UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Mirjana Štrboja

Nejednakosti za integrale bazirane na neaditivnim merama

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2011.

Sadržaj

Uvod

Klasična teorija mere je bazirana na prostoru mere sa merom koja je prebrojivo aditivna realna skupovna funkcija, [65, 75]. Osobina prebrojive aditivnosti mere često predstavlja problem jer ne omogućava modeliranje nekih pojava, kao što je na primer interakcija između kriterijuma u teoriji odlučivanja, te se pojavljuje potreba za njenim uopštenjem. Zato je razvijena teorija neaditivnih mera i odgovarajućih integrala, [27, 33, 34, 42, 64, 88]. Značaj integrala baziranih na neaditivnim merama takođe se ogleda kroz njihovu široku primenu u prepoznavanju oblika, ekonomiji, fazi kontroli itd.

Interval iz proširenog skupa realnih brojeva sa uopštenjima uobičajnih operacija sabiranja i množenja u obliku pseudo-sabiranja i pseudo-množenja, koji čine strukturu poluprstena, daju vezu sa neaditivnim merama tzv. pseudo-aditivnim merama i odgovarajućim integralom, videti [62, 63, 64, 65, 66]. Na osnovu tih pojmova su izgrađene teorije idempotentne analize, [39, 44, 45], i opštije pseudo-analize, [62, 63, 64, 65, 66].

Kako klasične integralne nejednakosti igraju važnu ulogu ne samo u matematičkoj analizi, već i u drugim oblastima matematike, pre svega verovatnoći, to je važno ispitati u kom obliku se te nejednakosti prenose na integrale bazirane na neaditivnim merama. U [10] je navedena veza između klasične teorije verovatnoće i teorije odlučivanja, te na osnovu tih rezultata, uopštenja integralnih nejednakosti u vezi sa odgovarajućim klasičnim nejednakostima koje imaju primenu u teoriji verovatnoće, mogu omogućiti njihovu primenu u teoriji odlučivanja.

Prve nejednakosti koje su uopštene za neaditvne integrale su nejednakosti Čebiševa [29] i Jensena [71] za fazi integral. Ubrzo počinju da se objavljuju radovi sa uopštenjima mnogih nejednakosti za integrale bazirane na neaditivnim merama ([7, 8, 9, 19, 20, 21, 22, 41, 55, 56, 59, 72, 73, 74]).

Ova disertacija je posvećena nejednakostima za integrale bazirane na neaditivnim merama sa akcentom na nejednakosti za pseudo-integral i njihovoj primeni.

Počevši od definicije fazi mere u prvoj glavi ovog rada date su definicije i osobine Šokeovog, Sugenovog, univerzalnog i pseudo-integrala ([16, 27, 36, 64, 86]). Takođe, data su poređenja Šokeovog i Lebegovog integrala ([48]), a zatim Šokeovog i Sugenovog integrala ([64]). Šokeov i Sugenov integral imaju široku primenu kao funkcije agregacije. U sekciji 1.1.5 data je definicija funkcije agregacije, primeri kao i njihova veza sa ova dva integrala ([33]). Univerzalni integral ([36]) je uopštenje Šokeovog i Sugenovog integrala i njegova konstrukcija je data u sekciji 1.2. Definicije pseudo-operacija, poluprstena i $\oplus$-mere koja nam omogućava da definišemo pseudo-integral ([63, 64, 65]) date su u sekciji 1.3.

Druga glava je posvećena nejednakostima za Sugenov, Šokeov i univerzalni integral, odnosno dati su rezultati iz [2, 4, 9, 29, 30, 31, 71, 84] vezani za uopštene nejednakosti Jensena, Čebiševa, Holdera, Minkovskog, Stolarskog i Bervalda za ove integrale. U sekciji 2.1 su navedene pomenute klasične nejednakosti za Lebegov integral. Originalni rezultati iz [4] vezani za uopštenje Bervaldove nejednakosti za Sugenov integral dati su u sekciji 2.8.

U trećoj glavi dati su originalni rezultati iz [68] vezani za uopštenje Jensenove nejednakosti za pseudo-integral. Ovaj tip nejednakosti je pokazan za dva slučaja poluprstena. U sekciji 3.3 su dokazane posledice ove nejednakosti koje će kasnije biti primenjene u pseudo-verovatnoći.

Originalni rezultati, vezani za dve nejednakosti poznate kao nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral, dati su u četvrtoj glavi ovog rada. Takođe, data je njihova primena u pseudo-verovatnoći. Prva nejednakost Čebiševa ima veliki značaj u teoriji verovatnoće, dok se druga odnosi na integrale funkcija koje su iste monotonosti. U sekciji 3.3 je navedena nejednakost Stolarskog koja je posledica druge nejednakosti Čebiševa.

Nejednakosti Holdera i Minkovskog za pseudo-integral date su u petoj glavi, što su takođe originalni rezultati ove disertacije ([5]). Pokazana je Holderova nejednakost u slučaju kad su pseudo-operacije definisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora, zatim kad je pseudo-sabiranje idempotentna operacija dok je pseudo-množenje definisano pomoću generatora g. Takođe je navedena nejednakost u slučaju kada su obe pseudo-operacije idempotentne. Nejednakost Minkovskog za pseudo-integral za tri slučaja poluprstena je pokazana u sekciji 5.2. U sekciji 5.3 dat je kratak pregled definicija osnovnih pojmova i rezultata vezanih za teoriju odlučivanja iz [10]. Analogija između optimizacije i klasične teorije verovatnoće je proučavane od strane više autora u [10, 11, 12, 13, 25, 26, 45]. U sekciji 5.3.2 date su nejednakosti koje su analogne nejednakostima Holdera i Minkovskog u klasičnoj teoriji verovatnoće.

Slično kao u klasičnoj teoriji mere nejednakosti Holdera, Minkovskog i Čebiševa za pseudo-integral se mogu primeniti prilikom uopštavanja klasičnog L^p prostora. Naime, u šestoj glavi data je definicija uopštene metrike na poluprstenu, a zatim je uvedeno uopštenje L^p prostora i uopštena metrika na njemu. Za dva slučaja poluprstena tipovi konvergencija i teoreme konvergencija niza funkcija date su u sekciji 6.1.

Ovom prilikom se zahvaljujem komisiji Akademiku Olgi Hadžić, dr Arpadu Takačiju i dr Tatjani Grbić na podršci i sugestijama koje su doprinele boljem kvalitetu ovog rada. Zahvaljujem se mentoru Akademiku Endre Papu na pomoći i svim korisnim savetima koji su mi pomogli tokom pisanja ovog rada.

Glava 1

Integrali bazirani na neaditivnim merama

Klasična teorija mere je bazirana na prebrojivo aditivnim merama i Lebegovom integralu. Međutim, aditivnost mere ne omogućava modeliranje mnogih pojava. Iz tog razloga uvode se monotone skupovne funkcije koje se nazivaju fazi mere i one predstavljaju uopštenje klasične mere. Šokeov i Sugenov integral su bazirani na fazi merama. U sekciji 1.1 dat je pregled definicija fazi mere, Šokeovog i Sugenovog integrala sa njihovim osnovnim osobinama ([16, 27, 86]). Takođe, dato je poređenje Šokeovog i Lebegovog integrala ([48]), a zatim Šokeovog i Sugenovog integrala ([64]). Ovako definisani intergali zbog njihovih osobina imaju široku primenu kao funkcije agregacije. Pored definicije funkcije agregacije dati su primeri kao i njihova veza sa Šokeovim i Sugenovim integralom ([33]). Zbog specijalnih operacija koje se koriste u konstrukciji Šokeovog i Sugenovog integrala njihova primena je ograničena. Iz tog razloga u [36] uvodi se univerzalni integral koji je uopštenje Šokeovog i Sugenovog integrala. Konstrukcija univerzalnog integrala je data u sekciji 1.2, dok su u sekciji 1.3 date definicije pseudo-operacija i poluprstena, a zatim primeri poluprstena. Sledi definicija $\oplus$-mere koja nam omogućava da definišemo pseudo-integral čija konstrukcija je slična konstrukciji Lebegovog integrala ([63, 64, 65]). Pseudo-verovatnoća je uopštenje klasične verovatnoće i bazirana je na neaditivnim merama i pseudo-integralu ([53]).

1.1 Šokeov i Sugenov integral

Šokeov i Sugenov integral su bazirani na fazi merama u širem smislu [16, 27, 64]. Neka je X neprazan skup i $\mathcal{A}$ σ-algebra na X. $(X, \mathcal{A})$ nazivamo prostor sa σ-algebrom.

Definicija 1.1. Fazi mera je funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ za koju važi:

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) za svako $A, B \in \mathcal{A}$ ako je $A \subset B$, tada je $\mu(A) \leq \mu(B)$.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ se naziva fazi merljiv prostor.

Fazi mera koja zadovoljava uslov $m(X) = 1$ naziva se normirana fazi mera.

U radu koristimo oznake

$$x \vee y = \sup(x, y) \ \text{ i } x \wedge y = \inf(x, y).$$

Definicija 1.2. Fazi mera μ je

i) neprekidna od dole ako za svaki rastući niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{A}$ važi: $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$,

ii) neprekidna od gore ako za svaki opadajući niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{A}$ takav da je $\mu(A_1) < \infty$ važi:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$

iii) modularna ako za svako $A, B \in \mathcal{A}$ važi:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B),$$

iv) maksitivna ($\vee$-aditivna) ako za svako $A, B \in \mathcal{A}$ važi:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B).$$

v) submodularna ako za svako $A, B \in \mathcal{A}$ važi:

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Zbog ispitivanja aditivnosti i maksitivnosti integrala potrebno je uvesti pojam komonotonosti funkcija. Svaka funkcija $f : X \to [-\infty, \infty]$ definiše na X relaciju $<_f$:

$$y_1 <_f y_2 \Leftrightarrow f(y_1) < f(y_2).$$

Funkcije f i g su komonotone, u oznaci $f \sim g$ ako i samo ako ne postoji par y_1, $y_2 \in X$ takav da je $y_1 <_f y_2$ i $y_2 <_g y_1$.

Neka je F skup svih merljivih funkcija iz X u $[-\infty, \infty]$.

Za svako $a \in [-\infty, \infty]$ i $A \in \mathcal{A}$ funkcija definisana sa

$$b(a, A)(x) = \begin{cases} a & , \quad x \in A, \\ 0 & , \quad x \notin A, \end{cases}$$

se naziva bazična funkcija.

Merljiva funkcija $s : X \to \mathbb{R}^+$ se naziva jednostavna funkcija ako je njen skup vrednosti konačan skup.

Svakoj jednostavnoj funkciji s sa skupom vrednosti $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ se pridružuje konačna particija $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, gde je $A_i = \{x \in X \mid f(x) = a_i\}$. Funkcija s se može predstaviti pomoću bazičnih funkcija na sledeći način:

$$s = \sum_{i=1}^{n} b(a_i, A_i) \equiv \bigvee_{i=1}^{n} b(a_i, A_i).$$

1.1.1 Šokeov integral

Šokeovog integral je uveden u [24]. Sledi definicija i osnovne osobine Šokeovog integrala ([16, 27, 64]).

Definicija 1.3. Šokeov integral je funkcionela iz $F(X)$ u $[-\infty, \infty]$ definisana sa

$$(c) \int f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(\{y \in X \mid f(y) > x\}) \, dx.$$

Osnovne osobine Šokeovog integrala su:

(C1) Za svaku bazičnu funkciju važi

$$(c) \int b(a, A) \, d\mu = a \cdot \mu(A)$$

za svako $a \in \mathbb{R}^+$ i $A \in \mathcal{A}$ sa konvencijom $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Karakteristična funkcija χ_A je specijalan slučaj bazične funkcije za $a = 1$ i važi

$$(c) \int \chi_A d\mu = \mu(A)$$

za svako $A \in \mathcal{A}$.

Neka su $f,\, g \in F(X)$.

(C2) (Monotonost) Ako je $f \leq g$, tada je $(c)\int f d\mu \leq (c)\int g d\mu$.

(C3) (Homogenost) $(c)\int (a \cdot f)\, d\mu \leq a \cdot (c)\int f d\mu$ za svako $a \in \mathbb{R}^+$.

(C4) (Komonotona aditivnost) Ako je $f \sim g$, tada je

$$(c)\int (f+g)\, d\mu = (c)\int f d\mu + (c)\int g d\mu.$$

Više o Šokeovom integralu se može naći u ([16, 27, 64]).

1.1.2 Sugenov integral

Sugenov integral je takođe baziran na fazi meri [16, 27, 64, 81, 86]. Uveden je u [81] i u originalnoj formi definisan je na funkcijima čiji je skup vrednosti u $[0,1]$ i na normiranoj fazi meri.

Opštiji integral u odnosu na uopštenu fazi meru proučavani su u [47, 52, 70].

Sledi pregled definicije i osnovnih osobina Sugenovog integrala iz [86].

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fazi merljiv prostor, $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ fazi mera. Neka je sa $G(X)$ označen skup svih konačnih nenegativnih merljivih funkcija definisanih na X.

Definicija 1.4. Sugenov integral funkcije $f \in G(X)$ nad $A \in \mathcal{A}$ u odnosu na μ je definisan sa

$$(s)\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge \mu(A \cap F_\alpha)\right]$$

gde je $F_\alpha = \{x \mid f(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in [0, \infty]$.

Očigledno za F_α važi: ako je $\alpha \leq \beta$ onda je $F_\beta \subseteq F_\alpha$.

U slučaju da je $A = X$, koristićemo oznaku $(s)\int_X f d\mu = (s)\int f d\mu$.

Ako je $X = (-\infty, \infty)$, $\mathcal{A}$ Borelova σ-algebra, μ Lebegova mera i $f : X \to [0, \infty)$ unimodalna neprekidna funkcija, Sugenov integral $(s)\int f d\mu$ je dužina stranice najvećeg kvadrata između funkcije f i x-ose.

Osnovne osobine Sugenovog integrala su:

(S1) Ako je $\mu(A) = 0$, tada je $(s)\int_A f d\mu = 0$ za svaku funkciju $f \in G(X)$.

(S2) $(s)\int_A f d\mu = (s)\int f \cdot \chi_A d\mu$

(S3) Ako je $f \leq g$, tada je $(s)\int f d\mu \leq (s)\int g d\mu$.

(S4) $(s)\int_A a d\mu \leq a \wedge \mu(A)$ za svako $a \in [0,\infty)$.

(S5) $(s)\int_A (f+a)\, d\mu \leq (s)\int_A f d\mu + (s)\int_A a d\mu$ za svako $a \in [0,\infty)$.

Dokazi navedenih osobina se mogu naći u [16, 27, 64, 86].

1.1.3 Poređenje Šokeovog i Lebegovog integrala

Neka je $(X,\mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom. U ovoj sekciji pod pojmom monotone mere podrazumevaćemo fazi meru $m : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ sa osobinom $m(X) > 0$ ([48]).

Teorema koja sledi daje vezu između Šokeovog i Lebegovog integrala [16, 64].

Teorema 1.1. *Ako je m σ-aditivna mera onda se Šokeov integral poklapa sa Lebegovim integralom, tj.*

$$(c)\int f dm = \int_X f dm.$$

Za dve monotone mere $m_1, m_2 : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ koje se poklapaju na $\mathcal{F} = \{\{f \geq t\}\}_{t=0}^{\infty}$ (ili na $\{\{f > t\}\}_{t=0}^{\infty}$), Šokeovi integrali u odnosu na te dve mere takođe se poklapaju, tj.

$$(c)\int f dm_1 = (c)\int f dm_2.$$

Važi sledeća teorema čiji se dokaz moze pronaći u [48].

Teorema 1.2. *Neka je $(X,\mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom, $m : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ monotona mera i $f : X \to [0,\infty]$ merljiva funkcija. Ako je X konačan skup ili $f : X \to [0,\infty]$ jednostavna funkcija, tada postoji σ-aditivna mera $\mu_f : \sigma(\mathcal{F}) \to [0,\infty]$ takva da $\mu_f|_{\mathcal{F}} = m|_{\mathcal{F}}$, gde je $\sigma(\mathcal{F})$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{F} = \{\{f \geq t\}\}_{t=0}^{\infty}$, i važi*

$$(c)\int_X f dm = (c)\int_X f d\mu_f = \int_X f d\mu_f.$$

Takođe na osnovu [16] imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.3. *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *prostor sa* σ*-algebrom,* $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *neprekidna od dole monotona mera. Tada za svaku merljivu funkciju* $f : X \to [0, \infty]$ *važi*

$$(c) \int_X f dm = \sup \left\{ (c) \int_X s dm \mid s \text{ je jednostavna funkcija, } s \leq f \right\}.$$

Ako je monotona mera submodularna, imamo sledeći rezultat pokazan u [27].

Teorema 1.4. *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *prostor sa* σ*-algebrom,* $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *submodularna monotona mera. Tada je skup*

$$M = \{\mu \mid \mu : \mathcal{A} \to [0, \infty], \ \mu \leq m, \ \mu \text{ je aditivna}\}$$

neprazan i za svaku merljivu funkciju $f : X \to [0, \infty]$ *važi*

$$(c) \int_X f dm = \sup \left\{ (c) \int_X f d\mu \mid \mu \in M \right\}.$$

Štaviše, za svako $A \in \mathcal{A}$, $m(A) = \sup \{\mu(A) \mid \mu \in M\}$.

Očigledno, ako je X konačan ili f jednostavna funkcija, onda $(c) \int f d\mu = \int_X f d\mu$ je na desnoj strani Lebegov integral za svako $\mu \in M$.

Lema 1.5. *Neka je* X *konačan prostor i neka je* $T : [0, \infty]^2 \to [0, \infty]$ *neopadajuće preslikavanja po obe koordinate. Tada za sve funkcije* $f, g : X \to [0, \infty]$ *funkcija* $T(f, g) : X \to [0, \infty]$ *data sa* $T(f, g)(x) = T(f(x), g(x))$ *je* $\mathcal{T}$*-merljiva, gde je*

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{p} A_i \cap B_i \mid p \in \mathbb{N}, \ A_i \in \mathcal{F}, \ B_i \in \mathcal{G} \right\}$$

najmanja familija skupova iz 2^X *koja sadrži* $\mathcal{F} = \{\{f \geq t\}\}_{t=0}^{\infty}$ *i* $\mathcal{G} = \{\{g \geq t\}\}_{t=0}^{\infty}$*, i zatvorena u odnosu na uniju i presek.*

Sledi teorema u čijem dokazu se koristi prethodna lema i notacija navedena u njoj (videti [48]).

Teorema 1.6. *Neka je* X *konačan prostor,* $m : 2^X \to [0, \infty]$ *modularna monotona mera na* $\mathcal{T}$ *i neka su date funkcije* $f, g : X \to [0, \infty]$*. Tada postoji aditivna mera* $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ *takva da za svako neopadajuće preslikavanja po obe koordinate* $T : [0, \infty]^2 \to [0, \infty]$ *važi*

$$(c) \int_X f dm = \int_X T(f, g) d\mu.$$

U opštem slučaju Šokeov integral nije aditivan.

Posledica 1.7. *Neka je X konačan prostor, $m : 2^X \to [0,\infty]$ modularna monotona mera na $\mathcal{T}$ i neka su date funkcije $f,g : X \to [0,\infty]$. Tada važi*

$$(c)\int_X (f+g)\,dm = (c)\int_X f dm + (c)\int_X g dm.$$

1.1.4 Poređenje Šokeovog i Sugenovog integrala

Za specijalan slučaj fazi mere Šokeov i Sugenov integral se poklapaju ([64]).

Teorema 1.8. *Neka je $f : X \to [0,1]$ merljiva funkcija.*

(1) Ako je $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ neprekidna od gore i od dole fazi mera takva da je $\mu(X) = 1$, tada važi

$$\left|(s)\int f d\mu - (c)\int f d\mu\right| < \frac{1}{4}.$$

(2) Ako je $\mu : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ fazi mera, tada važi

$$(s)\int f d\mu = (c)\int f d\mu.$$

1.1.5 Šokeov i Sugenov integral kao funkcije agregacije

Neka je $\mathbb{I}$ neprazan interval realnih brojeva. Sledi definicija funkcije agregacije [33].

Definicija 1.5. Funkcija agregacije je funkcija $A^{(n)} : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ koja je neopadajuća (po svakoj promenljivoj) i ispunjava granične uslove

$$\inf_{x\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \inf \mathbb{I} \text{ i } \sup_{x\in\mathbb{I}^n} A^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \sup \mathbb{I}.$$

Najpoznatije funkcije agregacije su: aritmetička sredina, geometrijska sredina, aritmetička sredina sa težinama, minimum, maksimum, medijana itd. Navešćemo neke od njih. Neka je $[n] = \{1,2,...,n\}$ i $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

i) Aritmetička sredina je funkcija $AM : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ definisina sa

$$AM(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

ii) Za svako $k \in [n]$ projekcija je funkcija $P_k : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ definisina sa

$$P_k(\boldsymbol{x}) = x_k.$$

iii) Minimum je funkcija Min: $\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ definisina sa

$$\operatorname{Min}(\boldsymbol{x}) = \min\{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

iv) Maksimum je funkcija Min: $\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ definisina sa

$$\operatorname{Max}(\boldsymbol{x}) = \max\{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

v) Za vektor težine $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, ..., w_n) \in [0,1]^n$ takav da je $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ aritmetička sredina sa težinama je funkcija $WAM_{\boldsymbol{w}} : \mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ definisana sa

$$WAM_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n w_i x_i.$$

vi) Za vektor težine $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, ..., w_n) \in [0,1]^n$ takav da je $\bigvee_{i=1}^n w_i = 1$ i $\mathbb{I} = [0,1]$ maksimum sa težinama u odnosu na $\boldsymbol{w}$ je funkcija $WMax_{\boldsymbol{w}}$: $\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ definisana sa

$$WMax_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \bigvee_{i=1}^n (w_i \wedge x_i).$$

vii) Za vektor težine $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, ..., w_n) \in [0,1]^n$ takav da je $\bigvee_{i=1}^n w_i = 1$ i $\mathbb{I} = [0,1]$ minimum sa težinama u odnosu na $\boldsymbol{w}$ je funkcija $WMin_{\boldsymbol{w}}$: $\mathbb{I}^n \to \mathbb{I}$ definisana sa

$$WMin_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{x}) = \bigwedge_{i=1}^n ((1 - w_i) \vee x_i).$$

Neka je $\mu : 2^{[n]} \to [0,\infty)$ fazi mera, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,\infty)^n$. Ako je funkcija $f = \sum_{i=1}^n \left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}\right) \chi_{A_{\sigma(i)}}$ gde je σ permutacija na $[n]$ takva da je $x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq ... \leq x_{\sigma(n)}$, $x_{\sigma(0)} = 0$ i $A_{\sigma(i)} = \{\sigma(i), ..., \sigma(n)\}$, tada je Šokeov integral funkcija agregacije u odnosu na μ i ima sledeći oblik

$$(c)\int f d\mu = \sum_{i=1}^n \left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(i-1)}\right) \mu\left(A_{\sigma(i)}\right).$$

U tom slučaju koristimo oznaku $\mathcal{C}_\mu(\boldsymbol{x}) = (c)\int f d\mu$.

U teoremi koja sledi data je veza Šokeovog integrala sa drugim funkcijama agregacije ([33]).

Teorema 1.9. *Neka je* $\mu : 2^{[n]} \rightarrow [0, \infty)$ *fazi mera takva da je* $\mu([n]) = 1$, $\mathbb{I} = \mathbb{R}$. *Tada važi;*

i) $\mathcal{C}_\mu$ *=Min ako i samo je* $\mu = \mu_{\min}$, *gde je* $\mu_{\min}$ *fazi mera za koju za svako* $A \subsetneq [n]$ *je* $\mu_{\min}(A) = 0$,

ii) $\mathcal{C}_\mu$ *=Max ako i samo je* $\mu = \mu_{\max}$, *gde je* $\mu_{\max}$ *fazi mera za koju za svako* $A \subset [n]$, $A \neq \emptyset$ *važi* $\mu_{\max}(A) = 1$,

iii) $\mathcal{C}_\mu = P_k$ *ako i samo je* μ *Dirakova mera* δ_k,

iv) $\mathcal{C}_\mu = WAM_{\boldsymbol{w}}$ *ako i samo je* μ *aditivna i za svako* $i \in [n]$ *je* $\mu(\{i\}) = w_i$.

Sada ćemo posmatrati Sugenov integral kao funkciju agregacije na $\mathbb{I}^n$.

Neka je $\mu : 2^{[n]} \rightarrow [0, \infty)$ fazi mera i $\boldsymbol{x} \in [0, \mu([n])]^n$. Ako je funkcija $f = \bigvee_{i=1}^n \left(x_{\sigma(i)} \wedge \chi_{A_{\sigma(i)}}\right)$ gde je σ permutacija na $[n]$ takva da je $x_{\sigma(1)} \leq x_{\sigma(2)} \leq ... \leq x_{\sigma(n)}$, $x_{\sigma(0)} = 0$ i $A_{\sigma(i)} = \{\sigma(i), ..., \sigma(n)\}$, tada je Sugenov integral funkcija agregacije u odnosu na μ i ima sledeći oblik

$$(s) \int f d\mu = \bigvee_{i=1}^{n} \left(x_{\sigma(i)} \wedge \mu\left(A_{\sigma(i)}\right)\right).$$

Koristićemo notaciju $\mathcal{S}_\mu(\boldsymbol{x})$ umesto $(s) \int f d\mu$.

Teorema koja sledi daje vezu Sugenovog integrala sa funkcijama agregacije ([33]).

Teorema 1.10. *Neka je* μ *fazi mera i* $\mathbb{I} = [0, \mu([n])]$. *Tada važi;*

i) $\mathcal{S}_\mu$ *=Min ako i samo je* $\mu = \mu_{\min}$, *gde je* $\mu_{\min}$ *fazi mera za koju za svako* $A \subsetneq [n]$ *je* $\mu_{\min}(A) = 0$.

ii) $\mathcal{S}_\mu$ *=Max ako i samo je* $\mu = \mu_{\max}$, *gde je* $\mu_{\max}$ *fazi mera za koju za svako* $A \subset [n]$, $A \neq \emptyset$ *važi* $\mu_{\max}(A) = 1$.

iii) $\mathcal{S}_\mu = P_k$ *ako i samo je* μ *Dirakova mera* δ_k.

v) $\mathcal{S}_\mu = WMax_{\boldsymbol{w}}$ *ako i samo je* μ *maksitivna fazi mera takva da je* $\mu([n]) = 1$ *i za svako* $i \in [n]$ *je* $\mu(\{i\}) = w_i$.

vii) $\mathcal{S}_\mu = WMin_{\boldsymbol{w}}$ *ako i samo je* μ *minitivna fazi mera takva da je* $\mu([n]) = 1$ *i za svako* $i \in [n]$ *je* $\mu([n] \setminus \{i\}) = \mu([n]) - w_i$.

1.2 Univerzalni integral

U ovoj sekciji ćemo takođe pod pojmom monotone mere podrazumevati fazi meru $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ sa osobinom $m(X) > 0$. Univerzalni integral je definisan na proizvoljnom prostoru sa σ-algebrom $(X, \mathcal{A})$ u odnosu na monotonu meru $m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ i za merljivu funkciju $f : X \to [0, \infty]$.

Sledi pregled definicija, notacija i rezultata iz [36].

Funkcija $f : X \to [0, \infty]$ je $\mathcal{A}$-merljiva ako $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svako $B \in \mathcal{B}([0, \infty])$ gde je $\mathcal{B}([0, \infty])$ Borelova σ-algebra na $[0, \infty]$. Koristićemo sledeću notaciju:

Definicija 1.6. Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom.

(1) $\mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ označava skup svih $\mathcal{A}$-merljivih funkcija $f : X \to [0, \infty]$;

(2) Za svako $a \in (0, \infty]$, $\mathcal{M}_a^{(X,\mathcal{A})}$ je skup svih monotonih mera koje zadovoljavaju $m(X) = a$ i

$$\mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})} = \bigcup_{a \in (0,\infty]} \mathcal{M}_a^{(X,\mathcal{A})}.$$

Koristeći prethodnu notaciju Šokeov [24], Sugenov [81] i Šilkretov [77] integral, respektivno su dati za prostor sa σ-algebrom $(X, \mathcal{A})$, za svaku funkciju $f \in \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ i za svaku monotonu meru $m \in \mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})}$ sa

$$\mathbf{Ch}(m, f) = \int_0^\infty m(\{f \geq t\})\, dt \tag{1.1}$$

$$\mathbf{Su}(m, f) = \sup\{\min(t, m(\{f \geq t\})) \mid t \in (0, \infty]\}, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{Sh}(m, f) = \sup\{t \cdot m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0, \infty]\}, \tag{1.3}$$

uzimajući da je $0 \cdot \infty = 0$.

Nezavisno od prostora sa σ-algebrom $(X, \mathcal{A})$ integrali (1.1), (1.2) i (1.3) preslikavaju $\mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})} \times \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ u $[0, \infty]$. Ako fiksiramo $m \in \mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})}$, oni su funkcije agregacije na $\mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$. Prethodni integrali su takođe neopadajuće funkcije iz $\mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})}$ u $[0, \infty]$ ako fiksiramo proizvoljnu funkciju $f \in \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$.

Neka je $\mathcal{S}$ klasa merljivih prostora i

$$\mathcal{D}_{[0,\infty]} = \bigcup_{(X,\mathcal{A}) \in \mathcal{S}} \mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})} \times \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}.$$

Integrali (1.1), (1.2) i (1.3) preslikavaju $\mathcal{D}_{[0,\infty]}$ u $[0,\infty]$ i neopadajući su po obe koordinate. Pored toga oni ispunjavaju jednakost $\mathbf{I}(m_1,f_1)=\mathbf{I}(m_2,f_2)$ kad parovi $(m_1,f_1)\,,\,(m_2,f_2)\in\mathcal{D}_{[0,\infty]}$ zadovoljavaju jednakost

$$m_1(\{f_1\geq t\})=m_2(\{f_2\geq t\})$$

za svako $t\in(0,\infty]$.

