



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU



Sandra Buhmiller

MODIFIKACIJE NJUTNOVOG POSTUPKA
ZA REŠAVANJE NELINEARNIH
SINGULARNIH PROBLEMA

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2013.

Predgovor

Ova teza bavi se problemom pronalaženja rešenja nelinearnog sistema jednačina

$$F(x) = 0,$$

odnosno, korena nelinearne funkcije $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Kako je do tačnog rešenja nelinearnog problema najčešće nemoguće doći u konačnom broju koraka, koriste se iterativne metode, postupci kojima se sukcesivnim putem dolazi do aproksimacije rešenja. Uspešan iterativni postupak podrazumeva dobro odabranu oblast u kojoj je iterativni niz definisan, kao i brzu konvergenciju ka rešenju što, između ostalog, zavisi od prirode rešenja sistema. Ako je funkcija F neprekidno diferencijabilna u okolini rešenja x^* , Jakobijan $F'(x)$ Lipšic neprekidan u x^* i $F'(x^*)$ je regularna matrica, tada kažemo da je problem regularan. Ako je $F'(x^*)$ singularna matrica, tada je problem singularan i kažemo da je x^* singularno rešenje.

U slučaju regularnog problema, najpoznatiji iterativni metod za rešavanje je Njutnov metod, zato što poseduje dobre teoretske osobine kao što su lokalna kvadratna konvergencija i afina invarijantnost. Međutim, uprkos dobrim osobinama, u praksi se pojavljuju i izvesni nedostaci. Njutnova iteracija je veoma skupa jer je potrebno određivanje matrice Jakobijana, što podrazumeva izračunavanje parcijalnih izvoda u svakoj iteraciji. Takođe, potrebno je pronalaženje rešenja sistema linearnih jednačina, pri čemu se matrica sistema menja iz iteracije u iteraciju. Zbog ovih nedostataka, pojavile su se brojne modifikacije koje pokušavaju da ih otklone. Jednu grupu modifikacija čine kvazi-Njutnovi metodi u čijoj osnovi je aproksimacija matrice Jakobijana matricom do koje se dolazi relativno brzo i lako. Osnovna ideja prilikom definisanja kvazi-Njutnovih metoda je smanjivanje broja izračunavanja parcijalnih izvoda, zapravo matrice Jakobijana. Ona se aproksimira koristeći aproksimaciju Jakobijana, izračunatu u prethodnoj iteraciji, čime je znatno snižena cena metoda.

U slučaju da je sistem singularan, red konvergencije i oblast konvergencije Njutnovog metoda i kvazi-Njutnovih metoda se smanjuje. Modifikacija postupka, zapravo prilagođavanje metoda singularnim sistemima, jedan je od načina da se osobine, karakteristične za regularan slučaj, bar donekle povrate. Jednu grupu modifikacija čine dvokoračni metodi koje su Keli i Sureš, (C.T. Kelley, R.A. Suresh), [31], predstavili za Njutnov metod, zatim Keli, (C.T. Kelley), [32], za metod Šamanskog, kao i Keli i Hu (C.T. Kelley, Z.Q. Xue), [30], za netačni Njutnov metod, u kojima se konvergencija postupka ubrzava uvođenjem međuitracije.

Druga grupa modifikacija su tenzorski metodi, koje su predstavili Šnabel i Frenk (R.B. Schnabel, P.D. Frank), [50], zatim Feng i Frenk (D. Feng, P.D. Frank), [19], i Bauariča i Šnabel (A. Bouaricha, R.B. Schnabel), [3]. Osnovna ideja ovih metoda je korišćenje Hesijana, odnosno drugog izvoda funkcije F , kako bi bila postignuta bolja konvergencija za singularne probleme.

U poslednjoj deceniji pojavili su se neprekidni Njutnovi metodi u Hauser, Nedić, (R. Hauser, J. Nedić), [24], [25]. Singularne probleme i neprekidne Njutove metode razmatrali su Janovski i Siger, (V. Janovsky, R. Seigre), [27], zatim Nojberger (J.W. Neuberger), [39], kao i Riaza (R. Riaza), [44], [45], [46]. Riaza i Zufiria (R. Riaza, P.J. Zufiria), [47], pokazali su da se Njutnova kvadratna konvergencija, u slučaju singularnog korena, može postići uvođenjem dvokoračnih integracionih šema za neprekidni Njutnov metod, po ugledu na one koje su predstavili Keli i Sureš, [31]. Jedan od novijih rezultata predstavio je Nedžibov, (H.G. Nedzhibov), [38], koji je uveo modifikacije Njutnovog metoda za pronalaženje višestrukog rešenja nelinearne algebarske jednačine, pri čemu je poznata višestrukost korena. Potom je Hueso, (L.J. Hueso), [26], uopštio prethodni postupak na problem pronalaženja rešenja sistema nelinearnih jednačina, ali samo u slučaju da su komponente funkcije $F(x)$ specijalnog oblika. U tom slučaju je Jakobijan predstavljen kao proizvod dve matrice, od kojih je jedna dijagonalna. Ovakva modifikacija primenljiva je na singularne sisteme zato što je višestrukost rešenja vezana i za singularnost Jakobijana.

Za razliku od prethodno spomenutih modifikacija Njutnovih metoda, konvergencija ka singularnom rešenju može se ubrzati modifikacijom samog problema. Definisanjem graničnih sistema, singularan problem se transformiše u, njemu ekvivalentan, regularan, dodavanjem određenog broja promenljivih. Pojam graničnog sistema uveli su Veber i Verner (H. Weber, W. Werner), [59], za jednu klasu singularnih sistema, a potom su Grivank i Reddien (A. Griewank, G.W. Reddien), [22], predstavili konstrukciju graničnih

sistema za pojedine tipove problema. Rabier i Redien (P.J. Rabier, G.W. Reddien), [42], predstavili su postupak formiranja graničnog sistema za proizvoljan singularni problem. Takođe su Šen i Ipma (Y.Q. Shen, T.J. Ypma), [57], konstruisali postupak za formiranje graničnog sistema, koristeći dekompoziciju po singularnim vrednostima Jakobijana u tački koja se nalazi u okolini rešenja. Na osnovu dobijenih singularnih vrednosti, formiran je granični sistem u koji je uključen slučajni vektor i pokazano je da je Jakobijan formiranog graničnog sistema regularan za skoro sve vrednosti slučajnog vektora. Postupak je veoma jeftin jer zahteva jednu LU dekompoziciju po iteraciji. Ovako dobijeni metod primenjen je na niz primera, čime je potvrđeno da je moguće lokalno postići kvadratnu konvergenciju Njutnovog metoda ka singularnom rešenju.

U okviru ove teze bavićemo se klasom singularnih sistema sa Jakobijanom $F'(x^*)$ koji zadovoljava uslov takozvane regularne singularnosti. U Glavi 2 predstavljeni su Njutnov metod, fiksni Njutnov metod, netačni Njutnov metod kao i metod Šamanskog, izložene su teoreme o konvergenciji ka regularnom rešenju i teoreme o konvergenciji u slučaju singularnosti. Potom su izložene poznate modifikacije za ubrzavanje konvergencije ka singularnom rešenju prethodno spomenutih metoda. Od kvazi-Njutnovih metoda posmatrani su Brojdenov i Tomasov metod, kao i Martinezov metod ažuriranja jedne kolone. U literaturi se može pronaći teorema o konvergenciji u singularnom slučaju jedino za Brojdenov metod, (D.W. Decker, C.T. Kelley), [15]. Po ugledu na već poznate modifikacije metoda, [31], [32], u Buhmiller, Krejić, Lužanin, (S. Buhmiller, N. Krejić, Z. Lužanin), [9], predložene su dve vrste modifikacija kvazi-Njutnovih metoda prelaskom na dvokoračni postupak, kako bi konvergencija ka singularnim rešenjima bila ubrzana, što je i numerički potvrđeno.

U Glavi 3 predstavljen je teorijski okvir za definisanje graničnih sistema i algoritam koji su definisali Šen i Ipma, [57], potom je predložen novi algoritam, u kome se računanje Jakobijana zamenjuje njegovom aproksimacijom konačnim razlikama. U Buhmiller, Krejić, Lužanin, [8], dokazano je da se ovom modifikacijom dolazi do regularnog sistema i predstavljen je algoritam za njegovo rešavanje. S obzirom na to da je predstavljeni algoritam lokalno konvergentan, za konstruisanje globalno konvergentnog metoda predložena je njegova kombinacija sa metodom negativnog gradijenta. Takođe je pokazano da je, primenom Brojdenovog metoda na uvedeni granični sistem, konvergencija ka singularnom rešenju ubrzana.

Numerički rezultati, dobijeni primenom pomenutih metoda na primere

koji se najčešće sreću u literaturi, predstavljeni su u Glavi 4. Upoređeni su rezultati dobijeni primenom nemodifikovanih kvazi-Njutnovih metoda sa rezultatima postignutim metodama dobijenim primenom dve vrste modifikacija primenjenih na singularne probleme. Zaključeno je da je uvođenjem međuitracije moguće ubrzati konvergenciju ka singularnom rešenju u slučaju kvazi-Njutnovih postupaka. Takođe, upoređeni su algoritmi predstavljeni u [57] i [8], čime je potvrđeno da je novi algoritam podjednako efikasan ali jeftiniji za rad. Numerički rezultati pokazuju da se kombinacijom metode negativnog gradijenta i lokalno konvergentnog algoritma može ubrzati konvergencija ka singularnom rešenju.



Zahvaljujem se dr Nataši Krejić, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na dugogodišnjoj saradnji i pomoći u mom dosadašnjem radu, kao i prilikom izrade ove teze.

Zahvaljujem se dr Zorani Lužanin, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na interesovanju i korisnim savetima u toku izrade ove teze.

Zahvaljujem se i dr Ljiljani Teofanov, docentu Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, na trudu i sugestijama u izradi ove teze.

Želim da se zahvalim i onima koji su sve vreme bili uz mene. Prvenstveno mom suprugu Zoltanu i ćerkama Ana-Mariji, Andrei i Miji na strpljenju i razumevanju, a zatim mojim roditeljima Marku i Mari, kao i sestri Kseniji, na neizmernoj podršci i pomoći u toku mog dosadašnjeg rada.

Sadržaj

1	Uvod	9
1.1	Oznake	9
1.2	Pregled definicija i teorema	10
1.2.1	Linearna algebra	10
1.2.2	Diferencijalni račun	12
1.2.3	Vektorski prostori	15
1.2.4	Iterativni postupci	16
2	Singularni sistemi	19
2.1	Njutnov metod	19
2.1.1	Njutnov metod u singularnom slučaju	21
2.1.2	Modifikacije Njutnovog metoda	30
2.1.2.1	Višekoračni Njutnov metod	30
2.2	Netačni Njutnov metod	36
2.2.1	Netačni Njutnov metod u singularnom slučaju	37
2.2.2	Modifikacije netačnog Njutnovog postupka	38
2.3	Fiksni Njutnov metod	40
2.3.1	Fiksni Njutnov metod u singularnom slučaju	40
2.4	Metod Šamanskog	42
2.4.1	Metod Šamanskog u singularnom slučaju	43
2.5	Kvazi-Njutnovi postupci	46
2.5.1	Brojdenov metod	47
2.5.1.1	Brojdenov metod u singularnom slučaju	50
2.5.2	Tomasov metod	52
2.5.3	Martinezov metod ažuriranja kolone	55
2.5.4	Modifikacije kvazi-Njutnovih metoda	56

3	Granični sistemi	61
3.1	Definicija i osnovne teoreme	61
3.2	Modifikacije Ipminog postupka	70
3.2.1	Primena Algoritma MY	86
3.3	Brojdenov postupak za granične sisteme	91
4	Numerički rezultati	95
4.1	Kvazi-Njutnovi metodi za singularne sisteme	101
4.2	Modifikovani kvazi-Njutnovi metodi	109
4.3	Numerički rezultati za granične sisteme	117
4.3.1	Ipmin metod i njegova modifikacija	118
4.3.2	Numerički rezultati algoritma MYLS	125
4.3.3	Numerički rezultati algoritma BY	138
5	Zaključak	145

1

Uvod

1.1 Oznake

\mathbb{R} - skup realnih brojeva

\mathbb{R}^n - skup n -dimenzionalnih realnih vektora

$\mathbb{R}^{m \times n}$ - skup realnih matrica dimenzije $m \times n$

$\mathbb{R}^{m \times n \times p}$ - skup realnih tenzora dimenzije $m \times n \times p$

x_i - i -ta komponenta vektora $x \in \mathbb{R}^n$

e_1, e_2, \dots, e_n - vektori standardne baze prostora \mathbb{R}^n

$A = [a_{ij}]$ - matrica sa elementima $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$A^T = [a_{ji}]$ - transponovana matrica

$A_{i.}$ - i -ta vrsta matrice A

$A_{.j}$ - j -ta kolona matrice A

A^{-1} - inverzna matrica matrice A

$diag\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ - dijagonalna matrica sa elementima a_{ii}

E - jedinična matrica iz $\mathbb{R}^{n \times n}$

E_q - jedinična matrica iz $\mathbb{R}^{q \times q}$

$\mathcal{T} = [T_{ijk}]$ - tenzor sa elementima $T_{ijk} \in \mathbb{R}$

$\{x_k\}$ - niz realnih vektora x_0, x_1, \dots

$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$ - vektorska norma l_∞

$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n v_i^2\right)^{1/2}$ - vektorska norma l_2

$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$ - vektorska norma l_1

$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|a_{i.}|\}$ - matrična norma indukovana normom l_∞

$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \{ |a_{.j}| \}$ - matricna norma indukovana normom l_1

$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 = \text{tr}(A^T A)$ - Frobenijusova norma

$C^k(D)$ - skup k puta neprekidno diferencijabilnih realnih preslikavanja na D

$L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ - prostor linearnih operatora iz \mathbb{R}^m u \mathbb{R}^n

$\mathcal{B}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < \varepsilon\}$ - ε okolina tačke x (oznaka $\mathcal{B}(x)$ podrazumeva proizvoljnu okolinu tačke x)

$\mathcal{N}(A)$ - nula prostor linearnog operatora A

$\mathcal{I}m(A)$ - skup svih slika linearnog operatora A

$\text{rang}(A)$ - rang matrice A

$\dim(V)$ - dimenzija vektorskog prostora V

$\text{span}(v_1, \dots, v_n)$ - vektorski prostor generisan vektorima v_1, \dots, v_n

$\text{int}(D)$ - unutrašnjost skupa D

1.2 Pregled definicija i teorema

1.2.1 Linearna algebra

Teorema 1.2.1. (*Banahova lema*) [18]

Ako je L matrica iz $\mathbb{R}^{n \times n}$, L^{-1} postoji ako i samo ako postoji regularna matrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takva da je

$$\|M - L\| \leq \frac{1}{\|M^{-1}\|}.$$

Ako L^{-1} postoji, tada je

$$L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (E - M^{-1}L)^n M^{-1}$$

i

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|E - M^{-1}L\|} \leq \frac{\|M^{-1}\|}{1 - \|M^{-1}\|\|M - L\|}.$$

Definicija 1.2.1. [18] Matrica $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonalna ako i samo ako važi

$$Q^T Q = E \quad \text{ili} \quad Q Q^T = E.$$

Definicija 1.2.2. [18] Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Karakteristični koreni i karakteristični vektori matrice A su realni ili kompleksni skalari λ i n -dimenzionalni vektori v takvi da je

$$Av = \lambda v, \quad v \neq 0.$$

Definicija 1.2.3. [18] Neka je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dekompozicija po singularnim vrednostima, u oznaci SVD, matrice A je

$$A = UDV^T,$$

gde su $U, V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalne matrice, a $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dijagonalna matrica takva da je $d_{ii} = \sigma_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$. Vrednosti $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ se nazivaju singularne vrednosti matrice A .

Definicija 1.2.4. [3] Za tenzor $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$ i vektore $v, w \in \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{T}vw \in \mathbb{R}^n$ i definisano je sa

$$(\mathcal{T}vw)_i = v^T H_i w = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n T_{ijk} v_j w_k,$$

pri čemu je $H_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 1, 2, \dots, n$ takvo da je

$$(H_i)_{jk} = (T)_{ijk}.$$

Definicija 1.2.5. [2] Za tenzor $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ i matricu $U \in \mathbb{R}^{p \times l}$ je

$$U \cdot \mathcal{A} = \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{p \times m \times n},$$

pri čemu je

$$B_{ijk} = \sum_{\alpha=1}^l U_{i\alpha} A_{\alpha jk}.$$

U slučaju da je $u \in \mathbb{R}^l$ tada je

$$u^T \mathcal{A} = \mathcal{A}u = B,$$

pri čemu je $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Definicija 1.2.6. [2] Za data dva tenzora $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{l \times m \times n}$ skalarni proizvod je definisan na sledeći način

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i,j,k} A_{ijk} B_{ijk},$$

pa je odgovarajuća norma

$$\|\mathcal{A}\| = \sqrt{\langle \mathcal{A}, \mathcal{A} \rangle} = \left(\sum_{i,j,k} A_{ijk}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2.2 Diferencijalni račun

Definicija 1.2.7. [41] Preslikavanje $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je F -diferencijabilno u $x \in \text{int}(D)$ ako postoji linearni operator $F'(x)$ takav da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Linearni operator $F'(x)$ se naziva F -izvod i predstavlja se Jakobijan matricom

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

U okviru ove teze umesto F -izvod pišaćemo samo izvod.

Definicija 1.2.8. [41] Preslikavanje $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je Lipsčic neprekidno sa konstantom $\gamma > 0$ nad oblasti D ako za svako $x, y \in D$ važi

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \gamma \|x - y\|.$$

Skup svih preslikavanja koja zadovoljavaju prethodnu definiciju označavamo sa $\text{Lip}_\gamma(D)$.

Definicija 1.2.9. [18] Preslikavanje $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je lokalno Lipsčic neprekidno na D ako za svako $x \in D$ postoji okolina $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$ takva da je F Lipsčic neprekidna nad $\mathcal{B}(x, \varepsilon)$.

Lema 1.2.1. [18] Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje na otvorenom i konveksnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n, x \in D$. Tada za svako $x, x+p \in D$ važi

$$F(x+p) - F(x) = \int_0^1 F'(x+tp)p \, dt \equiv \int_x^{x+p} F'(z) \, dz.$$

Lema 1.2.2. [18] Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje na otvorenom i konveksnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n, x \in D$, i neka je $F'(x) \in \text{Lip}_\gamma(D)$. Tada za svako $x+p \in D$ važi

$$\|F(x+p) - F(x) - F'(x)p\| \leq \frac{\gamma}{2} \|p\|^2.$$

Lema 1.2.3. [18] Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilno preslikavanje na otvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^n, x \in D$, i neka je $\nabla^2 f(x) \in \text{Lip}_\gamma(D)$. Tada za svako $x + p \in D$ važi

$$|f(x+p) - (f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x) p)| \leq \frac{\gamma}{6} \|p\|^3.$$

Teorema 1.2.2. (Teorema o implicitnoj funkciji)[41]

Neka je $F : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna funkcija na otvorenoj okolini $D_0 \subset D$ tačke (x^*, y^*) za koju je $F(x^*, y^*) = 0$. Pretpostavimo da postoji F'_x , da je neprekidan u okolini (x^*, y^*) i da je $F'_x(x^*, y^*)$ regularan. Tada postoje otvorene okoline $\mathcal{B}_1 \subset \mathbb{R}^n$ i $\mathcal{B}_2 \subset \mathbb{R}^p$ od x^* i y^* , tako da za svako $y \in \bar{\mathcal{B}}_2$ jednačina $F(x, y) = 0$ ima jedinstveno rešenje $x = Hy \in \bar{\mathcal{B}}_1$ i da je preslikavanje $H : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno. Ako još postoji $F'_y(x^*, y^*)$, tada je H i F -diferencijabilno i važi

$$H'(y^*) = -[F'_x(x^*, y^*)]^{-1} F'_y(x^*, y^*).$$

Teorema 1.2.3. [18] Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna funkcija na otvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^n, x \in D$ i Jakobijan $F'(x)$ Lipsčic neprekidan u $x \in D$. Neka je $\|e_j\| = 1, j = 1, \dots, n$, ξ izabrano tako da $x + \xi e_j \in D$ i matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takva da je

$$A_{.j} = \frac{F(x + \xi e_j) - F(x)}{\xi}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tada važi

$$\|A_{.j} - F'(x)_{.j}\| \leq \frac{\gamma}{2} |\xi|$$

i

$$\|A - F'(x)\|_1 \leq \frac{\gamma}{2} |\xi|.$$

Definicija 1.2.10. [41] Pretpostavimo da $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ima izvod u svakoj tački otvorenog skupa $D_0 \subset D$. Ako $F' : D_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ima izvod u $x \in D_0$, tada je $(F')'(x)$, u oznaci $F''(x)$, drugi izvod funkcije F u tački x . Po definiciji je $F''(x) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$, odnosno za svako $h \in \mathbb{R}^n$ je $F''(x)h \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i neka su vektori $h, k \in \mathbb{R}^n$. Ako postoji $f''(x)$, označimo sa

$$f''(x)hk = k^T H_f h,$$

pri čemu je $H_f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hesijan

$$\nabla^2 f(x) = H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix}.$$

U slučaju da je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pri čemu je $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, tada je $F''(x)hk \in \mathbb{R}^n$ i važi da je

$$[F''(x)hk]^T = (k^T H_1(x)h, k^T H_2(x)h, \dots, k^T H_n(x)h),$$

gde su $H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x)$ Hesijan matrice komponenti $f_1(x), \dots, f_n(x)$.

Teorema 1.2.4. [18] Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta neprekidno diferencijabilna na otvorenom i konveksnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Neka je $\nabla^2 f(x)$ Lipschitz neprekidan u $x \in D$, pri čemu se koristi vektorska norma i njome indukovana matična norma za koju je $\|e_j\| = 1, j = 1, \dots, n$. Pretpostavimo da $x, x + \xi e_i, x + \xi e_j, x + \xi e_i + \xi e_j \in D$ za $i, j = 1, \dots, n$ i da je matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definisana na sledeći način

$$A_{ij} = \frac{f(x + \xi e_i + \xi e_j) - f(x + \xi e_i) - f(x + \xi e_j) + f(x)}{\xi^2}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Tada važi

$$|A_{ij} - \nabla^2 f(x)_{ij}| \leq \frac{5}{3} \gamma |\xi|.$$

Ako se koristi norma l_1, l_∞ ili Frobenijusova norma onda važi

$$\|A - \nabla^2 f(x)\| \leq \frac{5}{3} \gamma n |\xi|.$$

1.2.3 Vektorski prostori

Definicija 1.2.11. [37] Neka je $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, pri čemu $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Skup svih linearnih kombinacija vektora v_1, v_2, \dots, v_n je skup

$$\text{span}(\mathcal{S}) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_i \in \mathbb{R}, v_i \in \mathcal{S}\}.$$

Kažemo da je $\text{span}(\mathcal{S})$ generisan skupom \mathcal{S} .

Definicija 1.2.12. [37] Neka je $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje. Skup svih slika, u oznaci $\mathcal{I}m(A)$, je skup

$$\mathcal{I}m(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = A(x)\}.$$

Skup $\mathcal{I}m(A)$ je potprostor prostora \mathbb{R}^n .

Definicija 1.2.13. [37] Neka je $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje. Nula prostor, u oznaci $\mathcal{N}(A)$, je skup

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : A(x) = 0\}.$$

Teorema 1.2.5. [37] Ako je $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linearno preslikavanje tada važi

$$\mathcal{N}(A) = \{0\} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n.$$

Definicija 1.2.14. [37] Ako je \mathcal{V} konačno dimenzionalni linearni vektorski prostor dimenzije n i \mathcal{X} njegov potprostor dimenzije k , tada je

$$\text{codim}\mathcal{X} = n - k.$$

Definicija 1.2.15. [37] Za potprostore \mathcal{X}, \mathcal{Y} vektorskog prostora \mathcal{V} se kaže da su komplementarni ako i samo ako važi

$$\mathcal{X} + \mathcal{Y} = \mathcal{V} \text{ i } \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset.$$

Tada se za vektorski prostor \mathcal{V} kaže da je direktna suma prostora \mathcal{X} i \mathcal{Y} , u oznaci $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = \mathcal{V}$.

Teorema 1.2.6. [37] Za vektorski prostor \mathcal{V} sa potprostorima \mathcal{X} i \mathcal{Y} čije su baze $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}}$ redom, sledeća tvrđenja su ekvivalentna

- $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y} = \mathcal{V}$

- za svako $v \in \mathcal{V}$ postoje jedinstveni $x \in \mathcal{X}$ i $y \in \mathcal{Y}$ takvi da je $v = x + y$
- $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cap \mathcal{B}_\mathcal{Y} = \emptyset$ i $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y}$ čini bazu vektorskog prostora \mathcal{V} .

Teorema 1.2.7. [37] Neka su \mathcal{X} i \mathcal{Y} komplementarni potprostori vektorskog prostora \mathcal{V} takvi da se svaki vektor $v \in \mathcal{V}$ na jedinstven način može predstaviti u obliku $v = x + y$. Jedinstveni operator P definisan sa $P(v) = x$ se naziva projekcija na \mathcal{X} duž \mathcal{Y} i ima sledeće osobine:

- $P^2 = P$
- $E - P$ je komplementarna projekcija na \mathcal{Y} duž \mathcal{X}
- $\mathcal{I}m(P) = \{x : P(x) = x\}$
- $\mathcal{I}m(P) = \mathcal{N}(E - P) = \mathcal{X}$ i $\mathcal{I}m(E - P) = \mathcal{N}(P) = \mathcal{Y}$
- u slučaju da je $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ tada je P dato sa

$$P = [X|0][X|Y]^{-1} = [X|Y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [X|Y]^{-1},$$

pri čemu su kolone matrica X i Y baze prostora \mathcal{X} i \mathcal{Y} .

1.2.4 Iterativni postupci

Definicija 1.2.16. Neka je $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ niz koji konvergira ka $x^* \in \mathbb{R}^n$, odnosno važi da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*.$$

Tada niz $\{x_k\}$ konvergira ka x^*

- q -kvadratno ako postoji konstanta $K > 0$ takva da je

$$\frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^2} \leq K;$$

- q -superlinearno ako

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0;$$

- *q*-linearno ako postoji konstanta $\sigma \in (0, 1)$ takva da je

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \sigma \|x_k - x^*\|$$

za k dovoljno veliko;

- *sublinearno*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 1.$$

Definicija 1.2.17. *Iterativni metod za izračunavanje x^* je lokalno (q -kvadratno, q -superlinearno, q -linearno, itd.) konvergentan ako niz iteracija $\{x_k\}$ konvergira ka x^* (q -kvadratno, q -superlinearno, q -linearno, itd.) pri čemu je početna iteracija dovoljno dobro zadata.*

Teorema 1.2.8. [18] *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilna funkcija na otvorenom konveksnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da je Jakobijan F' neprekidan u tački $x^* \in D$ i da je $F'(x^*)$ regularna matrica. Neka je $B_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ niz regularnih matrica i pretpostavimo da za neko $x_0 \in D$ niz $\{x_k\}$, gde je*

$$x_{k+1} = x_k - (B_k)^{-1} F(x_k),$$

ostaje u skupu D i konvergira ka x^ . Tada niz $\{x_k\}$ konvergira q -superlinearno ka x^* i $F(x^*) = 0$ ako i samo ako je*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|(B_k - F'(x^*))(x_{k+1} - x_k)\|}{\|x_{k+1} - x_k\|} = 0.$$

2

Singularni sistemi

Neka je dat sistem nelinearnih jednačina

$$F(x) = 0, \tag{2.1}$$

pri čemu je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i pretpostavimo da postoji rešenje $x^* \in \mathbb{R}^n$. U slučaju da je F neprekidno diferencijabilna funkcija u okolini rešenja x^* , Jakobijan preslikavanja $F'(x)$ Lipšic neprekidan u x^* i uz to je $F'(x^*)$ regularna matrica, kažemo da je problem regularan, a rešenje regularno. Ako je $F'(x^*)$ singularna matrica, tada je x^* singularno rešenje.

2.1 Njutnov metod

Prilikom određivanja rešenja sistema nelinearnih jednačina (2.1) iterativnim metodama, generiše se iterativni niz koji pod odgovarajućim pretpostavkama teži ka rešenju problema. Kad god je reč o regularnom problemu, Njutnov metod je najčešće korišćeni metod. Zasniva se na aproksimaciji funkcije F afinim modelom M_k i pronalaženju njegovog rešenja. Pod pretpostavkom da je funkcija F neprekidno diferencijabilna, važi sledeća jednakost

$$F(x_k + s_k) = F(x_k) + \int_{x_k}^{x_k + s_k} F'(z) dz.$$

Ako se integral sa desne strane aproksimira vektorom $F'(x_k)s_k$, dolazi se do afine aproksimacije funkcije F u tački x_k , odnosno do modela

$$M_k(x_k + s_k) = F(x_k) + F'(x_k)s_k.$$

Model M_k aproksimira funkciju F čiji se koren traži, što znači da se od modela očekuje da u okolini rešenja zadovoljava uslov

$$M_k(x_k + s_k) = 0.$$

Zbog toga je potrebno pronaći rešenje s_k , sistema linearnih jednačina

$$F'(x_k)s_k = -F(x_k).$$

Vektor s_k određen na ovaj način, naziva se Njutnov pravac. Naredna aproksimacija rešenja x^* , određena sa $x_{k+1} = x_k + s_k$, trebalo bi da bude bolja od x_k . Ovaj postupak može se primeniti iterativno, odnosno može se formulirati algoritam za formiranje niza Njutnovih iteracija.

Algoritam N: Njutnov algoritam

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$,

K1: Odrediti s_k iz $F'(x_k)s_k = -F(x_k)$,

K2: Izračunati $x_{k+1} = x_k + s_k$,

K3: $k = k + 1$, i vratiti se na **K1**.

Kako je Njutnov metod zasnovan na aproksimaciji funkcije afinim modelom, u slučaju da je F linearno preslikavanje rešenje se dostiže u samo jednoj iteraciji. Kod nelinearnih sistema, kod kojih je neka od komponenti linearna, u svakoj iteraciji dobija se tačno rešenje po toj komponenti.

Takođe, jedna od osobina zbog koje je ovaj postupak veoma popularan, to je njegova lokalna q -kvadratna konvergencija. Ako je trenutna iteracija dovoljno blizu rešenja broj tačnih cifara će se iz iteracije u iteraciju udvostručavati. Međutim, da bi brza konvergencija postupka bila postignuta, potrebno je dovoljno dobro odabrati početnu iteraciju. Jer, van oblasti konvergencije, ne može se garantovati konvergencija postupka.

Sledeća teorema daje uslove pod kojima se može postići kvadratna konvergencija.

Teorema 2.1.1. [18] *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna na otvorenom konveksnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da postoji rešenje $x^* \in \mathbb{R}^n$ i konstante $r, \beta > 0$, takve da je $\mathcal{B}(x^*, r) \subset D$, $F(x^*) = 0$, $F'(x^*)^{-1}$*

postoji, $\|F'(x^*)^{-1}\| \leq \beta$ i $F' \in Lip_\gamma(\mathcal{B}(x^*, r))$. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je za svako $x_0 \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ niz $\{x_k\}$ generisan Njutnovim algoritmom za $k = 0, 1, \dots$ dobro definisan, konvergira ka x^* i važi

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \beta\gamma\|x_k - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, \dots$$

Postupci koji imaju veći red konvergencije, zahtevaju izračunavanje drugog izvoda funkcije. U poslednjih nekoliko godina pojavili su se postupci koji modifikacijom Njutnovog metoda postižu kubnu konvergenciju i pri tome ne koriste drugi izvod, [20], [10], [58]. U [1] ispitana je međusobna veza ovakvih postupaka za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a neki od njih su uopšteni za slučaj $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

2.1.1 Njutnov metod u singularnom slučaju

Konvergencija Njutnovog algoritma može biti narušena u slučajevima da je Jakobijan singularan ili nije Lipsčic neprekidan u rešenju x^* . Ispitivanje niza Njutnovih iteracija u slučaju singularnosti, predmet je izučavanja još od 70-tih godina prošlog veka.

Većina teorema koje slede važe u proizvoljnom Banahovom prostoru, ali ćemo se u okviru ove teze ograničiti na prostor \mathbb{R}^n .

Označimo sa $\mathcal{N} = \mathcal{N}(F'(x^*))$ m -dimenzionalni ($m > 0$) nula prostor Jakobijana $F'(x^*)$ i neka je P ortogonalna projekcija na nula prostor od $F'(x^*)^T$. Pretpostavimo da je funkcija F dovoljno glatka funkcija i Jakobijan $F'(x)$ nije svuda singularan. Takođe, neka je $(p+1)$ -vi izvod funkcije $F(x)$ Lipsčic neprekidan. Najmanji broj $p \geq 0$ za koji je

$$PF^{(p+1)}(x^*) \neq 0 \tag{2.2}$$

naziva se stepen singularnosti rešenja x^* , [23]. Za funkciju $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ broj $p+1$ predstavlja višestrukost korena x^* .

U slučaju da je dimenzija nula prostora \mathcal{N} jednaka $m = 1$, tada postoje vektori v^* i u^* koji generišu prostore \mathcal{N} i $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}(F'(x^*)^T)$. Gotovo svi rezultati konvergencije Njutnovog postupka zahtevaju takozvanu regularnu pretpostavku koja je u ovom slučaju predstavljena sledećim uslovom

$$\beta^* \equiv (u^*)^T F^{(p+1)}(x^*) (v^*)^{p+1} \neq 0. \tag{2.3}$$

Geometrijsku interpretaciju (2.3) u slučaju da je $p = 1$, dao je Keler, (H.B. Keller), [28]. Rešenje x^* jednačine (2.1) geometrijski je izolovano ako

postoji okolina tačke x^* u kojoj je rešenje jedinstveno. Poznato je da je regularno rešenje ujedno i geometrijski izolovano, odnosno ako je Jakobijan $F'(x^*)$ regularan, tada postoji $\varepsilon > 0$ takvo da je rešenje jedinstveno na $\mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$. Međutim, obrnuto ne mora da bude tačno jer postoje geometrijski izolovana singularna rešenja.

Za funkciju

$$F_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 25 \\ x_1^2 - x_2 - 5 \end{bmatrix}$$

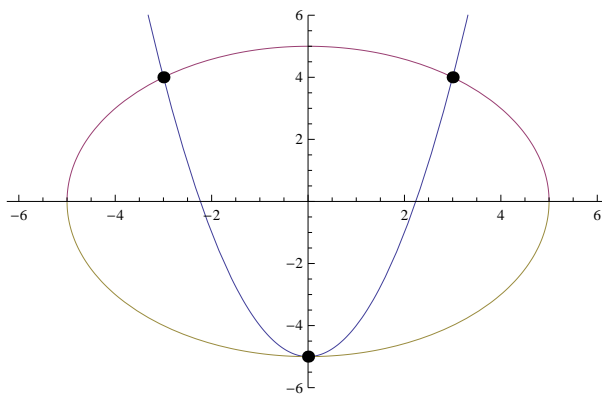
skup korena jednačine $F_1(x_1, x_2) = 0$ je skup $\mathcal{R}_1 = \{(3, 4), (-3, 4), (0, -5)\}$. Jakobijan preslikavanja je dat sa

$$F'_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & -1 \end{bmatrix},$$

odakle sledi da je

$$\det(F'_1(x_1, x_2)) = -2x_1(2x_2 + 1).$$

Jasno je da su prva dva korena regularna, dok je treći singularan. Sva tri rešenja su geometrijski izolovana i prikazana su na slici 2.1.



Slika 2.1

Za funkciju

$$F_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 - 25 \\ x_1x_2 - x_1 - 5x_2 + 5 \end{bmatrix}$$

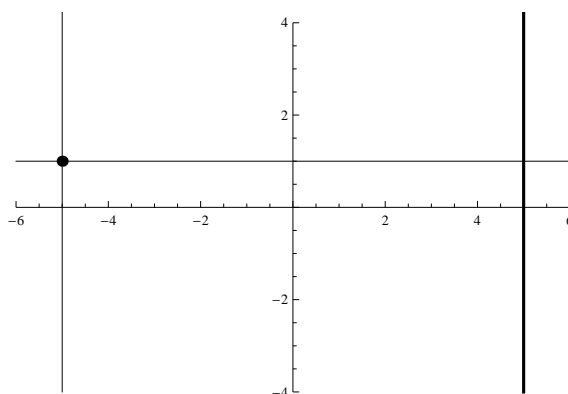
u skupu korena nalazi se tačka $(-5, 1)$, ali i sve tačke iz skupa

$$\mathcal{R}_2 = \{(5, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Kako je

$$\det(F'_2(x_1, x_2)) = 2x_1(x_1 - 5),$$

jasno je da je prvi koren regularan i geometrijski izolovan. Elementi skupa \mathcal{R}_2 čine pravu, tako da nijedan elemenat tog skupa nije geometrijski izolovan koren. Takođe važi da je svaki elemenat skupa \mathcal{R}_2 singularni koren funkcije F_2 . Jakobijan $F'_2(x_1, x_2)$ je singularan i na pravoj $\mathcal{R}_3 = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$, međutim na ovoj pravoj nema korena funkcije F_2 . Rešenja jednačine $F_2(x_1, x_2) = 0$ predstavljena su na slici 2.2.



Slika 2.2: Geometrijska interpretacija korena funkcije F_2

Problem pronalaženja singularnog geometrijski izolovanog rešenja, jeste od posebne važnosti jer se često sreće u praksi. On za nas ima prvorazredni značaj zato što predstavlja predmet izučavanja ove teze.

U skalarnom slučaju za $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ definisano je

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu f(x^*)}{dx^\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

i pokazano, [28], da će singularno rešenje x^* biti geometrijski izolovano ako za neko $N \geq 2$ važi

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{N-1} = 0, \quad a_N \neq 0. \quad (2.4)$$

Lema 2.1.1. [28] Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Singularno rešenje x^* jednačine

$$f(x) = 0$$

je geometrijski izolovano ako za neko $N \geq 2$ važi (2.4).

Geometrijska izolovanost rešenja x^* u ovom slučaju sledi iz činjenice da je x^* koren reda N . Tejlороva formula funkcije $f(x)$ za $x \in \mathcal{B}(x^*)$ je

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^N a_\nu (x - x^*)^\nu + o((x - x^*)^N),$$

te se koristeći uslov (2.4) dobija

$$f(x) = a_N (x - x^*)^N + o((x - x^*)^N) = (x - x^*)^N (a_N + o(x - x^*)).$$

U okolini $\mathcal{B}(x^*)$ je $a_N + o(x - x^*) \neq 0$, za $x \neq x^*$ jer važi (2.4), pa je rešenje x^* geometrijski izolovano. Kako je $a_0 = a_1 = 0$, ne postoji $f'(x^*)^{-1}$, pa je rešenje singularno.

Za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definisanu sa $f(x) = x^3$, rešenje jednačine $f(x) = 0$ je $x^* = 0$. Takođe važi da je $f'(0) = f''(0) = 0$ i $f'''(0) = 6$, odakle sledi da je $N = 3$ i rešenje je singularno i geometrijski izolovano.

Postoje geometrijski izolovani koreni funkcija koje nisu analitičke pa ne važi (2.4). To znači da je uslov (2.4) samo dovoljan ali ne i potreban da bi koren funkcije, odnosno rešenje jednačine $f(x) = 0$ bilo geometrijski izolovano.

Za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definisanu na sledeći način

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}$$

je $x^* = 0$ geometrijski izolovan koren. Međutim, ne važi uslov (2.4) zato što funkcija nije analitička, jer nema neprekidan drugi izvod u x^* .

U slučaju da je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, važi sledeća teorema:

Teorema 2.1.2. [28] Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $F(x) \in C^2(\mathcal{B}(x^*, \varepsilon))$ za $\varepsilon > 0$, pri čemu je x^* singularno rešenje jednačine (2.1). Pretpostavimo da je nula prostor \mathcal{N} generisan vektorom v^* , dok je nula prostor \mathcal{N}_1 generisan vektorom u^* tako da važi $(u^*)^T v^* = 1$. Ako važi da je

$$a_2 \equiv \frac{1}{2} (u^*)^T F''(x^*) v^* v^* \neq 0, \quad (2.5)$$

onda je x^* geometrijski izolovano rešenje.

Pored toga što implicira geometrijsku izolovanost rešenja x^* , uslov (2.5) implicira da $(n - 1)$ -dimenzionalna mnogostrukost na kojoj je Jakobijan $F'(x)$ singularan, seče nula prostor \mathcal{N} generisan vektorom v^* u tački x^* .

Funkcija $F(x)$ je glatka, što implicira postojanje karakterističnog korena $\alpha_1(x)$ i levog i desnog karakterističnog vektora $u^*(x), v^*(x)$ matrice $F'(x)$ koji odgovaraju korenu $\alpha_1(x)$ za $x \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$, tako da važi

$$a) \quad F'(x)v^*(x) = \alpha_1(x)v^*(x), \quad \|v^*(x)\| = 1 \quad (2.6)$$

$$b) \quad (u^*(x))^T F'(x) = \alpha_1(x)(u^*(x))^T, \quad (u^*(x))^T v^*(x) = 1 \quad (2.7)$$

$$c) \quad \alpha_1(x^*) = 0.$$

Pretpostavimo da je gradijent $\nabla\alpha_1(x^*) \neq 0$. Na osnovu teoreme o implicitnoj funkciji primenjenoj na

$$\alpha_1(x) = 0 \quad (2.8)$$

u $x = x^*$, sledi da (2.8) važi na glatkoj $(n - 1)$ -dimenzionalnoj mnogostrukosti \mathcal{S} . Na mnogostrukosti \mathcal{S} je vrednost karakterističnog korena $\alpha_1(x) = 0$ za svako $x \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$, što su singularne tačke Jakobijana $F'(x^*)$, pa je

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \det F'(x) = 0\}.$$

Takođe važi da $x^* \in \mathcal{S}$. Gradijent $\nabla\alpha_1(x^*)$ je ortogonalan na \mathcal{S} u x^* . Diferenciranjem prve jednakosti u (2.6)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(F'(x)v^*(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_1(x)v^*(x) \right)$$

sledi da je

$$\frac{\partial}{\partial x} F'(x)v^*(x) + F'(x) \frac{\partial}{\partial x} v^*(x) = \frac{\partial}{\partial x} \alpha_1(x)v^*(x) + \alpha_1(x) \frac{\partial}{\partial x} v^*(x),$$

odnosno

$$F''(x)v^*(x) + F'(x) \frac{\partial}{\partial x} v^*(x) = \nabla\alpha_1(x)(v^*(x))^T + \alpha_1(x) \frac{\partial}{\partial x} v^*(x).$$

Množenjem sa leve strane vektorom $u^*(x)$, dobijamo

$$\begin{aligned} & (u^*(x))^T F''(x)v^*(x) + (u^*(x))^T F'(x) \frac{\partial}{\partial x} v^*(x) = \\ & = (u^*(x))^T \nabla\alpha_1(x)(v^*(x))^T + (u^*(x))^T \alpha_1(x) \frac{\partial}{\partial x} v^*(x). \end{aligned}$$

Ako se iskoristi (2.7), tada je

$$(u^*(x))^T F''(x) v^*(x) = (u^*(x))^T \nabla \alpha_1(x) (v^*(x))^T$$

i sledi da za $x = x^*$ važi

$$\nabla \alpha_1(x^*) = u^*(x^*)^T F''(x^*) v^*(x^*).$$

Sada je

$$\nabla \alpha_1(x^*) v^*(x^*) = u^*(x^*)^T F''(x^*) v^*(x^*) v^*(x^*).$$

Uslov (2.5) ekvivalentan je uslovu da je $a_2 = \nabla \alpha_1(x^*) v^*(x^*) \neq 0$. To implicira da gradijent $\nabla \alpha_1(x^*)$ nije ortogonalan na prostor generisan vektorom $v^*(x^*)$, zapravo mnogostrukost \mathcal{S} seče nula prostor generisan vektorom v^* , u tački x^* . Neka je \mathcal{W} konus sa vrhom u x^* , osom paralelnom pravcu vektora $v^* = v^*(x^*)$ i uglom koji je manji od θ_0 , pri čemu je

$$\cos \theta_0 = \frac{a_2}{\|\nabla \alpha_1(x^*)\|}.$$

Tada uslov (2.5) implicira da postoji okolina rešenja $\mathcal{B}(x^*, \rho)$ za neko malo $\rho > 0$, tako da mnogostrukost \mathcal{S} i konus imaju zajedničku samo tačku x^* na $\mathcal{B}(x^*, \rho)$. To znači da je $F'(x)$ regularan u svim tačkama koje se nalaze u preseku $\mathcal{W} \cap \mathcal{B}(x^*, \rho)$, osim u x^* . U tačkama iz ovog skupa Njutnov niz je dobro definisan i očekuje se konvergencija ka rešenju ako iteracije ne napuste taj skup.

Jedan od prvih radova koji ispituju konvergenciju Njutnovog metoda u slučaju singularnosti prvog reda sa jednodimenzionalnim nula prostorom predstavio je Redien, (G.W. Reddien), [43].

Za funkciju $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F \in C^3(\mathbb{R}^n)$, neka je $\mathcal{N} \neq \{0\}$ netrivialan nula prostor operatora $F'(x^*)$. Neka je $\mathbb{R}^n = \mathcal{N} \oplus \mathcal{X}$, pri čemu je \mathcal{X} zatvoren skup i važi da je $F'(x^*)x \in \mathcal{X}$, za $x \in \mathcal{X}$. Neka je $P_{\mathcal{X}}$ projektor iz \mathbb{R}^n na \mathcal{X} za koji važi da je $\mathcal{N}(P_{\mathcal{X}}) = \mathcal{N}$ i $P_{\mathcal{N}} = E - P_{\mathcal{X}}$. Ako je

$$\mathcal{C}_{\theta}(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|P_{\mathcal{X}}(x - x^*)\| \leq \theta \|P_{\mathcal{N}}(x - x^*)\|\},$$

tada je skup $\mathcal{W}_{\rho, \theta}(x^*)$ definisan na sledeći način

$$\mathcal{W}_{\rho, \theta}(x^*) = \mathcal{B}(x^*, \rho) \cap \mathcal{C}_{\theta}(x^*).$$

Teorema 2.1.3. [43] Neka je $\dim \mathcal{N} = 1$ i za $v \in \mathcal{N}$ važi da je $F''(x^*)vv \cap \mathcal{X} = \{0\}$. Neka je $\|F''(x^*)vx\| \geq c_1\|v\|\|x\|$ za svako $v \in \mathcal{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c_1 > 0$. Tada postoji $\rho > 0$, $\theta > 0$ takvo da je $F'(x)$ regularan i $\|F'(x)^{-1}\| \leq c_2\|x - x^*\|^{-1}$ važi za $x \neq x^*$ na $\mathcal{W}_{\rho,\theta}(x^*)$. Ako je početna iteracija odabrana tako da $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho,\theta}(x^*)$, tada niz $\{x_k\}$, generisan Njutnovim algoritmom, ostaje sadržan u $\mathcal{W}_{\rho,\theta}(x^*)$, konvergira ka rešenju x^* i važi da je

$$\|P_{\mathcal{X}}(x_k - x^*)\| \leq c\|(x_{k-1} - x^*)\|^2$$

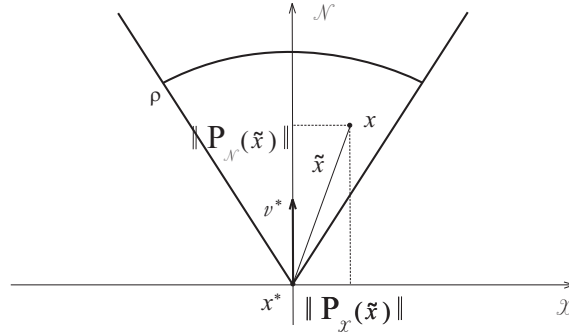
i

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|P_{\mathcal{N}}(x_k - x^*)\|}{\|P_{\mathcal{N}}(x_{k-1} - x^*)\|} = \frac{1}{2}.$$

Da bi Njutnova iteracija bila definisana, odnosno, da bi postojalo $F'(x_0)^{-1}$, oblast izbora početne iteracije u singularnom slučaju promenjena je u odnosu na regularni slučaj i predstavlja konus sa temenom u x^* duž pravca vektora koji generiše nula prostor operatora $F'(x^*)$. Označićemo ga sa

$$\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\tilde{x}\| \leq \rho, \|P_{\mathcal{X}}(\tilde{x})\| \leq \theta\|P_{\mathcal{N}}(\tilde{x})\|\}, \quad (2.9)$$

pri čemu je $\tilde{x} = x - x^*$. Na slici 2.3 je predstavljen skup $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$ za funkciju $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sa jednodimenzionalnim nula prostorom \mathcal{N} .



