UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

PETROVIĆ VOJISLAV

NEKI PRILOZI TEORIJI TURNIRA

- DISERTACIJA -

NOVI SAD, 1987.

S A D R Ž A J

0. UVOD

Problemi koji su inicirali, a potom podsticali, razvoj teorije turnira potiču iz različitih oblasti. Sam naziv turniri dolazi od individualnih ili ekipnih sportskih takmičenja u kojima svaki takmičar ili ekipa igra meč sa svakim od preostalih učesnika i pri tome nema nerešenih mečeva. Digraf čiji čvorovi predstavljaju učesnike takmičenja, a čije su grane orijentisane od pobednika ka pobedjenom - predstavlja jedan turnir. Struktura turnira se takodje sreće u sociometrijskim i nekim biološkim istraživanjima kao i u metodi uporedjivanja po parovima. U poslednjem je medju više različitih objekata potrebno odrediti optimalni, pri čemu se za svaki par objekata jednom od njih daje prednost. Najzad, turniri čine jednu važnu klasu grafova - kompletni orijentisani grafovi.

Mada je prvi rad iz teorije turnira, teorema Rédei-a o Hamiltonovim putevima, publikovan 1934. godine, pravi procvat teorija dostiže u periodu od 1960. godine do današnjih dana. Doprinosom velikog broja poznatih graf-teoretičara kao što su B.Alspach, L.Beineke, G.Chartrand, P. Erdös, B.Grünbaum, F.Harary, J.W.Moon, L.Moser, K.B.Reid, M.Rosenfeld, V.Sós, C.Thomassen i drugi, teorija turnira se razvila u više različitih pravaca.

U ovom radu koji se sastoji od tri odeljka, razmatraju se različiti problemi vezani za turnire.

Prvi odeljak sadrži osnovne pojmove i definicije. Osnovne oznake i termini uzeti su iz monografija [20] i [31], dok je sve ostalo što se koristi u radu dato u tom odeljku.

Drugi odeljak je posvećen neizbežnim podgrafovima turnira i sastoji se iz dva dela. U prvom delu se daje rešenje hipoteze V.Sós u vezi digrafova H(n,i) koji predstavljaju uopštenje Hamiltonovih bypass-a. Takodje se ispituje "neizbežnost" digrafova C(n,i) i $C_k + P_\ell$ u jako povezanim turnirima. Drugi deo se odnosi na poznatu hipotezu B.Grünbaum-a o alternativnim Hamiltonovim konturama. Dobija se znatno poboljšanje rezultata C.Thomassen-a i M.Rosenfeld-a, čime su od pomenute hipoteze, kao otvoreni, ostala samo tri slučaja.

U trećem odeljku se turniri ispituju sa stanovišta izlaznih stepena - skorova njegovih čvorova. U prvom delu razmatra se hipoteza K.B.Reid-a u vezi skor-skupa običnog turnira. Dobijeno je više rezultata koji idu u prilog hipotezi. Ista problematika je ispitivana i za slučaj bipartitnih turnira. Drugi deo se odnosi na skupove frekvencija skorova bipartitnih i 3-partitnih turnira. Daje se kompletno rešenje problema egzistencije bipartitnog, odnosno 3-partirnog turnira sa unapred zadatim skupom frekvencija skorova kao i minimalan broj čvorova koji takav turnir može da ima.

Za izradu ovog rada posebnu zahvalnost dugujem mentoru dr Ratku Tošiću na svesrdnoj pomoći.

Takodje se zahvaljujem akademiku D.Cvetkoviću i dr C.Thomassen-u na nizu korisnih primedbi i sugestija.

Najzad, zahvaljujem se Marčićev Merimi koja se pobrinula za tahničku obradu.

Petrović Vojislav

1. OSNOVNI POJMOVI I DEFINICIJE

U daljem tekstu ćemo se držati navedenih pojmova i oznaka. Sve ostalo što nije ovim obuhvaćeno isto je kao u [20] i [31].

Digraf D je par (V(D), E(D)) gde je V(D) konačan skup elemenata koji se zovu *čvorovi* i E(D) skup uredjenih parova čvorova (u,v) koji se zovu *grane*. Skup E(D) je *irefleksivan* ako $(u,u) \notin E(D)$ za svako $u \in V(D)$. Skup E(D) je *antisimetričan* ako iz $(u,v) \in E(D)$ sledi $(v,u) \notin E(D)$. Digraf čiji je skup grana irefleksivan i antisimetričan zove se *orijentisan graf*.

Digraf D je *kompletan* ako za svaka dva čvora $u,v \in V(D)$ bar jedna od grana (u,v) i (v,u) je element E(D). D je k-*partitni digraf* ako je $V(D) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$ pri čemu je $V_i \cap V_j = \phi$ $(i \neq j)$ i ako $(u,v) \in E(D)$ povlači $u \in V_i$ i $v \in V_j$ za neke i i j $(i \neq j)$. Skupove V_i zovemo *klasama*.

k-*partitni turnir* je kompletan k-partitni orijentisan graf. Za 2-partitni turnir se takodje koristi termin *bipartni turnir*. *Običan turnir* ili kratko *turnir* sa n čvorova je n-partitni turnir čije su sve klase jednočlani skupovi. k-partitni turnir ćemo označiti sa $T(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ gde su $V_1, V_2, \ldots, V_k$ klase, tj. $V(T) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_k$. Običan turnir sa n čvorova obeležavaćemo sa T_n.

Za granu $(u,v) \in E(D)$ kažemo da je *incidentna* sa čvorovima u i v. Takodje kažemo da izlazi iz čvora u, odnosno ulazi u čvor v, da čvor u *dominira* čvor v, odnosno da je čvor v *dominiran* čvorom u. Tu činjenicu ćemo označiti sa $u \to v$. Ako su A i B dva disjunktna skupa čvorova takva da svaki čvor iz A dominira svaki čvor iz B, to ćemo označavati sa $A\to B$ ili $B\leftarrow A$. Broj grana digrafa D koje izlaze iz čvora u V(D) zove se *izlazni stepen* ili *skor* čvora i obeležava $d_D^+(u)$. (Skraćena oznaka $d^+(u)$ se koristi kada je jasno o kojem je digrafu reč.) Broj grana koje ulaze u čvor $u\in V(D)$ je *ulazni stepen* koji se obeležava sa $d_D^-(u)$, odnosni $d^-(u)$. D je k-*diregularan* digraf ako je $d_D^+(u)=d_D^-(u)=k$ za svako $u\in V(D)$.

Ako je D digraf i $A\subset V(D)$ tada sa D-A označavamo digraf čiji je skup čvorova $V(D)-A$, a čiji skup grana čini skup E(D) iz kojeg su odstranjene sve grane incidentne sa nekim od čvorova iz A. Umesto $D-\{u\}$ koristićemo oznaku D-u. D(A) je *indukovani podgraf* digrafa D, tj. digraf čiji skup čvorova A, a čiji je skup grana $E(D)-A\times A$.

Orijentisan put $P_n=v_1\to v_2\to\dots\to v_n$ je digraf kod kojeg je $V(P_n)=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ i $E(P_n)=\{(v_i,v_{i+1})\}|1\leqslant i\leqslant \leqslant n-1\}$. P_n zovemo $(v_1\to v_n)$-put. *Orijentisana kontura* $C_n=v_1\to \to v_2\to\dots\to v_n\to v_1$ je digraf kod kojeg je $V(C_n)=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ i $E(C_n)=\{v_i,v_{i+1}\}|1\leqslant i\leqslant n,\ n+1\equiv 1\}$. Pod *dužinom* orijentisanog puta (konture) podrazumevamo broj grana koje put (kontura) sadrži.

Hamiltonov put (kontura) digrafa D je orijentisan put (kontura) koji sadrži sve čvorove iz D.

Digraf D je *jako povezan* ako za svaka dva čvora u,v ' V(D) postoji orijentisan $(u\to v)$-put u D. D je k-*jako povezan* ako je digraf D-A jako povezan za svako $A\subset V(D)$, $|A|<k$.

Digrafovi D_1 i D_2 su *izomorfni*, što označavamo sa $D_1\simeq D_2$, ako postoji bijekcija $\varphi:V(D_1)\to V(D_2)$ koja očuvava dominaciju tj. $\varphi(u)\to\varphi(v)$ u D_2 ako i samo ako $u\to v$ u D_1.

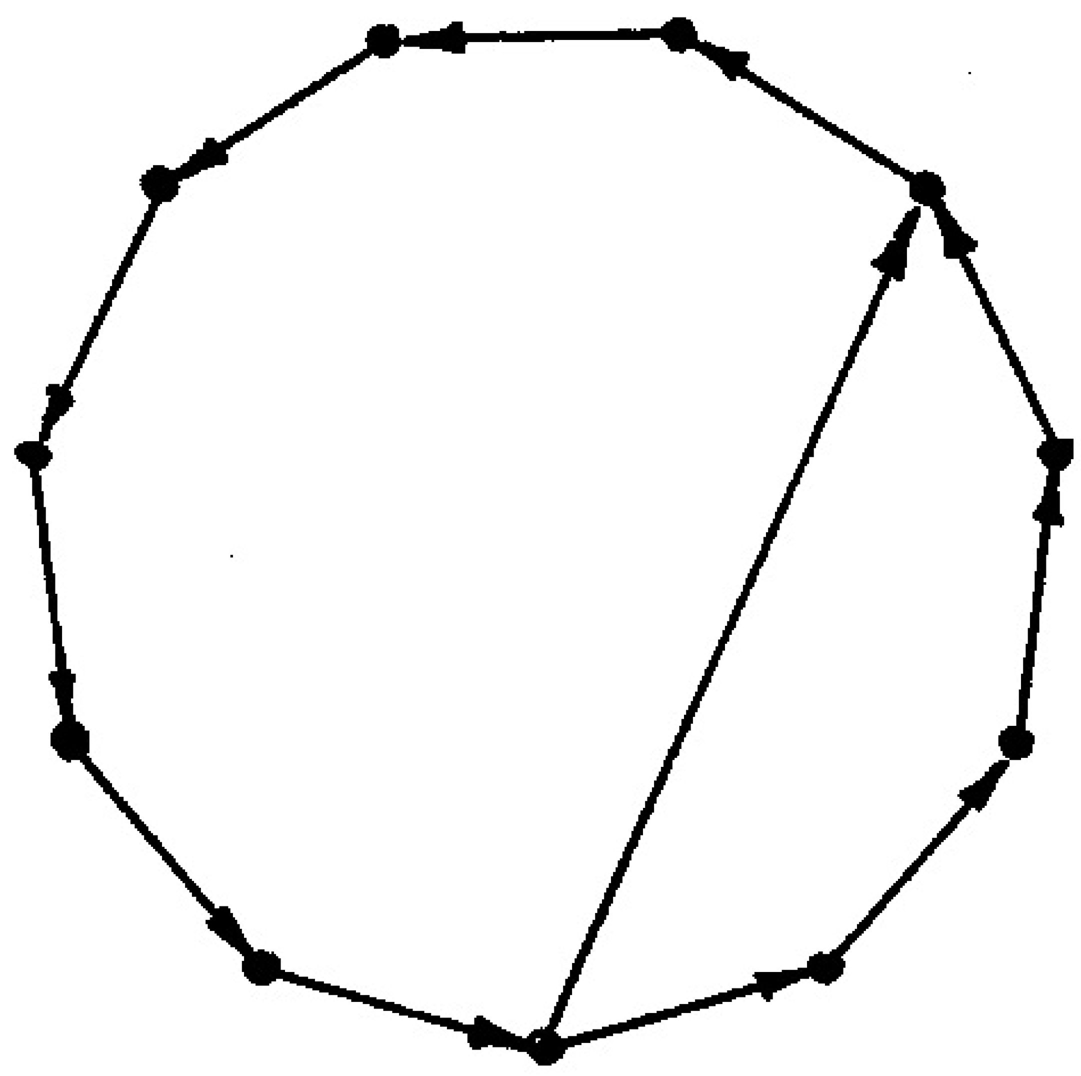
Dalje dajemo oznake i nazive za specijalne digrafove koji se u radu pojavljuju. H(n,i) je put dužine n-1 sa dodatnom granom iz prvog u i-ti čvor, $3\leqslant i\leqslant n$ (sl.1a). H(n,i) se zove *Hamiltonov bajpas.* (sl.1b). C(n,i) je kontura dužine n sa dodatnom granom iz prvog u i-ti čvor $3\leqslant i\leqslant n-1$, računajući u smeru konture (sl.2).

H(6,6) (a)

H(6,6) (b)

Sl. 1

C(11,5) :



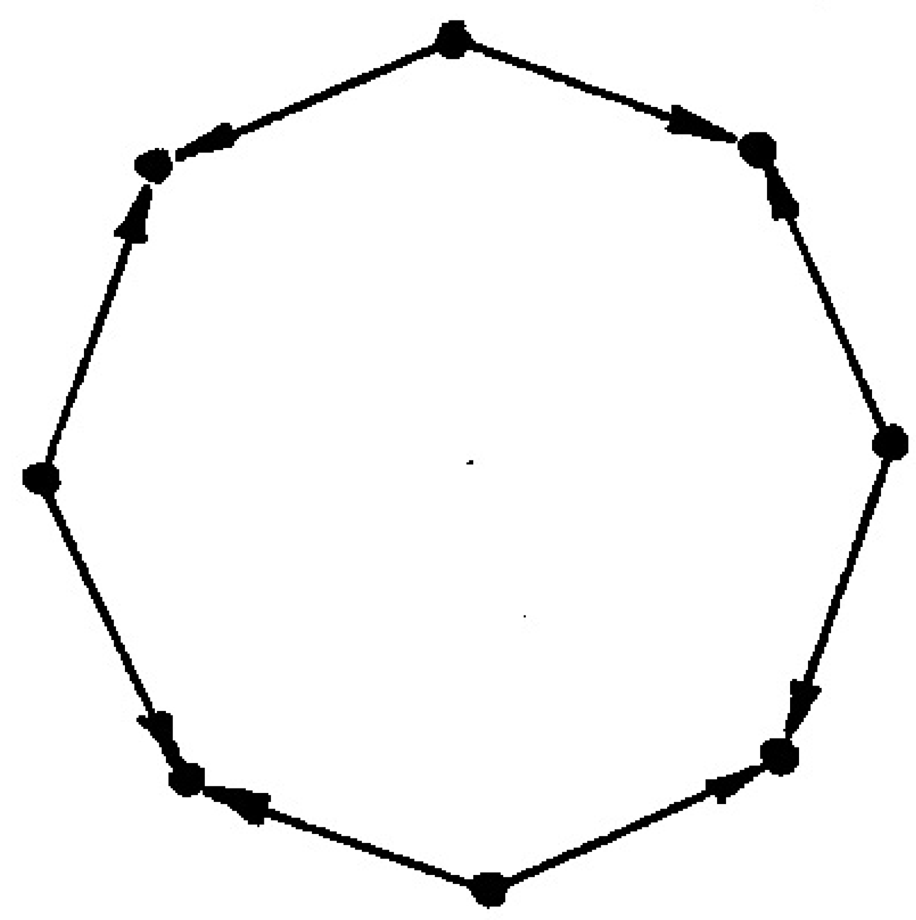
Sl. 2

Alternativni put (AP) dužine k je put od k grana čije su svake dve susedne grane (koje su incidentne sa istim čvorom) suprotno orijentisane. Na sl. 3. je prikazan AP dužine 5. *Alternativni Hamiltonov put* (AHP) digrafa D je AP

Sl. 3

koji sadrži sve čvorove iz D.

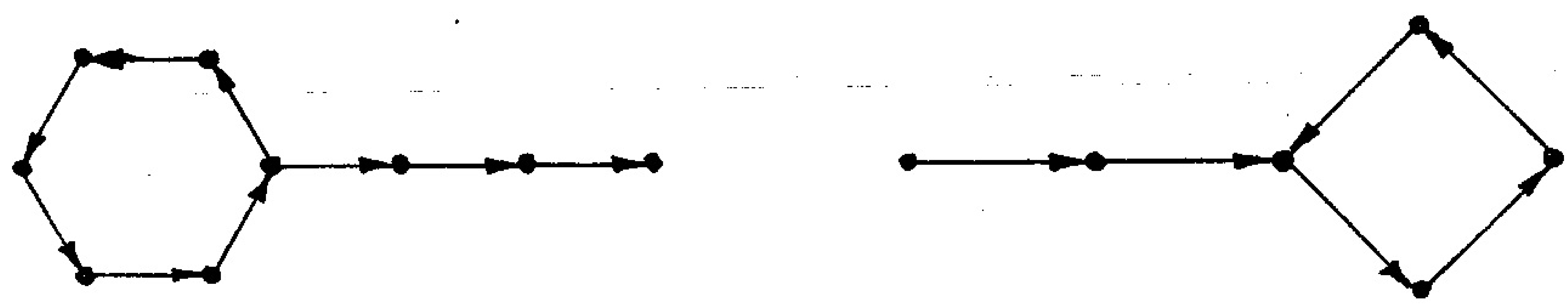
Alternativna kontura AK dužine 2k je kontura dužine 2k čije su svake dve susedne grane suprotno orijentisane (Sl.4 ; 2k = 8).



Sl.4

Alternativna Hamiltonova kontura AHK digrafa D definiše se slično kao AHP.

Digraf $C_k + P_\ell$ se sastoji od orijentisane konture $C_k = v_1 \to v_2 \to \dots \to v_k \to v_1$ i orijentisanog puta $P_\ell = u_1 \to u_2 \to \dots \to u_\ell$ pri čemu je $u_1 \equiv v_i$ za neko $i \in \{1,2,\dots,k\}$ i $u_p \neq v_q$ za $p > 1$. $P_\ell + C_k$ se definiše analogno. Na slikama 5(a) i 5(b) prikazani su $C_6 + P_4$ i $P_3 + C_4$, respektivno.



$C_6 + P_4$

(a)

$P_3 + C_4$

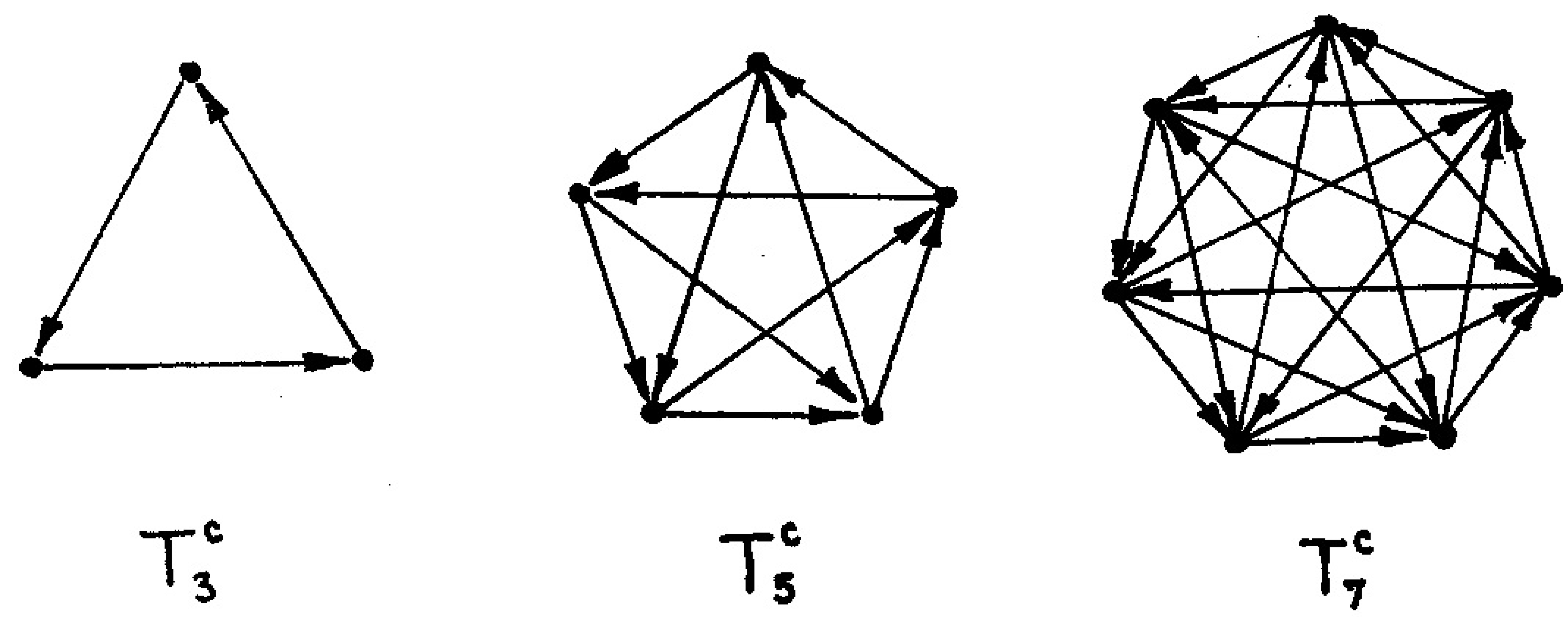
(b)

Sl. 5

Neka je $P_n = u_1 \to u_2 \to \ldots \to u_n$ orijentisan put i $v \notin V(P_n)$. Ako postoji $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ tako da $u_i \to v$ i $v \to u_{i+1}$ kažemo da se čvor v može *interpolirati* (*ubaciti*) u put P_n. Analogno se definiše interpolacija u konturu.

TT_n označava *tranzitivan turnir* sa u čvorova. AT_n je *skoro tranzitivan turnir*; dobija se iz TT_n promenom orijentacije grane koja vodi iz čvora sa skorom $n-1$ u čvor skorom 0.

T_3^c, T_5^c i T_7^c su diregularni turniri prikazani na Sl. 6.



Sl. 6

Ako je $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow T_k$ dekompozicija turnira T_n na jako povezane ili trivijalne (jednočlane) komponente, pri čemu $T_i \Rightarrow T_j$ za $i < j$, tada se komponenta T_1 zove *inicijalna* ili *početna*, a komponenta T_k *terminalna* ili *krajnja*.

2. NEIZBEŽNI PODGRAFOVI

Problematika koja se razmatra u ovom odeljku odnosi se na takozvane neizbežne podgrafove turnira, tj. digrafove koji se u odredjenom smislu pojavljuju u svakom turniru. Pojam neizbežnog podgrafa pojavljuje se praktično u prvoj teoremi teorije turnira.

TEOREMA 2.1. *(Redei) [41]) Svaki turnir sadrži Hamiltonov put.*

Naime, navedena teorema tvrdi da je Hamiltonov put neizbežan podgraf svakog turnira.

Pre negó što predjemo na dalja razmatranja daćemo preciznu definiciju neizbežnog podgrafa turnira.

DEFINICIJA 21.1. *Digraf* D *je* n*-neizbežan ako svaki turnir sa* n *čvorova sadrži podgraf izomorfan sa* D .

DEFINICIJA 2.2. *Digraf* D *je* k *jako* n*-neizbežan ako svaki* k *jako povezan turnir sadrži podgraf izomorfan sa* D.

U duhu poslednje definicije iz tvrdjenja

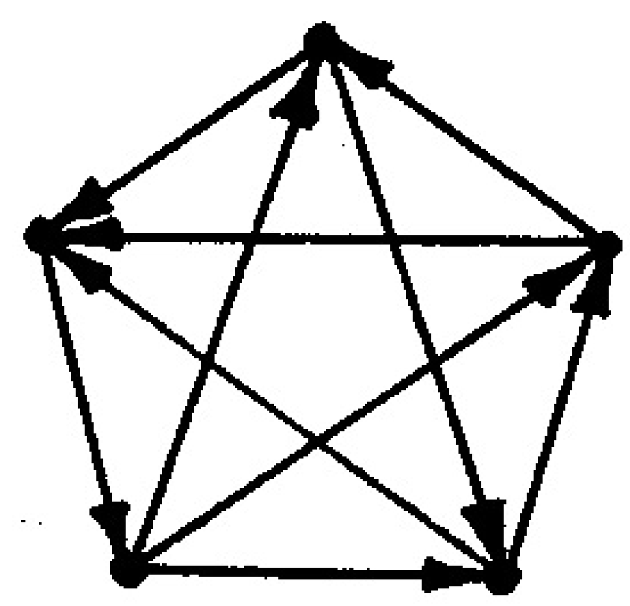
TEOREMA 2.2. *(Camion [11]) Turnir sadrži Hamiltonovu konturu ako i samo ako je jako povezan.*

Sledi da je Hamiltonova kontura jako n neizbežan podgraf za svako n $(n \geqslant 3)$.

2.1. DIGRAFOVI H(n,i), C(n,i) i $C_n + P_\ell$

Jedno prirodno uopštenje Hamiltonove konture je Hamiltonov bajpas - HB, čija je definicija data u uvodnom delu. Svaki Hamiltonov put turnira se produžuje ili u Hamiltonovu konturu ili u Hamiltonov bajpas. To očigledno zavisi od orijentacije grane koja povezuje prvi i poslednji čvor toga puta. HB, za razliku od Hamiltonove konture, nije n-neizbežan za svako n $(n \geq 3)$. Naime, postoje dva turnira koji ne sadrže HB. O tome je reč u sledećoj teoremi koju je formulisao B.Grünbaum, a čiji je jedan jednostavan dokaz ovde prezentiran. Drugi dokaz istog tvrdjenja kao i ostali srodni problemi mogu se naći u [2] i [50].

TEOREMA 2.3. *(Grünbaum [19], str. 216) Svaki turnir koji nije izomorfan ni sa* T_3^c, *ni sa* T_5^* *(Sl.7) sadrži* HB.



Sl. 7

DOKAZ: ([33]). Neka je T_n proizvoljan turnir sa n $(n \geq 3)$ čvorova. Ako T_n nije jako povezan, tada na osnovu teoreme 2.1. ima Hamiltonov put koji se, na osnovu teoreme 2.2., produžava u Hamiltonov bajpas.

Stoga možemo da se ograničimo na jako povezane turnire. Sa tri čvora postoje samo dva neizomorfna turnira. To su T_3^c, koji spada u zabranjene i TT_3 koji je slabo povezan. Tako možemo da se ograničimo na jako povezane turnire sa $n \geq 4$ čvorova.

Neka je v čvor jako povezanog turnira T_n $(n \geq 4)$ takav da je indukovan podturnir $T_n - v$ takodje jako povezan. (Takav čvor uvek postoji. Videti na primer [32], str.6 ili [20].) Neka je

$$C_{n-1} = v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{n-1} \to v_1$$

jedna Hamiltonova kontura u $T_n - v$. Ukoliko postoje dva čvora v_i i v_{i+1}, $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$ (sabiranje je po modulu n-1) takva da $v \to \{v_i, v_{i+1}\}$ ili $v \leftarrow \{v_i, v_{i+1}\}$, tada u $T_n - v$ imamo HB. Zaista, u prvom slučaju je to

$$v \to v_{i+1} \to v_{i+2} \to \dots \to v_i \ ,$$

a u drugom

$$v_{i+1} \to v_{i+2} \to \dots \to v_i \to v \ .$$

Sada ćemo razmatrati dva slučaja s obzirom na parnost n.

