



UNIVERZITET U NOVOM SADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA
STUDIJSKI PROGRAM: GRAĐEVINARSTVO

RAVANSKI MODEL INTERAKCIJE VODE,
NANOSA I ZAGAĐIVAČA U PRIRODNIM
VODOTOCIMA

Doktorska disertacija

Mentor: Prof. Dr. Dragan Savić

Kandidat: Zoltan Horvat

Subotica, 2014. godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
 GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

RBR	Redni broj:	
IBR	Identifikacioni broj:	
TD	Tip dokumentacije:	Monografska dokumentacija
TZ	Tip zapisa:	Tekstualni štampani materijal
VR	Vrsta rada:	Doktorska disertacija
AU	Ime i prezime autora:	Zoltan Horvat
MN	Mentor:	dr. Dragan Savić, gostujući profesor
NR	Naslov rada:	Ravanski model interakcije vode, nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima
JP	Jezik publikacije:	Srpski
JI	Jezik izvoda:	Srpski/Engleski
ZP	Zemlja publikovanja:	Republika Srbija
UGP	Uže geografsko područje:	Vojvodina
GO	Godina:	2014
IZ	Izdavač:	Autorski reprint
MA	Mesto i adresa:	Subotica, Kozaračka 2a
FO	Fizički opis rada:	Broj poglavlja: 7; Broj stranica: 245; Broj slika: 104; Broj tabela: 26; Broj priloga: 10; Broj referenci: 128
NO	Naučna oblast:	Građevinarstvo
ND	Naučna disciplina:	Numerička hidraulika
PO	Predmetna odrednica, ključne reči:	Ravanski numerički model, strujanje, ponašanje nanosa, transport zagađivača, interakcija, terenska merenja
UDK		627.157:519.6
ČU	Čuva se:	
VN	Važna napomena:	
IZ	Izvod:	<p>U okviru ovog rada je razvijen ravanski model koji sadrži sve važne aspekte interakcije vode, nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima. Model obuhvata procese strujanja vode, oba oblika kretanja nanosa (suspendovani i vučeni), mehanizme razmene mase između nanosa u suspenziji i nanosa u aktivnom sloju, deformacije korita usled erozije i deponovanja nanosnog materijala, mehanizme razmene mase između nanosa u aktivnom sloju i aktivnom stratumu, kao i procese transporta nekonzervativne zagađujuće materije koja je u interakciji sa nanosom preko procesa adsorpcije/desorpcije. Formulirane jednačine transporta zagađivača obuhvataju njegovu pojavu u rastvorenom i adsorbovanom obliku. Razmena između dva vida pojave zagađivača (rastvoreni i adsorbovani) je opisana preko kinetičkih procesa prvog reda, pri čemu je modelisanje koeficijenata razmene usko povezano sa dostupnom površinom za adsorpciju. Sa druge strane, razmena između materije adsorbovane na suspendovani nanos, odnosno materije adsorbovane na nanos u aktivnom sloju je neposredno vezana za nanosne procese uvlačenja zrna u suspenziju i deponovanja istih iz suspenzije. Početni šematski testovi su podrazumevali proveru razvijenog algoritma za rešavanje advektivnih članova jednačina. Druga grupa šematskih testova je podrazumevala implementaciju razvijenog modela transporta zagađujuće materije, pri čemu su testirani i kvalitativno ocenjeni mehanizmi razmene i interakcije. Za testiranje modela na primerima aluvijalnih vodotokova izabrane su dve deonice reke Dunav. Prva lokacija se nalazi u pograničnoj zoni između Mađarske i Srbije gde su testirani aspekti modela koji se odnose na proračun tečenja i ponašanje nanosa. Druga deonicia se nalazi kod Beograda gde je, pored proračuna strujanja i nanosa, vršena analiza modela transporta zagađujuće materije obuhvatajući sve relevantne mehanizme i aspekte izučavanih procesa. Upoređivanjem terenskih merenja i rezultata proračuna je konstatovano da razvijeni model može simulirati interakciju vode, nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima sa zadovoljavajućom tačnošću i pouzdanošću.</p>
DP	Datum prihvatanja teme od strane NN veća:	12.11.2013.
DO	Datum odbrane:	
KO	Članovi komisije:	predsednik: dr. Marko Ivetić član: dr. Ljubodrag Savić član: dr. Miodrag Jovanović član: dr. Srđan Kolaković član: dr. Miodrag Spasojević

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING SUBOTICA

KEY WORD DOCUMENTATION

ANO	Accession number:	
INO	Identification number:	
DT	Document type:	Monograph documentation
TR	Type of record:	Textual printed material
CC	Contents code:	PhD Thesis
AU	Author:	Zoltan Horvat
MN	Mentor:	dr. Dragan Savić, visiting professor
TI	Title:	A two-dimensional model for flow, sediment and pollutant interaction in natural watercourses
LT	Language of text:	Serbian
LA	Language of abstract:	English/Serbian
CP	Country of publication:	Republic of Serbia
LP	Locality of publication:	Vojvodina
PY	Publication year:	2014
PU	Publisher:	Author reprint
PP	Publication place:	Subotica, Kozaračka 2a
PD	Physical description:	Number of chapters: 7; Number of pages: 245; Number of figures: 104; Number of tables: 26; Number of appendices: 10; Number of references: 128
SF	Scientific field:	Civil Engineering
SD	Scientific discipline:	Computational Hydraulics
SKW	Subject, Key words:	2-D numerical model, flow, sediment behavior, pollutant transport, interaction, field measurements
UC		627.157:519.6
HD	Holding data:	
N	Note:	
AB	Abstract:	<p>This work presents the development of a two-dimensional model for flow, sediment and pollutant interaction in natural watercourses. The model incorporates water flow computation, both aspects of sediment transport (suspended and bed-load), the mechanisms of exchange between suspended and bed sediment, bed evolution due to erosion and deposition, the mechanisms of exchange between active layer and active stratum sediment, as well as the processes of nonconservative pollutant transport including its interaction with sediment particles by adsorption/desorption. Deriving the governing equations for pollutant transport included the dissolved and adsorbed pollutant. The exchange between the dissolved and adsorbed pollutant was described using a first order kinetic process, while the modeling of the exchange coefficients remained closely related to the sediment surface available for adsorption. On the other hand, the exchange between the pollutant adsorbed on suspended sediment and the pollutant adsorbed on active layer sediment was directly related to the sediment processes of entrainment and deposition. Numerical tests included the evaluation of the developed algorithm for advection terms. The second group of numerical tests targeted the pollutant transport model, with the emphasis on the mechanisms of exchange and interaction. For field test cases two reaches of the Danube River were used. The first reach was located in the border area between Hungary and Serbia. Field data collected there was used to analyze the developed model's ability to simulate flow and sediment transport. Data collected on the second reach near Belgrade was used to perform flow, sediment and pollutant transport simulations, taking into account all the relevant mechanisms of the studied processes. Comparing the computed and measured values, it was concluded that the developed model is able to simulate the interaction of flow, sediment and pollutant in natural watercourses with acceptable precision and reliability.</p>
AS	Accepted on Scientific Board on:	12.11.2013.
DE	Defended:	
DB	Thesis Defend Board:	<p>president: dr. Marko Ivetić member: dr. Ljubodrag Savić member: dr. Miodrag Jovanović member: dr. Srđan Kolaković member: dr. Miodrag Spasojević</p>

UNIVERZITET U NOVOM SADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET SUBOTICA
DOKTORSKA DISERTACIJA
podneta 2014. godine

RAVANSKI MODEL INTERAKCIJE VODE, NANOSA I ZAGAĐIVAČA U PRIRODNIM VODOTOCIMA

Zoltan Horvat, d.i.g.

Katedra za hidrotehniku i vodno inženjerstvo okoline,
Građevinski fakultet Subotica,
Univerzitet u Novom Sadu

Sažetak:

U okviru ovog rada je razvijen ravanski model koji sadrži sve važne aspekte interakcije vode, nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima. Model obuhvata procese strujanja vode, oba oblika kretanja nanosa (suspendovani i vučeni), mehanizme razmene mase između nanosa u suspenziji i nanosa u aktivnom sloju, deformacije korita usled erozije i deponovanja nanosnog materijala, mehanizme razmene mase između nanosa u aktivnom sloju i aktivnom stratumu, kao i procese transporta nekonzervativne zagađujuće materije koja je u interakciji sa nanosom preko procesa adsorpcije/desorpcije. Pošto transportovana materija stupa u interakciju samo sa sitnim zrnima nanosa, korektno modelisanje nanosne mešavine je od ključnog značaja. Formulirane jednačine transporta zagađivača obuhvataju njegovu pojavu u rastvorenom i adsorbovanom obliku, pri čemu se u skladu sa konceptom ponašanja nanosa posebno tretira materija adsorbovana na suspendovani nanos i materija adsorbovana na nanos u aktivnom sloju i stratumima ispod njega. Razmena između dva vida pojave zagađivača (rastvoreni i adsorbovani) je opisana preko kinetičkih procesa prvog reda, pri čemu je modelisanje koeficijenata razmene usko povezano sa dostupnom površinom za adsorpciju. Sa druge strane, razmena između materije adsorbovane na suspendovani nanos, odnosno materije adsorbovane na nanos u aktivnom sloju je neposredno vezana za nanosne procese uvlačenja zrna u suspenziju i deponovanja istih iz suspenzije. Sve jednačine su napisane u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu, nakon čega su osrednjene po dubini u slučajevima kada je to bilo neophodno. Numeričko rešenje jednačina se zasniva na primeni metode etapnog rešavanja, pri čemu su posebno razvijani i poboljšavani algoritmi za proračun linearnih i nelinearnih advektivnih članova koristeći metodu karakteristika. Model podrazumeva simultano rešavanje implicitnog sistema jednačina u računskoj tački posebno za nanosne promenljive i posebno za promenljive transporta zagađivača.

Početni šematski testovi su podrazumevali proveru razvijenog algoritma za rešavanje advektivnih članova jednačina. Posebno je testiran proračun linearne i nelinearne advekcije. Druga grupa šematskih testova je podrazumevala implementaciju razvijenog modela transporta zagađujuće materije, pri čemu su testirani i kvalitativno ocenjeni mehanizmi razmene i interakcije. Analizirana su tri načina pristizanja transportovane materije u računski domen i to u vidu rastvorenog zagađivača, zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa i zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa na dnu. Za testiranje modela na primerima aluvijalnih vodotokova izabrane su dve deonice reke Dunav. Prva izabrana lokacija se nalazi u pograničnoj zoni između Mađarske i Srbije gde su pre svega testirani aspekti modela koji se odnose na proračun tečenja i ponašanje nanosa. Rezultati numeričkih simulacija su pokazali zadovoljavajuće slaganje sa merenim vrednostima kako za karakteristike strujanja vode, tako i za parametre nanosa. Druga izabrana deonica se nalazi kod Beograda gde je, pored proračuna strujanja i nanosa, vršena analiza modela transporta zagađujuće materije obuhvatajući sve relevantne mehanizme i aspekte izučavanih procesa. Upoređivanjem terenskih merenja i rezultata proračuna je konstatovano da razvijeni model može simulirati interakciju vode, nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING SUBOTICA
PhD THESYS
submitted in 2014

A TWO-DIMENSIONAL MODEL FOR FLOW, SEDIMENT AND POLLUTANT INTERACTION IN NATURAL WATERCOURSES

Zoltan Horvat, C.E.

Department for Hydraulics and Environmental Engineering,
Faculty of Civil Engineering Subotica,
University of Novi Sad

Abstract:

This work presents the development of a two-dimensional model for flow, sediment and pollutant interaction in natural watercourses. The model incorporates water flow computation, both aspects of sediment transport (suspended and bed-load), the mechanisms of exchange between suspended and bed sediment, bed evolution due to erosion and deposition, the mechanisms of exchange between active layer and active stratum sediment, as well as the processes of nonconservative pollutant transport including its interaction with sediment particles by adsorption/desorption. Since the transported constituent interacts only with fine sediment particles, the appropriate modeling of the sediment mixture is of great importance. Deriving the governing equations for pollutant transport included the dissolved and adsorbed pollutant. However, taking into account the modeling concept for sediment transport, the adsorbed pollutant was further divided into its portion adsorbed on suspended sediment and its portion adsorbed on sediment in the active layer and the stratum below it. The exchange between the dissolved and adsorbed pollutant was described using a first order kinetic process, while the modeling of the exchange coefficients remained closely related to the sediment surface available for adsorption. On the other hand, the exchange between the pollutant adsorbed on suspended sediment and the pollutant adsorbed on active layer sediment was directly related to the sediment processes of entrainment and deposition. All the derived equations were transformed into a orthogonal curvilinear coordinate system and depth averaged, when necessary. The numerical solution of the governing equations utilized the split-operator approach, including the development and improvement of algorithms based on the characteristic method for the linear and nonlinear advection terms. The discretization yielded two separate systems of equations for sediment and pollutant transport computation. Each implicit system was simultaneously solved for every computational point independently.

Numerical tests included the evaluation of the developed algorithm for advection terms, with separate tests for linear and nonlinear advection. The second group of numerical tests targeted the pollutant transport model, with the emphasis on the mechanisms of exchange and interaction. Three means of delivering pollution in the computational domain were considered, namely pollution arriving in dissolved form, pollution arriving adsorbed on suspended sediment and pollution adsorbed on bed sediment. For field test cases two reaches of the Danube River were used. The first reach was located in the border area between Hungary and Serbia. Field data collected there was used to analyze the developed model's ability to simulate flow and sediment transport. The accordance between computed and measured values proved to be satisfactory both for flow and sediment parameters. Data collected on the second reach near Belgrade was used to perform flow, sediment and pollutant transport simulations, taking into account all the relevant mechanisms of the studied processes. Comparing the computed and measured values, it was concluded that the developed model is able to simulate the interaction of flow, sediment and pollutant in natural watercourses.

Zahvalnica

Pre svega se zahvaljujem mojim roditeljima, sestri i prijateljima, koji su me podržavali tokom doktorskih studija. Ostajem veđito zahvalan mojoj budućoj supruzi, bez ćije pomoći i podrške bi ovaj poduhvat ostao osuđen na neuspeh.

Zahvaljujem se dekanu, prodekanima i svim zaposlenima Građevinskog fakulteta Subotica, koji su svojom podrškom pomogli u veoma složenom administrativnom proceduri koja je pratila ovu doktorsku disertaciju. Takođe se zahvaljujem šefu Katedre za hidrotehniku i vodno inženjerstvo okoline, koji je sa stručnog stanovišta pomogao tokom višegodišnjeg rada na izradi teze. Zahvaljujem se mentoru dr. Draganu Saviću.

Terenska merenja radi sakupljanja podataka u vezi sa tećenjem vode i ponašanjem nanosa na deonici Dunava u pogranićnom području između Mađarske i Republike Srbije su finansirana od strane Evropske Unije preko projekta Hungary-Serbia IPA Cross-border Co-operation Programme, naziv projekta *Cooperation in Education: Environmental-Hydraulics Field Training Reach on the Danube River (Danube-EHT-2010)*, broj projekta HUSRB/0901/221/001. Zahvaljujem se Višoj školi Eötvös József iz Baje na njihovoj saradnji tokom projekta.

Detaljna merenja radi sakupljanja terenskih podataka u vezi sa tećenjem vode, ponašanjem nanosa i transportom teških metala (zagađujuće materije) na deonici Dunava kod Beograda su finansirana od strane Ministarstva za obrazovanje, nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije, naziv projekta *Merenje i modeliranje fizićkih, hemijskih, bioloških i morfodinamićkih parametara reka i vodnih akumulacija*, broj projekta TR 37009. Ovom prilikom bih želeo da se zahvalim svim učesnicima na projektu koji su nesebićnim zalaganjem pomogli u terenskom i laboratorijskom radu.

Subotica, 11.5.2014.

Autor

Sadržaj

1. Uvod	1
2. Pregled literature	3
2.1. Ravanski modeli tečenja	3
2.2. Modeli transporta nanosa i deformacije korita	8
2.3. Modeli transporta zagađujuće materije	13
3. Teorijske osnove	17
3.1. Konvencije obeležavanja	17
3.2. Jednačine strujanja vode	17
3.3. Jednačine transporta nanosa i deformacije korita	18
3.3.1. Suspendovani nanos	18
3.3.2. Nanos na dnu i pri dnu	20
3.4. Jednačine transporta zagađujuće materije	25
3.4.1. Zagađujuća materija u rastvorenom obliku	26
3.4.2. Zagađujuća materija vezana za zrna suspendovanog nanosa	28
3.4.3. Zagađujuća materija vezana za zrna nanosa na dnu i pri dnu	29
3.5. Krivolinijski koordinatni sistem	32
3.5.1. Delimična transformacija jednačina	33
3.5.2. Potpuna transformacija jednačina	34
3.5.3. Pravila transformacije	35
3.5.4. Bazni vektori	36
3.5.5. Promena zakrivljenosti - metrični tenzor	37
3.5.6. Uopšteni (kovarijantni) parcijalni izvod	38
3.5.7. Fizičke komponente vektora i tenzora	39
3.5.8. Ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem	40
3.5.9. Usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem	41
3.6. Jednačine strujanja vode u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu osrednjene po dubini toka	42
3.6.1. Jednačina kontinuiteta	42
3.6.2. Dinamička jednačina	43
3.6.3. Pregled jednačina strujanja	48
3.7. Jednačine transporta nanosa i deformacije korita u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu osrednjene po dubini toka	49
3.7.1. Suspendovani nanos	49
3.7.2. Nanos na dnu i pri dnu	52
3.8. Jednačine transporta zagađujuće materije u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu osrednjene po dubini toka	53
3.8.1. Zagađujuća materija u rastvorenom obliku	53
3.8.2. Zagađujuća materija vezana za zrna suspendovanog nanosa	56
3.8.3. Zagađujuća materija vezana za zrna nanosa na dnu i pri dnu	59
4. Numeričko rešavanje jednačina	61
4.1. Računska mreža	61
4.1.1. Proračun geometrijskih koeficijenata	62
4.1.2. Transformacija vektora iz krivolinijskog u kartezijanski koordinatni sistem	63
4.2. Numeričko rešavanje jednačina strujanja vode	63

4.2.1.	Advektivni korak	65
4.2.2.	Difuzioni korak	72
4.2.3.	Propagacioni korak	75
4.3.	Numeričko rešavanje jednačina transporta nanosa i deformacije korita	80
4.3.1.	Advektivno-morfološki korak	82
4.3.2.	Difuzioni korak	92
4.4.	Numeričko rešavanje jednačina transporta zagađujuće materije	94
4.4.1.	Advektivno-interakcioni korak	96
4.4.2.	Difuzioni korak	105
4.5.	Prikaz rezultata	106
5.	Programski kôd	108
5.1.	Podprogrami za sprovođenje „opštih” operacija	108
5.2.	Podprogrami za sprovođenje proračuna tečenja, ponašanja nanosa i transporta zagađujuće materije	110
5.2.1.	Proračun tečenja	111
5.2.2.	Proračun ponašanja nanosa	111
5.2.3.	Proračun transporta zagađujuće materije	112
5.3.	Potrebe za ulaznim podacima	114
6.	Analiza rezultata	116
6.1.	Šematski testovi linearne i nelinearne advekcije	116
6.1.1.	Linearna advekcija	117
6.1.2.	Nelinearna advekcija	120
6.2.	Šematski testovi modela transporta zagađujuće materije	124
6.2.1.	Test-primer zagađene vode	128
6.2.2.	Test-primer zagađenog suspendovanog nanosa	130
6.2.3.	Test-primer zagađenog nanosa na dnu	132
6.2.4.	Dodatne napomene	134
6.3.	Deonica Dunava između Mohača (H) i Bezdana (SRB)	134
6.3.1.	Sakupljanje merenih podataka	134
6.3.2.	Rezultati numeričkih simulacija	137
6.4.	Deonica Dunava kod Beograda	151
6.4.1.	Sakupljanje merenih podataka	151
6.4.2.	Rezultati numeričkih simulacija	153
7.	Zaključak	183
	Prilog A Transformacija operatora	186
	Prilog B Advektivni korak modela tečenja	187
	Prilog C Difuzioni korak modela tečenja	188
	Prilog D Propagacioni korak modela tečenja	192
	Prilog E Advektivno-morfološki korak modela ponašanja nanosa	194
	Prilog F Difuzioni korak modela ponašanja nanosa	197
	Prilog G Advektivno-interakcioni korak transporta zagađivača	199

Prilog H	Difuzioni korak transporta zagađivača	202
Prilog I	Deonica Dunava između Mohača (H) i Bezdana (SRB)	205
Prilog J	Deonica Dunava kod Beograda	218

Spisak slika

1	Rečno dno	20
2	Dužina najkraćeg domena za proučavanje nanosa na dnu i pri dnu	21
3	Kontrolna zapremina aktivnog sloja	22
4	Aktivni sloj i stratumi	24
5	Fizički domen razmatranog problema	32
6	Transformacija domena Ω	33
7	Delimična transformacija jednačina	33
8	Komponente vektora \vec{V} u krivolinijskom koordinatnom sistemu	34
9	Bazni vektori u krivolinijskom koordinatnom sistemu	36
10	Definisanje metričnog tenzora	37
11	Usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem	41
12	Korekcija napona trenja po dnu	47
13	Računska mreža u fizičkom domenu	61
14	Računska mreža u transformisanom (računskom) domenu	62
15	Diskretizacija geometrijskih koeficijenata	62
16	Tipičan izgled karakteristika u nelinearnoj hiperboličkoj jednačini	66
17	Deformisanje talasa usled delovanja nelinearne advekcije	66
18	Propagacija strmog čela talasa usled nelinearne advekcije	67
19	Konvencija obeležavanja segmenta trajektorije	68
20	Integraljenje duž trajektorije koja je podeljena na segmente	70
21	Kontrolna zapremina oko tačke $P(i, j)$	77
22	Određivanje jediničnih protoka u glavnim tačkama računске mreže	79
23	Princip modelisanja ponašanja nanosa	84
24	Princip modelisanja ponašanja zagađujuće materije	99
25	Šematski prikaz programskog kôda	109
26	Numerički test simuliranja linearne advekcije	119
27	Numerički test simuliranja nelinearne advekcije, test-primer br. 1	121
28	Numerički test simuliranja nelinearne advekcije, test-primer br. 2	123
29	Numerički test simuliranja nelinearne advekcije, test-primer br. 3	124
30	Računski domen za numerički test transporta zagađivača	125
31	Strujna slika za numerički test transporta zagađivača	125
32	Proračun nanosa za numerički test transporta zagađivača	127
33	Numerički test transporta zagađivača, test-primer br.1	129
34	Numerički test transporta zagađivača, test-primer br.2	131
35	Numerički test transporta zagađivača, test-primer br.3	133
36	Deonica Dunava između Mohača i Bezdana	135
37	Detalj deonice Dunava između Mohača i Bezdana - prvi set merenja	136
38	Detalj deonice Dunava između Mohača i Bezdana - drugi set merenja	137
39	Mereni i računati nivoi slobodne površine vode	138
40	Detalj hidrauličkog proračuna D1	139
41	Detalj hidrauličkog proračuna D2	139
42	Detalj hidrauličkog proračuna D3	140
43	Merene i računate brzine u mernim presecima 2, 3, 4 i 6	141
44	Sračunate koncentracije suspendovanog nanosa	144
45	Sračunata zastupljenost gran. intervala u mešavini nanosa aktivnog sloja	145
46	Merene i računate ukupne konc. susp. nanosa u m.p. 2, 3, 4 i 6	147
47	Merene i računate brzine u mernim presecima 2, 3, 4 i 6	149

48	Merene i računate ukupne konc. susp. nanosa u m.p. 2, 3, 4 i 6	150
49	Deonica Dunava kod Beograda	152
50	Detalj hidrauličkog proračuna	154
51	Merene i računate brzine u mernim presecima 3, 5, 6 i 7	155
52	Sračunate koncentracije suspendovanog nanosa	158
53	Sračunata zastupljenost gran. intervala u mešavini nanosa aktivnog sloja	159
54	Merene i računate ukupne konc. susp. nanosa u m.p. 3, 5, 6 i 7	160
55	Sračunate koncentracije cinka	162
56	Merene i računate konc. rastvorenog cinka u m.p. 3, 5, 6 i 7	164
57	Merene i računate konc. cinka ads. na susp. nanos u m.p. 3, 5, 6 i 7	165
58	Merene i računate konc. cinka ads. na nanos akt. sloja u m.p. 3, 5, 6 i 7	166
59	Bilans mase cinka u računskom domenu	168
60	Sračunate koncentracije olova	169
61	Merene i računate konc. rastvorenog olova u m.p. 3, 5, 6 i 7	171
62	Merene i računate konc. olova ads. na sus. nanos u m.p. 3, 5, 6 i 7	172
63	Merene i računate konc. olova ads. na nanos akt. sloja u m.p. 3, 5, 6 i 7	173
64	Bilans mase olova u računskom domenu	174
65	Sračunate koncentracije žive	177
66	Merene i računate konc. rastvorene žive u m.p. 3, 5, 6 i 7	178
67	Merene i računate konc. žive ads. na susp. nanos u m.p. 3, 5, 6 i 7	179
68	Merene i računate konc. žive ads. na nanos akt. sloja u m.p. 3, 5, 6 i 7 .	180
69	Bilans mase žive u računskom domenu	181
70	Raspored brzina po dubini toka	205
71	Raspored koncentracija suspendovanog nanosa po dubini toka	205
72	Merene i računate brzine u mernim presecima 1, 5 i 7	206
73	Sračunata ukupna konc. susp. nanosa i debljina aktivnog sloja	207
74	Merene i računate ukupne konc. susp. nanosa u m.p. 1, 5 i 7	208
75	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 1	209
76	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 2	210
77	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 3	211
78	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 4	212
79	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 6	213
80	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 7	214
81	Merene i računate brzine u mernim presecima 1, 5 i 7	215
82	Sračunata ukupna konc. susp. nanosa i debljina aktivnog sloja	216
83	Merene i računate ukupne konc. susp. nanosa u m.p. 1, 5 i 7	217
84	Raspored brzina po dubini toka	218
85	Raspored koncentracija suspendovanog nanosa po dubini toka	218
86	Merene i računate brzine u mernim presecima 1, 2 i 4	219
87	Sračunata ukupna konc. susp. nanosa i debljina aktivnog sloja	220
88	Merene i računate ukupne konc. susp. nanosa u m.p. 1, 2 i 4	221
89	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 1	222
90	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 2	223
91	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 3	224
92	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 4	225
93	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 5	226
94	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 6	227
95	Merene i računate koncentracije susp. nanosa u m.p. 7	228
96	Merene i računate konc. rastvorenog cinka u m.p. 1, 2 i 4	229

97	Merene i računate konc. cinka ads. na susp. nanos u m.p. 1, 2 i 4	230
98	Merene i računate konc. cinka ads. na nanos akt. sloja u m.p. 1, 2 i 4 . . .	231
99	Merene i računate konc. rastvorenog olova u m.p. 1, 2 i 4	232
100	Merene i računate konc. olova ads. na susp. nanos u m.p. 1, 2 i 4	233
101	Merene i računate konc. olova ads. na nanos akt. sloja u m.p. 1, 2 i 4 . . .	234
102	Merene i računate konc. rastvorene žive u m.p. 1, 2 i 4	235
103	Merene i računate konc. žive ads. na susp. nanos u m.p. 1, 2 i 4	236
104	Merene i računate konc. žive ads. na nanos akt. sloja u m.p. 1, 2 i 4 . . .	237

Spisak tabela

1	Pregled modela ravanskog tečenja, 1. deo	5
2	Pregled modela ravanskog tečenja, 2. deo	6
3	Pregled modela ravanskog tečenja, 3. deo	7
4	Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 1. deo	10
5	Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 2. deo	11
6	Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 3. deo	12
7	Pregled modela transporta zagađujuće materije, 1. deo	15
8	Pregled modela transporta zagađujuće materije, 2. deo	16
9	Greške numeričkog rešenja za test linearne advekcije	118
10	Greške numeričkog rešenja za test nelinearne advekcije	122
11	Granulometrijski intervali mešavine nanosa	126
12	Granični uslovi proračuna nanosa	126
13	Granični uslovi proračuna transporta zagađivača	128
14	Granični uslovi proračuna transporta zagađivača	130
15	Granični uslovi hidrauličkog proračuna	138
16	Granulometrijski intervali mešavine nanosa	142
17	Granični uslovi proračuna nanosa	142
18	Vreme rada računara	143
19	Granični uslovi hidrauličkog proračuna	148
20	Granični uslovi proračuna nanosa	148
21	Granični uslovi hidrauličkog proračuna	153
22	Granulometrijski intervali mešavine nanosa	156
23	Granični uslovi proračuna nanosa	156
24	Granični uslovi proračuna zagađivača - cink	161
25	Granični uslovi proračuna zagađivača - olovo	168
26	Granični uslovi proračuna zagađivača - živa	175

Lista promenljivih

$(\beta_{k_s}^\dagger)_{\ell_s}$	bezdimenzionalna koncentracija zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u stratumu sa indeksom $\ell_s = 1, 2, \dots, L_s$
$(\beta_{k_s})_{\ell_s}$	frakciona zastupljenost granulometrijskog intervala k_s u mešavini nanosa stratumu sa indeksom $\ell_s = 1, 2, \dots, L_s$
$\beta_{k_s}^\dagger$	bezdimenzionalna koncentracija zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju
β_{k_s}	frakciona zastupljenost granulometrijskog intervala k_s u mešavini nanosa aktivnog sloja
$\chi_{k_s}^{bs}$	„brzina” razmene pri modelisanju procesa adsorpcije na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju
$\chi_{k_s}^{ss}$	„brzina” razmene pri modelisanju procesa adsorpcije na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
$\Delta\xi^m$	rastojanje računskih tačaka u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu za pravac $m = i, j, k$
Δa_{k_s}	merodavno rastojanje za proračun gradijenta koncentracije nanosa granulometrijskog intervala k_s pri dnu
Δd	priraštaj vrednosti dubine između dva vremenska trenutka, $\Delta d = d^{n+1} - d^n$
Δt	računski korak po vremenu $\Delta t = t^{n+1} - t^n$
Δx^m	rastojanje računskih tačaka u kartezijanskom koordinatnom sistemu za pravac $m = i, j, k$
Δx_{bs}^m	dimenzija kontrolne zapremine za proučavanje nanosa na dnu i pri dnu za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
δ	merodavno rastojanje od dna za proračun deponovanja suspendovanog nanosa
$\Delta\ell$	dužina najkraćeg domena za proučavanje nanosa na dnu i pri dnu
$\Delta\xi, \Delta\eta$	rastojanje računskih tačaka u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu, redom za pravce i i j
δ_{mn}	<i>Kronecker</i> -ova delta
$\epsilon_{k_s}^m$	kontravarijantna komponenta fluksa zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine za pravac $m = i, j$
$\vec{\epsilon}_{k_s}$	fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine
$(\epsilon_{ds}^m)_{k_s}$	fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine na nizvodnom kraju kontrolne zapremine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu

$(\varepsilon_{us}^m)_{k_s}$	fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine na uzvodnom kraju kontrolne zapremine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
$\varepsilon_{k_s}^m$	fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
$(\Phi_{ds}^m)_{k_s}$	maseni pronos vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s na nizvodnom kraju kontrolne zapremine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
$(\Phi_{us}^m)_{k_s}$	maseni pronos vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s na uzvodnom kraju kontrolne zapremine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
$(\varphi_{ds}^m)_{k_s}$	fluks vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine na nizvodnom kraju kontrolne zapremine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
$(\varphi_{us}^m)_{k_s}$	fluks vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine na uzvodnom kraju kontrolne zapremine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
$\phi_{k_s}^t$	teorijski kapacitet fluksa vučenog nanosa za zrna granulometrijskog intervala k_s
$\phi_{k_s}^m$	kontravarijantna komponenta fluksa vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine za pravac $m = i, j$
$\varphi_{\xi}^b, \varphi_{\eta}^b$	ugao između dna korita i i odnosno j pravca u horizontalnoj ravni
$\varphi_{k_s}^m$	fluks vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
$\vec{\phi}_{k_s}$	fluks vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s po jedinici širine
Γ_{mn}^l	<i>Christoffel</i> -ov simbol, $l = i, j, k, m = i, j, k, n = i, j, k$
γ_{k_s}	koeficijent alokacije vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s
ι_c	koeficijent redukcije površine dostupne za adsorpciju/desorpciju na/sa zrna nanosa u aktivnom sloju
ι_{k_s}	koeficijent redukcije fluksa vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s za deo čestica koje nisu direktno izloženi toku
κ	<i>von Kármán</i> -ova konstanta, $\kappa = 0.435$
λ	funkcija karakteristične brzine (brzina propagacije) u jednačini linijske advekcije
$(\mu_1)_{k_s}$	kinetički koeficijent procesa adsorpcije na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s

$(\mu_1^{bs})_{k_s}$	kinetički koeficijent procesa adsorpcije na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju
$(\mu_2)_{k_s}$	kinetički koeficijent procesa desorpcije sa zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
μ_2	kinetički koeficijent procesa desorpcije sa zrna nanosa
ν	kinematski koeficijent viskoznosti vode
ν_t	koeficijent turbulentne viskoznosti
$(\Omega_c^{bs})_{k_s}$	zapremina zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju
Ω	računski domen
Ω_c	kontrolna zapremina
ω_c	granična površina kontrolne zapremine
$\omega_{k_s}^{bs}$	površina zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju dostupna za adsorpciju po jedinici zapremine vode sadržane u kontrolnoj zapremini
$\omega_{k_s}^{ss}$	površina zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s dostupna za adsorpciju po jedinici zapremine vode sadržane u kontrolnoj zapremini
$\partial\Omega$	granica računskog domena
$\varpi(mn)$	fizička komponenta proizvoljne tenzorske veličine, $m = i, j, k$, $n = i, j, k$
ϖ^{mn}	kontravarijantna komponenta proizvoljne tenzorske veličine, $m = i, j, k$, $n = i, j, k$
ψ_1, ψ_2	koeficijenti ponderacije po prostoru, redom za pravac i i j
$(\vartheta_{\text{grav}}^m)_{k_s}$	kontravarijantna komponenta fluksa zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s usled delovanja gravitacionog ubrzanja za pravac $m = i, j, k$
$(\vec{\vartheta}_{\text{grav}})_{k_s}$	fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s usled delovanja gravitacionog ubrzanja
θ	koeficijent ponderacije po vremenu (računskom koraku)
Θ_{k_s}	bezdimezionalni kritični napon trenja (kritični <i>Shields</i> -ov broj) za zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s
$\vartheta_{k_s}^\downarrow$	vertikalni fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s usled delovanja gravitacionog ubrzanja usmeren na dole
$\vartheta_{k_s}^m$	kontravarijantna komponenta „fluksa” zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s usled turbulentnih fluktuacija za pravac $m = i, j, k$

ρ	gustina fluida
ρ_s	gustina zrna nanosa
ρ_w	gustina (čiste) vode
ϱ_s	relativna gustina zrna nanosa $\varrho_s = \rho_s/\rho_w$
$(\sigma_t)_{k_s}$	<i>Schmidt</i> -ov broj za nanos granulometrijskog intervala k_s
σ	tenzor napona
σ^{mn}	kontravarijantna komponenta napona za pravac $m = i, j, k$, u ravni sa pravcem orta spoljne normale $n = i, j, k$
σ_t	<i>Schmidt</i> -ov broj
ζ^m	kontravarijantna komponenta „fluksa” rastvorene zagađujuće materije usled turbulentnih fluktuacija za pravac $m = i, j, k$
ζ_{mol}^m	kontravarijantna komponenta fluksa rastvorene zagađujuće materije usled molekularne difuzije za pravac $m = i, j, k$
$\vec{\zeta}_{\text{mol}}$	fluks rastvorene zagađujuće materije usled molekularne difuzije
τ^{mn}	kontravarijantna komponenta turbulentnog „napona” za pravac $m = i, j, k$, u ravni sa pravcem orta spoljne normale $n = i, j, k$
τ_b	turbulentni „napon” na dnu korita
τ_s	turbulentni „napon” na slobodnoj površini vode
τ_{vis}^{mn}	kontravarijantna komponenta devijatorskog (viskozno) dela napona za pravac $m = i, j, k$, u ravni sa pravcem orta spoljne normale $n = i, j, k$
ξ, η	koordinatni pravci i i j u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu
ξ^m	komponenta vektora položaja (koordinata) za pravac $m = i, j, k$ u krivolinijskom koordinatnom sistemu
$(\Upsilon_{ds}^m)_{k_s}$	maseni pronos zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s na nizvodnom kraju kontrolne zapremine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
$(\Upsilon_{us}^m)_{k_s}$	maseni pronos zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa granulometrijskog intervala k_s na uzvodnom kraju kontrolne zapremine za pravac $m = i, j$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
\vec{A}	proizvoljna vektorska veličina
\vec{a}^m	kontravarijantni bazni vektor za pravac $m = i, j, k$ u krivolinijskom koordinatnom sistemu
\vec{a}_m	kovarijantni bazni vektor za pravac $m = i, j, k$ u krivolinijskom koordinatnom sistemu

$A(m)$	fizička komponenta proizvoljne vektorske veličine \vec{A} za pravac $m = i, j, k$
A^m	kontravarijantna komponenta proizvoljne vektorske veličine za pravac $m = i, j, k$
A_ℓ	dolazna tačka segmenta trajektorije $\ell = 1, 2, \dots, L$
A_m	kovarijantna komponenta proizvoljne vektorske veličine za pravac $m = i, j, k$
a_{k_s}	merodavno rastojanje od dna za proračun koncentracije nanosa granulometrijskog intervala k_s pri dnu
$(C_a)_{k_s}$	koncentracija zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s na rastojanju a_{k_s} od dna
$(C_\delta)_{k_s}$	koncentracija zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s na rastojanju δ od dna
c_i	promenljiva zagađujuće materije sa rednim brojem $i = 1, 2, \dots, 2K_a + 1$
${}^{\text{mas}}C^\dagger$	dimenzionalna koncentracija rastvorene zagađujuće materije
${}^{\text{mas}}C_{k_s}^\dagger$	dimenzionalna koncentracija zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
${}^{\text{mas}}C_{k_s}$	dimenzionalna koncentracija suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
\vec{c}	vektor koji sadrži sve promenljive zagađujuće materije u posmatranoj računskoj tački
C^\dagger	bezdimenzionalna koncentracija rastvorene zagađujuće materije
c^\dagger	fluktuacija koncentracije rastvorene zagađujuće materije
$C_{k_s}^\dagger$	bezdimenzionalna koncentracija zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
C_f	koeficijent trenja
C_{ch}	<i>Chézy</i> -jev koeficijent trenja
C_{E_a}	koeficijent kalibracije debljine aktivnog sloja
C_{k_s}	bezdimenzionalna koncentracija suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
c_{k_s}	fluktuacija koncentracije suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
$\frac{Df}{Dt}$	materijalni izvod proizvoljne veličine f
$(D^*)_{k_s}$	bezdimenzionalni prečnik zrna granulometrijskog intervala k_s
d	dubina toka

$d\ell$	elementarna dužina
$D_{k_s}^\dagger$	deponovanje zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s iz suspenzije na dno
D^{dd}	koeficijent difuzije koji obuhvata zbirno dejstvo turbulentne difuzije i disperzije
$D_{k_s}^{\text{sed}}$	deponovanje nanosa granulometrijskog intervala k_s iz suspenzije na dno
D_ℓ	polazna tačka segmenta trajektorije $\ell = 1, 2, \dots, L$
D_A	prečnik najmanjeg nepokretnog zrna nanosa
D_t	koeficijent turbulentne difuzije
D_{50}, D_{90}	karakteristični prečnici zrna mešavine nanosa
D_{k_s}	reprezentativni prečnik zrna granulometrijskog intervala k_s
df	elementarni priraštaj proizvoljne veličine f
$(E_s)_{\ell_s}$	debljina stratuma sa indeksom $\ell_s = 1, 2, \dots, L_s$
\vec{e}_m	kovarijantni jedinični vektor za pravac $m = i, j, k$
$E_{k_s}^\dagger$	uvlačenje zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s sa dna u suspenziju
$E_{k_s}^{\text{sed}}$	uvlačenje nanosa granulometrijskog intervala k_s sa dna u suspenziju
E_a	debljina aktivnog sloja
\mathcal{F}	funkcija fluksa u jednačini linijske advekcije
$(*)f, f^{(*)}$	vrednost proizvoljne veličine f u iteraciji $(*)$
$(^m)f, f^{(m)}$	vrednost proizvoljne veličine f u iteraciji (m)
$(^p)f$	vrednost proizvoljne veličine f u iteraciji (p)
\tilde{f}	vrednost proizvoljne veličine f , osrednjena po dubini toka
\vec{F}	vektor zapreminske sile po jedinici mase
f	proizvoljna veličina
$F_{k_s}^{\frown}$	diskretizovana jednačina održanja mase nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju
$F_{k_s}^{\sim\sim}$	diskretizovana jednačina advektivnog koraka održanja mase suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
F^\uparrow	diskretizovana globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu
f^a	vrednost proizvoljne veličine f u advektivnom koraku
f^d	vrednost proizvoljne veličine f u difuzionom koraku

F^m	kontravarijantna komponenta vektora zapreminske sile po jedinici mase za pravac $m = i, j, k$
f^{n+1}	vrednost proizvoljne veličine f u narednom (tekućem) vremenskom trenutku t^{n+1}
f^n	vrednost proizvoljne veličine f u prethodnom vremenskom trenutku t^n (poznata veličina)
$f_{i,j}^{st}$	vrednost proizvoljne veličine f u smaknutoj računskoj tački (i, j) , pri čemu je $i = 1, 2, \dots, I - 1, j = 1, 2, \dots, J - 1$
$f_{i,j}$	vrednost proizvoljne veličine f u diskretnoj računskoj tački (i, j) , pri čemu je $i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J$
G	determinanta matrice metričnog tenzora
g	gravitaciono ubrzanje
G°	diskretizovana jednačina advektivnog koraka održanja mase rastvorene zagađujuće materije
$G_{k_s}^\circ$	diskretizovana jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju
$G_{k_s}^{\rightsquigarrow}$	diskretizovana jednačina advektivnog koraka održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
G^{mn}	kofaktor matrice metričnog tenzora, $m = i, j, k, n = i, j, k$
g^{mn}	element inverznog metričnog tenzora, $m = i, j, k, n = i, j, k$
g_{mn}	element metričnog tenzora, $m = i, j, k, n = i, j, k$
h_ξ, h_η, h_z	geometrijski koeficijenti za pravce i, j i k u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu
h_m	geometrijski koeficijent u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu za pravac $m = i, j, k$
K_a	oznaka poslednjeg granulometrijskog intervala mešavine nanosa koji učestvuje u procesu adsorpcije/desorpcije zagađujuće materije („aktivne” frakcije mešavine nanosa su $k_s = 1, 2, \dots, K_a$)
k_f	kinetička energija fluktuacija
K_s	ukupan broj granulometrijskih intervala (frakcija) mešavine nanosa
k_s	oznaka granulometrijskog intervala (frakcije) mešavine nanosa, $k_s = 1, 2, \dots, K_s$
$(M_{BC})_{k_s}$	masa zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju
$(M_{BS})_{k_s}$	masa nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju

$(M_{SC})_{k_s}$	masa zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s u kontrolnoj zapremini
$(M_{SS})_{k_s}$	masa suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s u kontrolnoj zapremini
M	masa vode i suspendovanog nanosa (mešavine) u kontrolnoj zapremini
M_ℓ	srednja tačka segmenta trajektorije $\ell = 1, 2, \dots, L$
M_{DC}	masa rastvorene zagađujuće materije u kontrolnoj zapremini
\vec{n}	ort spoljne normale (po definiciji usmeren <i>od</i> kontrolne zapremine)
n	<i>Manning</i> -ov koeficijent trenja
p	pritisak
p_s	poroznost mešavine nanosa u aktivnom sloju
$(\vec{q}_{\text{grav}})_{k_s}$	fluks suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s usled delovanja gravitacionog ubrzanja
$(q_{\text{grav}}^m)_{k_s}$	kontravarijantna komponenta fluksa suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s usled delovanja gravitacionog ubrzanja za pravac $m = i, j, k$
$q_{k_s}^\downarrow$	vertikalni fluks suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s usled delovanja gravitacionog ubrzanja usmeren na dole
$q_{k_s}^m$	kontravarijantna komponenta „fluksa” suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s usled turbulentnih fluktuacija za pravac $m = i, j, k$
\vec{r}	vektor položaja
$(S_f^\ddagger)_{k_s}$	član razmene (fluks) zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s između aktivnog sloja i aktivnog stratuma
$(S_f)_{k_s}$	član razmene (fluks) nanosa granulometrijskog intervala k_s između aktivnog sloja i aktivnog stratuma
\mathcal{S}	brzina propagacije strmog čela talasa usled delovanja nelinearne advekcije
\mathbf{s}_i	nanosna promenljiva sa rednim brojem $i = 1, 2, \dots, 2K_s + 1$
$\vec{\mathbf{s}}$	vektor koji sadrži sve nanosne promenljive u posmatranoj računskoj tački
s	proizvoljna skalarna veličina
$S_{k_s}^\dagger$	član izvora (fluks) rastvorene zagađujuće materije usled adsorpcije/desorpcije na/sa zrna granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju
$S_{k_s}^\ddagger$	član izvora (fluks) zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s iz aktivnog sloja
S_{k_s}	član izvora (fluks) suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s
t	vreme

t_b	vreme (trenutak) prelamanja talasa usled delovanja nelinearne advekcije
T_{k_s}	bezdimenzionalna brzina trenja za zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s
U, V	jedinični protoci u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu, redom za pravce i i j
u, v, w	fizičke komponente brzine za pravce i, j i k u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu
u^m	komponenta vektora brzine za pravac $m = i, j, k$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
u_*	brzina trenja za koordinatni pravac ξ
V_*	brzina trenja
$(V_*^{\text{cr}})_{k_s}$	kritična vrednost brzine trenja po <i>Shields</i> -u za zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s
\vec{V}	vektor brzine
V^m	kontravarijantna komponenta vektora brzine u krivolinijskom koordinatnom sistemu za pravac $m = i, j, k$
v^m	kontravarijantna komponenta fluktuacije vektora brzine u krivolinijskom koordinatnom sistemu za pravac $m = i, j, k$
$w_{k_s}^\dagger$	brzina tonjenja zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s
x^m	komponenta vektora položaja (koordinata) za pravac $m = i, j, k$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu
z	vertikalni koordinatni pravac
z_b	kota dna
z_b^\uparrow	lokalna vertikalna koordinata merena od dna rečnog korita
z_s	kota slobodne površine vode
z_{bf}	kota donje granične površine (podine) aktivnog sloja
$z_{k_s}^*$	<i>Rouse</i> -ov broj (suspension broj) za nanos granulometrijskog intervala k_s

1. Uvod

PROCESI koji se odvijaju u prirodnim vodotocima su po svojoj prirodi izuzetno složenog karaktera. Za izučavanje ovih procesa se mogu koristiti fizički modeli, eksperimentalne laboratorijske instalacije, analitičke metode i terenska merenja. Svaka od navedenih metoda poseduje određene prednosti i nedostatke. Fizički modeli, zasnovani na principima sličnosti, su veoma efikasni pri proučavanju strujanja vode u vodotocima sa kompleksnom geometrijom korita. Međutim, njihova ograničenost proizilazi iz ograničenja principa sličnosti. Eksperimentalne laboratorijske metode se koriste za rešavanje jasno izolovanih pojava (procesa) u prirodnim vodotocima. Analitičke metode su ograničene na relativno jednostavne slučajeve sa jasnim (i jednostavnim) graničnim uslovima, dok terenska merenja mogu dati detaljan uvid u procese koji se trenutno odvijaju u vodotocima, ali ne pružaju mogućnost predviđanja budućih stanja. Dosadašnja iskustva pokazuju da je najbolji pristup kombinacija matematičkih modela, terenskih merenja i laboratorijskih eksperimenata. Matematički modeli obezbeđuju numeričko rešavanje kompletnih jednačina koje uključuju sve bitne aspekte razmatranog problema. Podaci terenskih merenja omogućuju kalibraciju i verifikaciju ovih modela za razne slučajeve koji se mogu javiti u prirodnim vodotocima, dok se eksperimentalne metode mogu koristiti za unapređenje pojedinih izolovanih elemenata modela. Za razliku od drugih metoda, jednom formiran matematički model se može primeniti na niz raznovrsnih situacija. Ova mogućnost prognoze je od presudne važnosti u savremenoj hidrauličkoj praksi.

Razvoj numeričkih modela je blisko povezan sa razvojem računarske tehnike. Zbog početnih ograničenja u razvoju računara, krajem šezdesetih i početkom sedamdesetih godina prošlog veka se prvo pojavljuju linijski modeli. Dalje usavršavanje računara je ubrzo omogućilo razvoj ravanskih, a zatim i prostornih modela. Linijski modeli su svoju primenu našli kod izučavanja dugotrajnih pojava u složenim sistemima mreže prirodnih vodotokova, gde je dovoljno poznavati samo promene duž toka. Ravanski modeli daju detaljniju sliku, koja omogućava sagledavanje promena ne samo duž toka nego i upravno na tok, a svoju primenu nalaze za manje računarske domene i kraće vremenske intervale, dok se prostorni modeli ograničavaju na izučavanje lokalnih poremećaja (u prostornom i vremenskom smislu). Iako prostorni modeli pružaju detaljnije rezultate od ravanskih, njihova slabost se ogleda u izuzetno zahtevnim ulaznim podacima i veoma izraženoj ograničenosti po pitanju vremenskog intervala koji se simulira zbog dugog trajanja rada računara. Zato se, kada je to moguće, pribegava primeni ravanskih modela, koji se u poslednjim godinama osposobljavaju i za simulacije znatno dužih vremenskih perioda i većih računarskih domena (Zhou et al., 2009). Sa druge strane, ravanski modeli, za razliku od linijskih, daju raspodelu izučavanih veličina u horizontalnoj ravni, što ih čini pogodnim i za primenu na lokalne pojave kraćih deonica. Mogućnost modelisanja lokalnih (ravanskih) pojava je od presudnog značaja pri proučavanju kretanja nanosa i njegove interakcije sa zagađujućom materijom, jer su nanosne formacije po svojoj prirodi lokalnog karaktera. Postoji niz ravanskih modela koji simuliraju strujanje vode, transport nanosa i zagađenja u njima. Međutim, koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma sa podelom mešavine nanosa na neograničen broj granulometrijskih intervala, primenjen na ravanske modele sa transportom zagađujuće materije uz njihovu interakciju, zahteva dodatno istraživanje. Razvijanje ravanskog modela zasnovanog na ovom pristupu bi uz analizu kretanja zagađenja u aluvijalnim vodotocima omogućilo sticanje uvida u složenu interakciju zagađujuće materije i nanosa.

Istraživanje u ovom radu se zasniva na problematici strujanja vode, transporta nanosa i zagađivača (tj. zagađujuće materije) uz mogućnost njihove interakcije u prirod-

nim aluvijalnim vodotocima. Kombinacija kompleksne geometrije vodotoka sa promenljivim domenom strujanja, koji se ogleda u kontinualnoj promeni slobodne površine vode, utiče na formiranje izuzetno složene strujne slike koja je osnovni pokretač nanosa. Kretanje nanosa se odvija u vidu transporta nanosa nošenog brzinom vode (suspendovani nanos) i/ili kretanjem nanosa na i pri dnu (vučeni nanos). U zavisnosti od pokretačkih mehanizama dolazi do erozije ili deponovanja nanosa koji time menja morfologiju korita i na taj način povratno utiče na strujnu sliku. Dodatna poteškoća je posledica toga da se nanos u prirodnim vodotocima javlja kao heterogena mešavina. Zrna različitih veličina različito reaguju na iste hidrauličke uslove, što dodatno otežava njihovo matematičko modelisanje. Istraživanje takođe predviđa sticanje boljeg uvida i unapređenje modelisanja procesa interakcije zagađivača i nanosa, i njihovog uticaja na kvalitet vode. Zagađujuća materija se može kretati slobodno (rastvoreno) u vodi ili vezana za čestice nanosa usled čega se sve poteškoće modelisanja transporta nanosa prenose i na modelisanje transporta zagađivača. Posebna pažnja je posvećena analizi interakcije, tj. mehanizama razmene između slobodnog zagađenja i zagađenja vezanog za čestice nanosa.

Dakle, cilj istraživanja je formiranje ravanskog matematičkog modela (u horizontalnoj ravni), koji će omogućiti simuliranje složene međuzavisnosti strujanja vode, transporta nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima.

2. Pregled literature

POJAVA i dinamični razvoj računarske tehnike je omogućio da se (do tog trenutka samo teorijske) diferencijalne jednačine koje opisuju razne procese u prirodnim vodotocima primene u hidrotehničkoj praksi. Naravno, predmetne jednačine nemaju opšte analitičko rešenje (pogotovo u slučaju izuzetno složenih graničnih uslova koji vladaju u prirodnim vodotocima), pa se one rešavaju nekim od numeričkih metoda i postupaka koji su razvijeni u poslednjih nekoliko decenija. Intenzivna geneza ovih postupaka je dovela do poprilično tačnih i stabilnih numeričkih metoda, koje su omogućavale sve detaljnije modelisanje fizičkih procesa koji se odvijaju u prirodnim vodotocima. U inženjerskoj praksi postoji uzročno-posledična veza između matematičkog modelisanja i empirijskih eksperimenata (zavisnosti). Bilo je slučajeva da je dalji razvoj matematičkih modela bio motivisan postojanjem empirijskih zavisnosti za pojedine pojave i obrnuto. Empirijska istraživanja su u nekim slučajevima bila motivisana zahtevima matematičkih modela.

Paralelni razvoj numeričkih metoda i računarskih kapaciteta je doveo do mogućnosti, odnosno potrebe da se u modele strujanja vode uključe i drugi procesi kao što su transport materije ili toplote, deformacija korita itd. Zbog svoje osnovne uloge u svim procesima koji se odvijaju u prirodnim vodotocima, modeli strujanja su najviše proučavani i razvijani. Međutim, modeli kombinovanog modelisanja strujanja i drugih procesa (transport nanosa, deformacija korita, transport zagađujuće materije, itd.) suštinski menjaju koncept samoga modelisanja. Transport nanosa i deformacija korita neposredno utiču na strujanje vode preko promene oblasti strujanja i fizičkih karakteristika fluida (gustina). Naravno, povratni uticaj strujanja na transport nanosa je očigledan. Sa druge strane, transport zagađujuće materije zavisi od dvojnog dejstva struje i nanosnih procesa. Ovakav razvoj koncepta matematičkog modelisanja prirodnih vodotokova je doveo do modela koji su prilično „skupi” u pogledu rada računara.

Pošto je predmet ovog rada unapređenje ravanskog modela strujanja vode, transporta nanosa, deformacije korita i transporta zagađujuće materije, kao i njihova (veoma složena) interakcija, u nastavku se izlaže pregled literature iz ovih oblasti.

2.1. Ravanski modeli tečenja

Iako postoje pravci razvoja numeričkih postupaka koji se zasnivaju na direktnom rešavanju *Navier-Stokes* ovih jednačina (*DNS - direct numerical simulation*), kao i metode koje se zasnivaju na elimisanju malih opsega pri rešavanju jednačina (*LES - large eddy simulation*), najveći broj modela u numeričkoj hidraulici koriste *Navier-Stokes*-ove jednačine osrednjene po vremenu. Ove jednačine se nazivaju *Reynolds*-ove jednačine (*RANS - Reynolds-Averaged-Navier-Stokes*) i one daju oblik jednačina strujanja pogodan za turbulentne tokove, pri čemu se u njima javljaju tzv. „turbulentni” naponi koji se modelišu *modelom turbulencije*. Na ovom polju se najčešće koristi koncept analogije između turbulentnih i viskoznih napona, predložena od strane *Boussinesq*-a davne 1887. godine. Danas modeli turbulencije zasnovani na ovom principu variraju od najprostijih koji ne zahtevaju rešavanje diferencijalnih jednačina (*no-equation model*), pa do najstroženijih kao što su modeli sa jednom diferencijalnom jednačinom („*k model*”) ili modeli sa dve diferencijalne jednačine („*k - ε model*” ili „*k - ω model*”) (Rodi, 1993). Pošto je predmet ovog rada ravansko tečenje u nastavku se daje pregled *ravanskih* modela tečenja. Iz priloženih tabela 1, 2 i 3 se vidi da se u modelima ravanskog tečenja, koji se koriste u numeričkoj hidraulici po pravilu koriste *RANS* jednačine osrednjene po dubini toka, pa se zaključuje da je najvažnija razlika između njih u primeni odgovarajuće numeričke metode.

Numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina se deli u tri osnovne grupe: *metoda konačnih elemenata*, *metoda konačnih zapremina* i *metoda konačnih razlika*. Priroda fizičke pojave, kao i kompleksnost razmatranog problema definiše koja je od navedenih metoda najpovoljnija u datom slučaju.

Metoda konačnih elemenata se najčešće koristi u teoriji konstrukcija i podrazumeva podelu domena na konačni broj manjih (pod)domena, tj. elemenata. Ovi elementi su povezani računskim čvorovima, pri čemu su u svakom čvoru definisane tzv. bazne funkcije. Ovi setovi jednačina se sklapaju u globalni sistem jednačina za ceo domen i zahteva se da integral zaostalih greška u osrednjenom ili „otežanom” smislu bude jednak nuli. Konačno se dobija sistem jednačina koji se rešava nekim od raspoloživih matematičkih postupaka.

Metoda konačnih zapremina takođe podrazumeva određivanje vrednosti promenljivih u diskretnim računskim tačkama. Svakoj diskretnoj tački „pripada” odgovarajuća konačna zapremina. Osnovni koncept ove metode je da se zapreminski integrali u parcijalnim diferencijalnim jednačinama, koji sadrže član divergencije, pretvaraju u površinske integrale i računaju kao fluksevi na površinama kontrolnih zapremina.

Metoda konačnih razlika svodi diferencijalnu jednačinu na algebarsku, tako što se parcijalni izvodi diskretizuju pomoću vrednosti u diskretnim tačkama. Pomenute aproksimacije izvoda se nazivaju i *numeričke šeme*. Najjednostavnija numerička šema se dobija razvijanjem funkcije u *Taylor*-ov red. Međutim, ovakve proste aproksimacije često ne zadovoljavaju zahteve matematičkog modelisanja prirodnih tokova u pogledu tačnosti i stabilnosti. Da bi se ovaj problem prevazišao razvijene su aproksimacije kao što su *Preissmann*-ova šema (Preissmann, 1961), *Crank-Nicholson*-ova šema (Crank i Nicholson, 1996) i mnoge druge (Ferziger i Perić, 2002). Nelinearna advekcija, kao najproblematičniji (iako ne i najuticajniji) član u jednačini strujanja je uslovio razvoj konzervativnih šema (*MUSCL - Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws*), koje su pojedini istraživači dalje unapređivali (Kurganov i Levy, 2000), kao i šeme *MacCormack* (MacCormack, 1969). Drugi autori za rešavanje nelinearne advekcije predlažu *metodu karakteristika* (Benqué et al., 1982; Isic et al., 2013).

Nakon odabira odgovarajućih aproksimacija se dobija sistem linearnih ili nelinearnih algebarskih jednačina. Ako se sistem sastoji od (relativno malog broja) linearnih jednačina moguće je njihovo direktno rešavanje metodom *Gauss*-ove eliminacije (Ferziger i Perić, 2002) ili algoritmom za tridijagonalne matrice (*TDMA - Tridiagonal Matrix Algorithm*, poznatiji i kao *Thomas*-ov algoritam) (Conte i deBoor, 1972). Međutim, neposredno rešavanje sistema nelinearnih jednačina je obično sporo i računarski „skupo”, pa se nelinearne algebarske jednačine linearizuju i rešavaju iterativnim algoritmom kao što je *Jacobi* metoda, *Gauss-Seidel*-ova metoda ili metoda sukcesivne nadrelaksacije *SOR*. Za potrebe numeričke hidraulike su razvijene i poboljšane iterativne metode kao što je *CGM* metoda (*CGM - Conjugate Gradient Method*) (Hestenes i Stiefel, 1952), *CGMS* metoda (*CGMS - Conjugate Gradient Squared*) *GMRES* metoda (*GMRES - Generalized Minimal Residual Method*) (Saad i Schultz, 1986), kao i metoda razdvajanja po koordinatnim pravcima (*ADI - Alternating Direction Implicit Method*) (Peaceman i Rachford, 1955).

Opisani numerički principi modelisanja jednačina ravanskog tečenja se obično simultano primenjuju na sve članove jednačina. Ovakav način rešavanja ne vodi računa o fizičkom karakteru pojedinih članova, što može dovesti do značajnih grešaka i numeričke nestabilnosti modela. Da bi se svaki od članova predmetnih jednačina tretirao sa najboljom mogućom numeričkom metodom može se koristiti metoda razlomljenih koraka, koju je predložio Yanenko (1971), a primenili su mnogi autori Benqué et al. (1982), Hsieh i Yang (2003) Hsieh i Yang (2004), Hung et al. (2009), Budinski (2011).

Referenca	Model ravnanskog tečenja				Napomena
	Ustaljeno/ neustaljeno	Hidraulički model	Model turbulencije		
Harlow i Welch (1965)	neustaljeno	rešavanje ravnanskih jednačina strujanja, kartezijski koordinatni sistem	?		metoda konačnih razlika
McGuirk i Rodi (1978)	ustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, kartezijski koordinatni sistem	$k - \varepsilon$ model		metoda konačnih zapremina
Falconer (1980)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, kartezijski koordinatni sistem	no-equation model		metoda konačnih razlika, ADI metoda, smaknuta računska mreža
Benqué et al. (1982) CYTHERE-ESI	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, kartezijski koordinatni sistem	?		rešavanje u tri koraka: advekcija (metoda karakteristika), difuzija (ADI metoda), propagacija (smaknuta mreža)
Celik (1982) Celik i Rodi (1985)	ustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, kartezijski koordinatni sistem	modifikovani $k - \varepsilon$ model		metoda konačnih razlika
Dammuller et al. (1989)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem	no-equation model		metoda konačnih razlika, uz primenu <i>McCormack</i> -ove šeme
Spasojevic i Holly (1990) MOBED2	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem	-		rešava se propagacioni korak ADI metodom
van Rijn et al. (1990) SUTRENCH-2D	kvazi- neustaljeno	nivo vode je konstantan, a raspored brzina se određuje iz logaritamske raspodele	no-equation model		metoda konačnih elemenata
Sotiropoulos i Abdallah (1991)	neustaljeno	rešavanje ravnanskih jednačina strujanja, kartezijski koordinatni sistem	?		<i>Poisson</i> -ova jednačina za pritiske, metoda konačnih razlika

Tabela 1: Pregled modela ravnanskog tečenja, 1. deo

Referenca	Model ravnanskog tečenja			
	Ustaljeno/ neustaljeno	Hidraulički model	Model turbulencije	Napomena
Cheng et al. (1993)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, kartezijanski koordinatni sistem	zanemaruje se viskoznost u dinamičkoj jednačini	polu implicitna šema metode konačnih razlika
Zhou (1995)	ustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, kartezijanski koordinatni sistem	no-equation model	metoda konačnih zapremina, smaknuta računaska mreža
Yoon i Patel (1996)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina u vertikalnoj ravni, krivolinijski koordinatni sistem	$k - \omega$ model	modifikovani SIPLER algoritam
Bui et al. (1998) Rodi (2000) FAST2D	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, krivolinijski koordinatni sistem	$k - \epsilon$ model	metoda konačnih zapremina, za advekciju se koristi hybrid upwind/central šema
Olsen (1999)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, krivolinijski koordinatni sistem	no-equation model	metoda konačnih zapremina, uz primenu SIMPLE metode
Brots (1999)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina u vertikalnoj ravni	$k - \epsilon$ model	metoda konačnih elemenata
Jia i Wang (1999) Duan et al. (2001) CCHE2D	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, krivolinijski koordinatni sistem	no-equation model	Efficient Element Method: zasniva se na metodi konačnih elemenata
Hsieh i Yang (2003)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem	no-equation model	metoda razlomljenih koraka (advekcija+difuzija, propagacija), ADI metoda
Wu (2004)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, krivolinijski koordinatni sistem	$k - \epsilon$ model	metoda konačnih zapremina

Tabela 2: Pregled modela ravnanskog tečenja, 2. deo

Referenca	Model ravanskog tečenja				Napomena
	Ustaljeno/ neustaljeno	Hidraulički model	Model turbulencije		
Nicholas i McLelland (2004) HYDRO2DE	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, kartezijanski koordinatni sistem	no-equation model		Roe's approximate Riemann solver
Hsieh i Yang (2004)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem	no-equation model		metoda razlomljenih koraka (advekcija+difuzija, propagacija), ADI metoda
Duan i Nanda (2006)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, krivolinijski koordinatni sistem	no-equation model		?
Venutelli (2007)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, kartezijanski koordinatni sistem	-		ravanske jednačine se zamenjuju sa dve linijske jednačine na koje se primenjuje <i>Preissmann</i> -ova šema
Hung et al. (2009)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem	no-equation model		metoda razlomljenih koraka (advekcija+difuzija, propagacija), ADI metoda
Zhou et al. (2009)	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem	no-equation model		metoda konačnih razlika, smaknuta računska mreža
Lai (2010) SHR-2D	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini	$k - \varepsilon$ model		metoda konačnih zapremina, hibridna mreža
Budinski (2011) 2DVONASK	neustaljeno	rešavanje RANS jednačina osrednjenih po dubini, krivolinijski koordinatni sistem	no-equation model		metoda razlomljenih koraka; propagacija: ADI metoda; advekcija: metoda karakteristika; difuzija: metoda konačnih razlika

Tabela 3: Pregled modela ravanskog tečenja, 3. deo

2.2. Modeli transporta nanosa i deformacije korita

Za razliku od jednačina koje opisuju strujanje vode, trenutno nema opšte prihvaćene matematičke formulacije transporta nanosa i deformacije korita (Papanicolaou et al., 2008). Postoje nastojanja da se formuliše opšti model interakcije vode i nanosa, koji se zasnivaju na principu dvofaznog tečenja (Cao et al., 1996; Greimann et al., 1999). Osnovna ideja ovakvog pristupa je da se simultano rešavaju jednačine održanja mase i količine kretanja za obe faze, formulisane posebno za vodu kao jednu fazu i nanos kao drugu. Naravno, ovo podrazumeva definisanje mehanizama interakcije između njih u vidu napona što je izuzetno teško i diskutabilno. Radi izbegavanja navedenih poteškoća se gotovo svi (trenutno postojeći) modeli prirodnih vodotokova, koji u sebi sadrže interakciju vode i nanosa, zasnivaju na jednostavnijim konceptima.

Hidraulička praksa razlikuje dva vida kretanja nanosa: nanos koji je u suspenziji i kreće se brzinom vode se naziva *suspendovani nanos*, i *vučeni nanos* koji se kreće na dnu i pri dnu u vidu klizanja, kotrljanja ili kratkih „skokova”. U slučaju suspendovanog nanosa postoji opšta saglasnost u pogledu njegovog modelisanja jednačinom advekcije-difuzije, koja se dobija iz jednačine održanja mase suspendovanog nanosa. Najproblematiciiji a ujedno i veoma bitan član ove jednačine je član (linearne) advekcije. Za numeričko rešenje ovog člana su mnogi autori koristili metodu konačnih razlika zbog njene jednostavnosti (Fletcher, 1991; Strikwerda, 2004; Hirsch, 2007). Radi poboljšanja tačnosti modela transporta suspendovanog nanosa razvijeni su postupci zasnovani na metodi karakteristika, čija je tačnost uslovljena interpolacijom koja se u njoj koristi (Holly i Preissmann, 1977; Leonard, 1979). Metodu karakteristika za proračun linearne advekcije su analizirali i unapređivali i drugi autori (Holly i Usseglio-Polatera, 1984; Ahmad i Kothyari, 2001; Tsai et al., 2006; Isic et al., 2013).

Međutim, za razliku od jednačine za transport suspendovanog nanosa, postoji više koncepta modelisanja procesa (odnosno kretanja nanosa) na i pri dnu, kao i razmene između nanosa na dnu (koji miruje ili se kreće kao vučeni) i nanosa u suspenziji. Postoje tri osnovna načina modelisanja procesa koji se odvijaju na dnu i pri dnu: pristup *homogenog sloja (mixing layer)* (Karim i Kennedy, 1982; Karim et al., 1983, 1987), pristup *sloja vučenog nanosa (bed-load layer)* (van Rijn, 1987) i pristup *aktivnog sloja (active-layer)* (Spasojevic i Holly, 1990). Navedni principi modelisanja su međusobno veoma slični i u literaturi se ni jedan od navedenih ne smatra opšte prihvaćenim pristupom.

U tabelama 4, 5, 6 je dat pregled modela kretanja nanosa i deformacije korita. Konstatuje se da je njihova raznolikost daleko veća nego u slučaju strujanja vode u prirodnim vodotocima. Tokom godina su razvijani modeli koji obuhvataju transport suspendovanog nanosa, transport vučenog nanosa i deformaciju korita, kao i modeli koji obuhvataju samo neke od navedenih procesa. Pregledom literature je ustanovljeno da je prva osnovna razlika modela kretanja nanosa i deformacije korita u modelisanju procesa pri dnu.

Brors (1999) za deformaciju korita koristi osnovnu *Exner*-ovu jednačinu dopunjenu sa transportom vučenog nanosa i članom razmene sa suspenzijom. Model autora Jia i Wang (1999), kao i model autora Nagata et al. (2000) u *Exner*-ovu jednačinu uključuju samo vučeni nanos, bez razmene sa suspenzijom. Takođe postoje modeli koji za promenu kote dna koriste *Exner*-ovu jednačinu sa fluksom ukupnog nanosa (zbir vučenog i suspendovanog). Pored do sada navedenih modela postoje i oni, čija je primarna funkcija proračun transporta nanosa bez deformacija korita (Celik, 1982; Celik i Rodi, 1985; Hervouet i Bates, 2000; Duan i Nanda, 2006).

Sledeću značajniju grupu modela čine oni koji se zasnivaju na konceptu sloja vučenog nanosa, pri čemu se ovde predlažu dve alternativne metode za proračun deformacije ko-

rita. Prva metoda se zasniva na konceptu kontrolne zapremine sloja vučenog nanosa, a druga na konceptu kontrolne zapremine koja se sastoji od sloja vučenog nanosa i sloja suspendovanog nanosa iznad njega (sve do kote slobodne površine vode). U ovu grupu se svrstavaju modeli autora van Rijn et al. (1990), Bui et al. (1998), Rodi (2000) i Wu et al. (2000).

Poslednju važnu grupu čine modeli zasnovani na konceptu aktivnog sloja i aktivnog stratuma. Ovak pristup omogućava proračun kote dna korita i granulometrijskog sastava aktivnog sloja za neograničen broj granulometrijskih intervala koji se mogu javiti u prirodnoj mešavini nanosa. Ovde pripadaju modeli autora Spasojevic i Holly (1990) i Gessler et al. (1999), kojima se priključuju i modeli novijih datuma autora Hung et al. (2009) i Budinski (2011). Takođe je zanimljivo primetiti da prirodnu mešavinu nanosa, pored modela koji se zasnivaju na konceptu aktivnog sloja, uzimaju u obzir samo još modeli novijeg datuma autora Wu (2004), Yongjun et al. (2004), Bui i Rutschmann (2006), Fischer-Antze et al. (2009), Zhou et al. (2009) i Bui i Rutschmann (2010).

Drugi veoma značajan aspekt modelisanja ponašanja nanosa je razmena između nanosa na dnu (koji može biti u stanju mirovanja ili se može kretati kao vučeni nanos) i nanosa u suspenziji. Predmetna razmena je zbirni uticaj *deponovanja* i *uvlačenja nanosa u suspenziju*¹, koji su ponaosob izvedeni iz jednačine održanja suspendovanog nanosa (Jovanović, 2008; García, 2008; Wu, 2008). Na osnovu ovih razmatranja član uvlačenja nanosa u suspenziju je definisan kao turbulentni fluks usmeren vertikalno nagore, dok je deponovanje predstavljeno kao advektivni fluks usmeren vertikalno nadole uzrokovan gravitacionim ubrzanjem, tj. tonjenjem čestica nanosa.

Pošto je mehanizam razmene između suspenzije i nanosa na i pri dnu po definiciji prostornog karaktera, njihovo najverodostojnije modelisanje zahteva prostornu formulu svih relevantnih preseca. Modeli koji zadovoljavaju ovaj preduslov (Gessler et al., 1999; Wu et al., 2000) za proračun deponovanja koriste vrednost koncentracije sračunate neposredno iznad dna. Sa druge strane ravanski modeli za određivanje koncentracije pri dnu, merodavne za fluks deponovanja, obično koriste ili sračunatu koncentraciju osrednjenu po dubini (Wu, 2004), ili se sračunata koncentracija ekstrapoluje koristeći *Rouse*-ovu krivu (Duan i Nanda, 2006; Budinski, 2011). Matematička formulacija procesa uvlačenja nanosa u suspenziju je znatno komplikovanija. Pristup koji se prvi pojavio u literaturi se zasniva na korišćenju ravnotežne koncentracije pri proračunu ovog fluksa, što je korišćeno u modelima autora Spasojevic i Holly (1990), Bui et al. (1998), Rodi (2000), Wu et al. (2000), Duan i Nanda (2006) i Zeng et al. (2008). Osnovi nedostatak ovako definisanog uvlačenja nanosa u suspenziju je da se gotovo uvek javlja i to sa maksimalnim intenzitetom. Ovak problem je doveo do predloga da se fluks uvlačenja nanosa u suspenziju modelišu u svom izvornom obliku kao vertikalni gradijent, koji se diskretizuje koristeći sračunatu koncentraciju neposredno iznad dna i koncentraciju dobijenu empirijskim izrazom za ravnotežno stanje (Brors, 1999). Ovakav pristup je primenjen i u prostornom modelu autora Gessler et al. (1999) i ravanskom modelu autora Budinski (2011), uz napomenu da je u ravanskom modelu korišćena *Rouse*-ova kriva da bi se iz sračunate (neravnotežne) koncentracije dobila koncentracija u blizini dna neophodna za određivanje pomenutog gradijenta. Takođe postoje i modeli koji za procenu kompletnog člana razmene nanosa između suspenzije i dna koriste razliku računate koncentracije i „transportnog kapaciteta”, definisanog kao vrednost koncentracije za ravnotežne uslove transporta suspendovanog nanosa (Wu, 2004; Zhou et al., 2009).

¹ *Uvlačenje nanosa u suspenziju* (resuspenzija) je definisano kao vertikalni maseni fluks uvlačenja zrna nanosa sa dna (bilo da se radi o nanosu koji miruje ili nanosu koji se kreće u vidu vučenog nanosa) u suspenziju.

Referenca; dimenzija modela	Model transporta nanosa i deformacije korita						Napomena
	Transport vučenog nanosa	Promena kote dna	Transport susp. nanosa	Deponovanje / resuspenzija	Br. frakcija nanosa		
Celik (1982) dim: 2D	ne	ne	da (ustaljeno)	da	ne		
Struksima et al. (1985) dim: 2D	da	da	ne	ne	ne		promena kote dna se računa pomoću jednačine tipa <i>Erner-ova</i>
Celik i Rodi (1985) dim: 2D	ne	ne	da (ustaljeno)	da	ne		
Spasojevic i Holly (1990) MOBED2; dim: 2D	da	da	da	da	neograničen		koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma
van Rijn et al. (1990) SUTRENCH-2D; dim: 2D	da	da	da (kvazi-neustaljeno)	da	ne		promena kote dna se računa pomoću jednačine ukupnog nanosa
Bui et al. (1998) Rodi (2000) FAST2D; dim: 2D	da	da	da	da	ne		promena kote dna se računa pomoću jednačine održanja ukupnog nanosa; koncept sloja vučenog nanosa
Olsen (1999) dim: 2D	da	da	da	ne	da?		promena kote dna se računa iz „bilansne” jednačine
Brors (1999) dim: 2D	da	da	da	da	ne		model za promenu kote dna je linijski
Jia i Wang (1999) CCH2D; dim: 2D	da	da	ne	ne	ne		promena kote dna se računa pomoću jednačine tipa <i>Erner-ova</i>
Gessler et al. (1999) CH3D-SED; dim: 3D	da	da	da	da	neograničen		koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma
Nagata et al. (2000) dim: 2D	da	da	ne	ne	ne		promena kote dna se računa pomoću jednačine tipa <i>Erner-ova</i>
Wu et al. (2000) FAST3D; dim: 3D	da	da	da	da	ne		koncept sloja vučenog nanosa
Hervouet i Bates (2000) TELEMAC-3D; dim: 3D	ne	ne	da	nema resusp. samo dep.	ne		

Tabela 4: Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 1. deo

Referenca; dimenzija modela	Model transporta nanosa i deformacije korita							Napomena
	Transport vučenog nanosa	Promena kote dna	Transport susp. nanosa	Deponovanje/ resuspenzija	Br. frakcija nanosa	Transport vučenog nanosa	Promena kote dna	
Duan et al. (2001) EnCCE2D; dim: 2D	da	da	da	ne	ne	da	ne	promena kote dna se računa pomoću jednačine tipa <i>Emer</i> -ova
Olsen (2003) dim: 3D	da	da	da	ne?	ne	da	ne	promena kote dna se računa iz „bilansne” jednačine
Wu (2004) dim: 2D	da	da	da	da	neograničen?	da	neograničen?	koncept homogenog sloja
Yongjun et al. (2004) dim: 3D	ne	da	da	da?	neograničen?	da	neograničen?	koncept homogenog sloja
Ruther i Olsen (2005) dim: 3D	da	da	da	da	ne?	da	ne?	
Duan i Nanda (2006) dim: 2D	ne	ne	da	da	ne?	da	ne?	dep. i resusp. se računaju na osnovu ravnotežne koncentracije suspendovanog nanosa
Bui i Rutschmann (2006) FAST3D; dim: 3D	da	da	ne	ne	neograničen	da	neograničen	koncept sloja vučenog nanosa
Khosronejad et al. (2008) dim: 3D	da	da	da	da	ne	da	ne	promena kote dna se računa iz „bilansne” jednačine
Zeng et al. (2008) dim: 3D	da	da	da	da	ne?	da	ne?	promena kote dna se računa pomoću jednačine tipa <i>Emer</i> -ova
Fischer-Antze et al. (2009) dim: 3D	da	da	ne	ne	neograničen?	da	neograničen?	promena kote dna se računa iz „bilansne” jednačine
Hung et al. (2009) dim: 2D	da	da	da	da	neograničen	da	neograničen	koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma
Zhou et al. (2009) dim: 2D	da	da	da	da	neograničen	da	neograničen	dno se modelise pomoću tri sloja (<i>stratuma</i>); <i>loose-layer</i> method
Bui i Rutschmann (2010) FAST3D; dim: 3D	da	da	ne	ne	neograničen	da	neograničen	koncept sloja vučenog nanosa

Tabela 5: Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 2. deo

Model transporta nanosa i deformacije korita						
Referenca: dimenzija modela	Transport vučenog nanosa	Promena kote dna	Transport susp. nanosa	Depoziranje/ /resuspenzija	Br. frakcija nanosa	Napomena
Budinski (2011) 2DVONASK; dim: 2D	da	da	da	da	neograničen nanosa	koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma
MIKE 21 García (2008); dim: 2D	da	ne?	da	?	da?	koncept ukupnog nanosa
RMA-10 García (2008); dim: 3D	ne	?	da	da	ne?	
MIKE 3 García (2008); dim: 3D	ne	?	da	nema resusp. samo dep.	ne?	
RMA-10 García (2008); dim: 3D	ne	?	da	da	ne?	
Delft 3D García (2008); dim: 3D	ne?	ne	da	da	da	

Tabela 6: Pregled modela transporta nanosa i deformacije korita, 3. deo

2.3. Modeli transporta zagađujuće materije

Usled povećavanja zabrinutosti za životnu sredinu u poslednjih nekoliko decenija je došlo da značajnih napredaka na polju ekološkog inženjerstva, čiji je sastavni deo i numerička hidraulika. Matematički modeli su često korišćeni za simuliranje transporta zagađujuće materije u prirodnim vodotocima, jer daju uvid u neke od procesa koji imaju ključnu ulogu u ekološkom karakterisanju vodnih staništa (Scott, 2003). U stručnoj literaturi se razlikuju dve osnovne vrste zagađujuće materije: *konzervativna* i *nekonzervativna*. Konzervativni zagađivač je u vodi rastvoren na molekularnom nivou, nije podložan biološkoj i/ili hemijskoj razgradnji i/ili nastajanju. Ovakva vrsta materije nema nikakvu interakciju sa čvrstim česticama nanosa koje se mogu naći u vodi, te se njeno ponašanje matematički opisuje jednačinom advekcije-difuzije dobijenom iz jednačine održanja mase. Dakle, na „sudbinu” i transport konzervativne materije utiču isključivo parametri toka. Sa druge strane, nekonzervativni zagađivač ne ostaje rastvoren u vodi nego ima afinitet da se vezuje za sitna zrna nanosa, odnosno može biti podložan biološkoj i/ili hemijskoj razgradnji i/ili nastajanju. Ako se ovakva materija nađe u vodi ona se vezuje za čestice nanosa (adsorpcija) ili se oslobađa sa njih (desorpcija), usled čega ponašanje nanosa ima značajnu ulogu u njenom daljem transportu. Dakle, nekonzervativna materija se u prirodnim vodotocima može naći u *rastvorenom* i *adsorbovanom* obliku. Istraživanja mnogih autora ukazuju na činjenicu da samo čestice prečnika manjeg od $62.5 \mu m$ imaju značajniji uticaj u procesu interakcije sa nekonzervativnim zagađivačem (Aston et al., 1985; Eisma, 1993; Periañez, 2009). Pošto je jedan od ciljeva ovog rada modelisanje interakcije nanosa i zagađujuće materije, u pregledu stručne literature su razmatrani samo modeli ponašanja zagađivača koji u sebi već sadrže nekakav mehanizam interakcije sa nanosom (tabela 7 i 8). Slično kao pri modelisanju transporta nanosa i deformacije korita ni ovde ne postoje opšte prihvaćene matematičke formulacije razmatrane pojave. Međutim, može se konstatovati da postoje dva rasprostranjenija koncepta modelisanja.

Prvi koncept, koji je korišćen od samog početka razvoja numeričkog simuliranja transporta nekonzervativne materije, podrazumeva korišćenje koeficijenta *particije* (*distribucije*) koji daje odnos adsorbovanog i rastvorenog zagađivača (Periañez, 2005; Liu et al., 2007). Koeficijent particije se može zadavati kao konstanta ili se vezuje za neku drugu fizičku veličinu (npr. prisustvo soli u vodi, pH vrednost, itd.). Razmatrani modeli računaju ukupni transport zagađujuće materije pa se predmetnim koeficijentom određuje količina materije koja je rastvorena u vodi odnosno adsorbovana na sitna zrna nanosa, čime se izbegava potreba za posebnim formulisanjem razmene mase između dva vida transporta. Pri ovakvom načinu matematičkog modelisanja interakcija sa nanosom se svodi na procese deponovanja zrna i njihovog uvlačenja u suspenziju. Dakle, sposobnost reprodukovanja neravnotežnih stanja transporta zagađivača, koja se redovno javljaju u prirodnim vodotocima, u velikoj meri zavisi od brojčanog formulisanja koeficijenta particije. Opisani koncept je primenjivan od strane više autora za izučavanje transporta bakterija u vodi (Bai i Lung, 2005; Gao et al., 2011), odnosno teških metala (Wu et al., 2005; Liu et al., 2007). Takođe je bitno naglasiti da razmatrani modeli iz ove kategorije od nanosnih procesa uzimaju u obzir samo uniformni suspendovani nanos, čime se ova fizička pojava značajno pojednostavljuje jer se zanemaruju eventualne morfološke promene i njihov povratni uticaj na strujanje vode, kao i granulometrijske promene mešavine nanosa na dnu i u suspenziji.

Drugi koncept modelisanja transporta zagađivača i njegove interakcije sa nanosom se svodi na zasebno ispisivanje i rešavanje jednačina za različite oblike (pojave) nekonzervativne materije. Međutim, i ovakvi modeli se mogu međusobno značajno razliko-

vati jer postoje razlike u vidu aspekta transporta nanosa koji se uzima u obzir, formulacije razmene mase između rastvorene i adsorbovane zagađujuće materije, načina modelisanja fizičkih procesa na dnu, itd. Periañez (2002) je predstavio model koji uzima u obzir samo zagađujuću materiju adsorbovanu na nanos na dnu i u rastvorenom obliku, čime je potpuno zanemaren transport nanosa u vidu suspenzije i prateća interakcija sa nekonzervativnom materijom. Razvijani su modeli koji uzimaju u obzir interakciju zagađivača i sa suspendovanim nanosom i sa nanosom na dnu, pri čemu se dno uzima za homogenu sredinu (što za prirodne vodotokove po pravilu nije slučaj) bez mogućnosti dospevanja adsorbovanog zagađivača u dublje slojeve usled procesa deponovanja (Periañez, 1999, 2003a,b). Pošto dosta od ovde razmatranih modela ne uzima u obzir promenu kote dna, proces taloženja zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa i njegovo pristizanje u dublje slojeve usled daljeg deponovanja je modelisano kao proces „raspadanja” sa kinetičkim koeficijentom koji je vezivan za bilans deponovanja i uvlačenja nanosa u suspenziju (Periañez, 2009, 2012). Takođe postoje formulacije gde se suspendovani nanos „veštački” definiše kao nanos sa pečnikom zrna manjim od neke vrednosti (Abril i García-León, 1994; Periañez, 1999, 2003a). U slučaju kada modeli uzimaju u obzir neposrednu interakciju između rastvorenog i adsorbovanog zagađivača, ono je obično formulisano kao reverzibilni kinetički proces prvog reda, regulisan kinetičkim koeficijentima. Međutim postoje različiti koncepti i u načinu modelisanja ovog procesa. Najjednostavniji pristup je neposredno zadavanje brojevnih vrednosti koeficijenata koji regulišu adsorpciju/desorpciju (Ambrose et al., 1982). Nešto složeniji način definisanja funkcije razmene između rastvorenog i adsorbovanog zagađivača je modelisanje kinetičkih koeficijenata pomoću razlike između sračunate i ravnotežne koncentracije koja se dobija korišćenjem koeficijenta particije (Holly et al., 1990; Massoudieh et al., 2010). Pošto je proces adsorpcije površinski fenomen u smislu da se nekonzervativna materija vezuje za površinu zrna nanosa, kinetički koeficijent koji reguliše ovu pojavu je opravdano vezivati za površinu dostupnu ovom procesu. Opisani pristup modelisanja je razvijan za transport radionukleida (Periañez, 1999, 2002, 2003a,b), ali je primenjivan i u slučaju teških metala (Periañez, 2009, 2012). Na ovaj način se mogućnost i brzina adsorpcije zagađivača neposredno vezuje za prisustvo sitnih zrna nanosa u suspenziji ili na dnu.

Pregled dostupne stručne literature ukazuje na činjenicu da iako postoje prilično složeni i matematički jasno formulisani koncepti modelisanja ponašanja nekonzervativne materije, oni često nisu praćeni sa isto tako sveobuhvatnim i korektno formulisanim modelom ponašanja nanosa. Naime, obično se razmatra samo suspendovani nanos bez formulisanja procesa na dnu i pri dnu, koji zapravo čine suštinu modelisanja morfoloških i granulometrijskih promena. Naravno, ne želi se ostaviti utisak da ovde prikazani modeli nisu primenljivi ili bilo šta slično, jer se iz tabele 7 i 8 jasno vidi da je većina njih razvijana za primenu u morskim sredinama gde je opravdano zanemariti morfološke promene i gde je granulometrijski sastav nanosne mešavine znatno više ujednačen i nema tako značajnu ulogu. Takođe se napominje da su jednačine u ovim modelima formulisane u kartezijskom koordinatnom sistemu jer pri modelisanju velikih morskih domena nema potrebe za krivolinijskim koordinatnim sistemom. Dakle, njihova neposredna primena u slučaju prirodnih aluvijalnih vodotokova nije moguća ni zbog koordinatnog sistema, ni zbog formulisanja nanosnih procesa. Postoje modeli transporta zagađivača starijih datuma koji su razvijani za reke, ali su u njima nanosni procesi formulisani na način koji je danas moguće daleko bolje modelisati (Ambrose et al., 1982, 1993). Neophodno je pomenuti i linijski model autora Holly et al. (1990), koji može modelisati prirodnu mešavinu nanosa u prirodnim vodotocima ali takođe ima pojedine nedostatke u formulisanju nanosnih procesa na i pri dnu.

Reference; dimenzija modela	Model transporta zagađujuće materije						Primena
	Ukupni transport	Transport rastvorene materije	Transport adsorbirane materije	Nestajanje i/ili stvaranje materija	Mešavina nanosa	Interakcija sa nanosom na dnu	
Ambrose et al. (1982) SERATRA; dim: 1D ^a	da	da	da	da	3 frakcije	?	Four Mile and Wolf Creeks in Iowa
Holly et al. (1990) CHARIMA; dim: 1D	da	da	da	da	da	preko resusp./dep. za ads. materiju; preko kin. procesa prvog reda za rastv. materiju	?
Ambrose et al. (1993) WASP5; dim: 3D	da	ne?	ne?	da	3 frakcije	resuspenzija/deponovanje	transport više materija koje mogu imati hemijske veze jedna sa drugim
Periáñez (1999)	da	da	da	da	ne	preko resusp./dep. za ads. materiju; preko kin. procesa prvog reda za rastv. materiju	transport plutonijuma u moru
Periáñez (2003a) dim: 3D	da	da	da	ne?	ne	preko resusp./dep. za ads. materiju; preko kin. procesa prvog reda za rastv. materiju	transport cezijuma i plutonijuma u moru
Periáñez (2003b) dim: 2D	da	da	da	ne?	ne	preko resusp./deponovanja; koristi se koeficijent particije	transport teških metala u ušću reke u more
Wu et al. (2005) dim: 1D, 2D	da	ne	ne	ne	ne	resuspenzija/deponovanje	transport <i>E. coli</i> na kohezivnom nanosu
Bai i Lung (2005) EFDC; dim: 3D	da	ne	ne	ne	ne	preko resusp./deponovanja; koristi se koeficijent particije	transport bakra u ušću reke u more
Liu et al. (2007) dim: 2D	da	ne	ne	ne	ne	preko resusp./dep. za ads. materiju; preko kin. procesa prvog reda za rastv. materiju	transport teških metala u moru: cink, bakar i nikel

Tabela 7: Pregled modela transporta zagađujuće materije, 1. deo

^aModel se može smatrati za kvazi 2D, jer obuhvata i vertikalnu raspodelu pojedinih veličina.

Referenca; dimenzija modela	Model transporta zagađujuće materije						Primena
	Ukupni transport	Transport rastvorene materije	Transport adsorbovane materije	Nestajanje i/ili stvaranje materija	Mešavina nanosa	Interakcija sa nanosom na dnu	
Massoudieh et al. (2010) dim: 1D	da	da	da	da	ne	preko resusp./dep. za ads. materiju; preko kin. procesa prvog reda za rastv. materiju	transport teških metala i azota
Gao et al. (2011) DIVAST; dim: 2D	da	ne	ne	da	ne	preko resusp./deponovanja; koristi se koeficijent particije	transport fekalnih bakterija u reci
Periáñez (2012) dim: 2D	da	da	da	ne	3 frakcije	preko resusp./dep. za ads. materiju; preko kin. procesa prvog reda za rastv. materiju	transport teških metala u moru: cink, bakar i nikal

Tabela 8: Pregled modela transporta zagađujuće materije, 2. deo

3. Teorijske osnove

3.1. Konvencije obeležavanja

ZA obeležavanje koordinata se koristi gornji indeks, tj. $x^m = (x^i, x^j, x^k)$ obeležava koordinatu u kartezijanskom sistemu, a $\xi^m = (\xi^i, \xi^j, \xi^k)$ koordinatu u opštem krivolinijskom sistemu. Smatra se da parcijalni izvod po proizvoljnom koordinatnom pravcu ima *donji* indeks, tj.

$$\frac{\partial}{\partial \xi^m} \equiv \partial_m.$$

Za pisanje jednačina u matematici, a pogotovo u fizici se redovno koristi *Einstein*-ova notacija (poznatija kao *Einstein*-ova konvencija o sumiranju), koja podrazumeva sumiranje članova jednačine (monoma) sa ponovljenim indeksima radi postizanja kompaktnijeg pisanja. Konvencija za sumiranje je definisana za monome koji se sastoje od najmanje dve veličine ili najmanje jedne veličine i jednog operatora. Ako je indeks u monomu ponovljen jednom kao *gornji* i jednom kao *donji*, onda to predstavlja trinom, jer se za tako udvostručeni indeks uslovljava da se odnosi na sva tri koordinatna pravca, u svakom članu trinoma na po jedan.

$$\begin{aligned} A^n B_n &= A^i B_i + A^j B_j + A^k B_k \\ A^n \frac{\partial B^j}{\partial \xi^n} &= A^n \partial_n (B^j) = A^i \frac{\partial B^j}{\partial \xi^i} + A^j \frac{\partial B^j}{\partial \xi^j} + A^k \frac{\partial B^j}{\partial \xi^k} \\ \frac{\partial B^n}{\partial \xi^n} &= \partial_n (B^n) = \frac{\partial B^i}{\partial \xi^i} + \frac{\partial B^j}{\partial \xi^j} + \frac{\partial B^k}{\partial \xi^k} \end{aligned}$$

Indeksi i, j, k označavaju konkretne koordinatne pravce. Ako su ovi indeksi ponovljeni, oni *ne* označavaju sumiranje. Da bi se označilo sumiranje koriste se druga slova (l, m, n, p, q, s) ponovljena u skladu sa konvencijom za sumiranje. Pri sumaciji ponovljeni indeksi l, m, n, p, q, s će uzeti vrednosti i, j, k . Takođe se navodi da je permutacija indeksa i, j, k ciklična.

3.2. Jednačine strujanja vode

Strujna slika u prirodnim aluvijalnim vodotocima je po svojim osobinama prostornog i turbulentnog karaktera. Definisanje ovako složenog tečenja, nastalog kao posledica kompleksne geometrije prirodnog vodotoka i graničnih uslova koji se kontinualno menjaju, bazira se na osnovnim principima mehanike fluida sadržanim u zakonima održanja mase (jednačina kontinuiteta) i održanja količine kretanja (dinamička jednačina). Ako se ovi zakoni primene na slučaj homogenog, izotropnog i viskoznog fluida, dolazi se do poznatog oblika *Navier-Stokes*-ovih jednačina.

Jednačina koja se naziva jednačina održanja mase, nosi i naziv jednačina kontinuiteta (ili neprekidnosti). Ona se dobija neposrednom primenom stava o *nepromenljivosti mase na neprekidne sredine*. Jednačina kontinuiteta za vodu u vektorskom obliku je data sa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (3.1)$$

uz napomenu da se sve veličine u njoj odnose na *trenutne* vrednosti (Hajdin, 2002).

Jednačina koja se naziva jednačina održanja količine kretanja, nosi i naziv dinamička jednačina. Ona se zasniva na dobro poznatoj zakonitosti da je *priraštaj količine kretanja*

u jedinici vremena jednak delujućoj sili. Dinamička jednačina u vektorskom obliku je data sa

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (3.2)$$

uz napomenu da ovako navedeni izraz važi za *trenutne* vrednosti promenljivih koje se u njoj nalaze (Hajdin, 2002).

3.3. Jednačine transporta nanosa i deformacije korita

Kretanje nanosa je posledica strujanja fluida. Sa druge strane, nanos koji je u pokretu utiče na strujanje fluida preko promene kote dna, uslova na dnu (hrapavosti), promene gustine fluida itd. Imajući u vidu ovu međusobnu interakciju u prirodnim vodotocima, kao i neujednačen sastav nanosnog materijala, zaključuje se da je veoma teško jasno definisati procese koji opisuju ponašanje nanosa. Uzroci pokretanja zrna nanosa koje čine korito su „događaji” *turbulentnog kretanja* fluida u blizini dna, *turbulentne fluktuacije* u klasičnom smislu (homogena turbulencija), odnosno uticaji *osrednjenih veličina toka* (napon trenja u blizini dna). U narednom izlaganju se navode fundamentalne razlike između transporta *suspendovanog* i *vučenog* nanosa.

- Zrna nanosa, koja se nakon uvlačenja u suspenziju (tj. nakon podizanja sa dna) kreću brzinama fluida, čine *suspendovani nanos*. Dinamika njihovog kretanja se može dovesti u vezu sa dinamikom kretanja fluida pomoću transportne jednačine (jednačina advekcije-difuzije) (Jovanović, 2008).
- Zrna nanosa čijom dinamikom (nakon pokretanja) upravlja gravitacija se kreću u vidu skokova, kotrljanja ili klizanja u neposrednoj blizini dna. Nanos koji se kreće na ovaj način se svrstava u *vučeni nanos* (Jovanović, 2008).

Treba naglasiti da ne postoji jasna (oštra) granica između zrna nanosa koja se svrstavaju u vučeni, odnosno suspendovani nanos. Sa druge strane, u prirodnim vodotocima se javlja mešavina nanosa, pa se postavlja pitanje *dostupnosti* zrna nanosa određene veličine za koju su ispunjeni uslovi pokretanja. Pošto mehanizam transporta neposredno zavisi od veličine zrna nanosa, matematički model je potrebno formulisati za mešavinu nanosa, odnosno za određen broj granulometrijskih intervala (frakcija) sa reprezentativnim prečnikom zrna. Dakle, strategija zasebnog formulisanja jednačina za svaku frakciju nanosne mešavine omogućava tačnije definisanje nekih od ključnih procesa interakcije vode i nanosa.

Svi do sada navedeni mehanizmi su u složenoj međusobnoj zavisnosti. Suspendovani nanos utiče na dno vodotoka preko deponovanja ili uvlačenja materijala u suspenziju, a geometrija dna utiče na strujanje fluida, koje opet utiče na ponašanje suspendovanog nanosa. Uvodno razmatranje ukazuje na činjenicu da se radi o veoma složenom sistemu, pa se zahteva detaljna analiza svih njenih elemenata, kao i pronalaženje najboljih matematičkih i numeričkih metoda za njihovo rešavanje.

3.3.1. Suspendovani nanos

Suspendovani ili „lebdeći” nanos je deo ukupnog nanosa koji sa vodom formira suspenziju. Mehanizam održanja zrna nanosa u suspenziji se sastoji od uticaja gravitacionog ubrzanja koje izaziva kretanje čestica ka dnu i uticaja turbulentnih fluktuacija, koje vraćaju čestice ka površini vode. Dakle, održanje suspenzije je omogućeno ravnotežnim

delovanjem opisanog mehanizma. Jedna od osnovnih pretpostavki pri izvođenju jednačine transporta suspendovanog nanosa je da se zrna koja se nalaze u suspenziji kreću pod uticajem stujnog polja, tj. da zrna suspendovanog nanosa imaju istu brzinu kao fluid u njihovoj neposrednoj blizini (Jovanović, 2008).

U saglasnosti sa strategijom podele mešavine nanosa na odgovarajući broj granulometrijskih intervala, posmatra se frakcija k_s suspendovanog nanosa unutar kontrolne zapremine Ω_c , koja je ograničena površinom ω_c . U ovakvoj kontrolnoj zapremini je dimenzionalna koncentracija frakcije k_s suspendovanog nanosa definisana kao

$$\text{mas}C_{k_s} = \frac{d(M_{SS})_{k_s}}{d\Omega_c},$$

dok je odgovarajuća bezdimenzionalna koncentracija definisana izrazom

$$C_{k_s} = \frac{d(M_{SS})_{k_s}}{dM}.$$

Za formulisanje jednačine kretanja suspendovanog nanosa se u daljem razmatranju koristiti *bezdimenzionalna koncentracija*². U nastavku se navodi *Reynolds*-ova transportna teorema u vektorskom obliku, napisana za *nepokretnu* i *nedeformabilnu* kontrolnu zapreminu Ω_c , okruženu graničnom površinom ω_c .

$$\frac{D(M_{SS})_{k_s}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_c} \rho C_{k_s} d\Omega_c = \int_{\Omega_c(t)} \frac{\partial(\rho C_{k_s})}{\partial t} d\Omega_c + \int_{\Omega_c(t)} \nabla \cdot (\rho C_{k_s} \vec{V}) d\Omega_c \quad (3.3)$$

Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s u posmatranoj kontrolnoj zapremini je data sa

$$\frac{D(M_{SS})_{k_s}}{Dt} = - \int_{\omega_c} (\vec{q}_{\text{grav}})_{k_s} \vec{n} d\omega_c.$$

Koristeći *Gauss*-ovu teoremu prelaska sa površinskog na zapreminski integral, kao i definiciju bezdimenzionalne koncentracije suspendovanog nanosa, predmetna jednačina održanja mase se može napisati u vektorskom obliku kao

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_c} C_{k_s} \rho d\Omega_c = - \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\vec{q}_{\text{grav}})_{k_s} d\Omega_c.$$

Na poslednju jednačinu se primenjuje *Reynolds*-ova transportna teorema data izrazom (3.3), pa se dobija još jedan vektorski oblik jednačine održanja mase za frakciju k_s suspendovanog nanosa.

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial(\rho C_{k_s})}{\partial t} d\Omega_c + \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\rho C_{k_s} \vec{V}) d\Omega_c = - \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\vec{q}_{\text{grav}})_{k_s} d\Omega_c$$

Pošto su svi integrali u poslednjoj jednačini po kontrolnoj zapremini Ω_c , onda ona važi i za podintegralne funkcije, tj. za elementarnu kontrolnu zapreminu $d\Omega_c$, pa se može napisati da je

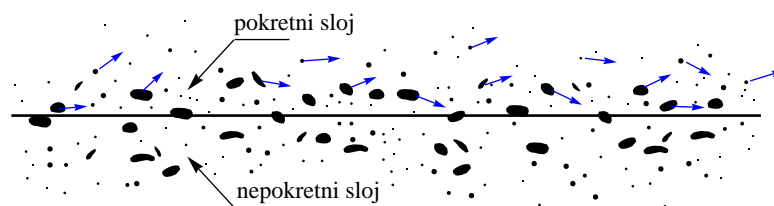
$$\frac{\partial(\rho C_{k_s})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho C_{k_s} \vec{V}) = - \nabla \cdot (\vec{q}_{\text{grav}})_{k_s}. \quad (3.4)$$

Gore navedena jednačina održanja mase suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s , koja se naziva još i jednačina kretanja frakcije k_s suspendovanog nanosa, važi za *trenutne* vrednosti promenljivih.

²Radi jednostavnijeg pisanja bezdimenzionalna koncentracija se u daljem izlaganju jednostavno naziva samo *koncentracija*.

3.3.2. Nanos na dnu i pri dnu

Rečno korito je sastavljeno od prirodne mešavine nanosa, koja sadrži zrna nanosa različitih veličina (frakcija). U zavisnosti od parametara strujanja, tj. turbulentnih fluktuacija i turbulentnih „događaja” jedan deo nanosa biva podignut u suspenziju, dok preostali deo ostaje na dnu i pri dnu, formirajući dva sloja: *pokretni* i *nepokretni* sloj (slika 1). Kad je jednom pokrenuto, zrno koje se kreće u pokretnom sloju je pod dominantnim uticajem gravitacije. U zavisnosti od hidrauličkih uslova, kao i fizičkih parametara nanosa, kretanje pojedinačnih zrna u pokretnom sloju se odvija kotrljanjem, klizanjem ili u vidu kratkih „skokova”. Nanos, koji se kreće u pokretnom sloju se naziva *vučeni* nanos. Takođe se može reći da je skokovito (saltaciono) kretanje karakteristično za male koncentracije vučenog nanosa, dok je kretanje u vidu kotrljanja i klizanja karakteristično za velike koncentracije vučenog nanosa (Jovanović, 2008).



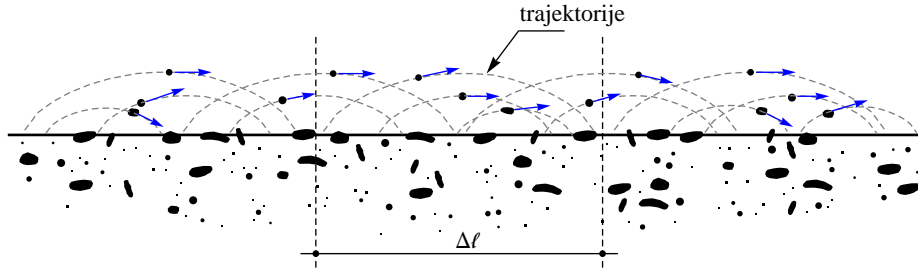
Slika 1: Rečno dno

Dakle, kada se razmatra ponašanje nanosa na dnu i pri dnu, koja pojedinačna zrna će se pokrenuti u velikoj meri zavisi od slučajnih procesa kao što su turbulentni „događaji” u blizini dna, izloženost zrna toku (tj. lokalna mikro-struktura površine dna) itd. Zbog ovoga je kretanje nanosa u pokretnom sloju *diskontinualno*, tj. posmatranjem jednog domena primećuju se različiti turbulentni (slučajni) „događaji” od trenutka do trenutka čak i kada se radi o uniformnom toku. Opisana pojava značajno otežava ispravnu matematičku formulaciju ponašanja nanosa na i pri dnu.

Da bi se navedeni problem rešio, za trenutak se posmatra prosečno (osrednjeno) kretanje nanosa na dnu i pri dnu u domenu sa uniformnom strujom. Zbog ovoga se može pretpostaviti da su turbulentni događaji uniformno raspoređeni tokom vremena i po prostoru. Pošto je lokalna mikrostruktura dna takođe stohastičnog karaktera, smatra se da su prosečno sva zrna podjednako izložena toku. Nakon gore navedenih pretpostavki za očekivati je da se, od jednog vremenskog trenutka do narednog, kretanje nanosa u pokretnom sloju manifestuje kao *kontinualno* kretanje u vremenskom pogledu. U razmatranom slučaju kota dna zavisi od broja zrna nanosa koja su pokrenuta sa dna posmatranog domena, kao i od broja zrna koja su svoje kretanje započela u nekom od uzvodnih domena u prethodnim vremenskim trenucima a deponuju se unutar posmatranog domena. Međutim, ako se hidraulički parametri toka menjaju po prostoru (tj. od domena do domena), onda bi bilo potrebno pratiti svako pojedinačno zrno posebno kroz različite faze toka. Umesto praćenja trajektorije svakog pojedinačnog zrna predlaže se praćenje nanosa u pokretnom sloju kao *kontinualnog* procesa (u nekom prosečnom, osrednjenom smislu) unutar pojedinačnih domena na koje se može primeniti analiza posmatranjem kontrolne zapremine. Poslednje napisano povlači za sobom problem odabira najmanje kontrolne zapremine unutar koje je moguće predloženo razmatranje kretanja nanosa. Ista kontrolna zapremina se može primeniti samo u diskretizovanoj formi.

Smatra se da su unutar najmanjeg domena (dužine $\Delta\ell$), pogodnog za proučavanje kretanja nanosa u pokretnom sloju, parametri toka konstantni (u suprotnom bi se svako

zrno moralo posmatrati zasebno, jer bi se struja menjala duž trajektorije zrna vučenog nanosa). Takođe se pretpostavlja da je unutar ovog domena, u slučaju prisustva mešavine nanosa, površina dna *uniformna* ili kvazi-uniformna, jer bi inače bilo potrebno znati tačnu poziciju svakog pojedinačnog zrna.



Slika 2: Dužina najkraćeg domena za proučavanje nanosa na dnu i pri dnu

Zrna nanosa koja su pokrenuta unutar domena $\Delta\ell$ se deponuju ili unutar posmatranog, ili unutar sledećeg nizvodnog domena. Sa druge strane, zrna nanosa koja se deponuju unutar domena $\Delta\ell$ su pokrenuta ili unutar posmatranog, ili unutar susednog uzvodnog domena. Dakle, posmatrani domen dužine $\Delta\ell$ viši razmenu zrna vučenog nanosa samo sa susednim domenima (tj. zrno iz posmatranog domena ne može biti deponovano u nekom udaljenom domenu, kao što ni zrno koje se deponuje u posmatrani domen ne može poticati iz nekog drugog udaljenog domena).

Određeni broj zrna, koji se kreće unutar posmatranog domena predstavlja razmenu između dna i vučenog nanosa (tj. zrna koja se pokreću pa deponuju) unutar samog domena. Pošto je usvojena pretpostavka o uniformnoj raspodeli zrna unutar $\Delta\ell$, razmatrana zrna nanosa neće (u prosečnom smislu) menjati uslove na površini dna. Međutim, određen broj zrna, koja su pokrenuta unutar $\Delta\ell$, će se deponovati nizvodno. Sa druge strane, neki broj zrna, koja se deponuju unutar $\Delta\ell$, su pokrenuta negde uzvodno. Razlika ova dva broja će promeniti raspodelu veličina zrna (frakcija) unutar posmatranog domena. Pošto je usvojena pretpostavka da je na dnu unutar pojedinačnog domena u *svakom vremenskom trenutku* raspodela veličina zrna (frakcija) uniformna, onda će promene na površini dna, unutar $\Delta\ell$, biti *trenutno* raspoređene. Stav da je raspodela veličina zrna (frakcija) uniformna unutar domena *ne* znači da postoji samo jedna frakcija, nego da su zrna (koja mogu spadati u više granulometrijskih intervala) podjednako zastupljena u svakom delu domena. U nastavku se navode mehanizmi formiranja površine dna pri procesima erozije i deponovanja.

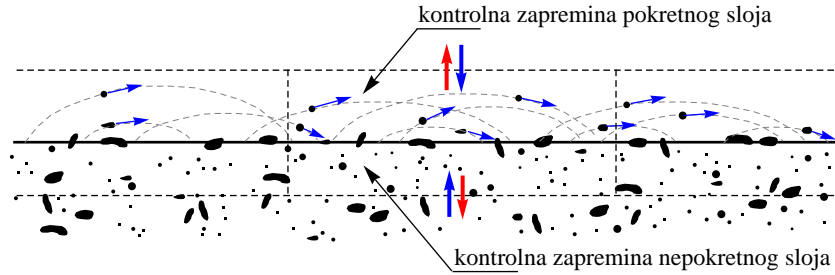
Ako je broj zrna nanosa koja napuštaju posmatrani domen veći od broja zrna koja u njega dospevaju javlja, se *erozija*. Zrna koja su ostala u domenu će sa nekim zrnima neposredno ispod stare površine dna formirati novu raspodelu frakcija na (novoj) površini dna. Pri ovome ostaje na snazi pretpostavka da se preostala zrna u potpunosti mešaju za novim zrnima iz donjeg sloja i čine homogenu površinu unutar posmatranog domena.

Ako je broj zrna nanosa koja napuštaju posmatrani domen manji od broja zrna koja u njega dospevaju, javlja se *deponovanje*. Nova zrna, koja su stigla u domen se mešaju sa *delom* zrna koja su ranije činila površinu dna, čime se dobija nova raspodela frakcija na (novoj) površini dna. Preostali deo zrna, koji je ranije činio površinu dna se meša sa zrnima neposredno ispod formirajući novu raspodelu frakcija i za sloj neposredno ispod (nove) površine dna.

Opisani koncepti ponašanja nanosa na dnu i pri dnu su posledica nastojanja da se izbegne praćenje svakog pojedinačnog zrna. Umesto toga se transport vučenog nanosa

razmatra kao *kontinualan* proces, barem unutar pojedinačnog domena. Ovo obezbeđuje kontinualnu razmenu vučenog nanosa između susednih kontrolnih zapremina. Dakle, unutar pojedinačnog domena se pretpostavljaju konstantni parametri toka i jednolika raspodela frakcija zrna, što već predstavlja neku vrstu diskretizacije. Međutim, predloženi koncept modelisanja zahteva poznavanje raspodele veličina zrna (frakcija) ne samo na samoj površini dna, nego i raspodele veličina zrna (frakcija) neposredno ispod površine (koji bi činili novu površinu dna nakon erozije). Ovo u krajnjoj liniji zahteva poznavanje položaja svakog pojedinačnog zrna nanosa u materijalu rečnog korita, što je praktično nemoguće. Zbog ovoga se uvodi pojam aktivnog sloja.

