

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКУ

Мр Милош Рацковић

**ФОРМИРАЊЕ МАТЕМАТИЧКИХ
МОДЕЛА СЛОЖЕНИХ
РОБОТСКИХ МЕХАНИЗАМА У
СИМБОЛИЧКОМ ОБЛИКУ**

- ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА -

Нови Сад, 1996.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ИНСТИТУТ ЗА МАТЕМАТИКУ

мр Милош Рацковић

**ФОРМИРАЊЕ МАТЕМАТИЧКИХ
МОДЕЛА СЛОЖЕНИХ
РОБОТСКИХ МЕХАНИЗАМА У
СИМБОЛИЧКОМ ОБЛИКУ**

- ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА -

Нови Сад, 1996.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

РБР

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације: *Монографска документација*

ТД

Тип записа: *Текстуални штампани материјал*

ТЗ

Врста рада: *Докторска дисертација*

ВР

Аутор: *мр Милош Рацковић*

АУ

Ментор: *др Душан Сурла, проф.*

МН

Наслов рада: *Формирање математичких модела сложених
роботских механизма у симболичком облику*

НР

Језик публикације: *српски (ћирилица)*

ЈП

Језик извода: *српски / енглески*
ЈИ

Земља публиковања: *СР Југославија*
ЗП

Уже географско подручје: *Војводина*
УГП

Година: *1996*
ГО

Издавач: *Ауторски репринт*
ИЗ

Место и адреса:
МА

*Нови Сад, Природно-математички факултет, Институт за
математику, Трг Доситеја Обрадовића 4*

Физички опис рада: *(5/171/0/19/13/0/2)*
ФО

Научна област: *Рачунарске науке*
НО

Научна дисциплина: *Вештачка интелигенција*
НД

Предметна одредница / кључне речи:
ПО

Роботика, Символично моделирање, Рачунска сложеност.

УДК:

Чува се:

ЧУ

Библиотека Института за математику, Природно-математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 4, Нови Сад

Важна напомена: нема

ВН

Извод:

ИЗ

Тема овог рада је формирање математичких модела сложених роботских механизма у симболичком облику. Под сложеним роботским механизмима се подразумевају активни просторни механизми састављени од затворених и отворених кинематичких ланаца. Њутн-Ојлерова метода за извођење модела динамике робота у затвореној форми која је развијена за просте отворене кинематичке ланце, у овом раду је проширена и на сложене активне просторне механизме. Приликом имплементације алгоритма за формирање математичког модела је коришћен систем за управљање базама података. На овај начин се комплетан модел роботског механизма меморише у бази података. Навигацијом кроз базу података се формирају аналитички изрази и/или срачунавају нумеричке вредности за одговарајуће величине модела. Редундантне математичке операције које постоје у моделу се елиминишу ажурирањем базе података. Комплетан поступак формирања математичког модела и смањивања рачунске сложености формираног модела је примењен на две конкретне роботске конфигурације. Прва је стандардна зглобна конфигурација са шест степени слободе, а друга антропоморфна локомоциона конфигурација са четрнаест степени слободе.

Датум прихватања теме од стране Наставно-научног већа:

22.02.1996

ДП

Датум одбране:

ДО

Чланови комисије:

КО

Председник: *др Ратко Тошић, редовни професор, Природно-математички факултет, Нови Сад*

Члан: *др Миомир Вужобратовић, академик, редовни професор, Институт "Михајло Пупин", Београд*

Члан: *др Драгош Цветковић, академик, редовни професор, Електро-технички факултет, Београд*

Члан: *др Душан Сурла, редовни професор, Природно-математички факултет, Нови Сад*

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF NATURAL SCIENCES & MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: *Monograph documentation*

DT

Type of the record: *Textual printed material*

TR

Contents code: *Ph.D. thesis*

CC

Author: *M.Sc. Miloš Racković*

AU

Menthor: *Ph.D. Dušan Surla, prof.*

MN

Title: *Generation of the mathematical models of complex robotic mechanisms in the symbolic form*

TI

Language of the text: *Serbian (Cyrillic)*

LT

Language of abstract: *English*

LA

Country of publication: *Yugoslavia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: *1996*

PY

Publisher: *Author's reprint*

PU

Publ. place:

PP

*Novi Sad, Faculty of Natural Sciences & Mathematics, Institute of
Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4*

Physical description: *(5/171/0/19/13/0/2)*

PD

Scientific field: *Computer science*

SF

Scientific discipline: *Artificial intelligence*

SD

Subject / key words:

SKW

Robotics, Symbolic modelling, Computational complexity.

UC:

Holding data:

HD

*Library of Institute of Mathematics, Faculty of Natural Sciences
& Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad*

Note: none

N

Abstract:

AB

The subject of the present work is the generation of mathematical models of complex robotic mechanisms in symbolic form. Under complex robotic mechanisms are understood the active spatial mechanisms composed of the closed and open kinematic chains. The Newton-Euler method for forming the closed form dynamic model of robot, which has been developed for the simple kinematic chains is extended here on complex active spatial mechanisms. For the implementation of the algorithm for generation of mathematical model the database control system is used. In this way a complete model of the robotic mechanism is stored in the database. By navigation through the database the analytical expressions can be formed and/or numerical values for the desired model quantities can be calculated. The elimination of the redundant mathematical operations is achieved by updating the database. The complete procedure of forming the mathematical model and reducing the computational complexity of the generated model is applied on the two concrete robotic configuration. One of them is the standard revolute-joint configuration with six degrees of freedom, and the other one is antropomorphic locomotion configuration with fourteen degrees of freedom.

Accepted by Scientific Board on: 22.02.1996.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: *Prof. Ratko Tošić, Ph. D., Faculty of Natural Sciences & Mathematics, Novi Sad*

Member: *Academic, Prof. Miomir Vukobratović, Ph. D., Institute "Mihajlo Pupin", Belgrade*

Member: *Prof. Dragoš Cvetković, Ph. D., Electro-Technical Faculty, Belgrade*

Menthor: *Prof. Dušan Surla, Ph. D., Faculty of Natural Sciences & Mathematics, Novi Sad*

Садржај

Предговор	vii
1 Алгоритми за генерисање математичких модела динамике активних просторних механизма	1
1.1 Поступци за извођење математичких модела динамике роботских механизма	2
1.1.1 Моделирање засновано на Лагранжевим једначинама	2
1.1.2 Моделирање засновано на Њутн-Ојлеровим једначинама	3
1.1.3 Моделирање засновано на Апеловим једначинама	4
1.2 Преглед метода за аутоматско генерисање математичких модела робота	5
1.2.1 Нумеричке методе за формирање математичких модела роботских механизма	6
1.2.2 Символичке методе за формирање математичких модела роботских механизма	8
1.2.2.1 Системи за аутоматско формирање модела засновани на рачунарским алгебарским системима опште намене	9
1.2.2.2 Системи за аутоматско формирање модела засновани на специфичним симболичким манипулационим стратегијама	10

1.2.2.3	Софтверски пакети за симболички компјутерски инжењеринг у механици.....	12
1.2.2.4	Ефикасност модела добијених симболичким методама	13
1.3	Моделирање простих отворених кинематичких ланаца помоћу Њутн-Ојлерове методе	13
1.3.1	Основне дефиниције	14
1.3.2	Основна Њутн-Ојлерова метода за моделирање роботских механизма	17
1.3.2.1	Одређивање иницијалне позиције	17
1.3.2.2	Позиција механизма	18
1.3.2.3	Кинематика механизма	19
1.3.2.4	Динамика механизма	21
1.3.3	Модел работа у затвореној форми	23
1.3.4	Алгоритам за формирање модела динамике простог отвореног кинематичког ланца	24
1.4	Формирање модела сложених отворених кинематичких ланаца у затвореној форми	27
1.4.1	Модел сложеног кинематичког ланца у затвореној форми	28
1.4.2	Алгоритам за формирање модела сложеног отвореног кинематичког ланца	30
1.5	Формирање модела активних просторних механизма састављених од затворених и отворених кинематичких ланаца	34
1.5.1	Затворени кинематички ланац	35
1.5.2	Модел сложеног активног просторног механизма у затвореној форми	37
1.5.3	Алгоритам за формирање модела динамике сложеног активног просторног механизма	37
2	Имплементација алгоритама за генерисање математичких модела динамике роботских механизма	45

2.1	Модел базе података	46
2.2	Имплементација модела базе података	50
2.3	Меморисање комплетног модела роботског механизма у бази података	53
2.4	Алгоритми за срачунавање нумеричких вредности и/или аналитичких израза роботских величина ...	55
2.4.1	Алгоритам за елиминисање редундантних операција типа множења и сабирања са неутралним елементом	56
2.4.2	Алгоритам за формирање аналитичких израза роботских величина	59
2.4.3	Алгоритам за израчунавање нумеричких вредности роботских величина	61
2.5	Пример	63
2.5.1	Роботска конфигурација	63
2.5.2	Нумеричка израчунавања	65
2.5.3	Формирање аналитичких израза	67
Прилог 2.1	73
	Шема базе података	73
	Опис функција	75
3	Смањивање рачунске сложености модела роботског механизма	85
3.1	Тригонометријски идентитети	85
3.2	Идентични изрази	88
3.3	Формирање графа израчунавања модела	90
3.3.1	Вредности експонената у аналитичким изразима роботских величина	91
3.3.2	Алгоритам извлачења монома	92
3.3.3	Растављање израза на производе	96

3.3.3.1	Структурне матрице	97
3.3.3.2	Представљање структурне матрице у форми производа	99
3.3.3.3	Алгоритам за растављање израза	105
3.4	Смањивање рачунске сложености над деловима модела	108
3.5	Пример	109
3.5.1	Комплетни аналитички изрази	110
3.5.2	Тригонометријски идентитети	112
3.5.3	Извлачење монома	116
3.5.4	Растављање израза на производе	116
3.5.5	Смањивање рачунске сложености по деловима модела	118
3.5.5.1	Смањивање рачунске сложености одабраног подграфа	118
3.5.5.2	Смањивање рачунске сложености новоформираног графа израчунавања	118
3.6	Табеларни приказ добијених резултата	121
Прилог 3.1	125
Модел 3.1	126
4	Пример сложеног активног просторног механизма	135
4.1	Антропоморфни локомоциони роботски механизми	135
4.2	Антропоморфна локомоциона конфигурација	136
4.3	Формирање математичког модела	140
4.4	Смањивање рачунске сложености модела	142
4.4.1	Смањивање рачунске сложености одабраног подграфа	142
4.4.2	Смањивање рачунске сложености новоформираног графа	143

4.5	Формирање математичког модела и смањивање рачунске сложености по појединим нивовима ”+” зглобова	147
4.5.1	Први кинематички ланац	148
4.5.2	Други кинематички ланац	150
4.5.3	Трећи кинематички ланац	152
4.5.4	Табеларни приказ резултата	156
5	Закључак	159
	Литература	165

1.1. Introduction 1

1.2. The problem 2

1.3. The solution 3

1.4. The algorithm 4

1.5. The implementation 5

1.6. The results 6

1.7. The conclusion 7

1.8. The references 8

1.9. The appendix 9

1.10. The bibliography 10

1.11. The index 11

1.12. The glossary 12

1.13. The list of figures 13

1.14. The list of tables 14

1.15. The list of equations 15

1.16. The list of symbols 16

1.17. The list of abbreviations 17

1.18. The list of acronyms 18

1.19. The list of initialisms 19

1.20. The list of terms 20

1.21. The list of definitions 21

1.22. The list of examples 22

1.23. The list of exercises 23

1.24. The list of problems 24

1.25. The list of projects 25

1.26. The list of assignments 26

1.27. The list of tests 27

1.28. The list of quizzes 28

1.29. The list of exams 29

1.30. The list of papers 30

1.31. The list of theses 31

1.32. The list of dissertations 32

1.33. The list of books 33

1.34. The list of articles 34

1.35. The list of chapters 35

1.36. The list of sections 36

1.37. The list of paragraphs 37

1.38. The list of sentences 38

1.39. The list of words 39

1.40. The list of letters 40

1.41. The list of numbers 41

1.42. The list of symbols 42

1.43. The list of signs 43

1.44. The list of marks 44

1.45. The list of characters 45

1.46. The list of elements 46

1.47. The list of parts 47

1.48. The list of pieces 48

1.49. The list of items 49

1.50. The list of objects 50

1.51. The list of things 51

1.52. The list of matters 52

1.53. The list of subjects 53

1.54. The list of topics 54

1.55. The list of issues 55

1.56. The list of questions 56

1.57. The list of problems 57

1.58. The list of difficulties 58

1.59. The list of challenges 59

1.60. The list of obstacles 60

1.61. The list of barriers 61

1.62. The list of hindrances 62

1.63. The list of impediments 63

1.64. The list of setbacks 64

1.65. The list of reversals 65

1.66. The list of disappointments 66

1.67. The list of letdowns 67

1.68. The list of letdowns 68

1.69. The list of letdowns 69

1.70. The list of letdowns 70

1.71. The list of letdowns 71

1.72. The list of letdowns 72

1.73. The list of letdowns 73

1.74. The list of letdowns 74

1.75. The list of letdowns 75

1.76. The list of letdowns 76

1.77. The list of letdowns 77

1.78. The list of letdowns 78

1.79. The list of letdowns 79

1.80. The list of letdowns 80

1.81. The list of letdowns 81

1.82. The list of letdowns 82

1.83. The list of letdowns 83

1.84. The list of letdowns 84

1.85. The list of letdowns 85

1.86. The list of letdowns 86

1.87. The list of letdowns 87

1.88. The list of letdowns 88

1.89. The list of letdowns 89

1.90. The list of letdowns 90

1.91. The list of letdowns 91

1.92. The list of letdowns 92

1.93. The list of letdowns 93

1.94. The list of letdowns 94

1.95. The list of letdowns 95

1.96. The list of letdowns 96

1.97. The list of letdowns 97

1.98. The list of letdowns 98

1.99. The list of letdowns 99

1.100. The list of letdowns 100

Предговор

Коришћењем рачунара за формирање математичких модела активних просторних механизма омогућен је развој општих алгоритама за моделирање широке класе различитих механизма. Такве алгоритамске структуре омогућавају да се само на основу улазних података о параметрима и тополошкој структури механизма аутоматски формира математички модел. Прво су биле развијене нумеричке методе које, приликом формирања модела, користе само нумеричке вредности величина модела. Затим су уведене и методе формирања математичког модела у аналитичком облику (симболичке методе), које сваку величину модела посматрају као променљиву. Методе у којима се параметрима механизма додељују конкретне бројне вредности, а само унутрашње координате механизма се посматрају као променљиве величине су нумеричко - симболичке. Предност симболичких метода је у томе што се могу развијати алгоритми за смањење рачунске сложености генерисаног модела. У овом раду дат је допринос у домену развоја симболичких метода за формирање математичких модела динамике сложених роботских механизма.

Рад је подељен у четири поглавља и закључак.

У Глави 1. је дат преглед метода за аутоматско формирање математичких модела роботских механизма. Методе су подељене по законима механике на основу којих се изводи математички модел роботског механизма и на основу начина имплементације методе (нумеричке или симболичке). Детаљно је описана Њутн-Ојлерова метода за формирање математичког модела простог кинематичког ланца у затвореној форми. Ова метода је проши-

рена да би се поступком моделирања обухватили и активни просторни механизми који су састављени од затворених и отворених кинематичких ланаца.

У Глави 2. је описана имплементација поступка моделирања роботских механизма на основу алгоритама описаних у првом поглављу, коришћењем система за управљање базама података. У Проширеном Моделу Објекти-Везе је описан модел базе података, уведен за представљање израза из математичког модела динамике роботског механизма и имплементиран комбинацијом релационог и мрежног модела базе података. Описан је алгоритам за меморисање комплетног модела роботског механизма у бази података и алгоритми за аналитичка и нумеричка срачунавања над генерисаним моделом. На примеру роботског механизма са шест степени слободe су илустровани резултати алгоритама за формирање аналитичких израза и нумеричко срачунавање вредности.

У Глави 3. се описује процес смањивања нумеричке сложености формираног модела у циљу генерисања што ефикаснијег резултујућег модела роботског механизма. Описани су алгоритми за елиминисање редундантних математичких операција у које спадају примена и елиминисање тригонометријских идентитета и елиминација идентичних израза. Затим је описано формирање графа израчунавања за аналитичке изразе модела са што мање рачунских операција потребних за његово израчунавање. У овај део спадају алгоритам извлачења монома и алгоритам за растављање израза на производе, који је у овом раду први пут уведен ради генерисања ефикаснијег резултујућег графа израчунавања у смислу мањег броја рачунских операција. Исто тако је уведено и смањивање нумеричке сложености по одабраним подграфовима почетног графа израчунавања. Резултати примене описаних алгоритама су приказани на примеру роботског механизма са шест ротационих степени слободe.

У Глави 4. су алгоритми описани у трећем поглављу примењени на антропоморфну локомоциону конфигурацију са 14 ротационих степени слободe, као илустративни пример сложеног активног просторног механизма. Поступак формирања модела и

смањивања нумеричке сложености модела је подељен по низовима " + " зглобова механизма. Приказани су добијени резултати.

У закључку је дат резиме резултата рада, као и могућности за даља истраживања у овој области.

Изражавам искрену и велику захвалност Институту за математику Природно-математичког факултета у Новом Саду и лабораторији за роботiku Института "Михајло Пупин" из Београда, који су подржали израду овог рада.

Захваљујем се Комисији на корисним сугестијама које су допринеле да рад буде јаснији и прегледнији.

Посебну захвалност дугујем академику САНУ Миомиру Вукобрадовићу и проф. Душану Сурли, на свестраној стручној помоћи и пријатељској подршци у току израде овог рада.

Специјалну захвалност дугујем др Зори Коњовић, доц. и др Браниславу Боровцу, ван. проф. са Факултета техничких наука из Новог Сада и др Ненаду Кирћанском, ван. проф., са Института "Михајло Пупин" из Београда, који је тренутно гостујући професор на Универзитету из Торонта, на несебичној помоћи и сарадњи током овог истраживања.

Нови Сад, Фебруар 1996.

Аутор

The following table shows the results of the experiment...

Year	Production (kg)	Consumption (kg)	Balance (kg)
1950	1200	1000	200
1951	1300	1100	200
1952	1400	1200	200
1953	1500	1300	200
1954	1600	1400	200
1955	1700	1500	200
1956	1800	1600	200
1957	1900	1700	200
1958	2000	1800	200
1959	2100	1900	200
1960	2200	2000	200

The data indicates a steady increase in production over the period, while consumption also increased but at a slower rate, resulting in a consistent surplus of 200 kg per year.

Глава 1

Алгоритми за генерисање математичких модела динамике активних просторних механизма

Једно од значајних подручја истраживања у роботизи је формирање математичких модела роботских механизма. Познавање математичког модела неког роботског механизма омогућује симулирање понашања механизма, као и синтезу управљања.

У овом поглављу се даје преглед поступака за извођење математичких модела роботских механизма. Приказан је и преглед рачунарских метода за генерисање математичких модела. Методе су, на основу начина имплементације, груписане у нумеричке и симболичке.

Детаљно је описан алгоритам за формирање математичких модела динамике роботских механизма у затвореном облику који је заснован на Њутн-Ојлеровој (*Newton-Euler*) методи и користи Родригову (*Rodrigues*) формулу коначних ротација. Ова метода је развијена за формирање математичког модела простог кинематичког ланца у симболичком облику.

У овом раду је наведена метода проширена тако да поступак моделирања обухвати и сложене активне просторне механизме, који поред отворених, садрже и затворене кинематичке ланце. Описан је алгоритам за формирање математичког модела сложеног активног просторног механизма у симболичком облику.

1.1 Поступци за извођење математичких модела динамике роботских механизма

Методе за аутоматско формирање математичких модела динамике роботских механизма се, у зависности од тога који закони механике су коришћени, могу поделити у три основне групе. Тако имамо:

1. Методе базиране на Лагранжевим (*Lagrange*) једначинама;
2. Методе засноване на Њутн-Ојлеровим динамичким једначинама;
3. Методе на бази Апелових (*Appel*) једначина.

У даљем тексту су укратко изложене основне једначине на основу којих су ова три поступка развијена. У свим поступцима се под роботским механизмом подразумева отворен кинематички ланац, који се састоји од n крутих тела повезаних са n зглобних веза. Генералисана координата q^i представља унутрашњу координату i -те зглобне везе.

1.1.1 Моделирање засновано на Лагранжевим једначинама

Овај поступак моделирања роботских механизма се заснива на Лагранжевим једначинама друге врсте. Лагранжеве једначине

друге врсте имају следећи облик:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q^i} + \frac{\partial E_p}{\partial q^i} = P_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

где је:

n - број степени слободe,

E_k - кинетичка енергија,

E_p - потенцијална енергија,

P_i - генералисана сила,

q^i - генералисана координата везана за i -ти степен слободe кретања механизма.

Кинетичка и потенцијална енергија се добијају као збир одговарајућих енергија сегмената механизма.

1.1.2 Моделирање засновано на Њутн-Ојлеровим једначинама

Њутн-Ојлерове једначине одређују инерцијалне силе и моменте, који делују на сегменте роботског механизма. Њутнов закон даје релацију

$$\tilde{F}_i = m_i \tilde{w}_i \quad (1.2)$$

где је:

m_i - маса i -тог сегмента,

\tilde{w}_i - убрзање центра масе i -тог сегмента,

\tilde{F}_i - инерцијална сила која делује на центар масе i -тог сегмента.

Ојлерова динамичка једначина одређује момент инерцијалних сила око центра масе i -тог сегмента

$$\tilde{M}_i = \tilde{J}_i \tilde{\epsilon}_i + \tilde{\omega}_i \times (\tilde{J}_i \tilde{\omega}_i) \quad (1.3)$$

где је:

\tilde{J}_i - матрица димензије 3×3 , чији су дијагонални елементи главни моменти инерције,

$\tilde{\epsilon}_i$ - угаоно убрзање i -тог сегмента,

$\tilde{\omega}_i$ - угаона брзина i -тог сегмента.

Све величине су изражене у локалном координатном систему i -тог сегмента, који је постављен у центар масе. Осе локалног система се поклапају са осама инерције.

Ове једначине, изражене у односу на непокретни инерцијални систем, имају исти облик с тим што, уместо \tilde{J}_i , фигурише $J_i = A_i \tilde{J}_i A_i^T$, где је A_i матрица трансформације из локалног система i -тог сегмента у непокретни систем.

1.1.3 Моделирање засновано на Апеловим једначинама

Апелове једначине се заснивају на Гибсовој (*Gibbs*) функцији енергије убрзања. Расподела сегмената механизма и њихова кинематика се описују на исти начин као и код Њутн-Ојлерове методе. Међусобни положај суседних сегмената механизма се описује Родриговом формулом.

Динамика механизма се описује Гибс-Апеловим једначинама

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \ddot{q}^i}\right) = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

где је:

G - функција енергије убрзања,

Q_i - генералисана сила сведена на i -ти зглоб.

Функција енергије убрзања G може да се напише у облику

$$G = \sum_{i=1}^n G_i \quad (1.5)$$

где је G_i Гибсова функција која се односи на i -ти сегмент механизма.

1.2 Преглед метода за аутоматско генерисање математичких модела динамике робота

Методе за генерисање математичких модела динамике роботских механизма се могу поделити на нумеричке и симболичке. Код нумеричко - итеративних метода се све величине, које учествују у формирању модела, третирају као реални бројеви. То значи да се, на основу улазних параметара роботског механизма, на излазу добијају нумеричке вредности роботских величина, предвиђених одговарајућим поступком моделирања. Симболичке методе сваку величину третирају као променљиву па се модел добија у облику аналитичких израза. Зато се ове методе зову и аналитичке методе.

У нумеричким методама имплементација се врши директно по поступку извођења модела. Рачунска сложеност добијеног модела је утврђена бројем рачунских операција у самом поступку извођења. За разлику од тога, за имплементацију симболичких метода потребно је развијати специјалне структуре података, погодне за манипулацију симболима. Пошто се модел добија у виду аналитичких израза, могуће је прво те изразе средити у смислу смањења броја рачунских операција потребних за израчунавање одговарајућих величина модела. Симболичке методе обезбеђују велику општост поступка моделирања, јер једном генерисани модел важи за све роботске механизме задате конфигурације за различите вредности кинематичких и динамичких параметара меха-

низма. Ипак, због великог броја променљивих формирање чисто симболичких модела је веома сложен поступак.

Могућа је и комбинација нумеричких и симболичких метода, такозване нумеричко-симболичке методе. У овом случају, параметри роботског механизма (који су фиксне величине за задату конфигурацију) се третирају као реални бројеви, а само унутрашње координате механизма се третирају као променљиве. Овим се у великој мери смањује број променљивих које учествују у моделу, а самим тим и сложеност модела, а не губи се могућност смањивања броја рачунских операција. Једном генерисани модел важи само за конкретну роботску конфигурацију са фиксним вредностима кинематичких и динамичких параметара.

У даљем тексту се наводе најзначајније нумеричке и симболичке методе за аутоматско формирање математичких модела роботских механизма.

1.2.1 Нумеричке методе за формирање математичких модела роботских механизма

Пошто је тема овог рада симболично моделирање роботских механизма, овде су наведени само основни резултати из области нумеричког моделирања.

Из Лагранжевих једначина је проистекло више метода од којих је прво развијена *Uicker-Kahn*-ова метода од стране *J. J. Uicker*-а [Uic65, Uic66, Uic67] а затим модификована од стране *M. Kahn*-а [Kah69, Kah71].

Метода је касније преформулисана од стране *L. Woo*-а и *F. Freudenstein*-а [Woo71] као и *A. Yang*-а [Yan71] и развијена је програмска имплементација ове методе у виду програмског пакета за динамичку анализу робота [Orl81].

Новије варијанте ове методе у смислу мањег броја нумеричких операција су развијали *S. Mahil* [Mah, Mah82], *M. Renaud* [Ren75],

M. Thomas и *D. Tesar* [Tho82], *R. Waters* [Wat79], *J. Hollerbach* [Hol80a, Hol80b] и други.

Метода је изведена у таквом облику да омогућава решавање било директног, било инверзног проблема динамике тако што се израчунавају инерцијална матрица, матрица Кориолисових (*Coriolis*) и центрифугалних ефеката и гравитациони вектор система.

Уместо релација у затвореном облику, у [Vuk79a] су *M. Вукобратовић* и *В. Поткоњак* формирали модел робота преко рекурзивних релација, које користе Родригову формулу за описивање просторне расподеле сегмената механизма. Овом модификацијом је знатно смањен број нумеричких операција потребан за формирање модела.

Њутн-Ојлерове динамичке једначине су први пут примењене од стране *M. Вукобратовића* и *Ј. Степаненка* [Vuk73]. Њутн-Ојлерове једначине су користили и *А. Лесков* и *Б. Медведов* [Med78] у методи блок-матрица.

R. Huston и *F. Kelly* [Hus82] су извели нерекурзивну методу, која се у основи базира на Њутн-Ојлеровим динамичким једначинама и *T. Kane*-овом алгоритму [Kan65, Kan68]. На бази *Kane*-ових једначина развијен је и *Huston-Kane*-ов алгоритам [Kan71, Hus74, Hus78].

Као и у методама базираним на Лагранжевим једначинама, у Њутн-Ојлеровим методама могу се користити било Родригова формула [Vuk73, Ste76] било Деневит-Хартенбергове матрице [Luh80].

Метода Апелових једначина је постављена од стране *Е. П. Попова* и сарадника [Pop74], а развијена у коначној форми од стране *M. Вукобратовића* и *В. Поткоњака* [Vuk79b, Vuk82].

Рачунска сложеност нумеричких метода, може се исказати бројевима множења и сабирања потребним за израчунавање свих величина модела. Тако се за случај простог кинематичког ланца са n степени слободе добијају следећи резултати. У случају метода заснованих на Лагранжевим једначинама најбољи резултати су постигнути у [Hol80a, Hol80b] где бројеви множења и саби-

рања у зависности од броја степени слободе износе $412n - 277$ и $320n - 201$ респективно. У [Luh80] је развијена метода на бази Њутн-Ојлерових једначина са $150n - 48$ множења и $131n - 48$ сабирања, потребних за израчунавање погонских момената.

1.2.2 Символичке методе за формирање математичких модела роботских механизма

У оквиру симболичких метода су посматране и нумеричко-символичке методе, јер су оне по својој концепцији много ближе симболичким, него нумеричким методама. И код симболичких и код нумеричко-символичких метода се морају развијати структуре података за представљање аналитичких израза модела и постоји могућност смањивања нумеричке сложености формираног модела.

Предности симболичких метода формирања математичких модела роботских механизма, у односу на нумеричке методе се први пут истичу у [Dil73, Kir83, Ald83]. У [Vuk85] је предложена и нумеричко - симболичка метода као ефикасно решење за формирање математичких модела роботских механизма.

Касније је развијен велик број симболичких метода заснован и на Њутн-Ојлеровим и на Лагранжевим једначинама. Из тих метода су проистекли и софтверски пакети за симболичко моделирање роботских механизма, који се могу сврстати у две класе. У прву класу спадају софтверски пакети за аутоматско формирање модела засновани на рачунарским алгебарским системима опште намене (пакети засновани на MACSYMA [Sym84] систему и пакети засновани на систему REDUCE [Hea84]). У другу класу спадају софтверски производи засновани на специфичним манипулационим стратегијама (OSSAM [Dil73], SYMB [Kir83, Vuk85], EMDEG [Bur86], ARM [Neu85, Neu87], SYMORO [Kha86, Kha87, Kha89] и SYM [Kir88, Vuk89, Kir89, Tim91a, Tim91b]).

Поред ових пакета, специјално развијаних за роботске механи-

зме, постоје и софтверски пакети намењени за симболички компјутерски инжењеринг у механици. Најпознатији од ових пакета су: AUTOLEV [Sch88], NEWEUL [Kre90] и MESA VERDE [Wit90].

У [Kir93, Sch90] су дати детаљни прегледи софтверских пакета за симболичко моделирање роботских механизма, а овде се дају основне особине наведених програмских пакета.

1.2.2.1 Системи за аутоматско формирање модела засновани на рачунарским алгебарским системима опште намене

Моделирање манипулатора засновано на систему MACSYMA је описано у [Leu86]. MACSYMA је програм опште намене заснован на програмском језику LISP, намењен за манипулацију различитих облика симболичких алгебарских израза. Основне Лагранжеве једначине кретања, засноване на Деневит-Хартенберговим параметрима су директно имплементирани у MACSYMA. У оваквом програму је једноставна имплементација било које технике моделирања роботских механизма. Недостатак је што се једначине кретања прво изводе без икаквог упрошћавања. Резултат су изузетно сложени изрази, који заузимају велик меморијски простор и захтевају велик утрошак времена за генерисање. После примене алгебарских и тригонометријских упрошћавања израза, они се доводе у прихватљив облик.

Аутоматско формирање динамичких једначина роботских механизма у симболичком облику, засновано на софтверском производу REDUCE, је описано у [Vec80, Kor86]. REDUCE је рачунарски алгебарски систем који је такође заснован на програмском језику LISP и намењен је за извршавање математичких операција над симболичким изразима. У њему може да се ради са матрицама, полиномима, специјано дефинисаним функцијама, као и другим математичким структурама. У [Kor86] су описана два REDUCE програма: један заснован на Лагранжевим, а други на рекурзивним Њутн-Ојлеровим једначинама. Други метод захтева меморисање израза помоћних променљивих и већи утрошак мемо-

ријског простора.

1.2.2.2 Системи за аутоматско формирање модела засновани на специфичним симболичким манипулационим стратегијама

OSSAM (Ohio State Symbolic Algebraic Manipulator) је први програм за аутоматско формирање симболичких модела робота, заснован на класичној Лагранжевој формулацији роботске динамике [Dil73]. Основни допринос овог програма је што је уведено симболичко моделирање у роботiku. Даљи развој овог програма је био ограничен сложеносту Лагранжевих једначина и недостацима дела пакета за упрошћавање израза.

SYMB је заснован на нумеричко - симболичкој стратегији, где су параметри механизма третирали као реални бројеви. У основи пакета су Њутн-Ојлерове једначине, преко којих се изводи модел робота у затвореној форми. Величине модела се представљају полиномима, чије променљиве могу бити и тригонометријске функције. Сваком полиному се додељује вектор коефицијената и матрица експонената. Уведене су и алгебарске операције између оваквих полинома, као и систематски алгоритми за свођење полинома на облик са што је могуће мање рачунских операција. SYMB генерише код у програмском језику FORTRAN за различите типове кинематичких и динамичких модела роботских механизма.

EMDEG (Efficient Manipulator Dynamic Equation Generator) је софтверски производ за симболичко моделирање роботских механизма описан у [Bur86]. Заснован је на Ојлер-Лагранжевим једначинама које су модификоване у низ рекурзивних израза. Основу програма EMDEG, који је такође заснован на програмском језику LISP, чине правила за упрошћавање израза. Уграђене су две основне идеје за упрошћавање израза: факторизација и упрошћавање помоћу скупа правила и одвајање параметара независних од роботске конфигурације. Ови параметри су груписани и третирају се као реални бројеви.

Једначине кретања су засноване на модификованој Деневит-Хартенберговој нотацији. EMDEG аутоматски генерише симболичке изразе за величине које зависе од унутрашњих координата и успешно их упрошћава. Овај концепт није проширен и на величине које зависе од брзина и убрзања у зглобовима, што је недостатак овог софтверског пакета. Слични алгоритми за симболичко моделирање манипулатора су предложени у [Ren83, Iza85].

Још један од добро познатих рачунарских програмских пакета за аутоматско формирање модела робота у симболичком облику је и ARM (Algebraic Robot Modeler) [Neu85, Neu87]. Модели динамике робота се могу формирати на бази две врсте класичних Лагранжевих једначина, на бази Лагранжеве методе Q матрица и на бази рекурзивних Њутн-Ојлерових једначина. Овим пакетом се генеришу и рекурзивни и модели робота у затвореној форми, који обезбеђују алтернативну алгебарску репрезентацију симболичких израза. ARM се састоји из два програма, једног написаног у C програмском језику који специфицира симболичке математичке операције на основу једног од четири наведена начина формирања модела, и другог написаног у LISP програмском језику, који генерише резултујуће изразе. У [Neu85] је дат и детаљан преглед техника за симболичко моделирање.

У пакету SYMORO (SYmbolic MOdeling of RObots) је примењена Њутн-Ојлерова метода и за просте и за сложене кинематичке ланце. Користећи чињеницу да погонски моменти линеарно зависе од масе зглобова и тензора инерције, у пакету су прегруписани параметри у циљу смањења броја системских параметара. Идентификација параметара који се групишу заједно је извршена помоћу Лагранжевих једначина, које јасно изражавају линеарну зависност у затвореној форми. Недостатак овог програмског пакета је што је применљив само на проблем инверзне динамике роботских механизма.

SYM је програмски пакет који наслеђује програмски пакет SYMB. Овај пакет је еволуирао од генератора модела инверзне динамике робота, до програмског окружења које генерише ра-

зличите врсте модела и омогућује широк скуп трансформација над генерисаним моделима.

И у овом пакету је уведена репрезентација израза преко полинома, чије променљиве могу бити и тригонометријске функције, сличних онима у пакету SYMB. SYM генерише као излаз веома ефикасан код написан у С програмском језику, за различите типове кинематичких и динамичких модела. Исто тако, пакет SYM омогућује и синтезу закона управљања роботом.

1.2.2.3 Софтверски пакети за симболички компјутерски инжењеринг у механици

AUTOLEV [Sch88] је интерактивни програмски пакет намењен за симулацију различитих динамичких система. Излаз из овог програма је код написан у програмском језику FORTRAN. Ефикасност овог програмског пакета је, у случају његовог коришћења за моделирање роботских механизма, мања од ефикасности софтверских производа намењених искључиво за роботске системе.

NEWEUL [Кге90] је софтверски производ за генерисање симболичких једначина кретања. Заснован је на Њутн-Ојлеровим једначинама кретања. Пошто генерисани симболички модели често захтевају велик утрошак меморијског простора и рачунарског времена, NEWEUL нуди и сажет облик једначина. То значи да се за помоћне изразе уведе помоћне променљиве којима се додељују ти изрази. Каснији изрази који користе те променљиве сматрају их за познате. Овим је остварена велика уштеда у меморијском простору и утрошеном времену. Генерисане једначине се могу искористити за графичке презентације и анимације.