Slika 2.3: Skup $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$

Takođe je pokazano, [43], da se svaka naredna iteracija nalazi u istoj oblasti $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$, pa je Jakobijan regularan u svakoj iteraciji, i na taj način je garantovana konvergencija Njutnovog metoda. Rastojanje iteracije x_k od

rešenja x^* , kao i ugao θ_k , između vektora $x_k - x^*$ i nula prostora, smanjuje se iz iteracije u iteraciju, što znači da se iteracije sabijaju uz nula prostor i za dovoljno malo ρ čine gotovo pravu liniju. Granična vrednost

$$q_k = \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} \quad (2.10)$$

teži ka $\frac{1}{2}$, odakle zaključujemo da je konvergencija postupka linearna. Međutim, konvergencija nije ista ako se posmatra na nula prostoru \mathcal{N} i na prostoru \mathcal{X} . Konvergencija na nula prostoru je sporija i linearna, dok se na prostoru \mathcal{X} može doći i do kvadratne konvergencije. Rešenje x^* jedinstveno je u lopti $\mathcal{B}(x^*, \rho)$.

Sledeće pretpostvake navode se u većini teorema kojima se opisuje ponašanje iterativnog niza i posebno ćemo ih izdvojiti.

A1. $\text{rang}(F'(x^*)) = n - 1$.

A2. Neka je \mathcal{N} nula prostor Jakobijana $F'(x^*)$ generisan vektorom $v^* \in \mathbb{R}^n$ i neka je \mathcal{X} zatvoren skup takav da je $\mathbb{R}^n = \mathcal{N} \oplus \mathcal{X}$. Za svaku projekciju $P_{\mathcal{N}}$ na \mathcal{N} paralelnu sa \mathcal{X} je

$$P_{\mathcal{N}}F''(x^*)v^*v^* \neq 0.$$

Slučaj da je dimenzija nula prostora \mathcal{N} veća od jedinice analizirali su Decker i Keli, (D.W. Decker, C.T. Kelley), u [12], i dokazali upoštenje teoreme 2.1.3. Za $x \in \mathbb{R}^n$ definisano je linearno preslikavanje $B(x) : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ na sledeći način:

$$B(x)(v) = -P_{\mathcal{N}}F''(x^*)xv, \quad (2.11)$$

pri čemu je $v = P_{\mathcal{N}}x$, i pokazano je da njegova regularnost na nula prostoru za posledicu ima konvergenciju Njutnovog iterativnog niza.

Teorema 2.1.4. [12] *Ako $F'(x^*)$ ima konačno dimenzionalni nula prostor \mathcal{N} i za svako $x \in \mathcal{N}$ je linearni operator $B(x)$ regularan na \mathcal{N} , tada važi teorema 2.1.3.*

U slučaju da je $\dim \mathcal{N} = 1$, pretpostavke **A1** i **A2** impliciraju regularnost operatora $B(x)$ na nula prostoru. U [12] je pokazano da je za $x \in \mathcal{W}_{\rho, \theta}^{\mathcal{N}}(x^*)$ Jakobijan regularan i

$$F'(x)^{-1} = B(\tilde{x})^{-1}P_{\mathcal{N}} + \beta_0(x),$$

pri čemu je sa $\beta_k(x)$ označen bilo koji izraz oblika $O(\|\tilde{x}\|^k)$. Teoremom 2.1.4. je pokazana konvergencija u slučaju da rešenje x^* nije izolovano, pa je opštija od teoreme 2.1.3.

U prethodnoj teoremi, regularnost operatora $B(x)$ za x koje zadovoljava $P_{\mathcal{N}}\tilde{x} \neq 0$, bila je ključna za pokazivanje konvergencije. Takva pretpostavka prirodna je u mnogim problemima, ali je neprimenljiva u slučaju da je $B(x) = 0$, za svako $x \in \mathbb{R}^n$, i taj slučaj je ispitan u [13]. Za $x \in \mathbb{R}^n$, definisani su operatori

$$B_1(\tilde{x})(x) = F''(x^*) \tilde{v} x, \quad (2.12)$$

$$B_2(\tilde{x})(x) = F'''(x^*) \tilde{v} \tilde{v} x, \quad (2.13)$$

pri čemu je $\tilde{v} = P_{\mathcal{N}}\tilde{x}$, i linearni operatori $\bar{B}_j(x)$ na \mathcal{N}

$$\bar{B}_j(\tilde{x})(x) = P_{\mathcal{N}}B_j(\tilde{x})(x)P_{\mathcal{N}}, \quad j = 1, 2. \quad (2.14)$$

Skup dozvoljenih iteracija modifikovan je na sledeći način:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{K,\rho,\theta}(x^*) &= \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\tilde{x}\| \leq \rho, \|P_{\mathcal{N}}F''(x^*)(P_{\mathcal{X}}\tilde{x}, v)\| \\ &\leq \theta\|P_{\mathcal{N}}\tilde{x}\|^2\|v\| \text{ za sve } v \in \mathcal{N}, \|P_{\mathcal{X}}\tilde{x}\| \leq K\|P_{\mathcal{N}}\tilde{x}\|^2\}. \end{aligned}$$

Teorema 2.1.5. [13] *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $F \in C^4(\mathbb{R}^n)$, $F(x^*) = 0$. Neka $F'(x^*)$ ima konačnodimenzionalni nula prostor \mathcal{N} i zatvoren skup slika \mathcal{X} tako da je $\mathbb{R}^n = \mathcal{N} \oplus \mathcal{X}$ i neka važe sledeće pretpostavke:*

- $\bar{B}_1(\tilde{x}) = 0$,
- preslikavanje $\bar{B}_2(\tilde{x})$ je regularno preslikavanje na \mathcal{N} , za $x \in \mathbb{R}^n$ takvo da je $P_{\mathcal{N}}\tilde{x} \neq 0$,
- za svako $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ je $P_{\mathcal{N}}B_1(\tilde{z})P_{\mathcal{X}}\hat{F}^{-1}P_{\mathcal{X}}B_1(\tilde{y})P_{\mathcal{N}}x = 0$, pri čemu je sa \hat{F} označena restrikcija $F'(x^*)|_{\mathcal{X}}$ i pri tome postoji \hat{F}^{-1} kao preslikavanje na \mathcal{X} .

Ako je

$$K_0 = 4 \sup_{v,\omega \in \mathcal{N}} \left(\frac{1}{\|v\|\|\omega\|} \|P_{\mathcal{X}}\hat{F}^{-1}P_{\mathcal{X}}F''(x^*)v\omega\| \right) + 1 \quad (2.15)$$

za dovoljno malo ρ i θ , tada je $F'(x)$ regularan za $x \in \mathcal{W}_{K_0,\rho,\theta}(x^*)$, postoji $c_1 > 0$ takvo da je $\|F'(x)^{-1}\| \leq c_1\|\tilde{x}\|^{-2}$ za sve $x \in \mathcal{W}_{K_0,\rho,\theta}(x^*)$ i niz Njutnovih iteracija ostaje sadržan u $\mathcal{W}_{K_0,\rho,\theta}(x^*)$.

Ako je $x_0 \in \mathcal{W}_{K_0,\rho,\theta}(x^*)$, tada niz Njutnovih iteracija $\{x_k\}$ konvergira ka x^* i važi

- $\|P_{\mathcal{X}}\tilde{x}_k\| \leq \frac{1}{3}K_0\|\tilde{x}_{k-1}\|^2$, $k = 1, 2, \dots$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_k\|}{\|P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_{k-1}\|} = \frac{2}{3}$,
- x^* jedino je rešenje jednačine $F(x) = 0$ na skupu $\{x : \|\tilde{x}\| \leq \rho\}$.

Za razliku od teoreme 2.1.4., u ovoj teoremi je pokazano da je konvergencija Njutnovog postupka moguća i kada je $\bar{B}_1(\tilde{x}) = 0$ i $\bar{B}_2(\tilde{x})$ regularno. Dobijena je bolja ocena za inverzni Jakobijan u oblasti u kojoj konvergira Njutnov metod, tj. $\|F'(x)^{-1}\| = O(\|\tilde{x}\|^{-2})$. U definiciji konstante K_0 može da se desi da je $P_{\mathcal{X}}F''(x^*)v\omega = 0$ za svako $v, \omega \in \mathcal{N}$. Ali, u tim slučajevima, na osnovu (2.15), sledi da je $K_0 = 1$. Kao i u prethodnom slučaju, dobijena je linearna konvergencija po nula prostoru, dok na \mathcal{X} imamo kvadratnu konvergenciju.

U prethodnim teoremama, pored toga što se opisuje oblast iz koje treba odabrati početnu iteraciju kako bi konvergencija Njutnovog metoda bila postignuta, u njima se opisuje i ponašanje Njutnovih iteracija kada se približavaju singularnom rešenju.

2.1.2 Modifikacije Njutnovog metoda

Kao što je već rečeno, prilikom singularnosti Jakobijana u rešenju, osobine Njutnovog metoda se pogoršavaju. Zbog toga su se pojavile modifikacije kako bi se ubrzala konvergencija ka singularnom rešenju. Ovde ćemo izdvojiti grupu višekoračnih Njutnovih postupaka, kao i metod Šamanskog.

2.1.2.1 Višekoračni Njutnov metod

Ako se posmatra Njutnov postupak za funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, u slučaju takozvane regularne singularnosti, kada je prvi izvod $f'(x)$ jednak nuli a drugi izvod $f''(x^*)$ različit od nule, konvergencija ne samo da je spora nego je i numerički nestabilna. Razlog tome je što se prilikom računanja Njutnovog pravca računa količnik $f(x_k)$ i $f'(x_k)$, pri čemu i brojilac i imenilac teže nuli. Jedan način da se izbegne ovakva situacija je da se pređe na fiksni Njutnov postupak. U njemu se $f'(x_k)$ zamenjuje nekim prethodno izračunatim Jakobijanom, najčešće $f'(x_0)$. Na taj način dolazimo do sublinearne konvergencije, gde količnik (2.10) teži ka 1, što je i dalje veoma sporo, jer su i Njutnovi koraci

veoma kratki. Međutim, kako Njutnov postupak u svakoj iteraciji dvostruko smanjuje rastojanje od rešenja, jedan od načina da se ubrza konvergencija je da se Njutnov korak u svakoj iteraciji udvostruči. U [48] je pokazano da se u slučaju jedne promenljive može postići q -kvadratna konvergencija, pod uslovom da je funkcija f dovoljno glatka.

Jedan od načina kako da se poboljša konvergencija kada je $F'(x^*)$ singularan predstavio je Grivank u [21]. On je dao sledeći algoritam.

Algoritam G:

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$,

K1: Odrediti w_k iz $F'(x_k)w_k = -F(x_k)$,

K2: Izračunati $y_k = x_k + w_k$,

K3: Odrediti v_k iz $F'(y_k)v_k = -F(y_k)$,

K4: Izračunati $z_k = y_k + v_k$,

K5: Odrediti s_k iz $F'(z_k)s_k = -F(z_k)$,

K6: Izračunati $x_{k+1} = z_k + 2s_k$,

K7: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Za iterativni niz generisan algoritmom **G** važi sledeća teorema.

Teorema 2.1.6. [31] *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $F \in C^4(\mathbb{R}^n)$. Neka za svako $v, \omega \in \mathcal{N}$ važi*

$$\|P_{\mathcal{N}}F''(x^*)v\omega\| \geq \alpha\|v\|\|\omega\|, \text{ za neko } \alpha \quad (2.16)$$

$$\|P_{\mathcal{N}}F'''(x^*)vvv\| \geq \beta\|v\|^3, \text{ za neko } \beta. \quad (2.17)$$

Ako $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^)$, gde je skup $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$ definisan sa (2.9). Neka je niz $\{x_k\}$ generisan algoritmom **G**. Tada postoji konstanta $K_1 > 0$ takva da za $k \geq 1$ važi*

$$\|\tilde{x}_k\| \leq K_1\|\tilde{x}_{k-1}\|^2.$$

Većina radova koji posmatraju ubrzavanje Njutnovog postupka do superlinearne konvergencije, koriste pretpostavke koje su analogne sa (2.16) i (2.17). Uslov (2.16) zahteva da je dimenzija nula prostora 1 ili 2, a (2.17)

predstavlja nedegenerativni uslov na izvod jednog reda većeg od višestrukosti korena.

Keli i Sureš, (C.T. Kelley, R. Suresh) primenili su u [31] sličan postupak za $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pri čemu su izbačeni uslovi oblika (2.17). Neka $F'(x^*)$ ima konačno dimenzionalni nula prostor \mathcal{N} i skup slika \mathcal{X} , neka je $P_{\mathcal{N}}$ projekcija na \mathcal{N} paralelna sa \mathcal{X} i $P_{\mathcal{X}} = E - P_{\mathcal{N}}$ i važi:

A3: Postoji $v^* \in \mathcal{N}$ takvo da je operator $B(x)$, definisan na \mathcal{N} sa

$$B(x)(v) = P_{\mathcal{N}}F''(x^*) v^* v,$$

pri čemu je $v = P_{\mathcal{N}}x$, regularan.

Neka je P_0 projekcija na jednodimenzionalan prostor generisan vektorom v^* takva da je

$$P_0P_{\mathcal{X}} = P_{\mathcal{X}}P_0 = 0, \quad P_{\mathcal{N}}P_0 = P_0P_{\mathcal{N}} = P_0,$$

i neka je definisan skup

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\rho,\theta,\eta}(x^*) = \{x : 0 < \|\tilde{x}\| < \rho, \|P_{\mathcal{X}}\tilde{x}\| \leq \theta\|P_{\mathcal{N}}\tilde{x}\|, \\ \|(P_{\mathcal{N}} - P_0)\tilde{x}\| \leq \eta\|P_{\mathcal{N}}\tilde{x}\|\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Za $x \in \mathbb{R}^n$ i $v = P_{\mathcal{N}}x$, sa $B(x)$ je definisano linearno preslikavanje na \mathcal{N} :

$$B(x)(v) = P_{\mathcal{N}}F''(x^*) \tilde{x} v.$$

Ako važi pretpostavka **A3** i $x \in \mathcal{W}_{\rho,\theta,\eta}(x^*)$ za dovoljno malo ρ, θ, η , tada je $B(x)$ invertibilno. U teoremi 2.1.4. je invertibilnost operatora $B(x)$ bila dovoljna za konvergenciju Njutnovog niza iteracija. Neka je

$$V(x) = B(x)^{-1}F'''(x^*)(\tilde{x})^3$$

i

$$\kappa = \sup_{x \in \mathcal{W}_{\bar{\rho},\bar{\theta},\bar{\eta}}(x^*)} \|\tilde{x}\|^{-2} \|V(x)\|, \quad (2.19)$$

pri čemu su $\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}$ odabrani tako da Njutnov iterativni niz, označimo ga sa $\{x_k^N\}$, pripada konusu, tj.

$$\{x_k^N\} \in \mathcal{W}_{\bar{\rho},\bar{\theta},\bar{\eta}}(x^*). \quad (2.20)$$

Ako važi pretpostavka **A3**, uslov da je $\kappa = 0$ je ekvivalentan uslovu

$$P_{\mathcal{N}}F'''(x^*) = 0.$$

Uslov (2.17) treba da osigura da iteracije definisane algoritmom **G**, u koracima **K2**, **K4** i **K6** imaju dovoljno veliku \mathcal{N} -komponentu i tako da će biti ubačene dovoljno duboko u konus, kako bi i modifikovana iteracija ostala u njemu. Zbog toga se predlaže dodavanje izraza koji će povećati \mathcal{N} -komponentu za \tilde{x}_k . Predložen je sledeći algoritam

Algoritam KS:

- K0:** Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$,
- K1:** Odrediti w_k iz $F'(x_k)w_k = -F(x_k)$,
- K2:** Izračunati $y_k = x_k + w_k$,
- K3:** Odrediti s_k iz $F'(y_k)s_k = -F(y_k)$,
- K4:** Izračunati $x_{k+1} = y_k - (2 - C\|s_k\|^\alpha)s_k$,
- K5:** $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

U sledećoj teoremi predstavljena je kvadratna konvergencija dvokoračnog metoda, definisanog algoritmom **KS**, pod uslovima pod kojima konvergira Njutnov metod.

Teorema 2.1.7. [31] *Neka za $F \in C^4(\mathbb{R}^n)$ važe pretpostavke **A1**, **A2** i neka su $\bar{\rho}$, $\bar{\theta}$ i $\bar{\eta}$ odabrani tako da važi (2.20). Neka je dato $\alpha \in (0, 1)$ i $C \in \mathbb{R}$. Ako je $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*)$, pri čemu su ρ, θ, η takve da važi $\mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*) \subset \mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$, tada niz $\{x_k\}$, generisan algoritmom **KS**, konvergira ka x^* , $x_k \in \mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$ za svako k , i postoji $K > 0$ tako da važi za svako $k \geq 0$*

$$\|\tilde{x}_{k+1}\| \leq K\|\tilde{x}_k\|^{1+\alpha}.$$

Ako je $\kappa = 0$, α može biti izabrano da bude 1 ako je C dovoljno veliko.

U ovom slučaju, znak konstante C nije bitan - bitno je da je $|C|$ dovoljno veliko da zadrži modifikovanu iteraciju u konusu. Manje vrednosti $|C|$ zahtevaju manje vrednosti ρ i θ , a vrednost $C = 0$ nije dovoljna da zadrži iteraciju u dozvoljenoj oblasti.

Ako se ovaj metod primeni na problem u kome je $F'(x^*)$ regularan, međiteracija je čisto Njutnova, tako da će ukupna konvergencija biti reda 4.

Za kvadratne probleme i κ definisano sa (2.19) uslov $\kappa = 0$ je trivijalno zadovoljen. Ako je $\kappa > 0$, niz iteracija generisanih algoritmom **KS** konvergiraće superlinearno ka rešenju, za razliku od iterativnog niza generisanog algoritmom **G** koji konvergira kvadratno, teorema 2.1.6. Međutim, algoritam **KS** koristi jednu međiteraciju, za razliku od algoritma **G**. Konvergencija se može ubrzati ako se izabere parametar α , tako da važi

$$\alpha > 4^{1/3} - 1.$$

U slučaju $\kappa = 0$, koristi se 3-koračni postupak koji je predstavljen sledećim algoritmom.

Algoritam KST:

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$,

K1: Odrediti w_k iz $F'(x_k)w_k = -F(x_k)$,

K2: Izračunati $y_k = x_k + w_k$,

K3: Odrediti v_k iz $F'(y_k)v_k = -F(y_k)$,

K4: Izračunati $z_k = y_k + v_k$,

K5: Odrediti s_k iz $F'(z_k)s_k = -F(z_k)$,

K6: Izračunati $x_{k+1} = z_k - (2 - C\|s_k\|^\alpha)s_k$,

K7: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Za ovako definisan algoritam, može se pokazati sledeća teorema.

Teorema 2.1.8. [31] *Neka je $F \in C^4(\mathbb{R}^n)$ i neka su dati $C \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in (0, 2)$. Pretpostavimo da je $\kappa = 0$ i da važi pretpostavka **A3**. Neka su konstante $\bar{\rho}$, $\bar{\theta}$ i $\bar{\eta}$ takve da važi (2.20). Ako $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*)$, gde je skup $\mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*)$ definisan sa (2.18), i važi $\mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*) \subset \mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$, tada niz $\{x_k\}$, generisan algoritmom **KST**, konvergira ka rešenju x^* , $x_k \in \mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$ za svako k , i postoji $K > 0$ takva da je za svako $k \geq 0$*

$$\|\tilde{x}_{k+1}\| \leq K\|\tilde{x}_k\|^{1+\alpha}.$$

Sličan postupak može se koristiti i za višestruke korene. Prethodno je potrebno uvesti pretpostavku ekvivalentnu **A3**.

A4: Neka $F \in C^{p+3}(\mathbb{R}^n)$ i neka postoji niz $\{b_k\} \subset \mathbb{R}^n$, kao i p najmanji ceo broj za koji je

$$P_{\mathcal{N}}F^{(p+1)}(x^*)(b_1, \dots, b_{p+1}) \neq 0.$$

Pretpostavimo da postoji vektor $v^* \in \mathcal{N}$, takav da je operator

$$H(x) = P_{\mathcal{N}}F^{(p+1)}(x^*)((v^*)^p, P_{\mathcal{N}}x) \quad (2.21)$$

invertibilan.

Broj p ujedno je i stepen singularnosti, (2.2). Neka je

$$D_p(\tilde{x})(x) = P_{\mathcal{N}}F^{(p+1)}(x^*) (P_{\mathcal{N}}\tilde{x})^p v,$$

za $v = P_{\mathcal{N}}x$. Ako je $x \in \mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$ za dovoljno male $\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}$, onda postoji $D_p(\tilde{x})(x)^{-1}$. U slučaju da je stepen singularnosti $p > 1$, može se koristiti sledeći algoritam. Superlinearna konvergencija pokazana je u teoremi 2.1.9..

Algoritam KSV:

- K0:** Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$,
- K1:** Odrediti w_k iz $F'(x_k)w_k = -F(x_k)$,
- K2:** Izračunati $y_k = x_k + w_k$,
- K3:** Odrediti s_k iz $F'(y_k)s_k = -F(y_k)$,
- K4:** Izračunati $x_{k+1} = z_k - (p + 1 - C\|s_k\|^\alpha)s_k$,
- K5:** $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Teorema 2.1.9. [31] Neka je $p > 1$, operator H invertibilan operator i važi pretpostavka **A4**. Neka je $\alpha \in (0, 1)$, $C \in \mathbb{R}$ i neka su $\bar{\rho}, \bar{\theta}$ i $\bar{\eta}$ takve da važi (2.20). Ako $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*)$ za ρ, θ, η takve da važi $\mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*) \subset \mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$, tada niz $\{x_k\}$, generisan algoritmom **KSV**, konvergira ka rešenju, $x_k \in \mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$ za svako k i postoji $K > 0$ takvo da je za svako $k \geq 0$

$$\|\tilde{x}_{k+1}\| \leq K\|\tilde{x}_k\|^{1+\alpha}.$$

Njutnov korak ima zadatak da smanji \mathcal{X} -komponentu iteracije, pa se može desiti da iteracija više ne pripada konusu. Zbog toga se uvodi korekcija kako bi se pravac \tilde{x}_{k+1} približio pravcu \tilde{x}_k . Numerički je pokazano da izbor parametara α i C ima uticaj na brzinu konvergencije. Ako je C malo, a α suviše veliko, može se desiti da naredna iteracija x_{k+1} napusti $\mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$. Ako je C suviše veliko, a α suviše malo, niz $\{x_k\}$, iako se nalazi u $\mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$, konvergiraće sporo. Numerički eksperimenti u [31] pokazali su da su optimalne vrednosti $C = 1$ i $\alpha = 0.9$.

2.2 Netačni Njutnov metod

Netačni Njutnov metod predstavlja modifikaciju kojom se otklanja jedan od nedostataka Njutnovog metoda. U svakoj iteraciji Njutnovog metoda, rešava se sistem linearnih jednačina kako bi došli do pravca u kome se nalazi naredna iteracija, odnosno pronalazi se rešenje linearnog sistema jednačina

$$F'(x_k)s_k = -F(x_k). \quad (2.22)$$

Izračunavanje tačnog rešenja jednačine (2.22) korišćenjem nekog od direktnih metoda, kao što je Gausov metod eliminacije, može biti dosta skupo. Zbog toga se kod netačnog Njutnovog metoda ova jednačina rešava samo približno i u zamenu za tačnost Njutnovog metoda dobijamo metod koji je jeftiniji za rad. Ovakvi postupci neće biti brzi kao Njutnov metod, ali će se vreme utrošeno na tačno rešavanje jednačine (2.22) znatno smanjiti. Dobijeno približno rešenje prihvata se u zavisnosti od norme rezidualnog vektora

$$r_k = F'(x_k)s_k + F(x_k),$$

odnosno, od veličine

$$\frac{\|r_k\|}{\|F(x_k)\|}.$$

U radu [16] posmatrana je klasa netačnih Njutnovih metoda koja prilikom određivanja aproksimacije rešenja koristi ocenu

$$\frac{\|r_k\|}{\|F(x_k)\|} \leq \eta_k, \quad (2.23)$$

pri čemu je niz $\{\eta_k\}$ odabran tako da je $\eta_k \leq \eta < 1$.

Netačni Njutnov metod dat je sledećim algoritmom.

Algoritam IN: Netačni Njutnov metod

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\eta_0 \in \mathbb{R}$, $k = 0$,

K1: Odrediti s_k iz $F'(x_k)s_k = -F(x_k) + r_k$, pri čemu je $\frac{\|r_k\|}{\|F(x_k)\|} \leq \eta_k$,

K2: Izračunati $x_{k+1} = x_k + s_k$,

K5: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Niz $\{\eta_k\}$ može zavisiti od x_k , a za vrednost $\eta_k = 0$ dobija se Njutnov metod. Pokazano je da su ovakvi metodi lokalno konvergentni ako je niz $\{\eta_k\}$ uniformno manji od jedinice, a uz pogodno odabran niz konvergencija će biti superlinearna.

Teorema 2.2.1. [30] *Neka je F Lipšic neprekidno diferencijabilna u okolini rešenja x^* i neka je $F'(x^*)$ regularna matrica. Ako $x_0 \in \mathcal{B}(x^*)$ i $\bar{\eta} \in [0, 1)$, tako da je $0 \leq \eta_k \leq \bar{\eta}$, tada niz $\{x_k\}$, generisan algoritmom **IN**, konvergira ka rešenju x^* q -linearno u normi $\|\cdot\|_*$, pri čemu je*

$$\|\omega\|_* = \|F'(x^*)\omega\|.$$

Ako niz $\{\eta_k\}$ teži ka 0, tada je konvergencija q -superlinearna. Ako je $\eta_k = \mathcal{O}(\|F(x_k)\|^l)$ za $k \rightarrow \infty$ za neko $l \in (0, 1]$ tada $\{x_k\}$ konvergira ka x^ q -superlinearno sa q -redom bar $1 + l$.*

2.2.1 Netačni Njutnov metod u singularnom slučaju

U slučaju da je problem koji rešavamo singularan i nula prostor \mathcal{N} jednodimenzionalan, Keli i Hu, (C.T. Kelley, Z.Q. Xue), [30], pokazali su da će netačni Njutnov postupak konvergirati u istoj oblasti kao i Njutnov postupak, dok će se red konvergencije smanjiti i postati linearan.

Teorema 2.2.2. [30] *Neka je $F \in C^2(\mathcal{B}(x^*))$ i važe pretpostavke **A1** i **A2**. Tada postoje konstante ρ, θ i η takve da je x_0 iz konusa $\mathcal{W}_{\rho, \theta}^{\mathcal{N}}(x^*)$, definisanog sa (2.9), i važi da je*

$$\eta_0 \|P_{\mathcal{X}} \tilde{x}_0\| \leq \bar{M} \|P_{\mathcal{N}} \tilde{x}_0\| \|\tilde{x}_0\|,$$

gde \bar{M} zadovoljava uslov $\eta\theta \leq \bar{M}\rho$. Ako je niz $\{\eta_k\}$ takav da je $\eta_k \leq \eta$ za svako k , tada niz $\{x_k\}$, generisan algoritmom **IN**, ostaje sadržan u $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$ i konvergira q -linearno ka x^* . Ako važi da $\eta_k \rightarrow 0$ kada $k \rightarrow \infty$, onda $x_k \rightarrow x^*$ sa q -faktorom $\frac{1}{2}$.

2.2.2 Modifikacije netačnog Njutnovog postupka

Slično modifikaciji Njutnovog metoda predstavljenu algoritmom **KS**, Keli i Hu, (C.T Kelley, Z.Q. Xue), izvršili su u [30] modifikaciju netačnog Njutnovog postupka, koristeći jednu međuiterciju. Za dato σ_k koje zavisi od trenutne iteracije $x_k \in \mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$ i niza $\eta_k < \eta$, naredna iteracija dobija se sledećim algoritmom.

Algoritam MIN: Modifikovani netačni Njutnov algoritam

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma_0, \eta_0 \in \mathbb{R}$, $k = 0$,

K1: Odrediti s_k tako da je

$$\|F'(x_k)s_k + F(x_k)\| \leq \eta_k \|F(x_k)\|,$$

K2: $y_k = x_k + s_k$,

K3: Odrediti z_k tako da je

$$\|F'(y_k)z_k + F(y_k)\| \leq \eta_k \|F(y_k)\|,$$

K4: $x_{k+1} = y_k + (2 + \sigma_k)z_k$,

K5: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Pokazano je da dobar izbor parametra σ_k može da dovede do superlinearne konvergencije. Takođe je pokazano da parametri C i α imaju istu ulogu kao i u algoritmu **KS**. U sledećoj teoremi date su ocene parametara koji se koriste kako bi iteracije ostale u dozvoljenom skupu.

Teorema 2.2.3. [30] Neka je $F \in C^2(\mathcal{B}(x^*))$ i važe pretpostavke **A1** i **A2**. Neka je $r \in (\frac{1}{2}, 1)$, $C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in (0, 1)$ i važi $\theta_k \eta_k \leq \bar{M}\rho_k$. Tada postoje konstante ρ , θ , η , σ , K^+ , K^- takve da ako $x_k \in \mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$,

$$\|\tilde{x}_k\| = \rho_k, \quad \|P_{\mathcal{X}}\tilde{x}_k\| = \theta_k \|P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_k\|, \quad C(\rho_k + \eta_k)^\alpha \leq |\sigma_k| \leq \sigma \leq 1$$

i ako je x_{k+1} generisano algoritmom MIN, onda $x_{k+1} \in \mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$,

$$\|\tilde{x}_{k+1}\| \leq r\rho_k, \quad K^-|\sigma_k|\rho_k \leq \|\tilde{x}_{k+1}\| \leq K^+|\sigma_k|\rho_k.$$

Ako postoji $K_\eta > 0$ tako da je

$$\eta_{k+1} \leq K_\eta|\sigma_k|(\eta_k + \rho_k)^\alpha \quad (2.24)$$

onda je

$$\eta_{k+1}\theta_{k+1} \leq \bar{M}\rho_{k+1}.$$

Iz same definicije iterativnog niza vidi se da je potrebno odrediti donje ograničenje niza σ_k koje nije nula. Niz σ_k može se aproksimirati na sledeći način

$$\sigma_k \approx \bar{C}(\eta_k + \rho_k)^\alpha,$$

za neko \bar{C} . Ako ρ_k aproksimiramo sa $\|z_k\|$, možemo posmatrati niz

$$\sigma_k = \bar{C}(\eta_k + \|z_k\|)^\alpha. \quad (2.25)$$

Teorema 2.2.4. [30] Neka je $F \in C^2(\mathcal{B}(x^*))$ i važe pretpostavke **A1** i **A2**. Neka je za $\beta \in [0, 1]$ definisan niz

$$\eta_k = \eta_0\beta^k,$$

pri čemu je $\eta_0 \leq \eta$. Neka je za $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ i dovoljno veliko \bar{C} definisan niz $\{\sigma_k\}$ sa (2.25). Tada postoje konstante ρ, θ, η takve da ako $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$ i ako su $\{x_k\}$ i $\{y_k\}$ dati algoritmom **MIN**, onda niz $\{x_k\}$ konvergira ka x^* q -superlinearno.

Ako je \bar{C} dovoljno veliko i $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ tada će (2.24) važiti za svako η_0 i $\beta \in [0, 1)$. Ako je $\beta = 1$ i \bar{C} je dovoljno veliko tada (2.24) važi za svako η_0 i $\alpha \in [0, 1)$. Zaključuje se da je uloga \bar{C} kontrolisanje θ_k , a numerički rezultati u [30] pokazuju da su dovoljne male vrednosti \bar{C} kako bi niz ostao u $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$ i bila postignuta brza konvergencija.

Ako je $\beta = 1$ i $\eta_k = \eta_0 = \eta$ ima malu vrednost, primenjujući algoritam **MIN** postići će se q -linearna konvergencija sa malim q -faktorom.

Teorema 2.2.5. [30] Neka je $F \in C^2(\mathcal{B}(x^*))$ i važe pretpostavke **A1** i **A2**. Neka je dato $\alpha \in [0, 1)$ i $\bar{C} > 0$. Tada postoje konstante ρ, θ, η takve da ako je $x_0 \in \mathcal{W}_{\varepsilon,\theta}^N(x^*)$ i \bar{C} dovoljno veliko, a $\{x_k\}$ i $\{y_k\}$ su dati algoritmom **MIN**, i niz $\{\sigma_k\}$ je definisan sa

$$\sigma_k = \bar{C}(\eta + \|z_k\|)^\alpha,$$

onda niz $\{x_k\}$ konvergira ka x^* q -linearno sa q -faktorom $K^+\bar{C}\eta^\alpha$.

2.3 Fiksni Njutnov metod

Računanje matrice Jakobijana u svakoj iteraciji, što kod problema velikih dimenzija može biti veoma zahtevno, još jedan je nedostatak Njutnovog metoda. Modifikacija Njutnovog metoda koja otklanja ovaj nedostatak je fiksni Njutnov metod. U njemu se Jakobijan u svakoj iteraciji aproksimira Jakobijanom izračunatim u nekoj od prethodnih iteracija, obično u početnoj iteraciji, tako da se izvodi računaju samo u prvom koraku. Iterativni niz se formira na sledeći način:

Algoritam FN: Fiksni Njutnov algoritam

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$,

K1: Odrediti s_k iz $F'(x_0)s_k = -F(x_k)$,

K2: Izračunati $x_{k+1} = x_k + s_k$,

K3: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

U slučaju da je $F'(x)$ regularan i Lipšic neprekidan, konvergencija fiksnog Njutnovog metoda je linearna.

Teorema 2.3.1. [29] *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna funkcija na otvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da postoji rešenje $x^* \in \mathbb{R}^n$ jednačine (2.1), $F'(x) \in Lip_\gamma(\mathcal{B}(x^*, \varepsilon))$ i postoji $F'(x^*)^{-1}$. Tada postoje konstante $K > 0$, $\varepsilon > 0$ takve da za $x_0 \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ niz $\{x_k\}$ generisan fiksnim Njutnovim algoritmom konvergira q -linearno ka x^* i važi*

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq K\varepsilon\|x_k - x^*\|.$$

2.3.1 Fiksni Njutnov metod u singularnom slučaju

Osobine fiksnog Njutnovog metoda u singularnom slučaju ispitali su Decker i Keli (D.W. Decker, C.T. Kelley) u [14]. Neka su za $x \in \mathbb{R}^n$ i k -tu iteraciju generisanu fiksnim Njutnovim algoritmom nizovi θ_k , ζ_k i ρ_k definisani na sledeći način

$$\begin{aligned} \theta_k \|P_{\mathcal{N}} \tilde{x}_k\| &= \|P_{\mathcal{X}} \tilde{x}_k\|, \\ \zeta_k P_{\mathcal{N}} \tilde{x}_k &= P_{\mathcal{N}} \tilde{x}_k, \\ \rho_k &= \|\tilde{x}_k\|. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Početna iteracija treba da bude odabrana tako da Jakobijan $F'(x_0)$ bude regularan, tako da je potrebno uvesti standardne pretpostavke pod kojima će x_0 pripadati konusu $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$, koji je dat sa (2.9).

Teorema 2.3.2. [14] *Neka je $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ i važe **A1** i **A2**. Ako je $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$, tada iteracije fiksnog Njutnovog postupka ostaju sadržane u skupu $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$, konvergiraju ka x^* i za svako $k \geq 1$ važi*

- a) $0 \leq \zeta_k(1 - \frac{3}{4}\zeta_k) \leq \zeta_{k+1} \leq \zeta_k(1 - \frac{1}{4}\zeta_k)$
- b) $(1 + \frac{3k}{4})^{-1} \|P_{\mathcal{N}}(x_0 - x^*)\| \leq \|P_{\mathcal{N}}(x_k - x^*)\| \leq (1 + \frac{k}{4})^{-1} \|P_{\mathcal{N}}(x_0 - x^*)\|$
- c) $\|P_{\mathcal{X}}(x_k - x^*)\| \leq K \|x_{k-1} - x^*\|^2$, za neko $K > 0$.

U okviru dokaza teoreme pokazano je da za dovoljno male vrednosti ρ i θ i dobro odabrano $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$ važi

$$\rho_k \leq \|\tilde{x}_k\| \leq \rho_0 \quad (2.27)$$

i

$$\theta_k \leq 2\kappa(1 - \theta_0)^{-1} \rho_0 \zeta_k < \theta \quad (2.28)$$

za $\kappa = 2(\kappa^* + 1)$, pri čemu je $\kappa^* = \beta_0(x_0)$, dok je $\beta_k(x_0) = O(\|\tilde{x}_0\|^k)$. Nejednakosti (2.27) i (2.28) garantuju da je $x_k \in \mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$ za svako $k \geq 0$. Iz

$$\zeta_k \leq \zeta_{k-1}(1 - \frac{1}{4}\zeta_{k-1})$$

sledi da je $\zeta_k = O(\frac{1}{k})$, ili preciznije

$$\zeta_k \leq (1 + \frac{k}{4})^{-1}. \quad (2.29)$$

Iz nejednakosti

$$\zeta_{k-1}(1 - \frac{3}{4}\zeta_{k-1}) \leq \zeta_k,$$

može se zaključiti da važi

$$\zeta_k \geq (1 + \frac{3k}{4})^{-1}, \quad (2.30)$$

pa se koristeći nejednakosti (2.29), (2.30) i definiciju niza ζ_k , (2.26), dobija ocena konvergencije po nula prostoru \mathcal{N} u teoremi pod *b*). Ovako dobijena ocena preciznija je od iste koju je Grivank, (A.O. Griewank) u [21] pokazao za konačnodimenzionalne probleme. U [21] pokazano je da je konvergencija fiksnog Njutnovog postupka sublinearna i važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\|^{\frac{1}{k}} = 1.$$

2.4 Metod Šamanskog

Šamanski, (V.E. Shamanskii), [51], predstavio je metod koji, slično prethodnom postupku, koristi ideju da se do naredne iteracije x_{k+1} dođe od x_k preko međuitercija, ali se u međuitercijama ne računa Njutnov pravac, nego se koristi Jakobijan koji je već izračunat. Na taj način, u svakoj iteraciji računa se jedna Njutnova iteracija, praćena sa nekoliko iteracija fiksnog Njutnovog postupka. Time je iskorištena brza konvergencija Njutnovog metoda, dok je od fiksnog Njutnovog metoda iskorišten smanjen broj izračunavanja izvoda i faktorizacije matrice. Postupak je definisan na sledeći način:

Algoritam S: Algoritam Šamanskog

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, zadat broj međuitercija s , $k = 0$,

K1: Izračunati $y_{k,1} = x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k)$,

K2: Za $j = 1, 2, \dots, s - 1$ izračunati međuitercije

$$y_{k,j+1} = y_{k,j} - F'(x_k)^{-1}F(y_{k,j}),$$

K3: Odrediti $x_{k+1} = y_{k,s}$,

K4: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Kada je broj međuitercija $s = 1$, dobijamo Njutnov metod, a u slučaju da je $s = \infty$ - u pitanju je fiksni Njutnov metod. Ako je Jakobijan $F'(x^*)$ regularan, konvergencija je s -koračno q -superlinearna reda bar $s + 1$, odnosno postoji konstanta $K_S > 0$, takva da je

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq K_S \|x_k - x^*\|^{s+1}. \quad (2.31)$$

Teorema 2.4.1. [29] *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna na otvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$ i neka je dato $s \geq 1$. Pretpostavimo da postoji rešenje $x^* \in \mathbb{R}^n$ jednačine (2.1), $F'(x) \in Lip_\gamma(\mathcal{B}(x^*, \varepsilon))$ i postoji $F'(x^*)^{-1}$. Tada postoji konstanta $K_S > 0$ takva da za $x_0 \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ niz $\{x_k\}$, generisan algoritmom Šamanskog, konvergira ka x^* q -superlinearno sa q -redom $s+1$, odnosno važi (2.31).*

Ako bi se u međuitraciji primenilo s Njutnovih iteracija, konvergencija bi bila mnogo brža. U tom slučaju bi važilo

$$\|x_{k+s} - x^*\| \leq K_N^s \|x_k - x^*\|^{2^s},$$

ali bi se u svakom koraku računao Jakobijan u međuitraciji i rešavao sistem linearnih jednačina. Prednost metoda Šamanskog nad ovako definisanim metodom, ogleda se u tome što se može postići brza konvergencija sa mnogo manje izračunavanja Jakobijana ili faktorizacija različitih matrica. Zbog toga metod Šamanskog predstavlja kombinaciju brze Njutnove konvergencije i smanjene cene računanja fiksnog Njutnovog metoda. Posmatrajući metod Šamanskog, Brent (Brent, R.P), [4], zaključio je da je on efikasniji od Njutnovog metoda u slučaju da se efikasnost meri brojem izračunavanja funkcije. Pri tome, izračunavanje Jakobijana posmatra se kao konačan broj izračunavanja funkcije. Performanse metoda poboljšavaju se povećanjem dimenzije sistema u slučaju da se odabere optimalan broj međuitracija. Pod optimalnim, podrazumeva se broj međuitracija potrebnih za postizanje zadovoljavajuće konvergencije, i on zavisi od dimenzije sistema i stepena singularnosti p .

2.4.1 Metod Šamanskog u singularnom slučaju

U slučaju da je Jakobijan $F'(x^*)$ singularan, poznato je da Njutnov postupak konvergira linearno, dok je konvergencija fiksnog Njutnovog postupka sublinearna. Metod Šamanskog će konvergirati linearno sa granicom koja zavisi od stepena singularnosti p , kao i od broja međuitracija s . Uslovi koje je potrebno pretpostaviti da bi se pokazala konvergencija ovakvog postupka, ne razlikuju se od uslova za konvergenciju Njutnovog postupka.

Keli je u [31] primenio dvokoračni Njutnov postupak i pokazalo se da je, nakon međuitracije, potrebna korekcija koraka kako bi iteracija ostala u konusu. Dobijeni algoritam ima dvokoračnu superlinearnu konvergenciju, ali

se zbog toga dva puta izračunava Jakobijan. Ovi rezultati su prezentovani u teoremi 2.1.9.

Ako se, međutim, koristi metod Šamanskog, odnosno, umesto Njutnovog koraka se u međuitraciji primenjuje fiksni Njutnov metod, u [32] je pokazano da je ovakav metod efikasniji. Neka je Njutnov korak označen sa

$$s^N(x) = -F'(x)^{-1}F(x),$$

a korak Šamanskog sa

$$s^S(x, y) = -F'(x)^{-1}F(y),$$

i neka je sa $S^{(s)}$ označen metod Šamanskog sa s međuitracija. Na taj način je sa $S^{(1)}$ označen Njutnov korak. Sledeća teorema daje ocenu konvergencije ovako definisanog postupka u slučaju da je Jakobijan singularan.

Teorema 2.4.2. [32] *Pretpostavimo da važi A4 i neka su konstante ρ, θ i η definisane tako da je za svako $x \in \mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*)$ Jakobijan $F'(x)$ regularan, pri čemu je skup $\mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*)$ definisan sa (2.18). Tada, za dato s postoje ρ, θ i η takvi da je $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*)$ i $\{x_k\}$ niz iteracija dobijenih metodom Šamanskog, $S^{(s)}$, nalazi se u $\mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*)$ i konvergira linearno ka x^* . Takođe važi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\tilde{x}_{k+1}\|}{\|\tilde{x}_k\|} = r_{p,s}$$

pri čemu je red konvergencije dat rekurzivnom formulom

$$r_{p,1} = \frac{p}{p+1}, \quad r_{p,j+1} = \left(1 - \frac{r_{p,j}^p}{p+1}\right)r_{p,j}.$$

Ako se na metod Šamanskog primeni modifikacija kao u [31], dobija se algoritam za koji se može pokazati q -superlinearna konvergencija. U slučaju da je broj međuitracija $s = 2$, modifikacija metoda Šamanskog data je sledećim algoritmom.

Algoritam MS: Modifikovani algoritam Šamanskog, $s = 2$

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$,

K1: Odrediti $s^N(x_k)$ iz $F'(x_k)s^N(x_k) = -F(x_k)$,

K2: Izračunati $y_{k+1} = x_k + s^N(x_k)$,

K3: Odrediti $s^S(x_k, y_{k+1})$ iz $F'(x_k)s^S(x_k, y_{k+1}) = -F(y_{k+1})$,

K4: Izračunati

$$x_{k+1} = y_{k+1} + \left(\frac{(p+1)^{p+1}}{p^p} - C \|s^S(x_k, y_{k+1})\|^\alpha \right) s^S(x_k, y_{k+1}),$$

K5: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Sledećom teoremom je pokazano da postupak Šamanskog konvergira q -superlinearno u slučaju da je $s = 2$.

Teorema 2.4.3. [32] *Pretpostavimo da važi **A4** i neka su $\bar{\rho}, \bar{\theta}$ i $\bar{\eta}$ definisani tako da za svako $x \in \mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$ je $F'(x)$ regularan. Neka je dato x_{-1} i definisano $x_0 = x_{-1} + s^N(x_{-1})$. Neka je niz $\{x_k\}$ generisan alogritmom **MS** i $\alpha \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$ za $p = 1$, odnosno $\alpha \in (0, \sqrt{2} - 1)$ za $p > 1$. Tada, za ρ, θ i η dovoljno malo i $x_{-1} \in \mathcal{W}_{\rho, \theta, \eta}(x^*)$, važi da $x_k \in \mathcal{W}_{\bar{\rho}, \bar{\theta}, \bar{\eta}}(x^*)$ za svako $k \geq 0$ i niz $\{x_k\}$ konvergira ka x^* q -superlinearno sa q -redom $1 + \alpha$.*

Već je rečeno da na konvergenciju utiče kako singularnost Jakobijana tako i stepen singularnosti. Kao i kod modifikacije u [31], potrebno je pronaći optimalne vrednosti parametara C i α . Ako je C jako malo, a α suviše veliko, tada korekcija možda neće biti dovoljna da zadrži narednu iteraciju u konusu. Isto tako, ako je C suviše veliko, a α suviše malo, niz će ostati sadržan u konusu, ali će konvergencija ka rešenju biti sporija. Numerički eksperimenti u [32] pokazuju da za algoritam **MS** vrednosti konstanti treba da budu $C = 1$ i $\alpha = 0.6$, dok u slučaju $p > 1$ je $\alpha = 0.4$. Pored optimalnih vrednosti C i α , potrebno je odrediti i optimalan broj međuitercija s , koji zavisi od dimenzije i od stepena singularnosti problema.