Aktivni sloj je definisan kao gornji sloj površine dna (uključujući i samu površinu) koji je pod neposrednim uticajem struje i u kojem zrna nanosa *uvek* čine *homogenu* mešavinu. Ovo znači da je raspodela veličina zrna (frakcija) ista u celom aktivnom sloju. Na osnovu navedene definicije, kada se zrna nanosa deponuju na površinu dna ili eroduju sa nje, raspodela veličina zrna (frakcija) se menja u celom aktivnom sloju. Takođe se smatra da su sva zrna nanosa u aktivnom sloju *jednako* izložena uticaju struje, bez obzira na položaj pojedinačnog zrna u aktivnom sloju.



Slika 3: Kontrolna zapremina aktivnog sloja

Nakon svega do sada navedenog u ovom poglavlju, moguće je definisati kontrolnu zapreminu koja je u osnovi pravougaona i ima dimenzije $\Delta x_{bs}^i, \Delta x_{bs}^j$. Navedene dužine ne smeju biti kraće od $\Delta \ell$, jer upravo taj kriterijum obezbeđuje preduslov da se ne moraju pratiti pojedinačna zrna nanosa. Kontrolna zapremina aktivnog sloja je u visinskom smislu definisana debljinom E_a . Ova debljina mora biti takva da se sve promene na samoj površini dna, kao i promene unutar kontrolne zapremine, mogu raspodeliti kao jednolika (i trenutna) promena celog aktivnog sloja. Zrna nanosa koja pripadaju aktivnom sloju se dele na ona koja miruju i nalaze se u *nepokretnom sloju* i ona koja se kreću u vidu skokova u *pokretnom sloju*. Ovo je šematski prikazano na slici 3.

U daljem razmatranju se posmatra vremenski trenutak kada su sva zrna koja čine aktivni sloj u kontaktu sa površinom dna, tj. *nema* saltacionog kretanja. Dakle, masa predmetnih zrna granulometrijskog intervala k_s iznosi

$$(M_{BS})_{k_s} = \rho_s (\Omega_c^{bs})_{k_s},$$

na osnovu čega je moguće i matematički definisati pojam *frakcione zastupljenosti* kao

$$\beta_{k_s} = \frac{(\Omega_c^{bs})_{k_s}}{(1 - p_s) \Omega_c}.$$

Dakle, za kontrolnu zapreminu koja ispunjava uslove neophodne za kontinualno praćenje kretanja nanosa na dnu i pri dnu se može napisati da je u njoj

$$(M_{BS})_{k_s} = \rho_s (1 - p_s) \beta_{k_s} \Omega_c = \rho_s (1 - p_s) \beta_{k_s} E_a \Delta x_{bs}^i \Delta x_{bs}^j.$$

Nakon uvođenja svih neophodnih definicija, navodi se jednačina održanja mase nanosa u aktivnom sloju bez mehanizama razmene sa suspendovanim nanosom i nanosom koji se nalazi u slojevima *ispod* aktivnog sloja. Smatra se da su gustina nanosa i poroznost mešavine nanosa konstante.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} [\rho_s (1 - p_s) \beta_{k_s} E_a \Delta x_{bs}^i \Delta x_{bs}^j] &= \left((\Phi_{us}^i)_{k_s} - (\Phi_{ds}^i)_{k_s} \right) + \left((\Phi_{us}^j)_{k_s} - (\Phi_{ds}^j)_{k_s} \right), \\ \rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (\beta_{k_s} E_a)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta x_{bs}^i} \left(\frac{(\Phi_{us}^i)_{k_s} - (\Phi_{ds}^i)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^j} \right) + \frac{1}{\Delta x_{bs}^j} \left(\frac{(\Phi_{us}^j)_{k_s} - (\Phi_{ds}^j)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^i} \right), \\ \rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (\beta_{k_s} E_a)}{\partial t} &= \frac{(\varphi_{us}^i)_{k_s} - (\varphi_{ds}^i)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^i} + \frac{(\varphi_{us}^j)_{k_s} - (\varphi_{ds}^j)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^j}, \\ \rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (\beta_{k_s} E_a)}{\partial t} &= -\frac{(\varphi_{ds}^i)_{k_s} - (\varphi_{us}^i)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^i} - \frac{(\varphi_{ds}^j)_{k_s} - (\varphi_{us}^j)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^j},\end{aligned}$$

što se u vektorskom obliku piše kao

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (\beta_{k_s} E_a)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{\phi}_{k_s}). \quad (3.5)$$

U ranijem izlaganju je rečeno da se usled turbulentnih fluktuacija i turbulentnih „događaja” zrna nanosa sa dna uvlače u suspenziju. Takođe je nagovešteno da se usled delovanja gravitacionog ubrzanja zrna nanosa kreću ka dnu napuštajući suspenziju. Zbirni uticaj dva navedena mehanizma se modelišu članom *izvora suspendovanog nanosa*, i on predstavlja *gubitak* za zrna koja se nalaze u aktivnom sloju, pa se na desnoj strani jednačine (3.5) mora pojaviti sa negativnim predznakom. Sa druge strane, kota površine dna, kao i kota podine aktivnog sloja se menjaju usled erozije ili deponovanja. Usled ovoga se materijal može *osloboditi* iz aktivnog sloja u sloj ispod njega, ili aktivni sloj može *zarobiti* materijal iz sloja ispod njega. Naravno, definicija aktivnog sloja zahteva da mešavina nanosa u njemu bude homogena, što znači da ako aktivni sloj zarobi nov materijal, on će biti u potpunosti pomešan sa ostatkom nanosa koji se tu već nalazi. Opisana razmera sa slojem, koji se nalazi ispod aktivnog sloja matematički može da se predstavi preko člana izvora koji deluje u podini aktivnog sloja. Ovaj član (po definiciji) predstavlja *dobitak* za nanos koji se nalazi u aktivnom sloju, pa se na desnoj strani jednačine (3.5) mora pojaviti sa pozitivnim predznakom. Na osnovu navedenog, jednačina (3.5) postaje

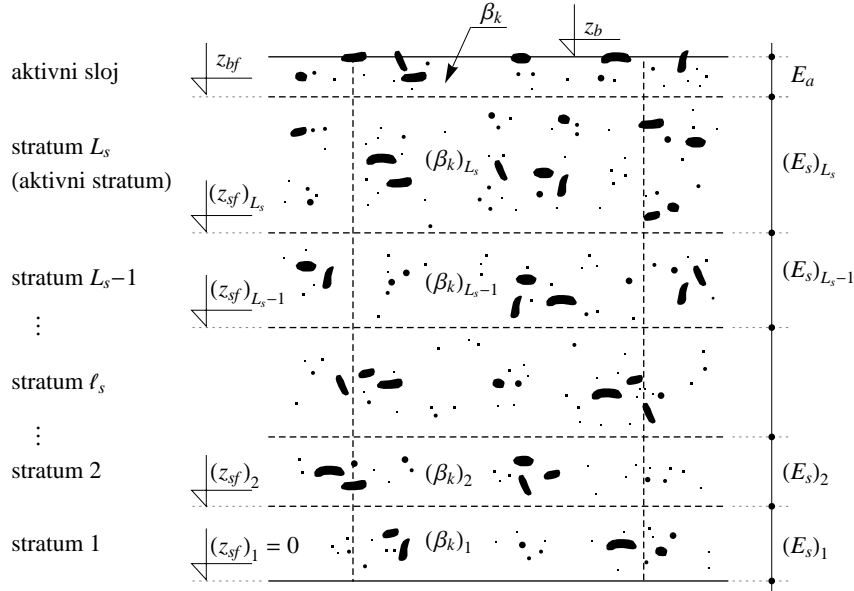
$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (\beta_{k_s} E_a)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{\phi}_{k_s}) - S_{k_s} + (S_f)_{k_s}. \quad (3.6)$$

Da bi karakter divergencije vektora u (3.6) bio u potpunosti jasan, navodi se jednačina održanja mase za frakciju k_s nanosa u aktivnom sloju u kartezijskom koordinatnom sistemu. Parcijalni izvodi fluksa vučenog nanosa u njoj se moraju shvatiti kao neophodnost pri transformaciji u krivolinijski koordinatni sistem, što je prikazano u poglavlju 3.7. Naime, zbog diskontinualnog kretanja nanosa u pokretnom sloju, strogo uzevši, jednačina se ne bi mogla pisati u diferencijalnom obliku.

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (\beta_{k_s} E_a)}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi_{k_s}^n}{\partial x^n} - S_{k_s} + (S_f)_{k_s} \quad (3.7)$$

Nije neobično da se nanos koji čini materijal ispod dna korita, tokom svoje prirodne geneze, formira u vidu slojeva (stratuma) prikazanih na slici 4. Može se pretpostaviti da je unutar jednog ovakvog sloja mešavina nanosa približno *homogena*. Opisana prirodna

pojava opravdava diskretizaciju materijala ispod dna korita u niz kontrolnih zapremina koje se nazivaju *stratumi*. Horizontalna dimenzija svakog stratuma odgovara dimenzijama odgovarajućeg aktivnog sloja na njihovoj površini. Stratum koji se nalazi neposredno ispod aktivnog sloja se naziva *aktivni stratum*. Donja granična površina (podina) aktivnog sloja je ujedno i gornja granična površina aktivnog stratuma. Dakle, pomeranje podine aktivnog sloja menja debljinu aktivnog stratuma. Moguće je (a i verovatno) da aktivni sloj i aktivni stratum imaju različitu raspodelu frakcione zastupljenosti granulometrijskih intervala mešavine nanosa. Pomeranje podine aktivnog sloja prouzrokuje da jedan deo materijala napusti kontrolnu zapreminu kojoj je pripadao usled čega dolazi do trenutnih promena raspodele frakcija obe kontrolne zapremine. Ovo je posledica pretpostavke o homogenosti aktivnog sloja i svih stratuma. Napominje se da opisana razmena materijala ne podrazumeva njegovo stvarno pomeranje, nego se radi o načinu modelisanja razmatranog procesa. Prethodno napisano daje dodatno objašnjenje o razmeni mase između aktivnog sloja i slojeva ispod njega.



Slika 4: *Aktivni sloj i stratumi*

Sledi izvođenje jednačine kojom se opisuje deformacija korita. Sumiranjem jednačina održanja mase za sve frakcije nanosa u aktivnom sloju (3.6) se dobija

$$(1 - p_s) \rho_s \frac{\partial}{\partial t} \left(E_a \sum_{k_s=1}^{K_s} \beta_k \right) + \sum_{k_s=1}^{K_s} \left[\nabla \cdot (\vec{\phi}_{k_s}) + S_{k_s} - (S_f)_{k_s} \right] = 0,$$

na koju se primenjuje dodatna jednačina

$$\sum_{k_s=1}^{K_s} \beta_k = 1, \quad (3.8)$$

tj. da je suma svih frakcija u aktivnom sloju jednaka jedinici (što sledi iz same definicije frakcione zastupljenosti granulometrijskih intervala), pa se konačno dobija da je

$$(1 - p_s) \rho_s \frac{\partial E_a}{\partial t} + \sum_{k_s=1}^{K_s} \left[\nabla \cdot (\vec{\phi}_{k_s}) + S_{k_s} - (S_f)_{k_s} \right] = 0, \quad (3.9)$$

pri čemu je važno primetiti da je jednačina (3.9) nezavisna u odnosu na (3.6), jer u sebi sadrži i jednačinu (3.8).

Debljina aktivnog sloja $E_a = z_b - z_{bf}$ se može menjati iz dva razloga, od kojih je prvi promena mase nanosa usled erozije ili deponovanja (što predstavljaju članovi fluksa vučenog nanosa i razmene sa suspenzijom). Drugi razlog promene debljine aktivnog sloja je promena raspodele frakcija nanosa u samom aktivnom sloju (što je posledica i člana razmene sa aktivnim stratumom). Prvi od dva navedena mehanizma (promena mase aktivnog sloja) po definiciji uzrokuje promenu kote dna, dok drugi (promena raspodele frakcija aktivnog sloja) uzrokuje promenu debljine aktivnog sloja, a samim tim i promenu kote podine aktivnog sloja. Dakle, jednačina (3.9) nije pogodna za određivanje kote dna, jer se usled promene debljine aktivnog sloja menjaju i kota dna i kota podine aktivnog sloja za nepoznatu veličinu.

Da bi se rešio prethodno naveden problem za sve stratume ispod aktivnog sloja se pišu jednačine održanja mase nanosa. Pre svega se razmatra aktivni startum, koji ima indeks L_s (slika 4). Odgovarajuća jednačina održanja mase nanosa je

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial [(\beta_{k_s})_{L_s} (E_s)_{L_s}]}{\partial t} = - (S_f)_{k_s},$$

koja se potom sumira za sve frakcije uz primenu jednačine (3.8), što daje

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (E_s)_{L_s}}{\partial t} = - \sum_{k_s=1}^{K_s} (S_f)_{k_s},$$

iz koje se vidi da debljina aktivnog stratuma zavisi samo od razmene mase sa aktivnim slojem. Za stratum $L_s - 1$ jednačina održanja mase nanosa je

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (E_s)_{L_s-1}}{\partial t} = 0,$$

itd. za sve stratume ispod. Nakon ovoga se mogu sumirati jednačine održanja mase nanosa za aktivni sloj i sve stratume ispod njega pa se konačno dobija globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu u vektorskom obliku.

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \sum_{k_s=1}^{K_s} \left[\nabla \cdot (\vec{\phi}_{k_s}) + S_{k_s} \right] = 0 \quad (3.10)$$

Globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu se navodi u kartezijskom koordinatnom sistemu, uz napomenu da se za parcijalne izvode fluksa vučenog nanosa u njoj odnose iste napomene kao u slučaju jednačine (3.7).

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \sum_{k_s=1}^{K_s} \left[\frac{\partial \varphi_{k_s}^n}{\partial x^n} + S_{k_s} \right] = 0 \quad (3.11)$$

3.4. Jednačine transporta zagađujuće materije

Zagađujuće materije koje dospevaju u prirodne aluvijalne vodotokove mogu biti *konzervativne* ili *nekonzervativne*. Nekonzervativne zagađujuće materije (između ostalog) karakteriše svojsvo da ne ostaju rastvorene u vodi nego imaju određenu tendenciju da se *adsorpcijom* vezuju za sitna zrna nanosa. Adsorpcija je definisana kao adhezija atoma,

jona ili molekula iz gasa, tečnosti ili rastvora na neku površinu. Slično kao u slučaju površinskog napona, adsorpcija je posledica postojanja površinske energije. Naime, u unutrašnjosti materijala vezivni potencijali atoma i molekula su zadovoljeni prisustvom drugih atoma i molekula. Izuzetak predstavljaju atomi koji čine površinu materijala, jer nisu potpuno okruženi drugim atomima, pa imaju (veći ili manji) afinitet da formiraju veze sa nekim drugim atomom koji se može naći u njihovoj blizini. Na samom početku je važno jasno naglasiti da u interakciji zagađujuće materije i nanosa učestvuju samo ona zrna koja su manja od granične vrednosti koja je uslovljena karakteristikama razmatrane materije (Periáñez, 2003b, 2009, 2012). One frakcije mešavine nanosna koje učestvuju u razmatranoj interakciji se nazivaju *aktivnim frakcijama*. Dakle, ako nekonzervativna zagađujuća materija dospe u rečni tok jedan njen deo se vezuje za zrna nanosa (bilo da se radi o suspendovanom, vučenom ili nanosu na dnu) a preostali deo ostaje rastvoren na molekularnom nivou. Iako količina adsorbovane i rastvorene materije teži da dostigne ravnotežno stanje, ponašanje ovakvog zagađivača postaje usko povezano sa kretanjem vode, odnosno nanosa. NeKonzervativni zagađivač se vezuje za sitna zrna suspendovanog nanosa, koja taloženjem mogu dovesti do zagađenja nanosa koji čini rečno dno. Sa druge strane, uvlačenjem zrna nanosa sa zagađenog dna može doći do pojave neželjene materije u inače čistoj vodi. Na zagađivač u rastvorenom obliku deluju procesi advekcije i difuzije koji su posledica strujanja vode, kao i direktna adsorpcija/desorpcija sa zrna nanosa (koji mogu biti u suspenziji ili na dnu). Dakle, ponašanje nekonzervativne zagađujuće materije u prirodnom vodotoku, koja se može javiti u rastvorenom i/ili adsorbovanom obliku, je uslovljeno parametrima toka i kretanjem nanosa. Sa druge strane, konzervativna zagađujuća materija se javlja samo u rastvorenom obliku i na njeno kretanje utiču isključivo parametri toka. Korisno je napomenuti da prisustvo zagađivača nema uticaj na strujanje vode, odnosno ponašanje nanosa.

U okviru ovog rada se razmatra ponašanje nekonzervativne zagađujuće materije koja se na osnovu prethodnog izlaganja može javiti u *rastvorenom obliku*, *adsorbovana za zrna suspendovanog nanosa* i *adsorbovana za zrna nanosa na dnu i pri dnu*. Razlog za posebno razmatranje adsorbovane zagađujuće materije vezane za zrna nanosa u suspenziji, odnosno zrna nanosa koja čine dno rečnog korita je upravo različito ponašanje nanosnog materijala kada je u suspenziji odnosno na dnu, kao što je to objašnjeno u poglavlju 3.3. Tokom formulisanja jednačina transporta zagađujuće materije će se voditi računa da one budu u najvećoj mogućoj saglasnosti sa jednačinama transporta nanosa i deformacije korita, što je i prirodan zahtev, jer proces adsorpcije/desorpcije nameće jaku zavisnost razmatrane pojave od nanosnih procesa.

3.4.1. Zagađujuća materija u rastvorenom obliku

Zagađujuća materija u rastvorenom obliku podrazumeva materiju koja je sa vodom pomešana na *molekularnom* nivou. Navedeno znači da je delovanje gravitacionog ubrzanja na ovu materiju zanemarljivo, kao i da na nju deluju prosci advekcije i difuzije nametnuti kretanjem vode. Da bi se pratila količina rastvorenog zagađivača u vodi, potrebno je jednoznačno definisati njeno prisustvo, pa se u tu svrhu posmatra kontrolna zapremina Ω_c u kojoj je dimenzionalna koncentracija rastvorene zagađujuće materije data kao

$${}^{\text{mas}}C^\dagger = \frac{dM_{DC}}{d\Omega_c},$$

dok se bezdimenzionalna koncentracija rastvorene zagađujuće materije može odrediti kao

$$C^\dagger = \frac{dM_{DC}}{dM}.$$

Poslednji izraz vezuje masu neželjene materije rastvorene u vodi za masu mešavine vode i nanosa analogno kao pri definisanju bezdimenzionalne koncentracije suspendovanog nanosa. Međutim, u ovom poglavlju je neophodno definisati i prisustvo zagađivača koji je adsorbovan na zrna *suspendovanog* nanosa. Slično kao ranije, posmatra se kontrolna zapremina Ω_c u kojoj je dimenzionalna koncentracija zagađujuće materije vezane za zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s definisana kao

$$\text{mas } C_{k_s}^\dagger = \frac{d(M_{SC})_{k_s}}{d\Omega_c},$$

dok je odgovarajuća bezdimenzionalna koncentracija definisana odnosom

$$C_{k_s}^\dagger = \frac{d(M_{SC})_{k_s}}{d(M_{SS})_{k_s}}.$$

Navedeni izraz za bezdimenzionalnu koncentraciju vezuje masu adsorbovanog zagađivača za masu prisutnog suspendovanog nanosa. Ovakav pristup je i fizički opravdan jer je prisustvo adsorbovanog zagađivača po definiciji uslovljeno prisustvom suspendovanog nanosa.

U saglasnosti sa formulisanjem jednačina ponašanja nanosa i ovde se u daljem razmatranju koriste *bezdimenzionalne koncentracije*. Navodi se *Reynolds*-ova transportna teorema u vektorskom obliku, napisana za *nepokretnu* i *nedeformabilnu* kontrolnu zapreminu Ω_c , okruženu graničnom površinom ω_c .

$$\frac{D(M_{DC})}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_c} \rho C^\dagger d\Omega_c = \int_{\Omega_c(t)} \frac{\partial(\rho C^\dagger)}{\partial t} d\Omega_c + \int_{\Omega_c(t)} \nabla \cdot (\rho C^\dagger \vec{V}) d\Omega_c \quad (3.12)$$

Razmena mase između zagađivača u rastvorenom i adsorbovanom obliku se može opisati pomoću reakcija prvog reda i odgovarajućih *kinetičkih* koeficijenata (Periáñez, 2003b, 2009, 2012). Dakle, pod usvojenom pretpostavkom da je adsorpcija/desorpcija reverzibilna reakcija, smatra se da kinetički koeficijent μ_1 opisuje transfer materije iz rastvorenog u adsorbovani oblik, a da kinetički koeficijent μ_2 opisuje inverzni proces. Pošto adsorpcija podrazumeva vezivanje materije za zrna nanosa odgovarajuće frakcije, u ovom trenutku se uzima da brožane vrednosti kinetičkih koeficijenata zavise i od toga o kojem granulometrijskom intervalu se radi (tj. ovi koeficijenti su dati po frakcijama nanosne mešavine). U saglasnosti sa principima reakcije prvog reda, vremenski priraštaj adsorbovane materije, što za razmatranu masu predstavlja gubitak, linearno zavisi od koncentracije zagađivača u rastvorenom obliku. Analogno tome, vremenski priraštaj materije koja se desorbuje, što za razmatranu masu predstavlja dobitak, zavisi od koncentracije zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa. Naravno ove veličine se moraju sumirati po svim *aktivnim* frakcijama nanosa, jer sve one podjednako učestvuju u opisanoj razmeni mase. Dodajući i molekularnu difuziju na ranije opisane mehanizme je moguće napisati jednačinu održanja mase zagađujuće materije u rastvorenom obliku kao

$$\frac{D(M_{DC})}{Dt} = - \int_{\omega_c} \vec{\zeta}_{\text{mol}} \vec{n} d\omega_c - \int_{\Omega_c} \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger d\Omega_c + \int_{\Omega_c} \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger d\Omega_c.$$

Koristeći *Gauss*-ovu teoremu prelaska sa površinskog na zapreminski integral, kao i definiciju bezdimenzionalne koncentracije zagađujuće materije u rastvorenom obliku, pred-

metna jednačina održanja mase se može napisati i kao

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_c} \rho C^\dagger d\Omega_c &= - \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\vec{s}_{\text{mol}}) d\Omega_c - \int_{\Omega_c} \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger d\Omega_c + \\ &+ \int_{\Omega_c} \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger d\Omega_c. \end{aligned}$$

Na poslednji izraz se primenjuje *Reynolds*-ova transportna teorema data sa (3.12), pa se dobija još jedan vektorski oblik razmatrane jednačine.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c(t)} \frac{\partial (\rho C^\dagger)}{\partial t} d\Omega_c + \int_{\Omega_c(t)} \nabla \cdot (\rho C^\dagger \vec{V}) d\Omega_c &= - \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\vec{s}_{\text{mol}}) d\Omega_c - \\ - \int_{\Omega_c} \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger d\Omega_c + \int_{\Omega_c} \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger d\Omega_c \end{aligned}$$

Pošto su svi integrali u gore napisanoj jednačini po kontrolnoj zapremini Ω_c , onda ona važi i za podintegralne funkcije, tj. za elementarnu kontrolnu zapreminu $d\Omega_c$, pa je

$$\frac{\partial (\rho C^\dagger)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho C^\dagger \vec{V}) = -\nabla \cdot (\vec{s}_{\text{mol}}) - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger + \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger. \quad (3.13)$$

Jednačina održanja mase rastvorenog zagađivača (3.13) važi za *trenutne* vrednosti promenljivih koji se u njoj javljaju.

3.4.2. Zagađujuća materija vezana za zrna suspendovanog nanosa

Po definiciji je zagađujuća materija, koja čini predmet ovog poglavlja, vezana (adsorbovana) za zrna suspendovanog nanosa adhezionim silama. U saglasnosti sa do sadašnjim formulacijama jednačina i ovde se koriste *bezdimenzionalne koncentracije*. Navodi se *Reynolds*-ova transportna teorema u vektorskom obliku, napisana za *nepokretnu* i *nedeformabilnu* kontrolnu zapreminu Ω_c , okruženu graničnom površinom ω_c .

$$\begin{aligned} \frac{D(M_{SC})_{k_s}}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_c} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger d\Omega_c = \\ &= \int_{\Omega_c(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger) d\Omega_c + \int_{\Omega_c(t)} \nabla \cdot (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger \vec{V}) d\Omega_c \end{aligned} \quad (3.14)$$

U poslednjoj jednačini se javlja i koncentracija suspendovanog nanosa, jer se masa adsorbovanog zagađivača dovodi u vezu sa masom suspendovanog nanosa, kao što je to objašnjeno u prethodnom poglavlju. Ovo ne predstavlja problem pri rešavanju jednačina jer, kao što je to ranije rečeno, prisustvo zagađivača ne utiče na strujanje vode, odnosno ponašanje nanosa, pa su sve nanosne veličine unapred poznate. Takođe je korisno napomenuti da je razmatrani zagađivač vezan za zrna suspendovanog nanosa adhezionim silama, pa na njega neposredno *ne* utiču fluktuacije koje se javljaju pri turbulentnom tečenju. Međutim, na posmatranu masu nanosa utiču svi mehanizmi koji se javljaju pri

transportu suspendovanog nanosa kao što su difuzija, fluktuacije i gravitaciono ubrzanje. Naravno, razmena mase između rastvorene i adsorbovane zagađujuće materije se javlja i ovde samo sa suprotnim predznacima u odnosu na poglavlje 3.4.1. i to za pojedinačne frakcije nanosne mešavine. Dakle, jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s je data sa

$$\begin{aligned} \frac{D(M_{SC})_{k_s}}{Dt} = & - \int_{\omega_c} (\vec{v}_{\text{grav}})_{k_s} \vec{n} d\omega_c + \\ & + \int_{\Omega_c} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger d\Omega_c - \int_{\Omega_c} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\ddagger d\Omega_c. \end{aligned}$$

Koristeći *Gauss*-ovu teoremu prelaska sa površinskog na zapreminski integral, kao i definiciju bezdimenzionalne koncentracije zagađujuće materije adsorbovane na zrna frakcije k_s suspendovanog nanosa, predmetna jednačina održanja mase se daje u obliku

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_c} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\ddagger d\Omega_c = & - \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\vec{v}_{\text{grav}})_{k_s} d\Omega_c + \\ & + \int_{\Omega_c} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger d\Omega_c - \int_{\Omega_c} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\ddagger d\Omega_c. \end{aligned}$$

Na poslednju jednačinu se primenjuje *Reynolds*-ova transportna teorema data izrazom (3.14), pa se dobija još jedan vektorski oblik razmatrane jednačine održanja mase.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\ddagger) d\Omega_c + \int_{\Omega_c(t)} \nabla \cdot (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\ddagger \vec{V}) d\Omega_c = & - \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\vec{v}_{\text{grav}})_{k_s} d\Omega_c + \\ + \int_{\Omega_c} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger d\Omega_c - \int_{\Omega_c} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\ddagger d\Omega_c \end{aligned}$$

Polazeći od činjenice da su svi integrali u gore navedenoj jednačini po kontrolnoj zapremini Ω_c , zaključuje se da jednačina važi i za podintegralne funkcije, tj. za elementarnu kontrolnu zapreminu $d\Omega_c$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\ddagger) + \nabla \cdot (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\ddagger \vec{V}) = & - \nabla \cdot (\vec{v}_{\text{grav}})_{k_s} + \\ & + (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger - (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\ddagger \end{aligned} \quad (3.15)$$

Navedena jednačina održanja mase važi za *trenutne* vrednosti promenljivih. Takođe treba naglasiti da jednačina (3.15) ima onoliko koliko i *aktivnih* frakcija mešavine nanosa.

3.4.3. Zagađujuća materija vezana za zrna nanosa na dnu i pri dnu

Tokom raznih faza neustaljenog tečenja aktivne frakcije nanosa, koje učestvuju u interakciji sa zagađujućom materijom, mogu da se nađu na dnu rečnog korita. Na ovaj način tokom morfoloških promena nepoželjna materija može dospeti i u dublje slojeve nanosnog materijala. Zastupljenost zagađujuće materije, adsorbovane na zrna nanosa frakcije k_s na dnu i pri dnu, definisana je odnosom mase zagađivača i mase odgovarajućih zrna nanosa po jednačini

$$\beta_{k_s}^\ddagger = \frac{(M_{BC})_{k_s}}{(M_{BS})_{k_s}}.$$

Gore navedena definicija zastupljenosti nepoželjne materije je posledica uslovljenosti njenog prisustva sa prisustvom odgovarajućih zrna nanosa. Ovakav način formulisanja problema je u saglasnosti sa definicijom bezdimenzionalne koncentracije zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa.

Ranije je rečeno da aktivne frakcije nanosa mogu dospeti na rečno dno. Takođe se, pri određenim hidrauličkim uslovima, mora uzeti u obzir mogućnost kretanja tog nanosa u vidu vučenog nanosa, što ukazuje na postojanje mehanizma transporta zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa. Navedeni zaključak ima za posledicu da se svi kriterijumi za odabir kontrolne zapremine iz poglavlja 3.3.2. moraju primeniti i pri formulisanju jednačine održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa na dnu i pri dnu. Dakle, kontrolna zapremina koja se koristi u ovom poglavlju je identična kontrolnoj zapremini korišćenoj pri izvođenju jednačine održanja mase nanosa u aktivnom sloju i podrazumeva da sve tamo navedene pretpostavke o njenim dimenzijama, homogenosti i trenutnoj jednolikoj raspodeli svih promena u njoj važe i ovde. Masa zagađivača adsorbovana na frakciju k_s nanosa koji se nalazi u ovako definisanoj kontrolnoj zapremini je

$$(M_{BC})_{k_s} = \rho_s (1 - p_s) \beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger \Omega_c = \rho_s (1 - p_s) \beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \Delta x_{bs}^i \Delta x_{bs}^j.$$

U nastavku se navodi jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s na dnu i pri dnu. Pri formulisanju ovog izraza se *ne* uzima u obzir razmena sa zagađivačem, koji je adsorbovan na čestice suspendovanog nanosa, usled tonjenja zrna i/ili njihovog uvlačenja u suspenziju sa dna, kao ni razmena mase sa dubljim slojevima. Takođe se izostavlja direktna adsorbicija i/ili desorbicija sa zrna nanosa koja su predmet ovog poglavlja. Dakle, u ovoj fazi razmatranja jedini mehanizam razmene je transport zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa. Smatra se da su gustina nanosa i poroznost mešavine nanosa konstante pa se navodi jednačina

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_s (1 - p_s) \beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \Delta x_{bs}^i \Delta x_{bs}^i \right] &= \left((\Upsilon_{us}^i)_{k_s} - (\Upsilon_{ds}^i)_{k_s} \right) + \left((\Upsilon_{us}^j)_{k_s} - (\Upsilon_{ds}^j)_{k_s} \right), \\ \rho_s (1 - p_s) \frac{\partial \left(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \right)}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta x_{bs}^i} \left(\frac{(\Upsilon_{us}^i)_{k_s} - (\Upsilon_{ds}^i)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^j} \right) + \frac{1}{\Delta x_{bs}^j} \left(\frac{(\Upsilon_{us}^j)_{k_s} - (\Upsilon_{ds}^j)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^i} \right), \\ \rho_s (1 - p_s) \frac{\partial \left(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \right)}{\partial t} &= \frac{(\varepsilon_{us}^i)_{k_s} - (\varepsilon_{ds}^i)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^i} + \frac{(\varepsilon_{us}^j)_{k_s} - (\varepsilon_{ds}^j)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^j}, \\ \rho_s (1 - p_s) \frac{\partial \left(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \right)}{\partial t} &= -\frac{(\varepsilon_{ds}^i)_{k_s} - (\varepsilon_{us}^i)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^i} - \frac{(\varepsilon_{ds}^j)_{k_s} - (\varepsilon_{us}^j)_{k_s}}{\Delta x_{bs}^j}, \end{aligned}$$

pri čemu se poslednje piše u vektorskom obliku kao

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial \left(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \right)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{\epsilon}_{k_s}). \quad (3.16)$$

Kao što je to nagovešteno ranije, prisustvo zagađivača ne utiče na strujanje vode, odnosno ponašanje nanosa, pa su sve nanosne veličine unapred poznate.

U izlaganju o ponašanju nanosa je konstatovano da usled turbulentnih „događaja” pri dnu, zrna nanosa sa dna bivaju uvučena u suspenziju. Sa druge strane, delovanjem gravitacionog ubrzanja, zrna se kreću ka rečnom dnu i napuštaju suspenziju. Opisana dva mehanizma podrazumevaju i razmenu zagađujuće materije, adsorbovane na površinu

zrna aktivnih frakcija nanosa, koja učestvuju u razmeni između suspenzije i nanosa na dnu. Predmetna pojava je obuhvaćena članom izvora adsorbovane zagađujuće materije sa rečnog dna, pri čemu ovaj termin treba shvatiti u kontekstu odgovarajućeg nanosnog mehanizma, uz konstataciju da je njegovo postojanje neposredna posledica uticaja ponašanja nanosa na ponašanje zagađujuće materije. U ranijem izlaganju je takođe jasno rečeno da je aktivni sloj definisan kao homogeni sloj nanosa na dnu, koji je pod neposrednim uticajem toka. Ovakvo shvatanje sloja nanosa na neposrednoj površini dna, opravdava postojanje mehanizma razmene mase između zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa u aktivnom sloju i rastvorenog zagađivača u toku. Pošto struja „prodire” u razmatrani sloj nanosa, materija koja se desorbuje sa zrna na dnu biva uvučena u rečni tok, i obrnuto, rastvorena materija iz rečnog toka se doprema u aktivni sloj i postaje dostupna procesu adsorpcije na zrna nanosa koja se tu nalaze. Međusobna razmena mase koja proizilazi iz ovakvog koncepta modelisanja je obuhvaćena odgovarajućim članom izvora rastvorene zagađujuće materije sa rečnog dna. Razmena sa dubljim slojevima je detaljno opisana ranije u poglavlju 3.3.2. i mora se uzeti u obzir i ovde. Navodi se odgovarajuća jednačina održanja mase

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \right) = -\nabla \cdot (\vec{\epsilon}_{k_s}) - S_{k_s}^\dagger - S_{k_s}^\ddagger + (S_f^\ddagger)_{k_s}, \quad (3.17)$$

kojih ima onoliko koliko i *aktivnih* frakcija mešavine nanosa. Podseća se da je kretanje vučenog nanosa pod dominantnim uticajem gravitacionog ubrzanja i ono se odvija u vidu saltacionog kretanja, klizanja i kotrljanja na rečnom dnu, kao što je to opisano u poglavlju 3.3.2. Dakle, može se još jednom naglasiti da je kretanje vučenog nanosa po svojoj prirodi *diskontinualno*. Pošto je moguće da vučeni nanos na sebi transportuje adsorbovanu zagađujuću materiju, izvodi koji proizilaze iz divergencije vektora u (3.17) se moraju shvatiti kao neophodnost pri transformaciji koordinatnog sistema u krivolinijski u poglavlju 3.8. Strogo uzevši, jednačina se ne bi mogla napisati u diferencijalnom obliku, međutim, u cilju prevazilaženja ove „nedoslednosti”, navodi se jednačina održanja mase zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \right) = -\frac{\partial \epsilon_{k_s}^n}{\partial x^n} - S_{k_s}^\dagger - S_{k_s}^\ddagger + (S_f^\ddagger)_{k_s}. \quad (3.18)$$

Prisustvo zagađujuće materije u nanosnom materijalu ispod aktivnog sloja može biti posledica zatečenog stanja ili se može javiti tokom razmatranog perioda usled morfoloških promena korita. U svakom slučaju, neophodno je pratiti prisustvo nepoželjne materije i u dubljim slojevima, jer se može javiti njihovo „aktiviranje” usled zadiranja aktivnog sloja u njih. Poglavlje 3.3.2. sardži opis usvojenog koncepta modelisanja nanosnog materijala u vidu niza stratuma, koji se preuzima i ovde. Dakle, prisustvo zagađujuće materije ispod aktivnog sloja se vezuje za pojedine stratume nanosa. Pošto je uticaj toka u aktivnom stratumu (i svim dubljim stratimuma) zanemarljiv, iako je prostor između pojedinih zrna ispunjen vodom, ovde procesi adsorpcije i desorpcije zagađivača stoje u međusobnoj ravnoteži. Poslednje napisano znači da postoji mehanizam razmene samo između aktivnog sloja i aktivnog stratuma, u vidu člana razmene mase zagađivača adsorbovanog na zrna aktivnih frakcija nanosa. Jednačina održanja mase zagađivača adsorbovanog na zrna aktivnih frakcija k_s nanosa u aktivnom stratumu je

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial}{\partial t} \left((\beta_{k_s})_{L_s} (\beta_{k_s}^\dagger)_{L_s} (E_s)_{L_s} \right) = -(S_f^\ddagger)_{k_s},$$

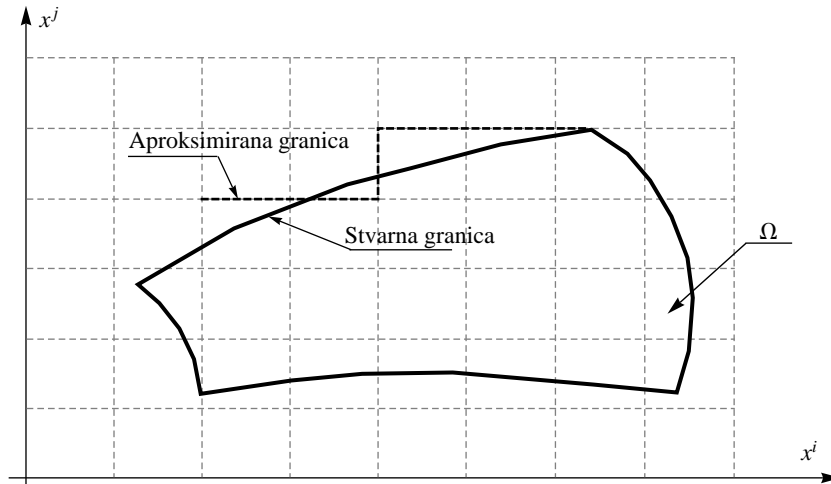
dok su jednačine održanja mase zagađivača za ostale stratume date jednačinama

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial}{\partial t} \left((\beta_{k_s})_{\ell_s} (\beta_{k_s}^\dagger)_{\ell_s} (E_s)_{\ell_s} \right) = 0, \quad \ell_s = 1, 2, \dots, L_s - 1.$$

3.5. Krivolinijski koordinatni sistem

Izlaganje u ovom poglavlju se zasniva na brojnim knjigama koje se mogu naći u stručnoj literaturi (Aris, 1962; Borisenko i Tarapov, 1979; Simmonds, 1994). Uglavnom teorijska izlaganja u navednim knjigama su uspešno primenjena na jednačine strujanja (Richmond et al., 1986) i jednačine kretanja nanosa i deformacije korita (Spasojevic i Holly, 1990).

Uočava se domen Ω na slici 5, čija se granica obeležava sa $\partial\Omega$. U okviru ovog (fizičkog) domena se razmatra problem definisan na Ω koji zahteva početni uslov na $\Omega + \partial\Omega$ i granični uslov po svim granicama $\partial\Omega$. Jednačine koje opisuju problem su poznate u vektorskoj formi. Nezavisne promenljive (npr. vektor položaja \vec{r}), kao i zavisno promenljive (npr. brzina \vec{V}) su razložene na tri komponente duž konstantnih jediničnih vektora u kartezijanskom koordinatnom sistemu. Dakle, jednačine su poznate za sva tri kartezijanska pravca. Iz navedenog sledi da se kartezijanski koordinatni sistem može koristiti za opisivanje proizvoljnog fizičkog domena Ω (slika 5). U ovom slučaju je svaka tačka definisana vektorom položaja \vec{r} , tj. njegovim kartezijanskim komponentama (x^i, x^j, x^k) .



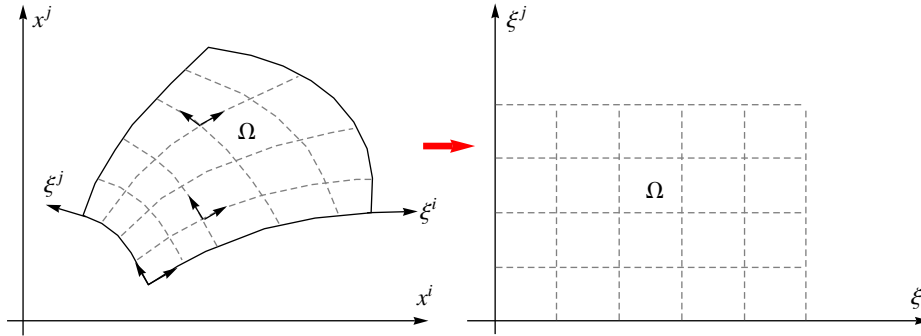
Slika 5: Fizički domen razmatranog problema

Prednost ovog pristupa je da su svi vektori, uključujući i \vec{r} , razloženi na isti način duž konstantnih baznih vektora, kao i da su u svakoj tački vektori razloženi duž pravaca x^i , x^j i x^k . Sa druge strane, mana ovakvog načina opisivanja problema je znatna teškoća u definisanju granice računskog prostora i samih graničnih uslova. Zbog ovoga se definiše novi koordinatni sistem (ξ^i, ξ^j, ξ^k) koji bolje opisuje (fizički) domen Ω (slika 6).

Svaka tačka u Ω , koja je predstavljena pomoću vektora položaja sa tri kartezijanske koordinate (x^i, x^j, x^k) je sad predstavljena sa tri koordinate novog sistema (ξ^i, ξ^j, ξ^k) . Domen na slici³ 6 sa krivim granicama u fizičkoj ravni (x^i, x^j) postaje pravougaonik u računskoj ravni (ξ^i, ξ^j) . Važno je napomenuti da domen Ω u fizičkoj ravni ima svoj oblik i u tom slučaju, skicirana mreža (ξ^i, ξ^j) predstavlja stvarna rastojanja. Međutim, u računskoj ravni predmetni domen je deformisan u pravougaonik pa njegove dimenzije (kao i elementarni priraštaji $d\xi^i$ i $d\xi^j$) nisu stvarne fizičke dimenzije. Ponavlja se da vektor položaja \vec{r} predstavlja poziciju proizvoljne tačke unutar domena Ω . U prostoru (x^i, x^j, x^k) je taj vektor razložen na komponente duž konstantnih jediničnih vektora u kartezijanskom sistemu. Sa druge strane, u prostoru (ξ^i, ξ^j, ξ^k) on se razlaže duž baznih

³Na slici je prikazan ravanski slučaj radi lakše ilustracije problema.

vektora u proizvoljno zakrivljenom sistemu. Dakle, u krivolinijskim koordinatama bazni vektori nisu *ni konstantni, ni jedinični* kao što je to skicirano na slici 6.

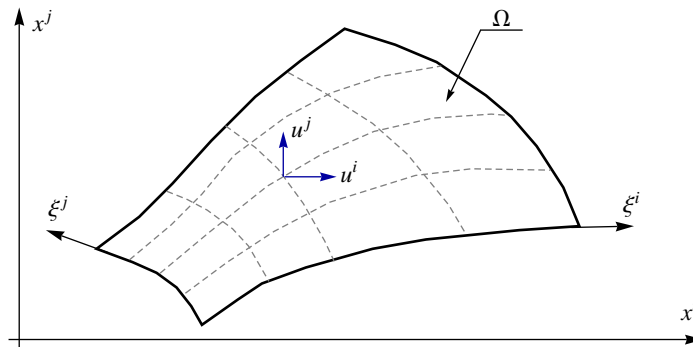


Slika 6: Transformacija domena Ω

Prednost novog koordinatnog sistema je lakoća definisanja granica i graničnih uslova. Međutim, ovaj pristup zahteva transformaciju jednačina razmatranog problema.

3.5.1. Delimična transformacija jednačina

Definiše se novi opšti krivolinijski koordinatni sistem (ξ^i, ξ^j, ξ^k) koji odgovara domenu Ω (slika⁴ 7).



Slika 7: Delimična transformacija jednačina

Delimična transformacija jednačina podrazumeva sledeće:

- Vršiti se transformacija komponenti nezavisnih promenljivih, tj. komponenti položajnog vektora \vec{r} , što je već izvršeno transformacijom prostora (x^i, x^j, x^k) u (ξ^i, ξ^j, ξ^k) . Ovo znači da je svaka tačka domena Ω koja je bila predstavljena (x^i, x^j, x^k) koordinatama vektora \vec{r} , sada je predstavljena (ξ^i, ξ^j, ξ^k) koordinatama tog istog vektora. Takođe su definisane funkcije prelaza

$$x^i = x^i(\xi^i, \xi^j, \xi^k), \quad x^j = x^j(\xi^i, \xi^j, \xi^k), \quad x^k = x^k(\xi^i, \xi^j, \xi^k). \quad (3.19)$$

- Komponente zavisnih promenljivih, npr. u^i, u^j i u^k komponente brzine \vec{V} , ostaju nepromenjene, tj. vektor \vec{V} ostaje razložen duž baznih vektora originalnog (kartezijanskog) sistema.

⁴Na slici je prikazan ravanski slučaj radi lakše ilustracije problema.

- Dakle, dovoljno je definisati vezu između komponenti zavisnih vektora u kartezijanskim koordinatama (npr. u^i , u^j i u^k komponente brzine \vec{V}) i komponenti nezavisnih vektora u novom koordinatnom sistemu (ξ^i , ξ^j i ξ^k komponente vektora položaja \vec{r}).

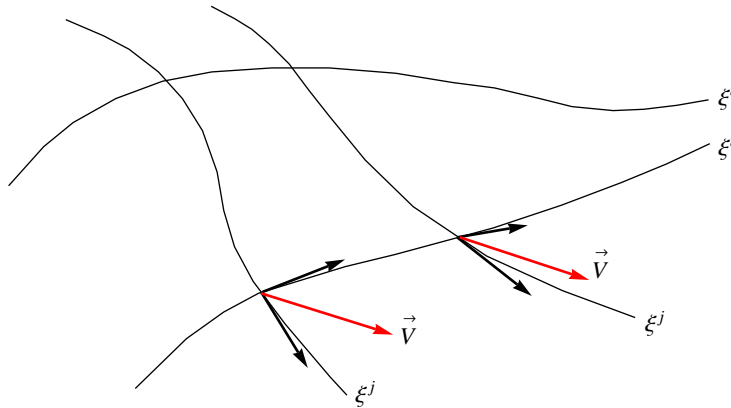
Za navedene transformacije se koristi pravilo parcijalnog diferenciranja, npr. za izvod po koordinatnom pravcu x^i bi to bilo

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i}.$$

Delimično transformisane jednačine važe u novom (ξ^i, ξ^j, ξ^k) sistemu, gde je pozicija svih tačaka definisana ξ^i , ξ^j i ξ^k komponentama vektora položaja \vec{r} . Međutim, u^i , u^j i u^k ostaju kartezijanske komponente brzine \vec{V} . Prednost ovog pristupa je jednostavnost transformisanih jednačina. Međutim, nedostatak je to što komponente brzine \vec{V} ostaju u kartezijanskim koordinatama. Ako su potrebne brzine u pravcu novih koordinatnih osa, one se određuju koristeći pravila parcijalnog diferenciranja.

3.5.2. Potpuna transformacija jednačina

Podseća se da je izvršena transformacija domena u proizvoljni krivolinijski koordinatni sistem (ξ^i, ξ^j, ξ^k) . Dakle, poznate su funkcije transformacije (3.19). U novom koordinatnom sistemu (ξ^i, ξ^j, ξ^k) je vektor položaja \vec{r} razložen duž baznih vektora tangencijalnih u odnosu na (ξ^i, ξ^j, ξ^k) (dakle bazni vektori nisu ni konstantni ni jedinični). Pozicija svake tačke je definisana komponentama vektora \vec{r} u novom sistemu (ξ^i, ξ^j, ξ^k) .



Slika 8: Komponente vektora \vec{V} u krivolinijskom koordinatnom sistemu

Potpuna transformacija jednačina znači da su *svi* nezavisno promenljivi vektori (tj. vektor položaja \vec{r}), kao i *svi* zavisno promenljivi vektori (npr. vektor brzine \vec{V}) razloženi duž tri nekomplanarna bazna vektora, tangencijalna u odnosu na proizvoljno zakrivljene koordinatne linije (ξ^i, ξ^j, ξ^k) (slika⁵ 8). Bazni vektori nisu konstantni, tj. variraju u prostoru (od tačke do tačke) i ne moraju biti jedinične dužine. Da bi se komponente vektora u starom sistemu dovele u vezu sa njihovim komponentama u novom sistemu, koriste se pravila parcijalnog diferenciranja. Uzevši u obzir zavisno promenljive vektore, kao što su \vec{V} , \vec{F} itd; kao i nezavisno promenljive vektore, kao što je \vec{r} , tj. $d\vec{r}$, može se zaključiti da se oni dele u dve grupe na osnovu toga kako se njihove komponente pretvaraju iz jednog

⁵Na slici je prikazan ravanski slučaj radi lakše ilustracije problema.

sistema u odgovarajuće komponente drugog sistema (tj. kako se komponente novog sistema dobijaju iz odgovarajućih komponenti u kartezijanskom sistemu).

Pravila parcijalnog diferenciranja se koriste i pri definisanju baznih vektora. Postoje *kovarijantni* bazni vektori i njihove recipročne vrednosti, tzv. *kontravarijantni* bazni vektori. Dakle, proizvoljni vektor se može razložiti u kovarijantne komponente duž kontravarijantnih baznih vektora ili u kontravarijantne komponente duž kovarijantnih baznih vektora. Bazni vektori zavise od lokalne zakrivljenosti (ξ^i, ξ^j, ξ^k) linija. Zbog ovoga je potrebno definisati *metrični tenzor* koji opisuje ovu lokalnu zakrivljenost. Takođe je potrebno definisati i inverzni metrični tenzor. Oba tenzora omogućavaju povezivanje kovarijantnih i kontravarijantnih komponenti istog vektora (npr. ako se neki vektor po prirodi razlaže na kovarijantne komponente duž kontravarijantnih baznih vektora i ako želimo taj vektor razložiti duž kovarijantnih baznih vektora, tj. ako želimo njegove kontravarijantne komponente, onda se za ovu svrhu koristi odgovarajući metrični tenzor).

U lagranžijanskom pristupu se prati fluidni delić tokom vremena, pa je za njega dovoljno napisati odgovarajuće fizičke zakonitosti. Međutim, u slučaju ojerijanskog pristupa, kada se posmatra određena kontrolna zapremina i fluid koji kroz njega struji, potrebno je definisati i promene po prostoru da bi se korektno opisali posmatrani fizički procesi. Ako se vektor razloži na komponente duž baznih vektora u proizvoljnom koordinatnom sistemu, i ako se napišu jednačine za određeni koordinatni pravac, potrebno je uzeti u obzir i promenu komponenti vektora duž proizvoljno zakrivljenih koordinatnih linija. U kartezijanskim koordinatama je dovoljno koristiti obične parcijalne izvode da bi se opisale promene komponenti vektora duž koordinatnih linija. Ova promena ne zavisi od načina na koji su vektori razloženi, jer je to urađeno duž konstantnih jediničnih baznih vektora. Međutim, u proizvoljno zakrivljenom koordinatnom sistemu (ξ^i, ξ^j, ξ^k), gde se zakrivljenost, pa samim tim i bazni vektori menjaju duž koordinatnih linija, vektori se u različitim tačkama razlažu duž različitih baznih vektora. Usled ovoga, iako se sam vektor ne menja duž npr. ξ^i linije, njegove komponente se menjaju (slika 8). Zbog gore navedenih razloga je potrebno definisati *uopštene* parcijalne izvode, koji uzimaju u obzir navedene poteškoće.

Kada je poznat prelaz sa kartezijanskog sistema na proizvoljni krivolinijski koordinatni sistem, potrebno je napisati jednačine za svaki pravac u sistemu (ξ^i, ξ^j, ξ^k). Pri ovome se koriste isti principi kao i kod razlaganja vektorskih jednačina u kartezijanskom sistemu, uz napomenu da je u ovom slučaju potrebno uzeti u obzir i sledeće stavove:

- samo vektorske jednačine u ojerijanskoj formi mogu da se razlože u novi koordinatni sistem, jer se svi vektori moraju razložiti u istoj tački, tj. duž istih baznih vektora;
- svi vektori se moraju razložiti duž istog tipa baznih vektora (npr. duž kovarijantnih baznih vektora), tj. komponente svih vektora moraju biti istog tipa (ako nisu svi vektori unutar jedne jednačine istog tipa za konverziju se koristi *metrični tenzor*);
- da bi se opisali izvodi po prostoru (izvodi duž koordinatnih linija u tački u kojoj se razlaže vektorska jednačina) koriste se *uopštene (kovarijantni) parcijalni izvodi*, koji uzimaju u obzir zakrivljenost (ξ^i, ξ^j, ξ^k) linija u razmatranoj tački.

3.5.3. Pravila transformacije

Ranije je napomenuto da postoje kovarijantne i kontravarijantne komponente vektora, i one su definisane načinom njihove transformacije iz kartezijanskog u opšti krivoli-

nijski koordinatni sistem. Zbog ovoga se navode pravila parcijalnog diferenciranja

$$d\xi^m = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^n} dx^n, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \xi^m} = \frac{\partial s}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \xi^m}. \quad (3.21)$$

Ako se vektor \vec{A} transformiše po jednačini (3.20), onda se dobijaju njegove *kontravarijantne* komponente A^m (ovako se transformišu vektori kao što su koordinatne razlike, brzina, ubrzanje, sila, napon, fluks itd.). Sa druge strane, ako se vektor \vec{A} transformiše po jednačini (3.21), dobijaju se njegove *kovarijantne* komponente A_m (ovako se transformišu gradijent skalara, itd.).

