rightarrow : Следи директно из Дефиниције 1.1.19.

\Leftarrow : Сваки нормални конус једног од политопа је страна неког његовог максималног нормалног конуса, па је, према претпоставци тврђења, и страна максималног нормалног конуса другог политопа, што даље, по Дефиницији 1.1.19, имплицира да је он нормални конус и другог политопа. Дакле, лепезе ових политопа су исте. \square

Тврђење 1.1.15. *Два политопа су нормално еквивалентна ако и само ако су комбинаторно еквивалентна и могу се добити један од другог паралелним транслацијама својих пљосни.*

Доказ: Без губитка општости, претпоставимо да су P и Q два максимално димензионална политопа.

\Leftarrow : Нека је $N_v(P)$ нормални конус у темену v разапет зрацима a_i , $i \in [m]$, при чему је зрак a_i спољашња нормала на пљосан f_i политопа P која садржи v . Према претпоставци тврђења, постоји изоморфизам $\phi : (P, \subseteq) \rightarrow (Q, \subseteq)$ такав да су пљосни f_i и $\phi(f_i)$ паралелне за свако $i \in [m]$. Дакле, постоји теме u политопа Q садржано у тачно m пљосни $\phi(f_i)$, при чему је нормални конус $N_u(Q)$ разапет истим зрацима као конус $N_v(P)$, тј. $N_v(P) = N_u(Q)$. Остаје да се примени Тврђење 1.1.14.

\Rightarrow : Нека је пресликавање $\phi : (P, \subseteq) \rightarrow (Q, \subseteq)$ такво да је $\phi(F^P) = F^Q$ ако и само ако је $N_{F^P}(P) = N_{F^Q}(Q)$. Према претпоставци тврђења,

$$F_1^P \subseteq F_2^P \iff N_{F_1^P}(P) \supseteq N_{F_2^P}(P) \iff N_{F_1^Q}(Q) \supseteq N_{F_2^Q}(Q) \iff F_1^Q \subseteq F_2^Q,$$

па је ϕ изоморфизам између мрежа. За свако $f \in \mathcal{F}(P)$, $N_f(P) = N_{\phi(f)}(Q)$, па су спољашње нормале на пљосни f и $\phi(f)$ заједничке, односно пљосни f и $\phi(f)$ су паралелне. \square

Пример 1.1.17. За свако $\lambda > 0$, политопи P и $\lambda P = \{\lambda x \mid x \in P\}$ су *позитивно хомотетични*. Скалирање политопа не утиче на његову лепезу, тј. $P \simeq \lambda P$.

Пример 1.1.18. Дванаестоуглови на Слици А.5 су нормално еквивалентни. Шестоуглови P_1 (Слика 1.1) и P_2 (Слика 1.2) нису нормално еквивалентни. Шестоугао P_2 је нормално еквивалентан шестоуглу приказаном на Слици 1.7 лево.

Вратимо се још једном на Пример 1.1.3, Пример 1.1.10 и Пример 1.1.14 (Слика 1.3). Међу комбинаторно еквивалентним политопима P_2 , P_3 и P_4 , добијеним зарубљивањем политопа P одсецањем истог темена, нормално еквивалентни су само P_3 и P_4 . Лепеза политопа P_2 се од лепезе политопа P_3 и P_4 разликује за нормалне конусе у странама троугаоне пљосни. У истој класи комбинаторне еквиваленције је и политоп са Слике 3.8, а није нормално еквивалентан ниједном од споменутих политопа. Слично, P и њему комбинаторно еквивалентан политоп са Слике 3.7 лево, такође нису у истој класи нормалне еквиваленције.

Пример нормално еквивалентних политопа су и политопи приказани на Слици А.2 и Слици А.3. Нормално еквивалентна су и свака два комбинаторно еквивалентна политопа са Слике А.4.

Напомена 1.1.2. Ако је $P \in \mathcal{M}_n$ пресек m граничних полупростора

$$\langle a_i, x \rangle \geq b_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

онда се, у складу са Напоменом 1.1.1, политоп $\text{tr}_F P = P \cap \pi^{\geq}$ може задати пресеком $m + 1$ граничних полупростора

$$\langle a_i, x \rangle \geq b_i, \quad 0 \leq i \leq m,$$

при чему неједначина $\langle a_0, x \rangle \geq b_0$ дефинише полупростор одсецања π^{\geq} .

Према претходном тврђењу, за сваки политоп Q нормално еквивалентан $\text{tr}_F P$ постоји вектор $c \in \mathbf{R}^{m+1}$ реалних бројева c_i такав да је Q пресек $m + 1$ граничних полупростора

$$\langle a_i, x \rangle \geq c_i, \quad 0 \leq i \leq m.$$

Дакле, ако је f пљосан политопа Q која лежи у хиперравни $\langle a_0, x \rangle = c_0$ паралелној π , онда постоји бијекција

$$\mu : \mathcal{F}(Q) - \{f\} \rightarrow \mathcal{F}(P)$$

која сваку пљосан пресликава у њој паралелну. За пљосни $f_P \in \mathcal{F}(P)$ и $f_Q \in \mathcal{F}(Q)$ кажемо да су *међусобно одговарајуће* када је $\mu(f_P) = f_Q$. Такође, за f кажемо да је *новонастала* пљосан политопа Q .

Лема 1.1.16. Нека је $\text{tr}_F P = P \cap \pi^{\geq}$ политоп настао зарубљивањем политопа $P \in \mathcal{M}_n$. Нека је $\{w_i \mid i \in [k]\}$ скуп темена политопа P која не припадају F , а суседна су датом темену $u \in F$. За свако $i \in [k]$, нека је $E_i = \overline{uw_i}$ и $v_i = E_i \cap \pi$. Унија нормалних конуса политопа $\text{tr}_F P$ у теменима која припадају хиперравни одсецања, једнака је унији нормалних конуса политопа P у теменима која припадају F . При том, зарубљивање је паралелно ако и само ако је

$$N_u(P) = \bigcup_{i \in [k]} N_{v_i}(\text{tr}_F P).$$

Доказ: Без губитка општости претпоставимо да је $\dim(P) = n$. Према Дефиницији 1.1.16, $N_v(\text{tr}_F P) = N_v(P)$ за свако теме v заједничко за оба политопа, па први део тврђења следи из потпуности њихових лепеза. Нека је a_0 спољашња нормала хиперравни одсецања π и i произвољни елемент скупа $[k]$. За сваки разапињући зрак $a \neq a_0$ конуса $N_{v_i}(\text{tr}_F P)$, постоји пљосан политоп P која садржи E_i и за коју је a спољашња нормала, па је отуда, зрак a садржан у нормалном конусу $N_{E_i}(P)$, а тиме и у нормалном конусу $N_u(P)$. Зарубљивање је паралелно ако и само ако постоји хиперраван паралелна π која дефинише F , што значи ако и само ако функционал a_0 достиже максимум на P у F , тј. $a_0 \in N_F(P)$. Како је нормални конус $N_F(P)$ заједничка страна свих нормалних конуса политопа P у теменима стране F , зрак a_0 је садржан у сваком од њих. Дакле, зарубљивање је паралелно ако и само ако $a_0 \in N_u(P)$, односно ако и само ако сваки разапињући зрак конуса $N_{v_i}(\text{tr}_F P)$ припада конусу $N_u(P)$, тј. ако и само ако је $N_{v_i}(\text{tr}_F P) \subseteq N_u(P)$. \square

Дефиниција 1.1.22. Нека су $A, B \subseteq \mathbf{R}^n$. Сума (Минковског) скупова A и B је скуп

$$A + B = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B\}.$$

Скупови A и B се називају *сабирцима* суме Минковског $A + B$.

Имајући у виду Дефиницију 1.1.1, сума Минковског два политопа је такође политоп, те се ова операција користи као класично геометријско конструктивно средство помоћу којег се од датих политопа стварају нови.

Тврђење 1.1.17. [7, Лема 1.4] Сума Минковског политопа $P_1 = \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$ и $P_2 = \text{conv}\{w_1, \dots, w_l\}$ је политоп

$$P_1 + P_2 = \text{conv}\{v_1 + w_1, \dots, v_i + w_j, \dots, v_k + w_l\}.$$

На основу исказа (i) и (ii) Тврђења 1.1.2, лако се да закључити да је довољно сумирати само темена, тј.

$$P_1 + P_2 = \text{conv}\{v + w \mid v \in \mathcal{V}(P_1), w \in \mathcal{V}(P_2)\}.$$

Сумирање Минковског је комутативна и асоцијативна операција на скупу \mathcal{M}_n , па је $(\mathcal{M}_n, +)$ комутативни моноид чији је неутрални елемент тачка $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$. Приметимо још да је за сваку тачку $A \in \mathbf{R}^n$, $A \neq \mathbf{0}$, и сваки политоп $P \in \mathcal{M}_n$, сума $P + A$ translација политопа P . У случају када је P тачка и T_i , $i \in \mathbf{N}$, низ тачака, тачку $P + T_i$ ћемо означавати краће P_i .

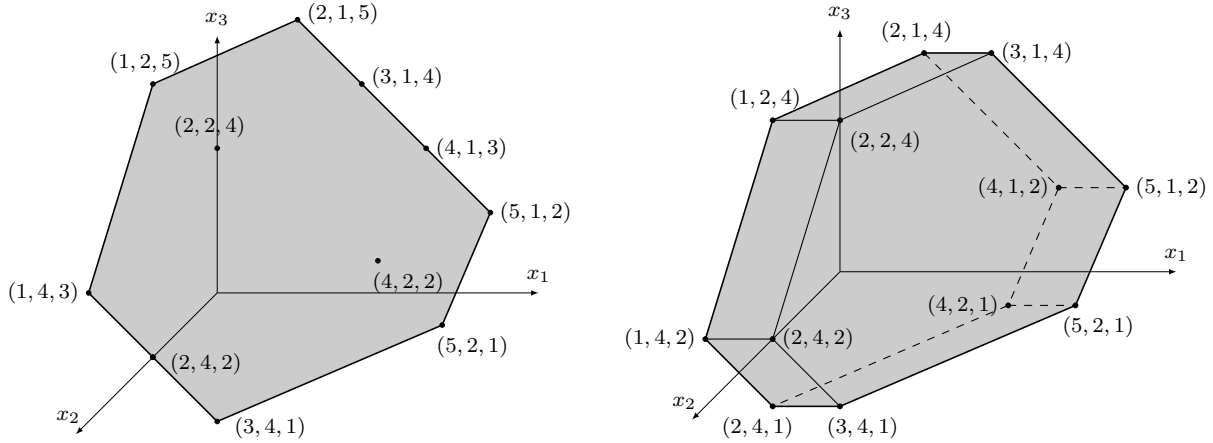
Пример 1.1.19. Нека је P_2 шестоугао из Примера 1.1.2 (Слика 1.2), и нека су $L_1 = \text{conv}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ и $L_2 = \{(1, 0, 0), (0, 0, 0)\}$ две дужи у \mathbf{R}^3 . Сума

$$P_2 + L_1 = \text{conv}\{(2, 2, 4), (2, 4, 2), (3, 1, 4), (3, 4, 1), (5, 1, 2), (5, 2, 1), (1, 2, 5), (1, 4, 3), (2, 1, 5), (4, 1, 3), (4, 2, 2)\}$$

је шестоугао приказан на Слици 1.7 лево, док је сума

$$P_2 + L_2 = \text{conv}\{(2, 2, 4), (2, 4, 2), (3, 1, 4), (3, 4, 1), (5, 1, 2), (5, 2, 1), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (4, 1, 2), (4, 1, 2), (4, 2, 1)\}$$

3-политоп приказан на Слици 1.7 десно.



Слика 1.7: Сума Минковског шестоугла и дужи

Пример 1.1.20. Посматрајмо суму $\Delta_{\{1,2,3\}} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{1,2\}}$ симплекса у \mathbf{R}^3 . Како је редослед сабирака ирелевантан, сумирајмо најпре 0-димензионалне сабирке:

$$\Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} = (1, 1, 1).$$

Даље, парцијална сума $(1, 1, 1) + \Delta_{\{1,2,3\}}$ је транслација симплекса $\Delta_{\{1,2,3\}}$ -троугао чија су темена $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ и $(1, 1, 2)$. На крају, додавањем и последњег сабирка, дужи $\Delta_{\{1,2\}}$, добијамо коначну суму

$$\text{conv}\{(3, 1, 1), (2, 2, 1), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2)\}.$$

Тачка $(2, 2, 1)$ је средиште дужи чији су крајеви тачке $(3, 1, 1)$ и $(1, 3, 1)$, па је коначна сума четвороугао са теменима $(3, 1, 1)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 1, 2)$ и $(1, 2, 2)$ (четвороугао $ABCD$ на Слици 3.3).

Треба ипак имати на уму да сума простих политопа најчешће није прост политоп. Иако је сумирање Минковског веома једноставна геометријска операција, збир понекад није очигледан и интуитивно предвидив, посебно када су сабирци политопи међусобно различитих димензија са много темена.

Тврђење 1.1.18. Нека су $P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n$.

- (i) Ако је $P_1 = P_2$, до на транслацију, онда је $P + P_1 = P + P_2$, до на транслацију, за сваки политоп $P \in \mathcal{M}_n$.
- (ii) $\dim(P_1 + P_2) \geq \max\{\dim(P_1), \dim(P_2)\}$.

Доказ: Према претпоставци, постоји тачка $A \in \mathbf{R}^n$ таква да је $P_2 = P_1 + A$, а како је сумирање асоцијативно важи

$$(P + P_1) + A = P + (P_1 + A) = P + P_2.$$

Ако је $k_1 = |\mathcal{V}(P_1)|$ и $k_2 = |\mathcal{V}(P_2)|$, тада је сума $P_1 + P_2$ конвексни омотач свих темена одређених k_2 транслација политопа P_1 , односно одређених k_1 транслација политопа P_2 , па димензија суме не може бити мања од димензија сабирака. \square

Тврђење 1.1.19. Ако је $\lambda \in \mathbf{N}$ и $P \in \mathcal{M}_n$, тада је $\underbrace{P + \dots + P}_{\lambda} = \lambda P$.

Доказ: Покажимо да тврђење важи индукцијом по λ . Случај $\lambda = 1$ је тривијалан, па претпоставимо да тврђење важи за произвољно $\lambda \in \mathbf{N}$. На основу индуктивне хипотезе и Тврђења 1.1.17 имамо

$$\underbrace{P + \dots + P}_{\lambda+1} = \lambda P + P = \operatorname{conv}\{\lambda x_1 + x_2 \mid x_1, x_2 \in \mathcal{V}(P)\} \supseteq \operatorname{conv}\{\lambda x + x \mid x \in \mathcal{V}(P)\}.$$

Приметимо да за свака два различита темена x_1 и x_2 политопа P важи

$$\lambda x_1 + x_2 = \frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda+1}x_1 + \frac{\lambda+1}{\lambda+1}x_2 = \frac{\lambda}{\lambda+1}(\lambda x_1 + x_1) + \frac{1}{\lambda+1}(\lambda x_2 + x_2),$$

а како је

$$0 < \frac{\lambda}{\lambda+1}, \frac{1}{\lambda+1} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{\lambda}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+1} = 1,$$

тачка $\lambda x_1 + x_2$ припада дужи чији су крајеви тачке $\lambda x_1 + x_1$ и $\lambda x_2 + x_2$. Дакле,

$$\lambda x_1 + x_2 \in \operatorname{conv}\{\lambda x + x \mid x \in \mathcal{V}(P)\},$$

па можемо закључити

$$\underbrace{P + \dots + P}_{\lambda+1} = \operatorname{conv}\{\lambda x + x \mid x \in \mathcal{V}(P)\} = (\lambda+1)P.$$

□

У \mathcal{M}_n важи и општије тврђење (видети [24, Одељак 15.1]). Наиме, ако је $\lambda P = \operatorname{conv}\{\lambda x \mid x \in P\}$ за свако $\lambda \in \mathbf{R}$, тада је

$$(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P, \quad \text{за све } \lambda, \mu \in \mathbf{R} \text{ такве да је } \lambda\mu \geq 0.$$

Такође, јасно је да сваки политоп има своју *тривијалну декомпозицију*, тј. за свако $0 \leq \lambda \leq 1$ и сваки политоп P важи $P = \lambda P + (1 - \lambda)P$. Политоп P има *нетривијалну декомпозицију* ако се може представити као сума политопа од којих барем један није позитивно хомотетичан политопу P (видети Пример 1.1.17).

Тврђење 1.1.20. [24, Поглавље 15.1, стр. 321] *Сваки прост политоп, изузев симплекса, има своју нетривијалну декомпозицију.*

Следи увођење појмова који ће помоћи при успостављању везе између сумирања и зарубљивања политопа. Наиме, поставља се питање какав политоп треба сабрати са датим политопом тако да њихова сума буде нормално еквивалентна политопу насталом зарубљивањем датог политопа одсецањем задате стране. Један од одговора на ово питање излажемо у Пододељку 3.3.3.

Дефиниција 1.1.23. Политоп P_2 *зарубљује* политоп P_1 када постоји зарубљени политоп $\operatorname{tr}_F P_1$ такав да важи

$$P_1 + P_2 \simeq \operatorname{tr}_F P_1.$$

Дефиниција 1.1.24. Индексирани скуп политопа $\{P_i\}_{i \in [m]}$ *зарубљује* политоп S_0 , када за свако $i \in [m]$ политоп P_i зарубљује политоп S_{i-1} , при чему је $S_i = S_{i-1} + P_i$, $i \in [m]$.

1.2 Комбинаторна својства политопа

Надаље ћемо политопе најчешће посматрати ван оквира геометријских дефиниција датих на почетку овог поглавља. Наиме, у претходном пододељку уведене су две релације међу политопима—релација комбинаторне еквиваленције која поистовећује политопе истих мрежа страна и релација нормалне еквиваленције која поистовећује политопе истих лепеза (видети Тврђење 1.1.15).

У овом одељку политопима приступамо искључиво са комбинаторне тачке гледишта, тј. поистовећујемо политопе истих мрежа страна чиме занемарујемо многа њихова геометријска својства (нормале на пљосни, углове, дужине ивица, волумен и сл.). На тај начин, политоп излази из свог оригиналног геометријског оквира и постаје један комбинаторни објекат.

1.2.1 Апстрактни политопи и симплицијални комплекси

Поставља се питање да ли за мрежу која је задата дијаграмом или графом, или на неки други комбинаторни начин, постоји класично геометријски дефинисан политоп чија је мрежа страна изоморфна задатој. Ако такав политоп постоји, онда та мрежа дефинише читаву једну класу комбинаторне еквиваленције, односно један *апстрактни* или *комбинаторни* политоп. Тако, према Примеру 1.1.11, сви d -симплекси представљају један апстрактни d -симплекс Δ^d . Слично, према Тврђењу 1.1.12, сви политопи настали зарубљивањем истог политопа одсецањем исте стране представљају један апстрактни политоп. У Поглављу 2 ћемо видети да је споменуто питање, у случају одређених апстрактних политопа, од суштинске важности за предмет овог рада.

Следе описи две изузетно значајне фамилије апстрактних политопа—*пермутоедара* ([47], [9]) и *асоциедара* ([44], [31], [45], [32],[39]). Реч је о важним простим политопима који су предмет непрестаног проучавања геометрије, комбинаторике, алгебре, логике и топологије. Пермутоедар се у конвексној геометрији истраживао још почетком XX века, док се асоциедар први пут појавио 1951. године у докторској дисертацији Дова Тамарија [46]. Асоциедар се још назива и *Сташевљевићевим политопом* по резултату Џима Сташева из 1963. године [44], о чему ће бити више речи у Одељку 2.1.

Нека је $A \in \mathbf{R}^n$ тачка чије су све координате међусобно различите. Политоп чија су темена све пермутације координата тачке A назива се (*геометријски*) *пермутоедар*. Прецизније, тачка $A = (a_1, \dots, a_n)$, таква да је $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, дефинише $(n - 1)$ -пермутоедар

$$P_n(A) = \text{conv}\{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n) \mid \sigma \in \Sigma_n\},$$

где је Σ_n група пермутација од n елемената. Очигледно,

$$|\mathcal{V}(P_n(A))| = n!.$$

Теорема 1.2.1. [8, Теорема 1.5.7]

(i) Свака пљосан пермутоедра $P_n(A)$ је његов пресек са хиперравни

$$\pi_A = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i \in A} x_i = a_1 + a_2 + \dots + a_{|A|} \right\},$$

за неки непразан скуп $A \subset [n]$. И обрнуто, за сваки непразан скуп $A \subset [n]$, хиперраван π_A дефинише пљосан пермутоедра.

- (ii) Два темена пермутоедра су повезана ивицом ако и само ако се могу добити једно од другог тачно једном транспозицијом суседних координата.
- (iii) k -стране пермутоедра $P_n(A)$ су у 1-1 кореспонденцији са уређеним партицијама скупа $[n]$ од $n - k$ непразних делова. Страна F_1 је садржана у страни F_2 када је партиција која одговара F_1 профиљеће партиције која одговара F_2 .

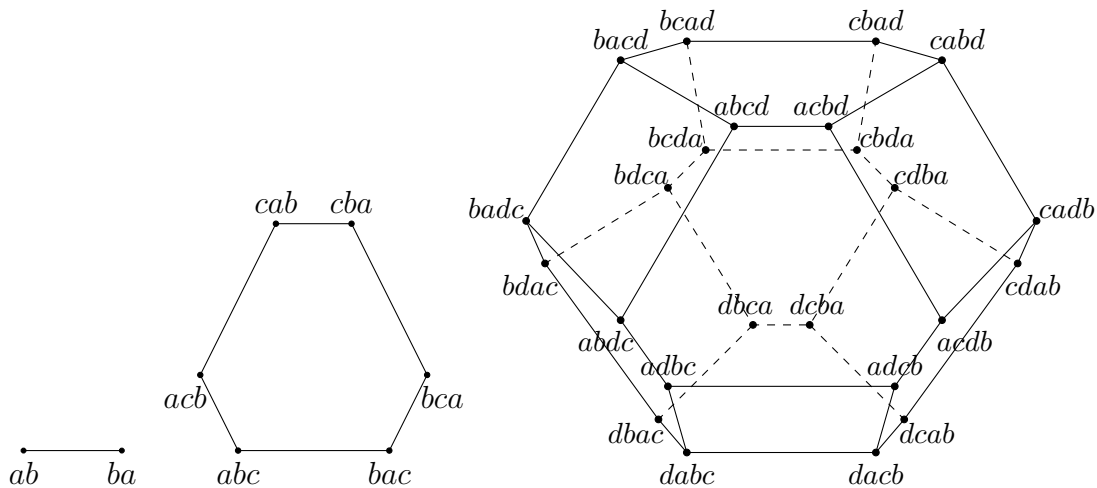
Дакле, независно од избора тачке A , истодимензионални пермутоедри су комбинаторно еквивалентни, а према Тврђењу 1.1.15 и нормално еквивалентни. Сваки политоп комбинаторно еквивалентан пермутоедру $P_n(A)$ је (апстрактни) пермутоедар у ознаци \mathbf{P}_n . На пример, 2-пермутоедар $P_3(1, 2, 4)$ је шестоугао P_2 дефинисан у Примеру 1.1.2 (Слика 1.2), па је сваки шестоугао 2-пермутоедар.

Пример 1.2.1. [15, Одељак 9] Нека је π хиперраван простора \mathbf{R}^{n+1} дефинисана једначином $x_1 + \dots + x_{n+1} = 3^{n+1}$, и нека је за сваки непразан подскуп B скупа $[n + 1]$, π_B^{\geq} полупростор дефинисан неједначином $\sum_{i \in B} x_i \geq 3^{|B|}$. Политоп

$$\left(\bigcap \{ \pi_B^{\geq} \mid B \subset [n + 1] \} \right) \cap \pi$$

је n -пермутоедар у простору \mathbf{R}^{n+1} настао sukcesивним зарубљивањем симплекса из Примера 1.1.5.

Према претходној теорему, темена пермутоедра \mathbf{P}_n се могу идентификовати са речима састављеним од свих пермутација произвољних n различитих слова, при чему су два темена суседна ако и само ако се њима одговарајуће речи могу добити једна од друге једном транспозицијом суседних слова.

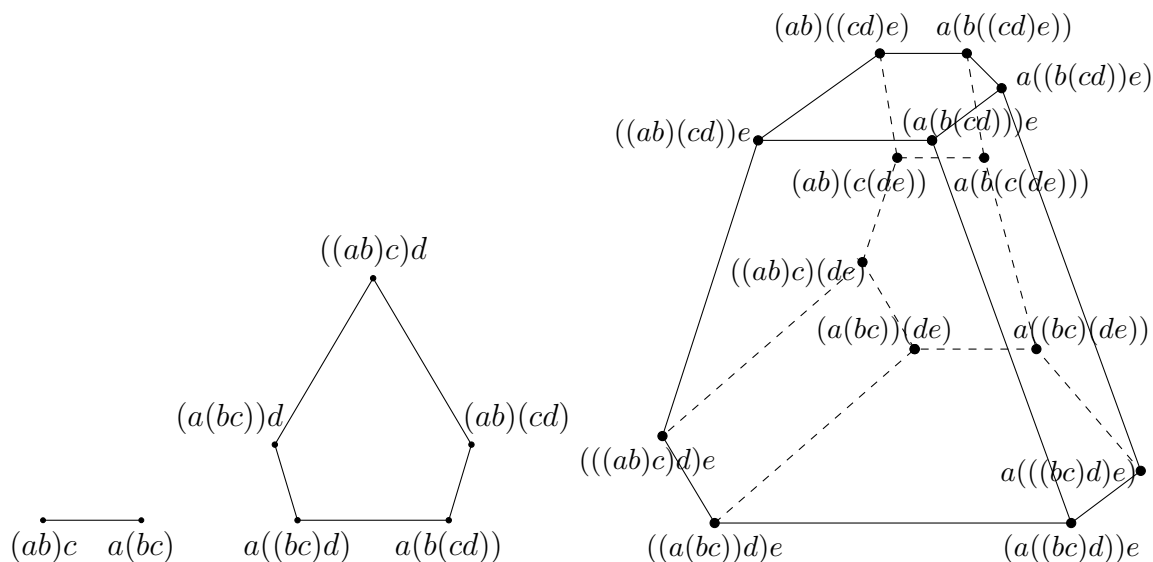


Слика 1.8: Пермутоедри \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 и \mathbf{P}_4

Асоциедар \mathbf{K}_n је $(n - 2)$ -политоп чија се темена могу идентификовати са правилно и потпуно заграђеним речима састављеним од произвољних n слова, при чему су два темена суседна ако и само ако се њима одговарајуће речи могу добити једна од друге преасоциравањем једног пара заграда. Дакле, укупан број темена асоциедра \mathbf{K}_n је Каталанов број c_{n-1} , тј.

$$|\mathcal{V}(\mathbf{K}_n)| = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} .$$

Генерално, k -стране овог политопа су у бијекцији са речима састављеним од n различитих слова које су правилно заграђене $n - k - 1$ паром заграда. Темена припадају истој k -страни ако и само ако се брисањем неких k парова заграда у свакој од речи које тим теменима одговарају добија идентично заграђена реч $n - k - 1$ паром заграда.



Слика 1.9: Асоциедри K_3 , K_4 и K_5

Претходне слике илуструју пермутоедре и асоциедре нижих димензија. Независно од димензије, обе фамилије политопа су прости политопи и могу се добити sukcesивним одсецањем страна истодимензионалног симплекса, о чему ће бити више речи у наредним одељцима.

За рад са апстрактним политопима, неопходна нам је теорија која се тиче *коначних апстрактних симплицијалних комплекса*. У делу који следи, излажемо део те теорије претежно се ослањајући на [6].

Дефиниција 1.2.1. *Апстрактни симплицијални комплекс* K на скупу V је колекција коначних подскупова скупа V таква да за сваки елемент $v \in V$, $\{v\} \in K$. Уз то, ако $\sigma \in K$ и $\tau \subseteq \sigma$, онда $\tau \in K$. Апстрактни симплицијални комплекс је *коначан* када је број његових елемената коначан, иначе је *бесконачан*. Елементи апстрактног симплицијалног комплекса се називају (*апстрактним*) *симплексима*. Симплекс $\tau \in K$ је *страна* симплекса $\sigma \in K$ када је $\tau \subseteq \sigma$. Симплекс $\sigma \in K$ је *максималан* када није страна ниједног другог симплекса из K .

Напомена 1.2.1. У Одељку 2.1 ће бити речи о *ћелијским комплексима* чија би формална дефиниција захтевала увођење разних детаља који суштински нису битни за ову тезу и само би је непотребно оптеретили. Задовољићемо се са тим да на ћелијске комплексе гледамо као на својеврсно уопштење апстрактних симплицијалних комплекса. За детаље упућујемо на [26, Уводно поглавље, Одељак 2.1, Додатак]. Ми ћемо најчешће баратати коначним апстрактним симплицијалним комплексима, па ћемо их надаље звати кратко *комплексима*.

Дефиниција 1.2.2. *Линк* симплекса σ комплекса K је скуп

$$K^\sigma = \{\tau \mid \sigma \cup \tau \in K, \sigma \cap \tau = \emptyset\}.$$

Комплекс који је подскуп комплекса K је *поткомплекс* комплекса K . Дакле, за свако $\sigma \in K$, линк K^σ је један поткомплекс комплекса K .

Дефиниција 1.2.3. *Димензија* комплекса K је

$$\dim(K) = \max_{\sigma \in K} \{\dim(\sigma)\},$$

при чему је $\dim(\sigma)$ димензија симплекса σ и износи $|\sigma| - 1$. d -*комплекс* је комплекс димензије d .

Напомена 1.2.2. Ако су V_1, \dots, V_m максимални симплекси комплекса K , тада су они неупоредиви коначни скупови и

$$K = \mathcal{P}(V_1) \cup \dots \cup \mathcal{P}(V_m).$$

Према Дефиницији 1.2.1, комплекс K уређен релацијом подскуп представља једно уређење. И више, како $\emptyset \in K$, и како за свака два симплекса $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ постоји највећа доња граница $\sigma_1 \cap \sigma_2$ у K , (K, \subseteq) је \wedge -полумрежа, тј. (K, \supseteq) је \vee -полумрежа.

Дефиниција 1.2.4. Прост политоп P (*геометријски*) *реализује* комплекс K када је \vee -полумрежа (K, \supseteq) изоморфна \vee -полумрежи добијеној од (P, \subseteq) уклањањем празне стране. Тада кажемо још и да је P (*геометријска*) *реализација* комплекса K .

Тврђење 1.2.2. Два политопа реализују исти комплекс ако и само ако су комбинаторно еквивалентна.

Доказ: Следи директно из Дефиниције 1.1.11 и Дефиниције 1.2.4. \square

Напомена 1.2.3. У литератури се најчешће геометријска реализација комплекса дефинише општије у смислу да није неопходно да постоји политоп који га реализује (видети [2, Одељак 2.1]). За нас такве реализације нису од значаја и под геометријском реализацијом комплекса подразумевамо искључиво реализацију политопом. У складу са тим, постоје комплекси који немају геометријску реализацију. Пример таквог комплекса је комплекс $\{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\diamondsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit\}\}$ на скупу $\{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$ за који не постоји политоп који га реализује.

Пример 1.2.2. Нека је $V = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit, \star\}$ и нека је

$$K = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\diamondsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit\}, \{\star\}, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \star\}, \{\diamondsuit, \clubsuit\}, \{\diamondsuit, \star\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\spadesuit, \star\}, \{\clubsuit, \star\}, \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \diamondsuit, \star\}, \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit, \star\}, \{\diamondsuit, \clubsuit, \star\}, \{\spadesuit, \clubsuit, \star\}\}.$$

У складу са Дефиницијом 1.2.1 и Дефиницијом 1.2.3, K је 2-комплекс на V . Следећи скупови су примери његових поткомплекса:

$$K^{\{\heartsuit\}} = \{\emptyset, \{\diamondsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit\}, \{\star\}, \{\diamondsuit, \clubsuit\}, \{\diamondsuit, \star\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\spadesuit, \star\}\},$$

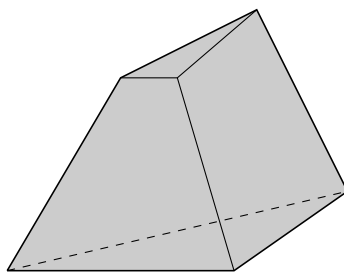
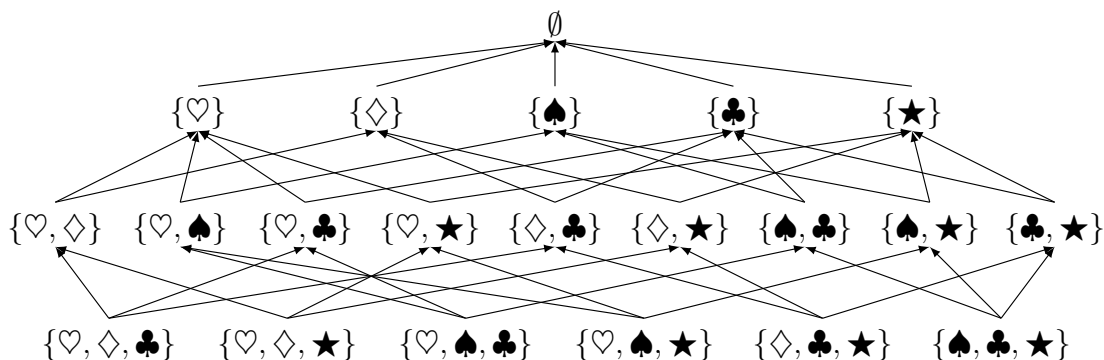
$$K^{\{\clubsuit\}} = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\diamondsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\star\}, \{\heartsuit, \diamondsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \star\}, \{\spadesuit, \star\}\},$$

$$K^{\{\spadesuit\}} = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\clubsuit\}, \{\star\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \star\}, \{\clubsuit, \star\}\},$$

$$K^{\{\spadesuit, \clubsuit\}} = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\star\}\},$$

$$K^{\{\diamondsuit, \clubsuit, \star\}} = \{\emptyset\}.$$

Према Тврђењу 1.2.2, Примеру 1.1.11 и Тврђењу 1.1.12, сваки зарубљени политоп добијен одсецањем произвољног темена неког 3-симплекса реализује K .



Слика 1.10: Геометријска реализација комплекса

Ако бисмо у претходном примеру све пљосни политопа означили елементима комплекса који им одговарају у изоморфизму између одговарајућих полумрежа (једноелементним подскуповима скупа V), добили бисмо јасну илустрацију како се полазећи од задатог простог политопа може конструисати комплекс који му одговара, тј. комплекс чија је геометријска реализација тај политоп. Према Последици 1.1.5, свака се непразна страна политопа може представити скупом пљосни које је садрже, па је, у складу са Дефиницијом 1.2.1 и Дефиницијом 1.2.4, колекција

$$K_P = \{G' \mid G \text{ је непразна страна простог политопа } P\},$$

при чему је $G' = \{F \in \mathcal{F}(P) \mid G \subseteq F\}$, комплекс на скупу $\mathcal{F}(P)$ чија је геометријска реализација политоп P .

Генерално, ако прост политоп P реализује комплекс K , онда, у контраваријантном изоморфизму између одговарајућих полумрежа, страни P одговара \emptyset , пљоснима одговарају једноелементни симплекси, а сваком темену одговара максимални симплекс који је унија једноелементних симплекса који одговарају пљоснима које се у том темену сустичу. Елементе комплекса који одговарају k -странама политопа зовемо k -ћелијама.

Остатак овог одељка је посвећен комплексима чије су геометријске реализације фамилије простих политопа значајне за теореме кохеренције.

1.2.2 Угњежђени скупови и фамилија нестоедара

У наставку дефинишемо d -комплексе чија ће геометријска реализација бити фамилија простих политопа која се може добити сукцесивним одсецањем страна $(d+1)$ -симплекса, тј. његовим сукцесивним зарубљивањем. Реч је о врло значајној фамилији која се непрестано дуги низ година изучава од стране многих аутора (Фултон и Мек Ферсон [19], Де Конђини и Проћези [13], Сташев и Шнајдер [45], Гаифи [20] [21], Фајхтнар и Козлов [16], Фајхтнар и Штурмфелс [17],

Кар и Дејвадос [9], Постњиков, Рајнер и Вилијамс [38], Постњиков [39], Дошен и Петрић [15]). Својства ове фамилије примењују се у многим математичким областима, посебно у алгебри, комбинаторици, геометрији, логици и топологији.

Дефиниција 1.2.5. Колекција \mathcal{B} непразних подскупова коначног скупа V је *градивни скуп* скупа $\mathcal{P}(V)$ када \mathcal{B} садржи све једночлане подскупове $\{v\}$, $v \in V$, и када за свака два скупа $S_1, S_2 \in \mathcal{B}$ таква да $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, њихова унија $S_1 \cup S_2$ такође припада \mathcal{B} . Нека су V_1, \dots, V_m максимални симплекси комплекса K . Колекција \mathcal{B} неких симплекса из K је *градивни скуп* комплекса K када је за свако $i \in [m]$ скуп $\mathcal{B} \cap \mathcal{P}(V_i)$ градивни скуп скупа $\mathcal{P}(V_i)$.

Дефиниција 1.2.6. Нека је N колекција скупова. Скуп $\{X_1, \dots, X_m\} \subseteq N$ је *N -антиланац* када је $m \geq 2$ и када су елементи X_1, \dots, X_m међусобно неупоредиви.

Дефиниција 1.2.7. Нека је \mathcal{B} градивни скуп комплекса K . Скуп $N \subseteq \mathcal{B}$ је *угњежђен скуп* у односу на \mathcal{B} када је унија сваког N -антиланца елемент скупа $K - \mathcal{B}$.

Више детаља о управо уведеним појмовима се може наћи у [36, Одељак 3]. Напоменимо само да је појам градивног скупа произвољне коначне \wedge -полумреже први пут уведен у [16, Дефиниција 2.2] и своди се управо на Дефиницију 1.2.5 у случају када је полумрежа комплекс. Такође, Дефиниција 1.2.7 је у складу са [16, Дефиниција 2.7].

Дефиниција угњежђеног скупа повлачи да је подскуп угњежђеног скупа такође угњежђен скуп, што даље имплицира да је колекција $\mathcal{N}(K, \mathcal{B})$ свих угњежђених скупова у односу на градивни скуп \mathcal{B} комплекса K , такође, комплекс.

Нека је C_0 колекција свих подскупова скупа $[n + 1]$ који немају више од n елемената тј.

$$C_0 = \mathcal{P}([n + 1]) - \{[n + 1]\}.$$

У складу са Дефиницијом 1.2.1, C_0 је комплекс. У литератури је познат као *гранични комплекс* $\partial \Delta^n$ апстрактног n -симплекса. За произвољни градивни скуп \mathcal{B} комплекса C_0 посматраћемо комплекс $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B})$.

Пример 1.2.3. Нека је

$$\mathcal{B} = \{\{1\}, \dots, \{11\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{7, 8\}, \{2, 3, 5\}, \{9, 10, 11\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

У складу са Дефиницијом 1.2.5, \mathcal{B} је градивни скуп комплекса C_0 за $n = 10$. Следећи скупови су неки од максималних угњежђених скупова у односу на \mathcal{B} :

$$N_1 = \{\{2\}, \{3\}, \{7\}, \{9\}, \{10\}, \{7, 8\}, \{2, 3, 5\}, \{9, 10, 11\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}, \\ N_2 = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{9\}, \{11\}, \{4, 5\}, \{9, 10, 11\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}, \\ N_3 = \{\{2\}, \{5\}, \{6\}, \{8\}, \{10\}, \{11\}, \{7, 8\}, \{4, 5, 6\}, \{9, 10, 11\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Пример 1.2.4. Скуп $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ је градивни скуп комплекса $C_0 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. Укупно је пет максималних угњежђених скупова у односу на \mathcal{B} :

$$\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1, 2\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{3\}\}.$$

Сви њихови подскупови формирају комплекс

$$\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{2, 3\}\}, \\ \{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1, 2\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{3\}\}, \{\{1\}, \{3\}\}\},$$

чија геометријска реализација је петоугао.

Скуп $\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}$ је градивни скуп комплекса $C_0 = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}) - \{\{1, 2, 3, 4\}\}$. Укупно је 14 максималних угњежђених скупова у односу на \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} & \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1\}\}, \quad \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{2\}\}, \quad \{\{1, 2, 3\}, \{1\}, \{3\}\}, \quad \{\{1, 2\}, \{2\}, \{4\}\}, \\ & \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{2\}\}, \quad \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{3\}\}, \quad \{\{2, 3, 4\}, \{2\}, \{4\}\}, \quad \{\{3, 4\}, \{1\}, \{4\}\}, \\ & \{\{2, 3, 4\}, \{2, 3\}, \{2\}\}, \quad \{\{2, 3, 4\}, \{2, 3\}, \{3\}\}, \quad \{\{1, 2\}, \{1\}, \{4\}\}, \\ & \{\{2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{4\}\}, \quad \{\{2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{3\}\}, \quad \{\{3, 4\}, \{1\}, \{3\}\}. \end{aligned}$$

Геометријска реализација комплекса $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B})$ је 3-асоциедар (Слика 1.9).

Без обзира на избор градивног скупа \mathcal{B} , постоји прост политоп који реализује $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B})$, о чему сведочи неколико познатих геометријских реализација. Различити аутори су независно користили другачије приступе, како у смислу комбинаторног описа проблема, тј. дефинисања фамилије апстрактних политопа чија се геометријска реализација тражи, тако и у смислу геометријског дефинисања политопа који ту фамилију апстрактних политопа реализују.

Једну од реализација је дао Постњиков у [39]. Користећи суме Минковског, дефинисао је *нестоедре*, фамилију простих политопа за коју је показао да реализује комплексе формиране од нешто другачије дефинисаних угњежђених скупова (видети [38, Дефиниција 6.4]). Међутим, комплекс који настаје од комплекса Постњикова када се максимални елемент $[n + 1]$ искључи из градивног скупа, изоморфан је управо комплексу који ми посматрамо (видети [36, Тврђење 3.4]). Недуго потом, Дошен и Петрић су експлицитно задали неједначине полупростора који дефинишу политопе који реализују фамилију апстрактних *хиперграф* политопа [15]. Касније су, по узору на тај рад, Ивановић, Кирјен и Обрадовић понудили алтернативну синтаксу да се индуктивно опише мрежа страна ове фамилије. Најважније, у [36], Петрић је детаљно упоредио све ове различите приступе и показао да је реч о међусобно изоморфним фамилијама комплекса, односно да су фамилије политопа који их реализују комбинаторно еквивалентне. У наставку излажемо споменућу реализацију Постњикова.

Нека је \mathcal{B} градивни скуп скупа $\mathcal{P}([n + 1])$ такав да $[n + 1] \in \mathcal{B}$, и нека је

$$\mathcal{B}_B = \{A \in \mathcal{B} \mid A \subseteq B\}.$$

Нестоедар $P_{\mathcal{B}}$ је сума симплекса индексираних елементима градивног скупа \mathcal{B} , тј.

$$P_{\mathcal{B}} = \sum_{B \in \mathcal{B}} \Delta_B.$$

У складу са Дефиницијом 1.2.5, скуп $\mathcal{B} - \{[n + 1]\}$ је градивни скуп комплекса C_0 ; и обрнуто, за сваки градивни скуп \mathcal{B} комплекса C_0 , скуп $\mathcal{B} \cup \{[n + 1]\}$ је градивни скуп скупа $\mathcal{P}([n + 1])$.

Теорема 1.2.3. [8, Теорема 1.5.11 и Теорема 1.5.15] *Нестоедар* $P_{\mathcal{B}}$ је прост n -политоп за који важи

$$P_{\mathcal{B}} = \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = |\mathcal{B}|, \sum_{i \in A} x_i \geq |\mathcal{B}_A| \text{ за свако } A \in \mathcal{B} \right\},$$

при чему за сваки скуп $A \neq [n + 1]$ *хиперраван* $\pi_A = \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i \in A} x_i = |\mathcal{B}_A| \right\}$ дефинише пљосан f_A *нестоедра* $P_{\mathcal{B}}$.

Теорема 1.2.4. *За сваки градивни скуп \mathcal{B} комплекса C_0 , нестоедар $P_{\mathcal{B} \cup \{[n+1]\}}$ геометријски реализује комплекс $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B})$.*

Доказ: Према [39, Теорема 7.4], нестоедар $P_{\mathcal{B} \cup \{[n+1]\}}$ реализује комплекс који је, према [36, Тврђење 3.4], изоморфан комплексу $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B})$. \square

Према закључку са краја претходног пододељка, у контраваријантном изоморфизму између полумрежа које одговарају $P_{\mathcal{B} \cup \{[n+1]\}}$ и $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B})$, пљоснима нестоедра одговарају минимални једноелементни угњежђени скупови, а теменима максимални угњежђени скупови. Како је, према претходној теорему, нестоедар прост политоп, максимални угњежђени скупови су кардиналности n .

Нестоедар $P_{\mathcal{B}}$ се може добити сукцесивним паралелним зарубљивањем n -симплекса (видети [8, Теорема 1.5.18]). Наиме, ако је градивни скуп \mathcal{B} минималан, тј. поред скупа $[n+1]$ садржи само једноелементе подскупове скупа $[n+1]$, тада је нестоедар политоп

$$P = \Delta_{[n+1]} + \sum_{i \in [n+1]} \Delta_{\{i\}},$$

који представља транслацију n -симплекса $\Delta_{[n+1]}$ за вектор $(1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Дакле, нестоедар је у том случају један n -симплекс. Претпоставимо да градивни скуп има још елемената и да симплексе индексирани њима додајемо један по један симплексу P . Како је $|\mathcal{F}(\Delta^n)| = n+1$, и како је, према Теорему 1.2.3, $|\mathcal{F}(P_{\mathcal{B}})| = |\mathcal{B}| - 1$, на све остале елементе градивног скупа можемо гледати као на рецепт који прописује које су стране симплекса P одсечене. Редослед сабирака је ирелевантан, па претпоставимо да предност имају симплекси индексирани скуповима веће кардиналности. На тај начин, свака текућа парцијална сума је комбинаторно еквивалентна политопу који настаје паралелним зарубљивањем претходне парцијалне суме одсецањем одређене стране. Чак и позитивно хомотетична, а тиме и нормално еквивалентна. Сваки сабирак индексирани скупом кардиналности k доводи до одсецања стране димензије $n - k$, што је и разлог давања приоритета сабирцима индексираним скуповима веће кардиналности. О свему наведеном сведочи [8, Лема 1.5.17].

Дакле, додавањем једног по једног симплекса, одсецањем једне по једне стране политоба P , путујемо од симплекса до резултујућег нестоедра. Притом, услов Дефиниције 1.2.5 који захтева да градивни скуп садржи унију свака два своја не-дисјунктна елемента, обезбеђује да ако постоје две одсечене стране политоба P чији је пресек непразна страна F , онда је пре тих страна одсечена најпре страна F . Када је градивни скуп максималан, тј. када садржи све подскупове скупа $[n+1]$, према [8, Последица 1.5.6] и [36, Тврђење 3.4], нестоедар је n -пермутоедар.

У интервалу између симплекса, када одсецања нема, и пермутоедра, када су све стране симплекса одсечене, налазе се сви остали нестоедри, међу којима је и асоциедар и многи други значајни прости политопи о којима ће касније бити више речи.

У складу са Дефиницијом 1.1.24, може се закључити да за свако индексирање скупа $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{B} \mid B \neq [n+1], |B| \neq 1\}$ које је такво да за свако $i > j$ важи $|B_i| \leq |B_j|$, скуп

$$\{\Delta_{B_i}\}_{i \in |\mathcal{A}|}$$

зарубљује симплекс P . Дакле, реч је о једној специфичној геометријској реализацији коју ћемо назвати *Минковски-реализацијом*. По угледу на њу ће у овој тези бити понуђене реализације и других фамилија комбинаторно задатих политоба. Следи формална дефиниција.

Дефиниција 1.2.8. Нека је \mathcal{B} градивни скуп комплекса K и нека је $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ партиција скупа \mathcal{B} таква да је \mathcal{A}_1 колекција свих једноелементних скупова из \mathcal{B} . Политоп P димензије n је n -димензионална Минковски-реализација комплекса $\mathcal{N}(K, \mathcal{B})$ када су задовољена следећа три услова:

- (i) P реализује $\mathcal{N}(K, \mathcal{B})$;
- (ii) постоји функција $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}$ таква да је

$$P = \Delta_{[n+1]} + \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \varphi(\beta);$$

- (iii) за свако индексирање $x : [m] \rightarrow \mathcal{A}_2$ такво да

$$\forall i, j \in [m] \quad i < j \Rightarrow |x(i)| \geq |x(j)|,$$

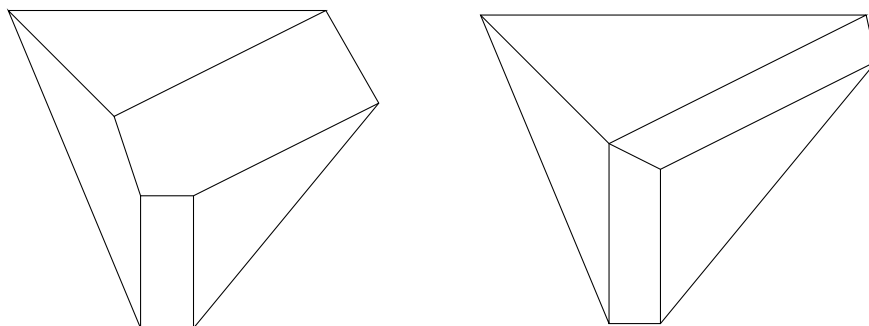
индексирани скуп политопа $\{P_i\}_{i \in [m]}$, $P_i = \varphi(x(i))$, зарубљује парцијалну суму

$$\Delta_{[n+1]} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_1} \varphi(\beta).$$

Теорема 1.2.5. За сваки градивни скуп \mathcal{B} комплекса C_0 , нестоедар $P_{\mathcal{B} \cup \{[n+1]\}}$ је n -димензионална Минковски-реализација комплекса $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B})$.

Доказ: Следи директно из Теореме 1.2.4 и [8, Лема 1.5.17 и Теорема 1.5.18]. \square

Нестоедром надаље зовео сваки политоп комбинаторно еквивалентан нестоедру $P_{\mathcal{B}}$. Наиме, претходна теорема, заједно са Тврђењем 1.1.12, даје могућност да на одређени апстрактни n -нестоедар, гледамо као на фамилију простих политопа чије су мреже страна изоморфне мрежама страна политопа који настају sukcesивним зарубљивањем произвољног n -симплекса одсецањем истих страна. На пример, политоп P приказан на Слици 1.3 и политоп приказан на Слици 3.7 лево представљају један исти нестоедар. Исто важи и за политопе P_2 , P_3 и P_4 приказане на Слици 1.3 и политоп приказан на Слици 3.8.



Слика 1.11: Зарубљени 3-симплекси који нису нестоедри

Ипак, треба бити обазрив када је реч о странама симплекса које се одсецају. Иако, према Тврђењу 1.1.13, одсецањем једне стране простог политопа настаје прост политоп, важно је нагласити да нестоедар није сваки прост политоп који се може добити sukcesивним одсецањем страна симплекса. На пример, политоп на

Слици 1.11 лево није нестоедар иако је прост и добијен сукцесивним зарубљивањем 3-симплекса одсецањем две ивице. У овом случају пресецање симплекса са два полупростора није, грубо речено, једнако дубоко. Приметимо још да би униформно симултано пресецање са два полупростора довело до политопа који није прост, јер одабране ивице имају заједничко теме (Слика 1.11 десно). Подсећамо да Дефиниција 1.2.5 гарантује да сукцесивном зарубљивању симплекса одсецањем страна непразног пресека, претходи одсецање тог пресека, односно одсецање свих страна које су им заједничке.

Пример 1.2.5. У зависности од тога колико је темена 2-симплекса одсечено, 2-нестоедар је троугао, четвороугао, петоугао или шестоугао.

На Слици 3.7, илустрован је 3-нестоедар индексираним градивним скупом

$$\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Реч је о политопу који се може добити зарубљивањем 3-симплекса одсецањем произвољне ивице и темена које јој припада, па исти нестоедар одговара сваком градивном скупу облика

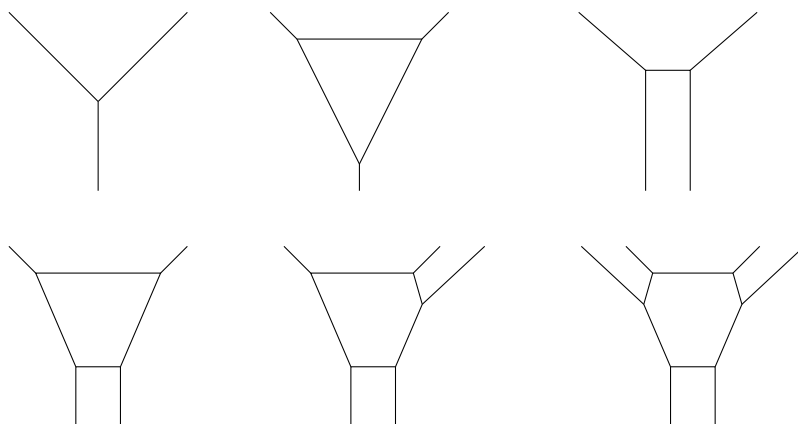
$$\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, B_1, B_2, \{1, 2, 3, 4\}\},$$

при чему је $B_1 \subset B_2 \subset \{1, 2, 3, 4\}$ и $|B_1| = 2$. Слично, 3-нестоедар који настаје зарубљивањем 3-симплекса одсецањем произвољног темена (Слика 1.10) одговара градивним скуповима облика

$$\mathcal{B} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, B, \{1, 2, 3, 4\}\},$$

где је B произвољан троелементни подскуп скупа $\{1, 2, 3, 4\}$.

Слика 1.12 илуструје све ситуације које се могу догодити локално у неком од темена 3-нестоедра, а потпуне илустрације се могу наћи у [15, Додатак Б]. За потребе истраживања ове дисертације, визуелно-графичким програмирањем је развијена апликација која генерише тродимензионалне моделе свих 3-нестоедара, уз могућност варирања дубине одсецања. У Додатку А.1 је дат преглед неких резултата те апликације.