U prethodnoj teoremi, izbor vrednosti parametra α sužen je u odnosu na teoremu 2.1.9. i očekuje se da će se povećanjem dimenzije nula prostora taj interval još više smanjiti. Upoređivanjem algoritma koji su dali Keli i Sureš u [31], u kome se kao međuitercija koristi čista Njutnova iteracija i algoritma Šamanskog, pri čemu se računa jedna međuitercija fiksnog Njutna, u [32] zaključeno je da je ovaj metod efikasniji kada se posmatra odnos stepena konvergencije i broja izračunavanja izvoda između dve iteracije x_k i x_{k+1} .

2.5 Kvazi-Njutnovi postupci

Kao što je već spomenuto, jedan od nedostataka Njutnovog postupka je izračunavanje matrice Jakobijana u svakoj iteraciji. Sa druge strane, fiksni Njutnov metod, za koji je potrebno računanje matrice Jakobijana samo jednom, veoma je jeftin ali njegova konvergencija je samo linearna, što može da rezultuje veoma velikim brojem iteracija. Kada je sredinom šezdesetih godina dvadesetog veka Brojden (C.G. Broyden) predstavio svoj algoritam, [5], koji je iterativan ali drugačiji od ostalih u to vreme, zajedno sa radovima Davidona (W.C. Davidon), Flečera (R. Fletcher) i Pauela (M.J.D. Powel), pojavila se nova klasa algoritama, nazvanih kvazi-Njutnovi metodi. U to vreme, pojava ovih metoda opravdana je time što su se prilikom računanja izvoda javljale ljudske greške. A kako se diferenciranje uz pomoć računara pojavilo tek krajem dvadesetog veka, ovi postupci bili su zanimljivi jer se do aproksimacije Jakobijana dolazi korišćenjem linearne algebre, odnosno množenjem vektora i matrica i njihovim sabiranjem.

Prednosti Njutnovog metoda su, kao što je već rečeno, ako se Njutnova iteracija nađe u okolini rešenja, tada i naredne iteracije ostaju u okolini i na kraju niz konvergira ka rešenju. Takođe, Njutnov metod odlikuje se kvadratnom konvergencijom, što znači da se broj tačnih cifara iz iteracije u iteraciju udvostručava. Njutnov metod spada u grupu postupaka koji sami sebe popravljaju, što znači da svaka iteracija zavisi samo od prethodne iteracije i funkcije F , pa se greške načinjene u prethodnim iteracijama ne prenose na naredne iteracije.

Međutim, izračunavanje Jakobijana iz iteracije u iteraciju veoma je skup postupak, jer se računa ukupno n^2 funkcija u svakom koraku. Kvazi-Njutnovi metodi smanjuju cenu računanja Jakobijana, što za posledicu ima smanjenje reda konvergencije. Proizvoljan kvazi-Njutnov postupak se može predstaviti sledećim algoritmom:

Algoritam QN:

K0: Za date $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k = 0$,

K1: Izračunati korak s_k iz $B_k s_k = -F(x_k)$,

K2: Odrediti $x_{k+1} = x_k + s_k$,

K3: Odrediti $B_{k+1} = G(B_k, x_{k+1}, x_k)$,

K4: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**,

gde je G iterativna funkcija za aproksimaciju Jakobijana. Očigledno svakom kvazi-Njutnovom metodu odgovara određena funkcija G u koraku **K3**.

U grupu kvazi-Njutnovih metoda spadaju postupci koji zadovoljavaju jednačinu sečice. Ako tražimo rešenje funkcije $F(x) = 0$, tada funkciju u narednoj iteraciji aproksimiramo afnim modelom

$$M_{k+1}(x) = F(x_{k+1}) + B_{k+1}(x - x_{k+1}), \quad (2.32)$$

koji zadovoljava $M_{k+1}(x_{k+1}) = F(x_{k+1})$ za svako $B_{k+1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. U slučaju da je $B_{k+1} = F'(x_{k+1})$, radi se o Njutnovom metodu. Od modela se zahteva da bar u trenutnoj iteraciji x_k zadovoljava $M_{k+1}(x_k) = F(x_k)$, odnosno

$$M_{k+1}(x_k) = F(x_k) = F(x_{k+1}) + B_{k+1}(x_k - x_{k+1}),$$

ili ako označimo sa $s_k = x_{k+1} - x_k$ i sa $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$ dobija se jednačina sečice

$$B_{k+1}s_k = y_k. \quad (2.33)$$

Ako se iskoristi teorema 1.2.1., veza između s_k i y_k data je sa

$$F(x_k + s_k) = F(x_k) + \int_0^1 F'(x_k + ts_k)s_k dt,$$

odnosno matrica B_{k+1} aproksimira integral

$$B_{k+1} \approx \int_0^1 F'(x_k + ts_k)dt.$$

Jednačina sečice predstavlja centralni deo prilikom konstrukcije kvazi-Njutnovih postupaka, a metodi koji zadovoljavaju jednačinu (2.33) nazivaju se sekantni metodi.

2.5.1 Brojdenov metod

Brojdenov metod je jedan od najjednostavnijih kvazi-Njutnovih metoda. Spada u grupu postupaka koji zadovoljavaju jednačinu (2.33) i predstavlja najmanju promenu trenutne aproksimacije Jakobijana koja zadovoljava jednačinu sečice.

U slučaju da je $n > 1$ matrica B_{k+1} nije jedinstveno određena jednačinom (2.33), jer za $s_k \neq 0$ postoji $n(n-1)$ -dimenzionalni potprostor matrica koje

zadovoljavaju jednačinu sečice, pa konstrukcija dobre aproksimacije B_{k+1} predstavlja odabir dobrog predstavnika iz ovog potprostora. Taj izbor treba da bude takav da se osobine aproksimacije Jakobijana prenesu na B_{k+1} i da aproksimacija bude pogodna za korišćenje u kvazi-Njutnovom algoritmu.

Ako pretpostavimo da pored jednačine sečice nema novih informacija o Jakobijanu niti o modelu, narednu aproksimaciju B_{k+1} treba odabrati tako da se napravi minimalna promena u modelu a da jednačina (2.33) ostane zadovoljena. Promena u modelu (2.32) je data sa

$$\begin{aligned} M_{k+1}(x) - M_k(x) &= F(x_{k+1}) + B_{k+1}(x - x_{k+1}) - F(x_k) - B_k(x - x_k) \\ &= y_k + (B_{k+1} - B_k)x - (B_{k+1} - B_k)x_k - B_{k+1}s_k \\ &= (B_{k+1} - B_k)(x - x_k). \end{aligned}$$

Predstavimo za svako $x \in \mathbb{R}^n$ razliku

$$x - x_k = \alpha s_k + t,$$

pri čemu je $t^T s_k = 0$, pa je izraz koji treba minimizovati dat sa

$$M_{k+1}(x) - M_k(x) = \alpha(B_{k+1} - B_k)s_k + (B_{k+1} - B_k)t.$$

Na prvi sabirak sa desne strane ne može se uticati, jer je

$$(B_{k+1} - B_k)s_k = y_k - B_k s_k. \quad (2.34)$$

Ali drugi sabirak može se izjednačiti sa nulom birajući B_{k+1} tako da je $(B_{k+1} - B_k)t = 0$ za svako t ortogonalno na s_k , odnosno da matrica $B_{k+1} - B_k$ treba da bude matrica ranga 1, oblika us_k^T , $u \in \mathbb{R}^n$. Da bi jednačina sečice ostala zadovoljena, odnosno da bi važila jednakost (2.34), vektor u mora biti oblika

$$\frac{y_k - B_k s_k}{s_k^T s_k},$$

pa je za matricu

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k)s_k^T}{s_k^T s_k} \quad (2.35)$$

promena modela koja zadovoljava jednačinu sečice najmanja. Ažuriranje aproksimacije Jakobijana na ovaj način je Brojdenovo ažuriranje i predstavlja

ažuriranje B_k kao aproksimacije Jakobijana $F'(x_k)$ u matricu B_{k+1} koja je aproksimacija Jakobijana $F'(x_{k+1})$.

Ako sa $Q(y, s)$ označimo skup svih matrica koje zadovoljavaju jednačinu sečice,

$$Q(y, s) = \{B \in \mathbb{R}^{n \times n} : Bs = y\},$$

tada je (2.35) rešenje problema

$$\min_{B \in Q(y, s)} \|B - B_k\|$$

ako se posmatra norma l_2 . Rešenje je jedinstveno ako se posmatra u Frobeniusovoj normi jer ona meri promenu u svakoj komponenti.

Za datu početnu aproksimaciju rešenja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i početnu aproksimaciju B_0 Jakobijana $F'(x_0)$, Brojdenove iteracije definisane su na sledeći način:

Algoritam B: Brojdenov algoritam

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n, B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}, k = 0$,

K1: Odrediti s_k iz $B_k s_k = -F(x_k)$,

K2: Ažurirati iteraciju $x_{k+1} = x_k + s_k$,

K3: Ažurirati aproksimaciju

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k},$$

gde je $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$,

K4: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Poznato je da ovaj postupak u regularnom slučaju konvergira q -superlinearno kada su početne aproksimacije rešenja i Jakobijana dovoljno precizno odabrane.

Teorema 2.5.1. [18] *Neka je funkcija $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna na otvorenom, konveksnom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo da postoji rešenje $x^* \in \mathbb{R}^n$, i konstante $r, \beta > 0$ takve da u okolini $\mathcal{B}(x^*, r) \subset D$ postoji $F'(x^*)^{-1}$ za koji važi $\|F'(x^*)^{-1}\| \leq \beta$ i $F'(x^*)^{-1} \in Lip_\gamma(\mathcal{B}(x^*, r))$. Ako postoje konstante ε, δ takve da je $\|x_0 - x^*\|_2 \leq \varepsilon$ i $\|B_0 - F'(x^*)\|_2 \leq \delta$, tada je niz $\{x_k\}$ generisan Brojdenovim algoritmom dobro definisan i konvergira ka x^* q -superlinearno.*

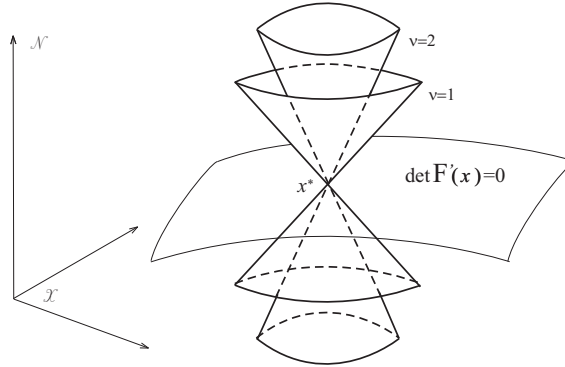
2.5.1.1 Brojdenov metod u singularnom slučaju

Kada je problem singularan, kao i u regularnom slučaju, konvergencija postupka zavisi od izbora početne aproksimacije rešenja i početne aproksimacije Jakobijana. Slično Njutnovom i fiksnom Njutnovom postupku, red konvergencije i oblast konvergencije Brojdenovog metoda se smanjuje. Konvergenciju Brojdenovog postupka u slučaju singularnog problema ispitali su Decker i Keli, (D.W. Decker, C.T. Kelley), [15], u slučaju da je $\dim \mathcal{N} = 1$.

Standardne pretpostavke pod kojima je Redien dokazao konvergenciju Njutnovog metoda u teoremi 2.1.3. potrebne su za dokazivanje konvergencije Brojdenovog metoda. Takođe je potrebno definisati oblast u kojoj se nalaze dozvoljene iteracije. Slično skupu $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^{\mathcal{N}}(x^*)$ u kome su definisane iteracije Njutnovog metoda, definiše se skup

$$\mathcal{W}_{\rho,\theta,\nu}(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\tilde{x}\| \leq \rho, \|P_{\mathcal{X}}\tilde{x}\| \leq \theta \|P_{\mathcal{N}}\tilde{x}\|^\nu\}. \quad (2.36)$$

Na slici 2.4 predstavljen je skup $\mathcal{W}_{\rho,\theta,\nu}(x^*)$ za dve vrednosti parametra ν .



Slika 2.4: Skup $\mathcal{W}_{\rho,\theta,\nu}(x^*)$

Teorema 2.5.2. [13] Neka je $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$, neka su zadovoljene pretpostavke **A1** i **A2** i neka su dati γ, μ . Neka $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho,\theta,1}(x^*)$ i važe sledeće nejednakosti

$$\|(B_0 - F'(x_0))P_{\mathcal{X}}\| \leq \gamma\rho, \quad (2.37)$$

$$\|(B_0 - F'(x_0))P_{\mathcal{N}}\| \leq \mu\rho^2. \quad (2.38)$$

Tada za dovoljno male vrednosti ρ i θ , niz iteracija generisan Brojdenovim algoritmom konvergira ka rešenju x^* i važi

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\tilde{x}_{k+1}\|}{\|\tilde{x}_k\|} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \quad (2.39)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|P_{\mathcal{X}}\tilde{x}_{k+1}\|}{\|P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_k\|^2} = 0. \quad (2.40)$$

Nejednakosti (2.37) i (2.38) ukazuju da izbor početne iteracije i početne aproksimacije Jakobijana nije nezavisan. Ako je B_0 dovoljno blizu $F'(x_0)$, prva iteracija će biti blizu Njutnove iteracije, što nam garantuje konvergenciju Brojdenovog postupka u oblasti istog oblika kao što je oblast konvergencije Njutnovog postupka.

U okviru sledeće teoreme predstavljani su uslovi za odabir početnih aproksimacija rešenja i Jakobijana, kao i ocene koje su zadovoljene prilikom primene Brojdenovog metoda na singularni problem.

Teorema 2.5.3. [13] *Neka su dati $x_0 \in \mathcal{W}_{\rho,\theta,1}(x^*)$ i $K > 0$. Neka važe pretpostavke iz prethodne teoreme, postoji B_0^{-1} , $x_1 \in \mathcal{W}_{\rho,\theta_1,2}(x^*)$ i važi*

$$\|B_0 - F'(x^*)\| \leq K\rho \equiv \varepsilon_0.$$

Neka je $P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_0 = \rho_0 v^$, $P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_1 = \rho_1 v^*$, pri čemu je $\|v^*\| = 1$ i $\rho_0 > 0$ i važi da je $\lambda_0 = \frac{\rho_1}{\rho_0} \in (\frac{3}{8}, \frac{4}{5})$. Tada za dovoljno male vrednosti ρ, θ, θ_1 Brojdenov niz iteracija konvergira i važe ocene (2.39) i (2.40).*

U dokazu teoreme pokazano je da za Brojdenov iterativni niz $\{x_k\}$ važi $x_{k+1} \in \mathcal{W}_{\rho,\theta_{k+1},2}(x^*)$, odnosno da se svaka naredna iteracija nalazi u konusu (2.36). Ugao θ_{k+1} ostaje ograničen i važi nejednakost

$$\theta_{k+1} \leq c_2((\varepsilon_k + \rho_k)(\theta_k + \theta_{k-1}) + \rho_k) \leq 1, \text{ za neko } c_2 > 0 \text{ i } k \geq 1,$$

pod pretpostavkom da je u prvoj iteraciji zadovoljeno $\theta_1 < \theta_0$.

Ako je $\tilde{x}_k = x_k - x^*$, pokazano je da na nula prostoru \mathcal{N} važi

$$P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_{k+1} = \rho_{k+1}\phi = \lambda_k \rho_k \phi = \lambda_k P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_k,$$

pa je

$$\lambda_k = \frac{P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_{k+1}}{P_{\mathcal{N}}\tilde{x}_k},$$

i važi da je $\frac{3}{8} < \lambda_k < \frac{4}{5}$, odnosno komponente koje odgovaraju nula prostoru u svakoj iteraciji se smanjuju λ_k puta.

Za dobijeni niz matrica, koje su aproksimacije Jakobijana $\{B_k\}$ važi

$$\|B_k - F'(x^*)\| \leq \varepsilon_0 + c_1 \rho_0 \sum_{p=1}^k \left(\frac{4}{5}\right)^p = \varepsilon_k,$$

za neko $c_1 > 0$, odakle dobijamo ocenu razlike Jakobijana u trenutnoj iteraciji i Jakobijana u rešenju. U regularnom slučaju, matrice aproksimacija Jakobijana, dobijene Brojdenovim algoritmom, zadovoljavaju "bounded deterioration" princip, i ta osobina ostaje zadovoljena i u singularnom slučaju. Znači, razlika između aproksimacije Jakobijana i Jakobijana u rešenju, ne mora se smanjivati, niti težiti nuli, ali će ostati kontrolisana.

2.5.2 Tomasov metod

Ovaj kvazi-Njutnov metod predstavio je Tomas (Stephen Walter Thomas) 1975. godine u [55]. U osnovi algoritma je sekvencionalna teorija skupova koju je 1968. godine dao Švep (Schweppe) u [49]. Uz pogodan izbor nelinearnog modela funkcije F , mera odstupanja B_k od $F'(x_k)$, izražena preko matrice P_k , predstavljena je kao specijalna vrsta problema sekvencionalne procene. Na taj način izvedene su procene koje se mogu koristiti u radu sa kvazi-Njutnovim algoritmima.

Postupak spada u grupu kvazi-Njutnovih metoda i predstavljen je sledećim algoritmom.

Algoritam T: Tomasov algoritam

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n, B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}, k = 0$,

K1: Odrediti s_k iz $B_k s_k = -F(x_k)$,

K2: Ažurirati iteraciju $x_{k+1} = x_k + s_k$,

K3: Ažurirati aproksimaciju

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) d_k^T}{d_k^T s_k},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} d_k &= (P_k + \frac{\|s_k\|}{2}E)s_k, \\ P_{k+1} &= (1 + \|s_k\|)(\|s_k\|E + P_k - \frac{d_k d_k^T}{d_k^T s_k}), \\ y_k &= F(x_k + s_k) - F(x_k), \end{aligned}$$

K4: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Iako osobine Tomasovog metoda nisu dovoljno razjašnjene u literaturi, numerički rezultati pokazuju njegovu robustnost. Ovaj metod se pokazao kao jedan od najpouzdanijih kvazi-Njutnovih metoda koji su posmatrani u [53].

Sledeća teorema koristi se pri dokazivanju lokalne konvergencije Tomasovog postupka i predstavlja ocenu odstupanja matrice B_k kao aproksimacije Jakobijana $F'(x_k)$ pomoću matrice P_k .

Teorema 2.5.4. [55] *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i konveksan skup i $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilno preslikavanje. Pretpostavimo da je $F'(x) \in Lip_\gamma(D)$ i da su nizovi $\{x_k\}$ i $\{x_k + s_k\}$ sadržani u D . Neka su $\{B_k\}$, $\{P_k\}$, $k = 0, 1, \dots$ nizovi matrica generisani algoritmom **T**, gde je $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična i pozitivno definitna matrica. Tada postoji konstanta $\mu \leq \infty$ takva da je*

$$\|(B_k - F'(x_k))z\|^2 \leq \mu z^T P_k z, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.41)$$

za svako $z \in \mathbb{R}^n$.

Primenom kvazi-Njutnovih postupaka bilo bi poželjno da se neke osobine matrice B_k kao aproksimacije Jakobijana prenose na matricu B_{k+1} . Jedna od osobina je i simetričnost koja se, u slučaju ažuriranja predstavljenog u koraku **K3** algoritma **T**, ne prenosi na narednu aproksimaciju. Zbog toga se koristi postupak simetrizacije, pa tako dobijene matrice zadržavaju osobinu simetričnosti i za njih važi teorema analogna teoremi 2.5.4., [55].

Konvergencija Tomasovog metoda pokazana je sledećom teorema.

Teorema 2.5.5. [55] *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilna funkcija u okolini rešenja $\mathcal{B}(x^*)$, $F'(x^*)$ je regularan i $F' \in Lip_\gamma(\mathcal{B}(x^*))$. Tada za svako $r \in (0, 1)$ postoje pozitivne konstante $\delta = \delta(\gamma, r)$, $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, r)$ takve da ako je $\|x_0 - x^*\| \leq \delta$, $0 \leq \sigma \leq \varepsilon$ i $\|B_0 - F'(x_0)\| \leq \gamma\sigma^2$, onda je iterativni niz $\{x_k\}$*

generisan algoritmom \mathbf{T} , dobro definisan za svako $k \geq 0$ i konvergira ka x^* , pri čemu je $P_0 = \sigma^2 I$, za $\sigma^2 > 0$. Takođe važi,

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq r \|x_k - x^*\|$$

za svako $k \geq 0$ i nizovi $\{\|B_k\|\}$, $\{\|B_k^{-1}\|\}$ su uniformno ograničeni.

Uslov da $\|P_0\|$ ima malu vrednost, ekvivalentan je zahtevu da B_0 dovoljno dobro aproksimira $F'(x_0)$. Matrica P_0 ne mora biti skalarna matrica kako bismo dokazali teoremu 2.5.5.. Na primer, dokaz u teoremi 2.5.5. ne menja se ako za simetričnu i pozitivno definitnu matricu P_0 važi da je $\sigma^2 = \|P_0\|$ i

$$\sup_{z \neq 0} \frac{|z^T (B_0 - F'(x_0)) z|}{z^T P_0 z} \leq \gamma,$$

umesto $\|B_0 - F'(x_0)\| \leq \gamma \sigma^2$.

Teorema 1.2.8. koju su dokazali Denis i More (Dennis Jr. J.E, More J.J.), [17], koristi se pri dokazivanju q-superlinearne konvergencije metoda.

Teorema 2.5.6. [55] Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilna u nekom otvorenom konveksnom skupu D i pretpostavimo da za neko $\gamma < \infty$, $F' \in Lip_\gamma(D)$. Pretpostavimo da su nizovi $\{x_k\}$ i $\{x_k + s_k\}$ sadržani u D i neka je za neko $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i pozitivno definitnu simetričnu matricu P_0 , B_k generisano algoritmom \mathbf{T} . Ako je red

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|s_k\|$$

konvergentan, onda je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|(B_k - F'(x_k))s_k\|}{\|s_k\|} = 0.$$

Posledica prethodne teoreme je da se, pod uslovima teoreme 2.5.5. može pokazati q-superlinearna konvergencija Tomasovog postupka.

Posledica 2.5.1. [55] Neka F zadovoljava uslove teoreme 2.5.5.. Neka je za $x_0 \in \mathbb{R}^n$, regularnu matricu $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i pozitivno definitnu, simetričnu matricu $P_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ iterativni niz $\{x_k\}$ definisan Tomasovim algoritmom dobro definisan i konvergira ka x^* . Tada $\{x_k\}$ konvergira q-superlinearno ako je red $\sum \|s_k\|$ konvergentan.

Osobine Tomasovog metoda u slučaju da funkcija F nije glatka, odnosno da Jakobijan F' ne postoji, bile su predmet izučavanja u [6]. U Buhmiller i Krejić, [7], predstavljeni su rezultati koji pokazuju da ovaj postupak, pored toga što se ponaša slučajno Brojdenovom metodu u regularnom slučaju, ne zaostaje za Brojdenovim metodom, ako se posmatra robustnost i efikasnost, u slučaju da funkcija F nije glatka. Predstavljeni rezultati motivišu primenu Tomasovog metoda, što potvrđuje i činjenica da je rad citiran u [56], prilikom testiranja i implementacije nove funkcije za rešavanje nelinearnih komplementarnih problema, dok je u [60] pronašao i praktičnu primenu.

Konvergencija Tomasovog metoda u slučaju da je Jakobijan singularan, nije teorijski ispitana, ali je u Buhmiller, Krejić i Lužanin, [9], numerički ispitano ponašanje ovog metoda u slučaju singularnosti na nekoliko primera. Rezultati su predstavljeni u Glavi 4.

2.5.3 Martinezov metod ažuriranja kolone

Martinezov postupak, (Martínez, J.M.), predstavljen je u [35] sa idejom da smanji cenu ažuriranja aproksimacije Jakobijana, tako da se naredna aproksimacija Jakobijana dobija modifikacijom samo jedne kolone trenutne aproksimacije. Neka je $\alpha \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}})$ i $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ indeks takav da je $|s_j| > \alpha \|s_k\|$. Neka je sa $I_j^k \subset \{1, \dots, n\}$ označen skup indeksa elemenata j -te kolone koje treba modifikovati. Tada se matrica B_{k+1} razlikuje od matrice B_k samo u j -toj koloni,

$$(B_{k+1})_{ij} = \begin{cases} \frac{y_i - \sum_{l \neq j} (B_k)_{il} (s_k)_l}{(s_k)_j}, & i \in I_j^k \\ (B_k)_{ij}, & i \notin I_j^k \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.42)$$

pa se Martinezov metod može definisati sledećim algoritmom.

Algoritam M: Martinezov algoritam

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k = 0$,

K1: Izračunati s_k iz $B_k s_k = -F(x_k)$,

K2: Odrediti $x_{k+1} = x_k + s_k$,

K3: Ažurirati

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) e_{jk}^T}{e_{jk}^T s_k},$$

gde je $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$, e_{j_k} je j_k -ti vektor standardne baze prostora \mathbb{R}^n takav da je $\|s_k\|_\infty = |e_{j_k}^T s_k|$,

K4: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Pokazano je da ovaj metod superlinearno konvergira u regularnom slučaju samo uz restart svakih m iteracija, odnosno ako je $B_{im} = F'(x^{im})$, za neko $m \in \mathbb{N}$, i $i = 1, 2, \dots$. Međutim, numerički rezultati pokazuju da iterativni niz konvergira bez restarta. Neke modifikacije ovog metoda date su u [36], [33].

Teorema 2.5.7. [35] *Neka je $D \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i konveksan skup i neka je $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferencijabilno preslikavanje i $r \in (0, 1)$. Pretpostavimo da je $F'(x) \in Lip_\gamma(D)$ i postoji rešenje x^* za koje je $F'(x^*)$ regularna matrica. Neka su konstante $\varepsilon = \varepsilon(r)$ i $\delta = \delta(r)$ takve da je $\|x_0 - x^*\| \leq \varepsilon$ i $\|B_k - F'(x^*)\| \leq \delta$ kad god je $k \equiv 0 \pmod{m}$. Tada su nizovi $\{x_k\}$ i $\{B_k\}$ generisani algoritmom **M** dobro definisani i ako je $F(x_k) \neq 0$ onda važi*

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq r\|x_k - x^*\|$$

za svako $k = 0, 1, 2, \dots$

2.5.4 Modifikacije kvazi-Njutnovih metoda

Kao što je poznato, konvergencija kvazi-Njutnovih metoda u regularnom slučaju zavisi kako od izbora početne aproksimacije rešenja, tako i od izbora početne aproksimacije Jakobijana. Teorema o konvergenciji Brojdenovog metoda u slučaju singularnosti potvrđuje: pored toga što treba pažljivo birati početnu aproksimaciju rešenja, takođe je potrebno polaznu aproksimaciju Jakobijana izabrati dovoljno blizu $F'(x^*)$. Na primerima u Glavi 4 je pokazano da je red konvergencije kvazi-Njutnovih metoda, u slučaju da je rešenje singularno, opao u odnosu na red konvergencije u regularnom slučaju. Konvergencija u nula prostoru je veoma spora i utiče na konvergenciju celog iterativnog niza, te je metode potrebno modifikovati kako bi se konvergencija poboljšala.

Jedna od prethodno spomenutih modifikacija Njutnovog metoda, [31], je uvođenje međuiteracije. Dobijeni dvokoračni metod predstavljen je sledećim algoritmom.

Algoritam SN: Singularni Njutnov postupak

- K0:** Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $k = 0$,
- K1:** Odrediti w_k iz jednačine $F'(x_k)w_k = -F(x_k)$,
- K2:** Odrediti $v_k = x_k + w_k$,
- K3:** Odrediti s_k iz jednačine $F'(v_k)s_k = -F(v_k)$,
- K4:** Izračunati $x_{k+1} = v_k + (2 - C\|s_k\|^\alpha)s_k$,
- K5:** $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Pod pretpostavkama **A1** i **A2**, ovako definisan iterativni niz $\{x_k\}$ za $C \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in (0, 1)$ lokalno je superlinearno konvegentan, [31], odnosno važi da je

$$\|x^* - x_{k+1}\| \leq K\|x^* - x_k\|^{1+\alpha}. \quad (2.43)$$

Vrednost parametra $M = 2$ u koraku **K4** obezbeđuje bržu konvergenciju na nula prostoru, dok je uloga parametara C i α , odnosno izraza $C\|s_k\|^\alpha$, da zadrži iterativni niz u oblasti konvergencije $\mathcal{W}_{\rho,\theta}^N(x^*)$.

Postupak Šamanskog modifikovan je na sličan način, u [32], i postignuta je superlinearna konvergencija u singularnom slučaju. Iterativni niz je generisan sledećim algoritom.

Algoritam SS: Singularni postupak Šamanskog

- K0:** Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $k = 0$,
- K1:** Odrediti w_k iz jednačine $F'(x_k)w_k = -F(x_k)$,
- K2:** Odrediti $v_k = x_k + w_k$,
- K3:** Odrediti s_k iz jednačine $F'(v_k)s_k = -F(v_k)$,
- K4:** Izračunati $x_{k+1} = v_k + (4 - C\|s_k\|^\alpha)s_k$,
- K5:** $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Oba metoda mogu se primeniti na probleme kod kojih je dimenzija nula prostora Jakobijana $F'(x^*)$ veća od 1 a u slučaju jednodimenzionalnog nula prostora pokazana je superlinearna konvergencija Algoritma SS. Takođe, oba algoritma generišu dva niza - niz iteracija i niz međuitercija, pri čemu je međuitercija u algoritmu SN čisto Njutnova, dok je u algoritmu SS u pitanju iteracija fiksnog Njutnovog metoda. Po ugledu na ova dva metoda u

Buhmiller, Krejić, Lužanin, [9], predstavljene su modifikacije kvazi-Njutnovih metoda uvođenjem međuitracije. Proizvoljni kvazi-Njutnov metod može se modifikovati primenom sledećeg algoritma.

Algoritam SQN: Singularni kvazi-Njutnovi postupci

K0: Za dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, regularnu matricu $B_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, konstante $M, C > 0$ i $k = 0$,

K1: Odrediti w_k iz jednačine $B_k w_k = -F(x_k)$,

K2: Odrediti $v_k = x_k + w_k$,

K3: Ažurirati matricu B_k u B'_k ,

K4: Odrediti s_k iz jednačine $B'_k s_k = -F(v_k)$,

K5: Izračunati $x_{k+1} = v_k + (M - C\|s_k\|^\alpha)s_k$,

K6: Ažurirati matricu B_k u B_{k+1} ,

K7: $k = k + 1$ i vratiti se na **K1**.

Kao i u prethodnim modifikacijama, uloga parametra M je da ubrza konvergenciju po nula prostoru, dok C i α imaju zadatak da narednu iteraciju zadrže u oblasti konvergencije. Za razliku od prethodnih metoda, u ovom slučaju potrebno je ažurirati dve matrice, u koraku **K3** i koraku **K6**. Vodeći se modifikacijom metoda Šamanskog, predstavljenom algoritmom **SS**, aproksimaciju Jakobijana potrebno je ažurirati samo jednom, nakon izračunate aproksimacije rešenja x_{k+1} . Modifikacija Njutnovog metoda, predstavljena algoritmom **SN**, vodi ka ažuriranju aproksimacije Jakobijana nakon međuitracije a potom i nakon izračunavanja x_{k+1} . Na ovaj način pojavljuju se dva pravila za modifikaciju kvazi-Njutnovih metoda u singularnom slučaju, označićemo ih sa **P-I** i **P-II**, i definisati na sledeći način:

P-I: Kod modifikacije metoda Šamanskog posle međuitracije, u koraku **K3** koristi se Jakobijan izračunat u prethodnoj iteraciji. Tako se iteracija i međuitracija dobijaju rešavanjem linearnog sistema sa istom matricom i različitim vektorom sa desne strane. Zato se ovim pravilom matrica B_k ažurira samo jednom i za aproksimaciju matrice B_k koristi se samo niz $\{x_k\}$. Ovako definisan postupak dosta je jeftin i koraci **K3** i **K6** postaju

$$\mathbf{K3: } B'_k = B_k.$$

$$\mathbf{K6: } B_{k+1} = G(B_k, x_k, x_{k+1}).$$

P-II: Kod modifikacije Njutnovog metoda, iteracija i međuitercija dobijaju se rešavanjem linearnih sistema sa različitim matricama. Zbog toga se u ovom pravilu matrica B_k ažurira posle međuitercije i posle iteracije, tako da se za aproksimaciju matrice B_k koristi, kako niz $\{x_k\}$ tako i niz $\{v_k\}$. Koraci **K3** i **K6** postaju

$$\mathbf{K3: } B'_k = G(B_k, x_k, v_k).$$

$$\mathbf{K6: } B_{k+1} = G(B_k, v_k, x_{k+1}).$$

Funkcija G predstavlja funkciju kojom se ažurira matrica B_k pojedinim kvazi-Njutnovim postupkom. U ovoj tezi je primenjena modifikacija pravilima **P-I** i **P-II** na Brojdenovo, Martinezovo i Tomasovo ažuriranje, a potom su dobijeni algoritmi testirani na primerima. Numerički rezultati su predstavljani u Glavi 4. Vrednosti parametara M , C i α u slučaju modifikacije kvazi-Njutnovih metoda nisu poznate, ali numerički rezultati pokazuju da su optimalne vrednosti $M = 3.7$, $C = 1$ i $\alpha = 0.6$. Takođe, na osnovu dobijenih rezultata može se zaključiti: pravilo **P-I**, pored toga što je jeftinije za primenu jer se matrica B_k ažurira samo jednom, ono je i efikasnije od pravila **P-II**.

3

Granični sistemi

U prethodnom odeljku brza i stabilna konvergencija ka singularnom rešenju jednačine

$$F(x) = 0, \quad (3.1)$$

za $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, postignuta je modifikacijama metoda, odnosno prilagođavanjem metode singularnim sistemima. Konvergenciju ka singularnom rešenju moguće je ubrzati i modifikacijom singularnog problema, odnosno njegovom transformacijom u regularan. Jedna od takvih modifikacija će biti predstavljena u nastavku.

3.1 Definicija i osnovne teoreme

Jednačine koje zavise od parametra pojavljuju se kao rezultat raznih problema u nauci. Jedna klasa ovih jednačina može se zapisati u obliku

$$\mathcal{F}(x, \lambda) = 0, \quad (3.2)$$

pri čemu $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, i x je vektor promenljivih, a λ parametar. Najčešće njihovo rešavanje podrazumeva pronalaženje povratnih tačaka ili tačaka bifurkacija. Tačka (x^*, λ^*) je tačka bifurkacije ako kroz nju prolaze dve grane rešenja sa različitim tangentama u toj tački. Ako kroz tačku (x^*, λ^*) prolazi jedinstveno rešenje i ako je u rešenju jednačine uvedena parametrizacija tako da je $x = x(s)$ i $\lambda = \lambda(s)$ i važi da je

$$\dot{\lambda}(s^*) \equiv \frac{d\lambda}{ds}(s^*) = 0,$$

tada je (x^*, λ^*) povratna tačka.

Jakobijan funkcije definisane jednačinom (3.2) je $\mathcal{F}' = [\mathcal{F}'_x(x) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda}]$ i u slučaju tačke bifurkacije ili povratne tačke parcijalni izvod funkcije \mathcal{F}'_x je singularan. Grivank i Redien, (A. Griewank, G.W. Reddien), [22], predstavili su uopšteni postupak za pronalaženje rešenja jednačine (3.2) takvih da je rang $(\mathcal{F}'_x) = n - 1$, dok Jakobijan \mathcal{F}' zadržava rang n . Njihov metod može se koristiti pri određivanju singularnih rešenja sistema nelinearnih jednačina, kao i tačaka bifurkacija i povratnih tačaka.

Neka je funkcija \mathcal{F} definisana i dva puta neprekidno diferencijabilna na skupu $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Ako je rang Jakobijana $\mathcal{F}'_x(x)$ bar $n - 1$ i važi $\partial \mathcal{F} / \partial \lambda \notin \text{Im}(\mathcal{F}'_x(x^*))$, teorema o implicitnoj funkciji garantuje da skup korena funkcije \mathcal{F} definiše na skupu D jednodimenzionalnu mnogostrukost \mathcal{M} . Ako je sa \mathcal{S} definisan skup tačaka u kojima je Jakobijan \mathcal{F}'_x singularan i ima rang $n - 1$, tada se rešenja jednačine (3.2) nalaze u preseku ova dva skupa, $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$.

Dodavanjem uslova regularne singularnosti, skup \mathcal{S} predstavljaće n -dimenzionalnu mnogostrukost u D . Ako se uporede dimenzije ove dve mnogostrukosti, može se zaključiti da se u preseku mogu naći samo izolovane tačke. Zbog toga bi trebalo da sistem (3.2), zajedno sa skupom jednačina kojima je definisana mnogostukost \mathcal{S} , bude regularan u rešenju (x^*, λ^*) . Ako je \mathcal{M} dimenzije q , tada je potrebno dodati još q jednačina kako bi se mogao odrediti presek $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$.

Sledećom teoremom su Grivank i Redien, [22], predstavili postupak za određivanje vektora iz nula prostora Jakobijana $\mathcal{F}'_x(x)$. Ti vektori će se koristiti prilikom formiranja graničnog sistema.

Teorema 3.1.1. [22] *Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ i $L = L(x, \lambda)$ i $R = R(x, \lambda)$ su neprekidno diferencijabilne funkcije $L : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $R : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ takve da je matrica*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}'_x(x) & -R(x, \lambda) \\ -L^T(x, \lambda) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

regularna za svako $(x, \lambda) \in D$. Tada za svako $(x, \lambda) \in D$ postoje jedinstvene funkcije $\mu = \mu(x, \lambda)$, $\eta = \eta(x, \lambda)$ i $g = g(x, \lambda)$ takve da je

$$\begin{aligned} (a) \quad & \mathcal{F}'_x(x) \eta(x, \lambda) = R(x, \lambda) g(x, \lambda), \quad L^T(x, \lambda) \eta(x, \lambda) = 1 \\ (b) \quad & \mu^T(x, \lambda) \mathcal{F}'_x(x) = g(x, \lambda) L^T(x, \lambda), \quad \mu^T(x, \lambda) R(x, \lambda) = 1, \end{aligned} \quad (3.4)$$

gde je $\eta(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n$, $g(x, \lambda) \in \mathbb{R}$ i $\mu(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n$. Iz uslova (b) važi da je

$$\text{rang}(\mathcal{F}'_x(x)) = n - 1 \text{ ako i samo ako je } g(x, \lambda) = 0. \quad (3.5)$$

Takođe važi da su $\mu(x, \lambda)$, $\eta(x, \lambda)$ i $g(x, \lambda)$ neprekidno diferencijabilne i

$$\begin{aligned} (g'(x, \lambda))^T &= (\mu^T(x, \lambda)\mathcal{F}'_x(x)\eta(x, \lambda))' \\ &= \mu^T(x, \lambda)(\mathcal{F}'_x(x))'\eta(x, \lambda) - \mu^T(x, \lambda)R'(x, \lambda)g^T(x, \lambda) \\ &\quad - g^T(x, \lambda)(L'(x, \lambda))^T\eta(x, \lambda). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Invertibilnost matrice (3.3) garantuje postojanje i neprekidnu diferencijabilnost rešenja sistema (3.4).

Na osnovu (3.5) zaključuje se da je skup korena funkcije $g(x, \lambda)$ ujedno i skup singularnih tačaka Jakobijana $\mathcal{F}'_x(x)$. Prema tome, kako bismo pronašli rešenje jednačine (3.2) koje se nalazi u preseku skupova $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}$, potrebno je pronaći rešenje sistema jednačina

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, \lambda) &= 0, \\ g(x, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Za funkcije $R(x, \lambda)$ i $L(x, \lambda)$ mogu biti odabrane aproksimacije vektora iz nula prostora Jakobijana \mathcal{F}'_x i menjati se u zavisnosti od x . Međutim, ako su $R(x, \lambda)$ i $L(x, \lambda)$ odabrane kao konstante ili je $g(x, \lambda) = 0$, što je zadovoljeno na skupu \mathcal{S} , onda iz (3.6) sledi da je

$$(g'(x, \lambda))^T = \mu^T(x, \lambda)(\mathcal{F}'_x(x))'\eta(x, \lambda).$$

Takođe se iz (3.4) može zaključiti da $\mu(x, \lambda)$ i $\eta(x, \lambda)$ predstavljaju aproksimacije vektora iz nula prostora Jakobijana $\mathcal{F}'_x(x)$, za fiksirano $(x, \lambda) \in D$.

Određivanje funkcija $\mu(x, \lambda)$, $\eta(x, \lambda)$ i $g(x, \lambda)$, za dato $(x, \lambda) \in D$, pomoću jednačina (3.4) ekvivalentno je pronalaženju rešenja sistema koristeći blok matrice.

$$\begin{aligned} (a)' \quad & \begin{bmatrix} \mathcal{F}'_x(x) & R(x, \lambda) \\ L^T(x, \lambda) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(x, \lambda) \\ -g^T(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \\ (b)' \quad & (\mu^T(x, \lambda), -g^T(x, \lambda)) \begin{bmatrix} \mathcal{F}'_x(x) & R(x, \lambda) \\ L^T(x, \lambda) & 0 \end{bmatrix} = (\mathbf{0}^T, 1), \end{aligned} \quad (3.7)$$

pri čemu je $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

Prethodni postupak može se primeniti na određivanje singularnog rešenja nelinearnog sistema jednačina (3.1). Jednačinu (3.2) potrebno je napisati u obliku

$$\mathcal{F}(x, \lambda) = F(x) + \lambda r(x) = 0, \quad (3.8)$$

pri čemu je $r(x)$ fiksiran vektor i odabran tako da $r(x) \notin \mathcal{I}m(F'(x^*))$. Jakobijan fukcije (3.2) je tada

$$\mathcal{F}' = ([F'(x) ; r(x)]), \quad (3.9)$$

i ovakav izbor vektora $r(x)$ garantuje da je

$$\text{rang } \mathcal{F}' = \text{rang} ([F'(x) ; r(x)]) = n \quad (3.10)$$

za $x \in \mathcal{B}(x^*)$.

Weber i Verner, (H. Weber, W. Werner), su u [59] za vektor $r(x)$ odabrali vektor iz nula prostora \mathcal{N} i pokazali da se na ovaj način može doći do singularnog izolovanog rešenja.

Neka je za funkciju $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jednodimenzionalni nula prostor \mathcal{N} generisan vektorom η^* . Takođe, neka je za zatvoren skup \mathcal{X} zadovoljeno da je $\mathbb{R}^n = \mathcal{N} \oplus \mathcal{X}$, $F'(x^*)x \in \mathcal{X}$ za $x \in \mathcal{X}$ i neka su zadovoljeni uslovi

$$F''(x^*)\eta^*\eta^* \cap \mathcal{X} \neq 0, \quad F''(x^*)\eta^*\eta^* \neq 0.$$

Označimo sa $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Neka je preslikavanje $G : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ definisano na sledeći način

$$G(x, \eta, \lambda) = \begin{bmatrix} F(x) + \lambda\eta \\ F'(x)\eta \\ \eta^T\eta - 1 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

za $(x, \eta, \lambda) \in \mathcal{E}$. Pod pretpostavkom da je funkcija F tri puta neprekidno diferencijabilna, odnosno $F(x) \in C^3(\mathbb{R}^n)$, sledi da je funkcija $G(x, \eta, \lambda)$ dva puta neprekidno diferencijabilna na prostoru \mathcal{E} . Pretpostavimo da važi $(\eta^*)^T\eta^* = 1$. Tada je

$$(x^*, \eta^*, 0)$$

rešenje jednačine (3.11), jer je x^* rešenje jednačine (3.1) a vektor η^* je generator nula prostora \mathcal{N} . U [59] pokazano je da je $(x^*, \eta^*, 0)$ regularno rešenje jednačine $G(x, \eta, \lambda) = 0$.

Koristeći (3.5) i (3.8), granični sistem za rešavanje jednačine (3.1) u [22] definisan je na sledeći način

$$\mathbf{F}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}(x, \lambda) \\ g(x, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x) - \lambda r(x) \\ g(x, \lambda) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.12)$$

Njegovo rešenje je izolovano singularno rešenje jednačine $F(x) = 0$ sa jednodimenzionalnim nula prostorom \mathcal{N} . Ako su $R(x, \lambda)$ i $L(x, \lambda)$ u matrici (3.3) odabrani kao konstantni vektori, onda važi sledeća teorema.

Teorema 3.1.2. [23] Ako je (x^*, λ^*) rešenje jednačine $\mathbf{F}(x, \lambda) = 0$ za koje je vektor $r(x)$ odabran tako da je zadovoljen uslov (3.10) i važi uslov

$$\beta^* \equiv g'(x^*, \lambda^*)^T \eta^* = (\mu^*)^T F''(x^*) \eta^* \eta^* \neq 0, \quad (3.13)$$

pri čemu su vektori $\mu^* = \mu(x^*, \lambda^*)$ i $\eta^* = \eta(x^*, \lambda^*)$ definisani sa (3.7), tada Njutnov metod konvergira ka (x^*, λ^*) lokalno kvadratno.

Rabier i Redien, (P.J. Rabier, G.W. Reddien), su u [42] prethodni postupak formiranja graničnih sistema proširili na širu klasu singularnih problema. Definisali su postupak za određivanje rešenja x^* jednačine (3.1) za koju važi

$$\text{rang}(F'(x^*)) = n - q, \quad q > 1. \quad (3.14)$$

Iako su prepostavili da je q poznato, analizirali su i postupak određivanja vrednosti q . Prepostavili su da važi

$$q = \dim(\mathcal{N}(F'(x^*))) \geq 1, \quad \text{codim}(\mathcal{I}m F'(x^*)) \geq 1. \quad (3.15)$$

Neka su r_1, \dots, r_q linearno nezavisni vektori koji generišu komplement skupa slika $\mathcal{I}m(F'(x^*))$, i neka je preslikavanje $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ definisano na sledeći način

$$\mathcal{F}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = F(x) + \lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_q r_q, \quad (3.16)$$

pri čemu je $(x, (\lambda_1, \dots, \lambda_q)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$. Očigledno važi da je

$$\mathcal{F}(x^*, 0, \dots, 0) = 0$$

i da Jakobijan $\mathcal{F}'(x^*, 0, \dots, 0)$ ima rang n . Označimo sa

$$z = (x, \lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}) \in \mathbb{R}^{n+q-1},$$

i

$$z^* = (x^*, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+q-1}.$$

Tada je

$$\mathcal{F}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_q) = \mathcal{F}(z, \lambda_q)$$

i važi sledeća teorema.