MESA VERDE (MEchanism, SAtelite, VEhicle and Robot Dynamics Equations) је софтверски пакет опште намене намењен за симболичку симулацију динамике активних система [Wit90]. Написан је у програмском језику PASCAL и генерише потпрограме за срачунавање израза, написане у истом језику или у програмском језику FORTRAN 77. Његова ефикасност је мања од оне остварене у софтверским производима намењеним искључиво за моделирање

роботских механизма.

1.2.2.4 Ефикасност модела добијених симболичким методама

У случају симболичких метода добијају се ефикаснији модели него у случају нумеричких метода. Резултати су исказани за стандардне примере роботских конфигурација, као што су PUMA и Stanford роботске конфигурације. Тако SYMB генерише модел динамике Stanford манипулатора са 384 множења и 152 сабирања. У случају пакета ARM је генерисан модел динамике PUMA робота са 224 множења и 174 сабирања. Пакет SYMORO генерише ефикасан модел инверзне динамике са 142 множења и 99 сабирања за Stanford, а 159 множења и 113 сабирања за PUMA роботску конфигурацију. За исте конфигурације у моделу генерисаном пакетом SYM потребно је 146 множења и 112 сабирања, то јест 156 множења и 108 сабирања, респективно.

1.3 Моделирање простих отворених кинематичких ланаца помоћу Њутн-Ојлерове методе

У овом одељку је детаљније описана основна Њутн-Ојлерова метода за моделирање простих отворених кинематичких ланаца. Исто тако је описано и извођење те методе у затвореном облику. Ова метода је детаљно описана у [Vuk85], а овде је наведена ради комплетности рада, јер је управо та метода искоришћена као основа за проширење поступка моделирања на сложене кинематичке ланце.

У првом делу одељка су дате основне дефиниције и појмови о роботским механизмима, у другом је дата основна Њутнова метода, у трећем се даје извођење модела у затвореној форми, а у четвртом је дат псеудокод алгоритма за извођење модела у затвореној форми.

1.3.1 Основне дефиниције

Опис роботског механизма, који се моделира дат је следећим дефиницијама у [Vuk85]:

Дефиниција 1 Структура механизма је скуп чврстих тела међусобно повезаних ротационим и/или трансляторним зглобовима.

Дефиниција 2 Сегмент механизма је дефинисан скупом $C_i = (K_i, D_i)$, где K_i представља скуп кинематичких а D_i скуп динамичких параметара, а индекс i означава i -ти сегмент механизма.

Скупови K_i и D_i су задати у следећем облику:

$$K_i = (Q_i, R_i, E_i), \quad D_i = (m_i, J_i)$$

где је:

$Q_i = (\vec{q}_{i1}, \vec{q}_{i2}, \vec{q}_{i3})$ - локални правоугли координатни систем везан за i -ти сегмент механизма;

$\vec{R}_i = (\vec{r}_{ik})$ - скуп вектора растојања од тачака Z_{ik} до координатног почетка система Q_i , где тачке Z_{ik} представљају центре зглобних веза између i -тог и k -тог члана механизма;

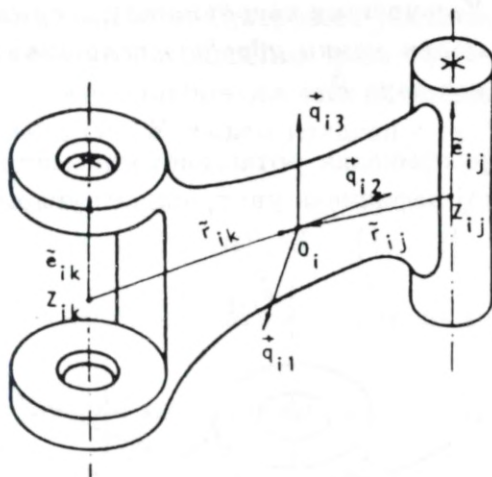
$\vec{E}_i = (\vec{e}_{ik})$ - скуп јединичних вектора оса зглобних веза којима је i -ти сегмент C_i повезан са сегментима C_k у тачкама Z_{ik} ;

m_i - маса i -тог сегмента;

J_i - тензор инерције i -тог сегмента, дефинисан у локалном координатном систему Q_i .

Најчешће се усваја да су осе координатног система Q_i постављене дуж централних оса инерције, тако да се тензор инерције

J_i своди на три момента инерције $J_i = (J_{i1}, J_{i2}, J_{i3})$. Такође се усваја да се координатни почетак система Q_i поклапа са центром масе сегмента C_i . Пример једног сегмента робота дат је на Сл. 1.1.



Сл. 1.1. Сегмент механизма C_i са две зглобне везе (Z_{ik} и Z_{ij}) са центром масе у тачки O_i

Дефиниција 3 Кинематички пар P_{ik} представља скуп од два суседна сегмента $\{C_i, C_k\}$ повезаних зглобном везом у тачки Z_{ik} .

Дефиниција 4 Кинематички ланац Λ_n је скуп n повезаних кинематичких парова, $\Lambda_n = \{P_{ik}\}$, $i \in N$, $k \in N$, где је $N = \{1, \dots, n\}$.

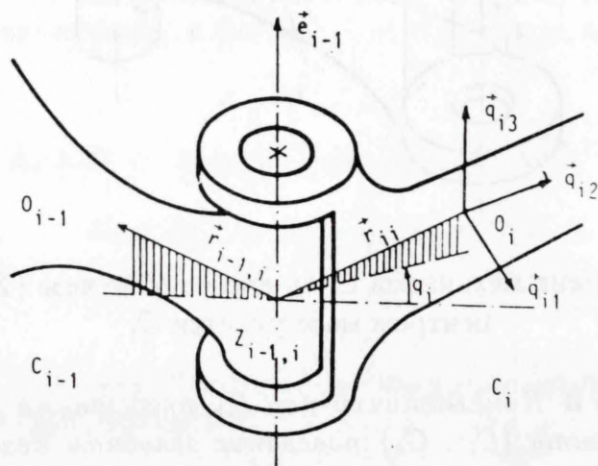
У зависности од структуре веза остварених у кинематичком ланцу, они се деле на просте, сложене, отворене и затворене.

Дефиниција 5 Прости кинематички ланац је онај у којем ниједан сегмент не учествује у више од два кинематичка пара. Насупрот томе, сложен кинематички ланац садржи бар један сегмент који је члан у више од два кинематичка пара.

Дефиниција 6 Кинематички ланац је отворен ако бар један његов сегмент учествује у само једном кинематичком пару, а затворен ланац је састављен од сегмената од којих сваки учествује у најмање два кинематичка пара.

Дефиниција 7 Унутрашње координате q_{ik} су скаларне величине које на јединствен начин одређују релативни положај чланова кинематичког пара P_{ik} .

На Сл. 1.2. је приказан ротациони кинематички пар чији је релативни положај дефинисан унутрашњим углом q^i .



Сл. 1.2. Избор унутрашње координате за ротациони кинематички пар $\{C_{i-1}, C_i\}$

Дефиниција 8 Активни механизам представља систем који се састоји од механичког дела и скупа актуатора којима се остварују погонске силе у зглобним везама ланца.

Механички део механизма се може моделирати одговарајућим кинематичким ланцем, а скупом актуатора се остварују погонске силе у зглобним везама ланца. Наведеним дефиницијама је дат опис роботског механизма.

1.3.2 Основна Њутн-Ојлерова метода за моделирање роботских механизма

Овде је изложена једна од рекурзивних нумеричких метода за формирање динамичких модела простих отворених кинематичких ланаца, заснована на Њутн-Ојлеровим једначинама. Процедура моделирања се састоји од следећих фаза: фазе одређивања иницијалне позиције, фазе одређивања стварне позиције, кинематичке фазе и динамичке фазе. У даљем излагању са N и I су означени скупови индекса

$$N = \{1, \dots, n\}, \quad I = \{1, \dots, i\}$$

где је са n означен број кинематичких парова механизма.

1.3.2.1 Одређивање иницијалне позиције

Претпоставља се да се посматрани активни механизам може описати простим отвореним кинематичким ланцем Λ_n који чини скуп кинематичких парова $\{C_{i-1}, C_i\}$, $i \in N$. Кинематички пар $\{C_0, C_1\}$ представља први члан механизма, који је зглобом Z_{10} везан за подлогу C_0 . Потребно је одредити положај свих чланова механизма при услову да су све унутрашње координате једнаке нули, $q^i = 0$, $i \in N$.

Претпостави се да су сви кинематички параметри $K_j^0 = (Q_j^0, R_j^0, E_j^0)$ за $j \in \{1, \dots, i-1\}$ познати. Горњи индекс 0 означава да је $q^j = 0$ за $j \in \{1, \dots, i-1\}$. Треба одредити $K_i^0 = (Q_i^0, R_i^0, E_i^0)$, где скупови R_i и E_i у случају простог ланца имају облик:

$$R_i = \{\vec{r}_{ii}, \vec{r}_{i,i+1}\}, \quad E_i = \{\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1}\},$$

и где су, једноставности ради, са \vec{e}_i и \vec{e}_{i+1} обележени вектори \vec{e}_{ii} и $\vec{e}_{i,i+1}$.

Пошто је K_{i-1}^0 познато, познати су и \vec{e}_i^0 и $\vec{r}_{i-1,i}^0$. Уочимо скуп од три ортогонална јединична вектора у тачки $Z_{i-1,i}$: \vec{e}_i^0 , \vec{a}_i^0 и $\vec{e}_i^0 \times \vec{a}_i^0$, где је $\vec{a}_i^0 = \text{ort}(\vec{e}_i^0 \times (\vec{r}_{i-1,i}^0 \times \vec{e}_i^0))$, чије су пројекције

познате у односу на референтни координатни систем. Исто тако се уочи скуп вектора \tilde{e}_i , \tilde{a}_i и $\tilde{e}_i \times \tilde{a}_i$, где је $\tilde{a}_i = -\text{ort}(\tilde{e}_i \times (\tilde{r}_{ii} \times \tilde{e}_i))$, чије су пројекције познате у односу на локални координатни систем Q_i .

У случају када су вектори \tilde{e}_i^0 и $\tilde{r}_{i-1,i}^0$ колинеарни, потребно је претходно дефинисати нови вектор $\tilde{r}_{i-1,i}^0$, нормалан на вектор \tilde{e}_i^0 . Нови вектор се добија ротирањем вектора $\tilde{r}_{i-1,i}^0$ за 90 степени. Ако су вектори \tilde{e}_i и \tilde{r}_{ii} колинеарни, на исти начин се ротирањем добија нови вектор \tilde{r}_{ii} .

При услову да је $q^i = 0$, ова два скупа вектора се поклапају. Пошто је Q_i^0 матрица трансформације унутрашњег координатног система сегмента C_i у референтни систем, следи

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i^0 &= Q_i^0 \tilde{e}_i \\ \tilde{a}_i^0 &= Q_i^0 \tilde{a}_i \\ \tilde{e}_i^0 \times \tilde{a}_i^0 &= Q_i^0 (\tilde{e}_i \times \tilde{a}_i)\end{aligned}\tag{1.6}$$

чиме је одређена матрица Q_i^0 :

$$Q_i^0 = [\tilde{e}_i^0 \ \tilde{a}_i^0 \ \tilde{e}_i^0 \times \tilde{a}_i^0][\tilde{e}_i \ \tilde{a}_i \ \tilde{e}_i \times \tilde{a}_i]^T\tag{1.7}$$

Уместо инверзије је коришћена операција транспоновања матрице, што је омогућено ортогоналношћу њених вектора колона.

Потребно је одредити преостале елементе скупа K_i^0 , т.ј. R_i^0 и E_i^0 . Пошто је матрица Q_i^0 одређена, важе релације

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{ii}^0 &= Q_i^0 \tilde{r}_{ii} \\ \tilde{r}_{i,i+1}^0 &= Q_i^0 \tilde{r}_{i,i+1} \\ \tilde{e}_{i+1}^0 &= Q_i^0 \tilde{e}_{i+1}\end{aligned}\tag{1.8}$$

Овим је успостављена рекурентност потребна за израчунавање Q_i^0 за $\forall i \in N$, као и свих вектора који улазе у R_i^0 и E_i^0 .

1.3.2.2 Позиција механизма

У овој фази се одређују елементи скупа кинематичких параметара K_i , при чему је позиција механизма одређена унутрашњим координатама q^i , $i \in N$.

Применом Родригове формуле коначних ротација у случају ротационих парова добија се

$$\vec{q}_{ij} = \begin{bmatrix} \vec{e}_i \times (\vec{q}_{ij}^0 \times \vec{e}_i) \\ (\vec{e}_i \times \vec{q}_{ij}^0) \\ (\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{ij}^0) \vec{e}_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \cos q^i \\ \sin q^i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.9)$$

Тиме је одређена матрица $Q_i = [\vec{q}_{i1} \ \vec{q}_{i2} \ \vec{q}_{i3}]$, $\forall i \in N$, која представља матрицу трансформације из локалног координатног система Q_i у референтни координатни систем. Директно следе релације

$$\begin{aligned} R_i &= \{\vec{r}_{ii}, \vec{r}_{i,i+1}\} = \{Q_i \vec{r}_{ii}, Q_i \vec{r}_{i,i+1}\} \\ E_i &= \{\vec{e}_i, \vec{e}_{i+1}\} = \{\vec{e}_i, Q_i \vec{e}_{i+1}\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

при чему очигледно важи да је $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_{i-1,j} - \vec{r}_{i-1,i} + \vec{r}_{ii}$ за $j \in I$, $i \in N$. Тиме је обезбеђена рекурзивност израчунавања матрице Q_i према једначини (1.9) и елементима скупова из једначине (1.10).

1.3.2.3 Кинематика механизма

У овој фази се формира скуп кинематичких величина $H_i = \{\Omega_i, W_i\}$, $i \in N$, где је

$$\Omega_i = \{\vec{\omega}_i, \vec{v}_i\}, \quad W_i = \{\vec{e}_i, \vec{w}_i\}$$

и

$\vec{\omega}_i$ - угаона брзина i -тог сегмента,

\vec{v}_i - линеарна брзина i -тог сегмента,

\vec{e}_i - угаоно убрзање i -тог сегмента,

\vec{w}_i - линеарно убрзање i -тог сегмента.

Ове кинематичке величине су функције брзина и убрзања унутрашњих координата q^i и \dot{q}^i , $i \in N$, и варијабла формираних у

претходној фази из скупа K_i . Применом основних теорема кинематике крутог тела добија се

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega}_i &= \vec{\omega}_{i-1} + \dot{q}^i \vec{e}_i \\
 \vec{v}_i &= \vec{v}_{i-1} - \vec{\omega}_{i-1} \times \vec{r}_{i-1,i} + \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{ii} \\
 \vec{e}_i &= \vec{e}_{i-1} + \dot{q}^i (\vec{\omega}_i \times \vec{e}_i) + \ddot{q}^i \vec{e}_i \\
 \vec{w}_i &= \vec{w}_{i-1} - \ddot{e}_{i-1} \times \vec{r}_{i-1,i} - \vec{\omega}_{i-1} \times (\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{r}_{i-1,i}) \\
 &\quad + \ddot{e}_i \times \vec{r}_{ii} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{ii})
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Из ових релација произилази да су угаона и линеарна убрзања функције других извода унутрашњих координата \ddot{q}^j , $j \in I$. Да би се формирале матрице динамичког модела механизма, потребно је наведене изразе преуредити тако да убрзања \ddot{q}^i , $i \in N$, експлицитно фигуришу:

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_i &= [\vec{\alpha}_{i1} \dots \vec{\alpha}_{ii} \ 0 \dots 0] \vec{q} + \vec{\alpha}_i^0 \\
 \vec{w}_i &= [\vec{\beta}_{i1} \dots \vec{\beta}_{ii} \ 0 \dots 0] \vec{q} + \vec{\beta}_i^0
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

где је $\vec{q} = [\dot{q}^1 \dots \dot{q}^n]$. Тиме се скуп кинематичких величина W_i своди на

$$W_i = \{ \vec{\alpha}_{ij}, \vec{\alpha}_i^0, \vec{\beta}_{ij}, \vec{\beta}_i^0 ; j \in I \}.$$

Из (1.11) и (1.12) добијају се рекурзивне релације којима се одређују елементи скупа W_i :

$$\begin{aligned}
 \vec{\alpha}_{ij} &= \vec{e}_j, \quad j \in I, \quad \vec{\alpha}_i^0 = \vec{\alpha}_{i-1}^0 + \dot{q}^i (\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{e}_i) \\
 \vec{\beta}_{ij} &= \vec{\beta}_{i-1,j} + \vec{e}_j \times \vec{R}_{i,i-1}, \quad j \in \{1, \dots, i-1\} \\
 \vec{\beta}_{ii} &= \vec{e}_i \times \vec{r}_{ii} \\
 \vec{\beta}_i^0 &= \vec{\beta}_{i-1}^0 + \vec{\alpha}_{i-1}^0 \times \vec{R}_{i,i-1} + \dot{q}^i (\vec{\omega}_{i-1} \times \vec{e}_i) \times \vec{r}_{ii} - \ddot{\gamma}_{i-1,i} + \ddot{\gamma}_{ii}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

где је $\vec{\gamma}_{ij} = \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_{ij})$, $j \in I$, а вектор $\vec{R}_{i,i-1} = \vec{r}_{ii} - \vec{r}_{i-1,i}$ представља вектор растојања између $(i-1)$ -вог и i -тог сегмента механизма. Тиме су одређене све кинематичке величине потребне за формирање динамичког модела механизма.

1.3.2.4 Динамика механизма

У овој фази се формира скуп динамичких величина $\Delta_i = \{F_i, M_i\}$, $i \in N$, где је

$$F_i = \{\vec{F}_i\}, \quad M_i = \{\vec{M}_i\}$$

и

\vec{F}_i - инерцијална сила у центру масе i -тог сегмента,

\vec{M}_i - момент инерцијалне силе i -тог сегмента.

Инерцијална сила се може израчунати применом Њутновог закона:

$$\vec{F}_i = -m_i \vec{w}_i = [\vec{a}_{i1} \dots \vec{a}_{ii} \ 0 \dots 0] \ddot{q} + \vec{a}_i^0 \quad (1.14)$$

где је m_i маса i -тог сегмента механизма. Коришћењем (1.12) добија се

$$\begin{aligned} \vec{a}_{ij} &= -m_i \vec{\beta}_{ij}, \quad j \in I \\ \vec{a}_i^0 &= -m_i \vec{\beta}_i^0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Моменти инерцијалних сила се одређују из Ојлерових динамичких једначина и могу се представити у облику

$$\vec{M}_i = [\vec{b}_{i1} \dots \vec{b}_{ii} \ 0 \dots 0] \ddot{q} + \vec{b}_i^0 \quad (1.16)$$

где је:

$$\begin{aligned} \vec{b}_{ij} &= -T_i \vec{\alpha}_{ij}, \quad j \in I \\ \vec{b}_i^0 &= -T_i \vec{\alpha}_i^0 + \vec{\lambda}_i \end{aligned} \quad (1.17)$$

и

$$\begin{aligned} T_i &= \sum_{l=1}^3 Q_{il} J_{il} \\ Q_{il} &= [q_{il}^1 \vec{q}_{il} \quad q_{il}^2 \vec{q}_{il} \quad q_{il}^3 \vec{q}_{il}] \\ \vec{\lambda}_i &= Q_i \begin{bmatrix} (\vec{\omega}_i \cdot \vec{q}_{i2})(\vec{\omega}_i \cdot \vec{q}_{i3})(J_{i2} - J_{i3}) \\ (\vec{\omega}_i \cdot \vec{q}_{i3})(\vec{\omega}_i \cdot \vec{q}_{i1})(J_{i3} - J_{i1}) \\ (\vec{\omega}_i \cdot \vec{q}_{i1})(\vec{\omega}_i \cdot \vec{q}_{i2})(J_{i1} - J_{i2}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.18)$$

при чему је са q_{il}^j ($j = 1, 2, 3$) обележена j -та компонента вектора \vec{q}_{il} .

Осим инерцијалних сила и момената, на сегменте механизма делују и спољне силе и моменти $G_i, M_i^G, i \in N$, тако да се укупне силе и моменти могу изразити у облику

$$\begin{aligned}\vec{F}_i^u &= \vec{F}_i + \vec{G}_i \\ \vec{M}_i^u &= \vec{M}_i + \vec{M}_i^G\end{aligned}\quad (1.19)$$

Применом општих теорема динамике крутог тела добијају се диференцијалне једначине кретања механизма:

$$\begin{aligned}P_i &= -\vec{e}_i \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{j=\max(i,k)}^n (\vec{b}_{jk} + \vec{r}_{ji} \times \vec{a}_{jk}) \ddot{q}^k - \\ &= -\vec{e}_i \cdot \sum_{j=i}^n (\vec{r}_{ji} \times (\vec{a}_j^0 + \vec{G}_j) + \vec{b}_j^0)\end{aligned}\quad (1.20)$$

где је $P_i \in R$ погонски момент i -тог актуатора.

Добијени израз се може написати и у матричном облику

$$P = H(q, \Theta) \ddot{q} + h(q, \dot{q}, \Theta) \quad (1.21)$$

где је $P = [P_1 \dots P_n]^T$ вектор погонских момената (сила), $q = [q^1, \dots, q^n]^T$ вектор унутрашњих координата, $\Theta = [\Theta_1, \dots, \Theta_m]^T$ вектор геометријских и динамичких параметара, $H(q, \Theta) : R^n \times R^m \rightarrow R^{n \times n}$ и $h(q, \dot{q}, \Theta) : R^n \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$ - матрица (вектор) система који према (1.20) имају облик:

$$\begin{aligned}H(q, \Theta) &= [H_{ik}] = [-\vec{e}_i \cdot \sum_{j=\max(i,k)}^n (\vec{b}_{jk} + \vec{r}_{ji} \times \vec{a}_{jk})] \\ h(q, \dot{q}, \Theta) &= [h_i] = [-\vec{e}_i \cdot \sum_{j=i}^n (\vec{r}_{ji} \times (\vec{a}_j^0 + \vec{G}_j) + \vec{b}_j^0)]\end{aligned}\quad (1.22)$$

Тиме су одређене све кинематичке и динамичке величине механичког дела система.

1.3.3 Модел работа у затвореној форми

Посматра се роботски механизам, састављен од низа крутих тела, повезаних ротационим зглобовима, који се може моделирати простим отвореним кинематичким ланцем. Потребно је развити алгоритам за формирање динамичког модела работа у облику

$$P = H(q, \Theta)\ddot{q} + \dot{q}^T C(q, \Theta)\dot{q} + h^G(q, \Theta) \quad (1.23)$$

где је:

$H = H(q, \Theta) : R^n \times R^m \rightarrow R^{n \times n}$ - инерцијална матрица система,

$C = C(q, \Theta) : R^n \times R^m \rightarrow R^{n \times n \times n}$ - матрица Кориолисових и центрифугалних ефеката система,

$h^G = h^G(q, \Theta) : R^n \times R^m \rightarrow R^n$ - гравитациони вектор,

при чему C - матрица узима у обзир Кориолисове и центрифугалне ефекте, и представља скуп од n матрица ($C^1(q, \Theta), \dots, C^n(q, \Theta)$) таквих да важи

$$\dot{q}^T C(q, \Theta)\dot{q} \equiv \begin{bmatrix} \dot{q}^T C^1(q, \Theta)\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T C^n(q, \Theta)\dot{q} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

где је $C^i(q, \Theta) \in R^{n \times n}$, $i \in N$. Све матрице система (1.23) треба експлицитно да зависе од следећих скупова параметара:

$$K_i = (Q_i, R_i, E_i), \quad i \in N$$

$$D_i = (m_i, J_i), \quad i \in N$$

где је $J_i = (J_{i1}, J_{i2}, J_{i3})$ скуп момената инерције око централних оса инерције. Остали параметри су дефинисани у претходном одељку.

Комплетан поступак извођења је дат у [Vuk85]. Матрице H и C , као и вектор h^G се могу израчунати према следећим изразима:

$$H_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^n [m_j(\vec{e}_i \times \vec{r}_{ji}) \cdot (\vec{e}_k \times \vec{r}_{jk}) +$$

$$H_{ki} = H_{ik} + \sum_{\mu=1}^3 (\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{j\mu})(\vec{e}_k \cdot \vec{q}_{j\mu})J_{j\mu} \quad (1.25)$$

где је H_{ik} , $i \leq k$ (i, k)-ти елемент инерцијалне матрице $H(q, \Theta)$.

Исто тако добија се да је

$$C_{kl}^i = \sum_{j=\max(i,k)}^n \{m_j(\vec{e}_i \times \vec{r}_{ji}) \cdot (\vec{e}_l \times (\vec{e}_k \times \vec{r}_{jk}))\} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 [(\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{j\mu})\vec{e}_{lk} + (\vec{e}_k \cdot \vec{q}_{j\mu})\vec{e}_{il} + (\vec{e}_l \cdot \vec{q}_{j\mu})\vec{e}_{ik}] \cdot \vec{q}_{j\mu}J_{j\mu} \quad (1.26)$$

$$C_{lk}^i = C_{kl}^i$$

где је C_{kl}^i , $k \geq l$ (k, l)-ти елемент матрице $C^i(q, \Theta)$, а $\vec{e}_{ij} = \vec{e}_i \times \vec{e}_j$.

Коначно, добија се и да је

$$h_i^G = - \sum_{j=i}^n ((\vec{e}_i \times \vec{r}_{ji}) \cdot \vec{G}_j) \quad (1.27)$$

где је h_i^G i -ти елемент вектора $h^G(q, \Theta)$.

Тиме су све величине одређене у аналитичком облику, погодном за формирање математичких модела роботских механизма.

1.3.4 Алгоритам за формирање модела динамике простог отвореног кинематичког ланца

У овом одељку је дат поступак за формирање математичког модела простог отвореног кинематичког ланца у затвореној форми, написан у псеудокоду.

Алгоритам 1.1

/* Улазне величине:

n - број степени слободe;

\vec{G} - вектор гравитације;

m_i - маса i -тог сегмента;

$J_i = (J_{i1}, J_{i2}, J_{i3})$ - моменти инерције i -тог сегмента у односу на главне централне осе инерције;

\vec{e}_i - јединични вектор осе i -тог зглоба;

\vec{r}_{ii} - вектор растојања од i -тог зглоба до центра масе i -тог сегмента;

\vec{r}_{ij} - вектор растојања од j -тог зглоба до центра масе i -тог сегмента кинематичког пара P_{ij} ;

\vec{r}_{01} - вектор растојања од првог зглоба до координатног почетка референтног система;

\vec{e}_1 - јединични вектор осе првог зглоба у референтном систему;

q^i - позиција i -тог сегмента;

Назнака - Вектори означени са (\sim) су дати у односу на локални координатни систем */

/* Величине које се израчунавају у моделу:

$Q_i^0 = [\vec{q}_{i1}^0 \ \vec{q}_{i2}^0 \ \vec{q}_{i3}^0]$ - иницијална матрица трансформације из координатног система i -тог сегмента у референтни координатни систем;

$Q_i = [\vec{q}_{i1} \ \vec{q}_{i2} \ \vec{q}_{i3}]$ - матрица трансформације из координатног система везаног за i -ти сегмент у референтни координатни систем;

\vec{r}_{ij} - вектор растојања од j -тог зглоба до центра масе i -тог сегмента;

\vec{e}_i - јединични вектор осе зглоба;

h_i^G - вектор гравитационих ефеката;

H_{ij} - инерцијална матрица;

C_{jk}^i - матрица Кориолисових и центрифугалних ефеката; */

```

/* Одређивање иницијалне позиције механизма */
for (i = 1 ; i <= n ; i ++ ) {
  if (Kolinearni(ēi , r̄ii))
    Rotiraj(r̄ii) ;
  R̄i = ēi × (r̄ii × ēi) ;
  if (Kolinearni(ēi0 , r̄i-1,i0))
    Rotiraj(r̄i-1,i0) ;
  R̄i = ēi0 × (r̄i-1,i0 × ēi0) ;
  āi = R̄i / |R̄i| ; āi0 = -R̄i / |R̄i| ;
  b̄i = ēi × āi ; b̄i0 = ēi0 × āi0 ;
  Qi0 = [ āi0 ēi0 b̄i0 ] [ āi ēi b̄i ]T ;
  r̄ii0 = Qi0 r̄ii ;
  if (i! = n) {
    r̄i,i+10 = Qi0 r̄i,i+1 ; ēi+10 = Qi0 ēi+1 ;
  }
}

```

```

/* Одређивање позиције механизма */
for (i = 1 ; i <= n ; i ++ ) {
  for (k = 1 ; k <= 3 ; k ++ )
    q̄ik = q̄ik0 cos qi + (1 - cos qi) (ēi · q̄ik0) ēi + (ēi × q̄ik0) sin qi ;
  Qi = [ q̄i1 q̄i2 q̄i3 ] ;
  r̄ii = Qi r̄ii ;
  if (i! = n) {
    r̄i,i+1 = Qi r̄i,i+1 ; ēi+1 = Qi ēi+1 ;
    for (j = i + 1 ; j <= n ; j ++ )

```

$$\left. \begin{array}{l} \text{for } (k = 1 ; k \leq 3 ; k++) \\ \quad \vec{q}_{jk}^0 = \vec{q}_{jk}^0 \cos q^i + (1 - \cos q^i)(\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{jk}^0)\vec{e}_i + (\vec{e}_i \times \vec{q}_{jk}^0) \sin q^i ; \\ \end{array} \right\}$$

/* Одређивање вектора h^G и матрица H и C */

for (i = 1 ; i ≤ n - 1 ; i++)

for (j = i + 1 ; j ≤ n ; j++)

$$\vec{r}_{ji} = \vec{r}_{j-1,i} - \vec{r}_{j-1,j} + \vec{r}_{jj} ;$$

for (i = 1 ; i ≤ n ; i++)

for (j = 1 ; j ≤ i ; j++) {

$$h_j^G = m_i((\vec{e}_j \times \vec{r}_{ij}) \cdot \vec{G}) ;$$

for (k = j ; k ≤ i ; k++)

$$H_{jk} = m_i((\vec{e}_j \times \vec{r}_{ij}) \cdot (\vec{e}_k \times \vec{r}_{ik})) + \sum_{v=1}^3 (\vec{e}_j \cdot \vec{q}_{iv})(\vec{e}_k \cdot \vec{q}_{iv})J_{iv} ;$$

for (k = 1 ; k ≤ i ; k++)

for (l = 1 ; l ≤ k ; l++) {

$$\vec{e}_{lk} = \vec{e}_l \times \vec{e}_k ; \vec{e}_{jl} = \vec{e}_j \times \vec{e}_l ; \vec{e}_{jk} = \vec{e}_j \times \vec{e}_k ;$$

$$C_{kl}^j = m_i((\vec{e}_j \times \vec{r}_{ij}) \cdot (\vec{e}_l \times (\vec{e}_k \times \vec{r}_{ik})))$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{v=1}^3 ((\vec{e}_j \cdot \vec{q}_{iv})\vec{e}_{lk} + (\vec{e}_k \cdot \vec{q}_{iv})\vec{e}_{jl} + (\vec{e}_l \cdot \vec{q}_{iv})\vec{e}_{jk}) \cdot \vec{q}_{iv}J_{iv} ;$$

}

}

Овај алгоритам формира математички модел простог кинематичког ланца у затвореној форми.

1.4 Формирање модела сложених отворених кинематичких ланаца у затвореној форми

У овом одељку се описује проширивање методе за формирање модела робота у затвореној форми преко Њутн-Ојлерових једначина, описане у претходном одељку, тако да поступак моделирања

обухвати и сложене кинематичке ланце. И даље остаје ограничење да се ради само о отвореним кинематичким ланцима.

1.4.1 Модел сложеног кинематичког ланца у затвореној форми

Специфичност сложених кинематичких ланаца је да постоји бар један сегмент механизма, који учествује у више од два кинематичка пара. Такви сегменти се називају *сегментима гранања*.

Да би могли израчунати вектор h^G и матрице H и C , потребно је увести одговарајући број низова "+" зглобова. Овај концепт је детаљно објашњен у [Vuk90], а овде се наводи ради комплетности рада, јер се користи за проширивање поступка моделирања на сложене кинематичке ланце.

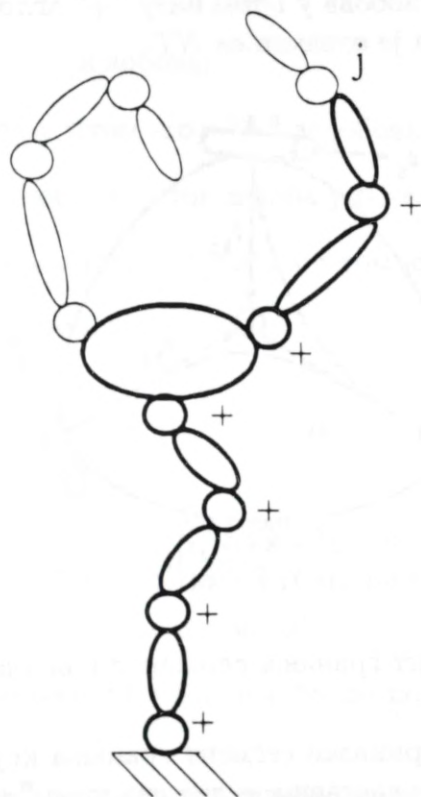
Сваки отворени сложени кинематички ланац се може представити и преко више простих кинематичких ланаца. Формирање модела сложеног кинематичког ланца се постиже преко низа "+" зглобова. На Сл. 1.3. је приказан један сложени кинематички ланац са издвојеним низом "+" зглобова. Овај низ се формира тако да, када се ланац прекине у j -том зглобу механизма, сегменти иза тог зглоба треба да остану у спољашњем делу механизма (оном који није повезан са подлогом).

У j -том зглобу се могу израчунати утицаји тог зглоба на вектор h^G и матрице H и C према:

$$\begin{aligned} \Delta H_{ik}^j &= [m_j(\vec{e}_i \times \vec{r}_{ji}) \cdot (\vec{e}_k \times \vec{r}_{jk}) + \\ &+ \sum_{\mu=1}^3 (\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{j\mu})(\vec{e}_k \cdot \vec{q}_{j\mu})J_{j\mu}] \\ \Delta C_{kl}^j &= \{m_j(\vec{e}_i \times \vec{r}_{ji}) \cdot (\vec{e}_l \times (\vec{e}_k \times \vec{r}_{jk})) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 [(\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{j\mu})\vec{e}_{lk} + (\vec{e}_k \cdot \vec{q}_{j\mu})\vec{e}_{il} + (\vec{e}_l \cdot \vec{q}_{j\mu})\vec{e}_{ik}] \cdot \vec{q}_{j\mu} J_{j\mu}\} \\ \Delta h_i^G &= ((\vec{e}_i \times \vec{r}_{ji}) \cdot \vec{G}_j) \end{aligned} \quad (1.28)$$

где симбол Δ означава прираштај посматране величине у односу

на j -ти зглоб механизма.



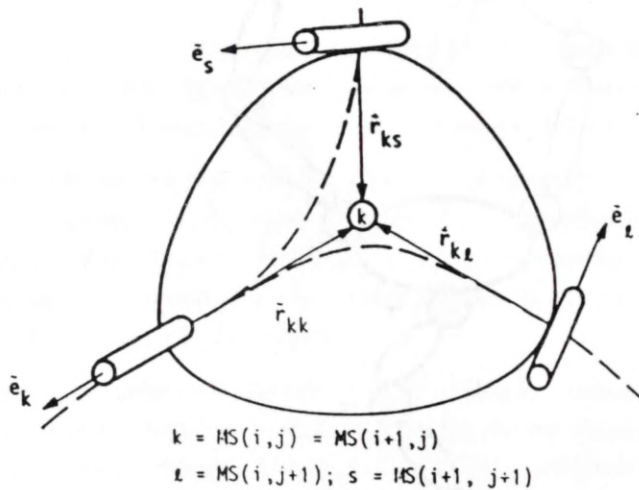
Сл. 1.3. Низ "+" зглобова сложеног кинематичког ланца

Сада се одговарајуће компоненте могу израчунати сумирањем величина из (1.28) по одговарајућим низовима "+" зглобова:

$$H_{ik} = \sum_{(j)} \Delta H_{ik}^j ; C_{kl}^i = \sum_{(j)} \Delta C_{kl}^{ij} ; h_i^G = \sum_{(j)} \Delta h_i^G{}^j \quad (1.29)$$

Тополошка структура целог механизма се може представити матрицом MS . Свака врста матрице садржи редне бројеве зглобова из одговарајућег низа "+" зглобова. За сваки низ "+"

зглобова се дефинише и *иницијални* зглоб који представља први зглоб тог низа, различит од зглобова претходног низа "+" зглобова. За i -ти низ "+" зглобова иницијални зглоб је означен са I_i , а K_i означава број зглобова у i -том низу "+" зглобова. Укупан број зглобова механизма је означен са NT .