3.5.4. Bazni vektori

Definišu se *kovarijantni* bazni vektori, koji su tangencijalni u odnosu na koordinatne linije (ξ^i, ξ^j, ξ^k) , kao što je to prikazano na slici 9a. Pomoću pravila diferenciranja se za elementarni priraštaj vektora položaja može napisati da je

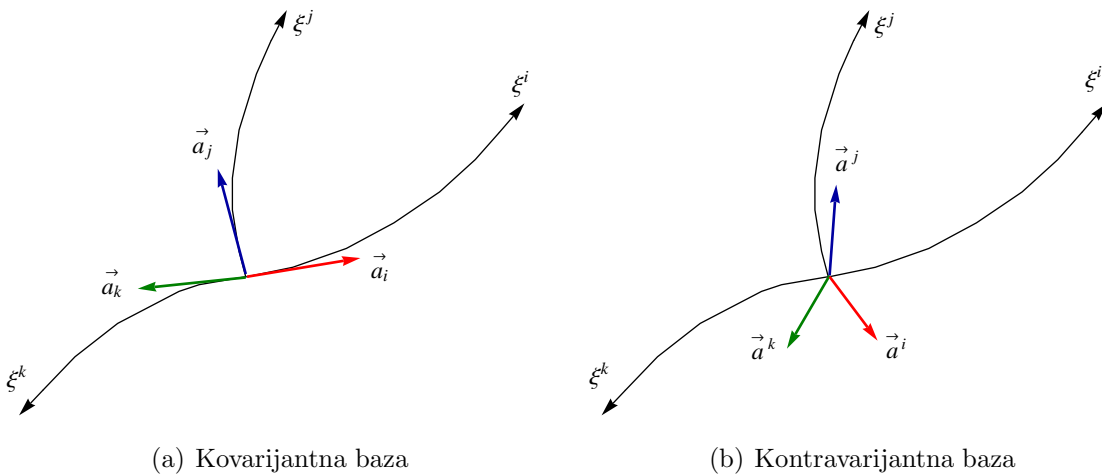
$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^n} d\xi^n.$$

Iz poslednje jednačine je moguće dati matematičku formulaciju *kovarijantnog baznog vektora* kao

$$\vec{a}_m = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi^m}, \quad (3.22)$$

nakon čega se elementarni priraštaj položajnog vektora može napisati pomoću ovako definisanih baznih vektora jednačinom

$$d\vec{r} = \vec{a}_n d\xi^n.$$



Slika 9: Bazni vektori u krivolinijskom koordinatnom sistemu

Dakle, razlaganje vektora na kontravarijantne komponente duž kovarijantne baze se vrši po jednačini

$$\vec{A} = A^n \vec{a}_n. \quad (3.23)$$

Mogu se definisati i *kontravarijantni bazni vektori* koji su inverzni u odnosu na kovarijantne bezne vektore. Ovi bazni vektori su upravni na koordinatne površine, kao što je to prikazano na slici 9b i definisani su izrazima

$$\vec{a}^i = \frac{\vec{a}_j \times \vec{a}_k}{\vec{a}_i \cdot (\vec{a}_j \times \vec{a}_k)}, \quad \vec{a}^j = \frac{\vec{a}_k \times \vec{a}_i}{\vec{a}_j \cdot (\vec{a}_j \times \vec{a}_k)}, \quad \vec{a}^k = \frac{\vec{a}_i \times \vec{a}_j}{\vec{a}_k \cdot (\vec{a}_j \times \vec{a}_k)}. \quad (3.24)$$

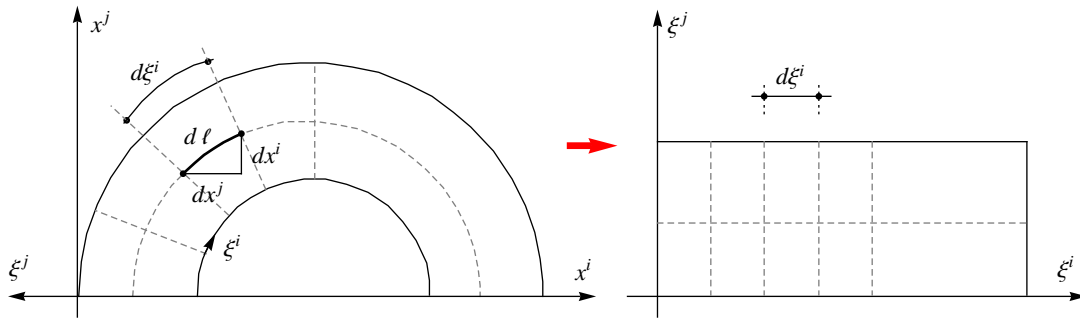
Analogno prethodnom slučaju, razlaganje vektora na kovarijantne komponente duž kontravarijantne baze se vrši po jednačini

$$\vec{A} = A_n \vec{a}^n. \quad (3.25)$$

3.5.5. Promena zakrivljenosti - metrični tenzor

Posmatra se elementarna dužina $d\ell$ na slici 10. Ona predstavlja invarijantu, tj. njena dužina mora biti ista u svakom koordinatnom sistemu. U ravanskom kartezijanskom sistemu se može napisati da je ova elementarna dužina na osnovu *Pitagorine* teoreme

$$(d\ell)^2 = (dx^i)^2 + (dx^j)^2 = \delta_{rs} dx^r dx^s. \quad (3.26)$$



Slika 10: Definisavanje metričnog tenzora

Primenjuju se koordinatne transformacije tipa (3.20), pa se može napisati da je

$$dx^r = \frac{\partial x^r}{\partial \xi^m} d\xi^m, \quad dx^s = \frac{\partial x^s}{\partial \xi^m} d\xi^m.$$

Kada se gore napisane zavisnosti uvrste u (3.26) dobija se sledeći izraz za elementarnu dužinu $d\ell$ u krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$(d\ell)^2 = \delta_{rs} \left(\frac{\partial x^r}{\partial \xi^m} d\xi^m \right) \left(\frac{\partial x^s}{\partial \xi^n} d\xi^n \right),$$

$$(d\ell)^2 = \delta_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial \xi^m} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^n} d\xi^m d\xi^n = g_{mn} d\xi^m d\xi^n.$$

Iz poslednje jednačine se vidi definicija elementa *metričnog tenzora*

$$g_{mn} = \delta_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial \xi^m} \frac{\partial x^s}{\partial \xi^n}. \quad (3.27)$$

Kada se poslednja jednačina uporedi sa (3.22) dolazi se do zaključka da je element metričnog tenzora g_{mn} zapravo skalarni proizvod kovarijantnih baznih vektora \vec{a}_m i \vec{a}_n .

Analogno ovome element *inverznog* metričnog tenzora g^{mn} je skalarni proizvod kontravarijantnih baznih vektora \vec{a}^m i \vec{a}^n .

Radi boljeg razumevanja će se dodatno objasniti fizičko značenje elemenata metričnog tenzora. Posmatrajući sliku 10, može se napisati da je u ravanskom slučaju

$$(d\ell)^2 = (dx^i)^2 + (dx^j)^2 = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^i} d\xi^i + \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} d\xi^j \right)^2 + \left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} d\xi^i + \frac{\partial x^j}{\partial \xi^j} d\xi^j \right)^2.$$

Za prikazani primer, u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu (kao na slici 10) je $d\xi^j = 0$, pa poslednja jednačina postaje

$$(d\ell)^2 = \left[\left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \right)^2 \right] d\xi^i d\xi^i = g_{ii} d\xi^i d\xi^i.$$

Iz gore navedenog izraza značenje elementa metričnog tenzora g_{ii} (u slučaju ortogonalnog krivolinijskog koordinatnog sistema) postaje jasnije

$$g_{ii} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \right)^2 = \frac{(\Delta x^i)^2 + (\Delta x^j)^2}{(\Delta \xi^i)^2} = \frac{(\text{stvarna dužina u } (x^i, x^j))^2}{(\text{koordinatno rastojanje u } (\xi^i, \xi^j))^2}.$$

Preostaje da se definišu prelazi sa kontravarijantnih komponenti vektora na kovarijantne i obrnuto. Ako se proizvoljna vektorska veličina \vec{A} skalarno pomnoži sa baznim vektorom \vec{a}^m , dobija se kontravarijantna komponenta vektora A^m . Uz ovo se koristi mogućnost pisanja vektora \vec{A} pomoću kovarijantnih komponenti na kontravarijantnim baznim vektorima, pa se konačno dobija zavisnost

$$A^m = A_n g^{nm}. \quad (3.28)$$

Poslednja jednačina definiše prelaz sa kovarijantnih komponenti vektora na kontravarijantne koristeći elemente inverznog metričnog tenzora. Analogno prethodnom razmatranju se može dobiti i pravilo prelaza sa kontravarijantnih komponenti vektora na kovarijantne pomoću elemenata metričnog tenzora na osnovu jednačine

$$A_m = A^n g_{nm}. \quad (3.29)$$

Na kraju se napominje da su u kartezijskom koordinatnom sistemu, gde su jedinični vektori konstantni, međusobno upravni i jedinične dužine, kovarijantne i kontravarijantne komponente bilo kojeg vektora *identične*.

3.5.6. Uopšteni (kovarijantni) parcijalni izvod

Glavni problem pri definisanju parcijalnog izvoda u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu je posledica činjenice da jedinični vektori nisu konstantni, tj. variraju po prostoru. U slučaju kartezijskog koordinatnog sistema (gde su jedinični vektori konstante, tj. $\vec{e}_m = \text{const.}$) se za izvod proizvoljne vektorske veličine po koordinatnom pravcu x^i može napisati da je

$$\vec{A} = A^m \vec{e}_m / \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^i} = \frac{\partial A^m}{\partial x^i} \vec{e}_m.$$

Međutim, u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu određivanje izvoda proizvoljne vektorske veličine po koordinatnom pravcu ξ^i nije trivijalan zadatak, što se vidi iz jednačine

$$\vec{A} = A^m \vec{a}_m / \frac{\partial}{\partial \xi^i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial A^m}{\partial \xi^i} \vec{a}_m + A^m \frac{\partial \vec{a}_m}{\partial \xi^i}.$$

Zbog ovoga se uvodi pojam *uopštenog (kovarijantnog) izvoda* za kontravarijantne komponente vektora

$$A_{,n}^m = \frac{\partial A^m}{\partial \xi^n} + \Gamma_{sn}^m A^s, \quad (3.30)$$

kao i za kovarijantne komponente vektora

$$A_{m,n} = \frac{\partial A_m}{\partial \xi^n} - \Gamma_{mn}^s A_s. \quad (3.31)$$

U jednačinama (3.30) i (3.31) se javlja *Christoffel-ov simbol*, koji u sebi sadrži elemente metričnog tenzora i njegove izvode, kao i elemente inverznog metričnog tenzora.

$$\Gamma_{mn}^l = \frac{1}{2} g^{ls} \left(\frac{\partial g_{sm}}{\partial \xi^n} + \frac{\partial g_{ns}}{\partial \xi^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial \xi^s} \right) \quad (3.32)$$

Može se primetiti da je

$$\Gamma_{mn}^l = \Gamma_{nm}^l,$$

što se jasno vidi iz jednačina (3.32) i (3.27). *Christoffel-ov simbol* se u specijalnom slučaju može napisati pomoću determinante matrice metričnog tenzora. Ako se jednačina (3.29) posmatra kao sistem linearnih jednačina, pri čemu su A^i , A^j i A^k nepoznate veličine, onda je rešenje takvog sistema

$$A^n = \frac{G^{mn} A_m}{G},$$

iz čega se, na osnovu jednačine (3.28), vidi da je $g^{mn} = G^{mn} G^{-1}$. Preuređivanjem ovako dobijenog izraza za g^{mn} se, uz korišćenje jednačine (3.32), može pokazati da je

$$\Gamma_{ps}^p = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G})}{\partial \xi^s}. \quad (3.33)$$

Na kraju je bitno važno još pomenuti da se elementi metričnog tenzora, odnosno inverznog metričnog tenzora u odnosu na uopšteni izvod ponašaju kao konstante.

$$g_{mn,p} = g_p^{mn} = 0$$

3.5.7. Fizičke komponente vektora i tenzora

U (ξ^i, ξ^j, ξ^k) prostoru koordinatna razlika $d\xi^m$ ne predstavlja stvarnu dužinu, pa komponente vektora $V^m = d\xi^m/dt$ nemaju jasno fizičko značenje. Takođe u (ξ^i, ξ^j, ξ^k) prostoru se vektori razlažu duž baznih vektora koji zavise od lokalne zakrivljenosti, usled čega i komponente vektora zavise od te iste lokalne zakrivljenosti. Da bi se dobila stvarna (fizička) veličina komponente vektora u m -tom pravcu, vektor \vec{A} je potrebno pomnožiti sa jediničnim vektorom \vec{e}_m .

$$A(m) = \vec{V} \cdot \vec{e}_m$$

Uz korišćenje jednačine (3.23) poslednji izraz se dalje modifikuje u

$$A(m) = A^m \vec{a}_m \cdot \vec{e}_m.$$

Koristeći definiciju jediničnog vektora, skalarnog proizvoda i elemenata metričnog tenzora, može se napisati da je

$$\begin{aligned} \vec{e}_m &= \frac{\vec{a}_m}{|\vec{a}_m|} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_m = \vec{e}_m |\vec{a}_m|, \\ |\vec{a}_m| &= \sqrt{\vec{a}_m \cdot \vec{a}_m} = \sqrt{g_{mm}}, \end{aligned}$$

pa se kombinacijom do sada napisanog dobija izraz za fizičku komponentu proizvoljne vektorske veličine, koristeći njene kontravarijantne komponente.

$$A(m) = \sqrt{g_{mm}} A^m \quad (3.34)$$

Pri korišćenju kovarijantnih komponenti vektora, potrebno je primeniti odgovarajuću konverziju pomoću elemenata metričnog tenzora, koja je data jednačinom (3.28). Analogno gore navedenom razmatranju, fizička komponenta parcijalnog izvoda po koordinatnom pravcu m je

$$\frac{\partial}{\partial \xi(m)} = \frac{1}{\sqrt{g_{mm}}} \frac{\partial}{\partial \xi^m}, \quad (3.35)$$

dok je fizička komponenta kontravarijantne komponente proizvoljne tenzorske veličine

$$\varpi(mn) = \sqrt{g_{mm}} \sqrt{g_{nn}} \varpi^{mn}. \quad (3.36)$$

Napominje se da u jednačinama (3.34) i (3.35) nema sumiranja po indeksu m , a u jednačini (3.36) nema sumiranja ni po indeksu m ni po indeksu n .

3.5.8. Ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem

U ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu za elemente metričnog tenzora važi da je

$$g^{mn} = g_{mn} = 0, \quad m \neq n. \quad (3.37)$$

Naveden stav dat izrazom (3.37) će se dodatno objasniti, radi boljeg razumevanja. Naime, u poglavlju 3.5.5. je rečeno da su elementi metričnog tenzora zapravo skalarni proizvodi baznih vektora. U ortogonalnom krivolinijskom sistemu su bazni vektori, po definiciji, međusobno upravni pa je njihov skalarni proizvod nula što je i rečeno sa (3.37). Dakle, jedini slučaj kada element metričnog tenzora nije nula je kada su mu indeksi isti (što odgovara skalarnom proizvodu baznog vektora sa samim sobom). Radi lakšeg pisanja se uvodi pojam *geometrijskih koeficijenata*, koji su definisani u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu kao

$$g_{mm} = h_m^2, \quad g^{mm} = \frac{1}{h_m^2}, \quad (3.38)$$

pri čemu je

$$h_m^2 = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \xi^m} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^m} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^k}{\partial \xi^m} \right)^2,$$

što se vidi iz jednačine (3.27). Preglednosti radi se navode i *Christoffel*-ovi simboli za ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, koji su dobijeni ispisivanjem jednačine (3.32) uz primenu stava (3.37).

$$\begin{aligned} \Gamma_{mm}^m &= \frac{1}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial \xi^m}, \\ \Gamma_{mn}^m &= \Gamma_{nm}^m = \frac{1}{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial \xi^n}, \quad m \neq n \\ \Gamma_{nn}^m &= -\frac{h_n}{h_m^2} \frac{\partial h_n}{\partial \xi^m}, \quad m \neq n \\ \Gamma_{mn}^l &= 0, \quad l \neq m \neq n \end{aligned}$$

Uz ovo se navodi da je determinanta matrice metričnog tenzora u slučaju ortogonalnog krivolinijskog koordinatnog sistema

$$G = (h_i h_j h_k)^2.$$

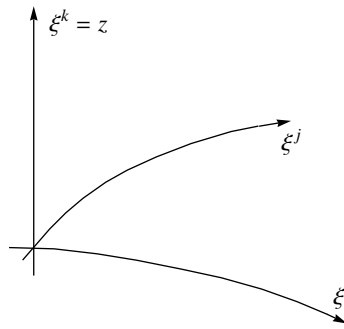
3.5.9. Usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem

Usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem (slika 11) je takav da se koordinatni pravci ξ^i i ξ^j nalaze u *horizontalnoj* ravni, a koordinatni pravac ξ^k se poklapa sa *vertikalnim* pravcem, tj. $\xi^k \equiv z$. Dakle, u ovako definisanom koordinatnom sistemu se za geometrijski koeficijent u pravcu k može napisati da je

$$h_k = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h_k}{\partial \xi^i} = \frac{\partial h_k}{\partial \xi^j} = 0,$$

dok geometrijski koeficijenti h_i i h_j , koji se sad nalaze u horizontalnoj ravni, po definiciji ne zavise od vertikalne koordinate pa se tvrdi da je

$$\frac{\partial h_i}{\partial \xi^k} = \frac{\partial h_j}{\partial \xi^k} = 0.$$



Slika 11: Usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem

U ovako usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu se koristi pojednostavljeno obeležavanje za koordinatne pravce, vektor brzine i geometrijske koeficijente

$$\begin{aligned} \xi^i &= \xi, & V(i) &= u, & h_i &= h_\xi, \\ \xi^j &= \eta, & V(j) &= v, & h_j &= h_\eta, \\ \xi^k &= z, & V(k) &= w, & h_k &= h_z = 1. \end{aligned}$$

Takođe se navodi obeležavanje fizičkih komponenti proizvoljnih vektorskih veličina (osim brzine, čije je obeležavanje definisano ranije)

$$A(i) = A_\xi, \quad A(j) = A_\eta, \quad A(k) = A_z,$$

odnosno proizvoljnih tenzorskih veličina

$$\begin{aligned} \varpi(ii) &= \varpi_{\xi\xi}, & \varpi(ij) &= \varpi_{\xi\eta}, & \varpi(ik) &= \varpi_{\xi z}, \\ \varpi(ji) &= \varpi_{\eta\xi}, & \varpi(jj) &= \varpi_{\eta\eta}, & \varpi(jk) &= \varpi_{\eta z}, \\ \varpi(ki) &= \varpi_{z\xi}, & \varpi(kj) &= \varpi_{z\eta}, & \varpi(kk) &= \varpi_{zz}, \end{aligned}$$

u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu. Napominje se da i skalarne veličine mogu dobiti indekse koordinatnih pravaca ako se razlikuju po njima, npr. u razmatranom sistemu bi to bilo s_ξ, s_η .

3.6. Jednačine strujanja vode u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu osrednjene po dubini toka

Najveći deo prirodnih aluvijalnih vodotokova spada u kategoriju „plitkih” tokova, koje karakteriše blago neustaljeno tečenje kod kojeg je vertikalna dimenzija daleko manja od horizontalne. Zbog ovoga je fizički opravdano jednačine strujanja vode „prevesti” iz prostornog u ravanski oblik. Zanimarivanjem vertikalnog ubrzanja u odnosu na gravitaciono ubrzanje, što je ekvivalentno pretpostavci o hidrostatičkom rasporedu pritisaka po dubini toka, prostorne jednačine strujanja je moguće svesti na, u pogledu matematičkog modelisanja, daleko pogodniji *ravanski* oblik.

Sledi ispisivanje jednačina strujanja u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu, koje se potom svode na usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem. Nakon toga se jednačine osrednjavaju po dubini toka u cilju formulisanja ravnanskih jednačina strujanja vode u prirodnim aluvijalnim vodotocima.

3.6.1. Jednačina kontinuiteta

Jednačina kontinuiteta je navedena ranije u vektorskom obliku (3.1), pa se na nju mogu primeniti transformacije operatora date u prilogu A. Ova jednačina u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho V^m)_{,m} = 0. \quad (3.39)$$

Sve veličine u poslednjoj jednačini važe za *trenutne vrednosti*, koje se sastoje od osrednjenog dela (koji se obeležava horizontalnom linijom iznad promenljive) i fluktuacije (koja se obeležava odgovarajućim malim slovom). Dakle, imajući ovo u vidu, jednačina kontinuiteta za nestišljiv fluid je

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + [\bar{\rho} (\bar{V}^m + v^m)]_{,m} = 0.$$

Osrednjavanjem poslednje jednačine po vremenu (osrednjavanje po *Reynolds-u*) se dobija jednačina kontinuiteta za glavni tok (jednostavnosti radi izostavljaju se oznake za osrednjene vrednosti)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho V^m)_{,m} = 0.$$

Primenom izraza kovarijantnog izvoda (3.30), jednačine za *Christoffel-ov* simbol, geometrijske koeficijente, izraza iz poglavlja 3.5.7. i 3.5.8. kao i elementarnih algebarskih operacija, za ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem se dobija jednačina kontinuiteta za nestišljiv fluid oblika

$$\frac{1}{h_i h_j h_k} \left[h_i h_j h_k \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} (h_k h_j \rho V(i)) + \frac{\partial}{\partial \xi^j} (h_i h_k \rho V(j)) + \frac{\partial}{\partial \xi^k} (h_i h_j \rho V(k)) \right] = 0. \quad (3.40)$$

Kada se na (3.40) primene jednačine i oznake iz poglavlja 3.5.9. dobija se jednačina kontinuiteta za nestišljiv fluid u usvojenom ortogonalnom koordinatnom sistemu

$$h_\xi h_\eta \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \rho u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (h_\xi h_\eta \rho w) = 0. \quad (3.41)$$

Nakon ovoga se jednačina kontinuiteta (3.41) osrednjava po dubini, član po član. Vrednost osrednjena po dubini toka proizvoljne veličine f se po definiciji dobija pomoću izraza

$$\tilde{f}(\xi, \eta, t) = \frac{1}{d} \int_{z_b}^{z_s} f(\xi, \eta, z, t) dz, \quad (3.42)$$

pri čemu će se koristiti i *Leibnitz*-ovo pravilo

$$\int_{z_b}^{z_s} \frac{\partial}{\partial t} f(\xi, \eta, z, t) dz = \frac{\partial(\tilde{f} d)}{\partial t} - \left[f(\xi, \eta, z, t) \frac{\partial z}{\partial t} \right]_{z_b}^{z_s}. \quad (3.43)$$

Tokom osrednjavanja pojedinih članova jednačine (3.41), usvaja se pretpostavka da je gustina fluida konstantna po dubini, što je neophodno pri formiranju ravanskog modela. Nakon elementarnih algebarskih operacija se dobija da je

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d} \left[h_\xi h_\eta \frac{\partial(\rho d)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \rho \tilde{u} d) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \rho \tilde{v} d) \right] + \\ & + \frac{\rho h_\xi h_\eta}{d} \left[w - \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]_{z_b}^{z_s} = 0, \end{aligned}$$

pri čemu je drugi član nula zbog kinematskog uslova koji važi na slobodnoj površini vode i na dnu korita. Na kraju se daje konačan oblik jednačine kontinuiteta osrednjene po dubini toka za nestišljiv fluid u usvojenom ortogonalnom koordinatnom sistemu

$$h_\xi h_\eta \frac{\partial(\rho d)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \rho \tilde{u} d) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \rho \tilde{v} d) = 0. \quad (3.44)$$

3.6.2. Dinamička jednačina

Dinamička jednačina je navedena ranije u vektorskom obliku (3.2), što omogućava primenu transformacija operatora iz priloga A. Ova jednačina u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\frac{\partial V^m}{\partial t} + V^n V_{,n}^m = F^m + \frac{1}{\rho} \sigma_{,n}^{mn}. \quad (3.45)$$

Od zapreminskih sila deluje *težina* kao posledica delovanja gravitacionog ubrzanja. Ona po definiciji deluje vertikano na dole i definisana je jednačinom

$$F^m = -g g^{mn} z_{,n}.$$

Deformisanje obavljaju naponi, pa se oni dele prema odgovarajućim deformacijama. U *sferni* deo naponskog stanja ulazi ono što teži da promeni *zapreminu*, a u *devijatorski* deo ono što menja *oblik* (Hajdin, 2002). Prethodno obrazloženje opravdava podelu koja se matematički formuliše pomoću jednačine

$$\sigma^{mn} = -g^{mn} p + \tau_{\text{vis}}^{mn}.$$

Nakon uvrštanja poslednja dva izraza u (3.45), elementarnim operacijama se dobija dinamička jednačina oblika

$$\rho \left(\frac{\partial V^m}{\partial t} + V^n V_{,n}^m \right) = -\rho g g^{mn} z_{,n} - g^{mn} p_{,n} + (\tau_{\text{vis}})_{,n}^{mn}.$$

Sve veličine u poslednjoj jednačini važe za *trenutne vrednosti*. Osrednjavanjem po vremenu (osrednjavanje po *Reynolds*-u) se dobija dinamička jednačina za glavni tok (jednostavnosti radi izostavljaju se oznake za osrednjene vrednosti) koja u sebi sadrži i uticaj fluktuacija na osrednjene veličine

$$\rho \left(\frac{\partial V^m}{\partial t} + V^n V_{,n}^m \right) = -\rho g g^{mn} \left[z + \frac{p}{\rho g} \right]_{,n} - \frac{p}{\rho} g^{mn} \rho_{,n} + (\tau_{\text{vis}})_{,n}^{mn} + (-\rho \overline{v^m v^n})_{,n}.$$

Dejstvo fluktuacija na glavno strujanje se može formalno prihvatiti kao dejstvo nekakvih zamišljenih „napona”, pa se uvodi pojam turbulentnog „napona” koji je definisan jednačinom

$$-\rho \overline{v^m v^n} = \tau^{mn}.$$

Pošto je opravdano zanemariti viskozni napon u odnosu na turbulentni, dinamička jednačina osrednjena po *Reynolds*-u za opšti krivolinijski koordinatni sistem je

$$\rho \left(\frac{\partial V^m}{\partial t} + V^n V_{,n}^m \right) = -\rho g g^{mn} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right)_{,n} - \frac{p}{\rho} g^{mn} \rho_{,n} + \tau_{,n}^{mn}. \quad (3.46)$$

Jednačina (3.46) se piše za koordinatni pravac ξ^i u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu. Pri ovome se koriste principi, jednačine i obeležavanja izneti u poglavlju 3.5.

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial V(i)}{\partial t} + \frac{V(i)}{h_i} \frac{\partial V(i)}{\partial \xi^i} + \frac{V(j)}{h_j} \frac{\partial V(i)}{\partial \xi^j} + \frac{V(k)}{h_k} \frac{\partial V(i)}{\partial \xi^k} + \right. \\ & + \left[\frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \xi^j} V(i) - \frac{1}{h_j h_i} \frac{\partial h_j}{\partial \xi^i} V(j) \right] V(j) + \\ & + \left. \left[\frac{1}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial \xi^k} V(i) - \frac{1}{h_k h_i} \frac{\partial h_k}{\partial \xi^i} V(k) \right] V(k) \right\} = \\ & = -\rho g \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) - \frac{p}{\rho} \frac{1}{h_i} \frac{\partial \rho}{\partial \xi^i} + \frac{1}{h_i} \frac{\partial \tau(ii)}{\partial \xi^i} + \frac{1}{h_j} \frac{\partial \tau(ij)}{\partial \xi^j} + \frac{1}{h_k} \frac{\partial \tau(ik)}{\partial \xi^k} + \\ & + \left(\frac{1}{h_j h_i} \frac{\partial h_j}{\partial \xi^i} + \frac{1}{h_k h_i} \frac{\partial h_k}{\partial \xi^i} \right) \tau(ii) - \frac{1}{h_j h_i} \frac{\partial h_j}{\partial \xi^i} \tau(jj) - \frac{1}{h_k h_i} \frac{\partial h_k}{\partial \xi^i} \tau(kk) + \\ & + \left(\frac{2}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial \xi^j} + \frac{1}{h_k h_j} \frac{\partial h_k}{\partial \xi^j} \right) \tau(ij) + \left(\frac{2}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial \xi^k} + \frac{1}{h_j h_k} \frac{\partial h_j}{\partial \xi^k} \right) \tau(ik) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Sledi ispisivanje dinamičke jednačine za sva tri koordinatna pravca u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu i njihovo osrednjavanje po dubini toka. U nastavku izvođenja se pretpostavlja da je gustina fluida konstantna duž koordinatnog pravca z , što je neophodno pri formiranju ravanskog modela. Slično jednačini (3.47), a uz činjenicu da indeksi i, j, k obeležavaju ciklični raspored, može se napisati dinamička jednačina za koordinatni pravac z

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\} = -\rho g \frac{\partial}{\partial z} \left(z + \frac{p}{\rho g} \right) - \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \\ & + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tau_{z\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tau_{z\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tau_{z\xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tau_{z\eta}, \end{aligned}$$

pri čemu su korišćene oznake i jednačine iz poglavlja 3.5.9. Takođe se uvodi pretpostavka o hidrostatičkom rasporedu pritisaka, tj. smatra se da su svi članovi poslednje jednačine

nula, osim prvog člana na desnoj strani. Konstatuje se da je ova pretpostavka opravdana za prirodne aluvijalne vodotokove, jer se oni smatraju za „plitke” vodotokove u kojima je strujanje blago promenljivo. Dakle, integraljenjem po dubini dinamičke jednačine za koordinatni pravac z se dobija da je

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const.} = z_s = z_b + d. \quad (3.48)$$

Na osnovu (3.47) se može napisati dinamička jednačina za koordinatni pravac ξ u obliku

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} u - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} v \right] v \right\} = \\ & = -\rho g \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d) - \frac{p}{\rho} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tau_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi z}}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tau_{\xi\xi} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tau_{\eta\eta} + \frac{2}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tau_{\xi\eta}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

pri čemu su korišćene jednačine i oznake iz poglavlja 3.5.9. kao i jednačina (3.48). Pomoću jednačine kontinuiteta (3.41) se može dobiti i alternativni oblik dinamičke jednačine za koordinatni pravac ξ .

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \rho u^2) + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \rho u v) + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial z} (h_\xi h_\eta \rho u w) + \\ & + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \rho u v - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \rho v^2 = \\ & = -\rho g \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d) - \frac{p}{\rho} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tau_{\xi\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{\xi z}}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tau_{\xi\xi} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tau_{\eta\eta} + \frac{2}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tau_{\xi\eta} \end{aligned}$$

Sledi osrednjavanje po dubini toka članova poslednje jednačine, pri čemu se koriste izrazi (3.42) i (3.43).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{u} d) + \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[h_\eta \rho \int_{z_b}^{z_s} u^2 dz \right] + \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[h_\xi \rho \int_{z_b}^{z_s} u v dz \right] + \\ & + \frac{\rho}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} u v dz - \frac{\rho}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} v^2 dz + \left[\frac{\rho u}{d} \left(w - \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \right]_{z_b}^{z_s} = \\ & = -\rho g \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d) - \frac{g d}{2} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \frac{1}{d h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{\tau}_{\xi\xi} d) + \frac{1}{d h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\tau}_{\xi\eta} d) + \\ & + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{\tau}_{\xi\xi} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{\tau}_{\eta\eta} + \frac{2}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{\tau}_{\xi\eta} + \frac{1}{d} \left(-\frac{\tau_{\xi\xi}}{h_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\tau_{\xi\eta}}{h_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \tau_{\xi z} \right)_{z_b}^{z_s} \end{aligned}$$

Integrali u poslednjoj jednačini, čije podintegralne funkcije sadrže brzine u i v se elementarnim operacijama mogu preurediti tako da se u njima jave i brzine osrednjene po dubini toka \tilde{u} i \tilde{v} . Takođe se koristi kinematski uslov, slično kao pri izvođenju jednačine kontinuiteta, što znači da je poslednji član sa leve strane jednak nuli. Poslednji član sa

desne strane se može preurediti tako da se dobije razlika napona na slobodnoj površini vode i dnu korita. Uzevši sve navedeno u obzir, dinamička jednačina u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu, osrednjena po dubini toka za koordinatni pravac ξ je

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 = \\
& = -\frac{g}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d) - \frac{g d}{2 \rho} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} + \\
& + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \tilde{\tau}_{\xi\xi} d) + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \tilde{\tau}_{\xi\eta} d) + \frac{(\tau_s)_\xi - (\tau_b)_\xi}{\rho d} + \\
& + \frac{1}{\rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{\tau}_{\xi\eta} - \frac{1}{\rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{\tau}_{\eta\eta} - \\
& - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (u - \tilde{u})^2 dz - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz - \\
& - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} \rho (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz + \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} \rho (v - \tilde{v})^2 dz.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Potpuno analogno izvođenju jednačine (3.50), dobija se dinamička jednačina u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu, osrednjena po dubini toka za koordinatni pravac η u obliku

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 = \\
& = -\frac{g}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (z_b + d) - \frac{g d}{2 \rho} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} + \\
& + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \tilde{\tau}_{\eta\xi} d) + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \tilde{\tau}_{\eta\eta} d) + \frac{(\tau_s)_\eta - (\tau_b)_\eta}{\rho d} + \\
& + \frac{1}{\rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{\tau}_{\eta\xi} - \frac{1}{\rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{\tau}_{\xi\xi} - \\
& - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (v - \tilde{v})^2 dz - \\
& - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} \rho (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz + \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} \rho (u - \tilde{u})^2 dz.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Turbulentni naponi su definisani ranije kao vremenski osrednjena vrednost fluktuacija komponentata brzine. Pošto su fluktuacije po definiciji stohastičnog karaktera potrebno je uvesti *model turbulencije*. U ovom radu se turbulentni naponi modelišu na osnovu koncepta turbulentne viskoznosti uvedene od strane *Boussinesq*-a, koja vezuje turbulentne napone za veličine osrednjene po *Reynolds*-u. U opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu je ova zakonitost definisana jednačinom

$$\tau^{mn} = \rho \nu_t (g^{pm} V_{,p}^n + g^{pn} V_{,p}^m) - \frac{2}{3} \rho g^{mn} k_f. \tag{3.52}$$

Kinetička energija fluktuacija iz (3.52) se priključuje članovima koji sadrže pritisak u ranije izvedenoj dinamičkoj jednačini (3.46) usled čega se „hidrostatički” pritisak menja

za pojam „hidrodinamičkog” pritiska koji u sebi sadrži i uticaj fluktuacija (tačnije kinetičke energije fluktuacija). Dakle, u jednačini (3.52) ostaje samo prvi član koji se u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu, gde važe jednačine (3.37) i (3.38), svodi na

$$\begin{aligned}\tau^{mm} &= \rho \nu_t \left(\frac{V_{,m}^m}{h_m^2} + \frac{V_{,m}^m}{h_m^2} \right) = 2 \rho \nu_t \frac{V_{,m}^m}{h_m^2}, \quad m = i, j, k, \\ \tau^{mn} &= \tau^{nm} = \rho \nu_t \left(\frac{V_{,m}^n}{h_m^2} + \frac{V_{,n}^m}{h_n^2} \right), \quad m \neq n.\end{aligned}$$

Kovarijantni izvodi u navedenim jednačinama se ispisuju za ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, uz korišćenje fizičkih komponenti vektora i napona, koje su redom date sa (3.34) i (3.36). Nakon toga se primenjuju jednačine i obeležavanja za usvojeni koordinatni sistem iz poglavlja 3.5.9. i vrši se osrednjavanje po dubini toka da bi se konačno dobile jednačine turbulentnih napona

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{\xi\xi} &= 2 \rho \tilde{\nu}_t \left[\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{v} \right], \\ \tilde{\tau}_{\eta\xi} &= \tilde{\tau}_{\xi\eta} = \rho \tilde{\nu}_t \left[\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v} \right], \\ \tilde{\tau}_{\eta\eta} &= 2 \rho \tilde{\nu}_t \left[\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \right].\end{aligned}\tag{3.53}$$

Naponi trenja na slobodnoj površini (usled kontakta voda-vazduh) se zanemaruju, a naponi trenja na dnu se računaju iz dobro poznatog kvadratnog zakona otpora datog izrazom

$$\tau_b = C_f \rho |\vec{V}|^2.\tag{3.54}$$

Poslednja jednačina se projektuje na odgovarajuće koordinatne pravce i prilagođava se za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, što konačno daje

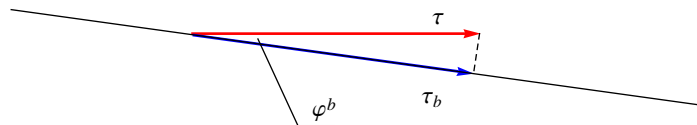
$$(\tau_b)_\xi = C_f \rho \tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}, \quad (\tau_b)_\eta = C_f \rho \tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}.\tag{3.55}$$

Koeficijent trenja se može odrediti pomoću neke od empirijskih formula. Ovde se navode izrazi

$$\text{po Manning-u} \quad C_f = \frac{n^2 g}{d^{1/3}},$$

$$\text{po Chézy-u} \quad C_f = \frac{g}{C_{\text{ch}}^2}.$$

U gornjem izlaganju je izostavljeno da se u navedenim jednačinama održanja količine kretanja traže naponi trenja po dnu $(\tau_b)_\xi$ i $(\tau_b)_\eta$ koji su u horizontalnoj ravni (ovo proizilazi iz izvođenja ovih članova u usvojenom krivolinijskom koordinatnom sistemu, gde su koordinatni pravci ξ i η u horizontalnoj ravni). Međutim, jednačina (3.54) daje intenzitet napona trenja koji prati stvarno dno (slika 12).



Slika 12: Korekcija napona trenja po dnu

Dakle, ako se uzme u obzir korekcija usled činjenice da napon trenja na dnu prati stvarno dno i da ono nije u horizontalnoj ravni, onda jednačine (3.55) postaju

$$(\tau_b)_\xi = \frac{C_f \rho \tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{\cos \varphi_\xi^b}, \quad (\tau_b)_\eta = \frac{C_f \rho \tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{\cos \varphi_\eta^b}. \quad (3.56)$$

3.6.3. Pregled jednačina strujanja

Navodi se konačni oblik sistema jednačina kojima se opisuje strujanje vode u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Za turbulentne napone se koriste jednačine (3.53), a za napon trenja na dnu korita izrazi (3.56). Smatra se da je koeficijent trenja poznat iz nekih od ranije navedenih empirijskih zavisnosti. Preglednosti radi, na gustinu fluida se u ovom trenutku još *ne* primenjuje *Boussinesq*-ova pretpostavka, koja se svodi na stav da je razlika gustine (po prostoru i vremenu) dovoljno mala da se zanemari osim u članovima pomnoženim sa gravitacionim ubrzanjem. Međutim, najavljuje se primena ovog principa u poglavlju koji se bavi numeričkim rešavanjem jednačina, pa se načelno smatra da je i gustina poznata veličina. Geometrijski koeficijenti su takođe poznati i određuju se pomoću koordinata računске mreže. Dakle, nepoznate veličine su dubina i dve komponente brzine, a na raspolaganju stoje tri jednačine: jednačina kontinuiteta i dve dinamičke jednačine u dva koordinatna pravca.

Jednačina kontinuiteta

$$h_\xi h_\eta \frac{\partial(\rho d)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \rho \tilde{u} d) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \rho \tilde{v} d) = 0 \quad (3.57)$$

Dinamička jednačina za koordinatni pravac ξ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 = \\ & = -\frac{g}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d) - \frac{g d}{2 \rho} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{C_f \tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d \cos \varphi_\xi^b} + \\ & + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[2 \rho \tilde{v}_t h_\eta \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{v} \right) d \right] + \\ & + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\rho \tilde{v}_t h_\xi \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \right) d \right] + \\ & + \frac{1}{\rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \left[\rho \tilde{v}_t \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{\rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \left[2 \rho \tilde{v}_t \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (u - \tilde{u})^2 dz - \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz - \\ & - \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} \rho (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} \rho (v - \tilde{v})^2 dz \end{aligned} \quad (3.58)$$

Dinamička jednačina za koordinatni pravac η

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 = \\
& = -\frac{g}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (z_b + d) - \frac{g d}{2 \rho} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \frac{C_f \tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d \cos \varphi_\eta^b} + \\
& + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\rho \tilde{v}_t h_\eta \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \right) d \right] + \\
& + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[2 \rho \tilde{v}_t h_\xi \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \right) d \right] + \\
& + \frac{1}{\rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \left[\rho \tilde{v}_t \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \right) \right] - \\
& - \frac{1}{\rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \left[2 \rho \tilde{v}_t \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{v} \right) \right] - \\
& - \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz - \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (v - \tilde{v})^2 dz - \\
& - \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} \rho (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz + \frac{1}{d \rho h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} \rho (u - \tilde{u})^2 dz
\end{aligned} \tag{3.59}$$

3.7. Jednačine transporta nanosa i deformacije korita u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu osrednjene po dubini toka

Sljede jednačine transporta nanosa i deformacije korita u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu, koje se potom svode na usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem. Nakon toga se jednačine osrednjavaju po dubini toka u cilju formulisanja ravnaskih jednačina transporta nanosa i deformacije korita u prirodnim aluvijanim vodotocima. Formulisanje predmetnih jednačina je u potpunosti kompatibilno sa ravnaskim modelom strujanja vode.

3.7.1. Suspendovani nanos

Jednačina održanja mase suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s je navedena ranije u vektorskom obliku (3.4), pa je moguće primeniti transformacije operatora iz priloga A. Predmetna jednačina u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\frac{\partial (\rho C_{k_s})}{\partial t} + (\rho C_{k_s} V^n)_{,n} = - \left((q_{\text{grav}}^n)_{k_s} \right)_{,n}.$$

Sve promenljive u poslednjoj jednačini važe za *trenutne vrednosti*. Osrednjavanjem po vremenu (osrednjavanje po *Reynolds-u*) se dobija jednačina održanja mase frakcije k_s suspendovanog nanosa za glavni tok (jednostavnosti radi izostavljaju se oznake za osrednjene vrednosti) koja u sebi sadrži i uticaj fluktuacija na osrednjene veličine.

$$\frac{\partial (\rho C_{k_s})}{\partial t} + (\rho C_{k_s} V^n)_{,n} = - \left((q_{\text{grav}}^n)_{k_s} \right)_{,n} + (-\rho \overline{c_{k_s} v^n})_{,n}$$

Dejstvo fluktuacija na glavno strujanje se može formalno prihvatiti kao dejstvo zamišljenog „fluksa”, pa se uvodi pojam fluksa suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s usled turbulentnih fluktuacija (što se još naziva i kao turbulentna difuzija)

$$-\rho \overline{c_{k_s} v^n} = -(q^n)_{k_s}.$$

Uvođenjem pojma turbulentnog fluksa, jednačina održanja mase granulometrijskog intervala (frakcije) k_s suspendovanog nanosa za opšti krivolinijski koordinatni sistem se može napisati u sledećem obliku

$$\frac{\partial (\rho C_{k_s})}{\partial t} + (\rho C_{k_s} V^n)_{,n} = -(q_{k_s}^n)_{,n} - ((q_{\text{grav}}^n)_{k_s})_{,n}. \quad (3.60)$$

Nakon ovoga je moguće pisanje jednačine (3.60) za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem. Pri ovome se koriste principi, jednačine i obeležavanja izneti ranije u poglavlju 3.5.

$$\begin{aligned} & h_i h_j h_k \frac{\partial (\rho C_{k_s})}{\partial t} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi^i} [h_j h_k \rho C_{k_s} V(i)] + \frac{\partial}{\partial \xi^j} [h_i h_k \rho C_{k_s} V(j)] + \frac{\partial}{\partial \xi^k} [h_i h_j \rho C_{k_s} V(k)] = \\ & = - \frac{\partial}{\partial \xi^i} [h_j h_k q_{k_s}(i)] - \frac{\partial}{\partial \xi^j} [h_i h_k q_{k_s}(j)] - \frac{\partial}{\partial \xi^k} [h_i h_j q_{k_s}(k)] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi^i} [h_j h_k (q_{\text{grav}})_{k_s}(i)] - \frac{\partial}{\partial \xi^j} [h_i h_k (q_{\text{grav}})_{k_s}(j)] - \frac{\partial}{\partial \xi^k} [h_i h_j (q_{\text{grav}})_{k_s}(k)] \end{aligned} \quad (3.61)$$

Sledi ispisivanje predmetne jednačine u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu. Napominje se da advektivni fluks frakcije k_s suspendovanog nanosa usled delovanja gravitacije u ovom koordinatnom sistemu, po definiciji, postoji samo za koordinatni pravac z . Dakle, (3.61) se svodi na

$$\begin{aligned} & h_\xi h_\eta \frac{\partial (\rho C_{k_s})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} [h_\eta \rho C_{k_s} u] + \frac{\partial}{\partial \eta} [h_\xi \rho C_{k_s} v] + \frac{\partial}{\partial z} [h_\xi h_\eta \rho C_{k_s} w] = \\ & = - \frac{\partial}{\partial \xi} [h_\eta (q_\xi)_{k_s}] - \frac{\partial}{\partial \eta} [h_\xi (q_\eta)_{k_s}] - \frac{\partial}{\partial z} [h_\xi h_\eta (q_z)_{k_s}] + \frac{\partial}{\partial z} [h_\xi h_\eta q_{k_s}^\downarrow]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Pristupa se osrednjavanju članova jednačine (3.62) po dubini toka, pri čemu se koriste izrazi (3.42) i (3.43).

$$\begin{aligned} & \frac{h_\xi h_\eta}{d} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{C}_{k_s} d) + \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[h_\eta \rho \int_{z_b}^{z_s} C_{k_s} u dz \right] + \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[h_\xi \rho \int_{z_b}^{z_s} C_{k_s} v dz \right] + \\ & + \frac{\rho h_\xi h_\eta}{d} \left[C_{k_s} \left(w - \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \right]_{z_b}^{z_s} = - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta (\tilde{q}_\xi)_{k_s} d) - \\ & - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi (\tilde{q}_\eta)_{k_s} d) - \frac{h_\xi h_\eta}{d} \left[(q_z)_{k_s} - \frac{(q_\xi)_{k_s}}{h_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{(q_\eta)_{k_s}}{h_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]_{z_b}^{z_s} + \frac{h_\xi h_\eta}{d} [q_{k_s}^\downarrow]_{z_b}^{z_s}. \end{aligned}$$

Integrali u poslednjoj jednačini, čije podintegralne funkcije sadrže veličine C_{k_s} i u , odnosno C_{k_s} i v se elementarnim operacijama mogu preurediti tako da se u njima jave koncentracije i brzine osrednjene po dubini toka \tilde{C}_{k_s} i \tilde{u} , odnosno \tilde{C}_{k_s} i \tilde{v} . Takođe se koristi

kinematski uslov, slično kao pri izvođenju jednačina strujanja, što znači da je poslednji član sa leve strane jednak nuli. Predposlednji član sa desne strane se može preurediti tako da se dobije razlika turbulentnih flukseva suspendovanog nanosa na slobodnoj površini vode i dnu korita. Uzevši sve navedeno u obzir, jednačina održanja mase suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \eta} = & - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} [h_\eta (\tilde{q}_\xi)_{k_s} d] - \\ & - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} [h_\xi (\tilde{q}_\eta)_{k_s} d] - \\ & - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (u - \tilde{u}) dz - \\ & - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (v - \tilde{v}) dz \\ & - \frac{1}{\rho d} [\vec{q}_{k_s} \cdot \vec{n}|_{z_s} + \vec{q}_{k_s} \cdot \vec{n}|_{z_b}] + \frac{1}{\rho d} [q_k^\downarrow|_{z_s} - q_k^\downarrow|_{z_b}]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Fluks frakcije k_s suspendovanog nanosa usled turbulentne difuzije se modeliše analogno molekularnoj difuziji, koristeći *Fick*-ov zakon. Odgovarajuća matematička formulacija ovoga u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu je

$$q^m = -D_t g^{mn} (\rho C_{k_s})_{,n}.$$

Poslednji izraz se u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu, gde važe jednačine (3.37) i (3.38), svodi na

$$q^m = -D_t \frac{1}{h_m^2} (\rho C_{k_s})_{,m}.$$

Kovarijantni izvodi u navedenim jednačinama se ispisuju za ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, uz korišćenje fizičkih komponenti vektora, koji su dati sa (3.34). Nakon toga se primenjuju jednačine i obeležavanja za usvojeni koordinatni sistem iz poglavlja 3.5.9. i vrši se osrednjavanje po dubini toka da bi se konačno dobili izrazi turbulentnog fluksa u dva koordinatna pravca

$$\tilde{q}_\xi = -\tilde{D}_t \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial (\rho \tilde{C}_{k_s})}{\partial \xi}, \quad \tilde{q}_\eta = -\tilde{D}_t \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial (\rho \tilde{C}_{k_s})}{\partial \eta}. \quad (3.64)$$

Konačno se posmatra i predposlednji član jednačine (3.63). Turbulentni fluks kroz slobodnu površinu vode po definiciji ne postoji, pa se razmatrani član svodi na

$$-\frac{1}{\rho d} \vec{q}_{k_s} \cdot \vec{n}|_{z_b}.$$

Pošto je ort spoljne normale, po svojoj definiciji, usmeren *od* kontrolne zapremine, kada je na bilo kojoj granici $-\vec{q}_{k_s} \cdot \vec{n}$ pozitivno onda to predstavlja izvor, jer masa ulazi u kontrolnu zapreminu. Iz navedenog se konstatuje da predmetni član predstavlja *wlačenje nanosa sa dna u suspenziju* i obeležava se kao

$$-\frac{1}{\rho d} \vec{q}_{k_s} \cdot \vec{n}|_{z_b} = \frac{E_{k_s}^{\text{sed}}}{\rho d}. \quad (3.65)$$

Na samom kraju se posmatra poslednji član jednačine (3.63). Fluks usled gravitacije kroz slobodnu površinu vode po definiciji ne postoji, pa se posmatrani član svodi na

$$-\frac{1}{\rho d} q_{k_s}^\downarrow|_{z_b}.$$

Razmatrani fluks je po svojoj definiciji *uvek* usmeren na dole, pa to predstavlja gubitak, jer masa napušta kontrolnu zapreminu. Iz navedenog se konstatuje da razmatrani član predstavlja *deponovanje nanosa iz suspenzije na dno* i obeležava se kao

$$-\frac{1}{\rho d} q_{k_s}^\downarrow|_{z_b} = -\frac{D_{k_s}^{\text{sed}}}{\rho d}. \quad (3.66)$$

Zbirni uticaj dva člana predstavljenih jednačinama (3.65) i (3.66) daje *izvor suspendovanog nanosa*

$$-\frac{1}{\rho d} \vec{q}_{k_s} \cdot \vec{n}|_{z_b} - \frac{1}{\rho d} q_{k_s}^\downarrow|_{z_b} = \frac{E_{k_s}^{\text{sed}}}{\rho d} - \frac{D_{k_s}^{\text{sed}}}{\rho d} = \frac{S_{k_s}}{\rho d}, \quad (3.67)$$

čije je postojanje najavljeno još u jednačini (3.6). Uvrštanjem (3.64) i (3.67) u (3.63), dobija se konačni oblik jednačine održanja mase suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \eta} &= \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_\eta}{h_\xi} \tilde{D}_t \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \tilde{C}_{k_s}) d \right] + \\ &+ \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_\xi}{h_\eta} \tilde{D}_t \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho \tilde{C}_{k_s}) d \right] - \\ &- \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (C - \tilde{C}) (u - \tilde{u}) dz - \\ &- \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (C - \tilde{C}) (v - \tilde{v}) dz + \frac{S_{k_s}}{\rho d} \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.7.2. Nanos na dnu i pri dnu

Jednačina održanja mase nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju je navedena ranije u vektorskom obliku (3.6). Primenom transformacija operatora iz priloga A, predmetna jednačina se navodi u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu.

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (\beta_{k_s} E_a)}{\partial t} + (\phi_{k_s}^n)_{,n} = -S_{k_s} + (S_f)_{k_s} \quad (3.69)$$

Na drugi član sa leve strane u (3.69) se primenjuje odgovarajući izraz za ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, uz napomenu da se ovde radi o ravanskom slučaju pa otpadaju izvodi po koordinatnom pravcu ξ^k . Takođe se primenjuju konvencije obeležavanja za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, navedeni u poglavlju 3.5.9. Napominje se da je jednačina (3.69) po definiciji ravanska, pa nema potrebe za osrednjavanjem po dubini toka. Dakle, daje se jednačina održanja mase nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem.

$$\begin{aligned} \rho_s (1 - p_s) \frac{\partial (\beta_{k_s} E_a)}{\partial t} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} [h_\eta (\phi_\xi)_{k_s}] + \\ + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} [h_\xi (\phi_\eta)_{k_s}] = -S_{k_s} + (S_f)_{k_s} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu je navedena ranije u vektorskom obliku (3.10), pa se mogu primeniti transformacije operatora iz priloga A. Ova jednačina u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \sum_{k_s=1}^{K_s} \left[(\phi_{k_s}^n)_{,n} + S_{k_s} \right] = 0. \quad (3.71)$$

Na član sa uopštenim (kovarijantnim) izvodom u (3.71) se primenjuje odgovarajući izraz za ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, uz napomenu da se i ovde radi o ravanskom slučaju pa otpadaju izvodi po koordinatnom pravcu ξ^k . Takođe se primenjuju konvencije obeležavanja za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, navedeni u poglavlju 3.5.9. Pošto je jednačina (3.69) ravanska, ne vrši se osrednjavanje po dubini toka. Dakle, daje se globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem.

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial z_b}{\partial t} + \sum_{k_s=1}^{K_s} \left\{ \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} [h_\eta (\phi_\xi)_{k_s}] + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} [h_\xi (\phi_\eta)_{k_s}] + S_{k_s} \right\} = 0 \quad (3.72)$$

3.8. Jednačine transporta zagađujuće materije u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu osrednjene po dubini toka

Slede jednačine transporta zagađujuće materije napisane u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu, koje se potom svode na usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem. Nakon toga se jednačine osrednjavaju po dubini toka u cilju formulisanja ravanskih jednačina transporta zagađujuće materije u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Formulisanje predmetnih jednačina je obavljeno na takav način da one budu u potpunosti kompatibilne sa ravanskim modelima strujanja vode odnosno transporta nanosa i deformacije korita.

