



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Nebojša Dedović

Delta udarni talasi i metod praćenja talasa

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2013.

Delta udarni talasi i metod praćenja talasa

- doktorska disertacija -

mr Nebojša Dedović

Osnovna osobina nelinearnih hiperboličnih sistema zakona održanja je pojava udarnih talasa. Globalno rešenje takvih sistema mora se tražiti samo u prostoru prekidnih funkcija, a odgovor na pitanje da li takvo rešenje postoji, dala je Glimova teorema (1965) uvođenjem funkcionele nerastuće u vremenu, koja kontrolira ukupnu snagu talasa. Alternativni pristup ovom problemu je konstrukcija entropijski dopustivog aproksimativnog slabog rešenja metodom praćenja talasa, koja omogućava tehnički jednostavnije dokaze u odnosu na Glimovu šemu. Pojava delta udarnih talasa i njihovih interakcija, vezana je za hiperbolične sisteme kod kojih ne postoji klasično rešenje Rimanovog problema, odnosno, kada se rešenje ne može predstaviti preko elementarnih talasa (razređujući talasi, udarni talasi i kontaktni talasi).

U uvodu ove doktorske disertacije predstavljena je jednačina zakona održanja u jednoj prostornoj dimenziji, definisani su Košijevi i Rimanovi problemi i dato je nekoliko primera zakona održanja (skalarna jednačina fuzije, Burgersova nelinearna neviskozna jednačina i Ojlerove jednačine za kompresibilan, neviskozni gas). Pokazano je da se rešenje Rimanovog problema Burgersove jednačine sastoji od elementarnih entropijskih talasa (razređujući i udarni talas) i dati su primeri neentropijskih talasa. U drugoj glavi, date su osnovne osobine nelinearnih hiperboličnih zakona održanja, uvedeni su pojmovi stroge hiperboličnosti i slabog rešenja zakona održanja. Definisani su Rankine-Hugoniot i entropijski uslovi u cilju dobijanja jedinstvenog slabog rešenja. Definisano je opšte rešenje Rimanovog problema za dovoljno male početne uslove koje se sastoji od razređujućih, udarnih i kontaktnih talasa. Uvedene su Rimanove invarijante i ispitan je Rimanov problem za jednačine izentropnog strujanja gasa. U trećoj glavi detaljno je objašnjena Glimova diferencna šema koja daje rešenje Rimanovog problema zakona održanja kada je totalna varijacija početnog uslova dovoljno mala. Definisani su prilazeći talasi i ocenjena je snaga talasa nastalih nakon interakcije dva talasa. Kao alternativni pristup rešavanju Rimanovog problema zakona održanja, predstavljen je metod praćenja talasa u četvrtoj glavi. Pokazano je da se ovom metodom, za dovoljno male početne uslove, dobija stabilno i jedinstveno rešenje koje u svakom vremenu ima ograničenu totalnu varijaciju. U petoj glavi, posmatrana je jednačina protoka izentropnog gasa u Lagranžovim koordinatama. Uz pretpostavku da je početni uslov ograničen i da ima ograničenu totalnu varijaciju, pokazano je da Košijev problem ima jedinstveno slabo rešenje ako je totalna varijacija početnog uslova pomnožena sa $0 < \varepsilon \ll 1$ dovoljno mala. Slabo rešenje dobijeno je metodom praćenja talasa. Detaljno su dokazana i sva tvrđenja i ti dokazi predstavljaju prvi originalni deo ove doktorske disertacije. Fenomen formiranja delta udarnih talasa, kada se rešenje Rimanovog problema ne može predstaviti preko elementarnih talasa, predstavljen je u glavi šest. Takođe, ispitana je interakcija dva delta talasa sa posebnim osvrtom na model jednačina gasne dinamike bez pritiska. Delta talasi posmatrani su kao specijalna vrsta *shadow* talasa. U glavi sedam, pokazano je da za proizvoljno velike početne uslove, rešenje Rimanovog problema jednodimenzionalnog Ojlerovog zakona održanja gasne dinamike postoji, da je jedinstveno i entropijski dopustivo. Data je numerička verifikacija interakcije dva delta talasa korišćenjem metode

praćenja talasa. Na kraju disertacije nalazi se pregled literature i indeks pojmova.



Zahvaljujem se dr Marku Nedeljkovu, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na dugogodišnjoj saradnji i pomoći prilikom izrade disertacije.

Zahvaljujem se dr Nataši Krejić, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na primedbama i sugestijama koje su bile od velike koristi.

Zahvaljujem se dr Stevanu Pilipoviću, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na interesovanju i korektnom odnosu.

Zahvaljujem se dr Srboljubu Simiću, redovnom profesoru Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, na detaljnom čitanju rukopisa disertacije što je uticalo na njeno konačno formiranje.

Konačno, želeo bih da se zahvalim i svima koji su sve vreme bili uz mene i pružali mi podršku tokom izrade disertacije.

Novi Sad, 24. oktobar 2013. godine

Nebojša Dedović

Predgovor	3
1 Uvod	7
1.1 Oznake	7
1.2 Pregled definicija i teorema	8
1.2.1 Teorema o implicitnim funkcijama	9
1.2.2 Hellyjeva teorema	9
1.3 Zakon održanja, Košijev i Rimanov problem	11
2 Hiperbolični sistemi zakona održanja	17
2.1 Nelinearni hiperbolični sistemi	17
2.1.1 Rankine-Hugoniot (RH) uslov	19
2.2 Entropijski uslovi	21
2.2.1 Metod iščezavajuće viskoznosti	21
2.2.2 Entropijske funkcije	21
2.2.3 Laksovi entropijski uslovi	23
2.3 Razređujući i udarni talasi	23
2.4 Rimanov problem	25
2.4.1 Opšte rešenje Rimanovog problema	27
2.5 Rimanove invarijante	28
2.6 Izentropno strujanje gasa	39
3 Glimova diferencna šema	45
3.1 Konstrukcija šeme	45
3.2 Ocena interakcije talasa	49
3.3 Glimova funkcionala	55
3.4 Ograničenost totalne varijacije i supremuma	59
4 Metod praćenja talasa - WFT metod	63
4.1 WFT aproksimacije	63
4.2 Algoritam praćenja talasa - WFT algoritam	67
4.2.1 Tačno Rimanovo rešenje	69
4.2.2 Aproksimativno Rimanovo rešenje	70
4.3 Globalna egzistencija WFT aproksimacija	72
4.4 Postojanje rešenja Rimanovog problema	100

5	Jednačine izentropnog strujanja gasa i proizvoljno veliki početni uslovi	105
5.1	Krive udarnih i razređujućih talasa	105
5.2	Ocena udarnih talasa	114
5.3	Interakcije talasa	121
5.4	Konvergencija aproksimativnog rešenja	147
5.5	WFT šema i dekompozicija po putanji	159
5.6	Ocena ukupnog broja iteracija	172
5.7	Ocena snage nefizičkih talasa	175
6	Delta udarni talasi kao aproksimativno rešenje za PGD model	179
6.1	Osnovne formule	179
6.2	Rimanov problem	183
6.2.1	Entropijski uslovi	185
6.2.2	Sistemi linearni po jednoj nepoznatoj	186
6.3	Entropijsko rešenje Rimanovog problema za PGD model	186
6.4	Konstantni SDW	188
6.4.1	Primena na PGD model	190
6.5	Težinski SDW	191
6.5.1	Primena interakcije dva SDW na PGD model	191
7	SDW rešenje Rimanovog problema i WFT metod	199
7.1	Ocena lokalnih interakcija talasa	200
7.2	Globalna ocena interakcije talasa	207
7.2.1	Dekompozicija po putanji i ukupna snaga talasa	208
7.3	Numerički primeri	211
7.3.1	Slučaj A	212
7.3.2	Slučaj B	216
	Literatura	224

1.1 Oznake

\mathbb{Z} - skup celih brojeva

\mathbb{R} - skup realnih brojeva

$\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ - skup pozitivnih realnih brojeva

\mathbb{R}^n - skup vektora x sa n komponentata, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

Ω - otvoren podskup skupa \mathbb{R}^n

Za $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uvodimo sledeće oznake:

- $\nabla h(x) = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial h(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right)^T$
- $Dh(x) = \left(\frac{\partial h(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial h(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial h(x)}{\partial x_n} \right)$
- $D^2h(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$

Za $p, q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p(x) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x))^T$, $q(x) = (q_1(x), q_2(x), \dots, q_m(x))^T$ uvodimo sledeće oznake:

- $\frac{\partial p(x)}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial p_1(x)}{\partial x_j}, \frac{\partial p_2(x)}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial p_m(x)}{\partial x_j} \right)^T$, $j = 1, 2, \dots, n$,
- $\frac{\partial^2 p(x)}{\partial x_j \partial x_k} = \left(\frac{\partial^2 p_1(x)}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial^2 p_2(x)}{\partial x_j \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 p_m(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right)^T$, $j, k = 1, 2, \dots, n$,
- $p \cdot q = \sum_{i=1}^m p_i(x) q_i(x) =: p^T \cdot q$,
- $\frac{\partial(p \cdot q)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i(x)}{\partial x_j} q_i(x) + \sum_{i=1}^m p_i(x) \frac{\partial q_i(x)}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\bullet \quad Dp(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial p_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial p_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial p_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial p_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial p_m(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

1.2 Pregled definicija i teorema

Definicija 1.2.1 Sa $C^k(\Omega)$ označavamo prostor funkcija nad otvorenim skupom Ω koje imaju neprekidne i uniformno ograničene izvode do reda k .

Definicija 1.2.2 Sa $C^\infty(\Omega)$ označavamo prostor glatkih funkcija nad otvorenim skupom Ω čiji su svi izvodi neprekidni i uniformno ograničeni.

Definicija 1.2.3 Sa $C_0^k(\Omega)$ označavamo prostor funkcija iz $C^k(\Omega)$ koje imaju kompaktan nosač u Ω .

Definicija 1.2.4 Sa $C_0^\infty(\Omega)$ označavamo prostor funkcija iz $C^\infty(\Omega)$ koje imaju kompaktan nosač u Ω .

Definicija 1.2.5 $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ je prostor merljivih funkcija nad otvorenim skupom $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ za koji je za svako $p \in [1, \infty)$, $\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty$. Norma u prostoru $L^p(\Omega)$ je $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$. Prostor $L^1(\Omega)$ nazivamo prostor integrabilnih funkcija.

Definicija 1.2.6 $L^\infty(\Omega)$ je skup merljivih funkcija f nad otvorenim skupom $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ za koje važi $|f(x)| < \infty$ skoro svuda u Ω . Norma je $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C \in \mathbb{R}_+; |f(x)| \leq C \text{ skoro svuda u } \Omega\}$.

Definicija 1.2.7 $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ je prostor merljivih funkcija f nad otvorenim skupom $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ za koje važi da za svako $p \in [1, \infty)$ i za svaki ograničeni interval $I \subset \Omega$, sledi $f \in L^p(\Omega)$. Prostor $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ nazivamo prostor lokalno integrabilnih funkcija. $L_{\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ je prostor lokalno integrabilnih funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.2.8 $L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$ je prostor merljivih funkcija f nad otvorenim skupom $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ za koje važi da za svaki ograničeni interval $I \subset \Omega$, $|f(x)| < \infty$ skoro svuda u I .

Definicija 1.2.9 $\mathcal{D}(\Omega)$ je vektorski prostor svih C^∞ funkcija nad Ω sa kompaktnim nosačem.

Definicija 1.2.10 $\mathcal{D}'(\Omega)$ je prostor svih distribucija. Distribucija je neprekidna linearna funkcionala nad $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definicija 1.2.11 $\mathcal{D}_{L^\infty}(\mathbb{R})$ je potprostor $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ tako da $\phi \in \mathcal{D}_{L^\infty}$ ako i samo ako je $\partial^\alpha \phi \in L^\infty$ za svako $\alpha \in P^m$, gde je P^m podskup do \mathbb{R}^n čiji elementi imaju koordinate cele nenegativne brojeve. Prostor $\mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbb{R})$ je dual prostora $\mathcal{D}_{L^\infty}(\mathbb{R})$.

Definicija 1.2.12 Glatka vektorska funkcija sa dve ili više promenljivih naziva se glatko vektorsko polje.

Definicija 1.2.13 Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je Lipšic neprekidna ako postoji konstanta $K \geq 0$ tako da važi

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

za svako $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.14 Neka je $z : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ neprekidno preslikavanje, takvo da je i $\partial_y z : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ neprekidno preslikavanje. Neka su $\alpha_1, \alpha_2 : [c, d] \rightarrow [a, b]$ preslikavanja klase \mathcal{C}^1 . Tada je funkcija $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$, definisana sa

$$g(y) = \int_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} z(x, y) dx$$

klase \mathcal{C}^1 na skupu $[c, d]$ i važi

$$\frac{d}{dy}g(y) = \alpha_2'(y)z(\alpha_2(y), y) - \alpha_1'(y)z(\alpha_1(y), y) + \int_{\alpha_1(y)}^{\alpha_2(y)} \frac{\partial}{\partial y} z(x, y) dx.$$

Teorema 1.2.15 (Fubinijeva teorema) Formula

$$\int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dx$$

važi ako je f integrabilna na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

1.2.1 Teorema o implicitnim funkcijama

Neka su $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi. Neka preslikavanje $F : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m$ ima neprekidne izvode do reda $k \geq 1$.

Teorema 1.2.16 Ako za $(\bar{u}, \bar{v}) \in U \times V$ važi $F(\bar{u}, \bar{v}) = 0$ i ako je Jakobijeva matrica $D_v F(\bar{u}, \bar{v})$ regularna, tada postoji okolina \mathcal{N} od \bar{u} i \mathcal{C}^k preslikavanje $f : \mathcal{N} \rightarrow V$ tako da važi

$$f(\bar{u}) = \bar{v}, F(u, f(u)) = 0 \text{ za svako } u \in \mathcal{N}.$$

Ako je k -ti izvod funkcije F Lipsčic neprekidan, tada važi i

$$f^{(k)}(\bar{u}) = \bar{v}, F(u, f^{(k)}(u)) = 0 \text{ za svako } u \in \mathcal{N}.$$

Izvod funkcije f u tački \bar{u} je $m \times n$ Jakobijeva matrica

$$Df(\bar{u}) = -[D_v F(\bar{u}, \bar{v})]^{-1} D_u F(\bar{u}, \bar{v}).$$

Teorema 1.2.17 Neka preslikavanje $G : U \times V \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ima neprekidne izvode do reda $k \geq 1$ i neka je $W : \Omega \rightarrow U \times V$, $W(\omega) = (\bar{u}_\omega, \bar{v}_\omega)$ \mathcal{C}^k preslikavanje takvo da za svako $\omega \in \Omega$ važi $G(\bar{u}_\omega, \bar{v}_\omega; \omega) = 0$. Ako je Jakobijeva matrica $D_v G(\bar{u}_\omega, \bar{v}_\omega; \omega)$ regularna za svako ω koje pripada kompaktnom skupu $K \subset \Omega$, tada postoji $\delta > 0$ i \mathcal{C}^k preslikavanje $\varphi : U \times \Omega \rightarrow V$ tako da važi

$$\varphi(\bar{u}_\omega, \omega) = \bar{v}_\omega, G(u, \varphi(u, \omega); \omega) = 0 \text{ za svako } \omega \in K \text{ za koje važi } |u - \bar{u}_\omega| \leq \delta.$$

Ako je k -ti izvod funkcije G Lipsčic neprekidan, tada važi i

$$\varphi^{(k)}(\bar{u}_\omega, \omega) = \bar{v}_\omega, G(u, \varphi^{(k)}(u, \omega); \omega) = 0 \text{ za svako } \omega \in K \text{ za koje važi } |u - \bar{u}_\omega| \leq \delta.$$

1.2.2 Hellyjeva teorema

Teorema 1.2.18 Posmatrajmo niz funkcija $q_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tako da važi

$$\text{TV}(q_k) \leq C, \quad |q_k(x)| \leq M$$

za svako k, x i za neke konstante C, M . Tada postoji funkcija q i podniz q_{k_η} niza q_k tako da važi

$$\lim_{k_\eta \rightarrow \infty} q_{k_\eta} = q(x) \tag{1.1}$$

i

$$\text{TV}(q) \leq C, \quad |q(x)| \leq M \tag{1.2}$$

za svako $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Korak 1. Neka je za $k \geq 1$

$$U_k(x) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |q_k(x_j) - q_k(x_{j-1})|, x_0 < x_1 < \cdots < x_N = x \right\}$$

totalna varijacija funkcije q_k na $(-\infty, x]$. Uočimo da je svako U_k neopadajuća funkcija koja zadovoljava (na osnovu pretpostavke u teoremi)

$$0 \leq U_k(x) \leq C, \quad |q_k(y) - q_k(x)| \leq U_k(p_2) - U_k(p_1) \quad (1.3)$$

za svako $p_1 \leq x \leq y \leq p_2$.

Korak 2. Koristeći Kantorov dijagonalni proces [4], konstruišemo podniz $U_{k'}$ niza U_k za koji važi

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} U_{k'}(x) = U(x)$$

i koji konvergira za svako $x \in \mathbb{Q}$. Zbog (1.3), funkcija U preslikava \mathbb{Q} u $[0, C]$ i neopadajuća je. Za svako $n \geq 1$, posmatrajmo skup tačaka J_n u kojima U ima skok, odnosno

$$J_n := \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \lim_{y \rightarrow x^+} U(y) - \lim_{y \rightarrow x^-} U(y) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

gde $y \in \mathbb{Q}$. Skup J_n ima najviše Cn tačaka. Naime, jasno je da važi

$$\sum_{x_i} \frac{1}{n} \leq \sum_{x_i} \left(\lim_{y \rightarrow x_i^+} U(y) - \lim_{y \rightarrow x_i^-} U(y) \right) \leq C$$

u svim tačkama x_i gde dolazi do skoka. Sledi

$$[\text{broj tačaka } x_i] \cdot \frac{1}{n} \leq C \Rightarrow [\text{broj tačaka } x_i] \leq Cn.$$

Zbog toga je skup tačaka $x \in \mathbb{R}$, gde su leva i desna granična vrednost različite, a koji ćemo obeležiti sa J , najviše prebrojiv i zato neka je

$$J = \bigcup_{n \geq 1} J_n.$$

Korak 3. Sada biramo podniz q_{k_η} niza q_k , tako da granična vrednost

$$q(x) := \lim_{k_\eta \rightarrow \infty} q_{k_\eta}(x) \quad (1.4)$$

postoji za svako $x \in J \cup \mathbb{Q}$ (tj. x pripada prebrojivom skupu). Sada tvrdimo, da za taj podniz, granična vrednost u (1.4) postoji i za svako $x \in \mathbb{R}$. Naime, neka $x \notin J$. Tada za svako $n \geq 1$, kako $x \notin J_n$, postoje racionalni brojevi $p_1 < x < p_2$ takvi da važi $U(p_2) - U(p_1) = U(p_2) - U(x) + U(x) - U(p_1) < 1/n + 1/n = 2/n$. Koristeći (1.3) i $q_{k_\eta}(p_1) \rightarrow q(p_1)$ (na osnovu (1.4)), dobijamo

$$\begin{aligned} \limsup_{k_\eta \rightarrow \infty} |q_{k_\eta}(x) - q(p_1)| &= \limsup_{k_\eta \rightarrow \infty} |q_{k_\eta}(x) - q_{k_\eta}(p_1)| \leq 2 \limsup_{k_\eta \rightarrow \infty} (U_{k_\eta}(p_2) - U_{k_\eta}(p_1)) \\ &= 2(U(p_2) - U(p_1)) < \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

Kako je n proizvoljno, pokazano je da granična vrednost u (1.4) postoji za svako $x \in \mathbb{R}$. Dakle, dokazano je (1.1).

Korak 4. Za bilo koje date tačke $x_0 < x_1 < \dots < x_N$, imamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |q(x_j) - q(x_{j-1})| &= \lim_{k_\eta \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^N |q_{k_\eta}(x_j) - q_{k_\eta}(x_{j-1})| \right) \\ &\leq \limsup_{k_\eta \rightarrow \infty} (\text{TV}(q_{k_\eta})) \leq C. \end{aligned}$$

Ovim je dokazana prva nejednakost u (1.2). Ako je totalna varijacija ograničena, tada je očigledno da važi i druga nejednakost u (1.2). \square

1.3 Zakon održanja, Košijev i Rimanov problem

Od sredine XIX veka, uporedo su se razvijale teorija o hiperboličnim sistemima zakona održanja i gasna dinamika. U poslednjih nekoliko decenija publikovan je veliki broj knjiga koje daju teorijski i numerički prilaz hiperboličnim zakonima održanja. Teorijske osnove mogu se naći u knjigama Jeffrey [19] i Smoller [35], dok knjige Bressan [4] i Holden i Risebro [17] sadrže detaljniju analizu zakona održanja. Numerički pristup dat je u knjigama LeVeque [24, 25] i Holden i Risebro [17]. U cilju pronalazaženja dopustivog slabog rešenja zakona održanja, uveden je termin *entropija* (Lax [23]). Klasifikacija entropijskih funkcija može se naći u Harten [15] i Harten et al. [16]. Veliki broj primera iz oblasti elektrodinamike uključuje probleme hiperboličnih zakona održanja (Bloom [5]). U ovoj glavi biće korišćeni rezultati iz [4] i [11].

Zakon održanja u jednoj prostornoj dimenziji dat je parcijalnom diferencijalnom jednačinom oblika

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) = 0, \quad (1.5)$$

gde $t \geq 0$ predstavlja vreme, a $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ n -dimenzionalni vektor. Za komponente vektora q , u oznaci $q_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, kažemo da su očuvane ako se integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_i(x, t) dx$$

ne menja za $t \geq 0$. Vektorska funkcija $f(q)$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, naziva se fluks sistema (1.5). Integraleći (1.5) na intervalu $[a, b]$ dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b q(x, t) dx &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} q(x, t) dx \\ &= - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) dx \\ &= f(q(a, t)) - f(q(b, t)). \end{aligned}$$

Drugim rečima, promena veličine q u vremenu, unutar intervala $[a, b]$, određena je protokom (fluksum) koji postoji na krajevima intervala.

Košijev problem za sistem (1.5) uključuje početni uslov

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.6)$$

Specijalan slučaj Košijevog problema je Rimanov problem gde je početni uslov oblika

$$q(x, 0) = \begin{cases} q_L, & x < 0, \\ q_R, & x > 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

gde su q_L i q_R konstante.

Kvazilinearna forma jednačine (1.5) oblika je

$$q_t + Df(q)q_x = 0. \quad (1.8)$$

Za glatka rešenja, jednačine (1.5) i (1.8) potpuno su ekvivalentne. Međutim, ako q ima skok (prekid), tada se na levoj strani jednačine (1.8) pojavljuje proizvod prekidne funkcije $Df(q)$ i distributivnog izvoda q_x što u opštem slučaju nije dobro definisano. Zbog toga, jednačina (1.8) ima smisla samo ako je q neprekidna funkcija. Divergentna forma jednačine (1.5) omogućava da se posmatraju i prekidna rešenja interpretirana u distributivnom smislu. Naime, lokalno integrabilna funkcija $q = q(x, t)$ je slabo rešenje problema (1.5, 1.6) ako važi

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (q\phi_t + f(q)\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty q(x, 0)\phi(x, 0) dx = 0$$

za svaku diferencijabilnu funkciju sa kompaktnim nosačem $\phi = \phi(x, t) \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$.

Sistem (1.5) je strogo hiperboličan ako Jakobijeva $n \times n$ matrica $Df(q)$ za svako q ima n realnih i različitih karakterističnih korena (tj. n linearno nezavisnih karakterističnih vektora). Kako je $f(q)$, u opštem slučaju, nelinearna funkcija, tada je (1.5) sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Primer 1.3.1 Skalarna linearna transportna jednačina oblika je

$$q_t + aq_x = 0, \quad (1.9)$$

gde je a konstanta. Rešenje Košijevog problema (1.9, 1.6) je

$$q(x, t) = q_0(x - at)$$

za $t \geq 0$. Duž prave $x - at = x_0$, funkcija $q(x, t)$ je konstantna za bilo koje $x_0 \in \mathbb{R}$.

U opštem slučaju, ako je data skalarna, homogena, kvazilinearna jednačina prvog reda

$$q_t + a(x, t, q)q_x = 0,$$

tada su karakteristike krive koje zadovoljavaju Košijev problem

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t, q), \quad x(0) = x_0. \quad (1.10)$$

Kako je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial x} q(x(t), t)x'(t) + \frac{\partial}{\partial t} q(x(t), t) \\ &= aq_x + q_t = 0, \end{aligned}$$

to znači da je duž datih karakteristika $x(t)$, funkcija $q(x(t), t)$ konstantna. Dakle, u $x - t$ ravni, rešavanje PDJ redukuje se na rešavanje ODJ (1.10). Na primer, posmatrajmo jednačinu $q_t + tq_x = 0$ uz početni uslov $q(x, 0) = x$. Tada su karakteristike oblika $x(t) = t^2/2 + x_0$, pa je $q(x, t) = q(x(t), t) = q(x(0), 0) = q(x_0, 0) = x_0 = x - t^2/2$.

Primer 1.3.2 Burgersova nelinearna nevizkozna skalarna jednačina oblika je

$$q_t + \left(\frac{q^2}{2} \right)_x = 0 \quad (1.11)$$

sa početnim uslovom (1.6). Tada se (1.11) može zapisati i kao

$$q_t + qq_x = 0. \quad (1.12)$$

Jednačina (1.11) sa glatkim početnim uslovom, može biti rešena pomoću karakteristika za t dovoljno malo. Karakteristike se dobijaju rešavanjem jednačine

$$x'(t) = q(x(t), t). \quad (1.13)$$

Duž karakteristika, q je konstantna funkcija jer važi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial x} q(x(t), t) x'(t) + \frac{\partial}{\partial t} q(x(t), t) \\ &= q_t + q q_x = 0, \end{aligned}$$

pa je i $x'(t)$ takođe konstantno zbog (1.13). Znači da su karakteristike prave linije određene početnim uslovom. Kako je početni uslov glatka funkcija, rešenje $q(x, t)$ može biti izračunato za $t = t_0$ dovoljno malo (odnosno dok ne dođe do preseka karakteristika). Ako se za svako (x, t) može se naći rešenje x_0 jednačine

$$x = x_0 + q(x_0, 0)t, \quad (1.14)$$

tada se rešenje za (1.12) sa glatkim početnim uslovom $q_0(x) = q(x, 0)$ zapisuje u formi

$$q(x, t) = q(x_0, 0). \quad (1.15)$$

Pokažimo da važi (1.14, 1.15). Svaka karakteristika zadovoljava jednačinu (1.13) za $x(0) = x_0$. Duž karakteristika, $q(x(t), t)$ je konstantna funkcija i njena se vrednost može izračunati u tački $(x_0, 0)$, za fiksirano x_0 . Rešenje jednačine $x'(t) = q(x_0, 0)$ je $x(t) = q(x_0, 0)t + x_0$. Iz ove jednačine nalazimo da je $x_0 = x_0(x, t)$ i da važi $q(x, t) = q(x(t), t) = q(x(0), 0) = q(x_0, 0) = q(x_0(x, t), 0)$. Karakteristike se prvi put seku u $t = T_e$, gde je

$$T_e = \frac{-1}{\min q'_0(x)}.$$

Naime, dve karakteristike $x = x_0 + q(x_0, 0)t$ i $x = x_1 + q(x_1, 0)t$ koje kreću iz tačaka x_0 i x_1 , redom, presećiće se u vremenu

$$t = -\frac{1}{\frac{q(x_0, 0) - q(x_1, 0)}{x_0 - x_1}} = -\frac{1}{q'(\xi, 0)} \geq -\frac{1}{\min_{x_0 < \xi < x_1} q'(\xi, 0)} \geq -\frac{1}{\min q'(x, 0)}$$

za $x_0 < \xi < x_1$. Kada $t \rightarrow T_e$,

$$\lim_{t \rightarrow T_e^-} \left\{ \inf_{x \in \mathbb{R}} q_x(x, t) \right\} = -\infty$$

i posle $t = T_e$ nema klasičnog rešenja.

Primer 1.3.3 (Gasna dinamika) Ojlerove jednačine za kompresibilan, neviskozni gas u Lagranžovim koordinatama mogu se napisati u obliku tri zakona održanja:

$$\begin{aligned} v_t - u_x &= 0 && \text{(održanje mase)} \\ u_t + p_x &= 0 && \text{(održanje momenta)} \\ (e + u^2/2)_t + (pu)_x &= 0 && \text{(održanje energije)}. \end{aligned}$$

Veličina $v = \rho^{-1}$ predstavlja specifičnu zapreminu, ρ gustinu, u brzinu, e unutrašnju energiju i p pritisak. Sistemu se obično dodaje i četvrta jednačina $p = p(e, v)$ koja se naziva jednačina stanja i ona zavisi od gasa koji se posmatra.

Primer 1.3.4 p -sistem čine dve jednačine

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t + p(v)_x = 0, \quad (1.16)$$

gde je $p' < 0$, $p'' > 0$. Sistem (1.16) je prost model izentropnog strujanja gasa. Sa v je obeležena specifična zapremina, sa u brzina i sa $p(v) = \kappa v^{-\gamma}$ pritisak, gde je κ gasna konstanta. Za većinu

gasova $\gamma \in [1, 3]$. Sistem (1.16) je strogo hiperboličan u oblasti $v > 0$. Jakobijeva matrica oblika je

$$Df = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{bmatrix}$$

i ima realne i različite karakteristične korene $\lambda_1 = -\sqrt{-p'(v)}$ i $\lambda_2 = \sqrt{-p'(v)}$.

Osnovna osobina nelinearnih sistema u formi (1.5) je da za čak glatke početne uslove, rešenje Košijevog problema može imati prekide u konačnom vremenu. Zbog toga se globalno rešenje posmatranog problema mora tražiti u klasi prekidnih funkcija.

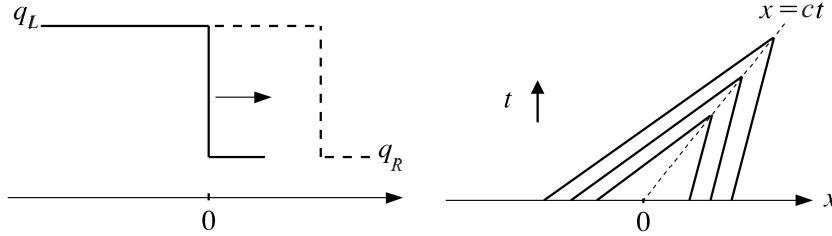
Primer 1.3.5 Neka je data Burgersova neviskozna jednačina (1.11) sa početnim uslovom (1.7). Rešenje posmatranog problema zavisi od odnosa q_L i q_R .

Slučaj 1. Neka je $q_L > q_R$.

Ako sa c obeležimo brzinu kojom se kreće diskontinuitet, tada je $c = (q_L + q_R)/2$ i rešenje posmatranog problema biće

$$q(x, t) = \begin{cases} q_L, & x < ct, \\ q_R, & x > ct. \end{cases} \quad (1.17)$$

Ovo rešenje naziva se udarni talas. Kako važi $q_R t < ct < q_L t$, sve karakteristike "idu" u udarni talas kako se vreme t povećava (slika 1.1).



Slika 1.1: Udarни talas i karakteristike.

Rešenje (1.17) je slabo rešenje Burgersove neviskozne jednačine ako i samo ako je $c = (q_L + q_R)/2$. Isti diskontinuitet sa drugačijom brzinom neće biti slabo rešenje. Navedeno tvrđenje biće dokazano korišćenjem integralne forme zakona održanja. Integraljenjem $q_t = -f(q)_x$ od x_1 do x_2 , za $x_1 < x_2$, dobija se

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t)) \quad (1.18)$$

za svako x_1, x_2, t . Za M dovoljno veliko, takvo da važi $M > ct$, koristeći (1.18) sledi

$$\frac{d}{dt} \int_{-M}^M q(x, t) dx = f(q_L) - f(q_R) = \frac{1}{2}(q_L + q_R)(q_L - q_R) \quad (1.19)$$

za Burgersovu neviskoznu jednačinu. Sa druge strane, za rešenje (1.17) mora važiti i

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M q(x, t) dx &= \int_{-M}^{ct} q(x, t) dx + \int_{ct}^M q(x, t) dx \\ &= \int_{-M}^{ct} q_L dx + \int_{ct}^M q_R dx \\ &= q_L(ct + M) + q_R(M - ct). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Korišćenjem (1.20), dobija se

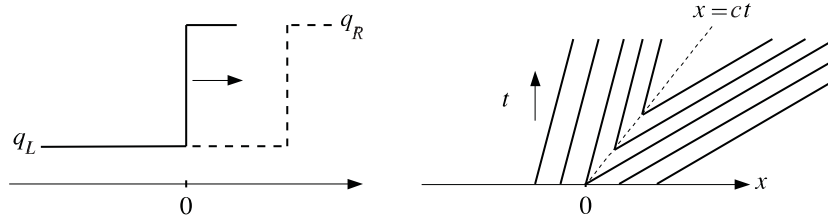
$$\frac{d}{dt} \int_{-M}^M q(x, t) dx = c(q_L - q_R). \quad (1.21)$$

Sada (1.19) zajedno sa (1.21) daje $c = (q_L + q_R)/2$ i time dobijamo čuveni Rankine-Hugoniot (RH) uslov:

$$f(q_R) - f(q_L) = c(q_R - q_L).$$

Slučaj 2. Neka je $q_L < q_R$.

U ovom slučaju postoji beskonačno mnogo slabih rešenja. Jedno od njih je i (1.17). Sada je $q_L t < ct < q_R t$ i karakteristike "idu" van udarnog talasa kako se vreme t povećava (slika 1.2). Kasnije će biti pokazano da ovo rešenje ne zadovoljava entropijske uslove.



Slika 1.2: Neentropijski udarni talas i karakteristike.

Jedno slabo rešenje može biti formirano i na sledeći način (videti [11], poglavlje 2.3). Neka je data Burgersova jednačina (1.11) sa početnim uslovom

$$q(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Za svako $\theta \in (0, 1)$, definišemo po delovima konstantnu funkciju $q_\theta : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ kao što sledi:

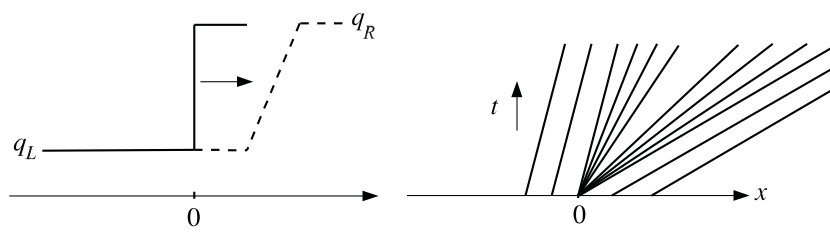
$$q_\theta(x, t) = \begin{cases} 0, & x < \theta t/2, \\ \theta, & \theta t/2 \leq x < (1 + \theta)t/2, \\ 1, & x \geq (1 + \theta)t/2. \end{cases}$$

Tada je svako q_θ rešenje posmatranog problema jer zadovoljava jednačinu (1.11) i RH uslove duž dve linije diskontinuiteta $x = \theta t/2$ i $x = (1 + \theta)t/2$. Videćemo da su sva pomenuta rešenja neentropijska (preciznije, oba udarna talasa koji se nalaze u q_θ nisu entropijska).

Još jedno slabo rešenje naziva se razređujući talas (slika 1.3),

$$q(x, t) = \begin{cases} q_L, & x < q_L t, \\ x/t, & q_L t \leq x < q_R t, \\ q_R, & x \geq q_R t. \end{cases} \quad (1.22)$$

Rešenje (1.22) je konstantno za $x < q_L t$ i $x > q_R t$, dok između te dve karakteristike vrednost rešenja raste, jer se nagib karakteristika povećava od $x'(t) = q_L$ do $x'(t) = q_R$. Kako se vreme povećava, konstantna stanja su sve udaljenija.



Slika 1.3: Razređujući talas i karakteristike.

Hiperbolični sistemi zakona održanja

Prilikom rešavanja Košijevog problema kod nelinearnih hiperboličnih zakona održanja nailazimo na dva važna izazova. Prvi je taj što rešenje ne mora ostati neprekidno u konačnom vremenu, a drugi je kako odabrati dopustivo rešenje između više slabih rešenja. Da bi se dobilo jedinstveno rešenje Košijevog problema, uvode se termini kao što su dopustiv talas, nestabilno rešenje, fizički nebitno rešenje, itd. Nepostojanje klasičnog rešenja sistema neizentropnog strujanja gasa i drugih sistema zakona održanja pokazao je Sideris [34]. Uslove pod kojima je slabo rešenje dopustivo prvi je dao Stokes [37]. Vezu između skokova u rešenju i entropijskih nejednakosti dao je Jouguet [20], i to za jednačine gasne dinamike. Potpunu teorijsku podlogu o zakonima održanja i dopustivosti slabog rešenja dao je Lax [23].

Specijalan slučaj Košijevog problema je Rimanov problem koji je formulisan i rešen još davne 1860. godine (videti [32]). Dugi niz godina se istražuje rešenje sistema izentropnog strujanja gasa, koje uključuje udarne i razređujuće talase i njihovu interakciju. Courant i Friedrich [8] kao i Lax [22], posmatrali su Rimanov problem za strogo hiperbolične sisteme zakona održanja čije su familije karakteristika zaista nelinearne ili linearno degenerisane. Međutim, kada sistem nije strogo hiperboličan, tada se kao rešenje Rimanovog problema mogu naći i nadkompresibilni, podkompresibilni, delta udarni talasi itd. Napredak je napravljen u klasifikaciji takvih sistema, kao i u određivanju uslova za postojanje, jedinstvenost i dopustivost rešenja (Glimm [14], Tan, Zhang i Zheng [38] i Nedeljkov [29]). Detaljna konstrukcija rešenja Rimanovog problema za Ojlerove jednačine gasne dinamike može se naći u Chang i Ling [7] i Li, Zhang i Yang [26].

U ovoj glavi biće korišćeni rezultati iz [4, 9, 27, 35].

2.1 Nelinearni hiperbolični sistemi

Neka je Ω otvoren podskup od \mathbb{R}^n i neka $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Posmatramo sistem

$$q_t + f(q)_x = 0, \quad (2.1)$$

gde je

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

i

$$f(q) = (f_1(q_1, q_2, \dots, q_n), f_2(q_1, q_2, \dots, q_n), \dots, f_n(q_1, q_2, \dots, q_n)) .$$

Sistem (2.1) se može napisati i u obliku

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} q_1 + \frac{\partial}{\partial x} f_1(q_1, q_2, \dots, q_n) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} q_2 + \frac{\partial}{\partial x} f_2(q_1, q_2, \dots, q_n) &= 0 \\ &\dots \\ \frac{\partial}{\partial t} q_n + \frac{\partial}{\partial x} f_n(q_1, q_2, \dots, q_n) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ako obeležimo $A(q) = Df(q)$, tada se (2.2) zapisuje u kvazilinearnoj formi

$$q_t + A(q)q_x = 0. \quad (2.3)$$

Definicija 2.1.1 Sistem (2.3) je strogo hiperboličan ako za svako $q \in \Omega$, matrica $A(q)$ ima n realnih i različitih karakterističnih korena koji se mogu urediti tako da važi

$$\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \dots < \lambda_n(q).$$

Osnovna osobina nelinearnih hiperboličnih sistema zakona održanja jeste da rešenje sistema u konačnom vremenu, može biti i prekidna funkcija čak iako je početni uslov glatka funkcija. Da bi se konstruisalo globalno rešenje koje zavisi od vremena, ono mora biti traženo u prostoru prekidnih funkcija, odnosno, zakon održanja se mora posmatrati u distributivnom smislu. Slabo rešenje uvek će biti traženo nad oblašću $\mathbb{R} \times [0, T]$ sa početnim uslovom

$$q(x, 0) = q_0(x) \quad (2.4)$$

i definiše se na sledeći način:

Definicija 2.1.2 Funkcija $q : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je distributivno rešenje zakona održanja (2.1, 2.4), gde $q_0(x) \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, ako važi

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (q \phi_t + f(q) \phi_x) dx dt = - \int_{-\infty}^{\infty} q(x, 0) \phi(x, 0) dx \quad (2.5)$$

za svaku \mathcal{C}^1 test funkciju ϕ sa kompaktnim nosačem koji se nalazi u skupu $\mathbb{R} \times (-\infty, T)$.

Sada se ne zahteva da funkcija q bude neprekidna. Jedini uslov je da funkcije q i $f(q)$ budu lokalno integrabilne na $\mathbb{R} \times [0, T]$. Ako se zahteva da funkcija $q(x, t)$ bude neprekidna po t sa vrednostima u $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$, tada se dobija sledeća definicija:

Definicija 2.1.3 Funkcija $q : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ je slabo rešenje zakona održanja (2.1, 2.4), gde $q_0(x) \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, ako važi da je:

1. q neprekidno preslikavanje intervala $[0, T]$ u $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$,
2. zadovoljen početni uslov (2.4), odnosno da važi $\lim_{t \rightarrow 0} \|q(\cdot, t) - q_0(\cdot)\|_{\mathbf{L}^1} = 0$,
3. restrikcija funkcije q nad otvorenim skupom $\mathbb{R} \times (0, T)$ distributivno rešenje jednačine (2.1).

Napomenimo još da je (2.5) ekvivalentno sa

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} (q_i(\phi_t)_i + f_i(q)(\phi_x)_i) dx dt = - \int_{-\infty}^{\infty} q_i(x, 0) \phi_i(x, 0) dx$$

za $i = 1, 2, \dots, n$. Ovde je sa h_i označena i -ta komponenta vektora h .

2.1.1 Rankine-Hugoniot (RH) uslov

Neka je $q(x, t)$ po delovima gladka funkcija koja ima skok duž krive $x = \gamma(t)$. Označimo sa q^+ i q^- desnu i levo granično vrednost funkcije q u tački skoka, redom, t.j.

$$q^\pm(t) = \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^\pm} q(x, t).$$

Pretpostavimo da je ϕ neprekidno diferencijabilna funkcija sa kompaktnim nosačem. Tada je

$$\begin{aligned} & \iint (q\phi_t + f(q)\phi_x) \, dxdt \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} q\phi_t \, dxdt + \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty q\phi_t \, dxdt \\ & \quad + \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} f(q)\phi_x \, dxdt + \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty f(q)\phi_x \, dxdt \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t}(q\phi) - q_t\phi \right) \, dxdt + \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty \left(\frac{\partial}{\partial t}(q\phi) - q_t\phi \right) \, dxdt \\ & \quad + \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x}(f(q)\phi) - f(q)_x\phi \right) \, dxdt + \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty \left(\frac{\partial}{\partial x}(f(q)\phi) - f(q)_x\phi \right) \, dxdt \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial t}(q\phi) \, dxdt - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} q_t\phi \, dxdt + \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty \frac{\partial}{\partial t}(q\phi) \, dxdt \\ & \quad - \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty q_t\phi \, dxdt + \int_0^\infty f(q)\phi|_{-\infty}^{\gamma(t)} \, dt - \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} A(q)q_x\phi \, dxdt \\ & \quad + \int_0^\infty f(q)\phi|_{\gamma(t)}^\infty \, dt - \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty A(q)q_x\phi \, dxdt. \end{aligned}$$

Na integrale $\int_{-\infty}^{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial t}(q\phi) \, dx$ i $\int_{\gamma(t)}^\infty \frac{\partial}{\partial t}(q\phi) \, dx$ primenićemo teoremu 1.2.14. Tada je

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial t}(q\phi) \, dxdt \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^-} \int_0^\infty \int_{-b}^x \frac{\partial}{\partial t}(q\phi) \, dxdt \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^-} \int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} \int_{-b}^x (q\phi) \, dx - \gamma'(t) q^- \phi(\gamma(t), t) + b' q^- \phi(b, t) \right) \, dt \\ &= \lim_{b \rightarrow -\infty} \lim_{x \rightarrow \gamma(t)^-} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \int_{-b}^x (q\phi) \, dxdt - \int_0^\infty \gamma'(t) q^- \phi(\gamma(t), t) \, dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\gamma(t)} (q\phi) \, dxdt - \int_0^\infty \gamma'(t) q^- \phi(\gamma(t), t) \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\gamma(\infty)} (q\phi)(x, \infty) \, dx - \int_{-\infty}^{\gamma(0)} (q\phi)(x, 0) \, dx - \int_0^\infty \gamma'(t) q^- \phi(\gamma(t), t) \, dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\gamma(0)} (q\phi)(x, 0) \, dx - \int_0^\infty \gamma'(t) q^- \phi(\gamma(t), t) \, dt. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili oznaku $(q\phi)(x, t) = q(x, t)\phi(x, t)$. Slično se može pokazati da važi

$$\int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty \frac{\partial}{\partial t}(q\phi) \, dxdt = - \int_{\gamma(0)}^\infty (q\phi)(x, 0) \, dx + \int_0^\infty \gamma'(t) q^+ \phi(\gamma(t), t) \, dt.$$

Sada sledi

$$\begin{aligned}
& \iint (q\phi_t + f(q)\phi_x) \, dxdt \\
&= - \int_{-\infty}^{\gamma(0)} (q\phi)(x, 0) \, dx - \int_0^{\infty} \gamma'(t) q^- \phi(\gamma(t), t) \, dt - \int_{\gamma(0)}^{\infty} (q\phi)(x, 0) \, dx \\
&+ \int_0^{\infty} \gamma'(t) q^+ \phi(\gamma(t), t) \, dt - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\gamma(t)} q_t \phi \, dxdt - \int_0^{\infty} \int_{\gamma(t)}^{\infty} q_t \phi \, dxdt \\
&+ \int_0^{\infty} f(q)\phi|_{-\infty}^{\gamma(t)} \, dt + \int_0^{\infty} f(q)\phi|_{\gamma(t)}^{\infty} \, dt \\
&- \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\gamma(t)} A(q)q_x \phi \, dxdt - \int_0^{\infty} \int_{\gamma(t)}^{\infty} A(q)q_x \phi \, dxdt \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} (q\phi)(x, 0) \, dx - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_t \phi \, dxdt - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(q)q_x \phi \, dxdt \\
&+ \int_0^{\infty} \gamma'(t) ((q^+(t) - q^-(t))\phi(\gamma(t), t) \, dt - \int_0^{\infty} (f(q^+)\phi(\gamma(t), t) - f(q^-)\phi(\gamma(t), t)) \, dt \\
&- \int_0^{\infty} (f(q^-)\phi)(-\infty, t) \, dt + \int_0^{\infty} (f(q^+)\phi)(\infty, t) \, dt \\
&= - \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (q_t + A(q)q_x)\phi \, dxdt - \int_{-\infty}^{\infty} (q\phi)(x, 0) \, dx \\
&+ \int_0^{\infty} ((q^+(t) - q^-(t))\gamma'(t) - (f(q^+(t)) - f(q^-(t))))\phi(\gamma(t), t) \, dt.
\end{aligned}$$

Kako (2.5) važi za svaku diferencijabilnu funkciju ϕ sa kompaktnim nosačem, tada sledi da $q_t + A(q)q_x = 0$ mora biti zadovoljeno u svim tačkama u kojima je funkcija neprekidna. Duž $\gamma(t)$ mora da važi

$$(q^+ - q^-)\dot{\gamma} = f(q^+) - f(q^-), \quad (2.6)$$

gde je $\dot{\gamma} = \gamma'(t)$. Vektorska jednačina (2.6) naziva se Rankine-Hugoniot (RH) uslov.

Navedimo još jedan način zapisivanja RH uslova. Neka je sada srednja matrica $A(u, v)$ definisana sa

$$A(u, v) = \int_0^1 A(\theta u + (1 - \theta)v) \, d\theta,$$

gde je

$$A = Df(q) = D \begin{bmatrix} f_1(q) \\ f_2(q) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_n(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Jakobijeva matrica, i neka su

$$\lambda_i(u, v), \quad 1 \leq i \leq n,$$

karakteristični koreni matrice $A(u, v)$. Tada se RH uslov (2.6) može zapisati kao

$$\begin{aligned}
(q^+ - q^-)\dot{\gamma} &= f(q^+) - f(q^-) \\
&= \int_0^1 Df(\theta q^+ + (1 - \theta)q^-) (q^+ - q^-) \, d\theta \\
&= A(q^+, q^-)(q^+ - q^-).
\end{aligned} \quad (2.7)$$

To znači da će RH uslov biti zadovoljen ako i samo ako je skok $q^+ - q^-$ karakteristični vektor matrice $A(q^+, q^-)$ i $\dot{\gamma}$ odgovarajući karakteristični koren. U skalarnom slučaju, (2.6) postaje jedna

jednačina oblika

$$\dot{\gamma} = \frac{f(q^+) - f(q^-)}{q^+ - q^-} = \frac{1}{q^+ - q^-} \int_{q^-}^{q^+} f'(q) dq.$$

Sa $f'(q)$ označen je prvi izvod funkcije $f(q)$.

2.2 Entropijski uslovi

Da bi se obezbedila jedinstvenost i neprekidna zavisnost od početnog uslova, na slabo rešenje moraju se postaviti dodatni uslovi koji su dati u [4] (videti primer 1.3.5, slučaj 2).

2.2.1 Metod iščezavajuće viskoznosti

Slabo rešenje q sistema (2.1) je dopustivo ako postoji niz glatkih funkcija q_ε koje zadovoljavaju jednačinu

$$(q_\varepsilon)_t + A(q_\varepsilon)(q_\varepsilon)_x = \varepsilon(q_\varepsilon)_{xx} \quad (2.8)$$

i koji konvergira ka q u \mathbf{L}^1 kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Međutim, često je veoma komplikovano odrediti uniformnu ocenu rešenja parabolichnog sistema (2.8). Zbog toga je potrebno odrediti drugačije entropijske uslove koji će biti jednostavniji za primenu. Za opšti rezultat pogledati važan rad [2]. Ipak, iz uslova (2.8) mogu se dobiti drugi entropijski uslovi (videti naredno poglavlje) koji se lakše mogu proveriti.

2.2.2 Entropijske funkcije

Neprekidno diferencijabilna funkcija $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ naziva se entropija sistema (2.1), dok se $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ naziva fluks entropije ako važi

$$D\eta(q)Df(q) = D\psi(q), \quad q \in \mathbb{R}^n. \quad (2.9)$$

Ako je $q = q(x, t) \in \mathcal{C}^1$ rešenje sistema (2.1) i ako važi (2.9), tada važi i

$$\eta(q)_t + \psi(q)_x = 0, \quad (2.10)$$

jer na osnovu (2.3)

$$D\eta(q)q_t + D\psi(q)q_x = D\eta(q)(-Df(q)q_x) + D\psi(q)q_x = 0.$$

Drugim rečima, kad god je rešenje sistema (2.1) glatka funkcija, tada ona zadovoljava dodatni zakon održanja (2.10). Ali ako je q prekidna funkcija, u opštem slučaju, ona ne mora biti slabo rešenje za (2.10). Na primer, za Burgersovu jednačinu $q_t + (q^2/2)_x = 0$, udarni talas q je slabo rešenje ako važi $q^- > q^+$ i ako se kreće brzinom $\dot{\gamma} = (q^- + q^+)/2$. Međutim, ako izaberemo $\eta(q) = q^3$ i $\psi(q) = 3q^4/4$, tada važi

$$\eta(q)_t + \psi(q)_x = 3q^2q_t + 3q^3q_x = 3q^2(q_t + qq_x) = 0$$

i

$$\dot{\gamma} = \frac{\psi(q^+) - \psi(q^-)}{\eta(q^+) - \eta(q^-)} = \frac{3((q^+)^4 - (q^-)^4)}{4((q^+)^3 - (q^-)^3)} \neq \frac{(q^- + q^+)}{2} = \dot{\gamma}.$$

što nam govori da q nije slabo rešenje i za (2.10) jer se kreće drugačijom brzinom u odnosu na onu koja se određuje iz RH uslova.

Ispitajmo sada kako se konveksna entropija ponaša u prisustvu malog difuznog izraza. Naime, pretpostavimo sada da su funkcije $\eta(q), \psi(q) \in \mathcal{C}^2$ i da je $\eta(q)$ konveksna funkcija. Množeći (2.8) sa leve strane sa $D\eta(q_\varepsilon)$ dobijamo

$$\eta(q_\varepsilon)_t + \psi(q_\varepsilon)_x = \varepsilon D\eta(q_\varepsilon)(q_\varepsilon)_{xx} = \varepsilon (\eta(q_\varepsilon)_{xx} - D^2\eta(q_\varepsilon)((q_\varepsilon)_x \otimes (q_\varepsilon)_x)), \quad (2.11)$$

gde je

$$D^2\eta(q_\varepsilon)((q_\varepsilon)_x \otimes (q_\varepsilon)_x) = (q_\varepsilon)_x^T D^2\eta(q_\varepsilon)(q_\varepsilon)_x = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^i \partial q_\varepsilon^j} \frac{\partial q_\varepsilon^i}{\partial x} \frac{\partial q_\varepsilon^j}{\partial x} \geq 0$$

i

$$D^2\eta(q_\varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^1 \partial q_\varepsilon^1} & \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^1 \partial q_\varepsilon^2} & \cdots & \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^1 \partial q_\varepsilon^n} \\ \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^2 \partial q_\varepsilon^1} & \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^2 \partial q_\varepsilon^2} & \cdots & \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^2 \partial q_\varepsilon^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^n \partial q_\varepsilon^1} & \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^n \partial q_\varepsilon^2} & \cdots & \frac{\partial^2\eta(q_\varepsilon)}{\partial q_\varepsilon^n \partial q_\varepsilon^n} \end{bmatrix}.$$

Pošto je η konveksna funkcija, time njen drugi izvod u tački q_ε ima pozitivnu semidefinitnu kvadratnu formu. Sa q_ε^i obeležili smo i -tu komponentu vektora q_ε , $i = 1, 2, \dots, n$. Množeći (2.11) nenegativnom glatkom funkcijom ϕ sa kompaktnim nosačem, nakon parcijalne integracije imamo

$$\begin{aligned} - \iint (\eta(q_\varepsilon)\phi_t + \psi(q_\varepsilon)\phi_x) \, dxdt &= \varepsilon \iint \eta(q_\varepsilon)\phi_{xx} \, dxdt \\ &- \varepsilon \iint D^2\eta(q_\varepsilon)((q_\varepsilon)_x \otimes (q_\varepsilon)_x) \phi \, dxdt. \end{aligned}$$

Zbog pretpostavki za η i ϕ , važi

$$\iint (\eta(q_\varepsilon)\phi_t + \psi(q_\varepsilon)\phi_x) \, dxdt \geq -\varepsilon \iint \eta(q_\varepsilon)\phi_{xx} \, dxdt.$$

Ako $q_\varepsilon \rightarrow q$ u \mathbf{L}_{loc}^1 kada $\varepsilon \rightarrow 0$, iz prethodne nejednakosti sledi

$$\iint (\eta(q)\phi_t + \psi(q)\phi_x) \, dxdt \geq 0$$

za $\phi \in \mathcal{C}_0^1$, $\phi \geq 0$. To znači da važi $\eta(q)_t + \psi(q)_x \leq 0$ u distributivnom smislu. Zaključujemo sledeće:

Entropijska nejednakost. Slabo rešenje za (2.1) je entropijski dopustivo ako za svaki par (η, ψ) važi

$$\eta(q)_t + \psi(q)_x \leq 0 \quad (2.12)$$

u distributivnom smislu, gde je η konveksna entropija za (2.1), a ψ odgovarajući fluks entropije.

Uslov (2.12) može biti od koristi ako je poznata netrivialna konveksna entropija za sistem (2.1). Primetimo da (2.9) može biti posmatrano i kao sistem od n jednačina sa dve nepoznate η , ψ . Za $n \geq 3$ sistem ima više jednačina od broja nepoznatih. U opštem slučaju, može se očekivati da se rešenje tog sistema ipak može naći za $n \leq 2$.

Pre sledeće teoreme trebaće nam Lipsicov uslov regularnosti (LR) koji glasi:

(LR) Neka je funkcija $q = q(x, t)$ merljiva i ograničena i neka postoji konačan broj tačaka $P_i = (x_i, t_i)$ i konačan broj Lipsic neprekidnih krivih $\gamma_k : (a_k, b_k) \rightarrow \mathbb{R}$ tako da važi:

- oko svake tačke $P = (x, t)$ koja se ne poklapa sa P_i i koja leži van krive γ_k , postoji okolina V gde je funkcija q Lipsic neprekidna,
- oko svake tačke $Q = (\gamma_k(t), t)$ na svakoj krivi γ_k postoji okolina V u kojoj su restrikcije funkcije q u oba podskupa $V^+ = V \cup \{x > \gamma_k(t)\}$, $V^- = V \cup \{x < \gamma_k(t)\}$ Lipsic neprekidne.

Teorema 2.2.1 ([4]) Neka je $q = q(x, t)$ rešenje sistema (2.1) koje po delovima zadovoljava Lipsicov uslov regularnosti (LR). Neka je η konveksna entropijska funkcija sa fluksom ψ . Tada uslov (2.12) važi ako i samo ako za svako t duž krive γ_k važi

$$\dot{\gamma}_k(t) (\eta(q_k^+(t)) - \eta(q_k^-(t))) \geq \psi(q_k^+(t)) - \psi(q_k^-(t)). \quad (2.13)$$

Dokaz. Za svaku nenegativnu funkciju $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, koristeći iste argumente kao pri dobijanju RH uslova, važi

$$\begin{aligned} & \iint (\eta(q)\phi_t + \psi(q)\phi_x) \, dxdt \\ &= - \iint_{\tilde{\Omega}} (\eta(q)_t + \psi(q)_x) \phi \, dxdt \\ & \quad + \sum_k \int_{a_k}^{b_k} \left((\eta(q_k^+) - \eta(q_k^-))\dot{\gamma}_k - (\psi(q_k^+) - \psi(q_k^-)) \right) \phi(\gamma_k, t) \, dt \end{aligned}$$

gde je $\tilde{\Omega}$ oblast van skoka. Po pretpostavci, van krive skoka γ_k važi

$$\eta(q)_t + \psi(q)_x = D\eta(q)q_t + D\psi(q)q_x = D\eta(q)q_t + D\eta(q)Df(q)q_x = D\eta(q)(q_t + A(q)q_x) = 0.$$

Zbog toga, entropijski uslov (2.12) će važiti ako i samo ako je

$$\begin{aligned} & \iint (\eta(q)\phi_t + \psi(q)\phi_x) \, dxdt \\ &= \sum_k \int_{a_k}^{b_k} \left((\eta(q_k^+) - \eta(q_k^-))\dot{\gamma}_k - (\psi(q_k^+) - \psi(q_k^-)) \right) \phi(\gamma_k, t) \, dt \geq 0 \end{aligned}$$

tačno za svaku nenegativnu funkciju $\phi \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, odnosno, ako i samo ako važi (2.13). \square

2.2.3 Laksovi entropijski uslovi

Naredni entropijski uslov može se primeniti na bilo koji sistem ([22]). Na osnovu (2.7) svaki i -ti udarni kreće se brzinom $\dot{\gamma} = \lambda_i(q^-, q^+)$ koja je karakteristični koren matrice $A(q^-, q^+)$. Laksov uslov zahteva da i -ta karakteristika putuje brzinom $\lambda_i(q^-)$ sa leve strane i $\lambda_i(q^+)$ sa desne strane i da obe brzine idu u udarni talas.

Laksov uslov. Ako su q^- i q^+ spojeni i -tim udarnim talasom koji se kreće brzinom $\dot{\gamma} = \lambda_i(q^-, q^+)$, tada kažemo da je i -ti udarni talas dopustiv ako važi

$$\lambda_i(q^-) \geq \lambda_i(q^-, q^+) \geq \lambda_i(q^+).$$

2.3 Razređujući i udarni talasi

U ovom poglavlju biće korišćena notacija i tvrđenja iz [4]. Neka je $q_0 \in \mathbb{R}^n$ i $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dalje, neka je $r_i(q)$ desni i -ti karakteristični vektor matrice $A(q) = Df(q)$. Integralna kriva vektorskog polja r_i kroz tačku q_0 naziva se *razređujuća kriva* kroz q_0 i ona će biti obeležena sa

$$s \rightarrow R_i(s)(q_0).$$

Preciznije, $R_i(s)(q_0)$ je vrednost rešenja Košijeveg problema

$$\frac{dq}{dt} = r_i(q(t)), \quad q(0) = q_0 \tag{2.14}$$

u vremenu $t = s$. Važe sledeći identiteti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_i} R_i(s_i)(q_0) &= r_i(R_i(s_i)(q_0)), \\ R_i(s_{i_2})(R_i(s_{i_1})(q_0)) &= R_i(s_{i_1} + s_{i_2})(q_0), \end{aligned} \tag{2.15}$$

za svako q_0 , s_i , s_{i_1} i s_{i_2} . Prva jednakost u (2.15) je tačna na osnovu (2.14), dok druga jednakost u (2.15) sledi iz činjenice da u svakoj tački krive $R_i(s_i)(q_0)$ postoji samo jedan tangentni vektor (istog smera i inteziteta).

Dalje, fiksirajmo $q_0 \in \mathbb{R}^n$ i $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Potrebno je formirati krivu koja spaja levu tačku q_0 sa desnom tačkom q i da je zadovoljen RH uslov (2.6). Na osnovu (2.7), kako je $q - q_0$ je desni i -ti karakteristični vektor matrice $A(q, q_0)$, tada je on normalan na svaki levi j -ti karakteristični vektor matrice $A(q, q_0)$, $j \neq i$. Tada se RH uslov (2.6) može zapisati kao

$$\Phi_j(q) := l_j(q, q_0)(q - q_0) = 0 \quad \text{za } j \neq i, \quad (2.16)$$

gde je $\dot{\gamma} = \lambda_i(q, q_0)$. Sistem (2.16) sastoji se od $n - 1$ skalarne jednačine i n nepoznatih i ima jedno trivijalno rešenje $q = q_0$. Da bismo primenili teoremu o implicitnim funkcijama, dovoljno je pokazati da $(n - 1) \times n$ matrica $D\Phi$ izračunata u $q = q_0$ ima rang $n - 1$. To je zapravo tačno jer su vrste matrice $D\Phi(q_0)$ gradijenti funkcija Φ_j za $j \neq i$ koji su izračunati kao

$$D\Phi_j(q_0) = l_j(q_0). \quad (2.17)$$

Na osnovu teoreme o implicitnim funkcijama, sistem (2.16) ima jednodimenzionalnu glatku krivu rešenja koja je tangentna na vektor r_i u q_0 . Odnosno, vektor r_i je tangenta krive S_i ako i samo ako je r_i normalan na $(n - 1)$ gradijent $D\Phi_j(q_0)$, $j \neq i$, što je tačno zbog (2.17). Takve krive S_i nazivaju se krive *udarnih talasa* i obeležavaju sa

$$s \rightarrow S_i(s)(q_0),$$

a važi i

$$\frac{d}{ds_i} S_i(s_i)(q_0) = r_i(S_i(s_i)(q_0)).$$

za svako q_0 i s_i . Koristeći pogodnu parametrizaciju, krive S_i i R_i imaće kontakt drugog reda u q_0 i imaju zajedničku tangentu u q_0 (slika 2.1). Važi (videti [4], poglavlje 5.2),

$$\begin{aligned} R_i(s)(q_0) &= q_0 + sr_i(q_0) + \mathcal{O}(1)s^2, \\ S_i(s)(q_0) &= q_0 + sr_i(q_0) + \mathcal{O}(1)s^2, \end{aligned}$$

$$|R_i(s)(q_0) - S_i(s)(q_0)| = \mathcal{O}(1)s^3$$

i

$$\lambda_i(S_i(s)(q_0), q_0) = \lambda_i(q_0) + \frac{s}{2} D\lambda_i(q_0) r_i(q_0) + \mathcal{O}(1)s^2, \quad (2.18)$$

za s dovoljno malo. Podsetimo se da je $D\lambda_i(q_0) = (\partial\lambda_i(q)/\partial q_1, \dots, \partial\lambda_i(q)/\partial q_n)$ u tački $q = q_0$. Da bismo pokazali zašto se u drugom sabirku poslednje jednakosti pojavljuje $1/2$, potražićemo $d\lambda_i(S_i(s)(q_0), q_0)/ds$. U tu svrhu uvodimo oznake $\lambda_i(s) := \lambda_i(S_i(s)(q_0), q_0)$, $S_i(s) := S_i(s)(q_0)$, $A_i(s) := A(S_i(s)(q_0)) = Df(S_i(s)(q_0))$ i $\dot{x} := dx/ds$. Diferencirajmo

$$f(S_i(s)) - f(q_0) = \lambda_i(s)(S_i(s) - q_0)$$

dva puta po parametru s . Tada dobijamo

$$\begin{aligned} A_i \dot{S}_i &= \dot{\lambda}_i(S_i - q_0) + \lambda_i \dot{S}_i \\ \dot{A}_i \dot{S}_i + A_i \ddot{S}_i &= \ddot{\lambda}_i(S_i - q_0) + 2\dot{\lambda}_i \dot{S}_i + \lambda_i \ddot{S}_i. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Kako za $s = 0$ važi $S_i(0) = q_0$ i $\dot{S}_i(0) = r_i(q_0)$, na osnovu (2.19) imaćemo

$$A_i \ddot{S}_i + \dot{A}_i r_i = 2\dot{\lambda}_i r_i + \lambda_i \ddot{S}_i. \quad (2.20)$$

Ako sada diferenciramo

$$A_i(s)r_i(S_i(s)) = \lambda_i(S_i(s))r_i(S_i(s))$$

po s , za $s = 0$ imaćemo

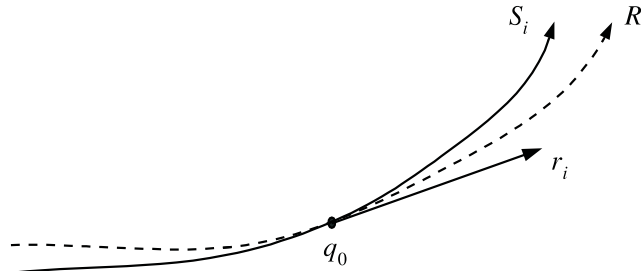
$$\dot{A}_i r_i = -A_i D r_i r_i + (D \lambda_i r_i) r_i + \lambda_i D r_i r_i. \quad (2.21)$$

Ako sada izrazimo $\dot{A}_i r_i$ iz (2.20) i uvrstimo u (2.21) dobijamo

$$A_i \ddot{S}_i + (D \lambda_i r_i) r_i + (\lambda_i - A_i) D r_i r_i = 2 \dot{\lambda}_i r_i + \lambda_i \ddot{S}_i. \quad (2.22)$$

Nakon množenja (2.22) sa $l_i(q_0)$ sa leve strane i koristeći $l_i(q_0) r_i(q_0) = 1$ dobijamo $D \lambda_i r_i = 2 \dot{\lambda}_i$, odnosno

$$\frac{d \lambda_i (S_i(s)(q_0), q_0)}{ds} = \frac{1}{2} D \lambda_i(q_0) r_i(q_0).$$



Slika 2.1: Kontakt drugog reda.

2.4 Rimanov problem

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatko vektorsko polje. Rimanov problem za sistem zakona održanja (2.1) uključuje početni uslov

$$q(x, 0) = \begin{cases} q^-, & x < 0, \\ q^+, & x > 0, \end{cases} \quad (2.23)$$

gde $q^-, q^+ \in \Omega$. Ponovimo, sa $A(q) = Df(q)$ obeležena je $n \times n$ Jakobijeva matrica parcijalnih izvoda funkcije $f(q)$ u q . Tada svako glatko rešenje problema (2.1) zadovoljava

$$q_t + A(q)q_x = 0. \quad (2.24)$$

Neka je $r_i(q)$ desni i -ti karakteristični vektor matrice $A(q)$. Izvod funkcije $z = z(q)$ u pravcu vektora $r_i(q)$ je

$$r_i(q) \bullet z(q) = Dz(q)r_i(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{z(q + \varepsilon r_i(q)) - z(q)}{\varepsilon}.$$

Definicija 2.4.1 Za $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, i -to polje karakteristika je zaista nelinearno ako važi

$$r_i(q) \bullet \lambda_i(q) = D \lambda_i(q) r_i(q) \neq 0 \quad \text{za svako } q \in \Omega.$$

Definicija 2.4.2 Za $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, i -to polje karakteristika je linearno degenerisano ako važi

$$r_i(q) \bullet \lambda_i(q) = D \lambda_i(q) r_i(q) = 0 \quad \text{za svako } q \in \Omega.$$

Ako je i -to polje karakteristika zaista nelinearno, birajući pogodnu orijentaciju vektora r_i , možemo uzeti da je

$$D\lambda_i(q)r_i(q) > 0. \quad (2.25)$$

U ovoj glavi biće konstruisano slabo rešenje Rimanovog problema (2.1, 2.23) pod sledećim pretpostavkama:

1. Sistem (2.1) je strogo hiperboličan i definisan na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sa glatkom funkcijom fluksa $f(q)$.
2. Za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, i -to polje karakteristika je zaista nelinearno ili linearno degenerisano.

Takvo rešenje biće samoslično u formi $q(x, t) = \tilde{\varphi}(x/t)$, za $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ i ovo rešenje može imati prekide. Posmatraćemo tri specijalna slučaja:

1. *Centralni razređujući talasi.* Neka (2.25) važi za i -to polje karakteristika i neka je q^+ spojeno sa q^- za $s > 0$, odnosno $q^+ = R_i(s)(q^-)$. Tada se za svako $\theta \in [0, s]$ definiše funkcija

$$\theta \rightarrow \lambda_i(\theta) = \lambda_i(R_i(\theta)(q^-)). \quad (2.26)$$

Ako važi (2.25), tada duž i -te razređujuće krive takođe važi i

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_i(q)}{d\theta} &= \frac{\partial \lambda_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{d\theta} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial q_2} \frac{dq_2}{d\theta} + \dots + \frac{\partial \lambda_i}{\partial q_n} \frac{dq_n}{d\theta} \\ &= D\lambda_i(q)r_i(q) > 0. \end{aligned}$$

Funkcije u (2.26) su rastuće na intervalu $[0, s]$ zbog (2.25). One preslikavaju interval $[0, s]$ u $[\lambda_i(q^-), \lambda_i(q^+)]$. Za svako $t \geq 0$, po delovima glatka funkcija

$$q(x, t) = \tilde{\varphi}(x/t) = \begin{cases} q^-, & x < \lambda_i(q^-)t \\ R_i(\theta)(q^-), & x = \lambda_i(\theta)t, \theta \in [0, s] \\ q^+, & x > \lambda_i(q^+)t \end{cases} \quad (2.27)$$

biće slabo rešenje problema (2.1, 2.23). Ovo tvrđenje sledi iz činjenice

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|q(\cdot, t) - q(\cdot, 0)\|_{\mathbf{L}^1} = 0$$

i da je jednačina (2.24) za $x < \lambda_i(q^-)t$ i $x > \lambda_i(q^+)t$ trivijalno zadovoljena. Neka $x = \lambda_i(\theta)t$ važi za neko $\theta \in (0, s)$. Kako je q konstantna funkcija duž prave $\{(x^*, t^*) : x^* = \lambda_i(\theta)t^*\}$, tada važi

$$q_t(x, t) + \lambda_i(\theta)q_x(x, t) = 0. \quad (2.28)$$

Iz

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{dR_i(\theta)(q^-)}{d\theta} \frac{d\theta}{d\lambda_i(\theta)} \frac{d\lambda_i(\theta)}{dx} \\ &= r_i(q) \left(\frac{d\lambda_i(\theta)}{d\theta} \right)^{-1} \frac{1}{t} \end{aligned}$$

i (2.28) sledi

$$\begin{aligned} 0 = q_t + \lambda_i(\theta)q_x &= q_t + \lambda_i(\theta)r_i(q) \left(\frac{d\lambda_i(\theta)}{d\theta} \right)^{-1} \frac{1}{t} \\ &= q_t + A(q)r_i(q) \left(\frac{d\lambda_i(\theta)}{d\theta} \right)^{-1} \frac{1}{t} \\ &= q_t + A(q)q_x. \end{aligned}$$

Dakle, iz (2.28) sledi (2.24) ponovo. Rešenje u formi (2.27) nazivamo *centralni razređujući talas*. Pretpostavka da je $s > 0$ ima ključnu ulogu u ovoj konstrukciji. Za $s < 0$, funkcija (2.27) nije

dobro definisana u oblasti $x/t \in [\lambda_i(q^+), \lambda_i(q^-)]$.

2. *Udarni talasi.* Neka je i -to polje karakteristika zaista nelinearno i neka je desno stanje q^+ spojeno sa levim stanjem q^- krivom i -tog udarnog talasa, odnosno $q^+ = S_i(s)(q^-)$. Tada je $c = \lambda_i(q^-, q^+)$ brzina tog udarnog talasa i funkcija

$$q(x, t) = \begin{cases} q^-, & x < ct, \\ q^+, & x > ct, \end{cases} \quad (2.29)$$

predstavlja po delovima konstantno rešenje Rimanovog problema. Ako je $s < 0$, tada je dobijeno dopustivo rešenje (2.29) za (2.1, 2.23) i ono zadovoljava Laksove entropijske uslove. Brzina udarnog talasa je monotono rastuća duž udarnog talasa i na osnovu (2.18) važi

$$\lambda_i(q^+) < \lambda_i(q^-, q^+) < \lambda_i(q^-). \quad (2.30)$$

Ako je $s > 0$, tada važi $\lambda_i(q^-) < \lambda_i(q^+)$ i time je uslov (2.30) narušen, pa je dobijen neentropijski udarni talas.

3. *Kontaktni talas.* Neka je sada i -to polje karakteristika linearno degenerisano i neka je q^+ spojeno sa q^- razređujućom krivom $q^+ = R_i(s)(q^-)$ za neko s . Na osnovu linearne degenerisanosti, brzina λ_i je konstantna duž navedene krive (važi: $\lambda_i(q^-) = \lambda_i(q^+)$). Biraajući da je $c = \lambda_i(q^-)$, po delovima glatka funkcija (2.29) je rešenje Rimanovog problema (2.1, 2.23), dok u tački skoka važi

$$\begin{aligned} f(q^+) - f(q^-) &= \int_0^1 Df(R_i(\theta)(q^-)) r_i(R_i(\theta)(q^-)) d\theta \\ &= \lambda_i(q^-) (R_i(s)(q^-) - q^-) = \lambda_i(q^-) (q^+ - q^-). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Sada je Laksov uslov zadovoljen bez obzira na predznak parametra s , odnosno važi

$$\lambda_i(q^+) = \lambda_i(q^-, q^+) = \lambda_i(q^-)$$

i prema (2.31), krive udarnih i razređujućih talasa se poklapaju, odnosno važi

$$S_i(s)(q_0) = R_i(s)(q_0) \text{ za svako } s.$$

2.4.1 Opšte rešenje Rimanovog problema

Neka je dato q^- i neka $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Definišemo krivu

$$\Psi_i(s)(q^-) = \begin{cases} R_i(s)(q^-), & s \geq 0, \\ S_i(s)(q^-), & s < 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Ako je za neko s , $q^+ = \Psi_i(s)(q^-)$, tada se rešenje Rimanovog problema sastoji od elementarnih talasa (razređujući talasi, udarni talasi i kontaktni talasi). U suprotnom, Rimanov problem (2.1, 2.23) može se rastaviti na n Rimanovih problema

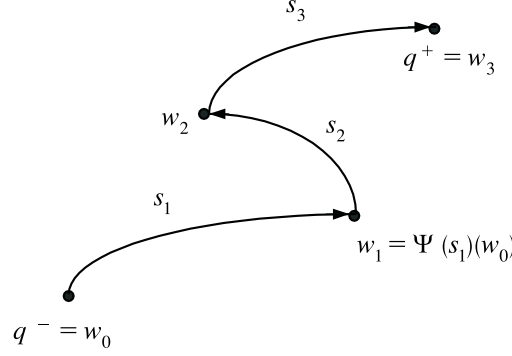
$$q_t + f(q)_x = 0, \quad q(x, 0) = \begin{cases} w_{i-1}, & x < 0, \\ w_i, & x > 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.33)$$

gde su $w_0 = q^-, w_1, \dots, w_n = q^+$ međustanja dobijena tako da se svaki par w_{i-1}, w_i može spojiti elementarnim talasom

$$w_i = \Psi_i(s_i)(w_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.34)$$

Ovaj postupak moguće je uraditi kada je q^+ dovoljno blizu q^- , jer teorema o implicitnim funkcijama obezbeđuje egzistenciju i jedinstvenost talasa amplitude s_1, s_2, \dots, s_n tako da važi (slika 2.2)

$$q^+ = (\Psi_n(s_n) \circ \dots \circ \Psi_1(s_1))(q^-).$$



Slika 2.2: Krive rešenja Rimanovog problema (2.34).

Na osnovu konstrukcije rešenja, svaki Rimanov problem ima entropijski dopustivo rešenje koje se sastoji od elementarnih talasa i -te familije karakteristika, $1 \leq i \leq n$. Preciznije:

Slučaj 1. Neka je i -to polje karakteristika zaista nelinearno i $s_i > 0$. Tada je rešenje za (2.33) centralni razređujući talas. Brzine i -tih karakteristika nalaze se u intervalu $[\lambda_i^-, \lambda_i^+]$, gde je

$$\lambda_i^- := \lambda_i(w_{i-1}), \quad \lambda_i^+ := \lambda_i(w_i). \quad (2.35)$$

Slučaj 2. Neka je i -to polje karakteristika zaista nelinearno (ili linearno degenerisano) i $s_i \leq 0$ (ili s_i proizvoljno). Tada je rešenje za (2.33) entropijski udarni talas (ili kontaktni talas) koji se kreće brzinom dobijenom iz RH uslova

$$\lambda_i^- := \lambda_i^+ := \lambda_i(w_{i-1}, w_i). \quad (2.36)$$

Sada se rešenje problema (2.1, 2.23) može konstruisati spajajući rešenja n Rimanovih problema (2.33). Naime, za s_1, s_2, \dots, s_n dovoljno malo, brzine λ_i^- i λ_i^+ definisane u (2.35, 2.36), ostaju blizu odgovarajućem karakterističnom korenu $\lambda_i(q^-)$ matrice $A(q^-)$, gde je $A(q) = Df(q)$ iz (2.3). Na osnovu osobina strogo hiperboličnih sistema i neprekidnosti karakterističnih korena, može se pretpostaviti da je n intervala $[\lambda_i^-, \lambda_i^+]$ disjunktno tako da važi

$$\lambda_1^- \leq \lambda_1^+ < \lambda_2^- \leq \lambda_2^+ < \dots < \lambda_n^- \leq \lambda_n^+. \quad (2.37)$$

Tada je $q : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ po delovima glatko rešenje problema (2.1, 2.23) u obliku

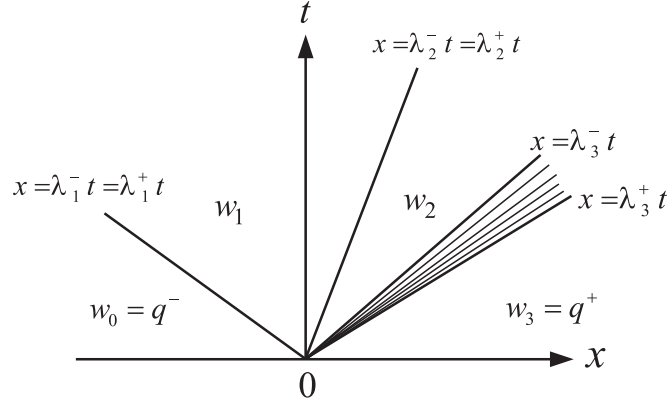
$$q(x, t) = \begin{cases} q^- = w_0, & \frac{x}{t} \in (-\infty, \lambda_1^-), \\ w_i, & \frac{x}{t} \in (\lambda_i^+, \lambda_{i+1}^-), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ R_i(\theta)(w_{i-1}), & \frac{x}{t} = \lambda_i(R_i(\theta)(w_{i-1})) \in [\lambda_i^-, \lambda_i^+], \\ q^+ = w_n, & \frac{x}{t} \in (\lambda_n^+, \infty). \end{cases}$$

dobro definisano i jedinstveno ([4], poglavlje 5.3).

Na slici 2.3 predstavljeno je tipično rešenje za 3×3 sistem, pretpostavljajući da je prvo i treće polje karakteristika zaista nelinearno, a da je drugo linearno degenerisano. Za rešenje kao na slici 2.3 važi da je $s_1 < 0$, $s_2 \neq 0$ i $s_3 > 0$. U tom slučaju, rešenje se sastoji od udarnog talasa prve familije koji putuje brzinom $\lambda_1^\pm = \lambda_1(w_0, w_1)$, kontaktnog talasa druge familije koji putuje brzinom $\lambda_2^\pm = \lambda_2(w_1) = \lambda_2(w_2)$. Unutar dela ravni gde je $x/t \in [\lambda_3^-, \lambda_3^+] = [\lambda_3(w_2), \lambda_3(w_3)]$, rešenje se sastoji od centralnog razređujućeg talasa treće familije.

2.5 Rimanove invarijante

Neka je dat sistem (2.1) uz pretpostavku da je strogo hiperboličan. Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $r_k = (r_k^1, r_k^2, \dots, r_k^n)^T$ desni karakteristični vektor matrice $A = Df(q)$. Koristeći oznake kao u poglavlju 2.4 definišemo k -Rimanovu invarijantu na sledeći način.

Slika 2.3: Tipično rešenje za 3×3 sistem.

Definicija 2.5.1 k -Rimanova invarijanta je glatka funkcija $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takva da za $q \in \Omega$ važi

$$Da(q) r_k(q) = \nabla a(q) \cdot r_k = 0.$$

Na osnovu definicije 2.5.1 važi

$$0 = \frac{\partial a}{\partial q_1} r_k^1 + \frac{\partial a}{\partial q_2} r_k^2 + \dots + \frac{\partial a}{\partial q_n} r_k^n$$

što se svodi na sistem $n - 1$ ODJ

$$\frac{dq_1}{r_k^1} = \frac{dq_2}{r_k^2} = \dots = \frac{dq_n}{r_k^n}$$

Rešenje tog sistema je $a = F(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ za proizvoljnu funkciju F i $c_i = c_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Zaključujemo da postoji $n - 1$ funkcionalno nezavisna k -Rimanova invarijanta koje ćemo obeležiti sa $a_{k,i} = c_i$ za $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Primitimo da ako uvedemo parametar σ tako da važi $d\sigma = dq_1/r_k^1$, tada dobijamo sistem

$$\frac{dq_i}{d\sigma} = r_k^i(q), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

što je ekvivalentno sa (2.14) za $\sigma = t$. Zaključujemo da je određivanje Rimanovih invarijanti ekvivalentno određivanju razređujućih talasa.

Lema 2.5.2 ([35]) Postoji tačno $n - 1$ k -Rimanova invarijanta čiji su gradijenti linearno nezavisni u Ω .

Dokaz. Neka su $a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n-1}$ k -Rimanove invarijante i neka je $R_k(\cdot) = D(\cdot)r_k$ definisano sa

$$R_k(a) = \sum_i r_k^i \frac{\partial a}{\partial q_i}.$$

U koordinatnom sistemu $(Z_1, a_{k,1}, \dots, a_{k,n-1})$, gde je $\frac{\partial}{\partial Z_1}(\cdot) = R_k(\cdot)$, gradijenti $\nabla a_{k,j}$ su linearno nezavisni za $j = 1, 2, \dots, n - 1$ jer je

$$\begin{aligned} \nabla a_{k,j} &= (Da_{k,j})^T = \left(R_k(a_{k,j}), \frac{\partial a_{k,j}}{\partial a_{k,1}}, \dots, \frac{\partial a_{k,j}}{\partial a_{k,j-1}}, \frac{\partial a_{k,j}}{\partial a_{k,j}}, \frac{\partial a_{k,j}}{\partial a_{k,j+1}}, \dots, \frac{\partial a_{k,j}}{\partial a_{k,n-1}} \right)^T \\ &= (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \end{aligned}$$

U prethodnoj jednakosti, jedinica sa nalazi na $(j + 1)$ -om mestu. \square

Rimanove invarijante su korisne kod sistema koji imaju sledeću osobinu.

Definicija 2.5.3 *Kažemo da je sistem (2.1) snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti ako postoji n skalarnih funkcija (a_1, a_2, \dots, a_n) u Ω , tako da je a_i k -Rimanova invarijanta za svako $i, k = 1, 2, \dots, n, i \neq k$.*

Kako smo sa $a_{k,1}, \dots, a_{k,n-1}$ obeležili $(n - 1)$ k -Rimanovu invarijantu, u svetlu definicije 2.5.3, k -Rimanove invarijante su

$$a_1 = a_{k,1}, \dots, a_{k-1} = a_{k,k-1}, a_{k+1} = a_{k,k}, \dots, a_n = a_{k,n-1}.$$

Na osnovu definicija 2.5.1 i 2.5.3 sledi naredna teorema.

Teorema 2.5.4 ([9]) *Funkcije (a_1, a_2, \dots, a_n) čine koordinatni sistem Rimanovih invarijanti za sistem (2.1) ako i samo ako važi*

$$Da_i(q) r_k(q) \begin{cases} = 0, & i \neq k, \\ \neq 0, & i = k, \end{cases} \quad (2.38)$$

odnosno, ako i samo ako za $i = 1, 2, \dots, n$, $Da_i(q)$ je levi karakteristični vektor matrice $Df(q)$ kome odgovara karakteristični koren $\lambda_i(q)$.

Ako je sistem $q_t + Df(q) q_x = 0$ snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti i ako ga pomnožimo sa leve strane sa $Da_i(q)$ dobijamo

$$0 = Da_i(q) q_t + Da_i(q) Df(q) q_x = Da_i(q) q_t + Da_i(q) \lambda_i q_x = \partial_t a_i(q) + \lambda_i \partial_x a_i(q), \quad (2.39)$$

za $i = 1, 2, \dots, n$ (korišćeno je da je $Da_i(q)$ levi karakteristični vektor matrice $Df(q)$ kome odgovara karakteristični koren $\lambda_i(q)$, pa je $Da_i(q) Df(q) = Da_i(q) \lambda_i$). Poslednji izraz u (2.39) je izvod a_i u pravcu i -te karakteristike, a to znači da je a_i konstantno duž i -te karakteristike. Dakle, sistem $q_t + Df(q) q_x = 0$ svodi se na dijagonalni sistem (2.39). Važi sledeće teorema.

Teorema 2.5.5 ([10]) *Pretpostavimo da (a_1, a_2, \dots, a_n) formira koordinatni sistem Rimanovih invarijanti za sistem (2.1). Tada za $i = 1, 2, \dots, n$, a_i ostaje konstantno duž i -te karakteristike.*

Primetimo da svaki hiperbolični sistem koji se sastoji od dva zakona održanja jeste snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti ([9], poglavlje 7.3). U slučaju kada hiperbolični sistem ima tri i više zakona održanja, koordinatni sistem Rimanovih invarijanti će postojati samo u slučaju kada sistem (2.38) od $n(n - 1)$ jednačine sa n nepoznatih (a_1, a_2, \dots, a_n) , ima rešenje. Naime, da bi zakon održanja bio snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti, mora važiti (videti [9], poglavlje 7.3)

$$[r_k, r_j] := Dr_k r_j - Dr_j r_k = \alpha_k^j r_k - \alpha_j^k r_j, \quad j, k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.40)$$

gde su α_k^j skalari za $j, k = 1, 2, \dots, n$ i gde je

$$Dr_k r_j = \begin{bmatrix} Dr_k^1 r_j \\ Dr_k^2 r_j \\ \vdots \\ Dr_k^n r_j \end{bmatrix}.$$

Kada postoji koordinatni sistem Rimanovih invarijanti (a_1, a_2, \dots, a_n) za (2.1), možemo normalizovati karakteristične vektore r_1, r_2, \dots, r_n tako da (2.38) postaje

$$Da_i(q) r_k(q) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \quad (2.41)$$

Izvedimo sada jednakost potrebnu u nastavku. Naime, kako je $Da_i = (\partial a_i / \partial q_1, \dots, \partial a_i / \partial q_n)$, tada za $i, k = 1, 2, \dots, n$ važi

$$M := Da_i r_k = \sum_{l=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial q_l} r_k^l \Rightarrow D(Da_i r_k) = \left(\frac{\partial M}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial q_n} \right),$$

gde je

$$\frac{\partial M}{\partial q_s} = \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial^2 a_i}{\partial q_l \partial q_s} r_k^l + \frac{\partial a_i}{\partial q_l} \frac{\partial r_k^l}{\partial q_s} \right), \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Zato je za $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ tačno

$$\begin{aligned} D(Da_i r_k) r_j &= \sum_{s=1}^n \frac{\partial M}{\partial q_s} r_j^s = \sum_{s=1}^n r_j^s \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial^2 a_i}{\partial q_l \partial q_s} r_k^l + \frac{\partial a_i}{\partial q_l} \frac{\partial r_k^l}{\partial q_s} \right) \\ &= \sum_{s=1}^n r_j^s \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_l \partial q_s} r_k^l + \sum_{s=1}^n r_j^s \sum_{l=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial q_l} \frac{\partial r_k^l}{\partial q_s} \\ &= r_j^T D^2 a_i r_k + Da_i Dr_k r_j, \end{aligned} \tag{2.42}$$

gde je

$$D^2 a_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_n \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 a_i}{\partial q_n^2} \end{bmatrix}.$$

Sada na osnovu (2.41) važi $D(Da_i r_k) = 0$, pa iz (2.42) sledi $Da_i Dr_k r_j = -r_j^T D^2 a_i r_k$ za svako $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Tada je i $Da_i Dr_j r_k = -r_k^T D^2 a_i r_j$, a kako se jednostavno može pokazati da važi $r_j^T D^2 a_i r_k = r_k^T D^2 a_i r_j$, dobijamo da je

$$Da_i Dr_k r_j - Da_i Dr_j r_k = 0 \Rightarrow Da_i (Dr_k r_j - Dr_j r_k) = 0,$$

za svako $i = 1, 2, \dots, n$. Za $j = k$ jasno je da važi $[r_k, r_k] = 0$. Za $i = j \neq k$, a na osnovu (2.40, 2.41), imaćemo

$$\begin{aligned} 0 &= Da_j (Dr_k r_j - Dr_j r_k) \\ &= Da_j (\alpha_k^j r_k - \alpha_j^k r_j) \\ &= \alpha_k^j Da_j r_k - \alpha_j^k Da_j r_j \\ &= -\alpha_j^k. \end{aligned}$$

Analogno, za $i = k \neq j$, a koristeći (2.40, 2.41), važiće

$$\begin{aligned} 0 &= Da_k (Dr_k r_j - Dr_j r_k) \\ &= Da_k (\alpha_k^j r_k - \alpha_j^k r_j) \\ &= \alpha_k^j Da_k r_k - \alpha_j^k Da_k r_j \\ &= \alpha_k^j. \end{aligned}$$

Zaključujemo da iz $Da_i (Dr_k r_j - Dr_j r_k) = 0$, za svako $i = 1, 2, \dots, n$, sledi

$$0 = Dr_k r_j - Dr_j r_k = [r_k, r_j]. \tag{2.43}$$

za svako $j, k = 1, 2, \dots, n$. Ova činjenica će nam biti kasnije potrebna.

Definicija 2.5.6 Klasično rešenje $q \in \mathcal{C}^1$ jednačine (2.1) na nekom domenu Ω naziva se k -ti razređujući talas ako q ostaje konstantno duž k -te karakteristike.

Na osnovu definicije 2.5.6, q mora zadovoljavati (2.1) jer je rešenje te jednačine, a mora zadovoljavati i

$$q_t(x, t) + \lambda_k(q(x, t)) q_x(x, t) = 0, \quad (2.44)$$

jer je konstantno duž k -te karakteristike. Sada iz (2.1, 2.44) sledi da je $\lambda_k(q) q_x = Df(q) q_x$, odnosno

$$q_x(x, t) = b(x, t) r_k(q(x, t)) \quad (2.45)$$

i

$$q_t(x, t) = -b(x, t) \lambda_k(q(x, t)) r_k(q(x, t)), \quad (2.46)$$

gde je $b(x, t)$ skalarna funkcija, a r_k odgovarajući k -ti karakteristični vektor. Koristeći Rimanove invarijante dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 2.5.7 ([9]) *Klasično rešenje $q \in C^1$ jednačine (2.1) na nekom domenu Ω je k -ti razređujući talas ako i samo ako je svaka k -Rimanova invarijanta konstantna u Ω duž k -te karakteristike.*

Dokaz. Za bilo koju k -Rimanovu invarijantu $a(q(x, t))$ važi $a_x = Da q_x$ i $a_t = Da q_t$. Ako je q i -ti razređujući talas, tada je

$$\begin{aligned} a_x &= Da q_x = Da b r_k = b Da r_k = 0, \\ a_t &= Da q_t = Da (-b) \lambda_k r_k = (-b) \lambda_k Da r_k = 0, \end{aligned}$$

na osnovu (2.45, 2.46) i zbog toga što je a k -Rimanova invarijanta. Dakle, a je konstantno duž k -te karakteristike jer važi $a_t + \lambda_k a_x = 0$. Pokažimo da važi teorema u suprotnom smeru. Neka je a k -Rimanova invarijanta takva da je $a_t = a_x = 0$. Tada je i $a_t + \lambda_k a_x = 0$. Kako je $Da r_k = 0$ i $a_x = Da q_x = 0$, tada mora važiti (2.45). Ako sada zamenimo $q_x = b r_k(q)$ u $q_t + Df(q) q_x = 0$, dobijamo $q_t = -Df(q) b r_k(q) = -b \lambda_k(q) r_k(q)$, odnosno važi (2.46), pa je time q k -ti razređujući talas. \square

Lema 2.5.8 ([35]) *Neka je sa $d/dk = \partial/\partial t + \lambda_k \partial/\partial x$ obeležen izvod u pravcu k -te karakteristike, odnosno u pravcu vektora $(\lambda_k, 1)$. Tada je q klasično rešenje sistema (2.1) ako i samo ako važi $l_k dq/dk = 0$ za svako $k = 1, 2, \dots, n$, gde l_k predstavlja k -ti levi karakteristični vektor matrice $Df(q)$, a λ_k odgovarajući karakteristični koren.*

Dokaz. Funkcija q je klasično rešenje sistema (2.1) ako i samo ako važi $q_t + Df(q) q_x = 0$. Ako pomnožimo tu jednačinu sa leve strane sa l_k , dobijamo

$$0 = l_k(q_t + Df(q) q_x) = l_k q_t + l_k Df(q) q_x = l_k q_t + l_k \lambda_k q_x = l_k(q_t + \lambda_k q_x) = l_k \frac{dq}{dk}.$$

\square

Teorema 2.5.9 ([35]) *Neka je q k -ti razređujući talas na nekom domenu Ω . Tada su karakteristike k -tog polja $dx/dt = \lambda_k(q(x, t))$ prave linije duž kojih je q konstantno.*

Dokaz. Na osnovu prethodne leme, važi

$$l_k \frac{dq}{dk} = 0. \quad (2.47)$$

Dalje, ako su $a_{k,1}, \dots, a_{k,n-1}$ k -Rimanove invarijante, tada su one konstantne u Ω duž k -te karakteristike. Zato važi

$$0 = \frac{da_{k,j}}{dk} = Da_{k,j} \frac{dq}{dk}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Prethodne jednačine, zajedno sa (2.47) daju

$$\begin{bmatrix} l_k \\ Da_{k,1} \\ Da_{k,2} \\ \vdots \\ Da_{k,n-1} \end{bmatrix} \frac{dq}{dk} = 0.$$

Pokažimo da su vektori $l_k, Da_{k,1}, \dots, Da_{k,n-1}$ linearno nezavisni. To će implicirati da je prethodna $(n \times n)$ matrica regularna, pa će jedino rešenje posmatranog sistema biti $dq/dk = 0$. To bi dalje značilo da je q konstantno u pravcu k -te karakteristike i da je k -ta karakterisitka prava linija. Pomnožimo jednakost $\alpha_1 l_k + \alpha_2 Da_{k,1} + \dots + \alpha_n Da_{k,n-1} = 0$ sa desne strane sa r_k , gde su α_i , $i = 1, \dots, n$, realni brojevi koje treba odrediti. Dobijamo $0 = \alpha_1 l_k r_k + \alpha_2 Da_{k,1} r_k + \dots + \alpha_n Da_{k,n-1} r_k = \alpha_1 l_k r_k$ na osnovu definicije 2.5.1. Kako je $l_k r_k \neq 0$ sledi da je $\alpha_1 = 0$. Tada dobijamo jednačinu $\alpha_2 Da_{k,1} + \dots + \alpha_n Da_{k,n-1} = 0$, što je tačno samo za $\alpha_i = 0$, $i = 2, \dots, n$ jer su $Da_{k,1}, \dots, Da_{k,n-1}$ linearno nezavisni na osnovu leme 2.5.2. \square

Definicija 2.5.10 *Centralni razređujući talas sa centrom u (x_0, t_0) je razređujući talas koji zavisi samo od $(x - x_0)/(t - t_0)$.*

Ponovimo da je k -to polje karakteristika je zaista nelinearno u domenu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ako je $D\lambda_k r_k \neq 0$ u Ω . Tada se r_k može normalizovati tako da važi $D\lambda_k r_k = 1$, što ćemo i pretpostaviti nadalje. U skalarnom slučaju se $q_t + f(q)_x = 0$ svodi na $q_t + f'(q)q_x = 0$, pa ako je karakteristični vektor $r = 1$, tada je karakteristični koren $\lambda = f'(q)$. Znači $D\lambda r = f''(q)$, te konveksnost ili konkavnost funkcije fluksa određuju kada je polje karakteristika zaista nelinearno, odnosno linearno degenerisano.

Postavlja se pitanje kako odabrati stanja q koja mogu biti spojena sa datim stanjem q_L preko k -tog centralnog razređujućeg talasa. Odgovor nam daje sledeća lema.