(a) $n-1 = 2k+1$, $(k \geq 1)$. Tada očigledno postoje dva čvora v_i i v_{i+1} na konturi C_{n-1} takvi da ili $v \leftarrow \{v_i, v_{i+1}\}$ ili $v \to \{v_i, v_{i+1}\}$. Na osnovu prethodnog zapažanja to garantuje egzistenciju HB-a u T_n.

(b) $n-1 = 2k$, $(k \geq 2)$. Pretpostavimo da T_n ne sadrži HB i pokažimo da to vodi kontradikciji.

Na osnovu prethodno rečenog i pretpostavke ne postoje dva susedna čvora v_i i v_{i+1} na konturi C_{n-1}, takva da $v \to \{v_i, v_{i+1}\}$ ili $v \leftarrow \{v_i, v_{i+1}\}$. Bez uticaja na opštost možemo uzeti da

$$\begin{aligned} & v \to \{v_1, v_2, v_5, \dots, v_{2k-1}\} \\ & v \leftarrow \{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2k}\} \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Za $n-1 = 2k = 4$ lako se verifikuje da je $T_5 \cong T_5^*$, što spada u tvrdjenje teoreme, pa stoga uzimamo da je $n \geq 7$, tj. $n-1 = 2k \geq 6$.

Pretpostavimo sada da

$$v_3 \to v_1 .$$

To implicira

$$\{v_4, v_5, \dots, v_{2k-1}\} \to v_1 \ . \tag{2}$$

Zaista, ukoliko bi čvor v_1 dominirao nekim od čvorova $v_4, v_5, \ldots, v_{2k-1}$, tada uočimo onaj sa najmanjim indeksom. Neka je to v_i, $i \in \{4,5,\ldots,2k-1\}$. Dakle, $v_{i-1} \to v_1$ i $v_1 \to v_i$. No tada u T_n imamo HB

$$v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_{i-1} \to v_1 \to v_{i+1} \to \ldots \to v_{2k-1} \to v_{2k} \to v$$

jer $v_2 \to v$ na osnovu (1). Prema tome, (2) važi.

Dalje

$$v_{2k} \to v_{2k-2} \tag{3}$$

zbog eventualnog HB-a

$$v_{2k-1} \to v_1 \to v_2 \to v \to v_3 \to \ldots \to v_{2k-2} \to v_{2k}$$

koji bi u protivnom egzistirao. Kombinujući (1), (2) i (3) dobijamo ipak HB

$$v_{2k} \to v \to v_{2k-1} \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{2k-2}$$

iz čega sledi da v_3 ne može da dominira v_1, tj. da

$$v_1 \to v_3 .$$

Zbog simetrije konture C_{n-1} zaključujemo da

$$v_i \to v_{i+2} \tag{4}$$

za svako $i \in \{1,3,5,\ldots,2k-1\}$. To pak povlači

$$v_{j+2} \to v_j \tag{5}$$

za svako $j \in \{2,4,6,\ldots,2k\}$. Stvarno, ako $v_j \to v_{j+2}$ za neko $j \in \{2,4,\ldots,2k\}$ tada u T_n imamo, na osnovu (1) i (4), HB

$$v_{j+1} \to v_{j+3} \to v_{j+4} \to v \to v_{j+5} \to \ldots \to v_j \to v_{j+2} .$$

Ali sada iz (1), (4) i (5) sledi egzistencija HB-a.

$$v_2 \to v \to v_1 \to v_3 \to v_4 \to \ldots \to v_{2k-1} \to v_{2k} .$$

Dobijena kontradikcija dokazuje teoremu.

Uopštenja pojma Hamiltonovog bajpasa kao i problemi povezani tim tretirani su u radovima [2], [6], [7], [22], [50].

Hamiltonov bajpas je očigledno bogatiji granama od Hamiltonovog puta, no još uvek je n-neizbežan za skoro svako $n \geq 3$. Digrafovi $H(n,i)$ - orijentisani putevi dužine $n-1$ sa dodatnom granom iz prvog u i-ti čvor $(3 \leq i \leq n)$, predstavljaju prirodno uopštenje Hamiltonovog bajpasa. $H(n,n)$ je zapravo HB.

Na VI Jugoslovenskom seminaru iz teorije grafova V.Sos je postavila sledeću hipotezu.

HIPOTEZA 2.1. *(V.Sós) Digraf* $H(n,i)$ *je* n-*neizbežan za svako* n $(n \geq 5)$ *i svako* i $(4 \leq i \leq n-1)$.

Sledeća teorema sadrži kompletan odgovor na pomenutu hipotezu.

TEOREMA 2.4. *([38], [39]) Digraf* $H(n,i)$ *je* n-*neizbežan za svako* n $(n \geq 3)$ *i svako* i $(3 \leq i \leq n)$ *izuzev u slučajevima:*

(a) $i = n,\ n = 3$ *ili* 5 *i* $T_3 \simeq T_3^c\ ,\ T_5 \simeq T_5^*$

(b) $i = 3$ *i* $T_n \simeq T_3 \Rightarrow T_{n-3}$

(c) $i = 5$ *i* $T_n \simeq T_5 \Rightarrow T_{n-5}$.

Pre nego što pristupimo dokazu teoreme dokazaćemo najpre dve leme.

LEMA 2.1. *([39]) Ako turnir* T_n $(n \geq 4)$ *ima Hamiltonov put* $v_n \to v_{n-1} \to \dots \to v_1$ *pri čemu grane* $(v_i, v_{i+3}) \in E(T_n)$ *za svako* $i \in \{1,2,\dots,n-3\}$, *tada* T_n *ima Hamiltonov put sa početkom u čvoru* v_2.

DOKAZ. Pokažimo, indukcijom po n, da je turnir T_n jako povezan. Za $n = 4$ imamo, na osnovu uslova leme, Hamiltonovu konturu $v_1 \to v_4 \to v_3 \to v_2 \to v_1$. Pretpostavimo da je T_k jako povezan za svako $k < n$ i posmatrajno T_n. Podturnir $T(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ zadovoljava uslove leme, pa je po induktivnoj pretpostavci jako povezan. Neka je

$$C_{n-1} = w_1 \to w_2 \to \dots \to w_{n-1} \to w_1$$

jedna njegova Hamiltonova kontura (teorema 2.1.), gde je $\{w_1,w_2,\dots,w_{n-1}\}=\{v_1,v_2,\dots,v_{n-1}\}$. Kako $v_n \to v_{n-1}$ i $v_n \leftarrow v_{n-3}$ čvor v_n se može interpolirati u konturu C_{n-1}, produkujući Hamiltonovu konturu u T_n. Svaki čvor te konture, pa prema tome i v_2, je početak jednog Hamiltonovog puta u T_n, čime je dokaz leme završen.

<u>LEMA 2.2.</u> *([39]) Ako turnir* T_n $(n \geqslant 4)$ *ima Hamiltonov put* $v_n \to v_{n-1} \to \dots \to v_1$ *pri čemu* $(v_i,v_{i+2}) \in E(T_n)$ *za svako* $i \in \{1,2,\dots,n-2\}$ *i* $(v_i,v_{i+3}) \in E(T_n)$ *za svako* $i \in \{1,2,\dots,n-3\}$, *tada* T_n *ima Hamiltonov put koji počinje u čvoru* v_1, *a završava se u čvoru* v_n.

<u>DOKAZ.</u> Indukcijom po n. Verifikujmo najpre slučajeve $n=4,5,6$. Za $n=4$ imamo, shodno uslovima leme, Hamiltonov put $v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_4$. Za $n=5$ to je $v_1 \to v_4 \to v_3 \to v_2 \to v_5$, dok za $n=6$ imamo $v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_5 \to v_4 \to v_6$.

Neka je sada $n \geqslant 7$. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za svaki turnir T_k, $(k<n)$ koji zadovoljava uslove leme i posmatrajmo T_n. Prema indukcijskoj pretpostavci podturnir $T_n - \{v_1,v_2,v_3\}$ ima Hamiltonov put $P_{n-3} = v_4 \to \dots \to v_n$. Povezujući P_{n-3} sa putem $v_1 \to v_3 \to v_2$ iz $T(v_1,v_2,v_3)$ dobijamo traženi Hamiltonov put

$$v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_4 \to \dots \to v_n$$

u T_n.

Sada možemo da damo

<u>DOKAZ.</u> Teoreme 2.4. Da u slučajevima (a),(b) i (c) turnir T_n ne sadrži $H(n,i)$ sledi direktno iz teoreme 2.3. Ostaje da se pokaže da je u svim ostalim slučajevima digraf $H(n,i)$ n-neizbezan za $3 \leqslant i \leqslant n-1$. (Slučaj $H(n,n)$ je dat u teoremi 3.1.).

Zapazimo, prvo, da je dovoljno posmatrati samo jako povezane turnire. Zaista, ako turnir T_n nije jako povezan tada se na jedinstven način može dekomponovati na jako povezane ili trivijalne komponente $T_{i_1}, T_{i_2},\dots,T_{i_k}$ $(k \leqslant n)$ pri čemu

$T_{i_j} \to T_{i_\ell}$ kad god je $j < \ell$. Hamiltonov put u T_n dobija se nadovezivanjem Hamiltonovih puteva podturnira $T_{i_1}, T_{i_2}, \dots, T_{i_k}$, redom. Ako je $|V(T_{i_1})| < i$ tvrdjenje teoreme direktno sledi s obzirom da $T_{i_1} \to (T_n - T_{i_1})$. Ako je pak $|V(T_{i_1})| \geq i$ tada je egzistencija $H(n,i)$ u T_n ekvivalentna egzistenciji $H(|V(T_{i_1})|, i)$ u jako povezanom podturniru T_1.

Stoga uzimamo da je T_n jako povezan turnir čiji je skup čvorova $V(T_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, a čija je jedna Hamiltonova kontura

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n \to v_1. \tag{6}$$

Pokažimo najpre da T_n $(n > 3)$ sadrži $H(n,3)$. U tu svrhu uočimo čvor $v_i \in V(T_n)$ takav da je podturnir $T_n - v_i$ jako povezan. (S obzirom da je T_n jako povezan, on sadrži konture svih dužina od 3 do n ([32]), tj. takav čvor v_i uvek postoji). Neka je $C_{n-1} = w_1 \to w_2 \to \dots \to w_{n-1} \to w_1$, gde je $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\} = \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$, Hamiltonova kontura u $T_n - v_i$. Kako je $d^+_{T_n}(v_i) > 0$ i $d^-_{T_n}(v_i) > 0$ (u protivnom T_n ne bi bio jako povezan) to se čvor v_i može interpolirati u konturu C_{n-1}. Naime, postoje čvorovi w_k i w_{k+1}, $w_k, w_{k+1} \in V(C_{n-1})$ takvi da $w_k \to v_i$ i $v_i \to w_{k+1}$. No to daje $H(n,3)$

$$w_k \to v_i \to w_{k+1} \to w_{k+2} \to \dots \to w_{k-1}$$

u T_n, s obzirom da $w_k \to w_{k+1}$.

U daljem pretpostavljamo da je $4 \leq i \leq n-1$, da postoji jako povezan turnir T_n koji ne sadrži $H(n,i)$, a nije nijedan od "zabranjenih" tipova (a), (b) i (c), i pokazujemo da to vodi kontradikciji.

Iz (6) i ove pretpostavke sledi da

$$v_j \to v_{j-i+1} \tag{7}$$

za svako $j \in \{1, 2, \dots, n\}$; inače bi u protivnom imali $H(n,i)$ - $\underline{v_{j-i+1}} \to v_{j-i+2} \to \dots \to \underline{v_j} \to v_{j+1} \to \dots \to v_{j-i}$. (Sva sumiranja su po modulu n).

Razlikovaćemo tri slučaja.

Slučaj 1. $i = (n+2)/2$. Stavljajući u (7) prvo $j=1$, a zatim $j=(n+2)/2$ dobijamo $v_1 \to v_{(n+2)/2}$ odnosno $v_{(n+2)/2} \to v_1$, što je očigledna kontradikcija.

Slučaj 2. $4 \leqslant i < (n+2)/2$. Uzmimo prvo da je $i \geqslant 5$. Stavljajući u (7) $j=i$ i $j=1$ dobijamo

$$v_i \to v_1$$

$$v_1 \to v_{n-i+2} .$$

To povlači

$$v_2 \to v_{n-1} \tag{8}$$

jer bi u protivnom imali $H(n,i)-\underline{v_1} \to v_{n-i+2} \to v_{n-i+3} \to \dots$ $\dots \to v_{n-1} \to \underline{v_2} \to \dots \to v_{i-1} \to \dots \to v_n \to \dots \to v_{n-i+1}$, gde je čvor v_n interpoliran u put $v_{i-1} \to v_i \to \dots \to v_{n-i+1}$. To je moguće jer $v_{i-1} \to v_n$ i $v_n \to v_{n-i+1}$ na osnovu (7). Zbog simetrije konture (6) na sličan način zaključujemo da $v_3 \to v_n$, $v_4 \to v_1, \dots$, tj. da

$$v_{j+3} \to v_j \tag{9}$$

za svako $j \in \{1,2,\dots,n\}$.

Pretpostavimo sada da

$$v_1 \to v_3 . \tag{10}$$

To implicira

$$v_2 \to v_i \tag{11}$$

zbog $H(n,i) - \underline{v_1} \to v_3 \to v_4 \to \dots \to v_i \to \underline{v_2} \to v_{n-1} \to \dots$ koji bi egzistirao u protivnom. Ovde je $v_{n-1} \to \dots$ Hamiltonov put u $T_n - \{v_1, v_2, \dots, v_i\}$ koji sledi iz leme 2.1. i činjenice da je $n-i \geqslant 4$. (11) dalje implicira

$$v_1 \leftarrow \{v_5, v_6, \dots, v_{i-1}\} \tag{12}$$

jer se u protivnom, ukoliko $v_1 \to v_k$ $(5 \leqslant k \leqslant i-1)$, čvor v_1 može interpolirati u put $v_4 \to v_5 \to \dots \to v_i$ ($v_4 \to v_1$ zbog (9)), što produkuje, na osnovu (11), H(n,i)

$$\underline{v_2} \to v_3 \to v_4 \to \ldots \to v_1 \to \ldots \to \underline{v_i} \to v_{i+1} \to \ldots \to v_n \,.$$

Dalje (12) i lema 2.1. povlače

$$v_2 \to v_n \tag{13}$$

zbog eventualnog H(n,i) $- \underline{v_n} \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_{i-1} \to \underline{v_1} \to v_{n-2} \to \ldots$, gde je sa $v_{n-1} \to \ldots$ označen Hamiltonov put turnira $T_n - \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_n\}$. Koristeći opet lemu 2.1. (9) i (13) zaključujemo da

$$v_n \to v_i \tag{14}$$

jer u protivnom imamo H(n,i) $- \underline{v_2} \to v_3 \to v_4 \to \ldots \to v_i \to \underline{v_n} \to v_1 \to \to v_{n-2} \to \ldots$, pri čemu je $v_{n-2} \to \ldots$ Hamiltonov put u $T_n - \{v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n\}$.

Najzad kombinujući (7), (9), (14) i lemu 1.1, dobijamo H(n,i) $- v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_{i-1} \to v_n \to v_i \to v_1 \to v_{n-2} \to \ldots$ ($v_{n-2} \to \ldots$ - Hamiltonov put u $T_n - \{v_1, v_2, \ldots, v_i, v_n\}$). To znači da (10) nije tačno tj. $v_3 \to v_1$. Zbog ranije pomenute simetrije sledi

$$v_{j+2} \to v_j \tag{15}$$

za svako $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Primenjujući sada (9) i (15) na lemu 2.2. i imajući u vidu da $v_1 \to v_{n-i+1}$ dobijamo H(n,i)

$$\underline{v_1} \to \ldots \to \underline{v_{n-i+2}} \to \ldots \to v_2 \tag{16}$$

gde su $v_1 \to \ldots \to v_{n-i+2}$ i $v_{n-i+2} \to \ldots \to v_2$ Hamiltonovi putevi u $T_n - \{v_2, v_3, \ldots, v_{n-i+1}\}$ i $T\,(v_2, v_3, \ldots, v_{n-i+2})$, respektivno. Time je prvi deo dokaza, za $i \geqslant 5$, završen.

Za $i = 4$ relacija (9) automatski važi. Ostale relacije su zadovoljene zbog istih argumenata.

Jedina razlika je relacija (13) koja važi, a razlog za to je potencijalni $H(n,i) - v_1 \to v_3 \to v_n \to v_2 \to v_4 \to \dots \to v_{n-1}$ gde $v_2 \to v_4$ zbog (11) $(i = 4)$. Tako opet dobijamo $H(n,i)$ iz (16).

Slučaj 3. $i > (n+2)/2$. Pretpostavimo prvo da

$$v_{n-1} \to v_2 \tag{17}$$

To implicira

$$v_n \Rightarrow \{v_2, v_3, \dots, v_{n-i}\} \tag{18}$$

zbog eventualnog $H(n,i) - v_1 \to v_{n-i+2} \to v_{n-i+3} \to \dots \to v_{n-1} \to v_2 \to \to \dots \to v_n \to \dots \to v_{n-i+1}$, gde je v_n interpoliran u put $v_2 \to \to v_3 \to \dots \to v_{n-i+1}$ ukoliko $v_n \to v_k$ za neko $k \in \{2, 3, \dots \dots, n-i\}$. (Uočimo da $v_n \to v_{n-i+1}$ zbog (7)). Prema tome (18) važi odakle sledi da $v_n \to v_3$. Ponavljajući isti postupak dobijamo da $v_1 \to \{v_3, v_4, \dots, v_{n-i+1}\}$ i da $v_2 \to \{v_4, v_5, \dots, v_{n-i+2}\}$, ..., tj. da

$$v_j \to \{v_{j+2}, v_{j+3}, \dots, v_{j+n-2}\} \tag{19}$$

za svako $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Medjutim, (19) povlači egzistenciju $H(n,i)$

$$\underline{v_1} \to v_{n-i+2} \overset{(19)}{\to} v_{n-i+4} \to v_{n-i+5} \to \dots \to v_n \overset{(18)}{\to} \underline{v_2} \to v_3 \to \dots \to v_{n-i+1} \overset{(19)}{\to} v_{n-i+3} \tag{20}$$

što opovrgava (17). Prema tome, $v_2 \to v_1$ i zbog simetrije

$$v_{j+3} \to v_j \tag{21}$$

za svako $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dalje imamo da

$$v_{j+i-2} \to v_j \tag{22}$$

za svako $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ jer u protivnom dobijamo $H(n,i)$ – $v_j \to v_{j+1} \to v_{j+2} \to \ldots \to v_{j-1} \to \ldots \to v_{j+n-i} \to v_{j+n-i+1} \to \ldots \to v_{j+i-2} \to \ldots \to v_{j-2}$. Napominjemo da je čvor v_{j-1} interpoliran u put $v_{j+2} \to v_{j+3} \to \ldots \to v_{j+n-i}$. To je moguće jer $v_{j+2} \to v_{j-1}$ zbog (21) i $v_{j-1} \to v_{j+n-i}$ zbog (7).

Razmotrićemo sada četiri podslučaja.

(a) $i \leqslant n-4$. Tada

$$v_{j+2} \to v_j \tag{23}$$

za svako $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Inače, na osnovu (21) i (22) imamo $H(n,i)$ – $v_j \to v_{j+2} \to v_{j+3} \to \ldots \to v_{j+n-1} \to v_{j+1} \to v_{j+2} \to \ldots$, gde je $v_{j+2} \to \ldots$ Hamiltonov put u $T_n - \{v_j, v_{j+1}, \ldots, v_{j+i-1}\}$ (lema 2.1. i činjenica da je $n-i \geqslant 4$). Medjutim, iz (7), (21), (23) i leme 2.1. sledi, kao u slučaju 2.1., $H(n,i)$ (16).

(b) $i = n-3$. Sada (23) ostaje u važnosti zbog eventualnog $H(n,i)$ – $v_1 \to v_{j+2} \to v_{j+3} \to \ldots \to \underline{v_{j+i}} \to v_{j+1} \to v_{j-2} \to v_{j+2}$. Ovde $v_j \to v_{j+i}$ i $v_{j+1} \to v_{j-2}$ slede iz (7) i uslova $i=n-3$. Tako, na isti način kao u (a), dobijamo $H(n,i)$ (16).

(c) $i = n-2$. Zamenjujući u (7) $j=n-1$ i uzimajući u obzir da je $i=n-2$ dobijamo $v_{k-1} \to v_2$ odakle se lako dobija $H(n,i)$ (20).

(d) $i = n-1$. Na osnovu (7) sledi

$$v_j \to v_{j+2}$$

za svako $j \in \{1,2,\ldots,n\}$. Otuda, s obzirom da je $i \geqslant 4$ i prema tome $n \geqslant 5$, imamo $H(n,n-1)$

$$\underline{v_1} \to v_3 \to v_5 \to v_6 \to \ldots \to v_{n-1} \to \underline{v_2} \to v_4 \quad .$$

Nalazeći u svim slučajevima $H(n,i)$ u T_n dobijamo kontradikciju sa pretpostavkom da uočeni turnir ne sadrži $H(n,i)$. Time je teorema u celini dokazana.

Kao što teorema 2.4. predstavlja proširenje tvrdjenja teoreme 2.1. i 2.3., tako i sledeća teorema 2.5. predstavlja, u izvesnom smislu, ekstenziju teoreme 2.2. Naime, pokazuje se da Hamiltonova kontura nije granama najbogatiji graf koji je neizbežan u jako povezanim turnirima.

TEOREMA 2.5. ([40]) *Digraf* $C(n,i)$ *je jako* n*-neizbežan za svako* n $(n \geq 4)$ *i svako* i $(3 \leq i \leq (n+2)/2)$.

DOKAZ. Indukcijom po i i n. Neka je i_o proizvoljan prirodan broj ≥ 3. Neka je $n_o = 2i_o - 2$. Obeležimo dalje sa T_{n_o} proizvoljan jako povezan turnir, a sa

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{n_o} \to v_1$$

jednu njegovu Hamiltonovu konturu. Pokažimo da T_{n_o} sadrži $C(n_o, i_o)$.

Zaista, ako $v_1 \to v_{i_o}$ $(i_o = (n+2)/2)$ tada imamo $C(n_o, i_o)$

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{i_o} \to v_{i_o+1} \to \dots \to v_{n_o} \to v_1 ,$$

a ako je $v_{i_o} \to v_1$ onda je

$$v_{i_o} \to v_{i_o+1} \to \dots \to v_{n_o} \to v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{i_o} \to v_{i_o}$$

$C(n_o, i_o)$ u T_{n_o}.

Pokažimo sada da svaki jako povezan turnir T_n sadrži $C(n, i_o)$ za svako $n \geq n_o$.

Uočimo u tu svrhu čvor $v \in V(T_n)$ takav da je podturnir $T_n - v$ jako povezan ([32], str. 6). Po indukcijskoj pretpostavci $T_n - v$ sadrži $C(n-1, i_o)$. Uzmimo da je to

$$\underline{v_1} \to v_2 \to \dots \to \underline{v_{i_o}} \to v_{i_o+1} \to \dots \to v_{n-1} \to v_1$$

gde $v_1 \to v_{i_o}$. Sada ćemo razmatrati tri slučaja. Sva sumiranja su po modulu $n-1$.

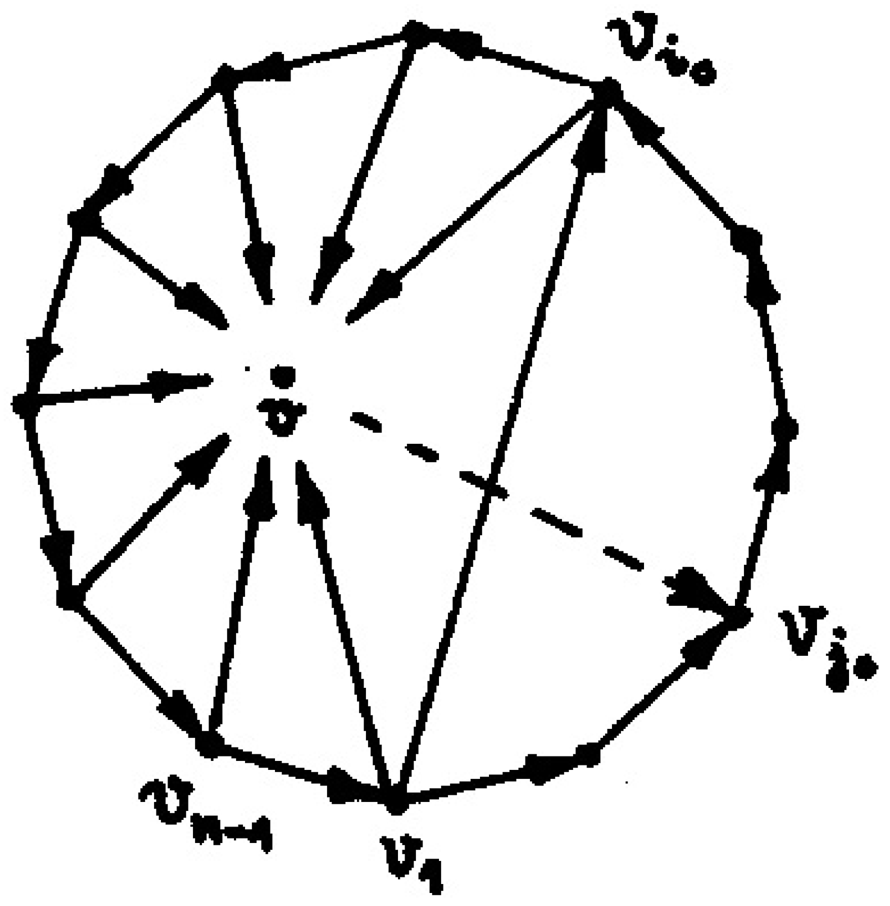
Slučaj 1. $v_{i_o} \to v$. Ukoliko $v \to v_k$ za neko $k \in \{i_o+1,\ i_o+2, \dots, n, 1\}$ tada, s obzirom da $v \leftarrow v_{i_o}$, v može da se interpolira u put $v_{i_o} \to v_{i_o+1} \to \dots \to v_{n-1} \to v_1$ iz čega dobijamo $C(n,i_o)$

$$\underline{v_1} \to v_2 \to \dots \to \underline{v_{i_o}} \to \dots \to v \to \dots \to v_1 .$$

Zbog toga pretpostavimo da

$$v \to \{v_{i_o+1},\ v_{i_o+2}, \dots, v_{n-1}, v_1\} \tag{24}$$

(sl.8.)



