UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

NEKE KLASE PLANARNIH MREŽA I INTERVALNO-VREDNOSNI RASPLINUTI SKUPOVI

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor: Prof. dr Andreja Tepavčević mr Marijana Gorjanac Ranitović

Novi Sad, 2014. godine

Predgovor

Istraživanje čiji su rezultati izloženi u ovoj doktorskoj disertaciji su nastavak istraživanja započetih u okviru rada na magistarskoj tezi.

Kao rezultati rada na magistarskoj tezi, pod mentorstvom prof dr Andreje Tepavčević, formulisane su i dokazane teoreme sinteze za mrežno vrednosne rasplinute i za mrežno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove. Kasnije je dokazano [144] da su mrežno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi, koji su proučavani u okviru magistarske teze, najopštiji koncept mrežno-vrednosnih intuicionističkih rasplinutih skupova sa stanovišta nivo skupova.

Rezultati dobijeni u okviru rada na magistarskoj tezi su primenjeni u radu na doktorskoj disertaciji. Zbog široke primene intervalno-vrednosnih rasplinutih skupova, bilo je potrebno rešiti problem sinteze i za ovaj, specijalan slučaj, mrežno-vrednosnih rasplinutih skupova. Pošto se u toku rešavanja problema sinteze za intuicionističke rasplinute skupove pojavila potreba za definisanjem novog tipa nivo skupova - donjih nivo skupova, u nastavku istraživanja u okviru ove doktorske disertacije prednost je data donjim nivo skupovima. Time je omogućeno rešavanje problema sinteze za intervalno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove. Sudeći prema broju radova vezanih za intuicionističke rasplinute i intervalno-vrednosne rasplinute skupove [1, 3, 14, 22, 23, 24, 25, 26, 37, 44, 45, 42, 41, 40, 39, 38, 55, 56, 57, 58, 59, 126, 127, 145], smatramo da će intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi dobijati sve veći značaj.

U ovom istraživanju se ponovo potvrdila dobro poznata činjenica, da nivo skupovi predstavljaju vezu između "klasične" matematike i teorije rasplinutih skupova. Tako su ostvareni interesantni rezultati u teoriji mreža. Za definisane mreže je utvrđeno da su, u svom konačnom slučaju, slim, odnosno dualno-slim mreže, za koje, poslednjih godina, postoji veliki interes u određenim naučnim krugovima [32, 31, 30, 29, 28, 27, 68].

Posebnu zahvalnost dugujem svom mentoru, **prof. dr Andreji Tepavčević** na ukazanoj časti i privilegiji da sa njom sarađujem. Takođe joj se zahvaljujem za strpljenje i dane koje je posvetila našem zajedničkom radu. Njeni saveti i instrukcije će mi biti dragoceni u daljem radu.

Zahvaljujem se članovima komisije **prof. dr Branimiru Šešelji**, koji je pažljivo pročitao ponuđeni tekst, ukazao na greške i svojim sugestijama i savetima doprineo značajnom poboljšanju kvaliteta konačne verzije doktorske disertacije.
Hvala **prof. dr Rozaliji Madaras Silađi** na vremenu posvećenom detaljnom čitanju

doktorske disertacije i predlozima koji su doprineli kvalitetu rada.
Zahvaljujem se profesorkama **dr Veri Lazarević** i **dr Jeleni Ignjatović** na ukazanim propustima i konstruktivnim savetima.

Zahvaljujem se kolegama **prof. dr Aleksandru Petojeviću** i **Mariji Bošnjak** na prijateljstvu i podršci u životu i u toku izrade ovog rada.

Najveću zahvalnost dugujem **svojoj porodici** na beskrajnom strpljenju, bezrezervnoj podršci i neizmernoj ljubavi.

mr Marijana Gorjanac Ranitović

Sombor, 28. novembar 2014.

Sadržaj

Uvod

Od kada je L. A. Zadeh 1965. godine objavio prvi rad [153] u kome definiše rasplinute (*fuzzy*) skupove, ovaj pojam je doživeo brojna uopštenja. Jedno od tih uopštenja predstavljaju intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi [154, 155, 124] - rasplinuti skupovi kod kojih je kodomen funkcije pripadnosti skup svih zatvorenih podintervala jediničnog intervala realnih brojeva $[0, 1]$. Na taj način se intervalno-vrednosnim skupovima može izraziti ne samo nepreciznost, već i neizvesnost, nedostatak znanja, nekompletnost informacija, sumnja u tačnost, koje nas onemogućavaju da precizno odredimo vrednost funkcije pripadanja.

U realnosti je vrlo česta situacija u kojoj je potrebno uzeti u obzir obe komponente - nepreciznost i neizvesnost, pa je to jedan od razloga široke primene intervalno-vrednosnih rasplinuti skupova [48, 56, 15, 34, 7]. Sambuc [124] definiše skupove koji su ekvivalentni intervalno-vrednosnim rasplinutim skupovima da bi ih primenio u medicini kao podršku u dijagnostici patologije štitne žlezde. Intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi se primenjuju u teoriji odlučivosti (*decision making*) [54], aproksimativnom zaključivanju (*approximate reasoning*) [12, 2, 13, 20, 149, 66], obradi slike (*image processing*) [147, 11, 107, 5]. Posebno treba istaći radove vezane za primenu intervalno-vrednosnih rasplinutih skupova u matematičkoj morfologiji [17, 126, 105], kao i radove u kojima se koriste koncepti sa kojima radimo - kompletne mreže [120, 106, 146, 57, 58, 59, 84] i nivo skupovi [100]. Pored ovde navedenih radova detaljnije i opširnije informacije o intervalno-vrednosnim rasplinutim skupovima mogu se naći pre svega u radu [14] i tamo citiranim radovima.

Nivo skup (*cut set*) je jedan od osnovnih pojmova u teoriji rasplinuti skupova. Nivo skupovi predstavljaju vezu izmedju klasičnih skupova (*crisp sets*) i rasplinutih skupova. Mnoge osobine rasplinutih skupova se mogu povezati sa rezultatima "klasične" teorije skupova zahvaljujući nivo skupovima [132, 137, 138], odnosno zahvaljujući takozvanom *"cutworthy"* svojstvu [94]. To je moguće, pre svega, zbog toga što se rasplinuti skupovi na jedinstven način mogu predstaviti pomoću familije svih njihovih nivo skupova (teoreme dekompozicije se mogu videti na primer u [94]).
Drugi problem povezan sa nivo skupovima je problem određivanja rasplinutog skupa čiji bi svi nivo skupovi bili unapred zadati. Ovim problemom, za "klasične" rasplinute skupove su se bavili Negoita i Ralescu [109, 110, 119], a u novije vreme Jaballah i Saidi [78, 122, 123]. Pošto su rasplinuti skupovi doživeli brojna uopštenja, i ovi problemi su posmatrani na tim uopštenjima. Tako su, na primer, za mrežno-vrednosne (kodomen funkcije pripadnosti je

kompletna mreža) i za poset-vrednosne (kodomen funkcije pripadnosti je poset) rasplinute skupove ispitani sledeći problemi:

> *Problem* 1: Pod kojim uslovima dva rasplinuta skupa $\mu : X \to L$ i $\nu : X \to L$ imaju iste familije nivo skupova, pri čemu je L data kompletna mreža?
> Dati problem je postavljen i delimično rešen u [104], a u generalnom (beskonačnom) slučaju rešen je u [136] i za poset-vrednosne rasplinute skupove u [135] (u ovom slučaju se umesto kompletne mreže L posmatra poset P).
>
> *Problem* 2: Odrediti uslove da za kolekciju $\mathcal{F}$ podskupova skupa X postoji rasplinuti skup, takav da je $\mathcal{F}$ njegova kolekcija nivoa.
> Problem je bio poznat u literaturi u radovima [95, 118], da bi u generalnom obliku bio rešen u [139] za poset-vrednosne rasplinute skupove i u [137] za mrežno vrednosne rasplinute skupove.
>
> *Problem* 3: Neka je L data kompletna mreža. Odrediti uslove pod kojima je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$ kolekcija nivoa rasplinutog skupa $\mu : X \to L$.
> Ovaj problem je rešen u [95] i u [64], ali na različite načine. Sličan problem, postavljen za poset vrednosne rasplinute skupove, odnosno ako se umesto kompletne mreže L posmatra poset P, rešen je u [131].

Koncept nivo skupa za intervalno-vrednosne rasplinute skupove uveli su Wenyi Zeng i Yu Shi [157]. Oni su za intervalno-vrednosne rasplinute skupove definisali nivo skupove na osam načina, ispitali su njihova svojstva i predložili tri teoreme dekompozicije zasnovane na ovim nivo skupovima. U sledećem koraku Zeng, Shi i Li Han-Xing [158] su definisali uopštene nivo skupove koje su nazvali $1-1$ tip i $1-2$ tip intervalno-vrednosnih ugnježdenih (*interval-valued nested*) rasplinutih skupova. Predložili su i dve teoreme reprezentacije sa ovim nivo skupovima. S druge strane, Yuan, Li i Lee [151] pokreću novi pravac u istraživanju nivo skupova. Za intervalno-vrednosne rasplinute skupove definišu nivo skupove kao tri-vrednosne rasplinute skupove i za njih daju teoreme reprezentacije.

Ipak, u pomenutim radovima nije dat odgovor na pitanje: *Pod kojim uslovima možemo rekonstruisati intervalno-vrednosni rasplinuti skup iz poznate familije nivo skupova.* Preciznije, problem našeg istraživanja je postavljen tako da su u centru interesovanja svojstva familije (mreže) podskupova datog nepraznog rasplinutog skupa nad univerzumom X. Određeni intervalno-vrednosni rasplinuti skup mora biti takav da je njegova familija nivo skupova (skupovno) jednaka familiji podskupova skupa X od koje smo krenuli. Dakle, naš pristup istraživanju je u osnovi drugačiji od pomenutih istraživanja.

U prvom poglavlju su date teorijske osnove rada. U prvom odeljku su navedeni pojmovi vezani za posete i mreže, oznake koje će dalje biti korišćene u radu i tvrđenja o svojstvima mreža, koja su korišćena u istraživanju. U rešavanju postavljenog problema važnu ulogu igraju operator zatvaranja i unutrašnji operator, pa su njihove definicije i svojstva izložene u drugom odeljku. Posebna pažnja je posvećena dobro poznatim Dilworth-ovim teoremama u trećem odeljku, u kome su dati i neki ekvivalentni oblici ovih tvrđenja, koji su pogodniji za primenu u ovom istraživanju. Na kraju ovog poglavlja nalazi se kratak osvrt na slim mreže.

U drugom poglavlju su ispitane i sistematizovane osobine mreža intervala proizvoljne mreže L, sa posebnim osvrtom na osobine mreža intervala mreže $[0, 1]$. Različite mreže intervala se dobijaju definisanjem različitih poredaka i operacija na skupu intervala neke mreže L. Detaljno ispitana i sistematizovana svojstva ovakvih mreža postoje samo za intervale uređene nepreciznim poretkom (skupovna inkluzija) [49]. Intervali na mreži uređeni poretkom po komponentama (slabi poredak) vrlo se često koriste u radovima u kojima se koriste intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi [82, 77, 115, 100, 52, 34, 35]. Intervali na mreži uređeni leksikografskim poretkom takođe se koriste u teoriji rasplinutih skupova, naročito u radovima vezanim za bipolarne rasplinute skupove [17, 47]. Elementarna svojstva ovih mreža intervala, koja se u ovim radovima navode, ovde su dopunjena i proširena. Intervali na mreži uređeni relacijom strogog poretka takođe čine mrežu, a svojstva ove mreže, prema našim saznanjima, do sada nisu objavljena.

Treće, četvrto i peto poglavlje su originalni delovi rada. U trećem poglavlju su definisane nove relacije na mreži i ispitana njihova svojstva. Zatim su u vezi sa tim relacijama definisane ili- između ravne mreže i njima dualne, i- između ravne mreže. Dalje su ispitana osnovna svojstva ovih mreža, definisana i karakterisana nova relacija poretka na specijalnim skupovima neuporedivih elemenata i proučavane podmreže ili- generisane tim skupovima. Ključni rezultati ovog poglavlja su karakterizacija kompletnih konačno prostornih i dualno konačno prostornih mreža, kao i izdvajanje klase mreža koje se mogu injektivno preslikati u direktan proizvod n kompletnih lanaca tako da su očuvani supremumi i dualno, izdvajanje klase mreža koje se mogu injektivno preslikati u direktan proizvod n kompletnih lanaca tako da su očuvani infimumi.
U nastavku je pokazano da su novouvedeni tipovi mreža u konačnom slučaju ekvivalentni sa dualno-slim, odnosno slim mrežama. Ova činjenica ukazuje na mogućnost da se uopšte mnogi rezultati u vezi sa slim i dualno-slim mrežama, koji su dokazani samo u konačnom slučaju.

U četvrtom poglavlju su, posle pregleda teorema sinteze za mrežno-vrednosne rasplinute skupove, rešeni problemi sinteze za mrežno-vrednosne rasplinute skupove za zadatu mrežu. Zatim su data rešenja za postavljeni problem sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove sa unapred datim mrežama intervala.

U petom poglavlju su neki od rezultata izloženih u četvrtom poglavlju primenjeni na rešavanje problema sinteze za intervalno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove. Takođe je dat kratak osvrt na moguće primene rezultata istraživanja iznetih u ovom radu. Na kraju ovog poglavlja su izneti ključni doprinosi ovog istraživanja, ukazano je na otvorene probleme i smernice za dalja istraživanja.

Glava 1

Mreže

1.1 Osnovni pojmovi i oznake

Uređeni par $(P, \leq)$ nepraznog skupa P i relacije poretka, (refleksivne, antisimetrične i tranzitivne relacije), je parcijalno uređeni skup ili kraće - **poset**.

Ako je data relacija poretka $\leq$ na skupu P, onda je i inverzna relacija, u oznaci $\geq$, takođe relacija poretka na P i zovemo je **dualni poredak**, a uređeni skup $(P, \geq)$ je **dualan** uređenom skupu $(P, \leq)$.

Na posetu koristimo i sledeće relacije: $x < y$ ako i samo ako je $x \leq y$ i $x \neq y$ (i kažemo da je ”x manje od y”), $x > y$ ako i samo ako je $y < x$ (što čitamo ”x je veće od y”), $x \parallel y$ ako i samo ako je $x \nleq y$ i $y \nleq x$ (i kažemo da su ”x i y neuporedivi”), $x \nparallel y$ ako i samo ako je $x \leq y$ i $y \leq x$ (i kažemo da su ”x i y uporedivi”).

Relacija pokrivanja, u oznaci $\prec$, na posetu se definiše na sledeći način: ako za dva elementa x, y poseta P važi $x < y$ i ne postoji $z \in P$ takav da je $x < z < y$, kažemo da je x **pokriveno** sa y ili da je x **neposredni prethodnik** y.

Relaciju $\preceq$ definišemo na sledeći način: $x \preceq y$ ako i samo ako $x \prec y$ ili $x = y$, za svako $x, y \in P$.

Neka je Q podskup poseta P uređenog relacijom $\leq$. Tada je i Q uređen relacijom poretka koju nasleđuje od P: za elemente $x, y \in Q$ važi $x \leq y$ u Q ako i samo ako je $x \leq y$ u P. Kažemo i da je poredak na Q **indukovan** poretkom iz P ili da je **restrikcija** poretka iz P na Q

Poset u kome su svaka dva elementa uporediva je **lanac** (linearno ili totalno uređen skup). Lanac je dužine n ako ima $n+1$ element (i n grana). Sa $\mathbf{n}$ obeležavamo konačan lanac sa n elemenata (čija dužina je $n-1$), a beskonačne lance obeležavamo velikim slovima $A, B, C, \ldots$. Lanac je i podskup poseta P čiji su svi elementi uporedivi, a najveća dužina među dužinama svih lanaca poseta P (ako postoji) je **dužina tog poseta**, u oznaci $l(P)$.

Tada kažemo da je poset P **konačne dužine**.

Anti-lanac je poset, ili njegov podskup, u kome važi: $x \leq y$ samo ako je $x = y$, odnosno anti-lanac je poset (podskup poseta) koji sadrži samo neuporedive elemente. Anti-lanac od n elemenata obeležavamo sa $\bar{\mathbf{n}}$. Beskonačne anti-lance obeležavamo sa: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.... Broj elemenata u anti-lancu je njegova **širina**, ako je konačan, u suprotnom je njegova širina beskonačna. Najveća širina među svim širinama anti-lanaca u posetu P, ako postoji, je **širina** poseta i označavamo je $w(P)$. U suprotnom je poset **beskonačne širine**.

Na skupu anti-lanaca poseta $(P, \leq)$ poredak uvodimo na sledeći način:
$\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2$ akko za svaki element $x \in \mathcal{A}_1$ postoji element $y \in \mathcal{A}_2$ takav da je $x \leq y$, pri čemu su $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$ proizvoljni anti-lanci poseta $(P, \leq)$.

Anti-lanac $\mathcal{A}$ u posetu P je **maksimalan** akko je svaki element poseta P uporediv sa nekim elementom anti-lanca $\mathcal{A}$.

Ako su $(P, \leq)$ i $(Q, \leq)$ dva uređena skupa, onda je funkcija $f : P \to Q$ **izotona** (monotona, saglasna sa poretkom - *order-preserving*) ako za $x, y \in P$ važi:

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Injektivna funkcija $f : P \to Q$ je **obostrano izotona**, ako zadovoljava uslov:

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$$

Ovakva funkcija zove se i **potapanje** (*order-embedding*) uređenog skupa P u uređeni skup Q.

Bijektivna, obostrano izotona funkcija $f : P \to Q$ zove se **izomorfizam** (*order-isomorphism*) između $(P, \leq)$ i $(Q, \leq)$, a skupovi P i Q su **izomorfni**, što kraće zapisujemo $P \cong Q$.

Neka je A neprazan podskup poseta $(P, \leq)$. **Gornje ograničenje** skupa A je element skupa P koji je veći ili jednak od svakog elementa iz skupa A. Najmanje gornje ograničenje za A je **supremum** skupa A u oznaci **sup A**. **Donje ograničenje** skupa A je element skupa P koji je manji ili jednak od svakog elementa iz skupa A. Najveće donje ograničenje za A je **infimum** skupa A u oznaci **inf A**.

Mrežu možemo definisati na dva ekvivalentna načina: kao poset $(L, \leq)$ u kome svaki dvoelementni podskup ima supremum i infimum, i kao algebru $(L, \wedge, \vee)$ sa dve binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ na nepraznom skupu L, koje su komutativne, asocijativne i za koje važe zakoni apsorpcije.

Ako neko tvrđenje važi za sve uređene skupove, onda za sve uređene skupove važi i dualno tvrđenje koje se dobija zamenom svih pojavljivanja relacije $\leq$ relacijom $\geq$ i svih pojavljivanja relacije $\geq$ relacijom $\leq$. Za mreže dualno tvrđenje se dobija na sličan način: pored uzajamne zamene relacija $\leq$ i $\geq$ potrebno je izvršiti i uzajamnu zamenu operacija $\wedge$ i $\vee$.

Uređeni skup dualan mreži L je mreža koju označavamo sa L^d.

Mreža je **kompletna (potpuna)** ako svaki njen podskup ima supremum i infimum.

Ako mreža ima najmanji element, označavamo ga sa $\mathbf{0_L}$ ili samo $\mathbf{0}$. Najveći element mreže, ako postoji, označavamo sa $\mathbf{1_L}$ ili $\mathbf{1}$.

Mreža je **ograničena** ako ima najmanji i najveći element.

Elementi ograničene mreže L koji pokrivaju najmanji element mreže zovu se **atomi**, a elementi koji su pokriveni najvećim elementom mreže su **koatomi**.

Mreža L sa najmanjim elementom je **atomarna** ako za svaki element $x \in L$ takav da je $x \neq 0_L$ postoji atom $a \in L$ takav da je $a \leq x$.

Mreža L sa najmanjim elementom je **atomarno generisana** ako je svaki element te mreže, osim najmanjeg, supremum atoma.

Mreža $(L, \wedge, \vee)$ je **modularna** ako i samo ako je na njoj ispunjen modularni zakon:

$$\text{ako je } x \leq z, \text{ onda je } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

Mreža $(L, \wedge, \vee)$ je **polumodularna na gore**, ili kraće **polumodularna**, ako za sve $x, y \in L$,

$$\text{iz } x \wedge y \prec x \text{ sledi } y \prec x \vee y.$$

Mreža $(L, \wedge, \vee)$ je **polumodularna na dole** ako je za sve $x, y \in L$ ispunjen uslov:

$$\text{iz } y \prec x \vee y \text{ sledi } x \wedge y \prec x.$$

Podmreža mreže $(L, \wedge, \vee)$ je mreža $(L_1, \wedge, \vee)$, gde je L_1 podskup iz L, a operacije na L_1 su restrikcije operacija iz L.

Neprazan presek proizvoljne familije podmreža je i sam podmreža.

Poredak na podmreži se poklapa sa poretkom na mreži. Međutim, ako je L_1 mreža kao podskup L sa indukovanim poretkom, ona ne mora biti zatvorena u odnosu operacije $\wedge$ i $\vee$, pa prema tome, ne mora biti podmreža mreže L.

Za podskup L_1 kompletne mreže L kažemo da je **kompletna podmreža** ako i samo ako za svaki podskup A od L_1 važi $\bigvee A \in L_1$ i $\bigwedge A \in L_1$.

Kompletna podmreža kompletne mreže je kompletna.

Reći ćemo da je mreža $(L_1, \wedge, \vee)$ $\vee$**- podmreža** mreže $(L, \wedge, \vee)$ ako je L_1 neprazan podskup skupa L a operacija $\vee$ na mreži L_1 je restrikcija operacije $\vee$ iz mreže L.

Za podskup L_1 kompletne mreže L kažemo da je $\vee$**- kompletna podmreža** ako i samo ako je zatvorena za supremume, odnosno ako i samo ako za svaki podskup A od L_1 važi $\bigvee A \in L_1$.

Definicija $\wedge$**- podmreže** i $\wedge$**- kompletne podmreže** je dualna.

Ako je L_1 podmreža mreže L takva da za svako $x, y \in L_1$ važi: ako $x \prec_{L_1} y$ onda $x \prec_L y$, tada kažemo da je L_1 **podmreža sa očuvanom relacijom pokrivanja** [27] (cover-preserving sublattice of L).

Ako je M neprazan podskup mreže L, onda je presek svih podmreža koje sadrže M, u oznaci $\langle M \rangle$, podmreža mreže L. Za mrežu $\langle M \rangle$ kažemo da je **generisana skupom** M, i to je najmanja podmreža mreže L koja sadrži skup M.

Homomorfizam iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(K, \wedge, \vee)$ je funkcija ψ saglasna sa obe operacije na mrežama kao algebrama.

Ako je preslikavanje $\psi : L \to K$ saglasno samo sa operacijom $\wedge$, odnosno ako je $\psi(x \wedge y) = \psi(x) \wedge \psi(y)$ za svako $x, y \in L$, kažemo da je ψ $\wedge$ **- homomorfizam** iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(K, \wedge, \vee)$.

Neka su mreže $(L, \wedge, \vee)$ i $(K, \wedge, \vee)$ mreže sa najvećim elementima, redom 1_L i 1_K. Tada za $\wedge$ - homomorfizam iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(K, \wedge, \vee)$ pri kome se najveći element mreže L preslikava u najveći element mreže K, kažemo da je $1-\wedge$ **- homomorfizam**.

Ako je preslikavanje $\psi : L \to K$ saglasno samo sa operacijom $\vee$, odnosno ako je $\psi(x \vee y) = \psi(x) \vee \psi(y)$ za svako $x, y \in L$, kažemo da je ψ $\vee$ **- homomorfizam** iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(K, \wedge, \vee)$.

Neka su mreže $(L, \wedge, \vee)$ i $(K, \wedge, \vee)$ mreže sa najmanjim elementima, redom 0_L i 0_K. Tada za $\vee$ - homomorfizam iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(K, \wedge, \vee)$ pri kome se najmanji element mreže L preslikava u najmanji element mreže K, kažemo da je $0 - \vee$ **- homomorfizam**.

Da bi preslikavanje iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(K, \wedge, \vee)$ bilo izotono, dovoljno je da bude saglasno sa jednom od mrežnih operacija.

Neka su L i K mreže. Kažemo da $\vee$**-homomorfizam** $\varphi : L \to K$ **održava relaciju pokrivanja** [27] (cover-preserving join-homomorphism) ako i samo ako za sve $x, y \in L$ važi sledeće:

$$\text{ako } x \preceq y \text{ onda } \varphi(x) \preceq \varphi(y).$$

Element a mreže L je **kompaktan** ako i samo ako kad god postoji $\bigvee A$ i $a \leq \bigvee A$ za $A \subseteq L$, tada je $a \leq \bigvee B$ za neki konačan podskup B skupa A.
Skup kompaktnih elemenata mreže L obeležavamo sa $\mathcal{K}(L)$.

Ako su a i b kompaktni elementi mreže L, tada je $a \vee b$ takođe kompaktan element te mreže. Ako mreža L ima najmanji element, onda je njen najmanji element kompaktan.

Mreža L je **kompaktno generisana** ako i samo ako je svaki element iz L supremum kompaktnih elemenata.

Mreža L je **algebarska** ako i samo ako je kompletna i kompaktno generisana.

Teorema 1.1 *Kompletna podmreža algebarske mreže je algebarska mreža.*

Teorema 1.2 *[108] Neka je L algebarska mreža. Ako je $a > b$ u L onda postoji kompaktni element $c \in \mathcal{K}(L)$ takav da je $c \leq a$ i $c \nleq b$.*

Teorema 1.3 *[108] Neka je L algebarska mreža. Tada za svako $a < b$ u L postoje $x, y \in L$ takvi da je $a \leq x \prec y \leq b$.*

Posledica 1.1 *[11] Neka je L kompletan lanac. Tada je L algebarska mreža ako i samo ako za svako $a, b \in L$ sa $a < b$ postoje $x, y \in L$ takvi da je $a \leq x \prec y \leq b$.*

Linearna suma dve disjunktne mreže L_1 i L_2 je mreža $(L_1 \cup L_2, \leq)$, koju označavamo sa $L_1 \oplus L_2$, a poredak na njoj je definisan na sledeći način:

$$\begin{array}{rll} x \leq y & \textit{akko} & x, y \in L_1 \text{ i } x \leq y \text{ u } L_1, \\ & \textit{ili} & x, y \in L_2 \text{ i } x \leq y \text{ u } L_2, \\ & \textit{ili} & x \in L_1, y \in L_2. \end{array}$$

Poretke na mrežama L_1 i L_2 obeležavamo istom oznakom $\leq$, ali je iz konteksta potpuno jasno na koji poredak se odnosi oznaka.

Specijalno: $L \oplus \mathbf{1}$ predstavlja mrežu koja se dobija od mreže L dodavanjem elementa koji se ne nalazi u mreži kao najvećeg elementa.

Slično, $\mathbf{1} \oplus L$ označava mrežu koja se dobija od mreže L dodavanjem elementa koji se ne nalazi u mreži kao najmanjeg elementa. Ova operacija se naziva i **lifting**, a dobijena mreža se označava sa $L_\perp$. U ovom radu koristimo obe oznake.

Vertikalna suma [33] dve disjunktne mreže L_1 i L_2, takve da je mreža L_1 sa najvećim elementom, a mreža L_2 sa najmanjim elementom, je mreža, u oznaci $L_1 \bar{\oplus} L_2$, koja se dobija od linearne sume $L_1 \oplus L_2$ identifikovanjem najvećeg elementa mreže L_1 sa najmanjim elementom mreže L_2.

Ovu istu operaciju Grätzer [67] naziva lepljena suma (*glued sum*) i označava je $L_1 \dot{+} L_2$.

Neka su $(P, \leq_P)$ i $(Q, \leq_Q)$ disjunktni poseti. **Direktna suma** [130] (ili **disjunktna unija** [33]) ovih poseta, u oznaci $P + Q$, je poset $(P \cup Q, \leq)$ gde je $x \leq y$ ako i samo ako su x i y iz P i važi $x \leq_P y$ ili su x i y iz Q i važi $x \leq_Q y$.

Ako su $(P, \leq_P)$ i $(Q, \leq_Q)$ dva poseta onda je njihov **direktan (Dekartov) proizvod** takođe poset $(P \times Q, \leq)$ ako se poredak $\leq$ definiše po komponentama: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ ako i samo ako je $a_1 \leq_P a_2$ i $b_1 \leq_Q b_2$.

Poredak po komponentama nije jedini način da se definiše poredak na direktnom proizvodu dva poseta. **Leksikografski poredak** na $(P \times Q, \leq)$ se definiše na sledeći način: $(a_1, b_1) \leq (a_2, b_2)$ ako i samo ako je $a_1 <_P a_2$ ili $(a_1 = a_2$ i $b_1 \leq_Q b_2)$. Ovu vrstu proizvoda dva poseta nazivamo **leksikografski proizvod**. Poznato je da, ako su $(P, \leq_P)$ i $(Q, \leq_Q)$ lanci onda je i $P \times Q$ lanac u odnosu na leksikografski poredak.

$I \subseteq P$ je **polu-ideal** na posetu $(P, \leq)$ ako za svako $x, y \in P$ iz $x \in I$ i $y \leq x$ sledi $y \in I$.

Dualno: F je **polu-filter** na posetu $(P, \leq)$ ako za svako $x, y \in P$ iz $x \in F$ i $x \leq y$ sledi $y \in F$.

Po definiciji $\emptyset$ je polu-ideal i polu-filter na uređenom skupu.

Važi da je skup $P \setminus I$ polu-filter ako i samo ako je I polu-ideal.

Ideal u mreži $(L, \leq)$ je njen neprazni podskup I koji ispunjava sledeće uslove:

1) iz $x, y \in I$ sledi $x \vee y \in I$,

2) iz $x \in I$ i $y \leq x$ sledi $y \in I$.

Filter u mreži L se definiše dualno.

Ideal (filter) mreže L je **maksimalan** ako nije podskup ni jednog ideala (filtera), osim mreže L.

Glavni ideal u mreži (posetu) L generisan elementom $a \in L$: $\downarrow a = \{x \in L \mid x \leq a\}$.

Glavni filter u mreži (posetu) L, generisan elementom $a \in L$: $\uparrow a = \{x \in L \mid a \leq x\}$.

Na posetu $(P, \leq)$, skup svih polu-ideala uređenih inkluzijom, $(\mathcal{I}(\mathcal{P}), \subseteq)$, je potpuna distributivna mreža, kao i skup svih polu-filtara uređenih inkluzijom, $(\mathcal{F}(\mathcal{P}), \subseteq)$.

Element a mreže L je $\vee$- **nerazloživ** ako je različit od $\mathbf{0}$ i ako iz $a = x \vee y$ sledi $a = x$ ili $a = y$, za sve $x, y \in L$.

Element a mreže L je **potpuno** $\vee$**- nerazloživ** ako iz $a = \bigvee S$ sledi $a \in S$ za svako $S \subseteq L$. Ako mreža L ima najmanji element 0, on nije potpuno $\vee$- nerazloživ zato što je $\bigvee \emptyset = 0$.

Element a mreže L je $\wedge$- **nerazloživ** ako je različit od **1** i ako iz $a = x \wedge y$ sledi $a = x$ ili $a = y$, za sve $x, y \in L$.

Element a mreže L je **potpuno** $\wedge$**- nerazloživ** ako iz $a = \bigwedge S$ sledi $a \in S$ za svako $S \subseteq L$. Ako mreža L ima najveći element 1, on nije potpuno $\wedge$- nerazloživ zato što je $\bigwedge \emptyset = 1$.

Ako je element potpuno $\wedge$- nerazloživ, on je i $\wedge$- nerazloživ, a obrnuto ne mora da važi. Recimo, u lancu je svaki elemenat $\wedge$- nerazloživ, ali ne mora da bude potpuno $\wedge$- nerazloživ. Na primer, u realnom intervalu $[0, 1]$ ni jedan elemenat nije potpuno $\wedge$- nerazloživ, a svi elementi osim jedinice su $\wedge$- nerazloživi. Slično važi da su potpuno $\vee$- nerazloživi elementi takođe i $\vee$- nerazloživi, a obrnuto ne mora da važi. Za primer ponovo možemo uzeti realni interval $[0, 1]$ u kome su svi elementi, osim nule, $\vee$- nerazloživi, a ni jedan elemenat nije potpuno $\vee$- nerazloživ.

Za element koji je i $\vee$- nerazloživ i $\wedge$- nerazloživ kažemo da je **nerazloživ**, a za element koji nije ni $\vee$- nerazloživ ni $\wedge$- nerazloživ kažemo da je **razloživ**.

Skup $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže L je uređen relacijom poretka nasleđenom iz mreže L, a označavamo ga sa M_L.

Slično, poset potpuno $\wedge$- nerazloživih elemenata označavamo sa M_L^*.

Poset $\vee$- nerazloživih elemenata mreže L označavamo sa J_L, a poset potpuno $\vee$- nerazloživih elemenata mreže L označavamo sa J_L^*.

Za mrežu L kažemo da je **prostorna** (*spatial*) [148] ako za svaki element $x \in L$ važi $x = \bigvee(\downarrow x \cap J_L^*)$.

Mreža L je **konačno prostorna** (*finitely spatial*) [148] ako za svaki element $x \in L$ važi $x = \bigvee(\downarrow x \cap J_L)$.

Svaka prostorna mreža je i konačno prostorna, a obrnuto ne mora da važi. Recimo, mreža $(\mathbb{R}, \leq)$ je konačno prostorna, ali nije prostorna.

Dualni pojmovi prostornoj i konačno prostornoj mreži su dualno prostorna i dualno konačno prostorna mreža, čije definicije dajemo u nastavku.

Za mrežu L kažemo da je **dualno prostorna** (*dually spatial*) [148] ako za svaki element $x \in L$ važi $x = \bigwedge(\uparrow x \cap M_L^*)$.

Mreža L je **dualno konačno prostorna** (*dually finitely spatial*) [148] ako za svaki element $x \in L$ važi $x = \bigwedge(\uparrow x \cap M_L)$.

Ograničena mreža je **bi-prostorna** ako je prostorna i dualno prostorna.

Ograničena mreža je **konačno bi-prostorna** (*finitely bi-spatial*) [148] ako je konačno prostorna i dualno konačno prostorna.

Teorema 1.4 *[108] Svaka algebarska mreža je dualno prostorna.*

Svaki element a konačne mreže se može predstaviti kao infimum svih $\wedge$- nerazloživih elemenata x za koje važi $a \leq x$ i kao supremum svih $\vee$- nerazloživih elemenata y za koje važi $y \leq a$. Prema tome, svaka konačna mreža je konačno bi-prostorna.

Ako je mreža distributivna tada je ovo predstavljanje $\wedge$ ($\vee$)- nerazloživim elementima jedinstveno ako je minimalno (što znači da ne postoji pravi podskup ove kolekcije $\wedge$ ($\vee$)-nerazloživih elemenata čiji infimum je dati element).

Teorema 1.5 *(**Birkhoff**) Neka je L konačna distributivna mreža i neka je $X \subseteq L$ uređeni skup njenih $\vee$- nerazloživih elemenata. Tada je L izomorfna mreži $\mathcal{I}(X)$ polu-ideala na X uređenih inkluzijom.*

Važi i dualno tvrđenje.

Teorema 1.6 *(**Birkhoff**) Neka je L konačna distributivna mreža i neka je $Y \subseteq L$ uređeni skup njenih $\wedge$- nerazloživih elemenata. Tada je L dualno izomorfna mreži $\mathcal{F}(Y)$ polu-filtara na Y uređenih inkluzijom.*

Teorema 1.7 *Mreža $(\mathcal{I}(X), \subseteq)$ polu-ideala na konačnom uređenom skupu X je distributivna, a uređeni skup $\vee$- nerazloživih elemenata iz $(\mathcal{I}(X), \subseteq)$ je izomorfan sa X.*

Teorema 1.8 *Mreža $(\mathcal{F}(Y), \supseteq)$ polu-filtara na konačnom uređenom skupu Y je distributivna, a uređeni skup $\wedge$- nerazloživih elemenata iz $(\mathcal{F}(Y), \supseteq)$ je izomorfan sa Y.*

Teorema 1.9 *U konačnoj distributivnoj mreži uređeni skupovi $\vee$- i $\wedge$- nerazloživih elemenata su izomorfni.*

Na kraju, rezultate iz radova B. Šešelja i A. Tepavčević [140], [141], [142] i [143] koji su formulisani za posete, formulišimo za konačne mreže jer će nam u takvom obliku trebati u nastavku teksta.

Dalje je $(X, \leq)$ konačni poset, a $L_D(X)$ ili, kraće, L_D je distributivna mreža za koju je X poset $\wedge$- nerazloživih elemenata.

Kažemo da poset $(X, \leq)$ **generiše** mrežu L_D u smislu Birkofove teoreme 1.6 ako je X poset $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže L_D. Ako poset $(X, \leq)$ generiše mrežu L i L_1 je mreža izomorfna sa L, tada kažemo da $(X, \leq)$ generiše L_1 do na izomorfizam.

Neka je L_D konačna distributivna mreža za koju je X poset $\wedge$- nerazloživih elemenata. Za svako $x \in X$ definišemo x' na sledeći način: $x' = \bigwedge_L Z$, gde je $Z = \{z \in X \mid x < z\}$ za x takvo da je $x = \bigwedge_X Z$, a ako je x jedini ko-atom u L, onda je $x' = \mathbf{1}_L$.

Neka je sada

$$X' = X \cup \{a \in L \mid a = x' \text{ za neko } x \in X\}. \tag{1.1}$$

Prema lemama u radu [142], važe sledeća tvrđenja:

Lema 1.1 *Neka je* $(L, \leq)$ *konačna mreža i neka je* $(Y, \leq)$ *poset njenih* $\wedge$*- nerazloživih elemenata. Neka je takođe,* L_D *distributivna mreža čiji je poset* $\wedge$*-nerazloživih elemenata* X *izomorfan sa* Y *sa preslikavanjem* $f : Y \to X$*. Tada je preslikavanje* $g : L \to L_D$*, takvo da za* $a \in L$*,* $a \neq \mathbf{1}_L$*,* $g(a) = \bigwedge(f(y) \mid y \in Y \text{ } i \text{ } a \leq y)$*, i* $g(\mathbf{1}_L) = \mathbf{1}_{L_D}$*, potapanje.*

Lema 1.2 *Neka je* $(L, \leq)$ *konačna mreža,* $(Y, \leq)$ *njen podskup* $\wedge$*- nerazloživih elemenata i* L_D *distributivna mreža čiji je poset* $\wedge$*- nerazloživih elemenata* X *izomorfan sa* Y *kao u lemi 1.1. Neka je preslikavanje* $g : L \to L_D$ *potapanje* L *u* L_D *definisano u lemi 1.1. Tada je* $X' \subseteq g(L)$*.*

Da važi i obrnuto, sledi iz naredne teoreme.

Teorema 1.10 *[143] Konačna mreža* L *i konačna distributivna mreža* L_D *imaju izomorfne posete* $\wedge$*- nerazloživih elemenata,* Y *i* X *redom, ako i samo ako je* L *izomorfna sa podposetom* L_D *koji sadrži* X' *definisan sa 1.1.*

Izomorfna slika mreže L u mreži L_D je takođe mreža sa poretkom nasleđenim iz L_D, ali nije podmreža mreže L_D. To je posledica činjenice da je svaka podmreža distributivne mreže takođe distributivna, pa njen poset $\wedge$- nerazloživih elemenata mora biti različit od X (po Birkhoffovoj teoremi). Međutim, izomorfna slika mreže L u mreži L_D je $\vee$- podmreža mreže L_D sa najmanjim elementom koji se poklapa sa najmanjim elementom u L_D, što možemo zaključiti iz tvrđenja koja slede.

Kolekciju svih podskupova distributivne mreže L_D koji su mreže sa poretkom nasleđenim od L_D i koji sadrže skup X' definisan sa 1.1 označavamo sa $\mathcal{L}(X)$.

Lema 1.3 *[143] Ako* $L \in \mathcal{L}(X)$ *i* $x, y \in L$*, onda je* $x \vee_{L_D} y \in L$*.*

Prema ovoj lemi, supremumi u svakoj mreži iz $\mathcal{L}(X)$ se poklapaju sa supremumima u L_D. Da ove mreže imaju isti najmanji element koji se poklapa sa najmanjim elementom u L_D, sledi iz dokaza sledeće teoreme koji se nalazi u radu [143].

Teorema 1.11 *Ako je* $(X, \leq)$ *konačan poset, onda je* $\mathcal{L}(X)$ *mreža u odnosu na inkluziju.*

Prema tome, $(\mathcal{L}(X), \subseteq)$ je mreža koja se sastoji od svih mreža generisanih posetom $(X, \leq)$ kao posetom $\wedge$- nerazloživih elemenata. Ove mreže su $\vee$- podmreže mreže $\mathcal{L}(X)$, sa istim najmanjim elementom $\mathbf{0} \in L_D$.

Princip dualnosti za mreže kao posete i za mreže kao algebre možemo primeniti na leme 1.1, 1.2, 1.3 i teoreme 1.10 i 1.11. Prema ovim, dualnim tvrđenjima, konačne mreže koje se mogu potopiti u konačnu distributivnu mrežu tako da im se poklapaju infimumi i najveći element, su mreže čiji su poseti $\vee$- nerazloživih elemenata izomorfni sa posetom $\vee$- nerazloživih elemenata te distributivne mreže.

Neka je $(L, \leq)$ konačna mreža čiji je poset $\vee$- nerazloživih elemenata $(J_L, \leq)$. Dalje, neka je $(D, \leq)$ konačna distributivna mreža sa posetom $\vee$- nerazloživih elemenata $(J_D, \leq)$ i neka je $f : J_L \to J_D$ izomorfizam ovih poseta.

Prema tvrđenju dualnom lemi 1.1, ovaj izomorfizam se može proširiti do potapanja $g : L \to D$, tako da je za $a \in L$, $a \neq \mathbf{0}_L$, $g(a) = \bigvee(f(y) \mid y \in J_L \text{ i } a \geq y)$, i $g(\mathbf{0}_L) = \mathbf{0}_D$.

Prema dualu leme 1.2, znamo da je $X^* \subseteq g(L)$ gde je

$$X^* = J_D \cup \{a \in D \mid a = x^* \text{ za neko } x \in J_D\}, \tag{1.2}$$

gde je $x^* = \bigvee_D Z$ i $Z = \{z \in J_D \mid x > z\}$ za $x \in J_D$ takvo da je $x = \bigvee_{J_D} Z$. Ako je x jedini atom u D, onda je $x^* = \mathbf{0}_D$.

Važi i obrnuto: Svaka mreža koja sadrži X^* definisano sa 1.2 i koja je podskup mreže D sa poretkom nasleđenim od D ima isti poset $\vee$- nerazloživih elemenata kao D.

Kolekciju svih podskupova distributivne mreže D koje su mreže sa poretkom nasleđenim od D i koje sadrže skup X^* definisan sa 1.2 označimo sa $\mathcal{L}(J_D)$.

Infimumi u svakoj od mreža iz $\mathcal{L}(J_D)$ poklapaju se sa infimumima u D i najveći element mreže D je zajednički element za sve mreže iz ove kolekcije (tvrđenja dualna lemi 1.3 i teoremi 1.11).

1.2 Operator zatvaranja i unutrašnji operator na mreži

Operator zatvaranja na mreži $(L, \leq)$ je funkcija $C : L \to L$ za koju važi:

C1: $x \leq C(x)$

C2: Ako je $x \leq y$ onda je $C(x) \leq C(y)$

C3: $C(C(x)) = C(x)$

Zatvoreni elementi mreže L u odnosu na dati operator su elementi $x \in L$ za koje važi $C(x) = x$.

Teorema 1.12 *[9] Neka je $(L, \leq)$ mreža i $C : L \to L$ operator zatvaranja na njoj. Tada za sve elemente $x, y \in L$ važi:*

1. $x \wedge y \leq C(x \wedge y) \leq C(x) \wedge C(y)$
2. $x \vee y \leq C(x) \vee C(y) \leq C(x \vee y)$

Ako su x i y zatvoreni elementi mreže L u odnosu na neki operator zatvaranja C, onda je i njihov infimum zatvoren. Ovo sledi iz osobine 1. prethodne teoreme: $x \wedge y \leq C(x \wedge y) \leq C(x) \wedge C(y) = x \wedge y$, odnosno $C(x \wedge y) = x \wedge y$. Međutim, supremum zatvorenih elemenata nije zatvoren u opštem slučaju.

Teorema 1.13 *[9] Ako je $C : L \to L$ operator zatvaranja na potpunoj mreži L, onda je skup zatvorenih elemenata zatvoren u odnosu na proizvoljne infimume.*

Posledica 1.2 *[9] Elementi mreže L koji su zatvoreni u odnosu na operator zatvaranja na njoj, obrazuju potpunu mrežu u odnosu na poredak iz L.*

Iz sledeće teoreme je jasno da postoji obostrano jednoznačna korespondencija između svih operatora zatvaranja na potpunoj mreži i svih njenih uređenih podskupova zatvorenih za proizvoljne infimume.

Teorema 1.14 *[130] Ako je L potpuna mreža i L_1 njen uređeni podskup zatvoren za proizvoljne infimume iz L, onda je preslikavanje $C : L \to L_1$ definisano sa*

$$C(x) = \bigwedge \{y \in L_1 \mid x \leq y\} \tag{1.3}$$

operator zatvaranja na L. Skup zatvorenih elemenata u odnosu na ovaj operator zatvaranja je upravo skup L_1.

Podskupu L_1 pripada i najveći element mreže L, koji je infimum praznog skupa. Zbog toga je uređeni podskup L_1 mreža.

Slično je i ako se pođe od operatora zatvaranja: ako se na skupu zatvorenih elemenata L_1 mreže L, u odnosu na dati operator zatvaranja, definiše operator zatvaranja definisan jednakošću 1.3, dobija se polazni operator zatvaranja.

Unutrašnji operator na mreži $(L, \leq)$ je funkcija $I : L \to L$ za koju važi:

I1: $I(x) \leq x$

I2: Ako je $x \leq y$ onda je $I(x) \leq I(y)$

I3: $I(I(x)) = I(x)$

Otvoreni elementi mreže L u odnosu na dati operator su elementi $x \in L$ za koje važi $I(x) = x$.

Za unutrašnji operator važe tvrđenja koja su dualna tvrđenjima za operator zatvaranja.

Teorema 1.15 *[9] Neka je $(L, \leq)$ mreža i $I : L \to L$ unutrašnji operator na njoj. Tada za sve elemente $x, y \in L$ važi:*

1. $I(x) \vee I(y) \leq I(x \vee y) \leq x \vee y$
2. $I(x \wedge y) \leq I(x) \wedge I(y) \leq x \wedge y$

Teorema 1.16 *Ako je $I : L \to L$ unutrašnji operator na potpunoj mreži L, onda je skup otvorenih elemenata zatvoren u odnosu na proizvoljne supremume.*

Posledica 1.3 *Elementi mreže L koji su otvoreni u odnosu na unutrašnji operator na njoj, obrazuju potpunu mrežu u odnosu na poredak iz L.*

I u ovom slučaju postoji obostrano jednoznačna korespondencija između svih unutrašnjih operatora na potpunoj mreži i svih njenih uređenih podskupova zatvorenih za proizvoljne supremume.

Teorema 1.17 *Ako je L potpuna mreža i L_1 njen uređeni podskup zatvoren za proizvoljne supremume iz L, onda je preslikavanje $I : L \to L_1$ definisano sa*

$$I(x) = \bigvee\{y \in L_1 \mid y \leq x\} \tag{1.4}$$

unutrašnji operator na L. Skup otvorenih elemenata u odnosu na ovaj unutrašnji operator je upravo skup L_1.

Podskupu L_1 pripada i najmanji element mreže L, koji je supremum praznog skupa. Zbog toga je uređeni podskup L_1 mreža.

1.3 Dilworth-ove i njima ekvivalentne teoreme

Za rešavanje postavljenog problema su neophodne poznate Dilworth-ove[1] teoreme [46].

Teorema 1.18 *[46] Konačan poset širine k može se predstaviti kao (skupovna) unija k disjunktnih lanaca.*

Harzheim je 2005. godine dokazao i generalni oblik Dilworth-ove teoreme za beskonačne posete konačne širine:

Teorema 1.19 *[74] Neka je $(P, \leq)$ poset širine k, gde je k prirodan broj. Tada je P unija k disjunktnih lanaca[2].*

Navodimo drugu Dilworth-ovu teoremu čiji ekvivalentni oblik definišemo u nastavku u tekstu i koji koristimo u radu.

Teorema 1.20 *[46] Neka je D konačna distributivna mreža. Neka je $k(a)$ za svako $a \in D$ broj različitih elemenata koji pokrivaju a i neka je k najveći od brojeva $k(a)$. Tada je D, do na izomorfizam, podmreža direktnog proizvoda k lanaca i k je najmanji broj za koji takvo potapanje u direktan proizvod k lanaca postoji.*

[1] Formulacije teorema i dokaza preuzetih iz originalnog rada su prilagođene savremenoj terminologiji.

[2] U citiranoj knjizi ne ističe se da su lanci disjunktni, ali to sledi iz dokaza teoreme. Takođe se u radovima nekih autora koji navode pomenutu teoremu, nalazi tvrđenje da su lanci disjunktni.

Prvo se podsetimo nekih činjenica koje se koriste u dokazu.

Neka je D konačna distributivna mreža. Svaki element mreže D se može izraziti kao supremum njenih $\vee$- nerazloživih elemenata. Odatle sledi da za proizvoljne elemente x, y mreže D važi sledeće:
ako je $x > y$ tada u D postoji $\vee$- nerazloživ elemenat q takav da je $x \geq q$ i $y \ngeq q$.

Ako je q $\vee$- nerazloživ element mreže D, tada iz $q \leq x \vee y$ sledi da je $q \leq x$ ili $q \leq y$.

Dokaz. [46] Neka je D konačna distributivna mreža i neka je J_D poset $\vee$- nerazloživih elemenata mreže D. Neka je element $a \in D$ za koji je $k(a) = k$, gde je k najveći takav broj, odnosno, u mreži D postoji k elemenata $a_1, a_2, ..., a_k$ koji pokrivaju element a. Neka su q_i $\vee$- nerazloživi elementi mreže D takvi da je $a_i \geq q_i$ i $a \ngeq q_i$ za $i = 1, 2, ..., k$.

Dokažimo da su elementi $q_1, q_2, ..., q_k$ dva po dva neuporedivi.

Pretpostavimo da je $q_i \geq q_j$ za $i \neq j$ i $i, j = 1, ..., k$. Tada je $a = a_i \wedge a_j \geq q_i \wedge q_j = q_j$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $a \ngeq q_j$. Prema tome, elementi $q_1, q_2, ..., q_k$ čine anti-lanac u posetu J_D.

Dokažimo da je k maksimalan broj neuporedivih elemenata u posetu J_D.

Neka je $q_1', q_2', ..., q_l'$ proizvoljan anti-lanac poseta J_L. Neka je $a' = q_1' \vee q_2' \vee ... \vee q_l'$ i $p_i' = q_1' \vee ... \vee q_{i-1}' \vee q_{i+1}' \vee ... \vee q_l'$ za $i = 1, ..., l$. Tada je $a' > p_i'$ za $i = 1, ..., l$ i $p_i' \vee p_j' = a'$ za $i \neq j$. Zaista, ako pretpostavimo da je $a' = p_i'$ za neko i, onda je $q_i' = q_i' \wedge a' = q_i' \wedge p_i' = (q_i' \wedge q_1') \vee ... \vee (q_i' \wedge q_{i-1}') \vee (q_i' \wedge q_{i+1}') \vee ... \vee (q_i' \wedge q_l')$. Odatle sledi da je $q_i' = q_i' \wedge q_j'$ za neko $j \neq i$. Tada je $q_i' \leq q_j'$ za neko $j \neq i$, što je suprotno pretpostavci da je $q_i' \parallel q_j'$ za $i, j = 1, ..., l$ i $j \neq i$.

Dalje, neka je $a = p_1' \wedge p_2' \wedge ... \wedge p_l'$ i $p_i = p_1' \wedge ... \wedge p_{i-1}' \wedge p_{i+1}' \wedge ... \wedge p_l'$ za svako $i = 1, ..., l$. Sada je $a < p_i$ za svako $i = 1, ..., l$ i $p_i \wedge p_j = a$ za $i \neq j$. Dokažimo da je $a \neq p_i$ za $i = 1, ..., l$. Ako pretpostavimo da je $a = p_i$ za neko i, onda je $p_i' = p_i' \vee a = p_i' \vee p_i = (p_i' \vee p_1') \wedge ... \wedge (p_i' \vee p_{i-1}') \wedge (p_i' \vee p_{i+1}') \wedge ... \wedge (p_i' \vee p_l') = a'$, što je suprotno sa $p_i' < a'$.

Neka je $p_i \geq a_i$, gde $a \prec a_i$ za $i = 1, ..., l$. Zbog konačnosti mreže D takav element a_i uvek postoji. Tada je $a \leq a_i \wedge a_j \leq p_i \wedge p_j = a$ za $i \neq j$. Odatle je $a = a_i \wedge a_j$ za $i \neq j$, pa su $a_1, a_2, ..., a_l$ različiti elementi koji pokrivaju a. Odatle sledi da je $l \leq k$, odnosno da je k maksimalan broj neuporedivih elemenata u posetu J_D.

Prema teoremi 1.18, J_D je skupovna unija k disjunktnih lanaca. Dodavanjem nule mreže D svakom od ovih lanaca dobijamo lance $C_1, C_2, ..., C_k$. Tada za svako $x \in D$ postoje jednoznačno određeni elementi $x_i = \downarrow x \cap C_i$ za $i = 1, 2, ..., k$.

Dokažimo da je tada $x = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k$. Pretpostavimo da je $x > x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k$. Tada postoji $\vee$- nerazloživ element q takav da je $x \geq q$ i $x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k \ngeq q$. S druge strane $q \in C_i$ za neko i, pa je $q \leq x_i \leq x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k$, što je suprotno definiciji q.

Direktan proizvod lanaca C_i, $i = 1, 2, ..., k$ je mreža $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_k$ u kojoj su operacije definisane po komponentama. Sada možemo definisati preslikavanje $f : D \to$

$C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_k$ na sledeći način:

$$f(x) = (x_1, x_2, ..., x_k),$$

gde je $x = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k$, $x_i = \downarrow x \cap C_i$ i gde su lanci C_i podskupovi mreže D do na izomorfizam za $i = 1, 2, ..., k$.

Dokažimo da je preslikavanje f traženo potapanje mreže D u mrežu $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_k$.

Za $x, y \in D$ važi $f(x) = f(y)$ ako i samo ako je $x_i = y_i$ za $i = 1, 2, ..., k$, a to je dalje ekvivalentno sa $x = y$. Dakle, preslikavanje f je dobro definisano i injektivno.

Dalje dokazujemo da je preslikavanje f saglasno sa operacijama $\vee$ i $\wedge$. Očigledno je $x \vee y \geq x_i \vee y_i$ za $i = 1, 2, ..., k$, pa je $(x \vee y)_i \geq x_i \vee y_i$. S druge strane, elementi $(x \vee y)_i$, $i = 1, 2, ..., k$, su $\vee$- nerazloživi, pa iz $x \vee y \geq (x \vee y)_i$ sledi da je $x \geq (x \vee y)_i$ ili $y \geq (x \vee y)_i$, za $i = 1, 2, ..., k$. Odatle, redom, sledi da je $x_i \geq (x \vee y)_i$ ili $y_i \geq (x \vee y)_i$, za $i = 1, 2, ..., k$. Prema tome važi $x_i \vee y_i \geq (x \vee y)_i$ za $i = 1, 2, ..., k$. Time je dokazano da je $(x \vee y)_i = x_i \vee y_i$ za $i = 1, 2, ..., k$, odnosno da je $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

Slično je $x \wedge y \geq x_i \wedge y_i$, pa je $(x \wedge y)_i \geq x_i \wedge y_i$ za $i = 1, 2, ..., k$. Sa druge strane je $x \geq x \wedge y$ i $y \geq x \wedge y$, a odatle, redom, sledi $x_i \geq (x \wedge y)_i$ i $y_i \geq (x \wedge y)_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Odatle, dalje, sledi $x_i \wedge y_i \geq (x \wedge y)_i$ za $i = 1, 2, ..., k$. Time je dokazano da je $(x \wedge y)_i = x_i \wedge y_i$ za $i = 1, 2, ..., k$, odnosno da je $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Ovim je kompletiran dokaz da je mreža D izomorfna sa podmrežom direktnog proizvoda k lanaca. Na kraju, dokažimo da je k najmanji broj za koji takvo potapanje postoji.

Pretpostavimo da je mreža D, do na izomorfizam, podmreža direktnog proizvoda l lanaca $C'_1, ..., C'_l$, gde je $l < k$. Ponovo, neka je $a \in D$ takvo da je $k(a) = k$, gde je k najveći takav broj, i neka su $a_1, ..., a_k$ različiti elementi koji pokrivaju a. Neka je $a' = a_1 \vee ... \vee a_k$ i neka je $a'_i = a_1 \vee ... \vee a_{i-1} \vee a_{i+1} \vee ... \vee a_k$ za $i = 1, 2, ..., k$. Neka je $a' = q'_1 \vee ... \vee q'_l$ gde $q'_i \in C'_i$ i $i = 1, 2, ..., l$.

Dokažimo da su elementi $q'_i \in C'_i$, $i = 1, 2, ..., l$ $\vee$- nerazloživi. Pretpostavimo da je $q'_i = x' \vee y'$. Tada je $q'_i = x'_i \vee y'_i$, gde $x'_i, y'_i \in C'_i$. Odatle sledi da je $q'_i = x'_i$ ili $q'_i = y'_i$, što za posledicu ima da je, redom, $q'_i = x'$ ili $q'_i = y'$.

S druge strane je $a' \geq q'_i$ za $i = 1, 2, ..., l$. Odatle za svako $i \leq l$ postoji j tako da je $a_j \geq q'_i$. Pošto je $l < k$, postoji r takvo da je $a'_r \geq q'_1 \vee ... \vee q'_l = a' \geq a_r$. Tada je $a_r = a'_r \wedge a_r = a$, što je kontradikcija sa činjenicom da a_r pokriva a. Odatle sledi da je $l \geq k$, odnosno da je k najmanji broj lanaca čiji direktan proizvod sadrži mrežu D kao podmrežu.

□

Poset $\vee$- nerazloživih elemenata mreže D može se razložiti na disjunktne lance na različite načine, pa mreža koja se dobija kao direktan proizvod tih lanaca, nije jednoznačno određena. Prema tome, potapanje konačne distributivne mreže u direktan proizvod lanaca nije jednoznačno određeno.

Iz dokaza prethodne teoreme jasno je da važi sledeća posledica.

Posledica 1.4 *Neka je D konačna distributivna mreža i neka je $k(a)$ za svako $a \in D$ broj različitih elemenata koji pokrivaju a. Tada je $max\{k(a) \mid a \in D\} = w(J_D)$.*

Prema gore rečenom, drugu Dilworth-ovu teoremu 1.20 je moguće iskazati u ekvivalentnom obliku:

Teorema 1.21 *Neka je D konačna distributivna mreža i neka je k širina poseta $\vee$- nerazloživih elemenata mreže D. Tada je mreža D do na izomorfizam podmreža direktnog proizvoda k lanaca $C_1, ..., C_k$ i k je najmanji broj za koji takvo potapanje postoji.*

Navodimo i dualni oblik ove teoreme.

Teorema 1.22 *Neka je D konačna distributivna mreža i neka je k širina poseta $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže D, odnosno $w(M_D) = k$. Tada je mreža D do na izomorfizam podmreža direktnog proizvoda k lanaca $C_1, ..., C_k$ i k je najmanji broj za koji takvo potapanje postoji.*

Prema dokazanom, u konačnim distributivnim mrežama, širina poseta $\vee$-nerazloživih elemenata se može odrediti preko najvećeg broja elemenata koji pokrivaju elemente date mreže.

Slično, u konačnim distributivnim mrežama, širina poseta $\wedge$-nerazloživih elemenata se može odrediti preko najvećeg broja elemenata koje pokrivaju elementi date mreže:

$$w(M_D) = k = max\{k(a) \mid a \in D\}. \tag{1.5}$$

gde je $k(a)$ broj različitih elemenata koje pokriva element $a \in D$.

S druge strane, poznato je da se dužina konačne distributivne mreže može odrediti preko broja njenih $\vee$- nerazloživih elemenata.

Teorema 1.23 *[97] Neka je D konačna distributivna mreža. Tada je dužina mreže D jednaka broju njenih $\vee$- nerazloživih elemenata.*

Neposredna posledica teorema 1.20 i 1.23 je sledeće tvrđenje.

Posledica 1.5 *Neka je D konačna distributivna mreža i neka je $w(J_D) = k$. Tada je $l(D) = l(C_1 \times \cdots \times C_k)$, gde je $C_1 \times \cdots \times C_k$ direktan proizvod k lanaca u koji se potapa mreža D.*

Dokaz. Neka je D konačna distributivna mreža i neka je $w(J_D) = k$. Tada je, prema teoremi 1.18, poset J_D unija k disjunktnih lanaca $C'_1, ..., C'_k$. Neka je $C_i = C'_i \cup \{0\}$, gde je 0 najmanji element mreže D. Prema teoremi 1.20, potapanje f mreže D u mrežu $C_1 \times \cdots \times C_k$ je definisano sa $f(x) = (x_1, x_2, ..., x_k)$, gde je $x = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k$ i $x_i = \downarrow x \cap C_i$, $i = 1, 2, ..., k$.

Poznato je da važi $l(C_1 \times \cdots \times C_k)) = l(C_1) + l(C_2) + \cdots + l(C_k)$ i da je $l(C_1) + l(C_2) + \cdots + l(C_k) =\mid C'_1 \mid + \mid C'_2 \mid + \cdots + \mid C'_k \mid$, gde je $\mid C'_i \mid$ broj elemenata lanca C'_i, $i = 1, 2, ..., k$. Pošto je $J_D = C'_1 \cup ... \cup C'_k$, a lanci C'_i, $i = 1, 2, ..., k$ su disjunktni, tada prema tvrđenju 1.23, važi $l(D) =\mid C'_1 \mid + \mid C'_2 \mid + \cdots + \mid C'_k \mid$. Odatle sledi da su mreže D i $C_1 \times \cdots \times C_k$ iste dužine. □

1.4 Slim mreže

Počevši sa radom Kelly-ja i Rivala [90] objavljenim 1975. godine mnogi autori su u novije vreme obnovili istraživanja vezana za planarne mreže. Među autorima koji se bave istraživanjima u ovoj oblasti nalaze se Grätzer, Knapp, Czédli i Schmidt sa brojnim radovima [128], [129], [32], [31], [29], [30], [28], [71], [70], [69].

Primetivši da polumodularne mreže imaju primenu u kombinatorici i geometriji, ovi autori su svoje interesovanje usmerili, pre svega, na slim polumodularne mreže. Ove mreže su planarne, imaju jednostavnu strukturu i osobinu da se sve planarne polumodularne mreže lako mogu dobiti iz slim mreža [71]. Govoreći o značaju slim mreža kao planarnih, u tim radovima se ističe da planarne polumodularne mreže imaju važnu ulogu u rešavanju raznih problema reprezentacije konačnih mreža kongruencija. Rezultati Jordan-Hölderove teoreme [85], [75] najčešće se formulišu za modularne mreže. Formulacija ovih rezultata za polumodularne mreže je poboljšana u radu [68]. Primenom svojstava slim polumodularnih mreža Czédli i Schmidt u [31] dodaju tvrđenje o jedinstvenosti u Jordan-Hölderovu teoremu. Osobine slim polumodularnih mreža nedavno su primenili i Czédli, Osvart i Udvari [28].

Konačni poseti se mogu predstavljati grafički Hase dijagramom - grafom čiji čvorovi predstavljaju elemente poseta, a grane povezuju element x sa elementom y ako i samo ako $x \prec y$, pri tome se element y postavlja iznad elementa x. Put od a do b postoji ako i samo ako je $a \leq b$. Naravno, jedan uređeni skup može imati više različitih dijagrama, ali su oni izomorfni - postoji bijekcija φ između njihovih čvorova koja je u oba smera saglasna sa relacijom pokrivanja (postoji grana od čvora x do čvora y u jednom dijagramu ako i samo ako postoji grana od čvora $\varphi(x)$ do čvora $\varphi(y)$ u drugom dijagramu).

Konačna mreža L je **planarna** ako ima planarni dijagram, odnosno dijagram čije se grane ne seku, osim u krajnim tačkama.

Grane dijagrama planarne mreže dele ravan na oblasti. Minimalna oblast je ćelija.

Ćelija [69] A dijagrama planarne mreže L je unija dva lanca C i D u L takva da važe sledeći uslovi:

1. $0_C = 0_D$ i $1_C = 1_D$, gde su $0_C, 0_D$ najmanji elementi, a $1_C, 1_D$ najveći elementi, redom, lanaca C i D;

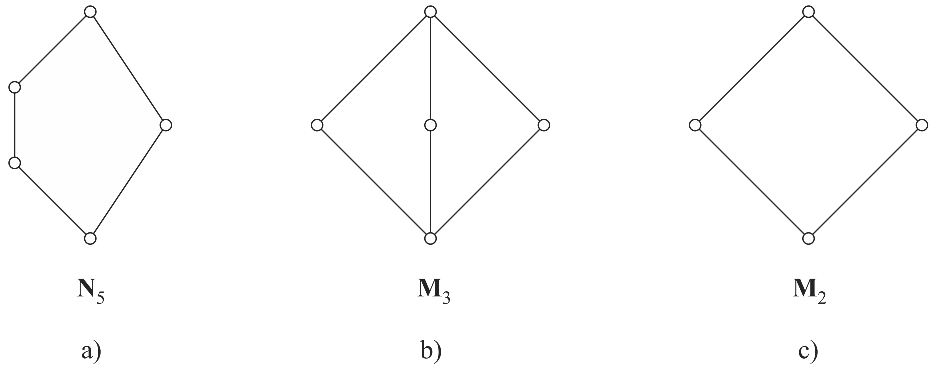
2. $c \parallel d$ za sve $c \in C \backslash \{0_C, 1_C\}$ i $d \in D \backslash \{0_D, 1_D\}$;

3. u unutrašnjoj oblasti A nema elemenata mreže L.