Lema 2.5.11 ([35]) *Pretpostavimo da je k -to polje karakteristika zaista nelinearno na Ω i neka $q_L \in \Omega$. Tada za s dovoljno malo, postoji $q(s)$ koje može biti spojeno sa q_L , sa desne strane, k -tim centralnim razređujućim talasom.*

Dokaz. Neka je $v(s)$ rešenje problema

$$\frac{dv}{ds} = r_k(v(s)), \quad v(\lambda_k(q_L)) = q_L, \quad s > \lambda_k(q_L).$$

Funkcija $v(s)$ postoji na intervalu $\lambda_k(q_L) < s < \lambda_k(q_L) + \tilde{a}$, za dovoljno malo $\tilde{a} > 0$. Takođe važi

$$\frac{d}{ds} \lambda_k(v(s)) = D\lambda_k \frac{dv}{ds} = D\lambda_k r_k = 1.$$

Zbog toga je $\lambda_k(v(s)) = s$, jer je $v(\lambda_k(q_L)) = q_L$. Neka je $q(x, t)$ definisano sa

$$q(x, t) = v(x/t), \quad \lambda_k(q_L) < x/t < \lambda_k(q_L) + \tilde{a}.$$

Tada, ako važi $\lambda_k(q_L) < x/t < \lambda_k(q_L) + \tilde{a}$, onda za k -Rimanovu invarijantu a i za $\xi = x/t$ imamo

$$\frac{da}{d\xi} = Da \frac{dq}{d\xi} = Da r_k = 0,$$

pa je a konstantno u posmatranom regionu. Kako je $\lambda_k(v(s)) = s > \lambda_k(q_L)$, tada λ_k raste duž razređujućeg talasa q . Kako je q glatka funkcija (jer je razređujući talas), važi

$$\begin{aligned} q_t + Df(q)q_x &= -\frac{x}{t^2} \frac{dv}{ds} + \frac{Df(v)(dv/ds)}{t} \\ &= -\frac{x}{t^2} r_k(v) + \frac{Df(v)r_k(v)}{t} \\ &= -\frac{x}{t^2} r_k(v) + \frac{\lambda_k(v)r_k(v)}{t} \\ &= -\frac{x}{t^2} r_k(v) + \frac{(x/t)r_k(v)}{t} = 0, \end{aligned}$$

te je q rešenje zakona održanja. \square

U nastavku će nam biti potrebne sledeće oznake. Ako je r_i desni karakteristični vektor, a λ_i odgovarajući karakteristični koren matrice $A = Df(q)$, tada je

$$D^2\lambda_i(r_i, r_i) := r_i^T H(\lambda_i) r_i \in \mathbb{R}$$

i

$$D^2f(r_i, r_i) := \begin{bmatrix} r_i^T H(f_1(q)) r_i \\ r_i^T H(f_2(q)) r_i \\ \vdots \\ r_i^T H(f_n(q)) r_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.48)$$

Sa $H(h(q))$ obeležavamo (Hessian) matricu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 h}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial q_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 h}{\partial q_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial q_n \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial q_n^2} \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.5.12 ([35]) *Neka je k -to polje karakteristika sistema (2.1) zaista nelinearno nad Ω i neka je $D\lambda_k r_k = 1$. Ako je $q_L \in \Omega$, tada postoji jednoparametarska familija stanja $q = q(\bar{\varepsilon})$, $0 < \bar{\varepsilon} < \tilde{a}$, $q(0) = q_L$, koja može biti spojena sa q_L sa desne strane k -tim centralnim razređujućim talasom. Parametrizacija je tako izabrana da važi $\dot{q} = r_k$ i $\ddot{q} = \dot{r}_k$.*

Dokaz. Kako su k -Rimanove invarijante $a_{k,i}$ konstante duž k -tog vektorskog polja, tada je $a_{k,i}(q(s)) = a_{k,i}(q_L)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Promenimo parametrizaciju koristeći novi parametar $\bar{\varepsilon}$ za koji će važiti $\lambda_k(q) = \lambda_k(q_L) + \bar{\varepsilon}$. Sada treba rešiti n jednačina po $q(\bar{\varepsilon})$, odnosno, treba naći q tako da je $F(q) = 0$, gde je $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oblika

$$F(q) = (a_{k,1}(q) - a_{k,1}(q_L), \dots, a_{k,n-1}(q) - a_{k,n-1}(q_L), \lambda_k(q) - \lambda_k(q_L) - \bar{\varepsilon}), \quad q \in \mathbb{R}^n.$$

Kako je Jakobijeva matrica funkcije F , $DF = (Da_{k,1}, \dots, Da_{k,n-1}, D\lambda_k)^T$ regularna, jednačina $F = 0$ definiše krivu $q = q(\bar{\varepsilon}; q_L)$ koja zavisi od q_L za dovoljno malo $|\bar{\varepsilon}|$ (posledica teoreme o implicitnim funkcijama). Ova kriva je baš kriva $v(s)$ iz leme 2.5.11 ali sa drugačijom parametrizacijom (sada je za parametrizaciju korišćen parametar $\bar{\varepsilon}$). Kako je $d\lambda_k/d\bar{\varepsilon} = 1$, tada će uslov $\lambda_k(q_L) < \lambda_k(q(\bar{\varepsilon}))$ biti zadovoljen samo za $\bar{\varepsilon} > 0$. Za svaku k -Rimanovu invarijantu a , kao u lemi 2.5.11, važi

$$0 = \frac{da}{d\bar{\varepsilon}} = Da \frac{dq}{d\bar{\varepsilon}}, \quad (2.49)$$

tako da se $dq/d\bar{\varepsilon}$ može zapisati kao $dq/d\bar{\varepsilon} = \varpi r_k$, za neku konsantu ϖ . Ali $\varpi = 1$ jer je

$$1 = \frac{d\lambda_k}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{d\lambda_k}{dq} \frac{dq}{d\bar{\varepsilon}} = D\lambda_k \frac{dq}{d\bar{\varepsilon}} = \varpi D\lambda_k r_k = \varpi .$$

Ovde smo koristili da je $D\lambda_k r_k = 1$. Zaključujemo da važi

$$\dot{q} := \frac{dq}{d\bar{\varepsilon}} = r_k . \quad (2.50)$$

Ako se sada diferencira (2.49) po $\bar{\varepsilon}$, na osnovu (2.50) dobija se

$$0 = Da \ddot{q} + \dot{D}a \dot{q} = Da \ddot{q} + \dot{D}a r_k . \quad (2.51)$$

Kako važi (2.49, 2.50), tada važi i $0 = (D\dot{a} r_k) = Da \dot{r}_k + \dot{D}a r_k$, pa zajedno sa (2.51) imamo $Da (\ddot{q} - \dot{r}_k) = 0$. Sledi da postoji konstanta ϱ tako da je $\ddot{q} - \dot{r}_k = \varrho r_k$. Ali, kako je $d\lambda_k/d\bar{\varepsilon} = 1$, imamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 \lambda_k}{d\bar{\varepsilon}^2} = \frac{d}{d\bar{\varepsilon}} \left(\frac{d\lambda_k}{d\bar{\varepsilon}} \right) = \frac{d}{d\bar{\varepsilon}} \left(\frac{d\lambda_k}{dq} \frac{dq}{d\bar{\varepsilon}} \right) = \frac{d}{d\bar{\varepsilon}} \left(D\lambda_k \frac{dq}{d\bar{\varepsilon}} \right) \\ &= \frac{d}{d\bar{\varepsilon}} (D\lambda_k \dot{q}) = D^2 \lambda_k (r_k, r_k) + D\lambda_k \ddot{q} = D^2 \lambda_k (r_k, r_k) + D\lambda_k (\dot{r}_k + \varrho r_k) \\ &= D^2 \lambda_k (r_k, r_k) + D\lambda_k \dot{r}_k + \varrho D\lambda_k r_k = D^2 \lambda_k (r_k, r_k) + D\lambda_k \dot{r}_k + \varrho \\ &= (D\dot{\lambda}_k r_k) + \varrho = \dot{1} + \varrho = \varrho . \end{aligned}$$

Pošto je $\varrho = 0$, sledi

$$\ddot{q} = \dot{r}_k . \quad (2.52)$$

□

Neka je sada q takvo rešenje problema (2.1) koje se sastoji od udarnih talasa. Tada mora važiti

$$c (q_R - q_L) = f(q_R) - f(q_L) , \quad (2.53)$$

gde je c brzina udarnog talasa. Podsetimo se, diskontinuitet koji zadovoljava (2.53) naziva se k -udarni talas ako važi

$$\begin{aligned} \lambda_{k-1}(q_L) < c < \lambda_k(q_L) < \lambda_{k+1}(q_L) , \\ \lambda_{k-1}(q_R) < \lambda_k(q_R) < c < \lambda_{k+1}(q_R) . \end{aligned} \quad (2.54)$$

Na primer, u slučaju 2×2 sistema, ako sa c_k obeležimo brzinu k -tog udarnog talasa $k = 1, 2$, tada brzina udarnog talasa prve familije mora zadovoljavati

$$c_1 < \lambda_1(q_L) < \lambda_2(q_L) \quad \text{i} \quad \lambda_1(q_R) < c_1 < \lambda_2(q_R) ,$$

dok za brzinu c_2 udarnog talasa druge familije mora važiti

$$\lambda_1(q_L) < c_2 < \lambda_2(q_L) \quad \text{i} \quad \lambda_1(q_R) < \lambda_2(q_R) < c_2 .$$

Kako postoji kriva $q = q(\bar{\varepsilon}; q_L)$ koja spaja levo stanje q_L i desno stanje q_R za dovoljno malo $\bar{\varepsilon}$, u (2.53) uvodimo desno stanje tako da je $q_R = q_k(\bar{\varepsilon})$. Nakon diferenciranja (2.53) dva puta po $\bar{\varepsilon}$ dobija se

$$c \dot{q}_k + \dot{c} (q_k - q_L) = Df \dot{q}_k \quad (2.55)$$

i

$$c \ddot{q}_k + 2\dot{c} \dot{q}_k + \ddot{c} (q_k - q_L) = Df \ddot{q}_k + \dot{D}f \dot{q}_k . \quad (2.56)$$

Ako posmatramo (2.55) u $\bar{\varepsilon} = 0$, a kako je $q(0) = q_L$, tada je

$$c(0) \dot{q}_k(0) = Df \dot{q}_k(0),$$

pa je $c(0) = \lambda_k(0) = \lambda_k(q_L)$ i postoji konstanta ϖ tako da važi $\dot{q}_k(0) = \varpi r_k(0)$. Postavlja se pitanje da li se može uvesti nova parametrizacija tako da je konstanta ϖ jednaka 1, kao u prethodnoj teoremi. Neka je sada $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\nu)$, gde je ν novi parametar. Tada važi

$$\frac{dq_k}{d\nu}(\nu) = \frac{dq_k}{d\bar{\varepsilon}}(\nu) \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\nu}(\nu),$$

pa za $\nu = 0$ imamo

$$\frac{dq_k}{d\nu}(0) = \frac{dq_k}{d\bar{\varepsilon}}(0) \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\nu}(0).$$

Da bismo dobili da je $\varpi = 1$, odnosno da važi

$$\dot{q}_k(0) = r_k(0), \quad (2.57)$$

moramo naći $\bar{\varepsilon}(\nu)$ tako da važi $\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\nu}(0) = 1$ i da važi $\nu = 0 \Rightarrow \bar{\varepsilon} = 0$. Jedna mogućnost je

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\nu}(\nu) = 1 + \zeta\nu \Rightarrow \bar{\varepsilon}(\nu) = \nu + \frac{1}{2}\zeta\nu^2 \quad (2.58)$$

za neko $\zeta \neq 0$.

Neka je sada data jednačina $Df(q)r_k = \lambda_k r_k$. Za $q = q_k(\bar{\varepsilon})$, nakon diferenciranja po $\bar{\varepsilon}$, dobijamo

$$D^2 f(r_k, r_k) + Df \dot{r}_k = \dot{\lambda}_k r_k + \lambda_k \dot{r}_k,$$

gde je $D^2 f(r_k, r_k)$ definisano u (2.48). Kako je $\dot{\lambda}_k = D\lambda_k r_k = 1$ iz dokaza prethodne teoreme, važi

$$D^2 f(r_k, r_k) + Df \dot{r}_k = r_k + \lambda_k \dot{r}_k. \quad (2.59)$$

Koristeći (2.56) u $\bar{\varepsilon} = 0$ i (2.57) dobijamo

$$\begin{aligned} c(0)\ddot{q}_k(0) + 2\dot{c}(0)\dot{q}_k(0) &= Df \ddot{q}_k(0) + \dot{D}f r_k(0) \\ \Rightarrow \lambda_k(0)\ddot{q}_k(0) + 2\dot{c}(0)\dot{q}_k(0) &= Df \ddot{q}_k(0) + D^2 f(r_k(0), r_k(0)) \\ \Rightarrow \lambda_k(0)\ddot{q}_k(0) + 2\dot{c}(0)r_k(0) &= Df \ddot{q}_k(0) + D^2 f(r_k(0), r_k(0)) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ako se (2.59) i poslednja jednakost u (2.60) pomnože sa leve strane sa $l_k = l_k(q_L)$, tada dobijamo

$$\begin{aligned} l_k D^2 f(r_k, r_k) + l_k Df \dot{r}_k &= l_k r_k + \lambda_k l_k \dot{r}_k, \\ \lambda_k l_k \ddot{q}_k + 2\dot{c} l_k r_k &= l_k Df \ddot{q}_k + l_k D^2 f(r_k, r_k) \end{aligned} \quad (2.61)$$

redom. Kako je $l_k r_k = 1$, nakon sabiranja jednakosti u (2.61), imamo

$$\begin{aligned} \lambda_k l_k \ddot{q}_k + 2\dot{c} + l_k Df \dot{r}_k &= 1 + \lambda_k l_k \dot{r}_k + l_k Df \ddot{q}_k \\ \Rightarrow l_k Df(\dot{r}_k - \ddot{q}_k) + 2\dot{c} &= 1 + \lambda_k l_k(\dot{r}_k - \ddot{q}_k) \\ \Rightarrow (l_k Df - \lambda_k l_k)(\dot{r}_k - \ddot{q}_k) + 2\dot{c} &= 1 \\ \Rightarrow 2\dot{c} &= 1 \end{aligned}$$

Zaključujemo da važi

$$\dot{c}(0) = \frac{1}{2}. \quad (2.62)$$

Ako se sada (2.59) doda poslednjoj jednakosti u (2.60), dobija se

$$\begin{aligned}\lambda_k \ddot{q}_k + 2\dot{c} r_k + Df \dot{r}_k &= r_k + \lambda_k \dot{r}_k + Df \dot{q}_k \\ \Rightarrow Df (\ddot{q}_k - \dot{r}_k) &= \lambda_k (\ddot{q}_k - \dot{r}_k).\end{aligned}$$

Zaključujemo da postoji konstanta ϱ tako da važi $\ddot{q}_k - \dot{r}_k = \varrho r_k$ u $\bar{\varepsilon} = 0$. Birajući parametrizaciju (2.58) tako da važi

$$\frac{d^2 q_k}{d\nu^2}(0) - \frac{dr_k}{d\nu}(0) = \zeta r_k(0),$$

dobijamo da je

$$\frac{d^2 q_k}{d\bar{\varepsilon}^2}(0) \left(\frac{d\bar{\varepsilon}}{d\nu}(0) \right)^2 + \frac{dq_k}{d\bar{\varepsilon}}(0) \frac{d^2 \bar{\varepsilon}}{d\nu^2}(0) - \frac{dr_k}{d\bar{\varepsilon}}(0) \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\nu}(0) = \zeta r_k(0),$$

odnosno

$$\ddot{q}_k(0) + \zeta r_k(0) - \dot{r}_k(0) = \zeta r_k(0)$$

i

$$\varrho r_k(0) + \zeta r_k(0) = \zeta r_k(0)$$

pa je $\varrho = 0$ i

$$\ddot{q}_k(0) = \dot{r}_k(0). \quad (2.63)$$

Ovim je dokazana sledeća teorema.

Teorema 2.5.13 ([35]) *Duž k -tog udarnog talasa, ako je polje karakteristika zaista nelinearno, može se izabrati parametrizacija tako da je $\dot{q}_k(0) = r_k$ i $\ddot{q}_k(0) = \dot{r}_k$, gde je $r_k = r_k(q_L)$. Sa ovakvom parametrizacijom važi i $c(0) = \lambda_k(q_L)$ i $\dot{c}(0) = 1/2$.*

Pokažimo da je tako dobijen k -ti udarni talas dopustiv.

Teorema 2.5.14 ([35]) *Nejednakosti (2.54) važe duž krive $q = q_k(\bar{\varepsilon})$ ako i samo ako je $\bar{\varepsilon} < 0$.*

Dokaz. Neka je $\lambda_j(\bar{\varepsilon}) = \lambda_j(q_k(\bar{\varepsilon}))$ i $c(\bar{\varepsilon}) = c(q_k(\bar{\varepsilon}))$. Tada se (2.54) može napisati kao

$$\begin{aligned}(a) \quad \lambda_{k-1}(0) &< c(\bar{\varepsilon}) < \lambda_k(0), \\ (b) \quad \lambda_k(\bar{\varepsilon}) &< c(\bar{\varepsilon}) < \lambda_{k+1}(\bar{\varepsilon}).\end{aligned}$$

Neka je $b(\bar{\varepsilon}) = \lambda_k(\bar{\varepsilon}) - c(\bar{\varepsilon})$. Tada je $b(0) = 0$, $\dot{b}(0) = D\lambda_k r_k - \dot{c}(0) = 1 - 1/2 > 0$. Dakle, ako važi (b), onda je $\bar{\varepsilon} < 0$. S druge strane, ako je $\bar{\varepsilon} < 0$, tada je $b(\bar{\varepsilon}) < 0$ i $\lambda_k(\bar{\varepsilon}) < c(\bar{\varepsilon})$ za $\bar{\varepsilon} < 0$. Takođe ako je $\dot{c}(0) = 1/2$ i $\lambda_k(0) = c(0)$, tada je $\lambda_k(0) > c(\bar{\varepsilon})$. Kako važi $c(\bar{\varepsilon}) \rightarrow \lambda_k(0) > \lambda_{k-1}(0)$ kada $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$, tada važi i $c(\bar{\varepsilon}) > \lambda_{k-1}(0)$ za malo $\bar{\varepsilon}$. Konačno $\lambda_{k+1}(0) > \lambda_k(0) = c(0)$ daje $\lambda_{k+1}(\bar{\varepsilon}) > c(\bar{\varepsilon})$ za malo $\bar{\varepsilon}$. Teorema je ovim dokazana. \square

Neka sada važi (2.50, 2.52, 2.57, 2.62, 2.63) i neka je Ψ_i definisano kao u (2.32). Da bismo rešili Rimanov problem, treba odrediti n -torku $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_n) \in \mathbb{R}^n$, za koju će važiti: $q_0 = q_L$, $q_i = \Psi_i(\tilde{\varepsilon}_i)(q_{i-1})$ za $i = 1, 2, \dots, n$ i $q_n = q_R$. Na osnovu toga definišemo funkciju

$$\hat{\Omega}(\tilde{\varepsilon}; \bar{q}) = (\Psi_n(\tilde{\varepsilon}_n) \circ \dots \circ \Psi_1(\tilde{\varepsilon}_1))(\bar{q}). \quad (2.64)$$

Formalno možemo zapisati

$$\hat{\Omega}(\tilde{\varepsilon}; \bar{q}) = \hat{\Omega}(0; \bar{q}) + \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}}(0; \bar{q}) \cdot \tilde{\varepsilon} + \frac{\partial^2 \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}^2}(0; \bar{q}) \cdot \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2} + \mathcal{O}(|\tilde{\varepsilon}|^3). \quad (2.65)$$

gde je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}}(0; \bar{q}) \cdot \tilde{\varepsilon} &= \left(\frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_1}(0; \bar{q}), \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_2}(0; \bar{q}), \dots, \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_n}(0; \bar{q}) \right) \cdot (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_i}(0; \bar{q}) \tilde{\varepsilon}_i \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}^2}(0; \bar{q}) \cdot \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{2} &= \frac{1}{2} (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_n) \left[\frac{\partial^2 \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_i \partial \tilde{\varepsilon}_j}(0; \bar{q}) \right]_{n \times n} (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_n)^T \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_i^2}(0; \bar{q}) \tilde{\varepsilon}_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2 \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_i \partial \tilde{\varepsilon}_j}(0; \bar{q}) \tilde{\varepsilon}_i \tilde{\varepsilon}_j. \end{aligned}$$

Tada iz (2.65) sledi

$$\hat{\Omega}(\tilde{\varepsilon}; \bar{q}) = \hat{\Omega}(0; \bar{q}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_i}(0; \bar{q}) \tilde{\varepsilon}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_i^2}(0; \bar{q}) \tilde{\varepsilon}_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial^2 \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_i \partial \tilde{\varepsilon}_j}(0; \bar{q}) \tilde{\varepsilon}_i \tilde{\varepsilon}_j + \mathcal{O}(|\tilde{\varepsilon}|^3). \quad (2.66)$$

Izračunajmo parcijalne izvode (prvog i drugog reda) od $\hat{\Omega}$ u (2.66). Prvo, jasno je da važi

$$\hat{\Omega}(0, \dots, 0, \tilde{\varepsilon}_i, 0, \dots, 0; \bar{q}) = \Psi_i(\tilde{\varepsilon}_i)(\bar{q}),$$

a tada, na osnovu (2.50, 2.57), važi i

$$\frac{\partial \hat{\Omega}(0, \dots, 0, \tilde{\varepsilon}_i, 0, \dots, 0; \bar{q})}{\partial \tilde{\varepsilon}_i} = \dot{\Psi}_i(\tilde{\varepsilon}_i)(\bar{q}) \Rightarrow \frac{\partial \hat{\Omega}(0; \bar{q})}{\partial \tilde{\varepsilon}_i} = \dot{\Psi}_i(0)(\bar{q}) = r_i(\bar{q}). \quad (2.67)$$

Dalje, iz (2.52, 2.62, 2.63) sledi

$$\frac{\partial^2 \hat{\Omega}(0, \dots, 0, \tilde{\varepsilon}_i, 0, \dots, 0; \bar{q})}{\partial \tilde{\varepsilon}_i^2} = \ddot{\Psi}_i(\tilde{\varepsilon}_i)(\bar{q}) \Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{\Omega}(0; \bar{q})}{\partial \tilde{\varepsilon}_i^2} = \ddot{\Psi}_i(0)(\bar{q}) = \dot{r}_i(\bar{q}) = Dr_i(\bar{q}) r_i(\bar{q}). \quad (2.68)$$

Za $i < j$ važi

$$\hat{\Omega}(0, \dots, 0, \tilde{\varepsilon}_i, 0, \dots, 0, \tilde{\varepsilon}_j, 0, \dots, 0; \bar{q}) = (\Psi_j(\tilde{\varepsilon}_j) \circ \Psi_i(\tilde{\varepsilon}_i))(\bar{q}),$$

i tada, na osnovu (2.52, 2.62, 2.63), sledi

$$\frac{\partial^2 \hat{\Omega}(0; \bar{q})}{\partial \tilde{\varepsilon}_i \partial \tilde{\varepsilon}_j} = Dr_j(\bar{q}) r_i(\bar{q}), \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (2.69)$$

Konačno, na osnovu (2.66), dobijamo izraz koji će nam kasnije biti potreban.

$$\hat{\Omega}(\tilde{\varepsilon}; \bar{q}) = \hat{\Omega}(0; \bar{q}) + \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i r_i(\bar{q}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\varepsilon}_i^2 Dr_i(\bar{q}) r_i(\bar{q}) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \tilde{\varepsilon}_j \tilde{\varepsilon}_i Dr_j(\bar{q}) r_i(\bar{q}) + \mathcal{O}(|\tilde{\varepsilon}|^3)$$

Ponovimo da za $r_k = (r_k^1, r_k^2, \dots, r_k^n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $Dr_i(\bar{q}) r_j(\bar{q})$ označava vektor

$$Dr_i(\bar{q}) r_j(\bar{q}) = \begin{bmatrix} Dr_i^1(\bar{q}) r_j(\bar{q}) \\ Dr_i^2(\bar{q}) r_j(\bar{q}) \\ \vdots \\ Dr_i^n(\bar{q}) r_j(\bar{q}) \end{bmatrix}$$

za $i, j = 1, 2, \dots, n$.

2.6 Izentropno strujanje gasa

Jednačine jednodimenzionalnog izentropnog strujanja gasa u Langranžovim koordinatama date su u obliku

$$\begin{aligned} v_t - u_x &= 0 \\ u_t + p(v)_x &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (2.70)$$

gde u predstavlja brzinu, v specifičnu zapreminu ($v = 1/\rho > 0$, gde je ρ gustina, slika 2.4). Sa p je obeležen pritisak u formi

$$p = \kappa^2 v^{-\gamma}, \quad 1 < \gamma < 3,$$

gde je κ gasna konstanta. Karakteristični koreni sistema (2.70), gde je $q = q(v, u)$, dobijaju se rešavanjem jednačine $\lambda^2 + p'(v) = 0$:

$$\lambda_1(q) = -\kappa\sqrt{\gamma}v^{-\frac{\gamma+1}{2}}, \quad \lambda_2(q) = \kappa\sqrt{\gamma}v^{-\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Za $\gamma = 1 + 2\varepsilon$ (kao u [9]), dobijamo

$$\lambda_1(q) = -\kappa\sqrt{\gamma}v^{-\varepsilon-1}, \quad \lambda_2(q) = \kappa\sqrt{\gamma}v^{-\varepsilon-1},$$

gde je $0 < \varepsilon \ll 1$ mala konstanta. Odgovarajući karakteristični vektori su

$$r_1(q) = (1, \sqrt{-p'(v)})^T, \quad r_2(q) = (-1, \sqrt{-p'(v)})^T,$$

ili

$$r_1(q) = (1, \kappa\sqrt{\gamma}v^{-\varepsilon-1})^T, \quad r_2(q) = (-1, \kappa\sqrt{\gamma}v^{-\varepsilon-1})^T.$$

Lako se može proveriti da je

$$D\lambda_1 r_1 = D\lambda_2 r_2 = k\sqrt{\gamma}(1 + \varepsilon)v^{-\varepsilon-2} > 0. \quad (2.71)$$

Odredimo Rimanove invarijante za sistem (2.70). Ako je $q = q(v, u)$, koristeći definiciju 2.5.1 imamo

$$\begin{aligned} Da(v, u) r_1(v, u) = 0 &\Rightarrow a_v + \kappa\sqrt{\gamma}v^{-\varepsilon-1}a_u = 0 \\ &\Rightarrow \frac{dv}{1} = \frac{du}{\kappa\sqrt{\gamma}v^{-\varepsilon-1}} \\ &\Rightarrow \int \kappa\sqrt{\gamma}v^{-\varepsilon-1} dv = \int du \\ &\Rightarrow -\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}v^{-\varepsilon} + C = u \\ &\Rightarrow C = u + \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}v^{-\varepsilon}, \end{aligned}$$

gde je $C = \text{const.}$ Jedna prva Rimanova invarijanta je dakle

$$a_2(v, u) = u + \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}v^{-\varepsilon}.$$

Na sličan način dobijamo da je jedna druga Rimanova invarijanta

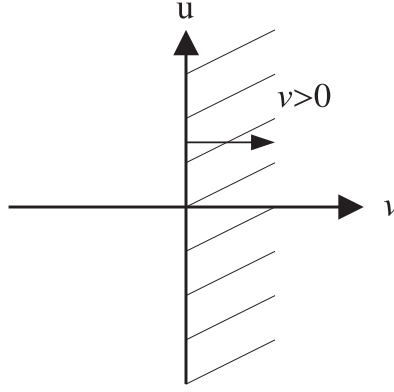
$$a_1(v, u) = u - \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}v^{-\varepsilon}.$$

Ako želimo da se koordinatni početak koordinatnog sistema Rimanovih invarijanti $(0, 0) = (a_1, a_2)$ preslika u, na primer, $(1, 0) = (v, u)$ u $v - u$ koordinatnom sistemu, tada su Rimanove invarijante

$$\begin{aligned} a_2 &= u + \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(v^{-\varepsilon} - 1) : \text{prva invarijanta,} \\ a_1 &= u - \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(v^{-\varepsilon} - 1) : \text{druga invarijanta.} \end{aligned}$$

Lako se može pokazati da važi

$$\begin{aligned} \partial_t a_2 + \lambda_2 \partial_x a_2 &= 0, \\ \partial_t a_1 + \lambda_1 \partial_x a_1 &= 0. \end{aligned}$$



Slika 2.4: Poluravan u kojoj se nalazi rešenje Rimanovog problema sistema (2.70).

što je posledica (2.39).

Ako se vratimo na prvu Rimanovu invarijantu u obliku $C = u + \kappa\sqrt{\gamma}v^{-\varepsilon}/\varepsilon$, krivu prvog razređujućeg talasa određujemo tako što biramo C tako da važi $u(v_0) = u_0$. Dobijamo da je $u_0 + \kappa\sqrt{\gamma}v_0^{-\varepsilon}/\varepsilon = u + \kappa\sqrt{\gamma}v^{-\varepsilon}/\varepsilon$ ili

$$u = u_0 - \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(v^{-\varepsilon} - v_0^{-\varepsilon}).$$

Na sličan način dobija se razređujuća kriva druge familije. Na osnovu (2.71), zaključujemo sledeće:

$$\begin{aligned} u - u_0 &= -\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(v^{-\varepsilon} - v_0^{-\varepsilon}), \quad v \geq v_0 : \text{ je prva razređujuća kriva,} \\ u - u_0 &= \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(v^{-\varepsilon} - v_0^{-\varepsilon}), \quad v < v_0 : \text{ je druga razređujuća kriva.} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Sa druge strane, ako je c brzina udarnog talasa i ako je $q^- = (v^-, u^-)$ i $q^+ = (v^+, u^+)$, onda su samoslični udarni talasi oblika

$$q(x, t) = \begin{cases} q^-, & x < ct, \\ q^+, & x > ct, \end{cases}$$

koji zadovoljavaju RH uslov

$$c(v_+ - v_-) = -(u_+ - u_-), \quad c(u_+ - u_-) = p(v_+) - p(v_-),$$

zajedno sa Laksovim entropijskim uslovima

$$\begin{aligned} \lambda_1(q_+) < c < \lambda_1(q_-) < \lambda_2(q_-), \quad c < \lambda_2(q_+) : \text{ za prvi udarni talas,} \\ \lambda_1(q_+) < \lambda_2(q_+) < c < \lambda_2(q_-), \quad \lambda_1(q_-) < c : \text{ za drugi udarni talas.} \end{aligned}$$

Da bismo odredili krive udarnih talasa, uzmimo da je $(v^-, u^-) = (v_0, u_0)$ i $(v^+, u^+) = (v, u)$. Sada je potrebno rešiti sistem

$$-u + u_0 = c(v - v_0) \quad (2.73)$$

$$\kappa^2 v^{-\gamma} - \kappa^2 v_0^{-\gamma} = c(u - u_0)$$

po c i u . Dobiju se dva rešenja za brzine udarnih talasa:

$$c_1 = -\kappa\sqrt{\frac{v^{-\gamma} - v_0^{-\gamma}}{v_0 - v}} \quad \text{i} \quad c_2 = \kappa\sqrt{\frac{v_0^{-\gamma} - v^{-\gamma}}{v - v_0}}.$$

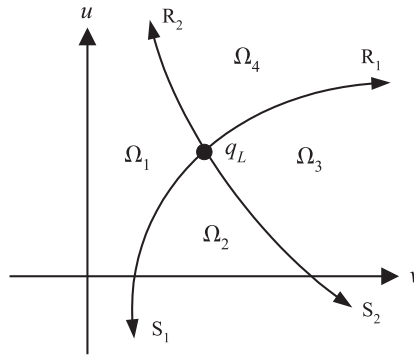
Koristeći prvu jednačinu iz (2.73) i $c = c_1$, a na osnovu (2.71), dobija se

$$u - u_0 = -\kappa \sqrt{\frac{v^{-\gamma} - v_0^{-\gamma}}{v_0 - v}} (v_0 - v), \quad v_0 > v. \quad (2.74)$$

Jednakost (2.74) predstavlja krivu udarnog talasa prve familije (kriva S_1). Kriva udarnog talasa druge familije (kriva S_2) je

$$u - u_0 = \kappa \sqrt{\frac{v_0^{-\gamma} - v^{-\gamma}}{v - v_0}} (v_0 - v), \quad v > v_0. \quad (2.75)$$

Neka je sada dat sistem (2.70) i početni uslov



Slika 2.5: Krive razređujućih i udarnih talasa u $v - u$ ravni.

$$q(x, 0) = \begin{cases} q_L, & x < 0, \\ q_R, & x > 0, \end{cases} \quad (2.76)$$

gde su $q_L = (v_L, u_L)^T$ i $q_R = (v_R, u_R)^T$ konstantni vektori. Za q_R dovoljno blizu q_L i za $v > 0$, opšte rešenje Rimanovog problema (2.70, 2.76) određeno je sa q_R , koje pripada krivama R_i, S_i , $i = 1, 2$. Ove krive dele okolinu q_L na četiri regiona (slika 2.5):

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\text{ ograničeno sa } S_1, R_2, & \Omega_2 &\text{ ograničeno sa } S_1, S_2, \\ \Omega_3 &\text{ ograničeno sa } R_1, S_2, & \Omega_4 &\text{ ograničeno sa } R_1, R_2. \end{aligned}$$

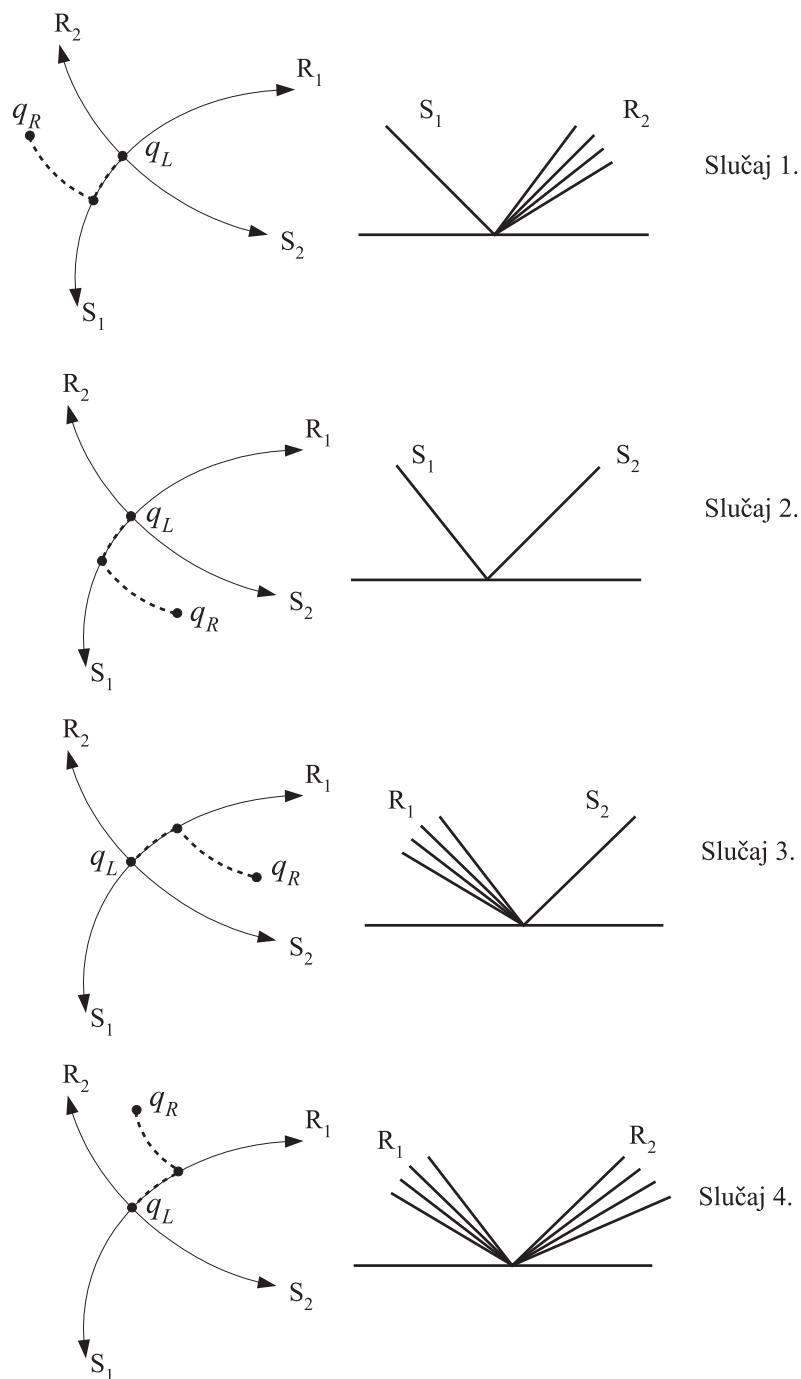
Sada imamo četiri mogućnosti za q_R (slika 2.6):

- Slučaj 1. $q_R \in \Omega_1$. Rešenje se sastoji od udarnog talasa prve i razređujućeg talasa druge familije.
- Slučaj 2. $q_R \in \Omega_2$. Rešenje se sastoji od udarnih talasa prve i druge familije.
- Slučaj 3. $q_R \in \Omega_3$. Rešenje se sastoji od razređujućeg talasa prve i udarnog talasa druge familije.
- Slučaj 4. $q_R \in \Omega_4$. Rešenje se sastoji od dva razređujuća talasa prve i druge familije.

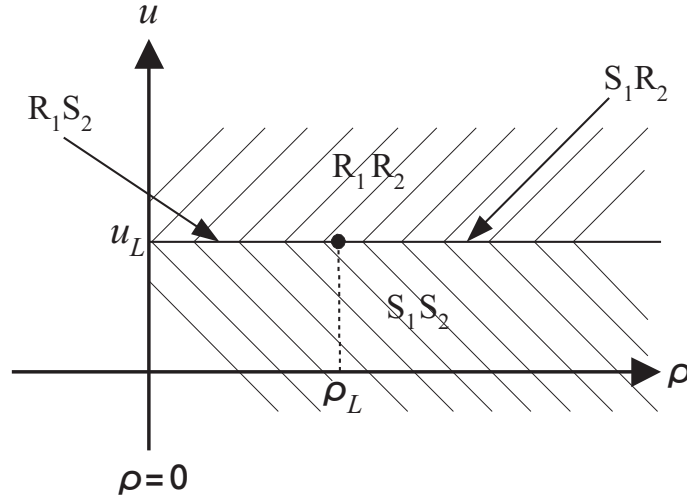
Ako posmatramo jednodimenzionalnu jednačinu protoka izentropnog gasa (2.70) u Ojlerovim koordinatama, tada dobijamo sistem

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\varepsilon, \rho)) &= 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

gde je ρ gustina, u brzina, $m = \rho u$ moment, $p(\varepsilon, \rho) = \varepsilon p_0(\rho)$ pritisak, $0 < \varepsilon \ll 1$ i $p_0(\rho) = \rho^\gamma / \gamma$. Ako $\varepsilon \rightarrow 0$ u (2.77), dobijamo model gasne dinamike bez pritiska (poglavlje 6.3, a videti i [1, 2, 6, 39]).

Slika 2.6: Rešenje sastavljeno od razređujućih i udarnih talasa u $v - u$ ravni.

Rešenje sistema (2.77) sa početnim uslovom (2.76), gde su sada $q_L = (\rho_L, u_L)^T$ i $q_R = (\rho_R, u_R)^T$ konstantni vektori, zavisi od odnosa u_L i u_R (slika 2.7).



Slika 2.7: Oblasti rešenja Rimanovog problem (2.77, 2.76) u $\rho - u$ ravni za ε dovoljno malo.

Naime, u [27] dokazana je sledeća teorema.

Teorema 2.6.1 ([27]) (a) *Ako je $u_L > u_R$, tada Rimanov problem (2.77, 2.76) ima rešenje koje se sastoji od udarnog talasa prve familije za kojim sledi udarni talas druge familije za ε dovoljno malo. Ako takvo rešenje obeležimo sa $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$, onda kada $\varepsilon \rightarrow 0$ važi*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_\varepsilon = G(x - ct) + t \cdot \text{const} \cdot \delta(x - ct),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = H(x - ct),$$

gde je

$$G(y) = \begin{cases} \rho_L, & y < 0, \\ \rho_R, & y > 0 \end{cases} \quad i \quad H(y) = \begin{cases} u_L, & y < 0, \\ u_R, & y > 0. \end{cases}$$

Sa $\delta(x - ct)$ obeležena je delta funkcija sa nosačem duž $x = ct$, dok je

$$c = \frac{\rho_R u_R - \rho_L u_L + (u_L - u_R) \sqrt{\rho_L \rho_R}}{\rho_R - \rho_L}$$

za $\rho_R \neq \rho_L$, odnosno $c = (u_L + u_R)/2$ za $\rho_R = \rho_L$.

(b) *Ako je $u_L = u_R$, tada Rimanov problem (2.77, 2.76) ima rešenje koje se sastoji ili od razređujućeg talasa prve familije za kojim sledi udarni talas druge familije (ako je $\rho_R < \rho_L$) ili od udarnog talasa prve familije za kojim sledi razređujući talas druge familije (ako je $\rho_R > \rho_L$) za dovoljno malo ε . Kada $\varepsilon \rightarrow 0$, takvo rešenje teži*

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L, & x < u_L t, \\ \rho_R, & x > u_L t, \end{cases}$$

$$u(x, t) = u_L.$$

(c) *Ako je $u_L < u_R$, tada Rimanov problem (2.77, 2.76) ima rešenje koje se sastoji od razređujućeg talasa prve familije i razređujućeg talasa druge familije za ε dovoljno malo. Kada $\varepsilon \rightarrow 0$, to rešenje*

postaje kombinacija dva kontaktna talasa spojena vakuumom,

$$\rho(x, t) = \begin{cases} \rho_L, & x < u_L t, \\ 0, & u_L t < x < u_R t, \\ \rho_R, & x > u_R t, \end{cases}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < u_L t, \\ \text{const}, & u_L t < x < u_R t, \\ u_R, & x > u_R t. \end{cases}$$

U ovoj glavi biće predstavljena Glimova diferencna šema ([9], glava 13) pomoću koje se, za Košijev problem kod strogo hiperboličnih sistema, konstruiše globalno rešenje sa ograničenom varijacijom. Grubo rečeno, pre nego što nastupi prva interakcija talasa nastalih u vremenu $t = 0$, dotadašnje rešenje se ponovo aproksimira sa deo po deo konstantnom funkcijom, ali sada uzimajući druge tačke za aproksimaciju. Pod pretpostavkom da je totalna varijacija početnog uslova dovoljno mala, rešenje se dobija kao granična vrednost niza aproksimativnih rešenja koja očuvavaju udarne talase (udarni talasi su na odgovarajućem mestu sa brzinom dobijenom iz RH uslova).

3.1 Konstrukcija šeme

Posmatrajmo zakon održanja (2.1), odnosno $q_t + f(q)_x = 0$, definisan nad centralnom loptom \mathcal{B} , i početni uslov (2.4), odnosno $q(x, 0) = q_0(x)$. Pretpostavićemo sledeće:

- $q_0(x)$ ima ograničenu totalnu varijaciju za $x \in (-\infty, \infty)$,
- sistem (2.1) je strogo hiperboličan, odnosno, da za karakteristične korene $Df(q)$ važi $\lambda_1(q) < \lambda_2(q) < \dots < \lambda_n(q)$,
- Na nekom otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, sistem (2.1) je zaista nelinearan za svako polje karakteristika.

Definišimo sada pojam totalne varijacije kao u poglavlju 2.4 iz [4]. Neka je dat interval $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ i preslikavanje $\hat{v} : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Totalna varijacija (TV) preslikavanja \hat{v} definiše se kao

$$\text{TV}(\hat{v}) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^{N_0} |\hat{v}(x_j) - \hat{v}(x_{j-1})| \right\},$$

gde je $N_0 \geq 1$, $x_j \in \mathcal{J}$ za $j = 0, 1, \dots, N_0$ i $x_0 < x_1 < \dots < x_{N_0}$. Naredna teorema je ključna u ovoj glavi.

Teorema 3.1.1 ([9]) *Ako postoje pozitivne konstante δ_0 i δ_1 tako da važi*

$$\sup_{(-\infty, \infty)} |q_0(\cdot)| < \delta_0 \tag{3.1}$$

i

$$\text{TV}_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)) < \delta_1, \tag{3.2}$$

tada postoji rešenje q problema (2.1, 2.4) koje ima ograničenu varijaciju na $(-\infty, \infty) \times [0, \infty)$. Takvo rešenje zadovoljava entropijske uslove za bilo koji entropijski par (η, ψ) , gde je $\eta(q)$ konveksna funkcija. Preciznije, za svako $t \in [0, \infty)$, $q(x, t)$ je funkcija sa ograničenom varijacijom za $x \in (-\infty, \infty)$ i važi

$$\sup_{(-\infty, \infty)} |q(\cdot, t)| < \sup_{(-\infty, \infty)} |q_0(\cdot)| + C_1 \text{TV}_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)), \quad 0 \leq t < \infty \quad (3.3)$$

$$\text{TV}_{(-\infty, \infty)}(q(\cdot, t)) < C_2 \text{TV}_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(x, t) - q(x, \tau)| dx \leq C_3 \hat{\lambda} |t - \tau| \text{TV}_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)), \quad 0 \leq \tau < t < \infty, \quad (3.5)$$

gde su C_1, C_2 i C_3 konstante koje zavise samo od f . Ako je sistem (2.1) snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti, tada je

$$\sup_{(-\infty, \infty)} |q(\cdot, t)| < C_0 \sup_{(-\infty, \infty)} |q_0(\cdot)| \quad (3.6)$$

za C_0 koje zavisi samo od f .

Dokaz ove teoreme obuhvatiće celu ovu glavu. Fiksirajmo vremenski korak $h > 0$ i $\hat{\lambda} > |\lambda_i(q)|$ za $q \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Neka je $x_r = rh$, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ i $t_s = sh/\hat{\lambda}$, $s = 0, 1, 2, \dots$ Od tačaka (x_r, t_s) u mrežu stavljamo tačke oblika (x_{2r}, t_{2s}) i (x_{2r+1}, t_{2s+1}) , odnosno uzimamo samo tačke (x_r, t_s) za koje je $r + s$ paran broj. Za tako izabrano t_s neće doći do preseka karakteristika koje kreću iz susednih tačaka mreže.

Ako pretpostavimo da je aproksimativno rešenje q_h definisano na skupu $\{(x, t) : -\infty < x < \infty, 0 \leq t < t_s\}$, možemo definisati $q_h(x, t_s)$ kao po delovima konstantnu funkciju u okolini tačaka mreže u vremenu $t = t_s$

$$q_h(x, t_s) = q_s^r, \quad x_{r-1} < x < x_{r+1}, \quad r + s = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.7)$$

Ovako definisana funkcija aproksimira funkciju $q_h(x, t_s)$ za $-\infty < x < \infty$. Nakon toga, funkciju q_h određujemo rešavajući sistem

$$\partial_t q_h(x, t) + \partial_x f(q_h(x, t)) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t_s \leq t < t_{s+1}, \quad (3.8)$$

gde je početni uslov dat u (3.7) za $t = t_s$. Rešenje problema (3.8, 3.7) sastoji se od elementarnih talasa koji kreću iz tačaka mreže u vremenu $t = t_s$ (slika 3.1). Na primer, talasi koji polaze iz tačke (x_r, t_s) , $r + s$ paran broj, dobijaju se rešavanjem Rimanovog problema sa levim stanjem q_s^{r-1} i desnim stanjem q_s^{r+1} . Zahtevamo da takvi talasi zadovoljavaju uslove dopustivosti. Osnovni problem je kako odrediti konstantno stanje q_s^r i to će biti u nastavku objašnjeno.

Na početku algoritma, uzećemo da je $s = 0$ i posmatrati početni uslov

$$q_h(x, 0) = q_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (3.9)$$

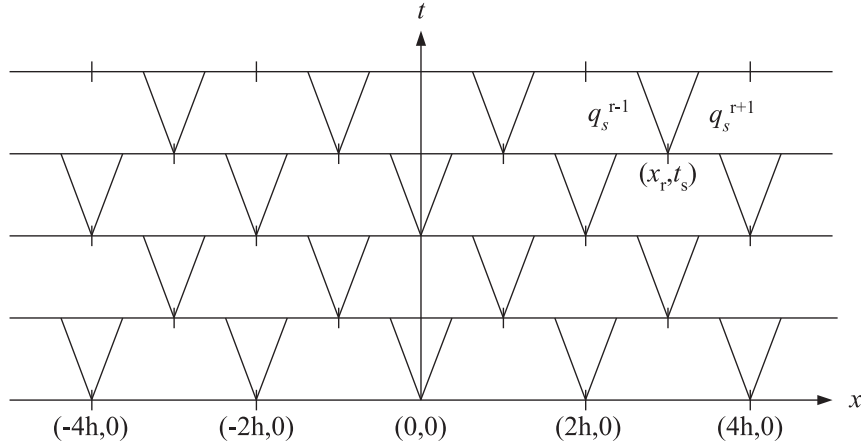
Konstrukcija funkcije q_h može da se nastavi dokle god se mogu rešiti Rimanovi problemi u mrežnim tačkama. To je moguće uraditi ako je $|q_s^{r+1} - q_s^{r-1}|$ dovoljno malo. U narednim poglavljima biće pokazano da q_h zadovoljava ocene

$$\sup_{(-\infty, \infty)} |q_h(\cdot, t)| \leq \sup_{(-\infty, \infty)} |q_0(\cdot)| + C_1 \text{TV}_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.10)$$

$$\text{TV}_{(-\infty, \infty)}(q_h(\cdot, t)) \leq C_2 \text{TV}_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (3.11)$$

i

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q_h(x, t) - q_h(x, \tau)| dx \leq C_3 (\hat{\lambda} |t - \tau| + 6h) \text{TV}_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)), \quad 0 \leq \tau < t < \infty, \quad (3.12)$$



Slika 3.1: Glimova diferencna šema.

za neke konstante C_1 , C_2 i C_3 koje zavise samo od f . Odnosno, ako važi (3.1, 3.2), tada iz (3.10, 3.11, 3.12) sledi da za δ_0 i δ_1 dovoljno malo, q_h može biti konstruisano za svako $t \geq 0$.

Ispitajmo sada kompaktnost i konzistenciju predložene konstrukcije rešenja. Za svako $h \rightarrow 0$ možemo formirati niz aproksimativnih rešenja $q_h(\cdot, \tau)$. Na osnovu (3.10, 3.11), Hellyjeve teoreme 1.2.18 i Kantorovog dijagonalnog procesa, postoji niz $\{h_m\}$ koji zadovoljava $\lim_{m \rightarrow \infty} h_m = 0$, tako da je podniz $\{q_{h_m}(\cdot, \tau)\}$ niza $\{q_h(\cdot, \tau)\}$ Košijev u prostoru $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(-\infty, \infty)$ za svaki pozitivan racionalan broj τ . Kako je skup racionalnih brojeva gust na intervalu $[0, \infty)$, na osnovu (3.12) sledi da je $\{q_{h_m}(\cdot, t)\}$ Košijev niz u $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(-\infty, \infty)$ za svako $t \geq 0$. Zbog toga važi

$$q_{h_m}(x, t) \rightarrow q(x, t), \quad \text{kada } m \rightarrow \infty, \quad \text{u } \mathbf{L}_{\text{loc}}^1((-\infty, \infty) \times [0, \infty)), \quad (3.13)$$

gde je, za svako fiksirano $t \in [0, \infty)$, $q(x, t)$ funkcija sa ograničenom varijacijom na intervalu $x \in (-\infty, \infty)$ koja zadovoljava (3.3, 3.4, 3.5). Praktično, q ima lokalno ograničenu varijaciju.

Pokažimo sada kada je q rešenje problema (2.1, 2.4), odnosno ispitajmo konzistenciju algoritma. Po konstrukciji, q_h je rešenje posmatranog problema unutar $\{-\infty < x < \infty, t_s < t < t_{s+1}\}$ za svako $s = 0, 1, \dots$. Greške su prouzrokovane skokovima kod q_h u vremenima $t = t_s$. Da bismo ocenili ukupnu grešku kada $t \rightarrow \infty$, fiksirajmo \mathcal{C}^∞ test funkciju ϕ koja ima kompaktn nosač na $(-\infty, \infty) \times [0, \infty)$. Ako pomnožimo (3.8) sa ϕ , primenimo parcijalnu integraciju na svakom pravougaoniku

$$\{(x, t) : x_{r-1} < x < x_{r+1}, t_s \leq t < t_{s+1}, r + s = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

i nakon sumiranja nad svakim takvim pravougaonikom, a koristeći (3.7, 3.9) dobijamo

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (q_h \phi_t + f(q_h) \phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty q_0(x) \phi(x, 0) dx \\ &= \sum_{s=0}^\infty \sum_{\substack{r+s=2k+1, \\ k \in \mathbb{Z}}} \int_{x_{r-1}}^{x_{r+1}} (q_h(x, t_s^-) - q_s^r) \phi(x, t_s) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

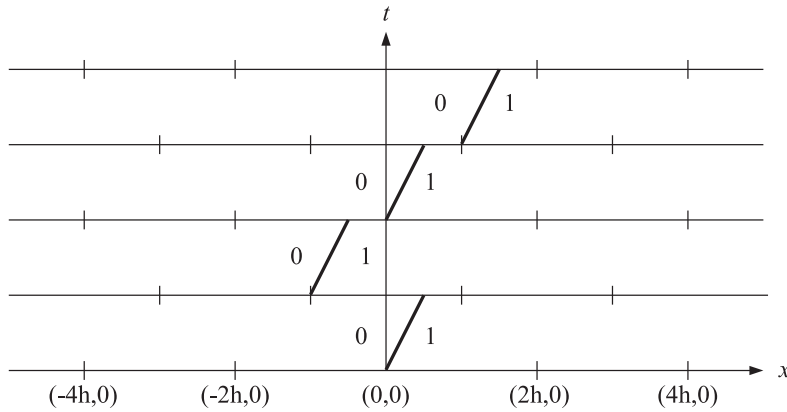
Dakle, q će biti slabo rešenje problema (2.1), ako q_s^r aproksimira funkciju $q_h(\cdot, t_s^-)$ na intervalu (x_{r-1}, x_{r+1}) tako da desna strana jednakosti (3.14) teži nuli kada $h \rightarrow 0$. Ostaje pitanje kako definisati q_s^r . U tu svrhu, posmatrajmo niz $\mathcal{T} = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots\}$, gde $\theta_s \in (-1, 1)$ za $s = 0, 1, 2, \dots$. Za fiksirano $s = 0, 1, 2, \dots$, definišemo $y_s^r = x_r + \theta_s h$ i formiramo mrežu čiji su čvorovi (y_s^r, t_s) , tako da važi $r + s = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Tačka (y_s^r, t_s) nalazi se na intervalu (x_{r-1}, x_{r+1}) u vremenu $t = t_s$. Sada definišemo

$$q_h(x, t_s) = q_s^r = \lim_{t \rightarrow t_s^-} q_h(y_s^r, t), \quad r + s = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, \quad x \in (x_{r-1}, x_{r+1}). \quad (3.15)$$

Problem kod ovakvog definisanja šeme je promena mesta nastanka udarnog talasa (u odnosu na lokaciju udarnog talasa kod tačnog rešenja) iako je njegova brzina očuvana. To se može ilustrovati sledećim primerom. Posmatrajmo Rimanov problem za linearni, skalarni zakon održanja

$$\begin{aligned} q_t(x, t) + \theta \hat{\lambda} q_x(x, t) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < \infty \\ q(x, 0) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

gde je θ konstanta na intervalu $(-1, 1)$. Nekoliko prvih koraka konstrukcije rešenja prikazano je na slici 3.2.



Slika 3.2: Prvih nekoliko koraka rešenja problema (3.16).

Rešenje problema (3.16) je udarni talas duž $x = \theta \hat{\lambda} t$ koji spaja levo stanje $q = 0$ i desno stanje $q = 1$. Na osnovu (3.15), kada udarni talas "pređe" sa $t = t_s$ na $t = t_{s+1}$, tada će brzina udarnog talasa biti očuvana, ali će lokacija udarnog talasa biti pomerena za h i to po sledećem pravilu: ako je $\theta_s \leq \theta$, tada će lokacija udarnog talasa biti pomerena za h u desno, dok će biti pomerena u levo za h ako važi $\theta_s > \theta$ (na osnovu definicije y_s^r). Međutim, može se desiti da udarni talas ne bude na poziciji na kojoj nastao kada $t \rightarrow \infty$ i $h \rightarrow 0$. Zato je potrebno postaviti neke uslove na niz \mathcal{T} . Obeležimo sa m_- broj indeksa $s \leq m$ takvih da važi $\theta_s \leq \theta$ (m je ukupan broj indeksa). Tada je ukupno pomeranje udarnog talasa u desnu stranu jednak $m_- h$. Sa m_+ obeležavamo broj indeksa $s \leq m$ takvih da važi $\theta_s > \theta$. Tada je ukupno pomeranje udarnog talasa u levu stranu jednak $m_+ h$. Dakle prosečna pozicija udarnog talasa je $m_- h - m_+ h$ u vremenu $t = t_m$. Zato zahtevamo da važi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m_- h - m_+ h}{t_m} = \theta \hat{\lambda}.$$

Sada, kako je $t_m = m h / \hat{\lambda}$, imamo da važi

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m_- h - m_+ h}{t_m} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m_- h \hat{\lambda} - m_+ h \hat{\lambda}}{m h} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\hat{\lambda}(m_- - m_+)}{m}. \end{aligned}$$

Dakle iz

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\hat{\lambda}(m_- - m_+)}{m} = \theta \hat{\lambda}$$

dobijamo da mora važiti $m_- - m_+ \sim m \theta$ kada $m \rightarrow \infty$. Kako je i $m_- + m_+ = m$ tada dobijamo da će q_h konvergirati ka rešenju problema (3.16) ako i samo ako važi $m_- / m \rightarrow (1 + \theta) / 2$ i $m_+ / m \rightarrow (1 - \theta) / 2$ kada $m \rightarrow \infty$. Ove uslove možemo zapisati i kao $2 / m \rightarrow (1 + \theta) / m_-$ i $2 / m \rightarrow (1 - \theta) / m_+$ kada $m \rightarrow \infty$. Prisetimo da je dužina intervala za koje je $\theta_s \leq \theta$ jednaka $1 + \theta$

(udarni talasi pomereni u desno), a da je dužina intervala za koje je $\theta_s > \theta$ jednaka $1 - \theta$ (udarni talasi pomereni u levo) za $\theta \in (-1, 1)$. Udarni talasi će biti na pravom mestu kada $m \rightarrow \infty$ ako za svaki podinterval $I \subset (-1, 1)$ dužine $\hat{\mu}(I)$ važi

$$\frac{[\text{broj indeksa } s \leq m \text{ za } \theta_s \in I]}{m} \sim \frac{\hat{\mu}(I)}{2}$$

kada $m \rightarrow \infty$, odnosno

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{m} [\text{broj indeksa } s \leq m \text{ za } \theta_s \in I] = \hat{\mu}(I).$$

Neka je niz \mathcal{T} tačka u prostoru $\mathcal{A} = (-1, 1) \times (-1, 1) \times (-1, 1) \times \dots = \prod_{s=0}^{\infty} (-1, 1)$. Važi sledeća teorema.

Teorema 3.1.2 ([9]) *Postoji podskup \mathcal{N} mere nula skupa \mathcal{A} sa osobinom da je predloženi algoritam konzistentan za svaki niz $\mathcal{T} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}$. Odnosno, ako je q_s^r izračunato preko (3.15), sa $y_s^r = x_r + \theta_s h$, tada je granična vrednost q iz (3.13) rešenje početnog problema $q_t + f(q)_x = 0$, $q(x, 0) = q_0(x)$.*

Da je rešenje entropijski dopustivo, dobijamo iz teoreme koja sledi.

Teorema 3.1.3 ([9]) *Pretpostavimo da je posmatrani sistem snabdeven entropijskim parom (η, ψ) , gde je η entropijska funkcija, a ψ fluks entropije. Neka je $\eta(q)$ konveksna funkcija nad \mathcal{B} . Tada postoji podskup \mathcal{N} mere nula, koji je podskup skupa \mathcal{A} , sa sledećim osobinama: kada se q_s^r računa pomoću (3.15), za $y_s^r = x_r + \theta_s h$, tada je za svako $\mathcal{T} \in \mathcal{A}/\mathcal{N}$, granična vrednost q iz (3.13) rešenje početnog problema $q_t + f(q)_x = 0$, $q(x, 0) = q_0(x)$ koje zadovoljava entropijski uslov*

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\eta(q)\phi_t + \psi(q)\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} \eta(q(x, 0))\phi(x, 0) dx \geq 0,$$

za svaku diferencijabilnu funkciju sa kompaktnim nosačem $\phi = \phi(x, t) \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$.

Dokazi navedenih teorema nalaze se u [9], poglavlje 13.2.

3.2 Ocena interakcije talasa

Sada sledi poglavlje koje ima centralnu ulogu za konstrukciju rešenja zakona održanja korišćenjem Glimove diferencne šeme. Posmatrajmo tri talasa. Prvi spaja levo stanje q_L i desno stanje q_M , drugi talas spaja stanje q_M sa leve strane, i stanje q_R sa desne strane, dok treći talas spaja stanje q_L , sa leve strane, i stanje q_R sa desne strane. Ove talase predstavljamo stanjima q_L , q_M i q_R i n -torkama $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, i $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_n)$ kao amplitudama. Na osnovu iznetog, $\tilde{\varepsilon}$ se može posmatrati kao rezultat interakcije talasa χ i β , koji dolaze sa leve, odnosno desne strane, redom. Podsetimo se da na osnovu (2.64), važi $q_M = \hat{\Omega}(\chi; q_L)$, $q_R = \hat{\Omega}(\beta; q_M)$ i $q_R = \hat{\Omega}(\tilde{\varepsilon}; q_L)$. Zaključujemo da je

$$\hat{\Omega}(\tilde{\varepsilon}; q_L) = q_R = \hat{\Omega}(\beta; q_M) = \hat{\Omega}(\beta; \hat{\Omega}(\chi; q_L)). \quad (3.17)$$

Ovim se dobija implicitna relacija $\tilde{\varepsilon} = E(\chi; \beta; q_L)$. Osnovni zadatak je da se odrede osobine funkcije $E = (E_1, E_2, \dots, E_n)^T$ u okolini $(0; 0; q_L)$. Kako je $\hat{\Omega}(0; \bar{q}) = \bar{q}$, za proizvoljno \bar{q} , imamo sledeću lemu.

Lema 3.2.1 ([9])

$$E(\chi; 0; q_L) = \chi, \quad E(0; \beta; q_L) = \beta, \quad (3.18)$$

a time i

$$\frac{\partial E_k}{\partial \chi_i}(0; 0; q_L) = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \beta_j}(0; 0; q_L) = \delta_{jk}. \quad (3.19)$$

Sa δ_{ik} i δ_{jk} označeni su Kronekerovi delta simboli, odnosno,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Dokaz. Biće pokazana prva jednakost u (3.18), a ostatak dokaza sledi na sličan način. Ako je $\beta = 0$, tada je $\hat{\Omega}(\tilde{\varepsilon}; q_L) = q_R = \hat{\Omega}(0; q_M) = q_M = \hat{\Omega}(\chi; q_L)$. Zaključujemo da je $\tilde{\varepsilon} = \chi$ za $\beta = 0$, a kako je $\tilde{\varepsilon} = E(\chi; \beta; q_L)$ imamo i $\chi = E(\chi; 0; q_L)$. \square

Sada ćemo dobiti koristan rezultat za funkciju E . Nije teško proveriti da važi sledeći identitet:

$$\begin{aligned} & E(\chi; \beta; q_L) - E(\chi; 0; q_L) - E(0; \beta; q_L) + E(0; 0; q_L) \\ &= \sum_{i,j=1}^n (E(\chi_1, \dots, \chi_i, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_j, \dots, \beta_n; q_L) \\ &\quad - E(\chi_1, \dots, \chi_i, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n; q_L) \\ &\quad - E(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_j, \dots, \beta_n; q_L) \\ &\quad + E(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n; q_L)) . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Koristeći identitet

$$\hat{f}(x, y) - \hat{f}(x, 0) - \hat{f}(0, y) + \hat{f}(0, 0) = xy \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x \partial y}(\tilde{\rho}x, \tilde{\sigma}y) d\tilde{\rho} d\tilde{\sigma},$$

koji važi za integrabilnu funkciju $\hat{f}(x, y)$ i ako zamenimo redom $\hat{f}(x, y)$, $\hat{f}(x, 0)$, $\hat{f}(0, y)$ i $\hat{f}(0, 0)$ sa svakim od sabiraka unutar zagrada, a koji su dati u (3.20), onda dobijamo

$$\begin{aligned} & E(\chi; \beta; q_L) = \chi + \beta \\ &+ \sum_{i,j=1}^n \chi_i \beta_j \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 E}{\partial \chi_i \partial \beta_j}(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \tilde{\rho}\chi_i, 0, \dots, 0; \\ &\quad 0, \dots, 0, \tilde{\sigma}\beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n; q_L) d\tilde{\rho} d\tilde{\sigma} \\ &= \chi + \beta \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \chi_i \beta_j \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 E}{\partial \chi_i \partial \beta_j}(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \tilde{\rho}\chi_i, 0, \dots, 0; \\ &\quad 0, \dots, 0, \tilde{\sigma}\beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n; q_L) d\tilde{\rho} d\tilde{\sigma} \\ &+ \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \chi_i \beta_j \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 E}{\partial \chi_i \partial \beta_j}(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \tilde{\rho}\chi_i, 0, \dots, 0; \\ &\quad 0, \dots, 0, \tilde{\sigma}\beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n; q_L) d\tilde{\rho} d\tilde{\sigma} \\ &+ \sum_{i=1}^n \chi_i \beta_i \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 E}{\partial \chi_i \partial \beta_i}(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \tilde{\rho}\chi_i, 0, \dots, 0; \\ &\quad 0, \dots, 0, \tilde{\sigma}\beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n; q_L) d\tilde{\rho} d\tilde{\sigma} . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Kažemo da su i -ti talas u χ i j -ti talas u β *prilazeći* ako važi ili (a) $i > j$ ili (b) $i = j$, i -ta familija karakteristika je zaista nelinearna, i bar jedna od amplituda χ_i i β_i je negativna (što odgovara udarnom talasu). *Snaga talasa* nakon interakcije χ i β biće merena veličinom

$$Q(\chi, \beta) = \sum_{\chi_i, \beta_j \in \tilde{\mathcal{A}}} |\chi_i| |\beta_j|,$$

gde $\tilde{\mathcal{A}}$ predstavlja skup talasa koji su prilazeći. Krucijalni zaključak je da kada talasi χ i β ne uključuju prilazeće talase, odnosno kada je $Q(\chi, \beta) = 0$, tada se talas $\tilde{\varepsilon}$ dobija tako što se spajaju talasi iz χ , sa leve strane, i talasi iz β , sa desne strane, tako da je $\tilde{\varepsilon} = \chi + \beta$. U stvari, kad god i -ti talas iz χ i j -ti talas iz β nisu prilazeći, ili je $i < j$ ili je zbog $i = j$ i χ_i i β_i pozitivno (odgovaraju amplitudama razređujućeg talasa). Tada važi

$$\begin{aligned} E(\chi_1, \dots, \chi_i, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_j, \dots, \beta_n; q_L) \\ = (\chi_1, \dots, \chi_i, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, \beta_j, \dots, \beta_n), \end{aligned}$$

pa iz sledeće jednakosti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (E(\chi_1, \dots, \chi_i, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_j, \dots, \beta_n; q_L) \\ - E(\chi_1, \dots, \chi_i, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n; q_L) \\ - E(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_j, \dots, \beta_n; q_L) \\ + E(\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, 0, \dots, 0; 0, \dots, 0, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n; q_L)) \\ = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n ((\chi_1, \dots, \chi_i, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, \beta_j, \dots, \beta_n) \\ - (\chi_1, \dots, \chi_i, 0, \dots, 0) - (0, \dots, 0, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n) \\ - (\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, 0, \dots, 0) - (0, \dots, 0, \beta_j, \dots, \beta_n) \\ + (\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n)) = 0, \end{aligned}$$

i iz (3.21) imamo

$$\begin{aligned} E(\chi; \beta; q_L) = \chi + \beta \\ + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \chi_i \beta_j \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 E}{\partial \chi_i \partial \beta_j} (\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \tilde{\rho} \chi_i, 0, \dots, 0; \\ 0, \dots, 0, \tilde{\sigma} \beta_j, \beta_{j+1}, \dots, \beta_n; q_L) d\tilde{\rho} d\tilde{\sigma} \quad (3.22) \\ + \sum_{i=1}^n \chi_i \beta_i \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 E}{\partial \chi_i \partial \beta_i} (\chi_1, \dots, \chi_{i-1}, \tilde{\rho} \chi_i, 0, \dots, 0; \\ 0, \dots, 0, \tilde{\sigma} \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n; q_L) d\tilde{\rho} d\tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Na osnovu (3.22) važi

$$\tilde{\varepsilon} = \chi + \beta + \sum_{\chi_i, \beta_j \in \tilde{\mathcal{A}}} \chi_i \beta_j \frac{\partial^2 E}{\partial \chi_i \partial \beta_j} (0; 0; q_L) + Q(\chi, \beta) \mathcal{O}(|\chi| + |\beta|),$$

gde je

$$\mathcal{O}(|\chi| + |\beta|) = \begin{bmatrix} \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^n (|\chi_i| + |\beta_i|)\right) \\ \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^n (|\chi_i| + |\beta_i|)\right) \\ \vdots \\ \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^n (|\chi_i| + |\beta_i|)\right) \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

Diferencirajmo sada (3.17) po β_j i stavimo da je $\beta_j = 0$. Koristeći (2.67) dobijamo da važi

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial E_k}{\partial \beta_j}(\chi; 0; q_L) \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_k}(E(\chi; 0; q_L); q_L) = r_j(\hat{\Omega}(\chi; q_L)). \quad (3.23)$$

Naime, na osnovu (3.17) važi

$$\frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \beta_j}(0; q_M) = r_j(q_M) = r_j(\hat{\Omega}(\chi; q_L)). \quad (3.24)$$

Nakon diferenciranja (3.17) po β_j imamo

$$\frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \beta_j}(\beta; q_M) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_k}(E(\chi; \beta; q_L); q_L) \frac{\partial E_k}{\partial \beta_j}(\chi; \beta; q_L),$$

odnosno, za $\beta = 0$,

$$\frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \beta_j}(0; q_M) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_k}(E(\chi; 0; q_L); q_L) \frac{\partial E_k}{\partial \beta_j}(\chi; 0; q_L)$$

Iz prethodne jednakosti i (3.24) sledi (3.23). Diferencirajmo (3.23) po χ_i . Tada važi

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{\partial E_k^2}{\partial \beta_j \partial \chi_i}(\chi; 0; q_L) \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_k}(E(\chi; 0; q_L); q_L) \\ & + \sum_{k=1}^n \frac{\partial E_k}{\partial \beta_j}(\chi; 0; q_L) \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_k \partial \tilde{\varepsilon}_l}(E(\chi; 0; q_L); q_L) \frac{\partial E_l}{\partial \chi_i}(\chi; 0; q_L) = Dr_j(\hat{\Omega}(\chi; q_L)) r_i(\hat{\Omega}(\chi; q_L)), \end{aligned}$$

odnosno, na osnovu (3.18, 3.19, 2.67, 2.68, 2.69) za $\chi = 0$ važi

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial E_k^2}{\partial \beta_j \partial \chi_i}(0; 0; q_L) r_k(q_L) + \frac{\partial^2 \hat{\Omega}}{\partial \tilde{\varepsilon}_j \partial \tilde{\varepsilon}_i}(0; 0; q_L) = Dr_j(q_L) r_i(q_L),$$

ili

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial E_k^2}{\partial \beta_j \partial \chi_i}(0; 0; q_L) r_k(q_L) = Dr_j(q_L) r_i(q_L) - Dr_i(q_L) r_j(q_L).$$

Dakle,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 E_k}{\partial \beta_j \partial \chi_i}(0; 0; q_L) r_k(q_L) = -[r_i(q_L), r_j(q_L)],$$

pa je

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 E_k}{\partial \beta_j \partial \chi_i}(0; 0; q_L) = -l_k(q_L)[r_i(q_L), r_j(q_L)].$$

Ovde je $[r_i, r_j] = Dr_i r_j - Dr_j r_i$, gde je

$$Dr_i r_j = \begin{bmatrix} Dr_i^1 r_j \\ Dr_i^2 r_j \\ \vdots \\ Dr_i^n r_j \end{bmatrix}.$$

Na osnovu (2.43) sledi $[r_i, r_j] = 0$ ako je sistem snabdeven Rimanovim invarijantama. Ovim smo dokazali sledeću teoremu.

Teorema 3.2.2 ([9]) *U sistemu čije su familije karakteristika zaista nelinearne ili linearno degenerisane, neka je talas $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n)$ nastao interakcijom talasa $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ koji dolazi sa leve strane i $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ koji dolazi sa desne strane. Tada važi*

$$\tilde{\varepsilon} = \chi + \beta - \sum_{i>j} \chi_i \beta_j L[r_i, r_j] + Q(\chi, \beta) \mathcal{O}(|\chi| + |\beta|).$$

gde je sa L obeležena $n \times n$ matrica sa k -tim levim karakterističnim vektorom l_k u k -toj vrsti. Sa $Q(\chi, \beta)$ obeležena je suma snaga prilazećih talasa χ i β . Ako je sistem snabdeven Rimanovim invarijantama, tada je $\sum_{i>j} \chi_i \beta_j L[r_i, r_j] = 0$.

Dakle, prema konstrukciji Glimove šeme, deo talasa koji kreće iz mrežne tačke (x_{r-1}, t_{s-1}) , gde je $r+s$ paran broj, ukrštaju se sa delom talasa koji kreću iz tačke (x_{r+1}, t_{s-1}) i time formiraju talase koji kreću iz mrežne tačke (x_r, t_s) . Ovo je ilustrovano time što se tačka (x_r, t_s) nalazi u četvorouglu Δ_s^r sa četiri tačke u okruženju, (y_s^{r-1}, t_s) , (y_{s-1}^r, t_{s-1}) , (y_s^{r+1}, t_s) i (y_{s+1}^r, t_{s+1}) (slika 3.3). Talasi koji kreću iz tačke (x_{r-1}, t_{s-1}) i spajaju stanje q_s^{r-1} , sa leve strane i stanje q_{s-1}^r , sa desne strane, ulaze u Δ_s^r kroz jugo-zapadnu ivicu. Oni mogu biti predstavljeni n -torkom $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$, gde su χ_i , $1 \leq i \leq n$, amplitude talasa. Drugi talasi koji polaze iz tačke (x_{r+1}, t_{s-1}) i spajaju stanje q_{s-1}^r , sa leve strane, sa stanjem q_s^{r+1} , sa desne strane, ulaze u Δ_s^r kroz jugo-istočnu ivicu. Oni se mogu predstaviti n -torkom $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, gde su β_i , $1 \leq i \leq n$, amplitude talasa. Iz Δ_s^r izlaze talasi koji kreću iz tačke (x_r, t_s) , a koji spajaju stanje q_s^{r-1} , sa leve strane, sa stanjem q_s^{r+1} , sa desne strane, i oni su predstavljeni sa n -torkom $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_1, \dots, \tilde{\varepsilon}_n)$ gde su $\tilde{\varepsilon}_i$, $1 \leq i \leq n$, amplitude talasa. Deo od $\beta' = (\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{j-1}, \beta'_j, \beta'_{j+1}, \dots, \beta'_n)$ talasa koji čine $\tilde{\varepsilon}$ talas, izlazi kroz severozapadnu ivicu Δ_s^r i ulazi u Δ_{s+1}^{r-1} , dok preostali deo $\chi' = (\chi'_1, \chi'_2, \dots, \chi'_{j-1}, \chi'_j, \chi'_{j+1}, \dots, \chi'_n)$ izlazi kroz severo-istočnu ivicu Δ_s^r i ulazi u Δ_{s+1}^{r+1} . Tada je $\tilde{\varepsilon}_i = \chi'_i + \beta'_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ponovimo da pozitivna amplituda odgovara razređujućem talasu, a negativna udarnom talasu i josh da talasi χ'_i i β'_k , $i, k = 1, 2, \dots, n$ nisu prilazeći talasi. Recimo još i to da ako je talas amplitude nula, to znači da taj talas nedostaje u posmatranoj familiji. Zbog toga, postoji $j \in \{1, \dots, n\}$, tako da je $\beta'_i = 0$ za $i = j+1, \dots, n$ i $\chi'_i = 0$ za $i = 1, \dots, j-1$ (u suprotnom bi bili prilazeći talasi). Oba talasa χ'_j i β'_j mogu biti amplitude različite od nule, ali onda moraju obe biti pozitivne (jer nisu prilazeći talasi).

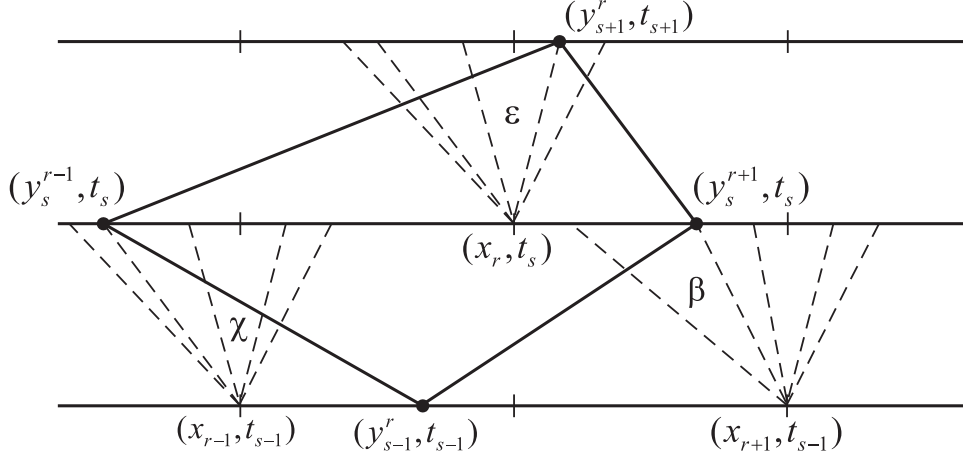
Posmatrajmo sada $\tilde{\varepsilon}$ kao rezultat interakcije talasa χ i β . Na osnovu teoreme 3.2.2 i ako je $|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ za $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, tada važi ocena

$$|\tilde{\varepsilon} - (\chi + \beta)| \leq (C_4 + C_5(|\chi| + |\beta|))Q(\Delta_s^r) \quad (3.25)$$

nad Δ_s^r , gde konstante C_4 i C_5 zavise samo od f . Ako je posmatrani sistem snabdeven Rimanovim koordinatama, tada je $C_4 = 0$. Sa

$$Q(\Delta_s^r) = \sum_{k,j} |\chi_k| |\beta_j|,$$

smo obeležili potencijal interakcije dva talasa, gde je sumiranje izvršeno po prilazećim talasima χ_k i β_j unutar četvougla Δ_s^r . Na osnovu (3.25) ako su χ_i i β_i istog znaka, ukupna snaga $|\beta'_i| + |\chi'_i|$



Slika 3.3: Četvorougao i mrežne tačke.

i -tog talasa koji napušta četvorougao Δ_s^r , je približno jednaka $|\chi_i| + |\beta_i|$. Međutim, kada su χ_i i β_i suprotnog znaka, dolazi do smanjenja snage i -tog odlazećeg talasa i ta pojava ima veliki uticaj na ponašanje rešenja. Zbog toga uvodimo sledeću notaciju. Smanjenje snage i -tog talasa u četvorouglu Δ_s^r meri se veličinom

$$\mathcal{C}_i(\Delta_s^r) = \frac{1}{2}(|\chi_i| + |\beta_i| - |\chi_i + \beta_i|) = \begin{cases} 0, & \chi_i \beta_i \geq 0, \\ |\beta_i|, & \chi_i \beta_i < 0, |\chi_i| \geq |\beta_i|, \\ |\chi_i|, & \chi_i \beta_i < 0, |\chi_i| < |\beta_i|. \end{cases} \quad (3.26)$$

Ukupno smanjenje snage u četvorouglu Δ_s^r računa se kao $\mathcal{C}(\Delta_s^r) = \sum_{i=1}^n \mathcal{C}_i(\Delta_s^r)$. Primitimo da iz (3.25) sledi

$$|\tilde{\varepsilon}| \leq |\chi| + |\beta| - 2\mathcal{C}(\Delta_s^r) + (C_4 + C_5(|\chi| + |\beta|))Q(\Delta_s^r). \quad (3.27)$$

Naime, na osnovu (3.26) važi

$$|\chi_i + \beta_i| = |\chi_i| + |\beta_i| - 2\mathcal{C}_i(\Delta_s^r),$$

pa je

$$\sum_{i=1}^n |\chi_i + \beta_i| = \sum_{i=1}^n |\chi_i| + \sum_{i=1}^n |\beta_i| - 2 \sum_{i=1}^n \mathcal{C}_i(\Delta_s^r)$$

ili

$$|\chi + \beta| = |\chi| + |\beta| - 2\mathcal{C}(\Delta_s^r).$$

Sada, na osnovu (3.25) važi

$$|\tilde{\varepsilon}| - |\chi + \beta| \leq |\tilde{\varepsilon} - (\chi + \beta)| \leq (C_4 + C_5(|\chi| + |\beta|))Q(\Delta_s^r),$$

pa je

$$|\tilde{\varepsilon}| \leq |\chi + \beta| + (C_4 + C_5(|\chi| + |\beta|))Q(\Delta_s^r),$$

odnosno

$$|\tilde{\varepsilon}| \leq |\chi| + |\beta| - 2\mathcal{C}(\Delta_s^r) + (C_4 + C_5(|\chi| + |\beta|))Q(\Delta_s^r).$$

3.3 Glimova funkcionala

U ovom poglavlju ćemo ograničiti totalnu varijaciju aproksimativnog rešenja q_h duž mrežnih krivih koje definišemo na sledeći način.

Definicija 3.3.1 *Mrežna kriva pridružena q_h je po delovima linearna kriva čiji su čvorovi $(y_{s_1}^{r_1}, t_{s_1}), \dots, (y_{s_m}^{r_m}, t_{s_m})$, gde je $r_{l+1} = r_l + 1$ i $s_{l+1} = s_l - 1$ ili $s_{l+1} = s_l + 1$ (slika 3.4).*

Kažemo da je J neposredni naslednik krive I ako je $J \setminus I$ gornja granica četvorougla Δ_s^r (odnosno severo-zapadna i severo-istočna ivica), a $I \setminus J$ donja granica četvorougla Δ_s^r (odnosno jugo-zapadna i jugo-istočna ivica, slika 3.5). Kažemo da je J naslednik krive I ako je $J > I$ i ako postoji niz $I = I_0, I_1, \dots, I_m = J$ mrežnih krivih takvih da je I_l neposredni naslednik I_{l-1} , $l = 1, 2, \dots, m$ (slika 3.6).

Mrežnoj krivi I dodeljujemo funkcionele $\mathcal{S}(I) = \max |\xi|$ i $L(I) = \sum |\xi|$, gde su i maksimum i suma uzeti po svim talasima (amplitude ξ) koji presecaju I . Time $\mathcal{S}(I)$ meri oscilaciju, a $L(I)$ totalnu varijaciju q_h duž krive I . Supremum i totalna varijacija q_h biće praćeni promenom \mathcal{S} i L pri prelasku sa krive I na njenog naslednika.

Neka je J neposredni naslednik I kao na slici 3.4. Talasi $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$ i $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ ulaze u Δ_s^r kroz jugo-zapadnu i jugo-istočnu granicu četvorougla Δ_s^r , redom, a talas $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \dots, \tilde{\varepsilon}_n)$ izlazi kroz severo-zapadnu i severo-istočnu granicu. Na osnovu (3.25) zaključujemo da važi

$$\mathcal{S}(J) \leq \mathcal{S}(I) + (C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))Q(\Delta_s^r) \quad (3.28)$$

i

$$L(J) \leq L(I) + (C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))Q(\Delta_s^r), \quad (3.29)$$

gde su C_4 i C_5 iste one konstante koje se pojavljuju u (3.25). Preciznije, $\mathcal{S}(J) = \max\{|\xi|, |\tilde{\varepsilon}|\}$ i $\mathcal{S}(I) = \max\{|\xi|, |\chi|, |\beta|\}$, gde su ξ amplitude preostalih talasa koji presecaju I i J . Sada ako je $\mathcal{S}(J) = |\xi|$ i na primer $\mathcal{S}(I) = |\beta|$, tada je

$$\mathcal{S}(J) - \mathcal{S}(I) = |\xi| - |\beta| \leq 0 \leq (C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))Q(\Delta_s^r).$$

Ako je $\mathcal{S}(J) = |\xi|$ i $\mathcal{S}(I) = |\xi|$, tada je

$$\mathcal{S}(J) - \mathcal{S}(I) = 0 \leq (C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))Q(\Delta_s^r).$$

Ako je $\mathcal{S}(J) = |\tilde{\varepsilon}|$ i na primer $\mathcal{S}(I) = |\beta|$, tada je, na osnovu (3.25), tačno

$$\mathcal{S}(J) - \mathcal{S}(I) = |\tilde{\varepsilon}| - |\beta| \leq |\tilde{\varepsilon} - \beta| \leq (C_4 + C_5 |\beta|)Q(\Delta_s^r) \leq (C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))Q(\Delta_s^r).$$

Konačno, ako je $\mathcal{S}(J) = |\tilde{\varepsilon}|$ i $\mathcal{S}(I) = |\xi|$, tada je, na osnovu (3.25), tačno

$$\mathcal{S}(J) - \mathcal{S}(I) = |\tilde{\varepsilon}| - |\xi| \leq |\tilde{\varepsilon}| - |\beta| \leq (C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))Q(\Delta_s^r).$$

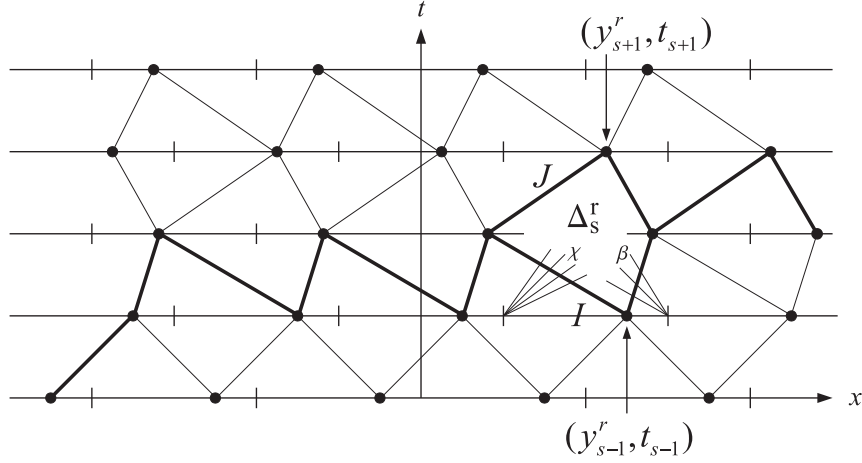
Ovim smo pokazali (3.28). Analogno važi i

$$\begin{aligned} L(J) - L(I) &= |\tilde{\varepsilon}| - (|\chi| + |\beta|) \leq |\tilde{\varepsilon}| - (|\chi| + 0) \leq |\tilde{\varepsilon} - (\chi + 0)| \leq (C_4 + C_5 (|\chi| + 0))Q(\Delta_s^r) \\ &\leq (C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))Q(\Delta_s^r), \end{aligned}$$

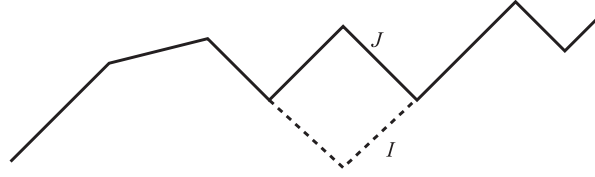
na osnovu (3.25). Ovim smo pokazali da važi i (3.29). Ponovimo, ako je sistem snabdeven Rimanovim invarijantama, tada je $C_4 = 0$. Kako i \mathcal{S} i L mogu porasti pri prelasku sa I na J , moramo uvesti još neke uslove da bismo dobili (3.10, 3.11).

Neka je potencijal prilazećih talasa $Q(I) = \sum |\chi||\beta|$ gde se sumiranje vrši po prilazećim talasima χ i β koji presecaju I . Jasno je da važi

$$Q(I) \leq \frac{1}{2} L^2(I). \quad (3.30)$$



Slika 3.4: Mrežna kriva.

Slika 3.5: J je neposredni naslednik I .

Promena potencijala prilazećih talasa, pri prelasku sa I na J , biće kontrolisana sa

$$Q(J) - Q(I) \leq ((C_4 + C_5 S(I))L(I) - 1) Q(\Delta_s^r), \quad (3.31)$$

gde su C_4 i C_5 iste konstante iz (3.28, 3.29). Da bismo pokazali (3.31), napravićemo razliku između unutrašnjih talasa (oni koji ulaze i izlaze iz Δ_s^r) i perifernih talasa (oni koji seku krive I i J levo od (y_s^{r-1}, t_s) i desno od (y_s^{r+1}, t_s)). Uočimo da unutrašnji talasi χ i β utiču na $Q(I)$, ali ne i na $Q(J)$ jer u $\tilde{\varepsilon}$ nema prilazećih talasa. Znači, u ovom slučaju je

$$Q(J) - Q(I) = -Q(\Delta_s^r). \quad (3.32)$$

Sa druge strane, za prilazeće periferne talase važiće $Q(J) - Q(I) = 0$. Preostalo je da se odredi kako na $Q(J) - Q(I)$ utiče potencijal interakcije perifernih i unutrašnjih talasa. Za početak, fiksirajmo i -ti periferni talas amplitude ξ_i i posmatrajmo kako utiče interakcija takvog talasa sa j -tim talasom iz χ , β i $\tilde{\varepsilon}$ na $Q(I)$ i $Q(J)$. Razlikujemo sledećih sedam slučajeva:

- (i) $j > i$ i periferni i -ti talas seče krivu I levo od (y_s^{r-1}, t_s) ,
- (ii) $j < i$ i periferni i -ti talas seče krivu I desno od (y_s^{r+1}, t_s) ,
- (iii) $j = i$ i i -ta familija karakteristika je linearno degenerisana.

U ova tri slučaja, i -ti periferni i j -ti talas iz χ , β i $\tilde{\varepsilon}$ nisu prilazeći, pa se $Q(I)$ i $Q(J)$ neće promeniti. Dalje,

- (iv) $j > i$ i periferni i -ti talas seče krivu I desno od (y_s^{r+1}, t_s) ,
- (v) $j < i$ i periferni i -ti talas seče krivu I levo od (y_s^{r-1}, t_s) ,
- (vi) $j = i$ i i -ta familija karakteristika je zaista nelinearna i i -ti periferni talas je amplitude $\xi_i < 0$ (udarni talas).

U ova nova tri slučaja, i -ti periferni i j -ti talas iz χ , β i $\tilde{\varepsilon}$ jesu prilazeći, pa se u $Q(I)$ mora naći izraz $|\xi_i||\chi_j| + |\xi_i||\beta_j|$, dok se u $Q(J)$ mora naći izraz $|\xi_i||\tilde{\varepsilon}_j|$. Konačno,

(vii) $j = i$ i i -ta familija karakteristika je zaista nelinearna i i -ti periferni talas je amplitude $\xi_i > 0$ (razređujući talas).

Sada u zavisnosti od znaka χ_i , β_i i $\tilde{\varepsilon}_i$, periferni i -ti talas može biti prilazeći sa χ_i , β_i i $\tilde{\varepsilon}_i$. Zato se u $Q(I)$ mora naći izraz $|\xi_i|(|\chi_i^-| + |\beta_i^-|)$, dok se u $Q(J)$ mora naći izraz $|\xi_i||\tilde{\varepsilon}_i^-|$. Ovde su χ_i^- , β_i^- i $\tilde{\varepsilon}_i^-$ amplitude udarnih talasa.

Na osnovu prethodne diskusije i (3.25), pri interakciji perifernog talasa amplitude ξ_i sa unutrašnjim talasom, doprinos te interakcije u $Q(J) - Q(I)$ ne može biti veći od $|\xi_i|(C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))Q(\Delta_s^r)$. To znači da je ukupni doprinos takvih interakcija predstavljen razlikom

$$Q(J) - Q(I) \leq (C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))L(I)Q(\Delta_s^r). \quad (3.33)$$

Koristeći (3.32, 3.33), dokazali smo (3.31). Primetimo da ako je u (3.31)

$$(C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))L(I) \leq 1,$$

tada će Q opadati pri prelasku sa I na J . Formirajmo sada Glimovu funkcionalu

$$F(I) = L(I) + 2K Q(I), \quad (3.34)$$

gde je K fiksirano gornje ograničenje za $C_4 + C_5 \mathcal{S}(I)$ koje ne zavisi od I i h .

Teorema 3.3.2 ([9]) *Neka je I mrežna kriva za koju važi $4K L(I) \leq 1$. Tada, za bilo koju mrežnu krivu J koja je naslednik I , važi*

$$F(J) \leq F(I) \quad (3.35)$$

i

$$L(J) \leq 2L(I). \quad (3.36)$$

Takođe važi i

$$\sum Q(\Delta_s^r) \leq L^2(I) \quad (3.37)$$

i

$$\sum \mathcal{C}(\Delta_s^r) \leq L(I), \quad (3.38)$$

gde je sumiranje izvršeno po svim četvorouglovima Δ_s^r .

Dokaz. Neka je J neposredni naslednik I kao na slikama 3.4 i 3.5. Na osnovu (3.34, 3.29, 3.31) zaključujemo da važi

$$\begin{aligned} F(J) - F(I) &= L(J) - L(I) + 2K(Q(J) - Q(I)) \\ &\leq (C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))Q(\Delta_s^r) + 2K((C_4 + C_5 \mathcal{S}(I))L(I) - 1)Q(\Delta_s^r) \\ &\leq K Q(\Delta_s^r) + 2K(K F(I) - 1)Q(\Delta_s^r) \\ &= K(2K F(I) - 1)Q(\Delta_s^r). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$F(J) \leq F(I) + K(2K F(I) - 1)Q(\Delta_s^r). \quad (3.39)$$

Na osnovu (3.34, 3.30) i $4K L(I) \leq 1$, dobijamo

$$\begin{aligned} F(I) &= L(I) + 2K Q(I) \\ &\leq L(I) + K L^2(I) \\ &= L(I)(1 + KL(I)) \\ &\leq L(I)\left(1 + \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

Dakle, važi

$$F(I) \leq 2L(I). \quad (3.40)$$

Sada je

$$2K F(I) - 1 \leq 4K L(I) - 1 \leq 0 \Rightarrow F(J) \leq F(I),$$

na osnovu (3.39, 3.40). Ovim je dokazano (3.35) i u slučaju kada je J naslednik I .

Ako pretpostavimo da je J naslednik I , tada je $L(J) \leq F(J) \leq F(I) \leq 2L(I)$, pa je dokazano i (3.36). Sumirajući (3.31) po svim četvorouglovima Δ_s^r koji se nalaze između krivih I i J , dobijamo

$$\frac{1}{2} \sum Q(\Delta_s^r) \leq Q(I) - Q(J). \quad (3.41)$$

Naime, kako je J neposredni naslednik I , na osnovu (3.31) i $4K L(I) \leq 1$ važi

$$\begin{aligned} Q(J) - Q(I) &\leq (K L(I) - 1) Q(\Delta_s^r) \\ &\leq (1/4 - 1) Q(\Delta_s^r) \\ &\leq (1/2 - 1) Q(\Delta_s^r) \\ &= -1/2 Q(\Delta_s^r). \end{aligned}$$

Sada, ako je J naslednik I , onda postoji niz $I = I_0, I_1, \dots, I_m = J$ mrežnih krivih takvih da je I_l neposredni naslednik I_{l-1} , $l = 1, 2, \dots, m$. Zato je

$$\begin{aligned} Q(J) - Q(I) &= Q(J) - Q(I_{m-1}) + Q(I_{m-1}) - Q(I_{m-2}) + \dots + Q(I_2) - Q(I_1) + Q(I_1) - Q(I) \\ &\leq -1/2 \sum Q(\Delta_s^r), \end{aligned}$$

gde je sumiranje izvršeno po svim četvorouglovima Δ_s^r . Ovim smo dobili (3.41). Sada na osnovu (3.41, 3.30) važi

$$\sum Q(\Delta_s^r) \leq 2(Q(I) - Q(J)) \leq 2Q(I) \leq L^2(I).$$

Ovim je dokazano (3.37). Sumirajmo sada (3.27) po svim četvorouglovima Δ_s^r između I i J . Dobijamo

$$\begin{aligned} |\tilde{\varepsilon}| &\leq |\chi| + |\beta| - 2\mathcal{C}(\Delta_s^r) + (C_4 + C_5(|\chi| + |\beta|))Q(\Delta_s^r) \\ &\Rightarrow 2\mathcal{C}(\Delta_s^r) \leq |\chi| + |\beta| - |\tilde{\varepsilon}| + (C_4 + C_5(|\chi| + |\beta|))Q(\Delta_s^r) \\ &\Rightarrow 2 \sum \mathcal{C}(\Delta_s^r) \leq L(I) + K \sum Q(\Delta_s^r) \\ &\Rightarrow 2 \sum \mathcal{C}(\Delta_s^r) \leq L(I) + K L(I)^2 \\ &\Rightarrow 2 \sum \mathcal{C}(\Delta_s^r) \leq L(I)(1 + K L(I)) \\ &\Rightarrow 2 \sum \mathcal{C}(\Delta_s^r) \leq L(I)(1 + 1/4) \\ &\Rightarrow 2 \sum \mathcal{C}(\Delta_s^r) \leq 2L(I) \\ &\Rightarrow \sum \mathcal{C}(\Delta_s^r) \leq L(I). \end{aligned}$$

Ovim je dokaz teoreme kompletiran. \square

Prethodna teorema je od fundamentalnog značaja. Ocene (3.35, 3.36) obezbeđuju ograničenost totalne varijacije, dok su ocene (3.37, 3.38) korisne za ocenu asimptotskog ponašanja rešenja (kada $t \rightarrow \infty$). Pretpostavka $4K L(I) \leq 1$ iz prethodne teoreme znači da $L(I)$ mora biti dovoljno malo, u opštem slučaju. Međutim, ako je sistem snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti ($C_4 = 0$), dovoljno je da $(\sup q_h)L(I)$ bude dovoljno malo (što je tačno ako važi (3.6)). Za ovaj specijalan slučaj, $(\sup q_h)$ će biti ocenjen pomoću sledeće teoreme.

Teorema 3.3.3 ([9]) *Pretpostavimo da je sistem snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti. Neka je I mrežna kriva za koju važi $4K L(I) \leq 1$. Tada za bilo koju mrežnu krivu J koja je naslednik I važi*

$$\mathcal{S}(J) \leq e^{C_5 L(I)^2} \mathcal{S}(I).$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je J neposredni naslednik I kao na slici 3.4. Kako je $C_4 = 0$, dobijamo

$$\mathcal{S}(J) \leq (1 + C_5 Q(\Delta_s^r)) \mathcal{S}(I)$$

korišćenjem (3.28). Međutim, ako je J naslednik I tada će, na osnovu (3.37), važiti i

$$\mathcal{S}(J) \leq \prod (1 + C_5 Q(\Delta_s^r)) \mathcal{S}(I) \leq e^{C_5 \Sigma Q(I)} \mathcal{S}(I) \leq e^{C_5 L(I)^2} \mathcal{S}(I),$$

gde su proizvod i suma uzeti po svim četvorouglovima Δ_s^r koji se nalaze između I i J . \square

3.4 Ograničenost totalne varijacije i supremuma

U ovom poglavlju biće pokazano da važi (3.11, 3.12, 3.10) pod pretpostavom da q_h ima uniformno ograničenu varijaciju. U tu svrhu poslužiće nam sledeća teorema.

Teorema 3.4.1 ([9]) *Fiksirajmo $0 \leq \tau < t < \infty$ i $-\infty < a < b < \infty$. Pretpostavimo da je $KTV(q_h(\cdot, t))$ na intervalu $[a - \hat{\lambda}(t - \tau) - 6h, b + \hat{\lambda}(t - \tau) + 6h]$ dovoljno malo. Tada je*

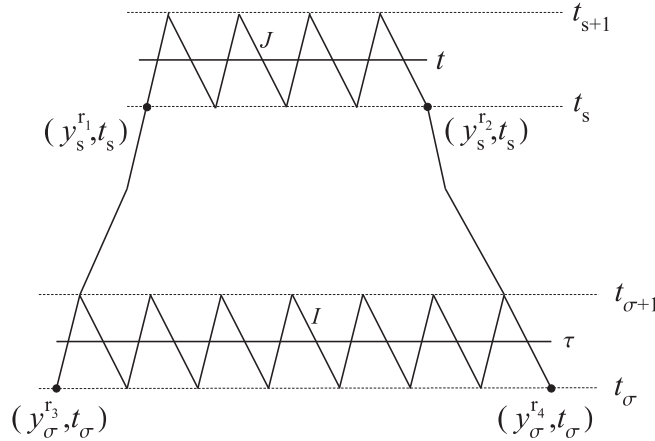
$$TV_{[a,b]}(q_h(\cdot, t)) \leq C_2 TV_{[a - \hat{\lambda}(t - \tau) - 6h, b + \hat{\lambda}(t - \tau) + 6h]}(q_h(\cdot, \tau)), \quad (3.42)$$

gde C_2 zavisi samo od f . Dalje, ako su i $q_h(\cdot, \tau)$ i $q_h(\cdot, t)$ neprekidne funkcije u tački x i ako je $KTV(q_h(\cdot, t))$ dovoljno malo na $[x - \hat{\lambda}(t - \tau) - 6h, x + \hat{\lambda}(t - \tau) + 6h]$, tada važi

$$|q_h(x, t) - q_h(x, \tau)| \leq C_9 TV_{[x - \hat{\lambda}(t - \tau) - 6h, x + \hat{\lambda}(t - \tau) + 6h]}(q_h(\cdot, \tau)), \quad (3.43)$$

gde C_9 zavisi samo od f .

Dokaz. Neka su σ i s nenegativni celi brojevi tako da je $t_\sigma \leq \tau < t_{\sigma+1}$ i $t_s \leq t < t_{s+1}$. Dalje neka su r_1 i r_2 celi brojevi tako da je $y_{s+1}^{r_1+1} < a \leq y_{s+1}^{r_1+3}$ i $y_{s+1}^{r_2-3} \leq b < y_{s+1}^{r_2-1}$. Na kraju, neka je $r_3 = r_1 - (s - \sigma)$ i $r_4 = r_2 + (s - \sigma)$.



Slika 3.6: J je naslednik I .

Sada konstruišemo dve mrežne krive I i J na sledeći način (slika 3.6). Kriva I kreće iz tačke $(y_{\sigma}^{r_3}, t_{\sigma})$ i idući cik-cak između t_{σ} i $t_{\sigma+1}$, završava u tački $(y_{\sigma}^{r_4}, t_{\sigma})$. Kriva J takođe kreće iz tačke $(y_{\sigma}^{r_3}, t_{\sigma})$ i nakon $s - \sigma$ koraka u pravcu severo-istoka dolazi u tačku $(y_s^{r_1}, t_s)$. Tada idući cik-cak između t_s i t_{s+1} , dolazi u tačku $(y_s^{r_2}, t_s)$. Konačno, nakon $s - \sigma$ koraka u pravcu jugo-istoka kriva J se završava u tački $(y_{\sigma}^{r_4}, t_{\sigma})$.

Važi

$$TV_{[a,b]}(q_h(\cdot, t)) \leq C_6 L(J), \quad (3.44)$$

za neko $C_6 > 0$. Pokazaćemo da važi $y_{\sigma}^{r_3} \geq a - \hat{\lambda}(t - \tau) - 6h$ i $y_{\sigma}^{r_4} \leq b + \hat{\lambda}(t - \tau) + 6h$, iz čega će slediti

$$L(I) \leq C_7 TV_{[a - \hat{\lambda}(t - \tau) - 6h, b + \hat{\lambda}(t - \tau) + 6h]}(q_h(\cdot, \tau)). \quad (3.45)$$

Pošto je $t_\sigma \leq \tau < t_{\sigma+1}$ i $t_s \leq t < t_{s+1}$, tada je $\sigma h / \hat{\lambda} \leq \tau < (\sigma + 1)h / \hat{\lambda}$ i $sh / \hat{\lambda} \leq t < (s + 1)h / \hat{\lambda}$. Dakle važi

$$\sigma h \leq \hat{\lambda} \tau < \sigma h + h, \quad sh \leq \hat{\lambda} t < sh + h. \quad (3.46)$$

Sada, na osnovu (3.46) sledi

$$\hat{\lambda}(t - \tau) = \hat{\lambda}t - \hat{\lambda}\tau \geq sh - \sigma h - h = (s - \sigma)h - h,$$

odnosno,

$$\hat{\lambda}(t - \tau) + h \geq (s - \sigma)h. \quad (3.47)$$

Dalje je

$$\begin{aligned} y_\sigma^{r_3} &= y_\sigma^{r_1 - (s - \sigma)} = x_{r_1 - (s - \sigma)} + \theta_\sigma h = (r_1 - (s - \sigma))h + \theta_\sigma h = r_1 h - (s - \sigma)h + \theta_\sigma h \\ &\geq r_1 h - (s - \sigma)h - h \\ &\geq r_1 h - \hat{\lambda}(t - \tau)h - 2h \end{aligned} \quad (3.48)$$

za $-1 < \theta_\sigma < 1$ i (3.47). Kako je $y_{s+1}^{r_1+1} < a \leq y_{s+1}^{r_1+3}$, onda je

$$\begin{aligned} a &\leq x_{r_1+3} + \theta_{s+1} h \\ &= (r_1 + 3)h + \theta_{s+1} h \\ &\leq r_1 h + 3h + h, \end{aligned}$$

jer je $-1 < \theta_{s+1} < 1$. Znači da je

$$r_1 h \geq a - 4h. \quad (3.49)$$

Sada je, na osnovu (3.48, 3.49),

$$y_\sigma^{r_3} \geq a - 4h - \hat{\lambda}(t - \tau)h - 2h = a - \hat{\lambda}(t - \tau)h - 6h.$$

Sličnim postupkom, dobijamo

$$\begin{aligned} y_\sigma^{r_4} &= y_\sigma^{r_2 + (s - \sigma)} = x_{r_2 + (s - \sigma)} + \theta_\sigma h = (r_2 + (s - \sigma))h + \theta_\sigma h = r_2 h + (s - \sigma)h + \theta_\sigma h \\ &\leq r_2 h + (s - \sigma)h + h \\ &\leq r_2 h + \hat{\lambda}(t - \tau)h + 2h \end{aligned} \quad (3.50)$$

za $-1 < \theta_\sigma < 1$ i (3.47). Kako je $y_{s+1}^{r_2-3} \leq b < y_{s+1}^{r_2-1}$, onda je

$$\begin{aligned} b &\geq x_{r_2-3} + \theta_{s+1} h \\ &= (r_2 - 3)h + \theta_{s+1} h \\ &\geq r_2 h - 3h - h, \end{aligned}$$

jer je $-1 < \theta_{s+1} < 1$. Znači da je

$$r_2 h \leq b + 4h. \quad (3.51)$$

Sada je, na osnovu (3.50, 3.51),

$$y_\sigma^{r_4} \leq b + 4h + \hat{\lambda}(t - \tau)h + 2h = b + \hat{\lambda}(t - \tau)h + 6h.$$

Kako je J naslednik od I i ako je $4KL(I) \leq 1$, na osnovu teoreme 3.3.2 sledi da je $L(J) \leq 2L(I)$. Na osnovu (3.44, 3.45) dobijamo (3.42) za $C_2 = 2C_6C_7$.