Definicija 1.7. Ako parovi $(m_1,f_1)\in\mathcal{M}^{(X_1,\mathcal{A}_1)}\times\mathcal{F}^{(X_1,\mathcal{A}_1)}$ i $(m_2,f_2)\in\mathcal{M}^{(X_2,\mathcal{A}_2)}\times\mathcal{F}^{(X_2,\mathcal{A}_2)}$ zadovoljavaju

$$m_1(\{f_1\geq t\})=m_2(\{f_2\geq t\})$$

za svako $t\in(0,\infty]$, tada kažemo da su (m_1,f_1) i (m_2,f_2) integralno ekvivalentni, u oznaci

$$(m_1,f_1)\sim(m_2,f_2)\,.$$

Univerzalni integral je baziran na operaciji koja u opštem slučaju nije ni asocijativna ni komutativna. Sledi definicija binarne operacije na kojoj se bazira univerzalni integral.

Definicija 1.8. Neka $\boxdot:[0,\infty]^2\to[0,\infty]$ funkcija koja zadovoljava sledeće osobine:

(1) $\boxdot$ je neopadajuća po obe komponente, tj. za svako $a_1,a_2,b_1,b_2\in[0,\infty]$ sa osobinom $a_1\leq a_2$ i $b_1\leq b_2$ važi $a_1\boxdot b_1\leq a_2\boxdot b_2$,

(2) 0 je anhilator za $\boxdot$, tj. za svako $a\in[0,\infty]$ važi $a\boxdot 0=0\boxdot a=0$,

(3) $\boxdot$ ima neutralni element e različit od 0, tj. postoji $e\in(0,\infty]$ tako da za svako $a\in[0,\infty]$ važi $a\boxdot e=e\boxdot a=a$.

U [36] dat je aksiomatski pristup za univerzalne integrale. Naime, polazi se od aksioma koje zadovoljavaju Šokeov, Sugenov i Šilkretov integral.

Definicija 1.9. Univerzalni integral je funkcija $\mathbf{I}:\mathcal{D}_{[0,\infty]}\to[0,\infty]$ koja zadovoljava sledeće aksiome:

(I1) za svaki prostor sa σ-algebrom $(X,\mathcal{A})$ restrikcija funkcije $\mathbf{I}$ na $\mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})}\times\mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ je neopadajuća po svakoj koordinati;

(I2) postoji funkcija $\boxdot:[0,\infty]^2\to[0,\infty]$ takva da za svaki par $(m,c\cdot\chi_A)\in\mathcal{D}_{[0,\infty]}$ važi

$$\mathbf{I}(m,c\cdot\chi_A)=c\boxdot m(A)\,;$$

(I3) za sve integralno ekvivalentne parove (m_1, f_1), $(m_2, f_2) \in \mathcal{D}_{[0,\infty]}$ važi $\mathbf{I}(m_1, f_1) = \mathbf{I}(m_2, f_2)$.

Teorema 1.11. *Neka je* $\boxdot : [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ *binarna operacija u smislu definicije 1.8. Tada je najmanji univerzalni integral* $\mathbf{I}$ *i najveći univerzalni integral* $\mathbf{I}$ *baziran na* $\boxdot$ *dat sa*

$$\mathbf{I}_{\boxdot}(m, f) = \sup\{t \boxdot m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0,\infty]\},$$

$$\mathbf{I}^{\boxdot}(m, f) = ess \sup_{m} f \boxdot \sup\{t \boxdot m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0,\infty]\},$$

gde je $ess \sup_m f = \sup\{t \in [0,\infty] \mid m(\{f \geq t\}) > 0\}$.

Očigledno je $\mathbf{Su} = \mathbf{I}_{\mathrm{Min}}$ i $\mathbf{Sh} = \mathbf{I}_{\mathrm{Prod}}$ gde su operacije Min i Prod date sa $\mathrm{Min}(a,b) = \min(a,b)$ i $\mathrm{Prod}(a,b) = a \cdot b$. Iz nelineranosti Sugenovog integrala (videti [37, 49]) sledi da univerzalni integral takođe nije linearan u opštem slučaju.

Ako fiksiramo neutralni element $e \in (0,\infty]$, najmanja operacija $\boxdot_e$ i najveća operacija $\boxdot^e$ u smislu definicije 1.8 sa neutralnim elementom e su date sa

$$a \boxdot_e b = \begin{cases} 0, & (a,b) \in [0,e)^2 \\ \max(a,b), & (a,b) \in [e,\infty]^2 \\ \min(a,b), & \text{inače}, \end{cases}$$

$$a \boxdot^e b = \begin{cases} \min(a,b), & \min(a,b) = 0 \text{ ili } (a,b) \in (0,e]^2 \\ \infty, & (a,b) \in (e,\infty]^2 \\ \max(a,b), & \text{inače}. \end{cases}$$

Teorema 1.12. *Neka je* $\boxdot : [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ *binarna operacija u smislu definicije 1.8 na* $[0,\infty]$ *sa neutralnom elementom* $e \in (0,\infty]$, *i neka je* $\mathcal{K}$ *skup svih univerzalnih integrala* $\mathbf{I}$ *takvih da*

i) za svako $m \in \mathcal{M}_e^{(X,\mathcal{A})}$ *i svako* $c \in [0,\infty]$ *važi*

$$\mathbf{I}(m, c \cdot \chi_X) = c,$$

ii) za svako $m \in \mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})}$ *i svako* $A \in \mathcal{A}$ *važi*

$$\mathbf{I}(m, c \cdot \chi_A) = m(A).$$

Onda $\mathbf{I}_{\boxdot_e}$ *i* $\mathbf{I}^{\boxdot_e}$ *su najmanji i najveći element iz* $\mathcal{K}$ *respektivno, njihove eksplicitne formule su date sa*

$$\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m,f) = \max\left(m\left(\{f \geq e\}\right), essinf_m f\right),$$

gde je $essinf_m f = \sup\{t \in [0,\infty] \mid m(\{f \geq t\}) \geq e\}$ *i*

$$\mathbf{I}^{\boxdot_e}(m,f) = \begin{cases} \min\left(ess\sup_m f, \lim\limits_{t\to 0^+} m(\{f \geq t\})\right) \\ \qquad ako \ \max\left(ess\sup_m f, \lim\limits_{t\to 0^+} m(\{f \geq t\})\right) \leq e, \\ \\ \infty \\ \qquad ako \ \min\left(ess\sup_m f, \lim\limits_{t\to 0^+} m(\{f \geq t\})\right) > e, \\ \\ ess\sup_m f \\ \qquad ako \ \lim\limits_{t\to 0^+} m(\{f \geq t\}) < e \ i \ ess\sup_m f \geq e, \\ \\ \lim\limits_{t\to 0^+} m(\{f \geq t\}) \qquad\qquad inače. \end{cases}$$

U [36] univerzalni integral se uvodi na još jedan način.

Za datu operaciju $\boxdot$ na $[0,\infty]$ pretpostavljamo da postoji operacija $\boxplus : [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ koja je neprekidna, asocijativna, neopadajuća i ima 0 kao neutralni element (tada sledi komutativnost operacije $\boxplus$, videti [35]) i koja je distributivna sa leve strane u odnosu na $\boxdot$, tj. za sve $a,b,c \in [0,\infty]$ važi

$$(a \boxplus b) \boxdot c = (a \boxdot c) \boxplus (b \boxdot c).$$

Par $(\boxplus, \boxdot)$ se naziva integralni par operacija.

Neka je $(X,\mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom.
Svaka jednostavna funkcija $s \in \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$, tj. funkcija koja ima konačan skup vrednosti $Ran(s) = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ gde je $a_1 < a_2 < ... < a_n$, $A_i = \{s \geq a_i\}$, $a_0 = 0$ i $b_i = \inf\{c \in [0,\infty] \mid a_{i-1} \boxplus c = a_i\}$, ima jedinstvenu prezentaciju

$$s = \mathop{\boxplus}_{i=1}^{\infty} b_i \cdot \chi_{A_i}.$$

Skup svih jednostavnih funkcija iz $\mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ obeležićemo sa $\mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}_{simple}$.

Slično kao kod konstrukcije Lebegovog integrala za svaki prostor sa σ-algebrom $(X,\mathcal{A})$ i svaku monotonu meru m na $(X,\mathcal{A})$ neka je $\mathbf{I}^{simple}_{\boxplus,\boxdot}$: $\mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})} \times \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}_{simple} \to [0,\infty]$ funkcija data sa

$$\mathbf{I}^{simple}_{\boxplus,\boxdot}\left(m, \bigboxplus_{i=1}^{\infty} b_i \cdot \chi_{A_i}\right) = \bigboxplus_{i=1}^{\infty} b_i \boxdot m\left(A_i\right). \tag{1.4}$$

Teorema 1.13. *Neka je* $(\boxplus,\boxdot)$ *integralni par operacija. Funkcija* $\mathbf{I}_{\boxplus,\boxdot}$: $\mathcal{D}_{[0,\infty]} \to [0,\infty]$ *data sa*

$$\mathbf{I}_{\boxplus,\boxdot}(m,f) =$$

$$\sup\left\{\mathbf{I}^{simple}_{\boxplus,\boxdot}(\mu,s) \mid (\mu,s) \in \mathcal{D}_{[0,\infty]},\ s \text{ je jednostavna, } h^{(\mu,s)} \leq h^{(m,f)}\right\}$$

je univerzalni integral koji je proširenje $\mathbf{I}^{simple}_{\boxplus,\boxdot}$ *u (1.4).*

1.2.1 Univerzalni integral na $[0,1]$

Za monotone normirane mere $m \in \mathcal{M}_1^{(X,\mathcal{A})}$ i funkcije $f \in \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ koje zadovoljavaju uslov $Rang(f) = [0,1]$ (pisaćemo kraće $f \in \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}_{[0,1]}$) univerzalni integrali su bazirani na binarnoj operaciji $\boxdot$ u smislu definicije 1.8 sa neutralnim elementom 1. Restrikcija univerzalnog integrala na klasu

$$\mathcal{D}_{[0,1]} = \bigcup_{(X,\mathcal{A})\in\mathcal{S}} \mathcal{M}_1^{(X,\mathcal{A})} \times \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}_{[0,1]}$$

naziva se univerzalni integral na skali $[0,1]$ ili fazi integral.

Semikopula (konjuktor, t-seminorma) [15, 28, 82] je binarna operacija $\boxdot : [0,1]^2 \to [0,1]$ koja je neopadajuća po obe komponente, 1 je neutralni element i zadovoljava $a \boxdot b \leq \min(a,b)$ za svako $(a,b) \in [0,1]^2$.

Ako je još operacija $\boxdot : [0,1]^2 \to [0,1]$ asocijativna i komutativna, onda se naziva triangularna norma (kraće t-norma [14, 35]).

Slede četiri najčešće korišćene t-norme:

(1) $T_{\mathbf{M}}(x,y) = \min(x,y)$ za $(x,y) \in [0,1]^2$. Ova t-norma je najveća semikopula i na njoj je baziran originalni Sugenov integral uveden u [81].

(2) $T_{\mathbf{P}}(x,y) = xy$ za $(x,y) \in [0,1]^2$. Šilkretov integral uveden u [77] i Šokeov integral na $[0,1]$ su bazirani na $T_{\mathbf{P}}$ t-normi.

(3) $T_{\mathbf{L}}(x,y) = \max(a+b-1,0)$

(4) $T_{\mathbf{D}}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in [0,1)^2 \\ xy, & \text{inače} \end{cases}$, što je najmanja semikopula.

Kopule ([79], videti i [14, 54]) su takođe specijalan slučaj semikopula i imaju važnu ulogu u statistici i teoriji verovatnoće. Pridružuju se funkciji raspodele na $[0,1]^2$ dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y) čije kordinate X i Y imaju uniformnu raspodelu na $[0,1]$. Kopula C ima osobinu da za svako $0 \leq a \leq b \leq 1$ i $0 \leq c \leq d \leq 1$ važi

$$C(a,c) + C(b,d) - C(b,c) - C(a,d) \geq 0.$$

Konstrukcija univerzalnog integrala na $[0,\infty]$ baziranog na fiksiranoj binarnoj operaciji u smislu definicije 1.8 se može takođe primeniti na univerzalni integral na $[0,1]$ počevši od fiksirane semikopule. Ako je $\circledast$ semikopula, najmanji i najveći univerzalni integral na $[0,1]$ i dati su sa:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\circledast}(m,f) &= \sup\{t \circledast m(\{f \geq t\}) \mid t \in [0,1]\}, \\ \mathbf{I}^{\circledast}(m,f) &= ess\sup_{m} f \circledast \sup\{t \circledast m(\{f \geq t\}) \mid t \in (0,1]\}. \end{aligned}$$

Za fiksirinu striktnu t-normu T, odgovarajući univerzalni integral $\mathbf{I}_T$ je Sugeno-Veberov integral [87], dok za opštiju semikopulu T, odgovarajući univerzalni integral $\mathbf{I}_T$ se naziva seminormirani integral i dat je u [82].

U sledećoj teoremi data je jos jedna konstrukcija univerzalnog integrala pomoću kopula.

Teorema 1.14. *Neka je* $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ *kopula i preslikavanje* $\mathbf{K}_C : \mathcal{D}_{[0,1]} \to [0,1]$ *definisano sa*

$$\mathbf{K}_C(m,f) = P_C\left(\left\{(x,y) \in (0,1]^2 \mid y < m(\{f \geq x\})\right\}\right),$$

gde je P_C *mera verovatnoće na* $\mathcal{B}\left([0,1]^2\right)$ *indukovana sa* C, *tj. za svako* $(a,b) \in [0,1]^2$ *imamo* $P_C((0,a] \times (0,b]) = C(a,b)$. *Tada je* $\mathbf{K}_C$ *univerzalni integral na skali* $[0,1]$.

1.3 Pseudo-integral

Pseudo-integral je baziran na $\oplus$-merama u odnosu na odgovarajuće pseudo-operacije ([63, 64]).

1.3.1 Pseudo-sabiranje i pseudo-množenje

Pseudo-sabiranje i pseudo-množenje su uopštene klasične operacije ([63, 64]). Ove pseudo-operacije su definisane na nekom zatvorenom intervalu $[a,b] \subset [-\infty,\infty]$ (ili poluzatvorenom intervalu da bi se izbegli slučajevi $(+\infty)+(-\infty)$ ili $0\cdot(+\infty)$).

Operacija $\oplus$ (pseudo-sabiranje) je funkcija $\oplus : [a,b]\times[a,b] \to [a,b]$ koja je komutativna, neopadajuća (u odnosu na relaciju parcijalnog uređenja $\preceq$), asocijativna i ima nulti elemenat, u oznaci $\mathbf{0}$, tj. za svako $x \in [a,b]$ važi $\mathbf{0}\oplus x = x$.

Neka je $[a,b]_+ = \{x : x \in [a,b], \mathbf{0} \preceq x\}$.

Operacija $\odot$ (pseudo-množenje) je funkcija $\odot : [a,b]\times[a,b] \to [a,b]$ koja je komutativna, pozitivno neopadajuća, tj. $x \preceq y$ implicira $x\odot z \preceq y \odot z$, $z \in [a,b]_+$, asocijativna i sa neutralnim elementom $\mathbf{1} \in [a,b]$, tj. za svako $x \in [a,b], \mathbf{1}\odot x = x$.

Pretpostavićemo da je $\mathbf{0}\odot x = \mathbf{0}$ i da je $\odot$ distributivno pseudo-množenje u odnosu na $\oplus$, tj. $x\odot(y\oplus z) = (x\odot y)\oplus(x\odot z)$. Tada je $([a,b],\oplus,\odot)$ *poluprsten.* Poluprsteni se mogu posmatrati i opštije na nekom parcijalno uređenom (relacijom $\preceq$) skupu P umesto na $[a,b]$.

Na osnovu ovih operacija razvija se pseudo-integralni račun, koji se koristi za rešavanje nelinearnih parcijalnih, običnih diferencijalnih i diferencnih jednačina. Slede primeri poluprstena ([63, 64]).

Posmatramo samo sledeće slučajeve poluprstena kod kojih su obe pseudo-operacije neprekidne (neprekidnost pseudo-množenja $\odot$ može biti narušena eventualno u slučajevima $\mathbf{0}\odot a = a\odot\mathbf{0}$ ili $\mathbf{0}\odot b = b\odot\mathbf{0}$, tj. u tačkama $(\mathbf{0},a)$ i $(a,\mathbf{0})$ ili $(\mathbf{0},b)$ i $(b,\mathbf{0})$) :

Slučaj I: Pseudo-sabiranje je idempotentna operacija dok pseudo-množenje nije.

(a) $x\oplus y = \sup(x,y)$, $\odot$ je proizvoljno neidempotentno pseudo-množenje na intervalu $[a,b]$ kancelativno na $(a,b)^2$. Neutralni elementi operacije $\oplus$ je $\mathbf{0}=a$. Idempotentna operacija sup indukuje totalni poredak na sledeći način: $x\preceq y$ ako i samo ako $\sup(x,y)=y$, tj. uobičajeni poredak. Štaviše, pseudo-množenje $\odot$ je generisano funkcijom $g : [a,b] \to [0,\infty]$ koja je rastuća funkcija i bijekcija, tj. $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$ (ovaj rezultat sledi iz [34], videti i [32]). Tada je $\mathbf{1} = g^{-1}(1)$.

(b) $x \oplus y = \inf(x, y)$, $\odot$ je proizvoljno neidempotentno pseudo-množenje na intervalu $[a, b]$ kancelativno na $(a, b)^2$. Tada je $\mathbf{0} = b$ i idempotentna operacija inf indukuje totalni poredak na sledeći način: $x \preceq y$ ako i samo ako $\inf(x, y) = y$, tj. poredak obrnut uobičajenom. Štaviše, pseudo-množenje $\odot$ je generisano funkcijom $g : [a, b] \to [0, \infty]$ koja je opadajuća funkcija i bijekcija, tj. $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$ (ovaj rezultat sledi iz [34], videti i [32]). Tada je $\mathbf{1} = g^{-1}(1)$.

Slučaj II: Pseudo-operacije su definisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora $g : [a, b] \to [0, \infty]$, tj. pseudo-operacije su date sa

$$x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y)) \quad \text{i} \quad x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)).$$

Ako je nulti element za pseudo-sabiranje a, posmatraćemo rastuće generatore. Tada je $g(a) = 0$ i $g(b) = \infty$. Ako je nulti element za pseudo-sabiranje b, posmatraćemo opadajuće generatore. Tada je $g(b) = 0$ i $g(a) = \infty$.

Kada je generator g rastući (respektivno opadajući), operacija $\oplus$ indukuje uobičajeni poredak (respektivno obrnut poredak uobičajenom) na intervalu $[a, b]$ na sledeći način: $x \preceq y$ ako i samo ako $g(x) \leq g(y)$.

Pseudo-operacije $\oplus$ i $\odot$ u ovom slučaju nazivamo g-sabiranje i g-množenje, a odgovarajući poluprsten g-poluprsten.

Slučaj III: Obe operacije su idempotentne.

(a) $x \oplus y = \sup(x, y)$, $x \odot y = \inf(x, y)$ na intervalu $[a, b]$. Tada je $\mathbf{0} = a$ i $\mathbf{1} = b$. Operacija sup indukuje uobičajeni poredak ($x \preceq y$ ako i samo ako $\sup(x, y) = y$).

(b) $x \oplus y = \inf(x, y)$, $x \odot y = \sup(x, y)$ na intervalu $[a, b]$. Tada je $\mathbf{0} = b$ and $\mathbf{1} = a$. Operacija inf indukuje obrnut poredak uobičajenom ($x \preceq y$ ako i samo ako $\inf(x, y) = y$).

U [51] je pokazano da se poluprsten sa idempotentnim pseudo-sabiranjem ($\oplus = \sup$ ili $\oplus = \inf$) može dobiti kao granična vrednost familije poluprstena sa pseudo-operacijama koje su definisane pomoću generatora.

Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten sa generisanim pseudo-operacijama, tj. $x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y))$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$. Funkcija g^λ (funkcija g na stepen λ), $\lambda \in (0, \infty)$ je generator poluprstena $([a, b], \oplus_\lambda, \odot_\lambda)$, gde je

$$x \oplus_\lambda y = \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(g^\lambda(x) + g^\lambda(y)\right)$$

i

$$x \odot_\lambda y = \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(g^\lambda(x) \cdot g^\lambda(y)\right) = g^{-1}(g(x) \cdot g(y)) = x \odot y,$$

jer je $\left(g^\lambda\right)^{-1}(x) = g^{-1}\left(x^{\frac{1}{\lambda}}\right)$.

Dokaz sledeće teoreme se može naći u [51, 63].

Teorema 1.15. *Neka je $g : [a,b] \to [0,\infty]$ striktno monotono opadajući generator poluprstena $([a,b], \oplus, \odot)$ i g^λ funkcija g na stepen $\lambda \in (0,\infty)$. Tada je g^λ generator poluprstena $([a,b], \oplus_\lambda, \odot)$ i za svako $\varepsilon > 0$ i svaki par $(x,y) \in [a,b]^2$ postoji λ_0 tako da je*

$$|x \oplus_\lambda y - \inf(x,y)| < \varepsilon$$

za sve $\lambda \geq \lambda_0$. Ako je g rastući generator, važi odgovarajući rezultat za $\sup$.

Sada ćemo uvesti pseudo-stepen [5].

Za $x \in [a,b]_+$ i $p \in (0,\infty)$, pseudo-stepen $x_\odot^{(p)}$ se definiše na sledeći način:

$$\text{ako je } p = n \text{ prirodan broj, tada je } x_\odot^{(n)} = \underbrace{x \odot x \odot ... \odot x}_{n-\text{puta}}.$$

Dalje je $x_\odot^{(\frac{1}{n})} = \sup\left\{y \mid y_\odot^{(n)} \leq x\right\}$. Tada je $x_\odot^{(\frac{m}{n})} = x_\odot^{(r)}$ dobro definisano za svaki racionalan broj $r \in (0,\infty)$, nezavisno od predstavljanja $r = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, gde su m, n, m_1, n_1 pozitivni celi brojevi (rezultat sledi iz neprekidnosti i monotonosti $\odot$). S obzirom na neprekidnost pseudo-množenja $\odot$, ako p nije racionalan broj, tada je

$$x_\odot^{(p)} = \sup\left\{x_\odot^{(r)} \mid r \in (0,p),\ r \text{ je racionalan broj}\right\}.$$

Očigledno, ako je $x \odot y = g^{-1}(g(x) \cdot g(y))$, tada je $x_\odot^{(p)} = g^{-1}\left(g^p(x)\right)$. S druge strane, ako je $\odot$ idempotentno, onda je $x_\odot^{(p)} = x$ za svako $x \in [a,b]$ i $p \in (0,\infty)$.

1.3.2 $\oplus$-mera i pseudo-integral

$\oplus$-mera je specijalna neaditivna mera koja je uopštenje klasične mere. Takva mera nam omogućava da definišemo pseudo-integral. U ovoj sekciji su date definicije $\oplus$-mere, pseudo-integrala kao i njegove osnovne osobine([63, 64]).

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten na intervalu $[a,b] \subset [-\infty, +\infty]$. Neka je sa $\mathcal{A}$ obeležena σ-algebra podskupova skupa X.

Definicija 1.10. Skupovna funkcija $m : \mathcal{A} \to [a,b]_+$ je $\oplus$-mera ako važi

i) $m(\emptyset) = \mathbf{0}$ (ako $\oplus$ nije idempotentna),

ii) $(\forall A, B \in \mathcal{A})\,(A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) \oplus m(B))$.
U slučaju kada je $\oplus$ idempotentna, moguće je da m nije definisana na praznom skupu.

Definicija 1.11. $\oplus$-mera m je σ-$\oplus$-mera ako

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} m(A_i)\,, \;\; (\sigma\text{ -}\oplus\text{ -aditivnost})$$

važi za svaki niz $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$, gde je $\bigoplus_{i=1}^{\infty} x_i = \lim\limits_{n\to\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} x_i$.

U slučaju kada je pseudo-sabiranje idempotentna operacija disjunktnost skupova u definicijama 1.10 i 1.11 može biti izostavljena ([64]).

Ako posmatramo slučaj poluprstena II, skupovna funkcija $m : \mathcal{A} \to [a,b]_+$ je σ-$\oplus$-mera ako i samo ako je $g \circ m : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ klasična mera, tj. σ-aditivna mera.

U jednoj od narednih sekcija posmatraćemo specijalne slučajeve $\oplus$-mere.

Maksitivna mera, tj. mera koja zadovoljava

$$(\forall A, B \in \mathcal{A})\,(m(A \cup B) = \max(m(A), m(B)))$$

je kompletna maksitivna mera ili kompletna sup-mera ako za svaku familiju merljivih skupova $\{A_i\}_{i \in I}$ važi

$$m\left(\bigcup_{i \in I} A\right) = \sup_{i \in I} m(A_i)\,.$$

Pretpostavimo dalje da su $([a,b], \oplus)$ i $([a,b], \odot)$ polugrupe koje su kompletne mreže sa poretkom. Kompletna mreža znači da svaki skup $A \subset [a,b]$ ograničen odozgo (odozdo) postoji sup A (inf A). Takođe pretpostavimo da je $[a,b]$ snabdeven metrikom d kompatibilnom sa $\limsup$ i $\liminf$, tj. iz $\limsup x_n = x$ i $\liminf x_n = x$, sledi $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ i koja zadovoljava jedan od sledećih uslova:

(a) $d(x \oplus y, x' \oplus y') \leq d(x, x') + d(y, y')$

(b) $d(x \oplus y, x' \oplus y') \leq \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$.

Iz uslova (a) i (b) sledi:

$$d(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow d(x_n \odot z, y_n \odot z) \to 0.$$

Takođe ćemo pretpostaviti monotonost metrike d, tj.

$$x \preceq z \preceq y \quad \Rightarrow \quad d(x,y) \geq \max\{d(y,z), d(x,z)\}$$

Neka su f, $h : X \to [a,b]$ funkcije. Tada za svako $x \in X$ i $\lambda \in [a,b]$ definišemo: $(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x)$, $(f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x)$ i $(\lambda \odot f)(x) = \lambda \odot f(x)$.

Definicija 1.12. Neka je ε pozitivan realan broj i $B \subset [a,b]$. Podskup $\{l_i^\varepsilon\}$ od B je ε-mreža ako za svako $x \in B$ postoji l_i^ε takav da $d(l_i^\varepsilon, x) \leq \varepsilon$. Ako imamo $l_i^\varepsilon \leq x$, onda ćemo $\{l_i^\varepsilon\}$ zvati opadajuća ε-mreža. Ako važi $l_i^\varepsilon \preceq l_{i+1}^\varepsilon$, onda je $\{l_i^\varepsilon\}$ monotona ε-mreža.

Definicija 1.13. Preslikavanje

$$\chi_A(x) = \begin{cases} \mathbf{0}, & x \notin A \\ \mathbf{1}, & x \in A \end{cases},$$

se naziva pseudo-karakteristična funkcija. Preslikavanje $e : X \to [a,b]$ je elementarna (merljiva) funkcija ako ima sledeću reprezentaciju

$$e = \bigoplus_{i=1}^{\infty} a_i \odot \chi_{A_i}, \ a_i \in [a,b]$$

i $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$ su po parovima disjunktni skupovi ako $\oplus$ nije idempotentna.

Funkcija $f : X \to [a,b]$ je merljiva od dole ako za svako $c \in [a,b]$ skupovi $\{x \mid f(x) \leq c\}$ i $\{x \mid f(x) < c\}$ pripadaju $\mathcal{A}$. Funkcija f je merljiva ako je merljiva od dole i skupovi $\{x \mid f(x) \geq c\}$ i $\{x \mid f(x) > c\}$ pripadaju $\mathcal{A}$.

Teorema 1.16. *Neka je $f : X \to [a,b]$ merljiva od dole funkcija ako je pseudo-sabiranje idempotentno, ili je f merljiva i za svaki pozitivan realan broj ε postoji monotona ε-mreža u $f(X)$. Onda postoji niz (φ_n) elementarnih funkcija takvih da, za svako $x \in X$,*

$$d(\varphi_n(x), f(x)) \to 0 \textit{ uniformno kad } n \to \infty.$$

Definicija 1.14. Neka je m σ-$\oplus$-mera.

i) Integral jednostavne funkcije $s = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \chi_{A_i}$ za $a_i \in [a,b]$ sa disjunktnim supovima $A_1, A_2, ..., A_n$, ako $\oplus$ nije idempotentna, je definisian sa
$$\int_X^{\oplus} s \odot dm = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot m\left(A_i\right).$$

ii) Integral merljive (odozdo za $\oplus$ idempotentnu) funkcije $f : X \to [a,b]$, za koju, ako $\oplus$ nije idempotentna, za svako $\varepsilon > 0$, postoji monotona ε-mreža u $f(X)$, je definisan sa
$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \varphi_n(x) \odot dm, \tag{1.5}$$
gde je (φ_n) niz jednostavnih funkcija konstruisanih u prethodnoj teoremi.

Teorema 1.17. *Integral definisan sa (1.5) ne zavisi od izbora niza* (φ_n).

Pseudo-integral nad skupom A, kad je A proizvoljan podskup skupa X, je dat sa
$$\int_A^{\oplus} f \odot dm = \int_X^{\oplus} (\chi_A \odot f) \odot dm.$$

U narednim teoremama su date osnovne osobine pseudo-integrala.

Teorema 1.18. *Neka su operacije $\oplus$ i $\odot$ neprekidne i $\oplus$ beskonačno komutativna i asocijativna operacija. Tada važe osobine:*

i) $\displaystyle\int_X^{\oplus} (f_1 \oplus f_2) \odot dm = \int_X^{\oplus} f_1 \odot dm \oplus \int_X^{\oplus} f_2 \odot dm,$

ii) $\displaystyle\int_X^{\oplus} (c \odot f_1) \odot dm = c \odot \int_X^{\oplus} f_1 \odot dm \quad \text{za } c \in [a,b].$

Teorema 1.19. *Neka su X_1 i X_2 neprazni disjunktni podskupovi od X, takvi da $X_1, X_2 \in \mathcal{A}$. Tada važi*
$$\int_{X_1 \cup X_2}^{\oplus} f \odot dm = \int_{X_1}^{\oplus} f \odot dm \oplus \int_{X_2}^{\oplus} f \odot dm.$$

Teorema 1.20. *Ako je* $f_1 \preceq f_2$, *tada je* $\int_X^{\oplus} f_1 \odot dm \preceq \int_X^{\oplus} f_2 \odot dm.$

U narednim sekcijama posmatraćemo tri različita slučaja poluprstena $([a,b], \oplus, \odot)$, naime I(a), II i III(a). Slučajevi I(b) i III(b) su dualno povezani sa slučajevima I(a) i III(a).