Kao primere možemo navesti mreže čiji su dijagrami prikazani na slici 1.1: dijamant ($\mathbf{M}_3$) sa dve ćelije, pentagon ($\mathbf{N}_5$) i mreža $\mathbf{M}_2$ koje imaju jednu ćeliju. Lanac je planarna mreža koja nema ćelija.

Ćeliju sa 4 elementa, odnosno ćeliju u kojoj je $l(C) = l(D) = 2$, zovemo 4**- ćelija**. Mreža za koju postoji planarni dijagram u kome su sve ćelije 4-ćelije zove se 4**-ćelijska mreža**.

Primeri 4- ćelijskih mreža su mreže $\mathbf{M}_3$ i $\mathbf{M}_2$ ilustrovane na slici 1.1.



Slika 1.1

Ako je L planarna mreža, tada su njena leva $B_L(L)$ i desna granica $B_R(L)$ maksimalni lanci u ovoj mreži. **Granica** [31] planarne mreže L je unija graničnih lanaca: $B(L) = B_L(L) \cup B_R(L)$. Kelly i Rival [90] su dali preciznu definiciju granice za dijagrame planarne mreže.

Prema definiciji Grätzera i Knappa [71] planarna mreža je slim ako nema podmrežu izomorfnu mreži dijamant u kojoj je očuvana relacija pokrivanja.

Mi usvajamo sledeću definiciju koju su dali Czédli i Schmidt:

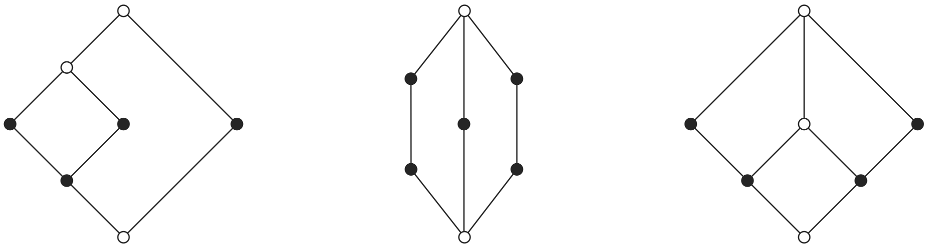
Definicija 1.1 *[31]*

Slim *mreža je konačna mreža L takva da je $w(J_L) \leq 2$, gde je J_L poset $\vee$- nerazloživih elemenata mreže L.*

Dualno-slim *mreža je konačna mreža L takva da je $w(M_L) \leq 2$, gde je M_L poset $\wedge$-nerazloživih elemenata mreže L.*

I ovako definisane slim mreže imaju osobinu da ne sadrže podmrežu izomorfnu mreži dijamant sa očuvanom relacijom pokrivanja. Po ovoj definiciji slim mreže su konačne, a Czédli i Schmidt [31] su dokazali da su one i planarne. Jasno je da iz toga sledi planarnost i dualno-slim mreža. I po definiciji Grätzera i Knappa slim mreže su planarne, pa odatle i konačne. Dakle, ako je mreža slim po definiciji Czédlija i Schmidta, onda je ona slim i po definiciji Grätzera i Knappa. Da obrnuto ne mora da važi, ilustrovano je sledećim primerom. Ipak, na skupu planarnih polu-modularnih mreža ove dve definicije su ekvivalentne, pa Grätzer i Knapp u novijim radovima [69] slim mreže definišu i kao *planarne polu-modularne mreže bez podmreže izomorfne mreži dijamant, u kojoj je očuvana relacija pokrivanja.*

Primer 1.1 *Na slici* 1.2 *ilustrovani su dijagrami tri mreže. Zatamnjenim kružićima istaknuti su* $\vee$*- nerazloživi elementi datih mreža. Poseti* $\vee$*- nerazloživih elemenata mreža ilustrovanih slikama* 1.2 *a) i* 1.2 *b) su širine* 3*, pa nisu slim po definiciji Czédlija i Schmidta. Međutim obe mreže su slim po definiciji Grätzera i Knappa s obzirom na to da nemaju podmreže izomorfne sa mrežom dijamant u kojoj je očuvana relacija pokrivanja. Mreža čiji je dijagram ilustrovan na slici* 1.2 *c) je polumodularna i očigledno slim po obe definicije.*



a) b) c)

Slika 1.2

Prema Dilworthovoj teoremi 1.18 i definiciji 1.1, konačna mreža je slim, odnosno dualno-slim, ako i samo ako je J_L, odnosno M_L unija dva disjunktna lanca.

Lema 1.4 *[71] Planarne polu-modularne mreže su* 4*-ćelijske mreže.*

Lema 1.5 *[71] Neka je L* 4*-ćelijska mreža. Tada je L polu-modularna ako i samo ako za ćelije A i B važi sledeće: ako je $0_A = 0_B$ onda je $1_A = 1_B$.*

Lema 1.6 *[71] Neka je L slim* 4*-ćelijska mreža. Tada je L polu-modularna ako i samo ako iz $0_A = 0_B$ sledi da je $A = B$, za ćelije A i B mreže L.*

U svim planarnim mrežama važi sledeće:

Lema 1.7 *[29] Ako je L planarna mreža, a i b pripadaju istom graničnom lancu mreže L u odnosu na bilo koje planarno predstavljanje i $a \prec b$, tada je ili a $\wedge$- nerazloživ ili je b $\vee$- nerazloživ.*

A za slim mreže onda važi:

Lema 1.8 *[29]*

1. *Ako je L slim mreža, tada je, za svaki njen planarni dijagram, poset* $\vee$*- nerazloživih elemenata podskup graničnog lanca.*
2. *Svaka slim distributivna mreža je i dualno-slim mreža.*

Glava 2

Mreže intervala

Interval $[a, b]$ za elemente $a, b \in L$ i $a \leq b$, gde je $(L, \leq)$ poset (mreža), je skup koji se definiše na sledeći način:

$$[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}.$$

Interval mreže L sa najmanjim (najvećim) elementom je glavni ideal (filter) mreže L ako i samo ako sadrži najmanji (najveći) element mreže L, odnosno za svako $x \in L$ je $\downarrow x = [0, x]$ ako mreža L ima najmanji element 0, a $\uparrow x = [x, 1]$ ako mreža L ima najveći element 1.

Teorema 2.1 *[49] Svaki interval $[a, b]$ jednoznačno se može predstaviti skupovnim presekom glavnog filtera elementa a i glavnog ideala elementa b, odnosno $[a, b] = \uparrow a \cap \downarrow b$.*

Prema oznaci koju uvodi Deschrijver [35], skup intervala mreže L označavamo sa $I(L)$:

$$I(L) = \{[\underline{x}, \overline{x}] \mid (\underline{x}, \overline{x}) \in L^2, \quad \underline{x} \leq_L \overline{x}\}. \tag{2.1}$$

Za proizvoljan element $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \in I(L)$ kažemo da su $\underline{x}$ i $\overline{x}$, redom, donja i gornja granica intervala.

Za skup zatvorenih podintervala intervala realnih brojeva $[0, 1]$ koristimo oznaku:

$$I([0, 1]) = \{[\underline{x}, \overline{x}] \mid (\underline{x}, \overline{x}) \in [0, 1]^2, \quad \underline{x} \leq \overline{x}\}. \tag{2.2}$$

Poredak na skupovima intervala može se uvesti na različite načine. Sándor Jenei [82], na primer, osim uobičajenog poretka koji se definiše preko komponenti:
$[\underline{x}, \overline{x}] \leq [\underline{y}, \overline{y}]$ ako je $\underline{x} \leq \underline{y}$ i $\overline{x} \leq \overline{y}$,
koristi i sledeće poretke za intervale realnih brojeva:

1. $[\underline{x}, \overline{x}] \sqsubseteq [\underline{y}, \overline{y}]$ ako je $\overline{x} \leq \underline{y}$;

2. $[\underline{x}, \overline{x}] \subset_r [\underline{y}, \overline{y}]$ ako je $\underline{y} \leq \underline{x}$ i $\overline{x} = \overline{y}$;

3. $[\underline{x},\overline{x}] \subset_l [\underline{y},\overline{y}]$ ako je $\underline{y} = \underline{x}$ i $\overline{x} \leq \overline{y}$.

Ishibuchi i Tanaka [77] (prema [73, 125, 98, 19, 34]), pored poretka koji se definiše preko komponenti, na mreži intervala realnih brojeva uvode relacije poretka i na dole navedene načine. Neka su $\mathbf{x} = [\underline{x},\overline{x}] \subseteq \mathbb{R}$ i $\mathbf{y} = [\underline{y},\overline{y}] \subseteq \mathbb{R}$ intervali realnih brojeva. Tada je

1. $\mathbf{x} \leq_{mw_{min}} \mathbf{y}$ ako je $m(\mathbf{x}) \leq m(\mathbf{y})$ i $w(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{y})$,
2. $\mathbf{x} \leq_{mw_{max}} \mathbf{y}$ ako je $m(\mathbf{x}) \leq m(\mathbf{y})$ i $w(\mathbf{x}) \geq w(\mathbf{y})$,
3. $\mathbf{x} \leq_{lm} \mathbf{y}$ ako je $\underline{x} \leq \underline{y}$ i $m(\mathbf{x}) \leq m(\mathbf{y})$,
4. $\mathbf{x} \leq_{um} \mathbf{y}$ ako je $m(\mathbf{x}) \leq m(\mathbf{y})$ i $\overline{x} \leq \overline{y}$,

pri čemu su $m(\mathbf{x}) = (\underline{x} + \overline{x})/2$ i $m(\mathbf{y}) = (\underline{y} + \overline{y})/2$, redom, srednje tačke intervala $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$, a $w(\mathbf{x}) = (\overline{x} - \underline{x})/2$ i $w(\mathbf{y}) = (\overline{y} - \underline{y})/2$ polu-širine ovih intervala.

Uvođenje ovih relacija poretka je moguće samo za intervale realnih brojeva, koji se mogu jednoznačno predstaviti i preko srednje tačke (centra) i širine (radiusa), na sledeći način:

$$\mathbf{x} = \langle m(\mathbf{x}), w(\mathbf{x})\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid m(\mathbf{x}) - w(\mathbf{x}) \leq x \leq m(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x})\}.$$

U skladu sa različitim primenama intervala, pojavljuju se različiti načini za njihovo poređenje. Mahato i Bhunia [98] uvode nove relacije poretka na skupu zatvorenih intervala realnih brojeva, dok Chanas i Kuchta [19] uopštavaju neke od poredaka koje su uveli Ishibuchi i Tanaka[1].

Naš izbor poredaka ograničen je na poretke u odnosu na koje skupovi $I(L)$ i $I([0,1])$ čine mrežu, a imaju primenu u teoriji rasplinutih skupova. Tako, na primer, na posetima $(I([0,1]), \subset_r)$ i $(I([0,1]), \subset_l)$ supremumi i infimumi ne postoje za neuporedive intervale, pa oni nisu mreže, a poređenje intervala preko njihovih centara i širine nije moguće na skupu intervala za proizvoljnu mrežu L.

Za izabrane poretke usvajamo nazive koji su uobičajeni u novijim radovima.

Neka su $\mathbf{x} = [\underline{x},\overline{x}]$ i $\mathbf{y} = [\underline{y},\overline{y}]$ elementi skupa $I(L)$ definisanog jednakošću 2.1 na str. 19. Na skupu $I(L)$ definišemo poretke na neki od sledećih načina.

Poredak po komponentama, odnosno slabi intervalni poredak[2] (*weak ordering*):

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \text{ako i samo ako je} \quad \underline{x} \leq_L \underline{y} \quad \text{i} \quad \overline{x} \leq_L \overline{y}, \tag{2.3}$$

Neprecizni intervalni poredak (*imprecision ordering*) je ekvivalentan uobičajenoj skupovnoj inkluziji ako intervale posmatramo kao skupove:

$$\mathbf{x} \leq_i \mathbf{y} \quad \text{ako i samo ako je} \quad \underline{y} \leq_L \underline{x} \leq_L \overline{x} \leq_L \overline{y}. \tag{2.4}$$

[1] Uopštenje se odnosi na poredak po komponentama i na, ovde navedene, poretke 2. i 3.

[2] Jenei [82] ga naziva slab intervalni, a Esteva i ostali [52] slab istinitosni poredak.

Strogi intervalni poredak[3] (*strong ordering*) je poredak $\sqsubseteq$, uveden na strani 19, dopunjen uslovom koji obezbeđuje refleksivnost ove relacije:

$$\mathbf{x} \leq_s \mathbf{y} \quad \text{ako i samo ako je} \quad \overline{x} \leq_L \underline{y} \quad \text{ili} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{2.5}$$

Leksikografski intervalni poredak:

$$\mathbf{x} \leq_l \mathbf{y} \quad \text{ako i samo ako je} \quad \underline{x} <_L \underline{y} \quad \text{ili} \quad (\underline{x} = \underline{y} \quad \text{i} \quad \overline{x} \leq_L \overline{y}). \tag{2.6}$$

U zavisnosti od oblasti u kojoj se primenjuju, intervali se interpretiraju na različite načine. Ishibuchi i Tanaka [77] (prema [34]) interval interpretiraju kao oblast između pesimističke i optimističke evaluacije istinitosti tvrđenja, a stvarna istinitosna vrednost tvrđenja je aproksimirana intervalom. U radu [156] autori ističu da se prilikom svakog merenja dobijaju netačne vrednosti. Tačna vrednost je nepoznata, a jedina informacija koju imamo o njoj je interval kome pripada. U primeni rasplinutih skupova česta je situacija da je nemoguće odrediti tačan stepen pripadnosti zbog nedostatka znanja, neodređenih informacija i slično. Tada "...intervali aproksimiraju realni, ali nepoznat, stepen pripadnosti. Dužina intervala je mera nesigurnosti u stepen pripadnosti" [35].

Ako je interval $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ manji ili jednak intervalu $\mathbf{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ u odnosu na slab intervalni poredak (poredak po komponentama) i ako intervali $[\underline{x}, \overline{x}]$ i $[\underline{y}, \overline{y}]$ imaju neprazan presek, tada stvarna vrednost (istinitosti, merenja, funkcije pripadanja...) koja je aproksimirana manjim intervalom ne mora biti manja od realne vrednosti aproksimirane većim intervalom. Slab intervalni poredak nam govori samo da za svaki element $a \in \mathbf{x}$ postoji element $b \in \mathbf{y}$ takav da je $a \leq b$ i za svaki element $b \in \mathbf{y}$ postoji element $a \in \mathbf{x}$ takav da je $a \leq b$.

Za razliku od slabog intervalnog poretka (poretka po komponentama), ako je $\mathbf{x} \leq_s \mathbf{y}$ i $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, onda je svaki element intervala $\mathbf{x}$ manji od svakog elementa intervala $\mathbf{y}$, odnosno manji interval "leži jače levo" [82] od većeg intervala. Osim toga, polazna relacija za relaciju $\leq_s$ je relacija strogog poretka $\sqsubseteq$.

Neprecizni intervalni poredak (skupovna inkluzija) nam govori o preciznosti i tačnosti (merenja, znanja), količini informacija. Manji interval nam govori da smo precizniji, bliži tačnoj vrednosti, posedujemo više znanja i informacija.

Leksikografski intervalni poredak daje prednost jednoj komponenti. Leksikografski poredak, definisan gore, daje prednost prvoj komponenti i uobičajen je u matematičkoj literaturi. Međutim, postoje radovi [16] u kojima se definiše i leksikografski poredak u odnosu na drugu komponentu, na sledeći način:

$$\mathbf{x} \leq_{l_2} \mathbf{y} \quad \text{ako i samo ako je} \quad \overline{x} <_L \overline{y} \quad \text{ili} \quad (\overline{x} = \overline{y} \quad \text{i} \quad \underline{x} \leq_L \underline{y}). \tag{2.7}$$

Isabelle Bloch [17] leksikografski intervalni poredak primenjuje u matematičkoj morfologiji na bipolarnim [47, 17] rasplinutim skupovima, koji u odnosu na ovaj poredak čine kompletnu mrežu. U pomenutom radu autorka poredak definiše na sledeći način:

$$\mathbf{x} \preceq_l \mathbf{y} \quad \text{ako i samo ako je} \quad \overline{x} > \overline{y} \quad \text{ili} \quad (\overline{x} = \overline{y} \quad \text{i} \quad \underline{x} \leq_L \underline{y}). \tag{2.8}$$

[3] Esteva i ostali [52] koriste naziv jak istinitosni poredak.

Primetimo još da strogi intervalni poredak implicira slab intervalni poredak i leksikografski poredak, odnosno ako su dva različita intervala uporediva strogim poretkom, onda su uporediva i slabim intervalnim poretkom (poretkom po komponentama) i leksikografskim poretkom. Slično, ako su različiti intervali uporedivi nepreciznim poretkom, onda su uporedivi leksikografskim poretkom. Različiti intervali koji su uporedivi poretkom po komponentma ili strogim intervalnim poretkom, neuporedivi su nepreciznim intervalnim poretkom i obrnuto, intervali uporedivi nepreciznim intervalnim poretkom su neuporedivi poretkom po komponentama i strogim intervalnim poretkom.

Poredak po komponentama (slabi intervalni poredak) je među najčešće korišćenim porecima na skupovima intervala proizvoljne mreže $(L, \leq_L)$ u teoriji intervalno-vrednosnih rasplinutih skupova. Kako smo već pomenuli, poredak po komponentama, pored nekih drugih poredaka, koriste Jenei [82], Ishibuchi i Tanaka [77], Petridis i Kaburlasos [115]. Neki autori smatraju da je slabi intervalni poredak najprirodniji poredak na skupu intervala neke kompletne mreže [100, 52, 34, 35], pa u svojim radovima koriste isključivo ovaj poredak.

Kehagias [89] koristi skupovnu inkluziju (neprecizni intervalni poredak) na skupu intervala kompletne mreže $(X, \leq)$ za povezivanje rasplinutih intervala, rasplinutih brojeva i rasplinutih intervalnih brojeva. Pomenuti rad se vezuje za rezultate Petridisa i Kaburlasosa [114] koji u svojim radovima [115, 86, 87, 88], koriste neprecizni intervalni poredak i mrežu intervala kompletne mreže $(L, \leq)$ sa nepreciznim intervalnim poretkom.

U primeni za intuicionističke rasplinute skupove [126, 17] pojavljuje se poredak dualan nepreciznom intervalnom poretku.

Elbassioni [50] skup zatvorenih intervala realnih brojeva uređuje nepreciznim intervalnim poretkom, odnosno skupovnom inkluzijom $\subseteq$, dok je skup n-dimenzionalnih intervala, čije komponente su zatvoreni intervali realnih brojeva, uređen poretkom po komponentama. Poredak po komponentama i dualno neprecizni intervalni poredak, u kombinaciji, primenjuju se i u bimrežama [1, 36].

I pored široke primene pomenutih poredaka na skupovima intervala i na direktnim proizvodima kompletnih mreža, svojstva ovih poseta nisu sistematski ispitivana, osim u slučaju skupovne inkluzije (nepreciznog poretka) [49]. Kao što će se u nastavku videti, skupovi intervala kompletne mreže u odnosu na svaki od ovih poredaka čine kompletnu mrežu.

U nastavku su izučavane mreže intervala za poredak po komponentama $\leq$, za neprecizni intervalni poredak $\leq_i$, za strogi intervalni poredak $\leq_s$ i za leksikografski intervalni poredak $\leq_l$.

2.1 Intervali na mreži i poredak po komponentama

Poset intervala mreže $L = (L, \leq_L)$ u odnosu na poredak po komponentama (slabi intervalni poredak) je mreža $I_w(L) = (I(L), \leq)$ sa operacijama definisanim na sledeći način:

$$[\underline{x}, \overline{x}] \wedge [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} \wedge_L \underline{y}, \overline{x} \wedge_L \overline{y}],$$

$$[\underline{x}, \overline{x}] \vee [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x} \vee_L \underline{y}, \overline{x} \vee_L \overline{y}],$$

za sve $[\underline{x}, \overline{x}], [\underline{y}, \overline{y}] \in I_w(L)$.

Mrežu $I_w(L) = (I(L), \leq)$ obeležavamo i sa $I_w(L) = (I(L), \wedge, \vee)$ ili kraće $I_w(L)$.

Operacije $\wedge$ i $\vee$ na različitim mrežama često obeležavamo istom oznakom, kada je iz konteksta jasno na koju mrežu se odnose. Na mestima gde bi moglo doći do zabune, indeksom uz operaciju je istaknuta mreža na koju se operacija odnosi.

Na mreži $(L \times L, \leq)$ poredak i operacije se po komponentama prenose sa mreže L, pa se mreža intervala $I_w(L)$ lako može dovesti u vezu sa mrežom $L \times L$.

Teorema 2.2 *Neka je $(L, \wedge_L, \vee_L)$ mreža. Tada je mreža intervala $I_w(L) = (I(L), \wedge, \vee)$ mreže L izomorfna sa podmrežom mreže $(L \times L, \wedge, \vee)$.*

Dokaz.

Neka je S podskup mreže $(L \times L, \leq)$ definisan na sledeći način:

$$S = \{(a, b) \mid (a, b) \in L \times L, a \leq_L b\}, \tag{2.9}$$

sa relacijom poretka $\leq_S$ koja je restrikcija relacije poretka $\leq$ na mreži $L \times L$.

Dokažimo da je poset $(S, \leq_S)$ mreža, odnosno da svaki dvoelementni podskup poseta $(S, \leq_S)$ ima supremum i infimum.

Neka su $(a, b), (c, d)$ proizvoljni elementi skupa S. Tada je
$inf\{(a, b), (c, d)\} = (inf\{a, c\}, inf\{b, d\}) = (a \wedge_L c, b \wedge_L d)$ i
$sup\{(a, b), (c, d)\} = (sup\{a, c\}, sup\{b, d\}) = (a \vee_L c, b \vee_L d)$.

Iz definicije skupa S sledi da za proizvoljne elemente $(a, b), (c, d)$ ovog skupa važi $a \leq_L b$ i $c \leq_L d$. Odatle sledi $a \wedge_L c \leq b \wedge_L d$ i $a \vee_L c \leq b \vee_L d$, pa prema tome $inf\{(a, b), (c, d)\} \in S$ i $sup\{(a, b), (c, d)\} \in S$. Time je dokazano da u posetu $(S, \leq_S)$ svaki dvoelementni podskup ima supremum i infimum.

Pošto se operacije u mreži $(S, \leq_S)$ definišu na uobičajeni način:
$(a, b) \wedge_S (c, d) = inf\{(a, b), (c, d)\} = (a \wedge_L c, b \wedge_L d)$ i $(a, b) \vee_S (c, d) = sup\{(a, b), (c, d)\} = (a \vee_L c, b \vee_L d)$, sledi da su operacije na mreži S restrikcije operacija na mreži $L \times L$, odnosno da je mreža $(S, \wedge_S, \vee_S)$ podmreža mreže $(L \times L, \wedge, \vee)$.

Dokažimo da je traženi izomorfizam preslikavanje $f : I_w(L) \to S$ definisano na sledeći način:

$$f([\underline{x}, \overline{x}]) = (\underline{x}, \overline{x}), \tag{2.10}$$

za svaki interval $[\underline{x}, \overline{x}] \in I_w(L)$. Dokaz da je ovo preslikavanje dobro definisano i injektivno je trivijalan. Očigledno je $f(I_w(L)) = S$. Prema tome, preslikavanje f je bijektivno preslikavanje skupa $I_w(L)$ na skup S.

Dokažimo da je ovo preslikavanje saglasno sa operacijama.

Za proizvoljne intervale $[\underline{x}, \overline{x}], [\underline{y}, \overline{y}] \in I_w(L)$ važi $f([\underline{x}, \overline{x}] \wedge [\underline{y}, \overline{y}]) = (\underline{x} \wedge_L \underline{y}, \overline{x} \wedge_L \overline{y})$. Sa druge strane je $f([\underline{x}, \overline{x}]) \wedge_S f([\underline{y}, \overline{y}]) = (\underline{x}, \overline{x}) \wedge_S (\underline{y}, \overline{y}) = (\underline{x} \wedge_L \underline{y}, \overline{x} \wedge_L \overline{y})$. Time je dokazano da je $f([\underline{x}, \overline{x}] \wedge [\underline{y}, \overline{y}]) = f([\underline{x}, \overline{x}]) \wedge_S f([\underline{y}, \overline{y}])$.

Dualno se dokazuje da je $f([\underline{x}, \overline{x}] \vee [\underline{y}, \overline{y}]) = f([\underline{x}, \overline{x}]) \vee_S f([\underline{y}, \overline{y}])$.

Time dokazan izomorfizam mreža $I_w(L) = (I(L), \wedge, \vee)$ i $(S, \wedge_S, \vee_S)$.

□

Neka je $(L, \wedge, \vee)$ mreža. U nastavku ćemo sa $(S, \wedge, \vee)$ označavati podmrežu mreže $(L \times L, \wedge, \vee)$, gde je $S = \{(a, b) \mid (a, b) \in L \times L, a \leq_L b\}$.

Premda su operacije u ove tri mreže obeleženo isto, iz konteksta je jasno na koju mrežu se operacije odnose.

Ako je mreža L kompletna, onda je kompletna i mreža $L \times L$, ali se to svojstvo ne prenosi i na podmrežu u opštem slučaju.

Tvrđenje 2.1 *Neka je $(L, \wedge, \vee)$ kompletna mreža. Tada je i mreža $(S, \wedge, \vee)$ kompletna.*

Dokaz. Iz definicije skupa S sledi da su najveći $(1, 1)$ i najmanji element $(0, 0)$ mreže $L \times L$ elementi podmreže S. Slično kao u teoremi 2.2 (str. 23) dokazuje se da je mreža S zatvorena za proizvoljne supremume i infimume. Odatle sledi kompletnost mreže $(S, \wedge, \vee)$.

□

Zbog izomorfizma mreža $I_w(L) = (I(L), \wedge, \vee)$ i $(S, \wedge, \vee)$ važi i sledeće tvrđenje.

Posledica 2.1 *Neka je $(L, \wedge, \vee)$ kompletna mreža. Tada je i mreža $I_w(L) = (I(L), \wedge, \vee)$ kompletna.*

Neka je L ograničena mreža. Uočimo sledeće podskupove mreže $I_w(L)$:
$D = \{[x, x] \mid x \in L\}$,
$L_1 = \{[x, 1_L] \mid x \in L\}$ *i*
$\mathrm{L}_0 = \{[0_L, x] \mid x \in L\}$,
sa poretkom $\leq$ koji je restrikcija poretka $\leq$ na ove skupove. Zbog jednostavnosti, za sve ove skupove relaciju poretka smo obeležili na isti način, a iz konteksta je jasno na koju restrikciju se odnosi.

Tvrđenje 2.2 *Neka je $(L, \leq_L)$ kompletna mreža i neka su $(D, \leq)$, $(L_1, \leq)$ i $(L_0, \leq)$ gore definisani poseti. Tada su poseti $(D, \leq)$, $(L_1, \leq)$ i $(L_0, \leq)$ kompletne mreže. Mreže $(D, \wedge, \vee)$, $(L_1, \wedge, \vee)$ i $(L_0, \wedge, \vee)$ su podmreže mreže $I_w(L) = (I(L), \wedge, \vee)$, gde su operacije $\wedge$ i $\vee$ redom, infimum i supremum na mrežno uređenim skupovima $(D, \leq)$, $(L_1, \leq)$ i $(L_0, \leq)$.*

Dokaz.

Slično kao u teoremi 2.2 (str. 23) dokazujemo da su poseti $(D, \leq)$, $(L_1, \leq)$ i $(L_0, \leq)$ zatvoreni za proizvoljne supremume i infimume pa čine kompletne mreže.

Slično kao u teoremi 2.2 dokazuje se da su operacije na ovim posetima restrikcije operacija na $I_w(L) = (I(L), \wedge, \vee)$.

□

Tvrđenje 2.3 *Neka je $(L, \leq_L)$ kompletna mreža i neka je $I_w(L) = (I(L), \leq)$ mreža njenih intervala. Tada se mreža L uvek može potopiti u mrežu $I_w(L)$ na sledeće načine:*

1. *Tako da se najmanji element mreže L preslikava na najmanji element mreže $I_w(L)$.*
2. *Tako da se najveći element mreže L preslikava na najveći element mreže $I_w(L)$.*
3. *Tako da se najmanji i najveći elementi mreže L preslikavaju, redom, na najmanji i najveći element mreže $I_w(L)$.*

Dokaz. Ako je mreža L kompletna, onda je kompletna i mreža $I_w(L)$, a odatle sledi i ograničenost obe mreže. Neka su najmanji i najveći elementi mreže L redom 0 i 1. Tada su najmanji i najveći elementi mreže $I_w(L)$ redom $[0, 0]$ i $[1, 1]$.

Dokazaćemo da su traženi izomorfizmi, redom:
1. $\varphi_0 : L \to L_0$ definisan sa: $\varphi_0(x) = [0, x]$,
2. $\varphi_1 : L \to L_1$ definisan sa: $\varphi(x) = [x, 1_L]$ i
3. $\varphi : L \to D$ definisan sa: $\varphi(x) = [x, x]$, za svako $x \in L$.

Očigledno je da su sva ova preslikavanja dobro definisana i bijektivna.

Dokažimo da je preslikavanje φ_0 obostrano izotono. Neka su x, y proizvoljni elementi mreže L. Tada je $[0, x] \leq [0, y]$ ako i samo ako je $x \leq y$. Takođe je $\varphi_0(0) = [0, 0]$. Time je dokazano da je mreža L izomorfna sa podmrežom L_0 mreže $I_w(L)$ i da se najmanji element mreže L preslikava na najmanji element mreže $I_w(L)$.

Slično se dokazuje da su preslikavanja φ_1 i φ obostrano izotona.

Osim toga, važi $\varphi_1(1) = [1, 1]$, pa je $L \cong L_1$ i najveći element mreže L se preslikava na najveći element mreže $I_w(L)$.

Za preslikavanje φ važi $\varphi(0) = [0, 0]$ i $\varphi(1) = [1, 1]$, pa je $L \cong D$ i najmanji i najveći elementi mreže L se preslikavaju, redom, na najmanji i najveći element mreže $I_w(L)$. □

Poznato je da se identiteti sa mreže L prenose na direktan proizvod $L \times L$ i na njegove podmreže. Zbog izomorfizma mreža S i $I_w(L)$ identiteti, kao što su modularnost i distributivnost, sa mreže L se prenose na mrežu njenih intervala.

Tvrđenje 2.4 *Ako je mreža L ograničena, ograničena je i mreža $I_w(L)$.*

Tvrđenje 2.5 *Mreža L je distributivna ako i samo ako je mreža $I_w(L)$ distributivna.*

Dokaz. Kao što smo već rekli, ako je mreža L distributivna, onda je i mreža $I_w(L)$ distributivna.

Obrnuto, ako je mreža $I_w(L)$ distributivna, onda su i njene podmreže $(D, \wedge, \vee)$, $(L_1, \wedge, \vee)$ i $(L_0, \wedge, \vee)$ takođe distributivne. Iz izomorfizma mreže L sa ovim mrežama sledi distributivnost mreže L.

□

Slično se dokazuje i sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.6 *Mreža L je modularna ako i samo ako je mreža $I_w(L)$ modularna.*

Tvrđenje 2.7 *Neka je mreža* $(L, \wedge, \vee)$ *ograničena. Mreža intervala* $(I_w(L), \wedge, \vee)$ *nije komplementirana, u opštem slučaju.*

Dokaz. Neka je mreža $(L, \wedge, \vee)$ ograničena i neka je njen najmanji element 0, a njen najveći element neka je 1. Tada je interval $[0, 1]$ element mreže intervala $(I_w(L), \wedge, \vee)$. Dokažimo da ovaj interval nema komplement u mreži $(I_w(L), \wedge, \vee)$.

Pretpostavimo suprotno, odnosno da interval $[0, 1]$ ima za komplement interval $[a, b]$. Tada je $[0, 1] \vee [a, b] = [1, 1]$ i $[0, 1] \wedge [a, b] = [0, 0]$. Odatle, redom, sledi da je $0 \vee a = a = 1$ i $1 \wedge b = b = 0$, odnosno da je $[a, b] = [1, 0]$. Pošto $[1, 0] \notin I_w(L)$ time je dokazano da interval $[0, 1]$ nema komplement.

$\square$

Relaciju pokrivanja na mreži intervala definišemo na uobičajeni način: za sve elemente $[\underline{x}, \overline{x}], [\underline{y}, \overline{y}]$ mreže $I_w(L)$, $[\underline{x}, \overline{x}] \prec [\underline{y}, \overline{y}]$ ako je $[\underline{x}, \overline{x}] < [\underline{y}, \overline{y}]$ i ne postoji $[\underline{z}, \overline{z}] \in I_w(L)$ takav da je $[\underline{x}, \overline{x}] < [\underline{z}, \overline{z}] < [\underline{y}, \overline{y}]$.

Tvrđenje 2.8 *Neka je mreža* L *ograničena i neka je njen najmanji element* 0*, a najveći element* 1*. Tada važi:*

1. *Atom mreže* $I_w(L)$ *je interval* $[0, a]$ *ako i samo ako je* a *atom mreže* L*.*

2. *Koatom mreže* $I_w(L)$ *je interval* $[a, 1]$ *ako i samo ako je* a *koatom mreže* L*.*

Dokaz.

1. Ako je a atom mreže L, onda očigledno važi $[0, 0] \prec [0, a]$, odnosno interval $[0, a]$ je atom mreže $I_w(L)$.
Obrnuto, dokažimo da su atomi mreže $I_w(L)$ tačno intervali $[0, a]$, gde je a atom mreže L. Pretpostavimo da je interval $[\underline{x}, \overline{x}]$ atom mreže $I_w(L)$, odnosno da $[0, 0] \prec [\underline{x}, \overline{x}]$ i da je $[\underline{x}, \overline{x}] \neq [0, 0]$. Tada postoje dve mogućnosti, da je $0 < \underline{x} \leq \overline{x}$ ili da je $0 = \underline{x}$ i $0 \prec \overline{x}$.

Ako je $0 < \underline{x} \leq \overline{x}$, onda je $[0, 0] < [0, \underline{x}] < [\underline{x}, \overline{x}]$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $[\underline{x}, \overline{x}]$ atom mreže $I_w(L)$. Odatle sledi da važi druga mogućnost, odnosno da je $0 = \underline{x}$ i $0 \prec \overline{x}$. Iz $0 \prec \overline{x}$ sledi da je $\overline{x} = a$ atom mreže L. Time je dokazano da je atom mreže $I_w(L)$ interval $[\underline{x}, \overline{x}] = [0, a]$, gde je a atom mreže L.

2. Ako je a koatom mreže L onda je očigledno interval $[a, 1]$ koatom mreže $I_w(L)$.

Dokažimo obrnuto, da su koatomi mreže $I_w(L)$ tačno intervali $[a, 1]$, gde je a koatom mreže L.
Pretpostavimo da je interval $[\underline{x}, \overline{x}]$ koatom mreže $I_w(L)$, odnosno da $[\underline{x}, \overline{x}] \prec [1, 1]$ i da je $[\underline{x}, \overline{x}] \neq [1, 1]$. Tada postoje dve mogućnosti, da je $\underline{x} \leq \overline{x} < 1$ ili da je $\underline{x} \prec 1$ i $\overline{x} = 1$. Slično kao u prethodnom slučaju, prva mogućnost nas dovodi do kontradikcije, pa je $\overline{x} = 1$ i $\underline{x} \prec 1$. Odatle sledi da je $\underline{x} = a$ koatom mreže L i da je koatom mreže $I_w(L)$ interval $[a, 1]$.

$\square$

Tvrđenje 2.9 *Neka je mreža L ograničena i neka je njen najmanji element 0, a najveći element 1. Mreža $I_w(L)$ je atomarna ako i samo ako je mreža L atomarna.*

Dokaz.

Pretpostavimo da je mreža L atomarna, odnosno da za svaki element $x \in L$ i $x \neq 0$ postoji atom $a \in L$ takav da je $a \leq x$. Neka je $[\underline{x}, \overline{x}] \neq [0, 0]$ proizvoljan element mreže $I_w(L)$. Tada je $\overline{x} \neq 0$ i za $\overline{x} \in L$ postoji atom a takav da je $\overline{x} \geq a$. Tada važi $[0, a] \leq [\underline{x}, \overline{x}]$. Prema tvrđenju 2.8 interval $[0, a]$ je atom mreže $I_w(L)$. Time je dokazano da za svaki element $[\underline{x}, \overline{x}] \neq [0, 0]$ mreže $I_w(L)$ postoji atom $[0, a]$ mreže $I_w(L)$ takav da je $[\underline{x}, \overline{x}] \geq [0, a]$, odnosno da je mreža $I_w(L)$ atomarna.

Za dokaz u drugom smeru pretpostavimo da je mreža $I_w(L)$ atomarna. Neka je $x \in L$ proizvoljan element. Tada za interval $[x, x] \neq [0, 0]$ mreže $I_w(L)$ postoji atom $[0, a]$ te mreže takav da je $[0, a] \leq [x, x]$. Odatle sledi da je $a \leq x$. Prema tvrđenju 2.8, ako je $[0, a]$ atom mreže $I_w(L)$, onda je a atom mreže L. Time je dokazano da je mreža L atomarna.

$\square$

Međutim, mreža $I_w(L)$ u opštem slučaju nije atomarno generisana, čak i kad je mreža L atomarno generisana - kao supremum atoma mogu se dobiti samo intervali $[0, x]$ za neke $x \in L$.

Tvrđenje 2.10 *Neka je L ograničena mreža čiji je najmanji element 0, a najveći 1. Tada je skup svih intervala mreže L koji sadrže najmanji element mreže L glavni ideal mreže intervala $I_w(L)$ generisan intervalom $[0, 1]$. Skup svih intervala mreže L koji sadrže najveći element mreže L, je glavni filter mreže intervala $I_w(L)$ generisan intervalom $[0, 1]$.*

Dokaz. Dokažimo da je $L_0 = \{[0, x] \mid x \in L\} = \downarrow[0, 1]$.
Očigledno je $L_0 \subseteq \downarrow[0, 1]$.

Neka je $[\underline{x}, \overline{x}] \in I_w(L)$. Pretpostavimo da interval $[\underline{x}, \overline{x}] \in \downarrow[0, 1]$. Tada je $[\underline{x}, \overline{x}] \leq [0, 1]$, što je ekvivalentno sa $\underline{x} \leq 0$ i $\overline{x} \leq 1$. Odatle sledi da je $\underline{x} = 0$, odnosno da je $[\underline{x}, \overline{x}] = [0, \overline{x}] \in L_0$. Time je dokazano da je $\downarrow[0, 1] \subseteq L_0$, a time i tražena jednakost.
Slično se dokazuje da je $L_1 = \{[x, 1] \mid x \in L\} = \uparrow[0, 1]$.

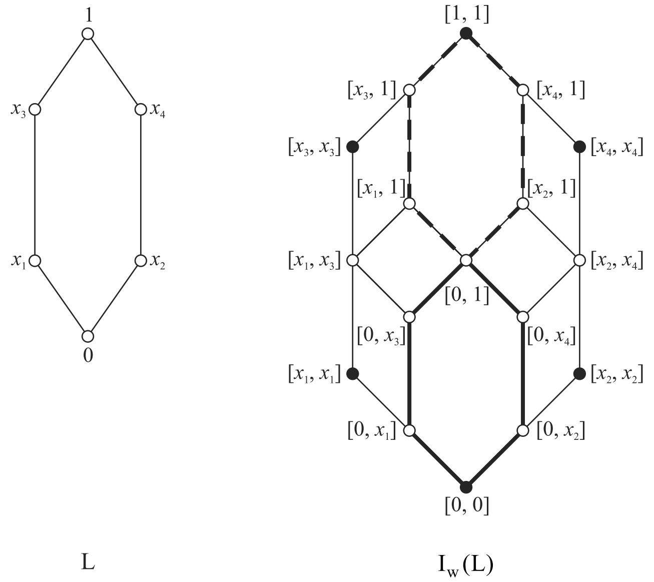
$\square$

Tvrđenje 2.11 *Neka je L ograničena mreža. Tada je mreža $(L_1, \leq)$ izomorfna sa $(\{\uparrow x \mid x \in L\}, \supseteq)$ i mreža $(L_0, \leq)$ je izomorfna sa $(\{\downarrow x \mid x \in L\}, \subseteq)$.*

Dokaz. Kao što smo već pomenuli, za intervale $[x, 1]$ i $[0, x]$ mreže L redom važi $[x, 1] = \uparrow x$ i $[0, x] = \downarrow x$ za svako $x \in L$. Poznato je da su poseti $(\{\downarrow x \mid x \in L\}, \subseteq)$ i $(\{\uparrow x \mid x \in L\}, \supseteq)$ kompletne mreže. Prema tome, može se uspostaviti obostrano jednoznačno preslikavanje mreže $(L_1, \leq)$ na mrežu $(\{\uparrow x \mid x \in L\}, \supseteq)$ definisano sa: $f([x, 1]) = \uparrow x$ za svako $x \in L$. Dokažimo da je preslikavanje f obostrano izotono. Neka su $[x, 1], [y, 1] \in L_1$ takvi da je $[x, 1] \leq [y, 1]$. To je ekvivalentno sa $x \leq y$, što je dalje ekvivalentno sa $\uparrow x \supseteq \uparrow y$. Time je dokazano da je $(L_1, \leq) \cong (\{\uparrow x \mid x \in L\}, \supseteq)$.

Obostrano jednoznačno preslikavanje mreže $(L_0, \leq)$ na mrežu $(\{\downarrow x \mid x \in L\}, \subseteq)$ se definiše na sledeći način: $g([0,x]) = \downarrow x$ za svako $x \in L$. Preslikavanje g je obostrano izotono. Zaista, za sve $x, y \in L$, $x \leq y$ je ekvivalentno sa $\downarrow x \subseteq \downarrow y$. Sa druge strane $x \leq y$ je ekvivalentno sa $[0,x] \leq [0,y]$. Dakle, $[0,x] \leq [0,y]$ je ekvivalentno sa $\downarrow x \subseteq \downarrow y$, što je trebalo dokazati.

□



Slika 2.1

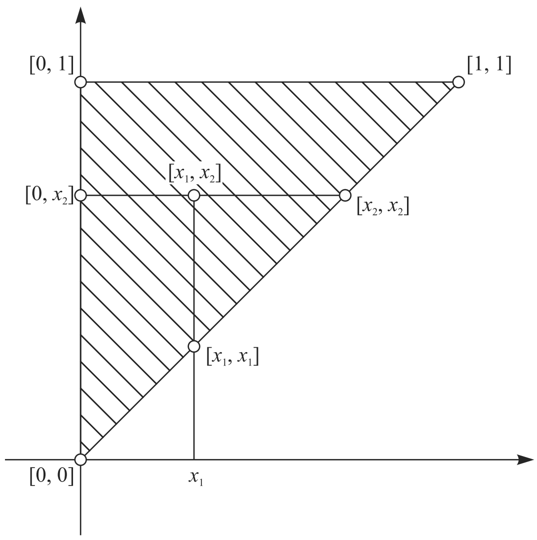
Primer 2.1 *Na slici* 2.1 *su prikazani dijagrami mreže L i mreže njenih intervala $I_w(L)$. Na dijagramu su zatamnjenim kružićima istaknuti elementi mreže D, debljom punom linijom je istaknuta podmreža L_0, a debljim isprekidanim linijama istaknuta je podmreža L_1. Na slici se jasno uočava da je mreža L izomorfna sa svakom od ovih podmreža.*

Takođe se može videti da je $L_0 = \downarrow[0,1]$ i da je $L_1 = \uparrow[0,1]$.

Primetimo da je mreža L komplementirana. Komplementi elementima x_1 i x_3 su elementi x_2 i x_4, i obrnuto. Kao što je dokazano u tvrđenju 2.7, mreža intervala $I_w(L)$ nije komplementirana. Osim intervala $[0,1]$, komplemente nemaju ni intervali $[0,x_3]$, $[0,x_4]$, $[x_1,1]$ i $[x_2,1]$.

Ako za mrežu L izaberemo jedinični interval realnih brojeva $[0,1]$, onda odgovarajuću mrežu intervala sa slabim intervalnim poretkom obeležavamo na sledeći način: $I_w([0,1]) = (I([0,1]), \leq)$ gde je skup $I([0,1])$ definisan jednakošću 2.2 (str. 19). Mreža $I_w([0,1])$ (slika 2.2 na str. 29) je kompletna mreža čiji je najmanji element $[0,0]$, a najveći $[1,1]$. Ovi elementi su ujedno i jedini elementi koji imaju komplement. Lanac $[0,1]$ je distributivan i nema atome, pa je i mreža $I_w([0,1])$ distributivna i bez atoma.

Primer 2.2 *Na slici* 2.2 *je uobičajena grafička reprezentacija mreže* $I_w([0,1])$ *koja se razlikuje od Hasse dijagrama mreže. Takođe je uobičajeno da se intervali prikazuju kao što se prikazuju tačke u ravni, odnosno kao uređeni parovi. U našem pristupu, interval* $[x_1, x_2]$ *mreže* $I_w([0,1])$ *je supremum intervala* $[0, x_2]$ *i* $[x_1, x_1]$*, a ne uređeni par elemenata* x_1 *i* x_2*. Mreže* $(D, \leq)$*,* $(L_1, \leq)$ *i* $(L_0, \leq)$ *su lanci izomorfni sa mrežom* $L = [0,1]$*, a na slici* 2.2 *one su, redom, hipotenuza i katete osenčenog trougla.*



Slika 2.2

2.2 Intervali na mreži i neprecizni intervalni poredak

Prema definiciji, intervali na mreži su skupovi, pa skupovna inkluzija spada u prirodne poretke na skupu intervala.

U ovom slučaju prazan skup takođe smatramo intervalom i nazivamo ga **prazni interval** [76], a skup intervala mreže $(L, \leq)$ je $I_\perp(L) = I(L) \cup \{\emptyset\}$, pri čemu je skup intervala $I(L)$ dat jednakošću 2.1 na strani 19.

Duthie [49] je dokazao da je poset intervala mreže $L = (L, \leq)$ sa skupovnom inkluzijom kao poretkom, mreža $(I_\perp(L), \subseteq)$, u kojoj je infimum skupovni presek intervala, a supremum bilo koja dva intervala je presek svih intervala koji ih sadrže, odnosno

$$[\underline{x}, \overline{x}] \sqcap [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x}, \overline{x}] \cap [\underline{y}, \overline{y}], \tag{2.11}$$

$$[\underline{x}, \overline{x}] \sqcup [\underline{y}, \overline{y}] = \bigcap \{[a,b] \in I_\perp(L) \mid [\underline{x}, \overline{x}] \subseteq [a,b], [\underline{y}, \overline{y}] \subseteq [a,b]\}, \tag{2.12}$$

za sve $[\underline{x}, \overline{x}], [\underline{y}, \overline{y}] \in I_\perp(L)$.

Neprecizni poredak na direktnom proizvodu $L_1 \times L_2$ mreža $(L_1, \leq_{L_1})$ i $(L_2, \leq_{L_2})$ definiše se na sledeći način:

$$(a,b) \leq_i (c,d) \text{ ako i samo ako je } a \geq_{L_1} c \text{ i } b \leq_{L_2} d,$$

za sve $(a,b),(c,d) \in L_1 \times L_2$.

Lako se dokazuje da za svaka dva elementa poseta $(L_1 \times L_2, \leq_i)$ postoji supremum i infimum, pa je $(L_1 \times L_2, \leq_i)$ mreža sa operacijama:

$$(a,b) \wedge (c,d) = (a \vee_{L_1} c, b \wedge_{L_2} d) \text{ i}$$
$$(a,b) \vee (c,d) = (a \wedge_{L_1} c, b \vee_{L_2} d),$$

za sve $(a,b),(c,d) \in L_1 \times L_2$.

Na skupu intervala $I(L)$ mreže L neprecizni intervalni poredak, definisan jednakošću 2.4 na strani 20, ekvivalentan je skupovnoj inkluziji, odnosno $[\underline{x},\overline{x}] \subseteq [\underline{y},\overline{y}] \Leftrightarrow [\underline{x},\overline{x}] \leq_i [\underline{y},\overline{y}]$.

Prema tome, intervale mreže $L = (L, \leq)$ možemo posmatrati kao mrežno uređeni skup $I_i(L) = (I_\perp(L), \leq_i)$ u kome su infimum i supremum, odnosno operacije $\wedge$ i $\vee$ redom [76]:

$$[\underline{x},\overline{x}] \wedge [\underline{y},\overline{y}] = \begin{cases} [\underline{x} \vee_L \underline{y}, \overline{x} \wedge_L \overline{y}] & \text{za} \quad \underline{x} \vee_L \underline{y} \leq \overline{x} \wedge_L \overline{y}, \\ \emptyset & \text{za} \quad \underline{x} \vee_L \underline{y} \not\leq \overline{x} \wedge_L \overline{y} \end{cases} \quad \text{i} \tag{2.13}$$

$$[\underline{x},\overline{x}] \vee [\underline{y},\overline{y}] = [\underline{x} \wedge_L \underline{y}, \overline{x} \vee_L \overline{y}], \tag{2.14}$$

za sve $[\underline{x},\overline{x}],[\underline{y},\overline{y}] \in L_i^I$.

Prazan skup je najmanji element mreže $I_i(L)$, pa se operacije sa praznim skupom definišu na sledeći način: $[\underline{x},\overline{x}] \vee \emptyset = [\underline{x},\overline{x}]$ i $[\underline{x},\overline{x}] \wedge \emptyset = \emptyset$ za svaki element $[\underline{x},\overline{x}] \in I_i(L)$.

Tvrđenje 2.12 *Neka je $I_\perp(L) = I(L) \cup \{\emptyset\}$ skup intervala mreže $(L, \wedge_L, \vee_L)$. Tada je $I_i(L) = (I_\perp(L), \wedge, \vee) = (I_\perp(L), \sqcap, \sqcup)$.*

Dokaz.

Pre nego što dokažemo da su definicije binarnih operacija $\wedge$ i $\sqcap$ ekvivalentne, podsetimo se da je na mreži L poredak $\leq$, a na mreži $I_i(L)$ poredak je $\leq_i$ što je na ovom skupu ekvivalentno sa $\subseteq$.

Prvo dokazujemo da je presek dva neprazna intervala $[\underline{x},\overline{x}],[\underline{y},\overline{y}] \in I_i(L)$ neprazan skup ako i samo ako je $\underline{x} \vee_L \underline{y} \leq \overline{x} \wedge_L \overline{y}$.

Neka je za dva neprazna intervala $[\underline{x},\overline{x}],[\underline{y},\overline{y}]$ iz skupa $I_\perp(L)$ njihov presek neprazan skup, odnosno pretpostavimo da postoji element a mreže L takav da $a \in [\underline{x},\overline{x}] \cap [\underline{y},\overline{y}]$. Tada je $\underline{x} \leq a \leq \overline{x}$ i $\underline{y} \leq a \leq \overline{y}$, pa je $\underline{x} \vee_L \underline{y} \leq a \leq \overline{x} \wedge_L \overline{y}$. Odatle sledi da je $\underline{x} \vee_L \underline{y} \leq \overline{x} \wedge_L \overline{y}$.

S druge strane ako pretpostavimo da je $\underline{x} \vee_L \underline{y} \leq \overline{x} \wedge_L \overline{y}$ i ako imamo u vidu da je $\underline{x} \leq \underline{x} \vee_L \underline{y} \leq \overline{x} \wedge_L \overline{y} \leq \overline{x}$ i $\underline{y} \leq \underline{x} \vee_L \underline{y} \leq \overline{x} \wedge_L \overline{y} \leq \overline{y}$, očigledno je $[\underline{x},\overline{x}] \cap [\underline{y},\overline{y}] \neq \emptyset$.

Odatle sledi da, za neprazne intervale čiji je presek neprazan skup, važi $[\underline{x},\overline{x}] \cap [\underline{y},\overline{y}] = \{a \in L \mid \underline{x} \vee_L \underline{y} \leq a \leq \overline{x} \wedge_L \overline{y}\}$. S druge strane je $\{a \in L \mid \underline{x} \vee_L \underline{y} \leq a \leq \overline{x} \wedge_L \overline{y}\} = [\underline{x} \vee_L \underline{y}, \overline{x} \wedge_L \overline{y}]$. Odatle sledi da je $[\underline{x},\overline{x}] \cap [\underline{y},\overline{y}] = [\underline{x} \vee_L \underline{y}, \overline{x} \wedge_L \overline{y}]$.

Prema gore dokazanom, za neprazne intervale $[\underline{x}, \overline{x}]$ i $[\underline{y}, \overline{y}]$ važi $[\underline{x}, \overline{x}] \cap [\underline{y}, \overline{y}] = \emptyset$ ako i samo ako je $\underline{x} \vee_L \underline{y} \not\leq \overline{x} \wedge_L \overline{y}$. Po definiciji binarne operacije $\wedge$, $\underline{x} \vee_L \underline{y} \not\leq \overline{x} \wedge_L \overline{y}$ ako i samo ako je $[\underline{x}, \overline{x}] \wedge [\underline{y}, \overline{y}] = \emptyset$. Takođe važi $[\underline{x}, \overline{x}] \cap \emptyset = \emptyset$, pa je i $[\underline{x}, \overline{x}] \sqcap \emptyset = [\underline{x}, \overline{x}] \wedge \emptyset = \emptyset$.

Time je dokazano da je $[\underline{x}, \overline{x}] \sqcap [\underline{y}, \overline{y}] = [\underline{x}, \overline{x}] \wedge [\underline{y}, \overline{y}]$.

Dokažimo da su ekvivalentne definicije binarnih operacija $\vee$ i $\sqcup$.

Neka je za dva proizvoljna neprazna intervala $[\underline{x}, \overline{x}], [\underline{y}, \overline{y}]$ iz skupa $I_\perp(L)$, $[\underline{x}, \overline{x}] \sqcup [\underline{y}, \overline{y}] = [a^*, b^*]$, odnosno neka je $\bigcap\{[a, b] \in I_i(L) \mid [\underline{x}, \overline{x}] \subseteq [a, b], [\underline{y}, \overline{y}] \subseteq [a, b]\} = [a^*, b^*]$. Tada je $[\underline{x}, \overline{x}] \subseteq [a^*, b^*]$ što je ekvivalentno sa $\underline{x} \geq a^*$ i $\overline{x} \leq b^*$. Takođe je $[\underline{y}, \overline{y}] \subseteq [a^*, b^*]$ ako i samo ako je $\underline{y} \geq a^*$ i $\overline{y} \leq b^*$. Odatle sledi da je $\underline{x} \wedge \underline{y} \geq a^*$ i $\overline{x} \vee \overline{y} \leq b^*$, pa je $[\underline{x} \wedge \underline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}] \subseteq [a^*, b^*]$, odnosno $[\underline{x} \wedge \underline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}] \leq_i [a^*, b^*]$.

S druge strane je $\underline{x} \wedge_L \underline{y} \leq \underline{x} \leq \overline{x} \leq \overline{x} \vee_L \overline{y}$ pa je $[\underline{x}, \overline{x}] \subseteq [\underline{x} \wedge_L \underline{y}, \overline{x} \vee_L \overline{y}]$. Slično važi $[\underline{y}, \overline{y}] \subseteq [\underline{x} \wedge_L \underline{y}, \overline{x} \vee_L \overline{y}]$. Odatle sledi $[\underline{x} \wedge_L \underline{y}, \overline{x} \vee_L \overline{y}] \in \{[a, b] \in I_i(L) \mid [\underline{x}, \overline{x}] \subseteq [a, b], [\underline{y}, \overline{y}] \subseteq [a, b]\}$. Prema tome važi $[\underline{x} \wedge \underline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}] \supseteq [a^*, b^*]$, odnosno $[\underline{x} \wedge \underline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}] \geq_i [a^*, b^*]$. Dakle, $[\underline{x} \wedge \underline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}] = [a^*, b^*]$.

Pored toga važi $[\underline{x}, \overline{x}] \sqcup \emptyset = \bigcap\{[a, b] \in I_i(L) \mid [\underline{x}, \overline{x}] \subseteq [a, b]\} = [\underline{x}, \overline{x}]$, a odatle sledi da je $[\underline{x}, \overline{x}] \sqcup \emptyset = [\underline{x}, \overline{x}] \vee \emptyset$.

Time je dokazano da važi $[\underline{x} \wedge \underline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}] = [\underline{x}, \overline{x}] \sqcup [\underline{y}, \overline{y}]$, za sve $[\underline{x}, \overline{x}], [\underline{y}, \overline{y}] \in I_i(L)$.

□

Mrežu $I_i(L) = (I_\perp(L), \wedge, \vee)$ obeležavamo i sa $I_i(L) = (I(L), \wedge, \vee)$ ili, kraće $I_i(L)$. Iako su obeležene na isti način, operacije na mreži $I_i(L)$ se razlikuju od operacija na mreži $I_w(L)$. Operacije na različitim mrežama indeksiramo samo u slučajevima u kojima je potrebno jasno naglasiti na koju mrežu se date operacije odnose.

Dodavanjem novog najmanjeg elementa $\theta \notin L \times L$ mreži $(L \times L, \leq_i)$ dobijamo mrežu koju obeležavamo sa $(L \times L)_i = ((L \times L)_\perp, \leq_i)$ i sa $(L \times L)_i = ((L \times L)_\perp, \wedge, \vee)$. Tada je $(a, b) \wedge \theta = \theta$ i $(a, b) \vee \theta = (a, b)$, za svaki element $(a, b) \in (L \times L)_i$.

Teorema 2.3 *Neka je $(L, \wedge, \vee)$ mreža. Tada je mreža intervala $I_i(L) = (I_\perp(L), \wedge, \vee)$ mreže L izomorfna sa $\vee$- podmrežom mreže $(L \times L)_i = ((L \times L)_\perp, \wedge, \vee)$.*

Dokaz. Neka je $S_\perp$ podskup mreže $(L \times L)_\perp$ definisan na sledeći način:

$$S_\perp = \{(a, b) \mid (a, b) \in L \times L, a \leq_L b\} \cup \{\theta\}. \tag{2.15}$$

Poredak na skupu $S_\perp$ se uvodi kao restrikcija poretka na mreži $(L \times L)_i = ((L \times L)_\perp, \leq_i)$, a supremum i infimum su, za svaka dva elementa, određeni slično kao na mreži $I_i(L) = (I_\perp(L), \wedge, \vee)$.

Prema definiciji poseta $S_\perp$ važi $S_\perp \subseteq (L \times L)_\perp$ i za proizvoljne elemente $(a, b), (c, d) \in S$ važi $a \wedge_L c \leq b \vee_L d$. Odatle sledi da je $(a, b) \vee_S (c, d) = (a \wedge_L c, b \vee_L d) \in S$.

Prema tome, poset $S_\perp$ je mreža na kojoj je operacija $\vee$ restrikcija odgovarajuće operacije na mreži $(L \times L)_i$, pa je mreža $(S_\perp, \wedge, \vee)$ $\vee$- podmreža mreže $(L \times L)_i = ((L \times L)_\perp, \wedge, \vee)$.

Očigledno je mreža $I_i(L)$ izomorfna sa mrežom $S_\perp$, gde je $f([\underline{x},\overline{x}]) = (\underline{x},\overline{x})$ i $f(\emptyset) = \theta$ traženi izomorfizam. □

Primetimo da operacija $\wedge$ nije restrikcija odgovarajuće operacije na mreži $(L\times L)_i$. Zaista, ako je $a\vee_L c \leq b\wedge_L d$, onda je $(a,b)\wedge_S (c,d) = (a\vee_L c, b\wedge_L d)$. Ako je $a\vee_L c \not\leq b\wedge_L d$, onda je $(a,b)\wedge_S (c,d) = \theta$. Dakle, u tom slučaju je $(a,b)\wedge_S (c,d) \neq (a\vee_L c, b\wedge_L d)$.

Mreža intervala $I_i(L)$ uvek ima najmanji element i ako ga mreža L nema. Ako je mreža L ograničena tada je $[0_L, 1_L]$ najveći element mreže $I_i(L)$. Ako mreža L nema najmanji 0_L ili najveći 1_L element, tada mreža $I_i(L)$ nema najveći element. Odatle sledi da mreža $I_i(L)$ ima najveći element ako i samo ako je mreža L ograničena.

Na osnovu definicije operacija na $I_i(L)$ direktno sledi naredno tvrđenje.

Tvrđenje 2.13 *Ako je mreža L kompletna, onda je i mreža $I_i(L)$ kompletna.*

Ovo tvrđenje je direktna posledica definicije operacija na $I_i(L)$[4].

Tvrđenje 2.14 *[49] Ako je mreža L komplementirana, onda je komplementirana i mreža $I_i(L)$.*

Duthie [49] je dokazao da iz komplementiranosti mreže L ne sledi i jednoznačna određenost komplemenata mreže $I_i(L)$. Tako mreža $I_i(L)$ ne mora biti jednoznačno komplementirana čak i kad je mreža L jednoznačno komplementirana. Poznato je da su distributivne komplementirane mreže jednoznačno komplementirane. Prema tome, ako je L komplementirana distributivna mreža, onda je i mreža $I_i(L)$ komplementirana, ali, u opštem slučaju, nije jednoznačno komplementirana. Odatle sledi da mreža $I_i(L)$ u opštem slučaju nije distributivna, čak i ako je mreža L distributivna.

Slično važi i za modularnost. Mreža $I_i(L)$ nije modularna u opštem slučaju, čak i ako je L modularna mreža. Na primer, ako mreža L ima bar tri elementa i ako je lanac, pa prema tome distributivna i modularna, onda mreža $I_i(L)$ nije modularna, što u nastavku dokazujemo.

Tvrđenje 2.15 *Neka je mreža L lanac sa više od dva elementa, sa najmanjim elementom 0_L i najvećim elementom 1_L. Mreža $I_i(L)$ nije modularna.*

Dokaz.

Neka su a, b, c proizvoljni različiti elementi mreže L. Prema uslovu tvrđenja svaka dva elementa mreže L su uporediva. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a < b < c$. Tada je $[a,a] < [a,b]$. Takođe je $[a,a]\vee([c,c]\wedge[a,b]) = [a,a]$ i $([a,a]\vee[c,c])\wedge[a,b] = [a,b]$. Prema tome, za $[a,a] < [a,b]$ važi $[a,a]\vee([c,c]\wedge[a,b]) \neq ([a,a]\vee[c,c])\wedge[a,b]$, odnosno mreža $I_i(L)$ nije modularna.

□

Poznato je da su distributivne mreže modularne, pa je sledeće tvrđenje direktna posledica prethodnog.

[4] Umesto dva intervala, posmatra se proizvoljna familija intervala.

Posledica 2.2 *Neka je mreža L lanac sa više od dva elementa, sa najmanjim elementom 0_L i najvećim elementom 1_L. Mreža $I_i(L)$ nije distributivna.*

Mreža $I_i(L)$ ima atome i kada ih mreža L nema. Važi i više:

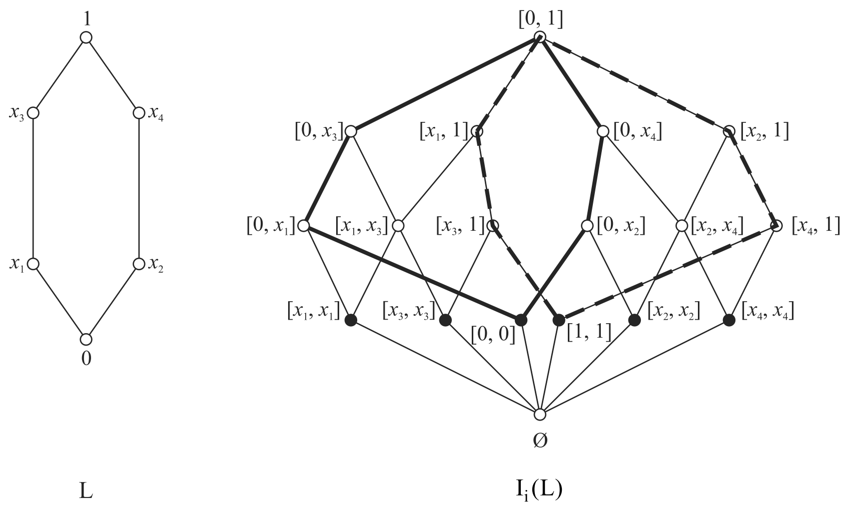
Teorema 2.4 *[49] Postoji bijekcija između elemenata mreže $(L, \leq)$ i atoma mreže $I_i(L) = (I_\perp(L), \leq_i)$ i svaki ne-atomski element $[\underline{x}, \overline{x}]$ mreže $I_i(L)$ može se jednoznačno izraziti kao supremum tačno dva atoma $[\underline{x}, \underline{x}]$ i $[\overline{x}, \overline{x}]$.*

Dakle, mreža $I_i(L)$ je atomarno generisana i atomarna.

Teorema 2.5 *[49] Glavni filter $\uparrow[a, b]$ nekog elementa $[a, b]$ mreže $I_i(L)$ je izomorfan sa direktnim proizvodom $\downarrow a \times \uparrow b$, gde su $\downarrow a$ i $\uparrow b$ redom, glavni ideal i glavni filtar elemenata $a, b \in L$.*

Posledica 2.3 *[49] Neka je L mreža sa najmanjim elementom. Skup svih glavnih ideala mreže L je izomorfan maksimalanom filteru mreže $I_i(L)$ generisanom elementom $[0, 0] \in I_i(L)$ koji je, dalje, izomorfan sa mrežom L.*

Neka je L mreža sa najvećim elementom. Skup svih glavnih filtera mreže L je izomorfan maksimalanom filteru mreže $I_i(L)$ generisanom elementom $[1, 1] \in I_i(L)$, koji je, dalje, izomorfan sa mrežom L^d.



Slika 2.3

Primer 2.3 *Na slici* 2.3 *su prikazani dijagrami konačne mreže L i njene mreže intervala $I_i(L)$. Elementi skupa $D = \{[x, x] \mid x \in L\}$ su istaknuti zatamnjenim kružićima. Na dijagramu mreže intervala $I_i(L)$ se jasno uočava da su elementi skupa D atomi mreže $I_i(L)$, te da bijektivno preslikavanje $f : L \to D$ definisano sa $f(x) = [x, x]$, za svako $x \in L$, nije izotono.*

Punom debljom linijom je istaknut maksimalni filter generisan elementom $[0,0] \in I_i(L)$. *Takođe se jasno uočava da je mreža* $\uparrow[0,0]$ *izomorfna sa mrežom* L.

