

**УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ**  
**Природно-математички факултет**

**ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**  
Неке класе планарних мрежа и интервално-вредносни расплинути скупови

<b>I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ</b>
<p>1. Датум и орган који је именовео комисију Одлуку о именовању комисије донело је Научно-наставно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду на 29. седници одржаној 29.12.2014. године</p> <p>2. Састав комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:</p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. др Розалија Мадарас Силађи, редовни професор ПМФ у Новом Саду, алгебра и математичка логика, 1.11.1999, – председник</li><li>2. др Андреја Тепавчевић, редовни професор ПМФ у Новом Саду, алгебра и математичка логика, 1.12.2003 – ментор</li><li>3. др Бранимир Шешеља, редовни професор ПМФ у Новом Саду, математика, 27.3.1992 – члан</li><li>4. др Вера Лазаревић, ванредни професор Техничког факултета у Чачку, математика, 11.07.2006. – члан</li><li>5. др Јелена Игњатовић, ванредни професор ПМФ у Нишу, информатика (рачунарске науке), 19.03.2012 – члан</li></ol>
<b>II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ</b>
<p>1. Име, име једног родитеља, презиме: Маријана, Марин, Горјанац Ранитовић</p> <p>2. Датум рођења, општина, држава: 02.10.1967, Сомбор, Србија</p> <p>3. Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, математика-наставни смер, професор математике</p> <p>4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија 2011, докторске академске студије математике</p> <p>5. Назив факултета, назив магистарске тезе, научна област и датум одбране: Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Мрежно вредносни интуиционистички расплинути скупови, Алгебра, 01.06.2005.</p> <p>6. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука: Математика</p>
<b>III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b> Неке класе планарних мрежа и интервално-вредносни расплинути скупови
<b>IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b> Навести кратак садржај са назнаком броја страна, поглавља, слика, шема, графикона и сл. Докторска дисертација има 144 стране А4 формата, 22 слике и 158 библиографских јединица. Рад се састоји из пет поглавља од којих прво садржи приказ познатих појмова и резултата, у другом поглављу су систематизовани постојећи резултати о мрежама интервала и изнети нови резултати, док су у трећем, четвртном и петом поглављу изложени оригинални резултати рада на постављеним проблемима. У првом поглављу су дате теоријске основе рада. Дефинисани су појмови и тврђења који су потребни за разраду резултата у дисертацији, као што су посети, мреже, слим мреже, оператор

затварања, унутрашњи оператор, Dilworth-ове теореме и неки еквивалентни облици ових теорема који су погоднији за примену у овом истраживању.

У другом поглављу су испитане и систематизоване особине мрежа интервала произвољне мреже  $L$ , са посебним освртом на особине мреже интервала мреже  $[0,1]$ .

У трећем поглављу су дефинисане нове релације на мрежи и испитана њихова својства. У вези са тим релацијама дефинисане су или- између равне мреже и њима дуалне, и- између равне мреже.

У четвртом поглављу су, после прегледа познатих резултата за мрежно-вредносне расплинуте скупове, решени проблеми синтезе за мрежно-вредносне расплинуте скупове за задату мрежу. Такође су решени проблеми синтезе за интервално-вредносне расплинуте скупове за неке од изабраних мрежа интервала. У решавању проблема синтезе за интервално-вредносне расплинуте скупове коришћени су резултати другог и трећег поглавља.

У петом поглављу су неки од резултата изложених у четвртом поглављу примењени на решавање проблема синтезе за интервално-вредносне интуиционистичке расплинуте скупове и представљене су могућности примене.

У наставку се наводе делови докторске дисертације:

## **Предговор**

### **Увод**

#### **Поглавље 1. Мреже (стр. 1-18.)**

- 1.1 Основни појмови и ознаке
- 1.2 Оператор затварања и унутрашњи оператор на мрежи
- 1.3 Dilworth-ове и њима еквивалентне теореме
- 1.4 Слим мреже

#### **Поглавље 2. Мреже интервала (стр. 19-48.)**

- 2.1 Интервали на мрежи и поредак по компонентама
- 2.2 Интервали на мрежи и непрецизни интервални поредак
- 2.3 Интервали на мрежи и строги интервални поредак
- 2.4 Интервали на мрежи и лексикографски интервални поредак