Teorema 3.1.3. [42] Neka važi (3.15) i neka je sa (3.16) definisana funkcija \mathcal{F} . Tada je $(z^*, 0)$ rešenje jednačine

$$\mathcal{F}(z, \lambda_q) = 0$$

i Jakobijan $\mathcal{F}'_z(z^*, 0)$ ima rang $n - 1$. Obrnuto, ako je $\mathcal{F}(z, \lambda_q) = 0$ i \mathcal{F}'_z ima rang $n - 1$ u $(z, 0) = (x, \lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}, 0)$, onda je $F'_x(x)$ singularan. Ako je z^* jedina tačka u kojoj je rang $\mathcal{F}'_z \leq n - 1$, onda je $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q = 0$ i $x = x^*$.

Prema tome, granični sistem za probleme za koje je zadovoljeno (3.14), definisan je preko graničnog sistema za problem za koji je rang($F'(x^*)$) = $n - 1$. U ovom slučaju važe jednačine slične (3.4) i one su sada sledećeg oblika

$$\begin{aligned} (a) \quad & \mathcal{F}'_z(z) \tilde{\eta}(z, \lambda_q) = r_q \tilde{g}^T(z, \lambda_q), & L^T(z, \lambda_q) \tilde{\eta}(z, \lambda_q) &= 1 \\ (b) \quad & \tilde{\mu}^T(z, \lambda_q) \mathcal{F}'_z(z) = \tilde{g}^T(z, \lambda_q) L^T(z, \lambda_q), & \tilde{\mu}^T(z, \lambda_q) r_q &= 1, \end{aligned} \quad (3.17)$$

sa rešenjima $\tilde{\mu}(z, \lambda_q)$, $\tilde{\eta}(z, \lambda_q)$ i $\tilde{g}(z, \lambda_q)$. Slično slučaju $q = 1$, dobijen je sistem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z, \lambda_q) &= 0, \\ \tilde{g}(z, \lambda_q) &= 0, \end{aligned}$$

koji se sastoji od $n + q$ jednačina sa $n + q$ nepoznatih za $q > 1$, čije rešenje je $(z^*, 0)$, pa je time određeno i x^* . Pored ovog rešenja, polazna jednačina (3.1) može imati još singularnih rešenja, ali u svakom od njih rang Jakobijana je veći od $n - q$ i ako nisu izolovana neće biti određena ovim metodom, [42].

U slučaju da je $q = 1$, jedinstvenost rešenja garantovana je ako je zadovoljen uslov (3.13). Slično, u slučaju da je $q > 1$ jedinstveno rešenje sistema (3.17) postoji ako je $q \times q$ matrica

$$\tilde{\eta}^T(z^*, 0)[\tilde{\mu}^T(z^*, 0)\mathcal{F}''_z(z^*, 0)]\tilde{\eta}(z^*, 0)$$

regularna.

Ipma i Šen, (T.J. Ypma, Y.Q. Shen), formirali su u [57] granični sistem, a za vektore $R(x, \lambda)$ i $L(x, \lambda)$ u matrici (3.3) odabrani su singularni vektori izračunati dekompozicijom po singularnim vrednostima (SVD) matrice $F'(\bar{x})$, za $\bar{x} \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$. Dokazali su da je dobijen sistem regularan, konstruisali su veoma jeftin algoritam za rešavanje dobijenog graničnog sistema i primenili ga na nekoliko primera, čime su potvrdili teorijske rezultate. Uvedene su sledeće pretpostavke:

B1: F je dva puta Lipšic neprekidno diferencijabilna funkcija u okolini rešenja x^* .

B2: $F'(x^*)$ ima rang $r = n - q$.

B3: Postoji vektor $\mu^* \in \mathcal{N}((F'(x^*))^T)$ i baza $\{\eta_1^*, \eta_2^*, \dots, \eta_q^*\}$ prostora $\mathcal{N}(F'(x^*))$ takva da je $q \times q$ matrica

$$[\eta^*]^T [(\mu^*)^T F''(x^*)] \eta^* \equiv [\eta_1^*, \dots, \eta_q^*]^T [(\mu^*)^T F''(x^*)] [\eta_1^*, \dots, \eta_q^*] \quad (3.18)$$

regularna.

Uslov (3.18) predstavlja prošireni uslov regularne singularnosti, pa je rešenje x^* izolovano sa singularnim Jakobijanom. Iz okoline $\mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ odabrana je tačka \bar{x} . Potom je izvršena SVD dekompozicija matrice $F'(\bar{x})$ na osnovu koje je određen skup n singularnih vrednosti

$$\sigma_1(\bar{x}) \geq \sigma_2(\bar{x}) \geq \dots \geq \sigma_n(\bar{x}) \geq 0$$

i skupovi n levih i n desnih singularnih vektora

$$\{u_1(\bar{x}), u_2(\bar{x}), \dots, u_n(\bar{x})\}, \{v_1(\bar{x}), v_2(\bar{x}), \dots, v_n(\bar{x})\}$$

koji čine ortonormiranu bazu prostora \mathbb{R}^n . Dimenzija nula prostora od $F'(x^*)$ jednaka je q , što za posledicu ima to da je tačno q singularnih vrednosti za $F'(x^*)$ jednako nuli. Kako su singularne vrednosti matrice neprekidne funkcije po promenljivoj x , u dobijenoj SVD dekompoziciji u tački $\bar{x} \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ ukupno je q singularnih vrednosti $\sigma_{n-q+1}(\bar{x}), \sigma_{n-q+2}(\bar{x}), \dots, \sigma_n(\bar{x})$ koje imaju malu vrednost, dok ostale $\sigma_1(\bar{x}), \sigma_2(\bar{x}), \dots, \sigma_{n-q}(\bar{x})$ imaju nenula vrednost za dovoljno malo ε .

Od singularnih vektora koji odgovaraju malim singularnim vrednostima, formirane su $n \times q$ matrice

$$R(\bar{x}) = [u_{n-q+1}(\bar{x}), \dots, u_n(\bar{x})]$$

$$L(\bar{x}) = [v_{n-q+1}(\bar{x}), \dots, v_n(\bar{x})]$$

i $(n+q) \times (n+q)$ matrica

$$A(x, \bar{x}) = \begin{bmatrix} F'(x) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

za koju je u [57] pokazano da je regularna za svako x iz okoline rešenja x^* i fiksirano \bar{x} dovoljno blizu x^* . Za definisanje graničnog sistema potrebno je pronaći rešenja $\eta(x), h(x), \mu_\alpha(x), g(x)$ sistema

$$A(x, \bar{x}) \begin{bmatrix} \eta(x) \\ h(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F'(x) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_q \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

i

$$A^T(x, \bar{x}) \begin{bmatrix} \mu_\alpha(x) \\ g(x) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F'(x) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mu_\alpha(x) \\ g(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

pri čemu je α proizvoljno izabran q -dimenzioni vektor. Jedinstvenost rešenja, kao i do sada, zavisi od vrednosti (3.13). U ovom slučaju je to $q \times q$ matrica

$$B(x, \alpha) \equiv \eta^T(x) [\mu_\alpha^T(x) F''(x)] \eta(x). \quad (3.22)$$

Pod uslovom da je matrica (3.19) regularna i da važe pretpostavke **B1** – **B3**, pokazano je da je matrica $B(x^*, \alpha)$ regularna za skoro sve vrednosti $\alpha \in \mathbb{R}^q$.

Granični sistem za rešavanje jednačine (3.1) sada ima oblik

$$\mathbf{F}(x, \lambda) \equiv \begin{bmatrix} F(x) + R(\bar{x})\lambda \\ g(x) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

i $(x^*, 0)$ je njegovo rešenje. Poznato je, [52], da je Jakobijan ovako definisane funkcije

$$\mathbf{F}'(x, \lambda) = \begin{bmatrix} F'(x) & R(\bar{x}) \\ -\eta^T(x) [\mu_\alpha^T(x) F''(x)] & 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

i ako važe pretpostavke **B1** – **B3**, onda je $\mathbf{F}'(x^*, 0)$ regularan i primenom Njutnovog metoda na (3.23) postiže se kvadratna konvergencija ka singularnom rešenju jednačine $F(x) = 0$. Takođe je pokazano, [57], da nije potrebno u svakoj iteraciji računati celu matricu $\mathbf{F}'(x, \lambda)$. Dovoljno je formirati matricu $A(x, \bar{x})$ iz (3.19) i pronaći rešenja sistema (3.20) i (3.21) kako bismo došli do Njutnovog pravca. On je, u ovom slučaju, definisan sa

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix} = dY + dZ = \begin{bmatrix} (dY)_1 \\ (dY)_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (dZ)_1 \\ (dZ)_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} A(x, \bar{x}) dY &= \begin{bmatrix} -(F(x) + R(\bar{x})\lambda) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ dZ &= \begin{bmatrix} \eta(x) \\ h(x) \end{bmatrix} dW, \\ B(x, \alpha) dW &= g(x) - \eta^T(x)(\mu_\alpha^T(x)F''(x))dY_1, \end{aligned}$$

Prethodno opisani postupak formiranja i rešavanja graničnog sistema, predstavljen je algoritmom koji sledi, [57].

Algoritam Y:

K0: Odabrati tačku \bar{x} iz okoline rešenja x^* , izvršiti SVD dekompoziciju Jakobijana $F'(\bar{x})$, odrediti vrednost za q i od singularnih vektora formirati matrice $R(\bar{x})$ i $L(\bar{x})$. Zatim odabrati proizvoljan vektor $\alpha \in \mathbb{R}^q$, postaviti $\lambda_0 = 0$ i $k = 0$,

K1: Formirati matricu $A(x_k, \bar{x})$ definisanu sa (3.19).

K2: Pronaći rešenja linearnih sistema:

$$A(x_k, \bar{x}) dY = \begin{bmatrix} -(F(x_k) + R(\bar{x})\lambda_k) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A(x_k, \bar{x}) \begin{bmatrix} \eta(x_k) \\ h(x_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_q \end{bmatrix},$$

$$A^T(x_k, \bar{x}) \begin{bmatrix} \mu_\alpha(x_k) \\ g(x_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

K3: Izračunati $q \times q$ matricu $B(x_k, \alpha)$, definisanu sa (3.22), i naći rešenje dW linearnog sistema

$$B(x_k, \alpha)dW = g(x_k) - \eta^T(x_k)[\mu_\alpha^T(x_k)F''(x_k)]dY_1.$$

K4: Odrediti korak

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix} = dY + \begin{bmatrix} \eta(x_k) \\ h(x_k) \end{bmatrix} dW$$

i izračunati novu iteraciju

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix},$$

K5: $k = k + 1$ i vratiti se na korak **K1**.

U [57] predstavljeni su numerički rezultati dobijeni implementacijom algoritma **Y** na nekoliko primera koji pokazuju lokalni karakter metoda, odnosno tačka \bar{x} mora biti blizu rešenja kako bi bila postignuta konvergencija. Za tačku \bar{x} birana je početna aproksimacija rešenja, $\bar{x} = x_0$. U okviru glave 4 predstavljeni su numerički rezultati dobijeni primenom ovog algoritma na niz primera.

3.2 Modifikacije Ipminog postupka

U slučajevima da funkcija $F(x)$ nije zadata formulom, nego su njene vrednosti rezultat eksperimentalnog procesa, do Jakobijana i Hesijana funkcije teško je doći. Takođe je poznato da je izračunavanje parcijalnih izvoda prvog i drugog reda veoma skupo. Zbog toga, postupke koji koriste vrednosti Jakobijana i Hesijana potrebno je modifikovati kako bi koristili samo vrednosti funkcije. U ovom delu je predložena modifikacija prethodno navedenog postupka, predstavljena u Buhmiller, Krejić, Lužanin, [8], koja koristi konačne razlike za aproksimaciju Jakobijana i Hesijana, pa je postupak dobijen na taj način jeftiniji za rad i pogodniji za primenu.

U ovom delu rada, osim ako nije naznačeno drugačije, $\|\cdot\|$ označava Frobenijusovu normu.

Neka važe pretpostavke **B1** - **B3**, navedene na strani 66. Kao i u [57], za $\bar{x} \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$, pri čemu je $\varepsilon > 0$ dovoljno malo, izvršićemo SVD Jakobijana $F'(\bar{x})$,

$$F'(\bar{x}) = [u_1(\bar{x}), \dots, u_n(\bar{x})] \text{diag}(\sigma_1(\bar{x}), \dots, \sigma_n(\bar{x})) [v_1(\bar{x}), \dots, v_n(\bar{x})]^T.$$

Od odgovarajućih q singularnih vektora, koji odgovaraju malim singularnim vrednostima, ćemo formirati $n \times q$ matrice

$$R(\bar{x}) = [u_{n-q+1}(\bar{x}), \dots, u_n(\bar{x})] \quad (3.25)$$

i

$$L(\bar{x}) = [v_{n-q+1}(\bar{x}), \dots, v_n(\bar{x})] \quad (3.26)$$

kao i $(n + q) \times (n + q)$ matricu

$$A_\xi(x, \bar{x}) = \begin{bmatrix} D(x, \xi) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

pri čemu je sa $D(x, \xi)$ označena aproksimacija Jakobijana dobijena centralnim konačnim razlikama, odnosno j -ta kolona matrice $D(x, \xi)$ data je sa

$$D(x, \xi)_{.j} = \frac{F(x + \xi e_j) - F(x - \xi e_j)}{2\xi}, \quad (3.28)$$

gde je e_j j -ti vektor standardne baze vektorskog prostora \mathbb{R}^n za koji je $\|e_j\| = 1$. Za ovakvu aproksimaciju važi sledeća lema.

Lema 3.2.1. *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dva puta Lipšic neprekidna sa konstantom γ na $\mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ i neka je matrica $D(x, \xi)$ definisana sa (3.28). Tada je*

$$\|D(x, \xi) - F'(x)\| \leq n \frac{\gamma}{2} \xi.$$

Dokaz:

Za j -tu kolonu matrice $D(x, \xi)$ i jakobiana $F'(x)$ važi lema 1.2.2. pa je

$$\begin{aligned} & \|D(x, \xi)_{.j} - F'(x)_{.j}\| = \left\| \frac{F(x + \xi e_j) - F(x - \xi e_j)}{2\xi} - F'(x)_{.j} \right\| \\ &= \left\| \frac{F(x + \xi e_j) - F(x - \xi e_j) - 2\xi F'(x) e_j}{2\xi} \right\| \\ &= \left\| \frac{F(x + \xi e_j) - F(x) - \xi F'(x) e_j - (F(x - \xi e_j) - F(x) - F'(x)(-\xi e_j))}{2\xi} \right\| \\ &\leq \frac{\|F(x + \xi e_j) - F(x) - \xi F'(x) e_j\|}{2\xi} + \frac{\|F(x - \xi e_j) - F(x) - F'(x)(-\xi e_j)\|}{2\xi} \\ &\leq \frac{1}{2\xi} \left(\frac{\gamma}{2} \|\xi e_j\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|\xi e_j\|^2 \right) \leq \frac{1}{2\xi} \left(\frac{\gamma}{2} |\xi|^2 + \frac{\gamma}{2} |\xi|^2 \right) \leq \frac{\gamma}{2} \xi. \end{aligned}$$

Prethodna nejednakost važi za svaku kolonu matrice $D(x, \xi) - F'(x)$, pa je

$$\|D(x, \xi) - F'(x)\|_1 \leq \frac{\gamma}{2} \xi,$$

odnosno, važi da je

$$\|D(x, \xi) - F'(x)\| \leq n \frac{\gamma}{2} \xi,$$

Sada se za matricu $A_\xi(x, \bar{x})$ definisanu sa (3.27) može pokazati sledeća teorema. ■

Teorema 3.2.1. *Neka su zadovoljeni uslovi **B1** i **B2** i neka je $\varepsilon > 0$ dovoljno malo. Tada postoji ξ_0 dovoljno malo tako da je za $\xi \leq \xi_0$ i fiksirano $\bar{x} \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ matrica $A_\xi(x, \bar{x})$ regularna za svako $x \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$.*

Dokaz:

Neka je matrica $A(x, \bar{x})$ definisana sa (3.19). Važi da je

$$\begin{aligned} \|A(\bar{x}, \bar{x}) - A_\xi(\bar{x}, \bar{x})\| &= \left\| \begin{bmatrix} F'(\bar{x}) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D(\bar{x}, \xi) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} F'(\bar{x}) - D(\bar{x}, \xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \|F'(\bar{x}) - D(\bar{x}, \xi)\|, \end{aligned}$$

odakle, koristeći lemu 3.2.1., sledi

$$\|F'(\bar{x}) - D(\bar{x}, \xi)\| \leq n \frac{\gamma}{2} \xi.$$

U slučaju da ξ teži nuli, važi

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|F'(\bar{x}) - D(\bar{x}, \xi)\| = 0,$$

odnosno, važi

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|A(\bar{x}, \bar{x}) - A_\xi(\bar{x}, \bar{x})\| = 0. \quad (3.29)$$

Matrica $A(\bar{x}, \bar{x})$ je regularna i na osnovu (3.29) važi da je

$$\|A^{-1}(\bar{x}, \bar{x})(A(\bar{x}, \bar{x}) - A_\xi(\bar{x}, \bar{x}))\| < 1$$

za $\xi \leq \xi_0$ i svako $x \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$. Kada se iskoristi teorema 1.2.1. sledi da je matrica $A_\xi(\bar{x}, \bar{x})$ regularna. Takođe, za svako $x \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ važi

$$\begin{aligned} \|A_\xi(\bar{x}, \bar{x}) - A_\xi(x, \bar{x})\| &= \left\| \begin{bmatrix} D(\bar{x}, \xi) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D(x, \xi) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \|D(\bar{x}, \xi) - D(x, \xi)\| \\ &\leq \|D(\bar{x}, \xi) - F'(\bar{x})\| + \|F'(\bar{x}) - F'(x)\| + \\ &\quad + \|F'(x) - D(x, \xi)\| \\ &\leq n \frac{\gamma}{2} \xi + \gamma \|\bar{x} - x\| + n \frac{\gamma}{2} \xi \\ &\leq \gamma (n \xi + \varepsilon), \end{aligned}$$

pa je za $\xi \leq \xi_0$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|A_\xi(\bar{x}, \bar{x}) - A_\xi(x, \bar{x})\| = \gamma \varepsilon. \quad (3.30)$$

Može se odabrati dovoljno mala vrednost $\varepsilon > 0$, zapravo dovoljno mala okolina rešenja $\mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$, tako da (3.30) i regularnost matrice $A_\xi(\bar{x}, \bar{x})$ imaju za posledicu da je

$$\|A_\xi^{-1}(\bar{x}, \bar{x})(A_\xi(\bar{x}, \bar{x}) - A_\xi(x, \bar{x}))\| < 1,$$

za $\xi \leq \xi_0$ i svako $x \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$. Na osnovu teoreme 1.2.1. sledi da je $A_\xi(x, \bar{x})$ regularna za svako $x \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ za $\xi \leq \xi_0$. ■

Neka su za $x \in \mathcal{B}(\bar{x}, \varepsilon)$ matrice $\bar{\eta}(x, \xi)$ i $\bar{h}(x, \xi)$ jedinstvena rešenja linearnog sistema

$$A_\xi(x, \bar{x}) \begin{bmatrix} \bar{\eta}(x, \xi) \\ \bar{h}(x, \xi) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} D(x, \xi) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\eta}(x, \xi) \\ \bar{h}(x, \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_q \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

pri čemu je $\bar{\eta}(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ i $\bar{h}(x, \xi) \in \mathbb{R}^{q \times q}$. Slično, neka su $\bar{\mu}_\alpha(x, \xi) \in \mathbb{R}^n$ i $\bar{g}(x, \xi) \in \mathbb{R}^q$ jedinstvena rešenja linearnog sistema

$$A_\xi^T(x, \bar{x}) \begin{bmatrix} \bar{\mu}_\alpha(x, \xi) \\ \bar{g}(x, \xi) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} D(x, \xi) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\mu}_\alpha(x, \xi) \\ \bar{g}(x, \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}^q$ slučajno odabran vektor.

Označimo sa $\eta(x) \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $h(x) \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $\mu_\alpha(x) \in \mathbb{R}^n$ i $g(x) \in \mathbb{R}^q$ jedinstvena rešenja linearnih sistema, (3.20) i (3.21). Pokazano je da $\eta(x^*) = \eta^*$, što je matrica sa kolonama formiranim od vektora koji čine bazu nula prostora $\mathcal{N}(F'(x^*))$. Takođe je pokazano da je $0 \neq \mu^* = \mu_\alpha(x^*) \in \mathcal{N}(F'(x^*)^T)$ i da je $h(x^*) = g(x^*) = 0$. Označimo sa $\|\eta^*\| = C_\eta^*$ i $\|\mu^*\| = C_\mu^*$.

Kako važi da je

$$\begin{aligned} \|D(x^*, \xi)\eta(x^*) + R(\bar{x})h(x^*)\| &= \|D(x^*, \xi)\eta(x^*)\| \\ &= \|(D(x^*, \xi) - F'(x^*))\eta(x^*)\| \\ &\leq \|D(x^*, \xi) - F'(x^*)\| \|\eta(x^*)\| \\ &\leq n \frac{\gamma}{2} \xi \|\eta(x^*)\| \\ &= n \frac{\gamma}{2} \xi C_\eta^*, \end{aligned}$$

sledi

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|D(x^*, \xi)\eta(x^*) + R(\bar{x})h(x^*)\| = 0.$$

Iz jedinstvenosti rešenja sistema (3.31) sledi

$$D(x^*, \xi)\eta(x^*, \xi) + R(\bar{x})h(x^*, \xi) = 0,$$

pa zaključujemo da je

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \bar{\eta}(x^*, \xi) = \eta(x^*) = \eta^* \quad (3.33)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \bar{h}(x^*, \xi) = h(x^*) = 0. \quad (3.34)$$

Slično, iz

$$\begin{aligned} \|D^T(x^*, \xi)\mu_\alpha(x^*) + L(\bar{x})g(x^*)\| &= \|D^T(x^*, \xi)\mu_\alpha(x^*)\| \\ &= \|D^T(x^*, \xi)\mu_\alpha(x^*) - F'(x^*)^T\mu_\alpha(x^*)\| \\ &= \|(D^T(x^*, \xi) - F'(x^*)^T)\mu_\alpha(x^*)\| \\ &\leq \|D^T(x^*, \xi) - F'(x^*)^T\| \|\mu_\alpha(x^*)\| \\ &\leq \|D(x^*, \xi) - F'(x^*)\| \|\mu_\alpha(x^*)\| \\ &\leq n \frac{\gamma}{2} \xi \|\mu_\alpha(x^*)\| \\ &= n \frac{\gamma}{2} \xi C_\mu^* \end{aligned}$$

sledi da je

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|D^T(x^*, \xi)\mu_\alpha(x^*) + L(\bar{x})g(x^*)\| = 0.$$

Iz jedinstvenosti rešenja sistema (3.32) sledi

$$D^T(x^*, \xi)\mu_\alpha(x^*, \xi) + L(\bar{x})g(x^*, \xi) = 0,$$

što ima za posledicu da je

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \bar{\mu}_\alpha(x^*, \xi) = \mu_\alpha(x^*) = \mu^* \quad (3.35)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \bar{g}(x^*, \xi) = g(x^*) = 0.$$

U [57] definisana je $q \times q$ matrica $B(x, \alpha)$ na sledeći način

$$B(x, \alpha) \equiv \eta^T(x) [\mu_\alpha^T(x) F''(x)] \eta(x), \quad (3.36)$$

i pokazano je da je $B(x^*, \alpha)$ regularna matrica za skoro sve vrednosti $\alpha \in \mathbb{R}^q$. Označimo sa $H(x, \xi)$ aproksimaciju tenzora $F''(x)$, sa $H_{F_k}(x)$ Hesijan komponente F_k funkcije

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)),$$

dok je sa $H_k(x, \xi)$ označena aproksimacija Hesijana $H_{F_k}(x)$ konačnim razlikama drugog reda, odnosno

$$H_k(x, \xi)_{ij} = \frac{F_k(x + \xi e_i + \xi e_j) - F_k(x + \xi e_i - \xi e_j)}{4\xi^2} - \frac{F_k(x - \xi e_i + \xi e_j) - F_k(x - \xi e_i - \xi e_j)}{4\xi^2}. \quad (3.37)$$

Sada možemo definisati novu $q \times q$ matricu

$$B_\xi(x, \alpha) \equiv \bar{\eta}^T(x, \xi) [\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi) H(x, \xi)] \bar{\eta}(x, \xi). \quad (3.38)$$

Naredne dve leme biće nam potrebne prilikom dokazivanja regularnosti matrice (3.38).

Lema 3.2.2. *Neka je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ dva puta Lipšic neprekidna sa konstantom γ u okolini $\mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$ rešenja x^* i neka je matrica $H_k(x, \xi)$ aproksimacija Hesijana $H_{F_k}(x)$ za komponentu $F_k(x)$, definisana sa (3.37). Tada je*

$$\|(H_k(x, \xi))_{ij} - (H_{F_k}(x))_{ij}\| \leq \frac{4}{3} \gamma \xi.$$

Dokaz:

Za komponentu $F_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ važi $H_{F_k} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Označimo sa

$$\begin{aligned} A &= F_k(x + \xi e_i + \xi e_j) - (F_k(x) + (F'_k)^T(x)(\xi e_i + \xi e_j) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\xi e_i + \xi e_j)^T H_{F_k}(x)(\xi e_i + \xi e_j)) \\ B &= F_k(x + \xi e_i - \xi e_j) - (F_k(x) + (F'_k)^T(x)(\xi e_i - \xi e_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}(\xi e_i - \xi e_j)^T H_{F_k}(x)(\xi e_i - \xi e_j) \\
C &= F_k(x - \xi e_i + \xi e_j) - (F_k(x) + (F'_k)^T(x)(-\xi e_i + \xi e_j) \\
& +\frac{1}{2}(-\xi e_i + \xi e_j)^T H_{F_k}(x)(-\xi e_i + \xi e_j)) \\
D &= F_k(x - \xi e_i - \xi e_j) - (F_k(x) + (F'_k)^T(x)(-\xi e_i - \xi e_j) \\
& +\frac{1}{2}(-\xi e_i - \xi e_j)^T H_{F_k}(x)(-\xi e_i - \xi e_j)).
\end{aligned}$$

Može se pokazati da je

$$\begin{aligned}
A - B - C + D &= F_k(x + \xi e_i + \xi e_j) - F_k(x + \xi e_i - \xi e_j) \\
& - F_k(x - \xi e_i + \xi e_j) + F_k(x - \xi e_i - \xi e_j) \\
& +\frac{1}{2}((\xi e_i)^T H_{F_k}(x)(\xi e_j) + (\xi e_j)^T H_{F_k}(x)(\xi e_i)) \\
& -\frac{1}{2}(-(\xi e_i)^T H_{F_k}(x)(\xi e_j) - (\xi e_j)^T H_{F_k}(x)(\xi e_i)) \\
& -\frac{1}{2}(-(\xi e_i)^T H_{F_k}(x)(\xi e_j) - (\xi e_j)^T H_{F_k}(x)(\xi e_i)) \\
& +\frac{1}{2}((\xi e_i)^T H_{F_k}(x)(\xi e_j) + (\xi e_j)^T H_{F_k}(x)(\xi e_i)). \tag{3.39}
\end{aligned}$$

Koristeći

$$e_i^T (H_{F_k}(x)) e_j = (H_{F_k}(x))_{ij},$$

i simetriju Hesijana, jednačina (3.39) postaje

$$\begin{aligned}
A - B - C + D &= F_k(x + \xi e_i + \xi e_j) - F_k(x + \xi e_i - \xi e_j) - \\
& - F_k(x - \xi e_i + \xi e_j) + F_k(x - \xi e_i - \xi e_j) + \\
& + 4 \xi^2 (H_{F_k})_{ij}.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\|(H_k(x, \xi))_{ij} - (H_{F_k}(x))_{ij}\| = \left\| \frac{A - B - C + D}{4\xi^2} \right\|.$$

Na osnovu teoreme 1.2.3. sledi da je

$$\|A\| \leq \frac{\gamma_k}{6} \|\xi e_i + \xi e_j\|^3$$

$$\begin{aligned}\|B\| &\leq \frac{\gamma_k}{6} \|\xi e_i - \xi e_j\|^3 \\ \|C\| &\leq \frac{\gamma_k}{6} \|\xi e_i + \xi e_j\|^3 \\ \|D\| &\leq \frac{\gamma_k}{6} \|\xi e_i - \xi e_j\|^3,\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}\|(H_k(x, \xi))_{ij} - (H_{F_k}(x))_{ij}\| &\leq \frac{1}{4\xi^2} \frac{\gamma_k}{6} \xi^3 (\|e_i + e_j\|^3 + \|e_i - e_j\|^3 + \\ &\quad + \|\xi e_i + \xi e_j\|^3 + \|\xi e_i - \xi e_j\|^3) \\ &\leq \frac{\gamma_k}{6} \xi 2^3 \\ &\leq \frac{4}{3} \gamma \xi.\end{aligned}$$

■

Lema 3.2.3. *Neka važe pretpostavke **B1** - **B3**. Za Hesijan $F''(x^*)$ i njegovu aproksimaciju $H(x^*, \xi)$ definisanu sa (3.37), važe sledeće nejednakosti:*

- a) $\|\bar{u}^T [\bar{v}^T H(x^*, \xi)]\| \leq 2 n \sqrt{n} \gamma \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|,$
- b) $\|\bar{u}^T [\bar{v}^T H(x^*, \xi)] - \bar{u}^T [\bar{v}^T F''(x^*)]\| \leq \frac{4}{3} n \sqrt{n} \gamma \xi \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|,$
- c) $\|\bar{u}^T [\bar{v}^T F''(x^*)] - \bar{u}^T [v^T F''(x^*)]\| \leq C_H^* \|\bar{u}\| \|\bar{v} - v\|,$
- d) $\|\bar{u}^T [v^T F''(x^*)] - u^T [v^T F''(x^*)]\| \leq C_H^* \|\bar{u} - u\| \|\bar{v}\|,$

gde su $u, \bar{u} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ i $v, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

Dokaz:

a) Kako važi

$$\begin{aligned}\|\bar{u}^T [\bar{v}^T H(x^*, \xi)]\| &= \|\bar{u}^T H(x^*, \xi) \bar{v}\| \\ &\leq \|H(x^*, \xi)\| \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|,\end{aligned}$$

koristeći Lipšicovu neprekidnost komponente F_k sa konstantom γ_k ,

$$\|(H_k(x^*, \xi))_{ij}\| = \left\| \frac{F_k(x + \xi e_i + \xi e_j) - F_k(x + \xi e_i - \xi e_j)}{4\xi^2} \right\|$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{F_k(x - \xi e_i + \xi e_j) - F_k(x - \xi e_i - \xi e_j)}{4\xi^2} \right\| \\
&= \frac{1}{4\xi^2} \left\| F_k(x + \xi e_i + \xi e_j) - F_k(x^*) - F'_k(x^*)^T(\xi e_i + \xi e_j) \right. \\
&\quad \left. - \left(F_k(x + \xi e_i - \xi e_j) - F_k(x^*) - F'_k(x^*)^T(\xi e_i - \xi e_j) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(F_k(x - \xi e_i + \xi e_j) - F_k(x^*) - F'_k(x^*)^T(-\xi e_i + \xi e_j) \right) \right. \\
&\quad \left. + F_k(x - \xi e_i - \xi e_j) - F_k(x^*) - F'_k(x^*)^T(-\xi e_i - \xi e_j) \right\| \\
&\leq \frac{\gamma_k}{8\xi^2} \left(\|\xi e_i + \xi e_j\|^2 + \|\xi e_i - \xi e_j\|^2 + \|\xi e_i + \xi e_j\|^2 \right. \\
&\quad \left. + \|\xi e_i - \xi e_j\|^2 \right) \\
&\leq 2 \gamma_k \leq 2 \gamma.
\end{aligned}$$

Svaki element aproksimacije $F''(x^*)$ zadovoljava ovu nejednakost. A kako ih ukupno ima n^3 iz definicije Frobrnijusove norme sledi

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}^T H(x^*, \xi) \bar{v}\| &\leq \|H(x^*, \xi)\| \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \\
&\leq 2 n \sqrt{n} \gamma \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|.
\end{aligned}$$

b) Imamo da važi

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}^T [\bar{v}^T H(x^*, \xi)] - \bar{u}^T [\bar{v}^T F''(x^*)]\| &= \|\bar{u}^T (H(x^*, \xi) - F''(x^*)) \bar{v}\| \\
&= \|H(x^*, \xi) - F''(x^*)\| \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|.
\end{aligned}$$

Za svaku komponentu tenzora $H(x^*, \xi) - F''(x^*)$ važi lema 3.2.2. odakle na osnovu definicije norme sledi

$$\|\bar{u}^T (H(x^*, \xi) - F''(x^*)) \bar{v}\| \leq \frac{4}{3} n \sqrt{n} \gamma \xi \|\bar{u}\| \|\bar{v}\|.$$

c) Za $q \times n$ matrice važi

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}^T [\bar{v}^T F''(x^*)] - \bar{u}^T [v^T F''(x^*)]\| &= \|\bar{u}^T F''(x^*) \bar{v} - \bar{u}^T F''(x^*) v\| \\
&= \|\bar{u}^T F''(x^*) (\bar{v} - v)\| \\
&= \|F''(x^*)\| \|\bar{u}\| \|\bar{v} - v\|.
\end{aligned}$$

Kako važi pretpostavka **B1**, Hesijan $F''(x^*)$ je ograničen, tj. postoji konstanta C_H^* takva da je $\|F''(x^*)\| \leq C_H^*$ i važi

$$\|\bar{u}^T [\bar{v}^T F''(x^*)] - \bar{u}^T [v^T F''(x^*)]\| \leq C_H^* \|\bar{u}\| \|\bar{v} - v\|.$$

d) Kako je

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^T[v^T F''(x^*)] - u^T[v^T F''(x^*)]\| &= \|(\bar{u}^T - u^T)F''(x^*)v\| \\ &\leq \|\bar{u} - u\| \|F''(x^*)\| \|v\|, \end{aligned}$$

koristeći iste argumente kao i za c), možemo zaključiti da važi d). ■

Sada se za matricu $B_\xi(x^*, \alpha)$ definisanu sa (3.38) može pokazati sledeća teorema.

Teorema 3.2.2. *Neka važe pretpostavke B1 – B3, i neka je \bar{x} izabrano tako da važi teorema 3.2.1.. Tada postoji ξ_0 dovoljno malo tako da je za svako $\xi \leq \xi_0$ matrica $B_\xi(x^*, \alpha)$, definisana sa (3.38), regularna za skoro sve vrednosti $\alpha \in \mathbb{R}^q$.*

Dokaz:

Za matricu $B(x^*, \alpha)$, definisanu sa (3.36), i matricu $B_\xi(x^*, \alpha)$ važi

$$\begin{aligned} &\|B_\xi(x^*, \alpha) - B(x^*, \alpha)\| = \\ &= \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)]\bar{\eta}(x^*, \xi) - \eta^T(x^*)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\eta(x^*)\| \\ &\leq \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)]\bar{\eta}(x^*, \xi) - \bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)]\eta(x^*)\| \\ &\quad + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)]\eta(x^*) - \eta^T(x^*)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\eta(x^*)\| \\ &\leq \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)](\bar{\eta}(x^*, \xi) - \eta(x^*))\| \\ &\quad + \|\left(\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)] - \eta^T(x^*)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\right)\eta(x^*)\| \\ &\leq \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)]\| \|(\bar{\eta}(x^*, \xi) - \eta(x^*))\| \\ &\quad + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)] - \bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)F''(x^*)]\| \|\eta(x^*)\| \\ &\quad + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)F''(x^*)] - \eta^T(x^*)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\| \|\eta(x^*)\| \\ &\leq \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)]\| \|(\bar{\eta}(x^*, \xi) - \eta(x^*))\| \\ &\quad + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)] - \bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)F''(x^*)]\| \|\eta(x^*)\| \\ &\quad + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)F''(x^*)] - \bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\| \|\eta(x^*)\| \\ &\quad + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)] - \eta^T(x^*)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\| \|\eta(x^*)\|. \end{aligned}$$

Na osnovu leme 3.2.3. sledi

$$\begin{aligned} \|B_\xi(x^*, \alpha) - B(x^*, \alpha)\| &\leq 2n\sqrt{n}\gamma\|\bar{\eta}(x^*, \xi)\|\|\bar{\mu}_\alpha(x^*, \xi)\|\|\bar{\eta}(x^*, \xi) - \eta(x^*)\| \\ &\quad + \frac{4}{3}n\sqrt{n}\gamma\xi C_\eta^*\|\bar{\eta}(x^*, \xi)\|\|\bar{\mu}_\alpha(x^*, \xi)\| \\ &\quad + C_H^*C_\eta^*\|\bar{\eta}(x^*, \xi)\|\|\bar{\mu}_\alpha(x^*, \xi) - \mu_\alpha(x^*)\| \\ &\quad + C_H^*C_{\eta^*}C_{\mu^*}\|\bar{\eta}^T(x^*, \xi) - \eta^T(x^*)\|. \end{aligned}$$

U slučaju da $\xi \rightarrow 0$, koristeći (3.33) i (3.35) zaključujemo da je

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|B_\xi(x^*, \alpha) - B(x^*, \alpha)\| = 0. \quad (3.40)$$

Regularnost matrice $B(x^*, \alpha)$ za skoro sve α i ocena (3.40) za posledicu imaju da važi sledeća ocena

$$\|B(x^*, \alpha)^{-1}(B_\xi(x^*, \alpha) - B(x^*, \alpha))\| < 1$$

za $\xi \leq \xi_0$, odakle sledi da je matrica $B_\xi(x^*, \alpha)$ regularna za skoro sve $\alpha \in \mathbb{R}^q$ kada $\xi \rightarrow 0$. ■

Definišimo sada granični sistem za (3.1) na sledeći način

$$\mathbf{F}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} F(x) + R(\bar{x})\lambda \\ \bar{g}(x, \xi) \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Iz (3.32) sledi

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu}(x, \xi) \\ \bar{g}(x, \xi) \end{bmatrix} = (A_\xi(x, \bar{x})^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

odakle je

$$\bar{g}(x, \xi) = [0 \ E_q] \begin{bmatrix} \bar{\mu}(x, \xi) \\ \bar{g}(x, \xi) \end{bmatrix} = [0 \ E_q](A_\xi(x, \bar{x})^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Ako se (3.31) napiše u obliku

$$[0 \ E_q] = [\bar{\eta}^T(x, \xi) \ \bar{h}^T(x, \xi)]A_\xi(x, \bar{x})^T, \quad (3.43)$$

tada iz (3.42) i (3.43) sledi da je

$$\begin{aligned} \bar{g}(x, \xi) &= [\bar{\eta}^T(x, \xi) \ \bar{h}^T(x, \xi)]A_\xi(x, \bar{x})^T(A_\xi(x, \bar{x})^T)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \\ &= \bar{h}^T(x, \xi)\alpha. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Koristeći (3.34) i (3.44) dobijamo

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \bar{g}(x^*, \xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \bar{h}^T(x^*, \xi)\alpha = h^T(x^*)\alpha = 0,$$

pa važi

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \mathbf{F}(x^*, 0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \begin{bmatrix} F(x^*) \\ \bar{g}(x^*, \xi) \end{bmatrix} = 0,$$

što znači da sistemi (3.41) i (3.1) imaju isto rešenje kada ξ teži ka nuli. Za matricu

$$C(x) = \begin{bmatrix} F'(x) & R(\bar{x}) \\ -\eta^T(x)[\mu_\alpha^T(x)F''(x)] & 0 \end{bmatrix}$$

koja predstavlja Jakobijan graničnog sistema definisanog u [57], pokazano je da je $C(x^*)$ regularna. Ako definišemo matricu

$$C_\xi(x) = \begin{bmatrix} D(x, \xi) & R(\bar{x}) \\ -\bar{\eta}^T(x, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi)] & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $D(x, \xi)$ aproksimacija Jakobijana i $H(x, \xi)$ aproksimacije Hessian funkcije $F(x)$, može se pokazati sledeća teorema.

Teorema 3.2.3. *Neka važe pretpostavke **B1-B3** i neka su \bar{x} i α odabrani tako da važe teoreme 3.2.1. i 3.2.2.. Tada postoji dovoljno malo ξ_0 takvo da je matrica $C_\xi(x^*)$ regularna za $\xi \leq \xi_0$.*

dokaz:

Posmatramo razliku

$$\begin{aligned} & \|C_\xi(x^*) - C(x^*)\| \\ = & \left\| \begin{bmatrix} D(x^*, \xi) - F'(x^*) & 0 \\ \bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)] - \eta^T(x^*)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)] & 0 \end{bmatrix} \right\|. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Primenom leme 3.2.1. na matricu $D(x^*, \xi) - F'(x^*)$ dobijamo

$$\|D(x^*, \xi) - F'(x^*)\| \leq n \frac{\gamma}{2} \xi,$$

pa važi

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|D(x^*, \xi) - F'(x^*)\| = 0.$$

Takođe, primenom leme 3.2.3. **b)**, **c)** i **d)** važi da je

$$\begin{aligned}
& \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)] - \eta^T(x^*)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\| \\
\leq & \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)] - \bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)F''(x^*)]\| \\
& + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)F''(x^*)] - \bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\| \\
& + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)] - \eta^T(x^*)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\| \\
\leq & \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)\| \|\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)\| \|H(x^*, \xi) - F''(x^*)\| \\
& + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)\| \|\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi) - \mu_\alpha^T(x^*)\| \|F''(x^*)\| \\
& + \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi) - \eta^T(x^*)\| \|\mu_\alpha^T(x^*)\| \|F''(x^*)\| \\
\leq & \frac{4}{3} n \sqrt{n} \gamma \xi \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)\| \|\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)\| \\
& + C_H^* \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)\| \|\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi) - \mu_\alpha^T(x^*)\| \\
& + C_H^* C_\mu^* \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi) - \eta^T(x^*)\|.
\end{aligned}$$

Koristeći (3.33) i (3.35) zaključujemo da je

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|\bar{\eta}^T(x^*, \xi)[\bar{\mu}_\alpha^T(x^*, \xi)H(x^*, \xi)] - \eta^T(x^*)[\mu_\alpha^T(x^*)F''(x^*)]\| = 0,$$

odakle, na osnovu definicije norme, sledi

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \|C_\xi(x^*) - C(x^*)\| = 0. \quad (3.46)$$

Kako je $C(x^*)$ regularna matrica i zadovoljeno je (3.46), sledi da za ξ dovoljno malo važi

$$\|C^{-1}(x^*, \lambda)(C_\xi(x^*) - C(x^*))\| < 1.$$

Dakle, matrica $C_\xi(x^*)$ regularna je za svako $\xi \leq \xi_0$. ■

Kao i u [57], nije potrebno računati matricu $C_\xi(x)$. Dovoljno je samo izračunati $\mathbf{F}(x, \lambda)$, rešenja linearnih sistema (3.31) i (3.32), kao i $q \times q$ matricu $A_\xi(x, \bar{x})$, definisanu sa (3.27).

Teorema 3.2.4. *Neka je*

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix} = dY + dZ = \begin{bmatrix} dY_1 \\ dY_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dZ_1 \\ dZ_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} A_\xi(x, \bar{x}) dY &= \begin{bmatrix} -(F(x) + R(\bar{x})\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} \\ dZ &= \begin{bmatrix} \bar{\eta}(x, \xi) \\ \bar{h}(x, \xi) \end{bmatrix} dW \\ B_\xi(x, \alpha) dW &= \bar{g}(x, \xi) - \bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))dY_1 \end{aligned}$$

dok je $dY_1, dZ_1 \in \mathbb{R}^n$ i $dY_2, dZ_2 \in \mathbb{R}^q$. Tada vektor $\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix}$ zadovoljava

$$C_\xi(x) \begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix} = -\mathbf{F}(x, \lambda). \quad (3.47)$$

Dokaz:

Koristimo istu tehniku dokaza kao u [57]. Iz definicije matrice $A_\xi(\bar{x}, x)$ sledi da je

$$\begin{aligned} & [D(x, \xi) \quad R(\bar{x})](dY + dZ) = [E_n \quad 0]A_\xi(x, \bar{x})(dY + dZ) \\ &= [E_n \quad 0]A_\xi(x, \bar{x})\left(A_\xi^{-1}(x, \bar{x}) \begin{bmatrix} -(F(x) + R(\bar{x})\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} + \right. \\ & \quad \left. + A_\xi^{-1}(x, \bar{x}) \begin{bmatrix} 0 \\ E_q \end{bmatrix} B_\xi^{-1}(x, \alpha)(\bar{g}(x, \xi) - \bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))dY_1)\right) \\ &= [E_n \quad 0] \begin{bmatrix} -(F(x) + R(\bar{x})\lambda) \\ 0 \end{bmatrix} + \\ & \quad + [E_n \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ E_q \end{bmatrix} B_\xi^{-1}(x, \alpha)(\bar{g}(x, \xi) - \bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))dY_1) \\ &= -(F(x) + R(\bar{x})\lambda). \end{aligned}$$

Takođe važi

$$\begin{aligned} & -\bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))dZ_1 \\ &= -\bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))[E_n \quad 0]A_\xi^{-1}(x, \bar{x}) \begin{bmatrix} 0 \\ E_q \end{bmatrix} B_\xi^{-1}(x, \alpha)(\bar{g}(x, \xi) - \\ & \quad -\bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))dY_1) \\ &= -\bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))\bar{\eta}(x, \xi)B_\xi^{-1}(x, \alpha)(\bar{g}(x, \xi) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))dY_1) \\
= & -B_\xi(x, \alpha)B_\xi^{-1}(x, \alpha)(\bar{g}(x, \xi) - \bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))dY_1) \\
= & -\bar{g}(x, \xi) + \bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))dY_1),
\end{aligned}$$

odakle je

$$-\bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi))(dY_1 + dZ_1) = -\bar{g}(x, \xi),$$

odnosno,

$$[-\bar{\eta}^T(x, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x, \xi)H(x, \xi)) \quad 0](dY \quad dZ) = -\bar{g}(x, \xi),$$

pa je (3.47) zadovoljeno. ■

Na taj način se za pronalaženje rešenja sistema nelinearnih jednačina

$$F(x) = 0,$$

pri čemu funkcija $F(x)$ zadovoljava pretpostavke **B1-B3**, može se koristiti sledeći algoritam.

Algoritam MY :

K0: Neka je data početna aproksimacija rešenja $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Odabrati \bar{x} iz okoline rešenja, izvršiti SVD dekompoziciju Jakobijana $F'(\bar{x})$, odrediti vrednost za q i formirati matrice $R(\bar{x})$ i $L(\bar{x})$. Odabrati slučajan vektor $\alpha \in \mathbb{R}^q$, kao i početne vrednosti za λ_k, ξ i $k = 0$,

K1: Formirati matrice $D(x_k, \xi)$

$$D(x_k, \xi)_{.j} = \frac{F(x_k + \xi e_j) - F(x_k - \xi e_j)}{2\xi},$$

i

$$A_\xi(x_k, \bar{x}) = \begin{bmatrix} D(x_k, \xi) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}.$$

K2: Odrediti rešenja linearnih sistema

$$A_\xi(x_k, \bar{x})dY = - \begin{bmatrix} F(x_k) + R(\bar{x})\lambda_k \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_\xi(x_k, \bar{x}) \begin{bmatrix} \bar{\eta}(x_k, \xi) \\ \bar{h}(x_k, \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_q \end{bmatrix},$$

$$A_\xi(x_k, \bar{x}) \begin{bmatrix} \bar{\mu}(x_k, \xi) \\ \bar{g}(x_k, \xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

kao i matricu $H(x_k, \xi)$ definisanu sa (3.37).