Sada za dato x , ponavljajući prethodnu konstrukciju krivih I i J za $a = b = x$, možemo naći tačku (y', τ') na krivoj I tako da je $q_h(y', \tau') = q_h(x, \tau)$, a takođe i tačku (x', t') na krivoj J tako da je $q_h(x', t') = q_h(x, t)$. Zato se $|q_h(x, t) - q_h(x, \tau)|$ može predstaviti preko suma amplituda talasa koji presecaju J i I od tačke (x', t') do tačke (y', τ') . Zbog toga sledi

$$|q_h(x, t) - q_h(x, \tau)| \leq C_8 (L(I) + L(J)) \leq 3C_8 L(I). \quad (3.52)$$

Sada na osnovu (3.52, 3.45) za $a = b = x$ dobijamo (3.43) za $C_9 = 3C_7C_8$. Ovim je dokaz završen. \square

Primenjujući (3.42) za $\tau = 0$, $a = -\infty$ i $b = \infty$, a kako je $TV_{(-\infty, \infty)}(q_h(\cdot, 0)) \leq TV_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot))$, dobijamo (3.11). Konačno, integraleći (3.43) na intervalu $(-\infty, \infty)$, a koristeći Fubinijevu teoremu 1.2.15 i (3.11) imamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |q_h(x, t) - q_h(x, \tau)| dx &\leq C_9 \int_{-\infty}^{\infty} TV_{[x-\hat{\lambda}(t-\tau)-6h, x+\hat{\lambda}(t-\tau)+6h]}(q_h(\cdot, \tau)) dx \\ &= 2C_9(\hat{\lambda}(t-\tau) + 6h)TV_{(-\infty, \infty)}(q_h(\cdot, \tau)) \\ &\leq 2C_9C_2(\hat{\lambda}(t-\tau) + 6h)TV_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)), \end{aligned}$$

pa time dobijamo (3.12) za $C_3 = 2C_9C_2$.

Ograničenost supremuma dobija se na sledeći način. Ako posmatramo L^∞ normu, koristeći (3.43) i $\tau = 0$ imamo

$$\begin{aligned} |q_h(x, t) - |q_h(x, 0)| &\leq |q_h(x, t) - q_h(x, 0)| \leq C_9 TV_{(-\infty, \infty)}(q_h(\cdot, 0)) \\ &\leq C_9 TV_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)), \end{aligned}$$

pa je

$$\sup_{(-\infty, \infty)} |q_h(\cdot, t)| \leq \sup_{(-\infty, \infty)} |q_0(\cdot)| + C_9 TV_{(-\infty, \infty)}(q_0(\cdot)).$$

Ovim je pokazano (3.10). Ako je sistem snabdeven koordinatnim sistemom Rimanovih invarijanti, tada će važiti

$$\sup_{(-\infty, \infty)} |q_h(\cdot, t)| \leq C_0 \sup_{(-\infty, \infty)} |q_0(\cdot)|, \quad 0 \leq t < \infty,$$

što je direktna posledica teoreme 3.3.3.

Metod praćenja talasa - WFT metod

Dafermos ([10]) je formulisao metod praćenja talasa za skalarni zakon održanja. DiPerna ([13]) je proširio metod na zaista nelinearne sisteme sa dva zakona održanja, dok su Bressan ([3]) i Risebro ([33]) uopštili WFT metod na zaista nelinearne sisteme bez ograničenja u broju jednačina zakona održanja. U Bressanovom algoritmu uvodi se nefizički talas u aproksimativnom Rimanovom rešenju, dok je Risebrov pristup da se svi novi talasi spoje u jedan od dva glavna talasa koji su uključeni u interakciju. U ovoj glavi koristićemo rezultate i pojmove iz [4] (glava 7).

WFT metod služi za konstrukciju rešenja početnog problema kod hiperboličnih sistema zakona održanja tako što se prate talasi i njihove interakcije. Glimova diferencna šema (glava 3) rešava problem interakcije talasa tako što pre interakcije uvek aproksimira rešenje sa po delovima konstantnom funkcijom. Za razliku od nje, kod metode praćenja talasa se posle svake interakcije dva talasa rešava Rimanov problem. Ako je njegovo rešenje udarni ili kontaktni talas, tada se prihvata takvo rešenje i ovde nema apoksimacije tačnog rešenja (osim u slučaju kada je proizvod snaga talasa koji učestvuju u interakciji manji od nekog unapred zadatog parametra). Međutim, ako rešenje problema sadrži i razređujući talas, tada se on aproksimira konstantnim stanjima i veštačkim prekidima koji razdvajaju konstantna stanja. Tako nastali talasi kreću se brzinom koja je približna brzini karakteristike, nisu dopustivi i male su snage. Ipak, kako aproksimacija razređujućih talasa postaje finija dobijamo dopustivo rešenje i u ovom slučaju.

4.1 WFT aproksimacije

Posmatraćemo Košijev problem (2.1, 2.4), odnosno

$$q_t + f(q)_x = 0, \quad q_0(x) = q(x, 0),$$

i postojanje globalnog rešenja za navedeni problem pod sledećom pretpostavkom:

(P1) Navedeni sistem (2.1) je strogo hiperboličan sa glatkim koeficijentima, definisan za $q \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Svako polje karakteristika je ili zaista nelinearno ili linearno degenerisano.

Teorema 4.1.1 ([4]) *Pod pretpostavkom (P1), postoji konstanta δ_0 sa sledećim osobinama. Za svaki početni uslov $q_0 \in \mathbf{L}^1$ za koji važi*

$$\text{TV}(q_0) \leq \delta_0, \tag{4.1}$$

Košijev problem (2.1, 2.4) ima entropijski dopustivo slabo rešenje $q = q(x, t)$ definisano za svako $t \geq 0$.

Teorema 4.1.1 dokazana je u fundamentalnom radu Glima [14]. Alternativni metod za konstrukciju aproksimativnog rešenja baziran je na WFT metodi i biće dat u narednim poglavljima.

Definicija 4.1.2 *Neka je dato $\mu > 0$. Kažemo da je neprekidno preslikavanje $q : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ μ -aproksimativno rešenje konstruisano metodom praćenja talasa ako važe sledeća četiri uslova:*

1. *Funkcija $q(x, t)$ je po delovima konstantna, sa prekidima duž konačno mnogo pravih linija u $x - t$ ravni. Postoje tri vrste talasa: udarni (ili kontaktni), razređujući i nefizički talasi, i čine skup $\mathcal{J} = \mathcal{S} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{NF}$.*
2. *Duž svakog udarnog (ili kontaktnog) talasa $x = x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{S}$, je $q^- := q(x_{\alpha-}, t)$, $q^+ := q(x_{\alpha+}, t)$ i*

$$q^+ = S_{k_\alpha}(s_\alpha)(q^-), \quad (4.2)$$

za neko $k_\alpha \in \{1, 2, \dots, n\}$ i za neku amplitudu talasa s_α . Ako je familija k_α zaista nelinearna, tada je $s_\alpha < 0$ (u slučaju linearne degenerisanosti, s_α je proizvoljno). Brzina udarnog (ili kontaktnog) talasa $\lambda_{k_\alpha}(q^-, q^+)$ zadovoljava

$$|\dot{x}_\alpha - \lambda_{k_\alpha}(q^-, q^+)| \leq \mu. \quad (4.3)$$

3. *Duž svake razređujuće krive $x = x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{R}$, je $q^- := q(x_{\alpha-}, t)$, $q^+ := q(x_{\alpha+}, t)$ i*

$$q^+ = R_{k_\alpha}(s_\alpha)(q^-), \quad s_\alpha \in (0, \mu],$$

za neku zaista nelinearnu familiju k_α . Važi i

$$|\dot{x}_\alpha - \lambda_{k_\alpha}(q^+)| \leq \mu. \quad (4.4)$$

4. *Svi nefizički talasi $x = x_\alpha(t)$, $\alpha \in \mathcal{NF}$, imaju istu brzinu*

$$\dot{x}_\alpha \equiv \hat{\lambda},$$

gde je $\hat{\lambda}$ fiksna konstantna brzina strogo veća od brzina svih karakteristika. Ukupna snaga svih nefizičkih talasa u $q(\cdot, t)$ ostaje uniformno mala, odnosno

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{NF}} |q(x_{\alpha+}, t) - q(x_{\alpha-}, t)| \leq \mu \quad \text{za svako } t \geq 0.$$

Ako važi još i

$$\|q(\cdot, 0) - q_0(\cdot)\|_{\mathbf{L}^1} < \mu,$$

tada kažemo da je q μ -aproksimativno rešenje Košijevog problema (2.1, 2.4) dobijeno metodom praćenja talasa.

U nastavku će nam biti potrebne dve leme čiji su dokazi dati u [4] (poglavlje 2.9), a gde je korišćeno

$$|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Lema 4.1.3 ([4]) *Neka je $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilna funkcija sa Lipšic neprekidnim prvim izvodom. Ako važi*

$$\Phi(0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x}(0) = 0,$$

tada važi

$$\Phi(x) = \mathcal{O}(1)|x|^2.$$

Ovde ćemo ipak dati detaljniji dokaz naredne leme u odnosu na dokaz dat u [4] (poglavlje 2.9).

Lema 4.1.4 ([4]) Neka je $\Phi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ dva puta diferencijabilna funkcija sa Lipšic neprekidnim drugim izvodom. Ako važi

$$\Phi(x, 0) = \Phi(0, y) = 0 \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}^p, \quad y \in \mathbb{R}^q, \quad (4.5)$$

tada važi

$$\Phi(x, y) = \mathcal{O}(1)|x||y| \quad (4.6)$$

za svako x, y u okolini $(0, 0)$. Ako važi i

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0, \quad (4.7)$$

tada važi preciznija ocena

$$\Phi(x, y) = \mathcal{O}(1)|x||y|(|x| + |y|). \quad (4.8)$$

Dokaz. Jednostavnim računanjem dolazimo do

$$\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} \Phi_1(x, y) \\ \Phi_2(x, y) \\ \vdots \\ \Phi_n(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^q \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_i}(x, \theta y) y_i \right) d\theta \\ \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^q \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_i}(x, \theta y) y_i \right) d\theta \\ \vdots \\ \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^q \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_i}(x, \theta y) y_i \right) d\theta \end{bmatrix},$$

a zatim i do

$$\Phi(x, y) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q x_j y_i \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_j \partial y_i}(\theta' x, \theta y) d\theta d\theta' \\ \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q x_j y_i \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_j \partial y_i}(\theta' x, \theta y) d\theta d\theta' \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q x_j y_i \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x_j \partial y_i}(\theta' x, \theta y) d\theta d\theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q |x_j| |y_i|\right) \\ \mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q |x_j| |y_i|\right) \\ \vdots \\ \mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q |x_j| |y_i|\right) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

korišćenjem (4.5). Kako je

$$\sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q |x_j| |y_i| = \sum_{j=1}^p |x_j| \sum_{i=1}^q |y_i| = |x||y|.$$

zaključujemo da važi (4.6), gde je sa $|x||y|$ zapravo obeležen vektor $(|x||y|, |x||y|, \dots, |x||y|)^T$ sa n komponenta. Sada, ako važi (4.7), tada Lipšicova neprekidnost drugog izvoda daje

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}(x, y) \right| = \mathcal{O}(1)(|x| + |y|),$$

pa, nakon uvrštavanja u (4.9), imamo (4.8). \square

Sledeća lema daje ocenu greške μ -aproksimativnog rešenja u datom vremenu t . Napomenimo da snagu nefizičkog talasa definišemo sa $|s_\alpha| = |q(x_\alpha +, t) - q(x_\alpha -, t)|$.

Lema 4.1.5 ([4]) Neka je $q = q(x, t)$ μ -aproksimativno rešenje za (2.1) koje je dobijeno metodom praćenja talasa. Neka je η konveksna entropija sa fluksom entropije ψ . Fiksirajmo vreme t u kome nema interakcije talasa i posmatrajmo proizvoljni talas lociran na x_α amplitude s_α . Za $q^- := q(x_\alpha^-, t)$ i $q^+ := q(x_\alpha^+, t)$, definišemo RH deficit za posmatrani sistem i za entropijske uslove:

$$\begin{aligned} E_\alpha &:= (f(q^+) - f(q^-)) - \dot{x}_\alpha(q^+ - q^-), \\ E'_\alpha &:= (\psi(q^+) - \psi(q^-)) - \dot{x}_\alpha(\eta(q^+) - \eta(q^-)). \end{aligned}$$

Tada

(i) za svaki razređujući talas važi

$$E_\alpha = \mathcal{O}(1) \mu |s_\alpha|, \quad E'_\alpha = \mathcal{O}(1) \mu |s_\alpha|,$$

(ii) duž svakog udarnog (ili kontaktnog) talasa važi

$$E_\alpha = \mathcal{O}(1) \mu |s_\alpha|, \quad E'_\alpha \leq \mathcal{O}(1) \mu |s_\alpha|,$$

(iii) duž svakog nefizičkog talasa važi

$$E_\alpha = \mathcal{O}(1) |s_\alpha|, \quad E'_\alpha = \mathcal{O}(1) |s_\alpha|.$$

Dokaz. Da bismo dokazali (i), fiksirajmo indeks $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, stanje ω i definišimo preslikavanje

$$\Psi(s, \omega) := (f(R_k(s)(\omega)) - f(\omega)) - \lambda_k(\omega)(R_k(s)(\omega) - \omega).$$

Dobijamo da je $\Psi(0, \omega) = 0$ i da važi

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s}(0, \omega) = Df(\omega)r_k(\omega) - \lambda_k(\omega)r_k(\omega) = 0.$$

Zbog toga, na osnovu leme 4.1.3

$$\Psi(s, \omega) = \mathcal{O}(1) |s|^2. \quad (4.10)$$

Ako talas u x_α pripada familiji k_α , iskoristimo (4.10) za $\omega = q^-$ i $k = k_\alpha$. Za $s_\alpha \in [0, \mu]$, imajući u vidu da važi

$$\begin{aligned} q^+ - q^- &= R_{k_\alpha}(s_\alpha)(q^-) - q^- = R_{k_\alpha}(s_\alpha)(q^-) - R_{k_\alpha}(0)(q^-) = \mathcal{O}(1) |s_\alpha| = \mathcal{O}(1) \mu, \\ |\lambda_{k_\alpha}(q^+) - \lambda_{k_\alpha}(q^-)| &= \mathcal{O}(1) |q^+ - q^-| = \mathcal{O}(1) |s_\alpha| = \mathcal{O}(1) \mu, \end{aligned}$$

a na osnovu (4.4, 4.10), važiće i

$$\begin{aligned} E_\alpha &= ((f(q^+) - f(q^-)) - \lambda_{k_\alpha}(q^-)(q^+ - q^-)) + (\lambda_{k_\alpha}(q^-) - \dot{x}_\alpha)(q^+ - q^-) \\ &= \mathcal{O}(1) |s_\alpha|^2 + (\lambda_{k_\alpha}(q^-) - \lambda_{k_\alpha}(q^+))(q^+ - q^-) + (\lambda_{k_\alpha}(q^-) - \dot{x}_\alpha)(q^+ - q^-) \\ &= \mathcal{O}(1) |s_\alpha|^2 + \mathcal{O}(1) \mu |s_\alpha| + \mathcal{O}(1) \mu |s_\alpha| = \mathcal{O}(1) \mu |s_\alpha|. \end{aligned}$$

Ocena za E'_α dobija se slično ako posmatramo funkciju

$$\Psi(s, \omega) := (\psi(R_k(s)(\omega)) - \psi(\omega)) - \lambda_k(\omega)(\eta(R_k(s)(\omega)) - \eta(\omega)).$$

Sada je $\Psi(0, \omega) = 0$ i važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial s}(0, \omega) &= D\psi(\omega)r_k(\omega) - \lambda_k(\omega)D\eta(\omega)r_k(\omega) \\ &= D\eta(\omega)Df(\omega)r_k(\omega) - \lambda_k(\omega)D\eta(\omega)r_k(\omega) \\ &= D\eta(\omega)\lambda_k(\omega)r_k(\omega) - \lambda_k(\omega)D\eta(\omega)r_k(\omega) = 0. \end{aligned}$$

Zbog toga, na osnovu leme 4.1.3 sledi $\Psi(s, \omega) = \mathcal{O}(1) |s|^2$. Koristeći još i (4.4), važiće

$$\begin{aligned} E'_\alpha &= ((\psi(q^+) - \psi(q^-)) - \lambda_{k_\alpha}(q^-)(\eta(q^+) - \eta(q^-))) + (\lambda_{k_\alpha}(q^-) - \dot{x}_\alpha)(\eta(q^+) - \eta(q^-)) \\ &= \mathcal{O}(1) |s_\alpha|^2 + (\lambda_{k_\alpha}(q^-) - \lambda_{k_\alpha}(q^+))(\eta(q^+) - \eta(q^-)) + (\lambda_{k_\alpha}(q^-) - \dot{x}_\alpha)(\eta(q^+) - \eta(q^-)) \\ &= \mathcal{O}(1) |s_\alpha|^2 + \mathcal{O}(1) |s_\alpha| |\eta(q^+) - \eta(q^-)| + \mu |\eta(q^+) - \eta(q^-)| \\ &= \mathcal{O}(1) \mu |s_\alpha| + \mathcal{O}(1) |s_\alpha| |q^+ - q^-| + \mathcal{O}(1) \mu |q^+ - q^-| = \mathcal{O}(1) \mu |s_\alpha| \end{aligned}$$

jer je $\eta(q)$ Lipšic neprekidna funkcija.

Da bismo dokazali (ii), koristimo $q^+ - q^- = \mathcal{O}(1)|s_\alpha|$, pa na osnovu (4.2, 4.3) dobijamo

$$\begin{aligned} E_\alpha &= ((f(q^+) - f(q^-)) - \lambda_{k_\alpha}(q^-, q^+)(q^+ - q^-)) + (\lambda_{k_\alpha}(q^-, q^+) - \dot{x}_\alpha)(q^+ - q^-) \\ &= (\lambda_{k_\alpha}(q^-, q^+) - \dot{x}_\alpha)(q^+ - q^-) = \mathcal{O}(1)\mu|s_\alpha|, \end{aligned}$$

jer udarni talasi zadovoljavaju RH uslov, pa je prvi sabirak u prethodnom izrazu jednak nuli. Ocena za E'_α dobija se analogno.

$$\begin{aligned} E'_\alpha &= ((\psi(q^+) - \psi(q^-)) - \lambda_{k_\alpha}(q^-, q^+)(\eta(q^+) - \eta(q^-))) \\ &\quad + (\lambda_{k_\alpha}(q^-, q^+) - \dot{x}_\alpha)(\eta(q^+) - \eta(q^-)) \\ &\leq (\lambda_{k_\alpha}(q^-, q^+) - \dot{x}_\alpha)(\eta(q^+) - \eta(q^-)) \\ &= \mathcal{O}(1)\mu|s_\alpha| \end{aligned}$$

jer na osnovu (2.13) važi

$$\lambda_{k_\alpha}(q^-, q^+)(\eta(q^+) - \eta(q^-)) - (\psi(q^+) - \psi(q^-)) \geq 0$$

za $q^+ = S_{k_\alpha}(s_\alpha)(q^-)$ i $s_\alpha < 0$.

Ocena (iii) je trivijalna posledica Lipšicove neprekidnosti funkcija f, η, ψ , odnosno

$$\begin{aligned} E_\alpha &= (f(q^+) - f(q^-)) - \hat{\lambda}|q^+ - q^-| = \mathcal{O}(1)|q^+ - q^-| - \hat{\lambda}|q^+ - q^-| \\ &= (\mathcal{O}(1) - \hat{\lambda})|q^+ - q^-| = \mathcal{O}(1)|s_\alpha|. \end{aligned}$$

Ocena za E'_α se dobija analogno.

$$\begin{aligned} E'_\alpha &= (\psi(q^+) - \psi(q^-)) - \hat{\lambda}(\eta(q^+) - \eta(q^-)) = \mathcal{O}(1)|q^+ - q^-| - \hat{\lambda}\mathcal{O}(1)|q^+ - q^-| \\ &= \mathcal{O}(1)(1 - \hat{\lambda})|q^+ - q^-| = \mathcal{O}(1)|s_\alpha|. \end{aligned}$$

□

Da bismo dokazali teoremu 4.1.1, prvi korak ka tom cilju će biti dokaz da postoji aproksimativno rešenje za svako $t \geq 0$, i da je to rešenje dobijeno metodom praćenja talasa.

Teorema 4.1.6 ([4]) *Pod pretpostavkom (P1), postoji konstanta $\delta_0 > 0$ sa sledećim osobinama: za svaki početni uslov $q_0 \in \mathbf{L}^1$ koji zadovoljava uslov (4.1) i za svako $\mu > 0$, Košijev problem (2.1, 2.4) ima μ -aproksimativno rešenje definisano za svako $t \geq 0$.*

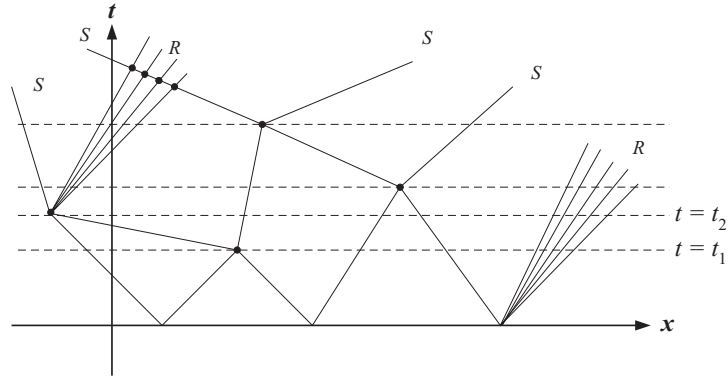
U drugom koraku biće pokazano da odgovarajući niz aproksimacija konvergira ka $q = q(x, t)$ koje je entropijski dopustivo rešenje Košijevog problema.

4.2 Algoritam praćenja talasa - WFT algoritam

Sada će biti predstavljen algoritam koji generiše pomenute WFT aproksimacije. Neka su μ i δ_0 mali pozitivni brojevi. Algoritam počinje u $t = 0$ (slika 4.1) tako što se početni uslov q_0 aproksimira sa po delovima konstantnom funkcijom $q(\cdot, 0)$ tako da važi

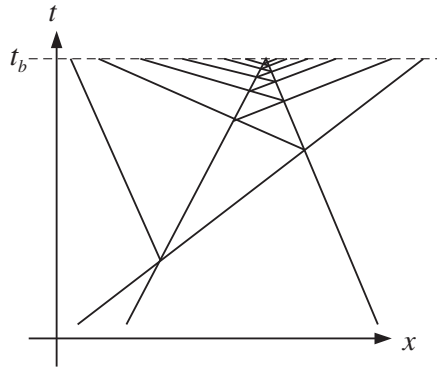
$$\|q(\cdot, 0) - q_0\|_{\mathbf{L}^1} \leq \mu, \quad \text{TV}(q(\cdot, 0)) \leq \text{TV}(q_0) \leq \delta_0.$$

Neku su $x_1 < x_2 < \dots < x_{N_0}$ tačke gde početni uslov $q(\cdot, 0)$ ima prekide. Za svako $m \in \{1, 2, \dots, N_0\}$, Rimanov problem generisan skokom $q^- = q(x_m-, 0)$, $q^+ = q(x_m+, 0)$ rešava se aproksimativno u okolini tačke $(x_m, 0)$ u $x - t$ ravni. Aproksimativno rešenje biće u samosličnom obliku $q(x, t) = \tilde{\varphi}((x - x_m)/t)$, gde je $\tilde{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ po delovima konstantna funkcija. Ako se rešenje Rimanovog problema sastoji samo od udarnih ili kontaktnih talasa, tada se usvaja dobijeno po delovima konstantno rešenje. Ako se u rešenju Rimanovog problema javljaju i razređujući talasi, tada se oni aproksimiraju konstantnim stanjima i veštačkim prekidima koji razdvajaju konstantna

Slika 4.1: Algoritam praćenja talasa u $x - t$ ravni.

stanja. Tako nastali talasi kreću se brzinom koja je približna brzini karakteristike. Za ovako dobijeno rešenje reći ćemo da je dobijeno primenom *tačnog Rimanovog rešenja*.

Rešenje q se može konstruisati sve dok ne dođe do preseka karakteristika, odnosno do interakcije dva susedna talasa. Neka se interakcija desi u vremenu $t = t_1$. Tada se konstruiše aproksimativno rešenje tako što se rešava Rimanov problem sa početnim uslovima $q(x, t_1 -)$. Pretpostavljamo da promenom brzine talasa reda $\mathcal{O}(1)\mu$, dolazi do interakcije tačno dva talasa. Navedena konstrukcija može se sprovesti sve dok broj diskontinuiteta ne divergira u konačnom vremenu. Da bi se izbegao takav slučaj (slika 4.2), uvodi se novo aproksimativno rešenje dobijeno korišćenjem *aproksimativnog Rimanovog rešenja* (u slučaju zakona održanja sa jednom ili dve jednačine, algoritam praćenja talasa proizvodi konačan broj talasa u konačnom vremenu za dovoljno male početne uslove, [13]).

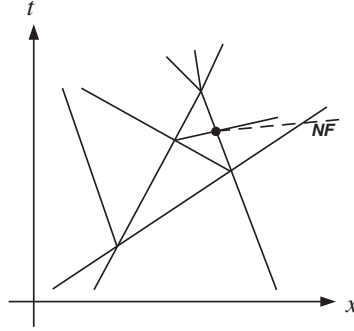


Slika 4.2: Broj prekida divergira u konačnom vremenu.

Neka je unapred dat prag parametar $\hat{\nu} > 0$. Neka su σ i τ amplitude talasa koji su u interakciji. U svakoj tački u kojoj dolazi do interakcije, računa se proizvod snaga prilazećih talasa, odnosno $|\sigma\tau|$. Ako je $|\sigma\tau| \geq \hat{\nu}$, tada se konstruiše aproksimativno rešenje na već pomenut način. Međutim, ako je $|\sigma\tau| < \hat{\nu}$, tada se konstruiše aproksimativno Rimanovo rešenje tako što je rezultat interakcije minimalan broj fizičkih talasa i jedan *nefizički talas* male snage (videti poglavlje 4.2.2). Nefizički talas se kreće fiksiranom brzinom $\hat{\lambda}$ koja je veća od brzina svih karakteristika. Time će ukupan broj talasa ostati ograničen za svako vreme $t \geq 0$ (slika 4.3).

Posmatrajmo sada sledeći Rimanov problem u proizvoljnoj tački (\bar{x}, \bar{t}) ,

$$v_t + f(v)_x = 0, \quad v(x, \bar{t}) = \begin{cases} q^- & \text{ako je } x < \bar{x}, \\ q^+ & \text{ako je } x > \bar{x}. \end{cases} \quad (4.11)$$



Slika 4.3: Ukupan broj talasa ostaje ograničen (NF = nefizički talas).

Za fiksirano stanje q^- i $i = 1, 2, \dots, n$, definišaćemo krivu

$$\Psi_i(s)(q^-) = \begin{cases} R_i(s)(q^-) & \text{ako je } s \geq 0, \\ S_i(s)(q^-) & \text{ako je } s < 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

i primenićemo tačno ili aproksimativno Rimanovo rešenje (videti naredna dva poglavlja). U tu svrhu dajemo još jednu definiciju.

Definicija 4.2.1 Za dva talasa koja u nekom vremenu t prolaze kroz tačke $x_i < x_j$ i koja pripadaju familiji karakteristika $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$, redom, kažemo da su prilazeći talasi ako i samo ako je $i > j$ ili ako je $i = j$, onda bar jedan od tih talasa je zaista nelinearni udarni talas. Nefizički talasi pripadaju familiji $n+1$.

4.2.1 Tačno Rimanovo rešenje

Neka su w_0, w_1, \dots, w_n međustanja i s_0, s_1, \dots, s_n amplitude talasa koji formiraju rešenje za (4.11), tako da važi

$$w_0 = q^-, \quad w_n = q^+, \quad w_i = \Psi_i(s_i)(w_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ako su svi skokovi (w_{i-1}, w_i) udarni talasi, tada je ovo rešenje već po delovima konstantno. Međutim, u opštem slučaju, rešenje može sadržati i razređujuće talase. Oni se aproksimiraju sa po delovima konstantnim stanjima $w_{i,j}$ na sledeći način. Neka je $\hat{\delta} > 0$ unapred data dovoljno mala konstanta. Ako je i -to polje karakteristika zaista nelinearno amplitude $s_i > 0$, tada se i -ti razređujući talas deli na p_i manjih talasa i -te familije i svaki takav talas je amplitude $s_i/p_i < \hat{\delta}$. Zbog toga biramo ceo broj

$$p_i = 1 + [s_i/\hat{\delta}],$$

gde $[x]$ predstavlja najveći ceo deo manji ili jednak x . Za $j = 1, 2, \dots, p_i$, definišemo međustanja i karakteristike (slika 4.4)

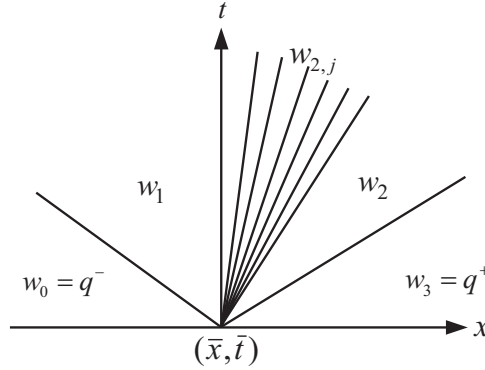
$$w_{i,j} = \Psi_i(j s_i/p_i)(w_{i-1}), \quad x_{i,j}(t) = \bar{x} + (t - \bar{t})\lambda_i(w_{i,j}).$$

Ako je i -to polje karakteristika zaista nelinearno amplitude $s_i \leq 0$ ili ako je i -to polje karakteristika linearno degenerisano za proizvoljno s_i , definišemo $p_i = 1$ i

$$w_{i,1} = w_i, \quad x_{i,1}(t) = \bar{x} + (t - \bar{t})\lambda_i(w_{i-1}, w_i).$$

Ovde je $\lambda_i(w_{i-1}, w_i)$ brzina skoka koji spaja w_{i-1} sa w_i . Ona je nastala primenom RH uslova

$$\lambda_i(w_{i-1}, w_i) (w_i - w_{i-1}) = f(w_i) - f(w_{i-1}).$$



Slika 4.4: Tačno Rimanovovo rešenje.

Sada smo u mogućnosti definišemo po delovima konstantno aproksimativno rešenje Rimanovog problema (4.11) na sledeći način:

$$v(x, t) = \begin{cases} q^- & \text{ako je } x < x_{1,1}(t), \\ w_i (= w_{i,p_i}) & \text{ako je } x_{i,p_i}(t) < x < x_{i+1,1}(t), \\ w_{i,j} & \text{ako je } x_{i,j}(t) < x < x_{i,j+1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, p_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \\ q^+ & \text{ako je } x > x_{n,p_n}(t). \end{cases} \quad (4.13)$$

4.2.2 Aproksimativno Rimanovo rešenje

Kao što je već rečeno u uvodu poglavlja 4.2, da se ne bi dogodilo da broj diskontinuiteta divergira u konačnom vremenu, uvodi se nefizički talas. Preciznije, ako je proizvod snaga dva fizička talasa različitih familija koji su interakciji, manji od nekog unapred zadatog parametra (prag parametar), tada se kao rezultat pomenute interakcije dobijaju najviše tri talasa (dva fizička i jedan nefizički). Međutim, interakcijom dva fizička talasa istih familija (ako je proizvod snaga takva dva talasa manji od prag parametra), nastaju najviše dva talasa (jedan fizički i jedan nefizički). Na kraju, pri interakciji nefizičkog i fizičkog talasa, nastaju fizički i nefizički talas.

Posmatrajmo ponovo Rimanov problem (4.11) u tački (\bar{x}, \bar{t}) i neka je dati problem nastao interakcijom dva talasa amplitude s_{i_1} i s_{j_2} . Napomenimo da talas amplitude s_{i_1} pripada i -toj, a s_{j_2} j -toj familiji karakteristika. Razlikujemo dva slučaja.

Slučaj 1: Neka $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ označavaju familiju dva prilazeća talasa, gde je $i \geq j$ (slike 4.5 a i b). Pretpostavimo da su $q^- = q_L$, q_M i $q_R = q^+$ levo, srednje i desno stanje, redom, pre interakcije i neka je

$$q_M = \Psi_i(s_{i_1})(q_L), \quad q_R = \Psi_j(s_{j_2})(q_M). \quad (4.14)$$

Definišemo pomoćno desno stanje

$$\bar{q}_R = \begin{cases} \Psi_i(s_{i_1}) \circ \Psi_j(s_{j_2})(q_L) & \text{ako je } i > j, \\ \Psi_i(s_{i_1} + s_{j_2})(q_L) & \text{ako je } i = j. \end{cases} \quad (4.15)$$

U opštem slučaju važi $q_R \neq \bar{q}_R$. Neka se skok (\bar{q}_R, q_R) kreće fiksnom brzinom $\hat{\lambda}$, strogo većom od brzina svih karakteristika. U okolini tačke (\bar{x}, \bar{t}) definišemo aproksimativno rešenje v kao što sledi. Prvo, neka je $\tilde{v} = \tilde{v}(x, t)$ po delovima konstantno rešenje, dobijeno primenom tačnog Rimanovog rešenja, sa levim stanjem q_L i desnim stanjem \bar{q}_R (videti (4.13)). Ovim smo definisali i stanje $\bar{q}_M = \Psi_j(s_{j_2})(q_L)$. Zbog (4.15), po delovima konstantno rešenje \tilde{v} sadrži tačno dva talasa amplitude s_{i_1}, s_{j_2} ako je $i > j$ ili tačno jedan talas amplitude $s_{i_1} + s_{j_2}$ ako je $i = j$. Dakle,

$$v(x, t) = \begin{cases} \tilde{v}(x, t) & \text{ako je } x - \bar{x} < (t - \bar{t})\hat{\lambda}, \\ q_R & \text{ako je } x - \bar{x} > (t - \bar{t})\hat{\lambda}. \end{cases} \quad (4.16)$$

Slučaj 2: Neka se nefizički talas nađe u interakciji sa talasom i -te familije, za neko $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (slika 4.5 c). Neka su $q^- = q_L$, q_M i $q_R = q^+$ levo, srednje i desno stanje pre interakcije, redom. Ako je

$$q_R = \Psi_i(s_i)(q_M), \quad (4.17)$$

tada se definiše pomoćno desno stanje kao

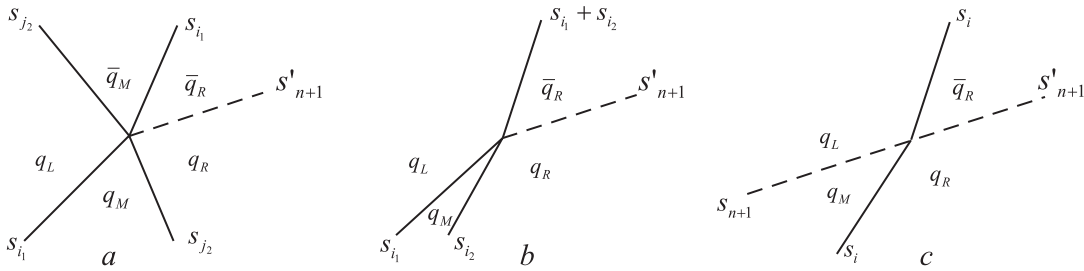
$$\bar{q}_R = \Psi_i(s_i)(q_L). \quad (4.18)$$

Neka je opet \tilde{v} rešenje Rimanovog problema dobijeno primenom tačnog Rimanovog rešenja, sa levim stanjem q_L i desnim stanjem \bar{q}_R (videti (4.13)). Zbog (4.18), \tilde{v} će sadržati jedan talas i -te familije amplitude s_i . Pošto je $\bar{q}_R \neq q_R$, u opštem slučaju, neka se skok (\bar{q}_R, q_R) kreće fiksnom brzinom $\hat{\lambda}$. U okolini tačke (\bar{x}, \bar{t}) , aproksimativno rešenje q se definiše prema (4.16). Po konstrukciji, dva nefizička talasa ne mogu nikada biti u interakciji jer se kreću istom brzinom $\hat{\lambda}$. Amplituda nefizičkog talasa pre interakcije biće obeležena sa s_{n+1} , a posle interakcije sa s'_{n+1} .

Sada se mora definisati kada koristiti tačno, a kada aproksimativno Rimanovo rešenje. Tačno Rimanovo rešenje koristi se u vremenu $t = 0$ i svaki put kada proizvod amplituda prilazećih fizičkih talasa zadovoljava $|s_{i_1} s_{j_2}| \geq \hat{\nu}$. Aproksimativno Rimanovo rešenje koristi se kada je $|s_{i_1} s_{j_2}| < \hat{\nu}$ ili kada je jedan od prilazećih talasa nefizički talas. Takođe usvajamo sledeće pravilo: u tačnom Rimanovom rešenju, ako je u interakciji učestvovao razređujući talas i -te familije, tada ga, da bi on bio jedinstveno produžen nakon interakcije, nećemo deliti na talase manje snage. Kako razređujući talas pre interakcije ima malu snagu, kasnije će biti pokazano da će se nakon interakcije, snaga razređujućeg talasa i -te familije malo promeniti.

Uočavamo da konstrukcija uključuje sledeće parametre:

- fiksnu brzinu $\hat{\lambda}$, strogo veću od brzina svih karakteristika,
- konstantu $\hat{\delta} > 0$, koja kontroliše maksimalnu snagu razređujućih talasa i
- prag parametar $\hat{\nu} > 0$, koji određuje kada će se primeniti tačno, a kada aproksimativno Rimanovo rešenje.



Slika 4.5: Aproksimativno Rimanovo rešenje.

Pojasnimo detaljnije sliku 4.5 a. Neka u interakciji budu dva talasa s_{i_1} i s_{j_2} familije i i j , redom, gde je $i > j$, tako da se mora koristiti aproksimativno Rimanovo rešenje ($|s_{i_1} s_{j_2}| < \hat{\nu}$). Tada amplitude talasa pre i posle interakcije ostaju nepromenjene, odnosno $s_{i_1} = s'_{i_1}$ i $s_{j_2} = s'_{j_2}$. U ovom slučaju nastaje i nefizički talas amplitude s'_{n+1} . Ako su u interakciji dva talasa iste familije kao na slici 4.5 b, tada se amplituda talasa s'_i dobija sabiranjem amplituda s_{i_1} i s_{i_2} , odnosno $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$. Takođe nastaje nefizički talas amplitude s'_{n+1} . Konačno, nakon interakcije nefizičkog talasa amplitude s_{n+1} i talasa amplitude s_i , talas i -te familije ne menja amplitudu ($s_i = s'_i$), dok amplituda s'_{n+1} ne mora biti jednaka s_{n+1} .

Napomena 4.2.2 Na osnovu navedenog algoritma, udarni talasi uvek se kreću brzinom $\dot{x}_\alpha = \lambda_{\kappa_\alpha}(q^+, q^-)$ dobijenom korišćenjem RH uslova. Razređujući talasi kreću se brzinom karakteristika u tački desnog stanja $\dot{x}_\alpha = \lambda_{\kappa_\alpha}(q^+)$ (videti definiciju 4.1.2, tačka 3).

4.3 Globalna egzistencija WFT aproksimacija

Dokaz teoreme 4.1.6 biće dat u nekoliko koraka.

1. Kompaktan domen. Biramo $\delta_1 > 0$ tako da se zatvorena lopta $\mathcal{B}(0, \delta_1)$ poluprečnika δ_1 cela nalazi u Ω . Ako je potrebno, smanjivanjem poluprečnika δ_1 , može se pretpostaviti da Rimanov problem sa stanjima q_L, q_R ima jedinstveno samoslično rešenje u Ω ako $q_L, q_R \in \mathcal{B}(0, \delta_1)$.

2. Ocene interakcija. Jasno je da, nakon interakcije, Rimanovo rešenje daje odlazeće talase. Navedimo sada teoremu koja će nam biti potrebna u nastavku.

Teorema 4.3.1 ([4]) *Posmatrajmo niz funkcija $q_k : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sa osobinama:*

$$\begin{aligned} \text{TV}(q_k(\cdot, t)) &\leq C, \quad |q_k(x, t)| \leq M \quad \text{za svako } x, t, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |q_k(x, t) - q_k(x, s)| dx &\leq N |t - s| \quad \text{za svako } t, s \geq 0, \end{aligned}$$

za neke konstante C, M i N . Tada postoji podniz q_{k_n} koji konvergira u $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty); \mathbb{R}^n)$ ka funkciji q koja zadovoljava

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q(x, t) - q(x, s)| dx \leq N |t - s| \quad \text{za svako } t, s \geq 0. \quad (4.19)$$

Vrednosti funkcije q dobijaju se na sledeći način:

$$q(x, t) = q(x+, t) := \lim_{y \rightarrow x+} q(y, t) \quad \text{za svako } x, t. \quad (4.20)$$

Tada važi i

$$\text{TV}(q(x, t)) \leq C, \quad |q(x, t)| \leq M \quad \text{za svako } x, t. \quad (4.21)$$

Dokaz. Na osnovu Hellyjeve teoreme 1.2.18 konstruišemo podniz $\{q_{k_n}\}$ tako da $q_{k_n}(\cdot, t) \rightarrow q(\cdot, t)$ u $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, za svako racionalno $t \geq 0$. Funkcija $q(\cdot, t)$ zadovoljava (4.19, 4.21) za $t, s \in \mathbb{Q}$. Za svako $t \geq 0$, posmatramo niz racionalnih brojeva $t_m \rightarrow t$ i definišemo

$$q(\cdot, t) := \lim_{m \rightarrow \infty} q(\cdot, t_m).$$

Zbog (4.19), ova granična vrednost postoji i ne zavisi od izbora niza $\{t_m\}$. Kako važi (na osnovu Hellyjeve teoreme 1.2.18)

$$\text{TV}(q(\cdot, t_m)) \leq C, \quad |q(x, t_m)| \leq M \quad \text{za svako } m \geq 1, x \in \mathbb{R},$$

dobijamo da važi i (4.21). Konačno, definišemo

$$q_\mu(x, t) := \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu} q(y, t) dy.$$

Svako q_μ je uniformno Lipšic neprekidno u odnosu na x i t jer je

$$|q_\mu(x, t) - q_\mu(x, s)| \leq \frac{1}{\mu} \int_x^{x+\mu} |q(y, t) - q(y, s)| dy \leq \frac{N}{\mu} |t - s|$$

i

$$\begin{aligned} |q_\mu(x, t) - q_\mu(x + \bar{h}, t)| &\leq \frac{1}{\mu} \left(\int_x^{x+\bar{h}} |q(y, t)| dy + \int_{x+\mu}^{x+\mu+\bar{h}} |q(y, t)| dy \right) \\ &\leq \frac{1}{\mu} \left(M \int_x^{x+\bar{h}} dy + M \int_{x+\mu}^{x+\mu+\bar{h}} dy \right) \leq \frac{2M}{\mu} \bar{h}. \end{aligned}$$

Za svako x, t imamo da važi

$$\tilde{q}(x, t) := \lim_{\mu \rightarrow 0^+} q_\mu(x, t) = q(x+, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} q(x+, t_m).$$

Naime,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} q_\mu(x, t) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{\int_x^{x+\mu} q(y, t) dy}{\mu} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \frac{q(x + \mu, t)}{1} = q(x+, t)$$

primenom Lopitalovog pravila. Za svako $t \geq 0$, jednakost $\tilde{q}(x, t) = q(x, t)$ važi za konačno mnogo tačaka x . Ako zamenimo q sa \tilde{q} , tada će važiti (4.19–4.21). \square

Sledeća lema daje ocenu razlike amplituda odlazećih i prilazećih talasa.

Lema 4.3.2 ([4]) *Posmatrajmo interakciju dva prilazeća talasa.*

(i) *Neka su s_i, s_j amplitude dva prilazeća talasa koji pripadaju familijama i, j , gde je $i > j$. Njihovom interakcijom nastaje novi Rimanov problem čije se (tačno) rešenje sastoji od talasa amplituda s'_1, \dots, s'_n (slika 4.6 a). Tada važi*

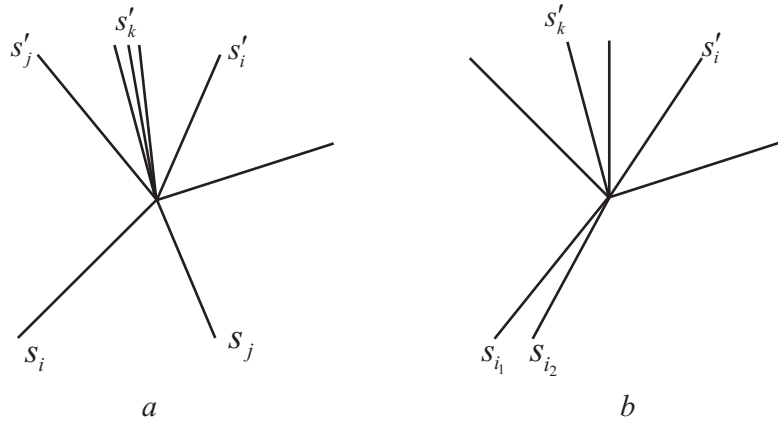
$$|s'_i - s_i| + |s'_j - s_j| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k| = \mathcal{O}(1) |s_i s_j|. \quad (4.22)$$

(ii) *Neka su s_{i_1}, s_{i_2} amplitude dva prilazeća talasa koji pripadaju i -toj familiji. Neka su amplitude odlazećih talasa s'_1, \dots, s'_n (slika 4.6 b). Tada je*

$$|s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| + \sum_{k \neq i} |s'_k| = \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{i_2}|, \quad (4.23)$$

ali važi i preciznija ocena

$$|s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| + \sum_{k \neq i} |s'_k| = \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{i_2}| (|s_{i_1}| + |s_{i_2}|). \quad (4.24)$$



Slika 4.6: Tačno Rimanovo rešenje.

(iii) *Neka su s_{i_1}, s_{j_2} amplitude dva prilazeća talasa koji pripadaju familijama i, j , redom (slike 4.5 a i b). Neka su q_L, q_M i q_R , levo, srednje i desno stanje pre interakcije, redom, tako da važi (4.14). Uvodeći pomoćno desno stanje \bar{q}_R kao u (4.15), važi*

$$|\bar{q}_R - q_R| = \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{j_2}|. \quad (4.25)$$

(iv) Neka je nefizički talas koji spaja stanja q_L i q_M u interakciji sa talasom i -te familije amplitude s_i (slika 4.5 c) koji spaja stanja q_M i q_R tako da važi (4.17). Definišući pomoćno desno stanje \bar{q}_R kao u (4.18), važi

$$|\bar{q}_R - q_R| - |q_M - q_L| = \mathcal{O}(1) |s_i| |q_M - q_L|. \quad (4.26)$$

Veličine $\mathcal{O}(1)$ ostaju uniformno ograničene sve dok $q_L, q_M, q_R \in \mathcal{B}(0, \delta_1)$.

Dokaz.

(i) Neka su q_L, q_M i q_R , levo, srednje i desno stanje pre interakcije, redom. Po pretpostavci važi

$$q_M = \Psi_i(s_i)(q_L), \quad q_R = \Psi_j(s_j)(q_M).$$

Posmatrajmo sada preslikavanje

$$(q_L, q_R) \rightarrow (E_1(q_L, q_R), \dots, E_n(q_L, q_R)) := (s'_1, \dots, s'_n) \quad (4.27)$$

koje levom i desnom stanju dodeljuje amplitude odlazećih međutalasa koji spajaju ta stanja. Na osnovu analize u poglavlju 2.4, ovo preslikavanje je dobro definisano ako su stanja q_L i q_R dovoljno blizu. Na osnovu teoreme o implicitnim funkcijama, preslikavanje dato u (4.27) je dva puta neprekidno diferencijabilno, sa Lipšic neprekidnim drugim izvodom.

Za dato levo stanje q_L , definišemo funkcije Φ_l , $l = 1, \dots, n$ na sledeći način:

$$\begin{aligned} \Phi_i(s_i, s_j) &:= s'_i - s_i = E_i(q_L, \Psi_j(s_j) \circ \Psi_i(s_i)(q_L)) - s_i \\ \Phi_j(s_i, s_j) &:= s'_j - s_j = E_j(q_L, \Psi_j(s_j) \circ \Psi_i(s_i)(q_L)) - s_j \\ \Phi_k(s_i, s_j) &:= s'_k = E_k(q_L, \Psi_j(s_j) \circ \Psi_i(s_i)(q_L)) \quad \text{za } k \neq i, j. \end{aligned}$$

Funkcije Φ_l su \mathcal{C}^2 funkcije koje zavise od s_i, s_j , imaju Lipšic neprekidne druge izvode i neprekidno zavise od levog stanja q_L . Važi

$$\Phi_l(s_i, 0) = \Phi_l(0, s_j) = 0, \quad \text{za svako } s_i, s_j, \quad l = 1, \dots, n,$$

i na osnovu prvog dela leme 4.1.4, zaključujemo da važi

$$\Phi_l(s_i, s_j) = \mathcal{O}(1) |s_i s_j|$$

za svako $l \in \{1, 2, \dots, n\}$, odnosno važi (4.22).

(ii) U ovom slučaju, za levo, srednje i desno stanje važi

$$q_M = \Psi_i(s_{i_1})(q_L) \text{ i } q_R = \Psi_i(s_{i_2})(q_M). \quad (4.28)$$

Neka su $(E_1(q_L, q_R), \dots, E_n(q_L, q_R))$ amplitude talasa dobijenih rešavanjem Rimanovog problema sa levim stanjem q_L i desnim stanjem q_R . Na osnovu (4.12), u slučaju kada je $s_{i_1}, s_{i_2} \geq 0$, stanja q_L, q_M i q_R u (4.28) pripadaju jednoj i -toj razređujućoj krivoj. Time iz (2.15) sledi

$$E_i = s_{i_1} + s_{i_2}, \quad E_k = 0 \quad \text{za } k \neq i,$$

odnosno, nema interakcije dva talasa. Definišemo funkciju Φ_l , $l = 1, 2, \dots, n$, na sledeći način:

$$\begin{aligned} \Phi_i(s_{i_1}, s_{i_2}) &:= s'_i - s_{i_1} - s_{i_2} = E_i(q_L, \Psi_i(s_{i_2}) \circ \Psi_i(s_{i_1})(q_L)) - s_{i_1} - s_{i_2} \\ \Phi_k(s_{i_1}, s_{i_2}) &:= s'_k = E_k(q_L, \Psi_i(s_{i_2}) \circ \Psi_i(s_{i_1})(q_L)) \quad \text{ako je } k \neq i. \end{aligned}$$

Funkcije Φ_l su \mathcal{C}^2 funkcije koje zavise od s_{i_1} i s_{i_2} , sa Lipšic neprekidnim drugim izvodom i koje neprekidno zavise od q_L . Važi

$$\Phi_l(s_{i_1}, 0) = \Phi_l(0, s_{i_2}) = 0, \quad l = 1, \dots, n. \quad (4.29)$$

Na osnovu prvog dela leme 4.1.4, zaključujemo da važi

$$\Phi_l(s_{i_1}, s_{i_2}) = \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{i_2}|.$$

za svako $l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ovim je dokazano (4.23). Međutim, kako je

$$\Phi_l(s_{i_1}, s_{i_2}) = 0 \quad \text{za svako } s_{i_1}, s_{i_2} \geq 0, \quad l = 1, \dots, n,$$

neprekidnost drugog izvoda daje

$$\frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial s_{i_1} \partial s_{i_2}}(0, 0) = 0, \quad l = 1, \dots, n. \quad (4.30)$$

Koristeći (4.29, 4.30) i drugi deo leme 4.1.4 zaključujemo da važi i

$$\Phi_l(s_{i_1}, s_{i_2}) = \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{i_2}| (|s_{i_1}| + |s_{i_2}|)$$

za svako $l \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(iii) U slučaju kada je $i > j$, posmatraćemo preslikavanje

$$(s_{i_1}, s_{j_2}) \rightarrow \Phi(s_{i_1}, s_{j_2}) := \bar{q}_R - q_R = \Psi_i(s_{i_1}) \circ \Psi_j(s_{j_2})(q_L) - \Psi_j(s_{j_2}) \circ \Psi_i(s_{i_1})(q_L).$$

Ovo preslikavanje je \mathcal{C}^2 sa Lipsčic neprekidnim drugim izvodom i ono zadovoljava

$$\Phi(s_{i_1}, 0) = \Phi(0, s_{j_2}) = 0, \quad \text{za svako } s_{i_1}, s_{j_2}.$$

Sada je ocena (4.25) posledica prvog dela leme 4.1.4. U slučaju $i = j$, primenjujemo iste argumente na preslikavanje

$$(s_{i_1}, s_{i_2}) \rightarrow \Phi(s_{i_1}, s_{i_2}) := \bar{q}_R - q_R = \Psi_i(s_{i_1} + s_{i_2})(q_L) - \Psi_i(s_{i_2}) \circ \Psi_i(s_{i_1})(q_L).$$

(iv) Za dato levo stanje q_L , posmatrajmo preslikavanje $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dato sa

$$(v, s) \rightarrow \Phi(v, s) := (\Psi_i(s)(q_L) + v) - \Psi_i(s)(q_L + v).$$

Preslikavanje Φ je dobro definisano u okolini $(0, 0)$ i dva puta neprekidno diferencijabilno sa Lipsčic neprekidnim drugim izvodom. Važi i

$$\Phi(v, 0) = \Phi(0, s) = 0 \quad \text{za svako } v, s.$$

Primenjujući prvi deo leme 4.1.4, dobijamo da važi

$$\Phi(v, s) = \mathcal{O}(1) |v||s|. \quad (4.31)$$

Ako izaberemo $v = q_M - q_L$ i $s = s_i$, tada je $\Psi_i(s_i)(q_L) = \bar{q}_R$ i $\Psi_i(s_i)(q_L + v) = \Psi_i(s_i)(q_M) = q_R$, pa je

$$\Phi(v, s_i) = (\bar{q}_R + (q_M - q_L)) - q_R = (\bar{q}_R - q_R) - (q_L - q_M).$$

Time se (4.26) dobija kao posledica (4.31). \square

Napomena 4.3.3 U slučaju pod (i), grubo govoreći, važi $s'_i \approx s_i$ i $s'_j \approx s_j$ dok je $s'_k \approx 0$ za $k \neq i, j$. U slučaju pod (ii), važi $s'_i \approx s_{i_1} + s_{i_2}$ dok je $s'_k \approx 0$ za $k \neq i$. Sa druge strane, u slučaju (iii), amplitude fizičkih talasa pre interakcije jednake su amplitudama fizičkih talasa nakon interakcije ($s_{i_1} = s'_{i_1}$, $s_{j_2} = s'_{j_2}$), ako su talasi različitih familija, odnosno $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$ ako su u interakciji dva talasa istih familija. Ako posmatramo slučaj (iv), tada je amplituda fizičkog talasa pre interakcije s_i jednaka amplitudi talasa nakon interakcije s'_i .

3. Ograničenost totalne varijacije. Neka je $q = q(x, t)$ po delovima konstantno aproksimativno rešenje konstruisano WFT algoritmom. Tražimo da važi

$$\text{TV}(q(\cdot, t)) \leq \delta_1, \quad (4.32)$$

za svako $t \geq 0$. Dokle god (4.32) važi, pri bilo kojoj interakciji dva talasa, levo, srednje i desno stanje pripadaće lopti $\mathcal{B}(0, \delta_1)$. Zbog toga se $q(x, t)$ može izračunati i nakon vremena kada se desila interakcija korišćenjem tačnog ili aproksimativnog Rimanovog rešenja.

Da bi se pratila promena totalne varijacije, uvode se dve funkcionele definisane preko snaga prilazećih talasa. Fiksirajmo vreme t i neka je x_α , $\alpha = 1, \dots, N$ pozicija gde se nalazi talas u $q(\cdot, t)$. Neka je $|s_\alpha|$ snaga talasa u x_α . Napomenimo još jednom da svaki nefizički talas pripada $(n + 1)$ -oj familiji karakteristika. Posmatrajmo sada funkcionalu

$$V(t) := \sum_{\alpha} |s_\alpha|,$$

koja meri ukupnu snagu talasa u $q(\cdot, t)$ i funkcionalu

$$Q(t) := \sum_{(\chi, \beta) \in \tilde{\mathcal{A}}} |s_\chi s_\beta|,$$

koja ocenjuje snage talasa koji mogu nastati u nekom vremenu pri interakciji χ i β . Sumiranje se, dakle, odnosi samo na prilazeće talase, gde je $\tilde{\mathcal{A}}$ je skup svih prilazećih talasa.

Neka je τ vreme kada je došlo do interakcije dva talasa snage $|s_i|$ i $|s_j|$. Želimo da ocenimo promenu V i Q u vremenu τ . Na osnovu (4.22–4.24) (ako je reč o tačnom Rimanovom rešenju) ili (4.25, 4.26) (ako je reč o aproksimativnom Rimanovom rešenju), dobijamo da važi

$$V(\tau^+) - V(\tau^-) = \mathcal{O}(1) |s_i s_j|. \quad (4.33)$$

Sa τ^- smo obeležili vreme pre, a sa τ^+ vreme posle interakcije. Primetimo da nakon interakcije dva talasa u vremenu τ , oni više nisu prilazeći. Sa druge strane, novi talas generisan na ovaj način može biti prilazeći sa svim ostalim talasima. Ako iskoristimo (4.22–4.26), dobijamo

$$Q(\tau^+) - Q(\tau^-) = -|s_i s_j| + \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(\tau^-). \quad (4.34)$$

Pokažimo da važi (4.33, 4.34) u sledećim slučajevima interakcije dva talasa: interakcija dva elementarna talasa različitih familija (istih familija) uz korišćenje tačnog Rimanovog rešenja - slučaj 1 (slučaj 2); interakcija dva elementarna talasa različitih familija (istih familija) uz korišćenje aproksimativnog Rimanovog rešenja - slučaj 3a (slučaj 3b); interakcija nefizičkog i elementarnog talasa - slučaj 4. Pre toga razmotrimo sledeću posledicu činjenice da su amplitude talasa male (definicija 4.1.2) i da su promene amplitude talasa pre i posle interakcije takođe male (lema 4.3.2), što znači da će se i brzine takvih talasa pre i posle interakcije malo razlikovati na osnovu definicije 4.1.2.

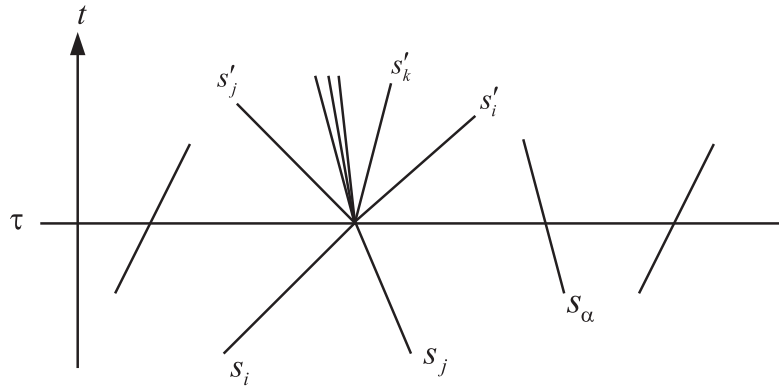
Posledica 4.3.4 *Posmatrajmo sledeće slučajeve:*

Slučaj 1. Neka je s_i amplituda talasa i -te familije karakteristika pre interakcije i s'_i amplituda talasa i -te familije karakteristika nakon interakcije. Neka je s_α amplituda talasa familije α koji je prilazeći talasu amplitude s_i (slika 4.7). Na osnovu definicije 4.2.1, mora važiti sledeće:

1) $i > \alpha$, a kako je talas amplitude s'_i isto i -te familije, to znači da je on takođe prilazeći talasu amplitude s_α . To je tačno jer je brzina talasa i -te familije veća od brzine talasa familije α jer je $i > \alpha$ (videti 2.37). Naime, kako su amplitude svih talasa male, time će i promena amplitude biti mala, pa će se tada i njihova brzina malo promeniti. Analogno važi i za talase amplitude s_j i s'_j ;

2) $i = \alpha$ i bar jedan od talasa amplitude s_i i s_α je udarni talas. Opet, zbog male promene amplitude, malo se menja i brzina talasa amplitude s_i , pa je i talas amplitude s'_i prilazeći talasu amplitude s_α . Analogno važi i za talase amplitude s_j i s'_j .

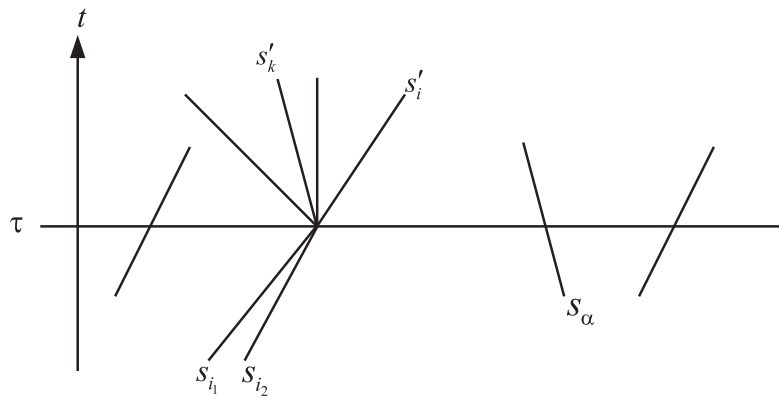
Slučaj 2. Neka su s_{i_1} i s_{i_2} amplitude talasa i -te familije karakteristika pre interakcije i s'_i amplituda talasa i -te familije karakteristika nakon interakcije. Neka je s_α amplituda talasa familije



Slika 4.7: Interakcija talasa, slučaj 1.

α koji je prilazeći talasima amplitude s_{i_1} i s_{i_2} (videti sliku 4.8). Na osnovu definicije 4.2.1, sledi:

- 1) $i > \alpha$, a kako je talas amplitude s'_i isto i -te familije, to znači da je talas amplitude s'_i takođe prilazeći talasu amplitude s_α ;
- 2) $i = \alpha$ i bar jedan od talasa amplitude s_{i_1} (s_{i_2}) i s_α je udarni talas. Opet zbog male promene amplitude, malo se menja i brzina pa je i talas amplitude s'_i prilazeći talasu amplitude s_α .



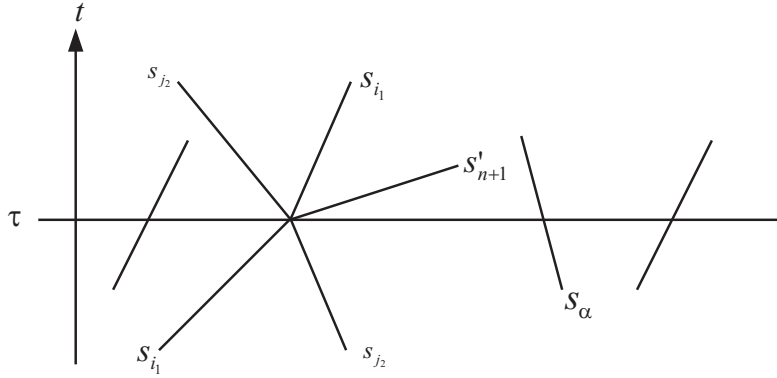
Slika 4.8: Interakcija talasa, slučaj 2.

Slučaj 3a. Neka je s_{i_1} amplituda talasa i -te familije karakteristika pre interakcije i s'_{i_1} amplituda talasa i -te familije karakteristika nakon interakcije. Neka je s_α amplituda talasa familije α koji je prilazeći talasu amplitude s_{i_1} (slika 4.9). Na osnovu definicije 4.2.1, mora važiti sledeće:

- 1) $i > \alpha$, a kako je talas amplitude s'_{i_1} isto i -te familije, to znači da je taj i talas takođe prilazeći talasu amplitude s_α . Treba napomenuti da je i nefizički talas amplitude s'_{n+1} takođe prilazeći talasu amplitude s_α jer nefizički talas ima veću brzinu. Analogno važi i za talase amplitude s_{j_2} i s'_{j_2} ;
- 2) $i = \alpha$ i bar jedan od talasa amplitude s_{i_1} i s_α je udarni talas. Opet zbog male promene amplitude, malo se menja i brzina pa je i talas amplitude s'_i prilazeći talasu amplitude s_α . Analogno važi i za talase amplitude s_{j_2} i s'_{j_2} .

Slučaj 3b. Neka su s_{i_1} i s_{i_2} amplitude talasa i -te familije karakteristika pre interakcije i $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$ amplituda talasa i -te familije karakteristika nakon interakcije. Neka je s_α amplituda talasa familije α koji je prilazeći talasima amplitude s_{i_1} i s_{i_2} (videti sliku 4.10). Na osnovu definicije 4.2.1 važiće:

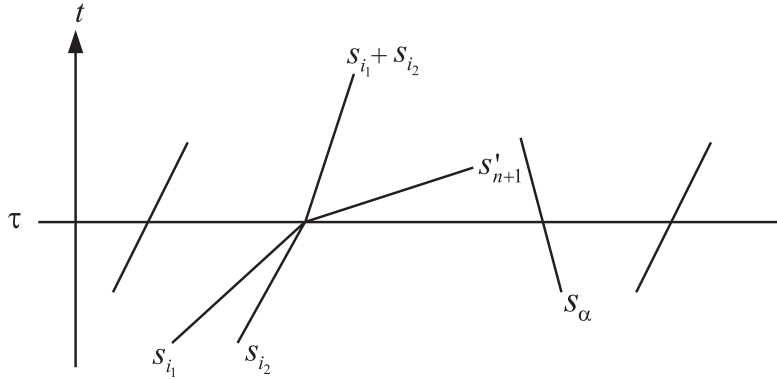
- 1) $i > \alpha$, a kako je talas amplitude s'_i isto i -te familije, to znači da je talas amplitude s'_i takođe



Slika 4.9: Interakcija talasa, slučaj 3a.

prilazeći talasu amplitude s_{α} (i nefizički talas amplitude s'_{n+1} je prilazeći talasu amplitude s_{α} jer nefizički talas ima veću brzinu);

2) $i = \alpha$ i bar jedan od talasa amplitude s_{i_1} (s_{i_2}) i s_{α} je udarni talas. Opet zbog male promene amplitude, malo se menja i brzina pa je i talas amplitude s'_i prilazeći talasu amplitude s_{α} .



Slika 4.10: Interakcija talasa, slučaj 3b.

Slučaj 4. Neka je s_i amplituda talasa i -te familije karakteristika pre interakcije i s'_i amplituda talasa i -te familije karakteristika nakon interakcije. Neka je s_{α} amplituda talasa familije α koji je prilazeći talasu amplitude s_i (slika 4.11). Na osnovu definicije 4.2.1, mora važiti sledeće:

1) $n+1 > i > \alpha$, a kako je talas amplitude s'_i isto i -te familije, to znači da on takođe prilazi talasu amplitude s_{α} . Treba napomenuti da su i nefizički talasi amplitude s_{n+1} i s'_{n+1} takođe prilazeći talasu amplitude s_{α} jer imaju veću brzinu od brzine talasa amplitude s_{α} .

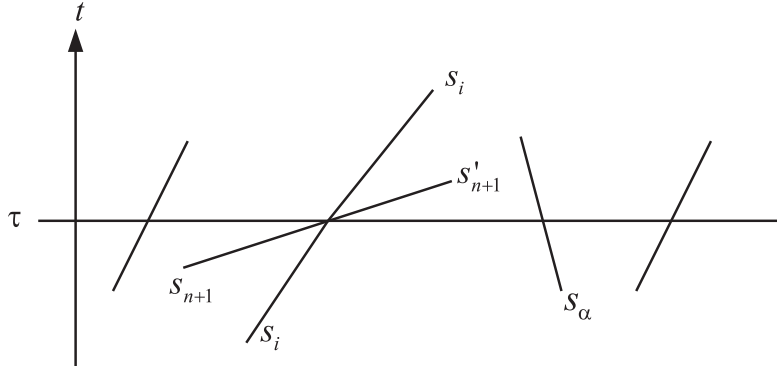
2) $n+1 > i = \alpha$ i bar jedan od talasa amplitude s_i i s_{α} je udarni talas. Opet zbog male promene amplitude, malo se menja i brzina pa je i talas amplitude s'_i prilazeći talasu amplitude s_{α} .

Pokažimo sada da važi (4.33, 4.34).

Slučaj 1. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_i i s_j , redom. Neka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Tada važi

$$V(\tau^+) = |s'_i| + |s'_j| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k| + \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|,$$

$$V(\tau^-) = |s_i| + |s_j| + \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|,$$



Slika 4.11: Interakcija talasa, slučaj 4.

gde su s_α amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Zato je

$$\begin{aligned}\Delta V(\tau) &= V(\tau^+) - V(\tau^-) = |s'_i| - |s_i| + |s'_j| - |s_j| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k| \\ &\leq |s'_i - s_i| + |s'_j - s_j| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k| \\ &= \mathcal{O}(1) |s_i s_j|\end{aligned}$$

na osnovu (4.22). Dalje je

$$\begin{aligned}Q(\tau^+) &= \sum_{\alpha} |s'_i s_\alpha| + \sum_{\beta} |s'_j s_\beta| + \sum_{k \neq i, j} \sum_{\alpha_k} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\gamma, \delta} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q(\tau^-) &= |s_i s_j| + \sum_{\alpha} |s_i s_\alpha| + \sum_{\beta} |s_j s_\beta| + \sum_{\gamma, \delta} |s_\gamma s_\delta|.\end{aligned}$$

Ovde su talasi s_α prilazeći talasima s_i i s'_i , talasi s_β prilazeći talasima s_j i s'_j (posledica 4.3.4, slučaj 1); s_{α_k} prilazeći s'_k ; dok su talasi s_γ i s_δ preostali prilazeći talasi. Napomenimo da su $s_\alpha, s_\beta, s_{\alpha_k}, s_\gamma$ i s_δ još i amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Koristeći opet (4.22), sada dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta Q(\tau) &= Q(\tau^+) - Q(\tau^-) = (|s'_i| - |s_i|) \sum_{\alpha} |s_\alpha| + (|s'_j| - |s_j|) \sum_{\beta} |s_\beta| - |s_i s_j| + \sum_{k \neq i, j} \sum_{\alpha_k} |s'_k s_{\alpha_k}| \\ &\leq (|s'_i| - |s_i|) \sum_{\alpha} |s_\alpha| + (|s'_j| - |s_j|) \sum_{\beta} |s_\beta| - |s_i s_j| + V(\tau^-) \sum_{k \neq i, j} |s'_k| \\ &\leq (|s'_i - s_i| + |s'_j - s_j| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k|) V(\tau^-) - |s_i s_j| \\ &= \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(\tau^-) - |s_i s_j|.\end{aligned}$$

Slučaj 2. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} . Neka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Tada važi

$$\begin{aligned}V(\tau^+) &= |s'_i| + \sum_{k \neq i} |s'_k| + \sum_{\alpha} |s_\alpha|, \\ V(\tau^-) &= |s_{i_1}| + |s_{i_2}| + \sum_{\alpha} |s_\alpha|,\end{aligned}$$

gde su s_α amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Zato je

$$\begin{aligned}\Delta V(\tau) &= V(\tau^+) - V(\tau^-) = |s'_i| - (|s_{i_1}| + |s_{i_2}|) + \sum_{k \neq i} |s'_k| \\ &\leq |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| + \sum_{k \neq i} |s'_k| \\ &= \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{i_2}|\end{aligned}$$

na osnovu (4.23). Slično kao i u slučaju 1,

$$\begin{aligned} Q(\tau^+) &= \sum_{\alpha} |s'_i s_{\alpha}| + \sum_{k \neq i} \sum_{\alpha_k} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\gamma, \delta} |s_{\gamma} s_{\delta}|, \\ Q(\tau^-) &= |s_{i_1} s_{i_2}| + \sum_{\alpha} |s_{i_1} s_{\alpha}| + \sum_{\alpha} |s_{i_2} s_{\alpha}| + \sum_{\gamma, \delta} |s_{\gamma} s_{\delta}|, \end{aligned}$$

gde su talasi s_{α} prilazeći talasima s_{i_1} , s_{i_2} i s'_i (posledica 4.3.4, slučaj 2); talasi s_{α_k} prilaze talasima s'_k , dok talasi s_{γ} prilaze talasima s_{δ} . Opet su s_{α} , s_{α_k} , s_{γ} i s_{δ} takođe i amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Koristeći (4.23) dobijamo

$$\begin{aligned} \Delta Q(\tau) &= Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq \sum_{\alpha} |s'_i s_{\alpha}| - \sum_{\alpha} |s_{i_1} s_{\alpha}| - \sum_{\alpha} |s_{i_2} s_{\alpha}| + V(\tau^-) \sum_{k \neq i} |s'_k| - |s_{i_1} s_{i_2}| \\ &= (|s'_i| - |s_{i_1}| - |s_{i_2}|) \sum_{\alpha} |s_{\alpha}| + V(\tau^-) \sum_{k \neq i} |s'_k| - |s_{i_1} s_{i_2}| \\ &\leq |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| \sum_{\alpha} |s_{\alpha}| + V(\tau^-) \sum_{k \neq i} |s'_k| - |s_{i_1} s_{i_2}| \\ &\leq (|s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| + \sum_{k \neq i} |s'_k|) V(\tau^-) - |s_{i_1} s_{i_2}| \\ &= \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{i_2}| V(\tau^-) - |s_{i_1} s_{i_2}|. \end{aligned}$$

Slučaj 3a. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{j_2} , dok su s'_{i_1} i s'_{j_2} amplitude odlazećih talasa, redom. Podsetimo se da je nefizički talas familije $n+1$. Tada važi

$$\begin{aligned} V(\tau^+) &= |s'_{i_1}| + |s'_{j_2}| + |s'_{n+1}| + \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|, \\ V(\tau^-) &= |s_{i_1}| + |s_{j_2}| + \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|, \end{aligned}$$

gde su s_{α} amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Sa s'_{n+1} obeležena je amplituda odlazećeg nefizičkog talasa. Zato je

$$\begin{aligned} \Delta V(\tau) &= V(\tau^+) - V(\tau^-) = |s'_{i_1}| - |s_{i_1}| + |s'_{j_2}| - |s_{j_2}| + |s'_{n+1}| \\ &= |s'_{n+1}| \\ &= \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{j_2}| \end{aligned}$$

na osnovu (4.25). Ovde je korišćeno da su amplitude fizičkih talasa nepromenjene nakon interakcije, odnosno $s_{i_1} = s'_{i_1}$ i $s_{j_2} = s'_{j_2}$. Podsetimo se da u ovom slučaju stvaraju najviše tri talasa. Dva fizička i jedan nefizički talas. Ocenimo sada potencijal mogućih interakcija talasa.

$$\begin{aligned} Q(\tau^+) &= \sum_{\alpha} |s'_{i_1} s_{\alpha}| + \sum_{\beta} |s'_{j_2} s_{\beta}| + \sum_o |s_o s'_{n+1}| + \sum_{\gamma, \delta} |s_{\gamma} s_{\delta}|, \\ Q(\tau^-) &= |s_{i_1} s_{j_2}| + \sum_{\alpha} |s_{i_1} s_{\alpha}| + \sum_{\beta} |s_{j_2} s_{\beta}| + \sum_{\gamma, \delta} |s_{\gamma} s_{\delta}|, \end{aligned}$$

gde su talasi s_{α} prilazeći talasima s_{i_1} i s'_{i_1} , talasi s_{β} prilazeći talasima s_{j_2} i s'_{j_2} (posledica 4.3.4, slučaj 3a); s_o prilazeći talasi talasima s'_{n+1} , dok talasi s_{γ} prilaze talasima s_{δ} . Sada su s_{α} , s_{β} , s_{γ} , s_{δ} i s_o takođe i amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Sada, na osnovu (4.25), važi

$$\begin{aligned} \Delta Q(\tau) &= Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -|s_{i_1} s_{j_2}| + V(\tau^-) |s'_{n+1}| \\ &= \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{j_2}| V(\tau^-) - |s_{i_1} s_{j_2}|. \end{aligned}$$

Slučaj 3b. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} , dok je s'_i amplituda odlazećeg talasa. Tada važi

$$\begin{aligned} V(\tau^+) &= |s'_i| + |s'_{n+1}| + \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|, \\ V(\tau^-) &= |s_{i_1}| + |s_{i_2}| + \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|, \end{aligned}$$

gde su s_α amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Sa s'_{n+1} obeležen je odlazeći nefizički talas, odnosno njegova amplituda. Zato je

$$\begin{aligned}\Delta V(\tau) &= V(\tau^+) - V(\tau^-) = |s'_i| - |s_{i_1}| - |s_{i_2}| + |s'_{n+1}| \\ &\leq |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| + |s'_{n+1}| \\ &= |s'_{n+1}| \\ &= \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{i_2}|\end{aligned}$$

na osnovu (4.25). Ovde je korišćeno da je $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$. Podsetimo se da u ovom slučaju stvaraju najviše dva talasa. Jedan fizički i -te familije i jedan nefizički talas. Dalje je

$$\begin{aligned}Q(\tau^+) &= \sum_{\alpha} |s'_i s_{\alpha}| + \sum_o |s_o s'_{n+1}| + \sum_{\gamma, \delta} |s_{\gamma} s_{\delta}|, \\ Q(\tau^-) &= |s_{i_1} s_{i_2}| + \sum_{\alpha} |s_{i_1} s_{\alpha}| + \sum_{\alpha} |s_{i_2} s_{\alpha}| + \sum_{\gamma, \delta} |s_{\gamma} s_{\delta}|,\end{aligned}$$

gde su talasi s_α prilazeći talasima s_{i_1} , s_{i_2} i s'_i (posledica 4.3.4, slučaj 3b); talasi s_o su prilazeći talasu s'_{n+1} , dok talasi s_γ prilaze talasima s_δ . Napomenimo da su još i s_α , s_γ , s_δ i s_o amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Sada, na osnovu (4.25) i $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$, važi

$$\begin{aligned}\Delta Q(\tau) &= Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + V(\tau^-) |s'_{n+1}| + (|s'_i| - |s_{i_1}| - |s_{i_2}|) \sum_{\alpha} |s_{\alpha}| \\ &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + V(\tau^-) |s'_{n+1}| + |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| \sum_{\alpha} |s_{\alpha}| \\ &= \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{i_2}| V(\tau^-) - |s_{i_1} s_{i_2}|.\end{aligned}$$

Slučaj 4. Pretpostavimo da jedan prilazeći talas pripada i -toj familiji karakteristika, a drugi da je nefizički talas i da su njihove amplitude s_i i s_{n+1} , redom. Tada važi

$$\begin{aligned}V(\tau^+) &= |s'_i| + |s'_{n+1}| + \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|, \\ V(\tau^-) &= |s_i| + |s_{n+1}| + \sum_{\alpha} |s_{\alpha}|,\end{aligned}$$

gde su s_α amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Zbog toga je

$$\begin{aligned}\Delta V(\tau) &= V(\tau^+) - V(\tau^-) = |s'_i| - |s_i| + |s'_{n+1}| - |s_{n+1}| \\ &= |s'_{n+1}| - |s_{n+1}| \\ &= \mathcal{O}(1) |s_i s_{n+1}|\end{aligned}$$

na osnovu (4.26). Ovde je korišćeno da je $s_i = s'_i$. Podsetimo se da su u ovom slučaju stvaraju najviše dva talasa. Jedan elementaran i -te familije i jedan nefizički talas. Još je i

$$\begin{aligned}Q(\tau^+) &= \sum_{\alpha} |s'_i s_{\alpha}| + \sum_o |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\gamma, \delta} |s_{\gamma} s_{\delta}|, \\ Q(\tau^-) &= |s_i s_{n+1}| + \sum_{\alpha} |s_i s_{\alpha}| + \sum_o |s_{n+1} s_o| + \sum_{\gamma, \delta} |s_{\gamma} s_{\delta}|,\end{aligned}$$

gde su talasi s_α prilazeći talasima s_i i s'_i (posledica 4.3.4, slučaj 4); s_o talasima s_{n+1} i s'_{n+1} ; dok talasi s_γ prilaze talasima s_δ . Napomenimo da su s_α , s_γ , s_δ i s_o još i amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji. Korišćenjem (4.26) i $s'_i = s_i$, imamo da važi

$$\begin{aligned}\Delta Q(\tau) &= Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -|s_i s_{n+1}| + V(\tau^-) (|s'_{n+1}| - |s_{n+1}|) \\ &= \mathcal{O}(1) |s_i s_{n+1}| V(\tau^-) - |s_i s_{n+1}|.\end{aligned}$$

Ovim je dokazano (4.33, 4.34).

Ako je V dovoljno malo, iz (4.34) sledi

$$Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\frac{|s_i s_j|}{2}. \quad (4.35)$$

Za $V(\tau^-) \leq \delta_2$, $\delta_2 \in (0, \delta_1)$, na osnovu (4.33–4.35) možemo izabrati dovoljno veliku konstantu C_0 tako da Glimova funkcionala

$$\Upsilon(t) := V(t) + C_0 Q(t) \quad (4.36)$$

ne raste kako se vreme povećava (dok se između dve uzastopne interakcije ne menja). Neka je sada C_1 konstanta takva da važi

$$\frac{1}{C_1} \text{TV}(q(\cdot, t)) \leq V(t) \leq C_1 \text{TV}(q(\cdot, t)).$$

Neka je $\delta_3 > 0$ dovoljno malo tako da važi

$$C_1^2 \delta_3 + C_0 C_1^3 \delta_3^2 \leq \delta_2.$$

Ako je $\text{TV}(q(\cdot, 0)) \leq \delta_3$, a kako je $Q(t) \leq V^2(t)$ za svako $t \geq 0$, tada važi

$$\begin{aligned} \text{TV}(q(\cdot, t)) &\leq C_1(V(t) + C_0 Q(t)) \\ &\leq C_1(V(0+) + C_0 Q(0+)) \\ &\leq C_1(C_1 \delta_3 + C_0(C_1 \delta_3)^2) \\ &\leq \delta_2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Sada, ako (4.37) važi pre vremena interakcije τ , tada važi $V(\tau^-) \leq \delta_2$. Kako Υ iz (4.36) ne raste tokom interakcije talasa, (4.37) važi i nakon vremena τ . Indukcijom se dobija da (4.37) važi za svako $t \geq 0$.

4. Ograničen broj talasa. Sada je potrebno dokazati da je ukupan broj talasa konačan u konačnom vremenu. Podsetimo se da je $\hat{\nu}$ prag parametar koji određuje koje će se Rimanovo rešenje koristiti (tačno ili aproksimativno, poglavlje 4.2). Tačno Rimanovo rešenje će se koristiti ako snage talasa koji su u interakciji zadovoljavaju $|s_i s_j| \geq \hat{\nu}$, a to se može desiti konačno mnogo puta. Naime, na osnovu (4.35) važi

$$Q(\tau^+) - Q(\tau^-) \leq -\hat{\nu}/2.$$

Neka je τ_n vreme kada je došlo do n -te interakcije dva talasa. Sa τ_n^- i τ_n^+ obeležimo vremena pre i posle vremena τ_n , redom. Tada je $Q(\tau_n^-) = Q(\tau_{n-1}^+)$ za $n = 1, 2, \dots$ i važi

$$-Q(0+) := -Q(\tau_0+) = \sum_{i=1}^n (Q(\tau_i^+) - Q(\tau_i^-)) - Q(\tau_n^+) \leq -n \frac{\hat{\nu}}{2} - Q(\tau_n^+) \leq -n \frac{\hat{\nu}}{2},$$

odnosno, $n \leq 2Q(0+)/\hat{\nu}$. Zbog toga novi fizički talasi nastaju u tačkama interakcije čiji je broj manji ili jednak $2Q(0+)/\hat{\nu}$. Time je broj fizičkih talasa konačan. Novi nefizički talas nastaje samo pri interakciji dva fizička talasa, a bilo koja dva fizička talasa mogu da budu u interakciji samo jednom. Time je i broj nefizičkih talasa konačan.

U koracima od 1 do 4 pokazano je da se za bilo koje vrednosti parametara $\hat{\delta}$ i $\hat{\nu}$, i za dovoljno mali početni uslov, koristeći algoritam WFT metode, može konstruisati po delovima konstantno aproksimativno rešenje za svako $t \geq 0$. U nastavku će biti pokazano da je za proizvoljno $\mu > 0$, ako su parametri $\hat{\delta}$ i $\hat{\nu}$ dovoljno mali, funkcija q konstruisana pomoću WFT algoritma zapravo μ -aproksimativno rešenje Košijevog problema (2.1, 2.4).

5. Snaga svakog razređujućeg talasa je mala. Sada treba pokazati da za neku konstantu C_2 , snaga svakog razređujućeg talasa zadovoljava

$$|s_\alpha| \leq C_2 \hat{\delta}, \quad \alpha \in \mathcal{R}. \quad (4.38)$$

Po konstrukciji, u vremenu t_0 novi razređujući talas nastao primenom tačnog Rimanovog rešenja ima snagu $|s_\alpha(t_0)| \in (0, \hat{\delta})$ (to su talasi koji su već podeljeni na razređujuće talase male snage, poglavlje 4.2.1). Sada treba ispitati kako se menja snaga tih talasa u vremenu.

Dva razređujuća talasa iste familije nikada neće biti u interakciji. Naime, pretpostavimo da razređujući talas i -te familije koji dolazi sa leve strane spaja q_L i q_M . Tada mora važiti $\lambda_i(q_L) < \lambda_i(q_M)$ zbog Laksovih entropijskih uslova. Dalje, neka razređujući talas i -te familije koji dolazi sa desne strane spaja q_M i q_R . Tada mora važiti $\lambda_i(q_M) < \lambda_i(q_R)$. Da bi došlo do interakcije ta dva talasa, mora važiti $\lambda_i(q_L) > \lambda_i(q_R)$ i tako dolazimo u suprotnost sa pretpostavkom da je došlo do interakcije dva razređujuća talasa iste familije.

Pri interakciji razređujućeg i udarnog talasa iste familije, snaga razređujućeg talasa će se smanjiti. Naime, kako je amplituda udarnog talasa negativna, a amplituda razređujućeg talasa pozitivna, nakon interakcije takva dva talasa iz iste familije, amplituda rezultujućeg talasa te familije dobija se (približno) kao zbir amplituda talasa pre interakcije pa će zbog toga, ako je taj zbir pozitivan, nastati razređujući talas manje amplitude a time i snage. Ako dođe do interakcije razređujućeg i nefizičkog talasa, snaga razređujućeg talasa se ne menja (po konstrukciji). Pri interakciji bilo kog elementarnog talasa sa nefizičkim talasom, snaga tog talasa se ne menja, dok se snaga nefizičkog talasa može promeniti. U ostalim slučajevima, može doći do povećanja snage razređujućeg talasa. Da bismo pratili promenu njegove amplitude s_α u vremenu $t > t_0$, posmatrajmo funkcionalu

$$V_\alpha(t) = \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{A}}(\alpha)} |s_\beta|, \quad (4.39)$$

gde je sumiranje izvršeno nad skupom $\tilde{\mathcal{A}}(\alpha)$ koji čine svi talasi koji su prilazeći razređujućem talasu s_α . Neka je sada $\tau > t_0$ vreme kada je došlo do interakcije.

1. *mogućnost*. Ako u interakciju nije uključen talas amplitude s_α , tada na osnovu (4.22–4.26) važi

$$\Delta s_\alpha(\tau) = 0, \quad \Delta V_\alpha(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau) \leq 0. \quad (4.40)$$

Prvi izraz u (4.40) znači da razređujući talas nije promenio snagu nakon interakcije u kojoj nije ni učestvovao. Drugi izraz u (4.40) će biti tačan ako pokažemo da važi $\Delta V_\alpha(\tau) = \Delta V(\tau)$ jer će onda važiti i

$$\Delta V_\alpha(\tau) = \Delta V(\tau) \Rightarrow \Delta V_\alpha(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau) = \Delta V(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau) \leq 0$$

jer Glimova funkcionala ne raste kako se vreme povećava. Pokažimo da $\Delta V_\alpha(\tau) = \Delta V(\tau)$ važi u sva četiri slučaja interakcije dva talasa. Ponovimo da je s_α razređujući talas koji nije učestvovao u interakciji i da $\beta \in \tilde{\mathcal{A}}(\alpha)$.

Slučaj 1. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_i i s_j , redom. Neka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Tada važi

$$\begin{aligned} V_\alpha(\tau^+) &= |s'_i| + |s'_j| + \sum_{\beta} |s_\beta| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k|, \\ V_\alpha(\tau^-) &= |s_i| + |s_j| + \sum_{\beta} |s_\beta|, \end{aligned}$$

gde je $\beta \neq i, j, k$. Zato je

$$\begin{aligned} \Delta V_\alpha(\tau) &= V_\alpha(\tau^+) - V_\alpha(\tau^-) = |s'_i| - |s_i| + |s'_j| - |s_j| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k| \\ &= \Delta V(\tau). \end{aligned}$$

Slučaj 2. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} . Neka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Tada važi

$$\begin{aligned} V_\alpha(\tau^+) &= |s'_i| + \sum_{\beta} |s_\beta| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k|, \\ V_\alpha(\tau^-) &= |s_{i_1}| + |s_{i_2}| + \sum_{\beta} |s_\beta|, \end{aligned}$$

gde je $\beta \neq k, i, i_1, i_2$. Zato je

$$\begin{aligned}\Delta V_\alpha(\tau) &= V_\alpha(\tau^+) - V_\alpha(\tau^-) = |s'_i| - |s_{i_1}| - |s_{i_2}| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k| \\ &= \Delta V(\tau).\end{aligned}$$

Slučaj 3a. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{j_2} , dok su s'_{i_1} i s'_{j_2} amplitude odlazećih talasa, redom. Podsetimo da je nefizički talas familije $n + 1$. Tada važi

$$\begin{aligned}V_\alpha(\tau^+) &= |s'_{i_1}| + |s'_{j_2}| + |s'_{n+1}| + \sum_{\beta} |s_\beta|, \\ V_\alpha(\tau^-) &= |s_{i_1}| + |s_{j_2}| + \sum_{\beta} |s_\beta|,\end{aligned}$$

gde je $\beta \neq i_1, j_2, n + 1$. Sa s'_{n+1} obeležen je odlazeći nefizički talas. Zato je

$$\begin{aligned}\Delta V_\alpha(\tau) &= V_\alpha(\tau^+) - V_\alpha(\tau^-) = |s'_{i_1}| - |s_{i_1}| + |s'_{j_2}| - |s_{j_2}| + |s'_{n+1}| \\ &= |s'_{n+1}| \\ &= \Delta V(\tau),\end{aligned}$$

jer je $s'_{i_1} = s_{i_1}$ i $s'_{j_2} = s_{j_2}$.

Slučaj 3b. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} , dok je s'_i amplituda odlazećeg talasa. Tada važi

$$\begin{aligned}V_\alpha(\tau^+) &= |s'_i| + |s'_{n+1}| + \sum_{\beta} |s_\beta|, \\ V_\alpha(\tau^-) &= |s_{i_1}| + |s_{i_2}| + \sum_{\beta} |s_\beta|,\end{aligned}$$

gde je $\beta \neq i_1, i_2, n + 1$. Sa s'_{n+1} obeležen je odlazeći nefizički talas. Zato je (korišćenjem $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$)

$$\begin{aligned}\Delta V_\alpha(\tau) &= V_\alpha(\tau^+) - V_\alpha(\tau^-) = |s'_i| - |s_{i_1}| - |s_{i_2}| + |s'_{n+1}| \\ &= \Delta V(\tau).\end{aligned}$$

Slučaj 4. Pretpostavimo da jedan prilazeći talas pripada i -toj familiji karakteristika, a drugi da je nefizički talas i da su njihove amplitude s_i i s_{n+1} , redom. Tada važi

$$\begin{aligned}V_\alpha(\tau^+) &= |s'_i| + |s'_{n+1}| + \sum_{\beta} |s_\beta|, \\ V_\alpha(\tau^-) &= |s_i| + |s_{n+1}| + \sum_{\beta} |s_\beta|,\end{aligned}$$

gde je $\beta \neq i, n + 1$. Zato je (uz $s'_i = s_i$)

$$\begin{aligned}\Delta V_\alpha(\tau) &= V_\alpha(\tau^+) - V_\alpha(\tau^-) = |s'_i| - |s_i| + |s'_{n+1}| - |s_{n+1}| \\ &= |s'_{n+1}| - |s_{n+1}| \\ &= \Delta V(\tau).\end{aligned}$$

2. mogućnost. Neka u vremenu τ , dođe do interakcije razređujućeg talasa amplitude s_α i talasa snage $|s_\beta|$. Tada za neku konstantu $C_3 > 0$ važi:

$$\Delta V_\alpha(\tau) = -|s_\beta|, \quad \Delta Q(\tau) < 0 \text{ i } \Delta s_\alpha(\tau) \leq C_3 |s_\alpha(\tau^-)| |s_\beta|. \quad (4.41)$$

Prvi izraz u (4.41) važi jer nakon interakcije s_α i s_β , talas s'_β više nije prilazeći sa s'_α , a oni talasi koji su bili prilazeći sa s_α pre interakcije, biće prilazeći i posle interakcije (posledica 2.37). Drugi izraz u (4.41) je tačan na osnovu (4.35), a treći na osnovu (4.22–4.26).

Sada imamo sve što nam je potrebno da bismo, na osnovu (4.40, 4.41), pokazali da je preslikavanje

$$t \rightarrow s_\alpha(t) e^{C_3(V_\alpha(t) + C_0 Q(t))} \quad (4.42)$$

nerastuća funkcija za $t > t_0$. Naime, neka je

$$\tilde{h}(t) = s_\alpha(t) e^{C_3(V_\alpha(t) + C_0 Q(t))}.$$

Ako važi (4.40), tada za $t_2 := \tau^+ > \tau^- =: t_1$ važi

$$\Delta s_\alpha(\tau) = 0 \Rightarrow s_\alpha(t_2) - s_\alpha(t_1) = 0 \Rightarrow s_\alpha(t_2) = s_\alpha(t_1).$$

Na osnovu drugog izraza u (4.40) imamo

$$\frac{\tilde{h}(t_2)}{\tilde{h}(t_1)} = \frac{s_\alpha(t_2) e^{C_3(V_\alpha(t_2) + C_0 Q(t_2))}}{s_\alpha(t_1) e^{C_3(V_\alpha(t_1) + C_0 Q(t_1))}} = e^{C_3(\Delta V_\alpha(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau))} \leq e^{C_3 \cdot 0} = 1.$$

Ako važi (4.41), tada za $t_2 > t_1$ važi i $s_\alpha(t_2) \leq s_\alpha(t_1) + C_3 |s_\alpha(t_1)| |s_\beta|$, pa je

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{h}(t_2)}{\tilde{h}(t_1)} &= \frac{s_\alpha(t_2) e^{C_3(V_\alpha(t_2) + C_0 Q(t_2))}}{s_\alpha(t_1) e^{C_3(V_\alpha(t_1) + C_0 Q(t_1))}} \leq \frac{(s_\alpha(t_1) + C_3 s_\alpha(t_1) |s_\beta|) e^{C_3(\Delta V_\alpha(\tau) + C_0 \Delta Q(\tau))}}{s_\alpha(t_1)} \\ &= (1 + C_3 |s_\beta|) e^{-C_3 |s_\beta| + C_3 C_0 \Delta Q(\tau)} \leq (1 + C_3 |s_\beta|) e^{-C_3 |s_\beta|} \leq 1, \end{aligned}$$

jer je $(1 + x) \leq e^x$. Dakle, za $t > t_0$ važi

$$s_\alpha(t) \leq s_\alpha(t) e^{C_3(V_\alpha(t) + C_0 Q(t))} \leq s_\alpha(t_0) e^{C_3(V_\alpha(t_0) + C_0 Q(t_0))}.$$

Kao posledicu imamo da za svako $t > t_0$ važi

$$\begin{aligned} s_\alpha(t) &\leq s_\alpha(t_0) e^{C_3(V_\alpha(t_0) + C_0 Q(t_0))} \\ &\leq \hat{\delta} e^{C_3(V(0+) + C_0 Q(0+))} \\ &\leq \hat{\delta} e^{C_3 \delta_2}, \end{aligned}$$

gde δ_2 konstanta iz (4.37). Time smo dobili (4.38) za $C_2 = e^{C_3 \delta_2}$. Za dato $\mu > 0$, sada možemo izabrati $\hat{\delta}$ dovoljno malo tako da desna strana u (4.38) bude manja od μ .

6. Ukupna snaga svih nefizičkih talasa je mala. Pokažimo prvo da za neku konstantu $C_4 > 0$, snaga svakog nefizičkog talasa zadovoljava

$$|s_\alpha| \leq C_4 \hat{\nu}, \quad \alpha \in \mathcal{NP}. \quad (4.43)$$

Podsetimo se, $\hat{\nu}$ je prag parametar koji određuje koje će se Rimanovo rešenje koristiti (tačno ili aproksimativno, poglavlje 4.2). Svaki novi nefizički talas nastaje pri interakciji dva fizička talasa (amplitude s_{i_1} i s_{j_2}) u nekom vremenu t_0 i to ako važi $|s_{i_1} s_{j_2}| < \hat{\nu}$. Na osnovu ocene (4.25), snaga nefizičkog talasa nakon njegovog formiranja (početna snaga) je

$$s_\alpha(t_0) = \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{j_2}| = \mathcal{O}(1) \hat{\nu}.$$

Međutim, početna snaga nefizičkog talasa može se povećati pri interakciji sa drugim talasima. Zbog toga, sa $s_\alpha(t)$ biće obeležena snaga nefizičkog talasa za $t > t_0$. Posmatrajmo opet (4.39) ali za nefizičke talase α . Koristeći ocene (4.22–4.26) i postupak koji je potpuno analogan postupku kada je α bio razređujući talas u (4.39), zaključujemo da je za odgovarajuću konstantu C_3 , preslikavanje dato u (4.42) nerastuća funkcija. Koristeći iste argumente kao pri oceni snaga u koraku 5, dobijamo (4.43).

Da bismo pokazali da je ukupna snaga svih nefizičkih talasa mala, svakom talasu dodelićemo prirodan broj (*generacijski red*), računajući koliko je interakcija bilo potrebno da bi se proizveo taj talas.

Definicija 4.3.5 *Generacijski red talasa definiše se induktivno kao što sledi.*

- *Svim talasima nastalim rešavanjem Rimanovog problema u vremenu $t = 0$ dodeljuje se generacijski red $g = 1$.*
- *Neka su interakciji dva talasa familije $i, j \in \{1, \dots, n, n + 1\}$, sa generacijskim redom g_{i_1} i g_{j_2} , redom. Generacijski red odlazećih talasa određuje se na sledeći način:*
 - *Slučaj 1: $i \neq j$. Važi:*
 - * *odlazeći talas i -te familije dobija generacijski red g_{i_1} , a odlazeći talas familije j dobija generacijski red g_{j_2} (isti generacijski red kao i kod prilazećih talasa);*
 - * *odlazeći talasi familije $k \neq i, j$ dobijaju generacijski red $\max\{g_{i_1}, g_{j_2}\} + 1$.*
 - *Slučaj 2: $i = j$. Važi:*
 - * *odlazeći talas i -te familije dobija generacijski red $\min\{g_{i_1}, g_{i_2}\}$;*
 - * *odlazeći talasi druge familije $k \neq i$ dobijaju generacijski red $\max\{g_{i_1}, g_{i_2}\} + 1$.*

Sa $V_g(t)$, za $g \geq 1$, obeležena je suma snaga svih talasa čiji je generacijski red veći ili jednak g . Da bismo dobili ocenu za V_g , definišemo $Q_g(t) = \sum |s_i s_j|$, gde se sumiranje vrši po svim parovima talasa koji su prilazeći u $q(\cdot, t)$ i neka im je generacijski red g_i i g_j , redom, gde je $\max\{g_i, g_j\} \geq g$. Sa I_g obeležimo skup svih vremena kada je došlo do interakcije dva talasa sa generacijskim redom g_i i g_j , gde važi $\max\{g_i, g_j\} = g$. Opet, koristeći istu tehniku kao pri dobijanju (4.33, 4.34), ali sada prateći generacijski red talasa uključenih u interakciju, dobijamo

$$\begin{aligned}
\Delta V_g(t) &= 0 & t \in I_1 \cup \dots \cup I_{g-2} \\
\Delta V_g(t) + C_0 \Delta Q_{g-1}(t) &\leq 0 & t \in I_{g-1} \cup I_g \cup I_{g+1} \cup \dots \\
\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q(t) V_g(t-) &\leq 0 & t \in I_1 \cup \dots \cup I_{g-2} \\
\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q_{g-1}(t) V(t-) &\leq 0 & t \in I_{g-1} \\
\Delta Q_g(t) &\leq 0 & t \in I_g \cup I_{g+1} \cup \dots
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Prva jednakost u (4.44) je tačna jer pri interakciji talasa čiji je generacijski red manji ili jednak $g-2$, može nastati talas čiji je generacijski red najviše $g-1$, pa se time ne menjaju snage talasa čiji je generacijski red g ili veći od g . Ako je jedan od dolazećih talasa generacijskog reda $g-1$ ili većeg, tada rast V_g prouzrokuje opadanje Q_{g-1} . To je osobina nejednakosti date u drugom redu (4.44). Preostale tri nejednakosti predstavljaju ograničenje rasta Q_g . U nastavku teksta, za određivanje generacijskog reda talasa, stalno će biti korišćena definicija 4.3.5 bez posebne napomene.

Dokažimo sada nejednakost u drugom redu (4.44). Pokazaćemo da tvrđenje važi za $t \in I_{g-1}$, dok za $t \in I_g \cup I_{g+1} \cup \dots$, dokaz ide analogno.

Slučaj 1. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_i i s_j , redom. Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_i , a generacijski red talasa amplitude s_j neka je manji od $g-1$ (analogno se dokazuje u slučaju da je generacijski red jednak $g-1$). Neka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Generacijski red talasa amplitude s'_i i s'_j jednak je generacijskom redu talasa amplitude s_i i s_j , redom. Generacijski red talasa amplitude s'_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $k \neq i, j$, je g (na osnovu definicije 4.3.5). Tada važi

$$V_g(t+) = \sum_{k \neq i, j} |s'_k| + \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad V_g(t-) = \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad \Delta V_g(t) = \sum_{k \neq i, j} |s'_k|,$$

$$Q_{g-1}(t+) = \sum_{g_\alpha \geq 1} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g-1} |s'_j s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|,$$

$$Q_{g-1}(t-) = |s_i s_j| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g-1} |s_j s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|,$$

$$\Delta Q_{g-1}(t) = -|s_i s_j| + (|s'_i| - |s_i|) \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| + (|s'_j| - |s_j|) \sum_{g_\beta \geq g-1} |s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}|.$$

Podsetimo se opet da su talasi s_α prilazeći talasima s_i i s'_i , talasi s_β prilazeći talasima s_j i s'_j (posledica 4.3.4, slučaj 1); s_{α_k} prilazeći s'_k ; dok talasi s_γ prilaze talasima s_δ . Recimo i to da su $s_\alpha, s_\beta, s_{\alpha_k}, s_\gamma$ i s_δ amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji (ovakve oznake koristićemo u dokazu preostalih nejednakosti u (4.44) i to u slučaju 1). Na osnovu istih argumenata koji su korišćeni pri dokazivanju (4.33, 4.34) ali za slučaj 1, sledi da se korišćenjem (4.22) dobija

$$\begin{aligned}\Delta V_g(t) &\leq \mathcal{O}(1)|s_i s_j|, \\ \Delta Q_{g-1}(t) &\leq -|s_i s_j| + (|s'_i - s_i| + |s'_j - s_j| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k|)V(t-) \\ &\leq -|s_i s_j| + \mathcal{O}(1)|s_i s_j|V(t-) \leq -|s_i s_j|/2\end{aligned}$$

tačno, za dovoljno malo $V(t-)$. Sada je jasno da važi druga nejednakost u (4.44) za C_0 dovoljno veliko.