#### **Поглавље 3. Између равне мреже (стр. 49-90.)**

- 3.1. Релације „између“ на мрежама
- 3.2. или- између равне мреже и и- између равне мреже
- 3.3. Коначне између равне мреже и дуално-слим мреже

#### **Поглавље 4. Теореме синтезе за интервално-вредносне расплинуте скупове (стр. 91-120.)**

- 4.1 Ниво скупови
- 4.2 Теореме синтезе за мрежно-вредносне расплинуте скупове
- 4.3 Интервално-вредносни расплинути скупови
- 4.4 Теореме синтезе за дату мрежу  $I_w$  ( $\{0,1\}$ )
- 4.5 Теореме синтезе за дату мрежу  $I_i$  ( $\{0,1\}$ )
- 4.6 Теореме синтезе за дату мрежу  $I_l$  ( $\{0,1\}$ )
- 4.7 Теореме синтезе за мрежне интервално-вредносне расплинуте скупове

#### **Поглавље 5. Примене и даљи правци истраживања (стр. 121-132.)**

- 5.1 Интервално-вредносни интуиционистички расплинути скупови
- 5.2 Могућности примене
- 5.3 Закључак, даљи правци истраживања и отворени проблеми

#### **Литература (стр. 133-144.)**

## **V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:**

### **Увод**

У уводном делу је истакнут значај и широка примена интервално-вредносних расплинутих скупова, као и значај ниво скупова у теорији расплинутих скупова. Дефинисан је проблем истраживања и дат је преглед сродних проблема који су до сада решавани. Радови Yu Shi-a, Wenyi Zeng-a, Li Han-Xing-a, Yuan-a. Li-a i Lee-a, у којима су такође посматрани ниво скупови и решаван проблем синтезе за интервално-вредносне расплинуте скупове. Поменути аутори су започели нови правац у дефинисању ниво скупова и проблем синтезе интервално-вредносних расплинутих скупова решавају у складу са тако дефинисаним ниво скуповима. На тај начин резултати ових аутора и посматрани проблем нису сродни проблему изучаваном у овој докторској дисертацији, али указују на актуелност и значај изучаваног проблема.

У овом делу је изложен и кратак преглед рада.

### **Поглавље 1. Мреже**

У овом поглављу дефинисани су основни појмови и уведене ознаке за посете и мреже које ће даље бити коришћене у раду. Такође су наведена тврђења потребна за разраду резултата у дисертацији. Међу тим тврђењима су теореме Birkhoff-a, Dilworth-a, и још неких других аутора, као и нека тврђења везана за унутрашњи оператор и оператор затварања. За мреже које су дефинисане у овој докторској дисертацији доказано је да су у свом коначном случају слим, односно дуално-слим мреже, па су на крају овог поглавља су изложени основни појмови и тврђења везана за слим мреже, које су последњих година интензивно изучаване. Међу ауторима који се баве истраживањима у овој области налазе се Grätzer, Knapp, Czedli i Schmidt.

### **Поглавље 2. Мреже интервала**

У другом поглављу су испитана и систематизирана својства мрежа интервала произвољне мреже  $L$ . Ово је било неопходно да би се могла одредити својства мрежа које се могу инјективно пресликати у дате мреже интервала, тако да су очувани сви инфимуми или сви супремуми.

Након прегледа поредака који се у математичкој литератури користе за уређење скупова интервала, издвојена су четири поретка: поредак по компонентама, непрецизни поредак, строги и лексикографски поредак, који су на скупу интервала мрежни пореци. Поред тога, ови пореци се користе у новијим радовима везаним за расплинуте скупове и њихова уопштења. Значај резултата у овом поглављу се огледа у систематизацији постојећих знања везаних за својства посматраних мрежа интервала, која се спорадично помињу у радовима у којима се ове мреже користе. Поред тога су својства ових мрежа детаљније испитана, према потребама истраживања у дисертацији. Поредак по компонентама и непрецизни поредак су мрежни пореци на директном производу произвољних мрежа. Доказано је да строги и лексикографски поредак нису мрежни пореци у општем случају. Строги поредак је мрежни само на скупу интервала произвољне мреже, док је лексикографски поредак мрежни поредак на директном производу мрежа  $L_1$  и  $L_2$  ако и само ако је мрежа  $L_1$  линеарно уређена или је мрежа  $L_2$  ограничена. Доказано је да је скуп интервала мреже  $L$  мрежа у односу на лексикографски поредак ако мрежа  $L$  има највећи елемент. Изнета својства посматраних мрежа интервала су илустрована примерима.