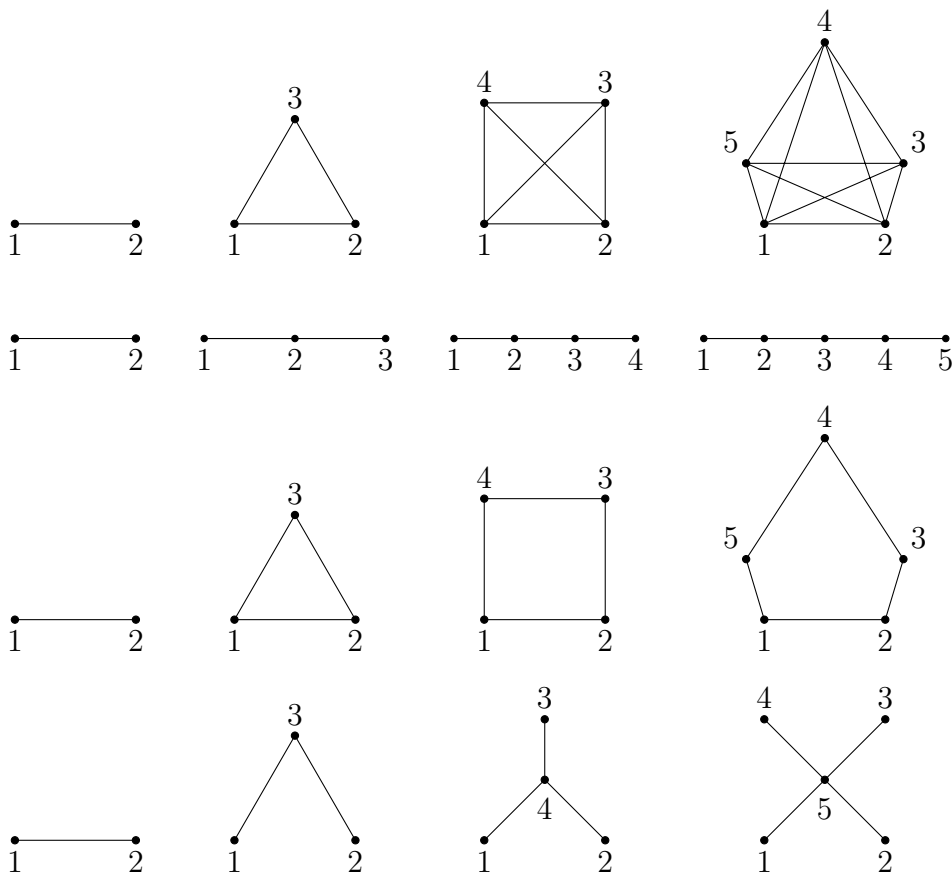


Слика 1.12: 3-нестоедар посматран локално [36, Увод]

Постоји и алтернативни графички начин да се задају неки градивни скупови скупа $\mathcal{P}([n + 1])$, а тиме и комплекса C_0 . Нека је Γ граф без петљи и вишеструких ивица чија су темена елементи скупа $[n + 1]$.

Дефиниција 1.2.9. *Графовски градивни скуп* \mathcal{B}_Γ је скуп свих непразних подскупова $B \subset [n+1]$ таквих да је подграф $\Gamma|_B$ повезан граф.

У складу са Дефиницијом 1.2.5, графовски градивни скуп \mathcal{B}_Γ је градивни скуп скупа $\mathcal{P}([n+1])$. Нестоедар $P_{\mathcal{B}_\Gamma}$ се назива *граф-асоциедром*. За више детаља о граф-асоциедрима упућујемо на [9], а у наставку издвајамо примере карактеристичних графичких градивних скупова по чијем изгледу нестоедри које дефинишу и носе назив.

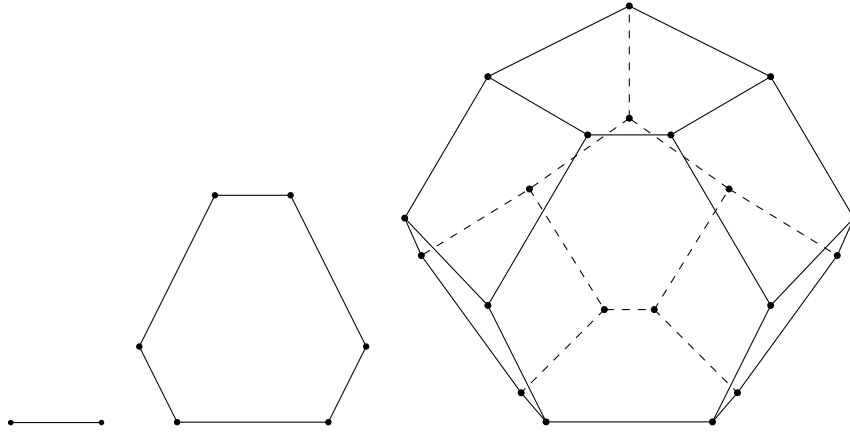


Слика 1.13: Графови који, за $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, одговарају нестоедрима \mathbf{P}_{n+1} , \mathbf{K}_{n+2} , \mathbf{S}_{n+1} и \mathbf{St}_n

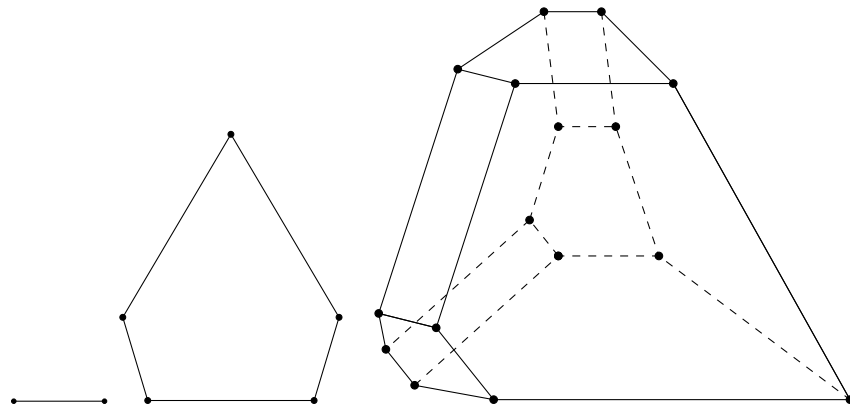
Пример 1.2.6. [8, Пример 1.5.28] Када је Γ комплетан граф, тада је $P_{\mathcal{B}_\Gamma}$ n -пермутоедар. Први ред Сlike 1.13 илустрuje Γ за $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Пример 1.2.7. [8, Пример 1.5.25] Када је Γ стаза, тј. када се Γ састоји од n ивица $\{i, i+1\}$, $i \in [n]$, тада се \mathcal{B}_Γ састоји од скупова облика $\{i, i+1, \dots, j\}$ за $1 \leq i \leq j \leq n+1$ (видети Пример 1.2.4), а нестоедар $P_{\mathcal{B}_\Gamma}$ је n -асоциедар. Други ред Сlike 1.13 илустрuje Γ за $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Пример 1.2.8. [8, Пример 1.5.29] Када је Γ цикл, тј. када се Γ састоји од n ивица $\{i, i+1\}$, $i \in [n]$, и ивице $\{n+1, 1\}$, тада је нестоедар $P_{\mathcal{B}_\Gamma}$ n -циклоедар. Класа n -циклоедара, у ознаци \mathbf{S}_{n+1} , први пут се појављује у [5], а нешто касније и у Стасевљевим радовима. Ипак, за више детаља препоручујемо радове [5] и [38, Пододељак 10.3], у којима је циклоедру посвећено више пажње. Наредна слика приказује \mathbf{S}_{n+1} за $n \in \{1, 2, 3\}$, а трећи ред Сlike 1.13 илустрuje одговарајући граф Γ за $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.


 Слика 1.14: Циклоедри C_{u_1} , C_{u_2} и C_{u_3}

Пример 1.2.9. [8, Пример 1.5.30] Када је Γ звезда, тј. када се Γ састоји од n ивица $\{i, n+1\}$, $i \in [n]$, онда је P_{B_Γ} n -звездодар. Наредна слика илуструје овај политоп за $n \in \{1, 2, 3\}$, а последњи ред Сlike 1.13 илуструје Γ за $n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Више детаља о класи n -звездодара, у ознаци St_n , може се наћи у [38, Пододељак 10.4].


 Слика 1.15: Звездодри St_1 , St_2 и St_3

1.2.3 Вишеструко угњежђени скупови и уопштавање фамилије нестодара

Према претходном пододељку, фамилија n -нестодара се може посматрати као интервал простих политопа између симплекса Δ^n и пермутоедра P_{n+1} , при чему је уређење над скупом свих политопа у интервалу контраиндуковано релацијом инклузије на одговарајућим градивним скуповима. Такође, имајући у виду Дефиницију 1.1.12 и Тврђење 1.1.11, на овај интервал се може гледати и као на интервал симплицијалних политопа између симплекса Δ^n и политопа који је поларан пермутоедру P_{n+1} .

Теорија која следи заснована је на раду Зорана Петрића у коме је детаљно описана формална процедура којом се овај интервал може проширити ([36]). Интервал се проширује итерираним генерисањем комплекса, при чему се сваки комплекс формира од угњежђених скупова у односу на произвољни градивни скуп комплекса формираног у претходној итерацији.

Нека је C_0 комплекс дефинисан као и до сада и \mathcal{B}_0 један његов градивни скуп. У првој итерацији се формира комплекс $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_0)$ чија је геометријска реализација одређен нестоедар из споменутог интервала. У другој итерацији, избором произвољног градивног скупа \mathcal{B}_1 комплекса $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_0)$, формира се нови комплекс $\mathcal{N}(\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_0), \mathcal{B}_1)$. Понављањем ове процедуре, из итерације у итерацију настају нови занимљиви комплекси. Истовремено структура угњежђених скупова постаје све сложенија и неудобна за рад. Већ након неколико итерација долази до потешкоћа у представљању резултата процедуре због непрегледности и тешке читљивости великог броја угњежђених заграда у запису угњежђених скупова. У истом раду, овај проблем је превазиђен уз помоћ једноставне алгебарске презентације којом се елементи градивних скупова представљају као елементи слободно генерисане комутативне семигрупе (видети [36, Одељак 4]). За потребе ове тезе довољно је само да, у циљу једноставнијег записа, индуктивно дефинишемо преозначавање комплекса који настају у свакој од итерација.

Нека комплекс C_0 не буде неопходно почетак процедуре, већ пођимо од комплекса K_P који одговара произвољном простом политопу P (видети крај Пододељка 1.2.1). Нека је \mathcal{B}_0 његов градивни скуп, $k \in \mathbf{Z}$ произвољан ненегативан број, и нека је за свако $0 \leq i \leq k$ скуп \mathcal{B}_{i+1} градивни скуп комплекса $\mathcal{N}(K_P, \mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_i)$, при чему је за $i > 0$

$$\mathcal{N}(K_P, \mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_i) = \mathcal{N}(\mathcal{N}(K_P, \mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_{i-1}), \mathcal{B}_i).$$

Теорема 1.2.6. [36, Тврђење 10.1] *Постоји прост политоп који геометријски реализује комплекс $\mathcal{N}(K_P, \mathcal{B}_0, \dots, \mathcal{B}_k)$.*

Ова теорема уопштава Теорему 1.2.4 гарантујући да, полазећи од било ког простог политопа, сваки комплекс настао на горе описан начин у некој од итерација, има геометријску реализацију простим политопом. Уз то, према [36, Тврђење 8.3] и [36, Тврђење 9.3], политоп Q који реализује комплекс настао у одређеној итерацији се може добити зарубљивањем политопа који реализује комплекс настао у претходној итерацији, тј.

$$Q \sim \text{tr}_{F_m}(\dots \text{tr}_{F_1} P),$$

за страну F_1 политопа P и страну F_j , $2 \leq j \leq m$, политопа $\text{tr}_{F_{j-1}}(\dots \text{tr}_{F_1} P)$. Дакле, када је P симплекс и $k = 0$, политоп Q је у стандардном интервалу симплекс-пермутоедар (видети Теорему 1.2.5), а заменом симплекса произвољним простим политопом, стандардни интервал се проширује. На пример, у случају $n = 2$, када се троугао замени петоуглом, настаје интервал петоугао-десетоугао. У случају $n = 3$, када се 3-симплекс замени политопом P приказаним на Слици 1.3, тада се политопи P_i , $1 \leq i \leq 4$, налазе у проширеном интервалу.

Свакако, када је градивни скуп \mathcal{B}_0 минималан, као и у случају оригиналног интервала, на почетку новог интервала остаје политоп P . Претходна теорема гарантује да постоји прост политоп који замењује пермутоедар на другом крају и који реализује комплекс формиран од угњежђених скупова у односу на максимални градивни скуп. Овај политоп називамо *P-пермутоедром*, и генерално, за све могуће изборе градивних скупова добијамо читаву фамилију простих политопа коју зовемо *P-нестоедрима*. У том смислу, \mathbf{P}_{n+1} је Δ^n -пермутоедар, а фамилија n -нестоедара је фамилија Δ^n -нестоедара. Ако је P пермутоедар, одговарајући P -нестоедар је *пермутонестоедар*. Отуда је *пермутосимплекс* заправо пермутоедар, а *пермутопермутоедар* политоп који се може добити сукцесивним зарубљивањем пермутоедра одсецањем свих страна. У Додатку А.3 је понуђено

компјутерско решење за креирање и испис елемената комплекса који одговара *пермутасоциједру*, а које се може проширити на комплекс угњежђених скупова који одговара произвољном P -нестоедру.

Сваки проширени интервал се даље аналогно може проширити итеративним понављањем процедуре, па се тако у случају $n = 2$ могу добити сви прости 2-политопи, тј. сви полигони. Примери 3-политопа добијених након друге итерације илустровани су на Слици 3.8, Слици 3.9 лево, Слици 3.10, Слици 3.11 лево и Слици 3.12.

Важно је напоменути да ова процедура, иако испоручује велики број простих политопа значајно проширујући оригиналну класу нестоедара, она ипак не даје могућност да се сваки прост политоп на овај начин досегне, осим у тривијалном случају када је баш то полазни политоп, а градивни скуп минималан. Већ у случају $n = 3$ постоје прости политопи које ова процедура не може да испоручи. Наиме, зарубљивањем простог 3-политопа одсецањем темена или ивице настаје политоп са макар једном троугаоном или четвороугаоном пљосни, па се прости 3-политопи који немају ни једну такву пљосан засигурно не могу добити процедуром зарубљивања. Такав је нпр. додекаедар чије су све пљосни петоуглови [25, Слика на стр. 13].

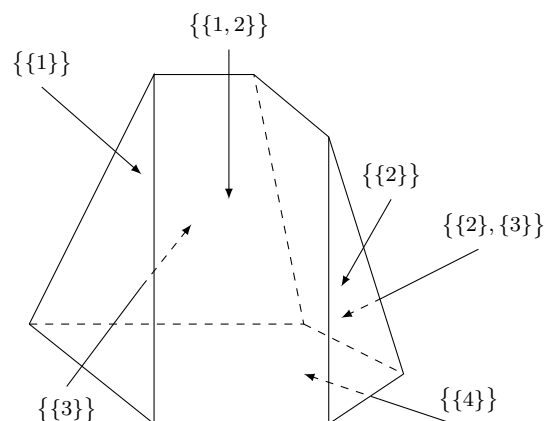
Дефиниција 1.2.10. Нека је P политоп који геометријски реализује комплекс $\mathcal{N}(K, \mathcal{B})$ и нека је ϕ контраваријантни изоморфизам између одговарајућих полу-режа. Пљосан $F \in \mathcal{F}(P)$ је *правилно означена* елементом $B \in \mathcal{B}$, када је

$$\phi(F) = \{B\}.$$

Политоп је *правилно означен* када су му све пљосни правилно означене. Елемент скупа \mathcal{B} је *ознака* пљосни када је она правилно означена тим елементом.

Напомена 1.2.4. Према закључцима са краја Пододељка 1.2.1, управо уведено означавање пљосни обезбеђује да две пљосни правилно означеног политопа имају заједничко теме ако и само ако постоји угњежђени скуп који садржи обе њихове ознаке.

Напомена 1.2.5. Приметимо да, ако је нестоедар $P_{\mathcal{B}}$ правилно означен, онда Дефиниција 1.2.8, Теорема 1.2.5 и Теорема 1.2.3 гарантују да ознаку $A \in \mathcal{B}$ има пљосан коју дефинише хиперраван π_A из Теореме 1.2.3.



Слика 1.16: Правилно означен 3-политоп проширеног интервала нестоедара

Пример 1.2.10. Нека је $n = 3$, $\mathcal{B}_0 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}$ градивни скуп комплекса C_0 , P нестоедар који реализује комплекс $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_0)$ и

$$\mathcal{B}_1 = \{ \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{4\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{2, 3\}\} \}$$

градивни скуп комплекса $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_0)$. Политоп који геометријски реализује комплекс $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$, тј. комплекс $\mathcal{N}(C_P, \mathcal{B}_1)$, приказан је на Слици 1.11 лево. Већ је установљено да овај политоп није 3-нестоедар, али овим закључујемо да као P -нестоедар припада проширеном интервалу. Претходна слика илуструје правилно означавање његових пљосни.

По угледу на описану итеративну процедуру, у Одељку 3.1 је дефинисан комплекс чија геометријска реализација простим политопом представља топологи доказ одређених теорема кохеренције. Одељак који следи посвећујемо управо овим теоремама.

Глава 2

Кохеренција

Ово поглавље отпочињемо на исти начин на који је Саундерс Меклејн започео свој Увод у [34]—запажањем да се многе карактеристике математичких система могу на униформан начин представити једноставним дијаграмима сачињеним од неких објеката повезаних стрелицама. На пример, стрелица $f: X \rightarrow Y$ представља функцију, тј. скупе X и Y и правило $x \mapsto f_x$ које сваком елементу $x \in X$ додељује неки елемент $f_x \in Y$. За дијаграм

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ h \downarrow & & \nearrow g \\ Z & & \end{array}$$

ћемо рећи да комутира када је h стандардна композиција функција f и g , тј. $h = gf$. Исти дијаграм се може применити и у другом математичком контексту: у свету тополошких простора објекти X , Y и Z би означавали неке тополошке просторе, а стрелице f , g и h непрекидна пресликавања; у свету свих група, објекти би били групе, а стрелице хомоморфизми, у свету логичких формула, објекти би били формуле, а стрелице извођења итд. На овај начин се могу довести у везу, тј. подвести под некакав исти тип, наизглед различити математички светови и сличним дијаграмима изразити све њихове универзалне карактеристике.

Ова запажања су довела до развоја Теорије категорија средином XX века, а њеним оснивачима се сматрају Семјуел Ајленберг и Саундерс Меклејн. По угледу на чувене радове Меклејна из 1963. и 1971. године ([33] и [34]), наводимо само мали део ове теорије који нам је неопходан за бављењем кохеренцијом, тачније за разматрање тополошког приступа помоћу ког се теореме кохеренције везане за одређени тип категорија могу доказати.

2.1 Теореме кохеренције

Категорија \mathcal{A} подразумева један математички свет који чине две класе $Ob(\mathcal{A})$ (објекти категорије \mathcal{A}) и $Ar(\mathcal{A})$ (морфизми или стрелице категорије \mathcal{A}) и два пресликавања $dom, cod: Ar(\mathcal{A}) \rightarrow Ob(\mathcal{A})$. Ако је $f \in Ar(\mathcal{A})$, $dom(f) = A$ и $cod(f) = B$, онда то краће означавамо $f: A \rightarrow B$. Такође, за свако $A \in Ob(\mathcal{A})$, постоји *јединични морфизам* $\mathbf{1}_A: A \rightarrow A$, а за свака два морфизма $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$, постоји њихова композиција, тј. морфизам $gf: A \rightarrow C$. Захтевају се и *категоријалне једнакости*

$$h(gf) = (hg)f \quad \text{и} \quad f\mathbf{1}_A = f = \mathbf{1}_B f.$$

Дакле, кад год је дефинисано, компоновање морфизама је асоцијативно, а јединични морфизам има улогу левог и десног неутрала при компоновању. Стрелице f и g су *истог типа* када је $\text{dom}(f) = \text{dom}(g)$ и $\text{cod}(f) = \text{cod}(g)$. Морфизам $f: A \rightarrow B$ је *изоморфизам* када постоји његов *инверзни* морфизам $f^{-1}: B \rightarrow A$ за који важи $f^{-1}f = \mathbf{1}_A$ и $ff^{-1} = \mathbf{1}_B$.

Како смо у уводу најавили, интеракција између објеката једне категорије често се представља *дијаграмом*. Темена су му означена објектима, а ивице морфизмима. Све ивице су усмерене—ивица означена са f усмерена је од темена $\text{dom}(f)$ ка темену $\text{cod}(f)$. *Пут* од темена A до темена B је композиција ознака нанизаних усмерених ивица којима се из A може стићи у B . Дијаграм се састоји од два или више путева од темена A (полазиште) до темена B (одредиште) и кажемо да он *комутира* када било која два пута од A до B представљају исти морфизам у тој категорији.

За две категорије \mathcal{A} и \mathcal{B} , *функтор* $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ подразумева два пресликавања $F: \text{Ob}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$ и $F: \text{Ar}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ar}(\mathcal{B})$, при чему се F слаже са структуром категорија. То значи да је слика стрелице $f: A \rightarrow A'$ класе $\text{Ar}(\mathcal{A})$ стрелица $F_f: F_A \rightarrow F_{A'}$ класе $\text{Ar}(\mathcal{B})$ и важе *функторијалне једнакости*

$$F\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{F_A} \quad \text{и} \quad F_{gf} = F_g F_f.$$

Функтор $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ је *веран* када за свака два објекта A и A' класе $\text{Ob}(\mathcal{A})$ и сваки пар стрелица $f_1, f_2: A \rightarrow A'$ класе $\text{Ar}(\mathcal{A})$, једнакост $F_{f_1} = F_{f_2}$ имплицира једнакост $f_1 = f_2$.

За два дата функтора $F, G: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, *природна трансформација* τ је фамилија стрелица класе $\text{Ar}(\mathcal{B})$,

$$\tau = \{\tau_A: F_A \rightarrow G_A \mid A \in \text{Ob}(\mathcal{A})\},$$

која је таква да, за сваки морфизам $f: A \rightarrow A'$ класе $\text{Ar}(\mathcal{A})$, комутира дијаграм

$$\begin{array}{ccc} F_A & \xrightarrow{\tau_A} & G_A \\ F_f \downarrow & & \downarrow G_f \\ F_{A'} & \xrightarrow{\tau_{A'}} & G_{A'} \end{array} \quad ,$$

тј. важи *једнакост природне трансформације*

$$G_f \tau_A = \tau_{A'} F_f.$$

Ако на функторе F и G гледамо као на слику категорије \mathcal{A} у категорију \mathcal{B} , онда на τ можемо гледати као на скуп свих стрелица које четвороугловима пресликавају (транслирају) слику функтора F у слику функтора G (видети [34, Пододељак 1.4]). Елементе колекције τ , индексирани објектима категорије \mathcal{A} , зовемо *компонентама* природне трансформације τ . Природна трансформација је *природни изоморфизам* када је свака њена компонента изоморфизам.

Категорија са множењем је категорија \mathcal{A} заједно са *бифунктором*

$$\cdot: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}.$$

Дакле, имамо бинарну операцију множења на објектима категорије \mathcal{A} , означену са \cdot , и истоозначену бинарну операцију на морфизмима¹. Према дефиницији

¹Меклејн је овај бифунктор у [33] означавао са \otimes (тензор), а у [34] са \square . У литератури је \otimes и најчешћа ознака ове операције.

функтора, ако су $f: A \rightarrow B$ и $g: C \rightarrow D$ два морфизма категорије \mathcal{A} , онда је $f \cdot g$ морфизам $f \cdot g: A \cdot C \rightarrow B \cdot D$, а функцијалне једнакости су

$$\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cdot B} \quad \text{и} \quad (g_1 f_1) \cdot (g_2 f_2) = (g_1 \cdot g_2)(f_1 \cdot f_2).$$

Категорија са множењем је *слободно генерисана* неким скупом објеката када су сви објекти те категорије или елементи тог скупа или су настали множењем његових елемената. На пример, $((0 \cdot (2 \cdot 5)) \cdot 2)$ је објекат категорије са множењем која је слободно генерисана скупом $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Уобичајно је да се најспољашњији пар заграда изоставља, па се овај објекат записује као $(0 \cdot (2 \cdot 5)) \cdot 2$.

Можемо даље разговарати о различитим типовима категорија са множењем, у зависности од тога које смо *канонске* (основне) стрелице дозволили, односно каква смо својства дали множењу. Да би операције биле део неке алгебарске структуре, скоро увек захтевамо да буду асоцијативне. Тако, ако у категорији са множењем дозволимо да бифунктор \cdot буде асоцијативан, до на изоморфизам, долазимо до категорија за које се везује прва теорема кохеренције, тј. први кохеренцијски резултат. Ако дозволимо да бифунктор уз то буде и комутативан, до на изоморфизам, долазимо до другог типа категорија којима ћемо у овој тези посветити највише пажње. Следе формалне дефиниције ова два типа категорија, које поред споменутих својстава бифунктора садрже и додатне услове, који, како ћемо касније видети, обезбеђују кохеренцију.

Моноидална категорија \mathcal{A} је категорија са множењем која садржи специјални објекат I и три природна изоморфизма α , λ и ϱ са компонентама

$$\alpha_{A,B,C}: A \cdot (B \cdot C) \rightarrow (A \cdot B) \cdot C,$$

$$\lambda_A: I \cdot A \rightarrow A \quad \text{и}$$

$$\varrho_A: A \cdot I \rightarrow A,$$

при чему је $\lambda_I = \varrho_I: I \cdot I \rightarrow I$. Уз то, захтева се да за свака четири објекта $A, B, C, D \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, дијаграми (1) и (2) комутирају.

$$\begin{array}{ccc}
 & A \cdot (B \cdot (C \cdot D)) & \\
 & \swarrow \mathbf{1} \cdot \alpha & \searrow \alpha \\
 A \cdot ((B \cdot C) \cdot D) & & (A \cdot B) \cdot (C \cdot D) \\
 \alpha \downarrow & & \swarrow \alpha \\
 (A \cdot (B \cdot C)) \cdot D & & \\
 \swarrow \alpha \cdot \mathbf{1} & \searrow \alpha & \\
 & ((A \cdot B) \cdot C) \cdot D &
 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc}
 A \cdot (I \cdot B) & \xrightarrow{\alpha} & (A \cdot I) \cdot B \\
 \mathbf{1} \cdot \lambda \downarrow & & \swarrow \varrho \cdot \mathbf{1} \\
 A \cdot B & &
 \end{array} \quad (2)$$

Симетрична моноидална категорија \mathcal{A} је моноидална категорија која додатно поседује природни изоморфизам

$$\gamma = \{\gamma_{A,B}: A \cdot B \rightarrow B \cdot A \mid A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})\},$$

при чему, за свака три објекта $A, B, C \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, важе једнакости (3) и комутира дијаграм (4).²

$$\gamma_{B,A}\gamma_{A,B} = \mathbf{1}_{A \cdot B} \quad \varrho_A = \lambda_A \gamma_{A,I} \quad (3)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & A \cdot (B \cdot C) & \\
 \mathbf{1} \cdot \gamma \swarrow & & \searrow \alpha \\
 A \cdot (C \cdot B) & & (A \cdot B) \cdot C \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \gamma \\
 (A \cdot C) \cdot B & & C \cdot (A \cdot B) \\
 \gamma \cdot \mathbf{1} \swarrow & & \nwarrow \alpha \\
 & (C \cdot A) \cdot B &
 \end{array} \quad (4)$$

Напоменимо да све споменуте претпостављене једнакости оба типа категорија важе и *у контексту*. На пример, једнакост (1) у контексту $\cdot K$ је следећи дијаграм и он је комутативан као инстанца дијаграма (1).

$$\begin{array}{ccc}
 & (A \cdot (B \cdot (C \cdot D))) \cdot K & \\
 (\mathbf{1} \cdot \alpha) \cdot \mathbf{1} \swarrow & & \searrow \alpha \cdot \mathbf{1} \\
 (A \cdot ((B \cdot C) \cdot D)) \cdot K & & ((A \cdot B) \cdot (C \cdot D)) \cdot K \\
 \alpha \cdot \mathbf{1} \downarrow & & \swarrow \alpha \cdot \mathbf{1} \\
 ((A \cdot (B \cdot C)) \cdot D) \cdot K & & \\
 (\alpha \cdot \mathbf{1}) \cdot \mathbf{1} \swarrow & & \nwarrow \alpha \cdot \mathbf{1} \\
 & (((A \cdot B) \cdot C) \cdot D) \cdot K &
 \end{array}$$

Најједноставнији пример симетричне моноидалне категорије је свакако категорија **Set** чији су објекти скупови, а морфизми функције. Бифунктор је у том случају Декартов производ, а специјалним објектом се може прогласити било који једноелементни скуп.

Кохеренција, тј. *теорема кохеренције*, везана за одређени тип категорије, у свом оригиналном значењу подразумева комутирање свих дијаграма тог типа категорије, тј. сваког дијаграма чије су ивице означене канонским стрелицама тог типа категорије.

Теорема 2.1.1. [34, Одељак 7.2] *У моноидалној категорији, све стрелице истог типа су једнаке.*

Дакле, слободно говорећи, кохеренција нам овде каже да се свака два пута са истим полазиштем и одредиштем могу поистоветити, тј. изједначити. Овим је Меклејн је доказао да су основне једнакости међу путевима, тј. комутирање основних дијаграма (1) и (2), довољни за закључак да сви дијаграми моноидалне категорије комутирају.

За многе друге типове категорија, укључујући и симетричне моноидалне категорије, исто тврђење не важи. Томе сведоче морфизми $\gamma_{A,A}$ и $\mathbf{1}_{A \cdot A}$ који представљају различите стрелице у симетричној моноидалној категорији иако су истог

²Меклејн је објекат I у [34] означио са e , а у [33] са K . Означавање изморфизама α, λ, ϱ и γ је потпуно у складу са [34], док су у [33] компоненте $\alpha_{A,B,C}, \lambda_A$ и $\gamma_{A,B}$ редом означене са $a(A,B,C), e(A)$ и $c(A,B)$, а стрелице λ^{-1}, ϱ и ϱ^{-1} нису основне већ изведене.

типа. Овај проблем се превазилази увођењем појма *графа канонске стрелице*, јер то даје могућност да се теорема кохеренције формулише у смислу да су све стрелице истог типа једнаке када су им и графови исти.

Теорема 2.1.2. [34, Одељак 11.1] *У симетричној моноидалној категорији, све стрелице истог типа и истог графа су једнаке.*

Постоје неке класе категорија, међу којима су и симетричне моноидалне, код којих је на неки начин ипак могуће кохеренцијски резултат свести на безусловни, тј. формулисати га као „све стрелице истог типа су једнаке”. У случају симетричне моноидалне категорије, то се постиже *диверсификацијом*. Наиме, свака канонска стрелица $f: A \rightarrow B$ се може диверсификовати, што значи да у категорији постоји стрелица $f': A' \rightarrow B'$, таква да су A' и B' диверсификовани објекти, тј. објекти у којима се елементи од којих су састављени не понављају, и да су при том објекти A и B редом инстанце објеката A' и B' , а f инстанца стрелице f' . На пример, диверсификацијом следећих стрелица истог типа које немају исти граф

$$\gamma_{A,A}: A \cdot A \rightarrow A \cdot A \quad \text{и} \quad \mathbf{1}_{A,A}: A \cdot A \rightarrow A \cdot A$$

добијамо стрелице

$$\gamma_{A,B}: A \cdot B \rightarrow B \cdot A \quad \text{и} \quad \mathbf{1}_{A,B}: A \cdot B \rightarrow A \cdot B$$

које нису истог типа. Дакле, симетрична моноидална категорија је таква да ако су сваке две стрелице истог диверсификованог типа једнаке, онда су и сваке две стрелице истог типа и истог графа једнаке. Другим речима, посматрањем искључиво дијаграма у чијим су теменима диверсификовани објекти, можемо потпуно избећи употребу графова канонских стрелица и свести теорему кохеренције на формулацију у апсолутном смислу. Напомињемо да се код многих других типова категорија, нпр. код *плетеничастих* [34, Одељак 11.4], диверсификацијом ово не може обезбедити.

Питање кохеренције одређеног типа категорија односи се на дијаграме чије су ивице означене канонским стрелицама те категорије, па је ту класу довољно посматрати из угла категорије те класе која је слободно генерисана неким скупом објеката. То значи да се са дијаграма природних трансформација, са којима је баратао Меклејн у доказима својих теорема, природно може прећи на класичне стрелице у категорији која је слободно генерисана. Да се такав приступ може генерално заузети, прва је сугерисала Вореаду, Меклејнов докторанд, у [48].

Обе горе наведене теореме формулисане су у стилу изворног поимања кохеренције. Са становишта логике, такво њено схватање се заправо своди на могућност аксиоматизације—циљ је формирати неки одлучиви и што је могуће мањи скуп аксиома који би испоручио и све друге потребне једнакости. Ипак, данас се појам кохеренције користи у ширем смислу изван овог свог првобитног значења. На пример, у кохеренцијске резултате убраја се и наредна теорема.

Теорема 2.1.3. [34, Пододељак 11.3] *Свака моноидална категорија је еквивалентна некој стриктној моноидалној категорији.*

Моноидална категорија је *стриктна* када су изморфизми α , λ и ρ идентитети, па нам ова теорема, између осталог, даје за право да Декартов производ сматрамо асоцијативним. Под стриктификацијом се генерално, независно од типа категорије на коју се односи, подразумева проглашавање неких основних изоморфизама за идентитете. Другим речима, она значи укидање неких путева и

идентификовање свега што ти путеви повезују. Иако се стриктификацијом могу изгубити важне информације помоћу којих се објекти категорије класификују, она ипак умногоме помаже да се структура категорије рашчисти не би ли се оно што преостане јасније сагледало.

Меклејн се у свом доказу Теореме 2.1.2 ослонио управо на стриктификацију моноидалне структуре симетричних моноидалних категорија, што му је оставило простора да искористи алгебарску репрезентацију симетричних група помоћу генератора и релација. Другим речима, са становишта логике, Меклејн је урадио следеће. Са једне стране је имао аксиоматизацију, а са друге стране модел, категорију чије су све стрелице пермутације. Показао је да је његова аксиоматизација комплетна у односу на тај модел, чиме је кохеренцијски проблем свео на стандардну аксиоматизацију симетричних група. У савременом смислу се кохеренција најчешће баш тако и интерпретира, односно под утврђивањем кохеренције одређеног типа категорија се сматра проналажење верног функтора из тог типа категорије у категорију у којој је провера једнакости стрелица значајно једноставнија. За више детаља о таквом приступу упућујемо на [14, Увод, Одељак 2.9, Одељак 5.1].

Резултати кохеренције, било у изворном било у савременом схватању, од великог су општег значаја. Конкретно, у теорији доказа омогућавају формирање задовољавајућег критеријума за једнакост извођења у неким дедуктивним системима.

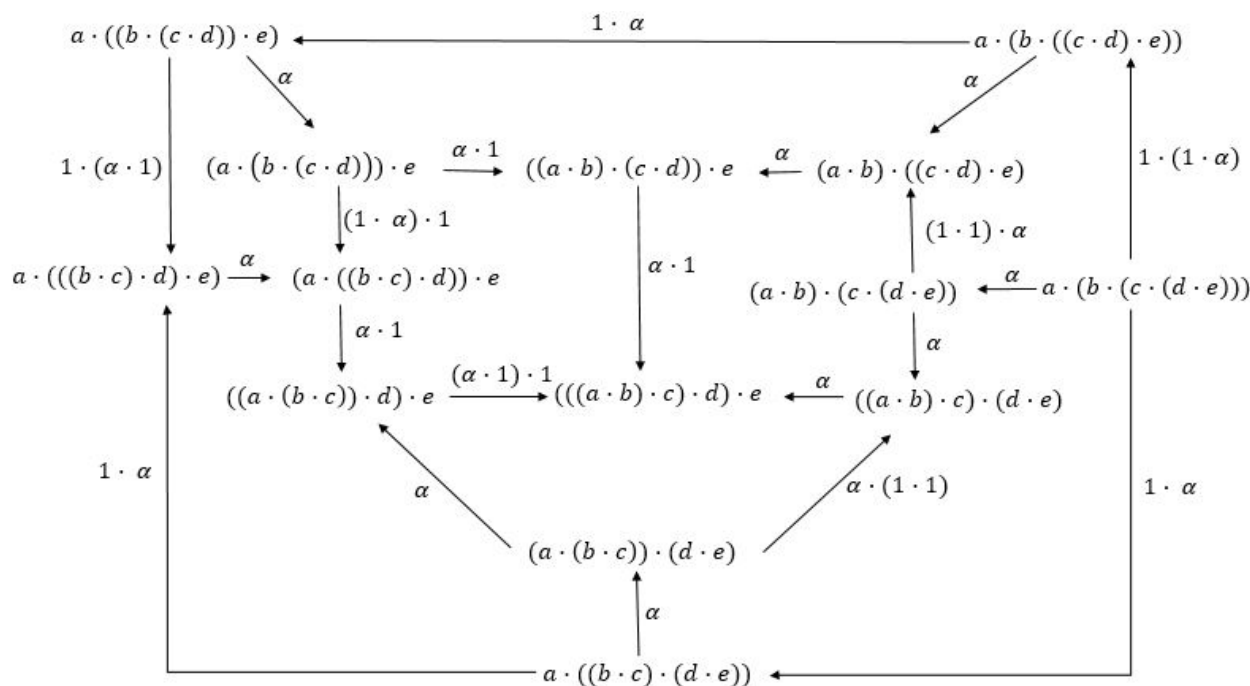
2.2 Тополошки докази кохеренције

Обе своје теореме кохеренције Меклејн је практично већ доказао у [33], само у нешто другачијој формулацији (видети [33, Теорема 3.1, Теорема 4.2]). Тада је, конкретно у случају моноидалних категорија, полазећи од категорије која је слободно генерисана скупом слова $\{a, b, c, \dots\}$, посматрао дијаграме чија су темена правилно асоциране речи (производи) од n слова (објекти настали применом множења $n - 1$ пут), а ивице инстанце α стрелице, тј. стрелице α и α^{-1} или њихови производи са јединичним морфизмима. Није манипулисао изоморфизмима λ и ϱ , па су у једном таквом дијаграму две речи повезане инстанцом α стрелице када се једна од друге могу добити преасоциравањем тачно једног пара заграда. Индукцијом по растојању од нормалне форме, доказао је да сви такви дијаграми комутирају, под претпоставком (базом индукције) да комутира основни петугаони дијаграм у чијим су теменима речи од 4 слова (видети дијаграм (1) у претходном одељку) и уз ослањање на природност и бифункторијалност. Затим је, у [34], темена дијаграма моноидалне категорије посматрао као речи у којима је допуштено и празно слово (слово I) дужине нула, и наравно, инстанце основних стрелица λ и ϱ . Иако у теменима оваквог дијаграма могу бити речи које нису добијене применом множења једнак број пута, описао је процедуру којом се они релативно једноставно свде на дијаграме моноидалне категорије чије су ивице само инстанце α стрелице и чије нам је комутирање већ загарантовано. Ово свођење, тј. проглашавање објекта I правим неутралом, очигледан је пример стриктификације.

На пример, ако су темена неког дијаграма моноидалне категорије речи састављене од 5 непразних и произвољног броја празних слова (случај $n = 5$), он се своди на један од дијаграма од којих је састављен граф на Слици 2.1. Приметимо да је овај граф „поплочан” дијаграмима који су или инстанце петougла (1) или четвороугла природне трансформације. Лако се да препознати да илустровани

граф одговара графу 3-асоциедра (видети дефиницију апстрактног асоциедра у Пододељку 1.2, Сliku 1.9 и Дефиницију 1.1.5): темена илустрованог графа одговарају теменима политопа (производу $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ који је правилно заграђен са три пара заграда), ивице одговарају ивицама политопа (истом производу који је заграђен са два пара заграда), а области (петоуглови и четвороуглови) одговарају 2-странама (истом производу који је заграђен само једним паром заграда).

Џим Сташев је исте 1963.године, независно од Меклејна, бавећи се хомотопском асоцијативношћу H -простора и карактеризацијом простора петљи у [44], показао да, за свако n , за граф који одговара илустрованом постоји одговарајући $(n - 3)$ -ћелијски комплекс (видети Напомену 1.2.1). Касније се показало да се та фамилија комплекса и геометријски може реализовати фамилијом политопа које зовемо асоциедрима. То наизглед нема нарочите везе са кохеренцијом, али се испоставља да тај резултат и Теорема 2.1.1 имају идентичан математички садржај, иако се до њега дошло потпуно другачијим приступом и средствима. Другим речима, Сташевљев резултат представља алтернативни *тополошки* доказ кохеренције моноидалних категорија.



Слика 2.1: Визуелизација кохеренције моноидалних категорија по угледу на [33, Одељак 3]

Није ово једини тип категорија за који постоји тополошки доказ кохеренције, што ћемо се касније и уверити. Управо су тополошки докази кохеренције симетричних моноидалних категорија најзначајнији резултати ове дисертације, па ћемо сада посветити томе нешто више пажње. Посматраћемо нешто општији случај којим свакако обухватамо и моноидалне и симетричне моноидалне категорије.

Претпоставимо да са једне стране имамо категорију одређеног типа која је слободно генерисана скупом објеката $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. Тип категорије подразумева да су задати одређени канонски морфизми и да су претпостављене неке основне једнакости, тј. задати су основни дијаграми који комутирају. Полазимо од претпоставке да су све канонске стрелице категорије коју посматрамо изоморфизми.

Можемо конструисати (*псеудо*)граф \mathcal{G} чија су темена објекти категорије, а два темена A и B су повезана ивицом када у категорији постоји морфизам $f: A \rightarrow B$ који је инстанца неког претпостављеног изоморфизма (у случају моноидалне категорије то су стрелице α , α^{-1} и њихове композиције са јединичним морфизмима, а у случају симетричних моноидалних категорија то су још и γ стрелице и њихове композиције са јединичним морфизмима). Све стрелице су инвертибилне, па ивице графа нису усмерене. Подразумевамо и да су канонски изоморфизми такви да свака компонента повезаности овог графа садржи објекте са једнаким бројем појављивања сваког елемената скупа ω . Дакле, сваки елемент скупа ω , па и специјални објекат I , представља по једну једноелементну компоненту повезаности категорије.

Поврх свега, претпостављамо и да је категорија таквог типа да, попут симетричне моноидалне, допушта да се диверсификацијом кохеренцијски резултат формулише у апсолутном смислу. Тада нам је за питање кохеренције довољно посматрање само оних компоненти повезаности графа \mathcal{G} које садрже диверсификоване објекте, тј. објекте категорије у којима се елементи скупа ω не понављају. Конкретно, за свако $n \in \omega$, довољна нам је компонента која садржи објекат

$$0 \cdot (1 \cdot (\dots \cdot n) \dots)$$

(она која у случају моноидалних категорија одговара графу илустрованом на Слици 2.1 када је $n = 4$). Означимо је са \mathcal{G}_n .

Претпоставимо да, са друге стране, за свако $n \in \omega$, тј. сваки граф \mathcal{G}_n , имамо ћелијски комплекс K_n чије све 0-ћелије одговарају теменима графа \mathcal{G}_n , 1-ћелије одговарају његовим ивицама, а свака 2-ћелија одговара некој претпостављеној једнакости, тј. неком основном комутативном дијаграму. Ако се овај комплекс може геометријски реализовати као политоп, онда можемо закључити да комутирају сви дијаграми који укључују објекте које укључује \mathcal{G}_n , чиме смо обезбедили тополошки доказ теореме кохеренције посматраног типа категорије.

Међутим, да смо заиста слободни то да закључимо, односно да је постојање политопа који геометријски реализују све ове комплексе довољно за кохеренцију, према нашем увиду, у литератури нема формалног доказа, већ се ова импликација подразумева као очигледна. Ипак, имајући у виду да је то основа тезе, покажимо да ова импликација заиста важи.

За сваки ћелијски комплекс K_n можемо формирати кратки *ланчasti комплекс* (видети [26, Одељак 2.0])

$$0 \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial^2} C_1 \xrightarrow{\partial^1} C_0 \rightarrow 0,$$

где су C_0 , C_1 и C_2 слободне комутативне групе које су редом генерисане оријентисаним 0-ћелијама, 1-ћелијама и 2-ћелијама комплекса K_n . Ове ћелије редом одговарају 0-странама, 1-странама и 2-странама политопа P_n који геометријски реализује K_n . Елементе ових комутативних група зовемо редом 0-*ланцима*, 1-*ланцима* и 2-*ланцима*, а граничне хомоморфизме ∂^1 и ∂^2 редом 1-*границом* и 2-*границом*. За посматрање прве хомолошке групе нашег политопа P_n ,

$$H_1 = \text{Ker } \partial^1 / \text{Im } \partial^2,$$

довољно је да прецизно дефинишемо 1-границу и 2-границу.

Претпоставимо да смо слободним избором оријентације усмерили све ивице политопа, тј. задали оријентацију генератора групе 1-ланаца. Слободним

избором можемо оријентисати и 2-стране политопа, тј. генераторе групе 2-ланаца. Наиме, сваку 2-страну можемо посматрати као један 2-политоп у простору \mathbf{R}^2 , па за оријентацију сваке од њих имамо слободу избора једне од две могућности (позитивну или негативну оријентацију у односу на кретање казаљки часовника). На сличан слободан начин би се могла бирати и оријентација осталих страна.

Усмерена ивица $a = \overrightarrow{A_1A_2}$ се 1-границом $\partial^1: C_1 \rightarrow C_0$ слика у 0-ланац

$$A_2 - A_1.$$

Назовимо 1-циклом сваки 1-ланац који се 1-границом слика у неутрал групе 0-ланаца. Приметимо да је сума 1-ланаца који формирају кружну путању по ивицама политопа један 1-цикл. Наиме, у том случају су сви сабирци или генератори групе 1-ланаца или њихови инверзи и за свако теме у таквој путањи постоји тачно један сабирак који у њега долази и тачно један сабирак који из њега креће.

Ако границу оријентисане 2-стране чини низ усмерених ивица a_1, \dots, a_k , онда се та 2-страна 2-границом $\partial^2: C_2 \rightarrow C_1$ пресликава у 1-ланац

$$\delta(1)a_1 + \dots + \delta(k)a_k,$$

при чему је, за свако $i \in [k]$,

$$\delta(i) = \begin{cases} 1, & \text{ако се оријентација коју индукује оријентација 2-стране} \\ & \text{поклапа са оријентацијом ивице } a_i, \\ -1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Сваки 2-ланац се, као линеарна комбинација оријентисаних 2-страна, 2-границом слика у линеарну комбинацију 1-ланаца који су 1-цикли (кружне путање по граници неке 2-стране). Све ово имплицира да је композиција $\partial^1\partial^2$ тривијално пресликавање, тј. пресликавање које све слика у неутрал групе 0-ланаца. Дакле, $\text{Im } \partial^2$ је подгрупа групе $\text{Ker } \partial^1$ и посецањем $\text{Ker } \partial^1/\text{Im } \partial^2$ добијамо прву хомологију H_1 .

Пошто се K_n геометријски реализује као *контрактибилан простор*, тј. простор који се хомотопски идентификује са тачком, његова прва хомологија је тривијална према [26, Тврђење 2.8]. Дакле, $\text{Ker } \partial^1/\text{Im } \partial^2$ је тривијална група, што значи да је сваки 1-цикл 2-граница неког 2-ланца.

Сваки дијаграм који укључује објекте које укључује \mathcal{G}_n , посматрајући га као низ стрелица, можемо, слободно речено, исцртати као кружну путању по ивицама политопа P_n . То нам дозвољава чињеница да су све претпостављене канонске стрелице инвертибилне. Према горњим закључцима, то значи да је сваки такав дијаграм 1-цикл, а тиме и 2-граница неког 2-ланца. Одатле следи да се тај дијаграм може поплочати 2-ћелијама које представљају претпостављене једнакости. Из могућности поплочавања претпостављеним комутативним дијаграмима, очигледно је и његово комутирање.

Овим смо коначно и сасвим оправдали то што смо политопима доделили главну улогу у овој дисертацији.

Природно се намеће закључак да су, поред асоциедара, и пермутоедри интересантни са становишта тополошког доказивања кохеренције. Наиме, пермутоедри, уз стриктификацију асоцијативности коју је урадио Меклејн, дају прави тополошки доказ кохеренције симетричних моноидалних категорија.

Други тополошки доказ овог типа категорија, без стриктификације асоцијативности, дао је Михаил Капранов 1993. године у [30]. Он је дефинисао фамилију ћелијских комплекса \mathbf{KP}_n чија темена одговарају правилно заграђеним речима (производима) од n пермутованих различитих слова. Успео је да покаже да се, за свако n , \mathbf{KP}_n може геометријски реализовати као $(n - 1)$ -политоп, чиме је дао директан тополошки доказ кохеренције симетричних моноидалних категорија. Пронашао је 3-политоп који реализује \mathbf{KP}_4 (Слика 2.3 лево), а убрзо након тога, у [40], Виктор Рајнер и Гинтер Циглер су успели да реализују све Капрановљеве ћелијске комплексе као фамилију политопа. Ова фамилија, као својеврстан хибрид фамилије асоциедара и фамилије пермутоедара, носи назив *пермутаасоциедри* и представља прву фамилију политопа која геометријски интерпретира удружено дејство асоцијативности и комутативности.

Међутим, за свако $n \geq 4$, политоп који реализује \mathbf{KP}_n није прост. Како су и асоциедар и пермутоедар прости политопи, природно је потражити другу фамилију комплекса која се да реализовати простим политопима, а да се као таква може искористити као тополошки доказ кохеренције симетричних моноидалних категорија. То је један од главних задатака ове тезе.

О комбинаторици фамилије политопа која ће одговорити постављеном задатку, било је донекле речи у Пододељку 1.2.3. Наиме, одговарајући комплекси припадају фамилији двоструко угњежђених скупова за коју, према Теорему 1.2.6, постоји геометријска реализација простим политопима. У овом случају, реч је о политопима који настају сукцесивним зарубљивањем пермутоедра према истом рецепту по коме зарубљивањем симплекса настају асоциедри. У Одељку 3.1 ћемо детаљно описати ову фамилију комплекса, након чега ћемо се, у остатку тезе, бавити њеним геометријским реализацијама. Реализација изложена у Пододељку 3.3.3 имплицитно нуди процедуру по којој се могу реализовати и други политопи из фамилије проширеног интервала нестоедара, а који би можда могли послужити у тополошким доказима кохеренције неких типова категорија.

2.3 Варирање генератора симетричних моноидалних категорија

У овом одељку ћемо формализовати главну разлику између Капрановљевог приступа који води до његове фамилије пермутаасоциедара и нашег приступа који води до фамилије простих пермутаасоциедара. Како теменима обе фамилије одговарају потпуно заграђене речи од n различитих пермутованих слова, суштинска разлика је, просто речено, у ивицама. Прецизније, разлика је у избору стрелица које генеришу симетрију у симетричним моноидалним категоријама.

Кренимо од симетричне моноидалне категорије \mathcal{A} која је слободно генерисана скупом објеката $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$. У Одељку 2.1 смо дефинисали генераторе симетричних моноидалних категорија, тј. основне стрелице и основне једнакости, а касније смо, врло слободно без нарочитог залажења у формалне детаље, одређене стрелице категорије једноставно звали инстанцама основних стрелица. Генерално, све стрелице неког типа категорије су *терми* који формирају класе еквиваленције (једнакости), а у зависности од тога какав се језик одабере да се ти терми изграде, постављају се различите основне једнакости које производе све стрелице категорије. У случају наше категорије \mathcal{A} , терме ћемо дефинисати тако да одговарају приступу Капранова.

(1.1) За $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$, јединични морфизам $\mathbf{1}_A: A \rightarrow A$ је **1-терм**;

(1.2) за **1-терме** f и g , $(f \cdot g)$ је **1-терм**.

(α .1) За $A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{A}) - I$, $\alpha_{A,B,C}: A \cdot (B \cdot C) \rightarrow (A \cdot B) \cdot C$ и $\alpha_{A,B,C}^{-1}: (A \cdot B) \cdot C \rightarrow A \cdot (B \cdot C)$ су α -терми;

(α .2) за α -терм f и **1-терм** g , $(f \cdot g)$ и $(g \cdot f)$ су α -терми.

(γ .1) За $p, q \in \omega$, $\gamma_{p,q}: p \cdot q \rightarrow q \cdot p$ је γ -терм;

(γ .2) за γ -терм f и **1-терм** g , $(f \cdot g)$ и $(g \cdot f)$ су γ -терми.

(t .1) Сваки **1-терм**, α -терм и γ -терм је терм;

(t .2) ако су $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$ терми, онда је $gf: A \rightarrow C$ терм.

На пример,

$$\alpha_{2,4,1,5}^{-1}(\alpha_{2,4,1} \cdot \mathbf{1}_5)((\mathbf{1}_2 \cdot \gamma_{1,4}) \cdot \mathbf{1}_5)(\alpha_{2,1,4}^{-1} \cdot \mathbf{1}_5): ((2 \cdot 1) \cdot 4) \cdot 5 \rightarrow (2 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 5)$$

је терм.