Slučaj 2. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} . Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski red talasa amplitude s_{i_2} neka je manji od $g-1$ (može se analogno dokazati i slučaj ako je generacijski red jednak $g-1$). Neka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Generacijski red talasa sa amplitudom s'_i jednak je generacijskom redu talasa amplitude s_{i_2} (dakle manji od $g-1$). Generacijski red talasa amplitude s'_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $k \neq i$, je g . Tada važi

$$\begin{aligned}V_g(t+) &= \sum_{k \neq i, j} |s'_k| + \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad V_g(t-) = \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad \Delta V_g(t) = \sum_{k \neq i, j} |s'_k|, \\ Q_{g-1}(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s'_i s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_{g-1}(t-) &= |s_{i_1} s_{i_2}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_{g-1}(t) &= -|s_{i_1} s_{i_2}| + \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s'_i s_\alpha| - \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_{i_1} s_\alpha| - \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}|.\end{aligned}$$

Ovde su talasi s_α prilazeći talasima s_{i_1}, s_{i_2} i s'_i (posledica 4.3.4, slučaj 2); talasi s_{α_k} prilaze talasima s'_k , dok talasi s_γ prilaze talasima s_δ . Naravno, $s_\alpha, s_{\alpha_k}, s_\gamma$ i s_δ su amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji (ovakve oznake ćemo koristiti u dokazu preostalih nejednakosti u (4.44) i to u slučaju 2). Sada je jasno da (4.23) daje

$$\begin{aligned}\Delta V_g(t) &\leq \mathcal{O}(1)|s_i s_j|, \\ \Delta Q_{g-1}(t) &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + |s'_i| \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s_\alpha| - |s_{i_1}| \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s_\alpha| - |s_{i_2}| \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| \\ &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}|V(t-) + V(t-) \sum_{k \neq i, j} |s'_k| \\ &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + \mathcal{O}(1)|s_{i_1} s_{i_2}|V(t-) \leq -|s_{i_1} s_{i_2}|/2\end{aligned}$$

za dovoljno malo $V(t-)$. Sada je jasno da važi druga nejednakost u (4.44) za C_0 dovoljno veliko.

Slučaj 3a. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{j_2} , dok su s'_{i_1} i s'_{j_2} amplitude odlazećih talasa, redom. Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_{i_1} (ujedno i talasa amplitude s'_{i_1}), a generacijski red talasa amplitude s_{j_2} (i talasa amplitude s'_{j_2}) neka je manji od $g-1$ (analogno se dokazuje kada je jednak $g-1$). Neka je s'_{n+1} amplituda odlazećeg nefizičkog talasa (koji ima generacijski red g). Kako je

$s_{i_1} = s'_{i_1}$ i $s_{j_2} = s'_{j_2}$, važi

$$\begin{aligned} V_g(t+) &= |s'_{n+1}| + \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad V_g(t-) = \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad \Delta V_g(t) = |s'_{n+1}|, \\ Q_{g-1}(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq 1} |s'_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g-1} |s'_{j_2} s_\beta| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_{g-1}(t-) &= |s_{i_1} s_{j_2}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g-1} |s_{j_2} s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_{g-1}(t) &= -|s_{i_1} s_{j_2}| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o|. \end{aligned}$$

Talasi s_α prilazeći talasima s_{i_1} i s'_{i_1} , talasi s_β prilazeći talasima s_{j_2} i s'_{j_2} (posledica 4.3.4, slučaj 3a); s_o prilazeći talasima s'_{n+1} , dok talasi s_γ prilaze talasima s_δ . Šada su $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma, s_\delta$ i s_o takođe i amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji (naravno, ovakve oznake koristimo u dokazu preostalih nejednakosti u (4.44) i to u slučaju 3a). Pošto važi (4.25), imamo

$$\begin{aligned} \Delta V_g(t) &\leq \mathcal{O}(1)|s_{i_1} s_{j_2}|, \\ \Delta Q_{g-1}(t) &\leq -|s_{i_1} s_{j_2}| + |s'_{n+1}|V(t-) \\ &\leq -|s_{i_1} s_{j_2}| + \mathcal{O}(1)|s_{i_1} s_{j_2}|V(t-) \leq -|s_{i_1} s_{j_2}|/2 \end{aligned}$$

za dovoljno malo $V(t-)$. Zbog toga će važiti druga nejednakost u (4.44) za C_0 dovoljno veliko.

Slučaj 3b. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} , dok je s'_i amplituda odlazećeg talasa. Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski red talasa amplitude s_{i_2} neka je manji od $g-1$ (ako je jednak $g-1$, analogno se pokazuje). Neaka je s'_{n+1} amplituda odlazećeg nefizičkog talasa (sa generacijskim redom g), a s'_i amplituda odlazećeg talasa i -te familije (sa generacijskim redom manjim $g-1$). Tada važi

$$\begin{aligned} V_g(t+) &= |s'_{n+1}| + \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad V_g(t-) = \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad \Delta V_g(t) = |s'_{n+1}|, \\ Q_{g-1}(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_{g-1}(t-) &= |s_{i_1} s_{i_2}| + \sum_{g_{\alpha_1} \geq 1} |s_{i_1} s_{\alpha_1}| + \sum_{g_{\alpha_2} \geq g-1} |s_{i_2} s_{\alpha_2}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_{g-1}(t) &= -|s_{i_1} s_{i_2}| + |s'_i| \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s_\alpha| - |s_{i_1}| \sum_{g_{\alpha_1} \geq 1} |s_{\alpha_1}| - |s_{i_2}| \sum_{g_{\alpha_2} \geq g-1} |s_{\alpha_2}| + |s'_{n+1}| \sum_{g_o \geq 1} |s_o|. \end{aligned}$$

Sada su talasi s_α prilazeći talasima s_{i_1} , s_{i_2} i s'_i (posledica 4.3.4, slučaj 3b); talasi s_o su prilazeći talasu s'_{n+1} , dok talasi s_γ prilaze talasima s_δ . Napomenimo i to da su još i $s_\alpha, s_\gamma, s_\delta$ i s_o amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji (ovakve oznake koristićemo u dokazu preostalih nejednakosti u (4.44) i to u slučaju 3b). Jasno da iz (4.25) sledi

$$\begin{aligned} \Delta V_g(t) &\leq \mathcal{O}(1)|s_{i_1} s_{i_2}|, \\ \Delta Q_{g-1}(t) &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + |s'_i| \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s_\alpha| - |s_{i_1}| \sum_{g_{\alpha_1} \geq g-1} |s_{\alpha_1}| - |s_{i_2}| \sum_{g_{\alpha_2} \geq g-1} |s_{\alpha_2}| + |s'_{n+1}| \sum_{g_o \geq 1} |s_o| \\ &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}|V(t-) + |s'_{n+1}| \sum_{g_o \geq 1} |s_o| \\ &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + |s'_{n+1}|V(t-) \\ &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + \mathcal{O}(1)|s_{i_1} s_{i_2}|V(t-) \leq -|s_{i_1} s_{i_2}|/2 \end{aligned}$$

jer je $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$ i za dovoljno malo $V(t-)$, pa važi druga nejednakost u (4.44) za C_0 dovoljno veliko.

Slučaj 4. Pretpostavimo da jedan prilazeći talas pripada i -toj familiji karakteristika, a drugi da je nefizički talas i da su njihove amplitude s_i i s_{n+1} , redom. Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_i , a generacijski red talasa amplitude s_{n+1} neka je manji od $g-1$ (slučaj kada je jednak $g-1$ ide analogno). Neke su s'_i i s'_{n+1} amplitude odlazećih talasa (generacijski redovi su isti kao kod odgovarajućih prilazećih talasa). Tada važi

$$\begin{aligned} V_g(t+) &= \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad V_g(t-) = \sum_{g_\gamma \geq g} |s_\gamma|, \quad \Delta V_g(t) = 0, \\ Q_{g-1}(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq 1} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g-1} |s'_{n+1} s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_{g-1}(t-) &= |s_i s_{n+1}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g-1} |s_{n+1} s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_{g-1}(t) &= -|s_i s_{n+1}| + (|s'_{n+1}| - |s_{n+1}|) \sum_{g_\beta \geq g-1} |s_\beta|, \end{aligned}$$

jer je $s'_i = s_i$. Opet su talasi s_α prilazeći talasima s_i i s'_i (posledica 4.3.4, slučaj 4); s_o talasu s_{n+1} ; dok talasi s_γ prilaze talasima s_δ . Recimo i to da su $s_\alpha, s_\gamma, s_\delta$ i s_o još i amplitude preostalih talasa koji ne učestvuju u posmatranoj interakciji (ovakve oznake biće korišćene u dokazu preostalih nejednakosti u (4.44) i to u slučaju 4). Sada je, na osnovu (4.26), $\Delta Q_{g-1}(t) \leq -|s_i s_{n+1}| + \mathcal{O}(1)|s_i s_{n+1}|V(t-) \leq -|s_i s_{n+1}|/2$ za dovoljno malo $V(t-)$. Druga nejednakost u (4.44) važiće za C_0 dovoljno veliko.

Dokažimo sada nejednakost u trećem redu (4.44). Pokažimo da je ovo tvrđenje tačno za $t \in I_{g-2}$, dok se analogno pokazuje za $t \in I_1 \cup \dots \cup I_{g-1}$.

Slučaj 1. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_i i s_j , redom. Takođe, neka je $g-2$ generacijski red talasa amplitude s_i , a generacijski red talasa amplitude s_j neka je manji ili jednak $g-2$. Neke su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Generacijski red talasa amplitude s'_i (s'_j) jednak je generacijskom redu talasa amplitude s_i (s_j), dok je generacijski red talasa amplitude s'_k , $k \neq i$, jednak $g-1$. Tada važi

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s'_j s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq g}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_g(t-) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s_j s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_g(t) &= (|s'_i| - |s_i|) \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| + (|s'_j| - |s_j|) \sum_{g_\beta \geq g} |s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq g}} |s'_k s_{\alpha_k}|, \\ V_g(t-) &= \sum_{g_\pi \geq g} |s_\pi|. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $\Delta Q_g(t) \leq (|s'_i - s_i| + |s'_j - s_j| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k|) V_g(t-) = \mathcal{O}(1)|s_i s_j| V_g(t-)$, na osnovu (4.22). Izraz u (4.35) daje $\Delta Q(t) \leq -|s_i s_j|/2$. Zbog toga imamo

$$\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q(t) V_g(t-) \leq \mathcal{O}(1)|s_i s_j| V_g(t-) - C_0 \frac{|s_i s_j|}{2} V_g(t-) = |s_i s_j| (\mathcal{O}(1) - \frac{C_0}{2}) V_g(t-) \leq 0$$

za dovoljno veliko C_0 .

Slučaj 2. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} . Takođe, neka je $g-2$ generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski

red talasa amplitude s_{i_2} neka je manji ili jednak $g - 2$. Neka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Generacijski red talasa amplitude s'_i je jednak generacijskom redu talasa amplitude s_{i_2} , dok je generacijski red talasa amplitude s'_k , $k \neq i$, jednak $g - 1$. Tada važi

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i \\ g_{\alpha_k} \geq g}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_g(t-) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_g(t) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| - \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_1} s_\alpha| - \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq g}} |s'_k s_{\alpha_k}|, \\ V_g(t-) &= \sum_{g_\pi \geq g} |s_\pi|, \\ \Delta V(t) &= |s'_i| - |s_{i_1}| - |s_{i_2}| + \sum_{k \neq i} |s'_k|. \end{aligned}$$

Sada je $\Delta Q_g(t) \leq (|s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k|) V_g(t-) = \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V_g(t-)$, na osnovu (4.23). Kako je $\Delta Q(t) \leq -|s_i s_j|/2$ imaćemo

$$\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q(t) V_g(t-) \leq \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V_g(t-) - C_0 \frac{|s_i s_j|}{2} V_g(t-) = |s_i s_j| (\mathcal{O}(1) - \frac{C_0}{2}) V_g(t-) \leq 0$$

za dovoljno veliko C_0 .

Slučaj 3a. Sada možemo dati dokaz drugačije izveden. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{j_2} , dok su s'_{i_1} i s'_{j_2} amplitude odlazećih talasa, redom. Takođe, neka je $g - 2$ generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski red talasa amplitude s_{j_2} neka je manji ili jednak $g - 2$. Neka je s'_{n+1} amplituda odlazećeg nefizičkog talasa (koji ima generacijski red $g - 1$). Generacijski red talasa amplitude s'_{i_1} (s'_{j_2}) jednak je generacijskom redu talasa amplitude s_{i_1} (s_{j_2}). Tada važi

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s'_{j_2} s_\beta| + \sum_{g_o \geq g} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ Q_g(t-) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s_{j_2} s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ \Delta Q_g(t) &= \sum_{g_o \geq g} |s'_{n+1} s_o|, \\ V_g(t-) &= \sum_{g_\pi \geq g} |s_\pi|, \\ \Delta V(t) &= |s'_{n+1}|. \end{aligned}$$

Znači da je $\Delta Q_g(t) = |s'_{n+1}| \sum_{g_o \geq g} |s_o| = \Delta V(t) \sum_{g_o \geq g} |s_o| \leq \Delta V(t) \sum_{g_\pi \geq g} |s_\pi| = \Delta V(t) V_g(t-)$ jer su talasi s_o sadržani u talasima s_π . Sada iskoristimo

$$\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q(t) V_g(t-) \leq (\Delta V(t) + C_0 \Delta Q(t)) V_g(t-) \leq 0$$

što je i trebalo dokazati. Ovde smo koristili da je Glimova funkcionala manja ili jednaka nuli i da je $s'_{i_1} = s_{i_1}$ i $s'_{j_2} = s_{j_2}$.

Slučaj 3b. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} , dok je s'_i amplituda odlazećeg talasa. Takođe, neka je $g-2$ generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski red talasa amplitude s_{i_2} neka je manji ili jednak $g-2$ (to će biti i generacijski red talasa amplitude s'_i). Neaka je s'_{n+1} amplituda odlazećeg nefizičkog talasa (generacijskog reda $g-1$). Tada važi

$$Q_g(t+) = \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq g} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|$$

$$Q_g(t-) = \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|$$

$$\Delta Q_g(t) = \sum_{g_o \geq g} |s'_{n+1} s_o|,$$

$$V_g(t-) = \sum_{g_\pi \geq g} |s_\pi|,$$

$$\Delta V(t) = |s'_{n+1}|.$$

Zato je $\Delta Q_g(t) \leq \Delta V(t) V_g(t-)$, pa kao u *slučaju 3a* dobijamo da je $\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q(t) V_g(t-) \leq 0$. Ovdje smo koristili da je $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$.

Slučaj 4. Pretpostavimo da jedan prilazeći talas pripada i -toj familiji karakteristika, a drugi da je nefizički talas i da su njihove amplitude s_i i s_{n+1} , redom. Takođe, neka je $g-2$ generacijski red talasa amplitude s_{n+1} , a generacijski red talasa amplitude s_i neka je manji ili jednak $g-2$. Neaka su s'_i i s'_{n+1} amplitude odlazećih talasa (generacijski red se nije promenio kod oba odlazeća talasa). Tada važi

$$Q_g(t+) = \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq g} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|$$

$$Q_g(t-) = \sum_{g_\alpha \geq g} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq g} |s_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|,$$

$$\Delta Q_g(t) = (|s'_{n+1}| - |s_{n+1}|) \sum_{g_o \geq g} |s_o|,$$

$$\Delta V(t) = |s'_{n+1}| - |s_{n+1}|.$$

Sada je $\Delta Q_g(t) \leq (|s'_{n+1}| - |s_{n+1}|) V_g(t-) = \mathcal{O}(1) |s_i s_{n+1}| V_g(t-)$, na osnovu (4.26). Kako je $\Delta Q(t) \leq -|s_i s_{n+1}|/2$ imaćemo

$$\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q(t) V_g(t-) \leq |s_i s_{n+1}| (\mathcal{O}(1) - \frac{C_0}{2}) V_g(t-) \leq 0$$

za dovoljno veliko C_0 . Ovdje smo koristili i da je $s'_i = s_i$.

Sličnim tehnikama dokazuje se nejednakost u četvrtom redu (4.44) za $t \in I_{g-1}$. Naime, neka su u interakciji dva talasa familije $i, j = 1, 2, \dots, n+1$ sa amplitudama s_i, s_j redom.

Slučaj 1. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_i i s_j , redom. Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_i (kao i talasa s'_i), a generacijski red talasa amplitude s_j neka je manji od $g-1$ (kao i talasa s'_j). Analogno se pokazuje i kada je generacijski red za s_j baš $g-1$. Neaka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa

(generacijski red odlazećih talasa s'_k , $k \neq i, j$ je g). Tada važi

$$\begin{aligned}
Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s'_j s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\
Q_g(t-) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s_j s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\
\Delta Q_g(t) &= (|s'_i| - |s_i|) \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| + (|s'_j| - |s_j|) \sum_{g_\beta \geq g} |s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}|, \\
Q_{g-1}(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq 1} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g-1} |s'_j s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\
Q_{g-1}(t-) &= |s_i s_j| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g-1} |s_j s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\
\Delta Q_{g-1}(t) &= -|s_i s_j| + (|s'_i| - |s_i|) \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| + (|s'_j| - |s_j|) \sum_{g_\beta \geq g-1} |s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}|, \\
V(t-) &= |s_i| + |s_j| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq 1} |s_\beta| + \sum_{g_{\alpha_k} \geq 1} |s_{\alpha_k}| + \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi|.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\Delta Q_g(t) &\leq |s'_i - s_i| \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| + |s'_j - s_j| \sum_{g_\beta \geq g} |s_\beta| + V(t-) \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k| \\
&\leq |s'_i - s_i| \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| + |s'_j - s_j| \sum_{g_\beta \geq 1} |s_\beta| + V(t-) \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k| \\
&\leq (|s'_i - s_i| + |s'_j - s_j| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k|) V(t-) \\
&\leq \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(t-),
\end{aligned}$$

na osnovu (4.22). Analogno se pokazuje da je i $\Delta Q_{g-1}(t) \leq -|s_i s_j| + \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(t-)$. Zbog toga važi

$$\begin{aligned}
\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q_{g-1}(t) V(t-) &\leq \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(t-) + C_0 (-|s_i s_j| + \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(t-)) V(t-) \\
&\leq (\mathcal{O}(1) + C_0(-1 + \mathcal{O}(1) V(t-))) |s_i s_j| V(t-) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

za dovoljno malo $V(t-)$ i dovoljno veliko C_0 .

Slučaj 2. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} . Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski red talasa amplitude s_{i_2} neka je manji od $g-1$ (analogno kada je jednak $g-1$). Neaka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Generacijski red talasa amplitude s'_i je jednak generacijskom redu

talasa amplitude s_{i_2} , dok je generacijski red talasa amplitude s'_k , $k \neq i$, jednak g . Tada važi

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_g(t-) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_g(t) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| - \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_1} s_\alpha| - \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}|, \\ Q_{g-1}(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g-1} |s'_i s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_{g-1}(t-) &= |s_{i_1} s_{i_2}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g-1} |s_{i_2} s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ V(t-) &= |s_{i_1}| + |s_{i_2}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| + \sum_{g_{\alpha_k} \geq 1} |s_{\alpha_k}| + \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi|. \end{aligned}$$

Sada imamo da je

$$\begin{aligned} \Delta Q_g(t) &\leq |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| + V(t-) \sum_{k \neq i, j} |s'_k| \\ &\leq (|s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k|) V(t-) \\ &\leq \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(t-), \end{aligned}$$

na osnovu (4.23). Analogno se pokazuje da je i $\Delta Q_{g-1}(t) \leq -|s_i s_j| + \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(t-)$. Zbog toga važi

$$\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q_{g-1}(t) V(t-) \leq 0,$$

za dovoljno malo $V(t-)$ i dovoljno veliko C_0 , što se potpuno isto pokazuje kao u *slučaju 1*.

Slučaj 3a. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{j_2} , dok su s'_{i_1} i s'_{j_2} amplitude odlazećih talasa, redom. Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski red talasa amplitude s_{j_2} neka je manji od $g-1$ (analogno se pokazuje i u slučaju jednakosti sa $g-1$). Neka je s'_{n+1} amplituda odlazećeg nefizičkog talasa (koji ima generacijski red g). Ako dokažemo da važi $\Delta Q_g(t) \leq \Delta V_g(t) V(t-)$ za $t \in I_{g-1}$, tada će važiti i

$$\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q_{g-1} V(t-) \leq (\Delta V_g(t) + C_0 \Delta Q_{g-1}(t)) V(t-) \leq 0,$$

na osnovu druge nejednakosti u (4.44). Sada, koristeći $s'_i = s_i$, $s'_j = s_j$ i (4.25), imamo

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s'_{j_2} s_\beta| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ Q_g(t-) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s_{j_2} s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ \Delta Q_g(t) &= \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o|, \\ V_g(t+) &= \sum_{g_\pi \geq g} |s_\pi| + |s'_{n+1}|, \quad V_g(t-) = \sum_{g_\pi \geq g} |s_\pi|, \quad \Delta V_g(t) = |s'_{n+1}|, \\ V(t-) &= |s_{i_1}| + |s_{j_2}| + \sum_{g_o \geq 1} |s_o| + \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi| \end{aligned}$$

Sada je jasno da važi $\Delta Q_g(t) \leq \Delta V_g(t) V(t-)$.

Slučaj 3b. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} , dok je $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$ amplituda odlazećeg talasa. Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski red talasa amplitude s_{i_2} neka je manji od $g-1$. Neka je s'_{n+1} amplituda odlazećeg nefizičkog talasa (koji ima generacijski red g). Dokažimo opet da važi $\Delta Q_g(t) \leq \Delta V_g(t) V(t-)$ za $t \in I_{g-1}$. Imamo da je

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ Q_g(t-) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ \Delta Q_g(t) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| - \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_1} s_\alpha| - \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o|, \\ V_g(t+) &= \sum_{g_\pi \geq g} |s_\pi| + |s'_{n+1}|, \quad V_g(t-) = \sum_{g_\pi \geq g} |s_\pi|, \quad \Delta V_g(t) = |s'_{n+1}|, \\ V(t-) &= |s_{i_1}| + |s_{i_2}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| + \sum_{g_o \geq 1} |s_o| + \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi| \end{aligned}$$

Zato je, korišćenjem (4.25),

$$\Delta Q_g(t) \leq |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o| = |s'_{n+1}| \sum_{g_o \geq 1} |s_o| \leq \Delta V_g(t) V(t-),$$

jer je $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$.

Slučaj 4. Pretpostavimo da jedan prilazeći talas pripada i -toj familiji karakteristika, a drugi da je nefizički talas i da su njihove amplitude s_i i s_{n+1} , redom. Takođe, neka je $g-1$ generacijski red talasa amplitude s_i , a generacijski red talasa amplitude s_{n+1} neka je manji od $g-1$ (analogno se dokazuje i kada je generacijski red jednak $g-1$). Neka su s'_i i s'_{n+1} amplitude odlazećih talasa. Tada je

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq g} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ Q_g(t-) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq g} |s_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_g(t) &= (|s'_{n+1}| - |s_{n+1}|) \sum_{g_o \geq g} |s_o|, \\ Q_{g-1}(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq 1} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq g-1} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_{g-1}(t-) &= |s_i s_{n+1}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq g-1} |s_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g-1} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_{g-1}(t) &= -|s_i s_{n+1}| + (|s'_{n+1}| - |s_{n+1}|) \sum_{g_o \geq g-1} |s_o|, \\ V(t-) &= |s_i| + |s_{n+1}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| + \sum_{g_o \geq 1} |s_o| + \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi|. \end{aligned}$$

Sada imamo da je

$$\Delta Q_g(t) \leq \mathcal{O}(1) |s_i s_{n+1}| V(t-)$$

i

$$\Delta Q_{g-1}(t) \leq -|s_i s_{n+1}| + \mathcal{O}(1) |s_i s_{n+1}| V(t-),$$

na osnovu (4.26). Analogno kao u *slučaju 1*, dokazuje se da

$$\Delta Q_g(t) + C_0 \Delta Q_{g-1}(t) V(t-) \leq 0$$

važi za dovoljno malo $V(t-)$ i dovoljno veliko C_0 .

Konačno, dokažimo petu nejednakost u (4.44). Ako u interakciji budu dva talasa familije $i, j = 1, 2, \dots, n+1$ sa amplitudama s_i, s_j redom, tada će važiti

$$\Delta Q_g(t) \leq \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(t-) - |s_i s_j| \leq 0$$

za dovoljno malo $V(t-)$ i za $t \in I_g \cup I_{g+1} \cup \dots$. Preciznije, posmatrajmo opet sva četiri slučaja za $t \in I_g$ (analogno za preostala vremena).

Slučaj 1. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_i i s_j , redom. Takođe, neka je g generacijski red talasa amplitude s_i , a generacijski red talasa amplitude s_j neka je manji od g (slično i za slučaj kada je generacijski red jednak g). Neka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Generacijski red talasa sa amplitudama s'_i i s'_j jednak je generacijskom redu talasa sa amplitudama s_i i s_j , redom. Generacijski red talasa amplitude s'_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $k \neq i, j$, je $g+1$. Tada važi

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq 1} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s'_j s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_g(t-) &= |s_i s_j| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s_j s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_g(t) &= -|s_i s_j| + (|s'_i| - |s_i|) \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| + (|s'_j| - |s_j|) \sum_{g_\beta \geq g} |s_\beta| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}|, \\ V(t-) &= \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi|, \end{aligned}$$

Ocenimo sada $\Delta Q_g(t)$. Na osnovu prethodne diskusije i (4.22) važi

$$\begin{aligned} \Delta Q_g(t) &\leq -|s_i s_j| + |s'_i - s_i| \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| + |s'_j - s_j| \sum_{g_\beta \geq g} |s_\beta| + V(t-) \sum_{k \neq i, j} |s'_k| \\ &\leq -|s_i s_j| + (|s'_i - s_i| + |s'_j - s_j| + \sum_{k \neq i, j} |s'_k|) V(t-) \\ &= -|s_i s_j| + \mathcal{O}(1) |s_i s_j| V(t-). \end{aligned}$$

Slučaj 2. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} . Takođe, neka je g generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski red talasa amplitude s_{i_2} neka je manji od g (analogno se dokazuje kada je jednak g). Neka su s'_1, \dots, s'_n amplitude odlazećih talasa. Generacijski red talasa sa amplitudom s'_i jednak je generacijskom redu talasa amplitude s_{i_2} . Generacijski red talasa amplitude s'_k , $k = 1, 2, \dots, n$, $k \neq i$, je $g+1$. Tada važi

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ Q_g(t-) &= |s_{i_1} s_{i_2}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\alpha \geq g} |s_{i_2} s_\alpha| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_g(t) &= -|s_{i_1} s_{i_2}| + |s'_i| \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| - |s_{i_1}| \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_\alpha| - |s_{i_2}| \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i, j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}|, \\ V(t-) &= \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi|, \end{aligned}$$

Sada ćemo oceniti $\Delta Q_g(t)$. Na osnovu (4.23) i prethodne diskusije važi

$$\begin{aligned} \Delta Q_g(t) &\leq -|s_{i_1}s_{i_2}| + |s'_i| \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| - |s_{i_1}| \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| - |s_{i_2}| \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| + \sum_{\substack{k \neq i,j \\ g_{\alpha_k} \geq 1}} |s'_k s_{\alpha_k}| \\ &\leq -|s_{i_1}s_{i_2}| + |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| V(t-) + V(t-) \sum_{k \neq i,j} |s'_k| \\ &= -|s_{i_1}s_{i_2}| + (|s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| + \sum_{k \neq i,j} |s'_k|) V(t-) \\ &\leq -|s_{i_1}s_{i_2}| + \mathcal{O}(1) |s_{i_1}s_{i_2}| V(t-). \end{aligned}$$

Slučaj 3a. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju različitim familijama $i > j$ i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{j_2} , dok su s'_{i_1} i s'_{j_2} amplitude odlazećih talasa, redom. Takođe, neka je g generacijski red talasa amplitude s_{i_1} (ujedno i amplitude s'_{i_1}), a generacijski red talasa amplitude s_{j_2} (i amplitude s'_{j_2}) neka je manji od g (dokaz analogan ako je generacijski jednak g). Neaka je s'_{n+1} amplituda odlazećeg nefizičkog talasa (koji ima generacijski red $g+1$). Tada važi

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq 1} |s'_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s'_{j_2} s_\beta| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ Q_g(t-) &= |s_{i_1} s_{j_2}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_{i_1} s_\alpha| + \sum_{g_\beta \geq g} |s_{j_2} s_\beta| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ \Delta Q_g(t) &= -|s_{i_1} s_{j_2}| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o|, \\ V(t-) &= \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi| \end{aligned}$$

Ovde smo koristili $s'_{i_1} = s_{i_1}$ i $s'_{j_2} = s_{j_2}$. Na osnovu prethodne diskusije i (4.25) važi

$$\begin{aligned} \Delta Q_g(t) &\leq -|s_{i_1} s_{j_2}| + |s'_{n+1}| V(t-) \\ &= -|s_{i_1} s_{j_2}| + \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{j_2}| V(t-). \end{aligned}$$

Slučaj 3b. Pretpostavimo da dva prilazeća talasa pripadaju i -toj familiji karakteristika i da su njihove amplitude s_{i_1} i s_{i_2} , dok je s'_i amplituda odlazećeg talasa. Takođe, neka je g generacijski red talasa amplitude s_{i_1} , a generacijski red talasa amplitude s_{i_2} neka je manji od g (analogno se dokazuje i u slučaju kada je jednak g). Neaka je s'_{n+1} amplituda odlazećeg nefizičkog talasa (sa generacijskim redom $g+1$), a s'_i amplituda odlazećeg talasa i -te familije (sa generacijskim redom manjim g). Tada važi

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq g} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ Q_g(t-) &= |s_{i_1} s_{i_2}| + \sum_{g_{\alpha_1} \geq 1} |s_{i_1} s_{\alpha_1}| + \sum_{g_{\alpha_2} \geq g} |s_{i_2} s_{\alpha_2}| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ \Delta Q_g(t) &= -|s_{i_1} s_{i_2}| + |s'_i| \sum_{g_\alpha \geq g} |s_\alpha| - |s_{i_1}| \sum_{g_{\alpha_1} \geq 1} |s_{\alpha_1}| - |s_{i_2}| \sum_{g_{\alpha_2} \geq g} |s_{\alpha_2}| + \sum_{g_o \geq 1} |s'_{n+1} s_o|, \\ V(t-) &= \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi| \end{aligned}$$

Kako je $s'_i = s_{i_1} + s_{i_2}$, na osnovu (4.25) i prethodne diskusije važi

$$\begin{aligned} \Delta Q_g(t) &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + (|s'_i| - |s_{i_1}| - |s_{i_2}|) V(t-) + |s'_{n+1}| V(t-) \\ &\leq -|s_{i_1} s_{i_2}| + |s'_i - s_{i_1} - s_{i_2}| V(t-) + |s'_{n+1}| V(t-) \\ &= -|s_{i_1} s_{i_2}| + \mathcal{O}(1) |s_{i_1} s_{i_2}| V(t-). \end{aligned}$$

Slučaj 4. Pretpostavimo da jedan prilazeći talas pripada i -toj familiji karakteristika, a drugi da je nefizički talas i da su njihove amplitude s_i i s_{n+1} , redom. Takođe, neka je g generacijski red talasa amplitude s_i , a generacijski red talasa amplitude s_{n+1} neka je manji od g (analogna kada je jednak g). Neka su s'_i i s'_{n+1} amplitude odlazećih talasa. Generacijski red talasa sa amplitudom s'_i jednak je g , dok je generacijski red odlazećeg nefizičkog talasa manji od g . Tada važi

$$\begin{aligned} Q_g(t+) &= \sum_{g_\alpha \geq 1} |s'_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq g} |s'_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta| \\ Q_g(t-) &= |s_i s_{n+1}| + \sum_{g_\alpha \geq 1} |s_i s_\alpha| + \sum_{g_o \geq g} |s_{n+1} s_o| + \sum_{\max\{g_\gamma, g_\delta\} \geq g} |s_\gamma s_\delta|, \\ \Delta Q_g(t) &= -|s_i s_{n+1}| + (|s'_{n+1}| - |s_{n+1}|) \sum_{g_o \geq g} |s_o|, \\ V(t-) &= \sum_{g_\pi \geq 1} |s_\pi|, \end{aligned}$$

jer je $s'_i = s_i$. Na osnovu prethodne diskusije i (4.26) važi

$$\begin{aligned} \Delta Q_g(t) &\leq -|s_i s_{n+1}| + (|s'_{n+1}| - |s_{n+1}|) \sum_{g_o \geq g} |s_o| \\ &\leq -|s_i s_{n+1}| + |s'_{n+1} - s_{n+1}| V(t-) \\ &= -|s_i s_{n+1}| + \mathcal{O}(1) |s_i s_{n+1}| V(t-). \end{aligned}$$

Ovim smo završili sa dokazivanjem nejednakosti datih u (4.44).

U nastavku će biti korišćene sledeće oznake: $[x]_+ = \max\{x, 0\}$ i $[x]_- = \max\{-x, 0\}$. Kako je $V_1 = V$, $Q_1 = Q$ i $V_g(0+) = Q_g(0+) = 0$ za $g \geq 2$ (jer su u vremenu $t = 0+$ svi talasi generacijskog reda 1), na osnovu druge nejednakosti u (4.44), imamo da važi

$$V_g(t) \leq C_0 \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{g-1}(\tau)]_-.$$

Naime, za $g \geq 2$ iz druge nejednačine u (4.44) imamo

$$\Delta V_g(t) \leq -C_0 \Delta Q_{g-1}(t) \Rightarrow V_g(t) - V_g(0+) \leq -C_0 \sum_{0 < \tau \leq t} (Q_{g-1}(\tau^+) - Q_{g-1}(\tau^-))$$

pa je,

$$V_g(t) \leq C_0 \sum_{0 < \tau \leq t} [Q_{g-1}(\tau^+) - Q_{g-1}(\tau^-)]_- \quad (4.45)$$

jer je

$$-x \leq \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} = [x]_-.$$

Pokažimo da važi i

$$\begin{aligned} Q_g(t) &\leq \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_g(\tau)]_+ \\ &\leq C_0 \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q(\tau)]_- \sup_t V_g(t) + C_0 \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{g-1}(\tau)]_- \sup_t V(t) \end{aligned} \quad (4.46)$$

za svako $t > 0$ i $g \geq 2$. Naime,

$$Q_g(t) = \sum_{0 < \tau \leq t} (Q_g(\tau^+) - Q_g(\tau^-)) \leq \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_g(\tau)]_+$$

jer je razlika $Q_g(\tau^+) - Q_g(\tau^-)$ zamenjena nulom ako je negativna. Sada, na osnovu treće i četvrte nejednakosti u (4.44) važi

$$\Delta Q_g(t) \leq -C_0 \Delta Q(t) V_g(t-) \Rightarrow Q_g(t) \leq C_0 \sup_{t \geq 0} V_g(t) \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q(t)]_-$$

i

$$\Delta Q_g(t) \leq -C_0 \Delta Q_{g-1}(t) V(t-) \Rightarrow Q_g(t) \leq C_0 \sup_{t \geq 0} V(t) \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{g-1}(t)]_-$$

pa je

$$Q_g(t) \leq C_0 \sup_{t \geq 0} V_g(t) \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q(t)]_- + C_0 \sup_{t \geq 0} V(t) \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{g-1}(t)]_-.$$

Važi i

$$0 \leq Q_g(t) = \sum_{0 < \tau \leq t} ([\Delta Q_g(\tau)]_+ - [\Delta Q_g(\tau)]_-). \quad (4.47)$$

Kako je $\Upsilon(t) := V(t) + C_0 Q(t)$ nerestuća funkcionala za $t > 0$, tada važi

$$V_g(t) \leq V(t) \leq \Upsilon(t) \leq \Upsilon(0+).$$

Na osnovu (4.35) znamo da je $\Delta Q(\tau) < 0$ i zbog toga je $[\Delta Q(\tau)]_- = -\Delta Q(\tau)$, pa je

$$\sum_{0 < \tau < \infty} [\Delta Q(\tau)]_- = - \sum_{0 < \tau < \infty} (Q(\tau^+) - Q(\tau^-)) \leq Q(0+) \leq \Upsilon(0+). \quad (4.48)$$

Sada, za C_0 dovoljno veliko definišimo

$$\tilde{Q}_g := \sum_{t > 0} [\Delta Q_g(t)]_+, \quad \tilde{V}_g := \sup_{t > 0} V_g(t),$$

Na osnovu (4.44–4.48), a kako je $[x]_- \leq [x]_+$, zaključujemo da za $g \geq 2$ važi

$$\begin{cases} \tilde{V}_g \leq C_0 \tilde{Q}_{g-1}, \\ \tilde{Q}_g \leq C_0 \Upsilon(0+) \tilde{V}_g + C_0 \Upsilon(0+) \tilde{Q}_{g-1} \leq (C_0^2 + C_0) \Upsilon(0+) \tilde{Q}_{g-1}. \end{cases} \quad (4.49)$$

Naime, koristeći (4.45, 4.47), prva nejednakost sledi iz

$$\begin{aligned} \tilde{V}_g := \sup_{t > 0} V_g(t) &\leq \sup_{t > 0} C_0 \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{g-1}(t)]_- \\ &= \sup_{t > 0} C_0 \left(\sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{g-1}(t)]_+ - Q_g(t) \right) \\ &\leq \sup_{t > 0} C_0 \sum_{0 < \tau \leq t} [\Delta Q_{g-1}(t)]_+ \\ &\leq C_0 \tilde{Q}_{g-1}, \end{aligned}$$

dok je druga direktna posledica (4.46). Ako je $\text{TV}(q(\cdot, 0+))$ dovoljno mala, $\Upsilon(0+) := V(0+) + C_0 Q(0+)$ će zadovoljavati

$$\tilde{\gamma} := (C_0^2 + C_0) \Upsilon(0+) < 1. \quad (4.50)$$

U ovom slučaju, za svako $t > 0$ i $g \geq 2$, na osnovu (4.49, 4.50) indukcijom dobijamo da važi

$$Q_g(t) \leq \tilde{Q}_g \leq \delta_2 \tilde{\gamma}^g, \quad V_g(t) \leq \tilde{V}_g \leq \delta_2 C_0 \tilde{\gamma}^{g-1}. \quad (4.51)$$

U nastavku će nam biti potreban broj talasa sa istim generacijskim redom. Prvo ćemo naći donju granicu za snagu talasa dobijenih podelom razređujućeg talasa.

Zbog toga, neka je $\hat{\delta} > 0$ data konstanta i neka je s_i snaga razređujućeg talasa i -te famije. Neka je svaki i -ti razređujući talas podeljen na p_i manjih talasa, svaki amplitude s_i/p_i , gde je

$$p_i = 1 + \left\lceil \frac{s_i}{\hat{\delta}} \right\rceil.$$

Sa $\lceil x \rceil$ smo označili najveći ceo broj $\leq x$. Ako je $s_i \geq \hat{\delta}$, tada snaga svakog podeljenog dela zadovoljava

$$\frac{\hat{\delta}}{2} \leq \frac{s_i}{p_i} < \hat{\delta}. \quad (4.52)$$

Drugim rečima, jasno je da važi

$$\frac{s_i}{\hat{\delta}} < p_i \leq 1 + \frac{s_i}{\hat{\delta}}. \quad (4.53)$$

Leva strana nejednakosti (4.53) daje da je snaga svakog podeljenog dela manja od $\hat{\delta}$, odnosno

$$\frac{s_i}{p_i} < \hat{\delta}.$$

Desna strana iste nejednakosti (4.53) i $s_i \geq \hat{\delta} \Rightarrow p_i \geq 2$ daju

$$1 + \frac{s_i}{\hat{\delta}} \geq p_i = \frac{p_i}{2} + \frac{p_i}{2} \geq \frac{2}{2} + \frac{p_i}{2} = 1 + \frac{p_i}{2}.$$

Time je

$$\frac{s_i}{\hat{\delta}} \geq \frac{p_i}{2} \Rightarrow \frac{s_i}{p_i} \geq \frac{\hat{\delta}}{2}.$$

Sada smo u stanju da dobijemo broj talasa sa istim generacijskim redom. Neka je N_0 broj skokova (prekida) u početnom uslovu $q(\cdot, 0)$. Sa $\bar{\sigma}_1$ ćemo obeležiti maksimalnu snagu razređujućih talasa koji su stvoreni rešavanjem Rimanovog problema u $t = 0$ a pre prve interakcije. Tada je, na osnovu (4.52), maksimalni broj razređujućih talasa koji su podeljeni jednak $N_0 \bar{\sigma}_1 / (\hat{\delta}/2)$, pa je

$$\text{ukupan broj talasa generacijskog reda 1} \leq 2 N_0 + 2 N_0 \bar{\sigma}_1 / \hat{\delta} = A_1 N_0 =: M_1,$$

gde je $A_1 := 2 + 2 \bar{\sigma}_1 / \hat{\delta}$. Znači da je broj talasa sa generacijskim redom 1 konačan. Talasi generacijskog reda 2 mogu nastati samo interakcijom talasa sa generacijskim redom 1. Kako je maksimalan broj interakcija $(M_1)^2$, to implicira da je broj odlazećih razređujućih talasa drugog reda takođe konačan pa biramo onaj sa najvećom snagom $\bar{\sigma}_2$. Tada je

$$\text{ukupan broj talasa generacijskog reda 2} \leq (2 + 2 \bar{\sigma}_2 / \hat{\delta}) M_1^2 = A_2 M_1^2 =: M_2$$

gde je $2 + 2 \bar{\sigma}_2 / \hat{\delta} =: A_2$. Dakle, i broj takvih talasa je konačan. Sada možemo definisati $A_g := 2 + 2 \bar{\sigma}_g / \hat{\delta}$, $g \in \mathbb{N}$, gde je $\bar{\sigma}_g$ maksimalna snaga razređujućeg talasa generacijskog reda g . Indukcijom dobijamo da je

$$\begin{aligned} \text{ukupan broj talasa generacijskog reda } g \leq & \\ & \{ \text{maksimalan broj odlazećih talasa pri rešavanju Rimanovog problema} \} \cdot \\ & \{ \text{ukupan broj talasa generacijskog reda } g-1 \} \cdot \\ & \{ \text{ukupan broj talasa generacijskog reda } \leq g-1 \} \end{aligned}$$

odnosno

$$\text{ukupan broj talasa generacijskog reda } g \leq A_g M_1^g \cdot \prod_{i=2}^{g-1} (A_i (A_i M_{i-1} + 1)^{g-i})$$

za $g \geq 3$. Možemo primetiti da postoji polinom $P_g(N_0, \hat{\delta}^{-1}) = 2N_0 + 2N_0\bar{\sigma}_1/\hat{\delta} + \dots$ takav da ukupan broj svih talasa generacijskog reda $\leq g$ ne premašuje $P_g(N_0, \hat{\delta}^{-1})$. Ova činjenica biće korišćena pri aproksimaciji snage nefizičkih talasa.

Da bi se ocenila ukupna snaga svih nefizičkih talasa u $q(\cdot, t)$ potrebno je razdvojiti nefizičke talase na one čiji je generacijski red veći od g i na preostale nefizičke talase. Koristeći (4.43, 4.51) zaključujemo

$$\begin{aligned} [\text{ukupna snaga svih nefizičkih talasa u } q(\cdot, t)] &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{NP} \\ g_\alpha > g}} |s_\alpha(t)| + \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{NP} \\ g_\alpha \leq g}} |s_\alpha(t)| \\ &\leq [\text{ukupna snaga svih talasa sa generacijskim redom } > g] \\ &\quad + [\text{broj talasa sa generacijskim redom } \leq g] \cdot [\text{maksimalna snaga nefizičkih talasa}] \\ &\leq \delta_2 C_0 \tilde{\gamma}^g + P_g(N_0, \hat{\delta}^{-1}) \cdot C_4 \hat{\nu}. \end{aligned}$$

Za dato $\mu > 0$, kako je $\tilde{\gamma} < 1$, možemo izabrati g dovoljno veliko tako da važi $\delta_2 C_0 \tilde{\gamma}^g < \mu/2$. Tada biramo $\hat{\nu} > 0$ dovoljno malo tako da važi $P_g(N_0, \hat{\delta}^{-1}) \cdot C_4 \hat{\nu} < \mu/2$. Tada će za svako $t \geq 0$, važiti

$$[\text{ukupna snaga svih nefizičkih talasa u } q(\cdot, t)] < \mu, \quad (4.54)$$

što kompletira dokaz teoreme 4.1.6.

4.4 Postojanje rešenja Rimanovog problema

Da bismo kompletirali dokaz teoreme 4.1.1, fiksirajmo niz $(\mu_k)_{k \geq 1}$ koji opada i teži nuli. Za svako $k \geq 1$ i $\mu_k > 0$, teorema 4.1.6 osigurava postojanje μ_k -aproksimativnog rešenja q_k Košijevog problema (2.1, 2.4). Na osnovu prethodnog poglavlja, funkcije $q_k(\cdot, t)$ imaju uniformno ograničenu totalnu varijaciju. Dalje, preslikavanja $t \rightarrow q_k(\cdot, t)$ su uniformno Lipšic neprekidna sa vrednostima u $\mathbf{L}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Zato

$$\begin{aligned} \|q_k(\cdot, t_2) - q_k(\cdot, t_1)\|_{\mathbf{L}^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |q_k(\cdot, t_2) - q_k(\cdot, t_1)| dx \\ &\leq (t_2 - t_1) \cdot [\text{ukupna snaga svih talasa}] \\ &\quad \cdot [\text{maksimalna brzina talasa}] \\ &\leq (t_2 - t_1) \\ &\quad \cdot [\text{ukupna snaga fizičkih talasa} + \text{ukupna snaga nefizičkih talasa}] \\ &\quad \cdot \hat{\lambda} \\ &\leq (t_2 - t_1) \cdot [\text{broj talasa}] \cdot (\delta_1 + \mu) \cdot \hat{\lambda} \\ &\leq M(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (4.55)$$

važi, za neku konstantu M koja ne zavisi od k . Ovde smo koristili da je ukupan broj talasa ograničen za svako $t \geq 0$, ograničenost totalne varijacije (4.32) i da je ukupna snaga nefizičkih talasa mala (4.54). Sada možemo primeniti teoremu 4.3.1 i izdvojiti podniz koji konvergira nekoj funkciji q u $\mathbf{L}_{\text{loc}}^1$. Kako važi $\|q_k(\cdot, 0) - q_0(\cdot)\|_{\mathbf{L}^1} \rightarrow 0$, na osnovu (4.55) važi $q(x, 0) = q_0(x)$. Da bi se pokazalo da je q slabo rešenje Košijevog problema, preostalo je da se pokaže da, za svaku test funkciju $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)^T \in \mathcal{C}_0^1$ sa kompaktnim nosačem sadržanim u otvorenoj poluravni $t > 0$, važi

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (q(x, t)\phi_t(x, t) + f(q(x, t))\phi_x(x, t)) dx dt = 0.$$

Kako je q_k uniformno ograničeno i f uniformno neprekidna na ograničenom skupu, dovoljno je pokazati da važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (q_k(x, t)\phi_t(x, t) + f(q_k(x, t))\phi_x(x, t)) dx dt \right] = 0. \quad (4.56)$$

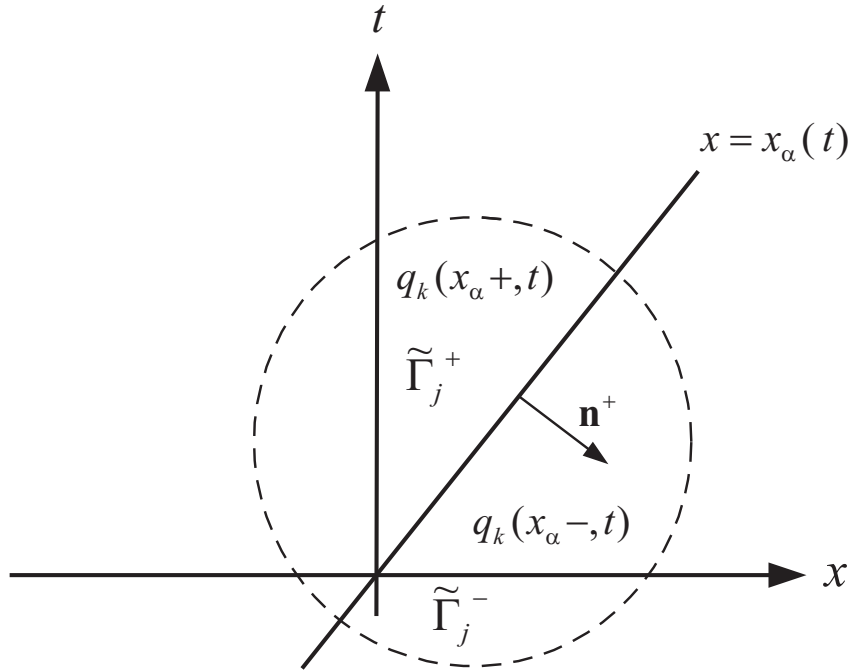
Biramo $T > 0$ tako da je $\phi(x, t) = 0$ kada $t \notin (0, T)$. Za fiksirano k i za bilo koje t , neka su $x_1(t) < \dots < x_N(t)$ tačke gde $q_k(\cdot, t)$ ima skok i neka je

$$\begin{aligned}\Delta q_k(x_\alpha, t) &:= q_k(x_{\alpha+}, t) - q_k(x_{\alpha-}, t), \\ \Delta f(q_k(x_\alpha, t)) &:= f(q_k(x_{\alpha+}, t)) - f(q_k(x_{\alpha-}, t)).\end{aligned}$$

Primetimo da linije $x = x_\alpha(t)$ dele $[0, T] \times \mathbb{R}$ na konačno mnogo regiona $\tilde{\Gamma}_j$ gde je q_k konstanto. Uvodeći vektor

$$\Phi := (f(q_k)\phi, q_k\phi),$$

na osnovu teoreme o divergenciji (slika 4.12), dvostruki integral u (4.56) može biti zapisan kao



Slika 4.12: Oblast $\tilde{\Gamma}_j = \tilde{\Gamma}_j^+ \cup \tilde{\Gamma}_j^-$.

$$\sum_j \iint_{\tilde{\Gamma}_j^+ \cup \tilde{\Gamma}_j^-} \operatorname{div} \Phi(x, t) dx dt = \sum_j \int_{\partial \tilde{\Gamma}_j^+} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n}^+ d\sigma + \sum_j \int_{\partial \tilde{\Gamma}_j^-} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n}^- d\sigma. \quad (4.57)$$

Ovde je $\tilde{\Gamma}_j^+ := \tilde{\Gamma}_j \cap \{x > x_\alpha(t)\}$ i $\tilde{\Gamma}_j^- := \tilde{\Gamma}_j \cap \{x < x_\alpha(t)\}$, dok su su $\partial \tilde{\Gamma}_j^\pm$ orijentisane krive na rubu $\tilde{\Gamma}_j^\pm$. Spoljašnje normale na $\partial \tilde{\Gamma}_j^\pm$ obeležene su sa \mathbf{n}^\pm . Prisetimo da je $\mathbf{n}^+ d\sigma = (-1, \dot{x}_\alpha) dt$ i $\mathbf{n}^- d\sigma = (1, -\dot{x}_\alpha) dt$ duž linije $x = x_\alpha(t)$, dok je $\phi(x, t) = 0$ duž linija $t = 0$ i $t = T$.

Naime, kako su stanja $q_k(x_{\alpha+}, t)$ i $q_k(x_{\alpha-}, t)$ konstantna u $\tilde{\Gamma}_j^+$ i $\tilde{\Gamma}_j^-$, redom, tada je

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (q_k \phi_t + f(q_k) \phi_x) dx dt &= \sum_j \iint_{\tilde{\Gamma}_j^+ \cup \tilde{\Gamma}_j^-} (q_k \phi_t + f(q_k) \phi_x) dx dt \\
&= \sum_j \iint_{\tilde{\Gamma}_j^+ \cup \tilde{\Gamma}_j^-} ((q_k \phi)_t + (f(q_k) \phi)_x) dx dt \\
&= \sum_j \iint_{\tilde{\Gamma}_j^+ \cup \tilde{\Gamma}_j^-} \operatorname{div} \Phi(x, t) dx dt \\
&= \sum_j \int_{\partial \tilde{\Gamma}_j^+} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n}^+ d\sigma + \sum_j \int_{\partial \tilde{\Gamma}_j^-} \Phi(x, t) \cdot \mathbf{n}^- d\sigma \\
&= \int_0^T \sum_\alpha (\dot{x}_\alpha q_k(x_{\alpha+}, t) - f(q_k(x_{\alpha+}, t))) \phi(x_\alpha(t), t) dt \\
&\quad + \int_0^T \sum_\alpha (-\dot{x}_\alpha q_k(x_{\alpha-}, t) + f(q_k(x_{\alpha-}, t))) \phi(x_\alpha(t), t) dt.
\end{aligned}$$

Dakle, na osnovu (4.57), dvostruki integral u (4.56), može zapisati u obliku

$$\int_0^T \sum_\alpha (\dot{x}_\alpha(t) \Delta q_k(x_\alpha, t) - \Delta f(q_k(x_\alpha, t))) \phi(x_\alpha(t), t) dt. \quad (4.58)$$

Da bismo ocenili prethodni integral, neka $|s_\alpha|$ predstavlja snagu talasa u tački x_α . Na osnovu ocena za E_α u lemi 4.1.5, ako je α udarni talas, razređujući talas ili kontaktni talas, tada važi

$$\dot{x}_\alpha(t) \Delta q_k(x_\alpha, t) - \Delta f(q_k(x_\alpha, t)) = \mathcal{O}(1) \mu_k |s_\alpha|.$$

Sa druge strane, ako nefizički talas prolazi kroz x_α , tada važi

$$\dot{x}_\alpha(t) \Delta q_k(x_\alpha, t) - \Delta f(q_k(x_\alpha, t)) = \mathcal{O}(1) |s_\alpha|.$$

Razdvajajući sumiranje u (4.58) na fizičke i nefizičke talase, zaključujemo da važi

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &:= \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{S} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{P}} [\dot{x}_\alpha(t) \Delta q_k(x_\alpha, t) - \Delta f(q_k(x_\alpha, t))] \phi(x_\alpha(t), t) \right) \\
&\leq (\max_{x,t} |\phi(x, t)|) \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{S} \cup \mathcal{R}} \mathcal{O}(1) \mu_k |s_\alpha| + \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P}} \mathcal{O}(1) |s_\alpha| \right).
\end{aligned} \quad (4.59)$$

Za svako $t > 0$, ukupna snaga talasa u $q_k(\cdot, t)$ ostaje uniformno ograničena dok je ukupna snaga nefizičkih talasa manja od μ_k i time teži nuli kada $k \rightarrow \infty$ i zbog toga je $\mathcal{D} = 0$. Granična vrednost u (4.56) sledi iz (4.59), pa je time pokazano da je q slabo rešenje Košijevog problema.

Neka je η konveksna entropija za (2.1), a ψ fluks entropije. Da bi se pokazalo da važi

$$\int_0^T \int_{-\infty}^\infty (\eta(q) \phi_t + \psi(q) \phi_x) dx dt \geq 0$$

dovoljno je pokazati da važi

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (\eta(q_k) \phi_t + \psi(q_k) \phi_x) dx dt \geq 0 \quad (4.60)$$

za svaku nenegativnu funkciju $\phi \in \mathcal{C}_0^1$ sa kompaktnim nosačem sadržanim u poluravni $t > 0$. Biramo $T > 0$ tako da $\phi = 0$ van $[0, T] \times \mathbb{R}$. Koristeći teoremu o divergenciji, za svako k , dvostruki integral u (4.60) može biti zapisan kao

$$\int_0^T \sum_{\alpha} [\dot{x}_{\alpha}(t) \Delta\eta(q_k(x_{\alpha}, t)) - \Delta\psi(q_k(x_{\alpha}, t))] \phi(x_{\alpha}(t), t) dt,$$

gde je sumiranje izvršeno po svim skokovima u $q_k(\cdot, t)$. Ovde smo koristili notaciju

$$\Delta\eta(q_k(x_{\alpha}, t)) := \eta(q_k(x_{\alpha+}, t)) - \eta(q_k(x_{\alpha-}, t)) \quad \text{i} \quad \Delta\psi(q_k(x_{\alpha}, t)) := \psi(q_k(x_{\alpha+}, t)) - \psi(q_k(x_{\alpha-}, t)).$$

Razdvajajući talase kao u (4.59) i koristeći ocene za E'_{α} kao u lemi 4.1.5, dobijamo

$$\begin{aligned} & \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{S} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{P}} [\dot{x}_{\alpha}(t) \Delta\eta(q_k(x_{\alpha}, t)) - \Delta\psi(q_k(x_{\alpha}, t))] \phi(x_{\alpha}(t), t) \right) \\ & \geq (\max_{x,t} |\phi(x, t)|) \liminf_{k \rightarrow \infty} \left(- \sum_{\alpha \in \mathcal{S} \cup \mathcal{R}} \mathcal{O}(1) \mu_{\nu} |s_{\alpha}| - \sum_{\alpha \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P}} \mathcal{O}(1) |s_{\alpha}| \right) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Ovim je kompletiran dokaz teoreme 4.1.1.

Jednačine izentropnog strujanja gasa i proizvoljno veliki početni uslovi

U ovoj glavi biće korišćena notacija iz [1, 31], a takođe biće data i sva tvrđenja zajedno sa dokazima. Posmatraćemo nelinearan sistem zakona održanja koji opisuje jednodimenzionalnu jednačinu protoka izentropnog gasa u Lagranžovim koordinatama:

$$\begin{aligned} v_t - u_x &= 0 \\ u_t + p(v)_x &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Veličina u predstavlja brzinu, p pritisak i v specifičnu zapreminu ($v = 1/\rho > 0$, gde je ρ je gustina). Pritisak je dat u formi

$$p = \kappa^2 v^{-\gamma}, \quad \gamma = 1 + 2\varepsilon,$$

gde je ε data mala pozitivna konstanta, dok je κ gasna konstanta, a γ je, za sada, takođe konstanta. Neka je dat problem (5.1) u oblasti $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, sa početnim uslovom

$$(v(x, 0), u(x, 0)) = (v_0(x), u_0(x)), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

i pretpostavimo da su funkcije $v_0(x)$ i $u_0(x)$ ograničene i da imaju ograničenu totalnu varijaciju. Dalje, pretpostavimo da postoje konstante \underline{v} i \bar{v} tako da važi

$$0 < \underline{v} \leq v_0(x) \leq \bar{v} < \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pod ovim pretpostavkama biće pokazano da početni problem (5.1, 5.2) ima slabo rešenje definisano za svako $t \geq 0$ ako je $\varepsilon \text{TV}(v_0(x), u_0(x))$ dovoljno malo. Ovu notaciju ćemo koristiti u celoj ovoj glavi.

5.1 Krive udarnih i razređujućih talasa

Sistem (5.1) je strogo hiperboličan u oblasti $\rho > 0$ sa karakterističnim korenima (poglavlje 2.6)

$$\lambda_1(q) = -\kappa\sqrt{\gamma}\rho^{\varepsilon+1}, \quad \lambda_2(q) = \kappa\sqrt{\gamma}\rho^{\varepsilon+1}$$

i sa odgovarajućim karakterističnim vektorima

$$r_1(q) = (1, \kappa\sqrt{\gamma}\rho^{\varepsilon+1})^T, \quad r_2(q) = (-1, \kappa\sqrt{\gamma}\rho^{\varepsilon+1})^T.$$

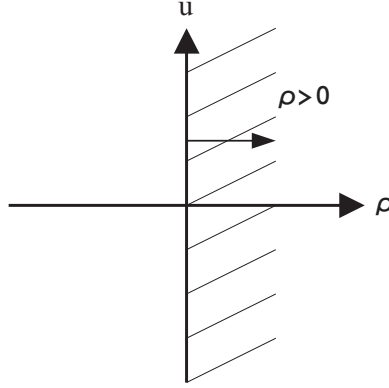
Rimanove invarijante su

$$\begin{aligned} s &= u + \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho^\varepsilon - 1) : \text{prva invarijanta,} \\ r &= u - \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho^\varepsilon - 1) : \text{druga invarijanta.} \end{aligned} \quad (5.3)$$

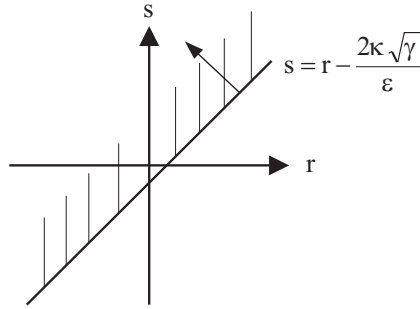
Preslikavanje oblasti $\{(\rho, u) : \rho > 0\}$ (slika 5.1) na oblast $\{(r, s) : s - r > \frac{-2\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}\}$ (slika 5.2) je bijekcija i važi

$$s - r = \frac{2\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}\rho^\varepsilon - \frac{2\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon} > -\frac{2\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}$$

za $\rho > 0$.



Slika 5.1: Poluravan u kojoj tražimo rešenje Rimanovog problema.



Slika 5.2: Poluravan u kojoj tražimo rešenje Rimanovog problema (Rimanove invarijante čine koordinatni sistem).

Na osnovu (2.72), razređujuće krive su oblika (slika 5.3)

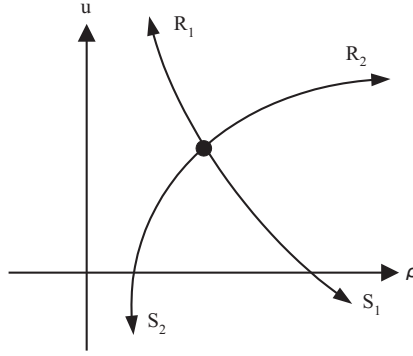
$$\begin{aligned} u - u_0 &= -\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon), \quad \rho \leq \rho_0 : \text{prva razređujuća kriva } (R_1), \\ u - u_0 &= \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon), \quad \rho \geq \rho_0 : \text{druga razređujuća kriva } (R_2), \end{aligned} \quad (5.4)$$

dok iz (2.74, 2.75) sledi da je kriva udarnog talasa prve familije (S_1) data sa

$$u - u_0 = -\kappa\sqrt{\frac{\rho^\gamma - \rho_0^\gamma}{\rho_0\rho(\rho - \rho_0)}}(\rho - \rho_0), \quad \rho > \rho_0, \quad (5.5)$$

a druge familije (S_2) sa

$$u - u_0 = \kappa\sqrt{\frac{\rho^\gamma - \rho_0^\gamma}{\rho_0\rho(\rho - \rho_0)}}(\rho - \rho_0), \quad \rho < \rho_0. \quad (5.6)$$

Slika 5.3: Krive razređujućih i udarnih talasa u $\rho - u$ ravni.

Neka je sada dat sistem (5.1) i Rimanov problem

$$q(x, 0) = \begin{cases} q_L, & x < 0, \\ q_R, & x > 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

gde su $q_L = (\rho_L, u_L)^T$ i $q_R = (\rho_R, u_R)^T$ konstantni vektori. Definišimo krivu *unapred* $\mathbb{W}_1^F(q_L)$ prve familije i krivu *unazad* $\mathbb{W}_2^B(q_R)$ druge familije na sledeći način:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_1^F(q_L) : \quad u - u_L &= \begin{cases} -\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho^\varepsilon - \rho_L^\varepsilon), & \rho \leq \rho_L, \\ -\kappa\sqrt{\frac{\rho^\gamma - \rho_L^\gamma}{\rho_L\rho(\rho - \rho_L)}}(\rho - \rho_L), & \rho > \rho_L, \end{cases} \\ \mathbb{W}_2^B(q_R) : \quad u - u_R &= \begin{cases} \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho^\varepsilon - \rho_R^\varepsilon), & \rho \leq \rho_R, \\ \kappa\sqrt{\frac{\rho^\gamma - \rho_R^\gamma}{\rho_R\rho(\rho - \rho_R)}}(\rho - \rho_R), & \rho > \rho_R. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Krive iz (5.8) su \mathcal{C}^2 krive sa Lipsčic neprekidnim drugim izvodom. Ako $(\rho, u) \in \mathbb{W}_1^F(q_L)$, tada postoji jedinstvena razređujuća kriva ili kriva udarnog talasa prve familije koja spaja (ρ_L, u_L) i (ρ, u) . Ako $(\rho, u) \in \mathbb{W}_2^B(q_R)$, tada postoji jedinstvena razređujuća kriva ili kriva udarnog talasa druge familije koja spaja (ρ, u) i (ρ_R, u_R) .

Problem (5.1, 5.7) prvi je rešio je Riman [32], a rezultat je sumiran u sledećoj teoremi (dokaz se može naći u Smoller [35], glava 17).

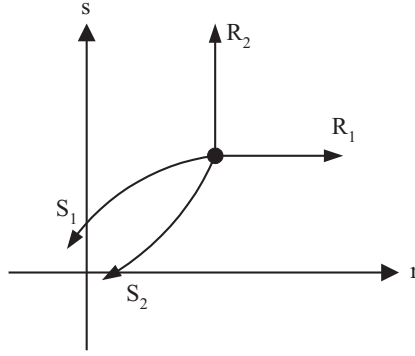
Teorema 5.1.1 ([1]) *Posmatrajmo sistem (5.1) sa početnim uslovom (5.7). Pretpostavimo da važi $u_R - u_L < \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_R^\varepsilon + \rho_L^\varepsilon)$, ili ekvivalentno $s_L - r_R > -\frac{2\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}$ (t.j. u rešenju se ne javlja vakuum stanje). Tada postoji jedinstveno rešenje sastavljeno od konstantnih stanja $(\rho_L, u_L) = (r_L, s_L)$, $(\rho_M, u_M) = (r_M, s_M)$ i $(\rho_R, u_R) = (r_R, s_R)$ gde je*

$$\begin{aligned} r_M(x, t) = r(\rho_M(x, t), u_M(x, t)) &\geq \min\{r_L, r_R\}, \\ s_M(x, t) = s(\rho_M(x, t), u_M(x, t)) &\leq \max\{s_L, s_R\}. \end{aligned}$$

Amplitude talasa označavamo sa

$$\begin{aligned} \beta^* &:= r_M - r_L & : & \text{amplituda talasa prve familije,} \\ \chi^* &:= s_R - s_M & : & \text{amplituda talasa druge familije.} \end{aligned}$$

Važi $\beta^*, \chi^* \geq 0$ za centralni razređujući talas i $\beta^*, \chi^* < 0$ za udarni talas; apsolutne vrednosti $|\beta^*|, |\chi^*|$ nazivaju se njihove snage.



Slika 5.4: Krive razređujućih i udarnih talasa u $r-s$ ravni. (Rimanove invarijante čine koordinatni sistem.)

Posmatrajmo sada osobine krivih udarnih talasa u $r-s$ ravni (slika 5.4), gde je r druga, a s prva Rimanova invarijanta (kao u (5.3)). Udarni talas prve familije karakteristika (odgovara manjem karakterističnom korenu) biće obeležen sa S_1 , a udarni talas druge familije (odgovara većem karakterističnom korenu) biće obeležen sa S_2 . Krive udarnih talasa S_1 i S_2 mogu se zapisati kao:

$$S_1 : \begin{cases} r_0 - r = \kappa \rho_0^\varepsilon \left(\sqrt{\frac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right), \\ s_0 - s = \kappa \rho_0^\varepsilon \left(\sqrt{\frac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}} - \sqrt{\gamma} \frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right), \end{cases} \quad (5.9)$$

gde je $r_0 = r(\rho_0, u_0)$, $s_0 = s(\rho_0, u_0)$, $\alpha = \rho/\rho_0 \geq 1$ i

$$S_2 : \begin{cases} s_0 - s = \kappa \rho_0^\varepsilon \left(\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{1-\alpha^\varepsilon}{\varepsilon} \right), \\ r_0 - r = \kappa \rho_0^\varepsilon \left(\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} - \sqrt{\gamma} \frac{1-\alpha^\varepsilon}{\varepsilon} \right), \end{cases} \quad (5.10)$$

gde je $r_0 = r(\rho_0, u_0)$, $s_0 = s(\rho_0, u_0)$ i $0 < \alpha = \rho/\rho_0 \leq 1$. Iz (5.9, 5.10) sledi da je $s_0 - s = g_1(r_0 - r, \rho_0)$ i $r_0 - r = g_2(s_0 - s, \rho_0)$ za S_1 i S_2 , redom, gde je

$$g_1(r_0 - r, \rho_0) = r_0 - r - 2\kappa\sqrt{\gamma}\rho_0^\varepsilon \frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon}, \quad \text{za } \alpha = \rho/\rho_0 \geq 1$$

i

$$g_2(s_0 - s, \rho_0) = s_0 - s - 2\kappa\sqrt{\gamma}\rho_0^\varepsilon \frac{1 - \alpha^\varepsilon}{\varepsilon}, \quad \text{za } 0 < \alpha = \rho/\rho_0 \leq 1.$$

U daljem tekstu biće nam potrebne dve leme čiji dokazi slede direktno.

Lema 5.1.2 Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne na \mathbb{R} . Ako je $f(x_0) = g(x_0)$ i ako je $f'(x) \geq g'(x)$, tada za svako $x \geq x_0$ važi $f(x) \geq g(x)$, za $x \geq x_0$.

Lema 5.1.3 Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne na \mathbb{R} . Ako je $f(x_0) = g(x_0)$ i ako je $f'(x) \leq g'(x)$ za svako $x \leq x_0$, tada je $f(x) \geq g(x)$, za $x \leq x_0$.

Sada slede tvrđenja koja daju osnovne ocene koje ćemo u koristiti nastavku.

Teorema 5.1.4 ([31]) *Kriva udarnog talasa S_1 čija je početna tačka (r_0, s_0) , može biti zapisana kao*

$$s_0 - s = g_1(r_0 - r, \rho_0) = \int_0^{r_0 - r} h_1(\alpha) d\beta, \quad r < r_0, \quad (5.11)$$

za neko $\alpha = \alpha_1(\beta/\kappa\rho_0^\varepsilon)$, gde je $0 \leq g_1'(\beta, \rho_0) < 1$ i $0 \leq g_1''(\beta, \rho_0)$. Kriva udarnog talasa S_2 , čija je početna tačka (r_0, s_0) , može biti zapisana kao

$$r_0 - r = g_2(s_0 - s, \rho_0) = \int_0^{s_0 - s} h_2(\alpha) d\chi, \quad s < s_0,$$

za neko $\alpha = \alpha_2(\chi/\kappa\rho_0^\varepsilon)$, gde je $0 \leq g_2'(\chi, \rho_0) < 1$ i $0 \leq g_2''(\chi, \rho_0)$. Funkcija h_1 je definisana kao

$$h_1 = \left(\frac{Y - 1}{Y + 1} \right)^2 \quad \text{gde je } Y = \sqrt{\frac{\gamma \alpha^\gamma (\alpha - 1)}{\alpha^\gamma - 1}}, \quad \alpha > 1,$$

za $\alpha = \alpha_1(\beta/\kappa\rho_0^\varepsilon)$ implicitno dato sa

$$\frac{\beta}{\kappa\rho_0^\varepsilon} = \sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha^\gamma - 1)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

Funkcija h_2 se definiše kao

$$h_2 = \left(\frac{1 - Y}{1 + Y} \right)^2 \quad \text{gde je } Y = \sqrt{\frac{\gamma \alpha^\gamma (1 - \alpha)}{1 - \alpha^\gamma}}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

za $\alpha = \alpha_2(\chi/\kappa\rho_0^\varepsilon)$ implicitno dato sa

$$\frac{\chi}{\kappa\rho_0^\varepsilon} = \sqrt{\frac{(1 - \alpha)(1 - \alpha^\gamma)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{1 - \alpha^\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Dokaz. Neka je $\alpha = \rho/\rho_0 > 1$. Iz relacije $s_0 - s = g_1(r_0 - r, \rho_0)$ sledi

$$\frac{\partial(s_0 - s)}{\partial\alpha} = \frac{\partial g_1(r_0 - r, \rho_0)}{\partial(r_0 - r)} \frac{\partial(r_0 - r)}{\partial\alpha} \Rightarrow \frac{\partial(s_0 - s)/\partial\alpha}{\partial(r_0 - r)/\partial\alpha} = g_1'(\beta, \rho_0) \quad (5.12)$$

za $\beta = r_0 - r$. Neka je $h_1(\alpha) = g_1'(\beta, \rho_0)$, gde uzimamo da je $\alpha = \alpha(\beta)$. Tada je

$$g_1(r_0 - r, \rho_0) = \int_0^{r_0 - r} h_1(\alpha) d\beta.$$

Na osnovu (5.9, 5.12) važi

$$h_1(\alpha) = \frac{\partial(s_0 - s)/\partial\alpha}{\partial(r_0 - r)/\partial\alpha} = \frac{\gamma \alpha^{1+\gamma} - 1 - \alpha^\gamma(\gamma - 1) - 2\sqrt{\gamma} \alpha^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}}}{\gamma \alpha^{1+\gamma} - 1 - \alpha^\gamma(\gamma - 1) + 2\sqrt{\gamma} \alpha^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}}}.$$

Sada za

$$Y = \sqrt{\frac{\gamma \alpha^\gamma (\alpha - 1)}{\alpha^\gamma - 1}}, \quad \alpha > 1 \quad (5.13)$$

dobijamo da je

$$Y(\alpha^\gamma - 1) = \sqrt{\gamma} \alpha^{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha^\gamma - 1)}{\alpha}}$$

te je

$$\begin{aligned} h_1(\alpha) &= \frac{\gamma \alpha^\gamma (\alpha - 1) + (\alpha^\gamma - 1) - 2Y(\alpha^\gamma - 1)}{\gamma \alpha^\gamma (\alpha - 1) + (\alpha^\gamma - 1) + 2Y(\alpha^\gamma - 1)} \\ &= \frac{\frac{\gamma \alpha^\gamma (\alpha - 1)}{\alpha^\gamma - 1} - 2Y + 1}{\frac{\gamma \alpha^\gamma (\alpha - 1)}{\alpha^\gamma - 1} + 2Y + 1}. \end{aligned}$$

Sada zaključujemo da važi

$$h_1(\alpha) = \left(\frac{Y-1}{Y+1} \right)^2. \quad (5.14)$$

Iz prve jednakosti u (5.9) dobijamo

$$\frac{\beta}{\kappa \rho_0^\varepsilon} = \sqrt{\frac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{\alpha^\varepsilon-1}{\varepsilon} =: \tilde{f}(\alpha), \quad (5.15)$$

za $\beta = r_0 - r$. Ako pokažemo da važi $\tilde{f}'(\alpha) > 0$ za $\alpha > 1$, tada će, na osnovu teoreme o implicitnim funkcijama, postojati $\alpha = \alpha_1(\beta/\kappa\rho_0^\varepsilon)$. Primitimo da važi

$$\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^{\gamma+1} > \alpha^\gamma \text{ za } \gamma > 1 \quad (5.16)$$

i

$$\alpha > 1 \Rightarrow \alpha^\gamma > 1 \Rightarrow \alpha^\gamma - 1 > 0 \text{ za } \gamma > 1. \quad (5.17)$$

Sada na osnovu (5.16, 5.17) imamo

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(\alpha) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}} \frac{\gamma \alpha^{\gamma+1} - \gamma \alpha^\gamma + \alpha^\gamma - 1}{\alpha^2} + \sqrt{\gamma} \alpha^{\varepsilon-1} \\ &> \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}} \frac{\gamma \alpha^\gamma - \gamma \alpha^\gamma + \alpha^\gamma - 1}{\alpha^2} + \sqrt{\gamma} \alpha^{\varepsilon-1} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}} \frac{\alpha^\gamma - 1}{\alpha^2} + \sqrt{\gamma} \alpha^{\varepsilon-1} > 0. \end{aligned}$$

Znajući da je $h_1(\alpha) = g_1'(\beta, \rho_0)$, $g_1''(\beta, \rho_0) = h_1'(\alpha) \frac{d\alpha}{d\beta}$ i $\frac{d\beta}{d\alpha} = \kappa \rho_0^\varepsilon \tilde{f}'(\alpha) > 0$, preostalo je da se dokaže da važi $0 \leq h_1(\alpha) < 1$ i $0 \leq h_1'(\alpha)$. Na osnovu (5.14) direktno sledi

$$0 \leq h_1(\alpha) = \left(\frac{Y-1}{Y+1} \right)^2 < \left(\frac{Y+1}{Y+1} \right)^2 = 1.$$

Da bismo dokazali $0 \leq h_1'(\alpha)$, moramo pokazati da je $Y \geq 1$ i $Y' \geq 0$, jer je

$$h_1'(\alpha) = 4 \frac{Y-1}{(Y+1)^3} Y'. \quad (5.18)$$

Zbog toga nam trebaju pomoćne ocene:

$$\alpha^\gamma - 1 \geq \gamma(\alpha - 1), \text{ za } \alpha \geq 1, \gamma \geq 1 \quad (5.19)$$

i

$$\alpha^\gamma - 1 \leq (\alpha - 1)\gamma\alpha^{\gamma-1}, \text{ za } \alpha \geq 1, \gamma \geq 1, \quad (5.20)$$

a koje ćemo odmah dokazati. Ako obeležimo sa $y(\alpha) = \alpha^\gamma - 1$ i $\tilde{y}(\alpha) = \gamma(\alpha - 1)$, tada je $y(1) = \tilde{y}(1) = 0$ i $y'(\alpha) = \gamma\alpha^{\gamma-1} \geq \gamma = \tilde{y}'(\alpha)$, za $\alpha \geq 1$. Na osnovu leme 5.1.2, zaključujemo da važi (5.19). Dokažimo sada (5.20). Neka je $y(\alpha) = (\alpha - 1)\gamma\alpha^{\gamma-1}$ i $\tilde{y}(\alpha) = \alpha^\gamma - 1$. Tada je $y(1) = \tilde{y}(1) = 0$, $y'(\alpha) = \gamma^2\alpha^{\gamma-1} - \gamma(\gamma-1)\alpha^{\gamma-2}$ i $\tilde{y}'(\alpha) = \gamma\alpha^{\gamma-1}$. Sada je jasno da važi sledeća ocena u slučaju $\gamma \geq 1$:

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha - 1) \geq \alpha - 1 &\Rightarrow \gamma(\alpha - 1) + 1 \geq \alpha \\ &\Rightarrow \gamma\alpha - (\gamma - 1) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \gamma\alpha^{\gamma-1} - (\gamma - 1)\alpha^{\gamma-2} \geq \alpha^{\gamma-1} \\ &\Rightarrow \gamma^2\alpha^{\gamma-1} - \gamma(\gamma - 1)\alpha^{\gamma-2} \geq \gamma\alpha^{\gamma-1} \\ &\Rightarrow y'(\alpha) \geq \tilde{y}'(\alpha). \end{aligned}$$

Na osnovu leme 5.1.2, zaključujemo da važi i (5.20). Dokažimo sada da je $Y \geq 1$. Na osnovu (5.20) dobijamo

$$Y = \sqrt{\frac{\gamma\alpha^\gamma(\alpha-1)}{\alpha^\gamma-1}} \geq \sqrt{\frac{\gamma\alpha^\gamma(\alpha-1)}{(\alpha-1)\gamma\alpha^{\gamma-1}}} = \sqrt{\alpha} \geq 1 \text{ za } \alpha \geq 1. \quad (5.21)$$

Na kraju, pokažimo da je $Y' \geq 0$. Koristeći (5.19) važi

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^\gamma-1}{\gamma\alpha^\gamma(\alpha-1)}} \gamma\alpha^{\gamma-1} \frac{\alpha(\alpha^\gamma-1) + \gamma - \alpha\gamma}{(\alpha^\gamma-1)^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^\gamma-1}{\gamma\alpha^\gamma(\alpha-1)}} \gamma\alpha^{\gamma-1} \frac{\alpha\gamma(\alpha-1) + \gamma - \alpha\gamma}{(\alpha^\gamma-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^\gamma-1}{\gamma\alpha^\gamma(\alpha-1)}} \gamma\alpha^{\gamma-1} \frac{\gamma(\alpha-1)^2}{(\alpha^\gamma-1)^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ovim je dokazan prvi deo teoreme. Dokažimo sada da je i drugi deo teoreme tačan za $r_0 - r = g_2(s_0 - s, \rho_0)$. Neka je $0 < \alpha = \rho/\rho_0 < 1$. Imamo da je

$$\frac{\partial(r_0 - r)}{\partial\alpha} = \frac{\partial g_2(s_0 - s, \rho_0)}{\partial(s_0 - s)} \frac{\partial(s_0 - s)}{\partial\alpha} \Rightarrow \frac{\partial(r_0 - r)/\partial\alpha}{\partial(s_0 - s)/\partial\alpha} = g'_2(\chi, \rho_0)$$

za $\chi = s_0 - s$. Neka je sada $h_2(\alpha) = g'_2(\chi, \rho_0)$. Tada za $\alpha = \alpha(\chi)$ važi

$$g_2(s_0 - s, \rho_0) = \int_0^{s_0 - s} h_2(\alpha) d\chi.$$

Koristeći analogni postupak pri dobijanju (5.14), dobijamo da važi

$$h_2(\alpha) = \left(\frac{1-Y}{1+Y} \right)^2 \text{ za } Y = \sqrt{\frac{\gamma\alpha^\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha^\gamma}}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (5.23)$$

Prva jednakost u (5.10) daje

$$\frac{\chi}{\kappa\rho_0^\varepsilon} = \sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{1-\alpha^\varepsilon}{\varepsilon} =: l(\alpha), \quad (5.24)$$

za $\chi = s_0 - s$. Ako pokažemo da važi $l'(\alpha) < 0$ za $0 < \alpha < 1$, ponovo će teorema o implicitnim funkcijama dati da je moguće definisati $\alpha = \alpha_2(\chi/\kappa\rho_0^\varepsilon)$. Pokažimo prvo da je $l'(\alpha) < 0$ za $0 < \alpha < 1$.

Važi

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha^{\gamma+1} < \alpha^\gamma \text{ za } \gamma > 1 \quad (5.25)$$

i

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha^\gamma < 1 \Rightarrow \alpha^\gamma - 1 < 0 \text{ za } \gamma > 1. \quad (5.26)$$

Sada zbog (5.25, 5.26) sledi

$$\begin{aligned} l'(\alpha) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}} \frac{\gamma\alpha^{\gamma+1} - \gamma\alpha^\gamma + \alpha^\gamma - 1}{\alpha^2} - \sqrt{\gamma} \alpha^{\varepsilon-1} \\ &< \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}} \frac{\gamma\alpha^\gamma - \gamma\alpha^\gamma + \alpha^\gamma - 1}{\alpha^2} - \sqrt{\gamma} \alpha^{\varepsilon-1} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}} \frac{1-\alpha^\gamma}{\alpha^2} - \sqrt{\gamma} \alpha^{\varepsilon-1} < 0. \end{aligned}$$

Znajući da je $h_2(\alpha) = g_2'(\chi, \rho_0)$, $g_2''(\chi, \rho_0) = h_2'(\alpha) \frac{d\alpha}{d\chi}$ i $\frac{d\chi}{d\alpha} = \kappa \rho_0^\varepsilon l'(\alpha) < 0$, preostalo je da se dokaže $0 \leq h_2(\alpha) < 1$ i $h_2'(\alpha) \leq 0$. Na osnovu (5.23) sledi

$$0 \leq h_2(\alpha) = \left(\frac{1-Y}{1+Y} \right)^2 < \left(\frac{Y+1}{Y+1} \right)^2 = 1.$$

Da bismo dokazali $h_2'(\alpha) \leq 0$, treba pokazati da je $Y \leq 1$ i $Y' \geq 0$, jer je

$$h_2'(\alpha) = -4 \frac{1-Y}{(Y+1)^3} Y'. \quad (5.27)$$

Zbog toga treba dokazati sledeće ocene:

$$1 - \alpha^\gamma \leq \gamma(1 - \alpha) \text{ za } 0 < \alpha < 1 \text{ i } \gamma \geq 1 \quad (5.28)$$

i

$$1 - \alpha^\gamma \geq (1 - \alpha)\gamma\alpha^{\gamma-1} \text{ za } 0 < \alpha < 1 \text{ i } \gamma \geq 1. \quad (5.29)$$

Neka je $y(\alpha) = 1 - \alpha^\gamma$ i $\tilde{y}(\alpha) = \gamma(1 - \alpha)$. Lako se može proveriti da važi $y(1) = \tilde{y}(1) = 0$ i $y'(\alpha) = -\gamma\alpha^{\gamma-1} \geq -\gamma = \tilde{y}'(\alpha)$, za $0 < \alpha < 1$. Koristeći lemu 5.1.3, zaključujemo da važi (5.28). Dalje, neka je $y(\alpha) = (1 - \alpha)\gamma\alpha^{\gamma-1}$ i $\tilde{y}(\alpha) = 1 - \alpha^\gamma$. Tada je $y(1) = \tilde{y}(1) = 0$, $y'(\alpha) = -\gamma^2\alpha^{\gamma-1} + \gamma(\gamma - 1)\alpha^{\gamma-2}$ i $\tilde{y}'(\alpha) = -\gamma\alpha^{\gamma-1}$. Sada je jasno da važi sledeća ocena za $\gamma \geq 1$.

$$\begin{aligned} \gamma(1 - \alpha) \geq 1 - \alpha &\Rightarrow \gamma(1 - \alpha) - 1 \geq -\alpha \\ &\Rightarrow -\gamma\alpha + (\gamma - 1) \geq -\alpha \\ &\Rightarrow -\gamma\alpha^{\gamma-1} + (\gamma - 1)\alpha^{\gamma-2} \geq -\alpha^{\gamma-1} \\ &\Rightarrow -\gamma^2\alpha^{\gamma-1} + \gamma(\gamma - 1)\alpha^{\gamma-2} \geq -\gamma\alpha^{\gamma-1} \\ &\Rightarrow y'(\alpha) \geq \tilde{y}'(\alpha). \end{aligned}$$

Na osnovu leme 5.1.3, zaključujemo da važi i (5.29). Pokažimo da je $Y \leq 1$. Koristeći (5.29) dobijamo

$$Y = \sqrt{\frac{\gamma\alpha^\gamma(1-\alpha)}{1-\alpha^\gamma}} \leq \sqrt{\frac{\gamma\alpha^\gamma(1-\alpha)}{(1-\alpha)\gamma\alpha^{\gamma-1}}} = \sqrt{\alpha} \leq 1, \text{ za } 0 < \alpha \leq 1. \quad (5.30)$$

Dokažimo da je $Y' \geq 0$. Na osnovu (5.28), dobijamo

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\alpha^\gamma}{\gamma\alpha^\gamma(1-\alpha)}} \gamma\alpha^{\gamma-1} \frac{\gamma - \alpha\gamma - \alpha(1-\alpha^\gamma)}{(1-\alpha^\gamma)^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-\alpha^\gamma}{\gamma\alpha^\gamma(1-\alpha)}} \gamma\alpha^{\gamma-1} \frac{\gamma - \alpha\gamma - \alpha(1-\alpha)\gamma}{(1-\alpha^\gamma)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^\gamma - 1}{\gamma\alpha^\gamma(\alpha - 1)}} \gamma^2 \alpha^{\gamma-1} \frac{(1-\alpha)^2}{(1-\alpha^\gamma)^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ovim je dokaz teoreme kompletiran. \square

Upravo dokazana teorema važna je za ocenu snaga udarnih talasa. Da bismo dokazali narednu teoremu, biće nam potrebni sledeći identiteti i dve leme. Na osnovu definicije za Y u (5.30) važi

$$\begin{aligned} (Y+1)^2 &= \frac{\gamma\alpha^\gamma(\alpha-1)}{\alpha^\gamma-1} + 2Y + 1 \\ \Rightarrow (Y+1)^2 &= \frac{\gamma\alpha^\gamma(\alpha-1) + 2Y(\alpha^\gamma-1) + \alpha^\gamma-1}{\alpha^\gamma-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (Y+1)^2(\alpha^\gamma - 1) &= \gamma\alpha^\gamma(\alpha - 1) + 2Y(\alpha^\gamma - 1) + \alpha^\gamma - 1 \\ \Rightarrow (Y+1)^2(1 - \alpha^\gamma) &= \gamma\alpha^\gamma(1 - \alpha) + 2Y(1 - \alpha^\gamma) + 1 - \alpha^\gamma \end{aligned} \quad (5.32)$$

i

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}} &= \sqrt{\frac{\alpha(\alpha^\gamma-1)\gamma\alpha^\gamma}{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)(\alpha^\gamma-1)\gamma\alpha^\gamma}} \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^\gamma-1}{(\alpha-1)\gamma\alpha^\gamma}} \sqrt{\frac{\alpha\gamma\alpha^\gamma}{(\alpha^\gamma-1)^2}} \\ &= \frac{1}{Y} \sqrt{\frac{\alpha\gamma\alpha^\gamma}{(\alpha^\gamma-1)^2}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Lema 5.1.5 Neka je $\rho_0 < \rho_1$. Tada važi

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{1}{\tilde{f}'(\alpha)} = \frac{2Y}{\sqrt{\gamma}\alpha^{\frac{\gamma-3}{2}}(1+Y)^2}, \quad (5.34)$$

gde je $\alpha > 1$ definisano implicitnom relacijom $\theta = \tilde{f}(\alpha)$, a $\tilde{f}(\alpha)$ je definisano sa (5.15).

Dokaz. Na osnovu (5.32, 5.33), a za $\gamma = 1 + 2\varepsilon$, dobijamo

$$\begin{aligned} \tilde{f}'(\alpha) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}} \frac{\gamma\alpha^{\gamma+1} - \gamma\alpha^\gamma + \alpha^\gamma - 1}{\alpha^2} + \sqrt{\gamma}\alpha^{\varepsilon-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{Y} \frac{\sqrt{\alpha\gamma\alpha^\gamma}}{\alpha^\gamma-1} \frac{(Y+1)^2(\alpha^\gamma-1) - 2Y(\alpha^\gamma-1)}{\alpha^2} + \sqrt{\gamma}\alpha^{\frac{\gamma-3}{2}} \\ &= \frac{\alpha^{1/2}\gamma^{1/2}\alpha^{\gamma/2}((Y+1)^2 - 2Y) + 2Y\alpha^2\gamma^{1/2}\alpha^{\frac{\gamma-3}{2}}}{2Y\alpha^2} \\ &= \frac{\alpha^{\frac{1+\gamma}{2}}\gamma^{1/2}(Y+1)^2}{2Y\alpha^2} = \frac{\alpha^{\frac{\gamma-3}{2}}\gamma^{1/2}(Y+1)^2}{2Y} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Koristeći $\theta = \tilde{f}(\alpha) \Rightarrow d\theta = \tilde{f}'(\alpha) d\alpha$ i (5.35) zaključujemo da važi (5.34) \square

Lema 5.1.6 Ako je $\rho_0 < \rho_1$, tada važi

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{1}{l'(\alpha)} = -\frac{2Y}{\sqrt{\gamma}\alpha^{\frac{\gamma-3}{2}}(1+Y)^2}, \quad (5.36)$$

gde je $0 < \alpha < 1$ definisano implicitnom relacijom $\theta = l(\alpha)$, a $l(\alpha)$ je definisano sa (5.24).

Dokaz. Koristeći (5.32, 5.33) i $\gamma = 1 + 2\varepsilon$, imamo

$$\begin{aligned} l'(\alpha) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}} \frac{\gamma\alpha^{\gamma+1} - \gamma\alpha^\gamma + \alpha^\gamma - 1}{\alpha^2} - \sqrt{\gamma}\alpha^{\varepsilon-1} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{Y} \frac{\sqrt{\alpha\gamma\alpha^\gamma}}{1-\alpha^\gamma} \frac{(Y+1)^2(1-\alpha^\gamma) - 2Y(1-\alpha^\gamma)}{\alpha^2} - \sqrt{\gamma}\alpha^{\frac{\gamma-3}{2}} \\ &= -\frac{\alpha^{1/2}\gamma^{1/2}\alpha^{\gamma/2}((Y+1)^2 - 2Y) + 2Y\alpha^2\gamma^{1/2}\alpha^{\frac{\gamma-3}{2}}}{2Y\alpha^2} \\ &= -\frac{\alpha^{\frac{1+\gamma}{2}}\gamma^{1/2}(Y+1)^2}{2Y\alpha^2} = -\frac{\alpha^{\frac{\gamma-3}{2}}\gamma^{1/2}(Y+1)^2}{2Y} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Koristeći $\theta = l(\alpha) \Rightarrow d\theta = l'(\alpha) d\alpha$ i (5.37) važiće (5.36). \square

Napomena 5.1.7 *Primitimo da razređujuća kriva prve familije odgovara horizontalnoj polupravi $s = s_0$ ($r \geq r_0$), a da razređujuća kriva druge familije odgovara vertikalnoj polupravi $r = r_0$ ($s \geq s_0$).*

5.2 Ocena udarnih talasa

U ovom poglavlju oćenićemo razlike Rimanovih invarijanti koje se odnose na udarne talase. Zato dajemo sledeću lemu i dve teoreme.

Lema 5.2.1 *Neka je $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ i $\alpha \geq 1$. Tada je:*

- (i) $1 + \varepsilon \alpha^{1+\varepsilon} \geq (1 + \varepsilon) \alpha^\varepsilon$,
- (ii) $(1 + 2\varepsilon) \alpha^{1+\varepsilon} (2 + \varepsilon \alpha^{1+\varepsilon}) \geq 2(1 + \varepsilon)^2 \alpha^{1+2\varepsilon} + \varepsilon$ i
- (iii) $\frac{(\alpha - 1)(\alpha^{1+2\varepsilon} - 1)}{\alpha} \geq (1 + 2\varepsilon) \left(\frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right)^2$.

Dokaz.

(i) Pokazaćemo da važi $h_1(\alpha, \varepsilon) := 1 + \varepsilon \alpha^{1+\varepsilon} - (1 + \varepsilon) \alpha^\varepsilon \geq 0$, na taj način što ćemo prvo pokazati da je $h_1(1, \varepsilon) = 0$ i da je $\partial h_1(\alpha, \varepsilon) / \partial \alpha \geq 0$ za $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ i $\alpha \geq 1$. Imamo da je $h_1(1, \varepsilon) = 1 + \varepsilon - (1 + \varepsilon) = 0$, dok je $\partial h_1(\alpha, \varepsilon) / \partial \alpha = \varepsilon(1 + \varepsilon) \alpha^\varepsilon (1 - 1/\alpha) \geq 0$, jer je $\alpha \geq 1$.

(ii) Definišimo funkciju $h_2(\alpha, \varepsilon) := (1 + 2\varepsilon) \alpha^{1+\varepsilon} (2 + \varepsilon \alpha^{1+\varepsilon}) - 2(1 + \varepsilon)^2 \alpha^{1+2\varepsilon} - \varepsilon$ i pokažimo da je $h_2(\alpha, \varepsilon) \geq 0$ koristeći postupak iz (i). Sada je $h_2(1, \varepsilon) = (1 + 2\varepsilon)(2 + \varepsilon) - 2(1 + \varepsilon)^2 - \varepsilon = 0$, dok je $\partial h_2(\alpha, \varepsilon) / \partial \alpha = 2(1 + 2\varepsilon)(1 + \varepsilon) \alpha^\varepsilon (1 + \varepsilon \alpha^{1+\varepsilon} - (1 + \varepsilon) \alpha^\varepsilon) \geq 0$ na osnovu (i) i $\alpha \geq 1$.

(iii) Neka je

$$h_3(\alpha, \varepsilon) := \frac{(\alpha - 1)(\alpha^{1+2\varepsilon} - 1)}{\alpha} - (1 + 2\varepsilon) \left(\frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right)^2.$$

Jasno je da je $h_3(1, \varepsilon) = 0$. Pokažimo da je i $\partial h_3(\alpha, \varepsilon) / \partial \alpha \geq 0$ za $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ i $\alpha \geq 1$. Naime,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_3(\alpha, \varepsilon)}{\partial \alpha} &= \frac{((\alpha^{1+2\varepsilon} - 1) + (1 + 2\varepsilon)(\alpha - 1)\alpha^{2\varepsilon})\alpha - (\alpha - 1)(\alpha^{1+2\varepsilon} - 1)}{\alpha^2} \\ &\quad - 2(1 + 2\varepsilon) \alpha^{\varepsilon-1} \left(\frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) \\ &= \frac{(1 + 2\varepsilon) \alpha^{1+\varepsilon} (2 + \varepsilon \alpha^{1+\varepsilon}) - 2(1 + \varepsilon)^2 \alpha^{1+2\varepsilon} - \varepsilon}{\varepsilon \alpha^2}, \end{aligned}$$

pa sledi da je $\partial h_3(\alpha, \varepsilon) / \partial \alpha \geq 0$ zbog (ii). Ovim je kompletiran dokaz leme. \square

Teorema 5.2.2 ([31]) *Neka je $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $s_0 < s_1$. Posmatrajmo dve S_1 krive koje kreću iz tačkaka $(r_0, s_0) = (\rho_0, u_0)$ u Ojlerovim koordinatama i $(r_0, s_1) = (\rho_1, u_1)$ u Ojlerovim koordinatama, i za odgovarajuće (ρ_i, u_i) u Ojlerovim koordinatama, završavaju se u tačkama (r, s) i (r, s_2) , redom (slika 5.5). Tada važi*

$$0 \leq (s_0 - s) - (s_1 - s_2) \leq C \varepsilon (s_1 - s_0)(r_0 - r)$$

gde C ne zavisi od ε , a $\rho_0, \rho_1 \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$, gde su $0 < \underline{\rho} < \bar{\rho} < \infty$ neke konstante.

Dokaz. Pokažimo prvo da je $\rho_1 > \rho_0$. Na osnovu (5.3) važi

$$s_i = u_i + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\rho_i^\varepsilon - 1) \quad \text{i} \quad r_i = u_i - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\rho_i^\varepsilon - 1)$$

za $i = 0, 1$. Tada iz $r_0 = r_1$ sledi $u_1 - u_0 = (\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$, dok $s_1 > s_0$ daje $u_1 - u_0 > -(\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$. Zbog toga važi $2(\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon} > 0$, odnosno $\rho_1 > \rho_0$.