### **Поглавље 3. Између равне мреже**

У трећем поглављу је оригиналан допринос докторске дисертације у теорији мрежа. Прво су дефинисане нове релације или- између и и- између на мрежи. Неопходност постављених услова илустрована је примером. Преко својстава ново уведених релација дата је још једна карактеризација линеарно уређених, модуларних и дистрибутивних мрежа. Дефинисане су или- између равне и њима дуалне, и- између равне мреже. Према овој дефиницији, мреже ширине 1 и 2 су између равне мреже – мреже које су или- и и- између равне. Доказано је да су мреже које се добијају као директан производ две линеарно уређене мреже дистрибутивне између равне мреже. Такође је доказано да је мрежа интервала линеарно уређене мреже са најмањим елементом 0 и највећим елементом 1, уређена непрецизним поретком, или- између равна мрежа и да није и- између равна мрежа. Једно од важних својстава или- између равних мрежа је да сваки анти-ланац или- између равне мреже има највише два и- неразложива елемента. Дуално својство важи за и- између равне мреже.

Доказано је да или- подмрежа или- између равне мреже такође или- између равна мрежа, па је и подмрежа или- између равне мреже такође или- између равна мрежа. Примером је доказано да Булова мрежа са 8 елемената није ни или- између равна ни и- између равна мрежа. На елементима неког анти-ланца или- између равне мреже, за дати елемент  $a$ , дефинисана је релација еквиваленције „ $\sim$  је са исте стране елемента  $a$ “. Уочено својство ове релације за коначне анти-ланце или- између равне мреже уопштено је за бесконачне анти-ланце и на тај начин су дефинисани ограничени анти-ланци. Један од важних појмова уведених у овом поглављу је скуп  $a, b$ - неупоредивих елемената или- између равне мреже, при чему су  $a$  и  $b$  границе неког максималног ограниченог анти-ланца дате мреже. На скупу ових елемената је дефинисана нова релација поретка. Даље су испитана својства датог посета, односно скупа  $a, b$ - неупоредивих елемената са уведену релацијом поретка. Међу најважнијим резултатима овог поглавља је карактеризација дуално коначно просторних и коначно просторних мрежа, као и карактеризација дуално- коначно просторних или- између равних мрежа и коначно просторних и- између равних мрежа. Такође је одређена класа мрежа које се могу инјективно пресликати у директан производ  $n$  комплетних ланаца тако да су очувани супремуми и дуално, одређена је класа мрежа које се могу инјективно пресликати у директан производ  $n$  комплетних ланаца тако да су очувани инфимуми. На крају овог поглавља је доказано да су и-

између равне мреже у свом коначном случају еквивалентне слим мрежама. На тај начин је створена могућност да се уопште многи резултати у вези са слим и дуално-слим мрежама, који су доказани само у коначном случају.

#### **Поглавље 4. Теореме синтезе за интервално-вредносне расплинуте скупове**

У првом делу четвртог поглавља дат је кратак преглед дефиниција и познатих тврђења везаних за ниво скупове потребних за формулисање теорема синтезе за мрежно-вредносне расплинуте скупове, па тиме и за формулисање теорема синтезе за интервално-вредносне расплинуте скупове. Због потребе решавања сродног проблема за интервално-вредносне интуиционистичке расплинуте скупове, дефинисана су два типа ниво скупова, чиме се такође прате савремени трендови у теорији расплинутих скупова.

Оригинални резултати се односе на доказане теореме синтезе за мрежно вредносне-расплинуте скупове, прво за произвољну мрежу  $L$ , а затим и за специјалне мреже интервала које су испитане у другом поглављу.

Одређена класа дуално- коначно просторних или- између равних мрежа је класа мрежа која може бити фамилија ниво скупова неког интервално-вредносног расплинутог скупа, за неке од испитаних мрежа интервала, па су у формулисању теорема синтезе за интервално-вредносне расплинуте скупове примењени резултати изнети у трећем поглављу. Решење проблема синтезе за мрежно-вредносне расплинуте скупове не искључује потребу за решавањем специјалних случајева, дакле за специфично одређену мрежу, као што су, на пример, мреже интервала. За специјалне случајеве могу се добити конструктивна решења, која даље могу имати велики значај у применама расплинутих скупова и њихових уопштења. Према томе, решен проблем синтезе за мрежно-вредносне расплинуте скупове је од фундаменталног теоријског значења за решавање проблема синтезе сродног типа и директно се надовезује на решење проблема синтезе за мрежно-вредносне расплинуте скупове другог типа које су доказане 2003. године. За решене проблеме синтезе за интервално-вредносне расплинуте скупове, на основу резултата објављених у новијим радовима, очекује се да ће имати значај у применама, пре свега у математичкој морфологији и обради слике.