Prvi slučaj je kad su pseudo-operacije definisane pomoću generatora g, tj. monotone i neprekidne funkcije $g : [a,b] \to [0,\infty]$, slučaj II iz sekcije 1.3.1. Pseudo-integral merljive funkcije $f : X \to [a,b]$ tada ima oblik

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = g^{-1}\left(\int_X (g \circ f)\, d\,(g \circ m)\right), \tag{1.6}$$

gde je integral sa desne strane jednakosti Lebegov integral. U specijalnom slučaju, kad je $X = [c,d]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ i $m = g^{-1} \circ \lambda$, gde je λ Lebegova mera na $[c,d]$, koristimo notaciju

$$g^{-1}\left(\int_c^d f(x)\, dx\right) = \int_X^{\oplus} f \odot dm.$$

Odnosno (1.6) ima sledeći oblik

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f(x)\, dx = g^{-1}\left(\int_c^d g(f(x))\, dx\right),$$

tj. dobijamo $g-$integral, videti [60, 61].

Sledeći slučajevi su kad je poluprsten tipa $([a,b], \sup, \odot)$, odnosno slučajevi I(a) i III(a) iz sekcije 1.3.1. Posmatraćemo kompletno maksitivnu meru m i $\mathcal{A} = 2^X$. Ako je X prebrojiv (specijalno, ako je X konačan), tada je svaka σ-sup-mera m kompletna i $m(A) = \sup_{x \in A} \psi(x)$, gde je $\psi : X \to [a,b]$ funkcija gustine data sa $\psi(x) = m(\{x\})$. Tada pseudo-integral funkcije $f : X \to [a,b]$ ima sledeći oblik

$$\int_X^{\oplus} f \odot dm = \sup_{x \in X} \left(f(x) \odot \psi(x)\right).$$

1.3.3 Idempotentni integral kao granica g-integrala

Svaka sup-mera koja je esencijalni supremum neprekidne funkcije gustine se može dobiti kao granična vrednost $\oplus$-mera u odnosu na pseudo-sabiranje koje je definisano pomoću generatora ([51]).

Neka je μ Lebegova mera na $\mathbb{R}$ i

$$m(A) = \underset{\mu}{ess\sup}\,(x \mid x \in A) = \sup\{a \mid \mu(\{x \mid x \in A,\ x > a\}) > 0\}.$$

Sledeće teoreme su dokazane u [51].

Teorema 1.21. *Neka je m sup-mera na $([0,\infty], \mathcal{B}([0,\infty]))$, gde je $\mathcal{B}([0,\infty])$ Borelova σ-algebra na $[0,\infty]$, $m(A) = \underset{\mu}{ess\sup}\,(\psi(x) \mid x \in A)$ i $\psi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ neprekidna funkcija gustine. Tada za svako pseudo-sabiranje $\oplus$ sa generatorom g postoji familija $\{m_\lambda\}$ $\oplus_\lambda$-mera na $([0,\infty), \mathcal{B})$, gde je $\oplus_\lambda$ generisano sa g^λ, $\lambda \in (0,\infty)$, tako da je $\lim\limits_{\lambda\to\infty} m_\lambda = m$.*

Za svaku neprekidnu funkciju $f : [0,\infty] \to [0,\infty]$ pseudo-integral $\displaystyle\int^{\oplus} f \odot dm$ se može dobiti kao granica g-integrala, [51].

Teorema 1.22. *Neka je $([0,\infty], \sup, \odot)$ poluprsten i $\odot$ pseudo-množenje generisano rastućim generatorom g, tj. $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$ za svako $x, y \in [0,\infty]$. Neka m ispunjava uslove teoreme 1.21. Tada postoji familija $\{m_\lambda\}$ $\oplus_\lambda$-mera gde je $\oplus_\lambda$ i generisano funkcijom g^λ, $\lambda \in (0,\infty)$, tako da za svaku neprekidnu funkciju $f : [0,\infty] \to [0,\infty]$ važi*

$$\begin{aligned} \int^{\sup} f \odot dm &= \lim_{\lambda\to\infty} \int^{\oplus_\lambda} f \odot dm_\lambda \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(\int g^\lambda (f(x))\, dx\right). \end{aligned}$$

Analogno, odgovarajući integrali u odnosu na inf-meru se mogu takođe dobiti kao granica familije g-integrala ([51]).

1.3.4 Pseudo-verovatnoća

Motivisani rezultatima iz [17] posmatramo uopštenje klasične teorije verovatnoće bazirano na $\oplus$-meri i pseudo-integralima. Naime, pseudo-verovatnoća je specijalan slučaj $\oplus$-mere. U ovoj sekciji date su definicije pseudo-verovatnoće, pseudo-promenljive, funkcije raspodele, gustine i pseudo-očekivanja iz [53].

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten, gde je $[a,b] \subset [-\infty, +\infty]$ i Ω neprazan skup.

Definicija 1.15. Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra podskupova skupa Ω. Skupovna funkcija $\boldsymbol{P} : \mathcal{A} \to [a,b]$ je pseudo-verovatnoća ako važi

i) $\boldsymbol{P}(\emptyset) = \mathbf{0}$,

ii) $\boldsymbol{P}(\Omega) = \mathbf{1}$,

iii) $\boldsymbol{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(A_i)$, važi za svaki niz $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$.

U slučaju kada je pseudo-sabiranje idempotentna operacija disjunktnost skupova može biti izostavljena.

Trojka $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ se naziva prostor pseudo-verovatnoće.

Ako posmatramo II slučaj poluprstena, pseudo-verovatnoća je $\boldsymbol{P}(A) = g^{-1}(P(A))$ gde je P verovatnoća. U tom slučaju pseudo-verovatnoća je deformisana verovatnoća ([23]).

Definicija 1.16. Funkcija $Y : \Omega \to [a, b]$ je pseudo-slučajna promenljiva ako je

$$Y^{-1}((\cdot, x)) = \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \prec x\} = \{Y \prec x\} \in \mathcal{A},$$

za svako $x \in [a, b]$.

Definicija 1.17. Funkcija F_Y definisana sa:

$$F_Y(x) = \boldsymbol{P}(\{Y \prec x\})$$

je funkcija raspodele pseudo-slučajne promenljive Y.

Neka je $\sigma([a, b])$ minimalna σ-algebra koja sadrži otvorene lopte iz separabilnog metričkog prostora $([a, b], d)$ gde je d kompatibilna metrika sa $\oplus$ i $\odot$, m σ-$\oplus$-mera definisana na prostoru sa σ-algebrom $([a, b], \sigma([a, b]))$ ([53]).

Definicija 1.18. Ako postoji merljiva funkcija $\phi_Y : [a, b] \to [a, b]$ takva da važi

$$F_Y(x) = \int_{(\cdot, x)}^{\oplus} \phi_Y \odot dm,$$

tada je ϕ_Y gustina za Y.

Definicija 1.19. Pseudo-očekivanje pseudo-slučajne promenljive Y je definisano sa:

$$\boldsymbol{E}(Y) = \int_{[a,b]}^{\oplus} x \odot \phi_Y(x) \odot dm.$$

Glava 2

Integralne nejednakosti za Šokeov, Sugenov i univerzalni integral

Klasične integralne nejednakosti imaju važnu ulogu ne samo u matematičkoj analizi, već i u drugim oblastima matematike, pre svega u teoriji verovatnoće. U sekciji 2.1 date su nejednakosti za Lebegov integral koje će kasnije biti uopštene za integrale bazirane na neaditivnim merama. U narednim sekcijama dati su rezultati iz [2, 4, 9, 29, 30, 31, 71, 84]. Jensenov tip nejednakosti za Sugenov i Šokeov integral, dokazan u [71, 84], dat je u sekciji 2.2. Nejednakost Čebiševa za Sugenov ([29, 30]) i Šokeov integral ([84]), navedena je u sekciji 2.3. Šokeov integral baziran na submodularnoj fazi meri takođe zadovoljava Holderovu nejednakost, dok je ta nejednakost oslabljena u slučaju kad fazi mera nije submodularna ([84]). Pregled ovih rezulata dat je u sekciji 2.4. U sekciji 2.5 navedene su nejednakosti Minkovskog iz [84] za Šokeov i iz [2, 9] za Sugenov integral. Uopštena nejednakost Stolarskog za Sugenov integral, dokazana u [31], data je u sekciji 2.6. Razni tipovi konvergencija i teoreme konvergencija, čiji su dokazi bazirani na nejednakostima za Šokeov integral ([84]), dati su u sekciji 2.7. Zatim, u sekciji 2.8 navedeni su originalni rezultati iz [4] vezani za uopštenje Bervaldove nejednakosti za Sugenov integral. Dat je primer koji pokazuje da u opštem slučaju ne važi Bervaldova nejednakost za Sugenov integral, a zatim je posmatrano pod kojim uslovima je ta nejednakost zadovoljena.

2.1 Klasične integralne nejednakosti za Lebegov integral

Jedna od integralnih nejednakosti vezana za konveksne funkcije je Jensenova nejednakost (Jensen's inequality). Sledeća teorema važi u klasičnoj analizi ([75]).

Teorema 2.1. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{M})$ *prostor sa* σ*-algebrom i* μ *mera na* $\mathcal{M}$ *takva da je* $\mu(\Omega) = 1$. *Neka je* h *realna funkcija koja pripada* $L^1(\mu)$, $a < h(x) < b$ *za svako* $x \in X$. *Ako je* φ *konveksna funkcija na* (a, b), *tada vazi*

$$\varphi\left(\int_\Omega h d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ h)\, d\mu. \tag{2.1}$$

Klasična Jensenova nejednakost ima svoju ulogu u mnogim teorijskim i praktičnim poljima. Ona omogućava razumevanje i predviđanje varijacija u dinamičkim sistemima u smislu klasičnog očekivanja ([46]). U teoriji verovatnoće važi sledeća teorema ([17]).

Teorema 2.2. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{M}, P)$ *prostor verovatnoće i* φ *konveksna funkcija na skupu vrednosti slučajne promenljive* Y. *Ako slučajne promenljive* Y *i* $\varphi(Y)$ *imaju matematičko očekivanje, tada važi:*

$$\varphi(E(Y)) \leq E(\varphi(Y)).$$

Posmatraćemo dve nejednakosti poznate kao nejednakosti Čebiševa (Chebyshev's inequality). Prva nejednakost je poznata i pod nazivom nejednakost Bijenemea-Čebiševa (Bienaymé-Chebyshev inequality) i ima primenu u teoriji mere i teoriji verovatnoće. U teoriji verovatnoće se primenom ove nejednakosti dokazuje zakon velikih brojeva, kao i upoređivanje različitih vrsta konvergencija niza slučajnih promenljivih ([17]).

Teorema 2.3. *Neka je* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *merljiv prostor i* $f : X \to [0, \infty]$ *merljiva funkcija. Ako je* g *merljiva i neopadajuća funkcija na skupu vrednosti funkcije* f, *sa vrednostima u* $[0, \infty]$, *tada za svako* $t > 0$ *važi nejednakost*

$$\mu(\{x \in X \mid f(x) \geq t\}) \leq \frac{1}{g(t)} \int_X (g \circ f)\, d\mu.$$

Druga nejednakost Čebiševa se u literaturi naziva nejednakost Čebiševa za monotone funkcije kao i nejednakost kovarijanse (covariance inequality). Ova nejednakost ima široku primenu u primenjenoj matematici i to najviše u ekonomiji, finansijama i teoriji odlučivanja (videti [78, 85]). Važi sledeća teorema ([18]).

Teorema 2.4. *Neka su f i g nenegativne merljive funkcije na $[a, b]$ koje su obe rastuće ili obe opadajuće. Tada važi nejednakost:*

$$\int_a^b f d\mu \cdot \int_a^b g d\mu \leq \int_a^b d\mu \cdot \int_a^b f g d\mu, \tag{2.2}$$

gde je μ mera na $\mathbb{R}$.

Prethodna nejednakost se može primeniti u teoriji verovatnoće na sledeći način ([83, 85]).

Teorema 2.5. *Ako je Y slučajna promenljiva i f, g funkcije koje su obe rastuće ili obe opadajuće, tada važi nejednakost*

$$E\left(f\left(Y\right)\right) E\left(g\left(Y\right)\right) \leq E\left(f\left(Y\right) g\left(Y\right)\right). \tag{2.3}$$

Sledeće nejednakosti, čija ćemo uopštenja za integrale bazirane na neaditivnim merama kasnije posmatrati, su nejednakosti Holdera i Minkovskog. Pojam konjugovanih eksponenata je vezan za Holderovu nejednakost.

Definicija 2.1. Ako su p i q pozitivni brojevi takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada su p i q par konjugovanih eksponenata.

Nejednakosti Holdera i Minkovskog su date u sledećoj teoremi ([75]).

Teorema 2.6. *Neka su p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$ i neka je $(X, \mathcal{M}, \mu)$ merljiv prostor. Ako su f i g merljive funkcije na X sa vrednostima u $[0, \infty]$, tada važi*

i) Holderova nejednakost (Hölder's inequality)

$$\int_X f g d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.4}$$

ii) nejednakost Minkovskog (Minkowski's inequality)

$$\left(\int_X (f+g)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.5}$$

U klasičnoj teoriji mere prlikom pokazivanja osobina L^p prostora primenjuju se Holderova i Minkovskog nejednakost. Takođe se mogu primeniti i u teoriji verovatnoće gde dobijamo nejednakosti vezane za matematička očekivanja slučajnih promenljivih ([17]), tj.

$$E\left(|YZ|\right) \leq \left[E\left(|Y|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \left[E\left(|Z|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{2.6}$$

$$\left[E\left(|Y+Z|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[E\left(|Y|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[E\left(|Z|^p\right)\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{2.7}$$

gde su p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$, a Y i Z slučajne promenljive.

Sledeća nejednakost se naziva Bervaldova nejednakost (Berwald's inequality) (videti [69]). Ova nejednakost ima primenu u teoriji informacija.

Teorema 2.7. *Ako je f nenegativna konkavna funkcija na $[a,b]$, tada važi*

$$\frac{(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}} \left(\frac{\int_a^b f^s(x)\,dx}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\frac{\int_a^b f^r(x)\,dx}{b-a}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{2.8}$$

za $0 < r < s < \infty$.

Nejednakost Stolarskog (Stolarsky's inequality) ima interesantne primene na nejednakosti za Gama funkcije (videti [80]). U [40] dokazan je uopšteni tip nejednakosti Stolarskog baziran na nejednakosti Čebiševa. Naredna teorema je klasična integralna nejednakost Stolarskog ([80]).

Teorema 2.8. *Ako je $g : [0,1] \to [0,1]$ nerastuća funkcija, tada za svako a, $b > 0$ važi nejednakost*

$$\int_0^1 g\left(x^{\frac{1}{a+b}}\right) dx \geq \int_0^1 g\left(x^{\frac{1}{a}}\right) dx \int_0^1 g\left(x^{\frac{1}{b}}\right) dx.$$

2.2 Jensenova nejednakost za Sugenov i Šokeov integral

Zbog svoje primene u mnogim oblastima jedna od prvih nejednakosti koja je proučavana i uopštena za integrale bazirane na neaditivnim merama je Jensenova nejednakost. Klasična nejednakost (2.1) ne važi u opštem slučaju za Sugenov i Šokeov integral, te je u [71, 84] pokazano pod kojim dodatnim uslovima je ova nejedankost ispunjena.

Jensenova nejednakost za Sugenov integral pokazana je u radu [71]. Slede teoreme iz [71].

Neka je μ fazi mera na X takva da je $\mu(X) < \infty$.

Teorema 2.9. *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *fazi merljiv prostor, funkcija* $f : X \to [0, \infty]$ *merljiva i takva da* $(s) \int f d\mu = p$. *Ako je* $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *rastuća funkcija takava da je* $\Phi(x) \leq x$ *za svako* $x \in [0, p]$, *tada važi:*

$$\Phi\left((s) \int f d\mu\right) \leq (s) \int \Phi(f)\, d\mu.$$

Teorema 2.10. *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *fazi merljiv prostor i* $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *rastuća funkcija takava da je* $\Phi(x) \leq x$ *za svako* $x \in [0, \mu(X)]$, *tada važi:*

$$\Phi\left((s) \int f d\mu\right) \leq (s) \int \Phi(f)\, d\mu$$

za svaku merljivu funkciju $f : X \to [0, \infty]$.

Jensenova nejednakost za Šokeov integral pokazana je u [84].

Teorema 2.11. *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *fazi merljiv prostor i* f *funkcija takva da je* $(c) \int f d\mu < \infty$. *Ako je* μ *fazi mera takva da je* $\mu(X) = 1$ *i* $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *konveksna funkcija, tada važi:*

$$\Phi\left((c) \int f d\mu\right) \leq (c) \int \Phi(f)\, d\mu.$$

2.3 Nejednakost Čebiševa za Sugenov i Šokeov integral

Nejednakost Čebiševa koja ima veliku primenu u teoriji verovatnoće važi i za Sugenov integral, tj. važi sledeća teorema iz [30].

Teorema 2.12. *Neka je* $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ *fazi mera,* $g : [0, \infty] \to (0, \infty]$ *neopadajuća funkcija i* $t > 0$. *Tada za svako* $A \in \mathcal{A}$ *važi*

$$g(t) \wedge \mu(\{x \in A \mid f(x) \geq t\}) \leq (s) \int_A g \circ f d\mu.$$

U sledećoj teoremi data je prethodna nejednakost za Šokeov integral, koja je dokazana u [84].

Teorema 2.13. *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *fazi merljiv prostor i* f *realno-vrednostna nenegativna merljiva funkcija definisana na* X. *Ako je* $g : [0, \infty] \to (0, \infty]$ *neopadajuća funkcija, tada važi nejednakost*

$$\mu(A \cap \{x \in X \mid f(x) \geq t\}) \leq \frac{1}{g(t)} (c) \int_A g \circ f d\mu$$

za svako $A \in \mathcal{A}$.

Ako je u prethodnim teoremama funkcija g indentičko preslikavanje, nejednakost Čebiševa se svodi na nejednakost Markova. Nejednakost Markova za Sugenov integral posmatrana je u [30].

Generalizacija nejednakosti Čebiševa za monotone funkcije za Sugenov integral pokazana je u [29].

Teorema 2.14. *Neka su f, $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ funkcije i μ fazi mera takva da je $(s)\int_{[0,a]} f d\mu \le 1$ i $(s)\int_{[0,a]} g d\mu \le 1$. Ako su f, g obe rasuće ili obe opadajuće funkcije, tada važi*

$$\left((s)\int_{[0,a]} f d\mu\right)\left((s)\int_{[0,a]} g d\mu\right) \le (s)\int_{[0,a]} fg d\mu.$$

U radu [29] je dokazana sledeća teorema koja je takođe uopštenje nejednakosti Čebiševa.

Teorema 2.15. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fazi merljiv prostor i neka su funkcije f i g nenegativne merljive funkcije takve da su integrali $(s)\int_A f d\mu$ i $(s)\int_A g d\mu$ konačni. Neka je $\star : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ neprekidna i neopadajuća po oba argumenta i ograničena od gore minimumom. Ako su f i g komonotone funkcije, tada važi nejednakost*

$$\left((s)\int_A f d\mu\right) \star \left((s)\int_A g d\mu\right) \le (s)\int_A f \star g d\mu.$$

2.4 Holderova nejednakost za Šokeov integral

U radu [84] pokazana su sledeća dva tipa Holderove nejednakosti.

Teorema 2.16. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fazi merljiv prostor i neka su funkcije f i g realno-vrednostne nenegativne merljive funkcije definisane na X. Ako je μ submodularna fazi mera, p i q konjugovani eksponeneti i $1 < p < \infty$, tada važi:*

$$(c)\int_X fg d\mu \le \left((c)\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left((c)\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ako izostavimo pretpostavku da je μ submodularna fazi mera, važi sledeći oblik Holderove nejednakosti.

Teorema 2.17. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fazi merljiv prostor i neka su funkcije f i g realno-vrednostne nenegativne merljive funkcije definisane na X. Ako su p i q konjugovani eksponeneti, $1 < p < \infty$, tada važi:*

$$(c)\int_X fg d\mu \le 2\left((c)\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left((c)\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sledi posledica teoreme 2.16.

Posledica 2.18. *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *fazi merljiv prostor i neka su funkcije* f *i* g *realno-vrednostne nenegativne merljive funkcije definisane na* X*. Ako je* μ *submodularna fazi mera,* $1 < p,\ q,\ r < \infty$ *i* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$*, tada*

$$\left((c)\int_X (fg)^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left((c)\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left((c)\int_X g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2.5 Nejednakost Minkovskog za Šokeov i Sugenov integral

Jedna od nejednakosti dokazana u radu [84] je nejednakost Minkovskog za Šokeov integral.

Teorema 2.19. *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *fazi merljiv prostor i neka su funkcije* f *i* g *realno-vrednostne nenegativne merljive funkcije definisane na* X*. Ako je* μ *submodularna fazi mera i* $1 \leq p < \infty$*, tada važi:*

$$\left((c)\int_X (f+g)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left((c)\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left((c)\int_X g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nejednakost Minkovskog za Sugenov integral posmatrana je u [2, 9]. U [9] dokazana je klasična nejednakost Minkovskog za Sugenov integral monotone funkcije baziran na proizvoljnoj fazi meri.

Teorema 2.20. *Neka je* μ *fazi mera na* $[0, a]$ *i* $f, g : [0, a] \to [0, \infty]$ *realne merljive funkcije takve da je* $(s)\int_{[0,a]} (f+g)^p \, d\mu \leq 1$*. Ako su* f, g *obe neopadajuće ili obe nerastuće funkcije, tada važi:*

$$\left((s)\int_{[0,a]} (f+g)^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left((s)\int_{[0,a]} f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left((s)\int_{[0,a]} g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

za sve $1 \leq p < \infty$.

Opštija nejednakost za Sugenov integral dokazana je u [2] gde je operacija sabiranja zamenjena sa neprekidnom, neopadajućom i ograničenom od dole maksimumom operacijom $\star$ (tj. $\max(x, y) \leq x \star y$ za svako $x, y \in [0, \infty)$).

Teorema 2.21. *Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fazi merljiv prostor i neka je $\star : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ neprekidna i neopadajuća po oba argumenta i ograničena od dole maksimumom. Neka su funkcije f i g nenegativne merljive funkcije takve da je $(s)\int_A (f \star g)\, d\mu$ konačan. Ako su f i g komonotone, tada važi nejednakost*

$$\left((s)\int_A (f\star g)^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left((s)\int_A f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \star \left((s)\int_A g^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

za sve $1 < p < \infty$.

2.6 Nejednakost Stolarskog za Sugenov integral

U radu [31] pokazana su dva slučaja nejednakosti Stolarskog. U prvom slučaju je podintegralna funkcija opadajuća dok je u drugom rastuća. Naime, važi sledeća teorema.

Teorema 2.22. *Neka je $a, b > 0$. Ako je $f : [0,1] \to [0,1]$ neprekidna i strogo opadajuća (rastuća) funkcija i μ Lebegova mera na $\mathbb{R}$, tada važi nejednakost*

$$\left((s)\int_{[0,1]} f\left(x^{\frac{1}{a}}\right) d\mu\right)\left((s)\int_{[0,1]} f\left(x^{\frac{1}{b}}\right) d\mu\right) \le (s)\int_{[0,1]} f\left(x^{\frac{1}{a+b}}\right) d\mu.$$

2.7 Teoreme konvergencija za Šokeov integral

Pored nejednakosti Jenesena, Čebiševa, Holdera i Minkovskog u [84] proučavani su i razni tipovi konvergencija za Šokeov integral, što je ujedno i primena pomenutih nejednakosti. U ovoj sekciji dat je pregled definicija i rezultata iz [84].

Neka je u definicijama i teoremama u ovoj sekciji $(X, \mathcal{A}, \mu)$ fazi merljiv prostor, $\{f_n\}$ niz merljivih funkcija, $f_n : X \to [0,\infty)$ i $f : X \to [0,\infty)$ takođe merljiva funkcija.

Sledeća definicija je proširenje konvergencije u srednjem, konvergencije u meri, fundamentalne konvergencije u srednjem i fundamentalne konvergencije u meri.

Definicija 2.2. i) Niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p ($p > 0$) ka funkciji f ako

$$\lim_{n\to\infty} (c)\int |f_n - f|^p\, d\mu = 0.$$

ii) Niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p $(p > 0)$ ako

$$\lim_{n,m\to\infty} (c)\int |f_n - f_m|^p \, d\mu = 0.$$

iii) Niz $\{f_n\}$ konvergira u meri μ reda p $(p > 0)$ ka funkciji f na A ako

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A \cap \{x \mid |f_n - f|^p \geq \varepsilon\}\right) = \mathbf{0}$$

za svako $\varepsilon > 0$. Ako je $A = X$, onda se kaže da niz $\{f_n\}$ konvergira u meri μ reda p $(p > 0)$ ka funkciji f.

iv) Niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u meri μ reda p $(p > 0)$ na A ako

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu\left(A \cap \{x \mid |f_n - f_m|^p \geq \varepsilon\}\right) = \mathbf{0}$$

za svako $\varepsilon > 0$. Ako je $A = X$, onda se kaže da niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u meri μ reda p $(p > 0)$.

U sledećim teoremama data je veza između prethodno definisanih vrsta konvergencija ([84]).

Teorema 2.23. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p, onda on konvergira u meri μ reda p.*

Teorema 2.24. *Ako niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p, onda on fundamentalno konvergira u meri μ reda p.*

Teorema 2.25. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p i μ je submodularna fazi mera, onda on fundamentalno konvergira u meri μ reda p.*

Holderov i Minkovskog tip nejednakosti (teoreme 2.17 i 2.19) se primenjuju u dokazu sledećih dveju teorema ([84]).

Teorema 2.26. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p, $0 < p' < p$, tada niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu $p\prime$. Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p i μ je submodularna fazi mera, tada*

$$\lim_{n\to\infty} (c)\int {f_n}^p d\mu = (c)\int f^p d\mu.$$

2.8 Bervaldova nejednakost za Sugenov integral

U ovoj sekciji dati su originalni rezultati iz [4]. Pokazano je da u opštem slučaju ne važi Bervaldova nejednakost (2.8) za Sugenov integral, a zatim posmatrano pod kojim dodatnim uslovima je ta nejednakost zadovoljena.

Koristimo oznaku $(s)\int_{[a,b]} f dm = (s)\int_a^b f dm$.

Sledeći primer pokazuje da u opštem slučaju Bervaldova nejednakost (2.8) ne važi za Sugenov integral.

Primer 2.1. Neka je $f(x) = \sqrt{x}$ dok $x \in [0,1]$. Funkcija f jeste nenegativna konkavna funkcija. Neka je $r = \frac{1}{3}$, $s = \frac{1}{2}$ i m Lebegova mera. Tada imamo

$$\begin{aligned}(s)\int_0^1 f^{\frac{1}{3}} dm &= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \left[\alpha \wedge m\left([0,1] \cap \left\{\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}} \geq \alpha\right\}\right)\right] \\ &= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \left[\alpha \wedge \left(1-\alpha^6\right)\right] \\ &= 0.778.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s)\int_0^1 f^{\frac{1}{2}} dm &= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \left[\alpha \wedge m\left([0,1] \cap \left\{\left(\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha\right\}\right)\right] \\ &= \sup_{\alpha\in[0,\infty]} \left[\alpha \wedge \left(1-\alpha^4\right)\right] \\ &= 0.724.\end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned}\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3}\left((s)\int_0^1 f^{\frac{1}{2}} dm\right)^2 &= 0.49756 \\ \left((s)\int_0^1 f^{\frac{1}{3}} dm\right)^3 &= 0.47091.\end{aligned}$$

Odakle se vidi da ne važi nejednakost (2.8), tj.

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3}\left((s)\int_0^1 f^{\frac{1}{2}} dm\right)^2 > \left((s)\int_0^1 f^{\frac{1}{3}} dm\right)^3.$$

Važi sledeća teorema.