Neka je $z^0 = s_0 - s$, $z^1 = s_1 - s_2$, $w = r_0 - r$ (videti sliku 5.5). Iz (5.11) sledi

$$z^0 - z^1 = \int_0^w \left(h_1 \left(\alpha \left(\frac{\beta}{\kappa \rho_0^\varepsilon} \right) \right) - h_1 \left(\alpha \left(\frac{\beta}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \right) \right) \right) d\beta. \quad (5.38)$$

Sa druge strane, teorema o srednjoj vrednosti i $\rho_1 > \rho_0$ impliciraju da postoji $\tilde{\theta} \in \left(\frac{\beta}{\kappa \rho_1^\varepsilon}, \frac{\beta}{\kappa \rho_0^\varepsilon} \right)$ tako da važi

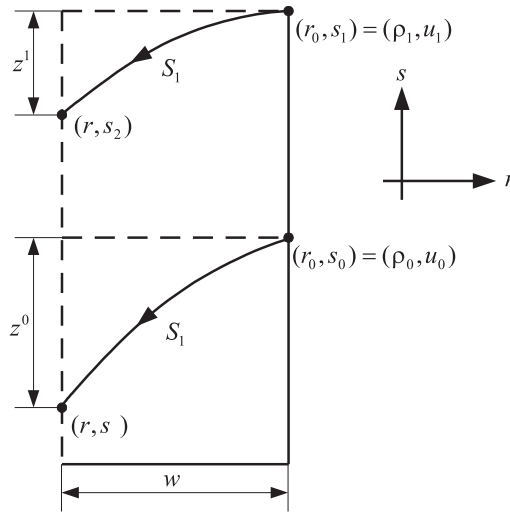
$$h_1 \left(\alpha \left(\frac{\beta}{\kappa \rho_0^\varepsilon} \right) \right) - h_1 \left(\alpha \left(\frac{\beta}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \right) \right) = \frac{dh_1}{d\alpha} \frac{d\alpha(\tilde{\theta})}{d\theta} \left(\frac{\beta}{\kappa \rho_0^\varepsilon} - \frac{\beta}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \right). \quad (5.39)$$

Na osnovu (5.38), (5.39) i teoreme 5.1.4 imamo

$$z^0 - z^1 = \int_0^w \frac{dh_1}{d\alpha} \frac{d\alpha(\tilde{\theta})}{d\theta} \left(\frac{\beta}{\kappa \rho_0^\varepsilon} - \frac{\beta}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \right) d\beta. \quad (5.40)$$

gde je $\beta/\kappa \rho_1^\varepsilon < \tilde{\theta} < \beta/\kappa \rho_0^\varepsilon$. Sada ćemo pokazati da je $z^0 - z^1 \geq 0$. Zbog (5.18) sledi

$$\frac{dh_1}{d\alpha} \geq 0,$$



Slika 5.5: Dve krive udarnih talasa u $r - s$ ravni.

a zbog (5.34) sledi

$$\frac{d\alpha(\tilde{\theta})}{d\theta} \geq 0.$$

Na kraju, kako je $\rho_1 > \rho_0$, dobijamo da važi

$$\frac{\beta}{\kappa \rho_0^\varepsilon} - \frac{\beta}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \geq 0,$$

pa time je dokazano da je podintegralna funkcija u (5.40) zaista nenegativna. Sada ćemo oceniti podintegralnu funkciju. Koristeći opet (5.13, 5.18, 5.22, 5.34), dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{d\alpha} \frac{d\alpha(\tilde{\theta})}{d\theta} &= \frac{2(Y-1)}{(Y+1)^3} \sqrt{\frac{\alpha^\gamma - 1}{\gamma \alpha^\gamma (\alpha - 1)}} \gamma \alpha^{\gamma-1} \frac{\alpha(\alpha^\gamma - 1) + \gamma - \alpha\gamma}{(\alpha^\gamma - 1)^2} \frac{2Y}{\sqrt{\gamma} \alpha^{\frac{\gamma-3}{2}} (1+Y)^2} \\ &= \frac{4(Y-1)\sqrt{\gamma} \alpha^{\frac{\gamma+1}{2}}}{(Y+1)^3 (\alpha^\gamma - 1)^2} \frac{\alpha^{\gamma+1} - (\gamma+1)\alpha + \gamma}{(1+Y)^2}. \end{aligned}$$

Izvedimo sledeće ocene koje su nam potrebne u nastavku dokaza. Koristeći (5.20), imamo

$$\gamma\alpha^\gamma(\alpha-1) + 1 - \alpha^\gamma \geq \alpha(\alpha^\gamma - 1) + 1 - \alpha^\gamma = (\alpha^\gamma - 1)(\alpha - 1) \geq 0, \quad (5.41)$$

a zbog (5.41) važiće

$$\begin{aligned} \alpha^{\gamma+1} - (\gamma+1)\alpha + \gamma &= \alpha^{\gamma+1} - \gamma\alpha - \alpha + \gamma \\ &\leq \alpha^{\gamma+1} - \gamma\alpha - \alpha + \gamma + \gamma\alpha^\gamma(\alpha-1) + 1 - \alpha^\gamma \\ &= (\gamma+1)(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1). \end{aligned}$$

Nastavimo sada sa ocenom podintegralne funkcije u (5.40), odnosno

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{d\alpha} \frac{d\alpha(\tilde{\theta})}{d\theta} &\leq \frac{4(Y-1)\sqrt{\gamma}\alpha^{\frac{\gamma+1}{2}}}{(Y+1)^3(\alpha^\gamma-1)^2} \frac{(\gamma+1)(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{(1+Y)^2} \\ &\leq \frac{4(Y-1)\sqrt{\gamma}\alpha^{\frac{\gamma+1}{2}}}{(Y+1)^3(\alpha^\gamma-1)} \frac{(\gamma+1)(\alpha-1)}{Y^2} \\ &\leq \frac{4(Y-1)(\gamma+1)\alpha^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\gamma}(Y+1)^3}. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili definiciju Y^2 iz (5.13). Zbog toga je

$$\begin{aligned} z^0 - z^1 &\leq \int_0^w \frac{4(Y-1)(\gamma+1)\alpha^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\sqrt{\gamma}(Y+1)^3} \left(\frac{\beta}{\kappa\rho_0^\varepsilon} - \frac{\beta}{\kappa\rho_1^\varepsilon} \right) d\beta \\ &= \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\sqrt{\gamma}\rho_0^\varepsilon\rho_1^\varepsilon} (\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon) \int_0^w \beta \alpha^{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{Y-1}{(Y+1)^3} d\beta. \end{aligned}$$

Uočimo da važi

$$\frac{Y-1}{(Y+1)^3} = \frac{Y-1}{Y+1} \frac{1}{(Y+1)^2} \leq \frac{1}{(Y+1)^2} \leq \frac{1}{Y^2} \leq \frac{1}{\alpha},$$

jer, na osnovu (5.21), sledi $Y^2 \geq \alpha$. Sada je

$$\begin{aligned} z^0 - z^1 &\leq \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\sqrt{\gamma}\rho_0^\varepsilon\rho_1^\varepsilon} (\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon) \int_0^w \beta \alpha^{\frac{1-\gamma}{2}} \frac{1}{\alpha} d\beta \\ &= \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\sqrt{\gamma}\rho_0^\varepsilon\rho_1^\varepsilon} (\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon) \int_0^w \beta \alpha^{-\frac{1+\gamma}{2}} d\beta. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Za $\beta/\kappa\rho_1^\varepsilon < \tilde{\theta} < \beta/\kappa\rho_0^\varepsilon$ i $d\alpha/d\theta > 0$, važi

$$\alpha \left(\frac{\beta}{\kappa\rho_1^\varepsilon} \right) \leq \alpha(\tilde{\theta}) \leq \alpha \left(\frac{\beta}{\kappa\rho_0^\varepsilon} \right), \quad (5.43)$$

jer je α rastuća funkcija. Koristeći lemu 5.2.1 pod (iii), sledi

$$\sqrt{\frac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}} \geq \sqrt{\gamma} \frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon}. \quad (5.44)$$

Na osnovu (5.15, 5.44), za $\alpha = \alpha \left(\frac{\beta}{\kappa\rho_1^\varepsilon} \right)$ zaključujemo da važi

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\kappa\rho_1^\varepsilon} = \tilde{f}(\alpha) &= \sqrt{\frac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{(\alpha-1)(\alpha^\gamma-1)}{\alpha}} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{(\alpha-1)\alpha^\gamma}{\alpha-1}} = 2\alpha^{\gamma/2}. \end{aligned}$$

Koristeći (5.43) i prethodnu nejednakost, imamo da važi

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \leq \alpha^{\gamma/2} &\Rightarrow \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}} \geq \left(\alpha\left(\frac{\beta}{\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)\right)^{-\frac{\gamma+1}{2}} \\ &\Rightarrow \min\left\{1, \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\} \geq \left(\alpha\left(\frac{\beta}{\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)\right)^{-\frac{\gamma+1}{2}} \\ &\Rightarrow \min\left\{1, \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\} \geq (\alpha(\tilde{\theta}))^{-\frac{\gamma+1}{2}}. \end{aligned}$$

Konačno, iz (5.42) sledi

$$z^0 - z^1 \leq \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\sqrt{\gamma}\rho_0^\varepsilon\rho_1^\varepsilon}(\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon) \int_0^w \beta \min\left\{1, \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\} d\beta. \quad (5.45)$$

Na osnovu prve Rimanove invarijante u (5.3) imamo

$$s_1 - s_0 = u_1 - u_0 + \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon),$$

dok na osnovu druge Rimanove invarijante

$$r_1 - r_0 = u_1 - u_0 - \frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon),$$

Kako je $r_1 = r_0$ u ovom slučaju, sledi

$$s_1 - s_0 = 2\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon),$$

odnosno

$$\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\kappa\sqrt{\gamma}}(s_1 - s_0). \quad (5.46)$$

Iz (5.45, 5.46) sledi

$$z^0 - z^1 \leq \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\sqrt{\gamma}\rho_0^\varepsilon\rho_1^\varepsilon} \frac{\varepsilon}{2\kappa\sqrt{\gamma}}(s_1 - s_0) \int_0^w \beta \min\left\{1, \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\} d\beta,$$

odnosno,

$$\begin{aligned} z^0 - z^1 &\leq \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\gamma\rho_0^\varepsilon} \varepsilon (s_1 - s_0) \int_0^w \frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \min\left\{1, \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-1-\frac{1}{\gamma}}\right\} d\beta \\ &= \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\gamma\rho_0^\varepsilon} \varepsilon (s_1 - s_0) \int_0^w \min\left\{\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}, \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} d\beta. \end{aligned}$$

Posmatraćemo dva slučaja za ocenu podintegralnog minimuma. Prvi slučaj,

$$\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \leq 1 \Rightarrow \min\left\{\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}, \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} = \frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \leq 1$$

i drugi,

$$\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \geq 1 \Rightarrow \min\left\{\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}, \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} = \left(\frac{\beta}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \leq 1.$$

Tada je

$$z^0 - z^1 \leq \frac{4(\gamma + 1)}{\kappa \gamma \rho_0^\varepsilon} \varepsilon (s_1 - s_0) \int_0^w 1 \, d\beta, \quad (5.47)$$

pa važi

$$z^0 - z^1 \leq C \varepsilon (s_1 - s_0) w,$$

gde je

$$C = \max \left\{ \frac{4(\gamma + 1)}{\kappa \gamma}, \frac{4(\gamma + 1)}{\kappa \gamma \sqrt{\rho_0}} \right\}.$$

Ovim je kompletiran dokaz teoreme. \square

Teorema 5.2.3 ([31]) *Neka je $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $r_0 > r_1$ i posmatrajmo dve S_2 krive koje kreću iz tačaka $(r_0, s_0) = (\rho_0, u_0)$ u Ojlerovim koordinatama i $(r_1, s_0) = (\rho_1, u_1)$ u Ojlerovim koordinatama, a za odgovarajuće (ρ_i, u_i) u Ojlerovim koordinatama, završavaju se u tačkama (r, s) i (r_2, s) , redom (slika 5.6). Tada je*

$$0 \leq (r_0 - r) - (r_1 - r_2) \leq C \varepsilon (r_0 - r_1)(s_0 - s),$$

gde C ne zavisi od ε i $\rho_0, \rho_1 \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$, gde su $0 < \underline{\rho} < \bar{\rho} < \infty$ konstante.

Dokaz. Pokažimo prvo da je $\rho_1 > \rho_0$. Na osnovu (5.3) važi

$$s_i = u_i + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\rho_i^\varepsilon - 1) \quad \text{and} \quad r_i = u_i - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\rho_i^\varepsilon - 1)$$

za $i = 0, 1$. Tada iz $s_0 = s_1$ sledi $u_1 - u_0 = (\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$, dok $r_1 < r_0$ daje $u_1 - u_0 < (\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$. Zbog toga važi $2(\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon} > 0$, odnosno $\rho_1 > \rho_0$. Uvedimo oznake $w^0 = r_0 - r$, $w^1 = r_1 - r_2$ i $z = s_0 - s$, kao na slici 5.6. Analogno kao i u prethodnoj teoremi, na osnovu teoreme 5.1.4 i teoreme o srednjoj vrednosti važiće

$$\begin{aligned} w^0 - w^1 &= \int_0^z \left[h_2 \left(\alpha \left(\frac{\chi}{\kappa \rho_0^\varepsilon} \right) \right) - h_2 \left(\alpha \left(\frac{\chi}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \right) \right) \right] d\chi \\ &= \int_0^z \frac{dh_2}{d\alpha} \frac{d\alpha(\tilde{\theta})}{d\theta} \left(\frac{\chi}{\kappa \rho_0^\varepsilon} - \frac{\chi}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \right) d\chi, \end{aligned} \quad (5.48)$$

gde je $\chi/\kappa \rho_1^\varepsilon < \tilde{\theta} < \chi/\kappa \rho_0^\varepsilon$. Pokažimo sada da je $w^0 - w^1 \geq 0$. Kako važi (5.27) imaćemo da je $\frac{dh_2}{d\alpha} \leq 0$. Iz (5.36) sledi $\frac{d\alpha(\tilde{\theta})}{d\theta} \leq 0$, dok iz $\rho_1 > \rho_0$ važi $\frac{\chi}{\kappa \rho_0^\varepsilon} - \frac{\chi}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \geq 0$, pa je podintegralna funkcija u (5.48) nenegativna.

Kao i u prethodnoj teoremi, potrebno je oceniti podintegralnu funkciju u (5.48). Koristeći (5.23, 5.27, 5.31, 5.36) dobijamo

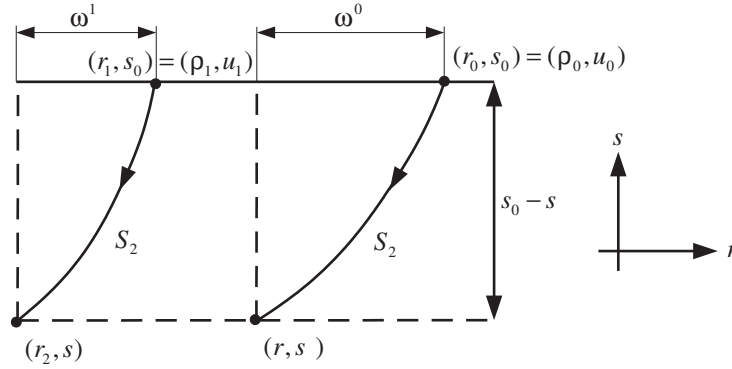
$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{d\alpha} \frac{d\alpha(\tilde{\theta})}{d\theta} &= \frac{2(1-Y)}{(1+Y)^3} \sqrt{\frac{1-\alpha^\gamma}{\gamma \alpha^\gamma (1-\alpha)}} \gamma \alpha^{\gamma-1} \frac{\alpha(\alpha^\gamma - 1) + \gamma - \alpha \gamma}{(1-\alpha^\gamma)^2} \frac{2Y}{\sqrt{\gamma} \alpha^{\frac{\gamma-3}{2}} (1+Y)^2} \\ &= \frac{4(1-Y) \sqrt{\gamma} \alpha^{\frac{\gamma+1}{2}}}{(1+Y)^3 (1-\alpha^\gamma)^2} \frac{\alpha^{\gamma+1} - (\gamma+1)\alpha + \gamma}{(1+Y)^2} \end{aligned}$$

Sada nam trebaju sledeće ocene. Na osnovu (5.29) važi

$$1 - \alpha^\gamma - \gamma \alpha^\gamma (1 - \alpha) \geq 1 - \alpha^\gamma - \alpha(1 - \alpha^\gamma) = (1 - \alpha^\gamma)(1 - \alpha) \geq 0,$$

a koristeći (5.41), dobijamo da je

$$\begin{aligned} \alpha^{\gamma+1} - (\gamma+1)\alpha + \gamma &= \alpha^{\gamma+1} - \gamma\alpha - \alpha + \gamma \\ &\leq \alpha^{\gamma+1} - \gamma\alpha - \alpha + \gamma + \gamma\alpha^\gamma(\alpha - 1) + 1 - \alpha^\gamma \\ &= (\gamma+1)(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma). \end{aligned}$$

Slika 5.6: Dve S_2 krive u $x-t$ ravni.

Nastavljamo sa ocenom podintegralne funkcije u (5.48). Kako važi

$$\begin{aligned}
 \frac{dh_2}{d\alpha} \frac{d\alpha(\tilde{\theta})}{d\theta} &\leq \frac{4(1-Y)\sqrt{\gamma} \alpha^{\frac{\gamma+1}{2}} (\gamma+1)(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{(1+Y)^3(1-\alpha^\gamma)^2 (1+Y)^2} \\
 &\leq \frac{4(1-Y)\sqrt{\gamma} \alpha^{\frac{\gamma+1}{2}} (\gamma+1)(1-\alpha)}{(1+Y)^3(1-\alpha^\gamma)} \frac{1}{1} \\
 &\leq \frac{4(1-Y)\sqrt{\gamma} \alpha^{\frac{\gamma+1}{2}} (\gamma+1)(1-\alpha^\gamma)}{(1+Y)^3(1-\alpha^\gamma)} \frac{1}{1} \\
 &\leq \frac{4(1-Y)\sqrt{\gamma} \alpha^{\frac{\gamma+1}{2}} (\gamma+1)}{(1+Y)^3},
 \end{aligned}$$

dobijamo da važi i

$$\begin{aligned}
 w^0 - w^1 &\leq \int_0^z \frac{4(1-Y)\sqrt{\gamma} \alpha^{\frac{\gamma+1}{2}} (\gamma+1)}{(1+Y)^3} \left(\frac{\chi}{\kappa \rho_0^\varepsilon} - \frac{\chi}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \right) d\chi \\
 &= \frac{4(\gamma+1)\sqrt{\gamma}}{\kappa \rho_0^\varepsilon \rho_1^\varepsilon} (\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon) \int_0^z \chi \alpha^{\frac{1+\gamma}{2}} \frac{1-Y}{(Y+1)^3} d\chi.
 \end{aligned}$$

Uz ocenu

$$\frac{1-Y}{(1+Y)^3} = \frac{1-Y}{1+Y} \frac{1}{(1+Y)^2} \leq 1,$$

imamo da važi

$$w^0 - w^1 \leq \frac{4(\gamma+1)\sqrt{\gamma}}{\kappa \rho_0^\varepsilon \rho_1^\varepsilon} (\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon) \int_0^z \chi \alpha^{\frac{1+\gamma}{2}} d\chi. \quad (5.49)$$

Kao što smo već videli, tačno je $\chi/\kappa \rho_1^\varepsilon < \tilde{\theta} < \chi/\kappa \rho_0^\varepsilon$ i $d\alpha/d\theta < 0$, pa je

$$\alpha \left(\frac{\chi}{\kappa \rho_1^\varepsilon} \right) \geq \alpha(\tilde{\theta}) \geq \alpha \left(\frac{\chi}{\kappa \rho_0^\varepsilon} \right) \quad (5.50)$$

jer je α sada opadajuća funkcija. Analognim postupkom koji se koristio da bi se dokazalo (5.44), može pokazati da važi i

$$\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} \geq \sqrt{\gamma} \frac{1-\alpha^\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (5.51)$$

Na osnovu (5.24, 5.51), za $\alpha = \alpha\left(\frac{\chi}{\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)$ zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{\kappa\rho_1^\varepsilon} = l(\alpha) &= \sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{1-\alpha^\varepsilon}{\varepsilon} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{1}{\alpha}} \leq 2\alpha^{-\gamma/2}. \end{aligned}$$

Na osnovu (5.50) i prethodne nejednakosti, imamo

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \leq \left(\alpha\left(\frac{\chi}{\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)\right)^{-\gamma/2} \leq \alpha(\tilde{\theta})^{-\gamma/2} &\Rightarrow \left(\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}} \geq \left(\alpha(\tilde{\theta})\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \\ &\Rightarrow \min\left\{1, \left(\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\} \geq \left(\alpha(\tilde{\theta})\right)^{\frac{\gamma+1}{2}}. \end{aligned}$$

Konačno, na osnovu (5.49) sledi

$$w^0 - w^1 \leq \frac{4(\gamma+1)\sqrt{\gamma}}{\kappa\rho_0^\varepsilon\rho_1^\varepsilon}(\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon) \int_0^z \chi \min\left\{1, \left(\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\} d\chi. \quad (5.52)$$

Kako važi

$$\rho_1^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2\kappa\sqrt{\gamma}}(r_0 - r_1), \quad (5.53)$$

koristeći (5.52, 5.53) dobijamo

$$w^0 - w^1 \leq \frac{4(\gamma+1)\sqrt{\gamma}}{\kappa\rho_0^\varepsilon\rho_1^\varepsilon} \frac{\varepsilon}{2\kappa\sqrt{\gamma}}(r_0 - r_1) \int_0^z \chi \min\left\{1, \left(\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\} d\chi,$$

odnosno

$$\begin{aligned} w^0 - w^1 &\leq \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\rho_0^\varepsilon} \varepsilon(r_0 - r_1) \int_0^z \frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \min\left\{1, \left(\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\} d\chi \\ &= \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\rho_0^\varepsilon} \varepsilon(r_0 - r_1) \int_0^z \min\left\{\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}, \left(\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} d\chi. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Ocenimo podintegralni minimum. Iz

$$\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \leq 1 \Rightarrow \min\left\{\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}, \left(\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} = \frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \leq 1$$

i

$$\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon} \geq 1 \Rightarrow \min\left\{\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}, \left(\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\} = \left(\frac{\chi}{2\kappa\rho_1^\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{\gamma}} \leq 1,$$

sledi da, na osnovu (5.54) i prethodnih nejednakosti, važi

$$w^0 - w^1 \leq \frac{4(\gamma+1)}{\kappa\rho_0^\varepsilon} \varepsilon(r_0 - r_1) \int_0^z 1 d\chi$$

Konačno,

$$w^0 - w^1 \leq C \varepsilon (r_0 - r_1) z,$$

gde je

$$C = \max \left\{ \frac{4(\gamma + 1)}{\kappa}, \frac{4(\gamma + 1)}{\kappa \sqrt{\rho_0}} \right\}.$$

□

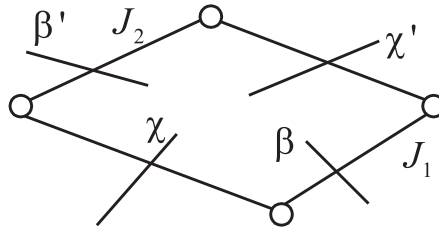
Ovim su završeni dokazi teorema 5.2.2 i 5.2.3, koji su modifikovani u odnosu na dokaze u [31]. Cilj je bio da se dobiju preciznije ocene koje će nam trebati kada $\varepsilon \rightarrow 0$.

5.3 Interakcije talasa

Označimo sa R_1 (R_2) razređujući talas, a sa S_1 (S_2) udarni talas prve (druge) familije. Tada su moguće interakcije sledećih talasa:

1. S_2 i S_1
2. S_2 i R_1 , R_2 i S_1
3. S_2 i S_2 , S_1 i S_1
4. S_2 i R_2 , R_1 i S_1
5. R_2 i S_2 , S_1 i R_1
6. R_2 i R_1 .

Posmatrajmo sada sliku 5.7 nastalu primenom Glimove diferencne šeme (glava 3). Neka je β (χ) udarni talas prve (druge) familije koji preseca J_1 , i neka je β' (χ') udarni talas prve (druge) familije koji preseca J_2 (slika 5.7). Neka je njihova apsolutna vrednost, u oznakama Rimanovih



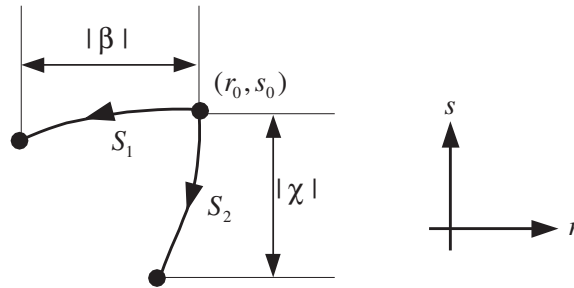
Slika 5.7: Posmatrani četvorougao.

invarianti, snaga udarnih talasa (slika 5.8). Neka je S'_2 inverzna kriva udarnog talasa druge familije, odnosno S'_2 sadrži sve tačke (r, s) koje mogu biti spojene sa (r_0, s_0) preko S'_2 (slika 5.9).

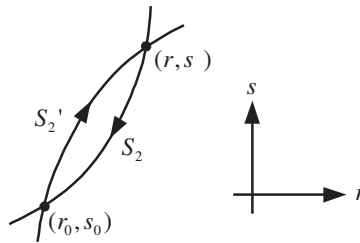
Inverzna kriva udarnog talasa druge familije predstavljena je jednačinama

$$S'_2 : \begin{cases} s - s_0 = k\rho_0^\varepsilon \left(\sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha^\gamma - 1)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right), \\ r - r_0 = k\rho_0^\varepsilon \left(\sqrt{\frac{(\alpha - 1)(\alpha^\gamma - 1)}{\alpha}} - \sqrt{\gamma} \frac{\alpha^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right), \end{cases} \quad \alpha = \rho/\rho_0 \geq 1.$$

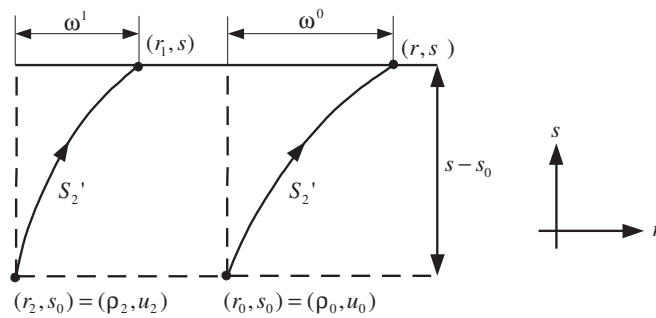
Na osnovu teoreme 5.1.4 sledi $r - r_0 = g_1(s - s_0, \rho_0)$, $s > s_0$. Posmatrajmo sada dve S'_2 krive koje polaze iz tačkaka $(r_2, s_0) = (\rho_2, u_2)$ i $(r_0, s_0) = (\rho_0, u_0)$, $r_0 > r_2$ i koje se završavaju u tačkama (r_1, s) i (r, s) , redom (slika 5.10).



Slika 5.8: Snaga udarnih talasa prve i druge familije.



Slika 5.9: Udarni talas druge familije i njegov inverzni talas.

Slika 5.10: Dve inverzne S_2 krive u $r - s$ ravni.

Tada, na osnovu teoreme 5.2.3, važi ocena

$$0 \leq (r - r_0) - (r_1 - r_2) \leq C \varepsilon (r_0 - r_2)(s - s_0),$$

gde je C dato u teoremi 5.2.3.

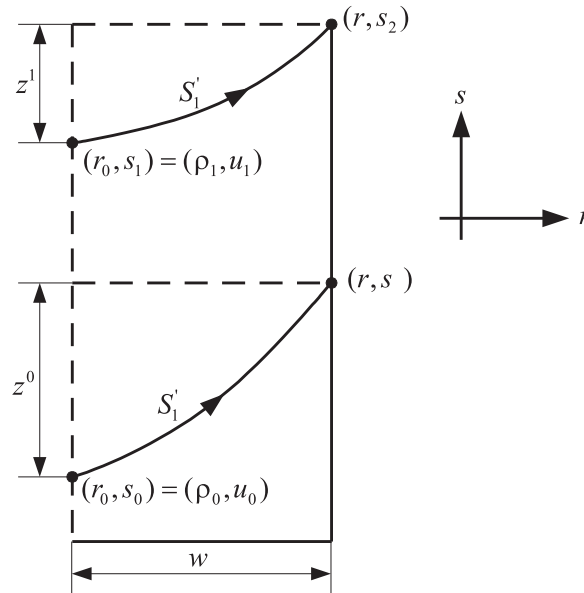
Neka je sada S'_1 inverzna kriva udarnog talasa prve familije, t.j. S'_1 sadrži sve tačke (r, s) koje mogu biti spojene sa (r_0, s_0) preko S'_1 . Tada se S'_1 može zapisati kao

$$S'_1 : \begin{cases} r - r_0 = k\rho_0^\varepsilon \left(\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} + \sqrt{\gamma} \frac{1-\alpha^\varepsilon}{\varepsilon} \right), \\ s - s_0 = k\rho_0^\varepsilon \left(\sqrt{\frac{(1-\alpha)(1-\alpha^\gamma)}{\alpha}} - \sqrt{\gamma} \frac{1-\alpha^\varepsilon}{\varepsilon} \right), \quad 0 < \alpha = \rho/\rho_0 \leq 1. \end{cases}$$

Na osnovu teoreme 5.1.4 dobijamo da je $s - s_0 = g_2(r - r_0, \rho_0)$ za $r > r_0$. Ako posmatramo dve S'_1 krive (slika 5.11) koje polaze iz tačaka $(r_0, s_1) = (\rho_1, u_1)$ i $(r_0, s_0) = (\rho_0, u_0)$ za $s_1 > s_0$, a završavaju se u tačkama (r, s_2) i (r, s) , redom, tada, na osnovu teoreme 5.2.2, važi

$$0 \leq (s - s_0) - (s_2 - s_1) \leq C \varepsilon (s_1 - s_0)(r - r_0),$$

gde je C dato u teoremi 5.2.2.



Slika 5.11: Dve inverzne S'_1 krive u $r - s$ ravni.

Napomena 5.3.1 Obeležimo sa Q_j , ($j = 1, 2$), razliku amplituda j -tog odlazećeg i j -prilazećeg talasa. Neka su σ i τ amplitude dva prilazeća talasa. Tada je $Q_j \in \mathcal{C}^2$ funkcija od σ i τ koja zadovoljava

$$Q_j(\sigma, 0) = Q_j(0, \tau) = 0, \quad \text{za svako } \sigma, \tau \quad (j = 1, 2).$$

Ako je drugi izvod Q_j Lipšic neprekidna funkcija, tada postoji konstanta \hat{C}_1 tako da važi

$$\begin{aligned} Q_j(\sigma, \tau) &= \int_0^1 \partial_\tau Q_j(\sigma, \theta\tau) \tau d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \partial_{\tau, \sigma} Q_j(\theta'\sigma, \theta\tau) \sigma \tau d\theta' d\theta \\ &\leq \hat{C}_1 |\sigma \tau| \int_0^1 \int_0^1 d\theta' d\theta = \mathcal{O}(1) |\sigma \tau|. \end{aligned} \quad (5.55)$$

U sledećoj teoremi, sa $\chi + \beta \rightarrow \beta' + \chi'$ obeležavamo interakciju S_2 i S_1 talasa koji daje talase S_1 i S_2 ; ostali slučajevi zapisuju se na sličan način (dakle, pre interakcije β je S_1 , χ je S_2 , o je R_1 , a π je R_2 talas; nakon interakcije β' je S_1 , χ' je S_2 , o' je R_1 i π' je R_2 talas). Sa $|\alpha|$ označavamo snagu talasa α .

Narednu teoremu dokazaćemo uz precizniju ocenu konstanti u odnosu na ocenu datu u [31].

Teorema 5.3.2 ([31]) *Neka je $0 < \varepsilon < 1/2$, $0 < \underline{\rho} < \bar{\rho} < \infty$ i neka za svaki talas posmatran u teoremi važi $\rho \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$, $u \in \mathbb{R}$. Tada važe sledeće ocene:*

1. *Rezultat interakcije udarnog talasa druge familije χ , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_0, s_0) , i udarnog talasa prve familije β , koji spaja stanja (r_0, s_0) i (r_2, s_2) , je udarni talas prve familije β' , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_3, s_3) , i udarni talas druge familije χ' , koji spaja stanja (r_3, s_3) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.13):*

$$(a) \quad \chi + \beta \rightarrow \beta' + \chi' \text{ (tačka } (r_3, s_3) \text{ nalazi se u regionu II, slike 5.14 i 5.15)} \\ |\beta'| \leq |\beta| + C\varepsilon|\beta||\chi|, \quad |\chi'| \leq |\chi| + C\varepsilon|\chi||\beta|,$$

ili postoje η, ξ tako da važi

$$(b) \quad \chi + \beta \rightarrow \beta' + \chi' \text{ (tačka } (r_3, s_3) \text{ nalazi se u regionu I, slika 5.16)} \\ 0 \leq |\beta'| = |\beta| - \xi, \quad |\chi'| \leq |\chi| + C\varepsilon|\beta||\chi| + \eta, \\ \text{gde je } 0 \leq \eta \leq g'_1(|\beta|, \rho_0)\xi < \xi, \text{ ili}$$

$$(c) \quad \chi + \beta \rightarrow \beta' + \chi' \text{ (tačka } (r_3, s_3) \text{ nalazi se u regionu III, slika 5.17)} \\ 0 \leq |\chi'| = |\chi| - \xi, \quad |\beta'| \leq |\beta| + C\varepsilon|\chi||\beta| + \eta, \\ \text{gde je } 0 \leq \eta \leq g'_1(|\chi|, \rho_0)\xi < \xi.$$

2. *Pri interakciji udarnog talasa druge familije χ , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_0, s_0) , i razređujućeg talasa prve familije o , koji spaja stanja (r_0, s_0) i (r_2, s_0) , nastaju razređujući talas prve familije o' , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r, s_1) , i udarni talas druge familije χ' , koji spaja stanja (r, s_1) i (r_2, s_0) (videti sliku 5.19):*

$$(a) \quad \chi + o \rightarrow o' + \chi' \\ |\chi'| = |\chi|, \quad |o'| \leq |o| + C\varepsilon|o||\chi|.$$

Nakon interakcije razređujućeg talasa druge familije π , koji spaja stanja (r_0, s_1) i (r_0, s_0) , i udarnog talasa prve familije β , koji spaja stanja (r_0, s_0) i (r_2, s_2) , dobijamo udarni talas prve familije β' , koji spaja stanja (r_0, s_1) i (r_2, s) , i razređujući talas druge familije π' , koji spaja stanja (r_2, s) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.21):

$$(b) \quad \pi + \beta \rightarrow \beta' + \pi' \\ |\beta'| = |\beta|, \quad |\pi'| \leq |\pi| + C\varepsilon|\pi||\beta|.$$

3. *Rezultat interakcije dva udarna talasa χ_1 i χ_2 druge familije, koji spajaju stanja (r_1, s_1) sa (r_0, s_0) i (r_0, s_0) sa (r_2, s_2) , redom, je razređujući talas prve familije o' , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_3, s_1) , i udarni talas druge familije χ' , koji spaja stanja (r_3, s_1) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.24):*

- (a) $\chi_1 + \chi_2 \rightarrow o' + \chi'$: postoji konstanta C_1 tako da važi
 $|\chi'| = |\chi_1 + \chi_2|, \quad |o'| \leq C_1 |\chi_1 \chi_2|.$

Nakon interakcije dva udarna talasa β_1 i β_2 prve familije, koji spajaju stanja (r_1, s_1) sa (r_0, s_0) i (r_0, s_0) sa (r_2, s_2) , redom, nastaju udarni talas prve familije β' , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_2, s_3) , i razređujući talas druge familije π' , koji spaja stanja (r_2, s_3) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.27):

- (b) $\beta_1 + \beta_2 \rightarrow \beta' + \pi'$: postoji konstanta C_2 tako da važi
 $|\beta'| = |\beta_1 + \beta_2|, \quad |\pi'| \leq C_2 |\beta_1 \beta_2|.$

4. Interakcijom udarnog talasa druge familije χ , koji spaja stanja $(\rho_1, u_1) = (r_1, s_1)$ i (r_0, s_0) , i razređujućeg talasa druge familije π , koji spaja stanja (r_0, s_0) i $(r_0, s_2) = (\rho_2, u_2)$, nastaju ili udarni talas prve familije β' , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_3, s_3) , i udarni talas druge familije χ' , koji spaja stanja (r_3, s_3) i (r_0, s_2) (videti sliku 5.29)

- (a) $1^\circ \chi + \pi \rightarrow \beta' + \chi'$: postoji S_1 udarni talas β_0 i S_2 udarni talas χ_0 tako da važi
 $|\chi_0| = |\chi| - \xi, \quad |\beta_0| = \eta$ i $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta' + \chi'$,
gde je $0 < \eta \leq g'_2(|\chi|, \rho_1)\xi < \xi$ i gde mora važiti $s_1 - s_2 > r_1 - r_0 - 2\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_2^\varepsilon - \rho_1^\varepsilon)$,

ili udarni talas prve familije β' , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_0, s_3) , i razređujući talas druge familije π' , koji spaja stanja (r_0, s_3) i (r_0, s_2) , (videti sliku 5.33)

- $2^\circ \chi + \pi \rightarrow \beta' + \pi'$: postoje η, ξ tako da važi
 $|\pi'| \leq |\pi|, \quad |\beta'| = \eta < \xi = |\chi|,$
gde je $0 < \eta \leq g'_2(|\chi|, \rho_1)\xi < \xi$ i gde je $s_1 - s_2 < r_1 - r_0 - 2\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_2^\varepsilon - \rho_1^\varepsilon)$.

Prilikom interakcije razređujućeg talasa prve familije o , koji spaja stanja $(\rho_1, u_1) = (r_1, s_0)$ i (r_0, s_0) , i udarnog talasa prve familije β , koji spaja stanja (r_0, s_0) i $(r_2, s_2) = (\rho_2, u_2)$, nastaju ili udarni talas prve familije β' , koji spaja stanja (r_1, s_0) i (r_3, s_3) , i udarni talas druge familije χ' , koji spaja stanja (r_3, s_3) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.35)

- (b) $1^\circ o + \beta \rightarrow \beta' + \chi'$: postoji S_1 udarni talas β_0 i S_2 udarni talas χ_0 tako da važi
 $|\beta_0| = |\beta| - \xi, \quad |\chi_0| = \eta$ i $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta' + \chi'$,
gde je $0 < \eta \leq g'_2(|\beta|, \rho_2)\xi < \xi$ i gde je $s_0 - s_2 < r_1 - r_2 + 2\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_1^\varepsilon - \rho_2^\varepsilon)$,

ili razređujući talas prve familije o' , koji spaja stanja (r_1, s_0) i (r_3, s_0) , i udarni talas druge familije χ' , koji spaja stanja (r_3, s_0) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.39)

- $2^\circ o + \beta \rightarrow o' + \chi'$: postoje η, ξ tako da važi
 $|o'| \leq |o|, \quad |\chi'| = \eta < \xi = |\beta|,$
gde je $0 < \eta \leq g'_1(|\beta|, \rho_0)\xi < \xi$ i gde važi $s_0 - s_2 > r_1 - r_2 + 2\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_1^\varepsilon - \rho_2^\varepsilon)$.

5. Interakcijom razređujućeg talasa druge familije π , koji spaja stanja $(\rho_1, u_1) = (r_0, s_1)$ i (r_0, s_0) , i udarnog talasa druge familije χ , koji spaja stanja (r_0, s_0) i $(r_2, s_2) = (\rho_2, u_2)$, nastaju ili udarni talas prve familije β' , koji spaja stanja (r_0, s_1) i (r_3, s_3) , i udarni talas druge familije χ' , koji spaja stanja (r_3, s_3) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.42)

- (a) $1^\circ \pi + \chi \rightarrow \beta' + \chi'$: postoje η, ξ tako da važi
 $|\chi'| = |\chi| - \xi, \quad |\beta'| = \eta,$
gde je $0 < \eta \leq g'_1(|\chi|, \rho_2)\xi < \xi$ i gde mora da važi $s_1 - s_2 > r_0 - r_2 - 2\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_2^\varepsilon - \rho_1^\varepsilon)$,

ili udarni talas prve familije β' , koji spaja stanja (r_0, s_1) i (r_2, s_3) , i razređujući talas druge familije π' , koji spaja stanja (r_2, s_3) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.45)

- $2^\circ \pi + \chi \rightarrow \beta' + \pi'$: postoje η, ξ tako da važi
 $|\pi'| \leq |\pi|, \quad |\beta'| = \eta < \xi = |\chi|,$
gde je $0 < \eta \leq g'_2(|\chi|, \rho_0)\xi < \xi$ i gde je $s_1 - s_2 < r_0 - r_2 - 2\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_2^\varepsilon - \rho_1^\varepsilon)$.

Prilikom interakcije udarnog talasa prve familije β , koji spaja stanja $(\rho_1, u_1) = (r_1, s_1)$ i (r_0, s_0) , i razređujućeg talasa prve familije o , koji spaja stanja (r_0, s_0) i $(r_2, s_2) = (\rho_2, u_2)$, nastaju ili udarni talas prve familije β' , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_3, s_3) , i udarni talas druge familije χ' , koji spaja stanja (r_3, s_3) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.48)

(b) $1^\circ \beta + o \rightarrow \beta' + \chi'$: postoje η, ξ tako da važi

$$|\beta'| = |\beta| - \xi, \quad |\chi'| = \eta,$$

$$\text{gde je } 0 < \eta \leq g'_1(|\beta|, \rho_1)\xi < \xi \text{ i gde je } s_0 - s_1 > r_2 - r_1 + 2\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_1^\varepsilon - \rho_2^\varepsilon),$$

ili razređujući talas prve familije o' , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_3, s_1) , i udarni talas druge familije χ' , koji spaja stanja (r_3, s_1) i (r_2, s_2) (videti sliku 5.51)

$2^\circ \beta + o \rightarrow o' + \chi'$: postoje η, ξ tako da važi

$$|o'| \leq |o|, \quad |\chi'| = \eta < \xi = |\beta|,$$

$$\text{gde je } 0 < \eta \leq g'_1(|\beta|, \rho_1)\xi < \xi \text{ i gde važi } s_0 - s_1 < r_2 - r_1 + 2\frac{\kappa\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}(\rho_1^\varepsilon - \rho_2^\varepsilon).$$

6. Rezultat interakcije razređujućeg talasa druge familije π i razređujućeg talasa prve familije o , koji spajaju stanja (r_0, s_1) sa (r_0, s_0) i (r_0, s_0) sa (r_1, s_0) , redom, je razređujući talas prve familije o' , koji spaja stanja (r_0, s_1) i (r_1, s_1) , i razređujući talas druge familije π' , koji spaja stanja (r_1, s_1) i (r_1, s_0) (videti sliku 5.53):

$$\pi + o \rightarrow o' + \pi'$$

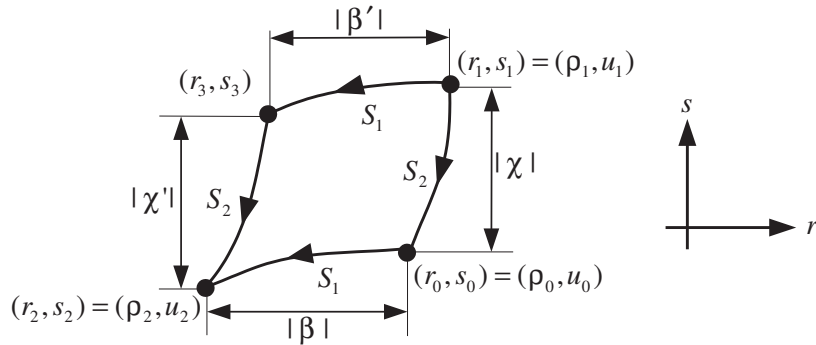
$$|o'| = |o|, \quad |\pi'| = |\pi|.$$

Ovde su C, C_1 i C_2 pozitivne konstante koje ne zavise od ε, β, χ i $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \in [\underline{\rho}, \bar{\rho}]$.

Dokaz.

Slučaj 1. (a)

Posmatrajmo prvo interakciju $S_2 + S_1 \rightarrow S_1 + S_2$ predstavljenu na slikama 5.12 i 5.13.



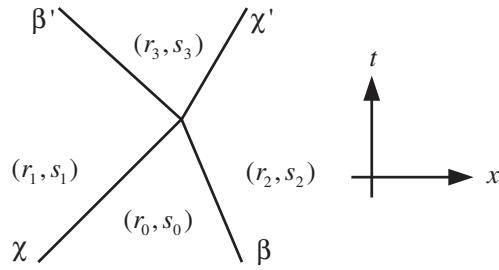
Slika 5.12: Interakcija udarnih talasa u $r - s$ ravni.

Tačka (r_3, s_3) , određena presekom S_1 krive sa početkom u (r_1, s_1) i S_2' krive sa početkom u (r_2, s_2) , leži, prema teoremi 5.2.2, u jednom od tri regiona obeležena sa I, II i III. Pretpostavimo da tačka (r_3, s_3) leži u regionu II (slika 5.14). Tada, na osnovu teoreme 5.2.2, važi

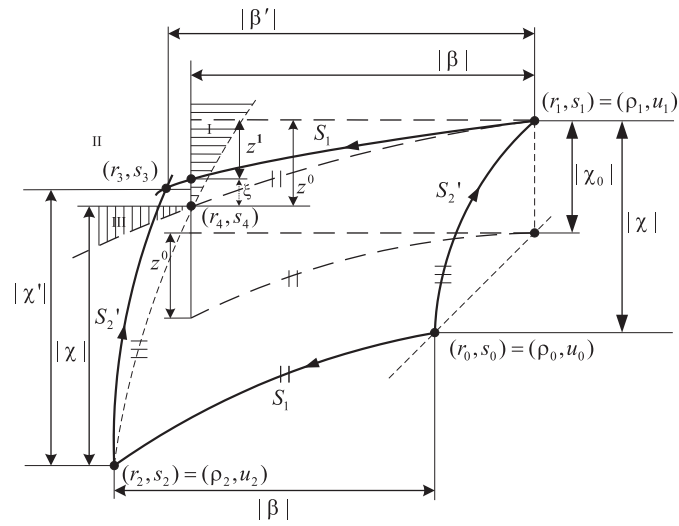
$$0 \leq |\chi'| - |\chi| \leq \xi = z^0 - z^1 \leq C\varepsilon |\chi_0| |\beta| \leq C\varepsilon |\chi| |\beta|.$$

Slično (slika 5.15),

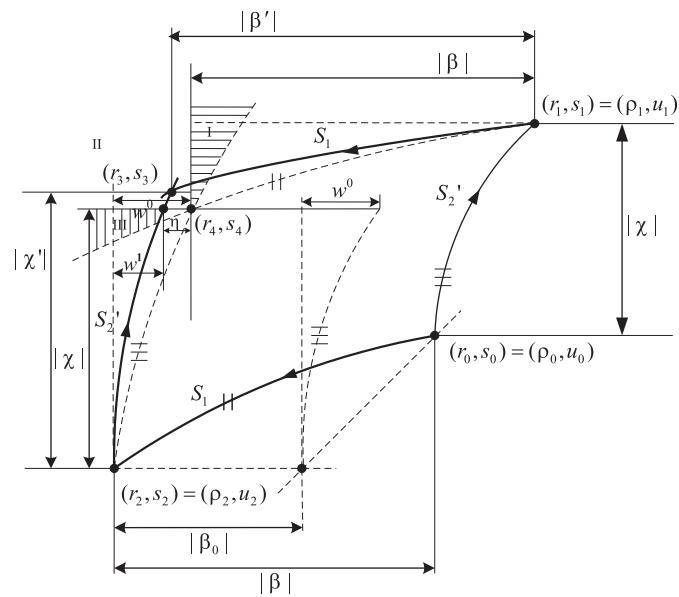
$$0 \leq |\beta'| - |\beta| \leq \eta = w^0 - w^1 \leq C\varepsilon |\beta_0| |\chi| \leq C\varepsilon |\beta| |\chi|.$$



Slika 5.13: Interakcija udarnih talasa u $x - t$ ravni.



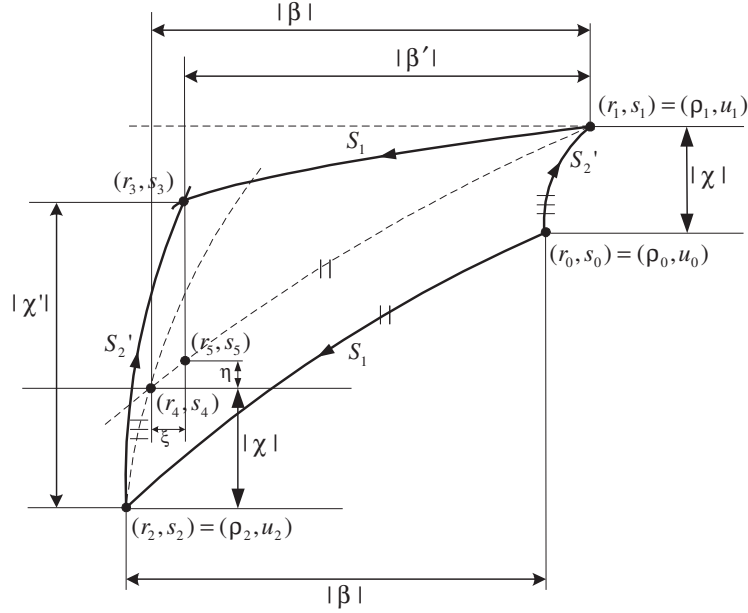
Slika 5.14: Interakcija S_2 i S_1 u $r - s$ ravni, *slučaj 1. (a)*.



Slika 5.15: Interakcija S_2 i S_1 u $r - s$ ravni, *slučaj 1. (a)*.

Slučaj 1. (b)

Neka se sada tačka (r_3, s_3) nalazi u regionu I (slika 5.16). Jasno je da važi $0 \leq |\beta'| = |\beta| - \xi$ ali i



Slika 5.16: Interakcija S_2 i S_1 u $r - s$ ravni, slučaj 1. (b).

$$\eta = g_1(|\beta|, \rho_0) - g_1(|\beta| - \xi, \rho_0) = g'_1(\tilde{\theta}, \rho_0)\xi \leq g'_1(|\beta|, \rho_0)\xi < \xi,$$

gde je $|\beta| - \xi < \tilde{\theta} < |\beta|$. Na osnovu teoreme 5.2.2, važi $|\chi'| - (|\chi| + \eta) \leq C\varepsilon|\chi||\beta'| \leq C\varepsilon|\chi||\beta|$.

Slučaj 1. (c)

Ako tačka (r_3, s_3) leži u regionu III (slika 5.17), tada je $0 \leq |\chi'| = |\chi| - \xi$, pa je tačno

$$\eta = g_1(|\chi|, \rho_0) - g_1(|\chi'|, \rho_0) = g'_1(\tilde{\theta}, \rho_0)\xi \leq g'_1(|\chi|, \rho_0)\xi < \xi,$$

gde je $|\chi| - \xi < \tilde{\theta} < |\chi|$. Na osnovu teoreme 5.2.2, sledi $|\beta'| - (|\beta| + \eta) \leq C\varepsilon|\beta||\chi'| \leq C\varepsilon|\beta||\chi|$.

Slučaj 2. (a)

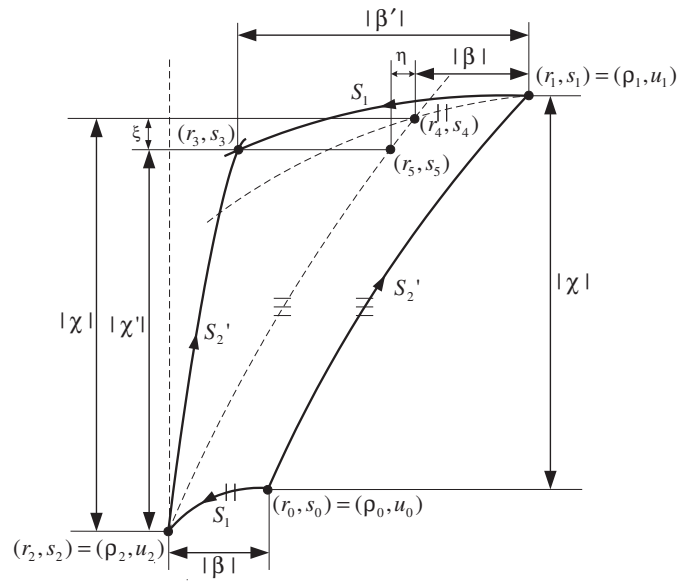
U slučaju interakcije $S_2 + R_1 \rightarrow R_1 + S_2$ (slike 5.18 i 5.19), na osnovu teoreme 5.2.3 zaključujemo da važi $|\chi'| = |\chi|$ i

$$|o'| - |o| = (r_1 - r_3) - (r_0 - r_2) = (r_1 - r_0) - (r_3 - r_2) \leq C\varepsilon(s_1 - s_0)(r_0 - r_2) = C\varepsilon|\chi||o|.$$

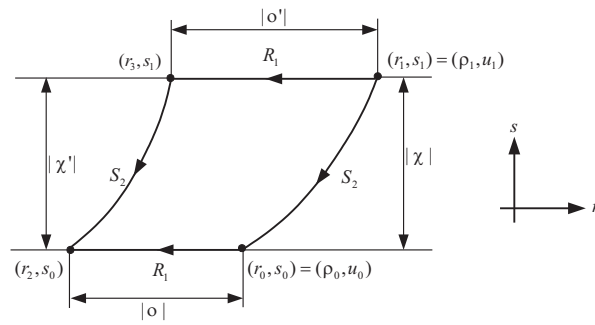
Slučaj 2. (b)

Ako dođe do sledećeg tipa interakcije $R_2 + S_1 \rightarrow S_1 + R_2$ (slike 5.20 i 5.21), na osnovu teoreme 5.2.2 imamo da je $|\beta'| = |\beta|$ i

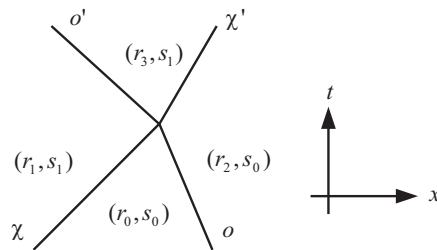
$$|\pi'| - |\pi| = (s_2 - s_3) - (s_0 - s_1) = (s_1 - s_3) - (s_0 - s_2) \leq C\varepsilon(r_0 - r_2)(s_0 - s_1) = C\varepsilon|\beta||\pi|.$$



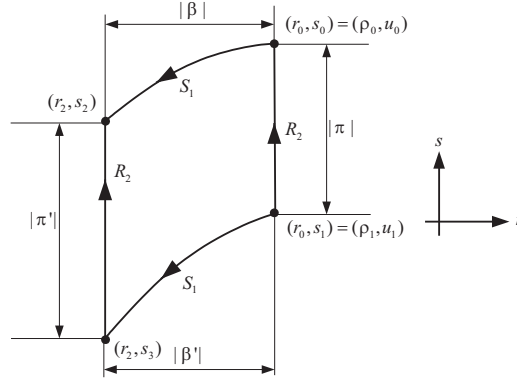
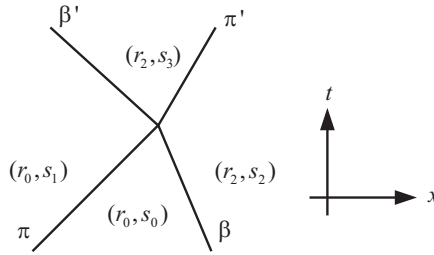
Slika 5.17: Interakcija S_2 i S_1 u $r - s$ ravni, *slučaj 1. (c)*.



Slika 5.18: Interakcija S_2 i R_1 u $r - s$ ravni, *slučaj 2. (a)*.



Slika 5.19: Interakcija S_2 i R_1 u $x - t$ ravni, *slučaj 2. (a)*.

Slika 5.20: Interakcija R_2 i S_1 u $r - s$ ravni, slučaj 2. (b).Slika 5.21: Interakcija R_2 i S_1 u $x - t$ ravni, slučaj 2. (b).

Slučaj 3. (a)

Sad prelazimo na slučajeve kada dolazi do interakcije dva udarna talasa istih familija. Radi jednostavnijeg objašnjenja, posmatrajmo interakciju $S_2 + S_2$ u $v - u$ ravni i neka su stanja (v_L, u_L) , (v_M, u_M) i (v_R, u_R) spojena udarnim talasima druge familije kao na slici 5.22. Postavlja se pitanje gde će se nalaziti tačka (v_R, u_R) . Dokazaćemo da će ona biti u delu ravni kao na slici 5.22 b, odnosno, da se ne može desiti da se interakcijom dva udarna talasa druge familije dobiju udarni talas prve i udarni talas druge familije (slika 5.22 a).

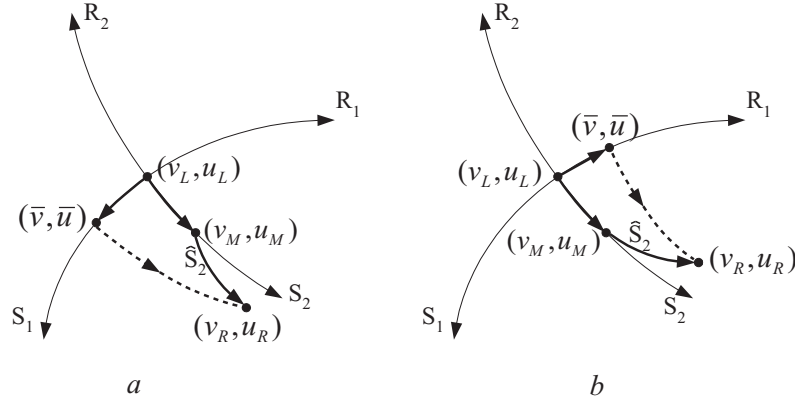
Podsetimo se da se krive udarnih talasa za (5.1), koje spajaju stanje (v_L, u_L) sa (v, u) , dobijaju rešavanjem sistema (nastao primenom RH uslova)

$$\begin{aligned} -u + u_L &= c(v - v_L) \\ p(v) - p(v_L) &= c(u - u_L), \end{aligned}$$

gde za pritisak p važi $p' < 0$ i $p'' > 0$, i gde je c brzina udarnog talasa. Tada se kriva udarnog talasa druge familije, koja spaja (v_L, u_L) i (v, u) , može predstaviti na sledeći način:

$$S_2 : u_{S_2}(v) - u_L = -\sqrt{(v - v_L)(p(v_L) - p(v))} \quad \text{za } v > v_L, u = u_{S_2}(v). \quad (5.56)$$

Pokazaćemo da udarni talas S_2 (koji kreće iz tačke (v_L, u_L)) ima manju brzinu u tački (v_M, u_M) od brzine udarnog talasa \hat{S}_2 (koji kreće iz tačke (v_M, u_M)) i da se za $v > v_M$ oba udarna talasa druge familije više neće seći (slika 5.22 b). Time osiguravamo da će se tačka (v_R, u_R) nalaziti u delu ravni u kom su (v_L, u_L) i (\bar{v}, \bar{u}) spojeni razređujućim talasom prve familije, dok su (\bar{v}, \bar{u}) i (v_R, u_R) spojeni udarnim talasom druge familije.

Slika 5.22: Interakcija S_2 i S_2 u $v - u$ ravni: a) nemoguć slučaj, b) jedini mogući slučaj.

Na osnovu (5.56) dobijamo

$$u'_{S_2}(v) = \frac{p'(v) + \frac{p(v_L) - p(v)}{v_L - v}}{2\sqrt{-\frac{p(v_L) - p(v)}{v_L - v}}} \quad \text{za } v_L < v,$$

pa je

$$u'_{S_2}(v_M) = \frac{p'(v_M) + \frac{p(v_L) - p(v_M)}{v_L - v_M}}{2\sqrt{-\frac{p(v_L) - p(v_M)}{v_L - v_M}}} \quad \text{za } v_L < v_M.$$

Sada, primenom Langranžove teoreme o srednjoj vrednosti, dobijamo da postoji $\tilde{\theta}$, za koje važi $v_L < \tilde{\theta} < v_M$ i

$$\frac{p(v_L) - p(v_M)}{v_L - v_M} = p'(\tilde{\theta}).$$

Zbog toga je

$$u'_{S_2}(v_M) = \frac{p'(v_M) + p'(\tilde{\theta})}{2\sqrt{-p'(\tilde{\theta})}} \quad \text{za } v_L < \tilde{\theta} < v_M. \quad (5.57)$$

Kako je funkcija p opadajuća jer je $p' < 0$, a kako je p' rastuća funkcija zbog $p'' > 0$, tada važi

$$\begin{aligned} v_L < \tilde{\theta} < v_M &\Rightarrow p(v_L) > p(\tilde{\theta}) > p(v_M) \\ &\Rightarrow p'(v_L) < p'(\tilde{\theta}) < p'(v_M) \\ &\Rightarrow \sqrt{-p'(v_L)} > \sqrt{-p'(\tilde{\theta})} > \sqrt{-p'(v_M)}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Na osnovu (5.57, 5.58) imamo

$$u'_{S_2}(v_M) < \frac{p'(v_M) + p'(v_M)}{2\sqrt{-p'(v_M)}} = -\sqrt{-p'(v_M)}. \quad (5.59)$$

Sada ćemo pokazati da je izvod funkcije koja predstavlja krivu \hat{S}_2 u (v_M, u_M) (slika 5.22) baš $-\sqrt{-p'(v_M)}$. Naime, kriva \hat{S}_2 je oblika

$$\hat{S}_2 : u_{\hat{S}_2}(v) - u_M = -\sqrt{(v - v_M)(p(v_M) - p(v))} \quad \text{za } v > v_M,$$

pa je

$$u'_{\hat{S}_2}(v) = \frac{p'(v) + \frac{p(v_M) - p(v)}{v_M - v}}{2\sqrt{-\frac{p(v_M) - p(v)}{v_M - v}}} \quad \text{za } v_M < v,$$

Kako je

$$\lim_{v \rightarrow v_M} \frac{p(v_M) - p(v)}{v_M - v} = p'(v_M),$$

dobijamo

$$u'_{\widehat{S}_2}(v_M) = \frac{p'(v_M) + p'(v_M)}{2\sqrt{-p'(v_M)}} = -\sqrt{-p'(v_M)}.$$

Na osnovu (5.59), sledi da funkcija koja predstavlja krivu \widehat{S}_2 ima veći prvi izvod u tački (v_M, u_M) od funkcije koja predstavlja krivu S_2 . Ostaje pitanje da li se za $v > v_M$ ove dve krive mogu ponovo preseći. Odgovor je negativan. Naime, definišimo funkciju $\bar{\phi}(x, y) = \sqrt{(x-y)(p(y) - p(x))}$. Dokazaćemo da za $x > y > z$ važi

$$\bar{\phi}(x, z) > \bar{\phi}(x, y) + \bar{\phi}(y, z).$$

Kako je p opadajuća i konveksna funkcija, tada mora važiti

$$\frac{p(z) - p(y)}{y - z} > \frac{p(y) - p(x)}{x - y},$$

pa važi

$$\left(\frac{p(z) - p(y)}{y - z} - \frac{p(y) - p(x)}{x - y} \right)^2 > 0.$$

Iz prethodne nejednakosti imamo

$$\left(\frac{p(z) - p(y)}{y - z} \right)^2 + 2 \frac{p(z) - p(y)}{y - z} \frac{p(y) - p(x)}{x - y} + \left(\frac{p(y) - p(x)}{x - y} \right)^2 > 4 \frac{p(z) - p(y)}{y - z} \frac{p(y) - p(x)}{x - y},$$

odnosno

$$\left(\frac{p(z) - p(y)}{y - z} + \frac{p(y) - p(x)}{x - y} \right)^2 > \left(2 \sqrt{\frac{p(z) - p(y)}{y - z}} \sqrt{\frac{p(y) - p(x)}{x - y}} \right)^2.$$

Kako su svi razlomci u prethodnom izrazu pozitivni, sledi

$$\frac{p(z) - p(y)}{y - z} + \frac{p(y) - p(x)}{x - y} > 2 \sqrt{\frac{p(z) - p(y)}{y - z}} \sqrt{\frac{p(y) - p(x)}{x - y}}.$$

Ako prethodni izraz pomnožimo sa $(y - z)(x - y)$, dobijamo

$$(p(z) - p(y))(x - y) + (p(y) - p(x))(y - z) > 2 \sqrt{(p(z) - p(y))(y - z)} \sqrt{(p(y) - p(x))(x - y)}.$$

Sada ćemo u poslednju nejednakost uvrstiti i sa leve i sa desne strane izraz $(p(z) - p(y))(y - z) + (p(y) - p(x))(x - y)$ i time dobiti

$$(p(z) - p(x))(x - y) + (p(z) - p(x))(y - z) > (\bar{\phi}(x, y) + \bar{\phi}(y, z))^2,$$

odnosno

$$(p(z) - p(x))(x - z) > (\bar{\phi}(x, y) + \bar{\phi}(y, z))^2$$

i konačno

$$(\bar{\phi}(x, z))^2 > (\bar{\phi}(x, y) + \bar{\phi}(y, z))^2 \Rightarrow \bar{\phi}(x, z) > \bar{\phi}(x, y) + \bar{\phi}(y, z). \quad (5.60)$$

Pretpostavimo sada da se krive \widehat{S}_2 i S_2 mogu preseći nakon $v > v_M$, pa zbog toga, neka $(v, u) \in \widehat{S}_2 \cap S_2$. Za $v > v_M > v_L$ imaćemo

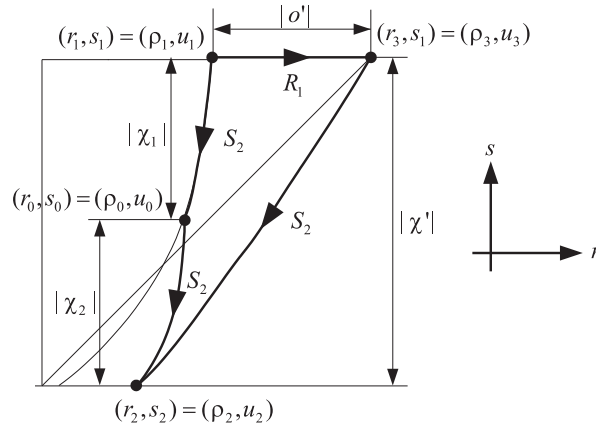
$$u - u_M = -\bar{\phi}(v, v_M), \quad u - u_L = -\bar{\phi}(v, v_L),$$

pa dobijamo

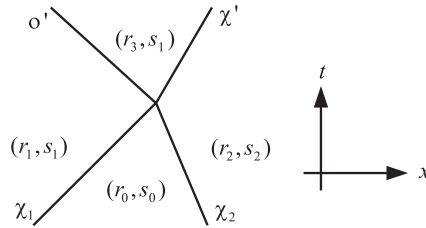
$$\bar{\phi}(v_L, v_M) = u_L - u_M = \bar{\phi}(v, v_L) - \bar{\phi}(v, v_M) > \bar{\phi}(v_M, v_L) = \bar{\phi}(v_L, v_M),$$

na osnovu (5.60), što je kontradikcija. Dakle kriva \widehat{S}_2 ostaje iznad krive S_2 za $v > v_M$. Ovim smo pokazali da je slika 5.22 *b* korektna, a da slika 5.22 *a* nije. Preciznije rečeno, interakcija dva udarna talasa druge familije može dati samo razređujući talas prve familije za kojim sledi udarni talas druge familije. Dakle važi $S_2 + S_2 \rightarrow R_1 + S_2$. Sa slike 5.23, a na osnovu (5.55) zaključujemo da važi

$$|\chi_1 + \chi_2| = |\chi'| \quad , \quad |o'| = \mathcal{O}(1) |\chi_1| |\chi_2| \quad \text{i} \quad |o'| \leq |\chi_1| + |\chi_2|.$$



Slika 5.23: Interakcija S_2 i S_2 u $x-t$ ravni, slučaja 3. (a).



Slika 5.24: Interakcija S_2 i S_2 u $x-t$ ravni, slučaja 3. (a).

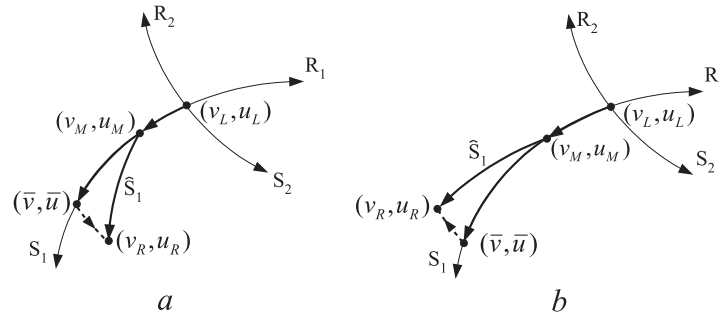
Slučaj 3. (b)

Posmatrajmo interakciju dva udarna talasa prve familije $S_1 + S_1$ u $v-u$ ravni i neka su, opet, stanja (v_L, u_L) , (v_M, u_M) i (v_R, u_R) spojena, sada, udarnim talasima prve familije kao na slici 5.25. Istom tehnikom kao u *slučaju 3. (a)*, dokazaćemo da će se tačka (v_R, u_R) naći u delu ravni kao na slici 5.25 *b*, odnosno, da se ne može desiti da se interakcijom dva udarna talasa prve familije dobiju udarni talas prve i udarni talas druge familije (slika 5.25 *a*).

Sada se kriva udarnog talasa prve familije, koja spaja (v_L, u_L) i (v, u) , predstavlja kao:

$$S_1 : u_{S_1}(v) - u_L = -\sqrt{(v_L - v)(p(v) - p(v_L))} \quad \text{za} \quad v_L > v, u = u_{S_1}(v). \quad (5.61)$$

Pokažimo da udarni talas S_1 (koji kreće iz tačke (v_L, u_L)) ima veću brzinu u tački (v_M, u_M) od brzine udarnog talasa \widehat{S}_1 . Takođe će biti pokazano i da se za $v < v_M$ oba udarna talasa prve familije više neće seći. Time ćemo osigurati da se tačka (v_R, u_R) ipak nalazi u delu ravni u kom

Slika 5.25: Interakcija S_1 i S_1 u $v - u$ ravni: a) nemoguć slučaj, b) jedini mogući slučaj.

su stanja (v_L, u_L) i (\bar{v}, \bar{u}) spojena udarnim talasom prve, a stanja (\bar{v}, \bar{u}) i (v_R, u_R) razređujućim talasom druge familije (slika 5.25 b).

Koristeći (5.61) zaključujemo da važi

$$u'_{S_1}(v) = \frac{-p'(v) - \frac{p(v_L) - p(v)}{v_L - v}}{2\sqrt{-\frac{p(v_L) - p(v)}{v_L - v}}} \quad \text{za } v_L > v,$$

i iz toga sledi

$$u'_{S_1}(v_M) = \frac{-p'(v_M) - \frac{p(v_L) - p(v_M)}{v_L - v_M}}{2\sqrt{-\frac{p(v_L) - p(v_M)}{v_L - v_M}}} \quad \text{za } v_L > v_M.$$

Primenjujući Langranžovu teorem o srednjoj vrednosti, dobijamo da postoji $\tilde{\theta}$, za koje važi

$$\frac{p(v_L) - p(v_M)}{v_L - v_M} = p'(\tilde{\theta}),$$

za $v_M < \tilde{\theta} < v_L$. Zbog toga je

$$u'_{S_1}(v_M) = \frac{-p'(v_M) - p'(\tilde{\theta})}{2\sqrt{-p'(\tilde{\theta})}} \quad \text{za } v_M < \tilde{\theta} < v_L.$$

Kako je funkcija p opadajuća jer je $p' < 0$, tada važi $((-p'(v_M)) - (-p'(v_L)))^2 > 0$, odnosno važi

$$(-p'(v_M))^2 + 2(-p'(v_M))(-p'(\tilde{\theta})) + (-p'(\tilde{\theta}))^2 > 4(-p'(v_M))(-p'(\tilde{\theta})).$$

Prethodni izraz nam omogućava da tvrdimo da je tačno i

$$((-p'(v_M)) + (-p'(\tilde{\theta})))^2 > \left(2\sqrt{-p'(v_M)}\sqrt{-p'(\tilde{\theta})}\right)^2,$$

pa važi

$$u'_{S_1}(v_M) = \frac{-p'(v_M) - p'(\tilde{\theta})}{2\sqrt{-p'(\tilde{\theta})}} > \sqrt{-p'(v_M)}. \quad (5.62)$$

Sada ćemo pokazati da je izvod funkcije koja predstavlja krivu \hat{S}_1 u (v_M, u_M) (slika 5.25) baš $\sqrt{-p'(v_M)}$. Naime, kriva \hat{S}_1 je oblika

$$\hat{S}_1 : u_{\hat{S}_1}(v) - u_M = -\sqrt{(v - v_M)(p(v_M) - p(v))} \quad \text{za } v_M > v,$$

pa je

$$u'_{\hat{S}_1}(v) = \frac{-p'(v) - \frac{p(v_M) - p(v)}{v_M - v}}{2\sqrt{-\frac{p(v_M) - p(v)}{v_M - v}}} \quad \text{za } v_M > v,$$

Kako je

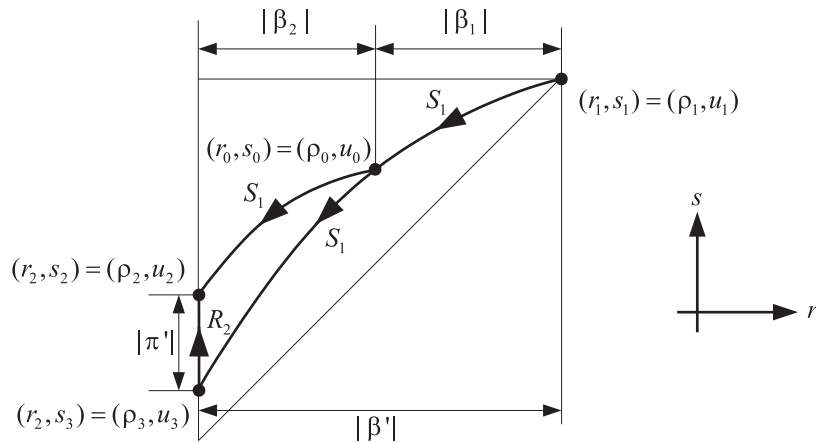
$$\lim_{v \rightarrow v_M} \frac{p(v_M) - p(v)}{v_M - v} = p'(v_M),$$

dobijamo

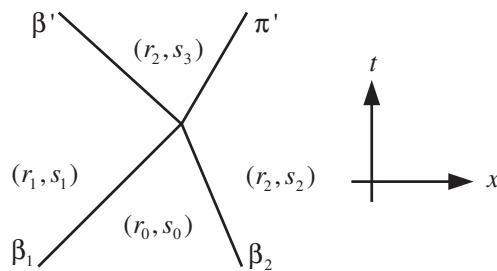
$$u'_{\hat{S}_1}(v_M) = \frac{-p'(v_M) - p'(v_M)}{2\sqrt{-p'(v_M)}} = \sqrt{-p'(v_M)}.$$

Na osnovu (5.62), sledi da funkcija koja predstavlja krivu kriva S_1 ima veći prvi izvod u tački (v_M, u_M) od funkcije koja predstavlja krivu \hat{S}_1 . Ostaje pitanje da li se za $v_M > v$ ove dve krive mogu ponovo preseći. Odgovor je opet negativan što se dokazuje potpuno analogno kao u *slučaju 3. (a)*. Zaključujemo da kriva \hat{S}_1 ostaje iznad krive S_1 za $v_M > v$. Ovim smo pokazali da je ipak slika 5.25 *b* korektna, a da slika 5.25 *a* nije. Tačnije, interakcija dva udarna talasa prve familije prouzrokuje formiranje udarnog talasa prve familije za kojim sledi razređujući talas druge familije. Ovim smo dobili da važi $S_1 + S_1 \rightarrow S_1 + R_2$. Tada sa slike 5.26, a na osnovu (5.55), zaključujemo da važi

$$|\beta_1 + \beta_2| = |\beta'| \quad , \quad |\pi'| = \mathcal{O}(1) |\beta_1| |\beta_2| \quad \text{i} \quad |\pi'| \leq |\beta_1| + |\beta_2|.$$



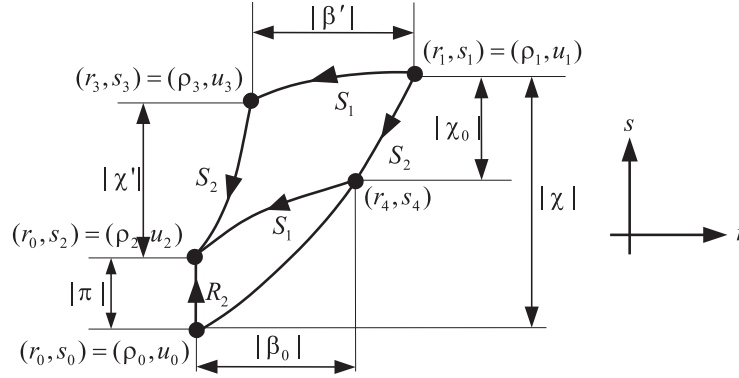
Slika 5.26: Interakcija S_1 i S_1 u $r-s$ ravni, slučaj 3. (b).



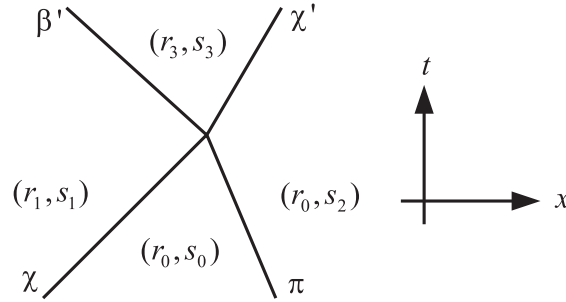
Slika 5.27: Interakcija S_1 i S_1 u $x-t$ ravni, slučaj 3. (b).

Slučaj 4. (a) 1°

Prelazimo na interakcije udarnih i razređujućih talasa istih familija. Neka da se desila interakcija $S_2 + R_2 \rightarrow S_1 + S_2$ (slika 5.29). Važi (slika 5.28)



Slika 5.28: Interakcija S_2 i R_2 u $r - s$ ravni, slučaj 4. (a) 1°.



Slika 5.29: Interakcija S_2 i R_2 u $x - t$ ravni, slučaj 4. (a) 1°.

$$\begin{aligned} |\beta_0| &= r_4 - r_0 = (r_1 - r_0) - (r_1 - r_4) = g_2(|\chi|, \rho_1) - g_2(|\chi_0|, \rho_1) = \eta \\ &= (|\chi| - |\chi_0|) g_2'(\tilde{\theta}, \rho_1) \leq (|\chi| - |\chi_0|) g_2'(|\chi|, \rho_1) \leq g_2'(|\chi|, \rho_1) \xi < \xi, \end{aligned}$$

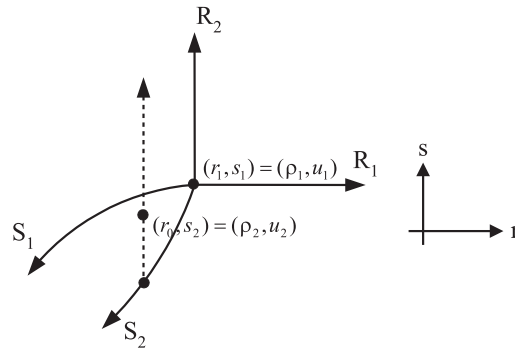
gde je $|\chi_0| < \tilde{\theta} < |\chi|$ i $|\chi| - |\chi_0| = \xi$. Napomenimo da, ako su u interakciji udarni i razređujućii talas druge familije i ako važi

$$s_1 - s_2 > r_1 - r_0 - 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho_2^\varepsilon - \rho_1^\varepsilon), \quad (5.63)$$

tada će rezultat interakcije biti udarni talasi prve i druge familije. Naime, na osnovu (5.9), za krivu S_1 važi

$$s_0 - s = r_0 - r - 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho^\varepsilon - \rho_0^\varepsilon),$$

gde kriva S_1 spaja stanja $(r_0, s_0) = (\rho_0, u_0)$ i $(r, s) = (\rho, u)$. U ovom slučaju potrebno je zameniti (r_0, s_0) sa (r_1, s_1) i (r, s) sa (r_0, s_2) , odnosno, (ρ_0, u_0) sa (ρ_1, u_1) i (ρ, u) sa (ρ_2, u_2) . Kako tačka (r_0, s_2) mora ostati ispod krive S_1 (da bi rezultat interakcije bio udarni talas prve familije za kojim

Slika 5.30: Interakcija S_2 i R_2 u $r - s$ ravni, slučaj 4. (a) 1° .

sledi udarni talas druge familije, slika 5.30), tada mora važiti (5.63).

Slučaj 4. (a) 2°

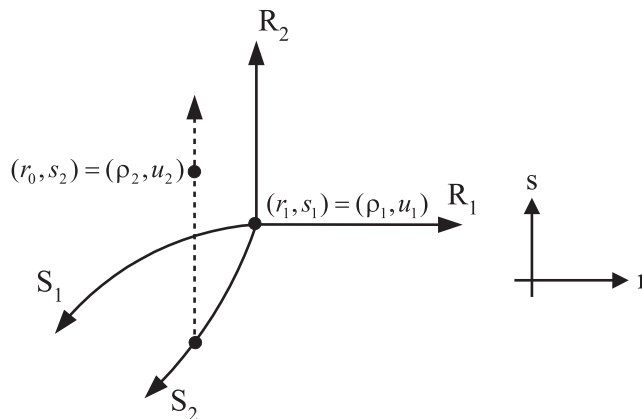
Posmatrajmo sada interakciju $S_2 + R_2 \rightarrow S_1 + R_2$ i sliku 5.32. Jasno je da važi $|\pi'| \leq |\pi|$ i $|\beta'| \leq |\chi|$, a onda i

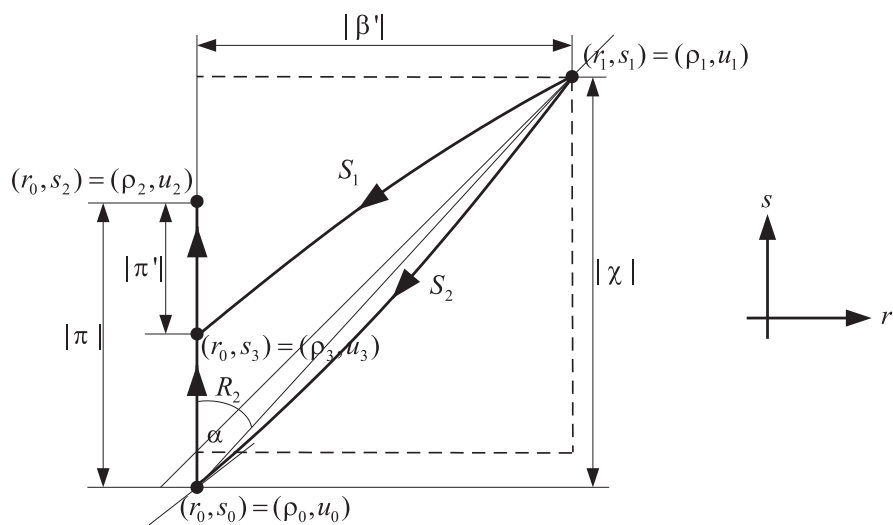
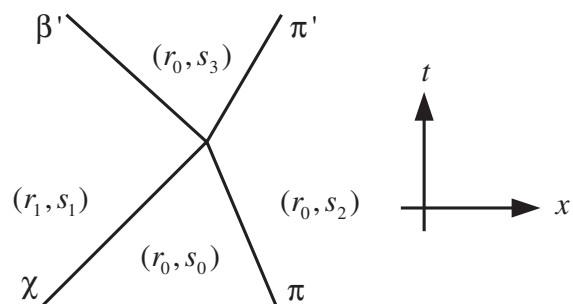
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{|\beta'|}{|\chi|} \leq g'_2(|\chi|, \rho_1) \\ &\Rightarrow \frac{|\chi|}{|\beta'|} \geq \frac{1}{g'_2(|\chi|, \rho_1)}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Ako obeležimo $|\beta'| = \eta$ i $|\chi| = \xi$, tada iz (5.64) sledi $\eta = |\beta'| \leq g'_2(|\chi|, \rho_1)|\chi| = g'_2(|\chi|, \rho_1)\xi < \xi$. Naravno, u ovom slučaju mora važiti

$$s_1 - s_2 < r_1 - r_0 - 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho_2^\varepsilon - \rho_1^\varepsilon),$$

odnosno, tačka (r_0, s_2) mora biti iznad krive S_1 (slika 5.31).

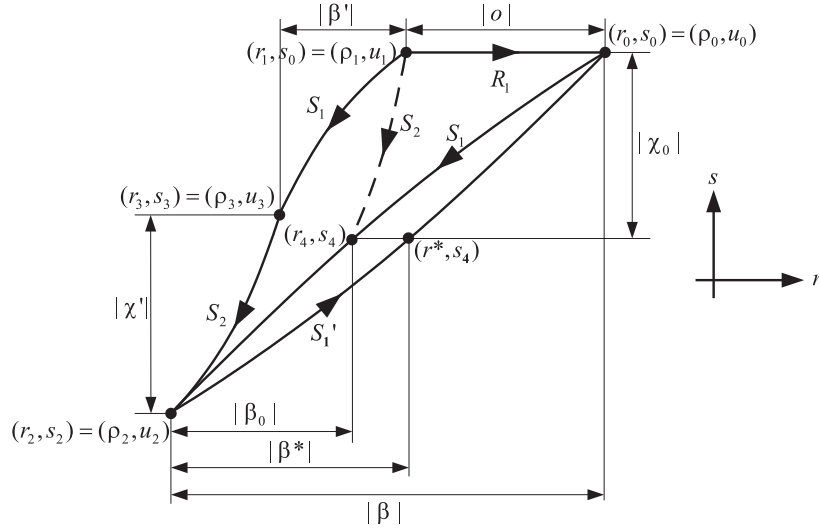
Slika 5.31: Interakcija S_2 i R_2 u $r - s$ ravni, slučaj 4. (a) 2° .

Slika 5.32: Interakcija S_2 i R_2 u $r - s$ ravni, slučaj 4. (a) 2° .Slika 5.33: Interakcija S_2 i R_2 u $x - t$ ravni, slučaj 4. (a) 2° .

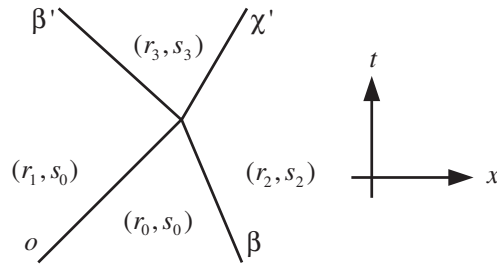
Slučaj 4. (b) 1°

Pretpostavimo da je došlo do interakcije razređujućeg i udarnog talasa prve familije $R_1 + S_1 \rightarrow S_1 + S_2$. U tu svrhu posmatrajmo sliku 5.34. Ako je $|\beta| - |\beta_0| = \xi$ i $|\beta^*| < \tilde{\theta} < |\beta|$, tada je

$$\begin{aligned} |\chi_0| &= (s_0 - s_4) = (s_0 - s_2) - (s_4 - s_2) = g_2(r_0 - r_2, \rho_2) - g_2(r^* - r_2, \rho_2) \\ &= g_2(|\beta|, \rho_2) - g_2(|\beta^*|, \rho_2) = \eta \leq g'_2(\tilde{\theta}, \rho_2)(|\beta| - |\beta^*|) \\ &\leq g'_2(|\beta|, \rho_2)(|\beta| - |\beta^*|) \leq g'_2(|\beta|, \rho_2)(|\beta| - |\beta_0|) = g'_2(|\beta|, \rho_2)\xi < \xi. \end{aligned}$$



Slika 5.34: Interakcija R_1 i S_1 u $r - s$ ravni, slučaj 4. (b) 1°.



Slika 5.35: Interakcija R_1 i S_1 u $x - t$ ravni, slučaj 4. (b) 1°.

Sada će, ako u interakciji budu razređujući i udarni talas prve familije, važiti i

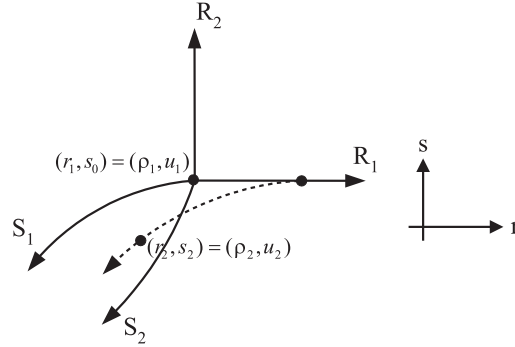
$$s_0 - s_2 < r_1 - r_2 + 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho_1^\varepsilon - \rho_2^\varepsilon), \quad (5.65)$$

da bi rezultat interakcije bio udarni talas prve familije za kojim sledi udarni talas druge familije. Zaista, na osnovu (5.10), za krivu S_2 važi

$$s_0 - s = r_0 - r + 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho_0^\varepsilon - \rho^\varepsilon),$$

gde kriva S_2 spaja stanja $(r_0, s_0) = (\rho_0, u_0)$ i $(r, s) = (\rho, u)$. Sada moramo zameniti (r_0, s_0) sa (r_1, s_0) i $(r, s) = (r_2, s_2)$, odnosno, (ρ_0, u_0) sa (ρ_1, u_1) i (ρ, u) sa (ρ_2, u_2) . Kako tačka (r_2, s_2) mora

ostati levo od krive S_2 (da bi rezultat interakcije bio udarni talas prve familije za kojim sledi udarni talas druge familije, slika 5.36), tada dobijamo (5.65).



Slika 5.36: Interakcija R_1 i S_1 u $r - s$ ravni, slučaj 4. (b) 1° .

Slučaj 4. (b) 2°

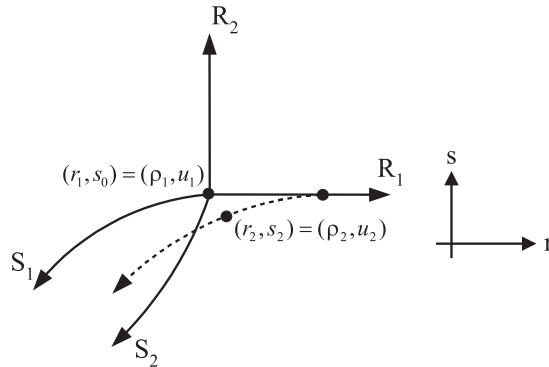
Posmatrajmo interakciju $R_1 + S_1 \rightarrow R_1 + S_2$ i sliku 5.38. Jasno je da važi $|o'| \leq |o|$ i $|\chi'| \leq |\beta|$. Takođe važi i

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{|\chi'|}{|\beta|} \leq g'_1(|\beta|, \rho_0) \\ \Rightarrow \frac{|\beta|}{|\chi'|} &\geq \frac{1}{g'_1(|\beta|, \rho_0)}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

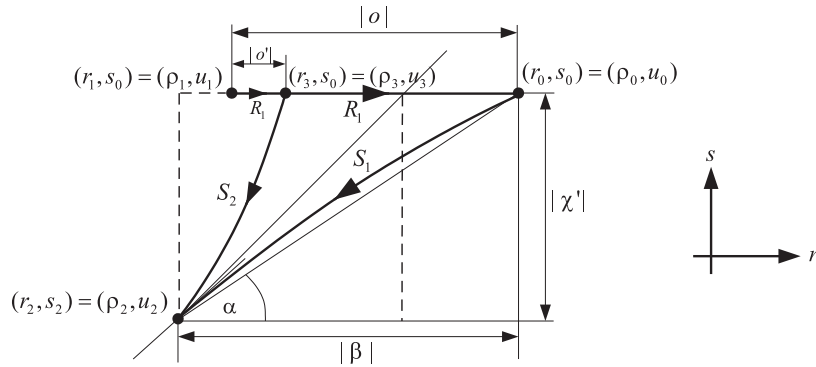
Ako obeležimo $|\chi'| = \eta$ i $|\beta| = \xi$, tada iz (5.66) sledi $\eta = |\chi'| \leq g'_1(|\beta|, \rho_0)|\beta| = g'_1(|\beta|, \rho_0)\xi < \xi$. U ovom slučaju mora da važi

$$s_0 - s_2 > r_1 - r_2 + 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho_1^\varepsilon - \rho_2^\varepsilon),$$

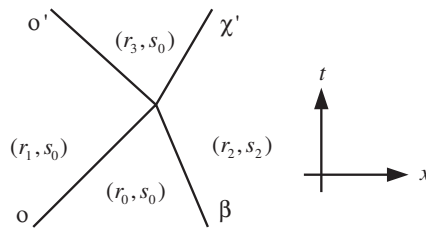
odnosno, tačka (r_2, s_2) mora biti desno krive S_2 (slika 5.37).



Slika 5.37: Interakcija R_1 i S_1 u $r - s$ ravni, slučaj 4. (b) 2° .



Slika 5.38: Interakcija R_1 i S_1 u $r - s$ ravni, slučaj 4. (b) 2° .

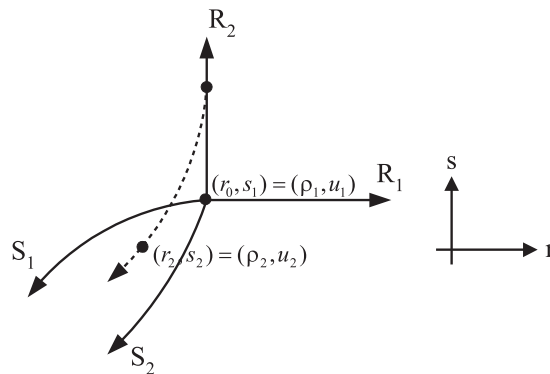


Slika 5.39: Interakcija R_1 i S_1 u $x - t$ ravni, slučaj 4. (b) 2° .

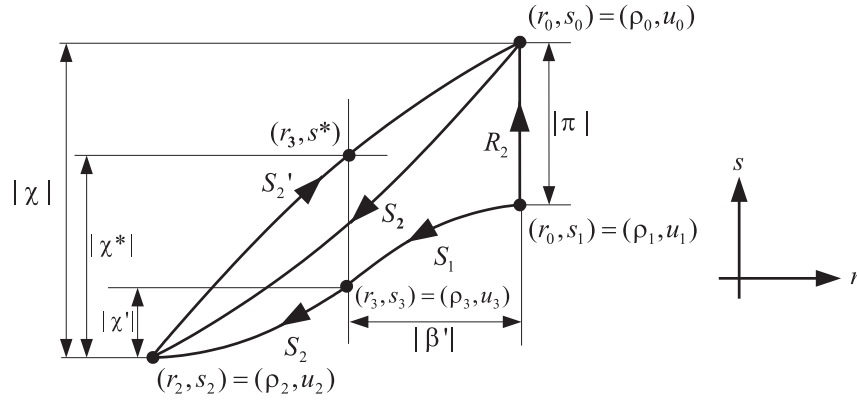
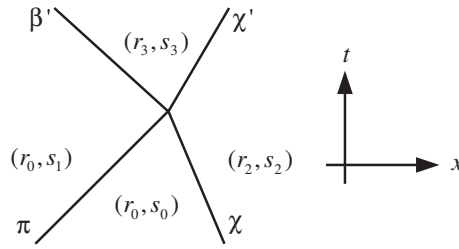
Slučaj 5. (a) 1°

I dalje posmatramo interakciju razređujućeg i udarnog talasa istih familija, odnosno $R_2 + S_2 \rightarrow S_1 + S_2$ (videti sliku 5.41). Ako je $|\chi| - |\chi^*| = \xi$ i $|\chi^*| < \tilde{\theta} < |\chi|$, tada važi

$$\begin{aligned} |\beta'| &= (r_0 - r_3) = (r_0 - r_2) - (r_3 - r_2) = g_1(s_0 - s_2, \rho_2) - g_1(s^* - s_2, \rho_2) \\ &= g_1(|\chi|, \rho_2) - g_1(|\chi^*|, \rho_2) = \eta = g'_1(\tilde{\theta}, \rho_2)(|\chi| - |\chi^*|) \\ &\leq g'_1(|\chi|, \rho_2)(|\chi| - |\chi^*|) \leq g'_1(|\chi|, \rho_2)(|\chi| - |\chi'|) = g'_1(|\chi|, \rho_2)\xi < \xi. \end{aligned}$$



Slika 5.40: Interakcija R_2 i S_2 u $r - s$ ravni, slučaj 5. (a) 1° .

Slika 5.41: Interakcija R_2 i S_2 u $r - s$ ravni, slučaj 5. (a) 1° .Slika 5.42: Interakcija R_2 i S_2 u $x - t$ ravni, slučaj 5. (a) 1° .

Istom tehnikom ako u slučaju 4. (a) 1° , pokazuje se da u ovom slučaju mora da važi

$$s_1 - s_2 > r_0 - r_2 - 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho_2^\varepsilon - \rho_1^\varepsilon),$$

odnosno, tačka (r_2, s_2) mora biti ispod krive S_1 (slika 5.40).

Slučaj 5. (a) 2°

Posmatrajmo interakciju $R_2 + S_2 \rightarrow S_1 + R_2$ i sliku 5.44. Jasno je da važi $|\pi'| \leq |\pi|$ i

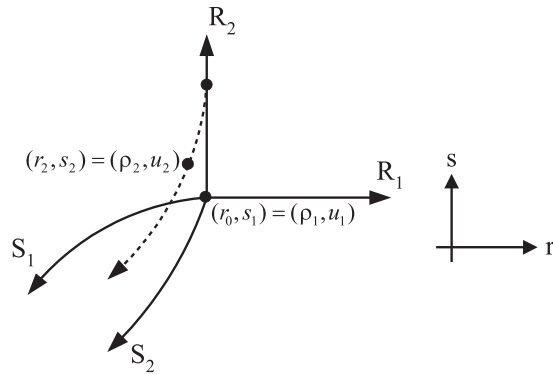
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{|\beta'|}{|\chi|} \leq g'_2(|\chi|, \rho_0) \\ &\Rightarrow \frac{|\chi|}{|\beta'|} \geq \frac{1}{g'_2(|\chi|, \rho_0)}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Ako je $|\beta'| = \eta$ i $|\chi| = \xi$, tada iz (5.67), sledi $\eta = |\beta'| \leq g'_2(|\chi|, \rho_0)|\chi| = g'_2(|\chi|, \rho_0)\xi < \xi$.

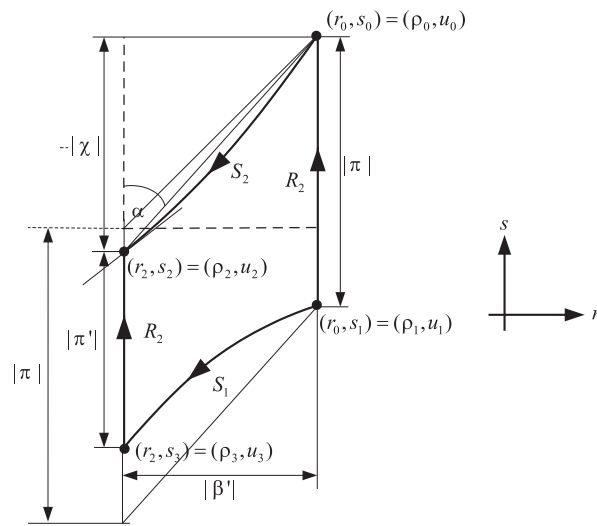
U ovom slučaju mora da važi

$$s_1 - s_2 < r_1 - r_0 - 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho_2^\varepsilon - \rho_1^\varepsilon),$$

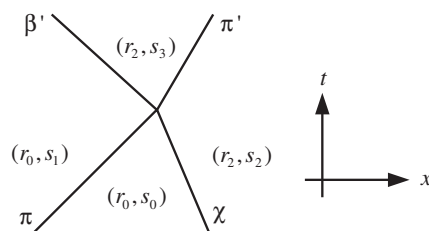
odnosno, tačka (r_2, s_2) mora biti iznad krive S_1 (slika 5.43).



Slika 5.43: Interakcija R_2 i S_2 u $r - s$ ravni, slučaj 5. (a) 2° .



Slika 5.44: Interakcija R_2 i S_2 u $r - s$ ravni, slučaj 5. (a) 2° .

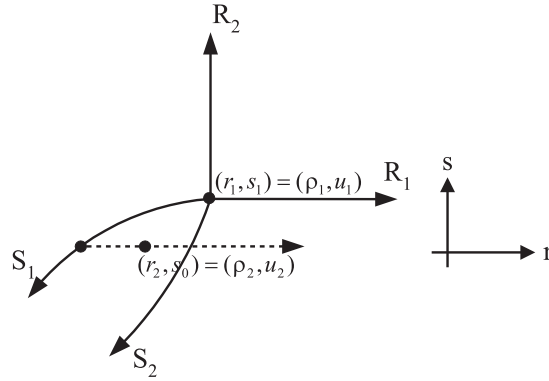


Slika 5.45: Interakcija R_2 i S_2 u $x - t$ ravni, slučaj 5. (a) 2° .

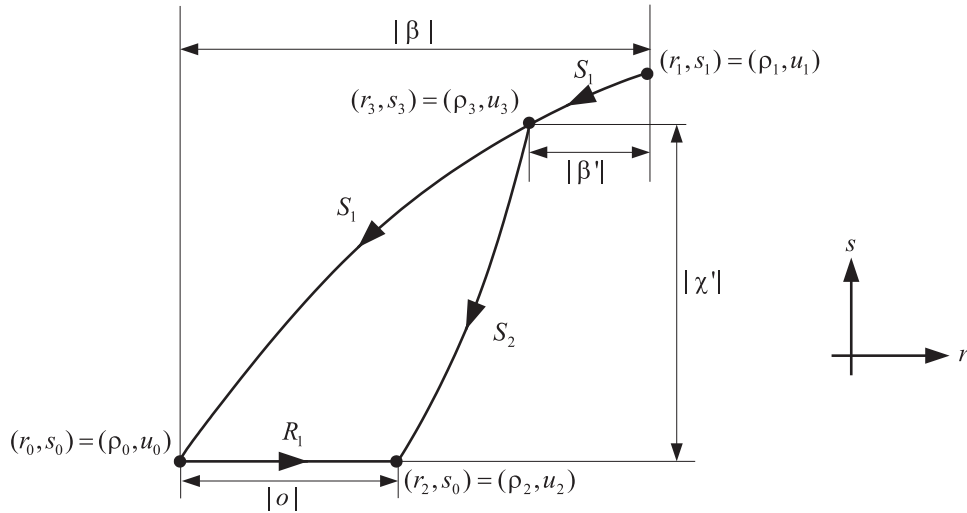
Slučaj 5. (b) 1°

Uočimo interakciju $S_1 + R_1 \rightarrow S_1 + S_2$ i sliku 5.47. Ako je $|\beta| - |\beta'| = \xi$ i $|\beta'| < \tilde{\theta} < |\beta|$, tada važi

$$\begin{aligned} |\chi'| &= (s_3 - s_0) = (s_1 - s_0) - (s_1 - s_3) \\ &= g_1(|\beta|, \rho_1) - g_1(|\beta'|, \rho_1) = \eta = g'_1(\tilde{\theta}, \rho_1)(|\beta| - |\beta'|) \\ &\leq g'_1(|\beta|, \rho_1)(|\beta| - |\beta'|) = g'_1(|\beta|, \rho_1) \xi < \xi. \end{aligned}$$



Slika 5.46: Interakcija S_1 i R_1 u $r - s$ ravni, slučaj 5. (b) 1°.

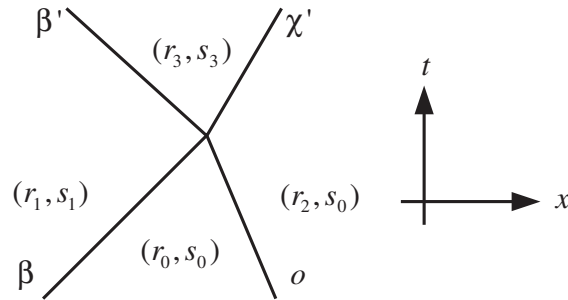


Slika 5.47: Interakcija S_1 i R_1 u $r - s$ ravni, slučaj 5. (b) 1°.

Koristeći istu tehniku kao u slučaju 4. (b) 1°, pokazuje se da u ovom slučaju mora da važi i

$$s_0 - s_1 > r_2 - r_1 + 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho_1^\varepsilon - \rho_2^\varepsilon),$$

odnosno, tačka (r_2, s_0) mora biti levo od krive S_2 (slika 5.46).

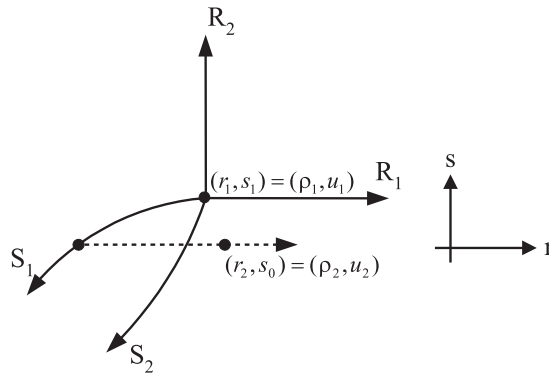
Slika 5.48: Interakcija S_1 i R_1 u $x-t$ ravni, slučaj 5. (b) 1°.

Slučaj 5. (b) 2°

Posmatrajmo i interakciju $S_1 + R_1 \rightarrow R_1 + S_2$ i sliku 5.50. Jasno je da važi $|o'| \leq |o|$, $|\chi'| \leq |\beta|$ i

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{|\chi'|}{|\beta|} \leq g'_1(|\beta|, \rho_1) \\ \Rightarrow \frac{|\beta|}{|\chi'|} &\geq \frac{1}{g'_1(|\beta|, \rho_1)}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Ako je $|\chi'| = \eta$ i $|\beta| = \xi$, tada iz (5.68) sledi $\eta = |\chi'| \leq g'_1(|\beta|, \rho_1)|\beta| = g'_1(|\beta|, \rho_1)\xi < \xi$.

Slika 5.49: Interakcija S_1 i R_1 u $r-s$ ravni, slučaj 5. (b) 2°.

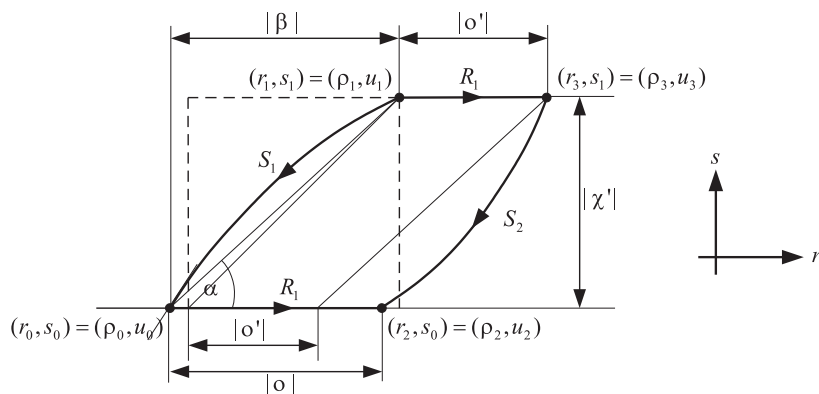
Istom tehnikom ako u slučaju 4. (b) 2°, pokazujemo da važi i

$$s_0 - s_1 < r_2 - r_1 + 2 \frac{\kappa \sqrt{\gamma}}{\varepsilon} (\rho_1^\varepsilon - \rho_2^\varepsilon)$$

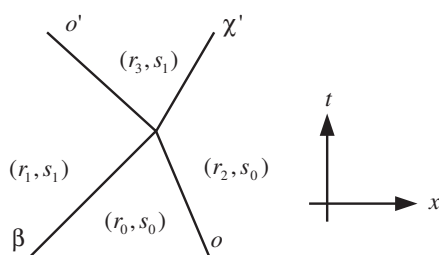
odnosno, tačka (r_2, s_0) mora biti desno od krive S_2 (slika 5.49).