Isprekidanom debljom linijom je istaknut maksimalni filter generisan elementom $[1,1] \in I_i(L)$. *Na prikazanim dijagramima je vidljivo da je mreža* $\uparrow[1,1]$ *dualno izomorfna sa mrežom* L.

Slično mreži $I_i(L) = (I_\perp(L), \leq_i)$ definiše se mreža $I_i([0,1]) = (I_\perp([0,1]), \leq_i)$, gde je $I_\perp([0,1]) = [0,1] \cup \{\emptyset\}$. Prema prethodno rečenom, mreža $(I_\perp([0,1]), \leq_i)$ je kompletna mreža čiji je najmanji element $\emptyset$, a najveći $[0,1]$. Ova mreža nije komplementirana, a prema teoremi 2.4 (str. 33) njeni atomi čine beskonačan anti-lanac. Mreža $I_i([0,1])$ nije modularna (tvrđenje 2.15), pa prema tome nije ni distributivna.

2.3 Intervali na mreži i strogi intervalni poredak

Skup intervala $I(L) = \{[\underline{x}, \overline{x}] \mid (\underline{x}, \overline{x}) \in L^2, \underline{x} \leq_L \overline{x}\}$ neke mreže L može se urediti i relacijom koja je definisana jednakošću 2.5 na strani 21. Lako se dokazuje da je ovako definisana relacija na skupu intervala $I(L)$ relacija poretka.

U prethodnim odeljcima smo videli da je poredak po komponentama na direktnom proizvodu $L \times L$ neke mreže L mrežni poredak i da može da se uspostavi veza između mreže intervala $I_w(L)$ mreže L i podmreže mreže $(L \times L, \leq)$ (str. 23). Slično, neprecizni poredak na direktnom proizvodu $L \times L$ neke mreže L je mrežni poredak. Takođe je uspostavljena veza između mreže intervala $I_i(L)$ mreže L i $\vee$- podmreže mreže $(L \times L, \leq_i)$ (str. 31). Zato na skupu $L \times L$ definišemo relaciju koja je prirodno proširenje relacije strogog intervalnog poretka na skupu intervala $I(L)$ mreže L.

Neka je $(L, \leq_L)$ mreža. Na skupu $L \times L$ definišemo relaciju $\leq_s$ na sledeći način:

$$\mathbf{x} \leq_s \mathbf{y} \quad \text{ako i samo ako je} \quad \overline{x} \leq_L \underline{y} \quad \text{ili} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}, \tag{2.16}$$

za sve $\mathbf{x} = (\underline{x}, \overline{x}), \mathbf{y} = (\underline{y}, \overline{y}) \in L \times L$.

Međutim, ovako definisana relacija $\leq_s$, na skupu $L \times L$ nije relacija poretka. Da bismo potvrdili ovu konstataciju, dovoljno je da uočimo elemente $(a,b), (b,a), (a,c) \in L \times L$, pri čemu su $a, b, c \in L$ različiti elementi. Po definiciji relacije $\leq_s$ važi: $(a,b) \leq_s (b,a)$ i $(b,a) \leq_s (a,b)$, pa ova relacija nije antisimetrična na $L \times L$. Pored toga, iz $(a,b) \leq_s (b,a)$ i $(b,a) \leq_s (a,c)$ ne sledi da je $(a,b) \leq_s (a,c)$ ako je $b > a$. Prema tome, ova relacija nije ni tranzitivna na $L \times L$.

Dakle, relacija koja predstavlja proširenje na $L \times L$ relacije strogog intervalnog poretka na skupu intervala $I(L)$ mreže L, nije relacija poretka na $L \times L$.

Teorema 2.6 *Skup intervala* $I(L)$ *mreže* $(L, \leq)$ *je mreža u odnosu na strogi intervalni poredak.*

Dokaz. Dokažimo da u posetu $(I(L), \leq_s)$ postoji supremum i infimum za svaka dva elementa.

Neka su $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ i $\mathbf{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ proizvoljni elementi poseta $(I(L), \leq_s)$. Supremum ovih elemenata je interval, označimo ga sa $[a, b]$, takav da je $\overline{x} \leq_L a$ i $\overline{y} \leq_L a$. Zbog toga je $sup\{\overline{x}, \overline{y}\} \leq_L a$. Ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ neuporedivi, onda su njihova gornja ograničenja svi intervali oblika $[sup\{\overline{x}, \overline{y}\}, b]$ gde je b bilo koji element mreže L takav da je $sup\{\overline{x}, \overline{y}\} \leq b$. Najmanje gornje ograničenje za elemente $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ je tada interval $[sup\{\overline{x}, \overline{y}\}, sup\{\overline{x}, \overline{y}\}]$. Ukoliko su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ uporedivi, recimo da je $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, onda je $sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathbf{y}$.

Slično se može pokazati da su donja ograničenja za $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$ svi intervali oblika $[a, inf\{\underline{x}, \underline{y}\}]$, gde je a element mreže L takav da je $a \leq inf\{\underline{x}, \underline{y}\}$. Dakle, ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ neuporedivi, njihovo najveće donje ograničenje je $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = [inf\{\underline{x}, \underline{y}\}, inf\{\underline{x}, \underline{y}\}]$. Ako je $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ onda je $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathbf{x}$.

Time je dokazano da za svaka dva elementa $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ poseta $I_s(L)$ postoji infimum i supremum, odnosno da je poset $(I(L), \leq_s)$ mreža.

$\square$

Za mrežu intervala u odnosu na strogi intervalni poredak koristimo sledeću oznaku: $I_s(L) = (I(L), \leq_s)$.

Operacije $\wedge$ i $\vee$ na mreži $I_s(L)$ su, kao što je uobičajeno, redom infimum i supremum u odnosu na $\leq_s$. Prema dokazu teoreme 2.6 operacije $\wedge$ i $\vee$ na mreži $I_s(L)$ se definišu na sledeći način.

$$[\underline{x}, \overline{x}] \wedge [\underline{y}, \overline{y}] = inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \begin{cases} [\underline{x} \wedge_L \underline{y}, \underline{x} \wedge_L \underline{y}], & \text{za} \quad [\underline{x}, \overline{x}] \parallel [\underline{y}, \overline{y}], \\ [\underline{x}, \overline{x}], & \text{za} \quad [\underline{x}, \overline{x}] \leq_s [\underline{y}, \overline{y}], \end{cases}$$

$$[\underline{x}, \overline{x}] \vee [\underline{y}, \overline{y}] = sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \begin{cases} [\overline{x} \vee_L \overline{y}, \overline{x} \vee_L \overline{y}], & \text{za} \quad [\underline{x}, \overline{x}] \parallel [\underline{y}, \overline{y}], \\ [\underline{y}, \overline{y}], & \text{za} \quad [\underline{x}, \overline{x}] \leq_s [\underline{y}, \overline{y}], \end{cases}$$

za sve $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}], \mathbf{y} = [\underline{y}, \overline{y}] \in I_s(L)$.

Za mrežu $I_s(L) = (I(L), \leq_s)$ koristimo i oznaku $I_s(L) = (I(L), \wedge, \vee)$, ili kraće, samo $I_s(L)$. Mada su operacije na različitim mrežama različite, koristimo iste oznake $\wedge$ i $\vee$ sve dok je iz konteksta jasno na koju mrežu se operacije odnose. U slučajevima u kojima je potrebno naglasiti na koju mrežu se odnose operacije $\wedge$ i $\vee$, mrežu ćemo istaći u indeksu operacije.

Tvrđenje 2.16 *Ako je mreža L ograničena, onda je ograničena i mreža $I_s(L)$.*

Dokaz. Neka je mreža L ograničena. Tada su intervali $\mathbf{0} = [0_L, 0_L]$ i $\mathbf{1} = [1_L, 1_L]$ elementi mreže $I_s(L)$. Očigledno je da su ovi elementi redom najmanji i najveći element mreže $I_s(L)$. Odatle sledi da je mreža $I_s(L)$ ograničena.

$\square$

Tvrđenje 2.17 *Ako je mreža L kompletna, onda je i mreža $I_s(L)$ kompletna.*

Dokaz. Ako je L kompletna mreža, onda je ograničena, pa je prema prethodnom tvrđenju mreža $I_s(L)$ takođe ograničena sa najvećim elementom $\mathbf{1} = [1_L, 1_L]$.

Da bismo dokazali kompletnost mreže $I_s(L)$ dovoljno je dokazati da svaki njen neprazan podskup ima infimum.

Neka je M neprazan podskup mreže $I_s(L)$. Ako M ima najmanji element, onda je njegov infimum jednak tom najmanjem elementu. Zato pretpostavimo da M nema najmanji element. Sa $\underline{M}$ i $\overline{M}$ obeležimo, redom, skup donjih granica i skup gornjih granica intervala u skupu M. Skup M je poset sa poretkom koji je restrikcija poretka na mreži $I_s(L)$. Infimum skupa M označimo sa $\bigwedge M$. Slično, skupovi $\underline{M}$ i $\overline{M}$ su poseti sa poretkom koji je restrikcija poretka na mreži L, a infimume za $\underline{M}$ i $\overline{M}$ obeležavamo sa $\bigwedge \underline{M}$ i $\bigwedge \overline{M}$.

U slučaju da je M takvo da može da se predstavi kao $M_1 \oplus M_2$, tako da su $M_1 \neq \emptyset$ i M_2 disjunktni i M_1 je linearno uređen, sa $\underline{M_i}$ i $\overline{M}_i$ $(i = 1, 2)$ obeležimo, redom, skup donjih granica i skup gornjih granica intervala u skupu M_i $(i = 1, 2)$. Slično kao za poset M, infimume za $\underline{M_i}$ i $\overline{M}_i$ obeležavamo sa $\bigwedge \underline{M_i}$ i $\bigwedge \overline{M}_i$, za $i = 1, 2$. Tada je $\bigwedge M = \bigwedge M_1 = [\bigwedge \underline{M_1}, \bigwedge \overline{M_1}]$.

Ako se M ne može predstaviti kao $M_1 \oplus M_2$, onda je $\bigwedge M = [\bigwedge \underline{M}, \bigwedge \underline{M}]$. Po definiciji su $\underline{M}$, $\underline{M_1}$ i $\overline{M_1}$ su neprazni podskupovi mreže L, a njihovi infimumi postoje zbog kompletnosti mreže L.

Time je dokazano da proizvoljno izabran podskup M mreže $I_s(L)$ ima infimum, odnosno da je mreža $I_s(L)$ kompletna.

□

Tvrđenje 2.18 *Neka je $I_s(L)$ mreža intervala neke mreže L u odnosu na strogi poredak. Za svaki interval $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \in I_s(L)$ postoje elementi $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in I_s(L)$ takvi da je $\mathbf{z} \prec \mathbf{x} \prec \mathbf{y}$.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ proizvoljan element mreže $I_s(L)$. Tada su $\mathbf{z} = [\underline{x}, \underline{x}]$ i $\mathbf{y} = [\overline{x}, \overline{x}]$ intervali za koje važi $\mathbf{z} \prec \mathbf{x} \prec \mathbf{y}$. Zaista, ako pretpostavimo da postoji interval $\mathbf{t} = [\underline{t}, \overline{t}] \in I_s(L)$ takav da je $[\underline{x}, \underline{x}] \leq_s [\underline{t}, \overline{t}] \leq_s [\underline{x}, \overline{x}]$ i $\mathbf{z} \neq \mathbf{t} \neq \mathbf{x}$, onda je $\underline{x} \leq_L \underline{t}$ i $\overline{t} \leq_L \underline{x}$. Odatle sledi da je $\underline{x} \leq_L \underline{t} \leq_L \overline{t} \leq_L \underline{x}$, pa je $\underline{t} = \overline{t} = \underline{x}$. Time je dokazano da je $\mathbf{t} = \mathbf{z}$, odnosno da važi $\mathbf{z} \prec \mathbf{x}$.

Slično se dokazuje da $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$. □

Posledica 2.4 *Neka je $I_s(L)$ mreža intervala neke mreže L u odnosu na strogi poredak. Za svaki interval $[p, p] \in I_s(L)$ važi $[x, p] \prec [p, p] \prec [p, y]$, za sve $x \leq_L p$, $p \leq_L y$ i $x \neq p$ i $y \neq p$.*

Posledica 2.5 *Neka je L ograničena mreža sa najmanjim elementom 0 i najvećim elementom 1. Tada važi:*

1. *Atomi mreže $I_s(L)$ su intervali $[0, x]$ za svako $x \in L$ i $x \neq 0$.*
2. *Kotomi mreže $I_s(L)$ su intervali $[x, 1]$ za svako $x \in L$ i $x \neq 1$.*

3. Mreža $I_s(L)$ je atomarna.

4. Ako mreža L ima više od dva elementa, onda je mreža $I_s(L)$ komplementirana.

Dokaz. Podsetimo se da je mreža $I_s(L)$ ograničena ako je mreža L ograničena, i da su tada intervali $[0,0]$ i $[1,1]$ redom, najmanji i najveći element mreže $I_s(L)$.

1. Prema posledici 2.4 važi $[0,0] \prec [0,x]$ za svako $x \in L$ i $x \neq 0$. Odatle sledi da su atomi mreže $I_s(L)$ intervali $[0,x]$ za svako $x \in L$ i $x \neq 0$.

2. Slično prema posledici 2.4 važi $[x, 1_L] \prec [1_L, 1_L]$ za svako $x \in L$ i $x \neq 1$, pa su intervali $[x,1]$ koatomi mereže $I_s(L)$ za svako $x \in L$ i $x \neq 1$.

3. Za svaki element $[\underline{x}, \overline{x}] \in I_s(L)$ za $\underline{x} \neq 0$, važi $[0, \underline{x}] \leq_s [\underline{x}, \overline{x}]$. Prema stavu *1.* ove posledice interval $[0, \underline{x}]$ je atom mreže $I_s(L)$. Time je dokazano da je ograničena mreža $I_s(L)$ atomarna.

4. Pretpostavimo da mreža L ima više od dva elementa. Interval $[0,1]$ je uporediv samo sa $[0,0]$ i $[1,1]$, dok je sa svim ostalim elementima mreže neuporediv, pa prema definiciji operacija $\wedge$ i $\vee$ na mreži $I_s(L)$, važi sledeće: interval $[0,1]$ je komplement svakom od intervala mreže $I_s(L)$, osim intervalima $[0,0]$ i $[1,1]$. Intervali $[0,0]$ i $[1,1]$ su jedan drugom komplementi. Dakle, mreža $I_s(L)$ je komplementirana.

Ako mreža L ima dva elementa 0 i 1, onda mreža $I_s(L)$ ima tri elementa i to su $[0,0], [0,1]$ i $[1,1]$. U ovom slučaju interval $[0,1]$ nema komplement.

□

Primetimo još da je interval $[0,1]$ i atom i koatom ograničene mreže $I_s(L)$.

Tvrđenje 2.19 *Ako je ograničena mreža L komplementirana, onda mreža $I(L)_s$ nije jednoznačno komplementirana.*

Dokaz. Neka je mreža L ograničena i komplementirana. Tada je mreža $I_s(L)$ ograničena. Ako mreža L ima samo dva elementa (0 i 1), onda mreža $I_s(L) = \{[0,0], [0,1], [1,1]\}$ nije komplementirana zato što interval $[0,1] \in I_s(L)$ nema komplement.

Pretpostavimo da mreža L ima više od dva elementa. Tada je mreža $I_s(L)$ komplementirana. Neka su $a, a' \in L \backslash \{0,1\}$ komplementi, odnosno neka je $a \vee a' = 1$ i $a \wedge a' = 0$. Tada su intervali $[0,a] \in I_s(L)$ i $[0,a'] \in I_s(L)$ neuporedivi, pa je $[0,a] \vee [0,a'] = [a \vee a', a \vee a'] = [1,1]$ i $[0,a] \wedge [0,a'] = [0 \wedge 0, 0 \wedge 0] = [0,0]$. Dakle, intervali $[0,a]$ i $[0,a']$ su jedan drugom komplementi. Pored toga, svaki od intervala $[0,a]$ i $[0,a']$ je komplement sa intervalom $[0,1] \in I_s(L)$. Odatle sledi da mreža $I_s(L)$ nije jednoznačno komplementirana.

□

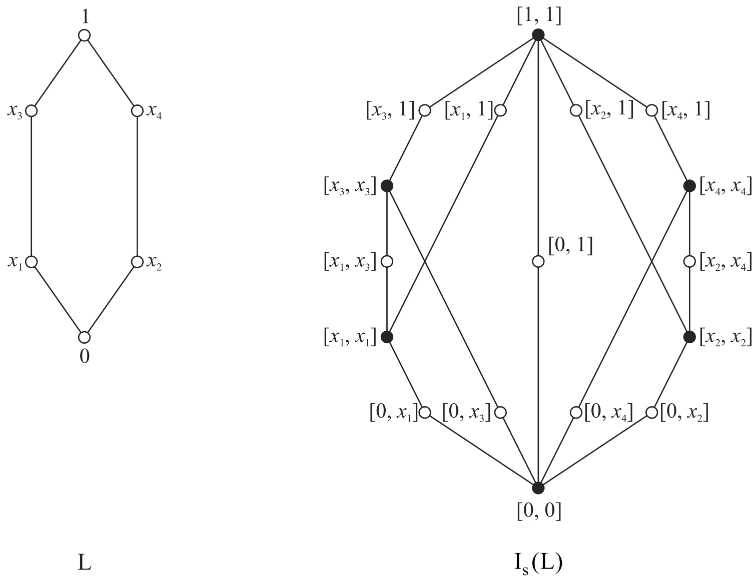
Tvrđenje 2.20 *Neka je L ograničena mreža. Ako ima bar tri elementa, mreža $I_s(L)$ nije modularna.*

Dokaz. Neka je a element mreže L takav da je $0 < a < 1$. Tada je $[0,a] \leq_s [a,1]$ i $[0,a] \neq [a,1]$, a $[0,1] \parallel [a,1]$, pa je $[0,a] \vee ([0,1] \wedge [a,1]) = [0,a]$.

S druge strane je $([0,a] \vee [0,1]) \wedge [a,1] = [1,1] \wedge [a,1] = [a,1]$. Time je dokazano tvrđenje.

□

Posledica 2.6 *Neka je L ograničena mreža. Mreža $I_s(L)$ nije distributivna u opštem slučaju.*



Slika 2.4

Primer 2.4 *Na slici* 2.4 *dati su dijagrami mreže L i njene mreže intervala $I_s(L)$. Na slici su istaknuti elementi skupa D, kao u prethodnim primerima. Pri injektivnom preslikavanju $\varphi : L \to D$ koje smo definisali (str. 25) sa $\varphi(x) = [x,x]$ poredak je očuvan:*
$x \leq_L y$ ako i samo ako je $[x,x] \leq_s [y,y]$. Lako se proverava da je preslikavanje φ saglasno sa operacijama $\wedge$ i $\vee$ mreže $I_s(L)$, pa je preslikavanje φ potapanje mreže L u $I_s(L)$ takvo da najveći i najmanji element mreže L odgovaraju redom, najvećem i najmanjem elementu mreže $I_s(L)$.

Može se uočiti da mreža $I_s(L)$ nije jednoznačno komplementirana, kao i da skupovi L_0 i L_1 nisu mreže.

Preslikavanjem $\varphi_0 : L \to L_0$ koje smo definisali (str. 25) na sledeći način $\varphi_0(x) = [0,x]$ uspostavljena je obostrano jednoznačna korespondencija između elemenata mreže $L \setminus \{0,1\}$ i atoma mreže $I_s(L)$, pri kojoj poredak nije očuvan.

Slično je preslikavanjem $\varphi_1 : L \to L_1$, $\varphi_0(x) = [x,1]$ uspostavljena je obostrano jednoznačna korespondencija između elemenata mreže $L \setminus \{0,1\}$ i koatoma mreže $I_s(L)$, pri kojoj poredak nije očuvan.

Ako je mreža $L = [0,1]$, onda njenu mrežu zatvorenih intervala u odnosu na strogi intervalni poredak obeležavamo sa $I_s([0,1])$. Iz dokaza tvrđenja 2.20 sledi da ova mreža nije modularna, pa prema tome nije ni distributivna. Anti-lanac njenih atoma, isto kao i koatoma je beskonačan. Jedinični interval realnih brojeva $[0,1]$ je kompletna mreža, pa je i mreža $I_s([0,1])$ kompletna. Zbog toga je mreža $I_s([0,1])$ ograničena, a najmanji i najveći element su redom intervali $[0,0]$ i $[1,1]$.

2.4 Intervali na mreži i leksikografski intervalni poredak

Podsetimo se da je leksikografski proizvod (str. 6) dva poseta (mreže) $(L_1, \leq_{L_1})$ i $(L_2, \leq_{L_2})$ poset $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ gde je poredak $\leq_l$ definisan na sledeći način:

$$(a_1, b_1) \leq_l (a_2, b_2) \text{ ako i samo ako je } a_1 <_{L_1} a_2 \text{ ili } (a_1 = a_2 \text{ i } b_1 \leq_{L_2} b_2).$$

Međutim, leksikografski poredak na $L_1 \times L_2$ nije mrežni poredak u opštem slučaju.

Tvrđenje 2.21 *Neka su* $(L_1, \leq_{L_1})$ *i* $(L_2, \leq_{L_2})$ *mreže. Poset* $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ *je mreža ako i samo ako je mreža* L_2 *ograničena ili je mreža* L_1 *linearno uređena.*

Dokaz. $(\Longrightarrow)$ Dokaz sledi kontrapozicijom. Pretpostavimo da mreža L_1 nije linearno uređena i da mreža L_2 nije ograničena. Tada supremum ne postoji za svaki dvočlani podskup poseta $L_1 \times L_2$, što u nastavku dokazujemo.

Pošto mreža L_1 nije linearno uređena, postoje bar dva elementa mreže L_1 koja su neuporediva. Neka su a_1 i a_2 neuporedivi elementi mreže L_1 i neka je $b \in L_2$ proizvoljan element. Tada su (a_1, b) i (a_2, b) neuporedivi elementi poseta $L_1 \times L_2$. Skup gornjih ograničenja za skup $\{(a_1, b), (a_2, b)\}$ je skup elemenata $(z_1, z_2) \in L_1 \times L_2$ za koje važi $(a_1, b) \leq_l (z_1, z_2)$ i $(a_2, b) \leq_l (z_1, z_2)$. Nejednakosti $(a_1, b) \leq_l (z_1, z_2)$ i $(a_2, b) \leq_l (z_1, z_2)$ su redom ekvivalentne sa:
$(a_1 <_{L_1} z_1$ ili $(a_1 = z_1$ i $b \leq_{L_2} z_2))$ i $(a_2 <_{L_1} z_1$ ili $(a_2 = z_1$ i $b \leq_{L_2} z_2))$. Prema pretpostavci važi $a_1 \parallel a_2$, pa odatle sledi da je $a_1 <_{L_1} z_1$ i $a_2 <_{L_1} z_1$, odnosno da je $sup\{a_1, a_2\} \leq z_1$. Prema tome, skup $\{(sup\{a_1, a_2\}, z_2) \mid z_2 \in L_2\}$ je skup gornjih ograničenja skupa $\{(a_1, b), (a_2, b)\}$. Međutim skup $\{(sup\{a_1, a_2\}, z_2) \mid z_2 \in L_2\}$ ima najmanji element samo ako je mreža L_2 ograničena. Po pretpostavci mreža L_2 nije ograničena, pa skup $\{(a_1, b), (a_2, b)\}$ nema supremum. Odatle sledi da poset $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ nije mreža.

$(\Longleftarrow)$ U nastavku dokazujemo da ako je mreža L_2 ograničena ili je mreža L_1 linearno uređena, onda je poset $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ mreža.

1. Neka je mreža L_2 ograničena i neka su njeni najmanji i najveći elementi redom 0_{L_2} i 1_{L_2}. Neka su $\mathbf{x} = (\underline{x}, \overline{x})$ i $\mathbf{y} = (\underline{y}, \overline{y})$ proizvoljni elementi mreže $L_1 \times L_2$.

Pre nego što dokažemo da za $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ postoji supremum i infimum, primetimo da je $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$ ako je $\underline{x} \parallel \underline{y}$ ili $(\underline{x} = \underline{y}$ i $\overline{x} \parallel \overline{y})$, a $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ako je $\underline{x} < \underline{y}$ ili $(\underline{x} = \underline{y}$ i $\overline{x} \leq \overline{y})$.

Ako je $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ onda je $sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathbf{y}$ i $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathbf{x}$.
Pretpostavimo dalje da su elementi $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ neuporedivi. Ako je $\mathbf{z} = [\underline{z}, \overline{z}]$ gornje ograničenje skupa $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, onda je $\mathbf{x} \leq \mathbf{z}$ i $\mathbf{y} \leq \mathbf{z}$. Lako je videti da je tada $sup\{\underline{x}, \underline{y}\} \leq \underline{z}$ ili je ($\underline{x} = \underline{y} = \underline{z}$ i $sup\{\overline{x}, \overline{y}\} \leq \overline{z}$). Slično, ako je $\mathbf{t} = [\underline{t}, \overline{t}]$ donje ograničenje skupa $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, onda je $\mathbf{t} \leq \mathbf{x}$ i $\mathbf{t} \leq \mathbf{y}$. Odatle sledi $\underline{t} \leq inf\{\underline{x}, \underline{y}\}$ ili je ($\underline{x} = \underline{y} = \underline{t}$ i $\overline{t} \leq inf\{\overline{x}, \overline{y}\}$).

Dokažimo da u oba slučaja, odnosno ako je $\underline{x} \parallel \underline{y}$ ili ako je ($\underline{x} \parallel \underline{y}$ i $\overline{x} \parallel \overline{y}$), postoji supremum i infimum za $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

1) Ako je $\underline{x} \parallel \underline{y}$, prema gore dokazanom, za $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ skup gornjih ograničenja je skup $\{(sup\{\underline{x}, \underline{y}\}, \overline{z}) \mid \overline{z} \in L_2\}$, a skup donjih ograničenja je skup $\{(inf\{\underline{x}, \underline{y}\}, \overline{t}) \mid \overline{t} \in L_2\}$. Zbog ograničenosti mreže L_2, najmanji element skupa $\{(sup\{\underline{x}, \underline{y}\}, \overline{z}) \mid \overline{z} \in L_2\}$ je element $(sup\{\underline{x}, \underline{y}\}, 0_{L_2}) \in L_1 \times L_2$, a najveći element skupa $\{(inf\{\underline{x}, \underline{y}\}, \overline{t}) \mid \overline{t} \in L_2\}$ je element $(inf\{\underline{x}, \underline{y}\}, 1_{L_2}) \in L_1 \times L_2$. Time je dokazano da je $sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (sup\{\underline{x}, \underline{y}\}, 0_{L_2})$ i $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (inf\{\underline{x}, \underline{y}\}, 1_{L_2})$.

2) Ako je $\underline{x} = \underline{y}$, onda je $\underline{x} = \underline{y} = \underline{z} = \underline{t}$, $sup\{\overline{x}, \overline{y}\} \leq \overline{z}$ i $\overline{t} \leq inf\{\overline{x}, \overline{y}\}$. Tada je $sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (\underline{x}, sup\{\overline{x}, \overline{y}\})$ i $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (\underline{x}, inf\{\overline{x}, \overline{y}\})$.

Time je dokazano da poset $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ ima supremum i infimum za svaki dvoelementni podskup, odnosno da je $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ mreža.

2. Neka je mreža L_1 linearno uređena i neka su $\mathbf{x} = (\underline{x}, \overline{x})$ i $\mathbf{y} = (\underline{y}, \overline{y})$ proizvoljni elementi mreže $L_1 \times L_2$.

Ako je $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ onda je $sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathbf{y}$ i $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathbf{x}$.
Zbog linearne uređenosti mreže L_1 elementi $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ su neuporedivi samo ako je $\underline{x} = \underline{y}$ i $\overline{x} \parallel \overline{y}$. Prema razmatranju u *1*. odatle sledi da je $sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (\underline{x}, sup\{\overline{x}, \overline{y}\})$ i $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = (\underline{x}, inf\{\overline{x}, \overline{y}\})$. Time je dokazano da je i u ovom slučaju poset $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ mreža.

$\square$

Poznato je (str. 6) da je leksikografski proizvod dva linearno uređena poseta, poset koji je linearno uređen. Prema dokazu tvrđenja 2.21 očigledno je da važi i sledeće tvrđenje.

Posledica 2.7 *Neka su $(L_1, \leq_{L_1})$ i $(L_2, \leq_{L_2})$ linearno uređene mreže. Tada je mreža $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ linearno uređena.*

Tvrđenje 2.22 *Ako su $(L_1, \leq_{L_1})$ i $(L_2, \leq_{L_2})$ kompletne mreže, onda je $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ kompletna mreža.*

Dokaz. Neka su $(L_1, \leq_{L_1})$ i $(L_2, \leq_{L_2})$ kompletne mreže. Odatle sledi da su $(L_1, \leq_{L_1})$ i $(L_2, \leq_{L_2})$ ograničene mreže, pa je, prema tvrđenju 2.21, $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ mreža. Ako sa 0_{L_1} i 0_{L_2} obeležimo najmanje elemente redom mreža L_1 i L_2, onda je uređeni par $(0_{L_1}, 0_{L_2})$ najmanji element mreže $L_1 \times L_2$. Pošto mreža $L_1 \times L_2$ ima najmanji element, da bismo dokazali da je kompletna dovoljno je da dokažemo da svaki neprazan podskup mreže $L_1 \times L_2$ ima supremum.

Neka je M proizvoljan neprazan podskup mreže $L_1 \times L_2$, neka je $M_1 = \{x \in L_1 \mid (x,y) \in M\}$ i $M_2 = \{y \in L_2 \mid (x,y) \in M\}$. Supremume skupova M, M_1 i M_2 obeležavamo redom sa $\bigvee M, \bigvee M_1$ i $\bigvee M_2$. Pošto je M_1 neprazan podskup kompletne mreže L_1, postoji $\bigvee M_1$. Sada posmatramo sledeća dva slučaja.

(1.) $\bigvee M_1 > x$ za svako $x \in M_1$. Tada je, prema analizi u dokazu tvrđenja 2.21, $\bigvee M = (\bigvee M_1, 0_{L_2})$.

(2.) Postoji $x \in M_1$ takvo da je $x = \bigvee M_1$. Neka je $S = \{y \in M_2 \mid (\bigvee M_1, y) \in M\}$. Primetimo da je $S \subseteq L_2$, pa zbog kompletnosti mreže L_2 postoji $\bigvee S$. Tada je $\bigvee M = (\bigvee M_1, \bigvee S)$.

Time je dokazano da postoji supremum svakog nepraznog podskupa mreže $(L_1 \times L_2, \leq_l)$, odnosno da je mreža $(L_1 \times L_2, \leq_l)$ kompletna mreža.

□

Tvrđenje 2.23 *Neka je L mreža sa najvećim elementom 1_L. Tada je skup intervala $I(L)$ mreže L, mreža u odnosu na leksikografski poredak.*

Dokaz. Neka su $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ i $\mathbf{y} = [\underline{y}, \overline{y}]$ proizvoljni elementi skupa $I(L)$.

Kao što smo već istakli u dokazu tvrđenja 2.21, ako je $\underline{x} \parallel \underline{y}$ ili ($\underline{x} = \underline{y}$ i $\overline{x} \parallel \overline{y}$) onda je $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$, a $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ako je $\underline{x} < \underline{y}$ ili ($\underline{x} = \underline{y}$ i $\overline{x} \leq \overline{y}$). Prema tome, možemo posmatrati sledeća tri slučaja.

1) Ako je $\underline{x} \parallel \underline{y}$, onda su gornja ograničenja za $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ svi intervali $[sup\{\underline{x}, \underline{y}\}, \overline{z}]$, gde je $\overline{z} \in L$ takav da je $\overline{z} \geq sup\{\underline{x}, \underline{y}\}$.

   Najmanje gornje ograničenje za $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ tada je $[sup\{\underline{x}, \underline{y}\}, sup\{\underline{x}, \underline{y}\}]$.

   Donja ograničenja za $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ su svi intervali $[inf\{\underline{x}, \underline{y}\}, \overline{t}]$, gde je $\overline{t} \in L$ takav da je $inf\{\underline{x}, \underline{y}\} \leq \overline{t}$.

   Najveći od tih intervala $[inf\{\underline{x}, \underline{y}\}, 1_L]$ je $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

   U ostalim slučajevima supremum i infimum skupa $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ dobijaju se slično kao u tvrđenju 2.21.

2) Ako je $\underline{x} = \underline{y}$, onda je $sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = [\underline{x}, sup\{\overline{x}, \overline{y}\}]$ i $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = [\underline{x}, inf\{\overline{x}, \overline{y}\}]$. Iz $\underline{x} \leq sup\{\overline{x}, \overline{y}\}$ sledi da $[\underline{x}, sup\{\overline{x}, \overline{y}\}] \in I(L)$. Iz $\underline{x} = \underline{y}$ sledi da je $\underline{x} \leq \overline{y}$. Kako je $\underline{x} \leq \overline{x}$, odatle sledi da je $\underline{x} \leq inf\{\overline{x}, \overline{y}\}$, odnosno da $[\underline{x}, inf\{\overline{x}, \overline{y}\}] \in I(L)$.

3) Ako je $\underline{x} < \underline{y}$, onda je $sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathbf{y}$ i $inf\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = \mathbf{x}$.

Time je dokazano da proizvoljan dvoelementni podskup poseta $(I(L), \leq_l)$ ima supremum i infimum, odnosno da je $(I(L), \leq_l)$ mreža. □

Neka je $(L, \leq)$ mreža sa najvećim elementom 1_L. Mrežu intervala mreže L u odnosu na leksikografski poredak obeležavamo sa $I_l(L) = (I(L), \leq_l)$. Operacije $\wedge$ i $\vee$ na mreži L

definišu se na uobičajeni način, kao infimum i supremum redom, u odnosu na poredak $\leq$. Slično, operacije $\wedge$ i $\vee$ na mreži intervala $I_l(L)$ mreže L definišu se kao infimum i supremum redom, u odnosu na leksikografski poredak $\leq_l$. Prema dokazu tvrđenja 2.23 operacije $\wedge$ i $\vee$ na mreži intervala $I_l(L)$ definišu se na sledeći način.

$$[\underline{x}, \overline{x}] \wedge [\underline{y}, \overline{y}] = \begin{cases} [\underline{x} \wedge_L \underline{y}, 1_L], & \text{za} \quad \underline{x} \parallel \underline{y}, \\ [\underline{x}, \overline{x} \wedge_L \overline{y}], & \text{za} \quad \underline{x} = \underline{y}, \\ [\underline{x}, \overline{x}], & \text{za} \quad \underline{x} < \underline{y}, \end{cases}$$

$$[\underline{x}, \overline{x}] \vee [\underline{y}, \overline{y}] = \begin{cases} [\underline{x} \vee_L \underline{y}, \underline{x} \vee_L \underline{y}], & \text{za} \quad \underline{x} \parallel \underline{y}, \\ [\underline{x}, \underline{x} \vee_L \underline{y}], & \text{za} \quad \underline{x} = \underline{y}, \\ [\underline{y}, \overline{y}], & \text{za} \quad \underline{x} < \underline{y}, \end{cases}$$

za sve $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}], \mathbf{y} = [\underline{y}, \overline{y}] \in I_l(L)$.

Mrežu intervala $I_l(L) = (I(L), \leq_l)$ obeležavamo i sa $I_l(L) = (I(L), \wedge, \vee)$, ili kraće $I_l(L)$. Premda za operacije $\wedge$ i $\vee$ koristimo iste oznake, operacije na različitim mrežama su različite, ali je iz konteksta jasno na koju mrežu se operacije odnose. U slučajevima u kojima je potrebno naglasiti na koju mrežu se odnose operacije $\wedge$ i $\vee$, mrežu ćemo istaći u indeksu operacije.

Prema tvrđenju 2.21 (str. 39), ako je mreža L ograničena, onda je $L \times L$ mreža u odnosu na leksikografski poredak. Ovu mrežu obeležavamo sa $(L \times L)_l = (L \times L, \wedge, \vee)$ ili sa $(L \times L, \leq_l)$. Prema dokazu tvrđenja 2.21 operacija $\wedge$ na mreži $(L \times L)_l$ je određena kao na mreži $I_l(L)$, a operacija $\vee$ na mreži $(L \times L)_l$ je određena na sledeći način:

$$[\underline{x}, \overline{x}] \vee [\underline{y}, \overline{y}] = \begin{cases} [\underline{x} \vee_L \underline{y}, 0_L], & \text{za} \quad \underline{x} \parallel \underline{y}, \\ [\underline{x}, \underline{x} \vee_L \underline{y}], & \text{za} \quad \underline{x} = \underline{y}, \\ [\underline{y}, \overline{y}], & \text{za} \quad \underline{x} < \underline{y}, \end{cases}$$

za sve $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}], \mathbf{y} = [\underline{y}, \overline{y}] \in (L \times L)_l$.

Teorema 2.7 *Neka je $(L, \wedge_L, \vee_L)$ ograničena mreža. Tada je mreža intervala $I_l(L) = (I(L), \wedge, \vee)$ mreže L izomorfna sa $\wedge$- podmrežom mreže $(L \times L)_l = (L \times L, \wedge, \vee)$.*

Dokaz. Neka je L ograničena mreža čiji je najmanji element 0, a najveći element 1.

Neka je S podskup mreže $(L \times L)_l = (L \times L, \leq_l)$ definisan na sledeći način:

$$S = \{(a, b) \mid (a, b) \in L \times L, a \leq_L b\}, \tag{2.17}$$

sa relacijom poretka $\leq_S$ koja je restrikcija relacije poretka $\leq_l$ na mreži $(L \times L)_l$.

Dokažimo da je poset $(S, \leq_S)$ mreža, odnosno da svaki dvoelementni podskup poseta $(S, \leq_S)$ ima supremum i infimum.

Neka su $(a,b),(c,d)$ proizvoljni elementi skupa S. Tada je

$$inf\{(a,b),(c,d)\} = \begin{cases} (a \wedge_L c, 1), & \text{za} \quad a \parallel c, \\ (a, b \wedge_L d), & \text{za} \quad a = c, \quad \text{i} \\ (a,b), & \text{za} \quad a < c, \end{cases}$$

$$sup\{(a,b),(c,d)\} = \begin{cases} (a \vee_L c, a \vee_L c), & \text{za} \quad a \parallel c, \\ (a, a \vee_L c), & \text{za} \quad a = c, \\ (c,d), & \text{za} \quad a < c. \end{cases}$$

Iz definicije skupa S sledi da za proizvoljne elemente $(a,b),(c,d)$ ovog skupa važi $a \leq_L b$ i $c \leq_L d$. Odatle sledi da je $a = c \leq_L b \wedge d$. Takođe je $a \wedge_L c \leq_L 1$ pa prema tome $inf\{(a,b),(c,d)\} \in S$.

Očigledno je da i $sup\{(a,b),(c,d)\} \in S$. Time je dokazano da u posetu $(S, \leq_S)$ svaki dvoelementni podskup ima supremum i infimum.

Dokažimo da je mreža $(S, \wedge_S, \vee_S)$ $\wedge$- podmreža mreže $((L \times L)_l, \wedge, \vee)$.

Operacije na mreži $(S, \leq_S)$ se definišu na uobičajeni način:
$(a,b) \wedge_S (c,d) = inf\{(a,b),(c,d)\}$ i $(a,b) \vee_S (c,d) = sup\{(a,b),(c,d)\}$.

Prema dokazu tvrđenja 2.21 (str. 39) i gore izloženom, operacija $\wedge$ na mreži S je restrikcija operacije $\wedge$ na mreži $(L \times L)_l$.

Odatle sledi da je mreža $(S, \wedge_S, \vee_S)$ $\wedge$- podmreža mreže $((L \times L)_l, \wedge, \vee)$.

Traženi izomorfizam mreže $I_l(L)$ i mreže S je preslikavanje definisano na sledeći način: $f([\underline{x}, \overline{x}]) = (\underline{x}, \overline{x})$, za svaki interval $[\underline{x}, \overline{x}] \in I_l(L)$, što se dokazuje kao u teoremi 2.2 na strani 23.

□

Primetimo da operacija $\vee$ na mreži S nije restrikcija operacije $\vee$ na mreži $(L \times L)_l$. Zaista, za $a \parallel c$, $sup\{(a,b),(c,d)\} = (a \vee_L c, a \vee_L c)$ u mreži S, dok je u mreži $(L \times L)_l$ $sup\{(a,b),(c,d)\} = (a \vee_L c, 0)$.

Tvrđenje 2.24 *Neka je $I_l(L)$ mreža intervala mreže L sa najvećim elementom 1_L. Tada važi sledeće:*

1. *Ako je mreža L ograničena, onda je mreža $I_l(L)$ ograničena.*

2. *Ako je mreža L kompletna, onda je mreža $I_l(L)$ kompletna.*

Dokaz. *1.* Ako je mreža L ograničena, onda su intervali $[0_L, 0_L]$ i $[1_L, 1_L]$ elementi mreže $I_l(L)$. Lako se dokazuje da su ovi intervali redom najmanji i najveći elementi mreže $I_l(L)$. Odatle sledi da je mreža $I_l(L)$ ograničena.

2. Neka je mreža L kompletna. Ako je L kompletna mreža, onda je ograničena, pa je prema prethodnom tvrđenju mreža $I_l(L)$ takođe ograničena sa najmanjim elementom $\mathbf{0} = [0_L, 0_L]$. Dokažimo da svaki neprazan podskup mreže $I_l(L)$ ima supremum.

Neka je M proizvoljan neprazan podskup mreže $I_l(L)$.

Sa $\underline{M}$ i $\overline{M}$ obeležimo, redom, skup donjih granica i skup gornjih granica intervala u skupu M. Skup M je poset sa poretkom nasleđenim iz mreže $I_l(L)$. Supremum skupa M označimo sa $\bigvee M$. Slično, supremume za $\underline{M}$ i $\overline{M}$ obeležavamo redom sa $\bigvee \underline{M}$ i $\bigvee \overline{M}$. Zbog kompletnosti mreže L postoji $\bigvee \underline{M}$.

Ako je $\bigvee \underline{M} > \underline{x}$ za svako $\underline{x} \in \underline{M}$, onda, prema dokazu tvrđenja 2.23 (str. 41), važi $\bigvee M = [\bigvee \underline{M}, \bigvee \overline{M}]$.

Ako postoji $\underline{x} \in \underline{M}$ takvo da je $\bigvee \underline{M} = \underline{x}$, onda je $\bigvee M = [\bigvee \underline{M}, \bigvee S]$ gde je $\bigvee S = \{\overline{x} \in \overline{M} \mid [\bigvee \underline{M}, \overline{x}] \in M\}$.

Time je dokazano da proizvoljno izabran neprazan podskup M mreže $I_l(L)$ ima supremum, odnosno da je mreža $I_l(L)$ kompletna.

□

Tvrđenje 2.25 *Neka je mreža L ograničena i neka je njen najmanji element 0, a najveći element 1. Tada važi:*

1. *Atom mreže $I_l(L)$ je interval $[0, a]$ ako i samo ako je a atom mreže L.*

2. *Koatom mreže $I_l(L)$ je interval $[a, 1]$ ako i samo ako je a koatom mreže L.*

Dokaz.

1. Stav *1.* ovog tvrđenja se dokazuje na isti način na koji je dokazan stav *1.* u tvrđenju 2.8 na strani 26.

2. Ako je a koatom mreže L onda je očigledno interval $[a, 1]$ koatom mreže $I_l(L)$.

Dokažimo obrnuto, da su koatomi mreže $I_l(L)$ tačno intervali $[a, 1]$, gde je a koatom mreže L.

Pretpostavimo da je interval $[\underline{x}, \overline{x}]$ koatom mreže $I_l(L)$, odnosno da $[\underline{x}, \overline{x}] \prec [1, 1]$ i da je $[\underline{x}, \overline{x}] \neq [1, 1]$. Tada postoje dve mogućnosti, da je $\underline{x} \prec 1$ i $\overline{x} = 1$ ili da je $\underline{x} = 1$ i $\overline{x} \prec 1$.

Pošto je $1 = \underline{x} \leq \overline{x} \prec 1$, druga mogućnost nas dovodi do kontradikcije, pa je $\underline{x} \prec 1$ i $\overline{x} = 1$. Odatle sledi da je $\underline{x} = a$ koatom mreže L i da je koatom mreže $I_l(L)$ interval $[a, 1]$.

□

Tvrđenje 2.26 *Neka je mreža L ograničena i neka je njen najmanji element 0, a najveći element 1. Ako je mreža L atomarna, onda je i mreža $I_l(L)$ atomarna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je mreža L atomarna, odnosno da za svaki element $x \in L$ i $x \neq 0$ postoji atom $a \in L$ takav da je $a \leq x$. Neka je $[\underline{x}, \overline{x}] \neq [0, 0]$ proizvoljan element mreže $I_l(L)$. Tada za $\overline{x} \in L$ postoji atom a takav da je $\overline{x} \geq a$. Tada je $[0, a] \leq [0, \overline{x}] \leq [\underline{x}, \overline{x}]$. Prema tvrđenju 2.25 interval $[0, a]$ je atom mreže $I_l(L)$. Time je dokazano da za svaki element $[\underline{x}, \overline{x}] \neq [0, 0]$ mreže $I_l(L)$ postoji atom $[0, a]$ mreže $I_l(L)$ takav da je $[\underline{x}, \overline{x}] \geq [0, a]$, odnosno da je mreža $I_l(L)$ atomarna. □

Mreža $I_l(L)$ nije atomarno generisana - kao supremum atoma mogu se dobiti samo intervali $[0, x]$ za neko $x \in L$.

Tvrđenje 2.27 *Neka je L ograničena mreža i neka je njen najmanji element 0, a najveći element 1. Tada je*

$$I_l(L) = \downarrow[0,1]\bar{\oplus}^{5}\uparrow[0,1].$$

Dokaz. Za interval $[0,1]$ važi sledeće: $[0,x] \leq [0,1]$ za svako $x \in L$ i $[0,1] < [\underline{x},\overline{x}]$ za sve $[\underline{x},\overline{x}] \in I_l(L)$ takve da je $\underline{x} \neq 0$. Drugim rečima, važi: $\downarrow[0,1] = \{[0,x] \mid x \in L\}$ i $\uparrow[0,1] = \{[\underline{x},\overline{x}] \in I_l(L) \mid 0 < \underline{x}$ ili $[\underline{x},\overline{x}] = [0,1]\}$. Odatle direktno sledi da je mreža $I_l(L)$ vertikalna suma, redom, glavnog ideala i glavnog filtera generisanih intervalom $[0,1]$. □

Tvrđenje 2.28 *Neka je L ograničena mreža i neka je njen najmanji element 0, a najveći element 1. Tada je mreža svih glavnih ideala mreže L izomorfna podmreži $(\downarrow[0,1], \leq_l)$ mreže $I_l(L)$ koja je dalje izomorfna sa mrežom L. Pri tome je relacija poretka $\leq_l$ na mreži $\downarrow[0,1]$ restrikcija relacije poretka na mreži $I_l(L)$.*

Dokaz. Slično kao u dokazu tvrđenja 2.11 na str. 27, možemo uspostaviti obostrano jednoznačno preslikavanje $f(\downarrow x) = [0,x]$ između mreže glavnih ideala $(\{\downarrow x \mid x \in L\}, \subseteq)$ mreže L i mreže $(\downarrow[0,1], \leq_l)$, gde je $\leq_l$ restrikcija relacije poretka na mreži $I_l(L)$. Da je preslikavanje f obostrano izotono dokazuje se slično kao u tvrđenju 2.11.

Poznato je da važi $L \cong (\{\downarrow x \mid x \in L\}, \subseteq)$, pa odatle, na osnovu gore iznetog razmatranja, sledi da je $L \cong (\downarrow[0,1], \leq_l)$.

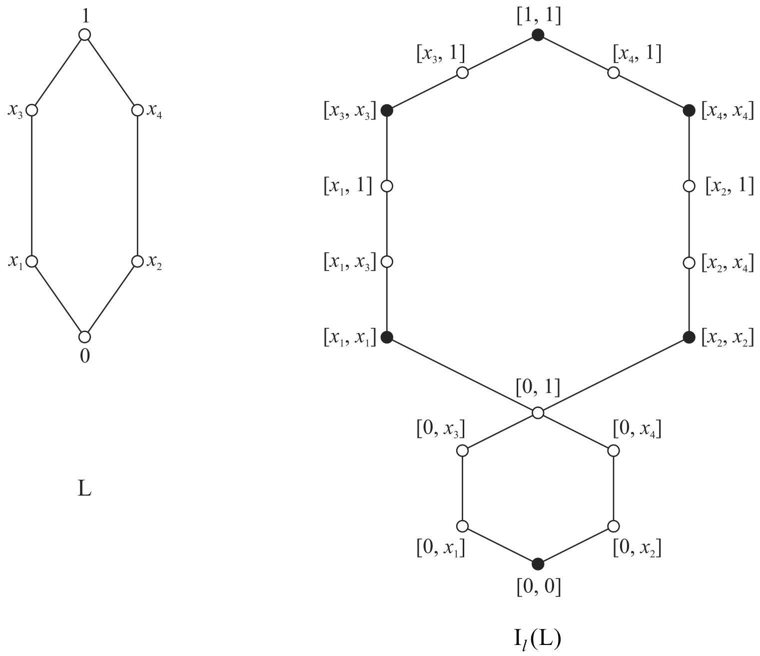
□

Mreža L se može potopiti kao poset u mrežu $I_l(L)$ tako da se svaki element $x \in L$ preslikava na $[x,x] \in I_l(L)$. Pri ovom potapanju je očuvan poredak, ali ne i operacije na mreži $I_l(L)$, što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 2.5 *Na slici 2.5 su ilustrovani dijagrami konačne mreže L i njene mreže intervala $I_l(L)$. Na dijagramu mreže $I_l(L)$ zatamnjenim kružićima su istaknuti elementi skupa $D = \{[x,x] \mid x \in L\}$. Skup D je poset u odnosu na restrikciju poretka na mreži $I_l(L)$. Jasno je da između elemenata mreže L i elemenata poseta D postoji obostrano jednoznačno preslikavanje $f(x) = [x,x]$, za svako $x \in L$, i da je to preslikavanje obostrano izotono. Međutim preslikavanje f u opštem slučaju nije saglasno sa operacijom $\wedge$ na mreži $I_l(L)$. Na primer, za mreže L i $I_l(L)$ na slici 2.5 važi sledeće: $f(x_1) = [x_1,x_1]$, $f(x_2) = [x_2,x_2]$ i $f(x_1 \wedge x_2) = f(0) = [0,0]$. S druge strane je $[x_1,x_1] \wedge [x_2,x_2] = [0,1]$. Prema tome $f(x_1 \wedge x_2) \neq f(x_1) \wedge f(x_2)$.*

Primetimo još da je mreža L komplementirana, ali da mreža njenih intervala $I_l(L)$ nije komplementirana. Možemo primetiti da intervali $[0,x_i]$, $i = 1,2,3,4$ na mreži $I_l(L)$ na slici 2.5 nemaju komplemente.

[5] Podsetimo da se za vertikalnu sumu, definisanu na strani 5, koristi i naziv lepljena suma.



Slika 2.5

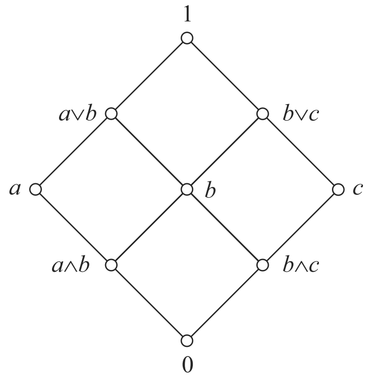
Tvrđenje 2.29 *Mreža intervala $I_l(L)$ ograničene mreže L u opštem slučaju nije komplementirana.*

Mreža intervala $I_l(L)$ mreže L nije modularna čak i u slučajevima kad je mreža L modularna, što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 2.6 *Na slici* 2.6 *dat je dijagram jedne distributivne, pa prema tome i modularne mreže. Obeležimo datu mrežu sa L, a operacije na njoj sa $\wedge_L$ i $\vee_L$. Na datom dijagramu možemo primetiti da su elementi a, b, c dva po dva neuporedivi i takvi da je $a \wedge_L c = 0$, $a \vee_L c = 1$. U nastavku ćemo dokazati da mreža intervala $(I_l(L), \wedge, \vee)$ date mreže L, u odnosu na leksikografski poredak, nije modularna.*

Zbog neuporedivosti elemenata a i c za elemente $[a, a], [a, a \vee_L b], [c, c] \in I_l(L)$ važi $[c, c] \wedge [a, a \vee_L b] = [a \wedge_L c, 1] = [0, 1]$ i $[a, a] \vee [c, c] = [a \vee_L c, a \vee_L c] = [1, 1]$. Odatle sledi da je $[a, a] \vee ([c, c] \wedge [a, a \vee_L b]) = [a, a] \vee [0, 1] = [a, a]$ i $([a, a] \vee [c, c]) \wedge [a, a \vee_L b] = [1, 1] \wedge [a, a \vee_L b] = [a, a \vee_L b]$. Zbog neuporedivosti elemenata a i b, važi $a < (a \vee b)$, pa je $[a, a] \leq_l [a, a \vee_L b]$ i $[a, a] \neq [a, a \vee_L b]$.

Dakle, za elemente $[a, a], [a, a \vee_L b], [c, c] \in I_l(L)$ važi $[a, a] \leq_l [a, a \vee_L b]$, $[a, a] \neq [a, a \vee_L b]$, a odatle sledi $[a, a] \vee ([c, c] \wedge [a, a \vee_L b]) \neq ([a, a] \vee [c, c]) \wedge [a, a \vee_L b]$. Prema tome, mreža $I_l(L)$ nije modularna.



Slika 2.6

Prema prethodnom primeru važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 2.30 *Mreža intervala* $I_l(L)$ *mreže* L *u opštem slučaju nije modularna.*

Očigledno je da tada važi i sledeća posledica prethodnog tvrđenja.

Posledica 2.8 *Mreža intervala* $I_l(L)$ *mreže* L *u opštem slučaju nije distributivna*

Neka je sada mreža L jedinični interval realnih brojeva, odnosno neka je $L = [0, 1]$. Iz ograničenosti intervala realnih brojeva $[0, 1]$ sledi da je skup intervala mreže $[0, 1]$ mreža u odnosu na leksikografski poredak, u oznaci $I_l([0, 1])$. Mreža $[0, 1]$ je kompletna i linearno uređena, pa je i mreža $I_l([0, 1])$ kompletna (tvrđenje 2.22, str. 40) i linearno uređena (posledica 2.7, str. 40).

Glava 3

Između ravne mreže

3.1 Relacije "između" na mrežama

Relaciju "između" na mrežama uvodi Glivenko [62],[63] za metričke mreže.

Poznato je da je **metrički prostor** skup M na kome je definisana funkcija $d : M \times M \to \mathbb{R}$ takva da za sve elemente x, y, z skupa M važi:

1. $d(x, y) \geq 0$,
2. $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,
3. $d(x, y) = d(y, x)$ i
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Funkciju d koja ispunjava date uslove zovemo **metrika na skupu** M, a broj $d(x, y)$ je **rastojanje** elemenata x i y.

Metrika na mrežama se može definisati preko valuacije.

Valuacija [9] na mreži L je realno vrednosna funkcija $v[x]$ na L, koja zadovoljava $v[x] + v[y] = v[x \vee y] + v[x \wedge y]$. Valuacija je **izotona** ako je saglasna sa poretkom: ako je $y \leq x$ onda je $v[y] \leq v[x]$, a **pozitivna** je ako važi: ako je $y < x$ onda je $v[y] < v[x]$.

U svakoj mreži L sa izotonom valuacijom funkcija rastojanja $d(x, y) = v[x \vee y] - v[x \wedge y]$ zadovoljava sledeće uslove [9]:

1. $d(x, x) = 0$, $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = d(y, x)$,
2. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$,
3. $d(a \vee x, a \vee y) + d(a \wedge x, a \wedge y) \leq d(x, y)$,

za sve $x, y, z, a \in L$.

Funkcija $d(x, y) = v[x \vee y] - v[x \wedge y]$ je metrika ako i samo ako je valuacija v pozitivna. Mreža sa valuacionom metrikom se zove metrička mreža [96], odnosno **metričke mreže** [9] su mreže sa pozitivnom valuacijom.

U metričkim mrežama element b *je između elemenata* a *i* c ako i samo ako je $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$, što je ekvivalentno sa uslovom $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b = (a \vee b) \wedge (b \vee c)$ [62, 63]. Ovaj poslednji uslov nije vezan za metriku, pa se može koristiti za definisanje ternarne relacije "između" (*betweenness*) na proizvoljnoj mreži L.

Definicija 3.1 *[9] Za elemente a, b, c mreže L kažemo da je b* **između** *elemenata a i c, u oznaci abc, ako i samo ako važi:*

$$(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b = (a \wedge b) \vee (b \wedge c). \tag{3.1}$$

Po prethodnoj definiciji važi aab i abb za sve elemente $a, b \in L$, pa je svaki od elemenata a i b uvek između elemenata a i b. Takođe je a između a i a, a b je između a i a ako i samo ako je $a = b$.

Sledeće osobine relacije "između" su dokazali Pitcher i Smiley [116]:

Lema 3.1 *Ako je L mreža, tada za sve elemente $a, b, c \in L$:*

(α) Važi abc ako i samo ako važi cba.

(β) Važi abc i acb ako i samo ako je $b = c$.

Lema 3.2 *Ako je L mreža i $a, b, c \in L$ tada važi sledeće:*

1. *Ako je $a \leq b \leq c$ onda važi abc.*
2. *Ako je abc onda je $a \wedge c \leq b \leq a \vee c$.*
3. *$a \wedge c$ i $a \vee c$ su između a i c.*

Za ovu ternarnu relaciju su ispitane, među ostalim, i sledeće osobine, koje Pitcher i Smiley [116] nazivaju "jake tranzitivnosti za četiri tačke" (*strong transitivities on four points*):

1. t_1: Ako je abc i adb onda je dbc.
2. t_2: Ako je abc i adb onda je adc.
3. t_3: Ako je abc i bcd i $b \neq c$ onda je abd.

Ovim osobinama možemo dodati i sledeću osobinu:

4. t_4: Ako je abc i bcd i $b \neq c$ onda je acd.

Dokazano je [116] sledeće:

1. Osobina t_1 je ispunjena za relaciju "između" na svim mrežama.

2. Mreža je modularna ako i samo ako relacija "između" na toj mreži zadovoljava osobinu t_2.

3. Mreža L je linearno uređena ako i samo ako relacija "između" na mreži L zadovoljava osobinu t_3.

4. Mreža L je distributivna ako i samo ako za svako $a, b, c \in L$ važi: ako je $a \wedge c \leq b \leq a \vee c$ onda je abc.

Očigledno je da za osobinu t_4 relacije "između" na mreži L važi svojstvo slično svojstvu osobine t_3:

5. Mreža L je linearno uređena ako i samo ako relacija "između" na mreži L zadovoljava osobinu t_4.

Dokaz datog tvrđenja je sličan dokazu za osobinu t_3 [116].

Mi uvodimo nove ternarne relacije na mrežama koje zovemo $\vee$ **-između** i, njoj dualnu, $\wedge$ **-između**.

Definicija 3.2 *Neka su a, b, c proizvoljni elementi mreže L. Kažemo da je element b* $\vee$ **-između** *elemenata a i c, što kraće obeležavamo sa $abc_\vee$, ako i samo ako je:*

$$(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b \ i \ b \leq a \vee c. \tag{3.2}$$

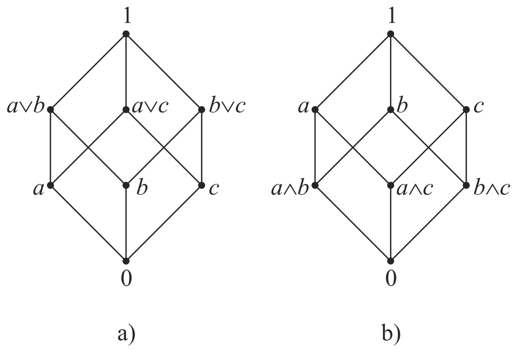
Dualno: element b je $\wedge$**-između** *elemenata a i c, što kraće obeležavamo sa $abc_\wedge$, ako i samo ako je:*

$$(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b \ i \ b \geq a \wedge c. \tag{3.3}$$

Očigledna posledica ove definicije i osobine *2*. leme 3.2 je da istovremeno važi $abc_\vee$ i $abc_\wedge$ ako i samo ako važi abc.

Posledica postulata (β) u lemi 3.1 je da za tri različita elementa a, b, c mreže L, najviše jedan od njih se nalazi između preostala dva elementa. Da bi ekvivalentno važilo i za relaciju $\vee$- između bilo je neophodno uvođenje uslova $b \leq a \vee c$ u definiciji relacije $\vee$-između.

Primer 3.1 *Na slici 3.1 a) ilustrovan je dijagram mreže u kojoj $a \not\leq b \vee c$ i $b \not\leq a \vee c$ i $c \not\leq a \vee b$, ali je $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b$ i $(a \vee c) \wedge (c \vee b) = c$ i $(a \vee c) \wedge (b \vee a) = a$.*



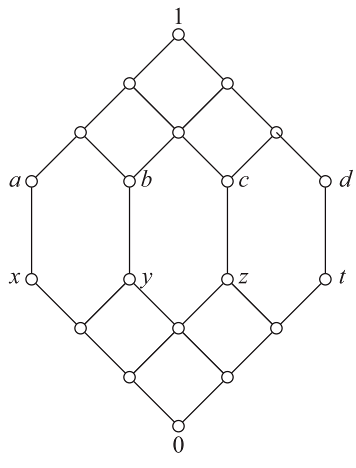
Slika 3.1

Dakle, ovaj primer ilustruje neophodnost traženih uslova u definiciji 3.2, da bi za tri različita elementa a, b, c mreže L važio najviše jedan od uslova: ili je $abc_{\vee}$ ili je $acb_{\vee}$ ili je $bac_{\vee}$.

Relacija $\wedge$-između je dualna relaciji $\vee$-između, pa su razmatranja za ove dve relacije takođe dualna i dobijaju se zamenom $\vee$ sa $\wedge$ i zamenom $\leq$ sa $\geq$. Tako bi u prethodnom primeru mogla da se izvede dualna analiza za relaciju $\wedge$-između, a mreža sa odgovarajuće obeleženim elementima je na slici 3.1 b).

Slično kao za relaciju između, za sve elemente a, b mreže L, svaki od elemenata a i b je uvek $\vee$- između ($\wedge$- između) elemenata a i b, a je $\vee$- između a i a, a b je $\vee$- između a i a ako i samo ako je $a = b$.

I pored toga što elementi mreže L koji su u relaciji $\vee$- između ne moraju biti u relaciji $\wedge$-između, očuvana su sva gore navedena svojstva (izuzev jednog), koja ima relacija "između".



Slika 3.2

Primer 3.2 *Na slici 3.2 ilustrovan je dijagram mreže u kojoj je element b $\vee$- između elemenata a i c i $\vee$- između elemenata a i d. S druge strane je $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = y \neq b$ i $(a \wedge b) \vee (b \wedge d) = y \neq b$, pa b nije $\wedge$- između a i c niti je $\wedge$- između a i d. Isto tako je element c $\vee$- između elemenata a i d i $\vee$- između elemenata b i d, ali nije $\wedge$- između ovih elemenata.*

Na ovoj istoj mreži elementi y i z su $\wedge$- između elemenata x i t, ali nisu $\vee$- između ovih elemenata. Element y je takođe $\wedge$- između elemenata x i z i nije $\vee$- između njih, a z je $\wedge$- između elemenata y i t i takođe nije $\vee$- između njih.

Sa ovako definisanim relacijama $\vee$-između i $\wedge$-između očuvane su osobine relacije "između" određene postulatima (α) i (β) i lemom 3.2.

Lema 3.3 *Ako je L mreža tada relacija $\vee$-između ($\wedge$-između) zadovoljava uslove:*

(α') Važi $abc_\vee$ ako i samo ako važi $cba_\vee$ ($abc_\wedge$ ako i samo ako važi $cba_\wedge$).

(β') Važi $abc_\vee$ i $acb_\vee$ ako i samo ako je $b = c$ ($abc_\wedge$ i $acb_\wedge$ ako i samo ako je $b = c$).

Dokaz.

Uslov (α') očigledno važi zbog komutativnosti operacija $\vee$ i $\wedge$.

Sada dokazujemo da važi uslov (β'):

Pretpostavimo da važe uslovi $abc_\vee$ i $acb_\vee$. Po definiciji relacije $\vee$-između znamo da je $b \leq a \vee c$, a odatle sledi da je $b \wedge (a \vee c) = b$, kao i da je $c \leq a \vee b$ pa je $c \wedge (a \vee b) = c$. Dalje važi:

$$\begin{aligned} b = b \wedge (a \vee c) &= (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee c) \\ &= (a \vee b) \wedge c = c \end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da je $b = c$, da bismo dokazali da važi tvrđenje teoreme, treba da dokažemo da važi $abb_\vee$ za svaki par elemenata. Kako je $(a \vee b) \wedge (b \vee b) = (a \vee b) \wedge b = b$ i $b \leq a \vee b$ za svaki par elemenata $a, b \in L$, onda je i $abb_\vee$ za svaki par elemenata $a, b \in L$.

Za relaciju $\wedge$-između dokaz je dualan. □

Lema 3.4 *Ako je L mreža i $a, b, c \in L$ tada važi sledeće:*

1. *Ako je $a \leq b \leq c$ onda važi $abc_\vee$ i $abc_\wedge$.*

2. *Ako je $abc_\vee$ ili $abc_\wedge$ onda je $a \wedge c \leq b \leq a \vee c$.*

3. *$a \wedge c$ i $a \vee c$ su $\vee$-između i $\wedge$-između a i c.*

Dokaz.

Osobine *1.* i *3.* očigledno važe direktno iz definicija ovih relacija i leme 3.2.

2. Neka važi $abc_\vee$. Po definiciji ove relacije je $b \leq a \vee c$.
Podsetimo se da za proizvoljne elemente mreže važi: $a \leq a \vee b$ i $c \leq b \vee c$, a odatle sledi da je $a \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) = b$, što je i trebalo dokazati.

Za relaciju $\wedge$-između dokaz je dualan. □

Za relaciju $\vee$- između se mogu definisati osobine t_1-t_4 slično kao što su definisane za relaciju "između".

1. t_1: Ako je $abc_\vee$ i $adb_\vee$ onda je $dbc_\vee$.

2. t_2: Ako je $abc_\vee$ i $adb_\vee$ onda je $adc_\vee$.