Teorema 2.27. *Neka je $0 < r < s < \infty$, $f : [a,b] \to [0,\infty)$ konkavna funkcija i m Lebegova mera na $\mathbb{R}$. Tada*

(a) ako je $f(a) < f(b)$, tada

$$\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\geq \min\left\{\begin{array}{c} \frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{(s)\int_a^b f^s dm}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ \left(b - \frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{(s)\int_a^b f^s dm}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}} + af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)}\right)^{\frac{1}{r}} \end{array}\right\},$$

(b) ako je $f(a) = f(b)$, tada

$$\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \geq \min\left\{f(a), (b-a)^{\frac{1}{r}}\right\},$$

(c) ako je $f(a) > f(b)$, tada

$$\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\geq \min\left\{\begin{array}{c} \frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{(s)\int_a^b f^s dm}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ \left(\frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{(s)\int_a^b f^s dm}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}} + af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)} - a\right)^{\frac{1}{r}} \end{array}\right\}.$$

Dokaz. Neka je $0 < r < s < \infty$ i $(s)\int_a^b f^s dm = t$. Kako je $f : [a,b] \to [0,\infty)$ konkavna funkcija, za $x \in [a,b]$ imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)a + \frac{x-a}{b-a}b\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = h(x). \end{aligned}$$

(a) Ako je $f(a) < f(b)$, tada

$$
\begin{aligned}
&\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\geq \left((s)\int_a^b h^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\left[\alpha\wedge m\left([a,b]\cap\left\{\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\geq\alpha^{\frac{1}{r}}\right\}\right)\right]\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\left[\alpha\wedge m\left([a,b]\cap\left\{x\mid x\geq\frac{\alpha^{\frac{1}{r}}(b-a)+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}\right\}\right)\right]\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\geq \left[\min\left\{\begin{array}{c}\frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ \\ m\left([a,b]\cap\left\{x\mid x\geq\frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}\right\}\right)\end{array}\right\}\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \min\left\{\begin{array}{c}\frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ \\ \left(b-\frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right\}.
\end{aligned}
$$

(b) Ako je $f(a) = f(b)$, tada je $h(x) = f(a)$. Kao posledicu osobina Sugenovog integrala (S3) i (S4) (sekcija 1.1.2) imamo

$$
\begin{aligned}
\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}} &\geq \left((s)\int_a^b h^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\geq \left((s)\int_a^b f^r(a)\,dm\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[f^r(a)\wedge(b-a)\right]^{\frac{1}{r}}. \\
&= f(a)\wedge(b-a)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}
$$

(c) Ako je $f(a) > f(b)$, tada

$$\begin{aligned}
&\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\geq \left((s)\int_a^b h^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\left[\alpha\wedge m\left([0,\infty]\cap\left\{\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\geq\alpha^{\frac{1}{r}}\right\}\right)\right]\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \left[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\left[\alpha\wedge m\left([a,b]\cap\left\{x\mid x\leq\frac{\alpha^{\frac{1}{r}}(b-a)+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}\right\}\right)\right]\right]^{\frac{1}{r}} \\
&\geq \left[\min\left\{\begin{array}{c}\frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ m\left([a,b]\cap\left\{x\mid x\leq\frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}\right\}\right)\end{array}\right\}\right]^{\frac{1}{r}} \\
&= \min\left\{\begin{array}{c}\frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ \left(\frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}-a\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right\}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Primer 2.2. Neka je $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in [0,2]$, $r = 1$, $s = 2$ i m Lebegova mera. Tada imamo

$$\begin{aligned}
(s)\int_0^2 f dm &= \sup_{\alpha\in[0,\infty]}[\alpha\wedge m([0,2]\cap\{\ln(1+x)\geq\alpha\})] \\
&= \sup_{\alpha\in[0,\infty]}[\alpha\wedge(3-e^{\alpha})] \\
&= 0.79206,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(s)\int_0^2 f^2 dm &= \sup_{\alpha\in[0,\infty]}\left[\alpha\wedge m\left([0,2]\cap\left\{\ln^2(1+x)\geq\alpha\right\}\right)\right]\\ &= \sup_{\alpha\in[0,\infty]}\left[\alpha\wedge\left(3-e^{\sqrt{\alpha}}\right)\right]\\ &= 0.69637,\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{2^2(1+2)^{\frac{1}{2}}}{(1+1)}\left(\frac{(s)\int_0^2 f^2dm}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-2f(0)}{f(2)-f(0)}=1.8606.$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned}0.79206 &= (s)\int_0^2 fdm\\ &\geq \min\left\{\begin{array}{c}\frac{2^2(1+2)^{\frac{1}{2}}}{(1+1)}\left(\frac{(s)\int_0^2 f^2dm}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\\ \left(2-\frac{\frac{2^2(1+2)^{\frac{1}{2}}}{(1+1)}\left(\frac{(s)\int_0^2 f^2dm}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{f(2)-f(0)}\right)\end{array}\right\}\\ &= 1.022\vee 0.1394=0.1394.\end{aligned}$$

Analogno se može dokazati sledeća teorema.

Teorema 2.28. *Neka je* $0<r<s<\infty$, $f:[a,b]\to[0,\infty)$ *konveksna funkcija i* m *Lebegova mera na* $\mathbb{R}$. *Tada*

(a) ako je $f(a)<f(b)$, *tada*

$$\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq\max\left\{\begin{array}{c}\frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{(s)\int_a^b f^s dm}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}},\\ \left(b-\frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{(s)\int_a^b f^s dm}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}\right)^{\frac{1}{r}}\end{array}\right\},$$

(b) ako je $f(a) = f(b)$, tada

$$\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \leq \min\left\{f(a), (b-a)^{\frac{1}{r}}\right\},$$

(c) ako je $f(a) > f(b)$, tada

$$\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \max\left\{\begin{array}{c} \frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{(s)\int_a^b f^s dm}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ \\ \left(\frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{(s)\int_a^b f^s dm}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} - a\right)^{\frac{1}{r}} \end{array}\right\}.$$

Dokaz. Neka je $0 < r < s < \infty$ i $(s)\int_a^b f^s dm = t$. Kako je $f : [a,b] \to [0,\infty)$ konveksna funkcija, za $x \in [a,b]$ imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)a + \frac{x-a}{b-a}b\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = h(x). \end{aligned}$$

(a) Ako je $f(a) < f(b)$, tada

$$\begin{aligned} &\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left((s)\int_a^b h^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left[\sup_{\alpha\in[0,\infty]}\left[\alpha \wedge m\left([0,\infty] \cap \left\{\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \geq \alpha^{\frac{1}{r}}\right\}\right)\right]\right]^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left[\inf_{\alpha\in[0,\infty]}\left[\alpha \vee m\left([a,b] \cap \left\{x \mid x \geq \frac{\alpha^{\frac{1}{r}}(b-a) + af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}\right\}\right)\right]\right]^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

$$\leq \left[\max \left\{ \begin{array}{c} \frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}} \left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ m\left([a,b] \cap \left\{ x \mid x \geq \frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}} + af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)} \right\}\right) \end{array} \right\} \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{(b-a)^{\frac{1}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}} \left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}}, \\ \left(b - \frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}}(1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}}\left(\frac{t}{b-a}\right)^{\frac{1}{s}} + af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)} \right)^{\frac{1}{r}} \end{array} \right\}.$$

(b) Ako je $f(a) = f(b)$, tada je $h(x) = f(a)$. Kao posledicu osobina Sugenovog integrala (S3) i (S4) (sekcija 1.1.2) imamo

$$\begin{aligned} \left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left((s)\int_a^b h^r dm\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \left((s)\int_a^b f^r(a)\, dm\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left[f^r(a) \wedge (b-a)\right]^{\frac{1}{r}}. \\ &= f(a) \wedge (b-a)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

(c) Ako je $f(a) > f(b)$, tada

$$\left((s)\int_a^b f^r dm\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left((s)\int_a^b h^r dm\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left[\sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge m\left([a,b] \cap \left\{\left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \geq \alpha^{\frac{1}{r}}\right\}\right)\right]\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$= \left[\sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge m \left([0,\infty] \cap \left\{ x \mid x \leq \frac{\alpha^{\frac{1}{r}} (b-a) + af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \right\} \right) \right] \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left[\inf_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \vee m \left([a,b] \cap \left\{ x \mid x \leq \frac{\alpha^{\frac{1}{r}} (b-a) + af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \right\} \right) \right] \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\leq \left[\max \left\{ \begin{array}{c} \frac{(b-a)^{\frac{1}{r}} (1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}} \left(\frac{t}{b-a} \right)^{\frac{1}{s}}, \\ m \left([a,b] \cap \left\{ x \mid x \leq \frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}} (1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}} \left(\frac{t}{b-a} \right)^{\frac{1}{s}} + af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)} \right\} \right) \end{array} \right\} \right]^{\frac{1}{r}}$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{c} \frac{(b-a)^{\frac{1}{r}} (1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}} \left(\frac{t}{b-a} \right)^{\frac{1}{s}}, \\ \left(\frac{\frac{(b-a)^{\frac{1+r}{r}} (1+s)^{\frac{1}{s}}}{(1+r)^{\frac{1}{r}}} \left(\frac{t}{b-a} \right)^{\frac{1}{s}} + af(b) - bf(a)}{f(b)-f(a)} - a \right)^{\frac{1}{r}} \end{array} \right\}. \qquad \square$$

Primer 2.3. Neka je $f(x) = 3x^2$, $x \in [0,2]$, $s = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{4}$ i m Lebegova mera. Tada imamo

$$\begin{aligned} (s)\int_0^2 f^{\frac{1}{2}} dm &= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge m \left([0,2] \cap \left\{ \sqrt{3}x \geq \alpha \right\} \right) \right] \\ &= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge \left(2 - \frac{1}{3}\alpha\sqrt{3} \right) \right] \\ &= 1.2679, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (s)\int_0^2 f^{\frac{1}{4}} dm &= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge m \left([0,2] \cap \left\{ \sqrt[4]{3x^2} \geq \alpha \right\} \right) \right] \\ &= \sup_{\alpha \in [0,\infty]} \left[\alpha \wedge \left(2 - \frac{1}{3}\alpha^2\sqrt{3} \right) \right] \\ &= 1.1868, \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{2^5\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^4}\left(\frac{(s)\int_0^2 f^{\frac{1}{2}}dm}{2}\right)^2-2f(0)}{f(2)-f(0)}=0.98769.$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned}
1.9839 &= \left((s)\int_0^2 f^{\frac{1}{4}}dm\right)^4\\
&\le \max\left\{\begin{array}{c}\frac{2^5\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^4}\left(\frac{(s)\int_0^2 f^{\frac{1}{2}}dm}{2}\right)^2,\\ \left(2-\frac{\frac{2^5\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{4}\right)^4}\left(\frac{(s)\int_0^2 f^{\frac{1}{2}}dm}{2}\right)^2-2f(0)}{f(2)-f(0)}\right)^4\end{array}\right\}\\
&= 5.9261\vee(2-0.98769)^4\\
&= 5.9261\vee 1.0502=5.9261.
\end{aligned}$$

Napomena 2.1. Poslednji korak u dokazu teoreme 2.27 pod (a) i teoreme 2.28 pod (a) važi kad je $[a,b]\cap\left\{x\mid x\ge\frac{\alpha^{\frac{1}{r}}(b-a)+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}\right\}\neq\emptyset$. Analogno, poslednji korak u dokazu teoreme 2.27 pod (c) i teoreme 2.28 pod (c) važi kad je $[a,b]\cap\left\{x\mid x\le\frac{\alpha^{\frac{1}{r}}(b-a)+af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}\right\}\neq\emptyset$.

2.9 Integralne nejednakosti za univerzalni integral

U ovoj sekciji dati su originalni rezultati vezani za nejednakost koju zadovoljava univerzalni integral, čije su posledice nejednakosti Čebiševa i Minkovskog ([6]).

Teorema 2.29. *Neka je* $\star : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ *neprekidna i neopadajuća funkcija po obe komponente i* $\varphi : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ *bijekcija koja je neprekidna i striktno rastuća funkcija. Neka su* $f, g \in \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ *dve komonotone funkcije,* $\boxdot_e : [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ *najmanja operacija u smislu definicije 1.8 na* $[0,\infty]$ *sa neutralnim elementom* $e \in (0,\infty]$ *i* $m \in \mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})}$ *monotona mera takva da su* $\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, \varphi(f))$ *i* $\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, \varphi(g))$ *konačni. Ako je*

$$\varphi^{-1}(\varphi(a{\star}b) \boxdot_e c) \geq \left(\varphi^{-1}(\varphi(a) \boxdot_e c) \star b\right) \vee \left(a \star \varphi^{-1}(\varphi(b) \boxdot_e c)\right), \quad (2.9)$$

tada važi nejednakost

$$\varphi^{-1}(\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, \varphi(f \star g))) \geq \varphi^{-1}(\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, \varphi(f))) \star \varphi^{-1}(\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, \varphi(g))) . (2.10)$$

Dokaz. Neka je $e \in (0,\infty]$ neutralni element za $\boxdot_e$. Ako je $\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, \varphi(f)) = \varphi(a)$ i $\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, \varphi(g)) = \varphi(b)$, onda za svako $\varepsilon > 0$, postoje $\varphi(a_\varepsilon)$ i $\varphi(b_\varepsilon)$ takvi da

$$\begin{aligned} m(\{\varphi(f) \geq \varphi(a_\varepsilon)\}) &= m(\{f \geq a_\varepsilon\}) = a_1, \\ m(\{\varphi(g) \geq \varphi(b_\varepsilon)\}) &= m(\{g \geq b_\varepsilon\}) = b_1, \end{aligned}$$

gde je $\varphi(a_\varepsilon) \boxdot_e a_1 \geq \varphi(a-\varepsilon)$ i $\varphi(b_\varepsilon) \boxdot_e b_1 \geq \varphi(b-\varepsilon)$. Kako je $\{f \geq a_\varepsilon\} \cap \{g \geq b_\varepsilon\} \subset \{f \star g \geq a_\varepsilon \star b_\varepsilon\}$ i f i g komonotone funkcije, to je

$$m(\{f \star g \geq a_\varepsilon \star b_\varepsilon\}) \geq a_1 \wedge b_1.$$

Iz uslova (2.9) sledi

$$\begin{aligned} &\varphi^{-1}(\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, \varphi(f \star g))) \\ &= \varphi^{-1}(\sup\{t \boxdot_e m(\{\varphi(f \star g) \geq t\}) \mid t \in (0,\infty]\}) \\ &\geq \varphi^{-1}(\varphi(a_\varepsilon \star b_\varepsilon) \boxdot_e (a_1 \wedge b_1)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(a_\varepsilon \star b_\varepsilon) \boxdot_e a_1) \wedge \varphi^{-1}(\varphi(a_\varepsilon \star b_\varepsilon) \boxdot_e b_1) \\ &\geq \left(\varphi^{-1}(\varphi(a_\varepsilon) \boxdot_e a_1) \star b_\varepsilon\right) \wedge \left(a_\varepsilon \star \varphi^{-1}(\varphi(b_\varepsilon) \boxdot_e b_1)\right) \\ &\geq ((a-\varepsilon) \star b_\varepsilon) \wedge (a_\varepsilon \star (b-\varepsilon)) \\ &\geq (a-\varepsilon) \star (b-\varepsilon) . \end{aligned}$$

Odakle $\varphi^{-1}\left(\mathbf{I}_{\boxdot_e}\left(m, \varphi\left(f \star g\right)\right)\right) \geq \varphi^{-1}\left(\mathbf{I}_{\boxdot_e}\left(m, \varphi\left(f\right)\right)\right) \star \varphi^{-1}\left(\mathbf{I}_{\boxdot_e}\left(m, \varphi\left(g\right)\right)\right)$ sledi iz neprekidnosti $\star$. □

Ako je $\varphi(x) = x^s$, $s > 0$, tada se nejednakost (2.10) svodi na tip nejednakosti Minkovskog za univerzalni integral.

Posledica 2.30. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ dve komonotone funkcije, $\boxdot_e : [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ najmanja operacija $\boxdot_e$ u smislu definicije 1.8 na $[0,\infty]$ sa neutralnim elementom $e \in (0,\infty]$ i $m \in \mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})}$ monotona mera takva da su $\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, f^s)$ i $\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, g^s)$ konačni. Neka je $\star : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ neprekidna i neopadajuća funkcija po obe komponente. Ako je*

$$\left((a \star b)^s \boxdot_e c\right)^{\frac{1}{s}} \geq \left(\left(a^s \boxdot_e c\right)^{\frac{1}{s}} \star b\right) \vee \left(a \star \left(b^s \boxdot_e c\right)\right)^{\frac{1}{s}},$$

tada za svako $s > 0$ važi nejednakost

$$\left(\mathbf{I}_{\boxdot_e}\left(m, (f \star g)^s\right)\right)^{\frac{1}{s}} \geq \left(\mathbf{I}_{\boxdot_e}\left(m, f^s\right)\right)^{\frac{1}{s}} \star \left(\mathbf{I}_{\boxdot_e}\left(m, g^s\right)\right)^{\frac{1}{s}}. \tag{2.11}$$

Ako je $s = 1$, dobija se nejednakost Čebiševa.

Posledica 2.31. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}^{(X,\mathcal{A})}$ dve komonotone funkcije, $\boxdot_e : [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ najmanja operacija $\boxdot_e$ u smislu definicije 1.8 na $[0,\infty]$ sa neutralnim elementom $e \in (0,\infty]$ i $m \in \mathcal{M}^{(X,\mathcal{A})}$ monotona mera takva da su $\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, f^s)$ i $\mathbf{I}_{\boxdot_e}(m, g^s)$ konačni. Neka je $\star : [0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ neprekidna i neopadajuća funkcija po obe komponente. Ako je*

$$\left((a \star b) \boxdot_e c\right) \geq \left(\left(a \boxdot_e c\right) \star b\right) \vee \left(a \star \left(b \boxdot_e c\right)\right),$$

tada važi nejednakost

$$\left(\mathbf{I}_{\boxdot_e}\left(m, (f \star g)\right)\right) \geq \left(\mathbf{I}_{\boxdot_e}\left(m, f\right)\right) \star \left(\mathbf{I}_{\boxdot_e}\left(m, g\right)\right). \tag{2.12}$$

Ako u teoremi 2.29 umesto intervala $[0,\infty]$ posmatramo interval $[0,1]$, tada je $\boxdot_e = \circledast$ semikopula (t-seminorma) i takođe važe nejednakosti (2.10), (2.11) i (2.12) za odgovarajuće univerzalne integrale.

Napomena 2.2. U [57] dat je primer koji pokazuje da uslov

$$\left((a \star b) \circledast c\right) \geq \left(\left(a \circledast c\right) \star b\right) \vee \left(a \star \left(b \circledast c\right)\right),$$

(takođe i uslov (2.9) u teoremi 2.29) ne može biti izostavljen.

Neka su $U, V : [0,1]^2 \to [0,1]$ dve binarne opercije. Kažemo da V dominira nad U, u oznaci $V \gg U$, ako važi

$$V(U(a,b), U(c,d)) \geq U(V(a,c), V(b,d))$$

za svako $a, b, c, d \in [0,1]$.

Ako je semikopila (t-seminorma) $\circledast$ minimum, $\star$ ograničena od gore minimumom i φ neprekidna i striktno rastuća funkcija, tada $\star$ dominira nad minimumom. Stoga kao posledice imamo sledeće nejednakosti za Sugenov integral koje su redom rezultati iz [1],[58] i [50].

Posledica 2.32. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}_{[0,1]}^{(X,\mathcal{A})}$ dve komonotone merljive funkcije, $\star : [0,1]^2 \to [0,1]$ neprekidna i neopadajuća funkcija po obe komponente i ograničena od gore minimumom i $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ bijekcija koja je neprekidna i striktno rastuća funkcija. Tada nejednakost*

$$\varphi^{-1}(\mathbf{Su}(m, \varphi(f \star g))) \geq \varphi^{-1}(\mathbf{Su}(m, \varphi(f))) \star \varphi^{-1}(\mathbf{Su}(m, \varphi(g)))$$

važi za svako $m \in \mathcal{M}_1^{(X,\mathcal{A})}$.

Posledica 2.33. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}_{[0,1]}^{(X,\mathcal{A})}$ dve komonotone merljive funkcije, $\star : [0,1]^2 \to [0,1]$ neprekidna i neopadajuća funkcija po obe komponente i ograničena od gore minimumom. Tada nejednakost*

$$(\mathbf{Su}(m, (f \star g)^s))^{\frac{1}{s}} \geq (\mathbf{Su}(m, f^s))^{\frac{1}{s}} \star (\mathbf{Su}(m, g^s))^{\frac{1}{s}}$$

važi za svako $m \in \mathcal{M}_1^{(X,\mathcal{A})}$ i svako $0 < s < \infty$.

Posledica 2.34. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}_{[0,1]}^{(X,\mathcal{A})}$ dve komonotone merljive funkcije, $\star : [0,1]^2 \to [0,1]$ neprekidna i neopadajuća funkcija po obe komponente i ograničena od gore minimumom. Tada nejednakost*

$$(\mathbf{Su}(m, (f \star g))) \geq (\mathbf{Su}(m, f)) \star (\mathbf{Su}(m, g))$$

važi za svako $m \in \mathcal{M}_1^{(X,\mathcal{A})}$.

Sada ćemo posmatrati uopštenu nejednakost koju zadovoljavaju integrali bazirani na semikonormi.

Ako je T t-seminorma, S njena dualna t-semikonorma, $S(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y)$ i m normirana fazi mera tada

$$(\mathbf{I}_T(m, f))^d = 1 - \mathbf{I}_T(m, 1-f) = \mathbf{I}_S\left(m^d, f\right),$$

gde je m^d dualna fazi mera data sa

$$m^d(A) = 1 - m(X - A).$$

Zbog dualnosti svi rezultati za integrale bazirane na t-seminormi mogu se preneti na rezultate za integrale bazirane na t-semikonorma. Sledeća teorema se analogno dokazuje kao teorema 2.29.

Teorema 2.35. *Neka su $f, g \in \mathcal{F}_{[0,1]}^{(X,\mathcal{A})}$ dve komonotone merljive funkcije, $\star : [0,1]^2 \to [0,1]$ neprekidna i neopadajuća funkcija po obe komponente i ograničena od gore minimumom i $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ bijekcija koja je neprekidna i striktno rastuća funkcija. Ako semikonorma S zadovoljava uslov*

$$\varphi^{-1}(S(\varphi(a \star b), c)) \leq \big(\varphi^{-1}(S(\varphi(a), c)) \star b\big) \vee \big(a \star \varphi^{-1}(S(\varphi(b), c))\big),$$

tada nejednakost

$$\varphi^{-1}(\mathbf{I}_S(m, \varphi(f \star g))) \leq \varphi^{-1}(\mathbf{I}_S(m, \varphi(f))) \star \varphi^{-1}(\mathbf{I}_S(m, \varphi(g)))$$

važi za svako $m \in \mathcal{M}_1^{(X,\mathcal{A})}$.

Ako je $\varphi(x) = x^s$, $s > 0$, tada dobijamo tip nejednakosti Minkovskog za univerzalni integral baziran na semikonormi. Nejednakost Čebiševa za univerzalni integral baziran na semikonormi se dobija kad je $s = 1$ i ta nejednakost je dokazana u [57].

U slučaju kad je semikonorma S maksimum, $\star$ ograničena od dole maksimumom i φ bijekcija koja je neprekidna i striktno rastuća funkcija, tada S dominira nad $\star$. Kao posledice toga imamo uopštenu nejednakost Čebiševa ([1]), nejednakost Minkovskog ([2]) i Čebiševljevu nejednakost ([57]) za Sugenov integral.

Glava 3

Jensenova nejednakost za pseudo-integral

U ovoj glavi dati su originalni rezultati iz [68] vezani za uopštenje Jensenove nejednakosti za pseudo-integral. Ovaj tip nejednakosti je pokazan za dva slučaja poluprstena. Takođe su date njene posledice koje će kasnije biti primenjene u pseudo-verovatnoći.

Koristeći teoremu 2.1 dokazuje se uopštenje Jensenove nejednakosti za pseudo-integral. Posmatramo dva slučaja realnih poluprstena. U prvom slučaju pseudo-operacije su definisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora g, a u drugom slučaju pseudo-sabiranje je idempotentna operacija, dok je pseudo-množenje definisano pomoću generatora g.

3.1 Jensenova nejednakost u generisanom poluprstenu

Familija svih funkcija $f : X \to [a, b]$ za koje postoji $\int_X^{\oplus} f \odot dm$ kao konačna vrednost u smislu poluprstena $([a, b], \oplus, \odot)$, što znači da ako $\oplus$ indukuje uobičajeni poredak, $\int_X^{\oplus} f \odot dm \prec b$, a ako $\oplus$ indukuje poredak obrnut uobičajenom, znači da je $\int_X^{\oplus} f \odot dm \prec a$, biće obeležena sa $L^1_{\oplus}(m)$.

Specijalan slučaj, kad je $X = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ i $m = g^{-1} \circ \lambda$, gde je λ Lebegova mera na $[0, 1]$, sledeće teoreme dokazan je u [68].

Teorema 3.1. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom i m σ-$\oplus$-mera na $\mathcal{A}$, takva da je $m(X) = \mathbf{1}$. Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten, $[a,b] \subset [0,\infty]$ i $g : [a,b] \to [a,b]$ generator pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ konveksna i rastuća funkcija. Ako je Φ konveksna i nerastuća funkcija na $[a,b]$, tada za svaku funkciju $f \in L^1_{\oplus}(m)$, $f : X \to [a,b]$ važi*

$$\Phi\left(\int_X^{\oplus} f \odot dm\right) \preceq \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot dm. \tag{3.1}$$

Dokaz. Ako je $\Phi : [a,b] \to [a,b]$ konveksna i nerastuća funkcija i $g : [a,b] \to [a,b]$ konveksna i rastuća funkcija, tada je kompozicija $g \circ \Phi \circ g^{-1}$ takođe konveksna funkcija. Naime, kako je g rastuća i konveksna funkcija, njena inverzna funkcija g^{-1} je takođe rastuća ali konkavna funkcija. Funkcija Φ je konveksna i nerastuća, te je $\Phi \circ g^{-1}$ takođe konveksna funkcija. Primenjujući na konveksnu funkciju $\Phi \circ g^{-1}$ rastuću i konveksnu funkciju g dobijamo da je $g \circ \Phi \circ g^{-1}$ konveksna funkcija. Kako $f \in L^1_{\oplus}(m)$ i g rastuća funkcija, očigledno je $g \circ f \in L^1(g \circ m)$.

Primenom klasične Jensenove nejednakosti (2.1) sa $\varphi = g \circ \Phi \circ g^{-1}$ i $h = g \circ f$ dobija se

$$g\left(\Phi\left(g^{-1}\left(\int_X (g \circ f)\, d(g \circ m)\right)\right)\right) \leqslant \int_X \left(g \circ \Phi \circ g^{-1} \circ g \circ f\right) d(g \circ m),$$

tj.

$$g\left(\Phi\left(g^{-1}\left(\int_X (g \circ f)\, d(g \circ m)\right)\right)\right) \leqslant \int_X g(\Phi \circ f)\; d(g \circ m).$$

Kako je g rastuća funkcija, njena inverzna funkcija g^{-1} je takođe rastuća i važi

$$g^{-1}\left(g\left(\Phi\left(g^{-1}\left(\int_X (g \circ f)\, d(g \circ m)\right)\right)\right)\right) \leqslant g^{-1}\left(\int_X g(\Phi \circ f)\; d(g \circ m)\right).$$

Dalje sledi

$$\Phi\left(g^{-1}\left(\int_X (g \circ f)\, d(g \circ m)\right)\right) \leqslant g^{-1}\left(\int_X g(\Phi \circ f)\; d(g \circ m)\right),$$

tj.

$$\Phi\left(\int_X^{\oplus} f \odot dm\right) \leqslant \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot dm,$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Primer 3.1. (i) Neka je $g(x) = x^{\alpha}$ za neko $\alpha \in [1, \infty)$, $x \in [0, \infty]$. Odgovarajuće pseudo-operacije su $x \oplus y = \sqrt[\alpha]{x^{\alpha} + y^{\alpha}}$ i $x \odot y = xy$. Tada se (3.1) svodi na sledeću nejednakost

$$\Phi\left(\sqrt[\alpha]{\int_{[0,1]} f(x)^{\alpha}\, dx}\right) \leqslant \sqrt[\alpha]{\int_{[0,1]} \Phi\left(f\left(x\right)\right)^{\alpha} dx}.$$

(ii) Neka je $g(x) = e^{x}$, $x \in [0, \infty]$. Odgovarajuće pseudo-operacije su $x \oplus y = \ln\left(e^{x} + e^{y}\right)$ i $x \odot y = x + y$. Tada se (3.1) svodi na sledeću nejednakost

$$\Phi\left(\ln \int_{[0,1]} e^{f(x)}\, dx\right) \leqslant \ln\left(\int_{[0,1]} e^{\Phi(f(x))\, dx}\right).$$

Analogna teorema važi za opadajući generator ([68]).

Teorema 3.2. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom i m σ-$\oplus$-mera na $\mathcal{A}$, takva da je $m\left(X\right) = \mathbf{1}$. Neka je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten, $[a, b] \subset [0, \infty]$ i $g : [a, b] \to [a, b]$ generator pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ konveksna i opadajuća funkcija. Ako je Φ konkavna i neopadajuća funkcija na $[a, b]$, tada za svaku funkciju $f \in L^{1}_{\oplus}\left(m\right)$, $f : X \to [a, b]$ važi*

$$\Phi\left(\int_{X}^{\oplus} f \odot dm\right) \preceq \int_{X}^{\oplus} \left(\Phi \circ f\right) \odot dm. \tag{3.2}$$

Dokaz. Ako je $\Phi : [a, b] \to [a, b]$ konkavna i neopadajuća funkcija i $g : [a, b] \to [a, b]$ konveksna i opadajuća, tada je kompozicija $g \circ \Phi \circ g^{-1}$ takođe konveksna funkcija. Naime, kako je g opadajuća i konveksna funkcija, njena inverzna funkcija g^{-1} je opadajuća ali konkavna funkcija. Funkcija Φ konkavna i neopadajuća funkcija, pa je kompozicija $\Phi \circ g^{-1}$ konkavna funkcija. Primenjujući na konkavnu funkciju $\Phi \circ g^{-1}$ opadajuću i konveksnu funkciju g dobijamo da je $g \circ \Phi \circ g^{-1}$ konveksna funkcija.

Na analogan način kao u dokazu teoreme 3.1 dobijamo

$$\Phi\left(g^{-1}\left(\int_{X} g\left(f\right) d\left(g \circ m\right)\right)\right) \geq g^{-1}\left(\int_{X} g\left(\Phi\left(f\right)\right) d\left(g \circ m\right)\right),$$

tj.

$$\Phi\left(\int_{X}^{\oplus} f \odot dm\right) \geq \int_{X}^{\oplus} \left(\Phi \circ f\right) \odot dm.$$

Kako je funkcija g opadajuća, pseudo-sabiranje $\oplus$ indukuje poredak obrnut uobičajenom i važi nejednakost (3.2). $\square$

Teoreme koje slede predstavljaju posledicu Jensenove nejednakosti za pseudo-integral.