#### **Поглавље 5. Примене и даљи правци истраживања**

Постигнути резултати су показали теоријску примену у решавању сродног проблема синтезе за мрежно-вредносне и интервално вредносне интуиционистичке расплинуте скупове, по дефиницији Atanasov-а. Како је већ раније доказано да су посматрани мрежно-вредносни интуиционистички расплинути скупови најопштијег типа, са становишта ниво скупова, дато решење има сличан теоријски значај за мрежно-вредносне интуиционистичке расплинуте скупове, као решење сродног проблема за мрежно-вредносне расплинуте скупове. У овом поглављу је указано и на могуће примене добијених резултата. У закључку су сумирани резултати, указано је на проблеме који су остали отворени и даље правце истраживања.

Списак библиографских јединица указује на коришћење адекватне и актуелне литературе, али и на актуелност изучаваног проблема.

### **VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ**

Таксативно навести називе радова, где и када су објављени. Прво навести најмање један рад објављен или прихваћен за објављивање у часопису са ISI листе односно са листе министарства надлежног за науку када су у питању друштвено-хуманистичке науке или радове који могу заменити овај услов до 01. јануара 2012. године. У случају радова прихваћених за објављивање, таксативно навести називе радова, где и када ће бити објављени и приложити потврду о томе.

1. M. Gorjanac Ranitović, A. Tepavčević, *General form of lattice valued fuzzy set under the cutworthy approach*, Fuzzy Sets and Systems, 158(11), 2007, 1213-1216, (M21).
2. A. Tepavčević, M. Gorjanac Ranitović, *General form of lattice valued intuitionistic fuzzy sets*, Computational Intelligence, Theory and Applications, International Conference 9th Fuzzy days 2006 in Dortmund, Proceedings, Springer Berlin Heidelberg, 2006, 375-381, (M33).
3. M. Gorjanac Ranitović, A. Petojević, *Lattice representations of interval-valued fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, 236, 2014, 50-57, (M21).

## VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Као истраживачки проблеми постављени су следећи проблеми:

- 1) Нека је мрежа интервала, која је мрежно уређена на неки од четири различита начина, дата комплетна мрежа. Одредити потребне и довољне услове да унапред задата колекција подскупова непразног скупа  $X$  буде колекција горњих, односно доњих, ниво скупова неког интервално-вредносног расплинутог скупа.
- 2) Издвојити класу мрежа које се могу потопити у директан производ два комплетна ланца тако да су очувани супремуми (или да су очувани инфимуми).

Решавањем другог проблема дат је допринос у теорији мрежа. За ново дефинисане мреже испитана су њихова својства и успостављена веза са познатим мрежама – слим мрежама. Ново дефинисане мреже су општије од раније дефинисаних слим мрежа, односно оне су њихово уопштење у бесконачном случају у класи просторних и дуално просторних мрежа. Истраживања везана за слим мреже су врло интезивна последњих година, па то потврђује актуелност добијених резултата који омогућавају уопштење резултата за слим мреже (које су коначне) на просторне мреже (бесконачни случај).

Познато је да су коначне дистрибутивне мреже чија је ширина посета или- неразложивих елемената  $n$ , до на изоморфизам подмреже директног производа  $n$  ланаца (Dilworth). Полазећи од овог резултата решен је општији проблем од постављеног проблема 2). Класу комплетних мрежа које се могу инјективно прсликати у директан производ  $n$  комплетних ланаца тако да су очувани супремуми чине дуално коначно просторне мреже са посетом и- неразложивих елемената ширине највише  $n$ . Дуално, класу комплетних мрежа које се могу инјективно прсликати у директан производ  $n$  комплетних ланаца тако да су очувани инфимуми чине коначно просторне мреже са посетом или- неразложивих елемената ширине највише  $n$ . Последица тога је да класу комплетних мрежа које се могу инјективно прсликати у директан производ два комплетна ланца тако да су очувани супремуми чине дуално коначно просторне или- између равне мреже. Дуално, класу комплетних мрежа које се могу инјективно прсликати у директан производ два комплетна ланца тако да су очувани инфимуми чине коначно просторне и- између равне мреже.