3. t_3: Ako je $abc_\vee$ i $bcd_\vee$ i $b \neq c$ onda je $abd_\vee$.

4. t_4: Ako je $abc_\vee$ i $bcd_\vee$ i $b \neq c$ onda je $acd_\vee$.

Za relaciju $\wedge$- između ove osobine se definišu dualno.

Tvrđenje 3.1 *Osobine t_3 i t_4 su ekvivalentne za relaciju $\vee$- između.*

Dokaz. Neka je L mreža. Pretpostavimo da za elemente $a, b, c, d \in L$, $b \neq c$ važi osobina t_3. Prema stavu α' leme 3.3 (str. 53) $abc_\vee$ je ekvivalentno sa $cba_\vee$ i $bcd_\vee$ je ekvivalentno sa $dcb_\vee$. Ako na $dcb_\vee$ i $cba_\vee$ primenimo osobinu t_3, dobijamo da važi $dca_\vee$, odnosno $acd_\vee$, pa važi osobina t_4. Slično, ako pretpostavimo da za elemente $a, b, c, d \in L$, $b \neq c$ važi osobina t_4 i ako na $dcb_\vee$ i $cba_\vee$ primenimo osobinu t_4, dobijamo da važi $dba_\vee$, odnosno $abd_\vee$, pa važi osobina t_3. □

Za relaciju $\wedge$- između važi ekvivalencija osobina koje su dualne osobinama t_3 i t_4.

Za razliku od relacije "između", za mrežne relacije $\vee$- između i $\wedge$- između osobina t_1 ne važi na svim mrežama. Osobine t_2, t_3 i t_4 takođe ne važe u opštem slučaju za mrežne relacije $\vee$- između i $\wedge$- zmeđu. O ovome će više biti reči u sledećem odeljku na strani 64, gde će biti navedeni kontra-primeri koji potkrepljuju iznete tvrdnje.

Tvrđenje 3.2 *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *Mreža L je modularna.*

2. *Na mreži L važi osobina t_2 za relaciju $\wedge$- između.*

3. *Na mreži L važi osobina t_2 za relaciju $\vee$- između.*

Dokaz. (*1.* $\Rightarrow$ *2.*) Neka je mreža L modularna. Dokazujemo da tada za relaciju $\wedge$-između važi osobina t_2.

Neka u modularnoj mreži L za proizvoljne elemente $a, b, c, d \in L$ važi $abc_\wedge$ i $adb_\wedge$. Dokazujemo da važi $adc_\wedge$.

Iz pretpostavke $abc_\wedge$ sledi da je $b = (a \wedge b) \vee (b \wedge c)$ i $a \wedge c \leq b$, a iz pretpostavke $adb_\wedge$ sledi da važi $d = (a \wedge d) \vee (d \wedge b)$ i $a \wedge b \leq d$. Tada je $d = (a \wedge d) \vee (d \wedge b) = (a \wedge d) \vee (d \wedge ((a \wedge b) \vee (b \wedge c)))$. Zbog modularnosti mreže L, pošto je $a \wedge b \leq d$, važi

$d = (a \wedge d) \vee (a \wedge b) \vee (d \wedge b \wedge c)$ i $(a \wedge d) \vee (a \wedge b) = (a \vee (a \wedge b)) \wedge d = a \wedge d$. Odatle sledi $d = (a \wedge d) \vee (d \wedge b \wedge c) \leq (a \wedge d) \vee (d \wedge c) \leq d$.

Prema tome, važi $d = (a \wedge d) \vee (d \wedge c)$. Iz $a \wedge c \leq b$ sledi $a \wedge c \leq a \wedge b \leq d$. Time je dokazano da važi $adc_\wedge$, odnosno da je zadovoljena osobina t_2 za relaciju $\wedge$-između.

(*1.* $\Rightarrow$ *3.*) Dokaz je dualan dokazu (*1.* $\Rightarrow$ *2*).

(*2.* $\Rightarrow$ *1.*) i (*3.* $\Rightarrow$ *1.*) Dokaz sledi kontrapozicijom. Pretpostavimo da mreža L nije modularna. Tada mreža L ima podmrežu izomorfnu mreži pentagon (slika 3.3 a), str. 57) i onda se dokazuje da osobina t_2 ne važi za relacije $\wedge$- između i $\vee$- između redom.

Na mreži pentagon na slici 3.3 a) uočimo elemente a, b, c, d. Za uočene elemente važi $abc_\wedge$ i $adb_\wedge$, ali $adc_\wedge$ ne važi. Zaista, iako je $a \wedge c \leq d$ ne važi $adc_\wedge$ zato što je $(a \wedge d) \vee (d \wedge c) = a \vee e = a \neq d$. Odatle sledi da osobina t_2 ne važi za relaciju $\wedge$-između na mreži koja kao podmrežu ima pentagon, odnosno ako mreža nije modularna na njoj ne važi osobina t_2 za relaciju $\wedge$-između.

Slično, za elemente a, c, d, e na mreži pentagon na slici 3.3 a) važi $dec_\vee$ i $dae_\vee$, ali $dac_\vee$ ne važi. Odatle sledi da na mreži koja nije modularna ne važi osobina t_2 za relaciju $\vee$-između.

Time je dokazana ekvivalencija sva tri uslova.

□

Tvrđenje 3.3 *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *Mreža L je linearno uređena.*
2. *Na mreži L važi osobina t_3 za relaciju $\vee$- između.*
3. *Na mreži L važi osobina t_4 za relaciju $\vee$- između.*
4. *Na mreži L važi osobina t_3 za relaciju $\wedge$- između.*
5. *Na mreži L važi osobina t_4 za relaciju $\wedge$- između.*

Dokaz. (*1.* $\Rightarrow$ *2.*) i (*1.* $\Rightarrow$ *4.*) Dokazano je [116] da je mreža L linearno uređena ako i samo ako relacija "između" na mreži L zadovoljava osobinu t_3. Odatle sledi da osobina t_3 važi za relacije $\vee$-između i $\wedge$-između, ako je mreža L linearno uređena.

(*2.* $\Leftrightarrow$ *3.*) prema tvrđenju 3.1 (str. 54), pa važi (*1.* $\Rightarrow$ *3.*).
Dualno važi (*4.* $\Leftrightarrow$ *5.*), pa važi (*1.* $\Rightarrow$ *5.*).

(*2.* $\Rightarrow$ *1.*) Dokaz sledi kontrapozicijom. Pretpostavimo da mreža L nije linearno uređena i dokazujemo da za relaciju $\vee$- između ne važi osobina t_3: Ako je $abc_\vee$ i $bcd_\vee$ i $b \neq c$ onda je $abd_\vee$.

Pošto mreža L nije linearno uređena, postoje elementi $b, c \in L$ koji su neuporedivi. Za neuporedive elemente b i c, prema lemi 3.4 (stav *3*), važi da je $(b \wedge c)$ $\vee$- između elemenata b i c. Dalje važi $b \wedge c \leq c \leq b \vee c$, pa je c $\vee$- između elemenata $(b \wedge c)$ i $(b \vee c)$ (stav *1*, lema 3.4). Prema osobini t_3 treba da važi $b(b \wedge c)(b \vee c)_\vee$. Međutim, važi $(b \vee (b \wedge c)) \wedge ((b \wedge c) \vee (b \vee c)) = b$, pa kako su, zbog neuporedivosti elemenata b i c, elementi b i $b \wedge c$ različiti, osobina t_3 ne važi.

Time je dokazana ekvivalencija uslova *1* i *2*.

(*4.* $\Rightarrow$ *1.*) dokaz je dualan dokazu (*2.* $\Rightarrow$ *1.*). Odatle sledi ekvivalencija uslova *1* i *4*, što sa ostalim ekvivalencijama daje ekvivalenciju svih pet uslova.

□

Tvrđenje 3.4 *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *Mreža L je distributivna.*

2. *Ako je* $a \wedge c \leq b \leq a \vee c$ *onda je* $abc_\vee$.

3. *Ako je* $a \wedge c \leq b \leq a \vee c$ *onda je* $abc_\wedge$.

Dokaz. (*1.* $\Rightarrow$ *2.*) i (*1.* $\Rightarrow$ *3.*) Neka je mreža L distributivna. Tada za sve elemente a, b, c za koje važi $a \wedge c \leq b \leq a \vee c$, važi $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = (a \wedge c) \vee b = b$, odnosno $abc_\vee$.

S obzirom na to da važi i dualno tvrđenje, tada važi i $abc_\wedge$.

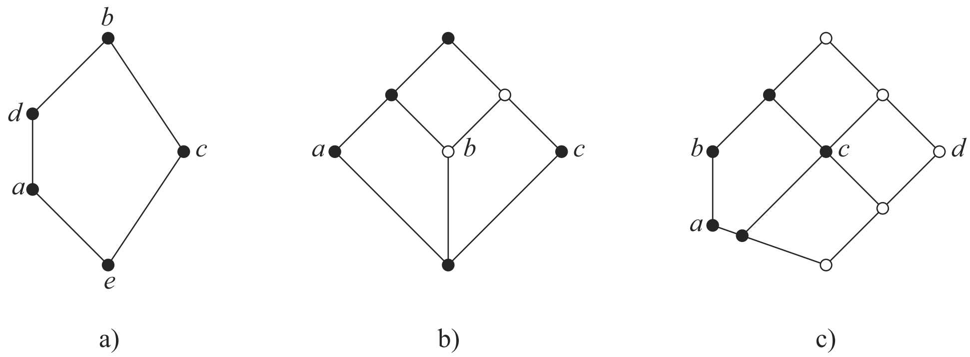
(*2.* $\Rightarrow$ *1.*) Dokaz izvodimo kontrapozicijom. Pretpostavimo da mreža L nije distributivna. Tada ona ima podmrežu koja je izomorfna mreži pentagon ili ima podmrežu koja je izomorfna mreži dijamant.

Dokažimo da tada ne važi uslov *2*. Na mreži pentagon na slici 3.3 a) za element a važi $d \wedge c \leq a \leq d \vee c$, ali ne važi $dac_\vee$. Zaista, $(a \vee d) \wedge (a \vee c) = d \wedge b = d \neq a$. Slično, na mreži dijamant za neuporedive elemente a, b, c ne važi ni jedno od sledećeg $abc_\vee$, $acb_\vee$ i $bac_\vee$, premda važe svi uslovi $a \wedge c \leq b \leq a \vee c$, $a \wedge b \leq c \leq a \vee b$ i $b \wedge c \leq a \leq b \vee c$. Dakle, ako mreža nije distributivna, uslov $a \wedge c \leq b \leq a \vee c$ nije dovoljan da važi $abc_\vee$.

Time je dokazano da je uslov *1* ekvivalentan sa uslovom *2*.

(*3.* $\Rightarrow$ *1.*) Dokazuje se slično kao (*2* $\Rightarrow$ *1*). Odatle sledi ekvivalencija uslova *1* sa uslovom *3*, što sa prethodno dokazanim daje ekvivalenciju sva tri uslova.

□



Slika 3.3

U daljem posmatramo mreže u kojima za sve trojke neuporedivih elemenata a, b, c važi tačno jedna od ternarnih relacija $\vee$-između $abc_\vee$, $acb_\vee$ i $bac_\vee$, i njima dualne mreže.

3.2 $\vee$-između ravne mreže i $\wedge$-između ravne mreže

Definicija 3.3 *Za mrežu L kažemo da je $\vee$-* **između ravna** *ili kraće $\vee$- IR ako i samo ako važi:*
ako su $a, b, c \in L$ dva po dva neuporedivi elementi tada važi tačno jedna od formula $abc_\vee$, $acb_\vee$ i $bac_\vee$.

Za mrežu L kažemo da je $\wedge$- **između ravna** *ili kraće $\wedge$- IR ako i samo ako važi:*
ako su $a, b, c \in L$ dva po dva neuporedivi elementi tada važi tačno jedna od formula $abc_\wedge$, $acb_\wedge$ i $bac_\wedge$.

Za mreže koje su istovremeno $\wedge$- IR i $\vee$- IR mreže kažemo da su **između ravne mreže**.

Drugim rečima, mreža L je $\vee$- IR mreža ako i samo ako za svaku trojku elementa istog anti-lanca važi da je tačno jedan od njih $\vee$- između ostalih. Slično, mreža L je $\wedge$- IR mreža ako i samo ako za svaku trojku elementa istog anti-lanca važi da je tačno jedan od njih $\wedge$-između ostalih.

U mrežama čija širina nije veća od 2, ne postoje tri različita elementa koji su dva po dva neuporedivi, pa, u skladu sa definicijom 3.3, smatramo da su **sve mreže čija je širina dva i jedan između ravne mreže**.

Relacija $\wedge$-između je dualna relaciji $\vee$-između, pa su $\wedge$- IR mreže dualne (dualno izomorfne) $\vee$- IR mrežama.

Primer 3.3 *1.) Na slici 3.3 na strani 57, ilustrovani su dijagrami konačnih mreža za koje važi:*

a) je mreža čija je širina 2, pa je prema tome između ravna mreža, *b) je mreža koja je* $\vee$*- između ravna i nije* $\wedge$*- između ravna - za obeležene elemente* a, b, c *ove mreže važi* $abc_{\vee}$ *i ne važi* $abc_{\wedge}$*, dok je mreža*

c) između ravna mreža, pošto za obeležene elemente b, c, d *i* a, c, d*, jedinih anti-lanca ove mreže sa više od dva elementa, važi:* $bcd_{\vee}$ *i* $bcd_{\wedge}$*,* $acd_{\vee}$ *i* $acd_{\wedge}$*.*

2.) Posmatrajmo sada mrežu čiji je dijagram ilustrovan na slici 3.2 na strani 52. U primeru 3.2 smo pokazali da je za svaka tri elementa anti-lanca $\overline{\mathbf{n}} : a, b, c, d$ *jedan od njih* $\vee$*- između preostala dva i da ni jedan od njih nije* $\wedge$*- između preostala dva. Prema definiciji 3.3 ova mreža nije* $\wedge$*- IR mreža. U istom primeru smo dokazali da je za svaka tri elementa anti-lanca* $\overline{\mathbf{m}} : x, y, z, t$ *jedan od njih* $\wedge$*- između preostala dva i da ni jedan od njih nije* $\vee$*- između preostala dva. Odatle sledi da ova mreža nije ni* $\vee$*- IR mreža.*

3.) Bulova mreža sa 8 *elemenata nije ni* $\vee$*- između ravna ni* $\wedge$*- između ravna. Iz razmatranja u primeru 3.1 na strani 51, sledi da u Bulovoj mreži sa* 8 *elemenata postoje elementi* a, b, c *koji su dva po dva neuporedivi i ni jedan od njih nije* $\vee$*- između, niti* $\wedge$*- između preostala dva.*

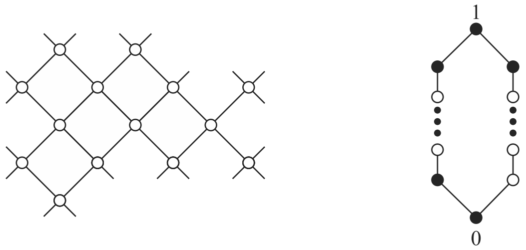
Na dijagramu mreže na slici 3.3 b) zatamnjenim kružićima su istaknuti elementi podmreže koje su izomorfne mreži pentagon. Odatle sledi da $\vee$- između ravne mreže u opštem slučaju nisu distributivne. Kako su $\wedge$- između ravne mreže dualne $\vee$- između ravnim mrežama, takođe važi da $\wedge$- između ravne mreže nisu distributivne u opštem slučaju.

Takođe mreža koja je istovremeno $\vee$- IR i $\wedge$- IR, odnosno između ravna mreža, nije distributivna u opštem slučaju. Na primer, za mreže na slikama 3.3 a),c) i 3.4 desno (na strani 58), smo utvrdili da su između ravne mreže i ni jedna od njih nije distributivna. Zaista, mreža na slici 3.3 a) je pentagon, a mreže na slikama 3.3 c) i 3.4 desno imaju podmreže koje su izomorfne mreži pentagon i koje su na dijagramima pomenutih mreža istaknute zatamnjenim kružićima.

Međutim, distributivna $\vee$- IR mreža je očigledno $\wedge$- IR mreža, i obrnuto, distributivna $\wedge$- IR mreža je $\vee$- IR mreža.

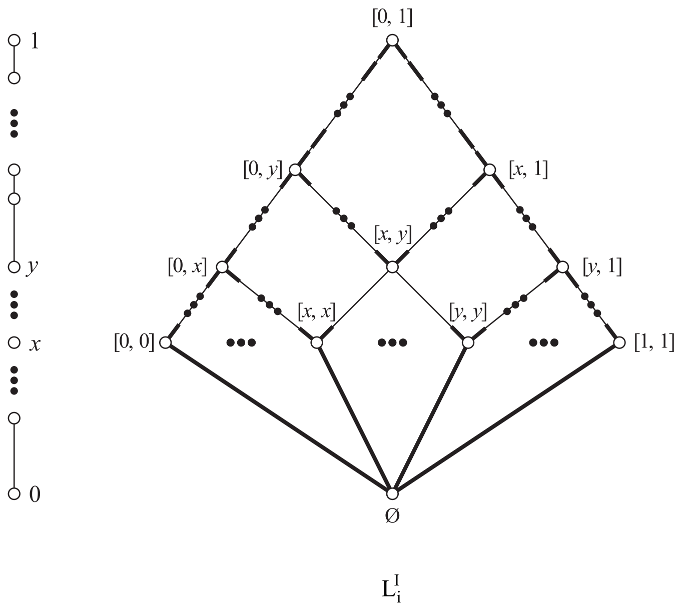
Primer 3.4 *U ovom primeru posmatramo nekoliko beskonačnih mreža čiji su dijagrami ilustrovani na slikama* 3.4 *i* 3.5 *(strana 59).*

1.) Na slici 3.4 *levo ilustrovan je dijagram mreže* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \leq)$*, gde je* $\leq$ *poredak po komponentama. Ova mreža je beskonačna, neograničena i distributivna između ravna mreža. U nastavku ćemo dokazati (lema 3.6, str. 60) da su sve mreže koje se dobijaju kao proizvod dva lanca između ravne mreže. Na istoj slici, desno je ilustrovan dijagram beskonačne, ograničene, nedistributivne mreže širine* 2*, pa prema tome i između ravne mreže.*



Slika 3.4

2.) Beskonačna $\vee$- *IR mreža čiji je dijagram ilustrovan na slici* 3.5*, je mreža intervala mreže* $(L, \leq)$ *koja je beskonačan lanac sa najmanjim elementom* 0 *i najvećim elementom* 1*, uređena nepreciznim poretkom koji je definisan jednakošću 2.4 na strani 20. Ovu mrežu intervala smo obeležili sa* $I_i(L) = (I_\perp(L), \leq_i)$*, pri čemu je* $I_\perp(L) = I(L) \cup \{\emptyset\}$*, a skup intervala* $I(L) = \{[\underline{x}, \overline{x}] \mid (\underline{x}, \overline{x}) \in L^2, \quad \underline{x} \leq_L \overline{x}\}$*. U prethodnom poglavlju smo pokazali da je mreža* $I_i(L)$ *kompletna ako je linearno uređena mreža* $(L, \leq)$ *kompletna (tvrđenje 2.13, str. 32), da nije distributivna, da je atomarna, atomarno generisana i da postoji bijekcija između elemenata mreže* L *i atoma mreže* $I_i(L)$ *(teorema 2.4 na str. 32). U nastavku ćemo dokazati da je ova mreža* $\vee$- *između ravna i da nije* $\wedge$- *između ravna mreža.*



Slika 3.5

Lema 3.5 *Neka je mreža* $(L, \leq_L)$ *beskonačan lanac čiji je najmanji element* 0*, a najveći element* 1*. Tada je mreža njenih intervala uređena nepreciznim poretkom* $I_i(L)$*,* $\vee$- *između ravna mreža i nije* $\wedge$- *između ravna mreža.*

Dokaz. Najmanji i najveći element lanca L su redom 0 i 1. Podsetimo se da su najmanji i najveći element mreže $I_i(L)$, redom, $\emptyset$ i $[0,1]$.

Neka su, dalje, $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}], \mathbf{y} = [\underline{y}, \overline{y}], \mathbf{z} = [\underline{z}, \overline{z}]$ neprazni intervali mreže $I_i(L)$ koji su dva po dva neuporedivi. Prema stavu *1.* leme 3.2 (str. 50), posledica linearnog uređenja mreže L je da je jedan od elemenata $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ između preostala dva, u smislu definicije 3.1 (str. 50). Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\underline{y}$ između $\underline{x}$ i $\underline{z}$. Tada je ili $\underline{x} < \underline{y} < \underline{z}$ ili $\underline{z} < \underline{y} < \underline{x}$. U oba slučaja je $\underline{x} \wedge \underline{z} \leq \underline{y}$. S druge strane, zbog neuporedivosti ovih intervala i linearnog uređenja mreže L, ako je $\underline{y} < \underline{z}$ ili $\underline{y} < \underline{x}$, onda je, redom, $\overline{y} < \overline{z}$ ili $\overline{y} < \overline{x}$. Slično, ako je $\underline{x} < \underline{y}$ ili $\underline{z} < \underline{y}$, onda je, redom, $\overline{x} < \overline{y}$ ili $\overline{z} < \overline{y}$. Odatle sledi da je, redom, $\overline{x} < \overline{y} < \overline{z}$ ili $\overline{z} < \overline{y} < \overline{x}$. U oba slučaja je $\overline{y} \leq \overline{x} \vee \overline{z}$. Time je dokazano da je $[\underline{y}, \overline{y}] \leq [\underline{x}, \overline{x}] \vee [\underline{z}, \overline{z}]$. Ako imamo u vidu da je ($\underline{x} < \underline{y} < \underline{z}$ i $\overline{x} < \overline{y} < \overline{z}$) ili ($\underline{z} < \underline{y} < \underline{x}$ i $\overline{z} < \overline{y} < \overline{x}$), očigledno je da je u oba slučaja $(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{y} \vee \mathbf{z}) = \mathbf{y}$. Dakle, važi $\mathbf{xyz}_\vee$.

Time je dokazano da za proizvoljne neprazne intervale mreže $I_i(L)$ koji su dva po dva neuporedivi važi da je jedan od njih između preostala dva, odnosno da je mreža $I_i(L)$ $\vee$-između ravna mreža.

Mreža $I_i(L)$ nije $\wedge$- IR mreža. Za proizvoljne atome $[a,a], [b,b], [c,c]$ ove mreže važi $([a,a] \wedge [b,b]) = \emptyset$ i $([b,b] \wedge [c,c]) = \emptyset$. Prema tome nije ispunjen uslov $([a,a] \wedge [b,b]) \vee ([b,b] \wedge [c,c]) = [b,b]$ definicije 3.2 na strani 51.

□

Za razliku od mreže $I_i(L)$, mreža koja se dobija kao direktan proizvod dva beskonačna lanca sa uređenjem po komponentama, je između ravna mreža.

Lema 3.6 *Neka su* $(C_1, \leq_{C_1})$ *i* $(C_2, \leq_{C_2})$ *linearno uređene mreže. Tada je mreža* $(C_1 \times C_2, \leq)$ *distributivna između ravna mreža, gde je* $\leq$ *relacija poretka po komponentama.*

Dokaz.

Dobro je poznata činjenica da je svaki lanac distributivna mreža i da je direktan proizvod distributivnih mreža takođe distributivna mreža. Dakle, $(C_1 \times C_2, \leq)$ je distributivna mreža.

Dokažimo da je $(C_1 \times C_2, \leq)$ između ravna mreža. Neka su $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ i $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ dva po dva neuporedivi elementi mreže $(C_1 \times C_2, \leq)$. Tada je $a_i, b_i, c_i \in C_i$, za $i = 1, 2$.
Bez umanjenja opštosti možemo smatrati da je $a_1 < b_1 < c_1$. Iz činjenice da su ovi uređeni parovi neuporedivi, jasno je da je tada $c_2 < b_2 < a_2$. Imajući u vidu da su supremum i infimum na mreži $(C_1 \times C_2, \leq)$ definisani redom kao maksimum i minimum po komponentama, jasno je da je $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = (b_1, a_2)$, $\mathbf{a} \vee \mathbf{c} = (c_1, a_2)$ i $\mathbf{b} \vee \mathbf{c} = (c_1, b_2)$.
Odatle sledi $(b_1, a_2) \wedge (c_1, b_2) = (min(b_1, c_1), min(a_2, b_2)) = (b_1, b_2)$, pa je $(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) = \mathbf{b}$. Zbog distributivnosti mreže $(C_1 \times C_2, \leq)$ očigledno važi i $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \vee (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}$. Odatle sledi da važi $\mathbf{abc}$, što je ekvivalentno sa činjenicom da važi $\mathbf{abc}_\vee$ i $\mathbf{abc}_\wedge$.

Time je dokazano da je mreža $(C_1 \times C_2, \leq)$ između ravna mreža. □

Direktan proizvod dve kompletne mreže je kompletna mreža, pa je sledeće tvrđenje očigledna posledica prethodne leme.

Posledica 3.1 *Ako su $(C_1, \leq_{C_1})$ i $(C_2, \leq_{C_2})$ kompletne linearno uređene mreže, onda je mreža $(C_1 \times C_2, \leq)$ kompletna, distributivna, između ravna mreža, gde je $\leq$ relacija poretka po komponentama.*

Lema 3.7 *Neka je L $\vee$- između ravna mreža. Ako su $a, b, c \in L$ dva po dva neuporedivi elementi, onda važi tačno jedan od sledećih uslova:*

1. $b \leq a \vee c$,

2. $a \leq b \vee c$,

3. $c \leq a \vee b$.

Dokaz. Na osnovu uslova (β') leme 3.3 na strani 53. i definicije $\vee$- IR mreže znamo da za proizvoljne različite elemente a, b, c mreže L važi tačno jedan od uslova: $abc_\vee$, $acb_\vee$ i $bac_\vee$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da važi $abc_\vee$. Tada je, po definiciji relacije $\vee$-između, $b \leq a \vee c$ i $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b$. Pretpostavimo da je i $a \leq b \vee c$. Tada je $b = (a \vee b) \wedge (b \vee c) \geq (a \vee b) \wedge a = a$, odnosno $a \leq b$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da su a i b neuporedivi elementi. Ako pretpostavimo da je $c \leq a \vee b$, slično dokazujemo da je tada $c \leq b$, a to je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $b \parallel c$.

$\square$

Posledica 3.2 *Ako je L $\vee$- IR mreža i ako su $a, b, c \in L$ dva po dva neuporedivi elementi, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. $b \leq a \vee c$,

2. $abc_\vee$,

3. $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b$.

Ako je ispunjen bilo koji od prethodnih uslova, onda je $(a \vee b) \parallel (b \vee c)$.

Dokaz. Dokažimo da je uslov *1*. ekvivalentan sa uslovom *2*.
Pretpostavimo da je $b \leq a \vee c$ i da nije $abc_\vee$. Po definiciji 3.3 $\vee$- IR mreže, mora biti ili $acb_\vee$ ili $bac_\vee$. Neka je $acb_\vee$. Tada je $c \leq a \vee b$, a to je u kontradikciji sa pretpostavkom i lemom 3.7 (str. 61).
Slično se dolazi do kontradikcije ako pretpostavimo da je $bac_\vee$.

Tvrđenje u suprotnom smeru sledi iz definicije relacije $\vee$-između.

Sada dokažimo da je uslov *3*. ekvivalentan sa uslovom *2*.
Pretpostavimo da je $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b$, ali da nije $abc_\vee$, odnosno da nije $b \leq a \vee c$. Kako je L $\vee$- IR mreža i a, b, c su elementi istog anti-lanca, jedan od elemenata a, b, c je između preostala dva. Neka je: $bac_\vee$. Tada je $a \leq b \vee c$ i $(b \vee a) \wedge (a \vee c) = a$. Kako je $a \leq b \vee c$, to je $a \vee c \leq b \vee c$, pa je $a = (b \vee a) \wedge (a \vee c) \leq (b \vee a) \wedge (b \vee c) = b$, što je

u suprotnosti sa $a \parallel b$. Slično dobijamo da je $c \leq b$ ako pretpostavimo da je $acb_\vee$, a to je kontradikcija sa uslovom $c \parallel b$. Suprotan smer tvrđenja sledi iz definicije relacije $\vee$-između.

Iz prethodno dokazanog sledi ekvivalencija *1.* i *3*.

Iz uslova $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b$ sledi da je $(a \vee b) \parallel (b \vee c)$ (u suprotnom bi bilo $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = a \vee b$ ili $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b \vee c$). Pošto su uslovi *1*, *2* i *3* ekvivalentni, sledi da ako je ispunjen bilo koji od uslova *1*, *2* i *3*, onda je $(a \vee b) \parallel (b \vee c)$.

□

U sledećoj teoremi dajemo najvažniju osobinu $\vee$- između ravnih mreža.

Teorema 3.1 *Neka je L $\vee$- između ravna mreža. Svaki anti-lanac mreže L ima najviše dva $\wedge$-nerazloživa elementa.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji anti-lanac a, b, c sa tri $\wedge$-nerazloživa elementa. Kako su elementi anti-lanca međusobno neuporedivi, a L je $\vee$- IR mreža, jedan od ovih elemenata je $\vee$-između preostala dva. Neka je $abc_\vee$, što je ekvivalentno sa $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b$. Po pretpostavci b je $\wedge$- nerazloživ element, pa je ili $a \vee b = b$ ili je $b \vee c = b$. Odatle sledi da je ili $a \leq b$ ili je $c \leq b$ sto je kontradikcija sa pretpostavkom da su elementi a, b, c elementi anti-lanca.

□

Zbog dualnosti $\vee$- i $\wedge$- između ravnih mreža, za $\wedge$- između ravne mreže važe tvrđenja dualna tvrđenjima za $\vee$- između ravne mreže, a dobijaju se zamenom $\wedge$ sa $\vee$, $\vee$ sa $\wedge$, relacije $\leq$ relacijom $\geq$, i obrnuto. Na sličan način se izvode i dokazi ovih tvrđenja. Navedimo tvrđenje koje je dualno teoremi 3.1.

Teorema 3.2 *Neka je L $\wedge$- između ravna mreža. Svaki anti-lanac mreže L ima najviše dva $\vee$-nerazloživa elementa.*

Ove teoreme ne govore ništa o egzistenciji $\wedge$- nerazloživih elemenata u $\vee$- IR mreži, odnosno o egzistenciji $\vee$- nerazloživih elemenata u $\wedge$- IR mreži. Ako $\vee$- IR mreža ($\wedge$- IR mreža) L ima $\wedge$- nerazložive ($\vee$- nerazložive) elemente, onda oni čine poset, sa poretkom nasleđenim iz mreže L, i taj poset ima širinu dva.

Tvrđenje 3.5 *Mreža koja je $\vee$- između ravna ili $\wedge$- između ravna mreža nema podmrežu izomorfnu mreži dijamant.*

Dokaz. Pretpostavimo da u $\vee$- IR mreži L postoji podmreža dijamant M_3. Tada postoje elementi $a, b, c \in L$ takvi da su dva po dva neuporedivi, i element $p \in L$ takav da je $a \vee b = b \vee c = a \vee c = p$. Zbog toga je $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = p \neq b$, pa ne važi $abc_\vee$. Slično se pokazuje da ne važe ni uslovi $bac_\vee$ i $acb_\vee$, što je u suprotnosti sa činjenicom da su a, b, c dva po dva neuporedivi elementi $\vee$- IR mreže.

Dokaz za $\wedge$- IR mrežu je dualan. □

Tvrđenje 3.6 *Neka je L $\vee$- IR mreža. Tada svaki element mreže L pokriva najviše dva elementa te mreže. Ako je L $\wedge$- IR mreža, onda je svaki element mreže L pokriven sa najviše dva elementa te mreže.*

Dokaz. Ako pretpostavimo da u $\vee$- IR mreži L postoji element p koji pokriva tri elementa $a, b, c \in L$, onda su elementi a, b, c dva po dva neuporedivi i važi $a \vee b = b \vee c = a \vee c = p$. Dalje dokaz teoreme 3.6 sledi iz istog razmatranja kao u posledici 3.5 (str. 62). □

Posledica 3.3 *Neka je L ograničena mreža. Ako je L $\vee$- IR mreža, onda mreža L ima najviše dva koatoma. Ako je L $\wedge$- IR mreža, onda mreža L ima najviše dva atoma.*

Dokaz. Prema tvrđenju 3.6 najveći element $\vee$- IR mreže može pokrivati najviše dva elementa, a najmanji element $\wedge$- IR mreže je pokriven sa najviše dva elementa.

□

Teorema 3.3 *Mreža L_1 koja je $\vee$- podmreža $\vee$- između ravne mreže L takođe je $\vee$- između ravna mreža.*

Dokaz. Neka je L $\vee$- između ravna mreža i neka je L_1 njena $\vee$-podmreža. Ako je $w(L_1) \leq 2$, onda je L_1 $\vee$- između ravna mreža po definiciji.

Pretpostavimo da je $w(L_1) > 2$. Tada postoje elementi $a, b, c \in L_1 \subseteq L$ koji su dva po dva neuporedivi. Prema definiciji $\vee$-između ravne mreže (3.3, str. 57), jedan od ovih elemenata je $\vee$-između preostala dva u mreži L. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da važi $abc_\vee$ u mreži L. Tada je, u mreži L, $(a \vee b) \wedge (b \vee c) = b$, $b \leq a \vee c$ i $(a \vee b) \parallel (b \vee c)$ (posledica 3.2, str. 61). Po pretpostavci, operacija $\vee$ na mreži L_1 je restrikcija operacije $\vee$ na mreži L, pa su i elementi $a \vee b, b \vee c$ i $a \vee b \vee c = (a \vee b) \vee (b \vee c)$ elementi mreže L_1. Takođe je poredak na L_1 restrikcija poretka na mreži L. Odatle sledi da je $b \leq_{L_1} a \vee c$ i da su $(a \vee b)$ i $(b \vee c)$ neuporedivi i u mreži L_1. Zato ćemo redom operaciju $\vee$ i relaciju poretka $\leq$ obeležavati isto na obe mreže L i L_1.

Dokažimo da u mreži L_1 važi $abc_\vee$. Utvrdili smo da važi $b \leq a \vee c$, pa treba dokazati da je $(a \vee b) \wedge_{L_1} (b \vee c) = b$.

Pretpostavimo da je $(a \vee b) \wedge_{L_1} (b \vee c) = b_1$. Kako je $b \leq a \vee b$ i $b \leq b \vee c$, odatle sledi da je $b \leq b_1$. S druge strane iz $(a \vee b) \wedge_{L_1} (b \vee c) = b_1$ sledi da je $b_1 \leq a \vee b$ i $b_1 \leq b \vee c$, a odatle dalje sledi $b_1 \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) = b$. Dakle, $b = b_1$.

Time je dokazano da je $(a \vee b) \wedge_{L_1} (b \vee c) = b$, odnosno da je mreža L_1 $\vee$-između ravna mreža. □

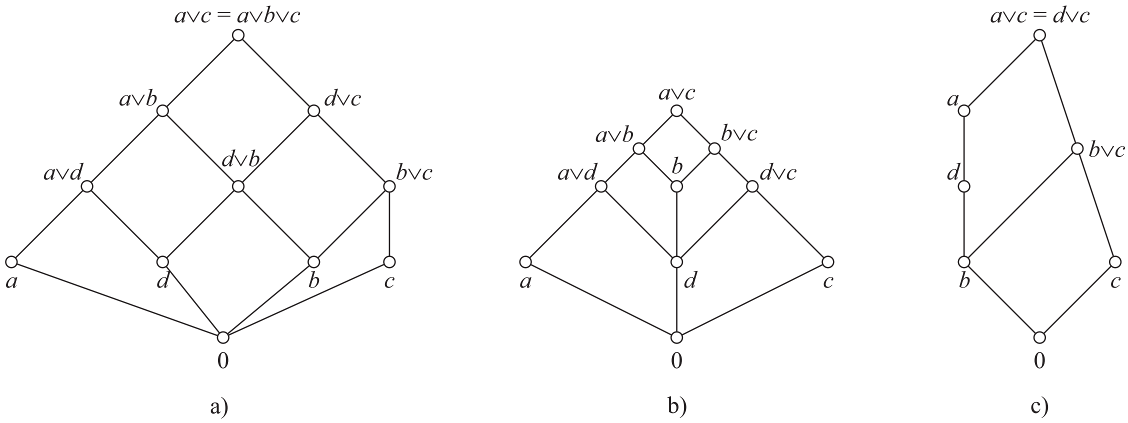
Ako je mreža L_1 podmreža mreže L, onda je L_1 $\vee$- podmreža i $\wedge$- podmreža mreže L, pa odatle sledi da važi sledeća posledica prethodne teoreme.

Posledica 3.4 *Podmreža $\vee$- između ravne mreže L takođe je $\vee$- između ravna mreža.*

Bulova mreža sa 8 elemenata nije ni $\vee$- između ravna ni $\wedge$- između ravna mreža. U ovoj mreži takođe postoji anti-lanac sa tri $\wedge$- nerazloživa elementa i anti-lanac sa tri $\vee$- nerazloživa elementa. Odatle sledi, prema posledici 3.4, sledeće tvrđenje.

Posledica 3.5 *Mreža koja je $\vee$- između ravna ili $\wedge$- između ravna mreža nema podmrežu izomorfnu Bulovoj mreži sa 8 i više elemenata.*

U nastavku ispitujemo svojstva samo $\vee$- između ravnih mreža. Za $\wedge$- između ravne mreže važe dualna svojstva, pa nije potrebno da ih posebno navodimo.



Slika 3.6

Osobine t_1, t_2, t_3, t_4 (str. 54) ne važe generalno na $\vee$-IR mrežama. Na $\vee$- IR mreži ilustrovanoj na slici 3.6 b) važi $abc_\vee$ i $adb_\vee$, ali zbog $b \not\leq d \vee c$ ne važi $dbc_\vee$, pa prema tome ne važi osobina t_1.
Na slici 3.6 c) je mreža na kojoj važi $abc_\vee$ i $adb_\vee$, ali zbog $(a \vee d) \wedge (d \vee c) = a \neq d$ ne važi $adc_\vee$, pa prema tome ne važi osobina t_2.
Ako uočimo elemente $b, d, b \vee c$ i $d \vee c$ na mreži ilustrovanoj na slici 3.6 b), lako je videti da na $\vee$- IR mrežama ne važi ni osobina t_3. Zaista, element b je $\vee$- između elemenata d i $b \vee c$, a element $b \vee c$ je $\vee$- između elemenata b i $d \vee c$. Međutim, element b je neuporediv sa elementom $d \vee (d \vee c) = d \vee c$, pa b nije $\vee$-između elemenata d i $d \vee c$. Time je dokazano da ne važi osobina t_3 za relaciju $\vee$-između u opštem slučaju.

Da bismo dokazali da važi osobina t_4 na mreži ilustrovanoj na slici 3.6 b) treba dokazati da je, za uočene elemente $b, d, b \vee c$ i $d \vee c$, $b \vee c$ $\vee$-između elemenata d i $d \vee c$.

Za elemente $d, b \vee c$ i $d \vee c$, važi $d \leq d \vee c \leq b \vee c$ pa je $d \vee c$ $\vee$-između elemenata d i $b \vee c$. Prema definiciji $\vee$-između ravne mreže, odatle sledi da nije $b \vee c$ $\vee$-između elemenata d i $d \vee c$, pa osobina t_4 ne važi za relaciju $\vee$-između na $\vee$-IR mrežama u opštem slučaju.

Premda osobine t_1, t_2, t_3, t_4 za relaciju $\vee$-između, u opštem slučaju, nisu zadovoljene na $\vee$- IR mrežama, one su zadovoljene na podskupovima neuporedivih elemenata ovih mreža (odnosno za elemente anti-lanaca).

Teorema 3.4 *Neka je L $\vee$- između ravna mreža i neka su a, b, c, d dva po dva neuporedivi elementi te mreže. Tada važe sledeće osobine:*

1. t_1: *Ako je $abc_\vee$ i $adb_\vee$ onda je $dbc_\vee$.*

2. t_2: *Ako je* $abc_\vee$ *i* $adb_\vee$ *onda je* $adc_\vee$.

3. t_3: *Ako je* $abc_\vee$ *i* $bcd_\vee$ *i* $b \neq c$ *onda je* $abd_\vee$.

4. t_4: *Ako je* $abc_\vee$ *i* $bcd_\vee$ *i* $b \neq c$ *onda je* $acd_\vee$.

Dokaz. Neka su a, b, c, d dva po dva neuporedivi elementi $\vee$- IR mreže i neka za ove elemente važi $abc_\vee$ i $adb_\vee$ (ilustracija na slici 3.6 a)).

1. Sa pretpostavkama $abc_\vee$ i $adb_\vee$ lako se dokazuje da važi $dbc_\vee$. Zaista, iz nejednakosti $(d\vee b)\wedge(b\vee c) \leq (a\vee b)\wedge(b\vee c) = b$ i $(d\vee b)\wedge(b\vee c) \geq b\wedge b = b$ sledi da je $(d\vee b)\wedge(b\vee c) = b$, a odatle, prema posledici 3.2 na strani 61, važi $dbc_\vee$, odnosno važi osobina t_1.

2. Iz $abc_\vee$, prema posledici 3.2, sledi da je $(a \vee b) \parallel (b \vee c)$ i $b \leq a \vee c$. Iz $adb_\vee$ sledi $d \leq a \vee b$, pa je $d \leq a \vee b \leq a \vee c$. Prema posledici 3.2 (str. 61) $d \leq a \vee c$ je ekvivalentno sa $adc_\vee$. Dakle, važi osobina t_2.

3. i *4.* Sada pretpostavimo da za elemente a, b, c, d $\vee$- IR mreže važi $abc_\vee$, $bcd_\vee$ i $b \neq c$.

Prema posledici 3.2 važi $(a \vee b) \parallel (b \vee c)$ i $(b \vee c) \parallel (c \vee d)$. Mada za relaciju $\parallel$ u opštem slučaju ne važi tranzitivnost, u ovom slučaju važi $(a \vee b) \parallel (c \vee d)$. Da bismo to dokazali, prvo pretpostavimo da je $(a\vee b) \leq (c\vee d)$. Tada je $b = (a\vee b)\wedge(b\vee c) \leq (c\vee d)\wedge(b\vee c) = c$, što je suprotno pretpostavci $b \parallel c$. Ako pretpostavimo da je $(c \vee d) \leq (a \vee b)$ dobijamo $c \leq b$ što je takođe suprotno pretpostavci $b \parallel c$. Time je dokazano da je $(a \vee b) \parallel (c \vee d)$.

Pretpostavka da važi $abc_\vee$ i $bcd_\vee$ ekvivalentna je redom sa $b \leq a\vee c$ i $c \leq b\vee d$ (posledica 3.2, str. 61). Odatle sledi da je $b \vee c \leq a \vee b \vee c \vee d$ što je ekvivalentno sa činjenicom da je $b \vee c$ $\vee$-između $a \vee b$ i $c \vee d$. Odatle je $(a \vee b \vee b \vee c) \wedge (b \vee c \vee c \vee d) = b \vee c$. S druge strane, lako se dokazuje da iz $abc_\vee$ i $bcd_\vee$ redom sledi $a \vee b \vee c = a \vee c$ i $b \vee c \vee d = b \vee d$. Prema tome važi $(a \vee c) \wedge (b \vee d) = b \vee c$.
Sada je $(a\vee b)\wedge(b\vee d) \leq (a\vee c)\wedge(b\vee d) = b\vee c$, pa je $(a\vee b)\wedge(a\vee b)\wedge(b\vee d) \leq (a\vee b)\wedge(b\vee c) = b$, odnosno $b \leq (a \vee b) \wedge (b \vee d) \leq b$. Time je dokazano da je $(a \vee b) \wedge (b \vee d) = b$, što je ekvivalentno sa $abd_\vee$.

Na sličan način se dokazuje da važi i $acd_\vee$.

□

Lema 3.8 *Neka je* L $\vee$- *IR mreža i neka su* a *i* b *proizvoljni elementi nekog anti-lanca* $\mathcal{S}$ *te mreže. Neka je, dalje,* $\mathcal{S}_1$ *anti-lanac mreže* L *takav da je* $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{S}$ *i* $\mathcal{S}_1 = \{x \in \mathcal{S} \mid axb_\vee\}$. *Tada je* $\bigvee_L \mathcal{S}_1 = a \vee b$ *i za sve* $x, y \in \mathcal{S}_1 \setminus \{a, b\}$ *važi:*

1. $a, (x \vee y), b$ *su dva po dva neuporedivi i* $a(x \vee y)b_\vee$,

2. $a \vee x \leq a \vee b$ *i* $b \vee x \leq a \vee b$.

Dokaz. Na osnovu uslova leme i definicije relacije $\vee$- između važi $aab_\vee$ i $abb_\vee$, a odatle sledi da su elementi a i b elementi anti-lanca $\mathcal{S}_1$. Iz uslova $axb_\vee$, koji je prema posledici

3.2 (str. 61) ekvivalentan sa $x \le a \vee b$ za svako $x \in \mathcal{S}_1$, i na osnovu činjenice da $a, b \in \mathcal{S}_1$, očigledno važi $\bigvee_L \mathcal{S}_1 = a \vee b$.

1. Za sve $x, y \in \mathcal{S}_1 \setminus \{a, b\}$ važi $axb_\vee$ i $ayb_\vee$. Dokažimo da je $a \parallel (x \vee y)$.

Pretpostavka $a \le x \vee y$ je ekvivalentna sa $xay_\vee$. Primenom osobine t_3 na $axb_\vee$ i $xay_\vee$, dobijamo da važi $bay_\vee$, što je protivrečno sa definicijom 3.2 relacije $\vee$- između na str. 51 i sa pretpostavkom da važi $ayb_\vee$. Kako su a, b, x, y elementi istog anti-lanca, nije moguće da bude $a \ge x \vee y$, pa je, prema tome, $a \parallel (x \vee y)$.

Slično se dokazuje da je $(x \vee y) \parallel b$. Po uslovu leme važi $a \parallel b$, pa je time dokazano da su elementi $a, x \vee y$ i b dva po dva neuporedivi.

Pretpostavke $axb_\vee$ i $ayb_\vee$ su ekvivalentne, tim redom, sa $x \le a \vee b$ i $y \le a \vee b$, a odatle sledi da je $x \vee y \le a \vee b$. Ovo je, dalje, ekvivalentno sa $a(x \vee y)b_\vee$ (posledica 3.2).

2. Iz uslova $x \le a \vee b$ i $y \le a \vee b$ slede, redom, i tvrđenja: $a \vee x \le a \vee b$ i $b \vee x \le a \vee b$.

□

Definicija 3.4 *Neka su a, p, q elementi istog anti-lanca $\vee$- IR mreže L. Kažemo da su elementi p i q* **sa iste strane elementa a** *ako važi $\neg(paq_\vee)$.*

Time je, za dati element a, na uočenom anti-lancu $\vee$- IR mreže L definisana relacija **"je sa iste strane elementa a"**.

Lema 3.9 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je a element proizvoljnog anti-lanca $\mathcal{A}$ mreže L. Za dati element a, relacija "je sa iste strane elementa a" je relacija ekvivalencije na $\mathcal{A} \setminus \{a\}$.*

Dokaz. Neka je a element proizvoljnog anti-lanca $\mathcal{A}$ mreže L Dokažimo da je na anti-lancu $\mathcal{A}$ relacija "je sa iste strane elementa a" refleksivna. Podsetimo se da, iako se u definiciji 3.2 (str. 51) ne zahteva da elementi $a, b, c \in L$ budu različiti, za $a \ne b$ nije moguće da bude zadovoljeno $a = c$ i $abc_\vee$. Prema tome, za uočeni element a i proizvoljni element p istog anti-lanca mreže L važi $\neg(pap_\vee)$, što dokazuje refleksivnost ove relacije.

Simetričnost sledi direktno iz postulata α' leme 3.3 na strani 53.

Dokazujemo da važi tranzitivnost. Neka su p, q, r elementi anti-lanca $\mathcal{A}$ za koje važi $\neg(paq_\vee)$ i $\neg(qar_\vee)$. Treba dokazati da tada važi $\neg(par_\vee)$.

Pretpostavimo suprotno da važi $par_\vee$. Iz pretpostavke $\neg(paq_\vee)$ sledi da je $apq_\vee$ ili $pqa_\vee$. Pretpostavka $par_\vee$ je ekvivalentna sa $rap_\vee$, što sa $apq_\vee$, primenom osobine t_3, za posledicu ima $raq_\vee$, što je suprotno pretpostavci $\neg(qar_\vee)$.

Slično, iz pretpostavke $par_\vee$ i $pqa_\vee$, primenom osobine t_1, dobijamo da važi $qar_\vee$ što je suprotno pretpostavci $\neg(qar_\vee)$.

Time je dokazano da važi $\neg(par_\vee)$.

□

U odnosu na proizvoljno izabrani element a anti-lanca $\mathcal{A}$ $\vee$- IR mreže L, relacija "je sa iste strane elementa a" vrši particiju elemenata anti-lanca $\mathcal{A} \setminus \{a\}$ na dve klase ekvivalencije.

Teorema 3.5 *Na svakom konačnom anti-lancu $\vee$- IR mreže postoje tačno dva elementa a i b takva da je, za obe relacije ekvivalencije "je sa iste strane elementa a" i "je sa iste strane elementa b", jedna od klasa ekvivalencije prazan skup.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ konačan anti-lanac $\vee$- IR mreže L. Neka su elementi tog anti-lanca x_i za $i \in I$, pri čemu je I konačan indeksni skup. Pretpostavimo da na anti-lancu $\mathcal{A}$ ne postoje elementi a i b takvi da je, za obe relacije ekvivalencije "je sa iste strane elementa a" i "je sa iste strane elementa b", jedna od klasa ekvivalencije prazan skup. Tada za svaki element x_i postoje elementi x_j, x_k za koje važi $(x_j x_i x_k)_\vee$. Elementi x_i, x_k su sa iste strane elementa x_j, odnosno nalaze se u istoj klasi ekvivalencije relacije "je sa iste strane elementa x_j", pa prema pretpostavci, postoji element x_{j_1} koji se nalazi u drugoj klasi ekvivalencije. Za ovaj element važi $(x_{j_1} x_j x_i)_\vee$, pa se x_{j_1} i x_j nalaze u istoj klasi ekvivalencije relacije "je sa iste strane elementa x_i", u kojoj nije x_k. Na isti način se dokazuje da postoji element x_{k_1} takav da je $(x_i x_k x_{k_1})_\vee$, pa se x_k i x_{k_1} nalaze u istoj klasi ekvivalencije relacije "je sa iste strane elementa x_i", u kojoj nisu elementi x_{j_1} i x_j. Pošto je anti-lanac $\mathcal{A}$ konačan postoji konačan broj elemenata anti-lanca $\mathcal{A}$ koji su u istoj klasi ekvivalencije relacije "je sa iste strane elementa x_i" kao elementi x_j i x_{j_1}. Isto tako postoji konačan broj elemenata anti-lanca $\mathcal{A}$ koji su u istoj klasi ekvivalencije relacije "je sa iste strane elementa x_i" kao elementi x_k i x_{k_1}. Neka su elementi ovih klasa ekvivalencije redom indeksirani sa $j = j_0, j_1, ..., j_n \in I$ i $k = k_0, k_1, ..., k_m \in I$, odnosno indeksirani su tako da redom važi $(x_{j_t} x_{j_{t-1}} x_i)_\vee$ za $t = 1, 2, ..., n$ i $(x_i x_{k_{z-1}} x_{k_z})_\vee$ za $z = 1, 2, ..., m$. Tada su elementi $a = x_{j_n} \in \mathcal{A}$ i $b = x_{k_m} \in \mathcal{A}$ takvi da ne postoji ni jedan element anti-lanca $\mathcal{A}$ koji se nalazi u klasi ekvivalencije relacija "je sa iste strane elementa $a = x_{j_n}$" i "je sa iste strane elementa $b = x_{k_m}$" redom, u kojoj nije element x_i. Takođe su elementi a i b u različitim klasama ekvivalencije relacije "je sa iste strane elementa x_i", odnosno važi $a x_i b_\vee$.

Zbog tranzitivnosti relacije "je sa iste strane elementa a", za svako $x \in S$ važi $axb_\vee$. Zaista, za svaki element $x \in \mathcal{A}$ važi $\neg(xax_i)$. Iz $ax_ib_\vee$ sledi $\neg(x_iab_\vee)$, pa primenom tranzitivnosti relacije "je sa iste strane elementa a", važi $\neg(xab_\vee)$. Slično, za svaki element $x \in \mathcal{A}$ važi $\neg(xbx_i)$, a iz $ax_ib_\vee$ sledi i $\neg(x_iba_\vee)$, pa primenom tranzitivnosti relacije "je sa iste strane elementa b", važi $\neg(xba_\vee)$.

Prema tome za svako $x \in \mathcal{A}$ važi $axb_\vee$, a odatle sledi da su a i b jedini elementi anti-lanca $\mathcal{A}$ takvi da je za obe relacije ekvivalencije "je sa iste strane elementa a" i "je sa iste strane elementa b" jedna od klasa ekvivalencije prazan skup. $\square$

Definicija 3.5 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je $\mathcal{A}$ neki anti-lanac te mreže. Ako postoje elementi $a, b \in \mathcal{A}$ takvi da za svaki element $x \in \mathcal{A}$ važi $axb_\vee$, reći ćemo da je anti-lanac $\mathcal{A}$* **ograničen**, *a elementi a i b su granice anti-lanca $\mathcal{A}$.*

Elementi a, b proizvoljnog anti-lanca $\mathcal{A}$ $\vee$- IR mreže koji ispunjavaju uslove ove definicije, su elementi za koje je za obe relacije ekvivalencije "je sa iste strane elementa a" i "je sa iste strane elementa b" jedna od klasa ekvivalencije prazan skup.
Zaista, prema dokazu prethodne teoreme, ako su a i b elementi konačnog anti-lanca $\mathcal{A}$ $\vee$- IR mreže za koje je jedna od klasa ekvivalencije za obe relacije ekvivalencije "je sa iste

strane elementa a" i "je sa iste strane elementa b" prazan skup, onda za svako $x \in \mathcal{A}$ važi $axb_\vee$. S druge strane, ako za svako $x \in \mathcal{A}$ važi $axb_\vee$, onda su svi elementi anti-lanca $\mathcal{A}$ sa iste strane elementa a sa koje je b i svi elementi anti-lanca $\mathcal{A}$ su sa iste strane elementa b sa koje je a, odnosno elementi $a, b \in \mathcal{A}$ su takvi da je za obe relacije ekvivalencije "je sa iste strane elementa a" i "je sa iste strane elementa b" jedna od klasa ekvivalencije prazan skup.

Odatle je očigledno da važi sledeća posledica teoreme 3.5.

Posledica 3.6 *Svaki konačni anti-lanac $\vee$- IR mreže je ograničen.*

Primer 3.5 *1.) Ako je L beskonačan lanac sa najvećim elementom* 1 *i najmanjim elementom* 0*, onda je anti-lanac $\mathcal{A}$ atoma mreže $I_i(L) = (I_\perp(L), \leq_i)$ (str. 30) beskonačan ograničen anti-lanac, a njegove granice su intervali $\mathbf{0} = [0,0]$ i $\mathbf{1} = [1,1]$ (slika 3.5 na str 59), što u nastavku dokazujemo.*

Da bismo dokazali da su $[0,0]$ i $[1,1]$ granice anti-lanca $\mathcal{A}$, prema definiciji 3.5, treba da dokažemo da za svaki element $\mathbf{x} = [x,x] \in \mathcal{A}$ važi $\mathbf{0x1}_\vee$. Za svaki element $[x,x] \in \mathcal{A}$ važi $([0,0] \vee [x,x]) \wedge ([x,x] \vee [1,1]) = [0,x] \wedge [x,1] = [x,x]$. Mreža $I_i(L)$ je $\vee$-IR mreža (lema 3.5 na str. 59), pa prema posledici 3.2 (str. 61) odatle sledi da je $[x,x]$ $\vee$-između $[0,0]$ i $[1,1]$, odnosno važi $\mathbf{0x1}_\vee$, za svaki element $\mathbf{x} = [x,x] \in \mathcal{A}$.

2.) Neka je L beskonačan lanac bez najvećeg i najmanjeg elementa. Mreža $I_i(L) = (I_\perp(L), \leq_i)$ je $\vee$- između ravna mreža, što se dokazuje kao u lemi 3.5 (str. 59) za mrežu $I_i(L)$, gde je L beskonačan lanac sa najvećim elementom 1 *i najmanjim elementom* 0*. Poznato je da postoji bijekcija između elemenata lanca L i atoma mreže $I_i(L)$ (teorema 2.4, str. 33). Pomenuta bijekcija je preslikavanje $f : L \to \mathcal{A}$ definisano sa $f(x) = [x,x]$, gde je $\mathcal{A}$ anti-lanac atoma mreže $I_i(L)$. Prema tome, anti-lanac atoma $\mathcal{A}$ mreže $I_i(L)$ je beskonačan. Dokažimo da je on neograničen, u smislu definicije 3.5. Kako smo već istakli, element $\mathbf{a} = [a,a]$ koji je granica anti-lanca $\mathcal{A}$ je takav da je jedna klasa ekvivalencije relacije "je sa iste strane elementa $\mathbf{a}$" na $\mathcal{A} \setminus \{\mathbf{a}\}$ prazan skup, odnosno za sve elemente $\mathbf{b} = [b,b], \mathbf{c} = [c,c] \in \mathcal{A}$ važi $\neg(\mathbf{bac}_\vee)$. Dokažimo da takav element $\mathbf{a}$ ne postoji na anti-lancu atoma $\mathcal{A}$ mreže $I_i(L)$.*

Neka je $\mathbf{a} = [a,a]$ proizvoljan element anti-lanca atoma $\mathcal{A}$ mreže $I_i(L)$. Za element $\mathbf{a} = [a,a]$ postoji element $a \in L$ takav da je $f(a) = \mathbf{a}$. Pošto je mreža L beskonačan lanac bez najvećeg i najmanjeg elementa, uvek postoje elementi $b, c \in L$ takvi da je $b < a < c$. Po definiciji preslikavanja f, važi $f(b) = \mathbf{b}$ i $f(c) = \mathbf{c}$, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{A}$. Tada su $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ dva po dva neuporedivi elementi u odnosu na neprecizni poredak i važi $\mathbf{a} = [a,a] \leq [b,b] \vee [c,c] = [b,c]$ i $([b,b] \vee [a,a]) \wedge ([a,a] \vee [c,c]) = [b,a] \wedge [a,c] = [a,a]$. Odatle sledi da važi $(\mathbf{bac}_\vee)$.

Time je dokazano da za svaki element $\mathbf{a}$ anti-lanca atoma $\mathcal{A}$ mreže $I_i(L)$, gde je L beskonačan lanac bez najvećeg i najmanjeg elementa, postoje elementi $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{A}$ takvi da važi $(\mathbf{bac}_\vee)$, odnosno da je anti-lanac atoma $\mathcal{A}$ u ovom slučaju neograničen.

Lema 3.10 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je $\mathcal{A}$ anti-lanac te mreže. Ako je $\mathcal{A}$ maksimalan anti-lanac (str. 2), koji je ograničen sa granicama a i b, onda je svaki anti-lanac $\mathcal{B}$ mreže L takav da $a, b \in \mathcal{B}$, ograničeni anti-lanac sa granicama a i b.*

Dokaz.

Neka je $\mathcal{A}$ maksimalan ograničeni anti-lanac $\vee$- IR mreže L sa granicama a i b. Tada za svaki element $x \in \mathcal{A}$ važi $axb_\vee$.

Neka je, dalje, $\mathcal{B}$ anti-lanac mreže L takav da je $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ i $a, b \in \mathcal{B}$. Dokažimo da za svaki element $y \in \mathcal{B}$ važi $ayb_\vee$.

Jasno je da za $y \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$ važi $ayb_\vee$. Zato pretpostavimo da je $y \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{A}$. Pošto su a, b, y elementi istog anti-lanca $\vee$- IR mreže, važi tačno jedan od uslova $yab_\vee$, $aby_\vee$ i $ayb_\vee$.

Neka važi $yab_\vee$, što je prema posledici 3.2 na strani 61, ekvivalentno sa $a \leq y \vee b$ i sa $(y \vee a) \wedge (a \vee b) = a$.
Kako je anti-lanac $\mathcal{A}$ maksimalan, postoji element $t \in \mathcal{A}$ takav da $t \not\parallel y$. Ako pretpostavimo da je $t > y$, onda je $t \vee b \geq y \vee b \geq a$, što je ekvivalentno sa $tab_\vee$ i prema tome u suprotnosti sa pretpostavkom da $t \in \mathcal{A}$.
Pretpostavimo sada da je $t < y$. Odatle sledi da je $t \vee a \leq y \vee a$, što za posledicu ima $a = (y \vee a) \wedge (a \vee b) \geq (t \vee a) \wedge (a \vee b)$. S druge strane je $t \leq a \vee b$, pa je $(t \vee a) \wedge (a \vee b) \geq (t \vee a) \wedge t = t$. Odatle sledi da je $t \leq a$, a to sa pretpostavkom $a, t \in \mathcal{A}$, za posledicu ima $t = a$. Po pretpostavci je $t < y$, pa važi $a < y$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da su a i y elementi istog anti-lanca $\mathcal{B}$. Dakle, $yab_\vee$ ne važi.

Slično se dokazuje da ne važi ni $aby_\vee$.

Time je dokazano da za svaki element $y \in \mathcal{B}$ važi $ayb_\vee$, odnosno da je anti-lanac $\mathcal{B}$ ograničen i da su elementi a i b njegove granice. $\square$

Neka su a i b proizvoljni neuporedivi elementi mreže L. Elementi mreže L neuporedivi sa elementom a su elementi poseta $L \setminus (\uparrow a \cup \downarrow a)$, a elementi neuporedivi sa b su elementi poseta $L \setminus (\uparrow b \cup \downarrow b)$. Odatle dalje sledi da su elementi neuporedivi sa a i sa b elementi poseta $L \setminus (\uparrow a \cup \downarrow a) \cap L \setminus (\uparrow b \cup \downarrow b)$. Odatle očigledno sledi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3.7 *Neka je L mreža i neka su a i b neuporedivi elementi mreže L. Skup $L\backslash(\uparrow a \cup \uparrow b \cup \downarrow a \cup \downarrow b))$ je skup svih elemenata mreže L koji su neuporedivi sa a i sa b.*

Definicija 3.6 *Neka je L $\vee$- između ravna mreža i neka su a i b granice nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca mreže L.* **Skup $\mathbf{a}, \mathbf{b}$- neuporedivih**, *u oznaci $\overline{ab}$, je skup svih elemenata mreže L koji su neuporedivi sa a i b, uključujući a i b, odnosno*

$$\overline{ab} = \{a, b\} \cup (L\backslash(\uparrow a \cup \uparrow b \cup \downarrow a \cup \downarrow b)). \tag{3.4}$$

U nastavku će $\overline{ab}$ uvek označavati skup a, b- neuporedivih, pri čemu su $a \in L$ i $b \in L$ granice maksimalnog ograničenog anti-lanca $\vee$- između ravne mreže L.

Teorema 3.6 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je $\overline{ab} \subseteq L$. Tada za svaki element $x \in \overline{ab}$ važi $axb_\vee$.*

Dokaz. Neka su a i b granice maksimalnog ograničenog anti-lanca $\vee$- IR mreže L i neka $x \in \overline{ab}$. Označimo sa $\mathcal{A}$ maksimalni anti-lanac mreže L čije su granice elementi a i b.

Ako $x \in \mathcal{A} \subseteq \overline{ab}$, onda po definiciji 3.5 (str. 67) važi $axb_\vee$.

Pretpostavimo da je $x \in \overline{ab}$ takvo da $x \notin \mathcal{A}$. Tada važi $xab_\vee$, $xba_\vee$ ili $axb_\vee$. Pošto je anti-lanac $\mathcal{A}$ maksimalan, postoji element $t \in \mathcal{A}$ takav da je $t < x$ ili $x < t$.

Slično kao u lemi 3.10 (str. 69) dokazujemo da pretpostavke $xab_\vee$ i $xba_\vee$ dovode do kontradikcije, odnosno da važi $axb_\vee$ za sve elemente $\vee$- IR mreže L neuporedive sa $a \in L$ i $b \in L$, pri čemu su a i b granice maksimalnog anti-lanca mreže L.

□

Teorema 3.7 *Neka su a i b neuporedivi elementi konačne $\vee$- između ravne mreže L. Za svaki element $x \in L$ koji je neuporediv sa a i sa b važi $axb_\vee$ ako i samo ako su elementi a i b granice nekog maksimalnog anti-lanca $\mathcal{A}$ mreže L.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka su a i b neuporedivi elementi $\vee$- između ravne mreže L i neka važi $axb_\vee$ za svaki element $x \in L$ koji je neuporediv sa a i sa b. Dokažimo da tada postoji maksimalni anti-lanac $\mathcal{A}$ mreže L čije su granice elementi a i b.

Neka je $\mathcal{A}_1$ proizvoljan anti-lanac $\vee$- IR mreže L takav da $a, b \in \mathcal{A}_1$. Prema pretpostavci, elementi a i b su granice anti-lanca $\mathcal{A}_1$. Ako je anti-lanac $\mathcal{A}_1$ maksimalan anti-lanac mreže L, tvrđenje je dokazano. Ako $\mathcal{A}_1$ nije maksimalan anti-lanac mreže L, onda postoji bar jedan element $x_1 \in L \setminus \mathcal{A}_1$ koji je neuporediv sa svim elementima anti-lanca $\mathcal{A}_1$. Pošto je x_1 neuporediv sa a i sa b, prema pretpostavci važi $ax_1b_\vee$. Odatle sledi da su elementi a i b granice anti-lanca $\mathcal{A}_1 \cup \{x_1\}$, koji obeležavamo sa $\mathcal{A}_2$. Ako je anti-lanac $\mathcal{A}_2$ maksimalan anti-lanac mreže L, tvrđenje je dokazano. Ako anti-lanac $\mathcal{A}_2$ nije maksimalan anti-lanac mreže L, na sličan način dobijamo ograničeni anti-lanac $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 \cup \{x_2\}$ sa granicama a i b, gde je $x_2 \in L \setminus \mathcal{A}_2$ neuporediv sa svim elementima anti-lanca $\mathcal{A}_2$. Zbog konačnosti mreže L, postoji konačno mnogo anti-lanaca $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i-1} \cup \{x_{i-1}\}$, $i = 2, 3, ..., n$, sa granicama a i b, gde je $x_{i-1} \in L \setminus \mathcal{A}_{i-1}$ neuporediv sa svim elementima anti-lanca $\mathcal{A}_{i-1}$, $i = 2, 3, ..., n$. Po konstrukciji je jasno da je svaki element mreže L uporediv sa nekim elementom anti-lanca $\mathcal{A}_n$, pa je anti-lanac $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ maksimalni anti-lanac mreže L sa granicama a i b.