Slučaj 6.

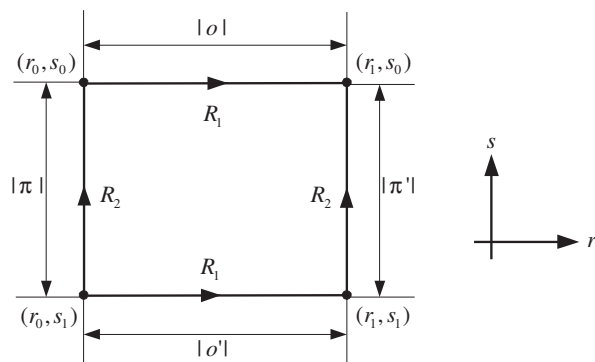
I na kraju, posmatrajmo interakciju $R_2 + R_1 \rightarrow R_1 + R_2$. Sa slike 5.52 vidimo da važi $|o'| = |o|$ i $|\pi'| = |\pi|$. Ovim je teorema dokazana. \square



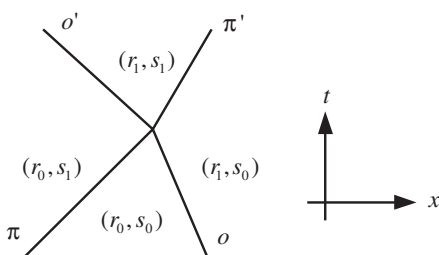
Slika 5.50: Interakcija S_1 i R_1 u $r - s$ ravni, slučaj 5. (b) 2° .



Slika 5.51: Interakcija S_1 i R_1 u $x - t$ ravni, slučaj 5. (b) 2° .



Slika 5.52: Interakcija R_2 i R_1 u $r - s$ ravni.



Slika 5.53: Interakcija R_2 i R_1 u $x - t$ ravni.

5.4 Konvergencija aproksimativnog rešenja

U glavi 4, pri oceni totalne varijacije rešenja Rimanovog problema zakona održanja, definisane su funkcionele koje zavise od snaga razređujućih, udarnih i nefizičkih talasa. U ovom poglavlju, za početak, definišimo funkcionele koje će zavisiti samo od snage udarnih talasa.

Definicija 5.4.1 Neka za Lipsicovu krivu J definisanu sa $t = T(x)$, $x \in \mathbb{R}$ važi $|T'(x)| < 1/\hat{\lambda}$, $\hat{\lambda} > \max_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\}$. Sa $S_j(J)$ obeležavamo skup j -udarnih talasa koji presecaju J i neka je $S(J) = S_1(J) \cup S_2(J)$. Definišemo

$$L^-(J) = \sum_{\alpha \in S(J)} |\alpha|, \quad Q(J) = \sum_{\beta \in S_1(J), \chi \in S_2(J)} |\beta \chi|, \quad \beta, \chi \text{ prilazeći talasi.}$$

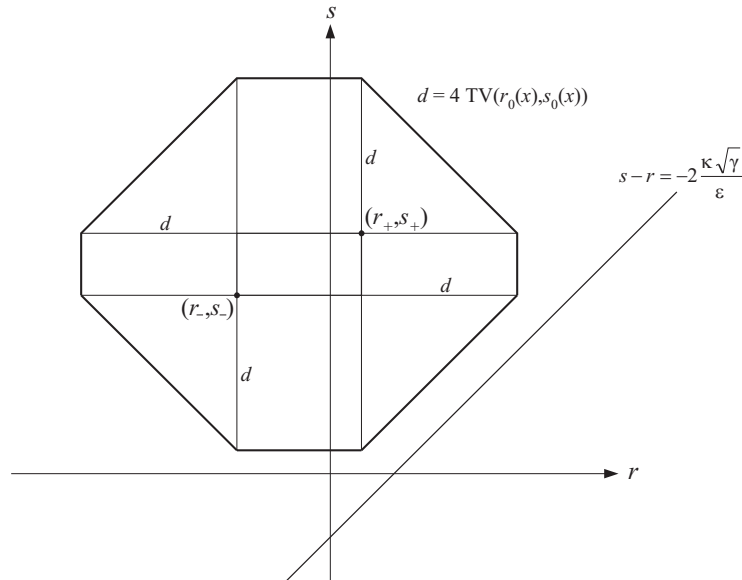
Sa $L^+(J)$ obeležimo sumu snaga razređujućih talasa koji presecaju J , sa O obeležavamo krivu u faznoj ravni koja leži između $t = 0$ i vremena prve interakcije dva talasa, dok sa $L^-(O)$, odnosno $L^+(O)$, sumu snaga udarnih, odnosno razređujućih talasa koji presecaju O , redom.

Napomena 5.4.2 Kao što smo definisali pojmove neposrednog naslednika i naslednika (poglavljje 3.3), pisaćemo $J_2 > J_1$ ako je $T_1 \neq T_2$ i $T_2(x) \geq T_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Neka je $F(J) = L^-(J) + K Q(J)$ za neku konstantu $K = K(\varepsilon) > 0$ koja će biti kasnije precizirana, a za sada je samo fiksirana u tekstu, $(r_{\mp}, s_{\mp}) = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} (r_0(x), s_0(x))$ i neka je sa W obeležen region (slika 5.54)

$$W = \{(r, s) : \text{dist}((r, s), (r_-, s_-)) + \text{dist}((r, s), (r_+, s_+)) \leq 8 \text{TV}(r_0(x), s_0(x)) + \text{dist}((r_-, s_-), (r_+, s_+))\},$$

gde je $\text{dist}((r_1, s_1), (r_2, s_2)) = |r_1 - r_2| + |s_1 - s_2|$. Biramo ε tako da važi $W \cap \{\rho = 0\} = \emptyset$ i da za takvo ε važe teoreme 5.2.2, 5.2.3 i 5.3.2. Kasnije će biti objašnjeno zašto je na slici 5.54 uzeto $d = 4 \text{TV}(r_0(x), s_0(x))$.



Slika 5.54: Region W .

Lema 5.4.3

$$Q(O) \leq L^-(O)^2. \quad (5.69)$$

Dokaz. Data nejednakost sledi direktno iz definicije. \square

Lema 5.4.4 Ako je $KL^-(O) \leq 1$, tada važi $F(O) \leq 2L^-(O)$.

Dokaz. Zbog (5.69) važi

$$\begin{aligned} F(O) &= L^-(O) + KQ(O) \\ &\leq L^-(O) + KL^-(O)^2 \\ &= L^-(O)(1 + KL^-(O)) \\ &\leq 2L^-(O). \end{aligned}$$

\square

Sada dajemo i ocenu za $L^+(O)$.

Lema 5.4.5 Važi

$$L^-(O) \leq \text{TV}(r_0(x), s_0(x)) \quad i \quad L^+(O) \leq \text{TV}(r_0(x), s_0(x)).$$

Dokaz. Neka su x_l tačke gde početni uslov ima prekid, $1 \leq l \leq N_0$. Neka $x_l \in \{x_i, x_j, x_k, x_m\}$ gde x_i predstavlja sve tačke u kojima se rešenje Rimanovog problema sastoji od S_1 za kojim sledi S_2 , x_j - rešenje Rimanovog problema se sastoji od R_1 i R_2 , x_k - rešenje Rimanovog problema se sastoji od S_1 i R_2 i x_m - rešenje Rimanovog problema se sastoji od R_1 i S_2 . Rešavajući Rimanov problem u svakoj tački x_l , dobijamo da je levo stanje (r_-, s_-) spojeno sa srednjim stanjem (r, s) talasom prve familije, a da je srednje stanje (r, s) spojeno sa desnim stanjem (r_+, s_+) talasom druge familije. Sa $L_{a,\alpha}^\pm(O)$ označićemo snagu talasa α koji kreće iz tačke a , gde se znak $-$ uzima ako je α udarni, a znak $+$ ako je α razređujući talas (navedeni talasi presecaju krivu O). Ako sa TV_a označimo totalnu varijaciju rešenja Rimanovog problema nastalog u tački a , tada važi:

$$\begin{aligned} \text{TV}_{x_i}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) &= |r_+ - r_-| + |s_+ - s_-| \\ &= (r_- - r_+) + (s_- - s_+) \\ &\geq (r_- - r) + (s - s_+) \\ &= L_{x_i, S_1}^-(O) + L_{x_i, S_2}^-(O), \end{aligned} \quad (5.70)$$

jer u ovom slučaju važi $r_- \geq r \geq r_+$ i $s_- \geq s \geq s_+$. Naime, za krivu S_1 važi $s_- - s = g_1(r_- - r, \rho_0)$, gde je $r_- \geq r$, $(r_-, s_-) = (\rho_0, u_0)$ i $g_1'(r_- - r, \rho_0) \geq 0$ (videti teoremu 5.1.4). Zbog toga je i $s_- \geq s$ (g_1 je neopadajuća funkcija). Dalje, za krivu S_2 važi $r - r_+ = g_2(s - s_+, \rho)$, gde je $s \geq s_+$, $(r, s) = (\rho, u)$ i $g_2'(s - s_+, \rho) \geq 0$ (teorema 5.1.4). Zato je $r \geq r_+$.

Dalje je

$$\begin{aligned} \text{TV}_{x_j}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) &= |r_+ - r_-| + |s_+ - s_-| \\ &= (r - r_-) + (s_+ - s) \\ &= L_{x_j, R_1}^+(O) + L_{x_j, R_2}^+(O), \end{aligned} \quad (5.71)$$

jer je $r_+ = r \geq r_-$ i $s_+ \geq s = s_-$. Preciznije, R_1 kriva definisana je za $r \geq r_-$ i $s = s_-$, a R_2 za $s_+ \geq s$ i $r_+ = r$ (napomena 5.1.7).

Važi i

$$\begin{aligned} \text{TV}_{x_k}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) &= |r_+ - r_-| + |s_+ - s_-| \\ &= |r - r_-| + |s_+ - s_-| \\ &\geq |s_- - s| + |s_+ - s_-| \\ &\geq |s_+ - s| \\ &= L_{x_k, R_2}^+(O) \end{aligned} \quad (5.72)$$

i

$$\begin{aligned} \text{TV}_{x_m}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) &= |r_+ - r_-| + |s_+ - s_-| \\ &\geq |r_+ - r_-| \\ &= |r_- - r| \\ &= L_{x_m, S_1}^-(O), \end{aligned} \quad (5.73)$$

zbog toga što je $r_- \geq r = r_+$ i $r_- - r \geq s_- - s \geq 0$. Naime, za S_1 krivu, kao što smo već videli, važi $r_- \geq r$ ali i $r_- - r \geq s_- - s \geq 0$ na osnovu (5.9). Za R_2 krivu važi $r = r_+$.

Takođe je tačno i

$$\begin{aligned} \text{TV}_{x_m}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) &= |r_+ - r_-| + |s_+ - s_-| \\ &= |r_+ - r_-| + |s_+ - s| \\ &\geq |r_+ - r_-| + |r - r_+| \\ &\geq |r - r_-| \\ &= L_{x_m, R_1}^+(O) \end{aligned} \quad (5.74)$$

i

$$\begin{aligned} \text{TV}_{x_m}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) &= |r_+ - r_-| + |s_+ - s_-| \\ &= |r_+ - r_-| + |s_+ - s| \\ &\geq |s_+ - s| \\ &= L_{x_m, S_2}^-(O), \end{aligned} \quad (5.75)$$

zato što je $s_- = s \geq s_+$ i $s - s_+ \geq r - r_+ \geq 0$. Naime, za R_1 krivu važi $s_- = s$, a za krivu S_2 i $s \geq s_+$ i $s - s_+ \geq r - r_+ \geq 0$ na osnovu (5.10).

Na osnovu (5.70, 5.73, 5.75) sledi

$$\begin{aligned} L^-(O) &= \sum_{x_i} L_{x_i, S_1}^-(O) + \sum_{x_i} L_{x_i, S_2}^-(O) + \sum_{x_k} L_{x_k, S_1}^-(O) + \sum_{x_m} L_{x_m, S_2}^-(O) \\ &\leq \sum_{x_n \in \{x_i, x_k, x_m\}} \text{TV}_{x_n}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) \\ &\leq \sum_{x_l} \text{TV}_{x_l}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) = \text{TV}(r_0(x), s_0(x)). \end{aligned}$$

Analogno, iz (5.71, 5.72, 5.74) sledi

$$\begin{aligned} L^+(O) &= \sum_{x_j} L_{x_j, R_1}^+(O) + \sum_{x_j} L_{x_j, R_2}^+(O) + \sum_{x_k} L_{x_k, R_2}^+(O) + \sum_{x_m} L_{x_m, R_1}^+(O) \\ &\leq \sum_{x_n \in \{x_j, x_k, x_m\}} \text{TV}_{x_n}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) \\ &\leq \sum_{x_l} \text{TV}_{x_l}((r_+, s_+), (r_-, s_-)) = \text{TV}(r_0(x), s_0(x)). \end{aligned}$$

Ovim je dokaz leme kompletiran. □

Uniformna ograničenost za $F(J)$ sledi iz naredne teoreme, u čijem će dokazu biti korišćena posledica 2.37, zbog koje talasi naznačene familije posle interakcije imaju iste prilazeće talase kao i talasi te familije pre interakcije.

Teorema 5.4.6 ([1]) *Ako je $KF(O) \leq \min\{2, \frac{1-\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}\}$, tada je $F(J_2) \leq F(J_1)$ za $J_2 > J_1$. Odnosno, $L^-(J) \leq F(O)$. Napomenimo da će u dokazu biti definisano $\tilde{\delta}$.*

Dokaz. Koristićemo iste oznake kao u teoremi 5.3.2. Naime, sa β obeležavamo udarni talas S_1 pre interakcije, a nakon interakcije β' . Slično, sa χ obeležavamo udarni talas S_2 pre interakcije, a nakon interakcije χ' . Isto tako i za razređujuće talase. Razređujući talas R_1 pre interakcije je o , a nakon interakcije o' . Razređujući talas R_2 pre interakcije obeležavamo π , a nakon interakcije π' .

Slučaj 1.

Posmatrajmo prvo interakciju $S_2 + S_1 \rightarrow S_1 + S_2$. Tada će važiti

$$L^-(J_2) = \sum |\alpha_k| + |\beta'| + |\chi'|, \quad L^-(J_1) = \sum |\alpha_k| + |\beta| + |\chi|,$$

gde su α_k udarni talasi različiti od β, χ, β' i χ' . Za potencijale prilazećih talasa koji presecaju krive J_2 i J_1 važiće

$$\begin{aligned} Q(J_2) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi'| + \sum |\beta'| |\chi_l| \\ Q(J_1) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi| + \sum |\beta| |\chi_l| + |\beta| |\chi|, \end{aligned}$$

gde su sada umesto α_k posmatrani β_k i χ_l udarni talasi koji su prilazeći talasima χ i β (a time i talasima χ' i β'), redom. Tada je

$$\begin{aligned} F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\ &= |\beta'| - |\beta| + |\chi'| - |\chi| \\ &\quad + K(\sum |\beta_k| (|\chi'| - |\chi|) + \sum |\chi_l| (|\beta'| - |\beta|) - |\beta| |\chi|). \end{aligned}$$

Sada ćemo iskoristiti ono što znamo o razlici snaga udarnih talasa pre i posle interakcije. Naime, na osnovu teoreme 5.3.2, *slučaj 1. (a)*, važi

$$\begin{aligned} F(J_2) - F(J_1) &\leq 2C\varepsilon|\beta||\chi| + KC\varepsilon|\beta||\chi|(\sum |\beta_k| + \sum |\chi_l|) - K|\beta||\chi| \\ &\leq 2C\varepsilon|\beta||\chi| + KC\varepsilon|\beta||\chi|F(J_1) - K|\beta||\chi| \\ &= (2C\varepsilon - K)|\beta||\chi| + KC\varepsilon|\beta||\chi|F(J_1) \\ &\leq (2C\varepsilon - K)|\beta||\chi| + KC\varepsilon|\beta||\chi|F(O) \\ &= C\varepsilon|\beta||\chi|(2 - \frac{K}{C\varepsilon} + KF(O)) \\ &\leq C\varepsilon|\beta||\chi|(4 - \frac{K}{C\varepsilon}) \end{aligned}$$

jer je, po pretpostavci, $KF(O) \leq 2$. Ako izaberemo da je $K = 4C\varepsilon$, tada je

$$F(J_2) - F(J_1) \leq 0.$$

Od sada, uvek će važiti $K = 4C\varepsilon$ i to ćemo koristiti u pogodnom momentu. Nastavimo dalje se dokazom teoreme.

Ako u teoremi 5.3.2 važi *slučaj 1. (b)*, odnosno kada je snaga udarnog talasa prve familije posle interakcije manja od snage udarnog talasa iste familije pre interakcije, imaćemo da je

$$|\beta'| = |\beta| - \xi, \quad |\chi'| - |\chi| \leq C\varepsilon|\beta||\chi| + \eta.$$

Sada je ocena razlike posmatranih funkcionala nešto komplikovanija. Naime, važi

$$\begin{aligned}
F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\
&\leq \eta - \xi + C\varepsilon|\beta||\chi| + K(\sum |\chi_l|(-\xi) + \sum |\beta_k|C\varepsilon|\beta||\chi| + \sum |\beta_k|\eta) - K|\beta||\chi| \\
&= \eta - \xi + C\varepsilon|\beta||\chi| - K|\beta||\chi|/2 + K(\sum |\chi_l|(-\xi) + \sum |\beta_k|C\varepsilon|\beta||\chi| + \sum |\beta_k|\eta) \\
&\quad - K|\beta||\chi|/2 \\
&\leq \eta - \xi + C\varepsilon|\beta||\chi| - 2C\varepsilon|\beta||\chi| + 4C\varepsilon|\beta||\chi|C\varepsilon\sum |\beta_k| + K\sum |\beta_k|\eta - 2C\varepsilon|\beta||\chi| \\
&= \eta - \xi + 2C\varepsilon(2C\varepsilon\sum |\beta_k| - 1)|\beta||\chi| + K\sum |\beta_k|\eta - C\varepsilon|\beta||\chi| \\
&\leq \eta - \xi + 2C\varepsilon(2C\varepsilon F(J_1) - 1)|\beta||\chi| + K\sum |\beta_k|\eta \\
&\leq \eta - \xi + 2C\varepsilon(2C\varepsilon F(O) - 1)|\beta||\chi| + K\sum |\beta_k|\eta \\
&\leq \eta - \xi + K\sum |\beta_k|\eta
\end{aligned}$$

jer je osnovu pretpostavke u teoremi $C\varepsilon F(O) \leq 1/2$. Dalje, na osnovu teoreme 5.3.2, *slučaj 1. (b)*, ocenjujemo dalje razliku funkcionala kao što sledi.

$$\begin{aligned}
F(J_2) - F(J_1) &\leq g'_1(|\beta|, \rho_0)\xi - \xi + K\sum |\beta_k|g'_1(|\beta|, \rho_0)\xi \\
&= \xi g'_1(|\beta|, \rho_0) \left(1 - \frac{1}{g'_1(|\beta|, \rho_0)} + K\sum |\beta_k|\right) \\
&\leq \xi g'_1(|\beta|, \rho_0) \left(1 - \frac{1}{g'_1(|\beta|, \rho_0)} + KF(O)\right) \\
&= \xi g'_1(|\beta|, \rho_0) \left(KF(O) - \frac{1 - g'_1(|\beta|, \rho_0)}{g'_1(|\beta|, \rho_0)}\right) \\
&\leq \xi g'_1(|\beta|, \rho_0) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}\right) \leq 0
\end{aligned}$$

za $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, gde je $\tilde{\delta} = \sup_{|\beta|} g'_1(|\beta|, \rho_0)$.

Ako važi *slučaj 1. (c)* u teoremi 5.3.2, imamo da je

$$|\chi'| = |\chi| - \xi, \quad |\beta'| - |\beta| \leq C\varepsilon|\chi||\beta| + \eta.$$

Analogno kao u slučaju 1. (b) važiće

$$\begin{aligned}
F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\
&\leq \eta - \xi + C\varepsilon|\beta||\chi| + K(\sum |\beta_k|(-\xi) + \sum |\chi_l|C\varepsilon|\beta||\chi| + \sum |\chi_l|\eta) - K|\beta||\chi| \\
&= \eta - \xi + C\varepsilon|\beta||\chi| - K|\beta||\chi|/2 + K(\sum |\beta_k|(-\xi) + \sum |\chi_l|C\varepsilon|\beta||\chi| + \sum |\chi_l|\eta) \\
&\quad - K|\beta||\chi|/2 \\
&\leq \eta - \xi + C\varepsilon|\beta||\chi| - 2C\varepsilon|\beta||\chi| + 4C\varepsilon|\beta||\chi|C\varepsilon\sum |\chi_l| + K\sum |\chi_l|\eta - 2C\varepsilon|\beta||\chi| \\
&= \eta - \xi + 2C\varepsilon(2C\varepsilon\sum |\chi_l| - 1)|\beta||\chi| + K\sum |\chi_l|\eta - C\varepsilon|\beta||\chi| \\
&\leq \eta - \xi + 2C\varepsilon(2C\varepsilon F(J_1) - 1)|\beta||\chi| + K\sum |\chi_l|\eta \\
&\leq \eta - \xi + 2C\varepsilon(2C\varepsilon F(O) - 1)|\beta||\chi| + K\sum |\chi_l|\eta \\
&\leq \eta - \xi + K\sum |\chi_l|\eta
\end{aligned}$$

jer je $C\varepsilon F(O) \leq 1/2$. Ponovo, na osnovu teoreme 5.3.2, slučaj 1. (c), važiće

$$\begin{aligned}
F(J_2) - F(J_1) &\leq g'_1(|\chi|, \rho_0)\xi - \xi + K\sum |\chi_l|g'_1(|\chi|, \rho_0)\xi \\
&= \xi g'_1(|\chi|, \rho_0) \left(1 - \frac{1}{g'_1(|\chi|, \rho_0)} + K\sum |\chi_l|\right) \\
&\leq \xi g'_1(|\chi|, \rho_0) \left(1 - \frac{1}{g'_1(|\chi|, \rho_0)} + KF(O)\right) \\
&= \xi g'_1(|\chi|, \rho_0) \left(KF(O) - \frac{1 - g'_1(|\chi|, \rho_0)}{g'_1(|\chi|, \rho_0)}\right) \\
&\leq \xi g'_1(|\chi|, \rho_0) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}\right) \leq 0
\end{aligned}$$

pošto je po pretpostavci $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, gde je $\tilde{\delta} = \sup_{|\chi|} g'_1(|\chi|, \rho_0)$.

Dakle, na osnovu prethodne diskusije, zaključujemo da mora važiti

$$KF(O) \leq \min \left\{ 2, \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} \right\} \Rightarrow C\varepsilon F(O) \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1 - \tilde{\delta}}{4\tilde{\delta}} \right\}.$$

Ovim je kompletiran dokaz za slučaj 1.

Slučaj 2. (a)

Pri interakciji udarnog talasa druge familije χ i razređujućeg talasa prve familije o , nastaju razređujući talas prve familije o' i udarni talas druge familije χ' , odnosno $S_2 + R_1 \rightarrow R_1 + S_2$. Tada je

$$L^-(J_2) = \sum |\alpha_k| + |\chi'|, \quad L^-(J_1) = \sum |\alpha_k| + |\chi|,$$

i

$$Q(J_2) = \sum |\beta_k||\chi_l| + \sum |\beta_k||\chi'|$$

$$Q(J_1) = \sum |\beta_k||\chi_l| + \sum |\beta_k||\chi|.$$

Talasi α_k , β_k i χ_l su isti kao i u *slučaju 1* i biće korišćeni do kraja dokaza ove teoreme. Sada sledi jednostavniji dokaz da je, u ovom slučaju, funkcionala F konstantna. Naime, važi

$$\begin{aligned} F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\ &= |\chi'| - |\chi| + K \sum |\beta_k|(|\chi'| - |\chi|) = 0, \end{aligned}$$

odnosno $F(J_2) = F(J_1)$. Ovde je korišćeno $|\chi'| = |\chi|$.

Slučaj 2. (b)

Pri interakciji razređujućeg talasa druge familije π i udarnog talasa prve familije β , nastaje udarni talas prve familije β' i razređujući talas druge familije π' ($R_2 + S_1 \rightarrow S_1 + R_2$). Tada je

$$L^-(J_2) = \sum |\alpha_k| + |\beta'|, \quad L^-(J_1) = \sum |\alpha_k| + |\beta|,$$

i

$$Q(J_2) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\chi_l| |\beta'|$$

$$Q(J_1) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\chi_l| |\beta|.$$

Pa je

$$\begin{aligned} F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\ &= |\beta'| - |\beta| + K \sum |\chi_l|(|\beta'| - |\beta|) = 0. \end{aligned}$$

Znači da je $F(J_2) = F(J_1)$. Ovde je korišćeno $|\beta'| = |\beta|$. Ovim je kompletiran dokaz za *slučaj 2*.

Slučaj 3. (a)

Ukoliko u interakciji budu dva udarna talasa druge familije χ_1 i χ_2 , nastaje razređujući talas prve familije σ' i udarni talas druge familije χ' . Takva interakcija obeležava se sa $S_2 + S_2 \rightarrow R_1 + S_2$ i važiće

$$L^-(J_2) = \sum |\alpha_k| + |\chi'| \quad L^-(J_1) = \sum |\alpha_k| + |\chi_1| + |\chi_2|,$$

i

$$Q(J_2) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi'|$$

$$Q(J_1) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi_1| + \sum |\beta_k| |\chi_2| + |\chi_1| |\chi_2|.$$

Jednostavnim postupkom pokazujemo da je F nerastuća funkcionala i u ovom slučaju.

$$\begin{aligned} F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\ &= |\chi'| - (|\chi_1| + |\chi_2|) + K(\sum |\beta_k|(|\chi'| - (|\chi_1| + |\chi_2|))) - K|\chi_1||\chi_2| \\ &= -K|\chi_1||\chi_2| \leq 0. \end{aligned}$$

Znači da je $F(J_2) \leq F(J_1)$. Ovde je korišćeno $|\chi'| = |\chi_1| + |\chi_2|$.

Slučaj 3. (b)

Analogno se pokazuje da je F nerastuća funkcionala i pri interakciji dva udarna talasa prve familije koji daje udarni talas prve familije i razređujući talas druge familije ($S_1 + S_1 \rightarrow S_1 + R_2$). Važiće

$$L^-(J_2) = \sum |\alpha_k| + |\beta'|, \quad L^-(J_1) = \sum |\alpha_k| + |\beta_1| + |\beta_2|,$$

i

$$Q(J_2) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\chi_l| |\beta'|$$

$$Q(J_1) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\chi_l| |\beta_1| + \sum |\chi_l| |\beta_2| + |\beta_1| |\beta_2|.$$

Sada je

$$\begin{aligned} F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\ &= |\beta'| - (|\beta_1| + |\beta_2|) + K(\sum |\chi_l| (|\beta'| - (|\beta_1| + |\beta_2|))) - K|\beta_1| |\beta_2| \\ &= -K|\beta_1| |\beta_2| \leq 0, \end{aligned}$$

pa je $F(J_2) \leq F(J_1)$. Ovde je korišćeno $|\beta'| = |\beta_1| + |\beta_2|$. Ovim je kompletiran dokaz za *slučaj 3*.*Slučaj 4. (a) 1°*

Posmatrajmo sada interakciju $S_2 + R_2 \rightarrow S_1 + S_2$. Uvešćemo veštačku interakciju $S_2 + R_2 \rightarrow S_2 + S_1 \rightarrow S_1 + S_2$, tako da je $\chi + \pi$ na $J_1 \rightarrow \chi_0 + \beta_0$ na $J_0 \rightarrow \beta' + \chi'$ na J_2 (slika 5.28). Interakcija $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta' + \chi'$ tretira se kao u *slučaju 1*. Na osnovu teoreme 5.3.2 *slučaj 4. (a) 1°* $|\beta_0| + |\chi_0| = |\chi| - \xi + \eta$. Za veštačku interakciju $\chi + \pi \rightarrow \chi_0 + \beta_0$ važiće sledeće:

$$L^-(J_0) = \sum |\alpha_k| + |\beta_0| + |\chi_0|,$$

$$L^-(J_1) = \sum |\alpha_k| + |\chi|,$$

$$L^-(J_0) - L^-(J_1) = |\beta_0| + |\chi_0| - |\chi| = -\xi + \eta,$$

$$Q(J_0) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi_0| + \sum |\chi_l| |\beta_0| + |\beta_0| |\chi_0|,$$

$$Q(J_1) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi|.$$

Sada je

$$\begin{aligned} F(J_0) - F(J_1) &= L^-(J_0) - L^-(J_1) + K(Q(J_0) - Q(J_1)) \\ &\leq -\xi + \eta + K \sum |\beta_k| (|\chi_0| - |\chi|) + K|\beta_0| (|\chi_0| + \sum |\chi_l|) \\ &= -\xi + \eta + K \sum |\beta_k| (-\xi) + K\eta (|\chi_0| + \sum |\chi_l|) \\ &\leq -\xi + \eta + K\eta (|\chi| + \sum |\chi_l|) \\ &\leq g'_2(|\chi|, \rho_1) \xi - \xi + KF(J_1) g'_2(|\chi|, \rho_1) \xi \\ &= \xi g'_2(|\chi|, \rho_1) \left(1 - \frac{1}{g'_2(|\chi|, \rho_1)} + KF(O) \right) \\ &= \xi g'_2(|\chi|, \rho_1) \left(KF(O) - \frac{1 - g'_2(|\chi|, \rho_1)}{g'_2(|\chi|, \rho_1)} \right) \\ &\leq \xi g'_2(|\chi|, \rho_1) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

pošto je $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, gde je $\tilde{\delta} = \sup_{|\beta|} g'_2(|\chi|, \rho_1)$.

Slučaj 4. (a) 2°

Prilikom interakcije udarnog talasa druge familije χ i razređujućeg talasa druge familije π , mogu nastati i udarni talas prve familije β' i razređujući talas druge familije π' . Dakle, posmatramo interakciju $S_2 + R_2 \rightarrow S_1 + R_2$ kod kojeg će važiti

$$L^-(J_1) = \sum |\alpha_k| + |\chi|,$$

$$L^-(J_2) = \sum |\alpha_k| + |\beta'|,$$

$$Q(J_1) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi|,$$

$$Q(J_2) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\chi_l| |\beta'|.$$

Opet, na osnovu teoreme 5.3.2, slučaj 4. (a) 2°, sledi

$$\begin{aligned} F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\ &= |\beta'| - |\chi| + K \sum |\chi_l| |\beta'| - K \sum |\beta_k| |\chi| \\ &\leq |\beta'| - |\chi| + K |\beta'| \sum |\chi_l| \\ &\leq \eta - \xi + K \eta F(J_1) \\ &\leq g'_2(|\chi|, \rho_1) \xi - \xi + K g'_2(|\chi|, \rho_1) \xi F(O) \\ &= g'_2(|\chi|, \rho_1) \xi \left(1 - \frac{1}{g'_2(|\chi|, \rho_1)} + KF(O) \right) \\ &= g'_2(|\chi|, \rho_1) \xi \left(\frac{g'_2(|\chi|, \rho_1) - 1}{g'_2(|\chi|, \rho_1)} + KF(O) \right) \\ &= g'_2(|\chi|, \rho_1) \xi \left(KF(O) - \frac{1 - g'_2(|\chi|, \rho_1)}{g'_2(|\chi|, \rho_1)} \right) \\ &\leq \xi g'_2(|\chi|, \rho_1) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

jer je $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, gde je $\tilde{\delta} = \sup_{|\chi|} g'_2(|\chi|, \rho_1)$.

Slučaj 4. (b) 1°

Posmatrajmo sada interakciju $R_1 + S_1 \rightarrow S_1 + S_2$. Veštačka interakcija data je sa $R_1 + S_1 \rightarrow S_2 + S_1 \rightarrow S_1 + S_2$, tako da je $o + \beta$ na $J_1 \rightarrow \chi_0 + \beta_0$ na $J_0 \rightarrow \beta' + \chi'$ na J_2 . Interakcija $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta' + \chi'$ tretira se kao u slučaju 1. Teorema 5.3.2 slučaj 4. (b) 1° daje $|\beta_0| = |\beta| - \xi$ i $|\chi_0| = \eta$. Sada za veštačku interakciju $o + \beta \rightarrow \chi_0 + \beta_0$ važi:

$$L^-(J_0) = \sum |\alpha_k| + |\beta_0| + |\chi_0|,$$

$$L^-(J_1) = \sum |\alpha_k| + |\beta|,$$

$$Q(J_0) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi_0| + \sum |\chi_l| |\beta_0| + |\beta_0| |\chi_0|,$$

$$Q(J_1) = \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\chi_l| |\beta|,$$

što zajedno sa

$$\begin{aligned}
F(J_0) - F(J_1) &= L(J_0) - L(J_1) + K(Q(J_0) - Q(J_1)) \\
&\leq -\xi + \eta + K \sum |\chi_l| (|\beta_0| - |\beta|) + K |\chi_0| (|\beta_0| + \sum |\beta_k|) \\
&= -\xi + \eta + K \sum |\chi_l| (-\xi) + K \eta (|\beta_0| + \sum |\beta_k|) \\
&\leq -\xi + g'_2(|\beta|, \rho_2) \xi + K g'_2(|\beta|, \rho_2) \xi (|\beta| + \sum |\beta_k|) \\
&\leq g'_2(|\beta|, \rho_2) \xi \left(1 - \frac{1}{g'_2(|\beta|, \rho_2)} + KF(O) \right) \\
&= g'_2(|\beta|, \rho_2) \xi \left(KF(O) - \frac{1 - g'_2(|\beta|, \rho_2)}{g'_2(|\beta|, \rho_2)} \right) \\
&\leq \xi g'_2(|\beta|, \rho_2) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

i $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, za $\tilde{\delta} = \sup_{|\beta|} g'_2(|\beta|, \rho_2)$, daje da je F nerastuća funkcionala.

Slučaj 4. (b) 2°

Interakcija razređujućeg talasa prve familije o i udarnog talasa prve familije β , proizvodi i razređujući talas prve familije o' i udarni talas druge familije χ' ($R_1 + S_1 \rightarrow R_1 + S_2$). Tada je

$$\begin{aligned}
L^-(J_1) &= \sum |\alpha_k| + |\beta|, \\
L^-(J_2) &= \sum |\alpha_k| + |\chi'|, \\
Q(J_1) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\chi_l| |\beta|, \\
Q(J_2) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi'|.
\end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 5.3.2, *slučaj 4. (b) 2°*, važiće

$$\begin{aligned}
F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\
&= |\chi'| - |\beta| + K |\chi'| \sum |\beta_k| - K |\beta| \sum |\chi_l| \\
&\leq \eta - \xi + K \eta F(J_1) \\
&\leq g'_1(|\beta|, \rho_0) \xi - \xi + K g'_1(|\beta|, \rho_0) \xi F(O) \\
&= g'_1(|\beta|, \rho_0) \xi \left(1 - \frac{1}{g'_1(|\beta|, \rho_0)} + KF(O) \right) \\
&= g'_1(|\beta|, \rho_0) \xi \left(KF(O) - \frac{1 - g'_1(|\beta|, \rho_0)}{g'_1(|\beta|, \rho_0)} \right) \\
&\leq \xi g'_1(|\beta|, \rho_0) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

pošto je $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, za $\tilde{\delta} = \sup_{|\beta|} g'_1(|\beta|, \rho_0)$.

Slučaj 5. (a) 1°

Neka interakcije razređujućeg talasa druge familije π i udarnog talasa druge familije χ proizvede udarni talas β' prve i udarni talas χ' druge familije, odnosno $R_2 + S_2 \rightarrow S_1 + S_2$. Teorema 5.3.2, *slučaj 5. (a) 1°* daje

$$\begin{aligned} L^-(J_1) &= \sum |\alpha_k| + |\chi|, \\ L^-(J_2) &= \sum |\alpha_k| + |\beta'| + |\chi'|, \\ Q(J_1) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi| \\ Q(J_2) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi'| + \sum |\chi_l| |\beta'| \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\ &\leq |\beta'| + |\chi'| - |\chi| + K(-\xi) \sum |\beta_k| + K\eta \sum |\chi_l| \\ &\leq -\xi + \eta + K\eta F(J_1) \\ &\leq g'_1(|\chi|, \rho_2) \xi - \xi + K g'_1(|\chi|, \rho_2) \xi F(O) \\ &= g'_1(|\chi|, \rho_2) \xi \left(1 - \frac{1}{g'_1(|\chi|, \rho_2)} + KF(O) \right) \\ &= g'_1(|\chi|, \rho_2) \xi \left(KF(O) - \frac{1 - g'_1(|\chi|, \rho_2)}{g'_1(|\chi|, \rho_2)} \right) \\ &\leq \xi g'_1(|\chi|, \rho_2) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

jer po pretpostavci važi $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, gde je $\tilde{\delta} = \sup_{|\chi|} g'_1(|\chi|, \rho_2)$.

Slučaj 5. (a) 2°

Posmatrajmo interakciju $R_2 + S_2 \rightarrow S_1 + R_2$, odnosno kada interakcija razređujućeg talasa druge familije π i udarnog talasa druge familije χ , prouzrokuje nastanak udarnog talasa prve familije β' i razređujućeg talasa druge familije π' . Sada je

$$\begin{aligned} L^-(J_1) &= \sum |\alpha_k| + |\chi|, \\ L^-(J_2) &= \sum |\alpha_k| + |\beta'|, \\ Q(J_1) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi|, \\ Q(J_2) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\chi_l| |\beta'|. \end{aligned}$$

Na osnovu teoreme 5.3.2, *slučaj 5. (a) 2°*, važi

$$\begin{aligned}
F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\
&= |\beta'| - |\chi| + K|\beta'| \sum |\chi_l| - K|\chi| \sum |\beta_k| \\
&\leq |\beta'| - |\chi| + K|\beta'| \sum |\chi_l| \\
&\leq \eta - \xi + K\eta F(J_1) \\
&\leq g'_2(|\chi|, \rho_0)\xi - \xi + K g'_2(|\chi|, \rho_0) \xi F(O) \\
&= g'_2(|\chi|, \rho_0) \xi \left(1 - \frac{1}{g'_2(|\chi|, \rho_0)} + KF(O) \right) \\
&= g'_2(|\chi|, \rho_0) \xi \left(KF(O) - \frac{1 - g'_2(|\chi|, \rho_0)}{g'_2(|\chi|, \rho_0)} \right) \\
&\leq \xi g'_2(|\chi|, \rho_0) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

jer je $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, gde je $\tilde{\delta} = \sup_{|\chi|} g'_2(|\chi|, \rho_0)$.

Slučaj 5. (b) 1°

Posmatrajmo interakciju $S_1 + R_1 \rightarrow S_1 + S_2$. Na osnovu teorema 5.3.2, *slučaj 5. (b) 1°*, dobijamo

$$\begin{aligned}
L^-(J_1) &= \sum |\alpha_k| + |\beta|, \\
L^-(J_2) &= \sum |\alpha_k| + |\beta'| + |\chi'|, \\
Q(J_1) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta| |\chi_l| \\
Q(J_2) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi'_l| + \sum |\chi_l| |\beta'|
\end{aligned}$$

Važiće i

$$\begin{aligned}
F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\
&\leq |\chi'| + |\beta'| - |\beta| + K(-\xi) \sum |\chi_l| + K\eta \sum |\beta_k| \\
&\leq -\xi + \eta + K\eta F(J_1) \\
&\leq g'_1(|\beta|, \rho_1)\xi - \xi + K g'_1(|\beta|, \rho_1) \xi F(O) \\
&= g'_1(|\beta|, \rho_1) \xi \left(1 - \frac{1}{g'_1(|\beta|, \rho_1)} + KF(O) \right) \\
&= g'_1(|\beta|, \rho_1) \xi \left(KF(O) - \frac{1 - g'_1(|\beta|, \rho_1)}{g'_1(|\beta|, \rho_1)} \right) \\
&\leq \xi g'_1(|\beta|, \rho_1) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} \right) \leq 0
\end{aligned}$$

pošto je $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, za $\tilde{\delta} = \sup_{|\beta|} g'_1(|\beta|, \rho_1)$.

Slučaj 5. (b) 2°

U slučaju da su pri interakciji udarnog talasa prve familije β i razređujućeg talasa prve familije o , nastali razređujući talas o' prve i udarni talas druge familije χ' , odnosno, $S_1 + R_1 \rightarrow R_1 + S_2$, teorema 5.3.2, *slučaj 5. (b) 2°*, daje

$$\begin{aligned} L^-(J_1) &= \sum |\alpha_k| + |\beta|, \\ L^-(J_2) &= \sum |\alpha_k| + |\chi'|, \\ Q(J_1) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\chi_l| |\beta| \\ Q(J_2) &= \sum |\beta_k| |\chi_l| + \sum |\beta_k| |\chi'|, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} F(J_2) - F(J_1) &= L^-(J_2) - L^-(J_1) + K(Q(J_2) - Q(J_1)) \\ &\leq |\chi'| - |\beta| + K(-\xi) \sum |\chi_l| + K\eta \sum |\beta_k| \\ &\leq -\xi + \eta + K\eta F(J_1) \\ &\leq g'_1(|\beta|, \rho_1) \xi - \xi + K g'_1(|\beta|, \rho_1) \xi F(O) \\ &= g'_1(|\beta|, \rho_1) \xi \left(1 - \frac{1}{g'_1(|\beta|, \rho_1)} + KF(O) \right) \\ &= g'_1(|\beta|, \rho_1) \xi \left(KF(O) - \frac{1 - g'_1(|\beta|, \rho_1)}{g'_1(|\beta|, \rho_1)} \right) \\ &\leq \xi g'_1(|\beta|, \rho_1) \left(KF(O) - \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} \right) \leq 0 \end{aligned}$$

jer je po pretpostavci $KF(O) \leq \frac{1 - \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}}$, gde je $\tilde{\delta} = \sup_{|\beta|} g'_1(|\beta|, \rho_1)$.

U *slučaju 6*, odnosno pri interakciji razređujućih talasa druge i prve familije, nastaju razređujući talas prve i druge familije, $R_2 + R_1 \rightarrow R_1 + R_2$, te nema udarnih talasa. □

Sada, na osnovu teoreme 5.4.6, važi $F(J) \leq F(O) \leq 2L^-(O)$ za bilo koju krivu J . Primetimo da kako važi $L^-(J) \leq F(O)$, da onda važi i $L^+(J) \leq F(O)$ za svako J . Tada je $L^-(J) + L^+(J) \leq 2F(O) \leq 4L^-(O) \leq 4TV(r_0(x), s_0(x))$ na osnovu lema 5.4.4 i 5.4.5. Iz tog razloga je na slici 5.54, $d = 4TV(r_0(x), s_0(x))$, odnosno ako levo i desno stanje pripadaju W , tada će i rešenje Rimanavog problema pripadati W .

5.5 WFT šema i dekompozicija po putanji

U ovom poglavlju biće korišćena tvrdjenja iz [1]. Posmatraćemo aproksimativno rešenje zakona održanja $q(\cdot, t)$ dobijeno WFT metodom za $0 < t < T$ (glava 4). U tu svrhu, formiraćemo putanju koja je sastavljena od udarnih talasa. Jedan udarni talas sastavljen je od konačnog broja putanja, dok je snaga tog talasa suma snaga putanja.

Niz tačaka P_0, P_1, \dots, P_n u kojima dolazi do interakcije dva talasa, formira *putanju*, ako $P_0 \in \{t = 0\}$ i ako je svaki segment $P_{j-1}P_j$ udarni talas. Ova putanja obeležava se sa

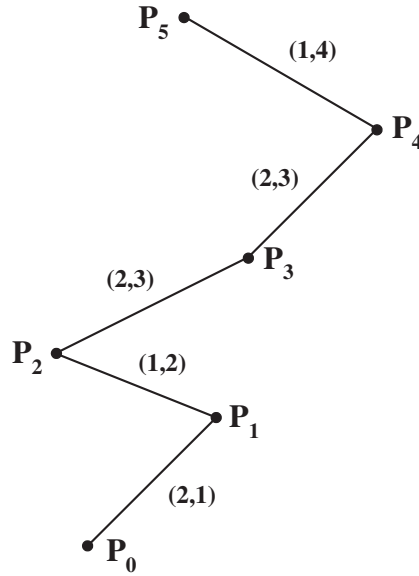
$$\Gamma : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_n .$$

Definicija 5.5.1 ([1]) Neka je (k_j, g_j) indeks svakog segmenta $P_{j-1}P_j$, gde je $g_1 = 1$,

$$k_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je } P_{j-1}P_j \text{ } S_1 \text{ udarni talas,} \\ 2, & \text{ako je } P_{j-1}P_j \text{ } S_2 \text{ udarni talas,} \end{cases}$$

$$g_j = \begin{cases} g_{j-1}, & \text{ako } k_{j-1} = k_j, \text{ jer se u } P_j \text{ ne menja familija udarnog talasa,} \\ g_{j-1} + 1, & \text{ako } k_{j-1} \neq k_j, \text{ jer se u } P_j \text{ menja familija udarnog talasa.} \end{cases}$$

Svako g_j naziva se **generacijski red** segmenta, a članovi niza $(k_1, g_1), (k_2, g_2), \dots, (k_n, g_n)$ nazivaju se **indeksi putanja** (slika 5.55).

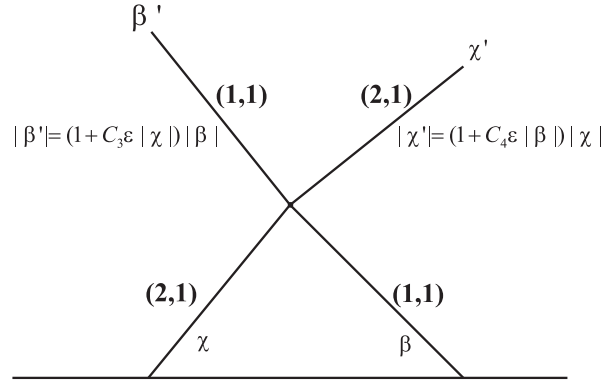


Slika 5.55: Putanja sastavljena od segmenata koje čine udarni talasi.

Osnovna ideja dekompozicije po putanji je da se povećanjem generacijskog reda, snaga segmenta na putanji smanjuje. *Snaga* segmenta putanje definiše se induktivnim putem na sledeći način. Neka je t_1 vreme kada je došlo do prve interakcije dva talasa. Pretpostavimo da udarni talas β polazi iz tačke $P_0 \in \{t = 0\}$. Segment koji spaja P_0 sa prvom tačkom P_1 u kojoj se desila interakcija, pripadaće različitim putanjama, ali za početak, neka segment P_0P_1 pripada samo jednoj putanji $\Gamma : P_0 \rightarrow P_1$ i neka je snaga segmenta $|\beta|$. Ovako se definiše snaga do vremena $t = t_1$ za svaki segment koji čini udarni talas i koji kreće iz $\{t = 0\}$. Pretpostavimo da dođe do interakcije (2, 1)-talasa χ i (1, 1)-talasa β u tački P_1 i da nastanu talasi β' i χ' . Nakon interakcije, snage talasa β' i χ' definišu se, prema mogućim slučajevima 1 (a), 1 (b) i 1 (c) iz teoreme 5.3.2 kao što sledi.

Slučaj 1. (a): Na osnovu teoreme 5.3.2, postoje pozitivne konstante C_3, C_4 tako da važi (slika 5.56)

$$|\beta'| = (1 + C_3\varepsilon|\chi|)|\beta| \text{ i } |\chi'| = (1 + C_4\varepsilon|\beta|)|\chi|. \quad (5.76)$$

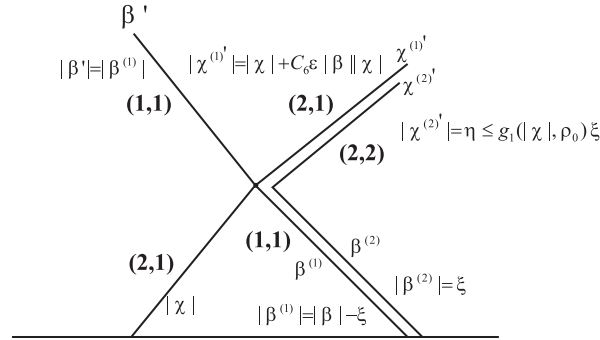


Slika 5.56: Interakcija udarnih talasa, (Slučaj 1. (a)).

Talasi β' i χ' dobijaju indekse (1, 1) i (2, 1), redom, a njihova snaga je $|\beta'|$ i $|\chi'|$, redom. Ovde imamo dve putanje (prvu čine χ i χ' , a drugu β i β').

Slučaj 1. (b): Postoje pozitivne konstatne C_6 , $0 < \tilde{\delta}_2 < 1$ i ξ (slika 5.57) tako da važi

$$|\chi'| = (1 + C_6\epsilon|\beta|)|\chi| + \tilde{\delta}_2\xi, \quad |\beta'| = |\beta| - \xi. \quad (5.77)$$



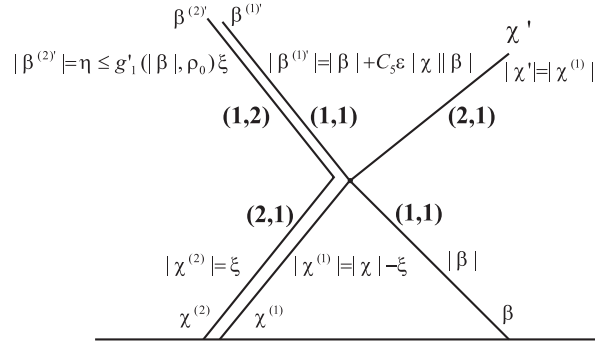
Slika 5.57: Interakcija udarnih talasa, (Slučaj 1. (b)).

Sada se (1,1)-segment β deli na dva (1,1)-segmenta $\beta^{(1)}$ i $\beta^{(2)}$ tako da je $|\beta^{(1)}| = |\beta| - \xi = |\beta'|$ i $|\beta^{(2)}| = \xi$. Indeks od $|\beta'|$ je (1,1). Definišemo (2,1)-segment $\chi^{(1)'}$ i (2,2)-segment $\chi^{(2)'}$ tako da važi $|\chi^{(2)'}| = \tilde{\delta}_2\xi$ i $|\chi^{(1)'}| = |\chi'| - |\chi^{(2)'}|$. Ovim je putanja Γ podeljena na dve putanje i produžena nakon P_1 tako da važi $\Gamma^{(1)} = \beta^{(1)} \cup \beta'$, $\Gamma^{(2)} = \beta^{(2)} \cup \chi^{(2)'}$. Takođe imamo putanju koja se sastoji od χ i $\chi^{(1)'}$.

Slučaj 1. (c): Postoje pozitivne konstatne C_5 , $0 < \tilde{\delta}_1 < 1$ i ξ (slika 5.58) tako da važi

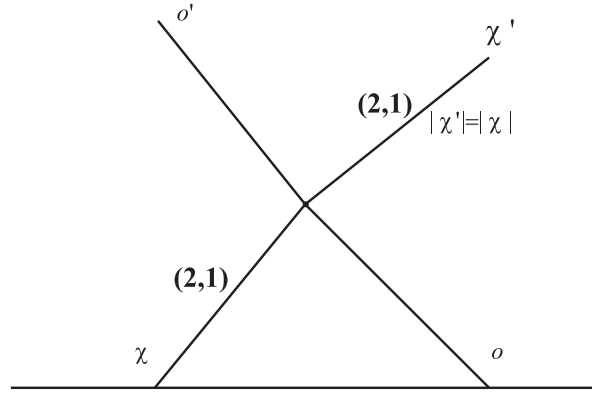
$$|\beta'| = (1 + C_5\epsilon|\chi|)|\beta| + \tilde{\delta}_1\xi, \quad |\chi'| = |\chi| - \xi. \quad (5.78)$$

Sada se (2,1)-segment χ deli na dva (2,1)-segmenta $\chi^{(1)}$ i $\chi^{(2)}$ tako da je $|\chi^{(1)}| = |\chi| - \xi = |\chi'|$ i $|\chi^{(2)}| = \xi$. Indeks od $|\chi'|$ je (2,1). Definišemo (1,1)-segment $\beta^{(1)'}$ i (1,2)-segment $\beta^{(2)'}$ tako da važi $|\beta^{(2)'}| = \tilde{\delta}_1\xi$ i $|\beta^{(1)'}| = |\beta'| - |\beta^{(2)'}|$. Ovim je putanja Γ podeljena na dve putanje i produžena nakon P_1 tako da važi $\Gamma^{(1)} = \chi^{(1)} \cup \chi'$, $\Gamma^{(2)} = \chi^{(2)} \cup \beta^{(2)'}$. Takođe postoji putanja koja se sastoji od β i $\beta^{(1)'}$.



Slika 5.58: Interakcija udarnih talasa, (Slučaj 1. (c)).

Slučaj 2. (a): Ako su u interakciji udarni talas druge familije χ koji ima indeks (2,1) i razređujući talas prve familije, tada se putanja sastoji od udarnog talasa χ pre interakcije i udarnog talasa χ' posle interakcije koji će imati istu snagu i isti indeks kao udarni talas χ , odnosno $\Gamma = \chi \cup \chi'$ i $|\chi'| = |\chi|$ (slika 5.59).

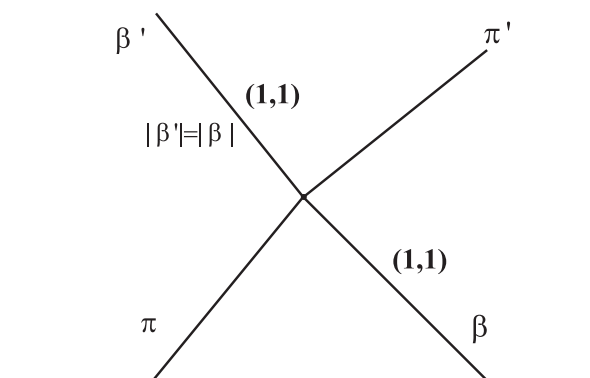


Slika 5.59: Interakcija S_2 i R_1 , (Slučaj 2. (a)).

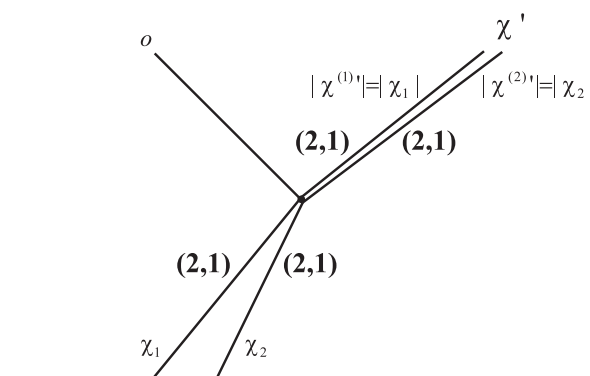
Slučaj 2. (b): Ako su sada u interakciji razređujući talas druge familije i udarni talas prve familije β koji ima indeks (1,1), tada se putanja sastoji od udarnog talasa β pre interakcije i udarnog talasa β' posle interakcije koji će imati istu snagu i isti indeks kao udarni talas β , odnosno $\Gamma = \beta \cup \beta'$ i $|\beta'| = |\beta|$ (slika 5.60).

Slučaj 3. (a): Ako su u interakciji dva udarna talasa druge familije χ_1 i χ_2 , sa indeksima (2,1), tada se kao rezultat interakcije formira udarni talas druge familije χ' koji će biti podeljen na dva segmenta $\chi^{(1)'}$ i $\chi^{(2)'}$, sa indeksima (2,1), tako da važi $|\chi^{(1)'}| = |\chi_1|$ i $|\chi^{(2)'}| = |\chi_2|$. Ovim je putanja Γ podeljena na dve putanje i produžena nakon P_1 tako da važi $\Gamma^{(1)} = \chi_1 \cup \chi^{(1)'}$, $\Gamma^{(2)} = \chi_2 \cup \chi^{(2)'}$ (slika 5.61).

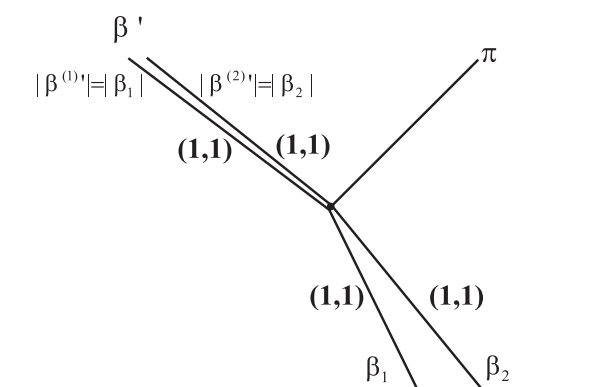
Slučaj 3. (b): Kada su u interakciji dva udarna talasa prve familije β_1 i β_2 , sa indeksima (1,1), tada će rezultat interakcije biti udarni talas prve familije β' koji ćemo sada podeliti na dva segmenta $\beta^{(1)'}$ i $\beta^{(2)'}$, sa indeksima (1,1), tako da važi $|\beta^{(1)'}| = |\beta_1|$ i $|\beta^{(2)'}| = |\beta_2|$. Ovim je putanja Γ podeljena na dve putanje i produžena nakon P_1 tako da važi $\Gamma^{(1)} = \beta_1 \cup \beta^{(1)'}$, $\Gamma^{(2)} = \beta_2 \cup \beta^{(2)'}$ (slika 5.62).



Slika 5.60: Interakcija R_2 i S_1 , (Slučaj 2. (b)).

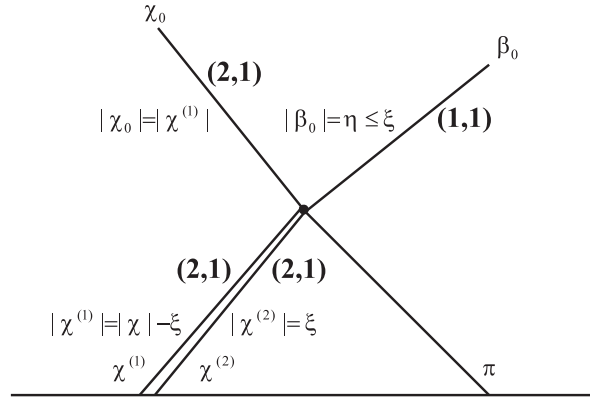


Slika 5.61: Interakcija dva udarna talasa druge familije, (Slučaj 3. (a)).



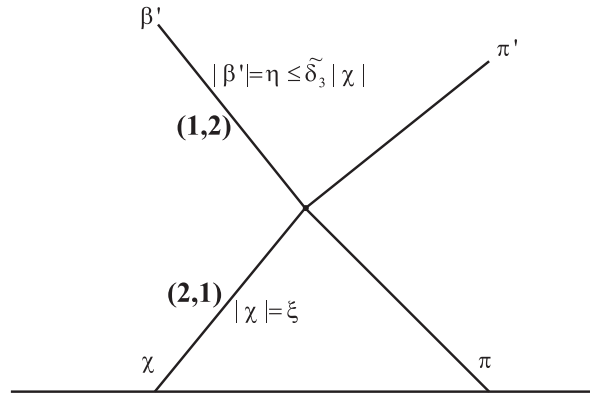
Slika 5.62: Interakcija dva udarna talasa prve familije, (Slučaj 3. (b)).

Slučaj 4. (a) 1°: pri interakciji $\chi + \pi \rightarrow \chi_0 + \beta_0$ postupamo tako što segment koji sadrži χ , sa indeksom (2,1), podelimo na dva segmenta tako da važi $|\chi^{(1)}| = |\chi| - \xi$ i $|\chi^{(2)}| = \xi$, $\xi > 0$, pa se putanja Γ se sada deli na dve putanje $\Gamma^{(1)} = \chi^{(1)} \cup \chi_0$, $\Gamma^{(2)} = \chi^{(2)} \cup \beta_0$. Ovde je $|\chi_0| = |\chi^{(1)}|$ i $|\beta_0| \leq |\chi^{(2)}|$. Sada se ne menja generacijski red na segmentu β_0 koji ima indeks (1,1) (na segmentu χ_0 se isto ne menja jer je to talas iste familije kao i χ). Nakon toga se kao u *slučaju 1.* postupa sa interakcijom $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta + \chi$ (slika 5.63).



Slika 5.63: Interakcija S_2 i R_2 , (*Slučaj 4. (a) 1°*).

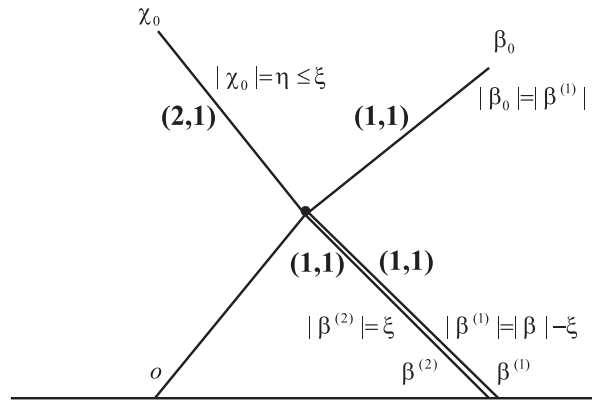
Slučaj 4. (a) 2°: pri interakciji udarnog talasa druge familije χ i razređujućeg talasa druge familije, druga mogućnost je da nastanu udarni talasi prve familije β' i razređujući talas druge familije. Putanja Γ se produžuje nakon P_1 tako da važi $\Gamma = \chi \cup \beta'$. Ovde je $|\chi| = \xi$ sa indeksom (2,1) i $|\beta'| = \eta \leq \tilde{\delta}_3 \xi$, sa indeksom (1,2), $0 < \tilde{\delta}_3 < 1$, $\xi > 0$ (slika 5.64).



Slika 5.64: Interakcija S_2 i R_2 , (*Slučaj 4. (a) 2°*).

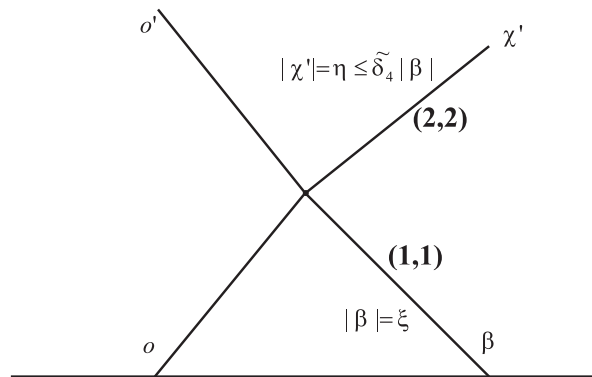
Slučaj 4. (b) 1°: pri interakciji $o + \beta \rightarrow \chi_0 + \beta_0$ postupamo tako što segment koji sadrži β , sa indeksom (1,1), podelimo na dva segmenta tako da važi $|\beta^{(1)}| = |\beta| - \xi$, $|\beta^{(2)}| = \xi$ i $\xi > 0$, pa se putanja Γ se sada deli na dve putanje $\Gamma^{(1)} = \beta^{(1)} \cup \beta_0$, $\Gamma^{(2)} = \beta^{(2)} \cup \chi_0$. Ovde je $|\beta_0| = |\beta^{(1)}|$ i $|\chi_0| \leq |\beta^{(2)}|$. Sada se ne menja generacijski red na segmentu χ_0 koji ima indeks (2,1). Nakon toga se kao u *slučaju 1.* postupa sa interakcijom $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta + \chi$ (slika 5.65).

Slučaj 4. (b) 2°: pri interakciji razređujućeg talasa prve familije i udarnog talasa prve familije β , preostala je mogućnost da nastanu razređujući talas prve familije i udarni talasi druge familije χ' .



Slika 5.65: Interakcija R_1 i S_1 , (Slučaj 4. (b) 1°).

Putanja Γ se produžuje nakon P_1 tako da važi $\Gamma = \beta \cup \chi'$. Ovde je $|\beta| = \xi$ sa indeksom (1,1) i $|\chi'| = \eta \leq \tilde{\delta}_4 \xi$ sa indeksom (2,2), $0 < \tilde{\delta}_4 < 1$, $\xi > 0$ (slika 5.66).

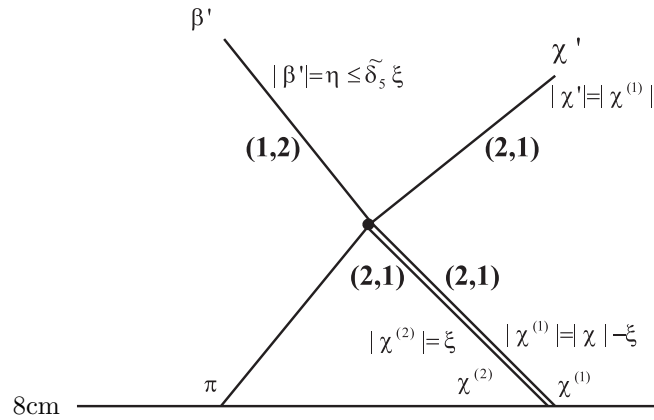
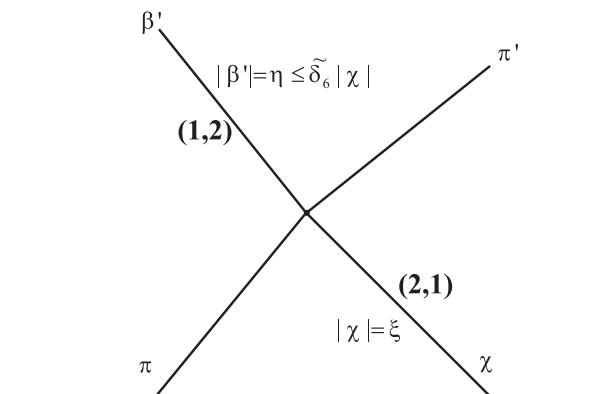


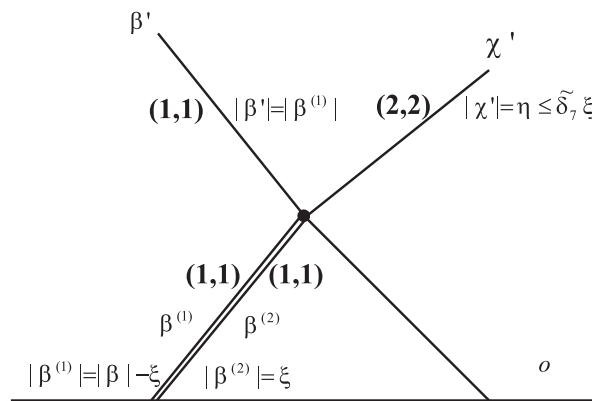
Slika 5.66: Interakcija R_1 i S_1 , (Slučaj 4. (b) 2°).

Slučaj 5. (a) 1° : pri interakciji razređujućeg talasa druge familije i udarnog talasa druge familije χ , mogu nastati udarni talasi prve i druge familije, β' i χ' , redom. Segment χ sa indeksom (2,1), se sada deli na dva segmenta, oba sa indeksom (2,1), tako da važi $|\chi^{(1)}| = |\chi| - \xi$ i $|\chi^{(2)}| = \xi$. Putanja Γ se sada deli na dve putanje i produžuje nakon P_1 tako da važi $\Gamma^{(1)} = \chi^{(1)} \cup \chi'$, $\Gamma^{(2)} = \chi^{(2)} \cup \beta'$. Ovde je $|\beta'| = \eta \leq \tilde{\delta}_5 \xi$ sa indeksom (1,2) i udarni talas druge familije $|\chi'| = |\chi^{(1)}|$ sa indeksom (2,1), $0 < \tilde{\delta}_5 < 1$, $\xi > 0$ (slika 5.67).

Slučaj 5. (a) 2° : Druga mogućnost je da pri interakciji razređujućeg talasa druge familije i udarnog talasa druge familije χ , nastanu udarni talasi prve familije β' i razređujući talas druge familije. Produžujemo putanju Γ nakon P_1 tako da važi $\Gamma = \chi \cup \beta'$. Ovde je $|\chi| = \xi$ sa indeksom (2,1) i $|\beta'| = \eta \leq \tilde{\delta}_6 \xi$ sa indeksom (1,2), $0 < \tilde{\delta}_6 < 1$, $\xi > 0$ (slika 5.68).

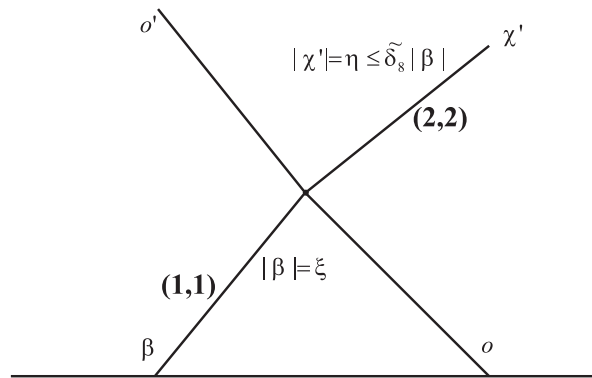
Slučaj 5. (b) 1° : pri interakciji udarnog talasa prve familije β i razređujućeg talasa prve familije nastaju udarni talasi prve i druge familije, β' i χ' , redom (jedna mogućnost). Segment β sa indeksom (1,1), podeli se na dva segmenta, oba sa indeksom (1,1), tako da važi $|\beta^{(1)}| = |\beta| - \xi$ i $|\beta^{(2)}| = \xi$. Putanja Γ se sada deli na dve putanje i produžuje nakon P_1 tako da važi $\Gamma^{(1)} = \beta^{(1)} \cup \beta'$, $\Gamma^{(2)} = \beta^{(2)} \cup \chi'$. Ovde je $|\chi'| = \eta \leq \tilde{\delta}_7 \xi$ sa indeksom (2,2) i udarni talas druge familije $|\beta'| = |\beta^{(1)}|$ sa indeksom (1,1), $0 < \tilde{\delta}_7 < 1$, $\xi > 0$ (slika 5.69).

Slika 5.67: Interakcija R_2 i S_2 , (Slučaj 5. (a) 1°).Slika 5.68: Interakcija R_2 i S_2 , (Slučaj 5. (a) 2°).



Slika 5.69: Interakcija S_1 i R_1 , (Slučaj 5. (b) 1°).

Slučaj 5. (b) 2° : pri interakciji udarnog talasa prve familije β i razređujućeg talasa prve familije nastaju razređujući talas prve familije i udarni talasi druge familije χ' (druga mogućnost). Putanja Γ se produžuje nakon P_1 tako da važi $\Gamma = \beta \cup \chi'$. Ovde je $|\beta| = \xi$ sa indeksom (1,1) i $|\chi'| = \eta \leq \delta_8 \xi$ sa indeksom (2,2), $0 < \delta_8 < 1$, $\xi > 0$ (slika 5.70).



Slika 5.70: Interakcija S_1 i R_1 , (Slučaj 5. (b) 2°).

Slučaj 6: Pošto putanju čine samo udarni talasi, zbog toga nema delova putanji koji sadrže razređujuće talase.

U opštem slučaju, pretpostavimo da dođe do interakcije talasa druge familije χ i talasa prve familije β u tački P_n ($t = t_n$) i neka nakon rešavanja Rimanovog problema nastanu talasi β' i χ' . Pretpostavimo da se β sastoji od segmenata putanja B_1, B_2, \dots , sa snagama $|\beta_1|, |\beta_2|, \dots$, redom, i neka se χ sastoji od segmenata putanja $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, redom sa snagama $|\chi_1|, |\chi_2|, \dots$, tako da je $|\beta| = \sum_j |\beta_j|$, $|\chi| = \sum_j |\chi_j|$. Pretpostavićemo da svi udarni talasi imaju takvu dekompoziciju za $t < t_n$.

Slučaj 1. (a): Važi $|\beta'| \geq |\beta|$ i $|\chi'| \geq |\chi|$. Na osnovu teoreme 5.3.2 važi (5.76). Tada produžimo putanju Γ_j do sledeće tačke preseka bez menjanja indeksa; snaga je definisana sa $(1 + C_4 \varepsilon |\beta|) |\chi_j|$. Na sličan način, putanja B_j se proširi bez menjanja indeksa, a snaga će biti $(1 + C_3 \varepsilon |\chi|) |\beta_j|$.

Slučaj 1. (b): Važi $|\beta'| < |\beta|$. Postoje pozitivne konstante $C_6, \tilde{\delta}_2, \xi$ tako da važi (5.77). Čak šta više, mogu se naći broj l i konstanta $\bar{\beta}_l$ tako da važi

$$\xi = |\bar{\beta}_l| + \sum_{j \geq l+1} |\beta_j|, \quad 0 < |\bar{\beta}_l| < |\beta_l|.$$

Za $1 \leq j \leq l-1$, proširujemo B_j do sledeće tačke preseka ne menjajući ni indeks ni snagu. Za $j = l$ prvo podelimo B_l na dve putanje $B_l^{(1)}$ i $B_l^{(2)}$ tako da se indeksi ne menjaju, a da snage zadovoljavaju $|\beta_l^{(1)}| = |\beta_l| - |\bar{\beta}_l|$ i $|\beta_l^{(2)}| = |\bar{\beta}_l|$ na svakom segmentu koji čini putanju. Tada produžimo $B_l^{(1)}$ do sledeće tačke interakcije ne menjajući ni indeks ni snagu. Neka je $(1, g_l)$ indeks od B_l na β . Proširujemo $B_l^{(2)}$ u drugom pravcu sa generacijskim redom $g_l + 1$ i snagom $\tilde{\delta}_2 |\bar{\beta}_l|$ tako da je sada indeks jednak $(2, g_l + 1)$ do sledeće tačke interakcije. Za $j \geq l+1$, proširujemo putanju B_j do sledeće tačke preseka menjajući njen indeks i snagu na $(2, g_j + 1)$ i $\tilde{\delta}_2 |\beta_j|$, redom. Γ_j se proširuje do sledeće tačke interakcije bez menjanja indeksa, a snaga je $(1 + C_6 \varepsilon |\beta|) |\chi_j|$.

Slučaj 1. (c): Važi $|\chi'| < |\chi|$. Postoje pozitivne konstante $C_5, \tilde{\delta}_3, \xi$ tako da važi jednačina (5.78). Čak šta više, mogu se naći broj l i konstanta $\bar{\chi}_l$ tako da važi

$$\xi = |\bar{\chi}_l| + \sum_{j \geq l+1} |\chi_j|, \quad 0 < |\bar{\chi}_l| < |\chi_l|.$$

Za $1 \leq j \leq l-1$, proširujemo Γ_j do sledeće tačke preseka ne menjajući ni indeks ni snagu. Za $j = l$ prvo podelimo Γ_l na dve putanje $\Gamma_l^{(1)}$ i $\Gamma_l^{(2)}$ tako da se indeksi ne menjaju, a da snage zadovoljavaju $|\chi_l^{(1)}| = |\chi_l| - |\bar{\chi}_l|$ i $|\chi_l^{(2)}| = |\bar{\chi}_l|$ na svakom segmentu koji čini putanju. Tada produžimo $\Gamma_l^{(1)}$ do sledeće tačke interakcije ne menjajući ni indeks ni snagu. Neka je $(2, g_l)$ indeks od Γ_l na χ . Proširujemo $\Gamma_l^{(2)}$ u drugom pravcu sa generacijskim redom $g_l + 1$ i snagom $\tilde{\delta}_1 |\bar{\chi}_l|$ tako da je sada indeks jednak $(1, g_l + 1)$ do sledeće tačke interakcije. Za $j \geq l+1$, proširujemo putanju Γ_j do sledeće tačke preseka menjajući njen indeks i snagu na $(1, g_j + 1)$ i $\tilde{\delta}_1 |\chi_j|$, redom. B_j se proširuje do sledeće tačke interakcije bez menjanja indeksa, a snaga je $(1 + C_5 \varepsilon |\chi|) |\beta_j|$.

Slučaj 2. (a): Važi $|\chi'| = |\chi|$. Produžimo putanju Γ_j do sledeće tačke preseka bez menjanja indeksa i snage.

Slučaj 2. (b): Važiće $|\beta'| = |\beta|$, pa zato proširujemo putanju B_j do sledeće tačke preseka ne menjajući ni indeks i ni snagu.

Slučaj 3. (a): Neka je $|\chi_1| = \sum_j |\chi_{1,j}|$ i $|\chi_2| = \sum_j |\chi_{2,j}|$. Proširujemo putanje $\Gamma_{1,j}$ i $\Gamma_{2,j}$ do sledeće tačke preseka talasa ne menjajući ni snagu ni indeks. Snaga putanje do sledeće tačke interakcije biće $\sum_j |\chi_{1,j}| + \sum_j |\chi_{2,j}| = |\chi_1| + |\chi_2| = |\chi'|$. Napomenimo da se $\chi_{i,j}$ nalaze na putanji $\Gamma_{i,j}$, $i = 1, 2$.

Slučaj 3. (b): Neka je $|\beta_1| = \sum_j |\beta_{1,j}|$ i $|\beta_2| = \sum_j |\beta_{2,j}|$. Proširujemo putanje $B_{1,j}$ i $B_{2,j}$ do sledeće tačke preseka talasa ne menjajući ni snagu ni indeks. Snaga putanje do sledeće tačke interakcije biće $\sum_j |\beta_{1,j}| + \sum_j |\beta_{2,j}| = |\beta_1| + |\beta_2| = |\beta'|$. Napomenimo da se $\beta_{i,j}$ nalaze na putanji $B_{i,j}$, $i = 1, 2$.

Sada ćemo prvo objasniti *slučaj 5*. jer će nam trebati kasnije da se pozovemo na njega.

Slučaj 5. (a) 1°: Važi $|\chi'| < |\chi|$. Postoji broj l i konstanta $\bar{\chi}_l$ tako da važi

$$\xi = |\bar{\chi}_l| + \sum_{j \geq l+1} |\chi_j|, \quad 0 < |\bar{\chi}_l| < |\chi_l|.$$

Za $1 \leq j \leq l-1$, proširujemo Γ_j do sledeće tačke preseka ne menjajući ni indeks ni snagu. Za $j = l$ prvo podelimo Γ_l na dve putanje $\Gamma_l^{(1)}$ i $\Gamma_l^{(2)}$ tako da se indeksi ne menjaju, a da snage zadovoljavaju $|\chi_l^{(1)}| = |\chi_l| - |\bar{\chi}_l|$ i $|\chi_l^{(2)}| = |\bar{\chi}_l|$ na svakom segmentu koji čini putanju. Tada produžimo

$\Gamma_l^{(1)}$ do sledeće tačke interakcije ne menjajući ni indeks ni snagu. Neka je $(2, g_l)$ indeks od Γ_l na χ . Proširujemo $\Gamma_l^{(2)}$ u drugom pravcu sa generacijskim redom $g_l + 1$ i snagom $\tilde{\delta}_5|\bar{\chi}_l|$ tako da je sada indeks jednak $(1, g_l + 1)$ do sledeće tačke interakcije. Za $j \geq l + 1$, proširujemo putanju Γ_j do sledeće tačke preseka menjajući njen indeks i snagu na $(1, g_j + 1)$ i $\tilde{\delta}_5|\chi_j|$, redom. Napomenimo da je $0 < \tilde{\delta}_5 < 1$.

Slučaj 5. (a) 2°: Putanja Γ_j proširuje se do sledeće tačke preseka ali sa snagom $\tilde{\delta}_6|\chi_j|$ i ako je njen generacijski red bio $(2, g_j)$, posle proširenja biće $(1, g_j + 1)$. Time je snaga putanje posle proširenja $\sum_j \tilde{\delta}_6|\chi_j| = \tilde{\delta}_6 \sum_j |\chi_j| = \tilde{\delta}_6|\chi| = \tilde{\delta}_6\xi$. Napomenimo da je $0 < \tilde{\delta}_6 < 1$.

Slučaj 5. (b) 1°: Važi $|\beta'| < |\beta|$. Postoji broj l i konstanta $\bar{\beta}_l$ tako da važi

$$\xi = |\bar{\beta}_l| + \sum_{j \geq l+1} |\beta_j|, \quad 0 < |\bar{\beta}_l| < |\beta_l|.$$

Za $1 \leq j \leq l - 1$, proširujemo B_j do sledeće tačke preseka ne menjajući ni indeks ni snagu. Za $j = l$ prvo podelimo B_l na dve putanje $B_l^{(1)}$ i $B_l^{(2)}$ tako da se indeksi ne menjaju, a da snage zadovoljavaju $|\beta_l^{(1)}| = |\beta_l| - |\bar{\beta}_l|$ i $|\beta_l^{(2)}| = |\bar{\beta}_l|$ na svakom segmentu koji čini putanju. Tada produžimo $B_l^{(1)}$ do sledeće tačke interakcije ne menjajući ni indeks ni snagu. Neka je $(1, g_l)$ indeks od B_l na β . Produžavamo $B_l^{(2)}$ u drugom pravcu sa generacijskim redom $g_l + 1$ i snagom $\tilde{\delta}_7|\bar{\beta}_l|$ tako da je sada indeks jednak $(2, g_l + 1)$ do sledeće tačke interakcije. Za $j \geq l + 1$, produžavamo putanju B_j do sledeće tačke preseka menjajući njen indeks i snagu na $(2, g_j + 1)$ i $\tilde{\delta}_7|\beta_j|$, redom. Napomenimo da je $0 < \tilde{\delta}_7 < 1$.

Slučaj 5. (b) 2°: Putanja B_j se proširuje do sledeće tačke preseka ali sa snagom $\tilde{\delta}_8|\beta_j|$ i ako je njen generacijski red bio $(1, g_j)$, posle proširenja biće $(2, g_j + 1)$. Time je snaga putanje posle proširenja $\sum_j \tilde{\delta}_8|\beta_j| = \tilde{\delta}_8 \sum_j |\beta_j| = \tilde{\delta}_8|\beta| = \tilde{\delta}_8\xi$. Napomenimo da je $0 < \tilde{\delta}_8 < 1$.

Slučaj 4. (a) 1°: Primenjuje se potpuno isti postupak kao u *slučaju 5. (a) 1°* i to na talase χ_0 i β_0 , koji zamenjuju χ i β redom, ali se ne menja generacijski red jer smo uveli veštačku interakciju. Dalje se interakcija $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta' + \chi'$ tretira kao *slučaj 1*.

Slučaj 4. (a) 2°: Potpuno analogno kao *slučaj 5. (a) 2°*.

Slučaj 4. (b) 1°: Primenjuje se potpuno isti postupak kao u *slučaju 5. (b) 1°* i to na talase β_0 i χ_0 , koji zamenjuju β i χ redom, ali se ne menja generacijski red jer smo uveli veštačku interakciju. Dalje se interakcija $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta' + \chi'$ tretira kao *slučaj 1*.

Slučaj 4. (b) 2°: Potpuno analogno kao *slučaj 5. (b) 2°*.

Slučaj 6.: Razređujući talasi ne ulaze u sastav putanje.

Ovim je konstruisana konačna familija putanja $\Gamma = \{\Gamma_j\}$ za aproksimativno rešenje. Putanja Γ posmatra se kao Lipsicova kriva $x = \Gamma(t)$. Za svako t različito od vremena interakcije, definišemo $\alpha_\Gamma(t)$ kao snagu putanje Γ u vremenu t i $g_\Gamma(t)$ generacijski red putanje Γ u vremenu t . Na osnovu prethodnog izlaganja i definicije 5.5.1 sledi:

Lema 5.5.2 ([1]) *Za svako aproksimativno rešenje, postoji konačna familija putanja $\Gamma = \{\Gamma_j\}$ tako da važi*

1. $L^-(t) = \sum_{\Gamma \in \Gamma} \alpha_\Gamma(t)$

2. Neka je $\Gamma : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_n$ i neka su (k_j, g_j) i α_j , indeks i snaga segmenta $P_{j-1}P_j$, redom. Tada važi

$$\begin{aligned} g_{j+1} = g_j &\Rightarrow \alpha_{j+1} \leq (1 + C\varepsilon|\beta_j|)\alpha_j, \\ g_{j+1} = g_j + 1 &\Rightarrow \alpha_{j+1} \leq \tilde{\delta}\alpha_j < \alpha_j, \end{aligned}$$

gde β_j je udarni talas koji učestvuje u interakciji i $0 < \tilde{\delta} < 1$.

Dokaz. Dokaz sledi iz konstrukcije putanje. Naime, putanja je tako konstruisana, da ako se generacijski red ne menja, tada će važiti $\alpha_{j+1} \leq (1 + C\varepsilon|\beta_j|)\alpha_j$ (npr. *slučaj 1. (a)*) Međutim, ako je generacijski red povećan, tada imamo

$$\alpha_{j+1} = \tilde{\delta}_1\xi \leq g'_1(|\beta|, \rho_0)\xi \leq \tilde{\delta}\alpha_j.$$

gde je $\tilde{\delta} = \sup_{|\beta|} g'_1(|\beta|, \rho_0)$ (npr. *slučaj 1. (b)*). Analogno važi i za preostale slučajeve. \square

Sada navodimo korisnu lemu potrebnu za dalja ispitivanja.

Lema 5.5.3

$$\prod_{j \geq 1} (1 + \varepsilon|\beta_j|) \leq 1 + \frac{3}{2} \sum_{j \geq 1} \varepsilon|\beta_j| \quad \text{ako je} \quad \sum_{j \geq 1} \varepsilon|\beta_j| \leq \frac{1}{3}, \quad (5.79)$$

Dokaz. Lemu dokazujemo indukcijom po j . Za $j = 1$ jasno je da važi

$$1 + \varepsilon|\beta_1| \leq 1 + \frac{3}{2} \varepsilon|\beta_1|.$$

Pretpostavimo da je (5.79) tačno za $1 \leq j \leq k$, odnosno da važi

$$\prod_{j=1}^k (1 + \varepsilon|\beta_j|) \leq 1 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^k \varepsilon|\beta_j|$$

i dokažimo da je (5.79) tačno za $1 \leq j \leq k+1$. Na osnovu induktivne pretpostavke imamo

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{k+1} (1 + \varepsilon|\beta_j|) &= (1 + \varepsilon|\beta_{k+1}|) \prod_{j=1}^k (1 + \varepsilon|\beta_j|) \\ &\leq (1 + \varepsilon|\beta_{k+1}|) \left(1 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^k \varepsilon|\beta_j| \right) \\ &= 1 + \varepsilon|\beta_{k+1}| + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^k \varepsilon|\beta_j| + \frac{3}{2} \varepsilon|\beta_{k+1}| \sum_{j=1}^k \varepsilon|\beta_j| \\ &\leq 1 + \varepsilon|\beta_{k+1}| + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^k \varepsilon|\beta_j| + \frac{3}{2} \varepsilon|\beta_{k+1}| \frac{1}{3} \\ &= 1 + \frac{3}{2} \varepsilon|\beta_{k+1}| + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^k \varepsilon|\beta_j| \\ &= 1 + \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{k+1} \varepsilon|\beta_j|. \end{aligned}$$

Ovim je dokazano (5.79). \square

Oredimo sada snagu putanje Γ u vremenu t za koju je generacijski red $g_\Gamma(t) = j$.

Lema 5.5.4 ([1]) *Pretpostavimo da važi $C\varepsilon F(O) \leq \min\{\frac{1}{2}, \frac{1-\tilde{\delta}}{4\tilde{\delta}}\}$. Tada postoji pozitivna konstanta $\bar{\vartheta}$ koja zavisi samo od $\tilde{\delta}$ i koja zadovoljava $0 < \bar{\vartheta} < 1$, tako da važi*

$$\begin{aligned} \alpha_\Gamma(t) &\leq 2\alpha_\Gamma(0) && \text{ako je } g_\Gamma(t) = 1, \\ \alpha_\Gamma(t) &\leq \bar{\vartheta}^{j-1}\alpha_\Gamma(0) && \text{ako je } g_\Gamma(t) = j \geq 2. \end{aligned}$$

Dokaz. Pokažimo prvo da za svako s i t različito od vremena interakcije, gde je $s < t$, važi

$$g_{\Gamma}(t) = g_{\Gamma}(s) + 1 \Rightarrow \alpha_{\Gamma}(t) \leq \bar{\vartheta} \alpha_{\Gamma}(s).$$

Obeležimo sa $\Gamma : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_{j_0-1} \rightarrow P_{j_0} \rightarrow \dots \rightarrow P_{j_1} \rightarrow \dots \rightarrow P_{j_2-1} \rightarrow P_{j_2} \rightarrow \dots \rightarrow P_n$ jednu putanju. Pretpostavimo da $\Gamma(s) \in P_{j_0-1}P_{j_0}$, $\Gamma(t) \in P_{j_2-1}P_{j_2}$ i da se generacijski red menja u P_{j_1} . Tada na osnovu leme 5.5.2 i leme 5.5.3 važi

$$\begin{aligned} \alpha_{\Gamma}(t) &\leq \alpha_{\Gamma}(s) \prod_{j_0 < j \leq j_1} (1 + C\varepsilon|\beta_j|) \tilde{\delta} \prod_{j_1 < j \leq j_2} (1 + C\varepsilon|\beta_j|) \\ &\leq \tilde{\delta} \prod_{j \geq 1} (1 + C\varepsilon|\beta_j|) \alpha_{\Gamma}(s) \\ &\leq \tilde{\delta} \left(1 + \frac{3}{2} C\varepsilon \sum_{j \geq 1} |\beta_j| \right) \alpha_{\Gamma}(s) \\ &\leq \tilde{\delta} \left(1 + \frac{3}{2} C\varepsilon L^-(J) \right) \alpha_{\Gamma}(s) \leq \tilde{\delta} \left(1 + \frac{3}{2} C\varepsilon F(O) \right) \alpha_{\Gamma}(s). \end{aligned}$$

Sada, ako je $C\varepsilon F(O) \leq \frac{1}{2}$ ($\leq \frac{1-\tilde{\delta}}{4\tilde{\delta}}$), tada važi

$$\tilde{\delta} \left(1 + \frac{3}{2} C\varepsilon F(O) \right) \alpha_{\Gamma}(s) \leq \tilde{\delta} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \alpha_{\Gamma}(s) = \frac{7\tilde{\delta}}{4} \alpha_{\Gamma}(s).$$

Biramo $\bar{\vartheta}$ tako da je

$$\bar{\vartheta} = \frac{7\tilde{\delta}}{4}. \quad (5.80)$$

Kako važi

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1-\tilde{\delta}}{4\tilde{\delta}} \Rightarrow \tilde{\delta} \leq \frac{1}{3}, \quad (5.81)$$

tada važi i $\bar{\vartheta} \leq \frac{7}{12} < 1$. Ali, ako je sada $C\varepsilon F(O) \leq \frac{1-\tilde{\delta}}{4\tilde{\delta}}$ ($\leq \frac{1}{2}$), tada je

$$\tilde{\delta} \left(1 + \frac{3}{2} C\varepsilon F(O) \right) \alpha_{\Gamma}(s) \leq \tilde{\delta} \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1-\tilde{\delta}}{4\tilde{\delta}} \right) \alpha_{\Gamma}(s) = \frac{3+5\tilde{\delta}}{8} \alpha_{\Gamma}(s).$$

Sada biramo $\bar{\vartheta}$ tako da važi

$$\bar{\vartheta} = \frac{3+5\tilde{\delta}}{8} < 1, \quad (5.82)$$

jer je $\tilde{\delta} < 1$. Sada je jasno da za $\tilde{\delta} \in (0, 1)$, možemo definisati

$$\bar{\vartheta}(\tilde{\delta}) = \frac{3+19\tilde{\delta}}{16} + \text{sign} \left(\tilde{\delta} - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{3-9\tilde{\delta}}{16}.$$

Poslednja jednakost sledi iz

$$\bar{\vartheta}(\tilde{\delta}) = \begin{cases} \frac{7\tilde{\delta}}{4}, & 0 < \tilde{\delta} \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{3+5\tilde{\delta}}{8}, & \frac{1}{3} < \tilde{\delta} < 1, \end{cases}$$

što je dobijeno na osnovu (5.80, 5.81, 5.82). Zaključujemo da važi $0 < \bar{\vartheta} < 1$. Za $g_\Gamma(t) = j$ i $g_\Gamma(s) = j - 1$, sledi

$$\alpha_\Gamma(t) \leq \bar{\vartheta} \alpha_\Gamma(s)$$

i tada će za $g_\Gamma(t) = j$ i $g_\Gamma(0+) = 1$, važiti

$$\alpha_\Gamma(t) \leq \bar{\vartheta}^{j-1} \alpha_\Gamma(0+) \text{ za } j \geq 2.$$

Ako je $j = 1$, tada je

$$\alpha_\Gamma(t) \leq \alpha_\Gamma(0+) \prod_{k \geq 1} (1 + C\varepsilon|\beta_k|) \leq \left(1 + \frac{3}{2} \sum_{k \geq 1} \varepsilon|\beta_k|\right) \alpha_\Gamma(0+) \leq 2 \alpha_\Gamma(0+),$$

čime je lema dokazana. \square

Na osnovu prethodne leme važi

$$\sum_{\Gamma: g_\Gamma(t)=j} \alpha_\Gamma(t) \leq \bar{\vartheta}^{j-1} \sum_{\Gamma: g_\Gamma(t)=1} \alpha_\Gamma(0+) = \bar{\vartheta}^{j-1} L^-(0+).$$

Ako obeležimo $L_j^-(t) = \sum_{\Gamma: g_\Gamma(t)=j} \alpha_\Gamma(t)$, dobijamo sledeću teoremu:

Teorema 5.5.5 ([1]) *Pretpostavimo da važi $C\varepsilon F(O) \leq \min\{\frac{1}{2}, \frac{1-\bar{\delta}}{4\bar{\delta}}\}$. Tada postoji pozitivna konstanta $\bar{\vartheta}$ koja zavisi samo od $\bar{\delta}$ tako da važi $0 < \bar{\vartheta} < 1$ i*

$$L_1^-(t) \leq 2L^-(0+), \quad L_j^-(t) \leq \bar{\vartheta}^{j-1} L^-(0+) \quad (j \geq 2). \quad (5.83)$$

Konstanta $\bar{\vartheta}$ je iz leme 5.5.4.

5.6 Ocena ukupnog broja iteracija

Sada ćemo dati ocenu ukupnog broja talasa generisanih u tačkama interakcije između $t = 0$ i $t = T$. Pretpostavićemo da važi $C\varepsilon F(O) \leq \min\{\frac{1}{2}, \frac{1-\bar{\delta}}{4\bar{\delta}}\}$, gde su C , $\bar{\delta}$ i ε iz prethodnog poglavlja. Na osnovu teoreme 5.3.2 važi:

1. Novi razređujući talas nastaje samo pri interakciji dva udarna talasa iste familije (*slučaj 3*).
2. Amplituda razređujućeg talasa opada pri interakciji sa udarnim talasom iste familije (*slučajevi: 4. (a) 2°, 4. (b) 2°, 5. (a) 2° i 5. (b) 2°*), a povećava se pri interakciji sa udarnim talasom suprotne familije (*slučaj 2*).
3. Prethodne interakcije opisane u koraku 2, ne generišu razređujući talas suprotne familije u odnosu na familiju prilazećeg razređujućeg talasa.
4. Dva razređujuća talasa iste familije nikada neće biti u interakciji.

Neka je $\{P_m\}$ familija svih tačaka u kojima dolazi do interakcije udarnih talasa iste familije. Snagu prilazećih talasa u tački P_m obeležićemo sa $\alpha_j(P_m)$, $j = 1, 2$.

Lema 5.6.1 ([1]) *Ukupna snaga novih razređujućih talasa generisanih interakcijom dva udarna talasa iste familije ocenjuje se sa*

$$\sum_{P_m} |\alpha_1(P_m)\alpha_2(P_m)| \leq \frac{2}{1-\bar{\vartheta}} L^-(O)^2, \quad (5.84)$$

gde je $\bar{\vartheta}$ iz leme 5.5.4.