Допринос у теорији расплинутих скупова се огледа у решавању централно постављеног проблема 1) и примени добијених резултата на решавање сродног проблема за мрежно-вредносне интуиционистичке расплинуте скупове.

И у овом случају су прво решени општији проблеми за мрежно-вредносне расплинуте скупове, који су били полазна тачка за решавање постављеног проблема за интервално-вредносне расплинуте скупове. Премда су интервално-вредносни расплинути скупови специјалан случај мрежно-вредносних расплинутих скупова, показало се да је одређивање специфичних услова за одређивање интервално-вредносних расплинутих скупова из дате фамилије нивоа, за задату мрежу интервала, комплексан проблем. Тако је за мрежу интервала јединичног интервала реалних бројева  $[0,1]$  са уређењем по компонентама задати проблем потпуно решен. За мрежу интервала јединичног интервала реалних бројева  $[0,1]$  са непрецизним поретком одређен је потребан и довољан услов да унапред задата фамилија подскупова непразног скупа  $X$  буде фамилија доњих ниво скупова неког интервално-вредносног расплинутог скупа. За унапред задату фамилију  $\mathcal{F}$  подскупова непразног скупа  $X$  одређени су довољни услови за постојање интервално-вредносног расплинутог скупа за који је фамилија  $\mathcal{F}$  фамилија његових горњих ниво скупова.

За мрежу интервала јединичног интервала реалних бројева  $[0,1]$  са лексикографским поретком одређени су довољни услови да дата фамилија подскупова непразног скупа  $X$  буде фамилија доњих ниво скупова и одређени су довољни услови да дата фамилија подскупова непразног скупа  $X$  буде фамилија горњих ниво скупова неког интервално-вредносног расплинутог скупа.

За мрежу интервала јединичног интервала реалних бројева  $[0,1]$  са строгим поретком постављени проблем није решаван пошто излази из оквира овог рада.

<b>VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА</b> Експлицитно навести позитивну или негативну оцену начина приказа и тумачења резултата истраживања.
Комисија позитивно оцењује начин приказа и тумачење резултата истраживања у овој докторској дисертацији. Резултати су приказани јасно, стандардним методама (лема, тврђење, теорема), сви оригинални резултати су и доказани. Дат је и изван број примера који илуструју резултате.
<b>IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ:</b> Експлицитно навести да ли дисертација јесте или није написана у складу са наведеним образложењем, као и да ли она садржи или не садржи све битне елементе. Дати јасне, прецизне и концизне одговоре на 3. и 4. питање:
1. Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме <b>Дисертација је написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме.</b>
2. Да ли дисертација садржи све битне елементе <b>Дисертација садржи све битне елементе.</b>
3. По чему је дисертација оригиналан допринос науци <b>Дисертација представља оригинални допринос науци по томе што представља оригинални наставак истраживања у областима које су актуелне у свету. Доказано је више нових и значајних тврђења и теорема. Уведени су и истражени нови значајни појмови, неки познати резултати су уопштени и отворени су нови правци истраживања.</b>
4. Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања <b>Дисертација нема уочених недостатака.</b>
<b>X ПРЕДЛОГ:</b>
На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже:
<b>да се докторска дисертација прихвати, а кандидату одобри одбрана.</b>

НАВЕСТИ ИМЕ И ЗВАЊЕ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ  
ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

1. Председник:

др Розалија Мадарас Силађи  
редовни професор, ПМФ у Новом Саду

2. Ментор:

др Андреја Тепавчевић  
редовни професор, ПМФ у Новом Саду

3. Члан:

др Бранимир Шешеља  
редовни професор, ПМФ у Новом Саду

4. Члан:

др Вера Лазаревић  
ванредни професор, Технички факултет у Чачку

5. Члан:

др Јелена Игњатовић  
ванредни професор ПМФ у Нишу

Нови Сад, 8.1.2014.

НАПОМЕНА: Члан комисије који не жели да потпише извештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије, дужан је да унесе у извештај образложење, односно разлоге због којих не жели да потпише извештај.