3.8.1. Zagađujuća materija u rastvorenom obliku

Jednačina održanja mase rastvorene zagađujuće materije je navedena ranije u vektorskom obliku (3.13). Nakon primene odgovarajućih transformacija operatora iz priloga A, ova jednačina u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\frac{\partial (\rho C^\dagger)}{\partial t} + (\rho C^\dagger V^n)_{,n} = - (s_{\text{mol}}^n)_{,n} - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger + \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger.$$

Sve veličine u poslednjoj jednačini važe za trenutne vrednosti, uz napomenu da je ranije rečeno da koncentracija adsorbovane zagađujuće materije nije pod neposrednim uticajem toka (pa ni fluktuacija) nego adhezionih (površinskih) sila. Osrednjavanjem po vremenu (osrednjavanje po *Reynolds*-u) se dobija jednačina održanja mase rastvorenog zagađivača za glavni tok (jednostavnosti radi izostavljaju se oznake za osrednjene vrednosti) koja u sebi sadrži i uticaj fluktuacija na osrednjene veličine.

$$\frac{\partial (\rho C^\dagger)}{\partial t} + (\rho C^\dagger V^n)_{,n} = - (s_{\text{mol}}^n)_{,n} - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger + \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger + (-\rho \overline{c^\dagger v^n})_{,n}$$

Dejstvo fluktuacija na transport rastvorene zagađujuće materije glavnom strujom se može formalno prihvatiti kao dejstvo zamišljenog „fluksa”, pa se uvodi pojam fluksa rastvorenog zagađivača usled turbulentnih fluktuacija (što se još naziva i kao turbulentna difuzija)

$$-\rho \overline{c^\dagger v^n} = -\zeta^n.$$

Pošto je opravdano zanemariti fluks molekularne difuzije u odnosu na turbulentnu, jednačina održanja mase rastvorene zagađujuće materije za opšti krivolinijski koordinatni sistem je

$$\frac{\partial (\rho C^\dagger)}{\partial t} + (\rho C^\dagger V^n)_{,n} = -\zeta_{,n}^n - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger + \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger. \quad (3.73)$$

Jednačina (3.73) se piše za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem. Pri ovome se koriste principi, jednačine i obeležavanja izneti u poglavlju 3.5.

$$\begin{aligned} & h_i h_j h_k \frac{\partial (\rho C^\dagger)}{\partial t} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi^i} [h_j h_k \rho C^\dagger V(i)] + \frac{\partial}{\partial \xi^j} [h_i h_k \rho C^\dagger V(j)] + \frac{\partial}{\partial \xi^k} [h_i h_j \rho C^\dagger V(k)] = \\ & = -\frac{\partial}{\partial \xi^i} [h_j h_k \varsigma(i)] - \frac{\partial}{\partial \xi^j} [h_i h_k \varsigma(j)] - \frac{\partial}{\partial \xi^k} [h_i h_j \varsigma(k)] - \\ & - h_i h_j h_k \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger + h_i h_j h_k \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger \end{aligned} \quad (3.74)$$

Sledi ispisivanje predmetne jednačine u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu, pa se (3.74) svodi na

$$\begin{aligned} & h_\xi h_\eta \frac{\partial (\rho C^\dagger)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \rho C^\dagger u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \rho C^\dagger v) + \frac{\partial}{\partial z} (h_\xi h_\eta \rho C^\dagger w) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \varsigma_\xi) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \varsigma_\eta) - \frac{\partial}{\partial z} (h_\xi h_\eta \varsigma_z) - \\ & - h_\xi h_\eta \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger + h_\xi h_\eta \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Članovi jednačine (3.75) se osrednjavaju po dubini toka, pri čemu se koriste izrazi (3.42) i (3.43).

$$\begin{aligned} & \frac{h_\xi h_\eta}{d} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{C}^\dagger d) + \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[h_\eta \rho \int_{z_b}^{z_s} C^\dagger u dz \right] + \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[h_\xi \rho \int_{z_b}^{z_s} C^\dagger v dz \right] + \\ & + \frac{\rho h_\xi h_\eta}{d} \left[C^\dagger \left(w - \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \right]_{z_b}^{z_s} = -\frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \tilde{\varsigma}_\xi d) - \\ & - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \tilde{\varsigma}_\eta d) - \frac{h_\xi h_\eta}{d} \left[\varsigma_z - \frac{\varsigma_\xi}{h_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\varsigma_\eta}{h_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]_{z_b}^{z_s} - h_\xi h_\eta \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \rho \tilde{C}^\dagger + \\ & + \frac{\rho h_\xi h_\eta}{d} \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \int_{z_b}^{z_s} C_{k_s} C_{k_s}^\dagger dz \end{aligned}$$

Integrali u poslednjoj jednačini, čije podintegralne funkcije sadrže veličine C^\dagger i u , C^\dagger i v , odnosno C_{k_s} i $C_{k_s}^\dagger$ se elementarnim operacijama mogu preurediti tako da se u njima javne koncentracije i brzine osrednjene po dubini toka. Takođe se koristi kinematski uslov, slično kao pri izvođenju jednačine održanja mase suspendovanog nanosa, što znači da je poslednji član sa leve strane jednak nuli. Treći član sa desne strane se može preurediti tako da se dobije razlika turbulentnih flukseva rastvorenog zagađivača na slobodnoj površini vode i dnu korita. Uzevši sve navedeno u obzir, jednačina održanja mase rastvorene zagađujuće materije je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \tilde{\zeta}_\xi d) - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \tilde{\zeta}_\eta d) - \\
-\frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (C^\dagger - \tilde{C}^\dagger) (u - \tilde{u}) dz &- \\
-\frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (C^\dagger - \tilde{C}^\dagger) (v - \tilde{v}) dz &- \\
-\frac{1}{\rho d} [\vec{\zeta} \cdot \vec{n}|_{z_s} + \vec{\zeta} \cdot \vec{n}|_{z_b}] - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger + \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger + \\
+\frac{1}{d} \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \int_{z_b}^{z_s} (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (C_{k_s}^\dagger - \tilde{C}_{k_s}^\dagger) dz. &
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Fluks rastvorene zagađujuće materije usled turbulentne difuzije se modeliše analogno molekularnoj difuziji, koristeći *Fick*-ov zakon. Formulisanje odgovarajućih jednačina je identično kao za suspendovani nanos, pa se analogno jednačinama (3.64) navode izrazi

$$\tilde{\zeta}_\xi = -\tilde{D}_t \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial(\rho \tilde{C}^\dagger)}{\partial \xi}, \quad \tilde{\zeta}_\eta = -\tilde{D}_t \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial(\rho \tilde{C}^\dagger)}{\partial \eta}. \tag{3.77}$$

Nakon ovoga se posmatra peti član na desnoj strani jednačine (3.76). Turbulentni fluks kroz slobodnu površinu vode po definiciji ne postoji, pa se posmatrani član svodi na proizvod fluksa i orta spoljne normale na dnu rečnog korita. Pošto je ort spoljne normale, po svojoj definiciji, usmeren *od* kontrolne zapremine, kada je na bilo kojoj granici $-\vec{\zeta} \cdot \vec{n}$ pozitivno onda to predstavlja izvor, jer masa ulazi u kontrolnu zapreminu. Iz navedenog se konstatuje da razmatrani član predstavlja razmenu mase između rastvorene zagađujuće materije i zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa na dnu koje su pod uticajem toka. Dakle, može se napisati da je član izvora rastvorene zagađujuće materije kroz dno korita

$$-\frac{1}{\rho d} \vec{\zeta} \cdot \vec{n}|_{z_b} = \frac{S^\dagger}{\rho d}. \tag{3.78}$$

Postojanje ovog člana je nagovešteno u poglavlju 3.4.3. Međutim, povlačenje paralele sa jednačinom (3.17) zahteva dodatno objašnjenje. Naime, u (3.17) je predviđeno postojanje mehanizma razmene mase, tj. izvora (fluksa) rastvorene zagađujuće materije usled adsorpcije/desorpcije na/sa zrna granulometrijskog integvala k_s u aktivnom sloju. Pošto je iz jednačine (3.76) jasno da sve aktivne frakcije nanosa učestvuju u interakciji sa zagađivačem tvrdi se da je

$$S^\dagger = \sum_{k_s=1}^{K_a} S_{k_s}^\dagger. \tag{3.79}$$

Uvrštanjem (3.77) i (3.78) u (3.76) i zanemarivanjem njenog poslednjeg člana se dobija konačni oblik jednačine održanja mase rastvorene zagađujuće materije u usvojenom koordinatnom sistemu.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial t} + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \eta} = & \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \tilde{D}_t \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho C^\dagger) d \right) + \\
& + \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \tilde{D}_t \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho C^\dagger) d \right) - \\
& - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (C^\dagger - \tilde{C}^\dagger) (u - \tilde{u}) dz - \\
& - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (C^\dagger - \tilde{C}^\dagger) (v - \tilde{v}) dz + \\
& + \frac{S^\dagger}{\rho d} - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger + \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger
\end{aligned} \tag{3.80}$$

3.8.2. Zagađujuća materija vezana za zrna suspendovanog nanosa

Jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa frakcije k_s je navedena ranije u vektorskom obliku (3.15), što omogućava primenu transformacija operatora iz priloga A. Predmetna jednačina u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger) + (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger V^n)_{,n} = & - \left((\vartheta_{\text{grav}}^n)_{k_s} \right)_{,n} + \\
& + (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger - (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger.
\end{aligned}$$

Sve veličine u poslednjoj jednačini važe za trenutne vrednosti, uz napomenu da je ranije rečeno da koncentracija adsorbovane zagađujuće materije nije pod neposrednim uticajem toka (fluktuacija) nego adhezionih (površinskih) sila. Osrednjavanjem po vremenu (osrednjavanje po *Reynolds*-u), dobija se jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog za glavni tok (jednostavnosti radi izostavljaju se oznake za osrednjene vrednosti), koja u sebi sadrži i uticaj fluktuacija na osrednjene veličine.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger) + (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger V^n)_{,n} = & - \left((\vartheta_{\text{grav}}^n)_{k_s} \right)_{,n} + \\
& + (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger - (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger + \left(-\rho C_{k_s}^\dagger \overline{c_{k_s} v^n} \right)_{,n}
\end{aligned}$$

Dejstvo fluktuacija na transport adsorbovane zagađujuće materije glavnom strujom se može formalno prihvatiti kao dejstvo zamišljenog „fluksa”, pa se uvodi pojam fluksa zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa usled turbulentnih fluktuacija (što se još naziva i kao turbulentna difuzija)

$$-\rho C_{k_s}^\dagger \overline{c_{k_s} v^n} = -\vartheta_{k_s}^n.$$

Pojam turbulentnog fluksa se u nastavku koristi pri pisanju jednačine održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala (frakcije) k_s u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu. Napominje se da je fizičko

objašnjenje predmetnog fluksa potpuno identično kao u slučaju jednačine (3.60), jer je ovde razmatran zagađivač adhezionim silama vezan za zrna nanosa u suspenziji.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger) + (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger V^n)_{,n} = & - (\vartheta_{k_s}^n)_{,n} - ((\vartheta_{\text{grav}}^n)_{k_s})_{,n} + \\ & + (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger - (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger \end{aligned} \quad (3.81)$$

Jednačina (3.81) se piše za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem. Pri ovome se koriste principi, jednačine i obeležavanja izneti u poglavlju 3.5.

$$\begin{aligned} & h_i h_j h_k \frac{\partial}{\partial t} (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} [h_j h_k \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger V(i)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \xi^j} [h_i h_k \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger V(j)] + \frac{\partial}{\partial \xi^k} [h_i h_j \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger V(k)] = \\ & = - \frac{\partial}{\partial \xi^i} [h_j h_k \vartheta_{k_s}(i)] - \frac{\partial}{\partial \xi^j} [h_i h_k \vartheta_{k_s}(j)] - \frac{\partial}{\partial \xi^k} [h_i h_j \vartheta_{k_s}(k)] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \xi^i} [h_j h_k (\vartheta_{\text{grav}})_{k_s}(i)] - \frac{\partial}{\partial \xi^j} [h_i h_k (\vartheta_{\text{grav}})_{k_s}(j)] - \frac{\partial}{\partial \xi^k} [h_i h_j (\vartheta_{\text{grav}})_{k_s}(k)] + \\ & + h_i h_j h_k (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger - h_i h_j h_k (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger \end{aligned} \quad (3.82)$$

Sledi ispisivanje predmetne jednačine održanja mase u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu. Napominje se da advektivni fluks zagađujuće materije adsorbovane na frakciju k_s suspendovanog nanosa usled delovanja gravitacije u ovom koordinatnom sistemu, po definiciji, postoji samo za koordinatni pravac z . Dakle, (3.82) se svodi na

$$\begin{aligned} & h_\xi h_\eta \frac{\partial}{\partial t} (\rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger) + \frac{\partial}{\partial \xi} [h_\eta \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger u] + \frac{\partial}{\partial \eta} [h_\xi \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger v] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} [h_\xi h_\eta \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger w] = - \frac{\partial}{\partial \xi} [h_\eta (\vartheta_\xi)_{k_s}] - \frac{\partial}{\partial \eta} [h_\xi (\vartheta_\eta)_{k_s}] - \\ & - \frac{\partial}{\partial z} [h_\xi h_\eta (\vartheta_z)_{k_s}] + \frac{\partial}{\partial z} [h_\xi h_\eta \vartheta_{k_s}^\downarrow] + h_\xi h_\eta (\mu_1)_{k_s} \rho C^\dagger - h_\xi h_\eta (\mu_2)_{k_s} \rho C_{k_s} C_{k_s}^\dagger \end{aligned} \quad (3.83)$$

Pristupa se osrednjavanju članova jednačine (3.83) po dubini toka, pri čemu se koriste izrazi (3.42) i (3.43).

$$\begin{aligned} & \frac{h_\xi h_\eta}{d} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \int_{z_b}^{z_s} C_{k_s} C_{k_s}^\dagger dz \right] + \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[h_\eta \rho \int_{z_b}^{z_s} C_{k_s} C_{k_s}^\dagger u dz \right] + \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[h_\xi \rho \int_{z_b}^{z_s} C_{k_s} C_{k_s}^\dagger v dz \right] + \\ & + \frac{\rho h_\xi h_\eta}{d} \left[C_{k_s} C_{k_s}^\dagger \left(w - \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{u}{h_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{v}{h_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \right]_{z_b}^{z_s} = - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta (\tilde{\vartheta}_\xi)_{k_s} d) - \\ & - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi (\tilde{\vartheta}_\eta)_{k_s} d) - \frac{h_\xi h_\eta}{d} \left[(\vartheta_z)_{k_s} - \frac{(\vartheta_\xi)_{k_s}}{h_\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{(\vartheta_\eta)_{k_s}}{h_\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right]_{z_b}^{z_s} + \frac{h_\xi h_\eta}{d} [\vartheta_{k_s}^\downarrow]_{z_b}^{z_s} + \\ & + h_\xi h_\eta (\mu_1)_{k_s} \rho \tilde{C}^\dagger - \frac{\rho h_\xi h_\eta}{d} (\mu_2)_{k_s} \int_{z_b}^{z_s} C_{k_s} C_{k_s}^\dagger dz \end{aligned}$$

U saglasnosti sa do sadašnjom strategijom formulisanja ravanskih jednačina, integrali u poslednjem izrazu, čije podintegralne funkcije sadrže veličine C_{k_s} , $C_{k_s}^\dagger$ i u ; C_{k_s} , $C_{k_s}^\dagger$ i

v , odnosno C_{k_s} i $C_{k_s}^\dagger$ se elementarnim operacijama mogu preurediti tako da se u njima jave koncentracije i brzine osrednjene po dubini toka. Takođe se koristi kinematski uslov, slično kao pri izvođenju jednačine održanja mase suspendovanog nanosa, što znači da je poslednji član sa leve strane jednak nuli. Treći član sa desne strane se može preurediti tako da se dobije razlika turbulentnih flukseva zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa na slobodnoj površini vode i dnu korita. Uzevši sve navedeno u obzir, jednačina održanja mase zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s je

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) = \\
& = -\frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta (\tilde{\vartheta}_\xi)_{k_s} d) - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi (\tilde{\vartheta}_\eta)_{k_s} d) - \\
& - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (C_{k_s} C_{k_s}^\dagger u)'' dz - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (C_{k_s} C_{k_s}^\dagger v)'' dz - \\
& - \frac{1}{\rho d} [\vec{\vartheta}_{k_s} \cdot \vec{n}|_{z_s} + \vec{\vartheta}_{k_s} \cdot \vec{n}|_{z_b}] + \frac{1}{\rho d} [\vartheta_{k_s}^\downarrow|_{z_s} - \vartheta_{k_s}^\downarrow|_{z_b}] + \\
& + (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger - (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger + \frac{1}{\rho d} \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{z_s} \rho (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (C_{k_s}^\dagger - \tilde{C}_{k_s}^\dagger) dz - \\
& - \frac{1}{d} (\mu_2)_{k_s} \int_{z_b}^{z_s} (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (C_{k_s}^\dagger - \tilde{C}_{k_s}^\dagger) dz,
\end{aligned} \tag{3.84}$$

pri čemu su radi lakšeg pisanja uvedene oznake

$$\begin{aligned}
(C_{k_s} C_{k_s}^\dagger u)'' &= (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (C_{k_s}^\dagger - \tilde{C}_{k_s}^\dagger) (u - \tilde{u}) + \tilde{C}_{k_s} (C_{k_s}^\dagger - \tilde{C}_{k_s}^\dagger) (u - \tilde{u}) + \\
& + \tilde{C}_{k_s}^\dagger (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (u - \tilde{u}) + \tilde{u} (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (C_{k_s}^\dagger - \tilde{C}_{k_s}^\dagger), \\
(C_{k_s} C_{k_s}^\dagger v)'' &= (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (C_{k_s}^\dagger - \tilde{C}_{k_s}^\dagger) (v - \tilde{v}) + \tilde{C}_{k_s} (C_{k_s}^\dagger - \tilde{C}_{k_s}^\dagger) (v - \tilde{v}) + \\
& + \tilde{C}_{k_s}^\dagger (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (v - \tilde{v}) + \tilde{v} (C_{k_s} - \tilde{C}_{k_s}) (C_{k_s}^\dagger - \tilde{C}_{k_s}^\dagger).
\end{aligned}$$

Fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa frakcije k_s usled turbulentne difuzije se modeliše analogno molekularnoj difuziji, koristeći *Fick*-ov zakon. Formulisanje odgovarajućih jednačina je identično kao za suspendovani nanos, pa se analogno jednačinama (3.64) navode izrazi

$$(\tilde{\vartheta}_\xi)_{k_s} = -\tilde{D}_t \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial (\rho \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)}{\partial \xi}, \quad (\tilde{\vartheta}_\eta)_{k_s} = -\tilde{D}_t \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial (\rho \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)}{\partial \eta}. \tag{3.85}$$

Nakon ovoga se posmatra peti član na desnoj strani jednačine (3.84). Turbulentni fluks kroz slobodnu površinu vode po definiciji ne postoji, pa se posmatrani član svodi na proizvod fluksa i orta spoljne normale na dnu rečnog korita. Pošto je ort spoljne normale, po svojoj definiciji, usmeren *od* kontrolne zapremine, kada je na bilo kojoj granici $-\vec{\vartheta}_{k_s} \cdot \vec{n}$ pozitivno onda to predstavlja izvor, jer masa ulazi u kontrolnu zapreminu. Iz navedenog se konstatuje da razmatrani član predstavlja dobitak mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa, usled uvlačenja zrna nanosa sa dna u suspenziju i

obeležava se kao

$$-\frac{1}{\rho d} \vec{\vartheta}_{k_s} \cdot \vec{n}|_{z_b} = \frac{E_{k_s}^\dagger}{\rho d}. \quad (3.86)$$

Na kraju se posmatra šesti član jednačine (3.84). Fluks usled gravitacionog ubrzanja kroz slobodnu površinu vode po definiciji ne postoji, pa se posmatrani član svodi na vrednost ovog fluksa na dnu rečnog korita. Pošto je razmatrani fluks po svojoj definiciji *uvek* usmeren na dole, to predstavlja gubitak, jer masa napušta kontrolnu zapreminu. Iz navedenog se konstatuje da razmatrani član predstavlja „deponovanje” zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa iz suspenzije na dno i obeležava se kao

$$-\frac{1}{\rho d} \vartheta_{k_s}^\downarrow|_{z_b} = -\frac{D_{k_s}^\dagger}{\rho d}. \quad (3.87)$$

Zbirni uticaj dva člana predstavljenih jednačinama (3.86) i (3.87) daje izvor zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa frakcije k_s sa rečnog dna (tj. iz aktivnog sloja), čije je postojanje nagovešteno ranije u poglavlju 3.4.3.

$$-\frac{1}{\rho d} \vec{\vartheta}_{k_s} \cdot \vec{n}|_{z_b} - \frac{1}{\rho d} \vartheta_{k_s}^\downarrow|_{z_b} = \frac{E_{k_s}^\dagger}{\rho d} - \frac{D_{k_s}^\dagger}{\rho d} = \frac{S_{k_s}^\dagger}{\rho d} \quad (3.88)$$

Uvrštanjem (3.85) i (3.88) u (3.84) i zanemarivanjem poslednja dva člana se dobija konačni oblik jednačine održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s u usvojenom koordinatnom sistemu.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) = \\ & = \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \tilde{D}_t \frac{\partial (\rho \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)}{\partial \xi} d \right) + \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \tilde{D}_t \frac{\partial (\rho \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)}{\partial \eta} d \right) - \\ & - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta \rho (C_{k_s} C_{k_s}^\dagger u)'' dz - \frac{1}{\rho h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi \rho (C_{k_s} C_{k_s}^\dagger v)'' dz + \\ & + \frac{S_{k_s}^\dagger}{\rho d} + (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger - (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger \end{aligned} \quad (3.89)$$

3.8.3. Zagađujuća materija vezana za zrna nanosa na dnu i pri dnu

Jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju je navedena ranije u vektorskom obliku (3.17). Nakon primene odgovarajućih transformacija operatora iz priloga A, jednačina se može napisati u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu kao

$$\rho_s (1 - p_s) \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \right) + (\epsilon_{k_s}^n)_{,n} = -S_{k_s}^\dagger - S_{k_s}^\dagger + (S_f^\dagger)_{k_s}. \quad (3.90)$$

Na drugi član sa leve strane u jednačini (3.90) se primenjuje odgovarajući izraz za ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, uz napomenu da se ovde radi o ravanskom slučaju pa otpadaju izvodi po koordinatnom pravcu ξ^k . Takođe se primenjuju konvencije obeležavanja za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, navedeni u poglavlju 3.5.9. Napominje se da je jednačina (3.90) po definiciji ravanska, pa nema

potrebe za osrednjavanjem po dubini toka. Dakle, daje se jednačina održanja mase zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju za usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem.

$$\begin{aligned} \rho_s (1 - p_s) \frac{\partial}{\partial t} \left(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a \right) + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} [h_\eta (\epsilon_\xi)_{k_s}] + \\ + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} [h_\xi (\epsilon_\eta)_{k_s}] = -S_{k_s}^\dagger - S_{k_s}^\dagger + (S_f^\dagger)_{k_s} \end{aligned} \quad (3.91)$$

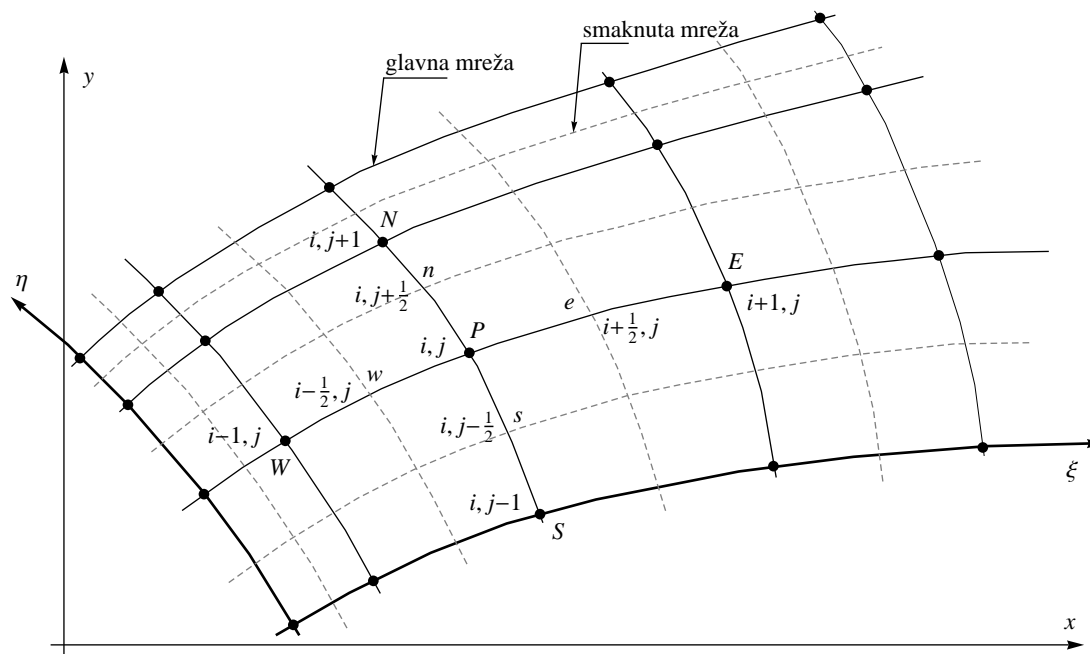
Na kraju se napominje da su jednačine održanja mase zagađivača adsorbovanog na zrna aktivnih frakcija nanosa u aktivnom stratumu kao i svim dubljim stratumima skalarna i u njima se ne javljaju vektori kao ni divergencije vektora. Dakle, ove jednačine su iste u bilo kojem, pa i u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu.

4. Numeričko rešavanje jednačina

RAZMATRAJU se parcijalne diferencijalne jednačine kojima se opisuje strujanje vode (3.57), (3.58) i (3.59), transport suspendovanog nanosa (3.68), deformacija rečnog korita (3.70) i (3.72) i transport zagađujuće materije u rastvorenom (3.80), odnosno adsorbovanom obliku (3.89) i (3.91). Navedene jednačine su prvo napisane u vektorskom obliku, nakon čega su formulisane u opštem krivolinijskom sistemu, pa su svedene na usvojeni ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem, da bi se na kraju izvršilo njihovo osrednjavanje po dubini toka radi formiranja ravanskog modela prirodnih vodotokova. Analiza predmetnog sistema jednačina dovodi do zaključka da je mogućnost analitičkog rešavanja isključena, pa se preporučuje primena odgovarajućih numeričkih metoda.

4.1. Računska mreža

Na fizičkom domenu razmatranog problema se generiše *glavna* računaska mreža kao na slici 13. Takođe se generiše *smaknuta* računaska mreža tako da ona uvek prolazi na sredini između linija glavne mreže. Uvode se donji indeksi radi obeležavanja računskih (diskretnih) tačaka, i to indeks $i = 1, 2, \dots, I$ za koordinatni pravac ξ , odnosno indeks $j = 1, 2, \dots, J$ za koordinatni pravac η .



Slika 13: Računska mreža u fizičkom domenu

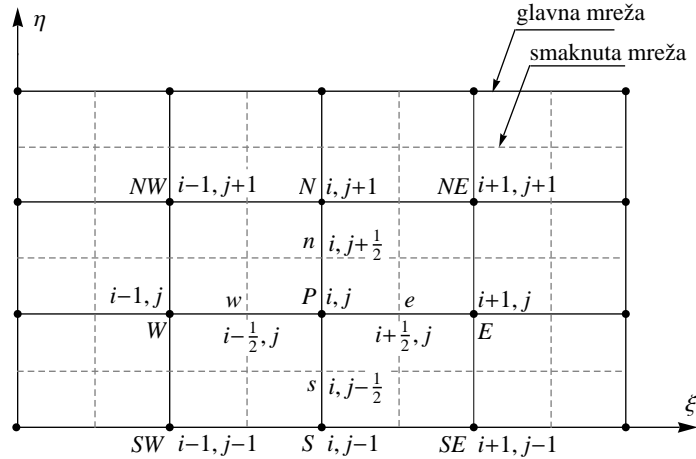
Nakon transformacije koordinatnog sistema dobija se tzv. *transformisani* ili *računski* domen prikazan na slici 14. Glavna odlika računске mreže u transformisanom domenu je da su sva rastojanja računskih tačaka jedinična, tj.

$$\Delta\xi = \Delta\eta = 1,$$

što značajno pojednostavljuje izvođenje diskretizovanih jednačina. Navode se osnovne karakteristike ovako generisane računске mreže:

- glavne računске tačke nisu u sredini računске ćelije koja ih obuhvata (ovo važi samo u fizičkom domenu);

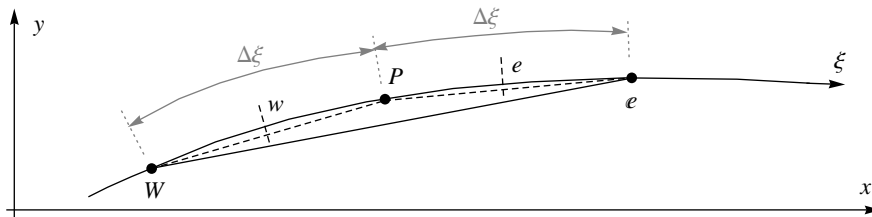
- smaknute računске tačke su na sredini između glavnih računskih tačaka i u fizičkom i u računskom domenu;
- određivanje brojevanih vrednosti u smaknutim tačkama se vrši pomoću trivijalne interpolacije, koja koristi vrednosti u glavnim tačkama.



Slika 14: Računska mreža u transformisanom (računskom) domenu

4.1.1. Proračun geometrijskih koeficijenata

U poglavlju 3.5.5. je pokazano da su u ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu elementi metričnog tenzora zapravo odnos kvadrata rastojanja u fizičkom i računskom prostoru. Takođe su ranije definisani i geometrijski koeficijenti jednačinama (3.37), (3.38) i (3.27), za čiju se diskretizaciju koristi metoda konačnih razlika. Smatra se da ovako dobijeni izrazi važe na određenoj (konačnoj) dužini.



Slika 15: Diskretizacija geometrijskih koeficijenata

Koristeći izabranu diskretizaciju u smaknutim računskim tačkama se mogu odrediti geometrijski koeficijenti pomoću izraza tipa

$$(h_{\xi})_e = \sqrt{\left(\frac{x_E - x_P}{\Delta\xi}\right)^2 + \left(\frac{y_E - y_P}{\Delta\xi}\right)^2}, \quad (h_{\eta})_n = \sqrt{\left(\frac{x_N - x_P}{\Delta\eta}\right)^2 + \left(\frac{y_N - y_P}{\Delta\eta}\right)^2},$$

uz napomenu da $(h_{\xi})_e$ predstavlja stvarno (fizičko) rastojanje između tačaka E i P , dok $(h_{\eta})_n$ predstavlja stvarno (fizičko) rastojanje između tačaka N i P . Geometrijski koeficijenti u *glavnim* računskim tačkama se određuju pomoću izraza

$$(h_{\xi})_P = \frac{1}{2} ((h_{\xi})_e + (h_{\xi})_w), \quad (h_{\eta})_P = \frac{1}{2} ((h_{\eta})_n + (h_{\eta})_s),$$

pri čemu ovi koeficijenti redom predstavljaju stvarno (fizičko) rastojanje između tačaka smaknute računске mreže e i w , odnosno n i s . U nastavku se za geometrijske koeficijente uvodi sledeća konvencija: koeficijent $(h_\xi^{st})_{i,j}$ koji se javlja isključivo na koordinatnom pravcu ξ se nalazi između glavnih tačaka (i, j) i $(i+1, j)$, a koeficijent $(h_\eta^{st})_{i,j}$ koji se javlja isključivo na koordinatnom pravcu η se nalazi između glavnih tačaka (i, j) i $(i, j+1)$. Dakle, predmetne jednačine za geometrijske koeficijente u smaknutim računskim tačkama se mogu napisati kao

$$(h_\xi^{st})_{i,j} = (h_\xi)_{i+\frac{1}{2},j} = \sqrt{\left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\Delta\xi}\right)^2 + \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\Delta\xi}\right)^2} \quad 1 \leq i < I, \text{ bilo koje } j,$$

$$(h_\eta^{st})_{i,j} = (h_\eta)_{i,j+\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{\Delta\eta}\right)^2 + \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j}}{\Delta\eta}\right)^2} \quad 1 \leq j < J, \text{ bilo koje } i,$$

dok je u glavnim računskim tačkama

$$(h_\xi)_{i,j} = \frac{1}{2} \left((h_\xi^{st})_{i,j} + (h_\xi^{st})_{i-1,j} \right), \quad (h_\eta)_{i,j} = \frac{1}{2} \left((h_\eta^{st})_{i,j} + (h_\eta^{st})_{i,j-1} \right).$$

4.1.2. Transformacija vektora iz krivolinijskog u kartezijanski koordinatni sistem

U poglavlju 3.5.3. su data pravila transformacije komponenti vektora iz kartezijanskog u krivolinijski koordinatni sistem i obrnuto. Ovde se kao primer vektora, za koji se nakon njegove transformacije dobijaju kontravarijantne komponente, koristi vektor brzine. Dakle, može se napisati da je

$$dx^m = \frac{\partial x^m}{\partial \xi^n} d\xi^n / \frac{1}{dt} \Rightarrow \frac{dx^m}{dt} = \frac{\partial x^m}{\partial \xi^n} \frac{d\xi^n}{dt} \Rightarrow u^m = \frac{\partial x^m}{\partial \xi^n} V^n,$$

uz napomenu da je kontravarijantna komponenta brzine u kartezijanskom koordinatnom sistemu ujedno i *fizička* komponenta brzine. Koristeći (3.34) se dobija da je

$$u(m) = \frac{\partial x^m}{\partial \xi^n} \frac{V(n)}{\sqrt{g_{nn}}}.$$

Poslednja jednačina se razvija u izabranom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$u(i) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{u}{h_\xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{v}{h_\eta}, \quad u(j) = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{u}{h_\xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{v}{h_\eta},$$

pri čemu preostaje da se metodom konačnih razlika odrede odgovarajući izvodi, odnosno geometrijski koeficijenti koji se u njoj javljaju.

4.2. Numeričko rešavanje jednačina strujanja vode

Jednačine strujanja vode sadrže članove koji imaju različiti matematički karakter (hiperbolički, parabolički). Kako bi se na svaki od članova jednačina primenila najpogodnija numerička metoda, koja odgovara njegovom matematičkom karakteru, koristi se metoda *razlomljenih koraka* koju je predložio Yanenko (1971), a na jednačine strujanja primenili i drugi autori kao što su Benqué et al. (1982), Spasojevic i Holly (1990), Hsieh i Yang (2003), Hung et al. (2009) i Budinski (2011). Jednačine strujanja se shodno

karakteru pojedinih članova rešavaju u tri sukcesivna koraka, koji podrazumevaju *advektivni*, *difuzioni* i *propagacioni* korak. Sa stanovišta matematičkog karaktera prvi korak je hiperboličkog a druga dva parboličkog tipa. Na jednačine strujanja se takođe primenjuje *Boussinesq*-ova pretpostavka o gustini fluida. U prvom koraku se rešava advektivni deo dinamičke jednačine za ξ

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)^a + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v}, \quad (4.1)$$

odnosno η koordinatni pravac

$$\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}\right)^a + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v}. \quad (4.2)$$

Uz uzimanje uticaja advekcije, koji se sad javlja kao prethodni računski korak, u drugom koraku se rešavaju difuzioni članovi dinamičke jednačine za ξ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)^d - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right)^a = \frac{2}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\tilde{v}_t h_\eta \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{v} \right) d \right] + \\ & + \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\tilde{v}_t h_\xi \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \right) d \right] + \\ & + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \left[\tilde{v}_t \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \right) \right] - \\ & - \frac{2}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \left[\tilde{v}_t \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta (u - \tilde{u})^2 dz - \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz - \\ & - \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz + \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} (v - \tilde{v})^2 dz, \end{aligned} \quad (4.3)$$

odnosno η koordinatni pravac

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}\right)^d - \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}\right)^a = \frac{2}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\tilde{v}_t h_\xi \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \right) d \right] + \\ & + \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\tilde{v}_t h_\eta \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{v} \right) d \right] + \\ & + \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \left[\tilde{v}_t \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} - \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{v} \right) \right] - \\ & - \frac{2}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \left[\tilde{v}_t \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{v} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz - \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi (v - \tilde{v})^2 dz - \\ & - \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz + \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} (u - \tilde{u})^2 dz. \end{aligned} \quad (4.4)$$

U trećem koraku se rešavaju preostali članovi dinamičke jednačine za ξ

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right)^d = -\frac{g}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d) - \frac{g d}{2 \rho} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{C_f \tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d \cos \varphi_\xi^b}, \quad (4.5)$$

odnosno η koordinatni pravac

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right)^d = -\frac{g}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (z_b + d) - \frac{g d}{2 \rho} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} - \frac{C_f \tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d \cos \varphi_\eta^b}, \quad (4.6)$$

zajedno sa jednačinom kontinuiteta

$$h_\xi h_\eta \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \tilde{u} d) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \tilde{v} d) = 0. \quad (4.7)$$

4.2.1. Advektivni korak

Razmatraju se jednačine koje čine advektivni korak ravanskog modela tečenja u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Međutim, pre nego što se pređe na njihovo rešavanje, neophodno je ispitati ponašanje samih jednačina, jer one imaju snažan *hiperbolički* karakter. U ovu svrhu služi linijska jednačina nelinearne advekcije (*Burger*-ova jednačina), koja je opisana sa mnogo detalja u knjizi autora Toro (2009). Analizu nelinearne advekcije u jednačinama strujanja, koja opisuje deformisanje talasa kao i formiranje strmog čela talasa, sprovedli su i drugi autori (Isic et al., 2013).

Dakle, posmatra se jednačina advekcije nepoznate komponente brzine u^i u linijskom kartezijskom prostoru i odgovarajući početni uslov

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} [\mathcal{F}(u^i)] = 0, \quad u^i(x^i, 0) = u_0^i(x^i), \quad (4.8)$$

pri čemu se predmetna jednačina može napisati i u obliku

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} + \lambda(u^i) \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = 0,$$

gde je sa

$$\lambda(u^i) = \frac{d\mathcal{F}}{du^i} = \mathcal{F}'(u^i)$$

obeležena *karakteristična brzina*, tj. *brzina propagacije*. Za linearnu advekciju je $\lambda(u^i) = \text{const}$; a za neviskoznu *Burger*-ovu jednačinu je $\lambda(u^i) = u^i$, tj. karakteristična brzina zavisi od *samog rešenja* i jednaka je nepoznatoj promenljivoj. U daljem izlaganju se posmatra jednačina (4.8) i pretpostavlja se da je funkcija početnog uslova glatka kriva pa se može napisati da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial t} + \lambda(u^i) \frac{\partial u^i}{\partial x^i} &= 0, \\ \lambda(u^i) &= \mathcal{F}'(u^i), \quad u^i(x^i, 0) = u_0^i(x^i). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Burger-ova jednačina se može analizirati putem konstruisanja *karakteristika* (tj. karakterističnih krivi). Razmatraju se karakteristične krive $x = x(t)$, koje zadovoljavaju jednačinu (4.9) i definisane su u ravni prostor-vreme diferencijalnom jednačinom

$$\frac{dx^i}{dt} = \lambda(u^i), \quad x^i(0) = x_0^i. \quad (4.10)$$

Uvrštanjem izraza (4.10) u (4.9) se dobija da je totalni (materijalni) izvod nepoznate promenljive

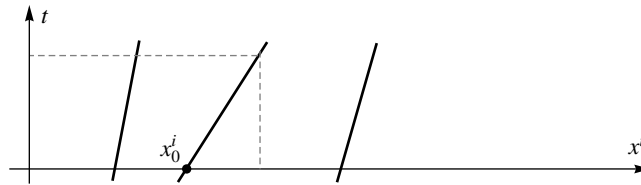
$$\frac{Du^i}{Dt} = \frac{\partial u^i}{\partial t} + \lambda(u^i) \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = 0.$$

Poslednje napisano znači da se promenljiva u^i ne menja duž karakterističnih linija, definisanih jednačinom (4.10). Dakle, tvrdi se da su karakteristične krive, u razmatranom slučaju, *prave linije*. Vrednost brzine duž svake karakteristične linije je jednaka vrednosti brzine u njenoj polaznoj tački, pa se može napisati da je

$$u^i(x^i, t) = u_0^i(x_0^i). \quad (4.11)$$

Na slici 16 se vidi tipičan izgled karakteristične krive, koja kreće iz polazne tačke x_0^i na x^i osi. Nagib karakteristične krive se može odrediti u njenoj polaznoj tački, što se može iskoristiti za formulisanje jednačine

$$x^i = x_0^i + \lambda(u_0^i(x_0^i)) t. \quad (4.12)$$

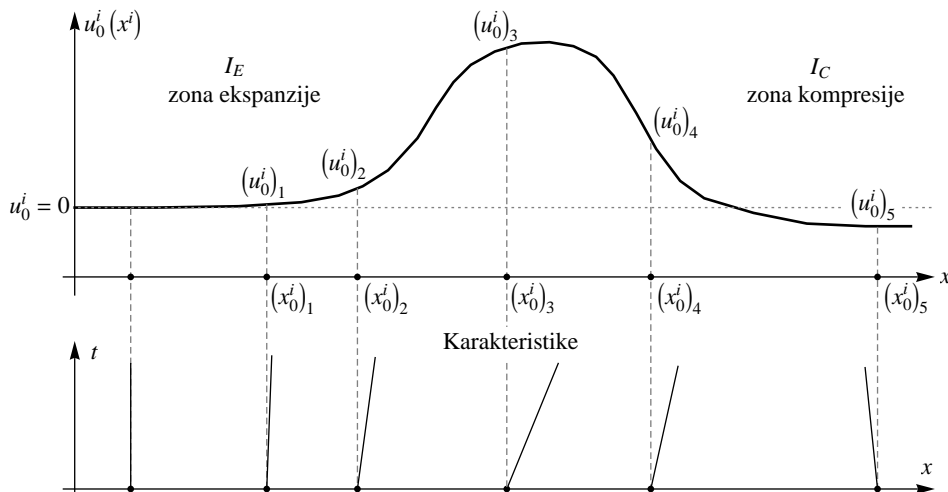


Slika 16: Tipičan izgled karakteristika u nelinearnoj hiperboličkoj jednačini

Jednačine (4.11) i (4.12) zadovoljavaju postavljeni problem formulisan sa (4.9). Međutim, dobijeno rešenje je *implicitno*, što se vidi uvrštanjem x_0^i iz (4.12) u (4.11), da bi se dobilo

$$u^i(x^i, t) = u_0^i(x^i - \lambda(u_0^i(x_0^i)) t). \quad (4.13)$$

Implicitnost se manifestuje u tome da se iz (4.11) pokušalo eliminisati x_0^i pomoću (4.12), ali je to opet unelo x_0^i u jednačinu, kao što se i vidi iz (4.13).



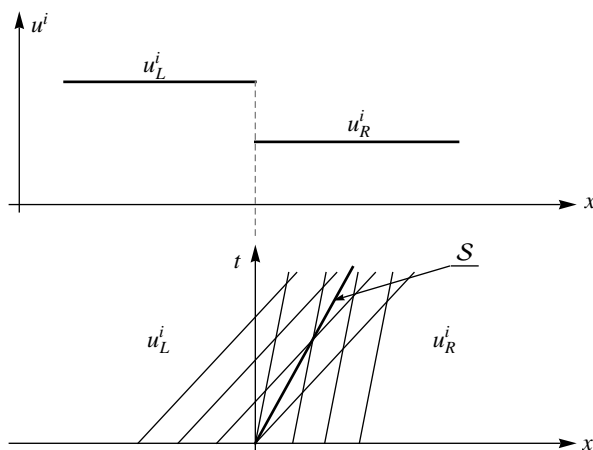
Slika 17: Deformisanje talasa usled delovanja nelinearne advekcije

Korisno je ponoviti da je u slučaju *linearne* advekcije, kada je brzina propagacije konstantna, rešenje jednako nepromenjenom početnom uslovu transliranom duž x^i ose. Međutim, u slučaju *nelinearne* advekcije brzina propagacije zavisi od rešenja, usled čega dolazi do *distorzije* početnog uslova, što je karakteristika nelinearnih sistema. Ovaj fenomen se može objasniti pomoću slike 17. Na gornjem delu je dat početni uslov u vidu glatke krive. Razmatra se *Burger*-ova jednačina, što znači da se povećavanjem brzine u^i , povećava i brzina propagacije $\lambda(u^i)$. Dakle, veće vrednosti $u_0^i(x^i)$ se propagiraju brže od manjih vrednosti $u_0^i(x^i)$.

Posmatraju se dva intervala sa slike 17 $I_E = [(x_0^i)_1, (x_0^i)_3]$ i $I_C = [(x_0^i)_3, (x_0^i)_5]$. U intervalu I_E se vrednost $(u_0^i)_3$ propagira brže od $(u_0^i)_2$, koji se opet propagira brže od $(u_0^i)_1$. Orijentacija odgovarajućih karakteristika na slici 17 odgovara gore iznetom stavu. Nakon određenog vremena će se raspored brzina u intervalu I_E transformisati u duži i ravniji raspored. Ovakav interval se naziva interval *ekspanzije* i ovde je $\partial\lambda/\partial x^i > 0$. Sa druge strane, interval I_C se naziva interval *kompresije* i ovde je $\partial\lambda/\partial x^i < 0$. Vrednost $(u_0^i)_3$ se propagira brže od $(u_0^i)_4$, koji se opet propagira brže od $(u_0^i)_5$, što se vidi iz orijentacije odgovarajućih karakterističnih linija sa slike 17. Kako vreme prolazi raspored brzina u intervalu kompresije će postati kraći i strmiji. Opisani proces dovodi do *preklapanja* (ili *prelamanja*) rasporeda brzina, što odgovara trenutku ukrštanja karakterističnih linija sa slike 17. Metodom karakteristika se može pratiti rešenje *samo do trenutka prelamanja talasa*, tj. do trenutka kada izvod $\partial u^i/\partial x^i$ dostigne beskonačnu vrednost, što se dešava u trenutku

$$t_b = \frac{-1}{\left. \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \right|_{x_0^i}^{\min}}, \quad (4.14)$$

gde $\left. \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \right|_{x_0^i}^{\min}$ predstavlja najmanju vrednost izvoda (tj. najveću negativnu vrednost). Prelamanje talasa u trenutku t_b se javlja upravo na karakterističnoj liniji koja polazi iz tačke x_0^i koja se javlja u jednačini (4.14), tj. x_0^i je tačka početnog uslova sa najmanjom vrednošću izvoda brzine propagacije.



Slika 18: Propagacija strmog čela talasa usled nelinearne advekcije

Na kraju se razmatra propagacija *strmog čela talasa* (slika 18). Strmo čelo može biti posledica početnog uslova ili može nastati usled deformacije početnog uslova kao što je to objašnjeno u prethodnom izlaganju. Brzina propagacije nelinearnom advekcijom se u ovom slučaju može odrediti iz *Rankine-Hugoniot*-ovog uslova

$$\Delta \mathcal{F} = \mathcal{S} \Delta u^i,$$

gde su navedene razlike definisane u skladu sa oznakama na slici 18 kao

$$\Delta \mathcal{F} = \mathcal{F}(u_R^i) - \mathcal{F}(u_L^i), \quad \Delta u^i = u_R^i - u_L^i.$$

§ § §

Nakon sticanja boljeg uvida u ponašanje nelinearne advekcije, razmatraju se jednačine (4.1) i (4.2), koje se rešavaju u advektivnom koraku ravanskog modela tečenja u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Na izvode po vremenu se primenjuje *Euler*-ova aproksimacija, koja se shodno metodi razlomljenih koraka svodi na

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^a = \frac{f^a - f^n}{\Delta t}.$$

Primenom metode karakteristika, potpuno analogno kao u uvodnom izlagnju ovog poglavlja, razmatrane jednačine se mogu napisati u obliku

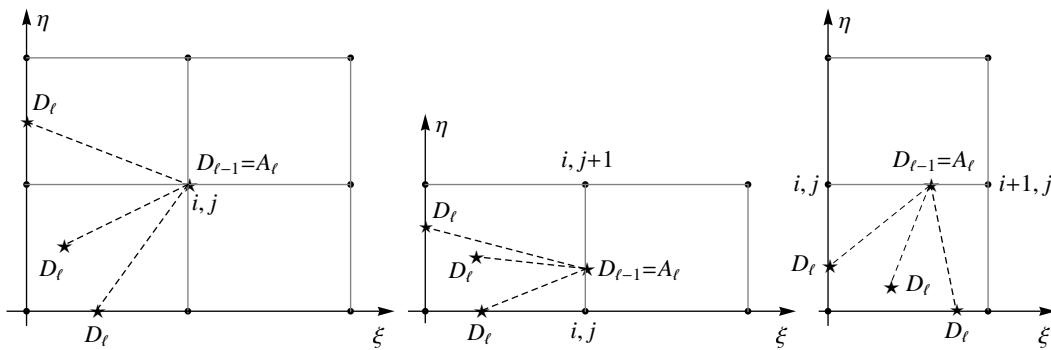
$$\frac{D\tilde{u}}{Dt} = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v}, \quad \frac{D\tilde{v}}{Dt} = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v},$$

duž trajektorije $\frac{d\xi}{dt} = \frac{\tilde{u}}{h_\xi}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\tilde{v}}{h_\eta}.$ (4.15)

Zbog efikasnosti proračuna usvojen je princip da se numerički model formuliše tako da se trajektorija može prostirati duž više računskih polja. Zbog ovoga se ona rastavlja na segmente sa indeksom $\ell = 1, 2, \dots, L$, pri čemu je jedan segment trajektorije definisan kao onaj njen deo koji se nalazi unutar *jednog* računskog polja i aproksimira se *pravom* linijom. Proračun trajektorije počinje od dolazne tačke A , koja je unapred poznata. Na slici 19 su prikazani segmenti trajektorije između dolazne A_ℓ i polazne D_ℓ tačke. Dolazna tačka segmenta ℓ je po definiciji polazna tačka prethodnog segmenta $\ell - 1$, pa se konstatuje da je

$$\begin{aligned} D_{\ell-1} &= A_\ell && \text{-tačka do koje stiže segment trajektorije } \ell, \\ D_\ell &&& \text{-tačka sa koje polazi segment trajektorije } \ell, \end{aligned}$$

uz usvojenu konvenciju o brojevima segmenata pri čemu je $\ell = 1$ prvi segment računajući od *dolazne tačke cele trajektorije* (slika 20).



Slika 19: Konvencija obeležavanja segmenta trajektorije

Ranije je pokazano da je primena metode karakteristika na jednačinu nelinearne advekcije *iterativnog* karaktera. Zbog ovoga se usvaja iterativno pravilo koje nalaže da se trajektorije računaju pomoću vrednosti brzina iz prethodne iteracije. Sa indeksom (p) se obeležavaju vrednosti iz prethodne, a sa ($p + 1$) vrednosti iz naredne iteracije i one se pišu na levu stranu promenljive. U nastavku se navodi predloženi iterativni algoritam.

1. Za vrednosti brzina u prvoj iteraciji se uzima prethodni vremeski trenutak.
2. Pomoću vrednosti brzina iz prethodne (p)-te iteracije se sračunaju koordinate trajektorije.
3. Duž trajektorije se integrale jednačine (4.15) i dobijaju se brzine za sledeću (tekuću) iteraciju ($p + 1$).
4. Vrednosti brzina sledeće iteracije postaju vrednosti brzina iz prethodne iteracije i algoritam se vraća na tačku 2. Iteracije se zaustavljaju kada se zadovolji zahtevana tačnost.

Geometrijski koeficijenti h_ξ i h_η se pri proračunu trajektorije računaju u srednjoj tački (segmenta) trajektorije M_ℓ . Smatra se da je tako sračunata vrednost reprezentativna za posmatrani segment. Takođe će se pokazati da su neophodne iteracije i tokom proračuna jednog segmenta trajektorije. Ove iteracije se obeležavaju indeksom (m) za prethodnu i ($m + 1$) za narednu iteraciju, ali se one pišu na desnoj strani promenljive.

Da bi se rešile jednačine za dve komponente brzine, prvo je potrebno odrediti koordinate linija duž kojih one važe. Radi postizanja ovog cilja, integrale se jednačine trajektorije iz (4.15) od polazne do dolazne tačke cele trajektorije.

$$\xi_{D_L} = \xi_{A_1} - \int_{D_L}^{A_1} \frac{\tilde{u}}{h_\xi} dt, \quad \eta_{D_L} = \eta_{A_1} - \int_{D_L}^{A_1} \frac{\tilde{v}}{h_\eta} dt$$

Integrali u poslednje dve jednačine se dele na segmente i rešavaju sukcesivno, počev od prvog segmenta (slika 20). Za numeričko integraljenje se koristi trapezno pravilo, pa se dobijaju jednačine koordinata polazne tačke segmenta trajektorije ℓ

$$\begin{aligned} {}^{(p)}\xi_{D_\ell}^{(m+1)} &= {}^{(p)}\xi_{A_\ell} - \frac{1}{2} \left[\frac{{}^{(p)}\tilde{u}_{D_\ell}^{(m)}}{{}^{(p)}(h_\xi)_{M_\ell}^{(m)}} + \frac{{}^{(p)}\tilde{u}_{A_\ell}^{(m)}}{{}^{(p)}(h_\xi)_{M_\ell}^{(m)}} \right] \left({}^{(p)}t_{A_\ell} - {}^{(p)}t_{D_\ell}^{(m+1)} \right), \\ {}^{(p)}\eta_{D_\ell}^{(m+1)} &= {}^{(p)}\eta_{A_\ell} - \frac{1}{2} \left[\frac{{}^{(p)}\tilde{v}_{D_\ell}^{(m)}}{{}^{(p)}(h_\eta)_{M_\ell}^{(m)}} + \frac{{}^{(p)}\tilde{v}_{A_\ell}^{(m)}}{{}^{(p)}(h_\eta)_{M_\ell}^{(m)}} \right] \left({}^{(p)}t_{A_\ell} - {}^{(p)}t_{D_\ell}^{(m+1)} \right), \end{aligned}$$

uz napomenu da je položaj dolazne tačke A_ℓ po definiciji unapred poznat. Preostaje da se odredi „vreme” polazne tačke posmatranog segmenta, tj. vreme kada fluidni delić ulazi u računsko polje u kojem se nalazi posmatrani segment trajektorije. Međutim, određivanje ove vrednosti nije trivijalno, jer se unapred ne zna položaj polazne tačke pošto ona zavisi od smera i intenziteta brzine u polaznoj i dolaznoj tački posmatranog segmenta. U nastavku se daju jednačine za razmatrano vreme, pri čemu je neophodno uzeti u obzir da li se dolazna tačka segmenta trajektorije nalazi u računskoj tački

$${}^{(p)}t_{D_\ell}^{(m+1)} = {}^{(p)}t_{A_\ell} - \min \left\{ \left| \frac{2 {}^{(p)}(h_\xi)_{M_\ell}^{(m)} \Delta \xi}{(p)\tilde{u}_{A_\ell} + (p)\tilde{u}_{D_\ell}^{(m)}} \right|, \left| \frac{2 {}^{(p)}(h_\eta)_{M_\ell}^{(m)} \Delta \eta}{(p)\tilde{v}_{A_\ell} + (p)\tilde{v}_{D_\ell}^{(m)}} \right| \right\},$$

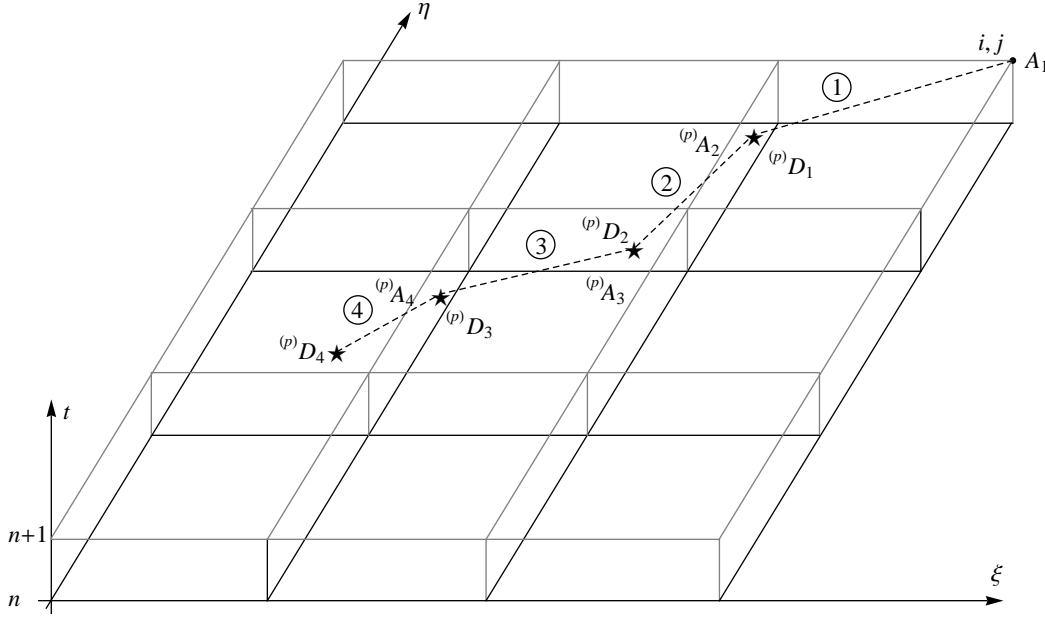
na η liniji

$${}^{(p)}t_{D_\ell}^{(m+1)} = {}^{(p)}t_{A_\ell} - \min \left\{ \left| \frac{2 {}^{(p)}(h_\xi)_{M_\ell}^{(m)} \Delta \xi}{(p)\tilde{u}_{A_\ell} + (p)\tilde{u}_{D_\ell}^{(m)}} \right|, \left| \frac{2 {}^{(p)}(h_\eta)_{M_\ell}^{(m)} ({}^{(p)}\eta_{A_\ell} - {}^{(p)}\eta_*)}{(p)\tilde{v}_{A_\ell} + (p)\tilde{v}_{D_\ell}^{(m)}} \right| \right\},$$

pri čemu $*$ uzima indeks i, j ili $i, j + 1$ u zavisnosti od smera i intenziteta \tilde{v} komponente brzine u polaznoj i dolaznoj tački segmenta (u saglasnosti sa slikom 19), odnosno na ξ liniji

$${}^{(p)}t_{D_\ell}^{(m+1)} = {}^{(p)}t_{A_\ell} - \min \left\{ \left| \frac{2 {}^{(p)}(h_\xi)_{M_\ell}^{(m)} ({}^{(p)}\xi_{A_\ell} - {}^{(p)}\xi_*)}{{}^{(p)}\tilde{u}_{A_\ell} + {}^{(p)}\tilde{u}_{D_\ell}^{(m)}} \right|, \left| \frac{2 {}^{(p)}(h_\eta)_{M_\ell}^{(m)} \Delta\eta}{{}^{(p)}\tilde{v}_{A_\ell} + {}^{(p)}\tilde{v}_{D_\ell}^{(m)}} \right| \right\},$$

pri čemu \star uzima indeks i, j ili $i + 1, j$ u zavisnosti od smera i intenziteta \tilde{u} komponente brzine u polaznoj i dolaznoj tački segmenta (u saglasnosti sa slikom 19).



Slika 20: Integraljenje duž trajektorije koja je podeljena na segmente

Kao što je to ranije rečeno, advektivni korak ravanskog hidrauličkog modela se računa iterativno, tj. iteriraju se sračunate vrednosti brzina. Potreba za ovim proizilazi iz nelinearnosti predmetnih jednačina. Zbog ovoga je svaka polazna tačka sračunata pomoću polja brzina iz prethodne (p)-te iteracije, kao što je to i naznačeno na slici 20. Međutim, radi lakšeg pisanja u nastavku se izostavlja oznaka za prethodnu iteraciju polja brzina (p), ali se svakako misli na te vrednosti, a predloženi iterativni algoritam i dalje važi.