Teorema 3.3. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom i m σ-$\oplus$-mera na $\mathcal{A}$. Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten, $[a,b] \subset [0,\infty]$ i $g : [a,b] \to [a,b]$ generator pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ konveksna i rastuća funkcija. Ako je Φ konveksna i nerastuća funkcija na $[a,b]$ i $h : X \to [a,b]$ merljiva funkcija za koji važi $\int_X^{\oplus} h \odot dm = \mathbf{1}$, tada za svaku funkciju $f \in L^1_{\oplus}(m)$, $f : X \to [a,b]$ važi*

$$\Phi\left(\int_X^{\oplus} (f \odot h) \odot dm\right) \preceq \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot h \odot dm.$$

Dokaz. Na osnovu teoreme 3.7 $m_h(A) = \int_A^{\oplus} h \odot dm$, $A \in \mathcal{A}$ je σ-$\oplus$-mera na $\mathcal{A}$. Kako je po pretpostavci $m_h(X) = \int_X^{\oplus} h \odot dm = \mathbf{1}$, m_h zadovoljava uslove teoreme 3.1. Primenjujući teoreme 3.7 i 3.1 dobijamo:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\int_X^{\oplus} (f \odot h) \odot dm\right) &= \Phi\left(\int_X^{\oplus} f \odot dm_h\right) \\
&\preceq \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot dm_h \\
&= \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot h \odot dm,
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Teorema 3.4. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom i m σ-$\oplus$-mera na $\mathcal{A}$. Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten, $[a,b] \subset [0,\infty]$ i $g : [a,b] \to [a,b]$ generator pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ konveksna i opadajuća funkcija. Ako je Φ konkavna i neopadajuća funkcija na $[a,b]$ i $h : X \to [a,b]$ merljiva funkcija za koju važi $\int_X^{\oplus} h \odot dm = \mathbf{1}$, tada za svaku funkciju $f \in L^1_{\oplus}(m)$, $f : X \to [a,b]$ važi*

$$\Phi\left(\int_X^{\oplus} (f \odot h) \odot dm\right) \preceq \int_X^{\oplus} (\Phi \circ f) \odot h \odot dm.$$

3.2 Jensenova nejednakost u poluprstenu $([a,b],\sup,\odot)$

Posmatramo slučaj kada je pseudo-sabiranje idempotentna operacija i pseudo-množenje dato pomoću monotonog generatora g, tj. $\oplus=\sup$ i $\odot=g^{-1}(g(x)\,g(y))$. Rezultati prikazani u ovoj sekciji predstavljaju originalni deo teze i mogu se naći u [68].

Teorema 3.5. *Neka je* $([0,\infty],\sup,\odot)$ *poluprsten i generator* g *pseudo-množenja* $\odot$ *je konveksna i rastuća funkcija. Neka je* m sup*-mera na* $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$*, gde je* $\mathcal{B}([0,1])$ *Borelova* σ*-algebra na* $[0,1]$,

$$m(A)=ess\sup_{\mu}(\psi(x)\mid x\in A),$$

gde je μ *Lebegova mera na* $\mathbb{R}$, $\psi:[0,1]\to[0,\infty]$ *neprekidna funkcija gustine. Ako je* Φ *konveksna i nerastuća funkcija na* $[0,\infty]$, *tada za svaku neprekidnu funkciju* $f:[0,1]\to[0,\infty]$, $f\in L^1_{\oplus}(m)$, *važi:*

$$\Phi\left(\int_{[0,1]}^{\sup} f\odot dm\right)\leqslant\int_{[0,1]}^{\sup}\Phi(f)\odot dm.$$

Dokaz. Neka je Φ konveksna i nerastuća funkcija na $[0,\infty]$. Po teoremi 1.22 postoji familija $\{m_\lambda\}$ $\oplus_\lambda$-mera, gde je $\oplus_\lambda$ generisana sa g^λ, $\lambda\in(0,\infty)$, tako da važi

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}^{\sup} f\odot dm &= \lim_{\lambda\to\infty}\int_{[0,1]}^{\oplus_\lambda} f\odot dm_\lambda\\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\left(g^\lambda\right)^{-1}\left(\int_0^1 g^\lambda(f(x))\,dx\right).\end{aligned}$$

Primenjujući na obe strane konveksnu i nerastuću funkciju Φ dobijamo

$$\Phi\left(\int_{[0,1]}^{\sup} f\odot dm\right)=\Phi\left(\lim_{\lambda\to\infty}\int_{[0,1]}^{\oplus_\lambda} f\odot dm_\lambda\right).$$

Kako je Φ neprekidna funkcija dalje važi

$$\begin{aligned}\Phi\left(\int_{[0,1]}^{\sup} f\odot dm\right) &= \lim_{\lambda\to\infty}\Phi\left(\int_{[0,1]}^{\oplus_\lambda} f\odot dm_\lambda\right)\\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\Phi\left(\left(g^\lambda\right)^{-1}\left(\int_0^1 g^\lambda(f(x))\,dx\right)\right).\end{aligned}$$

Kako je funkcija g konveksna i rastuća, takođe je g^λ za $\lambda \geqslant 1$ konveksna i rastuća funkcija. Dakle, kompozicija $g^\lambda \circ \Phi \circ \left(g^\lambda\right)^{-1}$ je takođe konveksna funkcija za $\lambda \geqslant 1$. Primenjujući prvo teoremu 3.1, a zatim teoremu 1.22 dobijamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to\infty} \Phi\left(\left(g^\lambda\right)^{-1}\left(\int_0^1 g^\lambda\left(f\left(x\right)\right)dx\right)\right)\\
&\leq \lim_{\lambda\to\infty}\left(\left(g^\lambda\right)^{-1}\left(\int_0^1 g^\lambda\left(\Phi\left(f\left(x\right)\right)\right)dx\right)\right)\\
&= \int_{[0,1]}^{\sup} \Phi\left(f\right)\odot dm,
\end{aligned}$$

tj.

$$\Phi\left(\int_{[0,1]}^{\sup} f(x)\,dx\right) \leqslant \int_{[0,1]}^{\sup} \Phi\left(f\left(x\right)\right)dx.$$

□

Primer 3.2. Koristeći primer 3.1(ii) imamo da je $g^\lambda(x) = e^{\lambda x}$. Tada

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\ln\left(e^{\lambda x}+e^{\lambda y}\right) = \max(x,y),$$

i

$$x \odot_\lambda y = x + y.$$

Jensenova nejednakost iz t*eoreme* 3.5 svodi se na

$$\Phi\left(\sup(f(x)+\psi(x))\right) \leqslant \sup\left(\Phi(f(x))+\psi(x)\right),$$

gde je ψ iz *teoreme* 1.21.

Napomena 3.1. Odgovarajući integrali u odnosu na inf-meru se mogu dobiti kao granica familija g-integrala [51]. Primenjujući taj rezultat i teoremu 3.2 možemo dobiti na analogan način sledeću nejednakost

$$\Phi\left(\int_{[0,1]}^{\inf} f\odot dm\right) \preceq \int_{[0,1]}^{\inf} \Phi\left(f\right)\odot dm.$$

3.3 Primena Jensenove nejednakosti u pseudo-verovatnoći

Jensenova nejednakost ima značajnu primenu u teoriji verovatnoće i statistici. Koristeći definiciju i osobine pseudo-integrala mogu se dokazati sledeće dve teoreme koje su analogne odgovarajućim teoremama u klasičnoj teoriji mere i koje ćemo koristiti u kasnijem radu.

Teorema 3.6. *Neka su* $(X_1, \mathcal{A}_1)$ *i* $(X_2, \mathcal{A}_2)$ *prostori sa* σ*-algebrom,* $m_1 : \mathcal{A}_1 \to [a,b]_+$ σ*-*$\oplus$*-mera i* $f : X_1 \to X_2$ *merljiva funkcija. Neka je za svako* $A \in \mathcal{A}_2$, $m_2(A) = m_1\left(f^{-1}(A)\right)$. *Tada je* m_2 σ*-*$\oplus$*-mera i za svaku merljivu funkciju* $g : X_2 \to [a,b]$ *važi:*

$$\int_{X_2}^{\oplus} g \odot dm_2 = \int_{X_1}^{\oplus} (g \circ f) \odot dm_1.$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je m_2 σ-$\oplus$-mera. Iz $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ sledi $m_2(\emptyset) = \mathbf{0}$. Ako je $A \cap B = \emptyset$, tada je $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset$. Zbog jednakosti $f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$ i osobine σ-$\oplus$-aditivnosti skupovne funkcuje m_1, za svaki niz po parovima disjunktnih skupova $\{A_n\}$ imamo:

$$\begin{aligned} m_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= m_1\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = m_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)\right) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} m_1\left(f^{-1}(A_n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} m_2(A_n). \end{aligned}$$

Po definiciji, imamo da je m_2 skupovna funkcija iz $\mathcal{A}_2$ u $[a,b]_+$. Čime smo pokazali da je $m_2 : \mathcal{A}_2 \to [a,b]_+$ σ-$\oplus$-mera.

Sada ćemo pokazati drugi deo teoreme. Neka je prvo g jednostavna funkcija, tj. $g = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \chi_{A_i}$. Tada je

$$g(f(x)) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \chi_{A_i}(f(x)) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot \chi_{f^{-1}(A_i)}(x).$$

Koristeći definiciju pseudo-integrala i prethodnu jednakost dobijamo:

$$\int_{X_2}^{\oplus} g \odot dm_2 = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot m_2(A_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} a_i \odot m_1\left(f^{-1}(A_i)\right) = \int_{X_1}^{\oplus} g(f) \odot dm_1.$$

Kako je g merljiva funkcija i $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz jednostavnih funkcija iz definicije 1.14 (ii) takav da $d(g_n(x), g(x)) \to 0$ uniformno kad $n \to \infty$. Tada važi:

$$\int_{X_2}^{\oplus} g \odot dm_2 = \lim_{n\to\infty} \int_{X_2}^{\oplus} g_n \odot dm_2 = \lim_{n\to\infty} \int_{X_1}^{\oplus} g_n(f) \odot dm_1 = \int_{X_1}^{\oplus} g(f) \odot dm_1.$$

$\square$

Teorema 3.7. *Ako je $v : X \to [a,b]$ merljiva funkcija, m σ-$\oplus$-mera, tada je*

$$m_v(A) = \int_A^{\oplus} v \odot dm \text{ za } A \in \mathcal{A},$$

σ-$\oplus$-mera i za svaku merljivu funkciju $u : X \to [a,b]$ je

$$\int_X^{\oplus} u \odot dm_v = \int_X^{\oplus} (u \odot v) \odot dm.$$

.

Dokaz. Neka je v jednostavna funkcija, tj. $v = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot \chi_{B_i}$ za $v_i \in [a,b]$ sa disjunktnim supovima $B_1, B_2, ..., B_n$ koji su particije od X i $B_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., n$.

Prvo ćemo pokazati da za svaki niz $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ važi $m_v\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} m_v(A_j)$.

$$\begin{aligned} m_v(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) &= \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}^{\oplus} v \odot dm = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot m\left(B_i \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_j\right)\right) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (B_i \cap A_j)\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot \bigoplus_{j=1}^{\infty} m(B_i \cap A_j) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{\infty} \bigoplus_{i=1}^{n} v_i \odot m(B_i \cap A_j) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \int_{A_j}^{\oplus} v \odot dm = \bigoplus_{j=1}^{\infty} m_v(A_j). \end{aligned}$$

Neka je v merljiva funkcija i $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz jednostavnih funkcija iz definicije 1.14 (ii) takav da $d(v_n(x), v(x)) \to 0$ uniformno kad $n \to \infty$. Zbog neprekidnosti $\oplus$ sledi

$$\begin{aligned} m_v(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j}^{\oplus} v_n \odot dm = \lim_{n\to\infty} \left(\bigoplus_{j=1}^{\infty} \int_{A_j}^{\oplus} v_n \odot dm\right) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{\infty} \int_{A_j}^{\oplus} v \odot dm = \bigoplus_{j=1}^{\infty} m_v(A_j). \end{aligned}$$

Sada ćemo pokazati drugi deo teoreme. Neka je u jednostavna funkcija, tj. $u = \bigoplus_{i=1}^{k} u_i \odot \chi_{U_i}$ za $u_i \in [a,b]$ sa disjunktnim supovima $U_1, U_2, ..., U_k$ koji su particije od X i $U_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, ..., k$.

$$\begin{aligned}
\int_X^{\oplus} u \odot dm_v &= \bigoplus_{i=1}^{k} \int_X^{\oplus} u_i \odot \chi_{U_i} \odot dm_v = \bigoplus_{i=1}^{k} u_i \odot \int_X^{\oplus} \chi_{U_i} \odot dm_v \\
&= \bigoplus_{i=1}^{k} u_i \odot m_v\left(U_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{k} u_i \odot \int_{U_i}^{\oplus} v \odot dm \\
&= \bigoplus_{i=1}^{k} u_i \odot \int_X^{\oplus} \chi_{U_i} \odot v \odot dm \\
&= \int_X^{\oplus} \left(\bigoplus_{i=1}^{k} u_i \odot \chi_{U_i} \right) \odot v \odot dm \\
&= \int_X^{\oplus} (u \odot v) \odot dm.
\end{aligned}$$

Neka je u merljiva funkcija i $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz jednostavnih funkcija iz definicije 1.14 (ii) takav da $d\left(u_n\left(x\right), u\left(x\right)\right) \to 0$ uniformno kad $n \to \infty$. Iz osobina metrike sledi $d\left(\left(u_n \odot v\right)\left(x\right), \left(u \odot v\right)\left(x\right)\right) \to 0$ uniformno kad $n \to \infty$. Na osnovu definicije pseudo-integrala i prethodno dokazanog tvrđenja za jednostavnu funkciju imamo:

$$\begin{aligned}
\int_X^{\oplus} u \odot dm_v &= \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} u_n \odot dm_v = \lim_{n\to\infty} \int_X^{\oplus} \left(u_n \odot v\right) \odot dm \\
&= \int_X^{\oplus} (u \odot v) \odot dm.
\end{aligned}$$

□

Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten, m σ-$\oplus$-mera na prostoru sa σ-algebrom $\left([a,b], \sigma\left([a,b]\right)\right)$.

Ako je ϕ_Y gustina pseudo-slučajne promenljive $Y : \Omega \to [a,b]$, tada za svaki skup $S \in \sigma\left([a,b]\right)$, važi:

$$\boldsymbol{P}\left(\{Y \in S\}\right) = \int_S^{\oplus} \phi_Y \odot dm \tag{3.3}$$

Očigledno je

$$\int_{[a,b]}^{\oplus} \phi_Y \odot dm = \mathbf{1}.$$

Ako pseudo-očekivanje pseudo-slučajne promenljive Y ima konačnu vrednost u smislu poluprstena $([a,b], \oplus, \odot)$, tada je Y integrabilna pseudo-slučajna promenljiva.

Dokazaćemo teoremu koja je uopštenje teoreme poznate kao osnovna teorema o matematičkom očekivanju u klasičnoj teoriji verovatnoće.

Teorema 3.8. *Ako je Y pseudo-slučajna promenljiva sa gustinom ϕ_Y i $f : [a,b] \to [a,b]$ merljiva funkcija, tada je:*

$$\boldsymbol{E}\left(f\left(Y\right)\right) = \int_{[a,b]}^{\oplus} f\left(x\right) \odot \phi_Y \odot dm.$$

Dokaz. Ako je $m_1(A) = \int_A^{\oplus} \phi_Y \odot dm$ za $A \in \sigma\left([a,b]\right)$, na osnovu teoreme 3.7 m_1 je σ-$\oplus$-mera i važi:

$$\int_{[a,b]}^{\oplus} f\left(x\right) \odot \phi_Y \odot dm = \int_{[a,b]}^{\oplus} f\left(x\right) \odot dm_1.$$

Koristeći teoremu 3.6 desna strana prethodne jednakosti je

$$\int_{[a,b]}^{\oplus} f\left(x\right) \odot dm_1 = \int_{[a,b]}^{\oplus} x \odot dm_2,$$

gde je $m_2\left(A\right) = m_1\left(f^{-1}\left(A\right)\right)$ za svako $A \in \sigma\left([a,b]\right)$. Kako važi (3.3), imamo:

$$\begin{aligned} m_2\left(A\right) &= m_1\left(f^{-1}\left(A\right)\right) = \boldsymbol{P}\left(\left\{Y \in f^{-1}\left(A\right)\right\}\right) = \boldsymbol{P}\left(Y^{-1}\left(f^{-1}\left(A\right)\right)\right) \\ &= \boldsymbol{P}\left(\left(f \circ Y\right)^{-1}\left(A\right)\right) = \boldsymbol{P}\left(Z^{-1}\left(A\right)\right) = \boldsymbol{P}\left(\left\{Z \in A\right\}\right) \\ &= \int_A^{\oplus} \phi_Z \odot dm. \end{aligned}$$

Primenjujući još jednom teoremu 3.7 dobijamo

$$\int_{[a,b]}^{\oplus} x \odot dm_2 = \int_{[a,b]}^{\oplus} x \odot \phi_Z \odot dm,$$

što je po definiciji $\boldsymbol{E}\left(Z\right)$.

□

Primenjujemo Jensenovu nejednakost za pseudo-integral u pseudo-verovatnoći.

Teorema 3.9. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ *prostor pseudo-verovatnoće,* $Y : \Omega \to [a,b]$ *integrabilna pseudo-slučajna promenljiva. Neka je* $([a,b], \oplus, \odot)$ *polu-prsten,* $[a,b] \subset [0,\infty]$ *i* $g : [a,b] \to [a,b]$ *generator pseudo-sabiranja* $\oplus$ *i pseudo-množenja* $\odot$ *konveksna i rastuća funkcija. Ako je merljiva funkcija* Φ *konveksna i nerastuća na* $[a,b]$*, tada važi:*

$$\Phi\left(\boldsymbol{E}\left(Y\right)\right) \preceq \boldsymbol{E}\left(\Phi\left(Y\right)\right). \tag{3.4}$$

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{E}\left(Y\right) = \int_{[a,b]}^{\oplus} x \odot \phi_Y \odot dm$. Kako je $\int_{[a,b]}^{\oplus} \phi_Y \odot dm = \mathbf{1}$, na osnovu teoreme 3.3 i teoreme 3.8 sledi

$$\Phi\left(\int_{[a,b]}^{\oplus} x \odot \phi_Y \odot dm\right) \preceq \int_{[a,b]}^{\oplus} \Phi \odot \phi_Y \odot dm,$$

tj. nejednakost (3.4). □

Kao posledica teoreme 3.4 i 3.8 analogno se može dokazati i teorema koja sledi.

Teorema 3.10. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ *prostor pseudo-verovatnoće,* $Y : \Omega \to [a,b]$ *integrabilna pseudo-slučajna promenljiva. Neka je* $([a,b], \oplus, \odot)$ *polu-prsten,* $[a,b] \subset [0,\infty]$ *,* *i* $g : [a,b] \to [a,b]$ *generator pseudo-sabiranja* $\oplus$ *i pseudo-množenja* $\odot$ *konveksna i opadajuća funkcija. Ako je merljiva funkcija* Φ *konkavna i neopadajuća na* $[a,b]$*, tada važi:*

$$\Phi\left(\boldsymbol{E}\left(Y\right)\right) \preceq \boldsymbol{E}\left(\Phi\left(Y\right)\right).$$

Glava 4

Nejednakost Čebiševa za pseudo-integral

U ovoj glavi je dato uopštenje za pseudo-integral dve nejedankosti poznate kao nejednakosti Čebiševa, te njihova primena u pseudo-verovatnoći što su ujedno i originalni rezultati. Prva nejednakost Čebiševa ima veliki značaj u teoriji verovatnoće, dok se druga odnosi na integrale funkcija koje su iste monotonosti. Data je takođe posledica druge nejednakosti Čebiševa, tj. nejednakost Stolarskog.

Teorema 4.1. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom i $f : X \to [a,b]_+$ merljiva funkcija. Ako je h merljiva i neopadajuća funkcija na skupu vrednosti funkcije f, sa vrednostima u $[a,b]_+$, tada za svaku σ-$\oplus$-meru m i za svako $t \in [a,b]_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ važi nejednakost*

$$h(t) \odot m(\{x \in X \mid f(x) \succeq t\}) \preceq \int_X^{\oplus} (h \circ f) \odot dm. \tag{4.1}$$

Dokaz. Neka je $C_t = \{x \in X \mid f(x) \succeq t\}$ i $t \in [a,b]_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$, tada za svako $x \in X$ važi

$$h(t) \odot \chi_{C_t}(x) \preceq h(f(x)) \odot \chi_{C_t}(x) \preceq h(f(x)), \tag{4.2}$$

gde je χ_{C_t} pseudo-karakteristična funkcija. Iz nejednakosti (4.2) i osobina pseudo-integrala sledi

$$h(t) \odot m(C_t) = h(t) \odot \int_X^{\oplus} \chi_{C_t} \odot dm \preceq \int_X^{\oplus} (h \circ f) \odot dm.$$

□

Specijalan slučaj nejednakosti Čebiševa je nejednakost Markova, naime

$$c \odot m\,(f \succeq c) \preceq \int_X^{\oplus} f \odot dm, \tag{4.3}$$

za svako $c \in [a,b]_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ i $f : X \to [a,b]_+$.

Ako je $\odot$ kancelativno na (a,b) (videti slučajeve I(a) i II sa g rastućim), tada se (4.3) može uopštiti u

$$c_{\odot}^{(p)} \odot m\,(f \geq c) \leq \int_X^{\oplus} f_{\odot}^{(p)} \odot dm,$$

gde je p proizvoljna pozitivna konstanta.

4.1 Primena nejednakosti Čebiševa u pseudo-verovatnoći

Neka je $[a,b]$ podinterval intervala $[-\infty,+\infty]$, $([a,b],\oplus,\odot)$ poluprsten i m σ-$\oplus$-mera definisana na prostoru sa σ-algebrom $([a,b]\,,\sigma\,([a,b]))$.

Teorema 4.2. *Neka je $(\Omega,\mathcal{A},\boldsymbol{P})$ prostor pseudo-verovatnoće, $Y:\Omega\to[a,b]$ integrabilna pseudo-slučajna promenljiva i $f:[a,b]\to[a,b]_+$ merljiva funkcija. Tada za svako $t\in[a,b]_+\setminus\{\mathbf{0}\}$ važi nejednakost*

$$t \odot \boldsymbol{P}\left(\{x\in\Omega \mid f\,(x)\succeq t\}\right) \preceq \boldsymbol{E}\left(f\,(Y)\right).$$

Dokaz. Ako je $m_Y(A) = \int\limits_A^{\oplus} \phi_Y \odot dm$ za $A \in \sigma\,([a,b])$, gde je m σ-$\oplus$-mera na $([a,b]\,,\sigma\,([a,b]))$, na osnovu teoreme 3.7 m_Y je σ-$\oplus$-mera i važi:

$$\int_{[a,b]}^{\oplus} f\odot\phi_Y\odot dm = \int_{[a,b]}^{\oplus} f\odot dm_Y.$$

Koristeći prethodnu jednakost, teoreme 3.8 i 4.1, dobijamo:

$$\boldsymbol{E}\left(f\,(Y)\right) = \int_{[a,b]}^{\oplus} f\odot dm_Y \succeq t\odot m_Y\left(\{x\in\Omega\mid f\,(x)\succeq t\}\right).$$

Zbog jednakosti (3.3) imamo

$$t\odot m_Y\left(\{f\succeq t\}\right) = t\odot\boldsymbol{P}\left(Y\in\{f\succeq t\}\right) = t\odot\boldsymbol{P}\left(\{f\,(Y)\succeq t\}\right),$$

tj.

$$t \odot \boldsymbol{P}\left(\{x\in\Omega \mid f\,(x)\succeq t\}\right) \preceq \boldsymbol{E}\left(f\,(Y)\right).$$

□

4.2 Nejednakost Čebiševa za monotone funkcije

U ovoj sekciji će biti dato uopštenje nejednakosti Čebiševa za monotone funkcije. Posmatraćemo dva slučaja realnih poluprstena. U prvom slučaju pseudo-operacije su definisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora g, a u drugom slučaju pseudo-sabiranje je idempotentna operacija dok je pseudo-množenje definisano pomoću generatora g. Specijalan slučaj, kad je $X = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ i $m = g^{-1} \circ \lambda$, λ Lebegova mera na $[0,1]$, teoreme koja sledi dat je u [3, 67].

Neka je u teoremama koje slede $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom, m σ-$\oplus$-mera na $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, $X = [c,d]$ i $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten.

Teorema 4.3. *Neka su $f_1, f_2 : [c,d] \to [a,b]$ merljive funkcije. Ako je generator g pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ rastuća funkcija i f_1, f_2 su obe rastuće ili obe opadajuće, tada važi:*

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot dm \preceq \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} \mathbf{1} \odot dm \right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot dm \right). \tag{4.4}$$

Dokaz. Ako su f_1 i f_2 monotono rastuće ili monotono opadajuće i g rastuća funkcija, tada su kompozicije $g \circ f_1$ i $g \circ f_2$ takođe monotono rastuće ili monotono opadajuće funkcije i nenegativne.

Ako primenimo klasičnu nejednakost Čebiševa (2.2), dobijamo:

$$\begin{aligned} &\int_{[c,d]} (g \circ f_1)\, d(g \circ m) \cdot \int_{[c,d]} (g \circ f_2)\, d(g \circ m) \\ &\leq \int_{[c,d]} d(g \circ m) \int_{[c,d]} (g \circ f_1)(g \circ f_2)\, d(g \circ m). \end{aligned}$$

Kako je funkcija g rastuća funkcija, onda je g^{-1} takođe rastuća i imamo

$$\begin{aligned} &g^{-1} \left(\int_{[c,d]} (g \circ f_1)\, d(g \circ m) \cdot \int_{[c,d]} (g \circ f_2)\, d(g \circ m) \right) \\ &\leq g^{-1} \left(\int_{[c,d]} d(g \circ m) \cdot \int_{[c,d]} (g \circ f_1)(g \circ f_2)\, d(g \circ m) \right), \end{aligned}$$

tj.,

$$g^{-1}\left(g\left(g^{-1}\left(\int_{[c,d]}(g\circ f_1)\,d\,(g\circ m)\right)\right)\right.$$
$$\left.\cdot g\left(g^{-1}\left(\int_{[c,d]}(g\circ f_2)\,d\,(g\circ m)\right)\right)\right)$$
$$\leq g^{-1}\left(g\left(g^{-1}\left(\int_{[c,d]}d\,(g\circ m)\right)\right)\right.$$
$$\left.\cdot\, g\left(g^{-1}\left(\int_{[c,d]}(g\circ f_1)\,(g\circ f_2)\,d\,(g\circ m)\right)\right)\right).$$

Sledi

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1\odot dm\odot\int_{[c,d]}^{\oplus} f_2\odot dm\leq\int_{[c,d]}^{\oplus}\mathbf{1}\odot dm\odot\int_{[c,d]}^{\oplus}(f_1\odot f_2)\odot dm,$$

tj.,

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1\odot dm\odot\int_{[c,d]}^{\oplus} f_2\odot dm\preceq\int_{[c,d]}^{\oplus}\mathbf{1}\odot dm\odot\int_{[c,d]}^{\oplus}(f_1\odot f_2)\odot dm.$$

$\square$

Primer 4.1. (i) Neka $g(x)=x^{\alpha}$ za neko $\alpha\in[1,\infty)$. Odgovarajuće pseudo-operacije su $x\oplus y=\sqrt[\alpha]{x^{\alpha}+y^{\alpha}}$ i $x\odot y=xy$. Tada se (4.4) svodi na sledeću nejednakost

$$\sqrt[\alpha]{\int_{[0,1]} f_1(x)^{\alpha}\,dx}\,\sqrt[\alpha]{\int_{[0,1]} f_2(x)^{\alpha}\,dx}\leqslant\sqrt[\alpha]{\int_{[0,1]} f_1(x)^{\alpha}f_2(x)^{\alpha}dx}\,.$$

(ii) Neka $g(x)=e^{x}$. Odgovarajuće pseudo-operacije su $x\oplus y=\ln\left(e^{x}+e^{y}\right)$ i $x\odot y=x+y$. Tada se (4.4) svodi na sledeću nejednakost

$$\ln\int_{[0,1]} e^{f_1(x)}\,dx+\ln\int_{[0,1]} e^{f_2(x)}\,dx\leqslant\ln\left(\int_{[0,1]} e^{f_1(x)+f_2(x)}dx\right).$$

Analogno prethodnoj teoremi može se pokazati sledeća teorema.

Teorema 4.4. *Neka su $f_1, f_2 : [c,d] \to [a,b]$ merljive funkcije. Ako je generator g pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ opadajuća funkcija i f_1, f_2 su obe rastuće ili obe opadajuće, tada važi:*

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot dm \preceq \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} \mathbf{1} \odot dm\right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot dm\right).$$

Dokaz. Ako su f_1 i f_2 monotono rastuće ili monotono opadajuće i g je opadajuća funkcija, tada su kompozicije $g \circ f_1$ i $g \circ f_2$ monotono rastuće ili monotono opadajuće funkcije i nenegativne.

Ako primenimo nejednakost Čebiševa (2.2), dobijamo:

$$\begin{aligned} &\int_{[c,d]} (g \circ f_1)\, d\,(g \circ m) \cdot \int_{[c,d]} (g \circ f_2)\, d\,(g \circ m) \\ &\leq \int_{[c,d]} d\,(g \circ m) \int_{[c,d]} (g \circ f_1)\,(g \circ f_2)\, d\,(g \circ m)\,. \end{aligned}$$

Funkcija g je opadajuća funkcija i tada je g^{-1} takođe opadajuća i imamo:

$$\begin{aligned} &g^{-1}\left(\int_{[c,d]} (g \circ f_1)\, d\,(g \circ m) \cdot \int_{[c,d]} (g \circ f_2)\, d\,(g \circ m)\right) \\ &\geq g^{-1}\left(\int_{[c,d]} d\,(g \circ m) \int_{[c,d]} (g \circ f_1)\,(g \circ f_2)\, d\,(g \circ m)\right). \end{aligned}$$

Kao u dokazu teoreme 4.3 dobijamo

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot dm \geq \int_{[c,d]}^{\oplus} \mathbf{1} \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot dm,$$

tj.,

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 \odot dm \preceq \int_{[c,d]}^{\oplus} \mathbf{1} \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\oplus} (f_1 \odot f_2) \odot dm.$$

□

U teoremi koja sledi posmatraćemo slučaj kada je pseudo-sabiranje idempotentna operacija i pseudo-množenje dato pomoću monotonog generatora g, tj. $\oplus = \sup$ i $\odot = g^{-1}\left(g(x)\, g(y)\right).$

Teorema 4.5. *Neka je* $([0,\infty],\sup,\odot)$ *poluprsten za koji je pseudo-množenje* $\odot$ *generisano rastućim generatorom* g. *Neka je* m sup-*mera na* $([c,d],\mathcal{B}([c,d]))$, *gde je* $\mathcal{B}([c,d])$ *Borelova* σ*-algebra na* $[c,d]$,

$$m(A) = ess\sup_{\mu}(\psi(x) \mid x \in A),$$

gde je μ *Lebegova mera na* $\mathbb{R}$ *i* $\psi : [c,d] \to [0,\infty]$ *neprekidna funkcija gustine. Tada za neprekidne funkcije* $f_1, f_2 : [c,d] \to [0,\infty]$, *koje su obe rastuće ili obe opadajuće važi:*

$$\int_{[c,d]}^{\sup} f_1 \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\sup} f_2 \odot dm \preceq \int_{[c,d]}^{\sup} \mathbf{1} \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\sup} (f_1 \odot f_2) \odot dm.$$

Dokaz. Na osnovu teoreme 1.22 postoji familija $\{m_\lambda\}$ $\oplus_\lambda$-mera, gde je $\oplus_\lambda$ generisana sa g^λ, $\lambda \in (0,\infty)$, tako da važi

$$\begin{aligned}\int_{[c,d]}^{\sup} f_i \odot dm &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_{[c,d]}^{\oplus_\lambda} f_i \odot dm_\lambda \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(\int_c^d g^\lambda (f_i(x))\, dx\right),\end{aligned}$$

za $i = 1, 2$.

Kako je $\odot$ neprekidna funkcija važi

$$\begin{aligned}&\int_{[c,d]}^{\sup} f_1 \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\sup} f_2 \odot dm \\ &= \left(\lim_{\lambda\to\infty} \int_{[c,d]}^{\oplus_\lambda} f_1 \odot dm_\lambda\right) \odot \left(\lim_{\lambda\to\infty} \int_{[c,d]}^{\oplus_\lambda} f_2 \odot dm_\lambda\right) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \left(\left(\int_{[c,d]}^{\oplus_\lambda} f_1 \odot dm_\lambda\right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus_\lambda} f_2 \odot dm_\lambda\right)\right).\end{aligned}$$

Ako prvo primenimo teoremu 4.3, a zatim i teoremu 1.22, dobijamo

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to\infty} \left(\left(\int_{[c,d]}^{\oplus_\lambda} f_1 \odot dm_\lambda\right) \odot \left(\int_{[c,d]}^{\oplus_\lambda} f_2 \odot dm_\lambda\right)\right) \\ &\leq \lim_{\lambda\to\infty} \left(\int_{[c,d]}^{\oplus_\lambda} \mathbf{1} \odot dm_\lambda \odot \int_{[c,d]}^{\oplus_\lambda} (f_1 \odot f_2) \odot dm_\lambda\right) \\ &= \int_{[c,d]}^{\sup} \mathbf{1} \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\sup} (f_1 \odot f_2) \odot dm,\end{aligned}$$

tj.,

$$\int_{[c,d]}^{\sup} f_1 \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\sup} f_2 \odot dm \preceq \int_{[c,d]}^{\sup} \mathbf{1} \odot dm \odot \int_{[c,d]}^{\sup} (f_1 \odot f_2) \odot dm.$$

□

Primer 4.2. Koristeći primer 4.1(ii) imamo da je $g^{\lambda}(x) = e^{\lambda x}$. Tada

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda} \ln\left(e^{\lambda x} + e^{\lambda y}\right) = \max(x, y),$$

i

$$x \odot_{\lambda} y = x + y.$$

Nejednakost Čebiševa iz teoreme 4.5 svodi se na

$$\sup(f_1(x) + \psi(x)) + \sup(f_2(x) + \psi(x)) \leqslant \sup\left(f_1(x) + f_2\left(x\right) + \psi(x)\right),$$

gde je ψ iz *teoreme* 1.21.

4.3 Primena nejednakosti Čebiševa za monotone funkcije u pseudo-verovatnoći

U ovoj sekciji data je nejednakost vezana za pseudo-očekivanjanja pseudo-slučajnih promenljivih koja je analogna nejednakosti (2.3) vezanoj za matematička očekivanja slučajnih promenljivih u klasičnoj teoriji verovatnoće.

Neka je $[a, b]$ podinterval intervala $[-\infty, +\infty]$, $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten i m σ-$\oplus$-mera definisana u prostoru sa σ-algebrom $([a, b], \sigma([a, b]))$.

Teorema 4.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ prostor pseudo-verovatnoće, $Y : \Omega \to [a, b]$ integrabilna pseudo-slučajna promenljiva i f_1, $f_2 : [a, b] \to [a, b]$ merljive funkcije. Ako je generator g pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ rastuća funkcija i f_1, f_2 su obe rastuće ili obe opadajuće, tada važi:*

$$\boldsymbol{E}\left(f_1\left(Y\right)\right) \odot \boldsymbol{E}\left(f_2\left(Y\right)\right) \preceq \boldsymbol{E}\left(f_1\left(Y\right) \odot f_2\left(Y\right)\right).$$

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{E}(Y) = \int_{[a,b]}^{\oplus} x \odot \phi_Y \odot dm$. Ako je $m_Y(A) = \int\limits_A^{\oplus} \phi_Y \odot dm$ za $A \in \sigma([a, b])$, na osnovu teorema 3.7 i 3.8 važi:

$$\boldsymbol{E}\left(f_i\left(Y\right)\right) = \int_{[a,b]}^{\oplus} f_i \odot \phi_Y \odot dm = \int_{[a,b]}^{\oplus} f_i \odot dm_Y, \tag{4.5}$$

za $i = 1, 2$. Takođe, na osnovu teoreme 3.8 važi:

$$\boldsymbol{E}\left(f_1\left(Y\right)\odot f_2\left(Y\right)\right)=\int_{[a,b]}^{\oplus}\left(f_1\odot f_2\right)\odot\phi_Y\odot dm=\int_{[a,b]}^{\oplus}\left(f_1\odot f_2\right)\odot dm_Y \tag{4.6}$$

Kako je $\int_{[a,b]}^{\oplus}\phi_Y\odot dm=\mathbf{1}$, sledi

$$\int_{[a,b]}^{\oplus}\mathbf{1}\odot dm_Y=\int_{[a,b]}^{\oplus}\left(\mathbf{1}\odot\phi_Y\right)\odot dm=\mathbf{1}. \tag{4.7}$$

Zbog prethodne jednakosti nejednakost (4.4) u ovom slučaju se svodi na

$$\int_{[a,b]}^{\oplus}f_1\odot dm_Y\odot\int_{[a,b]}^{\oplus}f_2\odot dm_Y\preceq\int_{[a,b]}^{\oplus}\left(f_1\odot f_2\right)\odot dm_Y.$$

Na osnovu (4.5) i (4.6) prethodna nejednakost je

$$\boldsymbol{E}\left(f_1\left(Y\right)\right)\odot\boldsymbol{E}\left(f_2\left(Y\right)\right)\preceq\boldsymbol{E}\left(f_1\left(Y\right)\odot f_2\left(Y\right)\right).$$

□

Analogno se dokazuje sledeća teorema.

Teorema 4.7. *Neka je* $(\Omega,\mathcal{A},\boldsymbol{P})$ *prostor pseudo-verovatnoće,* $Y:\Omega\to[a,b]$ *integrabilna pseudo-slučajna promenljiva i* $f_1,\ f_2:[a,b]\to[a,b]$ *merljive funkcije. Ako je generator* g *pseudo-sabiranja* $\oplus$ *i pseudo-množenja* $\odot$ *opadajuća funkcija i* f_1, f_2 *su obe rastuće ili obe opadajuće, tada važi:*

$$\boldsymbol{E}\left(f_1\left(Y\right)\right)\odot\boldsymbol{E}\left(f_2\left(Y\right)\right)\preceq\boldsymbol{E}\left(f_1\left(Y\right)\odot f_2\left(Y\right)\right).$$

4.4 Nejednakost Stolarskog za pseudo-integral

Nejednakost Čebiševa za pseudo-integral se može primeniti prilikom pokazivanja uopštenja nejednakosti Stolarskog. Posmatraćemo dva slučaja realnih poluprstena. U prvom slučaju pseudo-operacije su definisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora g, a u drugom slučaju pseudo-sabiranje je idempotentna operacija dok je pseudo-množenje definisano pomoću generatora g.

Posmatrajmo prvo slučaj poluprstena kad su pseudo-operacije definisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora g.

Teorema 4.8. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom, $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten gde je $g : [a,b] \to [0,\infty]$ generator pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ je rastuća funkcija. Ako je $f : [0,1] \to [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ merljiva, rastuća funkcija, tada za svaku σ-$\oplus$-meru m i c, $d > 0$ važi:*

$$\left(\int_{[0,1]}^{\oplus} f\left(x^{\frac{1}{c}}\right) \odot dm\right) \odot \left(\int_{[0,1]}^{\oplus} f\left(x^{\frac{1}{d}}\right) \odot dm\right) \leq \int_{[0,1]}^{\oplus} f\left(x^{\frac{1}{c+d}}\right) \odot dm. \tag{4.8}$$

Dokaz. Za svako c, $d > 0$ i $x \in [0,1]$ je $x^{\frac{1}{c}} \leq x^{\frac{1}{c+d}}$. S obzirom da je f rastuća funkcija to je

$$f\left(x^{\frac{1}{c}}\right) \leq f\left(x^{\frac{1}{c+d}}\right).$$

Kako je pseudo-množenje pozitivno neopadajuća operacija i $\mathbf{0} \leq f(x) \leq \mathbf{1}$, imamo da je

$$f\left(x^{\frac{1}{c}}\right) \odot f\left(x^{\frac{1}{d}}\right) \leq f\left(x^{\frac{1}{c}}\right) \leq f\left(x^{\frac{1}{c+d}}\right).$$

Zbog monotonosti pseudo-integrala važi

$$\int_{[0,1]}^{\oplus} \left(f\left(x^{\frac{1}{c}}\right) \odot f\left(x^{\frac{1}{d}}\right)\right) \odot dm \leq \int_{[0,1]}^{\oplus} f\left(x^{\frac{1}{c+d}}\right) \odot dm.$$

Primenom nejednakosti Čebiševa za pseudo-integral (4.4) dobijamo

$$\left(\int_{[0,1]}^{\oplus} f\left(x^{\frac{1}{c}}\right) \odot dm\right) \odot \left(\int_{[0,1]}^{\oplus} f\left(x^{\frac{1}{d}}\right) \odot dm\right) \leq \int_{[0,1]}^{\oplus} f\left(x^{\frac{1}{c+d}}\right) \odot dm.$$

□

Primer 4.3. (i) Neka je $g(x) = x^{\alpha}$ za neko $\alpha \in [1, \infty)$. Odgovarajuće pseudo-operacije su $x \oplus y = \sqrt[\alpha]{x^{\alpha} + y^{\alpha}}$ i $x \odot y = xy$. Tada se (4.8) svodi na sledeću nejednakost:

$$\sqrt[\alpha]{\int_{[0,1]} f\left(x^{\frac{1}{c}}\right)^{\alpha} dx}\,\sqrt[\alpha]{\int_{[0,1]} f\left(x^{\frac{1}{d}}\right)^{\alpha} dx} \leq \sqrt{\int_{[0,1]} f\left(x^{\frac{1}{c+d}}\right)^{\alpha} dx}.$$

(ii) Ako je $g(x) = e^{x}$, tada su odgovarajuće pseudo-operacije $x \oplus y = \ln\left(e^{x} + e^{y}\right)$, $x \odot y = x + y$ i (4.8) svodi se na sledeću nejednakost:

$$\ln \int_{[c,d]} e^{f\left(x^{\frac{1}{c}}\right)} dx + \ln \int_{[c,d]} e^{f\left(x^{\frac{1}{d}}\right)} dx \leq \ln\left(\int_{[c,d]} e^{f\left(x^{\frac{1}{c+d}}\right)} dx\right).$$

Analogno se može pokazati uopštenje nejednakosti Stolarskog za slučaj kad je $x \oplus y = \sup(x, y)$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$.

Teorema 4.9. *Neka je* $([0, \infty], \sup, \odot)$ *poluprsten za koji je pseudo-množenje* $\odot$ *generisano rastućim generatorom* g. *Neka je* m sup-*mera na* $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$, *gde je* $\mathcal{B}([0,1])$ *Borelova* σ*-algebra na* $[0,1]$,

$$m(A) = ess \sup_{\mu} (\psi(x) \mid x \in A),$$

gde je μ *Lebegova mera na* $\mathbb{R}$ *i* $\psi : [0,1] \to [0, \infty]$ *neprekidna funkcija gustine i* c, $d > 0$. *Tada za svaku merljivu i rastuću funkciju* $f : [0,1] \to [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ *važi:*

$$\left(\int_{[0,1]}^{\sup} f\left(x^{\frac{1}{c}}\right) \odot dm\right) \odot \left(\int_{[0,1]}^{\sup} f\left(x^{\frac{1}{d}}\right) \odot dm\right) \leq \int_{[0,1]}^{\sup} f\left(x^{\frac{1}{c+d}}\right) \odot dm.$$

Primer 4.4. Koristeći primer 4.3(ii) imamo da je $g^{\lambda}(x) = e^{\lambda x}$. Tada

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \ln\left(e^{\lambda x} + e^{\lambda y}\right) = \max(x, y),$$

i

$$x \odot_{\lambda} y = x + y.$$

Nejednakost iz t*eoreme* 4.8 svodi se na

$$\sup_{x \in [0,1]} \left(f\left(x^{\frac{1}{c}}\right) + \psi(x)\right) + \sup_{x \in [0,1]} \left(f\left(x^{\frac{1}{d}}\right) + \psi(x)\right)$$
$$\leq \sup_{x \in [0,1]} \left(f\left(x^{\frac{1}{d+c}}\right) + \psi(x)\right),$$

gde je ψ iz *teoreme* 1.21.

Glava 5

Nejednakosti Holdera i Minkovskog za pseudo-integral

Neke od nejednakosti za Lebegov integral koje se mogu uopštiti za nelinearne integrale, uključujući pseudo-integrale, su nejednakosti Holdera i Minkovskog. U ovoj glavi dati su originalni rezultati iz [5]. U sekcijama 5.1 i 5.2 prvo su pokazane nejednakosti Holdera i Minkovskog u slučaju kad su pseudo-operacije definisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora g, zatim kad je pseudo-sabiranje idempotentna operacija dok je pseudo-množenje definisano pomoću generatora g i m kompletna sup-mera i na kraju za opšti slučaj, tj. kada je m proizvoljna σ-sup-mera. Takođe su navedene odgovarajuće nejednakosti u slučaju kada su obe pseudo-operacije idempotentne ([5]).

5.1 Holderova nejednakost za pseudo-integral

Teorema koja sledi je uopštenje Holderove nejednakosti za pseudo-integral u slučaju kad su pseudo-operacije definisane pomoću monotonog i neprekidnog generatora g.

Teorema 5.1. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom. Ako su p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$, $u, v : X \to [a, b]$ merljive funkcije i generator $g : [a, b] \to [0, \infty]$ pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ rastuća funkcija, tada za svaku σ-$\oplus$-meru m važi:*

$$\int_X^{\oplus} (u \odot v) \odot \, dm \leqslant \left(\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \odot dm \right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \odot \left(\int_X^{\oplus} v_{\odot}^{(q)} \odot dm \right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)} . \quad (5.1)$$

Dokaz. Primenom klasične Holderove nejednakosti (2.4) dobijamo

$$\begin{aligned}&\int_X (g\circ u)\,(g\circ v)\,d\,(g\circ m)\\&\leq \left(\int_X (g\circ u)^p\,d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_X (g\circ v)^q\,d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Kako je g rastuća funkcija, to je g^{-1} takođe rastuća i važi

$$\begin{aligned}&g^{-1}\left(\int_X (g\circ u)\,(g\circ v)\,d\,(g\circ m)\right)\\&\leq g^{-1}\left(\left(\int_X (g\circ u)^p\,d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_X (g\circ v)^q\,d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{q}}\right).\end{aligned}$$

tj.,

$$\begin{aligned}&g^{-1}\left(\int\limits_X g\left(g^{-1}\left((g\circ u)\,(g\circ v)\right)\right)d\,(g\circ m)\right)\\&\leq g^{-1}\left(g\left(g^{-1}\left(\left(\int\limits_X (g\circ u)^p\,d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right)\right.\\&\qquad\left.\cdot\, g\left(g^{-1}\left(\left(\int\limits_X (g\circ v)^q\,d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}&\int_X^{\oplus} (u\odot v)\odot dm\\&\leq g^{-1}\left(\left(\int_X (g\circ u)^p\,d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)\odot g^{-1}\left(\left(\int_X (g\circ v)^q\,d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{q}}\right)\end{aligned}$$

Za desnu stranu nejednakosti važi:

$$
\begin{aligned}
& g^{-1}\left(\left(\int_X (g\circ u)^p \, d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \odot g^{-1}\left(\left(\int_X (g\circ v)^q \, d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(g^{-1}\left((g\circ u)^p\right) d\,(g\circ m)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\quad \odot g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(g^{-1}\left((g\circ v)^q\right)\right) d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(u_\odot^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \odot g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(v_\odot^{(q)}\right) d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\left(g\left(g^{-1}\left(\int_X g\left(u_\odot^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\quad \odot g^{-1}\left(\left(g\left(g^{-1}\left(\int_X g\left(v_\odot^{(q)}\right) d\,(g\circ m)\right)\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&= g^{-1}\left(\left(g\left(\int_X^{\oplus} u_\odot^{(p)} \odot dm\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \odot g^{-1}\left(\left(g\left(\int_X^{\oplus} v_\odot^{(q)} \odot dm\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&= \left(\int_X^{\oplus} u_\odot^{(p)}\,(x)\, dm\right)_\odot^{\left(\frac{1}{p}\right)} \odot \left(\int_X^{\oplus} v_\odot^{(q)}\,(x)\, dm\right)_\odot^{\left(\frac{1}{q}\right)}.
\end{aligned}
$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Primer 5.1. (i) Neka je $[a,b]=[0,\infty]$ i $g(x)=x^\alpha$ za neko $\alpha\in[1,\infty)$. Odgovarajuće pseduo-operacije su $x\oplus y=\sqrt[\alpha]{x^\alpha+y^\alpha}$ i $x\odot y=xy$. Tada se (5.1) svodi na nejednakost:

$$
\sqrt[\alpha]{\int_{[c,d]} u(x)^\alpha v\,(x)^\alpha \, dx} \leqslant \sqrt[p\alpha]{\int_{[c,d]} u\,(x)^{p\alpha}\, dx}\ \sqrt[q\alpha]{\int_{[c,d]} v\,(x)^{q\alpha}\, dx}.
$$

(ii) Neka je $[a,b]=[-\infty,\infty]$ i $g(x)=e^x$. Odgovarajuće pseduo-operacije su $x\oplus y=\ln\left(e^x+e^y\right)$ i $x\odot y=x+y$. Tada se (5.1) svodi na:

$$
\ln\int_{[c,d]} e^{u(x)+v(x)}\, dx \leqslant \frac{1}{p}\ln\left(\int_{[c,d]} e^{pu(x)}\, dx\right)+\frac{1}{q}\ln\left(\int_{[c,d]} e^{qv(x)}\, dx\right).
$$

Teorema 5.2. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom. Ako su p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$ $u, v : X \to [a, b]$ merljive funkcije i generator $g : [a, b] \to [0, \infty]$ pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ opadajuća funkcija, tada za svaku σ-$\oplus$-meru m važi:*

$$\int_X^{\oplus} (u \odot v) \odot dm \geq \left(\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \odot dm \right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \odot \left(\int_X^{\oplus} v_{\odot}^{(q)} \odot dm \right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)}.$$

Dokaz. Na sličan način kao u dokazu teoreme 5.1 dobijamo

$$g^{-1}\left(\int_X (g \circ u)(g \circ v)\, d(g \circ m) \right)$$

$$\geq g^{-1}\left(\left(\int_X (g \circ u)^p \, d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X (g \circ v)^q \, d(g \circ m) \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

tj.,

$$\int_X^{\oplus} (u \odot v) \odot dm \geq \left(\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \odot dm \right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \odot \left(\int_X^{\oplus} v_{\odot}^{(q)} \odot dm \right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)}.$$

□

Posmatramo slučaj kad je $x \oplus y = \sup(x, y)$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$.

Teorema 5.3. *Neka je pseudo-množenje $\odot$ generisano rastućim generatorom g i m kompletna sup-mera, p i q konjugovani eksponeneti, $1 < p < \infty$. Tada za svake dve merljive funkcije $u, v : X \to [a, b]$ važi:*

$$\int_X^{\sup} (u \odot v) \odot dm \leq \left(\int_X^{\sup} u_{\odot}^{(p)} \odot dm \right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \odot \left(\int_X^{\sup} v_{\odot}^{(q)} \odot dm \right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)}.$$

Dokaz. Po definiciji pseudo-integrala imamo

$$\begin{aligned} \int_X^{\sup} (u \odot v) \odot dm &= \sup_{x \in X} (u(x) \odot v(x) \odot \psi(x)) \\ &= g^{-1}\left(\sup_{x \in X} (g(u(x))\, g(v(x))\, g(\psi(x))) \right), \end{aligned}$$

gde je $\psi : X \to [a, b]$ funkcija gustine pomoću koje je definisana sup-mera

m. Važi

$$\left(\int_X^{\sup} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} = g^{-1}\left(\left(\sup_{y\in X}\left(g^p\left(u\left(y\right)\right)g\left(\psi\left(y\right)\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$= g^{-1}\left(\sup_{y\in X}\left(g\left(u\left(y\right)\right)g^{\frac{1}{p}}\left(\psi\left(y\right)\right)\right)\right).$$

Slično,

$$\left(\int_X^{\sup} v_{\odot}^{(q)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)} = g^{-1}\left(\sup_{z\in X}\left(g\left(v\left(z\right)\right)g^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(z\right)\right)\right)\right).$$

Iz prethodnih jednakosti sledi

$$\left(\int_X^{\sup} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \odot \left(\int_X^{\sup} v_{\odot}^{(q)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)}$$
$$= g^{-1}\left(\sup_{y\in X}\left(g\left(u\left(y\right)\right)g^{\frac{1}{p}}\left(\psi\left(y\right)\right)\right)\cdot\sup_{z\in X}\left(g\left(v\left(z\right)\right)g^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(z\right)\right)\right)\right)$$
$$\geq g^{-1}\left(\sup_{x\in X}\left(g\left(u\left(x\right)\right)g^{\frac{1}{p}}\left(\psi\left(x\right)\right)g\left(v\left(x\right)\right)g^{\frac{1}{q}}\left(\psi\left(x\right)\right)\right)\right)$$
$$= g^{-1}\left(\sup_{x\in X}\left(g\left(u\left(x\right)\right)g\left(v\left(x\right)\right)g\left(\psi\left(x\right)\right)\right)\right)$$
$$= \int_X^{\sup}\left(u\odot v\right)\odot dm,$$

što je i trebalo pokazati.

□

Napomena 5.1. U slučaju III(a), tj. ako je $\oplus = \sup$ i $\odot = \inf$, za svako $x \in [a,b]$ i $p > 0$, $x_{\odot}^{(p)} = x$. Holderova nejednakost se u ovom slučaju svodi na nejednakost:

$$\int_X^{\sup}\left(u\odot v\right)\odot dm \leq \left(\int_X^{\sup} u\odot dm\right)\odot\left(\int_X^{\sup} v\odot dm\right),$$

tj.,

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in X}\left(\inf\left(u\left(x\right),v\left(x\right),\psi\left(x\right)\right)\right)\\&\leq\inf\left(\sup_{y\in X}\left(\inf\left(u\left(y\right),\psi\left(y\right)\right)\right),\sup_{z\in X}\left(\inf\left(v\left(z\right),\psi\left(z\right)\right)\right)\right),\end{aligned}$$

što trivijalno važi zbog distributivnosti sup i inf.

Za opšti slučaj poluprstena I(a) i III(a), tj. kada je m proizvoljna σ-sup-mera, pretpostavimo da su u i v jednostavne funkcije na $(X,\mathcal{A})$ sa vrednostima u $[a,b]$. Tada postoji konačna particija $\{E_1,...,E_n\}$ od X tako da je

$$u=\sup_{i\in\{1,2,...,n\}}u_i\odot\chi_{E_i},\quad v=\sup_{i\in\{1,2,...,n\}}v_i\odot\chi_{E_i}.$$

Ako definišemo novi prostor sa σ-algebrom $\left(Y,2^Y\right)$ sa $Y=\{y_1,...,y_n\}$, $y_i=E_i$, $i=1,...,n$, i $m_Y:2^Y\to[a,b]$, $m_Y\left(B\right)=m\left(\bigcup_{y_i\in B}A_i\right)$, očigledno je m_Y kompletna sup-mera i važi

$$\int_X^{\sup}u\odot dm=\int_Y^{\sup}u_Y\odot dm_Y,$$

gde je $u_Y\left(y_i\right)=u_i$, $i=1,...,n$. Analogno se može definisati v_Y i

$$\int_X^{\sup}v\odot dm=\int_Y^{\sup}v_Y\odot dm_Y.$$

Sada ćemo dokazati Holderov tip nejednakosti za opštu σ-sup-meru što je posledica teoreme 5.3.

Posledica 5.4. *Neka je $\odot$ generisano rastućim generatorom g i m je σ-sup-mera. Neka su p i q konjugovani eksponenti i $1<p<\infty$. Tada za sve merljive funkcije $u,v:X\to[a,b]$ važi:*

$$\int_X^{\sup}(u\odot v)\odot dm\leq\left(\int_X^{\sup}u_{\odot}^{(p)}\odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\odot\left(\int_X^{\sup}v_{\odot}^{(q)}\odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)}.\quad(5.2)$$

Dokaz. Posmatramo nizove elementarnih funkcija $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz definicije 1.14 (ii) takve da $d\left(e_n\left(x\right),u\left(x\right)\right)\to0$ i $d\left(f_n\left(x\right),v\left(x\right)\right)\to0$ uniformno kad $n\to\infty$. Tada

$$d\left(\left(e_n\odot f_n\right)\left(x\right),\left(u\odot v\right)\left(x\right)\right)\to0,\ d\left(\left(e_n\right)_{\odot}^{(p)}\left(x\right),u_{\odot}^{(p)}\left(x\right)\right)\to0$$

i $d\left((f_n)_{\odot}^{(q)}(x), v_{\odot}^{(q)}(x)\right) \to 0$ uniformno kad $n \to \infty$. Na osnovu teoreme 5.3 nejednakost (5.2) važi za svaki par (e_n, f_n), te na osnovu definicije 1.14 (ii), nejednakost (5.2) važi za par (u, v).

□

Primer 5.2. Neka je $[a, b] = [-\infty, \infty]$ i g generator $\odot$ je dat sa $g(x) = e^x$. Tada je $x \odot y = x + y$ i Holderov tip nejednakosti iz teoreme 5.3 svodi se na

$$\sup_{x\in X}(u(x) + v(x) + \psi(x)) \leq \frac{1}{p}\sup_{x\in X}(p \cdot u(x) + \psi(x)) + \frac{1}{q}\sup_{x\in X}(q \cdot v(x) + \psi(x))$$

gde u, v, ψ su proizvoljne realne funkcije na X.

5.2 Nejednakost Minkovskog za pseudo-integral

U narednoj teoremi dato je uopštenje nejednakosti Minkovskog za pseudo-integral u slučaju kad su pseudo-operacije definisane pomoću rastućeg generatora g.

Teorema 5.5. *Neka su $u, v : X \to [a, b]$ merljive funkcije i $p \in [1, \infty)$. Ako je generator $g : [a, b] \to [0, \infty]$ pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ rastuća funkcija, tada za σ-$\oplus$-meru m važi:*

$$\begin{aligned}&\left(\int_X^{\oplus} (u \oplus v)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \\ &\leqslant \left(\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \oplus \left(\int_X^{\oplus} v_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Dokaz. Primenjujući klasičnu nejednakost Minkovskog (2.5) na kompozicije $g \circ u$ i $g \circ v$ dobijamo

$$\begin{aligned}&\left(\int_X (g \circ u + g \circ u)^p \, d(g \circ m)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_X (g \circ u)^p \, d(g \circ m)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X (g \circ v)^p \, d(g \circ m)\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Kako je funkcija g rastuća, to je g^{-1} takođe rastuća funkcija i važi:

$$g^{-1}\left(\left(\int_X (g\circ u+g\circ u)^p\, d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$\leq g^{-1}\left(\left(\int_X (g\circ u)^p\, d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X (g\circ v)^p\, d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Dalje sledi:

$$g^{-1}\left(\left(\int_X [g\circ u+g\circ v]^p\, d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$=g^{-1}\left(\left(\int_X \left[g\left(g^{-1}\left(g\circ u+g\circ v\right)\right)\right]^p d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$=g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(g^{-1}\left(\left[g\left(g^{-1}\left(g\circ u+g\circ v\right)\right)\right]^p\right)\right) d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$=g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(g^{-1}\left([g\,(u\oplus v)]^p\right)\right) d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$=g^{-1}\left(\left(\int_X g\left([u\oplus v]_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$=g^{-1}\left(\left(g\left(g^{-1}\left(\int_X g\left((u\oplus v)_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$=\left(\int_X^{\oplus} (u\oplus v)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}.$$

Sa druge strane imamo:

$$g^{-1}\left(\left(\int_X (g\circ u)^p\, d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_X (g\circ v)^p\, d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$=g^{-1}\left(g\left(g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(g^{-1}\left((g\circ u)^p\right) d\,(g\circ m)\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right)\right.$$
$$\left.+\,g\left(g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(g^{-1}\left((g\circ v)^p\right)\right) d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)\right)\right)$$
$$=g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(u_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)\oplus g^{-1}\left(\left(\int_X g\left(v_{\odot}^{(p)}\,(x)\right) d\,(g\circ m)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= g^{-1}\left(\left(g\left(\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \oplus dm\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right) \oplus g^{-1}\left(\left(g\left(\int_X^{\oplus} v_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$= \left(\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \oplus \left(\int_X^{\oplus} v_{\odot}^{(q)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)}.$$

čime je tvrđenje dokazano. □

Takođe u slučaju kad je idempotentno pseudo-sabiranje $\oplus = \sup$ nejednakost Minkovskog važi. Ako je $\odot = \inf$, tada je odgovarajuća nejednakost (tada je $x_{\odot}^{(p)} = x$ za svako $x \in [a,b]$, $p > 0$)

$$\int_X^{\oplus} (u \oplus v) \odot dm \leq \sup\left(\int_X^{\oplus} u \odot dm, \int_X^{\oplus} v \odot dm\right),$$

tj.

$$\sup_{x\in X} \inf\left(\sup\left(u\left(x\right), v\left(x\right)\right), \psi\left(x\right)\right)$$
$$\leq \sup\left(\sup_{y\in X}\left(\inf\left(u\left(y\right), \psi\left(y\right)\right)\right), \sup_{z\in X}\left(\inf\left(v\left(z\right), \psi\left(z\right)\right)\right)\right),$$

što važi zbog distributivnosti sup i inf.