K3: Formirati $q \times q$ matricu

$$B_\xi(x_k, \alpha) = \bar{\eta}^T(x_k, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x_k, \xi)H(x_k, \xi))\bar{\eta}(x_k, \xi)$$

i pronaći rešenje linearnog sistema

$$B_\xi(x_k, \alpha)dW = \bar{g}(x_k, \xi) - \bar{\eta}^T(x_k, \xi)(\bar{\mu}_\alpha^T(x_k, \xi)H(x_k, \xi))dY_1$$

K4: Ažurirati korak

$$\begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix} = dY + \begin{bmatrix} \bar{\eta}(x_k, \xi) \\ \bar{h}(x_k, \xi) \end{bmatrix} dW$$

i iteraciju

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx \\ d\lambda \end{bmatrix},$$

K5: $k = k + 1$ i vratiti se na korak **K1**.

Numerički rezultati dobijeni primenom algoritma **MY** kao i algoritma predstavljenog u [57] dati su u Glavi 4. Oba algoritma su veoma brza i efikasna, ali su lokalno konvergentni. Konvergencija algoritma zavisi od izbora tačke \bar{x} , koja mora biti veoma blizu rešenja. Zbog toga bi bilo dobro koristiti ove algoritme u kombinaciji sa algoritmom koji će iterativni niz dovesti dovoljno blizu rešenja a potom, primenom algoritma **MY**, veoma brzo stići do rešenja.

3.2.1 Primena Algoritma MY

Kao što je rečeno, konvergencija algoritama **Y** i **MY** zavisi od izbora početne aproksimacije. U slučaju da početna iteracija nije dovoljno blizu rešenja, numerički rezultati predstavljeni u Glavi 4 pokazuju da iterativni niz divergira. Međutim, u slučaju da je početna iteracija blizu rešenja, iterativni niz konvergira veoma brzo. Brza lokalna konvergencija algoritma može se iskoristiti njegovom kombinacijom sa globalno konvergentnim algoritmom kojim će se iterativni niz približiti rešenju. Metod negativnog gradijenta sa linijskim pretraživanjem, veoma je jednostavan i pouzdan metod koji je globalno konvergentan za regularne sisteme. Kombinacija ovog metoda sa algoritmima **Y** i **MY** u okolini rešenja, daje algoritam kojim će se ubrzati konvergencija ka singularnom rešenju.

Prilikom određivanja rešenja problema minimizacije

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

za $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, generiše se iterativni niz

$$x_{k+1} = x_k + \delta s_k$$

pri čemu je s_k pravac pretraživanja, dok skalar δ predstavlja dužinu koraka. Kako bi se odredila tačka u kojoj funkcija ima minimalnu vrednost, iterativni niz je potrebno generisati tako da se u svakom koraku smanjuje vrednost funkcije, zapravo pravac u kojem tražimo narednu iteraciju treba da bude opadajući pravac. Poznato je da će s_k biti opadajući ako je

$$\nabla f(x_k)^T s_k < 0,$$

čime se za malu pozitivnu vrednost δ može garantovati da funkcija opada u pravcu s_k , odnosno da je

$$f(x_k + \delta s_k) < f(x_k).$$

Jedan od važnijih opadajućih pravaca je i Njutnov pravac. Međutim, on se koristi u slučajevima kada razlika između funkcije $f(x_k + s_k)$ i njenog kvadratnog modela nije velika i u slučajevima kad je $\nabla^2 f(x_k)$ pozitivno definitno. U protivnom, $\nabla^2 f(x_k)^{-1}$ ne mora postojati, pa Njutnov pravac neće biti definisan.

Poznato je da po pravcu negativnog gradijenta funkcije, tj. po pravcu vektora

$$s_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{\|\nabla f(x_k)\|_2},$$

funkcija opada najbrže među pravcima koji koriste informacije prvog reda i taj pravac s_k naziva se pravac najbržeg pada funkcije.

Međutim, uslov da je $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$, ne garantuje da će niz $\{x_k\}$ konvergirati ka minimumu funkcije f . Zbog toga se koriste Volfovi uslovi, (P. Wolfe), kako bi se obezbedilo napredovanje konvergencije algoritma ka rešenju. Na taj način, su izbegnuti koraci suviše mali u odnosu na opadanje vrednosti funkcije f , kao i koraci za koje je opadanje vrednosti funkcije f suviše malo u odnosu na njihovu dužinu. Volfovi uslovi sastoje se od dve nejednakosti: prva je poznata pod imenom dovoljno opadanje funkcije f

$$f(x_k + \delta s_k) \leq f(x_k) + c_1 \delta \nabla f(x_k)^T s_k, \quad (3.48)$$

ili Armijo (Armijo, L.) uslov, dok je druga - takozvani uslov krivine

$$\nabla f(x_k + \delta s_k)^T s_k \geq c_2 \nabla f(x_k)^T s_k, \quad (3.49)$$

za $c_2 \in (c_1, 1)$ koji nam obezbeđuje da izbegnemo male korake.

Uslov $c_2 > c_1$, omogućava da obe nejednakosti budu zadovoljene istovremeno. Uslovi (3.48) i (3.49) garantuju da:

- za opadajući pravac s_k postoji δ koje zadovoljava (3.48) i (3.49);
- svaki postupak koji generiše iterativni niz $\{x_k\}$ za koji u svakoj iteraciji važi

$$\nabla f(x_k)^T (x_{k+1} - x_k) < 0,$$

(3.48) i (3.49), je globalno konvergentan;

- blizu rešenja, odnosno minimuma funkcije f gde je $\nabla^2 f$ pozitivno definitno, Njutnovi koraci zadovoljavaju uslove (3.48) i (3.49).

Uobičajena vrednost je $c_1 = 10^{-4}$, dok je u slučaju Njutnovog ili kvazi-Njutnovog pravca $c_2 = 0.9$. U slučaju konjugovanog gradijentnog metoda je $c_2 = 0.1$.

Uslov (3.48) nije dovoljan da bi algoritam napredovao ka minimumu. Međutim, ako se primeni postupak za određivanje dužine koraka, [18], opisan

u nastavku, iterativni niz konvergirao ka rešenju, i uslov (3.49) može se zanemariti. Uobičajeno je da se u svakoj iteraciji proveriti da li $\delta = 1$ zadovoljava uslov (3.48). Tada se prihvata ceo korak i u blizini rešenja postiže brza konvergencija. Ukoliko uslov nije zadovoljen, potrebno je smanjiti dužinu koraka u pravcu s_k , dok iteracija $x_k + \delta s_k$ ne postane zadovoljavajuća. Nova dužina koraka može se odrediti na sledeći način

$$\delta := \rho\delta,$$

za $\rho \in [l, u]$, $0 < l < u < 1$. Takođe je moguće koristiti interpolaciju da bi se odredila optimalna dužina koraka. Funkcija definisana sa

$$\hat{f}(\delta) \equiv f(x_k + \delta s_k), \quad (3.50)$$

predstavlja jednodimenzionalnu restrikciju funkcije $f(x)$ na pravcu kroz x_k u pravcu s_k . Ako je $\delta = 1$ i za $f(x_k + s_k)$ uslovi (3.48) i (3.49) nisu zadovoljeni, potrebno je smanjiti dužinu koraka. Poznate su tri vrednosti funkcije \hat{f} :

$$\hat{f}(0) = f(x_k), \quad \hat{f}(1) = f(x_k + s_k), \quad \hat{f}'(0) = \nabla f(x_k)^T s_k,$$

pa je moguće (3.50) aproksimirati kvadratnim modelom

$$\hat{m}_2(\delta) = (\hat{f}(1) - \hat{f}(0) - \hat{f}'(0))\delta^2 + \hat{f}'(0)\delta + \hat{f}(0)$$

koji dostiže minimum za vrednost

$$\hat{\delta} = \frac{-\hat{f}'(0)}{2(\hat{f}(1) - \hat{f}(0) - \hat{f}'(0))}. \quad (3.51)$$

Ova vrednost se uzima za novu dužinu koraka, odnosno $\delta = \hat{\delta}$. Kako bi jako mali koraci bili izbegnuti, uključuje se donja granica za dužinu koraka koja je, najčešće $l = \frac{1}{10}$, što znači - ako je $\hat{\delta} < \frac{1}{10}$, odabraćemo da je $\hat{\delta} = \frac{1}{10}$. Takođe, može se pokazati da važi $\hat{\delta} < \frac{1}{2}$, što je gornja granica za dužinu koraka, $u = \frac{1}{2}$. Ako i dalje nije zadovoljeno (3.48) i (3.49), dužinu koraka potrebno je ponovo smanjiti dužinu koraka. Međutim, sada su poznate vrednosti

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= f(x_k), & \hat{f}(\delta_{pr}) &= f(x_k + \delta_{pr} s_k), \\ \hat{f}(\delta_{2pr}) &= f(x_k + \delta_{2pr} s_k), & \hat{f}'(0) &= \nabla f(x_k)^T s_k, \end{aligned}$$

pa se može koristiti kubni model za aproksimaciju funkcije (3.50):

$$\hat{m}_3(\delta) = a\delta^3 + b\delta^2 + \hat{f}'(0)\delta + \hat{f}(0),$$

pri čemu je

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta_{pr} - \delta_{2pr}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\delta_{pr}^2} & \frac{-1}{\delta_{2pr}^2} \\ \frac{-\delta_{2pr}}{\delta_{pr}^2} & \frac{\delta_{pr}}{\delta_{2pr}^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(x_k + \delta_{pr}s_k) - f(x_k) - \delta_{pr}\nabla f(x_k)^T s_k \\ f(x_k + \delta_{2pr}s_k) - f(x_k) - \delta_{2pr}\nabla f(x_k)^T s_k \end{bmatrix}.$$

Jedinstveni lokalni minimum modela $\hat{m}_{cu}(\delta)$ je

$$\hat{\delta} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3a\hat{f}'(0)}}{3a}. \quad (3.52)$$

pa je $\delta = \hat{\delta}$. U ovom slučaju uključujemo i gornje i donje ograničenje za dužinu koraka - ako je $\hat{\delta} > \frac{1}{2} \delta_{pr}$, uzima se vrednost $\hat{\delta} = \frac{1}{2} \delta_{pr}$, a ako je $\hat{\delta} < \frac{1}{10} \delta_{pr}$, onda je $\hat{\delta} = \frac{1}{10} \delta_{pr}$.

Prilikom rešavanja sistema nelinearnih jednačina, uvođenjem norme, problem se transformiše na problem minimizacije norme funkcije. Za pronalaženje rešenja sistema

$$F(x) = 0$$

gde je $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, odgovarajući problem minimizacije je

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

pri čemu je

$$f(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} F(x)^T F(x). \quad (3.53)$$

Očigledno je za ovako definisanu funkciju gradijent dat sa

$$\nabla f(x) = F'(x)^T F(x).$$

Poznato je, takođe, da je svako rešenje sistema jednačina ujedno i rešenje problema minimizacije, dok obrnuto ne mora da bude tačno - mogu postojati lokalni minimumi koji nisu rešenja polaznog sistema.

U nastavku je predstavljen algoritam za pronalaženje rešenja sistema nelinearnih jednačina $F(x) = 0$. On koristi prethodno spomenutu tehniku linijskog pretraživanja sa pravcem negativnog gradijenta i označen je sa **LS**.

Algoritam LS :

K0: Neka je dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i $k = 0$. Za funkciju $f(x)$ definisanu sa (3.53) odrediti $f(x_0)$ i pravac

$$s_0 = -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|},$$

K1: Neka je $\delta = 1$. Izračunati $x_t = x_k + s_k$ i $f(x_t)$.

K2: Ako je $f(x_t) > f(x_k) + c_1 \delta \nabla f(x_k)^T s_k$ smanjiti dužinu koraka na sledeći način

K2.1: Ako je $\delta = 1$ koristiti kvadratni model i izračunati $\hat{\delta}$ koristeći (3.51).

K2.2: Inače, koristiti kubni model i izračunati $\hat{\delta}$ na osnovu (3.52).

Za $\hat{\delta}$ određeno u koracima **K2.1** ili **K2.2** proveriti:

- ako je $\hat{\delta} > \frac{1}{2} \delta_{pr}$, tada $\delta = \frac{1}{2} \delta_{pr}$
- ako je $\hat{\delta} < \frac{1}{10} \delta_{pr}$, tada $\delta = \frac{1}{10} \delta_{pr}$
- inače $\delta = \hat{\delta}$
- odrediti

$$x_t = x_k + \delta s_k.$$

K3: Ažurirati iteraciju $x_{k+1} = x_t$ i pravac $s_{k+1} = -\frac{\nabla f(x_{k+1})}{\|\nabla f(x_{k+1})\|}$.

K4: $k = k + 1$ i vratiti se na korak **K1**.

Sada ćemo definisati algoritam koji predstavlja kombinaciju globalno konvergentnog algoritma i algoritma koji poseduje brzu lokalnu konvergenciju. Iterativni niz će biti generisan algoritmom **LS** dok je dužina koraka veća od 10^{-4} , a u slučaju da je dužina koraka postala mala, prelazimo na algoritam **MY**.

Algoritam MYLS:

K0: Neka je dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$ i $mk = 0$. Za funkciju $f(x)$ definisanu sa (3.53) odrediti vrednost funkcije $f(x_0)$ i pravac

$$s_0 = -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

K1: Neka je $\delta = 1$. Izračunati $x_t = x_k + s_k$ i $f(x_t)$.

K2: Ako je $f(x_t) > f(x_k) + c_1 \delta \nabla f(x_k)^T s_k$ izračunati novu dužinu koraka δ koristeći (3.51) ili (3.52). Ako je $\delta \leq 10^{-4}$ dodeliti vrednost $mk = 1$ i odrediti x_t primenom algoritma **MY** sa početnom tačkom $(x_0)_{MY} = \bar{x} = x_k$, inače odrediti

$$x_t = x_k + \delta s_k.$$

K3: Ažurirati iteraciju $x_{k+1} = x_t$, i pravac $s_{k+1} = -\frac{\nabla f(x_{k+1})}{\|\nabla f(x_{k+1})\|}$.

K4: Ako je $mk = 0$, ažurirati broj iteracije $k = k + 1$ i vratiti se na korak **K1**, inače **STOP**.

Poznato je da je metod koji koristi negativni gradijent kao pravac pretraživanja, samo linearno konvergentan u slučaju da je rešenje regularno, pa se u slučaju singularnosti rešenja očekuje sublinearna konvergencija. To je i numerički potvrđeno primenom algoritma **LS** na numeričkim primerima u Glavi 4. Sublinearna konvergencija zahteva veoma veliki broj iteracija, ali je prelazak na algoritam **MY**, u slučaju da je korak veoma mali imao za posledicu veoma brzo dostizanje rešenja, što je i bio cilj konstrukcije algoritma **MYLS**.

3.3 Brojdenov postupak za granične sisteme

Kao što je već pokazano, prilikom formiranja graničnog sistema polazni, singularni sistem, transformiše se u regularan sistem. On se potom može rešavati proizvoljnim iterativnim metodom pri čemu red konvergencije ostaje očuvan. Ako je za rešavanje sistema

$$F(x) = 0$$

formiran granični sistem (3.23) pri čemu je

$$g(x) = [0 \ E_q][A^T(x, \bar{x})]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

tada je, [57],

$$\mathbf{F}'(x, \lambda) = \begin{bmatrix} F'(x) & R(\bar{x}) \\ g'(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

Takođe je poznato da važi

$$g'(x) = -\eta^T(x)[\mu_\alpha^T(x)F''(x)],$$

pri čemu su $\eta(x)$ i $\mu_\alpha(x)$ rešenja sistema (3.20) i (3.21) i važi da je $\mathbf{F}'(x^*, 0)$ regularna matrica, pa se može primeniti Brojdenov metod za rešavanje graničnog sistema. Aproksimacijom matrice Jakobijana i Hesijana konačnim razlikama u algoritmu **Y** konstruisan je algoritam **MY** koji je jeftiniji i praktičniji za primenu. Kvazi-Njutnovi postupci koriste se kako bi se izbeglo računanje matrice Jakobijana u svakoj iteraciji, tako da se primenom Brojdenovog metoda cena algoritma dodatno smanjuje u odnosu na algoritam **Y** i **MY**. Sledećim algoritmom predstavljen je postupak za formiranje graničnog sistema, koristeći metode iz [57], kao i postupak za rešavanje istog pomoću Brojdenovog algoritma.

Algoritam BY:

K0: Neka je dato $x_0 = \bar{x} \in \mathbf{R}^n$. Izvršiti SVD dekompoziciju za $F'(\bar{x})$, odrediti vrednost za q i formirati matrice $R(\bar{x})$ i $L(\bar{x})$. Odabrati slučajni vektor $\alpha \in \mathbf{R}^q$ i vrednost parametra ξ . Neka je $\lambda_0 = 0$ i $k = 0$.

K1: Formirati matricu $A(x_0, \bar{x})$ tako da je

$$A(x_0, \bar{x}) = \begin{bmatrix} F'(x_0) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunati rešenja $\eta(x_0)$, $h(x_0)$, $\mu(x_0)$, $g(x_0)$ sledećih sistema

$$A(x_0, \bar{x}) \begin{bmatrix} \eta(x_0) \\ h(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_q \end{bmatrix},$$

$$A^T(x_0, \bar{x}) \begin{bmatrix} \mu(x_0) \\ g(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

i odrediti $g'(x_0) = -\eta^T(x_0)[\mu^T(x_0)F''(x_0)]$. Formirati početnu aproksimaciju Jakobijana

$$H_0 = \begin{bmatrix} F'(x_0) & R(\bar{x}) \\ g'(x_0) & 0 \end{bmatrix}.$$

K2: Izračunati s_k iz jednačine $H_k s_k = -\mathbf{F}(x_k, \lambda_k)$, pri čemu je

$$s_k = \begin{bmatrix} dx_k \\ d\lambda_k \end{bmatrix}.$$

K3: Ažurirati iteraciju

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx_k \\ d\lambda_k \end{bmatrix}.$$

K4: Aproksimirati Jakobijan $F'(x_{k+1})$ matricom $D(x_{k+1}, \xi)$ koristeći (3.28) i formirati matricu

$$A_\xi(x_{k+1}, \bar{x}) = \begin{bmatrix} D(x_{k+1}, \xi) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Odrediti $g(x_{k+1}, \xi)$ kao rešenje jednačine

$$g(x_{k+1}, \xi) = [0 \ E_q][A_\xi^T(x_{k+1}, \bar{x})]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Izračunati $\mathbf{F}(x_{k+1}, \lambda_{k+1})$ i ažurirati aproksimaciju Jakobijana

$$H_{k+1} = H_k + \frac{(y_k - H_k s_k) s_k^T}{s_k^T s_k},$$

pri čemu je

$$y_k = \mathbf{F}(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) - \mathbf{F}(x_k, \lambda_k),$$

K5: $k = k + 1$ i vratiti se na korak **K2**.

U algoritmu **BY** potrebno je u prvoj iteraciji izračunati Jakobijan $F'(x_0)$, jer njegova SVD vodi ka formiranju matrice $A(x_0, \bar{x})$. Takođe je potrebno izračunati $g'(x_0)$ koje zahteva izračunavanje Hesijana $F''(x_0)$, ili njegovu aproksimaciju konačnim razlikama (3.37). Koristeći $A(x_0, \bar{x})$ i $g'(x_0)$, formira se početna aproksimacija Jakobijana graničnog sistema H_0 . Moguće je odabrati $H_0 = E_{n+q}$, ali se tada očekuju lošiji rezultati. U svakoj iteraciji algoritma **BY**, potrebno je formirati matricu $A_\xi(x_k, \bar{x})$ kako bi se mogla izračunati funkcija $g(x_k)$, potrebna prilikom određivanja y_k . Za iterativni niz generisan ovako definisanim algoritmom, važi sledeća teorema.

Teorema 3.3.1. *Neka su zadovoljene pretpostavke **B1** - **B3** i neka su \bar{x} i α odabrani tako da važe teoreme 3.2.1. i 3.2.2. Tada niz $\{x_k\}$ generisan algoritmom **BY** konvergira q -superlinearno ka x^* .*

Dokaz:

Pod uslovima teoreme pokazano je da je Jakobijan $\mathbf{F}'(x^*, 0)$ regularan, pa samim tim i ograničen. Zbog toga su zadovoljeni uslovi teoreme 2.5.1. i niz generisan algoritmom **BY** konvergira q -superlinearno. ■

4

Numerički rezultati

U ovom poglavlju predstavljene su numerički rezultati dobijeni primenom prethodnih algoritama na nizu primera koji se najčešće sreću u literaturi. Većina primera, [34], [54], su regularni, pa ih je potrebno prethodno transformisati u singularni problem. Za konstrukciju singularnih sistema koristi se Frank-Šnabelova transformacija, [50], opisana u nastavku.

Ako je $F(x) = 0$ standardni regularni test primer čije rešenje je $x^* \in \mathbb{R}^n$, i matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ima rang q , pri čemu je $1 \leq q \leq n$, tada za funkciju

$$\hat{F}(x) = F(x) - F'(x^*)A(A^T A)^{-1}A^T(x - x^*)$$

važi $\hat{F}(x^*) = 0$, a jednačina $\hat{F}(x) = 0$ predstavlja singularni problem takav da je

$$\hat{F}'(x^*) = F'(x^*)(I - A(A^T A)^{-1}A^T),$$

i važi da je

$$\text{rang}(\hat{F}'(x^*)) = n - \text{rang}(A).$$

Ako želimo da formiramo problem za koji je $q = 1$, za matricu A odabrana je matrica $A = [1, 1, \dots, 1]^T$, dok se za formiranje problema za koji je $q = 2$ koristi matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Sve jednačine $F_i(x) = 0$, $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ koje su transformisane u singularni problem, testirane su kvazi-Njutnovim metodama i njihovim modifikacijama

predstavljenim u Glavi 2 za $n = 10$ i $n = 100$, dok su algoritmi **Y**, **MY** i **MYLS**, predstavljeni u Glavi 3, testirani za $n = 4$ i $n = 10$. Pored ovih, algoritmi su testirani i na problemima malih dimenzija koji su sami po sebi singularni. Za njih je pored početne aproksimacije x_0 , dato rešenje x^* , dimenzija nula prostora \mathcal{N} kao i vektori koji ga generišu. U nastavku su date komponente testiranih funkcija, f_k , i njihove reference.

Primer 1. [43]

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 + x_1x_2 + x_2^2, \\ f_2(x) &= x_1^2 - 2x_1 + x_2^2, \end{aligned}$$

$x_0 = (0.5, 0.8)$, $x^* = (0, 0)$, $\dim \mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = \text{span}(0, 1)$.

Primer 2. [40]

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1, \\ f_2(x) &= \frac{10x_1}{x_1 + 0.1} + 2x_2^2, \end{aligned}$$

$x_0 = (3, 1)$, $x^* = (0, 0)$, $\dim \mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = \text{span}(0, 1)$.

Primer 3. [9]

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1^2 - x_2, \\ f_2(x) &= x_1^2 + x_2^2, \end{aligned}$$

$x_0 = (3, 1)$, $x^* = (0, 0)$, $\dim \mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = \text{span}(1, 0)$.

Primer 4. [57]

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 + x_2 - 2, \\ f_2(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 2, \end{aligned}$$

$x_0 = (3, 2)$, $x^* = (1, 1)$, $\dim \mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = \text{span}(1, -1)$.

Primer 5. [11]

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 + x_2^2, \\ f_2(x) &= \frac{3}{2}x_1x_2 + x_2^2 + x_2^3, \end{aligned}$$

$x_0 = (0.5, 0.5)$, $x^* = (0, 0)$, $\dim \mathcal{N} = 1$, $\mathcal{N} = \text{span}(0, 1)$.

Primer 6. [51]

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x_1 + x_1x_2 + x_2^2, \\f_2(x) &= x_1^2 - 2x_1 + x_2^2, \\f_3(x) &= x_1 + x_3^2,\end{aligned}$$

$x_0 = (0.1, 0.5, 0.1)$, $x^* = (0, 0, 0)$, $\dim \mathcal{N} = 2$, $\mathcal{N} = \text{span}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Primer 7. [57]

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - x_1^3x_2, \\f_2(x) &= x_1^2 - 2x_2 + 3x_1x_2^2,\end{aligned}$$

$x_0 = (0.02, 0.02)$, $x^* = (0, 0)$, $\dim \mathcal{N} = 2$.

Primer 8. [57]

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x_1^2 - x_2^2, \\f_2(x) &= 3x_1^2 - 3x_2^2.\end{aligned}$$

Rešenje je skup $\{x = (x_1, x_2) : x_1 \pm x_2 = 0\}$, dimenzija nula prostora je $\dim \mathcal{N}(F'(0, 0)) = 2$, dok je $\dim \mathcal{N}(F'(x^*)) = 1$ za $x^* \neq (0, 0)$, početna aproksimacija je $x_0 = (0.05, 0.04)$.

Primer 9. [57]

$$\begin{aligned}f_1(x) &= x_1 + x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2, \\f_2(x) &= x_1 - x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2, \\f_3(x) &= -x_3^2 + x_4^2 + x_5^2, \\f_4(x) &= x_3^2 - x_4^2 + x_5^2, \\f_5(x) &= x_3^2 + x_4^2 - x_5^2,\end{aligned}$$

$x_0 = (1.02, 1.02, 0.02, 0.02, 0.02)$, $x^* = (1, 1, 0, 0, 0)$, $\dim \mathcal{N} = 3$.

Primer 10. [54] **Funkcija 13.**

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 2x_1 - x_2 + h^2(x_1 + \sin x_1), \\f_k(x) &= -x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} + h^2(x_k + \sin x_k), \quad 1 < k < n, \\f_n(x) &= -x_{n-1} + 2x_n - 1 + h^2(x_n + \sin x_n),\end{aligned}$$

$x_0 = (1, 1, \dots, 1)^T$, $h = 1/(n + 1)$.

Primer 11. [34] **Problem 4.7.**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 4(x_1 - x_2^2), \\ f_k(x) &= 8x_k(x_k^2 - x_{k-1}) - 2(1 - x_k) + 4(x_k - x_{k+1}^2), \quad 1 < k < n, \\ f_n(x) &= 8x_n(x_n^2 - x_{n-1}) - 2(1 - x_n), \end{aligned}$$

$$x_0 = (0.9, 0.9, \dots, 0.9)^T.$$

Primer 12. [54] **Funkcija 2.**

$$\begin{aligned} f_k(x) &= x_k - 0.1x_{k+1}^2, \quad 1 \leq k < n, \\ f_n(x) &= x_n - 0.1x_1^2, \end{aligned}$$

$$x_0 = (2, 2, \dots, 2)^T.$$

Primer 13. [54] **Funkcija 12.**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1, \\ f_k(x) &= \cos x_{k-1} + x_k - 1, \quad 1 < k \leq n, \end{aligned}$$

$$x_0 = (0.5, 0.5, \dots, 0.5)^T.$$

Primer 14. [54] **Funkcija 26.**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x_1 - x_2 + mh^2 \sin h(mx_1), \\ f_k(x) &= -x_{k-1} + 2x_k - x_{k-1} + mh^2 \sin h(mx_k), \quad k = 2, \dots, n-1, \\ f_n(x) &= -x_{n-1} + 2x_n - 1 + mh^2 \sin h(mx_n), \end{aligned}$$

$$x_0 = (-2, -2, \dots, -2)^T, \quad m = 10, \quad h = \frac{1}{n+1}.$$

Primer 15. [54] **Funkcija 6.**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -2x_1 + x_2 - h^2 e^{x_1}, \\ f_k(x) &= x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1} - h^2 e^{x_k}, \quad 1 < k < n, \\ f_n(x) &= x_{n-1} - 2x_n - h^2 e^{x_n}, \end{aligned}$$

$$x_0 = (0, 0, \dots, 0)^T, \quad h = 1/(n+1).$$

Primer 16. [34] **Problem 4.11.**

$$f_k(x) = \begin{cases} 10(x_{k+1} - x_k^2), & k \equiv_2 1 \\ 1 - x_{k-1}, & k \equiv_2 0 \end{cases}$$

$$(x_0)_k = \begin{cases} -1.2, & k \equiv_2 1 \\ 1, & k \equiv_2 0 \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Primer 17. [34] **Problem 4.1.**

$$f_1(x) = \alpha - (1 - \alpha)x_3 - x_1(1 + 4x_2),$$

$$f_2(x) = -(2 - \alpha)x_4 - x_2(1 + 4x_1),$$

$$f_k(x) = \begin{cases} \alpha x_{k-2} - (1 - \alpha)x_{k+2} - x_k(1 + 4x_{k+1}), & k \equiv_2 1 \\ \alpha x_{k-2} - (2 - \alpha)x_{k+2} - x_k(1 + 4x_{k+1}), & k \equiv_2 0 \end{cases}$$

$$f_{n-1}(x) = \alpha x_{n-3} - x_{n-1}(1 + 4x_n),$$

$$f_n(x) = \alpha x_{n-2} - (2 - \alpha) - x_n(1 + 4x_{n-1}),$$

$$(x_0)_k = \begin{cases} 0.1, & k \equiv_8 1 \\ 0.2, & k \equiv_8 2 \vee k \equiv_8 0 \\ 0.3, & k \equiv_8 3 \vee k \equiv_8 7 \\ 0.4, & k \equiv_8 4 \vee k \equiv_8 6 \\ 0.5, & k \equiv_8 5 \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Primer 18. [54] **Funkcija 27.**

$$f_1(x) = 2x_1 - x_2 - \frac{h^2}{\epsilon} \left(x_1^2 + \frac{x_1}{2h} \right),$$

$$f_k(x) = -x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} - \frac{h^2}{\epsilon} \left(x_k^2 + \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2h} \right), \quad 1 < k < n,$$

$$f_n(x) = -x_{n-1} + 2x_n - 0.5 - \frac{h^2}{\epsilon} \left(x_n^2 + \frac{0.5 - x_{n-1}}{2h} \right),$$

$$x_0 = (1, 1, \dots, 1)^T, \quad h = 1/(n + 1), \quad \epsilon = 1/2.$$

Primer 19, [34] **Problem 4.14.**

$$f_1(x) = (3 - .5x_1)x_1 - 2x_2 + 1,$$

$$f_k(x) = (3 - .5x_k)x_k - x_{k-1} - 2x_{k+1} + 1, \quad 1 < k < n,$$

$$f_n(x) = (3 - .5x_n)x_n - x_{n-1} + 1,$$

$$x_0 = (-1, -1, \dots, -1)^T.$$

Primer 20. [34] **Problem 4.4.**

$$f_1(x) = 3x_1^3 + 2x_2 - 5 + \sin(x_1 - x_2) \sin(x_1 + x_2),$$

$$f_k(x) = 3x_k^3 + 2x_{k+1} - 5 + \sin(x_k - x_{k+1}) \sin(x_k + x_{k+1}), \\ + 4x_k - x_{k-1} e^{x_{k-1} - x_k} - 3, \quad 1 < k < n,$$

$$f_n(x) = 4x_n - x_{n-1} e^{x_{n-1} - x_n} - 3,$$

$$x_0 = (0, 0, \dots, 0)^T.$$

Primer 21. [34] **Problem 4.12.**

$$f_k(x) = \begin{cases} x_k + 10x_{k+1}, & k \equiv_4 1 \\ \sqrt{5}(x_{k+1} - x_{k+2}), & k \equiv_4 2 \\ (x_{k-1} - 2x_k)^2, & k \equiv_4 3 \\ \sqrt{10}(x_{k-3} - x_k)^2, & k \equiv_4 0 \end{cases}$$

$$(x_0)_k = \begin{cases} 3, & k \equiv_4 1 \\ -1, & k \equiv_4 2 \\ 0, & k \equiv_4 3 \\ 1, & k \equiv_4 0 \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Primer 22. [54] **Funkcija 22.**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -(x_1(2x_1 - 3) + 2x_2 - 1), \\ f_k(x) &= -(x_k(2x_k - 3) + x_{k-1} + 2x_{k+1} - 1), \quad 1 < k < n \\ f_n(x) &= -(x_n(2x_n - 3) - 1 + x_{n-1}), \end{aligned}$$

$$x_0 = (-1, -1, \dots, -1)^T.$$

Primer 23. [34] **Problem 4.16.**

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 2x_1 + h^2(x_1 + 1 + h)^3/2 - x_2, \\ f_k(x) &= 2x_k + h^2(x_k + 1 + hk)^3/2 - x_{k-1} - x_{k+1}, \quad 1 < k < n, \\ f_n &= 2x_n + h^2(x_n + 1 + hn)^3/2 - x_{n-1}, \end{aligned}$$

$$(x_0)_k = kh(kh - 1), \quad k \geq 1, \quad h = 1/(n + 1).$$

Primer 24.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -4c(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1 - x_1), \\ f_k(x) &= 2c(x_k - x_{k-1}^2) - 4c(x_{k+1} - x_k^2)x_k - 2(1 - x_k), \quad 1 < k < n \\ f_n(x) &= 2c(x_n - x_{n-1}^2). \end{aligned}$$

$$x_0 = (1, -1.2, 1, -1.2, \dots)^T.$$

Na osnovu dobijenih rezultata, za svaki postupak je određen indeks robustnosti, indeks efikasnosti i kombinovani indeks robustnosti i efikasnosti na sledeći način.

Neka je r_{ij} broj iteracija potrebnih za rešavanje i -tog problema j -tim metodom, $r_{ib} = \min_j(r_{ij})$ najbolji je rezultat za i -ti problem, t_j broj je uspešnih izvršenja j -tog metoda i n_j broj je testiranih problema j -tim metodom. Tada je indeks robustnosti

$$R_j = \frac{t_j}{n_j},$$

indeks efikasnosti

$$E_j = \frac{\sum_{i=0, r_{ij} \neq 0}^m \left(\frac{r_{ib}}{r_{ij}}\right)}{t_j},$$

a kombinovani indeks robustnosti i efikasnosti je

$$E_j \times R_j = \frac{\sum_{i=0, r_{ij} \neq 0}^m \left(\frac{r_{ib}}{r_{ij}}\right)}{n_j}.$$

4.1 Kvazi-Njutnovi metodi za singularne sisteme

U ovom odeljku predstavljene su rezultati dobijeni primenom nekih kvazi-Njutnovih metoda bez modifikacije na singularne probleme. Očekuje se da konvergencija metoda bude sporija nego u regularnom slučaju i zbog toga se posmatra količnik

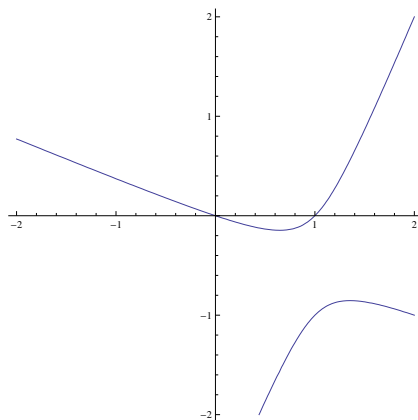
$$q_k = \frac{\|x^* - x_{k+1}\|}{\|x^* - x_k\|}. \quad (4.1)$$

Posmatraćemo Brojdenov, Tomasov i Matrinezov metod i fiksni Njutnov metod. Za kvazi-Njutnove metode karakteristično je da se matrica Jakobijana u svakoj iteraciji aproksimira matricom do koje se može relativno jednostavno doći. Fiksni Njutnov algoritam u svakoj iteraciji aproksimira matricu Jakobijana istom matricom i obično je to $F'(x_0)$, tako da se može svrstati u grupu kvazi-Njutnovih metoda.

Za funkciju iz *Primer 1* singularni koren je $x^* = (0, 0)$. Nula prostor \mathcal{N} generisan je vektorom $v^* = (0, 1)$, dok je skup slika \mathcal{X} generisan vektorom $u^* = (1, -2)$. Jakobijan $F'(x)$ singularan je na hiperboli

$$2x_1 - 2x_1^2 + 6x_2 - x_1x_2 + 2x_2^2 = 0$$

predstavljenoj na Slici 4.1.



Slika 4.1

U tabeli 4.1 dati su rezultati dobijeni primenom fiksnog Njuntovog metoda za određivanje korena funkcije iz *Primer 1*. Poznato je da u regularnom slučaju metod konvergira linearno. U singularnom slučaju red konvergencije je sublinearan, što se vidi u poslednjoj koloni tabele, u kojoj se nalazi količnik (4.1) koji teži ka jedinici. Sublinearna konvergencija izuzetno je spora, pa je u tabeli predstavljeno samo 30 iteracija. Međutim, evidentno je da je konvergencija po komponentama koje odgovaraju nula prostoru, u ovom slučaju to je komponenta x_2 , sporija nego po komponentama koje odgovaraju prostoru \mathcal{X} .

U tabelama 4.2 i 4.3 dat je iterativni niz generisan Brojdenovim metodom za određivanje korena funkcije iz istog primera. U tabeli 4.2 za početnu aproksimaciju Jakobijana izabrana je matrica $B_0 = F'(x_0)$, dok je u tabeli 4.3 početna aproksimacija Jakobijana $B_0 = E$. Kao što je poznato, ta aproksimacija mora biti dovoljno dobro odabrana, pa se vidi da je postupak stabilniji u prvom slučaju. Kao i u slučaju fiksnog Njutnovog postupka, evidentna je brža konvergencija po komponenti koja odgovara prostoru \mathcal{X} . U poslednjoj

Tabela 4.1: Fiksni Njutnov metod

it	x_1	x_2	q_k
1	-0.041164	0.530522	0.564043
2	0.042767	0.354556	0.671143
3	0.001478	0.302498	0.847045
4	0.008800	0.251731	0.832672
5	0.004234	0.220224	0.874466
6	0.003880	0.194973	0.885349
7	0.002941	0.175468	0.899908
8	0.002444	0.159585	0.909465
9	0.002031	0.146462	0.917748
10	0.001725	0.135401	0.924462

25	0.000372	0.064422	0.965535
26	0.000347	0.062278	0.966721
27	0.000325	0.060275	0.967827
28	0.000304	0.058398	0.968861
29	0.000286	0.056636	0.969829

Tabela 4.2: $B_0 = F'(x_0)$

Brojdenov metod			
it	x_1	x_2	q_k
1	-0.04116	0.53052	0.56404
2	0.04322	0.35358	0.66944
3	-0.00110	0.26198	0.73545
4	-0.00077	0.12623	0.48185
5	$-5.84 \cdot 10^{-5}$	0.08449	0.66932
6	$3.23 \cdot 10^{-5}$	0.05148	0.60935
7	$7.20 \cdot 10^{-6}$	0.03224	0.62618
8	$-7.32 \cdot 10^{-7}$	0.01978	0.61362
9	$-5.27 \cdot 10^{-7}$	0.01221	0.61748
10	$-4.10 \cdot 10^{-8}$	0.00754	0.61780
11	$2.57 \cdot 10^{-8}$	0.00467	0.61885
12	$6.85 \cdot 10^{-9}$	0.00288	0.61822
13	$-4.89 \cdot 10^{-10}$	0.00110	0.61783
15	$-5.54 \cdot 10^{-11}$	0.00068	0.61803
16	$2.38 \cdot 10^{-11}$	0.00042	0.61811
17	$7.54 \cdot 10^{-12}$	0.00026	0.61807
18	$-2.60 \cdot 10^{-13}$	0.00016	0.61801
19	$-5.27 \cdot 10^{-13}$	$9.94 \cdot 10^{-5}$	0.61800
20	$-7.17 \cdot 10^{-14}$	$6.14 \cdot 10^{-5}$	0.61803

Tabela 4.3: $B_0 = E$

Brojdenov metod			
it	x_1	x_2	q_k
1	-1.04	0.91	1.46483
2	-0.44060	-1.1546	0.89426
3	0.90370	4.7269	3.89424
4	-0.18592	-1.7257	0.36066
5	-0.0655	-2.7742	1.59877
6	-0.17177	-0.94527	0.34622
7	-0.09005	-0.61369	0.64560
8	-0.00269	-0.3506	0.56533
9	0.01006	-0.27155	0.77493

18	$1.31 \cdot 10^{-6}$	0.00733	0.62615
19	$4.89 \cdot 10^{-6}$	0.00612	0.83534
20	$2.80 \cdot 10^{-6}$	0.00464	0.75835
21	$-1.96 \cdot 10^{-9}$	0.00263	0.5681
22	$-6.40 \cdot 10^{-7}$	0.00113	0.42908
23	$-3.03 \cdot 10^{-7}$	0.00029	0.25661
24	$-5.54 \cdot 10^{-8}$	$-1.15 \cdot 10^{-5}$	0.03961
25	$-2.55 \cdot 10^{-9}$	$-6.88 \cdot 10^{-5}$	5.98345
26	$8.34 \cdot 10^{-10}$	$-7.46 \cdot 10^{-5}$	1.0834

koloni obe tabele dat je količnik (4.1) za koji je u [30] pokazano da teži ka $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339$. Za iterativni niz predstavljen u tabeli 4.2 su početne

aproksimacije rešenja i Jakobijana odabrane tako da je vrednost količnika q_k numerički potvrđena.

U tabelama 4.4 i 4.5 nalaze se rezultati dobijeni primenom Tomasovog metoda na *Primer 1*. Rezultati potvrđuju da se, kao i u regularnom slučaju, Tomasov metod ponaša slično Brojdenovom metodu, ako se posmatra konvergencija komponenti koje odgovaraju nula prostoru. Red konvergencije, kao i kod Brojdenovog metoda, je $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339$, a takođe se može zaključiti da zavisi od izbora početne aproksimacije.

Tabela 4.4: $B_0 = F'(x_0)$

Tomasov metod			
it	x_1	x_2	q_k
1	-0.04116	0.53052	0.56404
2	0.04322	0.35358	0.66944
3	0.02504	0.31602	0.88994
4	-0.00192	0.17392	0.54866
5	-0.00108	0.11867	0.68233
6	$-8.26 \cdot 10^{-5}$	0.07098	0.59809
7	$8.13 \cdot 10^{-5}$	0.04236	0.59686
8	$3.12 \cdot 10^{-5}$	0.02529	0.59697
9	$8.28 \cdot 10^{-7}$	0.01580	0.62493
10	$-3.12 \cdot 10^{-6}$	0.01009	0.63874
11	$-1.04 \cdot 10^{-6}$	0.00635	0.62945
12	$5.78 \cdot 10^{-8}$	0.00388	0.61086
13	$1.37 \cdot 10^{-7}$	0.00234	0.60385
14	$3.44 \cdot 10^{-8}$	0.00143	0.61201
15	$-4.96 \cdot 10^{-9}$	0.00089	0.62483
16	$-5.46 \cdot 10^{-9}$	0.00056	0.62823
17	$-1.08 \cdot 10^{-9}$	0.00034	0.62057
18	$3.17 \cdot 10^{-10}$	0.00021	0.61219
19	$2.19 \cdot 10^{-10}$	0.00013	0.61138
20	$2.98 \cdot 10^{-11}$	$8.07 \cdot 10^{-5}$	0.61735

Tabela 4.5: $B_0 = E$

Tomasov metod			
it	x_1	x_2	q_k
1	-1.04	0.91	1.46483
2	-0.44060	-1.1546	0.89426
3	1.38916	6.85088	5.6564
4	-0.15943	-1.52731	0.21967
5	-0.03248	-1.99962	1.30233
6	-0.22446	-0.74762	0.39032
7	-0.11112	-0.47060	0.61945
8	-0.00798	-0.29183	0.60376
9	0.01297	-0.21620	0.74189
	
14	-0.00033	-0.00471	0.25142
15	$-3.01 \cdot 10^{-5}$	-0.00144	0.30585
16	$4.82 \cdot 10^{-8}$	-0.00112	0.77689
17	$6.55 \cdot 10^{-7}$	-0.00109	0.97919
18	$5.96 \cdot 10^{-7}$	-0.00104	0.95223
19	$8.01 \cdot 10^{-9}$	-0.00054	0.51876
20	$-1.02 \cdot 10^{-7}$	-0.00023	0.44099
21	$-5.10 \cdot 10^{-8}$	$-4.66 \cdot 10^{-5}$	0.19494
22	$-9.62 \cdot 10^{-9}$	$2.25 \cdot 10^{-5}$	0.48333
23	$6.14 \cdot 10^{-11}$	$3.90 \cdot 10^{-5}$	1.72866

Oba metoda, Brojdenov i Tomasov, pripadaju istoj grupi kvazi-Njutnovih metoda koji zadovoljavaju "bounded deterioration" princip u regularnom slučaju. Za takve metode ne možemo tvrditi da niz aproksimacija Jakobijana $\{B_k\}$ teži ka $F'(x^*)$, bez dodatnih pretpostavki, ali je ova osobina dovoljno snažna da garantuje da će niz iteracija $\{x_k\}$ konvergirati ka rešenju. Iako je i početna vrednost aproksimacije $B_0 = E$ dovela do konvergencije iterativnog niza, rezultati su znatno bolji u slučaju $B_0 = F'(x_0)$. To je bilo i očekivano jer je u teoremi 2.5.3. jedan od uslova za konvergenciju Brojdenovog metoda u singularnom slučaju da početna aproksimacija bude dovoljno dobra. Treba očekivati isto i u slučaju Tomasovog metoda. Problem određivanja početnih aproksimacija analizira se u mnogim radovima, naročito u slučaju kada je

dimenzija problema velika. Iz ovog primera se vidi da problem dobrog izbora početnih aproksimacija igra veoma važnu ulogu, kao i u regularnom slučaju.

Kada na *Primer 1* primenimo Martinezov metod, pojavljuju se tri mogućnosti. Prva je da se primeni originalni metod koji je dao Martinez u [35], koji ažurira jednu kolonu Jakobijana i dat je sa (2.42). Označićemo ga sa *MCUM12*. Dobijeni rezultati su predstavljeni u tabeli 4.6 i 4.7 za različite vrednosti početne aproksimacije Jakobijana. Druga mogućnost je da se primeni metod koji modifikuje samo prvu kolonu Jakobijana, označićemo ga sa *MCUM1*. Poslednja mogućnost je metod koji modifikuje samo drugu kolonu Jakobijana, kolonu koja u ovom primeru odgovara nula prostoru preslikavanja $F'(x^*)$. Ovaj metod je označen sa *MCUM2*. Rezultati pokazuju linearnu konvergenciju Martinezovog metoda *MCUM2*, tabela 4.8, i sublinearnu konvergenciju metoda *MCUM1*, tabela 4.9. Kao i do sada, vidi se velika zavisnost konvergencije metoda od izbora početne aproksimacije Jakobijana, što se i očekivalo, jer je i u regularnom slučaju to jedna od standardnih pretpostavki u teoremama.