Nakon ovoga se rešavaju jednačine advektivnog koraka za dve komponente brzine date sa (4.15). Materijalni izvodi koji se tu javljaju predstavljaju promenu \tilde{u} i \tilde{v} duž trajektorije tokom vremena $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ usled dejstva advektivnih članova dinamičke jednačine. Integraljenjem predmetnih jednačina duž ranije utvrđene trajektorije se dobija

$$\int_{D_L}^{A_1} D\tilde{u} = \int_{D_L}^{A_1} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right] Dt,$$

$$\int_{D_L}^{A_1} D\tilde{v} = \int_{D_L}^{A_1} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right] Dt.$$

Rešenje integrala na levoj strani je trivijalno, a integrali na desnoj strani se rastavljaju na segmente i rešavaju primenom trapeznog pravila. Algebarskim preuređivanjem se

na kraju dobija diskretizovana jednačina advektivnog koraka za komponentu brzine u ξ pravcu

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,j}^a - \tilde{u}_{D_L} &= \frac{t_{D_{L-1}} - t_{D_L}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_L} + \\ &+ \sum_{\ell=L-1}^2 \frac{t_{D_{\ell-1}} - t_{D_{\ell+1}}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_\ell} + \\ &+ \frac{t^{n+1} - t_{D_2}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_1} + \\ &+ \frac{t^{n+1} - t_{D_1}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{i,j}^a, \end{aligned}$$

odnosno diskretizovana jednačina advektivnog koraka za komponentu brzine u η pravcu

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i,j}^a - \tilde{v}_{D_L} &= \frac{t_{D_{L-1}} - t_{D_L}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_L} + \\ &+ \sum_{\ell=L-1}^2 \frac{t_{D_{\ell-1}} - t_{D_{\ell+1}}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_\ell} + \\ &+ \frac{t^{n+1} - t_{D_2}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_1} + \\ &+ \frac{t^{n+1} - t_{D_1}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{i,j}^a. \end{aligned}$$

Do ovog trenutka je prećutano da je za određivanje vrednosti brzine, geometrijskih koeficijenata i njihovih izvoda u polaznim i dolaznim tačkama segmenata trajektorije potrebna neka vrsta interpolacije po prostoru (i vremenu). Usvaja se primena lokalne kubne interpolacije po prostoru (*Hermite Cubic Interpolation*), odnosno linearne interpolacije po vremenu. Opravdanost primene navedenih postupaka se dodatno razmatra u poglavlju 6.1. Za nepoznate komponente brzine interpolacija po vremenu zahteva poznavanje tih vrednosti u sledećem (nepoznatom) vremenskom trenutku usled čega proračun postaje *implicitan* i po prostoru. Međutim, da bi se održao *eksplicitan* karakter proračuna po prostoru, u interpolacionim polinomima se koriste vrednosti brzina iz prethodne iteracije (p). Na ovaj način se izbegava sistem gde je neophodno simultano rešavati jednačine za nepoznatu u svim računskim tačkama domena. Dakle, radi preglednijeg pisanja se uvodi skraćeno obeležavanje (prilog B) za veličine koje su poznate iz prethodne (p)-te iteracije u skladu sa predloženim iterativnim algoritmom. Nakon ovoga se daju jednačine advektivnog koraka za dve komponente brzine napisane u obliku

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,j}^a - \tilde{u}_{D_L} &= \sum_{D_L}^{D_1} \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \Delta t + \\ &+ \Delta t_1 \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{i,j}^a, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{i,j}^a - \tilde{v}_{D_L} &= \sum_{D_L}^{D_1} \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \Delta t + \\ &+ \Delta t_1 \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{i,j}^a. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Jednačine (4.16) i (4.17) čine sistem od dve nelinearne algebarske jednačine sa dve nepoznate $\tilde{u}_{i,j}^a$ i $\tilde{v}_{i,j}^a$, koji se rešava *Newton-Raphson*-ovim iterativnim postupkom.

Poznato je da advektivni korak zahteva granične uslove samo na *uzvodnoj* granici, što proizilazi iz hiperboličkog karaktera predmetnih jednačina. Generalno, granični uslov može biti poznat jedinični protok (dve komponente), poznata kota slobodne površine vode ili poznata kriva protoka. Ako su poznate dve komponente jediničnog protoka, vrednosti brzina se dobijaju pomoću izraza

$$\tilde{u}_{i,j}^a = \frac{U_{i,j}^{n+1}}{d_{i,j}^{n+1}}, \quad \tilde{v}_{i,j}^a = \frac{V_{i,j}^{n+1}}{d_{i,j}^{n+1}}.$$

Za poznatu kotu slobodne površine vode, vrednosti brzina se dobijaju pomoću izraza

$$\tilde{u}_{i,j}^a = \frac{U_{i,j}^n}{(z_s)_{i,j}^{n+1} - (z_b)_{i,j}^{n+1}} = \frac{U_{i,j}^n}{d_{i,j}^{n+1}}, \quad \tilde{v}_{i,j}^a = \frac{V_{i,j}^n}{(z_s)_{i,j}^{n+1} - (z_b)_{i,j}^{n+1}} = \frac{V_{i,j}^n}{d_{i,j}^{n+1}}.$$

U slučaju poznate krive protoka, prosto se preuzimaju brzine iz prethodnog vremenskog koraka

$$\tilde{u}_{i,j}^a = \tilde{u}_{i,j}^n, \quad \tilde{v}_{i,j}^a = \tilde{v}_{i,j}^n.$$

Pošto je algoritam za proračun advektivnog koraka konstruisan tako da se trajektorija može prostirati kroz više računskih ćelija, u numeričkom pogledu nema ograničenja vremenskog koraka. Međutim, u uvodnom izlaganju ovog poglavlja je objašnjeno da metoda karakteristika važi samo do vremenskog trenutka *prelamanja* talasa. Trenutak prelamanja talasa se u ravanskom prostoru sa opštim krivolinijskim koordinatnim sistemom može odrediti jednačinom

$$t_b = \min \left(\frac{-1}{\lambda_{i,i}^{\min}}, \frac{-1}{\lambda_{j,j}^{\min}} \right),$$

pri čemu u usvojenom ortogonalnom krivolinijskom koordinatnom sistemu veličine

$$\lambda_{i,i}^{\min} = \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{v} \quad \text{i} \quad \lambda_{j,j}^{\min} = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u}$$

predstavljaju najmanje vrednosti izvoda (tj. najveću negativnu vrednost) u i , odnosno j pravcu. Najmanje vrednosti predmetnog izvoda se određuju pomoću polja brzina iz prethodnog vremenskog koraka a ne iz početnog uslova. Razlog za ovo se krije u tome da primena metode razlomljenih koraka podrazumeva da difuzioni i propagacioni koraci takođe vrše transformaciju polja brzina, pa do prelamanja talasa može doći samo tokom *jednog vremenskog koraka* usled delovanja članova *nelinearne advекcije* u dinamičkoj jednačini koji se rešavaju upravo u advektivnom koraku. Dakle, u numeričkom modelu se mora nametnuti da je $\Delta t \leq t_b$.

4.2.2. Difuzioni korak

Razmatraju se jednačine (4.3) i (4.4), koje se rešavaju u difuzionom koraku ravanškog modela tečenja u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Rezultati advektivnog koraka ulaze u difuzioni kao vrednosti iz *prethodnog računskog koraka* i one su unapred poznate. Na izvode po vremenu se primenjuje *Euler*-ova aproksimacija, koja se shodno metodi razlomljenih koraka svodi na

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^d = \frac{f^d - f^n}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^a = \frac{f^a - f^n}{\Delta t}.$$

Takođe se uvodi skraćeno obeležavanje za članove disperzije u jednačini (4.3)

$$\begin{aligned} C_{uu}^* &= \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta (u - \tilde{u})^2 dz, & C_{uv}^* &= \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz, \\ C_{uv}^{**} &= \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz, & C_{vv}^{**} &= \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} (v - \tilde{v})^2 dz, \end{aligned}$$

odnosno za članove disperzije u jednačini (4.4)

$$\begin{aligned} D_{uv}^* &= \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz, & D_{vv}^* &= \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi (v - \tilde{v})^2 dz, \\ D_{uv}^{**} &= \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} (u - \tilde{u}) (v - \tilde{v}) dz, & D_{uu}^{**} &= \frac{1}{d h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} (u - \tilde{u})^2 dz. \end{aligned}$$

Da bi se prethodno navedeni članovi kvantifikovali neophodno je usvojiti teorijski raspored brzina po dubini toka. Ovde se predlaže korišćenje *stepene funkcije* oblika

$$u(z) = \tilde{u} \frac{m+1}{m} \left(\frac{z - z_b}{d} \right)^{1/m}, \quad (4.18)$$

gde je m empirijski koeficijent čije se vrednosti kreću u granicama od 2 do 10 i može se proceniti pomoću jednačine

$$m = \kappa \frac{d^{1/6}}{n \sqrt{g}}.$$

Nakon ovoga je moguće raspored brzina (4.18) uvrstiti u jednačine za disperzione članove i rešiti integrale koji se u njima javljaju. Predmetni članovi se računaju pomoću veličina iz *prethodnog* vremenskog trenutka. Smatra se da je ovakav pristup dovoljno tačan, a ovime se dodatno ne opterećuje proračun u vidu implicitnosti sistema.

Difuzioni korak ravanskih jednačina strujanja vode u prirodnim aluvijalnim vodotocima zahteva i *model turbulencije* radi određivanja brojčane vrednosti *koeficijenta turbulentne viskoznosti*, koji je uveden jednačinom (3.52). Turbulencija proizvodi *vertložno strujanje*, koje se obično javlja pri visokim vrednostima *Reynolds*-ovog broja. Dimenzija vrtloga značajno varira, a vektori brzine u vrtlogu mogu imati proizvoljan pravac i veoma su neustaljenog karaktera. Najveći vrtlozi koji odgovaraju fluktuacijama male frekvencije su definisani graničnim uslovima strujnog polja i njihove dimenzije su istog reda veličine kao dimenzije samog toka. Najmanji vrtlozi koji odgovaraju fluktuacijama velike frekvencije su definisani viskoznim silama. Uglavnom je vrtložno strujanje velikih dimenzija odgovorno za transport količine kretanja i materije. Dakle, karakteristična brzina i dužina koji se unose u model turbulencije su parametri koji karakterišu upravo ovakvo strujanje. Najveći vrtlozi su u interakciji sa glavnim tokom, što za posledicu ima oduzimanje kinetičke energije od glavnog toka u korist vrtložnog strujanja velikih dimenzija. Ova energija se potom predaje vrtlozima sve manjih dimenzija dok na kraju ona prelazi u toplotnu energiju i biva izgubljena. Osnovna klasifikacija modela turbulencije se zasniva na kriterijumu da li se koristi koncept turbulentne viskoznosti ili ne. Međutim i ovi modeli mogu biti različiti. Najjednostavniji pristup podrazumeva *konstantnu vrednost* koeficijenta turbulentne viskoznosti za celo strujno polje. Takođe postoje modeli koji vrednost

turbulentne viskoznosti vezuju za veličine koje se *odnose na glavnu struju*, što znači da se pretpostavlja da dolazi do disipacije energije tamo gde se generiše vrtložno strujanje, tj. da *nema transporta* turbulencije. Složeniji modeli turbulencije koriste *transportne jednačine* u kojima figurišu veličine koje karakterišu turbulentno strujanje. Neki od njih koriste jednačinu transporta sa *jednim parametrom* koji karakteriše fluktuirajuće brzine, drugi podrazumevaju i transport *parametra dužine* koji karakteriše vrtložno strujanje.

Ovde se navodi model turbulencije za jednačine osrednjene po dubini toka, koji ne zahteva rešavanje transportne jednačine (*zero-equation model*). Vrednost koeficijenta turbulentne viskoznosti se može sračunati pomoću jednačine, koja je vezuje za parametre glavnog toka (Wu, 2008)

$$\tilde{\nu}_t = \kappa \frac{V_* d}{6}, \quad (4.19)$$

pri čemu se (ukupna) brzina trenja računa kao

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}.$$

Napon trenja na dnu se može odrediti pomoću uobičajenog kvadratnog zakona otpora, pa se konačno dobija jednačina za koeficijent turbulentne viskoznosti

$$\tilde{\nu}_t = \kappa \frac{d \sqrt{C_f (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)}}{6}.$$

Poslednja jednačina nije linearna ni eksplicitna u pogledu brzina, a da bi se zadržao linearni karakter jednačina difuzionog koraka, za sve nepoznate se uzimaju vrednosti iz *prethodnog* vremenskog trenutka.

$$(\tilde{\nu}_t)_{i,j}^a = (\tilde{\nu}_t)_{i,j}^d = (\tilde{\nu}_t)_{i,j} = \kappa \frac{d_{i,j}^m \sqrt{(C_f)_{i,j}^n \left[(\tilde{u}_{i,j}^n)^2 + (\tilde{v}_{i,j}^n)^2 \right]}}{6}$$

Nakon uvođenja modela turbulencije, sledi diskretizacija jednačina (4.3) i (4.4). Pošto se dubina računa u propagacionom koraku (jer je evidentno da upravo propagacioni korak ima presudni uticaj na ovu promenljivu), pri proračunu difuzije se koriste vrednosti dubina iz prethodnog vremenskog trenutka. Svi članovi se ponderišu po računskom koraku, za šta se koristi koeficijent ponderacije θ .

$$f = \theta f^d + (1 - \theta) f^a$$

Sledi diskretizacija predmetnih jednačina primenom *Crank-Nicolson*-ove šeme metode konačnih razlika (Crank i Nicholson, 1996). Pri ovome se sve poznate veličine grupišu na desnu stranu jednačina da bi se dobio koeficijent

$$G_{i,j} = \tilde{u}_{i,j}^a + \Delta t (A_1 + A_2 + A_3 - A_4) + \\ + \Delta t \left(-(C_{uu}^*)_{i,j}^n - (C_{uv}^*)_{i,j}^n - (C_{uv}^{**})_{i,j}^n + (C_{vv}^{**})_{i,j}^n \right)$$

u slučaju jednačine (4.3), odnosno koeficijent

$$F_{i,j} = \tilde{v}_{i,j}^a + \Delta t (B_1 + B_2 + B_3 - B_4) \\ + \Delta t \left(-(D_{uv}^*)_{i,j}^n - (D_{vv}^*)_{i,j}^n - (D_{uv}^{**})_{i,j}^n + (D_{uu}^{**})_{i,j}^n \right)$$

u slučaju jednačine (4.4). Izrazi za koeficijente A_1 , A_2 , A_3 i A_4 , odnosno B_1 , B_2 , B_3 i B_4 su dati u prilogu C.

Diskretizovane jednačine difuzionog koraka ravanskog modela tečenja čine implicitni sistem linearnih algebarskih jednačina. Ovaj sistem se rešava iterativno primenom *ADI* metode, pri čemu se on razdvaja na dva ortogonalna pravca, što čini suštinu postupka (Peaceman i Rachford, 1955; Hsieh i Yang, 2004). Sa indeksom (m) se obeležava vrednost promenljive u prethodnoj iteraciji, sa (*) se obeležava rezultat iteracije u ξ koordinatnom pravcu, a sa ($m+1$) rezultat iteracije u η koordinatnom pravcu. Dakle, jednačine za iteracije u ξ koordinatnom pravcu su date sa

$$\begin{aligned} P_i^{(*)} \tilde{u}_{i-1,j}^d + Q_i^{(*)} \tilde{u}_{i,j}^d + R_i^{(*)} \tilde{u}_{i+1,j}^d &= {}^{(m)}S_i, \\ L_i^{(*)} \tilde{v}_{i-1,j}^d + M_i^{(*)} \tilde{v}_{i,j}^d + N_i^{(*)} \tilde{v}_{i+1,j}^d &= {}^{(m)}O_i, \end{aligned} \quad (4.20)$$

dok su jednačine za iteracije u η koordinatnom pravcu su date sa

$$\begin{aligned} P_j^{(m+1)} \tilde{u}_{i,j-1}^d + Q_j^{(m+1)} \tilde{u}_{i,j}^d + R_j^{(m+1)} \tilde{u}_{i,j+1}^d &= {}^{(*)}S_j, \\ L_j^{(m+1)} \tilde{v}_{i,j-1}^d + M_j^{(m+1)} \tilde{v}_{i,j}^d + N_j^{(m+1)} \tilde{v}_{i,j+1}^d &= {}^{(*)}O_j. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Izrazi za koeficijente P , Q , R i S , odnosno L , M , N i O za oba koordinatna pravca su dati u prilogu C. Rešavanje navedenih jednačina po jednom pravcu (tj. po ξ ili po η koordinatnoj liniji) podrazumeva korišćenje *double-sweep* (*Thomas*-ovog) algoritma (Hirsch, 2007).

Pošto je izuzetno teško definisati fizički opravdane granične uslove za difuzione članove dinamičke jednačine, na granicama domena se prosto preuzimaju vrednosti brzina iz prethodnog računskog koraka (tj. iz advektivnog koraka).

4.2.3. Propagacioni korak

Razmatraju se jednačine (4.5), (4.6) i (4.7), koje se rešavaju u propagacionom koraku ravanskog modela tečenja u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Rezultati difuzionog koraka ulaze u propagacioni, kao vrednosti iz *prethodnog računskog koraka* i one su unapred poznate. Na izvode po vremenu se primenjuje *Euler*-ova aproksimacija, koja se shodno metodi razlomljenih koraka svodi na

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^d = \frac{f^d - f^n}{\Delta t}.$$

Sledi ponderisanje jednačina propagacionog koraka po vremenu. Napominje se da je promena koeficijenta trenja, kao i uglova između dna korita i koordinatnih pravaca u horizontalnoj ravni veoma spora, pa se ove veličine uzimaju iz prethodnog vremenskog trenutka kao poznate vrednosti.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^d}{\Delta t} &= -\frac{g}{h_\xi} \left[\theta \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d)^{n+1} + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d)^n \right] - \\ &- \frac{g}{2h_\xi} \left[\theta \left(\frac{d}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^{n+1} + (1 - \theta) \left(\frac{d}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^n \right] - \\ &- \frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\xi^b)^n} \left[\theta \left(\frac{\tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^{n+1} + (1 - \theta) \left(\frac{\tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^n \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}^{n+1} - \tilde{v}^d}{\Delta t} = & -\frac{g}{h_\eta} \left[\theta \frac{\partial}{\partial \eta} (z_b + d)^{n+1} + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial \eta} (z_b + d)^n \right] - \\ & -\frac{g}{2h_\eta} \left[\theta \left(\frac{d}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^{n+1} + (1 - \theta) \left(\frac{d}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^n \right] - \\ & -\frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\eta^b)^n} \left[\theta \left(\frac{\tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^{n+1} + (1 - \theta) \left(\frac{\tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^d \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} h_\xi h_\eta \frac{d^{n+1} - d^n}{\Delta t} + \theta \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \tilde{u}^{n+1} d^{n+1}) + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta \tilde{u}^n d^n) + \\ + \theta \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \tilde{v}^{n+1} d^{n+1}) + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi \tilde{v}^n d^n) = 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Princip rešavanja jednačina propagacionog koraka je da se iz (4.22) i (4.23) dobiju eksplicitni izrazi za brzine \tilde{u}^{n+1} i \tilde{v}^{n+1} , koji se potom uvrštaju u jednačinu kontinuiteta (4.24). Tako se dobija jedna jednačina sa jednom nepoznatom, tj. jedna jednačina sa nepoznatom dubinom. Članovi trenja se mogu linearizovati razvijanjem u *Taylor*-ov red, pa se algebarskim preuređivanjem dobija izraz za komponentu brzine u ξ koordinatnom pravcu

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{n+1} = \tilde{u}^d - \frac{g}{h_\xi} \frac{\Delta t}{c_\xi} \left[\theta \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d)^{n+1} + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial \xi} (z_b + d)^n \right] - \\ - \frac{g}{2h_\xi} \frac{\Delta t}{c_\xi} \left[\theta \left(\frac{d}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^{n+1} + (1 - \theta) \left(\frac{d}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^n \right] - \\ - \frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\xi^b)^n} \frac{\Delta t}{c_\xi} \left(\frac{\tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^d + \frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\xi^b)^n} \frac{\Delta t}{c_\xi} \theta \left(\frac{\tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d^2} \right)^d \Delta d, \end{aligned} \quad (4.25)$$

odnosno izraz za komponentu brzine u η koordinatnom pravcu

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{n+1} = \tilde{v}^d - \frac{g}{h_\eta} \frac{\Delta t}{c_\eta} \left[\theta \frac{\partial}{\partial \eta} (z_b + d)^{n+1} + (1 - \theta) \frac{\partial}{\partial \eta} (z_b + d)^n \right] - \\ - \frac{g}{2h_\eta} \frac{\Delta t}{c_\eta} \left[\theta \left(\frac{d}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^{n+1} + (1 - \theta) \left(\frac{d}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^n \right] - \\ - \frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\eta^b)^n} \frac{\Delta t}{c_\eta} \left(\frac{\tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^d + \frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\eta^b)^n} \frac{\Delta t}{c_\eta} \theta \left(\frac{\tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d^2} \right)^d \Delta d, \end{aligned} \quad (4.26)$$

gde su unapred poznati koeficijenti

$$c_\xi = 1 + \frac{C_f^n \Delta t \theta}{\cos(\varphi_\xi^b)^n} \left(\frac{2\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{d\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}} \right)^d, \quad c_\eta = 1 + \frac{C_f^n \Delta t \theta}{\cos(\varphi_\eta^b)^n} \left(\frac{\tilde{u}^2 + 2\tilde{v}^2}{d\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}} \right)^d.$$

Nakon ovoga, u cilju dobijanja eksplicitnih izraza za *jedinični protok* u ξ , odnosno η koordinatnom pravcu, jednačine (4.25) i (4.26) se množe sa dubinom $d^{n+1} = d^n + \Delta d$. Tokom množenja se zanemaruju male veličine višeg reda, pa se jednačine mogu napisati u sažetijem obliku za ξ koordinatni pravac

$$\tilde{u}^{n+1} d^{n+1} = \alpha_1 \frac{\partial \Delta d}{\partial \xi} + \beta_1 \Delta d + \gamma_1, \quad (4.27)$$

odnosno η koordinatni pravac

$$\tilde{v}^{n+1} d^{n+1} = \alpha_2 \frac{\partial \Delta d}{\partial \eta} + \beta_2 \Delta d + \gamma_2, \quad (4.28)$$

gde su koeficijenti α_1 , β_1 i γ_1 , odnosno α_2 , β_2 i γ_2 dati u prilogu D.

Poznato je da korišćenje jedinstvene računске mreže dovodi do numeričkih oscilacija pa se zbog toga koristi *smaknuta* mreža prikazana na slici 21. Dubina se računa u računskim tačkama glavne mreže, a dve komponente brzine, tj. odgovarajući jedinični protoci se računaju u računskim tačkama smaknute mreže. Upravo se iz ovog razloga vrednosti koeficijenata α , β i γ određuju na smaknutoj mreži. Dakle, u saglasnosti sa slikom 21, jednačina (4.27) se diskretizuje kao

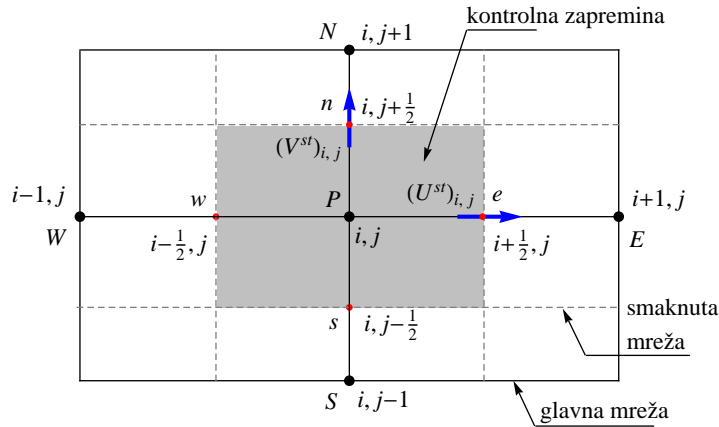
$$(\tilde{u} d)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = (\alpha_1^{st})_{i,j} (\Delta d_{i+1,j} - \Delta d_{i,j}) + (\beta_1^{st})_{i,j} [\psi_1 \Delta d_{i+1,j} + (1 - \psi_1) \Delta d_{i,j}] + (\gamma_1^{st})_{i,j},$$

uz napomenu da se koeficijenti α_1 , β_1 , γ_1 , kao i jedinični protok U javljaju samo u koordinatnom pravcu ξ , pa se za njih uvodi konvencija obeležavanja u smaknutim tačkama u potpunosti analogno kao za geometrijski koeficijent h_ξ u poglavlju 4.1.1. Radi lakšeg pisanja poslednja jednačina se preuređuje u oblik

$$(\tilde{u} d)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = (U^{st})_{i,j}^{n+1} = (a_1)_{i,j} \Delta d_{i+1,j} + (b_1)_{i,j} \Delta d_{i,j} + (c_1)_{i,j}, \quad (4.29)$$

gde su koeficijenti

$$\begin{aligned} (a_1)_{i,j} &= (\alpha_1^{st})_{i,j} + (\beta_1^{st})_{i,j} \psi_1, \\ (b_1)_{i,j} &= -(\alpha_1^{st})_{i,j} + (\beta_1^{st})_{i,j} (1 - \psi_1), \\ (c_1)_{i,j} &= (\gamma_1^{st})_{i,j}. \end{aligned}$$



Slika 21: Kontrolna zapremina oko tačke $P(i, j)$

U saglasnosti sa slikom 21, jednačina (4.28) se diskretizuje kao

$$(\tilde{v} d)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = (\alpha_2^{st})_{i,j} (\Delta d_{i,j+1} - \Delta d_{i,j}) + (\beta_2^{st})_{i,j} [\psi_2 \Delta d_{i,j+1} + (1 - \psi_2) \Delta d_{i,j}] + (\gamma_2^{st})_{i,j},$$

uz napomenu da se koeficijenti α_2 , β_2 , γ_2 , kao i jedinični protok V javljaju samo u koordinatnom pravcu η , pa se za njih uvodi konvencija obeležavanja u smaknutim tačkama

u potpunosti analogno kao za geometrijski koeficijent h_η u poglavlju 4.1.1. Radi lakšeg pisanja poslednja jednačina se preuređuje u oblik

$$(\tilde{v}d)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} = (V^{st})_{i,j}^{n+1} = (a_2)_{i,j} \Delta d_{i,j+1} + (b_2)_{i,j} \Delta d_{i,j} + (c_2)_{i,j}, \quad (4.30)$$

gde su koeficijenti

$$\begin{aligned} (a_2)_{i,j} &= (\alpha_2^{st})_{i,j} + (\beta_2^{st})_{i,j} \psi_2 \\ (b_2)_{i,j} &= -(\alpha_2^{st})_{i,j} + (\beta_2^{st})_{i,j} (1 - \psi_2), \\ (c_2)_{i,j} &= (\gamma_2^{st})_{i,j}. \end{aligned}$$

Napominje se da jednačine (4.29) i (4.30) predstavljaju vezu između jediničnih protoka i priraštaja dubine u diskretizovanom obliku. U saglasnosti sa do sada napisanim, konstatuje se da su jedinični protoci centrisani u smaknutim računskim tačkama.

Posmatra se jednačina kontinuiteta (4.24), koja važi za kontrolnu zapreminu prikazanu na slici 21. Diskretizacijom izvoda po prostoru u (4.24) se dobija

$$\begin{aligned} (h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j} \frac{\Delta d_{i,j}}{\Delta t} + \theta \left[(h_\eta \tilde{u}^{n+1} d^{n+1})_{i+\frac{1}{2},j} - (h_\eta \tilde{u}^{n+1} d^{n+1})_{i-\frac{1}{2},j} \right] + \\ + (1 - \theta) \left[(h_\eta \tilde{u}^n d^n)_{i+\frac{1}{2},j} - (h_\eta \tilde{u}^n d^n)_{i-\frac{1}{2},j} \right] + \\ + \theta \left[(h_\xi \tilde{v}^{n+1} d^{n+1})_{i,j+\frac{1}{2}} - (h_\xi \tilde{v}^{n+1} d^{n+1})_{i,j-\frac{1}{2}} \right] + \\ + (1 - \theta) \left[(h_\xi \tilde{v}^n d^n)_{i,j+\frac{1}{2}} - (h_\xi \tilde{v}^n d^n)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Uvrštavanjem izraza za jedinične protoke u smaknutim računskim tačkama (4.29) i (4.30) u (4.31) se dobija jedna jednačina sa jednom nepoznatom, koja ispisana za sve računске tačke razmatranog domena čini sistem linearnih jednačina. Za rešavanje pomenutog sistema se koristi *ADI* metoda (Peaceman i Rachford, 1955; Hsieh i Yang, 2004). Jednačina za nepoznatu dubinu (tačnije nepoznati priraštaj dubine) se razdvaja na dve jednačine, koje se rešavaju sukcesivno. Prva se odnosi na koordinatni pravac ξ i u njoj se vrednosti koje se odnose na η koordinatni pravac uzimaju kao *poznate* iz prethodne iteracije (prethodna iteracija se obeležava sa indeksom (m)). Rezultat iteracije u koordinatnom pravcu ξ su *međuvrednosti* obeležene sa indeksom (*), pa je odgovarajuća jednačina napisana u kompaktnom obliku

$$P_i \Delta d_{i-1,j}^{(*)} + Q_i \Delta d_{i,j}^{(*)} + R_i \Delta d_{i+1,j}^{(*)} = S_i, \quad (4.32)$$

gde su koeficijenti P_i , Q_i , R_i i S_i dati u prilogu D. Druga jednačina se odnosi na η koordinatni pravac i u njoj se vrednosti koje se odnose na koordinatni pravac ξ uzimaju kao rešenje dobijeno iz (4.32) (*međuvrednosti* koje su obeležene sa indeksom (*)). Rezultat iteracije u koordinatnom pravcu η su vrednosti *tekuće iteracije* obeležene sa indeksom ($m+1$), pa je odgovarajuća jednačina napisana u kompaktnom obliku

$$P_j \Delta d_{i,j-1}^{(m+1)} + Q_j \Delta d_{i,j}^{(m+1)} + R_j \Delta d_{i,j+1}^{(m+1)} = S_j, \quad (4.33)$$

gde su koeficijenti P_j , Q_j , R_j i S_j dati u prilogu D. Rešavanje navedenih linearnih algebarskih jednačina po jednom pravcu (tj. po ξ ili po η koordinatnoj liniji) podrazumeva korišćenje *double-sweep* (*Thomas-ovog*) algoritma (Hirsch, 2007).

Sledi analiza i način primene različitih tipova graničnih uslova. Preglednosti radi svakom od njih se dodeljuje odgovarajući broj.

Jednačina:	Opis:	Tip graničnog uslova:
$\tilde{u} d = 0$ i/ili $\tilde{v} d = 0$	-nepropusna (čvrsta) granica	(0)
$\tilde{u} d = f_u(t)$ ili $\tilde{v} d = f_v(t)$	-poznati jedinični protok	(1)
$\tilde{u} d = f_u(z_s)$ ili $\tilde{v} d = f_v(z_s)$	-veza jediničnog protoka i kote slobodne površine vode	(2)
$z_s = f_z(t)$	-poznata kota slobodne površine	(3)

U slučaju graničnih uslova (2) i (3) mora se izvršiti njihova *linearizacija* razvijanjem odgovarajuće funkcije u *Taylor*-ov red uz zanemarivanje malih veličina višeg reda. Prvo se razmatra veza jediničnog protoka i kote slobodne površine vode, npr. za komponentu brzine \tilde{u} bi to bilo

$$\tilde{u}^{n+1} d^{n+1} = f_u(z_s^n) + \left. \frac{\partial f_u}{\partial z_s} \right|_{z_s^n} \Delta d.$$

Nakon ovoga se daje linearizovana jednačina graničnog uslova koja podrazumeva poznatu kotu slobodne površine vode.

$$\Delta d = f_z(t^{n+1}) - z_b^{n+1} - d^n$$

Napominje se da je granični uslov (3) skalarnog tipa, dok je u slučaju graničnih uslova (0), (1) i (2) potrebno zadati dve komponente jediničnog protoka, i to u ξ i η koordinatnom pravcu.

Kada se pomoću iterativnog postupka definisanog jednačinama (4.32) i (4.33) sračunaju dubine, potrebno je kvantifikovati jedinične protoke u tačkama smaknute računске mreže. Za ovo se koriste jednačine (4.29) i (4.30). Međutim, ostali računski koraci ravanskog modela tečenja zahtevaju poznate brzine u *glavnim* računskim tačkama, pa je neophodno sračunati jedinične protoke i u njima da bi se deljenjem sa dubinom dobile tražene brzine.



Slika 22: Određivanje jediničnih protoka u glavnim tačkama računске mreže

Da bi se ostvario zahtevani cilj, ranije sračunati jedinični protoci u smaknutim tačkama se ponderišu pomoću geometrijskih koeficijenata (koji predstavljaju stvarna rastojanja između glavnih računskih tačaka). Primera radi, veličina $(U^{st})_{i-1, j}$ se ponderiše sa koeficijentom $(h_\xi^{st})_{i, j}$. Ovo na prvi pogled zvuči nelogično, međutim ako je $(h_\xi^{st})_{i, j} > (h_\xi^{st})_{i-1, j}$ onda će $(U^{st})_{i-1, j}$ biti bliže posmatranoj računskoj tački (i, j) , što znači da njemu treba dodeliti veću „težinu”, što se postiže množenjem sa većim geometrijskim koeficijentom a to je $(h_\xi^{st})_{i, j}$. Navode se izrazi za određivanje jediničnih protoka u glavnim računskim tačkama.

$$U_{i, j}^{n+1} = \frac{(h_\xi^{st})_{i-1, j} (U^{st})_{i, j}^{n+1} + (h_\xi^{st})_{i, j} (U^{st})_{i-1, j}^{n+1}}{(h_\xi^{st})_{i-1, j} + (h_\xi^{st})_{i, j}}$$

$$V_{i, j}^{n+1} = \frac{(h_\eta^{st})_{i, j-1} (V^{st})_{i, j}^{n+1} + (h_\eta^{st})_{i, j} (V^{st})_{i, j-1}^{n+1}}{(h_\eta^{st})_{i, j-1} + (h_\eta^{st})_{i, j}}$$

Evidentno je da se u jednačinama propagacionog koraka javljaju veličine iz prethodnog i narednog vremenskog trenutka, a koje se odnose na proračun nanosa i morfoloških promena, kao što je kota dna z_b ili gustina fluida ρ . Način povezivanja hidrauličkog proračuna i proračuna nanosa i morfoloških promena podrazumeva primenu jednostavnog iterativnog algoritma, koji se ovde neće detaljno iznositi. Međutim, u ovom delu izlaganja je neophodno reći da gustina fluida zavisi od koncentracije suspendovanog nanosa i da se može sračunati pomoći jednačine

$$\rho = \frac{\rho_w}{1 - \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_s} \sum_{k_s=1}^{K_s} \tilde{C}_{k_s}}.$$

4.3. Numeričko rešavanje jednačina transporta nanosa i deformacije korita

Pri numeričkom rešavanju jednačina transporta nanosa i deformacije korita je, kao i kod jednačina strujanja, presudan njihov matematički karakter, pa se i ovde koristi metoda *razlomljenih koraka* koju je formulisao Yanenko (1971), a na jednačine ponašanja nanosa u prirodnim aluvijalnim vodotocima primenili i drugi autori kao što su Spasojević i Holly (1990), Gessler et al. (1999), Hung et al. (2009), Budinski (2011), Isić et al. (2013), Budinski i Spasojević (2013). Međutim, pošto se ove jednačine znatno više oslanjaju na empirijske zavisnosti njihova analiza postaje znatno teža. Složena međuzavisnost između nanosnih procesa, kao i njihova uska povezanost sa parametrima strujanja zahteva da se jednačine pored čisto matematičkog aspekta posmatraju i sa *fizičkog* stanovišta ponašanja nanosa. Jasna analiza karaktera jednačina transporta nanosa i deformacije korita je osnovni preduslov za odabir adekvatne numeričke metode za njihovo rešavanje.

Pre svega, veoma je bitno primetiti jaku međuzavisnost između jednačina kojima se modelišu ponašanje nanosa. Vučeni nanos i suspendovani nanos su povezani preko člana izvora suspendovanog nanosa. Naime, količina nanosa koja se uvlači u suspenziju sa dna je definisana članom izvora suspendovanog nanosa, koji između ostalog zavisi i od frakcione zastupljenosti granulometrijskih intervala u aktivnom sloju. Sa druge strane promena kote dna i raspodela frakcija nanosa na dnu su povezani sa ponašanjem suspenzije, opet preko člana izvora suspendovanog nanosa. Navedeno ukazuje na potrebu da se jednačine kretanja nanosa i deformacije korita rešavaju *simultano*. Ranije je nagovešteno da određivanje matematičkog karaktera predmetnih jednačina predstavlja veoma složen proces. Zbog ovoga se nanosne promenljive⁶ vezuju za jednu od jednačina ponašanja nanosa i smatra se da upravo ta jednačina ima presudan uticaj na posmatranu promenljivu. Nakon usvajanja ovog principa, matematička analiza postaje nešto jednostavnija.

Frakciona zastupljenost pojedinih granulometrijskih intervala u aktivnom sloju se vezuje za jednačinu održanja mase nanosa u aktivnom sloju (3.70). Sa druge strane se smatra da na promenu kote dna presudan uticaj ima globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu (3.72). Pošto za fluks vučenog nanosa (koji se javlja u obe jednačine) ne postoji analitička zavisnost, određivanje matematičkog karaktera jednačina (3.70) i (3.72) je izuzetno teško. Iz ovog razloga se pribegava oslanjanju na fiziku procesa da bi se

⁶U nanosne promenljive spadaju koncentracija suspendovanog nanosa (za sve frakcije), frakciona zastupljenost granulometrijskog intervala u aktivnom sloju (za sve frakcije) i kota dna rečnog toka.

odredio karakter fluksa vučenog nanosa, a time i jednačina (3.70) i (3.72). U prethodnom izlaganju je rečeno da su proračuni tečenja i kretanja nanosa povezani jednostavnim iterativnim algoritmom, usled čega su parametri tečenja poznati tokom rešavanja nanosnih jednačina. Dakle, ako se unutar vremenskog koraka za proračun nanosa polje brzina smatra nepromenljivim, fizika stvari nameće zaključak da fluks vučenog nanosa ima advektivni karakter. Naime, zrna nanosa na dnu se nakon pokretanja kreću u pravcu srednjih brzina vode, pa se smatra da jednačine (3.70) i (3.72) imaju hiperbolički karakter.

Koncentracija suspendovanog nanosa za pojedine granulometrijske intervale se vezuje za jednačinu održanja mase suspendovanog nanosa (3.68). Ova jednačina je „klasična” jednačina advekcije-difuzije sa dodatnim članom izvora. Na jednačinu (3.68) se primenjuje metoda razlomljenih koraka zajedno sa *Boussinesq*-ovom pretpostavkom o gustini fluida, pa se dobijaju dve jednačine koje se rešavaju u dva sukcesivna računski koraka. Advektivni korak predstavlja promenu koncentracije suspendovanog nanosa usled dejstva advektivnih članova i člana izvora

$$\left(\frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial t}\right)^a + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \eta} = \frac{S_{k_s}}{\rho d}. \quad (4.34)$$

Uz uzimanje uticaja advekcije iz prethodnog računskog koraka, difuzioni korak predstavlja promenu koncentracije suspendovanog nanosa usled dejstva difuzionih članova. Ovde spadaju članovi usled uticaja turbulentne difuzije, kao i članovi disperzije koji su posledica osrednjavanja jednačina po dubini.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial t}\right)^d - \left(\frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial t}\right)^a &= \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_\eta}{h_\xi} \tilde{D}_t \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \xi} d \right] + \\ &+ \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_\xi}{h_\eta} \tilde{D}_t \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \eta} d \right] - \\ &- \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta (C - \tilde{C}) (u - \tilde{u}) dz - \\ &- \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi (C - \tilde{C}) (v - \tilde{v}) dz \end{aligned} \quad (4.35)$$

Nakon ovoga je veoma jednostavno odrediti matematički karakter prethodno navedenih izraza. Jednačina advektivnog koraka je hiperboličkog tipa, dok je jednačina difuzionog koraka eliptičnog tipa.

Član izvora suspendovanog nanosa, koji predstavlja glavni mehanizam razmene između nanosa u suspenziji i na dnu, je pridružen advektivnim članovima jednačine održanja mase suspendovanog nanosa. Usled ovoga difuzioni korak jednačine održanja mase suspendovanog nanosa postaje manje bitan za proces transporta nanosa i deformacije korita. Pored ovoga fluks suspendovanog nanosa usled difuzije je po svojoj prirodi manjeg intenziteta od fluksa suspendovanog nanosa usled advekcije. Ovo opravdava pristup rešavanja nanosnih jednačina koji podrazumeva da se u tzv. *advektivno-morfološkom* koraku simultano rešavaju jednačine održanja mase nanosa u aktivnom sloju (3.70) za sve granulometrijske intervale, globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu (3.72) i advektivni korak jednačina održanja mase suspendovanog nanosa (4.34) za sve granulometrijske intervale. Jednačine advektivno-morfološkog koraka su hiperboličkog tipa. U *difuzionom* koraku se rešavaju jednačine parabolikog tipa (4.35), takođe za sve granulometrijske intervale.

4.3.1. Advektivno-morfološki korak

Posmatra se advektivni korak jednačine održanja mase suspendovanog nanosa (4.34) dobijen primenom postupka etapnog rešavanja, koji se zasniva na tezi superpozicije lokalne promene zavisno promenljive veličine. Na izvod po vremenu se primenjuje *Euler*-ova aproksimacija, koja se shodno metodi razlomljenih koraka svodi na

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^a = \frac{f^a - f^n}{\Delta t}.$$

Primena većine šema metode konačnih razlika i metode konačnih zapremina na jednačinu linearne advekcije prouzrokuju numeričke oscilacije i numeričku difuziju (Isic et al., 2013). Međutim, metoda karakteristika obezbeđuje mogućnost značajnog poboljšanja tačnosti proračuna linearne advekcije. Holly i Preissmann (1977) su formulisali numeričku metodu za proračun advekcije koja se zasniva na metodi karakteristika i korišćenju lokalnog interpolacionog polinoma višeg reda. Ova metoda je implementirana i razvijana od strane više autora (Glass i Rodi, 1982; Holly i Usseglio-Polatera, 1984; Spasojevic i Holly, 1990; Yang i Hsu, 1991; Ahmad i Kothiyari, 2001; Tsai et al., 2006; Budinski, 2011; Isic et al., 2013) i koristi se i u ovom radu. Dakle, primenom metode karakteristika, razmatrana jednačina se može napisati u obliku

$$\frac{D\tilde{C}_{k_s}}{Dt} = \frac{S_{k_s}}{\rho d} \quad \text{duž trajektorije} \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\tilde{u}}{h_\xi}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\tilde{v}}{h_\eta}. \quad (4.36)$$

Proračun trajektorije je sada nešto jednostavniji nego u poglavlju 4.2.1. jer je u ovom slučaju strujno polje *unapred poznato*. Međutim, sve jednačine, principi i oznake (slike 19 i 20) u vezi sa određivanjem koordinata trajektorije izneti u poglavlju 4.2.1. važe i ovde, uz pojednostavljenje da sada nema potrebe za „globalnim” iteracijama koje su bile obeležene sa gornjim indeksom (p). Dakle, može se konstatovati da materijalni izvod u jednačini (4.36) predstavlja promenu koncentracije granulometrijskog intervala k_s suspendovanog nanosa duž trajektorije tokom vremena $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ usled zbirnog dejstva advektivnih članova i člana izvora suspendovanog nanosa. Integraljenjem razmatrane jednačine duž ranije utvrđene trajektorije se dobija

$$\int_{D_L}^{A_1} D\tilde{C}_{k_s} = \int_{D_L}^{A_1} \frac{S_{k_s}}{\rho d} Dt.$$

Rešenje integrala na levoj strani jednačine je trivijalno, a integral na desnoj strani se rastavlja na segmente (u skladu sa proračunom trajektorije i razlozima iznetim u poglavlju 4.2.1.) i rešava primenom uopštenog trapeznog pravila. Elementarnim algebarskim preuređivanjem se na kraju dobija diskretizovana jednačina advektivnog koraka održanja mase suspendovanog nanosa oblika

$$\begin{aligned} (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s})_{D_L} &= (1 - \theta) (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) \frac{(S_{k_s})_{D_L}}{\rho d_{D_L}} + \\ &+ \sum_{\ell=L-1}^2 [(1 - \theta) t_{D_{\ell-1}} + (2\theta - 1) t_{D_\ell} - \theta t_{D_{\ell+1}}] \frac{(S_{k_s})_{D_\ell}}{\rho d_{D_\ell}} + \\ &+ [(1 - \theta) t^{n+1} + (2\theta - 1) t_{D_1} - \theta t_{D_2}] \frac{(S_{k_s})_{D_1}}{\rho d_{D_1}} + \\ &+ \theta (t^{n+1} - t_{D_1}) \frac{(S_{k_s})_{i,j}^{n+1}}{\rho d_{i,j}^{n+1}}. \end{aligned}$$

Nakon uvođenja skraćenog obeležavanja datog u prilogu E, dobija se jednačina advektivnog koraka održanja mase suspendovanog nanosa

$$(\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s})_{DL} = \sum_{D_L}^{D_1} \frac{S_{k_s}}{\rho d} \Delta t + \Delta t_1 \theta \frac{(S_{k_s})_{i,j}^{n+1}}{\rho d_{i,j}^{n+1}}. \quad (4.37)$$

Određivanje vrednosti koncentracije suspendovanog nanosa u polaznoj tački svakog segmenta trajektorije zahteva primenu neke vrste interpolacije, jer se ove tačke po pravilu nalaze između računskih tačaka. Ako se polazna tačka segmenta trajektorije nalazi u prethodnom vremenskom trenutku t^n , onda se koristi lokalni kubni interpolacioni polinom. Sa druge strane, ako se predmetna tačka nalazi između prethodnog t^n i narednog (nepoznatog) vremenskog trenutka t^{n+1} , koristi se lokalni kubni interpolacioni polinom po prostoru odnosno linearni interpolacioni polinom po vremenu. Opravdanost primene navedenih postupaka se dodatno razmatra u poglavlju 6.1. Za određivanje članova izvora suspendovanog nanosa se u svim polaznim tačkama segmenata trajektorije koristi linearna interpolacija.

Ranije je rečeno da je advektivni korak jednačine održanja mase suspendovanog nanosa hiperboličkog tipa, pa zahteva granične uslove na uzvodnoj granici. Usled ovoga se koncentracije suspendovanog nanosa za sve granulometrijske intervale na uzvodnoj granici zadaju kao poznati granični uslov.

U nastavku se razmatraju jednačine održanja mase nanosa u aktivnom sloju (3.70) i globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu (3.72). Predmetne jednačine se diskretizuju integraljenjem unutar kontrolne zapremine formirane oko posmatrane računске tačke. Ovaj pristup daje iste algebarske jednačine kao primena metode konačnih razlika koja se zasniva na razvijanju funkcije u *Taylor*-ov red. U računskim tačkama uzvodne granice se vrednosti frakcione zastupljenosti svih granulometrijskih intervala, odnosno kota dna jednostavno zadaju kao granični uslovi. Usled ovoga uzvodna granica nije predmet daljeg razmatranja ponašanja nanosa. Navodi se diskretizovana jednačina održanja mase nanosa u aktivnom sloju

$$\begin{aligned} \rho_s (1 - p_s) \frac{(\beta_{k_s} E_a)_{i,j}^{n+1} - (\beta_{k_s} E_a)_{i,j}^n}{\Delta t} + \nabla_{\text{dis}}(\phi_{k_s}) &= \\ = -\theta (S_{k_s})_{i,j}^{n+1} - (1 - \theta) (S_{k_s})_{i,j}^n + [(S_f)_{k_s}]_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

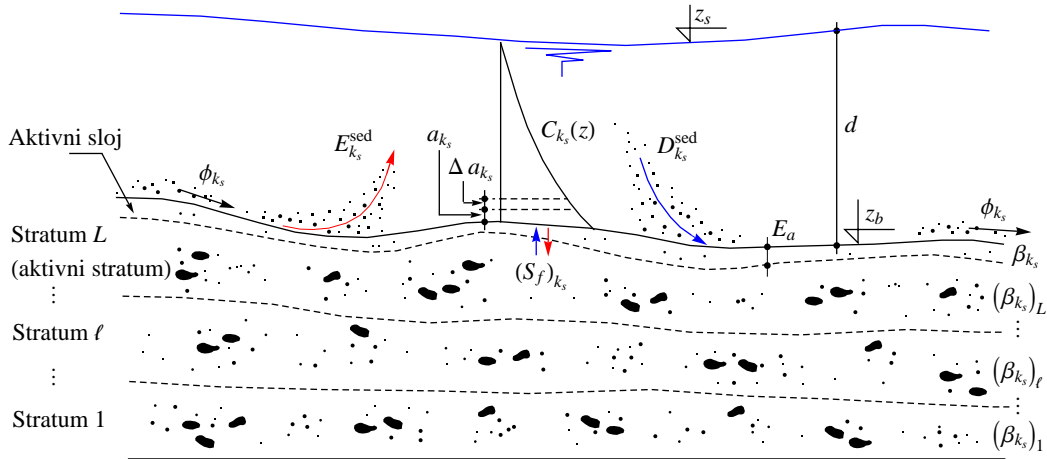
kao i globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu

$$\begin{aligned} \rho_s (1 - p_s) \frac{(z_b)_{i,j}^{n+1} - (z_b)_{i,j}^n}{\Delta t} + \sum_{k_s=1}^{K_s} [\nabla_{\text{dis}}(\phi_{k_s})] &= \\ = - \sum_{k_s=1}^{K_s} \left[\theta (S_{k_s})_{i,j}^{n+1} + (1 - \theta) (S_{k_s})_{i,j}^n \right], \end{aligned} \quad (4.39)$$

pri čemu $\nabla_{\text{dis}}(\phi_{k_s})$ označava diskretizovanu divergenciju fluksa vučenog nanosa koja je data u prilogu E.

Način modelisanja fluksa vučenog nanosa se zasniva na njegovom *fizičkom* karakteru. Naime, fluks vučenog nanosa koji prolazi kroz jednu od graničnih površina uočene kontrolne zapremine zavisi od komponente brzine upravne na tu graničnu površinu. Pošto se smatra da je frakciona zastupljenost granulometrijskih intervala konstantna u svakoj kontrolnoj zapremini, umesno je pretpostaviti da fluid koji struji kroz granične površine uočene kontrolne zapremine sa sobom nosi zrna nanosa iz *uzvodnih* kontrolnih zapremina.

Dakle, fluks vučenog nanosa u vremenskom trenutku t^{n+1} se računa koristeći parametre toka iz istog vremenskog trenutka t^{n+1} . Međutim, nanosne promenljive neophodne za određivanje predmetnog fluksa se vezuju za odgovarajuće uzvodne kontrolne zapremine i koriste se vrednosti iz prethodnog vremenskog trenutka t^n . Ovde opisani proračun fluksa vučenog nanosa još uvek zahteva uzvodni granični uslov, međutim, predloženi način modelisanja omogućava da jednačina održanja mase nanosa u aktivnom sloju, kao i globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu sadrže samo nepoznate nanosne promenljive iz posmatrane računске tačke. Na ovaj način se omogućava nezavisno rešavanje jednačina ponašanja nanosa od tačke do tačke računске mreže, sa čime se smanjuje vreme rada računara.