Dokaz. Neka je $\Gamma_{\alpha_j}(P_m)$ familija putanja koje sadrže $\alpha_j(P_m)$ i neka $\alpha_{\Gamma_j}(P_m)$ predstavlja snagu putanje $\Gamma_j \in \Gamma_{\alpha_j}(P_m)$, ($j = 1, 2$). Tada imamo

$$\begin{aligned} \sum_{P_m} |\alpha_1(P_m)\alpha_2(P_m)| &\leq \sum_{P_m} \sum_{\Gamma_1 \in \Gamma_{\alpha_1}(P_m)} \sum_{\Gamma_2 \in \Gamma_{\alpha_2}(P_m)} |\alpha_{\Gamma_1}(P_m)\alpha_{\Gamma_2}(P_m)| \\ &= \sum_{P_m} \sum_{\Gamma_1 \in \Gamma_{\alpha_1}(P_m)} |\alpha_{\Gamma_1}(P_m)| \sum_{\Gamma_2 \in \Gamma_{\alpha_2}(P_m)} |\alpha_{\Gamma_2}(P_m)| \quad (5.85) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma} \sum_{P_m \in \Gamma} |\alpha_{\Gamma}(P_m)| \sum_{\Gamma^* \in \Gamma^*(\Gamma, P_m)} |\alpha_{\Gamma^*}(P_m)|, \end{aligned}$$

gde $\Gamma^*(\Gamma, P_m)$ predstavlja skup svih putanja koje se seku sa Γ u P_m , dok je Γ skup svih putanja. Prva nejednakost u (5.85) sledi iz činjenice da se izraz $|\alpha_1(P_m)\alpha_2(P_m)|$ može javiti pri interakciji više putanja. Druga nejednakost u (5.85) sledi iz toga da se $|\alpha_{\Gamma_1}(P_m)\alpha_{\Gamma_2}(P_m)|$ nalazi u sumi i u obliku $|\alpha_{\Gamma_2}(P_m)\alpha_{\Gamma_1}(P_m)|$ (dva puta se sabira isti sabirak) i zbog toga što se sada posmatraju i sve putanje koje sadrže P_m . Kako je $\cup_{P_m \in \Gamma} \Gamma^*(\Gamma, P_m) \subset \Gamma \setminus \{\Gamma\}$, menjajući redosled sumiranja i zbog toga što sumiramo nad većim skupom, tj. nad $\Gamma \setminus \{\Gamma\}$, imamo

$$\sum_{P_m \in \Gamma} |\alpha_{\Gamma}(P_m)| \sum_{\Gamma^* \in \Gamma^*(\Gamma, P_m)} |\alpha_{\Gamma^*}(P_m)| \leq \sum_{\Gamma^* \in \Gamma \setminus \{\Gamma\}} \sum_{P_m \in \Gamma \cap \Gamma^*} |\alpha_{\Gamma}(P_m)\alpha_{\Gamma^*}(P_m)|.$$

Neka $P_m, P'_m \in \Gamma \cap \Gamma^*$, $P_m \neq P'_m$, i pretpostavimo da nema tačkaka putanje $\Gamma \cap \Gamma^*$ između P_m i P'_m (ako ne postoje takve dve tačke, tako da je $P_m \neq P'_m$, tada je $\Gamma = \Gamma^*$). Kako je nemoguće da važi i $g_{\Gamma}(P_m) = g_{\Gamma}(P'_m)$ i $g_{\Gamma^*}(P_m) = g_{\Gamma^*}(P'_m)$, generacijski red od Γ ili Γ^* mora se povećati, bar za jedan, pri prelasku sa P_m na P'_m i zato, na osnovu leme 5.5.4 imamo

$$\begin{aligned} \sum_{P_m \in \Gamma \cap \Gamma^*} |\alpha_{\Gamma}(P_m)\alpha_{\Gamma^*}(P_m)| &\leq 4 \sum_{j \geq 1} \vartheta^{j-1} |\alpha_{\Gamma}(P_0)\alpha_{\Gamma^*}(P_0^*)| \\ &\leq \frac{4}{1-\vartheta} |\alpha_{\Gamma}(P_0)\alpha_{\Gamma^*}(P_0^*)|, \end{aligned} \quad (5.86)$$

gde su $P_0 \in \Gamma$, $P_0^* \in \Gamma^*$ početne tačke odgovarajućih putanja u $t = 0$. Naime, najmanje što može da se desi je $g_{\Gamma^*}(P'_m) = g_{\Gamma^*}(P_m) = 1$ i $j = g_{\Gamma}(P'_m) = g_{\Gamma}(P_m) + 1$. Tada je $\alpha_{\Gamma}(P_m) \leq 2 \vartheta^{j-1} \alpha_{\Gamma}(P_0)$ i $\alpha_{\Gamma^*}(P_m) \leq 2 \alpha_{\Gamma^*}(P_0^*)$, pa sledi (5.86). Koristeći prethodno razmatranje, dobijamo da važi

$$\begin{aligned} \sum_{P_m} |\alpha_1(P_m)\alpha_2(P_m)| &\leq \frac{2}{1-\vartheta} \sum_{\Gamma \in \Gamma} \sum_{\Gamma^* \in \Gamma^*} |\alpha_{\Gamma}(P_0)\alpha_{\Gamma^*}(P_0^*)| \\ &\leq \frac{2}{1-\vartheta} \sum_{\Gamma \in \Gamma} |\alpha_{\Gamma}(P_0)| \sum_{\Gamma^* \in \Gamma^*} |\alpha_{\Gamma^*}(P_0^*)| \\ &\leq \frac{2}{1-\vartheta} L^-(O) \sum_{\Gamma \in \Gamma} |\alpha_{\Gamma}(P_0)| \\ &\leq \frac{2}{1-\vartheta} L^-(O)^2, \end{aligned}$$

odnosno

$$\sum_{P_m} |\alpha_1(P_m)\alpha_2(P_m)| = \frac{2C_7}{1-\vartheta} L^-(O)^2$$

za neko $C_7 > 0$. Ovim je lema dokazana. \square

Pokazano je da je ukupna snaga razređujućih talasa nastalih pri interakciji dva udarna talasa iste familije ocenjena sa $\frac{2C_7}{1-\vartheta} L^-(O)^2$. Primitimo da se amplituda razređujućeg talasa θ' , povećava

samo pri interakciji razređujućeg talasa θ sa udarnim talasom suprotne familije α (teorema 5.3.2, slučaj 2), pa se putanja koja sadrži taj udarni talas neće više presecati sa tim razređujućim talasom suprotne familije. To znači da se amplituda razređujućeg talasa može povećati najviše jednom pri preseku sa određenom putanjom. Kako je broj putanja konačan, i broj povećanja amplituda razređujućeg talasa je konačan. Tada je, prema teoremi 5.3.2 slučaj 2,

$$\begin{aligned} L^+(J) &\leq \sum_{\theta} |\theta| + C\varepsilon \sum_{\theta, \alpha} |\theta| |\alpha| + L^+(O) \\ &\leq (1 + C\varepsilon F(O)) \sum_{\theta} |\theta| + (1 + C\varepsilon F(O)) L^+(O) \\ &\leq (1 + C\varepsilon F(O)) \left(\frac{2C_7}{1 - \vartheta} L^-(O)^2 + L^+(O) \right). \end{aligned}$$

Dakle,

$$L^+(J) \leq 2L^+(O) + \frac{4C_7}{1 - \vartheta} L^-(O)^2. \quad (5.87)$$

Lema 5.6.2 ([1]) *Ukupna snaga talasa generisanih interakcijom udarnog talasa α i razređujućeg talasa θ ocenjuje se sa*

$$\sum_{P_m} |\alpha(P_m)\theta(P_m)| \leq \left(F(O) + \frac{2L^-(O)}{1 - \vartheta} \right) \left(L^+(O) + \frac{2C_7}{1 - \vartheta} L^-(O)^2 \right). \quad (5.88)$$

Dokaz. Rastavimo sumu u (5.88) na dve sume, gde će prva ići po tačkama u kojima u interakciji budu razređujući i udarni talas iste familije, a druga po tačkama u kojima u interakciji budu razređujući i udarni talas različitih familija:

$$\sum_{P_m} |\alpha(P_m)\theta(P_m)| = \sum_{\substack{P_m \\ i=1,2}} |\alpha_i(P_m)\theta_i(P_m)| + \sum_{\substack{P_m, i \neq j \\ i, j=1,2}} |\alpha_i(P_m)\theta_j(P_m)|.$$

Ukupna snaga talasa generisanih interakcijom udarnog i razređujućeg talasa suprotnih familija ocenjuje se sa

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{P_m, i \neq j \\ i, j=1,2}} |\alpha_i(P_m)\theta_j(P_m)| &\leq F(O) \sum_{P_m, j=1,2} |\theta_j(P_m)| \\ &\leq F(O) \left(L^+(O) + \frac{2C_7}{1 - \vartheta} L^-(O)^2 \right). \end{aligned}$$

Kada u interakciji budu razređujući i udarni talas iste familije, dolazi do toga da nestane razređujući talas ili da razređujući talas ostane u svojoj familiji (teorema 5.3.2, slučajevi 4 i 5). Time svaki razređujući talas neće biti u interakciji sa istom putanjom, odnosno udarnim talasom, a da se ne promeni generacijski red (jer je udarni talas promenio familiju), pa se time ukupan broj interakcija može prebrojati preko generacijskog reda.

$$\begin{aligned} \sum_{P_m, i=1,2} |\alpha_i(P_m)\theta_i(P_m)| &\leq \left(L^+(O) + \frac{2C_7}{1 - \vartheta} L^-(O)^2 \right) \sum_{P_m, i=1,2} |\alpha_i(P_m)| \\ &\leq \left(L^+(O) + \frac{2C_7}{1 - \vartheta} L^-(O)^2 \right) 2 \sum_{j \geq 1} \vartheta^{j-1} L^-(O) \end{aligned}$$

na osnovu leme 5.5.4. Zato je ukupan broj talasa generisanih ovim interakcijama ocenjen sa

$$2 \sum_{j \geq 1} \vartheta^{j-1} L^-(O) \left(L^+(O) + \frac{2C_7}{1 - \vartheta} L^-(O)^2 \right) \leq \frac{2L^-(O)}{1 - \vartheta} \left(L^+(O) + \frac{2C_7}{1 - \vartheta} L^-(O)^2 \right),$$

što dokazuje lemu. \square

Neka su sada σ, τ dva talasa čija se interakcija desila u tački P_m . Neka je $Q(P_m) = |\sigma\tau|$. Na osnovu prethodnih tvrđenja, odnosno, na osnovu (5.83, 5.84, 5.88) važi

Tvrđenje 5.6.3 ([1]) *Neka je $C\varepsilon F(O) \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1-\bar{\vartheta}}{4\delta}\right\}$. Tada je ukupna snaga fizičkih talasa generisanih interakcijama uniformno ograničena: postoji konstanta C_9 koja zavisi samo od jednačina, $\underline{\rho}, \bar{\rho}$, i $\text{TV}(q_0)$ tako da važi*

$$\sum_{P_m} Q(P_m) \leq C_9. \quad (5.89)$$

Dokaz. Neka su P_{m_1} tačke u kojima je došlo do interakcije dva udarna talasa različitih familija. Tada za svaku krivu J važi $L^-(J) \leq F(O)$, a kako je broj interakcija ograničen u konačnom vremenu, tada će važiti $\sum_{P_{m_1}} Q(P_{m_1}) = \mathcal{O}(1)F(O)$. Neka su sada P_{m_2} tačke u kojima je došlo do interakcije dva udarna talasa istih familija. Kao rezultat interakcije se dobije jedan razređujući i jedan udarni talas, pa će na osnovu leme 5.6.1 važiti $\sum_{P_{m_2}} Q(P_{m_2}) = 2\mathcal{O}(1)L^-(O)^2/(1-\bar{\vartheta}) + \mathcal{O}(1)F(O)$. Ako sa P_{m_3} obeležimo tačke u kojima je došlo do interakcije udarnog i razređujućeg talasa, tada iz leme 5.6.2 dobijamo

$$\sum_{P_{m_3}} Q(P_{m_3}) = (F(O) + 2L^-(O)/(1-\bar{\vartheta})) (L^+(O) + 2\mathcal{O}(1)L^-(O)^2/(1-\bar{\vartheta})).$$

Konačno, ako su P_{m_4} tačke u kojima dolazi do interakcije dva razređujuća talasa suprotnih familija, tada iz (5.87) sledi $\sum_{P_{m_4}} Q(P_{m_4}) = 2L^+(O) + 4\mathcal{O}(1)L^-(O)^2/(1-\bar{\vartheta})$. Dakle,

$$\begin{aligned} \sum_{P_m} Q(P_m) &= \sum_{P_{m_i}, i=1,2,3,4} Q(P_{m_i}) \\ &= 2\mathcal{O}(1) \left(F(O) + \frac{1}{1-\bar{\vartheta}} L^-(O)^2 \right) \\ &\quad + \left(F(O) + \frac{2}{1-\bar{\vartheta}} L^-(O) \right) \left(L^+(O) + \frac{2\mathcal{O}(1)}{1-\bar{\vartheta}} L^-(O)^2 \right) \\ &\quad + 2L^+(O) + \frac{4\mathcal{O}(1)}{1-\bar{\vartheta}} L^-(O)^2. \end{aligned}$$

Time je dobijena konstanta C_9 iz (5.89). \square

5.7 Ocena snage nefizičkih talasa

Da bi se dokazalo da je aproksimativno rešenje dobro definisano za svako $t \geq 0$, dovoljno je pokazati da ukupan broj talasa ostaje ograničen. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji niz vremena T_m u kojima dolazi do interakcije talasa tako da važi $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = T_\infty < \infty$. Kako su ocene u poglavlju 5.6 tačne za svako $0 < t < T$, tada postoji uniformna konstanta C_∞ tako da važi

$$\sum_{0 < t_m < T_\infty} Q(P_m) \leq C_\infty, \quad (5.90)$$

gde t_m predstavlja vreme interakcije u tački P_m i sumiranje se vrši po svim tačkama interakcije između $t = 0$ i T_∞ . Neka je sada $\hat{\nu} > 0$ prag parametar definisan u poglavlju 4.2. Iz ocene (5.90) sledi da je manje od $C_\infty/\hat{\nu}$ tačaka interakcije u kojima snage prilazećih talasa zadovoljavaju $Q(P_m) \geq \hat{\nu}$. Kako se novi fizički talasi generišu samo u tim tačkama, to je broj fizičkih talasa konačan. Novi nefizički talas je generisan su samo u tačkama u kojima se sudare dva fizička talasa

i dva fizička talasa mogu samo jednom da se sudare. Time je i broj nefizičkih talasa konačan. Dakle ukupan broj svih talasa je konačan, što je kontradikcija.

Sada, neka je α udarni talas u vremenu t . Tada se on nalazi na nekoliko putanja za koje važi

$$\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t), \dots \quad (g_{\Gamma_1(t)} \leq g_{\Gamma_2(t)} \leq g_{\Gamma_3(t)} \leq \dots).$$

Generacijski red talasa α definiše se sa $g_{\Gamma_1(t)}$ i obeležava sa g_α . Ovakav zapis odgovara Bressanovoj definiciji generacijskog reda (definicija 4.3.5). Neaka je sada V_j^- ukupna snaga udarnih talasa u vremenu t čiji je generacijski red veći ili jednak j . Tada sledi da je

$$V_j^-(t) = \sum_{l \geq j} L_l^-(t),$$

a iz (5.83) imamo i

$$\sup_{t \geq 0} V_j^-(t) \leq L^-(0) \sum_{l \geq j} \bar{\vartheta}^{l-1} \leq \frac{\bar{\vartheta}^{j-1} L^-(0)}{1 - \bar{\vartheta}}.$$

Sada ćemo dati ocenu snaga nefizičkih talasa. Primitimo da se samo u aproksimativnom Rimanovom rešenju generišu nefizički talasi i da u interakciji mora učestvovati bar jedan udarni talas. Kako je u aproksimativnom Rimanovom rešenju $|\beta| = |\beta'|$ i $|\chi| = |\chi'|$, totalna snaga udarnih talasa $L^-(t)$ se ne povećava i $L^-(t)$ je ocenjeno kao u teoremi 5.4.6. Pretpostavimo da su u interakciji udarni talasi χ i β . Tada se generacijski red generisanog nefizičkog talasa definiše kao $\max\{g_\beta, g_\chi\} + 1$; a ako u interakciji budu udarni talas β i razređujući talas, tada se generacijski red nefizičkog talasa definiše kao $g_\beta + 1$. Primitimo da dva nefizička talasa ne mogu biti u interakciji (jer se kreću istom brzinom). Sa \mathcal{NP} obeležili smo skup svih nefizičkih talasa.

Lema 5.7.1 ([1]) *Neka je $\hat{\varepsilon}$ proizvoljan nefizički talas. Postoji konstanta C koja zavisi samo od jednačina, $\underline{\rho}, \bar{\rho}$ tako da važe sledeće ocene:*

$$(1) \quad |\hat{\varepsilon}| = \mathcal{O}(1)\hat{\nu}, \quad (2) \quad \sum_{\hat{\varepsilon} \in \mathcal{NP}, g_{\hat{\varepsilon}} \geq j} |\hat{\varepsilon}| \leq C \sup_{t \geq 0} V_{j-1}^-(t).$$

Dokaz. (1) sledi iz činjenice $|\hat{\varepsilon}| = \mathcal{O}(1)|\alpha\theta| = \mathcal{O}(1)\hat{\nu}$, jer nefizički talas nastaje kada u interakciji budu talasi α i θ za koje važi $|\alpha\theta| < \hat{\nu}$. Pre nego što dokažemo (2), primitimo da generacijski red nefizičkog talasa ne može biti manji od 2. Neaka su sada α, α_1 i α_2 udarni, a θ razređujući talas.

$$\begin{aligned} \sum_{\hat{\varepsilon}, g_{\hat{\varepsilon}}=j} |\hat{\varepsilon}| &= \mathcal{O}(1) \sum_{0 < t < T} \sum_{\substack{\alpha_{\Gamma(t)}, \theta \\ g_\alpha = j-1}} |\alpha(t)\theta(t)| + \mathcal{O}(1) \sum_{0 < t < T} \sum_{\substack{\alpha_{1, \Gamma_1(t)}, \alpha_{2, \Gamma_2(t)} \\ g_{\alpha_1} = j-1 \\ g_{\alpha_2} \leq j-1}} |\alpha_1(t)\alpha_2(t)| \\ &\leq \mathcal{O}(1) \sum_{0 < t < T} L^+(t) \sum_{\substack{\alpha_{\Gamma(t)} \\ g_\alpha = j-1}} |\alpha(t)| + \mathcal{O}(1) \sum_{0 < t < T} L^-(t) \sum_{\substack{\alpha_{1, \Gamma_1(t)} \\ g_{\alpha_1} = j-1}} |\alpha_1(t)| \\ &\leq \mathcal{O}(1)F(\mathcal{O}) \left(\sum_{0 < t < T} L_{j-1}^-(t) + \sum_{0 < t < T} L_{j-1}^-(t) \right) \\ &\leq \mathcal{O}(1)F(\mathcal{O}) \left(2\mathcal{O}(1) \sup_{t \geq 0} L_{j-1}^-(t) \right) \\ &\leq 2\mathcal{O}(1)F(\mathcal{O}) \sup_{t \geq 0} L_{j-1}^-(t). \end{aligned}$$

Ovde smo sa $\alpha_{i,\Gamma_i(t)}$ obeležili udarni talas α_i koji se nalazi na putanji Γ_i u vremenu t , $i = 1, 2$. Dakle, sada imamo da važi

$$\begin{aligned} \sum_{\hat{\varepsilon}, g_{\hat{\varepsilon}} \geq j} |\hat{\varepsilon}| &\leq 2\mathcal{O}(1)F(O) \sum_{l \geq j-1} \sup_{t \geq 0} L_l^-(t) \\ &= 2\mathcal{O}(1)F(O) \sup_{t \geq 0} \sum_{l \geq j-1} L_l^-(t) \\ &= 2\mathcal{O}(1)F(O) \sup_{t \geq 0} V_{j-1}^-(t). \end{aligned}$$

□

Na osnovu leme 5.7.1 sledi

Tvrđenje 5.7.2 ([1]) *Za dato $\hat{\delta} > 0$, postoji prag parametar $\hat{\nu} > 0$ tako da aproksimativno rešenje konstruisano WFT metodom zadovoljava*

$$\sum_{\hat{\varepsilon} \in \mathcal{NP}} |\hat{\varepsilon}| \leq \hat{\delta}. \quad (5.91)$$

Dokaz. Neka je N_0 broj udarnih talasa u $t = 0$. Analogno kao u poglavlju 4.3, kada se pokazivalo da je snaga nefizičkih talasa mala, postoji polinom $P(N_0, \hat{\delta}^{-1})$ (videti sam kraj poglavlja 4.3) tako da važi

$$\begin{aligned} \sum_{\hat{\varepsilon} \in \mathcal{NP}} |\hat{\varepsilon}| &\leq \sum_{\hat{\varepsilon} \in \mathcal{NP}, g_{\hat{\varepsilon}} \leq j} |\hat{\varepsilon}| + \sum_{\hat{\varepsilon} \in \mathcal{NP}, g_{\hat{\varepsilon}} \geq j+1} |\hat{\varepsilon}| \\ &\leq \mathcal{O}(1)P(N_0, \hat{\delta}^{-1})\hat{\nu} + \mathcal{O}(1) \sup_{t \geq 0} V_j^-(t) \\ &\leq \mathcal{O}(1)P(N_0, \hat{\delta}^{-1})\hat{\nu} + \mathcal{O}(1) \bar{\vartheta}^j. \end{aligned}$$

Sada biramo j tako da važi $\mathcal{O}(1) \bar{\vartheta}^j \leq \frac{\hat{\delta}}{2}$ i onda $\hat{\nu}$ tako da važi (5.91). □

Ovim je dobijena uniformna ograničenost snage nefizičkih talasa. Pokažimo još da je i totalna varijacija rešenja uniformno ograničena (koristeći Rimanove invarijante). Kako je ocena ukupne snage talasa ekvivalentna merenju totalne varijacije, to znači da postoji konstanta $\tilde{\mu} > 0$ tako da važi

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} \text{TV}((r, s), J) \leq L(J) = L^-(J) + L^+(J) \leq \tilde{\mu} \text{TV}((r, s), J),$$

odnosno

$$\text{TV}((r, s), J) \leq \tilde{\mu} L(J). \quad (5.92)$$

Ovde je sa $\text{TV}((r, s), J)$ označena totalna varijacija u Rimanovim invarijantama talasa koji presecaju J . Na osnovu teoreme 5.4.6 i (5.87) imamo

$$L(J) = L^-(J) + L^+(J) \leq F(O) + 2L^+(O) + \frac{4\mathcal{O}(1)}{1-\bar{\vartheta}} L^-(O)^2. \quad (5.93)$$

Sada, koristeći lemu 5.4.4 i lemu 5.4.5, kao i (5.93) dobijamo

$$\begin{aligned} L(J) &\leq 2L^-(O) + 2L^+(O) + \frac{4\mathcal{O}(1)}{1-\bar{\vartheta}} L^-(O)^2 \\ &= 2(L^-(O) + L^+(O)) + \frac{4\mathcal{O}(1)}{1-\bar{\vartheta}} L^-(O)^2 \\ &\leq 4 \text{TV}(r_0(x), s_0(x)) + \frac{4\mathcal{O}(1)}{1-\bar{\vartheta}} (\text{TV}(r_0(x), s_0(x)))^2 \\ &\leq 4 \text{TV}(r_0(x), s_0(x)) \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{1-\bar{\vartheta}} \text{TV}(r_0(x), s_0(x)) \right). \end{aligned}$$

Na osnovu (5.92) i gornjih ocena, zaključujemo da važi

$$\mathrm{TV}((r, s), J) \leq 4\tilde{\mu} \mathrm{TV}(r_0(x), s_0(x)) \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{1-\vartheta} \mathrm{TV}(r_0(x), s_0(x)) \right).$$

Ovim smo dobili uniformnu ograničenost $\mathrm{TV}((r, s), J)$ za svako $t \geq 0$, pa sada možemo formulirati sledeću teoremu.

Teorema 5.7.3 ([1]) *Pretpostavimo da je $(\gamma - 1) \mathrm{TV}(q_0)$ dovoljno malo; tada je WFT šema stabilna i daje globalno rešenje za svako $t \geq 0$.*

Delta udarni talasi kao aproksimativno rešenje za PGD model

U ovoj glavi biće korišćena tvrđenja iz [29]. Posmatraćemo zakon održanja

$$\partial_t f(U) + \partial_x g(U) = 0, \quad U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad (6.1)$$

gde su $f = (f^1, \dots, f^n)$ i $g = (g^1, \dots, g^n)$ neprekidna preslikavanja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ u \mathbb{R}^n . Funkcija f naziva se funkcija gustine, dok je g fluks funkcija.

Brojni su radovi gde se mogu naći primeri sistema koji nemaju klasično rešenje Rimanovog problema. Većina takvih rešenja su delta talasi (videti [6], [18], [39]) ili singularni udarni talasi (videti [21], [28]), i ona se mogu posmatrati kao specijalni slučajevi novog tipa rešenja - *shadow wave* (u daljem tekstu SDW [29]). Postoje različiti uslovi pod kojima se traži rešenje u ovim primerima. Neki su limitirani formom fluks funkcije. Takođe postoji i problem jedinstvenosti rešenja jer postoji veliki izbor rešenja koja se ne mogu staviti u istu klasu. Entropijska funkcija i fluks entropije za takve sisteme nemaju lepe osobine, kao što imaju gustina i fluks funkcija, i to može dovesti do problema kada trebaju da se provere Laksovi entropijski uslovi. Zbog toga su se autori pomenutih radova opredelili za nadkompresibilnost kao kriterijum za dopustivost talasa i time rešili problem jedinstvenosti. Poseban je problem kada interakcija uključuje singularna rešenja.

Prevazilaženje ovih problema biće pokušano uvođenjem takozvanog SDW rešenja sistema zakona održanja. Grubo rečeno, brzina talasa perturbuje se sa obe strane malim parametrom μ tako da su stanja U_0 i U_1 spojena pomoću tri udarna talasa. Dva imaju perturbovanu brzinu, a treći, u sredini, ima neperturbovanu brzinu. Međustanja $U_{1,\mu}$ sa leve i $U_{2,\mu}$ sa desne strane udarnog talasa mogu težiti beskonačnosti kada $\mu \rightarrow 0$. Ceo metod podseća na aproksimaciju razređujućih talasa nizom neentropijskih udarnih talasa. U daljem tekstu biće korišćena tri tipa SDW rešenja: konstantni SDW, obični SDW i težinski SDW. Počnimo sa osnovnim definicijama.

6.1 Osnovne formule

Neka je dat parametar $\mu \in (0, \mu_0)$, gde je μ_0 dovoljno malo po potrebi. Neka su a_μ realne, a g_μ integrabilne funkcije na nekom domenu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Kažemo da je

$$a_\mu \sim \mu \text{ ako postoji } A \in (0, \infty), \text{ tako da važi } \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{a_\mu}{\mu} = A$$

i

$$g_\mu \approx g \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ ako } \int_{\Omega} g_\mu \phi \rightarrow \langle g, \phi \rangle \text{ kad } \mu \rightarrow 0 \text{ za svaku test funkciju } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

$\mathcal{D}'(\Omega)$ je skup svih distribucija [36] (poglavlje 2.1). Relacija $g_\mu \approx v_\mu$ znači $g_\mu - v_\mu \approx 0$ i to nazivamo distributivnom jednakošću.

Definicija 6.1.1 *Vektorska funkcija u formi*

$$U_\mu(x, t) = \begin{cases} U_0, & x < c(t) - a_\mu(t) - x_{1,\mu} \\ U_{1,\mu}, & c(t) - a_\mu(t) - x_{1,\mu} < x < c(t) \\ U_{2,\mu}, & c(t) < x < c(t) + b_\mu(t) + x_{2,\mu} \\ U_1, & x > c(t) + b_\mu(t) + x_{2,\mu} \end{cases} \quad (6.2)$$

naziva se konstantni SDW (slika 6.1). Dalje,

$$\sigma_\mu(t) := (a_\mu(t) + x_{1,\mu})U_{1,\mu} + (b_\mu(t) + x_{2,\mu})U_{2,\mu} \quad (6.3)$$

naziva se snaga, a $c'(t)$ brzina SDW. Centralna linija SDW data je sa $x = c(t)$, dok su spoljašnje linije date sa $x = c(t) - a_\mu(t) - x_{1,\mu}$ i $x = c(t) + b_\mu(t) + x_{2,\mu}$. Vrednosti $x_{1,\mu}$ i $x_{2,\mu}$ nazivaju se podizači, dok $U_{1,\mu}$ i $U_{2,\mu}$ međustanja datog SDW. Ovde je $x_{1,\mu}, x_{2,\mu} \sim \mu$, dok su a_μ i b_μ glatke funkcije jednake nuli u $t = 0$ i čiji je rast manji ili jednak μ .

Ako je $x_{1,\mu} = x_{2,\mu} = 0$, tada se SDW naziva običan. Pretpostavljamo da $\lim_{\mu \rightarrow 0} \sigma_\mu(t) = \sigma(t) \in \mathbb{R}^n$ postoji za svako $t \geq 0$ i da važi

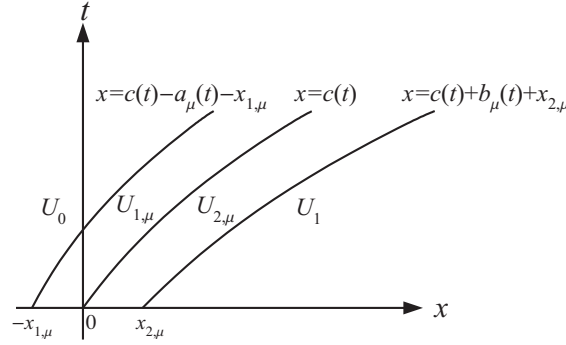
$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \iint U_\mu(x, t) \phi(x, t) dx dt &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{c(t) - a_\mu(t) - x_{1,\mu}} U_0 \phi(x, t) dx dt \\ &+ \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{c(t) - a_\mu(t) - x_{1,\mu}}^{c(t)} U_{1,\mu} \phi(x, t) dx dt \\ &+ \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{c(t)}^{c(t) + b_\mu(t) + x_{2,\mu}} U_{2,\mu} \phi(x, t) dx dt \\ &+ \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{c(t) + b_\mu(t) + x_{2,\mu}}^{+\infty} U_1 \phi(x, t) dx dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{c(t)} U_0 \phi(x, t) dx dt \\ &+ \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} (a_\mu(t) + x_{1,\mu}) U_{1,\mu} \phi(c(t), t) dt \\ &+ \lim_{\mu \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) U_{2,\mu} \phi(c(t), t) dt \\ &+ \int_0^{+\infty} \int_{c(t)}^{+\infty} U_1 \phi(x, t) dx dt \\ &= \iint (U_0 + (U_1 - U_0) \bar{\theta}(x - c(t))) \phi(x, t) dx dt + \int \sigma(t) \phi(c(t), t) dt, \\ &= \langle U_0 + (U_1 - U_0) \bar{\theta}(x - c(t)) + \sigma(t) \delta(x - c(t)), \phi(x, t) \rangle \end{aligned}$$

za $t \geq 0$, gde je $\bar{\theta}$ Hevisajdova funkcija. Sada se jasno vidi zašto baš veličina data u (6.3) predstavlja snagu SDW.

Sledeća lema je ključna u radu sa SDW.

Lema 6.1.2 ([29]) *Neka $f, g \in \mathcal{C}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ i neka je $U_\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ po delovima konstantna funkcija za svako $t \geq 0$ data sa (6.2). Takođe, pretpostavimo da funkcije f i g zadovoljavaju*

$$\max_{i=1,2} \{ \|f(U_{i,\mu})\|_{\mathbf{L}^\infty}, \|g(U_{i,\mu})\|_{\mathbf{L}^\infty} \} = \mathcal{O}(\mu^{-1}). \quad (6.4)$$



Slika 6.1: Konstantni SDW.

Tada važi

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_t f(U_\mu), \phi \rangle &\approx \int_0^\infty \left(a'_\mu(t) f(U_{1,\mu}) + b'_\mu(t) f(U_{2,\mu}) \right) \phi(c(t), t) dt \\
 &\quad - \int_0^\infty c'(t) \left(f(U_1) - f(U_0) \right) \phi(c(t), t) dt \\
 &\quad + \int_0^\infty c'(t) \left((a_\mu(t) + x_{1,\mu}) f(U_{1,\mu}) + (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) f(U_{2,\mu}) \right) \partial_x \phi(c(t), t) dt
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

i

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_x g(U_\mu), \phi \rangle &\approx \int_0^\infty \left(g(U_1) - g(U_0) \right) \phi(c(t), t) dt \\
 &\quad - \int_0^\infty \left((a_\mu(t) + x_{1,\mu}) g(U_{1,\mu}) + (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) g(U_{2,\mu}) \right) \partial_x \phi(c(t), t) dt.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

gde je $\int_0^\infty \phi(c(t), t) dt = \langle \delta, \phi \rangle$ i $\int_0^\infty \partial_x \phi(c(t), t) dt = -\langle \delta', \phi \rangle$. Delta funkcija i njen izvod imaju nosač duž linije $x = c(t)$.

Napomena 6.1.3 Pretpostavka (6.4) nije potrebna u svim sistemima zakona održanja, ali se mora uzeti u obzir kada se govori o opštem sistemu zakona održanja.

Napomena 6.1.4 Konstante $x_{i,\mu}$, $i = 1, 2$ su korisne ako početni uslov sadrži delta funkciju. Ako $\sigma := \lim_{\mu \rightarrow 0} x_{1,\mu} U_{1,\mu} + x_{2,\mu} U_{2,\mu} \in \mathbb{R}^n$ postoji, tada funkcija U_μ iz (6.2) zadovoljava

$$U|_{t=0} = \begin{cases} U_0, & x < 0, \\ U_1, & x > 0 \end{cases} + \sigma \delta_{(0,0)}.$$

Sa $\delta_{(0,0)}$ označena je delta funkcija sa nosačem u $(0, 0)$.

Dokaz. Koristeći razvoj test funkcije $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ u Tejlorov red imamo da važi

$$\begin{aligned}
 \phi(c(t) - a_\mu(t) - x_{1,\mu}, t) &= \phi(c(t), t) + \sum_{j=1}^m \partial_x^j \phi(c(t), t) \frac{(-a_\mu(t) - x_{1,\mu})^j}{j!} + \mathcal{O}(\mu^{m+1}), \\
 \phi(c(t) + b_\mu(t) + x_{2,\mu}, t) &= \phi(c(t), t) + \sum_{j=1}^m \partial_x^j \phi(c(t), t) \frac{(b_\mu(t) + x_{2,\mu})^j}{j!} + \mathcal{O}(\mu^{m+1}).
 \end{aligned}$$

Na osnovu pretpostavke o rastu a_μ , b_μ , $f(U_{i,\mu})$ i $g(U_{i,\mu})$, $i = 1, 2$, zaključujemo da je dovoljno uzeti $m = 1$ u prethodnom razvoju, tako da važi

$$\begin{aligned}
 \phi(c(t) - a_\mu(t) - x_{1,\mu}, t) &= \phi(c(t), t) - \partial_x \phi(c(t), t) (a_\mu(t) + x_{1,\mu}) + \mathcal{O}(\mu^2), \\
 \phi(c(t) + b_\mu(t) + x_{2,\mu}, t) &= \phi(c(t), t) + \partial_x \phi(c(t), t) (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) + \mathcal{O}(\mu^2).
 \end{aligned}$$

Koristeći standardnu proceduru sa udarnim talasima i prethodne aproksimacije, dobijamo

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t f(U_\mu), \phi \rangle &\approx - \int_0^\infty (c'(t) - a'_\mu(t))(f(U_{1,\mu}) - f(U_0)) \phi(c(t) - a_\mu(t) - x_{1,\mu}, t) dt \\
&\quad - \int_0^\infty c'(t)(f(U_{2,\mu}) - f(U_{1,\mu})) \phi(c(t), t) dt \\
&\quad - \int_0^\infty (c'(t) + b'_\mu(t))(f(U_1) - f(U_{2,\mu})) \phi(c(t) + b_\mu(t) + x_{2,\mu}, t) dt \\
&\approx -(f(U_{1,\mu}) - f(U_0)) \int_0^\infty (c'(t) - a'_\mu(t)) \left(\phi(c(t), t) - \partial_x \phi(c(t), t) \right. \\
&\quad \left. \cdot (a_\mu(t) + x_{1,\mu}) \right) dt \\
&\quad - (f(U_{2,\mu}) - f(U_{1,\mu})) \int_0^\infty c'(t) \phi(c(t), t) dt \\
&\quad - (f(U_1) - f(U_{2,\mu})) \int_0^\infty (c'(t) + b'_\mu(t)) \left(\phi(c(t), t) + \partial_x \phi(c(t), t) \right. \\
&\quad \left. \cdot (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) \right) dt.
\end{aligned}$$

Pretpostavke leme 6.1.2 impliciraju $a'_\mu(t), b_\mu(t), a'_\mu(t), b_\mu(t) \lesssim \mu$, $f(U_{i,\mu}) \lesssim 1/\mu$ i $x_{i,\mu} \sim \mu$ za $i = 1, 2$ kada $\mu \rightarrow 0$, pa su tada integrali

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty a'_\mu(t) f(U_{1,\mu}) \partial_x \phi(c(t), t) (a_\mu(t) + x_{1,\mu}) dt, \int_0^\infty c'(t) f(U_0) \partial_x \phi(c(t), t) (a_\mu(t) + x_{1,\mu}) dt, \\
&\int_0^\infty a'_\mu(t) f(U_0) \partial_x \phi(c(t), t) (a_\mu(t) + x_{1,\mu}) dt, \int_0^\infty c'(t) f(U_1) \partial_x \phi(c(t), t) (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) dt, \\
&\int_0^\infty b'_\mu(t) f(U_1) \partial_x \phi(c(t), t) (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) dt, \int_0^\infty b'_\mu(t) f(U_{2,\mu}) \partial_x \phi(c(t), t) (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) dt, \\
&\int_0^\infty a'_\mu(t) f(U_0) \phi(c(t), t) dt \text{ i } \int_0^\infty b'_\mu(t) f(U_1) \phi(c(t), t) dt
\end{aligned}$$

asocirani sa nulom i zbog toga sledi

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t f(U_\mu), \phi \rangle &\approx -(f(U_1) - f(U_0)) \int_0^\infty c'(t) \phi(c(t), t) dt \\
&\quad + \int_0^\infty \left(a'_\mu(t) f(U_{1,\mu}) + b'_\mu(t) f(U_{2,\mu}) \right) \phi(c(t), t) dt \\
&\quad + \int_0^\infty c'(t) \left((a_\mu(t) + x_{1,\mu}) f(U_{1,\mu}) + (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) f(U_{2,\mu}) \right) \\
&\quad \cdot \partial_x \phi(c(t), t) dt,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t f(U_\mu), \phi \rangle &\approx \left\langle \left(-c'(t)(f(U_1) - f(U_0)) + a'_\mu(t) f(U_{1,\mu}) + b'_\mu(t) f(U_{2,\mu}) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \delta(x - c(t)), \phi(x, t) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle -c'(t) \left((a_\mu(t) + x_{1,\mu}) f(U_{1,\mu}) + (b_\mu(t) + x_{2,\mu}) f(U_{2,\mu}) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \delta'(x - c(t)), \phi(x, t) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Na sličan način dobijamo da važi

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x g(U_\mu), \phi \rangle &\approx (g(U_{1,\mu}) - g(U_0)) \int_0^\infty \left(\phi(c(t), t) - \partial_x \phi(c(t), t)(a_\mu(t) + x_{1,\mu}) \right) dt \\
&\quad + (g(U_{2,\mu}) - g(U_{1,\mu})) \int_0^\infty \phi(c(t), t) dt \\
&\quad + (g(U_1) - g(U_{2,\mu})) \int_0^\infty \left(\phi(c(t), t) + \partial_x \phi(c(t), t)(b_\mu(t) + x_{2,\mu}) \right) dt \\
&\approx (g(U_1) - g(U_0)) \int_0^\infty \phi(c(t), t) dt \\
&\quad - \int_0^\infty \left((a_\mu(t) + x_{1,\mu})g(U_{1,\mu}) + (b_\mu(t) + x_{2,\mu})g(U_{2,\mu}) \right) \partial_x \phi(c(t), t) dt \\
&\approx \left\langle \left(g(U_1) - g(U_0) \right) \delta(x - c(t)), \phi(x, t) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \left((a_\mu(t) + x_{1,\mu})g(U_{1,\mu}) + (b_\mu(t) + x_{2,\mu})g(U_{2,\mu}) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \delta'(x - c(t)), \phi(x, t) \right\rangle,
\end{aligned}$$

jer su, opet, na osnovu pretpostavki iz leme 6.1.2, integrali

$$\int_0^\infty g(U_0) \partial_x \phi(c(t), t)(a_\mu(t) + x_{1,\mu}) dt \quad \text{i} \quad \int_0^\infty g(U_1) \partial_x \phi(c(t), t)(b_\mu(t) + x_{2,\mu}) dt$$

asocirani sa nulom. Ovim je lema dokazana. \square

Napomena 6.1.5 *Ako se koriste samo konstantna stanja $U_{1,\mu}$ i $U_{2,\mu}$ u (6.2), onda takvi SDW nisu dovoljni da bi se odgovorilo na pitanje interakcije dva SDW. Zbog toga će se kasnije biti uvedena međustanja $U_{1,\mu}(t)$ i $U_{2,\mu}(t)$ koja zavise od vremena.*

6.2 Rimanov problem

U nastavku, posmatraćemo specijalan slučaj vektorske funkcije date u (6.2). Neka je $c(t) = ct$, $a_\mu(t) = a_\mu t$, $b_\mu(t) = b_\mu t$ i $x_{1,\mu} = x_{2,\mu} = 0$, gde su c , a_μ i b_μ konstante. Tada je vektorska funkcija koju ćemo koristiti oblika

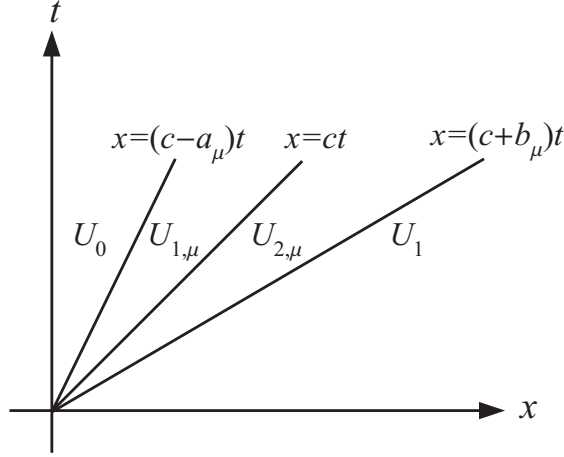
$$U_\mu(x, t) = \begin{cases} U_0, & x < (c - a_\mu)t, \\ U_{1,\mu}, & (c - a_\mu)t < x < ct, \\ U_{2,\mu}, & ct < x < (c + b_\mu)t, \\ U_1, & x > (c + b_\mu)t. \end{cases} \quad (6.7)$$

Ovako definisan talas naziva se *običan* SDW (slika 6.2). Sada jednakosti (6.5) i (6.6) imaju jednostavniji oblik

$$\begin{aligned}
\langle \partial_t f(U_\mu), \phi \rangle &\approx \int_0^\infty \left(a_\mu f(U_{1,\mu}) + b_\mu f(U_{2,\mu}) \right) \phi(c(t), t) dt \\
&\quad - \int_0^\infty c \left(f(U_1) - f(U_0) \right) \phi(c(t), t) dt \\
&\quad + \int_0^\infty c \left(a_\mu f(U_{1,\mu}) + b_\mu f(U_{2,\mu}) \right) t \partial_x \phi(c(t), t) dt
\end{aligned} \quad (6.8)$$

i

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x g(U_\mu), \phi \rangle &\approx \int_0^\infty \left(g(U_1) - g(U_0) \right) \phi(c(t), t) dt \\
&\quad - \int_0^\infty \left(a_\mu g(U_{1,\mu}) + b_\mu g(U_{2,\mu}) \right) t \partial_x \phi(c(t), t) dt.
\end{aligned} \quad (6.9)$$



Slika 6.2: Običan SDW.

Pretpostavka 6.2.1 Neka $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sve SDW komponente U_μ^i zadovoljavaju:

- $\|U_\mu^i\|_{\mathbf{L}^\infty} = \mathcal{O}(\mu^{-1})$ ako f i g imaju najviše linearan rast po U_μ^i . Takve komponente nazivamo glavne komponente ($\mu U_\mu^i \rightarrow C > 0$ kada $\mu \rightarrow 0$).
- $\|U_\mu^i\|_{\mathbf{L}^\infty} = o(\mu^{-1})$ u suprotnom. Takve komponente nazivamo sporedne komponente ($\mu U_\mu^i \rightarrow 0$ kada $\mu \rightarrow 0$, odnosno U_μ^i ima konačnu graničnu vrednost).

Pretpostavkom 6.2.1 se osigurava da uslov (6.4) ne bude narušen.

Definicija 6.2.2 Delta udarni talas je SDW asociran δ distribuciji sa sporednim komponentama koje imaju konačnu graničnu vrednost kada $\mu \rightarrow 0$.

Definicija 6.2.3 Neka je U_0 fiksirano. Skup svih stanja $U_1 \in \Omega$ takvih da postoji SDW rešenje za (6.1) sa početnim uslovom

$$U|_{t=0} = \begin{cases} U_0, & x < 0, \\ U_1, & x > 0, \end{cases}$$

naziva se SDW lokus. Skup tačaka za koje je pomenuti talas dopustiv naziva se dopustivi lokus. U slučaju kada je SDW delta udarni talas, tada se lokus naziva delta lokus.

Potražimo sada SDW rešenje za (6.1). Zamenjujući funkciju U_μ iz (6.7) u i -tu jednačinu sistema (6.1), dobijamo

$$\begin{aligned} & (-c(f^i(U_1) - f^i(U_0)) + a_\mu f^i(U_{1,\mu}) + b_\mu f^i(U_{2,\mu})) \delta(x - ct) \\ & - ct (a_\mu f^i(U_{1,\mu}) + b_\mu f^i(U_{2,\mu})) \delta'(x - ct) + (g^i(U_1) - g^i(U_0)) \delta(x - ct) \\ & + t (a_\mu g^i(U_{1,\mu}) + b_\mu g^i(U_{2,\mu})) \delta'(x - ct) \approx 0. \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} & (-c(f^i(U_1) - f^i(U_0)) + a_\mu f^i(U_{1,\mu}) + b_\mu f^i(U_{2,\mu}) + g^i(U_1) - g^i(U_0)) \delta(x - ct) \\ & + (-c (a_\mu f^i(U_{1,\mu}) + b_\mu f^i(U_{2,\mu})) + a_\mu g^i(U_{1,\mu}) + b_\mu g^i(U_{2,\mu})) t \delta'(x - ct) \approx 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Odatle sledi

$$\begin{aligned} & -c(f^i(U_1) - f^i(U_0)) + a_\mu f^i(U_{1,\mu}) + b_\mu f^i(U_{2,\mu}) + g^i(U_1) - g^i(U_0) \approx 0, \\ & -c (a_\mu f^i(U_{1,\mu}) + b_\mu f^i(U_{2,\mu})) + a_\mu g^i(U_{1,\mu}) + b_\mu g^i(U_{2,\mu}) \approx 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$i = 1, 2, \dots, n.$

Definišimo sada RH deficit i -te jednačine

$$\underline{\kappa}_i := c(f^i(U_1) - f^i(U_0)) - (g^i(U_1) - g^i(U_0)).$$

Tada iz (6.11) sledi

$$\begin{aligned} a_\mu f^i(U_{1,\mu}) + b_\mu f^i(U_{2,\mu}) &\approx \underline{\kappa}_i \\ a_\mu g^i(U_{1,\mu}) + b_\mu g^i(U_{2,\mu}) &\approx c\underline{\kappa}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ako je sistem (6.1) dat u evolucionom obliku $f^i(y) \equiv y^i, i = 1, \dots, n$, tada se sistem (6.11) redukuje na

$$\begin{aligned} -c(U_1^i - U_0^i) + a_\mu U_{1,\mu}^i + b_\mu U_{2,\mu}^i + g^i(U_1) - g^i(U_0) &\approx 0, \\ -c(a_\mu U_{1,\mu}^i + b_\mu U_{2,\mu}^i) + a_\mu g^i(U_{1,\mu}) + b_\mu g^i(U_{2,\mu}) &\approx 0, \\ &i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

a time i sistem (6.12) ima jednostavniju formu

$$\begin{aligned} a_\mu U_{1,\mu}^i + b_\mu U_{2,\mu}^i &\approx \underline{\kappa}_i \\ a_\mu g^i(U_{1,\mu}) + b_\mu g^i(U_{2,\mu}) &\approx c\underline{\kappa}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

6.2.1 Entropijski uslovi

Neka je $\eta(U)$ (strogo) konveksna ili semi-konveksna entropijska funkcija za (6.1), sa fluksom entropije $\psi(U)$. Entropijski uslov izrazićemo u sledećoj formi. Slabo aproksimativno rešenje U_μ sistema (6.1) sa početnim uslovom $U|_{t=0} = U_{0,\mu}$ je *dopustivo* ako za svako $T > 0$ važi

$$\liminf_{\mu \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_0^T \eta(U_\mu) \partial_t \phi + \psi(U_\mu) \partial_x \phi \, dt \, dx + \int_{\mathbb{R}} \eta(U_{0,\mu}(x, 0)) \phi(x, 0) \, dx \geq 0, \quad (6.13)$$

za sve nenegativne test funkcije $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (-\infty, T))$.

Posmatrajmo sada običan SDW U_μ dat u (6.7) i iskoristimo jednakosti (6.8, 6.9) gde f zamenimo sa η i g sa ψ . Kako je delta funkcija nenegativna distribucija, (6.8) postaje

$$\limsup_{\mu \rightarrow 0} -c(\eta(U_1) - \eta(U_0)) + a_\mu \eta(U_{1,\mu}) + b_\mu \eta(U_{2,\mu}) + \psi(U_1) - \psi(U_0) \leq 0. \quad (6.14)$$

Kako izvod delta funkcije menja znak, (6.9) postaje

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} -c(a_\mu \eta(U_{1,\mu}) + b_\mu \eta(U_{2,\mu})) + a_\mu \psi(U_{1,\mu}) + b_\mu \psi(U_{2,\mu}) = 0. \quad (6.15)$$

Ovde su $U_0, U_1, U_{1,\mu}$ i $U_{2,\mu}$ konstante.

U mnogim radovima o delta udarnim talasima, autori koriste uslov nadkompresibilnosti kao uslov da bi talas bio dopustiv. Za talas kažemo da je *nadkompresibilan* ako sve karakteristike sa obe strane SDW idu u SDW, odnosno ako važi

$$\lambda_i(U_0) \geq c'(t) \geq \lambda_i(U_1), \quad i = 1, \dots, n,$$

gde je $c'(t) = (ct)' = c$ brzina SDW, a $x = \lambda_i(U)t, i = 1, \dots, n$ su karakteristike sistema. Kako su entropijski uslovi povezani sa problemom jedinstvenosti slabog rešenja, sledi definicija slabe (distributivne) jedinstvenosti.

Definicija 6.2.4 Za SDW rešenje kažemo da je *jedinstveno u slabom smislu* ako je brzina talasa c jedinstvena kao i granična vrednost

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu U_{1,\mu} + b_\mu U_{2,\mu}.$$

Neka $i \in \{1, \dots, n\}$. Ako je granična vrednost $\lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu U_{1,\mu}^i + b_\mu U_{2,\mu}^i$ jedinstvena, tada kažemo da je i -ta komponenta jedinstvena.

Primetimo da su sve sporedne komponente funkcije U_μ jedinstvene po ovoj definiciji. Sledeće tvrđenje je direktna posledica definicije SDW.

Tvrđenje 6.2.5 ([29]) *Pretpostavimo da (6.1) ima SDW rešenje.*

- (a) *Ako postoji i -ta jednačina sistema takva da funkcija gustine $f^i(U)$ ne zavisi od glavne komponente od U , tada se brzina SDW jedinstveno određuje iz jednačine*

$$-c[f^i(U)] + [g^i(U)] = 0.$$

- (b) *Ako postoji i -ta jednačina sistema takva da važi $f^i(U) = U^j$, gde je U^j glavna komponenta, tada se jedinstveno određuje*

$$a_\mu U_{1,\mu}^j + b_\mu U_{2,\mu}^j = \kappa_i \in \mathbb{R}.$$

Kao posledicu imamo da ako (a) i (b) važe za sve glavne komponente, tada je distributivna granica SDW rešenja (6.1) jedinstvena. To je slučaj kod sistema datih u evolucionom obliku.

Definicija 6.2.6 *Kazemo da je rešenje za (6.1) jedinstveno u slabom smislu ako se sastoji od jedinstvene kombinacije udarnih talasa, razređujućih talasa, kontaktnih talasa i dopustivih SDW.*

6.2.2 Sistemi linearni po jednoj nepoznatoj

Ako je posmatrani sistem (6.1) linearan po jednoj komponenti (npr. U^1), tada se mogu dobiti dodatni rezultati u vezi sa postojanjem SDW rešenja za Rimanov problem. Sada se i -ta jednačina posmatranog sistema može zapisati u obliku

$$\partial_t (f_1^i(\underline{U})U^1 + f_2^i(\underline{U})) + \partial_x (g_1^i(\underline{U})U^1 + g_2^i(\underline{U})) = 0, \quad (6.16)$$

gde su $f_j, g_j, j = 1, 2$ neprekidne funkcije i gde je $\underline{U} := (U^2, \dots, U^n)$. Dalje, neka je

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \underline{U}_{j,\mu} := \underline{U}_{s,j} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad j = 1, 2, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu U_{1,\mu}^1 = \xi_1, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} b_\mu U_{2,\mu}^1 = \xi_2,$$

gde će $\underline{U}_{s,j}$ i $\xi_j, j = 1, 2$ biti određeno kasnije. Za SDW U_μ dat u (6.7) razlika $f(U_1) - f(U_0)$ biće obeležena sa $[f(U_\mu)]$.

Iz (6.16, 6.12) dobija se sistem jednačina za $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} f_1^i(\underline{U}_{s,1})\xi_1 + f_1^i(\underline{U}_{s,2})\xi_2 &= \kappa_i \\ g_1^i(\underline{U}_{s,1})\xi_1 + g_1^i(\underline{U}_{s,2})\xi_2 &= c\kappa_i. \end{aligned} \quad (6.17)$$

gde su ξ_1 i ξ_2 nepoznate koje treba odrediti. Ovde je $\kappa_i := c[f_1^i(\underline{U})U^1 + f_2^i(\underline{U})] - [g_1^i(\underline{U})U^1 + g_2^i(\underline{U})]$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu f_2^i(\underline{U}_{1,\mu}) = 0$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} b_\mu f_2^i(\underline{U}_{2,\mu}) = 0$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu g_2^i(\underline{U}_{1,\mu}) = 0$ i $\lim_{\mu \rightarrow 0} b_\mu g_2^i(\underline{U}_{2,\mu}) = 0$.

6.3 Entropijsko rešenje Rimanovog problema za PGD model

Posmatrajmo sistem

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) &= 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \end{aligned} \quad (6.18)$$

već ranije dat u [39] i koji nazivamo *pressureless gas dynamics model* ili PGD model. Karakteristični koreni za (6.18) su $\lambda_1 = \lambda_2 = u$. Rimanov problem

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_0, & x < 0, \\ \rho_1, & x > 0, \end{cases} \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x < 0, \\ u_1, & x > 0, \end{cases} \quad (6.19)$$

ima klasično entropijsko rešenje [6] koje se sastoji od dva kontaktna talasa spojena vakuumom ($\rho = 0$) ako je $u_0 \leq u_1$:

$$(\rho(x, t), u(x, t)) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < u_0 t, \\ (0, \tilde{\varphi}(x/t)), & u_0 t < x < u_1 t, \\ (\rho_1, u_1), & x > u_1 t, \end{cases}$$

gde je $\tilde{\varphi}(y) = y$. Vraćamo se sada na slučaj kada je $u_0 > u_1$, odnosno kada ne postoji klasično rešenje Rimanovog problema (6.18, 6.19). Svi entropijski parovi (η, ψ) sa semi-konveksnom funkcijom η dati su sa $\eta := \rho S(u)$, $\psi := \rho u S(u)$, gde je $S'' \geq 0$ (entropijska funkcija η je semi-konveksna u zavisnosti od promenljivih $(\rho, \rho u)$). Ovako definisani entropijski parovi biće korišćeni u narednoj teoremi.

Teorema 6.3.1 ([29]) *Pretpostavimo da je $u_0 > u_1$. Tada postoji rešenje u obliku jedinstvenog SDW u formi (6.7) Rimanovog problema (6.18, 6.19) koje zadovoljava entropijsku nejednakost (6.13). Uslov (6.13) ekvivalentan je uslovu nadkompresibilnosti za SDW.*

Dokaz. U slučaju sistema (6.18) imamo da je $U^1 = \rho$, $\underline{U} = u$,

$$\begin{aligned} f_1^1(\underline{U}) = f_1^1(u) = 1, \quad f_2^1(\underline{U}) = f_2^1(u) = 0, \quad g_1^1(\underline{U}) = g_1^1(u) = u, \quad g_2^1(\underline{U}) = g_2^1(u) = 0, \\ f_1^2(\underline{U}) = f_1^2(u) = u, \quad f_2^2(\underline{U}) = f_2^2(u) = 0, \quad g_1^2(\underline{U}) = g_1^2(u) = u^2, \quad g_2^2(\underline{U}) = g_2^2(u) = 0 \end{aligned}$$

i

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_{j,\mu} =: u_{s,j} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu \rho_{1,\mu} = \xi_1, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} b_\mu \rho_{2,\mu} = \xi_2,$$

pa se (6.17) se transformiše u

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &= \underline{\kappa}_1 \\ u_{s,1} \xi_1 + u_{s,2} \xi_2 &= c \underline{\kappa}_1, \end{aligned} \quad (6.20)$$

gde je $\underline{\kappa}_1 := c[\rho] - [\rho u]$ i

$$\begin{aligned} u_{s,1} \xi_1 + u_{s,2} \xi_2 &= \underline{\kappa}_2 \\ u_{s,1}^2 \xi_1 + u_{s,2}^2 \xi_2 &= c \underline{\kappa}_2, \end{aligned} \quad (6.21)$$

gde je $\underline{\kappa}_2 := c[\rho u] - [\rho u^2]$. Druga jednačina u (6.20) i prva jednačina u (6.21) daju $c \underline{\kappa}_1 = \underline{\kappa}_2$, pa se sistemi (6.20, 6.21) svode na

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &= \underline{\kappa}_1 \\ u_{s,1} \xi_1 + u_{s,2} \xi_2 &= c \underline{\kappa}_1 \\ u_{s,1}^2 \xi_1 + u_{s,2}^2 \xi_2 &= c^2 \underline{\kappa}_1. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Rešenje sistema (6.22) dobijamo kao što sledi:

- ako pretpostavimo da je $u_{s,1} = 0$, tada je $u_{s,2} = c$, $\xi_1 = 0$ i $\xi_2 = \underline{\kappa}_1$,
- ako sada pretpostavimo da je $u_{s,2} = 0$, onda je $u_{s,1} = c$, $\xi_2 = 0$ i $\xi_1 = \underline{\kappa}_1$,
- konačno, ako je $u_{s,1} \neq 0$ i $u_{s,2} \neq 0$, onda je $u_{s,1} = u_{s,2} = c$.

U sva tri slučaja, odgovarajući SDW su praktično isti (razlikuju se u izboru a_μ i b_μ) i mogu se tretirati na isti način. Izabraćemo treću mogućnost i nju koristimo dalje u radu. Ako je $\rho_0 \neq \rho_1$, tada iz relacije $c \underline{\kappa}_1 = \underline{\kappa}_2$ dobijamo

$$c = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0 \pm |u_0 - u_1| \sqrt{\rho_0 \rho_1}}{\rho_1 - \rho_0}. \quad (6.23)$$

Kako je $\underline{\kappa}_1 \geq 0$ (jer ξ_1 i ξ_2 predstavljaju gustine i zbog toga su nenegativne), tada, na osnovu (6.23) i prve jednačine u (6.20), mora važiti

$$\underline{\kappa}_1 := c(\rho_1 - \rho_0) - (\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0) = \pm |u_0 - u_1| \sqrt{\rho_0 \rho_1} \geq 0,$$

pa se uzima plus znak u izrazu (6.23). Zato je

$$c = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0 + |u_0 - u_1| \sqrt{\rho_0 \rho_1}}{\rho_1 - \rho_0} = \frac{[\rho u] - [u] \sqrt{\rho_0 \rho_1}}{[\rho]}. \quad (6.24)$$

U specijalnom slučaju, ako je $\rho_0 = \rho_1$, tada iz $c\kappa_1 = \kappa_2$ sledi

$$\begin{aligned} c^2(\rho_1 - \rho_0) - c(\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0) &= c(\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0) - (\rho_1 u_1^2 - \rho_0 u_0^2) \\ \Rightarrow -2c\rho_1(u_1 - u_0) &= -\rho_1(u_1^2 - u_0^2), \end{aligned}$$

te je $c = (u_0 + u_1)/2$. Kada je c poznato, tada se mogu odrediti RH deficiti κ_1 i κ_2 . Sada, na osnovu pretpostavke 6.2.1, sledi da su $a_\mu \rho_{1,\mu}$ i $b_\mu \rho_{2,\mu}$ ograničeni. Iz gornje konstrukcije SDW sledi $u_{1,\mu}, u_{2,\mu} \rightarrow c$ kada $\mu \rightarrow 0$.

Jedinstvenost. Iz prethodne diskusije zaključujemo da je c uvek jedinstveno i da je to prvi uslov za slabu jedinstvenost. Zbog toga dobijamo jedinstvenost RH deficita za fiksirane leve i desne strane. Tada prva jednačina u (6.20) daje

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu \rho_{1,\mu} + b_\mu \rho_{2,\mu} = \kappa_1,$$

za bilo koje reprezentе a_μ , b_μ , $\rho_{1,\mu}$ i $\rho_{2,\mu}$. A to je baš drugi entropijski uslov slabe jedinstvenosti (definicija 6.2.4). \square

6.4 Konstantni SDW

U ovom poglavlju biće dati uslovi pod kojima može doći do interakcije dva SDW i pod kojim uslovima će, nakon interakcije, nastati SDW talas. Pretpostavimo da dođe do interakcije dva (obična) SDW rešenja za (6.1)

$$\tilde{U}_\mu(x, t) = \begin{cases} U_0, & x - a < (\tilde{c} - \tilde{a}_\mu)t, \\ \tilde{U}_{1,\mu}, & (\tilde{c} - \tilde{a}_\mu)t < x - a < \tilde{c}t, \\ \tilde{U}_{2,\mu}, & \tilde{c}t < x - a < (\tilde{c} + \tilde{b}_\mu)t, \\ U_1, & x - a > (\tilde{c} + \tilde{b}_\mu)t \end{cases}$$

i

$$\hat{U}_\mu(x, t) = \begin{cases} U_1, & x - b < (\hat{c} - \hat{a}_\mu)t, \\ \hat{U}_{1,\mu}, & (\hat{c} - \hat{a}_\mu)t < x - b < \hat{c}t, \\ \hat{U}_{2,\mu}, & \hat{c}t < x - b < (\hat{c} + \hat{b}_\mu)t, \\ U_2, & x - b > (\hat{c} + \hat{b}_\mu)t, \end{cases}$$

gde je $\tilde{c} > \hat{c}$ i $a < b$. Neka je, kao na slici 6.3, (X, T) tačka gde dolazi do interakcije spoljašnjih SDW linija $x = a + (\tilde{c} + \tilde{b}_\mu)t$ i $x = b + (\hat{c} - \hat{a}_\mu)t$, odnosno, $X = a + (\tilde{c} + \tilde{b}_\mu)T = b + (\hat{c} - \hat{a}_\mu)T$ i $T = (b - a) / (\tilde{c} - \hat{c} + \hat{a}_\mu + \tilde{b}_\mu)$. U vremenu $t = T$, granična vrednost rešenja, u distributivnom smislu, je suma klasičnih po delovima konstantnih funkcija i delta funkcije sa nosačem u tački interakcije. Pitanje je kada će rezultat ove interakcije biti SDW za $t > T$. Zbog toga ćemo koristiti sledeće dve pretpostavke.

Pretpostavka 6.4.1 *Postoji SDW rešenje*

$$U_\mu(x, t) = \begin{cases} U_0, & x < (c - a_\mu)t, \\ U_{1,\mu}, & (c - a_\mu)t < x < ct, \\ U_{2,\mu}, & ct < x < (c + b_\mu)t, \\ U_2, & x > (c + b_\mu)t, \end{cases}$$

sistema (6.1) sa početnim uslovom

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_0, & x < 0, \\ U_2, & x > 0. \end{cases}$$

Sa $\tilde{\kappa}, \hat{\kappa}, \underline{\kappa} \in \mathbb{R}^n$ obeležavamo RH deficite za \tilde{U}, \hat{U} i U , redom. Prva relacija u (6.12) implicira da važi $\tilde{a}_\mu f(\tilde{U}_{1,\mu})T + \tilde{b}_\mu f(\tilde{U}_{2,\mu})T \approx T\tilde{\kappa}$ i $\hat{a}_\mu f(\hat{U}_{1,\mu})T + \hat{b}_\mu f(\hat{U}_{2,\mu})T \approx T\hat{\kappa}$.

Pretpostavka 6.4.2 *Moguće je izabrati $\alpha \geq 0$ tako da važi $\alpha\underline{\kappa} = T(\tilde{\kappa} + \hat{\kappa})$.*

Analizirajmo sada prethodne dve pretpostavke. Neka su $x_{1,\mu}, x_{2,\mu} = \mathcal{O}(\mu)$ nenegativni brojevi za dovoljno malo μ . Znamo da sistem (6.1) ima SDW rešenje ako važi (6.11). Koristeći lemu 6.1.2, zaključujemo da je funkcija

$$U_\mu(x, t) = \begin{cases} U_0, & x < (c - a_\mu)t - x_{1,\mu}, \\ U_{1,\mu}, & (c - a_\mu)t - x_{1,\mu} < x < ct, \\ U_{2,\mu}, & ct < x < (c + b_\mu)t + x_{2,\mu}, \\ U_2, & x > (c + b_\mu)t + x_{2,\mu}, \end{cases}$$

SDW rešenje ako važi

$$\begin{aligned} -c(f^i(U_2) - f^i(U_0)) + a_\mu f^i(U_{1,\mu}) + b_\mu f^i(U_{2,\mu}) + g^i(U_2) - g^i(U_0) &\approx 0, \\ -c(a_\mu f^i(U_{1,\mu}) + b_\mu f^i(U_{2,\mu})) + a_\mu g^i(U_{1,\mu}) + b_\mu g^i(U_{2,\mu}) &\approx 0, \\ -c(x_{1,\mu} f^i(U_{1,\mu}) + x_{2,\mu} f^i(U_{2,\mu})) + x_{1,\mu} g^i(U_{1,\mu}) + x_{2,\mu} g^i(U_{2,\mu}) &\approx 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Prve dve jednačine sistema (6.25) su iste kao u (6.11). Njihove leve strane su u i -toj jednačini sistema (6.1) pomnožene sa δ i $t\delta'$ (videti (6.10)), dok je leva strana treće jednačine sistema (6.25) pomnožena je sa δ' (videti (6.5, 6.6)) i ona se ne pojavljuje kada je SDW u formi (6.7). Kako je (6.11) rešivo na osnovu pretpostavke 6.4.1, zadovoljene su prve dve jednačine sistema (6.25). Vidimo da je treća jednačina sistema (6.25) zadovoljena ako je $(x_{1,\mu}, x_{2,\mu}) = \alpha(a_\mu, b_\mu)$, za bilo koje realno α (zbog toga što je zadovoljena druga jednačina sistema (6.25)).

Definišimo sada

$$U_\mu(x, t) = \begin{cases} U_0, & x - X < (c - a_\mu)(t - T) - x_{1,\mu}, t > T, \\ U_{1,\mu}, & (c - a_\mu)(t - T) - x_{1,\mu} < x - X < c(t - T), t > T, \\ U_{2,\mu}, & c(t - T) < x - X < (c + b_\mu)(t - T) + x_{2,\mu}, t > T, \\ U_2, & x - X > (c + b_\mu)(t - T) + x_{2,\mu}, t > T. \end{cases} \quad (6.26)$$

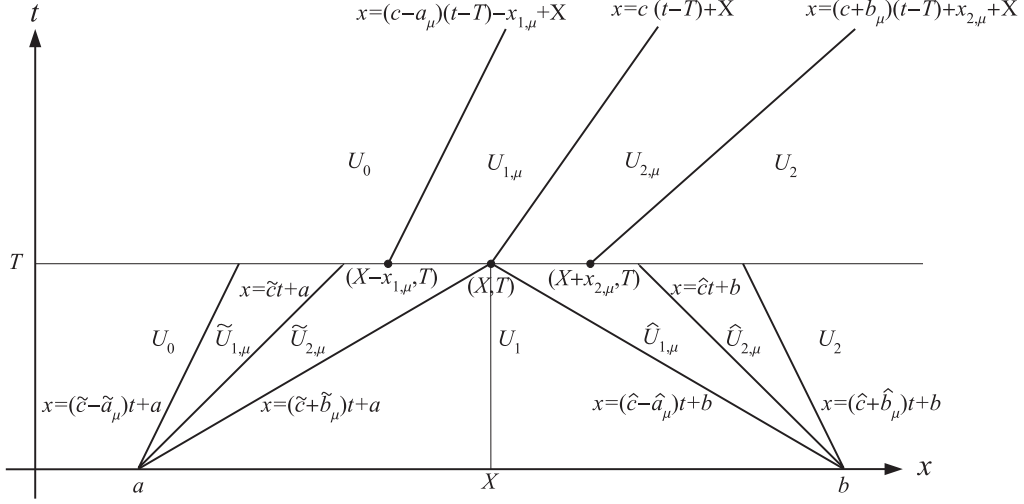
Rešenje za (6.1) pre interakcije dato je sa

$$(\tilde{U}_\mu \wedge \hat{U}_\mu)(x, t) = \begin{cases} U_0, & x < (\tilde{c} - \tilde{a}_\mu)t + a, t < T, \\ \tilde{U}_{1,\mu}, & (\tilde{c} - \tilde{a}_\mu)t + a < x < \tilde{c}t + a, t < T, \\ \tilde{U}_{2,\mu}, & \tilde{c}t + a < x < (\tilde{c} + \tilde{b}_\mu)t + a, t < T, \\ U_1, & (\tilde{c} + \tilde{b}_\mu)t + a < x < (\hat{c} - \hat{a}_\mu)t + b, t < T, \\ \hat{U}_{1,\mu}, & (\hat{c} - \hat{a}_\mu)t + b < x < \hat{c}t + b, t < T, \\ \hat{U}_{2,\mu}, & \hat{c}t + b < x < (\hat{c} + \hat{b}_\mu)t + b, t < T, \\ U_2, & x > (\hat{c} + \hat{b}_\mu)t + b, t < T. \end{cases}$$

Sa V_μ obeleženo je rešenje koje nastaje spajanjem rešenja pre i posle interakcije (slika 6.3). Dakle,

$$V_\mu(x, t) = \begin{cases} (\tilde{U}_\mu \wedge \hat{U}_\mu)(x, t), & t < T, \\ U_\mu(x, t), & t > T. \end{cases} \quad (6.27)$$

Dokaz sledeće teoreme dat je u [29].



Slika 6.3: Interakcija dva obična SDW daje konstantni SDW (6.26).

Teorema 6.4.3 ([29]) *Ako važe pretpostavke 6.4.1 i 6.4.2, tada važi*

$$\partial_t f(V_\mu) + \partial_x g(V_\mu) \approx 0,$$

gde je V_μ definisano u (6.27).

Definicija 6.4.4 *Skup svih stanja U_2 , takvih da postoji SDW talas kao rezultat interakcije dva SDW talasa koji spajaju stanja U_0, U_1 i U_2 , naziva se entropijski SDW lokus.*

6.4.1 Primena na PGD model

Posmatrajmo sada interakciju dva SDW nastalu rešavanjem sistema (6.18). Pretpostavimo da u tački (X, T) dođe interakcije dva SDW. Na osnovu entropijskih uslova, to je moguće samo ako je $u_0 > u_1 > u_2$, gde prvi SDW spaja stanja (ρ_0, u_0) i (ρ_1, u_1) , dok drugi spaja stanja (ρ_1, u_1) i (ρ_2, u_2) . Na osnovu teoreme 6.3.1 sledi da će stanja (ρ_0, u_0) i (ρ_2, u_2) biti takođe spojena entropijskim SDW i time je pretpostavka 6.4.1 zadovoljena. Primenimo sada pretpostavku 6.4.2. Na osnovu teoreme 6.3.1, znamo da je $u_{s,1} = u_{s,2} = c$, $\tilde{u}_{s,1} = \tilde{u}_{s,2} = \tilde{c}$ i $\hat{u}_{s,1} = \hat{u}_{s,2} = \hat{c}$. Dalje, neka je $\lim_{\mu \rightarrow 0} \tilde{a}_\mu \tilde{\rho}_{1,\mu} = \tilde{\xi}_1$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} \tilde{b}_\mu \tilde{\rho}_{2,\mu} = \tilde{\xi}_2$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} \hat{a}_\mu \hat{\rho}_{1,\mu} = \hat{\xi}_1$ i $\lim_{\mu \rightarrow 0} \hat{b}_\mu \hat{\rho}_{2,\mu} = \hat{\xi}_2$. Tada, na osnovu pretpostavke 6.4.2, postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ tako da važi

$$\alpha \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ c\kappa_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1 \\ \tilde{c}\tilde{\kappa}_1 + \hat{c}\hat{\kappa}_1 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Sada se, na osnovu (6.28), brzina talasa koji nastaje nakon interakcije može izraziti kao:

$$c = \frac{\tilde{c}\tilde{\kappa}_1 + \hat{c}\hat{\kappa}_1}{\tilde{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1} = \frac{\tilde{c}(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2) + \hat{c}(\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2)}{\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2} =: \xi_\pi. \quad (6.29)$$

Koristeći (6.24) dobijamo uslov kada će nastati konstantan SDW pri interakciji dva obična SDW

$$\frac{\rho_2 u_2 - \rho_0 u_0 + (u_0 - u_2)\sqrt{\rho_0 \rho_2}}{\rho_2 - \rho_0} = \xi_\pi, \rho_2 \neq \rho_0. \quad (6.30)$$

Konstanta α se određuje kao $\alpha := (\tilde{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1)T/\kappa_1$. Sada je entropijski SDW lokus kriva pa se interakcija dva SDW ne može rešiti korišćenjem konstantnih SDW. Ovaj specijalan slučaj koristićemo kasnije da bismo proverili preciznost primene WFT metode pri interakciji dva delta talasa (poglavljje 7.3).

6.5 Težinski SDW

Kao što je napomenuto, postoji potreba za drugačijim tipom SDW ako se želi rešiti problem interakcije dva SDW u opštem slučaju (što je tačno i za 2×2 PGD model). Talas dat u (6.31) nazivamo *težinskim SDW*.

Lema 6.5.1 ([29]) *Neka $f, g \in \mathcal{C}(\Omega : \mathbb{R}^n)$ i neka je $U_\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^n$ po delovima konstantna funkcija za svako $t \geq 0$ data sa*

$$U_\mu(x, t) = \begin{cases} U_0, & x < c(t) - a_\mu(t), \\ U_{1,\mu}(t), & c(t) - a_\mu(t) < x < c(t), \\ U_{2,\mu}(t), & c(t) < x < c(t) + b_\mu(t), \\ U_1, & x > c(t) + b_\mu(t). \end{cases} \quad (6.31)$$

Funkcije a_μ, b_μ su \mathcal{C}^1 funkcije koje zadovoljavaju $a_\mu(0) = x_{1,\mu}$ i $b_\mu(0) = x_{2,\mu}$. Takođe, pretpostavimo da funkcije f i g zadovoljavaju (6.4). Tada važi

$$\begin{aligned} \langle \partial_t f(U_\mu), \phi \rangle &\approx \int_0^\infty \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \left(a_\mu(t) f(U_{1,\mu}(t)) + b_\mu(t) f(U_{2,\mu}(t)) \right) \phi(c(t), t) dt \\ &\quad - \int_0^\infty c'(t) \left(f(U_1) - f(U_0) \right) \phi(c(t), t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty \lim_{\mu \rightarrow 0} c'(t) \left(a_\mu(t) f(U_{1,\mu}(t)) + b_\mu(t) f(U_{2,\mu}(t)) \right) \partial_x \phi(c(t), t) dt \end{aligned} \quad (6.32)$$

i

$$\begin{aligned} \langle \partial_x g(U_\mu), \phi \rangle &\approx \int_0^\infty \left(g(U_1) - g(U_0) \right) \phi(c(t), t) dt \\ &\quad - \int_0^\infty \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(a_\mu(t) g(U_{1,\mu}(t)) + b_\mu(t) g(U_{2,\mu}(t)) \right) \partial_x \phi(c(t), t) dt. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Dokaz za (6.5) jednostavno se može prilagoditi na (6.32), dok je dokaz za (6.33) isti kao i za (6.6). Teorema 6.4.3 važi i kada se U_μ , definisan u (6.26), zameni odgovarajućim težinskim SDW. Pretpostavka 6.4.1 je i dalje potrebna ali se reči "postoji SDW" trebaju zameniti sa "postoji težinski SDW".

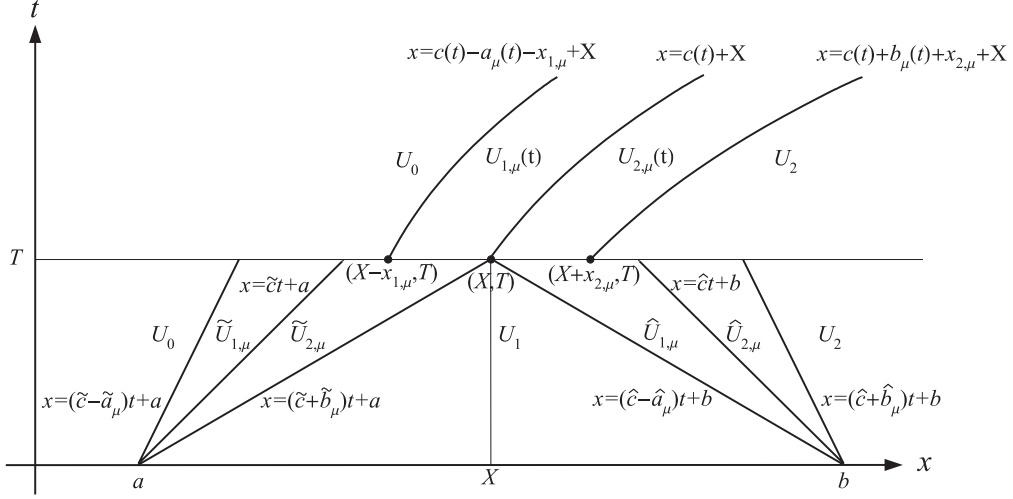
6.5.1 Primena interakcije dva SDW na PGD model

Prednost definisanja težinskog SDW (međustanja se menjaju u vremenu) je u tome da se problem interakcije dva SDW može relativno lako rešiti. Pretpostavimo da u tački (X, T) dođe do interakcije dva SDW (slika 6.4). Oznaka $\tilde{\cdot}$ biće korišćena za prvi SDW (koji dolazi sa leve strane), dok će oznaka $\hat{\cdot}$ biti korišćena za drugi SDW (koji dolazi sa desne strane). Na primer, brzina prvog SDW biće obeležena sa \tilde{c} , a drugog sa \hat{c} . Neka prvi SDW spaja stanje $U_0 = (\rho_0, u_0)^T$ sa stanjem $U_1 = (\rho_1, u_1)^T$, a drugi SDW stanje $U_1 = (\rho_1, u_1)^T$ sa $U_2 = (\rho_2, u_2)^T$.

Teorema 6.5.2 ([29]) *Rezultat interakcije dva SDW, nastalih rešavanjem sistema (6.18), je slabo jedinstveni težinski entropijski SDW.*

Dokaz. Posmatramo Rimanov problem

$$\begin{aligned} \partial_t f(U) + \partial_x g(U) &= 0 \\ U|_{t=T} &= \begin{cases} U_0, & x < X, \\ U_2, & x > X \end{cases} + \sigma \delta_{(X,T)}. \end{aligned}$$



Slika 6.4: Interakcija dva obična SDW daje teziški SDW (6.31).

Ovde je $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)^T$ suma snaga dva prilazeća SDW, $f(U) = (\rho, \rho u)^T$ i $g(U) = (\rho u, \rho u^2)^T$. Ako uvedemo notaciju kao u teoremi 6.3.1 imamo,

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu(t) \rho_{1,\mu}(t) &=: \xi_1(t), & \lim_{\mu \rightarrow 0} b_\mu(t) \rho_{2,\mu}(t) &=: \xi_2(t), \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} u_{j,\mu}(t) &=: u_{s,j}, \quad j = 1, 2, & [x] &:= x_2 - x_0, [x]_1 := x_1 - x_0, [x]_2 := x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Koristeći (6.32, 6.33) dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} (\xi_1(t) + \xi_2(t))' - c'(t)[\rho] + [\rho u] &= 0 \\ (\xi_1(t)u_{s,1}(t) + \xi_2(t)u_{s,2}(t))' - c'(t)[\rho u] + [\rho u^2] &= 0 \\ -c'(t)(\xi_1(t) + \xi_2(t)) + \xi_1(t)u_{s,1}(t) + \xi_2(t)u_{s,2}(t) &= 0 \\ -c'(t)(\xi_1(t)u_{s,1}(t) + \xi_2(t)u_{s,2}(t)) + \xi_1(t)u_{s,1}^2(t) + \xi_2(t)u_{s,2}^2(t) &= 0 \end{aligned} \quad (6.35)$$

zajedno sa početnim uslovom

$$\begin{aligned} (\xi_1 + \xi_2)(T) = \sigma_1 &= T(\tilde{\xi}_1 + \tilde{\xi}_2 + \hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2) = T(\tilde{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1) > 0, \\ (\xi_1 u_{s,1} + \xi_2 u_{s,2})(T) = \sigma_2 &= T(\tilde{c}\tilde{\kappa}_1 + \hat{c}\hat{\kappa}_1) > 0. \end{aligned}$$

Koristićemo pretpostavke

$$\xi_1 = \xi_2 =: \xi/2, \quad u_{s,1} = u_{s,2} =: u_s \quad (6.36)$$

koje uprošćuju posmatrani Rimanov problem (6.18, 6.19). Sistem (6.35) je tada oblika

$$\begin{aligned} \xi'(t) - c'(t)[\rho] + [\rho u] &= 0 \\ (u_s(t)\xi(t))' - c'(t)[\rho u] + [\rho u^2] &= 0 \\ -c'(t)\xi(t) + u_s(t)\xi(t) &= 0 \\ -c'(t)\xi(t)u_s(t) + \xi(t)u_s^2(t) &= 0. \end{aligned}$$

Kasnije će biti jasno da će, bez gubljenja opštosti, iz entropijskog uslova slediti $u_{s,1} \approx u_{s,2}$. Ono što se odmah uočava je da iz treće i četvrte jednačine prethodnog sistema važi $c'(t) = u_s(t)$, dok $u_s(t)$ i $\xi(t)$ moraju zadovoljavati sledeći sistem ODJ:

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= u_s(t)[\rho] - [\rho u] \\ (\xi(t)u_s(t))' &= u_s(t)[\rho u] - [\rho u^2], \end{aligned} \quad (6.37)$$

sa početnim uslovima

$$\begin{aligned}\xi(T) &= (\tilde{\xi} + \hat{\xi})T = (-[u]_1\sqrt{\rho_0\rho_1} - [u]_2\sqrt{\rho_1\rho_2})T, \\ \xi(T)u_s(T) &= (\tilde{c}\tilde{\xi} + \hat{c}\hat{\xi})T = \left(-\frac{[\rho u]_1 - [u]_1\sqrt{\rho_0\rho_1}}{[\rho]_1} [u]_1\sqrt{\rho_0\rho_1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{[\rho u]_2 - [u]_2\sqrt{\rho_1\rho_2}}{[\rho]_2} [u]_2\sqrt{\rho_1\rho_2} \right)T.\end{aligned}\quad (6.38)$$

Jednačine sistema (6.37) mogu se napisati i kao

$$\begin{aligned}\xi'(t) &= \frac{y(t)[\rho]}{\xi(t)} - [\rho u] \\ y'(t) &= \frac{y(t)[\rho u]}{\xi(t)} - [\rho u^2], \quad \text{za } y(t) = \xi(t)u_s(t),\end{aligned}$$

sa početnim uslovom $\xi(T) = \sigma_1 > 0$ i $y(T) = \sigma_2$. Kako je $\xi(t)$ pozitivno u $t = T$, tada postoji bar lokalno rešenje prethodnog sistema. Da bi se dokazalo postojanje globalnog rešenja, potrebno je dobiti još neke dodatne ocene. Na osnovu uslova nadkompresibilnosti, imamo da važi

$$u_s(T) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\tilde{c}\tilde{\kappa}_1 + \hat{c}\hat{\kappa}_1}{\tilde{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1} = \tilde{c} - \frac{(\tilde{c} - \hat{c})\hat{\kappa}_1}{\tilde{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1} < \tilde{c} \leq u_0$$

i

$$u_s(T) = \hat{c} + \frac{(\tilde{c} - \hat{c})\tilde{\kappa}_1}{\tilde{\kappa}_1 + \hat{\kappa}_1} > \hat{c} \geq u_2,$$

jer je $\tilde{c} > \hat{c}$. Sada ćemo navesti nekoliko činjenica u vezi sa rešenjem $(\xi(t), u_s(t))$ početnog problema (6.37, 6.38) za $t \geq T$ (videti [29]):

1. Kada postoji, funkcija $\xi(t)$ je rastuća funkcija za $t > T$ (objašnjenje sledi kasnije). Za početni uslov važi $\xi(t) > 0$ za $t \geq T$, jer je $u_0 > u_1 > u_2$.
2. Iz sistema (6.37) dobijamo

$$u_s'(t) = -\frac{1}{\xi(t)}([\rho]u_s^2(t) - 2[\rho u]u_s(t) + [\rho u^2]). \quad (6.39)$$

Sada je $-1/\xi(t)$ uvek negativno za $t > T$. Nule funkcije sa desne strane prethodne ODJ (nepoznata veličina je $u_s(t)$) obeležićemo sa $A_1 < A_2$. Tada za $[\rho] \neq 0$ važi

$$A_{1,2} = \frac{[\rho u] \pm |u_0 - u_2|\sqrt{\rho_0\rho_2}}{[\rho]}.$$

Pretpostavimo da je $[\rho] > 0$. Ako važi $u_s(t) \in (A_1, A_2)$, tada je $u_s(t)$ rastuća funkcija, a ako važi $u_s(t) \in (-\infty, A_1) \cup (A_2, \infty)$, tada je $u_s(t)$ opadajuća funkcija. Suprotno važi u slučaju ako je $[\rho] < 0$. Preciznije:

- Ako je $\rho_0 > \rho_2$, tada je $u_2 \leq A_1 \leq u_0 \leq A_2$. Naime, u ovom slučaju je

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{\rho_2 u_2 - \rho_0 u_0 + (u_0 - u_2)\sqrt{\rho_0\rho_2}}{\rho_2 - \rho_0} = \frac{\rho_0 u_0 - \rho_2 u_2 - (u_0 - u_2)\sqrt{\rho_0\rho_2}}{\rho_0 - \rho_2} \\ &\leq \frac{\rho_0 u_0 - \rho_2 u_2 - (u_0 - u_2)\rho_2}{\rho_0 - \rho_2} = \frac{u_0(\rho_0 - \rho_2)}{\rho_0 - \rho_2} = u_0.\end{aligned}$$

Sa druge strane imamo

$$A_1 = \frac{\rho_0 u_0 - \rho_2 u_2 - (u_0 - u_2)\sqrt{\rho_0\rho_2}}{\rho_0 - \rho_2} \geq \frac{\rho_0 u_0 - \rho_2 u_2 - (u_0 - u_2)\rho_0}{\rho_0 - \rho_2} = u_2.$$

Pokažimo da je i $A_2 \geq u_0$. Imamo

$$A_2 = \frac{\rho_0 u_0 - \rho_2 u_2 + (u_0 - u_2)\sqrt{\rho_0 \rho_2}}{\rho_0 - \rho_2} \geq \frac{\rho_0 u_0 - \rho_2 u_2}{\rho_0 - \rho_2} \geq \frac{\rho_0 u_0 - \rho_2 u_0}{\rho_0 - \rho_2} = u_0.$$

Ako važi $u_s(T) \in (u_2, A_1)$, tada $u_s(t)$ raste za $t > T$ ali ostaje ispod A_1 . Ako važi $u_s(T) \in (A_1, u_0)$, tada $u_s(t)$ opada za $t > T$ ali ostaje iznad A_1 .

- Ako je $\rho_2 > \rho_0$, tada je $A_1 \leq u_2 \leq A_2 \leq u_0$. Ponovo, ako važi $u_s(T) \in (u_2, A_2)$, tada $u_s(t)$ raste za $t > T$ ali ostaje ispod A_2 . Ako je $u_s(T) \in (A_2, u_0)$, tada $u_s(t)$ opada za $t > T$ ali ostaje iznad A_2 .

Iz prethodnog razmatranja zaključujemo sa važi $u_0 \geq u_s(t) \geq u_2$, odnosno SDW je nadkompesibilan, a asimptotsko ponašanje $u_s(t)$ kada $t \rightarrow \infty$ biće potkrepljeno numeričkim primerima.

Sada ćemo oceniti $\xi(t)$. Važi

$$\xi'(t) = [\rho]u_s(t) - [\rho u] \geq [\rho]u_2 - [\rho u] = \rho_0(u_0 - u_2) > 0$$

ako je $\rho_2 > \rho_0$, i

$$\xi'(t) = [\rho]u_s(t) - [\rho u] \geq [\rho]u_0 - [\rho u] = \rho_2(u_0 - u_2) > 0$$

za $\rho_0 > \rho_2$. Zato je $\xi(t)$ neopadajuća funkcija što implicira da postoji globalno rešenje $(\xi(t), u_s(t))$ problema (6.37, 6.38).

Ako je sada $\rho_0 = \rho_2$, tada prva jednačina u (6.37) daje

$$\xi(t) = -[\rho u](t - T) + \xi(T) = \rho_0(u_0 - u_2)(t - T) + \xi(T) > 0,$$

dok druga daje

$$u_s'(t) = -\frac{2\rho_0(u_0 - u_2)}{\rho_0(u_0 - u_2)(t - T) + \xi(T)}u_s(t) + \frac{\rho_0(u_0 - u_2)(u_0 + u_2)}{\rho_0(u_0 - u_2)(t - T) + \xi(T)}$$

$$\begin{cases} < 0, & u_s(t) > (u_0 + u_2)/2, \\ = 0, & u_s(t) = (u_0 + u_2)/2, \\ > 0, & u_s(t) < (u_0 + u_2)/2. \end{cases}$$

Na osnovu osobina prethodne ODJ važi:

- ako je $u_s(T) > (u_0 + u_2)/2$, tada $u_s(t) \in [(u_0 + u_2)/2, u_s(T)]$, $t > T$
- ako je $u_s(T) < (u_0 + u_2)/2$, tada $u_s(t) \in [u_s(T), (u_0 + u_2)/2]$, $t > T$,

što opet implicira postojanje globalnog rešenja za (6.37). Primetimo da je rezultat interakcije dva SDW jedinstveni SDW sa konstantnom brzinom c ako je zadovoljen uslov (6.29) uz (6.30).

Pokažimo sada da gornje rešenje zadovoljava entropijske uslove SDW rešenja za Rimanov problem i da je jedino takvo rešenje. Neka η i ψ čine takav entropijski par za sistem (6.1) da je rešenje oblika (6.31) dopustivo. Za rešenje u formi težinskog SDW, uslovi (6.14, 6.15) postaju

$$\begin{aligned} & -c'(t)(\eta(U_2) - \eta(U_0)) + (\psi(U_2) - \psi(U_0)) \\ & + \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{dt} (\eta(U_{1,\mu}(t))a_\mu(t) + \eta(U_{2,\mu}(t))b_\mu(t)) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

i

$$\begin{aligned} & \lim_{\mu \rightarrow 0} c'(t)(\eta(U_{1,\mu}(t))a_\mu(t) + \eta(U_{2,\mu}(t))b_\mu(t)) \\ & - \psi(U_{1,\mu}(t))a_\mu(t) - \psi(U_{2,\mu}(t))b_\mu(t) = 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

koji su dobijeni kao posledica (6.32, 6.33). U specijalnom slučaju, za PGD model, uslov (6.41) ekvivalentan je sa

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} ((c'(t) - u_{1,\mu}(t))\eta(U_{1,\mu}(t))a_\mu(t) + (c'(t) - u_{2,\mu}(t))\eta(U_{2,\mu}(t))b_\mu(t)) = 0,$$

za svaku semi-konveksnu funkciju η . Prethodna jednakost je tačna ako i samo ako važi $u_{1,\mu}(t) \approx u_{2,\mu}(t) \approx u_s(t)$ što je pretpostavljeno u toku konstrukcije rešenja. Ostalo je da se pokaže da važi (6.40). Koristeći ponovo da je $\eta(U) = \rho S(u)$ i $\psi(U) = u\eta(U) = \rho u S(u)$ za $S''(u) \geq 0$, dovoljno je pokazati da važi

$$J(t) := -(u_0 - u_s(t))\rho_0 S(u_0) - (u_s(t) - u_2)\rho_2 S(u_2) + \xi'(t)S(u_s(t)) + \xi(t)S'(u_s(t))u_s'(t) \leq 0.$$

Naime, koristeći $c'(t) = u_s(t)$ i (6.34, 6.36) iz (6.40) dobijamo

$$\begin{aligned} & -u_s(t)(\rho_2 S(u_2) - \rho_0 S(u_0)) + (\rho_2 u_2 S(u_2) - \rho_0 u_0 S(u_0)) \\ & \quad + \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{d}{dt}(\rho_{1,\mu} S(u_{1,\mu}) a_\mu(t) + \rho_{2,\mu} S(u_{2,\mu}) b_\mu(t)) \\ & = -(u_0 - u_s(t))\rho_0 S(u_0) - (u_s(t) - u_2)\rho_2 S(u_2) + \frac{d}{dt}(\xi(t) S(u_s(t))), \end{aligned}$$

a što je obeleženo sa $J(t)$. Sada ćemo pokazati da za svaku linearnu funkciju $S(u)$ važi da je $J(t) = 0$. Neka je $S(u) = au + b$ za neke konstante a i b . Tada je, koristeći (6.37, 6.39) i $u_s = u_s(t)$,

$$\begin{aligned} J(t) & = -(u_0 - u_s) \rho_0 (a u_0 + b) - (u_s - u_2) \rho_2 (a u_2 + b) \\ & \quad + (u_s(\rho_2 - \rho_0) - (\rho_2 u_2 - \rho_0 u_0)) (a u_s + b) \\ & \quad + \xi(t) a \frac{-1}{\xi(t)} (u_s^2(\rho_2 - \rho_0) - 2u_s(\rho_2 u_2 - \rho_0 u_0) + (\rho_2 u_2^2 - \rho_0 u_0^2)) \\ & = -(u_0 - u_s) \rho_0 (a u_0 + b) - (u_s - u_2) \rho_2 (a u_2 + b) \\ & \quad + u_s (\rho_2 - \rho_0) (a u_s + b) - (\rho_2 u_2 - \rho_0 u_0) (a u_s + b) \\ & \quad - a u_s^2 (\rho_2 - \rho_0) + 2a u_s (\rho_2 u_2 - \rho_0 u_0) - a (\rho_2 u_2^2 - \rho_0 u_0^2) \\ & = 0 \end{aligned}$$

nakon sređivanja. Izaberimo sada konstante a i b tako da je $a = S'(u_s)$, $b = S(u_s) - S'(u_s)u_s$ i napišimo

$$S(u) = au + b + S^*(u). \quad (6.42)$$

Tada je

$$S(u_s) = a u_s + b + S^*(u_s) = S'(u_s) u_s + S(u_s) - S'(u_s) u_s + S^*(u_s) = S(u_s) + S^*(u_s),$$

pa sledi da je $S^*(u_s) = 0$. Pošto je $S'(u) = a + (S^*)'(u)$, onda je

$$S'(u_s) = a + (S^*)'(u_s) = S'(u_s) + (S^*)'(u_s),$$

te je $(S^*)'(u_s) = 0$. Konačno, $S''(u) = (S^*)''(u) \geq 0$ na osnovu konveksnosti funkcije $S(u)$. Uvrstimo sada (6.42) u $J(t)$. Kako je $S^*(u_s) = 0$, imaćemo

$$\begin{aligned} J(t) & = -(u_0 - u_s) \rho_0 (a u_0 + b + S^*(u_0)) - (u_s - u_2) \rho_2 (a u_2 + b + S^*(u_2)) \\ & \quad + \xi'(t)(a u_s + b + S^*(u_s)) + \xi(t) a u_s'(t) \\ & = -(u_0 - u_s) \rho_0 (a u_0 + b) - (u_s - u_2) \rho_2 (a u_2 + b) + \xi'(t)(a u_s + b) + \xi(t) a u_s'(t) \\ & \quad - (u_0 - u_s) \rho_0 S^*(u_0) - (u_s - u_2) \rho_2 S^*(u_2). \end{aligned}$$

Kako je $J(t) = 0$ ako je $S(u)$ linearna funkcija, prvi red u poslednjoj jednakosti jednak je nuli, pa je

$$J(t) = -(u_0 - u_s) \rho_0 S^*(u_0) - (u_s - u_2) \rho_2 S^*(u_2). \quad (6.43)$$

Kako je $u_2 \leq u_s \leq u_0$, $S^*(u_s) = (S^*)'(u_s) = 0$ i $(S^*)''(u) \geq 0$, zaključujemo da je $S^*(u_0) \geq 0$ i $S^*(u_2) \geq 0$, te iz (6.43) sledi $J(t) \leq 0$.

Ovim smo u potpunosti dokazali entropijsku nejednakost kada dva SDW prilikom interakcije daju težinski SDW. Slaba jedinstvenost sledi direktno. \square

Sumirajmo sada rezultate date u ovoj glavi jer su nam potrebni zbog numeričke verifikacije. Rešenje problema (6.18, 6.19) zavisi od međusobnog odnosa u_0 i u_1 . Naime:

- 1) za $u_0 \leq u_1$, rešenje se sastoji od dva kontaktna talasa spojena vakuum stanjem ($\rho = 0$) i oblika je

$$(\rho(x, t), u(x, t)) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < u_0 t, \\ (0, \tilde{\varphi}(x/t)), & u_0 t < x < u_1 t, \\ (\rho_1, u_1), & x > u_1 t, \end{cases}$$

gde je $\tilde{\varphi}(y) = y$, dok

- 2) za $u_0 > u_1$, rešenje je u obliku jedinstvenog SDW u formi (6.7)

$$(\rho_\mu(x, t), u_\mu(x, t)) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < (c - a_\mu)t, \\ (\rho_{1,\mu}, u_{1,\mu}), & (c - a_\mu)t < x < ct, \\ (\rho_{2,\mu}, u_{2,\mu}), & ct < x < (c + b_\mu)t, \\ (\rho_1, u_1), & x > (c + b_\mu)t. \end{cases}$$

Važi

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu \rho_{1,\mu} = \xi_1, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} b_\mu \rho_{2,\mu} = \xi_2,$$

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_{1,\mu} = u_{s,1} = c, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} u_{2,\mu} = u_{s,2} = c,$$

gde je za $\rho_0 \neq \rho_1$

$$c = \frac{\rho_1 u_1 - \rho_0 u_0 + |u_0 - u_1| \sqrt{\rho_0 \rho_1}}{\rho_1 - \rho_0},$$

dok za $\rho_0 = \rho_1$ važi $c = (u_0 + u_1)/2$. Snaga talasa je, koristeći (6.3),

$$\sigma(t) := t \begin{bmatrix} \lim_{\mu \rightarrow 0} (a_\mu \rho_{1,\mu} + b_\mu \rho_{2,\mu}) \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} (a_\mu u_{1,\mu} + b_\mu u_{2,\mu}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\xi_1 + \xi_2) t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_0 - u_1) \sqrt{\rho_0 \rho_1} t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I centralna i spoljašnje linije običnog SDW su prave linije. Međustanja $(\rho_{i,\mu}, u_{i,\mu})$, $i = 1, 2$ su konstantna.

Problem interakcije dva obična SDW može se razložiti na dva slučaja. Prvi slučaj je kada takvom interakcijom nastane konstantni SDW (zadovoljen uslov (6.28)), dok u drugom slučaju nastaje težinski SDW. Konstantni SDW, koji nastaje u tački (X, T) , tada je oblika

$$(\rho_\mu(x, t), u_\mu(x, t)) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x - X < (c - a_\mu)(t - T) - x_{1,\mu}, \quad t > T, \\ (\rho_{1,\mu}, u_{1,\mu}), & (c - a_\mu)(t - T) - x_{1,\mu} < x - X < c(t - T), \quad t > T, \\ (\rho_{2,\mu}, u_{2,\mu}), & c(t - T) < x - X < (c + b_\mu)(t - T) + x_{2,\mu}, \quad t > T, \\ (\rho_2, u_2), & x - X > (c + b_\mu)(t - T) + x_{2,\mu}, \quad t > T. \end{cases}$$

Brzina nastalog talasa je

$$c = \frac{\rho_2 u_2 - \rho_0 u_0 + (u_0 - u_2) \sqrt{\rho_0 \rho_2}}{\rho_2 - \rho_0},$$

dok mu je snaga

$$\sigma(t) := \begin{bmatrix} (-[u]_1 \sqrt{\rho_0 \rho_1} - [u]_2 \sqrt{\rho_1 \rho_2}) t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ovde je $[x]_1 = x_1 - x_0$ i $[x]_2 = x_2 - x_1$. I centralna i spoljašnje linije konstantnog SDW su prave linije. Međustanja $(\rho_{i,\mu}, u_{i,\mu})$, $i = 1, 2$ su konstantna. Težinski SDW je oblika

$$(\rho_\mu(x, t), u_\mu(x, t)) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < c(t) - a_\mu(t), \\ (\rho_{1,\mu}(t), u_{1,\mu}(t)), & c(t) - a_\mu(t) < x < c(t), \\ (\rho_{2,\mu}(t), u_{2,\mu}(t)), & c(t) < x < c(t) + b_\mu(t), \\ (\rho_2, u_2), & x > c(t) + b_\mu(t). \end{cases}$$

Brzina posmatranog talasa je

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} u_{1,\mu}(t) = \lim_{\mu \rightarrow 0} u_{2,\mu}(t) = u_s(t) = c'(t),$$

dok mu je snaga

$$\sigma(t) := \begin{bmatrix} \xi(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

za

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} a_\mu(t)\rho_{1,\mu}(t) + b_\mu(t)\rho_{2,\mu}(t) = \xi(t).$$

Ako je težinski SDW nastao u vremenu $t = T$, tada je, za $t > T$, $\xi(t)$ je neopadajuća funkcija, dok za brzinu važi $u_0 \geq c'(t) \geq u_2$. Međustanja $(\rho_{i,\mu}(t), u_{i,\mu}(t))$, $i = 1, 2$ su konstantna za svako t . I centralna i spoljašnje linije težinskog SDW su krive.

SDW rešenje Rimanovog problema i WFT metod

U ovom poglavlju, kao i u radu [12], posmatraćemo jednodimenzionalni Ojlerov zakon održanja gasne dinamike

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p(\varepsilon, \rho)) &= 0, \end{aligned} \tag{7.1}$$

gde je $\rho \geq 0$ gustina, u brzina, $p(\varepsilon, \rho) = \varepsilon \rho^\gamma / \gamma$ pritisak, $0 < \varepsilon \ll 1$ i $\gamma = 1 + 2\varepsilon > 1$. Ako $\varepsilon \rightarrow 0$ u (7.1), dobijamo model gasne dinamike bez pritiska (poglavlje 6.3, videti i [1, 2, 5, 6, 39, 41]). Sistem (7.1) može biti posmatran i kao perturbacija sistema (6.18).

Cilj je da se prošire rezultati dobijeni u [6]: rešenje Rimanovog problema za (7.1) konvergira ka uopštenom rešenju slabog hiperboličnog sistema (6.18) pri istim početnim uslovima, kada $\varepsilon \rightarrow 0$. U radu [27] dati su rezultati u vezi sa uopštenim sistemom gasne dinamike bez pritiska. Za početne uslove (6.19) ne postoji klasično rešenje Rimanovog problema u slučaju $u_0 > u_1$. Preciznije rečeno, rešenje Rimanovog problema za (7.1) koje se sastoji od udarnih talasa prve i druge familije, teži δ -udarnom talasu (7.2), u distributivnom smislu,

$$(\rho(x, t), u(x, t)) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < ct \\ (\rho_1, u_1), & x > ct \end{cases} + \sigma \delta_{x=ct} \tag{7.2}$$

koji je rešenje za Ojlerove jednačine gasne dinamike bez pritiska (6.18), kada pritisak teži nuli. Ovde smo obeležili

$$c = \frac{1}{[\rho]}([\rho u] - [u]\sqrt{\rho_0 \rho_1}) \text{ i } \sigma = (-[u]\sqrt{\rho_0 \rho_1}, 0)$$

gde je $[x] = x_1 - x_0$.

Ako je $u_0 \leq u_1$, tada problem (6.18, 6.19) ima klasično entropijsko rešenje koje se sastoji od dva kontaktna talasa spojena vakuumom ($\rho = 0$)

$$(\rho(x, t), u(x, t)) = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < u_0 t, \\ (0, \tilde{\varphi}(x/t)), & u_0 t < x < u_1 t, \\ (\rho_1, u_1), & x > u_1 t, \end{cases}$$

gde je $\tilde{\varphi}(y) = y$. Ovo zapravo znači da rešenje sistema (7.1) koje se sastoji od dva razređujuća talasa prve i druge familije, teži rešenju sistema (6.18) koje se sastoji od dva kontaktna talasa spojena vakuumom.

Postoji mnogo različitih načina da se aproksimira delta talas koristeći: Volpertov srednji nekonzervativni proizvod ([22]), metod Borelove mere ([5], [18]), aproksimaciju glatkim funkcijama

([28]), iščezavajuća viskoznost ([40]), singularne udarne talase ([21]), ... Ovo naravno nije konačna lista, ali smo ovde naveli one reference koje su korišćene. U ovoj tezi će se koristiti SDW metod iz [29].

Nishida ([30]) je pokazao da postoji rešenje Košijevog problema za (7.1) za svako $t \geq 0$. To rešenje je ograničeno i ima ograničenu totalnu varijaciju za svako x i $t = \text{const.} \geq 0$. Nishida i Smoller ([31]) su, korišćenjem Glimove diferencne šeme, poboljšali taj rezultat time što su pokazali da postoji slabo globalno rešenje ograničene totalne varijacije za svako $t = \text{const.} \geq 0$, pod uslovom da je totalna varijacija početnog uslova pomnožena sa ε dovoljno malo. Konačno, koristeći rezultate iz [31], Asakura ([1]) je konstruisao takvo rešenje pomoću WFT metode.

Krajnji cilj ove disertacije je da se iskoriste ideje iz radova [1], [28] i [31], i da se prošire na opštije početne uslove u odnosu na Rimanov problem dat u [6]. Međutim, direktno primenjujući te ideje na sistem (7.1), totalna varijacija početnog uslova bi bila ograničena nekim pozitivnim stepenom od ε . Zbog toga se morala dati preciznija ocena snaga talasa pri WFT metodi nego što je data u [1]. Zamenjujući κ^2 iz [1, 31] sa $\varepsilon/(1+2\varepsilon)$, dobijamo da su snage talasa sada ograničene sa $\sqrt{\varepsilon}$ umesto sa ε . To nam dozvoljava da uzmemo proizvoljno veliku totalnu varijaciju početnog uslova i pustimo da $\varepsilon \rightarrow 0$ nakon rešavanja sistema (7.1) kao što je urađeno u [6]. Ipak, za sada ne znamo da li i u kom smislu dobijeno granično rešenje zadovoljava (6.18) u opštem slučaju.

Sa druge strane, problem interakcije dva delta talasa za sistem gasne dinamike bez pritiska je rešen u [29] pomoću SDW rešenja. Rezultat interakcije dva delta talasa je delta talas čija brzina nije konstantna u opštem slučaju. U ovoj glavi ćemo upoređivati čemu teži rešenje dobijeno WFT metodom kada $\varepsilon \rightarrow 0$ (prvi koncept) sa SDW rešenjem (drugi koncept). Upoređivanje se vrši na sledeći način. Za $\varepsilon > 0$ dovoljno malo, odaberemo dva Rimanova problema (7.1, 6.19) tako da je rešenje svakog od njih udarni talas prve familije za kojim sledi udarni talas druge familije. Time se aproksimira interakcija dva delta talasa. Nakon toga primenimo WFT metod za svako ε i pustimo da $\varepsilon \rightarrow 0$. Kada prestanu interakcije ili kada se stanje $(\rho_\varepsilon(x, t), u_\varepsilon(x, t))$ ne menja između $c_1 t < x < c_2 t$ nakon $t > t_0$, tada smatramo da smo došli do rešenja. Sa c_1 smo obeležili brzinu prvog levog udarnog talasa prve familije, a sa c_2 brzinu poslednjeg desnog udarnog talasa druge familije. Numerički rezultati su upoređeni sa analitičkim dobijenim drugim konceptom (SDW rešenje).

U nastavku teze, uvek ćemo smatrati da je $\gamma = 1 + 2\varepsilon$ kao u [31]. U radu [31], autori su koristili ε kao malu pozitivnu konstantu. Međutim, ovde ε nije konstanta jer je puštamo da teži nuli.

7.1 Ocena lokalnih interakcija talasa

Prvi zadatak je dobiti precizniju ocenu snage talasa u zavisnosti od ε koliko god je to moguće. Da bismo to uradili, koristićemo tvrđenja iz poglavlja 5 sa izvesnim promenama u dokazima, a koje su korisne za naša dalja ispitivanja. Zato dajemo adaptiranu teoremu za slučaj posmatran u disertaciji.