SL. 8

Kako je T_n jako povezan slučaj $(T_n - v) \to v$ nije moguć. Sledi da postoji j_o

$$j_o = \min_{2 \leqslant j \leqslant i_o - 1} \{j \mid v \to v_j\}$$

tako da

$$v_{j_o-1} \to v \tag{25}$$

$$v \to v_{j_o} . \tag{26}$$

Iz (24), (25) i (26) dobijamo Hamiltonovu konturu

$$v_{j_o-i_o+1} \to v_{j_o-i_o+2} \to \dots \to v_{j_o-1} \to v \to v_{j_o} \to$$
$$\to v_{j_o+1} \to \dots \to v_{j_o-i_o} \to v_{j_o-i_o+1} . \tag{27}$$

Uočimo da je

$$j_i - i_o + 1 \equiv n-1 + j_o - i_o + 1 \equiv n + j_o - i_o \pmod{n-1} \tag{28}$$

i

$$i_o \leqslant \frac{n-1+2}{2} = \frac{n+1}{2} .$$

Iz poslednje relacije dobijamo

$$2i_o \leq n+1$$

odnosno

$$n - i_o \leq i_o - 1 \ . \tag{29}$$

Kako je $j_o \geq 2$ to iz (29) sledi

$$n + j_o - i_o \geq i_o - 1 + 2 > i_o . \tag{30}$$

S druge strane je $j_o \leq i_o - 1$, pa je

$$n + j_o - i_o \leq n + i_o - 1 - i_o = n - 1 \tag{31}$$

Iz (28), (30) i (31) sledi

$$i_o < j_o - i_o + 1 \leq n - 1$$

odakle, s obzirom na (24), dobijamo da $v_{j_o - i_o + 1} \to v$. To znači da je (27) $C(n, i_o)$, čime je slučaj 1 dokazan.

Slučaj 2. $v \to v_1$. Možemo uzeti da

$$v \to \{v_{i_o}, v_{i_o+1}, \ldots, v_{n-1}\} \tag{32}$$

jer u protivnom dobijamo, slično kao u slučaju 1, $C(n, i_o)$. Iz istog razloga kao u prethodnom slučaju postoji j_o

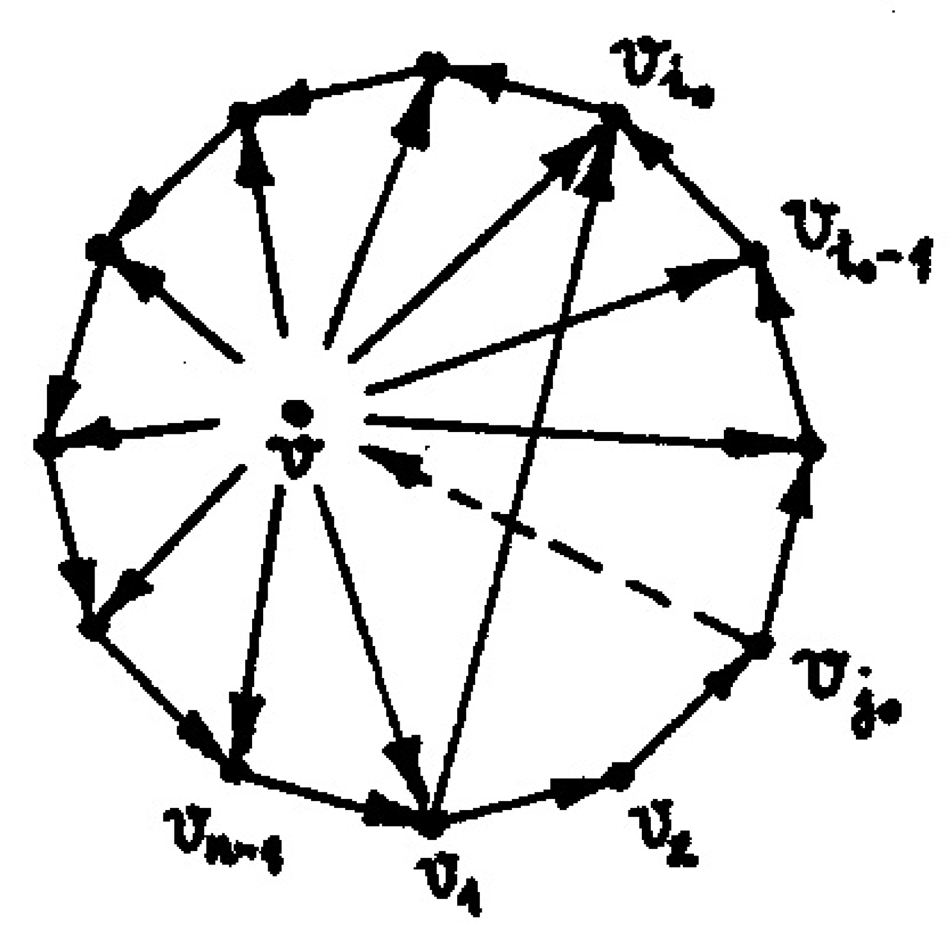
$$j_o = \max_{2 \leq j \leq i_o - 1} \{j \mid v_j \to v\}$$

tako da

$$v_{j_o} \to v \tag{34}$$

$$v \to v_{j_o+1} \tag{35}$$

(sl. 9).



Sl. 9

Iz (34) i (35) dobijamo Hamiltonovu konturu u T_n

$$v \to v_{j_o+1} \to v_{j_o+2} \to \dots \to v_{j_o+i_o-1} \to v_{j_o+i_o} \to$$
$$\to \dots \to v_{n-1} \to v_1 \to \dots \to v_{j_o} \to v \quad . \tag{36}$$

Ostaje da se pokaže da je (36) $C(n,i_o)$, tj. da

$$v \to v_{j_o+i_o-1}. \tag{37}$$

Kako je $j_o \geq 2$ to je

$$j_o + i_o - 1 \geq i_o + 1 \ , \tag{38}$$

a kako je $j_o \leq i_o - 1$ to je

$$\begin{aligned} j_o + i_o - 1 &\leq i_o - 1 + i_o - 1 \\ &= 2\,i_o - 2 \\ &= n_o \\ &\leq n-1 \ . \end{aligned} \tag{39}$$

Iz (38) i (39) sledi

$$i_o + 1 \leq j_o + i_o - 1 \leq n - 1$$

što, s obzirom na (32), implicira (37).

Slučaj 3. $v_1 \to v$ i $v \to v_{i_o}$. Uočimo prvo da ako $v \to v_2$ tada u T_n imamo $C(n,i_o)$ - $v \to v_2 \to v_3 \to \dots \to v_{i_o} \to v_{i_o+1} \to \dots \to v_{n-1} \to v_1 \to v$ (jer $v \to v_{i_o}$). Isto tako ako $v_{i_o} \to v$ imamo $C(n,i_o)$ - $v_1 \to v_2 \to \dots \to v_{i_o-1} \to v \to v_{i_o} \to v_{i_o+1} \to v_{n-1} \to v_1$ (jer $v_1 \to v$). Dakle, možemo uzeti da

$$\begin{aligned} &v_2 \to v \\ &v \to v_{i_o-1}. \end{aligned} \tag{40}$$

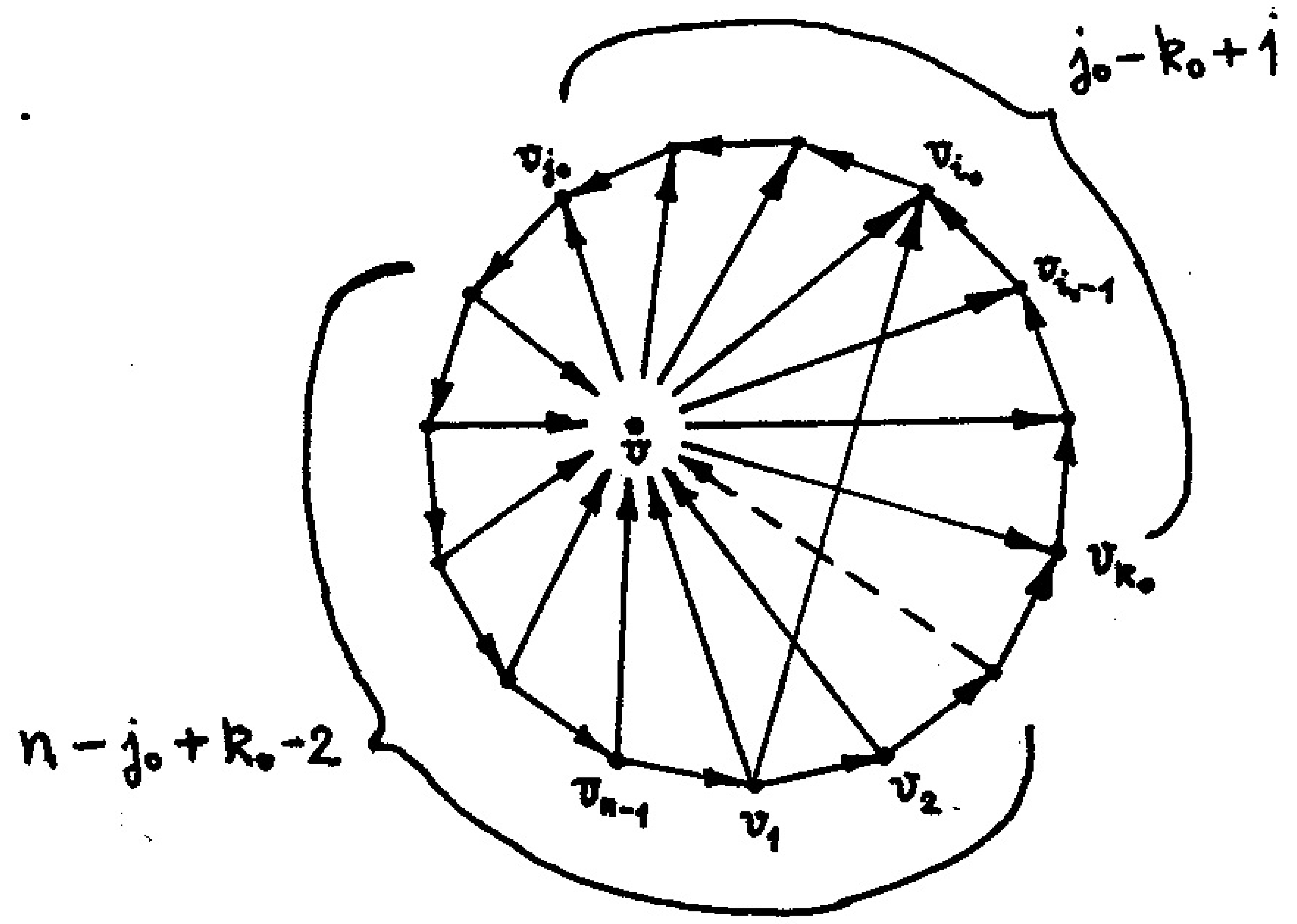
Neka je dalje

$$j_o = \max_{i_o \leq j \leq n-1} \{j \mid v \to v_j\} \tag{41}$$

i

$$k_o = \min_{3 \leq k \leq i_o-1} \{k \mid v \to \{k,k+1,\dots,i_o-1\}\} \tag{42}$$

(sl.10).



Sl. 10

Tada

$$v \to \{v_{i_o+1}, v_{i_o+2}, \ldots, v_{j_{o-1}}\} \qquad (43)$$

jer bi se u protivnom čvor v mogao "ubaciti" u put $v_{i_o+1} \to$ $\to v_{i_o+2} \to \ldots \to v_{j_o}$ produkujući $C(n,i_o)$ - $\underline{v_1} \to v_2 \to \ldots \to \underline{v_{i_o}} \to$ $\to \ldots \to v \to \ldots \to v_{j_o} \to v_{j_o+1} \to \ldots \to v_{n-1} \to v_1$. Iz istog razloga (41) implicira.

$$v \to \{v_{j_o+1}, v_{j_o+2}, \ldots, v_{n-1}\} \qquad (44)$$

Sada su aktuelna dva slučaja.

(a) $\underline{j_o - k_o + 2 \geqslant i_o}$. U ovom slučaju imamo $C(n_o, i_o)$

$$v \to v_{k_o} \to v_{k_o+1} \to \ldots \to v_{k_o+i_o-1} \to v_{k_o+i_o-1} \to$$

$$\to \ldots \to v_{n-1} \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{k_o-1} \to v$$

jer je prema gornjem uslovu $k_o + i_o - 2 \leqslant j_o$ odakle, na osnovu (42) i (43), sledi da $v \to v_{k_o+i_o-2}$.

(b) $\underline{j_o - k_o + 2 < i_o}$. Tada je

$$\begin{aligned} n - j_o + k_o - 2 + 1 &= n - j_o + k_o - 1 \\ &> n - i_o + 2 - 1 \\ &= n + 1 - i_o \\ &\geqslant i_o \,. \end{aligned} \tag{45}$$

(Ovde smo koristili uslov $j_o - k_o + 2 < i_o$ i činjenicu da je $n_o = 2i_o - 2$ iz koje sledi $n + 1 - i_o \geqslant (n_o+1) + 1 - i_o = n_o + 2 - - i_o = i_o$).

Pokažimo sada da je Hamiltonova kontura

$$\begin{aligned} &v_{k_o-i_o+1} \to v_{k_o-i_o+2} \to \dots \to v_{k_o-1} \to v \to \\ &\to v_k \to \dots \to v_{k_o-i_o} \to v_{k_o-i_o+1} \end{aligned} \tag{46}$$

koja sledi iz (42) u stvari $C(n,i_o)$ u T_n. Zaista iz $j_o - k_o + 2 < i_o$ (42) i (45) sledi

$$j_o < k_o - i_o + 1 < 1$$

što, zbog (41), povlači $v_{k_o-i_o+1} \to v$, odnosno (46) je $C(n,i_o)$. Time je dokaz teoreme završen.

Što se tiče pojavljivanja digrafa $C(n,i)$ u jako povezanim turnirima, za $i > (n+2)/2$ u stanju samo da dokažemo sledeće tvrdjenje.

TEOREMA 2.6. ([40]). *Digraf* $C(n,n-1)$ *je jako* n-*neizbežan za svako* n $(n \geqslant 4)$.

DOKAZ. Kako za $n = 4$ imamo slučaj iz teoreme 2.5 to možemo uzeti da je $n \geqslant 5$. Pretpostavimo da postoji jako povezan turnir T_n $(n \geqslant 5)$ koji ne sadrži $C(n,n-1)$ i pokažimo da to vodi kontradikciji.

Bez uticaja na opštost možemo uzeti da je

$$v_1 \to v_2 \to \dots \to v_n \to v_1 \tag{47}$$

jedna Hamiltonova kontura u T_n. Iz pretpostavke i (47) sledi

$$v_i \to v_{i+2} \qquad (48).$$

za svako $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. (Sva sumiranja su po modulu n.). Dalje iz (48) sledi $v_1 \to v_4$, jer u protivnom dobijamo $C(n,n-1) - \underline{v_1} \to v_3 \to v_5 \to v_6 \to \ldots \to v_n \to \underline{v_2} \to v_4 \to v_1$. Medjutim, zbog simetrije (47) zaključujemo da

$$v_i \to v_{i+3} \qquad (49)$$

za svako $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Slično, $v_1 \to v_5$ pošto su u suprotnom, na osnovu (48) i (49), imamo $C(n,n-1) - \underline{v_1} \to v_3 \to v_4 \to v_6 \to v_7 \to \ldots \to v_n \to \underline{v_2} \overset{(49)}{\to} v_5 \to v_1$. Opet zbog simetrije (47) dobijamo

$$v_i \to v_{i+4} \qquad (50)$$

za svako $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Ponavljajući sličan postupak dobijamo

$$v_i \to v_{i+j} \qquad (51)$$

za svako $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ i svako $j \in \{2,3,\ldots,n-3\}$. Kako iz (51) i $v_1 \to v_{n-2}$ sledi egzistencija $C(n,n-1) - v_1 \to v_3 \to v_4 \to \ldots \to v_{n-3} \overset{(48)}{\to} v_{n-1} \to v_n \overset{(48)}{\to} v_2 \overset{(52)}{\to} v_{n-2} \overset{(49)}{\to} v_1$, to

$$v_1 \to v_{n-2}\,. \qquad (52)$$

Medjutim stavljajući u (49) $i = n-2$ dobijamo $v_{n-2} \to v_1$, što je očigledna kontradikcija sa (52).

Za jako povezane turnire digrafovi $C_i + P_{n-i}$ kao i $P_{n-i} + C_i$ su takodje neizbežni. To je sadržaj sledeće teoreme.

<u>*TEOREMA 2.7.*</u> *([40]) Digrafovi* $C_i + P_{n-i}$ *i* $P_{n-i} + C_i$ *su jako* n*-neizbežni za svako* n $(n \geq 4)$ *i svako* i $(3 \leq i \leq n-1)$.

<u>*DOKAZ.*</u> Pokažimo prvo za digrafove $C_i + P_{n-i}$ da su jako n-neizbežni.

Neka je T_n $(n \geq 4)$ proizvoljan jako povezan turnir sa n čvorova i neka je T_n jedan jako povezan podturnir od Tn ([32], str. 6) sa i čvorova $(3 \leq i \leq n-1)$. Neka je dalje

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_i \to v_1 \tag{53}$$

jedna Hamiltonova kontura u T_n. Posmatraćemo dva slučaja.

(a) $T_n - T_i$ je jako povezan. Neka je

$$w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_{n-i} \tag{54}$$

Hamiltonova kontura u $T_n - T_i$. Kako je T_n jako povezan postoje $j \in \{1,2,\ldots,n-i\}$ i $k \in \{1,2,\ldots,n-i\}$ tako da $v_j \to w_k$. (Inače bi $(T_n - T_i) \to T_i$). To implicira egzistenciju $C_i + P_{n-i}$ u T_n gde je C_i Hamiltonova kontura (53), a P_{n-i} Hamiltonov put u $T_n - T_i$ sa početkom u w_k.

(b) $T_n - T_i$ nije jako povezan. Opet, zbog jake povezanosti turnira T_n, postoje čvor $v_j \in V(T_i)$ i čvor w koji pripada inicijalnoj komponenti od $T_n - T_i$, takvi da $v_j \to w$. Kako je svaki čvor inicijalne komponente početak jednog Hamiltonovog puta u $T_n - T_i$ to se na sličan način kao u (a) dobija $C_i + P_{n-i}$ u T_n.

Digraf $P_{n-i} + C_i$ se dobija iz $C_i + P_{n-i}$ izmenom orijentacije svih grana. Iz toga i principa dualiteta ([20], [21]) sledi drugi deo tvrdjenja teoreme.

2.2. ALTERNATIVNE HAMILTONOVE KONTURE

U drugom delu ovog odeljka bavićemo se alternativnim Hamiltonovim konturama - AHK kao neizbežnim podgrafovima odredjene klase jako povezanih turnira. Definiciju alternativnog Hamiltonovog puta - AHP, alternativne Hamiltonove konture i prve rezultate kao je B.Grünbaum u [18]. On je dokazao

<u>*TEOREMA 2.8.*</u> *(Grünbaum [18]). Svaki turnir izuzev* T_3^c, T_5^c *i* T_7^c *sadrži AHP.*

Drugi dokaz teoreme 2.8. kao i odgovarajuća uopštenja mogu se naći u [3],[15],[16],[17],[22],[29],[44],[45],[47],[53].

U duhu naše terminologije tvrdjenje teoreme 8.1. je ekvivalentno sa činjenicom da je AHP n-neizbežan za svako n $(n \geq 3)$ izuzev u slučajevima: (a) $n = 3$, $T_3 \simeq T_3^c$; (b) $n = 5$, $T_5 \simeq T_5^c$; (c) $n = 7$, $T_7 \simeq T_7^c$.

Za rezultate koji će dalje biti izloženi od velikog značaja su i biće korišćeni rezultati Rosenfeld-a ([44],[45]). Najpre dve definicije.

<u>*DEFINICIJA 2.3.*</u> *(Rosenfeld [44]) Čvor* $v \in V(T_n)$ *je početni (završni) čvor u turnitu* T_n *ako u* T_n *postoji AHP tita* $v \to w \leftarrow \ldots$ $(v \leftarrow w \to \ldots)$.

<u>*DEFINICIJA 2.4.*</u> *(Rosenfeld [44]). Čvor* $v \in V(T_n)$ *je dvostruki čvor u turniru* T_n *ako je istovremeno i početni i završni čvor.*

Što se tiče AHP-a Rosenfeld je pokazao sledeće

<u>*TEOREMA 2.9.*</u> *(Rosenfeld [44]). Svaki turnir sa neparnim brojem čvorova koji sadrži AHP ima dvostruki čvor.*

<u>*TEOREMA 2.10.*</u> *(Rosenfeld [45]). Neka je* TT_n *tranzitivni turnir čiji su čvorovi* $v_1, v_2, \ldots, v_n$*, pri čemu* $v_i \to v_j$ *ako i samo ako je* $i < j$.

(a) Ako je $n = 2k$ *tada* TT_n *ima AHP čiji je početni čvor* v_i $(i \neq n)$ *i završni čvor* v_j, $\{i,j\} \subset \{1,2,\ldots,n\}$ *izuzev u sledećim slučajevima:*

(i) $j = 1$;

(ii) $i = 1$, $j = 2$ $(n > 2)$;

(iii) $i = 2k - 1$, $j = 2k$

(b) Ako je $n = 2k + 1$ *tada* TT_n *ima AHP čiji su početni čvorovi* v_i *i* v_j, $\{i,j\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ *ako je* $i, j \neq 2k + 1$ *i* $\{i,j\} \neq \{2k - 1, 2k\}$ $(n > 3)$.

Alternativne Hamiltonove konture mogu se, očigledno, pojaviti samo u turnirima čiji je broj čvorova paran. Kako T_3^c, T_5^c i T_7^c, prema teoremi 2.8, ne sadrže AHK to turniri tipa $T_3^c \to v$, $T_5^c \to v$, $T_7^c \to v$ ne sadrže AHK. Stoga se egzistencija AHK u turnirima sa 4, 6 i 8 čvorova ne može garantovati. To znači da je sledeća hipoteza postavljena od strane Grünbaum-a ([18]), a formulisana u ovde korišćenoj terminologiji, najbolja moguća.

HIPOTEZA 2.2. *(B.Grünbaumm ([18]) AHK je* n *- neizbežan podgraf za svako* $n = 2k \geqslant 10$.

Prvi prilog dokazu hipoteze 2.2. dao je Thomassen ([47]), koji je pokazao da je tačna za $n \geqslant 50$. Tu granicu je znatno popravio Rosenfeld ([45]) utvrdivši tačnost hipoteze za $n \geqslant 28$. Rosenfeld-ov rezultat se bazira na sledećim dvema teoremama.

TEOREMA 2.11. *(Reid Parker [43])*

(a) TT_5 *je* n*-neizbežan podgraf za svako* $n \geqslant 14$.

(b) TT_6 *je* n*-neizbežan podgraf za svako* $n \geqslant 28$.

TEOREMA 2.12.(Rosenfeld [45]). Ako je $n = 2k \geqslant 16$ *i* $TT_6 \subseteq T_n$, *tada* T_n *sadrži AHK.*

Mi ćemo pokazati da je hipoteza 2.2. tačna za svako $n = 2k \geqslant 16$. Pre nego što formulišemo i dokažemo niz lema koje predstavljaju bazu za dokaz osnovnog tvrdjenja uvešćemo nekoliko oznaka koje ćemo do kraja slediti.

Ograničićemo se na posmatranje turnira T_n sa $n = 2k \geqslant 14$ čvorova. Na osnovu teoreme 2.11. svaki takav turnir predstavljaćemo u obliku

$$T_n = TT_5 + T_m \tag{55}$$

gde je T_m proizvoljan turnir sa $m = 2k + 1 \geqslant 9$ čvorova. Grane koje povezuju čvorove iz TT_5 sa čvorovima iz T_m su proizvoljno orijentisani.

Za skupove čvorova turnira TT_5 i T_m uzećemo

$$V(TT_5) = \{1,2,3,4,5\}$$

$$V(T_m) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$$

pri čemu $i \to j$ ako i samo ako je $i < j$, za svako $i,j \in V(TT_5)$.

Na osnovu teoreme 2.9 i 2.10. možemo, bez uticaja na opštost, pretpostaviti da je

$$v_1 \leftarrow v_2 \to \ldots \leftarrow v_{m-1} \to v_m \tag{56}$$

jedan AHP u T_m sa dvostrukim čvorom v_1. Takodje možemo uzeti da u TT_5 postoje čvorovi i,j i k takvi da je $1 \leq i < j < k \leq 5$ i

$$\{i, j, k\} \to v_1 \tag{57}$$

Ova posledica se bazira na činjenici da je v_1 dvostruki čvor i da u protivnom, ukoliko v_1 dominira nad tri ili više čvorova iz TT_5, možemo izmenivši orijentaciju svih grana u T_n, dobiti opet jedan AHK u T_m tipa (56) kao i relaciju (57).

U lemama koje slede svuda pretpostavljamo da turnir T_n (56) ne sadrži TT_6, tj. da je, prema teoremi 2.11., TT_5 njegov maksimalni tranzitivni podturnir.

<u>*LEMA 2.3.*</u> *([34]) Za svaki čvor* $v_i \in V(T_m)$ *postoje čvorovi* p *i* q, $p,q \in V(TT_5)$ *takvi da* $v_i \to p$ *i* $q \to v_i$.

<u>*DOKAZ.*</u> Sledi direktno iz pretpostavke $TT_6 \not\subset T_n$.

LEMA 2.4. ([34]). Ako T_n *ne sadrži AHK i ako* $v_1 \leftarrow \{i,j,k\}$ $(\{i,j,k\} \subset \{1,2,3,4,5\},\ i < j < k,\ i < 3)$ *tada* $v_m \to \{1,2,3,4\}$ *i* $v_m \leftarrow 5$.

<u>*DOKAZ.*</u> Ako bi $v_m \leftarrow \ell$ za neko $\ell \in \{1,2,3,4\}$ tada bi u T_n imali AHK $-x \to v_1 \leftarrow v_2 \to \ldots \leftarrow v_{m-1} \to v_m \leftarrow \ell \to \ldots \leftarrow x$ pri

čemu je $\quad x = \begin{cases} i & \text{za } \ell \neq i \\ j & \text{za } \ell = i \end{cases}$

dok je $\ell \to \ldots \leftarrow x$ AHP u TT_5. Ovde smo koristili (56) i (57) kao i teoremu 2.10. za egzistenciju AHP-a $\ell \to \ldots \leftarrow x$.

Dakle, $v_m \to \{1,2,3,4\}$, a to na osnovu leme 2.3. povlači $v_m \leftarrow 5$.

LEMA 2.5. *([34]) Ako T_n ne sadrži AHK i ako $v_1 \to \{1,2\}$ i $v_1 \leftarrow \{3,4,5\}$ tada $v_m \to \{1,2\}$.*

DOKAZ. Pretpostavimo da $v_m \leftarrow \ell$, $\ell \in \{1,2\}$. Tada je $3 \to v_1 \leftarrow v_2 \to \ldots \to v_m \leftarrow \ell \to \ldots \leftarrow 3$ AHK u T_n, gde je $\ell \to \ldots \leftarrow 3$ AHP u T_m (teorema 2.10.). Dobijena kontradikcija dokazuje lemu.

LEMA 2.6. *([34]). Ako T_n ne sadrži AHK i ako $v_1 \leftarrow \{3,4,5\}$, $v_1 \to \{1,2\}$, $v_m \leftarrow \{i,j\}$ i $v_m \to \{1,2,k\}$, gde je $\{i,j,k\} = \{3,4,5\}$ tada*

(i) $\quad v_{m-1} \leftarrow \{1,2,k\}$

(ii) $\quad v_{m-2} \to \{1,2,v_m\}$

(iii) $\quad v_{m-3} \leftarrow \{1,2,v_{m-1},k\}$

(iv) $\quad v_{m-4} \to \{1,2,v_{m-2}\}$.

DOKAZ. (i) Ako $v_{m-1} \to \ell$, $\ell \in \{1,2,k\}$ tada imamo AHK $- x \to v_1 \leftarrow v_2 \to \ldots \leftarrow v_{m-1} \to \ell \leftarrow v_m \to y \leftarrow \ldots \leftarrow x$, gde je $y \leftarrow \ldots$ $\ldots \leftarrow x$ AHP u $TT_5 - \ell$ i

$$x = \begin{cases} 3 & \text{za} \quad k \neq 3 \\ 4 & \text{za} \quad k = 3 \end{cases}, \quad y = \begin{cases} 2 & \text{za} \quad \ell = k \\ k & \text{za} \quad \ell \neq k. \end{cases}$$

(ii) Uzmimo prvo da $v_{m-2} \leftarrow \ell$, $\ell \in \{1,2\}$. Neka je $\{x,y,k\} = \{3,4,5\}$ i $\{\ell,\ell'\} = \{1,2\}$. Tada koristeći (i) dobijamo AHK $- \ell \to v_{m-2} \leftarrow v_{m-3} \to \ldots \to v_1 \leftarrow y \to v_m \leftarrow v_{m-1} \to x \leftarrow \ell' \to k \leftarrow \ell$.

Ovde traba zapaziti da $v_{m-1} \to x$ ili $v_{m-1} \to y$, jer u protivnom $v_{m-1} \leftarrow \{x,y\}$ što zajedno sa (i) daje $v_{m-1} \leftarrow \{1,2,3,4,5\}$; kontradikcija sa lemom 2.3.

Pretpostavimo sada da $v_{m-2} \leftarrow v_m$. Tada imamo AHK - $x \to v_1 \leftarrow v_2 \to \dots \to v_{m-2} \leftarrow v_m \to k \leftarrow \ell \to v_{m-1} \leftarrow 2 \to y \leftarrow x$ pri čemu je

$$x = \begin{cases} 3 & \text{za } k \neq 3 \\ 4 & \text{za } k = 3 \end{cases} \quad \text{i} \quad y = \begin{cases} 4 & \text{za } k = 5 \\ 5 & \text{za } k \neq 5 \end{cases} .$$

(iii) Ako $v_{m-3} \to \ell$, $\ell \in \{1,2\}$ tada imamo, na osnovu (ii), AHK - $v_1 \leftarrow v_2 \to \dots \leftarrow v_{m-3} \to \ell \leftarrow v_{m-2} \to v_m \leftarrow v_{m-1} \to x \leftarrow \ell' \to y \leftarrow z \to v_1$, gde je $\{\ell,\ell'\} = \{1,2\}$, $\{x,y,z\} = \{3,4,5\}$.

Ako $v_{m-3} \to v_{m-1}$ tada, na osnovu (i) i (ii), dobijamo AHK - $v_1 \leftarrow v_2 \to \dots \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-1} \leftarrow 1 \to 2 \leftarrow v_{m-2} \to v_m \leftarrow x \to 5 \leftarrow y \to v_1$, gde je $\{x,y\} = \{3,4\}$.

Najzad pretpostavimo da $v_{m-3} \to k$. Ukoliko $v_{m-1} \to j$, tada imamo AHK - $k \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \dots \to v_1 \leftarrow i \to j \leftarrow v_{m-1} \to v_m \leftarrow v_{m-2} \to 2 \leftarrow 1 \to k$. U suprotnom pak, ukoliko $v_{m-1} \leftarrow j$, (tada zbog (i) $v_{m-1} \to i$), imamo, u slučaju $v_{m-2} \leftarrow j$ AHK - $k \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \dots \to v_1 \leftarrow j \to v_{m-2} \leftarrow v_{m-1} \to i \leftarrow 1 \to 2 \leftarrow v_m \to k$, a u slučaju $v_{m-2} \to j$ AHK - $k \leftarrow v_{m-3} \leftarrow v_{m-4} \leftarrow \dots \to v_1 \leftarrow i \to v_m \leftarrow v_{m-2} \to j \leftarrow 2 \to v_{m-1} \leftarrow 1 \to k$.

(iv) Uzmimo najpre da $v_{m-4} \leftarrow \ell$, $\ell \in \{1,2\}$. Tada, na osnovu (iii), imamo AHK - $\ell \to v_{m-4} \leftarrow v_{m-5} \to \dots \to v_1 \leftarrow x \to v_m \leftarrow v_{m-1} \to v_{m-2} \leftarrow v_{m-3} \to y \leftarrow \ell' \to z \leftarrow \ell$, gde je $\{\ell,\ell'\} = \{1,2\}$ i $\{x,y,z\} = \{3,4,5\}$.

Uzmimo sada da $v_{m-4} \leftarrow v_{m-2}$. Na osnovu (ii) i (iii) dobijamo AHK - $v_1 \leftarrow v_2 \to \dots \to v_{m-4} \leftarrow v_{m-2} \to v_m \leftarrow v_{m-1} \to v_{m-3} \leftarrow 1 \to 5 \leftarrow 2 \to 4 \leftarrow 3 \to v_1$.

Tako u svim slučajevima dobija se kontradikcija sa pretpostavkom da T_n ne sadrži AHK čime je lema 2.6. dokazana.

LEMA 2.7. ([34]) *Ako* T_n *ne sadrži AHK i* $\{v_1, v_m\} \leftarrow \{3,4,5\}$, $\{v_1, v_m\} \rightarrow \{1,2\}$, $v_1 \leftarrow v_m$, *tada*

(i) $v_{m-1} \leftarrow \{2,4,5\}$

(ii) $v_{m-2} \rightarrow \{1, v_m\}$.

DOKAZ. (i) Ako $v_{m-1} \rightarrow 2$ tada imamo AHK $- 2 \leftarrow v_{m-1} \rightarrow v_{m-2} \leftarrow \dots \rightarrow v_1 \leftarrow 3 \rightarrow v_m \leftarrow 4 \rightarrow 5 \leftarrow 1 \rightarrow 2$. Ako pak $v_{m-1} \rightarrow \ell$, $\ell \in \{4,5\}$ tada iz uslova $v_m \rightarrow \{1,2,v_1\}$ dobijamo AHK $- 2 \leftarrow v_m \rightarrow v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow \dots \leftarrow v_{m-1} \rightarrow \ell \leftarrow 3 \rightarrow \ell' \leftarrow 1 \leftarrow 2$, gde je $\{\ell, \ell'\} = \{4,5\}$. Stoga $v_{m-1} \leftarrow \{2,4,5\}$.

(ii) Ukoliko $v_{m-2} \leftarrow 1$, tada imamo AHK $- 1 \rightarrow v_{m-2} \leftarrow v_{m-3} \rightarrow \dots \rightarrow v_1 \leftarrow 5 \rightarrow v_m \leftarrow 4 \overset{(i)}{\rightarrow} v_{m-1} \overset{(i)}{\leftarrow} 2 \rightarrow 3 \leftarrow 1$. Tako $v_{m-2} \leftarrow 1$. Pretpostavimo sada da $v_{m-2} \leftarrow v_m$. Na osnovu (i) i leme 2.3. moguća su sledeća tri slučaja.

(a) $v_{m-1} \rightarrow 1$, $v_{m-1} \leftarrow 3$

(b) $v_{m-1} \rightarrow \{1,2\}$

(c) $v_{m-1} \leftarrow 1$, $v_{m-1} \rightarrow 3$.

Medjutim, u slučaju (a) dobijamo AHK $- v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-2} \leftarrow v_m \rightarrow 2 \leftarrow 1 \rightarrow 5 \leftarrow 4 \overset{(i)}{\rightarrow} v_{m-1} \overset{(a)}{\leftarrow} 3 \rightarrow v_1$, u slučaju (b) dobijamo AHK $- v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-2} \leftarrow v_m \rightarrow 1 \overset{(b)}{\leftarrow} v_{m-1} \overset{(b)}{\rightarrow} 3 \leftarrow 2 \rightarrow 5 \leftarrow 4 \rightarrow v_1$, a u slučaju (c) AHK $- v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{m-2} \leftarrow v_m \rightarrow 2 \leftarrow 1 \overset{(c)}{\rightarrow} v_{m-1} \rightarrow \overset{(i)}{\leftarrow} 4 \rightarrow 5 \leftarrow 3 \rightarrow v_1$. Time je lema 2.7. dokazana.

Sada možemo pristupiti dokazu glavnog rezultata.

TEOREMA 2.13. ([34]). *Svaki turnir* T_n *sa* $n = 2k \geqslant 14$ *čvorova koji ne sadrži tranzitivni podturnir* TT_6 *ima AHK.*

DOKAZ. Prema teoremi 2.11. (a) T_n sadrži TT_5 pa se može predstaviti u obliku (55) pri čemu je $m = n - 5 \geq 9$. Kao što je već napred rečeno možemo uzeti da je (56) AHP u T_m sa dvostrukim čvorom v_1 pri čemu važi relacija (57). Razmatraćemo sledeće slučajeve:

Slučaj 1. $i < 3$. Označimo sa z čvor iz TT_5 takav da $v_{m-1} \to z$ (lema 2.3.). Ako je $z \neq 5$ tada, na osnovu leme 2.4. imamo AHK $- x \to v_1 \leftarrow v_2 \to \dots \leftarrow v_{m-1} \to z \leftarrow v_m \to y \leftarrow \dots \leftarrow$ $\leftarrow x$ gde je

$$x = \begin{cases} i & \text{za} \quad z \neq i \\ j & \text{za} \quad z = i \end{cases} \qquad \text{i} \quad y \leftarrow \dots \leftarrow x$$

AHP u $TT_5 - z$ za pogodno izabran čvor y. Poslednje je moguće učiniti na osnovu teoreme 2.10.

Ako $v_{m-1} \to 5$ i $v_m \leftarrow \{1,2,3,4\}$ tada imamo AHK

$$i \to v_1 \leftarrow v_2 \to \dots \leftarrow v_{m-1} \to 5 \leftarrow y \to \dots \leftarrow i$$

pri čemu je $y \to \dots \leftarrow i$ AHP u tranzitivnom podturniru odredjenom čvorovima $1,2,3,4,v_m$ (uočimo da $v_m \to \{1,2,3,4\}$ prema lemi 2.4.) i $y \in \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}$.

Slučaj 2. $i = 3$. To očigledno povlači

$$\begin{aligned} v &\leftarrow \{3,4,5\} \\ v_1 &\to \{1,2\} \end{aligned} \tag{58}$$

Sada na osnovu lema 2.3. i 2.5. za čvorove $v_m, 3, 4, 5$ su aktuelne sledeće mogućnosti:

(a) v_m je dominiran tačno jednim čvorom iz skupa $\{3,4,5\}$.

(b) v_m je dominiran od tačno dva čvora iz skupa $\{3,4,5\}$

(c) $v_m \leftarrow \{3,4,5\}$.

Razmotrimo posebno svaku od mogućnosti.

(a) Pretpostavimo da

$$v_m \leftarrow i_1$$
$$v_m \rightarrow \{1,2,j_1,k_1\}$$

gde je $\{i_1,j_1,k_1\} = \{3,4,5\}$. Ovo sledi iz leme 2.5. Neka je dalje $z \in V(TT_3)$ tako da $v_{m-1} \rightarrow z$. Za $z \neq i_1$ dobijamo, na osnovu leme 2.5. AHK

$$x \rightarrow v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow \dots \leftarrow v_{m-1} \rightarrow z \leftarrow v_m \rightarrow y \leftarrow \dots \leftarrow x$$

gde je

$$x = \begin{cases} 3 & \text{za} \quad z \neq 3 \\ 4 & \text{za} \quad z = 3 \end{cases} \quad \text{i} \quad y \leftarrow \dots \leftarrow x \text{ AHK u } TT_5 - z$$

za pogodno izabran čvor y (teorema 2.10.). Za $z = i_1$ imamo AHK $x \rightarrow v_1 \leftarrow v_2 \rightarrow \dots \leftarrow v_{m-1} \rightarrow i_1 \leftarrow 1 \rightarrow 2 \leftarrow v_m \rightarrow y \leftarrow x$ pri čemu

$$x = \begin{cases} 3 & \text{za} \quad z \neq 3 \\ 4 & \text{za} \quad z = 3 \end{cases} \quad \text{i} \quad \{i_1,x,y\} = \{3,4,5\}.$$

(b) Neka je

$$v_m \leftarrow \{i_1,\ j_1\}$$
$$v_m \rightarrow \{1,2,k_1\}$$

gde je $\{i_1,\ j_1,\ k_1\} = \{3,4,5\}$.

Uzmimo prvo da je $k_1 \neq 5$. Na osnovu lema 2.3. i 2.6. (iii) čvor v_{m-3} dominira bar jedan od čvorova i_1 i j_1 $(i_1 < j_1)$.

Iz pretpostavke $k \neq 5$ sledi da je $j_1 = 5$. Ako $v_{m-3} \rightarrow i_1$ tada za $v_{m-1} \rightarrow i_1$ imamo AHK

$$i_1 \leftarrow v_{m-3} \rightarrow v_{m-4} \leftarrow \dots \rightarrow v_1 \overset{(58)}{\leftarrow} k_1 \rightarrow j_1 \leftarrow 1 \rightarrow 2 \overset{2.6}{\leftarrow}$$
$$\leftarrow v_{m-2} \overset{2.6}{\rightarrow} v_m \leftarrow v_{m-1} \rightarrow i_1 \ ,$$

dok za $v_{m-1} \leftarrow i_1$ imamo AHK

$$i_1 \leftarrow v_{m-3} \rightarrow v_{m-4} \leftarrow \dots \rightarrow v_1 \overset{(58)}{\leftarrow} k_1 \rightarrow j_1 \leftarrow v_{m-1} \rightarrow v_m \leftarrow$$
$$\leftarrow v_{m-2} \rightarrow 2 \leftarrow 1 \rightarrow i.$$

Treba napomenuti da $v_{m-1} \rightarrow j_1$ na osnovu leme 2.6. (i). Ako pak $v_{m-3} \leftarrow i_1$ tada imamo AHK

$$j_1 \leftarrow v_{m-3} \rightarrow v_{m-4} \leftarrow \dots \rightarrow v_1 \overset{(58)}{\leftarrow} i_1 \rightarrow v_m \leftarrow v_{m-2} \overset{(2.6)}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow 2 \leftarrow 1 \rightarrow v_{m-1} \leftarrow k_1 \rightarrow j_1 \; .$$

Ispitajmo sada slučaj $k_1 = 5$. Tada

$$v_{m-3} \leftarrow 4 \tag{59}$$

jer u protivnom dobijamo AHK $- 4 \leftarrow v_{m-3} \rightarrow v_{m-4} \leftarrow \dots \rightarrow v_1 \overset{(58)}{\leftarrow}$ $\leftarrow 5 \overset{2.6}{\rightarrow} v_{m-1} \overset{2.6}{\leftarrow} 1 \rightarrow 2 \overset{2.6}{\leftarrow} v_{m-2} \rightarrow v_m \leftarrow 3 \rightarrow 4$.

Iz leme 2.6. (iii) (59) sledi

$$v_{m-3} \rightarrow 3 \tag{60}$$

(U protivnom u T_n dobijamo TT_6).

Dalje, zbog eventualnog AHK $- 3 \leftarrow v_{m-3} \rightarrow v_{m-4} \leftarrow \dots \rightarrow$ $\rightarrow v_1 \leftarrow 4 \rightarrow 5 \leftarrow 1 \rightarrow 2 \leftarrow v_{m-2} \rightarrow v_m \leftarrow v_{m-1} \rightarrow 3$ koji bi egzistirao prema lemi 2.6. i činjenici da $v_{m-1} \rightarrow 3$ sledi

$$v_{m-1} \leftarrow 3 \tag{61}$$

To opet povlači, iz istog razloga kao (60), za

$$v_{m-1} \rightarrow 4$$

Na osnovu lema 2.3. i 2.6. bar jedan od čvorova 3,4,5 dominira čvor v_{m-4}. Koristeći (59),(60),(61) i (62) dobijamo sledeće AHK

1. $3 \rightarrow v_{m-4}$

$$3 \rightarrow v_{m-4} \leftarrow v_{m-5} \rightarrow \dots \rightarrow v_1 \leftarrow 5 \rightarrow v_{m-3} \leftarrow 1 \rightarrow 2 \leftarrow v_{m-2} \rightarrow v_m \leftarrow$$

$$\rightarrow v_{m-1} \rightarrow 4 \leftarrow 3$$

2. $4 \rightarrow v_{m-4}$

$$4 \rightarrow v_{m-4} \leftarrow v_{m-5} \rightarrow \dots \rightarrow v_1 \leftarrow 5 \rightarrow v_{m-1} \leftarrow 3 \rightarrow v_m \leftarrow v_{m-2} \rightarrow 2$$

$$\leftarrow 1 \rightarrow v_{m-3} \leftarrow 4$$

3. $5 \to v_{m-4}$

$$5 \to v_{m-4} \leftarrow v_{m-5} \to \ldots \to v_1 \leftarrow 4 \to v_{m-3} \leftarrow 1 \to 2 \leftarrow v_{m-2} \to$$

$$\to v_m \leftarrow 3 \to v_{m-1} \leftarrow 5$$

(c) Prema lemi 2.5. $v_m \to \{1,2\}$. Tako imamo $\{v_1, v_m\} \leftarrow \{3,4,5\}$ i $\{v_1, v_m\} \to \{1,2\}$. Zbog ove simetrije, kao i zbog simetrije AHK (56) možemo uzeti da $v_m \quad v_1$. (U protivnom ćemo čvorove iz AHP (56) prenumerisati po sistemu: v_1 prelazi u v_m i obratno, v_2 prelazi u v_{m-1} i obratno, itd.). To omogućava da primenimo zaključke leme 2.7.

Razmotrićemo sledeće slučajeve:

1. $v_{m-1} \to 1$, $v_{m-1} \leftarrow 3$. Tada

$$v_{m-2} \to \{3,4,5\} \tag{63}$$

Zaista, ako $v_{m-2} \leftarrow i_1$, $i_1 \in \{3,4,5\}$ tada imamo AHK - $i_1 \to v_{m-2} \leftarrow v_{m-3} \to \ldots \to v_1 \leftarrow v_m \to 2 \leftarrow 1 \to k_1 \leftarrow j_1 \to v_{m-1} \leftarrow i$, gde je $\{i_1, j_1, k_1\} = \{3,4,5\}$, $j_1 < k_1$.

Dalje, čvor v_{m-3} dominira bar jedan od čvorova 1,2,3,4,5. Ako je to čvor 1 ili čvor 2 tada imamo AHK $1 \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \ldots \to v_1 \leftarrow 3 \to 5 \leftarrow 2 \to 4 \overset{(6.3)}{\leftarrow} v_{m-2} \overset{2.7}{\to} v_m \leftarrow v_{m-1} \to 1$, odnosno AHK $2 \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \ldots \to v_1 \leftarrow 3 \to v_{m-1} \overset{2.7}{\leftarrow} 4 \; v_m \overset{2.7}{\leftarrow} v_{m-2} \overset{(6.3)}{\to} 5 \leftarrow 1 \to 2$. Ako pak $v_{m-3} \to i_1$, $i_1 \in \{3,4,5\}$ tada dobijamo AHK - $i_1 \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \ldots \to v_1 \leftarrow v_m \to 1 \overset{2.7}{\leftarrow} v_{m-2} \overset{6.3}{\to} \leftarrow \to k_1 \leftarrow j_1 \to v_{m-1} \leftarrow 2 \to i_1$, gde je $\{i_1, j_1, k_1\} = \{3,4,5\}$, $j_1 < k_1$.

2. $v_{m-1} \to \{1,3\}$. Sada eventualni AHK - $2 \to v_{m-2} \leftarrow v_{m-3} \to \ldots \to v_1 \leftarrow 4 \to v_m \leftarrow v_{m-1} \to 3 \leftarrow 1 \to 5 \leftarrow 2$ i $4 \to v_{m-2} \leftarrow v_{m-3} \to \ldots \to v_1 \leftarrow v_m \to 1 \leftarrow v_{m-1} \to 3 \leftarrow 2 \to 5 \leftarrow 4$ (Lema 2.6.) povlače

$$v_{m-2} \to \{2,4\} \;. \tag{64}$$

Neka $v_{m-3} \to i_1$, $i_1 \in \{1,2,3,4,5\}$. Ako $i_1 \in \{1,3\}$ dobijamo, koristeći (64), AHK

$$i_1 \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \dots \to v_1 \leftarrow k_1 \to 5 \leftarrow j_1 \to \ell \leftarrow v_{m-2} \to$$

$$\to v_m \leftarrow v_{m-1} \to i_1$$

pri čemu je $k = \begin{cases} 3 & \text{za } i_1 = 1 \\ 4 & \text{za } i_1 = 3 \end{cases}$, $\quad j_1 = \begin{cases} 2 & \text{za } i_1 = 1 \\ 1 & \text{za } i_1 = 3 \end{cases}$

$\ell = \begin{cases} 4 & \text{za } i_1 = 1 \\ 2 & \text{za } i_1 = 3 \end{cases}$. Za $i_1 = 2$ imamo AHK

$$2 \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \dots \to v_1 \leftarrow 3 \to 5 \leftarrow 4 \to v_m \leftarrow v_{m-1} \to 1 \leftarrow v_{m-2} \to 2.$$

Najzad u slučaju $i_1 \in \{4,5\}$ imamo AHK $i_1 \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \dots \to v_1 \leftarrow j_1 \to v_m \leftarrow v_{m-2} \to 1 \leftarrow v_{m-1} \to 3 \leftarrow 2 \to i_1$, gde je $\{i_1, j_1\} = \{4,5\}$.

3) $v_{m-1} \leftarrow 1$, $v_{m-1} \to 3$. Sada

$$v_{m-2} \to \{2,3\} . \tag{65}$$

Stvarno, ako $v_{m-2} \leftarrow 2$ tada egzistira AHK - $2 \to v_{m-2} \leftarrow v_{m-3} \to \dots \to v_1 \leftarrow 4 \to v_m \leftarrow v_{m-1} \to 3 \leftarrow 1 \to 5 \leftarrow 2$, a u slučaju $v_{m-2} \leftarrow 3$ AHK - $3 \to v_{m-2} \leftarrow v_{m-3} \to \dots \to v_1 \leftarrow v_m \to 2 \leftarrow 1 \to v_{m-1} \leftarrow 4 \to 5 \leftarrow 3$ (lema 2.7.).

Pretpostavimo opet da $v_{m-3} \to i$, $i_1 \in \{1,2,3,4,5\}$. Za $i_1 \in \{1,2,3\}$ dobijamo, koristeći (65) i lemu 2.7., AHK - $i_1 \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \dots \to v_1 \leftarrow 5 \to v_m \to 4 \to v_{m-1} \leftarrow j_1 \to k_1 \leftarrow v_{m-2} \to i_1$, gde je $\{i_1, j_1, k_1\} = \{3,4,5\}$, $j_1 < k_1$. Za $i_1 \in \{4,5\}$ imamo AHK $i_1 \leftarrow v_{m-3} \to v_{m-4} \leftarrow \dots \to v_1 \leftarrow j_1 \to v_m \leftarrow v_{m-1} \to 3 \leftarrow v_{m-2} \to 2 \leftarrow 1 \to i_1$, gde je $\{i_1, j_1\} = \{4,5\}$.

Ovim su obuhvaćeni svi mogući slučajevi i kako je uvek dobijen AHK teorema je dokazana.

<u>*TEOREMA 2.14.*</u> *([34]) AHK je* n-*neizbežan za svako* $n = 2k \geqslant 16$.

DOKAZ. Ako $TT_6 \subseteq T_n$ tvrdjenje sledi iz teoreme 2.12. Ako $TT_6 \not\subset T_n$ tada $TT_5 \subset T_n$, jer je $n \geq 16$ (teorema 2.11.) i tvrdjenje sledi iz teoreme 2.13.

Tako su od hipoteze 2.2. ostali kao nerazjašnjeni samo slučajevi turnira sa 14 čvorova i to "visoke tranzitivnosti" (oni koji sadrže TT_k $(k \geq 6)$) i turniri sa 12 i 10 čvorova. Teškoće nastaju zbog toga što T_m (55) ne mora da ima AHP za $n = 10$, 12. Po svemu sudeći jedna detaljnija, no daleko složenija analiza, slična onoj iz teoreme 2.13., mogla bi da da odgovor.

3. SKUPOVI I FREKVENCIJE SKOROVA

U ovom odeljku ćemo se baviti nekim problemima vezanim za egzistenciju turnira (običnih i višepartitnih) za koje je unapred zadan skup skorova, odnosno skup frekvencija skorova.

Istraživanja u ovoj oblasti motivisana su teoremom Landan-a [26] koja se odnosi na skor-nizove, odnosno skor-veltore turnira. Najpre ćemo dati definiciju.

DEFINICIJA 3.1. *Skor-niz ili skor-vektor turnira* T_n *je uredjena neopadajuća* n-*torka skorova toga turnira* – $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$.

Lako se vidi da za proizvoljnu neopadajuću n-torku nenegativnih celih brojeva ne mora da postoji turnir čiji je to skor-vektor. Na primer, (0,0,...) ili (1,1,1,1,...) itd. Karakterizaciju je dao Landau ([26]).

TEOREMA 3.1. *(Landau [26])* n-*torka nenegativnih celih brojeva* $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n$ *je skor-vektor nekog turnira ako i samo ako važe sledeće relacije*

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geq \binom{k}{2}$$

za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *i*

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2} .$$

Osim autorovog poznato je više, kako konstruktivnih tako i nekonstrutivnih, dokaza ove teoreme. Za najjednostavniji smatra se Thomassen-ov [51].

3.1. SKUPOVI SKOROVA

Kao što se vidi iz teoreme 3.1. relativno mali broj n-torki su skor-vektori. S druge strane uslovi dati u teoremi su vrlo neprikladni za primenu. Sve to je bila motivacija da se problem skorova posmatra šire tj. da se umesto skor-vektora posmatra skor-skup.

DEFINICIJA 3.2. *Skor skup $S(T_n)$ turnira T_n čine svi medjusobno različiti skorovi koji se pojavljuju u T_n.*

Očigledno je $1 \leq |S(T_n)| \leq n$, s tim što je $|S(T_n)| = 1$ u slučaju regularnog turnira i $|S(T_n)| = n$ ako je $T_n \cong TT_n$. Prirodno pitanje koje se nameće jeste: "Da li je svaki konačan podskup nenegativnih brojeva $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ (možemo uzeti da je $0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_k$)) skor-skup nekog turnira, tj. da li postoji turnir T_n čiji svaki čvor ima skor s_i za neko $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ i za svako $s_i \in \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ postoji u T_n bar jedan čvor čiji je skor s_i ? " K.B.Reid ([42]) je postavio sledeću hipotezu.

HIPOTEZA 3.1. *(Reid [42]) Svaki konačan podskup nenegativnih celih brojeva je skor-skup nekog turnira.*

Hipoteza je verifikovana od strane K.B.Reid-a ([42]) za $k = 1,2,3$ kao i za neke manje opšte slučajeve.

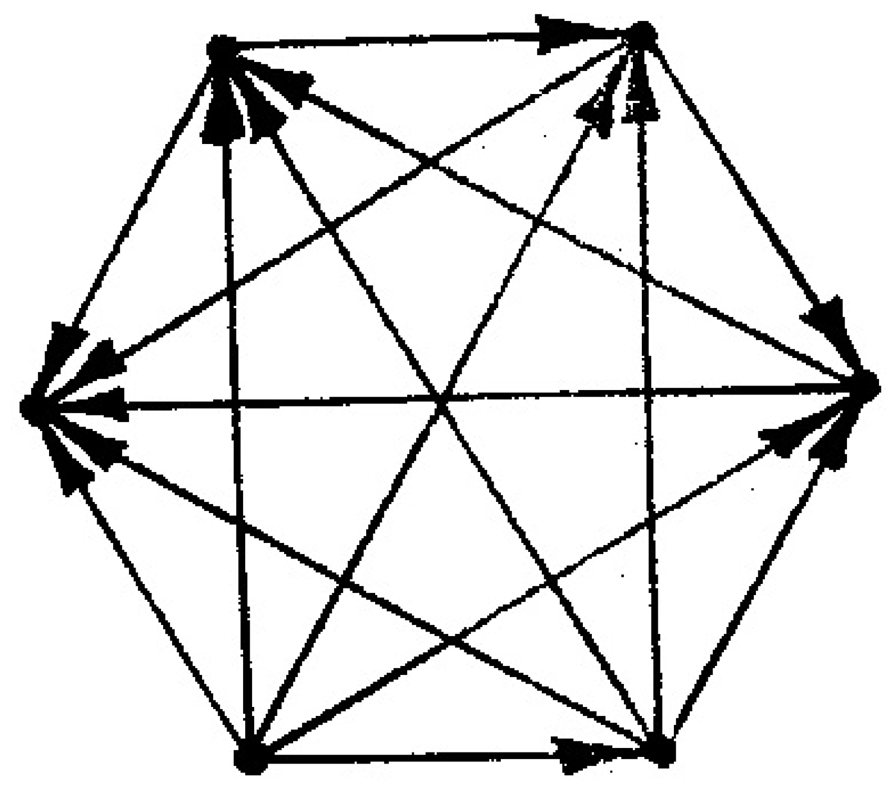
Mi ćemo, koristeći ideju C.Thomassena [52], prezentirati druge dokaze za $k = 1,2$ kao i nekoliko novih tvrdjenja koja su u velikoj meri opšta, mada ne obuhvataju sve slučajeve.

Koristićemo takozvanu box-reprezentaciju skor-vektora turnira, skraćeno - BR.

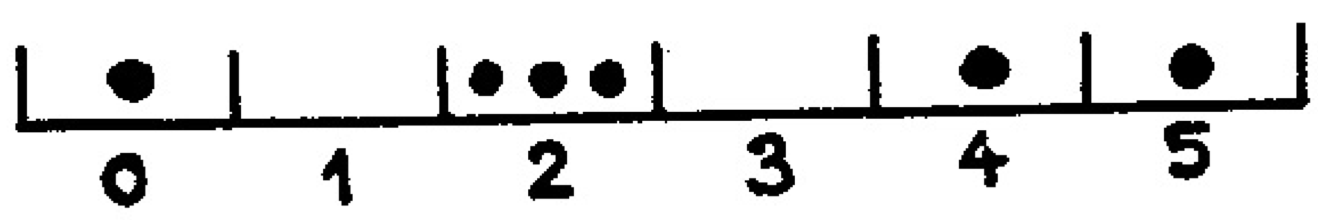
DEFINICIJA 3.3. *Box-reprezentaciju - BR turnira T_n čini niz od n box-ova (pregrada) numerisanih celim brojevima od 0 do n-1 pri čemu box numerisan brojem* i $(0 \leq i \leq n-1)$

sadrži onoliko kuglica koliko u T_n *ima čvorova sa skorom* i .

BR turnira T_6 (sl.11) data je na slici 12.



Sl. 11



Sl. 12

Na osnovu teoreme 3.1. proizvoljan razmeštaj kuglica po box-ovima ne mora da bude BR nekog turnira. Zato imamo

DEFINICIJA 3.4. *Razmeštaj kuglica po box-ovima za koji postoji turnir čija je to BR zove se legalna BR.*

Mi ćemo se isključivo baviti legalnim BR pri čemu ćemo jedne transformisati u druge. Za to nam je potrebna

DEFINICIJA 3.5. *Ako su box-ovi numerisani sa* p *i* q *(*$p < q$*) neprazni, tada se premeštanje jedne kuglice iz box-a* p *u box* p+1 *i jedne kuglice iz box-a* q *u box* q-1 *zove elementarna operacija.*

Za dokaz tvrdjenja da posle elementranih operacija legalne BR ostaju i dalje legalne potrebna je sledeća

LEMA 3.1. (Thomassen [51]). Ako su u *i* v *čvorovi turnira* T *i ako je* $d_T^+(u) \geq d_T^+(v)$*, tada u* T *postoji orijentisan put koji počinje u* u *i završava se u* v.

TEOREMA 3.2. *Ako je B legalna BR tada je to i B′ koja se dobija iz B primenom konačnog broja elementarnih operacija.*

DOKAZ. Dovoljno je pokazati da tvrdjenje važi u slučaju primene jedne elementarne operacije. Opšte tvrdjenje se tada dobija indukcijom po broju operacija.

Neka je B box-reprezentacija turnira T i neka je nad nepraznim box-ovima p i q ($p<q$) izvršena elementarna operacija. Označimo sa B′ dobijenu BR. Kako su box-ovi p i q neprazni u turniru T postoje čvorovi u i v takvi da je $d_T^+(u)=p$ i $d_T^+(v)=q$. Na osnovu leme 1.2. postoji u T orijentisani put koji počinje u v i završava se u u. Izmenom orijentacije svih grana toga puta dobijamo turnir T′ u kojim je $d_{T'}^+(u)=d_T^+(u)+1$, $d_{T'}^+(v)=d_T^+(v)-1$ i $d_{T'}^+(w)=d_T^+(w)$ za $w\neq u$ i $w\neq v$. Očigledno je B′ BR za T′ odakle sledi da je B′ legalna BR.

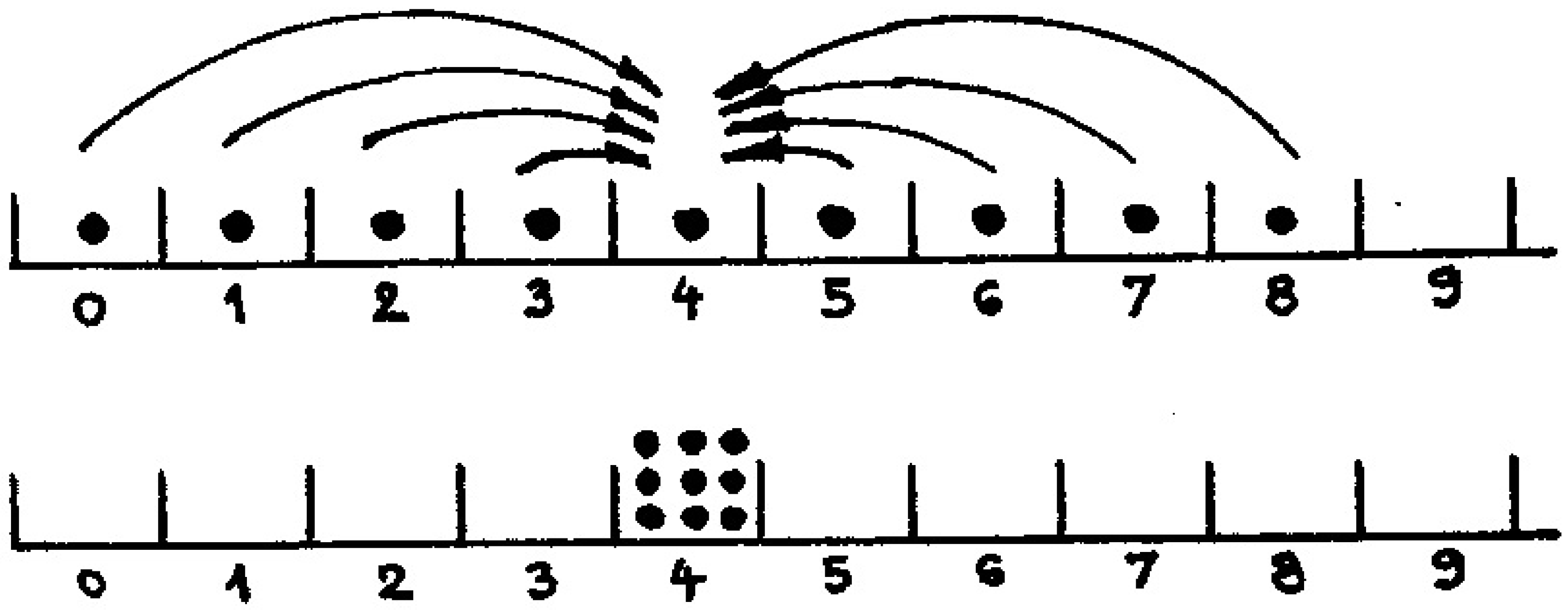
Sada ćemo prezentirati dokaze nekih Reid-ovih rezultata [42] koristeći ideju BR-a.

TEOREMA 3.3. *(Reid [42]) Svaki jednočlani ili dvočlani podskup S nenegativnih celih brojeva je skor-skup nekog turnira.*

DOKAZ. (a) $S=\{a\}$, $a\geqslant 0$. Neka je B box reprezentacija u kojoj su box-ovi $0,1,\dots,2a$ i samo oni, neprazni i sadrže tačno po jednu kuglicu. Očigledno BR B je legalna jer predstavlja BR od TT_{2a+1}. Primenjujući sukcesivno a elementarnih operacija možemo kuglice iz box-ova 0 i 2a premestiti u box a. Dalje sa a-1 elementarnih operacija premeštamo kuglice iz box-ova 1 i 2a-1 u box a, itd. Posle

$$a+(a-1)+\dots+2+1=\binom{a+1}{2}$$

elementarnih operacija sve kuglice "stižu" u box a (sl. 13; $a=4$)

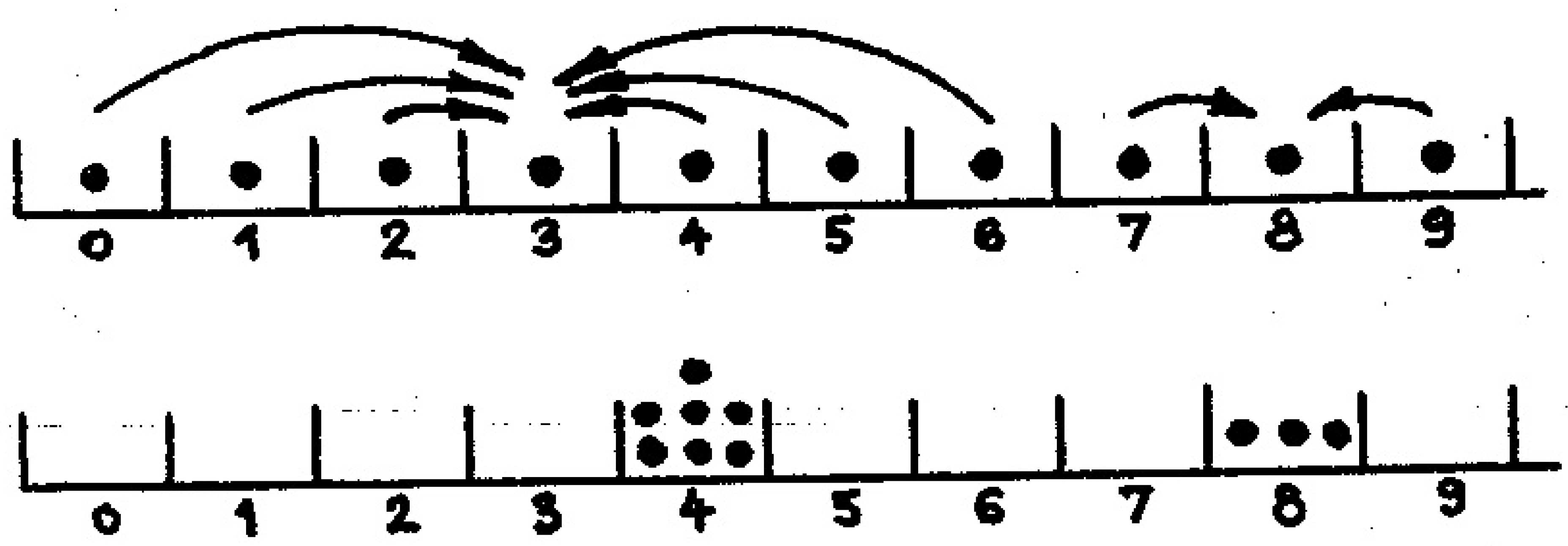


Sl. 13

Dobijena BR je legalna (teorema 3.2.) tj. postoji turnir čiji svi čvorovi imaju izlazni stepen a.

(b) $S = \{a_1, a_2\}$, $0 \leq a_1 < a_2$. Razlikovaćemo dva slučaja.

1) $a_2 > 2a_1$. Neka je B BR u kojoj su jedini neprazni box-ovi $0, 1, \ldots, 2(a_2 - a_1) - 1$ tj. BR od $TT_{2(a_2-a_1)}$. Na sličan način kao u (a) postižemo da sve kuglice iz a_1 box-ova levo od box-a a_1 i sve kuglice iz a_1 box-ova desno od box-a a_1 budu premeštene u box a_1. Zatim se ostatak od $a_2 - 2a_1 - 1 \geq 0$ kuglica levo od box-a a_2 i isto toliko sa desne strane premešta u box a_2 (sl. 14; $a_1 = 3$, $a_2 = 8$).



Sl. 14

Dobijena BR je legalna i ima neprazne samo box-ove a_1 i a_2.

2) $a_2 \leq 2a_1$. Neka je $a_2 = a_1 + k$ gde je $0 < k \leq a_1$ i neka je

$$a_1 = q \cdot k + r \qquad (66)$$

gde je $0 \leq r < k$. Očigledno $q \geq 1$. Obeležimo dalje sa x i y brojeve

$$x = 2k - 2r - 1$$

$$y = q \cdot x .$$

Zapazimo da je zbog $r < k$

$$x > 0 \tag{67}$$

i zbog $q \geqslant 1$ i (66)

$$\begin{aligned} y &= q \cdot x \\ &= q(2k - 2r - 1) \\ &= 2a_1 - 2qr - 2r - q \\ &< 2a_1 . \end{aligned} \tag{68}$$

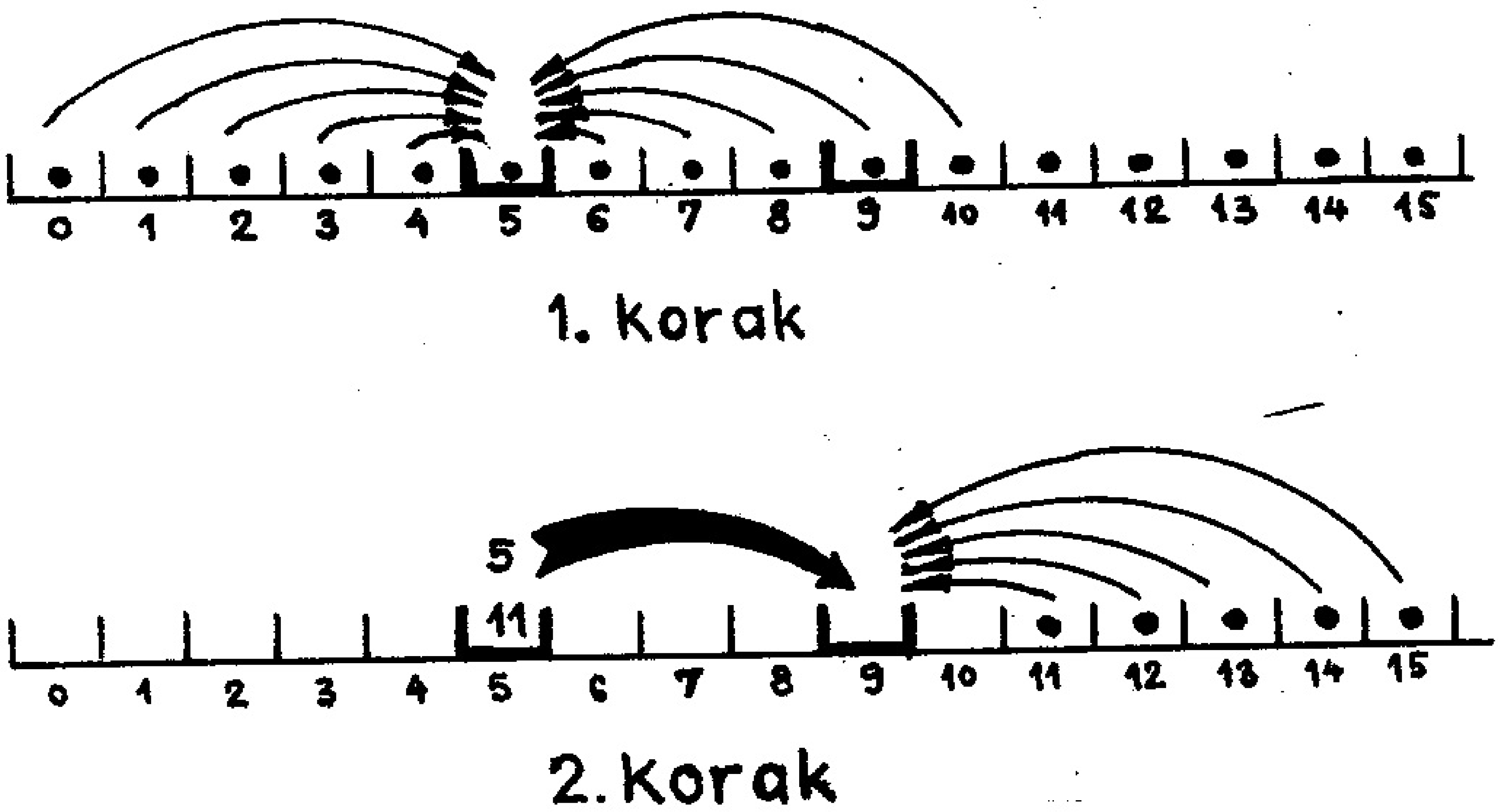
Označimo sada sa B box-reprezentaciju tranzitivnog turnira TT_{2a_1+x+1}. Primenimo sledeće transformacije. U prvom koraku premestimo sve kuglice iz box-ova $0,1,\ldots,a-1, a+1,a+2,\ldots,2a_1$ u box a_1. Prema teoremi 2.2. dobijena BR je legalna. U drugom koraku prebacimo sve kuglice iz box-ova $2a_1+1$, $2a_1+2,\ldots,2a_1+x$ u box a_2 i y kuglica iz box-a a_1 takodje u box a_2. Time smo postigli da su jedini neprazni box-ovi a_1 i a_2. Pokažimo da se drugi korak može izvesti i da je dobijena box-reprezentacija B´ legalna.

Kako box a_1 nakon prvog koraka sadrži $2a_1+1$ kuglica i kako je $y < 2a_1$, na osnovu (68), to se iz box-a a_1 može uzeti y kuglica, a da taj box ne ostane prazan.

Dalje, kako je

$$\begin{aligned} y \cdot k &= (a_1-k+1) + (a_1-k+2) + \ldots + (a_1-k+x) \\ &= k \cdot q(2k-2r-1) \end{aligned}$$

to prebacivanje y kuglica iz box-a a_1 u box a_2 i svih kuglica iz box-ova $2a_1+1$, $2a_1+2,\ldots,2a_1+x$ u box a_2 predstavlja niz od $(a_1-k+1) + (a_1-k+2) + \ldots + (a_1-k+x)$ elementarnih operacija. Stoga je B´ legalna BR. Slika 15. prikazuje prvi i drugi korak za $a_1 = 5$, $a_2 = 9$; $x = 5$, $y = 5$.



Sl. 15

Sličnom metodom, no sa daleko više različitih slučajeva, može se pokazati da je i svaki tročlani podskup nenegativnih celih brojeva skor-skup nekog turnira. To je takodje rezultat Reid-a [42] koji je dobijen na jedan drugi, takodje vrlo komplikovan način.

Sada ćemo dati dva opšta rezultata koja se odnose na podskupove proizvoljne kardinalnosti ali sa izvesnim ograničenjima.

TEOREMA 3.4. *Svaki konačan podskup skupa nenegativnih celih brojeva* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ *pri čemu je* $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ *i* $a_i + a_{i+2} > 2a_{i+1}$ *za svako* $i \in \{0,1,2,\ldots,n-2\}$ $(a_0 = 0)$ *je skor-skup nekog turnira.*

DOKAZ. Indukcijom po n. Pokazaćemo da za svako n $(n \geq 2)$ postoji BR nekog tranzitivnog turnira iz kojeg se, nakon primene konačnog broja elementarnih operacija, dobija BR čiji su jedini neprazni box-ovi $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Za $n = 2$ imamo skup $\{a_1, a_2\}$ pri čemu je $a_0 + a_2 > 2a_1$, tj. $a_2 > 2a_1$. To je zapravo slučaj 1. prethodne teoreme.

Pretpostavimo sada da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj manji od n i posmatrajmo skup $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ nenegativnih celih brojeva za koje važi

$$\begin{aligned} &0 \leqslant a_1 < a_2 < \dots < a_n \\ &a_i + a_{i+2} > 2a_{i+1} \end{aligned} \tag{69}$$

za svako $i \in \{0,1,2,\dots,n-2\}$, gde je $a_0 = 0$. Neka je

$$a_i' = a_i - 2a_1 \tag{70}$$

za svako $i = 2,3,\dots,n$. Kako je, prema (69),

$$\begin{aligned} a_3' &= a_3 - 2a_1 \\ &> (2a_2 - a_1) - 2a_1 \\ &= 2a_2 - 3a_1 \\ &> 2a_2 - 4a_1 \\ &= 2a_2' \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} a_i' + a_{i+2}' &= (a_i - 2a_1) + (a_{i+2} - 2a_1) \\ &> 2a_{i+1} - 4a_1 \\ &= 2a_{i+1}' \end{aligned}$$

to je, po indukcijskoj pretpostavci, $\{a_2', a_3', \dots, a_n'\}$ skor-skup nekog turnira T''.

Obeležimo sa B_1 BR od TT_{2a_1} i sa B_2 BR od nekog TT_k iz koje se elementarnim operacijama dobija BR od T''. Napravimo sada "kompoziciju" od B_1 i B_2. Naime, numeraciju box-ova u B_1 ostavimo nepromenjenom dok brojeve box-ova u B_2 izmenimo po formuli

$$i' = i + 2a_1$$

$i' = 0,1,2,\dots,k-1$. Primenjujući na B_1 elementarne operacije tako da jedini neprazan box ostane a_1, a na B_2 elementarne operacija takve da neprazni ostanu samo box-ovi $a_2', a_3', \ldots$ $\ldots a_n'$ dobijemo kao "kompoziciju" BR u kojoj su jedini neprazni box-ovi a_1, $a_2 = a_2' + 2a_1$, $a_3 = a_3' + 2a_1, \ldots, a_n = a_n' + 2a_1$. Time je teorema dokazana.

Direktna posledica ove teoreme je

TEOREMA 3.5. *(Reid [42]) Neka je* $S = \{a, ap, aq^2, \ldots, aq^n\}$ *gde su* a, q *i* n *prirodni brojevi,* $q > 1$. *Tada je* S *skor-skup nekog turnira.*

DOKAZ. Za $n = 0$ ili $n = 1$ tvrdjenje sledi iz teoreme 3.3. Za $n \geq 2$ imamo za $q \geq 2$

$$\begin{aligned} aq^i + aq^{i+2} &= aq^i(1+q^2) \\ &> a \cdot q^i \cdot 2q \\ &= 2aq^{i+1} \end{aligned}$$

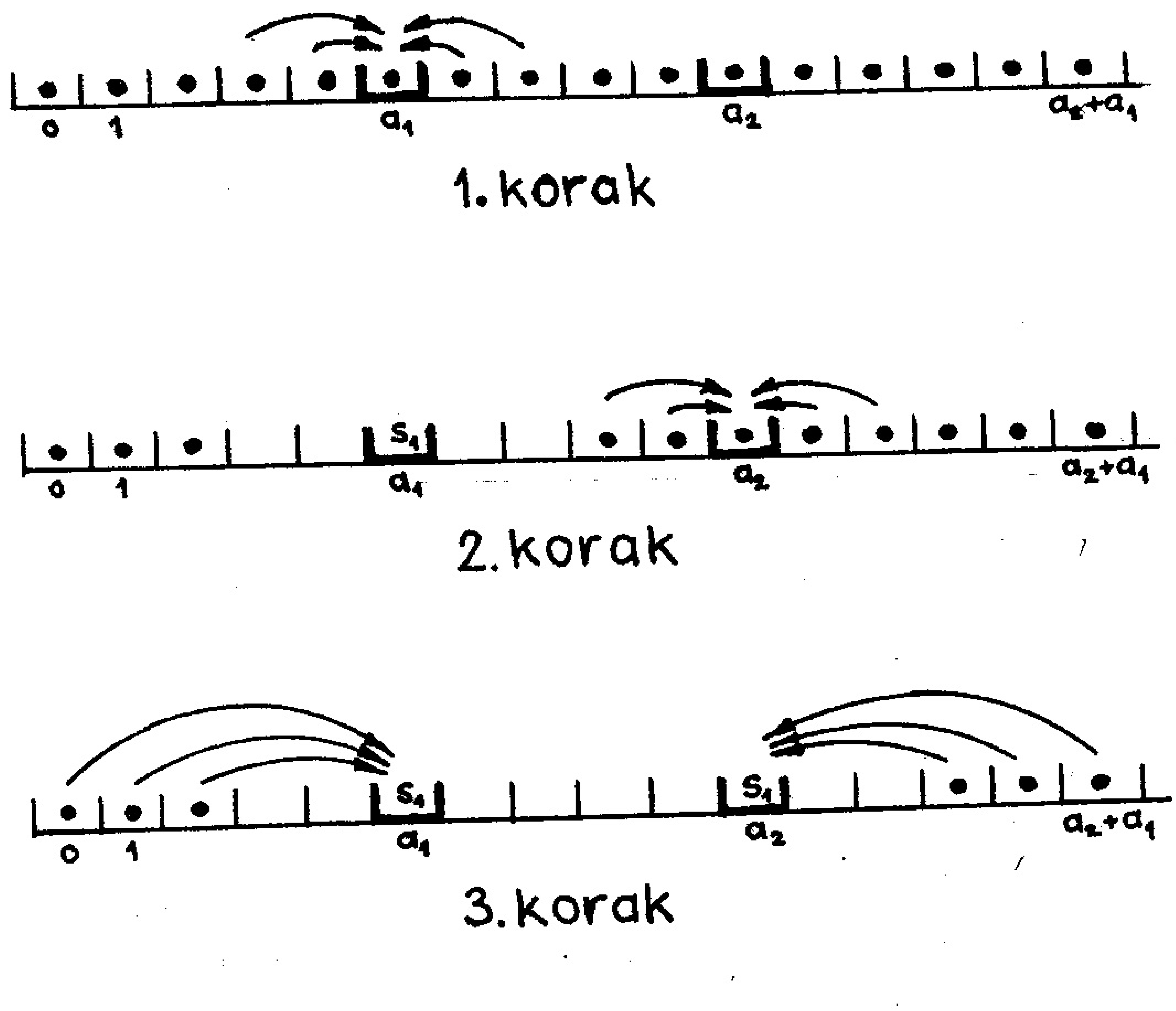
pa tvrdjenje sledi iz prethodne teoreme.

TEOREMA 3.6. *Svaki konačan podskup nenegativnih celih brojeva* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *takvih da je* $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ $(n \geq 2)$ *i* $a_{i+1} - a_i \equiv 1 \pmod 2$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *je skor-skup nekog turnira.*

DOKAZ. Indukcijom po n $(n \geq 2)$. Za $n=2$ imamo tvrdjenje teoreme 3.2. Ovde ćemo, nezavisno od dokazane teoreme, dati jedan dokaz koji se odnosi na slučaj $a_2 - a_1 \equiv 1 \pmod 2$.

Za $a_2 > 2a_1$ dokaz je isti kao u slučaju 1 teoreme 3.3. Stoga uzimamo da je $a_2 \leq 2a_1$ i uočimo BR od $TT_{a_2+a_1+1}$. Izvršimo sledeće elementarne operacije. Prvo kuglice iz box-ova $(3a_1-a_2+1)/2$, $(3a_1-a_2+1)/2+1, \ldots, a_1-1$, a_1+1, $a_1+2, \ldots$ $\ldots, (a_1+a_2-1)/2$ premestimo u box a_1. Primetimo da je to moguće jer je broj box-ova izmedju box-ova a_1 i box-a a_2 paran i $a_1 > (a_2-a_1-1)/2$. Dalje, kuglice iz box-ova $(a_1+a_2-1)/2+1$, $(a_1+a_2-1)/2+2,\ldots,a_2-1,a_2+1,\ldots,(3a_2-a_1-1)/2$ premestimo u box a_2. Najzad, kuglice iz box-ova $0,1,\ldots,(3a_1-a_2+1/2-1$ premestimo u box a_1, a kuglice iz box-ova $(3a_2-a_1-1)/2+1$, $(3a_2-a_1-1)/2+2,\ldots,a_2+a_1$ u box a_2. Dobijena BR je legalna i ima kuglice samo u box-ovima a_1 i a_2. Na slici 16. date su sve tri etape transformacije, pri čemu je

$$s_1 = 2(a_2-a_1-1)/2+1 = a_2 - a_1 .$$



Sl. 16

Pretpostavimo da tvrdjenje važi za manje od n ($n \geq 2$) nenegativnih celih brojeva i posmatrajmo skup $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ gde je $a_{i+1} - a_i \equiv 1 \pmod 2$ $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Po indukcijskoj pretpostavci postoji konačan broj elementarnih operacija koje BR od $TT_{a_{n-1}+a_1+1}$ prevode u BR čiji su jedini neprazni box-ovi $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Sada ćemo razmotriti dva slučaja.

1) $a_n - a_{n-1} > a_1$. Uočimo BR od $TT_{2a_n - a_{n-1} - a_1}$. Premestimo najpre $a_n - a_{n-1} - a_1 - 1$ kuglice koje se nalaze desno od box-a a_n i isto toliko sa leve strane u box a_n. Ostatak kuglica predstavlja BR od $TT_{a_{n-1}+a_1+1}$ koji se, kako je navedeno, može prevesti u BR sa nepraznim box-ovima $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Tako dobijamo BR čiji su jedini neprazni box-ovi $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a koja je očigledno legalna.

2) $a_n - a_{n-1} \leq a_1$. Označimo sa d polovinu broja box-ova izmedju box-a a_{n-1} i box-a a_n, tj.

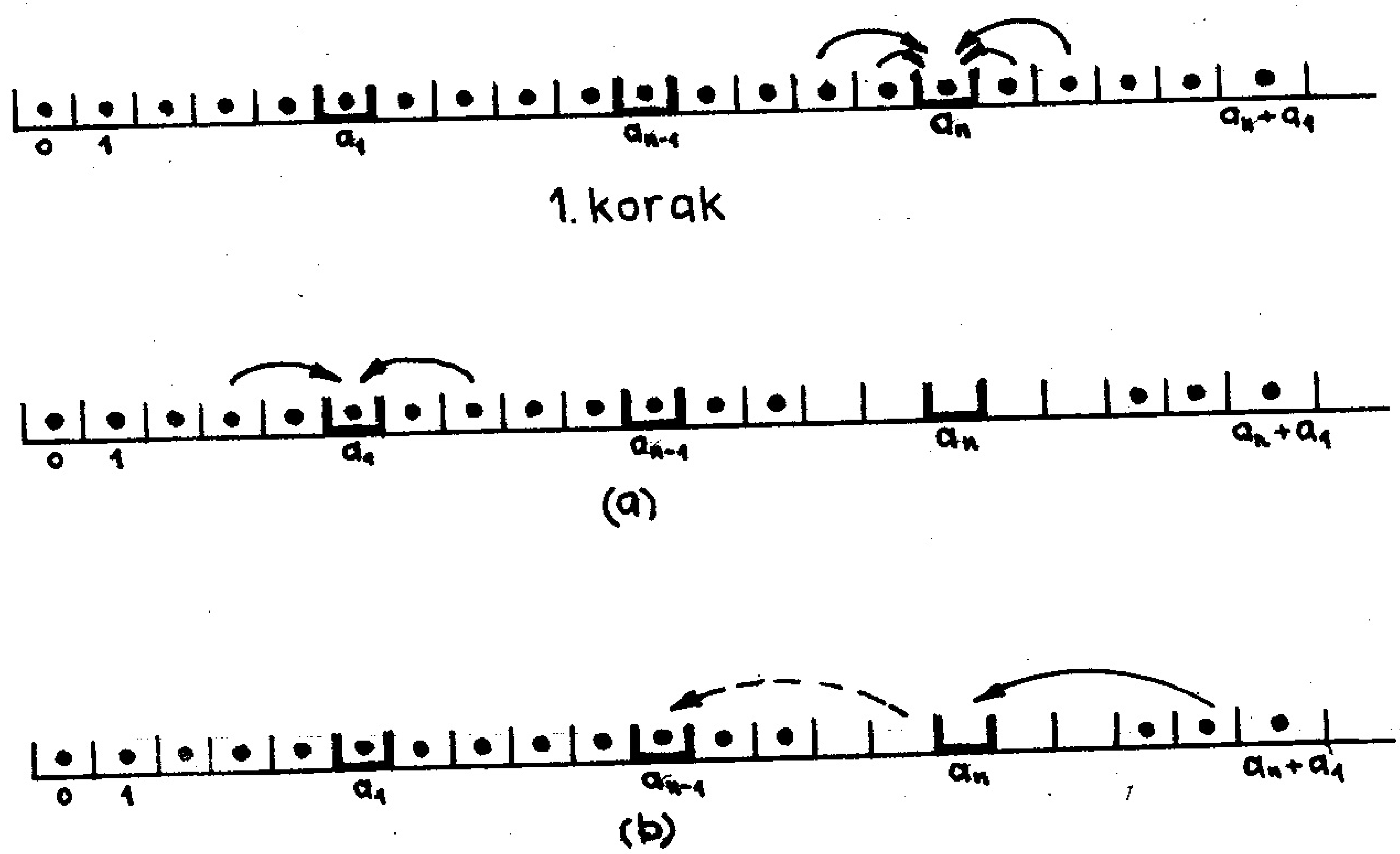
$$d = (a_n - a_{n-1} - 1) / 2.$$

Uočimo BR od $TT_{a_n+a_1+1}$ i premestimo kuglice, koje leže u prvih d box-ova levo i prvih d box-ova desno od box-a a_n, u box a_n. Dobijeni BR, očito legalan, označimo sa B_1.

Sada ćemo posmatrati transformacije u BR-u od $TT_{a_{n-1}+a_1+1}$ koje vode BR-u sa nepreznim box-ovima $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ (indukcijska pretpostavka). Svaku od tih elementarnih operacija primenjivaćemo u B_1 prema sledećem algoritmu.

(a) Svako premeštanje kuglica iz box ova $0,1,\ldots$ $\ldots,a_{n-1}+d$ direktno kopiramo u B_1.

(b) Svako premeštanje kuglica iz box-ova $a_{n-1}+$ $+d+i$, $i=1,2,\ldots,a_1-d+1$ u box a_{n-1} zamenjujemo premeštanjem kuglice iz box-a a_n+d+i u box a_n. Lako se vidi da primenjujući pravila (a) i (b) ostajemo u domenu elementarnih operacija što povlači da dobijamo legalnu BR sa jedinim nepraznim box-ovima $a_1,a_2,\ldots,a_n$. Na sl. 17 su prikazane sve tri etape.



Sl.17

Time je dokaz teoreme završen.

Umesto običnih turnira možemo razmatrati problem egzistencije višepartitnih turnira sa zadatim skor-skupom. Ovde će biti reči o skor-skupovima bipartitnih turnira. Prvo nekoliko definicija.

DEFINICIJA 3.6. *Neka je* $T(X,Y)$ *bipartitni turnir sa klasama* X *i* Y. *Skor-skup* $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ *klase* X *i skor-skup* $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ *klase* Y *čine bipartitni skup turnira* T.

DEFINICIJA 3.7. *Ako su* A *i* B *skor-skupovi klasa* X *i* Y *bipartitnog turnira* $T(X,Y)$, *tada se* $A \cup B$ *zove skor-skup turnira* $T(X,Y)$.

Problem egzistencije bipartitnog turnira sa zadatim bipartitnim skor-skupom postavio je K.B.Reid (Fourth International Conference on Theory and Applications of Graphs, Kalamazoo 1981). K.Wayland [55] je dao potreban i dovoljan uslov za egzistenciju $T(X,Y)$ u slučaju $|X| > b_n$. Medjutim, neki bipartitni turniri postoje isključivo za $|X| = b_n$. Kako ta klasifikacija nije poznata, praktično je nemoguće dati razuman potreban i dovoljan uslov za opšti slučaj.

Mi dajemo, koristeći jedan konstruktivni metod, potreban i dovoljan uslov da skupovi nenegativnih celih brojeva $A=\{a\}$ i $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ čine bipartitni skor-skup nekog bipartitnog turnira.

Kako obe klase bipartitnog turnira ne mogu imati čvorove sa skorom 0 to ćemo u daljem smatrati da a i b_1 nisu istovremeno jednaki 0. Takodje uzimamo da je $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$.

TEOREMA 3.7. ([35]) *Skupovi nenegativnih celih brojeva* $A=\{a\}$ *i* $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ $(a+b_1 \neq 0)$ *čine bipartitni skor-skup nekog bipartitnog turnira ako i samo ako je zadovoljen jedan od sledećih uslova:*

(a) $b_1+b_2+\ldots+b_{n-1} = (n-a-1)b_n$

(b) $b_1+b_2+\ldots+b_{n-1} > (n-a-1)(b_n+1)$

(c) $b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = (n-a-1)b_n + d$

$1 \leqslant d \leqslant n-a-1$ *i postoje prirodni brojevi* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$, *takvi da je*

$$ab_n = \gamma_1(b_n-b_1) + \gamma_2(b_n-b_2) + \ldots + \gamma_{n-1}(b_n-b_{n-1}).$$

<u>*DOKAZ.*</u> 1) Uslov je potreban. Najpre ćemo dokazati nejednakost

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} \geqslant (n-a-1)b_n . \qquad (71)$$

Neka je $T(X,Y)$ bipartitni turnir čije klase X i Y imaju redom skor-vektore

$$\underbrace{(a,\ a,\ \ldots,\ a)}_{\alpha}$$

i

$$(\underbrace{b_1,\ldots,b_1}_{\beta_1},\underbrace{b_2,\ldots,b_2}_{\beta_2},\ldots,\underbrace{b_n,\ldots,b_n}_{\beta_n})$$

gde je $\alpha \geqslant 1$ i $\beta_i \geqslant 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Obeležimo sa $y_{i1}, y_{i2},\ldots,y_{i\beta_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ čvorove iz Y koji imaju skor b_i, a sa $X_{i1},X_{i2},\ldots,X_{i\beta_i}$ podskupove od X takve da $X_{ij} \to y_{ij}$ $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\beta_i)$. Kako svaki čvor iz X ima skor a i kako je

$$X_{11} \cup \ldots \cup X_{1\beta_1} \cup X_{21} \cup \ldots \cup X_{2\beta_2} \cup \ldots \cup X_{n\beta_n}$$

jedan pokrivač skupa X, to je svaki čvor iz X pokriven sa tačno a podskupova X_{ij}. Otuda je

$$|X_{i1}| = \ldots = |X_{i\beta_i}| = |X| - b_i = \alpha - \beta_i$$

$(i=1,2,\ldots,n)$ i

$$|X_{11}| + \ldots + |X_{1\beta_1}| + |X_{21}| + \ldots + |X_{2\beta_2}| + \\ + \ldots + |X_{n\beta_n}| = a\alpha.$$

Otuda je

$$\alpha = \frac{\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_n b_n}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - a} \qquad (72)$$

Kako je $\alpha \geq b_n$ (broj čvorova u klasi X nije manji od najvećeg skora u Y) iz (72) dobijamo

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots + \beta_{n-1} b_{n-1} \geq (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_{n-1} - a) b_n \qquad (73)$$

Iz $\beta_i \geq 1$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ i $0 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ slede nejednakosti

$$\begin{aligned} (1-\beta_1) b_1 &\geq (1-\beta_1) b_n \\ (1-\beta_2) b_2 &\geq (1-\beta_2) b_n \\ &\vdots \\ (1-\beta_{n-1}) b_{n-1} &\geq (1-\beta_{n-1}) b_n \,. \end{aligned} \qquad (74)$$

Sabirajući (73) i (74) dobijamo (71).

Tako ostaje da se pokaže da relacija

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = (n-a-1) b_n + d \qquad (75)$$

$$1 \leq d \leq n-a-1$$

povlači relaciju $ab_n = \gamma_1 (b_n - b_1) + \gamma_2 (b_n - b_2) + \ldots + \gamma_{n-1} (b_n - b_{n-1})$ gde su γ_i $(i = 1,2,\ldots,n-1)$ neki prirodni brojevi.

Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_n$ čvorovi iz Y sa skorovima $b_1, b_2, \ldots, b_n$, redom i neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ podskupovi od X takvi da $X_i \to y_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Obeležimo sa s_i broj čvorova u X_i a sa s_o ukupan broj čvorova u svim ostalim podskupovima, tj.

$$s_i = |X_i| \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$s_o = |X_1| + \ldots + |X_{i-1}| + |X_{i+1}| + \ldots + |X_n| \, .$$

(Slučaj $s_o = 0$ je takodje moguć.) Tada imamo

$$b_i = \alpha - s_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + s_o = a\alpha$$

odakle sledi

$$b_i = (s_1 + \ldots + s_{i-1} + (1-a)s_i + s_{i+1} + \ldots + s_n + s_o) / a$$

Zamenjujući ovo u (75) dobijamo

$$(n-a)s_n + s_o = d$$

Kako je $s_n \geqslant 0$ i $1 \leqslant d \leqslant n-a-1$ (specijalno $a < n$) imamo

$$s_n = 0,$$

odnosno

$$\beta_n = \alpha \tag{76}$$

Predstavljajući (72) u obliku

$$\alpha = b_n + \frac{ab_n - \beta_1(b_n - b_1) - \beta_2(b_n - b_2) - \ldots - \beta_{n-1}(b_n - b_{n-1})}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n - a}$$

i imajući u vidu (76) dobijamo

$$ab_n = \beta_1(b_n - b_1) + \beta_2(b_n - b_2) + \ldots + \beta_{n-1}(b_n - b_{n-1})$$

Kako je $\beta_i \geqslant 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ stavljajući $\gamma_i = \beta_i$ dobijamo traženu relaciju.

2) Uslov je dovoljan. Struktura bipartitnog turnira $T(X,Y)$ je potpuno odredjena ako su poznati svi podskupovi od X koje dominiraju pojedini čvorovi iz Y. Upravo ti podskupovi će i biti konstruisani.

Shodno uslovima teoreme posebno će biti razmatrani sledeći slučajevi:

$$(a)\quad b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = (n-a-1)b_n .$$

Neka je $T(X,Y)$ bipartitni turnir sa klasama

$$X = \{1,2,\ldots,b_n\}$$

$$Y = \{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$$

i strukturom datom sa

$$\begin{aligned}
&y_1 \to \{1,2,\ldots,b_1\}\\
&y_2 \to \{b_1+1,\ldots,b_1+b_2\}\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (77)\\
&y_{n-1} \to \{b_1+\ldots+b_{n-2}+1,\ldots,b_1+\ldots+b_{n-2}+b_{n-1}\}\\
&y_n \to \{b_1+\ldots+b_{n-1}+1,\ldots,b_1+\ldots+b_{n-1}+b_n\}
\end{aligned}$$

(Sva sumiranja su po modulu b_n.).

Očigledno je

$$d_T^+(y_i) = b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n)$$

Iz (77) i činjenice da je

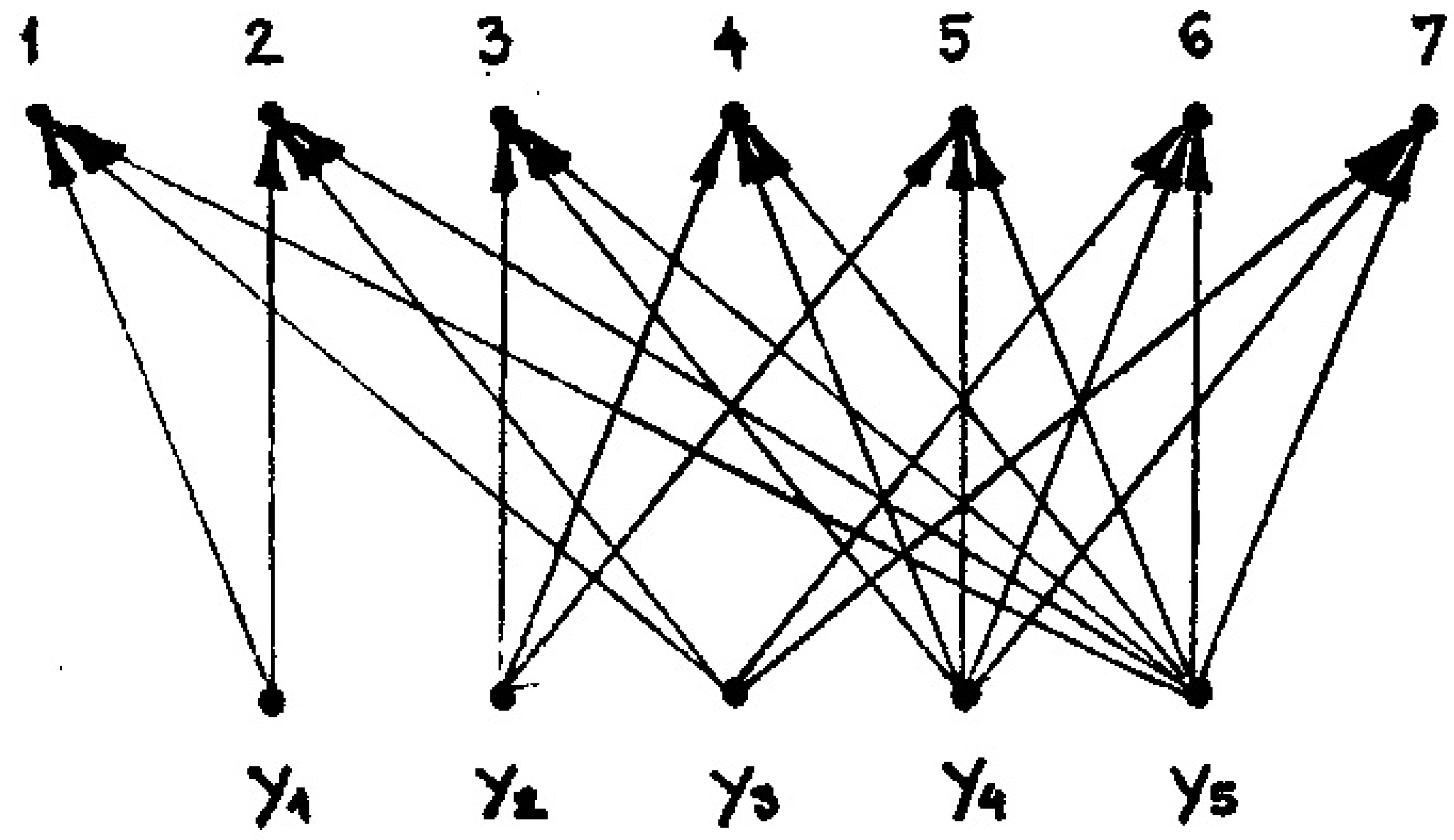
$$d^+(y_1) + d^+(y_2) + \ldots + d^+(y_n) =$$

$$= b_1 + b_2 + \ldots + b_n \doteq (n-a)b_n$$

sledi da je svaki čvor iz X dominiran od tačno $(n-a)$ čvorova iz Y. To znači da je

$$\begin{aligned}
d^+(x) &= |Y| - (n-a)\\
&= n - (n-a)\\
&= a
\end{aligned}$$

za svako $x \in X$, čime je slučaj (a) dokazan. Na Sl. 18. je primer bipartitnog turnira za $A = \{2\}$, $B = \{2,3,4,5,7\}$. Ovde je $n=5$ i $b_1+b_2+b_3+b_4 = 14 = (5-2-1)\cdot 7 = (n-a-1)b_n$. Klase su $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ i $Y = \{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$. Sve grane koje nisu naznačene orijentisane su od X ka Y.



Sl. 18

(b) $b_1+b_2+\ldots+b_{n-1} = (n-a-1)(b_n+1)+d, \quad (d \geq 1)$.

Uzmimo da je

$$X = \{1,2,\ldots,b_n+1\} .$$

$$Y = \{y_1,y_2,\ldots,y_{n-1},z_1,z_2,\ldots,z_d\}$$

i konstruišimo bipartitni turnir $T(X,Y)$ sa strukturom

$$
\begin{aligned}
&y_1 \to \{1,2,\ldots,b_1\}\\
&y_2 \to \{b_1+1,\ldots,b_1+b_2\}\\
&\vdots\\
&y_{n-2} \to \{b_1+\ldots+b_{n-3}+1,\ldots,b_1+\ldots+b_{n-3}+b_{n-2}\}\\
&y_{n-1} \to \{b_1+\ldots+b_{n-2}+1,\ldots,b_1+\ldots+b_{n-2}+b_{n-1}\}\\
&z_1 \to \{b_1+\ldots+b_{n-1}+1,\ldots,b_1+\ldots+b_{n-1}+b_n\} \qquad (78)\\
&z_2 \to \{b_1+\ldots+b_n+1,\ldots,b_1+\ldots+b_n+b_n\}\\
&\vdots\\
&z_d \to \{b_1+\ldots+b_{n-1}+(d-1)b_n+1,\ldots,b_1+\ldots+b_{n-1}+db_n\}
\end{aligned}
$$

(Sva sumiranja su po modulu b_n+1.)

Lako se vidi da je

$$d_T^+(y_i) = b_i \qquad (i=1,2,\dots,n-1)$$

$$d_T^+(z_j) = b_n \qquad (j=1,2,\dots,d).$$

Kako je

$$d^+(y_1)+\dots+d^+(y_{n-1}) + d^+(z_1)+\dots+d^+(z_d) =$$

$$= b_1 + \dots + b_{n-1} + d\cdot b_n$$

$$= (n-a-1)(b_n+1) + d + d\cdot b_n$$

$$= (n-a-1+d)(b_n+1)$$

to iz (78) sledi da je svaki čvor iz X dominiran od tačno (n-a-1+d) čvorova iz Y. Stoga je

$$d_T^+(x) = |Y| - (n-a-1+d)$$

$$= (n-1+d) - (n-a-1+d)$$

$$= a$$

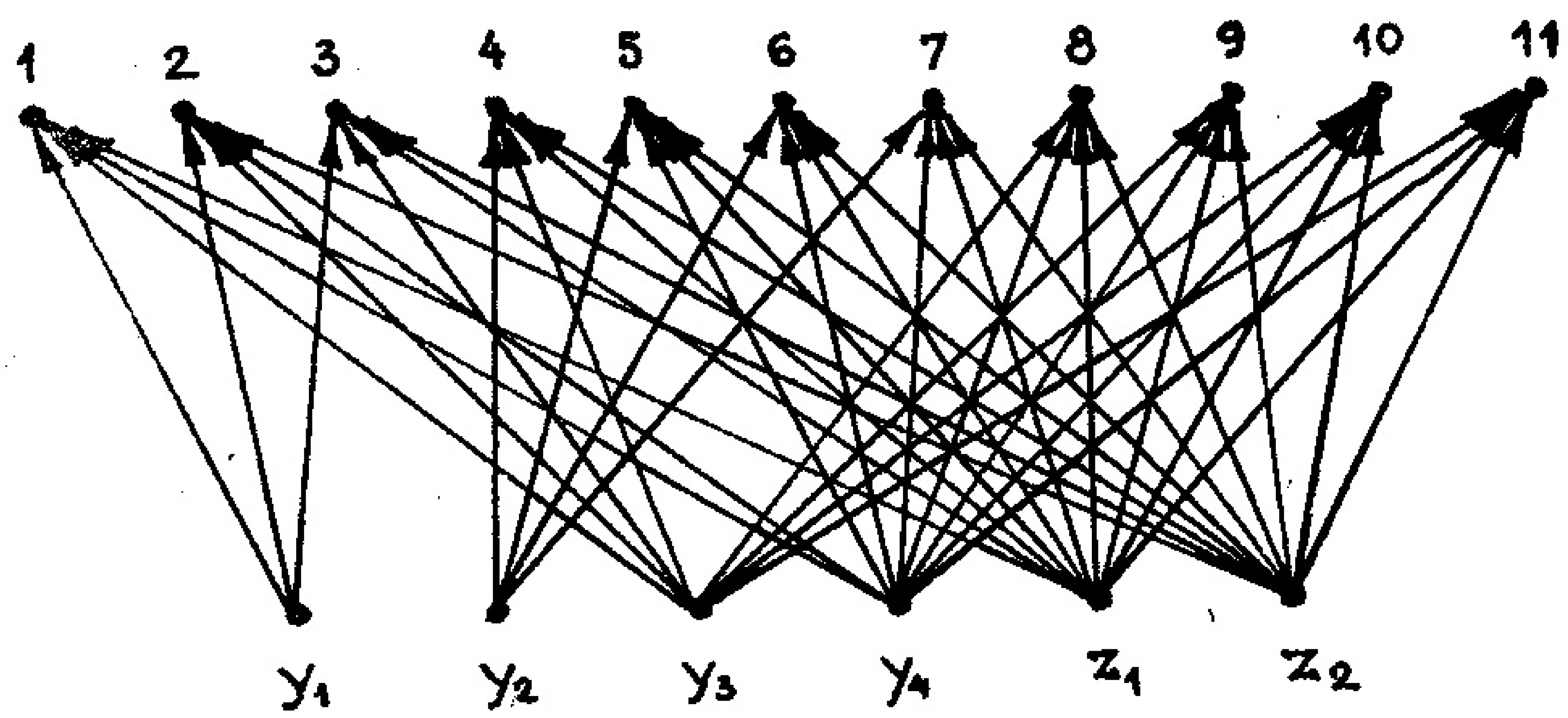
za svako $x \in X$, što znači da je $T(X,Y)$ traženi turnir. Na sl. 19. je prikazan slučaj $A=\{2\}$, $B=\{3,4,8,9,10\}$. Tu je $n=5$, $d=2$,

$$b_1+b_2+b_3+b_4 = 3+4+8+9$$

$$= 24$$

$$= (5-2-1)(10+1) + 2$$

$$= (n-a-1)(b_n+1)+d$$



Sl. 19

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ i

$Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, z_1, z_2\}$.

(c) $b_1+b_2+\ldots+b_{n-1} = (n-a-1)b_n+d, \quad (1 \leq d \leq n-a-1)$

$ab_n = \gamma_1(b_n-b_1)+\gamma_2(b_n-b_2)+\ldots+\gamma_{n-1}(b_n-b_1) \quad (\gamma_i > 0)$

Neka je $T(X,Y)$ bipartitni turnir sa klasama

$$X = \{1,2,\ldots,b_n\}$$

$$Y = \{y_{11},\ldots,y_{1\gamma_1},y_{21},\ldots,y_{2\gamma_2},\ldots,$$
$$y_{n-1,1},\ldots,y_{n-1,\gamma_{n-1}},y_n\}$$

i strukturom

$$y_{11} \to \{1,2,\ldots,b_1\}$$
$$y_{12} \to \{b_1+1,\ldots,2b_1\}$$
$$\vdots$$
$$y_{1\gamma_1} \to \{(\gamma_1-1)b_1+1,\ldots,\gamma_1 b_1\}$$
$$y_{21} \to \{\gamma_1 b_1+1,\ldots,\gamma_1 b_1+b_2\}$$
$$\vdots$$
$$y_{2\gamma_2} \to \{\gamma_1 b_1+(\gamma_2-1)b_2+1,\ldots,\gamma_1 b_1+\gamma_2 b_2\}$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1,1} \to \{\gamma_1 b_1+\ldots+\gamma_{n-2}b_{n-1}+1,\ldots,\gamma_1 b_1+\ldots+\gamma_{n-2}b_{n-2}+b_{n-1}\}$$
$$\vdots$$
$$y_{n-1,\gamma_{n-1}} \to \{\gamma_1 b_1+\ldots+\gamma_{n-2}b_{n-2}+(\gamma_{n-1}-1)b_{n-1}+1,\ldots$$
$$,\gamma_1 b_1+\ldots+\gamma_{n-1}b_{n-1}\}$$
$$y_n \to \{\gamma_1 b_1+\ldots+\gamma_{n-1}b_{n-1}+1,\ldots,\gamma_1 b_1+\ldots+\gamma_{n-1}b_{n-1}+b_n\}$$

(Sva sumiranja su po modulu b_n.)

Jednostavno se proverava da je

$$d_T^+(y_{ij}) = b_i \qquad (i=1,\dots,n-1;\ j=1,\dots,\gamma_i)$$

$$d^+(y_n) = b_n \,.$$

Dalje je

$$d^+(y_{11})+\dots+d^+(y_{1\gamma_1})+d^+(y_{21})+\dots+d^+(y_{2\gamma_2}) +$$

$$+\dots+d^+(y_{n-1,1})+\dots+d^+(y_{n-1\gamma_{n-1}})+d^+(y_n) =$$

$$= \gamma_1 b_1+\gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_{n-1} b_{n-1} + b_n$$

$$= (\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_{n-1}-1)b_n + b_n$$

$$= (\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_{n-1}-a+1)b_n$$

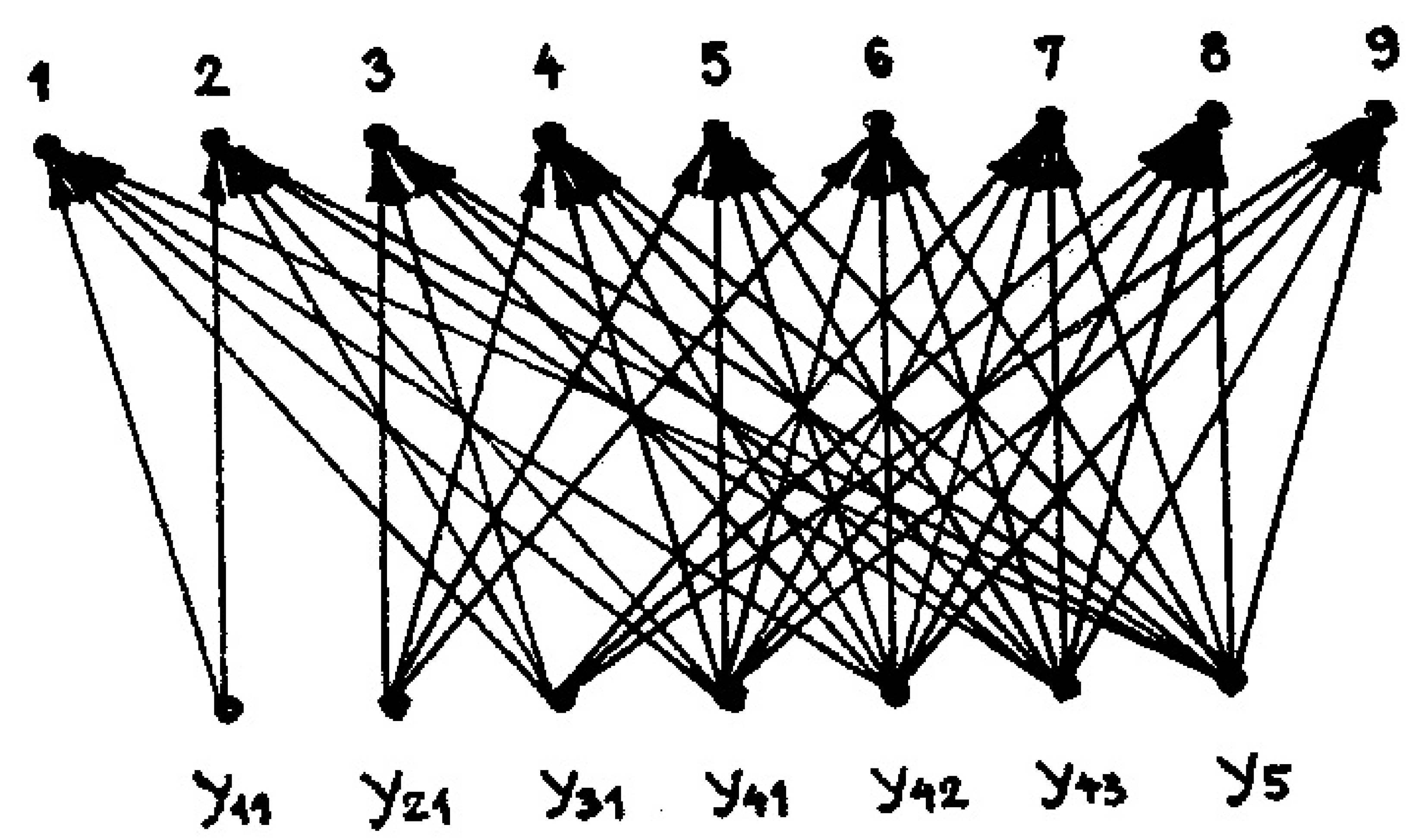
$$= (n-1-a+1)b_n$$

$$= (n-a)b_n$$

jer je $\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_{n-1} = |Y| - 1 = n-1$. To znači da je svaki čvor iz X dominiran od tačno $n-a$ čvorova iz Y, pa je

$$d^+(x) = |Y| - (n-a)$$
$$= n - (n-a)$$
$$= a$$

odakle sledi da je $T(X,Y)$ traženi bipartitni turnir. Na slici 20. je dat primer za $A=\{2\}$, $B=\{2,4,6,8,9\}$. Tu je $n=5$, $d = 2$.



Sl. 20

$$b_1+b_2+b_3+b_4 = 2+4+6+8$$
$$= 20$$
$$= (5-2-1)\cdot 9+2$$
$$= (n-a-1)b_n+d$$
$$ab_n = 2\cdot 9 = 18 = 1\cdot(9-2)+1\cdot(9-4)+1\cdot(9-6)+3(9-8)$$
$$= \gamma_1(b_n-b_1)+\gamma_2(b_n-b_2)+\gamma_3(b_n-b_3)+\gamma_4(b_n-b_4)$$

i

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$
$$Y = \{y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41}, y_{43}, y_5\}\ .$$

Teorema je dokazana.

Kao direktnu posledicu teoreme 2.7., shodno definiciji 2.7., imamo

TEOREMA 3.8. *Svaki konačan podskup skupa nenegativnih celih brojeva je skor-skup nekog bipartitnog turnira.*

DOKAZ. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ proizvoljan podskup nenegativnih celih brojeva takvih da je $0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Uzmimo da je $A = \{a_n\}$ i $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$. Kako je, očigledno, $a_n \geqslant n-1$ i kao posledica toga $((n-1)-a_n-1)(a_{n-1}+1) < 0$, to nejednakost

$$a_1+a_2+\ldots+a_{n-2} > ((n-1)-a_n-1)(a_{n-1}+1)$$

važi. Prema teoremi 2.7. (b) postoji bipartitni turnir čije klase imaju skor-skupove A i B, čime je teorema dokazana.

3.2. SKUPOVI FREKVENCIJA SKOROVA

Predmet ispitivanja skorova nekog digrafa ne moraju biti sami skorovi kao ni skupovi - skorova. Mogu se, naime, posmatrati samo učestalosti (frekvencije) skorova ili, opštije, skupovi frekvencija skorova. Prvi rezultati iz te problematike odnose se na obične turnire i dati su u [1]. Treba spomenuti da je problem skupa frekvencija stepena čvorova neorijentisanih grafova relativno jednostavan. Rezultati koji se odnose na specijalne klase neorijentisanih grafova mogu se naći u [13] i [24].

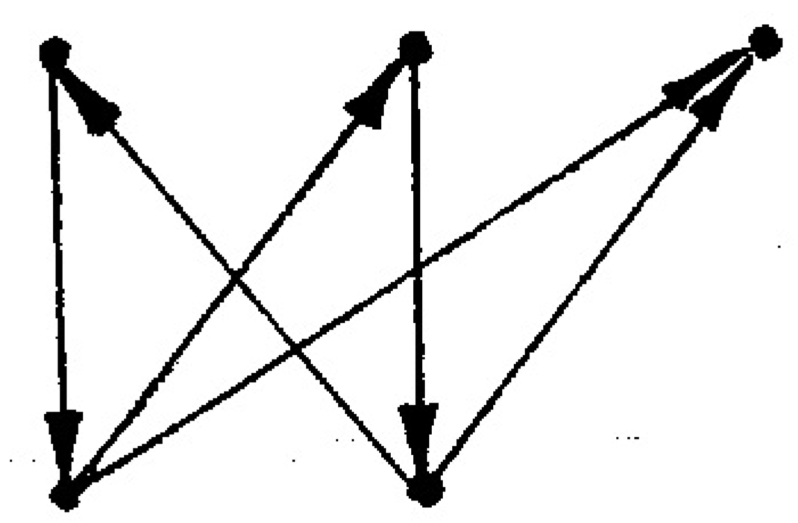
DEFINICIJA 3.8. *Frekvencija izlaznog (ulaznog) stepena* d *u digrafu* D *je broj čvorova u* D *čiji je izlazni (ulazni) stepen* d .

DEFINICIJA 3.9. *Skup frekvencija izlaznih (ulaznih) stepena* - $F^+(F^-)$ *čine sve različite frekvencije izlaznih (ulaznih) stepena koje se pojavljuju u* D .

DEFINICIJA 3.10. *Ako je za neki digraf* D $, F^+(D) = F^-(D) = F$ *tada se* F *zove skup frekvencija digrafa* D.

Zapazimo da je kod običnih turnira uvek $F^+(T) = F^-(T)$. U opštem slučaju za bipartitne turnire ne mora da važi. Na primer, kod bipartitnog turnira T_1 na sl. 2I.

T_1 :



Sl. 21

imamo: $F^+(T_1) = \{1,2\}$ i $F^-(T_1) = \{1,4\}$ (dva čvora sa izlaznim stepenom 2, dva sa izlaznim stepenom 1 i jedan sa izlaznim stepenom 0; četiri čvora sa ulaznim stepenom 1 i jedan sa ulaznim stepenom 2).

B.Alspach i K.B.Reid su u [1] razmatrali sledeći problem. Da li za dati podskup $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $f_1 < f_2 < \ldots < f_n$ skupa prirodnih brojeva postoji turnir čiji je skup frekvencija F i koliko najmanje čvorova može taj turnir da ima?

Mi ćemo se baviti istim pitanjima za slučaj bipartitnih i 3-partitnih turnira. U tu svrhu uvedimo sledeću oznaku. Sa $N_k(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ ćemo označavati najmanji broj takav da postoji k-partitni turnir čiji je skup frekvencija $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$.

Očigledno je

$$N_k(f_1,f_2,\ldots,f_n) \geqslant f_1+f_2+\ldots+f_n \; . \tag{79}$$

Sledeća jednostavna lema će se koristiti u dokazu glavnog tvrdjenja.

<u>*LEMA 3.2.*</u> *Ako svi čvorovi bipartitnog turnita* $T(X,Y)$ *imaju isti izlazni stepen* k *i isti ulazni stepen* ℓ *, tada je* $|X| = |Y| = 2m$ *i* $k = \ell$.

<u>*DOKAZ.*</u> Neka je $d^+(v) = k$ i $d^-(v) = \ell$ za svako $v \in V(T)$. Kako je $\ell = |X| - k = |Y| - k$ to je $|X| = |Y| = m_1$. S druge strane je

$$k\cdot(|X|+|Y|) = \ell\cdot(|X|+|Y|) = |E(T)|$$

$$|X|\cdot|Y| = |E(T)|$$

odakle sledi $m_1 = 2k = 2\ell$

<u>*TEOREMA 3.9.*</u> *([36])* *Neka je* $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ $f_1 < f_2 < \ldots < f_n$ *proizvoljan konačan podskup skupa prirodnih brojeva. Tada postoji bipartitni turnir čiji je skup frekvencija* F *i pri tome je*

$$N_2(f_1,f_2,\ldots,f_n) = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

za $n > 1$ *i*

$$N_2(f_1) = \begin{cases} f_1 & \text{za } f_1 \equiv 0 \pmod 4 \\ 2f_1 & \text{inače.} \end{cases}$$

DOKAZ. Razmatraćemo prvo slučaj $n=1$. To znači da svi čvorovi imaju isti izlazni i isti ulazni stepen. (Ulazni i izlazni stepen čvora ne moraju biti jednaki). Ako je $f_1=4k$ tada diregularni bipartitni turnir $T(X,Y)$ sa klasama $X=A_1\cup A_2$, $Y=A_3\cup A_4$, gde je $A_i\cap A_j=$ $=\emptyset$, $(i\neq j)$, $|A_i|=k$ $(i=1,2,3,4)$ i strukturom $A_1\to A_3$, $A_2\to A_4$ (sve ostale grane u $E(T)$ su orijentisane od Y ka X; ovakav sistem označavanja strukture ćemo slediti kroz čitav dokaz), ima skup frekvencija $\{f_1\}$. Ako je $f_1\not\equiv 0 \pmod 4$ tada, prema lemi 3.2., ne postoji bipartitni turnit sa f_1 čvorova i skupom frekvencija $\{f_1\}$. Dakle, u tom slučaju je $N_2(f_1)\geqslant 2f_1$. Kako bipartitni turnir $T(X,Y)$ definisan sa $|X|=|Y|=f_1$, $X\to Y$ ima skup frekvencija $\{f_1\}$, to je $N_2(f_1)=$ $=2f_1$ za $f_1\not\equiv 0 \pmod 4$.

Uzmimo sada da je $n>1$. Razlikovaćemo slučajeve kada je n parno, odnosno neparno.

(a) $n=2k$ $(k\geqslant 1)$. Za $k=1$ imamo $T(X,Y)$ dat sa: $|X|=f_1$, $|Y|=f_2$, $X\to Y$. Neka je stoga $k\geqslant 2$. Konstruišimo u tom slučaju bipartitni turnir $T_1(X,Y)$ čije su klase

$$X=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{k-1}\cup A_{2k}$$

$$Y=A_k\cup A_{k+1}\cup\ldots\cup A_{2k-1}$$

$$A_i\cap A_j=\emptyset,\ (i\neq j),\ |A_i|=f_i\ (i=1,2,\ldots,2k)$$

i struktura

$$A_i\to A_{2k-1-i}$$

za $i=1,2,\ldots,k$. (Ovu elegantnu strukturu dao je R.Tošić).

Pokažimo da je turnir $T_1(X,Y)$ traženi. Prvo, očigledno je

$$|V(T_1)| = f_1+f_2+\ldots+f_{2k} \tag{80}$$

Dalje, svi čvorovi iz A_i $(i=1,\dots,2k)$ imaju iste izlazne (ulazne) stepene. To znači da ostaje da se dokaže da su izlazni (ulazni) stepeni čvorova koji pripadaju skupovima A_i i A_j $(i \neq j)$ različiti. U tu svrhu označimo sa $d_i^+(d_i^-)$ izlazni (ulazni) stepen čvorova iz A_i, a sa S_1 i S_2 sume

$$S_1 = f_1+f_2+\dots+f_{k-1}+f_{2k} = |X|$$

$$S_2 = f_k+f_{k+1}+\dots+f_{2k-1} = |Y| .$$

Tada je, na osnovu definicije $T_1(X,Y)$,

$$d_i^+ = f_{2k-1-i} \qquad (i=1,2,\dots,k-1)$$

$$d_{2k}^+ = 0$$

$$d_j^+ = S_1 - f_{2k-1-j} \qquad (j=k,\ k+1,\dots,2k-2)$$

$$d_{2k-1}^+ = S_1$$

i

$$d_i^- = S_2 - f_{2k-1-i} \qquad (i=1,2,\dots,k-1)$$

$$d_{2k}^- = S_2$$

$$d_j^- = f_{2k-1-j} \qquad (j=k,k+1,\dots,2k-2)$$

$$d_{2k-1}^- = 0 .$$

Kako je $0 < f_1 < f_2 < \dots < f_{2k}$ svi izlazni stepeni d_i^+ $(i=1,2,\dots,k-1,2k)$ su medjusobno različiti. Isto važi za d_j^+ $(j=k,k+1,\dots,2k-1)$. Kako je najveći od d_i^+ -ova - f_{2k-2} manji od najmanjeg od d_j^+ -ova - $S_1 - f_{k-1}$ to svi izlazni stepeni $d_1^+, d_2^+,\dots,d_{2k}^+$ su medjusobno različiti. Za ulazne stepene se analogno dokazuje isto tvrdjenje.

Prema tome, $f_1, f_2, \ldots, f_{2k}$ je skup frekvencija turnira $T_1(X,Y)$ što, s obzirom na (80), dokazuje slučaj (a).

(b) $n = 2k+1$ $(k \geqslant 1)$. Neka je $T_2(X,Y)$ bipartitni turnir sa klasama

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{2k+1}$$

$$Y = A_k \cup A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{2k}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j), \ |A_i| = f_i, \ (i=1,2,\ldots,2k+1)$$

i strukturom

$$A_i \rightarrow A_{2k+1-i} \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

Koristeći oznake iz (a) i obeležavajući sa S_3 i S_4 sume

$$S_3 = f_1+f_2+\ldots+f_k+f_{2k+1} = |X|$$

$$S_4 = f_{k+1}+f_{k+2}+\ldots+f_{2k} = |Y|$$

dobijamo

$$d_i^+ = f_{2k+1-i} \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

$$d_{2k+1}^+ = 0$$

$$d_j^+ = S_3 - f_{2k+1-j} \qquad (j=k+1,k+2,\ldots,2k)$$

i

$$d_i^- = S_4 - f_{2k+1-i} \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

$$d_{2k+1}^- = S_4$$

$$d_j^- = f_{2k+1-j} \qquad (j=k+1,k+2,\ldots,2k) .$$

Na sličan način kao u (a) pokazujemo da su svi d_i^+-ovi $(i=1,2,\ldots,2k+1)$ medjusobno različiti odakle sledi da je $\{f_1,f_2,\ldots,f_{2k+1}\}$ skup frekvencija bipartitnog turnira T_2. Kako još $|V(T_2)| = f_1+f_2+\ldots+f_{2k+1}$ to je $N_2(f_1,f_2,\ldots,f_{2k+1}) = f_1+f_2+\ldots+f_{2k+1}$ čime je teorema u celini dokazana.

Za 3-partitne turnire se može postaviti isti problem. Medjutim, najveće teškoće nastaju u slučaju kada je zadati skup frekvencija jednočlan ili dvočlan. To je razlog što se slučaj jednočlanog skupa frekvencija razmatra zasebno.

<u>*TEOREMA 3.10.*</u> *([37]) Za svaki prirodan broj* f *postoji 3-partitni turnir čiji je skup frekvencija* $\{f\}$ *i pri tome je* $N_3(f) = 3f$ *izuzev u slučajevima:*

(a) $f \equiv 0 \pmod 3$ *kada je* $N_3(f) = f$;

(b) $f \not\equiv 0 \pmod 3$ *i* $f \equiv 0 \pmod 4$ *kada je*

$N_3(f) = 2f$.

<u>*DOKAZ.*</u> Neka je $T_1(X_1, X_2, X_3)$ 3-partitni turnir sa klasama koje zadovoljavaju uslov

$$|X_1| = |X_2| = |X_3| = f$$

i strukturom

$$X_1 \to (X_2 \cup X_3)$$

$$X_2 \to X_3$$

(sve ostale grane su orijentisane od X_i ka X_j za $i > j$; ova notacija će koristiti u daljem tekstu).

Različiti izlazni (ulazni) stepeni u T_1 su $2f$, f, 0 $(0, f, 2f)$ i svaki ima frekvenciju f. Kako je $|V(T_1)| = 3f$ to je

$$N_3(f) \leqslant 3f$$

Ako $f = 3f$ tada u 3-partitnom turniru $T_2(x_1, x_2, x_3)$ datom sa

$$|X_1| = |X_2| = |X_3| = k$$

$$X_1 \to X_2$$

$$X_2 \to X_3$$

svi čvorovi imaju isti izlazni stepen k i isti ulazni stepen k. Sledi da je $N_3(3k) = 3k$.

Uzmimo sada da je $f \not\equiv 0 \pmod 3$ i pretpostavimo da je $N_3(f) = f$. Neka je $T_3(x_1, x_2, x_3)$ 3-partitni turnir sa f čvorova čiji je skup frekvencija $\{f\}$. To znači da svi čvorovi imaju isti izlazni stepen a i isti ulazni stepen b. Tada je

$$b = |X_2| + |X_3| - a = |X_3| + |X_1| - a = |X_1| + |X_2| - a$$

odakle sledi

$$|X_1| = |X_2| = |X_3| , \quad \text{odnosno}$$

$$f = |V(T_3)| = |X_1| + |X_2| + |X_3| \equiv 0 \pmod 3 ,$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom. Prema tome,

$$N_3(f) \geqslant 2f$$

za $f \not\equiv 0 \pmod 3$. Za $f = 4k$, $k \not\equiv 0 \pmod 3$ 3-partitni turnir $T_4(X_1, X_2, X_3)$ sa klasama

$$X_1 = A_1 \cup A_2$$

$$X_2 = a_3 \cup A_4$$

$$X_3 = A_5$$

gde je

$$|A_i| = k, \ (i=1,2,3,4), \ |A_5| = 4k, \ A_i \cap A_j = \emptyset$$
$$(i \neq j)$$

i strukturom

$$A_1 \to A_3$$

$$A_2 \to A_4$$

ima skup frekvencija $\{f\}$. Izlazni (ulazni) stepeni koji se pojavljuju u T_4 su k i 4k (5k i 0), oba sa frekvencijom f. Kako je $|V(T_4)| = 8k = 2f$ to je $N_3(4k) = 2f$ za $f = 4k$, $k \not\equiv 0 \pmod 3$.

Najzad, pretpostavimo da je $f \not\equiv 0 \pmod 3$ i $f \not\equiv 0 \pmod 4$, a da postoji 3-partitni turnir $T(X,Y,Z)$ sa 2f čvorova čiji skup frekvencija $\{f\}$. Pokazaćemo , analizirajući više različitih slučajeva, da to vodi kontradikciji.

Neka su a i b $(a>b)$ dva različita izlazna stepena, svaki sa frekvencijom f, koji se pojavljuju u T. Označimo sa X_1 i X_2 podskupove klase X čiji čvorovi imaju izlazne stepene a i b, redom. (Dopušta se mogućnost da neki od skupova X_1, X_2 bude prazan.) Očigledno je $X_1 \cup X_2 = X$ i $|X_1|+|X_2| = |X|$. Podskupovi Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 se definišu analogno. Stavimo još $|X|=x$, $|Y|=y$, $|Z|=z$. Tada je

$$|V(T)| = x+y+z = 2f \tag{81}$$

Posebno ćemo razmatrati sledeće slučajeve:

Slučaj 1. Svi skupovi $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ su neprazni. Tada se u T pojavljuju sledeći ulazni stepeni

$$\begin{array}{ll} d_1^- = y+z-a & d_2^- = y+z-b \\ d_3^- = z+x-a & d_4^- = z+x-b \\ d_5^- = x+y-a & d_6^- = x+y-b \end{array} \tag{82}$$

Naime, $d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_5^-, d_6^-$ su ulazni stepeni čvorova iz X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, redom. Ova šema će se koristiti u svim slučajevima.

Kako je $|V(T)|=2f$, a skup frekvencija $\{f\}$, to su tačno dva ulazna stepena različita. Zbog $a>b$ imamo da je $d_i^- \neq d_{i+1}^-$ $(i=1,3,5)$. Dakle medju ulaznim stepenima d_1^-, d_3^- i d_5^- najmanje dva moraju biti jednaka. Bez uticaja na opštost, možemo uzeti da je $d_1^- = d_3^-$. To povlači $x=y$ i $d_2^- = d_4^-$. Sada šema (82) prelazi u

$$\begin{array}{ll} d_1^- = d_3^- = x+z-a & d_2^- = d_4^- = x+z-b \\ d_5^- = 2x-a & d_6^- = 2x-b. \end{array}$$

Iz istog razloga kao u prethodnom koraku i imajući u vidu da je $d_1^- \neq d_2$, $d_5^- = d_6^-$, zaključujemo da je ili $d_1^- = d_3^- = d_5^-$ što povlači $d_2^- = d_4^- = d_6^-$ ili $d_1^- = d_3^- = d_6^-$ što opet povlači $d_2^- = d_4^- = d_5^-$. U prvom slučaju dobijamo $x = y = z$ odakle, zbog (81), sledi $f \equiv 0 \pmod 3$, što je kontradikcija sa pretpostavkom. U drugom slučaju dobijamo iz prve i druge jednakosti

$$z - x = a - b$$

$$x - z = a - b$$

odakle sledi $a = b$ što je kontradikcija sa $a > b$.

Slučaj 2. Tačno jedan od skupova X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 je prazan. Bez uticaja na opštost možemo uzeti da je $X_2 = \emptyset$.

$$d_1^- = y + z - a$$

$$d_3^- = z + x - a \qquad d_4 = z + x - b$$

$$d_5^- = x + y - a \qquad d_6^- = x + y - b$$

Sledeći iste argumente kao u prethodnom slučaju aktuelno je sledeće:

(a) $d_1^- = d_3^-$. Tada je $x = y$ i

$$d_1^- = d_3^- = x + z - a \qquad d_4^- = x + z - b$$

$$d_5^- = 2x - a \qquad d_6^- = 2x - b.$$

Sada je ili $d_1^- = d_3^- = d_5^-$ ili $d_1^- = d_3^- = d_6^-$ i $d_4^- = d_5^-$. Iz prvog sledi $x = y = z$ odnosno $f \equiv 0 \pmod 3$, a iz drugog $a = b$, što su, kao što je već spomenuto kontradikcije sa pretpostavkama.

(b) $d_1^- = d_5^-$. Slično kao (a).

(c) $d_3^- = d_5^-$. Tada je $y = z$ pa imamo

$$d_1^- = 2y - a$$

$$d_3^- = d_5^- = x + y - a \qquad d_4^- = d_6^- = x + y - b.$$

Ako je $d_1^- = d_3^- = d_5^-$ tada je $x = y = z$ - kontradikcija. Zato možemo uzeti da je $d_1^- = d_4^- = d_6^-$. To povlači $y = x + a - b$ i

$$d_3^- = d_5^- = 2x - a \qquad d_1^- = d_4^- = d_6^- = 2x + a - 2b.$$

Tako su frekvencije izlaznih stepena a i b u $T(X,Y,Z)$ jednake f, a iste su i frekvencije ulaznih stepena $2x-a$ i $2x+a-2b$. Otuda je

$$|E(T)| = f(a+b) = f((2-a)+(2x+a-2b)) \tag{83}$$

odakle dobijamo

$$x = b$$

i na osnovu prethodnog

$$y = z = a .$$

S druge strane je

$$|E(T)| = xy + yz + zx \tag{84}$$

Kombinujući (83) i (84) sa činjenicom da je $2f = x + y + z = 2a + b$ dobijamo

$$(2a+b)(a+b)/2 = a^2 + 2ab$$

odnosno $a = b$ što je već ranije ukazana kontradikcija. Tako je slučaj 2 dokazan.

Slučaj 3. Tačno dva od skupova X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 su prazni. Uočimo odmah da prazni ne mogu da budu X_1 i X_2 ili Y_1 i Y_2 ili Z_1 i Z_2. Dva slučaja su esencijalno različita.

Slučaj 3.1. $X_2 = Y_2 = \emptyset$. Tada imamo

$d_1^- = y + z - a$

$d_3^- = z + x - a$

$d_5^- = x + y - a$ $\qquad d_6^- = x + y - b$,

pa sledeće mogućnosti dolaze u obzir:

(a) $d_1^- = d_3^-$. Sledi $x = y$. Sada za $d_1^- = d_3^- = d_5^-$ dobijamo $x = y = z$ - kontradikcija, pa preostaje $d_1^- = d_3^- = d_6^-$ $= 2x - b$. To implicira $x = y = (a+b)/2$, $z = (3a-b)/2$ i $f =$ $= (x+y+z)/2 = (5a+b)/4$. Kada to zamenimo u (83) i (84) dobijamo

$$(5a+b)(a+b)/4 = (a+b)^2/4 + 2(a+b)(3a-b)/4$$

odnosmo $a = b$ - kontradikcija.

(b) $d_1^- = d_5^-$. Sada je $x = z$. Kako je $d_5^- = d_6^-$ ostaje $d_1^- = d_3^- = d_5^-$ što daje $x = y = z$.

(c) $d_3^- = d_5^-$. Slično kao (a).

<u>*Slučaj 3.2.*</u> $X_2 = Z_1 = \emptyset$. Tada je

$d_1^- = y + z - a$

$d_3^- = z + x - a$ $\qquad d_4^- = z + x - b$

$\qquad d_6^- = x + y - b$.

odakle sledi jedna od relacija:

(a) $d_1^- = d_3^- = d_6^-$. To implicira $x = y$, $z = x +$ $+ a - b$ što predstavlja slučaj 3.1. (a).

(b) $d_1^- = d_4^- = d_6^-$. Sledi $x = z$, $y = x + a - b$, a to je u suštini opet slučaj 3.1.(a).

(c) $d_1^- = d_4^-$, $d_3^- = d_6^-$. Tada je

$$y = x + a - b$$
$$z = x + 2a - 2b,$$

pa dobijamo

$$d_1^- = d_4^- = 2x + 2a - b$$

$$d_3^- = d_6^- = 2x + a - 2b.$$

Koristeći (83) iz ovog dobijamo $x = (-a+3b)/2$, $y = (a+b)/2$, $z = (3a-b)/2$, $f = 3(a+b)/4$ što stavljeno u (84) daje

$$3(a+b)(a+b)/4 = (-a+3b)(a+b)/4 + (a+b)(3a-b)/4 + \\ + (3a-b)(-a+3b)/4$$

tj. $a = b$.

Tako je slučaj 3. kompletiran.

Slučaj 4. Tačno tri od skupova X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 su prazni. Lako se vidi da slučaj $X_i = Y_i = Z_i = \emptyset$ $(i=1,2)$ nije moguć. (U protivnom u $T(X,Y,Z)$ neće biti čvorova sa izlaznim stepenom a odnosno b). Bez uticaja na opštost može se uzeti da je $X_2 = Y_2 = Z_1 = \emptyset$, tj.

$$d_1^- = y + z - a$$

$$d_3^- = z + x - a \qquad\qquad d_6^- = x + y - b.$$

Očigledno, u ovom slučaju je

$$f = x + y = z$$

U obzir dolaze sledeće mogućnosti:

(a) $d_1^- = d_3^-$. Tada je $x = y$, $f = z = 2x$ pa imamo

$$d_1^- = d_3^- = 3x - a \qquad\qquad d_6^- = 2x - b.$$

Zamenjujući u (83) dobijamo

$$5x = 2(a+b)$$

odakle sledi $x = y \equiv 0 \pmod 2$. To povlači $f = x + y = 2x \equiv 0 \pmod 4$ što je kontradikcija sa pretpostavkom $f \not\equiv 0 \pmod 4$.

(b) $d_3^- = d_6^-$. Sledi $z = y + a - b$, $x = a - b$, pa imamo

$$d_1^- = 2y - b$$
$$d_3^- = d_6^- = y + a - 2b\ .$$

Zamenjujući to u (83) dobijamo

$$y = 4b/3,\quad f = z = (3a+b)/3.$$

Najzad, zamenjujući sve ovo u (84) dobijamo

$$(3a+b)(a+b)/3 = (a-b)4b/3 + 4b(3a+b)/3 + $$
$$+ (3a+b)(a-b)/3$$

odnosno

$$b(7b - 3a) = 0.$$

Kako je $b \neq 0$ (jer je $y = 4b/3$ i $y \neq 0$) to je $3a = 7b$. To implicira

$$f = 8b / 3$$

odnosno, $f \equiv 0 \pmod 4$, što je već ukazana kontradikcija.

(c) $d_1^- = d_6^-$. Slično kao (b).

Tako su svi slučajevi ispitani. Dobijene kontradikcije povlače da je $N_3(f) > 2f$ za $f \not\equiv 0 \pmod 3$ i $f \not\equiv 0 \pmod 4$. Kako je s druge strane $N_3(f) \leq 3f$, to je u ovom slučaju $N_3(f) = 3f$.

Teorema 3.10. je dokazana.

Sada ćemo dati dokaz opšteg tvrdjenja.

<u>*TEOREMA 3.11.*</u> *Neka je* $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ $(n \geq 2)$, $0 < f_1 < f_2 < \ldots < f_n$ *proizvoljan konačan podskup skupa prirodnih brojeva. Tada postoji 3-partitni turnir čiji je skup frekvencija* F *i pri tome je*

$$N_3(f_1, f_2, \ldots, f_n) = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

za svako $n \geq 2$ *izuzev za* $n = 2$ *i* $f_1 = 1$, $f_2 = 2$ *kada je* $N_3(1,2) = 4$.

DOKAZ. Najpre ćemo dati dokaz za $n > 2$. Razlikovaćemo dva slučaja.

Slučaj 1. $n = 2k+1$ $(k \geq 1)$. Neka je $T_1(X_1, X_2, X_3)$ 3-partitni turnir sa klasama

$$X_1 = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{k-1} \cup A_{2k}$$

$$X_2 = A_k \cup A_{k+1} \cup \ldots \cup A_{2k-1}$$

$$X_3 = A_{2k+1}$$

gde je

$$|A_i| = f_i \quad (i=1,2,\ldots,2k+1), \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

i strukturom

$$A_i \to A_{2k-1-i} \qquad (i=1,2,\ldots,k-1)$$

$$X_2 \to X_3 .$$

Pokažimo da je turnir T_1 traženi. Prvo, očigledno je

$$|V(T_1)| = f_1+f_2+\ldots+f_{2k+1} \tag{85}$$

Dalje svi čvorovi skupa A_i imaju isti izlazni (ulazni) stepen, d_i^+ (d_i^-). Ako sa S_1 i S_2 označimo sume

$$S_1 = f_1+f_2+\ldots+f_{k-1}+f_{2k} = |X_1|$$

$$S_2 = f_k+f_{k+1}+\ldots+f_{2k-1} = |X_2|$$

tada je

$$d_i^+ = f_{2k-1-i} \qquad (i=1,2,\ldots,k-1)$$

$$d_j^+ = S_1 + f_{2k+1} - f_{2k-1-j} \qquad (j=k,k+1,\ldots,2k-2)$$

$$d_{2k-1}^+ = S_1 + f_{2k+1}$$

$$d_{2k}^+ = 0$$

$$d_{2k+1}^+ = S_1$$

i

$$d_i^- = S_2+f_{2k+1}-f_{2k-1-i} \qquad (i=1,2,\dots,k-1)$$

$$d_j^- = f_{2k-1-j} \qquad (j=k,k+1,\dots,2k-2)$$

$$d_{2k-1}^- = 0$$

$$d_{2k}^- = S_2 + f_{2k+1}$$

$$d_{2k+1}^- = S_2$$

Kako je $0 < f_1 < f_2 < \dots < f_{2k+1}$ to je

$$\begin{aligned} &0 < f_k < f_{k+1} < \dots < f_{2k-2} < S_1 < \\ &< S_1 + f_{2k+1} - f_{k-1} < S_1 + f_{2k+1} - f_{k-2} < \\ &< \dots < S_1 + f_{2k+1} - f_1 < S_1 + f_{2k+1} \end{aligned} \tag{86}$$

odnosno

$$\begin{aligned} &d_{2k}^+ < d_{k-1}^+ < d_{k-2}^+ < \dots < d_1^+ < d_{2k+1}^+ < \\ &< d_k^+ < d_{k+1}^+ < \dots < d_{2k-2}^+ < d_{2k-1}^+ \end{aligned} \tag{87}$$

Analogno se pokazuje da važi

$$\begin{aligned} &d_{2k-1}^- < d_{2k-2}^- < \dots < d_k^- < d_{2k+1}^- < d_1^- < d_2^- \\ &< \dots < d_{k-1}^- < d_{2k}^- \end{aligned}$$

Iz (85), (86) i (87) sledi

$$N_3(f_1,f_2,\dots,f_{2k+1}) = f_1+f_2+\dots+f_{2k+1} .$$

Slučaj 2. $n = 2k+2$ $(k \geqslant 1)$. Neka je $T_2(X_1,X_2,X_3)$ 3-partitni turnir sa klasama

$$X_1 = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup A_{2k+1}$$

$$X_2 = A_{k+1} \cup A_{k+2} \cup \ldots \cup A_{2k}$$

$$X_3 = A_{2k+2}$$

gde je

$$|A_i| = f_i \quad (i=1,2,\ldots,2k+2), \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

i strukturom

$$A_i \to A_{2k+1-i} \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

$$X_2 \to X_3.$$

Koristeći predjašnje oznake i stavljajući

$$S_3 = f_1+f_2+\ldots+f_k+f_{2k+1} = |X_1|$$

$$S_4 = f_{k+1}+f_{k+2}+\ldots+f_{2k} = |X_2|$$

dobijamo

$$d_i^+ = f_{2k+1-i} \qquad (i=1,2,\ldots,k)$$

$$d_j^+ = S_3+f_{2k+1}-f_{2k+1-j} \quad (j=k+1,k+2,\ldots,2k)$$

$$d_{2k+1}^+ = 0$$

$$d_{2k+2}^+ = S_3$$

i

$$d_i^- = S_4+f_{2k+2}-f_{2k+1-i} \quad (i=1,2,\ldots,k)$$

$$d_j^- = f_{2k+1-j} \qquad (j=k+1,k+2,\ldots,2k)$$

$$d_{2k+1}^- = S_4 + f_{2k+2}$$

$$d_{2k+1}^- = S_4 .$$

Slično kao u slučaju 1 pokazujemo da su svi d_i^+ - ovi (d_i^--ovi) medjusobno različiti što zajedno sa činjenicom da je

$$|V(T_2)| = f_1+f_2+\ldots+f_{2k+2}$$

implicira

$$N_3(f_1,f_2,\ldots,f_{2k+2}) = f_1+f_2+\ldots+f_{2k+2} \;.$$

Tako je prvi deo dokaza $(n > 2)$ završen.

Pretpostavimo sada da je $n = 2$. Neka je $F = \{f_1,f_2\}$ i uzmimo prvo da je

$$\{f_1,f_2\} \neq \{1,2\}$$

(a) $f_2 \neq 2f_1$. U 3-partitnom turniru $T_3(X_1,X_2,X_3)$ definisanom sa

$$|X_1| = |X_2| = f_1$$

$$|X_3| = f_2 - f_2 \neq f_1$$

$$X_1 \rightarrow X_2$$

$$X_2 \rightarrow X_3$$

pojavljuju se izlazni stepeni f_1 i f_2-f_1 sa frekvencijama $|X_1|+|X_3| = f_1+(f_2-f_1) = f_2$ i $|X_2| = f_2$, redom. Slično, ulazni stepeni koji se pojavljuju u T_3 su f_1 i f_2-f_1 i imaju frekvencije f_2 i f_1, redom. Prema tome, $N_3(f_1,f_2) = f_1+f_2$ za $f_2 \neq 2f_1$.

(b) $f_2 = 2f_1$. Ovde imamo dva slučaja.

(b1) $f_1 = 2k$ $(k \geqslant 1)$. Neka je $T_4(X_1,X_2,X_3)$ 3-partitni turnir sa klasama

$$X_1 = A_1 \cup A_2$$

$$X_2 = A_3 \cup A_4$$

$$X_3 = A_5$$

gde je

$$|A_i| = k \ (i=1,2,3,4 \ , \ |A_5| = 2k, \ A_i \cap A_j = \emptyset \ (i\neq j)$$

$$A_1 \to A_3$$
$$A_2 \to A_4$$
$$X_1 \to X_3$$
$$X_2 \to X_3 .$$

Lako se vidi da su izlazni stepeni koji se pojavljuju u T_4 0 i 3k i da imaju frekvencije f_1 i f_2, redom. Ulazni stepeni su 4k i k i takodje imaju frekvencije f_1 i f_2, redom. Kako je, očigledno, $V(T_4) = 6k = f_1 + f_2$ to je $N_3(f_1, f_2) = f_1 + f_2$ za $f_2 = 2f_1$, $f_1 = 2k$.

(b2) $f_1 = 2k+1$ $(k \geq 1)$ Neka je $T_5(X_1, X_2, X_3)$ 3-partitni turnir čije su klase

$$X_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{2k+1}\}$$
$$X_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2k+1}\}$$
$$X_3 = \{w_1, w_2, \ldots, w_{2k+1}\}$$

i čija je struktura data sa

$$u_i \to v_i \quad (i=1,2,\ldots,2k+1)$$
$$v_j \to \{w_{(j-1)(k+1)+1}, w_{(j-1)(k+1)+2}, \ldots, w_{j(k+1)}\}$$
$$(j = 1,2,\ldots,2k+1)$$

Čvorovi iz X_1 imaju izlazni stepen 1 i ulazni stepen 4k+1, dok čvorovi iz X_2 i X_3 imaju izlazni stepen 3k+1 i ulazni k+1. To znači da je f_1, f_2 skup frekvencija turnira T_5, a kako je $|V(T_4)| = 6k+3 = f_1+f_2$ to je $N_3(f_1, f_2) = f_1+f_2$ za $f_2 = 2f_1$, $f_1 = 2k+1$ $(k \geq 1)$

Tako je pokazano da je $N_3(f_1, f_2) = f_1+f_2$ za $\{f_1, f_2\} \neq \{1,2\}$.

Pretpostavimo sada da je

$$\{f_1, f_2\} = \{1,2\}.$$

Pokažimo prvo da ne postoji 3-partitni turnir sa 3 čvora čiji je skup frekvencija $\{1,2\}$. Zaista, 3-partitni turnir sa 3 čvora je običan turnir koji je, kao što je poznato, ili tranzitivan TT_3 ili konturan T_3^c. Medjutim, skup frekvencija od TT_3 je $\{1\}$, a od T_3^c je $\{3\}$.

Otuda je $N_3(1,2) \geqslant 4$.

Kako 3-partitni turnir $T_6(X_1, X_2, X_3)$ definisan sa

$$|X_1| = |X_2| = 1$$

$$|X_3| = 2$$

$$|X_1| \to (X_2 \cup X_3)$$

ima skup frekvencija $\{1,2\}$, to je $N_3(1,2) = 4$.

Time je dokaz teoreme završen.

R.Tošić je pokazao [54] da za k-partitne turnire važi

$$N_k(f_1, f_2, \ldots, f_n) = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$

za $n \geqslant k$. Problem ostaje otvoren za $n < k$. Samo neke od teškoća koje se u tom slučaju pojavljuju date su u dokazu teoreme 3.10. Naime, broj slučajeva koje treba posebno ispitati u opštem slučaju je nesagledivo velik i za sada nema dobre metode za njihovu kompletnu karakterizaciju i klasifikaciju.

L I T E R A T U R A

[1] B.Alspach,K.B.Reid, Degree frequences in digraphs and tournaments, *Journal of Graph Theory, Vol 2 (1978)*, 241-249.

[2] B.Alspach, K.B.Reid, D.R.Roselle, Bypasses in asymmetric digraphs, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B (1974)*, 11-18.

[3] B.Alspach, M.Rosenfeld, Realization of centain generalized poths in toumnaments, *Discrete Mathematics*, 34 (1981), 199-202.

[4] L.Beineke, J.W.Moon, On bipartite tournaments and scores, *The Theory of Applications of Graphs*, Fourth International Conference, Western Michigen University Kalamazoo, J.Wiley 1981, 55-71.

[5] L.Beineke, K.B.Reid, Tournaments, *Selected topics in graph theory*, (ed. L.Beineke and R.J.Wilson, Academic Press, New York, 1979), 169-204.

[6] A.Benhocine, A.P.Wojda, On the existence of D(n,p) in directed graphs, *Annals of Discrete Mathematics* 17 (1983), 47-52.

[7] A.Benhocine, A.P.Wojda, On the existence of specified cycles in a tournament, *Journal of Graph Theory, Vol 7 (1983)*, 469-473.

[8] C.Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North Holland, Amsterdam 1983.

[9] J.C.Bermond, C.Thomassen, Cycles in digraphs - a survey, *Journal of Graph Theory*, 5(1981), 1-43.

[10] J.A.Bondy, U.S.Murty, *Graph Theory and Applications*, Macmillan, London (1976).

[11] P.Camion, Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets, *C.R.Acad.Sci. Paris*, 249(1959), 2151-2152.

[12] G.Chartrand, L.Lesniak, J.Roberts, Degree sets for digraphs, *Periodica Mathematica Hungarica, Vol. 7(1)*, (1976), 77-85.

[13] P.Z.Chinn, The frequency partition of a graphs, *Recent trends in Graph Theory,* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, (1971),Vol. 186, 69-70.

[14] P.Erdös, L.Moser, On the representations of directed graphs as union of orderings, *Publ.Inst.Hungar. Acad. Sci.* 9(1964), 125-132.

[15] R.Forcade, Parity of paths and circuits in tournaments, *Discrete Mathematics,* 6(1973), 115-118.

[16] D.Grant, Antidirected Hamiltonian cycles in digraphs, *Ars. Combinatoria,* 10(1980), 205-209.

[17] D.Grant, F.Jaeger, C.Payan, On digraphs without anti-directed cycles, *Journal of Graph Theory, Vol. 6*(1982), 133-138.

[18] B.Grünbaum, Antidirected Hamiltonian paths in tournaments, *Journal of Combinatorial Theory Ser.* B11(1971), 249-257.

[19] F.Harary, *Graph Theory,* Addison-Wesley Reading, Mass, 1969.

[20] F.Harary, L.Moser, The theory of round robin tournaments, *Amer.Math.Month.* 73(1966), 231-246.

[21] F.Harary, R.Norman, D.Cartwright, *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs,* Wiley, New York, 1965.

[22] M.C.Heydemann, D.Sotteau, C.Thomassen, Orientations of Hamiltonian cycles in digraphs, *Ars. Combinatoria, Vol. 14*,(1982), 3-8.

[23] F.B.Jacobson, Graph Theory and algorithms, Thesis,1982.

[24] R.H.Jonson, The frequency partitions of trees, *Procreedings of the 8 th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing,* 419-422.

[25] S.F.Kapoor, A.D.Polimeni, C.E.Wall, Degree sets for graphs, *Fundamenta Mathematicae* XCV(1977), 189-194.

[26] H.G.Landau, On dominance relations and the structure of animal societes: III The condition for a score structure, *Bull.Math. Biophisics* 15(1953), 143-148.

[27] L.Lesniak, A.Polimeni, J.Roberts, Asymmetric digraphs and degree sets, *Proceedings of the 7th Southeastern Conference on Combinatorics, Graphs Theory and Computing, 607-618.*

[28] N.Linial, M.Saks, V.Sós, Largest digraphs contained in all n-tournaments, *Combinatorica* 8(1983), 101-104.

[29] Mao-cheng Cai, A counter example to a conjesture of Grant, *Discrete Mathematics,* 44(1983), 111.

[30] J.W.Moou, On score sequences of an n-partite tournament, *Canad, Math. Bull. Vol 5,* No 1, Jan. 1962, 51-58.

[31] J.W.Moon, An extension of Landau´s theorem on tournaments, *Pacific Journal of Mathematics,* 13(1963),1343-1347.

[32] J.W.Moon, *Topics on tournaments,*Holt Rinehart and Winston, New York, 1968.

[33] V.Petrović, Jedan jednostavan dokaz teoreme Grünbaum-a, (saopštenje), I Jugoslovenski Seminar iz teorije grafova, Kragujevac, 1980.

[34] V.Petrović, Antidirected Hamiltonian circuits in tournaments, *Proceedings of the 4th Yugoslav Seminar on Graph Theory,* Novi Sad, (1983), 259-269.

[35] V.Petrović, On bipartite score sets, *Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad,* Volume 13(1983) 297-303.

[36] V.Petrović, On frequency sets of bipartite tournaments, *Proceedings of the 6th Yugolsav Seminar on Graph Theory* Dubrovnik, 1985, 173-178.

[37] V.Petrović, Degree frequencies in 3-partite tournaments, *Review of Research Faculty of Science-University of Novi Sad, Volume 16 (1986)* (u štampi).

[38] V.Petrović, On unavoidable subdigraphs of tournaments, *Review of Research Faculty Science-University of Novi Sad, Volume 16 (1986)* (u štampi).

[39] V.Petrović, Some unavoidable subgraphs of tournaments, (u štampi).

[40] V.Petrović, Unavoidable subgraphs in strong tournaments, (u štampi).

[41] L.Rédei, Ein kombinatorische Satz, *Acta.Sci. Math,* (Szeged) 7(1934), 39-43.

[42] K.B.Reid, Score sets for tournaments, *Proceedings of the 9th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing,* 421-432.

[43] K.B.Reid, E.T. Parker, Disproof of a conjectute of Erdös and Moser on tournaments, *Journal of Combinatorial Theory,* 9(1970), 225-238.

[44] M.Rosenfeld, Antidirected Hamiltonian paths in tournaments, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B* 12 (1972), 93-99.

[45] M.Rosenfeld, Antidirected Hamiltonian cycles in tournaments, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B* 16 (1974), 234-242.

[46] M.Saks, V.Sós, On unavoidable subgraphs of tournaments, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 37, Finite and infinite sets,* Eger (Hungary) 1981, 663-674.

[47] T.Szele, Kombinatorische Untersuchungen über gerichtete vollstëndige Graphen, *Publ.Math. Debrecen,* 13(1966), 145-168.

[48] C.Thomassen, Antidirected Hamiltonian circuits and paths in tournaments, *Math.Ann.* 201(1973), 231-238.

[49] C.Thomassen, Paths and cycles in graphs, Thesis 1976.

[50] C.Thomassen, Hamiltonian-connected tournaments, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B* 28(1980), 142-163.

[51] C.Thomassen, Landau's characterization of tournament score sequences, *Theory of Applications of Graphs* (ed. Gary Chartrand), Wiley 1981, 589-591.

[52] C.Thomassen, Private communication, 1984.

[53] A.Thomason, Paths and cycles in tournaments, Communication at the 1982 Southeastern Conference at Boca Raton.

[54] R.Tošić, Degree frequences in k-partite tournaments, (nepublikovano).

[55] K.Wayland, Bipartite score sets, *Canad Math.Bull. Vol 26. No 3,*1983, 273-279.