Неутралу композиције су јединични морфизми, важи $\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cdot B}$ и дијаграми који следе комутирају за све α -терме или γ -терме f , g и $f \cdot (g \cdot h)$. Такође, све претпостављене једнакости важе и у контексту.

$$\begin{array}{ccc} A \cdot B & \xrightarrow{f \cdot \mathbf{1}} & A' \cdot B \\ \mathbf{1} \cdot g \downarrow & & \downarrow \mathbf{1} \cdot g \\ A \cdot B' & \xrightarrow{f \cdot \mathbf{1}} & A' \cdot B' \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ccc} A \cdot (B \cdot C) & \xrightarrow{\alpha} & (A \cdot B) \cdot C \\ \mathbf{1} \downarrow & \swarrow \alpha^{-1} & \downarrow \mathbf{1} \\ A \cdot (B \cdot C) & \xrightarrow{\alpha} & (A \cdot B) \cdot C \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{ccc} & A \cdot (B \cdot (C \cdot D)) & \\ & \swarrow \mathbf{1} \cdot \alpha & \searrow \alpha \\ A \cdot ((B \cdot C) \cdot D) & & (A \cdot B) \cdot (C \cdot D) \\ \alpha \downarrow & & \\ (A \cdot (B \cdot C)) \cdot D & & \\ & \swarrow \alpha \cdot \mathbf{1} & \swarrow \alpha \\ & ((A \cdot B) \cdot C) \cdot D & \end{array} \quad (7)$$

$$\begin{array}{ccc} A \cdot (B \cdot C) & \xrightarrow{\alpha} & (A \cdot B) \cdot C \\ f \cdot (g \cdot h) \downarrow & & \downarrow (f \cdot g) \cdot h \\ A' \cdot (B' \cdot C') & \xrightarrow{\alpha} & (A' \cdot B') \cdot C' \end{array} \quad (8)$$

$$\begin{array}{ccc}
 p \cdot q & \xrightarrow{\gamma} & q \cdot p \\
 \mathbf{1} \downarrow & \nearrow \gamma & \\
 p \cdot q & &
 \end{array} \quad (9)$$

$$\begin{array}{c}
 p \cdot (q \cdot r) \xrightarrow{\mathbf{1} \cdot \gamma} p \cdot (r \cdot q) \\
 \alpha \swarrow \quad \searrow \alpha \\
 (p \cdot q) \cdot r \quad (p \cdot r) \cdot q \\
 \gamma \cdot \mathbf{1} \swarrow \quad \searrow \gamma \cdot \mathbf{1} \\
 (q \cdot p) \cdot r \quad (r \cdot p) \cdot q \\
 \alpha^{-1} \downarrow \quad \downarrow \alpha^{-1} \\
 q \cdot (p \cdot r) \quad r \cdot (p \cdot q) \\
 \mathbf{1} \cdot \gamma \swarrow \quad \searrow \mathbf{1} \cdot \gamma \\
 q \cdot (r \cdot p) \quad r \cdot (q \cdot p) \\
 \alpha \swarrow \quad \searrow \alpha \\
 (q \cdot r) \cdot p \xrightarrow{\gamma \cdot \mathbf{1}} (r \cdot q) \cdot p
 \end{array} \quad (10)$$

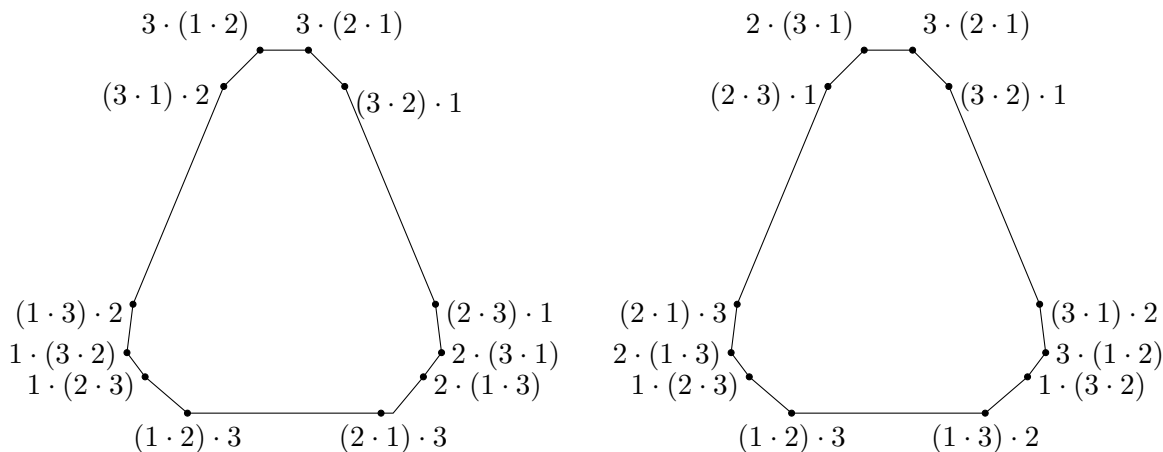
Сада се може изградити и (псеудо)граф \mathcal{G} чија су темена објекти категорије \mathcal{A} , а темена A и B су спојена ивицом када постоји α -терм или γ -терм $f: A \rightarrow B$. Видимо да \mathcal{G} поседује петље. На пример, $\gamma_{p,p}$ је терм, па постоји ивица која спаја $p \cdot p$ са самим собом. Приметимо и да све компоненте повезаности графа \mathcal{G} садрже објекте са једнаким бројем појављивања елемената скупа ω . Према претходном одељку, за питање кохеренције, довољно је, за свако $n \in \omega$, посматрати компоненту повезаности \mathcal{G}_n графа \mathcal{G} која садржи објекат $0 \cdot (1 \cdot (\dots \cdot n) \dots)$.

У складу са претходним одељком, за тополошки доказ, довољно је, за сваки граф \mathcal{G}_n пронаћи ћелијски комплекс, који се може геомтеријски реализовати као политоп, а да притом 0-ћелије одговарају теменама графа \mathcal{G}_n , 1-ћелије одговарају његовим ивицама, а 2-ћелије одговарају четвороугловима (5) и (8), петоугловима (7) и дванаестоугловима (10), што је Капранов и постигао.

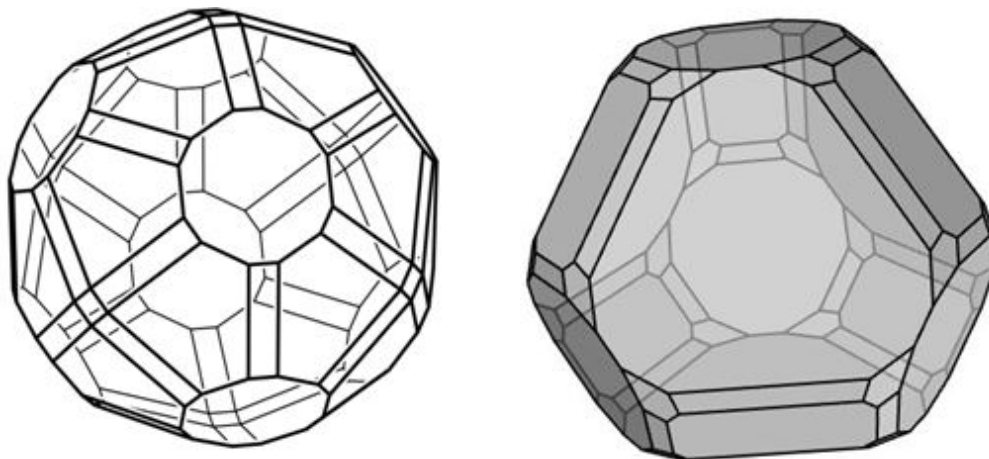
На Слици 2.2 и Слици 2.3, лево су илустровани политопи KP_3 и KP_4 који реализују Капрановљеве комплексе \mathbf{KP}_n за $n = 3$ и $n = 4$. Већ код 3-политопа KP_4 можемо уочити темена која нису проста. На пример, теме које одговара производу $(2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 4)$ је суседно са четири темена која одговарају производима $(2 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1)$, $((2 \cdot 3) \cdot 4) \cdot 1$, $2 \cdot (3 \cdot (1 \cdot 4))$ и $(3 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 4)$.

Десно су приказани прости политопи PA_2 и PA_3 чија се темена комбинаторно дефинишу на исти начин као темена политопа KP_3 и KP_4 —као правилно заграђени производи пермутованих цифара 1, 2 и 3, односно 1, 2, 3 и 4. Међутим, за разлику од ивица Капрановљевих политопа које одговарају или једном преасоциравању (α -терм) или једној транспозицији две суседне цифре груписане заједно (γ -терм), ивице политопа PA_2 и PA_3 одговарају једном преасоциравању или једној транспозицији две суседне цифре које *нису* груписане заједно, тј. „најнеочекиваној” транспозицији суседа. Тако, теме политопа PA_3 које одговара производу $(2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 4)$ има само три суседна темена која одговарају производима $((b \cdot c) \cdot a) \cdot d$, $b \cdot (c \cdot (a \cdot d))$ и $(b \cdot a) \cdot (c \cdot d)$. Ова есенцијална разлика видљива је чак и међу политопима KP_3 и PA_2 .

Сада ћемо формално описати приступ који одводи до свих простих пермутоасоциедара PA_n . Конструисаћемо категорију \mathcal{A}' , тако да је $Obj(\mathcal{A}') = Obj(\mathcal{A})$, за коју ћемо показати да је, до на преименовање стрелица, идентична категорији \mathcal{A}' .



Слика 2.2: 2-пермутоасоциедри KP_3 и PA_2



Слика 2.3: 3-пермутоасоциедри KP_4 [40, Пододељак 9.3] и PA_3

Дефинишимо најпре *леви*, *десни* и *средишњи контекст* који су нам потребни за формализовање поменуте најмање очекиване транспозиције суседа. Символ \square је и леви и десни контекст. Ако је L леви контекст, R десни контекст и $A \in Obj(\mathcal{A}')$, онда је $(A \cdot L)$ леви контекст, $(R \cdot A)$ десни контекст, а $(R \cdot L)$ средишњи контекст.

Ако су L , R и M редом леви, десни и средишњи контексти, и $a, b \in \omega$, онда La означава објекат категорије \mathcal{A}' добијен заменом \square у L елементом a . Аналогно су дефинисани и објекти bR и bMa . Очигледно је да за свако $A \in Obj(\mathcal{A}') - I$, постоји јединствени леви контекст L и јединствено $a \in \omega$ (најдешње појављивање неког елемента скупа ω у A за које је A једнако La). Исто важи и за десне контексте, а и за средишње контексте када је A објекат настао бар једним множењем (садржи \cdot).

Терме категорије \mathcal{A}' дефинишемо исто као терме категорије \mathcal{A} , осим што ставке $(\gamma.1)$ и $(\gamma.2)$ замењујемо ставком

(σ) За објекте La и bR , $\sigma_{La,bR}: La \cdot bR \rightarrow Lb \cdot aR$ је σ -терм,

а у ставци $(t.1)$, „ γ -терм” замењујемо са „ σ -терм”.

На пример,

$$\sigma_{2,1,4,5} \alpha_{2,1,4,5}^{-1} : ((2 \cdot 1) \cdot 4) \cdot 5 \rightarrow (2 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 5)$$

је терм.

Стрелице категорије \mathcal{A}' су дефинисане релацијом еквиваленције на термима, коју генеришу комутативни дијаграми (5), (6), (7) и (8) (при чему су f , g и $f \cdot (g \cdot h)$ искључиво α -терми) и комутативни дијаграми (11), (12), (13) и (14) који укључују σ -терме.

$$\begin{array}{ccc}
 La \cdot bR & \xrightarrow{\sigma} & Lb \cdot aR \\
 \mathbf{1} \downarrow & \swarrow \sigma & \\
 La \cdot bR & &
 \end{array} \quad (11)$$

$$\begin{array}{ccc}
 La \cdot bR \xrightarrow{f \cdot \mathbf{1}} L'a \cdot bR & La \cdot bR \xrightarrow{\mathbf{1} \cdot g} La \cdot bR' & \\
 \sigma \downarrow & \downarrow \sigma & \downarrow \sigma \\
 Lb \cdot aR \xrightarrow{f_b^a \cdot \mathbf{1}} L'b \cdot aR & Lb \cdot aR \xrightarrow{\mathbf{1} \cdot g_a^b} Lb \cdot aR' &
 \end{array} \quad (12)$$

$$\begin{array}{ccc}
 La \cdot (bMc \cdot dR) \xrightarrow{\sigma} Lb \cdot (aMc \cdot dR) & & \\
 \alpha \swarrow & & \searrow \alpha \\
 (La \cdot bMc) \cdot dR & & (Lb \cdot aMc) \cdot dR \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\
 (La \cdot bMd) \cdot cR & & (Lb \cdot aMd) \cdot cR \\
 \alpha^{-1} \swarrow & & \searrow \alpha^{-1} \\
 La \cdot (bMd \cdot cR) \xrightarrow{\sigma} Lb \cdot (aMd \cdot cR) & &
 \end{array} \quad (13)$$

$$\begin{array}{ccc}
 La \cdot (b \cdot cR) \xrightarrow{\sigma} Lb \cdot (a \cdot cR) & & \\
 \alpha \swarrow & & \searrow \alpha \\
 (La \cdot b) \cdot cR & & (Lb \cdot a) \cdot cR \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\
 (La \cdot c) \cdot bR & & (Lb \cdot c) \cdot aR \\
 \alpha^{-1} \downarrow & & \downarrow \alpha^{-1} \\
 La \cdot (c \cdot bR) & & Lb \cdot (c \cdot aR) \\
 \sigma \swarrow & & \swarrow \sigma \\
 Lc \cdot (a \cdot bR) & & Lc \cdot (b \cdot aR) \\
 \alpha \swarrow & & \searrow \alpha \\
 (Lc \cdot a) \cdot bR \xrightarrow{\sigma} (Lc \cdot b) \cdot aR & &
 \end{array} \quad (14)$$

У дијаграму (12), $f : La \rightarrow L'a$ и $g : bR \rightarrow bR'$ су α -терми, а $f_b^a : Lb \rightarrow L'b$ и $g_a^b : aR \rightarrow aR'$ су одговарајући α -терми добијени међусобном заменом a и b на истакнутим позицијама у f и g . Наравно, једнакости (5), (6), (7) и (8) важе и у контексту, док контекст нема никаквог смисла за једнакости (11), (12), (13) и (14).

Није тешко дефинисати σ -терме помоћу γ -терма и α -терма, а онда и индукцијом показати да једнакости (11), (12), (13) и (14) важе у категорији \mathcal{A} (једнакости (9), (8) за γ -терм $f \cdot (g \cdot h)$, (5) за γ -терме f и g , и (10), су у том доказу кључне). Што се тиче другог смера, γ -терми се такође дају лако изразити преко σ -терма и α -терма. Наша фамилија политопа, PA_n (видети Одељак 3.2) или $PA_{n,c}$

(видети Пододељак 3.3.3), биће гарант да све једнакости категорије \mathcal{A} , са изведеним γ -термима, важе у категорији \mathcal{A}' . Дакле, категорије \mathcal{A} и \mathcal{A}' су исте, до на преименовање стрелица.

Нека је \mathcal{G}' (псеудо)граф са истим скупом темена као граф \mathcal{G} , а темена A и B су повезана ивицом када постоји α -терм или σ -терм $f : A \rightarrow B$. Као и у случају графа \mathcal{G} , означимо са \mathcal{G}'_n ону компоненту повезаности графа \mathcal{G}' која садржи објекат $0 \cdot (1 \cdot (\dots \cdot n) \dots)$. Приметимо да је \mathcal{G}'_n n -регуларан граф, тј. свако његово теме је садржано у тачно n ивица ($n - 1$ α -терма и један σ -терм). Ако постоји прост n -политоп, чији је граф баш \mathcal{G}'_n , онда су сви такви политопи комбинаторно еквивалентни (видети [4] и [29]). Наш задатак је да, за свако n , реализујемо прост n -политоп чији је граф управо \mathcal{G}'_n и покажемо да све његове 2-стране одговарају четвороугловима (5), (8) и (12), петоугловима (7), осмоугловима (13) и дванаестоугловима (14).

Глава 3

Прост пермутоасоциедар

3.1 Апстрактни пермутоасоциедар

У Пододељку 1.2.3 је описана итеративна процедура конструисања комплекса чије геометријске реализације чине фамилију простих политопа која генерализује фамилију нестоедара проширујући стандардни интервал од симплекса до пермутоедра. Водећи се овом процедуром формирајмо комплекс који одговара простом пермутоасоциедру.

Нека је, као и до сада,

$$C_0 = \mathcal{P}([n+1]) - \{[n+1]\},$$

и нека је \mathcal{B}_0 максимални градивни скуп комплекса C_0 , тј.

$$\mathcal{B}_0 = C_0 - \{\emptyset\}.$$

Према Пододељку 1.2.2, пермутоедар \mathbf{P}_{n+1} реализује комплекс $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_0)$. Означимо га са C_1 , а његове елементе назовимо *0-угњежђеним скуповима*. Минимални 0-угњежђени скупови облика $\{B\}$, $B \in \mathcal{B}_0$, одговарају пљоснима пермутоедра, док максимални 0-угњежђени скупови одговарају његовим теменама, тј. пермутацијама скупа $[n+1]$, па их је укупно $(n+1)!$. Како је $C_0 - \mathcal{B}_0 = \{\emptyset\}$, Дефиниција 1.2.7 имплицира да су свака два елемента 0-угњежђеног скупа упоредива. То даље значи, у складу са Напоменом 1.2.4, да две правилно означене пљосни пермутоедра имају заједничко теме ако и само ако су им ознаке упоредиве. Такође, како су максимални 0-угњежђени скупови кардиналности n , они су облика

$$\{\{i_n, \dots, i_1\}, \dots, \{i_n, i_{n-1}\}, \{i_n\}\},$$

где су i_1, \dots, i_n међусобно различити елементи скупа $[n+1]$. Овај 0-угњежђени скуп одговара пермутацији

$$i_{n+1}i_1 \dots i_n,$$

при чему је $\{i_{n+1}\} = [n+1] - \{i_1, \dots, i_n\}$. На пример, у случају $n = 3$, скуп $\{\{2, 3, 4\}, \{2, 4\}, \{2\}\}$ је максимални 0-угњежђени скуп који одговара пермутацији 1342 (видети Сliku 3.6).

Дакле, градивни скуп \mathcal{B}_0 је задат тако да сукцесивним зарубљивањем симплекса доведе до пермутоедра, а у наредној итерацији је потребно дефинисати нови рецепт, градивни скуп \mathcal{B}_1 комплекса C_1 , који прописује наставак сукцесивног зарубљивања до пермутоасоциедра. Грубо речено, очекујемо да овај рецепт, локално у сваком темену пермутоедра, створи један $(n-1)$ -асоциедар. Са тим

циљем, за сваки максимални 0-угњежђени скуп формирамо граф који одговара асоциедру димензије $n - 1$, тј. стазу од n темена. Прецизније, горе наведеном максималном 0-угњежђеном скупу придружујемо стазу

$$\overline{\{i_n, \dots, i_1\}} \quad \{i_n, \dots, i_2\} \quad \dots \quad \overline{\{i_n, i_{n-1}\}} \quad \{i_n\}$$

Приметимо да је скуп темена ове стазе повезан када је то скуп темена неке њене повезане подстазе.

Нека је $\mathcal{B}_1 \subseteq C_1$ колекција свих скупова облика

$$\{\{i_{k+l}, \dots, i_k, \dots, i_1\}, \dots, \{i_{k+l}, \dots, i_k, i_{k-1}\}, \{i_{k+l}, \dots, i_k\}\},$$

за $1 \leq k \leq k+l \leq n$ и међусобно различите елементе i_1, \dots, i_{k+l} скупа $[n+1]$. Дакле, \mathcal{B}_1 је скуп свих непразних повезаних скупова темена стаза које одговарају максималним 0-угњежђеним скуповима. У складу са Дефиницијом 1.2.5, \mathcal{B}_1 заиста јесте градивни скуп комплекса C_1 . На крају, означимо са \mathcal{C} комплекс $\mathcal{N}(C_1, \mathcal{B}_1)$ формиран од угњежђених скупова у односу на скуп \mathcal{B}_1 , а све елементе комплекса назовимо *1-угњежђеним скуповима*. Теорема 1.2.6, заједно са [36, Тврђење 8.3 и Тврђење 9.3], гарантује да постоји прост n -политоп који геометријски реализује \mathcal{C} , па су максимални 1-угњежђени скупови кардиналности n .

Напомена 3.1.1. Елементи скупа $C_1 - \mathcal{B}_1$ су облика $\{A_1, \dots, A_r\}$, при чему је

$$2 \leq r \leq n - 1, \quad [n+1] \supset A_1 \supset \dots \supset A_r \quad \text{и} \quad \exists i |A_i - A_{i+1}| \geq 2.$$

Тврђење 3.1.1. *Скуп $N \subseteq \mathcal{B}_1$ је 1-угњежђен скуп ако и само ако је унија свака његова два неупоредива елемента припада скупу $C_1 - \mathcal{B}_1$.*

Доказ: Смер с лева на десно следи директно из Дефиниције 1.2.7. Нека је \mathcal{A} један N -антиланац. Према претпоставци тврђења и претходној напомени, произвољна два елемента скупа \mathcal{A} су облика $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_r}\}$ и $\{A_{j_1}, \dots, A_{j_q}\}$, при чему је $A_{i_1} \supset \dots \supset A_{i_r} \supset A_{j_1} \supset \dots \supset A_{j_q}$, $|A_{i_k} - A_{i_{(k+1)}}| = 1 = |A_{j_k} - A_{j_{(k+1)}}|$ и $|A_{i_r} - A_{j_1}| \geq 2$. Дакле, на скупу \mathcal{A} се може дефинисати линеарно уређење на природан начин, па је $\bigcup \mathcal{A}$ подскуп неког максималног 0-угњежђеног скупа, односно припада C_1 . Неједнакост $|A_{i_r} - A_{j_1}| \geq 2$ гарантује да постоји „рупа” у уређењу скупа \mathcal{A} из које проистиче да $\bigcup \mathcal{A}$ не припада \mathcal{B}_1 . \square

Следи директна последица претходног тврђења и Напомене 1.2.4.

Последица 3.1.2. *Нека је P политоп који геометријски реализује комплекс \mathcal{C} и нека су све његове пљосни правилно означене. Две пљосни политопа P имају заједничко теме ако и само ако су њихове ознаке упоредиве или је унија њихових ознака елемент скупа $C_1 - \mathcal{B}_1$.*

Пример 3.1.1. Када је $n = 2$, градивни скуп \mathcal{B}_1 је скуп

$$\begin{aligned} & \{\{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1, 3\}, \{1\}\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, \\ & \{\{1, 2\}\}, \{\{1, 3\}\}, \{\{2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{2\}\}, \{\{1, 3\}, \{3\}\}, \{\{2, 3\}, \{3\}\} \}. \end{aligned}$$

Укупно је 12 максималних 1-угњежђених скупова:

$$\begin{aligned} & \{\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1\}\}\}, \quad \{\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1, 2\}\}\}, \quad \{\{\{1, 2\}, \{2\}\}, \{\{2\}\}\}, \\ & \{\{\{1, 2\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\}\}, \quad \{\{\{1, 3\}, \{1\}\}, \{\{1\}\}\}, \quad \{\{\{1, 3\}, \{1\}\}, \{\{1, 3\}\}\}, \\ & \{\{\{1, 3\}, \{3\}\}, \{\{3\}\}\}, \quad \{\{\{1, 3\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}\}\}, \quad \{\{\{2, 3\}, \{3\}\}, \{\{3\}\}\}, \\ & \{\{\{2, 3\}, \{3\}\}, \{\{2, 3\}\}\}, \quad \{\{\{2, 3\}, \{2\}\}, \{\{2\}\}\}, \quad \{\{\{2, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}\}\}. \end{aligned}$$

Унију свих њихових подскупова, комплекс C , геометријски реализује дванаестоугао (видети Слику 3.2).

Пример 3.1.2. У случају $n = 3$, укупно је 120 максималних 1-угњежђених скупова, по 24 од сваког од следећих 5 облика:

$$\begin{aligned} & \{ \{ \{ i_3, i_2, i_1 \}, \{ i_3, i_2 \}, \{ i_3 \} \}, \{ \{ i_3, i_2, i_1 \} \}, \{ \{ i_3 \} \} \}, \\ & \{ \{ \{ i_3, i_2, i_1 \}, \{ i_3, i_2 \}, \{ i_3 \} \}, \{ \{ i_3, i_2 \}, \{ i_3 \} \}, \{ \{ i_3 \} \} \}, \\ & \{ \{ \{ i_3, i_2, i_1 \}, \{ i_3, i_2 \}, \{ i_3 \} \}, \{ \{ i_3, i_2 \}, \{ i_3 \} \}, \{ \{ i_3, i_2 \} \} \}, \\ & \{ \{ \{ i_3, i_2, i_1 \}, \{ i_3, i_2 \}, \{ i_3 \} \}, \{ \{ i_3, i_2, i_1 \}, \{ i_3, i_2 \} \}, \{ \{ i_3, i_2 \} \} \}, \\ & \{ \{ \{ i_3, i_2, i_1 \}, \{ i_3, i_2 \}, \{ i_3 \} \}, \{ \{ i_3, i_2, i_1 \}, \{ i_3, i_2 \} \}, \{ \{ i_3, i_2, i_1 \} \} \}, \end{aligned}$$

при чему су i_1 , i_2 и i_3 међусобно различити елементи скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. Конкретно, максимални 1-угњежђени скупови који садрже скуп $M = \{ \{1, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{1\} \}$ су следећих 5 скупова:

$$\begin{aligned} N = & \{ M, \{ \{1, 3, 4\} \}, \{ \{1\} \} \}, \quad \{ M, \{ \{1, 4\}, \{1\} \}, \{ \{1\} \} \}, \quad \{ M, \{ \{1, 4\}, \{1\} \}, \{ \{1, 4\} \} \}, \\ & \{ M, \{ \{1, 3, 4\}, \{1, 4\} \}, \{ \{1, 4\} \} \}, \quad \{ M, \{ \{1, 3, 4\}, \{1, 4\} \}, \{ \{1, 3, 4\} \} \}. \end{aligned}$$

Приметимо да у максималним 1-угњежђеним скуповима првог облика постоји антиланац $\{ \{ \{ i_3, i_2, i_1 \} \}, \{ \{ i_3 \} \} \}$ чија унија $\{ \{ i_3, i_2, i_1 \}, \{ i_3 \} \}$ не припада \mathcal{B}_1 , док у осталим нема антиланаца.

У Додатку А.3, за $2 \leq n \leq 7$, дато је компјутерско решење за исписивање максималних 0-угњежђених и максималних 1-угњежђених скупова.

Ако је N један 1-угњежђен скуп, онда постоји максимални 0-угњежђени скуп M такав да је сваки елемент скупа N подскуп скупа M , тј.

$$N \subseteq \mathcal{B}_1^M = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{P}(M),$$

и тада кажемо да је N *изведен* из M . У претходном примеру, свих пет наведених 1-угњежђених скупова су изведени из истог 0-угњежђеног скупа–скупа M . Ако је N максималан, тада је скуп из кога је изведен јединствен и то је управо онај максимални 0-угњежђени скуп који припада N . Исто важи и за остале 1-угњежђене скупове који садже неки максималан 0-угњежђен скуп. У супротном, када N не садржи максималан 0-угњежђен скуп, скуп из кога је изведен није јединствен.

Напомена 3.1.2. Сваки елемент скупа \mathcal{B}_1 је садржан у неком максималном 1-угњежђеном скупу.

За максимални 0-угњежђени скуп M , у складу са Дефиницијом 1.2.2, линк $C^{\{M\}}$ је колекција подскупова који не садрже M свих 1-угњежђених скупова који садрже M . Комплекс $C^{\{M\}}$ је повезан са $(n-1)$ -асоциедром на исти начин на који је комплекс C_1 повезан са n -пермутоедром, тј. \mathbf{K}_{n+1} геометријски реализује $C^{\{M\}}$. Ово је последица добро познатих тврђења које се тичу угњежђених скупова који формирају комплексе који одговарају асоциедрима (видети [17] или [9]). Дакле, из датог максималног 0-угњежђеног скупа изведено је тачно c_n максималних 1-угњежђених скупова, што значи да их је укупно

$$c_n(n+1)! = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}(n+1)! = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Главна питање ове дисертације тиче се управо комплекса C .

Питање 3.1.3. Како, у складу са Дефиницијом 1.1.1 или Дефиницијом 1.1.2, дефинисати прост n -политоп који геометријски реализује C ?

Одговор на ово суштинско питање најпре је дат у Одељку 3.2 задавањем полупростора у чијем пресеку се тражени политоп налази. Након тога, у Одељку 3.3, дефинисана је читава фамилија n -политопа која представља n -димензионалну Минковски-реализацију комплекса C .

Пре најављених геометријских реализација, покажимо да је граф политопа који реализује комплекс C заправо граф \mathcal{G}'_n и да 2-стране таквог политопа одговарају дијаграмима (5), (8), (12), (7), (13) и (14) из Одељка 2.3. Елементе комплекса C који су придружени теменима, ивицама и 2-странама политопа који га реализује назовимо редом његовим 0 -странама, 1 -странама и 2 -странама.

3.1.1 0-стране

Већ је установљено да су 0-стране комплекса C максимални 1-угњежђени скупови. Покажимо да свакој 0-страни једнозначно одговара потпуно заграђена реч која је производ пермутованих елемената скупа $[n + 1]$.

Нека је V једна 0-страна изведена из скупа

$$M = \{ \{i_n, \dots, i_1\}, \dots, \{i_n, i_{n-1}\}, \{i_n\} \}.$$

Почнимо од речи коју чини $n + 1$ празна позиција. Позиције чувају простор за по један елемент скупа $[n + 1]$ и међусобно су одвојене тачкама. Тачке су означене елементима скупа M у опадајућем поретку у односу на релацију \subseteq :

$$\begin{array}{ccccccc} \{i_n, \dots, i_1\} & & \{i_n, i_{n-1}\} & & \{i_n\} & & \\ \text{---} & & \text{---} & \dots & \text{---} & & \text{---} \end{array}$$

Свака ознака представља елементе скупа $[n + 1]$ који се јављају десно од означене тачке. Дакле, добијамо производ

$$i_{n+1} \begin{array}{c} \{i_n, \dots, i_1\} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} i_1 \begin{array}{c} \{i_n, \dots, i_2\} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \dots \begin{array}{c} \{i_n, i_{n-1}\} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} i_{n-1} \begin{array}{c} \{i_n\} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} i_n,$$

где је $\{i_{n+1}\} = [n + 1] - \{i_1, \dots, i_n\}$. Евентуално, за сваки елемент скупа V потребно је убацили пар заграда које укључују све ознаке садржане у том елементу.

Пример 3.1.3. Ако је $n = 2$, онда скуп $V = \{ \{ \{1, 2\}, \{1\} \}, \{ \{1, 2\} \} \}$ представља 0-страну која одговара потпуном заграђивању

$$((3 \begin{array}{c} \{1,2\} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} 2) \begin{array}{c} \{1\} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} 1).$$

На Слици 3.2, V одговара темену у коме се секу ивице означене са $\{ \{1, 2\} \}$ и $\{ \{1, 2\}, \{1\} \}$.

Пример 3.1.4. За $n = 3$ и $M = \{ \{1, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{1\} \}$, скуп $V = \{ M, \{ \{1\} \}, \{ \{1, 3, 4\} \} \}$ представља 0-страну која одговара потпуном заграђивању

$$((2 \begin{array}{c} \{1,3,4\} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} 3) \begin{array}{c} \{1,4\} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} (4 \begin{array}{c} \{1\} \\ \cdot \\ \cdot \end{array} 1)).$$

На Слици 3.6, ова 0-страна одговара темену у коме се секу дванаестоуглови означени са $\{ \{1, 3, 4\} \}$ и $\{ \{1\} \}$ и петоугао који покрива теме 2341 и коме одговара ознака M .

Такође, за свако потпуно заграђивање производа $i_{n+1} \cdot i_1 \cdot \dots \cdot i_n$, постоји јединствена 0-страна која му одговара, па су, дакле, 0-стране комплекса C у 1-1 кореспонденцији са теменима графа \mathcal{G}'_n .

3.1.2 1-страни

Уклањањем једног елемента из неке 0-страни комплекса C настаје његова 1-страна. У зависности од тога да ли је уклоњен баш максимални угњежђени скуп или не, разликујемо два типа 1-страни комплекса C : 1-страна *првог типа* садржи максималан 0-угњежђен скуп, док га 1-страна *другог типа* не садржи.

Нека је E једна 1-страна првог типа и

$$M = \{\{i_n, \dots, i_1\}, \dots, \{i_n, i_{n-1}\}, \{i_n\}\}$$

максимални 0-угњежђени скуп садржан у E . Онако како је потпуно заграђивање производа $i_{n+1} \cdot i_1 \cdot \dots \cdot i_n$ додељено 0-страни, тако се и 1-страни E додељује исти заграђени производ из кога је избачен један пар заграда. Очигледно је да постоје тачно две 0-страни које садрже све елементе 1-страни E . Њима одговарају потпуно заграђени производи који настају убацивањем једног пара заграда у заграђивање које одговара E . Дакле, свака 1-страна првог типа одговара једном α -терму.

Пример 3.1.5. Ако је $n = 2$, скуп $E = \{\{\{1, 2\}, \{1\}\}\}$ је онда 1-страна првог типа која одговара заграђивању

$$(3 \begin{smallmatrix} \{1,2\} \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 2 \begin{smallmatrix} \{1\} \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 1).$$

0-страна V из Примера 3.1.3 и 0-страна $V' = \{\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1\}\}\}$, која одговара потпуном заграђивању

$$(3 \begin{smallmatrix} \{1,2\} \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} (2 \begin{smallmatrix} \{1\} \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 1)),$$

су једине 0-страни од којих је 1-страна E могла настати. На Слици 3.2, E одговара ивици са ознаком $\{\{1, 2\}, \{1\}\}$.

Пример 3.1.6. Ако је $n = 3$ и $M = \{\{1, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{1\}\}$, онда скуп $E = \{M, \{\{1\}\}\}$ представља 1-страну првог типа којој одговара заграђивање

$$(2 \begin{smallmatrix} \{1,3,4\} \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 3 \begin{smallmatrix} \{1,4\} \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} (4 \begin{smallmatrix} \{1\} \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 1)).$$

0-страна V из Примера 3.1.4 и 0-страна $V' = \{M, \{\{1, 4\}, \{1\}\}, \{\{1\}\}\}$, која одговара потпуном заграђивању

$$(2 \cdot (3 \cdot (4 \cdot 1))),$$

су једине 0-страни од којих је 1-страна E могла настати. На Слици 3.6, E одговара ивици која је заједничка за дванаестоугао означен са $\{\{1\}\}$ и петоугао који покрива теме 2341 и коме одговара ознака M .

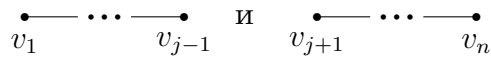
Као у случају 0-страни, за свако заграђивање производа $i_{n+1} \cdot i_1 \cdot \dots \cdot i_n$ са изостављеним једним паром заграда, постоји јединствена 1-страна првог типа која му одговара.

Да бисмо описали 1-страни другог типа, уведимо додатну нотацију по узору на општију форму уведена у [15]. *Конструкција* стазе

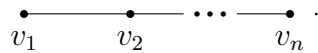
$$\bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \quad n \geq 1, \\ v_1 \qquad v_2 \qquad \qquad v_n$$

је подскуп скупа $\mathcal{P}(\{v_1, \dots, v_n\})$ индуктивно дефинисан на следећи начин:

- (1) ако је $n = 1$, онда је $\{\{v_1\}\}$ конструкција стазе од једног темена v_1 ;
- (2) ако је $n > 1$, $1 \leq j \leq n$, а L и D редом конструкције стаза



(када је $j = 1$, тада је $L = \emptyset$, а када је $j = n$, тада је $D = \emptyset$), онда је $\{\{v_1, \dots, v_n\}\} \cup L \cup D$ конструкција стазе

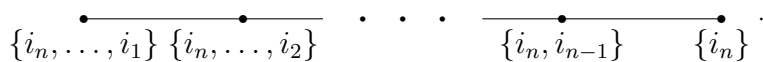


Напомена 3.1.3. Ако је K конструкција горе наведене стазе од n темена, онда је $\{v_1, \dots, v_n\} \in K$ и $|K| = n$.

Тврђење 3.1.4. V је θ -страна изведена из

$$\{\{i_n, \dots, i_1\}, \dots, \{i_n, i_{n-1}\}, \{i_n\}\}$$

ако и само ако је V конструкција стазе



Доказ: Тврђење следи директно из [15, Тврђење 6.11]. □

Тврђење 3.1.5. За Каталанове бројеве важи следећа рекурзивна формула:

$$c_0 = 1 \quad \text{и} \quad c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i}.$$

Доказ: Асоциедар димензије $n-1$ реализује комплекс $C^{\{M\}}$ (видети Одељак 3.1 и Пододељак 1.2.1), па је према претходном тврђењу, укупан број његових темена, тј. n -ти Каталанов број, једнак укупном броју конструкција стазе од n темена. Формула се даље лако изводи из дефиниције конструкције стазе. □

За 1-угњежђен скуп N и $A \in N$, елемент $a \in A$ је A -површински у односу на N када за сваки елемент $B \in N$ такав да је $B \subset A$ важи $a \notin B$. Укупан број A -површинских елемената у односу на N означимо са $\nu_N(A)$.

Напомена 3.1.4. Дефиниција конструкције стазе и Тврђење 3.1.4 повлаче да за сваку θ -стану V и сваки елемент $A \in V$ важи $\nu_V(A) = 1$.

Нека је E сада 1-страна другог типа, тј. нека је добијена од неке θ -стране V уклањањем њеног максималног θ -угњежђеног скупа M . Према претходној напомени, $\nu_V(M) = 1$, па је отуда $\bigcup E$ облика

$$\{\{i_n, \dots, i_1\}, \dots, \{i_n, \dots, i_{j-1}\}, \{i_n, \dots, i_{j+1}\}, \dots, \{i_n\}\},$$

што је у граничним случајевима

$$\{\{i_n, \dots, i_2\}, \dots, \{i_n\}\} \quad \text{или} \quad \{\{i_n, \dots, i_1\}, \dots, \{i_n, i_{n-1}\}\}.$$

Полазећи од $\bigcup E$ и примењујући исти поступак као за θ -стране и 1-стране првог типа, добијамо следећи производ са две празне позиције које чувају простор:

$$i_{n+1} \quad \{i_n, \dots, i_1\} \quad i_1 \cdot \dots \cdot i_{j-2} \quad \{i_n, \dots, i_{j-1}\} \quad _ \cdot _ \quad \{i_n, \dots, i_{j+1}\} \quad i_{j+1} \cdot \dots \cdot _ \quad \{i_n\} \quad i_n.$$

Потпуно заграђивање овог производа се реконструише на исти начин као у случају 0-страна. (Формално, најспољашњији пар заграда се изоставља, али се подразумева.) Приметимо да се следећи парови заграда морају укључити:

$$(i_{n+1} \begin{smallmatrix} \{i_n, \dots, i_1\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} i_1 \dots i_{j-2} \begin{smallmatrix} \{i_n, \dots, i_{j-1}\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} _) \cdot (_ \begin{smallmatrix} \{i_n, \dots, i_{j+1}\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} i_{j+1} \dots \begin{smallmatrix} \{i_n\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} i_n).$$

И сада постоје тачно две 0-стране које садрже све елементе 1-стране E . Оне одговарају двема пермутацијама елемената i_{j-1} и i_j на празним позицијама производа. Дакле, свака 1-страна другог типа одговара једном σ -терму.

Пример 3.1.7. Ако је $n = 2$, скуп $E = \{\{\{1, 2\}\}\}$, E је онда 1-страна другог типа која одговара заграђивању

$$(3 \begin{smallmatrix} \{1, 2\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} _) \cdot _ ,$$

0-страна V из Примера 3.1.3 и 0-страна $V'' = \{\{\{1, 2\}, \{2\}\}, \{\{1, 2\}\}\}$ која одговара потпуном заграђивању

$$((3 \begin{smallmatrix} \{1, 2\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 1) \begin{smallmatrix} \{2\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 2),$$

су једине 0-стране од којих је 1-страна E могла настати. На Слици 3.2, E одговара ивици означеној са $\{\{1, 2\}\}$.

Пример 3.1.8. Ако је $n = 3$ и $E = \{\{\{1\}\}, \{\{1, 3, 4\}\}\}$, E је онда 1-страна другог типа која одговара заграђивању

$$(2 \begin{smallmatrix} \{1, 3, 4\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} _) \cdot (_ \begin{smallmatrix} \{1\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 1).$$

0-страна V из Примера 3.1.4 и 0-страна

$$V'' = \{\{\{1, 3, 4\}, \{1, 3\}, \{1\}\}, \{\{1\}\}, \{\{1, 3, 4\}\}\},$$

која одговара потпуном заграђивању

$$((2 \begin{smallmatrix} \{1, 3, 4\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 4) \begin{smallmatrix} \{1, 3\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} (3 \begin{smallmatrix} \{1\} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} 1)).$$

су једине 0-стране из којих је 1-страна E могла настати. На Слици 3.6, E одговара заједничкој ивици дванаестougлова чије су ознаке $\{\{1\}\}$ и $\{\{1, 3, 4\}\}$.

Слично, јединствена је 1-страна другог типа која одговара произвољном потпуно заграђеном производу са две празне позиције—једна крајње десно у левом фактору производа, а друга крајње лево у његовом десном фактору. Дакле, закључујемо да су 1-стране комплекса C у 1-1 кореспонденцији са ивицама графа \mathcal{G}_n^* .

3.1.3 2-стране

Уклањањем једног елемента из 1-страна комплекса C настају његове 2-стране. Разликујемо два типа 2-страна: 2-страна *првог типа* садржи максималан 0-угњежђен скуп, док га 2-страна *другог типа* не садржи.

Нека је F једна 2-страна првог типа и

$$M = \{\{i_n, \dots, i_1\}, \dots, \{i_n, i_{n-1}\}, \{i_n\}\}$$

максимални 0-угњежђени скуп садржан у F . Поново, онако како је потпуно заграђивање додељено 0-страни, тако се и 2-страни F додељује заграђивање производа $i_{n+1} \cdot i_1 \dots i_n$ са избачена два пара заграда. Могуће су три ситуације:

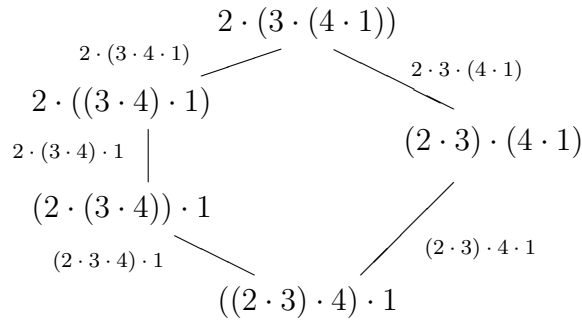
- (1.1) постоји елемент $A \in F$ за који је $\nu_F(A) = 3$;
- (1.2) постоје неупоредиви елементи $A, B \in F$ за које је $\nu_F(A) = \nu_F(B) = 2$;
- (1.3) постоје елементи $A, B \in F$, $B \subset A$, за које је $\nu_F(A) = \nu_F(B) = 2$.

Очигледно, у случају (1.1), постоји тачно пет 1-страна и тачно пет 0-страна које садрже све елементе стране F . Оне одговарају Меклејновом петоуглу (7). У случајевима (1.2) и (1.3), F је укључена у тачно четири 1-стране (које одговарају α -термима) и четири 0-стране. Притом, у случају (1.2), F одговара функторијалном четвороуглу (5), док у случају (1.3) одговара четвороуглу природне трансформације (8).

Пример 3.1.9. Ако је $n = 3$ и $F_1 = \{\{\{1, 3, 4\}, \{1, 4\}, \{1\}\}\}$, F_1 је онда 2-страна првог типа којој одговара заграђивање

$$(2^{\{1,3,4\}} 3^{\{1,4\}} 4^{\{1\}} 1),$$

и Меклејнов петоугао

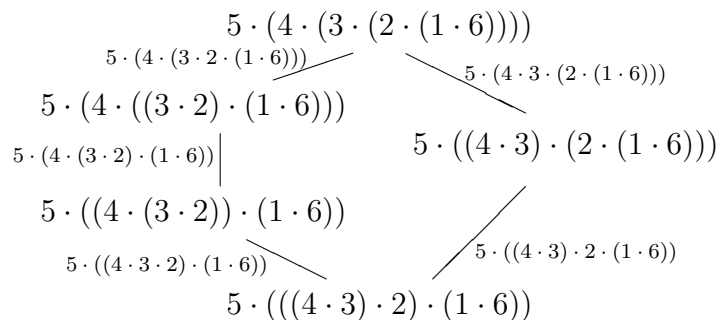


који на Слици 3.6 покрива теме 2341.

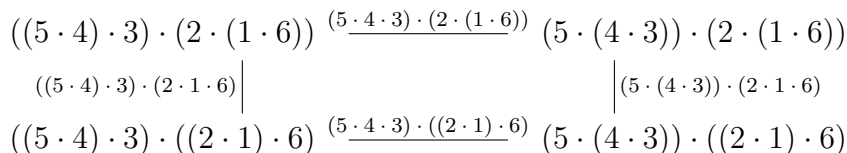
Пример 3.1.10. Нека је $n = 5$ и нека је M максимални 0-угњежђени скуп

$$\{\{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 6\}, \{6\}\}.$$

2-страни $F_1 = \{M, \{\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 6\}, \{6\}\}, \{\{6\}\}\}$ одговара заграђивање $(5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 6)))$ и илустровани петоугао.



2-страни $F_2 = \{M, \{\{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 6\}\}, \{\{1, 6\}, \{6\}\}\}$ одговара заграђивање $((5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 1 \cdot 6))$ и приказани четвороугао функторијалности.



2-страни $F_3 = \{M, \{\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 6\}, \{6\}\}, \{\{1, 6\}, \{6\}\}\}$ одговара заграђивање $(5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 6)))$ и приказани четвороугао природне трансформације.

$$\begin{array}{ccc} 5 \cdot ((4 \cdot 3) \cdot ((2 \cdot 1) \cdot 6)) & \xrightarrow{5 \cdot ((4 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 1 \cdot 6))} & 5 \cdot ((4 \cdot 3) \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6))) \\ 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot ((2 \cdot 1) \cdot 6)) & \Big| & 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6))) \\ 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot ((2 \cdot 1) \cdot 6))) & \xrightarrow{5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot 1 \cdot 6)))} & 5 \cdot (4 \cdot (3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6)))) \end{array}$$

Ако је F једнаа 2-страна другог типа, онда је

$$(2.1) \quad \left| \bigcup F \right| = n - 1 \quad \text{или} \quad (2.2) \quad \left| \bigcup F \right| = n - 2.$$

У случају (2.1), 2-страни F одговара четвороугао у форми дијаграма (12). У случају (2.2), $\bigcup F$ је облика

$$\{\{i_n, \dots, i_1\}, \dots, \{i_n, i_{n-1}\}, \{i_n\}\} - \{\{i_n, \dots, i_j\}, \{i_n, \dots, i_k\}\},$$

за $1 \leq j < k \leq n$, и притом разликујемо следеће две могуће ситуације:

(2.2.1) ако је $k - j > 1$, онда 2-страни F одговара осмоугао у форми дијаграма (13);

(2.2.2) ако је $k - j = 1$, онда 2-страни F одговара дванаестоугао у форми дијаграма (14).

Пример 3.1.11. Ако је $n = 5$, онда 2-страни

$$F_4 = \{\{\{1, 2, 3, 4, 6\}\}, \{\{1, 2, 6\}, \{1, 6\}, \{6\}\}, \{\{6\}\}\}$$

одговара заграђивање $(5 \cdot _) \cdot (_ \cdot 2 \cdot (1 \cdot 6))$ и приказани четвороугао у форми дијаграма (12).

$$\begin{array}{ccc} (5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6))) & \xrightarrow{(5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 6))} & (5 \cdot 4) \cdot ((3 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 6)) \\ (5 \cdot _) \cdot (_ \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6))) & \Big| & (5 \cdot _) \cdot ((_ \cdot 2) \cdot (1 \cdot 6)) \\ (5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6))) & \xrightarrow{(5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 6))} & (5 \cdot 3) \cdot ((4 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 6)) \end{array}$$

2-страни $F_5 = \{\{\{1, 2, 3, 4, 6\}\}, \{\{1, 2, 6\}\}, \{\{6\}\}\}$ одговара заграђивање

$$(5 \cdot _) \cdot (_ \cdot _) \cdot (_ \cdot 6),$$

при чему су прве две празне позиције резервисане за 3 и 4, а последње две за 1 и 2. 2-страни $F_6 = \{\{\{1, 2, 3, 4, 6\}\}, \{\{1, 6\}, \{6\}\}, \{\{6\}\}\}$ одговара заграђивање

$$(5 \cdot _) \cdot _ \cdot (_ \cdot (1 \cdot 6)) \quad .$$

Странама F_5 и F_6 редом одговарају приказани осмоугао у форми дијаграма (13) и дванаестоугао у форми дијаграма (14).

$$\begin{array}{ccc}
 & & (5 \cdot _) \cdot ((_ \cdot 1) \cdot (2 \cdot 6)) \\
 & & \swarrow \quad \searrow \\
 (5 \cdot 3) \cdot ((4 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 6)) & \xrightarrow{\quad} & (5 \cdot 4) \cdot ((3 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 6)) \\
 (5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 6) & & (5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 6) \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 ((5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 1)) \cdot (2 \cdot 6) & & ((5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 1)) \cdot (2 \cdot 6) \\
 ((5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot _)) \cdot (_ \cdot 6) & & | \quad | \quad | \\
 & & ((5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot _)) \cdot (_ \cdot 6) \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 ((5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 2)) \cdot (1 \cdot 6) & & ((5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 2)) \cdot (1 \cdot 6) \\
 (5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 6) & & (5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 6) \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 (5 \cdot 3) \cdot ((4 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 6)) & \xrightarrow{\quad} & (5 \cdot 4) \cdot ((3 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 6)) \\
 (5 \cdot _) \cdot ((_ \cdot 2) \cdot (1 \cdot 6)) & & (5 \cdot _) \cdot ((_ \cdot 2) \cdot (1 \cdot 6))
 \end{array} ,$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & (5 \cdot _) \cdot (_ \cdot (4 \cdot (1 \cdot 6))) \\
 & & \swarrow \quad \searrow \\
 (5 \cdot 2) \cdot (3 \cdot (4 \cdot (1 \cdot 6))) & \xrightarrow{\quad} & (5 \cdot 3) \cdot (2 \cdot (4 \cdot (1 \cdot 6))) \\
 (5 \cdot 2) \cdot 3 \cdot (4 \cdot (1 \cdot 6)) & & (5 \cdot 3) \cdot 2 \cdot (4 \cdot (1 \cdot 6)) \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 ((5 \cdot 2) \cdot 3) \cdot (4 \cdot (1 \cdot 6)) & & ((5 \cdot 3) \cdot 2) \cdot (4 \cdot (1 \cdot 6)) \\
 ((5 \cdot 2) \cdot _) \cdot (_ \cdot (1 \cdot 6)) & & | \quad | \quad | \\
 & & ((5 \cdot 3) \cdot _) \cdot (_ \cdot (1 \cdot 6)) \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 ((5 \cdot 2) \cdot 4) \cdot (3 \cdot (1 \cdot 6)) & & ((5 \cdot 3) \cdot 4) \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6)) \\
 (5 \cdot 2) \cdot 4 \cdot (3 \cdot (1 \cdot 6)) & & | \quad | \quad | \\
 & & (5 \cdot 3) \cdot 4 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6)) \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 (5 \cdot 2) \cdot (4 \cdot (3 \cdot (1 \cdot 6))) & & (5 \cdot 3) \cdot (4 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6))) \\
 (5 \cdot _) \cdot (_ \cdot (3 \cdot (1 \cdot 6))) & & | \quad | \quad | \\
 & & (5 \cdot _) \cdot (_ \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6))) \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 (5 \cdot 4) \cdot (2 \cdot (3 \cdot (1 \cdot 6))) & & (5 \cdot 4) \cdot (3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6))) \\
 (5 \cdot 4) \cdot 2 \cdot (3 \cdot (1 \cdot 6)) & & | \quad | \quad | \\
 & & (5 \cdot 4) \cdot 3 \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6)) \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 ((5 \cdot 4) \cdot 2) \cdot (3 \cdot (1 \cdot 6)) & \xrightarrow{\quad} & ((5 \cdot 4) \cdot 3) \cdot (2 \cdot (1 \cdot 6)) \\
 (5 \cdot 4) \cdot _ \cdot (_ \cdot (1 \cdot 6)) & & (5 \cdot 4) \cdot _ \cdot (_ \cdot (1 \cdot 6))
 \end{array} .$$

У Додатку А.3 је дат преглед 2-страна комплекса C у случају $n = 4$.

3.2 Геометријска реализација задавањем граничних полупростора - PA_n

За $1 \leq k \leq k+l \leq n$, нека је

$$\kappa(k, l) = \frac{3^{k+l+1} - 3^{l+1}}{2} + \frac{3^k - 3k}{3^n - n - 1}.$$

За елемент

$$\beta = \{ \{i_{k+l}, \dots, i_k, \dots, i_1\}, \dots, \{i_{k+l}, \dots, i_k, i_{k-1}\}, \{i_{k+l}, \dots, i_k\} \}$$

градивног скупа \mathcal{B}_1 , нека је π_β хиперраван у \mathbf{R}^{n+1} дефинисана једначином

$$x_{i_1} + 2x_{i_2} + \dots + k(x_{i_k} + \dots + x_{i_{k+l}}) = \kappa(k, l).$$

Напомена 3.2.1. Важи $\kappa(k, l) = 3^{l+1} + \dots + 3^{l+k} + \varepsilon(k)$ при чему је

$$\varepsilon(k) = \frac{3^k - 3k}{3^n - n - 1} < 1.$$

Нека је

$$PA_n = \left(\bigcap \{ \pi_\beta^\geq \mid \beta \in \mathcal{B}_1 \} \right) \cap \pi,$$

где је π хиперраван у \mathbf{R}^{n+1} дефинисана једначином

$$x_1 + \dots + x_{n+1} = 3^{n+1}.$$

Остатак овог поделења је посвећен доказу следеће теореме која даје одговор на Питање 3.1.3.

Теорема 3.2.1. PA_n је прост n -политоп који реализује комплекс C .

За свако $i \in [n+1]$, важи $\{\{i\}\} \in \mathcal{B}_1$, па је, према Примеру 1.1.5, PA_n садржан у n -симплексу

$$x_1 + \dots + x_{n+1} = 3^{n+1}, \quad x_i \geq 3, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Дакле, PA_n је ограничени пресек полупростора у \mathbf{R}^{n+1} , односно политоп у складу са Дефиницијом 1.1.2.

Нека је $\mathcal{B}_1^M = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{P}(M)$.

Лема 3.2.2. Ако су β и γ елементи скупа \mathcal{B}_1 за које је $\pi_\beta \cap \pi_\gamma \cap PA_n \neq \emptyset$, онда постоји максимални 0-угњежђени скуп M за који су β и γ елементи скупа \mathcal{B}_1^M .

Доказ: Претпоставимо да

(*) не постоји максимални 0-угњежђени скуп M за који важи $\beta, \gamma \in \mathcal{B}_1^M$.