Teorema 7.1.1 ([1]) *Posmatrajmo sistem (7.1) sa početnim uslovom (6.19). Neka je $u_1 - u_0 < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\rho_1^\varepsilon + \rho_0^\varepsilon)$ ili ekvivalentno $s_0 - r_1 > -\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$ (ovim se isključuje mogućnost pojavljivanja vakuum stanja). Tada postoji jedinstveno rešenje koje se sastoji od konstantnih stanja $(\rho_0, u_0) = (r_0, s_0)$, $(\rho_m, u_m) = (r_m, s_m)$ i $(\rho_1, u_1) = (r_1, s_1)$ spojenih razređujućim ili udarnim talasima gde važi:*

$$\begin{aligned} r_m(x, t) &= r(\rho_m(x, t), u_m(x, t)) \geq \min\{r_0, r_1\}, \\ s_m(x, t) &= s(\rho_m(x, t), u_m(x, t)) \leq \max\{s_0, s_1\}. \end{aligned}$$

Amplitude talasa su označene kao

$$\begin{aligned} \beta^* &:= r_m - r_0 & : & \text{amplituda prvog talasa,} \\ \chi^* &:= s_1 - s_m & : & \text{amplituda drugog talasa.} \end{aligned}$$

Ako je $\beta^*, \chi^* \geq 0$ tada su u pitanju razređujući talasi, dok ako je $\beta^*, \chi^* < 0$ tada su u pitanju udarni talasi; apsolutne vrednosti $|\beta^*|$ i $|\chi^*|$ se nazivaju njihove snage.

Dokažimo sada jednu lemu koja će nam biti potrebna u nastavku.

Lema 7.1.2 ([6]) *Pretpostavimo da je ρ^* prva komponenta u rešenju (ρ^*, u^*) problema (7.1, 6.19) za $u_0 > u_1$. Tada, za ε dovoljno malo, postoji konstanta $C > 0$ tako da važi*

$$C^{-1}\varepsilon^{-1/\gamma} \leq \rho^* \leq C\varepsilon^{-1/\gamma}.$$

Dokaz. Podsetimo se da na osnovu (5.5, 5.6) važi

$$u^* - u_0 = -\kappa \sqrt{\frac{(\rho^*)^\gamma - \rho_0^\gamma}{\rho_0 \rho^* (\rho^* - \rho_0)}} (\rho^* - \rho_0)$$

i

$$u_1 - u^* = -\kappa \sqrt{\frac{\rho_1^\gamma - (\rho^*)^\gamma}{\rho^* \rho_1 (\rho_1 - \rho^*)}} (\rho_1 - \rho^*)$$

za $\rho^* > \rho_0$, $\rho^* > \rho_1$. Sabirajući prethodne dve jednakosti imamo

$$u_0 - u_1 = \kappa \left(\sqrt{\frac{((\rho^*)^\gamma - \rho_1^\gamma)(\rho^* - \rho_1)}{\rho^* \rho_1}} + \sqrt{\frac{((\rho^*)^\gamma - \rho_0^\gamma)(\rho^* - \rho_0)}{\rho^* \rho_0}} \right),$$

odnosno, za $\kappa = \sqrt{\varepsilon}/\sqrt{\gamma}$ važi

$$u_0 - u_1 = \sqrt{\varepsilon} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho^*}\right) \left(\frac{(\rho^*)^\gamma}{\gamma} - \frac{\rho_1^\gamma}{\gamma}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho^*}\right) \left(\frac{(\rho^*)^\gamma}{\gamma} - \frac{\rho_0^\gamma}{\gamma}\right)} \right), \quad (7.3)$$

za $\rho^* > \rho_0, \rho^* > \rho_1$. Definišimo sada funkciju

$$\zeta(s, \tau) = \sqrt{\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{s}\right) \left(\frac{s^\gamma}{\gamma} - \frac{\tau^\gamma}{\gamma}\right)}.$$

Iz (7.3) sledi

$$u_0 - u_1 = \sqrt{\varepsilon} (\zeta(\rho^*, \rho_1) + \zeta(\rho^*, \rho_0)) > 0. \quad (7.4)$$

Na osnovu (7.4), kada $\varepsilon \rightarrow 0$, mora važiti

$$\zeta(\rho^*, \rho_1) \rightarrow \infty \text{ i } \zeta(\rho^*, \rho_0) \rightarrow \infty,$$

iz čega sledi da je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho^* = \infty.$$

Kako su zbog (7.4), $\sqrt{\varepsilon} \zeta(\rho^*, \rho_1)$ i $\sqrt{\varepsilon} \zeta(\rho^*, \rho_0)$ ograničene funkcije, a kako važi

$$\sqrt{\varepsilon} \zeta(\rho^*, \rho_1) = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho^*}\right) \left(\frac{\varepsilon(\rho^*)^\gamma}{\gamma} - \frac{\varepsilon \rho_1^\gamma}{\gamma}\right)}$$

i

$$\sqrt{\varepsilon} \zeta(\rho^*, \rho_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho^*}\right) \left(\frac{\varepsilon(\rho^*)^\gamma}{\gamma} - \frac{\varepsilon \rho_0^\gamma}{\gamma}\right)},$$

sledi da je $\varepsilon(\rho^*)^\gamma$ ograničeno i od dole i od gore. \square

Iz leme 7.1.2 sledi da postoji konstanta $C > 0$ koja ne zavisi od ε takva da $(C\varepsilon)^{-1} \leq \rho^* \leq C\varepsilon^{-1}$ za $\varepsilon > 0$ dovoljno malo (t.j. $\rho^* \sim C/\varepsilon$). Ovde su ρ_0 i ρ_1 konstante, odnosno ne zavise od ε . U narednoj lemi diskutujemo opštiji slučaj.

Lema 7.1.3 ([12]) Neka je (ρ_0, u_0) spojeno sa (ρ^*, u^*) talasom prve familije, dok su (ρ^*, u^*) i (ρ_1, u_1) spojeni talasom druge familije. Neka je $0 < \varepsilon \ll 1$, $|u_0 - u_1| \leq A$, $A > 0$ i

$$\rho_0, \rho_1 \in [e^{-\tilde{C}/\sqrt{\varepsilon}}, \tilde{C}/\varepsilon^{\theta_1}]$$

za neko $\theta_1 \geq 0$ i $\tilde{C}, \tilde{C} > 0$. Tada postoje konstante $\bar{C} > 0$ i $\bar{C} > \tilde{C} > 0$ tako da važi

$$e^{-\frac{\bar{C}}{\sqrt{\varepsilon}}} \lesssim \rho^* \lesssim \frac{\bar{C}}{\varepsilon^{\theta_1+1}},$$

kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Konstante $A, \tilde{C}, \tilde{C}, \bar{C}, \bar{C}$ ne zavise od ε .

Dokaz. (i) Pretpostavimo da su talasi S_1 i S_2 nastali nakon interakcije dva dolazeća talasa, odnosno da su (ρ_0, u_0) i (ρ^*, u^*) spojeni preko S_1 , a da su (ρ^*, u^*) i (ρ_1, u_1) spojeni preko S_2 . Na osnovu (5.5, 5.6) važi $\rho^* > \max\{\rho_0, \rho_1\}$, $u_0 > u^* > u_1$ i

$$\begin{aligned} u_0 - u_1 &= \frac{\sqrt{\varepsilon \frac{\rho^*}{\rho_0} (\rho^*)^{2\varepsilon}}}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho^*}\right) \left(1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho^*}\right)^{1+2\varepsilon}\right)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\varepsilon \frac{\rho^*}{\rho_1} (\rho^*)^{2\varepsilon}}}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho^*}\right) \left(1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho^*}\right)^{1+2\varepsilon}\right)}. \end{aligned}$$

Iz ograničenosti $u_0 - u_1$ dobijamo da postoji konstanta $C_1 > 0$ koje ne zavisi od ε tako da važi

$$\varepsilon \frac{\rho^*}{\rho_0} (\rho^*)^{2\varepsilon} \leq C_1^2, \quad \varepsilon \frac{\rho^*}{\rho_1} (\rho^*)^{2\varepsilon} \leq C_1^2,$$

odnosno

$$(\rho^*)^{1+2\varepsilon} \leq \frac{C_1^2 \rho_0}{\varepsilon} \leq \frac{\bar{C}}{\varepsilon^{\theta_1+1}}, \quad (\rho^*)^{1+2\varepsilon} \leq \frac{C_1^2 \rho_1}{\varepsilon} \leq \frac{\bar{C}}{\varepsilon^{\theta_1+1}},$$

kada $\varepsilon \rightarrow 0$ za $\bar{C} = \tilde{C} \cdot C_1^2 > 0$. Donja granica za ρ^* sledi iz $\rho^* > \max\{\rho_0, \rho_1\}$. Primitimo da je $u_0 - u_1 \lesssim 2C_1$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

(ii) Neka su, nakon interakcije, nastali talasi S_1 i R_2 , odnosno neka je (ρ_0, u_0) spojeno sa (ρ^*, u^*) preko S_1 , a (ρ^*, u^*) i (ρ_1, u_1) preko R_2 . Tada (5.4) i (5.5) daju $\rho_0 < \rho^* \leq \rho_1$ pa je time dobijena i donja i gornja granica za ρ^* .

(iii) Ako su posle interakcije nastali R_1 i S_2 , tada su (ρ_0, u_0) i (ρ^*, u^*) spojeni preko R_1 , a (ρ^*, u^*) i (ρ_1, u_1) preko S_2 . Formule (5.4) i (5.6) daju $\rho_1 < \rho^* \leq \rho_0$, pa su time i granice za ρ^* očigledne.

(iv) Konačno, ako su nakon interakcije nastala dva razređujuća talasa R_1 i R_2 , tada je $\rho^* \leq \min\{\rho_0, \rho_1\} \leq \tilde{C}/\varepsilon^{\theta_1}$ za $\theta_1 \geq 0$ i $\tilde{C} > 0$. Potražimo sada donje ograničenje za ρ^* . Na osnovu (5.4) imamo

$$u_1 - u_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\rho_0^\varepsilon - (\rho^*)^\varepsilon) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\rho_1^\varepsilon - (\rho^*)^\varepsilon)$$

odnosno

$$(\rho^*)^\varepsilon = \frac{1}{2} (\rho_0^\varepsilon + \rho_1^\varepsilon) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} (u_1 - u_0).$$

Na osnovu pretpostavki datih u lemi dobijamo

$$(\rho^*)^\varepsilon \geq \frac{1}{2} \left(e^{-\tilde{C}\sqrt{\varepsilon}} + e^{-\tilde{C}\sqrt{\varepsilon}} \right) - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} A$$

i birajući $\bar{C} > \tilde{C} > 0$ tako da važi

$$A \leq 2 \cdot \frac{e^{-\tilde{C}\sqrt{\varepsilon}} - e^{-\bar{C}\sqrt{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (7.5)$$

(ovo je moguće jer izraz na desnoj strani konvergira ka $2(\bar{C} - \tilde{C})$ kada $\varepsilon \rightarrow 0$) pa imamo

$$(\rho^*)^\varepsilon \geq e^{-\tilde{C}\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \left(2 \cdot \frac{e^{-\tilde{C}\sqrt{\varepsilon}} - e^{-\bar{C}\sqrt{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = e^{-\bar{C}\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow \rho^* \geq e^{-\bar{C}/\sqrt{\varepsilon}}.$$

□

Na osnovu teoreme 7.1.1, leme 7.1.3 i (7.5) zaključujemo da se vakuum stanje neće stvoriti jer je

$$\frac{\rho_0^\varepsilon + \rho_1^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \geq \frac{2 \left(e^{-\tilde{C}/\sqrt{\varepsilon}} \right)^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{2 e^{-\tilde{C}\sqrt{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon}} > \frac{2 \left(e^{-\tilde{C}\sqrt{\varepsilon}} - e^{-\bar{C}\sqrt{\varepsilon}} \right)}{\sqrt{\varepsilon}} \geq A \geq u_1 - u_0.$$

Prioritetni cilj ove leme je da se kontrolishe rast eksponenta od $1/\varepsilon$. On se, međutim može povećati samo pri sudaru udarnih talasa druge i prve familije, a takav broj sudara je konačan jer smo u poglavju 5.5, formirali konačan broj putanja kojima pripadaju udarni talasi. Pri preostalim sudarima eksponent od $1/\varepsilon$ je ograničen eksponentom pre sudara.

Lema 7.1.3 se može iskoristiti i za dobijanje preciznije ocene snage talasa u odnosu na ε . Naime, konstanta C iz teorema 5.2.2 i 5.2.3 zavisi od levih i desnih stanja Rimanovog problema, a ta stanja sada zavise i od ε . Zbog toga će nam trebati preciznije ocene razlika Rimanovih invarijanti koje se odnose na udarne talase. One su date u narednoj teoremi gde je nova ocena reda $\sqrt{\varepsilon}$ umesto ε kada $\varepsilon \rightarrow 0$.

Teorema 7.1.4 ([12]) *Neka je $s_0 < s_1$ i uzmimo dve S_1 krive koje kreću iz tačkaka $(r_0, s_0) = (\rho_0, u_0)$ i $(r_0, s_1) = (\rho_1, u_1)$, a završavaju se u tačkama (r, s) i (r, s_2) , redom. Tada je*

$$0 \leq (s_0 - s) - (s_1 - s_2) \leq C_* \sqrt{\varepsilon} (r_0 - r) (s_1 - s_0),$$

za ε dovoljno malo. Konstanta C_* ne zavisi od ε , ρ_0 , ρ_1 , r i s .

Dokaz. Za $z^0 = s_0 - s$, $z^1 = s_1 - s_2$ i $w = r_0 - r$, a na osnovu teoreme 5.2.2 i (5.47) i koristeći $\kappa\sqrt{\gamma} = \sqrt{\varepsilon}$ i $\gamma = 1 + 2\varepsilon$, imamo

$$z^0 - z^1 \leq \frac{8(1+\varepsilon)}{\rho_0^\varepsilon \sqrt{1+2\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} (s_1 - s_0) w.$$

Na osnovu leme 7.1.3 dobijamo

$$\rho_0 \geq e^{\frac{-\tilde{C}}{\sqrt{\varepsilon}}} \Rightarrow \frac{1}{\rho_0^\varepsilon} \leq e^{-\tilde{C}\sqrt{\varepsilon}} \leq \underline{C}$$

kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Zbog toga postoji konstanta C_* koja ne zavisi od ρ_0 , ρ_1 , ε , r i s , a za koju važi

$$\frac{8(1+\varepsilon)}{\rho_0^\varepsilon \sqrt{1+2\varepsilon}} \leq C_*$$

za ε dovoljno malo. Zato možemo pisati

$$z^0 - z^1 \leq C_* \sqrt{\varepsilon} (s_1 - s_0) w.$$

Ovim je teorema dokazana. □

Naredna teorema se može dokazati analogno kao i prethodna.

Teorema 7.1.5 ([12]) *Za $r_0 > r_1$ uzmimo dve S_2 krive koje kreću iz tačkaka $(r_0, s_0) = (\rho_0, u_0)$ i $(r_1, s_0) = (\rho_1, u_1)$, a završavaju se u tačkama (r, s) i (r_2, s) , redom. Tada važi*

$$0 \leq (r_0 - r) - (r_1 - r_2) \leq C_{**} \sqrt{\varepsilon} (s_0 - s) (r_0 - r_1),$$

za ε dovoljno malo. Konstanta C_{**} ne zavisi of ε , ρ_0 , ρ_1 , r i s .

U nastavku ćemo koristiti oznaku C_* za maksimum konstanti C_* i C_{**} iz teorema 5.2.2 i 5.2.3, redom.

Snaga talasa u $r - s$ ravni biće ocenjene pomoću leme 7.1.3 kao što sledi.

Lema 7.1.6 ([12]) *Snage udarnih i razređujućih talasa ostaju ograničene u Rimanovim invarijantama kada $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Dokaz. Posmatraćemo snage fizičkih talasa nakon interakcija. Neka je $(\rho_0, u_0) = (r_0, s_0)$ spojeno sa $(\rho, u) = (r, s)$ preko razređujućeg (udarnog) talasa prve familije, dok je $(\rho, u) = (r, s)$ spojeno sa $(\rho_1, u_1) = (r_1, s_1)$ preko razređujućeg (udarnog) talasa druge familije. Lema 7.1.3 implicira da je, koristeći drugu jednačinu u (5.3) i prvu u (5.4), snaga razređujućeg talasa prve familije jednaka

$$r - r_0 = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}(\rho_0^\varepsilon - \rho^\varepsilon) \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\left(\frac{\tilde{C}}{\varepsilon^{\theta_1}} \right)^\varepsilon - \left(e^{-\frac{\tilde{C}}{\sqrt{\varepsilon}}} \right)^\varepsilon \right) \sim 2\tilde{C}$$

kada $\varepsilon \rightarrow 0$ gde je $\rho \leq \rho_0$, $\theta_1 \geq 0$ i $\tilde{C} > 0$. Snaga razređujućeg talasa druge familije, koristeći prvu jednačinu u (5.3) i drugu u (5.4), jednaka je

$$s_1 - s = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}(\rho_1^\varepsilon - \rho^\varepsilon), \quad \rho < \rho_1,$$

i ograničena kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Iz (5.9) sledi da je snaga udarnog talasa prve familije ograničena sa

$$2\rho_0^\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \leq r_0 - r \leq 2 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(1+2\varepsilon)/2} \rho_0^\varepsilon, \quad \rho > \rho_0, \quad (7.6)$$

dok snaga udarnog talasa druge familije zadovoljava

$$2\rho_1^\varepsilon \sqrt{\varepsilon} \ln \frac{\rho}{\rho_1} \leq s - s_1 \leq 2 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right)^{(1+2\varepsilon)/2} \rho_1^\varepsilon, \quad \rho > \rho_1,$$

na osnovu (5.10). Ocenimo sada gornju granicu snage udarnog talasa prve familije u (7.6). Iz (5.5) imamo

$$u_0 - u = \frac{\sqrt{\varepsilon} \frac{\rho}{\rho_0} \rho^{2\varepsilon}}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \sqrt{\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left(1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1+2\varepsilon} \right)}$$

i korišćenjem leme 7.1.3 sledi

$$\varepsilon \frac{\rho}{\rho_0} \rho^{2\varepsilon} \leq \hat{C}^2, \quad (7.7)$$

gde $\hat{C} > 0$ ne zavisi od ε . Tada (7.7) daje

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(1+2\varepsilon)/2} \rho_0^\varepsilon = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} \rho^\varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \hat{C},$$

a onda i

$$2 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(1+2\varepsilon)/2} \rho_0^\varepsilon \leq 2 \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \frac{\hat{C}}{\sqrt{\varepsilon}} \sim 2\hat{C}.$$

Zaključujemo da je snaga udarnog talasa prve familije ograničena. To ćemo iskoristiti na sledeći način. Funkcija g_1 iz (5.11) zadovoljava $0 \leq g_1'(\beta, \rho_0) < 1$ i $0 \leq g_1''(\beta, \rho_0)$ i dobijamo

$$\lim_{|\beta| \rightarrow +\infty} g_1'(|\beta|, \rho_0) \leq 1.$$

Kako je snaga β ograničena, to znači da postoji konstanta C_3 koja ne zavisi od ε i ρ_0 tako da je

$$\sup g_1'(|\beta|, \rho_0) := C_3 < 1.$$

Zbog toga je i

$$\frac{1 - g'_1(|\beta|, \rho_0)}{g'_1(|\beta|, \rho_0)} \geq \frac{1 - C_3}{C_3} =: C_4 > 0.$$

Koristeći se istim argumentima može se pokazati da je snaga udarnog talasa druge familije takođe ograničena, odnosno

$$\sup g'_2(|\chi|, \rho_0) =: C_5 < 1$$

i

$$\frac{1 - g'_2(|\chi|, \rho_0)}{g'_2(|\chi|, \rho_0)} \geq \frac{1 - C_5}{C_5} =: C_6 > 0.$$

□

Sada uvodimo oznaku $C^* = \min\{C_4, C_6\}$, gde su C_4 i C_6 iz prethodne leme. Konstanta C^* ne zavisi od ε i biće korišćena u nastavku.

U sledećoj teoremi korišćemo oznake kao u teoremi 5.3.2.

Teorema 7.1.7 ([12]) *Ako je $0 < \varepsilon \ll 1$, tada važe sledeće ocene za odgovarajuće interakcije:*

1. *Rezultat interakcije udarnog talasa druge familije χ i udarnog talasa prve familije β je udarni talas prve familije β' i udarni talas druge familije χ' :*

$$(a) \quad \chi + \beta \rightarrow \beta' + \chi' \\ |\beta'| \leq |\beta| + C_*\sqrt{\varepsilon}|\chi||\beta|, \quad |\chi'| \leq |\chi| + C_*\sqrt{\varepsilon}|\beta||\chi|, \text{ ili}$$

postoje η, ξ tako da važi

$$(b) \quad \chi + \beta \rightarrow \beta' + \chi' \\ 0 \leq |\chi'| = |\chi| - \xi, \quad |\beta'| \leq |\beta| + C_*\sqrt{\varepsilon}|\chi||\beta| + \eta, \\ \text{gde je } 0 \leq \eta \leq g'_1(|\chi|, \rho_0)\xi < \xi, \text{ ili}$$

$$(c) \quad \chi + \beta \rightarrow \beta' + \chi' \\ 0 \leq |\beta'| = |\beta| - \xi, \quad |\chi'| \leq |\chi| + C_*\sqrt{\varepsilon}|\beta||\chi| + \eta, \\ \text{gde je } 0 \leq \eta \leq g'_1(|\beta|, \rho_0)\xi < \xi.$$

2. *pri interakciji udarnog talasa druge familije χ i razređujućeg talasa prve familije o nastaju razređujući talas prve familije o' i udarni talas druge familije χ' :*

$$(a) \quad \chi + o \rightarrow o' + \chi' \\ |\chi'| = |\chi|, \quad |o'| \leq |o| + C_*\sqrt{\varepsilon}|\chi||o|.$$

nakon interakcije razređujućeg talasa druge familije π i udarnog talasa prve familije β dobijamo udarni talas prve familije β' i razređujući talas druge familije π' :

$$(b) \quad \pi + \beta \rightarrow \beta' + \pi' \\ |\beta'| = |\beta|, \quad |\pi'| \leq |\pi| + C_*\sqrt{\varepsilon}|\beta||\pi|.$$

3. *Rezultat interakcije dva udarna talasa χ_1 i χ_2 druge familije je razređujući talas prve familije o' i udarni talas druge familije χ' :*

$$(a) \quad \chi_1 + \chi_2 \rightarrow o' + \chi' : \\ |\chi'| = |\chi_1| + |\chi_2|, \quad |o'| \leq |\chi_1| + |\chi_2|, |o'| = \mathcal{O}(|\chi_1||\chi_2|),$$

nakon interakcije dva udarna talasa β_1 i β_2 prve familije, nastaju udarni talas prve familije β' i razređujući talas druge familije π' :

$$(b) \quad \beta_1 + \beta_2 \rightarrow \beta' + \pi' : \\ |\beta'| = |\beta_1| + |\beta_2|, \quad |\pi'| \leq |\beta_1| + |\beta_2|, |\pi'| = \mathcal{O}(|\beta_1||\beta_2|).$$

4. Interakcijom udarnog talasa druge familije χ i razređujućeg talasa druge familije π , nastaju ili udarni talas prve familije β' i udarni talas druge familije χ' , ili udarni talas prve familije β' i razređujući talas druge familije π' :

(a) 1° $\chi + \pi \rightarrow \beta' + \chi'$: postoje S_1 talas β_0 i S_2 talas χ_0 tako da važi
 $|\chi_0| = |\chi| - \xi$, $|\beta_0| = \eta$ i $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta' + \chi'$,
 gde je $0 < \eta \leq g_2'(|\chi|, \rho_1)\xi < \xi$.
 2° $\chi + \pi \rightarrow \beta' + \pi'$: postoje η, ξ tako da važi
 $|\pi'| \leq |\pi|$, $|\beta'| = \eta < \xi = |\chi|$,
 gde je $0 < \eta \leq g_2'(|\chi|, \rho_1)\xi < \xi$,

Prilikom interakcije razređujućeg talasa prve familije o i udarnog talasa prve familije β , nastaju ili udarni talas prve familije β' i udarni talas druge familije χ' , ili razređujući talas prve familije o' i udarni talas druge familije χ' :

(b) 1° $o + \beta \rightarrow \beta' + \chi'$: postoje S_1 talas β_0 i S_2 talas χ_0 tako da važi
 $|\beta_0| = |\beta| - \xi$, $|\chi_0| = \eta$ i $\chi_0 + \beta_0 \rightarrow \beta' + \chi'$,
 gde je $0 < \eta \leq g_2'(|\beta|, \rho_2)\xi < \xi$.
 2° $o + \beta \rightarrow o' + \chi'$
 $|o'| \leq |o|$, $|\chi'| = \eta < \xi = |\beta|$,
 gde je $0 < \eta \leq g_1'(|\beta|, \rho_0)\xi < \xi$.

5. Interakcijom razređujućeg talasa druge familije π i udarnog talasa druge familije χ , nastaju ili udarni talas prve familije β' i udarni talas druge familije χ' , ili udarni talas prve familije β' i razređujući talas druge familije π' :

(a) 1° $\pi + \chi \rightarrow \beta' + \chi'$: postoje η, ξ tako da važi
 $|\chi'| = |\chi| - \xi$, $|\beta'| = \eta$,
 gde je $0 < \eta \leq g_1'(|\chi|, \rho_2)\xi < \xi$.
 2° $\pi + \chi \rightarrow \beta' + \pi'$
 $|\pi'| \leq |\pi|$, $|\beta'| = \eta < \xi = |\chi|$,
 gde je $0 < \eta \leq g_2'(|\chi|, \rho_0)\xi < \xi$.

Prilikom interakcije udarnog talasa prve familije β i razređujućeg talasa prve familije o , nastaju ili udarni talas prve familije β' i udarni talas druge familije χ' , ili razređujući talas prve familije o' i udarni talas druge familije χ' :

(b) 1° $\beta + o \rightarrow \beta' + \chi'$: postoje η, ξ tako da važi
 $|\beta'| = |\beta| - \xi$, $|\chi'| = \eta$,
 gde je $0 < \eta \leq g_1'(|\beta|, \rho_1)\xi < \xi$.
 2° $\beta + o \rightarrow o' + \chi'$
 $|o'| \leq |o|$, $|\chi'| = \eta < \xi = |\beta|$,
 gde je $0 < \eta \leq g_1'(|\beta|, \rho_1)\xi < \xi$.

6. Rezultat interakcije razređujućeg talasa druge familije π i razređujućeg talasa prve familije o je razređujući talas prve familije o' i razređujući talas druge familije π' :

$$\pi + o \rightarrow o' + \pi'$$

$$|o'| = |o|, \quad |\pi'| = |\pi|.$$

Dokaz. Dokaz ove teoreme može se izvesti istom tehnikom koja se koristila pri dokazivanju teoreme 5.3.2 i zbog toga će biti izostavljen. Razlike u dokazu su što sada konstatna C_* ne zavisi od $\varepsilon, \beta, \chi, \rho_0, \rho_1$ i ρ_2 i što koristimo $\sqrt{\varepsilon}$ umesto ε u ocenama 1 (a)-(c), 2 (a) i 2 (b). \square

7.2 Globalna ocena interakcije talasa

U ovom poglavlju koristićemo tvrđenja iz poglavlja 5.4 sa izvesnim korekcijama koje će biti eksplicitno navedene. Ponovimo, ako sa $S_j(J)$ obeležimo skup j -udarnih talasa koji presecaju J i ako je $S(J) = S_1(J) \cup S_2(J)$, tada je

$$L^-(J) = \sum_{\alpha \in S(J)} |\alpha|, \quad Q(J) = \sum_{\beta \in S_1(J), \chi \in S_2(J)} |\beta \chi|, \quad \beta, \chi \text{ prilazeći talasi.}$$

Sada određujemo Glimovu funkcionalu kao $F(J) = L^-(J) + \tilde{K} Q(J)$, gde je $\tilde{K} := 4C_* \sqrt{\varepsilon}$.

Lema 7.2.1 *Ako je $4C_* \sqrt{\varepsilon} L^-(O) \leq 1$, tada važi*

$$F(O) \leq 2L^-(O).$$

Dokaz. Na osnovu leme 5.69 važi $Q(O) \leq L^-(O)^2$, pa imamo

$$\begin{aligned} F(O) &= L^-(O) + \tilde{K} Q(O) \leq L^-(O) + \tilde{K} L^-(O)^2 \\ &= L^-(O)(1 + \tilde{K} L^-(O)) = L^-(O)(1 + 4C_* \sqrt{\varepsilon} L^-(O)) \\ &\leq L^-(O)(1 + 1) = 2L^-(O). \end{aligned}$$

□

Uniformna ograničenost $F(J)$ sledi iz sledeće teoreme.

Teorema 7.2.2 ([12]) *Ako je $C_* \sqrt{\varepsilon} F(O) \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{C^*}{4} \right\}$, tada važi $F(J_2) \leq F(J_1)$ za $J_2 > J_1$, odnosno $L^-(J) \leq F(O)$.*

Dokaz. Ova teorema se može dokazati kao što je dokazana teorema 5.4.6. ali je potrebno zameniti konstantu K sa \tilde{K} i $\frac{1-\delta}{\delta}$ sa C^* . □

Lema 7.2.3 ([12]) *Neka je $\tilde{K} L^-(O) \leq 1$ i*

$$\sqrt{\varepsilon} TV(r_0(x), s_0(x)) \leq \frac{1}{C_*} \cdot \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{C^*}{8} \right\}. \quad (7.8)$$

Tada je $\tilde{K} F(O) \leq \min \{2, C^\}$.*

Dokaz. Koristeći $F(O) \leq 2L^-(O)$, $L^-(O) \leq TV(r_0(x), s_0(x))$ i (7.8), imamo

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} F(O) \leq \sqrt{\varepsilon} L^-(O) \leq \sqrt{\varepsilon} TV(r_0(x), s_0(x)) \leq \frac{1}{C_*} \cdot \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{C^*}{8} \right\}.$$

Množenjem prethodnog izraza sa $8C_*$, dobijamo

$$4C_* \sqrt{\varepsilon} F(O) = \tilde{K} F(O) \leq \min \{2, C^*\}.$$

□

Desna strana od (7.8) ne zavisi od ε i tada možemo reći da $TV(r_0(x), s_0(x))$ može biti proizvoljno velika jer uvek možemo izabrati ε dovoljno malo da bi važio (7.8). Sada možemo primeniti metod praćenja talasa dat u glavama 4 i 5 za svako ε i time dobijamo niz po delovima konstantnih funkcija koji konvergira ka entropijskom rešenju. Ipak moramo uvesti i neke izmene koje dajemo u sledećem poglavlju.

7.2.1 Dekompozicija po putanji i ukupna snaga talasa

U odnosu na dekompoziciju po putanji iz poglavlja 5.5, ono što treba zameniti je C_ε sa $C_*\sqrt{\varepsilon}$ i procedura se može ponoviti. Ovde ćemo pokazati kako treba obaviti zamenu u pojedinim slučajevima.

Korak 1. Putanja, indeks i snaga putanje. Kao i u poglavlju 5.5, posmatrajmo teoremu 7.1.7 analognu teoremi 5.3.2.

Slučaj (1) (a): postoje pozitivne konstante $C_7 \leq C_*$ i $C_8 \leq C_*$ tako da važi

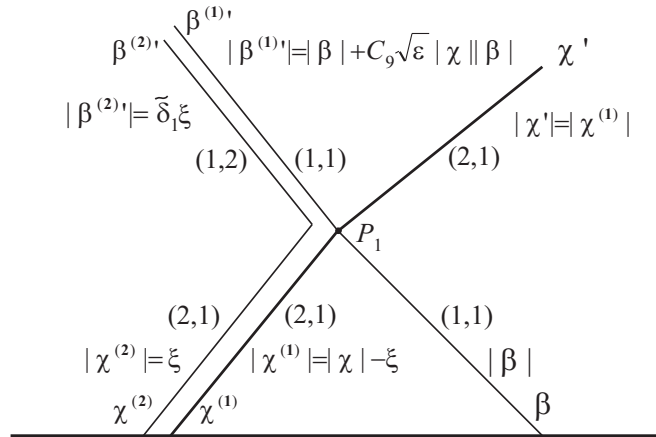
$$|\beta'| = (1 + C_7\sqrt{\varepsilon}|\chi|)|\beta|, \quad |\chi'| = (1 + C_8\sqrt{\varepsilon}|\beta|)|\chi|. \quad (7.9)$$

Indeksi od β' i χ' su (1, 1) i (2, 1), redom, a njihove snage su $|\beta'|$ i $|\chi'|$, redom.

Slučaj (1) (b): postoje pozitivne konstante $C_9, \tilde{\delta}_1$, i ξ takve da je $C_9 \leq C_*$, $0 < \tilde{\delta}_1 \leq C_3 < 1$ i

$$|\beta'| = (1 + C_9\sqrt{\varepsilon}|\chi|)|\beta| + \tilde{\delta}_1\xi, \quad |\chi'| = |\chi| - \xi. \quad (7.10)$$

(2,1)-segment χ sa deli na dva (2,1)-segmenta $\chi^{(1)}$ i $\chi^{(2)}$ tako da je $|\chi^{(1)}| = |\chi| - \xi = |\chi'|$ i $|\chi^{(2)}| = \xi$ (videti sliku 7.1). Indeks od χ' je (2,1). (1,1)-segment $\beta^{(1)'}$ i (1,2)-segment $\beta^{(2)'}$ se definišu tako da su njihove snage $|\beta^{(2)'}| = \tilde{\delta}_1\xi$ i $|\beta^{(1)'}| = |\beta'| - |\beta^{(2)'}| = |\beta| + C_9\sqrt{\varepsilon}|\chi||\beta|$. Time je Γ podeljena na dve putanje sve do presečne tačke P_1 gde važi $\Gamma^{(1)} = \chi^{(1)} \cup \chi'$ i $\Gamma^{(2)} = \chi^{(2)} \cup \beta^{(2)'}$. Takođe postoji i putanja $B = \beta \cup \beta^{(1)'}$. Ostali slučajevi se tretiraju kao u teoremi 5.3.2.



Slika 7.1: Interakcija udarnih talasa χ i β , teorema 7.1.7, slučaj (1) (b).

U opštem slučaju, kako je i navedeno u poglavlju 5.5, pretpostavimo da u tački P_n ($t = t_n$) dođe do interakcije udarnog talasa druge familije χ i udarnog talasa prve familije β i da su kreirani β' i χ' . Opet se pretpostavlja da se β sastoji od segmenata B_1, B_2, \dots , koji imaju snagu $|\beta_1|, |\beta_2|, \dots$, redom i da se χ sastoji od segmenata $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, sa snagama $|\chi_1|, |\chi_2|, \dots$, redom tako da važi $|\beta| = \sum_j |\beta_j|$, $|\chi| = \sum_j |\chi_j|$. Takođe se pretpostavlja da svi udarni talasi imaju takvu dekompoziciju za $t < t_n$.

Slučaj (1) (a): $|\beta'| \geq |\beta|$ and $|\chi'| \geq |\chi|$. Teorema 7.1.7 implicira da važi (7.9). Svaka putanja Γ_j se proširuje do sledeće tačke interakcije tako što se ne menja indeks, a snaga se definiše kao $(1 + C_8\sqrt{\varepsilon}|\beta|)|\chi_j|$. Slično, putanja B_j se proširuje bez promene indeksa, dok je snaga $(1 + C_7\sqrt{\varepsilon}|\chi|)|\beta_j|$. Slučaj (1) (b): $|\chi'| < |\chi|$. U ovom slučaju postoje pozitivne konstante $C_9, \tilde{\delta}_1$ i ξ takve da važi (7.10). Tada se može naći ceo broj l i konstanta $\bar{\chi}_l$ tako da važi

$$\xi = |\bar{\chi}_l| + \sum_{j \geq l+1} |\chi_j|, \quad 0 < |\bar{\chi}_l| < |\chi_l|.$$

Za $1 \leq j \leq l-1$, putanja Γ_j se proširuje do sledeće tačke interakcije bez promene indeksa i snage. Za $j = l$, putanja Γ_l se deli na dve putanje $\Gamma_l^{(1)}$ i $\Gamma_l^{(2)}$ tako da se indeksi ne menjaju a snage zadovoljavaju $|\chi_l^{(1)}| = |\chi_l| - |\bar{\chi}_l|$ i $|\chi_l^{(2)}| = |\bar{\chi}_l|$. Putanja $\Gamma_l^{(1)}$ se proširuje do sledeće tačke interakcije bez menjanja indeksa i snage. Neka je $(2, k_l)$ indeks putanje Γ_l na χ . Produžavamo $\Gamma_l^{(2)}$ u drugom pravcu sa novim generacijskim redom $k_l + 1$ i snagom $\tilde{\delta}_1 |\bar{\chi}_l|$ tako da je indeks $(1, k_l + 1)$ do sledeće tačke interakcije. Za $j \geq l+1$, putanju Γ_j produžavamo do sledeće tačke interakcije menjajući pravac: indeks je $(1, k_j + 1)$ a snaga $\tilde{\delta}_1 |\chi_j|$. Putanja B_j se proširuje do sledeće tačke interakcije bez promene indeksa, dok je nova snaga $(1 + C_9 \sqrt{\varepsilon} |\chi|) |\beta_j|$. Preostali slučajevi se tretiraju kao u teoremi 5.3.2.

Time je dakle dobijen konačan broj putanja $\Gamma = \{\Gamma_j\}$. U ovom koraku zamenili smo $C\varepsilon$ sa $C_* \sqrt{\varepsilon}$.

Korak 2. Generacijski red i snaga putanje. Na osnovu diskusije iz koraka 1, zaključujemo da će se snaga putanje smanjiti ako se poveća generacijski red putanje. Za svako t različito od vremena interakcije, definišemo $\alpha_\Gamma(t)$ kao snagu putanje Γ u vremenu t i $g_\Gamma(t)$ kao generacijski red putanje Γ u vremenu t . Iz definicije putanje dobijamo:

Lema 7.2.4 *Za svako aproksimativno rešenje postoji konačan broj putanja $\Gamma = \{\Gamma_j\}$ takvih da je*

1. $L^-(t) = \sum_{\Gamma \in \Gamma} \alpha_\Gamma(t)$
2. *Neka je data putanja $\Gamma : P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots \rightarrow P_n$ i neka su (k_j, g_j) i α_j indeks i snaga putanje na segmentu $P_{j-1}P_j$, redom. Tada je*

$$\begin{aligned} g_{j+1} = g_j &\Rightarrow \alpha_{j+1} \leq (1 + C_* \sqrt{\varepsilon} |\beta_j|) \alpha_j, \\ g_{j+1} = g_j + 1 &\Rightarrow \alpha_{j+1} \leq \frac{1}{1 + C_*} \alpha_j. \end{aligned}$$

gde je β_j udarni talas koji učestvuje u interakciji.

Dokaz. Dokaz ove leme je analogan dokazu leme 5.5.2. Potrebno je zameniti $C\varepsilon$ i $\tilde{\delta}$ sa $C_* \sqrt{\varepsilon}$ i $\frac{1}{1+C_*}$, redom. \square

Korak 3. Snaga putanje u vremenu $t > 0$. Posmatrajmo snagu putanje Γ u vremenu t tako da je $g_\Gamma(t) = j$.

Lema 7.2.5 *Pretpostavimo da važi $C_* \sqrt{\varepsilon} F(O) \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{C_*}{4} \right\}$. Tada postoji pozitivna konstanta $\iota = \iota(C_*)$, $0 < \iota < 1$, takva da je*

$$\begin{aligned} \alpha_\Gamma(t) &\leq 2 \alpha_\Gamma(0) && \text{if } g_\Gamma(t) = 1, \\ \alpha_\Gamma(t) &\leq \iota^{j-1} \alpha_\Gamma(0) && \text{if } g_\Gamma(t) = j \geq 2. \end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz ove leme je analogan dokazu leme 5.5.4. Potrebno je zameniti $C\varepsilon$, $\tilde{\delta}$ i $\bar{\vartheta}(\tilde{\delta})$ sa $C_* \sqrt{\varepsilon}$, $\frac{1}{1+C_*}$ i $\bar{\vartheta}(C_*) =: \iota(C_*)$, redom. \square

Sa $L_j^-(t)$ označimo sumu snaga udarnih talasa koji imaju generacijski red j na putanji Γ u vremenu t , odnosno $L_j^-(t) = \sum_{\Gamma: k_\Gamma(t)=j} \alpha_\Gamma(t)$. Ovim dobijamo sledeću lemu.

Lema 7.2.6 *Pretpostavimo da je $C_* \sqrt{\varepsilon} F(O) \leq \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{C_*}{4} \right\}$. Tada postoji pozitivna konstanta $\iota = \iota(C_*)$ koja zadovoljava $0 < \iota < 1$ tako da važi*

$$L_1^-(t) \leq 2 L^-(0), \quad L_j^-(t) \leq \iota^{j-1} L^-(0) \quad (j \geq 2).$$

Dokaz. Za $j = 1$ imaćemo

$$\sum_{\Gamma: k_{\Gamma}(t)=1} \alpha_{\Gamma}(t) \leq 2 \sum_{\Gamma: k_{\Gamma}(t)=1} \alpha_{\Gamma}(0) \leq 2L^{-}(0),$$

dok za $j \geq 2$, pomoću leme 7.2.5, dobijamo

$$\sum_{\Gamma: k_{\Gamma}(t)=j} \alpha_{\Gamma}(t) \leq \iota^{j-1} \sum_{\Gamma: k_{\Gamma}(t)=1} \alpha_{\Gamma}(0) = \iota^{j-1} L^{-}(0).$$

□

U ovom koraku, potrebno je zameniti $\bar{\vartheta}(\delta)$, $C\varepsilon$ i $\frac{1-\delta}{\delta}$ iz poglavlja 5.5 sa $\iota(C^*)$, $C_*\sqrt{\varepsilon}$ i C^* , redom.

Korak 4. Ocene snage razređujućih talasa. Preostalo je da se ocene snage razređujućih talasa nakon interakcija. Ako sa $\{P_m\}$ označimo skup svih tačaka u kojima dolazi do interakcije dva udarna talasa iste familije, tada za $C_*\sqrt{\varepsilon}F(O) \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{C_*}{4}\right\}$, imaćemo da se ukupna snaga novih razređujućih talasa generisanih ovakvim interakcijama ocenjuje sa

$$\sum_{P_m} |\alpha_1(P_m)\alpha_2(P_m)| \leq \frac{2}{1-\iota} L^{-}(O)^2$$

dok se snage razređujućih talasa generisanih interakcijom udarnog talasa α i razređujućeg talasa θ ocenjuje se

$$\sum_{P_m} |\alpha(P_m)\theta(P_m)| \leq \left(F(O) + \frac{2L^{-}(O)}{1-\iota}\right) \left(L^{+}(O) + \frac{2\mathcal{O}(1)}{1-\iota} L^{-}(O)^2\right).$$

Dokazi poslednje dve nejednakosti su analogni dokazima teorema 5.6.1 i 5.6.2, gde se $\bar{\vartheta}(\delta)$ treba zameniti sa $\iota(C^*)$.

Na osnovu koraka 1-4, zaključujemo da je ukupna snaga fizičkih talasa uniformno ograničena pod uslovom da važi $C_*\sqrt{\varepsilon}F(O) \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{C_*}{4}\right\}$.

Korak 5. Ocena nefizičkih talasa. Kao što je već dato u poglavlju 5.6, neka je $V_j^{-}(t)$ ukupna snaga udarnih talasa u vremenu t čiji je generacijski red veći ili jednak j . Tada, na osnovu koraka 4 imamo

$$\sup_{t \geq 0} V_j^{-}(t) \leq L^{-}(0) \sum_{l \geq j} \iota^{l-1} \leq \frac{\iota^{j-1} L^{-}(0)}{1-\iota}.$$

Podsetimo se da je skup svih nefizičkih talasa obeležen sa \mathcal{NP} , a da je $\hat{\varepsilon}$ proizvoljan nefizički talas i $\hat{\nu}$ prag parametar. Tada

$$(a) |\hat{\varepsilon}| = \mathcal{O}(1)\hat{\nu} \quad \text{and} \quad (b) \sum_{\hat{\varepsilon} \in \mathcal{NP}, g_{\hat{\varepsilon}} \geq j} |\hat{\varepsilon}| \leq 2\mathcal{O}(1)F(O) \sup_{t \geq 0} V_{j-1}^{-}(t) \quad (7.11)$$

daju da za dato $\hat{\delta} > 0$, postoje prag parametar $\hat{\nu} > 0$ i polinom $P(N_0, \hat{\delta}^{-1})$ takvi da važi

$$\begin{aligned} \sum_{\hat{\varepsilon} \in \mathcal{NP}} |\hat{\varepsilon}| &\leq \sum_{\hat{\varepsilon} \in \mathcal{NP}, g_{\hat{\varepsilon}} \leq j} |\hat{\varepsilon}| + \sum_{\hat{\varepsilon} \in \mathcal{NP}, g_{\hat{\varepsilon}} > j} |\hat{\varepsilon}| \\ &\leq \mathcal{O}(1)P(N_0, \hat{\delta}^{-1})\hat{\nu} + \mathcal{O}(1) \sum_{g_{\hat{\varepsilon}} > j} V_j^{-} \\ &\leq \mathcal{O}(1)P(N_0, \hat{\delta}^{-1})\hat{\nu} + \mathcal{O}(1) \iota^j \\ &< \hat{\delta}, \end{aligned}$$

pod uslovom da smo izabrali j tako da je $\mathcal{O}(1) \iota^j \leq \frac{\delta}{2}$, a nakon toga i $\hat{\nu}$ tako da je $\mathcal{O}(1)P(N_0, \hat{\delta}^{-1})\hat{\nu} < \frac{\delta}{2}$. Dokaz za (7.11) je isti kao dokaz leme 5.7.1. Na ovaj način je dobijena uniforman ograničenost snaga svih talasa.

Napomena 7.2.7 U [11], poglavlavlje 2, dat je još jedan način kako se može odabrati da li koristiti tačno ili aproksimativno Rimanovo rešenje. Tačno Rimanovo rešenje se koristi kada je generacijski red prilazećih talasa manji od unapred zadatog broja $n_g \in \mathbb{N}$, a aproksimativno ako jedan od prilazećih talasa ima generacijski red veći ili jednak n_g ili ako je nefizički talas. Uočimo sledeće:

- Fizički talasi su oni talasi koji imaju generacijski red manji ili jednak n_g .
- Talasi koji imaju generacijski red $n_g + 1$ su nefizički talasi.
- Nikad se neće formirati talas koji ima generacijski red veći ili jednak $n_g + 2$.

Za dovoljno veliko n_g , na osnovu (7.11), opet se ukupna snaga nefizičkih talasa se može oceniti sa

$$\sum_{\hat{\epsilon} \in \mathcal{NP}} |\hat{\epsilon}| = \sum_{\hat{\epsilon} \in \mathcal{NP}, g_{\hat{\epsilon}} = n_g + 1} |\hat{\epsilon}| \leq \mathcal{O}(1) \iota^{n_g} < \hat{\delta}.$$

Korak 6. Glavna teorema. Aproksimativno rešenje je dobro definisano jer je konačan broj svih talasa za svako $t \geq 0$. Koristeći prethodno navedene korake imamo sledeću teoremu.

Teorema 7.2.8 ([12]) Za proizvoljni početni uslov sa ograničenom totalnom varijacijom, postoji ε_0 takvo da za svako $\varepsilon < \varepsilon_0$ WFT šema ostaje stabilna i daje globalno rešenje za (7.1), a suma snaga udarnih talasa ne premašuje $\frac{1}{C_*\sqrt{\varepsilon}} \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{C^*}{4}\right\}$ za svako $t > 0$.

Dokaz. Za proizvoljnu $TV(r_0(x), s_0(x))$, biramo ε_0 tako da uslovi leme 7.2.3 budu zadovoljeni. Na osnovu rada Asakura ([1]) i prethodne diskusije, za svako $\varepsilon < \varepsilon_0$ ukupna snaga fizičkih i nefizičkih talasa nastalih pri interakcijama u WFT metodi, su uniformno ograničene. Kao što je prikazano u koracima 1-5, treba zameniti $C\varepsilon$, $\frac{1-\delta}{\delta}$ i $\bar{\nu}(\delta)$ sa $C_*\sqrt{\varepsilon}$, C^* i $\iota(C^*)$, redom. Zbog toga je WFT šema stabilna i daje globalno rešenje za svako $t > 0$. Drugi deo leme sledi iz činjenice da je F nerastuća funkcionala pa, na osnovu lema 7.2.2 i 7.2.3, dobijamo $L^-(J) \leq F(O) \leq \frac{1}{C_*\sqrt{\varepsilon}} \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{C^*}{4}\right\}$. \square

7.3 Numerički primeri

U ovom poglavlju biće predstavljeni numerički rezultati u svrhu provere konzistencije teorijskih (u smislu SDW, pa u glavi 6 biramo $\mu = \varepsilon$) i numeričkih rezultata. Posmatraćemo sistem (7.1) i početni uslov

$$(\rho, u)|_{t=0} = \begin{cases} (\rho_0, u_0), & x < a_1 \\ (\rho_1, u_1), & a_1 < x < a_2 \\ (\rho_2, u_2), & x > a_2 \end{cases} \quad (7.12)$$

gde je $a_1 < a_2$, $u_0 > u_1 > u_2$ i pritisak definisan kao $p(\varepsilon, \rho) = \varepsilon\rho^{1+2\varepsilon}/(1+2\varepsilon)$. Tada (videti teoremu 2.6.1, ali i [6, 27]), za ε dovoljno malo, postoji $(\rho_{1,\varepsilon}, u_{1,\varepsilon}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ i $(\rho_{2,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, tako da je:

- (ρ_0, u_0) spojeno sa $(\rho_{1,\varepsilon}, u_{1,\varepsilon})$ preko udarnog talasa S_1 , dok udarni talas S_2 spaja $(\rho_{1,\varepsilon}, u_{1,\varepsilon})$ sa (ρ_1, u_1) ,
- i udarni talas S_1 spoja (ρ_1, u_1) sa $(\rho_{2,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon})$, dok je $(\rho_{2,\varepsilon}, u_{2,\varepsilon})$ spojeno sa (ρ_2, u_2) preko udarnog talasa S_2 .

Tabela 7.1: Definicija parametara

Parametar	Definicija
ρ_ε	Prva komponenta rešenja $U_\varepsilon = (\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ problema (7.1, 7.12).
u_ε	Druga komponenta rešenja $U_\varepsilon = (\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ problema (7.1, 7.12).
c_1	Brzina prvog levog udarnog talasa prve familije.
c_2	Brzina poslednjeg desnog udarnog talasa druge familije.
$ Eq_1 $	Leva strana integrala u prvoj jednačini u (7.1).
$ Eq_2 $	Leva strana integrala u drugoj jednačini u (7.1).

Sada primenjujemo WFT algoritam opisan u glavi 5. Kako bismo verifikovali talas koji nastaje interakcijom dva delta talasa, posmatraćemo dva slučaja i koristiti oznake date u tabeli 7.1.

Slučaj A. Biramo (ρ_0, u_0) i (ρ_1, u_1) tako da su spojeni delta talasom, zatim (ρ_2, u_2) tako da (ρ_1, u_1) i (ρ_2, u_2) budu spojeni delta talasom i pretpostavimo da (ρ_0, u_0) može biti spojeno sa (ρ_2, u_2) delta talasom, takozvanim običnim SDW. Dobijeni SDW, nakon interakcije, imaće konstantnu brzinu. Ovaj slučaj je moguć ako se ρ_2 izabere tako da je za date ρ_0, u_0, ρ_1, u_1 i u_2 zadovoljen uslov (6.29) uz (6.30).

Slučaj B. Biramo ρ_2 proizvoljno. Dobijeni SDW, nakon interakcije, nema konstantnu brzinu. Centralna linija SDW je sada kriva.

7.3.1 Slučaj A

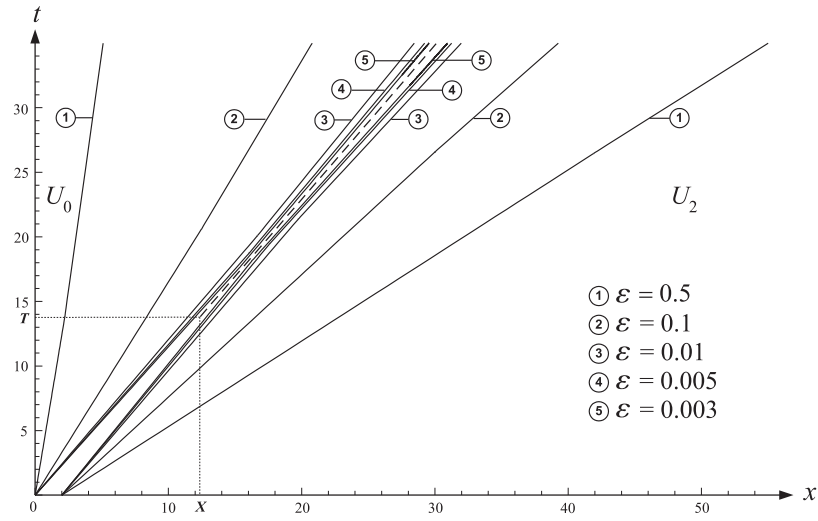
Primer 7.3.1 ([12]) Posmatrajmo problem (7.1, 7.12) gde je $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $(\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $(\rho_1, u_1) = (1.2, 0.8)$ i $u_2 = 0.7$. Za $\rho_2 = 1.14286$ u tački $(X, T) = (12.635, 13.809)$ doći će do interakcije dva SDW, a kao rezultat interakcije biće jedinstveni obični SDW. Međustanja $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ data su u tabeli 7.2 za različite vrednosti ε kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Numerička simulacija prikazana je na slici 7.2. Može se primetiti da regioni gde rešenje nije konstantno postaju uži kako $\varepsilon \rightarrow 0$. Nakon interakcije, brzina SDW je $c_\delta = 0.84499$ (slike 7.3 i 7.4), izračunata iz (6.29, 6.30). U ovom primeru je snaga razredjujućeg talasa ograničena sa $\hat{\delta} = \sqrt{\varepsilon}$ i uzeto je da je $n_g = 6$.

Tabela 7.2: Međustanja $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ nastala rešavanjem (7.1, 7.12) za različito ε , $\hat{\delta} = \sqrt{\varepsilon}$ i $n_g = 6$. Početni uslovi su $(\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $(\rho_1, u_1) = (1.2, 0.8)$ i $(\rho_2, u_2) = (1.14286, 0.7)$ za $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. c_1 je brzina prvog levog udarnog talasa S_1 , c_2 je brzina poslednjeg desnog udarnog talasa S_2 . $|Eq_1|$ i $|Eq_2|$ su leve strane integralne forme prve i druge jednačine u (7.1), redom. Nakon tačke $(x, t)_{kon}$, interakcije talasa prestaju.

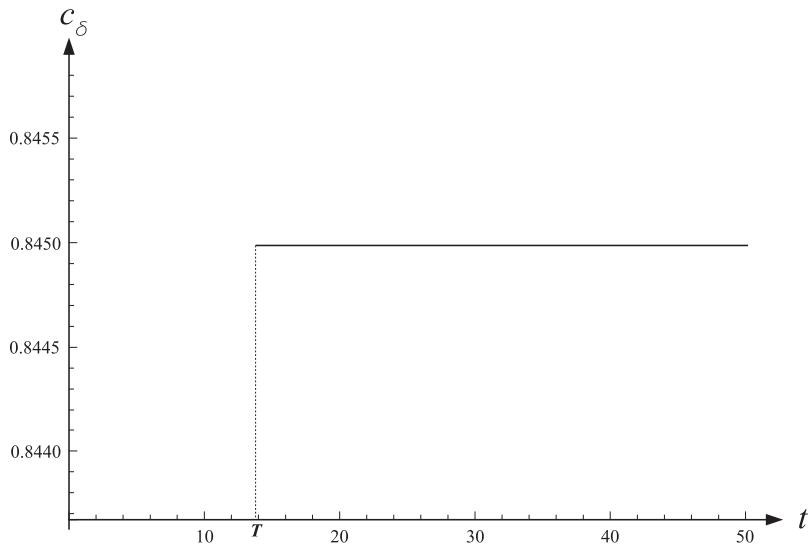
ε	ρ_ε	u_ε	c_1	c_2	$ Eq_1 $	$ Eq_2 $	Vreme	$(x, t)_{kon}$
0.1	1.68612	0.82806	0.57746	1.09746	0.00014	0.00020	0.9 s	(54245, 93937)
0.05	2.03792	0.83414	0.67434	1.00543	0.00037	0.00054	1.1 s	(62255, 61919)
0.01	4.22713	0.84164	0.79256	0.89412	0.02266	0.00402	4.8 s	(5128, 5734)
0.005	6.71266	0.84312	0.81566	0.87248	0.00501	0.02155	4477 s	(1229, 1409)
0.003	9.95854	0.84418	0.82644	0.86343	0.01212	0.00688	$\approx 168 h$	(813, 1009)

Kao što se može videti iz tabele 7.2, $u_\varepsilon \rightarrow c_\delta$ kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Primetimo i to da je vreme računanja drastično povećano za $\varepsilon = 0.005$ i $\varepsilon = 0.003$ jer se primenom WFT algoritma razredjujući talasi aproksimiraju većim brojem konstantnih stanja da bi se očuvala preciznost rešenja.

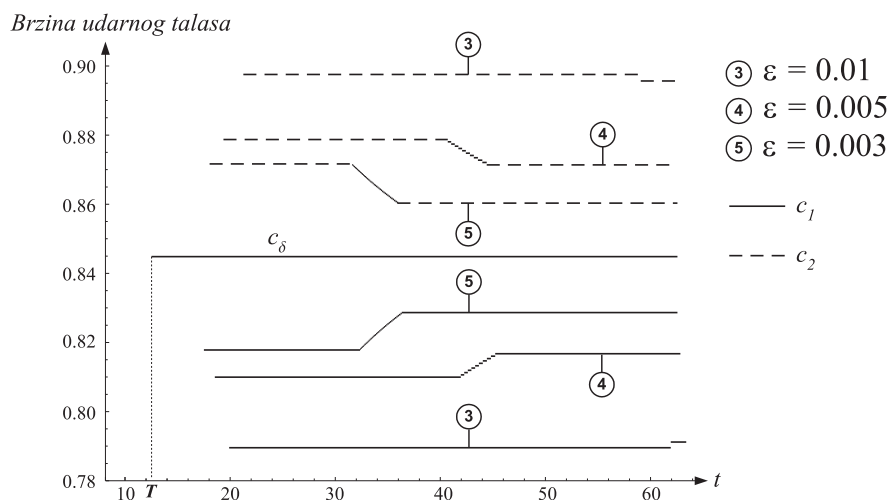
Sada sledi objašnjenje slike 7.2. Za svako ε imamo dve poluprave od kojih leva kreće iz tačke $(x, t) = (a_1, 0)$, dok desna kreće iz tačke $(x, t) = (a_2, 0)$. i -ti linearni segment ovih poluprava može se zapisati kao $x = c_{i,j}(t - t_i) + x_i$, $i \geq 1$, $j = 1, 2$, $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, $t_i \leq t \leq t_{i+1}$. $c_{i,1}$ predstavlja brzinu prvog S_1 talasa, dok $c_{i,2}$ predstavlja brzinu poslednjeg S_2 talasa za svaki i -ti segment u faznoj ravni. Interakcija talasa dešava se u tačkama (x_i, t_i) , $i \geq 1$. Centralna linija delta talasa na slici 7.2 kreće iz tačke (X, T) i eksplicitno se može izračunati iz sistema (6.18).



Slika 7.2: $x-t$ ravan, slučaj A, primer 7.3.1, $U_0 = (\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $U_2 = (\rho_2, u_2) = (1.14286, 0.7)$.

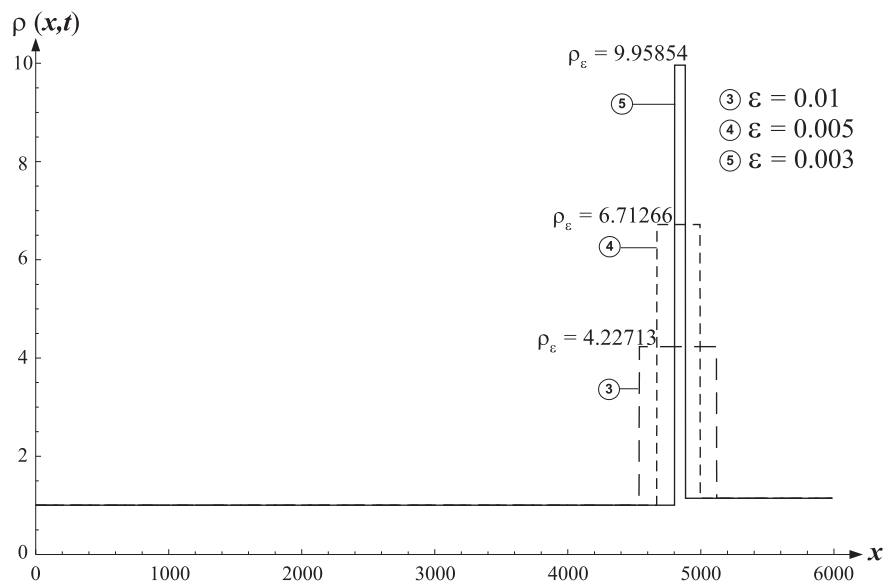


Slika 7.3: Brzina delta udarnog talasa formiranog nakon interakcije dva delta talasa, slučaj A, primer 7.3.1.



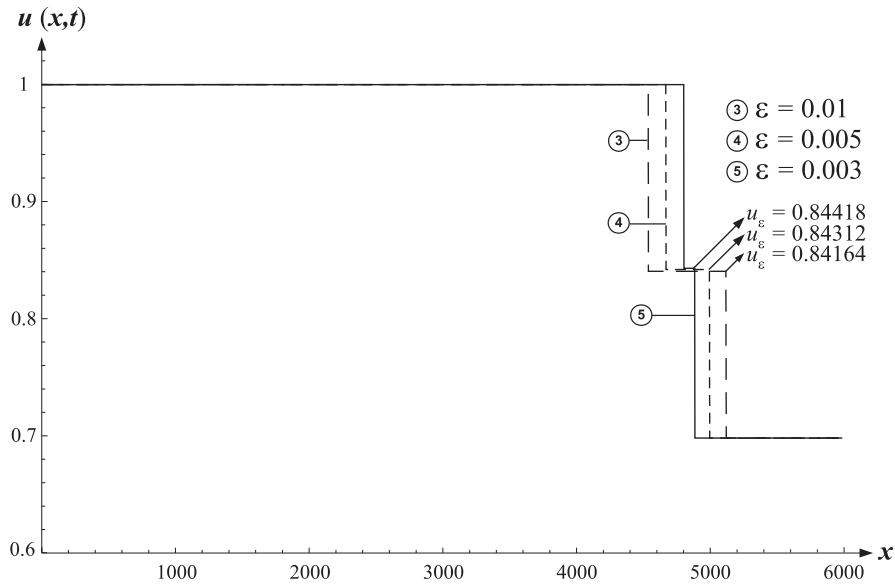
Slika 7.4: Brzine prvog levog S_1 i poslednjeg desnog S_2 talasa za izabrano ε , slucaj A, primer 7.3.1.

Na slikama 7.5 i 7.6, data su rešenja Rimanovog problema (7.1, 7.12) za različito ε u $t = 5735$.



Slika 7.5: Prva komponenta $\rho(x, t)$ rešenja problema (7.1, 7.12) za različito ε u $t = 5735$, slucaj A, primer 7.3.1.

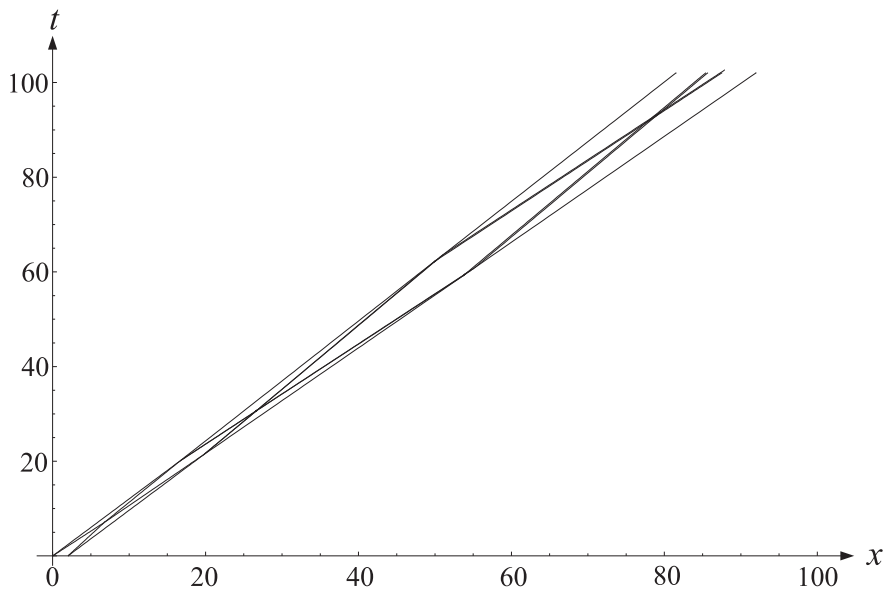
Primer 7.3.2 ([12]) Početni uslovi su isti kao i primeru 7.3.1, ali sada za fiksirano $\varepsilon = 0.01$ rešavamo Rimanov problem (7.1, 7.12) za različite snage $\hat{\delta}$ razređujućih talasa (tabela 7.3). Kao što se vidi u tabeli 7.3, manja snaga razređujućeg talasa implicira i manju grešku i povećanje vremena računanja. Slike 7.7 i 7.8 prikazuju $x - t$ ravan za $\hat{\delta} = 0.1$ i $\hat{\delta} = 0.01$, redom, gde je $0 \leq t \leq 100$.



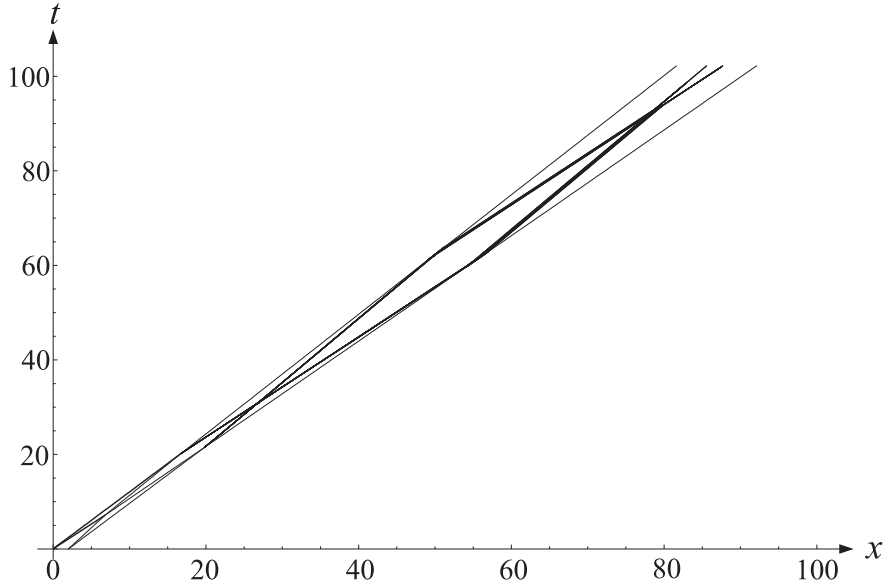
Slika 7.6: Druga komponenta $u(x, t)$ rešenja problema (7.1, 7.12) za različito ε u $t = 5735$, slučaj A, primer 7.3.1.

Tabela 7.3: Međustanja $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ nastala rešavanjem (7.1, 7.12) za $\varepsilon = 0.01$ i $n_g = 6$. Početni uslovi su $(\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $(\rho_1, u_1) = (1.2, 0.8)$ i $(\rho_2, u_2) = (1.14286, 0.7)$ za $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. c_1 je brzina prvog levog udarnog talasa S_1 , c_2 je brzina poslednjeg desnog udarnog talasa S_2 . $|Eq_1|$ i $|Eq_2|$ su leve strane integralne forme prve i druge jednačine u (7.1), redom. Nakon tačke $(x, t)_{kon}$, interakcije talasa prestaju.

$\hat{\delta}$	ρ_ε	u_ε	c_1	c_2	$ Eq_1 $	$ Eq_2 $	Vreme	$(x, t)_{kon}$
0.1	4.22713	0.841636	0.792563	0.894116	0.02266	0.04002	13 s	(5128, 5734)
0.05	4.22717	0.841634	0.792562	0.894115	0.00961	0.00786	25 s	(5123, 5729)
0.01	4.22716	0.841635	0.792562	0.894115	0.00352	0.00638	$\approx 96 h$	(5119, 5725)



Slika 7.7: $x - t$ ravan za primer 7.3.2 za $\hat{\delta} = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$ i $0 \leq t \leq 100$.

Slika 7.8: $x - t$ ravan za primer 7.3.2 za $\hat{\delta} = 0.01$, $\varepsilon = 0.01$ i $0 \leq t \leq 100$.

7.3.2 Slučaj B

Sada se bira ρ_2 tako da SDW ima promenljivu brzinu (centralna SDW linija je sada kriva).

Primer 7.3.3 Posmatramo (7.1, 7.12) za $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $(\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $(\rho_1, u_1) = (0.8, 0.9)$ i $(\rho_2, u_2) = (0.9, 0.7)$. Za tako date početne uslove, dva SDW će biti u interakciji u tački $(X, T) = (12.236, 12.843)$. Nakon interakcije, centralna linija kreće iz tačke (X, T) gde je

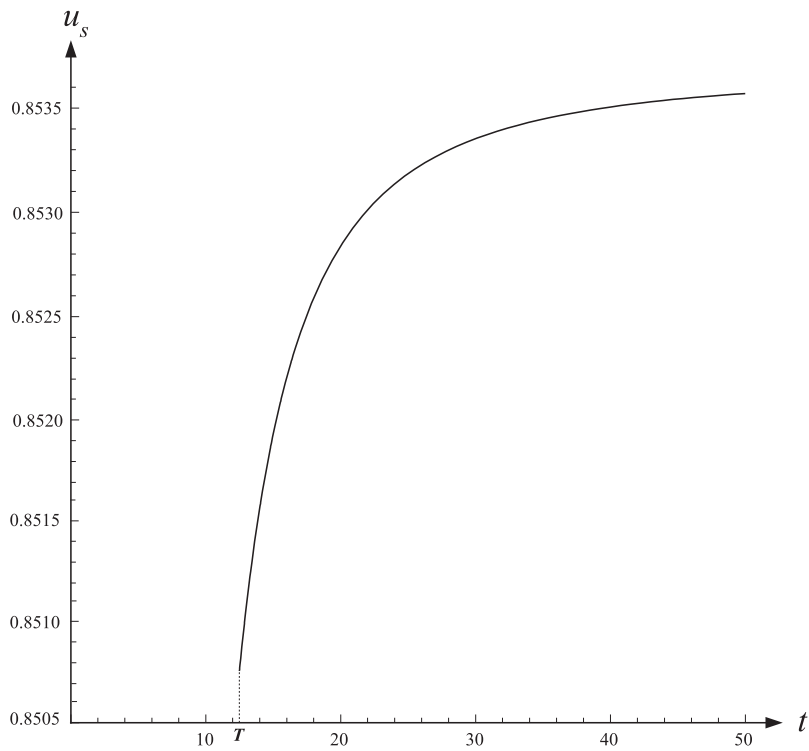
$$x(t) = \int_T^t u_s(p) dp + X, \quad t \geq T.$$

Ovde $u_s(t)$ (slike 7.9 i 7.10) predstavlja drugu komponentu rešenja $(\xi(t), u_s(t))$ sistema (6.37) sa početnim uslovom (6.38). Primitimo da je $u_s(t)$ rastuća funkcija, jer iz $\rho_0 > \rho_2$, $A_1 = 0.85393$ i $u_s(T) = 0.85081$ sledi $u_2 < u_s(T) < A_1$. Vrednosti za $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ date su u tabeli 7.4 za različito ε kada $\varepsilon \rightarrow 0$. I u ovom slučaju je uzeto $\hat{\delta} = \sqrt{\varepsilon}$ i $n_g = 6$. Slika 7.11 prikazuje $x - t$ ravan nakon interakcije dva SDW.

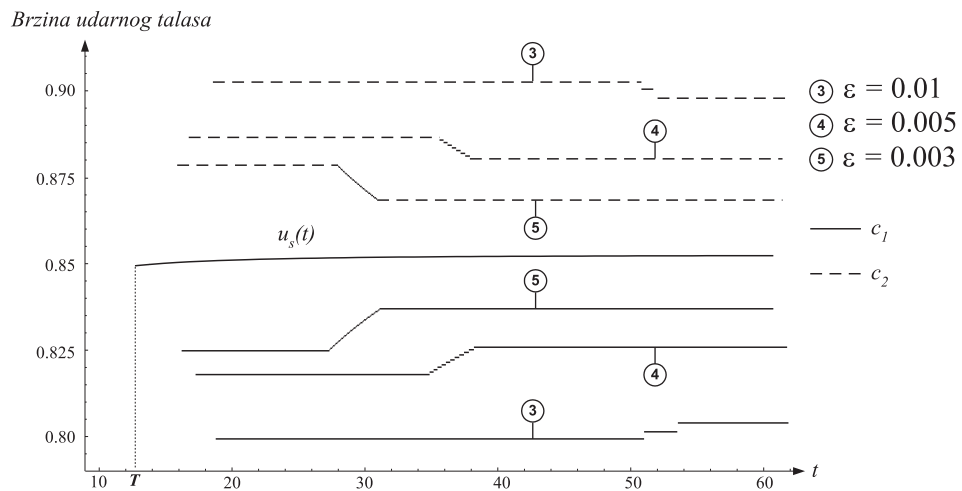
Tabela 7.4: Međustanja $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ nastala rešavanjem (7.1, 7.12) za različito ε , $\hat{\delta} = \sqrt{\varepsilon}$ i $n_g = 6$. Početni uslovi su $(\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $(\rho_1, u_1) = (0.8, 0.9)$ i $(\rho_2, u_2) = (0.9, 0.7)$ za $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. c_1 je brzina prvog levog udarnog talasa S_1 , c_2 je brzina poslednjeg desnog udarnog talasa S_2 . $|Eq_1|$ i $|Eq_2|$ su leve strane integralne forme prve i druge jednačine u (7.1), redom. Nakon tačke $(x, t)_{kon}$, interakcije talasa prestaju.

ε	ρ_ε	u_ε	c_1	c_2	$ Eq_1 $	$ Eq_2 $	Vreme	$(x, t)_{kon}$
0.1	1.16619	0.88675	0.20530	1.51813	0.00003	0.00001	1.1 s	(66344, 73898)
0.05	1.50419	0.86712	0.60356	1.11606	0.00022	0.00011	2.9 s	(54106, 89643)
0.01	3.75743	0.85660	0.80459	0.90592	0.00954	0.00229	4.1 s	(4131, 4558)
0.005	5.96392	0.85544	0.82632	0.88307	0.00179	0.01107	988 s	(998, 1129)
0.003	8.66370	0.85341	0.83808	0.86341	0.01523	0.03012	≈ 142 h	(425, 874)

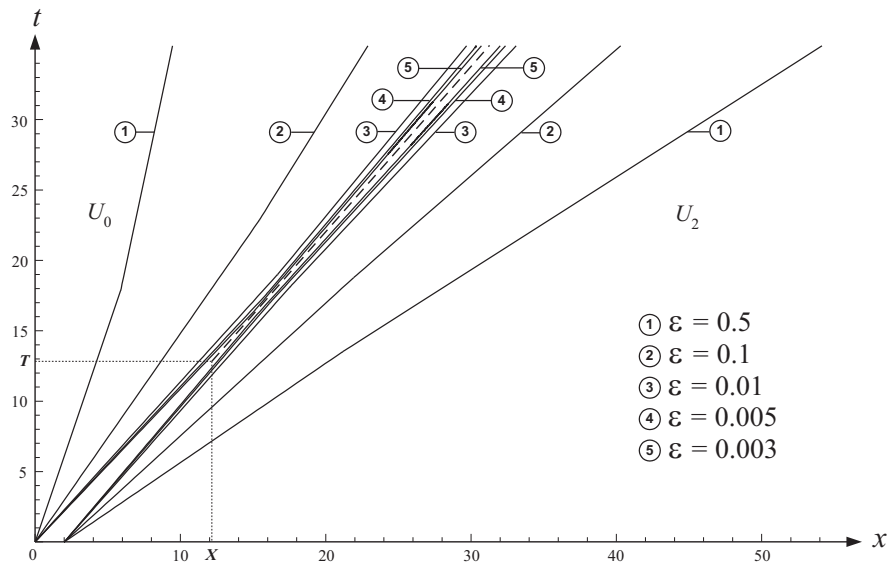
Na slikama 7.12 i 7.13, data su rešenja Rimanovog problema (7.1, 7.12) za različito ε u $t = 4560$.



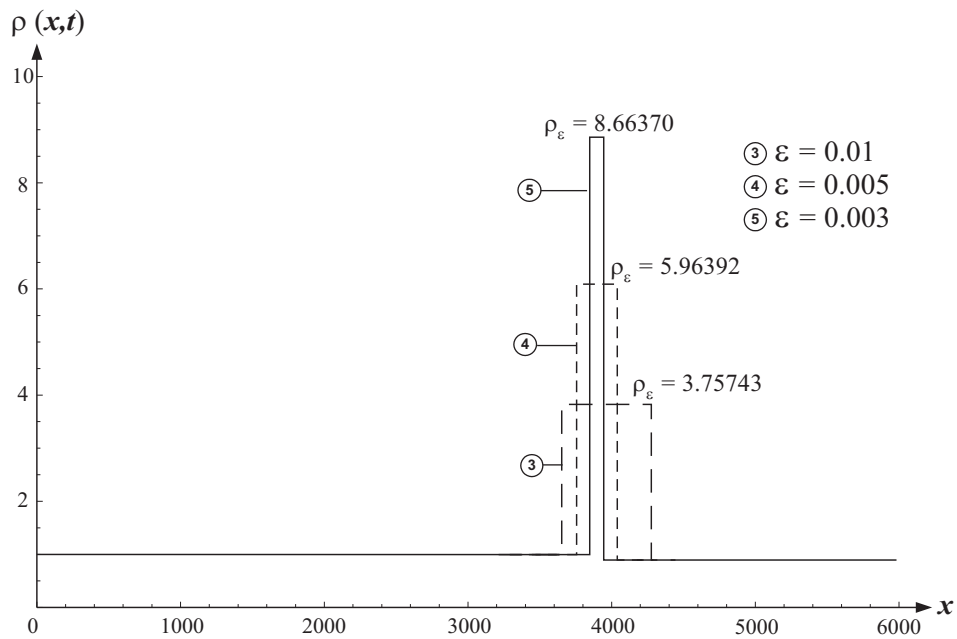
Slika 7.9: Brzina delta udarnog talasa formiranog nakon interakcije dva delta talasa, slučaj B, primer 7.3.3.



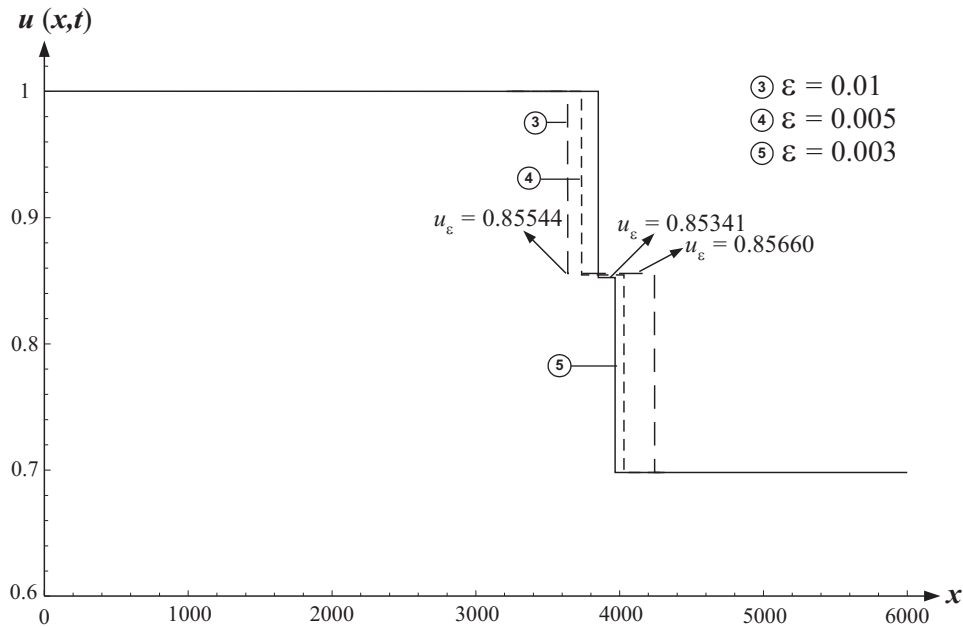
Slika 7.10: Brzine prvog levog S_1 i poslednjeg desnog S_2 talasa za izabrano ε , slučaj B, primer 7.3.3.



Slika 7.11: Fazna $x - t$ ravan, slučaj B, primer 7.3.3, $U_0 = (\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $U_2 = (\rho_2, u_2) = (0.9, 0.7)$.



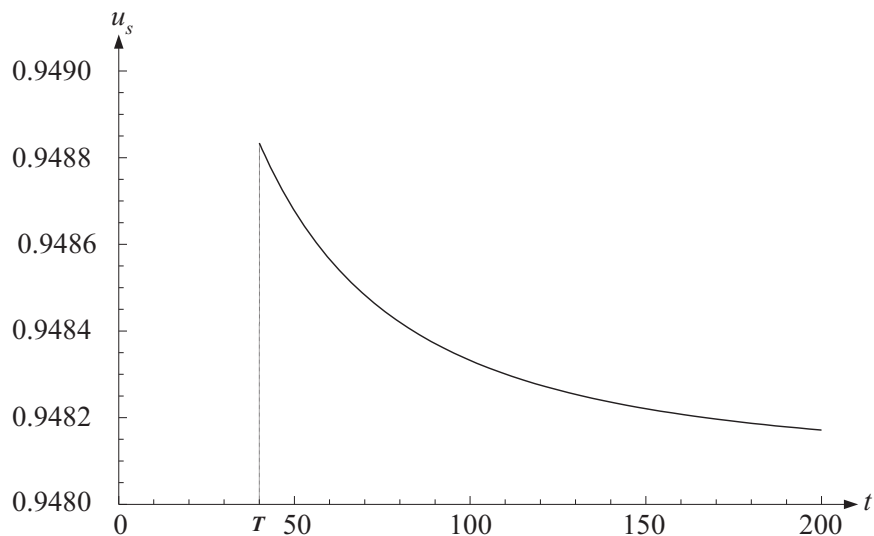
Slika 7.12: Rešenje $\rho(x, t)$ za izabrano ε u $t = 4560$, slučaj B, primer 7.3.3.

Slika 7.13: Rešenje $u(x, t)$ za izabrano ε u $t = 4560$, slučaj B, primer 7.3.3.

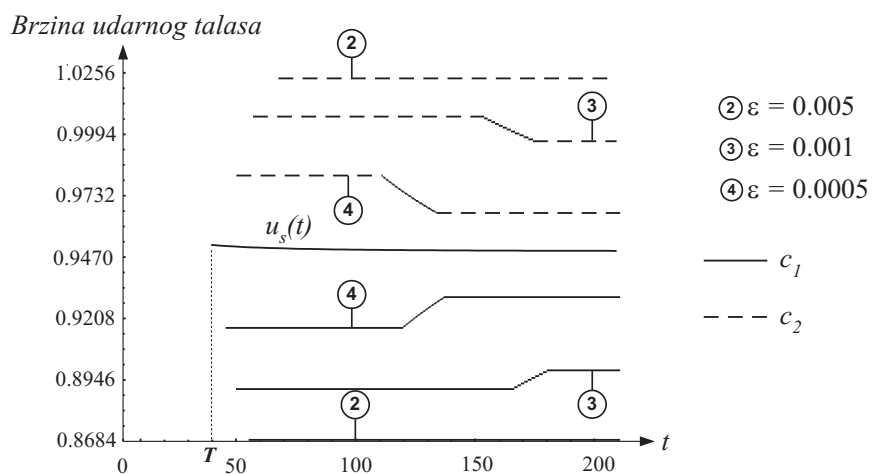
Primer 7.3.4 ([12]) Posmatramo (7.1, 7.12) za $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $(\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $(\rho_1, u_1) = (1.05, 0.95)$ i $(\rho_2, u_2) = (1.1, 0.9)$. Sada će u tački $(X, T) = (38.999, 40.011)$ doći do interakcije dva SDW. Nakon interakcije, $u_s(t)$ je opadajuća funkcija (slike 7.14 i 7.15), jer iz $\rho_2 > \rho_0$, $A_2 = 0.94881$ i $u_s(T) = 0.94911$ sledi $A_2 < u_s(T) < u_0$. Vrednosti za $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ su date u tabeli 7.5 za različito ε kada $\varepsilon \rightarrow 0$. U ovom slučaju je uzeto $\hat{\delta} = \sqrt{\varepsilon}$ i $n_g = 6$.

Tabela 7.5: Međustanja $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ nastala rešavanjem (7.1, 7.12) za različito ε , $\hat{\delta} = \sqrt{\varepsilon}$ i $n_g = 6$. Početni uslovi su $(\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $(\rho_1, u_1) = (1.05, 0.95)$ i $(\rho_2, u_2) = (1.1, 0.9)$ za $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. c_1 je brzina prvog levog udarnog talasa S_1 , c_2 je brzina poslednjeg desnog udarnog talasa S_2 . $|Eq_1|$ i $|Eq_2|$ su leve strane integralne forme prve i druge jednačine u (7.1), redom. Nakon tačke $(x, t)_{kon}$, interakcije talasa prestaju.

ε	ρ_ε	u_ε	c_1	c_2	$ Eq_1 $	$ Eq_2 $	Vreme	$(x, t)_{kon}$
0.01	1.71761	0.94508	0.86856	1.02538	0.00019	0.00022	0.75 s	(63244, 66947)
0.005	2.09421	0.94642	0.89746	0.99779	0.00054	0.00062	1 s	(82682, 82865)
0.001	4.46693	0.94808	0.93310	0.96379	0.00580	0.00059	1446 s	(11491, 11921)
0.0005	7.17653	0.94824	0.94016	0.95723	0.06592	0.00631	$\approx 10h$	(8956, 4356)



Slika 7.14: Brzina delta udarnog talasa formiranog nakon interakcije dva delta talasa, slučaj B, primer 7.3.4.



Slika 7.15: Brzine prvog levog S_1 i poslednjeg desnog S_2 talasa za izabrano ε , slučaj B, primer 7.3.4.

Primer 7.3.5 ([12]) U ovom primeru su isti početni uslovi kao i u primeru 7.3.4, ali sada ćemo da ispitamo uticaj generacijskog reda talasa na rešenje. Očekujemo da povećanjem n_g dobijemo preciznije rešenje (to znači da će se aproksimativno Rimanovo rešenje kasnije primeniti - tabela 7.6).

Tabela 7.6: Međustanja $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ nastala rešavanjem (7.1, 7.12) za $\varepsilon = 0.001$, $\hat{\delta} = \sqrt{\varepsilon}$ za različito n_g . Početni uslovi su $(\rho_0, u_0) = (1, 1)$, $(\rho_1, u_1) = (1.05, 0.95)$ i $(\rho_2, u_2) = (1.1, 0.9)$ za $a_1 = 0$, $a_2 = 2$. c_1 je brzina prvog levog udarnog talasa S_1 , c_2 je brzina poslednjeg desnog udarnog talasa S_2 . $|Eq_1|$ i $|Eq_2|$ su leve strane integralne forme prve i druge jednačine u (7.1), redom. Nakon tačke $(x, t)_{kon}$, interakcije talasa prestaju.

n_g	ρ_ε	u_ε	c_1	c_2	$ Eq_1 $	$ Eq_2 $	Vreme	$(x, t)_{kon}$
4	4.46393	0.948112	0.93312	0.96382	0.04409	0.00952	2358 s	(1387, 1438)
5	4.46730	0.948076	0.93310	0.96378	0.00427	0.01371	1075 s	(3933, 4080)
6	4.46693	0.948079	0.93310	0.96379	0.00580	0.00059	1446 s	(11491, 11921)
7	4.46698	0.948082	0.93310	0.96379	0.00006	0.00222	1405 s	(32610, 33835)
8	4.46697	0.948081	0.93310	0.96379	0.00115	0.00049	1733 s	(95286, 98865)

Iz datih numeričkih primera sa može zaključiti da se gustina u dobijenim rešenjima povećava kao $1/\varepsilon$, dok brzina teži predviđenoj vrednosti kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Numerički rezultati pokazuju konzistenciju sa teorijskim rezultatima (u smislu SDW).

- dekompozicija po putanji, 159
- delta funkcija, 181
- distributivna jednakost, 180

- entropija, 21
- entropijske funkcije, 21

- fluks, 11
- fluks entropije, 21

- generacijski red, 85, 86, 160
- Glimova
 - diferencna šema, 45
 - funkcionela, 82, 207
- Glimova funkcionela, 57

- indeks putanje, 160
- izvod u pravcu, 25

- jednačina
 - Burgersova neviskozna, 12
 - izentropnog strujanja gasa, 13, 39, 105
 - Ojlerova, 13, 199
 - transportna, 12

- karakteristike, 12
- komponente
 - glavne, 184
 - sporedne, 184
- kriva
 - inverznog udarnog, 121
 - razređujuća, 23
 - udarnog talasa, 24, 108
- kvazilinearna forma, 12

- Laksovi entropijski uslovi, 23
- Lipšicov uslov regularnosti (LR), 22
- lokus
 - delta, 184
 - SDW, 184

- matrica
 - Hessian, 34
 - Jakobijeva, 12
- metod
 - iščezavajuće viskoznosti, 21
 - praćenja talasa, 64
- mrežna kriva, 55

- naslednik, 55
- neposredni naslednik, 55

- p-sistem, 13, 105
- polje karakteristika
 - linearno degenerisano, 25
 - zaista nelinearno, 25
- prag parametar, 71
- problem
 - Košijev, 11
 - Rimanov, 11
- putanja, 160

- rešenje
 - dopustivo, 185
 - samoslično, 26
- RH deficit, 66, 185
- Rimanove invarijante, 28
- Rimanovo rešenje
 - aproksimativno, 68
 - tačno, 69

- SDW, 179
 - centralna linija, 180
 - konstantni, 179, 180
 - nadkompresibilan, 194
 - obični, 179, 180, 183, 212
 - podizači, 180
 - težinski, 179
- sistem
 - strogo hiperboličan, 12, 18
- slabo rešenje, 12

snaga

- segmenta putanje, 160
- talasa, 50, 175

talas

- centralni razređujući, 26, 33
- delta udarni, 184
- kontaktni, 27
- nadkompresibilan, 185
- nefizički, 68
- periferni, 56
- prilazeći, 50, 147, 207
- razređujući, 15, 31
- udarni, 14, 35
 - neentropijski, 27
- unutrašni, 56

uslov

- Rankine-Hugoniot (RH), 15, 20

zakon održanja, 11

- [1] F. Asakura, Wave-front tracking method for the equations of isentropic gas dynamics, *Quart. Appl. Math.* **1** (2005), 20–33.
- [2] S. Bianchini, A. Bressan, Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems, *Annals of Math.* **161** (2005), 223–342.
- [3] A. Bressan, Global solutions of systems of conservation laws by wave-front tracking, *J. Math. Anal. Appl.* **170** (1992), 414–432.
- [4] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One-Dimensional Cauchy Problem*, Oxford University Press, New York (2000).
- [5] F. Bloom, *Mathematical problems of Classical Nonlinear Electromagnetic Theory*, Harlow, Longman (1993).
- [6] G.Q. Chen and H. Liu, Formation of delta-shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of solutions to the isentropic Euler equations, *SIAM J. Math. Anal.* **34** (2003), 925–938.
- [7] T. Chang and H. Ling, *The Riemann problem and Interaction of Waves in Gas Dynamics*, Harlow, Longman (1989).
- [8] R. Courant and K. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer Verlag, New York (1976).
- [9] C.M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer (2000).
- [10] C.M. Dafermos, Polygonal approximation of solutions of the initial value problem for a conservation law, *J. Math. Anal. Appl.* **38** (1972), 33–41.
- [11] C.M. Dafermos and E. Feireisl, *Handbook of Differential Equations*, Elsevier, North Holland (2004).
- [12] N. Dedović and M. Nedeljkov, Delta Shocks Interactions and Wave Front Tracking Method, *J. Math. Anal. Appl.* **403** (2013), 580–598.
- [13] R.J. DiPerna, Global existence of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, *J. Diff. Eqs.* **20** (1976), 187–212.
- [14] J. Glimm, The interaction of nonlinear hyperbolic waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 569–590.

- [15] A. Harten, On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy, *J. Comput. Phys.* **49** (1983), 151–164.
- [16] A. Harten, P.D. Lax, C.D. Levermore and W.L. Morokoff, Convex entropies and hyperbolicity for general Euler equations, *SIAM J. Num. Anal.* **35** (1998), 2117–2127.
- [17] H. Holden and N.H. Risebro, *Front Tracking Method for Hyperbolic Conservation Laws*, Springer–Verlag New York, Inc. (2002).
- [18] F. Huang, Weak solution to pressureless type system, *Comm. Part. Diff. Eqs.* **30** (2005), 283–304.
- [19] A. Jeffrey, *Quasilinear Hyperbolic Systems and Waves*, London, Pitman (1976).
- [20] E. Jouguet, Sur la propagation des discontinuités dans les fluides, *C. R. Acad. Sci. Paris* **132** (1901), 673–676.
- [21] B.L. Keyfitz and H.C. Kranzer, Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions, *J. Diff. Eqs.* **118** (1995), 420–451.
- [22] P.D. Lax, Hyperbolic system of conservation laws II, *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), 537–566.
- [23] P.D. Lax, *Shocks waves and Entropy. Contributions to Functional Analysis*, ed. E.A. Zangwill, New York, Academic Press, (1971).
- [24] R.J. LeVeque, *Finite Difference Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge, Cambridge University Press (2002).
- [25] R.J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhaeuser Verlag, Basel (1990).
- [26] J. Li, T. Zhang and S. Yang, *The Two-Dimensional Riemann Problem in Gas Dynamics*, Harlow, Longman (1998).
- [27] D. Mitrović and M. Nedeljkov, Delta shock waves as a limit of shock waves, *J. Hyperbolic Differ. Equ.* **4** (2007), 1–25.
- [28] M. Nedeljkov, Delta and singular delta locus for one dimensional systems of conservation laws, *Math. Meth. Appl. Sci.* **27** (2004), 931–955.
- [29] M. Nedeljkov, Shadow waves – entropies and interactions for delta and singular shocks, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **197**(2) (2010), 489–537..
- [30] T. Nishida, *Global Solution for an Initial Boundary Value Problem of a Quasilinear Hyperbolic System*, Proc. Japan Acad., **44** (1968).
- [31] T. Nishida and J.A. Smoller, Solutions in the Large for Some Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws, *Comm. Pure Appl. Math.* **26** (1973), 183–200.
- [32] B. Riemann, Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, *Göttingen Abh. Math. Cl.* **8** (1860), 43–65.
- [33] N.H. Risebro, A front-tracking alternative to the random choice method, *Proc. Amer. Math. Soc.* **117** (1993), 1125–1139.
- [34] T.C. Sideris, Formation of singularities in three dimensional compressible fluids, *Comm. Math. Phys.* **101** (1985), 475–485.
- [35] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations*, Springer–Verlag, New York (1983).

-
- [36] B. Stanković i S. Pilipović, Teorija distribucija, Prirodno-matematički fakultet, Institut za matematiku, Novi Sad (1983).
- [37] G.G. Stokes, On a difficulty in the theory of sound, *Philos. Magazine*, Ser. 3, **33** (1848), 349–356.
- [38] D.C. Tan, T. Zhang and Y.X. Zheng, Delta shocks waves as limits of vanishing viscosity for hyperbolic systems of conservation laws, *J. Diff. Eqs.* **112** (1994), 1–32.
- [39] E. Weinan, Yu.G. Rykov, Ya.G. Sinai, Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of consevation laws arising in adhesion particle dynamics, *Comm. Math. Phys.* **177** (1996), 349–380.
- [40] H. Yang, Riemann problems for a class of coupled hyperbolic systems of conservation laws, *J. Differential Equations* **159** (1999), 447–484.
- [41] Ya. B. Zeldovich, Gravitational instability: An approximate theory for large density perturbations, *Astron. Astrophys.* **5** (1970), 84–89.

Kratka biografija



Nebojša M. Dedović rođen je 27. juna 1972. godine u Novom Sadu, Srbija. Prvu godinu studija upisuje 1991. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, odsek Matematika, obrazovani profil Diplomirani matematičar. Diplomira 1996. godine sa prosečnom ocenom 8,63. Magistarske studije upisuje na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu 1996. godine iz oblasti Numerička matematika. Od oktobra 1996. godine angažovan je na Departmanu za poljoprivrednu tehniku na Poljoprivrednom fakultetu u Novom Sadu za izvođenje vežbi iz sledećih predmeta: Matematika, Finansijska matematika, Primenjena matematika, Matematika i statistika. Položio je sve ispite sa poslediplomskih studija sa prosečnom ocenom 9,50. Nastavno-naučno veće Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu 16. januara 2003. godine prihvata temu magistarske teze pod naslovom: "Numerička verifikacija singularnih udarnih talasa kod zakona održanja" koja je odbranjena 16. januara 2004. godine. Izabran je u zvanje asistenta 30. juna 2004. godine na Poljoprivrednom fakultetu u Novom Sadu. Nastavno-naučno veće Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu 26. marta 2009. godine prihvata temu doktorske disertacije pod naslovom "Delta udarni talasi i metod praćenja talasa". Koautor je 9 radova sa SCI liste i 2 zbirke zadataka iz matematike za studente Poljoprivrednog fakulteta. Engleski jezik govori, čita i piše.

U Novom Sadu, 28. oktobar 2013. godine

Nebojša Dedović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Doktorska teza

VR

Autor: Nebojša Dedović

AU

Mentor: Prof. dr Marko Nedeljkov

MN

Naslov rada: Delta udarni talasi i metod praćenja talasa

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2013

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Trg
Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: 7 glava, 227 stranica, 41 literalnih citata, 6 tabela, 103 slike

FO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: PhD thesis

CC

Author: Nebojša Dedović, MSc

AU

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD

MN

Title: Delta shock waves and wave front tracking method

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian, English

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2013

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: 7 chapters, 227 pages, 41 references, 6 tables, 103 figures

PD

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Analiza

ND

Ključne reči: zakoni održanja, Rimanov problem, delta udarni talasi, metod praćenja talasa, interakcije, težinski talasi

PO

UDK: 519.677:517.95:517.956.3(043.3)

Čuva se: Biblioteka Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U doktorskoj disertaciji posmatrani su Rimanovi problemi kod strogo i slabo hiperboličnih nelinearnih sistema PDJ. U uvodu je predstavljena jednačina zakona održanja u jednoj prostornoj dimenziji i definisani su Košijevi i Rimanovi problemi. U drugoj glavi, date su osnovne osobine nelinearnih hiperboličnih zakona održanja, uvedeni su pojmovi stroge hiperboličnosti i slabog rešenja zakona održanja. Definisani su Rankin-Igono i entropijski uslovi kao i opšte rešenje Rimanovog problema (za dovoljno male početne uslove). U trećoj glavi detaljno je objašnjena Glimova diferencna šema. Metod praćenja talasa predstavljen je u četvrtoj glavi. Pokazano je da se ovom metodom, za dovoljno male početne uslove, dobija stabilno i jedinstveno rešenje koje u svakom vremenu ima ograničenu totalnu varijaciju. U petoj glavi, posmatrana je jednačina protoka izentropnog gasa u Lagranžovim koordinatama. Uz pretpostavku da je početni uslov ograničen i da ima ograničenu totalnu varijaciju, pokazano je da Košijev problem ima jedinstveno slabo rešenje ako je totalna varijacija početnog uslova pomnožena sa $0 < \varepsilon \ll 1$ dovoljno mala. Slabo rešenje dobijeno je metodom praćenja talasa. U glavi šest ispitana je interakcija dva delta talasa koji su posmatrani kao specijalna vrsta *shadow* talasa. U glavi sedam, pokazano je da za proizvoljno velike početne uslove, rešenje Rimanovog problema jednodimenzionalnog Ojlerovog zakona održanja gasne dinamike postoji, da je jedinstveno i entropijski dopustivo, uz drugačiju ocenu snaga elementarnih talasa. Data je numerička verifikacija interakcije dva delta talasa korišćenjem metode praćenja talasa.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 26.3.2009.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: prof. dr Stevan Pilipović, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu

Mentor: prof. dr Marko Nedeljkov, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu

Član: prof. dr Nataša Krejić, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu

Član: prof. dr Srboljub Simić, redovni profesor FTN-a u Novom Sadu

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Analysis

Key words: conservation laws, Riemann problem, delta shock waves, wave front tracking, interactions, weighted shadow waves

Holding data:

HD Note:

Abstract: In this doctoral thesis, Riemann problems for strictly and weakly nonlinear hyperbolic PDE systems were observed. In the introduction, conservation laws in one spatial dimension were presented and the Cauchy and Riemann problems were defined. In the second chapter, the basic properties of nonlinear hyperbolic conservation laws were introduced, as well as the terms such as strictly hyperbolic system and weak solution of conservation law. Also, Rankine-Hugoniot and entropy conditions were introduced and the general solution to the Riemann problem (for sufficiently small initial conditions) were defined. Glimm's difference scheme was explained in the third chapter. The wave front tracking method was introduced in the fourth chapter. It was shown that, using this method, for sufficiently small initial conditions, it could be obtained a unique solution with bounded total variation for $t \geq 0$. In the fifth chapter, the Euler equations for isentropic fluid in Lagrangian coordinates were observed. Under the assumption that the initial condition was bounded and had bounded total variation, it was shown that the Cauchy problem had a weak unique solution, provided that the total variation of initial condition multiplied by $0 < \varepsilon \ll 1$ was sufficiently small. Weak solution was obtained by applying the wave front tracking method. In the sixth chapter, the interaction of two delta shock waves were examined. Delta shock waves were regarded as special kind of *shadow* waves. In the chapter seven, it was shown that for arbitrarily large initial conditions, solution to the Riemann problem of one-dimensional Euler conservation laws of gas dynamics existed, it was unique and admissible. New bounds on the strength of elementary waves in the wave front tracking algorithm were given. The numerical verification of two delta shock waves interaction via wave front tracking method was given at the end of the thesis.

AB

Accepted by the Scientific Board on: March 26, 2009

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: Stevan Pilipović, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Mentor: Marko Nedeljkov, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Nataša Krejić, PhD, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Srboľjub Simin, PhD, full professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad