АЛФА БК УНИВЕРЗИТЕТ

ФАКУЛТЕТ ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСКЕ НАУКЕ

ФИГУРАТИВНИ БРОЈЕВИ КАО МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ ЗА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈУ ЗАКОНИТОСТИ МЕЂУ ПРИРОДНИМ БРОЈЕВИМА И РАЗВИЈАЊЕ КОНСТРУКТИВНОГ МИШЉЕЊА

Докторска дисертација

Кандидат:

мр Мирослава Михајлов Царевић

6901/2016

Ментор:

проф. др Милена Петровић

Београд, 2020.

ALFA BK UNIVERSITY

FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FIGURATIVE NUMBERS AS A MATHEMATICAL MODEL FOR THE REPREZENTATION OF LEGALITY BETWEEN NATURAL NUMBERS AND DEVELOPMENT OF A CONSTRUCTIVE OPINIONS

PhD thesis

Candidate:

mr Miroslava Mihajlov Carević

6901/2016

Mentor:

prof. Milena Petrović, PhD

Belgrade, 2020.

АЛФА БК УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФАКУЛТЕТ ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСКЕ НАУКЕ

ИЗЈАВА МЕНТОРА О ПРОЦЕНИ ОРИГИНАЛНОСТИ
И САГЛАСНОСТИ ЗА ПРЕДАЈУ
УРАЂЕНЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Изјављујем да сам након прегледаног рукописа докторске дисертације сагласна да кандидат мр Мирослава Михајлов Царевић може да преда Служби за последипломске студије Универзитета урађену докторску дисертацију под називом:

ФИГУРАТИВНИ БРОЈЕВИ КАО МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ ЗА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈУ ЗАКОНИТОСТИ МЕЂУ ПРИРОДНИМ БРОЈЕВИМА И РАЗВИЈАЊЕ КОНСТРУКТИВНОГ МИШЉЕЊА

ради организације њене оцене и одбране, и да дисертација садржи оригиналан научни допринос који се састоји у *конструисању математичких модела са фигуративним бројевима и њиховом доприносу развоју конструктивног мишљења.*

У Београду　　　　　　　　　　　　　　др Милена Петровић

___________　　　　　　　　　　　___________________
(потпис ментора)

Комисија

за преглед, оцену и јавну одбрану докторске дисертације

1. др Дејан Илић, редовни професор, Природно математички факултет, Универзитет у Нишу, председник.
   Ужа научна област: Математика.
2. др Милена Петровић, ван. професор, Природно математички факултет, Универзитет у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици, ментор.
   Ужа научна област: Математика.
3. др Небојша Денић, доцент, Природно математички факултет, Универзитет у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици, члан.
   Ужа научна област: Информациони системи и технологије.

Датум усмене одбране:

____

Захвалница

Захваљујем се др Милени Петровић, ментору у изради моје докторске дисертације, на несебичној помоћи у увођењу у савремене токове научно-истраживачког рада, праћењу мог истраживачког рада и објављивања радова, усмеравању током израде докторске дисертације и свим сугестијама које су биле изнад свега стручне и објективне.

ФИГУРАТИВНИ БРОЈЕВИ КАО МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛ ЗА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈУ ЗАКОНИТОСТИ МЕЂУ ПРИРОДНИМ БРОЈЕВИМА И РАЗВИЈАЊЕ КОНСТРУКТИВНОГ МИШЉЕЊА

Резиме

Један од основних дидактичких принципа у настави математике је принцип очигледности који подразумева стицање знања визуелизацијом објеката. Визуелизација и репрезентација су од изузетне важности у процесу учења математике и решавања математичких задатака. Још од античког периода датира мишљење чувених филозофа да посредством чула треба доћи до сазнања. Питагорејци су применом очигледности показали да је збир свих непарних бројева од 1 до 2n – 1 једнак n^2. Бројни су примери истицања важности очигледности која је само прелазна тачка ка апстрактном мишљењу. У том контексту фигуративни бројеви могу бити одличан апарат за уочавање законитости међу бројевима и развијање визуелно-логичког приступа решавању математичких задатака.

Фигуративни бројеви поседују једноставну дефиницију, сликовни приказ и многобројни скуп лако уочљивих законитости између својих чланова. Велики број законитости је установљен у претходном периоду али се стиче утисак да у тој области има још много до сада не откривених веза и релација. Током студијско истраживачког рада обављена су истраживања повезаности фигуративних бројева међусобно као и са природним бројевима, графовима, алгебарским функцијама. Резултати ових истраживања приказани су у 5 научних радова од којих је један публикован у научном часопису међународног значаја.

У овој докторској дисертацији изложене су теоријске основе и методолошки оквир истраживања ефикасности увођења фигуративних бројева у наставу математике. Фигуративни бројеви са својим сликовним приказом доприносе визуелизацији и сагледавању законитости међу бројевима, чиме обезбеђују остваривање принципа очигледности. Обављена истраживања су показала да ученици нису у довољној мери навикнути да уочавањем законитости међу бројевима решавају постављене задатке. Такође су показала да након рада са фигуративним бројевима ученици примењују визуелно–логички приступ проблему и у знатно већој мери успешно решавају задатке са бројним низовима и скуповима.

Током истраживања, при раду са ученицима, користили смо савремене технологије што је показало да су ученици у могућности да сврсисходно користе рачунаре и програмске пакете у настави. Такође смо примењивали рад у сарадничким групама. Ученици су током рада на часовима организовани у мале трочлане групе које су састављене од ученика различитог нивоа математичког знања. Такве групе су препоручене од многобројних истраживача ефикасног учења.

У дисертацији су описана истраживања која су обављена са ученицима основне и средње школе, њихови резултати и закључци до којих смо дошли. Обавили смо пет истраживања која су обухватила укупно 1148 ученика. Резултати обављених истраживања публиковани су (осим једног који је у процесу рецензије), у домаћим и међународним научним часописима и зборницима научних конференција. Истраживања су показала да фигуративни бројеви могу бити веома добро средство за представљање парадигми и развијање конструктивног мишљења.

Дисертација садржи 51 став и 14 теорема у којима су исказане законитости међу природним и фигуративним бројевима, фигуративним бројевима међусобно, фигуративним бројевима и алгебарским функцијама, графовима. Наведене законитости упућују на могућност формирања математичких модела за презентовање разних проблема у области теорије бројева. Наведени су модели који повезују троугаоне бројеве са савршеним бројевима, Питагориним триплетима, Паскаловим троуглом и Фибоначијевим низом бројева.

Кључне речи: фигуративни бројеви, визуелно–логички приступ, конструктивизам, парадигме, математички модел.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Теорија бројева

УДК:

FIGURATIVE NUMBERS AS A MATHEMATICAL MODEL FOR THE REPREZENTATION OF LEGALITY BETWEEN NATURAL NUMBERS AND DEVELOPMENT OF A CONSTRUCTIVE OPINIONS

Abstrac

One of the basic didactic principles in mathematics teaching is the principle of obviousness, which involves acquiring knowledge by visualizing objects. Visualization and representation are of utmost importance in the process of learning mathematics and solving mathematical problems. Since ancient times, the opinion of the famous philosophers dates back to the knowledge through the senses. The Pythagoreans showed by the obviousness that the sum of all odd numbers from 1 to 2n - 1 equals n^2. There are numerous examples of highlighting the importance of obviousness, which is only a point of departure for abstract thinking. In this context, figurative numbers can be an excellent apparatus for detecting regularities among numbers and developing a visual-logical approach to solving mathematical problems.

Figurative numbers have a simple definition, a pictorial representation and a multitude of easily recognizable laws between their members. A large number of legalities have been established in the previous period, but there is an impression that there are many unrevealed connections and relationships in the area. During the study research work it was carried out to study the connection of figurative numbers with each other as well as with natural numbers, graphs, algebraic functions. The results of these studies are presented in 5 scientific papers, one of which was published in a scientific journal of international importance.

In this doctoral dissertation, the theoretical bases and methodological framework for researching the efficiency of introducing figurative numbers in mathematics teaching are presented. Figurative numbers with their image contribute to the visualization and understanding of the laws among the numbers, which ensure the realization of the principles of obviousness. Studies have shown that students are not accustomed enough to solve tasks by observing legality among numbers. They also showed that after working with figurative numbers, students use a visual-logical approach to the problem and to a much greater extent successfully solve tasks with arrays and sets of numbers.

During the research, when working with students, we used modern technologies which showed that students were able to use computers and software packages in the teaching process. We also applied work in collaborative groups. While working on lessons, students are organized into small three-member groups composed of students of different levels of mathematical knowledge. Such groups are recommended by a wide range of effective learning instructors.

The dissertation describes the research done with primary and secondary school students, their results and the conclusions we came to. We conducted five surveys that included a total of 1148 pupils. The results of the research carried out have been published (except one that is in the process of being reviewed) in international and domestic scientific journals and proceedings of scientific conferences. Research has shown that figurative numbers can be a very good means of presenting paradigms and developing constructive thinking.

The dissertation contains 51 attitudes and 14 theorems in which regularities between natural and figurative numbers, figurative numbers with each other, figurative numbers and algebraic functions, graphs are shown. These lawfulness indicate the possibility of forming mathematical models for presenting various problems in the field of number theory. Models that connect triangular numbers to perfect numbers, Pythagorean triplets, Pascal's triangle and Fibonacci series of numbers are listed.

Key words: figurative numbers, visual-logical approach, constructivism, paradigms, mathematical model.

Scientific field: Mathematics

Scientific subfield: Theory of numbers

UDC:

САДРЖАЈ

Попис слика

Попис табела

УВОД

Током вишегодишњег професионалног бављења наставом математике увидели смо да је визуелно-логички приступ у решавању математичких проблема врло мало заступљен у настави математике. Ученици виших разреда основне школе, као и средње школе, првенствено се увежбавају у овладавању формулама и алгебарским поступцима помоћу којих долазе до решења датог задатка. Неопходно је да ученик повезивањем датих података у задатку формира једначину (или једначине) са једном или више непознатих и да их затим реши применом стечених знања о решавању једначина и система једначина. При том, врло мали број ученика, али и наставника математике, ће посегнути за визуелно-логичким начином решавања проблема. Примећује се да ученици аутоматски размишљају о једначинама које ће им „помоћи да реше постављени задатак“.

Истраживања која смо извршили у средњој и основној школи потврдила су наша емпиријска запажања. Када смо запитали ученике првог разреда средње школе колики је збир првих 1000 природних бројева, добили смо веома мали број тачних одговора. И у другом разреду средње школе ученици нису у већој могућности да решавају сличне задатке. Тек у трећам разреду, када се по наставном плану обрађују аритметички и геометријски низ, велики број ученика ће тачно израчунати збир првих 1000 природних бројева али примењујући формулу за збир првих n чланова аритметичког низа.

Ученици основне школе се на самом почетку учења математике упућују на очигледне везе и релације међу објектима. Током првог и другог разреда основне школе приметна је примена очигледне наставе али временом она прераста у упућивање ученика на овладавање поступцима и формулама и њиховој примени у решавању задатака. Касније током школовања, ученици се врло мало и врло ретко упућују на примену визуелно-логичког приступа при учењу математике и решавању математичких задатака. Визуелизација и репрезентација су од изузетне важности у процесу учења и разумевања математике и изузетно су корисне, понекад и неопходне при решавању математичких задатака.

Бројни су примери визуелно–логичког приступа решавању проблема, од античког периода до 21. века. Питагорејци су у античком периоду показали да је збир свих непарних бројева од 1 до 2n–1 једнак n^2. Занимљив је и поступак великог математичара Гауса, који је живео у 18. веку и као дечак од 10 година уочио законитост помоћу које је брзо и лако израчунао збир природних бројева од 1 до 100. Ученици који су упознати са Гаусовим поступком примењују га и брзо израчунавају разне збирове природних бројева. Али, ако им овај или сличан поступак никада није показан, мало ученика ће се досетити како да срачуна задати збир. Међутим, анализирањем савремене наставе математике у основној и средњој школи, уочава се одсуство визуелног приступа (осим у геометријским проблемима).

У процесу учења и решавања задатака парадигме заузимају значајно место. Оне доприносе бржем и лакшем решавању проблема пребацивањем на изоморфан проблем чије је решење познато. Фигуративни бројеви са својом сликовном презентацијом и законитостима које важе за њих, ученицима су веома интересантни и лако разумљиви а могу бити веома добро средство за презентацију парадигми и развијање конструктивног мишљења. Њихово графичко представљање је погодно за уочавање разних законитости па их је стога могуће примењивати на разним нивоима учења математике.

Фигуративни бројеви имају једноставну дефиницију али су веома богати разним својствима која их повезују са многобројним областима у математици. Законитости исказане у ставовима ове дисертације потврђују ову тврдњу и указују на могућност формирања математичких модела за презентовање разних проблема у области теорије бројева.

У овој докторској дисертацији анализирана је проблематика визуелно-логичког приступа при учењу математике и решавању математичких задатака са посебним освртом на фигуративне бројеве и њихов допринос развијању конструктивног мишљења. Дисертација је резултат дугогодишњег бављења теоријом бројева и наставом математике аутора дисертације као и истраживања обављених са ученицима основне и средње школе. Аутор дисертације се бави теоријом бројева од почетка својих последипломских студија. Специјалистички рад са темом „Еуклид и природни бројеви“ био је увод након чега је уследио магистарски рад са темом „Број код античких Грка“ да би дисертација била круна свеобухватног бављења теоријом бројева, посебно фигуративним бројевима као математичким моделима за репрезентацију законитости међу природним бројевима и са истраживањима њиховог доприноса развијању конструктивног мишљења ученика.

Садржај дисертације подељен је у шест глава.

Прва глава у дисертацији садржи хронолошки развој фигуративних бројева.
У првом поглављу ове главе изложен је историјски осврт на фигуративне бројеве, од питагорејских троугаоних, квадратних и правоугаоних до произвољних полигоналних бројева о којима је писани доказ оставио Диофант Александријски (3.в.н.е.). У свом спису „О полигоналним бројевима“ (Diophantus, 1974), Диофант наводи Хипсиклеса као аутора дефиниције полигоналних бројева и Никомаха као аутора законитости између полигоналаних бројева.
У другом поглављу прве главе представљени су полигонални фигуративни бријеви. Изведене су формуле за израчунавање произвољног n-тог члана троугаоних, квадратних, петоугаоних, шестоугаоних и m-угаоних бројева. Доказано је Никомахово тврђење о вези између полигоналних бројева које је исказано у ставу C1.1. Такође су изведене последице става C1.1. које исказују везу између произвољног m-угаоног броја и троугаоних бројева. Затим су представљени центрирани полигонални бројеви и изведене формуле за израчунавање произвољног n-тог члана центрираних троугаоних, квадратних, петоугаоних, шестоугаоних и m-угаоних бројева.
У трећем поглављу прве главе представљени су просторни фигуративни бројеви са посебним освртом на фигуративне бројеве правилних полиедара, пирамидалне фигуративне бројеве, центриране правилне полиедарске бројеве и центриране m-угаоне пирамидалне бријеве.

У другој глави су наведени ставови о фигуративним бројевима са доказима.
У првом поглављу друге главе наведени су ставови који се односе на полигоналне фигуративне бројеве означени са C2.1. до C2.14. Затим, у другом поглављу, следе ставови о фигуративним бројевима правилних полиедара који су означени са C2.15. до C2.27. Ставови C2.28. до C2.36 налазе се у трећем поглављу и односе се на пирамидалне фигуративне бројеве. У четвртом поглављу су наведени ставови C2.37 до C2.40. који се

односе на центриране полигоналне фигуративне бројеве, у петом поглављу ставови C2.41. до C2.45. који се односе на центриране полиедарске фигуративне бројеве и у шестом ставови C2.46. до C2.50. који се односе на центриране m-угаоне пирамидалне бријеве. Већина тврђења исказаних у ставовима је оригинална. Докази наведених ставова, као и свих других у дисертацији, изведени су применом разлика међу суседним члановима низова фигуративних бројева и разликама између поменутих разлика.

Трећа глава у дисертацији садржи математичке моделе за презентовање законитости међу природним бројевима. Фигуративни бројеви поседују једноставну дефиницију али су веома богати разним својствима која их чине погодним алаткама за презентовање разних законитости не само у области теорије бројева већ и у другим научним областима. У овом делу је начињен осврт на достигнућа појединих великана математике у области теорије бројева, од Никомаха из Герасе (1. век п.н.е.) до савремених истраживача 21. века. Показане су везе између троугаоних бројева и биномних коефицијената, Паскаловог троугла и полигоналних фигуративних бројева. Такође је указано на присуство фигуративних бројева и њихових модела у нуклеарној физици, медицини, метеорологији.

У четвртој глави су изложени педагошки аспекти упознавања фигуративних бројева.
У првом поглављу четврте главе изложена је расправа о визуелизацији и репрезентацији у настави математике са освртом на визуелно–логички приступ решавању математичких проблема кроз векове. Наведен је питагорејски начин израчунавања збира непарних бројева (Heath, 1981; Dejić & Mihajlović, 2015), Гаусов поступак израчунавања збира првих 100 природих бројева (Conway & Guy, 2012), Вертхајмеров поступак израчунавања збира првих n природних бројева (King, 2007). Такође су наведени примери визуелног приказа математичких законитости исказаних у алгебарским формулама који су примењени у истраживачком раду аутора дисертације обављеног са ученицима седмог разреда основне школе и приказаног у раду „*GeoGebra to help in the understanding and memorizing mathematical formulas*“, на Десетој међународној конференцији „Наука и високо образовање у функцији одрживог развоја – СЕД 2017“ у Ужицу (Mihajlov Carević & Denić, 2017).
У другом поглављу четврте главе изложен је осврт на процес учења математике и развој математичког мишљења. Наведен је Вертхајмеров пример „паралелограмског проблема“

(King, 2007) са закључком да је учење алгоритама без разумевања погрешно јер спречава дечију природу, људску тенденцију да виде ствари као структуиране целине и да продуктивно мисле. Алгоритамски начин решавања проблема и истинско разумевање проблемске ситуације је неопходно сјединити.

У трећем поглављу четврте главе анализиран је процес учења математике и решавања математичких задатака са освртом на парадигме и конструктивизам. Парадигме су изузетно корисне у процесу учења. Бавећи се испитивањем способности ученика шестог и седмог разреда основне школе да уочавањем законитости решавају разне задатке са природним бројевима, дошли смо до спознаје да су ученици недовољно упућени у такав приступ решавању задатака. Организовали смо упознавање ученика са троугаоним и квадратним бројевима у циљу презентације парадигми и развијања конструктивног мишљења код ученика. Резултати овог истраживања описани су у одељку 5.3.1 трећег поглавља пете главе и изложени су у нашем раду „Фигуративни бројеви као средство за презентацију парадигми и развијање конструктивног мишљења“ представљеном на Другој националној конференцији са међународним учешћем на Факултету техничких наука у Чачку (Mihajlov-Carević, Kopanja & Denić, 2017).

У четвртом поглављу четврте главе наведена је расправа о броју као основном елементу сазнања у настави математике. Проучавање броја као основног елемента нашег сазнања служило је, а служи и данас, као важан предмет за многе научне дисциплине: теорију сазнања, логику, математику, филозофију, историју културе. У свакој од тих дисциплина основним појмом броја бавили су се веома значајни умови чији су радови допринели већој спознаји броја као чиниоца основне области људског знања (Conway & Guy, 2012; Dickson, 2013; Heath, 1981; Mc Knight, Magid, Murphy & McKnight, 2000; Zazkis, & Campbell, 1996). Природне бројеве можемо сматрати пра – првим бројевима од којих су настали сви остали бројеви. Фигуративни бројеви као подскупови скупа природних бројева јасно имају своју улогу и значај у процесу упознавања ученика са теоријом бројева. Они поседују једноставне дефиниције и лако уочљиве законитости па су стога прикладни за рад са ученицима на свим нивоима образовања.

У петом поглављу четврте главе наведени су дидактички принципи у настави математике. Међу првим установљеним дидактичким принципима је принцип очигледности чија примена значи омогућавање ученицима да стичу знања помоћу перцепција која ће уз помоћ мишљења уопштавати у појмове. Фигуративни бројеви имају свој визуелни приказ, чиме је принцип очигледности задовољен а што препоручује бављење овим бројевима на свим нивоима наставе математике.

У петој глави дисертације је изложен методолошки оквир истраживања обављеног током израде докторске дисертације.

У првом поглављу пете главе изложен је проблем истраживања. Током вишегодишњег професионалног бављења наставом математике, аутор дисертације је уочила да је визуелизација при решавању математичких задатака недовољно заступљена у настави математике. Алгебарски поступци су овладали савременом математиком. Као што је Еуклид у 3.в.п.н.е. геометризовао алгебру тако је савремени период алгебраизовао математику. Ученици се упућују да, при решавању задатака, повезивањем познатих и непознатих елемената у задатку формирају једначине чијим решавањем ће добити решење постављеног задатка. Врло мали број ученика, али и наставника математике ће приступити визуелно–логичком начину решавања проблема.

У другом поглављу пете главе изложен је пројекат истраживања путем навођења ужег научног проблема истраживања, задатака у истраживању и њиховог остваривања, савремених образовних процеса примењених током истраживања и метода истраживачког рада. Ужи научни проблем истраживања био је проблем не научености ученика основне и средње школе да уочавањем законитости међу бројевима решавају задатке са низовима и скуповима бројева. Задаци у истраживању били су: остваривање увида у наученост ученика да решавају задатке уочавањем законитости међу бројевима; остваривање увида у способност ученика да након рада са фигуративним бројевима самостално уочавају законитости међу бројевима датог низа или скупа и решавају постављене задатке применом уочене законитости; остваривање увида у способност ученика да сврсисходно користе савремена технолошка достигнућа у настави. Задаци истраживања су остварени путем иницијалног теста који су ученици решавали на почетку истраживања, путем теста који су ученици решавали након обављеног рада са фигуративним бројевима и путем коришћења рачунара и програмског пакета Геогебра (GeoGebra) на часовима упознавања ученика са фигуративним бројевима и законитостима међу њима. Затим су наведени савремени образовни процеси примењени током истраживања. Један од главних циљева образовања у савременом добу је оспособљавање ученика за активно коришћење савремених технологија. Због тога је током истраживања рад са ученицима остварен уз компјутерску подршку. Настава је обављана у кабинету за информатику при чему су ученици радили у малим, трочланим, сарадничким групама. Овакав приступ се данас сматра једним од најнапреднијих за побољшање стицања и преношења знања. Методе примењене у истраживањима обухватају рад са паралелним групама. Формиране су експриментална и контролна група у сваком истраживању, при чему је експериментална група радила са фигуративним бројевима а контролна са другим, одговарајућим наставним садржајем. Пре и након обављеног експерименталног рада тестиране су обе групе. Резултати пре-теста и пост-теста су статистички обрађени, анализирани, упоређивани, на основу чега су изведени одговарајући закључци.

У трећем поглављу пете главе изложена су обављена истраживања и њихови резултати.

У првом одељку овог поглавља описано је прво истраживање обављено са ученицима седмог разреда основне школе чији су резултати иницирали остала обављена истраживања. Ово истраживање је показало да рад са фигуративним бројевима може бити ефикасна парадигма за уочавање законитости међу бројевима и решавање задатака применом уочене законитости. Истраживањем је обухваћено 8 одељења са укупно 243 ученика.

У другом одељку овог поглавља описано је истраживање обављено са ученицима првог разреда средње школе. Истраживањем је обухваћено 10 одељења са укупно 297 ученика. Циљ истраживања у овом раду био је сагледавање и утврђивање доприноса фигуративних бројева развоју способности уочавања законитости међу бројевима ученика првог разреда средње школе и дуготрајном памћењу бројног податка. Комплетни резултати и опис овог истраживања приказани су у нашем раду *„Figurative numbers contribution in perceiving the legality in numerous strings tasks and long-term memory of numerous data“,* (Mihajlov Carević, Petrović & Denić, 2019).

У трећем одељку овог поглавља описано је истраживање обављено са ученицима седмог разреда основне школе. Истраживањем је обухваћено 8 одељења са укупно 235 ученика. Циљ истраживања у овом раду био је сагледавање и утврђивање доприноса фигуративних бројева развоју способности уочавања законитости међу бројевима ученика седмог разреда основне школе. Комплетни резултати и опис овог истраживања приказани су у нашем раду „Multiple advantages of the establishment of figurate numbers in the maths curriculum“ (Mihajlov Carević, Petrović & Denić) који је у процесу рецензије.

У четвртом одељку овог поглавља описано је истраживање обављено са ученицима шестог разреда основне школе. Истраживањем је обухваћено 9 одељења са укупно 272 ученика. Методе истраживачког рада у свим истраживањима су исте само су математички задаци прилагођени узрасту ученика са којима се врши истраживање. Опис овог истраживања и комплетни резултати приказани су у нашем раду „*Numbers to development of visual logical approach to solving tasks with numerous strings*", на Међународној научној конференцији „Савремене перспективе васпитно–образовног рада" у Прешеву, (Mihajlov Carević, Petrović & Denić, 2018) и публиковани у часопису Универзитетска мисао.
Статистичке анализе обављене на крају ових истраживања показале су да су постигнућа ученика у уочавању законитости међу бројевима и примени уочених законитости у решавању задатака, боља након рада са фигуративним бројевима. Ученици шестог и седмог разреда основне школе као и ученици првог разреда средње школе су остварили напредовање у решавању задатака са бројним низовима и скуповима. Детаљна компаративна анализа статистичких резултата обављених истраживања показала је да рад са фигуративним бројевима доприноси развоју конструктивног мишљења ученика и неговању визуелно-логичког приступа у решавању математичких задатака, што је оригинални резултат аутора ове докторске дисертације.

У шестој глави дисертације изложена су истраживања међусобне повезаности фигуративних бројева и њихове повезаности са другим математичким објектима.
У првом поглављу шесте главе изложено је истраживање комбинованих сума природних и полигоналних бројева. У овом делу је конструисан математички модел за генерисање произвољног m-угаоног полигоналног броја применом квадратних и троугаоних бројева. Комплетни резултати овог истраживања изложени су у раду „ Polygonal numbers as sums of squares and triangular numbers" (Mihajlov Carević, Petrović & Denić) који је у процесу рецензије.
У другом поглављу шесте главе изложено је истраживање разлике између икосаедарских и октаедарских фигуративних бројева. Добијена разлика представљена је као двострука сума бинома природних бројева. Комплетни резултати овог истраживања изложени су у раду „On the representation of difference between icosahedral and octahedral numbers" (Mihajlov Carević, Petrović & Denić) који је у процесу рецензије.

У трећем поглављу шесте главе изложено је истраживање генератор функција за фигуративне бројеве. Приказан је поступак одређивања генератор функција за тетраедарске, хексаедарске, октаедарске, додекаедарске и икосаедарске фигуративне бројеве. Комплетни резултати овог истраживања изложени су у раду „Generating Function for the Figurative Numbers of Regular Polyhedron" (Mihajlov Carević, Petrović & Denić, 2020).

У четвртом поглављу шесте главе изложено је истраживање доминацијског скупа за икосаедарску хексагоналну мрежу. Фигуративни бројеви као математички модели су повезани и са теоријом графова који се користе у многобројним научним областима. Аутор ове дисертације се бавила истраживањем ромбоидалног кактус ланца и икосаедарске хексагоналне мреже на којој је базиран операционални глобални нумерички модел за временску прогнозу (GME) који је описан у трећој глави дисертације. Добијени резултати су изложени у научном раду „Dominating sets on the rhomboidal cactus chains and the icosahedral network "(Mihajlov Carević, Petrović & Denić), приказаном на научном симпозијуму „International simposium INFOTEH – JAHORINA 2020".

1. ХРОНОЛОШКИ РАЗВОЈ ФИГУРАТИВНИХ БРОЈЕВА

1.1. Фигуративни бројеви у античком периоду

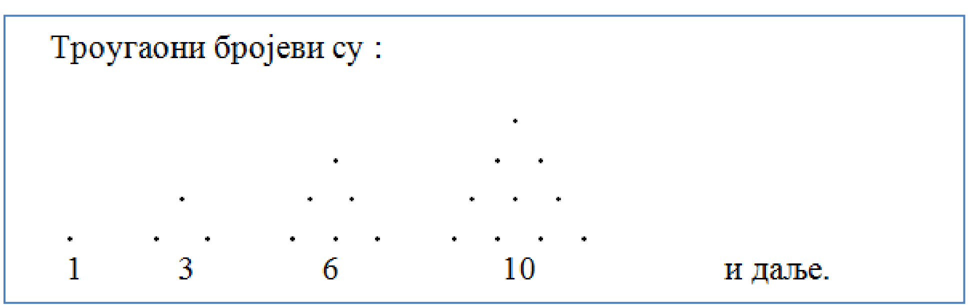
Познато је да је Питагора у 6.в.п.н.е. први почео да разматра број као јединствену математичку целину. У предходном периоду број је коришћен за трговачке и остале практичне потребе, на пример, двадесет бикова и осамдесет бикова било је сто бикова али Питагора је први издвојио чисте бројеве у 20 + 80 = 100 .

Ово достигнуће сматра се првим и најзначајнијим достигнућем Питагоре и питагорејаца. На другом месту по значајности налази се питагорејска филозофија броја, тврдња да светом владају законитости које се могу изразити помоћу бројева. Основна питагорејска догма је била

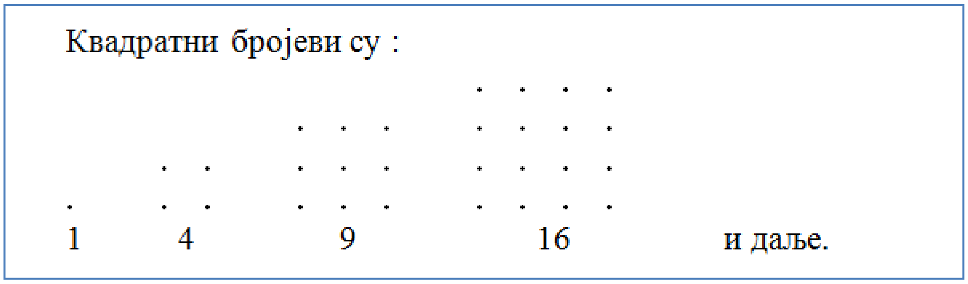
„ Све је број “.

Ову и претходну тврдњу наводе многобројни историчари математике (Božić, 2002; Deza & Deza, 2012; Lučić, 2009; Mihajlov, 2012; Nedović, 2004; Strojk, 1991).

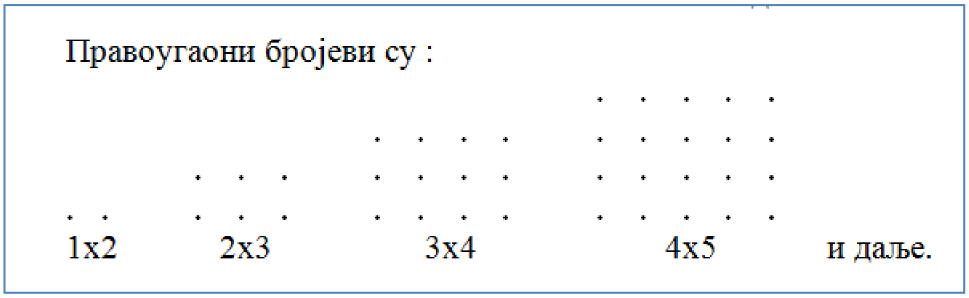
У Аристотеловим списима Метафизика (Aristotel, прев. 1971) је записано да су Питагора и питагорејци започели превођење бројева у ликове троугла, квадрата и правоугаоника па су отуда они добили назив троугаони, квадратни и правоугаони бројеви.



Слика 1.1: Троугаони бројеви



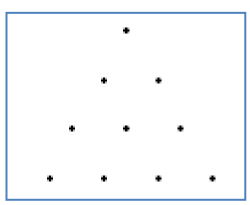
Слика 1.2: Квадратни бројеви



Слика 1.3: Правоугаони бројеви

Фигуративни начин записивања бројева омогућио је питагорејцима да запазе како сваки број садржи особине које га у општем случају разликују од свих осталих (Stillwell, 1996). Питагорејци су уочили особине бројева и разлике међу њима па су их на основу тога делили на парне, непарне, парно-парне, непарно-парне, парно-непарне, непарно-непарне, просте, сложене, савршене и пријатељске (Mihajlov, 2012).

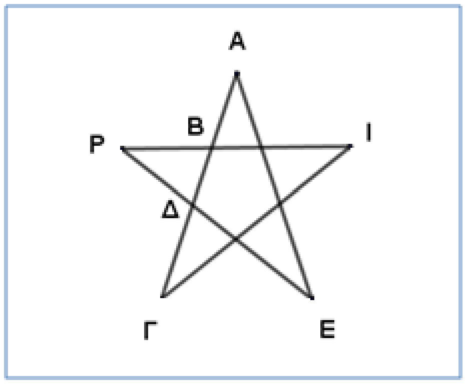
Посебно значајна фигура за питагорејце био је "Тетрактис". По предању откриће Тетрактиса се приписује Питагори (Lučić, 2009). То је лик облика:



Слика 1.4: Тетрактис

Број десет или Декада за питагорејце је била „свети број“.

У делу *Vita Pithagorica* (Jamblih, прев. 1998) Јамбликус је забележио да су питагорејци заклетву чувања тајности свих открића и сазнања унутар свог братства полагали на фигуративном симболу Декаде – „светом Тетрактису“. Такође су много значаја придавали броју пет или Пентади која је половина и сажети одраз Декаде. Геометријски амблем Пентаде је Пентаграм, правилна петокрака звезда која је била геометријски симбол питагорејског братства.



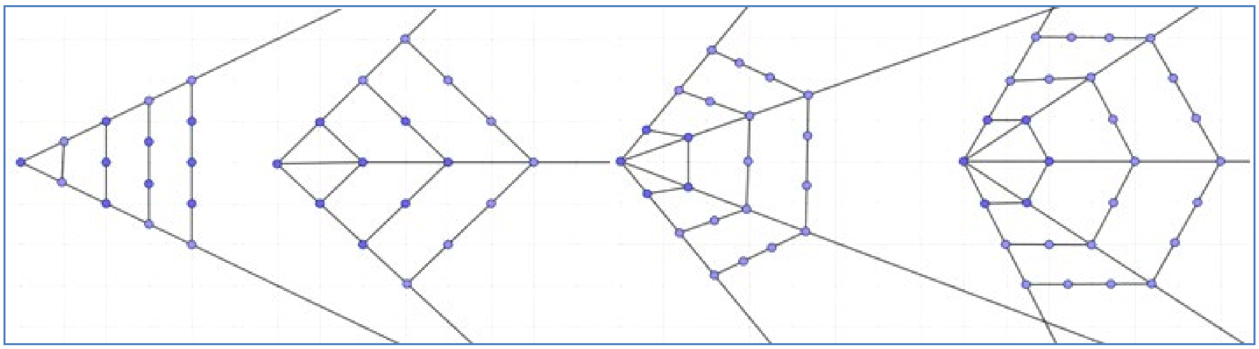
Слика 1.5: Пентаграм

Дужи које настају пресецањем линија у Пентаграму су у златном пресеку. На пример

$$\mathrm{A\Gamma} : \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B\Gamma} : \Delta\Gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\ldots = \Phi$$

То важи и за остале дужи у Пентаграму што овај симбол чини врхунским симболом лепоте и савршенства. Декада је за питагорејце, као и Пентада, била симбол космоса. Никомах из Герасе (60–120.г.) објашњавајући мистично значење броја (Gika, прев. 1987), наводи: „Првобитни хаос, лишен реда и облика и свега што разврстава према категоријама квалитета и квантитета организован је и уређен на основу броја“. Даље тврди: „Управо је у Декади постојала природна равнотежа између скупа и његових елемената. Зато се Бог који уређује вештином руковођен својим умом, послужио Декадом као законом за све . . . и зато су целине и делови свих ствари Неба и Земље односи склада.“ Тај однос склада у десетоуглу, геометријској слици Декаде је управо пропорција златног пресека (Gika, прев. 1987; Herz-Fischler, 1998) која доминира и у Пентаграму. Због тога је број Φ=1,618... назван и „божанска пропорција“.

Фигуративни начин приказивања бројева примењиван је у античкој математици више векова. Питагорејски троугаони и квадратни бројеви допуњени су другим полигоналним бројевима о којима је писани доказ оставио Диофант Александријски (3.в.н.е.). У свом спису „О полигоналним бројевима“ (Diophantus, прев. 1974), Диофант наводи Хипсиклеса као аутора дефиниције полигоналних бројева и Никомаха као аутора законитости између полигоналних бројева. Полигонални бројеви су дефинисани геометријским приказом са једнако размакнутим тачкама, при чему свака тачка представља јединицу. При томе је свака врста полигоналних бројева представљена полигоном исте врсте. Троугаони бројеви су представљени троугловима, квадратни бројеви квадратима и тако редом (Слика 1.6)



Слика 1.6: Полигонални бројеви

Троугаони бројеви су: 1, 3, 6, 10, 15 ...

Квадратни бројеви су: 1, 4, 9, 16, 25 ...

Петоугаони бројеви су: 1, 5, 12, 22, 35 ...

Шестоугаони бројеви су: 1, 6, 15, 28, 45 ...

Никомах је уочио следећу законитост: Ако формирамо таблицу полигоналних бројева:

Табела 1.1: Никомахова табела полигоналних бројева

троугаони	1	3	6	10	15	21	28	36...
квадратни	1	4	9	16	25	36	49	64...
петоугаони	1	5	12	22	35	51	70	92...
шестоугаони	1	6	15	28	45	66	91	120...

уочава се следећа законитост:

„Сваки полигонални број (осим троугаоног) једнак је збиру полигоналног броја из предходне врсте у таблици и троугаоног броја из предходне колоне“.

1.2. Полигонални фигуративни бројеви

1.2.1. Представљање полигоналних фигуративних бројева

Полигонални бројеви могу бити представљени дискретним геометријским обрасцем са једнако размакнутим тачкама (Слика 1.6) и алгебарском формулом по којој се генеришу сви бројеви тог типа. Геометријска интерпретација полигоналних бројева омогућава визуелно посматрање њихових својстава и на тај начин их чини погодним објектима за анализирање. Зато не чуди њихова вишевековна присутност у математици. Од античког периода до савременог доба, многи познати математичари су се бавили њима: Питагора са Самоса, Никомах из Герасе, Теон из Смирне, Диофант Александријски, Леонардо Пизано Фибоначи, Рене Декарт, Пјер Ферма, Блез Паскал, Леонард Ојлер, Карл Фридрих Гаус и други (Deza & Deza, 2012). Полигонални и други фигуративни бројеви су предмет интересовања многих научника у модерном добу (Beery, 2009; Braza & Tong, 2001; Dickson, 2013; Hajdy, Pinter, Tengely & Varga, 2014; Oh & Sun, 2009; Ono, Robins & Wahl, 1995; Panaitopol, 2005; Pengelley, 2013; Sun, 2007).

Полигонални бројеви такође могу бити представљени алгебарском формулом. До адекватних алгебарских формула за генерисање полигоналних бројева можемо доћи на следећи начин:

Посматрајмо фигуративне бројеве и означимо са „разлике првог реда“ разлике између два суседна полигонална броја а са „разлике другог реда“ разлике између две суседне разлике првог реда:

Табела 1.2: Полигонални фигуративни бројеви

Троугаони бројеви: 1 3 6 10 15 21 28 36 45 . . .

разлике првог реда : 2 3 4 5 6 7 8 9 . . .

разлике другог реда: 1 1 1 1 1 1 1 . . .

Квадратни бројеви: 1 4 9 16 25 36 49 64 81 . . .

разлике првог реда : 3 5 7 9 11 13 15 17 . . .

разлике другог реда: 2 2 2 2 2 2 2 . . .

Петоугаони бројеви: 1 5 12 22 35 51 70 92 117 . . .

разлике првог реда : 4 7 10 13 16 19 22 25 . . .

разлике другог реда: 3 3 3 3 3 3 3 . . .

Шестоугаони бројеви: 1 6 15 28 45 66 91 120 153 . . .

разлике првог реда: 5 9 13 17 21 25 29 33 . . .

разлике другог реда: 4 4 4 4 4 4 4 . . .

На основу уочених разлика првог и другог реда изводимо формуле за n–ти полигонални број:

n–ти троугаони број означимо са $P_3(n)$ и уочимо да је

$P_3(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n.$

Збир првих n природних бројева се може израчунати као сума n чланова аритметичког низа (или на неки други начин) а познат је и визуелни приказ овог збира који је приказан у наставку рада (Слика 4.2), износи $\frac{n(n+1)}{2}$.

Дакле $P_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. (1.1)

n-ти квадратни број означимо са $P_4(n)$:

$$P_4(n) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \ldots + 2n - 1 =$$

$$= 1+(1 + 2)+(1 + 2 + 2) + (1 + 2 + 2 + 2) + \ldots + (1 + (n - 1)\cdot 2) =$$

$$= n \cdot 1 + 2\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) =$$

$$= n + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n + n^2 - n = n^2 . \qquad (1.2)$$

(Такође следи из дефиниције квадратних бројева: $P_4(n) = n^2$)

n-ти петоугаони број означимо са $P_5(n)$:

$$P_5(n) = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + ... + 3n - 2 =$$

$$= 1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 3) + (1 + 3 + 3 + 3) + ... + (1 + (n - 1)\cdot 3) =$$

$$= n\cdot 1 + 3\cdot(1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 1)) = n + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{2n+3n^2-3n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} \quad . \tag{1.3}$$

n-ти шестоугаони број означимо са $P_6(n)$:

$$P_6(n) = 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + 25 + ... + 4n - 3 =$$

$$= 1 + (1 + 4) + (1 + 4 + 4) + (1 + 4 + 4 + 4) + ...+ (1 + (n - 1)\cdot 4) =$$

$$= n\cdot 1 + 4\cdot(1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n - 1)) = n + 4\cdot \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= n + 2n^2 - 2n = 2n^2 - n = n (2n - 1) . \tag{1.4}$$

Допунимо Никомахову табелу n–тим полигоналним бројем у свакој врсти:

Табела 1.3: Никомахова табела са n–тим полигоналним бројем

троугаони	1	3	6	10	15	21	28	36	... $n\cdot(n+1) / 2$
квадратни	1	4	9	16	25	36	49	64	... n^2
петоугаони	1	5	12	22	35	51	70	92	... $n\cdot(3n-1)/2$
шестоугаони	1	6	15	28	45	66	91	120	... $n\cdot(2n-1)$

Уочавамо да је разлика два суседна члана у колонама

$$0 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \quad 28 \ ... \ \frac{n(n-1)}{2}$$

а то је (елиминацијом нуле) низ троугаоних бројева до члана са индексом (n – 1).

Докажимо сада Никомахово тврђење да је сваки полигонални број (осим троугаоног) једнак је збиру полигоналног броја из предходне врсте у таблици и троугаоног броја из предходне колоне. Ово тврђење је исказано у следећем ставу:

C1.1. $P_6(n) - P_5(n) = P_5(n) - P_4(n) = P_4(n) - P_3(n) = P_3(n-1),\ n \in N \wedge n \geq 2.$ (1.5)

Доказ:

$$P_6(n) - P_5(n) = n \cdot (2n-1) - \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{2n\cdot(2n-1)-3n^2+n}{2} =$$

$$= \frac{4n^2-2n-3n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = P_3(n-1)$$ (на основу 1.1)

$$P_5(n) - P_4(n) = \frac{n(3n-1)}{2} - n^2 = \frac{3n^2-n-2n^2}{2} = \frac{n^2-n}{2} = P_3(n-1)$$ (на основу 1.1)

$$P_4(n) - P_3(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n^2-n^2-n}{2} = \frac{n^2-n}{2} = P_3(n-1)\ \blacksquare$$ (на основу 1.1)

Последица C1.1. $P_4(n) = P_3(n) + P_3(n-1)$

$P_5(n) = P_3(n) + 2 \cdot P_3(n-1)$

$P_6(n) = P_3(n) + 3 \cdot P_3(n-1)$, за $n \in N \wedge n \geq 2$. (1.6)

Означимо са $P_m(n)$ произвољан m – угаони фигуративни број, где је $m \in N \wedge m \geq 3$. На основу последице C1.1. следи да је:

$P_m(n) = P_3(n) + (m-3) \cdot P_3(n-1)$ за $n \in N \wedge n \geq 2$, тј. да је

$$P_m(n) = \frac{n(n+1)}{2} + (m-3) \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n\cdot(n+1+(m-3)\cdot(n-1))}{2} =$$

$$= \frac{n\cdot(n+1+mn-m-3n+3)}{2} = \frac{n\cdot(m\cdot(n-1)-2n+4)}{2} =$$

$$= \frac{mn\cdot(n-1)}{2} - \frac{2n\cdot(n-2)}{2} = m \cdot P_3(n-1) - n\cdot(n-2)$$

На основу добијеног резултата и (1.1) добијамо формулу за n–ти члан произвољног m–угаоног фигуративног броја ($m \in N \wedge m \geq 3$):

$$P_m(n) = m \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n\cdot(n-2)$$ (1.7)

Допунимо сада Табелу 1.2 полигоналних фигуративних бројева n–тим члановима и разликама између њих:

Табела 1.4: Полигонални фигуративни бројеви до n–тог члана

Троугаони бројеви: 1 3 6 10 15 21 . . . $\frac{(n-1)n}{2}$ $\frac{n(n+1)}{2}$

разлике првог реда: 2 3 4 5 6 . . . n

разлике другог реда: 1 1 1 1 . . . 1

Квадратни бројеви: 1 4 9 16 25 36 . . . $(n-1)^2$ n^2

разлике првог реда: 3 5 7 9 11 . . . $2n-1$

разлике другог реда: 2 2 2 2 . . . 2

Петоугаони бројеви: 1 5 12 22 35 . . . $\frac{(n-1)(3n-4)}{2}$ $\frac{n(3n-1)}{2}$

разлике првог реда: 4 7 10 13 16 . . . $3n-2$

разлике другог реда: 3 3 3 3 . . . 3

Шестоугаони бројеви: 1 6 15 28 45 66 . . . $(n-1)(2n-3)$ $n(2n-1)$

разлике првог реда: 5 9 13 17 21 . . . $4n-3$

разлике другог реда: 4 4 4 4 . . . 4

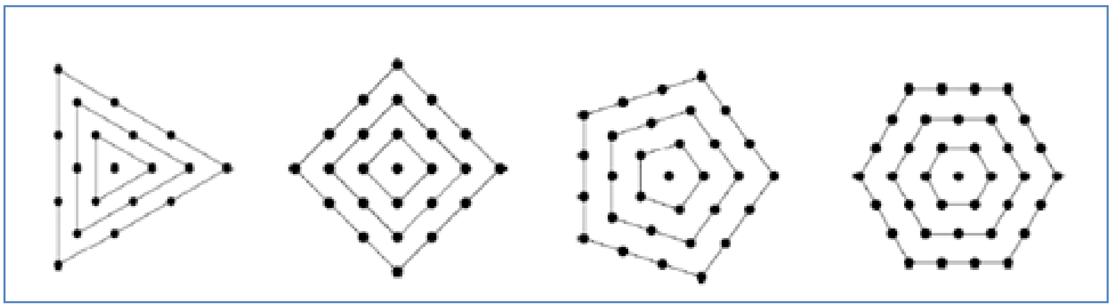
М–угаони бројеви : 1 m $3m-3$ $6m-8$ . . . $m\cdot\frac{n(n-1)}{2}-n(n-2)$

разлике првог реда: $m-1$ $2m-3$ $3m-5$ $4m-7$ . . . $m(n-1)-2n+3$

разлике другог реда: $m-2$ $m-2$ $m-2$ . . . $m-2$

1.2.2. Центрирани полигонални бројеви

Поред античких, претходно описаних полигоналних бројева, постоје и друге класе полигоналних бројева (Deza &Deza, 2012; Dickson, 1928; Dickson, 2013). Једна од тих класа је класа центрираних полигоналних бројева. Сваки центрирани полигонални број је формиран са централном тачком окруженом полигоналним линијама које чине међусобно сличне геометријске фигуре. Свака страница садржи једну тачку више од странице у претходној полигоналној линији. Центрирани троугаони бројеви су представљени троугловима са тачком у центру. Центрирани квадратни бројеви су представљени квадратима са тачком у центру, и тако редом (Слика 1.7).



Слика 1.7. Центрирани полигонални бројеви

Центрирани троугаони бројеви су: 1, 4, 10, 19, 31, 46 . . .

Центрирани квадратни бројеви су: 1, 5, 13, 25, 41, 61 . . .

Центрирани петоугаони бројеви су: 1, 6, 16, 31, 51, 76 . . .

Центрирани шестоугаони бројеви су: 1, 7, 19, 37, 61, 91 . . .

Аналогно разматрању разлика између два суседна полигонална броја, размотрићемо разлике између суседних центрираних полигоналних бројева.

Табела 1.5: Центрирани полигонални фигуративни бројеви

Центрирани троугаони бројеви су:	1	4	10	19	31	46 . . .
разлике првог реда:		3	6	9	12	15 . . .
разлике другог реда:			3	3	3	3 . . .

Центрирани квадратни бројеви су: 1 5 13 25 41 61 . . .

разлике првог реда: 4 8 12 16 20 . . .

разлике другог реда: 4 4 4 4 . . .

Центрирани петоугаони бројеви су: 1 6 16 31 51 76 . . .

разлике првог реда: 5 10 15 20 25 . . .

разлике другог реда: 5 5 5 5 . . .

Центрирани шестоугаони бројеви су: 1 7 19 37 61 91 . . .

разлике првог реда: 6 12 18 24 30 . . .

разлике другог реда: 6 6 6 6 . . .

Ако са $CP_3(n)$, $CP_4(n)$, $CP_5(n)$ и $CP_6(n)$, означимо редом n-ти троугаони центрирани број до n-тог шестоугаоног центрираног броја, уочавамо да је

$CP_3(n) = 1 + 3 + 6 + 9 + . . . + (n – 1) \cdot 3$

$CP_4(n) = 1 + 4 + 8 + 12 + . . . + (n – 1) \cdot 4$

$CP_5(n) = 1 + 5 + 10 + 15 + . . . + (n – 1) \cdot 5$

$CP_6(n) = 1 + 6 + 12 + 18 + . . . + (n – 1) \cdot 6$

Алгебарски, n-ти центрирани m-угаони број $CP_m(n)$ се добија као збир првих n елемената низа 1, m, 2m, 3m, ... Следи да је

$CP_m(n) = 1 + m + 2m + 3m + . . . + (n – 1) \cdot m.$

Како је

$$1 + m + 2m + 3m + . . . + (n – 1) \cdot m = 1 + m \cdot (1 + 2 + 3 + . . . + n – 1) =$$

$$= 1 + m \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} \qquad \text{(на основу 1.1)}$$

$$\Rightarrow \quad CP_m(n) = 1 + m \cdot P_3(n – 1). \tag{1.8}$$

Такође добијамо следеће релације:

$$CP_3(n) = 1 + 3 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} = \frac{3n^2-3n+2}{2} \tag{1.9}$$

$$CP_4(n) = 1 + 4 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} = 2n^2 - 2n + 1 \tag{1.10}$$

$$CP_5(n) = 1 + 5 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} = \frac{5n^2-5n+2}{2} \tag{1.11}$$

$$CP_6(n) = 1 + 6 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} = 3n^2 - 3n + 1 \tag{1.12}$$

Лако се може уочити следећа релација

$$CP_m(n) = \begin{Bmatrix} \frac{m}{2} \cdot n^2 - \frac{m}{2} \cdot n + 1 & \text{ако је } m \text{ паран број} \\ \frac{m\cdot n^2 - m\cdot n + 2}{2} & \text{ако је } m \text{ непаран број} \end{Bmatrix}$$

1.3. Просторни фигуративни бројеви

Поред равних фигуративних бројева (или полигоналних) имамо и просторне фигуративне бројеве (или полиедарске). Постоји више класа просторних фигуративних бројева (Deza &Deza, 2012; Dickson, 2013; Gika, 1987).

1.3.1. Фигуративни бројеви правилних полиедара

Просторне фигуративне бројеве, као и равне фигуративне бројеве, дефинисали су и проучавали питагорејци. Познато је да правилних полиедара има само 5 без обзира што правилних многоуглова има бесконачно много, и то су:

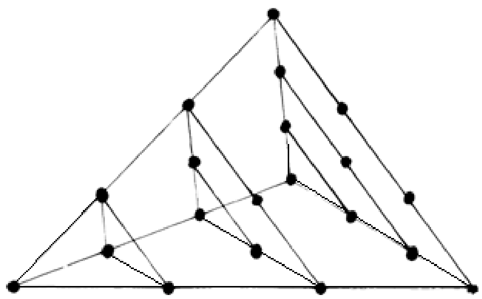
НАЗИВ	БРОЈ ТЕМЕНА (t)	ИВИЦА (i)	СТРАНА (s)
Тетраедар	4	6	4 једнакостранична троугла
Хексаедар	8	12	6 квадрата
Октаедар	6	12	8 једнакостраничних троуглова
Додекаедар	20	30	12 правилних петоуглова
Икосаедар	12	30	20 једнакостраничних троуглова

Број темена, ивица и страна повезује Ојлерова формула:

$$t + s = i + 2$$

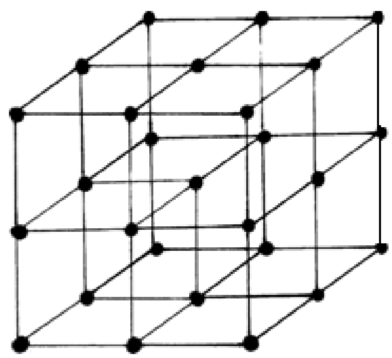
Полиедарски бројеви су:

Тетраедарски бројеви (Слика 1.8) су: 1 , 4 , 10 , 20 , 35 , 56 , ...



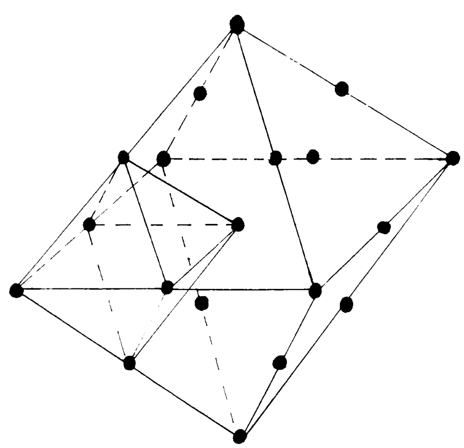
Слика 1.8. Тетраедарски бројеви

Хексаедарски бројеви (Слика 1.9) су: 1 , 8 , 27 , 64 , 125 , ...



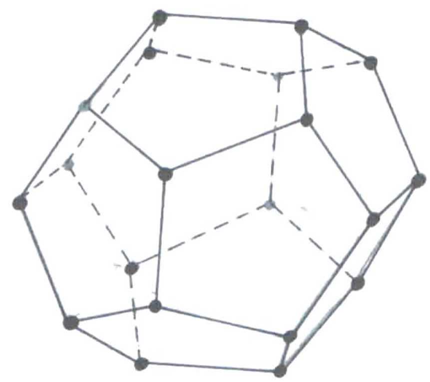
Слика 1.9. Хексаедарски бројеви

Октаедарски бројеви (Слика 1.10) су: 1 , 6 , 19 , 44 , 85 , ...



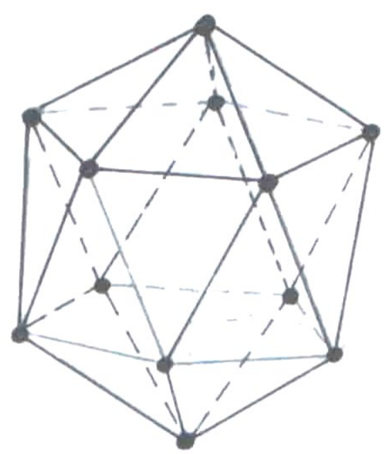
Слика 1.10. Октаедарски бројеви

Додекаедарски бројеви (Слика 1.11) су: 1 , 20 , 84 , 220 , 455 , ...



Слика 1.11. Додекаедарски бројеви

Икосаедарски бројеви (Слика 1.12) су: 1 , 12 , 48 , 124 , 255 , ...



Слика 1.12. Икосаедарски бројеви

Аналогно разматрању полигоналних фигуративних бројева, размотримо полиедарске фигуративне бројева са разликама између њих као и разликама између тих разлика, при чему ћемо сада имати и разлике трећег реда. Уочавају се сличне законитости при чему су разлике трећег реда константне за сваки низ полиедарских бројева.

У Табели 1.6 дата је таблица полиедарских фигуративних бројева са њиховим разликама:

Табела 1.6: Полиедарски фигуративни бројеви

Тетраедарски бројеви:	1 , 4 , 10 , 20 , 35 , 56 . . .
разлике првог реда:	3 6 10 15 21 . . .
разлике другог реда:	3 4 5 6 . . .
разлике трећег реда:	1 1 1 . . .
Хексаедарски бројеви:	1 , 8 , 27 , 64 , 125 , 216 . . .
разлике првог реда:	7 19 37 61 91 . . .
разлике другог реда:	12 18 24 30 . . .
разлике трећег реда:	6 6 6 . . .
Октаедарски бројеви:	1 , 6 , 19 , 44 , 85 , 146 . . .
разлике првог реда:	5 13 25 41 61 . . .
разлике другог реда:	8 12 16 20 . . .
разлике трећег реда:	4 4 4 . . .
Додекаедарски бројеви:	1 , 20 , 84 , 220 , 455 , 816 . . .
разлике првог реда:	19 64 136 235 361 . . .
разлике другог реда:	45 72 99 126 . . .
разлике трећаг реда:	27 27 27 . . .
Икосаедарски бројеви:	1 , 12 , 48 , 124 , 255 , 456 . . .
разлике првог реда:	11 36 76 131 201 . . .
разлике другог реда:	25 40 55 70 . . .
разлике трећег реда:	15 15 15 . . .

Означимо са TE(n) - n-ти тетраедарски број, даље, са HE(n), OK(n), DO(n), IK(n), n-ти хексаедарски, октаедарски, додекаедарски и икосаедарски број респективно. До формула за одређивање n–тог члана наведених полиедарских бројева може се доћи поступком аналогним одређивању n–тог члана полигоналних бројева и коришћењем доказаних тврђења о полигоналним бројевима што је наведено у одељку Ставови о фигуративним бројевима.

Декарт се такође бавио овом проблематиком и своја достигнућа изложио је у свом делу Progumnasmata de Solidorum Elementis (Federico, 1982). За 5 низова полиедарских бројева Декарт је сачинио логичке законе њиховог формирања:

Тетраедарски:

$$\begin{array}{r|l}
1-0+0 & +\ 0=\ 1 \\
3-0+0 & +\ 1=\ 4 \\
6-0+0 & +\ 4=10 \\
10-0+0 & +10=20 \\
15-0+0 & +20=35 \\
\uparrow & \quad\uparrow \\
\text{троугаони бројеви} & \text{претходни члан}
\end{array}$$

Хексаедарски:

$$\begin{array}{r|l}
1^2 \times 3-1 \times 3+1 & +0=\ 1 \\
2^2 \times 3-2 \times 3+1 & +1=\ 8 \\
3^2 \times 3-3 \times 3+1 & +8=27 \\
4^2 \times 3-4 \times 3+1 & +27=64 \\
\uparrow \qquad \uparrow \qquad\qquad & \qquad\uparrow \\
\text{природни бројеви} \qquad & \text{претходни члан}
\end{array}$$

Октаедарски:

$$\begin{array}{r|l}
1 \times 2^2-1 \times 2^2+1 & +\ 0=\ 1 \\
3 \times 2^2-2 \times 2^2+1 & +\ 1=\ 6 \\
6 \times 2^2-3 \times 2^2+1 & +\ 6=19 \\
10 \times 2^2-4 \times 2^2+1 & +19=44 \\
\uparrow \qquad \uparrow \qquad\qquad & \qquad\uparrow \\
\text{троугаони бројеви} \ \ \text{природни бројеви} & \text{претходни члан}
\end{array}$$

Додекаедарски :

$$\begin{array}{r|l}
1 \times 3^2-2 \times 3^2+10 & +0=\ 1 \\
5 \times 3^2-4 \times 3^2+10 & +1=20 \\
12 \times 3^2-6 \times 3^2+10 & +20=84 \\
22 \times 3^2-8 \times 3^2+10 & +84=220 \\
\uparrow \qquad \uparrow \qquad\qquad & \qquad\uparrow \\
\text{петоугаони бројеви} \ \ \text{парни бројеви} & \text{претходни члан}
\end{array}$$

Икосаедарски :

$$15 \times 1 - 1 \times 20 + 6 \;\big|\; + 0 = 1$$

$$15 \times 3 - 2 \times 20 + 6 \;\big|\; + 1 = 12$$

$$15 \times 6 - 3 \times 20 + 6 \;\big|\; + 12 = 48$$

$$15 \times 10 - 4 \times 20 + 6 \;\big|\; + 48 = 124$$

↑ ↑ ↑

троугаони бројеви природни бројеви ↑ претходни члан

Ове таблице нам јасно казују колико је прецизности и студиозности било потребно да би се извршиле анализе тих низова полиедарских бројева .

Примећује се да се у формирању тетраедарских, октаедарских и икосаедарских бројева јавља вертикално низ троугаоних бројева (1, 3, 6 , 10 , 15 , ...) док се у формирању додекаедарских појављује низ петоугаоних бројева (1, 5, 12, 35, ...) а у формирању хексаедарских бројева појављује се низ квадрата природних бројева, што је у директној вези са фигурама које чине стране полиедра.

Даље, низ природних бројева се појављује у формирању хексаедарских, октаедарских и икосаедарских бројева док се код додекаедарских појављује низ парних бројева.

Приметимо још да су разлике првог реда тетраедарског низа управо чланови троугаоног низ: 1 , 3 , 6 , 10 , ... ,

За додекаедарске бројеве

1 , 20 , 84 , 220 , 455 ...

примећује се да се могу извести из петоугаоних бројева

1 , 5 , 12 , 22 , 35 ...

када се они помноже својим разликама првог реда (са додатком 1 испред низа разлика):

1 , 4 , 7 , 10 , 13 ...

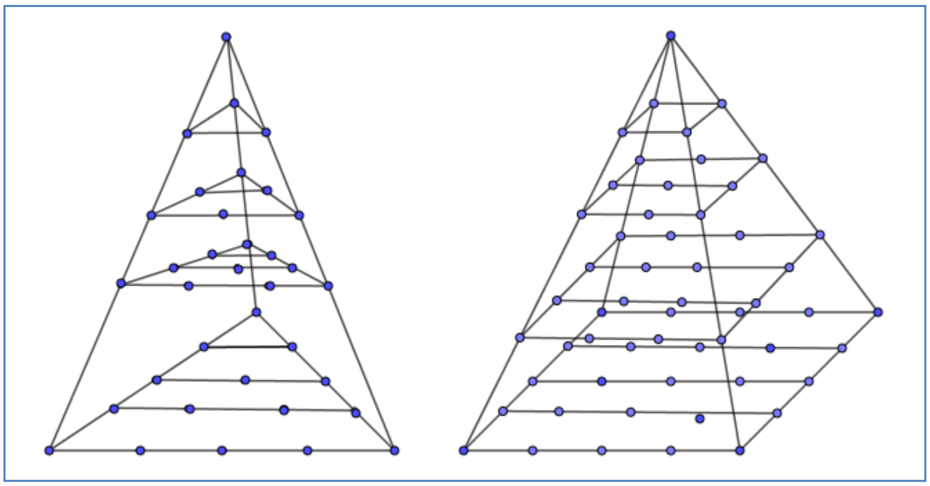
Ове особине као и друге законитости које се односе на полиедарске фигуративне бројеве, исказане су у ставовима 2. поглавља ове дисертације. Фигуративни бројеви, како полигонални тако и полиедарски, обилују разним особинама и законитостима које су предмет истраживања многобројних научника од античког периода до савременог доба.

1.3.2. Пирамидални фигуративни бројеви

По дефиницији, n-ти m-угаони пирамидални број је сума првих n m-угаоних бројева. Означимо са $PIR_m(n)$ n-ти m-угаони пирамидални број. Тада је

$$PIR_m(n) = P_m(1) + P_m(2) + P_m(3) + \ldots + P_m(n) \tag{1.13}$$

На Слици 1.13 приказани су троугаони и квадратни пирамидални бројеви.



Слика 1.13. Троугаони и квадратни пирамидални бројеви

На основу дефиниције следи

$PIR_3(n) = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + \ldots + P_3(n) =$

$$= 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(на основу 1.1)} \tag{1.14}$$

што чини збир првих n троугаоних бројева. На исти начин је

$PIR_4(n) = P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + \ldots + P_4(n) =$

$$= 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 \tag{1.15}$$

што чини збир првих n квадратних бројева.

На основу дефиниције за n-ти m-пирамидални број (1.14) следи да је

$$PIR_m(n) = PIR_m(n-1) + P_m(n) \tag{1.16}$$

Наведене суме као и друге законитости које важе за фигуративне бројеве изложене су у поглављу Ставови о фигуративним бројевима.

Пирамидални фигуративни бројеви су директно повезани са полигоналним фигуративним бројевима. Истраживањем једнаких вредности за ове две класе бројева бавили су се истраживачи у протеклом периоду (Brindza, Pintér & Turjányi, 1998; Hajdu, Pintér, Tengely & Varga, 2014).

1.3.3. Центрирани правилни полиедарски бројеви

Центрирани просторни фигуративни бројеви се формирају помоћу централне тачке окружене узастопним полиедарским слојевима.

Центрирани тетраедарски бројеви се формирају помоћу централне тачке и тетраедарских слојева који је окружују. У другом слоју имамо тетраедар формиран помоћу 4 тачке а то је други тетраедарски број TE(2). У трећем слоју имамо 10 тачака што је тетраедарски број TE(3). У четвртом слоју имамо 20 тачака што је тетраедарски број TE(4). У петом слоју имамо 34 тачке што је TE(5) – TE(1), у шестом слоју имамо 52 тачке што је TE(6) – TE(2), и тако даље. У општем случају, центрирани тетраедарски бројеви се формирају као узастопне суме елемената низа:

$TE(1), TE(2), TE(3), TE(4), TE(5) - TE(1), TE(6) - TE(2), \ldots, TE(n + 4) - TE(n), \ldots$

Ако са CTE(n) означимо n-ти центрирани тетраедарски број, лако је видети да је на основу претходно исказаних законитости за $n \geq 4$

$$CTE(n) = TE(n) + TE(n-1) + TE(n-2) + TE(n-3) \qquad (1.17)$$

Центрирани тетраедарски бројеви су: 1, 5, 15, 35, 69, 121, 195, 295, 425, 589, ...

Центрирани хексаедарски или кубни бројеви почевши од централне тачке 1 окружени су узастопним кубним слојевима. У другом слоју имају 8 тачака што је $HE(2) = 2^3$, у трећем слоју имају 26 тачака што је $3^3 - 1^3 = HE(3) - HE(1)$. У четвртом слоју имају 56 тачака што је $4^3 - 2^3 = HE(4) - HE(2)$. Центрирани хекаедарски бројеви су конструисани као узастопне суме елемената низа: $1^3, 2^3 - 0^3, 3^3 - 1^3, 4^3 - 2^3, \ldots, n^3 - (n-2)^3$.

Ако n-ти центрирани хексаедарски број означмо са CHE(n) тада је

$CHE(n) = 1^3 + (2^3 - 0^3) + (3^3 - 1^3) + (4^3 - 2^3) + \ldots + (n^3 - (n-2)^3)$

Лако је видети да након сређивања овог израза добијамо

$$CHE(n) = HE(n-1) + HE(n) \tag{1.18}$$

Центрирани хексаедарски бројеви су: 1, 9, 35, 91, 189, 341, 559, 855, 1241, 1729, ...

Центрирани октаедарски бројеви се формирају помоћу централне тачке окружене октаедарским слојевима. Могу се добити као парцијалне суме елемената низа 1, 6, 18, 38, 66, 102, 146, 198, 258, 326 . . . додавањем броја тачака на површини октаедра:

COK(1) = 1

COK(2) = 1 + 6 = 7

COK(3) = 1 + 6 + 18 = 25

COK(4) = 1 + 6 + 18 + 38 = 63

. . .

Лако је видети да општи члан низа центрираних октаедарских бројева задовољава једнакост:

$$COK(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(4i^2 + 2) \tag{1.19}$$

као и рекурентну формулу:

$$COK(n+1) = COK(n) + 4n^2 + 2 \text{ при чему је } COK(1) = 1 \tag{1.20}$$

Центрирани октаедарски бројеви су: 1, 7, 25, 63, 129, 231, 377, 575, 833, ...

Центрирани додекаедарски бројеви се формирају помоћу централне тачке окружене додекаедарским слојевима. Могу се добити као парцијалне суме елемената низа 1, 20, 74, 164, 290, 452, 650, 884, 1154, 1460 . . . додавањем броја тачака на површини додекаедра:

CDO(1) = 1

CDO(2) = 1 + 20 = 21

CDO(3) = 1 + 20 + 74 = 95

$CDO(4) = 1 + 20 + 74 + 164 = 259$

. . .

Лако је видети да општи члан низа центрираних додекаедарских бројева задовољава једнакост:

$$CDO(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(18i^2 + 2) \qquad (1.21)$$

као и рекурентну формулу:

$$CDO(n + 1) = CDO\ (n) + 18n^2 + 2 \text{ при чему је } CDO(1) = 1 \qquad (1.22)$$

Центрирани додекаедарски бројеви су: 1, 21, 95, 259, 549, 1001, 1651, 2535, 3689, ...

Центрирани икосаедарски бројеви се формирају слично претходном, помоћу једне централне тачке окружене икосаедарским слојевима. Могу се добити као парцијалне суме елемената низа: 1, 12, 42, 92, 162, 252, 362, 492, 642, 812, . . . додајући број тачака на површини икосаедра. Означимо их са CIK(1), CIK(2), CIK(3) . . . CIK(n). Тада је:

$CIK(1) = 1$

$CIK(2) = 1 + 12 = 13$

$CIK(3) = 1 + 12 + 42 = 55$

$CIK(4) = 1 + 12 + 42 + 92 = 147$

. . .

Лако је видети да општи члан низа центрираних икосаедарских бројева задовољава једнакост:

$$CIK(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(10i^2 + 2) \qquad (1.23)$$

као и рекурентну формулу:

$$CIK(n + 1) = CIK\ (n) + 10n^2 + 2 \text{ при чему је } CIK(1) = 1 \qquad (1.24)$$

Центрирани икосаедарски бројеви су: 1, 13, 55, 147, 309, 561, 923, 1415, 2057, 2869, . . .

1.3.4. Центрирани m-угаони пирамидални бројеви

Центрирани m-угаони пирамидални број је конфигурација тачака које формирају m-угаону пирамиду која у бази има центрирани m-угаони полигон.

По дефиницији, такви бројеви се формирају помоћу центрираних полигоналних бројева на следећи начин:

$$CPIR_m(n) = CP_m(1) + CP_m(2) + \ldots + CP_m(n) \tag{1.25}$$

Центрирани троугаони пирамидални бројеви се добијају као узастопне суме низа центрираних троугаоних бројева: 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136, ...

Центрирани троугаони пирамидални бројеви су: 1, 5, 15, 34, 65, 111, 175, 260, 369, 505 . . . .

Центрирани квадратни пирамидални бројеви се добијају као узастопне суме низа центрираних квадратних бројева: 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, ...

Центрирани квадратни пирамидални бројеви су: 1, 6, 19, 44, 85, 111, 146, 231, 344, 489 . . . .

Центрирани петоугаони пирамидални бројеви се добијају као узастопне суме низа центрираних петоугаоних бројева: 1, 6, 16, 31, 51, 76, 106, 141, 181, 226, ...

Центрирани петоугони пирамидални бројеви су: 1, 7, 23, 54, 105, 181, 287, 428, 609, 835 . . .

Центрирани шестоугаони пирамидални бројеви се добијају као узастопне суме низа центрираних шестоугаоних бројева: 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271, ...

Центрирани шестоугаони пирамидални бројеви су:

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 . . . .

По дефиницији, добијамо следећу рекурентну формулу за низ центрираних m-угаоних пирамидалних бројева

$$CPIR_m(n+1) = CPIR_m(n) + CP_m(n+1),\ CPIR_m(1) = 1. \tag{1.26}$$

2. СТАВОВИ О ФИГУРАТИВНИМ БРОЈЕВИМА

2.1. Ставови о полигоналним фигуративним бројевима

За полигоналне бројеве важе многобројне законитости. Неке од њих су доказане у претходном периоду (Deza & Deza, 2012). Ми смо се бавили доказивањем свих наведених законитости примењујући разлике међу суседним члановима низова полигоналних бројева (разлике првог реда) и разлике између њих (разлике другог реда). Већина тврђења су оригинална.

C2.1. Ако је $P_m(n)$ n–ти m–угаони полигонални фигуративни број, R1 први члан у низу разлика првог реда, R2 први члан у низу разлика другог реда из Табеле 1.4, онда је

$$P_m(n) = 1 + R1 \cdot (n-1) + R2 \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} \qquad (2.1)$$

Доказ:

$$1 + R1 \cdot (n-1) + R2 \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2} = 1 + (m-1)(n-1) + (m-2) \cdot \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

$$= 1 + mn - m - n + 1 + \frac{(m-2)(n^2-3n+2)}{2} =$$

$$= \frac{4+2mn-2m-2n+mn^2-3mn+2m-2n^2+6n-4}{2} =$$

$$= \frac{mn^2-mn+4n-2n^2}{2} =$$

$$= \frac{mn(n-1)-2n(n-2)}{2} =$$

$$= m \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n(n-2) = P_m(n) \ \blacksquare \qquad (\text{ на основу } (1.8))$$

За збир првих n чланова низа полигоналних фигуративних бројева важе следећа тврђења:

C2.2. Збир првих n троугоних бројева је

$$SP_3(n) = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + ... + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \tag{2.2}$$

Доказ:

$$SP_3(n) = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + . . . + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= 1 +(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)+... +(1+2+...+n)$$

$$= n\cdot 1 + (n-1)\cdot 2 + (n-2)\cdot 3 + (n-3)\cdot 4 +...+ (n-(n-1)) \cdot n$$

$$= n + 2n - 2 + 3n - 6 + 4n - 12 + . . . + n \cdot n - (n-1) \cdot n$$

$$= n \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + ...+ n) - 2 - 6 - 12 - . . . - (n-1) \cdot n$$

$$= n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2 \cdot (1 + 3 + 6 + . . . + \frac{(n-1)n}{2})$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - 2\cdot (SP_3(n) - \frac{n(n+1)}{2})$$

$$SP_3(n) = \frac{n^2(n+1)}{2} - 2\cdot SP_3(n) + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$3\cdot SP_3(n) = \frac{(n+1)\cdot(n^2+2n)}{2}$$

$$SP_3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \blacksquare$$

C2.3. Збир првих n квадратних бројева је

$$SP_4(n) = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2.3)$$

Доказ: За доказ овог тврђења користићемо део предходно доказаног става C1.1. тј. релацију (1.5):

$P_4(n) – P_3(n) = P_3(n–1)$ одакле следи да је

$P_4(n) = P_3(n–1) + P_3(n)$

па је

$$SP_4(n) = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + ... + n^2 =$$

$$= 1+(1+3)+(3+6)+(6+10)+(10+15)+(15+21)+...+\left(\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 15 + ...+ 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2 \cdot \left(1 + 3 + 6 + 10 + 15 + ... + \frac{(n-1)n}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2 \cdot \left(SP_3(n) - \frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{2n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+4-3)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \blacksquare$$

C2.4. Збир првих n петоугаоних бројева је

$$SP_5(n) = 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + ... + \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2} \qquad (2.4)$$

Доказ: Као у претходном доказу користимо законитост (1.5) која важи за полигоналне бројеве а која је исказана и доказана у C1.1.

$P_5(n) = P_3(n-1) + P_4(n)$, па је

$$SP_5(n) = 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + 51 + ... + \frac{n(3n-1)}{2} =$$

$$= 1 + (1+4) + (3+9) + (6+16) + (10+25) + ... + \left(\frac{(n-1)n}{2} + n^2\right) =$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + ... + n^2 + 1 + 3 + 6 + 10 + ... + \frac{(n-1)n}{2} =$$

$$= SP_4(n) + SP_3(n-1) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+n(n-1)(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1+n-1)}{6} =$$

$$= \frac{3n^2(n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)}{2} \quad \blacksquare$$

C2.5. Збир првих n шестоугаоних бројева је

$$SP_6(n) = 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + ... + n(2n-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \qquad (2.5)$$

Доказ : Аналогно претходном

$$SP_6(n) = 1 + 6 + 15 + 28 + 45 + 66 + ... + n(2n-1) =$$

$$= 1+(1+5)+ (3+12) + (6+22) + (10+35) + ... + \left(\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(3n-1)}{2}\right) =$$

$=1 + 3 + 6 + 10 + ... + \frac{(n-1)n}{2} + 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + ... + \frac{n(3n-1)}{2} =$

$= \quad SP_3(n-1) + SP_5(n) =$

$= \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)}{2} =$

$= \frac{n(n+1)(n-1+3n)}{6} =$

$= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ ■

C2.6. Збир првих n m–угаоних бројева је

$$SP_m(n) = SP_3(n) + (m-3) \cdot SP_3(n-1), \text{ за } m, n \in N, m \geq 3, n \geq 2. \qquad (2.6)$$

Ово тврђење ћемо доказати применом математичке индукције.

1° Докажимо да тврђење важи за $m = 3$

$SP_3(n) = SP_3(n) + (3-3) \cdot SP_3(n-1)$, тј. добијамо

$SP_3(n) = SP_3(n)$ што је увек тачно.

2° Предпоставимо да тврђење важи за $m = q$ тј. да је

$$SP_q(n) = SP_3(n) + (q-3) \cdot SP_3(n-1)$$

3° Докажимо да важи за $m = q + 1$ тј. да је

$$SP_{q+1}(n) = SP_3(n) + (q-2) \cdot SP_3(n-1)$$

Доказ:

$SP_{q+1}(n) = P_{q+1}(1) + P_{q+1}(2) + P_{q+1}(3) + \ldots + P_{q+1}(n)$

(како је на основу C1: $P_{q+1}(n) = P_q(n) + P_3(n-1)$ за $n \in N$

то је:

$P_{q+1}(2) = P_q(2) + P_3(1)$

$$P_{q+1}(3) = P_q(3) + P_3(2) \ldots$$

$$P_{q+1}(n) = P_q(n) + P_3(n-1)\ )$$

$$= 1 + P_q(2) + P_3(1) + P_q(3) + P_3(2) + P_q(4) + P_3(3) + \ \ldots\ + P_q(n) + P_3(n-1) =$$

$$= 1 + P_q(2) + P_q(3) + P_q(4) + \ldots + P_q(n) + SP_3(n-1) =$$

$= SP_q(n) + SP_3(n-1)$ (а на основу предпоставке)

$$= SP_3(n) + (\ q - 3) \cdot SP_3(n-1) + SP_3(n-1) =$$

$$= SP_3(n) + (\ q - 2) \cdot SP_3(n-1)\ ■$$

C2.7. Квадрат сваког природног броја већег од 1 једнак је збиру два узастопна троугаона броја :

$$(\ n + 1)^2 = P_3(n) + P_3(n+1)\ ,\ \ n \in N \tag{2.7}$$

Доказ:

$$P_3(n) + P_3(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+n+2)}{2} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = \frac{2(n+1)(n+1)}{2} = (n+1)^2\ ■$$

C2.8. Сваки природан број једнак је разлици двоструког троугаоног броја и одговарајућег квадратног броја :

$$n = 2P_3(n) - P_4(n) \tag{2.8}$$

Доказ:

$$2P_3(n) - P_4(n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^2 + n - n^2 = n\ ■$$

C2.9. Квадрат сваког непарног природног броја већег од 2 једнак је збиру шестоугаоног и троугаоног броја на следећи начин:

$$(2n-1)^2 = P_6(n) + P_3(2n-2)\,,\ \ n \geq 2 \ \ \wedge \ \ n \in N \qquad (2.9)$$

Доказ:

$$P_6(n) + P_3(2n-2) = n(2n-1) + \frac{(2n-2)(2n-1)}{2} = n(2n-1) + (n-1)(2n-1)$$

$$= (2n-1)(n+n-1) = (2n-1)(2n-1) = (2n-1)^2 \ \blacksquare$$

C2.10. Збир квадрата два узастопна природна броја једнак је збиру одговарајућег петоугаоног и троугаоног броја, на следећи начин:

$$n^2 + (n+1)^2 = P_5(n+1) + P_3(n-1),\ \ n \geq 2 \ \ \wedge \ \ n \in N \qquad (2.10)$$

Доказ :

$$P_5(n+1) + P_3(n-1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{3n^2+5n+2+n^2-n}{2} = \frac{4n^2+4n+2}{2} = 2n^2 + 2n + 1 = n^2 + (n+1)^2 \ \blacksquare$$

C2.11. Збир кубова n узастопних природних бројева једнак је квадрату n–тог троугаоног броја:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = (P_3(n))^2 \ \ , \ \ n \in N \qquad (2.11)$$

Доказ:

Докажимо да тврђење важи за $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 = (P_3(1))^2 .$$

Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$ тј. да је

$$\sum_{i=1}^{к} i^3 = (P_3(k))^2\,,\ \ к \in N$$

и докажимо да важи за $n = k + 1$ тј. да је

$$\sum_{i=1}^{к+1} i^3 = (P_3(k+1))^2, \ к \in N$$

Доказ:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = (P_3(k))^2 + (k+1)^3 =$$

$$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = (P_3(k+1))^2 \ ■$$

C2.12. Природан број $P_3(n)$ је троугаони акко је

$$8P_3(n) + 1 = (2n + 1)^2 \quad за \quad n \in N. \qquad (2.12)$$

Доказ:

→: Ако је $P_3(n)$ троугаони број и $n \in N$ тада је

$$P_3(n) = \frac{n(n+1)}{2} \quad па\ је$$

$$8\, P_3(n) + 1 = 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = 4n\,(n + 1) + 1 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$= (2n + 1)^2 \ ■$$

←: Ако је $8P_3(n) + 1 = (2n + 1)^2$ за $n \in N$ следи да је

$$8P_3(n) + 1 = 4n^2 + 4n + 1 \quad тј.$$

$$8P_3(n) = 4n^2 + 4n$$

$P_3(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ па, на основу (1.1) $P_3(n)$ је n-ти троугаони број■

C2.13. $P_5(n) = \sum_{i=1}^{n} (n + i - 1)\,, \quad n \in N$ (2.13)

Доказ :
$$\sum_{i=1}^{n} (n + i - 1) = \sum_{i=1}^{n} ((n-1) + i) = n(n-1) + \sum_{i=1}^{n} i =$$
$$= n(n-1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n(n-1)+n(n+1)}{2} =$$
$$= \frac{n(2n-2+n+1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2} = P_5(n) \blacksquare$$

C2.14. $P_6(n) = P_3(2n-1)$ (2.14)

Доказ :
$$P_3(2n-1) = \frac{(2n-1)(2n-1+1)}{2} = \frac{(2n-1)\cdot 2n}{2} = n(2n-1) = P_6(n) \blacksquare$$

2.2. Ставови о фигуративним бројевима правилних полиедара

C2.15. n – ти тетраедарски број је

$$TE(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \qquad (2.15)$$

Доказ :

$$TE(n) = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \ldots + P_3(n) = SP_3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \blacksquare$$

(↑ ово су троугаони бројеви ↑) (↑ на основу **C3** ↑)

C2.16. n – ти хексаедарски број је

$$HE(n) = n^3 \qquad (2.16)$$

Доказ:

$HE(n) = 1 + 7 + 19 + 37 + 61 + \ldots$

$= 1 + 7 + (7+12) + (7+12+18) + (7+12+18+24) + \ldots$

$= 1 + (n-1)\cdot 7 + (n-2)\cdot 12 + (n-3)\cdot 18 + (n-4)\cdot 24 + \ldots$

$= 1 + (n-1)\cdot 7 + (n-2)\cdot 6\cdot 2 + (n-3)\cdot 6\cdot 3 + (n-4)\cdot 6\cdot 4 + \ldots + (n-(n-1))\cdot(n-1)\cdot 6$

$= 1 + (n-1)\cdot 7 + 6\cdot[(n-2)\cdot 2 + (n-3)\cdot 3 + (n-4)\cdot 4 + \ldots + (n-(n-1))\cdot(n-1)]$

$= 1 + (n-1)\cdot 7 + 6\cdot[n\cdot(2+3+4+\ldots+(n-1)) - 4 - 9 - 16 - \ldots - (n-1)^2]$

$= 1 + (n-1)\cdot 7 + 6\cdot[n\cdot(P_3(n-1) - 1) - (SP_4(n-1) - 1)]$

$= 1 + (n-1)\cdot 7 + 6\cdot[n\cdot(\frac{(n-1)\cdot n}{2} - 1) - (\frac{(n-1)\cdot n(2n-1)}{6} - 1)]$

$= 1 + (n-1)\cdot 7 + 6\cdot\frac{n^2(n-1)-2n}{2} - 6\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)-6}{6}$

$= 1 + 7n - 7 + 3n^2(n-1) - 6n - n(2n^2 - n - 2n + 1) + 6$

$= 7n + 3n^3 - 3n^2 - 6n - 2n^3 + 3n^2 - n$

$= n^3$ ■

C2.17. n – ти октаедарски број је

$$OK(n) = \frac{n(2n^2+1)}{3} \qquad (2.17)$$

Доказ :

$OK(n) = 1 + 5 + 13 + 25 + 41 + 61 + \ldots$

$= 1 + 5 + (5 + 8) + (5 + 8 + 12) + (5 + 8 + 12 + 16) + (5+8+12+16+20) + \ldots$

$= 1 + (n-1)\cdot 5 + (n-2)\cdot 8 + (n-3)\cdot 12 + (n-4)\cdot 16 + (n-5)\cdot 20 + \ldots$

$= 1 + (n-1)\cdot 5 + (n-2)\cdot 2\cdot 4 + (n-3)\cdot 3\cdot 4 + (n-4)\cdot 4\cdot 4 + (n-5)\cdot 5\cdot 4 + \ldots + (n-(n-1))\cdot(n-1)\cdot 4$

$= 1 + (n-1)\cdot 5 + 4\cdot[(n-2)\cdot 2 + (n-3)\cdot 3 + (n-4)\cdot 4 + (n-5)\cdot 5 + \ldots + (n-(n-1))\cdot(n-1)]$

$= 1 + (n-1)\cdot 5 + 4\cdot[2n-4+3n-9+4n-16+5n-25+\ldots+n(n-1)-(n-1)^2]$

$= 1+(n-1)\cdot 5+4\cdot[n\cdot(2+3+4+5+\ldots+(n-1)) - (4+9+16+25+\ldots+(n-1)^2)]$

$= 1 + (n-1)\cdot 5 + 4n\cdot[\frac{(n-1)n}{2} - 1] - 4\cdot[SP_4(n-1) - 1]$

$= 1 + 5n - 5 + 2n \cdot (n^2 - n - 2) - 4 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)-6}{6}$

$= 1 + 5n - 5 + 2n^3 - 2n^2 - 4n - \frac{4n^3-6n^2+2n-12}{3}$

$= \frac{15n-12+6n^3-6n^2-12n-4n^3+6n^2-2n+12}{3}$

$= \frac{2n^3+n}{3}$

$= \frac{n(2n^2+1)}{3}$ ■

C2.18. n – ти додекаедарски број је

$$DO(n) = \frac{n(9n^2-9n+2)}{2} \tag{2.18}$$

Доказ :

Докажимо да тврђење важи за $n = 1$:

$DO(1) = \frac{1(9-9+2)}{2} = 1$

Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$ тј. да је

$DO(k) = \frac{k(9k^2-9k+2)}{2}$

и докажимо да важи за $n = k + 1$ тј. да је

$DO(k+1) = \frac{(k+1)(9(k+1)^2-9(k+1)+2)}{2}$

Доказ:

DO(k+1) = DO(k) + k-ти члан разлика првог реда

Уочимо да је први члан низа разлика првог реда број 19 другi члан је $64 = 19 + 45$

трећи члан је $136 = 19 + 45 + 72 = 19 + 45 + (45 + 27)$

четврти члан је $235 = 19 + 45 + 72 + 99 = 19 + 3\cdot 45 + 27\cdot(1 + 2)$, па је

$$DO(k+1) = \frac{k(9k^2-9k+2)}{2} + 19 + 45(k-1) + 27 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + k-2)$$

$$= \frac{k(9k^2-9k+2)}{2} + 19 + 45(k-1) + 27\, P_3(k-2)$$

$$= \frac{k(9k^2-9k+2)}{2} + 19 + 45k - 45 + 27 \cdot \frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

$$= \frac{9k^3-9k^2+2k}{2} + 45k - 26 + \frac{27(k^2-3k+2)}{2}$$

$$= \frac{9k^3-9k^2+2k+90k-52+27k^2-81k+54}{2}$$

$$= \frac{9k^3+18k^2+11k+2}{2} = \frac{9k^3+18k^2+9k+2k+2}{2}$$

$$= \frac{9k(k+1)^2+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(9k^2+9k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(9k^2+18k-9k+9-9+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(9(k+1)^2-9(k+1)+2)}{2}$$

$$= DO(k+1) \blacksquare$$

C2.19. n – ти икосаедарски број је

$$IK(n) = \frac{n(5n^2-5n+2)}{2} \qquad (2.19)$$

Доказ:

Докажимо да тврђење важи за $n = 1$:

$$IK(1) = \frac{1(5-5+2)}{2} = 1$$

Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$ тј. да је

$$IK(k) = \frac{k(5k^2-5k+2)}{2}$$

и докажимо да важи за $n = k + 1$ тј. да је

$$IK(k+1) = \frac{(k+1)(5(k+1)^2-5(k+1)+2)}{2}$$

Доказ :

$IK(k+1) = IK(k) + x$ где је са x означен к-ти члан у низу разлика првог реда (аналогно претходном доказу, уочимо да је $x = 11+25\cdot(k-1)+15\cdot(1+2+3+...+k-2)$)

па је $IK(k+1) = \frac{k(5k^2-5k+2)}{2} + 11 + 25(k-1) + 15 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + k-2)$

$$= \frac{k(5k^2-5k+2)}{2} + 11 + 25(k-1) + 15\, P_3(k-2)$$

$$= \frac{k(5k^2-5k+2)}{2} + 11 + 25k - 25 + 15 \cdot \frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

$$= \frac{5k^3+10k^2+7k+2}{2} = \frac{5k^3+10k^2+5k+2k+2}{2} =$$

$$= \frac{5k\left(k^2+2k+1\right)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(5k(k+1)+2)}{2} =$$

$$= \frac{(k+1)(5k^2+5k+2)}{2} = \frac{(k+1)(5\left(k^2+2k+1\right)-5k-3)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\left(5(k+1)^2-5(k+1)+2\right)}{2} = IK(k+1) \ \blacksquare$$

Допунимо сада табелу полиедарских бројева са њиховим разликама до n–тог члана.

Табела 2.1: Полиедарски фигуративни бројеви до n-тог члана

Тетраедарски бројеви: 1 , 4 , 10 , 20 , 35 , 56 , ..., $\frac{n(n^2+3n+2)}{6}$

разлике првог реда: 3 6 10 15 21 . . . $\frac{n(n+1)}{2}$

разлике другог реда: 3 4 5 6 . . . n

разлике трећег реда: 1 1 1 . . . 1

Хексаедарски бројеви: 1 , 8 , 27 , 64 , 125 , 216 , . . . , n^3

разлике првог реда: 7 19 37 61 91 . . . $3n^2–3n+1$

разлике другог реда: 12 18 24 30 . . . $6n–6$

разлике трећег реда: 6 6 6 . . . 6

Октаедарски бројеви: 1 , 6 , 19 , 44 , 85 , 146 , . . . , $\frac{n(2n^2+1)}{3}$

разлике првог реда: 5 13 25 41 61 . . . $2n^2–2n+1$

разлике другог реда: 8 12 16 20 . . . $4n–2$

разлике трећег реда: 4 4 4 . . . 4

Додекаедарски бројеви: 1 , 20 , 84 , 220 , 455 , 816 ... $\frac{n(9n^2-9n+2)}{2}$

разлике првог реда: 19 64 136 235 361 ... $\frac{27n^2-45n+20}{2}$

разлике другог реда: 45 72 99 126 . . . $\frac{54n-72}{2}$

разлике трећег реда: 27 27 27 . . . 27

Икосаедарски бројеви: 1 , 12 , 48 , 124 , 255 , 456 ... $\frac{n(5n^2-5n+2)}{2}$

разлике првог реда: 11 36 76 131 201 ... $\frac{15n^2-25n+12}{2}$

разлике другог реда: 25 40 55 70 . . . $15n–20$

разлике трећег реда: 15 15 15 . . . 15

C2.20. Ако са PO(n) означимо n–ти полиедарски број, са R_{11} разлику између прва два члана полиедарског низа (прва разлика првог реда), са R_{21} разлику између прве две разлике првог реда (прва разлика другог реда) и са R_{31} разлику између прве две разлике другог реда (као што је означено у претходној табели полиедарских бројева и њихових разлика), онда је

$$PO(n) = 1 + R_{11}\cdot(n-1) + R_{21}\cdot\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\cdot\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} \qquad (2.20)$$

Доказ :

1) Докажимо да тврђење важи за PO(n) = TE(n) тј. да је

$$TE(n) = 1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}$$

Доказ:

$$1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} =$$

$$1 + 3\cdot(n-1) + 3\cdot\frac{n^2-3n+2}{2} + 1\cdot\frac{(n-3)(n^2-3n+2)}{6} =$$

$$1 + 3n - 3 + \frac{3n^2-9n+6}{2} + \frac{n^3-3n^2+2n-3n^2+9n-6}{6} =$$

$$\frac{6+18n-18+9n^2-27n+18+n^3-6n^2+11n-6}{6} =$$

$$\frac{n^3+3n^2+2n}{6} = \frac{n(n^2+3n+2)}{6} = TE(n) \blacksquare$$

2) Докажимо да тврђење важи за PO(n) = HE(n) тј. да је

$$HE(n) = 1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}$$

Доказ:

$$1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} =$$

$$1 + 7\cdot(n-1) + 12\cdot\frac{n^2-3n+2}{2} + 6\cdot\frac{(n-3)(n^2-3n+2)}{6}$$

$$1 + 7n - 7 + 6n^2 - 18n + 12 + n^3 - 3n^2 + 2n - 3n^2 + 9n - 6 =$$

$$7n - 6 + 6n^2 - 18n + 12 + n^3 - 6n^2 + 11n - 6 = n^3 = HE(n) \blacksquare$$

3) Доказимо да тврђење важи за PO(n) = OK(n) тј. да је

$$OK(n) = 1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}$$

Доказ :

$$1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} =$$

$$1 + 5\cdot(n-1) + 8\cdot\frac{n^2-3n+2}{2} + 4\cdot\frac{(n-3)(n^2-3n+2)}{6} =$$

$$1 + 5n - 5 + 4n^2 - 12n + 8 + \frac{4(n^3-3n^2+2n-3n^2+9n-6)}{6} =$$

$$\frac{6+30n-30+24n^2-72n+48+4n^3-24n^2+44n-24}{6} =$$

$$\frac{4n^3+2n}{6} = \frac{2n(2n^2+1)}{6} =$$

$$\frac{n(2n^2+1)}{3} = OK(n) \blacksquare$$

4) Доказимо да тврђење важи за PO(n) = DO(n) тј. да је

$$DO(n) = 1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}$$

Доказ:

$$1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} =$$

$$1 + 19\cdot(n-1) + 45\cdot\frac{n^2-3n+2}{2} + 27\cdot\frac{(n-3)(n^2-3n+2)}{6} =$$

$$1 + 19n - 19 + \frac{45n^2-135n+90}{2} + \frac{9(n^3-3n^2+2n-3n^2+9n-6)}{2} =$$

$$\frac{2+38n-38+45n^2-135n+90+9n^3-54n^2+99n-54}{2} =$$

$$\frac{9n^3-9n^2+2n}{2} =$$

$$\frac{n(9n^2-9n+2)}{2} = DO(n) \blacksquare$$

5) Докажимо да тврђење важи за $PO(n) = IK(n)$ тј. да је

$$IK(n) = 1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6}$$

Доказ:

$$1 + R_{11}(n-1) + R_{21}\frac{(n-2)(n-1)}{2} + R_{31}\frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{6} =$$

$$1 + 11\cdot(n-1) + 25\cdot\frac{n^2-3n+2}{2} + 15\cdot\frac{(n-3)(n^2-3n+2)}{6} =$$

$$1 + 11n - 11 + \frac{25n^2-75n+50}{2} + \frac{5(n^3-3n^2+2n-3n^2+9n-6)}{2} =$$

$$\frac{2+22n-22+25n^2-75n+50+5n^3-30n^2+55n-30}{2} =$$

$$\frac{5n^3-5n^2+2n}{2} =$$

$$\frac{n(5n^2-5n+2)}{2} = IK(n) \blacksquare$$

Одредимо сада суме првих n полиедарских бројева:

C2.21. Сума првих n тетраедарских бројева је

$$STE(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} \tag{2.21}$$

Доказ:

$$STE(n) = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + \ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$= 1+(1+3) + (1+3+6) + (1+3+6+10) + \ldots + (1+3+6+10+\ldots+\frac{n(n+1)}{2})$$

$$= n\cdot 1 + (n-1)\cdot 3 + (n-2)\cdot 6 + (n-3)\cdot 10 + \ldots + (n-(n-1))\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n\cdot(1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2}) - 3 - 12 - 30 - \ldots - (n-1)\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n \cdot SP_3(n) - 3 \cdot \left(1 + 4 + 10 + \ldots + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} \right)$$

$$= n \cdot SP_3(n) - 3 \cdot \left(STE(n) - \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \right)$$

$$\Rightarrow \quad STE(n) = n \cdot SP_3(n) - 3\,STE(n) + \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 4\,STE(n) = n \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 4\,STE(n) = \frac{n^2(n+1)(n+2)+3n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\Rightarrow \quad 4\,STE(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n^2+3n)}{6}$$

$$\Rightarrow \quad STE(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} \quad \blacksquare$$

C2.22. Сума првих n хексаедарских бројева је

$$SHE(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \tag{2.22}$$

Доказ:

$SHE(n) = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + \ldots + n^3 = (P_3(n))^2$ (на основу **C12**)

$$\Rightarrow \quad SHE(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \blacksquare$$

Напомена: Доказана једнакост имплицира следећи идентитет

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

C2.23. Сума првих n октаедарских бројева је

$$SOK(n) = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6} \tag{2.23}$$

Доказ:

Докажимо да тврђење важи за $n = 1$

$$SOK(1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$ тј. да је

$$SOK(k) = \frac{k(k+1)(k^2+k+1)}{6}$$

и докажимо да важи за $n = k + 1$ тј. да је

$$SOK(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)((k+1)^2+k+2)}{6}$$

Доказ за $n = k + 1$:

$$SOK(k+1) = SOK(k) + OK(k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)(k^2+k+1)}{6} + \frac{(k+1)(2(k+1)^2+1)}{3}$$

$$= \frac{k(k+1)\left(k^2+k+1\right)+2(k+1)(2k^2+4k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k^3+k^2+k+4k^2+8k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k^3+3k^2+3k+2k^2+6k+6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k(k^2+3k+3)+2(k^2+3k+3))}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left(k^2+3k+3\right)(k+2)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)\left((k+1)^2+k+2\right)}{6}$$

$$= SOK(k+1) \blacksquare$$

C2.24. Сума првих n додекаедарских бројева је

$$SDO(n) = \frac{n(9n^3+6n^2-5n-2)}{8} = \frac{n(n+1)(3n-2)(3n+1)}{8} \qquad (2.24)$$

Доказ:

Докажимо да тврђење важи за $n = 1$:

$$SDO(1) = \frac{1\cdot(9+6-5-2)}{8} = 1$$

Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$ тј. да је

$$\mathrm{SDO}(k) = \frac{k(9k^3+6k^2-5k-2)}{8}$$

и докажимо да важи за $n = k + 1$ тј. да је

$$\mathrm{SDO}(k+1) = \frac{(k+1)(9(k+1)^3+6(k+1)^2-5(k+1)-2)}{8}$$

Доказ за $n = k + 1$:

$$\mathrm{SDO}(k+1) = \mathrm{SDO}(k) + \mathrm{DO}(k+1)$$

$$= \frac{k(9k^3+6k^2-5k-2)}{8} + \frac{(k+1)(9(k+1)^2-9(k+1)+2)}{2}$$

$$= \frac{9k^4+6k^3-5k^2-2k+(4k+4)(9k^2+9k+2)}{8}$$

$$= \frac{9k^4+42k^3+67k^2+42k+8}{8}$$

$$= \frac{k\left(9k^3+33k^2+34k+8\right)+(9k^3+33k^2+34k+8)}{8}$$

$$= \frac{\left(9k^3+33k^2+34k+8\right)(k+1)}{8}$$

$$= \frac{\left(9(k+1)^3+6(k+1)^2-5(k+1)-2\right)(k+1)}{8}$$

$$= \mathrm{SDO}(k+1) \ \blacksquare$$

C2.25. Сума првих n икосаедарских бројева је

$$\mathrm{SIK}(n) = \frac{n(15n^3+10n^2-3n+2)}{24} = \frac{n(n+1)(15n^2-5n+2)}{24} \qquad (2.25)$$

Доказ:

Докажимо да тврђење важи за $n = 1$:

$$\mathrm{SIK}(1) = \frac{1(15+10-3+2)}{24} = 1$$

Претпоставимо да тврђење важи за $n = k$ тј. да је

$$\mathrm{SIK}(k) = \frac{k(15k^3+10k^2-3k+2)}{24}$$

и докажимо да важи за $n = k + 1$ тј. да је

$$SIK(k+1) = \frac{(k+1)(15(k+1)^3+10(k+1)^2-3(k+1)+2)}{24}$$

Доказ за $n = k + 1$:

$$SIK(k+1) = SIK(k) + IK(k+1)$$

$$= \frac{k(15k^3+10k^2-3k+2)}{24} + \frac{(k+1)(5(k+1)^2-5(k+1)+2)}{2}$$

$$= \frac{15k^4+10k^3-3k^2+2k+12(k+1)(5\left(k^2+2k+1\right)-5k-5+2)}{24}$$

$$= \frac{15k^4+70k^3+117k^2+86k+24}{24}$$

$$= \frac{k\left(15k^3+55k^2+62k+24\right)+15k^3+55k^2+62k+24}{24}$$

$$= \frac{\left(15k^3+55k^2+62k+24\right)(k+1)}{24}$$

$$= \frac{(15(k^3+3k^2+3k+1)+10(k^2+2k+1)-3k-3+2)(k+1)}{24}$$

$$= \frac{(15(k+1)^3 + 10(k+1)^2 - 3(k+1) + 2)\,(k+1)}{24}$$

$$= SIK(k+1) \ \blacksquare$$

Слично законитостима које важе за полиедарске бројеве а које су исказане у ставу C21, имамо законитости које важе за суме полиедарских бројева:

C2.26. Ако са SPO(n) означимо суму првих n полиедарских бројева, са R_{11} разлику између прва два члана полиедарског низа (разлика првог реда), са R_{21} разлику између прве две разлике првог реда (разлике другог реда) и са R_{31} разлику између прве две разлике другог реда (као што је означено у табели полиедарских бројева и њихових разлика), онда је

$$SPO(n) = n + R_{11}\cdot \frac{(n-1)n}{2} + R_{21}\cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + R_{31}\cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24} \qquad (2.26)$$

Доказ:

1) Ако је $PO(n) = TE(n)$ докажимо да је $SPO(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$

Доказ:

$$SPO(n) = n + R_{11} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + R_{21} \cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + R_{31} \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}$$

$$= n + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 3 \cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + 1 \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}$$

$$= \frac{24n+36n(n-1) + 12n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$= \frac{n(24+36n-36+12(n^2-3n+2)+(n^2-3n+2)(n-3))}{24}$$

$$= \frac{n(36n-12+12n^2-36n+24+n^3-3n^2-3n^2+9n+2n-6)}{24}$$

$$= \frac{n(n^3+6n^2+11n+6)}{24} = \frac{n(n^3+3n^2+3n^2+9n+2n+6)}{24}$$

$$= \frac{n(n^2(n+3)+3n(n+3)+2(n+3))}{24}$$

$$= \frac{n(n+3)(n^2+3n+2)}{24}$$

$$= \frac{n(n+3)(n+2)(n+1)}{24} \quad \blacksquare$$

2) Ако је $PO(n) = HE(n)$ докажимо да је $SPO(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Доказ:

$$SPO(n) = n + R_{11} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + R_{21} \cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + R_{31} \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}$$

$$= n + 7 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 12 \cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + 6 \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}$$

$$= \frac{4n+14n(n-1)+8n(n-1)(n-2)+n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$$

$$= \frac{n(4+14n-14+8(n^2-3n+2)+(n^2-3n+2)(n-3))}{4}$$

$$= \frac{n(14n - 10 + 8n^2 - 24n + 16 + n^3 - 3n^2 - 3n^2 + 9n + 2n - 6)}{4}$$

$$= \frac{n(n^3 + 2n^2 + n)}{4} = \frac{n^2 (n^2 + 2n + 1)}{4} =$$

$$= \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \blacksquare$$

3) Ако је $PO(n) = OK(n)$ докажимо да је $SPO(n) = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6}$

Доказ:

$$SPO(n) = n + R_{11} \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} + R_{21} \cdot \frac{(n-2)(n-1)\,n}{6} + R_{31} \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)\,n}{24}$$

$$= n + 5 \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} + 8 \cdot \frac{(n-2)(n-1)\,n}{6} + 4 \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)\,n}{24}$$

$$= \frac{6n + 15n(n-1) + 8n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

$$= \frac{n(6 + 15n - 15 + 8(n^2 - 3n + 2) + (n^2 - 3n + 2)(n-3))}{6}$$

$$= \frac{n(15n - 9 + 8n^2 - 24n + 16 + n^3 - 3n^2 - 3n^2 + 9n + 2n - 6)}{6}$$

$$= \frac{n(n^3 + 2n^2 + 2n + 1)}{6}$$

$$= \frac{n((n+1)(n^2 - n + 1) + 2n(n+1))}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2 + n + 1)}{6} \quad \blacksquare$$

4) Ако је $PO(n) = DO(n)$ докажимо да је $SPO(n) = \frac{n(9n^3 + 6n^2 - 5n - 2)}{8}$

Доказ:

$$SPO(n) = n + R_{11} \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} + R_{21} \cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + R_{31} \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}$$

$$= n + 19 \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} + 45 \cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + 27 \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}$$

$$= \frac{8n + 76n(n-1) + 60n(n-1)(n-2) + 9n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$$

$$= \frac{n(\,8+76n - 76 + 60(n^2 -3n + 2) + (n^2 - 3n+2)(9n-27)}{8}$$

$$= \frac{n(76n - 68 + 60n^2 - 180n + 120 + 9n^3 - 27n^2 - 27n^2 + 81n + 18n - 54)}{8}$$

$$= \frac{n(9n^3 + 6n^2 - 5n - 2)}{8} \blacksquare$$

5) Ако је PO(n) = IK(n) докажимо да је $SPO(n) = \frac{n\,(n+1)\,(15n^2 - 5n + 2)}{24}$

Доказ:

$$SPO(n) = n + R_{11} \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} + R_{21} \cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + R_{31} \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}$$

$$= n + 11 \cdot \frac{(n-1)\,n}{2} + 25 \cdot \frac{(n-2)(n-1)n}{6} + 15 \cdot \frac{(n-3)(n-2)(n-1)n}{24}$$

$$= \frac{24n+132n(n-1)+100n(n-1)(n-2)+15n\,(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

$$= \frac{n(24 + 132n - 132 + 100(n^2 -3n + 2) + (n^2 - 3n + 2)(15n - 45))}{24}$$

$$= \frac{n(132n - 108 + 100n^2 - 300n + 200 + 15n^3 - 45n^2 - 45n^2 + 135n + 30n - 90)}{24}$$

$$= \frac{n(\,15n^3 + 10n^2 - 3n + 2\,)}{24} = \frac{n(15n^3 - 5n^2 + 2n + 15n^2 - 5\,n + 2)}{24}$$

$$= \frac{n(15n^2(n+1) - 5n(n+1) + 2(n+1))}{24} = \frac{n(n + 1)(15n^2 - 5\,n+2)}{24} \blacksquare$$

За полиедарске бројеве важе и друге интересантне законитости:

C2.27. $HE(n) = \sum_{i=1}^{n} (\,n(n-1) + 2i - 1)$ (2.27)

Доказ:

$$\sum_{i=1}^{n} (\,n(n-1) + 2i - 1) =$$

$$= (\,n(n-1) + 1) + (n(n-1) + 3) + (n(n-1) + 5) + \ldots + (n(n-1) + 2n-1) =$$

$$= n \cdot n(n-1) + 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n-1 =$$

$= n^2 (n-1) + n^2$ (на основу Питагорејског доказа)

$= n^3 - n^2 + n^2 = n^3 = HE(n)$ ■

Напомена: Ова теорема доказује да је сваки n–ти хексаедарски број збир n узастопних непарних бројева почев од $(n-1) \cdot n + 1$:

$$1 = 1$$
$$8 = 3 + 5$$
$$27 = 7 + 9 + 11$$
$$64 = 13 + 15 + 17 + 19$$
$$125 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$$
$$216 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$

2.3. Ставови о пирамидалним фигуративним бројевима

C2.28. $PIR_3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (2.28)

Доказ: На основу (1.13) имамо да је

$$PIR_3(n) = P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + \ldots + P_3(n) = 1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= SP_3(n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \ \blacksquare$$ (на основу 2.2)

C2.29. $PIR_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (2.29)

Доказ: На основу (1.13) имамо да је

$$PIR_4(n) = P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + \ldots + P_4(n) = 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 =$$

$$= SP_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ \blacksquare$$ (на основу 2.3)

C2.30. $PIR_5(n) = \frac{n^2(n+1)}{2}$ (2.30)

Доказ: На основу (1.13) имамо да је

$$PIR_5(n) = P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) + \ldots + P_5(n) = 1 + 5 + 12 + \ldots + \frac{n(3n-1)}{2} =$$

$$= SP_5(n) = \frac{n^2(n+1)}{2} \;\blacksquare \qquad \text{(на основу 2.4)}$$

C2.31. $PIR_6(n) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ (2.31)

Доказ: На основу (1.13) имамо да је

$$PIR_6(n) = P_6(1) + P_6(2) + P_6(3) + \ldots + P_6(n) = 1 + 6 + 15 + \ldots + n(2n-1) =$$

$$= SP_6(n) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \;\blacksquare \qquad \text{(на основу 2.5)}$$

C2.32. $PIR_m(n) = \frac{n(n+1)((m-2)n-m+5))}{6}$ (2.32)

Доказ: На основу (1.13) имамо да је

$$PIR_m(n) = P_m(1) + P_m(2) + P_m(3) + \ldots + P_m(n) =$$

$$= 1 + m + 3(m-3) + \ldots + m\cdot\frac{n(n-1)}{2} - n(n-2) =$$

$$= SP_m(n) = SP_3(n) + (m-3)\cdot SP_3(n-1) \qquad \text{(на основу 2.6)}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + (m-3)\cdot\frac{n(n-1)(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}\cdot(n + 2 + mn - m - 3n + 3) = \frac{n(n+1)}{6}\cdot(n\cdot(m-2) - m + 5) =$$

$$= \frac{n(n+1)((m-2)n-m+5))}{6} \;\blacksquare$$

C2.33. $PIR_3(2n) = 4 \cdot PIR_4(n)$ (2.33)

Доказ: На основу (2.28) имамо да је

$$PIR_3(2n) = \frac{2n(2n+1)(2n+2)}{6} =$$

$$= \frac{2n(2n+1)2(n+1)}{6} = \frac{4n(2n+1)(n+1)}{6} = 4 \cdot PIR_4(n) \blacksquare \quad \text{(на основу (2.29))}$$

C2.34. Квадратни пирамидални број је збир два узастопна тетраедарска броја

$$PIR_4(n) = PIR_3(n) + PIR_3(n-1) \tag{2.34}$$

Доказ: На основу (2.28) имамо да је

$$PIR_3(n) + PIR_3(n-1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2+n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= PIR_4(n) \blacksquare \qquad \text{(на основу (2.29))}$$

C2.35. $PIR_m(n) = PIR_{m-1}(n) + PIR_3(n-1)$ (2.35)

Доказ: На основу (2.32) и (2.28) имамо да је

$$PIR_{m-1}(n) + PIR_3(n-1) = \frac{n(n+1)((m-3)n-m+6))}{6} + \frac{n(n-1)(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(mn-3n-m+6+n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(mn-2n-m+5)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n(m-2)-m+5)}{6} = PIR_m(n) \blacksquare \qquad \text{(на основу (2.32))}$$

C2.36. $PIR_m(n) = PIR_3(n) + (m-3) \cdot PIR_3(n-1)$ (2.36)

Доказ: На основу (2.28) имамо да је

$$PIR_3(n) + (m-3) \cdot PIR_3(n-1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + (m-3) \cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2+mn-3n-m+3)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(mn-2n-m+5)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(n(m-2)-m+5)}{6} =$$

$= PIR_m(n)$ ■ (на основу (2.32))

2.4. Ставови о центрираним полигоналним фигуративним бројевима

С2.37. $CP_3(n) = P_3(n) + P_3(n-1) + P_3(n-2),\ n \geq 3$ (2.37)

Доказ: На основу (1.1) имамо да је

$$P_3(n) + P_3(n-1) + P_3(n-2) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2+n+n^2-n+n^2-3n+2}{2} =$$

$= \frac{3n^2-3n+2}{2} = CP_3(n)$ ■ (на основу (1.9))

С2.38. $CP_4(n) = P_4(n) + P_4(n-1)$ (2.38)

Доказ: На основу (1.2) имамо да је

$P_4(n) + P_4(n-1) = n^2 + (n-1)^2 = 2n^2 - 2n + 1 = CP_4(n)$ ■ (на основу (1.10))

С2.39. $CP_6(n) = HE(n) - HE(n-1)$ (2.39)

Доказ: На основу (2.16) имамо да је

$HE(n) - HE(n-1) = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1 = CP_6(n)$ ■ (на основу (1.12))

C2.40. $CP_6(1) + CP_6(2) + \ldots + CP_6(n) = HE(n)$ (2.40)

Доказ: На основу (2.16) и претходно доказаног тврђења (2.39) имамо да је

$CP_6(1) = 1^3 - 0^3$

$CP_6(2) = 2^3 - 1^3$

$CP_6(3) = 3^3 - 2^3$

$\ldots$

$CP_6(n) = n^3 - (n-1)^3$

$$\Rightarrow\ CP_6(1) + CP_6(2) + CP_6(3) + \ldots + CP_6(n) = 1^3 - 0^3 + 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + \ldots + n^3 - (n-1)^3$$

$$= n^3 = HE(n)\ \blacksquare$$

2.5. Ставови о центрираним полиедарским фигуративним бројевима

C2.41. $CTE(n) = \frac{(2n-1)\left(n^2-n+3\right)}{3}$ (2.41)

Доказ: На основу (1.17) и (2.15) имамо да је

$CTE(n) = TE(n) + TE(n-1) + TE(n-2) + TE(n-3)$

$$= \frac{n(n^2+3n+2)}{6} + \frac{(n-1)((n-1)^2+3(n-1)+2)}{6} + \frac{(n-2)((n-2)^2+3(n-2)+2)}{6} +$$

$$+ \frac{(n-3)((n-3)^2+3(n-3)+2)}{6} =$$

$$= \frac{n^3+3n^2+2n}{6} + \frac{(n-1)(n^2+n)}{6} + \frac{(n-2)(n^2-n)}{6} + \frac{(n-3)(n^2-3n+2)}{6} =$$

$$= \frac{4n^3-6n^2+14n-6}{6} = \frac{2n^3-3n^2+7n-3}{3} = \frac{2n\left(n^2-n+3\right)-(n^2-n+3)}{3} =$$

$$= \frac{(2n-1)\left(n^2-n+3\right)}{3}\ \blacksquare$$

C2.42. $CHE(n) = (2n - 1)(n^2 - n + 1)$ (2.42)

Доказ: На основу (1.18) и (2.16) имамо да је

$$CHE(n) = HE(n-1) + HE(n) = (n-1)^3 + n^3 = 2n^3 - 3n^2 + 3n - 1 =$$

$$= 2n^3 - 2n^2 - n^2 + 2n + n - 1 = 2n(n^2 - n + 1) - (n^2 - n + 1) =$$

$$= (2n - 1)(n^2 - n + 1) \blacksquare$$

C2.43. $COK(n) = \frac{(2n-1)(2n^2-2n+3)}{3}$ (2.43)

Доказ: На основу (1.19) и (2.3) имамо да је

$$COK(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(4i^2 + 2) = 1 + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 2(n-1) = 1 + 4 \cdot SP_4(n-1) + 2(n-1) =$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 2(n-1) =$$

$$= \frac{4n^3-6n^2+8n-3}{3} = \frac{2n\left(2n^2-2n+3\right)-(2n^2-2n+3)}{3} =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n^2-2n+3)}{3} \blacksquare$$

C2.44. $CDO(n) = (2n - 1)(3n^2 - 3n + 1)$ (2.44)

Доказ: На основу (1.21) и (2.3) имамо да је

$$CDO(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(18i^2 + 2) = 1 + 18 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 2(n-1) = 1 + 18 \cdot SP_4(n-1) + 2(n-1) =$$

$$= 1 + 18 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 2(n-1) =$$

$$= 1 + 6n^3 - 9n^2 + 3n + 2n - 2 = 6n^3 - 9n^2 + 5n - 1 =$$

$$= 2n(3n^2 - 3n + 1) - (3n^2 - 3n + 1) =$$

$$= (2n - 1)(3n^2 - 3n + 1) \blacksquare$$

C2.45. $\mathrm{CIK}(n) = \dfrac{(2n-1)(5n^2-5n+3)}{3}$ (2.45)

Доказ: На основу (1.23) и (2.3) имамо да је

$$\mathrm{CIK}(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(10i^2 + 2) = 1 + 10\cdot\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 2(n-1) = 1 + 10\cdot SP_4(n-1) + 2(n-1) =$$

$$= 1 + 10\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 2(n-1) = \frac{3+5n\left(2n^2-3n+1\right)+6n-6}{3} =$$

$$= \frac{10n^3-15n^2+11n-3}{3} = \frac{2n\left(5n^2-5n+3\right)-(5n^2-5n+3)}{3} =$$

$$= \frac{(2n-1)(5n^2-5n+3)}{3} \ \blacksquare$$

2.6. Ставови о центрираним m-угаоним пирамидалним бројевима

C2.46. $\mathrm{CPIR}_3(n) = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$ (2.46)

Доказ: На основу (1.25) и (1.8) имамо да је

$$\mathrm{CPIR}_3(n) = CP_3(1) + CP_3(2) + \ldots + CP_3(n) =$$

$$= 1 + (1 + 3\cdot P_3(1)) + (1 + 3\cdot P_3(2)) + (1 + 3\cdot P_3(3)) + \ldots + (1 + 3\cdot P_3(n-1)) =$$

$$= n\cdot 1 + 3\cdot(P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + \ldots + P_3(n-1)) =$$

$$= n + 3\cdot SP_3(n-1) = \qquad \text{(на основу (2.2))}$$

$$= n + 3\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{6} = n + \frac{(n-1)n(n+1)}{2} = \frac{2n+n(n^2-1)}{2} =$$

$$= \frac{n^3+n}{2} = \frac{n(n^2+1)}{2} \ \blacksquare$$

C2.47. $CPIR_4(n) = \frac{n(2n^2+1)}{3}$ (2.47)

Доказ: На основу (1.25) и (1.8) слично претходном, имамо да је

$$CPIR_4(n) = CP_4(1) + CP_4(2) + \ldots + CP_4(n) =$$

$$= 1 + (1 + 4\cdot P_3(1)) + (1 + 4\cdot P_3(2)) + (1 + 4\cdot P_3(3)) + \ldots + (1 + 4\cdot P_3(n-1)) =$$

$$= n + 4 \cdot (P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + \ldots + P_3(n-1)) =$$

$$= n + 4\cdot SP_3(n-1) =$$

$$= n + 4\cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = n + \frac{2n(n^2-1)}{3} = \frac{3n+2n^3-2n}{3} =$$

$$= \frac{2n^3+n}{3} = \frac{n(2n^2+1)}{3} \blacksquare$$

C2.48. $CPIR_5(n) = \frac{n(5n^2+1)}{6}$ (2.48)

Доказ: Слично претходном, на основу (1.25) и (1.8) имамо да је

$$CPIR_5(n) = CP_5(1) + CP_5(2) + \ldots + CP_5(n) =$$

$$= 1 + (1 + 5\cdot P_3(1)) + (1 + 5\cdot P_3(2)) + (1 + 5\cdot P_3(3)) + \ldots + (1 + 5\cdot P_3(n-1)) =$$

$$= n + 5 \cdot (P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + \ldots + P_3(n-1)) =$$

$$= n + 5\cdot SP_3(n-1) =$$

$$= n + 5\cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = n + \frac{5n(n^2-1)}{6} = \frac{6n+5n^3-5n}{6} =$$

$$= \frac{5n^3+n}{6} = \frac{n(5n^2+1)}{6} \blacksquare$$

C2.49. $CPIR_6(n) = n^3$ (2.49)

Доказ: На основу (1.25) и (1.8) имамо да је

$$CPIR_6(n) = CP_6(1) + CP_6(2) + \ldots + CP_6(n) =$$

$$= 1 + (1 + 6\cdot P_3(1)) + (1 + 6\cdot P_3(2)) + (1 + 6\cdot P_3(3)) + \ldots + (1 + 6\cdot P_3(n-1)) =$$

$$= n + 6 \cdot (P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + \ldots + P_3(n-1)) =$$

$$= n + 6\cdot SP_3(n-1) =$$

$$= n + 6\cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = n + n\cdot(n^2 - 1) =$$

$$= n + n^3 - n = n^3 \blacksquare$$

C2.50. $CPIR_m(n) = \frac{mn^3 - mn + 6n}{6}$ (2.50)

Доказ: На основу (1.25) и (1.8), као и у претходним ставовима, имамо да је

$$CPIR_m(n) = CP_m(1) + CP_m(2) + \ldots + CP_m(n) =$$

$$= 1 + (1 + m\cdot P_3(1)) + (1 + m\cdot P_3(2)) + (1 + m\cdot P_3(3)) + \ldots + (1 + m\cdot P_3(n-1)) =$$

$$= n + m \cdot (P_3(1) + P_3(2) + P_3(3) + \ldots + P_3(n-1)) =$$

$$= n + m\cdot SP_3(n-1) =$$

$$= n + m\cdot \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \frac{6n + mn(n^2-1)}{6} = \frac{6n + mn^3 - mn}{6} =$$

$$= \frac{mn^3 - mn + 6n}{6} \blacksquare$$

3. МАТЕМАТИЧКИ МОДЕЛИ ЗА ПРЕЗЕНТОВАЊЕ ЗАКОНИТОСТИ МЕЂУ ПРИРОДНИМ БРОЈЕВИМА

Фигуративни бројеви поседују једноставну дефиницију али су веома богати разним својствима. Присутне су једноставне међусобне везе између полигоналних бројева, између полиедарских и полигоналних бројева до веома комплексних веза које су описане у научним радовима истраживача у овој области (Beery, 2009; Braza & Tong, 2001; Caglayan, 2014; Hajdu, Pintér, Tengely & Varga, 2014; Leyendekkers & Shannon, 2016; Muktibodh & Vyawahare, 2005; Pengelley, 2013).

По природи своје дефинисаности, фигуративни бројеви су директно повезани са природним бројевима. Интересантне законитости између природних и фигуративних бројева су и следеће:

Како низ разлика између суседних чланова троугаоних бројева чини низ природних бројева могуће је формирати ове бројеве и на следећи начин:

ЗБИР ПРИРОДНИХ БРОЈЕВА	ТРОУГАОНИ БРОЈЕВИ
1	1
1+2	3
1+2+3	6
1+2+3+4	10
1+2+3+4+5	15
1+2+3+4+5+6	21
1+2+3+4+5+6+7	28
1+2+3+4+5+6+7+8	36
. . .	. . .

Слично претходном, у тетраедарском низу бројева, низ разлика суседних чланова чине троугаони бројеви па је могуће формирати тетраедарске бројеве и на следећи начин:

ЗБИР ТРОУГАОНИХ БРОЈЕВА	ТЕТРАЕДАРСКИ БРОЈЕВИ
1	1
1+3	4
1+3+6	10
1+3+6+10	20
1+3+6+10+15	35
1+3+6+10+15+21	56
1+3+6+10+15+21+28	84
1+3+6+10+15+21+28+36	120
. . .	. . .

Троугаони и тетраедарски бројеви се појављују и у Паскаловом троуглу чинећи трећу и четврту колону, респективно:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
. . .
↑ ↑
тетраедарски
троугаони бројеви

Такође се у петој колони појављују пентаедроидни бројеви, хипер пирамидални фигуративни бројеви из четвородимензионалног простора који нису предмет ове дисертације. Аутор дисертације се бавила одређивањем једнаких вредности за фигуративне бројеве у Паскаловом троуглу. Уочљиво је да се број 10 појављује у низу троугаоних и тетраедарских бројева али се не појављује у низу пентаедроидних бројева. Број 15 се појављује у низу троугаоних и пентаедроидних али се не појављује у низу тетраедарских бројева. Број 35 се појављује у низу тетраедарских и пентаедроидних али се не појављује у низу троугаоних бројева. Ове констатације су наметнуле питање одређивања бројева у

Паскаловом троуглу који су истовремено троугаони, тетраедарски и пентаедроидни, тј. природних бројева n, m, k ϵ N таквих да је

$$\binom{n}{2} = \binom{m}{3} = \binom{k}{4} \quad \text{за } n, m, k \in N \text{ и } n \geq 2, m \geq 3, k \geq 4.$$

Математичком анализом решења претходне једначине добијено је само једно решење. Број 1 је једини број у Паскаловом троуглу који је троугаони, тетраедарски и пентаедроидни. Добијено решење је проверено путем рачунара. Написан је програм на програмском језику C# који је тестиран у рачунарском центру Алфа БК Универзитета. Резултати рада програма показали су да су једини бројеви који су истовремено троугаони и тетраедарски (за $n \leq 10^7$) следећи бројеви: 1, 10, 120, 1540 і 7140. Такође је потврђено да једини број који је троугаони, тетраедарски и пентаедроидни јесте број 1.

Комлетни резултати и опис овог истраживања приказани су у нашем раду „ Computing support for testing equal values of the figurative numbers in the Pascal triangle“ (Mihajlov Carević, Ilić, Petrović & Denić) који је у процесу рецензије.

Претходно изложене законитости као и законитости исказане у ставовима доказаним у претходним поглављима, јасно указују на могућност формирања математичких модела за презентовање разних проблема у области теорије бројева.

Један од проблема који се повезује са фигуративним бројевима је проблем одређивања савршених бројева. По дефиницији, број је савршен ако је једнак збиру свих својих делитеља, не укључујући и сам број. Ову дефиницију је дао Еуклид наводећи је у свом делу ΣΤΟΙΧΕΙΑ (VII, деф. 23) и такође је доказао да је сваки природан број облика $2^{k-1}(2^k - 1)$ савршен број, где је $2^k - 1$ прост број. Такође је и k прост број али то није довољан услов, неопходно је да је $2^k - 1$ прост број (Еуклид, прев. 1949).

Напишимо неколико савршених бројева:

Прости бројеви	Савршени бројеви
2	$2^1(2^2 - 1) = 6$
3	$2^2(2^3 - 1) = 28$
5	$2^4(2^5 - 1) = 496$
7	$2^6(2^7 - 1) = 8128$
13	$2^{12}(2^{13} - 1) = 33550336$

17	$2^{16}(2^{17}-1) = 8589869056$
19	$2^{18}(2^{19}-1) = 137438691328$
. . .	. . .

Прост број облика $2^k - 1$ је Мерсенов прост број (Deza & Deza, 2012). Како је

$2^{k-1}(2^k - 1) = \frac{2^k(2^k-1)}{2}$ а ово је $P_3(2^k - 1)$, следи да је сваки савршен број који је облика $2^{k-1}(2^k - 1)$, троугаони број са индексом Мерсеновог простог броја $2^k - 1$.

Претходно је речено да је k прост број, ако је при том $k \geq 3$ тада је

$$\begin{aligned} 2^k - 1 &= 2^{2m+1} - 1 \quad (m \geq 1, m \in N) \\ &= 2^{2m} \cdot 2 - 1 \\ &= 2 \cdot 4^m - 1 \end{aligned}$$

Израз $2 \cdot 4^m - 1 \equiv 1 \pmod 3$ што је доказано у наставку рада,

$\Rightarrow$ $2^k - 1 = 3n + 1$ где је $n \in N$ и $n = \frac{2^k-2}{3}$.

На основу свега закључујемо да сваки савршен број облика $2^{k-1}(2^k - 1)$, осим 6, може бити приказан као

$$2^{k-1}(2^k - 1) = P_3(2^k - 1) = P_3(3n + 1) = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2} = \frac{9n^2+9n+2}{2} =$$

$$= 1 + \frac{9n(n+1)}{2} = 1 + 9 \cdot P_3(n) \quad \text{где је } n \in N \text{ и } n = \frac{2^k-2}{3}.$$

Доказ да је $2 \cdot 4^m - 1 \equiv 1 \pmod 3$ изводимо применом математичке индукције:

1° Докажимо да тврђење важи за $m = 1$

$2 \cdot 4^m - 1 = 2 \cdot 4^1 - 1 = 7$

$7 \equiv 1 \pmod 3$ чиме је тврђење доказано за $m = 1$.

2° Претпоставимо да тврђење важи за $m = k$ тј. да је

$2 \cdot 4^k - 1 \equiv 1 \pmod 3$

3° Докажимо да тврђење важи за $m = k + 1$ тј. да је

$2 \cdot 4^{k+1} - 1 \equiv 1 \pmod 3$

Доказ за $m = k + 1$: На основу претпоставке исказане у 2°

$$2 \cdot 4^{k} - 1 \equiv 1 \pmod 3 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 4^{k} - 1 = 3q + 1$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 4^{k} = 3q + 2,\; q \in N \;\wedge\; q > 1.$$

Израз $2 \cdot 4^{k+1} - 1 = 2 \cdot 4^{k} \cdot 4 - 1 =$

$$= (3q + 2) \cdot 4 - 1 =$$

$$= 12q + 7 =$$

$$= 3 \cdot (4q + 2) + 1$$

што при дељењу са 3 даје остатак 1.

Дакле $2 \cdot 4^{k+1} - 1 \equiv 1 \pmod 3$ ■

Поред савршених бројева, фигуративни бројеви су повезани са Питагориним триплетима и Фибоначијевим низом бројева.

Питагора са Самоса (6. век п.н.е.) је по неким историјским изворима од вавилонских мудраца сазнао да је код неких правоуглих троуглова квадрат над хипотенузом једнак збиру квадрата над катетама (Hogben, 1970; Lučić, 2009). Поуздано се зна да су Вавилонци знали ову законитост али нису доказали да она важи за сваки правоугли троугао, што је касније учинио Питагора.

Питагорини триплети бројева су елементи скупа Диофантових тројки бројева (a, b, c) за које је $c^2 = a^2 + b^2$. Има више начина да се одреде низови Диофантових тројки бројева. На пример, сваки број a који може да се растави на производ целих бројева $a = p \cdot q$ представља једну катету правоуглог троугла чија је хипотенуза $c = \frac{p^2+q^2}{2}$ а друга катета $b = \frac{p^2-q^2}{2}$. Тада је:

$$a^2 + b^2 = (p \cdot q)^2 + \left(\frac{p^2-q^2}{2}\right)^2 = p^2 q^2 + \frac{p^4 - 2p^2q^2+q^4}{4} = \frac{4p^2q^2 + p^4 - 2p^2q^2+q^4}{4} =$$

$$= \frac{p^4 + 2p^2q^2+q^4}{4} = \left(\frac{p^2+q^2}{2}\right)^2 = c^2.$$

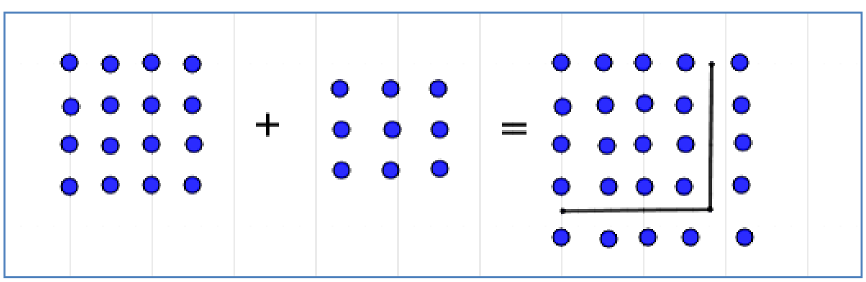
Данас је опште прихвећена тројка формула која генерише све Диофантове тројке бројева а која је изведена из претходно изложеног:

$a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ за $m, n \in \mathbf{N} \wedge m > n$.

Примери:

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	2	12	16	20
5	2	21	20	29
4	3	7	24	25
5	3	16	30	34

Изложене формуле јасно показују повезаност квадратних бројева са Питагориним тројкама бројева. Ова повезаност је још израженија у графичком приказу (Слика 3.1).

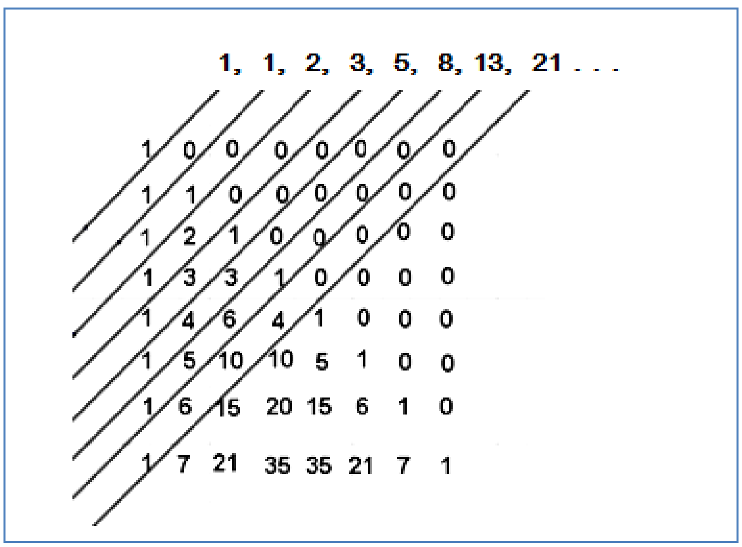


Слика 3.1: Питагорин триплет и фигуративни бројеви

Сваку тројку Питагориних бројева могуће је приказати фигуративно на претходно приказан начин тако што се на фигуративни приказ већег броја допишу по једна (или више) врста и колона састављених од тачака из графичког приказа другог броја. На тај начин ће бити формиран квадрат који има онолико тачака колико оба квадрата заједно.

Леонардо Филијус Боначи из Пизе (1170–1250.г.) познатији као Фибоначи, дефинисао је низ бројева чија су прва два члана 1 и 1 а сваки следећи члан се добија као збир претходна два члана. Чланови Фибоначијевог низа, који ћемо означити са F, су следећи бројеви:
F: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 . . . . Рекурентна формула за чланове Фибоначијевог низа је следећа: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_1 = F_2 = 1$, $n \in N$.

Ако Паскалов троугао бројева напишемо у облику правоуглог троугла и допунимо нулама до потпуног квадрата (Слика 3.2), збирови бројева на дијагоналама формирају Фибоначијев низ бројева.



Слика 3.2: Паскалов троугао и Фибоначијев низ бројева

Фибоначијев низ има особину да количник два узастопна члана веома брзо тежи константи златног пресека Ф = 1,618... .

$F_{10} : F_9 = 55 : 34 = 1,6177...$

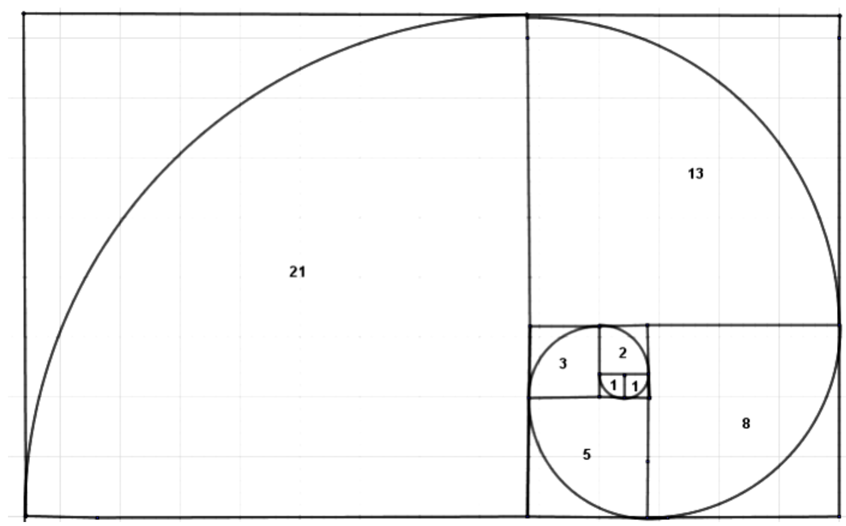
$F_{11} : F_{10} = 89 : 55 = 1,618...$

$F_{12} : F_{11} = 144 : 89 = 1,6179...$

Пропорција златног пресека је присутна у најлепшим грађевинама и уметничким делима. Она влада односима грађевинских елемената у египатској, грчкој, ренесансној и другим архитектурама, биолошком морфологијом, уметничким делима свих врста (Borisavljević, 1998; Mihajlov, 2012).

Фибоначијев низ бројева се може употребити за конструкцију Фибоначијевих правоугаоника који се добијају на следећи начин:

Конструишемо два квадрата димензија 1 x 1, један до другог а затим и квадрат димензија 2 x 2 који има заједничку страницу са претходна два квадрата. Над страницом дужине 3 конструишемо нови квадрат димензија 3 x 3. Поступак настављамо аналогно и добијамо Фибоначијеве правоугаонике. Ако затим конструишемо четвртине кругова полупречника 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... добићемо спиралу у којој су два суседна полупречника у златном пресеку (Слика 3.3).



Слика 3.3: Фибоначијева спирала

Проучавањем веза међу фигуративним бројевима бавили су се многобројни научници током протеклих векова.

Никомах (Nichomachus) је у 1. веку п.н.е. дошао до закључка да је

$P_m(n) = P_{m-1}(n) + P_3(n-1)$, за $m, n \in N$, $m > 3$, $n \geq 2$ (Deza & Deza, 2012).

Ово тврђење је исказано и доказано у ставу C1.1 за случајеве када је $m \in \{4, 5, 6\}$. Лако се може доказати и општи случај овог тврђења:

На основу (1.7) имамо да је

$$P_m(n) = m \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n\cdot(n-2)$$

па је

$$P_m(n) - P_{m-1}(n) = m \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n\cdot(n-2) - \left((m-1) \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n\cdot(n-2)\right) =$$

$$= m \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n\cdot(n-2) - (m-1) \cdot \frac{n(n-1)}{2} + n\cdot(n-2) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \cdot (m - m + 1) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} = P_3(n-1) \blacksquare \qquad \text{(на основу (1.1))}$$

Баше (Bachet de Mėziriac) је у 17. веку доказао да је

$P_m(n) = P_3(n) + (m-3) \cdot P_3(n-1)$ за $m, n \in N$, $m \geq 3$, $n \geq 2$ (Deza & Deza, 2012).

Доказ овом тврђењу можемо извести слично претходном: На основу (1.1)

$$P_3(n) + (m-3) \cdot P_3(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} + (m-3) \cdot \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + m \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} =$$

$$= m \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)-3n(n-1)}{2} =$$

$$= m \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{-2n^2+4n}{2} =$$

$$= m \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2n(n-2)}{2} =$$

$$= m \cdot \frac{n(n-1)}{2} - n(n-2) = P_m(n) \blacksquare$$

Пјер Ферма (Pier de Fermat) је 1636. године дошао до констатације да је сваки природан број сума највише 3 троугаона броја, 4 квадратна броја, 5 петоугаоних бројева и тако даље. Ову своју констатацију Пјер Ферма није доказао па су се многобројни математичари бавили доказивањем појединачних случајева да би на крају био доказан и општи случај. Случај квадрата доказао је Лагранж (Lagrange) 1770. године (Deza & Deza, 2012). Овај доказ је познат као Лагранжова теорема четири квадрата:

„За сваки позитиван цео број L постоје не-негативни цели бројеви a, b, c, d такви да је

$$L = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.\text{ “}$$

Доказ овом тврђењу базиран је на чувеном Ојлеровом (Leonard Ojler) идентитету „четири квадрата“ доказаном 1749. године:

„ За произвољне целе бројеве a, b, c, d, w, x, y, z важи следеће

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\cdot(w^2 + x^2 + y^2 + z^2) = (aw + bx + cy + dz)^2 + (ax - bw - cz + dy)^2 +$$
$$+ (ay + bz - cw - dx)^2 + (az - by + cx - dw)^2\text{ “.}$$

У књизи (Deza & Deza, 2012), у поглављу 5, наведен је комплетан доказ случаја 4 квадрата.

Случај троугаоних бројева решио је Гаус (Fridrih Gauss) 1796. године (Deza & Deza, 2012). Гаус је доказао да сваки позитиван цео број L може бити представљен на следећи начин:

$$L = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

где су k, m, n не-негативни цели бројеви.

Ова једнакост имплицира закључак да је сваки број облика 8L + 3 збир три непарна квадрата. Множењем претходне једнакости са 8 добијамо:

$$8L = 4k(k+1) + 4m(m+1) + 4n(n+1)$$

$$8L = 4k^2 + 4k + 4m^2 + 4m + 4n^2 + 4n$$

$$8L = (2k+1)^2 - 1 + (2m+1)^2 - 1 + (2n+1)^2 - 1$$

па је $8L + 3 = (2k+1)^2 + (2m+1)^2 + (2n+1)^2$.

Ова чињеница је посебан случај теореме којом се тврди да је природан број сума 3 квадрата ако није облика

$$4^k \cdot (8m + 7) \quad \text{за} \ \ k, m \geq 0.$$

Ову теорему је доказао Лежандр (Legendre) 1798. године али је доказ био не комплетан. Комплетирао га је Гаус 1801. године па је теорема позната као Гаус-Лежандрова теорема (Oh & Sun, 2009).

Први доказ Фермаовој тврдњи у целини дао је Коши (Cauchi) 1813. године (Deza & Deza, 2012).

Јакоби (Jacobi) је 1834. године одредио укупан број начина на које се дати природан број L може изразити као збир 4 квадратна броја:

„Укупан број је умножак броја 8 и збира свих делитеља броја L ако је L непаран број, односно умножак броја 24 и збира свих непарних делитеља броја L ако је L паран број."

Лежандр је такође доказао да је сваки довољно велики природан број сума од четири (m+2)-гонална броја ако је (m+2) непаран број, док је за (m+2) паран, сума од пет (m+2)-гонална броја при чему је један од њих 0 или 1. (Deza & Deza, 2012).

Позната је и Ферма-Ојлерова теорема којом се тврди

„ за сваки прост број $p \equiv 1 \pmod 4$ важи следеће: $p = x^2 + y^2$, $x, y \in Z$".

Овом теоремом се тврди да сваки прост број који при дељењу са 4 даје остатак 1 јесте сума два квадрата целих бројева (Oh & Sun, 2009). За илустрацију овог тврђења наводимо следеће примере простих бројева који при дељењу са 4 дају остатак 1:

$$5 = 2^2 + 1^2$$
$$13 = 3^2 + 2^2$$
$$17 = 4^2 + 1^2$$
$$29 = 5^2 + 2^2$$
$$37 = 6^2 + 1^2$$

Односима природних и фигуративних бројева бавили су се и савремени истраживачи.

Сун (Sun, 2007) доказује да је било који $n \in N$ сума парног квадрата и два троугаона броја. При том ако је $n \in N$ и $n \neq 2P_3(m)$ за свако $m \in N$ тада је n такође и сума једног непарног квадрата и два троугаона броја.

У истом раду Сун доказује и тврђење да ако су a, b, c позитивни цели бројеви са $b \geq c$, тада се сваки $n \in N$ може написати у облику $ax^2 + bP_3(y) + cP_3(z)$ за $x,y,z \in Z$ при чему су (a,b,c) из следећег скупа вектора:

$\{(1,1,1), (1,2,1), (1,2,2), (1,3,1), (1,4,1), (1,4,2), (1,5,2), (1,6,1), (1,8,1), (2,1,1), (2,2,1), (2,4,1), (3,2,1),(4,1,1), (4,2,1)\}$.

Ох (Oh & Sun, 2009) доказује да је сваки позитиван цео број сума квадрата, непарног квадрата и троугаоног броја. Такође доказује да је троугаони број $P_3(m)$ за $m \in Z^+$ сума два непарна квадрата и троугаоног броја ако и само ако $2m+1$ није прост број конгруентан 3 по модулу 4. На тај начин је доказано следеће тврђење:

Ако је p прост број и $p = 2m + 1$ за $m \in Z^+$, тада

$p \equiv 3 \pmod 4$ акко $P_3(m)$ се не може изразити као сума два непарна квадрата и троугаоног броја.

Бавећи се односима међу фигуративним и природним бројевима, аутор ове дисертације је дошла до следеће констатације:

За $m, n \in N$ и $m \geq 3$

$$P_m(n) = x^2 + P_3(y) + P_3(z) + (m-2)\,P_3(n-1)$$

при чему је за $k \in Z$

$$x = \begin{Bmatrix} 2k, & \text{ако} \quad n=2P_3(m) \\ 2k-1 & \text{ако} \quad n\neq 2P_3(m) \end{Bmatrix}.$$

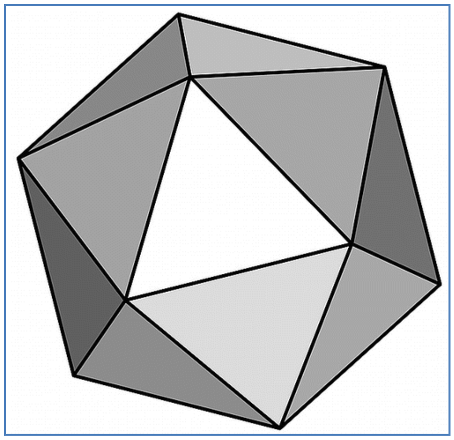
Ова констатација је формулисана као теорема која је са доказом део научног рада „Poligonal numbers as sums of squares and triangular numbers“ (Mihajlov Carević, Petrović & Denić) који је описан у поглављу 6.1. и у процесу је рецензије.

Осим у теорији бројева и другим математичким областима, фигуративни бројеви са својим моделима су присутни и у другим научним областима.

Немачка служба за временску прогнозу развила је оперативни глобални нумерички модел предвиђања времена, назван ГМЕ, заснован на икосаедарској хексагоналној мрежи. У свом раду „The Operational Global Icosahedral–Hexagonal Gridpoint Model GME:

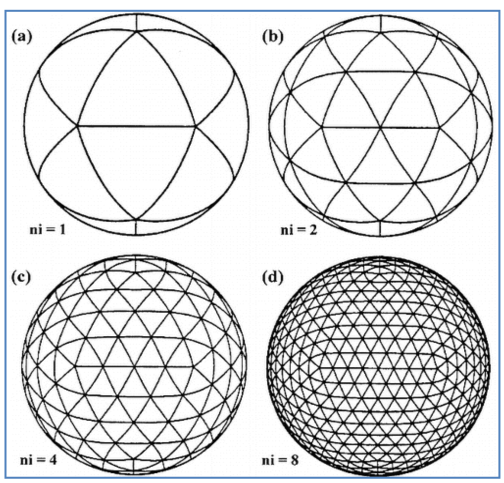
Description and High-Resolution Tests", аутори описују ову мрежу и дају оцене тачности њене примене (Majewski, Liermann, Prohl, Ritter, Buchhold, Hanisch & Baumgardner; 2002).

Да би се генерисала решетка, у сфери је конструисан правилни икосаедар (Слика 3.4) тако да се 2 од 12 вертикала (које пролазе кроз 12 темена икосаедра) поклапају са северним и јужним полом.



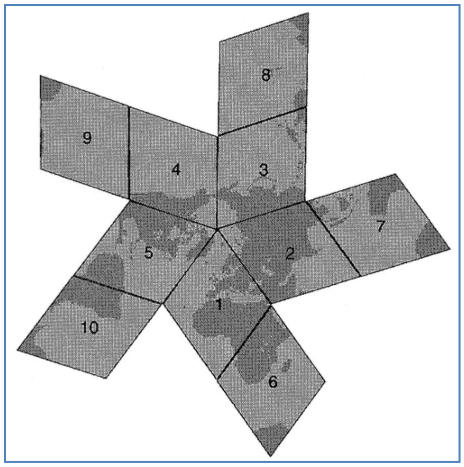
Слика 3.4: Правилни икосаедар

Узастопним половљењем ивица троуглова који су стране икосаедра формирани су нови троуглови (Слика 3.5). Параметар ni је број интервала на полазном троуглу.



Слика 3.5: Половљење ивица

Икосаедарска мрежа се развија у хексагоналну мрежу која се састоји од 10 ромбова, при чему је сваки састављен од 2 троугла из икосаедарске мреже (Слика 3.6).



Слика 3.6: Икосаедарска хексагонална мрежа ГМЕ

Икосаедарска - хексагонална решетка, први пут је уведена у метеоролошко моделирање 1968. године. Последњих година приметно је све веће интересовање истраживача за ову врсту мреже.

Бавећи се доминацијским скуповима и доминацијским бројевима ромбоидалних кактус ланаца, аутор ове дисертације је одредила минимални доминацијски скуп за икосаедарску хексагоналну мрежу. Резултати овог истраживања су изложени у раду „Dominating sets on the rhomboidal cactus chains and the icosahedral network " (Mihajlov Carević, Petrović & Denić) који је описан у поглављу 6.4. Рад је изложен на научном симпозијуму „International simposium INFOTEH – JAHORINA 2020".

Икосаедарке форме су присутне и на другим местима. Уз неколико изузетака, љуске (капсиде) вируса налик сфери имају симетрију икосаедра. У свом раду „Origin of icosahedral symmetry in viruses", аутори пружају одговор на фундаментално питање: зашто вируси усвајају икосаедарску симетрију (Zandi, Reguera, Bruinsma, Gelbart & Rudnick; 2004).

Икосаедарске структуре су присутне и у металима. У свом раду „Melting of icosahedral gold nanoclusters from molecular dynamics simulations" (Wang, Teitel & Dellago; 2005) аутори показују да се златни кластери са око 600-3000 атома након хлађења кристализују у икосаедарску структуру. Ганеш и Видом (Ganesh & Widom; 2006) такође показују да се у течном и суперхлађеном течном бакру појављују икосаедарске структуре. Аутори рада „Connectivity of icosahedral network and a dramatically growing static length scale in Cu-Zr binary metallic glasses“, карактеришу хемијски састав икосаедарских мрежа и њихових компоненти у Cu-Zr бинарним металним стаклима (Soklaski, Nussinov, Markow, Kelton & Yang; 2013).

Тетраедарске и октаедарске форме присутне су у атомској физици. У свом раду „Atomic Nuclei with Tetrahedral and Octahedral Symmetries“ аутори приказују могуће манифестације октаедарске и тетраедарске симетрије у језгрима атома (Dudek, Góźdz, & Schunck; 2003).

У раду „New nuclear stability islands of octahedral and tetrahedral shapes“ (Mazurek, Dudek, Góźdź, Curien, Kmiecik & Maj; 2009) аутори наводе да систематске калкулације укупне нуклеарне енергије показују присуство ефеката љуске које покреће тетраедарска симетрија и предвиђају нова острва стабилности тетраедарског и октаедарског облика.

Аутори рада „Hepatitis B small surface antigen particles are octahedral“ показују да су мале површинске честице антигена хепатитиса Б октаедарске структуре (Gilbert, Beales, Blond, Simon, Lin, Chisari & Rowlands; 2005).

Широка распрострањеност октаедарских и икосаедарских структура подстакла је аутора дисертације на истраживање међусобних веза између октаедарских и икосаедарских бројева. Резултати до којих сам дошла настали су коришћењем разлика првог реда и разлика другог реда за октаедарске бројеве и икосаедарске бројеве, наведених у Табели 2.1. Као први резултат добијен је израз за израчунавање (n+1)-ог члана низа октаедарских бројева, затим и низа икосаедарских бројева:

$$\mathrm{OK}(n+1) = 1 + 5 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(5 + \sum_{k=1}^{i} 4(k+1) \right), \text{ за } n \in \mathbb{N} \land n \geq 2$$

$$\mathrm{IK}(n+1) = 1 + 11 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(11 + \sum_{k=1}^{i} 5 \cdot (5 + (k-1) \cdot 3) \right), \text{ за } n \in \mathbb{N} \land n \geq 2$$

Истраживањем разлике међу њима добијен је следећи резултат:

$$\mathrm{IK}(n+1) - \mathrm{OK}(n+1) = 6 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(6 + \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k) \right), \text{ за } n \in \mathbb{N} \land n \geq 2$$

Ови резултати су формулисани као теореме које су са доказима део научног рада „On the representation of difference between icosahedral and octahedral numbers“ (Mihajlov Carević, Petrović & Denić) који је описан у поглављу 6.2. и у процесу је рецензије.

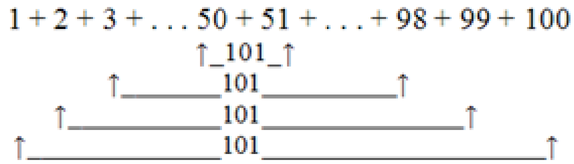
4. ПЕДАГОШКИ АСПЕКТИ УПОЗНАВАЊА ФИГУРАТИВНИХ БРОЈЕВА

4.1. Визуелизација и репрезентација у настави математике

Визуелно–логички приступ решавању математичких проблема је врло мало или ни мало присутан у савременој настави математике. Савремена настава математике се превасходно своди на примену алгебарских формула и алгебарских поступака. Чак је и геометрија постала подобласт алгебре. Као што је Еуклид у 3.в.п.н.е. (Euklid, прев.1949) геометризовао аритметику представљајући бројеве дужима и изводећи све ставове и њихове доказе над дужима као бројевима, тако је савремена математика алгебраизовала геометрију сводећи је само на примену геометријских чињеница и уочених законитости над геометријским објектима да би се одмах прешло на употребу алгебарског апарата за решавање задатка или извођење доказа.

Ако бисмо питали ученике основне школе чему је једнак збир првих 1000 природних бројева, мало ученика би за неколико минута дало тачан одговор. На питање чему је једнак збир првих n природних бројева или збир првих n непарних бројева, мало ученика првог и другог разреда средње школе може тачно да одговори. Истраживања која смо обавили у основној и средњој школи тема су наших радова публикованих у научним часописима и Зборницима научних конференција на којима су представљени. Ови радови су изложени у петом поглављу дисертације под називом „Методолошки оквир истраживања“.

Занимљив је поступак великог математичара Гауса, који је живео у 18. веку и као дечак од 10 година уочио законитост помоћу које је брзо и лако израчунао збир природних бројева од 1 до 100 (Conway & Guy, 2012) на следећи начин:



Свака два означена броја дају збир 101 а има их укупно 50 па је збир првих 100 природних бројева $50 \cdot 101 = 5050$. Ученици којима је испричана прича о великом математичару Гаусу примењују овај поступак и брзо израчунавају збир првих 1000 природних бројева. Али, ако им овај или сличан поступак никада није показан, мало ученика ће се досетити како да срачуна тај збир.

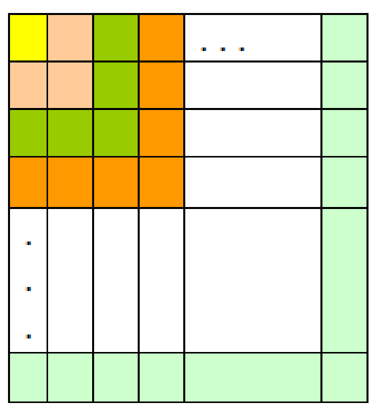
Питагорејци су још у античком периоду констатовали да је

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ . \ . \ . \ + 2n - 1 = n^2$$

дељењем квадрата на $n \times n$ квадратића и уочавањем збира

1 квадрат + 3 квадрата + 5 квадарата + . . . + 2n – 1 квадрата

на следећи начин:



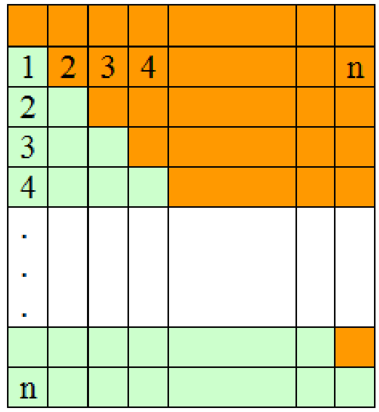
Слика 4.1: Питагорејски поступак сабирања непарних бројева

одакле се јасно види да је $1 + 3 + 5 + 7 + \ . \ . \ . + 2n - 1 = n \times n$. (Heath, 1981; Dejić & Mihajlović, 2015).

Почетком 20. века Макс Вертхајмер, оснивач Гешталт–теорије, бавећи се „продуктивним мишљењем“, (King, 2007) закључио је да је увиђање доброг облика кључ за решавање проблемске ситуације, а увиђање је сагледавање односа међу елементима проблемске ситуације. Израчунавање збира природних бројева

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ . \ . \ . \ + n$$

Вертхајмер изводи на следећи начин :



Слика4.2: Вертхајмеров поступак сабирања природних бројева

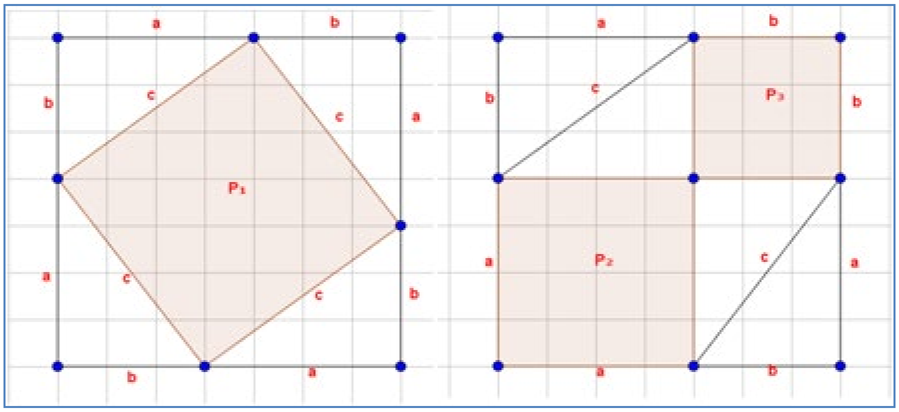
Ако допунимо овај квадрат са још једном врстом испред прве, добићемо идентичну структуру „степеница“ (окренуту наопако), и тада је уочљиво:

$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ . \ . \ . + n) = n \cdot (n + 1)$ па је

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ . \ . \ . + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Бројни су примери визуелно–логичког приступа решавању проблема, од античког периода до 21. века (Arcavi, 2003; Boaler, Chen, Williams & Cordero, 2016; Duval, 1999; Van Garden & Montague, 2003; Wang, Wu, Kinshuk, Chen & Spector, 2013). Међутим, анализирањем савремене наставе математике у основној и средњој школи, уочава се одсуство визуелног приступа (осим у геометријским проблемима).

Бавећи се испитивањем ефикасности визуелног приказа математичких законитости у процесу учења алгебарских формула, извршили смо истраживање са ученицима седмог разреда основне школе. Након провере знања ученика у познавању основних математичких формула, закључили смо да ученици делимично владају овом материјом. Због тога смо организовали два додатна часа посвећена савладавању предвиђених формула. Припремили смо сликовне приказе законитости исказане у Питагориној теореми (Слика 4.3), законитости за квадрат бинома (Слика 4.4) и разлику квадрата (Слика 4.5) и приказали их ученицима.



А Б

Слика 4.3: Питагорина теорема

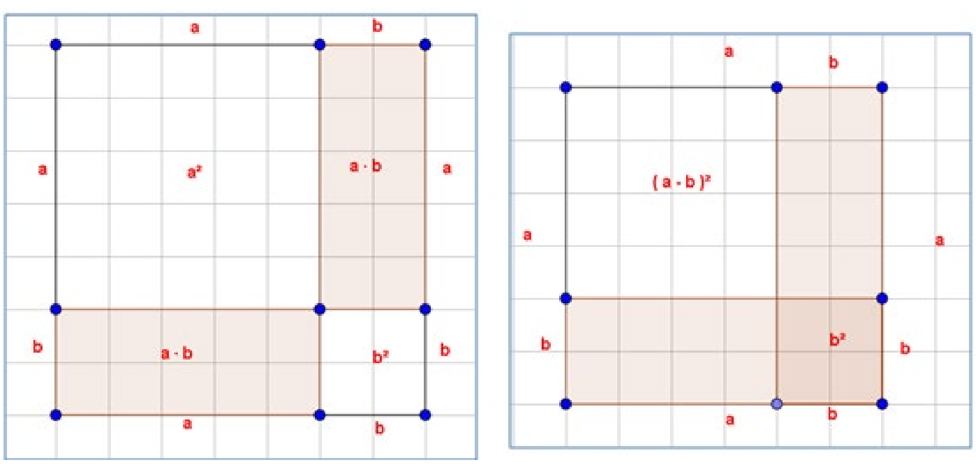
Уз сликовни приказ Питагорине теореме (Mihajlov, 2012), ученицима је предочено да је већи квадрат на Слици 4.3А састављен од мањег квадрата (обојеног и означеног са P_1) и 4 једнака правоугла троугла страница a, b и c. На Слици 4.3Б тај већи квадрат је након померања правоуглих троуглова страница a, b и c, састављен од ова 4 троугла и још два мања квадрата (обојена и означена са P_2 и P_3). Слика јасно показује да је $P_1 = P_2 + P_3$. Квадрат означен са P_1 има страницу дужине c док квадрати означени са P_2 и P_3 имају странице дужине a и b респективно. Површина квадрата $P_1 = c^2$, $P_2 = a^2$ и $P_3 = b^2$.

Замењујући добијене изразе у једнакост

$P_1 = P_2 + P_3$ добијамо

$c^2 = a^2 + b^2$

чиме је тврђење Питагорине теореме доказано.



А Б

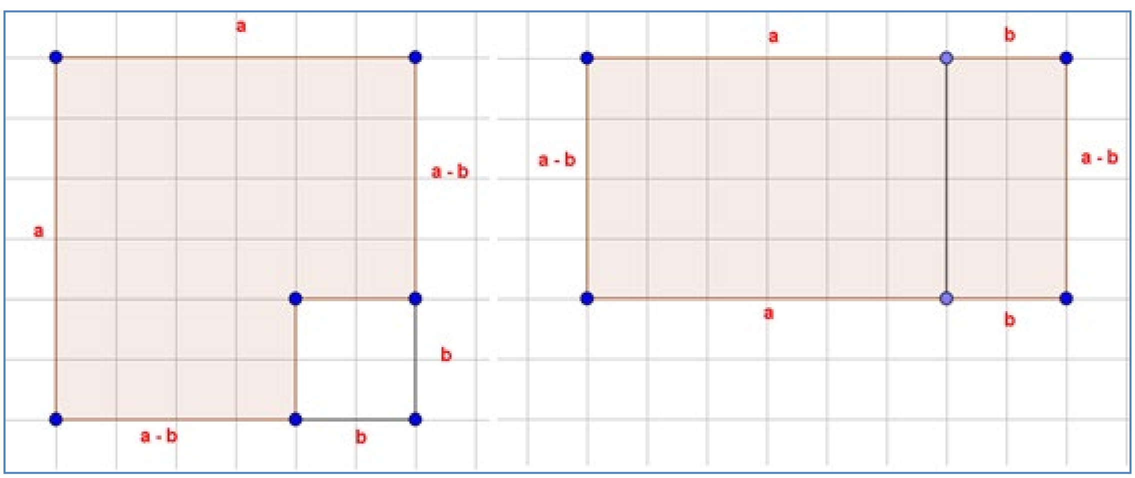
Слика 4.4: Квадрат бинома $(a + b)^2$ и $(a – b)^2$

За демонстрирање визуелизације формуле за квадрат бинома, $(a + b)^2$, употребили смо Слику 4.4А. На слици се јасно види да велики квадрат странице дужине $a+b$ садржи у себи два мања квадрата страница дужине a и b респективно, али и два правоугаоника страница дужине a и b. Одатле следи да је површина великог квадрата једнака збиру површина свих својих делова, или да је $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

Након увида у Слику 4.4А чули су се коментари ученика да им је сада јесно зашто је $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ а није једнако $a^2 + b^2$.

Када смо запитали ученике чему је једнако $(a - b)^2$ било је тачних одговора али и одговора „$a^2 - b^2$“. Ученицима је тада приказана Слика 4.4Б на којој је приказан велики квадрат странице дужине a од кога је одузимањем два правоугаоника дужина страница a и b (обојених на слици) остао део површине $(a - b)^2$. При том је два пута одузет мали квадрат (обојен тамнијом бојом на слици) чија је површина једнака b^2. Из свега изложеног видимо да је $(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

За демонстрирање визуелизације формуле за разлику квадрата припремили смо слику са квадратом странице a из кога је одстрањен квадрат странице b (Слика 4.5). Померањем правоугаоника страница b и $a - b$ добили со правоугаоник страница $a + b$ и $a - b$. На Слици 4.5 се јасно види да је $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ што су ученици лако уочили и схватили.



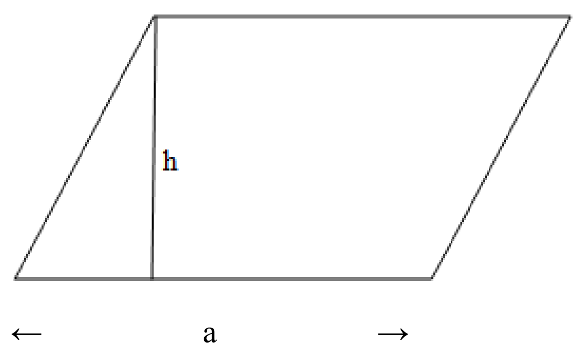
Слика 4.5: Разлика квадрата $a^2 - b^2$

Резултати и опис овог истраживања приказани су у нашем раду „*GeoGebra to help in the understanding and memorizing mathematical formulas“,* на Десетој међународној конференцији „Наука и високо образовање у функцији одрживог развоја – СЕД 2017“ у Ужицу (Mihajlov Carević & Denić, 2017). Истраживање је обухватило 101 ученика седмог разреда основне школе.

4.2. Процес учења математике и развој математичког мишљења

У процесу учења математике неопходно је разумевање законитости које важе за математичке објекте а разумевање је сагледавање проблемске ситуације као саставног дела шире целине.

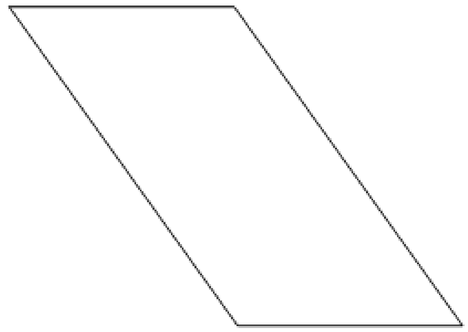
За демонстрирање ове тврдње навешћу чувени Вертхајмеров „паралелограмски проблем“ – експеримент са групом ученика којима је учитељ показао како да израчунају површину паралелограма (King, 2007). Речено им је да конструишу линију од горњег левог угла тако да формира угао од 90° са основицом. Након мерења ове линије и множења са дужином основице, добијали су тражену површину паралелограма као на слици :



Симболички записано $P = a \cdot h$

Слика 4.6: Површина паралелограма

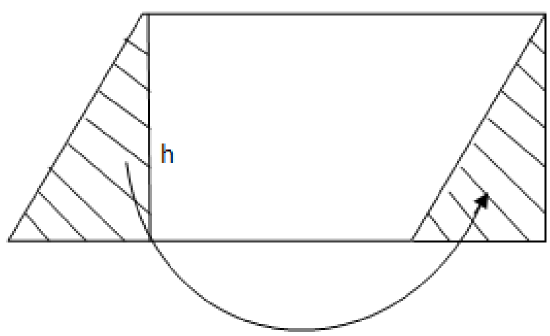
Користећи овај алгоритам деца су успешно решавала многобројне задатке израчунавања површине паралелограма које им је учитељ задавао. Али када им је Вертхајмер нацртао следећи паралелограм



Слика 4.7: Вертхајмеров паралелограм

и тражио да израчунају његову површину, наступили су проблеми. Неки ученици су говорили да нису научени да решавају ту врсту проблема, други су тврдили да њихов алгоритам не може да ради на таквој врсти проблема а остали су једноставно одустали од решавања. Проблем је био у томе што је подножје нормале из горњег левог (а и десног) угла било ван основице паралелограма, што је ученицима представљало новину и изазивало помисао да раније научени алгоритам сада не функционише.

Површина паралелограма са математичког аспекта, једнака је површини правоугаоника који настаје конструкцијом нормала из горњих темена на основицу (тј. продужену основицу).



Слика 4.8: Паралелограм и правоугаоник

Овај цртеж треба видети као правоугаоник са „празнином“ и „додатком“ који потпуно затвара ту празнину. Отуда се закључује да је површина паралелограма једнака површини правоугаоника (добијеног на описани начин) а она се израчунава множењем дужине нормале и основице. Поента овог експеримента је:

Ученици који су учили алгоритме за израчунавање површина без разумевања структурних принципа на којима су ти алгоритми били засновани су ограничени примерима подешеним од стране учитеља.

Учење алгоритама без разумевања је погрешно. Такво учење спречава продуктивно мишљење ученика.

Алгоритамски начин решавања проблема и истинско разумевање проблемске ситуације је неопходно сјединити. То је илустровано и у раније наведеним примерима Гаусовог сабирања бројева од 1 до 100, питагорејском поступку за збир n непарних бројева и другим. Овај циљ је могуће постићи и упознавањем ученика са фигуративним бројевима и законитостима које за њих важе. Бављење фигуративним бројевима негује уочавање законитости међу бројевима а како се многе појаве у свету могу исказати бројевима они доприносе уочавању законитости на општем нивоу.

Уочавање законитости (тамо где она постоји) доприноси процесу учења и памћања. Оно омогућава стварање структурно повезаних идеја или компоненти што узрокује неопходност памћења само законитости а не и читавог низа компоненти. Када је ученицима задат следећи задатак:

Укупан број спортиста у свим земљама света је 161116212631. Покушајте да запамтите тај број.

Три различите групе ученика су добиле три различита упутства за учење:

група 1: прочитај овај број групишући по три цифре – сто шесдесет један, сто шеснаест... и понови неколико пута;

група 2: читај број комплетно и прецизно као – број спортиста на свету је 161 милијарда, 116 милиона, 212 хиљада, 631;

група 3: покушај да научиш овај низ бројева. (Друго упутство није дато.)

Након предвиђеног времена за меморисање овог броја (5 минута) извршена је провера меморисања датог податка и резултати су у свим групама били одлични (само је један ученик из друге групе дао нетачан одговор). Али након недељу дана, када су упитани да ли се још сећају броја спортиста, у првој и другој групи се смањио број тачних одговора док је трећа група била у стању да прецизно понови низ бројева. Јасно је да је постојала квалитативна као и квантитативна разлика међу примењеним врстама учења. Група 3 је била најуспешнија јер су учили са разумевањем. Пошто су открили фундаментални принцип низа, законитост која важи за бројеве у низу, лако су га реконструисали. Принцип фундаменталности проблема не само да омогућава ученику да лакше реши дати проблем већ и проблеме сличне датом а такође омогућава реконструисање решења дуго након решавања задатка. Ученицима у трећој групи је требало уочавање и памћење принципа по коме се формира задати низ:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 6 & & 11 & & 16 & & 21 & & 26 & & 31 \\ & +5 & & +5 & & +5 & & +5 & & +5 & & +5 & \end{array}$$

што захтева много мање времена за учење него у осталим групама. Стога, организовање учења може да доведе до ефикаснијег памћења делимично и зато што смањује број одвојених делова информација које морају бити запамћене.

У процесу учења математике, гледање и интерпретирање свакако имају кључну улогу. Међу 5 чула – вида, слуха, мириса, укуса и додира, 80% информација примамо преко чула вида (Миочиновић, 2002). Зато је од изузетне важности визуелизација математичких чињеница као и постављеног проблема. Геометријске формуле и законитости имају по природи ствари своју сликовну интерпретацију. Такође, геометријске задатке већ устаљено решавамо применом одговарајуће слике. И у осталим областима математике, кад год је то могуће, треба користити сликовни приказ чињеница као и постављеног задатка, ради лакшег увида и ефикаснијег памћења (Duval, 1999; Komenski, 1932; Mc Knight, Magid, Murphy & McKnight, 2000).

У процесу решавања математичких задатака од изузетне важности је начин размишљања који би требало да води право у увид решавања проблема (Dejić & Egerić, 2006; Polya, прев. 2004). Он се састоји од следећих корака:

1) Анализирање проблема: На почетку решавања задатка треба раздвојити познате (дате) податке у задатку од непознатог, оног што треба одредити. Затим треба нацртати слику (ако је могуће) и означити елементе на цртежу. Након тога се тражи веза између познатих елемената и непознате. Треба проверити да ли су искоришћени сви полазни подаци, да ли се из услова датих у задатку и уочене везе може одредити непозната. Ако веза није одмах пронађена, треба прећи на 2. корак.

2) Разматрање помоћних елемената: Размислити да ли би нека позната теорема била од користи, да ли је сличан проблем претходно решаван. Да ли је потребно најпре одредити неки помоћни елеменат који ће се искористити у наставку процеса решавања. Ако није

пронађен пут за решавање задатог проблема треба преформулисати проблем и прећи на решавање аналогног проблема. Када је веза између датих података и захтеваног у задатку пронађена, прелази се на 3. корак.
3) Излагање плана решавања: План решавања задатка се излаже по корацима. Неопходно је проверити тачност сваког корака и могућност доказивања његове тачности. Затим се прелази на 4. корак.
4) Провера добијеног решења: Неопходно је проверити добијени резултат. Размислити да ли може да се добије другачији резултат.

4.3. Конструктивизам, схватање и парадигме

Конструктивизам је прилаз подучавању базиран на предпоставци да ученик формира мишљење о новим сазнањима повезујући их са већ постојећим знањем (Garcia, 2013; da Silva Figueira-Sampaio, dos Santos & Carrijo, 2009). Схватање и конструисање знања су индивидуални процеси али их ученици реализују уз интеракцију са другим људима (Schcolnik, Kol & Abarbanel, 2016). У том контексту рад ученика у сарадничким групама, размена мишљења, дискусија и објашњења су од кључне важности. Конструктивизам унапређује интелектуални развој ученика, замена је за меморисање у учењу и одлична је алтернатива традиционалним методама у образовању (Iran-Nejad, 1995). Предности конструктивизма у наставној пракси истичу и други истраживачи (Mc Phail, 2015).

Парадигме су изузетно корисне у процесу учења. Оне доприносе бржем и лакшем решавању проблема пребацивањем на сличан проблем чије је решење познато. Ако је познат пример који може представљати мноштво других примера, стицање увида у решење проблема је знатно олакшано а време решавања знатно смањено.

Фигуративни бројеви могу бити парадигме за многобројне проблеме са бројним низовима у којима је неопходно уочавање разлике између два суседна члана као и израчунавање произвољног члана низа или збира чланова.

Размотримо следећи задатак: Дат је низ бројева

$$5 , 7 , 11 , 17 , 25 , 35 , 47 , 61 , ...$$

Одредити 51. члан овог низа.

Овај низ бројева би представљао проблем ученицима јер нису навикнути на решавање сличних проблема. У 3. разреду средње школе, ученици се упознају са аритметичким и геометријским низовима као и законитостима које важе за њихове чланове, али овај низ бројева није ни аритметички ни геометријски. Када би се ученици предходно упознали са фигуративним бројевима и законитостима које за њих важе, овај проблем (и сваки њему сличан) би био лако решен. Анализирањем елемената овог низа, уочава се да је разлика између два суседна члана:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 5 & , & 7 & , & 11 & , & 17 & , & 25 & , & 35 & , & 47 & , & 61 & , & \ldots \\ & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & 12 & & 14 & & & \ldots \end{array}$$

а то је низ парних бројева.

Када је законитост уочена треба само формирати збир и применити поступак предходно илустрован при формирању n–тог члана троугаоних бројева и исказан у (1.1):

$$5 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \ldots + (2n–2) \quad \text{при чему је } n = 51$$

а то је даље једнако

$$5 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (n–1)) = 5 + 2 \cdot \frac{(n-1)\cdot n}{2} = 5 + 50 \cdot 51 = 2555$$

Бавећи се испитивањем способности ученика шестог и седмог разреда основне школе да уочавањем законитости решавају разне задатке са природним бројевима, дошли смо до спознаје да су ученици недовољно упућени у такав приступ решавању задатака. Организовали смо упознавање ученика са троугаоним и квадратним бројевима у циљу презентације парадигми и развијања конструктивног мишљења код ученика. Резултати овог истраживања су показали да поступци у раду са троугаоним и квадратним бројевима могу бити парадигме за решавање разних задатака са бројним низовима. Истраживање је описанио у одељку „Методолошки оквир истраживања“ и изложено је у нашем раду „Фигуративни бројеви као средство за презентацију парадигми и развијање конструктивног мишљења“ представљеном на Другој националној конференцији са међународним учешћем на Факултету техничких наука у Чачку (Mihajlov-Carević, Kopanja & Denić, 2017).

Такође, учење кроз решавање проблема у образовном систему је прихваћено као ефикасна парадигма учења (Wang, Wu, Kinshuk & Spector, 2013).

4.4. Број као основни елеменат сазнања у настави математике

Број као основни елеменат људског сазнања је важан предмет проучавања у разним научним дисциплинама: теорији сазнања, логици, математици, филозофији, историји културе. У свакој од тих дисциплина основним појмом броја бавили су се многобројни научници (Conway & Guy, 2012; Dickson, 2013; Heath, 1981; Mc Knight, Magid, Murphy & McKnight, 2000; Zazkis, & Campbell, 1996). Са математичке тачке гледишта, велико интересовање је посвећено еволуцији појма броја која датира од конкретних бројева прве петице („бројева прста“) и досеже до савременог броја који у својој општости и апстракцији губи првобитну конкретну природу.

Од античког периода до данашњих дана многи велики умови су трагали за основним законом по коме се влада природа али и други садржаоци људског живота. Налазили су их у пропорцији, броју, хармонији, посебно у златном пресеку ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) који је за многе научнике врховни принцип хармоније, пропорција која доминира свеопштим складом (Gika, прев.1987). Ову пропорцију су налазили у морфологији биљака и животиња, музици, кристалографији, архитектури, уметности, теоријској физици и логици (Borisavljević, 1998; Vesić, 2014; Herz-Fischler,1998).

Питагора је још у 6. веку п.н.е. тврдио да светом владају односи бројева. Платон (4. век п.н.е.) тврди да је архитип броја створио Бог а човек му даје само обличје. У свом делу Тимај (Platon, прев. 1981), Платон наводи:

„И тада су све тако саздане врсте добиле од Творца ликове, делањем Идеја и Бројева.“

У савременој математици се такође срећу овакве тврдње. Леополд Кронекер (19. век) је изјавио:

„ Драги Бог нам је дао природне бројеве а сви остали су дело људи“ (Božić, 2002).

Број, пре свега природан, почива на једнозначној, 1 – 1, коресподенцији између скупа објеката и неког индексног скупа или основне мере којом се тај скуп мери (Božić, 2002). Познато је да је у праисторији математике, мерни скуп био скуп каменчића, или штапића, или шкољки али је временом прерастао у скуп ознака. Како се то десило у свим до сада познатим цивилизацијама и на свим меридијанима, може се закључити да се ради о некој универзалној способности људског ума за интуитивним поимањем природног броја (Conway & Guy, 2012; Hogben, 1970; Nedović, 2004). Поставља се питање да ли је та способност људског ума у потпуности урођена или је делимично продукт васпитања и образовања. У ранијим епохама истраживачи су били мишљења да је поимање природног броја урођена даровитост људског ума. Савремени развој психологије сазнања утицао је да се мишљење о овом феномену промени. Данас се верује да је та способност већим делом резултат васпитања и образовања али да постоје неке карактеристике централног нервног система које су својствене свим људима а које доприносе апстракцији природног броја (Alaca, Alaca & Williams, 2015; Sierpinski, 2014).

Природне бројеве можемо сматрати пра – првим бројевима од којих су настали сви остали бројеви. Стога упознавање ученика са другим скуповима бројева (целим, рационалним, реалним, ирационалним...) у процесу образовања треба извршити позивајући се на природне бројеве (Dejić, 2003).

Фигуративни бројеви као подскупови скупа природних бројева јасно имају своју улогу и значај у процесу упознавања ученика са теоријом бројева. Они поседују једноставне дефиниције и лако уочљиве законитости па су стога прикладни за рад са ученицима на свим нивоима образовања.

4.5. Дидактички принципи у настави математике

Савремена настава математике базирана је на дидактичким принципима који доприносе усвајању њених појмова као и психичком развоју деце и омладине.

Међу првим установљеним дидактичким принципима је **принцип очигледности** чија примена значи омогућавање ученицима да стичу знања помоћу перцепција (опажања) која ће уз помоћ мишљења уопштавати у појмове. Још од античког периода датира мишљење чувених филозофа да треба посредством чула доћи до сазнања. Чешки педагог – Јан Амос Коменски (1592–1670.г.) у својој књизи „Велика дидактика“ (Komenski, прев. 1967) истиче да „чула треба да раде што више могу“. Он тврди да „пред чула треба износити штогод се може, оно што је видљиво – чулу вида, што се чује – чулу слуха, што се мирише – чулу мириса, што има укус – чулу укуса, што је опипљиво – чулу додира“. Коменскијеве лекције у његовој чувеној књизи „Свет у сликама“ почињу са сликом у дуборезу која представља један феномен који се потом вербално описује (Komenski, прев. 1932). То је први систематични пример сликовите репрезентације који је и данас узор многим илустрованим уџбеницима. Велики швајцарски педагог Јохан Песталоци (1746–1827.г.) тврди да почетак сваке наставе треба да буде очигледан и да је очигледност само прелазна тачка ка апстрактном мишљењу (Pestaloci, прев. 1946). Ученик треба да научи како да напредује постепено од посматрања до схватања, тј. формирања јасног концепта. Од његових следбеника потиче и захтев да појам броја мора да се формира путем очигледности. У том контексту, фигуративни бројеви би имали значајну улогу у настави математике. Принцип очигледности има важну улогу у формирању математичких појмова. Нарочито у нижим разредима основне школе када је мишљење ученика још конкретно, када се оперише перцепцијама да би се тек касније прешло на апстрактне појмове.

Принцип поступности карактеришу општа дидактичка начела: од простог ка сложеном, од познатог ка непознатом, од лакшег ка тежем. Поштовање правила од познатог ка непознатом води ка јединим путу у образовању – нова знања стичу се једино помоћу познатих, већ усвојених знања. При том стечана знања ученика морају бити систематизована. Само знања повезана, систематизована у целину омогућавају добро разумевање и стицање нових знања (Dejić & Egerić, 2006; Peterson, 2004).

На свим нивоима излагања математичких садржаја мора бити заступљен **принцип научности** који подразумева излагање материје базиране на научном тумачењу али тако методички обликоване да је приступачна слушаоцима (Dejić & Egerić, 2006; Peterson, 2004).

Принцип свесне активности подразумева да ученици, под руководством наставника, сходно својим способностима, сами, сопственим мисаоним активностима, схвате, разумеју и усвоје математичке садржаје и да ти садржаји постану њихова трајна својина (Dejić & Egerić, 2006; Peterson, 2004).

Математичко градиво је строго повезано, нова знања се стичу помоћу старих, већ стечених, и повезују у једну целину која постаје темељ неким опет новим знањима. Тај процес тече постепено и систематично а његова успешност зависи од тога колико су усвојена знања трајна (Dejić & Egerić, 2006; Peterson, 2004). Експерименти доказују да су трајнија она знања која ученици стичу уз употребу очигледних средстава. **Принцип трајности знања** као и остали дидактички принципи могу се лако реализовати обрадом полигоналних бројева у настави математике. Фигуративни бројеви имају свој визуелни приказ чиме је принцип очигледности задовољен. Након упознавања природних бројева и основних геометријских фигура могуће је лако прећи на упознавање фигуративних бројева који представљају један део природних бројева са одређеном карактеристиком. При том начин излагања мора бити прилагођен узрасту ученика, са научном основом али уз примену математичког језика прилагођеног слушаоцима. Бављење фигуративним бројевима негује свесне активности ученика, подстиче њихову заинтересованост и ствара осећај задовољства у процесу учења, што представља додатни стимуланс у савладавању градива математике. Упознавање ученика са полигоналним бројевима може бити реализовано у нижим разредима основне школе да би се касније, у вишим разредима, поступно упознавали са особинама фигуративних бројева и законитостима које за њих важе а у складу са одређеним математичким предзнањем. Особине у којима се помиње сума чланова низа као и особине за чије доказивање је неопходан принцип математичке индукције могуће је обрадити тек након упознавања ученика са бројним низовима и принципом математичке индукције (што се по досадашњем програму наставе математике остваривало у 3. разреду средње школе). То имплицира континуирано бављење фигуративним бројевима, од нижих разреда основне школе до виших разреда средње школе, а континуирано бављење овим бројевима даље имлицира поступност, систематичност и трајност знања како у области фигуративних бројева тако и у области теорије бројева уопште.

5. МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

5.1. Проблем истраживања

Проблем истраживања у овом раду је: Степен примене визуелно–логичког начина решавања проблема са бројним низовима.

Током вишегодишњег професионалног бављења наставом математике, уочила сам да је визуелно–логички приступ решавању математичких проблема недовољно заступљен у настави математике. Временом, ова појава је постајала још присутнија и уочљивија. Ученици виших разреда основне школе, као и средње школе увежбавају се у решавању свих проблема применом алгебарског апарата. Неопходно је да ученик повезивањем датих података у задатку, формира једначину (или једначине) са једном или више непознатих и да затим, применом стечених знања о решавању једначина или система једначина, реши постављене једначине. При том, врло мали број ученика, али и наставника математике, ће посегнути за визуелно–логичким начином решавања проблема. Примећује се да ученици аутоматски размишљају о једначинама које ће им „помоћи да реше постављени проблем”.

Као илустрацију примера за ово запажање, навешћу задатак из „Збирке задатака из математике за квалификациони испит за упис у средњу школу”, који се већ годинама појављује у збиркама ове врсте али и другим математичким збиркама за 8. разред основне школе.

Задатак је:

Збир цифара двоцифреног броја износи 7. Ако цифре замене места, онда је тако добијени број за 9 мањи од полазног броја. Који је то број?

Већина наставника и ученика овај задатак решава применом система линеарних једначина:

Нека су непознате цифре броја x и y. Двоцифрени број који се помоћу њих формира је

$x \cdot 10 + y$

а када цифре замене места, добија се број

$y \cdot 10 + x$.

На основу текста задатка формира се систем линеарних једначина:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 7 \\
10y + x &= 10x + y - 9
\end{aligned}
$$

Који се решава неком познатом методом, на пример:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 7 \\
x - 10x + 10y - y &= -9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + y &= 7 \\
-9x + 9y &= -9 \qquad / : 9
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x + y &= 7 \\
-x + y &= -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2y &= 6 \\
x + y &= 7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= 3 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Дакле, тражени број је 43.

Други начин за решавање овог задатка је следећи:

Како је збир цифара двоцифреног броја 7, могући двоцифрени бројеви су:

16, 25, 34, . . .

Напишимо све могуће бројеве ове врсте, као и бројеве добијене заменом места њиховим цифрама:

16 , 25 , 34 , 43 , 52 , 61 , 70 .

Када цифре замене места добијају се бројеви:

61 , 52 , 43 , 34 , 25 , 16 , 7 .

Разлике међу њима су:

–45 , –27 , –9 , 9

↑

Дакле, тражени број је 43.

Очигледно је, да је овакво решење краће, једноставније, не захтева примену одређеног математичког апарата. Стога је могуће решавање оваквих и сличних задатака и у нижим разредима основне школе. Међутим, овакав приступ решавању математичких проблема у редовној школској настави је врло редак. Приметна је његова примена само у додатној настави математике.

Ова констатација је иницирала прво истраживање које је обављено са ученицима седмог разреда основне школе и описано је у одељку 5.3.1. Након тога обављена су још три истраживања, са истим проблемом истраживања, која су описана у одељцима 5.3.2, 5.3.3 и 5.3.4.

5.2. Пројекат истраживања

5.2.1. Ужи научни проблем истраживања

За свако истраживање начињен је пројекат истраживања који је у сваком истраживању, као дефинисани ужи научни проблем, имао проблем не научености ученика основне и средње школе да уочавањем законитости међу бројевима решавају задатке са низовима и скуповима бројева.

Главна постављена хипотеза у свим истраживањима је: Рад са фигуративним бројевима доприноси уочавању законитости међу бројевима и успешном решавању задатака са низовима и скуповима бројева применом уочене законитости.

Поред главне хипотезе у појединим истраживањима су постављене и друге хипотезе у складу са истраживаним феноменом.

5.2.2. Остваривање задатака у истраживању

Први задатак у свим истраживањима је био остваривање увида у наученост ученика да уочавањем законитости међу бројевима датог низа или скупа решавају постављене задатке. То је остварено путем иницијалног теста који су ученици решавали на почетку истраживања. Резултати иницијалног теста били су незадовољавајући у свим групама обухваћеним истраживањем и приложени су у наставку рада.

Други задатак у истраживањима је био остваривање увида у способност ученика да након упознавања са законитостима које важе за фигуративне бројеве, самостално уочавају законитости међу бројевима задатог скупа или низа бројева и да успешно решавају задати проблем. То је остварено путем теста који су ученици решавали након обављеног рада са фигуративним бројевима.

Трећи задатак у истраживањима је био остваривање увида у способност ученика да сврсисходно користе савремена технолошка достигнућа у настави. То је остварено коришћењем рачунара и програмског пакета Геогебра (GeoGebra) на часовима упознавања ученика са фигуративним бројевима као и на часовима упознавања са одабраним примерима који демонстрирају уочавање законитости међу бројевима.

5.2.3. Савремени образовни процеси примењени током истраживања

Једна од главних карактеристика савременог друштва је широка распрострањеност информационих и комуникационих технологија. Због тога је један од главних циљева образовања, оспособљавање ученика за активно коришћење савремених технологија. Овај циљ је могуће остварити ако се у наставном процесу користе савремени приступи базирани на новим технологијама уз адекватне педагошке методе (Abu Bakar, Ayub, Fauzi & Tarmizi, 2010; Manenova, Skutil & Zikl, 2010). Савремено дигитално доба захтева модерне наставнике припремљене да користе савремене технологије и способне да их примене у наставном процесу у циљу ефикаснијег подучавања (Kim, 2002; Ruthven, 2009; Tabach, 2012). Истраживања показују да употреба информационих и комуникационих технологија интегрисаних у наставне активности, позитивно утиче на процес мишљења код ученика стимулишући креативно размишљање (Alegra, Chifari & Ottaviano, 2001; Viamonte, 2010).

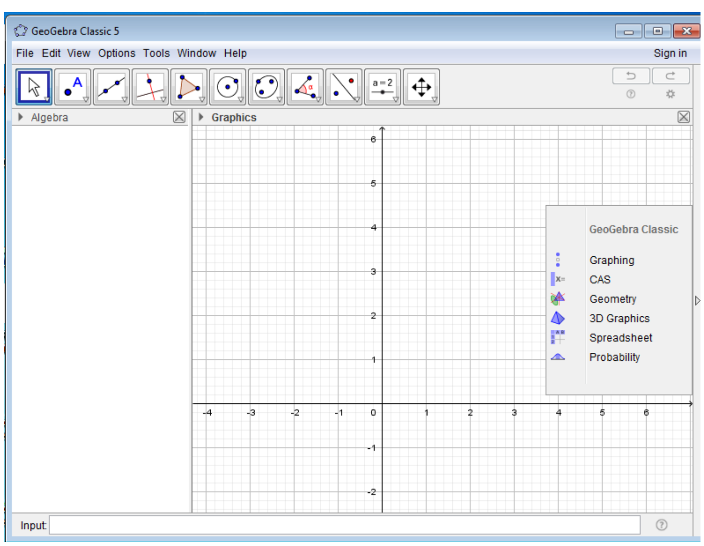
Интеграција савремених технолошких достигнућа у наставне процесе привлачи све веће интересовање наставника математике. Нове технологије су знатно прошириле скуп наставних средстава у образовању. Током последњих деценија дошло је до наглог развоја динамичких софтверских пакета, као што су „GeoGebra“, „Geometer's Sketchpad“, „Cabri Geometry“. Испитивањем ефикасности учења математике коришћењем математичких софтверских пакета, бавили су се многобројни истраживачи чије резултате је корисно упознати (Bozkurt & Ruthven, 2016; Doruk, Aktumen & Aytekin, 2013; Figueira-Sampaio, Santos & Carrijo, 2009; Hohenwarter & Fuchs, 2004; Hohenwarter, Hohenwarter & Lavicza, 2009; Lavicza & Varga, 2010; Ruthven, Hennessy & Deaney, 2008; Saha, Ayub & Tarmizi, 2010; Takači, Stankov & Milanovic, 2015; Zengin, Furkan & Kutluca, 2012).

У процесу истраживања примењен је савремени приступ упознавања ученика са фигуративним бројевима и одабраним примерима у циљу истраживања, базиран на сарадничком учењу уз компјутерску подршку. Настава је обављана у кабинету за информатику при чему је остварен рад у малим, трочланим, сарадничким групама. Овакав приступ се данас сматра једним од најнапреднијих за побољшање стицања и преношења знања (Gomez, Wu & Passerini, 2010; Laal & Ghodsi, 2012).

5.2.4. Програмски пакет Геогебра (GeoGebra)

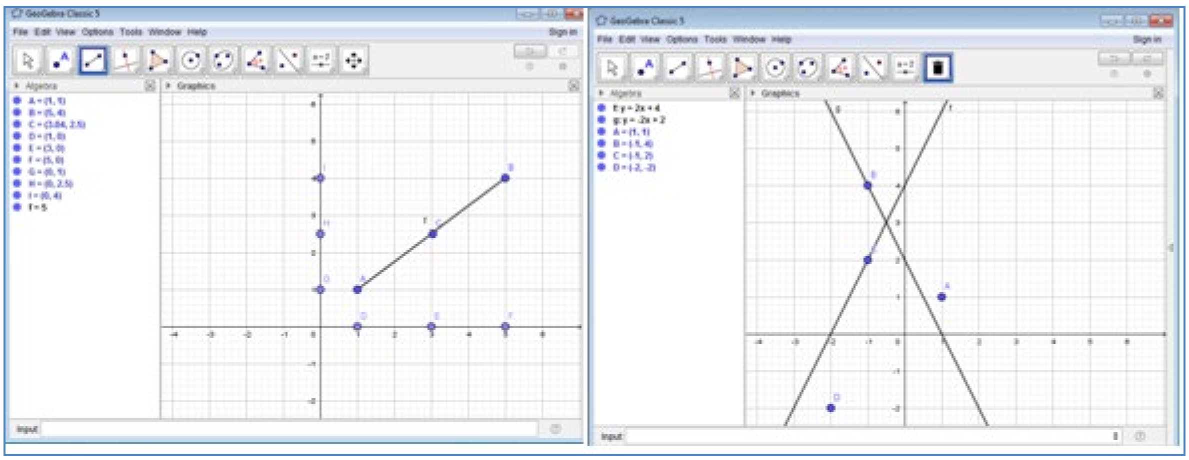
У истраживањима обављеним са ученицима основне и средње школе коришћен је програмски пакет Геогебра. При том је констатована претходна употреба овог програмског пакета на часовима математике у школама где је вршено истраживање. Ученици су претходно радили у Геогебри на часовима обраде координата тачака у Декартовом правоуглом координатном систему и цртања графика линеарних функција.

Геогебра је програм за динамичку математику који повезује геометрију, алгебру и анализу. Намењен је настави и учењу математике у школама. Приликом активирања овог програма, зависно од верзије Геогебре, на екрану рачунара ће се појавити слика са понуђеним могућностима (Слика 5.1):



Слика 5.1: Почетак рада у Геогебри

Зависно од потребе, корисник ће одабрати једну од понуђених могућности. Прва опција даје могућност цртања тачака и линија у Декартовом правоуглом координатном систему. Ова опција је коришћена у школама при упознавању ученика са координатама тачака, одређивању средишта дужи, цртању графика линеарних функција, уочавању тока функције, одређивању пресека графика са координатним осама и испитивању припадности тачке датој функцији (Слика 5.2).



Слика 5.2: Цртање тачака и графика функција у Геогебри

Уочавају се три дела на екрану: алгебарски, графички и улазни. У улазном делу се уносе координате тачака или функције које ће бити аутоматски приказане у графичком и алгебарском делу. Ови делови су динамички повезани и аутоматски се прилагођавају свакој промени која се изврши у улазном или графичком приказу.

Палета алатки у горњем делу екрана даје додатне могућности као што су цртање тачака, дужи, полуправих, геометријских фигура, углова, кружних линија, вектора. Такође је могуће бојење слика и писање текста.

Опције које су понуђене зависе од верзије програмског пакета Геогебра коју школа поседује. При том све верзије имају прву опцију која је у школама била у употреби.

На Интернационалној конференцији о образовању „Promjena stvarnosti kroz obrazovanje, MICE-2017“, у Мостару, аутор дисертације је са сарадницима објавила рад „*GeoGebra as a tool for understanding and learning mathematical quantities in Cartesian Cartesian coordinate system“,* који је публикован у часопису “Eduka” (Mihajlov Carević, Kopanja & Denić, 2018).

У овом раду су предочене предности рада у Геогебри при раду са математичким објектима у Декартовој равни.

У нашим истраживањима у школама користили смо само графичку могућност Геогебре. Представљање фигуративних бројева помоћу тачака, при чему свака тачка представља јединицу, веома је лако оствариво са Геогебра графичким приказом. Цртање затворених полигоналних линија и других геометријских објеката који су коришћени током истраживања, као и њихово бојење, такође се лако могу постићи. Динамика Геогебре није коришћена, нити њене друге могућности.

5.2.5. Методе истраживачког рада

Методе примењене у истраживањима обухватају формирање експерименталне и контролне групе чији се резултати упоређују пре и након обављеног експерименталног рада. При том је експериментална група, у сваком истраживању, радила са фигуративним бројевима а контролна са другим, одговарајућим наставним садржајем.

Током наставе ученици обе групе су радили у мањим сарадничким групама састављеним од по три или четири члана. У сваком истраживању су формиране сарадничке групе од ученика различитог нивоа математичког знања. По Каган принципу (Kagan, 1994) такве групе су ефикасније у раду јер чланови групе помажу један другом у учењу. За време сарадничког учења, ученици који су недовољно разумели материју постављају питања, ученици који су је разумели помажу другима да схвате и тиме продубљују своје знање. Сарадничко и кооперативно учење препоручују многобројни научници који су у својим истраживањима добили позитивне резултате (Chai, Lin, So & Cheah, 2011; Dooly, 2008; Petrović & Kontrec, 2017; Zakaria & Iksan, 2007). У сарадничком учењу ученици нису одговорни само за своје учење већ и за учење других чланова групе (Laal & Ghodsi, 2012). Приликом формирања група ученицима је дозвољено да се својевољно групишу (по принципу различитости математичког знања у групи) да би се остварила што боља сарадничка веза међу члановима (Dogru & Kalender, 2007).

Пре и након обављеног експерименталног рада обе групе ученика, експериментална и контролна, су тестиране. Резултати пре-теста и пост-теста су табеларно и графички приказани и анализирани. У циљу испитивања ефикасности рада са фигуративним бројевима, извршено је упоређивање резултата експрименталне и контролне групе на оба теста. Такође је вршено упоређивање резултата пре-теста експерименталне групе, као и контролне, са резултатима на пост-тесту у циљу испитивања ефикасности оба експериментална фактора.

Статистичка анализа резултата на пре-тесту и пост-тесту, базирана на постигнућима ученика исказаним у броју постигнутих бодова на тестовима, остварена је применом Студентовог т-теста разлике између аритметичких средина два велика независна узорка. При том је израчуната аритметичка средина укупног броја постигнутих бодова на пре-тесту, односно пост-тесту, за обе групе, експерименталну и контролну. На основу добијених резултата статистичких анализа, изведени су одговарајући закључци.

У испитивању корелације између два резултата истраживања примењена је корелација ранга између две промењиве и израчунат Спирменов коефицијент корелације на основу чега је изведен закључак о повезаности посматраних варијабли.

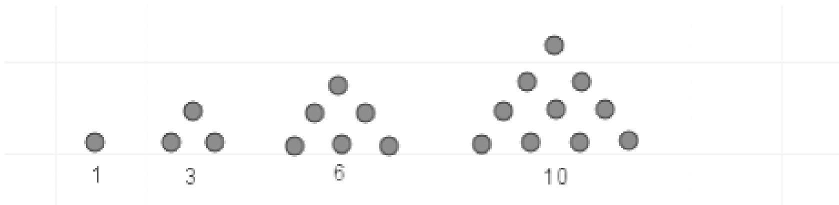
Пројектом истраживања је предвиђено да се истраживања обављају са ученицима шестог и седмог разреда основне школе, такође и са ученицима првог разреда средње школе. Ученици осмог разреда основне школе нису обухваћени истраживањем због њихове ангажованости у припремању за завршни испит у основном образовању.

5.3. Обављена истраживања и њихови резултати

5.3.1. Фигуративни бројеви као средство за презентацију парадигми

Ово истраживање је обављено са ученицима седмог разреда основне школе током првог полугодишта школске 2015/16. године. Повод овом истраживању били су резултати испитивања способности ученика седмог разреда да уочавањем законитости решавају разне задатке са природним бројевима. Констатације до којих смо дошли биле су у великој мери незадовољавајуће. Организовали смо упознавање ученика са троугаоним и квадратним бројевима у циљу развијања конструктивног мишљења код ученика и представљања парадигми у процесу учења. Троугаони и квадратни бројеви са својом сликовном презентацијом и законитостима које важе за њих, ученицима су веома интересантни и лако разумљиви. Ученицима је одржано једночасовно упознавање са овим бројевима, разликама међу њима и основним законитостима а затим једночасовно решавање разних задатака. У овом истраживању нису коришћени рачунари и програмски пакет Геогебра већ је планирани рад остварен путем постера, табле и креде.

На почетку првог часа ученици су упознати са визуелним приказом троугаоних бројева као што приказује следећа слика:

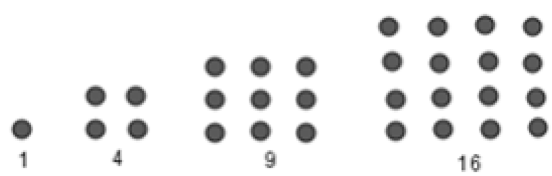


Слика 5.3: Визуелни приказ троугаоних бројева

Затим је од ученика захтевано да попуне следећу таблицу са циљем да сами уоче разлике међу троугаоним бројевима и разлике међу тим разликама:

Троугаони бројеви: 1 3 6 10 15 ...
Разлике међу њима: 2 3 (попунити даље)
Разлике међу разликама: 1 (попунити даље)

Након успешног попуњавања таблице ученици су упознати са визуелним приказом квадратних бројева као што приказује следећа слика:



Слика 5.4: Визуелни приказ квадратних бројева

Од ученика је потом захтевано, као у претходном делу, да попуне следећу таблицу са циљем да сами уоче разлике међу квадратним бројевима и разлике међу тим разликама:

Квадратни бројеви: 1 4 9 16 25 ...

Разлике међу њима: 3 5 (попунити даље)

Разлике међу разликама: 2 (попунити даље)

И овај задатак је успешно обављен.

Затим су ученицима задати следећи задаци:

1. Одредити 6. по реду троугаони број.
2. Одредити 6. по реду квадратни број.

Оба задатка су све групе брзо и тачно решиле.

Након дискусије у којој је констатовано да би сада са лакоћом могли написати произвољно дуг низ троугаоних и квадратних бројева, прешли смо на следећи задатак:

3. Одредити 80. по реду троугаони број.

Коментари ученика су били попут:

„Ух, ко ће сада да рачуна до 80-тог члана“;

„Добро је да нисте тражили 1000-ти члан“ и слично.

Када им је речено да не морају одредити све троугаоне бројеве да би дошли до 80-тог, већина група је покушала али није стигла до решења.

Затим им је показано решење:

други троугаони број: $3 = 1 + 2$

трећи: $6 = 1 + 2 + 3$

четврти: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$

пети: $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

. . .

осамдесети: $x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 80$ tj.

$$x = 1 + 2 + 3 + \ldots + 40 + 41 + \ldots + 78 + 79 + 80$$

↑_81_↑

↑_________81__________↑

↑____________81______________↑

↑_______________ 81 __________________↑

Па је $x = 40 \cdot 81 = 3240$.

Затим су решавани разни задаци у којима је неопходно уочавање законитости међу члановима низа:

4. У низу квадратних бројева разлика два суседна члана је 53. Који су то бројеви?

И у овом задатку ученици су имали потешкоћа при решавању па им је показано следеће решење:

други квадратни број: $4 = 1 + 3$
трећи : $9 = 1 + 3 + 5$
четврти: $16 = 1 + 3 + 5 + 7$
пети: $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

$. \ . \ .$

$y = 1 + 3 + 5 + 7 + \ . \ . \ . + 51$

$x = 1 + 3 + 5 + 7 + . \ . \ . + 51 + 53 = y + 53$

$y = 1 + 3 + 5 + . \ . \ . \ 25 + 27 + . \ . \ . + 47 + 49 + 51$

↑_52_↑
↑______ 52 ________↑
↑_________52_____________↑
↑____________52__________________↑

Ових парова има 13 па је

$y = 13 \cdot 52 = 676$ и $x = 676 + 53 = 729$

5. Колика је разлика између 101. и 100. троугаоног броја?

Све групе су успешно решиле овај задатак примењујући резоне и поступак из претходних задатака. Дошли су до закључка да је

стоти троугаони број: $x = 1 + 2 + 3 + ... + 100$
сто први $y = 1 + 2 + 3 + ...+ 100 + 101$
па је њихова разлика 101.

6. Колика је разлика између 50-ог квадратног и 50-тог троугаоног броја?

При решавању овог задатка већина група је закључила да је 50-ти квадратни број 50^2 тј. 2500 а 50-ти троугаони број су израчунали аналогно претходном задатку (50-ти троугаони број је 1275).

Затим су добили резултат 2500 – 1275 = 1225.

Након тога су решавани задаци са низовима бројева који нису троугаони нити квадратни:

7. Дат је низ бројева

   3 , 9 , 15 , 21 , 27 , 33 , 39 . . .

   Одредити 80-ти члан овог низа.

Већина група је уочила да се суседни бројеви у низу разликују за 6 па су решење добили применом поступка из претходних задатака:

$x_2 = 3 + 6$

$x_3 = 9 + 6 = 3 + 6 + 6 = 3 + 2 \cdot 6$

$x_4 = 15 + 6 = 3 + 2 \cdot 6 + 6 = 3 + 3 \cdot 6$

. . .

$x_{80} = 3 + 79 \cdot 6 = 3 + 474 = 477$

Групама које нису уочиле законитост показан је поступак уз неопходно објашњење. Затим су самостално поновили поступак и дошли до тачног решења.

8. Написати још 5 елемената следећег низа бројева:

   4 , 7 , 12 , 19 , 28 , 39 , 52 . . . .

За овај задатак смо добили више тачних одговора у односу на претходни. Требало је само уочити да разлике два суседна члана чине низ непарних бројева:

4 , 7 , 12 , 19 , 28 , 39 , 52 . . .
\ / \ / \ / \ / \ / \ /
3 , 5 , 7, 9 , 11, 13 . . . па се затим формирају следећи чланови додавањем наредних непарних бројева

```
52      67     84      103     124    147
  \     /   \    /   \    /    \    /    \   /
    +15     +17     +19     + 21    +23
```

Успешност ученика у решавању описаних задатака показала нам је да су ученици у могућности да за кратко време овладају способношћу уочавања законитости међу бројевима и да је рад са фигуративним бројевима ефикасна парадигма за ову проблематику.

Резултати и опис овог истраживања обављеног са 243 ученика седмог разреда приказани су у нашем раду „Фигуративни бројеви као средство за презентацију парадигми и развијање конструктивног мишљења“, на Националној конференцији са међународним учешћем „Информационе технологије, образовање и предузетништво – ИТОП 2017“ у Чачку (Mihajlov Carević, Kopanja & Denić, 2017).

Истраживање је показало да је рад са троугаоним и квадратним бројевима био вишеструко користан за ученике. Кроз решавање задатака ученици су научили да одређују суме низова бројева, да допуњују низове недостајућим члановима, да одређују произвољан члан у низу.

Резултати овог истраживања и анкетирања ученика након истраживања били су подстицај новим истраживањима каја су након тога реализована.

5.3.2. Истраживање у првом разреду средње школе

Приликом планирања истраживања у средњој школи одлучено је да истраживањем буду обухваћени ученици гимназије која традиционално прима најбоље ученике из генерације.

Проблем истраживања

У првом разреду средње школе једна од предвиђених наставних тема су „Реални бројеви“. У оквиру рада са реалним бројевима решавају се проблеми дељивости бројева, попут: „Показати да је збир свих непарних бројева мањих од 150 дељив са 125“. Главна потешкоћа у овом задатку је одређивање збира наведених бројева јер ученици нису научени да решавају такве проблеме. Факторисање броја и доказивање његове дељивости са одређеним бројем већина ученика успешно ради јер су одређивање делилаца датог природног броја савладали у основној школи. Али у овом случају им недостаје почетак решења проблема, тиме и комплетно решење. Затим, израчунавање вредности израза

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ ...\ + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2$$

за већину ученика је не решиво. Неколицина ученика почиње решавање овог задатка растављањем разлике квадрата на чиниоце (што су научили у основној школи) :

$$(100-99)\cdot(100+99)+(98-97)\cdot(98+97)+\ ...\ +(4-3)\cdot(4+3)+(2-1)\cdot(2+1)$$

након чега добијају израз:

$1\cdot199 + 1\cdot195 + 1\cdot191 + \ ...\ + 1\cdot7 + 1\cdot3$ тј. израз

$199 + 195 + 191 + \ ...\ + 7 + 3$

Али након тога не успевају да израчунају овај збир.

Резултати истраживања описаног у претходном поглављу узроковали су претпоставку да би упознавање ученика са фигуративним бројевима, допринело стицању и неговању визуелно-логичког мишљења код ученика и развијању таквог приступа у решавању проблема. Фигуративни бројеви могу бити парадигме за многобројне проблеме са бројним низовима у којима разлике између два суседна члана формирају низ са одређеном законитошћу која доприноси решавању задатка. Парадигме су изузетно корисне у процесу учења и решавања задатака. Оне доприносе бржем и лакшем решавању проблема пребацивањем на изоморфан проблем чије је решење познато. Ако се може пронаћи пример чије нам је решење познато а који је сличан задатом проблему, решавање задатог проблема је знатно олакшано и убрзано.

Такође је тежња била да развијамо конструктивно мишљење код ученика. Конструктивизам унапређује интелектуални развој ученика, замена је за меморисање у учењу и одлична је алтернатива традиционалним методама у образовању (Iran-Nejad, 1995; Wang, Wu, Kinshuk, Chen & Spector, 2013). Предности конструктивизма у наставној пракси истичу и други аутори (McPhail, 2015; Schcolnik, Kol, Abarbanel, 2016).

Задаци у овом истраживањау били су добијање одговора на следећа истраживачка питања:

1) Да ли су ученици првог разреда средње школе научени да уочавањем законитости међу бројевима решавају задатке са бројним низовима и скуповима;

2) Да ли ће рад ученика са фигуративним бројевима допринети развијању способности ученика у уочавању законитости међу бројевима и успешнијем решавању задатака у којима је то неопходно;
3) Да ли уочавање законисти међу бројевима доприноси дуготрајнијем памћењу бројних података у којима постоји одређена законитост.

Циљ истраживања у овом раду био је сагледавање и утврђивање доприноса фигуративних бројева развоју способности уочавања законитости међу бројевима, ученика првог разреда средње школе и дуготрајном памћењу бројног податка.

Хипотезе у овом истраживању су следеће:

1) Претпоставља се да ће мање од 25% ученика првог разреда средње школе бити у могућности да решава задатке у којима је неопходно уочавање законисти међу бројевима;
2) Рад са фигуративним бројевима ће допринети ученицима у сагледавању и уочавању законитости међу бројевима које ће их довести до решења датог проблема;
3) Упознавање ученика са законитостима које важе међу фигуративним бројевима допринеће бољем и дуготрајнијем меморисању података у којима је могуће уочавање неке законитости.

Истраживање је вршено школске 2016/17. године. Циљна група су ученици првог разреда гимназије. Истраживањем је обухваћено 10 одељења са укупно 297 ученика.
На почетку истраживања сви ученици су решавали пре-тест са 2 задатка:

1) Колики је збир првих 1000 природних бројева?
2) Написати још три елемента следећег низа бројева: 2,4,8,14,22,32,44 . . . .

Пре-тест је имао за циљ да покаже способност ученика да уочавају законитости међу бројевима и примењујући их да решавају дате задатке.
Резултати пре-теста приказани су у Табели 5.1.

Табела 5.1: Резултати пре-теста ученика првог разреда средње школе

Одељење	Укупан број ученика	Бр. ученика који су **тачно** решили 1.зада.	2. задатак	Бр. ученика који су **делимично** решили 1. зада.	2. задатак	Бр. ученика који **нису** решили 1. зада.	2. задатак
1_1	30	4	6	10	9	16	15
1_2	30	5	6	8	8	17	16
1_3	30	3	5	11	12	16	13
1_4	29	4	6	12	10	13	13
1_5	30	4	6	14	11	12	13
1_6	29	3	7	12	9	14	13
1_7	30	5	7	10	9	15	14
1_8	30	3	6	11	8	16	16
1_9	29	4	5	13	10	12	14
1_{10}	30	3	6	10	8	17	16

Од 297 ученика првог разреда први задатак је решило само 38 ученика, или 12,8%, а други задатак 60 ученика или 20,2%.

Добијене резултате смо оценили као доказ нашој хипотези да ће мање од 25% ученика првог разреда средње школе бити у могућности да решава задатке у којима је неопходно уочавање законитости међу бројевима. Посебно забрињавајућа је чињеница да су овај иницијални тест радили ученици гимназије која традиционално добија најбоље ученике из генерације која је завршила основну школу.

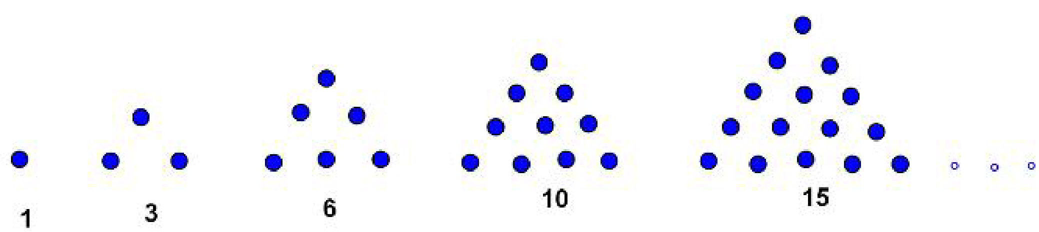
Узимајући у обзир просечне оцене из математике и број ученика у одељењима формирали смо експерименталну и контролну групу. Од ученика првих 5 одељења (1_1 - 1_5) формирали смо експерименталну групу (са укупно 149 ученика) док су ученици 1_6 - 1_{10} чинили контролну групу (са укупно 148 ученика). Просек оцена из математике као и број ученика у групама је био приближно једнак. На основу резултата добијених иницијалним тестом у одељењима експерименталне и контролне групе формиране су мале трочлане групе од ученика различитог нивоа математичког знања за сарадничко учење. (Са изузетком у 1_4, 1_6 и 1_9 где су формиране по две четворочлане групе.) Сарадничке групе су ефикасније у раду јер чланови групе помажу један другом у учењу. Такве групе су препоручене од многобројних истраживача ефикасног учења (Kagan, 1994; Petrović & Kontrec, 2017). У сарадничком учењу ученици нису одговорни само за своје учење већ и за учење других чланова групе. У свакој групи био је по један ученик који је решио бар један задатак или по два ученика који су делимично решили оба. Тежња је била да формиране групе буду приближно истог предзнања и могућности у раду са бројевима. При том је дозвољено

ученицима да у оквиру изречених правила формирају групе према својим изборима да би се остварила што боља сарадничка веза међу члановима групе (Dogru & Kalender, 2007).
У првом разреду гимназије реални бројеви се обрађују током 7 часова редовне наставе. Ученици обе групе су имали 4 часа у учионици радећи на уобичајени начин и 3 часа у кабинету инфоматике где су применом рачунара били упознати са фигуративним бројевима и одабраним примерима који демонстрирају уочавање законитости међу бројевима.

Рад са експерименталном и контролном групом

За рад са експерименталном групом припремљено је трочасовно упознавање са фигуративним бројевима, уочавање законитости међу њима и решавање разних задатака применом уочених законитости. Свако одељење 1_1 - 1_5 из експерименталне групе имало је три часа у кабинету за информатику током којих су радили у сарадничким групама помоћу рачунара и програмског пакета Геогебра (GeoGebra). Садржај предавања и вежбања на часовима је следећи:

На почетку првог часа ученици су укратко упознати са Питагориним начином представљања бројева ликовима троугла, квадрата и правоугаоника, корисним последицама таквог начина сагледавања бројева и даљим развојем фигуративних бројева. Затим су упознати са првих 5 троугаоних бројева приказаним на Слици 5.5.



Слика 5.5: Приказ троугаоних бројева

Након тога је од ученика захтевано да попуне следећу таблицу са циљем да сами уоче разлике међу троугаоним бројевима и разлике међу тим разликама:

Троугаони бројеви: 1 3 6 10 15 . . .

Разлике међу њима: 2 3 ... (попунити даље)

Разлике међу разликама: 1 ... (попунити даље)

Свака група је сараднички решавала постављени задатак и наставник је водио евиденцију њихових одговора. Након тога ученицима је приказан тачан одговор и остављена 2-3 минута да, уколико нису дали тачан одговор, закључе како се до њега долази. Резултати у овом делу испитивања приказани су у Табели 5.2.

Табела 5.2: Резултати решавања првог задатка у експерименталној групи

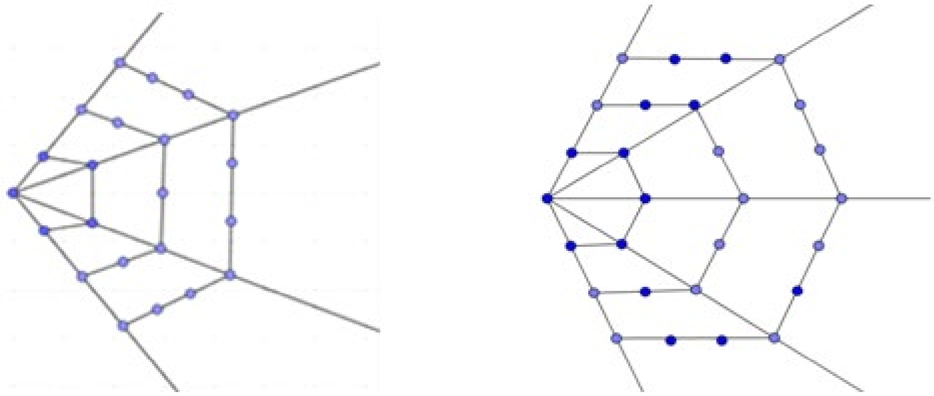
Одељење	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 10
Број тачних одговора	5	6	4	5	5
Број нетачних одговора	5	4	6	4	5

Затим је ученицима постављен други задатак у коме се захтевало да на основу започетог низа троугаоних бројева и разлика међу њима напишу још 5 елемената у низу разлика и још 5 елемената у низу троугаоних бројева. Тиме је ученицима указано на пут размишљања којим треба та иду: прво треба уочити следећу разлику између два фигуративна броја па на основу тога добити следећи фигуративни број. Овог пута групе су биле успешније у решавању задатка, резултати су приказани у Табели 5.3.

Табела 5.3: Резултати решавања другог задатка у експерименталној групи

Одељење	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 10
Број тачних одговора	6	7	5	6	6
Број делимично тачних	2	1	2	1	2
Број нетачних одговора	2	2	3	2	2

На другом часу ученици су на исти начин упознати са квадратним бројевима, петоугаоним и шестоугаоним бројевима након чега су решавали по два задатка истог садржаја као код троугаоних бројева. Резултати при решавању задатака са квадратним бројевима су најбољи вероватно зато што су им ти бројеви делимично познати од раније (Табела 5.4). Графички прикази петоугаоних и шестоугаоних бројева (Слика 5.6) су им били посебно интересантни и будући да су се већ привикли на потребан начин размишљања и уочавања законитости и резултати су били бољи него на почетку рада са троугаоним бројевима.



Слика 5.6: Приказ петоугаоних и шестоугаоних бројева

Табела 5.4: Број тачних одговора добијених у свих 5 одељења експерименталне групе

Одељење	1_1		1_2		1_3		1_4		1_5	
Групе	1 - 10		1 - 10		1 - 10		1 - 9		1 - 10	
Број тачних одговора	први зад.	други зад.	први зад.	други зад.	први зад.	други зад.	први зад.	други зад.	први зад.	други зад.
Троугаони бројеви	5	6	6	7	4	5	5	6	5	6
Квадратни бројеви	9	9	10	10	8	7	9	8	9	8
Петоугаони бројеви	7	9	8	9	5	6	7	8	7	8
Шестоугаони бројеви	9	10	10	10	7	8	8	8	9	10

На почетку трећег часа од ученика је захтевано да одреде 20. троугаони број. Све групе су започеле решавање овог задатка помоћу разлика, као у претходном примеру. Неколицина ученика је коментарисала да „има много да се рачуна“. Било је и коментара попут „добро је да нисте тражили 200. троугаони број“. Затим је ученицима показан поступак за одређивање 20. троугаоног броја који је приказан на Слици 5.7.

други троугаони број: $3 = 1 + 2$
трећи : $6 = 1 + 2 + 3$
четврти : $10 = 1 + 2 + 3 + 4$
пети : $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
. . . . . .
двадесети : $x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 20$

$$x = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 + \ldots + 18 + 19 + 20$$

↑_21_↑
. . .
↑______21______↑
↑________21________↑
↑__________21__________↑

Па је $x = 10 \cdot 21 = 210.$

Слика 5.7: Поступак одређивања двадесетог троугаоног броја

Након тога ученици су решавали следеће задатке:

1. Одредити 33. по реду троугаони број.

Током решавања ових задатака наставници су разговарали са члановима група и бележили њихова запажања и одговоре. У свим групама ученици су поновили поступак из претходног решења, констатујући да је 33. троугаони број једнак збиру

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 33$$

Али су имали проблема код одређивања овог збира. Неки су рачунали на начин приказан на Слици 5.8А и мислећи да ових парова има 17 добијали су резултат $17 \cdot 34 = 578$ што није тачно. Мали број ученика је написао средишне чланове овог збира, као што је приказано на Слици 5.8Б и закључио да је резултат $16 \cdot 34 + 17 = 561$.

$1 + 2 + 3 + \quad \ldots + 31 + 32 + 33$
↑______34______↑
↑________34________↑
↑__________34__________↑

А

$1 + 2 + 3 + \quad + 16 + 17 + 18 \quad \ldots + 31 + 32 + 33$
↑__34__↑
. . .
↑______ 34 ______↑
↑________ 34 ________↑
↑__________ 34 __________↑

Б

Слика 5.8: Поступак одређивања тридесет трећег троугаоног броја

Резултати решавања овог задатка приказани су у Табели 5.5.

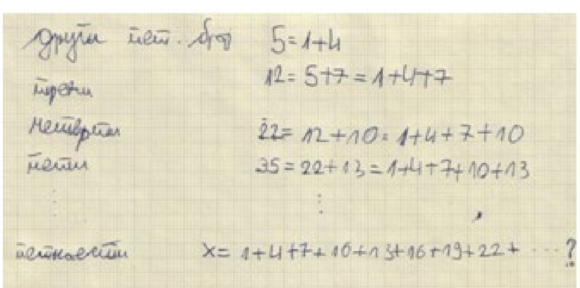
Табела 5.5: Број тачних одговора у првом задатку

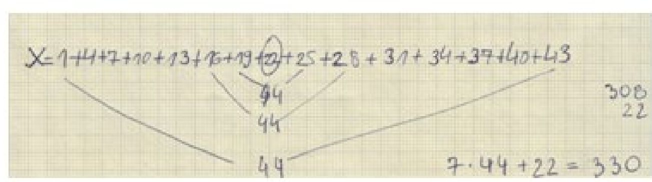
Одељење	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 10
Број тачних одговора	4	5	3	3	4

Након завршетка решавања овог задатка позвани су ученици из група које су тачно урадиле задатак да објасне групама које нису добиле тачан резултат где су погрешили.
Затим су ученици решавали следећи задатак:

2. Одредити 15. по реду петоугаони број.

Поучени примером одређивања двадесетог троугаоног броја, ученици су одређивали други, трећи, четврти, пети петоугаони број али су застали код одређивања петнаестог петоугаоног броја. Пример таквог ученичког рада приказан је на Слици 5.9 (део А). Када се један члан те групе досетио да додавањем 3 на претходни сабирак формира све сабирке редом, закључно са петнаестим, као што се може видети на Слици 5.9 (део Б), тачно су израчунали петнаести петоугаони број.





А Б

Слика 5.9: Рад ученика

На питање наставнице шта би урадили да је требало израчунати 150. по реду петоугаони број одговорили су да није фер тражити тако велики број и да то не би знали да ураде. Резултати решавања овог задатка приказани су у Табели 5.6.

Табела 5.6: Број тачних одговора у другом задатку

Одељење	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 10
Број тачних одговора	7	8	5	5	6

Затим је ученицима предочено како се помоћу разлика другог реда код петоугаоних (и других) бројева формирају разлике првог реда помоћу којих се даље формира низ тих фигуративних бројева или се израчунава захтевани фигуративни број. Претходни задатак је урађен на следећи начин:

други петоугаони број $5 = 1 + 4= 1 + (1+3)$

трећи $12 = 5 + 7= 1 + (1+3) + (1+3+3)$

четврти $22 = 12 + 10= 1 + (1+3) + (1+3+3) + (1+3+3+3)$

$= 4 \cdot 1 + 3 \cdot (1+2+3)$

пети $35 = 22 + 13= 1 + (1+3) + (1+2\cdot3) + (1+3\cdot3) +$

$+ (1+4\cdot3) = 5\cdot1 + 3\cdot(1+2+3+4)$

. . .

петнаести $x = 15\cdot1 + 3\cdot(1+2+3+4+ \ldots +14)$

Израчунавање збира целих бројева од 1 до 14 извршено је на претходно приказан начин, груписањем по два броја чији је збир 15 (1 и 14, 2 и 13 ... 7 и 8). Таквих парова је укупно 7 па је збир ових бројева једнак вредности израза $7 \cdot 15 = 105$. Тако долазимо до вредности за петнаести петоугаони број

$$x = 15 + 3 \cdot 105 = 330$$

Након тога ученицима је задат задатак који не садржи фигуративне бројеве:

3. Дат је низ бројева

3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 . . .

Одредити 80. члан овог низа.

Све групе су започеле решавање задатка уочавањем разлике међу члановима низа

$$\begin{array}{cccccccccc} 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 33 & 39 \ldots & x_{79} & x_{80} \\ & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \ \ldots & & 6 \end{array}$$

Затим је већина група тачно решила задатак на следећи начин:

$x_2 = 3 + 6$

$x_3 = 3 + 6 + 6$

$x_4 = 3 + 6 + 6 + 6$

. . .

$x_{80} = 3 + (6 + 6 + 6 + \ldots + 6) = 3 + 79 \cdot 6 = 3 + 474 = 477$

← укупно 79 →

Резултати решавања овог задатка приказани су у Табели 5.7.

Табела 5.7: Број тачних одговора у трећем задатку

Одељење	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 10
Број тачних одговора	9	10	9	9	10

Након овог задатка завршен је рад у кабинету информатике и ученици су се вратили у редовну наставу где су током 4 часа, радећи појединачно, пратили предавања и вежбање из области реалних бројева.

Ученици у контролној групи су током прва три часа, путем одабраних примера који демонстрирају уочавање законитости међу бројевима, упућени у визуелно-логички приступ сагледавања проблемске ситуације и решавања проблема. Радили су у сарадничким групама, у кабинету информатике, помоћу рачунара, табле и креде.

На почетку првог часа упознати су са питагорејским поступком за одређивање збира непарних бројева који је конкретизован и објашњен на примеру:

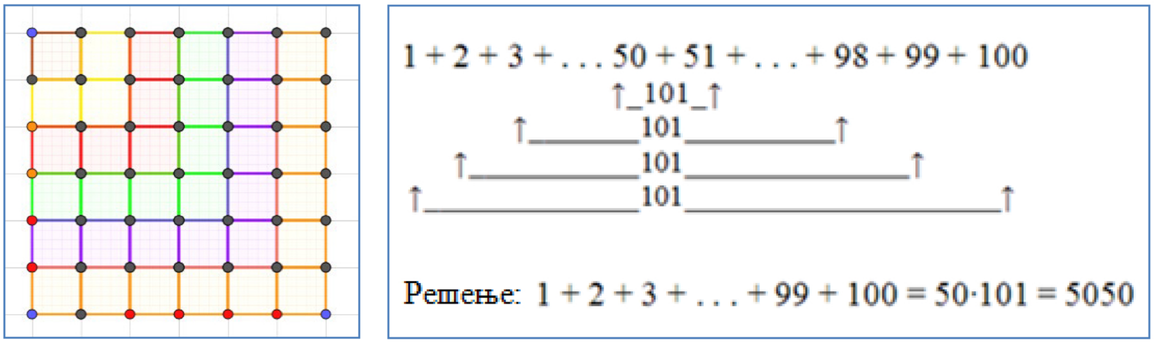
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ (Слика 5.10А).

Након тога тражено је да се израчуна збир следећих бројева:

1) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 39$
2) Збир свих непарних бројева мањих од 100.

Током рада наставници су подстицали ученике да повезују нови задатак са задатком чије им је решење познато, да постављају питања и дискутују о начину решавања и добијеном решењу. Групе које су решиле задатак помагале су другим групама да дођу до решења.

На почетку другог часа ученици су упознати са Гаусовим поступком израчунавања збира првих 100 природних бројева (Слика 5.10Б).



А Б

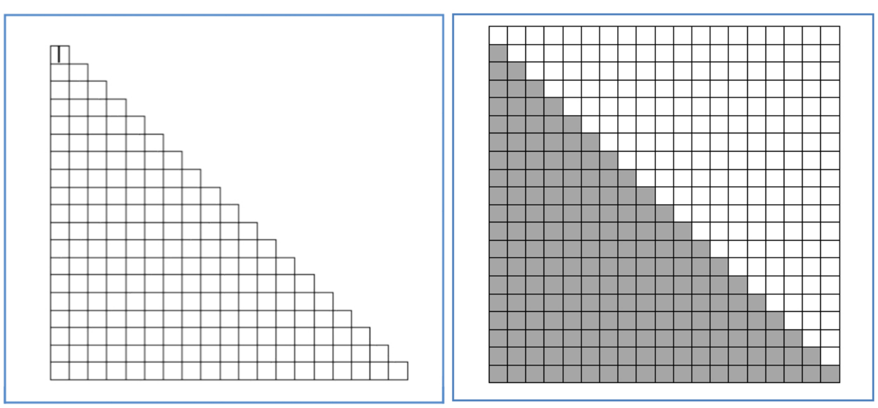
Слика 5.10: Приказ збира непарних бројева и Гаусовог поступка

Након тога од ученика је захтевано да израчунају следеће суме:

1) 1 + 2 + 3 + . . . + 84 + 85
2) Збир свих природних бројева мањих од 200.

Затим је ученицима задат следећи задатак:

Одредити укупан број квадратних плоча потребних за поплочавање једне бочне стране степеништа које има 19 степеника. Уз текст задатка ученицима је на екрану приказана слика степеништа (Слика 5.11А). Након предвиђеног времена за решавање овог задатка ученицима је приказано решење са додатком степеништа у обрнутом положају чиме се добија правоугаоник у коме је укупан број плоча $19 \cdot 20$ на основу чега се закључује да је тражени број плоча 190 (Слика 5.11Б).



А Б

Слика 5.11: Приказ степеништа

На почетку трећег часа ученицима су предочени низови природних бројева дељивих са 3, затим бројева дељивих са 5 и бројева дељивих са 7:

3, 6, 9, 12, 15, 18 . . .

5, 10, 15, 20, 25, 30 . . .

7, 14, 21, 28, 35, 42 . . .

При том је предочена разлика између два суседна члана у сваком низу бројева. Затим је од ученика захтевано да формирају 10 чланова низа чији је први члан 2 а разлика између два суседна члана 6. Потом и низ чији је први члан 8 а разлика између два суседна члана 3. Након тога решаван је следећи задатак:

Уочити законитост формирања датог низа бројева и написати још 3 члана:

a) 3 , 8 , 13 , 18 , 23 , 28 . . .
b) 1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , 22 , 29 . . .

Током часа наставници су захтевали од ученика да анализирају постављене задатке, да их повежу са задацима чија су им решења позната. Помагали су ученицима да дођу до решења а ученици који су брже схватали поступак рада помагали су осталим члановима своје групе да напредују.

Овим задатком завршено је вежбање уочавања законитости међу бројевима за контролну групу. Ученици су се вратили у редовну наставу где су током 4 часа, радећи појединачно, пратили предавања и вежбања из области реалних бројева.

По завршетку седмочасовног рада сви ученици првог разреда су радили тест из области реалних бројева. Извршена је статистичка анализа теста као и пре-теста, базирана на ученичким постигнућима исказаним бројем тачних одговора и постигнутим бројем бодова на тестовима. У обе статистичке анализе примењен је Студентов т-тест разлике између аритметичких средина два велика независна узорка.

Пре-тест је имао за циљ да покаже способност ученика првог разреда гимназије да уочавају законитости међу бројевима и примењујући их да решавају дате задатке. На основу добијених резултата, приказаних у Табели 5.1, добили смо одговор на наше прво истраживачко питање и закључили да ученици нису научени на такав приступ анализирању и решавању задатака. Пре-тест је такође показао да није било статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе.

Статистички резултати пре-теста приказани су у Табели 5.8. Сваки тачно урађен задатак бодован је са 5 поена и половично урађен задатак са 2,5 поена. Након сумирања остварених поена и израчунавања просечног броја поена у експерименталној групи (3,41) и контролној групи (3,34), односно израчунавања вредности за аритметичку средину и стандардну девијацију, добијена је т-вредност од 0,459 и р-вредност од 0,685. Добијена т-вредност је мања од граничне вредности за праг значајности од 0,05 што показује да разлика између експерименталне и контролне групе није статистички значајна на нивоу значајности од 0,05 ($t(295) = 0,459$; $p = 0,685$).

Табела 5.8: Статистички резултати пре-теста

Група	Број ученика	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлике између аритметичких средина	
				т-вредност	р - вредност
Експериментална	149	3,41	0,232	0,459	0,685
Контролна	148	3,34	0,250		

Задаци на тесту садржавали су законитост међу бројевима и резултати њиховог решавања дали су одговор на наше друго истраживачко питање. То су били следећи задаци:

1) Показати да је збир свих парних бројева мањих од 1000 дељив са 499.
2) Израчунати вредност израза:

$$1999^2 - 1998^2 + 1997^2 - 1996^2 + \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2.$$

Оба задатка на тесту бодована су максимално са 5 бодова. Успешност ученика у решавању првог и другог задатка приказана је у Табели 5.9.

Анализирањем добијених резултата уочава се да ни у експерименталној нити у контролној групи нема ученика са 0 поена ни у првом нити у другом задатку. Ученици експерименталне групе постигли су у првом задатку укупно 558 поена, или 3,75 поена по ученику и у другом задатку 590 поена или 3,96 по ученику. Ученици контролне групе постигли су у првом задатку укупно 472 поена, или 3,19 поена по ученику и у другом задатку 510 поена или 3,45 по ученику.

Табела 5.9: Број постигнутих поена у првом и другом задатку

Број поена	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5	$\sum E$	1_6	1_7	1_8	1_9	1_{10}	$\sum K$
1. задатак												
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	3	3	0	8	2	2	4	3	3	14
2	1	3	6	4	6	20	4	5	5	6	9	29
3	4	2	6	5	8	25	12	9	10	8	8	47
4	12	11	7	8	7	45	7	8	6	6	4	31
5	11	14	8	9	9	51	4	6	5	6	6	27
2. задатак												
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	2	1	1	2	2	8
2	0	0	0	0	0	0	3	6	3	4	2	18
3	10	7	11	8	10	46	10	7	10	8	9	44
4	12	14	11	13	13	63	11	12	12	10	11	56
5	8	9	8	8	7	40	3	4	4	5	6	22

За решавање првог задатка на тесту било је неопходно израчунати збир бројева

$$2 + 4 + \ldots + 996 + 998$$

који износи 249500 а то је број који је дељив са 499, чиме је овај задатак решен. Поступак сабирања низа бројева са одређеном законитошћу међу члановима показан је обема групама (на претходно описан начин) и практикован у неколико урађених задатака.

При решавању другог задатка, након разлагања датог израза на просте чиниоце, добија се израз

$$3997 + 3993 + 3989 + \ldots + 9 + 5 + 1$$

који се решава као и претходни задатак. Поступак решавања оба задатка је практикован у обе групе током описаног трочасовног вежбања.

Упоређивањем резултата постигнутих у овим задацима уочава се да је експериментална група била успешнија од контролне. Разлика у њиховој успешности је статистички значајна што показују статистички резултати приказани у Табели 5.10.

Табела 5.10: Статистички резултати теста

Група	Број ученика	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлике између аритметичких средина	
				т-вредност	p - вредност
Експериментална	149	7,70	0,347	6,760	0,000
Контролна	148	6,63	0,071		

Аналогно израчунавању аритметичке средине (као просечног броја постигнутих поена) и стандарне девијације на пре-тесту, израчунате су аритметичка средина и стандардна девијација у експерименталној и контролној групи, а затим т-вредност и р-вредност овог теста. Добијена т-вредност је већа од граничне вредности за праг значајности од 0,05 што показује да је разлика просечног броја постигнутих поена у експерименталној и контролној групи у анализираним задацима на тесту, статистички значајна на нивоу значајности од 0,05 ($t(295) = 6{,}760$; $p = 0.000$).

У првом задатку на тесту било је неопходно израчунати збир свих парних бројева мањих од 1000 што је аналогно одређивању збира првих 1000 природних бројева захтеваном у првом задатку на пре-тесту. Сумирајући успешност ученика у одређивању поменутих збирова бројева констатовали смо да је у експерименталној групи први задатак на пре-тесту урадило 20 ученика а на тесту 96 ученика. У контролној групи први задатак на пре-тесту је урадило 18 а на тесту 58 ученика. Разлика између просечне вредности финалног и иницијалног стања броја тачних решења у првом задатку, у експерименталној групи износи 0,51 док је у контролној групи 0,27. Ови резултати показују да је просечна ефикасност првог експерименталног фактора – рада са фигуративним бројевима, већа од просечне ефикасности рада без фигуративних бројева. Такође показују да рад са фигуративним бројевима доприноси развијању способности ученика у уочавању законитости међу бројевима и успешнијем решавању задатака у којима је то неопходно.

У овом истраживању испитивали смо и допринос фигуративних бројева дуготрајном памћењу бројних података.

Неколико дана након тестирања ученика извршена је прва провера меморисања бројног податка. Наставници су саопштили ученицима следеће:

„Број регистрованих паса у свету је 171319253137. Покушајте да запамтите овај број.“

Након 5 минута извршена је провера запамћеног броја. Ученицима су подељени папирићи на које су они уписали запамћени број. Резултати у свим одељењима су били добри и приказани су у Табели 5.11.

Табела 5.11: Проценат успешности меморисања броја непосредно након меморисања

Одељење	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5	1_6	1_7	1_8	1_9	1_{10}
Број ученика	28	28	29	28	29	28	29	29	28	28
Број тачних одговора	28	28	28	28	29	27	29	28	28	27
Проценат тачних одговора	100%	100%	97%	100%	100%	96%	100%	97%	100%	96%

Непосредно након меморисања податка све групе су биле скоро сто процентно (осим по 1 ученика у 4 групе) у могућности да понове задати бројни податак.

Након две недеље извршена је провера трајности меморисања податка. Наставници су ученицима поделили папириће и када су им саопштили да на њих упишу број регистрованих паса у свету који су запамтили пре две недеље, чули су се коментари попут:

„Ух, ко се тога сећа.“

„Знам само да је био огроман број.“

„Сећам се само да је почињао са 1.“

Резултати су овог пута били потпуно другачији. (Ученици који нису били на часу када је извршена прва провера меморисања бројног податка нису обухваћени овом додатном провером.) Приказ резултата дат је у Табели 5.12.

Табела 5.12: Проценат успешности меморисања броја након две недеље

Одељење	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5	1_6	1_7	1_8	1_9	1_{10}
Број ученика	27	28	28	27	28	27	28	28	27	28
Број тачних одговора	25	28	25	26	27	14	13	12	13	12
Проценат тачних одговора	93%	100%	89%	96%	96%	52%	46%	43%	48%	43%

Када су ученици написали своје одговоре и предали их наставницима, наставници су написали на табли тачан одговор и затим поразговарали са ученицима о меморисаном податку. Ученици који се нису сетили броја који су запамтили пре две недеље коментарисали су:

„Сећам се само да је било неколико милијарди регистрованих паса.“

„Било је пуно различитих цифара и нисам могао да се сетим којим редом су ишле.“

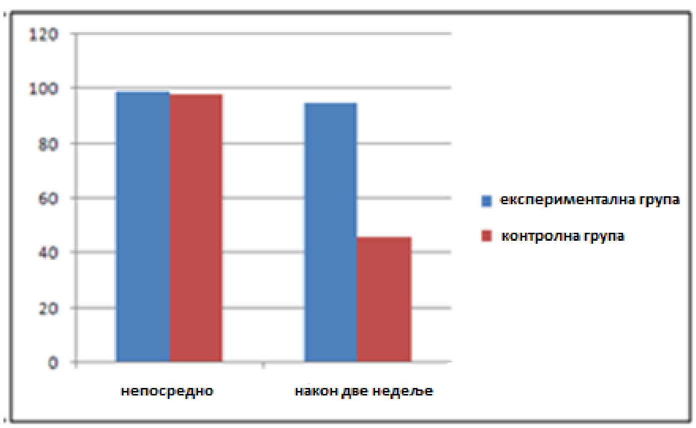
„Не могу дуго да памтим вишецифрене податке.“

Ученици који су и након две недеље памтили број регистрованих паса у свету имали су исто објашњење. Они су уочили законитост у низу бројева 171319253137 (свака два суседна броја се разликују за 6) и лако су реконструисали решење:

1 7 13 19 25 31 37

+6 +6 +6 +6 +6 +6

Анализирањем резултата у експерименталној и контролној групи можемо уочити да је непосредно након меморисања бројног податка, проценат успешности реконструкције меморисаног податка у експерименталној групи био 99,4% а у контролној 97,8%. Након две недеље проценат успешности у експерименталној групи био је 94,8 % док је у контролној смањен на 46,8%. Разлика у успешности реконструкције меморисаног податка графички је приказана на Слици 5.12.



Слика 5.12: Проценат успешности памћења бројног податка

Испитивањем међусобне повезаности дуготрајности запамћеног бројног податка и успешности ученика у првом и другом задатку на тесту, добили смо коефицијент корелације (Спирменов коефицијент) $\rho = 0{,}702$ што показује изразиту повезаност ових варијабли.

На основу резултата добијених у овом истраживању закључили смо:

- Да ученици првог разреда средње школе нису научени да уочавањем законитости међу бројевима решавају задатке са бројним низовима и скуповима;
- Да рад са фигуративним бројевима доприноси развијању способности ученика у уочавању законитости међу бројевима и успешнијем решавању задатака у којима је то неопходно;
- Да уочавање законитости међу бројевима доприноси дуготрајнијем памћењу бројних података у којима постоји одређена законитост;

Резултати овог истраживања приказани су у нашем раду „*Figurative numbers contribution in perceiving the legality in numerous strings tasks and long-term memory of numerous data*" (Mihajlov Carević, Petrović & Denić, 2019), публикованом у часопису EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, Sci Tech. Ed 2019; 15(4):em1692.

По завршетку истраживања, након тестирања, извршили смо анкетирање ученика са циљем добијања увида у начин на који ученици доживљавају рад са фигуративним бројевима и одабраним примерима за демонстрирање уочавања законитости међу бројевима. Резултати анкете су нам помогли у планирању и организовању наредних истраживања али нису обрађени и приказани у поменутом публикованом раду.

5.3.3. Истраживање у седмом разреду основне школе

Током школске 2016/17. године обавили смо истраживање са ученицима седмог разреда основне школе. Истраживањем је обухваћено 235 ученика. На почетку истраживања извршили смо тестирање ученика са циљем испитивања њихове научености да уочавањем законитости решавају разне задатке са природним бројевима. Резултати добијени на пре-тесту били су у великој мери незадовољавајући. Веома мали број ученика је тачно израчунао збир првих 100 природних бројева. Још мањи број је умео да израчуна збир непарних бројева мањих од 100. Ни једноставни задаци са уочавањем законитости међу датим бројевима и уписивањем недостајућег броја у празно поље нису боље урађени. Због тога смо организовали упознавање ученика седмог разреда са одабраним примерима који демонстрирају уочавање везе међу елементима проблемске ситуације и њено решавање применом уочене везе. Поред тога, желели смо да планираном наставом помогнемо развоју конструктивног мишљења ученика. Део планиране наставе реализовали смо путем рачунара и програмског пакета Геогебра чиме смо на бржи и очигледнији начин предочили ученицима одабране примере који су их упутили у визуелно-логички приступ сагледавања проблемске ситуације. Такође нам је тежња била да коришћењем савремених технологија у настави (рачунара и програмског пакета) одржавамо континуитет њихових примена у образовном процесу. Употреба и оспособљавање ученика за активно коришћење савремених технологија су од изузетне важности у савременом образовању (Doruk, Aktumen & Aytekin, 2013). Истраживања су показала да интеграција информационих и комуникационих технологија у наставне процесе доприноси развоју активног мишљења код ученика стимулишући њихово креативно размишљање (Alegra, Chifari & Ottaviano, 2001; Viamonte, 2010).

У циљу упоређивања резултата по завршетку истраживања, формирали смо две групе ученика, експерименталну и контролну, у којима је на различит начин реализована настава. Ученици у експерименталној групи су упознати са фигуративним бројевима након чега су самостално и уз помоћ наставника уочавали законитости међу бројевима и решавали постављене задатке. Ученици у контролној групи су без упознавања са фигуративним бројевима, путем одабраних примера који демонстрирају уочавање законитости међу бројевима, упућени у визуелно-логички приступ сагледавања проблемске ситуације и решавања проблема. Обе групе су састављене од по 4 одељења одабрана тако да просек оцена из математике буде приближно једнак као и број ученика у групама. У обе групе организовано је сарадничко учење у малим трочланим групама.

Као што је пројектом истраживања предвиђено по завршетку наставе извршено је тестирање ученика обе групе. Пре-тест је показао да није било статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе. На пост-тесту резултати обе групе су били бољи него на пре-тесту при чему је експериментална група имала боље резултате од контролне групе а разлика између њих је била статистички значајна.

Резултати истраживања описаног у поглављу 5.3.1. показали су да фигуративни бројеви могу бити веома добро средство за презентацију парадигми и развијање конструктивног мишљења. Добијени резултати су подстакли ново истраживање чији је циљ био сагледавање и утврђивање доприноса фигуративних бројева развоју способности уочавања законитости међу бројевима ученика седмог разреда основне школе.

Предмет истраживања

Током основне школе ученици се упознају са скуповима природних, целих, рационалних, ирационалних и на крају реалних бројева. У седмом разреду са обрадом реалних бројева завршава се теорија бројева у основној школи да би се у средњој школи она наставила обрадом имагинарних и комплексних бројева. Ученици основне школе су упознати са представљањем бројева на бројној правој. У петом разреду приказују природне бројеве на бројној правој, у шестом разреду целе бројеве, у седмом разреду реалне бројеве. Иако нижу бројеве на бројној правој, низ као математички појам им није познат. Низови бројева се по наставном плану обрађују тек у средњој школи. Чини се природним упознавање ученика са низовима бројева паралелно са обрадом скупова бројева. Бесконачан број елемената неких низова не би требало да буде препрека јер и скупови бројева могу бити коначни и бесконачни. Појам бесконачности је ученицима основне школе познат и интуитивно јасан. Стога је увођење низова фигуративних бројева у наставу математике основне школе објективно могуће. Историјски посматрано, фигуративни бројеви су повезани са природним бројевима. Њихови корени су у питагорејској теорији бројева која је зачетник и основа опште теорије бројева. Стога је природно упознавање ученика са овом класом бројева током основне школе, на почетку њиховог учења теорије бројева.

Предмет истраживања у овом раду је могућност и корисност увођења фигуративних бројева у наставу математике седмог разреда основне школе. При том смо истраживали могућност ученика седмог разреда да се баве низовима фигуративних бројева, законитостима међу њиховим члановима и применом уочених законитости у решавању математичких задатака.

Задаци у овом истраживању били су следећи:

1) Остварити увид у наученост ученика седмог разреда основне школе да уочавају законитости међу бројевима једног низа или скупа;
2) Остварити увид у способност ученика седмог разреда основне школе да након упознавања са законитостима које важе за фигуративне бројеве, самостално уочавају законитости у разним низовима бројева и
3) да уочене законитости примењују при решавању разних задатака са бројним подацима.

Циљ истраживања био је сагледавање и утврђивање доприноса фигуративних бројева развоју способности уочавања законитости међу бројевима ученика седмог разреда основне школе.

Постављене су следеће хипотезе:

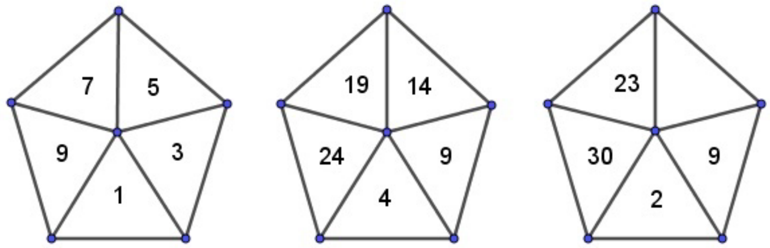
1) Претпоставља се да ће мање од 25% ученика седмог разреда основне школе бити у могућности да решава задатке у којима је неопходно уочавање законитости међу бројевима;
2) Упознавање са фигуративним бројевима омогућиће ученицима да уочавају законитости међу бројевима и да применом уочене законитости решавају постављене задатке.

Методе и инструменти у истраживању

Истраживањем је обухваћено 8 одељења седмог разреда са укупно 235 ученика. На почетку истраживања извршили смо тестирање ученика са циљем испитивања њихове научености да уочавањем законитости решавају разне задатке са природним бројевима. На пре-тесту су постављени следећи задаци:

1) Колики је збир првих 100 природних бројева?

2) Колики је збир непарних бројева мањих од 100?
3) Поштујући законитост која важи за прве две слагалице бројева попуни празно место у трећој слагалици:



Слика 5.13: Слагалица бројева

Пре-тест је имао за циљ да покаже наученост ученика седмог разреда да уочавају законитости међу бројевима и примењујући их да решавају дате задатке.

Резултати пре-теста приказани су у Табели 5.13.

Табела 5.13: Резултати пре-теста са ученицима седмог разреда

Одељење	Укупан број ученика	Број и проценат ученика који су тачно решили		
		1.задатак	2.задатак	3.задатак
7_1	31	5 (16,1%)	4 (12,9%)	9 (29,0%)
7_2	30	4 (13,3%)	3 (10,0%)	10 (33,3%)
7_3	30	4 (13,3%)	4 (13,3%)	8 (26,7%)
7_4	29	5 (17,2%)	4 (13,8%)	12 (41,4%)
7_5	28	4 (14,3%)	3 (10,7%)	12 (42,8%)
7_6	30	6 (19,8%)	5 (16,5%)	13 (42,9%)
7_7	28	5 (17,8%)	5 (17,8%)	11 (39,3%)
7_8	29	4 (13,8%)	3 (10,3%)	10 (34,5%)

Од 235 ученика седмог разреда први задатак је решило само 37 ученика или 15,7%, други задатак 31 ученик или 13,2%, трећи задатак 85 ученика или 36,2%.

Резултати добијени на пред-тесту могу се окарактерисати као доказ нашој првој хипотези да ће мање од 25% ученика седмог разреда основне школе бити у могућности да решава задатке у којима је неопходно уочавање законитости међу бројевима.

Узимајући у обзир просек оцена из математике и број ученика у одељењима, формирали смо експерименталну и контролну групу ученика. Експерименталну групу су чинила одељења 7_1, 7_3, 7_5 и 7_7 (укупно 117 ученика) а контролну 7_2,7_4, 7_6 и 7_8 (укупно 118 ученика). Просек оцена из математике као и број ученика у групама је био приближно једнак. У одељењима експерименталне и контролне групе формиране су мале трочлане групе од ученика различитог нивоа математичког знања за сарадничко учење. (Са изузетком у 7_1, 7_5 и 7_7 где је била једна четворочлана група и 7_4 и 7_8 где су биле две четворочлане групе.) За обе групе ученика припремљено је трочасовно упознавање са одабраним примерима који демонстрирају уочавање везе међу елементима проблемске ситуације и њено решавање применом уочене везе. За сликовно приказивање фигуративних бројева у експерименталној групи и одабраних примера у контролној групи одабран је програмски пакет Геогебра због његове једноставне примене и упознатости ученика са радом у Геогебри. Представљање фигуративних бројева помоћу тачака, при чему свака тачка представља јединицу, је врло лако изводљиво у графичком приказу Геогебре. Такође и цртање дужи, затворених полигоналних линија и других геометријских објеката коришћених у раду са контролном групом као и њихово бојење различитим бојама. Динамичност софтверског пакета Геогебра нисмо користили, као ни друге њене могућности.

Рад са експерименталном и контролном групом

На почетку првог часа ученици експерименталне групе су упознати са троугаоним бројевима приказаним на слици:

Слика 5. 14: Троугаони бројеви

Затим је од ученика захтевано да одреде следећи број у низу троугаоних бројева и да га сликовно прикажу у Геогебри. Групе су сараднички решавале постављени задатак. Прво су одређивали следећи троугаони број. Неколико ученика је увидело да задатак треба решавати применом разлика. Закључили су да следећи број у низу разлика мора бити 5 па су додајући га на број 10 добили број 15 као следећи троугаони број. Неколико група је цртајући број помоћу тачкица и примењујући уочену сликовну законитост добило сликовни приказ са 15 тачкица и закључило да је следећи број у низу троугаоних бројева, број 15. Међутим, већи број група није успео да дође до решења. Резултати решавања овог задатка приказани су у Табели 5.14.

Табела 5.14: Резултати решавања првог задатка са троугаоним бројевима

Одељење	7_1	7_3	7_5	7_7
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 9
Број тачних одговора	4	5	3	4

Групе које су тачно решиле задатак помагале су осталим групама да дођу до тачног решења. Затим су све групе радиле на сликовном приказу броја 15 у Геогебри.

Након тога ученици су аналогно упознати са квадратним, петоугаоним и шестоугаоним бројевима при чему су такође одређивали следећи број у низу и сликовно га приказивали у Геогебри. Током рада наставници су подстицали ученике да повезују нови задатак са задатком чије им је решење познато, да постављају питања и дискутују о начину решавања и добијеном решењу. Број тачних одговора за све презентоване фигуративне бројеве по одељењима приказан је у Табели 5.15.

Табела 5.15: Број тачних одговора за први задатак код свих фигуративних бројева

Одељење	7_1	7_3	7_5	7_7
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 9
Троугаони бројеви	4	5	3	4
Квадратни бројеви	9	10	8	9
Петоугаони бројеви	5	6	4	5
Шестоугаони бројеви	6	7	5	6

Резултати одређивања следећег квадратног броја у низу су најбољи вероватно због упознатости ученика са квадратним бројевима у скупу реалних бројева. Примећено је да су га ученици одређивали применом формуле за x^2 а не као код троугаоних бројева применом разлика међу бројевима или сликовног приказа. Код петоугаоног броја групе су имале потешкоће у раду али по узору на одређивање следећег троугаоног броја већина група је тачно решила задатак. Одређивање следећег шестоугаоног броја је брже и лакше урађено јер су се ученици већ привикли на потребан начин размишљања и уочавања законитости.

На другом часу ученицима је задат други задатак у коме се захтевало да напишу још по 3 елемента у низу троугаоних, квадратних, петоугаоних и шестоугаоних бројева. Тиме је ученицима указано на пут размишљања којим треба ићи. Најпре је потребно одредити следећу разлику између два фигуративна броја, додати је на претходни фигуративни број и тако формирати следећи фигуративни број. Резултати решавања овог задатка су бољи од претходних и приказани су у Табели 5.16.

Табела 5.16: Број тачних одговора за други задатак код свих фигуративних бројева

Одељење	7_1	7_3	7_5	7_7
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 9
Троугаони бројеви	7	7	6	6
Квадратни бројеви	9	10	9	9
Петоугаони бројеви	8	8	7	7
Шестоугаони бројеви	8	9	8	7

Након тога од ученика је тражено да одреде 30. квадратни број. Све групе су тачно одредиле тражени број али рачунајући на следећи начин: $30^2 = 900$. Кад је након тога тражено да одреде 30. троугаони број, чули су се коментари ученика:

„Како ћемо сада да рачунамо. Немамо формулу.“

„Зар треба да рачунамо редом све бројеве док не дођемо до тридесетог?“

Затим је ученицима показан поступак за одређивање 30. троугаоног броја који је приказан на следећој слици:

```
други троугаони број:  3 = 1 + 2
трећи                 : 6 = 1 + 2 + 3
четврти               :10 = 1 + 2 + 3 + 4
пети                  :15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5
 . . .
Тридесети             :  x = 1 + 2 + 3 + . . . + 15 + 16 + . . . + 28 + 29 + 30
                                                  ↑_31_↑
                                           ↑________31_________↑
                                      ↑___________31_____________↑
                                 ↑_______________31_________________↑

                        Па је  x =  15 · 31 = 465
```

Слика 5.15: Поступак одређивања тридесетог троугаоног броја

На почетку трећег часа од ученика је захтевано да одреде 21. троугаони број. Током њиховог рада наставници су разговарали са члановима група и бележили њихова запажања и одговоре. У свим групама ученици су поновили поступак из претходног задатка, констатујући да је 21. троугаони број једнак збиру

$$1 + 2 + 3 + . . . + 21.$$

Међутим ни једна група није тачно израчунала тај збир. Групишући по два броја (као у претходном решењу) добијали су њихов збир 22 и мислећи да ових парова има 10 добијали су решење $10 \cdot 22 = 220$. У другим групама су били мишљења да ових парова има 11 па су добијали решење $11 \cdot 22 = 242$. Ни једно решење није било тачно па је ученицима уз објашњење показано решење овог задатка:

```
1 + 2 + 3 + . . . + 10 + 11 + 12 + . . . + 19 + 20 + 21
                     ↑__ 22 __↑
               ↑___________ 22 ___________↑
           ↑______________ 22 ________________↑
       ↑__________________ 22 ____________________↑
```

Решење је: $10 \cdot 22 + 11 = 220 + 11 = 231$.

Затим је од ученика тражено да израчунају 12. по реду петоугаони број. Поучени примером одређивања 30. троугаоног броја ученици су одређивали редом други, трећи, четврти, пети троугаони број:

други петоугаони број: $5 = 1 + 4$

трећи : $12 = 5 + 7 = 1 + 4 + 7$

четврти : $22 = 12 + 10 = 1 + 4 + 7 + 10$

пети : $35 = 22 + 13 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13$

али су застали код одређивања 12. петоугаоног броја, незнајући који је последњи члан у збиру. Када су се у неколико група ученици досетили да додавањем броја 3 на претходни сабирак формирају све сабирке редом, закључно са дванаестим, дошли су до закључка:

дванаести петоугаони број:

$$x = 1+4+7+10+13+16+ 19+22+25+28+31+34$$

а затим и до тачног решења:

$$x = 6 \cdot 35 = 210.$$

Резултати решавања овог задатка приказани су у Табели 5.17.

Табела 5.17: Број тачних одговора при одређивању дванаестог петоугаоног броја

Одељење	7_1	7_3	7_5	7_7
Групе	1 – 10	1 – 10	1 – 9	1 – 9
Број тачних одговора	6	7	6	5

Након завршетка решавања овог задатка позвани су ученици из група које су тачно урадиле задатак да објасне групама које нису добиле тачан резултат како треба радити.

Претходни задатак је могуће урадити и на други начин, формирајући разлике међу петоугаоним бројевима помоћу разлика међу разликама, који је неопходан при формирању произвољно великих фигуративних бројева. Тај поступак није показан ученицима јер је процењено да би за ученике седмог разреда који се на трочасовном курсу упознају са фигуративним бројевима, то било превише захтевно.

Затим је урађен задатак са одређивањем 9. по реду шестоугаоног броја. Примећено је да су ученици решавали овај задатак знатно брже и лакше од претходног задатка. Резултати су приказани у Табели 5.18.

Табела 5.18: Број тачних одговора при одређивању деветог шестоугаоног броја

Одељење	7_1	7_3	7_5	7_7
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 9
Број тачних одговора	8	10	8	7

До краја трећег часа урађен је још један задатак који није садржао фигуративне бројеве али је захтевао уочавање законитости међу члановима низа бројева. У задатку се захтевало да се одреди 70. члан низа бројева 2, 7, 12, 17, 22 . . . .

Све групе су започеле решавање задатка уочавањем разлика међу члановима низа

2 7 12 17 22 . . .

5 5 5 5

У већини група су уочили да је

други члан: 7 = 2 + 5

трећи : 12 = 7 + 5 = 2 + 5 + 5

четврти : 17 = 12 + 5 = 2 + 5 + 5 + 5

пети : 22 = 17 + 5 = 2 + 5 + 5 + 5 + 5 = 2 + 4·5

и уочивши да петица у збиру има за 1 мање од редоследа тог члана у низу, закључили су да је седамдесети члан: x = 2 + 69·5 и добили решење 347.

Резултати решавања овог задатка приказани су у Табели 5.19.

Табела 5.19: Број тачних одговора у последњем задатку

Одељење	7_1	7_3	7_5	7_7
Групе	1 - 10	1 - 10	1 - 9	1 - 9
Број тачних одговора	7	9	7	6

Након овог задатка завршен је рад са експерименталном групом. Приказани поступци и резултати рада ученика показују да су ученици седмог разреда основне школе способни да после само неколико примера уочавања законитости међу фигуративним бројевима, уочавају разне законитости међу бројевима и примењујући их долазе до решења задатка.

По завршетку рада ученици експерименталне групе су замољени да попуне упитник о раду са фигуративним бројевима. Упитник је био анониман и осмишљен је са циљем стицања увида у начин на који ученици доживљавају рад са фигуративним бројевима. У складу са постављеним циљем припремљено је пет питања са по три понуђена одговора који описују потенцијални доживљај ученика при раду са фигуративним бројевима. Од ученика је захтевано да у сваком питању у упитнику заокруже један од три понуђена одговора који највише описује њихов став по том питању.

Садржај упитника је следећи:

1) Рад са фигуративним бројевима ми је:

а) тежак б) делимично тежак делимично лак ц) лак

2) Рад са фигуративним бројевима ми је:

а) неинтересантан б) делимично интересантан ц) интересантан

3) Да ли је уочавање законитости међу бројевима корисно при решавању задатака?

а) није б) делимично јесте ц) јесте

4) Рад са фигуративним бројевима помаже уочавању законитости међу бројевима:

а) не б) делимично да ц) да

5) Да ли желиш да усавршаваш вештине уочавања законитости међу бројевима?

а) не б) помало ц) да

Резултати упитника приказани су у Табели 5.20.

Табела 5.20: Резултати упитника за експерименталну групу

Питање	Одговори		
	а	б	ц
1	8	23	86
2	0	15	102
3	0	25	92
4	5	21	91
5	8	19	90

Од 117 ученика експерименталне групе, рад са фигуративним бројевима је лак за 86 ученика (или 73,5%), интересантан за 102 ученика (или 87,2%), помаже у уочавању законитости међу бројевима за 91 ученика (или 77,8%). Takође, 92 ученика (или 78,6%) мисли да је уочавање законитости међу бројевима корисно при решавању задатака и 90 ученика (или 76,9%) жели да усавршава вештине уочавања законитости. Може се закључити да је рад са фигуративним бројевима ученицима лак, интересантан и да повећава жељу за усавршавањем вештина и способности у решавању задатака са уочавањем законитости међу бројевима.

У жељи да испитамо корелацију између резултата анкете и резултата на пост-тесту применили смо поступак корелације ранга између две варијабле, X и Y. Варијабла X представља број одговора „ц" у свих пет питања а варијабла Y број поена на пост-тесту. У Табели 5.21 приказан је број одговора „ц" у свих пет питања по одељењима:

Табела 5.21: Број одговора „ц" по одељењима у свих пет питања у анкети

Одељење	1.питање	2.питање	3.питање	4.питање	5.питање	Укупно
7_1	18	24	21	21	20	104
7_3	21	23	22	21	21	108
7_5	24	27	26	26	25	128
7_7	23	28	23	23	24	121
Укупно	86	102	92	91	90	

Примењујући податке из Табеле 5.21 и Табеле 5.24 формирали смо Табелу 5.22 и потом израчунали Спирменов коефицијент корелације.

Табела 5.22: Рангирање вредности варијабли X и Y

Одељење	Варијабла X	Варијабла Y	Ранг X	Ранг Y	D = Ранг X– Ранг Y	D^2
7_1	104	400	4	3.5	0.5	0.25
7_3	108	400	3	3.5	– 0.5	0.25
7_5	128	445	1	2	– 1	1
7_7	121	460	2	1	1	1

Спирменов коефицијент корелације (N = 4):

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum D^2}{N \cdot (N^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 2.5}{4 \cdot 15} = 0.75$$

Добијена вредност $\rho > 0.70$ имплицира високу корелацију између посматраних варијабли.

Ова чињеница показује да је успешност у решавању задатака на пост-тесту у високој корелацији са начином на који ученици доживљавају рад са фигуративним бројевима. Мишљења ученика да је рад са фигуративним бројевима лак, интересантан, да помаже уочавању законитости међу бројевима, да је уочавање законитости међу бројевима корисно при решавању задатака и да желе усавршавање тих вештина, у високој је корелацији са постигнућима на пост-тесту.

Ови резултати пружају додатну мотивацију за увођење фигуративних бројева у наставу математике основне школе.

Ученици контролне групе су на почетку првог часа упознати са питагорејским поступком за одређивање збира непарних бројева који је конкретизован и објашњен на примеру:

$1 + 3 + 5 + 7$ (Слика 5.16А).

Затим је од ученика захтевано да одреде збир првих 6 непарних бројева и да га прикажу у Геогебри као у претходном примеру. Након тога тражено је да се израчуна збир следећих бројева:

$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 29$.

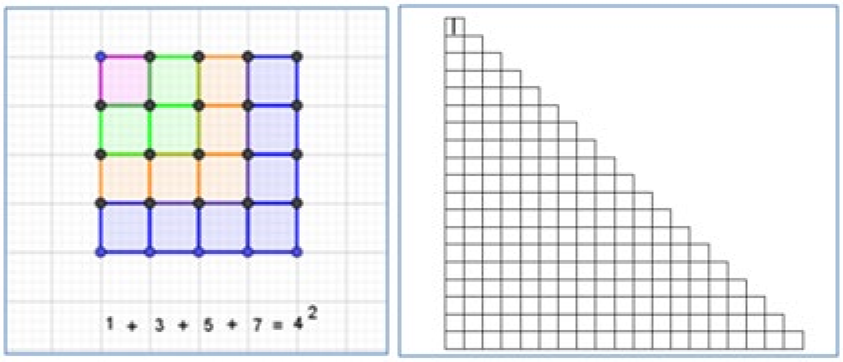
Током рада наставници су подстицали ученике да повезују нови задатака са задатком чије им је решење познато, да постављају питања и дискутују о начину решавања и добијеном решењу.

Оба задатка су урађена у свим групама. Групе које су решиле задатке помагале су другим групама да дођу до решења.

Затим је ученицима задат следећи задатак:

Одредити укупан број квадратних плоча потребних за поплочавање једне бочне стране степеништа које има 19 степеника.

Уз текст задатка ученици су на рачунару добили слику степеништа (Слика 5.16Б). Након предвиђеног времена за решавање овог задатка ученицима је показано решење са додатком степеништа у обрнутом положају чиме се добија правоугаоник у коме је укупан број плоча $19 \cdot 20$ на основу чега се закључује да је тражени број плоча 190.



А Б

Слика 5.16: Приказ збира непарних бројева и степеништа

На почетку другог часа ученици контролне групе су упознати са Гаусовим поступком израчунавања збира првих 100 природних бројева (Слика 5.17А). Након тога од ученика је захтевано да израчунају следеће суме:

1) 1 + 2 + 3 + . . . + 10 + 11 + . . . + 20

2) 1 + 2 + 3 + ... + 22 + 23 + 24 + . . . + 44 + 45

3) Збир свих парних бројева мањих од 100.

Сви задаци су решени на часу у свим групама, уз помоћ наставника или група које су самостално дошле до решења.

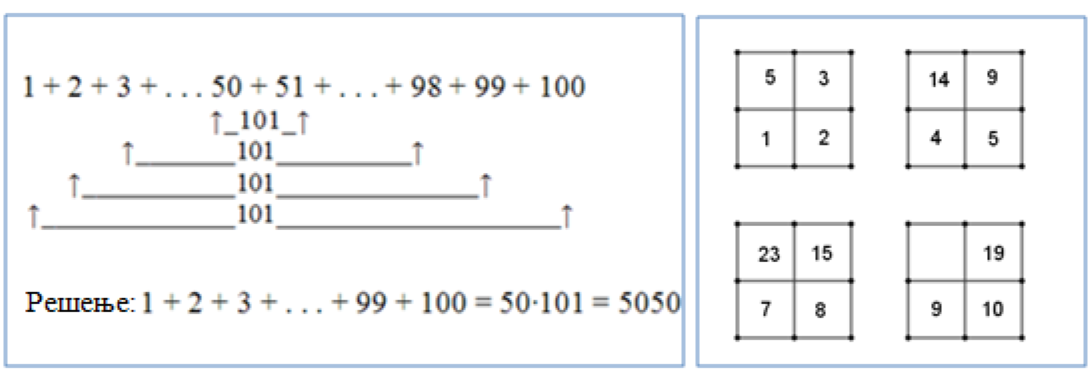
На трећем часу ученици су решавали следеће задатке:

1. Уочити законитост формирања датог низа бројева и написати још 3 члана:

а) 2 , 5 , 8 , 11 , 14 , 17 . . .

б) 1 , 2 , 4 , 7 , 11 , 16 , 22 , 29 . . .

2. Поштујући законитост која важи за прве три слагалице бројева попунити празно место у четвртој слагалици (Слика 5.17Б).



А Б

Слика 5.17: Гаусов поступак израчунавања збира и задатак за контролну групу

Током часа наставници су захтевали од ученика да анализирају постављене задатке, да их повежу са задацима чија су им решења позната. Помагали су ученицима да дођу до решења а ученици који су брже схватали поступак рада помагали су осталим члановима своје групе да напредују. На крају часа ученици су замољени да попуне следећи упитник:

1) Рад са уочавањем законитости међу бројевима ми је:

а) тежак   б) делимично тежак делимично лак   ц) лак

2) Рад са уочавањем законитости међу бројевима ми је:

а) неинтересантан   б) делимично интересантан   ц) интересантан

3) Да ли је уочавање законитости међу бројевима корисно при решавању задатака?

а) није   б) делимично јесте   ц) јесте

4) Одабрани примери приказани на часу помажу уочавању законитости међу бројевима:

а) не   б) делимично да   ц) да

5) Да ли желиш да усавршаваш вештине уочавања законитости међу бројевима?

а) не   б) помало   ц) да

Резултати упитника су коришћени у планирању даљих истраживања.

По завршетку трочасовног рада сви ученици седмог разреда су радили тест за проверу стечених способности уочавања законитости међу бројевима и примени уочених законитости при решавању задатака.

Резултати пре-теста и теста

У овом одељку приказане су статистичке анализе пре-теста и пост-теста базиране на ученичким постигнућима исказаним бројем решених задатака и постигнутим бројем бодова на тестовима, респективно. У обе статистичке анализе примењен је Студентов т-тест разлике између аритметичких средина два велика независна узорка.

Пре-тест је имао за циљ проверу научености ученика седмог разреда основне школе да уочавају законитости међу бројевима и да применом уочене законитости решавају задатке. На основу добијених резултата, приказаних у Табели 5.13, закључили смо да ученици седмог разреда нису научени на такав приступ анализирању и решавању задатака. Пре-тест је такође показао да није било статистички значајне разлике између експерименталне и контролне групе.

Статистички резултати пре-теста приказани су у Табели 5.23. Разлика у предзнању тестиране материје између експерименталне и контролне групе није била статистички значајна на нивоу значајности од 0,05. Добијена т-вредност од 0,528 је мања од граничне вредности за праг значајности од 0,05 (t(233) = 0,528; p = 0,596).

Табела 5.23: Статистички резултати пре-теста

Група	Број ученика	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлике између аритметичких средина	
				т-вредност	p - вредност
Експериментална	117	0,635	0,084873	0,528	0,596
Контролна	118	0,669	0,096797		

Пост-тест је обухватао проверу напредовања ученика после трочасовног практиковања визуелно-логичког приступа у решавању задатака са уочавањем законитости међу бројевима. Експериментална група је практиковање остварила радећи са фигуративним бројевима а контролна путем одабраних примера и задатака за ту сврху, као што је описано у претходном одељку.

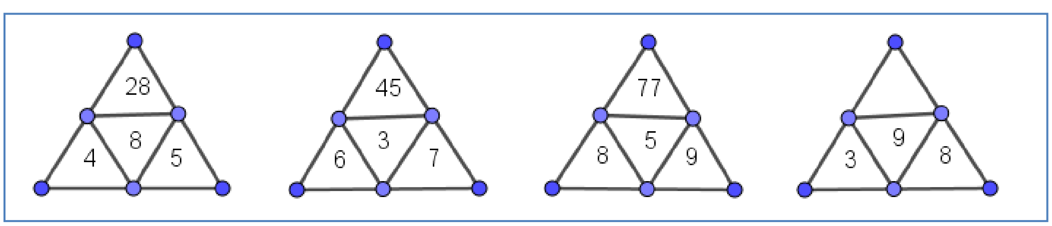
На пост-тесту су задати следећи задаци:

1) Израчунати збир првих 200 природних бројева.

2) Израчунати збир свих непарних природних бројева мањих од 100.

3) Написати следећи број у низу бројева: 2, 4, 8, 14, 22, 32, 44, ...

4) Поштујући законитост која важи за прве три слагалице бројева попуни празно место у четвртој слагалици (Слика 5.18):



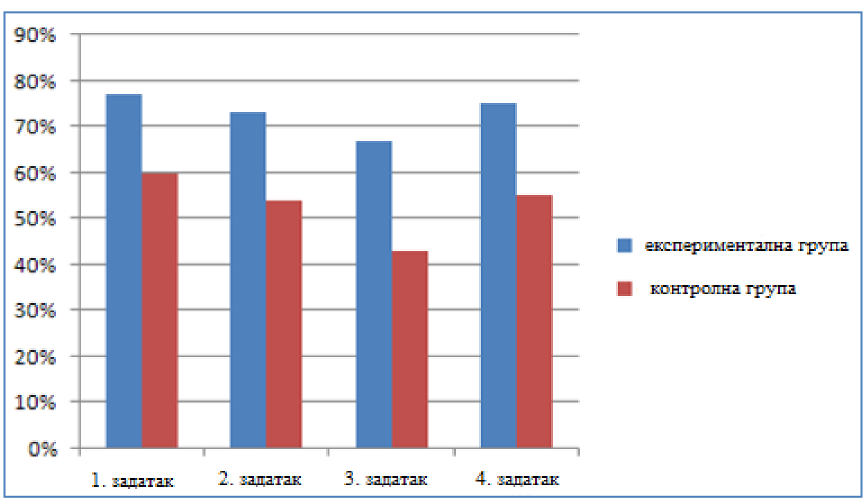
Слика 5.18. Четврти задатак на пост-тесту

Тачно решење у сваком задатку бодовано је са 5 бодова. Резултати на пост-тесту по одељењима приказани су у Табели 5.24.

Табела 5.24: Резултати пост-теста по одељењима

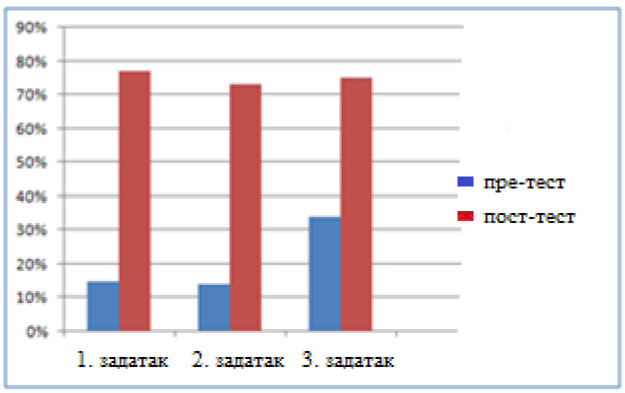
Одељење	Број ученика	Број ученика који су тачно решили				Укупно поена у одељењу	Просечно поена по ученику
		1.зад.	2.зад.	3.зад.	4.зад.		
7_1	31	21	19	18	22	400	12,90
7_2	30	17	15	13	15	300	10,00
7_3	30	20	20	17	23	400	13,33
7_4	29	18	17	13	16	320	11,04
7_5	28	24	22	21	22	445	15,89
7_6	30	19	18	13	19	345	11,50
7_7	28	25	24	22	21	460	16,43
7_8	29	17	14	12	15	290	10,00

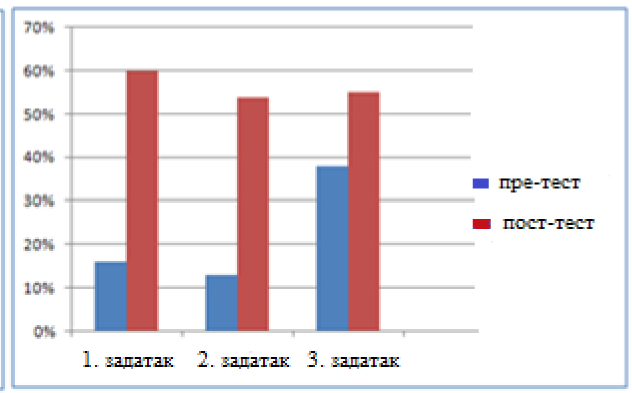
На првом задатку ученици експерименталне групе постигли су укупно 90 тачних одговора (од могућих 117) што износи 76,9% док су ученици контролне групе остварили 71 тачан одговор (од могућих 118) што износи 60,2%. На другом задатку у експерименталној групи је било 85 тачних одговора или 72,6%, у контролној 64 или 54,2%. У трећем задатку разлика у успешности експерименталне према контролној групи је још већа. Експериментална је остварила 78 тачних одговора или 66,7% док је контролна остварила 51 тачан одговор или 43,2%. У четвртом задатку експериментална група је имала успешност од 75,2% (или 88 тачних одговора) док је контролна имала 55,1% (или 65 тачних одговора). Разлика у успешности између експерименталне и контролне групе најбоље се уочава на графичком приказу резултата:



Слика 5.19: Успешност експерименталне и контролне групе на пост-тесту

На пост-тесту први и четврти задатак су исте тежине и захтевности као први и трећи задатак на пре-тесту а други задатак им је идентичан. Поређењем резултата у овим задацима на пост-тесту и пре-тесту уочава се да су обе групе оствариле напредак у успешности. На пре-тесту ученици експерименталне групе су у првом задатку постигли 18 тачних одговора (или 15,4%), у другом 16 (или 13,7%) и у трећем 40 (или 34,2%), док су ученици у контролној групи у првом задатку постигли 19 (или 16,1%), у другом 15 (или 12,7%) и у трећем 45 (или 38,1%). Постигнуто напредовање обе групе остварено након трочасовног практиковања визуелно-логичког приступа при решавању задатака са бројним подацима јасно је уочљиво на графичком приказу ових резултата (Слике 5.20А и 5.20Б).





А Б

Слика 5.20: Резултати пре-теста и пост-теста у експерименталној групи (А) и контролној групи (Б)

На графикону се такође уочава да је експериментална група остварила веће напредовање од контролне групе. У првом задатку експериментална група је остварила за 61,5 већи проценат успешности а контролна за 44,1. У другом задатку експериментална за 58,9 а контролна за 41,5 и у трећем експериментална је остварила за 38 а контролна за 17 већи проценат успешности.

На пост-тесту, највећа разлика у успешности између експерименталне и контролне групе остварена је у трећем задатку у коме се захтевало уочавање законитости међу елементима низа бројева који је ученицима обе групе био непознат. Ученици експерименталне групе су у овом задатку остварили 78 тачних одговора (или 66,7%) а ученици контролне групе 51 тачан одговор (или 43,2%).

Након реализованог трочасовног вежбања визуелно логичког приступа у решавању задатака са бројним низовима различитим инструментима, обе групе, експериментална и контролна, су оствариле напредовање. То показује да фигуративни бројеви нису једини инструмент којим се остварује повећање способности ученика за уочавање законитости међу бројевима и примени уочене законитости у решавању задатака, али су делотворни.

Статистички резултати пост-теста показују да је разлика у знању ученика експерименталне и контролне групе након оствареног трочасовног вежбања статистички значајна (Табела 5.25).

Табела 5.25: Статистички резултати пост-теста

Група	Број ученика	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлике између аритметичких средина	
				т-вредност	p - вредност
Експериментална	117	14,638	1,5419	4,778	0,000
Контролна	118	10,635	0,6555		

Добијена т-вредност од 4,778 је већа од граничне вредности за праг значајности од 0,05 што показује да је разлика просечног броја постигнутих поена у експерименталној и контролној групи на пост-тесту, статистички значајна са нивоом значајности од 0,05 ($t(233) = 4.778$; $p = 0.000$).

Статистичка анализа показује да су постигнућа ученика у уочавању законитости међу бројевима и примени уочених законитости у решавању задатака, боља када се практиковање визуелно-логичког приступа у решавању задатака остварује применом фигуративних бројева.

На основу резултата добијених у овом истраживању и упитника обављеног са ученицима обухваћених истраживањем, можемо закључити:

- Да бављење фигуративним бројевима доприноси развоју способности ученика у уочавању законитости међу бројевима и примени уочених законитости при решавању задатака са бројним низовима и скуповима;
- Да је за ученике седмог разреда основне школе рад са фигуративним бројевима занимљив а законитости међу њима лаке за разумевање;

- Да рад са фигуративним бројевима узрокује појачану мотивацију испољену у повећаној радозналости и жељи за усавршавањем вештина и способности у решавању задатака са уочавањем законитости;
- Да је учење у сарадничким групама уз рачунарску подршку ученицима интересантно и вишеструко корисно, доприноси ефективнијем учењу, неговању тимског рада и упућује ученике да ефикасно користе савремене технологије у настави.

На основу свега изложеног, мишљења смо да фигуративни бројеви заслужују своје место у редовној настави математике седмог разреда основне школе. Ученичке способности, знања и вештине формирају се кроз различите стадијуме образовног процеса. Постигнућа на сваком стадијуму производе одређене исходе али се одражавају и на будуће стадијуме. Због тога је неопходно брижљиво одредити време почетка упознавања ученика са визуелно-логичким приступом у решавању математичких задатака. Након овог истраживања планиран је наставак истраживања у основној школи са циљем сагледавања и утврђивања могућности млађих ученика да се баве фигуративним бројевима и могућности развијања способности уочавања законитости и њихове примене у решавању задатака са бројним низовима.

Резултати овог истраживања приказани су у нашем раду „Multiple advantages of the establishment of figurative numbers in the maths curriculum“ (M.Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić), који је у процесу рецензије.