Tabela 4.6: $B_0 = F'(x_0)$

Martinezov metod			
it	x_1	x_2	q_k
1	-0.04116	0.53052	0.56404
2	0.03149	0.37818	0.71317
3	-0.01180	0.23441	0.61849
4	0.00317	0.13146	0.56027
5	-0.00034	0.09081	0.69058
6	$6.54 \cdot 10^{-5}$	0.04838	0.53277
7	$-1.54 \cdot 10^{-7}$	0.03208	0.66315
8	$-4.01 \cdot 10^{-7}$	0.01907	0.59439
9	$-9.54 \cdot 10^{-9}$	0.01195	0.62700
10	$4.14 \cdot 10^{-9}$	0.00735	0.61486
11	$2.52 \cdot 10^{-10}$	0.00455	0.61928
12	$-4.50 \cdot 10^{-11}$	0.00281	0.61754
13	$-5.03 \cdot 10^{-12}$	0.00173	0.61821
14	$4.39 \cdot 10^{-13}$	0.00107	0.61796
15	$8.71 \cdot 10^{-14}$	0.00066	0.61806
16	$-2.98 \cdot 10^{-15}$	0.00041	0.61802
17	$-1.35 \cdot 10^{-15}$	0.00025	0.61803
18	$-8.29 \cdot 10^{-18}$	0.00015	0.61803
19	$1.91 \cdot 10^{-17}$	$9.68 \cdot 10^{-5}$	0.61803
20	$8.43 \cdot 10^{-19}$	$5.98 \cdot 10^{-5}$	0.61803

Tabela 4.7: $B_0 = E$

Martinezov metod			
it	x_1	x_2	q_k
1	-1.04	0.91	1.46483
2	-0.37892	-1.36704	1.02653
3	0.37479	2.40765	1.71766
4	-0.28669	-3.55346	1.46308
5	0.16070	7.77184	2.1805
6	-0.32448	-6.71169	0.864415
7	-1.67232	-52.5889	7.83024
8	-0.25011	-5.94312	0.113054
9	-0.14814	-5.335	0.897228
10	0.50035	-2.92519	0.55605

25	$-3.23 \cdot 10^{-6}$	-0.00337	0.65393
26	$6.81 \cdot 10^{-7}$	-0.00186	0.55200
27	$5.37 \cdot 10^{-7}$	-0.00096	0.51961
28	$8.44 \cdot 10^{-8}$	-0.00056	0.58770
29	$-2.12 \cdot 10^{-8}$	-0.00038	0.68514
30	$-1.63 \cdot 10^{-8}$	-0.00027	0.69344
31	$-2.16 \cdot 10^{-9}$	-0.00016	0.61831
32	$1.35 \cdot 10^{-9}$	$-9.62 \cdot 10^{-5}$	0.57558
33	$5.99 \cdot 10^{-10}$	$-5.58 \cdot 10^{-5}$	0.58060

Slični rezultati su dobijeni primenom Brojdenovog, Tomasovog i Martinezovog metoda na ostale primere. Za sve metode, za početnu aproksimaciju Jakobijana, odabrana je matrica $B_0 = F'(x_0)$, dok je kod Martine-

Tabela 4.8

MCUM2, $B_0 = F'(x_0)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	-0.04116	0.53052	0.56404
2	0.20070	0.02343	0.37974
3	0.00272	0.19372	0.9588
4	-0.00060	0.16274	0.84
5	0.00159	0.06036	0.37101
6	-0.00016	0.05130	0.84969
7	-0.00075	0.09405	1.83324
8	$-1.15 \cdot 10^{-5}$	0.03363	0.35756
9	$-9.71 \cdot 10^{-6}$	0.02539	0.75522
10	$5.44 \cdot 10^{-7}$	0.01435	0.5652
11	$-4.19 \cdot 10^{-7}$	0.00929	0.64735
12	$8.46 \cdot 10^{-8}$	0.00559	0.60231
13	$-2.73 \cdot 10^{-8}$	0.00351	0.62819
14	$7.37 \cdot 10^{-9}$	0.00214	0.61125
15	$-2.02 \cdot 10^{-9}$	0.00133	0.62276
16	$5.77 \cdot 10^{-10}$	0.00082	0.61464
17	$-1.54 \cdot 10^{-10}$	0.00051	0.62045
18	$4.40 \cdot 10^{-11}$	0.00031	0.61627
19	$-1.18 \cdot 10^{-11}$	0.00019	0.6193
20	$3.33 \cdot 10^{-12}$	0.00012	0.61711
21	$-9.05 \cdot 10^{-13}$	$7.43 \cdot 10^{-5}$	0.61869

Tabela 4.9

MCUM1, $B_0 = F'(x_0)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	-0.04116	0.53052	0.56404
2	0.03149	0.37818	0.71317
3	0.01444	0.32157	0.84823
4	0.00696	0.25175	0.7824
5	0.00387	0.19853	0.78843
6	0.00221	0.15605	0.78595
7	0.00148	0.12809	0.82085
8	0.00051	0.08820	0.68856
9	0.00104	0.10333	1.17157
10	0.00077	0.0908	0.87874

40	$3.59 \cdot 10^{-5}$	0.02041	0.89673
41	$3.37 \cdot 10^{-5}$	0.01968	0.96410
42	$3.71 \cdot 10^{-5}$	0.02061	1.04724
43	$2.39 \cdot 10^{-5}$	0.01683	0.81683
44	$2.86 \cdot 10^{-5}$	0.01800	1.06919
45	$2.55 \cdot 10^{-5}$	0.01707	0.94861
46	$2.10 \cdot 10^{-5}$	0.01562	0.91506
47	$2.00 \cdot 10^{-5}$	0.01517	0.97116
48	$2.15 \cdot 10^{-5}$	0.01572	1.03597
49	$1.45 \cdot 10^{-5}$	0.01310	0.83361

zovog metoda u *Primerima 2-5* odabrana vrednost $\alpha = 0.7$, a u *Primeru 6* je $\alpha = 0.5$. Kod Tomasovog metoda odabrana je vrednost parametra $\sigma = 0.0005$. U svim primerima urađeno je 30 iteracija kako bi se moglo uporediti napredovanje iterativnog niza ka rešenju za različite metode.

U tabeli 4.10 date su poslednje iteracije generisane Brojdenovim, Tomasovim i Martinezovim metodom primenjenim na *Primere 2-5*. Posebno je ispitana konvergencija Martinezovog metoda u slučaju da se modifikuje određena kolona.

Tabela 4.10

prb	Brojden	Martinez	Tomas
Pr 2	$(0, -3.39 \cdot 10^{-6})$	$(0, -3.1 \cdot 10^{-6})$	$(0, -3.39 \cdot 10^{-6})$
Pr 3	$(2.04 \cdot 10^{-4}, 1.5 \cdot 10^{-7})$	$(-3.0 \cdot 10^{-4}, -8.0 \cdot 10^{-9})$	$(9.2 \cdot 10^{-6}, 9.8 \cdot 10^{-14})$
Pr 4	$(1, 0.999999)$	$(1, 1)$	$(1, 0.999999)$
Pr 5	$(-3.4 \cdot 10^{-12}, 2.8 \cdot 10^{-6})$	$(-3.1 \cdot 10^{-6}, 3.5 \cdot 10^{-3})$	$(-2.2 \cdot 10^{-15}, 4.5 \cdot 10^{-7})$

U prvom koloni tabele 4.11 dati su rezultati Martinezovog metoda ako se

ažurira samo prva kolona aproksimacije Jakobijana, dok se u drugoj koloni nalaze rezultati kada se vrši ažuriranje samo druge kolone. U *Primerima 2 i 3* postupak je stao pre 30-te iteracije jer je došlo do numeričke singularnosti sistema. Kao i u *Primeru 1*, zaključujemo da se izbor kolone koju modifikujemo pokazao kao veoma bitan za konvergenciju postupka. U *Primerima 2 i 4* je jedna komponenta funkcije linearna dok je druga nelinearna, pa se u svim konvergentnim postupcima količnik (4.1) približava granici $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. U *Primerima 1 i 3* nema linearne komponente pa količnik osciluje oko 1, što ukazuje na sublinearnu konvergenciju.

Tabela 4.11

it	MCUM1	MCUM2
Pr 2	D	$(0, -3.88 \cdot 10^{-6})$
Pr 3	$(-3.01 \cdot 10^{-4}, -8.08 \cdot 10^{-9})$	D
Pr 4	$(1, 0.999997)$	$(1, 1)$
Pr 5	$(-4.62 \cdot 10^{-4}, 2.75 \cdot 10^{-2})$	$(-3.24 \cdot 10^{-9}, 9.58 \cdot 10^{-5})$

U tabeli 4.12 date su 30-te iteracije Brojdenovog, Tomasovog i Martinezovog metoda primenjenog na *Primer 6*. Ovaj primer se od prethodnih razlikuje u tome što je dimenzija nula prostora Jakobijana $\dim \mathcal{N} = 2$, odnosno, $\text{rang}(F'(x^*)) = 1$, ali se svi metodi ponašaju kao u prethodnim primerima. Iznenađujuće je to što je Tomasov metod generisao niz iteracija za koji količnik (4.1) osciluje oko 0.5, što je karakteristično za Njutnov metod. Takođe, primenjen je Martinezov metod sa modifikacijama samo prve, druge ili treće kolone, kao i originalni Martinezov metod, koji pokazuje sublinearnu konvergenciju i najbolje rezultate.

U tabeli 4.13 nalaze se rezultati dobijeni primenom Brojdenovog, Tomasovog i Martinezovog metoda bez modifikacije na niz primera, prethodno transformisanih u singularni problem, pri čemu je rang Jakobijana u rešenju jednak $n - 1$. Postupak ćemo smatrati konvergentnim ako je

$$\|F(x_k)\| \leq 10^{-8}$$

i broj iteracija potrebnih za ovako postignutu tačnost je manji od $\text{maxiter} = 100$. U tabeli 4.13 je predstavljen broj iteracija potrebnih za konvergenciju postupka, a u slučaju da tačnost nije postignuta, stavljena je oznaka D .

Tabela 4.12

	$(x_1, x_2, x_3)^{30}$
Brojden	(-0.001116, 0.043570, 0.227231)
Tomas	$(6.36 \cdot 10^{-8}, 0.007891, -0.005360)$
MCUM1	$(8.65285 \cdot 10^{-5}, 0.0206108, 0.0113313)$
MCUM2	$(7.39555 \cdot 10^{-6}, 0.0202366, 0.0313562)$
MCUM3	$(-1.03782 \cdot 10^{-5}, -0.00296838, 0.00310629)$
MCUM123	$(-2.93386 \cdot 10^{-10}, 0.000137269, 0.00685842)$

Tabela 4.13

prb	$n = 10$			$n = 100$		
	Brojden	Tomas	Martinez	Brojden	Tomas	Martinez
10	15	15	13	11	11	19
11	23	28	D	34	63	D
12	21	22	22	22	22	23
13	19	20	49	20	20	75
14	13	15	19	6	6	7
15	11	11	14	8	8	12
16	25	25	26	27	27	31
17	22	31	25	D	D	D
18	16	16	19	D	D	D
19	22	21	34	31	28	35
20	55	D	57	D	D	D
21	23	23	17	25	25	19
22	21	23	22	24	24	24
23	12	12	15	8	8	22
24	32	54	43	D	D	D

Na osnovu ovako dobijenih rezultata, u tabeli 4.14 predstavljeni su izračunati indeksi robustnosti, efikasnosti i kombinovani indeks robustnosti i efikasnosti za tri predstavljena kvazi-Njutnova metoda. Može se primetiti da su sva tri metoda robustni, dok su Brojdenov i Tomasov metod podjednako efikasni.

U regularnom slučaju, sva tri postupka imaju superlinearnu konvergenciju. U slučaju singularnosti, očekuje se smanjenje reda konvergencije kod sva tri postupka, ali bi njihovo ponašanje trebalo da ostane međusobno

Tabela 4.14

	Brojden	Tomas	Martinez
R	0.86666	0.83333	0.8
E	0.970137	0.908537	0.789071
$E \times R$	0.840786	0.757114	0.631257

ujednačeno, što dobijeni rezultati i potvrđuju.

4.2 Modifikovani kvazi-Njutnovi metodi

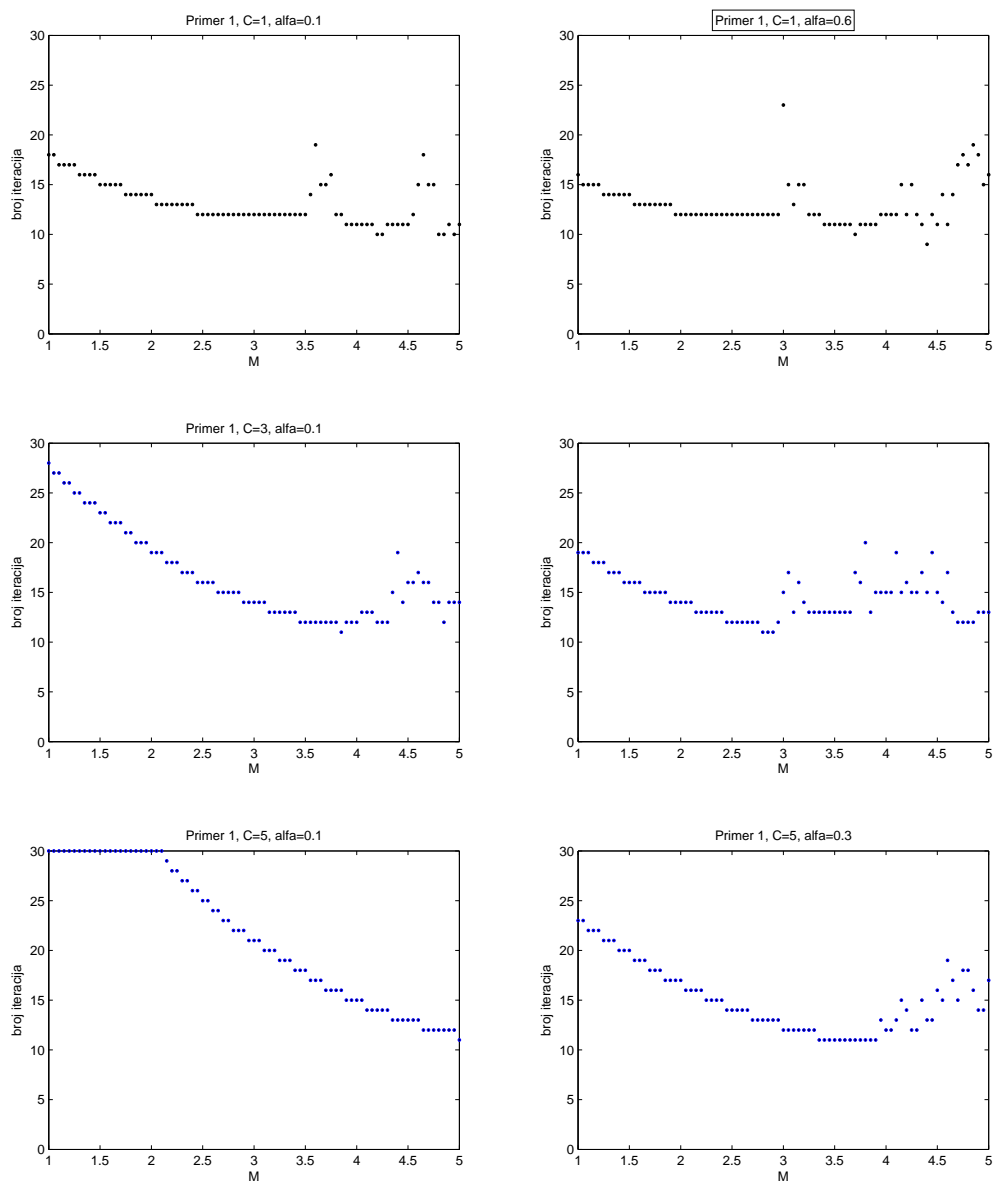
U ovom odeljku se nalaze numerički rezultati dobijeni primenom modifikovanih kvazi-Njutnovih metoda na singularne probleme. Metodi su modifikovani uvođenjem tri parametra M, C i α što je opisano u Glavi 2.5.4.

Kao što je već rečeno, parametar M ima ulogu ubrzanja konvergencije komponenti koje odgovaraju nula prostoru, dok parametri C i α treba da zadrže iteraciju u oblasti konvergencije metoda. Optimalne vrednosti ovih parametara nisu poznate. Za Njutnov metod poznato je da je $M = 2$, [31], dok je za metod Šamanskog $M = 4$, [30]. Pretpostavljamo da je za kvazi-Njutnove metode konstanta M iz intervala $M \in [2, 4]$.

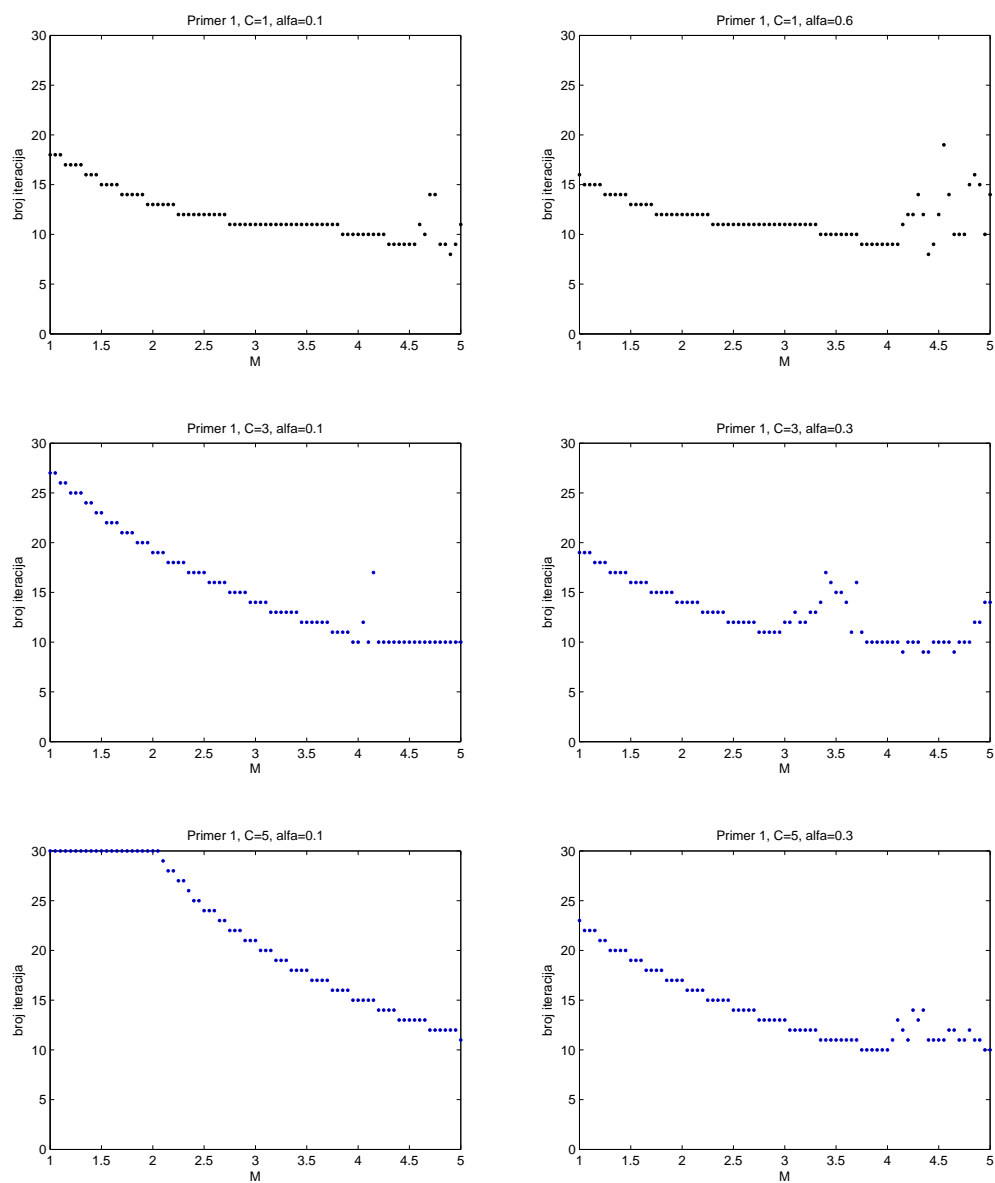
Na slikama 4.2-4.4 nalazi se broj iteracija potrebnih Brojdenovom, Tomasovom i Matrinezovom metodu za konvergenciju ka rešenju za različite vrednosti parametara M, C i α . Vrednosti parametara M su iz intervala $[1, 5]$, parametar C uzima vrednosti 1, 3 ili 5, a vrednost parametara α je 0.1, 0.3 i 0.6. Na svim graficima se mogu izdvojiti intervali sa gotovo istim brojem iteracija.

Vrednosti parametara $M = 3.7, C = 1$ i $\alpha = 0.6$ odabrane su kao optimalne jer je za te vrednosti broj iteracija najmanji za Brojdenov i Tomasov metod. Za Martinezov metod, grafici ukazuju na to da su optimalne vrednosti parametara M u intervalu $[4, 4.3]$, u slučaju da je $C = 1$ i $\alpha = 0.6$. U slučaju da je $C = 5$ i $\alpha = 0.6$, optimalna vrednost je $M = 3.7$. U tabelama 4.15 - 4.20 date su iteracije generisane pojedinim postupcima za prethodno odabrane optimalne vrednosti parametara.

U tabeli 4.15 date su iteracije generisane Brojdenovim metodom modifikovanim pravilom **P-I**. Ako se uporede tabele 4.2 i 4.15, evidentno je smanjenje broja iteracija. U tabeli 4.16 date su iteracije generisane Brojdenovim me-

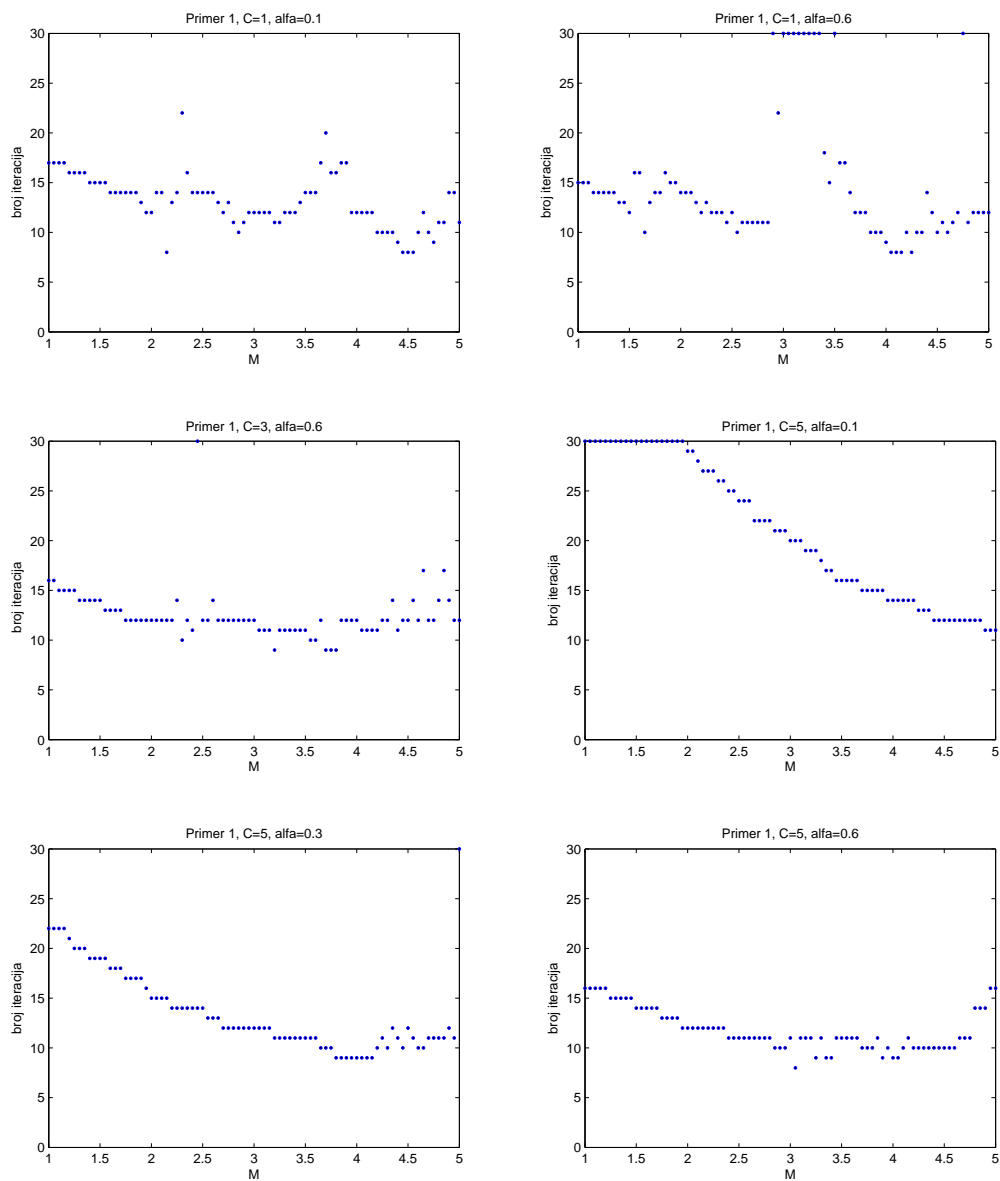
Slika 4.2: Brojdenov metod za vrednosti $C = 1, 3, 5$ i $\alpha = 0.1, 0.3, 0.6$

todom modifikovanim pravilom **P-II**, ali sa konstantom $M = 3.9$. Naime, u slučaju da je $M = 3.7$, ovaj postupak divergira, ali malom promenom parametra M generisan je niz sa najmanjim brojem iteracija. Drugo pravilo

Slika 4.3: Tomasov metod za vrednosti $C = 1, 3, 5$ i $\alpha = 0.1, 0.3, 0.6$

za modifikaciju postupaka je, u većini slučajeva, osjetljivije na izbor parametra M i optimalna vrednost zavisi, kako od metoda, tako i od primera.

U tabelama 4.17 i 4.18 predstavljene su iteracije generisane Tomasovim



Slika 4.4: Martinezov metod za vrednosti $C = 1, 3, 5$ i $\alpha = 0.1, 0.3, 0.6$

metodom modifikovanim pravilom **P-I** i pravilom **P-II**. Kao i u slučaju Brojdenovog metoda, i u ovom je evidentan smanjen broj iteracija, ako se uporede table 4.4 i 4.17. Slično Brojdenovom metodu modifikovanom pravilom **P-II**,

Tabela 4.15: Br P-I

it	x_1	x_2
1	0.237915	-0.054574
2	0.045407	0.024073
3	0.019866	0.026973
4	0.001076	0.02561
5	$7.01 \cdot 10^{-5}$	0.022688
6	$3.93 \cdot 10^{-6}$	0.011318
7	$-5.73 \cdot 10^{-7}$	0.001622
8	$-5.77 \cdot 10^{-8}$	0.000852
9	$4.35 \cdot 10^{-9}$	$6.39 \cdot 10^{-5}$

Tabela 4.16: Br P-II

it	x_1	x_2
1	0.256223	-0.09295
2	-0.057580	0.142126
3	-0.019121	0.024931
4	-0.000585	0.005251
5	$-3.17 \cdot 10^{-5}$	-0.000199
6	$-7.07 \cdot 10^{-7}$	$-1.64 \cdot 10^{-5}$
7	$3.29 \cdot 10^{-11}$	$-1.22 \cdot 10^{-5}$

u tabeli 4.18 se nalazi iterativni niz dobijen Tomasovim metodom modifikovanim pravilom **P-II** za vrednost parametra $M = 3.4$, dok za $M = 3.7$ niz divergira.

Tabela 4.17: Th P-I

it	x_1	x_2
1	0.237915	-0.054574
2	0.045407	0.024073
3	0.019877	0.026934
4	0.001365	0.023143
5	$-1.50 \cdot 10^{-6}$	0.009470
6	$-1.91 \cdot 10^{-6}$	0.001509
7	$-3.20 \cdot 10^{-9}$	0.000730
8	$3.39 \cdot 10^{-10}$	0.000100
9	$1.35 \cdot 10^{-13}$	$5.36 \cdot 10^{-5}$

Tabela 4.18: Th P-II

it	x_1	x_2
1	0.214026	-0.004491
2	-0.028945	0.121036
3	-0.010616	-0.090361
4	0.001311	0.005995
5	$6.73 \cdot 10^{-6}$	0.011532
6	$5.06 \cdot 10^{-8}$	$4.70 \cdot 10^{-5}$
7	$4.22 \cdot 10^{-10}$	$4.29 \cdot 10^{-5}$

Primenjujući modifikovani Martinezov postupak dobijeni rezultati su dati u tabelama 4.19 i 4.20. U tabeli 4.20 vrednost parametra je $M = 3.6$ jer za vrednost $M = 3.7$ metod divergira.

Slični rezultati dobijeni su primenom postupaka na *Primere 2-6*. Iako se pravilom **P-II** može generisati iterativni niz koji sadrži manje iteracija, postupak je znatno nestabilniji od pravila **P-I**. Male promene parametra M mogu dovesti do divergencije postupka. Takođe, optimalna vrednost parametra M nije ista za sve primere, zavisi i od postupka. Sa druge strane, pravilo **P-I** je jeftinije, jer se matrica aproksimacije Jakobijana računa samo jednom.

Tabela 4.19: M P-I

it	x_1	x_2
1	0.237915	-0.054574
2	0.083916	-0.044116
3	0.028699	-0.042961
4	0.002975	-0.051637
5	0.000551	-0.068394
6	0.001420	-0.009895
7	0.000278	-0.003145
8	$7.69 \cdot 10^{-6}$	-0.001541
9	$3.37 \cdot 10^{-7}$	-0.001336
10	$9.42 \cdot 10^{-8}$	-0.000854
11	$1.57 \cdot 10^{-9}$	$-8.88 \cdot 10^{-5}$
12	$2.87 \cdot 10^{-10}$	$-5.61 \cdot 10^{-5}$

Tabela 4.20: M P-II

it	x_1	x_2
1	0.195434	0.0344872
2	-0.020502	0.121238
3	-0.006872	2.0476
4	-0.001348	-0.46002
5	-0.000365	-0.008139
6	$1.35 \cdot 10^{-5}$	-0.005103
7	$7.45 \cdot 10^{-7}$	-0.008707
8	$-5.18 \cdot 10^{-9}$	-0.000185
9	$7.05 \cdot 10^{-10}$	$-2.93 \cdot 10^{-5}$

Takođe se oko jedne vrednosti parametra M mogu razlikovati intervali sa gotovo istim brojem iteracija generisanih različitim postupcima. Iz tog razloga, nadalje se predstavljaju samo rezultati dobijeni modifikacijama pravilom **P-I**.

U tabeli 4.21 data je 15-ta iteracija generisana primenom modifikovanih metoda u *Primerima 2-5*.

Tabela 4.21

it	Brojden	Martinez	Tomas
Pr 2	$(0, 6.7 \cdot 10^{-6})$	$(0, 5.1 \cdot 10^{-6})$	$(0, 6.7 \cdot 10^{-6})$
Pr 3	$(2.4 \cdot 10^{-4}, -7.8 \cdot 10^{-8})$	$(2.9 \cdot 10^{-2}, -4.9 \cdot 10^{-4})$	$(2.6 \cdot 10^{-9}, -1.7 \cdot 10^{-18})$
Pr 4	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)
Pr 5	$(8.5 \cdot 10^{-9}, 1.2 \cdot 10^{-5})$	$(7.9 \cdot 10^{-9}, -6.5 \cdot 10^{-5})$	$(5.5 \cdot 10^{-15}, -1.4 \cdot 10^{-6})$

Rezultati dobijeni modifikovanim Martinezovim metodom, pri čemu se ažuriraju određene kolone, predstavljeni su u tabeli 4.22. Uticaj kolone koja se ažurira na konvergenciju metoda, vidi se i u slučaju modifikovanog postupka, ali je zaključak da originalni Martinezov postupak pokazuje najbolje rezultate.

Ako se uporede rezultati dobijeni u tabelama 4.10 i 4.21 može se primetiti da je kod modifikovanih metoda nakon 15 iteracija postignuto rešenje za koje

Tabela 4.22

it	MCUM1	MCUM2
Pr 2	D	$(0, 5.16537 \cdot 10^{-6})$
Pr 3	$(0.029803, -0.000491)$	D
Pr 4	$(1, 1)$	$(1, 1)$
Pr 5	$(-0.001483, 0.048912)$	$(-0.103906, -0.257079)$

je nemodifikovanim metodama bilo potrebno 30 iteracija.

Primenom modifikovanih postupaka na *Primer 6*, u tabeli 4.23 predstavljena je 30-ta iteracija. Martinezov metod u slučaju modifikacije kolone koja ne odgovara nula prostoru, u ovom slučaju to je prva kolona, divergira. Međutim, modifikacijom druge ili treće kolone, postignuta je veoma spora konvergencija, a vrednosti parametra M date su u tabeli.

Tabela 4.23

	$(x_1, x_2, x_3)^{15}$
Brojden	$(3.57095 \cdot 10^{-13}, 7.37855 \cdot 10^{-6}, 3.11688 \cdot 10^{-6})$
Tomas	$(1.89744 \cdot 10^{-15}, 0.000339213, -0.000440725)$
MCUM1	D
MCUM2	$(-7.33355 \cdot 10^{-7}, -0.000520164, -0.00140544), M = 3.6$
MCUM3	$(-1.87261 \cdot 10^{-5}, 0.00127138, -0.00672646), M = 2.3$
MCUM123	$(-4.57543 \cdot 10^{-7}, 0.00151224, -0.00194985)$

Do sada je analizirano ponašanje kvazi-Njuntovih metoda u slučaju da je rešenje x^* singularno i predložene su dvokoračne modifikacije kako bi konvergencija bila poboljšana. One su testirane na primerima kod kojih je $\text{rang}(F'(x^*)) = n - 1$. Poznato je da se u slučaju singularnosti problema, red konvergencije Njuntovog i Brojdenovog metoda snižava. U regularnom slučaju, Tomasov i Martinezov metod mogli su da pariraju Brojdenovom postupku, pa je očekivano da u singularnom slučaju takođe zadrže osobine slične Brojdenovom metodu.

U tabelama 4.24 i 4.25 predstavljeni su rezultati dobijeni primenom metoda modifikovanih pravilom **P-I** primenjenih na *Primere 10-24*, prethodno transformisanih u singularni problem, za vrednosti parametara $M = 2.7$ i

$M = 3.7$, dok je $C = 1$ i $\alpha = 0.6$.

Tabela 4.24

$M = 2.7, C = 1, \alpha = 0.6$						
	$n = 10$			$n = 100$		
prb	Br	Th	M	Br	Th	M
10	7	8	7	5	6	5
11	38	21	D	D	74	D
12	10	11	10	11	12	11
13	9	10	9	9	10	9
14	15	15	13	54	D	31
15	5	6	5	3	4	3
16	12	13	12	13	14	13
17	D	27	D	D	D	D
18	7	8	8	D	D	D
19	D	26	15	72	42	71
20	D	25	D	D	D	D
21	11	12	11	12	13	12
22	11	11	13	11	11	17
23	5	6	5	3	4	3
24	20	14	24	D	D	D

Tabela 4.25

$M = 3.7, C = 1, \alpha = 0.6$						
	$n = 10$			$n = 100$		
prb	Br	Th	M	Br	Th	M
10	6	7	6	4	5	4
11	65	25	D	D	91	D
12	7	8	7	9	10	9
13	5	6	5	7	8	7
14	21	16	12	17	D	33
15	4	5	4	2	3	2
16	9	10	9	10	11	10
17	D	D	D	D	D	D
18	8	8	7	D	D	D
19	23	17	D	D	D	D
20	D	D	D	D	D	D
21	8	9	9	9	10	10
22	20	14	18	19	12	20
23	6	6	4	4	5	3
24	D	17	D	D	29	D

U ovom slučaju mogu se izračunati indeksi robustnosti, efikasnosti i kombinovani indeks robustnosti i efikasnosti kvazi-Njutnovih metoda modifikovanih pravilom **P-I**. Označimo sa Br1, Th1 i M1 modifikovane kvazi-Njutnove metode sa vrednostima parametara iz tabele 4.24, dok su sa Br2, Th2 i M2 označene metode sa vrednostima parametara iz tabele 4.25. Ako se modifikovani postupci uporede sa nemodifikovanim metodama, dobijeni rezultati predstavljeni su u tabeli 4.26. U tabeli su sa Br, Th i M označeni nemodifikovani metodi.

Može se primetiti da je robustnost svih postupaka opala u slučaju da je izvršena modifikacija, ali su indeksi efikasnosti, kao i kombinovani indeks znatno poboljšani naročito u slučaju Martinezovog metoda. Takođe se na osnovu dobijenih vrednosti može zaključiti da se izborom parametara $M = 3.7, C = 1, \alpha = 0.6$ postižu bolji rezultati nego u slučaju $M = 2.7, C = 1, \alpha = 0.6$, što je i očekivano.

Ovaj izbor parametra M , u nekim od primera nije optimalan. Kao što je rečeno, vrednost parametra M utiče na ubrzanje konvergencije postupka i promenom ovog parametra može se ubrzati konvergencija postupaka

Tabela 4.26

	Br	Th	M	Br1	Th1	M1	Br2	Th2	M2
R	0.8666	0.8333	0.8	0.7333	0.8333	0.7333	0.7	0.7666	0.6333
E	0.5265	0.4825	0.3981	0.7450	0.7518	0.7414	0.7794	0.8165	0.9543
$E \times R$	0.4563	0.4021	0.3184	0.5463	0.6265	0.5437	0.5455	0.6260	0.6043

za *Primere 11, 14, 17 i 19*. U tabelama 4.27 i 4.28 rezultati su dobijeni promenom vrednosti parametara u pojedinim primerima i potreban broj iteracija za konvergenciju postupka. Može se primetiti da je u *Primerima 11, 14 i 19* dovoljno promeniti samo parametar M , kojim se ubrzava konvergencija, i postići zadovoljavajuće rezultate. Međutim, u *Primeru 17* potrebno je promeniti i parametre C i α , odakle se može zaključiti da iterativni niz izlazi iz oblasti konvergencije postupka.

Tabela 4.27

Brojdenov metod					
pr	n	M	C	α	it
11	10	1.9	1	0.6	12
11	100	1	1	0.6	15
14	10	2.9	1	0.6	11
14	100	2.6	1	0.6	9
17	10	1.9	1	0.3	87
19	10	1.4-1.6	1	0.6	11
19	100	1.4-1.6	1	0.6	13

Tabela 4.28

Tomasov metod					
pr	n	M	C	α	it
11	10	2.9	1	0.6	16
11	100	1.3	1	0.6	16
14	10	1.2	1	0.6	10
14	100	2.8	1	0.6	14
17	10	1.2	1	0.6	13
17	100	1.5	3	0.3	32
19	10	2.2	1	0.6	10
19	100	1.3-1.6	1	0.6	14

4.3 Numerički rezultati za granične sisteme

U ovom odeljku se nalaze numerički rezultati dobijeni rešavanjem singularnih problema uvođenjem graničnih sistema metodama opisanim u Glavi 3. Po ugledu na algoritam označen sa \mathbf{Y} , predstavljen u [57], konstruisan je novi algoritam, označen sa \mathbf{MY} , i upoređeni su rezultati dobijeni njihovom primenom na relevantnim primerima. S obzirom na to da su algoritmi \mathbf{Y} i \mathbf{MY} lokalnog karaktera, pa njihova konvergencija zahteva odabir početne iteracije

veoma blizu rešenja, konstruisan je algoritam koji predstavlja kombinaciju sa metodom negativnog gradijenta.

Kao i do sada, pod konvergentnim nizom ćemo smatrati niz u kome je za najviše *maxit* iteracija generisana iteracija koja zadovoljava uslov $\|F(x_k)\| \leq 10^{-8}$.

4.3.1 Ipmn metod i njegova modifikacija

U [57] predstavljeni su numerički rezultati dobijeni primenom algoritma **Y** na nekoliko primera, navedenih u ovom poglavlju. Prilikom njegove implementacije, potrebno je računanje izvoda funkcije kao i računanje Hesijana u svakoj iteraciji. U slučajevima da Jakobijan nije analitički dostupan, ili da su na raspolaganju samo vrednosti funkcije, potrebna je aproksimacija Jakobijana i Hesijana konačnim razlikama i na taj način je dobijen algoritam označen sa **MY**.

Tabela 4.29: Alg Y

Primer 1				Primer 1			
$x_0 = (0.02, 0.02), \alpha = 0.874367$				$x_0 = (0.02, 0.02), \alpha = 0.814724$			
it	x_1	x_2	λ	it	x_1	x_2	λ
1	-0.00015	$9.7 \cdot 10^{-5}$	0.00107	1	-0.000153	$9.27 \cdot 10^{-5}$	0.001072
2	$-1.4 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-9}$	$9.9 \cdot 10^{-9}$	2	$-1.3 \cdot 10^{-8}$	$3.2 \cdot 10^{-9}$	$9.3 \cdot 10^{-9}$
3	$-9.3 \cdot 10^{-17}$	$1.5 \cdot 10^{-17}$	$6.3 \cdot 10^{-17}$	3	$-8.9 \cdot 10^{-17}$	$1.5 \cdot 10^{-17}$	$6.0 \cdot 10^{-17}$
$x_0 = (0.5, 0.8), \alpha = 0.237284$				$x_0 = (0.5, 0.8), \alpha = 0.0975404$			
1	1.03652	-0.0662	-2.14533	1	1.03653	-0.066195	-2.14532
2	0.60882	-0.32965	-1.04566	2	0.608841	-0.329648	-1.04567
3	0.08918	-0.1234	-0.49372	3	0.089201	-0.123391	-0.493768
4	-0.05153	-0.10585	0.10221	4	-0.051503	-0.105826	0.102126
5	-0.24232	-0.19662	0.56724	5	-0.242045	-0.196523	0.566577
6	3.51133	-0.32022	-9.17884	6	3.52273	-0.319497	-9.20685
7	1.12139	0.19335	-7.30796	7	1.12325	0.196718	-7.35722
8	0.86235	-0.24902	-1.24748	8	0.864749	-0.247236	-1.25028
9	0.21634	-0.11666	-0.85194	9	0.219429	-0.120446	-0.853632
10	0.01941	-0.01998	-0.09097	10	0.019690	-0.022516	-0.092857
11	0.00056	-0.00277	-0.00187	11	0.000654	-0.003942	-0.002111
12	$2.4 \cdot 10^{-5}$	-0.00012	$-5.9 \cdot 10^{-5}$	12	$4.9 \cdot 10^{-5}$	-0.000256	-0.000118
13	$5.3 \cdot 10^{-8}$	$-2.4 \cdot 10^{-7}$	$-1.2 \cdot 10^{-7}$	13	$2.3 \cdot 10^{-7}$	$-1.0 \cdot 10^{-6}$	$-5.6 \cdot 10^{-7}$
14	$2.0 \cdot 10^{-13}$	$-9.1 \cdot 10^{-13}$	$-4.9 \cdot 10^{-13}$	14	$3.9 \cdot 10^{-12}$	$-1.7 \cdot 10^{-11}$	$-9.5 \cdot 10^{-12}$

Tabela 4.30: Alg MY

U algoritmima **Y** i **MY** potrebno je odrediti q , dimenziju nula prostora Jakobijana $F'(x^*)$. Kako je vrednost q nepoznata, jer je rešenje, pa samim tim i nula prostor \mathcal{N} , kao i njegova dimenzija nepoznata, oba algoritma su testirana za razne vrednosti q . Neki od rezultata dobijeni primenom algoritma

Y su poznati, [57], ali su u nastavku ponovljeni, kako bi bili upoređeni sa rezultatima dobijenim za algoritam **MY**. Zatim je algoritam **MY** primenjen na ostale primere iz ovog poglavlja i dobijene vrednosti su upoređene sa rezultatima dobijenim primenom algoritma **MY**.

Oba algoritma su veoma brza i efikasna u slučaju da je početna iteracija blizu rešenja, tako da je u ovom delu $maxit = 30$. Prilikom aproksimacije Jakobijana i Hesijana konačnim razlikama, odnosno matricama $D(x, \xi)$ i $H(x, \xi)$, vrednost parametra je $\xi = 10^{-5}$.

Tabela 4.31: Alg Y

Primer 4			
$x_0 = (1.05, 0.95), \alpha = 0.970845$			
it	x_1	x_2	λ
1	1.00096	1.00104	0.00223
2	1	1	$8.9 \cdot 10^{-7}$
3	1	1	$1.4 \cdot 10^{-13}$
$x_0 = (3, 2), \alpha = 0.546806$			
1	1.3143	1.72834	1.06181
2	1.15182	1.05507	0.21069
3	1.00129	1.00993	0.01142
4	1.00004	1	$4.6 \cdot 10^{-5}$
5	1	1	$8.0 \cdot 10^{-10}$

Tabela 4.32: Alg MY

Primer 4			
$x_0 = (1.05, 0.95), \alpha = 0.913376$			
it	x_1	x_2	λ
1	1.00096	1.00104	0.002239
2	1	1	$8.98 \cdot 10^{-7}$
3	1	1	$1.45 \cdot 10^{-13}$
$x_0 = (3, 2), \alpha = 0.278498$			
1	1.31429	1.72837	1.06182
2	1.15183	1.05507	0.2107
3	1.00129	1.00993	0.0114257
4	1.00004	1	$4.64 \cdot 10^{-5}$
5	1	1	$8.07 \cdot 10^{-10}$

U tabelama koje slede predstavljeni su iterativni nizovi generisani algoritmom **MY** kao i algoritmom **Y**. Da bismo uporedili iterativne nizove dobijene primenom kvazi-Njutnovih algoritama kao i njihovim modifikacijama, za *Primer 1* i *Primer 4* algoritmima **Y** i **MY** su generisani iterativni nizovi sa dve početne iteracije. U slučaju da je $x_0 = (0.5, 0.8)$ za *Primer 1*, odnosno $x_0 = (3, 2)$ za *Primer 3*, algoritmi **Y** i **MY** generisali su nizove sa manje iteracija od bilo kog posmatranog kvazi-Njutnovog metoda. Takođe se u tabelama 4.29 i 4.30, kao i u tabelama 4.31 i 4.32 može primetiti da obe komponente iterativnog niza konvergiraju istom brzinom, što kod kvazi-Njutnovih metoda nije bio slučaj. Jedna od osnovnih karakteristika algoritma **Y**, a samim tim i algoritma **MY**, je što se obe komponente, komponenta koja odgovara nula prostoru \mathcal{N} i komponenta koja odgovara prostoru \mathcal{X} , približavaju komponentama rešenja istom brzinom.

Primenom algoritama **MY** i **Y** na ostale primere sa početnom iteracijom kojom su generisani iterativni nizovi kvazi-Njutnovim metodama i njihovim modifikacijama, nije postignuta konvergencija. Prilikom formiranja graničnog sistema i konstrukcije algoritma **MY** i **Y**, potrebno je odabrati

tačku \bar{x} koja je blizu rešenja, koje nije poznato. Uobičajeno je da se za \bar{x} odabere početna iteracija, tj. $\bar{x} = x_0$. U *Primerima 2, 3 i 5* ova tačka nije bila dovoljno blizu rešenja i iterativni niz nije konvergirao.