Sada posmatramo nejednakost Minkovskog za slučaj kad je $x \oplus y = \sup(x, y)$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$.

Teorema 5.6. *Neka je $\odot$ generisano rastućim generatorom g, m je kompletna sup-mera i $p \in (0, \infty)$. Tada za funkcije $u, v : X \to [a,b]$ važi:*

$$\left(\int_X^{\sup} (\sup(u,v))_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$$
$$= \sup\left(\left(\int_X^{\sup} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}, \left(\int_X^{\sup} v_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right). \tag{5.4}$$

Dokaz. Kao što je već pokazano u dokazu teoreme 5.3,

$$\left(\int_X^{\sup} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} = g^{-1}\left(\sup_{y\in X}\left(g\left(u\left(y\right)\right) g^{\frac{1}{p}}\left(\psi\left(y\right)\right)\right)\right),$$

i

$$\left(\int_X^{\sup} v_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} = g^{-1}\left(\sup_{z\in X}\left(g\left(v\left(z\right)\right)g^{\frac{1}{p}}\left(\psi\left(z\right)\right)\right)\right),$$

gde je ψ funkcija gustine pomoću koje je definisana sup-mera m. Tada je

$$\sup\left(\left(\int_X^{\sup} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}, \left(\int_X^{\sup} v_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right)$$

$$= g^{-1}\left(\sup\left(\sup_{y\in X}\left(g\left(u\left(y\right)\right)g^{\frac{1}{p}}\left(\psi\left(y\right)\right)\right), \sup_{z\in X}\left(g\left(v\left(z\right)\right)g^{\frac{1}{p}}\left(\psi\left(z\right)\right)\right)\right)\right)$$

$$= g^{-1}\left(\sup_{x\in X}\left(g\left(\sup\left(u\left(x\right), v\left(x\right)\right)\right)\cdot g^{\frac{1}{p}}\left(\psi\left(x\right)\right)\right)\right)$$

$$= \left(\int_X^{\sup} \left(\sup\left(u, v\right)\right)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right)_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}.$$

□

5.3 Primena nejednakosti Holdera i Minkovskog u teoriji odlučivanja

Zamena klasične strukture relnih brojeva $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sa idempotentnim poluprstenom $(P, \oplus, \odot)$ dovodi do pojma idempotentne mere koja je prvi put uvedena u [42] gde su takođe uvedeni i idempotentni integrali. Ako se posmatra poluprsten $((-\infty, \infty], \min, +)$, mera ili teorija verovatnoće može biti zamenjena optimizacijom. Verovatnoći odgovara mera troškova, slučajnoj promenljivi odgovara promenljiva odlučivanja itd. Analogija optimizacije i teorije mere prvo je proučavana u [42], dok je korespondencija između pojmova iz teorije verovatoće i optimizacije kasnije proučavana od strane više autora u [10, 11, 12, 13, 25, 26, 45]. Zakon velikih brojeva i centralna granična teorema za nezavisne promenljive odlučivanja dokazani su u [76].

5.3.1 Mera troškova i promenljive odlučivanja

Neka je $\mathbb{R}_{\min}$ idempotentni poluprsten $((-\infty, \infty], \min, +)$ i posmatramo metriku $d(x, y) = |e^{-x} - e^{-y}|$. Sledi pregled definicija i rezultata iz [13, 63].

Definicija 5.1. Neka je $(U,\mathcal{U})$ topološki prostor. Preslikavanje $\mathbb{K}$ iz $\mathcal{U}$ u $\mathbb{R}_{\min}$ je mera troškova ako važi

i) $\mathbb{K}(\emptyset) = \infty$,

ii) $\mathbb{K}(U) = 0$,

iii) $\mathbb{K}\left(\bigcup_n A_n\right) = \inf_n \mathbb{K}(A_n)$ za sve A_n iz $\mathcal{U}$.

Trojka $(U, \mathcal{U}, \mathbb{K})$ se naziva prostor odlučivanja.

Funkcija $c : U \to \mathbb{R}_{\min}$ takva da za svako $A \in \mathcal{U}$ važi $\mathbb{K}(A) = \inf_{u \in A} c(u)$ naziva se gustina troškova mere troškova $\mathbb{K}$.

Skup $D_c = \{u \in U \mid c(u) \neq \infty\}$ je domen gustine troškova c.

Od dole poluneprekidna realna funkcija c takva da je $\inf_u c(u) = 0$ definiše meru troškova na $(U, \mathcal{U})$ na sledeći način $\mathbb{K}(A) = \inf_{u \in A} c(u)$ ([11]). Takođe postoji minimalno proširenje $\mathbb{K}_*$ mere troškova $\mathbb{K}$ na partitivnom skupu skupa U ([38, 43]).

Analogno slučajnim promenljivima definišu se promenljive odlučivanja.

- Promenljiva odlučivanja X na $(U, \mathcal{U}, \mathbb{K})$ je preslikavanje iz U u E (topološki prostor sa prebrojivom bazom). Ona indukuje meru troškova $\mathbb{K}_X$ na $(E, \mathcal{B})$, gde je $\mathcal{B}$ skup otvorenih podskupova od E, definisanu sa
$$\mathbb{K}_X(A) = \mathbb{K}_*\left(X^{-1}(A)\right)$$
za sve $A \in \mathcal{B}$. Mera troškova $\mathbb{K}_X$ ima od dole poluneprekidnu funkciju gustine c_X. Kada je $E = \mathbb{R}$ promenljiva odlučivanja X naziva se realna promenljiva odlučivanja. Ako je $E = \mathbb{R}_{\min}$, tada se X naziva promenljiva troškova.

- Dve promenljive odlučivanja su nezavisne ako važi:
$$c_{X,Y}(x, y) = c_X(x) + c_Y(y).$$

- Uslovni višak troškova od X znajući Y je definisan sa:
$$c_{X|Y}(x, y) = \mathbb{K}_*(X = x \mid Y = y) = c_{X,Y}(x, y) - c_Y(y).$$

- Optimum promenljive odlučivanja je
$$\mathbb{O}(X) = \arg\min_{x \in E} \operatorname{conv}(c_X)(x)$$
kad minimum postoji. Sa conv označena je od dole poluneprekidna konveksna obvojnica i arg min je tačka u kojoj se dostiže minimum. Ako je $\mathbb{O}(X) = 0$, kažemo da je promenljiva odlučivanja X centrirana.

- Ako je optimum promenljive odlučivanja X jedinstven, i kada je blizu optimuma, imamo:

$$\operatorname{conv}\left(c_X\left(x\right)\right) = \frac{1}{p}\left\|\sigma^{-1}\left(x - \mathbb{O}\left(X\right)\right)\right\|^p + o\left(\left\|x - \mathbb{O}\left(X\right)\right\|^p\right),$$

definišemo senzitivnost (osetljivost) reda p od $\mathbb{K}$ sa $\mathbb{S}^p\left(X\right) = \sigma$, gde je o uobičajena oznaka za asimptotsko ponašanje u matematičkoj analizi. Kada promenljiva odlučivanja ispunjava uslov $\mathbb{S}^p\left(X\right) = I$ (jedinična matrica), kažemo da je X reda p i da je normalizovana (videti [13, 63]).

- Srednji broj (sredina) promenljive odlučivanja X je

$$\mathbb{V}\left(X\right) = \inf_x \left(x + c_X\left(x\right)\right),$$

dok je uslovni srednji broj definisan sa

$$\mathbb{V}\left(X \mid Y = y\right) = \inf_x \left(x + c_{X|Y}\left(x, y\right)\right).$$

Napomena 5.2. Kako je poluprsten $\left(\left(-\infty, \infty\right], \min, +\right)$ specijalan slučaj poluprstena I b) iz sekcije 1.3.1 gde je $\mathbf{0} = \infty$ i $\mathbf{1} = 0$, to je $\mathbb{K}_*$ σ-$\oplus$-mera, odnosno pseudo-verovatnoća definisana u sekciji 1.3.4. Srednji broj promenljive odlučivanja X je pseudo-integral u odnosu na $\mathbb{K}_X$, odnosno pseudo-očekivanje.

Može se uvesti prostor promenljivih odlučivanja analogno standardnom L^p prostoru, [13].

Teorema 5.7. *Za $p > 0$ sa*

$$\left|X\right|_p = \inf\left\{\sigma \mid c_X\left(x\right) \geq \frac{1}{p}\left|\frac{x - \mathbb{O}\left(X\right)}{\sigma}\right|^p\right\}$$

i

$$\left\|X\right\|_p = \left|X\right|_p + \left|\mathbb{O}\left(X\right)\right|$$

definisane su respektivno seminorma i norma na vektorskom prostoru $\mathbb{L}^p$ realnih promenljivih odlučivanja koje imaju jedinstven optimum i takvih da je $\left\|X\right\|_p$ konačno.

Važi sledeća teorema, videti [13].

Teorema 5.8. *Za dve nezavisne realne promenljive odlučivanja X, Y i $k \in \mathbb{R}$ važi (ako leve i desne strane postoje):*

$$\begin{aligned}
\mathbb{O}(X+Y) &= \mathbb{O}(X)+\mathbb{O}(Y), \\
\mathbb{O}(kX) &= k\mathbb{O}(X), \\
\mathbb{S}^p(kX) &= |k|\,\mathbb{S}^p(X), \\
\left[\mathbb{S}^p(X+Y)\right]^{p'} &= \left[\mathbb{S}^p(X)\right]^{p'}+\left[\mathbb{S}^p(Y)\right]^{p'}, \\
\left(|X+Y|_p\right)^{p'} &\leq \left(|X|_p\right)^{p'}+\left(|Y|_p\right)^{p'}, \ \text{gde je} \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \\
|X+Y|_p &\leq \max\left(|X|_p, |Y|_p\right) \ \text{za } p \leq 1.
\end{aligned}$$

Sledeća nejednakost je nejednakost Čebiševa za promenljivu odlučivanja [13].

Teorema 5.9. *Za promenljivu odlučivanja iz prostora $\mathbb{L}^p$ važi:*

$$\mathbb{K}\left(|x-\mathbb{O}(X)| \geq a\right) \geq \frac{1}{p}\left(\frac{a}{|X|_p}\right)^p,$$

$$\mathbb{K}\left(|X| \geq a\right) \geq \frac{1}{p}\left(\frac{\left(a-\|X\|_p\right)^+}{\|X\|_p}\right)^p.$$

5.3.2 Nejednakosti Holdera i Minkovskog u teoriji odlučivanja

U ovoj sekciji date su nejednakosti vezane za srednji broj promenljive odlučivanja koje su analogne nejednakostima (2.6), (2.7) vezanih za matematička očekivanja slučajnih promenljivih u klasičnoj teoriji verovatnoće.

Srednji broj promenljive odlučivanja, definisan u sekciji 5.3.1, je pseudo-integral u odnosu na σ-$\oplus$-meru $\mathbb{K}_*$, tj.

$$\mathbb{V}(X) = \int_U^{\inf} X \odot d\mathbb{K}_*.$$

Dakle, primenjujući notaciju iz ove glave nejednakosti Holdera i Minkovskog dokazane u sekcijama 5.1, 5.2 imaju sledeći oblik, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 5.10. *Neka je* $(U,\mathcal{U},\mathbb{K})$ *prostor odlučivanja. Ako su* X *i* Y *promenljive troškova, tada važe respektivno nejednakost Holdera i Minkovskog, tj. važe sledeće nejednakosti:*

$$\mathbb{V}\left(X+Y\right) \geq \frac{1}{p}\mathbb{V}\left(pX\right) + \frac{1}{q}\mathbb{V}\left(qY\right),$$

gde su p *i* q *konjugovani eksponenti,* $1 < p < \infty$ *i*

$$\frac{1}{p}\mathbb{V}\left(p\inf\left(X,Y\right)\right) = \inf\left(\frac{1}{p}\mathbb{V}\left(pX\right), \frac{1}{p}\mathbb{V}\left(pY\right)\right),$$

gde $p \in (0,\infty)$.

U [25] polazeći od poluprstena $\left([-\infty,\infty), \sup, +\right)$ dokazane su odgovarajuće nejednakosti za idempotentni integral uveden u [42] koje takođe imaju primenu u teoriji odlučivanja. Naime, važe nejednakosti Holdera i Minkovskog u obliku

$$\mathbb{E}\left(X+Y\right) \leq \frac{1}{p}\mathbb{E}\left(pX\right) + \frac{1}{q}\mathbb{E}\left(qY\right),$$

gde su p i q konjugovani eksponenti, $0 < p \leq q < \infty$ i

$$\frac{1}{p}\mathbb{E}\left(p\sup\left(X,Y\right)\right) = \sup\left(\frac{1}{p}\mathbb{E}\left(pX\right), \frac{1}{p}\mathbb{E}\left(pY\right)\right),$$

gde je $p \in (0,\infty)$ i $\mathbb{E}\left(X\right)$ srednji broj promenljive odlučivanja definisan preko sup-integrala (videti [42]).

Glava 6

Uopštenje L^p prostora

U teoriji mere prilikom uvođenja i pokazivanja osobina klasičnog L^p prostora veoma važnu ulogu imaju klasične nejednakosti za Lebegov integral. Integralne nejednakosti za pseudo-integral se slično mogu primeniti prilikom uopštavanja klasičnog L^p prostora.

Neka je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom, m σ-$\oplus$-mera i $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten na intervalu $[a,b] \subset [-\infty, +\infty]$.

Definicija 6.1. Neka je A neprazan skup. Funkcija $d_\oplus : A \times A \to [a,b]_+$ takva da

(UM1) za sve $x, y \in A$ važi $d_\oplus(x,y) = \mathbf{0}$ akko $x = y$,

(UM2) za sve $x, y \in A$ važi $d_\oplus(x,y) = d_\oplus(y,x)$,

(UM3) postoji $c \in [a,b]_+$ takvo da za sve $x, y, z \in A$ važi

$$d_\oplus(x,y) \preceq c \odot (d_\oplus(x,z) \oplus d_\oplus(z,y))$$

je uopštena metrika na A.

Primer 6.1. Neka je $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten sa pseudo-operacijama koje su definisane pomoću rastućeg i neprekidnog generatora g. Ako je funkcija $d_\oplus : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]$ definisana sa

$$d_\oplus(x,y) = g^{-1}(|g(x) - g(y)|), \tag{6.1}$$

tada je $d_\oplus$ uopštena metrika na $[a,b]$ i $c = \mathbf{1}$.

Primer 6.2. U poluprstenu $([a,b], \oplus, \odot)$ gde je $x \oplus y = \sup(x,y)$, $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$ i g rastuća i neprekidna funkcija, funkcija $d_{\oplus} : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]$ definisana takođe sa (6.1) je uopštena metrika na $[a,b]$ i $c = g^{-1}(2)$. Kako prve dve osobine slede direktno iz definicije funkcije $d_{\oplus}$, pokazaćemo samo treću osobinu.

$$\begin{aligned} d_{\oplus}(x,y) &= g^{-1}(|g(x) - g(y)|) \\ &\leq g^{-1}(|g(x) - g(z)| + |g(z) - g(y)|) \\ &\leq g^{-1}(2\sup(|g(x) - g(z)|, |g(z) - g(y)|)) \\ &= g^{-1}\left(2g\left(\sup\left(g^{-1}(|g(x) - g(z)|), g^{-1}(|g(z) - g(y)|)\right)\right)\right) \\ &= g^{-1}(2) \odot (d_{\oplus}(x,z) \oplus d_{\oplus}(z,y)). \end{aligned}$$

□

Primer 6.3. U [25] posmatran je poluprsten $([-\infty,\infty), \oplus, \odot)$ gde je $x \oplus y = \sup(x,y)$ i $x \odot y = x + y$. Uopštena metrika je definisana sa $d_{\oplus}(x,y) = \log|e^x - e^y|$. Uslov (UM3) je ispunjen za $c = \log 2$.

Za $0 < p < \infty$ i $u, v : X \to [a,b]$ merljive funkcije posmatramo

$$D_{p\oplus}(u,v) = \left[\int_X^{\oplus} (d_{\oplus}(u,v))_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}.$$

Ako je $p = \infty$, tada je

$$D_{\infty\oplus}(u,v) = \inf\{\alpha \in [a,b] \mid m(\{x \in X \mid d_{\oplus}(u(x), v(x)) \geq \alpha\}) = \mathbf{0}\}.$$

Definicija 6.2. Neka za funkciju $f : X \to [a,b]$ izraz $D_{p\oplus}(f, \mathbf{0})$ ima konačnu vrednost u smislu poluprstena $([a,b], \oplus, \odot)$, tj. ako $\oplus$ indukuje uobičajeni poredak, $D_{p\oplus}(f,\mathbf{0}) \prec b$, a ako $\oplus$ indukuje poredak obrnut uobičajenom, znači da je $D_{p\oplus}(f,\mathbf{0}) \prec a$. Skup svih takvih funkcija obeležavamo sa $\mathcal{L}_{\oplus}^{p}$, dok skup funkcija za koje $D_{\infty\oplus}(f,\mathbf{0})$ ima konačnu vrednost u smislu poluprstena $([a,b], \oplus, \odot)$ obeležićemo sa $\mathcal{L}_{\oplus}^{\infty}$.

Neka je u nastavku rada $([a,b], \oplus, \odot)$ poluprsten sa pseudo-operacijama koje su definisane pomoću rastućeg i neprekidnog generatora g ili poluprsten kod koga je $x \oplus y = \sup(x, y)$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$ gde je g rastuća i neprekidna funkcija. Neka je uopštena metrika $d_{\oplus}$ na $[a, b]$ definisana sa (6.1), tada je

$$D_{p\oplus}(f, \mathbf{0}) = \left[\int_X^{\oplus} f_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$$

i

$$D_{\infty\oplus}(f, \mathbf{0}) = \inf\left\{\alpha \in [a, b] \mid m\left(\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}\right) = \mathbf{0}\right\}.$$

Za dve merljive funkcije u i v kažemo da su jednake skoro svuda u odnosu na σ-$\oplus$-meru m na X, u oznaci $u = v$ *m-a.e.*, ako važi

$$m\left(\{x \mid u(x) \neq v(x)\}\right) = \mathbf{0}.$$

Funkcija $D_{p\oplus}$ ne zadovoljava prvu osobinu iz definicije 6.1. Naime, iz osobina pseudo-integrala imamo da ako $u = v$ *m-a.e.*, tada je $D_{p\oplus}(u, v) = \mathbf{0}$. Slično kao u klasičnoj teoriji mere, posmatraćemo klase ekvivalencije u kojima se nalaze sve funkcije iz $\mathcal{L}_{\oplus}^p$ koje su jednake skoro svuda u odnosu na σ-$\oplus$-meru m na skupu X. Skup čiji su elementi klase ekvivalencije obeležićemo sa $L_{\oplus}^p$. Ako su U i V dve klase ekvivalencije iz $L_{\oplus}^p$, tada je

$$D_{p\oplus}(U, V) = D_{p\oplus}(u, v),$$

gde $u \in U$ i $v \in V$. U daljem tekstu ćemo govoriti o elementima $L_{\oplus}^p$ kao o funkcijama koje predstavljaju klasu ekvivalencije.

Napomena 6.1. U [25] polazeći od poluprstena $([-\infty, \infty), \sup, +)$, uopštene metrike iz primera 6.3 i idempotentnog integrala uvedenog u [42] analogno se uvodi odgovarajuće uopštenje klasičnog L^p prostora.

Teorema 6.1. *Ako je $([a, b], \oplus, \odot)$ poluprsten sa pseudo-operacijama koje su definisane pomoću rastućeg i neprekidnog generatora g (respektivno poluprsten kod koga je $x \oplus y = \sup(x, y)$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$) i $1 \leq p \leq \infty$ (respektivno $0 < p \leq \infty$), tada je $D_{p\oplus}$ uopštena metrika na $L_{\oplus}^p$.*

Dokaz. Osobine (UM1) i (UM2) iz definicije 6.1 očigledno važe.

Kao posledicu aditivnosti pseudo-integrala za $p = 1$ imamo sledeću nejednakost:

$$D_{p\oplus}(u, v) \leq c \odot \left(D_{p\oplus}(u, w) \oplus D_{p\oplus}(w, v)\right), \tag{6.2}$$

odnosno $D_{p\oplus}$ zadovoljava osobinu (UM3) iz definicije 6.1.
Ako posmatramo poluprsten sa pseudo-operacijama koje su definisane pomoću rastućeg i neprekidnog generatora g prethodna nejednakost važi i kad

je $1 < p < \infty$ što je posledica nejednakosti Minkovskog (5.3), dok u slučaju poluprstena kod koga je $x \oplus y = \sup(x, y)$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$ ta nejednakost je ispunjena za $0 < p < \infty$ što je posledica nejednakosti (5.4).

Pokazaćemo da nejednakost (6.2) važi i za $D_{\infty\oplus}$.

Neka je

$$\mathcal{S}(u, v) = \{\alpha \in [a, b] \mid m(\{x \in X \mid d_{\oplus}(u(x), v(x)) \geq \alpha\}) = \mathbf{0}\}.$$

Ako pretpostavimo da $\alpha_1 \in \mathcal{S}(u, w)$ i $\alpha_2 \in \mathcal{S}(w, v)$, tada $c \odot (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \in \mathcal{S}(u, v)$. Važi:

$$\begin{aligned} D_{\infty\oplus}(u, v) &= \inf\{\alpha \in [a, b] \mid \alpha \in \mathcal{S}(u, v)\} \\ &\leq \inf\{c \odot (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \mid \alpha_1 \in \mathcal{S}(u, w), \alpha_2 \in \mathcal{S}(w, v)\} \\ &\leq c \odot (D_{\infty\oplus}(u, w) \oplus D_{\infty\oplus}(w, v)). \end{aligned}$$

Funkcija $D_{p\oplus}$ zadovoljava uslove definicije 6.1 te je uopštena metrika na $L^p_{\oplus}$.

$\square$

Teorema koja sledi je posledica nejednakosti Minkovskog za pseudo-integral (5.3).

Teorema 6.2. *Neka je m σ-$\oplus$-mera. Ako $u \in L^p_{\oplus}$ i $v \in L^p_{\oplus}$, $\lambda \in [a, b)$, $1 \leq p < \infty$ i generator $g : [a, b] \to [0, \infty]$ pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ je rastuća funkcija, tada $u \oplus v \in L^p_{\oplus}$ i $\lambda \odot u \in L^p_{\oplus}$.*

Dokaz. Neka $p \in [1, \infty)$. Kako $u \in L^p_{\oplus}$ i $v \in L^p_{\oplus}$, to važi

$$\left[\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \prec b \text{ i } \left[\int_X^{\oplus} v_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \prec b.$$

Primenom nejednakosti Minkovskog, teoreme 5.5, dobijamo

$$\left[\int_X^{\oplus} (u \oplus v)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \prec b \oplus b \preceq b,$$

odnosno $u \oplus v \in L^p_{\oplus}$.

Ako $u \in L^p_{\oplus}$ i $\lambda \in [a, b)$, zbog osobina pseudo-integrala i pseudo-stepena važi:

$$\left[\int_X^{\oplus} (\lambda \odot u)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} = \lambda \odot \left[\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \prec b \odot b \preceq b,$$

tj. $\lambda \odot u \in L^p_{\oplus}$. $\square$

Analogno se može pokazati sledeća teorema, što je posledica teoreme 5.6.

Teorema 6.3. *Neka je $\odot$ generisano rastućim generatorom g, m je σ-sup-mera i $p \in (0, \infty)$. Ako $u, v \in L^p_{\oplus}$ i $\lambda \in [a, b)$, tada $u \oplus v \in L^p_{\oplus}$ i $\lambda \odot u \in L^p_{\oplus}$.*

Slede posledice Holderove nejednakosti za pseudo-integral.

Teorema 6.4. *Neka je m σ-$\oplus$-mera i p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$. Ako $u \in L^p_{\oplus}$ i $v \in L^q_{\oplus}$, i generator $g : [a, b] \to [0, \infty]$ pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ je rastuća funkcija, tada $u \odot v \in L^1_{\oplus}$.*

Dokaz. Kako $u \in L^p_{\oplus}$ i $v \in L^q_{\oplus}$, to važi

$$\left[\int_X^{\oplus} u_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \prec b \text{ i } \left[\int_X^{\oplus} v_{\odot}^{(q)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)} \prec b.$$

Primenom Holderove nejednakosti, teoreme 5.1, dobijamo

$$\int_X^{\oplus} (u \odot v) \odot dm \prec b \odot b \preceq b,$$

odnosno $u \odot v \in L^1_{\oplus}$. $\square$

Analogno se može pokazati da važe sledeće teoreme.

Teorema 6.5. *Neka je m σ-$\oplus$-mera i p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$. Ako $u \in L^p_{\oplus}$ i $v \in L^q_{\oplus}$, i generator $g : [a, b] \to [0, \infty]$ pseudo-sabiranja $\oplus$ i pseudo-množenja $\odot$ je opadajuća funkcija, tada $u \odot v \in L^1_{\oplus}$.*

Teorema 6.6. *Neka je $\odot$ generisano rastućim generatorom g, m je σ-sup-mera i p i q konjugovani eksponenti, $1 < p < \infty$. Ako $u \in L^p_{\oplus}$ i $v \in L^q_{\oplus}$, tada $u \odot v \in L^1_{\oplus}$.*

Sledi uopštenje odgovarajuće teoreme iz klasične teorije mere koja je takođe posledica Holderove nejednakosti za pseudo-integral.

Teorema 6.7. *Ako je $m(X) < b$ i $0 < s < p \leq \infty$, tada važi $L^p_{\oplus} \subset L^s_{\oplus}$.*

Dokaz. Neka je $m(X) < b$, $0 < s < p < \infty$ i $f \in L^p_{\oplus}$. Uvrštavajući $u = f_{\odot}^{(s)}$ i $v = \mathbf{1}$ u Holderovu nejednakost (5.1) ili (5.2) u zavisnosti od tipa poluprstena, dobijamo

$$
\begin{aligned}
&\left[\int^{\oplus}\left(f_{\odot}^{(s)}\odot\mathbf{1}\right)\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{s}\right)}\\
&\leq\left[\int^{\oplus}\left(f_{\odot}^{(s)}\right)_{\odot}^{\left(\frac{p}{s}\right)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\odot\left[\int^{\oplus}(\mathbf{1})_{\odot}^{\left(\frac{p}{p-s}\right)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\left(1-\frac{s}{p}\right)\frac{1}{s}\right)}\\
&=\left[\int^{\oplus}\left(f_{\odot}^{(s)}\right)_{\odot}^{\left(\frac{p}{s}\right)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\odot\left[m\left(X\right)\right]_{\odot}^{\left(\frac{p-s}{ps}\right)}\\
&=\left[m\left(X\right)\right]_{\odot}^{\left(\frac{p-s}{ps}\right)}\odot\left[\int^{\oplus}f_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)},
\end{aligned}
$$

odakle sledi $\left[\int^{\oplus}f_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}<b$, odnosno $f\in L_{\oplus}^{p}$.

Neka je $0<s<p$, $p=\infty$ i $f\in L_{\oplus}^{\infty}$. Tvrđenje sledi iz nejednakosti

$$f\left(x\right)\leq D_{\infty\oplus}\left(f,\mathbf{0}\right)$$

za m skoro svako x. □

6.1 Vrste konvergencija

Integralne nejednakosti imaju primenu u dokazivanju teorema konvergencije. U ovoj sekciji biće uvedeno nekoliko vrsta konvergencija za pseudo-integral.

Definicija 6.3. Neka je $(X,\mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom, m σ-$\oplus$-mera, $\{f_n\}$ niz funkcija iz $L_{\oplus}^{p}$, $f_n : X\to[a,b]$ i $f : X\to[a,b]$ funkcija iz $L_{\oplus}^{p}$.

i) Niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p $(p>0)$ ka funkciji f ako

$$\lim_{n\to\infty}D_{p\oplus}\left(f_n,f\right)=\mathbf{0}.$$

ii) Niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p $(p>0)$ ako

$$\lim_{n,m\to\infty}D_{p\oplus}\left(f_n,f_m\right)=\mathbf{0}.$$

iii) Niz $\{f_n\}$ konvergira u σ-$\oplus$-meri m reda p $(p > 0)$ ka funkciji f na A ako

$$\lim_{n\to\infty} m\left(A \cap \left\{x \mid (d_\oplus(f_n, f))_\odot^{(p)} \geq \varepsilon\right\}\right) = \mathbf{0}$$

za svako $\varepsilon > \mathbf{0}$. Ako je $A = X$, onda se kaže da niz $\{f_n\}$ konvergira u σ-$\oplus$-meri m reda p $(p > 0)$ ka funkciji f.

iv) Niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u σ-$\oplus$-meri m reda p $(p > 0)$ na A ako

$$\lim_{n,m\to\infty} m\left(A \cap \left\{x \mid (d_\oplus(f_n, f_m))_\odot^{(p)} \geq \varepsilon\right\}\right) = \mathbf{0}$$

za svako $\varepsilon > \mathbf{0}$. Ako je $A = X$, onda se kaže da niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u σ-$\oplus$-meri m reda p $(p > 0)$.

Veza između ovih tipova konvergencija biće posmatrana u zavisnosti od tipa poluprstena.