Slika 23: Princip modelisanja ponašanja nanosa

U ranijem izlaganju je rečeno da su jednačine ponašanja nanosa (4.37), (4.38) i (4.39) u jakoj međusobnoj sprezi, pa ih je neophodno simultano rešavati. Navodi se sistem algebarskih jednačina, koji čine jedna diskretizovana globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu

$$F^{\uparrow} = \rho_s (1 - p_s) \frac{(z_b)_{i,j}^{n+1} - (z_b)_{i,j}^n}{\Delta t} + \sum_{k_s=1}^{K_s} \left[\nabla_{\text{dis}}(\phi_{k_s}) + \theta (S_{k_s})_{i,j}^{n+1} + (1 - \theta) (S_{k_s})_{i,j}^n \right] = 0, \quad (4.40)$$

K_s diskretizovanih jednačina advektivnog koraka održanja mase suspendovanog nanosa

$$F_{k_s}^{\rightsquigarrow} = (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s})_{D_L} - \sum_{D_L} \frac{S_{k_s}}{\rho d} \Delta t - \Delta t_1 \theta \frac{(S_{k_s})_{i,j}^{n+1}}{\rho d_{i,j}^{m+1}} = 0, \quad (4.41)$$

i K_s diskretizovanih jednačina održanja mase nanosa u aktivnom sloju

$$F_{k_s}^{\curvearrowright} = \rho_s (1 - p_s) \frac{(\beta_{k_s} E_a)_{i,j}^{n+1} - (\beta_{k_s} E_a)_{i,j}^n}{\Delta t} + \nabla_{\text{dis}}(\phi_{k_s}) + \theta (S_{k_s})_{i,j}^{n+1} + (1 - \theta) (S_{k_s})_{i,j}^n - [(S_f)_{k_s}]_{i,j} = 0, \quad (4.42)$$

uz napomenu da su u gore navedenim algebarskim jednačinama nepoznate veličine

$$(z_b)_{i,j}^{n+1}, \quad (\beta_{k_s})_{i,j}^{n+1}, \quad (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a, \quad k_s = 1, \dots, K_s.$$

Nije beskorisno još jednom naglasiti da se divergencija fluksa vučenog nanosa određuje eksplicitno u pogledu nanosnih promenljivih. Takođe se napominje da se suma u jednačini (4.41) isto kvantifikuje eksplicitno. Poslednje navedeno se postiže tako što se pri određivanju člana izvora suspendovanog nanosa u polaznim tačkama segmenata trajektorije koristi linearna interpolacija po vremenu koja za trenutak t^{n+1} uzima vrednosti člana izvora suspendovanog nanosa iz prethodne iteracije. Dakle, dobija se sistem *nelinearnih* algebarskih jednačina koji je „eksplicitan” po prostoru jer se u njemu javljaju samo nepoznate nanosne promenljive za posmatranu računsku tačku i on se može napisati u obliku

$$F^\downarrow(\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}) = 0, \quad F_{k_s}^{\rightsquigarrow}(\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}) = 0, \quad F_{k_s}^{\curvearrowright}(\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}) = 0, \quad k_s = 1, \dots, K_s.$$

Za linearizaciju i rešavanje ovako definisanog nelinearnog sistema algebarskih jednačina se primenjuje *Newton-Raphson*-ov iterativni postupak. Smatra se da vektor nepoznatih u sledećoj iteraciji zadovoljava sistem, pa se može napisati da je

$$\begin{aligned} F^\downarrow((^{m+1})\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}) &= 0, \\ F_{k_s}^{\rightsquigarrow}((^{m+1})\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}) &= 0, \quad F_{k_s}^{\curvearrowright}((^{m+1})\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}) = 0, \quad k_s = 1, \dots, K_s. \end{aligned}$$

Nakon ovoga se gore navedeni sistem razvija u *Taylor*-ov red oko vrednosti $(^m)\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}$ iz čega se dobija sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F^\downarrow(\vec{\mathfrak{s}}^{n+1})}{\partial \vec{\mathfrak{s}}^{n+1}} \right|_{(^m)\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}} \cdot \Delta \vec{\mathfrak{s}} &= -F^\downarrow((^m)\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}), \\ \left. \frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}(\vec{\mathfrak{s}}^{n+1})}{\partial \vec{\mathfrak{s}}^{n+1}} \right|_{(^m)\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}} \cdot \Delta \vec{\mathfrak{s}} &= -F_{k_s}^{\rightsquigarrow}((^m)\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}), \quad k_s = 1, \dots, K_s, \\ \left. \frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}(\vec{\mathfrak{s}}^{n+1})}{\partial \vec{\mathfrak{s}}^{n+1}} \right|_{(^m)\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}} \cdot \Delta \vec{\mathfrak{s}} &= -F_{k_s}^{\curvearrowright}((^m)\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}), \quad k_s = 1, \dots, K_s, \end{aligned}$$

gde je priraštaj vektora nanosnih promenljivih definisan kao

$$\Delta \vec{\mathfrak{s}} = (^{m+1})\vec{\mathfrak{s}}^{n+1} - (^m)\vec{\mathfrak{s}}^{n+1}.$$

Radi kompaktnijeg zapisivanja, kao i lakšeg razumevanja odnosno programiranja razmatranog sistema jednačina uvodi se uniformno obeležavanje promenljivih koji se tiču nanosa. Napominje se da je $K_s = K_s^*$, tj. da je broj nanosnih promenljivih $2K_s + 1 = 2K_s^* + 1$.

z_b	odgovara promenljivoj nanosa	\mathfrak{s}_1	\Rightarrow	$\Delta \mathfrak{s}_1 = \Delta z_b$
\tilde{C}_1	odgovara promenljivoj nanosa	\mathfrak{s}_2	\Rightarrow	$\Delta \mathfrak{s}_2 = \Delta \tilde{C}_1$
β_1	odgovara promenljivoj nanosa	\mathfrak{s}_3	\Rightarrow	$\Delta \mathfrak{s}_3 = \Delta \beta_1$
		\vdots		
$\tilde{C}_{k_s^*}$	odgovara promenljivoj nanosa	$\mathfrak{s}_{2k_s^*}$	\Rightarrow	$\Delta \mathfrak{s}_{2k_s^*} = \Delta \tilde{C}_{k_s^*}$
$\beta_{k_s^*}$	odgovara promenljivoj nanosa	$\mathfrak{s}_{2k_s^*+1}$	\Rightarrow	$\Delta \mathfrak{s}_{2k_s^*+1} = \Delta \beta_{k_s^*}$
		\vdots		
$\tilde{C}_{K_s^*}$	odgovara promenljivoj nanosa	$\mathfrak{s}_{2K_s^*}$	\Rightarrow	$\Delta \mathfrak{s}_{2K_s^*} = \Delta \tilde{C}_{K_s^*}$
$\beta_{K_s^*}$	odgovara promenljivoj nanosa	$\mathfrak{s}_{2K_s^*+1}$	\Rightarrow	$\Delta \mathfrak{s}_{2K_s^*+1} = \Delta \beta_{K_s^*}$

Dakle, dobijen je sistem od $2K_s + 1$ linearnih algebarskih jednačina sa $2K_s + 1$ nepoznatih, koji se može napisati u matricnoj formi kao

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,2K_s^*} & a_{1,2K_s^*+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,2K_s^*} & a_{2,2K_s^*+1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,2K_s^*} & a_{3,2K_s^*+1} \\ \vdots & & & & \\ a_{2k_s,1} & a_{2k_s,2} & \dots & a_{2k_s,2K_s^*} & a_{2k_s,2K_s^*+1} \\ a_{2k_s+1,1} & a_{2k_s+1,2} & \dots & a_{2k_s+1,2K_s^*} & a_{2k_s+1,2K_s^*+1} \\ \vdots & & & & \\ a_{2K_s,1} & a_{2K_s,2} & \dots & a_{2K_s,2K_s^*} & a_{2K_s,2K_s^*+1} \\ a_{2K_s+1,1} & a_{2K_s+1,2} & \dots & a_{2K_s+1,2K_s^*} & a_{2K_s+1,2K_s^*+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta s_1 \\ \Delta s_2 \\ \vdots \\ \Delta s_{2k_s^*} \\ \Delta s_{2k_s^*+1} \\ \vdots \\ \Delta s_{2K_s^*} \\ \Delta s_{2K_s^*+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2k_s} \\ b_{2k_s+1} \\ \vdots \\ b_{2K_s} \\ b_{2K_s+1} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

pri čemu su svi članovi sistema dati u prilogu E. Invertovanjem matrice (4.43) nekom od numeričkih metoda (Carnahan et al., 1969) se dobija rešenje za priraštaje nanosnih promenljivih u skladu sa *Newton-Raphson*-ovim iterativnim postupkom. Primena iterativnog postupka se ponavlja dok se ne zadovolji zahtevana tačnost proračuna.

Izlaganje o modelisanju ponašanja nanosa u prirodnim aluvijanim vodotocima, kao i njihovo rešavanje do sada nije obuhvatalo empirijske izraze za kvantifikaciju pojedinih veličina koje se javljaju u jednačinama (4.40), (4.41) i (4.42). Ovakav pristup omogućava slobodno biranje potrebnih empirijskih zavisnosti, pri čemu sam numerički postupak ostaje nezavistan od istih. U nastavku slede empirijske zavisnosti koje se koriste u ovom radu.

§ § §

Za brzinu tonjenja se koriste empirijske zavisnosti koje su nastale razmatranjem relativnog kretanja čestice nanosa u neograničenoj zapremini mirne vode. Korišćenje ovih formula u modelu koji podrazumeva neustaljeno tečenje u prirodnim vodotocima unosi nepoznatu grešku zbog uticaja homogene turbulencije, kao i turbulentnih „događaja” u blizini dna. Međutim, smatra se da formule za brzinu tonjenja čestica nanosa u mirnoj vodi predstavljaju dovoljno tačno *matematičko očekivanje* ove veličine. Navode se predmetni obrasci na osnovu istraživanja autora van Rijn (1984b)

$$w_{k_s}^\downarrow = \frac{(\varrho_s - 1) g D_{k_s}^2}{18 \nu}, \quad D_{k_s} < 1 \cdot 10^{-4} m,$$

$$w_{k_s}^\downarrow = \frac{10 \nu}{D_{k_s}} \left\{ \left[1 + \frac{0.01 (\varrho_s - 1) g D_{k_s}^3}{\nu^2} \right]^{0.5} - 1 \right\}, \quad 1 \cdot 10^{-4} m \leq D_{k_s} < 1 \cdot 10^{-3} m,$$

$$w_{k_s}^\downarrow = 1.1 [(\varrho_s - 1) g D_{k_s}]^{0.5}, \quad D_{k_s} \geq 1 \cdot 10^{-3} m,$$

odnosno istraživanja autora Wu i Wang (2006)

$$w_{k_s}^\downarrow = \frac{M_w \nu}{N_w D_{k_s}} \left[\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{4 N_w}{3 M_w^2} (D^*)_{k_s}^3 \right)^{1/n_w}} - \frac{1}{2} \right]^{n_w},$$

gde je bezdimenzionalni prečnik zrna definisan kao

$$(D^*)_{k_s} = D_{k_s} \left[\frac{(\varrho_s - 1) g}{\nu^2} \right]^{1/3},$$

dok su ostali koeficijenti dati u funkciji *Corey*-ovog koeficijenta oblika zrna nanosa za čiju vrednost se može uzeti $S_{co} = 0.7$ (Cheng, 1997).

$$M_w = 53.5 \exp(-0.65 S_{co}), \quad N_w = 5.65 \exp(-2.5 S_{co}), \quad n_w = 0.7 + 0.9 S_{co}$$

$$\S \quad \S \quad \S$$

Pri proračunu kretanja nanosa koeficijent trenja na dnu mora da odslikava granulometrijski sastav mešavine nanosa u aktivnom sloju, pa se ova veličina računa kao

$$C_f = \frac{g}{C_{ch}^2},$$

pri čemu se za *Chézy*-jev koeficijent trenja, koji se zasniva na logaritamskom zakonu brzine i važi za hidraulički hrapavo dno, koristi jednačina (van Rijn, 1984a)

$$C_{ch} = 18 \log \left(\frac{12 d}{3 D_{90}} \right).$$

\S \quad \S \quad \S

Teorijski kapacitet fluksa vučenog nanosa se računa po obrazcu van Rijn (1984a). Ovde se navode jednačine za ξ koordinatni pravac, uz napomenu da je proračun predmetnog fluksa za η koordinatni pravac potpuno analogan ovde navedenom postupku.

$$(\phi_{\xi}^t)_{k_s} = \rho_s \sqrt{(\varrho_s - 1) g} D_{k_s}^{1.5} 0.053 \frac{T_{k_s}^{2.1}}{(D^*)_{k_s}^{0.3}}$$

U poslednjoj jednačini je bezdimenzionalna brzina trenja data sa

$$T_{k_s} = \frac{(u_*)^2 - (V_*^{cr})_{k_s}^2}{(V_*^{cr})_{k_s}^2},$$

gde su brzina trenja za koordinatni pravac ξ , odnosno kritična brzina trenja po *Shields*-u redom definisani kao

$$u_* = \tilde{u} \sqrt{C_f}, \quad (V_*^{cr})_{k_s} = \sqrt{\Theta_{k_s} g (\varrho_s - 1) D_{k_s}}.$$

Shields-ov broj se određuje u funkciji bezdimenzionalnog prečnika zrna po izrazima

$$\begin{aligned} \Theta_{k_s} &= 0.24 (D^*)_{k_s}^{-1} & (D^*)_{k_s} &\leq 4, \\ \Theta_{k_s} &= 0.14 (D^*)_{k_s}^{-0.64} & 4 < (D^*)_{k_s} &\leq 10, \\ \Theta_{k_s} &= 0.04 (D^*)_{k_s}^{-0.1} & 10 < (D^*)_{k_s} &\leq 20, \\ \Theta_{k_s} &= 0.013 (D^*)_{k_s}^{0.29} & 20 < (D^*)_{k_s} &\leq 150, \\ \Theta_{k_s} &= 0.056 & (D^*)_{k_s} &> 150. \end{aligned}$$

Teorijski fluks vučenog nanosa, koji u svojoj izvornoj formi važi za *uniformni* nanos, je primenljiv samo u slučajevima kada je transport vučenog nanosa dominantan. Međutim, kada je struja intenzivnija, usled čega je transport suspendovanog nanosa značajan, predmetna formula daje nerealno velike vrednosti. U stvarnosti, deo vučenog nanosa odlazi u suspenziju (što je obuhvaćeno članom izvora suspendovanog nanosa). Zbog ovoga je neophodno redukovati teorijski fluks vučenog nanosa. van Rijn (1984b) je definisao

koeficijent alokacije kao odnos fluksa suspendovanog i ukupnog nanosa, pri čemu je vrednost ovog koeficijenta data kao funkcija odnosa brzine trenja i brzine tonjenja. Ranije je rečeno, što važi i ovde, da brzina trenja predstavlja intenzitet turbulencije na dnu, što kao posledicu ima uvlačenje nanosa u suspenziju. Brzina tonjenja predstavlja deponovanje, što kao posledicu ima smanjenje količine nanosa koji se kreće u vidu suspenzije. Shodno ovome, teorijski fluks se redukuje pomoću koeficijenta alokacije po obrazcu

$$(1 - \gamma_{k_s}) (\phi_\xi^t)_{k_s}.$$

Za analitičko opisivanje koeficijenta alokacije vučenog nanosa se može koristiti sledeći obrazac

$$\begin{aligned} \frac{u_*}{w_{k_s}^\downarrow} < 0.4 & \quad \gamma_{k_s} = 0, \\ 0.4 \leq \frac{u_*}{w_{k_s}^\downarrow} < 10 & \quad \gamma_{k_s} = 0.25 + 0.325 \ln \left(\frac{u_*}{w_{k_s}^\downarrow} \right), \\ \frac{u_*}{w_{k_s}^\downarrow} \geq 10 & \quad \gamma_{k_s} = 1. \end{aligned}$$

Konstatuje se da napisane jednačine daju tendenciju koja je fizički opravdana. Za male vrednosti odnosa $u_*/w_{k_s}^\downarrow$ se dobija mala vrednost koeficijenta alokacije, pa se nanos uglavnom kreće u vidu vučenog nanosa, a za velike vrednosti $u_*/w_{k_s}^\downarrow$ se dobija vrednost koeficijenta alokacije bliska jedinici, što znači da deo nanosa iz fluksa $\phi_{k_s}^t$ odlazi u suspenziju. Efekti skrivanja sitnijih čestica iza krupnijih zrna nanosa unose se u proračun transporta nanosa i deformacije korita empirijskim izrazom predloženim od strane autora Karim et al. (1987)

$$\iota_{k_s} = \left(\frac{D_{k_s}}{D_{50}} \right)^{0.85}.$$

Na samom kraju se fluks vučenog nanosa mora redukovati u skladu sa zastupljenošću odgovarajućeg granulometrijskog intervala u aktivnom sloju. Dakle, konačni izraz za fluks vučenog nanosa frakcije k_s za koordinatni pravac ξ je (Spasojevic i Holly, 1990; García, 2008; Budinski, 2011)

$$(\phi_\xi)_{k_s} = (1 - \gamma_{k_s}) \iota_{k_s} \beta_{k_s} (\phi_\xi^t)_{k_s}.$$

§ § §

Proces razmene suspendovanog materijala sa rečnim dnom obuhvaćen je članom izvora suspendovanog nanosa, koji predstavlja masu suspendovanih čestica jednog granulometrijskog intervala uvučenih u suspenziju i deponovanih kroz elementarnu površinu (tj. graničnu površinu računске ćelije). Većina modela, koji u sebi sadrže nanosne procese, fluks deponovanja za neravnotežne uslove transporta nanosa modelišu kao advektivni fluks usled tonjenja zrna usmeren na dole sračunat pomoću neravnotežne koncentracije dobijene iz samog proračuna nanosa (Shimizu et al., 1990; Spasojevic i Holly, 1990; Bui et al., 1998; Rodi, 2000; Wu et al., 2000). Međutim, određivanje masenog fluksa uvlačenja nanosa u suspenziju za neravnotežne uslove je daleko komplikovaniji poduhvat. Jedan pristup je da se ovaj fluks modeliše analogno deponovanju korišćenjem brzine tonjenja zrna i „reprezentativne” koncentracije pri dnu koja oslikava proces uvlačenja zrna u suspenziju usled turbulencije (Spasojevic i Holly, 1990; Garcia i Parker, 1991; Lin i Falconer, 1996; Bui et al., 1998; Rodi, 2000; Wu et al., 2000). Drugi pristup, koji se primenjuje i u ovom radu, je modelisanje fluksa uvlačenja nanosa u suspenziju pomoću gradijenta

koncentracije (Brors, 1999; Gessler et al., 1999; Budinski, 2011; Budinski i Spasojević, 2013), tj.

$$S_{k_s} = -D_t \left. \frac{\partial (\rho C_{k_s})}{\partial z} \right|_{z_b} - \rho C_{k_s} w_{k_s}^\downarrow \Big|_{z_b}.$$

Osnovni princip razmatranog koncepta je da se suspendovani nanos prostire između slobodne površine vode i rastojanja δ od dna i da je njen raspored opisan *Rouse*-ovom krivom. Koncentracija nanosa ispod δ je posledica trenja po dnu i može se utvrditi jednim od empirijskih izraza. Nakon diskretizacije poslednje jednačine pomoću metode konačnih razlika dobija se

$$S_{k_s} = -\rho D_t|_{z=\delta} \frac{(C_\delta)_{k_s} - (C_a)_{k_s}}{\Delta a_{k_s}} - \rho w_{k_s}^\downarrow (C_\delta)_{k_s}.$$

Dakle, *ravnotežna* koncentracija nanosa $(C_a)_{k_s}$ se računa na rastojanju a_{k_s} od dna, a *neravnotežna* koncentracija nanosa $(C_\delta)_{k_s}$ na rastojanju δ od dna. Razlika ove dve položajne kote je $\Delta a_{k_s} = \delta - a_{k_s}$. Napominje se da veličine δ i a_{k_s} postaju parametri kalibracije modela ponašanja nanosa.

U nastavku se daje empirijski izraz ravnotežne koncentracije nanosa na rastojanju a_{k_s} od dna korita (van Rijn, 1984b), modifikovan tako da se uzme u obzir dostupnost zrna nanosa posmatranog granulometrijskog intervala u aktivnom sloju

$$(C_a)_{k_s} = 0.015 \beta_{k_s} \frac{D_{k_s}}{a_{k_s}} \frac{T_{k_s}^{1.5}}{(D_*)_{k_s}^{0.3}},$$

uz napomenu da se u ovom slučaju brzina trenja, koja se javlja u T_{k_s} , računa pomoću vektora *ukupne* brzine. Poslednja jednačina se može napisati u nešto sažetijoj formi kao

$$(C_a)_{k_s} = \vartheta_{k_s}^{\text{sus}} \beta_{k_s} D_{k_s}^{0.7} T_{k_s}^{1.5},$$

gde je poznat koeficijent

$$\vartheta_{k_s}^{\text{sus}} = \frac{0.015 \nu^{0.2}}{a_{k_s} [(\varrho_s - 1) g]^{0.1}}.$$

Nakon ovoga se razmatra neravnotežna koncentracija na rastojanju δ od dna korita (Wu, 2008). Navodi se *Rouse*-ova jednačina za raspodelu suspendovanog nanosa po vertikali, koja je izvedena za uslove *stabilne* suspenzije

$$\frac{C_{k_s}}{(C_\delta)_{k_s}} = \left(\frac{d - z_b^\uparrow}{z_b^\uparrow} \frac{\delta}{d - \delta} \right)^{z_{k_s}^*},$$

pri čemu je *Rouse*-ov broj (suspenzioni broj) definisan sa

$$z_{k_s}^* = \frac{(\sigma_t)_{k_s} w_{k_s}^\downarrow}{\kappa V_*}.$$

Schmidt-ov broj se može odrediti pomoću zavisnosti

$$\frac{1}{(\sigma_t)_{k_s}} = 1 + 2 \left(\frac{w_{k_s}^\downarrow}{u_*} \right)^2 \quad \text{za } 0.1 < \frac{w_{k_s}^\downarrow}{u_*} < 1,$$

$$(\sigma_t)_{k_s} = 1 \quad \text{za } 0.1 \geq \frac{w_{k_s}^\downarrow}{u_*} \geq 1.$$

Integraljenjem *Rouse*-ove krive od δ do dubine d se dobija jednačina koja vezuje koncentraciju nanosa na rastojanju δ od dna korita za koncentraciju suspendovanog nanosa osrednjenu po dubini toka pomoću jednačine

$$(C_\delta)_{k_s} = v_{k_s}^{\text{dep}} \tilde{C}_{k_s},$$

gde je poznat koeficijent

$$v_{k_s}^{\text{dep}} = \frac{d - \delta}{\int_{\delta}^d \left(\frac{d - z_b^\uparrow}{z_b^\uparrow} \frac{\delta}{d - \delta} \right)^{z_{k_s}^*} dz_b^\uparrow}.$$

Korisno je još jednom napomenuti da je koncentracija nanosa na rastojanju δ od dna sračunata za neravnotežno stanje. Ovo na prvi pogled deluje zbunjujuće jer je pri ovoj korišćenoj *Rouse*-ova kriva za koju se pouzdano zna da važi za ravnotežne uslove. Međutim, ne sme se ispustiti iz vida da *Rouse*-ova kriva ovde nije vezana za nekakvu ravnotežnu koncentraciju pri dnu (kao što je to uobičajeno), nego ona služi da se iz sračunate (neravnotežne) koncentracije suspendovanog nanosa dobije koncentracija na rastojanju δ od dna korita koja onda takođe mora biti neravnotežna (Bui et al., 1998, 2004). Koeficijent turbulentne difuzije se određuje pomoću pretpostavke o njegovom paraboličnom rasporedu po dubini toka, tj.

$$D_t|_{z_b^\uparrow} = \frac{1}{(\sigma t)_{k_s}} \kappa u_* z_b^\uparrow \left(1 - \frac{z_b^\uparrow}{d} \right).$$

Preglednosti radi, navodi se konačni izraz za član izvora suspendovanog nanosa

$$S_{k_s} = -\rho \left\{ D_t|_{z_b^\uparrow=\delta} \frac{v_{k_s}^{\text{dep}} \tilde{C}_{k_s} - \beta_{k_s} v_{k_s}^{\text{sus}} D_{k_s}^{0.7} T_{k_s}^{1.5}}{\Delta a_{k_s}} + w_{k_s}^\downarrow v_{k_s}^{\text{dep}} \tilde{C}_{k_s} \right\}.$$

§ § §

Vertikalno pomeranje kote dna je posledica kretanja nanosnog materijala, što direktno utiče kako na aktivni sloj, tako i na stratume ispod aktuelne kote dna. Dinamika, intenzitet i karakter ovih promena, koje pored promene same kote dna istovremeno menjaju i njegov sastav, prvenstveno zavisi od trenutno aktuelnog nanosnog procesa. Ukoliko se radi o eroziji, nanosni materijal se ispire sa dna, zbog čega dolazi do spuštanja kote dna i mogućeg aktiviranja materijala u stratumima. Sa druge strane, ako je dominantan proces deponovanja nanosa na rečno dno, postojeća kota dna se pomera vertikalno naviše, formirajući nove stratume koji se ponovo mogu aktivirati prilikom erozije.

Kao što je to navedeno u poglavlju 3.3.2., aktivni sloj se sastoji od zrna nanosa koja čine homogenu mešavinu i usled toga su sva podjednako izložena uticaju toka. Tokom procesa erozije rečnog dna sitnije frakcije se prve uvlače u suspenziju, povećavajući time procenat krupnozrnih čestica na dnu što prouzrokuje redukciju intenziteta ovog procesa. Uzimajući u obzir ovakvo ponašanje nanosa pri eroziji, gde debljina aktivnog sloja zavisi od intenziteta i vremena trajanja procesa erozije, autori Benett i Nordin (1977) su predložili vezivanje debljine aktivnog sloja za intenzitet erozije u vidu linearne funkcije. Originalni izraz je dodatno modifikovan tako da debljina aktivnog sloja ne bude manja od debljine armirajućeg sloja po autoru Borah (1982), čime se dobija jednačina

$$E_a^{n+1} = \frac{1}{\sum_{k_s=A}^{K_s} \beta_{k_s}} \frac{D_A}{1 - p_s} - C_{E_a} (z_b^{n+1} - z_b^n),$$

koja je korišćena od strane mnogih autora (Spasojević i Holly, 1990; Gessler et al., 1999; Hung et al., 2009; Budinski, 2011; Budinski i Spasojević, 2013). Posledica pomeranja podine aktivnog sloja je razmena nanosa između aktivnog sloja i aktivnog stratuma preko odgovarajućeg člana u jednačini (4.42). Usled ranije opisanog načina modelisanja debljine aktivnog sloja, njegova podina se može pomerati brže ili sporije od same kote dna, štaviše, može se desiti i da tokom procesa erozije dođe do podizanja podine aktivnog sloja.

Ako se tokom procesa erozije podina aktivnog sloja spušta, dolazi do „zarobljavanja” nanosnog materijala iz aktivnog stratuma u aktivni sloj. U razmatranom slučaju se član razmene nanosa između aktivnog sloja i aktivnog stratuma modelišu pomoću jednačine

$$(S_f)_{k_s} = -\frac{\rho_s (1 - p_s)}{\Delta t} [(z_b^{n+1} - E_a^{n+1}) - (z_b^n - E_a^n)] (\beta_{k_s})_L,$$

uz napomenu da raspored frakcija u aktivnom stratumu ostaje nepromenjen. U drugom (i ređem) slučaju, kada tokom jednog vremenskog koraka dođe do naglog smanjenja intenziteta erozije, dolazi do podizanja podine aktivnog sloja. Razmatrana pojava podrazumeva „ispuštanje” materijala iz aktivnog sloja u aktivni stratum, što se modelišu jednačinom

$$(S_f)_{k_s} = -\frac{\rho_s (1 - p_s)}{\Delta t} [(z_b^{n+1} - E_a^{n+1}) - (z_b^n - E_a^n)] (\theta \beta_{k_s}^{n+1} + (1 - \theta) \beta_k^n),$$

uz napomenu da dolazi i do promene rasporeda frakcija u aktivnom stratumu. Naime, sada aktivni stratum preuzima deo nanosnog materijala iz aktivnog sloja, menjajući na taj način svoj granulometrijski sastav. Zbog retke pojave ovog slučaja, u rešavanju nanosnih jednačina promena granulometrijskog sastava aktivnog stratuma se formuliše eksplicitno i računa se na kraju vremenskog koraka.

Nije na odmet napomenuti da za razliku od člana izvora suspendovanog nanosa, član razmene nanosa između aktivnog sloja i aktivnog stratuma *ne* podrazumeva stvarno pokretanje zrna nanosa. Razmatrani član je posledica koncepta modelisanja ponašanja nanosa i tako ga treba i shvatiti.

Tokom procesa deponovanja istaložena zrna nanosa se dodaju postojećem aktivnom sloju i u potpunosti mešaju sa njegovim nanosnim materijalom u skladu sa pretpostavkom o homogenosti aktivnog sloja. Ako se pretpostavi da podina aktivnog sloja ostaje nepromenjena, taloženjem nanosa kota dna raste, pa se izraz za debljinu aktivnog sloja formuliše kao

$$E_a^{n+1} = E_a^n + (z_b^{n+1} - z_b^n),$$

pri čemu je član razmene nanosa između aktivnog sloja i aktivnog stratuma

$$(S_f)_{k_s} = 0.$$

Na osnovu gore navedenog postaje jasno da definicija (i kvantifikacija) debljine aktivnog sloja, kao i člana razmene nanosa između aktivnog sloja i aktivnog stratuma zavisi od toga da li se tokom posmatranog vremenskog koraka javlja proces erozije ili deponovanja. Međutim, koje će se od ova dva procesa ostvariti je deo rešenja posmatranog vremenskog koraka. Da bi se ova poteškoća rešila upotrebljava se postojanje iterativnog proračuna nanosnih veličina, koji proizilazi iz primene *Newton-Raphson*-ovog iterativnog postupka. Na početku svake nove iteracije se pretpostavi erozija ili deponovanje na osnovu podataka iz prethodne iteracije. Na ovaj način se jednoznačno mogu odrediti sve neophodne veličine za tekuću iteraciju.

4.3.2. Difuzioni korak

Razmatra se difuzioni korak jednačine održanja mase suspendovanog nanosa (4.35), koji definiše doprinos difuzije u ukupnom održanju mase suspendovanog nanosa, predstavljajući drugu i ujedno poslednju etapu u rešavanju jednačine održanja mase suspendovanog nanosa. Shodno principima metode razlomljenih koraka, vrednost koncentracije suspendovanog nanosa iz advektivno-morfološkog koraka ide u difuzioni korak u svojstvu vrednosti iz *prethodnog računskog koraka*. Dakle, izvodi po vremenu se ovde aproksimiraju kao

$$\left(\frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial t}\right)^d = \frac{\tilde{C}_{k_s}^d - \tilde{C}_{k_s}^n}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial t}\right)^a = \frac{\tilde{C}_{k_s}^a - \tilde{C}_{k_s}^n}{\Delta t}.$$

Članovi disperzije, koji se javljaju kao posledica osrednjavanja jednačina po dubini toka, u (4.35) se mogu shvatiti kao zamišljeni „fluks” mase suspendovanog nanosa usled dejstva disperzije. Uobičajena hidraulička praksa je da se ovi fluksevi modelišu analogno fluksu mase suspendovanog nanosa usled turbulentnih fluktuacija koristeći *Fick-ov zakon*. Ako se uvedu koeficijenti difuzije koji obuhvataju zbirno dejstvo turbulentne difuzije i disperzije, jednačina (4.35) postaje

$$\frac{(\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d - (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a}{\Delta t} = \frac{1}{d h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_\eta}{h_\xi} \tilde{D}_\xi^{\text{dd}} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \xi} d \right] + \frac{1}{d h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_\xi}{h_\eta} \tilde{D}_\eta^{\text{dd}} \frac{\partial \tilde{C}_{k_s}}{\partial \eta} d \right]. \quad (4.44)$$

Da bi se jednačina (4.44) mogla diskretizovati i rešiti, neophodno je kvantifikovati koeficijente difuzije u oba koordinatna pravca. Ovde se navode dva načina modelisanja predmetnog koeficijenta, pri čemu oba spadaju u kategoriju *no-equation* modela. Prvi ima mogućnost kalibracije, i na taj način obuhvata uticaj disperzije, dok je u drugi model uticaj disperzije ugrađen neposredno.

Prvo se navodi model za koeficijent difuzije osrednjen po dubini toka, koji je u potpunosti u skladu sa jednačinama iz poglavlja 4.2.2. Naime, koeficijent difuzije se dobija tako što se koeficijent turbulentne viskoznosti deli sa *Schmidt-ovim brojem* σ_t (Rodi, 1993; Duan i Nanda, 2006; Wu, 2008). Takođe se smatra da su predmetni koeficijenti isti u oba koordinatna pravca, pa se mogu sračunati pomoću jednačine (Wu, 2008)

$$\tilde{D}_\xi^{\text{dd}} = \tilde{D}_\eta^{\text{dd}} = \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_t} = \frac{\kappa}{\sigma_t} \frac{V_* d}{6}, \quad (4.45)$$

pri čemu se koriste isti principi kao u poglavlju 4.2.2. da bi se dobila konačna jednačina u diskretizovanom obliku

$$(\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_{i,j}^a = (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_{i,j}^d = (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_{i,j}^a = (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_{i,j}^d = \frac{\kappa}{\sigma_t} \frac{\sqrt{(C_f)_{i,j}^{n+1} \left[(u_{i,j}^{n+1})^2 + (v_{i,j}^{n+1})^2 \right]} d_{i,j}^{n+1}}{6}.$$

Drugi model takođe daje koeficijent difuzije-disperzije osrednjen po dubini toka. Međutim, u ovom slučaju se on razlikuje za dva koordinatna pravca i dat je algebarskim jednačinama (Falconer, 1984; Zhou et al., 2009)

$$\tilde{D}_\xi^{\text{dd}} = \frac{(k_l \tilde{u}^2 + k_t \tilde{v}^2) d \sqrt{C_f}}{\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}, \quad \tilde{D}_\eta^{\text{dd}} = \frac{(k_t \tilde{u}^2 + k_l \tilde{v}^2) d \sqrt{C_f}}{\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}, \quad (4.46)$$

iz kojih se diskretizacijom dobijaju izrazi

$$\begin{aligned} (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_{i,j}^a &= (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_{i,j}^d = \frac{\left(k_l (\tilde{u}_{i,j}^{n+1})^2 + k_t (\tilde{v}_{i,j}^{n+1})^2\right) d_{i,j}^{n+1} \sqrt{(C_f)_{i,j}^{n+1}}}{\sqrt{(\tilde{u}_{i,j}^{n+1})^2 + (\tilde{v}_{i,j}^{n+1})^2}}, \\ (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_{i,j}^a &= (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_{i,j}^d = \frac{\left(k_t (\tilde{u}_{i,j}^{n+1})^2 + k_l (\tilde{v}_{i,j}^{n+1})^2\right) d_{i,j}^{n+1} \sqrt{(C_f)_{i,j}^{n+1}}}{\sqrt{(\tilde{u}_{i,j}^{n+1})^2 + (\tilde{v}_{i,j}^{n+1})^2}}. \end{aligned}$$

Za vrednost koeficijenta podužne disperzije osrednjene po dubini se može uzeti $k_l = 5.93$ (Elder, 1959), a za koeficijent poprečne turbulentne difuzije osrednjene po dubini se predlaže vrednost $k_t = 0.15$ (Fischer, 1973). Međutim za prirodne vodotokove se mogu uzeti vrednosti $k_l \approx 6$ i $k_t = 0.3 - 1.0$ (Fischer et al., 1979; Wu, 2008).

Osnovna razlika između ovde navedena dva modela je da se prvi obično koristi kada je disperzija suspendovanog nanosa relativno mala, pa se koeficijent difuzije može vezati za koeficijent turbulentne viskoznosti. Drugi model daje veće vrednosti za koeficijente difuzije i obično se koristi kada je disperzija više izražena u prirodnim vodotocima.

Nakon uvođenja modela za proračun koeficijenata difuzije, sledi diskretizacija jednačine (4.44) koristeći *Crank-Nicholson*-ovu šemu metode konačnih razlika (Crank i Nicholson, 1996). Svi članovi se ponderišu po računskom koraku, za šta se koristi koeficijent ponderacije θ .

$$f = \theta f^d + (1 - \theta) f^a$$

Pri ovome se sve poznate veličine grupišu na desnu stranu jednačine da bi se za proizvoljni granulometrijski interval (frakciju) mešavine nanosa dobio koeficijent

$$G_{i,j} = (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a + \Delta t (A_1 + A_2),$$

pri čemu su izrazi za A_1 i A_2 dati u prilogu F. Diskretizovana jednačina difuzionog koraka održanja mase suspendovanog nanosa čini implicitni sistem linearnih algebarskih jednačina. Ovaj sistem se rešava iterativno primenom *ADI* metode, pri čemu se ona razdvaja na dva ortogonalna pravca, što čini suštinu postupka (Peaceman i Rachford, 1955; Hsieh i Yang, 2004). Sa indeksom (m) se obeležava vrednost promenljive u prethodnoj iteraciji, sa (*) se obeležava rezultat iteracije u ξ koordinatnom pravcu, a sa ($m + 1$) rezultat iteracije u η koordinatnom pravcu. Dakle, jednačine za iteracije u ξ koordinatnom pravcu za proizvoljnu frakciju nanosa su date sa

$$P_i^{(*)} (\tilde{C}_{k_s})_{i-1,j}^d + Q_i^{(*)} (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d + R_i^{(*)} (\tilde{C}_{k_s})_{i+1,j}^d = {}^{(m)}S_i, \quad (4.47)$$

dok su jednačine za iteracije u η koordinatnom pravcu za proizvoljnu frakciju nanosa date sa

$$P_j^{(m+1)} (\tilde{C}_{k_s})_{i,j-1}^d + Q_j^{(m+1)} (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d + R_j^{(m+1)} (\tilde{C}_{k_s})_{i,j+1}^d = {}^{(*)}S_j. \quad (4.48)$$

Izrazi za koeficijenate P , Q , R i S za oba koordinatna pravca i proizvoljni granulometrijski interval (frakciju) nanosne mešavine su dati u prilogu F. Rešavanje navedenih jednačina po jednom pravcu (tj. po ξ ili po η koordinatnoj liniji) podrazumeva korišćenje *double-sweep* (*Thomas*-ovog) algoritma (Hirsch, 2007).

Difuzioni korak jednačine održanja mase suspendovanog nanosa zahteva granične uslove na svim granicama domena. Usvaja se princip da tokom difuzionog koraka nema promene mase suspendovanog nanosa, pa se po svim granicama nameće da je gradijent koncentracije upravno na graničnu površinu jednak nuli.

4.4. Numeričko rešavanje jednačina transporta zagađujuće materije

U skladu sa formulisanjem modela tečenja, odnosno modela transporta nanosa i morfoloških promena i na jednačine transporta zagađujuće materije se primenjuje metoda *razlomljenih koraka* koju je formulisao Yanenko (1971). Pošto se ovde razmatra ponašanje nekonzervativne materije postoji veoma neposredna povezanost mehanizama koji upravljaju transportom zagađivača odnosno nanosnih mehanizama i parametara tečenja, kao što je to nagovešteno u poglavlju 3.4. Na rastvorenu zagađujuću materiju utiče struja preko advekcije i turbulentne difuzije, dok je razmena mase sa zagađivačem adsorbovanim na zrna suspendovanog nanosa odnosno nanosa na dnu diktirana procesom adsorpcije/desorpcije. Poslednje rečeno nagoveštava da adsorbovana zagađujuća materija „deli sudbinu” zrna nanosa za koje je vezana do trenutka kada se ispune uslovi za njenu desorpciju, nakon čega je za dalju sudbinu nepoželjne materije odgovorna jedino struja. Dakle, na osnovu ovog kratkog opisa se može sa sigurnošću konstatovati da i nanosni procesi imaju jak i neposredni uticaj na transport zagađivača (posebno u adsorbovanom obliku). Složena međuzavisnost mehanizama razmene, kao i njihova uska povezanost koja proizilazi iz činjenice da se zagađivač može javiti u rastvorenom ili adsorbovanom obliku, zahteva da se jednačine koje opisuju ovaj proces pored čisto matematičkog aspekta posmatraju i sa *fizičkog* stanovišta. Analiza karaktera jednačina transporta zagađivača je ključni preduslov za formulisanje numeričke metode za njihovo rešavanje.

Pre nego što se pređe na dalju analizu, neophodno je konstatovati jaku međuzavisnost između jednačina kojima se modelišu ponašanje zagađujuće materije. Naime, usled procesa adsorpcije/desorpcije postoji neposredna povezanost između zagađivača u rastvorenom i adsorbovanom obliku. Količina zagađivača koja se desorbuje sa zrna suspendovanog nanosa ili nanosa sa dna ulazi u masu rastvorene zagađujuće materije. Sa druge strane materija koja je vezana za zrna nanosa na dnu se može uvući u suspenziju preko odgovarajućih nanosnih procesa i tako prelazi u masu zagađivača adsorbovanog na suspendovanom nanosu. Ovaj proces može biti i inverznog karaktera usled deponovanja nanosa iz suspenzije koji sa sobom može nositi i zagađivač. Navedeno ukazuje na potrebu da se jednačine kretanja zagađujuće materije rešavaju *simultano*. U uvodnom izlaganju ovog poglavlja je pomenuto da precizno određivanje matematičkog karaktera predmetnih jednačina predstavlja veoma mukotrpan proces. Iz ovog razloga se pojedine koncentracije zagađivača⁷ vezuju za jednu od jednačina ponašanja zagađujuće materije i smatra se da upravo ta jednačina ima presudan uticaj na posmatranu koncentraciju (promenljivu). Nakon usvajanja ovog principa, matematička analiza postaje nešto jednostavnija.

Koncentracija adsorbovanog zagađivača u aktivnom sloju se vezuje za jednačinu održanja mase (3.91). Pošto za fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa ne postoji analitička zavisnost, određivanje matematičkog karaktera jednačine (3.91) je izuzetno teško. Zbog ovoga se pribegava analizi zasnovanoj na fizici procesa da bi se odredio karakter razmatranog fluksa, a time i jednačine (3.91). Ranije je rečeno da transport zagađivača ne utiče na tok kao ni na nanosne procese, usled čega su parametri tečenja i kretanja nanosa poznati tokom rešavanja jednačina transporta zagađujuće materije. Dakle, ako se unutar vremenskog koraka za proračun zagađivača, polje brzina smatra nepromenljivim, fizika stvari nameće zaključak da fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa ima advektivni karakter. Naime, predmetna zrna

⁷U koncentracije zagađivača spadaju bezdimenzionalna koncentracija rastvorene zagađujuće materije, bezdimenzionalna koncentracija zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa i bezdimenzionalna koncentracija zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa u aktivnom sloju.

nanosa na dnu (pa i materija vezana na njih) se nakon pokretanja kreću u pravcu srednjih brzina vode, pa se smatra da jednačina (3.91) ima hiperbolički karakter.

Koncentracija rastvorenog zagađivača, odnosno zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa određenog granulometrijskog intervala se redom vezuju za jednačine održanja mase (3.80) i (3.89). Ove jednačine su „klasične” jednačine advekcije-difuzije sa dodatnim članovima izvora. Na jednačine (3.80) i (3.89) se primenjuje metoda razlomljenih koraka zajedno sa *Boussinesq*-ovom pretpostavkom o gustini fluida, pa se dobijaju četiri jednačine koje se rešavaju u dva sukcesivna računski koraka. Takođe se koristi veza (3.79). Advektivni korak predstavlja promenu koncentracija rastvorenog

$$\left(\frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial t}\right)^a + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \xi} + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho d} \sum_{k_s=1}^{K_a} S_{k_s}^\dagger - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger + \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger, \quad (4.49)$$

odnosno adsorbovanog zagađivača

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)\right)^a + \frac{\tilde{u}}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) + \frac{\tilde{v}}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) = \frac{S_{k_s}^\dagger}{\rho d} + (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger - (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger, \quad (4.50)$$

usled dejstva advektivnih članova i članova izvora. Uz uzimanje uticaja advekcije iz prethodnog računskog koraka, difuzioni korak predstavlja promenu razmatranih koncentracija usled dejstva difuzionih članova. Ovde spadaju članovi usled uticaja turbulentne difuzije, kao i članovi disperzije koji su posledica osrednjavanja jednačina po dubini. Dakle, navodi se difuzioni korak jednačina održanja mase rastvorenog zagađivača

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial t}\right)^d - \left(\frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial t}\right)^a &= \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \tilde{D}_t \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \xi} d \right) + \\ &+ \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \tilde{D}_t \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \eta} d \right) - \\ &- \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta (C^\dagger - \tilde{C}^\dagger) (u - \tilde{u}) dz - \\ &- \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi (C^\dagger - \tilde{C}^\dagger) (v - \tilde{v}) dz, \end{aligned} \quad (4.51)$$

odnosno difuzioni korak jednačine održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)\right)^d - \left(\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)\right)^a &= \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \tilde{D}_t \frac{\partial(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)}{\partial \xi} d \right) + \\ &+ \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \tilde{D}_t \frac{\partial(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)}{\partial \eta} d \right) - \\ &- \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{z_b}^{z_s} h_\eta (C_{k_s} C_{k_s}^\dagger u)'' dz - \\ &- \frac{1}{h_\xi h_\eta d} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{z_b}^{z_s} h_\xi (C_{k_s} C_{k_s}^\dagger v)'' dz. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Nakon ovoga je veoma jednostavno odrediti matematički karakter prethodno navedenih izraza. Jednačine advektivnog koraka su hiperboličkog tipa, dok su jednačine difuzionog koraka eliptičnog tipa.

Svi članovi izvora odnosno članovi koji obuhvataju razmenu između zagađujuće materije u rastvorenom i adsorbovanom obliku, a koji predstavlja glavni mehanizam sprege između razmatranih jednačina, su pridruženi advektivnim članovima. Usled ovoga difuzioni korak postaje manje bitan za proces transporta zagađivača. Pored ovoga fluks zagađujuće materije usled difuzije je po svojoj prirodi manjeg intenziteta od fluksa zagađujuće materije usled advekcije. Ovo opravdava pristup rešavanja jednačina ponašanja zagađivača koji podrazumeva da se u advektivno-interakcionom koraku simultano rešavaju jednačine održanja mase zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa u aktivnom sloju (3.91) za sve *aktivne* granulometrijske intervale, advektivni korak jednačine održanja mase rastvorenog zagađivača (4.49) i advektivni korak jednačina održanja mase zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa (4.50) za sve *aktivne* granulometrijske intervale. Jednačine advektivno-interakcionog koraka su hiperboličkog tipa. U difuzionom koraku se rešavaju jednačine parabolikog tipa (4.51) i (4.52), takođe za sve *aktivne* granulometrijske intervale.

U dosadašnjem izlaganju, kao i u poglavlju 3.4. je jasno rečeno da proces adsorpcije/desorpcije ne obuhvata sve granulometrijske intervalne, nego samo tzv. *aktivne* frakcije nanosne mešavine. Istraživanja autora Periañez (1999) su pokazala da je doprinos većih zrna ovom procesu zanemarljiv u odnosu na zrna koja su manja od granične vrednosti uslovljene karakteristikama razmatrane materije. Dakle, za aktivne granulometrijske intervale (frakcije) nanosne mešavine se smatraju one frakcije čiji je karakteristični prečnik zrna manji od $62.5 \mu m$ (Eisma, 1993; Benes et al., 1994; Periañez, 1999, 2002, 2003a,b, 2009).

4.4.1. Advektivno-interakcioni korak

Razmatraju se advektivni korak jednačine održanja mase rastvorenog zagađivača (4.49) i advektivni korak jednačine održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s data sa (4.50), dobijeni primenom postupka etapnog rešavanja zasnovanog na tezi superpozicije lokalne promene zavisno promenljive veličine. Na izvod po vremenu se primenjuje *Euler*-ova aproksimacija, koja se shodno metodi razlomljenih koraka svodi na

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^a = \frac{f^a - f^n}{\Delta t}.$$

U skladu sa formulisanjem advektivno-morfološkog koraka kod jednačina transporta nanosa i morfoloških promena i u advektivno-interakcionom koraku modela transporta zagađivača se koristi proračun advekcije koji se zasniva na metodi karakteristika i korišćenju lokalnog interpolacionog polinoma višeg reda (Holly i Preissmann, 1977). Dakle, primenom ove metode razmatrane jednačine se mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{C}^\dagger}{Dt} &= \frac{1}{\rho d} \sum_{k_s=1}^{K_a} S_{k_s}^\dagger - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger + \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger, & \text{duž trajektorije} \\ \frac{D}{Dt} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) &= \frac{S_{k_s}^\dagger}{\rho d} + (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger - (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger, & \frac{d\xi}{dt} = \frac{\tilde{u}}{h_\xi}, \frac{d\eta}{dt} = \frac{\tilde{v}}{h_\eta}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Proračun trajektorije je identičan kao u advektivno-morfološkom koraku modela nanosa, pa se ovde neće ponavljati. Dakle, može se konstatovati da materijalni izvodi u (4.53)

predstavljaju promenu koncentracije rastvorenog zagađivača, odnosno promenu koncentracije zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s duž trajektorije tokom vremena $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ usled zbirnog dejstva advektivnih članova i članova izvora, tj. interakcije. Integraljenjem razmatranih jednačina duž ranije utvrđene trajektorije se dobija

$$\int_{D_L}^{A_1} D\tilde{C}^\dagger = \int_{D_L}^{A_1} \Lambda^\dagger Dt, \quad \int_{D_L}^{A_1} D(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) = \int_{D_L}^{A_1} \Lambda_{k_s}^\dagger Dt,$$

gde su veličine Λ^\dagger i $\Lambda_{k_s}^\dagger$ uvedene radi lakšeg obeležavanja i date su u prilogu G. Rešenje integrala na levoj strani jednačina je trivijalno, a integrali na desnoj strani se rastavljaju na segmente (u skladu sa proračunom trajektorije i razlozima iznetim u poglavlju 4.2.1.) i rešavaju primenom uopštenog trapeznog pravila. Elementarnim algebarskim preuređivanjem se na kraju dobija diskretizovana jednačina advektivnog koraka održanja mase rastvorenog zagađivača

$$\begin{aligned} (\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^a - (\tilde{C}^\dagger)_{D_L} &= (1 - \theta) (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) (\Lambda^\dagger)_{D_L} + \\ &+ \sum_{\ell=L-1}^2 [(1 - \theta) t_{D_{\ell-1}} + (2\theta - 1) t_{D_\ell} - \theta t_{D_{\ell+1}}] (\Lambda^\dagger)_{D_\ell} + \\ &+ [(1 - \theta) t^{n+1} + (2\theta - 1) t_{D_1} - \theta t_{D_2}] (\Lambda^\dagger)_{D_1} + \\ &+ \theta (t^{n+1} - t_{D_1}) (\Lambda^\dagger)_{i,j}^{n+1}, \end{aligned}$$

odnosno diskretizovana jednačina advektivnog koraka održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s

$$\begin{aligned} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)_{D_L} &= (1 - \theta) (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) (\Lambda_{k_s}^\dagger)_{D_L} + \\ &+ \sum_{\ell=L-1}^2 [(1 - \theta) t_{D_{\ell-1}} + (2\theta - 1) t_{D_\ell} - \theta t_{D_{\ell+1}}] (\Lambda_{k_s}^\dagger)_{D_\ell} + \\ &+ [(1 - \theta) t^{n+1} + (2\theta - 1) t_{D_1} - \theta t_{D_2}] (\Lambda_{k_s}^\dagger)_{D_1} + \\ &+ \theta (t^{n+1} - t_{D_1}) (\Lambda_{k_s}^\dagger)_{i,j}^{n+1}. \end{aligned}$$

Nakon uvođenja skraćenog obeležavanja datog u prilogu G, dobijaju se jednačine advektivnog koraka održanja mase zagađujuće materije

$$(\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^a - (\tilde{C}^\dagger)_{D_L} = \sum_{D_L}^{D_1} (\Lambda^\dagger) \Delta t + \Delta t_1 \theta (\Lambda^\dagger)_{i,j}^{n+1}, \quad (4.54)$$

$$(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)_{D_L} = \sum_{D_L}^{D_1} (\Lambda_{k_s}^\dagger) \Delta t + \Delta t_1 \theta (\Lambda_{k_s}^\dagger)_{i,j}^{n+1}. \quad (4.55)$$

Slično kao u modelu ponašanja nanosa, određivanje vrednosti koncentracije zagađujuće materije u polaznoj tački svakog segmenta trajektorije zahteva primenu neke vrste interpolacije, jer se ove tačke po pravilu nalaze između računskih tačaka. Ako se polazna tačka segmenta trajektorije nalazi u prethodnom vremenskom trenutku t^n , onda se koristi lokalni kubni interpolacioni polinom. Sa druge strane, ako se predmetna tačka

nalazi između prethodnog t^n i narednog (nepoznatog) vremenskog trenutka t^{n+1} , koristi se lokalni kubni interpolacioni polinom po prostoru odnosno linearni interpolacioni polinom po vremenu. Opravdanost primene navedenih postupaka se dodatno razmatra u poglavlju 6.1. Za određivanje svih članova izvora, odnosno članova interakcije iz jednačina (4.54) i (4.55) u svim polaznim tačkama segmenata trajektorije se koristi linearna interpolacija.

Advektivni koraci jednačina održanja mase zagađujuće materije su hiperboličkog tipa, pa zahtevaju granične uslove na uzvodnoj granici. Usled ovoga se koncentracije rastvorenog zagađivača, kao i koncentracije zagađujuće materije adsorbovane na zrna aktivnih frakcija suspendovanog nanosa na uzvodnoj granici zadaju kao poznati granični uslov.

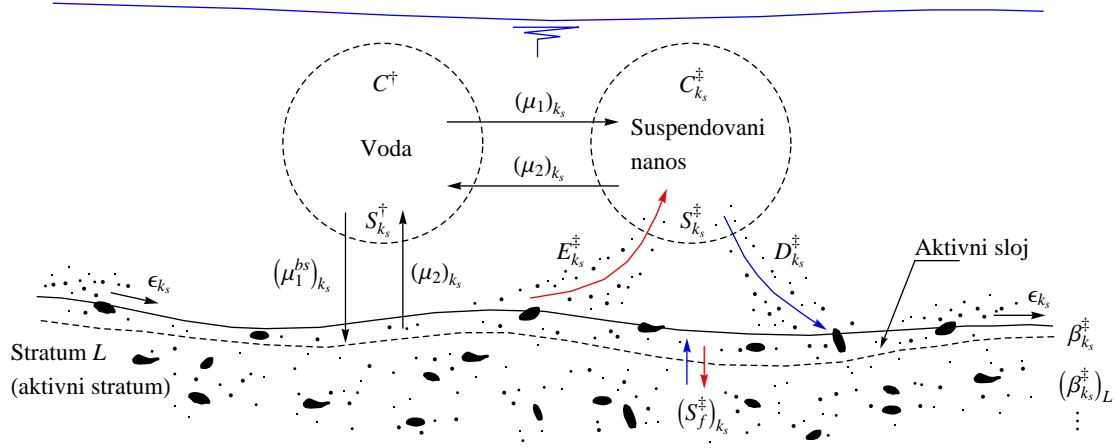
U nastavku se razmatra jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa u aktivnom sloju (3.91). Predmetna jednačina se diskretizuje integriranjem unutar kontrolne zapremine formirane oko posmatrane računске tačke potpuno analogno diskretizaciji jednačine održanja mase nanosa u aktivnom sloju. U računskim tačkama uzvodne granice se vrednost bezdimenzionalne koncentracije zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa u aktivnom sloju zadaje kao granični uslov za sve aktivne frakcije nanosne mešavine. Dakle, uzvodna granica nije predmet daljeg razmatranja ponašanja zagađivača. Navodi se diskretizovana jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju

$$\begin{aligned} \rho_s (1 - p_s) \frac{(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a)_{i,j}^{n+1} - (\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a)_{i,j}^n}{\Delta t} + \nabla_{\text{dis}}(\epsilon_{k_s}) = \\ = -\theta (S_{k_s}^\dagger + S_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^{n+1} - (1 - \theta) (S_{k_s}^\dagger + S_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^n + \left[(S_f^\ddagger)_{k_s} \right]_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

pri čemu $\nabla_{\text{dis}}(\epsilon_{k_s})$ označava diskretizovanu divergenciju fluksa zagađivača adsorbovanog na zrna vučenog nanosa koja je data u prilogu G.

Način modelisanja fluksa zagađivača adsorbovanog na zrna vučenog nanosa se zasniva na njegovom *fizičkom* karakteru. Kao što je navedeno ranije, fluks vučenog nanosa koji prolazi kroz jednu od graničnih površina uočene kontrolne zapremine zavisi od komponente brzine upravne na tu graničnu površinu. Pošto se smatra da su frakciona zastupljenost granulometrijskih intervala, kao i koncentracija adsorbovane zagađujuće materije konstante u svakoj kontrolnoj zapremini, umesno je pretpostaviti da fluid koji struji kroz granične površine uočene kontrolne zapremine sa sobom nosi zrna nanosa iz *uzvodnih* kontrolnih zapremina. Dakle, fluks zagađivača adsorbovanog na zrna vučenog nanosa u vremenskom trenutku t^{n+1} se računa koristeći parametre toka iz istog vremenskog trenutka t^{n+1} . Međutim, promenljive koje se tiču zagađujuće materije neophodne za određivanje predmetnog fluksa se vezuju za odgovarajuće uzvodne kontrolne zapremine i koriste se vrednosti iz prethodnog vremenskog trenutka t^n . Iako su pri proračunu zagađivača nanosne promenljive poznate i za vremenski trenutak t^{n+1} , one se ovde takođe uzimaju iz prethodnog vremenskog trenutka da bi proračun bio u skladu sa proračunom nanosa. Drugi razlog za ovakvo postupanje je činjenica da je razmatrani fluks neposredno vezan za mehanizam vučenog nanosa, pa je zgodno držati se iste formulacije kao u poglavlju 4.3.1. Ovde opisani proračun fluksa zagađivača adsorbovanog na zrna vučenog nanosa još uvek zahteva uzvodni granični uslov, međutim, predloženi način modelisanja omogućava da jednačina održanja mase zagađivača u aktivnom sloju sadrži samo nepoznate promenljive iz posmatrane računске tačke. Na ovaj način se omogućava nezavisno rešavanje jednačina ponašanja zagađujuće materije od tačke do tačke računске mreže, čime se smanjuje vreme rada računara.