Нека су π_β и π_γ редом хиперравни

$$y_1 + 2y_2 + \dots + k(y_k + \dots + y_{k+l}) = \kappa(k, l) \text{ и}$$

$$z_1 + 2z_2 + \dots + m(z_m + \dots + z_{m+p}) = \kappa(m, p),$$

при чему су $Y = \{y_1, \dots, y_{k+l}\}$ и $Z = \{z_1, \dots, z_{m+p}\}$ подскупови скупа променљивих $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, и нека је Σ сума

$$y_1 + 2y_2 + \dots + k(y_k + \dots + y_{k+l}) + z_1 + 2z_2 + \dots + m(z_m + \dots + z_{m+p}).$$

Покажимо да за сваку тачку $a(x_1, \dots, x_{n+1}) \in PA_n$ важи

$$\Sigma > \kappa(k, l) + \kappa(m, p),$$

што даље повлачи да су PA_n и хиперраван $\Sigma = \kappa(k, l) + \kappa(m, p)$ дисјунктни, а како је пресек $\pi_\beta \cap \pi_\gamma$ садржан у Σ , онда $a \notin \pi_\beta \cap \pi_\gamma$. Да бисмо то показали, користимо више пута следеће: ако су i_1, \dots, i_m међусобно различити елементи скупа $[n+1]$, онда $\{\{i_1, \dots, i_m\}\} \in \mathcal{B}_1$, и важи $x_{i_1} + \dots + x_{i_m} \geq 3^m$ за $a(x_1, \dots, x_{n+1}) \in PA_n$.

(1) Ако су Y и Z неупоредиви и $Y \cup Z = \{u_1, \dots, u_q\}$, онда је $q > k+l, m+p$ и

$$\Sigma \geq u_1 + \dots + u_q \geq 3^q \geq \frac{3^{k+l+1} + 3^{m+p+1}}{2} > \kappa(k, l) + \kappa(m, p).$$

(2) Ако је $Z \subset Y$, онда због (*) имамо три могућа закључка:

(2.1) $z_1 = y_i$ за неко $i \leq k-2$ и $\{z_2, \dots, z_{m+p}\} \subseteq \{y_k, \dots, y_{k+l}\}$, или

(2.2) $z_1 = y_{k-1}$ и $\{z_2, \dots, z_{m+p}\} \subset \{y_k, \dots, y_{k+l}\}$, или

(2.3) $\{z_2, \dots, z_{m+p}\} \not\subseteq \{y_k, \dots, y_{k+l}\}$.

У случају (2.1) важи $k+l-i \geq p+m$ и

$$\begin{aligned}
 \Sigma &\geq (y_1 + \dots + y_{l+k}) + \dots + (y_{i-1} + \dots + y_{l+k}) + 2(y_i + \dots + y_{l+k}) \\
 &\geq 3^{l+k} + \dots + 3^{l+k-i+2} + 2 \cdot 3^{l+k-i+1} \\
 &> 3^{l+k} + \dots + 3^{l+k-i+2} + 3^{l+k-i+1} + 2(3^{l+k-i} + \dots + 1) \\
 &\geq 3^{l+k} + \dots + 3^{l+1} + 1 + 3^{p+m} + \dots + 3^{p+1} + 1, \text{ јер је } k+l-i \geq p+m \\
 &> \kappa(k, l) + \kappa(m, p).
 \end{aligned}$$

У случају (2.2) важи $l+1 \geq p+m$, па се резонување своди на претходни случај када се i замени са $k-1$.

У случају (2.3), нека је i најмањи елемент скупа $[k-1]$ за који је $y_i = z_j$ за неко $j \in \{2, \dots, m+p\}$. Тада је $k+l-i+1 \geq p+m$ и

$$\begin{aligned}
 \Sigma &\geq (y_1 + \dots + y_{l+k}) + \dots + (y_{i-1} + \dots + y_{l+k}) + 3(y_i + \dots + y_{l+k}) \\
 &\geq 3^{l+k} + \dots + 3^{l+k-i+2} + 3 \cdot 3^{l+k-i+1} \\
 &> 3^{l+k} + \dots + 3^{l+k-i+2} + 2(3^{l+k-i+1} + \dots + 1) \\
 &\geq 3^{l+k} + \dots + 3^{l+1} + 1 + 3^{p+m} + \dots + 3^{p+1} + 1, \text{ јер је } k+l-i+1 \geq p+m \\
 &> \kappa(k, l) + \kappa(m, p).
 \end{aligned}$$

(3) Ако је $Z = Y$, онда (*) имплицира да постоји елемент $i \in [k-1]$ за који је, за неко $r \geq 1$, једначина хиперравни π_γ облика

$$y_1 + \dots + (i-1)y_{i-1} + (i+r)y_i + \dots = \kappa(m, p),$$

при чему су коефицијенти уз свако y_j , $j > i$, скривени у „...”, већи или једнаки i . Дакле,

$$\begin{aligned}
 \Sigma &\geq 2(y_1 + \dots + y_{l+k}) + \dots + 2(y_{i-1} + \dots + y_{l+k}) + 3(y_i + \dots + y_{l+k}) \\
 &\geq 2(3^{l+k} + \dots + 3^{l+k-i+1}) + 3^{l+k-i+1},
 \end{aligned}$$

а пошто је $3^{l+k-i+1} - 1 = 2(3^{k+l-i} + \dots + 1)$, следи

$$\Sigma > 2(3^{l+k} + \dots + 1) > \kappa(k, l) + \kappa(m, p).$$

□

Лема 3.2.3. Нека су Y и Z два неупоредива подскупа скупа $[n+1]$. Ако је

$$\sum_{i \in Y} x_i \leq 3^{|Y|}, \quad \sum_{i \in Z} x_i \leq 3^{|Z|} \quad \text{и} \quad x_i \geq 0, \text{ за свако } i \in Y \cup Z,$$

онда је

$$\sum_{i \in Y \cup Z} x_i < 3^{|Y \cup Z|}.$$

Доказ: Лема је база индуктивног доказа Леме 9.1 у [15]. □

У наставку се ослањамо на афину трансформацију која нормализује једначине хиперравни везане за \mathcal{B}_1^M где је $M = \{\{n, \dots, 1\}, \dots, \{n, n-1\}, \{n\}\}$. Наиме, нека је p ортогонална пројекција из хиперравни π на хиперраван $\pi^0 : x_{n+1} = 0$, и нека је PA_n^0 , p -слика политопа PA_n . Како је p бијективно афино пресликавање, важи

$PA_n \sim PA_n^0$ при чему p слика страну политопа PA_n у њој одговарајућу страну политопа PA_n^0 . Посматрајмо $n \times n$ матрице

$$L = \frac{1}{3^n - n - 1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad L^{-1} = (3^n - n - 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

и вектор $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3^n - 3^{n-1} \\ 3^{n-1} - 3^{n-2} \\ \vdots \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Нека је $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \pi^0$ бијективно афино пресликавање које тачку (x'_1, \dots, x'_n) простора \mathbf{R}^n слика у тачку $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \pi^0$ тако да је $x_{n+1} = 0$ и

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{w} + L \begin{pmatrix} x'_1 - 3 \\ \vdots \\ x'_n - 3 \end{pmatrix}.$$

Нека је $u = h^{-1} \circ p$ и нека је политоп PA'_n , u -слика политопа PA_n . Поново важи $PA_n \sim PA'_n$.

Ако је $\beta \in \mathcal{B}_1^M$, нађимо хиперраван простора \mathbf{R}^n која пресликавањем u одговара $\pi_\beta \cap \pi$. Елемент $\beta \in \mathcal{B}_1^M$ је облика

$$\{\{n, n-1, \dots, n-l, \dots, n-l-k+1\}, \dots, \{n, n-1, \dots, n-l\}\},$$

па назовимо скуп $Y = \{n-l-k+1, \dots, n-l\}$, u -кореспондентом елемента β . Означимо са Ξ леву страну следеће једначине која дефинише хиперраван $\pi_\beta \in \mathbf{R}^{n+1}$:

$$x_{n-l-k+1} + 2x_{n-l-k+2} + \dots + (k-1)x_{n-l-1} + k(x_{n-l} + \dots + x_n) = \kappa(k, l).$$

Ако је скуп Y , u -кореспондент елемента β , нека је π_Y хиперраван простора \mathbf{R}^n дефинисана једначином

$$\sum_{i \in Y} x'_i = 3^{|Y|}, \text{ тј. } x'_{n-l-k+1} + \dots + x'_{n-l} = 3^k.$$

Покажимо да је $\pi_\beta \cap \pi^0$, h -слика хиперравни π_Y . Из дефиниције пресликавања h следи

$$\begin{aligned} x_{n-l-k+1} &= 2 \cdot 3^{l+k-1} + \frac{1}{3^n - n - 1} (x'_{n-l-k+1} - x'_{n-l-k+2}) \\ &\vdots \\ x_{n-l} &= 2 \cdot 3^l + \frac{1}{3^n - n - 1} (x'_{n-l} - x'_{n-l+1}) \\ &\vdots \\ x_n &= 3 + \frac{1}{3^n - n - 1} (x'_n - 3), \text{ па је} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Xi &= 2 \cdot 3^{l+k-1} + 2 \cdot 2 \cdot 3^{l+k-2} + \dots + (k-1)2 \cdot 3^{l+1} + k(2 \cdot 3^l + \dots + 2 \cdot 3 + 3) \\ &\quad + \frac{1}{3^{n-n-1}}(x'_{n-l-k+1} + \dots + x'_{n-l} - 3k) \\ &= 3^{l+k} + 3^{l+k-1} + \dots + 3^{l+1} + \frac{1}{3^{n-n-1}}(x'_{n-l-k+1} + \dots + x'_{n-l} - 3k).\end{aligned}$$

Дакле,

$$\begin{aligned}\Xi = \kappa(k, l) &\Leftrightarrow \frac{1}{3^{n-n-1}}(x'_{n-l-k+1} + \dots + x'_{n-l} - 3k) = \frac{3^k - 3k}{3^{n-n-1}} \\ &\Leftrightarrow x'_{n-l-k+1} + \dots + x'_{n-l} = 3^k,\end{aligned}$$

што значи да је $\pi_\beta \cap \pi^0$, h -слика хиперравни π_Y , односно да π_Y пресликавањем u одговара $\pi_\beta \cap \pi$. Исто важи и за одговарајуће полупросторе π_Y^\geq и π_β^\geq . Дакле, бијективна u -кореспонденција између елемената скупа \mathcal{B}_1^M и елемената скупа

$$\mathcal{B} = \{\{n-l, \dots, n-l-k+1\} \mid 1 \leq k \leq k+l \leq n\}$$

је сведена на бијекцију између скупа хиперравни (полупростора) везаних за PA_n и скупа хиперравни (полупростора) везаних за PA'_n .

Приметимо да је \mathcal{B} скуп свих непразних повезаних скупова темена стазе

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \\ 1 \quad 2 \quad \quad \quad n \end{array},$$

односно градивни скуп скупа $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$, па се лако може проверити да важе следеће еквиваленције. Два елемента скупа \mathcal{B}_1^M су неупоредива ако и само ако су њихови u -кореспонденти неупоредиви. Унија два елемента скупа \mathcal{B}_1^M припада \mathcal{B}_1^M ако и само ако унија њихових u -кореспондената припада \mathcal{B} . Скуп $N \subseteq \mathcal{B}_1^M$ је 1-угњежђен скуп ако и само ако је скуп u -кореспондената елемената скупа N угњежђен скуп у односу на \mathcal{B} . Скуп $N \subseteq \mathcal{B}_1^M$ је конструкција стазе

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \text{---} \bullet \\ \{n, \dots, 1\} \quad \quad \quad \{n, n-1\} \quad \{n\} \end{array}$$

ако и само ако је скуп u -кореспондената елемената скупа N конструкција стазе

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \\ 1 \quad 2 \quad \quad \quad n \end{array}.$$

Лема 3.2.4. *Ако су β и γ два неупоредива елемента скупа \mathcal{B}_1 за која важи*

$$\pi_\beta \cap \pi_\gamma \cap PA_n \neq \emptyset,$$

онда $\beta \cup \gamma \in C_1 - \mathcal{B}_1$.

Доказ: Према Леми 3.2.2, постоји максимални 0-угњежђени скуп M за који $\beta, \gamma \in \mathcal{B}_1^M$. Због симетрије можемо претпоставити да је

$$M = \{\{n, \dots, 1\}, \dots, \{n, n-1\}, \{n\}\}.$$

(У том случају, пошто $\beta, \gamma \in \mathcal{B}_1^M$, x_{n+1} се не појављује ни у π_β ни у π_γ .)

Нека су $Y, Z \in \mathcal{B}$ редом u -кореспонденти елемената β и γ . Како су β и γ неупоредиви, такви су међусобно и Y и Z . Нека је $a \in \pi_\beta \cap \pi_\gamma \cap PA_n$ и $a' = u(a)$. Координате (x'_1, \dots, x'_n) тачке a' задовољавају једначине хиперравни π_Y и π_Z , па самим тим и неједначине полупростора π_Y^\leq и π_Z^\leq . Отуда, с обзиром да за свако

$i \in [n]$ важи $x'_i \geq 3$, скупови Y и Z и координате тачке a' задовољавају услове Леме 3.2.3. Дакле, унија $Y \cup Z$ не припада \mathcal{B} јер би у супротном важила неједнакост $\pi_{Y \cup Z}^{\geq}$, тј.

$$\sum_{i \in Y \cup Z} x'_i \geq 3^{|Y \cup Z|},$$

што је у контрадикцији са Лемом 3.2.3. Дакле, $\beta \cup \gamma \notin \mathcal{B}_1$, и, с обзиром да $\beta, \gamma \in \mathcal{B}_1^M$, закључујемо да $\beta \cup \gamma \in C_1 - \mathcal{B}_1$. \square

Следи последица Леме 3.2.4 и Тврђења 3.1.1.

Последица 3.2.5. *Ако су β_1, \dots, β_k елементи скупа \mathcal{B}_1 за које је*

$$\pi_{\beta_1} \cap \dots \cap \pi_{\beta_k} \cap PA_n \neq \emptyset,$$

онда је $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$, 1-угњежђен скуп.

Тврђење 3.2.6. *За свако теме v политопа PA_n постоји 0-страна V комплекса C тако да је*

$$\{v\} = \left(\bigcap \{ \pi_{\beta} \mid \beta \in V \} \right) \cap \pi,$$

док за сваки елемент $\gamma \in \mathcal{B}_1 - V$, $v \notin \pi_{\gamma}$.

Доказ: Нека је v теме политопа PA_n . Како се политоп налази у простору димензије $n + 1$, постоје $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathcal{B}_1$ за које је

$$\{v\} = \pi_{\beta_1} \cap \dots \cap \pi_{\beta_n} \cap \pi.$$

Према претходној последици, скуп $V = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ је 1-угњежђен. Како су максимални 1-угњежђени скупови кардиналности n , V је 0-страна комплекса C , и за сваки елемент $\gamma \in \mathcal{B}_1 - V$, $V \cup \{\gamma\}$ није 1-угњежђен, па према претходној последици, теме v не припада хиперравни π_{γ} . \square

Последица 3.2.7. *PA_n је прост n -политоп.*

Доказ: Следи директно из претходног тврђења, а с обзиром да свака 0-страна има тачно n елемената може се применити и [15, Тврђење 9.7]. \square

Тврђење 3.2.8. *За сваку 0-страну V комплекса C постоји теме v политопа PA_n тако да је*

$$\{v\} = \left(\bigcap \{ \pi_{\beta} \mid \beta \in V \} \right) \cap \pi.$$

Доказ: Довољно је да покажемо да за сваку 0-страну V комплекса C , пресек

$$\left(\bigcap \{ \pi_{\beta} \mid \beta \in V \} \right) \cap \pi$$

је само једна тачка која, за свако $\gamma \in \mathcal{B}_1 - V$, припада полупростору $\pi_{\gamma}^>$. Због симетрије опет можемо претпоставити да је $V = \{\beta_1, \dots, \beta_n\} \subseteq \mathcal{B}_1^M$ за

$$M = \{ \{n, \dots, 1\}, \dots, \{n, n-1\}, \{n\} \}.$$

За свако $i \in [n]$, нека је X_i , u -кореспондент елемента $\beta_i \in V$. Пошто је V конструкција стазе

$$\overset{\bullet}{\text{---}} \{n, \dots, 1\} \quad \dots \quad \overset{\bullet}{\text{---}} \{n, n-1\} \quad \overset{\bullet}{\text{---}} \{n\},$$

скуп $N = \{X_1, \dots, X_n\}$ је конструкција стазе

$$\bullet \text{---} \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet$$

1 2 n

Индукцијом по $n \geq 1$, покажимо да је пресек $\pi_{X_1} \cap \dots \cap \pi_{X_n}$ једна тачка. Ако је $n = 1$, онда је π_{X_1} тачка $x'_1 = 3$. Нека је $n > 1$ и нека су L и D редом конструкције стаза

$$\bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet \quad \text{и} \quad \bullet \text{---} \dots \text{---} \bullet,$$

1 j-1 j+1 n

при чему је $N = \{\{1, \dots, n\}\} \cup L \cup D$. Према индуктивној хипотези, пресеци

$$\bigcap \{\pi_{\beta_i} \mid \beta_i \in L\} \quad \text{и} \quad \bigcap \{\pi_{\beta_i} \mid \beta_i \in D\}$$

су тачке у одговарајућем $(j-1)$ -димензионалном, односно $(n-j)$ -димензионалном простору. Дакле, одређене су све координате $x'_1, \dots, x'_{j-1}, x'_{j+1}, \dots, x'_n$ неке тачке која припада пресеку $\pi_{X_1} \cap \dots \cap \pi_{X_n}$, па остаје само још да се одреди координата x'_j . Њена вредност је јединствена јер следи из једначине

$$x'_1 + \dots + x'_{j-1} + x'_j + x'_{j+1} + \dots + x'_n = 3^n$$

и вредности координата $x'_1, \dots, x'_{j-1}, x'_{j+1}, \dots, x'_n$.

Све ово имплицира да је пресек

$$\left(\bigcap \{\pi_{\beta} \mid \beta \in V\} \right) \cap \pi$$

само једна тачка, скуп $\{v\}$, па остаје још да се покаже да за свако $\gamma \in \mathcal{B}_1 - V$, $v \in \pi_{\gamma}^>$.

У горе поменутом израчунавању вредности координате x'_j тачке $u(v)$, с обзиром да је $x'_1 + \dots + x'_{j-1} = 3^{j-1}$ и $x'_{j+1} + \dots + x'_n = 3^{n-j}$, добија се

$$x'_j = 3^n - (3^{j-1} + 3^{n-j}) > 3^{n-1}.$$

Приметимо и да је $j \in [n]$ био $[n]$ -површински елемент у односу на N . Аналогно можемо закључити да ако је m X_i -површински елемент у односу на N , онда m -та координата тачке $u(v)$ задовољава неједнакост $x'_m > 3^{|X_i|-1}$.

Нека је $\gamma \in \mathcal{B}_1^M - V$ и $Y = \{n-l, \dots, n-l-k+1\} \in \mathcal{B}$ његов u -кореспондент. Како је $Y \in \mathcal{B} - N$, индукцијом по n се лако може доказати да постоји $X_i \in N$ тако да Y садржи X_i -површински елемент у односу на N и да је $Y \subset X_i$ (видети [15, Лема 6.14]). Дакле, постоји елемент $m \in \{n-l, \dots, n-l-k+1\}$ који је X_i -површински, при чему је $k < |X_i|$. Сада, на основу претходног параграфа, m -та координата тачке $u(v)$ задовољава неједнакост $x'_m > 3^{|X_i|-1}$, а како су све остале координате позитивне, следи да $u(v) \in \pi_Y^>$, тј.

$$x'_{n-l-k+1} + \dots + x'_{n-l} > 3^{|X_i|-1} \geq 3^k,$$

односно $v \in \pi_{\gamma}^>$.

За сваки други елемент $\gamma \in \mathcal{B}_1 - V$, тј. за елемент $\gamma \in \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_1^M$, посматрајмо политоп добијен у пресеку хиперравни π и полупростора облика

$$x_{i_1} + \dots + x_{i_k} \geq 3^k,$$

где су i_1, \dots, i_k међусобно различити елементи скупа $[n+1]$. Према Примеру 1.2.1, реч је о n -пермутоедру који реализује комплекс C_1 . Пресек овог пермутоедра и хиперравни

$$x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = \kappa(n, 0)$$

је $(n-1)$ -симплекс-конвексни омотач скупа тачака $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ (подсећамо да је

$$\varepsilon(n) = \frac{3^n - 3n}{3^n - n - 1}$$

као у Напомени 3.2.1):

$$\begin{aligned} & a_1(3^{n+1} - 3^n - \varepsilon(n), 3^n - 3^{n-1} + \varepsilon(n), 3^{n-1} - 3^{n-2}, \dots, 3), \\ & a_2(3^{n+1} - 3^n, 3^n - 3^{n-1} - \varepsilon(n), 3^{n-1} - 3^{n-2} + \varepsilon(n), \dots, 3), \\ & \quad \vdots \\ & a_n(3^{n+1} - 3^n, \dots, 3^3 - 3^2, 3^2 - 3 - \varepsilon(n), 3 + \varepsilon(n)). \end{aligned}$$

(Координате тачке a_i добијене као решење система

$$\begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = \kappa(n, 0) \\ & x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3^{n+1} \\ (1) \quad & x_1 + x_2 + \dots + x_n = 3^n \\ (2) \quad & x_2 + \dots + x_n = 3^{n-1} \\ & \quad \vdots \\ (n) \quad & x_n = 3, \end{aligned}$$

из кога је једначина (i) изостављена.)

Како је $\gamma \in \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_1^M$, једначина која дефинише хиперраван π_γ је

$$x_{i_1} + 2x_{i_2} + \dots + k(x_{i_k} + \dots + x_{i_{k+l}}) = \kappa(k, l),$$

при чему је $i_k < i_{k+1} < \dots < i_{k+l}$ и

(**) i_1, i_2, \dots, i_{k+l} нису узастопни чланови низа $1, 2, \dots, n$. Означимо са Ξ леву страну ове једначине.

Покажимо да за свако $i \in [n]$, координате (x_1, \dots, x_{n+1}) тачке a_i задовољавају неједначину $\pi_\gamma^>$, јер из тога, као и из чињенице да $v \in \text{conv}\{a_1, \dots, a_n\}$, следи да $v \in \pi_\gamma^>$.

(1) Ако се за неко $0 \leq m \leq n - l - k$, x_m појављује у Ξ , онда је

$$\begin{aligned} \Xi & > x_m > 3^{n+1-m} - 3^{n-m} - 1 = 2 \cdot 3^{n-m} - 1 = 2(3^{n-m} - 1) + 1 \\ & > \frac{3}{2}(3^{n-m} - 1) + 1 = \frac{3^{n-m+1} - 3}{2} + 1 \geq \frac{3^{l+k+1} - 3}{2} + 1 \\ & > \kappa(k, l). \end{aligned}$$

(2) Ако $i_1, \dots, i_{l+k} \in \{n - l - k + 1, \dots, n\}$, онда је Ξ облика

$$a_1x_{n-l-k+1} + a_2x_{n-l-k+2} + \dots + a_{l+k}x_n,$$

при чему је $a_m \geq 0$ за свако $0 \leq m \leq l+k$. Пошто важи (**), постоји $j \in [k-1]$ тако да је $a_j > j$, док је $a_m = m$ за свако $m \in [j-1]$. Отуда је

$$\begin{aligned} \Xi & \geq x_{n-l-k+1} + \dots + (j-1)x_{n-l-k+j-1} + j(x_{n-l-k+j} + \dots + x_n) + x_{n-l-k+j} \\ & = (x_{n-l-k+1} + \dots + x_n) + \dots + (x_{n-l-k+j} + \dots + x_n) + x_{n-l-k+j}. \end{aligned}$$

За i које је такво да $n - l - k + 1 \leq i \leq n - l - k + j$, координате (x_1, \dots, x_{n+1}) тачке a_i задовољавају неједначину

$$(x_{n-l-k+1} + \dots + x_n) + \dots + (x_{n-l-k+j} + \dots + x_n) > 3^{l+k} + \dots + 3^{l+k-j+1},$$

док за остале вредности i ова неједначина прелази у једнакост. Такође, $(n - l - k + j)$ -та координата $x_{n-l-k+j}$ тачке a_i је већа од $3^{l+k-j+1} - 3^{l+k-j} - 1$. Дакле,

$$\begin{aligned} \Xi &> 3^{l+k-j+1} \frac{3^j - 1}{2} + 3^{l+k-j+1} - 3^{l+k-j} - 1 \\ &= \frac{3^{l+k+1} - 3^{l+k-j+1} + 2 \cdot 3^{l+k-j+1} - 2 \cdot 3^{l+k-j}}{2} - 1 = \frac{3^{l+k+1} + 3^{l+k-j}}{2} - 1, \end{aligned}$$

а пошто је $k \geq j + 1$, следи

$$\Xi > \frac{3^{l+k+1} + 3^{l+1}}{2} - 1 > \frac{3^{l+k+1} - 3^{l+1}}{2} + 1 > \kappa(k, l).$$

□

Доказ Теореме 3.2.1. На основу Тврђења 3.2.6, Тврђења 3.2.8 и Последице 3.2.7, политоп PA_n је прост n -политоп чија је мрежа страна, без празне стране, уређени скуп

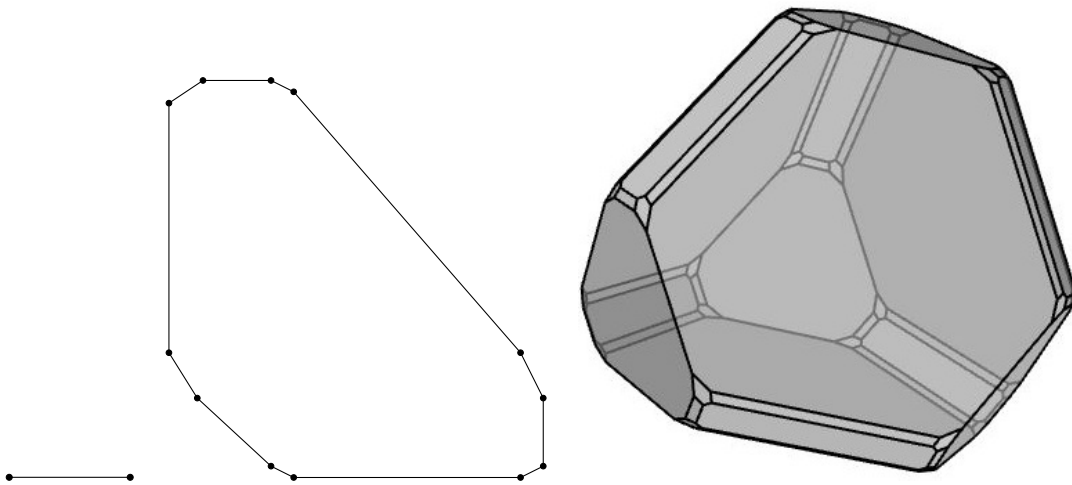
$$\left(\bigcup \{ \mathcal{P}(\{ \pi_\beta \mid \beta \in V \}) \mid V \text{ је } 0\text{-страна комплекса } C \}, \supseteq \right),$$

па PA_n геометријски реализује комплекс C , у складу са Дефиницијом 1.2.4. □

Последица 3.2.9. За сваки елемент $\beta \in \mathcal{B}_1$, $\pi_\beta \supseteq$ је гранични полупростор политопу PA_n . Уз то, ако је PA_n правилно означен, онда је β ознака пљосни $PA_n \cap \pi_\beta \supseteq$.

Доказ: Следи директно из Теореме 3.2.1, Последице 3.1.2 и Леме 3.2.4. □

На наредној слици је приказан политоп PA_n за $n \in \{1, 2, 3\}$. Такође, Слика 3.2 и Слика 3.6 редом илуструју везу између пермутоедра и простог пермутаосоциедра у случају $n = 2$ и $n = 3$, уз правилно означавање пљосни пермутаосоциедра.



Слика 3.1: Прости пермутаосоциедри PA_1 , PA_2 и PA_3

3.3 Геометријска реализација сумама Минковског

Претходна геометријска реализација простог пермутоасоциедра је настала као својеврсно уопштавање процедуре која је реализовала фамилију нестоедара у [15], па се природно намеће питање постојања алтернативне геометријске реализације по узору на процедуру коју је користио Постњиков у својој реализацији нестоедара у [39].

Питање 3.3.1. Да ли постоји n -димензионална Минковски-реализација комплекса C која је нормално еквивалентна политопу PA_n ?

Тврђење 1.1.20 гарантује да се политоп PA_n може представити као сума Минковског на нетривијалан начин, али ипак не гарантује позитиван одговор на претходно питање. У складу са првим условом Дефиниције 1.2.8, наш циљ није класична декомпозиција политопа PA_n , већ је потребно наћи нетривијалне сабирке чија сума је PA_n до на комбинаторну еквиваленцију. Ипак, додатни услов у питању захтева нормалну еквиваленцију међу политопима чиме остајемо на мосту између подударности (декомпозиције политопа PA_n) и комбинаторне еквиваленције. Уз то, према осталим условима Дефиниције 1.2.8, без обзира на редослед сабирака, сваки од њих зарубљује текућу парцијалну суму, тј. суме свих сабирака који му претходе.

Разматрајући најпре случајеве $n = 2$ и $n = 3$, у наредним пододељцима показујемо да је одговор на постављено питање позитиван. У Пододељку 3.3.3 дефинишемо читаву колекцију политопа нормално еквивалентних политопу PA_n , при чему је сваки од њих n -димензионална Минковски-реализација комплекса C .

3.3.1 2-пермутоасоциедар

У овом пододељку одговарамо на Питање 3.3.1 у случају $n = 2$. У складу са Одељком 3.1, крећемо од троугла, тј. комплекса

$$C_0 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

и његовог градивног скупа

$$\mathcal{B}_0 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}.$$

Геометријска реализација комплекса C_1 је 2-пермутоедар, тј. шестоугао, па је укупно 6 максималних 0-угњежђених скупова:

$$\{\{1, 2\}, \{1\}\}, \{\{1, 2\}, \{2\}\}, \{\{1, 3\}, \{1\}\}, \{\{1, 3\}, \{3\}\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{3\}\}.$$

Дакле, градивни скуп \mathcal{B}_1 је колекција

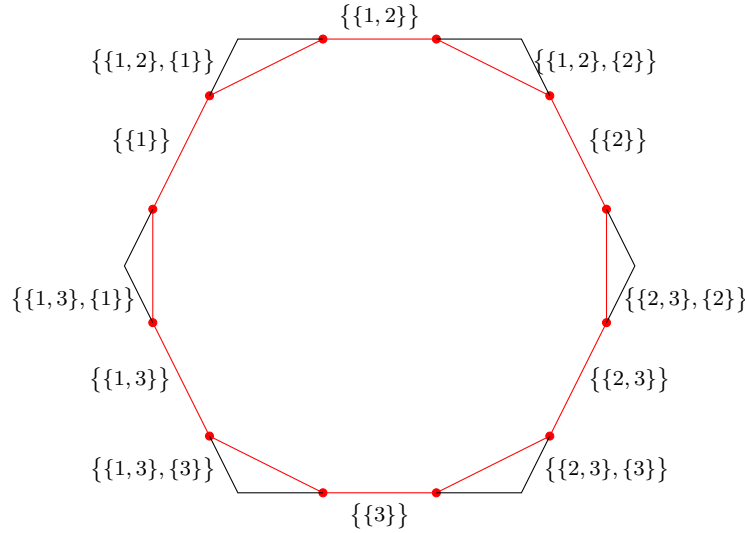
$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{3\}\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1, 3\}\}, \{\{2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{1\}\}, \\ \{\{1, 2\}, \{2\}\}, \{\{1, 3\}, \{1\}\}, \{\{1, 3\}, \{3\}\}, \{\{2, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{3\}\} \end{array} \right\},$$

тј. $\mathcal{B}_1 = C_1 - \{\emptyset\}$. Даље, пошто сваки елемент $\beta \in \mathcal{B}_1$ дефинише по један полупростор $\pi_\beta^>$, добијамо скуп од 12 полупростора у \mathbf{R}^3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i_2} \geq 3 \\ x_{i_1} + x_{i_2} \geq 9 \\ x_{i_1} + 2x_{i_2} \geq 12, 5, \end{array} \right.$$

где су i_1 и i_2 различити елементи скупа [3]. Геометријска реализација комплекса C је, према Теорему 3.2.1 и Последици 3.2.9, дванаестоугао PA_2 (Слика 3.1), дефинисан као пресек хиперравни $x_1 + x_2 + x_3 = 27$ и наведених 12 граничних полупростора. Да је заиста реч о дванаестоуглу може се брзо проверити коришћењем неког софтвера који је специјализован за рад са политопима. У том смислу, за потребе овог рада, коришћен је Полимејк (видети Додатак А.2).

Претпоставимо да је PA_2 правилно означен елементима скупа \mathcal{B}_1 . Према Последици 3.2.9, за свако $\beta \in \mathcal{B}_1$, ивица садржана у π_β је означена са β , а према Последици 3.1.2, две ивице имају заједничко теме ако и само ако су њихове ознаке упоредиве.



Слика 3.2: Правилно означавање пљосни простог 2-пермутоасоциедра

У складу са Питањем 3.3.1 и Дефиницијом 1.2.8, циљ је дефинисати функцију $\varphi : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{M}_3$ такву да ако је

$$M_2 = \Delta_{[3]} + \sum_{\beta \in \mathcal{B}_1} \varphi(\beta),$$

онда је $M_2 \simeq PA_2$. Притом, без обзира на редослед сабирака $\varphi(\beta)$, сваки од њих зарубљује парцијалну суму коју чине сви сабирци који му претходе, укључујући и троугао $\Delta_{[3]}$. Дакле, могли бисмо навести 12 политопа, слике елемената градивног скупа, и показати да су сви наведени услови задовољени. Уместо тога, и у овом и у наредном пододељку, бирамо другачији приступ који води до општег критеријума за проналажење ових политопа, односно одговарајућих сабирака у n -димензионалним Минковски-реализацијама.

Нека је слика сваког једноелементног скупа $\beta \in \mathcal{B}_1$ одговарајући симплекс, тј. нека је

$$\varphi(\beta) = \Delta_{\cup\beta}.$$

Према Пододељку 1.2.2, парцијална сума

$$S = \Delta_{[3]} + \sum_{\substack{\beta \in \mathcal{B}_1 \\ |\beta|=1}} \varphi(\beta) = \Delta_{[3]} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{1,2\}} + \Delta_{\{1,3\}} + \Delta_{\{2,3\}}$$

је Минковски-реализација комплекса C_1 . Реч је о шестоуглу у \mathbf{R}^3 са три пара паралелних ивица које се правилно означавају одговарајућим подскупом скупа [3].

Додајмо свакој ознаци још један пар заграда, односно преозначимо ивице одговарајућим једноелементним скупом из \mathcal{B}_1 . Сада су истоозначене ивице шестоугла S и дванаестоугла PA_2 међусобно паралелне.

Остаје да се дефинишу слике преосталих шест елемената скупа \mathcal{B}_1 , који су облика $\{\{i_2, i_1\}, \{i_2\}\}$. Без обзира на редослед додавања сабирака $\varphi(\{\{i_2, i_1\}, \{i_2\}\})$, сваки од њих зарубљује текућу парцијалну суму. Нека је $\{P_i\}_{i \in [6]}$ индексирани скуп одговарајућих политопа, тј. слика преосталих елемената, и посматрајмо парцијалне суме настале њиховим додавањем шестоуглу S , корак по корак. Нека је $S_0 = S$ и $S_i = S_{i-1} + P_i$, $i \in [6]$. Дакле, $M_2 = S_6$. Како за свако $i \in [6]$, постоји политоп $\text{tr}_V S_{i-1}$ нормално еквивалентан полигону S_i , на i -том кораку означимо ивице полигона S_i елементима скупа \mathcal{B}_1 на следећи начин: нека су међусобно одговарајуће ивице полигона S_i и S_{i-1} истоозначене, а новонасталу ивицу означимо ознаком β_i (видети Напомену 1.1.2). Да би на крају S_6 био правилно означен, следећи услов мора бити испуњен за свако $i \in [6]$: ако је P_i слика елемента $\{\{i_2, i_1\}, \{i_2\}\}$, онда је $S_i \simeq \text{tr}_V S_{i-1}$ за теме V које је заједничко ивицама означеним са $\{\{i_2, i_1\}\}$ и $\{\{i_2\}\}$, и $\beta_i = \{\{i_2, i_1\}, \{i_2\}\}$ (Слика 3.2). Такође, како је $S_6 \simeq PA_2$, за сваку ивицу парцијалне суме S_i , постоји истоозначена ивица дванаестоугла PA_2 која јој је паралелна.

Без губитка општости, можемо кренути од сабирка

$$P = \varphi(\{\{1, 2\}, \{1\}\}).$$

Очигледно је да P не може бити тачка, па је према Тврђењу 1.1.18(ii), или дуж или полигон. Претпоставићемо да је P полигон, а да дуж не може бити гарантује следеће тврђење чији доказ одлажемо за Пододељак 3.3.3.

Тврђење 3.3.2. *Ако је φ функција која задовољава услове Дефиниције 1.2.8 у случају $n = 2$, онда $\varphi(\{\{i_2, i_1\}, \{i_2\}\})$ није дуж ни за један пар различитих елемената $i_1, i_2 \in [3]$.*

Нека је P најједноставнији полигон, троугао $T_1T_2T_3$, где су $T_1(a_1, b_1, c_1)$, $T_2(a_2, b_2, c_2)$ и $T_3(a_3, b_3, c_3)$ тачке у \mathbf{R}^3 . Овај троугао зарубљује шестоугао S . Тачније, $S + P$ је седмоугао нормално еквивалентан неком политопу насталом зарубљивањем политопа S одсецањем оног темена које припада ивицама са ознакама $\{\{1, 2\}\}$ и $\{\{1\}\}$. Како је сума S , Минковски-реализација комплекса C_1 , њени сабирци индексирани вишеелементним скуповима чине скуп који зарубљује троугао

$$\Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}},$$

па нам то даје могућност да уклонимо неке од поменутих сабирака суме S , али тако да парцијална сума преосталих сабирака буде нестоедар са теменом у коме се сустичу ивице правилно означене са $\{1, 2\}$ и $\{1\}$. Зато, не бисмо ли одредили непознати троугао P , уместо да кренемо од суме S , кренимо од њене парцијалне суме

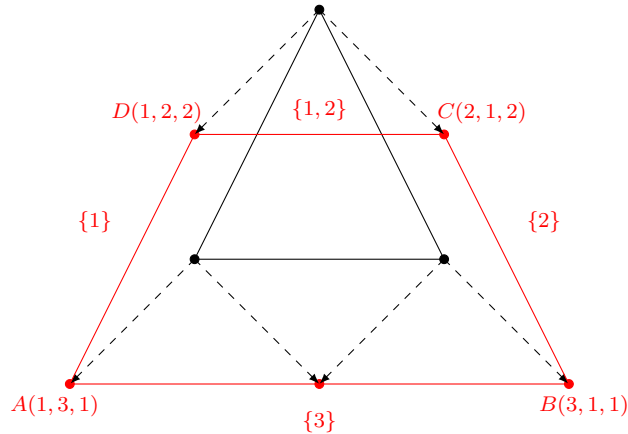
$$\Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{1,2\}}.$$

Реч је о трапезу $ABCD$ илустрованом на Слици 3.3. Дакле, претпоставка је да P зарубљује, не само шестоугао S , већ и овај трапез, тј. да је политоп

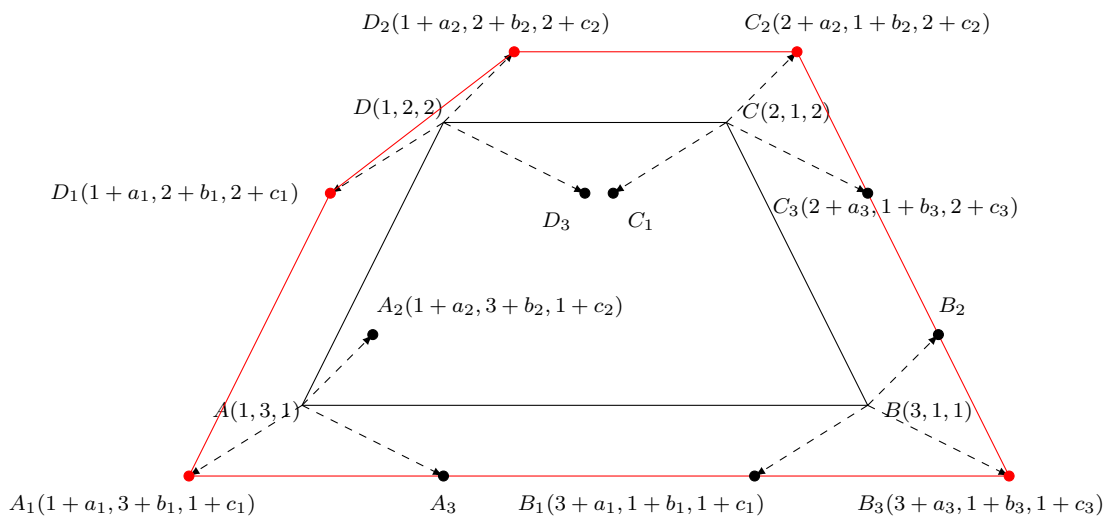
$$ABCD + T_1T_2T_3 = \text{conv}\{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3\},$$

петоугао нормално еквивалентан неком политопу који настаје зарубљивањем трапеза $ABCD$ одсецањем темена D .

Такође, спољашњи вектор нормале новонастале ивице је $-(2, 1, 0)$. Нека је то ивица D_1D_2 , при чему темена D_1 и D_2 припадају и ивицама чији су спољашњи вектори нормала редом $-(1, 0, 0)$ и $-(1, 1, 0)$ (видети Сliku 3.4).



Слика 3.3: $\Delta_{\{1,2,3\}} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{1,2\}}$



Слика 3.4: Сума $\Delta_{\{1,2,3\}} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{1,2\}} + T_1T_2T_3$

Претпоставимо да су A_1, B_3 и C_2 преостала темена петougла тако да A_1 припада ивицама чији су спољашњи вектори нормала $-(1, 0, 0)$ и $-(0, 0, 1)$, B_3 припада ивицама чији су спољашњи вектори нормала $-(0, 1, 0)$ и $-(0, 0, 1)$, а C_2 ивицама чији су спољашњи вектори нормала $-(0, 1, 0)$ и $-(1, 1, 0)$. Дакле, важи следећи систем једначина:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 \\ a_1 + b_1 + c_1 = a_3 + b_3 + c_3 \\ 2a_1 + b_1 = 2a_2 + b_2 \\ c_1 = c_3 \\ b_2 = b_3. \end{array} \right.$$

Прве две једначине следе из чињенице да све translације $A_iB_iC_iD_i$ трапеца $ABCD$, $i \in [3]$, леже у равни паралелној $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ у којој је $ABCD$. Такође,

да би тачке A_2, A_3, B_1, B_2, C_1 и C_3 припадале $\text{conv}\{A_1, B_3, C_2, D_1, D_2\}$, довољно је да важе следеће неједнакости:

$$a_1 < a_2 \leq a_3, \quad b_2 \leq b_3 < b_1, \quad c_1 \leq c_3 < c_2.$$

Решавањем система закључујемо да су тачке T_i облика

$$T_1(a_1, b_1, c_1), \quad T_2\left(\frac{2a_1 + b_1 - b_3}{2}, b_3, \frac{b_1 - b_3}{2} + c_1\right), \quad T_3(a_1 + b_1 - b_3, b_3, c_1),$$

тј.

$$T_1(0, b_1 - b_3, 0), \quad T_2\left(\frac{b_1 - b_3}{2}, 0, \frac{b_1 - b_3}{2}\right), \quad T_3(b_1 - b_3, 0, 0),$$

до на translацију.

Дакле, P може бити троугао са теменима

$$T_1(0, 2\lambda, 0), \quad T_2(\lambda, 0, \lambda), \quad T_3(2\lambda, 0, 0), \quad \lambda > 0,$$

или било која његова translација (видети Пример 1.1.17). Ако пажљиво погледамо Сliku 3.4, можемо приметити да је троугао ABC један од таквих за $\lambda = 1$.

Нека је $\varphi(\{\{1, 2\}, \{1\}\})$ троугао

$$P = \text{conv}\{(0, 2, 0), (1, 0, 1), (2, 0, 0)\}.$$

Може се проверити да постоји зарубљени политоп $\text{tr}_V S$ настао одсецањем темена V које припада ивицама означеним са $\{\{1, 2\}\}$ и $\{\{1\}\}$, тако да важи $S + P \simeq \text{tr}_V S$.

За налажење преосталих 5 политопа, не настављамо даљу анализу од добијене суме $S + P$, већ за сваки од њих опет посматрамо одговарајућу парцијалну суму шестоугла S . На тај начин, потпуно аналогним рачуном долазимо до слика свих преосталих елемената градивног скупа:

$$\varphi(\{\{i_2, i_1\}, \{i_2\}\}) = \text{conv}\{2e_{i_1}, e_{i_2} + e_{i_3}, 2e_{i_2}\},$$

где су i_1, i_2 и i_3 међусобно различити елементи скупа [3].

Овим смо дефинисали пресликавање φ и политоп

$$M_2 = \Delta_{[3]} + \sum_{\beta \in \mathcal{B}_1} \varphi(\beta).$$

Реч је о дванаестоуглу чија су темена све пермутације координата тачака $(1, 5, 13)$ и $(2, 3, 14)$ (видети Додатак А.2). Може се дефинисати и као пресек хиперравни $x_1 + x_2 + x_3 = 19$ и следећих граничних полупростора:

$$\begin{cases} x_{i_2} & \geq 1 \\ x_{i_1} + x_{i_2} & \geq 5 \\ x_{i_1} + 2x_{i_2} & \geq 7, \end{cases}$$

при чему су i и j различити елементи скупа [3]. Дакле, $M_2 \simeq PA_2$ (видети Слику А.5). Може се проверити да је и трећи услов Дефиниције 1.2.8 задовољен анализом сваке парцијалне суме у саставу M_2 , корак по корак, за сваки редослед сабирака. Коначно, у складу са Дефиницијом 1.2.8, закључујемо да је M_2 , 2-димензионална Минковски-реализација комплекса C .

3.3.2 3-пермутоасоциедар

У овом пододељку одговарамо на Питање 3.3.1 у случају $n = 3$. У складу са Одељком 3.1, крећемо од тетраедра, тј. комплекса

$$C_0 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

и његовог градивног скупа $\mathcal{B}_0 = C_0 - \{\emptyset\}$. Геометријска реализација комплекса C_1 је 3-пермутоедар (Слика 1.8), па имамо 24 максимална 0-угњежђена скупа облика

$$\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\},$$

где су i_1, i_2 и i_3 међусобно различити елементи скупа [4]. Дакле, градивни скуп \mathcal{B}_1 је колекција од 62 скупа облика

$$\{\{i_{k+l}, \dots, i_k, \dots, i_1\}, \dots, \{i_{k+l}, \dots, i_k, i_{k-1}\}, \{i_{k+l}, \dots, i_k\}\},$$

при чему је $1 \leq k \leq k+l \leq 3$.

Нека је $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4\}$ партиција скупа \mathcal{B}_1 у којој \mathcal{A}_1 садржи све једноелементне скупове, док су блокови $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ и \mathcal{A}_4 редом колекције скупова облика

$$\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}\}, \{\{i_3, i_2\}, \{i_3\}\} \quad \text{и} \quad \{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\}.$$

Укупно је, дакле, $|\mathcal{A}_4| \cdot c_3 = 120$ максималних 1-угњежђених скупова и комплекс C је унија њихових партитивних скупова. Како свако $\beta \in \mathcal{B}_1$ дефинише по један полупростор π_β^\geq , добијамо следећа 62 полупростора у \mathbf{R}^4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i_3} \geq 3 \\ x_{i_2} + x_{i_3} \geq 9 \\ x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} \geq 27 \\ x_{i_2} + 2x_{i_3} \geq \frac{279}{23} \\ x_{i_1} + 2x_{i_2} + 2x_{i_3} \geq \frac{831}{23} \\ x_{i_1} + 2x_{i_2} + 3x_{i_3} \geq \frac{915}{23}, \end{array} \right.$$

где су i_1, i_2 и i_3 међусобно различити елементи скупа [4]. Геометријска реализација комплекса C је, према Теорему 3.2.1 и Последици 3.2.9, прост 3-политоп PA_3 (Слика 3.1), дефинисан као пресек наведена 62 гранична полупростора и хиперравни $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 81$.

Претпоставимо да је PA_3 правилно означен елементима скупа \mathcal{B}_1 . Према Последици 3.2.9, за свако $\beta \in \mathcal{B}_1$, пљосан садржана у π_β је означена са β , а према Последици 3.1.2, две пљосни имају заједничко теме ако и само ако су њихове ознаке упоредиве или унија њихових ознака не припада \mathcal{B}_1 (нпр. пљосни означене са $\{\{1\}\}$ и $\{\{1, 2, 3\}\}$ имају заједничко теме, док пљосни означене са $\{\{1\}\}$ и $\{\{1, 2\}\}$ немају). Слика 3.6 и Слика 3.5 илуструју правилно означавање пљосни овог политопа.

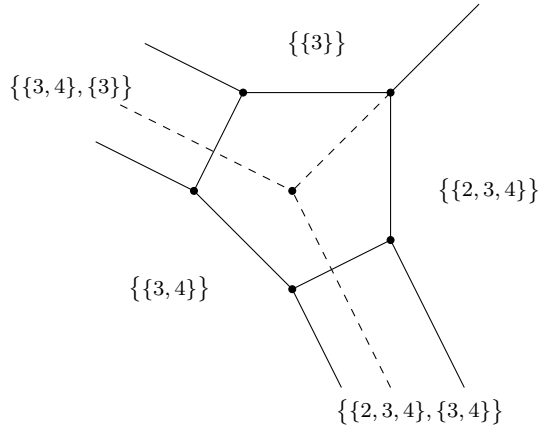
У складу са Питањем 3.3.1 и Дефиницијом 1.2.8, циљ је дефинисати функцију $\varphi: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{M}_4$ такву да ако је

$$M_3 = \Delta_{[4]} + \sum_{\beta \in \mathcal{B}_1} \varphi(\beta),$$

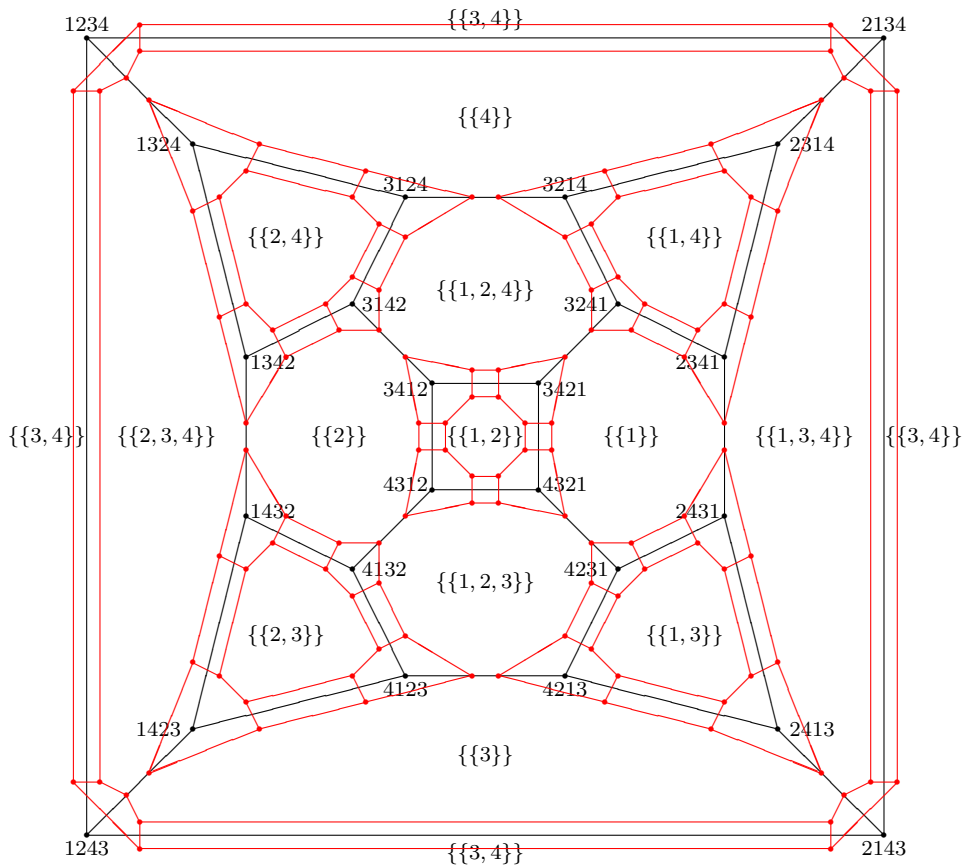
онда је $M_3 \simeq PA_3$. Притом, без обзира на редослед сабирака $\varphi(\beta)$, сваки од њих зарубљује парцијалну суму коју чине сви сабирци који му претходе, укључујући и тетраедар $\Delta_{[4]}$.

Нека је слика сваког елемента $\beta \in \mathcal{A}_1$ одговарајући симплекс, тј. нека је

$$\varphi(\beta) = \Delta_{\cup\beta}.$$



Слика 3.5: Означавање пљосни које су суседне петоуглу $\{\{2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{3\}\}$



Слика 3.6: Прост 3-пермутасоциедар

Према Пододељку 1.2.2, парцијална сума

$$\begin{aligned} S &= \Delta_{[4]} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_1} \varphi(\beta) = \Delta_{[4]} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{4\}} \\ &\quad + \Delta_{\{1,2\}} + \Delta_{\{1,3\}} + \Delta_{\{1,4\}} + \Delta_{\{2,3\}} + \Delta_{\{2,4\}} + \Delta_{\{3,4\}} \\ &\quad + \Delta_{\{1,2,3\}} + \Delta_{\{1,2,4\}} + \Delta_{\{1,3,4\}} + \Delta_{\{2,3,4\}}, \end{aligned}$$

је Минковски-реализација комплекса C_1 . Реч је о пермутоедру у \mathbf{R}^4 чија темена су све пермутације координата тачке $(1, 2, 4, 8)$, и чије се пљосни правилно означавају одговарајућим подскупом скупа $[4]$. Поново додајмо свакој ознаци још један пар заграда, односно преозначимо пљосни одговарајућим елементом скупа \mathcal{A}_1 . Сада су истоозначене пљосни пермутоедра S и политопа PA_3 међусобно паралелне.

Остаје да се дефинишу слике преосталих 48 елемената скупа \mathcal{B}_1 . Дефинишемо најпре оне са већом кардиналношћу које имају приоритет у сабирању у складу са Дефиницијом 1.2.8, тј. елементе блока \mathcal{A}_4 , а затим остале. Без обзира на редослед додавања сабирака $\varphi(\beta)$, $\beta \in \mathcal{A}_4$, сваки од њих зарубљује текућу парцијалну суму. Исто важи и за сабирке $\varphi(\beta)$, $\beta \in \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$, који долазе након тога у произвољном редоследу.