($\Longleftarrow$) Obrnuto, neka su a i b granice nekog maksimalnog anti-lanca $\mathcal{A}$ mreže L. Prema definiciji 3.6 (str. 69), element $x \in L$ je neuporediv sa a i b ako i samo ako $x \in \overline{ab}$, a odatle, prema teoremi 3.6 (str. 69), važi $axb_\vee$.

□

Na skupu $\overline{ab}$ definišemo relaciju poretka na sledeći način.

Definicija 3.7 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je $\overline{ab} \subseteq L$. Za $x, y \in \overline{ab}$ kažemo da element x* **prethodi** *elementu y, što označavamo sa $x \ll y$, ako i samo ako je $x = y$ ili ($x \parallel y$ i $axy_\vee$).*

Tvrđenje 3.8 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je $\overline{ab} \subseteq L$. Relacija $\ll$ je relacija poretka na skupu $\overline{ab}$.*

Dokaz. Neka su x, y, z elementi skupa $\overline{ab}$.

Prema definiciji 3.7 važi $x \ll x$ za svako $x \in \overline{ab}$, pa je relacija $\ll$ refleksivna. Antisimetričnost ove relacije je posledica postulata β' leme 3.3 na strani 53. Dokažimo da je relacija $\ll$ tranzitivna. Neka $x \ll y$ i $y \ll z$. Prema definiciji 3.7 (str. 70) tada je ($x = y$ ili ($x \parallel y$ i $axy_\vee$)) i ($y = z$ ili ($y \parallel z$ i $ayz_\vee$)).
Ako je $x = y$ ili $y = z$ onda je $x \ll z$ trivijalno zadovoljeno.
Neka je $x \parallel y$ i $y \parallel z$. Dokažimo da je tada $x \parallel z$.
Pretpostavimo da važi $x \nparallel z$. Pošto su x, y, z različiti elementi, tada je $x > z$ ili $x < z$.

Ako je $x > z$, onda je $a \vee x \geq a \vee z$. Iz pretpostavke $y \ll z$ sledi da je $ayz_\vee$ što je ekvivalentno sa $y \leq a \vee z \leq a \vee x$, a to je dalje ekvivalentno sa $ayx_\vee$ (posledica 3.2, str. 61). Odatle sledi da ne važi $axy_\vee$, što je suprotno pretpostavci da $x \ll y$.

Ako je $x < z$, onda je $y \vee x \leq y \vee z$. Iz pretpostavke $x \ll y$ sledi da važi $axy_\vee$ što je ekvivalentno sa $x \leq a \vee y$. Iz pretpostavke $y \ll z$ sledi da je $ayz_\vee$ što je ekvivalentno sa $y = (a \vee y) \wedge (y \vee z)$. Prema prethodno rečenom, tada je $y \geq x \wedge (y \vee x) = x$, a to je suprotno pretpostavci da su elementi x i y neuporedivi u odnosu na poredak $\leq$ mreže L.

Ovim je dokazano da je $x \parallel z$. Iz $axy_\vee$ i $ayz_\vee$ sledi $axz_\vee$, prema osobini t_2 za relaciju $\vee$-između. Time je dokazano da važi $x \ll z$ i kada su x, y, z različiti elementi. Dakle, relacija $\ll$ je tranzitivna.

Time je dokazano da je relacija $\ll$ relacija poretka.

□

Tvrđenje 3.9 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je $\overline{ab} \subseteq L$. Za sve neuporedive elemente $x, y \in \overline{ab}$ sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. $x \ll y$,

2. $axy_\vee$,

3. $xyb_\vee$.

Dokaz. (*1.* $\Leftrightarrow$ *2.*) Po definiciji 3.7, za neuporedive elemente $x, y \in \overline{ab}$, $x \ll y$ je ekvivalentno sa $axy_\vee$.

(*2.* $\Rightarrow$ *3.*) Neka važi $axy_\vee$ za neuporedive elemente $x, y \in \overline{ab}$. Prema teoremi 3.6 (str. 69), zbog $y \in \overline{ab}$ važi $ayb_\vee$. Tada važi i $xyb_\vee$, prema svojstvu t_1 relacije $\vee$- između.

(*3.* $\Rightarrow$ *2.*) Neka važi $xyb_\vee$. Iz $x \in \overline{ab}$ sledi da važi $axb_\vee$. Tada je $axy_\vee$, primenom postulata α' leme 3.3 (str. 53) i svojstva t_1.

Time je dokazana ekvivalencija sva tri uslova. □

Posledica 3.7 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je $\overline{ab} \subseteq L$. Za svako $x \in \overline{ab}$ važi $a \ll x \ll b$.*

Dokaz. Iz definicije i $aax_\vee$ sledi da $a \ll x$ za svako $x \in \overline{ab}$. Takođe je, po teoremi 3.6, $axb_\vee$ za sve $x \in \overline{ab}$, pa $x \ll b$. Zbog tranzitivnosti relacije $\ll$ važi i $a \ll b$. □

Prema tome, relacijom $\ll$ je određen poredak (smer) na skupu neuporedivih elemenata skupa $\overline{ab}$ koji zavisi od izbora jednog, od dva granična elementa, za početni element. Izborom početnog i krajnjeg elementa nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca određen je isti poredak na svim ograničenim anti-lancima sa istim granicama. Tako je, izborom elementa a za početni, a elementa b za krajnji element odgovarajućeg maksimalnog ograničenog anti-lanca, na skupu neuporedivih elemenata skupa $\overline{ab}$ određen poredak u kome je element a najmanji, a element b najveći.

Poredak koji je dualan ovom poretku, u oznaci $\ll^d$, na skupu neuporedivih elemenata skupa $\overline{ab}$, dobija se izborom elementa b za početni, a elementa a za krajnji element odgovarajućeg maksimalnog ograničenog anti-lanca. Relaciju $\ll^d$ definišemo na sledeći način.

Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je $\overline{ab} \subseteq L$, a x i y proizvoljni neuporedivi elementi iz $\overline{ab}$. Tada kažemo da element x **dualno prethodi** *elementu y, što označavamo sa $x \ll^d y$, ako i samo ako je $x = y$ ili ($x \parallel y$ i $bxy_\vee$).*

Time je za neuporedive elemente skupa $\overline{ab}$ određen poredak u kome je element b najmanji, a element a najveći.

Dakle, na skupu elemenata svakog ograničenog anti-lanca mogu postojati dva poretka. Različiti elementi skupa $\overline{ab}$ su uporedivi relacijom $\leq$, koja je restrikcija poretka $\leq$ mreže L, ako i samo ako su neuporedivi relacijama $\ll$ i $\ll^d$.

Relacije $\ll$ i $\ll^d$ nisu mrežne relacije. Zaista, skup $\{z \mid x \parallel z, y \parallel z, x \ll z, y \ll z\}$ gornjih ograničenja za skup $\{x, y\}$, gde su $x, y \in L$ neuporedivi relacijom $\ll$ (odnosno uporedivi relacijom $\leq$), u opštem slučaju nema najmanji element u odnosu na relaciju $\ll$. Slično važi za relaciju $\ll^d$. Prema tome za elemente $\vee$- IR mreže L koji su neuporedivi relacijama $\ll$ i $\ll^d$ supremum ne postoji u opštem slučaju. Slično, za elemente $\vee$- IR mreže L koji su neuporedivi relacijama $\ll$ i $\ll^d$ ne postoji ni infimum u opštem slučaju.

Lema 3.11 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je dat uređeni skup $(\overline{ab}, \ll)$ za $\overline{ab} \subseteq L$. Neka su $x, y, z \in \overline{ab}$ dva po dva neuporedivi elementi u odnosu na poredak $\leq$ iz mreže L. Tada je $xyz_\vee$ ako i samo ako je ili $x \ll y \ll z$ ili $z \ll y \ll x$.*

Dokaz. Neka su $x, y, z \in \overline{ab} \subseteq L$ dva po dva neuporedivi elementi u odnosu na poredak $\leq$ iz $\vee$- između ravne mreže L .

($\Longleftarrow$) Neka važi $x \ll y$ i $y \ll z$. Odatle redom sledi da važi $axy_\vee$ i $ayz_\vee$. Primenimo svojstva t_1 relacije $\vee$-između, odatle sledi $xyz_\vee$. Na sličan način se dokazuje da iz pretpostavke $z \ll y \ll x$ takođe sledi $xyz_\vee$. Time je dokazano da ako važi jedan od uslova $x \ll y \ll z$ ili $z \ll y \ll x$, onda važi $xyz_\vee$.

($\Longrightarrow$) Obrnuto, neka važi $xyz_\vee$, odnosno neka su x i z u različitim klasama ekvivalencije relacije "...je sa iste strane elementa..." u odnosu na element y. Tada su moguća sledeća dva slučaja.

(1.) a i x su sa iste strane elementa y, odnosno $\neg(ayx_\vee)$. Pošto je element a granica maksimalnog anti-lanca mreže L (po definiciji 3.6, str. 69), x i y su sa iste strane elementa a što je ekvivalentno sa $\neg(xay_\vee)$ (definicija 3.4, str. 66). Odatle sledi da važi $axy_\vee$, a to je ekvivalentno sa $x \ll y$ (definicija 3.7, str. 70). Pošto su x i z u različitim klasama ekvivalencije relacije "...je sa iste strane elementa..." u odnosu na element y, onda su a i z u različitim klasama ekvivalencije relacije "...je sa iste strane elementa..." u odnosu na element y, odnosno važi $ayz_\vee$, što je ekvivalentno sa $y \ll z$. Zbog tranzitivnosti relacije $\ll$, u ovom slučaju važi $x \ll y \ll z$.

(2.) a i z su sa iste strane elementa y, odnosno $\neg(ayz_\vee)$. Sa sličnim argumentim kao u slučaju (1.) dokazujemo da tada važi $azy_\vee$ i $ayx_\vee$. Odatle redom sledi $z \ll y$ i $y \ll x$. Dakle, u ovom slučaju važi $z \ll y \ll x$.

Zbog antisimetričnosti relacije $\ll$ nije moguće da važi $x \ll y \ll z$ i $z \ll y \ll x$. Time je dokazano da iz $xyz_\vee$ sledi ili $x \ll y \ll z$ ili $z \ll y \ll x$.

□

Lema 3.12 *Neka je L $\vee$- IR mreža i neka je dat uređeni skup $(\overline{ab}, \ll)$ za $\overline{ab} \subseteq L$. Neka su, dalje, $x, y \in \overline{ab}$ proizvoljni elementi neuporedivi u odnosu na poredak $\leq$ iz mreže L. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. $x \ll y$,
2. $a \vee x < a \vee y$,
3. $b \vee x > b \vee y$,
4. $(a \vee x), (x \vee y), (b \vee y)$ *su dva po dva neuporedivi i* $(a \vee x)(x \vee y)(b \vee y)_\vee$.

Dokaz. Neka su $x, y \in \overline{ab} \subseteq L$ neuporedivi elementi.

(*1.* $\Rightarrow$ *4.*) Neka $x \ll y$. Prema tvrđenju 3.9 (str. 71) $x \ll y$ je ekvivalentno sa $axy_\vee$ i $xyb_\vee$. Dokažimo da su $(a \vee x), (x \vee y), (b \vee y)$ dva po dva neuporedivi.

Prema posledici 3.2 (str. 61) iz $axy_\vee$ i $xyb_\vee$ redom sledi $(a \vee x) \parallel (x \vee y)$ i $(x \vee y) \parallel (y \vee b)$. Treba dokazati da važi $(a \vee x) \parallel (y \vee b)$. Pretpostavimo suprotno, odnosno da $(a \vee x) \nparallel (y \vee b)$.

Prvo pretpostavimo da je $(a \vee x) \leq (y \vee b)$. Tada je, zbog $axy_\vee$ i $xyb_\vee$, $x = (a \vee x) \wedge (x \vee y) \leq (b \vee y) \wedge (y \vee x) = y$, što je suprotno pretpostavci $x \parallel y$.

Ako pretpostavimo da je $(y \vee b) \leq (a \vee x)$, na sličan način dokazujemo da je $y \leq x$, što je takođe suprotno pretpostavci $x \parallel y$. Time je dokazano da su $(a \vee x), (x \vee y), (b \vee y)$ dva po dva neuporedivi.

Dokažimo da važi $(a \vee x)(x \vee y)(b \vee y)_\vee$. Iz $axy_\vee$ i $xyb_\vee$ sledi redom $x \leq a \vee y$ i $y \leq x \vee b$, a odatle dalje sledi $x \vee y \leq a \vee x \vee y \vee b$ što je ekvivalentno sa $(a \vee x)(x \vee y)(b \vee y)_\vee$ (posledica 3.2).

(*4.* $\Rightarrow$ *1.*) Pretpostavimo da je tačno tvrđenje *4*, ali da $x \not\ll y$. Pošto su x i y neuporedivi u odnosu na poredak $\leq$, tada važi $y \ll x$, što je ekvivalentno sa $ayx_\vee$ i $yxb_\vee$ (tvrđenje 3.9), a to je dalje ekvivalentno redom sa $y \leq a \vee x$ i $x \leq y \vee b$. Odatle redom sledi $x \vee y \leq a \vee x$ i $x \vee y \leq y \vee b$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da su $(a \vee x), (x \vee y), (b \vee y)$ dva po dva neuporedivi.

Time je dokazano da je *1.* ekvivalentno sa *4.*

(*1.* $\Rightarrow$ *2.*) i (*1.* $\Rightarrow$ *3*). Neka važi $x \ll y$. Kao što smo već u prethodnom delu dokaza naveli, odatle sledi $x \leq a \vee y$, $y \leq x \vee b$, $(a \vee x) \parallel (x \vee y)$ i $(b \vee y) \parallel (x \vee y)$. Odatle je, redom, $a \vee x \leq a \vee y$ i $b \vee y \leq x \vee b$. S druge strane je $(a \vee x) \vee (x \vee y) = a \vee y$ i $(b \vee y) \vee (x \vee y) = b \vee x$, a odatle sledi da je, redom, $a \vee x \neq a \vee y$ i $b \vee y \neq b \vee x$. Time je dokazano da iz pretpostavke $x \ll y$ sledi $a \vee x < a \vee y$ i $b \vee x > b \vee y$.

(*2.* $\Rightarrow$ *1.*) Sada pretpostavimo da je $a \vee x < a \vee y$ i da x ne prethodi y. Pošto su $x, y \in \overline{ab}$ neuporedivi u odnosu na poredak $\leq$, tada važi $y \ll x$. Prema prethodno dokazanom tada je $a \vee y < a \vee x$, što sa pretpostavkom $a \vee x < a \vee y$ dovodi do kontradikcije.

Slično se dokazuje da iz *3.* sledi *1.*

Ovim je dokazana ekvivalencija sva četiri uslova.

$\square$

Teorema 3.8 *Neka je L kompletna $\vee$- između ravna mreža i $\overline{ab} \subseteq L$. Tada su poseti*

$$\bar{A} = \{\bigvee (a \vee x) \mid x \in S \text{ za svaki neprazni skup } S \subseteq \overline{ab}\} \quad i \tag{3.5}$$

$$\bar{B} = \{\bigvee (b \vee x) \mid x \in S \text{ za svaki neprazni skup } S \subseteq \overline{ab}\} \tag{3.6}$$

linearno uređeni relacijom poretka koja je restrikcija poretka iz L.

Dokaz.

Za sve jednoelementne podskupove $\{x\}$ i $\{y\}$ skupa $\overline{ab}$ važi $a \vee x \leq a \vee y$ ili $a \vee y \leq a \vee x$. Ako su elementi x i y uporedivi u odnosu na poredak $\leq$, to je očigledno, a ako su neuporedivi u odnosu na poredak $\leq$ tada $x \ll y$ ili $y \ll x$. Prema lemi 3.12 (str. 73) za svaka dva elementa x i y neuporediva u odnosu na poredak $\ll$, važi $x \ll y$ ako i samo ako $a \vee x < a \vee y$. Prema tome, za svaki element $x \in \overline{ab} \subseteq L_{\overline{ab}}$, element $a \vee x$ je uporediv sa svim elementima $a \vee y$ za sve $y \in \overline{ab}$.

Neka su sada S i S_1 proizvoljni neprazni podskupovi skupa $\overline{ab}$. Dokažimo da je $\bigvee_{x \in S}(a \vee x)$ uporediv sa $\bigvee_{y \in S_1}(a \vee y)$.

Primetimo da je $\bigvee_{x \in S}(a \vee x) = a \vee \bigvee_{x \in S} x$ i $\bigvee_{y \in S_1}(a \vee y) = a \vee \bigvee_{y \in S_1} y$ i da ovi supremumi postoje zbog kompletnosti mreže L.

Pošto su $a \vee x$ i $a \vee y$ uporedivi za sve pojedinačne elemente $x \in S$ i $y \in S_1$, moguća su sledeća tri slučaja.

(1.) Za svako $x \in S$ postoji $y \in S_1$ takav da je $a \vee x \leq a \vee y$ i za svako $y \in S_1$ postoji $x \in S$ takvo da je $a \vee y \leq a \vee x$. Odatle je, redom, $\bigvee_{x \in S}(a \vee x) \leq \bigvee_{y \in S_1}(a \vee y)$ i $\bigvee_{y \in S_1}(a \vee y) \leq \bigvee_{x \in S}(a \vee x)$. Odatle dalje sledi da su ovi supremumi jednaki.

(2.) Postoji $x \in S$ takvo da je $a \vee x \geq a \vee y$ za svako $y \in S_1$. Tada je $\bigvee_{x \in S}(a \vee x) \geq \bigvee_{y \in S_1}(a \vee y)$. Zaista, $\bigvee_{x \in S}(a \vee x) \geq a \vee x$ za svako $x \in S$ i $a \vee x \geq \bigvee_{y \in S_1}(a \vee y)$.

(3.) Postoji $y \in S_1$ takav da je $a \vee y \geq a \vee x$ za svako $x \in S$. Slično kao u slučaju (2.) se dokazuje da je tada $\bigvee_{x \in S}(a \vee x) \leq \bigvee_{y \in S_1}(a \vee y)$.

Time smo dokazali da je poset $\bar{A}$ linearno uređen. Slično se dokazuje da je poset $\bar{B}$ takođe linearno uređen.

□

Lanci $\bar{A}$ i $\bar{B}$ su ograničeni. Zaista, ako je skup $S = \{a\}$, onda važi $a \in \bar{A}$ i $a \vee b \in \bar{B}$. Ako je skup $S = \{b\}$, onda važi $a \vee b \in \bar{A}$ i $b \in \bar{B}$. Prema posledici 3.7 (str. 71) i lemi 3.12 (str. 73), najmanji i najveći elementi lanaca $\bar{A}$ i $\bar{B}$ su, redom, $0_{\bar{A}} = a$, $0_{\bar{B}} = b$, $1_{\bar{A}} = 1_{\bar{B}} = a \vee b$. Prema tome, ako su elementi a i b granice nekog maksimalnog anti-lanca kompletne $\vee$- između ravne mreže L, onda je $\bar{A} \subseteq [a, a \vee b]$ i $\bar{B} \subseteq [b, a \vee b]$. Da obrnuto ne važi u opštem slučaju, odnosno da je u opštem slučaju $[a, a \vee b] \not\subseteq \bar{A}$ i $[b, a \vee b] \not\subseteq \bar{B}$, ilustrovaćemo primerom, nakon što dokažemo da su i intervali $[a, a \vee b]$ i $[b, a \vee b]$ linearno uređeni za proizvoljne neuporedive elemente a i b mreže L.

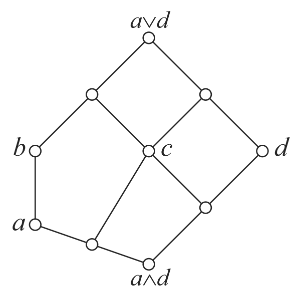
Teorema 3.9 *Neka je L $\vee$- između ravna mreža i neka su a i b neuporedivi elementi mreže L. Tada su intervali $[a, a \vee b]$ i $[b, a \vee b]$ linearno uređeni.*

Dokaz.

Neka su elementi $a, b \in L$ neuporedivi. Pretpostavimo da u intervalu $[a, a \vee b]$ postoje neuporedivi elementi $p \neq a \vee b$ i $q \neq a \vee b$. Za elemente p i q važi $a \leq p$ i $a \leq q$, što za posledicu ima $p \vee b = q \vee b = a \vee b$. Odatle sledi da su p i q neuporedivi sa b i da je $p \leq b \vee q$. Prema posledici 3.2 (str. 61) $p \leq b \vee q$ je ekvivalentno sa $bpq_{\vee}$. Međutim, takođe važi i $q \leq b \vee p$, pa važi $bqp_{\vee}$, što je moguće samo ako je $p = q$ (postulat β' leme 3.3, str. 53).

Time je dokazano da je interval $[a, a \vee b]$ linearno uređen. Slično se dokazuje linearna uređenost intervala $[b, a \vee b]$. □

Primer 3.6 *Neka je L $\vee$- između ravna mreža čiji je dijagram ilustrovan na slici 3.7. Na mreži su označeni elementi a i d koji su granice maksimalnog anti-lanca date mreže. U ovom slučaju je $\overline{ad} = \{a, c, d\}$, pa je $\bar{A} = \{a, a \vee c, a \vee d\}$, a $\bar{B} = \{d, c \vee d, a \vee d\}$. Za datu mrežu važi $[a, a \vee d] \not\subseteq \bar{A}$, zato što element $b \in [a, a \vee d]$ i $b \notin \bar{A}$.*



Slika 3.7

Tvrđenje 3.10 *Neka je L kompletna $\vee$- između ravna mreža i neka su $\bar{A}$ i $\bar{B}$ ograničeni lanci definisani u teoremi 3.8 na str. 74. Tada je svaki element lanca $\bar{A}\setminus\{a\vee b\}$ neuporediv sa svakim elementom lanca $\bar{B}\setminus\{a\vee b\}$.*

Dokaz. Neka su elementi $p, q \in L_{\overline{ab}}$ takvi da je $p \in \bar{A}\setminus\{a\vee b\}$ i $q \in \bar{B}\setminus\{a\vee b\}$.

Pretpostavimo da je $q \leq p$. Odatle sledi da je $a \leq p$ i $b \leq q \leq p$. Tada je $a \vee b \leq p$, pa važi $a \vee b = p$, što je kontradikcija sa pretpostavkom $p \neq a \vee b$. Slično sa pretpostavkom $p \leq q$ dobijamo da je $a \vee b = q$, što je kontradikcija sa pretpostavkom $q \neq a \vee b$. Time je dokazano da važi $p \parallel q$.

□

Definicija 3.8 *Neka je L kompletna $\vee$- između ravna mreža i neka je $\overline{ab} \subseteq L$. Za poset $(L_{\overline{ab}}, \leq)$, gde je $L_{\overline{ab}} = \{\bigvee S \mid$ za sve neprazne skupove $S \subseteq \overline{ab}\} \cup \{a \wedge b\}$ i gde je relacija $\leq$ restrikcija relacije $\leq$ iz mreže L, kažemo da je $\vee$-* **generisan skupom** *$\overline{ab}$.*

Lema 3.13 *Neka je L kompletna $\vee$- između ravna mreža i neka je $(L_{\overline{ab}}, \leq)$ poset $\vee$- generisan skupom $\overline{ab} \subseteq L$. Tada važi:*

1. *$m \geq a$ ako i samo ako je $m \in \bar{A}$, za svaki element $m \in L_{\overline{ab}}$;*

2. *$n \geq b$ ako i samo ako je $n \in \bar{B}$, za svaki element $n \in L_{\overline{ab}}$;*

gde su $\bar{A}$ i $\bar{B}$ lanci definisani u teoremi 3.8 (str. 74).

Dokaz. *1*. Iz pretpostavke $m = a$ trivijalno sledi
$m \in \bar{A} = \{\bigvee(a \vee x) \mid x \in S$ za svaki neprazni skup $S \subseteq \overline{ab}\}$.
Neka je element $m \in L_{\overline{ab}}$ takav da je $m > a$. Prema ovoj pretpostavci m nije element skupa $\overline{ab}$, a poset $L_{\overline{ab}}$ je $\vee$- generisan skupom $\overline{ab}$, te stoga postoji neprazan podskup S elementa iz $\overline{ab}$ takav da je $m = \bigvee_{x\in S} x$. S druge strane važi $\bigvee_{x\in S}(a \vee x) = a \vee \bigvee_{x\in S} x$. Odatle sledi $\bigvee_{x\in S}(a \vee x) = a \vee m = m$, pa je time dokazano da $m \in \bar{A}$.

Tvrđenje u drugom smeru je očigledno.

2. Dokaz stava *2*. je sličan dokazu stava *1*.

□

Teorema 3.10 *Neka je L kompletna $\vee$- između ravna mreža i neka je $(L_{\overline{ab}}, \leq)$ poset $\vee$- generisan skupom $\overline{ab} \subseteq L$. Tada je*

$$L_{\overline{ab}} = \overline{ab} \cup \bar{A} \cup \bar{B} \cup \{a \wedge b\}. \tag{3.7}$$

Dokaz.

Neka $s \in L_{\overline{ab}} \setminus \{a \wedge b\}$. Tada postoji neprazan podskup S poseta $\overline{ab}$ takav da je $\bigvee S = s$. Pošto je $S \subseteq \overline{ab}$ nije moguće da bude $s < a$ ili $s < b$. Prema tome, mogući su sledeći slučajevi.

(1.) $s \geq a$. Prema prethodnoj lemi $s \geq a$ je ekvivalentno sa $s \in \bar{A}$.

(2.) $s \geq b$, što je ekvivalentno sa $s \in \bar{B}$.

(3.) $s \parallel a$ i $s \parallel b$, što je ekvivalentno sa $s \in \overline{ab}$.

Dakle formiranjem supremuma na nepraznim podskupovima skupa $\overline{ab}$ dobijamo ponovo neki od elemenata skupa $\overline{ab}$ ili neki od elemenata lanaca $\bar{A}$ ili $\bar{B}$, čime je dokazano tvrđenje teoreme. □

Teorema 3.11 *Neka je L kompletna $\vee$- između ravna mreža i neka je $\overline{ab} \subseteq L$. Tada je $(L_{\overline{ab}}, \leq)$ kompletna $\vee$- između ravna mreža.*

Dokaz.

Za svaki element $x \in \overline{ab}$ važi $axb_{\vee}$, pa, prema osobini *2.* leme 3.4 na strani 53, važi $a \wedge b \leq x$. Po konstrukciji $a \wedge b \in L_{\overline{ab}}$, pa je $a \wedge b$ najmanji element poseta $L_{\overline{ab}}$.

Dobro je poznata činjenica da je kompletna mreža svaki uređeni skup sa najmanjim elementom, u kome svaki neprazan podskup ima supremum. Po definiciji $L_{\overline{ab}}$ elementi proizvoljnog nepraznog podskupa poseta $L_{\overline{ab}}$ su elementi skupa $\overline{ab} \cup \{a \wedge b\}$ ili su supremumi nepraznih podskupova elemenata skupa $\overline{ab}$, pa se može smatrati da je supremum svakog nepraznog podskupa poseta $L_{\overline{ab}}$ supremum nepraznog podskupa elemenata skupa $\overline{ab}$. Supremumi nepraznih podskupova poseta $L_{\overline{ab}}$ su, po definiciji 3.8 (str. 76) i prethodno rečenom, elementi poseta $L_{\overline{ab}}$. Odatle sledi da svaki neprazan podskup poseta $L_{\overline{ab}}$ ima supremum, pa je $L_{\overline{ab}}$ kompletna meža, a operacija $\vee$ na mreži $L_{\overline{ab}}$ je restrikcija operacije $\vee$ na mreži L. Dakle, kompletna mreža $L_{\overline{ab}}$ je $\vee$- podmreža mreže L.

Kako je mreža $L_{\overline{ab}}$ $\vee$- podmreža $\vee$- IR mreže L, prema teoremi 3.3 (str. 63), i $L_{\overline{ab}}$ je $\vee$- IR mreža.

□

U nastavku će $L_{\overline{ab}}$ uvek označavati $\vee$- podmrežu $\vee$- između ravne mreže L $\vee$- generisanu skupom $\overline{ab} \subseteq L$.

Iz kompletnosti mreže $L_{\overline{ab}}$ koja je dokazana u prethodnoj teoremi, sledi njena ograničenost. Prema teoremi 3.10 (str. 76) i osobini *2.* leme 3.4 (str. 53) za svaki element $x \in L_{\overline{ab}}$ važi $a \wedge b \leq x \leq a \vee b$, a odatle sledi da su $a \vee b$ i $a \wedge b$ redom najveći i najmanji element mreže $L_{\overline{ab}}$.

Primer 3.7 *Mreža $I_i(L)$, definisana na strani 59, generisana je anti-lancem svojih atoma. Anti-lanac atoma je beskonačan i ograničen elementima $\mathbf{0} = [0,0]$ i $\mathbf{1} = [1,1]$, što je dokazano u primeru 3.5 na strani 68. Poredak $\ll$ na posetu $\overline{\mathbf{01}}$, je takav da je element $\mathbf{0}$ najmanji, a element $\mathbf{1}$ najveći element. Dokazali smo da je mreža $I_i(L)$ $\vee$- između ravna (lema 3.5 na str. 59). Najveći element ove mreže je $\mathbf{0} \vee \mathbf{1} = [0,1]$, a najmanji $\mathbf{0} \wedge \mathbf{1} = \emptyset$. Mreža $I_i(L)$ je atomarno generisana (teorema 2.4, str. 33), pa je mreža $\vee$-generisana skupom $\overline{\mathbf{01}} \subseteq I_i(L)$ upravo mreža $I_i(L)$, odnosno $L_{\overline{\mathbf{01}}} = I_i(L)$.*

Dokazaćemo da se $\wedge$- nerazloživi elementi mreže $L_{\overline{ab}}$ nalaze samo na lancima $\bar{A}$ i $\bar{B}$.

Lema 3.14 *Neka je L $\vee$- između ravna mreža i $\overline{ab} \subseteq L$. Neka je p element mreže $L_{\overline{ab}}$. Element $p \neq a \vee b$ je $\wedge$- nerazloživ u $L_{\overline{ab}}$ akko $p \in \bar{A}$ ili $p \in \bar{B}$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je p $\wedge$- nerazloživ element mreže $L_{\overline{ab}}$. Ako su elementi a, p, b dva po dva neuporedivi, tada, prema uslovima leme, važi $apb_{\vee}$, što je dalje (prema posledici 3.2 na strani 61) ekvivalentno sa $(a \vee p) \wedge (p \vee b) = p$. Zbog $\wedge$- nerazloživosti elementa p, tada je $a \vee p = p$ ili $p \vee b = p$, što je nemoguće jer je neuporediv sa a i sa b.

Dakle, ako je p $\wedge$- nerazloživ element mreže $L_{\overline{ab}}$ nemoguće je da $p \in \overline{ab} \setminus \{a, b\}$. Prema teoremi 3.10 na strani 76, tada je $p \in \bar{A}$ ili $p \in \bar{B}$.

Time je dokazano da se $\wedge$- nerazloživi elementi mreže $L_{\overline{ab}}$ nalaze na ograničenim lancima $\bar{A}$ i $\bar{B}$.

($\Longleftarrow$) Za dokaz u suprotnom smeru pretpostavimo da $p \in \bar{A}$. Neka su $t, r \in L_{\overline{ab}}$ takvi da je $p = t \wedge r$. Posledica je $a \leq p \leq t$ i $a \leq p \leq r$, a to je ekvivalentno sa $t, r \in \bar{A}$. Odatle sledi da je $p = t$ ili $p = r$, odnosno p je $\wedge$- nerazloživ.

Slično se dokazuje da je svaki element lanca $\bar{B}$ takođe $\wedge$- nerazloživ.

$\square$

Primer 3.8 *Kao ilustraciju prethodnih rezultata u mreži $I_i(L)$ na slici 3.5 (str.59), prema oznakama u prethodnoj lemi, je lanac $\bar{A} = L_0 = \{[0, x] \mid x \in L\}$, a lanac $\bar{B} = L_1 = \{[x, 1] \mid x \in L\}$. Lanac $\bar{A}$ je ograničen, a njegov najmanji element je interval $[0, 0]$, dok je njegov najveći element interval $[0, 1]$. Lanac $\bar{B}$ ima isti najveći element, dok je njegov najmanji element interval $[1, 1]$. Elementi ovih lanaca su $\wedge$- nerazloživi i svaki element lanca $\bar{A} \setminus \{[0, 1]\}$ je neuporediv sa svakim elementom lanca $\bar{B} \setminus \{[0, 1]\}$. Takođe uočavamo da su svi elementi mreže $I_i(L)$, osim $\emptyset$ i elemenata ograničenih lanaca $\bar{A}$ i $\bar{B}$, neuporedivi sa intervalima $[0, 0]$ i $[1, 1]$.*

U sledećoj posledici teoreme 3.9 (str. 75) je dat jedan dovoljan uslov da $\vee$- između ravne mreže imaju neprazan poset $\wedge$- nerazloživih elemenata.

Posledica 3.8 *Neka je L kompletna $\vee$- između ravna mreža sa najvećim elementom 1 i najmanjim elementom 0, u kojoj su svi maksimalni anti-lanci ograničeni. Ako postoje elementi $a, b \in L \setminus \{1\}$ koji su granice nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca mreže L takvi da je $a \vee b = 1$, onda su glavni filtri generisani elementima a i b linearno uređeni. Svi elementi glavnih filtera $\uparrow a \setminus \{1\}$ i $\uparrow b \setminus \{1\}$ su $\wedge$- nerazloživi elementi mreže L.*

Dokaz.

Neka su elementi $a, b \in L \setminus \{1\}$ granice nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca mreže L takvi da je $a \vee b = 1$. Tada je $[a, a \vee b] = [a, 1] = \uparrow a$ i $[b, a \vee b] = [b, 1] = \uparrow b$, a odatle, prema teoremi 3.9, sledi da su $\uparrow a$ i $\uparrow b$ linearno uređeni.

Dokažimo da su elementi glavnog filtra generisanog elementom a $\wedge$- nerazloživi elementi mreže L.

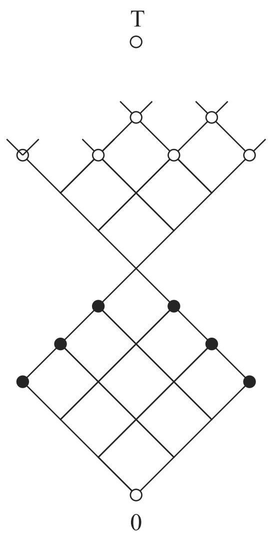
Neka je $x \in \uparrow a \setminus \{1\}$ i neka su $p, q \in L$ takvi da je $p \wedge q = x$. Tada je $a \leq x \leq p$ i $a \leq x \leq q$, a odatle sledi $p, q \in \uparrow a$. Zbog linearne uređenosti filtera $\uparrow a$ elementi p i q su uporedivi pa je, prema tome, $x = p$ ili $x = q$. Time je dokazano da je svaki element $x \in \uparrow a \setminus \{1\}$ $\wedge$- nerazloživ u mreži L.

Slično se dokazuje da je svaki element $x \in \uparrow b \setminus \{1\}$ $\wedge$- nerazloživ u mreži L.

□

Mreža L koja ispunjava uslove posledice 3.8, ima neprazan poset $\wedge$- nerazloživih elemenata. Obrnuto ne važi, odnosno u mreži u kojoj su svi maksimalni anti-lanci ograničeni i koja ima neprazan poset $\wedge$- nerazloživih elemenata, ne moraju postojati granice a i b nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca takve da je $a \vee b = 1$. Ovo tvrđenje ilustrujemo sledećim primerom.

Primer 3.9 *Na slici* 3.8 *je ilustrovana kompletna $\vee$- između ravna mreža čiji je gornji deo izomorfan sa mrežom $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{T\}$ gde je T dodat najveći element. Maksimalni anti-lanci ove mreže su ograničeni, ne postoje elementi a, b koji su granice nekog maksimalnog anti-lanca ove mreže takvi da je $a \vee b = T$, a poset $\wedge$- nerazloživih elemenata je neprazan. Na slici su $\wedge$- nerazloživi elementi istaknuti zatamnjenim kružićima.*



Slika 3.8

Pre nego što formulišemo sledeću lemu, podsetimo se da $\wedge$- nerazloživi elementi mreže L čine poset sa poretkom nasleđenim iz mreže L i da taj poset označavamo sa $M_L = (M_L, \leq)$, a širinu poseta $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže L označavamo sa $w(M_L)$.

Lema 3.15 *Neka je L kompletna konačno dualno prostorna mreža. Mreža L je lanac ako i samo ako je $w(M_L) = 1$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Ako je kompletna, konačno dualno prostorna (str. 7) mreža L lanac, onda je očigledno $w(M_L) = 1$.

($\Longleftarrow$) Neka je L kompletna, konačno dualno prostorna mreža i neka je $w(M_L) = 1$. Tada za sve $x, y \in L$ važi $x = \bigwedge(\uparrow x \cap M_L)$ i $y = \bigwedge(\uparrow y \cap M_L)$. Jasno je da važi $(\uparrow x \cap M_L) \subseteq M_L$ i $(\uparrow y \cap M_L) \subseteq M_L$, a pošto je poset M_L lanac, odatle sledi da je $(\uparrow x \cap M_L) \subseteq (\uparrow y \cap M_L)$ ili $(\uparrow x \cap M_L) \supseteq (\uparrow y \cap M_L)$. Odatle redom sledi $\bigwedge(\uparrow x \cap M_L) \geq \bigwedge(\uparrow y \cap M_L)$ ili $\bigwedge(\uparrow x \cap M_L) \leq \bigwedge(\uparrow y \cap M_L)$. Dakle, $x \geq y$ ili $x \leq y$. Time je dokazano da je mreža L lanac.

□

Teorema 3.12 *Neka je L kompletna mreža i neka je $w(M_L) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Mreža L je dualno konačno prostorna ako i samo ako je svaki element x mreže L jednoznačno određen sa $x = \bigwedge(\uparrow x \cap C_1) \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_2) \wedge ... \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_n)$, gde su C_i $(i = 1, 2, ..., n)$ disjunktni lanci njenih $\wedge$- nerazloživih elemenata.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je L kompletna, dualno konačno prostorna mreža. Iz pretpostavke da je mreža L dualno konačno prostorna sledi da je $w(M_L) = 1$ ako i samo ako je mreža L lanac, a odatle direktno sledi tvrđenje teoreme.

Neka je sada $w(M_L) = n$ i $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Prema teoremi 1.19 (str. 12) poset M_L se može predstaviti kao unija n disjunktnih lanaca. Neka je $M_L = \bigcup C_i$, $i = 1, 2, ..., n$ i $C_i \cap C_j = \emptyset$ za sve $i, j \in I = \{1, 2, ..., n\}$ i $i \neq j$. Zbog kompletnosti mreže L, za svaki element $x \in L$ postoje $\bigwedge(\uparrow x \cap C_i)$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Očigledno je $x \leq \bigwedge(\uparrow x \cap C_i)$ za svako $i \in I$, pa je $x \leq \bigwedge(\uparrow x \cap C_1) \wedge ... \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_n)$.

Neka je y element mreže L takav da je $\bigwedge(\uparrow x \cap C_1) \wedge ... \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_n) = y$. Odatle sledi da je $y \leq \bigwedge(\uparrow x \cap C_i)$ za svako $i \in I$ i da je $x \leq y$. Iz $x \leq y$ sledi da je $\uparrow y \subseteq \uparrow x$, a odatle da je i $\uparrow y \cap M_L \subseteq \uparrow x \cap M_L$. Neka je $m \in L$ element takav da $m \in \uparrow x \cap M_L$. Tada je $m \geq x$ i $m \in M_L$. Odatle sledi da postoji $i \in I$ tako da $m \in C_i$.
Ako $m \in C_i$, onda $m \geq \bigwedge(\uparrow x \cap C_i)$ $(i \in I)$. S druge strane je $y \leq \bigwedge(\uparrow x \cap C_i)$ $(i \in I)$, pa odatle sledi da je $m \geq y$. Dakle, $m \in \uparrow y$. Pošto $m \in M_L$, odatle sledi da važi $m \in \uparrow y \cap M_L$, pa je $\uparrow x \cap M_L \subseteq \uparrow y \cap M_L$.
Pošto je obrnuta inkluzija već dokazana, ovim je dokazano da je $\uparrow y \cap M_L = \uparrow x \cap M_L$. Odatle sledi da je $\bigwedge(\uparrow y \cap M_L) = \bigwedge(\uparrow x \cap M_L)$. Po uslovu teoreme mreža L je dualno konačno prostorna pa je $x = \bigwedge(\uparrow x \cap M_L)$ i $y = \bigwedge(\uparrow y \cap M_L)$. Time je dokazano da je $x = y$, odnosno da je $x = \bigwedge(\uparrow x \cap C_1) \wedge ... \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_n)$.

($\Longleftarrow$) Dokažimo tvrđenje u drugom smeru. Pretpostavimo da je svaki element x kompletne mreže L jednoznačno određen sa $x = \bigwedge(\uparrow x \cap C_1) \wedge ... \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_n)$, gde su C_i, $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$ disjunktni lanci njenih $\wedge$- nerazloživih elemenata. Iz $\uparrow x \cap C_i \subseteq \uparrow x \cap M_L$ za $i \in I$, sledi da je $\bigwedge(\uparrow x \cap C_i) \geq \bigwedge(\uparrow x \cap M_L)$. Odatle sledi da je $x = \bigwedge(\uparrow x \cap C_1) \wedge ... \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_n) \geq \bigwedge(\uparrow x \cap M_L)$. S druge strane, važi $x \leq \bigwedge(\uparrow x \cap M_L)$. Odatle sledi da je $x = \bigwedge(\uparrow x \cap M_L)$. Time je dokazano da je mreža L dualno konačno prostorna.

□

Primetimo da u prethodnoj teoremi nije neophodno da su C_i $(i = 1, ..., n)$ lanci, ni da su disjunktni, već samo da je M_L unija skupova C_i $(i = 1, ..., n)$, ali je za dokaze teorema koje slede potrebna data formulacija.

Navodimo i dualni oblik prethodne teoreme.

Teorema 3.13 *Neka je L kompletna mreža i neka je J_L poset $\vee$- nerazloživih elemenata mreže L širine n, $n \in \mathbb{N}$. Mreža L je konačno prostorna ako i samo ako je svaki element x mreže L jednoznačno određen sa $x = \bigvee(\downarrow x \cap C_1) \vee \bigvee(\downarrow x \cap C_2) \vee ... \vee \bigvee(\downarrow x \cap C_n)$, gde su C_i $(i = 1, 2, ..., n)$ disjunktni lanci njenih $\vee$- nerazloživih elemenata.*

Sledeće tvrđenje je posledica teoreme 3.12.

Posledica 3.9 *Neka su $(C_i, \leq_{C_i})$ za $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ kompletni lanci sa najmanjim elementom 0_{C_i} i najvećim elementom 1_{C_i} redom. Tada je mreža $(C_1 \times C_2 \times ... \times C_n, \leq)$ konačno bi-prostorna mreža, gde je $\leq$ relacija poretka po komponentama.*

Dokaz. Neka su $(C_i, \leq_{C_i})$ za $i \in I = \{1, 2, ..., n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ kompletni lanci sa najmanjim elementima 0_{C_i} i najvećim elementima 1_{C_i} za svako $i \in I$ redom. Tada je mreža $(C_1 \times ... \times C_n, \leq)$ kompletna i distributivna.
Lako se pokazuje da su $C_i' = \{(1_{C_1}, ..., 1_{C_{i-1}}, x_i, 1_{C_{i+1}}, ..., 1_{C_n}) \mid x_i \in C_i \setminus \{1_{C_i}\}\}$ za svako $i \in I$ disjunktni lanci $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže $C_1 \times ... \times C_n$. Za svaki element $(x_1, x_2, ..., x_n)$ mreže $C_1 \times ... \times C_n$ važi:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = \textstyle\bigwedge_{i \in I}(1_{C_1}, ..., 1_{C_{i-1}}, x_i, 1_{C_{i+1}}, ..., 1_{C_n}),$$

pa je mreža $C_1 \times ... \times C_n$ dualno konačno prostorna.
Dokaz da je mreža $C_1 \times ... \times C_n$ konačno prostorna je dualan prethodnom dokazu.

$\square$

Teorema 3.14 *Neka je L kompletna dualno konačno prostorna mreža čiji je poset $\wedge$- nerazloživih elemenata $(M_L, \leq)$ i neka je $w(M_L) = n$ $(n \in \mathbb{N})$. Tada postoje kompletni lanci $C_1, ..., C_n$ i injektivno preslikavanje $f : L \to C_1 \times ... \times C_n$ takvo da su očuvani supremumi i n je najmanji broj za koji takvi lanci i takvo potapanje postoji.*

Dokaz.

Pretpostavimo da je L kompletna dualno konačno prostorna mreža i da je $w(M_L) = n$. Iz pretpostavke da je mreža L kompletna, sledi da je ograničena, odnosno da ima najmanji (0_L) i najveći (1_L) element.

Pretpostavimo prvo da je $n = 1$, odnosno da je $w(M_L) = 1$. Pošto je mreža L dualno konačno prostorna, prema lemi 3.15 (str. 79), $w(M_L) = 1$ je ekvivalentno sa činjencom da je mreža L lanac. Tada je $C_1 = M_L \cup \{1_L\} = L$. Preslikavanje $f : L \to C_1$ definisano sa $f(x) = x$ $(x \in L)$ je injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi.

Neka je sada $w(M_L) = n \geq 2$. Tada M_L može da se predstavi kao unija n disjunktnih lanaca (teorema 1.19, str. 12). Neka je $M_L = C'_1 \cup ... \cup C'_n$, gde je $C'_i \cap C'_j = \emptyset$, za $i \neq j$, $i, j \in I = \{1, 2, ..., n\}$.

Neka su dalje lanci C_i za svako $i \in I$ definisani na sledeći način:

$$C_i = C'_i \cup \{\bigwedge M \mid \text{ za svaki podskup } M \subseteq C'_i\}. \tag{3.8}$$

Lanci C_i $(i = 1, ..., n)$ su kompletni. Zaista, ako je $M = \emptyset$, onda je $\bigwedge M = 1_L \in C_i$, za svako $i \in I$. Prema tome, lanci C_i $(i = 1, ..., n)$ imaju najveći element. Zbog kompletnosti mreže L svaki neprazan podskup lanca C_i ima infimum koji je element lanca C_i $(i = 1, ..., n)$.

Primetimo još da su najmanji elementi lanaca C_i elementi $0_{C_i} = \bigwedge C'_i$, za $i = 1, ..., n$. Jasno je da važi $\bigwedge C'_i = \bigwedge C_i$, za svako $i \in I$ (po konstrukciji).
Dokažimo da važi $\bigwedge(\uparrow x \cap C'_i) = \bigwedge(\uparrow x \cap C_i)$, $(i = 1, ..., n)$, za svako $x \in L$.

Neka je $x \in L$. Ako važi $\bigwedge(\uparrow x \cap C'_i) \in C'_i$, jasno je da tada važi $\bigwedge(\uparrow x \cap C'_i) = \bigwedge(\uparrow x \cap C_i)$, $(i = 1, ..., n)$.

Neka je $t \in I$ i neka je $\bigwedge(\uparrow x \cap C'_t) = x_t$ i $x_t \notin C'_t$. Po definiciji lanaca C_t, važi $x_t \in C_t$. Pretpostavimo da je $\bigwedge(\uparrow x \cap C_t) = m_t$. Zbog kompletnosti lanca C_t važi $m_t \in C_t$. Odatle sledi da postoji skup $M \subseteq C'_t$ takav da je $\bigwedge M = m_t$. Tada je $M \subseteq \uparrow x \cap C'_t$.
Zaista, za svaki element $t \in M$ važi $t \geq \bigwedge M = m_t$. S druge strane je $\bigwedge(\uparrow x \cap C_t) = m_t$, pa je $m_t \geq x$. Odatle sledi $t \geq x$, odnosno $t \in \uparrow x$. Pošto je $M \subseteq C'_t$, odatle dalje sledi $t \in \uparrow x \cap C'_t$. Time je dokazano da važi $M \subseteq \uparrow x \cap C'_t$, a posledica toga je da je $\bigwedge M \geq \bigwedge(\uparrow x \cap C'_t)$, odnosno $m_t \geq \bigwedge(\uparrow x \cap C'_t)$.
S druge strane je $C'_t \subseteq C_t$, pa je $\uparrow x \cap C'_t \subseteq \uparrow x \cap C_t$. Odatle sledi $\bigwedge(\uparrow x \cap C'_t) \geq \bigwedge(\uparrow x \cap C_t) = m_t$. Time je dokazano da važi $\bigwedge(\uparrow x \cap C'_t) = m_t = \bigwedge(\uparrow x \cap C_t)$ za svako $x \in L$ i svako $i \in I$.

Prema teoremi 3.12 (str. 80) važi $x = \bigwedge_{i \in I}(\uparrow x \cap C'_i)$ za svako $x \in L$. Prema gore dokazanom tada važi i $x = \bigwedge_{i \in I}(\uparrow x \cap C_i)$ za svako $x \in L$. Pošto, zbog kompletnosti lanaca C_i važi $\bigwedge(\uparrow x \cap C_i) \in C_i$ za svako $i \in I$, sada možemo definisati preslikavanje $f : L \to C_1 \times ... \times C_n$ na sledeći način:

$$f(x) = (\bigwedge(\uparrow x \cap C_1), ..., \bigwedge(\uparrow x \cap C_n)).$$

Preslikavanje f je očigledno dobro definisano. Dokažimo da je preslikavanje f injektivno.

Neka su x, y proizvoljni elementi mreže L i neka su $\bigwedge(\uparrow x \cap C_i) = x_i$ i $\bigwedge(\uparrow y \cap C_i) = y_i$ za $i = 1, ..., n$.

Za ovako definisano preslikavanje f jednakost $f(x) = f(y)$ je ekvivalentna sa $(x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_n)$, a to je dalje ekvivalentno sa $x_i = y_i$ za svako $i \in I$. Odatle sledi da je $x = x_1 \wedge ... \wedge x_n = y_1 \wedge ... \wedge y_n = y$. Dakle, $x = y$.

Dokažimo da su pri preslikavanju f očuvani supremumi.

Neka je S proizvoljan podskup mreže L. Dokazujemo da je $f(\bigvee S) = \bigvee(f(S))$, gde je $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\} = \{(\bigwedge(\uparrow x \cap C_1), ..., \bigwedge(\uparrow x \cap C_n)) \mid x \in S\}$.

Ako je $S = \emptyset$, onda je $\bigvee S = 0_L$. Pošto je $\bigwedge(\uparrow 0_L \cap C_i) = \bigwedge C_i$, $i = 1, ..., n$, onda je $f(\bigvee \emptyset) = f(0_L) = (\bigwedge C_1, ..., \bigwedge C_n)$. Već smo konstatovali da je $\bigwedge C_i' = \bigwedge C_i = 0_{C_i}$, $i = 1, ..., n$, pa je $f(\bigvee \emptyset) = 0_{C_1 \times ... \times C_n}$, gde je sa $0_{C_1 \times ... \times C_n}$ obeležen najmanji element mreže $C_1 \times ... \times C_n$. S druge strane važi $\bigvee(f(\emptyset)) = \bigvee\{f(x) \mid x \in \emptyset\} = 0_{C_1 \times ... \times C_n}$. Time je dokazano da je $f(\bigvee \emptyset) = \bigvee(f(\emptyset))$.

Neka je sada $S \neq \emptyset$ podskup mreže L. U mreži $C_1 \times ... \times C_n$ supremum se definiše po komponentama, pa je $\bigvee f(S) = (\bigvee_{x \in S}(\bigwedge(\uparrow x \cap C_1), ..., \bigvee_{x \in S}(\bigwedge(\uparrow x \cap C_n))$.
Neka je $\bigvee S = s$. Tada je $f(\bigvee S) = f(s) = (\bigwedge(\uparrow s \cap C_1), ..., \bigwedge(\uparrow s \cap C_n))$. Prema tome, treba dokazati da je $\bigwedge(\uparrow s \cap C_i) = \bigvee_{x \in S}(\bigwedge(\uparrow x \cap C_i))$ za $i = 1, ..., n$.

Iz $\bigvee S = s$ i osobine filtara da je $\uparrow s = \bigcap_{x \in S} \uparrow x$ sledi da je $\uparrow s \subseteq \uparrow x$ za svako $x \in S$. Odatle dalje sledi $\bigwedge(\uparrow s \cap C_i) \geq \bigwedge(\uparrow x \cap C_i)$ $(i = 1, ..., n)$ za svako $x \in S$. Dakle, $\bigwedge(\uparrow s \cap C_i) \geq \bigvee_{x \in S}(\bigwedge(\uparrow x \cap C_i))$ $(i = 1, ..., n)$.

Neka je $i \in I$ i neka je $\bigvee_{x \in S}(\bigwedge(\uparrow x \cap C_i)) = t$. Odatle sledi da je $t \geq \bigwedge(\uparrow x \cap C_i)$ za svako $x \in S$, dakle $t \geq x$ za svako $x \in S$. Prema tome, važi $t \geq \bigvee S = s$, odnosno $t \in \uparrow s$. Pošto je C_i kompletan lanac važi $t \in C_i$, pa odatle sledi $t \in \uparrow s \cap C_i$ i $t \geq \bigwedge(\uparrow s \cap C_i)$. Pošto je obrnuta nejednakost dokazana, time je dokazano da važi $\bigwedge(\uparrow s \cap C_i) = \bigvee_{x \in S}(\bigwedge(\uparrow x \cap C_i))$.

Time je dokazano da je $\bigwedge(\uparrow s \cap C_i) = \bigvee_{x \in S}(\bigwedge(\uparrow x \cap C_i))$ za svako $i \in I = \{1, ..., n\}$. Dakle, pri preslikavanju f su očuvani supremumi.

Dokažimo da je n najmanji broj za koji takvo potapanje postoji.
Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{N}$, kompletni lanci $D_1, ..., D_k$ i injektivno preslikavanje $g : L \to D_1 \times D_2 \times ... \times D_k$ kojim su očuvani supremumi, dakle g je izotono preslikavanje. Tada je $g(L)$ $\vee$- kompletna podmreža mreže $D_1 \times ... \times D_k$, pa je $w(g(L)) \leq w(D_1 \times ... \times D_k) = k$. S druge strane važi $w(L) = w(g(L))$ i $w(L) \geq w(M_L) = n$. Dakle, $n \leq k$.

$\square$

Pri gore definisanom potapanju infimumi se ne poklapaju u opštem slučaju. To je posledica osobine filtara $\bigcup_{i \in I} \uparrow x_i \subseteq \uparrow(\bigwedge_{i \in I} x_i)$ za $x_i \in L$ $(i \in I = \{1, ..., n\})$, gde jednakost ne važi u opštem slučaju.

Teorema 3.15 *Neka je $(L, \leq)$ kompletna mreža. Tada postoje kompletni lanci $C_1, ..., C_n$ i injektivno preslikavanje $f : L \to C_1 \times ... \times C_n$ takvo da su očuvani supremumi ako i samo ako je L dualno konačno prostorna mreža i $w(M_L) \leq n$.*

Dokaz. $(\Longrightarrow)$ Neka je L kompletna mreža. Pretpostavimo da postoje kompletni lanci $C_1, ..., C_n$ sa najmanjim elementima redom $0_{C_1}, ..., 0_{C_n}$ i najvećim elementima $1_{C_1}, ..., 1_{C_n}$ redom, tako da je $f : L \to C_1 \times ... \times C_n$ injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi. Dakle, preslikavanje f je izotono. Neka je dalje $L_1 = f(L)$. Prema tome, mreže L i L_1 su izomorfne, pri čemu je operacija $\vee_{L_1}$ na mreži L_1 restrikcija operacije $\vee$ na mreži $C_1 \times ... \times C_n$. Zaista, po uslovu teoreme pri preslikavanju f supremumi su očuvani, pa je mreža L_1 $\vee$- kompletna podmreža (str. 4) mreže $C_1 \times ... \times C_n$. Pri tome je najmanji element mreže L_1 isti kao najmanji element mreže $C_1 \times ... \times C_n$. Zaista, $\vee_L \emptyset = 0_L$ i $\vee_{C_1 \times ... \times C_n} \emptyset = (0_{C_1}, ... 0_{C_n})$, pa pošto su supremumi očuvani, onda je $f(0_L) = (0_{C_1}, ..., 0_{C_n}) \in L_1$.

Dokažimo da je mreža $L_1 \subseteq C_1 \times ... \times C_n$ dualno konačno prostorna.
Neka je $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n) \in L_1$ i neka $\mathbf{a}$ nije $\wedge$- nerazloživ. Tada postoje elementi $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_n) \in L_1$ i $\mathbf{c} = (c_1, ..., c_n) \in L_1$ takvi da je $\mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge_{L_1} \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ i $\mathbf{a} \neq \mathbf{c}$. Primetimo da operacija $\wedge_{L_1}$ na mreži L_1 u opštem slučaju nije restrikcija operacije $\wedge$ na mreži $C_1 \times ... \times C_n$ i da važi $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \geq \mathbf{b} \wedge_{L_1} \mathbf{c}$. Neka je $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. Iz $\mathbf{d} = (d_1, ..., d_n) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ sledi da je $d_i = b_i$ ili $d_i = c_i$ za svako $i \in \{1, 2, ..., n\} = I$. Takođe postoje $i, j \in I$ $i \neq j$ takvi da je $d_i < b_i$ i $d_j < c_j$. Neka je $\bigvee\{(x_1, ..., x_n) \in L_1 \mid x_i \geq d_i, x_j = d_j, i \in I, i \neq j\} = (\vee x_1, ..., \vee x_{j-1}, d_j, \vee x_{j+1}, ..., \vee x_n) = (t_1, ..., t_{j-1}, d_j, t_{j+1}, ..., t_n)$ za svako $j \in I$. Elementi $\mathbf{t_j} = (t_1, ..., t_{j-1}, d_j, t_{j+1}, ..., t_n)$ su elementi mreže L_1 za svako $j \in I$ i takođe su $\wedge$- nerazloživi elementi mreže L_1. Zaista, elementi $(y_1, ..., y_n) \in L_1$ takvi da je $\mathbf{t_j} \leq (y_1, ..., y_n)$ su elementi $(t_1, ..., t_{j-1}, y_j, t_{j+1}, ..., t_n)$ i $d_j \leq y_j$, za svako $j \in I$, pa u mreži L_1 ne postoje elementi $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_n)$ i $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$ takvi da je $\mathbf{t_j} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{t_j}$ i $\mathbf{q} \neq \mathbf{t_j}$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Očigledno važi $\bigwedge\{\mathbf{t_j} \mid j \in I\} = \bigwedge\{(t_1, ..., t_{j-1}, d_j, t_{j+1}, ..., t_n) \mid j \in I\} = (d_1, ..., d_n) = \mathbf{d}$.

Dokažimo da je $\bigwedge_{L_1}\{\mathbf{t_j} \mid j \in I\} = \mathbf{a}$.
S obzirom na to da je $\bigwedge_{L_1}\{\mathbf{t_j} \mid j \in I\} \leq \bigwedge\{\mathbf{t_j} \mid j \in I\} = \mathbf{d} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ važi $\bigwedge_{L_1}\{\mathbf{t_j} \mid j \in I\} \leq \mathbf{b}$ i $\bigwedge_{L_1}\{\mathbf{t_j} \mid j \in I\} \leq \mathbf{c}$, pa je $\bigwedge_{L_1}\{\mathbf{t_j} \mid j \in I\} \leq \mathbf{b} \wedge_{L_1} \mathbf{c} = \mathbf{a}$. S druge strane iz $\mathbf{a} \leq \mathbf{d}$ sledi $\mathbf{a} \leq \mathbf{t_j}$ za svako $j \in I$, pa važi $\mathbf{a} \leq \bigwedge_{L_1}\{\mathbf{t_j} \mid j \in I\}$. Odatle sledi da je $\bigwedge_{L_1}\{\mathbf{t_j} \mid j \in I\} = \mathbf{a}$.

Time je dokazano da je mreža L_1 dualno konačno prostorna.

Zbog izomorfizma mreža L_1 i L, odatle sledi da je mreža L dualno konačno prostorna i da je $w(L) = w(L_1)$. Širina mreže L_1 nije veća od širine mreže $C_1 \times ... \times C_n$, odnosno $w(L_1) \leq n$. Odatle sledi da je $w(M_L) \leq w(L) \leq n$, odnosno $w(M_L) \leq n$.

($\Longleftarrow$) Neka je mreža L kompletna dualno konačno prostorna mreža i neka je $w(M_L) = k \leq n$. Tada, prema teoremi 3.14, postoje kompletni lanci $C_1, C_2, ..., C_k$ i injektivno preslikavanje $f : L \rightarrow C_1 \times ... \times C_k$ takvo da su očuvani supremumi. Tada za svako $n \geq k$ postoji injektivno preslikavanje $h : L \rightarrow D_1 \times ... \times D_n$ tako da su očuvani supremumi, gde su D_i lanci redom izomorfni sa lancima C_i $(i = 1, ..., k)$, a lanci $D_{k+1}, ..., D_n$ su proizvoljni lanci sa najmanjim elementom 0. Zaista, ako su $g_i : C_i \rightarrow D_i$ $(i = 1, ..., k)$ dati izomorfizmi, onda je preslikavanje h definisano na sledeći način $h(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1), ..., f_n(x_k), 0, ..., 0)$ traženo potapanje.

□

Posledica 3.10 *Neka je L kompletna mreža. Mreža L je dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža ako i samo ako postoje kompletni lanci C_1 i C_2 i injektivno preslikavanje $f : L \rightarrow C_1 \times C_2$ takvo da su očuvani supremumi.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka je mreža L kompletna, dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža. Prema teoremi 3.1 na strani 62, poset $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže L je najviše širine dva, odnosno $w(M_L) = n \leq 2$ $(n \in \mathbb{N})$. Dalje je dokaz sledi iz teoreme 3.14 za $n = 2$.

Dokažimo da postoje kompletni lanci C_1 i C_2 i injektivno preslikavanje $f : L \rightarrow C_1 \times C_2$ takvo da su očuvani supremumi za $n = 1$.

Pošto je mreža L dualno konačno prostorna, prema lemi 3.15 (str. 79), $w(M_L) = 1$ je ekvivalentno sa činjencom da je mreža L lanac. Tada je $C_1 = M_L \cup \{1_L\} = L$, a $C_2 = \{c\}$ je jednoelementni lanac. Preslikavanje $f : L \to C_1 \times C_2$ definisano sa $f(x) = (x, c)$ $(x \in L)$, očigledno je dobro definisano i izomorfizam između mreža L i $C_1 \times C_2$. Dakle, pri preslikavanju f su očuvani supremumi.

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da postoje kompletni lanci C_1, C_2 sa najmanjim elementima redom $0_{C_1}, 0_{C_2}$ i najvećim elementima $1_{C_1}, 1_{C_2}$ redom. Neka je $f : L \to C_1 \times C_2$ injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi. Prema prethodnoj teoremi 3.15 L je dualno konačno prostorna mreža.

Neka je dalje $L_1 = f(L)$. Prema tome, mreže L i L_1 su izomorfne, pri čemu je operacija $\vee_{L_1}$ restrikcija operacije $\vee$ na mreži $C_1 \times C_2$. Zaista, po uslovu teoreme pri preslikavanju f supremumi su očuvani, pa je mreža L_1 $\vee$- kompletna podmreža mreže $C_1 \times C_2$.

Prema lemi 3.6 na strani 60, mreža $C_1 \times C_2$ je između ravna mreža, pa je, prema tome, $C_1 \times C_2$ $\vee$- između ravna mreža. Pošto je mreža L_1 $\vee$- kompletna podmreža mreže $C_1 \times C_2$, odatle sledi da je L_1 $\vee$- između ravna mreža (prema teoremi 3.3 (str. 63)). Iz izomorfizma mreža L i L_1 sledi da je i mreža L $\vee$- između ravna mreža.

$\square$

Zbog kompletnosti rezultata, navodimo i dualni oblik teoreme 3.15 (str. 83).

Teorema 3.16 *Neka je $(L, \leq)$ kompletna mreža. Tada postoje kompletni lanci $C_1, ..., C_n$ i injektivno preslikavanje $f : L \to C_1 \times ... \times C_n$ takvo da su očuvani infimumi ako i samo ako je L konačno prostorna mreža i $w(J_L) \leq n$, gde je J_L poset $\vee$- nerazloživih elemenata mreže L.*

Podsetimo se da su algebarske mreže dualno prostorne (str. 8). Potpuno $\wedge$- nerazloživi elementi su takođe i $\wedge$- nerazloživi, pa su algebarske mreže dualno konačno prostorne. Prema tome, za algebarske mreže važe redom posledice teoreme 3.12 (str. 80) i posledice 3.10 (str. 84), koje navodimo u nastavku.

Posledica 3.11 *Neka je L algebarska mreža i neka je $w(M_L) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je svaki element x mreže L jednoznačno određen sa $x = \bigwedge(\uparrow x \cap C_1) \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_2) \wedge ... \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_n)$, gde su C_i $(i = 1, 2, ..., n)$ disjunktni lanci njenih $\wedge$- nerazloživih elemenata.*

Važi i specijalan slučaj ove posledice.

Posledica 3.12 *Neka je L algebarska $\vee$- između ravna mreža. Tada je svaki element x mreže L jednoznačno određen sa $x = \bigwedge(\uparrow x \cap C_1) \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap C_2)$, gde su C_1 i C_2 lanci njenih $\wedge$- nerazloživih elemenata.*

Posledica 3.13 *Neka je L algebarska mreža. Tada je L $\vee$- između ravna mreža ako i samo ako postoje kompletni lanci C_1, C_2 i injektivno preslikavanje mreže L u mrežu $C_1 \times C_2$ takvo da su supremumi očuvani.*

Pored algebarskih $\vee$- IR mreža, možemo izdvojiti još jednu klasu $\vee$- IR mreža koje se mogu injektivno preslikati u direktan proizvod dva lanca tako da su supremumi očuvani.