6.1.1 Teoreme konvergencije za pseudo-integrale u generisanom poluprstenu

Posmatrajmo poluprsten $([a,b], \oplus, \odot)$ sa pseudo-operacijama koje su definisane pomoću rastućeg i neprekidnog generatora g. Neka je $d_\oplus$ uopštena metrika na $[a,b]$ definisana sa

$$d_\oplus(x,y) = g^{-1}(|g(x) - g(y)|).$$

U teoremama koje slede pretpostavljamo da je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom i m σ-$\oplus$-mera.

Teorema 6.8. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p, onda on konvergira u σ-$\oplus$-meri m reda p.*

Dokaz. Neka niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p. Na osnovu nejednakosti Čebiševa (4.1) imamo

$$\varepsilon \odot m\left(\left\{x \mid (d_\oplus(f_n, f))_\odot^{(p)} \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \int^\oplus \left(d_\oplus(f_n, f)_\odot^{(p)}\right) \odot dm,$$

što je ekvivalentno sa

$$m\left(\left\{x \mid (d_\oplus(f_n, f))_\odot^{(p)} \geq \varepsilon\right\}\right) \leq g^{-1}\left(\frac{1}{g(\varepsilon)}\right) \odot \int^\oplus (d_\oplus(f_n, f))_\odot^{(p)} \odot dm,$$

$g(\varepsilon) \neq 0$ jer $\varepsilon > \mathbf{0}$.
Kako je $m(A) \geq \mathbf{0}$ za svako $A \in \mathcal{A}$ i $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p to je

$$\lim_{n\to\infty} m\left(\left\{x \mid (d_\oplus(f_n, f))_\odot^{(p)} \geq \varepsilon\right\}\right) = \mathbf{0}.$$

□

Analogno se može dokazati sledeća teorema.

Teorema 6.9. *Ako niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p, onda on fundamentalno konvergira u σ-$\oplus$-meri m reda p.*

Primenjujući nejednakost Minkovskog za pseudo-integral (2.5) može se pokazati da iz konvergencije niza funkcija u srednjem redu p sledi fundamentalna konvergencija u srednjem redu p. Međutim, važi i obrnuto. Teorema koja sledi je posledica kompletnosti klasičnog L^p prostora.

Teorema 6.10. *Niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p i generator pseudo-operacija g je rastuća funkcija akko fundamentalno konvergira u srednjem redu p.*

Dokaz. Neka niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p ka funkciji f. Kako je

$$\int_X^\oplus (d_\oplus(f_n, f))_\odot^{(p)} \odot dm = g^{-1}\left(\int_X |g(f_n) - g(f)|^p \, d(g \circ m)\right)$$

to niz $\{g(f_n)\}$ konvergira u srednjem redu p u $L^p(g \circ m)$ ka funkciji $g(f)$. Iz kompletnosti klasičnog prostora $L^p(g \circ m)$ sledi da niz $\{g(f_n)\}$ konvergira u srednjem redu p u $L^p(g \circ m)$ akko niz $\{g(f_n)\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p. Odakle sledi tvrđenje. □

Još jedna primena nejednakosti Holdera (5.1) dokazana je u teoremi koja sledi.

Teorema 6.11. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p i $0 < p' < p < \infty$, tada niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu $p\prime$.*

Dokaz. Neka niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p i $0 < p' < p < \infty$. Uvrštavajući $u = (d_\oplus(f_n, f))_\odot^{(p')}$ i $v = \mathbf{1}$ u Holderovu nejednakost (5.1), dobijamo

$$\int^{\oplus}\left((d_{\oplus}(f_n,f))_{\odot}^{(p')}\odot \mathbf{1}\right)\odot dm$$

$$\leq\left[\int^{\oplus}\left(d_{\oplus}(f_n,f)_{\odot}^{(p')}\right)_{\odot}^{\left(\frac{p}{p'}\right)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{p'}{p}\right)}\odot\left[\int^{\oplus}(\mathbf{1})_{\odot}^{(q)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)}$$

$$=\left[\int^{\oplus}\left(d_{\oplus}(f_n,f)_{\odot}^{(p')}\right)_{\odot}^{\left(\frac{p}{p'}\right)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{p'}{p}\right)}\odot[m(X)]_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)}$$

$$=[m(X)]_{\odot}^{\left(\frac{1}{q}\right)}\odot\left[\int^{\oplus}\left(d_{\oplus}(f_n,f)_{\odot}^{(p)}\right)\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{p'}{p}\right)}.$$

Odakle sledi $\lim\limits_{n\to\infty}\int^{\oplus} d_{\oplus}(f_n,f)_{\odot}^{(p')}\odot dm=\mathbf{0}$. □

Analogno se može pokazati sledeća teorema.

Teorema 6.12. *Ako niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p, $0<p'<p<\infty$, tada niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu $p\prime$.*

Teorema 6.13. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p, $1\leq p<\infty$ i generator pseudo-operacija g je rastuća funkcija, tada*

$$\lim_{n\to\infty}\int^{\oplus}(f_n)_{\odot}^{(p)}\odot dm=\int^{\oplus} f_{\odot}^{(p)}\odot dm.$$

Dokaz. Neka je $1\leq p<\infty$. Primenjujući nejednakost Minkovskog za pseudo-integral (2.5) dobijamo

$$\left[\int^{\oplus}(f_n)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$$

$$\leq\left[\int^{\oplus}(d_{\oplus}(f_n,f)\oplus d_{\oplus}(f,\mathbf{0}))_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$$

$$\leq\left[\int^{\oplus} d_{\oplus}(f_n,f)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\oplus\left[\int^{\oplus} d_{\oplus}(f,\mathbf{0})_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)},$$

što je ekvivalentno sa

$$\left[\int g\left((f_n)_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left[\int g\left(d_{\oplus}\,(f_n,f)_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int g\left((f)_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Analogno se dobija

$$\left[\int g\left((f)_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left[\int g\left(d_{\oplus}\,(f_n,f)_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int g\left((f_n)_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Iz prethodne dve nejednakosti sledi

$$\left|\left[\int g\left((f_n)_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}} - \left[\int g\left(f_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}}\right|$$

$$\leq \left[\int g\left(d\,(f_n,f)_{\odot}^{(p)}\right) d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}},$$

što je ekvivalentno sa

$$d\left(\left[\int^{\oplus} (f_n)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}, \left[\int^{\oplus} f_{\odot}^{(p)} d\,(g\circ m)\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\leq g\left(\left[\int^{\oplus} d_{\oplus}\,(f_n,f)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right).$$

Odakle sledi

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\left[\int^{\oplus} (f_n)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}, \left[\int^{\oplus} f_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right) = 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$\lim_{n\to\infty} \int^{\oplus} (f_n)_{\odot}^{(p)} \odot dm = \int^{\oplus} f_{\odot}^{(p)} \odot dm.$$

□

6.1.2 Teoreme konvergencije za pseudo-integrale u poluprstenu $([a,b], \sup, \odot)$

U ovoj sekciji posmatraćemo poluprsten $([a,b], \oplus, \odot)$ kod koga je $x \oplus y = \sup(x,y)$ i $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$, gde je g rastuća i neprekidna funkcija. Neka je $d_{\oplus}$ uopštena metrika na $[a,b]$ definisana sa

$$d_{\oplus}(x,y) = g^{-1}(|g(x) - g(y)|).$$

U teoremama koje slede pretpostavljamo da je $(X, \mathcal{A})$ prostor sa σ-algebrom i m kompletna sup-mera.

Analogno dokazima teoreme 6.8 i 6.9 mogu se pokazati i sledeće teoreme.

Teorema 6.14. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p, onda on konvergira u σ-$\oplus$-meri m reda p.*

Teorema 6.15. *Ako niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p, onda on fundamentalno konvergira u σ-$\oplus$-meri m reda p.*

Teorema 6.16. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p, $0 < p < \infty$ i generator pseudo-množenja g je rastuća funkcija, tada taj niz fundamentalno konvergira u srednjem redu p.*

Dokaz. Neka je $0 < p < \infty$. Pretpostavimo da $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p ka funkciji f. Primenom nejednakosti Minkovskog (5.4) dobijamo

$$\left[\int^{\sup} d_{\oplus}(f_n, f_m)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}$$

$$\leq g^{-1}(2) \odot \left(\left[\int^{\sup} (d_{\oplus}(f_n, f))_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right.$$

$$\left.\oplus \left[\int^{\sup} (d_{\oplus}(f_m, f))_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right)$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} & \left(g^{-1}(2)\odot\left(\left[\int^{\sup}(d_{\oplus}(f_n,f))_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right.\right. \\
& \left.\left.\oplus\left[\int^{\sup}(d_{\oplus}(f_m,f))_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right)\right) \\
= \quad & g^{-1}(2)\odot(\mathbf{0}\oplus\mathbf{0})=\mathbf{0},
\end{aligned}$$

to je

$$\lim_{n,m\to\infty}\int^{\sup} d_{\oplus}(f_n,f_m)_{\odot}^{(p)}\odot dm=\mathbf{0}.$$

□

Važi i obrnuto, tj. važi sledeća teorema.

Teorema 6.17. *Ako niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p, $0<p<\infty$ i generator pseudo-množenja g je rastuća funkcija, tada taj niz konvergira u srednjem redu p.*

Dokaz. Neka je $m(A)=\sup\limits_{x\in A}\psi(x)$ za svako $A\in\mathcal{A}$. Pretpostavimo da $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p. Kako je

$$\begin{aligned}
& \left[\int^{\sup} d_{\oplus}(f_n,f_m)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} \\
&= g^{-1}\left(\sup_{x\in X}\left(|g(f_n(x))-g(f_m(x))|\,g^{\frac{1}{p}}(\psi(x))\right)\right) \\
&= g^{-1}\left(\sup_{x\in X}\left|g(f_n(x))\,g^{\frac{1}{p}}(\psi(x))-g(f_m(x))\,g^{\frac{1}{p}}(\psi(x))\right|\right),
\end{aligned}$$

to imamo

$$\lim_{n,m\to\infty}\left(\sup_{x\in X}\left|g(f_n(x))\,g^{\frac{1}{p}}(\psi(x))-g(f_m(x))\,g^{\frac{1}{p}}(\psi(x))\right|\right)=0.$$

Uzmimo da je $h_n(x)=g(f_n(x))\,g^{\frac{1}{p}}(\psi(x))$. Po Košijevom kriterijumu za uniformnu konvergenciju funkcionalnih nizova sledi da funkcionalni niz $\{h_n\}$ uniformno konvergira ka funkciji $h(x)=g(f(x))\,g^{\frac{1}{p}}(\psi(x))$, tj.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in X}\left|g(f_n(x))\,g^{\frac{1}{p}}(\psi(x))-g(f(x))\,g^{\frac{1}{p}}(\psi(x))\right|\right)=0.$$

Po definiciji pseudo-integrala to je

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f_n, f\right)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)} = \mathbf{0}.$$

□

Kako Košijev kriterijum daje potreban i dovoljan uslov za uniformnu konvergenciju funkcionalnih nizova, teorema 6.16 je takođe posledica ovog kriterijuma.

Kao posledicu Holderove nejednakosti (5.3) imamo sledeću teoremu.

Teorema 6.18. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu p i $0 < p' < p < \infty$, tada niz $\{f_n\}$ konvergira u srednjem redu $p\prime$.*

Analogno se može pokazati sledeća teorema.

Teorema 6.19. *Ako niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu p, $0 < p' < p < \infty$, tada niz $\{f_n\}$ fundamentalno konvergira u srednjem redu $p\prime$.*

Teorema 6.20. *Ako niz $\{f_n\}$ konvergira srednje reda p, $0 < p < \infty$ i generator pseudo-operacija g je rastuća funkcija, tada*

$$\lim_{n\to\infty}\int^{\sup}\left(f_n\right)_{\odot}^{(p)} \odot dm = \int^{\sup} f_{\odot}^{(p)} \odot dm.$$

Dokaz. Neka je $0 < p < \infty$. Važi

$$g\left(\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f_n, \mathbf{0}\right)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right)$$

$$= \sup_{x\in X}\Big(\left(\left|g\left(f_n\left(x\right)\right) - g\left(f\left(x\right)\right)\right| + g\left(f\left(x\right)\right)\right) g^{\frac{1}{p}}\left(\psi\left(x\right)\right)\Big)$$

$$\leq g\left(\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f_n, f\right)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right) + g\left(\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f, \mathbf{0}\right)_{\odot}^{(p)} \odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right).$$

Analogno se dobija

$$g\left(\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f,\mathbf{0}\right)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right)$$

$$\leq g\left(\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f_n,f\right)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right)+g\left(\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f_n,\mathbf{0}\right)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right).$$

Iz prethodne dve nejednakosti sledi

$$d\left(\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f_n,\mathbf{0}\right)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)},\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f,\mathbf{0}\right)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\leq g\left(\left[\int^{\sup} d_{\oplus}\left(f_n,f\right)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right),$$

odakle sledi

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\left[\int^{\sup} d\left(f_n,\mathbf{0}\right)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)},\left[\int^{\sup} d\left(f,\mathbf{0}\right)_{\odot}^{(p)}\odot dm\right]_{\odot}^{\left(\frac{1}{p}\right)}\right)=0,$$

što je ekvivalentno sa

$$\lim_{n\to\infty}\int^{\sup}\left(f_n\right)_{\odot}^{(p)}\odot dm=\int^{\sup} f_{\odot}^{(p)}\odot dm.$$

□

Literatura

[1] H. Agahi, R. Mesiar, Y. Ouyang, New general extensions of Chebyshev type inequalities for Sugeno integrals, Int. J. of Approximate Reasoning 51 (2009) 135-140.

[2] H. Agahi, R. Mesiar, Y. Ouyang, General Minkowski type inequalities for Sugeno integrals, Fuzzy sets and Systems 161 (2010) 708-715.

[3] H. Agahi, R. Mesiar and Y. Ouyang, Chebyshev type inequalities for pseudo-integrals, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 72, 2737-2743, 2010.

[4] H. Agahi, R. Mesiar, Y. Ouyang, E. Pap, M. Štrboja, Berwald type inequality for Sugeno integral, Applied Mathematics and Computation 217 (2010) 4100-4108.

[5] H. Agahi, R. Mesiar, Y. Ouyang, E. Pap, M. Štrboja, Hölder and Minkowski type inequalities for pseudo-integral, Applied Mathematics and Computation, Volume 217, Issue 21 (2011) 8630-8639 .

[6] H. Agahi, R. Mesiar, Y. Ouyang, E. Pap, M. Štrboja, General Chebyshev type inequalities for universal integral, submitted.

[7] H. Agahi, H. Román-Flores, A. Flores-Franulič, General Barnes-Godunova-Levin type inequalities for Sugeno integrals, Information Sciences, In Press, Available online 3 December 2010.

[8] Agahi, M.A. Yaghoobi, General Hardy type inequality for seminormed fuzzy integrals, Applied Mathematics and Computation, Volume 216, Issue 7, 2010, 1972-1977.

[9] H. Agahi, M. A. Yaghoobi, A Minkowski type inequalities for fuzzy integrals, Journal of Uncertain Systems, Vol.4, No.3, pp.187-194, 2010.

[10] M. Akian, Theory of cost measures: convergence of decision variables. INRIA Report, 1995.

[11] M. Akian, Densities of idempotent measures and large deviations, Transactions of the American Mathematical Society, 351, no. 11, 1999, 4515-4543.

[12] M. Akian, J. P. Quadrat andM. Viot, Bellman processes. In 11th International Conference on Analysis and Optimization of Systems : Discrete Event Systems. Lecture notes in Control and Information Sciences, Vol. 199, Springer Verlag, 1994.

[13] M. Akian, J. P. Quadrat and M. Viot, Duality between Probability and Optimization, In Idempotency (J. Gunawardena, ed.). Publication of the Isaac Newton Institute, Crambridge University press, 1998.

[14] C. Alsina, M. J. Frank, B. Schweizer, Associative function: Triangular norms and copulas, World Scientific, Singapore, 2006.

[15] B. Bassan, F. Spizzichino, Relations among univariate agin, bivariate agin and dependence for exchangeable lifetimes, J. Multivariate Anal. 93 (2005), 313-339.

[16] P. Benvenuti, R. Mesiar, D. Vivona, Monotone Set Functions-Based Integrals, Handbook of Measure Theory (Ed. E. Pap), Elsevier, Amsterdam, 2002, 1329-1379.

[17] P. Billingsley, Probability and Measure, John Wiley & Sons, New York, 1995.

[18] P. S. Bullen, Handbook of Means and Their Inequaliies, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2003.

[19] J. Caballero, K. Sadarangani, Hermite–Hadamard inequality for fuzzy integrals, Applied Mathematics and Computation, Volume 215, Issue 6, 2009, Pages 2134-2138

[20] J. Caballero, K. Sadarangani, Fritz Carlson's inequality for fuzzy integrals, Computers & Mathematics with Applications, Volume 59, Issue 8, (2010) 2763-2767

[21] J. Caballero, K. Sadarangani, Chebyshev inequality for Sugeno integrals, Fuzzy Sets and Systems, Volume 161, Issue 10 (2010) 1480-1487.

[22] J. Caballero, K. Sadarangani, A Cauchy–Schwarz type inequality for fuzzy integrals, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Volume 73, Issue 10 (2010) 3329-3335.

[23] A. Chateauneuf, Decomposable Measures, Distorted Probabilities and Concave Capacities, Mathematical Social Sciences 31, 19-37, 1996.

[24] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 5 (1953-1954) 131-292.

[25] P. Del Moral, Résolution particulaire des problèmes d'estimation et d'optimisation non-linéaires. Thesis dissertation, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1994.

[26] P. Del Moral, T. Thuillet, G. Rigal and G. Salut, Optimal versus random processes: the non-linear case. LAAS Report, Toulouse, 1990.

[27] D. Denneberg, Non-additive measure and integral, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht-Boston-London, 1994.

[28] F. Durante, C. Semi, Semicopule, Kybernetika (Prague) 41 (2005), 315-328.

[29] A. Flores-Franulič, H. Román-Flores, A Chebyshev type inequality for fuzzy integrals, Appl. Math. Comput. 190 (2007) 1178-1184.

[30] A. Flores-Franulič, H. Román-Flores, Y. Chalco-Cano, Markov type inequalities for fuzzy integrals, Applied Mathematics and Computation 207 (2009) 242–247.

[31] A. Flores-Franulič, H. Román-Flores, Y. Chalco-Cano, A note on fuzzy integral inequality of Stolarsky type, Applied Mathematics and Computation 196 (2008) 55-59.

[32] J. C. Fodor, R.R. Yager, A. Rybalov, Structure of Uninorms, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 5, 1997, 411-427.

[33] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, Aggregation Functions, Cambridge University Press, 2009.

[34] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, On the relationship of associative compensatory operators to triangular norms and conorms, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems Vol. 4, No. 2, 1996, 129-144.

[35] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[36] E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, A Universal Integral as Common Frame for Shoquet and Sugeno Integral, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 18, 1 (2010) 178 - 187.

[37] E. P. Klement, D. A. Ralescu, Nonlinerity of the fuzzy integral, Fuzzy sets and systems 11 (1983), 309-315.

[38] V. N. Kolokoltsov, V. P. Maslov, The general form of the endomorphisms in the space of continuous functions with values in a numerical commutative semiring (with the operation $\oplus$=max). Soviet Math. Dokl. Vol. 36, No. 1 (1988) 55-59.

[39] V. N. Kolokoltsov, V.P. Maslov, Idempotent Analysis and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[40] L. Maligranda, J. E. Pečarić, L. E. Persson, Stolarsky's inequality with general weghts, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995) 2113-2118.

[41] Q.-S. Mao, A note on the Chebyshev-type inequality of Sugeno integrals, Applied Mathematics and Computation, Volume 212, Issue 1 (2009) 275-279.

[42] V. Maslov, Méthodes Opératorielles, EditionsMIR, Moscou, 1987.

[43] V. P. Maslov, and V. N. Kolokoltsov, Idempotent analysis and its applications to optimal control theory, Moscow, Nauka (1994) in Russian.

[44] V. P. Maslov, G. L. Litvinov (Editors), Idempotent Mathematics and Mathematical Physics, Contemporary Mathematics 377, AMS 2005.

[45] V. P. Maslov, S. N. Samborski (Ed.), Idempotent analysis, Advances In Soviet Mathematics, Vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

[46] P. Massart, Concentration Inequalities and Model Selection, Springer, 2007.

[47] R. Mesiar, Choquet-like integrals, J. Math. Anal. Appl. 194 (1995), 477-488.

[48] R. Mesiar, J. Li, E. Pap, The Choquet integral as Lebesgue integral and related inequalities, Kybernetika, Volume 46 (2010), Number 6, 1098-1107.

[49] R. Mesiar, A. Mesiarová, Fuzzy integrals and linearity, Internat. J. Approx. Reason. 47 (2008), 352-358.

[50] R. Mesiar, Y. Ouyang, General Chebyshev type inequalities for Sugeno integrals, Fuzzy sets and systems 160 (2009) 58-64.

[51] R. Mesiar, E. Pap, Idempotent integral as limit of g-integrals, Fuzzy Sets and Systems 102 (1999), 385-392.

[52] T. Murofushi, M. Sugeno, Fuzzy t-conorm integrals with respect to fuzzy measures: generalization of Sugeno integral and Choquet integral, Fuzzy sets and systems 42 (1991), 57-71.

[53] Lj. M. Nedović, T. Grbić, The Pseudo Probability, Journal of Electrical Engineering 53, no. 12/s, 2002, 27-30.

[54] R. B. Nelsen, An introduction to copulas, Lecture Notes in Statistics 139, second edition, Springer, New York, 2006.

[55] Y. Ouyang, J. Fang, Sugeno integral of monotone functions based on Lebesgue measure, Computers & Mathematics with Applications, Volume 56, Issue 2, 2008, 367-374.

[56] Y. Ouyang, J. Fang, L. Wang, Fuzzy Chebyshev type inequality, International Journal of Approximate Reasoning, Volume 48, Issue 3 (2008) 829-835.

[57] Y. Ouyang, R. Mesiar, On the Chebyshev type inequality for seminormed fuzzy integral, Applied Mathematics Letters, Volume 22, Issue 12 (2009) 1810-1815.

[58] Y. Ouyang, R. Mesiar, H. Agahi, An inequality related to Minkowski type for Sugeno integrals, Information Sciences, Volume 180, Issue 14, (2010) 2793-2801.

[59] Y. Ouyang, R. Mesiar, J. Li, On the comonotonic-$\star$-property for Sugeno integral, Applied Mathematics and Computation, Volume 211, Issue 2 (2009) 450-458.

[60] E. Pap, An integral generated by decomposable measure, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 20 (1) (1990), 135-144.

[61] E. Pap, g-calculus, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 23 (1) (1993), 145-156.

[62] E. Pap, Applications of decomposable measures, in Handbook Mathematics of Fuzzy Sets-Logic, Topology and Measure Theory (Eds. U. Hohle, S.R. Rodabaugh), Kluwer Academic Publishers, 1999, 675-700.

[63] E. Pap, Fazi mere i njihova primena, PMF Novi Sad, 1999.

[64] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht- Boston-London, 1995.

[65] E. Pap (Ed.), Handbook of Measure Theory, Volume I, II, Elsevier, North-Holland, 2002.

[66] E. Pap, Generalized real analysis and its applications, Int. J. Approximative Reasoning 47 (2008), 368-386.

[67] E. Pap, M. Štrboja, Generalization of the Chebyshev inequality for pseudo-integral, Proc. of SISY 2009, Subotica, 2009.

[68] E. Pap, M. Štrboja, Generalization of the Jensen inequality for pseudo-integral, Information Sciences 180 (2010) 543-548

[69] J. E. Pečarić, F. Prochan, Y. L. Tong, Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications, Academic Press, Inc., Boston, San Diego, New York, 1992.

[70] D. Ralescu, G. Adams, The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), 562-570.

[71] H. Román-Flores, A. Flores-Franulič, Y. Chalco-Cano, A Jensen type inequality for fuzzy integrals, Information Sciences 177 (2007), 3192-3201.

[72] H. Román-Flores, A. Flores-Franulič, Y. Chalco-Cano, A Hardy-type inequality for fuzzy integrals, Applied Mathematics and Computation, Volume 204, Issue 1, (2008) 178-183.

[73] H. Román-Flores, A. Flores-Franulič, Y. Chalco-Cano, A convolution type inequality for fuzzy integrals, Applied Mathematics and Computation, Volume 195, Issue 1, (2008) 94-99.

[74] H. Román-Flores, A. Flores-Franulič, Y. Chalco-Cano, Markov type inequalities for fuzzy integrals, Applied Mathematics and Computation, Volume 207, Issue 1, (2009) 242-247

[75] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

[76] J. P. Quadrat, Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique. Note CRAS, Vol. 311, Paris, 1990, pp 745–748.

[77] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indag. Math. 33 (1971), 109-116.

[78] A. Simonovits, Three economic applications of Chebyshev's Algebraic Inequality, Mathematical Social Sciences 30, 1995, 207–220.

[79] A. Sklar, Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 8 (1959), 229-231.

[80] K. B. Stolarsky, From Wythoff's Nim to Chebyshev's inequality, Amer. Math. Month. 98 (1991) 889-900.

[81] M. Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph.D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[82] F. Suárez García and P. Gil Álvarez, Two families of fuzzy integrals, Fuzzy Sets and Systems 18 (1986), 67-81.

[83] Y. L. Tong, Relationship between stochastic inequalities and some classical mathematical inequalities, J. of Inequal. & Appl., 1997, Vol. 1, 85-98.

[84] R. S. Wang, Some inequalities and convergence theorems for Choquet integrals, J. Appl. Comput., Volume 35, Numbers 1-2, 305-321, 2011.

[85] A. Wagener, Chebyshev's algebraic inequality and comparative statics under uncertainty, Mathematical Social Sciences, 52 (2006), 217–221.

[86] Z. Wang, G. J. Klir, Generalized Measure Theory, Springer, Boston, 2009.

[87] S. Weber, Two integrals and some modified versions: critical remarks, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986), 97-105.

[88] Q. Zhang, R. Mesiar, J. Li, P. Struk, Generalized Lebesgue integral , Int. J. Approx. Reason (2010).

BIOGRAFIJA

Mirjana Štrboja je rođena 10. avgusta 1979. godine u Zrenjaninu, gde je završila osnovnu i srednju školu.

Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer diplomirani matematičar, upisala je 1998. godine gde je diplomirala 27.09.2002. godine. Diplomirala je sa prosečnom ocenom 9,64.

Dobitnik je Nagrade koju dodeljuje Univerzitet u Novom Sadu i Nagrade Prirodno-matematičkog fakulteta za postignut uspeh u školskoj 1998/1999 godini, Izuzetne nagrade za postignut uspeh u školskoj 2001/2002 godini i Nagrade za postignut uspeh u toku studija koje dodeljuje Univerzitet u Novom Sadu.

Magistarske studije je upisala 2002. godine na odseku za matematiku na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Magistarsku tezu pod nazivom "Primena peudo-analize na nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine" odbranila ja 13.2.2007.

1.01.2003. godine zasniva radni odnos kao asistent-pripravnik za užu naučnu oblast Analiza i verovatnoća na Prirodno-matematičkom faklultetu u Novom Sadu, gde trenutno drži vežbe na kursevima Analiza za informatičare, Analiza I, Analiza II (za informatičare), Opšta matematika, Matematika II (za hemičare) i Analitička geometrija (za matematičare).

Koautor je pet naučnih radova i izlagala je na nekoliko međunarodnih konferencija u zemlji i inostranstvu.

Novi Sad, 3.07.2011. Mirjana Štrboja

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: Mirjana Štrboja
AU
Mentor: Akademik Endre Pap
MN

Naslov rada: Nejednakosti za integrale bazirane na neaditivnim merama
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2011.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 6/118/88/0/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Matematička analiza
ND
Ključne reči: fazi mera, poluprsten, pseudo-operacije, $\oplus$-mera, pseudo-integral, nejednakosti Jensena, Čebiševa, Holdera, Minkovskog.
PO

UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: Klasične integralne nejednakosti vezane za Lebegov integral uopštene su za integrale bazirane na neaditivnim merama. U ovoj tezi dokazana je Bervaldova nejednakost za Sugenov integral. Data je nejednakost koju zadovoljava univerzalni integral, čije su posledice nejednakosti Čebiševa i Minkovskog. Uopštenja nejednakosti Jensena, Čebiševa, Holdera i Minkovskog dokazane su za pseudo-integral i data je njihova primena u pseudo-verovatnoći. Slično kao u klasičnoj teoriji mere pokazane nejednakosti za pseudo-integral su primenjene prilikom uopštavanja klasičnog L^p prostora.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 24.12.2009.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
Predsednik: Akademik Olga Hadžić, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Akademik Endre Pap, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor.

Član: dr Arpad Takači, redovni profesor,
Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Tatjana Grbić, docent,
Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic type
DT
Type of record: Text printed material
TR
Contents code: PhD thesis
CC
Author: Mirjana Štrboja
AU
Mentor: Academician Endre Pap
MN

Title: Inequalities for integrals based on non-additive measures
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2011.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ.place: University of Novi Sad, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 6/118/88/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphs/additional lists)
PD
Scientific field: Mathematics

SF
Scientific discipline: Analysis
SD
Key words: fuzzy measure, semiring, pseudo-operations, $\oplus$-measure, pseudo-integral, Jensen's inequality, Chebyshev's inequality, Hölder's inequality, Minkowski's inequality.
SKW
UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: Classical integral inequalities related to Lebesgue integral are generalized for integrals based on non-additive measures. In this thesis Berwald type inequality for Sugeno integral are proven. A new type inequality for universal integral is studied. As two corollaries of the previous, Minkowski's and Chebyshev's type inequalities for universal integral are obtained. Generalized Jensen, Chebyshev, Hölder and Minkowski type inequalities for pseudo-integral are proven and their applications in the pseudo-probability are given. As in classical measure theory, observed inequalities for pseudo-integral are applied in generalization of classical L^p spaces.
AB

Accepted by Scientific Board on: 24th December 2009.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:
President: Academician Olga Hadžić, Full Professor,
Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Academician Endre Pap, Full Professor,
Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Dr. Arpad Takači, Full Professor,
Faculty of Science, University of Novi Sad, mentor

Member: Dr. Tatjana Grbić, Assistant Professor,
Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
DB