Нека је $\{P_i\}_{i \in [24]}$ индексирани скуп политопа $\varphi(\beta)$, $\beta \in \mathcal{A}_4$, а $\{P_i\}_{i \in [48]-[24]}$ индексирани скуп политопа $\varphi(\beta)$, $\beta \in \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$. Посматрајмо парцијалне суме настале њиховим додавањем пермутоедру S , корак по корак. Нека је $S_0 = S$ и $S_i = S_{i-1} + P_i$, $i \in [48]$. Дакле, $PA_3 = S_{48}$. Како за свако $i \in [48]$, постоји политоп $\text{tr}_F S_{i-1}$ нормално еквивалентан политопу S_i , на i -том кораку означимо пљосни политопа S_i елементима скупа $\mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1$ на следећи начин: нека су међусобно одговарајуће пљосни политопа S_i и S_{i-1} истоозначене, а новонасталу пљосан означимо са β_i (видети Напомену 1.1.2). Да би на крају S_{48} био правилно означен, следећи услов мора бити испуњен за свако $i \in [48]$: ако је P_i слика елемента $\beta \in \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1$, онда је $S_i \simeq \text{tr}_F S_{i-1}$ за страну F која припада свакој пљосни која је за неко $B \in \beta$ означена са $\{B\}$. Такође, $\beta_i = \beta$. На пример, ако је $P_5 = \varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{2, 4\}, \{2\}\})$, онда је политоп S_5 нормално еквивалентан политопу $\text{tr}_F S_4$ насталом одсецањем темена F које припада пљоснима означеним са $\{\{1, 2, 4\}\}$, $\{\{2, 4\}\}$ и $\{\{2\}\}$, док је ознака новонастале пљосни $\{\{1, 2, 4\}, \{2, 4\}, \{2\}\}$; ако је $P_{30} = \varphi(\{\{1, 3, 4\}, \{1, 3\}\})$, онда је политоп S_{30} нормално еквивалентан политопу $\text{tr}_F S_{29}$ насталом одсецањем ивице F која припада пљоснима означеним са $\{\{1, 3, 4\}\}$ и $\{\{1, 3\}\}$, а ознака новонастале пљосни је $\{\{1, 3, 4\}, \{1, 3\}\}$. Такође, како је $S_{48} \simeq PA_3$, за сваку пљосан парцијалне суме S_i , постоји истоозначена пљосан политопа PA_3 која јој је паралелна.

Нека је $\varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1\}\})$ политоп $P \subset \mathbf{R}^4$ чији је скуп темена

$$\mathcal{V}(P) = \{ T_1(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, T_k(a_k, b_k, c_k, d_k) \}.$$

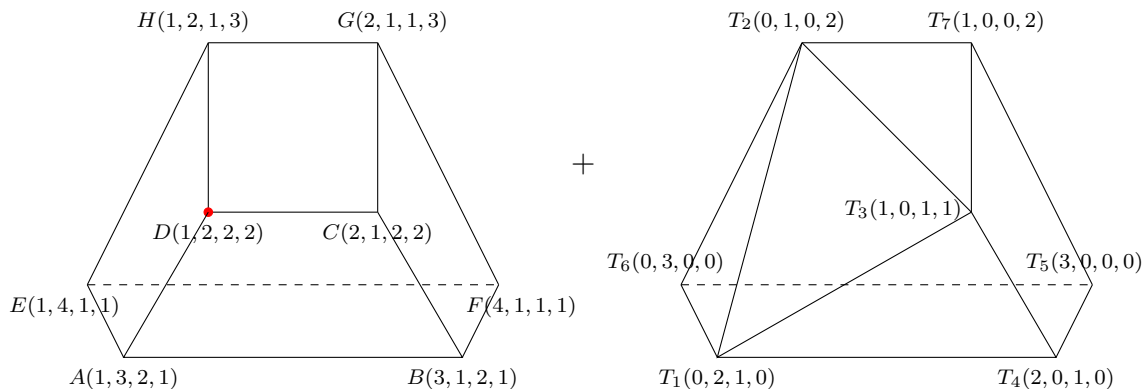
Сума $S + P$ је нормално еквивалентна неком политопу насталом зарубљивањем пермутоедра S одсецањем темена које припада пљоснима означеним са $\{\{1, 2, 4\}\}$, $\{\{1, 2\}\}$ и $\{\{1\}\}$. Као и у случају $n = 2$, да бисмо одредили скуп $\mathcal{V}(P)$, уместо да кренемо од суме S , крећемо од нестоедра који има теме у пресеку пљосни правилно означених са $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2\}$ и $\{1\}$:

$$S_0 = \Delta_{[4]} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{4\}} + \Delta_{\{1,2,4\}} + \Delta_{\{1,2\}}.$$

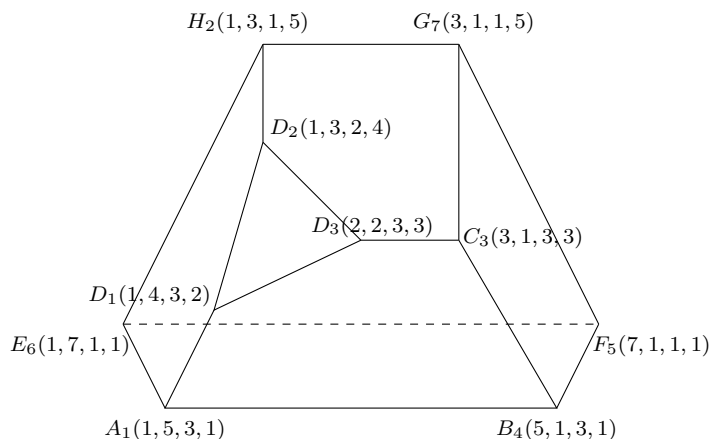
Реч је о нестоедру $ABCDEFGH$ илустрованом на Слици 3.7 лево. Дакле, претпоставка је да P зарубљује овај нестоедар, тј. да је политоп

$$S_0 + P = \text{conv}\{A_1, \dots, A_k, \dots, H_1, \dots, H_k\}$$

нормално еквивалентан неком политопу који настаје зарубљивањем политопа S_0 одсецањем темена D (Слика 3.8).



Слика 3.7: Дефинисање $\varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1\}\})$



Слика 3.8: Сума $S_0 + \text{conv}\{T_1, \dots, T_7\}$

Нека је новонастала пљосан троугао $D_1D_2D_3$. Ако је $\nu(n_1, \dots, n_l)$ ознака за скуп темена садржаних у пљоснима чији су спољашњи вектори нормала $-n_1, \dots, -n_l$, онда нека је

$$D_1 = \nu((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 0, 1)),$$

$$D_2 = \nu((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (3, 2, 0, 1)) \quad \text{и}$$

$$D_3 = \nu((1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (3, 2, 0, 1)).$$

Даље, нека су A_1, H_2, C_3 следећа темена суме $S_0 + P$

$$A_1 = \nu((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1)),$$

$$H_2 = \nu((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)) \quad \text{и}$$

$$C_3 = \nu((0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1)).$$

Дакле, важи следећи систем једначина:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_3 + b_3 + c_3 + d_3 \\ a_1 + b_1 + d_1 = a_3 + b_3 + d_3 \\ 3a_1 + 2b_1 + d_1 = 3a_2 + 2b_2 + d_2 \\ 3a_1 + 2b_1 + d_1 = 3a_3 + 2b_3 + d_3 \\ a_1 = a_2 \\ a_2 + b_2 = a_3 + b_3. \end{array} \right.$$

Прве две једначине следе из чињенице да све транслације политопа S_0 леже у једној равни, паралелној равни $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ у којој је S_0 . Такође, да тачке $A_2, A_3, B_2, C_1, C_2, E_3, G_1, H_1$ и H_3 не би биле темена суме $S_0 + P$, односно да би припадала конвексном омотачу преосталих тачака, довољно је да важе неједнакости

$$a_1 \leq a_2 < a_3, \quad b_3 < b_2 \leq b_1, \quad c_2 < c_3 \leq c_1 \quad \text{и} \quad d_1 < d_3 \leq d_2,$$

Решавањем постављеног система, закључујемо да су тачке T_i облика:

$$T_1(a_1, b_1, c_1, d_1), T_2(a_1, b_2, b_2 - b_1 + c_1, 2b_1 - 2b_2 + d_1), T_3(a_1 + b_1 - b_2, 2b_2 - b_1, c_1, b_1 + d_1 - b_2).$$

Међутим, $S_0 + T_1T_2T_3$ није политоп са захтеваним својствима јер му је скуп темена $\{A_1, B_1, B_3, C_3, D_1, D_2, D_3, E_1, E_2, F_1, F_2, F_3, G_2, G_3, H_2\}$. Потребно је „поправити” четири критичне ситуације које се тичу темена B, F, E и G нестоедра S_0 . Наиме, не би ли $S_0 + P$ био политоп чија су темена $A_1, B_4, C_3, D_1, D_2, D_3, E_6, F_5, G_7$ и H_2 (Слика 3.8), додајемо још четири групе услова, редом за сваку од ситуација:

$$\begin{array}{l} a_4 + b_4 + d_4 = a_1 + b_1 + d_1, \quad b_4 = b_3, \quad d_4 = d_1, \quad a_4 + b_4 + c_4 + d_4 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1; \\ b_5 = b_3, \quad c_5 = c_2, \quad d_5 = d_1, \quad a_5 + b_5 + c_5 + d_5 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1; \\ a_6 = a_1, \quad c_6 = c_2, \quad d_6 = d_1, \quad a_6 + b_6 + c_6 + d_6 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1; \\ a_7 + b_7 = a_2 + b_2, \quad b_7 = b_3, \quad c_7 = c_2, \quad a_7 + b_7 + c_7 + d_7 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1. \end{array}$$

Решавањем овог система добијамо форму нових темена политопа P :

$$\begin{array}{l} T_4(a_1 + 2b_1 - 2b_2, 2b_2 - b_1, c_1, d_1), \quad T_5(a_1 + 3b_1 - 3b_2, 2b_2 - b_1, b_2 - b_1 + c_1, d_1), \\ T_6(a_1, 2b_1 - b_2, b_2 - b_1 + c_1, d_1), \quad T_7(a_1 + b_1 - b_2, 2b_2 - b_1, b_2 - b_1 + c_1, 2b_1 - 2b_2 + d_1). \end{array}$$

Дакле, P је, до на транслацију, политоп са теменима

$$\begin{array}{l} T_1(0, 2(b_1 - b_2), b_1 - b_2, 0), \quad T_2(0, b_1 - b_2, 0, 2(b_1 - b_2)), \quad T_3(b_1 - b_2, 0, b_1 - b_2, b_1 - b_2), \\ T_4(2(b_1 - b_2), 0, b_1 - b_2, 0), \quad T_5(3(b_1 - b_2), 0, 0, 0), \quad T_6(0, 3(b_1 - b_2), 0, 0) \\ T_7(b_1 - b_2, 0, 0, 2(b_1 - b_2)), \end{array}$$

односно за $\lambda > 0$,

$$\begin{array}{l} T_1(0, 2\lambda, \lambda, 0), \quad T_2(0, \lambda, 0, 2\lambda), \quad T_3(\lambda, 0, \lambda, \lambda), \quad T_4(2\lambda, 0, \lambda, 0), \quad T_5(3\lambda, 0, 0, 0), \\ T_6(0, 3\lambda, 0, 0, 0), \quad T_7(\lambda, 0, 0, 2\lambda). \end{array}$$

Ако погледамо Сliku 3.7 лево, можемо приметити да је политоп $ABCEFGH$ један од одговарајућих за $\lambda = 1$.

Нека је $\lambda = 1$, односно нека је $\varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1\}\})$ политоп

$$\text{conv}\{(0, 2, 1, 0), (0, 1, 0, 2), (1, 0, 1, 1), (2, 0, 1, 0), (3, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 0), (1, 0, 0, 2)\},$$

илустрован на Слици 3.7 десно. Аналогном процедуром долазимо и до слика преосталих елемената блока \mathcal{A}_4 . За међусобно различите елементе i_1, i_2, i_3 и i_4 скупа [4], нека је $\varphi(\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\})$ политоп

$$\text{conv}\{2e_{i_2} + e_{i_4}, 2e_{i_1} + e_{i_2}, e_{i_1} + e_{i_3} + e_{i_4}, 2e_{i_3} + e_{i_4}, 3e_{i_3}, 3e_{i_2}, 2e_{i_1} + e_{i_3}\}.$$

Може се проверити да је сума

$$S' = \Delta_{[4]} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_4} \varphi(\beta) = S + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_4} \varphi(\beta).$$

нормално еквивалентна политопу који може настати sukcesивним зарубљивањем пермутоедра S одсецањем свих темена (видети Додатак А.2). Такође се потврђује да сваки индексирани скуп $\{P_i\}_{i \in [24]}$ управо дефинисаних политопа зарубљује пермутоедар S .

Процедуру даље настављамо дефинисањем слика елемената блока \mathcal{A}_2 . У складу са Дефиницијом 1.2.8, $\varphi(\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}\})$ зарубљује суму S' . Тачније, постоји зарубљени политоп $\text{tr}_F S'$ настао одсецањем ивице F која је садржана у пљоснима са ознакама $\{\{i_3, i_2, i_1\}\}$ и $\{\{i_3, i_2\}\}$, тако да важи

$$S' + \varphi(\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}\}) \simeq \text{tr}_F S'.$$

Једно теме ивице F припада пљосни са ознаком $\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\}$, а друго пљосни са ознаком $\{\{i_2, i_3, i_1\}, \{i_2, i_3\}, \{i_2\}\}$.

Нека је $\varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}\})$ политоп $P \subset \mathbf{R}^4$ чији је скуп темена

$$\mathcal{V}(P) = \{T_1(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, T_k(a_k, b_k, c_k, d_k)\}.$$

Уместо да даље сабирање наставимо додавањем на S' , као и у претходним случајевима, бирамо одговарајућу парцијалну суму из које је настала сума S' . Овог пута је то сума

$$S'_0 = S_0 + Q + R,$$

за $Q = \varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1\}\})$ и $R = \varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{2\}\})$. Реч је о простом 3-политопу $ABCDEFGHIJKL$ (Слика 3.9 лево). Како Q и R чине скуп који зарубљује S_0 , политоп S'_0 је нормално еквивалентан политопу који се може добити sukcesивним зарубљивањем политопа S_0 одсецањем два темена. То нам даје могућност да пљосни политопа S'_0 које одговарају пљоснима политопа S_0 означимо истим ознакама (троуглови CIJ и DKL остају неозначени). Пошто је JK ивица садржана у пљоснима са ознакама $\{1, 2, 4\}$ и $\{1, 2\}$, претпоставка је да постоји политоп настао зарубљивањем политопа S'_0 одсецањем ове ивице, коме је политоп

$$S'_0 + P = \text{conv}\{A_1, \dots, A_k, \dots, L_1, \dots, L_k\}$$

нормално еквивалентан (Слика 3.10).

Нека је новонастала пљосан четвороугао $J_1 J_2 K_3 K_4$ тако да је:

$$\begin{aligned} J_1 &= \nu((3, 2, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (2, 2, 0, 1)), & J_2 &= \nu((3, 2, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (2, 2, 0, 1)), \\ K_3 &= \nu((2, 3, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (2, 2, 0, 1)), & K_4 &= \nu((2, 3, 0, 1), (1, 1, 0, 1), (2, 2, 0, 1)). \end{aligned}$$

Даље, нека су $A_2, B_4, C_2, D_4, G_3, H_1, I_1$ и L_3 следећа темена суме $S'_0 + P$:

$$\begin{aligned} A_2 &= \nu((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1)), & B_4 &= \nu((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1)), \\ C_2 &= \nu((1, 0, 0, 0), (3, 2, 0, 1), (1, 1, 0, 1)), & D_4 &= \nu((0, 1, 0, 0), (2, 3, 0, 1), (1, 1, 0, 1)), \\ G_3 &= \nu((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)), & H_1 &= \nu((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)), \\ I_1 &= \nu((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (3, 2, 0, 1)), & L_3 &= \nu((0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (2, 3, 0, 1)). \end{aligned}$$

Дакле, важи следећи систем једначина:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_3 + b_3 + c_3 + d_3 \\ a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = a_4 + b_4 + c_4 + d_4 \\ 2a_1 + 2b_1 + d_1 = 2a_2 + 2b_2 + d_2 \\ 2a_1 + 2b_1 + d_1 = 2a_3 + 2b_3 + d_3 \\ 2a_1 + 2b_1 + d_1 = 2a_4 + 2b_4 + d_4 \\ 3a_1 + 2b_1 + d_1 = 3a_2 + 2b_2 + d_2 \\ a_1 + b_1 = a_3 + b_3 \\ a_1 = a_2 \\ c_1 = c_3 \\ a_2 + b_2 + d_2 = a_4 + b_4 + d_4 \\ d_2 = d_4 \\ 2a_3 + 3b_3 + d_3 = 2a_4 + 3b_4 + d_4 \\ b_3 = b_4. \end{array} \right.$$

Прве три једначине следе из чињенице да све транслације политопа S'_0 леже у једној равни, паралелној равни $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 13$ у којој је S'_0 . Такође, ако важе неједнакости

$$a_1 \leq a_2 < a_3 \leq a_4, \quad b_3 \leq b_4 < b_1 \leq b_2, \quad c_1 \leq c_3 < c_2 \leq c_4 \quad \text{и} \quad d_2 \leq d_4 < d_1 < d_3,$$

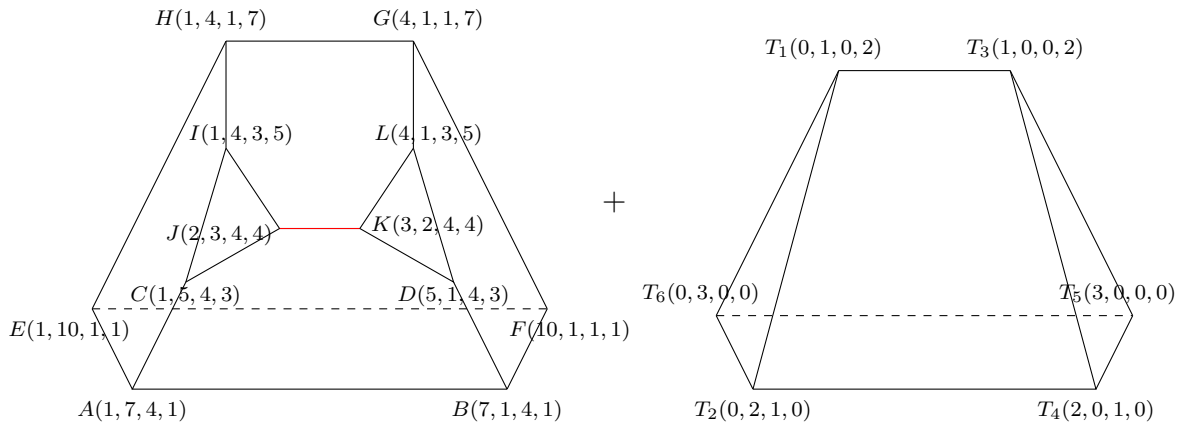
онда тачке $A_1, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, C_1, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3, H_2, G_1, G_2, G_4, H_3, H_4, J_3, J_4, K_1$ и K_2 припадају конвексном омотачу осталих тачака, односно нису темена суме $S'_0 + P$. Решавањем система, добијамо да су тачке T_i облика:

$$\begin{aligned} T_1(a_1, b_1, c_1, d_1), & \quad T_2(a_1, b_1 + c_2 - c_1, c_2, d_2), \\ T_3(a_1 + b_1 - b_3, b_3, c_1, d_1), & \quad T_4(a_1 + b_1 - b_3 + c_2 - c_1, b_3, c_2, d_2), \end{aligned}$$

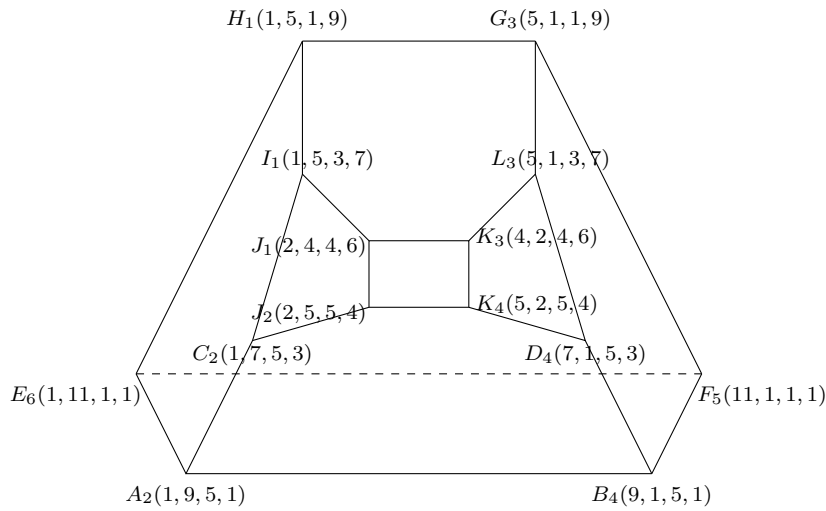
при чему је $d_1 - d_2 = 2(c_2 - c_1)$.

Међутим, $S'_0 + T_1T_2T_3T_4$ није политоп са захтеваним својствима јер је

$$\mathcal{V}(S'_0 + T_1T_2T_3T_4) = \{A_2, B_4, C_2, D_4, E_1, E_2, F_3, F_4, G_3, H_1, I_1, J_1, J_2, K_3, K_4\}.$$



Слика 3.9: Дефинисање $\varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}\})$



Слика 3.10: Сума $S'_0 + \text{conv}\{T_1, \dots, T_6\}$

Овог пута имамо две критичне ситуације везане за темена F и E које треба поправити, не би ли $S'_0 + P$ био политоп $A_2B_4C_2D_4E_6F_5G_3H_1I_1J_1J_2K_3K_4$. Из тог разлога, за сваку од ситуација додајемо по једну групу услова:

$$\begin{aligned} b_5 = b_3, \quad c_5 = c_1, \quad d_5 = d_2, \quad a_5 + b_5 + c_5 + d_5 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1; \\ a_6 = a_1, \quad c_6 = c_1, \quad d_6 = d_2, \quad a_6 + b_6 + c_6 + d_6 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1. \end{aligned}$$

Нови систем имплицира форму два додатна темена политопа P :

$$T_5(a_1 + b_1 - b_3 + d_1 - d_2, b_3, c_1, d_2) \quad \text{и} \quad T_6(a_1, b_1 + d_1 - d_2, c_1, d_2).$$

Дакле, P је, до на транслацију, политоп са теменима

$$\begin{aligned} T_1(0, b_1 - b_3, 0, 2(c_2 - c_1)), \quad T_2(0, b_1 - b_3 + c_2 - c_1, c_2 - c_1, 0), \\ T_3(b_1 - b_3, 0, 0, 2(c_2 - c_1)), \quad T_4(b_1 - b_3 + c_2 - c_1, 0, c_2 - c_1, 0), \\ T_5(b_1 - b_3 + 2(c_2 - c_1), 0, 0, 0), \quad T_6(0, b_1 - b_3 + 2(c_2 - c_1), 0, 0), \end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned} T_1(0, \mu, 0, 2\lambda), \quad T_2(0, \mu + \lambda, \lambda, 0), \quad T_3(\mu, 0, 0, 2\lambda), \\ T_4(\mu + \lambda, 0, \lambda, 0), \quad T_5(\mu + 2\lambda, 0, 0, 0), \quad T_6(0, \mu + 2\lambda, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

за $\lambda, \mu > 0$. Посматрајући Сliku 3.9 лево, увиђамо да је политоп $ABEFGH$ управо један од одговарајућих за $\mu = \lambda = 3$.

Нека је $\mu = \lambda = 1$, тј. нека је $\varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}\})$ политоп

$$\text{conv}\{(3, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 2)\},$$

приказан на Слици 3.9 десно. Аналогном процедуром дефинишемо и слике преосталих елемената скупа \mathcal{A}_2 . За међусобно различите елементе i_1, i_2, i_3 и i_4 скупа [4], нека је

$$\varphi(\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}\}) = \text{conv}\{3e_{i_2}, 3e_{i_3}, 2e_{i_3} + e_{i_4}, 2e_{i_2} + e_{i_4}, 2e_{i_1} + e_{i_3}, 2e_{i_1} + e_{i_2}\}.$$

Напомена 3.3.1. Приметимо да је за свака три међусобно различита елемента i_1, i_2 и i_3 скупа [4], слика елемента $\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}\}$ дефинисана као конвексни омотач скупа тачака

$$\mathcal{V}(\varphi(\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_2\}\})) \cap \mathcal{V}(\varphi(\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\})).$$

Потврђује се да је сума

$$S'' = \Delta_{[4]} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_4} \varphi(\beta) = S' + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_2} \varphi(\beta)$$

нормално еквивалентна политопу који се може добити сукцесивним зарубљивањем политопа S' одсецањем свих оних ивица чије једно теме припада неком троуглу са ознаком $\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_2\}\}$, а друго троуглу са ознаком $\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\}$. Наравно, претпоставка је да су све пљосни политопа S' , без обзира на редослед додавања сабирака, означене елементима скупа $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_4$ на већ описан итеративни начин. Такође се потврђује да сваки индексирани скуп $\{P_i\}_{i \in [36]}$ до сада дефинисаних политопа, при чему мање индексе имају политопи који одговарају елементима скупа \mathcal{A}_4 , зарубљује пермутедар S . Све ове провере захтевају огроман број израчунавања које је ручно исцрпљујуће спровести, али се компјутерски врло ефикасно изводе (видети Додатак А.2).

Преостало је да се још дефинишу слике елемената блока \mathcal{A}_3 . У складу са Дефиницијом 1.2.8, $\varphi(\{\{i_3, i_2\}, \{i_3\}\})$ зарубљује суму S'' . Тачније, постоји зарубљени политоп $\text{tr}_F S''$ настао одсецањем ивице F , која је садржана у пљоснима са ознакама $\{\{i_3, i_2\}\}$ и $\{\{i_3\}\}$, тако да важи

$$S'' + \varphi(\{\{i_3, i_2\}, \{i_3\}\}) \simeq \text{tr}_F S''.$$

У овом случају, једно теме ивице F припада пљосни са ознаком $\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\}$, а друго пљосни са ознаком $\{\{i_3, i_2, i_4\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\}$.

Нека је $\varphi(\{\{1, 2\}, \{1\}\})$ политоп $P \subset \mathbf{R}^4$ чији је скуп темена

$$\mathcal{V}(P) = \{T_1(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, T_k(a_k, b_k, c_k, d_k)\}.$$

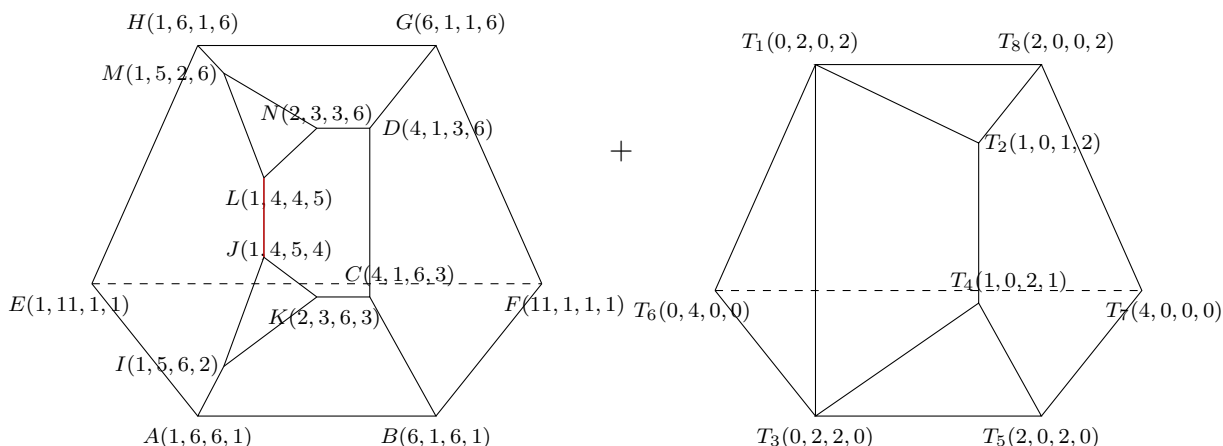
У овом случају, одговарајућа парцијална сума је

$$S''_0 = S_0 + \Delta_{\{1,2,3\}} + Q + T,$$

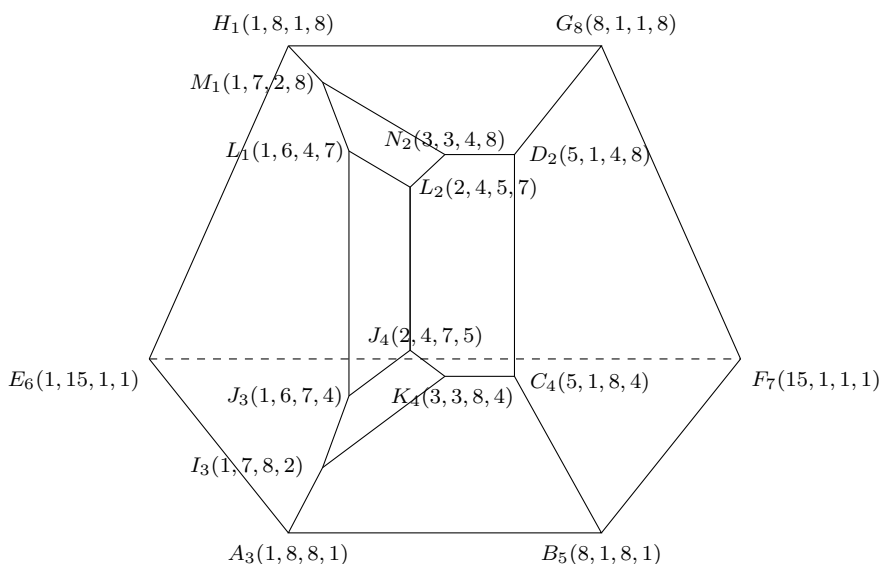
за $Q = \varphi(\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1\}\})$ и $T = \varphi(\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1\}\})$. Реч је о простом политопу $ABCDEFGHIJKLMN$ илустрованом на Слици 3.11 лево. Политопи Q и T чине скуп који зарубљује нестоедар $S_0 + \Delta_{\{1,2,3\}}$, па је политоп S_0'' нормално еквивалентан политопу који може настати сукцесивним зарубљивањем овог нестоедра одсецањем два темена. Дакле, сваку пљосан политопа S_0'' можемо означити истом ознаком којом је правилно означена њој одговарајућа пљосан нестоедра (два преостала троугла остају неозначена). Како ивица JL припада пљоснима са ознакама $\{1, 2\}$ и $\{1\}$, претпоставка је да постоји политоп нормално еквивалентан политопу

$$S_0'' + P = \text{conv}\{A_1, \dots, A_k, \dots, N_1, \dots, N_k\},$$

који може настати зарубљивањем политопа S_0'' одсецањем ивице JL (Слика 3.12).



Слика 3.11: Дефинисање $\varphi(\{\{1, 2\}, \{1\}\})$



Слика 3.12: Сума $S_0'' + \text{conv}\{T_1, \dots, T_8\}$

Нека је новонастала пљосан четвороугао $L_1L_2J_3J_4$ при чему је:

$$\begin{aligned} L_1 &= \nu((3, 2, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0)), & L_2 &= \nu((3, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)), \\ J_3 &= \nu((3, 2, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0)), & J_4 &= \nu((3, 2, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0)). \end{aligned}$$

Даље, нека су $A_3, H_1, M_1, N_2, I_3, K_4, C_4$ и D_2 следећа темена суме $S_0'' + P$:

$$\begin{aligned} A_3 &= \nu((1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1)), & H_1 &= \nu((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0)), \\ M_1 &= \nu((1, 0, 0, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 0)), & N_2 &= \nu((1, 1, 0, 0), (3, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 0)), \\ I_3 &= \nu((1, 0, 0, 0), (3, 2, 0, 1), (1, 1, 0, 1)), & K_4 &= \nu((1, 1, 0, 0), (3, 2, 0, 1), (1, 1, 0, 1)), \\ C_4 &= \nu((1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1)), & D_2 &= \nu((1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)). \end{aligned}$$

Дакле, важи следећи систем једначина:

$$\left\{ \begin{array}{llll} a_1 & + & b_1 & + c_1 + d_1 & = & a_2 + b_2 + c_2 + d_2 \\ a_1 & + & b_1 & + c_1 + d_1 & = & a_3 + b_3 + c_3 + d_3 \\ a_1 & + & b_1 & + c_1 + d_1 & = & a_4 + b_4 + c_4 + d_4 \\ a_1 & + & b_1 & + c_1 & = & a_2 + b_2 + c_2 \\ 2a_1 & + & b_1 & & = & 2a_2 + b_2 \\ 2a_1 & + & b_1 & & = & 2a_3 + b_3 \\ 2a_1 & + & b_1 & & = & 2a_4 + b_4 \\ 3a_1 & + & 2b_1 & + c_1 & = & 3a_2 + 2b_2 + c_2 \\ a_1 & & & & = & a_3 \\ a_2 & + & b_2 & & = & a_4 + b_4 \\ & & b_2 & & = & b_4 \\ 3a_3 & + & 2b_3 & + d_3 & = & 3a_4 + 2b_4 + d_4 \\ a_3 & + & b_3 & + d_3 & = & a_4 + b_4 + d_4. \end{array} \right.$$

Такође, неједнакости

$$\begin{aligned} a_1 \leq a_3 < a_2 \leq a_4, & \quad b_2 \leq b_4 < b_1 \leq b_3, & \quad c_1 \leq c_2 < c_3 \leq c_4, \\ d_3 \leq d_4 < d_2 \leq d_1 & \text{ и } a_2 - a_1 < c_3 - c_1 \end{aligned}$$

смештају тачке $A_1, A_2, A_4, H_2, H_3, H_4, M_2, M_3, M_4, N_1, N_3, N_4, I_1, I_2, I_4, J_1, J_2, K_1, K_2, K_3, L_3, L_4, C_1, C_2, C_3, D_1, D_3$ и D_4 унутар конвексног омотача свих осталих тачака. Конкретно, последња неједнакост гарантује да тачке A_2, I_2, H_4 и M_4 не припадају $\mathcal{V}(S_0'' + P)$ и да је $\text{conv}\{L_3, L_4, J_1, J_2\} \subseteq \text{conv}\{L_1, L_2, J_3, J_4\}$. Решавањем система, закључујемо да су темена политопа P облика:

$$\begin{aligned} T_1(a_1, b_1, c_1, d_1), & \quad T_2(a_2, b_1 - 2(a_2 - a_1), a_2 - a_1 + c_1, d_1), \\ T_3(a_1, b_1, c_3, c_1 - c_3 + d_1), & \quad T_4(a_2, b_1 - 2(a_2 - a_1), c_3, a_2 - a_1 + c_1 - c_3 + d_1), \end{aligned}$$

при чему је

$$\frac{b_1 - b_2}{2} = a_2 - a_1 < c_3 - c_1.$$

Ипак, политоп $S_0'' + T_1 T_2 T_3 T_4$ не испуњава захтеване услове јер му је скуп темена

$$\{A_3, B_3, B_4, C_4, D_2, E_1, E_3, F_1, F_2, F_3, F_4, G_1, G_2, H_1, I_3, J_3, J_4, K_4, L_1, L_2, M_1, N_2\}.$$

Дакле, постоје четири критичне ситуације везане за темена B , E , F и G које треба поправити. Додајмо следеће четири листе додатних услова, не би ли $S''_0 + P$ био политоп $A_3B_5C_4D_2E_6F_7G_8H_1I_3J_3K_4L_1L_2$:

$$\begin{aligned} a_5 + b_5 + d_5 &= a_3 + b_3 + d_3, & b_5 &= b_2, & d_5 &= d_3, & a_5 + b_5 + c_5 + d_5 &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1; \\ a_6 &= a_1, & c_6 &= c_1, & d_6 &= d_3, & a_6 + b_6 + c_6 + d_6 &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1; \\ b_7 &= b_2, & c_7 &= c_1, & d_7 &= d_3, & a_7 + b_7 + c_7 + d_7 &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1; \\ a_8 + b_8 + c_8 &= a_1 + b_1 + c_1, & b_8 &= b_2, & c_8 &= c_1, & a_8 + b_8 + c_8 + d_8 &= a_1 + b_1 + c_1 + d_1. \end{aligned}$$

Нови систем имплицира форму четири додатна темена политопа P :

$$\begin{aligned} T_5(2a_2 - a_1, b_1 - 2(a_2 - a_1), c_3, c_1 - c_3 + d_1), \\ T_6(a_1, b_1 + c_3 - c_1, c_1, c_1 - c_3 + d_1), \\ T_7(2a_2 - a_1 + c_3 - c_1, b_1 - 2(a_2 - a_1), c_1, c_1 - c_3 + d_1), \\ T_8(2a_2 - a_1, b_1 - 2(a_2 - a_1), c_1, d_1). \end{aligned}$$

Дакле, P је, до на translацију, политоп са теменима

$$\begin{aligned} T_1(0, 2(a_2 - a_1), 0, c_3 - c_1), & T_2(a_2 - a_1, 0, a_2 - a_1, c_3 - c_1), \\ T_3(0, 2(a_2 - a_1), c_3 - c_1, 0), & T_4(a_2 - a_1, 0, c_3 - c_1, a_2 - a_1), \\ T_5(2(a_2 - a_1), 0, c_3 - c_1, 0), & T_6(0, 2(a_2 - a_1) + c_3 - c_1, 0, 0), \\ T_7(2(a_2 - a_1) + c_3 - c_1, 0, 0, 0), & T_8(2(a_2 - a_1), 0, 0, c_3 - c_1), \end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned} T_1(0, 2\mu, 0, \lambda), & T_2(\mu, 0, \mu, \lambda), & T_3(0, 2\mu, \lambda, 0), & T_4(\mu, 0, \lambda, \mu), \\ T_5(2\mu, 0, \lambda, 0), & T_6(0, 2\mu + \lambda, 0, 0), & T_7(2\mu + \lambda, 0, 0, 0), & T_8(2\mu, 0, 0, \lambda), \end{aligned}$$

за $0 < \mu < \lambda$. Овога пута политоп $ABCDEFGH$ са Слике 3.11 лево није један од њих.

Нека је $2\mu = \lambda = 2$, тј. нека је $\varphi(\{\{1, 2\}, \{1\}\})$ конвексни омотач скупа

$$\{(0, 2, 0, 2), (1, 0, 1, 2), (0, 2, 2, 0), (1, 0, 2, 1), (2, 0, 2, 0), (0, 4, 0, 0), (4, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 2)\},$$

илустрован на Слици 3.11 десно. Преостале елементе блока \mathcal{A}_3 дефинишемо потпуно аналогном процедуром. За међусобно различите елементе i_1 , i_2 , i_3 и i_4 скупа [4], нека је $\varphi(\{\{i_3, i_2\}, \{i_3\}\})$

$$\text{conv}\{4e_{i_2}, 4e_{i_3}, 2e_{i_2} + 2e_{i_1}, 2e_{i_2} + 2e_{i_4}, 2e_{i_3} + 2e_{i_1}, 2e_{i_3} + 2e_{i_4}, 2e_{i_1} + e_{i_3} + e_{i_4}, 2e_{i_4} + e_{i_3} + e_{i_1}\}.$$

Напомена 3.3.2. Приметимо да ни за која два различита елемента i_2 и i_3 скупа [4], слика елемента $\{\{i_3, i_2\}, \{i_3\}\}$ није дефинисана као конвексни омотач скупа тачака

$$\mathcal{V}(\varphi(\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\})) \cap \mathcal{V}(\varphi(\{\{i_3, i_2, i_4\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\})).$$

Овим смо потпуно дефинисали пресликавање φ и политоп

$$M_3 = \Delta_{[4]} + \sum_{\beta \in \mathcal{B}_1} \varphi(\beta) = S''' + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_3} \varphi(\beta).$$

Потврђује се да је M_3 нормално еквивалентан политопу који се може добити сукцесивним зарубљивањем политопа S'' одсецањем свих ивица чије једно теме припада неком четвороуглу са ознаком $\{\{i_3, i_2, i_4\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\}$, а друго четвороуглу са ознаком $\{\{i_3, i_2, i_1\}, \{i_3, i_2\}, \{i_3\}\}$. Наравно, претпоставка је да су све пљосни политопа S'' , без обзира на редослед додавања сабирака, означене елементима скупа $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_4$ на већ описан итеративни начин. Коначно, темена политопа M_3 су све пермутације координата тачака $(1, 13, 32, 125)$, $(1, 11, 36, 123)$, $(2, 9, 37, 123)$, $(3, 9, 34, 125)$ и $(3, 8, 36, 124)$, а може се дефинисати и као пресек хиперравни $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 171$ и граничних полупростора

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i_3} \geq 1 \\ x_{i_2} + x_{i_3} \geq 11 \\ x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} \geq 46 \\ x_{i_2} + 2x_{i_3} \geq 13 \\ x_{i_1} + 2x_{i_2} + 2x_{i_3} \geq 58 \\ x_{i_1} + 2x_{i_2} + 3x_{i_3} \geq 61, \end{array} \right.$$

при чему су i_1 , i_2 и i_3 међусобно различити елементи скупа [4] (видети Додатак А.2). Дакле, $M_3 \simeq PA_3$. Такође се потврђује да сваки индексирани скуп $\{P_i\}_{i \in [48]-[24]}$ слика елемената скупа $\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$, зарубљује политоп S' . Како је већ утврђено да сваки индексирани скуп слика елемената блока \mathcal{A}_4 зарубљује пермутоедар S , трећи услов Дефиниције 1.2.8 је испуњен, и закључујемо да је M_3 , 3-димензионална Минковски-реализација комплекса C .

3.3.3 n -пермутоедари $PA_{n,c}$

У претходним пододељцима, дефинишући 2-димензионалну и 3-димензионалну Минковски-реализацију комплекса C , политопа M_2 и M_3 , ослањали смо се само на спољашње векторе нормала граничних полупростора простих пермутоедара PA_2 и PA_3 . При дефинисању сваког од сабирака коришћена је одговарајућа парцијална сума већ дефинисаних сабирака, уз ослањање на претпоставку да је то довољно. Да је ова претпоставка заиста тачна и да су и остали захтевани услови испуњени, проверавано је коришћењем рачунара.

Циљ овог пододељка је, осим генералног одговора на Питање 3.3.1, наћи политоп који зарубљује задати политоп у задатој страни. Другим речима, циљ је пронаћи везу између два политопа P_1 и P_2 чија је сума нормално еквивалентна неком зарубљеном политопу $\text{tr}_F P_1$ насталом одсецањем задате стране F . Према Теорему 1.2.5 и дефиницији нестоедара, ако је P_1 симплекс, онда је P_2 конвексни омотач свих темена политопа P_1 која не припадају F . Следеће тврђење показује да исто важи за сваки прост политоп P_1 у случају када је F теме. Међутим, ако је $\dim(F) > 0$, онда $P_1 + P_2$ најчешће није чак ни комбинаторно еквивалентно политопима који настају зарубљивањем политопа P_1 одсецањем стране F . Много примера томе сведочи (нпр. сума нестоедра са Сlike 3.7 лево и конвексног омотача свих његових темена изузев темена A и D није комбинаторно еквивалентна политопу који настаје зарубљивањем овог нестоедра одсецањем ивице AD ; чак им ни f -вектор није исти).

Тврђење 3.3.3. Нека је $P_1 \in \mathcal{M}_n$, n -политоп чије је теме v просто. Ако је $P_2 = \text{conv}(\mathcal{V}(P_1) - \{v\})$, онда постоји зарубљени политоп $\text{tr}_v P_1$ за који важи

$$P_1 + P_2 \simeq \text{tr}_v P_1.$$

Доказ: Нека је $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ скуп $\mathcal{V}(P_1) - \{v\}$. Како је теме v просто, садржано је у тачно n ивица, па постоји тачно n темена политопа P_1 која су овом темињу суседна. Претпоставимо да су v и v_i суседна темена ако и само ако $i \in [n]$. Даље, нека је за свако $i \in [n]$, w_i средиште дужи $\overline{v_i v}$. Како постоји хиперраван која садржи све тачке w_i , $i \in [n]$, политоп $\text{conv}(\{w_1, \dots, w_n\} \cup V)$ је зарубљени политоп настао зарубљивањем политопа P_1 одсецањем темена v . Означимо га са $\text{tr}_v P_1$. Дакле,

$$\text{tr}_v P_1 = \text{conv}\left(\left\{\frac{v+v_1}{2}, \dots, \frac{v+v_n}{2}\right\} \cup V\right).$$

С друге стране, према Тврђењу 1.1.17, закону дистрибутивности и Тврђењу 1.1.19, важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \text{conv}(\{v\} \cup V) + \text{conv}V = \text{conv}((\{v\} \cup V) + V) \\ &= \text{conv}((\{v\} + V) \cup (V + V)) = \text{conv}((\{v\} + V) \cup 2V). \end{aligned}$$

Имајући у виду Тврђење 1.1.18(i), без губитка општости можемо претпоставити да је $v = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$, па је онда

$$P_1 + P_2 = \text{conv}(V \cup 2V) \quad \text{и} \quad \text{tr}_v P_1 = \text{conv}\left(\left\{\frac{v_1}{2}, \dots, \frac{v_n}{2}\right\} \cup V\right).$$

Дакле,

$$2\text{tr}_v P_1 = \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\} \cup 2V) \subseteq \text{conv}(V \cup 2V) = P_1 + P_2.$$

Сада, за свако $j \in [k] - [n]$, посматрајмо дуж $L_j = \overline{v_j v}$. Како је P_1 конвексни омотач својих темена, L_j сече хиперраван одсецања у тачки w која припада $\text{conv}\{w_1, \dots, w_n\}$. Дакле,

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{v+v_i}{2} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{v_i}{2},$$

при чему је

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq \alpha_i < 1 \quad \text{за свако } i \in [n].$$

Ако би средиште дужи L_j припадало дужи $\overline{v w}$, онда би из дефиниције тачака w_i , $i \in [n]$, следило да $v_j \in \text{conv}\{v, v_1, \dots, v_n\}$, што је у контрадикцији са чињеницом да је v_j теме. Дакле, средиште дужи L_j припада дужи $\overline{w v_j}$, тј.

$$\frac{v_j}{2} \in \text{conv}\{w, v_j\}.$$

То значи да постоје $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ за које важи $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и

$$\frac{v_j}{2} = \lambda_1 w + \lambda_2 v_j = \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{v_i}{2} + \lambda_2 v_j,$$

што даље имплицира

$$v_j = \sum_{i=1}^n \lambda_1 \alpha_i v_i + \lambda_2 2v_j.$$

Како је $0 < \lambda_1 \alpha_i < 1$ за свако $i \in [n]$, и

$$\lambda_2 + \sum_{i=1}^n \lambda_1 \alpha_i = \lambda_2 + \lambda_1 \sum_{i=1}^n \alpha_i = \lambda_2 + \lambda_1 = 1,$$

закључујемо да $v_j \in \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\} \cup 2V)$, што имплицира да је

$$\text{conv}(V \cup 2V) \subseteq \text{conv}(\{v_1, \dots, v_n\} \cup 2V).$$

Дакле, $P_1 + P_2 = 2\text{tr}_v P_1$. Остаје да применимо напомену из Примера 1.1.17. \square

Тврђење 3.3.4. [49, Тврђење 7.12. и дефиниција на стр. 195] *Лепеза суме два политопа је заједничко профишење лепеза њених сабирака, тј.*

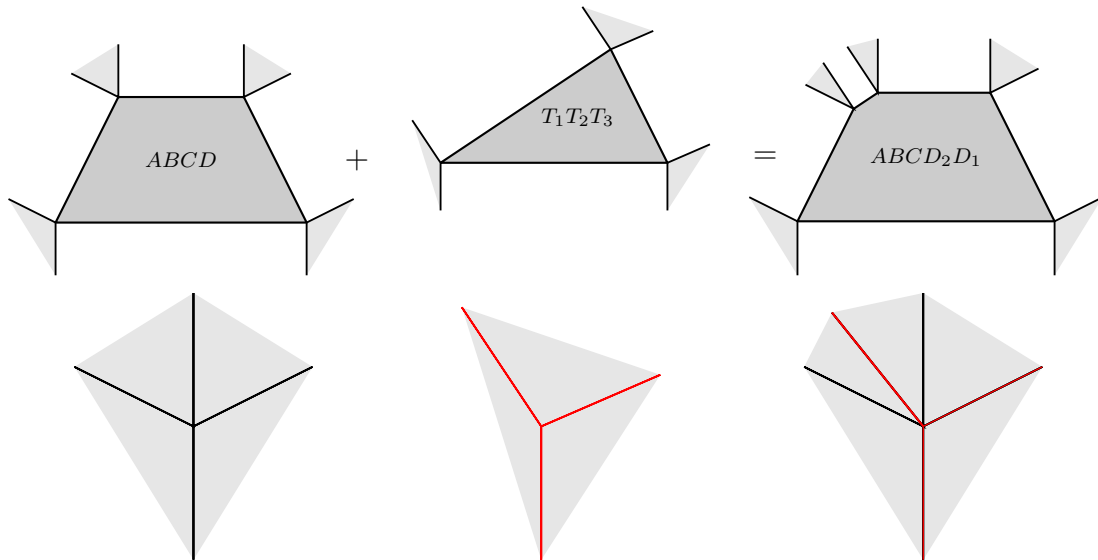
$$\mathcal{L}(P_1 + P_2) = \{N_1 \cap N_2 \mid N_1 \in \mathcal{L}(P_1), N_2 \in \mathcal{L}(P_2)\}.$$

Последица 3.3.5. *За $P, P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n$ важи $P_1 + P_2 \simeq P$ ако и само ако важе следећа два исказа.*

- (i) *Сваки максимални нормални конус политопа P је пресек максималног нормалног конуса политопа P_1 и максималног нормалног конуса политопа P_2 .*
- (ii) *Ако је пресек максималног нормалног конуса политопа P_1 и максималног нормалног конуса политопа P_2 неки n -конус, онда је он максимални нормални конус политопа P .*

Доказ: Следи директно из претходног тврђења и Тврђења 1.1.14. \square

Наредна слика илуструје примену Тврђења 3.3.4 на трапезу $ABCD$ и троуглу $T_1T_2T_3$ који је транслација троугла ABC (видети Пододељак 3.3.1). Приметимо да је, без губитка општости, претпостављено да се ови полигони налазе у \mathbf{R}^2 . Лепеза њиховог збира заиста одговара петоуглу који је нормално еквивалентан сваком политопу који настаје зарубљивањем трапеза одсецањем темена D помоћу полупростора одсецања чија је гранична хиперраван паралелна ивици AC .



Слика 3.13: Нормални конуси и лепезе у \mathbf{R}^2

Доказ Тврђења 3.3.2. Претпоставимо да је за неки пар различитих елемената $i_1, i_2 \in [3]$, $\varphi(\{\{i_2, i_1\}, \{i_2\}\})$ дуж $L \subset \mathbf{R}^3$. Према претходном тврђењу и Примеру 1.1.16, лепеза суме $S + L$ је заједничко профишење лепезе шестоугла S и скупа $\{\pi, \pi^{\geq}, \pi^{\leq}\}$, где је π равна нормална на L . Како је S шестоугао са три пара паралелних ивица, његова лепеза се састоји од три равни, које се секу у једној правој, и шест диедара које те равни одређују. Очигледно је да је свако

профињење такве лепезе, које профињује и лепезу $\{\pi, \pi^{\geq}, \pi^{\leq}\}$, или идентична лепеза $\mathcal{L}(S)$ или лепеза која одговара осмоуглу са четири пара паралелних ивица. Дакле, $S+L$ није седмоугао, тј. L не зарубљује шестоугао S , што је у контрадикцији са трећим условом Дефиниције 1.2.8. \square

У складу са Напоменом 1.1.2, нека је $P_1 \in \mathcal{M}_n$ један d -политоп дефинисан као пресек m граничних полупростора

$$\alpha_i^{\geq} : \langle a_i, x \rangle \geq b_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

и нека је $\text{tr}_F P_1$ паралелно зарубљени политоп дефинисан као пресек $m+1$ граничних полупростора

$$\alpha_i^{\geq} : \langle a_i, x \rangle \geq b_i, \quad 0 \leq i \leq m.$$

Дефиниција 3.3.1. Нека су P_1 и $\text{tr}_F P_1$ политопи дефинисани на горе описан начин. Политоп $P_2 \in \mathcal{M}_n$ је F -деформација¹ политопа P_1 када су испуњена следећа два услова:

(i) P_2 је пресек полупростора $\pi_i^{\geq} : \langle a_i, x \rangle \geq c_i, \quad 0 \leq i \leq m$, при чему је

$$P_2 \cap \pi_0 \simeq P_1 \cap \alpha_0;$$

(ii) за сваки скуп $S \subset \{0, \dots, m\}$, ако је $\bigcap \{\alpha_i \mid i \in S\}$ теме политопа $\text{tr}_F P_1$, онда је $\bigcap \{\pi_i \mid i \in S\}$ теме политопа P_2 .

Напомена 3.3.3. Услов (ii), заједно са првим делом услова (i), значи да се политоп P_2 може добити од политопа $\text{tr}_F P_1$ паралелним транслацијама пљосни без, грубо речено, прелажења преко темена. Ако је f пљосан политопа $\text{tr}_F P_1$ која лежи у хиперравни одсецања, онда то, заједно са другим делом услова (i), значи да је $d-1 \leq \dim(P_2) \leq d$ и да је π_0 носач $(d-1)$ -стране политопа P_2 која је нормално еквивалентна f . Ако је $\dim(P_2) = d-1$, та стана је сам политоп P_2 .

Напомена 3.3.4. Кажемо да теме F -деформације политопа P_1 одговара темену политопа $\text{tr}_F P_1$ ако му одговара у смислу услова (ii) Дефиниције 3.3.1.

Пример 3.3.1. Политоп настао паралелним зарубљивањем политопа P_1 одсецањем стране F је једна F -деформација политопа P_1 у односу на тај зарубљени политоп.

Пример 3.3.2. Троугао ABC је D -деформација трапеза $ABCD$ (Слика 3.3 и Слика 3.13). Слика 3.7, Слика 3.9 и Слика 3.11 илуструју примере 3-нестоедара и њихових деформација.

Лема 3.3.6. Нека су P_1 и $\text{tr}_F P_1$ два политопа дефинисна на горе описан начин. Ако је P_2 једна F -деформација политопа P_1 , онда важе следећа тврђења.

- (i) Ако је v теме политопа $\text{tr}_F P_1$ и u_2 њему одговарајуће теме политопа P_2 , онда је $N_v(\text{tr}_F P_1) \subseteq N_{u_2}(P_2)$.
- (ii) Сваки максимални нормални конус политопа P_2 је унија максималних нормалних конуса политопа $\text{tr}_F P_1$.

¹Ова дефиниција је инспирисана [38, Дефиницијом 15.01] која за дати политоп дефинише неколико типова конуса деформације.

- (iii) Сваки максимални нормални конус политопа P_2 садржи највише један максимални нормални конус политопа $\text{tr}_F P_1$ у темену које припада хиперравни одсецања.

Доказ: Без губитка општости, претпоставимо да је P_1 максимално димензионалан.

(i): Нека је $\{\alpha_i^\geq \mid i \in S\}$ скуп граничних полупростора који дефинишу све пљосни којима v припада. Дакле, скуп зракова $\{-a_i \mid i \in S\}$ разапиње конус $N_v(\text{tr}_F P_1)$, и u_2 је пресек хиперравни π_i , $i \in S$. Одатле, за свако $i \in S$, функционал $-a_i$ достиже максималну вредност на политопу P_2 у темену u_2 , тј. зрак $-a_i$ је садржан у конусу $N_{u_2}(P_2)$. Дакле, сви разапињући зраци конуса $N_v(\text{tr}_F P_1)$ су садржани у конусу $N_{u_2}(P_2)$.

(ii): Према претходном, за сваки максимални нормални конус политопа $\text{tr}_F P_1$ постоји максимални нормални конус политопа P_2 који га садржи, па тврђење следи из чињенице да су лепезе обе политопа потпуне.

(iii): Према услову (i) Дефиниције 3.3.1, $P_2 \cap \pi_0$ је $(n-1)$ -страна политопа P_2 , па је $-a_0$ разапињући зрак свих и само оних максималних нормалних конуса политопа P_2 у теменима те стране. Према тврђењу(ii), сваки од њих садржи макар један нормални конус политопа $\text{tr}_F P_1$ у темену које лежи у α_0 . Онда, како је $P_2 \cap \pi_0 \sim \text{tr}_F P_1 \cap \alpha_0$, тврђење директно следи из једнакости $|\mathcal{V}(P_2 \cap \pi_0)| = |\mathcal{V}(\text{tr}_F P_1 \cap \alpha_0)|$. \square

Тврђење 3.3.7. Нека су P_1 и $\text{tr}_F P_1$ два политопа дефинисана на горе описан начин. Ако је P_2 једна F -деформација политопа P_1 , онда је

$$P_1 + P_2 \simeq \text{tr}_F P_1.$$

Доказ: Без губитка општости, претпоставимо да је P_1 максимално димензионалан и покажимо да тврђење важи позивањем на Последицу 3.3.5.

Нека је N_v нормални конус политопа $\text{tr}_F P_1$ у темену v . Циљ је наћи два максимална нормална конуса $N_1 \in \mathcal{L}(P_1)$ и $N_2 \in \mathcal{L}(P_2)$ за која је $N_v = N_1 \cap N_2$. Нека је u_2 теме политопа P_2 које одговара v у складу са Напоменом 3.3.4. Тада је, према Леми 3.3.6(i), $N_v \subseteq N_{u_2}(P_2)$. Ако зрак $-a_0$ није разапињући за N_v , онда је v теме политопа P_1 , тј. $N_v = N_v(P_1)$, па је N_v пресек нормалних конуса $N_v(P_1)$ и $N_{u_2}(P_2)$. У супротном, ако $v \in \alpha_0$, онда постоји ивица E политопа P_1 која сече α_0 у темену v , а са страном F има заједничко теме. Нека је $E \cap F$ теме u_1 . Према Леми 1.1.16, $N_v \subseteq N_{u_1}(P_1)$, па је, дакле, $N_v \subseteq N_{u_1}(P_1) \cap N_{u_2}(P_2)$. Ако је $N_v = N_{u_2}(P_2)$, онда је очигледно $N_v = N_{u_1}(P_1) \cap N_{u_2}(P_2)$. Иначе, према Леми 3.3.6(ii) и (iii), $N_{u_2}(P_2) = N_v \cup N$, где је N унија максималних нормалних конуса политопа $\text{tr}_F P_1$ при чему је сваки од њих нормални конус у темену које је ван хиперравни одсецања, тј. у темену политопа P_1 које не припада F . Ако би важило $N_v \subset N_{u_1}(P_1) \cap N_{u_2}(P_2)$, постојао би максимални нормални конус политопа P_1 садржан у N чији је пресек са N_{u_1} конус димензије n , што је у контрадикцији са чињеницом да су то максимални нормални конуси исте лепезе. Дакле, и у овом случају је $N_v = N_{u_1}(P_1) \cap N_{u_2}(P_2)$, па је први услов Последице 3.3.5 испуњен.

Нека су сада N_{u_1} и N_{u_2} редом нормални конуси политопа P_1 и P_2 у теменима u_1 и u_2 . Покажимо да ако им је пресек n -конус, онда је то максимални нормални конус политопа $\text{tr}_F P_1$. Ако $u_1 \notin F$, онда је $N_{u_1} = N_{u_1}(\text{tr}_F P_1)$. Према Леми 3.3.6(i), N_{u_2} је унија максималних нормалних конуса политопа $\text{tr}_F P_1$, па је $N_{u_1} \cap N_{u_2}$ конус димензије n ако и само ако је $N_{u_1} \subseteq N_{u_2}$. Ако то јесте случај, пресек је баш N_{u_1} , максимални конус политопа $\text{tr}_F P_1$. Претпоставимо сада да $u_1 \in F$. Према Леми 3.3.6(iii), за N_{u_2} имамо две могућности. Ако сви максимални

нормални конуси политопа $\text{tr}_F P_1$, који су садржани у N_{u_2} , одговарају теменима ван хиперравни одсецања, онда су они максимални нормални конуси политопа P_1 у теменима која не припадају F , па пресек нормалног конуса N_{u_1} са унијом тих конуса није n -конус. У супротном, постоји тачно једно теме v које припада хиперравни одсецања и за које је $N_v(\text{tr}_F P_1) \subseteq N_{u_2}$. Применом Леме 1.1.16 закључујемо да је $N_{u_1} \cap N_{u_2}$ конус димензије n ако и само ако постоји ивица политопа P_1 којој припадају оба темена, и u_1 и v . Ако таква ивица постоји, њихов пресек је баш $N_v(\text{tr}_F P_1)$, па можемо закључити да је и други услов Последице 3.3.5 испуњен. \square

Ако је P_1 прост политоп и $v \in \mathcal{V}(P_1)$, онда је $\text{conv}(\mathcal{V}(P_1) - \{v\})$, v -деформација политопа P_1 . Дакле, Тврђење 3.3.3 је специјалан случај претходног тврђења. Приметимо да су доказана другачијим методама и да је Тврђење 3.3.3 доказано без иједног позива Последице 3.3.5, односно Тврђења 3.3.4.

Сада, у намери да одговоримо на Питање 3.3.1, представљамо n -политоп $PA_{n,1}$. И више од тога, представљамо фамилију n -политопа $PA_{n,c}$, за $c \in (0, 1]$.

Нека је $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ партиција скупа \mathcal{B}_1 у којој \mathcal{A}_1 садржи све једноелементне скупове, тј.

$$\mathcal{A}_1 = \{\{\{i_{1+l}, \dots, i_1\} \mid 0 \leq l \leq n-1\}\} \text{ и } \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1,$$

где су i_1, \dots, i_n међусобно различити елементи скупа $[n+1]$. Нека је

$$\beta = \{\{i_{k+l}, \dots, i_k, \dots, i_1\}, \dots, \{i_{k+l}, \dots, i_k, i_{k-1}\}, \{i_{k+l}, \dots, i_k\}\},$$

елемент скупа \mathcal{A}_2 , за $1 < k \leq k+l \leq n$. Даље, нека је

$$\beta_{\min} = \{i_{k+l}, \dots, i_k\}, \quad \beta_{\max} = \{i_{k+l}, \dots, i_k, \dots, i_1\} \text{ и}$$

$$\mathcal{B}_\beta = \{B \subseteq [n+1] \mid B \in \beta \text{ или } B \subset \beta_{\min} \text{ или } \beta_{\max} \subset B\} \cup \{\{v\} \mid v \in [n+1]\}.$$

Лема 3.3.8. *Скуп $\mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$ је градивни скуп скупа $\mathcal{P}([n+1])$.*

Доказ: Сви једноелементни подскупови скупа $[n+1]$ припадају $\mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$ по дефиницији. Нека су $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$ два недисјунктна различита скупа. Ако су упоредиви, њихова унија очигледно припада $\mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$. У супротном, пошто је $\beta_{\min} \subset \beta_{\max}$, или је $B_1, B_2 \supset \beta_{\max}$ или је $B_1, B_2 \subset \beta_{\min}$, односно

$$\text{или је } \beta_{\max} \subseteq B_1 \cap B_2 \subset B_1 \cup B_2 \text{ или је } \beta_{\min} \supseteq B_1 \cup B_2.$$

Дакле, у оба случаја, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$. \square

Према претходној лем и Дефиницији 1.2.5, $\mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$ је градивни скуп комплекса C_0 , па је, према Теорему 1.2.5, нестоедар $P_{\mathcal{B}_\beta}$, n -димензионална Минковски-реализација комплекса $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\})$. Претпоставимо да су пљосни овог нестоедра правилно означене у складу са Дефиницијом 1.2.10, и нека је, за сваку ознаку $A \in \mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$, f_A пљосан означена са A . Према дефиницији скупа \mathcal{B}_β , важи $\beta \subseteq \mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$, па нека је

$$F_\beta = \bigcap_{B \in \beta} f_B.$$

Елементи скупа β су међусобно упоредиви, па је, према Напомени 1.2.4, F_β права страна нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$ (видети и [8, Теорема 1.5.14]), а како је $|\beta| > 1$, F_β није пљосан.

Имајући у виду Напомену 1.2.5, следеће тврђење је само специјалан случај Теореме 1.2.3, али га наводимо засебно јер ћемо се на њега често позивати.

Тврђење 3.3.9. *Нестоедар $P_{\mathcal{B}_\beta}$ је прост n -политоп за који важи*

$$P_{\mathcal{B}_\beta} = \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = |\mathcal{B}_\beta|, \sum_{i \in A} x_i \geq |\mathcal{B}_{\beta|A}| \text{ за свако } A \in \mathcal{B}_\beta \right\},$$

при чему за сваки скуп $A \neq [n+1]$ хиперраван $\pi_A = \left\{ x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i \in A} x_i = |\mathcal{B}_{\beta|A}| \right\}$ дефинише пљосан f_A нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$.

Нека је N_β политоп који настаје од нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$ уклањањем стране F_β , тј.

$$N_\beta = \text{conv}(\mathcal{V}(P_{\mathcal{B}_\beta}) - \mathcal{V}(F_\beta)).$$

Даље, нека је $\kappa_\beta : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ функција

$$\kappa_\beta(x) = \sum_{B \in \beta} \sum_{i \in B} x_i = x_{i_1} + 2x_{i_2} + \dots + k(x_{i_k} + \dots + x_{i_{k+l}}),$$

за $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$, и нека је $m_\beta = \min_{v \in \mathcal{V}(P_{\mathcal{B}_\beta})} \kappa_\beta(v)$.

Тврђење 3.3.10. *Важи једнакост*

$$F_\beta = \text{conv}\{v \in \mathcal{V}(P_{\mathcal{B}_\beta}) \mid \kappa_\beta(v) = m_\beta\}.$$

Доказ: Нека је $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ теме нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$. Како је $\beta \subseteq \mathcal{B}_\beta$, према Тврђењу 3.3.9 важи

$$\kappa_\beta(v) = \sum_{B \in \beta} \sum_{i \in B} v_i \geq \sum_{B \in \beta} |\mathcal{B}_{\beta|B}|,$$

односно

$$m_\beta = \sum_{B \in \beta} |\mathcal{B}_{\beta|B}|.$$

Дакле, $\kappa_\beta(v) = m_\beta$ ако и само ако за свеко $B \in \beta$, v лежи у хиперравни π_B . Како π_B дефинише пљосан f_B , $\kappa_\beta(v) = m_\beta$ ако и само ако $v \in \bigcap_{B \in \beta} f_B$. \square

Последица 3.3.11. *Важи једнакост*

$$N_\beta = \text{conv}\{v \in \mathcal{V}(P_{\mathcal{B}_\beta}) \mid \kappa_\beta(v) > m_\beta\}.$$

Ова последица нуди једноставнији начин генерисања политопа N_β , који је ближи операцији сумирања политопа. Наиме, једноставније је радити само са теменима и њиховим координатама него са пљоснима и њиховим ознакама. Овакав начин генерисања носи и велике олакшице и разне погодности са аспекта програмирања.

Следе примери политопа N_β у случајевима $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$. За детаље о начину компјутерског генерисања и анализе ових политопа упућујемо на Додатак А.2.

Пример 3.3.3. Ако је $n = 2$ и $\beta = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$, онда је $\mathcal{B}_\beta = \beta \cup \{\{2\}, \{3\}, [3]\}$, па је $P_{\mathcal{B}_\beta}$ трапез $ABCD$ приказан на Слици 3.3. Како је $m_\beta = 4$, F_β и N_β су редом теме D и троугао ABC .

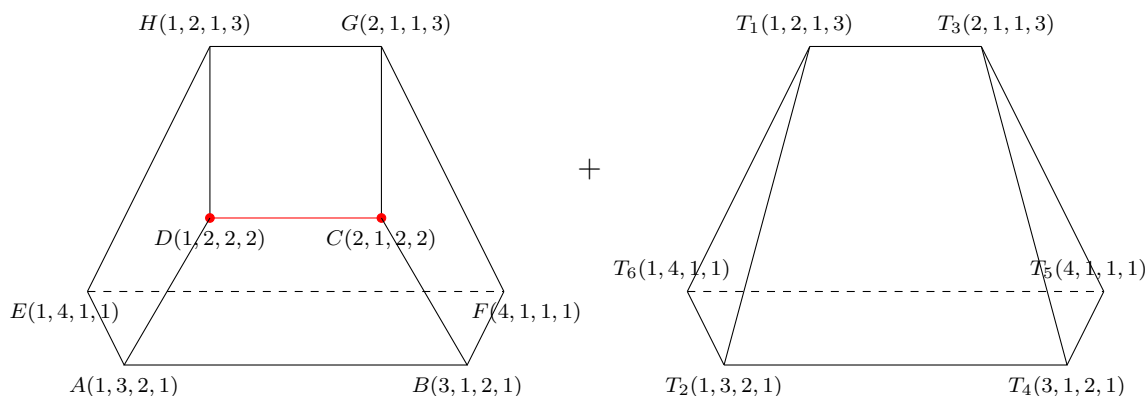
Пример 3.3.4. Нека је $n = 3$.

Ако је $\beta = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}, \{1\}\}$, онда је $\mathcal{B}_\beta = \beta \cup \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, [4]\}$ и

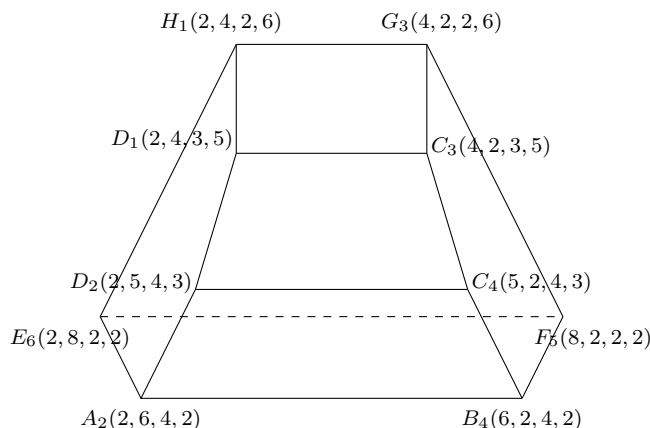
$$P_{\mathcal{B}_\beta} = \Delta_{[4]} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{4\}} + \Delta_{\{1,2,4\}} + \Delta_{\{1,2\}},$$

нестоедар $ABCDEFGH$ (Слика 3.7 лево). Како је $m_\beta = 9$, F_β је теме D , а N_β конвексни омотач преосталих темена (Слика 3.7 десно). Подсећамо да постоји политоп настао зарубљивањем овог нестоедра одсецањем темена D , коме је политоп $P_{\mathcal{B}_\beta} + N_\beta$ нормално еквивалентан (Слика 3.8).

Ако је $\beta = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}\}$, онда су \mathcal{B}_β и $P_{\mathcal{B}_\beta}$ исти као у претходном случају, али је $m_\beta = 8$. Овај минимум се достиже у теменима C и D , па је F_β ивица CD . Еквивалентно, F_β је пресек пљосни са ознакама $\{1, 2\}$ и $\{1, 2, 4\}$, тј. квадрата $CDGH$ и трапеза $ABCD$. Какогод, N_β је конвексни омотач преосталих темена (Слика 3.14 десно). Такође се може проверити да постоји политоп који се може добити зарубљивањем нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$ одсецањем ивице CD , коме је сума $P_{\mathcal{B}_\beta} + N_\beta$ нормално еквивалентна (Слика 3.15).



Слика 3.14: Политопи $P_{\mathcal{B}_\beta}$ и N_β за $\beta = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}\}$



Слика 3.15: Сума $P_{\mathcal{B}_\beta} + N_\beta$ за $\beta = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2\}\}$

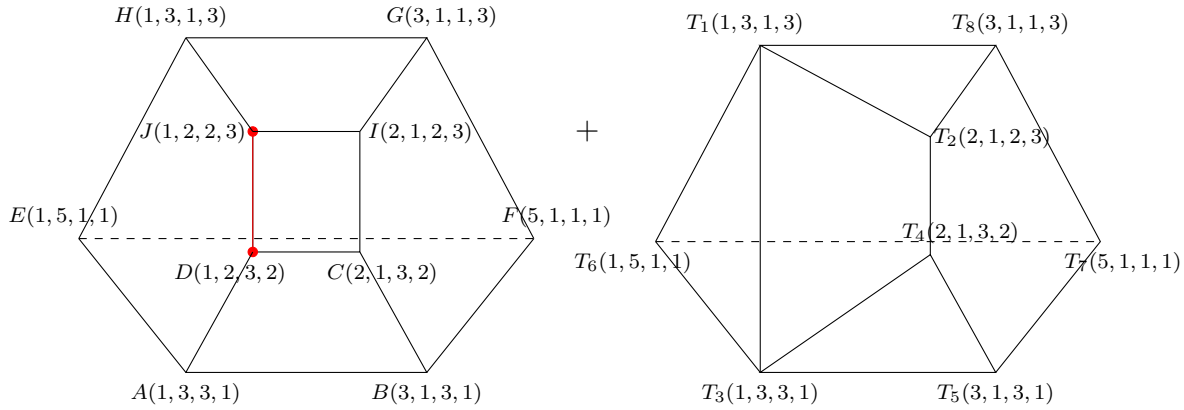
Ако је $\beta = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$, онда је

$$\mathcal{B}_\beta = \beta \cup \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, [4]\},$$

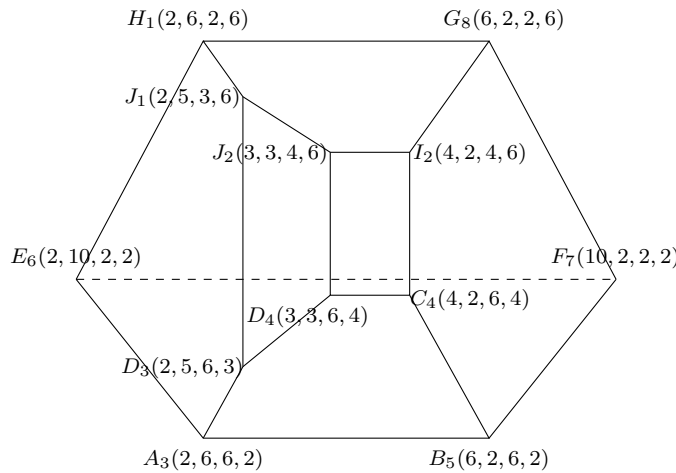
а политоп $ABCDEFGHIJ$ на Слици 3.16 лево је нестоедар

$$P_{\mathcal{B}_\beta} = \Delta_{[4]} + \Delta_{\{1\}} + \Delta_{\{2\}} + \Delta_{\{3\}} + \Delta_{\{4\}} + \Delta_{\{1,2,3\}} + \Delta_{\{1,2,4\}} + \Delta_{\{1,2\}}.$$

То значи да је $m_\beta = 4$, а F_β ивица DJ . Еквивалентно, F_β је пресек пљосни означених са $\{1, 2\}$ и $\{1\}$, тј. петоугла $AEDJH$ и квадрата $CDIJ$. У сваком случају, N_β је конвексни омотач преосталих тачака (Слика 3.16 десно). Приметимо да, у овом случају, N_β није прост политоп. Ако погледамо Слика 3.17 која илуструје суму $P_{\mathcal{B}_\beta} + N_\beta$, можемо закључити да постоји политоп који се може добити зарубљивањем нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$ одсецањем ивице DJ , а коме је ова сума нормално еквивалентна.



Слика 3.16: Политопи $P_{\mathcal{B}_\beta}$ и N_β за $\beta = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$



Слика 3.17: Сума $P_{\mathcal{B}_\beta} + N_\beta$ за $\beta = \{\{1, 2\}, \{1\}\}$

Пример 3.3.5. Ако је $n = 4$ и $\beta = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}\}$, онда је

$$\mathcal{B}_\beta = \beta \cup \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, [5]\},$$

а $\mathcal{V}(P_{\mathcal{B}_\beta})$ је скуп

$$\begin{aligned} &\{(6, 1, 1, 1, 1), (1, 6, 1, 1, 1), (2, 1, 5, 1, 1), (1, 2, 5, 1, 1), (1, 2, 3, 3, 1), \\ &(4, 1, 1, 3, 1), (3, 1, 1, 3, 2), (1, 4, 1, 3, 1), (2, 1, 3, 3, 1), (1, 2, 3, 1, 3), \\ &(2, 1, 2, 3, 2), (1, 2, 2, 3, 2), (4, 1, 1, 1, 3), (1, 4, 1, 1, 3), (1, 3, 1, 2, 3), \\ &(2, 1, 3, 1, 3), (3, 1, 1, 2, 3), (2, 1, 2, 2, 3), (1, 2, 2, 2, 3), (1, 3, 1, 3, 2)\}. \end{aligned}$$

Одатле је $m_\beta = 9$, па је F_β четвороугао чија су темена тачке последње колоне. Дакле, N_β је конвексни омотач тачака у преосталим колонама.

Коначно, за $n \geq 2$, нека је

$$PA_{n,1} = \Delta_{[n+1]} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_1} \Delta_{\cup \beta} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_2} N_{\beta}.$$

Остатак овог пододељка је посвећен доказу следеће теореме.

Теорема 3.3.12. *Политоп $PA_{n,1}$ је n -димензионална Минковски-реализација комплекса C која је нормално еквивалентна политопу PA_n .*

Лема 3.3.13. *Максимални угњежђен скуп $N \in \mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_{\beta} - \{[n+1]\})$ одговара темињу стране F_{β} ако и само ако је N максималан 0-угњежђен скуп и $\beta \subseteq N$.*

Доказ: Ако је v теме које одговара N , v је теме стране F_{β} ако и само ако $v \in f_{\beta}$ за свако $B \in \beta$, односно ако и само ако $N \supseteq \beta$.

Остаје да покажемо да ако N одговара темињу стране F_{β} , онда је N максималан 0-угњежђен скуп. Како је N максималан, кардиналности је n , па се, према Дефиницији 1.2.7, може добити надограђивањем скупа β са још $n - k$ елемената скупа $\mathcal{B}_{\beta} - \{[n+1]\}$. Притом, унија сваког N -антиланца припада $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_{\beta} - \{[n+1]\}) - \mathcal{B}_{\beta}$. Покажимо да нема N -антиланаца, тј. да су сви елементи скупа N међусобно упоредиви, што значи да је N максимални 0-угњежђени скуп.

У N -антиланцу се не може наћи ниједан пар вишеелементних скупова, јер би то значило или да је реч о подскуповима скупа β_{min} или о надскуповима скупа β_{max} , па би унија таквог пара била или подскуп скупа β_{min} или надскуп скупа β_{max} , тј. припадала би $\mathcal{B}_{\beta} - \{[n+1]\}$ или би била баш скуп $[n+1]$ који не припада C_0 .

Даље, за свако $i \in \beta_{max} - \beta_{min}$ скуп $\{i\}$ не припада N , јер постоји скуп $A \in \beta$ за који је $\{A, \{i\}\}$, N -антиланац чија унија припада β , па тиме и $\mathcal{B}_{\beta} - \{[n+1]\}$. Такође, за свако $i \in [n+1] - \beta_{max}$ скуп $\{i\}$ не припада N јер је $\{\beta_{max}, \{i\}\}$, N -антиланац чија унија је надскуп скупа β_{max} , односно или припада $\mathcal{B}_{\beta} - \{[n+1]\}$ или не припада C_0 . Унија пара једноелементних подскупова скупа β_{min} , такође је подскуп скупа β_{min} , па се само један такав скуп може наћи у N . Дакле, не постоји ниједан N -антиланац. \square

Нека је $\pi_{\beta,c}$, за $c \in (0, 1]$, хиперраван дефинисана једначином

$$x_{i_1} + 2x_{i_2} + \dots + k(x_{i_k} + \dots + x_{i_{k+1}}) = m_{\beta} + c,$$

и нека је a_{β} произвољни спољашњи вектор нормале полупростора $\pi_{\beta,c}^{\geq}$.

Напомена 3.3.5. Збир спољашњих вектора нормала свих пљосни које садрже F_{β} је спољашњи вектор нормале полупростора $\pi_{\beta,c}^{\geq}$, за свако $c \in (0, 1]$.

Лема 3.3.14. *За сваки елемент $\beta \in \mathcal{A}_2$*

$$P_{\beta} \cap \pi_{\beta,c}^{\geq} = \begin{cases} \text{паралелно зарубљени политоп } \text{tr}_{F_{\beta}} P_{\beta}, & \text{за } c \in (0, 1) \\ N_{\beta}, & \text{за } c = 1. \end{cases}$$

При том, у односу на све ове паралелно зарубљене политопе, политоп N_{β} је F_{β} -деформација нестоедра P_{β} .

Доказ: Најпре, чињеница да су све координате темена нестоедра P_{β} природни бројеви, Тврђење 3.3.10 и Последица 3.3.11, имплицирају да је за свако $c \in (0, 1)$, полупростор $\pi_{\beta,c}^{\geq}$ испод свих темена стране F_{β} и изнад свих темена

политопа N_β . Дакле, $F_{\mathcal{B}_\beta} \cap \pi_{\beta,c} \geq$ је зарубљени политоп настао зарубљивањем политопа $F_{\mathcal{B}_\beta}$ одсецањем стране F_β . Како хиперраван $\pi_{\beta,0}$ дефинише страну F_β , сва ова зарубљивања су паралелна, па је за свако $c \in (0, 1)$, политоп $F_{\mathcal{B}_\beta} \cap \pi_{\beta,c} \geq$ једна F_β -деформације нестоедра $F_{\mathcal{B}_\beta}$ (видети Пример 3.3.1).

Нека је $\{U, W\}$ таква партиција скупа $\mathcal{V}(N_\beta)$, да су у U сва темена која су суседна неком темену стране F_β у политопу $F_{\mathcal{B}_\beta}$, а сва остала темена припадају W . Нека је $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$ произвољно теме из скупа U , $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ једно од темена стране F_β које је суседно темену u , а N_v и N_u максимални угњежђени скупови који овим теменима одговарају. Како је $|N_v| = |N_u| = n$, а \overline{uv} ивица нестоедра, важи $|N_v \cap N_u| = n - 1$, што значи да се N_u може добити од N_v заменом неког елемента S_v другим елементом $S_u \in \mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$. Према Лемми 3.3.13, $\beta \subseteq N_v$ и $\beta \not\subseteq N_u$, што значи да је $S_v \in \beta$. Користећи резоновање као у доказу Леме 3.3.13 и имајући у виду да је N_v максималан 0-угњежђен скуп, утврђује се да S_u мора бити једноелементни скуп. У сваком другом случају постоји N_u -антиланац чија унија припада \mathcal{B}_β .

Претпоставимо да F_β није теме, тј. $|\beta| < n$, и да постоји још једно теме $v' \in \mathcal{V}(F_\beta)$ суседно темену u . Ако је $N_{v'}$ њему одговарајући максимални 0-угњежђени скуп, N_u се може добити и из $N_{v'}$ заменом елемента $S'_v \in \beta$ једноелементним скупом S'_u . То је могуће једино ако се N_v и $N_{v'}$ разликују само за елементе $A \in N_v - \beta$ и $B \in N_{v'} - \beta$, а да је притом $S_v = S'_v$, $S_u = B$ и $S'_u = A$. Дакле, једноелементни скупови A и B чине N_u -антиланац. Скупови N_v и $N_{v'}$ садрже β_{min} , а елементи сваког од њих су међусобно упоредиви, па је и унија овог антиланца садржана у β_{min} тј. припада скупу $\mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\}$, што је у контрадикцији са чињеницом да је N_u угњежђен скуп. Дакле, различита темена стране F_β нису суседна истом темену скупа U .

Покажимо да $u \in \pi_{\beta,1}$. Нека је N_v скуп

$$\{\{i_n, \dots, i_1\}, \dots, \{i_n, i_{n-1}\}, \{i_n\}\}.$$

Како $v \in F_\beta$ и $u \notin F_\beta$, важи следеће:

$$\begin{aligned} m_\beta(v) &= v_{i_1} + 2v_{i_2} + \dots + k(v_{i_k} + \dots + v_{i_{k+l}}) = m_\beta, \\ m_\beta(u) &= u_{i_1} + 2u_{i_2} + \dots + k(u_{i_k} + \dots + u_{i_{k+l}}) > m_\beta. \end{aligned}$$

Такође, за сваки елемент A скупа $N_v \cap N_u = N_v - \{S_v\} = N_u - \{S_u\}$, важи $u, v \in f_A$, па, према Тврђењу 3.3.9, важи једнакост

$$(\star) \quad \sum_{i \in A} u_i = \sum_{i \in A} v_i = |\mathcal{B}_{\beta|A}|.$$

Према Тврђењу 3.3.9 такође важи једнакост

$$(\star\star) \quad u_1 + \dots + u_{n+1} = v_1 + \dots + v_{n+1} = |\mathcal{B}_{\beta|[n+1]}|.$$

Нека је $S_v = \{i_{k+l}, \dots, i_p\}$ за неко $1 \leq p \leq k$. Једнакост (\star) онда имплицира

$$m_\beta(u) = m_\beta - (v_{i_p} + v_{i_{p+1}} + \dots + v_{i_{k+l}}) + (u_{i_p} + u_{i_{p+1}} + \dots + u_{i_{k+l}}).$$

Анализирајмо могуће случајеве.

(1) Ако је S_v једноелементни скуп, тј. $p = k = n$ и $l = 0$, онда је

$$m_\beta(u) = m_\beta - v_{i_k} + u_{i_k}.$$

Како $\{i_k\} \in N_v$, из Тврђења 3.3.9 имамо $v_{i_k} = |\mathcal{B}_{\beta|\{i_k\}}| = 1$. Разматрањем свих могућности за скуп S_u , утврђује се да је N_u угњежђен скуп ако и само ако је $S_u = \{i_{k-1}\}$. То значи да $u \in f_{\{i_{k-1}\}}$, односно према Тврђењу 3.3.9,

$$u_{i_{k-1}} = |\mathcal{B}_{\beta|\{i_{k-1}\}}| = 1.$$

Како $\{i_k, i_{k-1}\} \in N_u \cap N_v$, применом Тврђења 3.3.9 добијамо једнакост

$$u_{i_k} = |\mathcal{B}_{\beta|\{i_k, i_{k-1}\}}| - u_{i_{k-1}} = 3 - 1 = 2,$$

одакле следи

$$m_{\beta}(u) = m_{\beta} - 1 + 2 = m_{\beta} + 1.$$

(2) Ако S_v није једноелементни скуп, онда $\{i_{k+l}, \dots, i_{p+1}\} \in N_v \cap N_u$, па једнакост (★) повлачи

$$u_{i_{p+1}} + \dots + u_{i_{k+l}} = v_{i_{p+1}} + \dots + v_{i_{k+l}}.$$

Дакле,

$$m_{\beta}(u) = m_{\beta} - v_{i_p} + u_{i_p}.$$

Како $S_v, \{i_{k+l}, \dots, i_{p+1}\} \in N_v$, применом Тврђења 3.3.9 добијамо једнакости

$$v_{i_p} = |\mathcal{B}_{\beta|S_v}| - |\mathcal{B}_{\beta|S_v - \{i_p\}}| = |\mathcal{B}_{\beta|S_v - \{i_p\}}| + 2 - |\mathcal{B}_{\beta|S_v - \{i_p\}}| = 2.$$

(2.1) Ако је $|S_v| \neq n$, онда разматрањем свих могућности утврђујемо да је N_u угњежђен скуп ако и само ако је $S_u = \{i_{p-1}\}$. То даље имплицира да $u \in f_{\{i_{p-1}\}}$, тј. према Тврђењу 3.3.9, важи

$$u_{i_{p-1}} = |\mathcal{B}_{\beta|\{i_{p-1}\}}| = 1.$$

Како $\{i_{k+l}, \dots, i_{p-1}\}, \{i_{k+l}, \dots, i_{p+1}\} \in N_v \cap N_u$, из једнакости (★) добијамо следеће једнакости:

$$\begin{aligned} u_{i_{k+l}} + \dots + u_{i_{p-1}} &= |\mathcal{B}_{\beta|S_v \cup \{i_{p-1}\}}| = |\mathcal{B}_{\beta|S_v}| + 2, \\ u_{i_{k+l}} + \dots + u_{i_{p+1}} &= |\mathcal{B}_{\beta|S_v - \{i_p\}}| = |\mathcal{B}_{\beta|S_v}| - 2. \end{aligned}$$

Одатле је $u_{i_p} + u_{i_{p-1}} = 4$, односно

$$m_{\beta}(u) = m_{\beta} - 2 + (4 - 1) = m_{\beta} + 1.$$

(2.2) Ако је $|S_v| = n$, тј. $p = 1$ и $k+l = n$, разматрањем свих могућности утврђујемо да је N_u угњежђен скуп ако и само ако је $S_u = \{i_{n+1}\}$. То значи да је $u \in f_{\{i_{n+1}\}}$, тј. према Тврђењу 3.3.9,

$$u_{i_{n+1}} = |\mathcal{B}_{\beta|\{i_{n+1}\}}| = 1.$$

Како $\{i_n, \dots, i_2\} \in N_v \cap N_u$, применом једнакости (★) добијамо

$$u_{i_n} + \dots + u_{i_2} = |\mathcal{B}_{\beta|S_v - \{i_1\}}| = |\mathcal{B}_{\beta|S_v}| - 2 = |\mathcal{B}_{\beta|[n+1]}| - 4.$$

Одавде и из једнакости (★★) следи да је

$$u_{i_{n+1}} + u_{i_1} = |\mathcal{B}_{\beta|[n+1]}| - (|\mathcal{B}_{\beta|[n+1]}| - 4) = 4,$$

односно

$$m_{\beta}(u) = m_{\beta} - v_{i_1} + u_{i_1} = m_{\beta} - 2 + (4 - 1) = m_{\beta} + 1.$$

Дакле, можемо закључити да за свако $u \in U$ важи $m_\beta(u) = m_\beta + 1$, тј.

$$\text{conv}U \in \pi_{\beta,1}.$$

Елементи скупа W не припадају овој хиперравни. Наиме, ако би постојала тачка скупа W која припада $\pi_{\beta,1}$, с обзиром да она није суседна нити једном темењу стране F_β , припадала би конвексном омотачу скупа U , па не би била теме нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$. Дакле,

$$P_{\mathcal{B}_\beta} \cap \pi_{\beta,1} = N_\beta \cap \pi_{\beta,1} = \text{conv}U \quad \text{и} \quad P_{\mathcal{B}_\beta} \cap \pi_{\beta,1}^\geq = N_\beta.$$

Да бисмо показали да је N_β једна F_β -деформација нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$, остаје још само да покажемо да је испуњен и други део првог услова Дефиниције 3.3.1. Све тачке скупа U су теме нестоедра, па је $\mathcal{V}(\text{conv}U) = U$. Нека је c произвољни елемент интервала $(0, 1)$ и f плосан зарубљеног политопа $P_{\mathcal{B}_\beta} \cap \pi_{\beta,c}^\geq$ садржана у хиперравни одсецања. Већ смо раније закључили да различита теме нестоедра F_β немају заједничко суседно теме из скупа U , тј. да различита теме нестоедра f нису ивицом нестоедра повезана са истим елементом скупа U . Дакле, $f \sim \text{conv}U$. Нормална еквиваленција следи из Тврђења 1.1.15 и паралелности хиперравни $\pi_{\beta,c}$ и $\pi_{\beta,1}$. \square

Напомена 3.3.6. У складу са Дефиницијом 1.2.7, скуп

$$\{\{i_1\}, \dots, \{i_{n+1}\}\} - \{\{i_n\}\}$$

је максималан угњежђен скуп комплекса $\mathcal{N}(C_0, \mathcal{B}_\beta - \{[n+1]\})$. Одговара неком елементу скупа W (који је дефинисан у доказу претходне леме), па је $W \neq \emptyset$ и $\dim(N_\beta) = n$.

Лема 3.3.15. Нека је $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ скуп разапњућих вектора произвољног n -конуса у простору \mathbf{R}^n , и нека је, за сваки подскуп $I \subseteq [n]$ такав да је $|I| \geq 2$, вектор h_I збир вектора индексираних елементима скупа I , тј.

$$h_I = \sum_{i \in I} a_i.$$

Важне следећа два тврђења.

- (i) Ако је $I \subset J$, онда је вектор h_J садржан у конусу који је разапет скупом $\{h_I\} \cup \{a_i \mid i \in J - I\}$.
- (ii) Нека је $I_1, \dots, I_m \subseteq [n]$ при чему је $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m$ и $2 \leq m \leq n - 1$, и нека је A_1 скуп добијен од скупа A заменом t елемената векторима h_{I_1}, \dots, h_{I_m} . Ако A_1 разапне n -конус N_1 , онда за свако $1 \leq k < m$ постоји тачно један елемент $i \in I_k - I_{k+1}$, такав да скуп добијен од скупа A_1 заменом вектора h_{I_k} вектором a_i разапне n -конус N_2 који садржи конус N_1 .

Доказ: Прво тврђење следи директно из чињенице да је

$$h_J = h_I + \sum_{i \in J - I} a_i.$$

Нека је $\Delta_k = I_k - I_{k+1}$, $1 \leq k < m$. Како је $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_m$, скупови Δ_k су међусобно дисјунктни. Вектор h_{I_m} је разапњући зрак конуса N_1 , па постоји барем један елемент скупа $\{a_i \mid i \in I_m\}$ који не припада скупцу A_1 . Такође,

за свако $1 \leq k < m$ бар један елемент скупа $\{a_i \mid i \in \Delta_k\}$ не припада A_1 , јер у супротном, према тврђењу (i), h_{I_k} не би био разапињући вектор конуса N_1 . Ако претпоставимо да за неко k постоје два или више таквих елемената, онда постоји више од m елемената скупа A који не припадају скупу A_1 , што је у контрадикцији са претпоставком да је $|A - A_1| = n - m$. Према тврђењу (i), вектор h_{I_k} је садржан у конусу који је разапет скупом

$$\{h_{I_{k+1}}\} \cup \{a_i \mid i \in \Delta_k\},$$

што значи да конус N_2 садржи све разапињуће векторе конуса N_1 . Дакле, N_2 је n -конус и $N_1 \subseteq N_2$. \square

Доказ Теореме 3.3.12. Политоп $PA_{n,1}$ је очигледно формиран у складу са другим условом Дефиниције 1.2.8. Сваки његов сабирак је или d -симплекс $\Delta_{\cup\beta}$, $d < n$, или n -политоп N_β (видети Напомену 3.3.6), па је, према Тврђењу 1.1.18(ii), $\dim(PA_{n,1}) \geq n$.

Посматрајмо парцијалну суму

$$S_0 = \Delta_{[n+1]} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_1} \Delta_{\cup\beta}.$$

Реч је о n -пермутоедру, тј. n -димензионалној Минковски-реализацији комплекса

$$C_1 = \mathcal{N}(C_0, \{\cup\beta \mid \beta \in \mathcal{A}_1\})$$

(видети Пододељак 1.2.2). Према Теореме 1.2.3, S_0 је пресек $|\mathcal{A}_1| = 2^{n+1} - 2$ гранична полупростора

$$\alpha_j^\geq : \langle a_j, x \rangle \geq b_j, \quad 1 \leq j \leq 2^{n+1} - 2,$$

при чему сваком од њих одговара по један подскуп $A \subset [n+1]$ за који је

$$\alpha_j^\geq : \sum_{i \in A} x_i \geq 2^{|A|} - 1.$$

У складу са Напоменом 1.2.5, ако је пермутоедар правилно означен елементима скупа \mathcal{B}_0 , онда ознаку A носи пљосан коју дефинише гранична хиперраван оног полупростора коме одговара A . Такође, према Напомени 1.2.4, темена су пресек n пљосни означених међусобно упоредивим ознакама. Преозначимо све пљосни одговарајућим елементима скупа \mathcal{A}_1 , тј. свакој ознаци додајмо још један пар заграда. Према Последици 3.2.9, сада је свака пљосан паралелна истоозначеној пљосни политопа PA_n .

Потребно је доказати да индексирани скуп преосталих сабирака суме $PA_{n,1}$ зарубљује пермутоедар S_0 . Покажимо, најпре, да за произвољни елемент $\beta \in \mathcal{A}_2$, политоп N_β зарубљује овај пермутоедар.

Подсетимо да се S_0 може добити сукцесивним паралелним зарубљивањем нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$, до на нормалну еквиваленцију. Дакле, $P_{\mathcal{B}_\beta}$ може дефинисати као пресек полупростора

$$\gamma_j^\geq : \langle a_j, x \rangle \geq c_j, \quad 1 \leq j \leq 2^{n+1} - 2,$$

тако да ако је

$$\cap \{\alpha_j \mid j \in J \subset [2^{n+1} - 2]\}$$

теме пермутоедра S_0 , онда је и

$$\cap \{\gamma_j \mid j \in J \subset [2^{n+1} - 2]\}$$

теме нестоедра $P_{\mathcal{B}_\beta}$. Према Лемми 3.3.14, за $c \in (0, 1)$, политоп $P_{\mathcal{B}_\beta} \cap \pi_{\beta, c}^{\geq}$ је настао паралелним зарубљивањем овог нестоедра одсецањем стране F_β , а политоп $N_\beta = P_{\mathcal{B}_\beta} \cap \pi_{\beta, 1}^{\geq}$ је једна његова F_β -деформација. Страна F_β је пресек свих пљосни које су правилно означене елементима скупа β . Како су сви елементи скупа β међусобно упоредиви, за страну F_β постоји одговарајућа страна F_0 пермутоедра S_0 која је такође пресек пљосни означених елементима скупа β у његовом правилном означавању. Како су пљосни нестоедра које садрже F_β и њима одговарајуће пљосни пермутоедра које садрже F_0 истих спољашњих нормала, закључујемо да постоји паралелно зарубљени политоп $\text{tr}_{F_0} S_0 = S_0 \cap \alpha_0^{\geq}$, при чему је спољашња нормала полупростора одсецања вектор a_β , тј. спољашња нормала полупростора $\pi_{\beta, 1}$. Дакле,

$$S_0 \cap \alpha_0 \simeq P_{\mathcal{B}_\beta} \cap \pi_{\beta, c} \simeq N_\beta \cap \pi_{\beta, 1}.$$

Из свега наведеног, и чињенице да је N_β , F_β -деформација нестоедра, закључујемо да је N_β и F_0 -деформација пермутоедра S_0 . Дакле, према Тврђењу 3.3.7,

$$S_0 + N_\beta \simeq \text{tr}_F S_0,$$

тј. политоп N_β зарубљује пермутоедар S_0 .

Сада, за $m = |\mathcal{A}_2|$, нека је $x : [m] \rightarrow \mathcal{A}_2$ такво индексирање скупа \mathcal{A}_2 да $i < j$ повлачи $|x(i)| \geq |x(j)|$. Нека је $Q_i = N_{x(i)}$ за свако $i \in [m]$. Покажимо да индексирани скуп $\{Q_i\}_{i \in [m]}$ зарубљује пермутоедар S_0 , што даље имплицира да је трећи услов Дефиниције 1.2.8 задовољен.

Нека је за $i \in [m]$, $S_i = S_{i-1} + Q_i$. Све док је $|x(i)| = n$, тј. све док је $F_{x(i)}$ теме политопа Q_i , итеративно се, потпуно аналогно горњем закључивању, закључује да постоји страна F парцијалне суме S_{i-1} која одговара темену $F_{x(i)}$, као и да постоји паралелно зарубљени политоп $\text{tr}_F S_{i-1}$, таква да је вектор $a_{x(i)}$, спољашњи вектор нормале полупростора $\pi_{x(i), 1}^{\geq}$, уједно и спољашњи вектор нормале полупростора одсецања. Одатле, политоп Q_i је, у односу на тај зарубљени политоп, F -деформација суме S_{i-1} . Наиме, за $i = 1$, тврдња је већ горе показана, а у свакој наредној итерацији следи из чињенице да је Q_i , F -деформација пермутоедра, за страну F која одговара страни $F_{x(i)}$, као и чињенице да су сва зарубљивања парцијалних сума добијених у претходним корацима заправо паралелна зарубљивања одсецањем темена. Дакле, према Тврђењу 3.3.7,

$$S_i \simeq \text{tr}_F S_{i-1}.$$

Како скуп \mathcal{B}_1 садржи све максималне 0-угњежђене скупове, можемо констатовати да ова нормална еквиваленција важи за свако $i \in [n!]$, и да се сума $S_{n!}$, до на нормалну еквиваленцију, може добити сукцесивним зарубљивањем пермутоедра S_0 одсецањем свих темена.

Да горња еквиваленција важи и за свако $n! < i \leq m$, показаћемо уз индуктивну претпоставку да важи за свако $l < i$. Ради једноставније нотације, нека је $\beta = x(i)$. Како је за свако $l < i$ парцијална сума S_l настала паралелним зарубљивањем парцијалне суме S_{l-1} , до на нормалну еквиваленцију, и при свим овим зарубљивањима одсечене стране су мањих димензија од димензије стране F_β , опет постоји одговарајућа страна F политопа S_{i-1} , као и такав паралелно зарубљен политоп $\text{tr}_F S_{i-1}$ да је вектор a_β спољашњи вектор нормале полупростора одсецања.

Међутим, и поред тога, не можемо закључити да је политоп Q_i , F -деформација политопа S_{i-1} у односу на овај зарубљени политоп. Наиме, други део услова (i) Дефиниције 3.3.1 у општем случају не важи, тј. пљосан политопа $\text{tr}_F S_{i-1}$ која лежи у хиперравни одсецања може бити комбинаторно нееквивалентна пресеку $Q_i \cap \pi_{\beta,1}$.

Да горња еквиваленција ипак важи, тј. да важи $S_{i-1} + Q_i \simeq \text{tr}_F S_{i-1}$, доказаћемо применом Последице 3.3.5. Како су Q_i , S_{i-1} и $\text{tr}_F S_{i-1}$, n -политопи, без губитка општости, посматраћемо нормалне конусе сваког од њих под претпоставком да су политопи максималнодимензионални, тј. да је унија елемената сваке од лезеза простор \mathbf{R}^n . Покажимо, најпре, да важи да вази услов (ii) из Последице 3.3.5.

Посматрајмо нормалне конусе политопа Q_i у теменима ван хиперравни $\pi_{\beta,1}$. Нека је N један од њих. Како је Q_i , F_0 -деформација пермутоедра S_0 у односу на зарубљени политоп $\text{tr}_{F_0} S_0$ дефинисану полупростором чија је спољашња нормала вектор a_β , према Леми 3.3.6, N је унија нормалних конуса политопа $\text{tr}_{F_0} S_0$ у неким теменима која не припадају хиперравни одсецања, а то су заправо нормални конуси пермутоедра S_0 у неким теменима која не припадају страни F_0 . Како је политоп S_{i-1} , до на нормалну еквиваленцију, добијен од политопа S_0 низом паралелних зарубљивања, према Леми 1.1.16, N је унија нормалних конуса N_1, \dots, N_t политопа S_{i-1} у теменима која не припадају F . Пресек ове уније и произвољног максималног конуса политопа S_{i-1} је n -конус ако и само ако је реч о конусу N_i за неко $i \in [t]$. У том случају, пресек $N \cap N_i$ је N_i , нормални конус политопа $\text{tr}_F S_{i-1}$ у неком темену које не припада хиперравни одсецања.

Нека је N сада нормални конус политопа Q_i у темену које припада $\pi_{\beta,1}$. Како је Q_i , F_0 -деформација пермутоедра S_0 , према Леми 3.3.6, $N = N' \cup N_v$, где је N_v нормални конус политопа $\text{tr}_{F_0} S_0$ у темену које припада хиперравни одсецања, док је N' унија нормалних конуса политопа $\text{tr}_{F_0} S_0$ у неким теменима ван те хиперравни. Дакле, N' унија нормалних конуса пермутоедра S_0 у неким теменима која не припадају F_0 . Као и горе, према Леми 1.1.16, N' је онда унија максималних нормалних конуса политопа S_{i-1} у неким теменима која не припадају F , па је пресек ове уније са произвољним максималним конусом политопа S_{i-1} конус димензије n ако и само ако је реч баш о неком елементу ове уније, када је споменути пресек сам тај елемент. Како су сви елементи ове уније нормални конуси у теменима која не припадају F , они су уједно и максимални нормални конуси политопа $\text{tr}_F S_{i-1}$ у теменима ван хиперравни одсецања.

Сваки други n -конус, који се може добити као пресек конуса N и неког максималног нормалног конуса политопа S_{i-1} , је пресек тог конуса и конуса N_v . Анализирајмо ове случајеве. Нека је u теме пермутоедра S_0 које припада F_0 и нека је $k = \dim(F_0)$. Како је S_0 прост политоп, према Тврђењу 1.1.7, страна F_0 је садржана у тачно $p = n - k$ пљосни. Без губитка општости претпоставимо да су оне дефинисане хиперравнима из скупа $\{\alpha_j \mid j \in [p]\}$, а да је u пресек хиперравни из скупа $\{\alpha_j \mid j \in [n]\}$. Одатле следи да је сваки елемент скупа $\{-a_j \mid j \in [p]\}$ разапинући зрак свих нормалних конуса политопа S_{i-1} у теменима која припадају F . Како је F_0 такође прост k -политоп, постоји тачно k темена суседних u у политопу F_0 , што имплицира да постоји тачно p темена пермутоедра S_0 суседних u која не припадају F_0 . Дакле, нормални конус $N_u(S_0)$ је унија p нормалних конуса N_{v_1}, \dots, N_{v_p} политопа $\text{tr}_{F_0} S_0$ у одговарајућим теменима садржаним у хиперравни одсецања, у складу са Лемом 1.1.16. Преостаје да се испита управо пресек сваког од њих са произвољним максималним нормалним конусом M политопа S_{i-1} .

За $j \in [p]$, нека је

$$\{a_\beta\} \cup \{-a_i \mid i \in [n] - \{j\}\}$$

скуп разапињућих вектора конуса N_{v_j} . Према Леми 1.1.16 и индуктивној хипотези, конус $N_u(S_0)$ је унија максималних нормалних конуса политопа S_{i-1} . Наиме, до на нормалну еквиваленцију, стране пермутоедра S_0 које садрже теме u су у некој од претходних итерација могле бити одсечене, при чему је свакако теме u најпре одсечено. Нека је h_1 спољашњи вектор нормале полупростора одсецања при одсецању темена u . Према Леми 1.1.16, то одсецање је произвело n максималних конуса N_1, \dots, N_n чија унија је $N_u(S_0)$, а затим се сваки од њих у наредним зарубљивањима даље профињавао. У складу са Напоменом 3.3.5, можемо претпоставити да је

$$h_1 = -(a_1 + \dots + a_n),$$

и да је конус N_j , $j \in [n]$, разапет скупом

$$\{h_1\} \cup \{-a_i \mid i \in [n] - \{j\}\}.$$

Применом Леме 3.3.15(i) за $I = [p]$ и $J = [n]$, вектор h_1 је садржан у конусу који је разапет скупом $\{a_\beta, -a_{p+1}, -a_{p+2}, \dots, -a_n\}$. То значи да је, за свако $j \in [p]$, сваки разапињући вектор конуса N_j садржан у конусу N_{v_j} , одакле следи да је $N_j \subseteq N_{v_j}$. Од интереса су само случајеви када је конус M садржан у конусу $N_u(S_0)$, па се скуп вектора који разапиње M може добити од скупа $\{-a_j \mid j \in [n]\}$ заменом q елемената векторима h_1, \dots, h_q , при чему је сваки од њих спољашња нормала одговарајућег полупростора одсецања који дефинише зарубљивање из претходних итерација. При свим овим зарубљивањима одсечене су стране које одговарају странама пермутоедра S_0 садржаним у страни F_0 . Можемо претпоставити да вектор h_q одговара одсецању максималне стране. Све ове стране (као и њима одговарајући елементи скупа \mathcal{A}_2) су међусобно упоредиве, па имајући у виду Напомену 3.3.5, закључујемо да су сви услови Леме 3.3.15(ii) задовољени. Разликујемо следећа два случаја.

(1) Ако M одговара темену које не припада F , онда је M и максимални нормални конус политопа $\text{tr}_F S_{i-1}$ у неком темену ван хиперравни одсецања. Такође, за неко $j \in [p]$ вектор $-a_j$ није разапињући вектор овог конуса. Ако $q-1$ пут применимо Лему 3.3.15(ii), заменом вектора h_1, \dots, h_{q-1} одговарајућим елементима скупа $\{-a_i \mid p < i \leq n\}$, добијамо да је M садржан у n -конусу M' који је разапет скупом

$$\{h_q\} \cup \{-a_j \mid j \in [n] - \{r\}\} \quad \text{за неко } r \in [p].$$

Како је конус N_{v_r} разапет скупом

$$\{a_\beta\} \cup \{-a_j \mid j \in [n] - \{r\}\},$$

применом Леме 3.3.15(i), закључујемо да је $M' \subseteq N_{v_r}$. Дакле, $M \subseteq N_{v_r}$. Како је $N_{v_r} \subseteq N_r$, једини n -конус, који је пресек конуса M са неким од конуса N_{v_1}, \dots, N_{v_p} , је конус $M \cap N_{v_r} = M$.

(2) Ако M одговара темену које припада F , онда је $\{-a_j \mid j \in [p]\}$ подскуп скупа који разапиње M . Према Леми 1.1.16, M је унија максималних конуса политопа $\text{tr}_F S_{i-1}$ у одговарајућим теменима која припадају хиперравни одсецања. Како су и политоп S_i и његова страна F прости политопи, као и у случају пермутоедра и његове стране F_0 , и ових конуса је тачно p . Нека су то конусу N'_1, \dots, N'_p . Скуп који разапиње конус N'_j , $j \in [p]$, се може добити од скупа који разапиње M заменом вектора $-a_j$ вектором a_β . Ако за сваки од конуса N'_j , q пута применимо Лему 3.3.15(ii), тј. заменимо векторе h_1, \dots, h_q одговарајућим елементима $-a_i$, за $p < i \leq n$, добијамо да је N'_j садржан у n -конусу који је разапет скупом

$$\{a_\beta\} \cup \{-a_j \mid j \in [n] - \{j\}\}.$$

То је скуп који разапиње конус N_{v_j} , па можемо закључити да је за свако $j \in [p]$, пресек $M \cap N_{v_j}$ конус N'_j . Важи и више: унија свих ових пресека је конус M , тј.

$$\bigcup_{j \in [p]} (M \cap N_{v_j}) = M.$$

Коначно можемо закључити да је, за свако $n! < i \leq m$, пресек прозивољног максималног нормалног конуса политопа S_{i-1} и произвољног максималног нормалног конуса политопа Q_i , у случају када је n -конус, уједно и максимални конуси политопа $\text{tr}_F S_{i-1}$. Дакле, испуњен је други услов Последице 3.3.5. Такође, водећи се свом претходна анализом и Лемом 1.1.16, може се утврдити да је испуњен и први услов, тј. да не постоји маскимални нормални конус политопа $\text{tr}_F S_{i-1}$ који се не може добити као један од споменутих пресека.

Применом Последице 3.3.5, закључујемо да за свако $i \in [m]$ важи $S_i \simeq \text{tr}_F S_{i-1}$, тј. да индексирани скуп политопа $\{Q_i\}_{i \in [m]}$ зарубљује пермутоедар S_0 . Дакле, испуњен је и трећи услов Дефиниције 1.2.8.

Остаје да покажемо да сума S_m реализује комплекс C . Подсетимо да су пљосни пермутоедра S_0 на почетку доказа означене елементима скупа \mathcal{A}_1 . За свако $i \in [m]$, на крају i -те итерације, означимо пљосни политопа S_i на следећи начин: међусобно одговарајуће пљосни политопа S_i и S_{i-1} нека су истоозначене, а новонасталу пљосан означимо са $x(i)$ (видети Напомену 1.1.2). Сада је сваки елемент скупа \mathcal{B}_1 ознака неке пљосни политопа S_m . Како су све истоозначене пљосни политопа S_m и PA_n паралелне, Тврђењу 1.2.2 и Теореме 3.2.1, важи $S_m \simeq PA_n$, па је и први услов Дефиниције 1.2.8 испуњен. \square

Применом Леме 3.3.14, а потпуно пратећи доказ Теореме 3.3.12, добијамо општију теорему која испоручује читаву фамилију n -димензионалних Минковски-реализација комплекса C .

Теорема 3.3.16. *За $n \geq 2$ и $c \in (0, 1]$, политоп*

$$PA_{n,c} = \Delta_{[n+1]} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_1} \Delta_{\cup \beta} + \sum_{\beta \in \mathcal{A}_2} (P_{B_\beta} \cap \pi_{\beta,c}^{\geq})$$

је n -димензионална Минковски-реализација комплекса C , нормално еквивалентна политопу PA_n .

Глава 4

Хроматски број

У Пододељку 1.2.2, Дефиницијом 1.2.10 је уведено правилно означавање пљосни политопа који реализује комплекс угњежђених скупова у односу на задати градивни скуп. То даје могућност да се пљосни поистовете са својим ознакама, односно са одговарајућим елементима градивног скупа. Тада, у складу са Напоменом 1.2.4, две пљосни једног политопа немају заједничко теме, тј. *раздвојене* су, ако и само ако не постоји угњежђени скуп који их обе садржи. У наставку дефинишемо правилно бојење пљосни као функцију која дозвољава да две пљосни буду обојене истом бојом само ако су раздвојене.

Дефиниција 4.0.1. Сурјективна функција $f: \mathcal{F}(P) \rightarrow [m]$ је *правилно бојење* пљосни политопа P у m боја ако и само ако за сваке две различите нераздвојене пљосни F_1 и F_2 важи

$$f(F_1) \neq f(F_2).$$

Хроматски број политопа P , у ознаци $\chi(P)$, је најмање m за које постоји правилно бојење његових пљосни у m боја.

Пример 4.0.1. Хроматски број полигона је 2 или 3, у зависности од парности укупног броја његових ивица; хроматски број 3-политопа је, према Теореме о четири боје [12], 3 или 4.

Осим са комбинаторног становишта, израчунавање хроматских бројева простих политопа, значајно је и са становишта торусне топологије због могућности примене у проучавању торусних и квазиторусних многострукости. Наиме, за правилно бојење простог n -политопа по дефиницији је потребно најмање n боја, а довољан услов да се прост n -политоп политоп појави као простор орбита неке квазиторусне многострукости је управо могућност правилног бојења његових пљосни у n или $n + 1$ боја. За више детаља упућујемо на [12].

Познати примери оваквих политопа су симплекси и пермутоедри јер је

$$\chi(\Delta^n) = n + 1 \quad \text{и} \quad \chi(\mathbf{P}_{n+1}) = n.$$

Познато је и да је хроматски број простог n -политопа једнак n ако и само ако свака његова 2-страна има паран број темена ([28, Теорема 4.5]).

Ово поглавље посвећујемо испитивању да ли се прост пермутаосоедари и неке познате класе нестоедара које имају 2-страну са непарним бројем темена, могу обојити у $n + 1$ боја. За све класе простих политопа које ћемо разматрати, постоје реализације са рационалним координатама, тј. ради се о *Делцановим политопима*. Познато је да такве реализације дефинишу структуру глатких несингуларних торусних варијетета и квазиторусних многострукости.

Како низак хроматски број пермутоедра дефинише канонску квазиторусну многострукост која није торусни варијетет, природно је испитати да ли је неки други граф асоциедар или прост пермутаасоциедар обојив у n или $n+1$ боја и дефинише неку другу канонску квазиторусну многострукост.

4.1 Пермутоедар

Пљосни n -пермутоедра \mathbf{P}_{n+1} се поистовећују са правим подскуповима скупа $[n+1]$. Нека је $f: \mathcal{F}(\mathbf{P}_{n+1}) \rightarrow [n]$ функција дефинисана са

$$f(X) = |X|.$$

Како две пљосни пермутоедра имају заједничко теме ако и само ако су им ознаке упоредиве, f је правилно бојење. Дакле, $\chi(\mathbf{P}_{n+1}) = n$.

4.2 Асоциедар

За $a, b \in [n+1]$, при чему је $a \leq b$, нека је *сегмент* $[a, b]$ скуп $\{i \mid a \leq i \leq b\}$. *Дужина* сегмента је његова кардиналност. Пљосни n -асоциедра \mathbf{K}_{n+2} се поистовећују са сегментима дужине мање од $n+1$ (видети Пример 1.2.7). Кажемо да се пљосан $[c, d]$ *надовезује* на пљосан $[a, b]$ када је $b+1 = c$; да пљосан $[c, d]$ *преклапа* пљосан $[a, b]$ када је $a < c \leq b < d$; да се пљосан $[c, d]$ *наставља* на пљосан $[a, b]$ када се на њу надовезује или је преклапа тј. када је $a+1 \leq c \leq b+1 \leq d$.

Тврђење 4.2.1. *Две пљосни асоциедра су раздвојене ако и само ако се једна од њих наставља другу.*

Доказ: Постоји угњежђен скуп који садржи две пљосни асоциедра ако и само ако и само ако су те пљосни упоредиве, или су дисјунктне али се ниједна од њих не надовезује на другу, дакле, ако и само ако се ниједна од њих не наставља другу. \square

Последица 4.2.2. *Нека су X_1, \dots, X_k међусобно раздвојене пљосни асоциедра. За све $i, j, l \in [k]$ важи*

$$X_i \cap X_j = X_i \cap X_l \Rightarrow j = l.$$

Тврђење 4.2.3. *Ако је $f: \mathcal{F} \rightarrow [m]$ правилно бојење пљосни асоциедра, онда за пљосан X кардиналности k важи да је кардиналност скупа*

$$\{Y \mid f(Y) = f(X)\}$$

највише $\min\{k+1, n-k+2\}$.

Доказ: Нека је $\mathcal{F}_X = \{Y \mid f(Y) = f(X)\} - \{X\}$. Довољно је показати да је

$$|\mathcal{F}_X| \leq \min\{k, n-k+1\}.$$

Нека су функције $g: \mathcal{F}_X \rightarrow X$ и $h: \mathcal{F}_X \rightarrow [n+1] - X$ дефинисане на следећи начин:

$$g([a, b]) = \begin{cases} b+1, & \text{ако се } X \text{ наставља на } [a, b], \\ a-1, & \text{ако се } [a, b] \text{ наставља на } X, \end{cases}$$

$$h([a, b]) = \begin{cases} a, & \text{ако се } X \text{ наставља на } [a, b], \\ b, & \text{ако се } [a, b] \text{ наставља на } X. \end{cases}$$

Да је h инјективна функција следи директно из Тврђења 4.2.1. Према Последици 4.2.2, инјективне су онда и рестрикција функције g на елементе скупа \mathcal{F}_X на које се X наставља и рестрикција функције g на елементе скупа \mathcal{F}_X који се настављају на X . Према Тврђењу 4.2.1, за свако Y на које се X наставља и свако Z које се наставља на X , важи $g(Y) > g(Z)$, па остаје да закључимо да је функција g инјективна. \square

За $2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, посматрајмо следећа два низа целих бројева:

$$B_i = \begin{cases} 0, & \text{ако је } i = 2, \\ n + 3 + B_{i-1} - (i-1)A_{i-1}, & \text{ако је } 2 < i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \end{cases}$$

$$A_i = \begin{cases} \lceil \frac{n+3+B_i}{i} \rceil, & \text{ако је } n \text{ паран број или је } i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ 1, & \text{ако је } n \text{ непаран број и } i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1. \end{cases}$$

Теорема 4.2.4. $\chi(\mathbf{K}_{n+2}) = \sum_{i=2}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} A_i.$

Да бисмо доказали ову теорему, посматрајмо следећи проблем. Претпоставимо да имамо $l_2 \geq 0$ куглица тежине $\frac{1}{2}$, $l_3 \geq 0$ куглица тежине $\frac{1}{3}$, и тако даље до $l_m \geq 0$ куглица тежине $\frac{1}{m}$. Нека је $\mu(x)$ тежина куглице x . Задатак је све ове куглице спаковати у кутије тако да за n куглица x_1, \dots, x_n спакованих у једну кутију важи

$$n \cdot \max\{\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)\} \leq 1.$$

Једно паковање је боље од другог ако је за њега потребно мање кутија.

Нека је (*) следеће паковање: најпре спакујмо l_2 куглица тежине $\frac{1}{2}$ у $\lceil \frac{l_2}{2} \rceil$ кутија. У случају када је l_2 непаран број, једна од ових кутија садржи само једну куглицу, па у њу додајмо и једну куглицу тежине $\frac{1}{3}$, односно куглицу најмање тежине, ако таква постоји. Преостале куглице тежине $\frac{1}{3}$ спакујмо по три у кутији. Ако број ових куглица није дељив са 3, позајмимо једну или две куглице најмање тежине да бисмо попунили кутију у којој је мање од три куглице. Поновимо аналогни поступак са куглицама тежине мање од $\frac{1}{3}$.

Лема 4.2.5. *Не постоји боље паковање од паковања (*).*

Доказ: Претпоставимо да је $n = l_2 + \dots + l_m$ најмањи број куглица за које постоји паковање (*). Означимо то паковање са (**). Нека је i најмањи природан број за који је $l_i > 0$ ($l_2 = \dots = l_{i-1} = 0$). Ради једноставности, означимо са \bullet све куглице тежине $\frac{1}{i}$, са \circ најтеже куглице међу преосталим, са \star најтеже куглице међу преосталим итд.

Садржај прве кутије A у паковању (*) је, у општем случају, облика:

$$\bullet \bullet \bullet \circ \circ \star \star \star \quad .$$

То значи да је $i \geq 9$, $l_i = 4$, а постоје две куглице најтеже међу преосталим куглицама. Садржај неке кутије B паковања (**) која садржи куглицу \bullet је, у општем случају, облика:

$$\bullet \bullet \circ \star \star \diamond$$

У њој не може бити више од четири куглице \bullet , нити више од две куглице \circ , нити у њој, према услову паковања, може бити више куглица него што их има у A . Направимо неколико замена куглица у кутијама паковања (**) на следећи начин. Најпре, заменимо куглицу \circ из B , куглицом \bullet из неке друге кутије C . Тиме је тежа куглица у C замењена лакшом, а кутија A је сведок да B није прекомерне тежине. Укупан број кутија паковања (**) се није повећао, па је, (**) још увек боље паковање од паковања (*). Поновимо овакве замене све док садржај кутије B не постане

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \circ \circ$$

Након тога, три куглице \star (оно што разликује садржај кутије A од садржаја кутије B) померимо из неких других кутија у кутију B , без замена. Очигледно је да (**) остаје прихватљиво паковање, а да се притом број кутија није повећао. Дакле, (**) је још увек боље од паковања (*). Елиминацијом кутије A из (*) и кутије B из (**), добијамо паковање мање од n куглица које је боље од паковања (*), што је контрадикција. \square

Доказ Теореме 4.2.4. Ако је $n = 2k - 1$, посматрајмо следеће низове пљосни:

$$\begin{aligned} (2) \quad & [1, 1], \dots, [n + 1, n + 1], [1, n], [2, n + 1] \\ (3) \quad & [1, 2], \dots, [n, n + 1], [1, n - 1], [2, n], [3, n + 1] \\ & \vdots \\ (k) \quad & [1, k - 1], \dots, [k + 2, n + 1], [1, k + 1], \dots, [k, n + 1] \\ (k + 1) \quad & [1, k], \dots, [k + 1, n + 1]. \end{aligned}$$

Приметимо да последњи низ има $k + 1$ елемент, а сви остали по $n + 3$ елемента. У намери да применимо Лему 4.2.5, нека је

$$l_2 = \dots = l_k = n + 3 \quad \text{и} \quad l_{k+1} = k + 1 = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1.$$

Приметимо да i узастопних елемената низа (i) представљају међусобно раздвојене пљосни. Такође, међусобно раздвојене пљосни су и последњих j елемената низа (i) , за $i > j$, заједно са првих $i - j$ елемената низа $(i + 1)$. Дакле, имајући у виду Тврђење 4.2.3, све пљосни можемо обојити у складу са процедуром паковања (*) тако да свака кутија значи по једну боју. Према Леми 4.2.5 нема бољег паковања, тј. правилног бојења које користи мање боја, па је хроматски број оваквог асоциедра број употребљених боја у овом бојењу, тј.

$$\sum_{i=2}^{k+1} A_i.$$

Ако је $n = 2k$, имамо исте низове пљосни као у претходном случају сем што су сада низови (k) и $(k + 1)$ облика:

$$\begin{aligned} (k) \quad & [1, k - 1], \dots, [k + 3, n + 1], [1, k + 2], \dots, [k, n + 1] \\ (k + 1) \quad & [1, k], \dots, [k + 2, n + 1], [1, k + 1], \dots, [k + 1, n + 1] \end{aligned}$$

Применом Леме 4.2.5 за $l_2 = \dots = l_k = l_{k+1} = n + 3$, долазимо до истог закључка као у претходном случају. \square

У Додатку А.3 је дат програм за компјутерско израчунавање и исписивање хроматског броја асоциедра произвољне димензије.

4.3 Прост пермутаасоциедар

Пљосни простог n -пермутаасоциедра PA_n се поистовећују са елементима скупа \mathcal{B}_1 . За функцију $f: \mathcal{B} \rightarrow [m]$, при чему је $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1$, кажемо да је *правилно бојење* када за свака два елемента $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ важи следеће: ако је $f(B_1) = f(B_2)$, онда B_1 и B_2 не припадају истом 1-угњежђеном скупу. Како су две пљосни политопа PA_n раздвојене ако и само ако не припадају истом 1-угњежђеном скупу, јасно је да, правилно бојење $f: \mathcal{B}_1 \rightarrow [m]$ одговара правилном бојењу пљосни политопа PA_n .

За пермутацију $\pi: [n+1] \rightarrow [n+1]$ и 1-угњежђен скуп N нека је

$$N^\pi = \{\{\pi(i_1), \dots, \pi(i_k)\} \mid \{i_1, \dots, i_k\} \in N\}.$$

Нека је M максимални 0-угњежђени скуп $\{\{n, \dots, 1\}, \dots, \{n, n-1\}, \{n\}\}$.

Напомена 4.3.1. Ако $\beta \in \mathcal{B}_1$, онда $\beta^\pi \in \mathcal{B}_1$ за сваку пермутацију π .

Тврђење 4.3.1. Нека је $f: \mathcal{B}_1 \rightarrow [m]$ таква функција да за свако $\beta \in \mathcal{B}_1$ и сваку пермутацију π , важи

$$f(\beta) = f(\beta^\pi).$$

Ако је рестрикција функције f на скуп \mathcal{B}_1^M правилно бојење, онда је функција f правилно бојење.

Доказ: Нека су β_1 и β_2 два различита елемента скупа \mathcal{B}_1 која припадају истом 1-угњежђеном скупу N . Постоји максимални 0-угњежђени скуп M' из кога је N изведен, тј. $N \subseteq \mathcal{B}_1^{M'}$. Постоји и пермутација π за коју је $M' = M^{\pi^{-1}}$, што значи да је $N \in \mathcal{P}(M^{\pi^{-1}})$. Имајући у виду Напомену 4.3.1, закључујемо да скупови β_1^π и β_2^π припадају скупу N^π , 1-угњежђеном скупу изведеном из M . Дакле, према претпоставци тврђења, важи $f(\beta_1^\pi) \neq f(\beta_2^\pi)$, па важи и $f(\beta_1) \neq f(\beta_2)$. \square

Тврђење 4.3.2. За два различита елемента $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{B}_1^M$ и две произвољне пермутације π_1 и π_2 , важи $\beta_1^{\pi_1} \neq \beta_2^{\pi_2}$.

Доказ: Како су β_1 и β_2 различити елементи скупа \mathcal{B}_1^M , постоји такав елемент $k \in [n]$, да један од елемената β_1 и β_2 садржи неки скуп из M кардиналности k , док други не садржи ниједан скуп те кардиналности. Дакле, исто важи и за $\beta_1^{\pi_1}$ и $\beta_2^{\pi_2}$. \square

Последица 4.3.3. Нека је $f^M: \mathcal{B}_1^M \rightarrow [m]$ произвољна функција. Постоји њено проширење $f: \mathcal{B}_1 \rightarrow [m]$ које задовољава $f(\beta^\pi) = f^M(\beta)$, за свако $\beta \in \mathcal{B}_1^M$ и сваку пермутацију π .

Теорема 4.3.4. $\chi(PA_n) = \chi(\mathbf{K}_{n+1}) + 1$.

Доказ: Како свако правилно бојење пљосни политопа PA_n индукује једно правилно бојење пљосни његове пљосни, тј. пљосни $(n-1)$ -асоциедра, јасно је да је

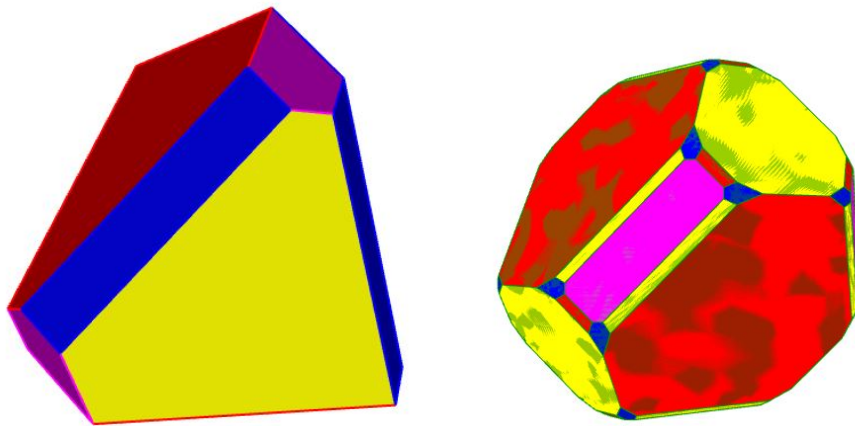
$$\chi(PA_n) \geq \chi(\mathbf{K}_{n+1}) + 1.$$

Да бисмо доказали једнакост, према Тврђењу 4.3.1 и Последици 4.3.3, довољно је да докажемо постојање правилног бојења

$$f^M: \mathcal{B}_1^M \rightarrow [\chi(\mathbf{K}_{n+1}) + 1].$$

Нека је функција f^M таква да је $f^M(M) = \chi(\mathbf{K}_{n+1}) + 1$, а сви остали елементи скупа \mathcal{B}_1^M нека су обојени у складу са процедуром описаном у Одељку 4.2. Ради једноставности, елементи скупа $\mathcal{B}_1^M - \{M\}$ се могу преименовати у своје минималне

елементе (нпр. скуп $\{n-1, \dots, n-k\}$ се може преименовати у $n-k$), након чега се, не би ли се дефинисало правилно бојење из скупа $\mathcal{B}_1^M - \{M\}$ у скуп $[\chi(\mathbf{K}_{n+1})]$, поступа потпуно идентично као у Одељку 4.2. \square



Слика 4.1: Правилно бојење пљосни 3-асоциедра и 3-пермутасоциедра

4.4 Циклоедар

Проширимо дефиницију сегмента са почетка Одељка 4.2. За $a, b \in [n+1]$, нека је *сегмент* $[a, b]$ скуп дефинисан на следећи начин:

$$[a, b] = \begin{cases} \{i \mid a \leq i \leq b\}, & \text{ако је } a \leq b \\ \{i \mid a \leq i \leq n+1\} \cup \{i \mid 1 \leq i \leq b\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пљосни n -циклоедра Су_n се поистовећују са сегментима дужине мање од $n+1$ (видети Пример 1.2.8). Кажемо да се пљосни $[a, b]$ и $[c, d]$ *надовезују* када је $b +_{n+1} 1 = c$ или $d +_{n+1} 1 = a$. Две пљосни се *преклапају* када нису ни дисјунктне ни упоредиве. Када се две пљосни преклапају или надовезују, кажемо да се једна на другу *настављају*.

Тврђење 4.4.1. *Две пљосни циклоедра су раздвојене ако и само ако се настављају једна на другу.*

Доказ: Постоји угњежђен скуп који садржи две пљосни циклоедра ако и само ако су те пљосни упоредиве, или су дисјунктне али се не надовезују, дакле, ако и само ако се нити преклапају нити надовезују. \square

Теорема 4.4.2. $\chi(\mathbf{K}_{n+1}) + 1 \leq \chi(\text{Су}_n) \leq \chi(\mathbf{K}_{n+1}) + n$.

Доказ: Нека је $h: \mathcal{F}(\mathbf{K}_{n+1}) \rightarrow [\chi(\mathbf{K}_{n+1})]$ правилно бојење пљосни $(n-1)$ -асоциедра у $\chi(\mathbf{K}_{n+1})$ боја. Нека је $f: \mathcal{F}(\text{Су}_n) \rightarrow [\chi(\mathbf{K}_{n+1}) + n]$ функција дефинисана на следећи начин:

$$f(X) = \begin{cases} h(X), & \text{ако } n+1 \notin X \text{ и } X \neq [1, n] \\ [\chi(\mathbf{K}_{n+1})] + 1, & \text{ако је } X = [1, n] \\ [\chi(\mathbf{K}_{n+1})] + |X|, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажимо да је f правилно бојење пљосни n -циклоедра у $[\chi(\mathbf{K}_{n+1}) + n]$ боја. Пљосни које не садрже $n+1$ су сегмент $[1, n]$ и сегменти са којима се поистовећују пљосни $(n-1)$ -асоциедра. За њихово бојење је потребно најмање $\chi(\mathbf{K}_{n+1}) + 1$ боја. Све остале пљосни, тј. сегменти који садрже $n+1$, се могу поређати у n низова тако да сваки од њих садржи сегменте исте дужине. Дакле, сваки од низова чине сегменти који нису међусобно упоредиви, а како сви садрже $n+1$, нису ни дисјунктни. То значи да се све пљосни једног низа међусобно преклапају, па се према Тврђењу 4.4.1 могу обојити истом бојом. Пљосни $[n+1, n+1]$ и $[1, n]$ се, према Тврђењу 4.4.1, могу обојити истом бојом, јер се надовезују. \square

За $2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, посматрајмо следећа два низа целих бројева:

$$B_i = \begin{cases} 0, & \text{ако је } i = 2, \\ n + 1 + B_{i-1} - (i-1)A_{i-1}, & \text{ако је } 2 < i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \end{cases}$$

$$A_i = \begin{cases} \lceil \frac{n+1+B_i}{i} \rceil, & \text{ако је } i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ 1, & \text{ако је } n \text{ паран број и } i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \\ 0, & \text{ако је } n \text{ непаран број и } i = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1. \end{cases}$$

Теорема 4.4.3. $\chi(\mathbf{C}u_n) \leq \sum_{i=2}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1} (A_i + 1)$.

Доказ: Ако је $n = 2k - 1$, посматрајмо следеће низове пљосни:

$$\begin{array}{ll} (2) & [1, 1], \dots, [n+1, n+1] \quad [1, n], [2, n+1], \dots, [n+1, n-1] \\ (3) & [1, 2], \dots, [n+1, 1] \quad [1, n-1], [2, n], \dots, [n+1, n-2] \\ & \vdots \\ (k) & [1, k-1], \dots, [n+1, k-2] \quad [1, k+1], \dots, [n+1, k] \\ (k+1) & [1, k], \dots, [n+1, k-1]. \end{array}$$

Приметимо да сваки низ има леву и десну групу пљосни, осим последњег који има само леву. Све групе у сваком од низова имају по $n+1$ елемент. Према Тврђењу 4.4.1, пљосни које се међусобно преклапају или надовезују се могу обојити истом бојом. Обојимо најпре пљосни које се налазе у левој групи првих k низова. У левој групи низа (i) , i узастопних елемената су пљосни које се међусобно или преклапају или надовезују. Такође, последњих j елемената леве групе низа (i) , за $j < i$, заједно са првих $i-j$ елемената леве групе низа $(i+1)$, представљају пљосни које се међусобно или преклапају или надовезују. Дакле, све их можемо обојити према процедури $(*)$ описаној у Одељку 4.2, за $l_2 = \dots = l_k = n+1$. Тиме је потрошено

$$\sum_{i=2}^k A_i$$

боја. Приметимо да је притом могуће да је и првих $k-j$ пљосни низа $(k+1)$ такође обојено. Чак и да није ниједна, сви елементи низа $(k+1)$ су пљосни које се међусобно преклапају, па се могу обојити једном бојом. Слично, сви елементи друге групе низа (i) се међусобно преклапају, па се могу обојити по једном бојом. На овај начин су све пљосни циклоедра правилно обојене коришћењем укупно

$$k + \sum_{i=2}^{k+1} A_i$$

боја.

Ако је $n = 2k$, имамо исте низове пљосни као у претходном случају сем што су сада низови (k) и $(k + 1)$ облика:

$$\begin{array}{ll} (k) & [1, k - 1], \dots, [n + 1, k - 2] \quad [1, k + 2], \dots, [n + 1, k + 1] \\ (k + 1) & [1, k], \dots, [n + 1, k - 1] \quad [1, k + 1], \dots, [n + 1, k]. \end{array}$$

Првих k низова бојимо потпуно аналогно као у претходном случају, при чему је, такође, могуће да је обојено и првих $k - j$ пљосни леве групе низа $(k + 1)$. Чак и да није ниједна, сви елементи леве групе низа $(k + 1)$ су пљосни које се међусобно преклапају или надовезују, па се могу обојити једном бојом. Исто важи и за десну групу тог низа, чиме долазимо до истог закључка као у претходном случају. \square

Да Теорема 4.4.3 даје значајно бољу горњу оцену од Теореме 4.4.2, показује преглед вредности ових оцена за циклоедре разних димензија (видети Додатак А.3).

За неке вредности броја n , оцена коју даје Теорема 4.4.3 се може додатно поправити. Наиме, нека је $2 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$, и нека су

$$[a_1, b_1] = X_1, \dots, X_i = [a_i, b_i]$$

i узастопних елемената леве групе низа (i) , или j последњих елемената леве групе низа (i) и $i - j$ почетних елемената леве групе низа $(i + 1)$ ($j < i$). Посматрајмо следећи низ пљосни

$$Y_1 = [a_i +_{n+1} 1, a_1 +_{n+1} n], Y_2 = [a_i +_{n+1} 2, a_1], \dots, Y_{i-1} = [a_i +_{n+1} (i - 1), a_1 +_{n+1} (i - 3)].$$

Како је $a_i = a_1 +_{n+1} (i - 1)$, дужина свих ових сегмената је $n + 1 - i$, па је реч о елементима десне групе низа $(i + 1)$ (када је n непаран број и $i = \frac{n}{2}$, реч је о елементима леве групе низа $(k + 1)$). Како је $a_1 +_{n+1} n +_{n+1} 1 = a_1$, пљосни Y_1 и X_1 се надовезују, што имплицира да се, за свако $l \in [i - 1]$, пљосни Y_l и X_l надовезују. Ако је X_2 елемент низа (i) , онда важе једнакости

$$b_2 +_{n+1} 1 = b_1 +_{n+1} 2 = a_1 +_{n+1} (i - 2) +_{n+1} +2 = a_1 +_{n+1} (i - 1) +_{n+1} +1 = a_i +_{n+1} 1,$$

па се и пљосни Y_1 и X_2 надовезују. Ако је X_2 елемент низа $(i + 1)$, онда је $b_2 = a_i +_{n+1} 1$, и тада се Y_1 и X_2 преклапају. Одатле следи да се, за свако $l \in [i - 1]$, пљосни Y_l и X_{l+1} надовезују или преклапају, у зависности од тога ком низу припада X_{l+1} . Све ово, заједно са једнакостима

$$a_1 +_{n+1} (i - 3) = a_1 +_{n+1} n +_{n+1} (i - 2) = b_1 +_{n+1} n,$$

повлачи да се Y_l преклапа са сваком од пљосни X_m , $m \notin \{l, l + 1\}$. Закључујемо да се пљосни $X_1, \dots, X_i, Y_1, \dots, Y_{i-1}$ међусобно настављају, па се, према Тврђењу 4.4.1, могу обојити истом бојом. Приметимо још и да су сегменти $Y_0 = [a_i, a_1 +_{n+1} (n - 1)]$ и $Y_i = [a_i +_{n+1} i, a_1 +_{n+1} (i - 2)]$ упоредиви редом са X_i и X_1 , па се, према Тврђењу 4.4.1, не могу придружити овом скупу међусобно раздвојених пљосни.

Дакле, у бојењу описаном у доказу Теореме 4.4.3, при бојењу истом бојом i узастопних елемената леве групе низа (i) , односно последњих j елемената низа (i) и $i - j$ почетних елемената низа $(i + 1)$, том бојом се може обојити и одговарајућих $i - 1$ елемената десне групе низа $(i + 1)$. То потенцијално даје могућност да се

при бојењу необојених елемената свих десних група утроши мање од $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ боја, колико је за њих првобитно потрошено. Да ли се та могућност може заиста и искористити, не зависи толико од тога колико је елемената остало необојено, колико зависи од тога о којим елементима је реч. На пример, ако је у свим десним групама остао необојен m -ти елемент, како су они међусобно упоредиви, морају се обојити различитим бојама и нема простора да се уштеди ниједна боја. Дакле, мера уштеде зависи од елемената низа B_i , тј. природе броја n .

Пример 4.4.1. Следе два правилна бојења f и h пљосни 7-циклоедра. Бојење f је бојење описано у доказу Теореме 4.4.3, док h у односу на f штеди једну боју на горе описан начин :

$$\begin{aligned} f([1, 1]) &= f([2, 2]) = 1, & f([1, 2]) &= f([2, 3]) = f([3, 4]) = 5, \\ f([3, 3]) &= f([4, 4]) = 2, & f([4, 5]) &= f([5, 6]) = f([6, 7]) = 6, \\ f([5, 5]) &= f([6, 6]) = 3, & f([7, 8]) &= f([8, 1]) = f([1, 3]) = 7, \\ f([7, 7]) &= f([8, 8]) = 4, \\ f([2, 4]) &= f([3, 5]) = f([4, 6]) = f([5, 7]) = 8, \\ f([6, 8]) &= f([7, 1]) = f([8, 2]) = f([1, 4]) = 9, \\ f([1, 7]) &= \dots = f([8, 6]) = 10, & f([1, 6]) &= \dots = f([8, 5]) = 11, \\ f([1, 5]) &= \dots = f([8, 4]) = 12, & f([2, 5]) &= \dots = f([8, 3]) = 13; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h([1, 1]) &= h([2, 2]) = h([3, 8]) = 1, & h([3, 3]) &= h([4, 4]) = h([5, 2]) = 2, \\ h([5, 5]) &= h([6, 6]) = h([7, 4]) = 3, & h([7, 7]) &= h([8, 8]) = h([1, 6]) = 4, \\ h([1, 2]) &= h([2, 3]) = h([3, 4]) = h([4, 8]) = h([5, 1]) = 5, \\ h([4, 5]) &= h([5, 6]) = h([6, 7]) = h([7, 3]) = h([8, 4]) = 6, \\ h([7, 8]) &= h([8, 1]) = h([1, 3]) = h([2, 6]) = h([3, 7]) = 7, \\ h([2, 4]) &= h([3, 5]) = h([4, 6]) = h([5, 7]) = h([6, 1]) = h([7, 2]) = h([8, 3]) = 8, \\ h([6, 8]) &= f([7, 1]) = h([8, 2]) = h([1, 4]) = h([2, 5]) = h([3, 6]) = h([4, 7]) = 9, \\ h([1, 7]) &= \dots = h([8, 6]) = 10, \\ h([2, 7]) &= f([4, 1]) = f([6, 3]) = f([8, 5]) = 11, & h([1, 5]) &= f([6, 2]) = f([5, 8]) = 12. \end{aligned}$$

Бојењем h су пљосни 7-циклоедра обојене у 12 боја, колико је минимално потребно и да се обоје пљосни асоциедра исте димензије.

Аналогно се може проверити да се на овај начин, у случају $n = 8$, не може у односу на f уштедети ниједна боја, док се код 9-циклоедра може уштедети једна.

4.5 Звездодар

Пљосни n -звездодра \mathbf{St}_n се поистовећују са скуповима $\{1\}, \dots, \{n\}$ и правим подскуповима скупа $[n+1]$ који садрже $n+1$ (видети Пример 1.2.9). Две различите пљосни Y и Z имају заједничко теме ако и само ако су Y и Z неки од скупова $\{1\}, \dots, \{n\}$ или су Y и Z упоредиви.

Нека је

$$\mathcal{H} = \{Y \subseteq \mathbf{N} \mid n+1 \in Y \text{ и } Y \text{ је коначан скуп}\}.$$

Индукцијом по $k = |Y - \{n+1\}|$, дефинишимо функцију $h: \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{N}$ и скуп $F_Y \subseteq \mathbf{N}$, и покажимо да важи следеће:

(*) $h(Y) \notin F_Y$ и скуп $F_Y \cup \{h(Y)\}$ се састоји од елемената скупа

$$(Y)_1^{n+1} = (Y - \{n+1\}) \cup \{1\}$$

и највише k почетних елемената скупа $\mathbf{N} - (Y)_1^{n+1}$.

За $k = 0$, нека је $F_{\{n+1\}} = \emptyset$ и $h(\{n+1\}) = 1$. Очигледно, важи (*). Претпоставимо да су, за сваки скуп $Y \in \mathcal{H}$ за који је $|Y - \{n+1\}| < k$, дефинисани скуп F_Y и функција $h(Y)$ који задовољавају (*). За $Y = \{i_1, \dots, i_k, n+1\}$, нека је $Y_j = Y - \{i_j\}$, и нека је $Z_j = F_{Y_j} \cup \{h(Y_j)\}$, $j \in [k]$. Нека је

$$F_Y = (Y)_1^{n+1} \cup \left(\bigcup \{Z_j \mid j \in [k]\} \right) \quad \text{и} \quad h(Y) = \min(\mathbf{N} - F_Y).$$

На пример,

$$\begin{aligned} F_{\{1, n+1\}} &= \{1\}, & h(\{1, n+1\}) &= 2, \\ F_{\{2, n+1\}} &= \{1, 2\}, & h(\{2, n+1\}) &= 3, \\ \text{за } i \geq 3, \quad F_{\{i, n+1\}} &= \{1, i\}, & h(\{i, n+1\}) &= 2, \\ F_{\{4, 7, n+1\}} &= \{1, 2, 4, 7\}, & h(\{4, 7, n+1\}) &= 3. \end{aligned}$$

Према индуктивној претпоставци, сваки скуп Z_j се састоји од елемената скупа $(Y_j)_1^{n+1}$ и највише $k-1$ почетних елемената скупа $\mathbf{N} - (Y_j)_1^{n+1}$, а сваки од тих $k-1$ припада унији скупа $(Y)_1^{n+1}$ и скупа почетних $k-1$ елемената скупа $\mathbf{N} - (Y)_1^{n+1}$. Дакле, скуп F_Y је подскуп те уније и очигледно се састоји од елемената скупа $(Y)_1^{n+1}$ и највише $k-1$ почетних елемената скупа $\mathbf{N} - (Y)_1^{n+1}$. Када се овом скупу дода још $h(Y)$, видимо да (*) важи. Приметимо да из (*) следи да је $h(Y) \leq 2k+1$ када је $|Y - \{n+1\}| = k$.

Напомена 4.5.1. Ако су Y и Z елементи скупа \mathcal{H} и $Z \subset Y$, онда је $h(Z)$ елемент скупа F_Y . Дакле, $h(Y) \neq h(Z)$. Такође, ако је $n+1 \neq i \in Y \in \mathcal{H}$, онда је $h(Y) \neq i$.

Дефинишимо функцију

$$f: \mathcal{F}(\mathbf{St}_n) \rightarrow [2n-1 - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor]$$

на следећи начин:

$$\text{нека је } f(\{1\}) = f(\{n+1\}) = 1;$$

$$\text{за } 2 \leq i \leq n, \text{ нека је } f(\{i\}) = i;$$

за $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ и за Y које је такво да је $|Y - \{n+1\}| = k$, нека је $f(Y) = h(Y)$ (у овом случају $h(Y) \in [n]$);

$$\text{за } k > \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \text{ и } Y \text{ које је такво да је } |Y - \{n+1\}| = k, \text{ нека је } f(Y) = n+k - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor.$$

Теорема 4.5.1. *Функција f је правилно бојење пљосни звездоедра \mathbf{St}_n .*

Доказ: Довољно је увидети да из Напомене 4.5.1 следи да за две пљосни Y и Z , такве да је $Z \subset Y \in \mathcal{H}$ и да је $|Y - \{n+1\}| \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$, важи $f(Y) \neq f(Z)$. \square

Последица 4.5.2. $\chi(\mathbf{St}_n) \leq 2n-1 - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

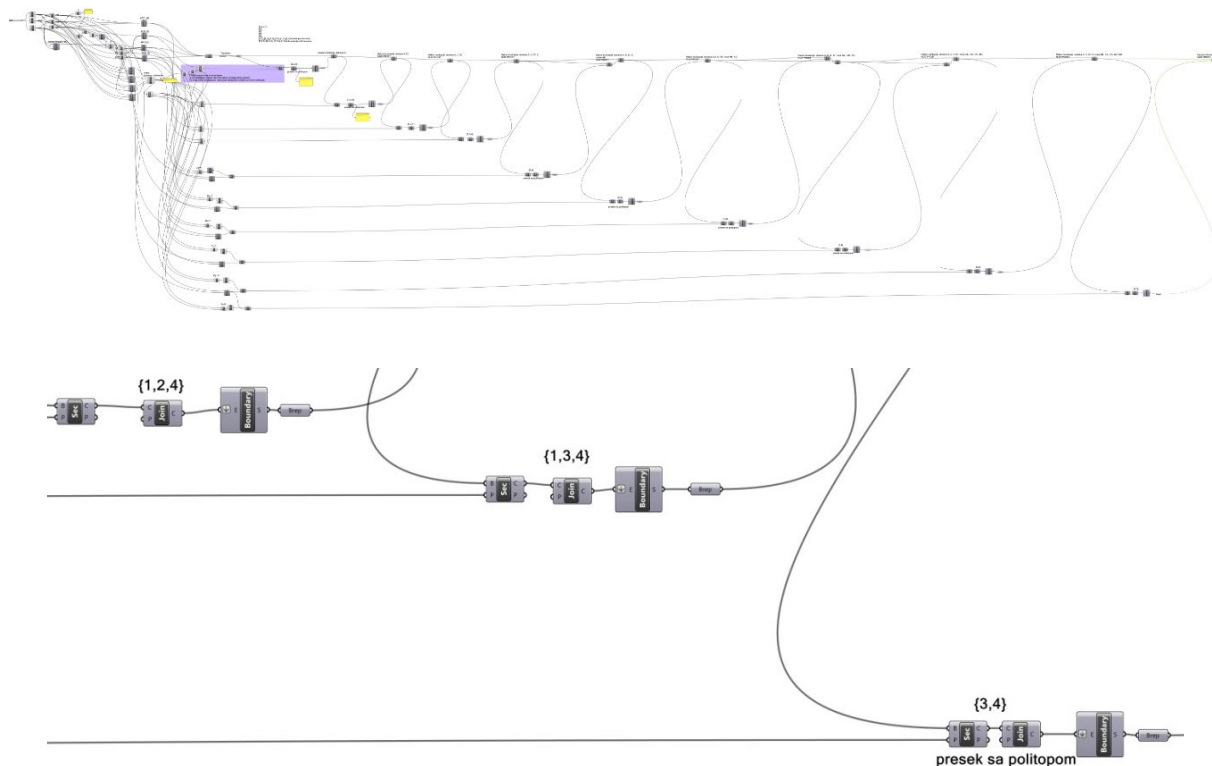
На крају, супротно очекивању, испоставило се да све испитиване класе простих политопа имају високе хроматске бројеве. Овај резултат је, ипак, врло интересантан, с обзиром да се ради о Делцановим политопима који допуштају квази-торусну структуру.

Додатак А

Софтверска решења

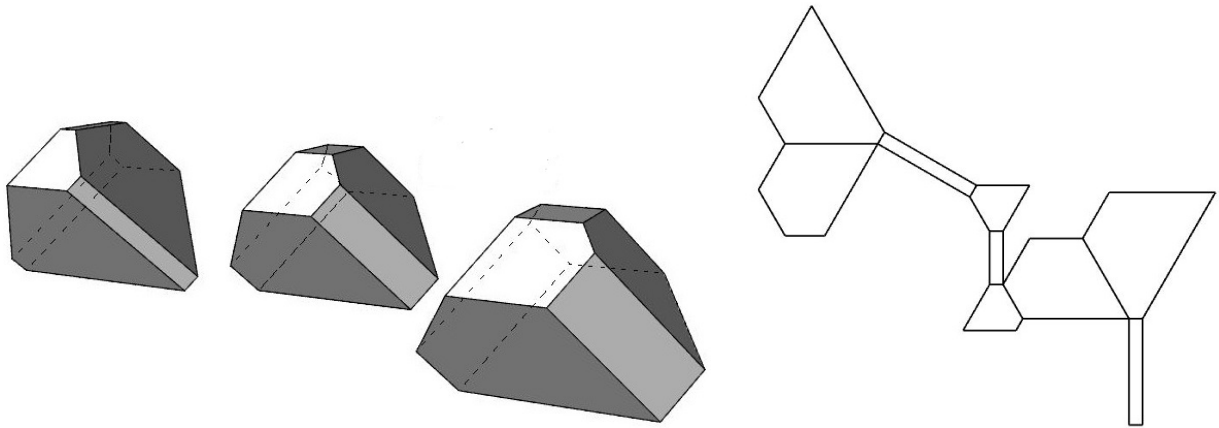
А.1 Грасхопер (Rhinoсeros/Grasshopper)

Уз помоћ Грасхопера, графичко-алгоритамског едитора и софтверског додатка за визуелно програмирање и подршку моделовању тродимензионалних геометријских форми ([35], [41]), креирана је апликација, тзв. *дефиниција*, која генерише политопе настале сукцесивним зарубљивањем тетраедра, тј. 3-симплекса (Слика А.1). Кориснику ове апликације је омогућено да, и без нарочитог познавања овог алата, једноставно означи темена и ивице које се одсецају и на тај начин генерише тродимензионалан модел 3-нестоедра по избору. Испрограмирана је и параметарска контрола дубине зарубљивања. Корисник је подешава на клизачу нумеричких вредности које представљају удаљеност новонастале стране од тежишта тетраедра. Неки од резултата приказани су на Слици А.2 и Слици А.4.

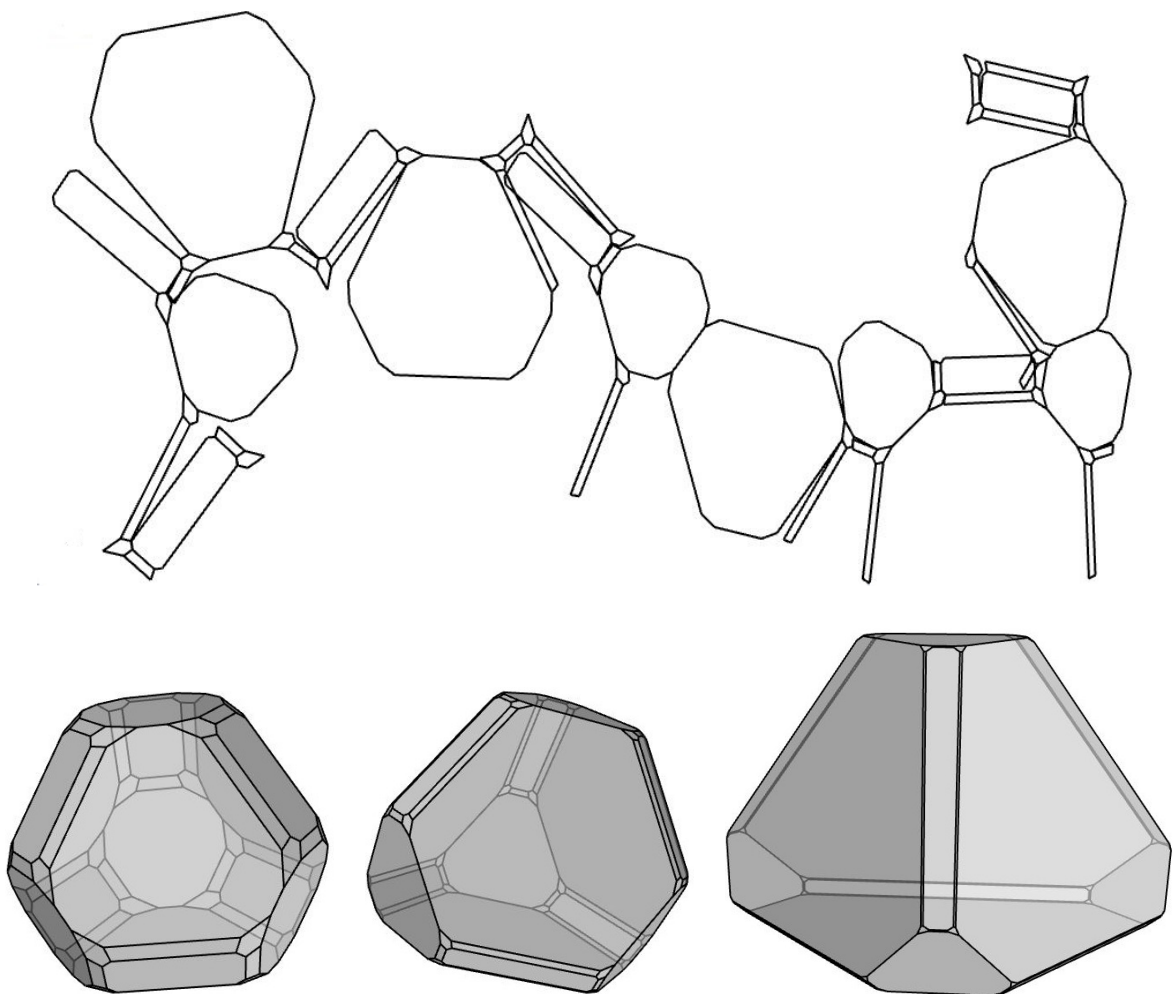


Слика А.1: Структура и детаљ дефиниције

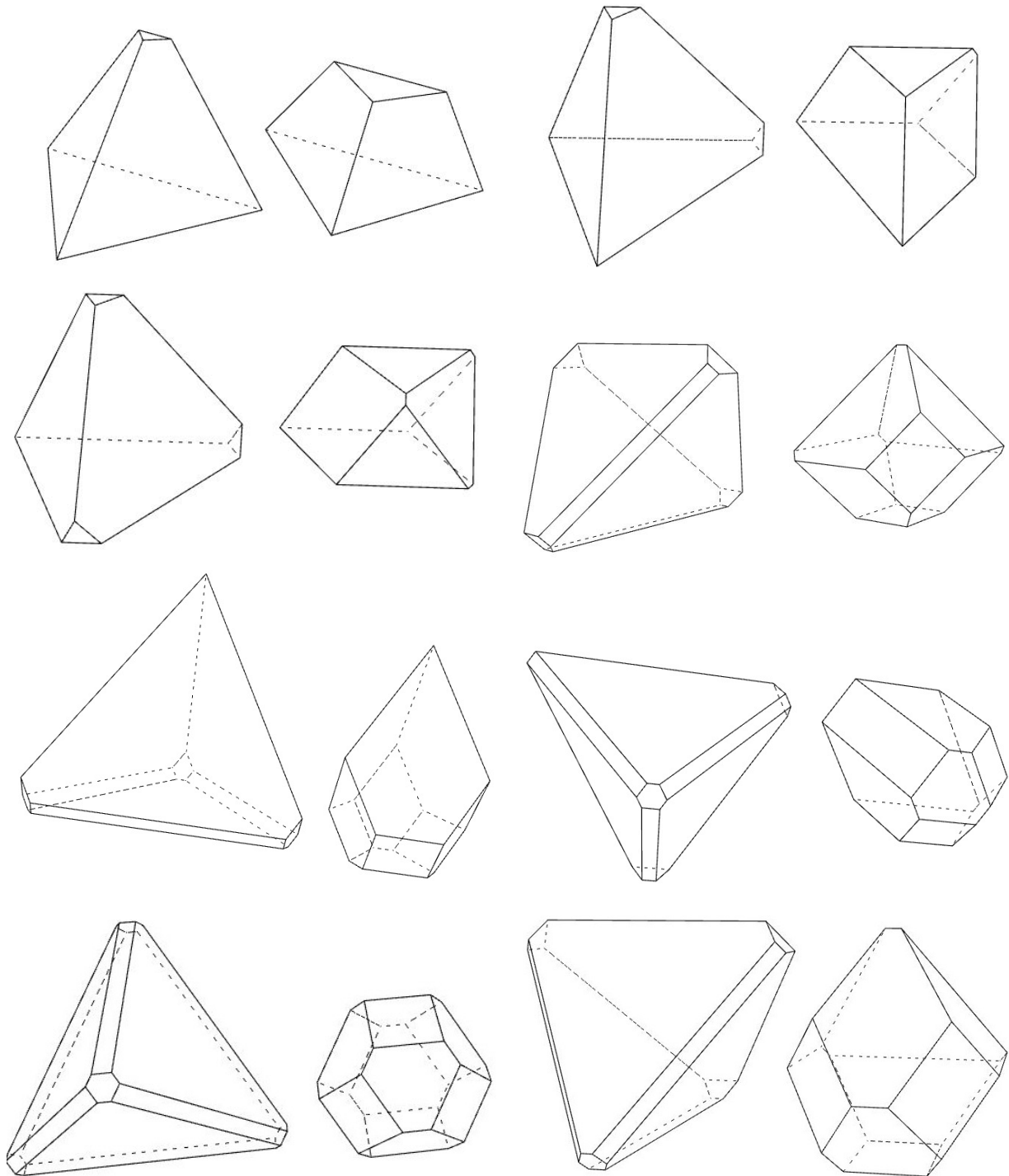
Ова дефиниција је даље надограђена са циљем реализације и наредног интервала зарубљивања, односно моделовања политопа који настају зарубљивањем 3-нестоедара, попут пермутоасоциедра (Слика А.3).



Слика А.2: Тродимензионални модели асоциедара



Слика А.3: Тродимензионални модели пермутоасоциедра



Слика А.4: Тродимензионални модели нестоедара

A.2 Полимејк (polymake/Perl)

За прорачуне и тестирања разних својстава политопа споменутих у овој дисертацији, интензивно је коришћен Полимејк, софтвер намењен управо проучавању комбинаторних и геометријских карактеристика политопа и полиедара [18]. Већ у случају 3-политопа, ручна израчунавања постају изузетно обимна и захтевна, а у случају већих димензија готово неизводљива. Уз подршку овог софтверског алата, који поседује преко 230 функција за рад са политопима, могућа је анализа и израчунавање свих појмова који се придружују једном политопу

(димензија, скуп темена, скуп пљосни, мрежа страна, f -вектор, граф, једначине граничних полупростора, нормални конуси, лепеза итд.), као и провера својстава и утврђивање односа са другим политопами (тестирање да ли је прост, комбинаторно или нормално еквивалентан другом политопу итд.). За више детаља препоручујемо [22] и [23].