Teorema 3.17 *Neka je L kompletna $\vee$- između ravna mreža takva da je $w(L) \geq 2$. Ako u mreži L postoje različiti elementi a i b koji su granice nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca takvi da je $L = L_{\overline{ab}} \cup [a, a \vee b] \cup [b, a \vee b]$[1], onda je mreža L dualno konačno prostorna.*

Dokaz.

Neka su $a, b \in L$ granice nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca mreže L i neka je $L = L_{\overline{ab}} \cup [a, a \vee b] \cup [b, a \vee b]$. Prema teoremi 3.10 (str. 76) važi $L_{\overline{ab}} = \overline{ab} \cup \bar{A} \cup \bar{B} \cup \{a \wedge b\}$, gde su $\bar{A} = \{\bigvee(a \vee x) \mid x \in S$ za svaki neprazni skup $S \subseteq \overline{ab}\}$ i $\bar{B} = \{\bigvee(b \vee x) \mid x \in S$ za svaki neprazni skup $S \subseteq \overline{ab}\}$ lanci (teorema 3.8, str. 74). Prema teoremi 3.9 (str. 75) intervali $[a, a \vee b]$ i $[b, a \vee b]$ su lanci i važi $\bar{A} \subseteq [a, a \vee b]$ i $\bar{B} \subseteq [b, a \vee b]$ (str. 75). Prema lemi 3.14 (str. 78), $\wedge$- nerazloživi elementi mreže $L_{\overline{ab}}$ su samo elementi lanaca $\bar{A} \setminus \{a \vee b\}$ i $\bar{B} \setminus \{a \vee b\}$. S obzirom na to da je $L = L_{\overline{ab}} \cup [a, a \vee b] \cup [b, a \vee b]$, najveći element mreže L je $a \vee b = 1_L$, a najmanji element mreže L je $a \wedge b = 0_L$. Tada je $[a, a \vee b] = [a, 1_L] = \uparrow a$ i $[b, a \vee b] = [b, 1_L] = \uparrow b$. Prema posledici 3.8 (str. 78) svi elementi glavnih filtera $\uparrow a \setminus \{1_L\}$ i $\uparrow b \setminus \{1_L\}$ su $\wedge$- nerazloživi elementi mreže L. Prema prethodnom razmatranju, svi $\wedge$-nerazloživi elementi mreže L su elementi disjunktnih lanaca $\uparrow a \setminus \{1_L\}$ i $\uparrow b \setminus \{1_L\}$, odnosno $M_L = (\uparrow a \setminus \{1_L\}) \cup (\uparrow b \setminus \{1_L\})$.

Prema teoremi 3.12 (str. 80) mreža L je konačno dualno prostorna ako i samo ako je svaki element $x \in L$ jednoznačno određen sa $x = \bigwedge(\uparrow x \cap (\uparrow a \setminus \{1_L\})) \wedge \bigwedge(\uparrow x \cap (\uparrow b \setminus \{1_L\}))$.

Dokažimo da je $\bigwedge(\uparrow x \cap (\uparrow a \setminus \{1_L\})) = a \vee x$ za svako $x \in L$. Zaista, za $x \in L$ i $x \notin \uparrow b$ važi $x \vee a \in \uparrow a \setminus \{1_L\}$ i $x \vee a \in \uparrow x$, odnosno $x \vee a \in (\uparrow x \cap (\uparrow a \setminus \{1_L\}))$, pa je $x \vee a \geq \bigwedge(\uparrow x \cap (\uparrow a \setminus \{1_L\}))$. S druge strane $\bigwedge(\uparrow x \cap (\uparrow a \setminus \{1_L\})) \geq x$ i $\bigwedge(\uparrow x \cap (\uparrow a \setminus \{1_L\})) \geq a$, pa je $\bigwedge(\uparrow x \cap (\uparrow a \setminus \{1_L\})) \geq a \vee x$. Time je dokazano da je $\bigwedge(\uparrow x \cap (\uparrow a \setminus \{1_L\})) = a \vee x$ za $x \in L$ i $x \notin \uparrow b$. Za $x \in \uparrow b$ važi $\bigwedge(\uparrow b \cap (\uparrow a \setminus \{1_L\})) = \bigwedge \emptyset = 1_L = a \vee 1_L$, pa i u ovom slučaju važi tražena jednakost. Slično se dokazuje da važi $\bigwedge(\uparrow x \cap (\uparrow b \setminus \{1_L\})) = b \vee x$ za svako $x \in L$.

Prema tome, treba dokazati da za svaki element $x \in L$ važi $x = (a \vee x) \wedge (x \vee b)$. Pošto je $L = \overline{ab} \cup \uparrow a \cup \uparrow b \cup \{a \wedge b\}$, mogući su sledeći slučajevi:

(1.) $x \in \overline{ab}$. Prema teoremi 3.6 (str. 69) tada važi $axb_{\vee}$, što je ekvivalentno sa $x = (a \vee x) \wedge (x \vee b)$ (posledica 3.2, str. 61).

(2.) $x \in \uparrow a$. Tada je $a \vee x = x$, pa važi $x = x \wedge (x \vee b)$.

(3.) $x \in \uparrow b$. Tada je $b \vee x = x$, pa važi $x = (a \vee x) \wedge x$.

(4.) $x = a \wedge b$. Tada je $(a \vee (a \wedge b)) \wedge ((a \wedge b) \vee b) = a \wedge b$.

[1] Mreža $L_{\overline{ab}}$ $\vee$- generisana skupom $\overline{ab}$ definisana je na strani 76, a u teoremi 3.10 (str. 76) dokazano je da je $L_{\overline{ab}} = \overline{ab} \cup \bar{A} \cup \bar{B} \cup \{a \wedge b\}$, gde su $\bar{A} = \{\bigvee(a \vee x) \mid x \in S$ za svaki neprazni skup $S \subseteq \overline{ab}\}$ i $\bar{B} = \{\bigvee(b \vee x) \mid x \in S$ za svaki neprazni skup $S \subseteq \overline{ab}\}$, a skup $\overline{ab}$ neuporedivih definisan na strani 69.

Time je dokazano da za svaki element $x \in L$ važi $x = (a \vee x) \wedge (x \vee b)$, a time i da je mreža L konačno dualno prostorna.

$\square$

Sledeće tvrđenje je posledica upravo dokazane teoreme 3.17 i posledice 3.10 (str. 84).

Posledica 3.14 *Neka je L kompletna $\vee$- između ravna mreža takva da je $w(L) \geq 2$. Ako u mreži L postoje različiti elementi a i b koji su granice nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca takvi da je $L = L_{\overline{ab}} \cup [a, a \vee b] \cup [b, a \vee b]$, onda postoje kompletni lanci C_1 i C_2 i injektivno preslikavanje $f : L \to C_1 \times C_2$ takvo da su pri preslikavanju f očuvani supremumi.*

Dokaz. Neka su $a, b \in L$ granice nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca mreže L i neka je $L = L_{\overline{ab}} \cup [a, a \vee b] \cup [b, a \vee b]$. Prema teoremi 3.17 mreža L je dualno konačno prostorna, a prema posledici 3.10 za mrežu L postoje kompletni lanci C_1 i C_2 i potapanje $f : L \to C_1 \times C_2$ takvo da su pri potapanju f očuvani supremumi.

$\square$

Dakle, mreže koje se mogu potopiti u direktan proizvod dva kompletna lanca tako da su očuvani supremumi, su kompletne dualno konačno prostorne $\vee$- IR mreže. Neke klase dualno konačno prostornih $\vee$- između ravnih mreža su algebarske $\vee$- IR mreže i $\vee$- IR mreže koje ispunjavaju uslove teoreme 3.17. Dualno, kompletne mreže koje se mogu potopiti u direktan proizvod dva kompletna lanca tako da su očuvani infimumi, su konačno prostorne $\wedge$- IR mreže, a neke klase ovih mreža su ko-algebarske $\wedge$- IR mreže i $\wedge$- IR mreže koje ispunjavaju uslove dualne uslovima teoreme 3.17.

Drugom Dilworth-ovom teoremom 1.21 (str. 15) je određen uslov da postoje konačni lanci $C_1, ..., C_n$ i injektivno preslikavanje date konačne, distributivne mreže D u podmrežu mreže $C_1 \times ... \times C_n$. U nastavku formulišemo tvrđenja kojima su određeni potrebni i dovoljni uslovi da postoje konačni lanci $C_1, ..., C_n$ i injektivno preslikavanje proizvoljne konačne mreže L u $\vee$- podmrežu mreže $C_1 \times ... \times C_n$ i potrebni i dovoljni uslovi da postoje konačni lanci $C_1, ..., C_n$ i injektivno preslikavanje proizvoljne konačne mreže L u $\wedge$- podmrežu mreže $C_1 \times ... \times C_n$.

U dokazu koristimo činjenicu da svaki konačan poset jednoznačno određuje distributivnu mrežu tako da je izomorfan sa posetom $\wedge$- nerazloživih elemenata te distributivne mreže. Za distributivne mreže koje su, do na izomorfizam, generisane posetom M_L $\wedge$-nerazloživih elemenata mreže L koristimo oznaku $D(M_L)$.

Teorema 3.18 *Neka je L konačna mreža čiji je poset $\wedge$-nerazloživih elemenata $(M_L, \leq)$ i neka je $w(M_L) = k$. Tada postoji potapanje mreže $(L, \leq)$ u direktan proizvod k lanaca, tako da su supremumi očuvani i k je najmanji broj za koji takvo potapanje postoji.*

Dokaz. Mreža $(\mathcal{I}(M_L), \subseteq)$ polu-ideala na posetu $(M_L, \leq)$ je distributivna, a poset $\vee$-nerazloživih elemenata iz $(\mathcal{I}(M_L), \subseteq)$ je izomorfan sa posetom $(M_L, \leq)$ (teorema 1.7 na str.

8). Prema teoremi 1.9 na str. 8 u mreži $(\mathcal{I}(M_L), \subseteq)$ poseti $\vee$- i $\wedge$- nerazloživih elemenata su izomorfni, pa je i poset $\wedge$-nerazloživih elemenata mreže $(\mathcal{I}(M_L), \subseteq)$ izomorfan sa $(M_L, \leq)$.

Prema lemi 1.1 (str. 9) postoji potapanje $g : L \to \mathcal{I}(M_L)$. Tada je $g(L) \cong L$. Prema lemi 1.3 (str. 9) operacija $\vee$ na mreži $g(L)$ je restrikcija operacije $\vee$ na mreži $\mathcal{I}(M_L)$. Prema dokazu teoreme 1.11 (str. 9), najmanji element distributivne mreže $\mathcal{I}(M_L)$ takođe je element mreže $g(L)$. Prema tome $g(L)$ je $\vee$- podmreža mreže $\mathcal{I}(M_L)$ sa najmanjim elementom koji se poklapa sa najmanjim elementom mreže $\mathcal{I}(M_L)$.

Ako je $w(M_L) = k$ onda je i $w(M_{\mathcal{I}(M_L)}) = k$, zbog izomorfizma poseta $\wedge$- nerazloživih elemenata mreža L i $\mathcal{I}(M_L)$. Prema teoremi 1.22 na str. 15, postoji potapanje mreže $\mathcal{I}(M_L)$ u mrežu koja je proizvod k konačnih lanaca $C_1, C_2, ..., C_k$. Pri tom potapanju su očuvani i supremumi i infimumi, pa prema tome i najveći i najmanji elementi.

Neka je pomenuto potapanje $\varphi : \mathcal{I}(M_L) \to C_1 \times C_2 \times ... \times C_k$.

Preslikavanje $\varphi \circ g : L \to C_1 \times C_2 \times ... \times C_k$ je potapanje mreže L koje ispunjava zahteve teoreme.

Iz teoreme 1.22 takođe sledi da je k najmanji broj za koji takvo potapanje postoji.

$\square$

Pošto su konačne mreže kompletne i bi-prostorne, važi sledeća posledica teoreme 3.15 (str. 83).

Posledica 3.15 *Konačna mreža $(L, \leq)$ se može potopiti u direktan proizvod k lanaca, tako da su supremumi očuvani, ako i samo ako je $w(M_L) \leq k$.*

Sledeća posledica je dualna posledici 3.15, pa je takođe navodimo bez dokaza.

Teorema 3.19 *Neka je L konačna mreža i neka je $(J_L, \leq)$ poset $\vee$-nerazloživih elemenata mreže L. Tada postoji potapanje mreže $(L, \leq)$ u direktan proizvod k lanaca, tako da su infimumi očuvani, ako i samo ako je $w(J_L) \leq k$.*

3.3 Konačne između ravne mreže i dualno-slim mreže

U ovom delu dajemo vezu između dualno-slim mreža (str. 17) i $\vee$- između ravnih mreža.

Prema teoremi 3.1 (str. 62) postoji veza između dualno-slim mreža i konačnih $\vee$- između ravnih mreža. U teoremi 3.1 je dokazano da je jedna od karakteristika $\vee$- IR mreža da svaki anti-lanac ima najviše dva $\wedge$- nerazloživa elementa. Odatle sledi da su konačne $\vee$- između ravne mreže dualno-slim mreže. Obrat ćemo dokazati uspostavljanjem veze između $\vee$- između ravnih mreža i mreža koje nastaju kao direktan proizvod dva lanca, s jedne strane, i između dualno-slim mreža i mreža koje nastaju kao direktan proizvod dva konačna lanca, s druge strane.

Tvrđenje 3.11 *Neka je L konačna mreža. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *L je $\vee$- IR mreža.*

2. Poset $\wedge$-nerazloživih elemenata $(M_L, \leq)$ mreže L je takav da je $w(M_L) \leq 2$.

3. Postoje $n, m \in \mathbb{N}$ i potapanje mreže L u mrežu $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ pri kome su supremumi očuvani.[2]

Dokaz. *2* $\Leftrightarrow$ *3* sledi iz teoreme 3.18 (str. 87) i njene posledice 3.15.

3 $\Leftrightarrow$ *1* Uslovi *3* i *1* su ekvivalentna na osnovu posledice 3.10 (str. 84).

$\square$

Time je uspostavljena veza između dualno-slim i konačnih $\vee$- između ravnih mreža.

Posledica 3.16 *Konačna mreža L je dualno-slim mreža ako i samo ako je L $\vee$- između ravna mreža.*

Za $\wedge$- IR mreže važi tvrđenje dualno tvrđenju 3.11 u kome se poset $\wedge$- nerazloživih elemenata zamenjuje posetom $\vee$- nerazloživih elemenata, supremum sa infimumom, a najmanji element sa najvećim elementom.

Prema principu dualnosti važi sledeća posledica.

Posledica 3.17 *Konačna mreža L je slim ako i samo ako je L $\wedge$- između ravna mreža.*

[2]Podsetimo se da je sa $\mathbf{n}$ obeležen konačni lanac sa n elemenata, dužine $n-1$ (str. 1).

Glava 4

Teoreme sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove

4.1 Nivo skupovi

Poslednjih godina osim "klasičnih" nivo skupova uvode se i neke nove definicije nivo skupova koji imaju slične osobine kao "klasični" nivo skupovi i takođe daju mogućnost za dekompoziciju rasplinutih skupova. Među autorima koji su posmatrali nestandardne nivo skupove i mogućnost za reprezentaciju rasplinutih skupova, ili njihovih uopštenja, pomoću ovakvih nivo skupova su V. Janiš, A. Tepavčević, B. Šeselja [79], Yuan Xue-Hai, Li Hong-Xing, E. Stanley Lee, Xiao-shen Li [150, 151, 152].

U ovom radu koristimo sledeće termine:

Neka je L kompletna mreža i $\mu : X \to L$ mrežno-vrednosni rasplinuti skup na X (kraće: L - rasplinuti skup), tada za $p \in L$ skup $\mu_p = \{x \in X \mid \mu(x) \geq p\}$ zovemo **p-gornji nivo skup** ili samo **gornji nivo skup** prema nazivu uvedenom u [151], umesto uobičajenog naziva p-nivo skup (p-cut set) ili nivo skup (cut set).

Skup: $\mu^p = \{x \in X \mid \mu(x) \leq p\}$ zovemo **p-donji nivo skup** ili samo **donji nivo skup**, takodje prema nazivu uvedenom u [151], umesto $\leq$- p - nivo skup, kako su nazvani u [144].

Familiju gornjih nivo skupova obeležavamo: $F_\mu = \{\mu_p \mid p \in L\}$, a familiju donjih nivo skupova: $F^\mu = \{\mu^p \mid p \in L\}$.

Donji nivo skupovi imaju slične osobine kao gornji nivo skupovi, što se može videti u [151]. Ovde navodimo neke od osobina nivo skupova koje su od interesa u ovom radu.

Ako je 0 najmanji element, a 1 najveći element mreže L, tada važi sledeće:

1. $\mu_0 = X$ i $\mu^1 = X$
2. Ako je $p \leq q$ tada je $\mu_q \subseteq \mu_p$ i $\mu^p \subseteq \mu^q$
3. $\mu(x) = \bigvee\{p \in L \mid x \in \mu_p\}$
   $\mu(x) = \bigwedge\{p \in L \mid x \in \mu^p\}$
4. Ako je $M \subseteq L$ tada važi: $\bigcap(\mu_p \mid p \in M) = \mu_{\bigvee\{p \in M\}}$ i
   $\bigcap(\mu^p \mid p \in M) = \mu^{\bigwedge\{p \in M\}}$.
5. $(F_\mu, \subseteq)$ i $(F^\mu, \subseteq)$ su kompletne mreže, pri čemu je $\subseteq$ uobičajena inkluzija za skupove.

Možemo primetiti da iz $\mu^1 = X$ i $\mu_0 = X$ sledi da su μ_0 i μ^1 redom, najveći elementi familija gornjih i donjih nivo skupova $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to L$. Slično važi za najmanje elemente familija gornjih i donjih nivo skupova mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to L$.

Lema 4.1 *Neka je L kompletna mreža, X neprazan skup i $\mu : X \to L$ mrežno-vrednosni rasplinuti skup. Neka je $\mathcal{F}_1$ familija gornjih, a $\mathcal{F}_2$ familija donjih nivo skupova mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa μ. Tada važi:*

1. $\mu_1 = \bigcap \mathcal{F}_1$ *i*

2. $\mu^0 = \bigcap \mathcal{F}_2$,

gde su $\bigcap \mathcal{F}_1$ i $\bigcap \mathcal{F}_2$ najmanji elementi familija nivo skupova $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, redom.

Dokaz. *1*. Podsetimo se da je $\mu_1 = \{x \in X \mid \mu(x) \geq 1\} = \{x \in X \mid \mu(x) = 1\}$. Za svako $p \in L$ važi $p \leq 1$, pa je $\mu_p \supseteq \mu_1$. Odatle sledi da je μ_1 najmanji element familije gornjih nivo skupova mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa μ, odnosno $\mu_1 = \bigcap \mathcal{F}_1$.

2. Slično je $\mu^0 = \{x \in X \mid \mu(x) \leq 0\} = \{x \in X \mid \mu(x) = 0\}$. Za svako $p \in L$ važi $0 \leq p$, pa je $\mu^0 \supseteq \mu^p$. Odatle sledi da je μ^0 najmanji element familije donjih nivo skupova mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa μ, odnosno $\mu^0 = \bigcap \mathcal{F}_2$.

□

Koristeći gornje nivo skupove na mreži L možemo definisati relaciju ekvivalencije $\approx$ na sledeći način [137, 138]: za $p, q \in L$

$$p \approx q \text{ ako i samo ako je } \mu_p = \mu_q.$$

Skup klasa ekvivalencije obeležavamo sa $L/_\approx$. Relacija $\leq$ na mreži L proizvodi poredak na $L/_\approx$ na sledeći način: za $p, q \in L$

$$[p]_\approx \leq [q]_\approx \text{ ako i samo ako je } \uparrow q \bigcap \mu(X) \subseteq \uparrow p \bigcap \mu(X).$$

Relacija $\leq$ na $L/_{\approx}$ je dobro definisana, odnosno ne zavisi od elemenata koji predstavljaju klase. Zaista, ako $p_1 \in [p]_{\approx}$, onda je $p_1 \approx p$, što je ekvivalentno sa $\mu_{p_1} = \mu_p$. Ovo je dalje ekvivalentno sa $\uparrow p_1 \bigcap \mu(X) = \uparrow p \bigcap \mu(X)$. Slično važi $q_1 \in [q]_{\approx}$ ako i samo ako je $\uparrow q_1 \bigcap \mu(X) = \uparrow q \bigcap \mu(X)$. Odatle sledi da je $[p]_{\approx} \leq [q]_{\approx}$ ako i samo ako je $\uparrow q_1 \bigcap \mu(X) = \uparrow p_1 \bigcap \mu(X)$.

Poredak $\leq$ na $L/_{\approx}$ se može dovesti u vezu sa inkluzijom na skupu gornjih nivo skupova na sledeći način [137]:

$$[p]_{\approx} \leq [q]_{\approx} \text{ ako i samo ako je } \mu_q \subseteq \mu_p$$

Odatle sledi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 4.1 ([138]) *Neka je $\mu : X \to L$ L-rasplinuti skup na X. Tada je poset $(L/_{\approx}, \leq)$ mreža anti-izomorfna sa mrežom gornjih nivo skupova $(F_\mu, \subseteq)$ skupa μ.*

Preslikavanje $p \mapsto \bigvee [p]_{\approx}$ $(p \in L)$ je operator zatvaranja na mreži L, a zatvoreni elementi ove mreže su najveći elementi klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju $\approx$ i oni čine kompletnu mrežu na L (posledica 1.2, str. 11). Ova mreža je zatvorena u odnosu na proizvoljne infimume iz L (teorema 1.13, str. 11), ali ne i u odnosu na supremume, pa je $\wedge$- kompletna podmreža mreže L (str. 4).

Slično definišemo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa donjim nivo skupovima: za $p, q \in L$

$$p \sim q \text{ ako i samo ako je } \mu^p = \mu^q.$$

Poredak na $L/_{\sim}$ se uvodi dualno poretku na $L/_{\approx}$, odnosno za $p, q \in L$ važi:

$$[p]_{\sim} \leq [q]_{\sim} \text{ ako i samo ako je } \downarrow p \bigcap \mu(X) \subseteq \downarrow q \bigcap \mu(X).$$

Relacija $\leq$ na $L/_{\sim}$ je očigledno dobro definisana.

Poredak $\leq$ na $L/_{\sim}$ se može dovesti u vezu sa inkluzijom na skupu donjih nivo skupova na sledeći način:

$$[p]_{\sim} \leq [q]_{\sim} \text{ ako i samo ako je } \mu^p \subseteq \mu^q$$

Dakle, važi tvrđenje dualno tvrđenju 4.1:

Tvrđenje 4.2 *Neka je $\mu : X \to L$ L-rasplinuti skup na X. Tada je poset $(L/_{\sim}, \leq)$ mreža izomorfna sa mrežom donjih nivo skupova $(F^\mu, \subseteq)$ skupa μ.*

Preslikavanje $p \mapsto \bigwedge [p]_{\sim}$ $(p \in L)$ je unutrašnji operator na mreži L, a otvoreni elementi ove mreže su najmanji elementi klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju $\sim$ i oni čine kompletnu mrežu na L (posledica 1.3, str. 12). Ova mreža je zatvorena u odnosu na proizvoljne supremume iz L (teorema 1.16, str. 11), ali ne i u odnosu na infimume, pa je $\vee$- kompletna podmreža mreže L.

4.2 Teoreme sinteze za mrežno-vrednosne rasplinute skupove

Sledećom teoremom sinteze za mrežno-vrednosne rasplinute skupove ili, kraće, L-rasplinute skupove, određeni su potrebni uslovi da unapred zadata kolekcija podskupova nepraznog skupa X bude kolekcija gornjih nivo skupova nekog L- rasplinutog skupa.

Teorema 4.1 *[137] Neka je F kolekcija podskupova nepraznog skupa X koja je zatvorena u odnosu na preseke i čija unija je X. Neka je $(F, \leq)$ mreža izomorfna sa $(F, \supseteq)$. Tada je kolekcija gornjih nivo skupova L-rasplinutog skupa $\mu : X \to F$, definisanog sa $\mu(x) = \bigcap(p \in F \mid x \in p)$, jednaka sa F i za svako $p \in F$ važi: $\mu_p = p$.*

Poznato je da je familija gornjih nivo skupova nekog L- rasplinutog skupa zatvorena u odnosu na preseke i da sadrži X, pa su ovi uslovi i dovoljni.

Sledeće teoreme, formulisane za mrežno-vrednosne rasplinute skupove, su objavljene u [64]. Navodimo ih sa prethodno navedenim terminološkim izmenama vezanim za nivo skupove.

Teorema 4.2 *Neka su L i L_1 kompletne mreže, takve da je $L \subseteq L_1$, svi infimumi u L se poklapaju sa odgovarajućim infimumima u L_1 i najveći element im je isti. Neka su rasplinuti skupovi $\mu : X \to L$ i $\nu : X \to L_1$ takvi da je $\mu(x) = \nu(x)$ za sve $x \in X$. Tada rasplinuti skupovi μ i ν imaju iste kolekcije gornjih nivo skupova.*

Dokaz.

Neka je $C : L_1 \to L_1$ preslikavanje na L_1 definisano na sledeći način: za svako $p \in L_1$,

$$C(p) = \bigwedge\{p_i \in L \mid p \leq p_i\}.$$

Pošto je najveći element isti u obe mreže i $L \subseteq L_1$, preslikavanje C je dobro definisano. Lako se proverava da je ovo preslikavanje operator zatvaranja na L_1 i da su zatvoreni elementi tačno svi elementi iz L.

Sada dokazujemo da je za svako $p \in L_1$ gornji nivo skup ν_p jednak gornjem nivo skupu $\nu_{C(p)}$.

Neka $p \in L_1$. Tada $x \in \nu_p$ ako i samo ako je $\nu(x) \geq p$. Neka je $\nu(x) = q$. Tada je $q \geq p$, a odatle je $q \geq \bigwedge\{p_i \in L \mid p \leq p_i\}$, pošto $q \in L$. Odatle je $\nu(x) \geq C(p)$ i $x \in \nu_{C(p)}$. Time je dokazano da je $\nu_p \subseteq \nu_{C(p)}$.

Iz $p \leq C(p)$, imamo da je $\nu_{C(p)} \subseteq \nu_p$ i jednakost gornjih nivo skupova je dokazana.

$\square$

Teorema 4.3 *Neka su $(L, \wedge_L, \vee_L)$ i $(L_1, \wedge_{L_1}, \vee_{L_1})$ kompletne mreže i neka je $\varphi : L \to L_1$ injektivno preslikavanje iz L u L_1 koje preslikava najveći element L u najveći element L_1, tako da za sve $x, y \in L$ važi $\varphi(x \wedge_L y) = \varphi(x) \wedge_{L_1} \varphi(y)$. Neka je $\mu : X \to L$ rasplinuti skup na X i neka je $\nu : X \to L_1$ definisan sa $\nu(x) = \varphi(\mu(x))$. Tada rasplinuti skupovi μ i ν imaju iste familije gornjih nivo skupova i $\mu_p = \nu_{\varphi(p)}$ za sve $p \in L$.*

Dokaz. Neka je $L_2 = \{\varphi(x) \mid x \in L\} \subseteq L_1$. Lako se dokazuje da je $(L_2, \wedge_{L_2}, \vee_{L_2})$ mreža, gde su operacije $\wedge_{L_2}$ i $\vee_{L_2}$ redom restrikcije operacija $\wedge_{L_1}$ i $\vee_{L_1}$. Mreža L_2 je izomorfna sa mrežom L, svi infimumi u L_2 se poklapaju sa odgovarajućim infimumima u L_1 i najveći element u L_1 se poklapa sa najvećim elementom u L_2. Neka je sada $\eta : X \to L_2$ preslikavanje definisano sa $\eta(x) = \nu(x)$ za sve $x \in X$. Po definiciji rasplinutog skupa ν i pošto su mreže L i L_2 izomorfne, odatle sledi da se gornji nivo skupovi rasplinutog skupa μ poklapaju sa gornjim nivo skupovima rasplinutog skupa η i da je $\mu_p = \eta_{\varphi(p)}$ za sve $p \in L$. Po teoremi 4.1, gornji nivo skupovi rasplinutih skupova η i ν se poklapaju, te odatle sledi da rasplinuti skupovi μ i ν imaju iste familije gornjih nivo skupova i važi $\mu_p = \nu_{\varphi(p)}$ za sve $p \in L$.

□

Sa istim terminološkim izmenama navodimo teoremu sinteze za L- rasplinute skupove kod kojih je kompletna mreža L unapred zadata.

Teorema 4.4 *[64] Neka je L data kompletna mreža. Potreban i dovoljan uslov da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bude kolekcija gornjih nivo skupova L-rasplinutog skupa $\mu : X \to L$ je da je $\mathcal{F}$*

1. *zatvorena za preseke i sadrži X,*
2. *da njen dualni poset može biti potopljen u L, tako da su tim potapanjem očuvani svi infimumi i najveći element.*

Dokaz. Neka je L kompletna mreža, neka je X neprazan skup i neka je $\mathcal{F}$ kolekcija podskupova skupa X zatvorena za preseke, koja sadrži X. Pošto je zatvorena za preseke i sadrži X, kolekcija $\mathcal{F}$ je kompletna mreža. Neka je $\mathcal{F}^d$ dualna mreža i neka je E potapanje $\mathcal{F}^d$ u mrežu L takvo da su tim potapanjem očuvani svi infimumi i najveći element mreže $\mathcal{F}^d$ se preslikava na najveći element mreže L. Takvo potapanje postoji po uslovima teoreme.

Po teoremi 4.1 na strani 94, postoji rasplinuti skup $\varphi : X \to \mathcal{F}^d$ takav da za svako $s \in \mathcal{F}^d$, $\varphi_s = s$, odnosno kolekcija gornjih nivo skupova rasplinutog skupa φ sa poklapa sa kolekcijom $\mathcal{F}$.

Neka je $\mu : X \to L$ rasplinuti skup definisan sa $\mu(x) = E(\varphi(x))$. Ispunjeni su svi uslovi teoreme 4.3 (str. 94), pa se poklapaju kolekcije gornjih nivo skupova rasplinutih skupova μ i φ. Time je dokazano da se kolekcija gornjih nivo skupova rasplinutog skupa μ poklapa sa kolekcijom $\mathcal{F}$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\mathcal{F} = \{\mu_p \mid p \in L\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ kolekcija gornjih nivo skupova rasplinutog skupa $\mu : X \to L$, za datu kompletnu mrežu L. Poznato je da je kolekcija $\mathcal{F}$ zatvorena za preseke i da sadrži X. Neka je $\mathcal{F}^d$ mreža dualna mreži $\mathcal{F}$. Prema tvrđenju 4.1 na strani 93, $\mathcal{F}^d$ je izomorfna mreži $(L/_{\approx}, \leq)$. Ova poslednja mreža je izomorfna sa mrežom zatvorenih elemenata za operator zatvaranja $p \mapsto \vee[p]_{\approx}$ u mreži L. Zatvoreni elementi su najveći elementi klasa ekvivalencije za $\approx$. Mreža zatvorenih elemenata ima isti najveći element kao L i svi infimumi su očuvani. Odatle sledi da se $\mathcal{F}^d$ može potopiti u L tako da su pri tom potapanju očuvani svi infimumi i najveći element.

□

Teorema 4.5 *[64] Neka je $\mu : X \to L$ mrežno-vrednosni rasplinuti skup. Tada postoji kardinalni broj c i rasplinuti skup $\nu : X \longrightarrow \{0,1\}^c$ takav da rasplinuti skupovi μ i ν imaju identične kolekcije nivo skupova.*

Dokaz. Dobro je poznato da je svaka kompletna mreža L izomorfna sa mrežom svih svojih glavnih ideala uređenom inkluzijom $(\{\downarrow x \mid x \in L\}, \subseteq)$. Mreža $(\{\downarrow x \mid x \in L\}, \subseteq)$ se može potopiti u mrežu $(\mathcal{P}(L), \subseteq)$ tako da svi infimumi ostaju očuvani i najveći element im je isti. Mreža $(\mathcal{P}(L), \subseteq)$ se može izomorfno predstaviti sa $\{0,1\}^c$ za neko c.

□

Mreža $\{0,1\}^c$ je podmreža mreže $[0,1]^c$, pri čemu su operacije $\vee$ i $\wedge$ redom maksimum i minimum po komponentama. Na taj način gore izneti rezultati omogućavaju korišćenje realne analize u istraživanju mrežno vrednosnih struktura.

Teoreme 4.1-4.4 možemo iskazati u dualnoj formi.

Teorema 4.6 *Neka je $(F, \subseteq)$ kolekcija podskupova nepraznog skupa X koja je zatvorena u odnosu na preseke i čija unija je X. Tada je kolekcija donjih nivo skupova L-rasplinutog skupa $\mu : X \to F$, definisanog sa $\mu(x) = \bigcap(p \in F \mid x \in p)$, jednaka sa F i za svako $p \in F$ važi: $\mu^p = p$.*

Teorema 4.7 *Neka su L i L_1 kompletne mreže, takve da je $L \subseteq L_1$, svi supremumi u L se poklapaju sa odgovarajućim u L_1 i najmanji element im je isti. Neka su rasplinuti skupovi $\mu : X \to L$ i $\nu : X \to L_1$ takvi da je $\mu(x) = \nu(x)$ za sve $x \in X$. Tada rasplinuti skupovi μ i ν imaju iste kolekcije donjih nivo skupova.*

Dokaz. Dokaz je dualan dokazu teoreme 4.2 (str. 94) tako da se operator zatvaranja na mreži L_1 zameni unutrašnjim operatorom $I : L_1 \to L_1$ definisanim na sledeći način: $I(p) = \bigvee\{p_i \in L \mid p \geq p_i\}$, čiji su otvoreni elementi upravo elementi mreže L.

□

Teorema 4.8 *[144] Neka su $(L, \wedge_L, \vee_L)$ i $(L_1, \wedge_{L_1}, \vee_{L_1})$ kompletne mreže i neka je $\varphi : L \to L_1$ injektivno preslikavanje iz L u L_1 koje preslikava najmanji element L u najmanji element L_1, tako da za sve $x, y \in L$ važi $\varphi(x \vee_L y) = \varphi(x) \vee_{L_1} \varphi(y)$. Neka je $\mu : X \to L$ rasplinuti skup na X i neka je $\nu : X \to L_1$ definisan sa $\nu(x) = \varphi(\mu(x))$. Tada rasplinuti skupovi μ i ν imaju iste familije donjih nivo skupova i $\mu^p = \nu^{\varphi(p)}$ za sve $p \in L$.*

Teorema 4.9 *Neka je L data kompletna mreža. Potreban i dovoljan uslov da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bude kolekcija donjih nivo skupova L-rasplinutog skupa $\mu : X \to L$ je da je $\mathcal{F}$*

1. *zatvorena za preseke i sadrži X;*
2. *da poset $(\mathcal{F}, \subseteq)$ može biti potopljen u L,*

tako da su tim potapanjem očuvani svi supremumi i najmanji element.

Dokaz. Ovaj dokaz je dualan dokazu teoreme 4.4 (str. 95), tako da su pri potapanju E očuvani supremumi i da se najmanji element $\mathcal{F}$ preslikava na najmanji element 0 mreže L. Dalje se, umesto teoreme 4.1 (str. 94), koristi teorema 4.6 (str. 96), a umesto teoreme 4.3 (str. 94), pozivamo se na teoremu 4.8 (str. 96).

S druge strane, u dokazu da je uslov potreban, koristimo tvrđenje 4.2 (str. 93), umesto tvrđenja 4.1 (str. 93), po kome je kolekcija donjih nivo skupova izomorfna sa mrežom $L/_{\sim}$, a ova je izomorfna sa mrežom otvorenih elemenata na mreži L (pri unutrašnjem operatoru $p \mapsto \bigwedge[p]_{\sim}$). Kao što je ranije rečeno, mreža otvorenih elemenata ima isti najmanji element kao L i supremumi su očuvani. Time je ispunjen i *2.* uslov ove teoreme.

□

4.3 Intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi

Intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi se definišu na sledeći način.

Definicija 4.1 *[48, 66] Intervalno-vrednosni rasplinuti skup (IVFS) na univerzumu X je preslikavanje $\mu : X \to Int([0,1])$, gde $Int([0,1])$ označava sve zatvorene podintervale intervala $[0,1]$. Klasa svih intervalno-vrednosnih rasplinutih skupova na X se označava $\mathcal{IVFS}(\mathcal{X})$[1].*

Uobičajeno je da se za $\mathbf{a} \in Int([\mathbf{0},\mathbf{1}])$ donja i gornja granica intervala, redom, obeležavaju sa $\underline{a}$ i $\overline{a}$, tj. $\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}]$. Dužina intervala $\pi(\mathbf{a}) = \overline{a} - \underline{a}$ je stepen neizvesnosti (neodređenosti) za $\mathbf{a}$ kako je definisano u [35], odnosno amplituda intervala $\mathbf{a}$, kako je definisano u [12].

Intervalno-vrednosne rasplinute skupove posmatramo kao mrežno vrednosne rasplinute skupove, odnosno kao preslikavanje $\mu : X \to L$, gde je L kompletna mreža, a X neprazan skup. Prema rezultatima iznetim u drugom poglavlju, skup intervala jediničnog intervala $[0,1]$ realnih brojeva, u oznaci $I([0,1])$, je kompletna mreža u odnosu na svako od četiri posmatrana uređenja: poredak po komponentama $\leq$, neprecizni poredak $\leq_i$, strogi intervalni poredak $\leq_s$ i leksikografski poredak $\leq_l$ koji su definisani na stranama 20 i 21. Zbog toga ćemo pod intervalno-vrednosnim rasplinutim skupom podrazumevati svako preslikavanje nepraznog skupa X u neku od četiri kompletne mreže intervala:

1.) $I_w([0,1]) = (I([0,1]), \leq)$

2.) $I_i([0,1]) = (I([0,1]) \cup \emptyset, \leq_i)$

3.) $I_s([0,1]) = (I([0,1]), \leq_s)$

[1] Rasplinuti skupovi $\mu : X \to [0,1]^2$ se predstavljaju slično kao IVFS, ali ih ne treba poistovetiti. Bitna razlika među njima je to što funkcija pripadnosti, za rasplinute skupove $\mu : X \to [0,1]^2$, ima za vrednost uređeni par elemenata, pri čemu prva koordinata ne mora biti manja od druge koordinate, dok funkcija pripadnosti za intervalno vrednosne rasplinute skupove kao svoju vrednost ima interval. Takođe ne treba poistovetiti rasplinute skupove $\nu : X \to \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$ sa IVFS, mada su na izvesan način slični intervalno-vrednosnim rasplinutim skupovima.

4.) $I_l([0,1]) = (I([0,1]), \leq_l)$

gde je $I([0,1]) = \{[x_1, x_2] \mid (x_1, x_2) \in [0,1]^2, x_1 \leq x_2\}$.

Poredak po komponentama $\leq$ ponekad obeležavamo sa $\leq_w$ zbog lakšeg razlikovanja od ostalih poredaka koji se koriste u radu.

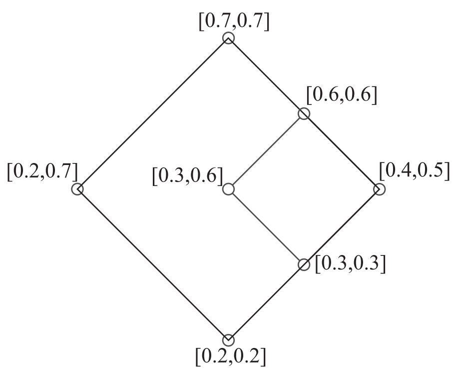
Neka je $\mu : X \to I_t([0,1])$, gde $t \in \{w, i, s, l\}$, intervalno-vrednosni rasplinuti skup. Tada je za $\mathbf{p} = [p_1, p_2] \in I_t([0,1])$ $(t \in \{w, i, s, l\})$
gornji nivo skup: $\mu_{\mathbf{p}} = \{x \in X \mid [p_1, p_2] \leq_t \mu(x)\}$,
dok je **donji nivo skup**: $\underline{\mu^{\mathbf{p}}} = \{x \in X \mid \mu(x) \leq_t [p_1, p_2]\}$,
pri čemu je $\mu(x) = [\underline{\mu(x)}, \overline{\mu(x)}]$.

Problem sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove formulišemo na sledeći način:

Neka je $I_t([0,1])$ za $t \in \{w, i, s, l\}$, data kompletna mreža intervala. Odrediti potrebne i/ili dovoljne uslove da unapred zadata kolekcija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa X bude kolekcija gornjih (donjih) nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa.

Prema rezultatima u radu [65] za rešavanje ovako postavljenog problema sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove, postavljen je sledeći problem: *Karakterisati mreže koje se mogu injektivno preslikati u mrežu koja je direktan proizvod dva lanca tako da su očuvani supremumi ili tako da su očuvani infimumi.*

Međutim, istraživanje je pokazalo da ova dva problema nisu relevantna za sve izabrane mreže intervala. Tako, na primer, podmreža mreže intervala $I_s([0,1]) = (I([0,1]), \leq_s)$, čiji je dijagram ilustrovan na slici 4.1, nije ni $\vee$- između ravna ni $\wedge$- između ravna mreža, pa se, prema našim rezultatima, ne može injektivno preslikati u direktan proizvod dva lanca tako da su očuvani supremumi, ni tako da su očuvani infimumi.



Slika 4.1

Zbog toga problem sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove za datu mrežu intervala $I_s([0,1])$, treba rešavati na drugi način. U ovom momentu nije jasno da li problem treba rešavati tako što će se tražiti karakterizacija mreža koje se na odgovarajući način mogu potopiti u mrežu $I_s([0,1]) = (I([0,1]), \leq_s)$ ili treba tražiti ograničavajuće faktore.

Za sada smo u mogućnosti samo da odredimo neke potrebne uslove prema rezultatima koji postoje u matematičkoj literaturi, od kojih neke navodimo za ilustraciju.

Predstavljanje poseta preko (realnih) intervala koji su uređeni relacijom strogog poretka u klasičnom smislu (bez uslova za refleksivnost) problem je kojim su se bavili mnogi autori. Među njima izdvajamo rezultate Fishburna [53], Kirsteada i Trottera [93], kao i radove [99, 55]. Za više detalja se mogu konsultovati i reference navedene u ovim radovima.

Poset $(P, \leq)$ zovemo **intervalni poredak** [93] ako postoji funkcija I koja svakom elementu $x \in P$ dodeljuje zatvoreni interval $I(x) = [\underline{x}, \overline{x}]$ realnih brojeva tako da za svako $x, y \in P$ važi: $x < y$ u P ako i samo ako je $\overline{x} < \underline{y}$.

Kolekcija intervala $I(P)$ je **intervalna reprezentacija poretka** $(P, \leq)$.

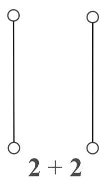
Prema Amy Myers [99] definicija intervalnog poretka se može uopštiti ako se umesto intervala realnih brojeva posmatraju intervali bilo kog linearno uređenog skupa.

Prema tome, poset (mreža) koja se preslikava na zatvorene podintervale jediničnog intervala realnih brojeva, uređene relacijom strogog poretka u smislu jednakosti 2.5 (str. 21), takođe je intervalni poredak.

Primetimo da za intervale $I(x) = [\underline{x}, \overline{x}]$ i $I(y) = [\underline{y}, \overline{y}]$ važi $I(x) \leq_s I(y)$ ako i samo ako je $(I(x) < I(y)$ ili $I(x) = I(y))$ ako i samo ako je $(\overline{x} < \underline{y}$ ili $(\underline{x} = \underline{y}$ i $\overline{x} = \overline{y}))$. Zbog toga se sledeći rezultat može primeniti i u našem istraživanju.

Teorema 4.10 *[53] (Fishburn-ova teorema)*

Konačan poset P je intervalni poredak ako i samo ako nema pod-poset izomorfan sa $\mathbf{2}+\mathbf{2}$.



Slika 4.2

U sledećem tvrđenju navodimo neke potrebne uslove da $\mathcal{F}$ bude familija donjih (gornjih) nivo skupova datog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa za datu mrežu $I_s([0,1])$.

Tvrđenje 4.3 *Neka je $\mu : X \to I_s([0,1])$ intervalno-vrednosni rasplinuti skup na konačnom nepraznom skupu X. Neka je, dalje, $\mathcal{F}$ familija donjih (gornjih) nivo skupova datog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa. Tada je familija $\mathcal{F}$ sistem zatvaranja i ne sadrži podposet izomorfan sa $\mathbf{2}+\mathbf{2}$.*

Dokaz.

Pošto je $\mathcal{F}$ familija donjih (gornjih) nivo skupova konačnog mrežno-vrednosnog rasplinutog skupa, ona je konačna i sistem zatvaranja.

Prema teoremi 4.9 na str. 96 (4.4, str. 95) mreža $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}^d$) se može potopiti u mrežu $I_s([0,1])$ tako da su tim potapanjem očuvani svi supremumi (infimumi) i najmanji (najveći) element. Prema definiciji intervalnog poretka i ove mreže su intervalni poreci. Odatle, prema Fishburn-ovoj teoremi sledi da $\mathcal{F}$ nema podposet izomorfan sa $\mathbf{2}+\mathbf{2}$.

□

4.4 Teoreme sinteze za datu mrežu $I_w([0,1])$

Kao što smo već istakli, problem sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove je rešavan indirektno, karakterisanjem mreža koje se mogu injektivno preslikati u mrežu koja je direktan proizvod dva lanca tako da su očuvani supremumi ili tako da su očuvani infimumi. Ovo je moguće zato što za svaka dva disjunktna kompletna lanca C_1 i C_2, koja su sup-predstavljiva u $[0,1]$ (definicija 4.3 ispod), postoji injektivno preslikavanje mreže $C_1 \times C_2$ u mrežu $I_w([0,1])$ pri kome su očuvani supremumi (ili pri kome su očuvani infimumi), što ćemo u nastavku dokazati.

Definicija 4.2 *[60] Za lanac $(L,\leq)$ kažemo da je predstavljiv (representable) u $\mathbb{R}$ ako postoji injektivna i izotona realno vrednosna funkcija $u : L \to \mathbb{R}$, koju zovemo funkcija korisnosti (utility function).*

Pošto je $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ možemo uvesti sličnu definiciju.

Definicija 4.3 *Za lanac $(L,\leq)$ kažemo da je* **predstavljiv u $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$** *ako postoji injektivna i izotona funkcija $f : L \to [0,1]$. Ako su funkcijom f očuvani supremumi reći ćemo da je lanac L* **sup-predstavljiv u $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$**. *Ako su funkcijom f očuvani infimumi reći ćemo da je lanac L* **inf-predstavljiv u $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$**.

Tvrđenje 4.4 *Neka su C_1 i C_2 disjunktni, kompletni lanci koji su sup-predstavljivi u $[0,1]$. Tada postoji injektivno preslikavanje φ mreže $C_1 \times C_2$ u mrežu $I_w([0,1])$ takvo da su supremumi očuvani.*

Dokaz. Neka su C_1 i C_2 disjunktni kompletni lanci koji su sup-predstavljivi u $[0,1]$. Neka su $f_i : C_i \to [0,1]$ $(i=1,2)$ data injektivna preslikavanja pri kojima su očuvani supremumi. Pošto su supremumi očuvani, preslikavanja f_i $(i=1,2)$ su izotona i važi $f_i(0_{C_i}) = 0$ za

$i = 1, 2$. Zaista, supremum praznog skupa je najmanji element date mreže, pa se najmanji element lanca C_i, $i = 1, 2$, preslikava na najmanji element intervala realnih brojeva $[0, 1]$.

Preslikavanja $g : [0,1] \to [0,a]$ i $h : [0,1] \to [a, 2 \cdot a]$, gde $a \in (0, 0.5]$, definišemo na sledeći način.
Za svako $x \in [0,1]$ važi

$$g(x) = a \cdot x \quad \text{i} \quad h(x) = a + a \cdot x.$$

Preslikavanja g i h su očigledno dobro definisana, injektivna i izotona, a takođe su i supremumi očuvani pri oba preslikavanja. Zaista, za neprazan skup $S \subseteq [0,1]$ je $g(S) = \{a \cdot x \mid x \in S\} = aS$ važi $\bigvee g(S) = \bigvee aS = a \cdot \bigvee S$. S druge strane je $a \cdot \bigvee S = g(\bigvee S)$, pa je $\bigvee g(S) = g(\bigvee S)$. Slično važi reslikavanje h. Očigledno je da se preslikavanjima g i h najmanji element intervala $[0, 1]$ preslikava redom, na najmanje elemente intervala $[0, a]$ i $[a, 2 \cdot a]$.

Sada možemo definisati preslikavanje $\varphi : C_1 \times C_2 \to I_w([0,1])$ na sledeći način[2]. Za svako $(x, y) \in C_1 \times C_2$ važi

$$\varphi((x,y)) = \begin{cases} [(g \circ f_1)(x), (h \circ f_2)(x)], & \text{za} \quad x \neq 0_{C_1} \quad \textit{ili} \quad y \neq 0_{C_2}, \\ [0,0], & \text{za} \quad x = 0_{C_1} \quad \textit{i} \quad y = 0_{C_2}. \end{cases}$$

Preslikavanje φ je definisano tako da je ispunjen uslov da se najmanji element mreže $C_1 \times C_2$ preslikava na najmanji element mreže $I_w([0,1])$. Iz $(x,y) \in C_1 \times C_2$ sledi da $x \in C_1$ i $y \in C_2$. Iz definicije funkcija $(g \circ f_1)$ i $(h \circ f_2)$ sledi da je $(g \circ f_1)(x) \leq (h \circ f_2)(y)$. Dakle, $[(g \circ f_1)(x), (h \circ f_2)(y)]$ je element skupa $I([0,1])$.

Preslikavanje φ je dobro definisano i injektivno:

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, x_2)) = \varphi((y_1, y_2)) \;&\Leftrightarrow\; [(g \circ f_1)(x_1), (h \circ f_2)(x_2)] = [(g \circ f_1)(y_1), (h \circ f_2)(y_2)] \text{ ili} \\ &\;\; [0,0] = [0,0] \\ &\Leftrightarrow\; (g(f_1(x_1)) = (g(f_1(y_1)) \text{ i } (h(f_2(x_2)) = (h(f_2(y_2)) \text{ ili} \\ &\;\; (x_1 = y_1 = 0_{C_1} \text{ i } x_2 = y_2 = 0_{C_2}) \\ &\Leftrightarrow\; x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \\ &\Leftrightarrow\; (x_1, x_2) = (y_1, y_2) \end{aligned}$$

Ostaje još da se dokaže da su preslikavanjem φ očuvani supremumi.
Neka je M proizvoljan neprazan podskup mreže $C_1 \times C_2$ i neka je $\underline{M} = \{x \mid (x,y) \in M\}$ i $\overline{M} = \{y \mid (x,y) \in M\}$. Supremume skupova $M, \underline{M}$ i $\overline{M}$ obeležavamo redom sa $\bigvee M, \bigvee \underline{M}$ i $\bigvee \overline{M}$. Tada važi: $\varphi(\bigvee M) = \varphi((\bigvee \underline{M}, \bigvee \overline{M})) = [(g \circ f_1)(\bigvee \underline{M}), (h \circ f_2)(\bigvee \overline{M})]$. Pošto je $\underline{M} \subseteq C_1$ i $\overline{M} \subseteq C_2$, važi redom $g(f_1(\bigvee \underline{M})) = \bigvee g(f_1(\underline{M}))$ i $h(f_2(\bigvee \overline{M})) = \bigvee h(f_2(\overline{M}))$, pa je $\varphi(\bigvee M) = [\bigvee g(f_1(\underline{M})), \bigvee h(f_2(\overline{M}))] = \bigvee [g(f_1(\underline{M})), h(f_2(\overline{M}))] = \bigvee \varphi(M)$. Dakle, $\varphi(\bigvee M) = \bigvee \varphi(M)$.

[2]Pošto parametar $a \in (0, 0.5]$ biramo proizvoljno iz datog intervala, jasno je da preslikavanja g i h nisu jednoznačno određena, a pored toga mogu da se definišu na različite načine. Isto tako preslikavanja f_1 i f_2 u opštem slučaju nisu jednoznačno određena, pa ni preslikavanje φ nije jednoznačno određeno.

Time je dokazano da su preslikavanjem φ očuvani supremumi, odnosno preslikavanje φ je saglasno sa operacijom $\vee$ mreže $I_w([0,1])$, pa je φ traženo preslikavanje mreže $C_1 \times C_2$ u mrežu $I_w([0,1])$.

$\square$

Primetimo da važi $h(f_2(0_{C_2})) = a \neq 0$. Sada možemo dokazati da pri preslikavanju φ ne moraju da budu očuvani infimumi. Uočimo elemente $(0_{C_1}, y)$ i $(x, 0_{C_2})$ mreže $C_1 \times C_2$. Infimum ovih elemenata u mreži $C_1 \times C_2$ je $(0_{C_1}, 0_{C_2})$ i on se funkcijom φ preslikava na interval $[0,0]$. S druge strane je:

$$\begin{aligned}
\varphi((0_{C_1}, y)) \wedge_{I_w([0,1])} \varphi((x, 0_{C_2})) &= [g(f_1(0_{C_1})), h(f_2(y))] \wedge_{I_w([0,1])} [g(f_1(x)), h(f_2(0_{C_2}))] \\
&= [g(f_1(0_{C_1})), h(f_2(0_{C_2}))] = [0, a] \\
&\neq [0,0]
\end{aligned}$$

Formulisaćemo i dualno tvrđenje.

Tvrđenje 4.5 *Neka su C_1 i C_2 disjunktni, kompletni lanci koji su inf-predstavljivi u $[0,1]$. Tada postoji injektivno preslikavanje ψ mreže $C_1 \times C_2$ u mrežu $I_w([0,1])$ takvo da su infimumi očuvani.*

Dokaz. Dokaz je dualan dokazu tvrđenja 4.4. Ovde samo definišemo traženo preslikavanje $\psi : C_1 \times C_2 \to I_w([0,1])$. Za svako $(x,y) \in C_1 \times C_2$ važi:

$$\psi((x,y)) = \begin{cases} [g(f_1(x)), h(f_2(y))], & \text{za} \quad x \neq 1_{C_1} \text{ ili } y \neq 1_{C_2}, \\ [1,1], & \text{za} \quad x = 1_{C_1} \text{ i } y = 1_{C_2}. \end{cases}$$

gde su $f_i : C_i \to [0,1]$ $(i = 1,2)$ data injektivna preslikavanja pri kojima su očuvani infimumi, a preslikavanja $g : [0,1] \to [0,a]$ i $h : [0,1] \to [a, 2 \cdot a]$, $a \in (0, 0.5]$ su definisana kao u tvrđenju 4.4 sa $g(x) = a \cdot x$ i $h(x) = a + a \cdot x$, pošto su ovim preslikavanjima očuvani i infimumi.

$\square$

Preslikavanjem ψ u opštem slučaju nisu očuvani supremumi. Zaista, supremum elemenata $(1_{C_1}, b)$ i $(c, 1_{C_2})$ mreže $C_1 \times C_2$ se, po definiciji preslikavanja ψ, preslikava na najveći element mreže $I_w([0,1])$ - interval $[1,1]$. Međutim, supremum elemenata
$\psi((1_{C_1}, y))$ i $\psi((x, 1_{C_2}))$ je interval $[g(f_1(1_{C_1})), h(f_2(1_{C_2}))]$, koji se zbog $g(f_1(1_{C_1})) \leq a \neq 1$ razlikuje od $[1,1]$.

Primer 4.1 *Neka je $C_1 = \mathbf{4}$ lanac čiji su elementi $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$, a $C_2 = \mathbf{2}$ lanac sa elementima $b_0 < b_1$. S obzirom na to da su lanci C_1 i C_2 konačni, oni su inf-predstavljivi u $[0,1]$. Neka je preslikavanje $g : [0,1] \to [0, 0.1]$ dato sa $g(x) = 0.1 \cdot x$, a preslikavanja $f_1 : C_1 \to [0,1]$ i $g \circ f_1 : C_1 \to [0, 0.1]$ su data sledećom tabelom:*

C_1	a_0	a_1	a_2	a_3
$f_1(x)$	0	0.1	0.2	0.3
$g(f_1(x))$	0	0.01	0.02	0.03

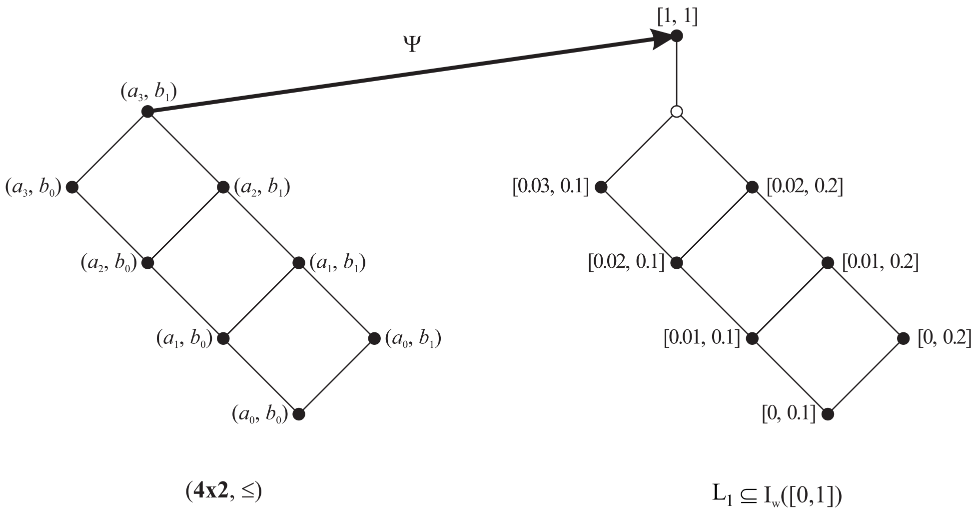
Neka je preslikavanje $h : [0,1] \to [0.1, 0.2]$ *dato sa* $h(x) = 0.1 + 0.1 \cdot x$, *a preslikavanja* $f_2 : C_2 \to [0,1]$ *i* $h \circ f_1 : C_2 \to [0.1, 0.2]$ *su data sledećom tabelom:*

C_2	b_0	b_1
$f_2(x)$	0	1
$h(f_2(x))$	0.1	0.2

Prema prethodnom tvrđenju preslikavanje $\psi : \mathbf{4} \times \mathbf{2} \to I_w([0,1])$ *je definisano na sledeći način. Za svako* $(a,b) \in C_1 \times C_2$ *važi:*

$$\psi((x,y)) = \begin{cases} [g(f_1(x)), h(f_2(y))], & \text{za} \quad a \neq 1_{C_1} \text{ ili } b \neq 1_{C_2}, \\ [1,1], & \text{za} \quad a = 1_{C_1} \text{ i } b = 1_{C_2}. \end{cases}$$

Prema tome je, na primer, $\psi((a_3, b_1)) = [1,1]$, *a* $\psi((a_0, b_1)) = [g(f_1(a_0)), h(f_2(b_1))] = [0, 0.2]$. *Preslikavanje* ψ *je ilustrovano na slici* 4.3, *gde je prikazan dijagram mreže* $C_1 \times C_2 = \mathbf{4} \times \mathbf{2}$ *i mreže* $L_1 = \psi(\mathbf{4} \times \mathbf{2})$. *Odgovarajući elementi su obeleženi zatamnjenim kružićima, a strelicom je označeno preslikavanje najvećeg elemenata.*



Slika 4.3

Sada možemo dokazati sledeće tvrđenje primenom posledice 3.10 (str. 84) koja je dokazana u trećem poglavlju, a prema osobinama mreže $I_w([0,1])$ iznetim u drugom poglavlju.

Tvrđenje 4.6 *Mreža intervala* $I_w([0,1])$ *je konačno bi-prostorna*[3] *između ravna mreža.*

[3]Podsetimo se da je konačno bi-prostorna mreža mreža koja je konačno prostorna i dualno konačno prostorna.

Dokaz. Poznato je da je interval realnih brojeva $[0,1]$ kompletan, distributivni lanac. Mreža $[0,1] \times [0,1]$ je konačno bi-prostorna između ravna mreža. Zaista, prema lemi 3.6 i njenoj posledici 3.1 (str. 61), direktan proizvod $[0,1] \times [0,1]$ je kompletna i distributivna između ravna mreža, a prema posledici 3.9 (str. 81) mreža $[0,1] \times [0,1]$ je dualno konačno prostorna. Prema posledici dualnoj posledici 3.9 mreža $[0,1] \times [0,1]$ je konačno prostorna.

Iz dokaza teoreme 2.2 na str. 23, sledi da je mreža intervala $I_w([0,1]) = (I([0,1], \wedge, \vee)$ izomorfna sa podmrežom $(S, \wedge, \vee)$ mreže $([0,1] \times [0,1], \wedge, \vee)$, gde je $S = \{(a,b) \mid (a,b) \in [0,1] \times [0,1], a \leq b\}$, a operacije $\wedge$ i $\vee$ na mreži S su restrikcije operacija na mreži $[0,1] \times [0,1]$. Dakle, postoji injektivno preslikavanje f mreže $I_w([0,1]) = (I([0,1], \leq)$ pri kome su očuvani supremumi, pa mreža $I_w([0,1])$ ispunjava uslove posledice 3.10. Prema posledici 3.10 mreža $I_w([0,1])$ je dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža.
Pošto je S podmreža mreže $[0,1] \times [0,1]$, pri injektivnom preslikavanju f su očuvani i infimumi. Time mreža $I_w([0,1])$ ispunjava uslove teoreme dualne posledici 3.10, pa je mreža $I_w([0,1])$ konačno prostorna $\wedge$- između ravna mreža.

Time je dokazano da je mreža $I_w([0,1])$ između ravna, konačno bi-prostorna mreža.

□

Pošto je mreža $I_w([0,1])$ konačno bi-prostorna između ravna mreža, za mrežu intervala $I_w([0,1])$ postoje kompletni lanci C_1 i C_2 i injektivno preslikavanje u mrežu $C_1 \times C_2$ tako da su očuvani supremumi (posledica 3.10, str. 84) i postoje kompletni lanci C_1 i C_2 i injektivno preslikavanje u mrežu $C_1 \times C_2$ tako da su očuvani infimumi (tvrđenje dualno posledici 3.10). Prema dokazu teoreme 3.14 lanci C_1 i C_2 se dobijaju kompletiranjem lanaca $\wedge$- nerazloživih elemenata, na koje je izvršena particija poseta $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže $I_w([0,1])$. Pošto particija poseta $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže L na dva lanca u opštem slučaju nije jednoznačno određena, ni mreža $C_1 \times C_2$, koja je direktan proizvod odgovarajućih lanaca, u opštem slučaju nije jednoznačno određena.

Ipak, možemo primetiti da razlaganje poseta $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže $I_w([0,1])$ na dva disjunktna lanca jeste jednoznačno određeno.

Iz dokaza prethodnog tvrđenja sledi da postoji injektivno preslikavanje mreže $I_w([0,1])$ u mrežu $[0,1] \times [0,1]$ i da su pri tom preslikavanju očuvani supremumi i infimumi. Prema tome važi sledeća posledica teoreme 2.2 (str. 23) i posledice 3.10 (str. 84).

Posledica 4.1 *Neka je L kompletna mreža. Ako postoji injektivno preslikavanje f mreže $(L, \leq)$ u mrežu intervala $I_w([0,1])$ pri kom su očuvani supremumi, onda je L dualno konačno prostorna $\vee$- IR mreža.*

Dokaz. Neka je L kompletna mreža i neka je $f : L \to I_w([0,1])$ injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi. Prema dokazu teoreme 2.2 (str. 23), postoji injektivno preslikavanje $g : I_w([0,1]) \to [0,1] \times [0,1]$ pri kom su očuvani supremumi. Preslikavanje $h = g \circ f : L \to [0,1] \times [0,1]$ je injektivno kao kompozicija dva injektivna preslikavanja i takvo da su očuvani supremumi. Pošto je interval $[0,1]$ kompletan lanac, prema posledici 3.10, mreža L je dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža. □

Pre nego što formulišemo teoreme sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove za datu mrežu intervala $I_w(L)$, podsetimo se da sa M_L obeležavamo poset $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže L. Ako je L $\vee$- između ravna mreža, onda je $w(M_L) \leq 2$ i tada je M_L lanac ili se može predstaviti kao unija dva disjunktna lanca.

Teorema 4.11 *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X, i neka je data mreža intervala $I_w([0,1])$. Tada postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_w([0,1])$, čija je familija donjih nivo skupova $\mathcal{F}$, ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na preseke i sadrži X,*

2. *$\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ je dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža sa skupom $\wedge$-nerazloživih elemenata $M_{\mathcal{F}} = C'_1 \cup C'_2$ i lanci $C_i = C'_i \cup \{\bigwedge M \mid$ za svaki podskup $M \subseteq C'_i\}$ $(i = 1, 2)$ su sup-predstavljivi u $[0,1]$.*

Dokaz. $(\Longrightarrow)$ Neka je $\mu : X \to I_w([0,1])$ intervalno-vrednosni rasplinuti skup čija je familija donjih nivo skupova $\mathcal{F}$. Pošto su intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi mrežno vrednosni rasplinuti skupovi, na osnovu teoreme 4.9, na strani 96, važi uslov *1*.

Pošto poset $(\mathcal{F}, \subseteq)$ ima najveći element i zatvoren je u odnosu preseke, onda je $(\mathcal{F}, \subseteq)$ kompletna mreža. Prema *2*. uslovu teoreme 4.9, postoji injektivno preslikavanje f mreže $(\mathcal{F}, \subseteq)$ u mrežu $I_w([0,1])$, tako da su tim potapanjem očuvani svi supremumi. Prema posledici 4.1 (str. 104), $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ je dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža.