Сл. 1.4. Сегмент гранања сложеног кинематичког ланца

На Сл. 1.4. је приказан сегмент гранања који учествује у три кинематичка пара и саставни је део два низа "+" зглобова.

1.4.2 Алгоритам за формирање модела сложеног отвореног кинематичког ланца

У Алгоритму 1.2 је дат поступак за формирање математичког модела сложеног отвореног кинематичког ланца, написан у псеудокоду. Алгоритам генерише математички модел у затвореној форми и настао је модификацијом алгоритма за формирање модела простих отворених кинематичких ланаца (Алгоритам 1.1).

Алгоритам 1.2

/* Улазне величине:

N - број низова "+" зглобова;

K_i - број зглобова у i -том низу "+" зглобова;

$MS = MS(i, j)$ - редни број j -тог зглоба у i -том низу "+" зглобова;

I_i - редни број иницијалног зглоба у i -том низу "+" зглобова;

NT - укупан број зглобова;

\vec{G} - вектор гравитације;

m_i - маса i -тог сегмента;

$J_i = (J_{i1}, J_{i2}, J_{i3})$ - моменти инерције i -тог сегмента у односу на главне централне осе инерције;

\vec{e}_i - јединични вектор осе i -тог зглоба;

\vec{r}_{ii} - вектор растојања од i -тог зглоба до центра масе i -тог сегмента;

\vec{r}_{ij} - вектор растојања од j -тог зглоба до центра масе i -тог сегмента кинематичког пара P_{ij} ;

\vec{r}_{01} - вектор растојања од првог зглоба до координатног почетка референтног система;

\vec{e}_1 - јединични вектор осе првог зглоба у референтном систему;

q^i - позиција i -тог сегмента;

Назнака - Вектори означени са (\sim) су дати у односу на локални координатни систем */

/* Величине које се израчунавају у моделу:

$Q_i^0 = [\vec{q}_{i1}^0 \ \vec{q}_{i2}^0 \ \vec{q}_{i3}^0]$ - иницијална матрица трансформације из координатног система i -тог сегмента у референтни координатни систем;

$Q_i = [\vec{q}_{i1} \ \vec{q}_{i2} \ \vec{q}_{i3}]$ - матрица трансформације из координатног система везаног за i -ти сегмент у референтни координатни систем;

\vec{r}_{ij} - вектор растојања од j -тог зглоба до центра масе i -тог сегмента;

\vec{e}_i - јединични вектор осе зглоба;

h_i^G - вектор гравитационих ефеката;

H_{ij} - инерцијална матрица;

C_{jk}^i - матрица Кориолисових и центрифугалних ефеката; */ =

/* Одређивање иницијалне позиције механизма */

for ($j = 1 ; j \leq N ; i ++$)

for ($l = \max(1, I_j - 1) ; l \leq K_j ; l ++$) {

$i = MS(j, l) ;$

if ($l \neq I_j - 1$) {

if ($Kolinearni(\vec{e}_i, \vec{r}_{ii})$)

Rotiraj(\vec{r}_{ii}) ;

$\vec{R}_i = \vec{e}_i \times (\vec{r}_{ii} \times \vec{e}_i) ;$

if ($l \neq 1$)

$k = MS(j, l - 1) ;$

else

$k = 0 ;$

if ($Kolinearni(\vec{e}_i^0, \vec{r}_{k,i}^0)$)

Rotiraj($\vec{r}_{k,i}^0$) ;

$\vec{R}_i = \vec{e}_i^0 \times (\vec{r}_{k,i}^0 \times \vec{e}_i^0) ;$

$\vec{a}_i = \frac{\vec{R}_i}{|\vec{R}_i|} ; \vec{a}_i^0 = -\frac{\vec{R}_i}{|\vec{R}_i|} ;$

$\vec{b}_i = \vec{e}_i \times \vec{a}_i ; \vec{b}_i^0 = \vec{e}_i^0 \times \vec{a}_i^0 ;$

$Q_i^0 = [\vec{a}_i^0 \ \vec{e}_i^0 \ \vec{b}_i^0] [\vec{a}_i \ \vec{e}_i \ \vec{b}_i]^T ;$

$\vec{r}_{ii}^0 = Q_i^0 \vec{r}_{ii} ;$

```

}
if (l != Kj) {
  s = MS(j, l + 1);
   $\vec{r}_{is}^0 = Q_i^0 \vec{r}_{is}$ ;  $\vec{e}_s = Q_i^0 \vec{e}_s$ ;
}
}

/* Одређивање позиције механизма */
for (j = 1; j <= N; j++)
for (l = max(1, Ij - 1); l <= Kj; l++) {
  i = MS(j, l);
  if (l != Ij - 1) {
    for (k = 1; k <= 3; k++)
       $\vec{q}_{ik} = \vec{q}_{ik}^0 \cos q^i + (1 - \cos q^i)(\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{ik}^0)\vec{e}_i + (\vec{e}_i \times \vec{q}_{ik}^0) \sin q^i$ ;
       $Q_i = [\vec{q}_{i1} \ \vec{q}_{i2} \ \vec{q}_{i3}]$ ;
       $\vec{r}_{ii} = Q_i \vec{r}_{ii}$ ;
  }
  if (l != Kj) {
    s = MS(j, l + 1);
     $\vec{r}_{is} = Q_i \vec{r}_{is}$ ;  $\vec{e}_s = Q_i \vec{e}_s$ ;
    for (m = s; m <= NT; m++)
      if (Povezani(i, m))
        for (k = 1; k <= 3; k++)
           $\vec{q}_{mk}^0 = \vec{q}_{mk}^0 \cos q^i + (1 - \cos q^i)(\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{mk}^0)\vec{e}_i + (\vec{e}_i \times \vec{q}_{mk}^0) \sin q^i$ ;
  }
}

/* Одређивање вектора  $h^G$  и матрица  $H$  и  $C$  */
for (j = 1; j <= N; j++)
for (l = 1; l <= Kj - 1; l++)
  for (k = max(l + 1, Ij); k <= Kj; k++) {
    i = MS(j, l); s = MS(j, k); t = MS(j, k - 1);
     $\vec{r}_{si} = \vec{r}_{ti} - \vec{r}_{ts} + \vec{r}_{ss}$ ;
  }
for (j = 1; j <= N; j++)
for (l = Ij; l <= Kj; l++) {
  i = MS(j, l);
  for (m = 1; m <= l; m++) {

```

```

t = MS(j, m) ;
htG = mi((ēt × r̄it) · Ḡ) ;
for (p = m ; p <= l ; p++) {
  s = MS(j, p) ;
  Hts += mi((ēt × r̄it) · (ēs × r̄is)) + ∑v=13(ēt · q̄iv)(ēs · q̄iv)Jiv ;
}
for (p = 1 ; p <= l ; p++) {
  s = MS(j, p) ;
  for (k = 1 ; k <= p ; k++) {
    u = MS(j, k) ; ēus = ēu × ēs ;
    ētu = ēt × ēu ; ēts = ēt × ēs ;
    Csut += mi((ēt × r̄it) · (ēu × (ēs × r̄is)))
    + 1/2 ∑v=13((ēt · q̄iv)ēus + (ēs · q̄iv)ētu + (ēu · q̄iv)ēts) · q̄ivJiv ;
  }
}
}
}
}

```

Овим алгоритмом се формирају математички модели сложених отворених кинематичких ланаца у затвореној форми.

1.5 Формирање модела активних просторних механизма састављених од затворених и отворених кинематичких ланаца

У овом одељку је метода формирања модела робота у затвореној форми проширена тако да обухвати и затворене кинематичке ланце. Сложени активни просторни механизми су састављени од сложених кинематичких ланаца, где неки ланци могу да буду и затворени кинематички ланци.

У активне просторне механизме спадају и антропоморфни локомоторни роботски механизми у којима ланац који представља ноге механизма, наизменично прелази из отвореног у затворени кинематички ланац.

1.5.1 Затворени кинематички ланац

Посматрајмо сложени кинематички ланац састављен од N низова "+" зглобова са укупно NT сегмената, у коме l -ти низ "+" зглобова представља затворени кинематички ланац. Затворених кинематичких ланаца може бити више. Овде се даје поступак који се понавља за сваки затворени кинематички ланац.

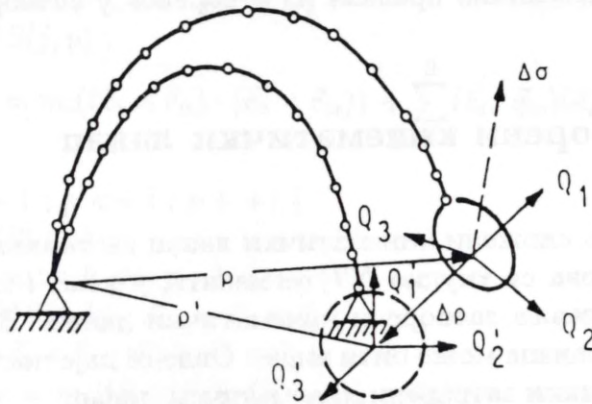
Уместо затвореног кинематичког ланца уводи се еквивалентни отворени кинематички ланац са једним фиктивним зглобом додатим на крају ланца. Исто тако се уводе вектори \vec{Q}_1^l , \vec{Q}_2^l и \vec{Q}_3^l и вектори $\vec{Q}_1^{l'}$, $\vec{Q}_2^{l'}$ и $\vec{Q}_3^{l'}$, који представљају осе координатних система повезаних са завршним сегментом и основом, респективно. Положај завршног сегмента се одређује тако да поклапање еквивалентног отвореног ланца са затвореним кинематичким ланцем доводи до поклапања координатних система \vec{Q}^l и $\vec{Q}^{l'}$. У даљем тексту се индекс низа "+" зглобова (l) не наводи, ради читљивијег записа једначина.

У случају када се ови координатни системи не поклапају, што је приказано на Сл. 1.5., уводе се трансляторна померања $\Delta\vec{p} = \vec{p}' - \vec{p}$ и угаона померања $\Delta\vec{\sigma}$.

Као резултат затварања, еквивалентни кинематички ланац губи 6 степени слободе. Због тога се зглобови еквивалентног ланца деле на два скупа зглобова. Први такозвани *основни* скуп зглобова (u) сачињавају сви осим последњих шест зглобова, а други *допунски* скуп (S) сачињавају последњих шест зглобова.

Треба утврдити који је однос између основних (u_i , $i = 1, \dots, n_u$, n_u је број основних зглобова) и додатних (S_i , $i = 1, \dots, 6$) зглобова у случају малих трансляторних и угаоних померања. Уводе се и мала померања свих зглобова Δq , која се такође могу поделити на

основна Δu и допунска ΔS .



Сл. 1.5. Завршни сегмент еквивалентног ланца

Добија се да важе следеће једначине:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-n_u} (\vec{e}_k \times \vec{r}_{mk}) \cdot \vec{Q}'_j \Delta S_i &= - \sum_{i=1}^{n_u} (\vec{e}_i \times \vec{r}_{mi}) \cdot \vec{Q}'_j \Delta u_i + \Delta \vec{\rho} \cdot \vec{Q}'_j \\ \sum_{i=1}^{n-n_u} \vec{e}_k \cdot \vec{Q}'_j \Delta S_i &= - \sum_{i=1}^{n_u} \vec{e}_i \cdot \vec{Q}'_j \Delta u_i + \Delta \vec{\sigma} \cdot \vec{Q}'_j \end{aligned} \quad (1.30)$$

где је n број зглобова еквивалентног ланца, m редни број завршног сегмента ($m = NT + l$), $k = n_u + i$ и $j = 1, 2, 3$.

Ако се формирају следеће матрице

$$\begin{aligned} A &= [A_{jk}] = -[(\vec{e}_k \times \vec{r}_{mk}) \cdot \vec{Q}'_j] \\ \tilde{A} &= [\tilde{A}_{jk}] = [\vec{e}_k \cdot \vec{Q}'_j] \\ B &= [B_{ji}] = -[(\vec{e}_i \times \vec{r}_{mi}) \cdot \vec{Q}'_j] \\ \tilde{B} &= [\tilde{B}_{ji}] = [\vec{e}_i \cdot \vec{Q}'_j] \\ C &= \begin{bmatrix} \vec{i} \cdot \vec{Q}'_1 & \vec{j} \cdot \vec{Q}'_1 & \vec{k} \cdot \vec{Q}'_1 \\ \vec{i} \cdot \vec{Q}'_2 & \vec{j} \cdot \vec{Q}'_2 & \vec{k} \cdot \vec{Q}'_2 \\ \vec{i} \cdot \vec{Q}'_3 & \vec{j} \cdot \vec{Q}'_3 & \vec{k} \cdot \vec{Q}'_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.31)$$

једначина (1.30) се може написати у облику

$$\begin{bmatrix} A \\ - \\ \tilde{A} \end{bmatrix} \Delta S = \begin{bmatrix} B \\ - \\ \tilde{B} \end{bmatrix} \Delta u + \begin{bmatrix} C \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \Delta \rho + \begin{bmatrix} 0 \\ - \\ C \end{bmatrix} \Delta \sigma \quad (1.32)$$

Овим су уведене све величине које су потребне за формирање математичког модела затвореног кинематичког ланца.

1.5.2 Модел сложеног активног просторног механизма у затвореној форми

Увођењем еквивалентног отвореног ланца може се извести модел динамике затвореног ланца. На завршни сегмент еквивалентног механизма делују сила \vec{R}^* и момент \vec{M}^* , који представљају реакцију основе затвореног ланца. Ова два вектора имају шест компоненти које се представљају са

$$\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \dots, \vec{\sigma}_6)^T = (\vec{R}_x^*, \vec{R}_y^*, \vec{R}_z^*, \vec{M}_x^*, \vec{M}_y^*, \vec{M}_z^*)^T \quad (1.33)$$

Сада се модел активног просторног механизма у затвореној форми добија у облику

$$P = H\ddot{q} + B\sigma + \dot{q}^T C \dot{q} + h^G \quad (1.34)$$

где су матрице H и C и вектор h^G непромењени у односу на сложени отворени кинематички ланац, а матрица B је задата у једначини (1.31).

1.5.3 Алгоритам за формирање модела динамике сложеног активног просторног механизма

Да би се формирао модел сложеног активног просторног механизма, потребно је модификовати Алгоритам 1.2 тако да се

поступком моделирања обухвате и затворени кинематички ланци. Алгоритам написан у псеудокоду који генерише математички модел активног просторног механизма у затвореној форми дат је у Алгоритму 1.3.

Алгоритам 1.3

/* Улазне величине:

N - број низова " + " зглобова;

K_i - број зглобова у i -том низу " + " зглобова;

$MS = MS(i, j)$ - редни број j -тог зглоба у i -том низу " + " зглобова;

I_i - редни број иницијалног зглоба у i -том низу " + " зглобова;

NT - укупан број зглобова;

\vec{G} - вектор гравитације;

m_i - маса i -тог сегмента;

$J_i = (J_{i1}, J_{i2}, J_{i3})$ - моменти инерције i -тог сегмента у односу на главне централне осе инерције;

\vec{e}_i - јединични вектор осе i -тог зглоба;

\vec{r}_{ii} - вектор растојања од i -тог зглоба до центра масе i -тог сегмента;

\vec{r}_{ij} - вектор растојања од j -тог зглоба до центра масе i -тог сегмента кинематичког пара P_{ij} ;

\vec{r}_{01} - вектор растојања од првог зглоба до координатног почетка референтног система;

\vec{e}_1 - јединични вектор осе првог зглоба у референтном систему;

q^i - позиција i -тог сегмента;

Z_i - ознака да је i -ти низ "+" зглобова затворен ($Z_i = 1$) или отворен ($Z_i = 0$);

O_{ij} - ознака да ли j -ти сегмент припада основном ($O_{ij} = 1$) или допунском ($O_{ij} = 0$) скупу сегмената i -тог низа "+" зглобова;

\vec{Q}_k^i , $k = 1, 2, 3$ - вектори оса координатног система затварања за i -ти низ "+" зглобова; Овај координатни систем се дефинише само кад је i -ти низ "+" зглобова затворен ($Z_i = 1$);

$\vec{\sigma}$ - вектор димензије 6 који преставља реакцију затварања ланца;

Назнака - Вектори означени са (\sim) су дати у односу на локални координатни систем */

/* Величине које се израчунавају у моделу:

$Q_i^0 = [\vec{q}_{i1}^0 \ \vec{q}_{i2}^0 \ \vec{q}_{i3}^0]$ - иницијална матрица трансформације из координатног система i -тог сегмента у референтни координатни систем;

$Q_i = [\vec{q}_{i1} \ \vec{q}_{i2} \ \vec{q}_{i3}]$ - матрица трансформације из координатног система везаног за i -ти сегмент у референтни координатни систем;

\vec{r}_{ij} - вектор растојања од j -тог зглоба до центра масе i -тог сегмента;

\vec{e}_i - јединични вектор осе зглоба;

h_i^G - вектор гравитационих ефеката;

H_{ij} - инерцијална матрица;

C_{jk}^i - матрица Кориолисових и центрифугалних ефеката;

B_{ij} - матрица затварања ланца; */

```

/* Одређивање иницијалне позиције механизма */
for (j = 1 ; j <= N ; i++) {
  for (l = max(1, Ij - 1) ; l <= Kj ; l++) {
    i = MS(j, l) ;
    if (l != Ij - 1) {
      if (Kolinearni(ēi , r̃ii))
        Rotiraj(r̃ii) ;
      R̃i = ēi × (r̃ii × ēi) ;
      if (l != 1)
        k = MS(j, l - 1) ;
      else
        k = 0 ;
      if (Kolinearni(ēi0 , r̃ki0))
        Rotiraj(r̃ki0) ;
      R̃i = ēi0 × (r̃ki0 × ēi0) ;
      āi =  $\frac{\tilde{R}_i}{|\tilde{R}_i|}$  ; āi0 =  $-\frac{\tilde{R}_i}{|\tilde{R}_i|}$  ;
      b̃i = ēi × āi ; b̃i0 = ēi0 × āi0 ;
      Qi0 = [ āi0 ēi0 b̃i0 ] [ āi ēi b̃i ]T ;
      r̃ii0 = Qi0 r̃ii ;
    }
    if (l != Kj || (Zj && l == Kj)) {
      if (l != Kj)
        s = MS(j, l + 1) ;
      else
        s = NT + j ;
      r̃is0 = Qi0 r̃is ; ēs0 = Qi0 ēs ;
    }
  }
}
if (Zj) {
  s = NT + j ;
  if (Kolinearni(ēs , r̃ss))
    Rotiraj(r̃ss) ;
  R̃s = ēs × (r̃ss × ēs) ;
  if (Kolinearni(ēs0 , r̃is0))
    Rotiraj(r̃is0) ;
}

```

$$\begin{aligned} \vec{R}_s &= \vec{e}_s^0 \times (\vec{r}_{is}^0 \times \vec{e}_s^0); \\ \tilde{a}_s &= \frac{\vec{R}_s}{|\vec{R}_s|}; \vec{a}_s^0 = -\frac{\vec{R}_s}{|\vec{R}_s|}; \\ \tilde{b}_s &= \vec{e}_s \times \tilde{a}_s; \vec{b}_s^0 = \vec{e}_s^0 \times \vec{a}_s^0; \\ Q_s^0 &= [\vec{a}_s^0 \ \vec{e}_s^0 \ \vec{b}_s^0][\tilde{a}_s \ \tilde{e}_s \ \tilde{b}_s]^T; \\ \vec{r}_{ss}^0 &= Q_s^0 \vec{r}_{ss}; \end{aligned}$$

/* Одређивање позиције механизма */

```

for (j = 1 ; j <= N ; j ++ ) {
  for (l = max(1, Ij - 1) ; l <= Kj ; l ++ ) {
    i = MS(j, l) ;
    if (l != Ij - 1) {
      for (k = 1 ; k <= 3 ; k ++ )
        q_ik^0 = q_ik^0 cos q^i + (1 - cos q^i)(e_i^0 . q_ik^0)e_i^0 + (e_i^0 x q_ik^0) sin q^i ;
      Qi = [ q_i1^0 q_i2^0 q_i3^0 ] ;
      r_ii^0 = Qi r_ii ;
    }
    if (l != Kj || (Zj && l == Kj)) {
      if (l != Kj)
        s = MS(j, l + 1) ;
      else
        s = NT + j ;
      r_is = Qi r_is ; e_s = Qi e_s ;
      for (m = s ; m <= NT ; m ++ )
        if (Povezani(i, m))
          for (k = 1 ; k <= 3 ; k ++ )
            q_mk^0 = q_mk^0 cos q^i + (1 - cos q^i)(e_i^0 . q_mk^0)e_i^0 + (e_i^0 x q_mk^0) sin q^i ;
      if (Zj) {
        s = NT + j ;
        for (k = 1 ; k <= 3 ; k ++ )
          q_sk^0 = q_sk^0 cos q^i + (1 - cos q^i)(e_i^0 . q_sk^0)e_i^0 + (e_i^0 x q_sk^0) sin q^i ;
      }
    }
  }
}
if (Zj) {

```

```

s = NT + j ;
for (k = 1 ; k <= 3 ; k++)
   $\vec{q}_{sk} = \vec{q}_{sk}^0 \cos q^i + (1 - \cos q^i)(\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{sk}^0)\vec{e}_i + (\vec{e}_i \times \vec{q}_{sk}^0) \sin q^i ;$ 
   $Q_s = [\vec{q}_{s1} \vec{q}_{s2} \vec{q}_{s3}] ;$ 
   $\vec{r}_{ss} = Q_i \vec{r}_{ss} ;$ 
}
}

/* Одређивање вектора  $h^G$  и матрица  $H$ ,  $C$  и  $B$  */
for (j = 1 ; j <= N ; j++) {
  for (l = 1 ; l <= K_j - 1 ; l++) {
    i = MS(j, l) ;
    for (k = max(l + 1, I_j) ; k <= K_j ; k++) {
      s = MS(j, k) ; t = MS(j, k - 1) ;
       $\vec{r}_{si} = \vec{r}_{ti} - \vec{r}_{ts} + \vec{r}_{ss} ;$ 
    }
  }
  if (Z_j) {
    s = NT + j ;
    for (l = 1 ; l <= K_j ; l++) {
      i = MS(j, l) ;
      if (O_{ji}) {
        t = MS(j, K_j) ;
         $\vec{r}_{si} = \vec{r}_{ti} - \vec{r}_{ts} + \vec{r}_{ss} ;$ 
        for (k = 1 ; k <= 3 ; k++) {
           $B_{ki} = -((\vec{e}_i \times \vec{r}_{si}) \cdot \vec{Q}'_k) ;$ 
           $B_{k+3,i} = -(\vec{e}_i \cdot \vec{Q}'_k) ;$ 
        }
      }
    }
  }
}
for (j = 1 ; j <= N ; j++)
  for (l = I_j ; l <= K_j ; l++) {
    i = MS(j, l) ;
    for (m = 1 ; m <= l ; m++) {
      t = MS(j, m) ;

```

$$\begin{aligned}
& h_t^G = m_i((\vec{e}_t \times \vec{r}_{it}) \cdot \vec{G}) ; \\
& \text{for } (p = m ; p \leq l ; p++) \{ \\
& \quad s = MS(j, p) ; \\
& \quad H_{ts} = m_i((\vec{e}_t \times \vec{r}_{it}) \cdot (\vec{e}_s \times \vec{r}_{is})) + \sum_{v=1}^3 (\vec{e}_t \cdot \vec{q}_{iv})(\vec{e}_s \cdot \vec{q}_{iv})J_{iv} ; \\
& \quad \} \\
& \text{for } (p = 1 ; p \leq l ; p++) \{ \\
& \quad s = MS(j, p) ; \\
& \quad \text{for } (k = 1 ; k \leq p ; k++) \{ \\
& \quad \quad u = MS(j, k) ; \vec{e}_{us} = \vec{e}_u \times \vec{e}_s ; \\
& \quad \quad \vec{e}_{tu} = \vec{e}_t \times \vec{e}_u ; \vec{e}_{ts} = \vec{e}_t \times \vec{e}_s ; \\
& \quad \quad C_{su}^t = m_i((\vec{e}_t \times \vec{r}_{it}) \cdot (\vec{e}_u \times (\vec{e}_s \times \vec{r}_{is}))) \\
& \quad \quad + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^3 ((\vec{e}_t \cdot \vec{q}_{iv})\vec{e}_{us} + (\vec{e}_s \cdot \vec{q}_{iv})\vec{e}_{tu} + (\vec{e}_u \cdot \vec{q}_{iv})\vec{e}_{ts}) \cdot \vec{q}_{iv}J_{iv} ; \\
& \quad \quad \} \\
& \quad \} \\
& \} \\
& \}
\end{aligned}$$

Овим алгоритмом се формира математички модел динамике сложеног активног просторног механизма у затвореној форми. Овај алгоритам је, у другом поглављу овог рада, имплементиран коришћењем система за управљање базама података. Сви изрази модела су меморисани у специјалној структури података реализованој помоћу базе података. Над добијеном базом података се за све величине модела могу израчунати нумеричке вредности и формирати аналитички изрази било у чисто симболичком, било у нумеричко симболичком облику. Исто тако, ажурирањем базе података се постиже смањивање рачунске сложености модела што је описано у трећем поглављу рада.

Глава 2

Имплементација алгоритама за генерисање математичких модела динамике роботских механизама

У овом поглављу је описана имплементација алгоритама за формирање математичких модела: простих отворених (Алгоритам 1.1) и сложених отворених кинематичких ланаца (Алгоритам 1.2), као и сложених активних просторних механизма који укључују и затворене кинематичке ланце (Алгоритам 1.3). Имплементација је извршена у програмском језику С под UNIX оперативним системом. Коришћен је и систем за управљање базама података db_VISTA.

У бази података је дефинисана структура података, погодна за манипулисање симболима модела динамике роботског механизма. Навигацијом кроз базу података могу се једноставно срачунати нумеричке вредности и/или аналитички изрази за одговарајуће величине модела. Описани су и алгоритми за наведена срачунавања.

На крају поглавља је дат пример генерисања модела за један индустријски роботски механизам са шест ротационих степени слобде.

2.1 Модел базе података

Уместо да се математички модел добије у виду програма који за улазне величине израчунава нумеричке вредности одговарајућих роботских величина, овде се предлаже меморисање комплетног модела роботског механизма у бази података.

Предности оваквог приступа су у томе што се добија на комплетности (може се израчунавати жељена величина модела), и у томе што је омогућено даље ажурирање добијене базе података у циљу смањивања нумеричке сложености модела. Увођењем базе података, процес моделирања роботских механизма је подигнут на виши ниво апстракције.

Исто тако, поред могућности срачунавања величина модела директно у бази података, не губи се могућност формирања модела у виду програма написаног у неком програмском језику. Из базе података се једноставним алгоритмом може генерисати програмски код у одговарајућем програмском језику.

Први корак у приступу моделирању роботских механизма, коришћењем базе података, је да се дефинише такав модел базе података, који ће омогућити једноставно и ефикасно меморисање модела роботског механизма, као и имплементацију ефикасних алгоритама за одговарајућа срачунавања над добијеном базом података и за ажурирање базе података у циљу смањивања нумеричке сложености.

Да би се формирала структура података погодна за меморисање модела роботског механизма, овде је извршена анализа алгоритама за формирање модела. Формирана је таква структура података која омогућује представљање математичких израза, то јест повезивање променљивих модела роботског механизма тако да се може реконструисати математички израз у којима оне учествују.

Овакав поступак се може користити не само за формирање математичких модела роботских механизма, већ и за друге задатке где је потребно представљати математичке изразе, те може да се користи приликом конструкције компајлера и у задацима симболичког програмирања.

Утврђено је да математичке релације, које сачињавају модел роботског механизма, представљају скуп израза облика:

$$Y = S_1 + \dots + S_n \quad (2.1)$$

у којима је сваки сабирак облика:

$$S_i = K_i \cdot X_1^{E_1} \cdot \dots \cdot X_l^{E_l} \quad (2.2)$$

и где су:

Y - роботска величина која се израчунава датом релацијом;

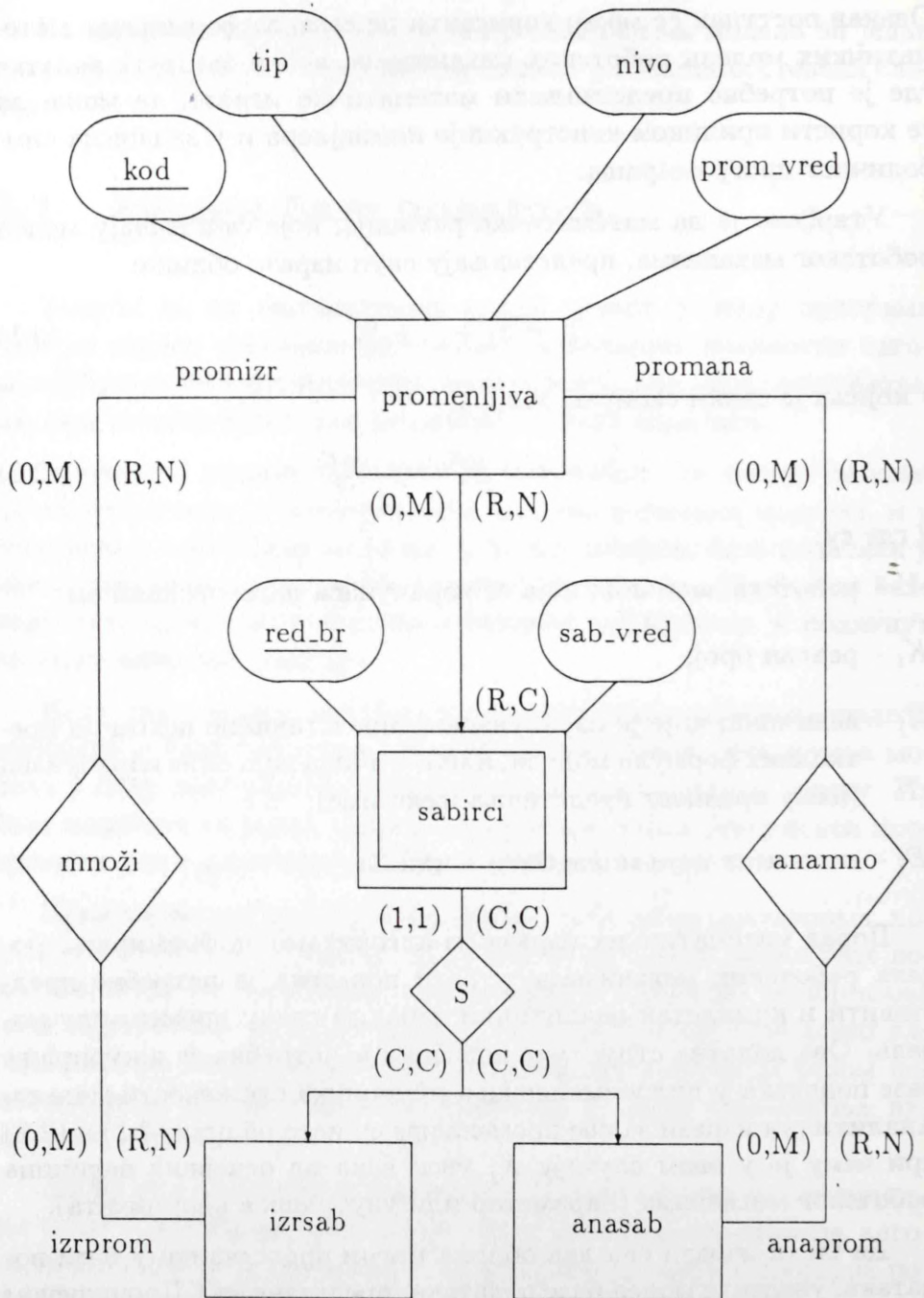
K_i - реалан број;

X_j - величина, чије је израчунавање представљено неком од претходних формула модела, или величина која се не израчунава (њену вредност представља њено име);

E_j - експонент који може бити 1 или 2.

Поред математичких израза из алгоритама за формирање модела роботских механизма, у бази података је потребно представити и комплетан аналитички израз за сваку променљиву модела. Ова додатна структура података је потребна за ажурирање базе података у циљу смањивања нумеричке сложености модела. Аналитички изрази за све променљиве су исто облика (2.1) и (2.2) при чему је у овом случају X_j увек нека од основних величина роботског механизма (параметар или унутрашња координата).

Да би се изрази ова два облика могли представити у бази података, уведен је модел базе података, представљен у Проширеном Моделу Објекти-Везе и приказан на Сл. 2.1. У [Рас95а] је дат модел базе података за представљање само првог типа израза.



Сл. 2.1. Модел базе података

Објекат *promenljiva* се користи за меморисање свих променљивих (нпр. Y, X_1, \dots, X_l), и његове компоненте су следећи атрибути: *kod*, *tip*, *prom_vred* и *nivo*.

Атрибут *kod* садржи јединствени код који се додељује променљивој и представља јединствени кључ објекта.

Атрибут *tip* узима вредности из скупа $\{ '0', '1', '2', '3' \}$, где '0' означава да променљива има константну нумеричку вредност записану у атрибуту *prom_vred*. Вредност '1' означава да је та променљива један од параметара роботског механизма (нпр. маса, момент инерције,...), док '2' означава да та променљива представља неку од унутрашњих координата механизма или синус или косинус неке од унутрашњих координата. И вредност '1' и вредност '2' означавају да се та променљива не израчунава неким од израза, јер представља улазну величину. Две различите вредности су уведене јер су параметри механизма непроменљиви за задату конфигурацију и могу се заменити реалним бројем (нумеричко - симболичке методе), док се унутрашње координате мењају у времену и увек у изразима модела фигуришу као променљиве. Вредност '3' означава да је израчунавање те променљиве описано формулом која је представљена помоћу објекта *sabirci* и везе *množi*.

Атрибут *nivo* је уведен да би се омогућило израчунавање роботских величина навигацијом кроз базу података одоздо нагоре. Његова вредност представља број корака потребних за израчунавање те променљиве. Променљиве које се не израчунавају изразом (променљиве са вредношћу атрибута *tip* '0', '1' и '2') имају 0 као вредност овог атрибута; све променљиве које се израчунавају директно преко неке од поменутих променљивих добијају 1 за вредност атрибута, итд., зависно од броја корака потребних за израчунавање променљиве.

Објекат *sabirci* је слаби објекат објекта *promenljiva* и служи за повезивање променљиве са њеним сабирцима; састоји се од наслеђеног кључа *kod* и атрибута *red_br* и *sab_vred*.

Вредност атрибута *kod* се преноси од променљиве која је на левој страни знака једнакости у изразу којим се променљива израчунава (Y), атрибут *red_br* је додат да би се оформио јединствени

кључ и представља редни број сваког сабирка (i), а у атрибуту *sab_vred* се меморише вредност константе (K_i).

Овај објекат се специјализује на два објекта *izrsab* и *anasab*. Ова специјализација је потребна да би се разликовали изрази који формирају модел, од комплетних аналитичких изрази променљивих модела. Тако објекат *izrsab* представља сабирке који учествују у изразима првог типа, а објекат *anasab* представља сабирке из комплетних аналитичких изрази. Ниједан од ових типова објекта нема додатне атрибуте, али имају различиту везу са објектом *promenljiva*.

Помоћу везе *množi* сваки сабирак изрази првог типа је повезан са својим чиниоцима, који су такође представљени као појављивања објекта *promenljiva* (X_j). Пошто сабирак не мора да има чиниоце, а може и да их има више, кардиналност везе $(0, M)$ је одређена у смеру од објекта *sabirci* до објекта *promenljiva*. Аналогно томе, променљива не мора да буде чинилац ни у једном сабирку, а може и да учествује у више сабирака (од различитих изрази), тако да је исти кардиналитет везе добијен и у супротном смеру.