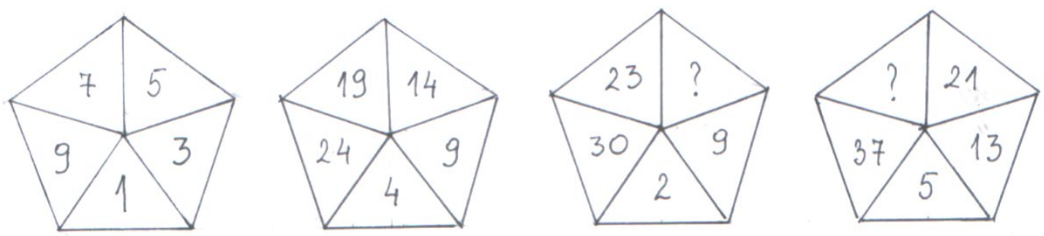
5.3.4. Истраживање у шестом разреду основне школе

Након истраживања са ученицима седмог разреда обавили смо истраживање и са ученицима шестог разреда основне школе. Циљ овог истраживања био је сагледавање и утврђивање могућности млађих ученика да се баве фигуративним бројевима. Такође нам је циљ био да сагледамо могућности ученика шестог рада у развијању способности уочавања законитости међу бројевима и примени уочене законитости у решавању задатака са бројним низовима.

На почетку истраживања извршили смо тестирање свих ученика шестог разреда са циљем испитивања њихове научености да уочавањем законитости решавају разне задатке са природним бројевима. Истраживање је обухватило 9 одељења са укупно 272 ученика.

На пре–тесту су постављени следећи задаци:

1. Колики је збир непарних природних бројева мањих од 100?
2. Колики је збир првих 1000 природних бројева?
3. Поштујући законитост која важи за прве две слагалице бројева попуни празно место у трећој и четвртој слагалици:



Слика 5.21: Слагалица бројева

Ученици су решавали први задатак додавањем наредног непарног броја, све до 99, али је већина ученика при том грешила у сабирању или одустајала. У другом задатку је било још мање тачних одговора и мање покушаја да се дође до решења. Трећи задатак су покушали да реше сви ученици и број тачних одговора је био већи него у претходним задацима. Резултати пре–теста приказани су у Табели 5.26.

Табела 5.26: Резултати пре-теста са ученицима шестог разреда

Одељење	Укупан број ученика	Број ученика који су тачно решили		
		1.задатак	2.задатак	3.задатак
6_1	31	5	4	9
6_2	30	4	3	10
6_3	30	4	4	8
6_4	29	5	4	12
6_5	28	4	3	12
6_6	30	6	5	13
6_7	28	5	5	11
6_8	29	4	3	10
6_9	30	6	5	13

Добијени резултати су јасно показали да ученици шестог разреда основне школе нису научени да уочавају законитости међу бројевима нити да решавају задатке у којима је неопходно применити уочену законитост. Због тога смо организовали упознавање ученика са одабраним примерима који демонстрирају уочавање законитости међу бројевима и примену уочене законитости у решавању задатака. У циљу упоређивања резултата у истраживању, формирали смо две групе ученика, експерименталну и контролну при чему је експериментална група радила са фигуративним бројевима а контролна није. У обе групе смо формирали мале трочлане групе од ученика различитог нивоа математичког знања за сарадничко учење. Организовали смо трочасовно вежбање визуелно–логичког приступа решавању задатака за обе групе. Методе и инструменти у истраживању примењени са ученицима седмог разреда основне школе употребљени су и у раду са ученицима шестог разреда при чему су примери и задаци прилагођени њиховом узрасту.

Ученици у експерименталној групи су на почетку првог часа упознати са прва 4 троугаона броја након чега се од њих захтевало да напишу следећи по реду троугаони број и да га прикажу графички, помоћу тачкица при чему свака тачкица представља јединицу. Након тога су одређивали шести и седми троугаони број у низу. Затим су на исти начин упознати са квадратним бројевима након чега су одређивали следећи по реду квадратни број и представљали га графички. Овај део рада је ученицима био забаван и уз малу помоћ наставника, или самостално, све групе су решиле ове задатке. Такође су тачно и брзо одредили шести и седми по реду квадратни број али рачунајући применом формуле за x^2. Затим је од ученика захтевано да попуне претходну таблицу квадратних бројева са разликама међу њима и разликама међу њиховим разликама закључно са десетим по реду квадратним бројем. Овај задатак је имао за циљ упућивање ученика на разлике између два суседна броја. Наставница је помагала групама подстичући их да повезују задатак са претходно виђеним решењима.

Током трећег часа решавани су следећи задаци:

1) Дат је низ бројева

   3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 . . . .

   Одредити следећи члан овог низа.

   За решавање овог задатка било је неопходно уочити да је разлика свака два суседна члана константна и износи 6.

```
3    9    15    21    27    33    39
 \  / \  / \  /  \  / \  /  \  /
  6    6    6    6    6     6
```

На основу тога се закључује да је следећи члан у низу број 45.

Примећено је да је мали број ученика уочио законитост формирања наредног члана низа. Након објашњења наставника ученици су схватили начин решавања и све групе су дошле до тачног решења.

2) Написати још 3 елемента следећег низа бројева

4, 7, 12, 19, 28, 39, 52 . . .   .

Ученици су започели решавање као у претходном задатку:

```
4    7    12    19    28    39    52
 \  / \  / \   / \   / \   / \   /
  3    5     7     9    11    13
```

али се нису сви снашли у даљем решавању јер их је изненадила различитост у разликама између два суседна члана. Добили смо мање тачних одговора него у првом задатку. Након објашњења наставника још неколико група је дошло до тачног одговора али нису сви успели да реше овај задатак.

3) Одредити следећи члан низа

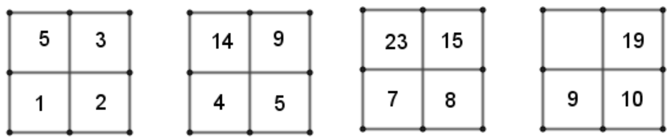
2, 5, 11, 20, 32, 47, 65 . . .   .

Овај задатак је урадило мало ученика. За његово решавање било је неопходно уочити разлике међу бројевима али и разлике међу тим разликама:

```
2    5    11    20    32    47    65
 \  / \  / \   / \   / \   / \   /
  3    6     9    12    15    18
   \  /  \  / \  / \  / \  /
    3     3    3    3    3
```

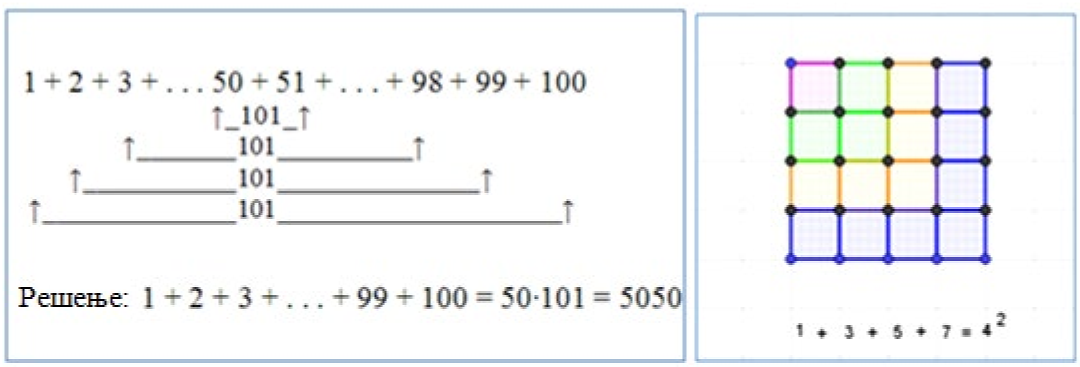
Ни након објашњења наставника нисмо добили већи број тачних одговора. То нам је показало да ученици шестог разреда основне школе нису спремни за уочавање разлика међу разликама између бројева.

4) Примењујући законитост која важи за прве три слагалице бројева попуни празно место у четвртој слагалици:



У овом задатку смо имали највише тачних одговора.

Рад у контролној групи је организован на исти начин при чему је уместо рада са фигуративним бројевима коришћен други наставни садржај. На почетку првог часа ученици контролне групе су упознати са Гаусовим поступком за израчунавање збира првих 100 природних бројева приказаним на Слици 5.22А.



А Б

Слика 5.22: Гаусов и питагорејски поступак израчунавања збира бројева

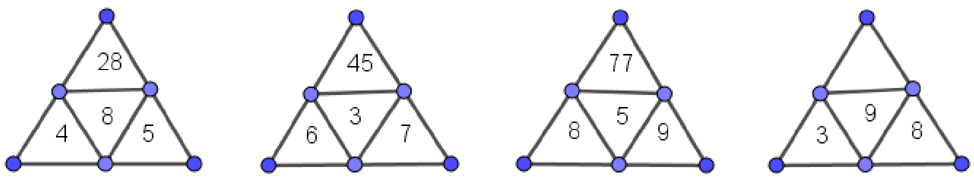
Затим су до краја часа решавани задаци са применом претходно демонстрираног поступка. На другом часу ученици су, на исти начин, упознати са питагорејским поступком за одређивање збира непарних бројева који је конкретизован и објашњен на примеру: 1 + 3 + 5 + 7 (Слика 5.22Б). Затим су решавани задаци са применом приказаног поступка. На трећем часу ученици контролне групе су решавали исте задатке као ученици експерименталне групе.

Након завршетка планираног рада извршили смо тестирање ученика обе групе.

На пост–тесту ученици су решавали следеће задатке:

1. Израчунати збир првих 2000 природних бројева.
2. Написати следећи број у низу бројева: 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, ...

3. Поштујући законитост која важи за прве три слагалице бројева попуни празно место у четвртој слагалици:



Слика 5.23: Слагалица бројева

На пост–тесту обе групе су оствариле напредовање у односу на пре-тест при чему су резултати у експерименталној групи били значајно бољи од резултата у контролној групи. Истраживање је показало да се ученици могу упутити на уочавање законитости међу бројевима и решавање задатака применом уочене законитости. Такође је показало да су ученици шестог разреда основне школе у могућности да раде са фигуративним бројевима и да бављење фигуративним бројевима доприноси развоју визуелно-логичког приступа решавању задатака са бројним низовима и скуповима.

Постигнуто напредовање обе групе остварено након трочасовног практиковања визуелно–логичког приступа при решавању задатака са бројним подацима, јасно показује да су ученици шестог разреда основне школе у могућности да уочавају законитости међу бројевима и примењују их при решавању задатака са бројним низовима. Такође показује да су фигуративни бројеви ефикасан инструмент којим се остварује повећање способности ученика за уочавање законитости међу бројевима.

Комплетни резултати и опис овог истраживања приказани су у нашем раду „*Numbers to development of visual logical approach to solving tasks with numerous strings*“, на Међународној научној конференцији „Савремене перспективе васпитно–образовног рада“, (Mihajlov Carević, Petrović & Denić, 2018) и публиковани у часопису Универзитетска мисао.

По завршетку тестирања, извршили смо анкетирање ученика са циљем сагледавања њиховог доживљаја при раду са фигуративним бројевима и одабраним примерима за демонстрирање уочавања законитости међу бројевима. Резултати анкете су коришћени у планирању даљих истраживања али нису обрађени и приказани у поменутом публикованом раду.

6. ИСТРАЖИВАЊЕ ПОВЕЗАНОСТИ ФИГУРАТИВНИХ БРОЈЕВА СА ДРУГИМ МАТЕМАТИЧКИМ ОБЈЕКТИМА

6.1. Истраживање комбинованих сума природних и полигоналних бројева

Као проблем истраживања у овој дисертацији појављује се и проблем конструисања математичких модела за репрезентацију законитости међу природним и полигоналним бројевима. Проучавање веза између полигоналних и природних бројева као и полигоналних бројева међусобно, има дугу историју. Исказано нотацијом коришћеном у дисертацији, интересантни су следећи резултати:

Никомах из Герасе (1. в.н.е.) је дошао до следећег закључка:

$P_m(n) = P_{m-1}(n) + P_3(n-1)$, $m>3$, $m, n \in N$ (Deza & Deza, 2012).

Теон из Смирне (2.в.н.е.) је показао да је:

$P_3(n) + P_3(n-1) = P_4(n)$, $n \in N$ (Deza & Deza, 2012).

Пјер Ферма (17. век) је тврдио:

„Сваки природан број може бити написан као сума највише три троугаона броја, четири квадратна броја и тако редом“ (Sun, 2009).

Односима природних, троугаоних и квадратних бројева бавили су се и савремени истраживачи (Hajdu, Pintér, Tengely & Varga, 2014; Hirschhorn & Sellers, 1999; Oh & Sun, 2009; Panaitopol, 2005; Pengelley, 2013; Sun, 2007; Toh, 2013). Такође и троугаоно-квадратним бројевима (Braza & Tong, 2001).

Аутор дисертације је истраживала комбиноване суме природних и полигоналних бројева. Постоји много доказаних законитости у овом пољу добијених у протеклом периоду. Мотивисана теоремом Сун-а (Sun, 2007) у којој је доказано да је сваки природан број сума квадрата и два троугаона броја, аутор ове дисертације је тражила везу између произвољног m-угаоног полигоналног броја, квадратног и троугаоних бројева.

Полазни резултати овог истраживања исказани су у следећој теореми:

Теорема 6.1. За сваки природан број n > 1 важи следеће:

(i) $P_4(n) = n + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i$

(ii) $P_5(n) = n + 3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i$

(iii) $P_6(n) = n + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i$

Доказ: За $n \in N$ i $n > 1$

(i) $n + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i = n + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n-1) =$

$= 1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 + n + 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$

$= P_3(n) + P_3(n-1) = P_4(n)$ на основу (1.6).

(ii) $n + 3 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i = n + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n-1) =$

$= 1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 + n + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) =$

$= \frac{n(n+1)}{2} + 2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = P_3(n) + 2 \cdot P_3(n-1) = P_5(n)$ на основу (1.6).

(iii) $n + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i = n + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n-1) =$

$= 1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 + n + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) =$

$= \frac{n(n+1)}{2} + 3 \cdot \frac{(n-1)n}{2} = P_3(n) + 3 \cdot P_3(n-1) = P_6(n)$ на основу (1.6).

Теорема 6.2. За $m, n \in N$, $m \geq 3$, $n > 1$

$P_m(n) = n + (m-2) \sum_{i=1}^{n-1} i$

Доказ: За $m, n \in N$, $m \geq 3$, $n > 1$

$n + (m-2) \sum_{i=1}^{n-1} i = n + (m-2) \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n-1) =$

$= 1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 + n + (m-3) \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) =$

$= \frac{n(n+1)}{2} + (m-3) \cdot \frac{(n-1)n}{2} =$

$= P_3(n) + (m-3) \cdot P_3(n-1) = P_m(n)$ на основу Башеовог доказа.

Теорема 6.3. За $m, n \in N$ и $m \geq 3$

$$P_m(n) = x^2 + P_3(y) + P_3(z) + (m-2)\,P_3(n-1)$$

при чему је за $k \in Z$

$$x = \begin{cases} 2k, & \text{ako } n = 2P_3(m) \\ 2k-1 & \text{ako } n \neq 2P_3(m) \end{cases}$$

У теореми се тврди да је n-ти члан m-угаоног броја збир квадрата броја x, два троугаона броја и израза $(m-2)\,P_3(n-1)$ при чему је број x паран ако је $\frac{n}{2}$ једнак m-том троугаоном броју и непаран у супротном.

Резултат овог истраживања представља још једну комбиновану суму природних и полигоналних бројева и на тај начин даје допринос теорији бројева. Законитост међу фигуративним бројевима доказана у изложеној теореми омогућава генерисање произвољног m-угаоног полигоналног броја применом математичког апарата. Такође и применом рачунара што је са становишта наставе математике и информатике чини додатно интересантном.

Доказ ове теореме као и комплетни резултати овог истраживања изложени су у раду „Polygonal numbers as sums of squares and triangular numbers“ (Mihajlov Carević, Petrović & Denić) који је у процесу рецензије.

6.2. Истраживање разлике између октаедарских и икосаедарских бројева

Истраживања обављена током израде дисертације обухватају и конструисање математичких модела за репрезентацију законитости међу природним и фигуративним бројевима. Бавећи се односима икосаедарских и октаедарских фигуративних бројева, аутор дисертације је дошла до резултата изложених у наставку рада. Сви резултати су конструисани применом разлика првог и другог реда октаедарских фигуративних бројева, аналогно и икосаедарских бројева, које су наведене у Табели 2.1.

Теорема 6.4. За $n \in N \wedge n \geq 2$

$$OK(n+1) = 1 + 5 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(5 + \sum_{k=1}^{i} 4(k+1) \right)$$

Доказ: Израз на десној страни једнакости садржи разлике првог реда међу октаедарским бројевима и разлике међу тим разликама (разлике другог реда).

$$1 + 5 + \sum_{i=1}^{n-1} (5 + \sum_{k=1}^{i} 4(k+1)) = 1 + 5 + (5+8) + (5+8+12) + (5+8+12+16) + (5+8+12+16) +$$

$$+ (5+8+12+16+20+ \ldots + 4n) =$$

$$= 1 + n\cdot 5 + (n-1)\cdot 8 + (n-2)\cdot 12 + (n-3)\cdot 16 + \ldots+(n-(n-1))\cdot 4n =$$

$$= 1 + 5n + 4 \cdot [2(n-1)+3(n-2)+4(n-3)+ \ldots+n(n-(n-1))] =$$

$$= 1 + 5n + 4 \cdot [n (2+3+4+ \ldots +n) -2 - 6 - 12 - \ldots - n(n-1)] =$$

(па на основу (1.1) и (2.2) имамо)

$$= 1 + 5n + 4\cdot[n\cdot(\frac{n(n+1)}{2} - 1) - 2\cdot (1 + 3 + 6 + \ldots+ \frac{n(n-1)}{2})] =$$

$$= 1 + 5n + 4 \cdot \frac{n(n^2+n-2)}{2} - 8 \cdot SP_3(n-1) =$$

$$= 1 + 5n + 2n (n^2 + n -2) - 8 \cdot \frac{(n-1)n (n+1)}{6} =$$

$$= \frac{3 \left(1+5n+2n^3+2n^2-4n\right)-4n(n^2-1)}{3} =$$

$$= \frac{2n^3+6n^2+7n+3}{3} = \frac{\left(2n^2+4n+3\right)(n+1)}{3} =$$

$$= \frac{(n+1)(2(n+1)^2+1)}{3} = OK(n+1)$$ на основу (2.17).

Теорема 6.5. За $n \in N \ \wedge \ n \geq 2$

$$IK(n+1) = 1 + 11 + \sum_{i=1}^{n-1} (11 + \sum_{k=1}^{i} 5 \cdot (5 + (k-1) \cdot 3))$$

Доказ: Слично претходном, у изразу на десној страни једнакости појављују се разлике првог реда и разлике другог реда за икосаедарске бројеве.

$$1 + 11 + \sum_{i=1}^{n-1} (11 + \sum_{k=1}^{i} 5 \cdot (5 + (k-1) \cdot 3)) =$$

$$1 + 11 + (11 + 25) + (11 + 25 + 40) + (11 + 25 + 40 + 55) + \ldots+$$
$$+ (11 + 25 + 40 + 55 + \ldots+ 5\cdot(5 + (n-2) \cdot 3)) =$$

$$1 + 11 + (11+25) + (11+25+25+15) + (11+25+25+15+25+2\cdot 15)+$$

$$+ \ldots +(11+25+25+15+25+2\cdot15+ \ldots + 25+(n-2)\cdot15\ ) =$$

$$1 + n\cdot 11 + 25 \cdot (1+2+3+\ldots + n-1) + 15 \cdot (1+3+6+ \ldots + P_3(n-2)) =$$

(па на основу (1.1) и (2.2) имамо)

$$1 + 11n + 25 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 15 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} =$$

$$\frac{5n^3+10n^2+7n+2}{2} = \frac{(n+1)(5n^2+5n+2)}{2} =$$

$$\frac{(n+1)(5(n+1)^2-5(n+1)+2)}{2} = IK(n+1)$$ на основу (2.19).

Теорема 6.6. За $n \in N \wedge n \geq 2$

$$IK(n+1) - OK(n+1) = 6 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(6 + \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k)\right)$$

Доказ: На основу Теореме 6.4 и Теореме 6.5 имамо следеће:

$IK(n+1) - OK(n+1) =$

$$1 + 11 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(11 + \sum_{k=1}^{i} 5 \cdot (5 + (k-1) \cdot 3)\right) - \left(1 + 5 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(5 + \sum_{k=1}^{i} 4(k+1)\right)\right) =$$

$$6 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(6 + \sum_{k=1}^{i} (5 \cdot (5 + (k-1) \cdot 3) - 4 \cdot (k+1))\right) =$$

$$6 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(6 + \sum_{k=1}^{i} (5 \cdot (5 + 3k - 3) - 4k - 4)\right) =$$

$$6 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(6 + \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k)\right)$$ што је требало доказати.

Последице Теореме 6.6:

Последица 6.1. За $n \in N \wedge n \geq 2$

.

$$IK(n+1) - OK(n+1) = 6n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k))$$

Доказ Последице 6.1: На основу Теореме 6.6 имамо

$$\mathrm{IK}(n+1) - \mathrm{OK}(n+1) = 6 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(6 + \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k)\right) = 6 + (n-1)\cdot 6 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k) =$$

$$= 6n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k)) \quad \text{што је требало доказати.}$$

Последица 6.2. За $n \in N \ \wedge \ n \geq 2$

$$11n^3 + 18n^2 - 29n = 6 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k))$$

Доказ Последице 6.2: На основу (4.3) и (4.5) имамо следеће

$$\mathrm{IK}(n+1) - \mathrm{OK}(n+1) = \frac{(n+1)(5(n+1)^2-5(n+1)+2)}{2} - \frac{(n+1)(2(n+1)^2+1)}{3} =$$

$$= (n+1) \cdot \left(\frac{5n^2+5n+2}{2} - \frac{2n^2+4n+3}{3}\right) =$$

$$= (n+1) \cdot \frac{15n^2+15n+6-4n^2-8n-6}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(11n^2+7n)}{6}$$

Комбинујући овај резултат и резултат добијен у Последици 1, добијамо следеће

$$6\cdot \left(6n + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k)\right) = (n+1)(11n^2 + 7n)$$

$$=> \quad 36n + 6\cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k) = 11n^3 + 18n^2 + 7n$$

$$=> \quad 6\cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{i} (6 + 11k) = 11n^3 + 18n^2 - 29n \quad \text{што је требало доказати.}$$

Добијени резултати су део научног рада „*On the representation of difference between icosahedral and octahedral numbers*“(Mihajlov Carević, Petrović & Denić), који је у процесу рецензије.

6.3. Истраживање генератор функција за фигуративне бројеве

Током израде дисертације обављена су и истраживања генератор функција за фигуративне бројеве.

Дефиниција 6.1: Генератор функција за дати низ бројева (b_n) je funkcija

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n \quad \text{за } |x| < 1.$$

На пример, генератор функција за Фибоначијев низ бројева 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 . . . је

$F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ јер је $\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots$.

Доказ: Нека је (F_n) низ Фибоначијевих бројева, тј. $F_0 = F_1 = 1 \wedge F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за $n \geq 2$.

Означимо са $F(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots$. Можемо видети да је

$$\begin{aligned}
F(x) &= 1 + x + \sum_{n\geq 2} F_n x^n = 1 + x + \sum_{n\geq 2}(F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n\geq 2} F_{n-1} x^n + \sum_{n\geq 2} F_{n-2} x^n = \\
&= 1 + x + (x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \ldots) + (x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + \ldots) \\
&= 1 + x + x(x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots) + x^2(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots) \\
&= 1 + x + x (F(x) - 1) + x^2 F(x) = \\
&= 1 + x + x F(x) - x + x^2 F(x) = \\
&= 1 + F(x) (x + x^2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $F(x) - F(x) (x + x^2) = 1$

$\Rightarrow$ $F(x) (1 - x - x^2) = 1$

$\Rightarrow$ $F(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$.

Замењујући x неком вредношћу из интервала (– 1, 1) на пример x = 0,01 добијамо

$$F(x) = \frac{1}{1-0{,}01-0{,}0001} = 1{,}0102030508\ldots = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots.$$

Такође, издвајајући по две цифре у добијеном децималном броју, добијамо низ Фибоначијевих бројева.

Генератор функције за полигоналне фигуративне бројеве биле су предмет истраживања у претходном периоду (Castillo, 2016; Conway & Guy, 2012; Deza, 2012). Такође и генератор функције за полиедарске фигуративне бројеве (Barvinok, 2006; Kauers & Paule, 2011). Ми смо се бавили одређивањем генератор функција за тетраедарске, хексаедарске, октаедарске, додекаедарске и икосаедарске фигуративне бројеве. Поступак њиховог одређивања базиран је на разликама између чланова низа поменутих бројева, које ће бити означене са Δ_1, разликама првог реда (Δ_2) и разликама другог реда (Δ_3).

Познате су генератор функције за полигоналне фигуративне бројеве (Deza & Deza, 2012):

Троугаони бројеви: $$\frac{x}{(1-x)^3} = x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \ldots, \text{ for } |x| < 1; \tag{6.1}$$

Квадратни бројеви: $$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots, \text{ for } |x| < 1; \tag{6.2}$$

Петоугаони бројеви: $$\frac{x(1+2x)}{(1-x)^3} = x + 5x^2 + 12x^3 + 22x^4 + \ldots, \text{ for } |x| < 1; \tag{6.3}$$

Шестоугаони бројеви: $$\frac{x(1+3x)}{(1-x)^3} = x + 6x^2 + 15x^3 + 28x^4 + \ldots, \text{ for } |x| < 1; \tag{6.4}$$

Полазна тачка за већину генератор функција је следећи геометријски ред:

$$\sum_{n \geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1;$$

Он конвергира за $|x| < 1$ и његова генератор функција је $\frac{1}{1-x}$, тј.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1; \tag{6.5}$$

И репрезентује низ $1, 1, 1 \ldots 1, \ldots.$

Квадрирањем леве и десне стране једнакости добијамо:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots)$$

$$= 1 + (1 + 1)x + (1 + 1 + 1)x^2 + (1 + 1 + 1 + 1)x^3 + \ldots$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$$

И то је генератор функција за низ $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Тако је

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots, \text{ for } |x| < 1. \tag{6.6}$$

Означимо са S1, S2, S3, S4, S5 скупове тетраедарских, хексаедарских, октаедарских, додекаедарских и икосаедарских фигуративних бројева респективно.

Теорема 6.7. Генератор функцијаза тераедарске фигуративне бројеве је

$$f(S_1, x) = \frac{x}{(1-x)^4}, \text{ за } |x| < 1.$$

Доказ: Овом теоремом се тврди да је

$\frac{x}{(1-x)^4} = x + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 + \ldots$, за $|x| < 1$ што ћемо доказати на следећи начин:

Означимо са

$$A(x) = x + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 + \ldots$$

Можемо видети да је

$$A(x) = x\cdot(1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + \ldots)$$

Применом разлика Δ_1 за тетраедарске фигуративне бројеве имамо да је

$$A(x) = x\cdot(1 + x + 3x + 4x^2 + 6x^2 + 10x^3 + 10x^3 + \ldots)$$

$$= x\cdot((1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots) + (x + 4x^2 + 10x^3 + \ldots))$$

$= (x + 3x^2 + 6x^3 + 10x^4 + \ldots) + x\cdot A(x)$ на основу (6.1) добијамо

$$= \frac{x}{(1-x)^3} + x\cdot A(x)$$

Дакле

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^3} + x\cdot A(x)$$

$$\Rightarrow \quad A(x) - x\cdot A(x) = \frac{x}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \quad A(x)\cdot(1 - x) = \frac{x}{(1-x)^3}$$

$\Rightarrow \quad A(x) = \frac{x}{(1-x)^4}$ што је требало доказати.

Узимајући вредност x = 0.01 добијамо

$$A(x) = \frac{0{,}01}{(1-0{,}01)^4} = 0{,}0104102035\ldots$$

У добијеном резултату, издвајањем по две децимале добијамо тетраедарске бројеве:

1, 4, 10, 20, 35 ...

тј. $A(x) = 0{,}01 + 4\cdot 0{,}01^2 + 10\cdot 0{,}01^3 + 20\cdot 0{,}01^4 + \ldots = x + 4x^2 + 10x^3 + 20x^4 + \ldots$

Примедба: За вредност x = 0.01, тетраедарски бројеви већи од 100 не могу бити лако уочени. У циљу боље прегледности треба узети вредност x = 0.001 или још мању. То важи и у наредним примерима.

Теорема 6.8. Генератор функција за хексаедарске фигуративне бројеве је

$$f(S_2, x) = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}, \text{ за } |x| < 1.$$

Доказ: Овом теоремом се тврди да је

$\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} = x + 8x^2 + 27x^3 + 64x^4 + \ldots$, за $|x| < 1$ што ћемо доказати слично претходном:

Означимо са

$$A(x) = x + 8x^2 + 27x^3 + 64x^4 + \ldots$$

Тада је

$$A(x) = x\cdot(1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + \ldots)$$

Применом разлика Δ_1 за хексаедарске фигуративне бројеве имамо да је

$$\begin{aligned}
A(x) &= x\cdot(1 + x + 7x + 8x^2 + 19x^2 + 27x^3 + 37x^3 + \ldots) \\
&= x\cdot((x + 8x^2 + 27x^3 + \ldots) + (1 + 7x + 19x^2 + 37x^3 + \ldots)) \\
&= x\cdot(A(x) + 1 + 7x + (7+12)x^2 + (7 + 12 + 18)x^3 + \ldots) \\
&= x\cdot(A(x) + 1 + 7\cdot(x + x^2 + x^3 + \ldots) + 12\cdot(x^2 + x^3 + \ldots) + 18\cdot(x^3 + x^4 + \ldots) + \ldots) \\
&= x\cdot(A(x) + 1 + 7x\cdot(1 + x + x^2 + \ldots) + 6\cdot 2x^2\cdot(1 + x + x^2 + \ldots) + 6\cdot 3x^3(1 + x + x^2 + \ldots) + \ldots)
\end{aligned}$$

Из једнакости (6.5), добијамо:

$$A(x) = x\cdot(A(x) + 1 + 7x\cdot \frac{1}{1-x} + 6\cdot 2x^2\cdot \frac{1}{1-x} + 6\cdot 3x^3\cdot \frac{1}{1-x} + \ldots)$$

$$= x\cdot A(x) + x\cdot(1 + \frac{7x}{1-x} + \frac{6x}{1-x}\cdot(2x + 3x^2 + 4x^3 + ...))$$

Применом једнакости (6.6), добијамо:

$$A(x) - x\cdot A(x) = x\cdot(1 + \frac{7x}{1-x} + \frac{6x}{1-x}\cdot(\frac{1}{(1-x)^2} - 1))$$

$$A(x)\cdot(1 - x) = x\cdot(\frac{1-x+7x}{1-x} + \frac{6x}{1-x}\cdot\frac{2x-x^2}{(1-x)^2})$$

Сређивањем овог израза добијамо да је

$A(x) = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$ што је требало доказати.

Узимајући вредност x = 0.01 добијамо

$$A(x) = \frac{0{,}01\cdot1{,}0401}{(1-0{,}01)^4} = 0{,}01082764\ ...$$

У добијеном резултату, издвајањем по две децимале добијамо хексаедарске бројеве: 1, 8, 27, 64…

Теорема 6.9. Генератор функција за октаедарске фигуративне бројеве је

$$f(S_3, x) = \frac{x(x+1)^2}{(1-x)^4},\ \text{за } |x| < 1.$$

Доказ: Овом теоремом се тврди да је

$\frac{x(x+1)^2}{(1-x)^4} = x + 6x^2 + 19x^3 + 44x^4 + 85x^5 + ...$, за $|x| < 1$ што ћемо доказати слично претходном: Означимо са

$A(x) = x + 6x^2 + 19x^3 + 44x^4 + 85x^5 + ...$, тада је

$$A(x) = x\cdot(1 + 6x + 19x^2 + 44x^3 + 85x^4 + …)$$

$$= x\cdot(1 + (x + 5x) + (6x^2 + 13x^2) + (19x^3 + 25x^3) + (44x^4 + 41x^4) + …)$$

$$= x\cdot(x + 6x^2 + 19x^3 + 44x^4 + ... + 1 + 5x + 13x^2 + 25x^3 + 41x^4 + ...)$$

$$= x\cdot(A(x) + 1 + 5x + 5x^2 + 8x^2 + 5x^3 + 8x^3 + 12x^3 + 5x^4 + 8x^4 + 12x^4 + 16x^4 + …)$$

$= x\cdot(A(x) + 1 + 5x + 5x^2 + 5x^3 + 5x^4 + \ldots + 8x^2 + 8x^3 + 8x^4 + \ldots + 12x^3 + 12x^4 + \ldots)$

$= x\cdot(A(x) + 1 + 5\cdot(x + x + x^2 + x^3 + \ldots) + 8x\cdot(x + x^2 + x^3 + \ldots) + 12x^2\cdot(x + x^2 + x^3 \ldots) + \ldots)$

$= x\cdot(A(x) + 1 + 5\cdot(\frac{1}{1-x} - 1) + 8x\cdot(\frac{1}{1-x} - 1) + 12x^2\cdot(\frac{1}{1-x} - 1) + \ldots)$

$= x\cdot(A(x) + 1 + \frac{x}{1-x} \cdot (5 + 8x + 12x^2 + \ldots))$

$= x\cdot(A(x) + 1 + \frac{5x}{1-x} + \frac{x}{1-x} \cdot (4\cdot 2x + 4\cdot 3x^2 + 4\cdot 4x^3 \ldots))$

$= x\cdot A(x) + x + \frac{5x^2}{1-x} + \frac{4x^2}{1-x} \cdot (2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots)$

Применом једнакости (6.6), добијамо:

$$A(x) - x\cdot A(x) = x + \frac{5x^2}{1-x} + \frac{4x^2}{1-x} \cdot (\frac{1}{(1-x)^2} - 1)$$

Сређивањем израза добијамо да је

$$A(x) \cdot (1 - x) = \frac{x+2x^2+x^3}{(1-x)^3}$$

$\Rightarrow$ $A(x) = \frac{x(1+x)^2}{(1-x)^4}$ што је требало доказати.

Узимајући вредност x = 0.01 добијамо

$$A(x) = \frac{0{,}01\cdot 1{,}0201}{(1-0{,}01)^4} = 0{,}01061944\ldots$$

Издвајањем по две децимале добијамо октаедарске бројеве: 1, 6, 19, 44 . . . .

Теорема 6.10. Генератор функција за додекаедарске фигуративне бројеве је

$$f(S_4, x) = \frac{x(10x^2+16x+1)}{(1-x)^4}, \text{ за } |x| < 1.$$

Доказ: Теоремом се тврди да је

$$\frac{x(10x^2+16x+1)}{(1-x)^4} = x + 20x^2 + 84x^3 + 220x^4 + 455x^5 + \ldots, \quad \text{за } |x| < 1.$$

Означимо са

$A(x) = x + 20x^2 + 84x^3 + 220x^4 + 455x^5 + \ . \ . \ . \ ,$ тада је

$A(x) = x\cdot(1 + 20x + 84x^2 + 220x^3 + 455x^4 + \ . \ . \ . \ )$

$= x\cdot(1 + x + 19x + 20x^2 + 64x^2 + 84x^3 + 136x^3 + 220x^4 + 235x^4 + \ . \ . \ . \ )$

$= x\cdot(x + 20x^2 + 84x^3 + 220x^4 + \ . \ . \ . + 1 + 19x + 64x^2 + 136x^3 + 235x^4 + \ . \ . \ . \ )$

$= x\cdot(A(x) + 1 + 19x + (19 + 45)x^2 + (19 + 45 + 72)x^3 + (19 + 45 + 72 + 99)x^4 + \ . \ . \ .)$

$= x\cdot(A(x) + 1 + 19x\cdot(1 + x + x^2 + ...) + 45x^2\cdot(1 + x + x^2 + ...) + 72x^3\cdot(1 + x + x^2 + ...) + \ldots)$

$= x\cdot(A(x) + 1 + 19x\cdot \frac{1}{1-x} + 45x^2\cdot \frac{1}{1-x} + 72x^3\cdot \frac{1}{1-x} + \ldots)$

$= x\cdot(A(x) + 1 + \frac{x}{1-x} \cdot (19 + 45x + 72x^2 + 99x^3 + \ . \ . \ . \ )$

$= x\cdot A(x) + x + \frac{x^2}{1-x} \cdot 19 + \frac{x^2}{1-x} \cdot 9 \cdot(5x + 8x^2 + 11x^3 + \ . \ . \ . \ )$

$= x\cdot A(x) + x + \frac{19x^2}{1-x} + \frac{9x^2}{1-x} \cdot(5x + 5x^2 + 3x^2 + 5x^3 + 2\cdot 3x^3 + \ . \ . \ . \ )$

$A(x) - x\cdot A(x) = x + \frac{19x^2}{1-x} + \frac{9x^2}{1-x} \cdot(5x\cdot(1 + x + x^2 + x^3 + \ . \ . \ . \ ) + 3x^2 \cdot(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ . \ . \ . \ )$

Из једнакости (6.5) и (6.6), добијамо:

$A(x)\cdot(1 - x) = x + \frac{19x^2}{1-x} + \frac{9x^2}{1-x} \cdot(5x\cdot \frac{1}{1-x} + 3x^2 \cdot \frac{1}{(1-x)^2})$ и након сређивања израза добијамо

$$A(x)\cdot(1 - x) = \frac{10x^3+16x^2+x}{(1-x)^3}$$

$\Rightarrow$ $A(x) = \frac{x(10x^2+16x+1)}{(1-x)^4}$ што је требало доказати.

Узимајући вредност $x = 0.001$ добијамо

$$A(x) = \frac{0{,}001\cdot 1{,}01601}{(1-0{,}001)^4} = 0{,}0010200842. \ . \ .$$

Издвајањем по три децимале добијамо додекаедарске бројеве: 1, 20, 84 … .

Теорема 6.11. Генератор функција за икосаедарске фигуративне бројеве је

$$f(S_5, x) = \frac{x(6x^2+8x+1)}{(1-x)^4}, \text{ за } |x| < 1.$$

Доказ: Овом теоремом се тврди да је

$$\frac{x(6x^2+8x+1)}{(1-x)^4} = x + 12x^2 + 48x^3 + 124x^4 + 255x^5 + \ldots, \quad \text{за } |x| < 1.$$

Означимо са

$$\begin{aligned}
A(x) &= x + 12x^2 + 48x^3 + 124x^4 + 255x^5 + \ldots \\
&= x\cdot(1 + 12x + 48x^2 + 124x^3 + 255x^4 + \ldots) \\
&= x\cdot(1 + x + 11x + 12x^2 + 36x^2 + 48x^3 + 76x^3 + 124x^4 + 131x^4 + \ldots) \\
&= x\cdot(x + 12x^2 + 48x^3 + 124x^4 + \ldots + 1 + 11x + 36x^2 + 76x^3 + 131x^4 + \ldots) \\
&= x\cdot(A(x) + 1 + 11x + (11 + 25)x^2 + (11 + 25 + 40)x^3 + (11 + 25 + 40 + 55)x^4 + \ldots) \\
&= x\cdot(A(x) + 1 + 11x\cdot(1 + x + x^2 + \ldots) + 25x^2\cdot(1 + x + x^2 + \ldots) + 40x^3\cdot(1 + x + x^2 + \ldots) + \ldots) \\
&= x\cdot(A(x) + 1 + 11x\cdot \frac{1}{1-x} + 25x^2\cdot \frac{1}{1-x} + 40x^3\cdot \frac{1}{1-x} + \ldots) \\
&= x\cdot A(x) + x + \frac{1}{1-x}\cdot(11x^2 + 25x^3 + 40x^4 + 55x^5 + \ldots) \\
&= x\cdot A(x) + x + \frac{1}{1-x}\cdot (11x^2 + 25x^3 + 25x^4 + 15x^4 + 25x^5 + 2\cdot 15x^5 + \ldots) \\
&= x\cdot A(x) + x + \frac{1}{1-x}\cdot (11x^2 + 25x^3 + 25x^4 + 25x^5 + \ldots + 15x^4 + 2\cdot 15x^5 + \ldots) \\
&= x\cdot A(x) + x + \frac{1}{1-x}\cdot (11x^2 + 25x^3\cdot(1 + x + x^2 + \ldots) + 15x^4\cdot(1 + 2x + 3x^2 + \ldots))
\end{aligned}$$

$$A(x) - x\cdot A(x) = x + \frac{1}{1-x}\cdot (11x^2 + 25x^3\cdot \frac{1}{1-x} + 15x^4\cdot \frac{1}{(1-x)^2})$$

$$A(x)\cdot(1 - x) = \frac{x(6x^2+8x+1)}{(1-x)^3}$$

$\Rightarrow$ $A(x) = \dfrac{x(6x^2+8x+1)}{(1-x)^4}$ што је требало доказати.

Узимајући вредност x = 0.001 добијамо

$$A(x) = \frac{0{,}001 \cdot 1{,}008006}{(1-0{,}001)^4} = 0{,}0010120481\ldots$$

Издвајајући по три децимале добијамо икосаедарске бројеве: 1, 12, 48 … .

Добијени резултати су део научног рада „Generating Function for the Figurative Numbers of Regular Polyhedron"(Mihajlov Carević, Petrović & Denić), публикованом у часопису Mathematical Problems in Engineering, https://doi.org/10.1155/2020/6238934.

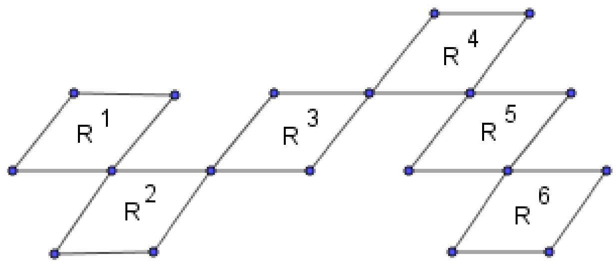
6.4. Истраживање доминацијског скупа за икосаедарску хексагоналну мрежу

Фигуративни бројеви као математички модели су повезани и са теоријом графова који се користе у многобројним научним областима. Хемијске структуре материјала се прикладно представљају графовима где чворови одговарају атомима а гране (линије) графа одговарају хемијским везама. Аналогно се представљају електричне мреже, комуникационе мреже и друге појаве у науци.

Аутор ове дисертације се бавила истраживањем ромбоидалног кактус ланца и икосаедарске хексагоналне мреже на којој је базиран операционални глобални нумерички модел за временску прогнозу (GME) који је описан у трећем одељку дисертације.

За граф G означили смо скуп чворова (врхова) са V(G) и скуп грана (линија) са E(G). Граф кактуса је повезан граф у коме ни једна линија није смештена у више од једног циклуса. Ромбоидални кактус G је граф кактуса састављен од циклуса ромбоидалног облика који су повезани у чворовима. Чвор који је заједнички за два или више ромбоида назива се пресечени чвор. Ако сваки ромбоид у G има највише два пресечена чвора и сваки пресечени чвор је подељен између тачно два ромбоида, граф G се назива ромбоидални кактус ланац. Број ромбоида у G се назива дужином ланца и означава са h.

Ако су $R^1, R^2, \ldots, R^h$ узастопни ромбоиди у ромбоидалном кактус ланцу (Слика 6.1), онда означавамо ромбоидални кактус ланац са G_h и пишемо $G_h = R^1 R^2 \ldots R^h$.



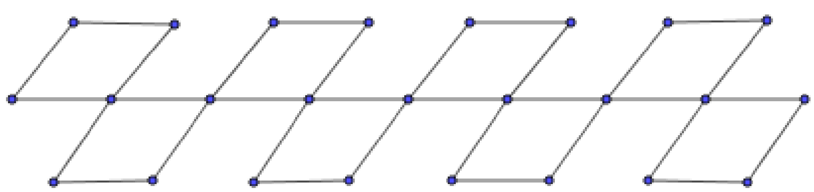
Слика 6.1: Ромбоидални кактус ланац дужине 6

Сваки ромбоидални кактус ланац G_h, $h \geq 2$, има тачно два ромбоида са само једним пресеченим чвором. То су први и последњи ромбоид, R^1 и R^h. Сви остали ромбоиди у ланцу имају два пресечена чвора и називају се унутрашњи ромбоиди.

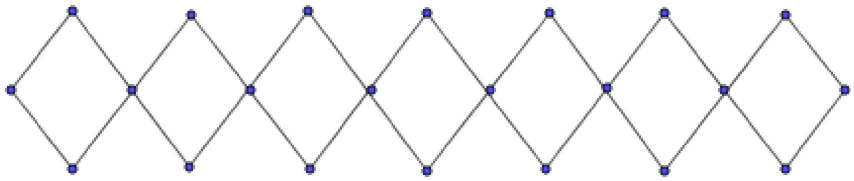
Унутрашњи ромбоид у G_h се назива орто-ромбоид ако су његови пресечени чворови суседни. Удаљеност његових пресечених чворова је $d = 1$.

Унутрашњи ромбоид у G_h се назива мета-ромбоид ако је удаљеност његових пресечених чворова $d = 2$.

За ромбоидални кактус ланац кажемо да је униформан ако су сви његови унутрашњи ромбоиди исте врсте. Ланац G_h се назива орто-ланац ако су сви његови унутрашњи ромбоиди орто-ромбоиди. Аналогно, G_h се назива мета-ланац ако су сви његови унутрашњи ромбоиди мета-ромбоиди. Орто-ланац дужине h означавамо са O_h, а мета-ланац са M_h. Слика 6.2 приказује орто-ланац O_8 а Слика 6.3 мета-ланац M_7.



Слика 6.2: Орто-ланац дужине 8



Слика 6.3: Мета-ланац дужине 7

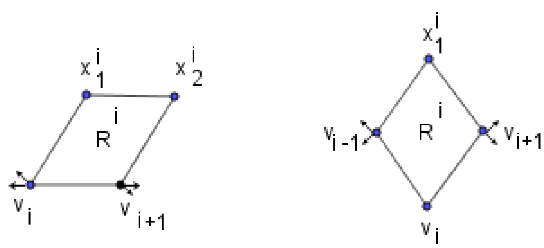
Подскуп D графа V (G) се назива к-доминацијски скуп ако за сваки чвор у ван скупа D, постоји најмање један чвор x у скупу D, такав да је растојање између њих $d(x, y) \leq k$.

Број елемената најмањег k-доминацијског скупа се назива k-доминацијски број и означава са γ_k. За $k = 1$, 1-доминацијски скуп се назива доминацијски скуп и 1-доминацијски број се такође назива доминацијски број и означава са γ.

У циљу одређивања доминацијског скупа и доминацијског броја униформних кактус ланаца O_h и M_h, $h \geq 2$, означили смо чворове у ланцу на следећи начин:

У орто-ланцу пресечени чворови су суседни и означавамо их са v_i и v_{i+1} , преостала два чвора означавамо са x_1^i и x_2^i (Слика 6.4A).

У мета ланцу, пресечене чворове означавамо са v_{i-1} и $v_{i+1},$ преостала два чвора са v_i и x_1^i (Слика 6.4B).



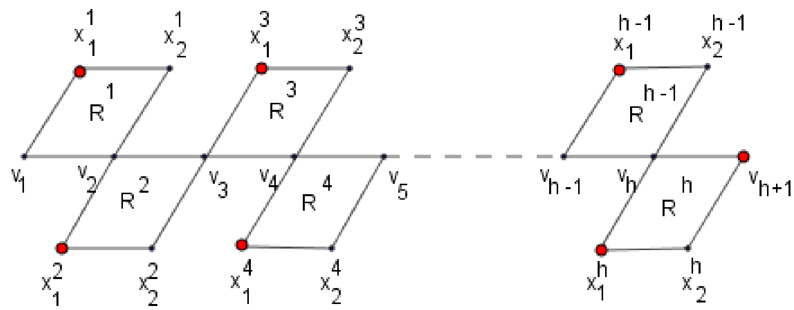
A B

Слика 6.4:Означавање чворова у униформном орто и мета ланцу

Теорема 6.12. За униформни ромбоидални кактус орто ланац $\gamma(O_h) = h + 1$.

Доказ: Посматрамо ромбоидални орто ланац $G_h = R^1 R^2 \ldots R^h$ и скуп

$D_{Oh} = \{ x_1^i , i = 1, h\} \cup \{ v_{h+1} \}$. Скуп D_{Oh} је приказан на Слици 6.5.