Pošto je $(\mathcal{F}, \subseteq)$ $\vee$- između ravna mreža, onda je širina poseta $\wedge$-nerazloživih elemenata $M_{\mathcal{F}}$ mreže $\mathcal{F}$ jedan ili dva. Zato posmatramo sledeća dva slučaja:

1.) Ako je $w(M_{\mathcal{F}}) = 2$, onda se $M_{\mathcal{F}}$ može predstaviti kao unija dva disjunktna lanca (teorema 1.19, str. 12). Neka je $M_{\mathcal{F}} = C'_1 \cup C'_2$ i neka su $C_i = C'_i \cup \{\bigwedge M \mid$ za svaki podskup $M \subseteq C'_i\}$ $(i = 1, 2)$ kompletni lanci. Sada je $f(C_1) = D_1$ i $f(C_2) = D_2$[4]. Iz kompletnosti lanaca C_1 i C_2 sledi njihova ograničenost. Neka su $0_{C_1}, 0_{C_2}$ redom, najmanji elementi lanaca C_1 i C_2. Pošto je preslikavanje f izotono, lanci D_i $(i = 1, 2)$ takođe imaju najmanje elemente $\mathbf{0_{D_1}}, \mathbf{0_{D_2}}$ redom, i važi $f(0_{C_i}) = \mathbf{0_{D_i}}$ $(i = 1, 2)$. Neka je preslikavanje $f_1 : D_1 \to [0,1]$ definisano na sledeći način. Za svaki element $[\underline{x}, \overline{x}] \in D_1$ važi

$$f_1([\underline{x}, \overline{x}]) = \frac{\underline{x} + \overline{x}}{2}, \text{ za } [\underline{x}, \overline{x}] \neq \mathbf{0_{D_1}} \quad \text{i} \quad f_1([\underline{x}, \overline{x}]) = 0, \text{ za } [\underline{x}, \overline{x}] = \mathbf{0_{D_1}}.$$

Preslikavanje $f_2 : D_2 \to [0,1]$ se definiše slično.

Preslikavanje f_1 je injektivno na lancu D_1. Zaista, ako su $[\underline{x}, \overline{x}]$ i $[\underline{y}, \overline{y}]$ različiti elementi lanca D_1, onda je $[\underline{x}, \overline{x}] < [\underline{y}, \overline{y}]$ ili $[\underline{y}, \overline{y}] < [\underline{x}, \overline{x}]$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $[\underline{x}, \overline{x}] < [\underline{y}, \overline{y}]$. Tada je ($\underline{x} < \underline{y}$ i $\overline{x} \leq \overline{y}$) ili ($\underline{x} \leq \underline{y}$ i $\overline{x} < \overline{y}$). Odatle sledi da je

$$\frac{\underline{x} + \overline{x}}{2} < \frac{\underline{y} + \overline{y}}{2} \quad \text{ili} \quad 0 < \frac{\underline{y} + \overline{y}}{2}.$$

[4]Preciznije, preslikavanje $f : C_1 \to I_w([0,1])$ je restrikcija preslikavanja $f : \mathcal{F} \to I_w([0,1])$ na lanac C_1.

Dakle, ako je $[\underline{x},\overline{x}] < [\underline{y},\overline{y}]$, onda je$f_1([\underline{x},\overline{x}]) < f_1([\underline{y},\overline{y}])$. Prema tome, preslikavanje f_1 je injektivno i izotono.

Pri ovako definisanom preslikavanju f_1 su očuvani supremumi. Zaista, za neprazan skup $S \subseteq D_1 \subseteq I_w([0,1])$ važi $\bigvee S = [\bigvee \underline{S}, \bigvee \overline{S}]$, gde je $\underline{S} = \{\underline{x} \mid [\underline{x},\overline{x}] \in S\}$, $\overline{S} = \{\overline{x} \mid [\underline{x},\overline{x}] \in S\}$ i $\bigvee S, \bigvee \underline{S}, \bigvee \overline{S}$ su supremumi skupova $S, \underline{S}, \overline{S}$, redom. Za sve $[\underline{x},\overline{x}] \in S$ važi $\underline{x} \leq (\underline{x}+\overline{x})/2 \leq \overline{x}$, pa je $\bigvee \underline{S} \leq \bigvee f_1(S) \leq \bigvee \overline{S}$, gde je $f_1(S) = \{(\underline{x}+\overline{x})/2 \mid [\underline{x},\overline{x}] \in S\}$. S druge strane važi $\bigvee \underline{S} \leq (\bigvee \underline{S} + \bigvee \overline{S})/2 \leq \bigvee \overline{S}$. Odatle sledi $\bigvee f_1(S) - (\bigvee \underline{S} + \bigvee \overline{S})/2 = 0$, pa je $\bigvee f_1(S) = (\bigvee \underline{S} + \bigvee \overline{S})/2 = f_1(\bigvee S)$. Po definiciji preslikavanja f_1 najmanji element lanca D_1 se preslikava na najmanji element intervala $[0,1]$, pa je time dokazano da su preslikavanjem f_1 očuvani svi supremumi.

Preslikavanje $f_1 \circ f : C_1 \to [0,1]$ je injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi, pa je time dokazano da je lanac C_1 sup-predstavljiv u $[0,1]$.

Slično se dokazuje da je preslikavanje $f_2 \circ f : C_2 \to [0,1]$ injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi, odnosno da je lanac C_2 sup-predstavljiv u $[0,1]$.

2.) Ako je $w(M_{\mathcal{F}}) = 1$, onda je mreža $\mathcal{F} = C_1$ lanac (lema 3.15, str. 79). Preslikavanjem $f : \mathcal{F} \to I_w([0,1])$ su očuvani supremumi, pa se najmanji element lanca $\mathcal{F} = C_1$ preslikava na najmanji element mreže $I_w([0,1])$, na interval $[0,0]$. Dakle, u ovom slučaju $[0,0] \in D_1 = f(C_1)$, pa je preslikavanje $f_1 : D_1 \to [0,1]$ definisano na sledeći način. Za svaki element $[\underline{x},\overline{x}] \in D_1$ važi

$$f_1([\underline{x},\overline{x}]) = \frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}.$$

Dalje dokaz sledi kao u slučaju 1).

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X koja zadovoljava uslove *1 – 2*. Iz uslova *1* sledi da je $(\mathcal{F}, \subseteq)$ kompletna mreža čiji je najveći element $1_{\mathcal{F}} = X$, a najmanji - presek svih elemenata familije. Prema teoremi 4.6 (str. 96) postoji mrežno-vrednosni rasplinuti skup $\mu'(x) = \cap(f \in \mathcal{F} \mid x \in f)$ čija je kolekcija donjih nivo skupova familija $\mathcal{F}$.

Pošto je $(\mathcal{F}, \subseteq)$ kompletna mreža, iz uslova *2* sledi da je poset $M_{\mathcal{F}}$ $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže $\mathcal{F}$ lanac ili da se može predstaviti kao unija dva lanca. Neka je $M_{\mathcal{F}} = C_1' \cup C_2'$. Prema posledici 3.10 (str. 84), iz uslova *2* sledi da postoji injektivno preslikavanje f mreže $(\mathcal{F}, \subseteq)$ u mrežu $C_1 \times C_2$ takvo da su očuvani supremumi, gde su kompletni lanci $C_i = C_i' \cup \{\bigwedge M \mid \text{ za svaki podskup } M \subseteq C_i'\}$ $(i = 1,2)$ za $M_{\mathcal{F}} = C_1' \cup C_2'$ (dokaz teoreme 3.14, str. 81). Za $w(M_{\mathcal{F}}) = 1$ je $C_1 = C_1' \cup \{\bigwedge M \mid \text{ za svaki podskup } M \subseteq C_1'\} = \mathcal{F}$, $C_2 = \emptyset \cup \bigwedge \emptyset = \{1_{\mathcal{F}}\}$. Primetimo da se najmanji element mreže $\mathcal{F}$ preslikava na najmanji element mreže $C_1 \times C_2$.

Prema tvrđenju 4.4 (str. 100), iz uslova *2* takođe sledi da postoji injektivno preslikavanje $\varphi : C_1 \times C_2 \to I_w([0,1])$ takvo da su supremumi očuvani.

Preslikavanje $\varphi \circ f : \mathcal{F} \to I_w([0,1])$ je injektivno kao kompozicija dva injektivna preslikavanje. Pri oba preslikavanja f i φ su očuvani supremumi, pa su supremumi očuvani i pri preslikavanju $\varphi \circ f$. Time su ispunjeni uslovi teoreme 4.9 (str. 96), pa postoji rasplinuti skup $\mu : X \to I_w([0,1])$ definisan sa $\mu(x) = \varphi(f(\mu'(x)))$ $(x \in X)$, čija familija donjih nivo skupova je upravo familija $\mathcal{F}$. Rasplinuti skup $\mu(x) = \varphi(f(\mu'(x)))$ je traženi intervalno-vrednosni rasplinuti skup.

□

Potreban i dovoljan uslov da unapred data familija skupova bude familija gornjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa su isti kao uslovi da data familija skupova bude familija donjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa.

Teorema 4.12 *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X, i neka je data mreža intervala $I_w([0,1])$. Potreban i dovoljan uslov da postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_w([0,1])$ čija je familija gornjih nivo skupova $\mathcal{F}$ su sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na preseke i sadrži X,*

2. *$\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ je dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža sa skupom $\wedge$-nerazloživih elemenata $M_{\mathcal{F}} = C_1' \cup C_2'$ i lanci $C_i = C_i' \cup \{\bigwedge M \mid$ za svaki podskup $M \subseteq C_i'\}$ $(i = 1, 2)$ su sup-predstavljivi u $[0,1]$.*

Dokaz. $(\Longrightarrow)$ Dokaz je dualan dokazu teoreme 4.11, pa ga ovde ne navodimo.

$(\Longleftarrow)$ Iz uslova *1* sledi da je mreža $\mathcal{F}^d = (\mathcal{F}, \supseteq)$ kompletna. Najveći element $1_{\mathcal{F}^d}$ mreže $\mathcal{F}^d$ je presek svih elemenata familije, a najmanji element je $0_{\mathcal{F}^d} = X$.

Iz uslova *2* sledi da je $\mathcal{F}^d$ konačno prostorna $\wedge$- između ravna mreža. Poset $\vee$- nerazloživih elemenata $J_{\mathcal{F}^d}$ mreže $\mathcal{F}^d = (\mathcal{F}, \supseteq)$ je dualan posetu $\wedge$- nerazloživih elemenata $M_{\mathcal{F}}$ mreže $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$, odnosno $J_{\mathcal{F}^d} = M_{\mathcal{F}}^d = C_1'^d \cup C_2'^d$. Pošto je $\mathcal{F}^d$ $\wedge$- između ravna mreža $C_1'^d$ i $C_2'^d$ su disjunktni neprazni lanci ako je $w(J_{\mathcal{F}^d}) = 2$, a ako je $w(J_{\mathcal{F}^d}) = 1$, onda je $C_1'^d \neq \emptyset$ i $C_2'^d = \emptyset$.

Prema uslovu *2* takođe su kompletni lanci C_i^d $(i = 1, 2)$ inf-predstavljivi u $[0,1]$. Prema tvrđenju dualnom teoremi 3.12 (str. 80), postoje lanci C_1, C_2 i potapanje g mreže $(\mathcal{F}, \supseteq)$ u mrežu $C_1 \times C_2$ takvo da su očuvani infimumi, pa prema tome i najveći element.

Prema lemi 4.5 (str. 102) postoji injektivno preslikavanje $\psi : C_1 \times C_2 \to I_w([0,1])$ koje zadovoljava uslove teoreme 4.3 (str. 94). Konačno, preslikavanje $\psi \circ g$ je potapanje koje ispunjava uslov *2* teoreme 4.4 (str. 95), pa postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_w([0,1])$, definisan sa $\mu(x) = \psi(g(\cap\{f \in \mathcal{F} \mid x \in f\}))$ za svako $x \in X$, čija familija gornjih nivo skupova je upravo familija $\mathcal{F}$.

□

Primer 4.2 *Posmatrajmo familiju skupova $\mathcal{F} = \{\{a,b,c,d\}, \{a,b,d\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{b\}, \emptyset\}$, koja je konačna $\vee$- između ravna mreža, pa prema tome i dualno konačno prostorna. Prema prethodnoj teoremi, postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu(x) = \psi(g(\cap\{f \in \mathcal{F} \mid x \in f\}))$ za svako $x \in X$, takav da je $\mathcal{F}$ familija njegovih gornjih nivo skupova. U prvom* *koraku, svaki element $x \in X$ se preslikava na element $\cap\{f \in \mathcal{F} \mid x \in f\}$ familije $\mathcal{F}$. Odgovarajuće preslikavanje je dato sledećom tabelom.*

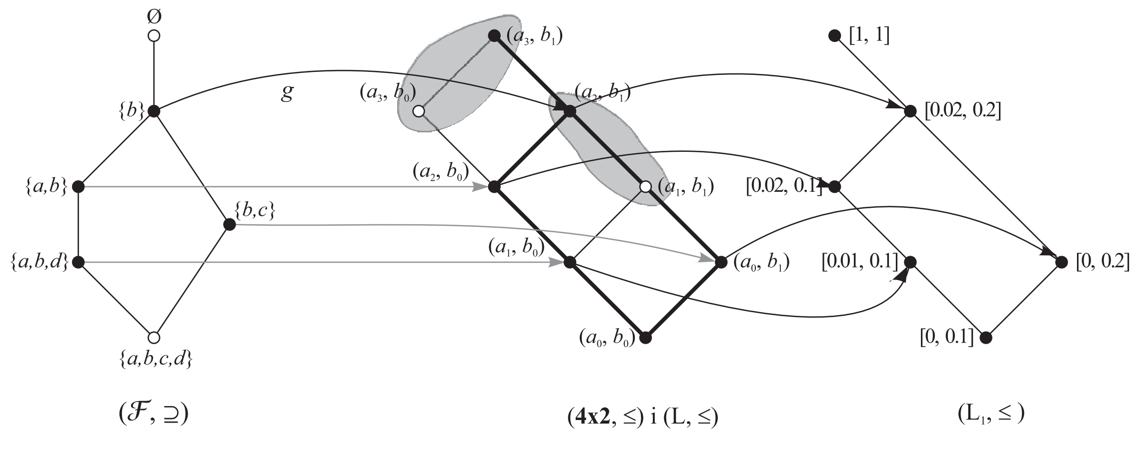
X	a	b	c	d
$\cap\{f \in \mathcal{F} \mid x \in f\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,d\}$

Poset $\vee$- nerazloživih elemenata mreže $(\mathcal{F}, \supseteq)$ je $J_{\mathcal{F}} = M^d_{\mathcal{F}} = \{\emptyset, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,b,d\}\}$. Jedna od mogućih particija poseta $J_{\mathcal{F}}$ na dva disjunktna lanca je $C_1' = \{\emptyset, \{a,b\}, \{a,b,d\}\}$ i $C_2' = \{\{b,c\}\}$. Prema dokazu teoreme 4.12 kompletni lanci C_1 i C_2 su $C_1 = \{\{a,b,c,d\}, \{a,b,d\}, \{a,b\}, \emptyset\}$ i $C_2 = \{\{a,b,c,d\}, \{b,c\}\}$. Lanci $C_1 = (C_1, \supseteq)$ i $C_2 = (C_2, \supseteq)$ su redom izomorfni sa lancima $\mathbf{4} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ i $\mathbf{2} = \{b_0, b_1\}$. Ovi izomorfizmi su dati sledećim tabelama:

C_1	$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$
$\mathbf{4}$	a_0	a_1	a_2	a_3

C_1	$\{a,b,c,d\}$	$\{b,c\}$
$\mathbf{2}$	b_0	b_1

Prema teoremi dualnoj teoremi 3.12 (str. 80) tada, na primer, elementu $\{b\} = \{a,b\} \vee \{b,c\}$ odgovara element $(a_2, b_1) \in \mathbf{4} \times \mathbf{2}$ (slika 4.4).



Slika 4.4

Potapanje g mreže $(\mathcal{F}, \supseteq)$ u mrežu $\mathbf{4} \times \mathbf{2}$, ilustrovano na slici 4.4, dato je sledećom tabelom.

$\mathcal{F}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b,d\}$	$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{b\}$	$\emptyset$
$g(X)$	(a_0, b_0)	(a_1, b_0)	(a_2, b_0)	(a_0, b_1)	(a_2, b_1)	(a_3, b_1)

Na mreži $\mathbf{4} \times \mathbf{2}$ *zatamnjenim kružićima predstavljeni su elementi mreže* $g(\mathcal{F}) = L \subseteq \mathbf{4} \times \mathbf{2}$. *U tom slučaju postoji operator zatvaranja* $C : \mathbf{4} \times \mathbf{2} \to \mathbf{4} \times \mathbf{2}$ *definisan sa* $C((a,b)) = \bigwedge\{(c,d) \in L \mid (a,b) \leq (c,d)\}$ *(teorema 1.14, str. 11). Mreža zatvorenih elemenata je upravo mreža* L*, a na slici* 4.4 *su zaokruženi elementi koji imaju istu sliku (pripadaju istoj klasi ekvivalencije u odnosu na operator zatvaranja* C*).*

Potapanje mreže $\mathbf{4} \times \mathbf{2}$ *u* $I_w([0,1])$ *opisano je u prethodnom primeru 4.1 (str. 102). Prema primeru 4.1 važi, na primer* $\psi((a_2, b_0)) = [0.02, 0.1]$. *Tada je* $\mu(a) = \psi(g(\{a,b\})) = \psi(((a_2, b_0)) = [0.02, 0.1]$.

Odgovarajući intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu(x) = \psi(g(\cap\{f \in \mathcal{F} \mid x \in f\})) = L_1 \subseteq I_w([0,1])$ *dat je sledećom tabelom:*

X	a	b	c	d
$\mu(x)$	$[0.02, 0.1]$	$[0.02, 0.2]$	$[0, 0.2]$	$[0.01, 0.1]$

Na slici 4.4 su prikazana preslikavanja $g : \mathcal{F} \to \mathbf{4} \times \mathbf{2}$ i $\psi : \mathbf{4} \times \mathbf{2} \to L_1 \subseteq I_w([0,1])$. U prvoj tabeli je određeno preslikavanje elemenata skupa X u mrežu $\mathcal{F}$, a na slici 4.4 su strelicama povezani odgovarajući elementi mreže $\mathcal{F}$ sa svojim slikama u mreži $\mathbf{4} \times \mathbf{2}$, a preko njih i sa slikama u mreži $L_1 \subseteq I_w([0,1])$.

4.5 Teoreme sinteze za datu mrežu $I_i([0,1])$

Pošto problem sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove rešavamo indirektno i pošto je rešavanje ovog problema za datu mrežu $I_i([0,1])$ slično rešavanju odgovarajućeg problema za datu mrežu $I_w([0,1])$, dokažimo prvo da za svaka dva disjunktna kompletna lanca C_1 i C_2, koja su sup-predstavljiva u $[0,1]$, postoji injektivno preslikavanje mreže $C_1 \times C_2$ u mrežu $I_i([0,1])$ tako da su očuvani supremumi (ili da su očuvani infimumi).

Tvrđenje 4.7 *Neka su* C_1 *i* C_2 *disjunktni, kompletni lanci koji su sup-predstavljivi u* $[0,1]$. *Tada postoji injektivno preslikavanje* φ *mreže* $C_1 \times C_2$ *u mrežu* $I_i([0,1])$ *takvo da su supremumi očuvani.*

Dokaz. Iz činjenice da su lanci C_1 i C_2 sup-predstavljivi u $[0,1]$ sledi da postoje injektivna preslikavanja $f_i : C_i \to [0,1]$ $(i = 1,2)$ pri kojima su očuvani supremumi, pa važi $f_i(0_{C_i}) = 0$ za $i = 1,2$.

Slično kao u dokazu tvrđenja 4.4 (str. 100) definišemo injektivna preslikavanja $g : [0,1] \to [0,a]$ i $h : [0,1] \to [a, 2 \cdot a]$, $a \in (0, 0.5]$, pri kojima su očuvani supremumi i infimumi, na sledeći način: za svako $x \in [0,1]$ važi $g(x) = a \cdot x$ i $h(x) = a + a \cdot x$.
Dalje, definišemo injektivno preslikavanje $g_1 : [0,1] \to [0,1]$ na sledeći način:
Za svako $x \in [0,1]$ važi $g_1(x) = 1 - x$. Očigledno je da za preslikavanje g_1 važi $g_1(\bigvee M) = \bigwedge g_1(M)$ za svaki skup $M \subseteq [0,1]$[5].

[5]Preslikavanje $g_1(x) = 1 - x$ je linearna, monotono opadajuća funkcija, pa se lanac $[0,1]$ preslikava u dualni lanac $[0,1]$.

Neka su preslikavanja $\varphi_1 = g \circ g_1 \circ f_1 : C_1 \to [0, a]$ i $\varphi_2 = h \circ f_2 : C_2 \to [a, 2 \cdot a]$. Istaknimo da su preslikavanja φ_1 i φ_2 injektivna i da važi $\varphi_1(\bigvee M) = \bigwedge(\varphi_1(M))$, za svaki skup $M \subseteq C_1$ i $\varphi_2(\bigvee S) = \bigvee(\varphi_2(S))$, za svaki skup $S \subseteq C_2$.

Sada možemo definisati preslikavanje $\varphi : C_1 \times C_2 \to I_i([0,1])$ na sledeći način.
Za svako $(x, y) \in C_1 \times C_2$ važi

$$\varphi((x,y)) = \begin{cases} [\varphi_1(x), \varphi_2(y)], & \text{za} \quad x \neq 0_{C_1} \quad \textit{ili} \quad y \neq 0_{C_2}, \\ \emptyset, & \text{za} \quad x = 0_{C_1} \quad \textit{i} \quad y = 0_{C_2}. \end{cases}$$

Preslikavanje φ je definisano tako da je ispunjen uslov da se najmanji element mreže $C_1 \times C_2$ preslikava na najmanji element mreže $I_i([0,1])$. Preslikavanje φ je dobro definisano i injektivno.

Ostaje još da se dokaže da su preslikavanjem φ očuvani supremumi.
Neka je M proizvoljan neprazan podskup mreže $C_1 \times C_2$ i neka je $\underline{M} = \{x \mid (x, y) \in M\} \subseteq C_1$ i $\overline{M} = \{y \mid (x, y) \in M\} \subseteq C_2$. Supremume skupova $M, \underline{M}$ i $\overline{M}$ obeležavamo redom sa $\bigvee M, \bigvee \underline{M}$ i $\bigvee \overline{M}$. Tada važi: $\varphi(\bigvee_{C_1 \times C_2} M) = [\varphi_1(\bigvee_{C_1} \underline{M}), \varphi_2(\bigvee_{C_2} \overline{M})]$. Dalje je $[\varphi_1(\bigvee_{C_1} \underline{M}), \varphi_2(\bigvee_{C_2} \overline{M})] = [\bigwedge_{[0,a]} \varphi_1(\underline{M}), \bigvee_{[a,2\cdot a]} \varphi_2(\overline{M})] = \bigvee_{I_i([0,1])} \varphi(M)$.

Time je dokazano da su preslikavanjem φ očuvani supremumi, odnosno preslikavanje φ je saglasno sa operacijom $\vee$ mreže $I_i([0,1])$, pa je φ traženo preslikavanje mreže $C_1 \times C_2$ u mrežu $I_i([0,1])$.

$\square$

Formulišimo i dualno tvrđenje.

Tvrđenje 4.8 *Neka su C_1 i C_2 disjunktni, kompletni lanci koji su inf-predstavljivi u $[0,1]$. Tada postoji injektivno preslikavanje $\psi : C_1 \times C_2 \to I_i([0,1])$ takvo da su infimumi očuvani.*

Dokaz. Dokaz je dualan dokazu prethodnog tvrđenja. Ovde ćemo dati samo definicije odgovarajućih preslikavanja.

Neka je $a \in (0, 0.5]$ i neka su preslikavanja g, h, g_1, ψ_1 i ψ_2 definisana na sledeći način:

1.) $g : [0,1] \to [0,a]$, $g(x) = a \cdot x$,

2.) $h : [0,1] \to [1-a, 1]$, $h(x) = 1 - a + a \cdot x$,

3.) $g_1 : [0,1] \to [0,1]$, $g_1(x) = 1 - x$,

4.) $\psi_1 : C_1 \to [0,a]$, $\psi_1 = g \circ g_1 \circ f_1$,

5.) $\psi_2 : C_2 \to [1-a, 1]$, $\psi_2 = h \circ f_2$,

gde su $f_i : C_i \to [0,1]$ $(i = 1, 2)$ data injektivna preslikavanja pri kojima su očuvani infimumi.

Preslikavanje ψ definišemo na sledeći način:

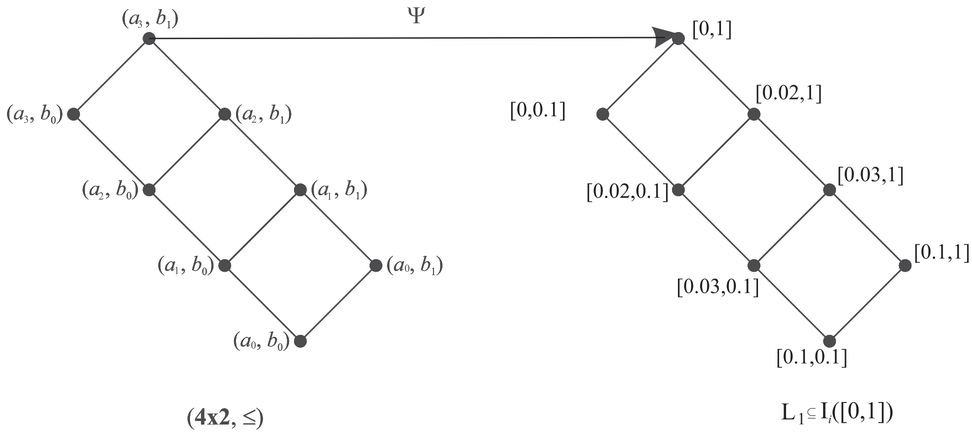
$$\psi((x,y)) = [\psi_1(x), \psi_2(y)],$$

za svako $(x,y) \in C_1 \times C_2$. $\square$

Primer 4.3 *Neka su $C_1 = \mathbf{4}$ i $C_2 = \mathbf{2}$ lanci čiji su elementi redom $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$ i $b_0 < b_1$. S obzirom na to da su lanci C_1, C_2 konačni, oni su inf-predstavljivi u $[0,1]$. Preslikavanja $f_i : C_i \to [0,1]$ $(i = 1,2)$ biramo proizvoljno tako da su infimumi očuvani, što u konačnom slučaju znači da su preslikavanja izotona. Preslikavanja f_1, f_2, $g(x) = 0.1 \cdot x$, $h(x) = 0.9 + 0.1 \cdot x$, $g_1 = 1 - x$, ψ_1 i ψ_2 su data sledećim tabelama:*

C_1	a_0	a_1	a_2	a_3
$f_1(x)$	0	0.7	0.8	1
$g_1(f_1(x))$	1	0.3	0.2	0
$\psi_1(x)$	0.1	0.03	0.02	0

C_2	b_0	b_1
$f_2(x)$	0	1
$\psi_2(x)$	0.9	1



Slika 4.5

Prema prethodnom tvrđenju preslikavanje $\psi : \mathbf{4}\times\mathbf{2} \to I_i([0,1])$ je definisano sa $\psi((x,y)) = [\psi_1(x), \psi_2(y)]$, za svako $(x,y) \in C_1 \times C_2$.

Prema tome je, na primer, $\psi((a_0,b_1)) = [0.1,1]$, a $\psi((a_3,b_1)) = [0,1]$. Preslikavanje ψ je ilustrovano na slici 4.5, gde je prikazan dijagram mreže $C_1 \times C_2$ i mreže $L_1 = \psi(C_1 \times C_2) \subseteq I_i([0,1])$, a strelicom je označeno preslikavanje najvećeg elemenata.

U drugom poglavlju smo dokazali da je mreža intervala $I_i([0,1]) = (I_\perp([0,1]), \leq_i)$ uređena nepreciznim poretkom (str. 20) gde je $I_\perp([0,1]) = I([0,1]) \cup \{\emptyset\}$, kompletna mreža, čiji je najmanji element $\emptyset$, a najveći element $[0,1]$. Mreža $I_i([0,1])$ nije komplementirana, nije modularna (tvrđenje 2.15, str. 32), pa prema tome nije ni distributivna.

U trećem poglavlju smo dokazali (lema 3.5 na str. 59) da je $I_i([0,1])$ $\vee$- između ravna mreža. Anti-lanac atoma mreže $I_i([0,1])$ je ograničen intervalima $\mathbf{0} = [0,0]$ i $\mathbf{1} = [1,1]$

(primer 3.5, str. 68). Prema teoremi 2.4 (str. 33) mreža $I_i([0,1])$ je atomarno generisana, pa odatle sledi da je mreža $I_i([0,1])$ $\vee$- generisana skupom $\overline{\mathbf{01}}$- neuporedivih[6], odnosno da je $I_i([0,1]) = L_{\overline{\mathbf{01}}}$, gde je $L = [0,1]$. Dakle, mreža $I_i([0,1])$ ispunjava uslove teoreme 3.17 (str. 86), pa je dualno konačno prostorna. Prema tome postoje kompletni lanci C_1, C_2 i injektivno preslikavanje $\phi : I_i([0,1]) \to C_1 \times C_2$ takvo da su supremumi očuvani (posledica 3.10, str. 84).

Sada možemo formulisati teoremu sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove ako je unapred zadata mreža intervala $I_i([0,1])$.

Teorema 4.13 *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X, i neka je data mreža intervala $I_i([0,1])$. Tada postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_i([0,1])$, čija je familija donjih nivo skupova $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$, ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na preseke i sadrži X,*

2. *$\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ je dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža sa skupom $\wedge$- nerazloživih elemenata $M_{\mathcal{F}} = C_1' \cup C_2'$ i lanci $C_i = C_i' \cup \{\bigwedge M \mid$ za svaki podskup $M \subseteq C_i'\}$ $(i = 1, 2)$ su sup-predstavljivi u $[0,1]$.*

Dokaz. $(\Longrightarrow)$ Neka je $\mu : X \to I_i([0,1])$ intervalno-vrednosni rasplinuti skup čija je familija donjih nivo skupova $\mathcal{F}$. Pošto su intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi mrežno vrednosni rasplinuti skupovi, na osnovu teoreme 4.9 (str. 96), važi uslov *1.*

Pošto poset $(\mathcal{F}, \subseteq)$ ima najveći element i zatvoren je u odnosu preseke, onda je $(\mathcal{F}, \subseteq)$ kompletna mreža. Prema *2.* uslovu teoreme 4.9, postoji injektivno preslikavanje f mreže $(\mathcal{F}, \subseteq)$ u mrežu $I_i([0,1])$, tako da su tim potapanjem očuvani svi supremumi. Prema teoremi 3.17 i posledici 3.10 postoje kompletni lanci $C_1 = C_1' \cup \{\bigwedge M \mid$ za svaki podskup $M \subseteq C_1'\}$, $C_2 = C_2' \cup \{\bigwedge M \mid$ za svaki podskup $M \subseteq C_2'\}$ i injektivno preslikavanje $\phi : I_i([0,1]) \to C_1 \times C_2$ takvo da su supremumi očuvani, gde su C_i' $(i = 1, 2)$ lanci $\wedge$- nerazloživih elemenata mreže $I_i([0,1])$. Odatle sledi da je $\phi \circ f$ injektivno preslikavanje mreže $(\mathcal{F}, \subseteq)$ u mrežu $C_1 \times C_2$, tako da su tim potapanjem očuvani svi supremumi. Prema posledici 3.10, odatle sledi da je $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža.

Dalje je dokaz sličan dokazu teoreme 4.11 (str. 105), pa ovde navodimo razlike i ponavljamo delove dokaza koji su neophodni.

1.) Neka je $w(M_{\mathcal{F}}) = 2$ i $M_{\mathcal{F}} = C_1' \cup C_2'$. Neka su $C_i = C_i' \cup \{\bigwedge M \mid$ za svaki podskup $M \subseteq C_i'\}$ $(i = 1, 2)$ kompletni lanci i $f(C_1) = D_1$ i $f(C_2) = D_2$, gde je $f : C_i \to D_i$ $(i = 1, 2)$ restrikcija preslikavanja $f : \mathcal{F} \to I_i([0,1])$ na lance C_1 i C_2 redom. Podsetimo se da je $f(0_{C_i}) = \mathbf{0_{D_i}}$ $(i = 1, 2)$ gde su $0_{C_1}, 0_{C_2}$ redom, najmanji elementi lanaca

[6] Podsetimo se da je skup $\overline{ab}$- neuporedivih definisan na strani 69 (definicija 3.6) kao skup svih elemenata koji uz elemente a i b sadrži i skup svih elemenata date mreže koji su neuporedivi sa a i b, pri čemu su a i b granice nekog maksimalnog ograničenog anti-lanca.

C_1 i C_2, a $\mathbf{0_{D_1}}, \mathbf{0_{D_2}}$ najmanji elementi lanaca D_1 i D_2 redom. Neka je preslikavanje $f_1 : D_1 \longrightarrow [0,1]$ definisano na sledeći način. Za svaki element $[\underline{x}, \overline{x}] \in D_1$ važi

$$f_1([\underline{x}, \overline{x}]) = \overline{x} - \underline{x}, \text{ za } [\underline{x}, \overline{x}] \neq \mathbf{0_{D_1}} \quad \text{i} \quad f_1([\underline{x}, \overline{x}]) = 0, \text{ za } [\underline{x}, \overline{x}] = \mathbf{0_{D_1}}.$$

Preslikavanje $f_2 : D_2 \longrightarrow [0,1]$ se definiše slično.

Preslikavanje f_1 je dobro definisano i injektivno na lancu D_1. Zaista, $0 \leq \overline{x} - \underline{x} \leq 1$. Ako su $[\underline{x}, \overline{x}]$ i $[\underline{y}, \overline{y}]$ različiti elementi lanca D_1, onda je $[\underline{x}, \overline{x}] < [\underline{y}, \overline{y}]$ ili $[\underline{y}, \overline{y}] < [\underline{x}, \overline{x}]$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $[\underline{x}, \overline{x}] < [\underline{y}, \overline{y}]$. Tada je ($\underline{x} > \underline{y}$ i $\overline{x} \leq \overline{y}$) ili ($\underline{x} \geq \underline{y}$ i $\overline{x} < \overline{y}$). Odatle sledi da je $\overline{x} - \underline{x} < \overline{y} - \underline{y}$ ili $0 < \overline{y} - \underline{y}$. Dakle, ako je $[\underline{x}, \overline{x}] < [\underline{y}, \overline{y}]$, onda je$f_1([\underline{x}, \overline{x}]) < f_1([\underline{y}, \overline{y}])$. Prema tome, preslikavanje f_1 je injektivno i izotono.

Pri ovako definisanom preslikavanju f_1 su očuvani supremumi. Za neprazan skup $S \subseteq D_1 \subseteq I_i([0,1])$ važi $\bigvee S = [\bigwedge \underline{S}, \bigvee \overline{S}]$, gde je $\underline{S} = \{\underline{x} \mid [\underline{x}, \overline{x}] \in S\}$, $\overline{S} = \{\overline{x} \mid [\underline{x}, \overline{x}] \in S\}$, $\bigvee S$ i $\bigvee \overline{S}$ su supremumi skupova S i $\overline{S}$, redom, a $\bigwedge \underline{S}$ infimum skupa $\underline{S}$. Tada je $f_1(\bigvee S) = f_1([\bigwedge \underline{S}, \bigvee \overline{S}]) = \bigvee \overline{S} - \bigwedge \underline{S}$. S druge strane je $\bigvee f(S) = \bigvee \{\overline{x} - \underline{x} \mid [\underline{x}, \overline{x}] \in S\} = \bigvee \overline{S} - \bigwedge \underline{S}$, što se dokazuje tehnikama realne analize. Dakle, $\bigvee f_1(S) = f_1(\bigvee S)$.

Po definiciji preslikavanja f_1 najmanji element lanca D_1 se preslikava na najmanji element intervala $[0,1]$, pa je time dokazano da su preslikavanjem f_1 očuvani svi supremumi.

Preslikavanje $f_1 \circ f : C_1 \longrightarrow [0,1]$ je injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi, pa je time dokazano da je lanac C_1 sup-predstavljiv u $[0,1]$.

Slično se dokazuje da je preslikavanje $f_2 \circ f : C_2 \longrightarrow [0,1]$ injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi, odnosno da je lanac C_2 sup-predstavljiv u $[0,1]$.

2.) Ako je $w(M_{\mathcal{F}}) = 1$, onda je mreža $\mathcal{F} = C_1$ lanac (lema 3.15, str. 79). Preslikavanjem $f : \mathcal{F} \longrightarrow I_w([0,1])$ su očuvani supremumi, pa se najmanji element lanca $\mathcal{F} = C_1$ preslikava na najmanji element mreže $I_w([0,1])$, na interval $[0,0]$. Dakle, u ovom slučaju $[0,0] \in D_1 = f(C_1)$, pa je preslikavanje $f_1 : D_1 \longrightarrow [0,1]$ definisano sa $f_1([\underline{x}, \overline{x}]) = \overline{x} - \underline{x}$ za svaki element $[\underline{x}, \overline{x}] \in D_1$.

($\Longleftarrow$) Pretpostavimo da je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X koja zadovoljava uslove *1* $-$ *3*. Iz uslova *1* sledi da je $(\mathcal{F}, \subseteq)$ kompletna mreža čiji je najveći element X, a najmanji $\bigcap \mathcal{F}$. Prema teoremi 4.6 (str. 96) postoji mrežno-vrednosni rasplinuti skup $\mu'(x) = \cap(f \in \mathcal{F} \mid x \in f)$ čija je kolekcija donjih nivo skupova familija $\mathcal{F}$.

Iz uslova *2* sledi da se poset $\wedge$- nerazloživih elemenata $M_{\mathcal{F}}$ mreže $\mathcal{F}$ može predstaviti kao unija dva lanca ili je lanac. Neka je $M_{\mathcal{F}} = C_1' \cup C_2'$, gde je $C_2' = \emptyset$ ako je Prema posledici 3.10 (str. 84), iz uslova *2* sledi da postoji injektivno preslikavanje f mreže $(\mathcal{F}, \subseteq)$ u mrežu $C_1 \times C_2$ takvo da su očuvani supremumi, gde su kompletni lanci $C_i = C_i' \cup \{\bigwedge M \mid$ za svaki podskup $M \subseteq C_i'\}$ $(i = 1, 2)$ za $M_{\mathcal{F}} = C_1' \cup C_2'$ (dokaz teoreme 3.14, str. 81). Za

$w(M_{\mathcal{F}}) = 1$ je $C_1 = C_1' \cup \{\bigwedge M \mid \text{ za svaki podskup } M \subseteq C_1'\} = \mathcal{F}$, $C_2 = \emptyset \cup \bigwedge \emptyset = \{1_{\mathcal{F}}\}$. Primetimo da se najmanji element mreže $\mathcal{F}$ preslikava na najmanji element mreže $C_1 \times C_2$.

Prema tvrđenju 4.7 (str. 109), iz uslova *2* sledi da postoji injektivno preslikavanje $\varphi : C_1 \times C_2 \to I_i([0,1])$ tako da su očuvani supremumi.

Preslikavanje $\varphi \circ f : \mathcal{F} \to I_i([0,1])$ je injektivno i ispunjava uslove teoreme 4.9 (str. 96), pa postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_i([0,1])$ definisan sa $\mu(x) = \varphi(f(\mu'(x)))$ $(x \in X)$, čija familija donjih nivo skupova je upravo familija $\mathcal{F}$. Rasplinuti skup $\mu(x) = \varphi(f(\mu'(x)))$ je traženi intervalno-vrednosni rasplinuti skup.

$\square$

Dokaz sledeće teoreme je dualan dokazu dovoljnih uslova u prethodnoj teoremi, pa je navodimo bez dokaza.

Teorema 4.14 *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X, i neka je data mreža intervala $I_i([0,1])$. Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova nepraznog skupa X takva da su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na preseke i sadrži X,*
2. *$\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ je dualno konačno prostorna $\vee$- između ravna mreža sa skupom $\wedge$-nerazloživih elemenata $M_{\mathcal{F}} = C_1' \cup C_2'$ i lanci $C_i = C_i' \cup \{\bigwedge M \mid \text{ za svaki podskup } M \subseteq C_i'\}$ $(i = 1, 2)$ su sup-predstavljivi u $[0,1]$.*

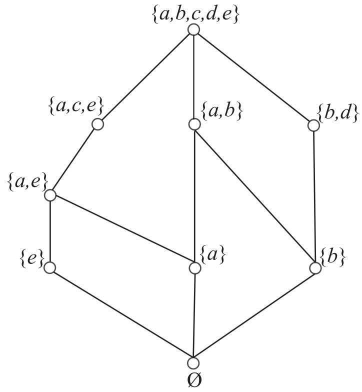
Tada postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_i([0,1])$ čija je familija gornjih nivo skupova $\mathcal{F}$.

Pošto je mreža $I_i([0,1])$ je atomarno generisana, a njeni atomi su ujedno i jedini $\vee$-nerazloživi elementi, onda je mreža $I_i([0,1])$ konačno prostorna, ali nije $\wedge$- između ravna (lema 3.5), pa prema tvrđenju dualnom posledici 3.10, ne postoje kompletni lanci C_1 i C_2 takvi da se mreža $I_i([0,1])$ može injektivno preslikati u mrežu $C_1 \times C_2$ tako da su infimumi očuvani. Zbog toga, teoremu sinteze možemo formulisati samo za familiju donjih nivo skupova intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to I_i([0,1])$, dok odgovarajuće tvrđenje za familiju gornjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to I_i([0,1])$ ne važi, što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 4.4 *Neka je $\mu : X \to I_i([0,1])$ intervalno-vrednosni rasplinuti skup koji je dat sledećom tabelom.*

x	a	b	c	d	e
$\mu(x)$	$[0.3, 0.5]$	$[0.1, 0.3]$	$[0.5, 0.5]$	$[0.2, 0.2]$	$[0.4, 0.6]$

Na slici 4.6 *ilustrovan je dijagram mreže $(F_\mu, \subseteq)$ gde je familija gornjih nivo skupova datog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa μ familija*
$F_\mu = \{\{a,b,c,d,e\}, \{a,c,e\}, \{a,b\}, \{a,e\}, \{b,d\}, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \emptyset\}$.
Na dijagramu na slici 4.6 *se jasno uočava da mreža $(F_\mu, \subseteq)$ nije ni $\vee$- između ravna niti $\wedge$- između ravna mreža. Zaista, vidi se da skupovi $\wedge$- nerazloživih elemenata, kao i $\vee$-nerazloživih elemenata imaju širinu* 3.



Slika 4.6

Prema prethodnom primeru, problem pronalaženja potrebnih uslova da familija podskupova nepraznog skupa X bude familija gornjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to I_i([0,1])$ nije ekvivalentan problemu pronalaženja potrebnih uslova da se mreža potopi u direktan proizvod dva lanca. Dakle, za određivanje potrebnih i dovoljnih uslova da unapred zadata kolekcija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa X bude kolekcija donjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa za datu mrežu intervala $I_i([0,1])$, potrebno je pronalaženje drugog načina, što zahteva dodatno istraživanje.

Time rešavanje ovog problema izlazi iz okvira ovog rada, te ga ostavljamo kao otvoren problem.

4.6 Teoreme sinteze za datu mrežu $I_l([0,1])$

Jedinični interval realnih brojeva $[0,1]$ je ograničena, kompletna i linearno uređena mreža. Prema teoremi 2.21 (str. 39) odatle sledi da je poset intervala $I_l([0,1]) = (I([0,1]), \leq_l)$ mreža. Mreža $I_l([0,1])$ je kompletna (tvrđenje 2.22, str. 40) i linearno uređena (posledica 2.7, str. 40).

Ako je $I_l([0,1])$ data kompletna mreža intervala, onda je potreban i dovoljan uslov da unapred zadata kolekcija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa X bude kolekcija donjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to I_l([0,1])$ isti kao u teoremi 4.9 (str. 96).

Slično, potreban i dovoljan uslov da unapred zadata kolekcija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa X bude kolekcija gornjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to I_l([0,1])$ je isti kao u teoremi 4.4 (str. 95), pa sledeće teoreme navodimo zbog kompletnosti rezultata, bez dokaza.

Teorema 4.15 *Neka je* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *familija podskupova nepraznog skupa* X *i neka je data mreža intervala* $I_l([0,1])$*. Tada postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup* $\mu : X \to I_l([0,1])$ *čija je familija donjih nivo skupova* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ *ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na preseke i sadrži X,*

2. *Postoji injektivno preslikavanje $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ u mrežu $I_l([0,1])$ pri kom su očuvani supremumi.*

Teorema 4.16 *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X i neka je data mreža intervala $I_l([0,1])$. Tada postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_l([0,1])$ čija je familija gornjih nivo skupova $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na preseke i sadrži X,*

2. *Postoji injektivno preslikavanje $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ u mrežu $I_l([0,1])$ pri kom su očuvani supremumi.*

U nastavku navodimo i neke dovoljne uslove za egzistenciju intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to I_l([0,1])$ sa unapred zadatom familijom donjih nivo skupova.

Teorema 4.17 *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X i neka je data mreža intervala $I_l([0,1])$. Tada postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_l([0,1])$ čija je familija donjih nivo skupova $\mathcal{F}$ ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na preseke i sadrži X,*

2. *$\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ je lanac koji je sup-predstavljiv u $[0,1]$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X koja ispunjava uslove *1* i *2* i neka je data mreža intervala $I_l([0,1])$.

Iz *1*. uslova sledi da je $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ kompletna mreža čiji je najmanji element presek familije $\mathcal{F}$, u oznaci $\bigcap \mathcal{F}$, a najveći element je dati skup X.

Prema *2*. uslovu $\mathcal{F}$ je lanac i sup-predstavljiv u $[0,1]$, pa postoji injektivno preslikavanje $g : \mathcal{F} \to [0,1]$ takvo da su očuvani supremumi. Preslikavanje $\varphi : \mathcal{F} \to I_l([0,1])$ definišemo na sledeći način.
Za svako $x \in \mathcal{F}$ neka je

$$\varphi(x) = \begin{cases} [g(x), 1], & \text{za} \quad x \neq \bigcap \mathcal{F}, \\ [0,0], & \text{za} \quad x = \bigcap \mathcal{F}. \end{cases}$$

Preslikavanje φ je očigledno dobro definisano, injektivno i očuvani su supremumi.

Dakle, preslikavanje φ je injektivno preslikavanje poseta $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ u mrežu $I_l([0,1])$, pri kome su očuvani supremumi, pa, prema teoremi 4.9, postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_l([0,1])$ čija je familija donjih nivo skupova data familija $\mathcal{F}$.

□

Sledeću teoremu, u kojoj dajemo neke dovoljne uslove za egzistenciju intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to I_l([0,1])$ sa unapred zadatom familijom gornjih nivo skupova, navodimo bez dokaza, imajući u vidu da je njen dokaz sličan dokazu teoreme 4.17.

Teorema 4.18 *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ familija podskupova nepraznog skupa X i neka je data mreža intervala $I_l([0,1])$. Tada postoji intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_l([0,1])$ čija je familija gornjih nivo skupova $\mathcal{F}$ ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ je zatvorena u odnosu na preseke i sadrži X,*
2. *$\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \subseteq)$ je lanac koji je sup-predstavljiv u $[0,1]$.*

4.7 Teoreme sinteze za mrežne intervalno-vrednosne rasplinute skupove

Podsetimo se da je skup intervala $I(L) = \{[x_1, x_2] \mid (x_1, x_2) \in L^2, x_1 \leq_L x_2\}$, a relacije poretka na $I(L)$ (uvedene na stranama 20 i 21) su definisane na neki od sledećih načina:

1. $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ ako i samo ako je $\underline{x} \leq_L \underline{y}$ i $\overline{x} \leq_L \overline{y}$,
2. $\mathbf{x} \leq_i \mathbf{y}$ ako i samo ako je $\underline{y} \leq_L \underline{x} \leq_L \overline{x} \leq_L \overline{y}$,
3. $\mathbf{x} \leq_s \mathbf{y}$ ako i samo ako je $\overline{x} \leq_L \underline{y}$ ili $\mathbf{x} = \mathbf{y}$,
4. $\mathbf{x} \leq_l \mathbf{y}$ ako i samo ako je $\underline{x} < \underline{y}$ ili $(\underline{x} = \underline{y}$ i $\overline{x} \leq_L \overline{y})$.

Prema rezultatima iznetim u drugom poglavlju, skup intervala proizvoljne kompletne mreže L je kompletna mreža za svaki od posmatranih poredaka. Zbog toga ćemo pod mrežnim intervalno-vrednosnim rasplinutim skupom podrazumevati svako preslikavanje nepraznog skupa X u neku od četiri kompletne mreže intervala:

1) $I_w(L) = (I(L), \leq) = (I(L), \leq_w)$

2) $I_i(L) = (I(L) \cup \emptyset, \leq_i)$

3) $I_s(L) = (I(L), \leq_s)$

4) $I_l(L) = (I(L), \leq_l)$

Prema tome, intervalno-vrednosne rasplinute skupove možemo definisati opštije.

Definicija 4.4 *Neka je $(L, \leq)$ kompletna mreža. Mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup ili kraće, L-IVFS, na univerzumu X, je preslikavanje $\mu : X \to I_t(L)$, za $t \in \{w, i, s, l\}$.*

Nivo skupovi se definišu kao za intervalno-vrednosne rasplinute skupove.
Neka je $\mu : X \to I_t(L)$, gde $t \in \{w, i, s, l\}$, mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup. Tada je za $\mathbf{p} = [p_1, p_2] \in I_t(L)$ $(t \in \{w, i, s, l\})$ gornji nivo skup: $\mu_{\mathbf{p}} = \{x \in X \mid [p_1, p_2] \leq_t \mu(x)\}$, dok je donji nivo skup: $\mu^{\mathbf{p}} = \{x \in X \mid \mu(x) \leq_t [p_1, p_2]\}$.

Teoreme sinteze za mrežne intervalno-vrednosne rasplinute skupove možemo formulisati slično postojećim za mrežno-vrednosne rasplinute skupove, a ovde ih navodimo zbog kompletnosti rezultata.

Teorema 4.19 *Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija podskupova nepraznog skupa X koji je zatvoren u odnosu na preseke i sadrži X. Tada*

1. *Postoji mreža L i mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_w(L)$,*
2. *Postoji mreža L i mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_i(L)$,*
3. *Postoji mreža L i mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_s(L)$,*
4. *Postoji mreža L i mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_l(L)$,*

tako da je $\mathcal{F}$ kolekcija gornjih nivo skupova za svaki od datih intervalno-vrednosnih rasplinutih skupova.

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija podskupova nepraznog skupa X koji je zatvoren u odnosu na preseke i sadrži X. Odatle sledi da je $(\mathcal{F}, \supseteq)$ kompletna mreža čiji je najveći element presek svih elemenata familije $\mathcal{F}$ u oznaci $1_{\mathcal{F}}$, a najmanji element je skup $X = 0_{\mathcal{F}}$.

Na osnovu teoreme 4.1 (str. 94), postoji rasplinuti skup $\nu : X \to \mathcal{F}$ takav da je njegova kolekcija gornjih nivo skupova jednaka sa $\mathcal{F}$.

1. Pošto je $(\mathcal{F}, \supseteq)$ kompletna mreža, onda je kompletna mreža i skup intervala $I(\mathcal{F})$ mreže $\mathcal{F}$ sa poretkom po komponentama, u oznaci $I_w(\mathcal{F}) = (I(\mathcal{F}), \leq)$. Prema tvrđenju 2.17 (str. 42) postoji injektivno, izotono preslikavanje $\varphi_1 : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_1$ definisano sa $\varphi_1(x) = [x, 1_{\mathcal{F}}]$, gde je $\mathcal{F}_1 = \{[x, 1_{\mathcal{F}}] \mid x \in \mathcal{F}\} \subseteq I_w(\mathcal{F})$. Očigledno je da su preslikavanjem φ_1 očuvani infimumi. Time su ispunjeni uslovi teoreme 4.4 (str. 95), pa postoji mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_w(\mathcal{F})$, tako da je $\mathcal{F}$ kolekcija gornjih nivo skupova mrežno intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa μ.

2. Iz kompletnosti mreže $(\mathcal{F}, \supseteq)$ sledi kompletnost mreže $I_i(\mathcal{F}) = (I(\mathcal{F}) \cup \emptyset, \leq_i)$. Prema posledici 2.3 i primeru 2.3 (str. 33), postoji injektivno, izotono preslikavanje φ_0 mreže $\mathcal{F}$ u podmrežu $\mathcal{F}_0 = \{[0, x] \mid x \in \mathcal{F}\}$ mreže $I_i(\mathcal{F})$. Dakle, preslikavanje φ_0 je saglasno sa operacijama na mreži $\mathcal{F}$. Ovim preslikavanjem se najveći element mreže $\mathcal{F}$ preslikava na najveći element mreže $I_i(\mathcal{F})$, pa su očuvani infimumi. Time su ispunjeni uslovi teoreme 4.4 (str. 95), pa postoji mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_i(\mathcal{F})$, tako da je $\mathcal{F}$ kolekcija gornjih nivo skupova mrežno intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa μ.

3. Iz kompletnosti mreže $(\mathcal{F}, \supseteq)$ sledi kompletnost mreže intervala $I_s(\mathcal{F}) = (I(\mathcal{F}), \leq_s)$ (tvrđenje 2.13, str. 32). Tada postoji injektivno preslikavanje $\varphi : \mathcal{F} \to D = \{[x, x] \mid x \in L\} \subseteq I_s(\mathcal{F})$ kojim su očuvani supremumi i infimumi (primer 2.4, str 38). Dakle, postoji mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_s(\mathcal{F})$, tako da je $\mathcal{F}$ kolekcija gornjih nivo skupova mrežno intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa μ.

4. Iz kompletnosti mreže $(\mathcal{F}, \supseteq)$ sledi kompletnost mreže intervala $I_l(\mathcal{F}) = (I(\mathcal{F}), \leq_s)$ (stav *2*. tvrđenja 2.24, str. 43). Prema tvrđenju 2.28 (str. 45), postoji izomorfizam $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_0$. Preslikavanje $g : \mathcal{F} \to I_l(\mathcal{F})$ definisano sa $g(x) = f(x)$ za $x \neq 1_{\mathcal{F}}$ i

$g(1_{\mathcal{F}}) = [1_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}}]$, je dobro definisano, injektivno preslikavanje kojim su očuvani infimumi. Dakle, postoji mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_l(\mathcal{F})$, tako da je $\mathcal{F}$ kolekcija gornjih nivo skupova mrežno intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa μ.

□

Dokaz sledeće teoreme je sličan dokazu prethodne teoreme, pa je navodimo bez dokaza.

Teorema 4.20 *Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija podskupova nepraznog skupa X koji je zatvoren u odnosu na preseke i sadrži X. Tada*

1. *Postoji mreža L i mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_w(L)$,*
2. *Postoji mreža L i mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_i(L)$,*
3. *Postoji mreža L i mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_s(L)$,*
4. *Postoji mreža L i mrežni intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \to I_l(L)$,*

tako da je $\mathcal{F}$ kolekcija donjih nivo skupova za svaki od datih intervalno-vrednosnih rasplinutih skupova.

Sledeće teoreme navodimo takođe zbog kompletnosti rezultata bez dokaza.

Teorema 4.21 *Neka je L data kompletna mreža. Potreban i dovoljan uslov da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bude kolekcija gornjih nivo skupova mrežnog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to I_t(L)$ za $t \in \{w, i, s, l\}$, je da su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ zatvorena za preseke i da sadrži X,*
2. *poset $(\mathcal{F}, \subseteq)$ može biti potopljen u $I_t(L)$, tako da su tim potapanjem očuvani svi supremumi.*

Teorema 4.22 *Neka je L data kompletna mreža. Potreban i dovoljan uslov da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ bude kolekcija donjih nivo skupova mrežnog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \to I_t(L)$ za $t \in \{w, i, s, l\}$, je da su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}$ zatvorena za preseke i da sadrži X,*
2. *poset $(\mathcal{F}, \subseteq)$ može biti potopljen u $I_t(L)$, tako da su tim potapanjem očuvani svi supremumi.*

Rezultati u odeljcima 4.4, 4.5 i 4.6 su specijalni slučajevi teorema 4.21 i 4.22 u kojima se bliže precizira šta znači da je poset $(\mathcal{F}, \subseteq)$ potopljen u mrežu intervala $I_t(L)$ ($t \in \{w, i, s, l\}$). Dalja istraživanja su moguća za druge specijalne klase mreža, ali to izlazi izvan okvira ovog rada.

Glava 5

Primene i dalji pravci istraživanja

Jedna od očekivanih primena rezultata postignutih u ovom radu, je njihova primena u rešavanju problema sinteze za intervalno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove, po definiciji Atanassova.

Premda je dokazano da su, u određenom smislu, intuicionistički rasplinuti skupovi ekvivalentni intervalno-vrednosnim rasplinutim skupovima [43], sa stanovišta primene ovo su dva potpuno različita koncepta. Prema [106] u primeni u matematičkoj morfologiji, na primer, svakom pikselu neke slike mogu se dodeliti dve vrednosti. Jedna, kojom se izražava stepen uverenja da piksel ima određenu vrednost na sivoj skali i drugu, kojom se iskazuje sigurnost da se razlikuje od dodeljene vrednosti. Ovo se naročito odnosi na piksele koji se nalaze na granici objekta na slici, gde postoji velika nesigurnost oko toga da li piksel pripada objektu ili pozadini. U tom slučaju u primeni su intuicionistički rasplinuti skupovi.

Dokazano je [45] da intervalno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi predstavljaju uopštenje intuicionističkih i intervalno-vrednosnih rasplinutih skupova. U tom smislu je rešavanje problema sinteze za intervalno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove nesumnjivo značajno. U tome je mrežni pristup najlogičniji izbor, pošto su intervalno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi specijalan slučaj mrežno-vrednosnih rasplinutih skupova.

5.1 Intervalno - vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi

Definicija 5.1 *[3] Intuicionistički rasplinuti skup A na univerzumu X je objekat oblika $A = \{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X\}$, gde su funkcije $\mu : X \to [0,1]$ i $\nu : X \to [0,1]$ takve da je $\mu(x)+\nu(x) \leq 1$. Funkcija μ predstavlja stepen pripadanja, a funkcija ν stepen nepripadanja elementa x skupu X.*

Uobičajeni način posmatranja intuicionističkih rasplinutih skupova je u obliku uređene trojke $A = (X, \mu, \nu)$, gde su X, μ i ν kao u prethodnoj definiciji.

Atanassov i Stoeva [4] definišu mrežno vrednosne intuicionističke rasplinute skupove (intuicionističke L- rasplinute skupove) koristeći kompletnu mrežu L sa unarnom, involutivnom operacijom $\mathcal{N} : L \to L$ koja je obratno saglasna sa poretkom.

Definicija 5.2 *[4] Mrežno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skup je objekat oblika* $A = \{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X\}$*, gde su funkcije* $\mu : X \to L$ *i* $\nu : X \to L$ *takve da za svako* $x \in X$ *važi* $\mu(x) \leq \mathcal{N}(\nu(x))$ *gde je* $\mathcal{N} : L \to L$ *unarna, involutivna operacija obratno saglasna sa poretkom.*

Mrežno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi se mogu definisati i na sledeći način.

Definicija 5.3 *[144] Mrežno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skup je uređena trojka* (X, μ, ν) *gde su funkcije* $\mu : X \to [0,1]^I$ *i* $\nu : X \to [0,1]^I$*, pri čemu je* I *proizvoljan indeksni skup, takve da je*

$$\mu(x)(i) + \nu(x)(i) \leq 1 \tag{5.1}$$

za svako $x \in X$ *i svako* $i \in I$.

$[0,1]^I$ je kompletna mreža u kojoj je poredak definisan po komponentama (dakle, slab poredak), a mrežne operacije $\wedge$ i $\vee$ su, redom, minimum i maksimum po komponentama. Za svako $p \in [0,1]^I$ postoje dva nivo skupa definisana sa:

$\mu_p = \{x \in X \mid \mu(x) \geq p\}$ koji zovemo **nivo pripadanja** elementa $x \in X$ i
$\nu^p = \{x \in X \mid \nu(x) \leq p\}$ koji zovemo **nivo nepripadanja** elementa $x \in X$.

Odatle za mrežno vrednosne intuicionističke rasplinute skupove postoje dve familije nivo skupova:
familija nivoa pripadanja $\mathcal{F}_\mu = \{\mu_p \mid p \in [0,1]^I\}$ i
familija nivoa nepripadanja $\mathcal{F}^\nu = \{\nu^p \mid p \in [0,1]^I\}$.

Prema terminologiji usvojenoj u ovom radu, nivo pripadanja elementa $x \in X$ je gornji nivo skup funkcije $\mu : X \to [0,1]^I$, a nivo nepripadanja elementa $x \in X$ je donji nivo skup funkcije $\nu : X \to [0,1]^I$.

Takođe je familija nivoa pripadanja $\mathcal{F}_\mu$ familija gornjih nivo skupova funkcije μ, a familija nivoa nepripadanja $\mathcal{F}^\nu$ familija donjih nivo skupova funkcije ν.

U radu [144] je dokazano da su mrežno vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi čiji je kodomen mreža $[0,1]^I$, najopštiji koncept mrežno vrednosnih intuicionističkih rasplinutih skupova, posmatrajući ih iz ugla nivo skupova (*cutworthy approach*).

Teorema 5.1 *[144] Neka je* L *kompletna mreža i neka je* (X, μ, ν) *mrežno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skup sa unarnom, involutivnom operacijom* $\mathcal{N} : L \to L$ *obratno saglasnom sa poretkom, gde su funkcije* $\mu : X \to L$ *i* $\nu : X \to L$ *takve da za svako* $x \in X$ *važi* $\mu(x) \leq \mathcal{N}(\nu(x))$*. Tada postoji indeksni skup* I *i rasplinuti skup* (X, μ', ν')*, gde* $\mu' : X \to [0,1]^I$ *i* $\nu' : X \to [0,1]^I$*, takav da rasplinuti skupovi* (X, μ, ν) *i* (X, μ', ν') *imaju identične kolekcije nivo skupova.*

Dokaz. Neka je (X, μ, ν) mrežno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skup i neka su μ_p i ν^p njegovi nivo skupovi za svako $p \in L$. Neka je $\mathcal{N} : L \to L$ odgovarajuća unarna, involutivna operacija, obratno saglasna sa poretkom. Tada za svako $x \in X$ važi $\mu(x) \leq \mathcal{N}(\nu(x))$. Pošto je $\mathcal{N}$ obratno saglasna sa poretkom i involutivna, takođe je $\nu(x) \leq \mathcal{N}(\mu(x))$.

Neka su najveći i najmanji element mreže L redom 1 i 0. Iz $\mathcal{N}(1) = 0$ i $\nu(x) \leq \mathcal{N}(\mu(x))$ sledi da važi sledeće:

$$\text{Ako je } \mu(x) = 1 \text{ onda je } \nu(x) = 0.$$

Ovu činjenicu koristimo u nastavku.

Neka je L^d mreža koja je dualno izomorfna (dualna) mreži L sa izomorfizmom δ, tako da je $L \cap L^d = \emptyset$. Neka je mreža $L_1 = \mathcal{P}(L \cup L^d) = (\mathcal{P}(L \cup L^d), \subseteq)$ i neka je injektivno preslikavanje $\varphi : L \to L_1$ definisano na sledeći način:

$$\varphi(p) = \begin{cases} 1_{L_1}, & \text{za} \quad p = 1, \\ \downarrow p, & \text{za} \quad p \neq 1, \end{cases}$$

za svako $p \in L$.

Poznato je da važi $\downarrow(p \wedge q) = \downarrow p \cap \downarrow q$, pa je $\varphi(p \wedge q) = \varphi(p) \cap \varphi(q)$. Time su ispunjeni uslovi teoreme 4.3 (str. 94).

Neka je dalje, preslikavanje $\xi : \mathcal{P}(L^d) \to \mathcal{P}(L \cup L^d)$ definisano sa $\xi(X) = L^d \setminus X$, za svako $X \in \mathcal{P}(L^d)$. Podsetimo se da je $\delta : L \to L^d$ dualni izomorfizam. Sada možemo definisati injektivno preslikavanje $\psi : L \to L_1$ sa $\psi(p) = \xi(\downarrow\delta(p))$, za svako $p \in L$.

Dokažimo da su ispunjeni uslovi teoreme 4.8 (str. 96).

Za $p = 0$ važi $\psi(0) = \xi(\downarrow\delta(0)) = \xi(L^d) = L^d \setminus L^d = \emptyset$.

Dalje je $\psi(p \vee q) = \xi(\downarrow\delta(p \vee q)) = \xi(\downarrow(\delta(p) \wedge \delta(q)))$. Znamo da je $\downarrow(\delta(p) \wedge \delta(q)) = \downarrow\delta(p) \cap \downarrow\delta(q)$, pa je $\xi(\downarrow(\delta(p) \wedge \delta(q))) = L^d \setminus (\downarrow(\delta(p)) \cap \downarrow(\delta(q))) = (L^d \setminus \downarrow\delta(p)) \cup (L^d \setminus \downarrow\delta(q)) = \psi(p) \cup \psi(q)$. Dakle, $\psi(p \vee q) = \psi(p) \cup \psi(q)$, čime je dokazana ispunjenost uslova teoreme 4.8.

U nastavku dokazujemo da postoji injektivno preslikavanje Bulove mreže $(\mathcal{P}(L \cup L^d), \subseteq)$ u mrežu $[0, 1]^I$ za indeksni skup I odgovarajuće kardinalnosti.

Neka je skup I iste kardinalnosti kao $L \cup L^d$ i neka je $\gamma : L \cup L^d \to I$ bijektivno preslikavanje. Neka je σ preslikavanje indukovano preslikavanjem γ, koje svaki podskup skupa $L \cup L^d$ preslikavaju na podskup skupa I. Dalje, neka je $\kappa : \mathcal{P}(I) \to \{0, 1\}^I$ preslikavanje koje svaki podskup skupa I preslikava na njegovu karakterističnu funkciju. Pri svim ovde pomenutim preslikavanjima supremumi i infimumi su očuvani, pa se i najmanji i najveći elementi preslikavaju redom, na odgovarajuće najmanje i najveće elemente. Tada je preslikavanje $\alpha : \mathcal{P}(L \cup L^d) \to [0, 1]^I$ definisano sa $\alpha(M) = \kappa(\sigma(M))$, za svako $M \in \mathcal{P}(L \cup L^d)$, injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi i infimumi.

Sada možemo definisati preslikavanja $\mu' : X \to [0, 1]^I$ i $\nu' : X \to [0, 1]^I$ na sledeći način:

$$\mu'(x) = \alpha(\varphi(\mu(x))) \quad \text{i} \quad \nu'(x) = \alpha(\psi(\nu(x))),$$

za svako $x \in X$.

Pošto je α injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi i infimumi, a preslikavanja φ i ψ zadovoljavaju redom uslove teorema 4.3 i 4.8, odgovarajuće familije nivoa su identične.