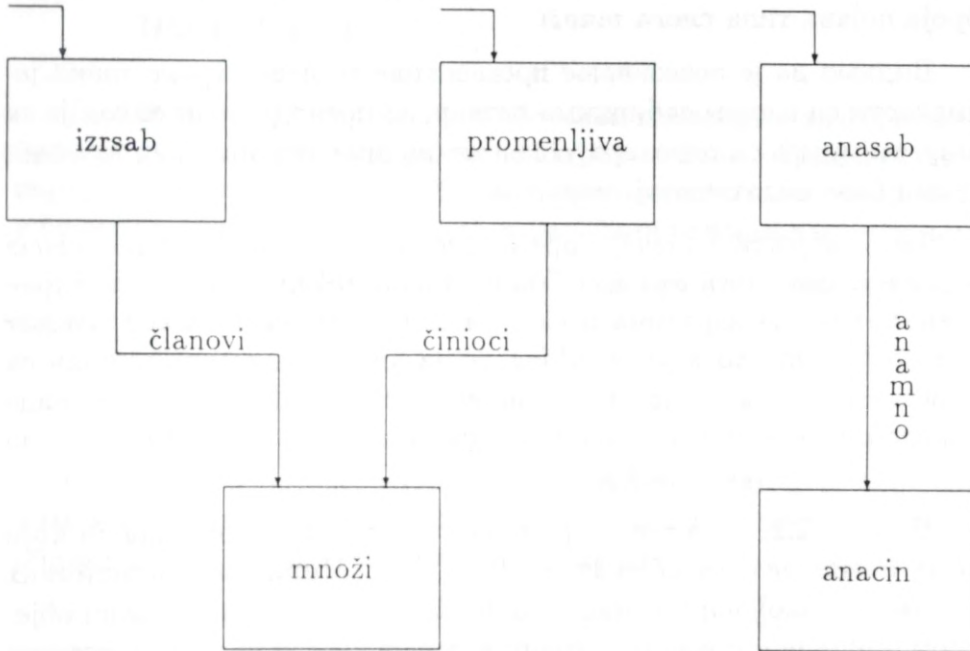
Аналогном везом *anatno* се остварује повезивање сабирака комплетних аналитичких изрази са њиховим чиниоцима, који су такође појаве објекта *promenljiva*. Кардиналитети везе су исти као код везе *množi*.

Описана структура се лако може имплементирати било у релационом, било у мрежном моделу базе података.

2.2 Имплементација модела базе података

Предложени модел података је имплементиран у систему за управљање базама података *db_VISTA* комбинацијом релационог и мрежног модела базе података. На Сл. 2.2. је приказан добијени дијаграм шеме базе података. Правоугаона поља означавају

типове слогова, именоване линије приказују скупове, а неименоване линије са стрелицама означавају да се типу слога у кога стрелица показује, директно приступа.



Сл. 2.2. Дијаграм шеме базе података

Сваки објекат са Сл. 2.1. се пресликао у тип слога са одговарајућим обележјима.

Тип слога *promenljiva* је настао од објекта *promenljiva* и његова обележја су: *prom_kod*, *tip*, *prom_vred* и *nivo*.

Тип слога *izrsab* је настао од објекта *izrsab* који је специјализација објекта *sabirci* и његова обележја су: *sab_kod*, *zred_br* и *sab_vred*. Обележје *sab_kod* је додато да би се остварила веза између типова слога *promenljiva* и *izrsab*. Пошто је објекат *sabirci* слаби објекат објекта *promenljiva*, веза од типа слога *promenljiva* ка типу слога *izrsab* се остварује преко релације између њих. У релацији ће бити оне појаве типова слога које имају једнаку вредност обележја *prom_kod* и *sab_kod*.

Пошто је веза *množi* типа "више према више", потребно је

увести нови тип слога *množi*, који нема своја обележја и служи за остваривање те везе. Свака појава типа слога *izrsab* се повезује са својим чиниоцима преко скупова *činioci* и *članovi* и одговарајућег броја појава типа слога *množi*.

Видимо да је повезивање променљиве са леве стране знака једнакости са њеним сабирцима остварено преко релације, док је за везу сабирака са одговарајућим чиниоцима искоришћен мрежни модел базе података, тј. скупови.

Типу објекта *anasab*, који је специјализација објекта *sabirci* одговара тип слога *anasab*. Тип слога *anasab* представља сабирке у аналитичким изразима и састоји се од обележја: *a_kod*, *ared_br* и *a_vred*. Тип слога *promenljiva*, је на аналоган начин повезан са типом слога *anasab* као и са типом слога *izrsab*, стим да су овде у релацији оне појаве типова слога које имају исту вредност за обележја *prom_kod* и *a_kod*.

На Сл. 2.2. се види да је додат и нови тип слога *apacin* који нема еквивалентни објекат на Сл. 2.1. Чиниоци аналитичких израза су такође променљиве, и на Сл. 2.1. су представљени објектом *promenljiva*, али је погодније за њих увести посебан тип слога *apacin* који има обележја *cin_kod* и *stepen*. У обележју *stepen* се чува степен чиниоца.

Веза *apatno*, која повезује типове објекта *promenljiva* и *anasab*, се имплементира преко скупа *apatno*, који повезује појаве типа слога *apacin* са појавама типа слога *anasab*. И у овом случају је у питању веза "више према више", али се не уводи додатни тип слога већ се омогућује понављање појава типа слога *apacin*, јер се показало да је такво решење далеко ефикасније што се тиче брзине и уштеде меморијског простора.

У Прилогу 2.1 је приказана комплетна шема базе података, преко спецификације која се користи у систему за управљање базама података *db_VISTA*.

2.3 Меморисање комплетног модела роботског механизма у бази података

Да би се комплетан модел роботског механизма меморисао у бази података, потребно је сваки израз модела обрадити одговарајућом процедуром, која ће све променљиве израза меморисати у бази података и извршити одговарајућа повезивања између њих.

На примеру је приказана процедура за представљање следећег израза у бази података:

$$r_{ij} = Q_{ij1} \cdot \tilde{r}_{i1} + Q_{ij2} \cdot \tilde{r}_{i2} + Q_{ij3} \cdot \tilde{r}_{i3}.$$

Овај израз је преузет из алгоритама Алгоритам 1.1, Алгоритам 1.2 и Алгоритам 1.3, стим што је овде записан у скаларном облику док је у поменутиим алгоритмима дат у векторском облику.

У алгоритму Алгоритам 2.1 је дата процедура написана у псеудокоду, која меморише дати израз у бази података.

Алгоритам 2.1

```

Izraz (p1, p2, p3, i, j)
/* p1 = r, p2 = Q, p3 = r̃ */
{
  nivo = 0;
  for (k = 0 ; k <= 2 ; k++) {
    kod1[k] = Kodiraj(p2, i, j, k + 1);
    nivo = MaksNivo(kod1[k], nivo);
    kod2[k] = Kodiraj(p3, i, i, k + 1);
  }
  kod = Kodiraj(p1, i, i, j);
  PostProm(kod, nivo + 1);
  for (k = 0 ; k <= 2 ; k++) {
    PostSab(kod, k + 1, 1.00);
  }
}

```

```

NadjiCin(kod1[k]);
if (j! = 1)
  NadjiCin(kod2[k]);
else
  PostCin(kod2[k], '1');
}
}

```

Процедура $Kodiraj(p, i, j, k)$ одређује јединствени кључ kod за дату променљиву p_{ijk} .

Процедура $MaksNivo(kod, nivo)$ служи да прочита вредност обележја $nivo$ за променљиву задату обележјем kod из базе података и да врати већу од прочитане и вредности задате у променљивој $nivo$.

Процедура $PostProm(kod, nivo)$ меморише променљиву задату својим кодом kod као појаву типа слога $promenljiva$ заједно са одговарајућим вредностима обележја ($tip='3'$, $nivo$ је задат).

Процедура $PostSab(kod, rbr, vred)$ меморише сабирак као појаву типа $sabirci$ са одговарајућим обележјима ($sab_kod= kod$, $sred_br= rbr$ и $sab_vred= vred$). Аутоматски је успостављена релација између тог сабирка и променљиве са истим кодом. Исто тако, тај сабирак се поставља за текућег власника скупа $ciniosi$.

Процедура $NadjiCin(kod)$ проналази променљиву задату кодом у бази података, и повезује је са одговарајућим сабирком. Повезивање се остварује на следећи начин. Прво се пронађена променљива постави за текућег власника скупа $clanovi$, затим се меморише појава типа слога $tnoži$ и повеже се као члан скупова $ciniosi$ и $clanovi$.

Процедура $PostCin(kod, tip)$ врши аналогна повезивања, али уместо проналажења, она меморише променљиву са задатим кодом (tip је задат, $nivo= 0$).

Прво се све променљиве са десне стране знака једнакости у изразу кодирају и пронађе се максимални ниво свих тих променљивих. Пошто су променљиве \tilde{r}_{ijk} параметри роботског механизма,

за њих је вредност обележја *nivo* једнака нули, тако да не може бити максимална вредност. Као друго, променљива са леве стране знака једнакости у изразу се кодира и меморише у бази података као појава типа слога *promenljiva*.

Сваки од три сабирка се меморише као појава типа слога *sabir-ci* заједно са одговарајућом вредношћу обележја *sred_br* и *sab_vred* = 1, а затим се повеже са својим чиниоцима. У случају променљивих Q_{ijk} које су, пошто су израчунате неким од претходних израза модела обрађеног одговарајућом процедуром, већ меморисане у бази података, потребно је извршити само повезивање. Пошто се променљиве \tilde{r}_{iik} за $j = 1$ појављују по први пут у моделу, оне се прво морају меморисати у бази података као појаве објекта *promenljiva*, па тек онда повезати са одговарајућим сабирком. За $j = 2$ и $j = 3$ извршава се само повезивање јер је променљива већ меморисана за $j = 1$.

У другом делу Прилога 2.1 је дат листинг ове процедуре, написан у програмском језику С, као и листинг процедура које се позивају наведеном процедуром.

На аналоган начин се обрађују сви изрази из модела роботског механизма. На тај начин се комплетан модел меморише у бази података и све даље операције над моделом се извршавају ажурирањем базе података. Програм, који извршава меморисање модела динамике роботског механизма, је имплементиран у програмском језику С.

2.4 Алгоритми за срачунавање нумеричких вредности и/или аналитичких израза роботских величина

Навигацијом кроз базу података могу се формирати анали-

тички изрази и/или израчунати нумеричке вредности жељених роботских величина. Пре израчунавања потребно је учитати вредности параметара роботског механизма. То значи да се посебним програмом попуне вредности обележја *prom_vred* за оне променљиве које представљају параметре механизма.

Овако генерисани модел роботског механизма је у потпуно симболичком облику, јер се све величине модела третирају као променљиве. Могуће је оставити модел до краја поступка смањивања нумеричке сложености у таквом облику, а могуће је прећи и на нумеричко-симболички облик, где се параметри роботског механизма третирају као бројне вредности.

Описани су алгоритам за формирање аналитичких израза и алгоритам за израчунавање нумеричких вредности жељених величина модела. Описан је и алгоритам за елиминисање редувантних математичких операција типа множења нулом и јединицом и сабирања са нулом, којим се смањује број рачунских операција потребних за израчунавање модела.

2.4.1 Алгоритам за елиминисање редувантних операција типа множења и сабирања са неутралним елементом

Пре израчунавања нумеричких вредности роботских величина и формирања аналитичких израза, врши се елиминисање редувантних математичких операција као што су множење нулом и јединицом и сабирање са нулом. Нуле и јединице се појављују као вредности параметара роботског механизма ако се они третирају као бројеви и као вредности такозваних константних променљивих (гравитациони вектор).

У Алгоритму 2.2 је у псеудокоду написан алгоритам који извршава елиминисање редувантних операција.

Алгоритам 2.2

```
Eliminisi()
{
    kpr.nivo = radi = 1;
    kpr.prom_kod = 0;
    if (!NadjiKl(PR2, kpr))
        if (SledKl(PR2))
            UcitSl(pr);
        else
            radi = 0;
    else
        UcitSl(pr);
    while (radi) {
        radi1 = 1;
        ksab.sab_kod = pr.prom_kod;
        ksab.sred_br = 0;
        if (!NadjiKl(SAB, ksab))
            if (SledKl(SAB))
                UcitSl(sab);
            else
                radi1 = 0;
        else
            UcitSl(sab);
        while (radi1 && sab.sab_kod == ksab.sab_kod) {
            PostVlSl(ČINIOCI);
            while (NadjiCl(ČINIOCI)) {
                NadjiVl(ČLANOVI);
                UcitSl(pc);
                if (pc.tip == '0' || pc.tip == '1') {
                    if (pc.prom_vred == 0.0)
                        RazvSve();
                    else if (pc.prom_vred == 1.0)
                        Razvezi(pc);
                    else if (pc.prom_vred == -1.0) {
                        Razvezi(pc);
                        PromZnak(sab);
                    }
                }
            }
        }
    }
}
```

```

    }
  }
}
if (SledKl(SAB))
  UcitSl(sab);
else
  radi1 = 0;
}
if (SledKl(PR2))
  UcitSl(pr);
else
  radi = 0;
}
}

```

Процедуре $Nadjikl(KL, kp)$ и $SledKl(KL)$ служе за рад са кључевима. Процедура $Nadjikl(KL, kp)$ проналази у бази слог, који има вредност задату променљивом kp записану у кључу KL , ако га има. Тај слог постаје текући слог а његов кључ текући кључ. Процедура $SledKl(KL)$ проглашава за текући слог, онај слог који има следећу већу вредност кључа KL од текућег кључа. Исто тако вредност кључа текућег слога постаје и текући кључ.

Процедуром $UcitSl(p)$ се у променљиву p учитава вредност текућег слога.

Процедуре $PostVlSl(SK)$, $Nadjicl(SK)$ и $Nadjivl(SK)$ служе за рад са скуповима. Процедура $PostVlSl(SK)$ поставља текући слог за текућег власника скупа SK . Процедура $Nadjicl(SK)$ налази следећег члана скупа SK , а процедура $Nadjivl(SK)$ налази власника текућег слога у скупу SK .

Ово су неке од основних процедура за манипулацију базом података и биће кориштене и у даљем тексту. Како се буде појављивала нека нова процедура, тако ће бити и објашњена.

Процедуре $RazvSve()$, $Razvezi(p)$ и $PromZnak(s)$ су сложеније процедуре, које позивају неке од основних процедура. Ако је један од чиниоца једнак нули, процедура $RazvSve()$ развезује све чиниоце и сабирак из израза. Процедура $Razvezi(p)$ развезује чинилац

p из израза ако му је вредност јединица. У случају кад је вредност чиниоца -1 , потребно је, поред развезивања, променити знак константи сабирка којем припада тај чинилац, што се постиже процедуром $PromZnak(s)$.

2.4.2 Алгоритам за формирање аналитичких израза роботских величина

Пошто су аналитички изрази одговарајућих роботских величина потребни и за даље смањивање броја рачунских операција, идеја је да се и комплетни аналитички изрази свих роботских величина меморишу у бази података. За ту сврху се користе типови слогова $anasab$ и $anacin$ као што је већ описано.

Алгоритам 2.3 даје у псеудокоду написан алгоритам за формирање аналитичких израза у потпуном облику за све променљиве величине модела роботског механизма.

Алгоритам 2.3

```
Formiraj()  
{  
  kpr.nivo = radi = 1;  
  kpr.prom_kod = 0;  
  if (!Nadjikl(PR2, kpr))  
    if (Sledkl(PR2))  
      UcitSl(pr);  
  else  
    radi = 0;  
  else  
    UcitSl(pr);  
  AnulIzr(aizr);  
  while (radi) {  
    radi1 = 1;  
    ksab.sab_kod = pr.prom_kod;
```

```

ksab.sred_br = 0;
if (!Nadjikl(SAB, ksab))
  if (SledKl(SAB))
    UcitSl(sab);
  else
    radi = 0;
else
  UcitSl(sab);
AnulIzr(asab);
while (radi && sab.sab_kod == ksab.sab_kod) {
  PostVlSl(ČINIOCI);
  while (Nadjicl(ČINIOCI)) {
    Nadjivl(ČLANOVI);
    UcitSl(pc);
    MnoziIzr(asab, pc);
  }
  SabIzr(aizr, asab);
  if (SledKl(SAB))
    UcitSl(sab);
  else
    radi = 0;
}
SinCos(aizr);
PrepIzr(pr, aizr);
if (SledKl(PR2))
  UcitSl(pr);
else
  radi = 0;
}
}

```

Процедура *AnulIzr(izr)* анулира променљиву *izr* и припрема је за смештање аналитичког израза. Процедура *MnoziIzr(asab, pc)* израз, који је већ генерисан у *asab*, множи аналитичким изразом променљиве *pc* који је меморисан у бази података и резултат смешта у *asab*. Процедура *SabIzr(aizr, asab)* на досад генерисани израз *aizr* додаје израз *asab*. Процедуром *SinCos(aizr)* се из

израза air отклањају сви тригонометријски идентитети облика $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, а процедура $PrepIzr(pr, air)$ врши меморисање добијеног аналитичког израза air у бази и његово повезивање са променљивом pr .

Основна идеја овог алгоритма је да се, навигацијом по бази у растућем редоследу обележја $nivo$, врши формирање израза за све променљиве тог нивоа, преко већ генерисаних израза променљивих са нижих нивоа, и њихово меморисање у бази података. У току формирања аналитичких израза врши се и елиминисање тригонометријског идентитета $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, да би се одмах добили што једноставнији аналитички изрази.

2.4.3 Алгоритам за израчунавање нумеричких вредности роботских величина

Сада се може приступити израчунавању нумеричких вредности. Треба напоменути да се, пре израчунавања, попуњавају вредности обележја $prom_vred$ за оне променљиве које представљају унутрашње координате роботског механизма ($q^i, \sin q^i, \cos q^i$). Те вредности су улазни подаци за програм који израчунава нумеричке вредности. Дат је алгоритам за нумеричко израчунавање роботских величина написан у псеудокоду у Алгоритму 2.4.

Алгоритам 2.4

```

Izracunaj()
{
  kpr.nivo = radi = 1;
  kpr.prom_kod = 0;
  if (!NadjKl(PR2, kpr))
    if (SledKl(PR2))
      UcitSl(pr);
  else
    radi = 0;
}

```

```

else
  UcitSl(pr);
while (radi) {
  radi1 = 1;
  vred = 0.0;
  ksab.sab_kod = pr.prom_kod;
  ksab.sred_br = 0;
  if (!Nadjikl(SAB, ksab))
    if (SledKl(SAB))
      UcitSl(sab);
    else
      radi1 = 0;
  else
    UcitSl(sab);
  while (radi1 && sab.sab_kod == ksab.sab_kod) {
    pomvred = 1.0;
    PostVlSl(ČINIOCI);
    while (Nadjicl(ČINIOCI)) {
      Nadjivl(ČLANOVI);
      UcitSl(pc);
      pomvred* = pc.prom_vred;
    }
    vred+ = pomvred;
    if (SledKl(SAB))
      UcitSl(sab);
    else
      radi1 = 0;
  }
  PromVred(pr, vred);
  if (SledKl(PR2))
    UcitSl(pr);
  else
    radi = 0;
}
}

```

Процедура *PromVred*(*pr*, *vred*) променљивој *pr* додељује изра-

чунату вредност *vred*.

Основна идеја овог алгоритма је да се, навигацијом по бази по растућем редоследу обележја *nivo*, врши израчунавање вредности за све променљиве тог нивоа и меморисање тих вредности у обележју *prom_vred*. Када се обиђу сви нивои и све променљиве имају израчунату вредност. Не може се догодити да у току рада наиђемо на случај кад нека вредност није израчуната, јер све променљиве са десне стране знака једнакости у изразу имају вредност обележја *nivo* бар за један мању него променљива са леве стране знака једнакости, а тим променљивима је већ израчуната вредност, јер су обрађени сви нивои мањи од текућег.

2.5 Пример

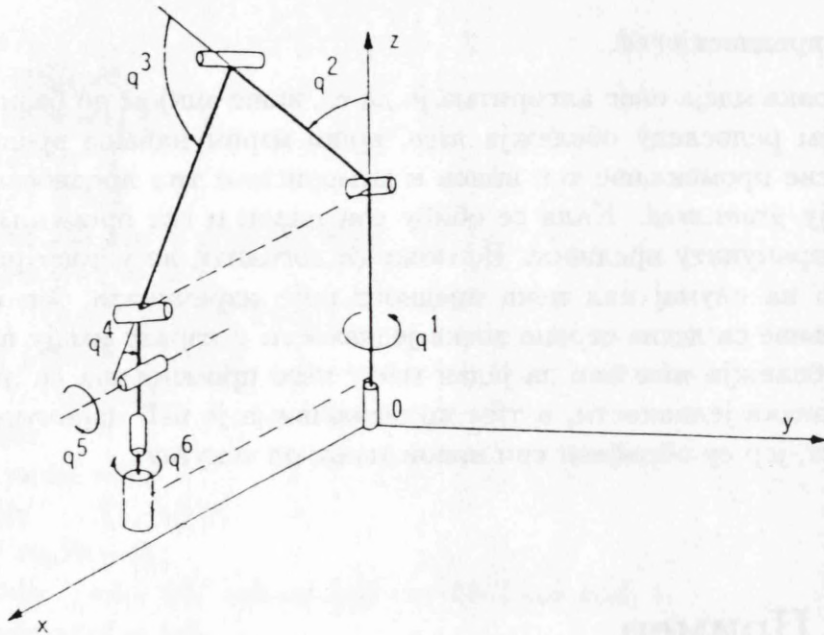
На примеру индустријског роботског механизма са шест ротационих степени слободе је илустровано генерисање математичког модела динамике робота. У бази података је меморисан комплетан математички модел механизма. Приказани су резултати добијени применом алгоритама за нумеричка и симболичка срачунавање над генерисаном базом података (Алгоритам 2.2, Алгоритам 2.3 и Алгоритам 2.4).

2.5.1 Роботска конфигурација

Пример 2.1 даје стандардну зглобну конфигурацију роботског индустријског механизма са шест сегмената и шест ротационих зглобова.

Пример 2.1

На Сл. 2.3. је приказана роботска конфигурација, а у Табели 2.1. су дате и вредности параметара роботског механизма.



Сл. 2.3 Конфигурација роботског механизма

Табела 2.1. Параметри роботског механизма

i	1	2	3	4	5	6
e_{i1}	0.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0
e_{i2}	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
e_{i3}	1.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
r_{ii1} [m]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
r_{ii2} [m]	0.0	0.4	0.0	0.075	0.075	0.15
r_{ii3} [m]	0.4	0.0	-0.4	0.0	0.0	0.0
$r_{i,i+1,1}$ [m]	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$r_{i,i+1,2}$ [m]	0.0	-0.4	0.0	-0.075	-0.075	-0.15
$r_{i,i+1,3}$ [m]	-0.4	0.0	0.4	0.0	0.0	0.0
m_i [kg]	0.0	5.0	5.0	1.0	1.0	2.0
J_{i1} [kg/m ²]	0.0	0.25	0.25	0.002	0.002	0.01
J_{i2} [kg/m ²]	0.0	0.01	0.25	0.002	0.002	0.002
J_{i3} [kg/m ²]	0.2	0.25	0.01	0.002	0.002	0.01

За дату роботску конфигурацију је генерисан математички модел, по алгоритму за моделирање простих кинематичких ланаца

(Алгоритам 1.1), и комплетан је меморисан у бази података. Навигацијом кроз базу података се могу израчунати нумеричке вредности за компоненте вектора h^G и матрица H и C (једначина (1.23)), а могу се формирати и аналитички изрази за наведене променљиве.

2.5.2 Нумеричка израчунавања

У Табели 2.2 су приказане улазне вредности унутрашњих координата q^i , $i = 1, \dots, 6$ и вредности за компоненте вектора h^G и матрица H и C , добијене применом алгоритма Алгоритам 2.4.

Табела 2.2. Улазне и излазне нумеричке вредности

i	1	2	3	4	5	6
q^i	-1.57080	-0.52360	-2.09439	-0.52360	0.0	0.0
h_i^G	0.0	70.632298	25.506203	0.000031	0.0	0.0
H_{i1}	4.906043	0.0	0.0	0.0	0.540003	-0.002
H_{i2}	0.0	6.735289	2.836653	0.475251	0.0	0.0
H_{i3}	0.0	2.836653	5.748018	1.306634	0.0	0.0
H_{i4}	0.0	0.475251	1.306634	0.475250	0.0	0.0
H_{i5}	0.540003	0.0	0.0	0.0	0.197625	0.0
H_{i6}	-0.002	0.0	0.0	0.0	0.0	0.002
C_{i1}^1	0.0	-0.425643	4.320193	0.960005	0.0	0.0
C_{i2}^1	-0.425643	0.0	0.0	0.0	0.002	0.0
C_{i3}^1	4.320193	0.0	0.0	0.0	0.002	0.0
C_{i4}^1	0.960005	0.0	0.0	0.0	0.002	0.0
C_{i5}^1	0.0	0.002	0.002	0.002	0.0	0.0
C_{i6}^1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C_{i1}^2	0.425643	0.0	0.0	0.0	-0.296874	0.0
C_{i2}^2	0.0	0.0	4.08268	0.960004	0.0	0.0
C_{i3}^2	0.0	4.08268	4.08268	0.960004	0.0	0.0
C_{i4}^2	0.0	0.960004	0.960004	0.960004	0.0	0.0
C_{i5}^2	-0.296874	0.0	0.0	0.0	0.540002	-0.001
C_{i6}^2	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.001	0.0

Табела 2.2. Наставак

i	1	2	3	4	5	6
C_{i1}^3	-4.320193	0.0	0.0	0.0	-0.764528	0.0
C_{i2}^3	0.0	-4.08268	0.0	0.480001	0.0	0.0
C_{i3}^3	0.0	0.0	0.0	0.480001	0.0	0.0
C_{i4}^3	0.0	0.480001	0.480001	0.480001	0.0	0.0
C_{i5}^3	-0.764528	0.0	0.0	0.0	0.270001	-0.001
C_{i6}^3	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.001	0.0
C_{i1}^4	-0.960005	0.0	0.0	0.0	-0.296875	0.0
C_{i2}^4	0.0	-0.960004	-0.480001	0.0	0.0	0.0
C_{i3}^4	0.0	-0.480001	-0.480001	0.0	0.0	0.0
C_{i4}^4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C_{i5}^4	-0.296875	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.001
C_{i6}^4	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.001	≈ 0.0
C_{i1}^5	0.0	0.296874	0.764528	0.296875	0.0	0.0
C_{i2}^5	0.296874	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001
C_{i3}^5	0.764528	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001
C_{i4}^5	0.296875	0.0	0.0	0.0	0.0	0.001
C_{i5}^5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C_{i6}^5	0.0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.0
C_{i1}^6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C_{i2}^6	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.001	0.0
C_{i3}^6	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.001	0.0
C_{i4}^6	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.001	0.0
C_{i5}^6	0.0	-0.001	-0.001	-0.001	0.0	0.0
C_{i6}^6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

За ова израчунавања је укупно било потребно 10268 множења и 6166 сабирања. Пре примене алгорита за нумеричко израчунавање (Алгоритам 2.4) је примењен алгоритам за елиминисање редувантних операција множења нулом и јединицом и сабирања са нулом (Алгоритам 2.2).

2.5.3 Формирање аналитичких израза

Над моделом меморисаним у бази података потребно је формирати аналитичке изразе за све променљиве модела алгоритмом **Алгоритам 2.3**. У случају када се све величине модела третирају као променљиве, добијају се аналитички изрази облика полинома у којима се појављују унутрашње координате и параметри роботског механизма.

Овде је приказан аналитички израз за променљиву H_{44} добијен на тај начин.

$$\begin{aligned}
 H_{44} = & 2.0 \cdot \cos^2 q^5 \cdot \tilde{r}_{553} \cdot m_6 \cdot \tilde{r}_{663} - \\
 & -2.0 \cdot \tilde{r}_{453} \cdot \cos q^5 \cdot \tilde{r}_{553} \cdot m_6 + \\
 & +2.0 \cdot \tilde{r}_{443} \cdot \cos q^5 \cdot \tilde{r}_{553} \cdot m_6 - \\
 & -2.0 \cdot \cos^2 q^5 \cdot \tilde{r}_{553} \cdot \tilde{r}_{563} \cdot m_6 + \\
 & +2.0 \cdot \tilde{r}_{453} \cdot \cos q^5 \cdot \tilde{r}_{563} \cdot m_6 - \\
 & -2.0 \cdot \tilde{r}_{443} \cdot \cos q^5 \cdot \tilde{r}_{563} \cdot m_6 - \\
 & -2.0 \cdot \cos^2 q^5 \cdot \tilde{r}_{563} \cdot m_6 \cdot \tilde{r}_{663} - \\
 & -2.0 \cdot \tilde{r}_{453} \cdot \cos q^5 \cdot m_6 \cdot \tilde{r}_{663} + \\
 & +2.0 \cdot \tilde{r}_{443} \cdot \cos q^5 \cdot m_6 \cdot \tilde{r}_{663} + \\
 & +2.0 \cdot \tilde{r}_{443} \cdot \cos q^5 \cdot \tilde{r}_{553} - \\
 & -2.0 \cdot \tilde{r}_{453} \cdot \cos q^5 \cdot \tilde{r}_{553} + \\
 & + \cos^2 q^5 \cdot \tilde{r}_{553}^2 \cdot m_6 + \\
 & + \cos^2 q^5 \cdot \tilde{r}_{563}^2 \cdot m_6 + \\
 & + \cos^2 q^5 \cdot m_6 \cdot \tilde{r}_{663}^2 - \\
 & -2.0 \cdot \tilde{r}_{443} \cdot \tilde{r}_{453} \cdot m_6 + \\
 & + \cos^2 q^5 \cdot \cos^2 q^6 \cdot J_{63} + \\
 & + \cos^2 q^5 \cdot \sin^2 q^6 \cdot J_{61} + \\
 & + \cos^2 q^5 \cdot \tilde{r}_{553}^2 - \\
 & -2.0 \cdot \tilde{r}_{443} \cdot \tilde{r}_{453} + \\
 & + \tilde{r}_{453}^2 \cdot m_6 + \\
 & + \tilde{r}_{443}^2 \cdot m_6 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^2 q^5 \cdot J_{62} + \\
& + \sin^2 q^5 \cdot J_{52} + \\
& + \cos^2 q^5 \cdot J_{51} + \\
& + \tilde{r}_{453}^2 + 2.0 \cdot \tilde{r}_{443}^2 + J_{41}
\end{aligned}$$

Уколико се параметри роботског механизма третирају као бројеви, добијају се изрази облика полинома у којима фигуришу само унутрашње координате роботског механизма. Приказан је аналитички израз за променљиву H_{11} који је добијен на тај начин.

$$\begin{aligned}
H_{11} = & 0.2 + 0.01 \cdot \cos^2 q^2 + 6.81 \cdot \sin^2 q^2 + 3.61 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 + \\
& + 7.2 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 + 3.61 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 + \\
& + 0.01 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 + 0.01 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 + \\
& + 0.002 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 + \\
& + 0.002 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 + \\
& + 0.002 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 + \\
& + 0.002 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 + \\
& + 0.004 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& + 0.36325 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& + 0.36325 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& + 0.36325 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& + 0.004 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 - \\
& - 0.36325 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \cos^2 q^5 - \\
& - 0.36325 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& + 0.004 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 - \\
& - 0.36325 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& + 0.004 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& + 0.087125 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 + \\
& + 0.17025 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos^2 q^4 + \\
& + 0.17025 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 - \\
& - 0.17025 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 + \\
& + 0.087125 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.17025 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 - \\
& -0.17025 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 + \\
& +0.087125 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 - \\
& -0.17025 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin^2 q^4 + \\
& +0.087125 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 + \\
& +0.012 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 - \\
& -0.024 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 - \\
& -0.024 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \sin^2 q^5 - \\
& -0.024 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +0.012 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +0.024 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +0.024 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +0.012 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +0.024 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +0.012 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +8.32 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 + \\
& +8.32 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \sin q^3 + \\
& +0.84 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \cos q^4 + \\
& +0.84 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 + \\
& +0.84 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^4 - \\
& -0.84 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin q^3 \cdot \sin q^4 + \\
& +1.08 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +1.08 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +1.08 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 - \\
& -1.08 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin q^3 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.84 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos q^4 + \\
& +1.68 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 + \\
& +0.84 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin q^4 - \\
& -0.84 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin q^4 + \\
& +1.08 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \cos q^5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2.16 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +1.08 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 - \\
& -1.08 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.84 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos q^4 + \\
& +0.84 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin q^4 - \\
& -0.84 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin q^4 + \\
& +1.08 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +1.08 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 - \\
& -1.08 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.405 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.405 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 - \\
& -0.405 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.405 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 - \\
& -0.405 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos q^5 - \\
& -0.405 \cdot \cos q^2 \cdot \sin q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.185625 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& +0.185625 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& +0.185625 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& +0.185625 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& +0.185625 \cdot \sin^2 q^5
\end{aligned}$$

У овако генерисаном моделу још увек постоје редувантне математичке операције које треба отклонити. Отклањање редувантних операција се врши над аналитичким изразима компонента вектора h^G и матрица H и C , формираним алгоритмом **Алгоритам 2.3**. Ово смањивање нумеричке сложености је могуће вршити и над изразима добијеним чисто симболичком и нумеричко-симболичком методом. У наредном поглављу ће бити говора о ал-

горитмима за смањивање нумеричке сложености и на Примеру 2.1 ће бити приказани добијени резултати.

Прилог 2.1

У овом прилогу представљени су резултати извођења формула за смањивање нумеричке сложености горитмима из Примера 2.1. Резултати су приказани у табели 2.1. Резултати су добијени коришћењем програма *Mathematica* 5.0.1.0.

У табели 2.1 приказани су резултати извођења формула за смањивање нумеричке сложености горитмима из Примера 2.1. Резултати су добијени коришћењем програма *Mathematica* 5.0.1.0. Резултати су приказани у табели 2.1. Резултати су добијени коришћењем програма *Mathematica* 5.0.1.0.

Табела 2.1. Резултати извођења формула

Ова табела приказује резултате извођења формула за смањивање нумеричке сложености горитмима из Примера 2.1. Резултати су добијени коришћењем програма *Mathematica* 5.0.1.0.

Резултати извођења формула за смањивање нумеричке сложености горитмима из Примера 2.1. Резултати су добијени коришћењем програма *Mathematica* 5.0.1.0.

Прилог 2.1

У овом прилогу дат је детаљан опис имплементације формирања математичког модела роботског механизма. У првом делу дат је листинг шеме базе података. У другом делу су дати листинзи функција за меморисање израза

$$r_{ij} = Q_{ij1} \cdot \tilde{r}_{i1} + Q_{ij2} \cdot \tilde{r}_{i2} + Q_{ij3} \cdot \tilde{r}_{i3}$$

у бази података. Циљ прилога је да се на карактеристичном примеру детаљно прикаже начин имплементације алгорита за формирање математичког модела динамике роботског механизма. Аналогно се меморишу и сви остали изрази модела. У овом примеру су наведене скоро све помоћне функције које се користе у формирању модела.

Шема базе података

Овде је дата комплетна шема базе података представљена на Сл. 2.2., написана у спецификационом језику система за управљање базама података db_VISTA.

```
database model {  
  data file "prom.dat" contains promenljiva;  
  data file "izrsab.dat" contains izrsab;  
  data file "mnozi.dat" contains mnozi;  
  data file "anasab.dat" contains anasab;  
  data file "anacin.dat" contains anacin;
```

```
key file "pr.key" contains prom_kod,pr1,pr2,sab,asab;
record promenljiva {
  unique key unsigned long prom_kod;
  unsigned short nivo;
  char tip;
  double prom_vred;
  compound unique key pr1 {
    tip;
    prom_kod;
  }
  compound unique key pr2 {
    nivo;
    prom_kod;
  }
}
record izrsab {
  unsigned long sab_kod;
  unsigned short sred_br;
  double sab_vred;
  compound unique key sab {
    sab_kod;
    sred_br;
  }
}
record mnozi {
}
record anasab {
  unsigned long a_kod;
  unsigned short ared_br;
  double a_vred;
  compound unique key asab {
    a_kod;
    ared_br;
  }
}
record anacin {
  unsigned long cin_kod;
```

```
    unsigned short stepen;
}
set cinioci {
    order next;
    owner izrsab;
    member mnozi;
}
set clanovi {
    order next;
    owner promenljiva;
    member mnozi;
}
set anamno {
    order next;
    owner anasab;
    member anacin;
}
}
```

Опис функција

У овом делу су дати листинзи функција написаних у С програмском језику, које се користе у Алгоритму 2.1 за меморисање израза у бази података.

Назив: *Kodiraj*

Синопис:

```
unsigned long Kodiraj(
    char pr[5],
    unsigned short i,
    unsigned short j,
    unsigned short m,
    unsigned short n,
```

```
unsigned short k,  
unsigned short l  
);
```

Параметри:

pr - име променљиве која се кодира;

i, j, m, n, k, l - индекси променљиве која се кодира. За променљиве које немају све индексе, неки од њих узимају неутралне вредности.

Опис:

Функција *Kodiraj* враћа као своју вредност јединствени код за променљиву pr_{ijmnl} . Пошто се користи једна функција за све променљиве, уводи се шест индекса да се покрију сви могући случајеви.

Назив: *FormProm*

Листинг:

```
struct promenljiva FormProm(  
    unsigned long kod,  
    char tip,  
    unsigned short nivo,  
    double vred)  
{  
    struct promenljiva pr;  
    pr.prom_kod = kod;  
    pr.tip = tip;  
    pr.nivo = nivo;  
    pr.prom_vred = vred;  
    return pr;  
}
```


}

Параметри:

kod - јединствени код променљиве;

tip - тип променљиве;

nivo - ниво променљиве;

ured - вредност променљиве;

Опис:

Функција *FormProm* је помоћна функција која формира променљиву од њених обележја.

Назив: *PostProm***Листинг:**

```
void PostProm(  
    unsigned long kod,  
    unsigned short nivo)  
{  
    struct promenljiva pr;  
    pr = FormProm(kod,'3',nivo,-111111.00);  
    d_fillnew(PROMENLJIVA,&pr,CURR_DB);  
}
```

Параметри:

kod - јединствени код променљиве која се меморише у бази;

nivo - ниво променљиве;

Опис:

Funkcija *PostProm* prvo formira promenljivu sa zadatim kodom *kod*, nivoom *nivo*, tipom *tip = '3'* i inicijalnom vrednošću -111111.00 , a zatim formira pojavu tipa sloga *promenljiva* u bazi podataka.

Назив: *PostSab***Листинг:**

```
void PostSab(
    unsigned long kod,
    unsigned short rbr,
    double vred)
{
    struct izrsab sab;
    sab.sab_kod = kod;
    sab.sred_br = rbr;
    sab.sab_vred = vred;
    d_fillnew(IZRSAB, &sab, CURR_DB);
    d_setor(CINIOCI, CURR_DB);
}
```

Параметри:

kod - jedinstveni kod promenljive čiji se sabirak memoriše;

rbr - redni broj sabirka;

vred - vrednost konstante sabirka;

Опис:

Funkcija *PostSab* formira sabirak sa zadatim obeležjima i memoriše ga u bazi podataka kao pojavu tipa sloga *izrsab*. Zatim se formirani slog postavlja za tekućeg vlasnika skupa *cinioci*.

Назив: *PostCin*

Листинг:

```
void PostCin(
    unsigned long kod,
    char tip)
{
    struct promenljiva pr;
    pr = KopProm(kod,'1',0,-111111.00);
    d_fillnew(PROMENLJIVA,&pr,CURR_DB);
    d_setor(CLANOVI,CURR_DB);
    d_makenew(MNOZI,CURR_DB);
    d_connect(CLANOVI,CURR_DB);
    d_connect(CINIOCI,CURR_DB);
}
```

Параметри:

kod - jedinstveni kod činioца koji se memoriše;

tip - tip promenljive;

Опис:

Funkcija *PostCin* formira činilac sa zadatim obeležjima i memoriše ga u bazi podataka kao pojavu tipa sloga *promenljiva*. Zatim se formirani slog postavlja za tekućeg vlasnika skupa *clanovi*. Na kraju se formira pojava tipa sloga *mnozi* i povezuje se kao član u skupovima *cinioci* i *clanovi*.

Назив: *NadjiCin*

Листинг:

```
void NadjiCin(
    unsigned long kod)
{
    if (d_keyfind(PROM_KOD, &kod, CURR_DB) != S_OKAY) {
        printf("Nema koda %u u u strukturi \n", kod);
        return;
    }
    else {
        d_setor(CLANOVI, CURR_DB);
        d_makenew(MNOZI, CURR_DB);
        d_connect(CLANOVI, CURR_DB);
        d_connect(CINIOCI, CURR_DB);
    }
}
```

Параметри:

kod - jedinstveni kod činioca koji se povezuje;

Опис:

Funkcija *NadjiCin* pronalazi činilac sa zadatim kodom u bazi podataka. Zatim se pronadjeni slog postavlja za tekućeg vlasnika skupa *clanovi*. Na kraju se formira pojava tipa sloga *mnozi* i povezuje se kao član u skupovima *cinioci* i *clanovi*, kao i u funkciji *PostCin*.

Назив: *NadjiNivo*

Листинг:

```
unsigned short NadjiNivo(
```

```
unsigned long kod)
{
    struct promenljiva pr;
    if (d_keyfind(PROM_KOD, &kod, CURR_DB) != S_OKAY) {
        printf("Nema koda %u u u strukturi \n", kod);
        return 0;
    }
    else {
        d_recread(&pr, CURR_DB);
        return pr.nivo;
    }
}
```

Параметри:

kod - jedinstveni kod promenljive;

Опис:

Funkcija *NadjiNivo* čita iz baze podataka nivo promenljive zadate kodom i vraća ga kao rezultat.

Назив: *MaksNivo***Листинг:**

```
unsigned short MaksNivo(
    unsigned long kod,
    unsigned short nivo)
{
    unsigned short pom;
    pom = NadjiNivo(kod);
    if (pom > nivo)
        return pom;
    else
```

```

    return nivo;
}

```

Параметри:

kod - jedinstveni kod promenljive;

nivo - dosadašnji maksimalni nivo;

Опис:

Funkcija *MaksNivo* koristi funkciju *NadjiNivo* da odredi nivo promenljive zadate kodom, a zatim vraća veću od dve vrednosti.

Назив: *Izraz*

Листинг:

```

void Izraz(
    char *p1,
    char *p2,
    char *p3,
    unsigned short i,
    unsigned short j)
{
    unsigned short nivo = 0, k;
    unsigned long kod, kod1[3], kod2[3];
    for (k = 0 ; k <= 2 ; k ++ ) {
        kod1[k] = Kodiraj(p2, i, 1, 1, 1, j, k + 1);
        nivo = MaksNivo(kod1[k], nivo);
        kod2[k] = Kodiraj(p3, i, i, 1, 1, k + 1, 0);
    }
    kod = Kodiraj(p1, i, i, 1, 1, j, 0);
    PostProm(kod, nivo + 1);
    for (k = 0 ; k <= 2 ; k ++ ) {
        PostSab(kod, k + 1, 1.00);
    }
}

```

```
Nadjicin(kod1[k]);  
if (j! = 1)  
    Nadjicin(kod2[k]);  
else  
    PostCin(kod2[k], '1');  
}  
}
```

Параметри:

$p1$ - "r";

$p2$ - "Q";

$p3$ - "lr", где је lr ознака за \tilde{r} ;

i, j - индекси задатих променljivih;

Опис:

Функција *Izraz* меморише задати израз у бази података.

Овим је описана имплементација формирања математичких модела динамике роботских механизамa.

Глава 3

Смањивање рачунске сложености модела роботског механизма

У претходном поглављу је описано меморисање комплетног математичког модела роботског механизма у бази података. Над добијеним моделом се могу вршити симболичка и нумеричка израчунавања. У моделу роботског механизма се и даље налазе редундантне математичке операције. Потребно је елиминисати те операције да би добили што ефикаснији модел у смислу броја рачунских операција, потребних за израчунавање одговарајућих величина модела. Ово елиминисање редундантних операција се врши ажурирањем базе података.

У овом поглављу су описани алгоритми за смањивање нумеричке сложености модела и дат је пример примене тих алгоритама на генерисаном моделу роботске конфигурације, описане у претходном поглављу (Пример 2.1).

3.1 Тригонометријски идентитети

Први корак је формирање аналитичких израза за комплетан

модел роботског механизма (**Алгоритмом 2.3**). Потребно је извршити сређивање формираних аналитичких израза, што се постиже елиминисањем редундантних математичких операција. Пошто се у аналитичким изразима величина модела појављују синуси и косинуси унутрашњих координата роботског механизма, могуће је применити тригонометријске идентитете облика:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \sin y - \sin x \cdot \sin y$$

где су x и y неке од унутрашњих координата роботског механизма, или променљиве које су добијене применом неког од наведених идентитета.

Алгоритам 3.1 проналази и елиминише тригонометријске идентитете из одговарајућих аналитичких израза и написан је у псеудокоду.

Алгоритам 3.1

```

TrigIden()
{
  while (SledIzr(pr)) {
    SortSab(pr);
    radi = 1;
    ksab.a_kod = pr.prom_kod;
    ksab.ared_br = 0;
    if (!NadjIKl(ASAB, ksab))
      if (SledKl(ASAB))
        UcitSl(as);
    else
      radi = 0;
    else
      UcitSl(as);
    while (radi) {

```

```

UzmiAdr(adr);
radl = 1;
if (SledKl(ASAB))
  UcitSl(as1);
else
  radl = 0;
while (radl && IstBrCin(as, as1)) {
  UzmiAdr(adr1);
  if (ImaTrId(as, as1))
    ProvIst(as1);
  PostAdr(adr1);
  TekKl();
  if (SledKl(ASAB))
    UcitSl(as1);
  else
    radl = 0;
}
PostAdr(adr);
TekKl();
if (SledKl(ASAB))
  UcitSl(as);
else
  radi = 0;
}
}
}

```

Процедуре $UzmiAdr(adr)$, $PostAdr(adr)$ и $TekKl()$ су основне процедуре за рад са базом података. Оне служе за приступ подацима преко њихових адреса. Процедуром $UzmiAdr(adr)$ се променљивој adr додељује адреса текућег слога, а процедура $PostAdr(adr)$ поставља за текући слог, слог са адресом adr . Процедура $TekKl()$ поставља све кључеве текућег слога за текуће кључеве.

Процедура $SledIzr(pr)$ у променљиву pr поставља променљиву чији израз треба да се упрости применом тригонометријских идентитета. Уколико су све променљиве предвиђене за упрошћавање

исцрпене, процедура враћа 0 као своју вредност и алгоритам се завршава.

Процедура $SortSab(pr)$ сортира сабирке израза променљиве pr ; редослед сабирака је нерастући по броју чинилаца сваког сабирка.

Процедура $IstBrCin(as, as1)$ проверава да ли сабирци as и $as1$ имају исти број чинилаца.

Процедура $ImaTrId(as, as1)$ проверава да ли у сабирцима as и $as1$ постоји тригонометријски идентитет који се може применити и ако постоји примењује га и упрошћава дате сабирке.

Процедура $ProvIst(as1)$ проверава да ли упрошћени сабирак $as1$ има идентични сабирак међу осталим сабирцима израза, и ако га има своди их на један сабирак сабирањем константи које стоје уз сабирке.

Алгоритам, редом за сваки израз, прво сортира његове сабирке у нерастућем редоследу по броју чинилаца у сабирку. Овакво сортирање се врши да би се проверавање постојања тригонометријских идентитета проверавало само код сабирака са истим бројем чинилаца. Ако се тригонометријски идентитет пронађе, његовим примењивањем се број чинилаца једног од два сабирка у којима је идентитет пронађен смањује за један. Сада постоји могућност да тај сабирак има идентичан сабирак међу осталим сабирцима израза па се врши проверавање идентичности. Овај поступак се наставља док се не провере сви упоредиви сабирци.

3.2 Идентични изрази

Исто тако, међу свим аналитичким изразима се појављују и неки који су идентични. Да се приликом израчунавања не би понављале исте операције, примењује се алгоритам који проналази идентичне изразе и оставља по једно појављивање сваког израза. У псеудокоду је написан **Алгоритам 3.2** за елиминисање идентичних израза.

Алгоритам 3.2

```
IdentIzr()
{
  SortIzr();
  kpr.nivo = radi = 1;
  kpr.prom_kod = 0;
  if (!NadjiKl(PR2, kpr))
    if (SledKl(PR2))
      UcitSl(pr);
    else
      radi = 0;
  else
    UcitSl(pr);
  while (radi) {
    UzmiAdr(adr);
    radi1 = 1;
    if (SledKl(PR2))
      UcitSl(pr1);
    else
      radi1 = 0;
    while (radi1) {
      if (IdIzr(pr, pr1))
        ElimIzr(pr, pr1);
      if (SledKl(PR2))
        UcitSl(pr1);
      else
        radi1 = 0;
    }
    PostAdr(adr);
    TekKl();
    if (SledKl(PR2))
      UcitSl(pr);
    else
      radi = 0;
  }
}
```

}
}

Процедура $SortIzr()$ сортира сабирке сваког израза да би се упоређивање два израза могло извршити једним истовременим пролазом кроз оба израза.

Процедура $IdIzr(pr, pr1)$ врши упоређивање два израза променљивих pr и $pr1$ тако што редом пореди сабирке једне променљиве са сабирцима друге променљиве. Код проналажења прве разлике упоређивање се прекида и процедура враћа 0 као вредност, а ако се добије да су изрази идентични процедура враћа вредност 1.

Процедура $ElimIzr(pr, pr1)$ елиминише израз променљиве $pr1$ из базе података, и променљиву $pr1$ повезује са променљивом pr . Тако се једном врши израчунавање израза, а онда се вредност преноси и у променљиву $pr1$.

Алгоритам прво сортира сабирке свих израза да би се упоређивање израза могло извршити у једном пролазу, а затим се редом пореде сви изрази. У случају идентичности, један израз се елиминише из базе података, а променљива чији је то израз се у бази података повезује са променљивом идентичног израза, па се израчунавање врши само једанпут.

3.3 Формирање графа израчунавања модела

После свих упрошћавања, добијени аналитички изрази су облика:

$$Y = \sum_{i=1}^N S_i \quad (3.1)$$

где је сваки од сабирака облика:

$$S_i = k_i \cdot \prod_{j=1}^L x_j^{e_{ij}} \quad (3.2)$$

и где су:

Y - роботска величина која се израчунава изразом;

k_i - константни коефицијент који стоји уз i -ти сабирак;

x_j - једна од основних променљивих роботског механизма представљена својим именом. За сваки сабирак се користи исти низ променљивих x_j , $j = 1, \dots, L$.

e_{ij} - експонент j -те променљиве i -тог сабирка.

Задатак је да се за изабране аналитичке изразе типа (3.1) формира граф израчунавања са што мањим бројем математичких операција. Скуп израза за које формирамо граф израчунавања означимо са Y^j , $j = 1, \dots, W$. То су све изрази облика (3.1).

3.3.1 Вредности експонената у аналитичким изразима роботских величина

Пре него што се пређе на проблем формирања графа израчунавања модела, у овом одељку се говори о облику аналитичких израза роботских величина. Аналитички изрази свих величина модела су облика (3.1). У [Vuk85] је доказана теорема која тврди да су сви експоненти који учествују у аналитичким изразима мањи или једнаки од 2 ($\forall e_{ij}, e_{ij} \in \{0, 1, 2\}$). Ова теорема је доказана за роботске механизме, који се могу представити простим отвореним кинематичким ланцем.

Теорема је доказана тако што се за сваку променљиву, која учествује у алгоритму за формирање математичког модела роботског механизма, показује да се њен аналитички израз може довести у облик у којем не постоје степени већи од 2. За неке променљиве је доказано да важи и да су сви степени из скупа $\{0, 1\}$.

Ова теорема је егзистенцијална, што значи да показује да постоји облик аналитичког израза такав да задовољава услове теореме. Сам поступак формирања аналитичких израза не гарантује да ће теорема бити задовољена. У току формирања аналитичких

израза се појављују и изрази који имају и степене веће од 2, али се ти степени могу смањити применом тригонометријских идентитета.

3.3.2 Алгоритам извлачења монома

У [Vuk85, Tim89, Tim91a, Tim91b] је предложен и детаљно описан алгоритам извлачења монома да би се решио проблем формирања графа израчунавања модела са најмањим бројем рачунских операција. Овде је укратко изложена идеја овог алгоритма.

Главни задатак је записати аналитичке изразе модела Y^j , $j = 1, \dots, W$ у следећем облику:

$$Y^j = \mu \cdot Y_1^j + Y_2^j \quad (3.3)$$

где су Y_1^j и Y_2^j такође изрази облика (3.1), и где је:

$$\mu = \prod_{j=1}^m x_j^{e_j} \quad (3.4)$$

моном степена $d(\mu) = \sum_{j=1}^m e_j$ и $m \leq L$.

Моном μ је јединствен за све аналитичке изразе за које се генерише граф израчунавања. Изабран је тако да се постигне максимална уштеда у броју множења извлачењем монома μ из сваког израза. За неке изразе Y_1^j може бити једнак нули, па је у том случају $Y^j = Y_2^j$.

Иста процедура се понавља за све изразе Y_1^j и Y_2^j , $j = 1, \dots, W$ док год постоји моном μ који може да се извуче, а чијим извлачењем се постиже уштеда у броју множења. У [Tim89] је доказана теорема која одређује тачан број уштеђених операција множења за сваки моном. Овде се само наводи израз по коме се рачуна уштеда у броју множења. За моном μ степена $d(\mu)$ уштеда у броју множења износи

$$U(\mu) = \Phi(\mu) \cdot d(\mu) - N(\mu) \cdot (d(\mu) - 1) \quad (3.5)$$

где је:

$\Phi(\mu)$ - број сабирака, свих израза Y^j $j = 1, \dots, W$, који садрже μ ;

$N(\mu)$ - број израза у систему у којима се μ ефективно појављује, то јест за које је $Y_1^j \neq 0$;

— - операција, дефинисана над скупом целих бројева на следећи начин: $x - y = x - y$ за $x - y > 0$ а иначе је једнако 0.

Имплементација овог алгоритма је једноставна јер се проблем извлачења монома може решити сукцесивно за сваки сабирак задатих израза. Главни проблем је у одабирању монома који ће бити извучен. У [Tim89] је предложено да се прво генеришу сви мономи степена мањег или једнаког од 4. Статистичком анализом на бази експеримента је изведен закључак да мономи степена већег од 4 у 90% случајева не постижу максималну уштеду у броју множења. Тада се израчунава уштеда у броју множења за сваки генерисани моном и бира се онај са највећом уштедом. У циљу смањења времена потребног за одабир монома, у [Tim89] је примењен алгоритам који врши процену да ли поједини кандидат (моном) може постићи највећу уштеду, тако да се не рачуна тачан број уштеђених операција множења за све кандидате, чиме је време потребно за одабир кандидата смањено и до 50% .

Овде је алгоритам извлачења монома нешто другачије имплементиран. Не генеришу се сви мономи степена мањег или једнаког од 4, већ само они који стварно учествују у изразима на које примењујемо алгоритам извлачења монома. Исто тако ради општости алгоритма није вршена процена појединих монома већ се за све мономе рачуна уштеда. Треба напоменути и да се после извлачења сваког монома примењује и већ описани алгоритам за елиминисање идентичних израза (Алгоритам 3.2), да би се избегло понављање. Граф израчунавања се генерише у бази података у току извлачења појединих монома у структури података дефинисаној на Сл. 2.2. Тако се на крају добија модел роботског механизма у истом облику у којем је био и приликом његовог меморисања у бази података. Дат је Алгоритам 3.3 за извлачење монома

написан у псеудокоду.

Алгоритам 3.3

```

IzvlMon()
{
  gotovo = 0;
  do {
    radi = 1;
    kpr.tip = '3';
    kpr.prom_kod = 0;
    if (!NadjiKl(PR1, kpr))
      if (SledKl(PR1))
        UcitSl(pr);
      else
        radi = 0;
    else
      UcitSl(pr);
    while (radi) {
      GenerMon(pr, stm);
      if (SledKl(PR1))
        UcitSl(pr);
      else
        radi = 0;
    }
    IzrUst(stm, mon);
    AnuliMon(stm);
    if (ImaUst(mon)) {
      IzvuciMon(mon);
      IdentIzr();
    }
    else
      gotovo = 1;
      PrepIzr();
  }
}

```

```

}
while (!gotovo);
}

```

У алгоритму се појављују процедуре $GenerMon(pr, stm)$, $IzrUst(stm, mon)$, $AnuliMon(stm)$ и $ImaUst(mon)$ које служе за рад са мономима. Процедура $GenerMon(pr, stm)$ меморише све мономе који се појављују у изразу променљиве pr у структури монома stm . Ова процедура аутоматски за тај моном ажурира све податке потребне за израчунавање уштеде према једначини (3.5). Процедура $IzrUst(stm, mon)$ израчунава уштеду према (3.5) за све мономе у структури stm и моном са највећом уштедом смешта у променљиву mon . Ако више нема монома са уштедом, променљива mon остаје празна, па ће процедура $ImaUst(mon)$ вратити 0 као резултат. Процедура $AnuliMon(stm)$ анулира структуру монома stm за следећу итерацију, то јест ново извлачење.

Процедура $IzvuciMon(mon)$ врши извлачење монома mon из свих израза у бази, а истовремено у новој структури података генерише и граф израчунавања модела. Пошто је у питању сложена процедура, и она је дата у псеудокоду (**Алгоритам 3.3.1**).

Алгоритам 3.3.1

```

IzvuciMon(mon)

```

```

{
  MemMon(mon);
  radi = 1;
  kpr.tip = '3';
  kpr.prom_kod = 0;
  if (!Nadjiki(PR1, kpr))
    if (Sledki(PR1))
      UcitSI(pr);
  else
    radi = 0;
  else
    UcitSI(pr);
}

```

```

while (radi) {
  UzmiAdr(adr);
  if (ImaMon(mon, pr, pr1, pr2))
    MemIzr(mon, pr, pr1, pr2);
  PostAdr(adr);
  TekKl();
  if (SledKl(PR1))
    UcitSl(pr);
  else
    radi = 0;
}
}

```

Процедура $MemMon(mon)$ меморише моном mon у новој структури података, која је такође у бази података и аналогна је структури у којој је био меморисан првобитни модел роботског механизма. У тој структури података ће на крају бити меморисан коначан граф израчунавања модела механизма. Процедура $ImaMon(mon, pr, pr1, pr2)$ проверава да ли моном mon постоји у изразу променљиве pr , и ако постоји, извлачи моном из свих сабирака у којима постоји и те сабирке премешта у израз нове променљиве $pr1$, а преостале сабирке меморише у изразу такође нове променљиве $pr2$. После растављања израза се процедуром $MemIzr(mon, pr, pr1, pr2)$, у новој структури података меморише израз по формули $pr = mon \cdot pr1 + pr2$ на начин аналоган меморисању израза у бази података већ описаном у **Алгоритму 2.1**.

Овим је процедура $IzvuciMon(mon)$ потпуно описана и још је преостало да се опише процедура $PrepIzr()$ да би се до краја објаснио **Алгоритам 3.3**. Процедура $PrepIzr()$ преписује све преостале изразе у нову структуру; тиме је формиран граф израчунавања модела у бази података.

3.3.3 Растављање израза на производе

Да би се добила што већа уштеда у броју математичких опе-

рација у овом раду се предлаже растављање израза на производе [Рас95b] пре примене алгоритма извлачења монома. Овакав поступак је новина у процесу формирања графа израчунавања и у досадашњим радовима није примењиван. Основна идеја је да се аналитички изрази модела Y^j , $j = 1, \dots, W$ прво запишу у облику:

$$Y^j = \sum_{l=1}^M (Y_{l1}^j \cdot Y_{l2}^j) + Y_{M+1}^j \quad (3.6)$$

где су Y_{l1}^j , Y_{l2}^j , $l = 1, \dots, M$ и Y_{M+1}^j , $j = 1, \dots, W$ исто изрази облика (3.1).

Изрази Y_{l1}^j , Y_{l2}^j , $l = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, W$ имају бар по два сабирка сваки и одређени су тако да се оствари што већа уштеда у броју математичких операција. Y_{M+1}^j , $j = 1, \dots, W$ представља израз остатак који се даље не може раставити на производ.

За разлику од алгоритма извлачења монома који се једноставно примењује на све изразе, у случају растављања израза је потребно утврдити да ли је растављање уопште могуће. Потребно је пронаћи потребне и довољне услове за растављање израза $Y \in \{Y^1, \dots, Y^W\}$ у облик (3.6). Претходно су описане структурне матрице које се користе за одређивање тих услова.

3.3.3.1 Структурне матрице

Концепт структурних матрица је уведен у [Vuk85] да би се представили аналитички изрази роботских величина.

Структурна матрица S израза Y је представљена са вектором коефицијената $K_S = [k_1^S, \dots, k_N^S]^T$, вектором променљивих $X_S = [x_1^S, \dots, x_L^S]^T$ и матрицом експонената:

$$E_S = \begin{bmatrix} e_{11}^S & e_{12}^S & \dots & e_{1L}^S \\ e_{21}^S & e_{22}^S & \dots & e_{2L}^S \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{N1}^S & e_{N2}^S & \dots & e_{NL}^S \end{bmatrix}.$$

У [Vuk85], уведена је алгебра структурних матрица, а овде се

описује само множење структурних матрица због своје важности за решавање наведеног проблема.

Посматрајмо производ две структурне матрице које имају исте векторе променљивих.

$$A = (K_A, X_A, E_A)$$

$$B = (K_B, X_B, E_B)$$

$$X_A = X_B$$

Ако су матрице експонената E_A и E_B задате са:

$$E_A = \begin{bmatrix} e_{11}^A & e_{12}^A & \dots & e_{1L}^A \\ e_{21}^A & e_{22}^A & \dots & e_{2L}^A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{I1}^A & e_{I2}^A & \dots & e_{IL}^A \end{bmatrix}; E_B = \begin{bmatrix} e_{11}^B & e_{12}^B & \dots & e_{1L}^B \\ e_{21}^B & e_{22}^B & \dots & e_{2L}^B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{J1}^B & e_{J2}^B & \dots & e_{JL}^B \end{bmatrix} =$$

тада је њихов производ матрица експонената E_C где је:

$$E_C = \begin{bmatrix} e_{11}^C & e_{12}^C & \dots & e_{1L}^C \\ e_{21}^C & e_{22}^C & \dots & e_{2L}^C \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{M1}^C & e_{M2}^C & \dots & e_{ML}^C \end{bmatrix}$$

и где је:

$$M = I \cdot J$$

$$e_{ml}^C = e_{il}^A + e_{jl}^B$$

$$m = (i - 1) \cdot J + j$$

$$l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J.$$

Исто тако, ако су вектори коефицијената K_A и K_B задати са:

$$K_A = \begin{bmatrix} k_1^A \\ k_2^A \\ \dots \\ k_I^A \end{bmatrix}; K_B = \begin{bmatrix} k_1^B \\ k_2^B \\ \dots \\ k_J^B \end{bmatrix}$$

тада је њихов производ вектор коефицијената K_C где је:

$$K_C = \begin{bmatrix} k_1^C \\ k_2^C \\ \dots \\ k_M^C \end{bmatrix}$$

и где је:

$$\begin{aligned} M &= I \cdot J \\ k_m^C &= k_i^A \cdot k_j^B \\ m &= (i - 1) \cdot J + j \\ i &= 1, \dots, I; j = 1, \dots, J. \end{aligned}$$

Тако је структурна матрица C добијена као производ структурних матрица A и B .

$$C = (K_C, X_C, E_C)$$

$$X_C = X_A = X_B$$

У решавању постављеног проблема појављује се обрнута ситуација. Постоји структурна матрица коју треба раставити на две структурне матрице чији је производ задата матрица.

3.3.3.2 Представљање структурне матрице у форми производа

Овај проблем се може поделити у два одвојена задатка. Први је растављање матрице експонената а други растављање вектора коефицијената.

Посматрајмо једначину

$$E_A \cdot E_B = E_C \quad (3.7)$$

где су E_A , E_B и E_C матрице експонената димензија $I \times L$, $J \times L$ и $M \times L$, $M = I \cdot J$, дефинисане у претходном одељку. Матрица E_C представља експоненте израза облика (3.1) који желимо да

запишемо у облику производа израза истог типа. Матрице E_A и E_B су непознате у овој једначини. Ако решење проблема постоји, тада матрице E_A и E_B , које задовољавају једначину, представљају експоненте у изразима који сачињавају производ.

Ако се једначина (3.7) запише као систем добија се $I \cdot J \cdot L$ линеарних једначина са $(I + J) \cdot L$ непознатих. Систем је облика:

$$e_{il}^A + e_{jl}^B = e_{ml}^C \quad (3.8)$$

$$m = (i - 1) \cdot J + j$$

$$l = 1, \dots, L; i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J.$$

Ако се вектори $[e_{i1}^A, \dots, e_{iL}^A]^T$, $[e_{j1}^B, \dots, e_{jL}^B]^T$ и $[e_{m1}^C, \dots, e_{mL}^C]^T$ (врсте матрица E_A , E_B и E_C) означе са e_i^A , e_j^B и e_m^C респективно, систем се може записати у векторском облику:

$$e_i^A + e_j^B = e_m^C \quad (3.9)$$

$$m = (i - 1) \cdot J + j$$

$$i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J.$$

где је сабирање вектора дефинисано на уобичајен начин.

Изаберимо $i1$ и $i2$ такве да $i1, i2 \in \{1, \dots, I\}$ и $i1 \neq i2$, и $j1$ и $j2$ такве да $j1, j2 \in \{1, \dots, J\}$ и $j1 \neq j2$. Тада се изабирају следеће четири једначине из система (3.9):

$$e_{i1}^A + e_{j1}^B = e_{m1}^C \quad (3.10)$$

$$m1 = (i1 - 1) \cdot J + j1$$

$$e_{i1}^A + e_{j2}^B = e_{m2}^C \quad (3.11)$$

$$m2 = (i1 - 1) \cdot J + j2$$

$$e_{i2}^A + e_{j1}^B = e_{m3}^C \quad (3.12)$$

$$m3 = (i2 - 1) \cdot J + j1$$

$$e_{i2}^A + e_{j2}^B = e_{m4}^C \quad (3.13)$$

$$m4 = (i2 - 1) \cdot J + j2$$

Сабирањем једначина (3.10) и (3.13) добија се

$$e_{i1}^A + e_{j1}^B + e_{i2}^A + e_{j2}^B = e_{m1}^C + e_{m4}^C \quad (3.14)$$

Исто тако сабирањем једначина (3.11) и (3.12) добија се

$$e_{i1}^A + e_{j2}^B + e_{i2}^A + e_{j1}^B = e_{m2}^C + e_{m3}^C \quad (3.15)$$

Следи да следећи услов мора бити задовољен

$$e_{m1}^C + e_{m4}^C = e_{m2}^C + e_{m3}^C \quad (3.16)$$

или у другом облику

$$e_{m1}^C - e_{m3}^C = e_{m2}^C - e_{m4}^C \quad (3.17)$$

Ако услов (3.16) није испуњен следи да систем (3.9) нема решења.

Ако се ова процедура понови за сваку комбинацију $i1, i2$ и $j1, j2$ на основу транзитивности за једнакост, добија се $I \cdot J$ услова који морају бити задовољени да би се обезбедила решивост система (3.9).

Ако су ови услови задовољени може се показати да систем има бесконачно много решења у скупу R^L . За решавање конкретног проблема где су сви експоненти из аналитичких израза роботских величина ненегативни цели бројеви, потребно је да се решења система (3.9) нађу у скупу $(N \cup \{0\})^L$. Решење које припада скупу $(N \cup \{0\})^L$ зваћемо допустивим решењима. Прво се доказује да постоји бар једно решење у скупу Z^L .

Лема 1 *Ако су испуњени услови (3.16) постоји бар једно решење система (3.9) у скупу Z^L .*

Лема се доказује извођењем решења.

Претпоставимо да важи (3.16). Тада се за e_1^A узима 0 вектор. Из J једначина у којима учествује e_1^A следи:

$$e_j^B = e_j^C \quad (3.18)$$

$$j = 1, \dots, J.$$

Сада за свако $e_i^A, i \neq 1$ остаје по J једначина из којих следи:

$$e_i^A = e_{m_1}^C - e_1^C = \dots = e_{m_j}^C - e_j^C \quad (3.19)$$

$$m_j = (i - 1) \cdot J + j$$

$$i = 2, \dots, I.$$

Проверимо коректност једначине (3.19). Изабере се $i_1 \in \{2, \dots, I\}$. За i_2 се узима 1, а за j_1, j_2 било која комбинација из скупа $\{1, \dots, J\}$. Једначина (3.19) следи из једначине (3.17) за ову комбинацију и транзитивности за једнакост.

Тако је решење које припада скупу Z^L пронађено за све $e_i^A, i = 1, \dots, I$ и $e_j^B, j = 1, \dots, J$ јер су сви $e_m^C, m = 1, \dots, M$ из скупа Z^L .

Сада се показује постојање допустивог решења.

Теорема 1 *Ако су испуњени услови (3.16) постоји бар једно допустиво решење система (3.9).*

Претпоставимо да важи (3.16). За e_1^A се свака компонента одређује као $e_{1l}^A = \min(e_{1l}^C, \dots, e_{Jl}^C)$ за $l = 1, \dots, L$. Добијени вектор је допустив, јер су допустиви и сви вектори e_m^C . Из J једначина у којима учествује e_1^A следи:

$$e_j^B = e_j^C - e_1^A \quad (3.20)$$

$$j = 1, \dots, J.$$

Ова решења су такође допустива јер $e_{jl}^C \geq e_{1l}^A$ за $j = 1, \dots, J$ и $l = 1, \dots, L$. Сада за свако $e_i^A, i \neq 1$ остаје J једначина из којих следи:

$$e_i^A = e_{m_1}^C - e_1^C + e_1^A = \dots = e_{m_j}^C - e_j^C + e_1^A \quad (3.21)$$

$$m_j = (i - 1) \cdot J + j$$

$$i = 2, \dots, I.$$

Коректност једначине (3.21) се доказује на аналоган начин као и коректност једначине (3.19) из Леме 1. Сада се мора доказати да су сви e_i^A за $i = 2, \dots, I$ допустиви.

Претпоставимо да постоји $i1$ и $l1$ за које је $e_{i1l1}^A < 0$. Тада се изабере $j1$ тако да $e_{j1l1}^C = e_{i1l1}^A = \min(e_{i1l1}^C, \dots, e_{j1l1}^C)$. Следи да $e_{j1l1}^B = e_{j1l1}^C - e_{i1l1}^A = 0$. Вектор e_{j1}^B учествује у још $I - 1$ једначина. Од тих једначина се изабере она у којој учествује и e_{i1}^A . Следи да $e_{j1l1}^B = e_{m1l1}^C - e_{i1l1}^A = 0$ где је $m1 = (i1 - 1) \cdot J + j1$. Из ове једначине следи да је $e_{m1l1}^C = e_{i1l1}^A$ и добијена је контрадикција са претпоставком да је $e_{i1l1}^A < 0$ јер $e_{ml}^C \geq 0$, за $m = 1, \dots, M$ и $l = 1, \dots, L$.

На аналоган начин се решава и проблем растављања вектора коефицијената. Посматра се једначина

$$K_A \cdot K_B = K_C \tag{3.22}$$

где су K_A , K_B и K_C вектори коефицијената дефинисани у претходном одељку.

Ако се једначина (3.22) запише као систем добија се $I \cdot J$ једначина са $I + J$ непознатих. Систем је облика:

$$k_i^A \cdot k_j^B = k_m^C \tag{3.23}$$

$$m = (i - 1) \cdot J + j$$

$$i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J.$$

Процедуром аналогном оној из растављања матрице експонената добијају се следећи услови:

$$k_{m1}^C \cdot k_{m4}^C = k_{m2}^C \cdot k_{m3}^C \tag{3.24}$$

или у другом облику

$$\frac{k_{m1}^C}{k_{m3}^C} = \frac{k_{m2}^C}{k_{m4}^C} \tag{3.25}$$

који су аналогни условима (3.16) и (3.17).

Важи следећа теорема:

Теорема 2 Ако су услови (3.24) задовољени постоји бар једно решење система (3.23) у скупу реалних бројева.

Претпоставимо да важи (3.24). За k_1^A се узима вредност 1.00. Из J једначина у којима учествује k_1^A следи:

$$k_j^B = k_j^C \quad (3.26)$$

$$j = 1, \dots, J.$$

Сада за свако $k_i^A, i \neq 1$ остаје J једначина из којих следи:

$$k_i^A = \frac{k_{m_1}^C}{k_1^C} = \dots = \frac{k_{m_J}^C}{k_J^C} \quad (3.27)$$

$$m_j = (i - 1) \cdot J + j$$

$$i = 2, \dots, I.$$

Коректност једначине (3.27) се доказује на аналоган начин као коректност једначине (3.19) из Леме 1.

Сада се може формулисати комплетан проблем. Посматрајмо једначину

$$A \cdot B = C \quad (3.28)$$

где су A, B и C структурне матрице. Циљ је одредити матрице A и B тако да важи једначина (3.28).

Теорема 3 Структурне матрице A и B које задовољавају једначину (3.28) постоје ако и само ако су испуњени услови (3.16) и (3.24).

Ако су испуњени услови (3.16) и (3.24), постојање матрица A и B је доказано примењивањем Теореме 1 и Теореме 2, и састављањем одговарајуће матрице експонената и вектора коефицијената у структурне матрице. Супротан смер теореме очигледно следи из процедуре формирања услова (3.16) и (3.24). У случају када услови (3.16) нису задовољени, добија се контрадикција у систему (3.9), а ако нису задовољени услови (3.24), добија се контрадикција у систему (3.23), што значи да не постоје матрице A и B .

3.3.3.3 Алгоритам за растављање израза

Када су извођени услови (3.16) и (3.24) изабране су по две врсте матрица E_A и E_B , то јест по два елемента вектора K_A и K_B . Исто тако се одабирањем четири врсте матрице E_C одабирају и четири елемента вектора K_C . Ово значи да су четири сабирка израза представљена матрицом експонената E_C и вектором коефицијената K_C , добијена множењем два израза од по два сабирка који су представљени изабраним деловима матрица E_A и E_B и вектора K_A и K_B . Тако сваки услов облика (3.16) и (3.24) представља једно " 2×2 " множење.

На исти начин једначине (3.19) и (3.21) представљају једно " $2 \times J$ " множење јер су одабране две врсте матрице E_A и свих J врста матрице E_B као и два елемента вектора K_A и свих J елемената вектора K_B . Исто тако су одабране $2 \cdot J$ врсте матрице E_C и исти број елемената вектора K_C .

Задатак алгоритма је да доведе почетне изразе Y^j , $j = 1, \dots, W$ у облик (3.6) растављањем њихових структурних матрица S^j на производе.

Први корак је проналажење свих могућих " $2 \times n$ " множења, где је n што је могуће веће за свако множење. Следи алгоритам написан у псеудокоду за један израз $Y \in \{Y^1, \dots, Y^W\}$.

Алгоритам 3.4

FormMno()

```
{
  for (i1 = 1 ; i1 < N ; i1 ++ ) {
    for (i2 = i1 + 1 ; i2 ≤ N ; i2 ++ ) {
      if (NiјеClan(i1, i2)) {
        MemPar(i1, i2, mn);
        s = ei1S - ei2S;
        q =  $\frac{k_{i1}^S}{k_{i2}^S}$ ;
        for (i3 = 1 ; i3 < N ; i3 ++ ) {
```

```

for ( $i4 = i3 + 1 ; i4 \leq N ; i4 ++$ ) {
  if ( $s == e_{i3}^S - e_{i4}^S \ \&\& \ q == \frac{k_{i3}^S}{k_{i4}^S}$ )
    MemPar( $i3, i4, mn$ );
  else if ( $s == e_{i4}^S - e_{i3}^S \ \&\& \ q == \frac{k_{i4}^S}{k_{i3}^S}$ )
    MemPar( $i4, i3, mn$ );
}
}
}
MemMno( $mn$ );
OslMno( $mn$ );
}
}
}

```

Процедура *NijeClan*($i1, i2$) проверава да ли је задати пар ($i1, i2$) меморисан у структури података у којој ће се чувати пронађена множења. Ако јесте резултат функције је 0 јер се, због закона транзитивности за једнакост, не проверавају услови за тај пар.

Процедура *MemPar*($i1, i2, mn$) меморише задати пар у променљивој mn у којој ће бити садржано комплетно множење.

Процедура *MemMno*(mn) меморише комплетно множење mn у структури података предвиђеној за меморисање множења.

Процедура *OslMno*(mn) ослобађа променљиву mn за ново множење.

После примене овог дела алгорита у структури података су меморисана сва могућа " $2 \times n$ " множења над структурном матрицом S . Након тога се, манипулацијом над формираном структуром података, изабирају таква множења која омогућују свођење почетног израза Y на облик (3.6) са што је могуће мање математичких операција. Ту спада и конструисање " $m \times n$ " множења користећи ($m - 1$)-но " $2 \times n$ " множења. Ако је у структури података пронађено ($m - 1$)-но " $2 \times n$ " множење, или њихови делови, који имају исте прве елементе сваког пара и све различите друге

елементе свих парова, лако је доказати да се " $m \times n$ " множење конструише спајањем одговарајућих елемената пронађених множења мање димензије. Због закона транзитивности за једнакост, следи да су сви услови за постојање решења система (3.9) и (3.23) испуњени кад је $I = m$ и $J = n$.

Над свим конструисаним множењима се врши одабир оних која ће дати израз раставити у облик (3.6) са што је већом уштедом у броју рачунских операција. Исти поступак се примењује на све Y^j , $j = 1, \dots, W$. Затим се примењује алгоритам који раставља сваки израз на производе израза садржане у одабраним множењима. Следи алгоритам написан у псеудокоду.

Алгоритам 3.5

RastIzr()

```
{
  radi = 1;
  kpr.tip = '3';
  kpr.prom_kod = 0;
  if (!NadjiKl(PR1, kpr))
    if (SledKl(PR1))
      UcitSl(pr);
    else
      radi = 0;
  else
    UcitSl(pr);
  while (radi) {
    UzmiAdr(adr);
    if (ImaRast(pr, dim, nizpr1, nizpr2, ostpr))
      MemRast(pr, dim, nizpr1, nizpr2, ostpr);
    PostAdr(adr);
    TekKl();
    if (SledKl(PR1))
      UcitSl(pr);
    else
```

```

    radi = 0;
  }
  IdentIzr();
}

```

Процедура $ImaRast(pr, dim, nizpr1, nizpr2, ostpr)$ проверава у структури података да ли постоје одабрана множења за израз променљиве pr и, ако постоје, раставља израз према њима тако да важи формула:

$$pr = \sum_{i=1}^{dim} (nizpr1[i] \cdot nizpr2[i]) + ostpr.$$

Затим процедура $MemRast(pr, dim, nizpr1, nizpr2, ostpr)$ меморише у структури података добијену формулу на начин аналоган оном описаном у Алгоритму 2.1.

Уколико неки израз не може да се растави на производе, он остаје у првобитном облику. Алгоритам укључује и поновно елиминисање идентичних израза јер се генерисањем производа формирају нови изрази и постоји могућност да неки од њих буду идентични.

Када су сви изрази Y^j доведени на облик (3.6), над изразима $Y_{l1}^j, Y_{l2}^j, l = 1, \dots, M$ и $Y_{M+1}^j, j = 1, \dots, W$ се примењује алгоритам извлачења монома да би се добио граф израчунавања меморисан у бази података. Примењује се већ описани Алгоритам 3.3.

3.4 Смањивање рачунске сложености над деловима модела

Уместо да се поступак смањења рачунске сложености врши над комплетним моделом роботског механизма, могуће је поделити модел на делове, а затим процес смањивања нумеричке сложености вршити по одабраним деловима. Идеја се састоји у следећем. Пошто се поступком меморисања модела роботског механизма у

бази података добије структура у облику графа (граф израчунавања почетног модела), могуће је унутар структуре уочити подграф који је независан од преостале структуре. За подграф кажемо да је независан ако постоји скуп променљивих "на врху" тог подграфа који је повезан са преосталом структуром, док све остале променљиве из тог подграфа нису повезане са преосталом структуром.

Сада се поступак смањивања рачунске сложености одвија на следећи начин. Прво се формирају аналитички изрази само за променљиве из одабраног дела структуре (подграфа). Затим се над тим скупом израза примењује комплетан поступак смањивања нумеричке сложености. Прво се елиминишу тригонометријски идентитети а затим се за одабрани скуп израза формира граф израчунавања са мањим бројем рачунских операција него што је било потребно у почетном делу структуре. Након тога се део структуре почетног модела роботског механизма замени са новоформираним графом израчунавања. Управо због овог дела поступка је био потребан услов независности, јер би иначе постојала могућност да се изгуби нека променљива потребна за израчунавање преосталог дела структуре. Сада се над комплетном структуром поново формирају аналитички изрази и изврши комплетан поступак смањивања нумеричке сложености према већ описаним алгоритмима.

Очито је да се овај поступак може применити и више пута, то јест после смањивања рачунске сложености подграфа се не прелази на комплетну структуру него се уочи нови подграф и понови се описани поступак.

3.5 Пример

У овом одељку је дат пример смањивања броја рачунских операција у моделу, индустријског роботског механизма са 6 степени слободе (Пример 2.1), чије је меморисање у бази података описано у другој глави.

3.5.1 Комплетни аналитички изрази

Потребно је прво формирати аналитичке изразе за све променљиве модела поступком описаним у другој глави (**Алгоритам 2.3**). У овом примеру су приликом формирања аналитичких израза сви параметри роботског механизма третирали као реални бројеви. На тај начин се добијају једноставнији аналитички изрази јер је мањи број променљивих које учествују у њима. Сви алгоритми за смањивање нумеричке сложености се могу применити и на чисто симболичке аналитичке изразе, али се тада сви алгоритми примењују на сложенијим аналитичким изразима (већи број променљивих).

Бројеви операција потребни за израчунавање свих елемената матрица H и C и вектора h^G су приказани у Табели 3.1. Укупно за све компоненте тих матрица и вектора потребно је 5768 множења и 1047 сабирања. Треба напоменути да су у табели неки бројеви операција наведени два пута јер су матрице H и C симетричне што је описано у Глави 1., а у укупан број множења и сабирања нису урачунате те операције. Исто важи и за све табеле које наводе бројеве операција у наредном тексту.

Табела 3.1. Бројеви операција множења и сабирања

i	1		2		3		4		5		6	
	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.
h_i^G	0	0	33	10	32	9	28	7	16	3	0	0
H_{i1}	491	80	44	10	42	9	36	7	36	10	16	3
H_{i2}	44	10	19	10	19	10	18	9	8	2	1	0
H_{i3}	42	9	19	10	8	5	8	5	2	0	1	0
H_{i4}	36	7	18	9	8	5	5	3	0	0	1	0
H_{i5}	36	10	8	2	2	0	0	0	0	0	0	0
H_{i6}	16	3	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
C_{i1}^1	0	0	557	89	534	83	490	73	246	35	0	0
C_{i2}^1	557	89	44	10	42	9	36	7	52	11	16	3
C_{i3}^1	534	83	42	9	42	9	36	7	52	11	16	3
C_{i4}^1	490	73	36	7	36	7	36	7	52	11	16	3
C_{i5}^1	246	35	52	11	52	11	52	11	24	6	16	3
C_{i6}^1	0	0	16	3	16	3	16	3	16	3	0	0
C_{i1}^2	557	89	0	0	0	0	0	0	76	18	16	3
C_{i2}^2	0	0	0	0	11	4	13	5	11	4	0	0
C_{i3}^2	0	0	11	4	11	4	13	5	11	4	0	0
C_{i4}^2	0	0	13	5	13	5	13	5	11	4	0	0
C_{i5}^2	76	18	11	4	11	4	11	4	8	2	1	0
C_{i6}^2	16	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i1}^3	534	83	0	0	0	0	0	0	74	17	16	3
C_{i2}^3	0	0	11	4	0	0	3	1	5	2	0	0
C_{i3}^3	0	0	0	0	0	0	3	1	5	2	0	0
C_{i4}^3	0	0	3	1	3	1	3	1	5	2	0	0
C_{i5}^3	74	17	5	2	5	2	5	2	2	0	1	0
C_{i6}^3	16	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Табела 3.1. Наставак

i	1		2		3		4		5		6	
	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.
C_{i1}^4	490	73	0	0	0	0	0	0	68	15	16	3
C_{i2}^4	0	0	13	5	3	1	0	0	3	1	0	0
C_{i3}^4	0	0	3	1	3	1	0	0	3	1	0	0
C_{i4}^4	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	0	0
C_{i5}^4	68	15	3	1	3	1	3	1	0	0	1	0
C_{i6}^4	16	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i1}^5	246	35	76	18	74	17	68	15	0	0	16	3
C_{i2}^5	76	18	11	4	5	2	3	1	0	0	1	0
C_{i3}^5	74	17	5	2	5	2	3	1	0	0	1	0
C_{i4}^5	68	15	3	1	3	1	3	1	0	0	1	0
C_{i5}^5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C_{i6}^5	16	3	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
C_{i1}^6	0	0	16	3	16	3	16	3	16	3	0	0
C_{i2}^6	16	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i3}^6	16	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i4}^6	16	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i5}^6	16	3	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
C_{i6}^6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

3.5.2 Тригонометријски идентитети

Након формирања аналитичких израза, над њима се примењује описани алгоритам за елиминисање тригонометријских идентитета (Алгоритам 3.1). Након тога за израчунавање свих израза је потребно 1340 множења и 453 сабирања. У Табели 3.2. су приказани бројеви рачунских операција за сваки од израза појединачно.

Табела 3.2. Бројеви операција множења и сабирања

i	1		2		3		4		5		6	
	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.
h_i^G	0	0	5	3	4	2	3	1	2	0	0	0
H_{i1}	225	44	13	4	11	3	9	2	7	3	2	0
H_{i2}	13	4	10	7	10	7	9	6	4	1	1	0
H_{i3}	11	3	10	7	6	4	6	4	2	0	1	0
H_{i4}	9	2	9	6	6	4	3	2	0	0	1	0
H_{i5}	7	3	4	1	2	0	0	0	0	0	0	0
H_{i6}	2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
C_{i1}^1	0	0	74	22	79	22	84	20	114	19	0	0
C_{i2}^1	74	22	18	5	16	4	14	3	4	1	2	0
C_{i3}^1	79	22	16	4	16	4	14	3	4	1	2	0
C_{i4}^1	84	20	14	3	14	3	14	3	4	1	2	0
C_{i5}^1	114	19	4	1	4	1	4	1	6	2	2	0
C_{i6}^1	0	0	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0
C_{i1}^2	74	22	0	0	0	0	0	0	10	4	2	0
C_{i2}^2	0	0	0	0	4	2	6	3	6	3	0	0
C_{i3}^2	0	0	4	2	4	2	6	3	6	3	0	0
C_{i4}^2	0	0	6	3	6	3	6	3	6	3	0	0
C_{i5}^2	10	4	6	3	6	3	6	3	4	1	1	0
C_{i6}^2	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i1}^3	79	22	0	0	0	0	0	0	8	3	2	0
C_{i2}^3	0	0	4	2	0	0	3	1	4	2	0	0
C_{i3}^3	0	0	0	0	0	0	3	1	4	2	0	0
C_{i4}^3	0	0	3	1	3	1	3	1	4	2	0	0
C_{i5}^3	8	3	4	2	4	2	4	2	2	0	1	0
C_{i6}^3	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Табела 3.2. Наставак

i	1		2		3		4		5		6	
	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.	м.	с.
C_{i1}^4	84	20	0	0	0	0	0	0	6	2	2	0
C_{i2}^4	0	0	6	3	3	1	0	0	2	1	0	0
C_{i3}^4	0	0	3	1	3	1	0	0	2	1	0	0
C_{i4}^4	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	0	0
C_{i5}^4	6	2	2	1	2	1	2	1	0	0	1	0
C_{i6}^4	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i1}^5	114	19	10	4	8	3	6	2	0	0	2	0
C_{i2}^5	10	4	6	3	4	2	2	1	0	0	1	0
C_{i3}^5	8	3	4	2	4	2	2	1	0	0	1	0
C_{i4}^5	6	2	2	1	2	1	2	1	0	0	1	0
C_{i5}^5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0 ^z
C_{i6}^5	2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
C_{i1}^6	0	0	2	0	2	0	2	0	2	0	0	0
C_{i2}^6	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i3}^6	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i4}^6	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
C_{i5}^6	2	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
C_{i6}^6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Исто тако је приказан и аналитички израз променљиве H_{11} добијен после елиминисања тригонометријских идентитета.

$$\begin{aligned}
 H_{11} = & 4.007625 + 6.8 \cdot \sin^2 q^2 + 1.8 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin 2q^3 - \\
 & - 3.6 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 - 3.6 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 + \\
 & + 0.133375 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin 2q^3 \cdot \cos 2q^4 + \\
 & + 0.26675 \cdot \sin 2q^2 \cdot \cos 2q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 + \\
 & + 0.26675 \cdot \cos 2q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin 2q^4 - \\
 & - 0.181625 \cdot \cos^2 q^5 + 0.085125 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 + \\
 & + 0.085125 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 + \\
 & + 0.085125 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.085125 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 + \\
& +0.012 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 - \\
& -0.096812 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin 2q^3 \cdot \cos 2q^4 \cdot \sin^2 q^5 - \\
& -0.193625 \cdot \sin 2q^2 \cdot \cos 2q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \sin^2 q^5 - \\
& -0.193625 \cdot \cos 2q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin 2q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +0.012 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +0.012 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +0.012 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\
& +8.32 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 + \\
& +4.16 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin q^3 + \\
& +0.84 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos (q^3 + q^4) + \\
& +0.42 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin (q^3 + q^4) + \\
& +1.08 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos (q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\
& +0.54 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin (q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\
& +0.42 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin (2q^3 + q^4) + \\
& +1.08 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos q^4 + \cdot \cos q^5 + \\
& +0.54 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin (2q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\
& +0.84 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos q^4 + \\
& +0.84 \cdot \cos 2q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin q^4 + \\
& +1.08 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +1.08 \cdot \cos 2q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.10125 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin 2q^3 \cdot \cos 2q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \sin 2q^2 \cdot \cos 2q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \cos 2q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin 2q^4 + \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.2025 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos q^5 + \\
& +0.181625 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
& +0.181625 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+0.181625 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5 + \\
 &+0.181625 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \cos^2 q^5
 \end{aligned}$$

На аналитичке изразе је затим примењен описани алгоритам за проналажење идентичних израза после чега укупан број операција износи 801 множење и 257 сабирања.

3.5.3 Извлачење монома

Након примене алгоритма извлачења монома, добија се граф израчунавања модела роботског механизма меморисан у бази података са 260 множења и 177 сабирања потребних за израчунавање свих компоненти матрица H и C и вектора h^G . Исто тако потребно је 13 одређивања синуса и 13 одређивања косинуса.

3.5.4 Раствављање израза на производе

Уколико се, пре примене алгоритма извлачења монома, примени растављање израза на производе, добијају се следећи резултати. Раствављени су изрази променљивих H_{11} , H_{22} , H_{23} , H_{24} , C_{21}^1 , C_{31}^1 , C_{41}^1 , C_{51}^1 и C_{42}^2 на следећи начин:

$$H_{11} = X_1 + X_2 \cdot X_3 + X_4 \cdot X_5 + X_6 \cdot X_7 + X_8 \cdot X_9$$

$$H_{22} = X_{10} + X_6 \cdot X_{11}$$

$$H_{23} = X_{12} + X_6 \cdot X_{13}$$

$$H_{24} = H_{44} + X_6 \cdot X_{14}$$

$$C_{21}^1 = X_{15} + X_{16} \cdot X_{17} + X_6 \cdot X_{18}$$

$$C_{31}^1 = X_{19} + X_{16} \cdot X_{17} + X_6 \cdot X_{20}$$

$$C_{41}^1 = X_{21} + X_{16} \cdot X_{17} + X_6 \cdot X_{22}$$

$$C_{51}^1 = X_{23} + X_{24} \cdot X_{25} + X_{26} \cdot C_{52}^4 + X_{27} \cdot X_{28}$$

$$C_{42}^2 = X_{29} + X_6 \cdot X_{30}$$

Остали изрази се не могу раставити на производе. Сада за израчунавање свих компоненти матрица H и C и вектора h^G преко

аналитичких израза треба 453 множења и 148 сабирања. Наведени су аналитички изрази који се добијају растављањем само израза променљиве H_{11} .

$$X_1 = 4.007625 + 6.8 \cdot \sin^2 q^2 - 0.181625 \cdot \cos^2 q^5 + \\ + 1.8 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin 2q^3 + 1.8 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin q^3 + \\ + 8.32 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos q^3 +$$

$$+ 0.012 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 + \\ + 0.012 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5$$

$$X_2 = 0.468685 + \cos^2 q^5 + 1.114935 \cdot \cos q^5$$

$$X_3 = 0.181625 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4 +$$

$$+ 0.181625 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 +$$

$$+ 0.181625 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos^2 q^4 +$$

$$+ 0.181625 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \sin^2 q^4$$

$$X_4 = 0.5 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin 2q^3 \cdot \cos 2q^4 +$$

$$+ \sin 2q^2 \cdot \cos 2q^3 \cdot \cos q^4 \cdot \sin q^4 +$$

$$+ \cos 2q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin 2q^4$$

$$X_5 = 0.266750 - 0.193625 \cdot \sin^2 q^5 + 0.2025 \cdot \cos q^5$$

$$X_6 = 0.777778 + \cos q^5$$

$$X_7 = 0.54 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin (2q^3 + q^4) +$$

$$+ 0.54 \cdot \sin 2q^2 \cdot \sin (q^3 + q^4) +$$

$$+ 1.08 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos (q^3 + q^4) +$$

$$+ 1.08 \cdot \sin^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3 \cdot \cos q^4 +$$

$$+ 1.08 \cdot \cos^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 \cdot \cos q^4 +$$

$$+ 1.08 \cdot \cos 2q^2 \cdot \cos q^3 \cdot \sin q^3 \cdot \sin q^4$$

$$X_8 = \sin^2 q^2 \cdot \sin^2 q^3 + \cos^2 q^2 \cdot \cos^2 q^3$$

$$X_9 = 0.012 \cdot \cos^2 q^4 \cdot \sin^2 q^5 - 3.6$$

Када се сада на овакве изразе примени алгоритам извлачења монома добија се граф израчунавања са 218 множења, 138 сабирања, 13 синуса и 13 косинуса.

3.5.5 Смањивање рачунске сложености по деловима модела

За део модела над којим се примењује смањивање нумеричке сложености су одабране све променљиве Q_{ijk} и променљиве e_{ij} , $i = 1, \dots, 6$, $j, k = 1, 2, 3$. Да је овај део графа израчунавања независан следи из алгоритама извођења модела описаном у првој глави (Алгоритам 1.1).

3.5.5.1 Смањивање рачунске сложености одабраног подграфа

За израчунавање комплетног модела је, као што је већ наведено, потребно 10268 множења и 6166 сабирања. Када се у првобитном моделу означе само променљиве одабраног дела, за њихово израчунавање је потребно 768 множења и 382 сабирања. Затим се примењује алгоритам за формирање аналитичких израза и добијају се изрази за чије је израчунавање потребно 543 множења и 191 сабирање. После елиминисања тригонометријских идентитета и идентичних израза за њихово израчунавање је потребно 60 множења и 14 сабирања. После примене алгоритма извлачења монома добија се граф израчунавања са 43 множења и 14 сабирања. У овом случају ни један израз не може да се растави на производе. Сада се у првобитној структури означени део замењује новоформираним графом израчунавања и добија се нови граф израчунавања са 9544 множења и 5798 сабирања.

3.5.5.2 Смањивање рачунске сложености новоформираног графа израчунавања

Сада се редом примењују сви алгоритми за смањивање нумеричке сложености на новодобијеном моделу механизма. Прво се формирају аналитички изрази за компоненте матрица H и C и вектора h^G са укупно 931 множења и 310 сабирања. Наведен је

израз за променљиву H_{11} који има 41 множења и 16 сабирања.

$$\begin{aligned}
 H_{11} = & 0.01 \cdot \cos^2 q^2 + 0.01 \cdot \cos^2 (q^2 + q^3) + \\
 & + 6.81 \cdot \sin^2 q^2 + 0.002 \cdot \cos^2 (q^2 + q^3 + q^4) + \\
 & + 0.2 + 3.61 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3) + \\
 & + 0.004 \cdot \cos^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos^2 q^5 + \\
 & + 0.012 \cdot \cos^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \sin^2 q^5 + \\
 & + 0.087125 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) + 8.32 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3) + \\
 & + 0.84 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) + \\
 & + 1.08 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\
 & + 0.84 \cdot \sin (q^2 + q^3) \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) + \\
 & + 1.08 \cdot \sin (q^2 + q^3) \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\
 & + 0.2025 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\
 & + 0.185625 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos^2 q^5 + \\
 & + 0.185625 \cdot \sin^2 q^5
 \end{aligned}$$

После елиминисања тригонометријских идентитета и идентичних израза добијају се изрази са укупно 442 множења и 174 сабирања. Опет је наведен израз променљиве H_{11} који сад има 31 множења и 12 сабирања.

$$\begin{aligned}
 H_{11} = & 6.8 \cdot \sin^2 q^2 + \\
 & + 0.407625 + 3.6 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3) - \\
 & - 0.181625 \cdot \cos^2 q^5 + \\
 & + 0.012 \cdot \cos^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \sin^2 q^5 + \\
 & + 0.085125 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) + 8.32 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3) + \\
 & + 0.84 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) + \\
 & + 1.08 \cdot \sin q^2 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\
 & + 0.84 \cdot \sin (q^2 + q^3) \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) + \\
 & + 1.08 \cdot \sin (q^2 + q^3) \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\
 & + 0.2025 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\
 & + 0.185625 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos^2 q^5
 \end{aligned}$$

После примене алгоритма извлачења монома добија се граф израчунавања са 196 множења, 135 сабирања, 7 синуса и 7 косинуса.

Ако се и овог пута примени растављање израза на производе, пре извлачења монома растављају се изрази H_{11} , H_{22} , H_{23} , H_{24} , H_{33} , H_{34} , C_{21}^1 , C_{31}^1 , C_{41}^1 , C_{32}^2 , C_{42}^2 , C_{22}^3 , C_{42}^3 , C_{22}^4 и C_{32}^4 на следећи начин:

$$H_{11} = X_1 + X_2 \cdot X_3$$

$$H_{22} = X_4 + X_5 \cdot X_6$$

$$H_{23} = X_7 + X_5 \cdot X_8$$

$$H_{24} = H_{44} + X_5 \cdot X_9$$

$$H_{33} = X_{10} + X_5 \cdot X_{11}$$

$$H_{34} = H_{44} + X_5 \cdot X_{12}$$

$$C_{21}^1 = X_{13} + X_5 \cdot X_{14}$$

$$C_{31}^1 = X_{15} + X_5 \cdot X_{16}$$

$$C_{41}^1 = X_{17} + X_{18} \cdot X_{19}$$

$$C_{32}^2 = X_{20} + X_5 \cdot X_{21}$$

$$C_{42}^2 = X_{22} + X_5 \cdot X_{23}$$

$$C_{22}^3 = X_{24} + X_{25} \cdot X_{26}$$

$$C_{42}^3 = X_{27} + X_5 \cdot X_{28}$$

$$C_{22}^4 = X_{29} + X_5 \cdot X_{30}$$

$$C_{32}^4 = X_{31} + X_5 \cdot X_{32}$$

Остали изрази се не могу раставити на производе. Сада укупан број операција за израчунавање израза износи 328 множења и 138 сабирања. Приказани су изрази који се добијају растављањем израза променљиве H_{11} на производе.

$$\begin{aligned} X_1 = & 0.407625 - 0.181625 \cdot \cos^2 q^5 + \\ & + 8.32 \cdot \sin q^2 \cdot \sin (q^2 + q^3) + \\ & + 0.2025 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + \\ & + 0.181625 \cdot \sin^2 (q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos^2 q^5 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +0.012 \cdot \cos^2(q^2 + q^3 + q^4) \cdot \sin^2 q^5 \\
 & +6.8 \cdot \sin^2 q^2 + 3.6 \cdot \sin^2(q^2 + q^3) + 0.085125 \cdot \sin^2(q^2 + q^3 + q^4) \\
 X_2 & = \sin(q^2 + q^3 + q^4) \cdot \cos q^5 + 0.777778 \cdot \sin(q^2 + q^3 + q^4) \\
 X_3 & = 1.08 \cdot \sin q^2 + 1.08 \sin(q^2 + q^3).
 \end{aligned}$$

После примене алгоритма извлачења монома добија се граф израчунавања са 140 множења, 107 сабирања, 7 синуса и 7 косинуса.

Видимо да су приликом смањивања нумеричке сложености по деловима модела добијени бољи резултати него приликом смањивања броја рачунских операција над комплетним моделом. У случају целог модела приликом формирања израза се примењује само тригонометријски идентитет $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. За разлику од тога, када се ажурира прво део структуре, над тим изразима су примењени сви тригонометријски идентитети, па такви изрази учествују у формирању комплетних аналитичких израза за компоненте матрица H и C и вектора h^G . У овом случају се овај други начин показао погоднији, што у општем случају очито не мора да важи.

У Прилогу 3.1 је дат и комплетан модел записан преко низа формула које се могу добити из базе података у којој је модел меморисан.

3.6 Табеларни приказ добијених резултата

У овом одељку су приказани резултати смањивања рачунске сложености за модел роботске конфигурације из Примера 2.1 у виду табела. У Табели 3.3 су дати бројеви рачунских операција коначних графова израчунавања модела за четири обрађена случаја.

Табела 3.3. Бројеви рачунских операција

	Случај 1.	Случај 2.	Случај 3.	Случај 4.
Број множења	260	218	196	140
Број сабирања	177	138	135	107
Број синуса	13	13	7	7
Број косинуса	13	13	7	7

Случај 1. представља смањивање нумеричке сложености над комплетним моделом без примењивања алгорита за растављање израза на производе. **Случај 2.** представља смањивање рачунске сложености над комплетним моделом са применом алгорита за растављање израза на производе. Аналогно томе, **Случај 3.** и **Случај 4.** представљају смањивање нумеричке сложености без растављања и са растављањем израза на производе, респективно, стим што се сада смањивања броја рачунских операција врши по деловима модела роботске конфигурације из **Примера 2.1.**

Коначно, у Табели 3.4 су приказани бројеви множења и сабирања за **Случај 4.** поступно како се одвијао поступак смањивања нумеричке сложености.

Табела 3.4. Бројеви множења и сабирања

	Бр. мн.	Бр. са.
Почетни граф	10268	6166
Почетни подграф	768	382
Аналитички изрази	543	191
Упрошћени изрази	60	14
Нови подграф	43	14
Нови граф	9544	5798
Аналитички изрази	931	310
Упрошћени изрази	442	174
Растављање израза на производе	328	138
Коначни граф	140	107

Овим су приказани резултати постигнути на роботској конфигурацији из **Примера 2.1**.

Пример 3.1

У овом примеру, уместо функције $f(x)$ узимамо функцију $f(x) = x^2$. Ова функција је конвексна, па је f^* функција $f^*(x) = \begin{cases} x^2/4 & \text{за } |x| \leq 2 \\ \infty & \text{за } |x| > 2 \end{cases}$. Ова функција је конвексна, па је f^* функција $f^*(x) = \begin{cases} x^2/4 & \text{за } |x| \leq 2 \\ \infty & \text{за } |x| > 2 \end{cases}$.

У овом примеру, уместо функције $f(x)$ узимамо функцију $f(x) = x^2$. Ова функција је конвексна, па је f^* функција $f^*(x) = \begin{cases} x^2/4 & \text{за } |x| \leq 2 \\ \infty & \text{за } |x| > 2 \end{cases}$. Ова функција је конвексна, па је f^* функција $f^*(x) = \begin{cases} x^2/4 & \text{за } |x| \leq 2 \\ \infty & \text{за } |x| > 2 \end{cases}$.

Прилог 3.1

У овом прилогу је приказан комплетан модел динамике роботског механизма из **Примера 2.1 (Модел 3.1)**, који је добијен поступком смањивања рачунске сложености. Примењено је смањивање броја рачунских операција по деловима модела и алгоритам растављања израза на производе. Формирани математички модел динамике роботског механизма садржи 140 множења, 107 сабирања, 7 синуса и 7 косинуса.

У **Моделу 3.1** се користе стандардне ознаке за математичке операције и функције: = (додељивање), + (сабирање), - (одузимање), · (множење), sin (синус), cos (косинус). Са q^i , $i = 1, \dots, 6$ су означене унутрашње координате зглобова механизма. Са H_{ij} , C_{jk}^i и h_i^G , $i, j, k = 1, \dots, 6$ су означене компоненте матрица H , C и вектора h^G , респективно. Пошто су матрице H и C симетричне (Глава 1.), у **Моделу 3.1** је приказано само израчунавање променљивих H_{ij} , $i \leq j$ и променљивих C_{jk}^i , $j \geq k$, а остале компоненте матрица H и C се добијају изједначавањем $H_{ji} = H_{ij}$ и $C_{kj}^i = C_{jk}^i$ без додатних операција. Остале ознаке у **Моделу 3.1** су уведене за означавање помоћних променљивих.

Модел 3.1

$$ZQ_{23} = q^2 + q^3$$

$$ZQ_{234} = ZQ_{23} + q^4$$

$$ZQ_{223} = ZQ_{23} + q^2$$

$$ZQ_{2234} = ZQ_{234} + q^2$$

$$ZQ_{22334} = ZQ_{2234} + q^3$$

$$SQ_2 = \sin q^2$$

$$SQ_5 = \sin q^5$$

$$CQ_2 = \cos q^2$$

$$CQ_5 = \cos q^5$$

$$SZ_{23} = \sin ZQ_{23}$$

$$SZ_{234} = \sin ZQ_{234}$$

$$SZ_{223} = \sin ZQ_{223}$$

$$SZ_{2234} = \sin ZQ_{2234}$$

$$SZ_{22334} = \sin ZQ_{22334}$$

$$CZ_{23} = \cos ZQ_{23}$$

$$CZ_{234} = \cos ZQ_{234}$$

$$CZ_{223} = \cos ZQ_{223}$$

$$CZ_{2234} = \cos ZQ_{2234}$$

$$CZ_{22334} = \cos ZQ_{22334}$$

$$KC_5 = CQ_5 \cdot CQ_5$$

$$KCZ_{234} = CZ_{234} \cdot CZ_{234}$$

$$KS_2 = SQ_2 \cdot SQ_2$$

$$KSZ_{23} = SZ_{23} \cdot SZ_{23}$$

$$KSZ_{234} = SZ_{234} \cdot SZ_{234}$$

$$h_1^G = 0.0$$

$$H_{55} = 0.197625$$

$$H_{66} = 0.002$$

$$C_{65}^2 = -0.001 \cdot CQ_5$$

$$X_5 = 0.777778 + CQ_5$$

$$X_{25} = CQ_2 \cdot SZ_{234} - 0.5 \cdot SZ_{2234}$$

$$P_{109} = 0.54 \cdot CQ_5$$

$$P_{10} = -0.193625 \cdot CQ_5 - 0.10125$$

$$P_{19} = -0.001 \cdot CZ_{234}$$

$$P_{31} = -6.62175 \cdot CZ_{234}$$

$$P_{35} = -0.54 \cdot SZ_{23}$$

$$P_{43} = P_{35} + P_{35}$$

$$P_{81} = 0.54 \cdot CZ_{23}$$

$$P_{52} = -0.54 \cdot SZ_{22334}$$

$$P_{58} = 0.54 \cdot CZ_{22334}$$

$$P_{59} = 2.16 \cdot SZ_{23}$$

$$P_{60} = P_{58} + P_{58}$$

$$P_{71} = -6.62175 \cdot CQ_5 - 5.15025$$

$$P_{51} = P_{81} + P_{81}$$

$$P_{84} = 0.10125 \cdot CQ_5 + 0.195625$$

$$P_{89} = -0.193625 \cdot SQ_5$$

$$P_{101} = 0.54 \cdot SQ_2$$

$$P_{98} = P_{101} + P_{101}$$

$$P_{99} = -0.54 \cdot SZ_{2234}$$

$$X_{26} = P_{109} + P_{109} + 0.84$$

$$P_{110} = -SZ_{2234} - SZ_{22334}$$

$$P_{113} = CQ_2 + CZ_{23}$$

$$P_{114} = -SQ_2 - SZ_{23}$$

$$P_{119} = -CZ_{2234} - CZ_{22334}$$

$$P_{135} = 0.2025 \cdot CQ_5$$

$$P_{149} = SZ_{23} \cdot CQ_5$$

$$P_{172} = SQ_2 \cdot SZ_{23}$$

$$P_{174} = 4.16 \cdot CZ_{223} + 3.689125$$

$$P_{176} = 8.32 \cdot CZ_{223} + 10.499125$$

$$P_{179} = 4.16 \cdot SZ_{223}$$

$$P_{183} = 8.32 \cdot CQ_2 \cdot SZ_{23}$$

$$P_{189} = 3.6 \cdot CZ_{23} \cdot SZ_{23}$$

$$P_{191} = 6.8 \cdot CQ_2 \cdot SQ_2$$

$$P_{213} = SQ_2 \cdot CZ_{23}$$

$$P_{216} = 51.012 \cdot SZ_{23}$$

$$h_4^G = SZ_{234} \cdot P_{71}$$

$$h_3^G = h_4^G - P_{216}$$

$$h_5^G = SQ_5 \cdot P_{31}$$

$$H_{26} = -SQ_5 \cdot H_{66}$$

$$\begin{aligned}
C_{62}^1 &= SZ_{234} \cdot C_{65}^2 \\
C_{65}^1 &= SQ_5 \cdot P_{19} \\
C_{65}^3 &= C_{65}^2 \\
C_{52}^4 &= SQ_5 \cdot P_{10} \\
C_{65}^4 &= C_{65}^2 \\
C_{62}^5 &= -C_{65}^2 \\
C_{63}^5 &= -C_{65}^2 \\
C_{64}^5 &= -C_{65}^2 \\
C_{52}^6 &= C_{65}^2 \\
C_{53}^6 &= C_{65}^2 \\
C_{54}^6 &= C_{65}^2 \\
X_2 &= SZ_{234} \cdot X_5 \\
X_3 &= -1.08 \cdot P_{114} \\
X_{11} &= SZ_{234} \cdot P_{59} + P_{60} \\
P_{27} &= SZ_{234} \cdot P_{43} \\
X_{12} &= P_{58} - P_{27} \\
X_{14} &= -0.54 \cdot P_{110} \\
X_{16} &= CZ_{234} \cdot P_{101} + P_{52} \\
X_{18} &= CZ_{234} \cdot X_5 \\
X_{19} &= -0.54 \cdot P_{114} \\
X_{21} &= CZ_{234} \cdot P_{98} + P_{99} \\
X_{24} &= P_{183} - P_{179} \\
X_{28} &= P_{52} - CZ_{234} \cdot P_{43} \\
X_{32} &= SZ_{234} \cdot P_{51} + P_{52} \\
P_6 &= 0.012 \cdot KSZ_{234} \cdot SQ_5 \\
P_{11} &= CZ_{234} \cdot P_{89} \\
P_{12} &= CZ_{234} \cdot P_{84} \\
P_{22} &= SZ_{234} \cdot P_{10} \\
P_{23} &= P_{22} + P_{35} \\
P_{28} &= -CZ_{234} \cdot P_{10} \\
P_{29} &= P_{28} + P_{81} \\
P_2 &= 0.54 \cdot P_{119} \\
P_4 &= -0.54 \cdot CZ_{22334} \\
P_{53} &= 1.08 \cdot P_{113}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{62} &= -0.54 \cdot P_{119} \\
 P_{63} &= P_{98} + P_{59} \\
 P_{64} &= 0.54 \cdot CZ_{2234} + P_{60} \\
 P_{65} &= -2.16 \cdot P_{114} \\
 P_{66} &= -1.08 \cdot P_{119} \\
 P_{69} &= -0.10125 \cdot CQ_5 - H_{55} \\
 P_{70} &= P_{109} \cdot P_{114} \\
 P_{75} &= -90.252 \cdot SQ_2 - P_{216} \\
 P_{76} &= 0.26675 + P_{135} \\
 P_{79} &= 0.54 \cdot P_{113} \\
 P_{85} &= P_{109} \cdot P_{113} \\
 P_{42} &= P_2 + P_{10} \\
 P_{44} &= P_4 + P_{10} \\
 P_{91} &= P_2 - P_{10} \\
 P_{93} &= P_4 - P_{10} \\
 P_{103} &= 1.08 \cdot P_{149} \\
 P_{104} &= -SZ_{22334} \cdot P_{109} \\
 P_{106} &= P_{109} \cdot P_{110} \\
 P_{108} &= CQ_5 \cdot H_{66} \\
 P_{148} &= -CQ_5 \cdot P_{114} \\
 P_{161} &= 0.193625 \cdot KC_5 \\
 P_{165} &= 16.64 \cdot P_{172} + P_{176} \\
 P_{169} &= 8.32 \cdot P_{172} + P_{174} \\
 P_{181} &= P_{189} + P_{191} \\
 P_{193} &= 4.16 \cdot P_{213} \\
 P_{186} &= 0.181625 \cdot KC_5 \\
 P_{187} &= KSZ_{234} - 1.0 \\
 P_{188} &= 6.8 \cdot KS_2 + 3.6 \cdot KSZ_{23} + 0.085125 \cdot KSZ_{234} + 0.407625 \\
 P_{185} &= P_{193} + P_{193} \\
 P_{204} &= 0.193625 \cdot KCZ_{234} \\
 P_{205} &= -0.10125 \cdot KSZ_{234} \\
 h_2^G &= h_4^G + P_{75} \\
 H_{13} &= SQ_5 \cdot P_{29} \\
 H_{14} &= SQ_5 \cdot P_{28}
 \end{aligned}$$

$$H_{15} = SZ_{234} \cdot P_{69} + P_{70}$$

$$H_{16} = CZ_{234} \cdot P_{108}$$

$$H_{35} = SQ_5 \cdot X_{28}$$

$$H_{36} = H_{26}$$

$$H_{46} = H_{26}$$

$$C_{32}^1 = SQ_5 \cdot P_{23}$$

$$C_{42}^1 = SQ_5 \cdot P_{22}$$

$$C_{63}^1 = C_{62}^1$$

$$C_{64}^1 = C_{62}^1$$

$$C_{61}^2 = -C_{62}^1$$

$$C_{22}^3 = X_{24} + X_{25} \cdot X_{26}$$

$$C_{42}^3 = X_{27} + X_5 \cdot X_{28}$$

$$C_{55}^3 = CZ_{234} \cdot P_{103} + P_{104}$$

$$C_{61}^3 = -C_{62}^1$$

$$C_{32}^4 = X_{31} + X_5 \cdot X_{32}$$

$$P_{26} = SQ_5 \cdot P_{11}$$

$$C_{51}^4 = P_{26} + P_{12}$$

$$C_{53}^4 = C_{52}^4$$

$$C_{54}^4 = C_{52}^4$$

$$C_{61}^4 = -C_{62}^1$$

$$C_{42}^5 = -C_{52}^4$$

$$C_{43}^5 = -C_{52}^4$$

$$C_{44}^5 = -C_{52}^4$$

$$C_{61}^5 = -C_{65}^1$$

$$C_{21}^6 = C_{62}^1$$

$$C_{31}^6 = C_{62}^1$$

$$C_{41}^6 = C_{62}^1$$

$$C_{51}^6 = C_{65}^1$$

$$X_6 = SZ_{234} \cdot P_{65} + P_{66}$$

$$X_8 = SZ_{234} \cdot P_{63} + P_{64}$$

$$P_{32} = SZ_{234} \cdot X_3$$

$$X_9 = P_{32} + P_{62}$$

$$X_{20} = P_{185} - P_{179}$$

$$X_{23} = CZ_{234} \cdot X_3 - X_{14}$$

$$\begin{aligned}
 X_{30} &= SZ_{234} \cdot P_{53} - X_{14} \\
 P_{14} &= SZ_{234} \cdot P_{11} \\
 P_8 &= CZ_{234} \cdot P_{51} + P_{93} \\
 P_9 &= CZ_{234} \cdot P_{53} + P_{91} \\
 P_{13} &= P_{27} + P_{44} \\
 P_{16} &= P_{42} - P_{32} \\
 P_{18} &= P_{12} + P_{85} \\
 P_{15} &= P_{12} + P_{87} \\
 P_{20} &= 0.10125 \cdot SZ_{234} + X_{19} \\
 P_{24} &= P_{22} - X_{19} \\
 P_{30} &= P_{79} - P_{28} \\
 P_{38} &= CQ_5 \cdot P_{204} + P_{205} \\
 P_{45} &= CZ_{234} \cdot P_{76} \\
 P_{46} &= P_{179} + P_{181} \\
 P_{48} &= P_{189} + P_{193} \\
 P_{105} &= 1.08 \cdot P_{148} \\
 P_{107} &= P_{161} - 0.195625 \\
 P_{141} &= 3.689125 + P_{161} \\
 P_{143} &= P_{161} + P_{167} \\
 P_{147} &= 0.079125 + P_{161} \\
 P_{145} &= P_{161} + P_{165} \\
 P_{178} &= P_{186} \cdot P_{187} + P_{188} \\
 H_{12} &= SQ_5 \cdot P_{30} \\
 H_{25} &= SQ_5 \cdot X_{23} \\
 H_{44} &= P_{135} + P_{147} \\
 C_{22}^1 &= SQ_5 \cdot P_{24} \\
 C_{33}^1 &= C_{32}^1 \\
 C_{43}^1 &= C_{42}^1 \\
 C_{44}^1 &= C_{42}^1 \\
 C_{52}^1 &= CZ_{234} \cdot P_{107} \\
 C_{55}^1 &= SQ_5 \cdot P_{20} \\
 C_{32}^2 &= X_{20} + X_5 \cdot X_{21} \\
 C_{42}^2 &= X_{22} + X_5 \cdot X_{23} \\
 C_{51}^2 &= P_{26} + P_{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{52}^2 &= SQ_5 \cdot P_{16} \\
C_{55}^2 &= CZ_{234} \cdot P_{105} + P_{106} \\
C_{43}^3 &= C_{42}^3 \\
C_{44}^3 &= C_{42}^3 \\
C_{51}^3 &= P_{26} + P_{15} \\
C_{52}^3 &= SQ_5 \cdot P_{13} \\
C_{22}^4 &= X_{29} + X_5 \cdot X_{30} \\
C_{33}^4 &= C_{32}^4 \\
C_{22}^5 &= SQ_5 \cdot P_9 \\
C_{32}^5 &= SQ_5 \cdot P_8 \\
C_{41}^5 &= -C_{51}^4 \\
X_4 &= P_{135} + P_{145} \\
X_7 &= P_{135} + P_{143} \\
X_{10} &= P_{135} + P_{141} \\
P_1 &= SZ_{234} \cdot P_{45} \\
P_3 &= P_1 + P_{48} \\
P_5 &= P_1 + P_{46} \\
P_{21} &= P_{38} - SZ_{234} \cdot X_{19} \\
P_{139} &= 8.32 \cdot P_{172} + P_{178} \\
H_{22} &= X_4 + X_5 \cdot X_6 \\
H_{23} &= X_7 + X_5 \cdot X_8 \\
H_{24} &= H_{44} + X_5 \cdot X_9 \\
H_{33} &= X_{10} + X_5 \cdot X_{11} \\
H_{34} &= H_{44} + X_5 \cdot X_{12} \\
C_{51}^1 &= SQ_5 \cdot P_{21} \\
C_{53}^1 &= C_{52}^1 \\
C_{54}^1 &= C_{52}^1 \\
C_{33}^2 &= C_{32}^2 \\
C_{43}^2 &= C_{42}^2 \\
C_{44}^2 &= C_{42}^2 \\
C_{53}^2 &= C_{52}^2 \\
C_{54}^2 &= C_{52}^2 \\
C_{53}^3 &= C_{52}^3 \\
C_{54}^3 &= C_{52}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{21}^5 &= -C_{51}^2 \\
C_{31}^5 &= -C_{51}^3 \\
C_{33}^5 &= C_{31}^5 \\
P_{25} &= SQ_5 \cdot P_{14} \\
X_{13} &= P_{25} + P_3 \\
X_{15} &= P_{25} + P_3 \\
X_{17} &= P_{25} + P_1 \\
P_7 &= SZ_{234} \cdot P_{135} + P_{139} \\
C_{21}^1 &= X_{13} + X_5 \cdot X_{14} \\
C_{31}^1 &= X_{15} + X_5 \cdot X_{16} \\
C_{41}^1 &= X_{17} + X_{18} \cdot X_{19} \\
C_{11}^5 &= -C_{51}^1 \\
X_1 &= SQ_5 \cdot P_6 + P_7 \\
H_{11} &= X_1 + X_2 \cdot X_3 \\
C_{11}^2 &= -C_{21}^1 \\
C_{11}^3 &= -C_{31}^1 \\
C_{11}^4 &= C_{41}^1
\end{aligned}$$

Приказаним matematičkim modelom se za zadate unutrašnje koordinate konkretnog robotskog mehanizma (**Пример 2.1**) израчунавају компоненте матрица H и C као и вектора h^G .

Глава 4

Пример сложеног активног просторног механизма

У овом поглављу се даје поступак формирања математичког модела и смањења броја рачунских операција за сложене активне просторне механизме. Као илустративни пример сложених активних просторних механизма, узет је антропоморфни локомоциони роботски механизам.

Укратко су описани антропоморфни локомоциони механизми са својим специфичностима. Прво је детаљно описана конкретна конфигурација антропоморфног активног механизма а затим су изложени резултати, добијени формирањем модела и смањивањем броја рачунских операција у добијеном моделу.

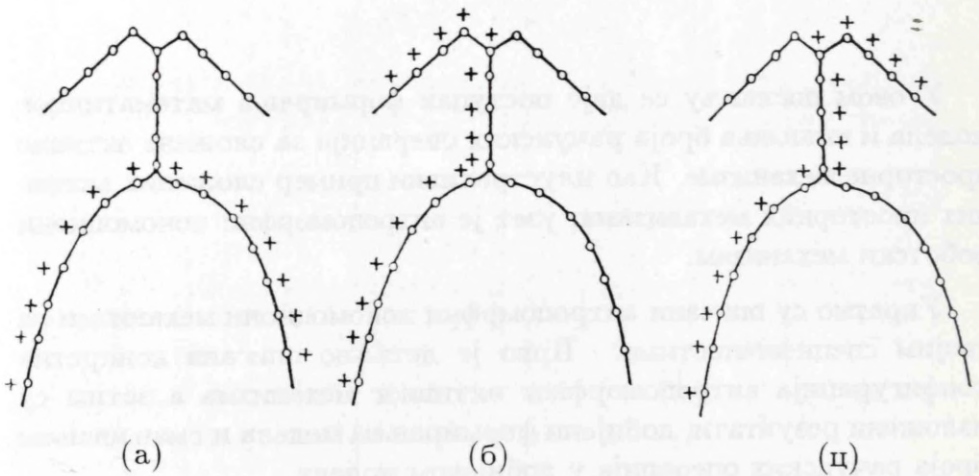
4.1 Антропоморфни локомоциони роботски механизми

Антропоморфни локомоциони роботски механизми су детаљно описани у [Vuk90], а овде се наводе њихове основне особине. Локомоциони роботски механизам се моделира са сложеним кинематичким ланцем. На Сл. 4.1. је приказан један локомоциони меха-

низам који се састоји од три низа " + " зглобова. На слици је под (а) означен први, под (б) други, а под (ц) трећи низ " + " зглобова.

Први низ " + " зглобова наизменично прелази из отвореног у затворени кинематички ланац. Када је ланац отворен механизам се налази у једнослоначкој, а када је затворен у двоослоначкој фази кретања. Фазе су назване по аналогiji са фазама људског хода. Када се оба стопала налазе у контакту са подлогом, реч је о двоослоначкој фази, а када је једно од стопала у фази преноса, о једноослоначкој фази.

Ови роботски механизми спадају у сложене активне просторне механизме па се њихов математички модел формира према Алгоритму 1.3 који обухвата и затворене кинематичке ланце.



Сл. 4.1. Структура локомоционог механизма

4.2 Антропоморфна локомоциона конфигурација

Да би се формирање математичких модела сложених активних просторних механизма илустровало на примеру антропоморфних локомоционих механизма, одабрана је конфигурација од 14 сегме-

ната, повезаних са 14 ротационих зглобова, приказана у Примеру 4.1.

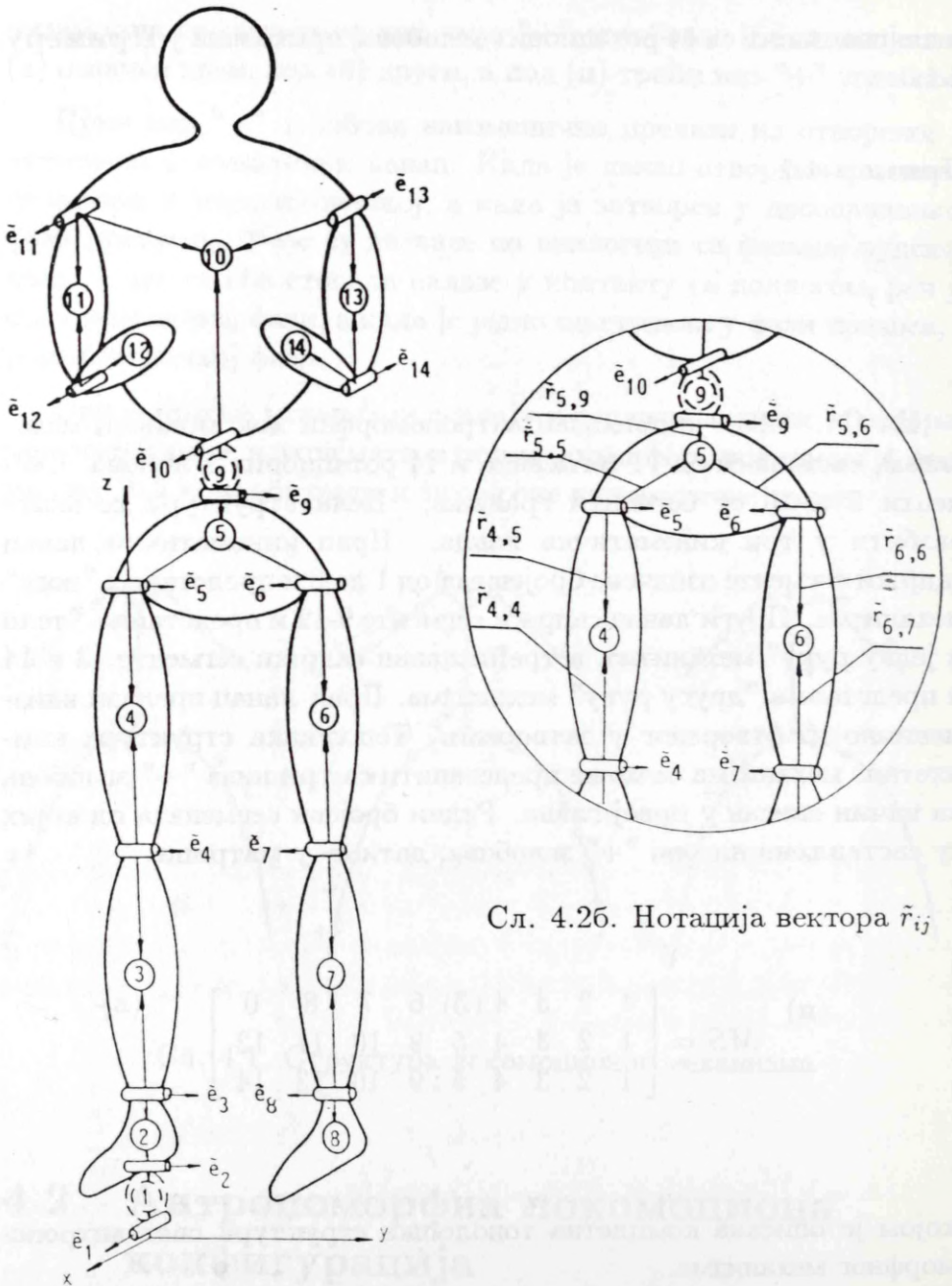
Пример 4.1

На Сл. 4.2а. је приказан антропоморфни локомоциони механизам, састављен од 14 сегмената и 14 ротационих зглобова. Сегменти 5 и 10 су сегменти гранања. Цела структура се може разбити у три кинематичка ланца. Први кинематички ланац садржи сегменте означене бројевима од 1 до 8 и представља "ноге" механизма. Други ланац садржи сегменте 9-12 и представља "тело и једну руку" механизма, а трећи ланац садржи сегменте 13 и 14 и представља "другу руку" механизма. Први ланац прелази наизменично из отвореног у затворени. Тополошка структура комплетног механизма се може представити са три низа "+" зглобова на начин описан у првој глави. Редни бројеви сегмената од којих су састављени низови "+" зглобова, дати су у матрици

$$MS = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 & 13 & 14 \end{bmatrix}$$

којом је описана комплетна тополошка структура овог антропоморфног механизма.

На Сл. 4.2б. је илустрован начин означавања вектора \vec{r}_{ij} на одабраном делу механизма који се састоји од сегмената означеним бројевима 4, 5, 6 и 9. У Табели 4.1. су дати комплетни кинематички и динамички параметри роботског механизма.



Сл. 4.26. Нотација вектора \tilde{r}_{ij}

Сл. 4.2а. Топологија антропоморфног механизма

Табела 4.1. Кинематички и динамички параметри механизма

i	m_i [kg]	J_{ij} [kg/m ²]	\tilde{r}_{ij} [m]	\tilde{e}_i
1	0.0	$J_{1,1} = 0.0$ $J_{1,2} = 0.0$ $J_{1,3} = 0.0$	$\tilde{r}_{1,1} = (0, 0, 0.0001)^\top$ $\tilde{r}_{1,2} = (0, 0, -0.0001)^\top$	$(1, 0, 0)^\top$
2	1.53	$J_{2,1} = 0.00006$ $J_{2,2} = 0.00055$ $J_{2,3} = 0.00045$	$\tilde{r}_{2,2} = (0, 0, 0.03)^\top$ $\tilde{r}_{2,3} = (0, 0, -0.07)^\top$	$(0, 1, 0)^\top$
3	3.21	$J_{3,1} = 0.00393$ $J_{3,2} = 0.00393$ $J_{3,3} = 0.00038$	$\tilde{r}_{3,3} = (0, 0, 0.21)^\top$ $\tilde{r}_{3,4} = (0, 0, -0.21)^\top$	$(0, 1, 0)^\top$
4	8.41	$J_{4,1} = 0.0112$ $J_{4,2} = 0.012$ $J_{4,3} = 0.003$	$\tilde{r}_{4,4} = (0, 0, 0.22)^\top$ $\tilde{r}_{4,5} = (0, 0, -0.22)^\top$	$(0, 1, 0)^\top$
5	6.96	$J_{5,1} = 0.007$ $J_{5,2} = 0.00565$ $J_{5,3} = 0.00627$	$\tilde{r}_{5,5} = (0, 0.135, 0.1)^\top$ $\tilde{r}_{5,6} = (0, -0.135, 0.1)^\top$ $\tilde{r}_{5,9} = (0, 0, -0.05)^\top$	$(0, 1, 0)^\top$
6	8.41	$J_{6,1} = 0.0112$ $J_{6,2} = 0.012$ $J_{6,3} = 0.003$	$\tilde{r}_{6,6} = (0, 0, -0.22)^\top$ $\tilde{r}_{6,7} = (0, 0, 0.22)^\top$	$(0, -1, 0)^\top$
7	3.21	$J_{7,1} = 0.00393$ $J_{7,2} = 0.00393$ $J_{7,3} = 0.00038$	$\tilde{r}_{7,7} = (0, 0, -0.21)^\top$ $\tilde{r}_{7,8} = (0, 0, 0.21)^\top$	$(0, -1, 0)^\top$
8	1.53	$J_{8,1} = 0.00006$ $J_{8,2} = 0.00055$ $J_{8,3} = 0.00045$	$\tilde{r}_{8,8} = (0, 0, -0.07)^\top$	$(0, -1, 0)^\top$
9	0.0	$J_{9,1} = 0.0$ $J_{9,2} = 0.0$ $J_{9,3} = 0.0$	$\tilde{r}_{9,9} = (0, 0, 0.0001)^\top$ $\tilde{r}_{9,10} = (0, 0, -0.0001)^\top$	$(0, 1, 0)^\top$
10	30.85	$J_{10,1} = 0.1514$ $J_{10,2} = 0.137$ $J_{10,3} = 0.0283$	$\tilde{r}_{10,10} = (0, 0, 0.34)^\top$ $\tilde{r}_{10,11} = (0, 0.2, -0.06)^\top$ $\tilde{r}_{10,13} = (0, -0.2, -0.06)^\top$	$(1, 0, 0)^\top$
11	2.07	$J_{11,1} = 0.002$ $J_{11,2} = 0.002$ $J_{11,3} = 0.00022$	$\tilde{r}_{11,11} = (0, 0, -0.154)^\top$ $\tilde{r}_{11,12} = (0, 0, 0.154)^\top$	$(1, 0, 0)^\top$

Табела 4.1. Наставак

i	m_i [kg]	J_{ij} [kg/m ²]	\tilde{r}_{ij} [m]	\tilde{e}_i
12	1.14	$J_{12,1} = 0.0025$ $J_{12,2} = 0.00425$ $J_{12,3} = 0.00014$	$\tilde{r}_{12,12} = (0, 0, -0.132)^\top$	$(1, 0, 0)^\top$
13	2.07	$J_{13,1} = 0.002$ $J_{13,2} = 0.002$ $J_{13,3} = 0.00022$	$\tilde{r}_{13,13} = (0, 0, -0.154)^\top$ $\tilde{r}_{13,14} = (0, 0, 0.154)^\top$	$(-1, 0, 0)^\top$
14	1.14	$J_{14,1} = 0.0025$ $J_{14,2} = 0.00425$ $J_{14,3} = 0.00014$	$\tilde{r}_{14,14} = (0, 0, -0.132)^\top$	$(-1, 0, 0)^\top$

Овим подацима је описан један конкретан антропоморфни локомоциони механизам. Механизам је коришћен као илустративни пример сложеног роботског механизма. На примеру су тестирани алгоритми за формирање математичког модела и смањивање нумеричке сложености модела.

4.3 Формирање математичког модела

Као што је описано у првој глави, математички модел антропоморфног локомоционог механизма је облика

$$P = H\ddot{q} + \dot{q}^\top C\dot{q} + h^G \quad (4.1)$$

$$P = H\ddot{q} + B\sigma + \dot{q}^\top C\dot{q} + h^G \quad (4.2)$$

У једнослоначкој фази је модел механизма описан једначином (4.1), а у двослоначкој фази једначином (4.2).

У **Алгоритму 1.3** је описан поступак формирања математичког модела сложеног активног просторног механизма. Пошто антропоморфни локомоциони механизам спада у активне просторне механизме поменути алгоритам је искоришћен за добијање његовог математичког модела. Када се на све изразе из тог

алгоритма примени процедура за меморисање израза у бази података, аналогна **Алгоритму 2.1**, добија се комплетан математички модел меморисан у бази података. Над тако формираним моделом се могу формирати аналитички изрази и срачунавати нумеричке вредности роботских величина.

Затим је примењен алгоритам за елиминисање операција типа множења и сабирања са неутралним елементом (**Алгоритам 2.2**). У Табели 4.2. су приказани бројеви множења и сабирања за формирање модела (4.1) у једнослоначкој фази (матрице H , C и вектор h^G) и формирање модела (4.2) у двослоначкој фази (матрице H , C и B и вектор h^G). Матрица H је димензије 14×14 , матрица C $14 \times 14 \times 14$, матрица B 14×6 , а вектор h^G димензије 14. Матрица B има нула елементе само у случају прва три сегмента првог кинематичког ланца. Пошто се приликом моделирања затвореног ланца (двослоначка фаза) губи шест степени слободе (Глава 1.), елементи матрице B који одговарају осталим сегментима првог ланца су нуле. И елементи матрице B који одговарају сегментима другог и трећег кинематичког ланца су нуле, јер су у питању отворени кинематички ланци. Поред овога, матрице H и C су симетричне, па укупан број различитих променљивих износи 924 у једнослоначкој, а 942 у двослоначкој фази механизма.

Табела 4.2. Бројеви множења и сабирања

	Број множења	Број сабирања
Једнослоначка фаза	95219	58951
Двослоначка фаза	95402	59057

У овако генерисаном графу израчунавања постоје редундантне математичке операције, које треба елиминисати. Да би се то постигло, примењују се алгоритми за смањивање рачунске сложености модела, описани у трећем поглављу.

4.4 Смањивање рачунске сложености модела

Први корак у смањивању броја рачунских операција у моделу је формирање аналитичких израза модела. У трећој глави је описано да се ови изрази могу формирати, како над целим графом израчунавања, тако и над одабраним подграфовима.

Уочен је подграф над којим ће се примењивати алгоритми за смањивање нумеричке сложености. За подграф су одабране све променљиве Q_{ijk} и променљиве e_{ij} , $i = 1, \dots, 14$, $j, k = 1, 2, 3$. Да је овај део графа израчунавања независан, следи из алгоритма извођења модела описаног у првој глави (**Алгоритам 1.3**).

4.4.1 Смањивање рачунске сложености одабраног подграфа

У издвојеном подграфу је за израчунавање променљивих Q_{ijk} и e_{ij} потребно 4738 множења и 2407 сабирања. Применом **Алгоритма 2.3** се добијају комплетни аналитички изрази наведених променљивих. За израчунавање свих променљивих преко добијених израза је потребно 69356 множења и 8996 сабирања. Затим је, на све добијене изразе, примењен **Алгоритам 3.1** за елиминисање тригонометријских идентитета и **Алгоритам 3.2** за елиминисање идентичних израза. Добијени су изрази који садрже 2144 множења и 596 сабирања. Затим је на такве изразе примењен **Алгоритам 3.3** за извлачење монома и у бази података је формиран нови граф израчунавања у коме је за израчунавање свих променљивих Q_{ijk} и e_{ij} , $i = 1, \dots, 14$, $j, k = 1, 2, 3$, потребно 387 множења и 206 сабирања. У Табели 4.3. су приказани резултати смањивања броја рачунских операција над одабраним подграфом.

Табела 4.3. Бројеви множења и сабирања

	Број множења	Број сабирања
Почетни модел	4738	2407
Комплетни изрази	69356	8996
Упрошћени изрази	2144	596
Крајњи модел	387	206

У овом случају примена алгоритма за растављање израза на производе (**Алгоритам 3.4**, **Алгоритам 3.5**) пре алгоритма извлачења монома, не даје боље резултате. Наиме, после растављања израза на производе добијају се изрази са 2010 множења и 564 сабирања и кад се на те изразе примени алгоритам извлачења монома добија се граф израчунавања са 411 множења и 220 сабирања. Овај пример показује да, у општем случају, алгоритам за растављање израза на производе не мора да донесе смањење у броју рачунских операција.

Када се у комплетном графу израчунавања замени одабрани подграф, добија се новоформирано граф израчунавања. Пошто су се, поступком смањивања нумеричке сложености, неке од променљивих из одабраног подграфа анулирале, могуће је поново применити **Алгоритам 2.2**, којим се отклањају непотребна множења и сабирања са нулом. После тога се добија граф израчунавања са бројевима рачунских операција приказаним у Табели 4.4.

Табела 4.4. Бројеви множења и сабирања

	Број множења	Број сабирања
Једнослоничка фаза	67773	39423
Двоослоничка фаза	68875	40089

4.4.2 Смањивање рачунске сложености новоформираног графа

Сада се примењује алгоритам за формирање аналитичких израза (**Алгоритам 2.3**). Добијени су аналитички изрази у ко-

јима је за израчунавање свих компоненти матрица H , C и B и вектора h^G потребно 802859 множења и 109643 сабирања. Над добијеним изразима су, затим, примењени алгоритми за елиминисање тригонометријских идентитета и идентичних израза (**Алгоритам 3.1**, **Алгоритам 3.2**), и бројеви рачунских операција су смањени на 391417 множења и 30374 сабирања. Сада над добијеним изразима треба применити алгоритам извлачења монома (**Алгоритам 3.3**), да би се формирао нови граф израчунавања модела. Због велике рачунске сложености добијених аналитичких израза овај алгоритам није примењен, па су коначни резултати они који су приказани у Табели 4.4.

Основни разлог што алгоритам извлачења монома није примењен је у великој сложености аналитичких израза над којима се примењује овај алгоритам. Ту сложеност илуструје и чињеница да је број различитих аналитичких израза 671, са укупно 31045 сабирака. У овим изразима фигурише укупно 97 променљивих.

Један од показатеља сложености аналитичких израза је и величина меморијског простора којег заузимају. У Прилогу 2.1 је наведена спецификација базе података, одакле се види да се појаве типа слога *анацин* смештају у датотеци *anacin.dat*, а појаве типа слога *анасаб* у датотеци *anasab.dat*, а та два типа слога представљају аналитичке изразе. У овом случају величина датотеке *anacin.dat* износи 55.6 MB (мегабајта), а величина датотеке *anasab.dat* износи 21.2 MB.

Први од разлога што су добијени тако сложени аналитички изрази је тај што се у њима појављују и променљиве са трећим степеном. Теорема о степенима у аналитичким изразима [Vuk85], која за просте кинематичке ланце доказује да степени у свим аналитичким изразима остају у скупу $\{0, 1, 2\}$, је егзистенцијалног карактера и не даје поступак формирања израза са степенима из тог скупа. Виши степени, који се појављују током формирања израза, се елиминишу применом тригонометријских идентитета. Да би се решио проблем појављивања трећих степена у аналитичким изразима, потребно је доказати теорему о степенима и за сложене роботске механизме, и развити алгоритам формирања

математичког модела на начин који обезбеђује да се приликом формирања аналитичких израза неће појављивати степени већи од 2.

Други начин решавања овог проблема је у побољшању алгоритма за елиминисање тригонометријских идентитета. За разлику од предложеног алгоритма (**Алгоритам 3.1**), који тригонометријске идентитете примењује оним редом којим их и проналази, потребно је развити алгоритам који би укључио анализу свих идентитета који постоје у изразу и примењивао онај који ће омогућити највећу уштеду у броју рачунских операција.

Други разлог због кога алгоритам извлачења монома није дао резултате је у ефикасности самог алгоритма. Ако се анализира алгоритам извлачења монома, види се да су одлучујући параметри, који утичу на време извршавања алгоритма, број различитих монома који може да се формира над аналитичким изразима и сам број аналитичких израза, који учествују у смањивању броја рачунских операција. Током извршавања алгоритма, број монома се стално смањује, јер се из израза стално извлаче поједини мономи, а број израза се повећава јер се извлачењем монома из израза од њега формирају два нова израза. На број различитих монома се може утицати варирањем горњег степена до којег се мономи генеришу (предложено је да то буде степен 4 [Tim89]). Остаје да је критичан параметар, на који се никако не може утицати, број аналитичких израза. Највећи утицај овог параметра се огледа у алгоритму за елиминисање идентичних израза (**Алгоритам 3.2**), који је саставни део алгоритма извлачења монома и квадратно зависи од броја израза, јер се свака два израза међусобно пореде.

Анализом извршавања алгоритма извлачења монома на примеру роботског механизма са шест степени слободe (**Пример 2.1**), одређене су просечне вредности за проценат израза у којима се проналази моном који се извлачи (60%), и проценат идентичних израза који се елиминишу **Алгоритмом 3.2** (5%). Ови показатељи су усвојени да би се извршила симулација извршавања алгоритма извлачења монома над аналитичким изразима антропо-

морфног локомоционог механизма.

У реалном случају ови проценти су различити за сваки моном, али су овде на бази извршене анализе узете предложене вредности. На основу усвојених показатеља следи да се број израза повећава 1.52 пута после сваког извлачења монома. Пошто алгоритам за елиминисање идентичних израза квадратно зависи од броја израза, следи да се број поређења израза повећава 2.31 пута по сваком извлачењу. Иако су сваки пут у питању све простији и простији аналитички изрази који се пореде, у првој фази извршавања алгоритма извлачења монома (док су аналитички изрази довољно сложени) на време трајања алгоритма за елиминисање идентичних израза много више утиче број поређења израза, него сложеност самих израза који се пореде. Следи да, у случају овако сложених аналитичких израза, због великог фактора повећавања броја поређења израза, долази до застоја услед дуготрајног елиминисања идентичних израза, пре него што се изрази довољно упросте.

Ако би се из алгоритма извлачења монома избацило позивање алгоритма за елиминисање идентичних израза, то би довело до формирања графа израчунавања са великим бројем редувантних операција. У случајевима сложених аналитичких израза, где је број рачунских операција у изразима доста већи од броја рачунских операција у првобитном моделу, на овај начин се добија граф израчунавања са већим бројем рачунских операција него у почетном графу израчунавања. У наведеном примеру се број множења која постоје у аналитичким изразима (391417) мора смањити испод 68875 множења да би се добио граф израчунавања са мање рачунских операција.

На конкретним изразима антропоморфног роботског механизма је после седам дана извршавања алгоритма извлачења монома, било завршено осам итерација, а време извршавања једне итерације је достигло један дан и још се повећавало. На бази анализе резултата, добијених на примеру роботског механизма са шест степени слободе је оцењено да ће се у овом примеру појавити бар 100 итерација, па је очекивано трајање извршавања целог алгоритма

преко 100 дана. Алгоритам је извршаван на РС 486 рачунару са 66 MHz, под SCO-UNIX оперативним системом. Следи да би, ради примењивања алгоритма извлачења монома у случају веома сложених аналитичких израза, било потребно побољшати алгоритам у смислу ефикасности извршавања.

Из поменутих разлога нису ни формиран аналитички изрази над комплетним графом израчунавања (без издвајања подграфа), јер су у току извршавања алгоритма за формирања израза датотеке базе података у којима се меморишу елементи аналитичких израза достигле величину од преко 100 MB, што значи да би се добили још сложенији аналитички изрази него у случају са издвајањем подграфа.

Да би се и са постојећим алгоритмима могао смањити број рачунских операција модела, предлаже се да се механизам подели на низове " + " зглобова и да се поступак извршава над сваким низом " + " зглобова појединачно.

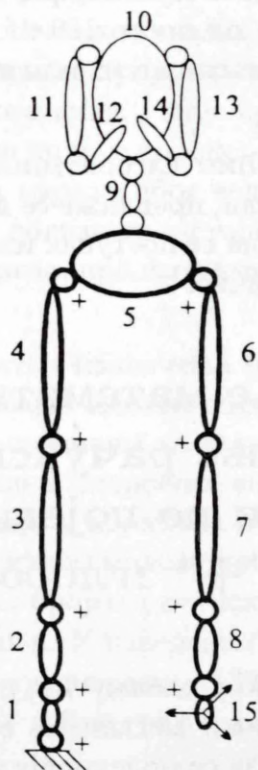
4.5 Формирање математичког модела и смањивање рачунске сложености по појединим низовима " + " зглобова

Као што је већ описано у одељку 4.1, и приказано на Сл. 4.1. антропоморфни локомоциони механизам се састоји од три низа " + " зглобова. Сва три низа се моделирају простим кинематичким ланцима, где први наизменично прелази из отвореног у затворени, док су други и трећи отворени кинематички ланци. У конкретном примеру (Пример 4.1), представљеном на Сл. 4.2а., први ланац је састављен од сегмената означених бројевима од 1 до 8. Други ланац је састављен од сегмената 1 до 5 и од 9 до 12, а трећи ланац од сегмената 1 до 5, 9, 10, 13 и 14. Само код првог ланца се појављује и елемент затварања па се формира и матрица B , док се код другог и трећег ланца формирају само матрице H и C , као и

вектор h^G .

4.5.1 Први кинематички ланац

На Сл. 4.3. је приказана конкретна локомоциона конфигурација (Пример 4.1), где је означен први кинематички ланац који наизменично прелази из отвореног у затворени ланац.



Сл. 4.3. Први кинематички ланац

Због затварања је додат фиктивни сегмент означен бројем 15 за који је везан нови координатни систем (Глава 1.). За формирање математичког модела је примењен Алгоритам 1.3 и добијен је граф израчунавања са бројем рачунских операција приказаним у Табели 4.5. Пре израчунавања броја рачунских операција је при-

мењен и алгоритам за елиминисање редувантних операција типа множења и сабирања са неутралним елементом (**Алгоритам 2.2**).

Табела 4.5. Бројеви множења и сабирања за први ланац

	Број множења	Број сабирања
Једноослоначка фаза	30247	18435
Двоослоначка фаза	30760	18724

И овог пута је одабран подграф који садржи све променљиве Q_{ijk} и променљиве e_{ij} , $i = 1, \dots, 8$, $j, k = 1, 2, 3$, да би се смањивање нумеричке сложености извршило над њим. У првобитној структури за израчунавање ових променљивих је потребно 2172 множења и 1094 сабирања. Када се формирају аналитички изрази по **Алгоритму 2.3**, за срачунавање променљивих Q_{ijk} и променљивих e_{ij} је потребно 19848 множења и 2629 сабирања. После примене алгоритама за елиминисање тригонометријских идентитета и идентичних израза, број операција се смањује на 444 множења и 137 сабирања. Када се примени алгоритам извлачења монома, добија се граф израчунавања са 138 множења и 57 сабирања. Резултати смањивања броја рачунских операција над одабраним подграфом су дати у Табели 4.6.

Табела 4.6. Бројеви множења и сабирања

	Број множења	Број сабирања
Почетни модел	2172	1094
Комплетни изрази	19848	2629
Упрошћени изрази	444	137
Крајњи модел	138	57

После замене одабраног подграфа и поновне примене алгоритма за елиминисање множења и сабирања неутралним елементима, добија се нови граф израчунавања, чији су бројеви операција приказани у Табели 4.7.

Табела 4.7. Бројеви множења и сабирања

	Број множења	Број сабирања
Једноослоначка фаза	15454	8366
Двоослоначка фаза	16570	9043

Сада су формиран и аналитички изрази у којима за израчунавање свих компоненти матрица H , C и B , као и вектора h^G треба 35828 множења и 12869 сабирања. У овом случају у изразима се не појављују степени већи од два. После примене алгоритама за елиминисање тригонометријских идентитета и идентичних израза, бројеви операција су смањени на 16002 множења и 6406 сабирања. Затим је примењен алгоритам за извлачење монома и добијен је граф израчунавања са бројевима операција приказаним у Табели 4.8.

Табела 4.8. Бројеви множења и сабирања

	Број множења	Број сабирања
Једноослоначка фаза	3287	3270
Двоослоначка фаза	3451	3389

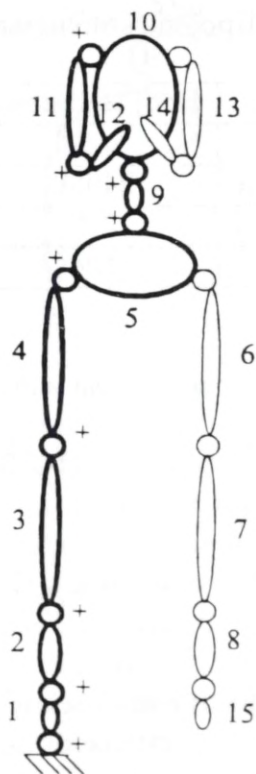
Овим је формиран коначан граф израчунавања за први кинематички ланац.

4.5.2 Други кинематички ланац

За други кинематички ланац, као и за трећи није потребно формирати матрицу B , јер су у питању прости отворени кинематички ланци. За формирање математичког модела се користи **Алгоритам 1.2** (моделирање сложених кинематичких ланаца), јер он омогућује да се користи формирање модела преко низа "+" зглобова. На овај начин је формиран почетни граф израчунавања са 41315 множења и 25434 сабирања. Пре израчунавања

броја рачунских операција је примењен алгоритам за елиминисање множења и сабирања са неутралним елементима.

На Сл. 4.4. је означен други кинематички ланац.



Сл. 4.4. Други кинематички ланац

Одабран је подграф који садржи све променљиве Q_{ijk} и променљиве e_{ij} , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11, 12\}$, $j, k = 1, 2, 3$. У првобитној структури за израчунавање ових променљивих је потребно 2198 множења и 1110 сабирања. Када се формирају аналитички изрази по Алгоритму 2.3, за срачунавање променљивих Q_{ijk} и променљивих e_{ij} је потребно 24088 множења и 3151 сабирања. После примене алгоритама за елиминисање тригонометријских идентитета и идентичних израза, број операција се смањује на 272 множења и 92 сабирања. Када се примени алгоритам извлачења

монома, добија се граф израчунавања са 104 множења и 42 сабирања. Резултати смањивања нумеричке сложености одабраног подграфа су дати у Табели 4.9.

Табела 4.9. Бројеви множења и сабирања

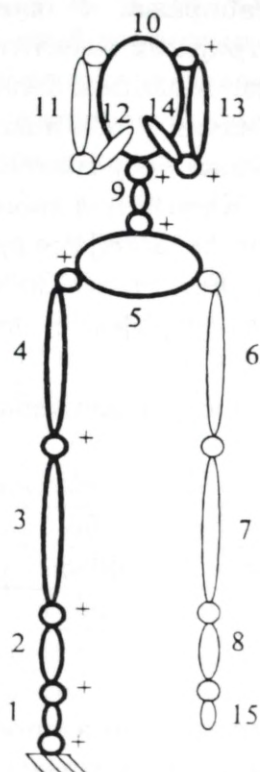
	Број множења	Број сабирања
Почетни модел	2198	1110
Комплетни изрази	24088	3151
Упрошћени изрази	272	92
Крајњи модел	104	42

После замене одабраног подграфа и поновне примене алгоритма за елиминисање множења и сабирања неутралним елементима, добија се нови граф израчунавања са 29030 множења и 17079. Сада су формиран и аналитички изрази у којима је, за израчунавање свих компоненти матрица H и C , као и вектора h^G , потребно 107440 множења и 33547 сабирања. И у овом случају се, што се већ и по великом броју рачунских операција може закључити, појављују трећи степени. Након примене алгоритма за елиминацију тригонометријских идентитета и идентичних израза, бројеви рачунских операција су смањени на 43073 множења и 17938 сабирања. У овом случају је алгоритам извлачења монома успешно примењен и добијен је граф израчунавања са 12021 множења и 10653 сабирања, чиме је формиран и коначни модел за други кинематички ланац.

4.5.3 Трећи кинематички ланац

Модел трећег кинематичког ланца се формира на аналоган начин као и модел другог ланца.

На Сл. 4.5. је означен трећи кинематички ланац.



Сл. 4.5. Трећи кинематички ланац

Добија се граф израчунавања са 29837 множења и 18363 сабирања. Опет је пре израчунавања броја рачунских операција, примењен алгоритам за елиминисање множења и сабирања са неутралним елементом.

За подграф су, и овог пута, одабране променљиве Q_{ijk} и променљиве e_{ij} , $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 13, 14\}$, $j, k = 1, 2, 3$, да би се смањивање рачунске сложености извршило над њим. У првобитној структури за израчунавање ових променљивих је потребно 2198 множења и 1110 сабирања. Када се формирају аналитички изрази по Алгоритму 2.3, за срачунавање променљивих Q_{ijk} и променљивих e_{ij} је потребно 24088 множења и 3151 сабирања. После примене алгоритама за елиминисање тригонометриј-

ских идентитета и идентичних израза, број операција се смањује на 496 множења и 156 сабирања. У овом случају алгоритам за елиминисање тригонометријских идентитета не даје исте резултате као код другог ланца. Анализом аналитичких израза, који су формиран на аналоган начин у оба ланца, следи да у изразима за трећи ланац постоји мањи број тригонометријских идентитета који може да се примени. Када се над добијеним изразима примени алгоритам извлачења монома, добија се граф израчунавања са 164 множења и 78 сабирања. Резултати смањивања броја рачунских операција над одабраним подграфом су дати у Табели 4.10.

Табела 4.10. Бројеви множења и сабирања

	Број множења	Број сабирања
Почетни модел	2198	1110
Комплетни изрази	24088	3151
Упрошћени изрази	496	156
Крајњи модел	164	78

После замене одабраног подграфа и поновне примене алгоритма за елиминисање множења и сабирања неутралним елементима, добија се нови граф израчунавања са 23418 множења и 13824.

Сада су формиран аналитички изрази у којима је, за израчунавање свих компоненти матрица H и C , као и вектора h^G , потребно је 392500 множења и 87905 сабирања. Због разлике у аналитичким изразима променљивих из подграфа, у овом случају се добијају још сложенији изрази компоненти матрица H и C и вектора h^G . Након примене алгоритма за елиминацију тригонометријских идентитета и идентичних израза, бројеви рачунских операција су смањени на 163632 множења и 45199 сабирања. Из разлога објашњених у параграфу 4.4.2 није примењиван алгоритам извлачења монома.

Да би се број рачунских операција још смањено настављено је смањивање нумеричке сложености одабраних подграфова. Над досад формираним графом одабран је нови подграф који поред променљивих Q_{ijk} и променљивих e_{ij} , $i \in$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 13, 14\}$, $j, k = 1, 2, 3$, садржи и променљиве $(\vec{e}_i \cdot \vec{q}_{jk})$, $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 13, 14\}$, $k = 1, 2, 3$. Ове променљиве су преузете из Алгоритма 1.2. За израчунавање ових променљивих је у графу израчунавања потребно 257 множења и 138 сабирања. Поново се примењује комплетан поступак смањивања рачунске сложености и на крају се добија граф израчунавања са 213 множења и 110 сабирања. Након замене овог подграфа, у комплетном графу израчунавања и примењивања алгоритма за елиминисање множења и сабирања са неутралним елементима за израчунавање свих компоненти матрица H , C и вектора h^G је потребно 18892 множења и 11541 сабирања. Иако је остварена веома мала уштеда на одабраном подграфу, због анулирања неких променљивих је на комплетном графу израчунавања остварено знатно смањење броја рачунских операција.

Када се сада формирају аналитички изрази, за израчунавање свих променљивих је потребно 420865 множења и 93938 сабирања. Смањивање нумеричке сложености одабраног подграфа у овом случају не доводи до уштеде у броју рачунских операција у комплетним изразима. Напротив, број операција се повећао, па се и даље не примењује алгоритам извлачења монома, али се зато број рачунских операција потребан за израчунавање променљивих преко графа израчунавања знатно смањило.

Над досад формираним графом израчунавања се поново уочава подграф, који поред поменутих променљивих, садржи и променљиве \vec{e}_{ij} , $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 13, 14\}$. И ове променљиве су преузете из Алгоритма 1.2. За израчунавање свих променљивих је у графу израчунавања потребно 401 множења и 178 сабирања. После комплетног поступка смањивања броја рачунских операција, добија се граф израчунавања са 205 множења и 110 сабирања. Види се да су променљиве \vec{e}_{ij} потпуно анулиране. После замене одабраног подграфа и примене алгоритма за елиминацију множења и сабирања са неутралним елементима, у графу израчунавања је за израчунавање свих компоненти матрица H , C и вектора h^G потребно 15299 множења и 9325 сабирања.

Аналитички изрази остају и даље на 420865 множења и 93938 сабирања па се не примењује алгоритам извлачења монома, али је број операција у графу израчунавања доведен скоро до истог броја који је постигнут за други ланац. Овде је завршено смањивање нумеричке сложености за трећи ланац, иако би се овај поступак одабирања нових подграфа могао и даље наставити.

4.5.4 Табеларни приказ резултата

У овом одељку су табеларно приказани резултати, добијени приликом смањивања рачунске сложености на примеру антропоморфне локомционе конфигурације (Пример 4.1). У Табелама 4.11., 4.12. и 4.13. су приказани почетни и коначни бројеви рачунских операција, постигнути за сваки ланац појединачно и за цео механизам. У прве две колоне су приказани бројеви множења и сабирања за почетни, а у друге две колоне су приказани бројеви множења и сабирања за крајњи граф израчунавања.

Табела 4.11. Бројеви множења и сабирања у првом ланцу

	Почетни граф		Крајњи граф	
	мн.	саб.	мн.	саб.
Једнослоначка фаза	30247	18435	3287	3270
Двослоначка фаза	30760	18724	3451	3389

Табела 4.12. Бројеви множења и сабирања у другом и трећем ланцу

	Почетни граф		Крајњи граф	
	мн.	саб.	мн.	саб.
Други ланац	41315	25434	12021	10653
Трећи ланац	29837	18363	15299	9326

Табела 4.13. Бројеви множења и сабирања у целом механизму

	Почетни граф		Крајњи граф	
	мн.	саб.	мн.	саб.
Једноослоначка фаза	95219	58951	30607	24008
Двоослоначка фаза	95402	59057	30771	24127

Додатна сабирања су потребна да би се сабрали делови истих променљивих који се налазе у моделима више ланаца. Компоненте матрица H , C и вектора h^G за сегменте од 1 до 5 се налазе у сва три модела, а компоненте ових матрица и вектора за сегменте 9 и 10 се налазе у моделима другог и трећег ланца. Ови резултати показују да је остварена значајна уштеда у броју рачунских операција.

Приликом примењивања алгоритма извлачења монома над изразима првог и другог ланца, горњи степен монома који се генеришу као кандидати за извлачење је постављен на 2, да би се смањило број могућих монома и тиме смањило и време извршавања алгоритма у циљу савладавања сложених аналитичких израза. Исто тако није примењиван алгоритам за растављање израза на производе, јер би он додатно повећао рачунску сложеност алгоритма извлачења монома.

№ п/п	Наименование	Единица измерения	Количество	Стоимость
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

Итого: 100 шт. Стоимость: 1000 руб.

Сумма: 1000 руб.

Подпись: _____

Дата: _____

№ п/п	Наименование	Единица измерения	Количество	Стоимость
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

Итого: 100 шт. Стоимость: 1000 руб.

Сумма: 1000 руб.

Подпись: _____

Дата: _____

Глава 5

Закључак

Овај рад се бави формирањем математичких модела динамике сложених роботских механизма у симболичком облику. У првој глави је постојећи алгоритам за извођење модела простог отвореног кинематичког ланца у затвореном облику, заснован на Њутн-Ојлеровим једначинама, проширен тако да поступак моделирања обухвата и сложене активне просторне механизме. Ови механизми се моделирају сложеним кинематичким ланцима, од којих неки могу бити и затворени ланци.

Да би се аутоматски формирао математички модел динамике роботског механизма, у другој глави је уведена специјална структура података, представљена помоћу система за управљање базама података. Коришћење базе података је нови елеменат у процесу симболичког моделирања роботских механизма, јер су у досадашњим поступцима, формирани модели били у форми програма на неком програмском језику. У приступу предложеном у овом раду, комплетан модел се меморише у бази података. Овакав приступ диже поступак моделирања роботских механизма на висок ниво апстракције, и омогућује да се за произвољну величину модела врши срачунавање нумеричке вредности и/или формирање аналитичког израза. Исто тако, генерисани модел може да се прикаже и у виду програма на одабраном програмском језику.

Анализом израза који се појављују у поступку извођења мате-

матичког модела, утврђено је да су ти изрази облика полинома, где су променљиве полинома роботске величине, или операције синус и косинус унутрашњих координата роботског механизма. На основу тога је формиран општи облик израза математичког модела роботског механизма. Коришћењем овог формалног описа израза, поступак се подиже на виши ниво, јер се посматрају произвољни изрази одговарајућег типа, што у општем случају не морају бити изрази математичког модела роботског механизма.

Да би се сви изрази из модела меморисали у бази података, уведен је скуп основних процедура за манипулисање изразима у бази података. На основу ових процедура је формиран програм који редом обрађује изразе математичког модела и меморише их у бази података. Након примене овог програма добија се комплетан модел роботског механизма, меморисан у бази података. Само меморисање променљивих, које сачињавају изразе, и њихово међусобно повезивање, је веома једноставан поступак, па је сложеност програма за меморисање модела у бази података управо сложеност самог поступка извођења математичког модела роботског механизма.

Навигацијом кроз базу података се може за произвољну величину модела формирати аналитички израз и/или срачунати нумеричка вредност. Аналитички изрази могу да се формирају у потпуно симболичком облику, где су све величине модела третиране као променљиве, или у нумеричко - симболичком облику, где се параметри механизма третирају као реални бројеви.

У овако генерисаном математичком моделу роботског механизма постоје и редундантне математичке операције. Потребно је ажурирати базу података у циљу смањивања нумеричке сложености. У трећој глави су формиран и описани алгоритми за смањивање броја рачунских операција. Да би се применили алгоритми за смањивање рачунске сложености, потребно је претходно формирати аналитичке изразе модела. Затим се над добијеним изразима примењују: алгоритам за елиминисање тригонометријских идентитета, алгоритам за елиминисање идентичних израза, алгоритам извлачења монома и алгоритам за растављање израза

на производе. Алгоритам за елиминисање тригонометријских идентитета, у сваком изразу посебно, примењује све тригонометријске идентитете које у њему пронађе. Алгоритам за елиминисање идентичних израза избацује вишеструка појављивања истих израза ради отклањања понављања истих израчунавања. Идеја алгоритма извлачења монома је преузета из литературе, а у овом раду је тај алгоритам имплементиран коришћењем базе података. Овај алгоритам од аналитичких израза формира граф израчунавања са што мањим бројем рачунских операција, који представља резултујући модел роботског механизма. Растављање израза на производе даје теоријски допринос у процесу смањивања нумеричке сложености. Овај поступак омогућује већу уштеду у броју рачунских операција и у циљу његовог спровођења је доказана теорема која утврђује потребне и довољне услове за могућност растављања израза на производе. На бази тога је имплементиран ефикасан алгоритам за растављање израза на производе.

Редослед смањивања рачунске сложености је следећи. Прво се над формираним изразима примењују алгоритми за елиминисање тригонометријских идентитета и идентичних израза. Затим се изрази раставе на производе, и на добијене изразе се примењује алгоритам извлачења монома, који формира резултујући граф израчунавања у бази података. Описани поступак може да се примењује на комплетном графу израчунавања, који представља модел роботског механизма, а и над одабраним подграфовима тог графа. Тиме се комплетан поступак смањивања нумеричке сложености примењује на подграфу, а затим на новоформираном графу израчунавања који се формира заменом почетног подграфа оним са мањим бројем рачунских операција.

Овако развијени поступак смањивања рачунске сложености, може да се примени и у друге сврхе, а не само за елиминисање редундантних математичких операција из аналитичких израза модела роботских механизма. Једна од примена овог система за смањивање броја рачунских операција би могла да буде и оптимизација кода у програмском језику, који садржи у себи нека сложена израчунавања преко полиномијалних израза.

На индустријском роботском механизму са шест степени слободe су примењени алгоритми за формирање математичког модела у бази података и за смањивање нумеричке сложености. Тестиране су четири варијанте поступка смањивања броја рачунских операција: Прва, без растављања израза на производе над комплетним графом; друга, са растављањем израза на производе над комплетним графом; трећа, без растављања израза на производе по деловима модела; четврта, са растављањем израза на производе по деловима модела. Показало се да растављање израза на производе и смањивање нумеричке сложености по деловима модела доносе додатну уштеду у броју рачунских операција. Тако је број рачунских операција (за наведени пример) у четвртој варијанти за око 40% мањи од броја рачунских операција у првој варијанти.

Алгоритми за формирање математичког модела у бази података и алгоритми за смањивање рачунске сложености модела, који су описани у другом и трећем поглављу, су примењени на антропоморфном локомоционом механизму, који је илустративан пример сложеног активног просторног механизма. У четвртој глави су сви ови алгоритми тестирани на механизму са 14 сегмената, повезаних са 14 ротационих зглобова. Механизам је растављен на три низа "+" зглобова, на начин описан у првој глави, а затим је комплетан поступак формирања модела примењен на сваки од тих низова појединачно. Код првог и другог низа "+" зглобова је примењен комплетан поступак смањивања нумеричке сложености, без растављања израза на производе. За трећи низ "+" зглобова је примењено смањивање броја рачунских операција над три одабрана подграфа, један иза другог. Коначни граф израчунавања целог механизма има за око 65% мање рачунских операција него почетни граф. Због велике сложености, у овом примеру нису примењени сви наведени алгоритми. И са постојећим алгоритмима би се могли постићи бољи резултати, ако би се неки алгоритми пустили да раде дужи временски период.

Резултати добијени на примеру сложеног роботског механизма показују да се појављује проблем велике сложености аналитичких израза. Даља истраживања ће бити усмерена ка превазилажењу овог проблема. У циљу смањења сложености аналитичких израза,

потребно је постојећи поступак извођења математичког модела изменити на такав начин да сам поступак обезбеђује да се приликом формирања аналитичких израза неће појављивати трећи степени.

Сви предложени алгоритми за смањивање нумеричке сложености имају детерминистичку структуру, и не поседују знање о комплетном моделу. Други правац за превазилажење проблема сложених аналитичких израза је у развоју алгоритама који ће имати елементе вештачке интелигенције и на бази знања о комплетном моделу доносити одлуке. Овакве измене и допуне алгоритама за формирање модела и смањивање рачунске сложености генерисаног модела, значајно би повећале ефикасност формираних математичких модела сложених роботских механизма. Могло би се очекивати да се добију математички модели у којима је за израчунавање одговарајућих променљивих модела потребно за ред величине мање рачунских операција.

Један од правца даљих истраживања биће и проширивање постојеће структуре података у бази података, тако да подржи и операције налажења парцијалног извода жељених величина модела. На овај начин би се помоћу истих алгоритама могао добити и извод модела роботског механизма, а у општем случају, било би подржано симболичко диференцирање полиномијалних израза. Исто тако би се методологија моделирања аналитичких израза коришћењем система за управљање базама података, уз једноставне измене модела базе података, могла искористити и за друге проблеме симболичког програмирања.

Литература

- [Ald83] Aldon, M. J., Legois, A., "Computational Aspects in Robot Dynamics Modelling", Proc. of Advanced Software in Robotics, (Elsevier Science Publishers B. V., Liege, Belgium, May 4-6, 1983), pp. 3-14.
- [Bur86] Burdick, J. W., "An Algorithm for Generation of Efficient Manipulator Dynamic Equations", Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, San Francisco, 1986.
- [Dil73] Dillon, S. R., Computer Assisted Equation Generation in Linkage Dynamics, Ph. D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Ohio State University, Columbus, OH, 1973.
- [Hea84] Hearn, A. C., REDUCE User's Manual, Version 3.1, Rand Corp., Santa Monica, California, 1984.
- [Hol80a] Hollerbach, J. M., An Iterative Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics, A. I. Memo 533, MIT Artificial Intelligence Laboratory, March 1980.
- [Hol80b] Hollerbach, J. M., "A Recursive Formulation of Lagrangian Formulation of Manipulator Dynamics", IEEE Trans. on SMC, Vol. 10, No 11, pp. 730-736, 1980.
- [Hus74] Huston, R. L., Posserello, C. E., "On the Dynamics of Chain Systems", ASME Paper No 74-WA/Aut 11, 1974.
- [Hus78] Huston, R. L., Posserello, C. E., Harlow, M. W., "Dynamics of Multirigid-Body Systems", ASME Trans. Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, pp. 889-894, 1978.

- [Hus82] Huston, R. L., Kelly, F. A., "The Development of Equations of Motion of Single Arm Robots", IEEE Trans. on SMC, Vol. 12, N0 3, pp. 259-266, 1982.
- [Iza85] Izaguirre, A., Paul, R. P., "Computation of the Inertial and Gravitational Coefficients of the Dynamics Equations for a Robot Manipulator With a Load, Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation, pp. 1024-1032., 1985.
- [Kah69] Kahn, M. E., The Near Minimum Time Control of Open Loop Articulated Kinematic Chains, Ph. D. Thesis, Stanford University, MEMO AIM. 106, 1969.
- [Kah71] Kahn, M. E., Roth, B., "The Near-Minimum-Time Control of Open-loop Articulated Kinematic Chains", Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, Vol. 93, pp. 164-172, 1971.
- [Kan65] Kane, T. R., Wang, C. F., "On the Derivation of Equations of Motion", J. Soc. for Ind. and Appl. Math., Vol. 13, pp. 487-492, 1965.
- [Kan68] Kane, T. R., Dynamics, New York: Holt, Reinhart, and Winston, 1968.
- [Kan71] Kane, T. R., Likins, P., "Kinematics of Rigid Bodies in Spaceflight", Applied Mechanics, Stanford University, Rep. 204, pp. 26-119, 1971.
- [Kha86] Khalil, W., Klenfinger, J. F., Gautier, M., "Reducing the Computational Burden of the Dynamic Model of Robots", Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation, pp. 512-531, 1986.
- [Kha87] Khalil, W., Klenfinger, J. F., "Minimum Operation and Minimum Parameters of the Dynamic Models of Tree Structure Robots", IEEE J. Robotics and Automation, RA-3(6), 517-526, 1987.
- [Kha89] Khalil, W., SYMORO: Système Pour la Modelisation des Robots, Support Technique - Notice d'utilisation, ENSM-LAN, Nantes, 1989.

- [Kir88] Кирћански, М., Вукобратовић, М., Кирћански, Н., Тимченко, А., "A New Program Package For the Generation of the Efficient Manipulator Kinematic and Dynamic Equations in Symbolic Form", *Robotica* 6, 311-318, 1988.
- [Kir83] Кирћански, Н., Вукобратовић, М., "Computer Aided Procedure of Forming Robot Motion Equations in Analytical Forms", *Proc. VI IFToMM Congress, New Delhi*, 1983.
- [Kir89] Кирћански, Н., Тимченко, А., Јовановић, З., Кирћански, М., Вукобратовић, М., Милунов, Р., "Computation of Customized Symbolic Robot Models on Peripheral Array Processors", *Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation*, pp. 1180-1185, 1989.
- [Kir93] Кирћански, Н., Вукобратовић, М., Тимченко, А., Кирћански, М., "Symbolic Modelling in Robotics: Genesis, Application, and Future Prospects", *Journal of Intelligent and Robotic Systems* 8: 1-19, 1993.
- [Kop86] Koplik, J., Leu, M. C., "Computer Generation of Robot Dynamic Equations and the Related Issues", *J. Robotic Systems* 3(3), 301-319, 1986.
- [Kre90] Kreuzer, E., Schiehlen, W., NEWEUL - Software for the Generation of Symbolical Equations of Motion, in W. Schiehlen (ed.), *Multibody Systems Handbook*, Springer-Verlag, New York, pp. 181-202., 1990.
- [Leu86] Leu, M. C., Hemati, N., "Automated Symbolic Derivation of Dynamic Equations of Motion for Robotic Manipulators", *J. Dynamic Systems, Meas. Control* 108, 172-189, 1986.
- [Luh80] Luh, J. Y. S., Walker, M. W., Paul, R. P. C., "On-line Computational Scheme for Mechanical Manipulators", *Trans. of ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol. 102, No 2, pp. 69-76, 1980.

- [Mah] Mahil, S. S., Modelling Techniques in the Control of Antropomorphic Industrial Manipulators, Ph. D. thesis, Lanchester Polytechnic, Coventry, England.
- [Mah82] Mahil, S. S., "On the Application of Lagrange's Method to the Description of Dynamic Systems", IEEE Trans. on SMC, Vol. 12, No 6, pp. 877-890, 1982.
- [Med78] Медведов, В. С., Лесков, В. С., Ющенко, А. С., Системы управления манипуляционных роботов, Москва "Наука", 1978.
- [Neu85] Neuman, C. P., Murray, J. J., "Computational Robot Dynamics: Foundations and Application", J. Robotic Systems 2(4), 425-452, 1985.
- [Neu87] Neuman, C. P., Murray, J. J., "Customized Computational Robot Dynamics", J. Robotic Systems 4(4), 503-526, 1987.
- [Orl81] Orlandea, N., Berenui, T., "Dynamic Continuous Path Synthesis of Industrial Robots Using Adams Computer Program", ASME Journal of Mechanical Design, No. 5, 1981.
- [Pop74] Попов, Е. П., "Управление роботами-манипуляторами", Изв. АН С С С Р, Техническая кибернетика, No. 6, 1974.
- [Rac95a] Рацковић, М., Сурла, Д., "Automatic Generating of the Symbolic Mathematical Models of the Complex Robotic Systems", First ECPD International Conference on Advanced Robotics and Intelligent Automation, 6 - 8 September 1995, Athens, Greece, pp. 522-527.
- [Rac95b] Рацковић, М., Сурла, Д., "The Algorithms and Data Structures for Forming Symbolic Models of the Robotic Systems", Proceedings of the Conference on Algebra, Logic and Discrete Mathematics, Ниш, Апрель 14-16, 1995, FILOMAT (Ниш).
- [Ren75] Renaud, M., "Contribution a l-Etude de la Modelisation et de la Commande des Systéms Mécaniques Articulés", Thése de Docteur-Ingénieur, 1975, Toulouse, France.

- [Ren83] Renaud, M., "An Efficient Iterative Analytical Procedure for Obtaining a Robot Manipulator Dynamic Model", 1st Int. Sympos. Robotic Res., Brehnton Woods, U.S.A., 1983.
- [Sch88] Schaechter, D. B., Levinson, D. A., "Interactive Computerized Symbolics Dynamics for the Dynamicist", J. Astronaut. Sci. 36(4), 365-388., 1988.
- [Sch90] Schiehlen, W., (ed.), Multibody Systems Handbook, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [Ste76] Степаненко, Ј., Вукобратовић, М., "Dynamics of Articulated Open Chain Active Mechanisms", Mathematical Biosciences, Vol. 28, pp. 137-170, 1976.
- [Sym84] Symbolics, Inc., MACSYMA Reference Manual, Cambridge, Mass., 1984.
- [Tim89] Тимченко, А., Програмски Пакет за Генерисање Символичких Модела Манипулационих Робота, Магистарски рад, Београд, 1989.
- [Tim91a] Тимченко, А., Кирђански, Н., Вукобратовић, М., "A Two-Step Algorithm for Generating Efficient Manipulator Models in Symbolic Form", Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, California - April 1991, pp. 1887-1892.
- [Tim91b] Тимченко, А., Кирђански, Н., Урошевић, Д., Вукобратовић, М., "SYM - Program Environment for Manipulator Modeling, Control and Simulation", Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Sacramento, California - April 1991, pp. 1122-1127.
- [Tho82] Thomas, M., Tesar, D., "Dynamic Modelling of Serial Manipulator Arms", Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 104, No 3, pp. 218-228, 1982.

- [Uic65] Uicker, J. J., On the Dynamic Analysis of Spatial Linkages Using 4×4 Matrices, Ph. D. dissertation, Northwestern University, Evanstone, Aug. 1965.
- [Uic66] Uicker, J. J., "Dynamic Force Analysis of Spatial Linkages", Lafayette, Ind., Oct. 10-12, 1966.
- [Uic67] Uicker, J. J., "Dynamic Force Analysis of Spatial Linkages", ASME Journal of Applied Mechanics, June, pp. 418-424, 1967.
- [Vec80] Vecchio, L., Nicosia, S., Nicolo, F., Lentini, D., "Automatic Generation of Dynamic Model of Manipulators", Proc. 10th Int. Symp. Industrial Robots, Milan, Italy, pp. 293-301, 1980.
- [Vuk73] Вукобратовић, М., Степаненко, Ј., "Mathematical Models of General Anthropomorphic Systems", Mathematical Biosciences, Vol. 17, pp. 191-242, 1973.
- [Vuk79a] Вукобратовић, М., Поткоњак, В., "Contribution to Automatic Forming of Active Chain Models via Langrangian Form", Journal of Applied Mechanics, No 1, 1979.
- [Vuk79b] Вукобратовић, М., Поткоњак, В., "Two New Methods for Computer Forming of Dynamic Equations of Active Mechanisms", Mechanism and Machine Theory, Vol. 14, No 3, 1979.
- [Vuk82] Вукобратовић, М., Поткоњак, В., Dynamics of Manipulation Robots, Theory and Application, Springer-Verlag 1982.
- [Vuk85] Вукобратовић, М., Кирћански, Н., Real-Time Dynamics of Manipulation Robots, Springer-Verlag, 1985.
- [Vuk89] Вукобратовић, М., Кирћански, Н., Тимченко, А., Кирћански, М., SYM - Program for Computer-Aided Generation of Optimal Symbolic Models of Robot Manipulators, in W. Schiehlen (ed.), Multibody Systems Handbook, Springer-Verlag, New York, pp. 37-60., 1989.
- [Vuk90] Вукобратовић, М., Боровац, Б., Сурла, Д., Стокић, Д., Biped Locomotion, Dynamics, Stability, Control and Application, Springer-Verlag, 1990.

- [Wat79] Waters, R. C., Mechanical Arm Control, A. I. Memo 549, MIT Artificial Intelligence Laboratory, 1979.
- [Wit90] Wittenburg, J., Wolz, U., Schmidt, A., MESA VERDE - A General Purpose Program Package for Symbolical Dynamics Simulations of Multibody Systems, in W. Schiehlen (ed.), Multibody Systems Handbook, Springer-Verlag, New York, pp. 341-360., 1990.
- [Woo71] Woo, L. S., Freudenstein, F., "Dynamic Analysis of Mechanisms Using Screw Coordinates", ASME Journal of Engineering for Industry, February, 1971.
- [Yan71] Yang, A. T., "Inertia Force Analysis of Spatial Mechanisms", ASME Journal of Engineering for Industry, February, 1971.