У наставку је илустровано како се кроз интерактивну командну линију креира 2-пермутаасоциедар PA_2 . Потпуно аналогно се дефинишу и сложенији политопи већих димензија. Осим илустрованог начина, навођењем листе неједначина и једначина које одговарају полупросторима и хиперравнима које дефинишу политоп, доступне се у и команде за дефинисање политопа као конвексног омотача листе тачака.

```
polytope> $nejednakosti=new Matrix<Rational>([[ -3,1,0,0],[ -3,0,1,0],[ -3,0,0,1],
[-9,1,1,0],[ -9,1,0,1],[ -9,0,1,1],[ -12.5,0,1,2],[ -12.5,0,2,1],[ -12.5,2,1,0],
[-12.5,1,2,0],[ -12.5,1,0,2],[ -12.5,2,0,1]]);
polytope> $pa_2=new Polytope<Rational>(INEQUALITIES=>$nejednakosti,
EQUATIONS=>[[ -27,1,1,1]]);
polytope>
```

Полимејк, чији интерактивни језик је и сам својеврсни дијалект програмског језика Перл, препознаје и преводи команде писане Перл језиком, а допушта и покретање скрипт датотека писаних овим језиком (екстензија .pl). Приметимо да би већ за интерактивно дефинисање политопа PA_3 било неопходно откуцати 62 вектора који одговарају граничним полупросторима овог политопа. С обзиром да се политоп PA_n дефинише формулом, тј. алгоритамски, природно је испрограмирати скрипт који према том алгоритму генерише PA_n за n по избору, односно за n које корисник интерактивно наводи у командној линији при покретању скрипта. У наставку је понуђено једно решење (скрипт сачуван у датотеци `permutoasociedar.pl`), које је пропраћено и демонстрацијом његовог позива из командне линије.

```
1 #!/usr/bin/perl
  use application "polytope";
3
  sub permute (&@);
5
  my $n=$ARGV[0]; #ucitavanje dimenzije permutoasociedra
7
  #kreiranje jednachine hiperravni
9  my @lista;
  my $c=-3**($n+1);
11 push(@lista,$c);
  for(my $i=1;$i<$n+2;$i++){
13   push(@lista,1);
  };
15 my $jednakost = new Vector<Rational>(@lista);
17 #kreiranje matrice (liste vektora) nejednachine poluprostora
  my @nejednakosti;
19 for(my $k=1;$k<=$n;$k++){
  for(my $l=0;$l<=($n-$k);$l++){
21   my $kael=((3**($l+1)*(3**$k-1))/2+(3**$k-3*$k)/(3**$n-$n-1))*(-1);
   #za jedan par k i l ($kael)--jedan vektor i sve njegove permutacije
```

```

23 my @kl_lista;
    for(my $i=0;$i<$n+1-$k-$l;$i++){
25     push(@kl_lista,0);
    };
27 for(my $i=1;$i<$k;$i++){
    push(@kl_lista,$i);
29 };
    for(my $i=0;$i<$l+1;$i++){
31     push(@kl_lista,$k);
    };
33 my @permutacije; #niz permutacija za tekuci par k i l
    permute { push(@permutacije,"@_");}
35 @kl_lista;
    for(my $i=0;$i<=$#permutacije;$i++){
37     #print @permutacije[$i].":"; testiranje ispisa jedne permutacije
        my @values = split(' ', @permutacije[$i]);
39     unshift(@values,$kael);
        my $kl_vektor = new Vector<Rational>(@values);
41     push(@nejednakosti,$kl_vektor);
    };
43 };
};
45 my $pa_nejednakosti=new Matrix<Rational>(\@nejednakosti);
my $permutoasociedar=new Polytope<Rational>(INEQUALITIES=>$pa_nejednakosti,
    EQUATIONS=>[$jednakost]);
47 print "Politop PA_{$n} je kreiran.\n";
return $permutoasociedar;
49
#metod permutacije
51 sub permute (&@) {
    my $code = shift;
53     my @idx = 0..$#_;
        while ( $code->(@_[@idx]) ) {
55         my $p = $#idx;
            --$p while $idx[$p-1] > $idx[$p];
57         my $q = $p or return;
            push @idx, reverse splice @idx, $p;
59         ++$q while $idx[$p-1] > $idx[$q];
            @idx[$p-1,$q]=@idx[$q,$p-1];
61     }
}

```

```

polytope> $pa_3=script("permutoasociedar.pl",3);
polytope> Politop PA_3 je kreiran.
polytope> $pa_4=script("permutoasociedar.pl",4);
polytope> Politop PA_4 je kreiran.
polytope> $pa_3->SIMPLE;
polytope> 1
polytope> $pa_4->DIM;
polytope> 4
polytope> $pa_3->F_VECTOR;
polytope> 120 180 62

```

```
polytope> $pa_4->F_VECTOR;
polytope> 1680 3360 2020 340
polytope>
```

Важно је напоменути да по затварању сесије нестају сви политопи и други објекти који су током те сесије дефинисани. Конкретно, при свакој следећој сесији, за рад са пермутаасоциедром PA_n потребно га је поново дефинисати, тј. поново позвати скрипт. У случају великих вредности броја n , Полимејк захтева одређено време да дефинише тако сложен политоп. Из тог разлога, препоручљиво је да се овај политоп, али и сваки други са којим ће се извесно баратати и у наредним сесијама, одмах по првом дефинисању сачува у некој датотеци функцијом `save`.

```
polytope> save($pa_3,"ime_datoteke_pa_3");
polytope> save($pa_4,"ime_datoteke_pa_4");
polytope>
```

У било којој од наредних сесија, политопи се из ових датотека ефикасно учитају функцијом `load`.

```
polytope> $pa_3=load("ime_datoteke_pa_3.poly");
polytope> $pa_4=load("ime_datoteke_pa_4.poly");
polytope>
```

Како Полимејк подржава и сумирање Минковског помоћу бинарне функције `minkowski_sum`, све суме из Пододељка 3.3.1 и Пододељка 3.3.2 се овом функцијом могу дефинисати и даље анализирати. Конкретно, 2-пермутаасоциедар M_2 (видети Пододељак 3.3.1) се генерише на следећи начин:

```
polytope> $e=new Polytope(POINTS=>[[1,1,0,0],[1,0,1,0],[1,0,0,1]]);
polytope> $e1=new Polytope(POINTS=>[[1,1,0,0]]);
polytope> $e2=new Polytope(POINTS=>[[1,0,1,0]]);
polytope> $e3=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,1]]);
polytope> $e4=new Polytope(POINTS=>[[1,1,0,0],[1,0,1,0]]);
polytope> $e5=new Polytope(POINTS=>[[1,1,0,0],[1,0,0,1]]);
polytope> $e6=new Polytope(POINTS=>[[1,0,1,0],[1,0,0,1]]);
polytope> $permutoedar=minkowski_sum(minkowski_sum(minkowski_sum(minkowski_sum(
minkowski_sum(minkowski_sum($e,$e1),$e2),$e3),$e4),$e5),$e6);
polytope> $e7=new Polytope(POINTS=>[[1,2,0,0],[1,0,2,0],[1,1,0,1]]);
polytope> $e8=new Polytope(POINTS=>[[1,2,0,0],[1,0,2,0],[1,0,1,1]]);
polytope> $e9=new Polytope(POINTS=>[[1,2,0,0],[1,0,0,2],[1,1,1,0]]);
polytope> $e10=new Polytope(POINTS=>[[1,2,0,0],[1,0,0,2],[1,0,1,1]]);
polytope> $e11=new Polytope(POINTS=>[[1,0,2,0],[1,0,0,2],[1,1,1,0]]);
polytope> $e12=new Polytope(POINTS=>[[1,0,2,0],[1,0,0,2],[1,1,0,1]]);
polytope> $pa_2=minkowski_sum(minkowski_sum(minkowski_sum(minkowski_sum(minkowski_
sum(minkowski_sum($permutoedar,$e7),$e8),$e9),$e10),$e11),$e12);
polytope> $pa_2->F_VECTOR;
12 12
polytope> $pa_2->VERTICES;
1 1 5 13
1 13 1 5
1 13 5 1
1 2 14 3
1 3 2 14
1 5 13 1
```

```

1 3 14 2
1 14 2 13
1 2 3 14
1 14 13 2
1 5 1 13
1 1 13 5
polytope> $pa_2->FACETS;
-1 0 1 0
-1 0 0 1
18 0 -1 -1
14 0 0 -1
31 0 -2 -1
14 0 -1 0
12 0 1 -1
31 0 -1 -2
12 0 -1 1
-7 0 2 1
-5 0 1 1
-7 0 1 2
polytope>

```

Дакле, креирани политоп је дванаестоугао чија су темена све пермутације координата тачака $(1, 5, 13)$ и $(2, 3, 14)$, а може се дефинисати и као пресек хиперравни $x_1 + x_2 + x_3 = 19$ и граничних полупростора

$$x_i \geq 1, x_i + x_j \geq 5, x_i + 2x_j \geq 7,$$

при чему су i и j различити елементи скупа [3].

Аналогно се утврђује и да је парцијална сума S' из Пододељка 3.3.2 конвексни омотач свих пермутација координата тачака $(1, 7, 17, 62)$, $(1, 6, 19, 61)$ и $(2, 5, 18, 62)$. Може се дефинисати и као пресек граничних полупростора

$$x_{i_3} \geq 1, x_{i_2} + x_{i_3} \geq 7, x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} \geq 25, x_{i_1} + 2x_{i_2} + 3x_{i_3} \geq 34,$$

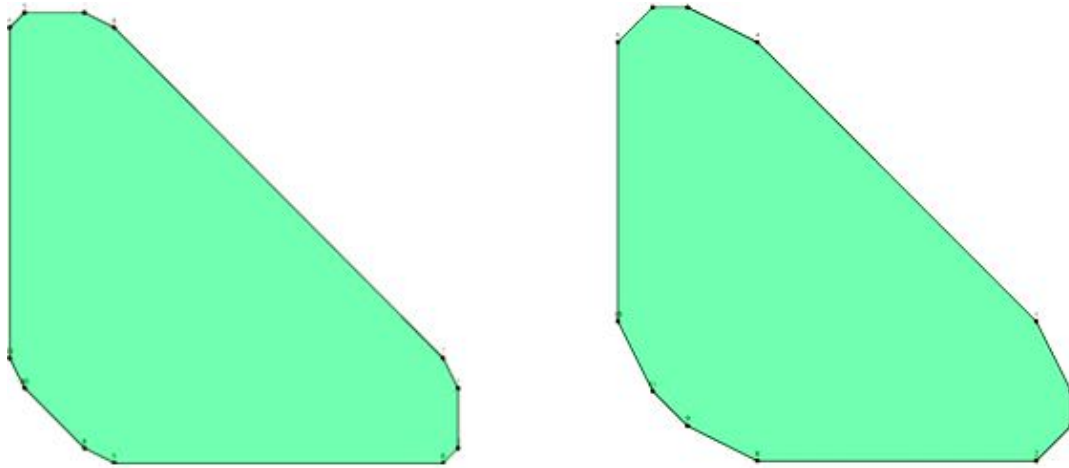
са хиперравни $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 87$, при чему су i_1 , i_2 и i_3 међусобно различити елементи скупа [4]. Сви сабирци који се додају пермутоедру S , до дефинисање коначне суме S' , чине скуп који зарубљује пермутоедар S , односно S' је комбинаторно еквивалентан политопу који настаје сукцесивном зарубљивањем пермутоедра S одсецањем свих темена. Ово се утврђује током генерисања политопа S' , корак по корак, додавањем једног по једног сабирка и анализом сваке добијене парцијалне суме. Комбинаторна еквиваленција се проверава бинарном функцијом `isomorphic`.

Слично, политоп S'' је конвексни омотач свих пермутација координата тачака $(1, 10, 23, 89)$, $(2, 8, 24, 89)$, $(2, 7, 26, 88)$ и $(1, 8, 27, 87)$. Такође је и пресек граничних полупростора

$$x_{i_3} \geq 1, x_{i_2} + x_{i_3} \geq 9, x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} \geq 34, x_{i_1} + 2x_{i_2} + 3x_{i_3} \geq 46, x_{i_1} + 2x_{i_2} + 2x_{i_3} \geq 44$$

и хиперравни $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 123$, где су i_1 , i_2 и i_3 међусобно различити елементи скупа [4].

Полимејк пружа значајан број могућности за рад и са другим типовима објеката као што су комплекси, лепезе и торусни варијетети, а поседује и скуп алата намењен визуелизацији геометрије и комбинторних графова [37].

Слика А.5: JavaView визуелизација пермутаасоциедара PA_2 и M_2

А.3 Јава (Eclipse/Java)

За $2 \leq n \leq 7$, следећи програм, написан на програмском језику Јава [1], креира и испишује елементе комплекса C_1 и C , који редом одговарају n -пермутоедру и простом n -пермутаасоциедру. Илустрован је испис 0-страна (максималних 1-угњежђених скупова) и 2-страна 4-пермутаасоциедра. Уместо скупа $[n + 1]$, коришћен је скуп почетних $n + 1$ слова абецедe. Програм је конципиран на објектно-орјентисаном наслеђивању (класе `Politop/Permutocedar/AsociedarBaziranNaPerm`), чиме је остављена могућност релативно једноставног проширивања програма и на друге комплексе угњежђених скупова, који одговарају произвољним нестоедрима базираним на пермутоедру, тј. пермутонестоедрима (видети Пододељак 1.2.3).

```

import java.util.ArrayList;
2 import java.util.HashSet;

4 public class Politop {
    protected int n; //dimenzija
    6 protected String rec; // konkatencija slova azbuke
    protected ArrayList<ArrayList<String>> konstrukcije; //temena
    8 //strane baziranog politopa
    protected ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>> temenaBaziranog;
    10 protected ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>> ivaiceBaziranog;
    protected ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>> dvaStraneBaziranog;
    12 protected ArrayList<Integer> brojTemena2Dstrana;
    protected HashSet<String> feseti;
    14 //npr. broj maksimalnih 1-ugnjezdjenih skupova izvedenih iz jednog maksimalnog
        0-ugnjezdenog skupa
    protected int brojBaziranihKonstrukcijaJednogGraficica;

    16
    public Politop(int n, String slova) {
    18     super();
        this.n = n;
    20     this.rec=new String(slova);
        konstrukcije=new ArrayList<>();
    22     temenaBaziranog=new ArrayList<>();

```

```

    iviceBaziranog=new ArrayList<>();
24   dvaStraneBaziranog=new ArrayList<>();
    brojTemena2Dstrana=new ArrayList<>();
26   feseti=new HashSet<>();
}
28
public Politop(int n, String slova,int ind){
30   super();
    this.n = n;
32   this.rec=new String(slova);
    konstrukcije=new ArrayList<>();
34   temenaBaziranog=new ArrayList<>();
    iviceBaziranog=new ArrayList<>();
36   dvaStraneBaziranog=new ArrayList<>();
    brojTemena2Dstrana=new ArrayList<>();
38   feseti=new HashSet<>();
}
40
    protected void postaviFesete(){
42        for (int i = 0; i < konstrukcije.size(); i++)
            for (int j = 0; j < konstrukcije.get(i).size(); j++)
44                if (!feseti.contains(konstrukcije.get(i).get(j)))
                    feseti.add(konstrukcije.get(i).get(j));
46    }

48   //ispis pljosni
    protected void ispisiSveFesete(){
50        System.out.println("Pljosni:");
        int brojac=1;
52        for(String i:feseti){
            System.out.println(brojac+" "+i);
54            brojac++;
        }
56    }

58   //brise jedan karakter iz stringa na zadatoj poziciji
    protected static String skloniKarakter(String str, Integer n) {
60        String front = str.substring(0, n);
        String back = str.substring(n+1, str.length());
62        return front + back;
    }
64

    //ispisuje string u skupovnom formatu bez zagrada
66   public static void ispisiString(String s){
        for (int i = 0; i < s.length(); i++) {
68            System.out.print(s.charAt(i));
            if(i!=s.length()-1)
70                System.out.print(",");
        }
72    }

74   //ispisuje jedan konstrukt, tj. jednu stranu
    public void ispisiKonstrukt(ArrayList<String> k){

```

```

76     System.out.print("{");
77     for (int i = 0; i < k.size(); i++) {
78         System.out.print("{");
79         ispisiString(k.get(i));
80         System.out.print("}");
81         if(i!=k.size()-1)
82             System.out.print(",");
83     }
84     System.out.print(" }");
85     System.out.println();
86 }

88 //ispisuje listu ugnjezdjenih skupova (listu listi stringova)
89 public void ispisiSveKonstrukte(ArrayList<ArrayList<String>> lista){
90     for (int i = 0; i < lista.size(); i++) {
91         System.out.println((i+1)+". "); //sa rednim brojem
92         ispisiKonstrukt((lista.get(i)));
93         System.out.println();
94     }
95 }

96 public void ispisJedneBazirane(ArrayList<ArrayList<String>> bazirana) {
97     for (int i = 0; i < bazirana.size(); i++) {
98         System.out.print("{");
99         for (int j = 0; j < bazirana.get(i).size(); j++) {
100             System.out.print("{");
101             ispisiString(bazirana.get(i).get(j));
102             System.out.print("}");
103             if(j!=bazirana.get(i).size()-1)
104                 System.out.print(",");
105         }
106         System.out.print("}");
107         if(i!=bazirana.size()-1)
108             System.out.print(", ");
109     }
110 }

111 }

112 public void ispisiSveBazKons(ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>> bazirane){
113     for (int i = 0; i < bazirane.size(); i++) {
114         System.out.print((i+1)+". {"); //sa rednim brojem
115         ispisiJedneBazirane(bazirane.get(i));
116         System.out.println(" }");
117     }
118 }

119 }

120 protected void postaviIviceBaziranog(int deo) {
121     //iz maskimalnog 1-ugnjezdjenog skupa izbaciti jedan element i ukloniti duplikate
122     ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>> ivateDuplikati=new ArrayList<>();
123     if (deo==0){
124         for (int i = 0; i < brojBaziranihKonstrukcijaJednogGraficica; i++) {
125             /*i-ta konstrukcija*/
126             for (int j = 0; j < temenaBaziranog.get(i).size(); j++) {
127                 /*izbacujemo j-ti element*/

```



```

130     ArrayList<ArrayList<String>> nova=new ArrayList<>();
131     for (int k = 0; k<temenaBaziranog.get(i).size(); k++)
132         if (j!=k)
133             nova.add(temenaBaziranog.get(i).get(k));
134     iviceDuplikati.add(nova);
135 }
136 }
137 else{
138     for (int i = 0; i < temenaBaziranog.size(); i++) {
139         /*i-ta konstrukcija*/
140         for (int j = 0; j < temenaBaziranog.get(i).size(); j++) {
141             /*izbacujemo j-ti element*/
142             ArrayList<ArrayList<String>> nova=new ArrayList<>();
143             for (int k = 0; k<temenaBaziranog.get(i).size(); k++)
144                 if (j!=k)         nova.add(temenaBaziranog.get(i).get(k));
145             iviceDuplikati.add(nova);
146         }
147     }
148 }
149 iviceBaziranog.add(iviceDuplikati.get(0));
150 for (int i = 1; i < iviceDuplikati.size(); i++) {
151     boolean indikator=false;
152     for (int j = 0; j < iviceBaziranog.size() && !indikator; j++)
153         if (iste(iviceBaziranog.get(j), iviceDuplikati.get(i)))
154             indikator=true;
155     /*dodajemo i-tu ako je nije bilo medju j-ovima, tj. ako indikator nije promenjen*/
156     if (!indikator)
157         iviceBaziranog.add(iviceDuplikati.get(i));
158 }
159 }
160
161 /*mogu biti iste do na permutaciju*/
162 protected boolean iste(ArrayList<ArrayList<String>>
163     prva,ArrayList<ArrayList<String>> druga){
164     if (prva.size()!=druga.size())
165         return false;
166     else{
167         /*uporediti jednu po jednu - bazirane su razlicite ako je bar jedan par
168             odgovarajucih razlicit*/
169         for (int i = 0; i < prva.size(); i++)
170             if(razliciteListeStringova(prva.get(i),druga.get(i)))
171                 return false;
172         return true;
173     }
174 }
175
176 protected boolean razliciteListeStringova(ArrayList<String>
177     prva,ArrayList<String> druga) {
178     /*liste su razlicite ako su razlicite kao skupovi*/
179     HashSet<String> prvi=new HashSet<String>(prva);
180     HashSet<String> drugi=new HashSet<String>(druga);
181     return (!prvi.equals(drugi));

```

```

    }
180
protected void postaviDvaStraneBaziranog(){
182     //iz svake ivice izbaciti jedan element i ukloniti duplikate
    ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>> dvaStraneSaDuplikatima=new
        ArrayList<>();
184
    for (int i = 0; i < iviceBaziranog.size(); i++) {
186         /*i-ta ivica*/
        for (int j = 0; j < iviceBaziranog.get(i).size(); j++) {
188             /*izbacujemo j-ti element*/
            ArrayList<ArrayList<String>> nova=new ArrayList<>();
190             for (int k = 0; k<iviceBaziranog.get(i).size(); k++)
                if (j!=k)
192                 nova.add(iviceBaziranog.get(i).get(k));
            dvaStraneSaDuplikatima.add(nova);
194         }
        }
196     dvaStraneBaziranog.add(dvaStraneSaDuplikatima.get(0));
    for (int i = 1; i < dvaStraneSaDuplikatima.size(); i++) {
198         boolean indikator=false;
        for (int j = 0; j < dvaStraneBaziranog.size() && !indikator; j++)
200             if (iste(dvaStraneBaziranog.get(j), dvaStraneSaDuplikatima.get(i)))
                indikator=true;
202         /*dodajemo i-tu ako je nije bilo medju j-ovima, tj.ako indikator nije promenjen*/
        if (!indikator)
204             dvaStraneBaziranog.add(dvaStraneSaDuplikatima.get(i));
        }
206     }

208     protected void postaviBrojaceTemena2StranaBazirnog(){
        for (int i = 0; i < dvaStraneBaziranog.size(); i++) {
210             int brojac=0;
            for (int j = 0; j < temenaBaziranog.size(); j++)
212                 if (podskupBazirane(dvaStraneBaziranog.get(i),temenaBaziranog.get(j)))
                    brojac++;
214             brojTemena2Dstrana.add(brojac);
        }
216     }

218     /*ako je strana podskup konstrukcije, onda sadri teme*/
    public boolean podskupBazirane(ArrayList<ArrayList<String>> stranaBazirana,
        ArrayList<ArrayList<String>> konstrukcijBazirana ){
220         if ((stranaBazirana.size()+2)!=konstrukcijBazirana.size())
            return false;
222         for (int i = 0; i < stranaBazirana.size(); i++)
            if (!konstrukcijBazirana.contains(stranaBazirana.get(i)))
224                 return false;
        return true;
226     }
}

1 import java.util.ArrayList;

```

```

3 public class Permutoedar extends Politop{
  //maksimalni 0-ugnjezdjeni skupovi
5   protected static ArrayList<ArrayList<String>> konstrukcije(String ulaz){
      ArrayList<ArrayList<String>> listaSvih=new ArrayList<ArrayList<String>>();
7       int brojSlova=ulaz.length();
      ArrayList<String> tekucaKonstrukcija=new ArrayList<>();
9
11      if (brojSlova==1){
          tekucaKonstrukcija.add(ulaz);
          listaSvih.add(tekucaKonstrukcija);
13      }
      else{
15          for (int i = 0; i < brojSlova; i++) {
              ArrayList<ArrayList<String>> rekurzija=konstrukcije(skloniKarakter(ulaz,
                  i));
17              for (int j = 0; j < rekurzija.size(); j++)
                  rekurzija.get(j).add(ulaz);
19              for (int j = 0; j < rekurzija.size(); j++)
                  listaSvih.add(rekurzija.get(j));
21          }
      }
23      return listaSvih;
  }
25
26   public Permutoedar(int n, String slova) {
27       super(n,slova);
      super.konstrukcije=konstrukcije(skloniKarakter(rec, 0));
29       for (int i = 1; i < rec.length(); i++)
          super.konstrukcije.addAll(konstrukcije(skloniKarakter(rec, i)));
      postaviFesete();
31   }
33
34   public Permutoedar(int n, String slova,int ind) {
      // TODO Auto-generated constructor stub
35       super(n,slova);
      super.konstrukcije=konstrukcije(skloniKarakter(rec, 0));
37       for (int i = 1; i < rec.length(); i++)
          super.konstrukcije.addAll(konstrukcije(skloniKarakter(rec, i)));
      postaviFesete();
39   }
  }
}

import java.util.ArrayList;
2
public class AsociedarBaziranNaPerm extends Permutoedar{
4   public AsociedarBaziranNaPerm(int n, String slova) {
      // TODO Auto-generated constructor stub
6       super(n, slova);
      rasparcaj();
8       postaviIviceBaziranog(0);
      postaviDvaStraneBaziranog();
10      postaviBrojaceTemena2StranaBazirnog();

```

```

    }
12
public AsociedarBaziranNaPerm(int n, String slova,int ind) {
14     // TODO Auto-generated constructor stub
    super(n, slova,ind);
16 }

18 protected void rasparcaj() {
    // TODO Auto-generated method stub---samo jedno teme
20     ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>>
        odJednogTemena=rasparcajKonstrukciju(konstrukcije.get(0));
    temenaBaziranog.addAll(odJednogTemena);
22     brojBaziranihKonstrukcijaJednogGraficica=odJednogTemena.size();
    }

24
public static ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>>
    rasparcajKonstrukciju(ArrayList<String> lista) {
26     // TODO Auto-generated method stub
    //rasparcavanje prema stazi koja odgovara asociedru
28     ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>> sveOdJedne=new ArrayList<>();
    int k=lista.size();
30     if (k==1){ //jedan string, npr. { {30} } i to je jedna jedina
        ArrayList<ArrayList<String>> udebljana=new ArrayList<>();
32         udebljana.add(lista);
        sveOdJedne.add(udebljana);
34     }
    else if(k==2){ //dva stringa i uvek su susedna
36         // a ab { {15},{15,30} }
        // b ab { {30},{15,30} }
38         ArrayList<String> najveci=new ArrayList<>();
        najveci.addAll(lista);
40         ArrayList<String> lista1=new ArrayList<>();
        ArrayList<String> lista2=new ArrayList<>();
42         lista1.add(lista.get(0));
        lista2.add(lista.get(1));
44         ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>>
            rekurzija1=rasparcajKonstrukciju(lista1);
        ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>>
            rekurzija2=rasparcajKonstrukciju(lista2);
46         rekurzija1.get(0).add(najveci); //sigurni smo da je samo jedna
        rekurzija2.get(0).add(najveci); //sigurni smo da je samo jedna
48         sveOdJedne.addAll(rekurzija1);
        sveOdJedne.addAll(rekurzija2);
50     }
    else{ //barem 3 stringa i briramo koji izbacujemo
52         ArrayList<String> najveci=new ArrayList<>();
        najveci.addAll(lista);
54         for (int i = 0; i < k; i++) {
            if(i==0 || i==(k-1)){
56                 //izbacujemo prvi ili poslednji-ostaje povezan
                //kreiramo kopiju liste bez i-tog elementa
58                 ArrayList<String> nova=new ArrayList<>();
                nova.addAll(lista);
            }
        }
    }

```

```

60     nova.remove(i);
        ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>>
            rekurzija=rasparcajKonstrukciju(nova);
62     /*u svaki rezultat dodajemo najveci*/
        int brojeRekurzivnihRezultata=rekurzija.size();
64     for (int j = 0; j < brojeRekurzivnihRezultata; j++)
            rekurzija.get(j).add(najveci);
66     sveOdJedne.addAll(rekurzija);
    }
68     else{ //izbacujemo neki iz sredine-postaje nepovezan
        ArrayList<String> lista1=new ArrayList<>();
70     ArrayList<String> lista2=new ArrayList<>();
        for (int j = 0; j < i; j++)
72     lista1.add(lista.get(j));
        for (int j = i+1; j < lista.size(); j++)
74     lista2.add(lista.get(j));
        ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>>
            rekurzija1=rasparcajKonstrukciju(lista1);
76     ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>>
            rekurzija2=rasparcajKonstrukciju(lista2);
        /*ukrstanje dve liste*/
78     for (int j = 0; j < rekurzija1.size(); j++) {
            for (int j2 = 0; j2 < rekurzija2.size(); j2++) {
80     ArrayList<ArrayList<String>> nova=new ArrayList<>();
                nova.addAll(rekurzija1.get(j));
82     nova.addAll(rekurzija2.get(j2));
                nova.add(najveci);
84     sveOdJedne.add(nova);
            }
86     }
        }
88     }
    }
90     return sveOdJedne;
}
92 }

```

```

import java.util.ArrayList;
2
public class AsociedarBaziranNaPermCeo extends AsociedarBaziranNaPerm{
4     public AsociedarBaziranNaPermCeo(int n, String slova) {
        // TODO Auto-generated constructor stub
6         super(n, slova);
    }
8
    public AsociedarBaziranNaPermCeo(int n, String slova, int indikNeSve) {
10     // TODO Auto-generated constructor stub
        super(n, slova, indikNeSve);
12     rasparcaj();
        postaviIviceBaziranog(indikNeSve);
14     postaviDvaStraneBaziranog();
        postaviBrojaceTemena2StranaBazirnog();
16     }
}

```

```

18  @Override
protected void rasparcaj() {
20      // TODO Auto-generated method stub
      /*u prvoj iteraciji je potrebno da zapamti koliko je nastalo baziranih
          konstrukcija od jedne staze*/
22      boolean indik=true;
      ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>> baziraneSaDuplikatima=new ArrayList<>();
24      for (int i = 0; i < konstrukcije.size(); i++) {
          ArrayList<ArrayList<ArrayList<String>>> odJednogTemena=new ArrayList<>();
26          odJednogTemena=rasparcajKonstrukciju(konstrukcije.get(i));
          if (indik){
28              brojBaziranihKonstrukcijaJednogGrafcica=odJednogTemena.size();
              System.out.println("Od jednog maksimalnog 0-ugnjezdjenog skupa nastalo je
                  "+brojBaziranihKonstrukcijaJednogGrafcica+" maksimalnih 1-ugnjezdjenih
                  skupova.");
30              indik=false;
          }
32          baziraneSaDuplikatima.addAll(odJednogTemena);
      }
34      //viskovi
      temenaBaziranog.add(baziraneSaDuplikatima.get(0));
36      for (int i = 1; i < baziraneSaDuplikatima.size(); i++) {
          boolean indikator=false;
38          for (int j = 0; j < temenaBaziranog.size() && !indikator; j++)
              if (iste(temenaBaziranog.get(j), baziraneSaDuplikatima.get(i)))
40                  indikator=true;
          //dodajemo i-tu ako je nije bilo medju j-ovima, tj.ako indikator nije promenjen
42          if (!indikator)
              temenaBaziranog.add(baziraneSaDuplikatima.get(i));
44      }
46 }

```

```

import java.util.ArrayList;
2 import java.util.Scanner;

4 public class Mejn {
      //ucitavanje dimenzije politopa sa standardnog ulaza
6      private static int ucitajDimenzijuPermutoedra(){
          System.out.println("Unesite dimenziju permutoasociedra:");
8          Scanner ulaz=new Scanner(System.in);
          int n=ulaz.nextInt();
10         ulaz.close();
          return n;
12     }

14     //kreiranje azbuke od n+1 slova
      private static String inicijalizacijaSlova(int n){
16         char[] niz=new char[n];
          for (int i = 0; i < n; i++) {
18             niz[i]=(char)(97+i);
          }

```

```

20     String rec=new String(niz);
        return rec;
22     }

24     public static void testirajPermutoedar(){
        int n=ucitajDimenzijuPermutoedra();
26     String rec=inicijalizacijaSlova(n+1);
        Permutoedar p=new Permutoedar(n,rec);
28     System.out.println("0-ugnjezdjeni skupovi:");
        p.ispisiSveKonstrukte(p.konstrukcije);
30     p.ispisiSveFesete();
        }

32     public static void main(String[] args) {
34     int n=ucitajDimenzijuPermutoedra();
        String rec=inicijalizacijaSlova(n+1);
36     //testirajPermutoedar();
        AsociedarBaziranNaPermCeo ceo=new AsociedarBaziranNaPermCeo(n, rec,0);
38     System.out.println("Ukupno maksimalnih 0-ugnjezdjenih skupova:
            "+ceo.konstrukcije.size()+".");
        System.out.println("Maksimalni 1-ugnjezdjeni skupovi (0-strane):");
40     ceo.ispisiSveBazKons(ceo.temenaBaziranog);
        System.out.println();
42     System.out.println("2-strane izvedene iz jednog maksimalnog 0-ugnjezdjenog
            skupa i broj temena svake od njih:");
        ceo.ispisiSveBazKons(ceo.dvaStraneBaziranog);
44     //System.out.println("Broj temena ovih 2-strana:");
        for (int i = 0; i < ceo.brojTemena2Dstrana.size(); i++)
46         System.out.println((i+1)+". strana: "+ceo.brojTemena2Dstrana.get(i)+"
            temena.");
        }
48 }

```

Unesite dimenziju permutoasociedra:

4

Od jednog maksimalnog 0-ugnjezdjenog skupa nastalo je 14 maksimalnih 1-ugnjezdjenih skupova.

Ukupno maksimalnih 0-ugnjezdjenih skupova: 120.

Maksimalni 1-ugnjezdjeni skupovi (0-strane):

1. { {c,d,e}, {c,d,e},{b,c,d,e}, {d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}, {e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e} }
2. { {b,c,d,e}, {c,d,e},{b,c,d,e}, {d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}, {e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e} }
3. { {d,e}, {b,c,d,e}, {d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}, {e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e} }
4. { {d,e}, {d,e},{c,d,e}, {d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}, {e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e} }
5. { {c,d,e}, {d,e},{c,d,e}, {d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}, {e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e} }
- ⋮
119. { {e}, {b,c,d,e}, {b,d,e},{b,c,d,e}, {e},{b,e},{b,d,e},{b,c,d,e} }
120. { {e}, {e},{b,e}, {b,c,d,e}, {e},{b,e},{b,d,e},{b,c,d,e} }
- ⋮

1679. { {{a}}, {{a},{a,b}}, {{a},{a,b},{a,b,c}}, {{a},{a,b},{a,b,c},{a,b,c,d}} }
1680. { {{a,b}}, {{a},{a,b}}, {{a},{a,b},{a,b,c}},
 {{a},{a,b},{a,b,c},{a,b,c,d}} }

2-strane izvedene iz jednog maksimalnog 0-ugnjezdjenog skupa i broj temena svake od njih:

1. { {{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 5
2. { {{c,d,e},{b,c,d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 4
3. { {{c,d,e},{b,c,d,e}}, {{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 4
4. { {{c,d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 5
5. { {{c,d,e}}, {{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 4
6. { {{c,d,e}}, {{c,d,e},{b,c,d,e}} } 12
7. { {{b,c,d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 5
8. { {{b,c,d,e}}, {{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 4
9. { {{b,c,d,e}}, {{c,d,e},{b,c,d,e}} } 12
10. { {{d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 5
11. { {{d,e}}, {{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 4
12. { {{d,e}}, {{b,c,d,e}} } 8
13. { {{d,e},{c,d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 4
14. { {{d,e},{c,d,e}}, {{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 4
15. { {{d,e}}, {{d,e},{c,d,e}} } 8
16. { {{c,d,e}}, {{d,e},{c,d,e}} } 8
17. { {{e}}, {{e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 5
18. { {{e}}, {{c,d,e},{b,c,d,e}} } 4
19. { {{e}}, {{c,d,e}} } 8
20. { {{e}}, {{b,c,d,e}} } 12
21. { {{e},{d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 4
22. { {{e},{d,e}}, {{b,c,d,e}} } 4
23. { {{e}}, {{e},{d,e}} } 12
24. { {{d,e}}, {{e},{d,e}} } 12
25. { {{e},{d,e},{c,d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e},{b,c,d,e}} } 5
26. { {{d,e},{c,d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e}} } 4
27. { {{d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e}} } 4
28. { {{c,d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e}} } 4
29. { {{e}}, {{e},{d,e},{c,d,e}} } 4
30. { {{e},{d,e}}, {{e},{d,e},{c,d,e}} } 4

У складу са Одељком 4.2 и Одељком 4.4, следећи програм израчунава и исписује хроматски број n -асоциедра и оцене хроматског броја n -циклоедра за произвољно $n \geq 3$. Уједно показује да Теорема 4.4.3 даје бољу горњу оцену од оне коју даје Теорема 4.4.2.

Програм садржи само главну класу, па се једноставно може превести на неки базични процедурални програмски језик (C, Pascal, Fortran и сл.). Дакле, Јава је у овом случају изабрана због удобности, а не њених објектно-орјентисаних карактеристика.

```
import java.util.ArrayList;
2
public class Hromatika {
4     public static void main(String[] args) {
        //niz hromatskih brojeva asociedara
6         ArrayList<Integer> asociedri=new ArrayList<>();
        asociedri.add(1);
8         asociedri.add(1);
    }
```



```

asociedri.add(3);
10 //gornje granice hromatskih brojeva cikloedra
ArrayList<Integer> cikloedri=new ArrayList<>();
12 cikloedri.add(1);
cikloedri.add(1);
14 cikloedri.add(2);

16 for (int n = 3; n <= 10000; n++) { // n - dimenzija politopa
    int hr_br_asoc=0; //hromatski broj tekuceg asociedra
18 int granica_ciklo=0; //gornja ocena hr.broja tekuceg cikloedra
    int k=(int)Math.floorDiv(n+1,2);
20 //nizovi A_i i B_i tekuceg asociedra i tekuceg cikloedra
    ArrayList<Integer> A_asoc=new ArrayList<>();
22 ArrayList<Integer> B_asoc=new ArrayList<>();
    ArrayList<Integer> A_ciklo=new ArrayList<>();
24 ArrayList<Integer> B_ciklo=new ArrayList<>();
    A_asoc.add(0); //inicijalizacija nizova
26 A_asoc.add(0);
    B_asoc.add(0);
28 B_asoc.add(0);
    B_asoc.add(0);
30 A_ciklo.add(0);
    A_ciklo.add(0);
32 B_ciklo.add(0);
    B_ciklo.add(0);
34 B_ciklo.add(0);

36 for (int i = 2; i <= k; i++) {
    int novi_A_asoc=(int)Math.ceil((n+3+B_asoc.get(i))*1.0/i);
38 A_asoc.add(novi_A_asoc);
    int novi_B_asoc=n+3+(B_asoc.get(i))-i*(A_asoc.get(i));
40 B_asoc.add(novi_B_asoc);
    int novi_A_ciklo=(int)Math.ceil((n+1+B_ciklo.get(i))*1.0/i);
42 A_ciklo.add(novi_A_ciklo);
    int novi_B_ciklo=n+1+(B_ciklo.get(i))-i*(A_ciklo.get(i));
44 B_ciklo.add(novi_B_ciklo);
}

46 if (n==(2*k)){
48     int kraj=(int)Math.ceil(((n+3+(B_asoc.get(k+1)))*1.0)/(k+1));
    A_asoc.add(kraj);
50     A_ciklo.add(1);
}
52 else{
    A_asoc.add(1);
54     A_ciklo.add(0);
}

56 for (int i = 2; i < A_asoc.size(); i++) {
58     hr_br_asoc=hr_br_asoc+A_asoc.get(i);
    granica_ciklo=granica_ciklo+A_ciklo.get(i)+1;
60 }
asociedri.add(hr_br_asoc);

```

```

62     cikloedri.add(granica_ciklo);
64     //ispis rezultata
66     System.out.println(">> Hromatski broj "+n+"-asociedra = "+hr_br_asoc+".");
66     System.out.println("Prva teorema: "+(asociedri.get(n-1)+1)+"<= hromatski broj
        "+n+"-cikloedra <= "+(asociedri.get(n-1)+n)+".");
        System.out.println("Druga teorema: hromatski broj "+n+"-cikloedra <=
        "+granica_ciklo);
68     }
    }
70 }

```

```

> Hromatski broj 3-asociedra = 4.
  Teorema 4.4.2:  $4 \leq$  hromatski broj 3-cikloedra  $\leq$  6.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 3-cikloedra  $\leq$  4.
> Hromatski broj 4-asociedra = 6.
  Teorema 4.4.2:  $5 \leq$  hromatski broj 4-cikloedra  $\leq$  8.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 4-cikloedra  $\leq$  6.
> Hromatski broj 5-asociedra = 8.
  Teorema 4.4.2:  $7 \leq$  hromatski broj 5-cikloedra  $\leq$  11.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 5-cikloedra  $\leq$  8.
> Hromatski broj 6-asociedra = 10.
  Teorema 4.4.2:  $9 \leq$  hromatski broj 6-cikloedra  $\leq$  14.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 6-cikloedra  $\leq$  10.
> Hromatski broj 7-asociedra = 12.
  Teorema 4.4.2:  $11 \leq$  hromatski broj 7-cikloedra  $\leq$  17.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 7-cikloedra  $\leq$  13.
> Hromatski broj 8-asociedra = 15.
  Teorema 4.4.2:  $13 \leq$  hromatski broj 8-cikloedra  $\leq$  20.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 8-cikloedra  $\leq$  15.
> Hromatski broj 9-asociedra = 17.
  Teorema 4.4.2:  $16 \leq$  hromatski broj 9-cikloedra  $\leq$  24.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 9-cikloedra  $\leq$  18.
> Hromatski broj 10-asociedra = 20.
  Teorema 4.4.2:  $18 \leq$  hromatski broj 10-cikloedra  $\leq$  27.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 10-cikloedra  $\leq$  21.
  :
> Hromatski broj 100-asociedra = 364.
  Teorema 4.4.2:  $360 \leq$  hromatski broj 10-cikloedra  $\leq$  459.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 10-cikloedra  $\leq$  406.
  :
> Hromatski broj 1000-asociedra = 5815.
  Teorema 4.4.2:  $5809 \leq$  hromatski broj 1000-cikloedra  $\leq$  6808.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 1000-cikloedra  $\leq$  6302.
  :
> Hromatski broj 5000-asociedra = 37035.
  Teorema 4.4.2:  $37028 \leq$  hromatski broj 5000-cikloedra  $\leq$  42027.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 5000-cikloedra  $\leq$  39520.
  :
> Hromatski broj 10000-asociedra = 80975.
  Teorema 4.4.2:  $80967 \leq$  hromatski broj 10000-cikloedra  $\leq$  90966.
  Teorema 4.4.3: hromatski broj 10000-cikloedra  $\leq$  85958.

```

Литература

- [1] K. ARNOLD, J. GOSLING and D. HOLMES, *The Java programming language*, Addison Wesley Professional, 2005
- [2] Б. Баралић, **Топологија и комбинаторика квазиторусних многострукости и К степена**, Глава 3: Политопи, Докторска теза, Универзитет у Београду, 2013
- [3] Ђ. BARALIĆ, J. IVANOVIĆ and Z. PETRIĆ, *A simple permutoassociahedron*, **Discrete Mathematics**, vol. 342 num 12, (2019) 111591
- [4] R. BLIND and P. MANI-LEVITSKA, *On puzzles and polytope isomorphisms*, **Aequationes mathematicae**, vol. 34 (1987) pp. 287-297
- [5] R. BOTT and C. TAUBES, *On the self-linking of knots*, **Journal of Mathematical Physics**, vol. 35 num. 10 (1994) pp. 5247-5287
- [6] G.E. BREDON, **Topology and Geometry, Chapter 4: Homology theory**, Springer-Verlag, 1993
- [7] V.M. BUCHSTABER, **Lectures on Toric Topology**, Lecture III, *Toric Topology Workshop KAIST*, Information Center for Mathematical Series, vol. 10 num. 1 (2008) pp. 34-41
- [8] V.M. BUCHSTABER and T.E. PANOV, **Toric Topology**, American Mathematical Society, 2015
- [9] M. CARR and S.L. DEVADOSS, *Coxeter complexes and graph-associahedra*, **Topology and its Applications**, vol. 153 (2006) pp. 2155-2168
- [10] H.S.M. COXETER, **Regular Polytopes**, Dover Publications, Inc., New York, 1948 (updated second edition, 1973)
- [11] P.L. CURRIEN, J. IVANOVIĆ and J. OBRADOVIĆ, *Syntactic aspects of hypergraph polytopes*, **Journal of Homotopy and Related Structures**, vol. 14.1 (2019) pp. 235-279
- [12] M.W. DAVIS and T. JANUSZKIWICZ, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, **Duke Math. J.** 62, vol. 2 (1991) pp. 417-451
- [13] C. DE CONCINI and C. PROCESI, *Wonderful models of subspace arrangements*, **Selecta Mathematica** (N.S.), vol. 1 (1995) pp. 459-494
- [14] K. DOŠEN and Z. PETRIĆ, **Proof-Theoretical Coherence**, KCL Publications, London, 2004
- [15] ———, *Hypergraph polytopes*, **Topology and its Applications**, vol. 158 (2011) pp. 1405-1444

- [16] E.M. FEICHTNER and D.N. KOZLOV, *Incidence combinatorics of resolutions*, ***Selecta Mathematica*** (N.S.), vol. 10 (2004) pp. 37-60
- [17] E.M. FEICHTNER and B. STURMFELS, *Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans*, ***Portugaliae Mathematica*** (N.S.), vol. 62 (2005) pp. 437-468
- [18] K. FUKUDA, cddlib package for polymake software, Version 0.93d (2005), http://www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/cdd_home/cdd.html
- [19] W. FULTON and R. MACPHERSON, *A compactification of configuration spaces*, ***Annals of Mathematics***, Second Series, vol. 139 (1994) pp. 183-225
- [20] G. GAIFFI, *Models for real subspace arrangements and stratified manifolds*, ***International Mathematics Research Notices***, vol. 12 (2003) pp. 627-656
- [21] ———, *Real structures of models of arrangements*, ***International Mathematics Research Notices***, vol. 64 (2004) pp. 3439-3467
- [22] E. GAWRILOW and M. JOSWIG, *polymake: a framework for analyzing convex polytopes*, ***Polytopes—combinatorics and computation, DMV Seminar***, vol. 29 Birkhäuser, Basel (2000) pp. 43-73
- [23] ———, *polymake: an approach to modular software design in computational geometry*, ***International Mathematics Research Notices***, Proceedings of the 17th Annual Symposium on Computational Geometry, ACM, Medford, MA (2001) pp. 222-231
- [24] B. GRÜNBAUM, *Convex polytopes*, *International Mathematics Research Notices*, (the second edition, 1967)
- [25] ———, *Geometry strikes again*, ***Mathematics magazine***, vol. 58 (1985) pp. 12-17
- [26] A. HATCHER, ***Algebraic Topology***, Cambridge University Press, 2000
- [27] J. IVANOVIĆ, *Geometrical realisations of the simple permutaoassociahedron by Minkowski sums*, ***Applicable Analysis and Discrete Mathematics***, vol. 14, num 1, (2020) pp. 55-93
- [28] M. JOSWIG, *Projectivities in Simplicial Complexes and Colorings of Simple Polytopes*, ***Mathematische Zeitschrift***, 240(2) (2002) pp. 243-259
- [29] G. KALAI, *A simple way to tell a simple polytope from its graph*, ***Journal of Combinatorial Theory, Series A***, vol. 49 (1988) pp. 381-383
- [30] M. KAPRANOV, *The permutaoassociahedron, Mac Lane's coherence theorem and asymptotic zones for the KZ equation*, ***Journal of Pure and Applied Algebra***, vol. 85 (1993) pp. 119-142
- [31] J.-L. LODAY et al. (Eds), ***Operads: Proceedings of Renaissance Conferences***, Contemporary Mathematics vol. 202, American Mathematical Society, Providence, 1997
- [32] J.-L. LODAY, *Realisation of the Stasheff polytope*, ***Archiv der Mathematik (Basel)***, no. 3 (2004), 267278
- [33] S. MAC LANE, *Natural associativity and commutativity*, ***Rice University Studies, Papers in Mathematics***, vol. 49 (1963) pp. 28-46

- [34] ———, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlin, 1971 (expanded second edition, 1998)
- [35] R. MCNEEL & ASSOCIATES, Rhinoceros software, Version 5 (2018)
<https://www.rhino3d.com/>
- [36] Z. PETRIĆ, *On stretching the interval simplex-permutohedron*, *Journal of Algebraic Combinatorics*, vol. 39 (2014) pp. 99-125
- [37] K. POLTHIER, K. HILDEBRANDT, E. PREUß and U. REITEBUCH *JavaView - interactive 3D geometry and visualization*, ver. 3.90 (1999-2005) <http://www.javaview.de/>
- [38] A. POSTNIKOV, V. REINER and L. WILLIAMS, *Faces of generalized permutohedra*, *Documenta Mathematica*, vol. 13 (2008) pp. 207-273
- [39] A. POSTNIKOV, *Permutohedra, associahedra, and beyond*, *International Mathematics Research Notices*, vol. 2009 (2009) pp. 1026-1106
- [40] V. REINER and G. ZIEGLER, *Coxeter-Associahedra*, *Mathematika*, vol. 41 (1994) pp. 364-393
- [41] D. RUTTEN, Grasshopper 3D software, Version 0.9.76.0 for Rhino 5 (2018)
<https://www.grasshopper3d.com/>
- [42] L. SCHLÄFLI, *Theorie der vielfachen Kontinuität*, Georg & Co., Zürich, Basel, 1901 (republished by Cornell University Library historical math monographs, 2010)
- [43] R.P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics, Volume I, Chapter 3*, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, 1986
- [44] J.D. STASHEFF, *Homotopy associativity of H-spaces, I, II*, *Transactions of the American Mathematical Society* vol. 108 (1963) pp. 275-292, 293-312.
- [45] ———, *From operads to physically inspired theories* (Appendix B co-authored with S. Shnider), in [31], pp. 53-81
- [46] D. TAMARI, *Monoïdes préordonnés et chaînes de Malcev*, Thèse, Université de Paris, MR 0051833, 1951
- [47] R.R. THOMAS, *Lectures in Geometric Combinatorics, Chapter 9: The Permutahedron*, Student Mathematical Library: IAS/Park City Mathematical Subseries, 2006
- [48] R. VOREADOU, *Coherence and Non-Commutative Diagrams in Closed Categories*, *Memoirs of the American Mathematical Society*, no 182, American Mathematical Society, Providence, 1977
- [49] G.M. ZIEGLER, *Lectures on Polytopes*, Springer, Berlin, 1995 (updated seventh printing of the first edition, 2007)

Биографија

Лични подаци

Име и презиме: Јелена (Слободан) Ивановић

Датум и место рођења: 12.01.1985., Смедерево

Радно место: Архитектонски факултет Универзитета у Београду,
Кабинет за математику, архитектонску геометрију и СААД

Звање: Асистент

Адреса: Булевар краља Александра 73/II, 11000 Београд, Србија

Електронска адреса: jelena.ivanovic@arh.bg.ac.rs

Образовање и признања

Јелена Ивановић завршава Гимназију у Смедереву јуна 2004. године, као носилац неколико Вукових диплома. Током свог основног и средњег образовања активно учествује на такмичењима из математике, физике и хемије на којима осваја бројне награде. Најзначајнија међу њима је друго место на републичком такмичењу из математике 2004. године. Исте године, уписује основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Рачунарство и информатика. Дипломира са просечном оценом 9.79 фебруара 2010. године чиме стиче звање дипломираног математичара. Октобра исте године на матичном факултету, уписује докторске студије на студијском програму Математика. Две године касније, на пар година зауставља студије, због рођења сина Вукана коме се у потпуности повећује. Докторске студије завршава крајем 2017. године са просечном оценом 10.00. Фебруара 2018. године, Универзитет у Београду одобрава предлог теме њене докторске дисертације под називом *Кохеренција и прости политопи*, под руководством ментора професора Зорана Петрића. Носилац је неколико годишњих признања Математичког факултета најуспешнијим студентима. Добитник је Светосавске повеље за стваралаштво младих града Смедерева, награде која се додељује за најуспешније ученичке и студентске резултате остварене у дужем временском периоду. Стипендиста је Министарства просвете, науке и технолошког развоја за студенте докторских студија, све до избора у звање асистента на Архитектонском факултету Универзитета у Београду.

Запослење

На Архитектонском факултету Универзитета у Београду, ангажована је у настави на предметима: *Математика у архитектури*, *Параметарско моделовање* (основне студије); *Параметарско моделовање 1*, *Параметарско моделовање 2*, *Примењена математика у области конструктивних система* (мастер студије). У оквиру Кабинета за математику, архитектонску геометрију и СААД, за потребе наставе и науке, реализовала је више значајних софтверских апликација. Модератор је

електронске платформе коју Архитектонски факултет користи за рад и наставу на даљину.

Интересовања

Теорија доказа, Прости политопи, Конвексна геометрија, Дискретна геометрија, Објектно-орјентисано и логичко програмирање, Параметарско моделовање геометријских форми, Примена математичких концепата и генеричких алгоритама у архитектури и урбанизму.

Друштвене активности

Члан је организационог одбора удружења Млади математичар и централне комисије за реализацију такмичења из математике за ученике основних школа, гимназија и средњих стручних школа, у организацији овог удружења. Учествоје у националном пројекту III44006 *Развој нових информационо-комуникационих технологија, коришћењем напредних математичких метода, са применама у медицини, телекомуникацијама, енергетици, заштити националне баштине и образовању*. Члан је Друштва за чисту и примењену логику Републике Србије и Српског друштва за геометрију и графику SUGIG.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Јелена Ивановић

број уписа 2007/2010

Изјављујем

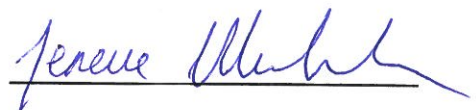
да је докторска дисертација под насловом

Кохеренција и прости политопи

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 7.7.2020. године

Handwritten signature of Jelena Ivanović in blue ink, written over a horizontal line.

Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске
верзије докторског рада**

Име и презиме аутора	Јелена Ивановић
Број уписа	2007/2010
Студијски програм	Математика
Наслов рада	Кохеренција и прости политопи
Ментор	др Зоран Петрић

Потписани Јелена Ивановић

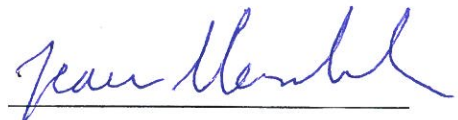
изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 7.7.2020. године



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Кохеренција и прости политопи

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

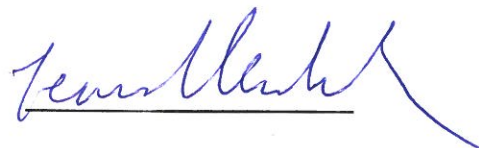
Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 7.7.2020. године



1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.