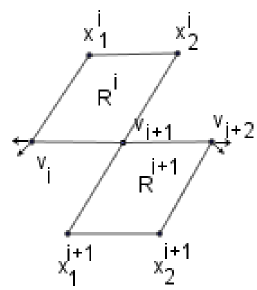


Слика 6.5: Минимални доминацијски скуп за O_h

Докажимо да је D_{O_h} доминацијски скуп минималне кардиналности.

1° Ако је h паран број, поделићемо орто ланац G_h на подланце $R^i R^{i+1}$, i = 1, …, h–1.

(Слика 6.6)



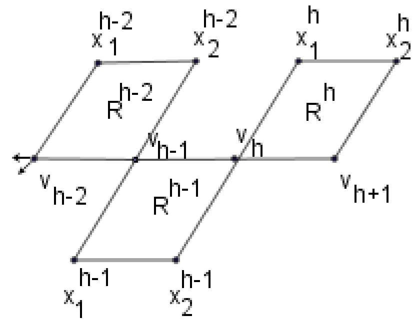
Слика 6.6: Подланац орто ланца

Сваки циклус R^i је дужине 4, следи да у сваком циклусу R^i мора постојати један чвор који доминира над суседна два чвора. Чвор x_1^i доминира над v_i и x_2^i. Чвор x_1^{i+1} доминитра над v_{i+1} и x_2^{i+1}. У подланцу $R^i R^{i+1}$ постоји само један чвор v_{i+2}, над којим не доминирају чворови x_1^i и x_1^{i+1}. Ако додамо подланац $R^{i+2} R^{i+3}$, чвор x_1^{i+2} ће доминирати над чворовима v_{i+2} и x_2^{i+2}, чвор x_1^{i+3} ће доминирати над x_2^{i+3} и v_{i+3} а без доминације ће остати чвор v_{i+4}. Идуктивно закључујемо да дуж целог кактус ланца, чворови x_1^i и x_1^{i+1}, за i = 1, h–1, доминирају над осталим чворовима осим над чвотом v_{h+1}. Следи да је минимални доминацијски скуп за O_h скуп

$D_{O_h} = \{ x_1^i , i = 1, h\} \cup \{ v_{h+1} \}$ а његова кардиналност је h + 1.

Дакле $\gamma (O_h) = h + 1$.

2° Ако је h непаран, имаћемо један појединачни циклус R^h на крају ланца (Слика 6.7).



Слика 6.7: Појединачни циклус R^h на крају ланца

Као што је доказано у претходном одељку, чворови x_1^{h-2}, x_1^{h-1} и x_1^h доминирају над циклусима R^{h-2}, R^{h-1}, R^h осим над чвором v_{h+1}. Следи да је минимални доминацијски скуп за O_h скуп

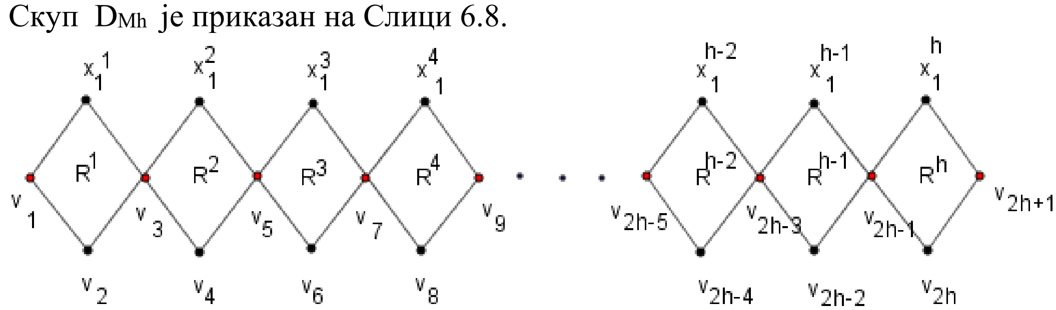
$$D_{O_h} = \{ x_1^i, i = 1, h\} \cup \{ v_{h+1} \} \text{ као у случају h паран број.}$$

Теорема 6.13. За униформни ромбоидални кактус мета ланац $\gamma(O_h) = h + 1$.

Доказ: Посматрамо ромбоидални мета ланац $G_h = R^1 R^2 \ldots R^h$ и скуп

$$D_{M_h} = \{ v_{2i-1}, i = 1, h+1\}.$$

Скуп D_{M_h} је приказан на Слици 6.8.



Слика 6.8: Минимални доминацијски скуп за M_h.

Слично претходном, у сваком циклусу R^i најмање један чвор је доминацијски и он доминира над суседна два чвора али не и над четвртим, не суседним, чвором. Због тога, тај чвор (који је заједнички за два циклуса) мора бити доминантни чвор у следећем циклусу. Индуктивно закључујемо да сваки циклус R^i у мета ланцу $G = R^1 R^2 \ldots R^h$ садржи један доминантни чвор али у последњем R^h не постоји доминација за чвор v_{2h+1}. Због тога, у циклусу R^h мора постојати још један доминацијски чвор.

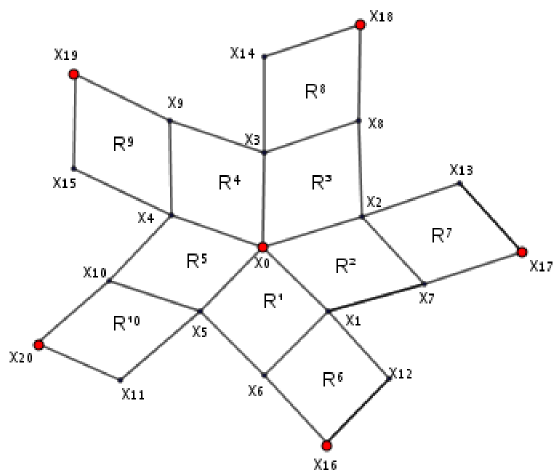
Следи да је минимални доминацијски скуп за M_h скуп $D_{Mh} = \{ v_{2i-1} , i = 1, h+1\}$ а његова кардиналност је $h + 1$. Дакле, $\gamma (M_h) = h + 1$.

У овом случају је небитно да ли мета-ланац садржи паран или непаран број циклуса (ромбоида), због тога не разматрамо два посебна случаја као у претходном доказу.

Теорема 6.14. За икосаедарску хексагоналну мрежу GME доминацијски број $\gamma = 6$.

Доказ: Посматрамо икосаедарску хексагоналну мрежу и скуп

$D = \{ x_0, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}\}$ приказан на Слици 6.9.



Слика 6.9: Минимални доминацијски скуп за икосаедарску хексагоналну мрежу

Базирано на претходним резултатима, имамо чвор x_0 који доминира над чворовима x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5. Чвор x_{16} доминира над чворовима x_6 и x_{12}, чвор x_{17} доминира над чворовима x_7 и x_{13}, чвор x_{18} доминира над чворовима x_8 и x_{14} , чвор x_{19} доминира над чворовима x_9 и x_{15} , чвор x_{20} доминира над чворовима x_{10} и x_{11}. Следи да је скуп $D = \{ x_0, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}\}$ минимални доминацијски скуп за икосаедарску хексагоналну мрежу GME па закључујемо да је $\gamma = 6$.

Добијени резултати су део научног рада „Dominating sets on the rhomboidal cactus chains and the icosahedral network “(Mihajlov Carević, Petrović & Denić), приказаном на научном симпозијуму „International simposium INFOTEH – JAHORINA 2020“.

.

ЗАКЉУЧАК

Динамичан развој науке, технике и технологије условили су промене у образовним захтевима и наставним активностима на часу математике. У савременом образовном систему се захтева да ученик буде активан у процесу учења на часу. Резултати истраживања указују на неопходност адекватног планирања наставних активности које ће омогућити оспособљавање ученика да увиђају проблем, да га повезују са сличним проблемом чије им је решење познато, да апстрахују одређене математичке појмове и да развијају математичко мишљење.

Значајну функцију у савременом образовању данас имају мотивација, комуникација између ученика и наставника као и интеракција. У процесу учења ученик креира мишљење о новим сазнањима и информацијама повезујући их са већ постојећим знањем. Конструисање знања је индивидуалан процес али га ученици реализују уз интеракцију са другим људима. У том контексту, рад ученика у сарадничким групама, размена мишљења, дискусија и објашњења су од кључне важности. Такође је рад наставника на часу од изузетне важности. Наставник припрема наставу са циљем да ученицима олакша учење. Подстиче их да постављају питања, да дискутују. Захтева од ученика да анализирају постављени задатак, да га повежу са задатком чије им је решење познато.

У процесу учења и решевања задатака парадигме заузимају значајно место. Оне доприносе бржем и лакшем решавању проблема пребацивањем на изоморфан проблем чије је решење познато. Публиковани научни радови поменути и описани у дисертацији потврђују ове тврдње. Фигуративни бројеви са својом сликовном презентацијом и законитостима које важе за њих, ученицима су веома интересантни и лако разумљиви а могу бити веома добро средство за презентацију парадигми и развијање конструктивног мишљења. Конструктивизам унапређује интелектуални развој ученика, замена је за меморисање у учењу и одлична је алтернатива традиционалним методама у образовању.

Циљ истраживања у дисертацији је да покаже оправданост увођења фигуративних бројева и савремених технологија у наставу математике основне и средње школе.

Емпиријска запажања током вишегодишњег професионалног бављења наставом математике показала су нам да је визуелно-логички приступ у решавању математичких проблема недовољно заступљен у настави математике. Резултате добијене на пре-тесту у истраживањима описаним у дисертацији смо оценили као доказ нашој првој и другој хипотези (постављеним у описаним радовима) да ће врло мали број ученика првог разреда средње школе као и седмог и шестог разреда основне школе бити у могућности да решава задатке у којима је неопходно уочавање законитости међу бројевима.

Рад са фигуративним бројевима, описан у истраживачким радовима у дисертацији, помогао је ученицима у развијању визуелно-логичког приступа у решавању задатака са бројевним низовима и скуповима. Статистички резултати теста показали су да рад са фигуративним бројевима доприноси развијању способности ученика у уочавању законитости међу бројевима и успешнијем решавању задатака са низовима и скуповима бројева, чиме је доказана главна хипотеза постављена у овој дисертацији.

У нашем образовном систему настава математике се већином реализује применом табле и креде уз објашњења наставника. Такав приступ треба мењати јер савремено технолошко доба захтева интеграцију савремених технолошких достигнућа у наставне процесе. Коришћење рачунара и програмског пакета Геогебра у истраживањима која смо обавили са ученицима шестог и седмог разреда основне школе као и првог разреда средње школе дали су добре резултате. Реализација наставе путем рачунара и Геогебре, описана у дисертацији, ученицима је била интересантна и вишеструко корисна, допринела је ефективнијем учењу и упутила ученике да ефикасно користе савремене технологије у настави. Тиме је показано да коришћење рачунара и математичког софтверског пакета доприноси ефикаснијем учењу.

На основу резултата истраживања са ученицима шестог и седмог разреда основне школе као и првог разреда средње школе, описаних у дисертацији, можемо дати одговоре на истраживачке задатке постављене у дисертацији:

1) Остваривањем увида у наученост ученика да уочавају законитости међу бројевима једног низа или скупа, увидели смо да ученици нису у довољној мери навикнути да уочавају законитости међу бројевима и да применом уочених законитости решавају задате проблеме.

2) Ученици који су упознати са фигуративним бројевима и законитостима које важе за њих су у знатно већој мери у могућности да самостално уочавају законитости међу бројевима и да их примењују у решавању разних задатака са бројним низовима и скуповима.
3) Ученици су у могућности да сврсисходно користе рачунаре и програмске пакете у настави.

Такође се на основу свега изложеног у овом раду може закључити да је рад са фигуративним бројевима вишеструко користан. Представљање бројева помоћу тачкица а групе бројева помоћу геометријских фигура и полиедара, доприносе лакоћи формирања појма броја. Такође доприносе уочавању особина тих бројева, разлика међу њима као и законитости које за њих важе. На пример, чињеница да је збир два непарна броја увек паран број је визуелно уочљива као и многе друге особине бројева. Континуирано бављење фигуративним бројевима током школовања развијало би и неговало способност уочавања законитости међу бројевима и примену уочене законитости при решавању разних задатака. Фигуративни бројеви су повезани са низовима бројева, биномним обрасцем, Паскаловим троуглом, сумама и производима бројних података. Стога се могу комбиновати са овим математичким појмовима у настави математике. Такође, законитости исказане у теоремама доказаним у претходним поглављима, јасно указују на могућност формирања математичких модела за презентовање разних проблема у области теорије бројева.

Фигуративни бројеви су античким математичарима били основни елементи у формирању теорије бројева. Кроз протекле векове фигуративни број је еволуирао преко скупа природних и рационалних бројева, затим ирационалних и целих до комплексних бројева. Овај пут развоја идеје броја требало би да прати и савремена настава математике. Због тога се препоручује увођење фигуративних бројева у почетну наставу математике, њихово допуњавање и повезивање са другим математичким областима током каснијег математичког образовања.

Истраживања повезаности фигуративних бројева са другим математичким областима и објектима показала су да поред једноставне дефиниције они поседују велико богатство разних својстава, од једноставних међусобних односа до веома комплексних односа који укључују теме из области више математике. У овој дисертацији приказани су резултати истраживања међусобних веза између природних и полигоналних бројева, октаедарских и икосаедарских бројева, икосаедарске мреже са теоријом графова. Такође су конструисане генератор функције као математички модели за генерисање тетраедарских, хексаедарских, октаедарских, додекаедарских и икосаедарских бројева.

Теорија фигуративних бројева не припада централној области математике али математичке чињенице имају дубоку повезаност са фигуративним бројевима. Многобројне добро познате теореме могу бити формулисане помоћу ових бројева. Фигуративни бројеви су повезани са другим класама специјалних позитивних целих бројева као што су биномни коефицијенти, Питагорине тројке бројева, савршени бројеви, Мерсенови и Фибоначијеви бројеви. Фигуративни бројеви се користе и за решавање одређених Диофантских једначина, за приказивање природних бројева помоћу сума полиедарских бројева и у многим другим проблематикама. Њихово присуство у савременој науци је вишеструко и неоспорно као и њихова повезаност са многобројним математичким областима.

Овим истраживањем остварено је настојање аутора да се пажња у научним и образовним круговима усмери на визуелно-логички приступ анализирању и решавању математичких задатака са бројевним низовима и скуповима. Такође је за очекивање буђење интересовања домаће математичке јавности за фигуративне бројеве који су веома богати разним својствима и пружају велики потенцијал за допринос математици, рачунарским наукама и науци у целини.

Будућа истраживања треба да се крећу у правцу:

1) Сагледавања могућности ученика петог разреда основне школе да се баве визуелно-логичким приступом решавању задатака са низовима и скуповима бројева;
2) Сагледавања могућности ученика петог разреда основне школе да се упознају са троугаоним и квадратним фигуративним бројевима и њиховим законитостима;
3) Сагледавања могућности ученика петог разреда основне школе да коришћењем законитости које важе за троугаоне и квадратне бројеве уочавају законитости у датим скуповима и низовима бројева и решавају задатке применом уочене законитости;
4) Истраживања нових веза између фигуративних и природних бројева;
5) Истраживања повезаности фигуративних бројева са другим математичким областима.

ЛИТЕРАТУРА

Abu Bakar, K., Ayub, M., Fauzi, A., & Ahmad Tarmizi, R., (2010), *Utilization of computing tehnology in learning transformation.* International Journal of Education and Information Technologes, 4(2), 91-99.

Alaca, A., Alaca, Ş., & Williams, K. S. (2015). *Advances in the Theory of Numbers*. In Proceedings of the Thirteenth Conference of the Canadian Number Theory Association.

Allegra M., Chifari A., Ottaviano S.,(2001), *ICT to train students towards creative thinking,* Educational Tehnology & Society, 4(2), 48-53.

Apra, E., Baletto, F., Ferrando, R., & Fortunelli, A. (2004). Amorphization mechanism of icosahedral metal nanoclusters. *Physical review letters*, *93*(6), 065502.

Arcavi, A. (2003), *The role of visual representations in the learning of mathematics.* Educational studies in mathematics, 52(3), 215-241.

Aristotel, (1971), *Metafizika*, Kultura, Beograd.

Baker, J. E. (2016). Figurate Numbers. *Spreadsheets in Education (eJSiE)*, *9*(1), 2.

Barnett, J. H. (2017). *Generating Pythagorean Triples: The Methods of Pythagoras and of Plato via Gnomons*.

Barnett, J., Bezhanishvili, G., Leung, H., Lodder, J., Pengelley, D., Pivkina, I., Ranjan, D. and Zack, M.,(2013), *Primary historical sources in the classroom:Discrete mathematics and computer science. AMC*, *10*, p.12.

Barvinok, A. (2006). The complexity of generating functions for integer points in polyhedra and beyond. In *International Congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 763-787).

Bauersfeld, H. (2012). The structuring of the structures: Development and function of mathematizing as a social practice. In *Constructivism in education* (pp. 155-176). Routledge.

Beery, J. L. (2009). Formulating figurate numbers. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, *24*(2), 78-91.

Bennett M., (1997), *Effective measures of irrationality for certain algebraic numbers*, J.Austral. Math. Soc. (Series A) 62, 329-344.

Boaler, J., Chen, L., Williams, C., & Cordero, M. (2016), *Seeing as understanding: The importance of visual mathematics for our brain and learnin,* Journal of Applied & Computational Mathematics, 5(5), 1-17.

Bozkurt G., Ruthven K., (2016), *Clasroom-based professional expertise. A mathematics teacher´s practice with tehnology*, Educ. Stud. Math., DOI 10. 1007/s 10649-016-973-5.

Božić, M., (2002), *Pregled istorije i filozofije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredsrva, Beograd.

Borisavljević, M., (1998), *Zlatni presek i drugi eseji*, Srpska književna zadruga, Beograd.

Boyer, C. B.,(1968) *A History of Mathematics*, Wiley, New York, London, Sydney.

Braza, P.A., & Tong, J. (2001). 85.25 Square-triangular numbers, revisited. *The Mathematical Gazette*, 270-273.

Breje, L., (1976), *Vizantijska civilizacija*, Nolit, Beograd.

Brindza B., Pinter A., Turjanyi S., (1998), *On equal values of pyramidal and polygonal numbers*, Indag. Mathem., N.S.,9 (2), 183-185.

Caglayan, G., (2014), Visualizing number sequences: Secondary preservice mathematics teachers' constructions of figurate numbers using magnetic color cubes. *The Journal of Mathematical Behavior*, *35*, 110-128.

Castillo, R. C. (2016). A survey on triangular number, factorial and some associated numbers. *Indian Journal of Science and Technology*, *9*(41), 1-7.

Chai, C., Lin, W.-Y., So, H.-J., Cheah, H.M. (2011). *Advancing collaborative learning with ICT: Conception, cases and design.* Singapore: Ministry of Education.

Conway J. H. & Guy, R., (2012), *The book of numbers*. Springer Science & Business Media.

Curtis McKnight, Andy Magid, Teri J. Murphy, Michelynn McKnight (2000), Mathematics education research: A Guide for the Research Mathematician, American Mathematical Society, Providence.

da Silva Figueira-Sampaio, A., dos Santos, E. E. F., & Carrijo, G. A. (2009). *A constructivist computational tool to assist in learning primary school mathematical aquations*. Computer & Education, *53*(2), 484-492.

Dejić, M., (2003), *Zasnivanje teorije prirodnih brojeva i metodičke implikacije*, Nastava i vaspitanje, 56-70, Beograd.

Dejić, M., (2002), *Analiza I objašnjenje sadržaja nastavnog programa matematike u razrednoj nastavi,* Nastava i vaspitanje, 166-183, Beograd.

Dejić M. & Egerić M., (2006), *Metodika nastave matematike*, Učiteljski fakultet, Jagodina.

Dejić, M. & Mihajlović, A. (2015), *Uloga u znaĉaj istorije matematike u nastavi*, u: Godišnjak Učiteljskog fakulteta u Vranju, knjiga VI. Vranje. 67–82.

Deza E. & Deza M.M., (2012), *Figurate Numbers*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ.

Dickson, L. E., (2013), *History of the theory of numbers: Diophantine Analysis* (Vol. 2). Courier Corporation.

Dickson L. E., (1928), *Extended Polygonal Numbers*, Bull. Amer. Math. Soc., 34 (2).

Diophantus, (1974), *Arithmetics and the Book of Polygonal Numbers*, Moscow: Nauka.

Dogru & Kalender, (2007), *Applying the subject 'cell' through consructivist approach during science lessons and the teacher's view.* Journal of Environmental & Science Education, 2(1), 3-13.

Dooly, M., (2008). *Constructing knowledge together. In M. Dooly (Ed.),Telecollaborative language learning*. Aguidebook to moderating intercultural collaboration online (pp.21-24). Bern: Peter Lang.

Doruk, B. K., Aktumen, M., Aytekin, C. (2013). *Pre-service elementary mathematics teachers' opinions about using GeoGebra in mathematics education with reference to ‘teaching practices’*. Teaching Mathematics and Its Applications, 32(3), 140-157.

Dudek, J., Gózdz, A., & Schunck, N. (2003). Atomic nuclei with tetrahedral and octahedral symmetries. *arXiv preprint nucl-th/0303001*.

Duit, R. (2012). *The Constructionist View: A Fashionable and Fruitful Paradigm for Science Education Research and Practice*. In *Constructivism in education* (pp. 289-304). Routledge.

Duval, R. (1999*), Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematics Thinking.* Basic Issues for Learning.

Egerić, M., (2006), *Metodika razvijanja početnih matematičkih pojmova,* Učiteljski fakultet, Jagodina.

Elkind, D., (1974), *Children and adolescents interpretative essays on Jean Piaget,* Oxford University Press, New Yuork.

Ernest, P. (2012). The one and the many. In *Constructivism in education* (pp. 477-504). Routledge

Euklid, (1949), *ΣΤΟΙΧΕΙΑ*, Naučna knjiga, Beograd.

Federico, P. J., (1982), *Decartes on Polyhedra: A study of the De Solidorum Elementis,* Springer-Verlag, New Yuork Inc.

Finkelstein, R., (1972), *On Triangular Numbers Which are Sums of Consecutive Squares,* Journal of Number Theory 4, 455-462.

Ganesh, P., & Widom, M. (2006). Signature of nearly icosahedral structures in liquid and supercooled liquid copper. *Physical Review B*, *74*(13), 134205.

Garcia, C. P., (2013), *A constructivist computational platform to support mathematics education in elementary school.* Computers & Education, 66, 25-39.

Gika, M. (1987), *Filozofija i mistika broja,* Književna zajednica Novog Sada.

Gilbert, R. J., Beales, L., Blond, D., Simon, M. N., Lin, B. Y., Chisari, F. V. & Rowlands, D. J. (2005). Hepatitis B small surface antigen particles are octahedral. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *102*(41), 14783-14788.

Gow, J., (2004), *A Short History of Greek Mathematics*, Dover Publications Inc. Mineola, New York.

Gomez, E. A., Wu, D. & Paserini, K., (2010), *Computer-supported team-based learning. The impact of motivation, enjoyment and team contributions on lerning outcomes*, Computers&Education 378-390.

Guy, R. K. (1994). Every number is expressible as the sum of how many polygonal numbers?. *The American Mathematical Monthly*, *101*(2), 169-172.

Hajdy L., PinterA., Tengely S. & Varga N., (2014), *Equal values of figurate numbers,* Journal of Number Theory 137,130-141.

Heath, T. L., (1981), *A History of Greek Mathematics*, Dover, New York.

Heath, T. L., (2004), *Aristarchus of Samos, The Ancient Copernicus*, Dover, New York.

Herz-Fischler, (1998), *A Mathematical History of the Golden Number*, Dover Publications inc. Mineola, New York.

Hitt, F. (1994). Visualization, anchorage, availability and natural image: polygonal numbers in computer environments. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *25*(3), 447-455.

Hogben, L., (1970), *Sve o matematici,* Mladost, Zagreb.

Hogben, L., (1955), *Figurate series and factorial notation*, Acta genet. 5, 115-133.

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004), *Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra*. In Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching Conference.

Hohenwarter, J., Hohenwarter, M., & Lavicza, Z. (2009*), Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: The case of GeoGebra.* Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 28(2), 135-146.

Ikodinović, N., Dimitrijević, S., (2014). Matematika 5 – udžbenik za 5. razred osnovne škole, *Klet*, Beograd.

Ikodinović, N., Dimitrijević, S., (2015). Matematika 6 – udžbenik za 6. razred osnovne škole, *Klet*, Beograd.

Ikodinović, N., Dimitrijević, S., (2009). Matematika 7 – udžbenik za 7. razred osnovne škole, *Klet*, Beograd.

Ikodinović, N., Dimitrijević, S., (2010). Matematika 8 – udžbenik za 8. razred osnovne škole, *Klet*, Beograd.

Ivančević, I., Tahirović, S.,(2013). Matematika 1, *Novi Logos*, Beograd.

Ivančević, I., Tahirović, S.,(2015). Matematika 2, *Novi Logos*, Beograd.

Ivančević, I., Tahirović, S.,(2015). Matematika 3, *Novi Logos*, Beograd.

Iran-Nejad, A., (1995). *Constructivism as substitute for memorization in learning: meaning is created by learner*, Education, 116, 16-32.

Istomina, N., B., (1998), *Методика преподованиЯ математики вначальных классах, Москва.*

Jamblih, (1998), *Vita Pithagorica*, Deubner, L., Klein, U., (eds), K G Saur Verlag Gmbh & Co.

Ješić, S., Ignjatović, M. & Mišić D.,(2008). *Matematika za 5. razred osnovne škole*, Gerundijum, Beograd.

Ješić, S., Ignjatović, M. & Mišić D.,(2010). *Matematika za 6. razred osnovne škole,* Gerundijum, Beograd.

Ješić, S., Mišić, D. & Babačev N.,(2009). *Matematika za 7. razred osnovne škole*, Gerundijum, Beograd.

Ješić, S., Mišić, D. & Babačev N.,(2010). *Matematika za 8. razred osnovne škole*, Gerundijum, Beograd.

Jones, M. G., & Brader-Araje, L., (2002), *The impact of constructivism on education: Language, discourse, and meaning*. American Communication Journal, *5*(3), 1-10.

Jovanović Lazić, M.,Drndarević, D.,(2008). *Matematika 1,* BIGZ, Beograd.

Jovanović Lazić, M.,Drndarević, D.,(2008). *Matematika 2*, BIGZ*,* Beograd.

Jovanović Lazić, M.,Drndarević, D.,(2008). *Matematika 3,* BIGZ, Beograd.

Kagan, S.,(1994). *Cooperative learning*. San Clemente, CA: Resources for Teachers, Inc.

Katona, G. (1940). *Organizing and memorizing: studies in the psychology of learning and teaching.* Oxford, England: Columbia Univ. Press.

Kauers, M., & Paule, P. (2011). *The concrete tetrahedron: symbolic sums, recurrence equations, generating functions, asymptotic estimates*. Springer Science & Business Media.

Kempen, L., & Biehler, R. (2015), *Pre-service teachers' perceptions of generic proofs in elementary number theory,* In CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 135-141).

Kim C. Y., (2002), *Teachers in digital knowledge-based society: new roles and vision,* Asia Pacific Education Review, 3(2), 144-148.

King, B., (2007). *Max Wertheimer & Gestalt theory*, Somerset, Transaction Publishers.

Komenski, J. A., (1967), *Velika didaktika*, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd.

Komenski, J. A., (1932), *Svet u slikama*, Izdavačka knjižnica Gece Kona, Beograd.

Kovács, T., & Rábai, Z. (2018). Equal values of pyramidal numbers. *Indagationes Mathematicae, 29*(5), 1157-1166.

Laal, M. & Ghodsi, S. M.(2012). *Benefits of collaborative learning*. Procedia-Social and Behavioral Science, 31, 486-490.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabrigeometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 283– 317.

Lavicza Z. & Varga Z. P., (2010), *Integrating GeoGebra into IWB-equipped teaching environments:preliminary results,* Technology, Pedagogy and Education, Vol.19, No.2, 245-252.

Lekić, Đ., (1991), *Metodika razredne nastave,* Prosvetni pregled, Beograd.

Leyendekkers, J. V., & Shannon, A. G. (2016). Figurate numbers in the modular ring Z4. *Integers*, *4*, 1.

Lučić, Z., (2009), *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd.

Majewski, D., Liermann, D., Prohl, P., Ritter, B., Buchhold, M., Hanisch, T. & Baumgardner, J. (2002). The operational global icosahedral–hexagonal gridpoint model GME: description and high-resolution tests. *Monthly Weather Review*, *130*(2), 319-338.

Maksimović, M., (2008). *Matematika 3,* BIGZ, Beograd.

Maněnová, M., Skutil, M., & Zikl, P. A. V. E. L. (2010*), Taking advantage of ITC by teachers at the primary school.* In Proc. of the 6th Educational technologies (EDUTE'10): WSEAS/IASME international conference. Athens: WSEAS (pp. 48-52).

Marjanović, M., (1996), *Metodika matematike*, Učiteljski fakultet, Beograd.

Marjanović, M., Zeljić, M., Kaps, M. & Simović, Lj., (2004), *Matematika za drugi razred osnovne škole,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.

Marjanović, M., Popović, B., Zeljić, M. & Kaps, M., (2005), *Matematika za treći razred osnovne škole,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.

Marjanović, M., Popović, B., Zeljić, M. & Mandić, A., (2006), *Matematika za četvrti razred osnovne škole,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.

Mazurek, K., Dudek, J., Góźdź, A., Curien, D., Kmiecik, M., & Maj, A. (2009). NEW NUCLEAR STABILITY ISLANDS OF OCTAHEDRAL AND TETRAHEDRAL SHAPES. *Acta Physica Polonica B*, *40*(3).

Mc Knight, C., Magid, A., Murphy T. J. & McKnight, M., (2000), *Mathematics Education Research,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Mc Phail, G., (2015), *The fault lines of recontextualisation: the limits of constructivism in education.* British Educational Research Journal.

Meena, K., Vidhyalakshmi, S., Geetha, B., Vijayasankar, A., & Gopalan, M. A. (2008*). Relations between special polygonal numbers generated through the solutions of Pythagorean equation*. IJISM, 5(2), 15-18.

Mihajlov Carević, M. & Denić N., (2017), *GeoGebra to help in the understanding and memorizing mathematical formulas,* Deseta međunarodna konferencija „Nauka i visoko obrazovanje u funkciji održivog razvoja-SED 2017“, Užice, ISBN 978-86-83573-90-5, str. 2-13 do 2-19.

Mihajlov-Carević, M., Kopanja,L. & Denić, N., (2017), *Figurative numbers as a tool for presentation paradigms and development constructive opinions*, A collection of papers from the National Conference with international participation, Čačak: ITOP (pp. 217-224).

Mihajlov Carević, M., Kopanja, L. & Denić, N., (2018), *GeoGebra as a tool for understanding and learning of mathematical quantities in Cartesian Cartesian coordinate system,* The first international conference on education MICE 2017, "Promjena stvarnosti kroz obrazovanje", Mostar, Eduka, ISSN: 2303-7342, str. 221-226.

Mihajlov Carević, M., Petrović M. & Denić N., (2018), *Numbers to development of visual logical approach to solving tasks with numerous strings*, Međunarodna naučna konferencija „Savremene perspektive vaspitno-obrazovnog rada", Internacionalni univerzitet u Novom Pazaru, Univerzitetska misao – časopis za nauku, kulturu i umjetnost, Novi Pazar, (17), 72-85.

Mihajlov Carević, M., Petrović M. & Denić N., (2019), *Figurative numbers contribution in perceiving the legality in numerous strings tasks and long-term memory of numerous data,* EURASIA J. Math., Sci Tech. Ed 2019;15(4):em1692, https://doi.org/10.29333/ejmste/103387.

Mihajlov Carević, M., Petrović, M. & Denić, N., (2020), *Generating Function for the Figurative Numbers of Regular Polyhedron*, Mathematical Problems in Engineering, 2020; https://doi.org/10.1155/2020/6238934.

Mihajlov Carević, M., Petrović, M. & Denić, N., (2020), *Dominating sets on the rhomboidal cactus chains and the icosahedral network,* naučni simpozijum „International simposium INFOTEH – JAHORINA 2020".

Mihajlov Carević, M., Petrović, M. & Denić, N., (2020), *Modern teaching technologies and developing constructive thinking*, naučna konferencija „Education and higher education in disruptive times" – EMAN 2020, Ljubljana.

Mihajlov, M., (2012), *Deset veličanstvenih u svetu matematike*, Naša priča plus, ISBN 978-86-87601-12-3, Beograd.

Milovanović, M., Takači, Đ., & Milajić, A. (2011). *Multimedia approach in teaching mathematics–example of lesson about the definite integral application for determining an area.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42(2), 175-187.

Miočinović, LJ., (2002), *Pijažeova teorija intelektualnog razvoja*, Institut za pedagoška istraživanja, Beograd .

Muktibodh, A. S., & Vyawahare, A. W. (2005). Figurate Systems. *Bull. Marathwada Mathematical Soc*, *2*, 12-20.

Nedović, S. V., (2004), *Matematičko-istorijski mozaik*, Arhimedes, Beograd.

Nicomachus of Geraza, (1926), *Introduction in Arithmetic*, translated by Martin Luther D'Ooge, Macmillan.

Oh, B.K. & Sun, Z.W., (2009), *Mixed sums of squares and triangular numbers (III)*, Journal of Number Theory 129, 964-969.

Ono, K., Robins, S. & Wahl, P., (1995), *On the representation of integers as sums of triangular numbers,* Aequationes Mathematicae 50, 73-94.

Panaitopol, L., (2005), *On the representation of natural numbers as sums of squares*, Amer.Math. Monthly, 112, 168–171.

Panić, S., Petrović, M., Mihajlov Carević M., (2018), *Initial improvement of the hybrid accelerated gradient descent process, Bulletin of the Australian Mathematical Society,* https://doi.org/10.1017/S0004972718000552, DOI: 10.1007/s11075-017-0460-4.

Pape, S. J., Bell, C. V. & Yetkin, I. E. (2003). Developing mathematical thinking and self-regulated learning: A teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *53*(3), 179-202.

Peng, J., & Zhang, Y., (2019), *Heron triangles with figurate number sides.* Acta Mathematica Hungarica, 1–11.

Pengelley, D. (2013). *Figurate numbers and sums of numerical powers: Fermat, Pascal, Bernoulli.* Convergence, Mathematical Association of America, *http://www. maa. org/press/periodicals/convergence,* DOI, 10.

Pestaloci, J., (1946), *Kako Gertruda uči svoju decu*, Prosveta, Beograd.

Peterson, L. G., (2004), *Matematika, metodičeskie rekomendacii,* Juventa, Moskva.

Petrović, M., Kontrec, N., (2017). *Possibilities for applying team teaching system in order to improve the efficiency of math teaching*, A collection of papers from the National Conference with international participation, Leposavić: Innovation in education-digitalization, innovation models and programs.

Pijaže, Ž., (1977), *Psihologija inteligencije,* Nolit, Beograd.

Pijaže, Ž., (1978), *Kako deca obrazuju matematičke pojmove,* Nastava i vaspitanje, Beograd.

Platon, (1981). *Timaj*, NIRO Mladost, Beograd.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (No. 246). Princeton university press.

Polya, G., (1981), *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*.

Radišić, Đ., (2015), *About the golden ratio spiral and the Fibonacci sequence.* Kultura, (148), 67-74.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM*, *40*(1), 65-82.

Ruthven, K. (2009), *Towards a naturalistic conceptualisation of technology integration in classroom practice: The example of school mathematics.* Education and Didactique, 3(1), 131–159.

Ruthven, K., Hennessy, S. & Deaney, R. (2008), *Constructions of dynamic geometry: A study of the interpreta tive flexibility of educational software in classroom practice*. Computers and Education, 51(1), 297–331.

Saha, R. A., Ayub, A. F. M., & Tarmizi, R. A. (2010), *The effects of GeoGebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning*. Procedia-Social and Behavioral Sciences, 8, 686-693.

Saldin, D. K., Poon, H. C., Schwander, P., Uddin, M., & Schmidt, M. (2011). Reconstructing an icosahedral virus from single-particle diffraction experiments. *Optics express*, *19*(18), 17318-17335.

Saxe, G. B. (2015). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding*. Psychology Press.

Scheiter, K., Gerjets, P., & Schuh, J. (2010). The acquisition of problem-solving skills in mathematics: How animations can aid understanding of structural problem features and solution procedures. *Instructional Science*, *38*(5), 487-502.

Schcolnik, M., Kol, S. & Abarbanel J., (2016). *Constructivism in theory and in practise.* In English Teaching Forum (Vol.44, No.4, pp.12-20).

Sierpinski, W. (2014). *A selection of problems in the theory of numbers: popular lectures in mathematics*. Elsevier.

Soklaski, R., Nussinov, Z., Markow, Z., Kelton, F. & Yang, L.(2013), *Connectivity of icosahedral network and a dramatically growing static length scale in Cu-Zr binary metallic glasses.* Physical Review B, 87(18), 184203.

Stanković, N.,(2008). *Milutin Borisavljević and His Scientific Aesthetics of Architecture.* Serbian Studies: Journal of the North American Society for Serbian Studies, 22(2), 133-147.

Stojanović, V., (2008). *Matematika5 – udžbenik za 5. razred osnovne škole*, Matematiskop, Beograd.

Stojanović, V., (2010). *Matematika6 – udžbenik za 6. razred osnovne škole*, Matematiskop, Beograd.

Stojanović, V., (2009). *Matematika7 – udžbenik za 7. razred osnovne škole*, Matematiskop, Beograd.

Stojanović, V., (2010). *Matematika8 – udžbenik za 8. razred osnovne škole*, Matematiskop, Beograd.

Stillwell, J., (1996), *Elements of Algebra – Geometry, Numbers, Equations*, Springer.

Stipanić, E., (1967), *U svetu brojeva i figura*, Zavod za izdavanje udbenika, Beograd.

Strojk, D., (1991), *Kratak pregled istorije matematike*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd.

Sun, Z.W., (2007), *Mixed sums of squares and triangular numbers*, Acta Arith. 127, 103–113.

Sun, Z.W., (2009), *On sums of primes and triangular numbers,* Journal of Combinatorics and Number Theory 1, no.1, 65-76, http://arxiv.org/abs/0803.3737.

Tabach M., (2012), *A mathematcs teacher´s practice in a tehnological environment: A case studyanalysis using two complementary theories*, Tehnology, Knowledge and Learning, 16(3), 247-265.

Takači, Đ., & Budinski, N. (2011). Learning and Teaching Mathematics through Real Life Models. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *18*(1).

Tahirović, S., (2015). Matematika 4. *Novi Logos*, Beograd.

Toh P. C., (2013), *On representations by figurate numbers: A uniform approach to the conjectures of Melham,* International Journal of Number Theory, Vol.9, No.4, 1055-1071.

Valtonen, T., Havu-Nuutinen, S., Dillon, P., Kontkanen, S., Vesisenaho, M., Pontinen, S. (2014). Challenges with social software for collaboration: two case studies from teacher training. *International Journal of Media, Technology & Lifelong Learning*, 10(1).

Vamvakoussi X. & Vosniadou S.,(2004), *Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach*. Learning and Instruction, 14(5), 453-467.

Van der Waerden, B. L.,(1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer.

Van Garderen, D. & Montague M., (2003). *Visual-spatial representation, mathematical problem solving and students of varying abilities,*Learning Disabilities Research & Practice, 18(4), 246-254.

Vesić, D.,(2014), *Golden ratio and Fibonacci sequence in music: Characteristics of Bartók's creative approach*. Zbornik radova Akademije umetnosti, Beograd, (2), 198-209.

Viamonte, A. J. (2010), *The computer in the teaching of mathematics. In roceeding of advanced educational technologies*. 6th WSEAS/IASME international conference on educational technology (EDUTE'10) (pp. 24-29).

Vilotijević, M., *Didaktika 1, 2 i 3*, (2001), Naučna knjiga, Beograd.

Vitruvije, (2009), *O arhitekturi*, Zavod za udžbenike, Beograd.

Von Glasersfeld, E. (2012). A constructivist approach to teaching. In *Constructivism in education* (pp. 21-34). Routledge.

Vučinić, D. (2018). *Uloga nastavnika i uspeh učenika u nastavi matematike* (Doctoral dissertation, Univerzitet u Beogradu-Filozofski fakultet).

Walny, J., Carpendale, S., Riche, N. H., Venolia, G., & Fawcett, P. (2011*). Visual thinking in action: Visualizations as used on whiteboards*. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 17(12), 2508-2517.

Wang, Y., Teitel, S., & Dellago, C. (2005). Melting of icosahedral gold nanoclusters from molecular dynamics simulations. *The Journal of chemical physics*, *122*(21), 214722.

Wang, M., Wu, B., Kinshuk, Chen, N. S. & Spector, J. M.,(2013), *Connecting problem-solving and knowledge-construction processes in a visualization-based learning environment*, Computers & Education, 68, 293-306.

Wittmann, E. C. (2001). The alpha and omega of teacher education: Organizing mathematical activities. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 539-552). Springer, Dordrecht.

Wood, T., Cobb, P., & Yackel, E. (2012). Reflections on learning and teaching mathematics in elementary school. In *Constructivism in education* (pp. 419-440). Routledge.

Wu, Z.W., Li, M. Z., Wang, W.H. & Liu, K. X. (2013). *Correlation between structural relaxation And connectivity of icosahedral clusters in CuZr metallic glass-forming liquids.* Physical Review B, 88(5), 054202.

Yeung, K. & Leung, H., (2000), *New ideas teaching the Multiplication Table in Primary Mathematics Education*, Hong Kong Institute of Education.

Yilmaz, K. (2008). Constructivism: Its theoretical underpinnings, variations, and implications for classroom instruction. *Educational Horizons*, *86*(3), 161-172.

Zakaria, E., & Iksan, Z. (2007). Promoting Cooperative Learning in Science and Mathematics Education: A Malaysian Perspective. *Online Submission*, *3*(1), 35-39.Eurasia Journal of Mathematics, Science and Education

Zandi, R., Reguera, D., Bruinsma, R.F., Gelbart, W.M. & Rudnick, J. (2004), *Origin of icosahdral symmetry in viruses.* Proceedings of the National Academy of Science, 101(44), 15556-15560.

Биографија аутора

Мирослава Михајлов Царевић је рођена 04. 06. 1958. године у Београду. Након основне школе завршила је Математичку гимназију „Вељко Влаховић“ у Београду, затим 1983. године Математички факултет у Београду, смер за математику, информатику и рачунарство. Стручни испит за професора математике положила је 1986. године. На Математичком факултету у Београду уписала је специјалистичке студије школске 1999/2000. године на наставном смеру а завршила 2001. године са просеком 9,00 и одбранила специјалистички рад под називом „Еуклид и природни бројеви“. Магистарске студије на истом факултету и наставном смеру завршила је 2007. године са просечном оценом 9,17 и одбранила магистарску тезу „Број код античких Грка“ стекавши академско звање магистра наставе математике.

Радила је у „Четвртој гимназији“ у Београду од школске 1983/84 до 2007. године, затим као сарадник у настави на Вишој пословној школи у Београду. Од 2010. до 2014. године била је на месту директора основне школе „Стеван Сремац“ у Београду. Затим ради као сарадник у настави на Високој школи за пословну економију и предузетништво у Београду. Од 2016. године до сада ради као асистент за математику и статистику на Алфа БК Универзитету.

Аутор је до сада објавила следеће радове који су из области теме дисертације:

1. M.Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić: *Generating Function for the Figurative Numbers of Regular Polyhedron*, Mathematical Problems in Engineering, 2020; https://doi.org/10.1155/2020/6238934. (M23)
2. M.Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić: *Figurative numbers contribution in perceiving the legality in numerous strings tasks and long-term memory of numerous data,* EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2019; 15(4): em1692, DOI: https: //doi.org/10.29333/ejmste/103387. (M53)
3. M. Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić: *Dominating sets on the rhomboidal cactus chains and the icosahedral network,* naučni simpozijum „International simposium INFOTEH – JAHORINA 2020“. (M33)

4. M. Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić: *Modern teaching technologies and developing constructive thinking*, naučna konferencija „Education and higher education in disruptive times" – EMAN 2020, Ljubljana. (M33)
5. M. Mihajlov Carević, N. Denić: *GeoGebra to help in the understanding and memorizing mathematical formulas,* Deseta međunarodna konferencija „Nauka i visoko obrazovanje u funkciji održivog razvoja-SED 2017", Užice, Zbornik radova ISBN 978-86-83573-90-5, str. 2-13 do 2-19, 2017. (M33)
6. M. Mihajlov Carević, L. Kopanja, N. Denić: *Figurativni brojevi kao sredstvo za prezentaciju paradigmi i razvijanje konstruktivnog mišljenja,* Nacionalna konferencija sa međunarodnim učešćem, Čačak, Zbornik radova ITOP17, ISBN 978-86-7776-211-7, str. 217-224, 2017. (M63)
7. M.Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić: *Numbers to development of visual logical approach to solving tasks with numerous strings*, Međunarodna naučna konferencija „Savremene perspektive vaspitno-obrazovnog rada", Internacionalni univerzitet u Novom Pazaru, Univerzitetska misao – časopis za nauku, kulturu i umjetnost, Novi Pazar, (17), str. 72-85. (M53)

Радови у процесу рецензије:

1. M.Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić, S. Rešić: *„Multiple advantages of figurate numbers establishment in maths curriculum".*
2. M.Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić: *„Polygonal numbers as sums of squares and triangular numbers".*
3. M.Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić: „*On the representation of difference between icosahedral and octahedral numbers".*
4. M.Mihajlov Carević, M. Илић, M. Petrović, N. Denić: „*Computing support for testing equal values of the figurative numbers in the Pascal triangle"*.
5. M. Mihajlov Carević, M. Petrović, N. Denić, A. Mitrović: „*Computing Support in Statistical Evaluation of Mathematics Teaching Effectiveness: Development of Students' Constructive Thinking".*

Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Потписани мр Мирослава Михајлов Царевић

Број уписа 2016/6901

Изјављујем да је докторска дисертација под насловом

Фигуративни бројеви као математички модел за репрезентацију законитости међу природним бројевима и развијање конструктивног мишљења

- Резултат сопственог истраживачког рада;
- Да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- Да су резултати коректно наведени;
- Да нисам кршила ауторска права и користила интелектуалну својину других лица.

У Београду _______________

Потпис докторанта

____

Прилог 2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА

Потписани мр Мирослава Михајлов Царевић

Број уписа 2016/6901

Студијски програм Факултет за математику и рачунарске науке

Наслов рада Фигуративни бројеви као математички модел за репрезентацију законитости међу природним бројевима и развијање конструктивног мишљења

Ментор ван. професор др Милена Петровић

Изјављујем

Да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предала за објављивање у репозиторијуму на сајту Алфа БК Универзитета.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање научног звања доктора наука као што су име и презиме, година и место рођења, подаци о стеченим стручним и академским звањима, датум одбране рада и други подаци у функцији транспарентности поступка стицања научног звања.

Ови лични подаци могу се објавити у публикацијама Алфа БК Универзитета и доставити Министарству просвете, науке и технолошког развоја, као и бити доступни сагласно Закону о слободном приступу информацијама од јавног значаја.

У Београду ______________

Потпис докторанта

____

Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Алфа БК Универзитет да у Дигитални репозиторијум Универзитета унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Фигуративни бројеви као математички модел за репрезентацију законитости међу природним бројевима и развијање конструктивног мишљења

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предала сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета, достављену репозиторијуму Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучила.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY – NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY – NC – ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY – NC – SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY – ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY – SA)

(Молим да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве.)

У Београду ______________

Потпис докторанта

____

1. **Ауторство**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.