Tabela 4.33: Alg Y

Primer 2				Primer 2			
$x_0 = (0.02, 0.02), \alpha = 0.0150095$				$x_0 = (0.02, 0.02), \alpha = 0.905792$			
it	x_1	x_2	λ	it	x_1	x_2	λ
1	-0.00399	0.00799	-0.00399	1	-0.003998	0.007995	-0.003999
2	-0.00015	-0.00063	-0.00015	2	-0.000158	-0.000639	-0.000158
3	$-2.4 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$-2.4 \cdot 10^{-7}$	3	$-2.4 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-6}$	$-2.4 \cdot 10^{-7}$
4	$-5.0 \cdot 10^{-13}$	$-9.8 \cdot 10^{-12}$	$-5.0 \cdot 10^{-13}$	4	$-5.1 \cdot 10^{-13}$	$-9.8 \cdot 10^{-12}$	$-5.1 \cdot 10^{-13}$

Tabela 4.34: Alg MY

U svakoj tabeli, pored početne iteracije, predstavljen je i slučajni vektor α . Može se primetiti: iako algoritmi **MY** i **Y** ne koriste isti slučajni vektor $\alpha \in \mathbb{R}^q$, broj iteracija se ne razlikuje, a generisani iterativni nizovi gotovo su identični.

Tabela 4.35: Alg Y

Primer 3			
$x_0 = (0.02, 0.02), \alpha = 0.76795$			
it	x_1	x_2	λ
1	0.00072	-0.00034	0.00078
2	$-5.1 \cdot 10^{-7}$	$-4.9 \cdot 10^{-7}$	$6.3 \cdot 10^{-7}$
3	$4.7 \cdot 10^{-13}$	$-2.4 \cdot 10^{-13}$	$5.1 \cdot 10^{-13}$

Tabela 4.36: Alg MY

Primer 3			
$x_0 = (0.02, 0.02), \alpha = 0.126987$			
it	x_1	x_2	λ
1	0.000717	-0.000341	0.000785
2	$-5.0 \cdot 10^{-7}$	$-4.9 \cdot 10^{-7}$	$6.3 \cdot 10^{-7}$
3	$4.6 \cdot 10^{-13}$	$-2.3 \cdot 10^{-13}$	$5.0 \cdot 10^{-13}$

Tabela 4.37: Alg Y

Primer 5			
$x_0 = (0.02, 0.02), \alpha = 0.990083$			
it	x_1	x_2	λ
1	$6.4 \cdot 10^{-5}$	0.00871	0.00039
2	$8.1 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^{-5}$	0.00018
3	$-9.2 \cdot 10^{-10}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-10}$

Tabela 4.38: Alg MY

Primer 5			
$x_0 = (0.02, 0.02), \alpha = 0.632359$			
it	x_1	x_2	λ
1	0.000452	-0.000443	0.001034
2	$1.92 \cdot 10^{-7}$	$-1.57 \cdot 10^{-7}$	$-1.04 \cdot 10^{-7}$
3	$2.41 \cdot 10^{-14}$	$-5.23 \cdot 10^{-11}$	$-2.07 \cdot 10^{-14}$

Primeri 1-5 imaju jednodimenzionalni nula prostor, tako da pretpostavljena vrednost nula prostora $q = 1$ odgovara stvarnoj vrednosti. U primerima koji slede, dimenzija nula prostora veća je od jedinice, pa se može analizirati ponašanje algoritama **Y** i **MY** u slučajevima da pretpostavljena vrednost dimenzije nula prostora ne odgovara stvarnoj vrednosti.

U *Primerima 6 i 7* dimenzija nula prostora je $q = 2$, tako da su u tabelama 4.39 - 4.42 predstavljeni rezultati dobijeni primenom algoritama **MY** i **Y**

Tabela 4.39: Alg Y

Primer 6					
$q = 2, \alpha = (0.975404, 2.78498), x_0 = (0.1, 0.5, 0.1)$					
it	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2
1	0.380655	-0.0875443	-0.198488	-1.40349	-0.40018
2	-0.0216849	-0.01168	0.122076	-0.152847	-0.0627726
3	0.00432072	-0.00121821	-0.00126291	-0.0148277	-0.00164873
4	$-5.40 \cdot 10^{-6}$	$2.48 \cdot 10^{-7}$	$3.47 \cdot 10^{-6}$	$-9.96 \cdot 10^{-6}$	$-6.36 \cdot 10^{-6}$
5	$-4.14 \cdot 10^{-12}$	$-6.73 \cdot 10^{-13}$	$1.21 \cdot 10^{-11}$	$-2.29 \cdot 10^{-11}$	$-1.35 \cdot 10^{-11}$
$q = 1, \alpha = 9.64889, x_0 = (0.1, 0.5, 0.1)$					
it	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2
1	-0.0143774	0.0133496	0.518424	-0.37871	-
2	-0.000142904	$3.92 \cdot 10^{-5}$	0.259359	-0.000161177	-
3	$-9.15 \cdot 10^{-9}$	$1.52 \cdot 10^{-9}$	0.129679	$-6.27 \cdot 10^{-9}$	-
4	$-3.47 \cdot 10^{-17}$	$4.33 \cdot 10^{-18}$	0.0648397	$-2.85 \cdot 10^{-17}$	-
5	0	0	0.0324199	$6.16 \cdot 10^{-33}$	-
6	0	$-2.16 \cdot 10^{-19}$	0.0162099	0	-
7	$-2.35 \cdot 10^{-38}$	0	0.00810496	0	-
8	0	$-5.42 \cdot 10^{-20}$	0.00405248	$1.27 \cdot 10^{-57}$	-
9	$-1.46 \cdot 10^{-39}$	0	0.00202624	$1.27 \cdot 10^{-57}$	-
10	0	$-1.35 \cdot 10^{-20}$	0.00101312	$1.29 \cdot 10^{-57}$	-
11	$-9.18 \cdot 10^{-41}$	0	0.00050656	$1.29 \cdot 10^{-57}$	-
12	0	$-3.38 \cdot 10^{-21}$	0.00025328	$1.29 \cdot 10^{-57}$	-
13	$-5.73 \cdot 10^{-42}$	0	0.00012664	$1.29 \cdot 10^{-57}$	-
14	0	$-8.47 \cdot 10^{-22}$	$6.33 \cdot 10^{-5}$	$-4.40 \cdot 10^{-58}$	-

za dve vrednosti q . U prvom slučaju, pretpostavljena vrednost odgovara stvarnoj vrednosti dimenzije nula prostora, dok je u drugom slučaju manja od stvarne vrednosti.

U slučaju da je algoritam **Y** primenjen sa pretpostavljenom vrednošću $q = 2$, može se primetiti da je generisano manje iteracija nego kad je pretpostavljena vrednost $q = 1$. U prvom slučaju, granični sistem je regularan, što za posledicu ima manji broj iteracija potrebnih za postizanje konvergencije, dok je u slučaju da je $q = 1$ granični sistem ostao singularan. Zato je potrebno više iteracija i može se primetiti da komponente generisanog iterativnog niza ne konvergiraju istom brzinom ka komponentama rešenja.

Skup korena funkcije iz *Primera 8* sa strane 97 je

$$\{x = (x_1, x_2) : x_1 = \pm x_2\},$$

tako da nijedno od ovih rešenja nije izolovano, što je jedan od uslova za konvergenciju algoritma. Ako je $x^* = (0, 0)$, onda je dimenzija nula prostora Jakobijana $\dim \mathcal{N} = 2$, dok je za ostala rešenja dimenzija nula prostora jednaka jedinici. Rezultati dobijeni primenom algoritma **Y** predstavljeni su

Tabela 4.40: Alg MY

Primer 6					
$q = 2, \alpha = (0.970593, 0.957167), x_0 = (0.1, 0.5, 0.1)$					
it	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2
1	0.355211	-0.0463732	-0.15056	-1.30432	-0.347892
2	-0.0302362	-0.012422	0.0368938	-0.0913477	-0.0620095
3	0.000227696	$-7.67 \cdot 10^{-5}$	0.000169353	-0.00159854	-0.00107254
4	$-8.57 \cdot 10^{-9}$	$-7.41 \cdot 10^{-9}$	$-2.56 \cdot 10^{-8}$	$-5.18 \cdot 10^{-8}$	$-1.90 \cdot 10^{-8}$
5	$1.82 \cdot 10^{-16}$	$-5.63 \cdot 10^{-17}$	$-3.49 \cdot 10^{-16}$	$-6.54 \cdot 10^{-16}$	$-2.07 \cdot 10^{-16}$
$q = 1, \alpha = 0.157613, x_0 = (0.1, 0.5, 0.1)$					
it	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2
1	-0.0143784	0.0133449	0.518427	-0.378724	-
2	-0.000142886	$3.92 \cdot 10^{-5}$	0.259361	-0.000161067	-
3	$-9.14 \cdot 10^{-9}$	$1.52 \cdot 10^{-9}$	0.12968	$-6.27 \cdot 10^{-9}$	-
4	$-3.46 \cdot 10^{-17}$	$5.20 \cdot 10^{-18}$	0.0648401	$-2.85 \cdot 10^{-17}$	-
5	$-6.16 \cdot 10^{-33}$	$4.33 \cdot 10^{-19}$	0.0324201	0	-
6	$-1.17 \cdot 10^{-37}$	$-2.16 \cdot 10^{-19}$	0.01621	$-1.88 \cdot 10^{-37}$	-
7	$5.87 \cdot 10^{-39}$	$1.08 \cdot 10^{-19}$	0.00810502	$-1.88 \cdot 10^{-37}$	-
8	$-1.02 \cdot 10^{-38}$	$-5.42 \cdot 10^{-20}$	0.00405251	$-2.35 \cdot 10^{-38}$	-
9	$1.83 \cdot 10^{-39}$	0	0.00202625	$-8.81 \cdot 10^{-39}$	-
10	0	0	0.00101313	0	-
11	0	0	0.00050656	0	-
12	0	0	0.00025328	0	-
13	0	0	0.00012664	0	-
14	0	0	$6.33 \cdot 10^{-5}$	0	-

Tabela 4.41: Alg Y

Primer 7				
$q = 2, \alpha = (4.85376, 8.0028), x_0 = (0.05, 0.04)$				
it	x_1	x_2	λ_1	λ_2
1	0.000339141	-0.00114063	-0.0017989	0.00033758
2	$9.99 \cdot 10^{-7}$	$1.22 \cdot 10^{-6}$	$-1.67 \cdot 10^{-6}$	$9.85 \cdot 10^{-7}$
$q = 1, \alpha = 1.41886, x_0 = (0.05, 0.04)$				
it	x_1	x_2	λ_1	λ_2
1	-0.00211737	0.0190329	0.000128214	-
2	$2.16 \cdot 10^{-5}$	0.00815183	$5.89 \cdot 10^{-5}$	-
3	$-1.65 \cdot 10^{-7}$	0.00408982	$-2.35 \cdot 10^{-7}$	-
4	$-2.59 \cdot 10^{-9}$	0.0020448	$9.12 \cdot 10^{-10}$	-
5	$-3.16 \cdot 10^{-10}$	0.0010224	$7.19 \cdot 10^{-12}$	-
6	$-2.32 \cdot 10^{-11}$	0.000511199	$4.39 \cdot 10^{-13}$	-
7	$8.64 \cdot 10^{-13}$	0.0002556	$1.61 \cdot 10^{-14}$	-
8	$8.76 \cdot 10^{-13}$	0.0001278	$-3.01 \cdot 10^{-16}$	-
9	$2.13 \cdot 10^{-13}$	$6.38 \cdot 10^{-5}$	$-1.52 \cdot 10^{-16}$	-

u tabeli 4.43, a tabela 4.44 sadrži rezultate dobijene primenom algoritma MY. Zanimljiva je činjenica: u slučaju da je pretpostavljena vrednost nula

Tabela 4.42: Alg MY

Primer 7				
$q = 2, \alpha = (4.21761, 9.15736), x_0 = (0.05, 0.04)$				
it	x_1	x_2	λ_1	λ_2
1	$-2.64 \cdot 10^{-5}$	$-1.11 \cdot 10^{-5}$	-0.00103453	-0.000464295
$q = 1, \alpha = 7.92207, x_0 = (0.05, 0.04)$				
it	x_1	x_2	λ_1	λ_2
1	0.00970761	0.00303476	-0.0003106	-
2	0.0046471	0.00190198	$-1.79 \cdot 10^{-6}$	-
3	0.00231946	0.000960722	$-8.47 \cdot 10^{-10}$	-
4	0.00115972	0.000480373	$1.03 \cdot 10^{-11}$	-
5	0.000579862	0.000240187	$6.49 \cdot 10^{-13}$	-
6	0.000289931	0.000120093	$4.05 \cdot 10^{-14}$	-
7	0.000144966	$6.00 \cdot 10^{-5}$	$2.53 \cdot 10^{-15}$	-
8	$7.24 \cdot 10^{-5}$	$3.00 \cdot 10^{-5}$	$1.58 \cdot 10^{-16}$	-
9	$3.62 \cdot 10^{-5}$	$1.50 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-17}$	-

prostora 2, iterativni niz konvergira ka rešenju sa ovom dimenzijom nula prostora, dok za pretpostavljenu vrednost $q = 1$, konvergira ka rešenju za koje je dimenzija nula prostora jednaka 1.

Tabela 4.43: Alg Y

Primer 8				
$q = 2, \alpha = (9.59492, 6.55741), x_0 = (0.02, 0.02)$				
it	x_1	x_2	λ_1	λ_2
1	$2.17 \cdot 10^{-15}$	$-3.21 \cdot 10^{-15}$	-0.00284605	$-6.15 \cdot 10^{-20}$
$q = 1, \alpha = 0.357117, x_0 = (0.02, 0.02)$				
it	x_1	x_2	λ_1	λ_2
1	0.0477745	0.0484682	$-1.37 \cdot 10^{-19}$	-
2	0.0477745	0.0477795	$3.91 \cdot 10^{-21}$	-
3	0.0473312	0.0473313	$-1.20 \cdot 10^{-19}$	-
4	0.0473312	0.0473312	$-5.62 \cdot 10^{-20}$	-

U tabeli 4.45 predstavljen je iterativni niz generisan primenom algoritma **MY** na *Primer 9*, pri čemu su primenom algoritma **Y** rezultati slični i zbog toga izostavljeni. Dimenzija nula prostora je $q = 3$, pa su predstavljena tri iterativna niza generisana za $q = 3$, $q = 2$ i $q = 1$.

Dimenzija nula prostora q je nepoznata, jer je rešenje x^* nepoznato, tako da je potrebno pretpostaviti njegovu vrednost. Kako odrediti vrednost q , analizirano je u [42]. U slučaju da je pretpostavljena vrednost q veća od stvarne vrednosti, iako je matrica (3.27) regularna, Njutnov postupak, kao ni bilo koji drugi, neće konvergirati jer u okolini rešenja nema korena funkcije

Tabela 4.44: Alg MY

Primer 8				
$q = 2, \alpha = (4.21761, 9.15736), x_0 = (0.05, 0.04)$				
it	x_1	x_2	λ_1	λ_2
1	$-5 \cdot 10^{-6}$	$-4.99 \cdot 10^{-6}$	-0.00284668	$3.02 \cdot 10^{-16}$
$q = 1, \alpha = 7.92207, x_0 = (0.05, 0.04)$				
it	x_1	x_2	λ_1	λ_2
1	-0.176578	-0.231966	$2.49 \cdot 10^{-15}$	-
1	-0.240647	-0.231962	$3.51 \cdot 10^{-15}$	-
1	-0.00451816	0.00416095	$-5.18 \cdot 10^{-14}$	-
1	-0.00448969	0.00450258	$1.92 \cdot 10^{-20}$	-
1	-0.00447025	0.00447032	$3.48 \cdot 10^{-22}$	-

Tabela 4.45: Alg MY

Primer 9					
$q = 3, \alpha = (6.55478, 1.71187, 7.06046), x_0 = (1.02, 1.02, 0.02, 0.02, 0.02)$					
it	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1.00121	1	$-3.15 \cdot 10^{-5}$	$9.73 \cdot 10^{-5}$	-0.000314478
2	1	1	$-2.11 \cdot 10^{-10}$	$-2.54 \cdot 10^{-9}$	$-2.43 \cdot 10^{-8}$
3	1	1	$-2.84 \cdot 10^{-20}$	$1.32 \cdot 10^{-17}$	$-3.75 \cdot 10^{-8}$
$q = 2, \alpha = (0.318328, 2.76923)$					
it	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1.00121	1	$-8.77 \cdot 10^{-5}$	$-8.77 \cdot 10^{-5}$	-0.000147915
2	1	1	$-1.83 \cdot 10^{-9}$	$-1.83 \cdot 10^{-9}$	$-5.33 \cdot 10^{-9}$
3	1	1	$3.51 \cdot 10^{-16}$	$-3.53 \cdot 10^{-16}$	$-4.98 \cdot 10^{-18}$
$q = 1, \alpha = 0.461714$					
it	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1.00121	1	-0.000101225	-0.000101225	-0.000101225
2	1	1	$-2.46 \cdot 10^{-9}$	$-2.46 \cdot 10^{-9}$	$-2.46 \cdot 10^{-9}$
3	1	1	$-1.18 \cdot 10^{-15}$	$-1.31 \cdot 10^{-15}$	$2.49 \cdot 10^{-15}$

$g(x)$. Zbog toga se preporučuje uzimanje veće vrednosti za q i njeno smanjivanje dok konvergencija ne bude postignuta. Konvergencija podrazumeva da su svi λ_i iz jednačine (3.16), odnosno λ iz (3.23), jednaki nuli, što je posledica dobro odabrane vrednosti q , pod uslovom da je početna tačka dovoljno blizu rešenja. U tom slučaju bi ponovno povećavanje vrednosti q imalo za posledicu da vrednost funkcije $g(x)$ bude različita od nule.

Ako je vrednost q određena prethodnim postupkom ili postoji informacija o dimenziji nula prostora, može se pojaviti konvergencija Njutnovog postupka van okoline $\mathcal{B}(x^*)$. U tom slučaju su vrednosti λ_i različite od nule, što znači da dobijena aproksimacija nije rešenje polazne jednačine. Do toga je doveo izbor početne aproksimacije, koji u ovom slučaju nije bilo dovoljno

dobar, i ne može biti nezavisan od generatora nula prostora.

U tabeli 4.46 predstavljen je broj iteracija potrebnih algoritmu **MY** za postizanje konvergencije u zavisnosti od vrednosti q , pri čemu je markirana stvarna vrednost nula prostora.

Tabela 4.46

Primer	$q = 1$	$q = 2$	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$
6	14	5	D	-	-
7	9	2	-	-	-
8	5	1	-	-	-
9	3	3	3	D	D

Prethodna analiza određivanja dimenzije nula prostora koja je predstavljena u [42], potvrđena je na primerima u [57]. U slučajevima da je pretpostavljena vrednost q bila manja od stvarne, dobijena je konvergencija postupka, ali je red konvergencije smanjen, jer je granični sistem ostao singularan. U ovom delu numerički je pokazano da algoritmi **Y** i **MY** generišu gotovo identične iterativne nizove, tako da se u slučajevima da Jakobijan ili Hesijan nisu dostupni, može umesto algoritma **Y** primenjivati algoritam **MY**, kao što je i očekivano.

4.3.2 Numerički rezultati algoritma MYLS

U ovom odeljku predstavljeni su rezultati dobijeni primenom algoritma **MYLS** na već definisane primere. Iako su algoritmi **Y** i **MY** veoma brzi i efikasni, primenom na primerima u prethodnom odeljku potvrđeno je da konvergencija iterativnog niza zavisi od izbora početne iteracije. Zbog toga je njihova implementacija ograničena, jer je najčešće teško odabrati zadovoljavajuću početnu iteraciju. Jedan od načina da se iskoristi brzina i efikasnost algoritma je njegova primena u kombinaciji sa algoritmom koji je globalno konvergentan. Takav algoritam za bilo koju početnu iteraciju generiše iterativni niz koji konvergira ka rešenju, i u slučaju da je trenutna iteracija "dovoljno" blizu rešenja primenom algoritma **MY** očekuje se brža konvergencija.

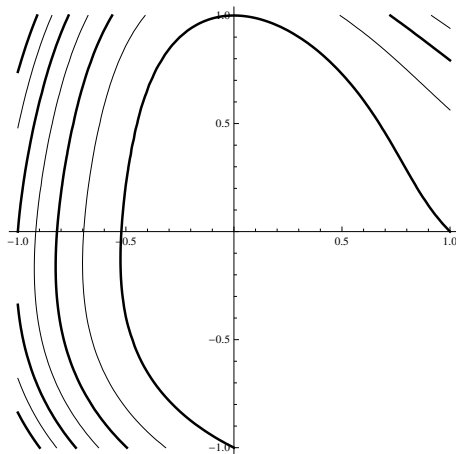
Na ovaj način je konstruisan algoritam **MYLS**. Metod najbržeg pada jedan je od globalno konvergentnih metoda kod koga je za pravac pretraživanja odabran pravac negativnog gradijenta, što predstavlja pravac naj-

bržeg opadanja funkcije. Na taj način nam je garantovana konvergencija ka rešenju. Dužina koraka se određuje koristeći Armijo uslov, (3.48). U slučaju da je dužina koraka mala, primenjuje se algoritam **MY**, jer se pretpostavlja da se iterativni niz nalazi u okolini rešenja. Metod negativnog gradijenta samo je linearno konvergentan u regularnom slučaju, tako da se za postizanje konvergencije očekuje veliki broj iteracija.

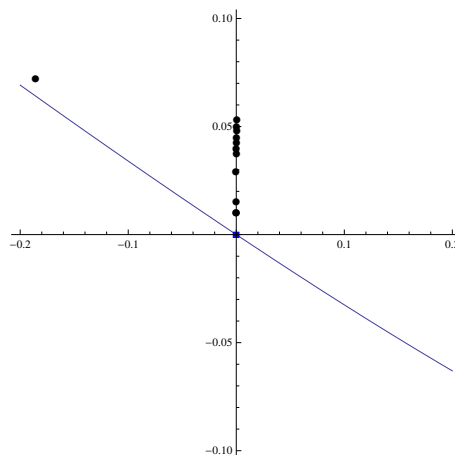
Kako bi algoritam **MYLS** mogao biti primenjen na primere predstavljene u ovoj Glavi, potrebno je transformisati ih u problem minimizacije, odnosno definisati funkciju

$$f(x) \equiv \frac{1}{2} F(x)^T F(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|_2^2.$$

Poznato je da je $\nabla f(x) = F'(x)^T F(x)$.



Slika 4.5



Slika 4.6

Pored algoritma **MYLS** posmatran je i algoritam koji u koraku **K2** algoritma **MYLS**, u slučaju da je dužina koraka manja od 10^{-4} poziva algoritam **Y**. Taj algoritam je označen sa **LSY**. S obzirom na to da je u prehodnom odeljku numerički pokazano da algoritmi **MY** i **Y** generišu nizove sa istim brojem iteracija, očekuje se da i u kombinaciji sa metodom negativnog gradijenta dobijeni iterativni nizovi zadrže istu osobinu. Dobijeni rezultati su upoređeni sa nizovima generisanim metodom negativnog gradijenta, odnosno algoritmom **LS**. Iterativni niz ćemo smatrati konvergentnim

ako je za najviše 1000 iteracija generisana aproksimacija rešenja za koju važi da je $\|F(x_k)\| \leq 10^{-8}$.

U tabelama koje slede predstavljeni su dobijeni iterativni nizovi, pri čemu su iteracije generisane algoritmima **MY** i **Y** označene odgovarajućim indeksima.

Na slici 4.5 predstavljene su konture funkcije $f_1(x) = \frac{1}{2}\|F_1(x)\|^2$. Njihova izduženost u okolini rešenja ukazuje na to da je za konvergenciju algoritma **LS** potreban veliki broj iteracija i da korak postaje sve kraći, što je iterativni niz bliži korenu x^* . Kao što je već pomenuto, funkcija F_1 ima singularni koren $x^* = (0, 0)$ i nula prostor generisan vektorom $(0, 1)$.

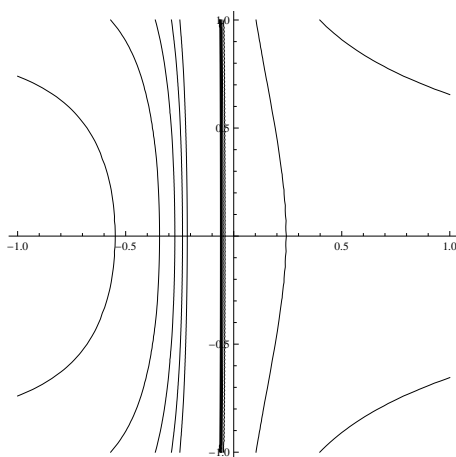
Na slici 4.6 predstavljena je svaka 5-ta iteracija, sa delom hiperbole na kojoj je Jakobijan singularan, kroz singularno rešenje x^* . Na grafiku se jasno vidi kako se iteracije sabijaju uz nula prostor, što za posledicu ima sporu konvergenciju.

Tabela 4.47: Primer 1

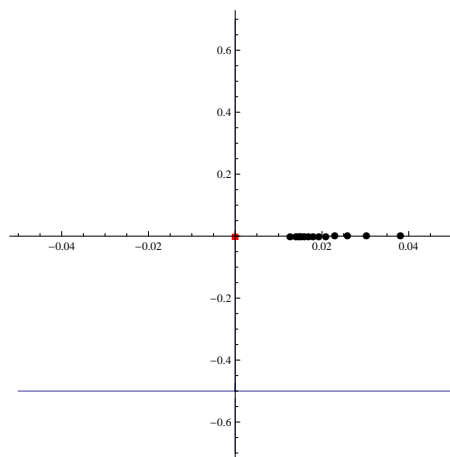
Algoritam MYLS				
it	x_1	x_2	$\ F(x_k)\ $	q_k
1	-0.185854	0.0722613	0.45494	0.211372
5	0.0005668	0.0532799	0.0038357	0.99762
10	0.0001860	0.0502292	0.0034663	0.981538
15	0.0004555	0.0480361	0.0031154	0.998129
20	0.0001349	0.0450007	0.0027879	0.979082
25	0.0003603	0.0428664	0.0024792	0.998542
30	$9.064 \cdot 10^{-5}$	0.0398432	0.0021921	0.976159
35	0.0002782	0.0377524	0.0019216	0.998885
40	-0.0002090	0.0291874	0.0014206	0.854222
45	$4.602 \cdot 10^{-5}$	0.015325	0.0003157	0.999758
46	$-7.184 \cdot 10^{-5}$	0.0103834	0.0002539	0.67756
47	$2.814 \cdot 10^{-5}$	0.0103821	0.0001456	0.999857
48_{MY}	$-2.114 \cdot 10^{-5}$	$1.681 \cdot 10^{-5}$	$4.728 \cdot 10^{-5}$	0.00255404
49_{MY}	$-2.972 \cdot 10^{-10}$	$8.055 \cdot 10^{-11}$	$6.646 \cdot 10^{-10}$	$1.161 \cdot 10^{-5}$
Algoritam LSY				
48_Y	$-2.11 \cdot 10^{-5}$	$2.097 \cdot 10^{-5}$	$4.728 \cdot 10^{-5}$	0.00255404
49_Y	$-3.539 \cdot 10^{-10}$	$1.167 \cdot 10^{-10}$	$7.913 \cdot 10^{-10}$	$1.252 \cdot 10^{-5}$

U tabeli 4.47 predstavljen je iterativni niz generisan algoritmom **MYLS**, pri čemu su poslednje dve iteracije generisane algoritmom **MY** i algoritmom **Y** i gotovo su identične. U poslednjoj koloni tabele 4.47 nalaze se vredno-

sti količnika (4.1). U slučaju da se iteracije generišu metodom negativnog gradijenta, njegove vrednosti ukazuju na sublinearnu konvergenciju, dok se prilikom primene algoritama **MY** i **Y** dobijaju vrednosti karakteristične za superlinearnu konvergenciju.



Slika 4.7



Slika 4.8

Na slici 4.7 su predstavljene konture funkcije $f_2(x) = \frac{1}{2} \|F_2(x)\|^2$ na osnovu kojih se može zaključiti da je problem loše uslovnjen. Konvergencija je postignuta dosta brzo jer je, zbog loše uslovljenosti sistema, korak postao dovoljno mali već u devetoj iteraciji. Međutim, iteracija x_9 nalazi se u okolini rešenja, tako da je lokalna konvergencija algoritama **MY** i **Y** dovela do konvergencije iterativnog niza. Tabela 4.48 sadrži iterativni niz generisan ovim algoritmom.

Za funkciju definisanu u *Primeru 3*, Jakobijan je singularan za

$$\det F'_3(x_1, x_2) = 4x_1x_2 + 2x_1 = 0,$$

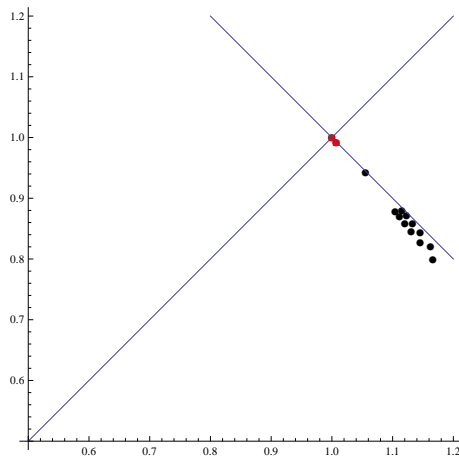
odnosno, na skupu

$$\{(0, t) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, -\frac{1}{2}) : t \in \mathbb{R}\}.$$

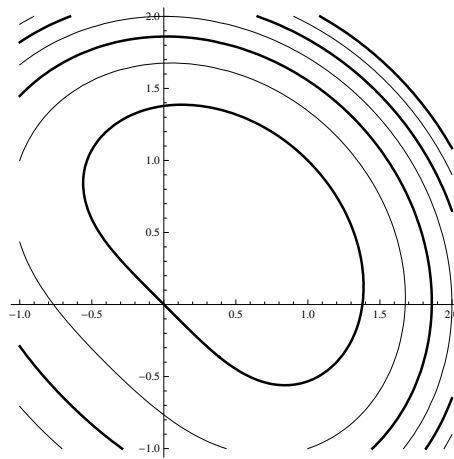
Kako je potreban veoma veliki broj iteracija za postizanje konvergencije, na slici 4.8 predstavljena je svaka 50-ta iteracija kao i skup singularnih tačaka Jakobijana $F'_3(x^*)$. S obzirom na to da je nula prostor Jakobijana $F'_3(x^*)$

Tabela 4.48: Primer 2

Algoritam MYLS				
it	x_1	x_2	$\ F(x_k)\ $	q_k
1	2.91012	0.00404703	10.0963	0.920263
2	1.9109	-0.0352736	9.69538	0.656749
3	0.957019	0.264919	9.24398	0.519568
4	0.271011	-0.462674	7.73754	0.539979
5	-0.0177099	-0.389477	1.84883	0.72711
6	$1.9644 \cdot 10^{-5}$	-0.389663	0.30171	0.999446
7	-0.00254783	-0.389624	0.0422465	0.99992
8	-0.00304778	-0.389617	0.0111797	0.99999
9	-0.00294609	-0.389618	0.00294656	1
10 _{MY}	0.00353876	0.0521454	0.00353892	0.134141
11 _{MY}	$-7.506 \cdot 10^{-5}$	0.00364142	$-7.506 \cdot 10^{-5}$	0.0696865
12 _{MY}	$2.092 \cdot 10^{-7}$	$-5.477 \cdot 10^{-6}$	$2.092 \cdot 10^{-7}$	0.00150508
13 _{MY}	$1.644 \cdot 10^{-13}$	$-2.290 \cdot 10^{-11}$	$1.644 \cdot 10^{-13}$	$4.178 \cdot 10^{-6}$
Algoritam LSY				
10 _Y	0.00353812	0.0521416	0.347177	0.134131
11 _Y	$-7.502 \cdot 10^{-5}$	0.00364048	0.00748194	0.0696865
12 _Y	$2.091 \cdot 10^{-7}$	$-5.473 \cdot 10^{-6}$	$2.091 \cdot 10^{-5}$	0.0015043
13 _Y	$1.617 \cdot 10^{-13}$	$-2.287 \cdot 10^{-11}$	$1.617 \cdot 10^{-11}$	$4.176 \cdot 10^{-6}$



Slika 4.9



Slika 4.10

generisan vektorom $(1, 0)$, vidi se da komponenta, koja odgovara nula prostoru, sporije konvergira jer se iteracije grupišu oko nula prostora. To utiče

Tabela 4.49: Primer 3

Algoritam MYLS				
it	x_1	x_2	$\ F(x_k)\ $	q_k
1	2.00612	0.889568	5.74631	0.693962
50	0.0381893	0.0019514	0.0015431	0.993161
100	0.0303398	0.00141995	0.0010490	0.99531
150	0.0259303	0.00117273	0.00083922	0.996303
200	0.0230124	0.00103006	0.00072942	0.996876
250	0.0208989	0.00093724	0.00066484	0.997248
300	0.0192773	0.00087205	0.00062378	0.997509
350	0.0179824	0.00082376	0.00059615	0.997703
400	0.0169172	0.00078654	0.00057672	0.997852
450	0.0160211	0.00075699	0.00056258	0.997971
500	0.0152536	0.00073296	0.0005519	0.998067
550	0.0145866	0.00071303	0.00054382	0.998147
600	0.0139999	0.00069623	0.00053744	0.998214
637	0.00127273	$1.62 \cdot 10^{-6}$	$1.619 \cdot 10^{-6}$	0.993079
638_{MY}	$-5.0 \cdot 10^{-6}$	-0.000161685	0.000161685	0.0127364
639_{MY}	$1.632 \cdot 10^{-11}$	$-2.499 \cdot 10^{-11}$	$2.770 \cdot 10^{-11}$	$5.672 \cdot 10^{-6}$
Algoritam LSY				
638_Y	$2.902 \cdot 10^{-12}$	$-1.619 \cdot 10^{-6}$	$1.619 \cdot 10^{-6}$	0.00127273
639_Y	$-9.402 \cdot 10^{-18}$	$-8.494 \cdot 10^{-18}$	$8.494 \cdot 10^{-11}$	$7.822 \cdot 10^{-12}$

na konvergenciju celog iterativnog niza.

Na slici 4.9 predstavljena je svaka 15-ta iteracija, nula prostor $F'_4(x^*)$ i skup na kome je Jakobijan singularan. Konture funkcije $\frac{1}{2}\|F_4(x)\|^2$ predstavljene su na slici 4.10 i vidi se njihova izduženost u okolini rešenja, u ovom primeru je to $x^* = (1, 1)$. Takođe se na slici 4.9 jasno vidi cik-cak putanja, što je karakteristika metoda negativnog gradijenta.

Metod negativnog gradijenta je u regularnom slučaju linearno konvergentan, dok se u slučaju singularnosti u svim tabelama može primetiti da količnik (4.1) teži ka 1, odnosno da je u pitanju sublinearna konvergencija. Iteracije generisane algoritmima **MY** i **Y** ukazuju na to da je konvergencija superlinearna, što je posledica aproksimacije Jakobijana i Hesijana konačnim razlikama i regularnosti graničnog sistema.

U slučaju da je $\dim \mathcal{N}(F'(x^*)) > 1$, mogu se posmatrati iterativni nizovi generisani za različite vrednosti q .

U tabeli 4.52 predstavljen je iterativni niz generisan algoritmom **MYLS**

Tabela 4.50: Primer 4

Algoritam MYLS				
it	x_1	x_2	$\ F(x_k)\ $	q_k
1	2.17352	1.43703	5.05281	0.560026
15	1.16609	0.799822	0.034095	0.991804
30	1.16264	0.82095	0.0304803	0.998117
45	1.14541	0.827102	0.0277692	0.993099
60	1.14545	0.843288	0.0257744	0.999163
75	1.13092	0.84561	0.0242196	0.993899
90	1.13291	0.859123	0.0229965	0.999825
105	1.12002	0.859204	0.0220285	0.994439
120	1.12323	0.871089	0.0212208	1.00028
135	1.11144	0.869724	0.0205842	0.994827
150	1.11547	0.880535	0.0200196	1.00062
165	1.10444	0.878173	0.0195846	0.995119
180	1.05521	0.942236	0.00285546	0.99981
192	1.00738	0.992507	0.00016156	0.999962
193_{MY}	1.00002	1.00002	$4.946 \cdot 10^{-5}$	0.0029747
194_{MY}	1	1	$4.376 \cdot 10^{-10}$	$8.851 \cdot 10^{-6}$
Algoritam LSY				
193_Y	1.00002	1.00002	$9.892 \cdot 10^{-5}$	0.0029747
194_Y	1	1	$8.754 \cdot 10^{-10}$	$8.85 \cdot 10^{-6}$

za funkciju iz *Primer 6* ako je pretpostavljena vrednost nula prostora $q = 2$, zapravo pretpostavljena vrednost jednaka je stvarnoj vrednosti nula prostora. Dobro odabrana vrednost q garantuje regularnost graničnog sistema, što za posledicu ima iterativni niz sa većim redom konvergencije, odnosno manjim brojem iteracija potrebnih za dostizanje zadovoljavajuće aproksimacije rešenja.

U slučaju da je pretpostavljena vrednost nula prostora $q = 1$, algoritmu **MY** potrebno je više iteracija za postizanje konvergencije jer je sistem ostao singularan. Može se primetiti da obe komponente ne konvergiraju istom brzinom. Takođe, poslednja kolona ukazuje na sniženje reda konvergencije kod algoritama **MY** i **Y**. U slučaju da je $q = 2$ u pitanju je superlinearna konvergencija, dok je u slučaju $q = 1$ konvergencija linearna. Iterativni niz generisan ovim algoritmom predstavljen je u tabeli 4.53.

Funkcija iz *Primer 8* nema izolovanih korena. Ako se primeni algoritam **MYLS**, rezultati su predstavljeni u tabeli 4.56 u slučaju da je $q = 2$, dok se

Tabela 4.51: Primer 5

Algoritam MYLS				
it	x_1	x_2	$\ F(x_k)\ $	q_k
1	9.95524	9.001	949.043	0.949012
5	9.72068	5.008	226.394	0.952053
10	9.00367	0.0701812	9.05887	0.966099
15	4.04169	-0.0485614	4.05459	0.802316
20	-0.0459061	-0.0313993	0.0450282	0.838871
25	-0.000188198	-0.0233721	0.000647997	0.859289
30	-0.000274533	-0.0167393	0.000282465	0.998714
34	-0.000143885	-0.0111708	0.000127245	0.999325
35_{MY}	0.000120715	$-8.675 \cdot 10^{-5}$	0.000124417	0.0133066
36_{MY}	$7.659 \cdot 10^{-9}$	$-4.515 \cdot 10^{-9}$	$-8.183 \cdot 10^{-9}$	$5.981 \cdot 10^{-5}$
Algoritam LSY				
35_Y	0.00011984	$1.613 \cdot 10^{-7}$	0.00011984	0.0107271
36_Y	$-1.609 \cdot 10^{-11}$	$5.136 \cdot 10^{-5}$	$3.719 \cdot 10^{-9}$	0.428608

Tabela 4.52: Primer 6, $q = 2$

Algoritam MYLS					
it	x_1	x_2	x_3	$\ F(x_k)\ $	q_k
1	4.52542	4.14505	4.79063	56.6644	0.898969
50	0.000163599	-0.0599632	-0.00534915	0.00497768	0.99577
100	$-5.416 \cdot 10^{-5}$	-0.0499181	-0.00524843	0.00356606	0.997142
150	-0.000164455	-0.0436725	-0.00517613	0.00284293	0.997863
200	-0.000231239	-0.0393088	-0.0051196	0.00241316	0.998307
250	-0.000276047	-0.0360384	-0.0050731	0.00213425	0.998608
300	-0.000308197	-0.0334697	-0.00503352	0.00194227	0.998826
350	-0.000308197	-0.0334697	-0.00503352	0.00194227	0.998826
400	-0.000351249	-0.029644	-0.00496837	0.001702	0.999119
450	-0.000366364	-0.0281659	-0.00494078	0.001624	0.999222
500	-0.000378747	-0.0268894	-0.00491566	0.00156326	0.999307
559	$3.379 \cdot 10^{-5}$	-0.013668	-0.00458767	0.000256294	0.999853
560_{MY}	$-2.836 \cdot 10^{-5}$	$3.697 \cdot 10^{-5}$	$8.657 \cdot 10^{-6}$	$6.958 \cdot 10^{-5}$	0.00328919
561_{MY}	$-6.615 \cdot 10^{-10}$	$5.389 \cdot 10^{-10}$	$5.742 \cdot 10^{-11}$	$1.620 \cdot 10^{-9}$	$1.803 \cdot 10^{-5}$
Algoritam LSY					
560_Y	$-2.843 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-5}$	$1.367 \cdot 10^{-5}$	$6.966 \cdot 10^{-5}$	0.00364417
561_Y	$-7.345 \cdot 10^{-10}$	$6.392 \cdot 10^{-10}$	$1.056 \cdot 10^{-10}$	$1.799 \cdot 10^{-9}$	$1.864 \cdot 10^{-5}$

u slučaju $q = 1$ iterativni niz, generisan algoritmima **MY** i **Y**, nalazi u tabeli 4.55. Kao i u prethodnom odeljku, u slučaju da je pretpostavljena vrednost $q = 2$, algoritam **MY** je generisao iterativni niz koji konvergira ka rešenju sa dimenzijom nula prostora 2, dok je u slučaju da je pretpostavljena dimenzija

Tabela 4.53: Primer 6, $q = 1$

Algoritam MY					
it	x_1	x_2	x_3	$\ F(x_k)\ $	q_k
560_{MY}	$3.801 \cdot 10^{-6}$	-0.00690144	$-4.394 \cdot 10^{-7}$	$6.526 \cdot 10^{-5}$	0.478688
561_{MY}	$-3.582 \cdot 10^{-9}$	-0.00345012	$9.534 \cdot 10^{-11}$	$1.683 \cdot 10^{-5}$	0.499912
562_{MY}	$1.683 \cdot 10^{-12}$	-0.00172506	$-9.755 \cdot 10^{-15}$	$4.208 \cdot 10^{-6}$	0.5
563_{MY}	$-3.955 \cdot 10^{-16}$	-0.000862529	$-3.767 \cdot 10^{-18}$	$1.052 \cdot 10^{-6}$	0.5
564_{MY}	$4.669 \cdot 10^{-20}$	-0.000431265	$-3.882 \cdot 10^{-17}$	$2.630 \cdot 10^{-7}$	0.5
565_{MY}	$-1.895 \cdot 10^{-23}$	-0.000215632	$9.258 \cdot 10^{-19}$	$6.575 \cdot 10^{-8}$	0.5
566_{MY}	$-7.369 \cdot 10^{-24}$	-0.000107816	$-1.412 \cdot 10^{-18}$	$1.643 \cdot 10^{-8}$	0.5
567_{MY}	$2.79 \cdot 10^{-25}$	$-5.39 \cdot 10^{-5}$	$-2.426 \cdot 10^{-19}$	$4.109 \cdot 10^{-9}$	0.5
Algoritam Y					
560_Y	$3.818 \cdot 10^{-6}$	-0.00690425	$4.570 \cdot 10^{-6}$	$6.530 \cdot 10^{-5}$	0.478883
561_Y	$-3.596 \cdot 10^{-9}$	-0.00345152	$-9.866 \cdot 10^{-10}$	$1.683 \cdot 10^{-5}$	0.499912
562_Y	$1.69 \cdot 10^{-12}$	-0.00172576	$1.042 \cdot 10^{-13}$	$4.211 \cdot 10^{-6}$	0.5
563_Y	$-3.973 \cdot 10^{-16}$	-0.00086288	$-8.290 \cdot 10^{-18}$	$1.052 \cdot 10^{-6}$	0.5
564_Y	$4.668 \cdot 10^{-20}$	-0.00043144	$1.062 \cdot 10^{-18}$	$2.632 \cdot 10^{-7}$	0.5
565_Y	$-3.538 \cdot 10^{-24}$	-0.00021572	$-1.075 \cdot 10^{-19}$	$6.581 \cdot 10^{-8}$	0.5
566_Y	$6.803 \cdot 10^{-24}$	-0.00010786	$-6.920 \cdot 10^{-19}$	$1.645 \cdot 10^{-8}$	0.5
567_Y	$-1.259 \cdot 10^{-25}$	$-5.393 \cdot 10^{-5}$	$-1.075 \cdot 10^{-19}$	$4.1113 \cdot 10^{-9}$	0.5

$q = 1$, konvergencija postignuta ka rešenju sa dimenzijom nula prostora 1.

Na *Primere 1-9* primenjen je algoritam **LS**, metod negativnog gradijenta sa linijskim pretraživanjem. Poslednje generisane iteracije predstavljene su u tabeli 4.58. Maksimalan broj iteracija je $maxit = 1000$, što je algoritmu **LS** bilo dovoljno za postizanje konvergencije jedino za funkciju iz *Primera 8*. U slučaju *Primera 4* i *7*, iterativni niz je divergirao. U naznačenoj iteraciji, dužina koraka postala je veoma mala, pa je algoritam prekinut. U svim primerima je očekivan veliki broj iteracija primenom algoritma **LS** jer je metod negativnog gradijenta linearno konvergentan u regularnom slučaju, a u singularnom slučaju konvergencija je sublinearna.

Algoritam **MYLS** testiran je i na primerima koji su Frank-Šnabelovom transformacijom transformisani u singularne probleme. Testirani su primeri dimenzije $n = 4$ i $n = 10$ za različite vrednosti q .

U tabelama 4.59 i 4.60 prikazan je broj iteracija potrebnih za postizanje konvergencije algoritma **MYLS** za primere koji su transformisani u singularni problem, tako da je $\text{rang}(F'(x^*)) = n - 1$, odnosno $q = 1$. U koloni NGit označen je broj iteracija u kojima je dužina koraka $\delta > 10^{-4}$, a u koloni $\|F(x_k)\|_{NG}$ data vrednost funkcije u poslednjoj takvoj iteraciji. Poslednje dve kolone označavaju broj iteracija generisanih algoritmom **MY**, kao i vrednost funkcije u poslednjoj aproksimaciji rešenja.

Tabela 4.54: Primer 7

Algoritam MYLS				
it	x_1	x_2	$\ F(x_k)\ $	$\frac{\ x^* - x^{k+1}\ }{\ x^* - x^k\ }$
1	9.0509	-9.68503	7365.8	0.937333
2	8.09547	-9.38982	5146.63	0.935267
3	7.13324	-9.11755	3457.31	0.933747
4	6.16372	-8.87256	2212.63	0.933228
5	5.18625	-8.66148	1335.3	0.93447
6	4.19988	-8.49694	756.352	0.938861
7	3.20343	-8.41274	415.781	0.938861
8	2.22166	-8.60283	264.941	0.987009
9_{MY}	3.0081	4.20594	859.182	1.00543
10_{MY}	2.18423	1.80816	14.7747	0.548361
11_{MY}	1.42537	0.791177	4.179	0.574925
12_{MY}	0.739457	0.29665	1.1505	0.488732
13_{MY}	0.18975	0.0580501	0.0734977	0.249053
14_{MY}	0.00410858	0.000992897	$3.249 \cdot 10^{-5}$	0.0213014
15_{MY}	$3.758 \cdot 10^{-8}$	$7.142 \cdot 10^{-9}$	$2.573 \cdot 10^{-15}$	$9.051 \cdot 10^{-6}$
Algorithm MY $q = 1$, $\alpha = 0.632359$				
9_{MY}	5.02791	7.384	859.182	1.00543
15_{MY}	-0.177732	-0.619415	0.57792	1.07298
20_{MY}	0.00739576	-0.0178467	0.00104705	0.500024
25_{MY}	0.00023103	-0.000557755	$1.022 \cdot 10^{-6}$	0.5
29_{MY}	$1.443 \cdot 10^{-5}$	$-3.485 \cdot 10^{-5}$	$3.994 \cdot 10^{-9}$	0.5

Tabela 4.55: Primer 8

Algorithm MY $q = 1$				
9_{MY}	1.72058	-1.72058	$2.234 \cdot 10^{-10}$	1
Algorithm Y $q = 1$				
9_Y	1.72036	-1.72036	$2.605 \cdot 10^{-11}$	0.999877

Algoritmima **MY** i **Y** za postizanje konvergencije posmatranim primerima, potreban je veoma mali broj iteracija što potvrđuje da u okolini rešenja dužina koraka postaje mala. U *Primeru 12* je konvergencija postignuta primenom metoda negativnog gradijenta, a za *Primere 14, 17, 21* i *24* maksimalan broj iteracija nije bio dovoljan da se metodom negativnog gradijenta dovoljno približimo rešenju kako bismo primenili jedan od algoritama **MY**

Tabela 4.56: Primer 8

Algoritam MYLS				
it	x_1	x_2	$\ F(x_k)\ $	$\frac{\ x^* - x^{k+1}\ }{\ x^* - x^k\ }$
1	0.562378	-7.00195	154.038	0.876352
2	0.642438	-6.00516	112.733	0.859766
3	0.748812	-5.01083	77.6267	0.8389
4	0.896609	-4.02181	48.6076	0.813297
5	1.1142	-3.04577	25.4098	0.787075
6	1.45776	-2.10664	7.31397	0.789915
7	1.73418	-1.70718	0.293754	0.949899
8	1.72057	-1.72057	$2.113 \cdot 10^{-7}$	0.999908
9_{MY}	$-6.072 \cdot 10^{-6}$	$-7.246 \cdot 10^{-6}$	$4.946 \cdot 10^{-11}$	$3.885 \cdot 10^{-6}$
Algorithm LSY				
9_Y	$-5.542 \cdot 10^{-12}$	$2.564 \cdot 10^{-12}$	$7.634 \cdot 10^{-23}$	$2.509 \cdot 10^{-12}$

Tabela 4.57: Primer 9

it	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\frac{\ x^* - x^{k+1}\ }{\ x^* - x^k\ }$
1	-0.70702	-0.29298	0.447948	0.447948	0.447948	0.83168
5	0.0898372	0.821127	0.420715	0.420715	0.420715	0.833092
10	0.338646	0.989826	0.433248	0.433248	0.433248	0.953293
15	0.623137	1	0.368976	0.368976	0.368976	0.930096
20	0.76371	1	0.264371	0.264371	0.264371	0.93909
25	0.96894	0.999993	0.144911	0.144911	0.144911	0.757898
30	0.970038	1	0.093677	0.093677	0.093677	0.979008
35	0.97911	1	0.083576	0.083576	0.083576	0.995615
40	0.982872	1	0.070789	0.070789	0.070789	0.947634
45	0.98817	1	0.062824	0.062824	0.062824	0.997692
50	0.991246	1	0.049176	0.049176	0.049176	0.906232
55	0.994571	1	0.0425111	0.0425111	0.0425111	0.999481
56_{MY}	1.00068	1	$1.135 \cdot 10^{-5}$	$3.267 \cdot 10^{-5}$	$-7.158 \cdot 10^{-5}$	0.0262761
57_{MY}	1	1	$2.951 \cdot 10^{-11}$	$1.955 \cdot 10^{-10}$	$7.622 \cdot 10^{-10}$	$9.273 \cdot 10^{-6}$
Algorithm MY $q = 2$						
56_{MY}	1.00068	1	$-7.364 \cdot 10^{-7}$	$-7.364 \cdot 10^{-7}$	$-7.522 \cdot 10^{-6}$	0.0261228
57_{MY}	1	1	$-5.071 \cdot 10^{-13}$	$-4.926 \cdot 10^{-13}$	$3.022 \cdot 10^{-12}$	$8.457 \cdot 10^{-8}$
Algorithm MY $q = 1$						
56_{MY}	1.00069	1	$3.627 \cdot 10^{-5}$	$3.627 \cdot 10^{-5}$	$3.627 \cdot 10^{-5}$	0.0263668
57_{MY}	1	1	$2.385 \cdot 10^{-10}$	$2.385 \cdot 10^{-10}$	$2.385 \cdot 10^{-10}$	$5.758 \cdot 10^{-6}$

ili \mathbf{Y} .

S obzirom na to da su prethodni primeri transformisani u singularni problem, pri čemu je $q = 1$, pretpostavljena vrednost dimenzije nula prostora odgovarala je stvarnoj dimenziji nula prostora \mathcal{N} . U slučaju da su primeri

Tabela 4.58: Algoritam **LS**

Primer	it	x_k	$\ F(x_k)\ $
1	1000	$(1.037 \cdot 10^{-6}, 0.00227887)$	$6.969 \cdot 10^{-6}$
2	1000	$(-0.00284604, -0.382748)$	0.00284649
3	1000	$(0.00126139, 1.592 \cdot 10^{-6})$	$1.591 \cdot 10^{-6}$
4	210	<i>D</i>	$2.12 \cdot 10^{-8}$
5	1000	$(-3.16 \cdot 10^{-5}, -0.00607678)$	$3.736 \cdot 10^{-5}$
6	1000	$(1.825 \cdot 10^{-5}, -0.011218, -0.00445215)$	0.000173596
7	10	<i>D</i>	
8	9	$(1.72057, -1.72057)$	$1.196 \cdot 10^{-13}$
9	1000	$(0.999776, 1, -0.00855513, -0.00855513, -0.00855513)$	0.00012696

Tabela 4.59: $n = 4$

Prim	NGit	$\ F(x_k)\ _{NG}$	MYit	$\ F(x_k)\ $
10	12	0.0073900	3	$6.16 \cdot 10^{-10}$
11	187	0.0467837	3	$1.08 \cdot 10^{-15}$
12	4	$4.60 \cdot 10^{-14}$	-	-
13	459	0.0011759	2	$9.15 \cdot 10^{-16}$
14	<i>D</i>	-	-	-
15	1	0.0003048	2	$5.17 \cdot 10^{-13}$
16	43	0.0124438	3	$2.35 \cdot 10^{-15}$
17	<i>D</i>	-	-	-
18	1802	0.0106034	2	$1.0 \cdot 10^{-12}$
19	14	0.0136073	2	$1.12 \cdot 10^{-15}$
20	412	0.0178485	2	$3.21 \cdot 10^{-10}$
21	<i>D</i>	-	-	-
22	685	0.0112401	2	$1.4 \cdot 10^{-9}$
23	15	0.0007837	2	$6.47 \cdot 10^{-14}$
24	<i>D</i>	-	-	-

transformisani u singularni problem tako da je $\text{rang}(F'(x^*)) = n - 2$, odnosno $q = 2$, može se posmatrati ponašanje iterativnog niza ako se dimenzija nula prostora ne poklapa sa pretpostavljenom dimenzijom nula prostora.

Tabele 4.61 i 4.62 sadrže broj iteracija potrebnih algoritmu **MYLS** za dostizanje rešenja u slučaju da je dimenzija nula prostora $q = 2$, dok je pretpostavljena vrednost za q jednaka 1 ili 2. Kao što je i očekivano, većina primera konvergira ako je pretpostavljena vrednost manja od stvarne vrednosti, ali se u tim slučajevima povećao broj iteracija potrebnih algoritmima

Tabela 4.60: $n = 10$

Primer	NGit	$\ F(x_k)\ _{NG}$	MYit	$\ F(x_k)\ $
10	180	0.0027666	4	$2.18 \cdot 10^{-10}$
11	186	0.060387	5	$9.29 \cdot 10^{-9}$
12	7	0.0004532	2	$3.10 \cdot 10^{-16}$
13	667	0.0013610	3	$2.14 \cdot 10^{-15}$
14	D	-	-	-
15	65	0.0007336	3	$1.32 \cdot 10^{-13}$
16	486	0.039313	4	$2.75 \cdot 10^{-13}$
17	D	-	-	-
18	373	0.0197013	2	$2.21 \cdot 10^{-13}$
19	984	0.0170329	3	$6.23 \cdot 10^{-14}$
20	649	0.0198281	3	$1.20 \cdot 10^{-11}$
21	D	-	-	-
22	972	0.0151269	2	$6.63 \cdot 10^{-10}$
23	159	0.0016404	2	$1.04 \cdot 10^{-14}$
24	D	-	-	-

Tabela 4.61

		$n = 4$					
		NG		$q = 2$		$q = 1$	
Pr	it	$\ F(x_k)\ $	MYit	$\ F(x_k)\ $	MYit	$\ F(x_k)\ $	
10	5	0.0075747	5	$1.69 \cdot 10^{-13}$	11	$2.86 \cdot 10^{-9}$	
11	341	0.0284104	4	$5.13 \cdot 10^{-13}$	12	$7.04 \cdot 10^{-9}$	
12	5	$4.60 \cdot 10^{-14}$	-	-	-	-	
13	111	0.0004567	3	$1.60 \cdot 10^{-16}$	8	$8.59 \cdot 10^{-9}$	
14	D	-	-	-	-	-	
15	1	0.0003048	3	$5.19 \cdot 10^{-13}$	D	-	
16	12	$3.02 \cdot 10^{-9}$	-	-	-	-	
17	41	0.0092194	5	$8.57 \cdot 10^{-10}$	D	-	
18	D	-	-	-	-	-	
19	494	0.0087854	3	$6.77 \cdot 10^{-16}$	10	$8.33 \cdot 10^{-9}$	
20	590	0.0184143	4	$6.27 \cdot 10^{-10}$	11	$3.81 \cdot 10^{-9}$	
21	D	-	-	-	-	-	
22	480	0.0080577	3	$1.40 \cdot 10^{-9}$	11	$3.35 \cdot 10^{-9}$	
23	6	0.0006980	3	$1.05 \cdot 10^{-13}$	10	$6.50 \cdot 10^{-9}$	
24	D	-	-	-	-	-	

Tabela 4.62

		$n = 10$					
		LS		$q = 2$		$q = 1$	
Pr	it	$\ F(x_k)\ $	MYit	$\ F(x_k)\ $	MYit	$\ F(x_k)\ $	
10	215	0.00270038	4	$8.14 \cdot 10^{-12}$	11	$3.813 \cdot 10^{-9}$	
11	603	0.0541193	4	$4.27 \cdot 10^{-15}$	17	$3.537 \cdot 10^{-9}$	
12	8	$1.416 \cdot 10^{-5}$	1	$8.183 \cdot 10^{-7}$	1	$8.778 \cdot 10^{-9}$	
13	528	0.00138605	3	$2.27 \cdot 10^{-15}$	9	$5.003 \cdot 10^{-9}$	
14	D						
15	65	0.000733667	3	$1.357 \cdot 10^{-13}$			D
16	12	$2.351 \cdot 10^{-7}$	1	$1.188 \cdot 10^{-11}$	5	$9.723 \cdot 10^{-9}$	
17	D						
18	274	0.0198517	4	$2.596 \cdot 10^{-9}$	11	$5.53 \cdot 10^{-9}$	
19	D			D			D
20	652	0.0212265	3	$1.922 \cdot 10^{-10}$	12	$3.62 \cdot 10^{-9}$	
21	D						
22	906	0.0142496	3	$6.748 \cdot 10^{-10}$	16	$3.394 \cdot 10^{-9}$	
23	135	0.00132767	3	$2.681 \cdot 10^{-14}$	8	$2.775 \cdot 10^{-9}$	
24	D						

MY i **Y** za konvergenciju.

U slučaju da je dimenzija problema $n = 4$, kod *Primer 12* i *16* konvergencija je postignuta metodom negativnog gradijenta, tako da algoritam **MY** nije primenjen. Maksimalan broj iteracija u *Primerima 14, 17, 18, 21* i *24* nije bio dovoljan kako bi iteracije prišle dovoljno blizu rešenju, tako da algoritam **MY** ni u ovom slučaju nije primenjen, što ćemo smatrati divergencijom. U *Primeru 15* za $n = 4$ i $n = 10$, u slučaju da je pretpostavljena manja vrednost dimenzije nula prostora, konvergencija nije postignuta zbog numeričke singularnosti sistema.

4.3.3 Numerički rezultati algoritma **BY**

Formiranjem graničnog sistema, polazni singularni problem se transformiše u regularan tako da red konvergencije iterativnog metoda, primenjenog za njegovo rešavanje, ostaje očuvan. Algoritam **BY** konstruisan je na taj način, odnosno na granični sistem formiran pomoću tehnike opisane u Glavi 3, primenjen je Brojdenov algoritam. Međutim, kao i u slučaju algoritama **Y** i **MY**, za konverenciju iterativnog niza uslov je da početna aproksimacija

rešenja bude odabrana u okolini rešenja.

Dobijeni rezultati upoređeni su sa rezultatima dobijenim primenom Brojdenovog algoritma na polazni, singularni, sistem jednačina $F(x) = 0$. U ovom delu je $maxit = 30$, dok je - kao i u prethodnom odeljku - za konvergenciju niza potrebno da bude zadovoljen uslov

$$\|F(x_k)\| \leq 10^{-8}.$$

U tabelama koje slede, pored niza iteracija predstavljen je i količnik (4.1) kako bi red konvergencije generisanih iterativnih nizova mogao biti upoređen.

Prilikom primene algoritma **BY**, u svakoj iteraciji potrebno je izračunavanje matrice $D(x_k, \xi)$, definisane sa (3.28), koja predstavlja aproksimaciju matrice Jakobijana $F'(x_k)$. Ažuriranje matrice H_k zahteva izračunavanje vrednosti

$$y_k = \mathbf{F}(x_{k+1}, \lambda_{k+1}) - \mathbf{F}(x_k, \lambda_k),$$

pri čemu je

$$\mathbf{F}(x_k, \lambda) \equiv \begin{bmatrix} F(x_k) + R(\bar{x})\lambda \\ g(x_k) \end{bmatrix}.$$

Kako je $g(x_k)$ rešenje sistema (3.32), potrebno je u svakoj iteraciji formirati matricu

$$A_\xi(x_k, \bar{x}) = \begin{bmatrix} D(x_k, \xi) & R(\bar{x}) \\ L^T(\bar{x}) & 0 \end{bmatrix}.$$

Tabela 4.63: Pr 1 B

$x_0 = (0.02, 0.02)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	-0.000101	0.01505	0.532128
2	$3.59 \cdot 10^{-5}$	0.010561	0.70174
3	$-1.01 \cdot 10^{-6}$	0.006259	0.592691
4	$1.07 \cdot 10^{-7}$	0.003917	0.625856
	...		
10	$3.53 \cdot 10^{-16}$	0.000217	0.618054
11	$-9.00 \cdot 10^{-18}$	0.000134	0.618026
12	$4.03 \cdot 10^{-19}$	$8.316 \cdot 10^{-5}$	0.618037

Tabela 4.64: Pr 1 BY

$x_0 = (0.02, 0.02)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	$3.32 \cdot 10^{-5}$	0.05313	1.87849
2	-0.004167	-0.266201	5.00848
3	0.002657	-0.001887	0.012243
4	$2.63 \cdot 10^{-5}$	-0.000358	0.110409
5	$-1.77 \cdot 10^{-5}$	$3.29 \cdot 10^{-5}$	0.10391
6	$-2.22 \cdot 10^{-6}$	$4.79 \cdot 10^{-6}$	0.141158
7	$2.31 \cdot 10^{-8}$	$-4.56 \cdot 10^{-8}$	0.009599
8	$1.42 \cdot 10^{-10}$	$-5.45 \cdot 10^{-10}$	0.002986

Tabela 4.65: Pr 2 B

$x_0 = (0.02, 0.02)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	0	-3.46222	122.408
2	0	0.061056	0.017635
3	0	0.062152	1.01795
4	0	0.0308	0.495552
5	0	0.020594	0.668649
	...		
14	0	0.000264	0.618025
15	0	0.000163	0.618037
16	0	0.000101	0.618033
17	0	$6.25 \cdot 10^{-5}$	0.618034

Tabela 4.66: Pr 2 BY

$x_0 = (0.02, 0.02)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	-0.004042	0.048012	1.70649
2	0.007042	0.101357	2.11207
3	0.002110	0.020077	0.198769
4	-0.000228	0.001603	0.080708
5	$7.81 \cdot 10^{-5}$	0.000345	0.219091
6	$-3.21 \cdot 10^{-5}$	-0.000109	0.324062
7	$6.83 \cdot 10^{-7}$	$1.98 \cdot 10^{-6}$	0.018468
8	$-1.06 \cdot 10^{-8}$	$-3.76 \cdot 10^{-8}$	0.018595
9	$-2.18 \cdot 10^{-10}$	$-1.21 \cdot 10^{-9}$	0.019671
10	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$-4.95 \cdot 10^{-10}$	0.006000

U algoritmu **BY** je odabrano da je $\xi = 10^{-7}$, kako bi matrica $D(x_k, \xi)$ što bolje aproksimirala Jakobijan $F'(x_k)$.

U tabelama se može primetiti: pored toga što je u većini primera za postizanje konvergencije algoritmom **BY** potrebno manje iteracija, generisani iterativni niz ima osobinu da obe komponente konvergiraju ka rešenju istom brzinom. Posledica toga je brža konvergencija u slučaju algoritma **BY**, što se ogleda i u poslednjoj koloni u kojoj se nalaze dobijene vrednosti količnika q_k .

Tabela 4.67: Pr 3 B

$x_0 = (0.02, 0.02)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	0.019615	0.000384	0.693642
2	0.010095	$3.95 \cdot 10^{-6}$	0.514551
3	0.006576	$-2.67 \cdot 10^{-6}$	0.651481
4	0.003973	$-1.51 \cdot 10^{-7}$	0.604166
5	0.002479	$2.59 \cdot 10^{-8}$	0.623982
6	0.001527	$2.77 \cdot 10^{-9}$	0.61594
7	0.000944	$-2.27 \cdot 10^{-10}$	0.618798
8	0.000583	$-4.17 \cdot 10^{-11}$	0.617725
9	0.000360	$1.45 \cdot 10^{-12}$	0.616154
10	0.000222	$5.62 \cdot 10^{-13}$	0.61799
11	0.000137	$2.61 \cdot 10^{-16}$	0.618051
12	$8.51 \cdot 10^{-5}$	$-6.93 \cdot 10^{-15}$	0.618027
13	$5.26 \cdot 10^{-5}$	$-2.27 \cdot 10^{-16}$	0.618036

Tabela 4.68: Pr 3 BY

$x_0 = (0.02, 0.02)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	0.040725	0.00119533	1.44047
2	6.96391	0.337453	171.125
3	0.0425064	0.0520631	0.009640
4	0.0524712	0.120912	1.96108
5	0.0176248	-0.0549036	0.437483
6	-0.00479826	-0.10126	1.75804
7	-0.00575155	-0.0819391	0.810274
	...		
22	$-1.99 \cdot 10^{-7}$	$1.94 \cdot 10^{-6}$	0.371441
23	$-3.14 \cdot 10^{-7}$	$3.22 \cdot 10^{-6}$	0.352083
24	$-1.35 \cdot 10^{-8}$	$1.09 \cdot 10^{-7}$	0.366345
25	$-1.83 \cdot 10^{-9}$	$1.11 \cdot 10^{-8}$	0.057208
26	$-5.04 \cdot 10^{-10}$	$3.68 \cdot 10^{-11}$	0.003210

Kako što je već rečeno, red konvergencije Brojdenovog iterativnog niza ka singularnom korenu je $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180339$, što potvrđuje dobijena vrednost količnika u tabelama. Takođe, može se uočiti da iterativni niz, generisan algoritmom **BY**, konvergira q -superlinearno, jer postoji iteracija počevši od koje vrednosti količnika teže ka nuli.

Tabela 4.69: Pr 5 B

$x_0 = (0.02, 0.02)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	-0.000173	0.014342	0.507134
2	$-8.62 \cdot 10^{-5}$	0.011327	0.789729
3	$-7.38 \cdot 10^{-8}$	0.006329	0.55875
4	$-5.22 \cdot 10^{-7}$	0.004088	0.645885
5	$-5.07 \cdot 10^{-8}$	0.002488	0.608784
6	$-1.96 \cdot 10^{-8}$	0.001549	0.622777
7	$-3.71 \cdot 10^{-9}$	0.000956	0.61682
8	$-1.01 \cdot 10^{-9}$	0.000591	0.61892
9	$-2.24 \cdot 10^{-10}$	0.000365	0.61794
10	$-5.58 \cdot 10^{-11}$	0.000226	0.618228
11	$-1.29 \cdot 10^{-11}$	0.000139	0.618056
12	$-3.10 \cdot 10^{-12}$	$8.63 \cdot 10^{-5}$	0.618086
13	$-7.27 \cdot 10^{-13}$	$5.33 \cdot 10^{-5}$	0.618051

Tabela 4.70: Pr 5 BY

$x_0 = (0.02, 0.02)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	-0.002621	0.072214	2.55486
2	0.021523	-0.2319	3.22293
3	-0.023953	-0.044377	0.216531
4	0.100486	0.360932	7.4294
5	-0.015004	0.004818	0.042063
6	-0.006637	0.013764	0.96968
7	0.001435	0.009135	0.605125
8	0.000799	0.003129	0.349281
9	$2.88 \cdot 10^{-5}$	$-6.53 \cdot 10^{-5}$	0.022103
10	$-8.67 \cdot 10^{-7}$	$-1.59 \cdot 10^{-6}$	0.025380
11	$-1.01 \cdot 10^{-7}$	$-1.14 \cdot 10^{-6}$	0.635212
12	$-2.12 \cdot 10^{-8}$	$2.32 \cdot 10^{-7}$	0.202736
13	$-9.08 \cdot 10^{-11}$	$9.76 \cdot 10^{-10}$	0.004204

Brojdenovom algoritmu, primenjenom na *Primer 6*, 30 iteracija nije bilo dovoljno za postizanje tražene tačnosti, dok je primenom Brojdenovog algoritma na funkciju iz *Primer 8*, zbog numeričke singularnosti sistema iterativni niz divergirao.

Tabela 4.71: Pr 6 BY

$x_0 = (0.02, 0.02, 0.02)$				
it	x_1	x_2	x_3	q_k
1	-0.000170	0.054658	0.039775	1.95142
2	-0.000978	-0.107119	-0.077615	1.95692
3	0.000397	-0.003312	0.000138	0.02523
4	$-3.20 \cdot 10^{-5}$	-0.001233	0.003927	1.23305
5	$-2.89 \cdot 10^{-5}$	-0.004171	0.006615	1.89978
6	$1.10 \cdot 10^{-5}$	0.000207	-0.000337	0.05075
7	$1.84 \cdot 10^{-7}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$-2.24 \cdot 10^{-5}$	0.06472
8	$-1.15 \cdot 10^{-8}$	$2.01 \cdot 10^{-7}$	$8.59 \cdot 10^{-7}$	0.03435
9	$3.16 \cdot 10^{-9}$	$7.43 \cdot 10^{-8}$	$-1.01 \cdot 10^{-7}$	0.14250
10	$4.07 \cdot 10^{-10}$	$7.97 \cdot 10^{-9}$	$-1.48 \cdot 10^{-8}$	0.13405
11	$-1.08 \cdot 10^{-11}$	$-2.24 \cdot 10^{-10}$	$3.97 \cdot 10^{-10}$	0.027060

Dobijeni rezultati potvrđuju da se primenom Brojdenovog metoda na rešavanje graničnog sistema, može očuvati konvergencija koju je isti imao u regularnom slučaju. Iako je u svakoj iteraciji potrebno izračunati Jakobijan $F'(x_k)$, ili ga aproksimirati, za razliku od algoritama **MY** i **Y** nije potrebno računanje Hesijana, što algoritam **BY** čini jeftinijim za rad. Međutim, ako se uporede nizovi koje generišu ova tri algoritma, algoritam **BY** generiše najveći broj iteracija.

Tabela 4.72: Pr 8 BY

$x_0 = (0.05, 0.04)$			
it	x_1	x_2	q_k
1	0.099999	0.079999	2
2	-0.000585	-0.000468	0.005857
3	-0.001189	-0.000951	2.03052
4	$-7.99 \cdot 10^{-6}$	$-5.39 \cdot 10^{-6}$	0.006332
5	$-9.58 \cdot 10^{-7}$	$1.20 \cdot 10^{-6}$	0.159655
6	$-1.92 \cdot 10^{-6}$	$2.40 \cdot 10^{-6}$	2.00174
7	$-2.73 \cdot 10^{-8}$	$3.42 \cdot 10^{-8}$	0.014219
8	$4.36 \cdot 10^{-14}$	$-5.45 \cdot 10^{-14}$	$1.59 \cdot 10^{-6}$

Tabela 4.73: Pr 9 B

$x_0 = (1.02, 1.02, 0.02, 0.02, 0.02)$						
it	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	q_k
1	1	1	0.01	0.01	0.01	0.387298
2	1	1	0.00731	0.00731	0.00731	0.731707
3	1	1	0.00422	0.00422	0.00422	0.577465
4	1	1	0.00267	0.00267	0.00267	0.633929
5	1	1	0.00163	0.00163	0.00163	0.612022
6	1	1	0.00101	0.00101	0.00101	0.620339
7	1	1	0.00062	0.00062	0.00062	0.617155
8	1	1	0.00038	0.00038	0.00038	0.61837
9	1	1	0.00023	0.00023	0.00023	0.617906
10	1	1	0.00014	0.00014	0.00014	0.618083
11	1	1	$9.16 \cdot 10^{-5}$	$9.16 \cdot 10^{-5}$	$9.16 \cdot 10^{-5}$	0.618015
12	1	1	$5.66 \cdot 10^{-5}$	$5.66 \cdot 10^{-5}$	$5.66 \cdot 10^{-5}$	0.618041
13	1	1	$3.49 \cdot 10^{-5}$	$3.49 \cdot 10^{-5}$	$3.49 \cdot 10^{-5}$	0.618031

Kao i u slučaju algoritama **MY** i **Y**, početna aproksimacija rešenja mora biti odabrana blizu rešenja kako bi konvergencija bila postignuta. Koristeći istu tehniku kojom je konstruisan algoritam **MYLS**, kombinacijom globalno konvergentnog metoda i algoritma **BY** u okolini rešenja može se konstruisati efikasan i jednostavan algoritam sa q -superlinearnom konvergencijom ka singularnom korenu funkcije F .

Tabela 4.74: Pr 9 BY

$x_0 = (1.02, 1.02, 0.02, 0.02, 0.02)$						
it	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	q_k
1	0.99639	1	0.040030	0.039971	0.040029	1.55171
2	1.02986	1	-0.182993	-0.182715	-0.182988	4.5853
3	0.97169	1	-0.017323	-0.015750	-0.017299	0.127701
4	1.02752	1	0.036264	0.038491	0.036299	1.71968
5	0.99669	1	0.000385	0.004152	0.000443	0.076614
6	0.99923	1	-0.001606	0.005942	-0.001489	1.19165
7	0.99746	1	0.024832	-0.030517	0.023974	7.26528
8	0.99956	1	0.001415	-0.001513	0.001370	0.055067
9	1.00001	1	0.000308	-0.000387	0.000298	0.226676
10	1.00001	1	-0.00017	0.000210	-0.000166	0.559082
11	1	1	$-2.12 \cdot 10^{-5}$	$2.35 \cdot 10^{-5}$	$-1.60 \cdot 10^{-5}$	0.110942
12	1	1	$-4.36 \cdot 10^{-6}$	$-4.66 \cdot 10^{-7}$	$5.12 \cdot 10^{-6}$	0.188077
13	1	1	$-9.44 \cdot 10^{-6}$	$-1.35 \cdot 10^{-7}$	$9.57 \cdot 10^{-6}$	1.99242
14	1	1	$-1.18 \cdot 10^{-8}$	$1.72 \cdot 10^{-8}$	$-7.97 \cdot 10^{-9}$	0.001706
15	1	1	$6.16 \cdot 10^{-11}$	$3.15 \cdot 10^{-10}$	$-8.15 \cdot 10^{-11}$	0.016099

5

Zaključak

U tezi je posmatran problem rešavanja singularnog sistema nelinearnih jednačina. Red konvergencije proizvoljnog iterativnog metoda smanjen je zbog singularnosti sistema, pa su predložene modifikacije samog metoda, kao i modifikacije problema u cilju ubrzanja konvergencije ka singularnom rešenju.

Posmatrani su kvazi-Njutnovi metodi, posebno Brojdenov, Tomasov i Martinezov metod ažuriranja kolone i predložene su njihove modifikacije uvođenjem međuitracije. Predloženi dvokoračni postupci, po ugledu na postupke iz [31] i [30], zavise od tri parametra, M , C i α . Zaključeno je da parametar M ima najjači uticaj na konvergenciju postupka. Na nizu numeričkih primera je pokazano da vrednosti M koje su blizu 3.7 daju zadovoljavajuće rezultate.

Prelaskom na dvokoračne postupke, pojavila se mogućnost ažuriranja aproksimacije Jakobijana i posle međuitracije, odnosno uvedena su pravila **P-I** i **P-II**. Numerički primeri su pokazali da prvo pravilo, ne samo da je jeftinije jer se aproksimacija Jakobijana ažurira samo jednom, nego je i efikasnije, kada se posmatra broj iteracija potrebnih za postizanje konvergencije. Takođe, može se primetiti da se malom promenom parametra M u pravilu **P-I**, broj iteracija ne menja značajno i da se ne narušava konvergencija. Nasuprot pravilu **P-I**, pravilo **P-II** znatno je osetljivije na promenu parametara, odnosno izbor optimalnih vrednosti parametara zavisi od primera koji se rešava i od metoda koji se primenjuje. Zbog toga, pravilu **P-I** daje se prednost i preporučuje se njegova primena prilikom upotrebe proizvoljnog kvazi-Njutnovog metoda za rešavanje singularnog sistema.

Definisanjem graničnog sistema, rešavanje nelinearnog singularnog siste-

ma svodi se na rešavanje njemu ekvivalentnog regularnog sistema. Predloženi algoritam **MY** zasnovan je na algoritmu **Y** predstavljenom u [57] koji je veoma efikasan ali i dosta skup, jer je u svakoj iteraciji potrebno izračunati Jakobijan i Hesijan. Novi algoritam **MY** ne koristi izvode. Matrice Jakobijana i Hesijana aproksimiraju se koristeći samo vrednosti funkcije, pomoću konačnih razlika. Postupak dobijen na ovaj način znatno je jeftiniji za rad. Teorijski je pokazano da se na ovaj način može postići veoma brza lokalna konvergencija, a na nizu numeričkih primera to je i potvrđeno. Na ovaj način potvrđeno je da algoritam **MY**, po svojim osobinama, može da parira algoritmu predstavljenom u [57].

Međutim, konvergencija algoritma **MY** zahteva početnu iteraciju veoma blizu rešenja, koje nije poznato. Zbog toga je predložena kombinacija algoritma **MY** sa metodom negativnog gradijenta, kojom je iskorišćena globalna konvergencija metoda negativnog gradijenta i lokalna konvergencija algoritma **MY**. Metodom negativnog gradijenta iterativni niz će se približiti ka rešenju, i u slučaju da je okolina rešenja dovoljno mala, prelaskom na algoritam **MY** postiže se brza lokalna konvergencija ka singularnom rešenju, što je numerički potvrđeno.

U cilju da se cena algoritma još više smanji, na formiran granični sistem primenjen je Brojdenov algoritam i na taj način je konstruisan algoritam **BY**. S obzirom na to da je regularnost graničnog sistema dokazana, superlinearna konvergencija algoritma **BY** je potvrđena teorijski i numerički. Međutim, početna iteracija, kao i u slučaju algoritma **MY**, mora biti veoma blizu rešenja, pa se predlaže kombinacija sa globalno konvergentnim algoritmom.

Literatura

- [1] Babajee, D.K.R., Dauhoo, M.Z., *An analysis of the properties of the variants of Newton's method with third order convergence*, Appl. Math. and Comput. 183, pp. 659-684, 2006
- [2] Berkant, S., Lars, E., *Krylov-type methods for tensor computations I*, Linear Algebra and its Applications 438, pp. 891-918, 2013
- [3] Bouaricha, A., Schnabel, R.B., *Tensor methods for nonlinear least squares problems*, SIAM J. Sci. Comput., Vol 21, pp. 1199-1221, 1999
- [4] Brent, R.P., *Some efficient algorithms for solving systems of nonlinear equations*, SIAM J. Numer Anal., Vol. 10, pp. 327-344, 1973
- [5] Broyden, G., *A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equations*, Math. Comp. 19, pp. 577-593, 1965
- [6] Buhmiler, S., *Kvazi-Njutnovi postupci za nelinearne komplementarne probleme*, magistrarska teza, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Novi Sad, 2005
- [7] Buhmiler, S., Krejić, N., *A new smoothing quasi-Newton method for nonlinear complementarity problems*, J. Comput. Appl. Math. Vol. 211, pp. 141-155, 2008
- [8] Buhmiler, S., Krejić, N., Lužanin, Z., *Finite difference bordering systems for singular nonlinear equations*, Technical report, 2013
- [9] Buhmiler, S., Krejić, N., Lužanin, Z., *Practical quasi-Newton algorithms for singular nonlinear systems*, Numerical Algorithms, Vol.55, pp. 481-502, 2010

- [10] Darvishi, M.T., Barati, A., *A third-order method to solve systems of nonlinear equations*, Appl. Math and Comput. 187, pp. 630-635, 2007
- [11] Decker, D.W., Keller, H.B., Kelley, C.T., *Convergence rates for Newton's method at singular points*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.20, No.2, pp. 296-314, 1983
- [12] Decker, D.W., Kelley, C.T., *Newton's method for singular points. I*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.17, No.1, pp. 66-70, 1980
- [13] Decker, D.W., Kelley, C.T., *Newton's method for singular points. II*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.17, No.3, pp. 465-471, 1980
- [14] Decker, D.W., Kelley, C.T., *Sublinear convergence of the chord method at singular points*, Numerische Mathematik, Vol.42, pp. 147-154, 1983
- [15] Decker, D.W., Kelley, C.T., *Broyden's method for a class of problems having singular jacobian at the root*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.22, No.3, pp. 566-574, 1985
- [16] Dembo, S.R., Eisenstat, C.S., Steihaug, T., *Inexact Newton method*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.19, No.2, pp. 400-408, 1982
- [17] Dennis Jr.,J.E., More, J.J., *A Characterization of Superlinear Convergence and Its Application to Quasi-Newton Methods*, Mathematics of Computation, Vol. 28, No. 126, pp. 549-560, 1974
- [18] Dennis Jr.,J.E., Schnabel, R.B., *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, SIAM Classics in Applied Mathematics, Philadelphia, 1996
- [19] Feng, D., Frank, P.D., Schnabel, R.B., *Local convergence analysis of tensor methods for nonlinear equations*, Math. Prog. 62, pp. 427-459, 1993
- [20] Frontini, M., Sormani, E., *Third-order methods for solving quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations*, Appl. Math. and Comput. 149, pp. 771-782, 2004
- [21] Griewank, A., *Analysis and modification of Newton's method at singularities*, Thesis, Australian National University, 1980

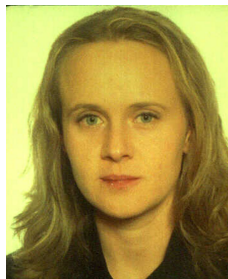
- [22] Griewank, A., Reddien, G.W., *Characterization and computation of generalized turning points*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.21, No.1, pp. 176-185, 1984
- [23] Griewank, A., *On solving nonlinear equations with simple singularities or nearly singular solutions*, SIAM Review, Vol.27, No. 4, pp. 537-563, 1985
- [24] Hauser, R., Nedić, J., *The continuous Newton-Raphson method can look ahead*, SIAM J. Optim. 15, pp. 915-925, 2005
- [25] Hauser, R., Nedić, J., *On the relationship between the convergence rates of iterative and continuous processes*, SIAM J. Optim. 18, pp. 52-64, 2007
- [26] Hueso, L.J., Martínez, E., Torregrosa, J.R., *Modified Newton's method for systems of nonlinear equations with singular jacobian*, J. Comput. and Appl. Math. 224, pp. 77-83, 2009
- [27] Janovsky, V., Seigre, R., *Qualitative analysis of Newton's flow*, SIAM J. Numer. Anal. 33, pp. 2068-2097, 1996
- [28] Keller, B.H., *geometrically isolated nonisolated solutions and their approximation*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 18, pp. 822-838, 1981
- [29] Kelley, C.T., *Iterative Methods for Linear and Nonlinear equations*, SIAM, Philadelphia, 1995
- [30] Kelley, C.T., Xue, Z.Q., *Inexact Newton methods for singular problems*, Optim. Meth. Soft. 2, pp.249-267, 1993
- [31] Kelley, C.T., Suresh, R. *A new acceleration method for Newton's method at singular points*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 20, No. 5, pp. 1001-1009, 1983
- [32] Kelley, C.T., *A Shamanskii-Like Acceleration Scheme for Nonlinear Equations at Singular Roots*, Mathematics of Computation, Vol. 47, No. 176, pp. 609-623, 1986
- [33] Lopes, V.L.R., Martínez, J.M., *Convergence properties of the column-updating method*, Optimization Methods and Software, Vol. 6, Is. 2, pp. 127-144, 1995

- [34] Lukšan, L., *Inexact Trust Region Method for Large Sparse Systems of Nonlinear Equations*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 81, 1994
- [35] Martínez, J.M., *A Quasi-Newton Method with modification of one column per iteration*, Computing, Vol. 33, pp. 353-362, 1984
- [36] de Mendonça, L.F., Pérez, R. Lopes, V.L.R., *Inverse q -Columns updates methods for solving nonlinear system of equations*, J.Comput. Appl. Math, Vol.158, pp. 317-337, 2003
- [37] Meyer, C.D., *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM , 2000
- [38] Nedzhibov, H.G., *An acceleration of iterative processes for solving nonlinear equation*, Applied Math. and Comput., Vol.168, pp. 320-332, 2005
- [39] Neuberger, J.W., *The continuous Newton's method, inverse functions and Nesh-Moser*, American Math. Monthly 114, pp. 432-437, 2007
- [40] Nie, P.Y., *A null space method for solving system of equations*, App. Math. Comp. 149, pp. 215-226, 2004
- [41] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970
- [42] Rabier, P.J., Reddien, G.W., *Characterization and computation of singular points with maximum rank deficiency*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 23, No 5, pp. 1040-1051, 1986
- [43] Reddien, G.W., *On Newton's method for singular problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol.15, No.5, pp. 993-996, 1978
- [44] Riaza, R., *Attraction domains of degenerate singular equilibria in quasilinear ODEs*, SIAM J. Numer. Anal. 36, pp. 678-690, 2004
- [45] Riaza, R., *On the local classification of smooth maps introduced by Newton's method*, J. Differential Equations 217, pp. 377-392, 2005
- [46] Riaza, R., *Local dynamics of quasilinear ODEs with folded singular equilibria*, Nonlinear analysis 68, pp. 2242-2249, 2008

- [47] Riaza, R., Zufiria, P.J., *Discretization of implicit ODEs for singular rootfinding problems*, J. Comput. Appl. Math. 140, pp. 695-712, 2002
- [48] Schröder, E., *Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, Math. Ann., V2, pp.317-365, 1980
- [49] Schweppe, F.C., *Recursive State Estimation: Unknown but bounded errors and system input*, IEEE Trans. Automat. Contr. Vol. AC-13, 1968
- [50] Schanbel, R.B., Frank, P.D., *Tensor methods for nonlinear equations*, SIAM J. Numer. Anal. 21, pp. 815-843, 1984
- [51] Shamanskii, V.E., *A modification of Newton's method*, Ukrain. Mat. Zh., Vol 19, pp. 133-138, 1967
- [52] Shen, Y.Q., *Computation of a multiple bifurcation point using one singular value decomposition nearby*, Dynam. Cont. Disc. Impul. Syst. 6, pp. 53-68, 1999
- [53] Spedicato, E., Greenstadt, J. *On some classes of Variationally Derived Quasi-Newton Methods for systems of Nonlinear Algebraic Equations*, Numer. Math., Vol. 29, 1978
- [54] Spedicato, E., Huang, Z., *Numerical Experience with Newton-like Methods for Nonlinear Algebraic Systems*, Computing 58, pp. 69-89, 1997
- [55] Thomas, S., *Sequential Estimation Techniques For Quasi-Newton Algorithms*, Ph.D. Thesis, TR 75-227, Cornell University, 1975
- [56] Yuan, L., Wan, Z., Zhang, J., Sun, B., *A filled function for solving nonlinear complementarity problem*, Journal of Industrial and Management Optimization (JIMO), Vol. 5, Issue 4, pp. 911-928, 2009
- [57] Yun-Qiu, S., Tjalling, J.Y., *Newton's method for singular nonlinear equations using approximate left and right nullspaces of the Jacobian*, Applied Numerical Mathematics 54, pp. 256-265, 2005
- [58] Wang, H., *New third-order method for solving systems of nonlinear equations*, Numer. Algor. 50, pp 271-282, 2009
- [59] Weber, H., Werner, W., *On the accurate determination of nonisolated solutions of nonlinear equations*, Computing 26, pp. 315-326, 1981

- [60] Zhu, R., Wu, D., Liu, Z., Wu, X., Guo, Y., *Aeroengine modules performance deterioration modeling and assessment*, IEEE, pp. 1626-1630, 2010

Kratka biografija



Rodjena sam 27.10.1971. godine u Somboru. Osnovnu i srednju školu završila sam u Novom Sadu.

Godine 1991. godine upisala sam se na Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Odsek za matematiku, smer diplomirani matematičar. Na četvrtoj godini studija sam, kao koautor sa Jovanom Roganovićem, nagrađena za nastavni temat pod nazivom "Hibridni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina". Diplomirala sam 1997. godine i upisala se na poslediplomske studije na Departmanu za matematiku, smer Numerička matematika, na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Magistarski rad pod naslovom "Kvazi-Njutnovi postupci za nelinearne komplementarne probleme" odbranila sam sam 2005. godine. Koautor sam sledećih radova :

1. Sandra Buhmiller, Nataša Krejić : A new smoothing quasi-Newton method for nolinear complementarity problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 211, 2008, 141-155.
2. Sandra Buhmiller, Nataša Krejić, Zorana Lužanin : Practical Quasi-Newton algorithms for singular nonlinear systems, *Numerical Algorithms* 55(4), 2010, 481-502.

Po završetku studija, 1997. godine, zaposlila sam se na Fakultetu tehničkih nauka kao asistent pripravnika gde i sada radim. Držala sam vežbe iz matematičkih predmeta na različitim odsecima, a od 2009. godine sam izabrana u zvanje predavača na Osnovnim strukovnim studijama Elektroenergetika - obnovljivi izvori energije.

U januaru 2011. godine Nastavno-naučno veće Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu je prihvatilo, a Senat Univerziteta u Novom Sadu je dao saglasnost na temu moje doktorske disertacije.

Udata sam i imam tri ćerke.

Novi Sad, 02.09.2013.

Sandra Buhmiller

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija

VR

Autor: Sandra Buhmiller

AU

Mentor: Prof. dr Nataša Krejić

MN

Naslov rada: Modifikacije Njutnovog postupka za rešavanje nelinearnih singularnih problema

MR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: s / e

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2013.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Institut za matematiku, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (5, 148, 60, 72, 10, 0, 0)

FO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph type

DT

Type of record: Printed text

TR

Contents Code: PhD thesis

CC

Author: Sandra Buhmiler

AU

Mentor: Prof. dr Nataša Krejić

MN

Title: Modification of the Newton method for nonlinear singular problems

TI

Language of text: Serbian

LT

Language of abstract: Serbian English

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2013.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: Novi Sad, Institute of Mathematics, Faculty of Science, Trg
Dositeja Obradovića 4

PP

Physical description: (5, 148, 66, 72, 10, 0, 0)

PD

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Numerička matematika

ND

Ključne reči: nelinearni sistemi, singularni problemi, kvazi-Njutnovi postupci, modifikacije Njutnovog postupka, lokalna konvergencija, granični sistemi, konačne razlike, metod negativnog gradijenta

PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

U doktorskoj disertaciji posmatrani su singularni nelinearni problemi. U prvom poglavlju predstavljene su oznake i osnovne definicije i teoreme koje se koriste u disertaciji. U drugom poglavlju prikazani su poznati postupci i njihovo ponašanje u slučajevima da je rešenje regularno ili singularno. Takođe su pokazane poznate modifikacije ovih postupaka kako bi se poboljšala konvergencija. Posebno su predstavljena četiri kvazi-Njutnova metoda i predložene njihove modifikacije u slučaju singularnosti rešenja. U trećem poglavlju predstavljeni su teorijski okvir pri definisanju graničnih sistema i neki poznati algoritmi za njihovo rešavanje i definisan je novi algoritam koji je podjednako efikasan ali jeftiniji za rad jer ne uključuje izračunavanje izvoda. Takođe, predložena je kombinacija definisanog algoritma sa metodom negativnog gradijenta, kao i algoritam koji predstavlja primenu poznatog algoritma na definisani granični sistem. U četvrtom poglavlju predstavljeni su numerički rezultati dobijeni primenom definisanih algoritama na relevantne primere i potvrđeni su teorijski dobijeni rezultati.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 21.12.2010.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: prof. dr Zorana Lužanin, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu

Član: prof. dr Nataša Krejić, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu

Član: dr Ljiljana Teofanov, docent FTN-a u Novom Sadu

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Numerical mathematics

SD

Key words: nonlinear singular problems, nonlinear systems, quasi-Newton algorithm, modifications of quasi-Newton methods, local convergence, bordering system finite differences, negative gradient method

SKW

UC:

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

AB

In this doctoral thesis nonlinear singular problems were observed. The first chapter presents basic definitions and theorems that are used in the thesis. The second chapter presents several methods that are commonly used and their behavior if the solution is regular or singular. Also, some known modifications to these methods are presented in order to improve convergence. In addition four quasi-Newton methods and their modifications in the case the singularity of the solution. The third chapter consists of the theoretical foundation for defining the bordered system, some known algorithms for solving them and new algorithm is defined to accelerate convergence to a singular solution. New algorithm is efficient but cheaper for the use since there is no derivative evaluations in it. It is presented synthesis of new algorithm with negative gradient method and using one of well known method on the bordered system as well. The fourth chapter presents the numerical results obtained by the defined algorithms on the relevant examples and theoretical results are confirmed.

Accepted by the Scientific Board on: 21.12.2010.

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: prof. dr Zorana Lužanin, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: prof. dr Nataša Krejić, Full Professor, Faculty of Science, Novi Sad

Member: dr Ljiljana Teofanov, Associate Professor, Faculty of Technical Science, Novi Sad