Ostaje da se dokaže da za svako $x \in X$ i svako $i \in I$ važi uslov $\mu'(x)(i) + \nu'(x)(i) \leq 1$, odnosno da je (X, μ', ν') intuicionistički rasplinuti skup.

Neka $x \in X$. Posmatramo sledeća dva slučaja.

1.) Neka je $\mu(x) \neq 1$ i neka $i \in I$.
Tada za svako $i \in \gamma(L^d)$ važi $\mu'(x)(i) = \alpha(\varphi(\mu(x))(i) = 0$.[1] S druge strane, za sve $i \notin \gamma(L^d)$ važi $\nu'(x)(i) = \alpha(\psi(\nu(x)))(i) = 0$. Dakle, $\mu'(x) + \nu'(x) \leq 1$.

2.) Neka je $\mu(x) = 1$ i neka $i \in I$.
Tada je, po pretpostavci, $\nu(x) = 0$. Odatle sledi
$\mu'(x)(i) = \alpha(\varphi(\mu(x)))(i) = \alpha(L \cup L^d)(i) = 1$ i
$\nu'(x)(i) = \alpha(\psi(\nu(x)))(i) = \alpha(\emptyset)(i) = 0$.

Time je dokazano tvrđenje teoreme.

$\square$

Prema tome, problem sinteze za mrežno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove formulišemo na sledeći način:

Odrediti potrebne i dovoljne uslove da unapred zadate kolekcije $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ podskupova nepraznog skupa X budu kolekcije, redom, nivoa pripadanja i nivoa nepripadanja nekog mrežno-vrednosnog intuicionističkog rasplinutog skupa (X, μ, ν) gde su funkcije $\mu : X \to [0,1]^I$ i $\nu : X \to [0,1]^I$, pri čemu je I proizvoljan indeksni skup, takve da je $\mu(x)(i) + \nu(x)(i) \leq 1$, za svako $x \in X$ i svako $i \in I$.

Teorema 5.2 *Neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ dve kolekcije podskupova nepraznog skupa X. Tada postoji indeksni skup I i mrežno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skup (X, μ, ν) gde su funkcije $\mu : X \to [0,1]^I$ i $\nu : X \to [0,1]^I$, takav da su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ redom, kolekcije nivoa pripadanja i nivoa nepripadanja mrežno-vrednosnog intuicionističkog rasplinutog skupa (X, μ, ν) ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. *$\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ su sistemi zatvaranja na X,*
2. *$\bigcap \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_2$.*

Dokaz. ($\Longrightarrow$) Neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ dve kolekcije podskupova nepraznog skupa X koje su sistemi zatvaranja i neka je $\bigcap \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_2$. Tada su $\mathcal{F}_1^d = (\mathcal{F}_1, \supseteq)$ i $\mathcal{F}_2 = (\mathcal{F}_2, \subseteq)$ kompletne mreže. Neka su $(F_1, \leq)$ i $(F_2, \leq)$ mreže izomorfne redom sa mrežama $\mathcal{F}_1^d$ i $\mathcal{F}_2$ tako da je $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Neka su $f_1 : \mathcal{F}_1^d \to F_1$ i $f_2 : \mathcal{F}_2 \to F_2$ dati izomorfizmi, a 1_{F_i} i 0_{F_i} $(i = 1, 2)$ su redom najveći i najmanji elementi odgovarajućih mreža.

Prema teoremi 4.1 postoji mrežno-vrednosni rasplinuti skup $\mu' : X \to F_1$ definisan sa $\mu'(x) = \bigcap(p \in F_1 \mid x \in p)$, za svako $x \in X$. Prema teoremi 4.6 postoji mrežno-vrednosni rasplinuti skup $\nu' : X \to F_2$ definisan sa $\nu'(x) = \bigcap(p \in F_2 \mid x \in p)$, za svako $x \in X$. Neka

[1] Podsetimo da je sa $\gamma(L^d)$ označen skup slika pri preslikavanju γ, odnosno $\gamma(L^d) = \{\gamma(z) \mid z \in L^d\}$.

je mreža $L_1 = \mathcal{P}(F_1 \cup F_2) = (\mathcal{P}(F_1 \cup F_2), \subseteq)$. Dalje je dokaz sličan dokazu u teoremi 5.1. Zbog lakšeg praćenja ostatka dokaza i zbog nekih razlika koje postoje u odnosu na dokaz teoreme 5.1, navodimo odgovarajuća preslikavanja.

1.) Za svako $p \in L$ preslikavanje $\varphi : F_1 \to L_1$ definisano sa $\varphi(p) = \begin{cases} 1_{L_1}, & \text{za} \quad p = 1_{F_1}, \\ \downarrow p, & \text{za} \quad p \neq 1_{F_1}. \end{cases}$
Podsetimo da je preslikavanjee φ saglasno sa operacijom $\wedge$, odnosno da ispunjava uslove teoreme 4.3 (str. 94).

2.) Preslikavanje $g : F_2 \to \mathcal{P}(F_2) \subseteq L_1$ definisano sa $g(p) = \uparrow p$, za svako $p \in F_2$.

3.) Preslikavanje $\xi : \mathcal{P}(F_2) \to L_1$ definisano sa $\xi(X) = F_2 \setminus X$, za svako $X \in \mathcal{P}(F_2)$.

4.) Preslikavanje $\psi : F_2 \to L_1$ definisano sa $\psi(p) = \xi(g(p)) = \xi(\uparrow p)$, za svako $p \in F_2$.
Dokažimo da je preslikavanje ψ saglasno sa operacijom $\vee$, odnosno da ispunjava uslove teoreme 4.8 (str. 96).
$\psi(0_{F_2}) = \xi(\uparrow 0_{F_2}) = \xi(F_2) = F_2 \setminus F_2 = \emptyset$.
Za sve $p, q \in F_2$ važi $\psi(p \vee q) = \xi(\uparrow(p \vee q)) = \xi(\uparrow p \cap \uparrow q) = F_2 \setminus (\uparrow p \cap \uparrow q)$. Dalje je $F_2 \setminus (\uparrow p \cap \uparrow q) = F_2 \setminus \uparrow p \cup F_2 \setminus \uparrow q)$, pa je $\psi(p \vee q) = \psi(p) \cup \psi(q)$, što je trebalo dokazati.

Dokaz da postoji injektivno preslikavanje Bulove mreže $(\mathcal{P}(F_1 \cup F_2), \subseteq)$ u mrežu $[0,1]^I$ za indeksni skup odgovarajuće kardinalnosti je isti kao u dokazu teoreme 5.1. Dakle, preslikavanja $\mu : X \to [0,1]^I$ i $\nu : X \to [0,1]^I$ definišemo na sledeći način:

$$\mu(x) = \alpha(\varphi(\mu'(x))) \quad \text{i} \quad \nu(x) = \alpha(\psi(\nu'(x))),$$

za svako $x \in X$. Pri tome je skup I iste kardinalnosti kao $F_1 \cup F_2$, a preslikavanje $\alpha : \mathcal{P}(F_1 \cup F_2) \to [0,1]^I$ definisano sa $\alpha(M) = \kappa(\sigma(M))$, za svako $M \in \mathcal{P}(L \cup L^d)$, injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi i infimumi, gde su $\gamma : F_1 \cup F_2 \to I$ dato bijektivno preslikavanje, preslikavanje σ je indukovano preslikavanjem γ, koje svaki podskup skupa $F_1 \cup F_2$ preslikavaju na podskup skupa I i $\kappa : \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}^I$ preslikavanje koje svaki podskup skupa I preslikava na njegovu karakterističnu funkciju.

Pri svim ovde pomenutim preslikavanjima supremumi i infimumi su očuvani, pa se i najmanji i najveći elementi preslikavaju redom, na odgovarajuće najmanje i najveće elemente.

Pošto je α injektivno preslikavanje kojim su očuvani supremumi i infimumi, a preslikavanja φ i ψ zadovoljavaju redom uslove teorema 4.3 i 4.8, identične su familije nivoa rasplinutih skupova μ' i μ, kao i familije nivoa rasplinutih skupova ν' i ν.

Ostaje da se dokaže da za svako $x \in X$ i svako $i \in I$ važi uslov $\mu(x)(i) + \nu(x)(i) \leq 1$, odnosno da je (X, μ, ν) intuicionistički rasplinuti skup.

Neka $x \in X$. Posmatramo sledeća dva slučaja.

1.) Neka je $\mu'(x) \neq 1_{F_1}$ i neka $i \in I$.
Tada za svako $i \in \gamma(F_2)$ važi $\mu(x)(i) = \alpha(\varphi(\mu'(x))(i) = 0$. S druge strane, za sve $i \notin \gamma(F_2)$ važi $\nu(x)(i) = \alpha(\psi(\nu'(x)))(i) = 0$. Dakle, $\mu(x)(i) + \nu(x)(i) \leq 1$ za svako $i \in I$.

2.) Neka je $\mu'(x) = 1_{F_1}$ i neka $i \in I$.
Tada, prema lemi 4.1 (str. 92), važi $x \in \bigcap \mathcal{F}_1$. Iz uslova $\bigcap \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_2$, sledi da $x \in \bigcap \mathcal{F}_2$, pa je, prema lemi 4.1, $\nu'(x) = 0_{F_2}$. Dalje je $\mu(x)(i) = \alpha(\varphi(\mu'(x)))(i) = \alpha(1_{L_1})(i) = \alpha(F_1 \cup F_2)(i) = 1$ i
$\nu(x)(i) = \alpha(\psi(\nu'(x)))(i) = \alpha(\psi(0_{F_2}))(i) = \alpha(\emptyset)(i) = 0$.

($\Longleftarrow$) Obrnuto, neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ redom, kolekcije nivoa pripadanja i nivoa nepripadanja mrežno-vrednosnog intuicionističkog rasplinutog skupa (X, μ, ν), gde su preslikavanja $\mu : X \to [0,1]^I$ i $\nu : X \to [0,1]^I$, za neki indeksni skup I. Prema tome, preslikavanja μ i ν su mrežno-vrednosni rasplinuti skupovi, a kolekcije $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ su redom, familija gornjih nivo skupova rasplinutog skupa μ i familija donjih nivo skupova rasplinutog skupa ν. Prema teoremama 4.4 i 4.9, redom, $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ su sistemi zatvaranja na X, odnosno ispunjen je uslov *1*.

Dokažimo da je ispunjen *2*. uslov ove teoreme.
Ako je $\bigcap \mathcal{F}_1 = \emptyset$ tvrđenje sledi trivijalno.
Neka je $\bigcap \mathcal{F}_1 \neq \emptyset$. Tada postoji $x \in \bigcap \mathcal{F}_1$. Odatle sledi da je $\mu(x)(i) = 1$ za svako $i \in I$ (lema 4.1), pa pošto je (X, μ, ν) intuicionistički rasplinuti skup, važi $\nu(x)(i) = 0$ za svako $i \in I$. Odatle, prema lemi 4.1, sledi $x \in \bigcap \mathcal{F}_2$. Dakle $\bigcap \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_2$.

□

U prethodnoj teoremi smo dokazali da za familije nivoa pripadanja i nivoa nepripadanja $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$, redom, nekog mrežno-vrednosnog intuicionističkog rasplinutog skupa (X, μ, ν) važi $\bigcap \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_2$. U sledećem primeru ćemo pokazati da obrnuto $\bigcap \mathcal{F}_2 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_1$ ne mora da važi.

Primer 5.1 *Neka je skup $X = \{a, b, c\}$ i kompletna mreža $L = [0,1]^2$. Mrežno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skup (X, μ, ν) je dat sledećom tabelom.*

X	a	b	c
$\mu(x)$	$(1,1)$	$(0.2, 0.5)$	$(0.6, 0.2)$
$\nu(x)$	$(0,0)$	$(0.3, 0.4)$	$(0,0)$

Familija nivoa pripadanja je $\mathcal{F}_1 = \{\{a,b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a\}\}$, a familija nivoa nepripadanja je $\mathcal{F}_2 = \{\{a,b,c\}, \{a,c\}\}$. Dakle, $\bigcap \mathcal{F}_2 = \{a, c\}$ i $\bigcap \mathcal{F}_1 = \{a\}$, čime je ilustrovano tvrđenje prethodne teoreme $\bigcap \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_2$ i pokazano da $\bigcap \mathcal{F}_2 \nsubseteq \bigcap \mathcal{F}_1$.

Rešavanje problema sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove za oba slučaja, kada je data konačna familija gornjih nivo skupova i kada je data konačna familija donjih nivo skupova, omogućava rešavanje problema sinteze za intervalno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove, koji su specijalan slučaj mrežno-vrednosnih intuicionističkih rasplinutih skupova.

Definicija 5.4 *[3] Intervalno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skup A na univerzumu X je objekat oblika $A = \{(x, \mu(x), \nu(x)) \mid x \in X\}$, gde su funkcije $\mu : X \to I_w([0,1])$ i $\nu : X \to I_w([0,1])$ takve da je za svako $x \in X$ važi:*

$$\overline{\mu(x)} + \overline{\nu(x)} \leq 1.$$

Pri tome je $I_w([0,1]) = \{[\underline{x}, \overline{x}] \mid (\underline{x}, \overline{x}) \in [0,1]^2, \ \ \underline{x} \leq \overline{x}\}$ *mreža sa poretkom po komponentama, a* $\mu(x) = [\underline{\mu(x)}, \overline{\mu(x)}]$ *i* $\nu(x) = [\underline{\nu(x)}, \overline{\nu(x)}]$.

Kao što je uobičajeno, intuicionističke rasplinute skupove posmatramo kao uređene trojke $A = (X, \mu, \nu)$, gde su X, μ i ν kao u prethodnoj definiciji.

Problem sinteze za intervalno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove formulišemo slično kao za mrežno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove.
Neka je $I_w([0,1]) = (I(L), \leq)$ *data kompletna mreža intervala. Odrediti potrebne i dovoljne uslove da unapred zadate kolekcije* $\mathcal{F}_1$ *i* $\mathcal{F}_2$ *podskupova nepraznog skupa* X *budu kolekcije, redom, nivoa pripadanja i nivoa nepripadanja nekog intervalno-vrednosnog intuicionističkog rasplinutog skupa.*

Teorema 5.3 *Neka su* $\mathcal{F}_1$ *i* $\mathcal{F}_2$ *dve konačne kolekcije podskupova nepraznog skupa* X. *Tada postoji intervalno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skup* (X, μ, ν) *gde su funkcije* $\mu : X \to I_w([0,1])$ *i* $\nu : X \to I_w([0,1])$, *takav da su* $\mathcal{F}_1$ *i* $\mathcal{F}_2$ *redom, kolekcije nivoa pripadanja i nivoa nepripadanja intervalno-vrednosnog intuicionističkog rasplinutog skupa* (X, μ, ν) *ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

1. $\mathcal{F}_1$ *i* $\mathcal{F}_2$ *su sistemi zatvaranja na* X,

2. $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{F}_1, \subseteq)$ *i* $\mathcal{F}_2 = (\mathcal{F}_2, \subseteq)$ *su dualno konačno prostorne* $\vee$- *između ravne mreže sa skupovima* $\wedge$- *nerazloživih elemenata redom,* $M_{\mathcal{F}_1} = C_1' \cup C_2'$, $M_{\mathcal{F}_2} = D_1' \cup D_2'$ *i lanci* $C_i = C_i' \cup \{\bigwedge M \mid$ *za svaki podskup* $M \subseteq C_i'\}$ *i*
$D_i = D_i' \cup \{\bigwedge M \mid$ *za svaki podskup* $M \subseteq D_i'\}$ $(i = 1, 2)$, *su sup-predstavljivi u* $[0,1]$,

3. $\bigcap \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_2$.

Dokaz. $(\Longrightarrow)$ Neka je (X, μ, ν) $(\mu : X \to I_w([0,1])$ i $\nu : X \to I_w([0,1]))$ intervalno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skup čije su kolekcije nivoa pripadanja i nivoa nepripadanja redom, familije $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$. Tada su preslikavanja $\mu : X \to I_w([0,1])$ i $\nu : X \to I_w([0,1])$ intervalni-vrednosni rasplinuti skupovi takvi da je $\mathcal{F}_1$ familija gornjih nivo skupova intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa μ, a $\mathcal{F}_2$ familija donjih nivo skupova intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa ν. Prema teoremama 4.12 i 4.11 (str. 107 i 105), redom, ispunjeni su uslovi *1* i *2*. Prema teoremi 5.2 (str. 124) ispunjen je i uslov *3*.

$(\Longleftarrow)$ Neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ konačne kolekcije podskupova nepraznog skupa X koje ispunjavaju uslove *1*. $-$ *3*.

Iz *1*. uslova sledi da su poseti $\mathcal{F}_1^d = (\mathcal{F}_1, \supseteq)$ i $\mathcal{F}_2 = (\mathcal{F}_2, \subseteq)$ kompletne mreže. Prema teoremama 4.1 (str. 94) i 4.6 (str. 96) redom, postoje rasplinuti skupovi $\mu' : X \to \mathcal{F}_1^d$ i $\nu' : X \to \mathcal{F}_2$, definisani sa $\mu'(x) = \cap(f \in \mathcal{F}_1^d \mid x \in f)$ i $\nu'(x) = \cap(f \in \mathcal{F}_2 \mid x \in f)$. Rasplinuti skupovi μ' i ν' su takvi da je $\mathcal{F}_1^d$ kolekcija gornjih nivo skupova rasplinutog skupa μ', a $\mathcal{F}_2$ kolekcija donjih nivo skupova rasplinutog skupa ν'.

Prema dokazu teorema 4.12 (str. 107) i 4.11 (str. 107) redom, iz *2.* uslova sledi da postoji injektivno preslikavanje $\mu_1 : \mathcal{F}_1^d \to I_w([0,1])$ pri kom su očuvani infimumi i injektivno preslikavanje $\nu_1 : \mathcal{F}_2 \to I_w([0,1])$ pri kom su očuvani supremumi.

Pri preslikavanju μ_1 su očuvani svi infimumi, što podrazumeva i očuvanost infimuma prazne familije, a to je najveći element. Zato se najveći element $\bigcap \mathcal{F}_1$ mreže $\mathcal{F}_1^d$ preslikava na najveći element mreže $I_w([0,1])$, odnosno važi $\mu_1(\bigcap \mathcal{F}_1) = [1,1]$. Dualno, očuvanost supremuma podrazumeva i očuvanost supremuma prazne familije, pa se preslikavanjem ν_1 najmanji element $\bigcap \mathcal{F}_2$ mreže $\mathcal{F}_2$ preslikava u najmanji element mreže $I_w([0,1])$, odnosno važi $\nu_1(\bigcap \mathcal{F}_2) = [0,0]$.

Dalje, preslikavanja $\varphi : I_w([0,1]) \to I_w([0,1])$ i $\psi : I_w([0,1]) \to I_w([0,1])$ definišemo na sledeći način. Za svako $[x,y] \in I_w([0,1])$ neka je:

$$\varphi([x,y]) = [0.2 \cdot x, 0.21 + 0.1 \cdot y], \quad \text{za } [x,y] \neq [0,0] \quad \text{i} \quad \varphi([0,0]) = [0,0].$$

Za svako $[x,y] \in I_w([0,1])$ neka je:

$$\psi([x,y]) = [0.21 + 0.1 \cdot x, 0.31 + 0.1 \cdot y], \quad \text{za } [x,y] \neq [1,1] \quad \text{i} \quad \psi([1,1]) = [1,1].$$

Dokaz da su preslikavanja φ i ψ dobro definisana, injektivna i da su preslikavanjem φ očuvani supremumi, a preslikavanjem ψ infimumi, sledi slično kao u dokazu u tvrđenju 4.4 (str. 100), pa ga ovde izostavljamo.

Sada možemo definisati preslikavanja $\mu : X \to I_w([0,1])$ i $\nu : X \to I_w([0,1])$ na sledeći način:

$$\mu(x) = \psi(\mu_1(\mu'(x))) \quad \text{i} \quad \nu(x) = \varphi(\nu_1(\nu'((x)))).$$

Pri injektivnim preslikavanjima ψ i μ_1 očuvani su infimumi, pa su infimumi očuvani i pri injektivnom preslikavanju $\psi \circ \mu_1 : \mathcal{F}_1^d \to I_w([0,1])$. Preslikavanje μ je intervalno-vrednosni rasplinuti skup čija familija gornjih nivo skupova je data kolekcija $\mathcal{F}_1$ (teorema 4.4, str. 95). Slično, pri injektivnim preslikavanjima φ i ν_1 očuvani su supremumi, pa su supremumi očuvani pri injektivnom preslikavanju $\varphi \circ \nu_1 : \mathcal{F}_2 \to I_w([0,1])$. Tada je preslikavanje ν intervalno-vrednosni rasplinuti skup čija familija donjih nivo skupova je data kolekcija $\mathcal{F}_2$ (teorema 4.9, str. 96).

Dokažimo da za svako $x \in X$ važi uslov $\overline{\mu(x)} + \overline{\nu(x)} \leq 1$, odnosno da je (X, μ, ν) intuicionistički rasplinuti skup.

Neka $x \in X$. Posmatramo sledeća dva slučaja.

1.) Neka je $\mu'(x) \neq \bigcap \mathcal{F}_1$. Tada je $\mu_1(\mu'(x)) \neq [1,1]$, pa je $[0.21, 0.31] \leq \mu(x) = \psi(\mu_1(\mu'(x))) \leq [0.31, 0.41]$. S druge strane je $[0, 0.21] \leq \nu(x) = \varphi(\nu_1(\nu'((x))) \leq [0.2, 0.31]$ ili $\nu(x) = \varphi(\nu_1(\nu'((x))) = [0,0]$, po definiciji preslikavanja φ. Odatle sledi da je $\overline{\mu(x)} + \overline{\nu(x)} \leq 0.72 < 1$.

2.) Neka je $\mu'(x) = \bigcap \mathcal{F}_1$. Tada je $\mu_1(\mu'(x)) = [1,1]$, pa je $\mu(x) = \psi([1,1]) = [1,1]$. Iz $\mu'(x) = \bigcap \mathcal{F}_1$ takođe sledi da važi $x \in \bigcap \mathcal{F}_1$, pa odatle, prema uslovu $\bigcap \mathcal{F}_1 \subseteq \bigcap \mathcal{F}_2$, sledi da važi $x \in \bigcap \mathcal{F}_2$. Dakle, $\nu_1(\nu'(x)) = \nu_1(\bigcap \mathcal{F}_2) = [0,0]$ i $\nu(x) = \varphi([0,0]) = [0,0]$. Odatle sledi da je, u ovom slučaju, $\overline{\mu(x)} + \overline{\nu(x)} = 1$.

Time je dokazano da za svako $x \in X$ važi $\overline{\mu(x)} + \overline{\nu(x)} \leq 1$ i da je (X, μ, ν) intuicionistički intervalno-vrednosni rasplinuti skup za koji su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ redom, kolekcije nivoa pripadanja i nivoa nepripadanja. □

Iz dokaza prethodne teoreme je jasno da preslikavanja φ i ψ nisu jedina moguća za ovu konstrukciju, tako da dobijeni intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi koji zadovoljavaju tražene uslove nisu jednoznačni.

5.2 Mogućnosti primene

Kao oblast u kojoj očekujemo primenu rezultata postignutih u ovom radu, možemo istaći matematičku morfologiju, time i primenu u obradi slike. Očekivana primena rezultata ovog rada bazira se na radovima koji su objavljeni u toj oblasti, a naročito na radovima koji su objavljeni u novije vreme.

U matematičkoj morfologiji, morfološki operatori su sredstvo za transformaciju jedne slike u drugu sliku, od kojih su osnovni: dilatacija (*dilation*), erozija (*erosion*), otvaranje (*opening*) i zatvaranje (*closing*). Morfološki operatori su uvedeni za transformacije binarnih slika na transformacije "sivih" slika (*grayscale images*). Sledeći korak u razvijanju matematičke morfologije je bio uvođenje različitih modela baziranih na teoriji rasplinutih skupova. Međutim, u tim modelima, teorija rasplinutih skupova je "... služila samo kao alat za konstruisanje morfoloških modela, a u modele uopšte nije uključivana neodređenost (rasplinutost) i neizvesnost, odnosno nesigurnost" [106]. Zahvaljujući novim ekstenzijama rasplinutih skupova, u novije vreme se razvija intervalno-vrednosna rasplinuta i intuicionistička rasplinuta matematička morfologija. U ovom okviru "...teorija rasplinutih skupova služi ne samo kao alat za rad sa "sivim" slikama, već i kao model za nesigurnost..." [106]. U tom kontekstu, matematička morfologija se može posmatrati kao mrežna rasplinuta matematička morfologija (*L- fuzzy mathematical morphology*) [126, 127]. Pomenimo još neke radove u kojima već korišćeni intervalno-vrednosni i intuicionistički rasplinuti skupovi u matematičkoj morfologiji [17, 105, 126], kao i radove iz kojih se vidi da su kompletne mreže prirodno okruženje za razvijanje matematičke morfologije [120, 106]. Prema tome, koncepti koji su korišćeni u ovom radu su u širokoj primeni u razvijanju i primeni matematičke morfologije u današnje vreme.

Pošto probleme, koje smo izabrali za istraživanje, posmatramo iz ugla nivo skupova, pomenimo da su neke fazifikacije matematičke morfologije vršene upotrebom nivo skupova [18]. Mada su svojstva morfoloških operatora dobijena na taj način slabija od drugih, ovaj princip konstrukcije je "...interesantan sam po sebi i korišćen je za generalizaciju drugih operacija na rasplinutim skupovima... Čak i operatori sa slabijim svojstvima mogu biti korisni u prmenama..." [18]. Možemo istaći i rad [100] grupe autora sa Ghent Univerziteta u kome je korišćen isti pristup - preko nivo skupova. U radu [100] su kao najpogodniji način reprezentacije slike izabrani intervali, odnosno intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi, a ispitane su mogućnosti za dekompoziciju morfoloških operatora na nivo skupove, odnosno ispitano je u kojim slučajevima se nivoi osnovnih morfoloških operatora mogu napisati ili aproksimirati u terminima odgovarajućih binarnih operatora. Kao razlog za takvo istraživanje, autori pomenutog rada ističu da takva konverzija na binarne operatore rezultuje skraćenjem vremena potrebnog za računanje (*computation time*), a takođe je i teorijski interesantna zato što daje vezu između intervalno-vrednosno rasplinutih morfoloških operatora i binarnih morfoloških operatora.

Pored toga postoji mogućnost primene postignutih rezultata u evaluaciji nastavnog procesa [91, 121] i obradi reči [101, 155]. Rukovodeći se mišlju da "Iste reči imaju različito značenje za različite ljude, pa su zbog toga neodređene" [101], Mendel skuplja intervalne podatke od grupe subjekata (*interval end-point data*) [101, 102, 103]. U tom smislu bi u obradi reči mogle naći primenu ispitane mreže intervala i intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi.

5.3 Zaključak, dalji pravci istraživanja i otvoreni problemi

U centar istraživanja postavljen je sledeći problem:
Neka je mreža intervala, koja je mrežno uređena na neki od četiri različita načina, data kompletna mreža. Odrediti potrebne i dovoljne uslove da unapred zadata kolekcija podskupova nepraznog skupa X bude kolekcija gornjih (donjih) nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa.

S tim u skladu je postavljen sledeći problem - izdvojiti klasu mreža koje zadovoljavaju potrebne i dovoljne uslove za centralno postavljeni problem. Problem je formulisan na sledeći način:
Izdvojiti klasu mreža koje se mogu potopiti u direktan proizvod dva kompletna lanca tako da su očuvani supremumi i najmanji element (očuvani infimumi i najveći element) ili, ekvivalentno: *Odrediti potrebne i dovoljne uslove da se kompletna mreža može potopiti u direktan proizvod dva kompletna lanca tako da su očuvani supremumi i najmanji element ili očuvani infimumi i najveći element.*

Time je pored doprinosa u teoriji rasplinutih skupova, dat doprinos i u teoriji mreža. Sistematizovana su, ili ispitana svojstva određenih mreža intervala.
Definisane su nove relacije $\wedge$- i $\vee$- između i ispitana njihova svojstva po analogiji sa poznatom relacijom "...između..." na elementima mreže. Data je još jedna karakterizacija linearnih, distributivnih i modularnih mreža preko ternarnih relacija definisanih za novouvedene relacije $\wedge$- i $\vee$- između.

Dalje su definisane mreže, koje su u svom konačnom slučaju dualno-slim mreže, i ispitana su njihova svojstva potrebna za rešavanje problema sinteze.

Data je karakterizacija kompletnih konačno prostornih i kompletnih dualno konačno prostornih mreža. Takođe je određena klasa mreža koje se mogu injektivno preslikati u direktan proizvod n kompletnih lanaca tako da su očuvani supremumi i dualno, određena je klasa mreža koje se mogu injektivno preslikati u direktan proizvod n kompletnih lanaca tako da su očuvani infimumi.

Doprinos u teoriji rasplinutih skupova se ogleda u rešavanju centralno postavljenog problema.
Za mrežu intervala $I_w([0,1])$, koja je uređena po komponentama, postavljeni problem je potpuno rešen, odnosno određen je potreban i dovoljan uslov da unapred zadata familija podskupova nepraznog skupa X bude familija donjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \rightarrow I_w([0,1])$. Takođe je određen potreban i dovoljan uslov da unapred zadata familija podskupova nepraznog skupa X bude familija gornjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \rightarrow I_w([0,1])$.

Za mrežu intervala $I_i([0,1])$, koja je uređena nepreciznom poretkom (skupovnom inkluzijom), određen je potreban i dovoljan uslov da unapred zadata familija podskupova nepraznog skupa X bude familija donjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \rightarrow I_i([0,1])$. Međutim, određeni su samo dovoljni uslovi da data familija podskupova nepraznog skupa X bude familija gornjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \rightarrow I_i([0,1])$.

Za mrežu intervala $I_l([0,1])$, koja je uređena leksikografskim poretkom, takođe su određeni dovoljni uslovi da data familija podskupova nepraznog skupa X bude familija donjih nivo skupova i određeni su dovoljni uslovi da data familija podskupova nepraznog skupa X bude familija gornjih nivo skupova nekog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \rightarrow I_l([0,1])$.

Za mrežu intervala $I_s([0,1])$ postavljeni problem nije rešavan, jer izlazi izvan okvira ovog rada.

U daljem istraživanju pre svega bi trebalo naći rešenja za postavljene, a nerešene probleme:

- Ako je data mreža intervala $I_i([0,1])$ i intervalno-vrednosni rasplinuti skup $\mu : X \rightarrow I_i([0,1])$, okarakterisati mrežu gornjih nivo skupova datog intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa μ.

- Odrediti potrebne i dovoljne uslove da unapred zadata kolekcija podskupova nepraznog skupa X bude kolekcija gornjih (donjih) nivo skupova intervalno-vrednosnog rasplinutog skupa $\mu : X \rightarrow I_s([0,1])$.

Jedan od zadataka u daljem radu je ispitivanje mogućnost daljeg povezivanja dobijenih rezultata za $\vee$- između ravne mreže sa postojećim rezultatima za dualno-slim mreže.

Na neke od pravaca za dalje istraživanje je ukazano u prethodna dva odeljka. Sve rezultate koji se budu dobili rešavanjem ovde postavljenih, a nerešenih problema sinteze, treba primeniti na rešavanje problema sinteze za odgovarajuće intuicionističke rasplinute skupove. Od posebnog interesovanja u daljem radu će svakako biti implementacija dobijenih rezultata u matematičkoj morfologiji, obradi slike, obradi reči i evaluaciji u nastavi.

Literatura

[1] O. Arieli, C. Cornelis, G. Deschrijver and E. E. Kerre, *Relating intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets through bilattices*, In Applied Computational Intelligence, eds D. Ruan at al., World Scientific, (2004), 57-64.

[2] T. Arnould and S. Tano, *Interval valued fuzzy backward reasoning*, IEEE Trans, Fuzzy Syst 3/4, (1995), 425-437.

[3] K. T. Atanasov, *Intuitionistic fuzzy sets. Theory and Applications*, Physica-Verlag Heidelberg, 1999.

[4] K. T. Atanasov and S. Stoeva, *Intuitionistic L-fuzzy sets.* In: R. Trappl (ed.) Cybernetics and Systems Research 2. Elsevier, North-Holland, (1984), 539-540.

[5] E. Barrenechea, *Image processing with interval-valued fuzzy sets - edge detection - contrast*, PhD thesis, Public University of Navarra, 2005.

[6] A. F. Beardon at al., *The non-existence of utility function and the structure of non-representable preference relations*, Journal of Mathematical Economics 37, (2012), 17-38.

[7] A. Bigand and O. Colot, *Fuzzy filter based on interval-valued fuzzy sets for image filtering*, fuzzy Sets and Systems 161, (2010), 96-117.

[8] A. Bigand and O. Colot, *Fuzzy filter based on interval-valued fuzzy sets for image filtering*, Fuzzy Sets and Systems 161, (2010), 96-117.

[9] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence RI, 1967.

[10] D. S. Bridges and G. B. Mehta, *Representation of Preference Orderings*, Springer, New York, 1995.

[11] S. Burris and H. P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algrebra*, The Millennium Edition, 2012.

[12] H. Bustince, *Indicator of inclusion grade for interval-valued fuzzy sets. Application to approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets*, International Journal of Approximate Reasoning 23, (2000), 137-209.

[13] H. Bustince and P. Burillo, *Mathematical analysis of interval-valued fuzzy relations: Application to approximate reasoning*, Fuzzy Sets and Systems 113, (2000), 205-219.

[14] H. Bustince at al., *A survey of interval-valued fuzzy sets*, in: Handbook of Granular Computing, (W. Pedrycz, A. Skowron and V. Kreinovich, eds.) John Wiley and Sons, (2008), 491-516.

[15] H. Bustince at al., *Interval-valued fuzzy sets constructed from matrices: Application to edge detection*, Fuzzy Sets and Systems 160, (2009), 1819-1840.

[16] H. Bustince at al., *Generation of linear orders for intervals by means of aggregation functions*, Fuzzy Sets and Systems 220, (2013), 69-77

[17] I. Bloch, *Lattices of fuzzy sets and bipolar fuzzy sets, and mathematical morphology*, Information Sciences 181, (2011), 2002-2015.

[18] I. Bloch and H. Maítre, *Fuzzy mathematical morphologies: a comparative study*, Pattern Recognition 28/9, (1995), 1341-1387.

[19] S. Chanas and D. Kuchta, *Multiobjective programming in optimization of interval objective functions - a generalized approach*, European Journal of Operational Research 94, (1996), 594-598.

[20] S. M. Chen and W. H. Hsiao, *Bidirectional approximate reasoning for rule - based systems using interval-valued fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 113, (2000),185-203.

[21] D. Coker, *Fuzzy rough sets are intuitionistic L-fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 96, (1998), 381-383.

[22] C. Cornelis, K. T. Atanassov E. E. Kerre, *Intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets: a critical comparison*, in: Proceedings of the 3rd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Technology (M. Wagenknecht and R. Hampel eds.), 2003, 159-163.

[23] C. Cornelis at al., *Intuitionistic fuzzy relational calculus: an overview*, in: Proceedings of First International IEEE Symposium on Intelligent Systems, Varna 1, 2002, 340-345.

[24] C. Cornelis, G. Deschrijver and E. E. Kerre, *Classification of intuitionistic fuzzy implicators: an algebraic approach*, in: Proceedings of the 6th Joint Conference on Information Sciences, Durham, 2002, 105-108.

[25] C. Cornelis, G. Deschrijver and E. E. Kerre, *Implication in intuitionistic fuzzy and inteval-valued fuzzy set theory: Construction, classification, application*, Int. J. Approx. Reas. 35, (2004), 55-95.

[26] C. Cornelis, G. Deschrijver and E. E. Kerre, *Advances and challenges in interval-valued fuzzy logic*, Fuzzy Sets and Systems 157, (2006), 622-627.

[27] G. Czédli, *Coordinatization of join-distributive lattices*, Algebra Universalis 71/4,(2014), 385-404.

[28] G. Czédli, L. Ozsvárt and B. Udvari, *How many ways can two composition series intersect?*, Discrete Mathematics 312, (2012), 3523-3536.

[29] G. Czédli and E. T. Schmidt, *Slim semimodular lattices I. A visual approach*, Order 29, (2012), 481-497.

[30] G. Czédli and E. T. Schmidt, *Slim semimodular lattices II. A description by patchwork systems*, Order 30, (2013), 689-721.

[31] G. Czédli and E. T. Schmidt, *The Jordan-Hölder theorem with uniqueness for groups and semimodular lattices*, Algebra Universalis 66, (2011), 69-79.

[32] G. Czédli and E. T. Schmidt, *How to derive finite semimodular lattices from distributive lattices?*, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar 121/3, (2008), 277-282.

[33] B. A. Davey and H. A. Priestley, *Introduction to Lattices and Order*, Cambridge University Press, 1990.

[34] G. Deschrijver, *Generalised arithmetic operators and their relationship to t-norms in interval-valued fuzzy set theory*, Fuzzy Sets and Systems 160/21, (2009), 3080-3102.

[35] G. Deschrijver, *A representation of t-norms on interval-valued L-fuzzy set theory*, Fuzzy Sets and Systems 159, (2008), 1597-1618.

[36] G. Deschrijver, O. Arieli, C. Cornelis and E. E. Kerre, *A bilattice-based framework for handling graded truth and imprecision*, International journal of Uncertainty, Fuzzyness and Knowledge-Based Systems 15/1, (2007), 13-41.

[37] G. Deschrijver, C. Cornelis and E. E. Kerre, *On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 12, (2004), 45-61.

[38] G. Deschrijver and E. E. Kerre, *Aggregation operators in interval-valued fuzzy and Atanassov's intuitionistic fuzzy set theory*, in: Fuzzy Sets and their Extensions: Representation, Aggregation and Models (H. Bustince, F. Herrera and J. Montero eds.), Springer-Verlag, Studies in Fuzziness and Soft Computing 220, 2008, 183-203.

[39] G. Deschrijver and E. E. Kerre, *On the position of intuitionistic fuzzy set theory in the framework of theories modeling imprecision*, Information Sciences 177, (2007), 1860-1866.

[40] G. Deschrijver and E. E. Kerre, *Triangular norms and related operators in L^*- fuzzy set theory*, in: Logical, Analytic and probabilistic Aspects of Triangular Norms, (E. P. Klement and R. Mesiar eds.), Elsevier, 2005, 231-259.

[41] G. Deschrijver and E. E. Kerre, *On the cuts of intuitionistic fuzzy compositions*, Kuwait Journal of Science and Engineering 32, (2005), 17-38.

[42] G. Deschrijver and E. E. Kerre, *Implicators based on binary aggregation operators in interval-valued fuzzy set theory*, Fuzzy Sets and Systems 153, (2005), 229-248.

[43] G. Deschrijver and E. E. Kerre, *On the relationship between some extensions of fuzzy set theory*, Fuzzy Sets and Systems 133, (2003), 227-235.

[44] G. Deschrijver and E. E. Kerre, *A generalization of operators on intuitionistic fuzzy sets using triangular norms and conorms*, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets 8, (2002), 19-27.

[45] G. Deschrijver and E. E. Kerre, *On the relationship between intuitionistic fuzzy sets and some other extensions of fuzzy set theory*, Journal of Fuzzy Mathematics, 10/3,(2002), 711-725.

[46] R. P. Dilworth, *A decomposition theorem for partially ordered sets*, Annals of Mathematics, 51/1, (1950), 161-166.

[47] D. Dubois, S. Kaci and H. Prade, *Bipolarity in reasoning and decision, an introduction*, in: International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty, IPMU'04, Perugia, Italy, 2004, 959-966.

[48] D. Dubois, W. Ostasiewicz and H. Prade, *Fuzzy sets: history and basic notions*, in: D. Dubois, H. Prade (Eds.), Fundamentals of Fuzzy Sets, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2000), pp.80-93.

[49] W. D. Duthie, *Segments of ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 51, (1942), 1-14.

[50] K. M. Elbassioni, *Finding All Minimal Infrequent Multi-dimensional Intervals*, LATIN 2006: Theoretical Informatics, Lecture Notes in Computer Science 3887, Latin American Symposium 2006, Valdivia, Chile, Proceedings, Springer Berlin Heidelberg, (2006), 423-434.

[51] M. Erne, B. Šešelja and A. Tepavčević, *Posets Generated by Irreducible Elements*, Order 20, (2003), 79-89.

[52] F. Esteva, P. Garcia-Calvés and L. Godo, *Enriched interval bilattices and partial many-valued logics: an approach to deal with graded truth and imprecision*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2(1), (1994), 37-54.

[53] P. C. Fischburn, *Interval orders and interval graphs: A study of partially ordered sets*, Wiley, New York, 1985.

[54] J. Fodor and M. Roubens, *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*, Theory and Decision Library, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[55] I. Garth, *Interval order representation via shortest paths*, The Mathematics of Preference, Choice and Order, Studies in Choice and Welfare III(8), (2009), 303-311.

[56] B. V. Gasse st al., *A caracterisation of interval-valued residuated lattices*, Int. Journal of Approximate Reasoning 49(2), (2008), 478-489.

[57] T. Gerstenkorn and A. Tepavčević, *Lattice valued intuitionistic fuzzy sets*, Central European Journal of Mathematics, 2(3), (2004), 388-398.

[58] T. Gerstenkorn and A. Tepavčević, *An L-fuzzy Set Model of the Optimal Therapy when Diagnosis is known*, International Journal of Computing Anticipatory Systems, Chaos, Vol. 14, 146-155.

[59] T. Gerstenkorn and A. Tepavčević, *Lattice Valued Intuitionistic fuzzy Relations and Applications*, in "Soft Computing-Foundations and Theoretical Aspects", K.T. Atanassov, O. Hryniewicz, J. Kacprzyk (Eds.), Exit, Warsaw 2004, 221-234.

[60] A. Giarlotta, *The representability number of a chain*, Topology and its Applications 150, (2005), 157-177.

[61] A. Giarlotta, *On the Representability Number of Lexicographic Products in a Dedekind-Complete Chain*, Applied Mathematical Sciences 7/127, (2013), 6347-6353.

[62] V. Glivenko, *Contributions á l' étude des systèmes de choses normées*, American Journal of Mathematics, vol 59, (1937), 941-956.

[63] V. Glivenko, *Géométrie des systèmes de choses normées*, American Journal of Mathematics, vol 58, (1936), 799-828.

[64] M. Gorjanac Ranitović and A. Tepavčević, *General form of lattice-valued fuzzy sets under the cutworthy approach*, Fuzzy Sets and Systems 158(11), (2007), 1213-1216.

[65] M. Gorjanac Ranitović and A. Petojević, *Lattice representations of interval-valued fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 236, (2014), 50-57.

[66] M. B. Gorzalczany, *A method of inference in approximate reasoning based on interval valued fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 21, (1987), 1-17.

[67] G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation*, Birkhauser, 2010.

[68] G. Grätzer and J. B. Nation, *A new look at the Jordan-Hölder theorem for semimodular lattices*, Algebra Universalis 64, (2010), 309-311.

[69] G. Grätzer and E. Knapp, *Notes on planar semimodular lattices IV. The size of a minimal congruence lattice representation with rectangular lattices*, Acta Sci. Math.(Szeged) 76, (2010), 3-26.

[70] G. Grätzer and E. Knapp, *Notes on planar semimodular lattices III. Rectangular lattices*, Acta Sci. Math.(Szeged) 75, (2009), 29-48.

[71] G. Grätzer and E. Knapp, *Notes on semimodular planar lattices I. Construction*, Acta Sci. Math.(Szeged) 73, (2007), 445-462.

[72] G. Grätzer,H. Lakser and E. T. Schmidt, *Congruence lattices of small planar lattices*, 1993.

[73] M. L. Guerra and L. Stefanini, *A comparison index for interval ordering based on generalized Hukuhara difference*, Soft Computing 16, (2012), 1931-1943.

[74] E. Harzheim, *Ordered sets*, Advances in Mathematics (Springer) 7, New York: Springer, 2005.

[75] O. Hölder, *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen*, Math. Ann. 34, (1889), 26-56.

[76] V. I. Igošin, *An algebraic characterization of interval lattices*, russian Mathematical Surveys 40(3), (1985), 233.

[77] H. Ishibuchi and H. Tanaka, *Multiobjective programming in optimization of the interval objective function*, European Journal of Operational Research 48 (2), (1990), 219-225.

[78] A. Jaballah and F. B. Saidi, *Uniqueness results in the representation of families of sets by fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 157, (2006), 964-975.

[79] V. Janiš, A. Tepavčević and B. Šeselja, *Non-standard cut classification of fuzzy sets*, Information Sciences 177, (2007), 161-169.

[80] V. Janiš and A. Tepavčević, *Metric in a Space with Fuzzy Compatibility*, Indian Journal in Pure and Applied Mathematics, 35/6, (2004),737-745.

[81] V. Janiš, M. Rencova, B. Šešelja and A. Tepavčević, *Construction of fuzzy relation by closure systems*, S. Chaudhury et al. (Eds.): PReMI 20009. LNCS 5909, 2009.

[82] S. Jenei, *A more efficient method for defining fuzzy connectives*, Fuzzy Sets and Systems 90,(1997), 25-35.

[83] J. Jimenez, S. Montes, B. Šešelja and A. Tepavčević, *On lattice valued up-sets and down-sets*, Fuzzy Sets and Systems 161, (2010), 1699-1710.

[84] J. Jimenez, S. Montes, B. Šešelja and A. Tepavčević, *Lattice-valued approach to closed sets under fuzzy relations: Theory and applications*, Computers Mathematics with Applications, 62/10, (2011), 3729-3740.

[85] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algebraique*, Gauthier Villars, 1870.

[86] V. G. Kaburlasos, *FINs: lattice theoretic tools for improving prediction of sugar production from populations of measurements*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B 34, (2004), 1017-1030.

[87] V. G. Kaburlasos, *Towards a Unified Modeling and Knowledge-Representation Based on Lattice Theory*, Studies in Computational Intelligence 27, Springer, Heidelberg, 2006.

[88] V. G. Kaburlasos, S. E. Papadakis and A. Amanatiadis, *Binary Image 2D Shape Learning and Recognition based on Lattice-Computing (LC) Techniques*, J. Math. Imaging Vis. 42, (2012), 118-133.

[89] A. Kehagias, *Some remarks on the lattice of fuzzy intervals*, Information Sciences 181(10), (2011), 1863-1873.

[90] D. Kelly and I. Rival, *Planar lattices*, Can. J. Math. 27/3, (1975), 636-665.

[91] A. R. Khan at al., *Application of Expert System with Fuzzy Logic in teachers' performance Evaluation* international Journal of Advanced Computer Science and Applications 2(2), (2011), 51-57.

[92] E. E. Kerre, *The impact of fuzzy set theory on contemporary mathematics*, Appl. Comput. Math. 10/1, Special Issue, (2011), 20-34.

[93] H. A. Kierstead and W. T. Trotter, *Interval orders and dimension*, Discrete mathematics 213, (2000), 179-188.

[94] G. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*, Prentice-Hall PTR, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[95] Y. M. Liu and M. K. Luo, *Fuzzy Topology*, Advances in Fuzzy Systems-Applications and Theory, Vol. 9, World Scientific, Singapore, 1997.

[96] A. Lochmann, *Irreducible Elements in Metric Lattices*, (2010), arXiv:1005.5155.

[97] S. MacLane and G. Birkhoff, *Algebra, 3rd ed.*, American Mathematical Society, Providence RI, New York, 1988.

[98] S. K. Mahato and A. K. Bhunia, *Interval-Arithmetic-Oriented Interval Computing Technique for Global Optimization*, AMRX Applied Mathematics Research eXpress 2006, Article ID 69642, 1-19.

[99] A. Myers, *Basic Interval Orders*, Order 16, (1999), 261-275.

[100] T. Mèlange, M. Nachtegael, P. Sussner and E. E. Kerre, *On the Decomposition of Interval-Valued Fuzzy Morphological Operators*, J. Math. Imaging Vis. 36, (2010), 270-290.

[101] J. M. Mendel, *Computing with words and its relationships with fuzzistics*, Information Sciences 177, (2007), 988-1006.

[102] J. M. Mendel, *Computing with words, when words can mean different things to different people*, In: Proceedings of Third International ICSC Symposium on Fuzzy Logic and Applications, Rochester University, Rocheste, NY, 1999.

[103] J. M. Mendel, *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems:Introduction and New Directions*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.

[104] V. Murali and B. B. Makamba, *On an equivalence of fuzzy subgroups*, Fuzzy Sets and Systems 123, (2001), 259-264.

[105] M. Nachtegael at al., *Some aspects of Interval-valued and Intuitionistic Fuzzy Mathematical Morphology*, J. Math. Imaging. Vis. 43, (2012), 50-71.

[106] M. Nachtegael at al., *On the role of complete lattices in mathematical morphology: from tool to uncertainty model*, Information Sciences 181, (2011), 1971-1988.

[107] M. Nachtegael at al., *Modelling numerical and spatial uncertainty in grayscale image capture using fuzzy set theory*, In: Proceedings of NASTEC 2008, 15-22, 2008.

[108] J. B. Nation, *Notes on Lattice Theory*, University of Hawaii, math.hawaii.edu/ jb/books.html.

[109] C. V. Negoita and D. A. Ralescu, *Representation theorems for fuzzy concepts*, Kybernetes 4, (1975), 169-174.

[110] C. V. Negoita and D. A. Ralescu, *Simulation, Knowledge-Based Computing and Fuzzy Statistics*, Van Nostrand Reinhold, New York, (1987), 89-91.

[111] C. V. Negoita and D. A. Ralescu, *Applications of Fuzzy Sets to System Analysis*, Wiley, New York, 1975.

[112] J. Niederle, *On automorphism groups of planar lattices*, Mathematica Bohemica, Vol.123, No. 2, (1998), 113-136.

[113] Z. Pawlak, *Some Remarks on Rough Sets*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences, Vol 33, No 11-12, 1985.

[114] V. Petridis and V. G. Kaburlasos, *FINkNN: a fuzzy interval number k-nearest neighbor classifier for prediction of sugar production*, Journal of Machine Learning Research 4, (2003), 17-37.

[115] V. Petridis and V. G. Kaburlasos, *Fuzzy Lattice Neural Network (FLNN): A Hybrid Model for Learning*, IEEE Transactions on neural networks 9/5, (1998), 877-890.

[116] E. Pitcher and M. F. Smiley, *Transitivities of betweenness*, Trans. Amer. Math. Soc, Vol 52, (1942), 95-114.

[117] A. M. Radzikowska and E. E. Kerre, *On L-fuzzy rough sets*, L. Rutkowski et al. (Eds.): ICAISC 2004, LNAI 3070, pp 526-531, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2004.

[118] D. A. Ralescu, *A survey of the representation of fuzzy concepts and its applications*, Advances in Fuzzy Sets, Theory and Applications (M. M. Gupta, R. K. Ragade and R. Yager (Eds.)), North Holland, Amsterdam, (1979), 77-91.

[119] D. A. Ralescu, *A generalization of the representation theorem*, Fuzzy Sets and Systems 51, (1992), 309-311.

[120] C. Ronse, *Why mathematical morphology needs complete lattices*, Signal Processing 21(2), (1990), 129-154

[121] E. Roventa, A. Naaji and I. Dascal, *Using Fuzzy Techniques for Students' Evaluation*, Latest trends on Computers 1, (2010), 375-378.

[122] F. B. Saidi and A. Jaballah, *Uniqueness in the generalized representation by fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems 159, (2008), 2176-2184.

[123] F. B. Saidi and A. Jaballah, *Alternative characterizations for the representation of families of sets by fuzzy sets*, Information Sciences 178, Issue 12, (2008), 2639-2647.

[124] R. Sambuc, *Functions Φ-Flous Application à l'aide au Diagnostic en Pathologie Thyroidienne*, Thèse de Doctorat en Médecine, Marseille, 1975.

[125] A. Segupta and T. K. Pal, *On comparing interval numbers*, European Journal of Operational Research 127, (2000), 28-34.

[126] P. Sussner at al., *Interval-Valued and Intuitionistic Fuzzy Mathematical Morphologies as Special Cases of L-Fuzzy Mathematical Morphology*, J. Math. Imaging. Vis. 43, (2012), 50-71.

[127] P. Sussner at al., *L-fuzzy mathematical morphology: an extension of interval-valued and intuitionistic fuzzy mathematical morphology*, in: Proceedings of NAFIPS 2009 - 28th North American Fuzzy Information Processing Society Annual Conference, 2009, 6 pages on CD.

[128] E. Tamas Schmidt, *Rectangular hulls of semimodular lattices*, online manuscript, www.math.bme.hu/schmidt/lattice.htm, 2011.

[129] E. Tamas Schmidt, *A new look at the semimodular lattices, a geometric approach*, online manuscript, www.math.bme.hu/schmidt/lattice.htm, 2011.

[130] B. Šešelja, *Teorija mreža*, Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2006.

[131] B. Šešelja, D. Stojić and A. Tepavčević, *On existence of P-valued fuzzy sets with a given collection of cuts*, Fuzzy Sets and Systems 161/5, (2010), 763-768.

[132] B. Šešelja and A. Tepavčević, *Representation by Cuts in the Framework of Relational Valued Fuzzy Sets*, Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1656-1659.

[133] B. Šešelja and A. Tepavčević, *Fuzzy Identities*, Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1660-1664.

[134] B. Šešelja and A. Tepavčević, *Weak fuzzy equivalence and equality relations*, S. Chaudhury et al. (Eds.): PReMI 2009, LNSC 5909, 134-139, 2009.

[135] B. Šešelja and A. Tepavčević, *Equivalent fuzzy sets*, Kybernetika 41 (2), (2005), 115-128.

[136] B. Šešelja and A. Tepavčević, *A note on natural equivalence relation on fuzzy power set*, Fuzzy Sets and Systems 148 (2), (2004), 201-210.

[137] B. Šešelja and A. Tepavčević, *Completion of ordered structures by cuts of fuzzy sets: an overview*, Fuzzy Sets and Systems 136, (2003), 1-19.

[138] B. Šešelja and A. Tepavčević, *Representing ordered structures by fuzzy sets:an overview*, Fuzzy Sets and Systems 136, (2003), 21-39.

[139] B. Šešelja and A. Tepavčević, *On a construction of codes by P-fuzzy sets*, Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad 20(2), (1990), 71-80.

[140] B. Šešelja and A. Tepavčević, *On the collection of lattices determined by the same poset of meet-irreducibles*, Novi Sad J. Math.,Vol 26,No. 2, (1996), 11-19.

[141] B. Šešelja and A. Tepavčević, *A note on Boolean lattices of finite posets*, Novi Sad J. Math.,Vol 28,No. 2, (1998), 63-69.

[142] B. Šešelja and A. Tepavčević, *On generation of finite posets by meet-irreducibles*, Discrete Math. 186, (1998), 269-275.

[143] B. Šešelja and A. Tepavčević, *Collection of Finite Lattices generated by a Poset*, Order 17, (2000), 129-139.

[144] A. Tepavčević and M. Gorjanac-Ranitović, *General form of lattice valued intuitionistic fuzzy sets*, Computational Intelligence, Theory and Applications, International Conference 9th Fuzzy Days in Dortmund, Germany, 2006 Proceedings, Springer Berlin Heidelberg, (2006), 375-381.

[145] A. Tepavčević and A. Pešić, *Special intuitionistic fuzzy sets and applications in management in nonprofit organizations*, Fuzzy Economic Review, X/1, 2005.

[146] A. Tepavčević and G. Trajkovski, *L-fuzzy lattices: an introduction*, Fuzzy Sets and Systems 123, (2001), 206-219.

[147] H. R. Tizhoosh, *Image thresholding using type II fuzzy sets*, Pattern Recognition 38, (2005), 2363-2372.

[148] F. Wehrung, *Direct decompositions of non-algebraic complete lattices*, arXiv.math/0501373v1[math.GM].

[149] B. Yuan at. al., *On normal form based on interval-valued fuzzy sets and their applications to approximate reasoning*, International J. General Systems 23, (1995), 241-254.

[150] Yuan Xue-Hai and Li Hong-Xing, *Cut Sets on interval-valued intuitionistic Fuzzy Sets*, 2009 Sixth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge discovery.

[151] Yuan Xue-Hai, Li Hong-Xing and E. Stanley Lee, *Three new cut sets of fuzzy sets and new theories of fuzzy sets*, Computers and Mathematics with Applications 57, (2009), 691-701.

[152] Xiao-shen Li, Xue-hai Yuan and E. Stanley Lee, *The three-dimensional fuzzy sets and their cut sets*, Computers and Mathematics with Applications 58, (2009), 1349-1359.

[153] L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Inform. Control 8, (1965), 338-353.

[154] L. A. Zadeh, *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes interval-valued fuzzy sets*, IEEE Trans. Syst. Man Cybernet. 3, (1973), 28-44.

[155] L. A. Zadeh, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning*, Information Sciences 8, (1975), 43-80.

[156] F. Zapata at all, *Orders an intervals over partially ordered sets: Extending Allen's algebra and interval graph results*, Soft Computing 17(8), (2013), 1379-1391

[157] W. Zeng and Yu Shi, *Note on Interval-Valued Fuzzy Set*, FSKD 2005, LNAI 3613, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2005), 20-25.

[158] W. Zeng, Yu Shi and Li Hong-Xing, *Representation theorem of interval-valued fuzzy set*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and knowledge-Based Systems 14(3), (2006), 259-269.

Biografija

Marijana Gorjanac Ranitović, rođena 1967. godine u Somboru, gde započnje školovanje. Svoje dalje obrazovanje nastavlja na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, gde je 1993. godine diplomirala na odseku za matematiku, smer: Profesor matematike.

Magistarsku tezu *„Mrežno vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi“*, urađenu pod mentorstvom prof. dr Andreje Tepavčević, odbranila je 2005. godine, takođe na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu na Departmanu za matematiku.

Od 1993. do 1997. godine zaposlena u Srednjoj Tehničkoj školi u Somboru.
Od oktobra 1997. godine do danas radi na Učiteljskom, današnjem Pedagoškom, fakultetu u Somboru, prvo kao asistent-pripravnik, a zatim i kao asistent na predmetima: Matematika 1, Matematika 2 i Matematičko modelovanje.

Koautor nekoliko radova objavljenih u međunarodnim časopisima (dva M21, jedan M33, jedan M34), domaćim tematskim zbornicima (dva rada M45) i jedan u monografiji nacionalnog značaja (M44).

Kao istraživač angažovana na naučno-istraživačkom projektu Ministarstva prosvete nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije br. 179001 i na projektu „Primena mini-projekata u realizaciji sadržaja integrisanih prirodnih nauka i matematike u razrednoj nastavi“, Pokrajinskog sekretarijata za nauku i tehnološki razvoj. Takođe učestvuje u TEMPUS projektu Harmonization and Modernization of the Curriculum for Primary Teacher Education (HAMOC), br: 516762-TEMPUS-1-2011-1-RS-TEMPUS-JPCR, čiji je koordinator Univerzitet u Novom Sadu.

Marijana Gorjanac Ranitović

Novi Sad, 28.11.2014. godine

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: RBR	
Identifikacioni broj: IBR	
Tip dokumentacije: TD	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: TZ	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada (dipl., mag., dokt.): VR	Doktorska disertacija
Ime i prezime autora: AU	Marijana Gorjanac Ranitović
Mentor (titula, ime, prezime, zvanje): MN	dr Andreja Tepavčević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Naslov rada: NR	Neke klase planarnih mreža i intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi
Jezik publikacije: JP	srpski
Jezik izvoda: JI	srp. / eng.
Zemlja publikovanja: ZP	Republika Srbija
Uže geografsko područje: UGP	Vojvodina
Godina: GO	2014.
Izdavač: IZ	Autorski reprint
Mesto i adresa: MA	Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 3

Fizički opis rada: FO	(5 glava /144 stranica / 22 slika / 0 grafikona / 158 referenci / 0 priloga)
Naučna oblast: NO	Matematika
Naučna disciplina: ND	Algebra
Predmetna odrednica, ključne reči: PO	intervalno-vrednosni rasplinuti skupovi, intervalno-vrednosni intuicionistički rasplinuti skupovi, mreže, kompletne mreže, nivo skupovi, i-između ravne mreže, ili-između ravne mreže, slim mreže, dualno-slim mreže, konačno prostorne mreže, dualno konačno prostorne mreže
UDK	
Čuva se: ČU	U biblioteci Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Važna napomena: VN	
Izvod: IZ	U radu je ispitan sledeći problem: *Pod kojim uslovima se može rekonstruisati (sintetisati) intervalno-vrednosni rasplinuti skup iz poznate familije nivo skupova.* U tu svrhu su proučena svojstva mreža intervala za svaki od četiri izabrana mrežna uređenja: poredak po komponentama, nepre- cizni poredak (skupovna inkluzija), strogi i leksikografski poredak. Definisane su i-između i ili-između ravne mreže i ispitana njihova svojstva potrebna za rešavanje postavljenog problema sinteze za intervalno-vrednosne rasplinute skupove. Za i-između ravne mreže je dokazano da su, u svom konačnom slučaju, slim mreže i dualno, da su ili-između ravne mreže dualno-slim mreže. Data je karakterizacija kompletnih konačno prostornih i dualno konačno prostornih mreža. Određena je klasa mreža koje se mogu injektivno preslikati u direktan proizvod n kompletnih lanaca tako da su očuvani supremumi i dualno, određena je klasa mreža koje se mogu injektivno preslikati u direktan proizvod n lanaca tako da su očuvani infimumi. U rešavanju problema sinteze posmatrana su dva tipa nivo skupova- gornji i donji nivo skupovi. Potreban i dovoljan uslov za sintezu intervalno-

vrednosnog rasplinutog skupa iz poznate familije nivo skupova određen je za mrežu intervala koja je uređena poretkom po komponentama, za oba tipa posmatranih nivo skupova.

Za mrežu intervala uređenu nepreciznim poretkom, problem je rešen za donje nivo skupove, dok su za gornje nivo skupove određeni dovoljni uslovi.

Za mrežu intervala koja je uređena leksikografskim poretkom, takođe su dati dovoljni uslovi i to za oba tipa nivo skupova.

Za mrežu intervala uređenu strogim poretkom problem nije rešavan, jer izlazi izvan okvira ovog rada.

Dobijeni rezultati su primenjeni za rešavanje sličnog problema sinteze za intervalno-vrednosne intuicionističke rasplinute skupove za mrežu intervala uređenu poretkom po komponentama.

Rezultati ovog istraživanja su od teorijskog značaja u teoriji mreža i teoriji rasplinutih skupova, ali postoji mogućnost za primenu u matematičkoj morfologiji i obradi slika.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: DP	22. novembar 2012.
Datum odbrane: DO	
Članovi komisije: (ime i prezime / titula / zvanje / naziv organizacije / status) KO	1. dr Rozalija Madaras Silađi, redovni profesor, PMF u Novom Sadu - predsednik 2. dr Andreja Tepavčević, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu - mentor 3. dr Branimir Šešelja, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu - član 4. dr Vera Lazarević, vanredni profesor Tehničkog fakulteta u Čačku -član 5. dr Jelena Ignjatović, vanredni profesor, PMF u Nišu – član

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number: ANO	
Identification number: INO	
Document type: DT	Monograph documentation
Type of record: TR	Textual printed material
Contents code: CC	PhD Theses
Author: AU	Marijana Gorjanac Ranitović
Mentor: MN	prof. dr Andreja Tepavčević
Title: TI	Some classes of planar lattices and interval-valued fuzzy sets
Language of text: LT	Serbian
Language of abstract: LA	eng. / srp.
Country of publication: CP	Republic of Serbia
Locality of publication: LP	Vojvodina
Publication year: PY	2014.
Publisher: PU	Author' s reprint
Publication place: PP	University of Novi Sad, Faculty of Sciences

Physical description: PD	(5/ 144/ 22/ 0/ 158/ 0)
Scientific field SF	Mathematics
Scientific discipline SD	Algebra
Subject, Key words SKW	interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets, interval-valued intuitionistic fuzzy sets, lattices, complete lattices, cut sets, meet - between planar lattices, join - between planar lattices, slim lattices, dually slim lattices, finitely spatial lattices, dually finitely spatial lattices
UC	
Holding data: HD	
Note: N	

Abstract:
AB

In this thesis the following problem was investigated:
Under which conditions an interval-valued fuzzy set can be reconstructed from the given family of cut sets.

We consider interval-valued fuzzy sets as a special type of lattice-valued fuzzy sets and we studied properties of lattices of intervals using four different lattice order: componentwise ordering, imprecision ordering (inclusion of sets), strong and lexicographical ordering.

We proposed new definitions of meet- between planar and join - between planar lattices, we investigated their properties and used them for solving problem of synthesis in interval-valued fuzzy sets.

It has been proven that finite meet- between planar lattices and slim lattices are equivalent, and dually: finite join- between planar lattices and dually slim lattices are equivalent.

Complete finitely spatial lattices and complete dually finitely spatial lattices are fully characterized in this setting. Next, we characterized lattices which can be order embedded into a Cartesian product of n complete chains such that all suprema are preserved under the embedding.

And dually, we characterized lattices which can be order embedded into a Cartesian product of

n complete chains such that all infima are preserved under the embedding.

We considered two types of cut sets – upper cuts and lower cuts.

Solution of the problem of synthesis of interval-valued fuzzy sets are given for lattices of intervals under componentwise ordering for both types of cut sets.

Solution of problem of synthesis of interval-valued fuzzy sets are given for lower cuts for lattices of intervals under imprecision ordering. Sufficient conditions are given for lattices of intervals under imprecision ordering and family of upper cuts.

Sufficient conditions are also given for lattices of intervals under lexicographical ordering.

The problem of synthesis of interval-valued fuzzy sets for lattices of intervals under strong ordering is beyond the scope of this thesis.

A similar problem of synthesis of interval-valued intuitionistic fuzzy sets is solved for lattices of intervals under componentwise ordering.

These results are mostly of theoretical importance in lattice theory and fuzzy sets theory, but also they could be applied in mathematical morphology and in image processing.

Accepted on Scientific Board on: AS	22. November 2012.
Defended: DE	
Thesis Defend Board: DB	1. Ph.D Rozalija Madaras Silađi, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad - president 2. Ph.D Andreja Tepavčević, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad - mentor 3. Ph.D Branimir Šešelja, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad - member 4. Ph.D Vera Lazarević, associate professor, Faculty of Technical Sciences, University of Kragujevac - member 5. Ph.D Jelena Ignjatović, associate professor, Faculty of Sciences, University of Niš – member