U ranijem izlaganju je rečeno da su jednačine ponašanja zagađivača (4.54), (4.55)



Slika 24: Princip modelisanja ponašanja zagađujuće materije

i (4.56) u jakoj međusobnoj sprezi, pa ih je neophodno simultano rešavati. Navodi se sistem algebarskih jednačina, koji čine jedna diskretizovana jednačina advektivnog koraka održanja mase rastvorenog zagađivača

$$G^{\odot} = (\tilde{C}^{\dagger})_{i,j}^a - (\tilde{C}^{\dagger})_{D_L} - \sum_{D_L}^{D_1} (\Lambda^{\dagger}) \Delta t - \Delta t_1 \theta (\Lambda^{\dagger})_{i,j}^{n+1} = 0, \quad (4.57)$$

K_a diskretizovanih jednačina advektivnog koraka održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa

$$G_{k_s}^{\rightsquigarrow} = (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^{\dagger})_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^{\dagger})_{D_L} - \sum_{D_L}^{D_1} (\Lambda_{k_s}^{\dagger}) \Delta t - \Delta t_1 \theta (\Lambda_{k_s}^{\dagger})_{i,j}^{n+1} = 0, \quad (4.58)$$

i K_a diskretizovanih jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa u aktivnom sloju

$$G_{k_s}^{\curvearrowright} = \rho_s (1 - p_s) \frac{(\beta_{k_s} \beta_{k_s}^{\dagger} E_a)_{i,j}^{n+1} - (\beta_{k_s} \beta_{k_s}^{\dagger} E_a)_{i,j}^n}{\Delta t} + \nabla_{\text{dis}}(\epsilon_{k_s}) + \theta (S_{k_s}^{\dagger} + S_{k_s}^{\ddagger})_{i,j}^{n+1} + (1 - \theta) (S_{k_s}^{\dagger} + S_{k_s}^{\ddagger})_{i,j}^n - [(S_f^{\dagger})_{k_s}]_{i,j} = 0, \quad (4.59)$$

uz napomenu da su u gore navedenim algebarskim jednačinama nepoznate veličine

$$(\tilde{C}^{\dagger})_{i,j}^{n+1}, \quad (\tilde{C}_{k_s}^{\dagger})_{i,j}^{n+1}, \quad (\beta_{k_s}^{\dagger})_{i,j}^a, \quad k_s = 1, \dots, K_a.$$

Nije na odmet još jednom naglasiti da se divergencija fluksa zagađivača adsorbovanog na zrna vučenog nanosa određuje eksplicitno u pogledu promenljivih koji se tiču zagađivača. Takođe se napominje da se sume u jednačinama (4.57) i (4.58) isto kvantifikuju eksplicitno. Poslednje navedeno se postiže tako što se pri određivanju članova izvora i članova interakcije (koji su sadržani u Λ^{\dagger} i $\Lambda_{k_s}^{\dagger}$) u polaznim tačkama segmenata trajektorije, koristi linearna interpolacija po vremenu koja za trenutak t^{n+1} uzima vrednosti ovih članova iz prethodne iteracije. Dakle, dobija se sistem *nelinearnih* algebarskih jednačina koji je „eksplicitan” po prostoru jer se u njemu javljaju samo nepoznate promenljive za posmatranu računsku tačku, i on se može napisati u obliku

$$G^{\odot}(\vec{c}^{n+1}) = 0, \quad G_{k_s}^{\rightsquigarrow}(\vec{c}^{n+1}) = 0, \quad G_{k_s}^{\curvearrowright}(\vec{c}^{n+1}) = 0, \quad k_s = 1, \dots, K_a.$$

Za linearizaciju i rešavanje ovako definisanog nelinearnog sistema algebarskih jednačina se primenjuje *Newton-Raphson*-ov iterativni postupak. Smatra se da vektor nepoznatih u sledećoj iteraciji zadovoljava sistem, pa se može napisati da je

$$\begin{aligned} G^\circledast \left({}^{(m+1)}\vec{c}^{n+1} \right) &= 0, \\ G_{k_s}^{\rightsquigarrow} \left({}^{(m+1)}\vec{c}^{n+1} \right) &= 0, \quad G_{k_s}^{\curvearrowright} \left({}^{(m+1)}\vec{c}^{n+1} \right) = 0, \quad k_s = 1, \dots, K_a. \end{aligned}$$

Nakon ovoga se gore navedeni sistem razvija u *Taylor*-ov red oko vrednosti ${}^{(m)}\vec{c}^{n+1}$ iz čega se dobija sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G^\circledast \left(\vec{c}^{n+1} \right)}{\partial \vec{c}^{n+1}} \right|_{(m)\vec{c}^{n+1}} \cdot \Delta \vec{c} &= - G^\circledast \left({}^{(m)}\vec{c}^{n+1} \right), \\ \left. \frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow} \left(\vec{c}^{n+1} \right)}{\partial \vec{c}^{n+1}} \right|_{(m)\vec{c}^{n+1}} \cdot \Delta \vec{c} &= - G_{k_s}^{\rightsquigarrow} \left({}^{(m)}\vec{c}^{n+1} \right), \quad k_s = 1, \dots, K_a, \\ \left. \frac{\partial G_{k_s}^{\curvearrowright} \left(\vec{c}^{n+1} \right)}{\partial \vec{c}^{n+1}} \right|_{(m)\vec{c}^{n+1}} \cdot \Delta \vec{c} &= - G_{k_s}^{\curvearrowright} \left({}^{(m)}\vec{c}^{n+1} \right), \quad k_s = 1, \dots, K_a, \end{aligned}$$

gde je priraštaj vektora promenljivih zagađujuće materije definisan kao

$$\Delta \vec{c} = {}^{(m+1)}\vec{c}^{n+1} - {}^{(m)}\vec{c}^{n+1}.$$

Radi kompaktnijeg zapisivanja, kao i lakšeg razumevanja odnosno programiranja razmatranog sistema jednačina, uvodi se uniformno obeležavanje koncentracija zagađujuće materije. Napominje se da je $K_a = K_a^*$, tj. da je broj promenljivih $2K_a + 1 = 2K_a^* + 1$.

$$\begin{aligned} C^\dagger & \text{ odgovara promenljivoj zagađivača} & \mathbf{c}_1 & \Rightarrow \Delta \mathbf{c}_1 = \Delta C^\dagger \\ \tilde{C}_1^\dagger & \text{ odgovara promenljivoj zagađivača} & \mathbf{c}_2 & \Rightarrow \Delta \mathbf{c}_2 = \Delta \tilde{C}_1^\dagger \\ \beta_1^\dagger & \text{ odgovara promenljivoj zagađivača} & \mathbf{c}_3 & \Rightarrow \Delta \mathbf{c}_3 = \Delta \beta_1^\dagger \\ & & \vdots & \\ \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger & \text{ odgovara promenljivoj zagađivača} & \mathbf{c}_{2k_s^*} & \Rightarrow \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*} = \Delta \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger \\ \beta_{k_s^*}^\dagger & \text{ odgovara promenljivoj zagađivača} & \mathbf{c}_{2k_s^*+1} & \Rightarrow \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*+1} = \Delta \beta_{k_s^*}^\dagger \\ & & \vdots & \\ \tilde{C}_{K_a^*}^\dagger & \text{ odgovara promenljivoj zagađivača} & \mathbf{c}_{2K_a^*} & \Rightarrow \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*} = \Delta \tilde{C}_{K_a^*}^\dagger \\ \beta_{K_a^*}^\dagger & \text{ odgovara promenljivoj zagađivača} & \mathbf{c}_{2K_a^*+1} & \Rightarrow \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*+1} = \Delta \beta_{K_a^*}^\dagger \end{aligned}$$

Dakle, dobijen je sistem od $2K_a + 1$ linearnih algebarskih jednačina sa $2K_a + 1$ nepoznatih, koji se može napisati u matricnoj formi kao

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,2K_a^*} & a_{1,2K_a^*+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,2K_a^*} & a_{2,2K_a^*+1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,2K_a^*} & a_{3,2K_a^*+1} \\ \vdots & & & & \\ a_{2k_s,1} & a_{2k_s,2} & \dots & a_{2k_s,2K_a^*} & a_{2k_s,2K_a^*+1} \\ a_{2k_s+1,1} & a_{2k_s+1,2} & \dots & a_{2k_s+1,2K_a^*} & a_{2k_s+1,2K_a^*+1} \\ \vdots & & & & \\ a_{2K_a,1} & a_{2K_a,2} & \dots & a_{2K_a,2K_a^*} & a_{2K_a,2K_a^*+1} \\ a_{2K_a+1,1} & a_{2K_a+1,2} & \dots & a_{2K_a+1,2K_a^*} & a_{2K_a+1,2K_a^*+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{c}_1 \\ \Delta \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*} \\ \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*+1} \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*} \\ \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{2k_s} \\ b_{2k_s+1} \\ \vdots \\ b_{2K_a} \\ b_{2K_a+1} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

pri čemu su svi članovi sistema dati u prilogu G. Invertovanjem matrice (4.60) nekom od numeričkih metoda (Carnahan et al., 1969) se dobija rešenje za priraštaje promenljivih zagađujuće materije u skadu sa *Newton-Raphson*-ovim iterativnim postupkom. Primena iterativnog postupka se ponavlja dok se ne zadovolji zahtevana tačnost proračuna.

Izlaganje o modelisanju ponašanja zagađujuće materije u prirodnim aluvijalnim vodotocima, kao i njegovo rešavanje do sada nije obuhvatalo empirijske izraze za kvantifikaciju pojedinih veličina koje se javljaju u jednačinama (4.57), (4.58) i (4.59). Ovakav pristup omogućava slobodno biranje potrebnih empirijskih zavisnosti, pri čemu sam numerički postupak ostaje nezavistan od istih. U nastavku slede zavisnosti za kvantifikaciju veličina o kojima dosad još nije bilo reči, a koje se koriste u ovom radu.

§ § §

Ovde usvojeni koncept modelisanja podrazumeva da je kinetički koeficijent koji reguliše desorpciju zagađujuće materije sa zrna nanosa *konstanta* (Periáñez, 2003a,b, 2009), pa se prosto konstatuje da je

$$(\mu_2)_{k_s} = \mu_2 = \text{const.}$$

Proces prelaska zagađivača iz rastvorenog u adsorbovani oblik zahteva postojanje odgovarajuće površine za koju se ona može vezati adhezionim silama. Međutim, desorpcija podrazumeva da je zagađivač već vezan na površinu zrna nanosa, pa njegovo „otpuštanje” ne zavisi od dostupnosti površine pogodne za adsorpciju, nego samo od kinetike procesa. Navedeno opravdava modelisanje odgovarajućeg kinetičkog koeficijenta kao konstantne veličine.

§ § §

Ranije je navedeno da proces adsorpcije ima površinski karakter u smislu da neposredno zavisi od dostupnosti površine zrna nanosa za koje se zagađujuća materija vezuje adhezionim silama. Dakle, kinetički koeficijent koji reguliše proces adsorpcije na zrna suspendovanog nanosa se može modelisati tako da se njena vrednost vezuje za dostupnu površinu razmene preko kalibracionog koeficijenta koji ima dimenziju brzine i naziva se „brzina” razmene (Periáñez, 1999, 2002, 2003a,b, 2009, 2012).

$$(\mu_1)_{k_s} = \chi_{k_s}^{ss} \omega_{k_s}^{ss}$$

Površina zrna suspendovanog nanosa koja učestvuje u interakciji nanosa i zagađivača se izražava kao površina *po jedinici zapremine vode* sadržane u posmatranoj kontrolnoj zapremini. Ovo ima svoju fizičku opravdanost, jer ako se određena površina pogodna za adsorpciju nalazi u manjoj količini vode, molekuli zagađivača lakše dospevaju do nje i proces adsorpcije je intenzivniji pa onda i vrednost odgovarajućeg kinetičkog koeficijenta mora biti veća nego da se ista ta površina nalazi u većoj zapremini vode. Dakle, za istu vrednost brzine razmene, ista površina zrna nanosa će izazvati intenzivniji proces adsorpcije ako se ona nalazi u manjoj zapremini vode, nego ako se nalazi u većoj. Zaključuje se da obračunavanje predmetne površine po jedinici zapremine vode obezbeđuje postojanje opisanog mehanizma u formulisanom modelu. Pod pretpostavkom da su zrna suspendovanog nanosa idealno *sfernog* oblika i identična po granulometrijskim intervalima, površina zrna (po jedinici zapremine vode sadržane u kontrolnoj zapremini) dostupna za proces adsorpcije se računa po obrazcu

$$\omega_{k_s}^{ss} = \frac{6 \tilde{C}_{k_s} \rho}{D_{k_s} \rho_s}$$

Naravno, poznato je da zrna suspendovanog nanosa u prirodnim aluvijalnim vodotocima nisu idealno sfernog oblika. Međutim, ako se uzme u obzir činjenica da u procesu adsorpcije zagađivača na zrna suspendovanog nanosa učestvuju samo aktivne frakcije (sa karakterističnim prečnikom $< 62.5 \mu m$), na ovde opisan način je moguće dobiti realne vrednosti za dostupnu površinu razmene (Duursma i Carroll, 1996).

§ § §

Fluks zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa je usko vezan za fluks vučenog nanosa iz poglavlja 4.3.1. U skladu sa prethodnim izlaganjem, za kvantifikaciju ove veličine se vrednosti koncentracije zagađivača u aktivnom sloju uzimaju iz prethodnog vremenskog koraka da bi se zadržao eksplicitni proračun po prostoru. Dakle, predmetni fluks se načelno dobija pomoću izraza

$$(\epsilon_\xi)_{k_s} = (\phi_\xi)_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger, \quad (\epsilon_\eta)_{k_s} = (\phi_\eta)_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger,$$

uz napomenu da su vrednosti fluksa vučenog nanosa unapred poznati iz ranije sprovedenog proračuna nanosa. Konstatuje se da je prirodno vezati ovaj vid kretanja zagađujuće materije za kretanje zrna vučenog nanosa, kao što je to urađeno u prethodnim jednačinama. Molekul zagađivača koji je adhezionim silama vezan za zrno koje se kreće kotrljanjem, klizanjem i kratkim poskakivanjem na dnu korita ima *identičnu* putanju kao i pomenuto zrno nanosa dok se ne ispune uslovi za njegovu desorpciju. Pošto samo aktivne frakcije ($D_{k_s} < 62.5 \mu m$) učestvuju u kretanju zagađivača na ovaj način, razumno je pretpostaviti da učesće fluksa zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa u ukupnom transportu materije nije značajno, ali se ono ipak uzima u obzir radi sveobuhvatnosti formulisano modela.

§ § §

Posmatra se član izvora (fluks) rastvorene zagađujuće materije usled adsorpcije/desorpcije na/sa zrna nanosa u aktivnom sloju. Ovaj član se po svojoj prirodi sastoji od mase zagađujuće materije (po jedinici površine i po jedinici vremena) koja se adsorbuje na zrna nanosa u aktivnom sloju (gubitak za zagađivač u rastvorenom obliku) i mase zagađujuće materije koja se desorbuje sa zrna nanosa u aktivnom sloju (dobitak za zagađivač u rastvorenom obliku). Na osnovu ovoga se može napisati da je

$$S_{k_s}^\dagger = (S_{k_s}^\dagger)^{\text{des}} - (S_{k_s}^\dagger)^{\text{ads}}.$$

Masa koja se desorbuje sa zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju se može odrediti koristeći odgovarajući kinetički koeficijent. Princip ovakvog načina modelisanja podrazumeva da je desorbovana masa (po jedinici površine i po jedinici vremena) proporcionalna masi adsorbovanog zagađivača u aktivnom sloju (po jedinici površine) dostupnoj za ovaj proces (Periáñez, 2005). Koeficijent proporcionalnosti je upravo kinetički koeficijent desorpcije.

$$(S_{k_s}^\dagger)^{\text{des}} = \mu_2 \rho_s (1 - p_s) E_a \beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger \nu_c$$

U navedenom izrazu se javlja koeficijent korekcije ν_c , koji ovde služi za redukciju količine zagađivača dostupne za desorpciju (Periáñez, 2009, 2012). Određena površina nanosa koja na sebi sadrži zagađujuću materiju nije u neposrednom kontaktu sa vodom, nego je u kontaktu sa drugim zrnima pa materija vezana za nju nije dostupna procesu desorpcije. Ova pojava je moguća samo u slučaju nanosa na dnu a ne i u slučaju suspendovanog nanosa. Analogno prethodnom razmatranju, masa zagađujuće materije (po

jedinici površine i po jedinici vremena) koja se adsorbuje na zrna nanosa granulometrijskog intervala k_s u aktivnom sloju je proporcionalna masi rastvorenog zagađivača u aktivnom sloju (Periáñez, 2005). Koeficijent proporcionalnosti je upravo kinetički koeficijent adsorpcije.

$$(S_{k_s}^\dagger)^{\text{ads}} = (\mu_1^{bs})_{k_s} p_s E_a \rho \tilde{C}^\dagger$$

U skladu sa razlozima iznetim u ranijem izlaganju, kinetički koeficijent u poslednjoj jednačini se modeliše tako da se njegova vrednost vezuje za dostupnu površinu razmene preko „brzine” razmene (Periáñez, 1999, 2002, 2003a,b, 2009, 2012), pa se piše da je

$$(\mu_1^{bs})_{k_s} = \chi_{k_s}^{bs} \omega_{k_s}^{bs}.$$

Slično kao i ranije, i ovde se površina zrna nanosa u aktivnom sloju koja učestvuje u interakciji nanosa i zagađivača, izražava kao površina *po jedinici zapremine vode* sadržane u posmatranoj kontrolnoj zapremini. Na ovaj način se u model ugrađuje mehanizam da površina dostupna procesu adsorpcije u manjoj zapremini vode daje veću vrednost kinetičkog koeficijenta nego kada se ista površina nalazi u većoj zapremini vode. Pod pretpostavkom da su zrna nanosa u aktivnom sloju *sfernog* oblika i identična po granulometrijskim intervalima, onda se površina zrna (po jedinici zapremine vode sadržane u kontrolnoj zapremini) dostupna za proces adsorpcije može napisati kao

$$\omega_{k_s}^{bs} = \frac{6(1-p_s)\beta_{k_s}l_c}{D_{k_s}p_s}.$$

Koeficijent redukcije površine dostupne za adsorpciju u poslednjoj jednačini kvantifikuje pojavu da se u mešavini nanosa na dnu korita pojedina zrna dodiruju smanjujući tako površinu koja može učestvovati u interakciji nanosa i zagađujuće materije. Iako zrna nanosa nisu idealno sfernog oblika na ovde opisan način je moguće dobiti realne vrednosti za dostupnu površinu razmene (Duursma i Carroll, 1996), pošto u procesu adsorpcije učestvuju samo aktivne frakcije (sa karakterističnim prečnikom zrna $< 62.5 \mu m$).

§ § §

Izvor zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s sa rečnog dna proizilazi iz usvojenog koncepta modelisanja nanosa. Ovaj član je neposredno uslovljen mehanizmima uvlačenja zrna nanosa sa dna u suspenziju i deponovanja nanosa iz suspenzije na rečno dno, jer predmetna zrna mogu na sebi nositi adsorbovanu zagađujuću materiju. Zbog ovoga se piše da je

$$S_{k_s}^\dagger = E_{k_s}^\dagger - D_{k_s}^\dagger.$$

Kada se usled turbulentnih događaja na dnu i/ili homogene turbulencije, zrna nanosa sa dna uvuku u suspenziju, ona sa sobom mogu poneti zagađujuću materiju adsorbovanu na njih. Dakle, opisana pojava pored fluksa mase nanosa podrazumeva i fluks koji predstavlja dobitak za masu zagađivača adsorbovanu na zrnima suspendovanog nanosa i modeliše se po izrazu

$$E_{k_s}^\dagger = E_{k_s}^{\text{sed}} \beta_{k_s}^\dagger.$$

Inverzni proces u odnosu na prethodno opisani se javlja deponovanjem zrna nanosa iz suspenzije na dno usled delovanja gravitacionog ubrzanja. Ova zrna sa sobom takođe mogu poneti adsorbovanu zagađujuću materiju, pa se definiše fluks koji predstavlja gubitak za masu zagađivača adsorbovanu na zrnima suspendovanog nanosa i računa se po jednačini

$$D_{k_s}^\dagger = D_{k_s}^{\text{sed}} \tilde{C}_{k_s}^\dagger.$$

Ovde opisani vidovi kretanja zagađujuće materije su uslovljeni postojanjem nanosnih procesa uvlačenja zrna u suspenziju i njihovog deponovanja iz suspenzije. Zbog ovoga je flukseve zagađivača, koji su posledica ovog kretanja, zgodno vezati za odgovarajuće mehanizme ponašanja nanosa kao što je to i urađeno sa prikazanim jednačinama.

§ § §

Usvojeni koncept modelisanja ponašanja nanosa koji se zasniva na postojanju aktivnog sloja podrazumeva fluks razmene mase nanosa između aktivnog sloja i aktivnog stratuma, kao što je to opisano u poglavlju 4.3.1. Ovaj nanos sa sobom može „poneti” adsorbovanu zagađujuću materiju, usled čega se onda javlja odgovarajući fluks mase zagađivača.

Ako se tokom procesa erozije podina aktivnog sloja spušta dolazi do „zarobljavanja” nanosnog materijala iz aktivnog stratuma u aktivni sloj. U razmatranom slučaju se član razmene adsorbovane zagađujuće materije između aktivnog sloja i aktivnog stratuma modeliše pomoću jednačine

$$(S_f^\ddagger)_{k_s} = -\frac{\rho_s (1 - p_s)}{\Delta t} [(z_b^{n+1} - E_a^{n+1}) - (z_b^n - E_a^n)] (\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\ddagger)_L,$$

uz napomenu da se koncentracija adsorbovanog zagađivača u aktivnom stratumu ne menja.

U drugom slučaju, kada tokom jednog vremenskog koraka dođe do naglog smanjenja intenziteta erozije, dolazi do podizanja podine aktivnog sloja. Razmatrana pojava podrazumeva „ispuštanje” materijala iz aktivnog sloja u aktivni stratum, što se u pogledu ponašanja zagađujuće materije modeliše jednačinom

$$(S_f^\ddagger)_{k_s} = -\frac{\rho_s (1 - p_s)}{\Delta t} [(z_b^{n+1} - E_a^{n+1}) - (z_b^n - E_a^n)] \left(\theta (\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\ddagger)^{n+1} + (1 - \theta) (\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\ddagger)^n \right).$$

Napominje se da u ovom slučaju dolazi i do promene koncentracije zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa u aktivnom stratumu. Naime, sada aktivni stratum preuzima deo nanosnog materijala iz aktivnog sloja, menjajući na taj način koncentraciju adsorbovanog zagađivača u sebi. Zbog retke pojave ovog slučaja, pri rešavanju predmetnih jednačina promena koncentracija adsorbovanog zagađivača u aktivnom stratumu se formuliše eksplicitno i računa se na kraju vremenskog koraka.

Nije na odmet napomenuti da za razliku od člana izvora adsorbovane zagađujuće materije iz aktivnog sloja, član razmene između aktivnog sloja i aktivnog stratuma ne podrazumeva stvarno pokretanje zrna nanosa i zagađivača adsorbovanog na njih. Razmatrani član je posledica koncepta modelisanja ponašanja nanosa i tako ga treba i shvatiti.

Tokom procesa deponovanja istaložena zrna nanosa se, zajedno sa zagađujućom materijom adsorbovanom na njih, dodaju postojećem aktivnom sloju i u potpunosti mešaju sa njegovim nanosnim materijalom u skladu sa pretpostavkom o homogenosti aktivnog sloja. Ako se uzme da podina aktivnog sloja ostaje nepromenjena, što je u skladu sa modelom nanosa, član razmene mase adsorbovanog zagađivača između aktivnog sloja i aktivnog stratuma je

$$(S_f^\ddagger)_{k_s} = 0.$$

Na osnovu gore navedenog postaje jasno da definicija (i kvantifikacija) člana razmene adsorbovanog zagađivača između aktivnog sloja i aktivnog stratuma zavisi od toga da li se tokom posmatranog vremenskog koraka javlja proces erozije ili deponovanja. Ovaj podatak je poznat iz proračuna nanosa.

4.4.2. Difuzioni korak

Razmatra se difuzioni korak jednačine održanja mase rastvorene zagađujuće materije (4.51), kao i difuzioni korak jednačine održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa (4.52). Navedene jednačine definišu doprinos difuzije u ukupnom održanju mase zagađivača, predstavljajući drugu i ujedno poslednju etapu u rešavanju jednačina održanja mase rastvorene i adsorbovane zagađujuće materije. Pošto su svi članovi izvora i interakcije obuhvaćeni advektivno-interakcionim korakom, difuzioni koraci (4.51), odnosno (4.52) se rešavaju *nezavisno* jedan od drugog. Shodno principima metode razlomljenih koraka, vrednost koncentracije zagađivača iz advektivno-interakcionog koraka ide u difuzioni korak u svojstvu vrednosti iz *prethodnog računskog koraka*. Dakle, izvodi po vremenu se ovde aproksimiraju kao

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial t}\right)^d &= \frac{(\tilde{C}^\dagger)^d - (\tilde{C}^\dagger)^n}{\Delta t}, & \left(\frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial t}\right)^a &= \frac{(\tilde{C}^\dagger)^a - (\tilde{C}^\dagger)^n}{\Delta t}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)\right)^d &= \frac{(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)^d - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)^n}{\Delta t}, & \left(\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)\right)^a &= \frac{(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)^a - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)^n}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Članovi disperzije, koji se javljaju kao posledica osrednjavanja jednačina po dubini toka, u izrazima (4.51) i (4.52) se mogu shvatiti kao zamišljeni „fluks” mase zagađivača usled dejstva disperzije. Uobičajena hidraulička praksa je da se ovi fluksevi modelišu analogno fluksu mase usled turbulentnih fluktuacija koristeći *Fick*-ov zakon. Ako se, slično kao u slučaju suspendovanog nanosa, uvedu koeficijenti difuzije koji obuhvataju zbirno dejstvo turbulentne difuzije i disperzije, difuzioni korak jednačine održanja mase rastvorene zagađujuće materije postaje

$$\frac{(\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^d - (\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^a}{\Delta t} = \frac{1}{d h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_\eta}{h_\xi} \tilde{D}_\xi^{\text{dd}} \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \xi} d \right] + \frac{1}{d h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_\xi}{h_\eta} \tilde{D}_\eta^{\text{dd}} \frac{\partial \tilde{C}^\dagger}{\partial \eta} d \right], \quad (4.61)$$

a difuzioni korak jednačine održanja mase zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala k_s se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{(\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)_{i,j}^d - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)_{i,j}^a}{\Delta t} &= \frac{1}{d h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{h_\eta}{h_\xi} \tilde{D}_\xi^{\text{dd}} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) d \right] + \\ &+ \frac{1}{d h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{h_\xi}{h_\eta} \tilde{D}_\eta^{\text{dd}} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger) d \right]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Da bi se jednačine (4.61) i (4.62) mogle diskretizovati i rešiti, neophodno je kvantifikovati koeficijente difuzije u oba koordinatna pravca. Za ovu svrhu se koristi model turbulencije potpuno identičan kao u slučaju suspendovanog nanosa, opisan ranije u poglavlju 4.3.2. Nakon uvođenja modela za proračun koeficijenata difuzije, sledi diskretizacija jednačina (4.61) i (4.62) koristeći *Crank-Nicholson*-ovu šemu metode konačnih razlika (Crank i Nicholson, 1996). Svi članovi se ponderišu po računskom koraku, za šta se koristi koeficijent ponderacije θ .

$$f = \theta f^d + (1 - \theta) f^a$$

Pri ovome se sve unapred poznate veličine grupišu na desnu stranu znaka jednakosti da bi se u slučaju jednačine održanja mase rastvorene zagađujuće materije dobio koeficijent

$$G_{i,j}^\dagger = (\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^a + \Delta t (A_1^\dagger + A_2^\dagger),$$

dok se u slučaju jednačine održanja mase zagađivača adsorbovanog na proizvoljni granulometrijski interval (frakciju) mešavine nanosa dobija koeficijent

$$G_{i,j}^\ddagger = (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^a + \Delta t (A_1^\ddagger + A_2^\ddagger).$$

Napominje se da su izrazi za A_1^\ddagger i A_2^\ddagger , odnosno A_1^\ddagger i A_2^\ddagger dati u prilogu H. Diskretizovane jednačine difuzionog koraka održanja mase rastvorenog, odnosno adsorbovanog zagađivača čine dva međusobno nezavisna, implicitna sistema linearnih algebarskih jednačina. Ovi sistemi se rešavaju iterativno primenom *ADI* metode, pri čemu se razdvajaju na dva ortogonalna pravca, što čini suštinu postupka (Peaceman i Rachford, 1955; Hsieh i Yang, 2004). Kao i ranije, sa gornjim indeksom (m) se obeležava vrednost promenljive u prethodnoj iteraciji, sa $(*)$ se obeležava rezultat iteracije u ξ koordinatnom pravcu, a sa $(m+1)$ rezultat iteracije u η koordinatnom pravcu. Dakle, jednačine za iteracije u ξ koordinatnom pravcu za difuzioni korak održanja mase rastvorene zagađujuće materije su date sa

$$P_i^\ddagger (*) (\tilde{C}^\ddagger)_{i-1,j}^d + Q_i^\ddagger (*) (\tilde{C}^\ddagger)_{i,j}^d + R_i^\ddagger (*) (\tilde{C}^\ddagger)_{i+1,j}^d = {}^{(m)}S_i^\ddagger, \quad (4.63)$$

dok su jednačine iste namene za difuzioni korak održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa proizvoljne frakcije date sa

$$P_i^\ddagger (*) (\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i-1,j}^d + Q_i^\ddagger (*) (\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^d + R_i^\ddagger (*) (\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i+1,j}^d = {}^{(m)}S_i^\ddagger. \quad (4.64)$$

Jednačine za iteracije u η koordinatnom pravcu za difuzioni korak održanja mase rastvorene zagađujuće materije su date sa

$$P_j^\ddagger {}^{(m+1)} (\tilde{C}^\ddagger)_{i,j-1}^d + Q_j^\ddagger {}^{(m+1)} (\tilde{C}^\ddagger)_{i,j}^d + R_j^\ddagger {}^{(m+1)} (\tilde{C}^\ddagger)_{i,j+1}^d = {}^{(*)}S_j^\ddagger, \quad (4.65)$$

dok su jednačine iste namene za difuzioni korak održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa proizvoljne frakcije date sa

$$P_j^\ddagger {}^{(m+1)} (\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j-1}^d + Q_j^\ddagger {}^{(m+1)} (\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^d + R_j^\ddagger {}^{(m+1)} (\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j+1}^d = {}^{(*)}S_j^\ddagger. \quad (4.66)$$

Sveobuhvatni izrazi za koeficijenate P^\ddagger , Q^\ddagger , R^\ddagger i S^\ddagger , odnosno P^\ddagger , Q^\ddagger , R^\ddagger i S^\ddagger za oba koordinatna pravca i proizvoljni granulometrijski interval (frakciju) nanosne mešavine su dati u prilogu H. Rešavanje navedenih linearnih jednačina po jednom pravcu (tj. po ξ ili po η koordinatnoj liniji) podrazumeva korišćenje *double-sweep* (*Thomas-ovog*) algoritma (Hirsch, 2007).

Difuzioni koraci jednačina održanja mase rastvorene, odnosno adsorbovane zagađujuće materije zahtevaju granične uslove na svim granicama domena. Usvaja se princip da tokom difuzionog koraka nema promene mase zagađujuće materije u bilo kojem obliku, pa se po svim granicama nameće da je gradijent koncentracije upravno na graničnu površinu nula.

4.5. Prikaz rezultata

Rezultati proračuna tečenja su u potpunom skladu sa terenskim merenjima, pa se ove veličine mogu neposredno upoređivati i prikazivati.

Model ponašanja nanosa daje vrednosti kote rečnog dna i zastupljenosti granulometrijskih intervala nanosne mešavine u skladu sa merenim podacima. Međutim, terenska merenja koncentracije suspendovanog nanosa podrazumevaju njen dimenzionalni

oblik, zbog čega je neophodno preračunavanje u bezdimenzionalnu koncentraciju radi usklađivanja sa modelom. Pored ovoga je neophodno naglasiti da su na prikazima rezultata proračuna koncentracije navedene u *ppm* (*parts per million*), što zapravo predstavlja bezdimenzionalnu koncentraciju pomnoženu sa milion.

Na kraju se navodi način prikazivanja rezultata proračuna zagađujuće materije. Koncentracija rastvorene materije je prikazana u bezdimenzionalnom obliku navedenom u *ppm*, zbog čega su terenska merenja, koja su u ovom slučaju takođe podrazumevala dimenzionalnu koncentraciju, usklađivana sa navedenom jedinicom mere. Rezultati koji se odnose na adsorbovani zagađivač se prikazuju vezani za odgovarajuću nanosnu promenljivu. Podseća se da bezdimenzionalne koncentracije $\tilde{C}_{k_s}^\ddagger$ i $\beta_{k_s}^\ddagger$ predstavljaju masu zagađivača po jedinici mase suspendovanog nanosa odnosno nanosa u aktivnom sloju odgovarajućeg granulometrijskog intervala. U šematskim testovima se u cilju dobijanja slikovitih prikaza koji neposredno ukazuju na prisustvo zagađujuće materije prikazuju proizvodi $\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger$ i $\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\ddagger$. Sa druge strane, u slučaju numeričkih simulacija zasnovanih na terenskim merenjima se prikazuje bezdimenzionalna koncentracija adsorbovanog zagađivača koja predstavlja ukupnu masu zagađujuće materije po masi nanosa za koju je vezana. Navedeno podrazumeva zbir svih aktivnih frakcija, jer terenska merenja parametara zagađujuće materije nisu omogućila analizu granulometrijske zastupljenosti zrna nanosa na koje se zagađivač vezuje. Dakle, koncentracija adsorbovane materije se, u terenskim simulacijama, prikazuje u njenom bezdimenzionalnom obliku i navodi se u *ppm*, pa su merene vrednosti prilagođene ovakvom načinu kvantifikacije.

5. Programski kôd

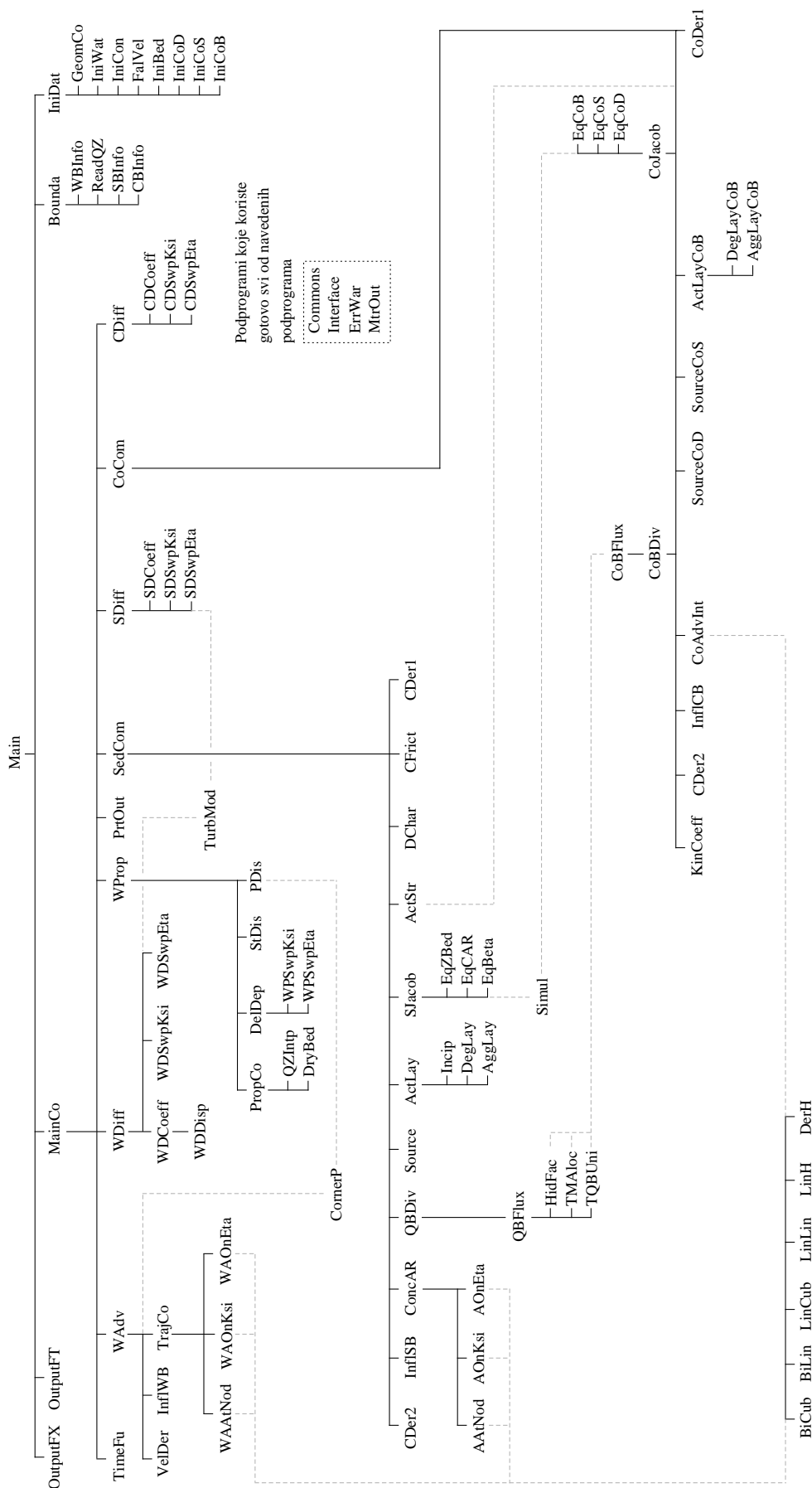
NUMERIČKO rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina strujanja vode, ponašanja nanosa i transporta zagađujuće materije, sprovedeno je koristeći programski jezik FORTRAN. Računske procedure formulisane u poglavlju 4. su prvo pisane u obliku izvorne (*source*) datoteke, a zatim je izvršeno njihovo prevođenje u binarni oblik. Na ovaj način je formirana izvršna aplikacija koja se može koristiti na bilo kojem računaru nezavisno od izvornih datoteka.

Pošto je postupak rešavanja algebarskih jednačina koje opisuju procese od interesa u prirodnim vodotocima veoma složen, rešavanje formulisanih jednačina je sprovedeno u nizu zasebnih celina. Naime, numerička procedura je rastavljena na više manjih podprograma, koji se pozivaju od strane podprograma „višeg” nivoa u odgovarajućem redosledu. Ovo je šematski prikazano na slici 25, gde se vidi da je izvršna aplikacija sastavljena od 104 podprograma u kojima je sadržano oko 17500 linija kôda. Glavna programska jedinica (*Main*) koja povezuje podprograme „nižeg” reda je nazvana *MoBed2* i ona ne sadrži računске procedure nego služi za deklaraciju globalnih promenljivih, alociranje memorije i neposredno ili posredno pozivanje ostalih podprograma. Sam programski kôd se, uzimajući u obzir njegovu strukturu, može podeliti u četiri grupe, a to su podprogrami koji više „opšte” operacije (kao što je učitavanje početnih uslova, graničnih uslova itd.), odnosno podprogrami koji vrše proračun tečenja, ponašanja nanosa i transport zagađujuće materije. Napominje se da ovakvu podelu ne treba shvatiti suviše kruto, jer postoje programske jedinice koje se koriste u više grupa operacija. U nastavku se daje kratak pregled podprograma i funkcija koje one obavljaju.

5.1. Podprogrami za sprovođenje „opštih” operacija

Svrha „opštih” operacija je da se definiše geometrija računskog domena, kao i početni i granični uslovi za proračune tečenja, ponašanja nanosa i transporta zagađujuće materije. Ove programske jedinice takođe vrše određivanje početnih vrednosti zavisno promenljivih, kao i određivanje izvoda promenljivih koji su neophodni za interpolacione podprograme.

Podprogram *IniDat* upravlja grupom programskih jedinica koje definišu računski domen i početne uslove. *GeomCo* učitava kartezijske koordinate računskih tačaka i kvantifikuje geometrijske koeficijente, kao i njihove izvode u oba koordinatna pravca. Za glavne računске tačke *IniWat* učitava početni uslov za kotu slobodne površine vode, kotu dna, odnosno dve komponente vektora brzine, kao i vrednosti koeficijenta trenja za proračun strujanja. Ovaj podprogram takođe određuje početni uslov za jedinični protok u smaknutim računskim tačkama, kao i početni uslov za dubinu. *IniCon* učitava početne uslove za koncentraciju suspendovanog nanosa svih granulometrijskih intervala i računa vrednosti njihovih izvoda za oba koordinatna pravca. *IniBed* učitava početni broj stratuma ispod aktivnog sloja, njihove dubine, odnosno raspored granulometrijskih intervala u njima. Nakon ovoga *IniBed* poziva podprograme *DChar*, *CFrict* i *Source* da bi izračunao početne vrednosti za koeficijent trenja odnosno član izvora suspendovanog nanosa (zavisne promenljive). *FalVel* određuje brzinu tonjenja za karakteristično zrno svakog granulometrijskog intervala. *IniCoD* učitava početni uslov za koncentraciju rastvorene zagađujuće materije i računa vrednosti izvoda u oba koordinatna pravca. *IniCoS* učitava početni uslov za koncentraciju zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa za sve granulometrijske intervale, nakon čega se određuju vrednosti izvoda u oba koordinatna pravca. *IniCoB* učitava početni uslov za koncentraciju



Slika 25: Šematski prikaz programskog kôda

zagađujuće materije adsorbovane na nanos u aktivnom sloju i stratumima ispod njega, takođe za sve granulometrijske intervale. Nakon ovoga *IniCoB* poziva podprograme *KinCoeff*, *CourseCoD* i *SourceCoS* da bi se sračunale početne vrednosti za kinetičke koeficijente razmene odnosno članove izvora rastvorenog i adsorbovanog zagađivača (zavisne promenljive).

Podprogram *Bounda* upravlja grupom programskih jedinica koje definišu granične uslove. *WBInfo* učitava informacije neophodne za definisanje graničnih uslova pri proračunu tečenja, tj. poziciju tačaka u kojima su zadati granični uslovi, tip graničnih uslova (nepropusna granica, poznat jedinični protok, poznat nivo, poznata kriva zavisnosti jediničnog protoka i nivoa). Na ovom mestu se takođe učitavaju i redni brojevi funkcija koje se koriste kao granični uslovi. Brojčane vrednosti ovih funkcija se učitavaju tokom proračuna pomoću podprograma *TimeFu*. Tabelarne vrednosti zavisnosti jediničnog protoka i nivoa učitava *ReadQZ*. Podprogram *SBInfo* učitava informacije o graničnim uslovima za proračun nanosa, tj. položaj tačaka u kojima su zadati granični uslovi i njihov tip (uzvodna, nepropusna ili nizvodna granica). Svaka tačka uzvodne granice zahteva funkciju po vremenu za kotu dna, zastupljenost granulometrijskih intervala u aktivnom sloju, kao i za koncentraciju suspendovanog nanosa svih granulometrijskih intervala. Ovde se takođe učitavaju samo redni brojevi funkcija graničnih uslova, dok se njihove brojčane vrednosti učitavaju tokom proračuna pomoću *TimeFu*. Podprogram *CBInfo* učitava informacije o graničnim uslovima za proračun zagađujuće materije, tj. položaj tačaka sa zadatim graničnim uslovima i njihov tip (uzvodna, nepropusna ili nizvodna granica). Napominje se da ovde deklarisan tip graničnih tačaka mora biti u skladu sa onima deklarisanim pri učitavanju graničnih uslova za proračun nanosa. Svaka tačka uzvodne granice zahteva funkciju po vremenu za koncentraciju rastvorenog zagađivača, koncentraciju adsorbovanog zagađivača u aktivnom sloju za sve granulometrijske intervale, kao i za koncentraciju zagađivača adsorbovanog na sve granulometrijske intervale suspendovanog nanosa. Slično kao i ranije, u razmatranom podprogramu se učitavaju samo redni brojevi funkcija graničnih uslova, dok se njihove brojčane vrednosti učitavaju tokom proračuna pomoću *TimeFu*.

Podprogrami *OutputFX* i *OutputFT* na kraju proračuna iz ranije ispisane binarne datoteke (u koju su upisani rezultati) učitavaju vrednosti promenljivih i upisuju ih u tekstualnu datoteku. Ovakvo ispisivanje rezultata je optimizovano za grafičko prikazivanje u programskom paketu TecPlot360.

5.2. Podprogrami za sprovođenje proračuna tečenja, ponašanja nanosa i transporta zagađujuće materije

Podprogram *MainCo* upravlja globalnim iteracijama, sprovođenjem proračuna tokom simuliranog vremena, kao i ispisivanjem rezultata simulacije u binarnu i tekstualnu datoteku. Na početku svakog vremenskog koraka *TimeFu* učitava i interpoluje funkcije po vremenu koje su zadate kao granični uslovi. Podprogram *PrtOut* je namenjen za upravljanje ispisivanjem rezultata tokom proračuna u tekstualnu datoteku radi praćenja rezultata simulacije u realnom vremenu. Naredne četiri programske jedinice se koriste od strane gotovo svih ostalih programskih jedinica. *ErrWar* ispisuje informacije o greškama i upozorenjima u tekstualnu datoteku, a *MtrOut* vrši ispisivanje promenljivih u matričnoj formi. *Commons* sadrži module sa globalnim promenljivama, a *Interface* sadrži programski modul koji definiše zahteve podprograma u vidu ulaznih i izlaznih parametara.

Algoritam za linearnu interpolaciju vrednosti geometrijskih koeficijenata je sadržan u *LinH*, dok se linearna interpolacija izvoda geometrijskih koeficijenata vrši sa *DerH*. Pod-

program *LinLin* određuje vrednost proizvoljne promenljive koristeći linearnu interpolaciju po vremenu i linijskom prostoru, *BiLin* sprovodi linearnu interpolaciju u ravanskom prostoru, *LinCub* određuje vrednost promenljive koristeći linearnu interpolaciju po vremenu i kubnu interpolaciju po linijskom prostoru, dok podprogram *BiCub* sprovodi kubnu interpolaciju u ravanskom prostoru. Iako interpolacione podprograme koristi niz drugih programskih jedinica, njihova upotreba je (u pogledu algoritma proračuna) najznačajnija u podprogramima *TrajCo*, *ConcAR*, *CoAdvInt* i u njihovim „nižim” podprogramima, kako je to i naznačeno na slici 25. Korisno je još jednom naglasiti da kubna interpolacija u razvijenom programskom kôdu podrazumeva korišćenje lokalnog interpolacionog polinoma višeg reda (Holly i Preissmann, 1977; Benqué et al., 1982; Holly i Usseglio-Polatera, 1984; Isic et al., 2013), koji zahteva poznavanje prvog i drugog izvoda promenljivih koje se interpoluju. Zbog ovoga su pri učitavanju početnih uslova, kao i u algoritmu proračuna, predviđene programske jedinice koje vrše procenu vrednosti prvih izvoda u oba koordinatna pravca, odnosno vrednosti drugog (mešanog) izvoda.

5.2.1. Proračun tečenja

Podprogram *WAdv* upravlja proračunom advektivnog koraka strujanja vode, koji se svodi na rešavanje dve diskretizovane i linearizovane jednačine pomoću *Newton-Raphson*-ovog iterativnog postupka. *VelDer* određuje izvode za dve komponente brzine koji su neophodni za interpolaciju ovih promenljivih u polaznoj tački trajektorije. *InflWB* nameće odgovarajuće granične uslove, a *TrajCo* upravlja proračunom trajektorije segment po segment. Podprogrami *WAAtNod*, *WAOOnKsi* i *WAOOnEta* određuju koordinate polazne tačke segmenta trajektorije kada je dolazna tačka u računskoj tački, na ξ , odnosno η koordinatnoj liniji. Na kraju *CornerP* nameće dvostruki granični uslov za tačke u uglovima računskog domena gde je to neophodno.

Za numerički proračun difuzionog koraka strujanja vode, koji je zasnovan na primeni ADI metode, je zadužen podprogram *WDiff*. Model turbulencije je sadržan u podprogramu *TurbMod*. Koeficijenti u kojima figurišu veličine iz prethodnog računskog koraka se kvantifikuju u *WDCoeff*, uz napomenu da se za određivanje članova disperzije poziva *WDDisp*. *Thomas*-ov algoritam duž ξ koordinatnih linija se sprovodi u *WDSwpKsi*, a duž η koordinatnih linija u *WDSwpEta*.

Upravljanjem numeričkog proračuna za propagacioni korak modela strujanja je zadužen *WProp*. Podprogram *PropCo* računa koeficijente u diskretizovanoj i linearizovanoj jednačini propagacionog koraka. Ako je za računsku tačku, kao granični uslov, nametnuta kriva zavisnosti jediničnog protoka i nivoa, podprogram *QZIntp* određuje potrebne vrednosti koristeći linearnu interpolaciju. *DelDep* upravlja iterativnim postupkom sistema jednačina za priraštaj dubine. *Thomas*-ov algoritam duž ξ koordinatnih linija se sprovodi u *WPSwpKsi*, a duž η koordinatnih linija u *WPSwpEta*. Nakon što su priraštaji dubine poznati, podprogram *StDis* sračuna jedinične protoke u smaknutim računskim tačkama, a *PDis* određuje jedinične protoke u glavnim računskim tačkama. Na kraju *CornerP* nameće dvostruki granični uslov u tačke u uglovima računskog domena gde je to neophodno.

5.2.2. Proračun ponašanja nanosa

Numeričkim proračunom advektivno-morfološkog koraka modela ponašanja nanosa upravlja *SedCom*. Na samom početku proračuna proizvoljnog vremenskog trenutka podprogram *CDer2* određuje druge izvode koncentracije suspendovanog nanosa za sve granulometrijske intervale. Podprogram *InflSB* sračuna primarne i sekundarne nanosne

promenljive (pri čemu se ovde koriste i podprogrami *DChar*, *CFrict* i *Source*), kao i prve izvode koncentracije u oba koordinatna pravca, sve za uzvodnu granicu. Nakon ovoga *SedCom* upravlja petljom po svim računskim tačkama (izuzev uzvodne granice), pri čemu se nanosne promenljive rešavaju simultano u svakoj računskoj tački. Izvan *Newton-Raphson*-ovog iterativnog postupka se nalaze podprogrami *ConcAR* i *QBDiv*. U *ConcAR* se sprovode svi eksplicitni proračuni u vezi sa advektivnim korakom jednačine održanja mase suspendovanog nanosa. Trajektorije duž koje se rešava ova jednačina se računaju segment po segment, koristeći podprograme *AAtNod*, *AOnKsi* i *AOnEta* u zavisnosti od toga da li se dolazna tačka razmatranog segmenta nalazi u računskoj tački, ξ koordinatnoj liniji ili η koordinatnoj liniji. Konačno, u *ConcAR* se vrši integracija jednačine advektivnog koraka suspendovanog nanosa duž trajektorije. Podprogram *QBDiv* računa divergenciju fluksa vučenog nanosa, dok *QBFlux* kvantifikuje fluks vučenog nanosa za pojedinačni granulometrijski interval. *TMAloc* određuje koeficijent alokacije vučenog nanosa, *HidFac* koeficijent skrivanja sitnih čestica, a *TQBUni* određuje teorijski fluks vučenog nanosa (tj. transportni kapacitet) za uniformni nanos. Podprogrami *SJacob*, *EqZBed*, *EqCAR*, *EqBeta*, *Simul*, *Source* i *ActLay* su deo *Newton-Raphson*-ovog iterativnog postupka za rešavanje sistema nanosnih jednačina u jednoj računskoj tački. Podprogram *SJacob* je zadužen za popunjavanje matrice sistema diskretizovanih i linearizovanih nanosnih jednačina. *EqZBed* računa koeficijente globalne jednačine održanja mase nanosa na dnu, *EqCAR* računa koeficijente jednačine advektivnog koraka održanja mase pojedine frakcije suspendovanog nanosa, dok *EqBeta* računa koeficijente jednačine održanja mase pojedine frakcije nanosa u aktivnom sloju. Podprogram *Simul* rešava sistem linearnih jednačina. *Source* računa član izvora suspendovanog nanosa i njegove izvode po svim nanosnim promenljivama. Podprogram *ActLay* upravlja proračunima u vezi sa aktivnim slojem. Ako se u tekućoj iteraciji predviđa degradacija (erozija) dna, onda *Incip* određuje najmanje nepokretno karakteristično zрно nanosne mešavine, a *DegLay* računa debljinu aktivnog sloja, član razmene mase između aktivnog sloja i aktivnog stratuma i njegove izvode po svim nanosnim promenljivama. U slučaju predviđenog deponovanja u tekućoj iteraciji, debljina aktivnog sloja, član razmene mase između aktivnog sloja i aktivnog stratuma i njegovi izvodi po svim nanosnim promenljivama se računaju u podprogramu *AggLay*. Nakon rešavanja sistema jednačina u posmatranoj računskoj tački, podprogram *ActStr* eksplicitno određuje debljinu aktivnog stratuma i zastupljenost granulometrijskih intervala u njemu (ako je to potrebno). *DChar* određuje karakteristične prečnike nanosne mešavine D_{50} i D_{90} , pri čemu poslednju koristi *CFrict* da bi se dobio koeficijent trenja. Nakon ovoga podprogram *CDer1* sračuna prve izvode koncentracije suspendovanog nanosa za oba koordinatna pravca i sve granulometrijske intervale.

Za numerički proračun difuzionog koraka modela ponašanja nanosa, koji se zasniva na primeni ADI metode, je zadužen podprogram *SDiff*. Koeficijenti difuzije/disperzije se određuju pozivanjem podprograma *TurbMod*. Članovi jednačine koji sadrže veličine iz prethodnog računskog koraka se računaju u *SDCoeff*. *Thomas*-ov algoritam duž ξ koordinatnih linija se sprovodi u *SDSwpKsi*, a duž η koordinatnih linija u *SDSwpEta*. Navedeni postupak proračuna difuzionog koraka se sprovodi za svaki granulometrijski interval posebno.

5.2.3. Proračun transporta zagađujuće materije

Numeričkim proračunom advektivno-interakcionog koraka modela transporta zagađujuće materije upravlja *CoCom*. Na samom početku proračuna proizvodnog vremenskog trenutka, podprogram *KinCoeff* određuje kinetičke koeficijente razmene za sve

granulometrijske intervale nanosa u suspenziji i nanosa koji se nalazi u aktivnom sloju. U ovoj fazi se takođe računaju drugi izvodi koncentracije za rastvoreni zagađivač, odnosno zagađivač adsorbovan na zrna suspendovanog nanosa svih granulometrijskih intervala pomoću *CoDer2*. Podprogram *InflCB* na uzvodnoj granici sračuna primarne i sekundarne promenljive transporta zagađujuće materije (pri čemu se ovde koriste i podprogrami *SourceCoD* i *SourceCoS*), kao i prve izvode koncentracija rastvorenog zagađivača i zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos u oba koordinatna pravca. Nakon ovoga *CoCom* upravlja petljom po svim računskim tačkama (izuzev uzvodne granice), pri čemu se promenljive zagađujuće materije rešavaju simultano u svakoj računskoj tački. Izvan *Newton-Raphson*-ovog iterativnog postupka se nalaze podprogrami *CoAdvInt* i *CoBDiv*. U podprogramu *CoAdvInt* se sprovode svi eksplicitni proračuni u vezi sa advektivnim koracima jednačina održanja mase rastvorenog zagađivača i zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa. Koordinate trajektorije duž koje se rešavaju ove jednačine se jednostavno preuzimaju iz ranije sprovedenog proračuna nanosa, nakon čega se u *CoAdvInt* vrši integracija jednačina advektivnog koraka održanja mase rastvorenog zagađivača i održanja mase zagađivača adsorbovanog na pojedine granulometrijske intervale suspendovanog nanosa. Podprogram *CoBDiv* računa divergenciju fluksa zagađujuće materije adsorbovane na zrna vučenog nanosa, dok *CoBFlux* kvantifikuje fluks zagađujuće materije adsorbovane na vučeni nanos pojedinog granulometrijskog intervala. Iz grupe programskih jedinica za proračun nanosa se pozivaju *TMAloc*, *HidFac* i *TQBUni*, koji vrše operacije opisane u ranijem izlaganju. Podprogrami *CoJacob*, *EqCoD*, *EqCoS*, *EqCoB*, *Simul*, *SourceCoD*, *SourceCoS* i *ActLayCoB* su deo *Newton-Raphson*-ovog iterativnog postupka za rešavanje sistema jednačina transporta zagađujuće materije u jednoj računskoj tački. Podprogram *CoJacob* je zadužen za popunjavanje matrice sistema diskretizovanih i linearizovanih jednačina transporta zagađivača. *EqCoD* računa koeficijente jednačine advektivnog koraka održanja mase rastvorenog zagađivača, *EqCoS* računa koeficijente jednačine advektivnog koraka održanja mase zagađivača adsorbovanog na pojedine frakcije suspendovanog nanosa, dok *EqCoB* računa koeficijente jednačine održanja mase zagađivača adsorbovanog na pojedine frakcije nanosa u aktivnom sloju. Podprogram *Simul* rešava sistem linearnih jednačina. *SourceCoD* računa član izvora rastvorenog zagađivača i njegove izvode po svim promenljivama zagađujuće materije, dok *SourceCoS* računa član izvora zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa i njegove izvode po svim promenljivama zagađujuće materije. Podprogram *ActLayCoB* upravlja proračunima vezanim za procese u aktivnom sloju. Ako se u posmatranom vremenskom koraku javlja degradacija (erozija) dna (što se može ustanoviti iz već sračunate kote dna), onda *DegLayCoB* sračuna član razmene mase između aktivnog sloja i aktivnog stratuma i njegove izvode po svim promenljivama zagađivača. U slučaju deponovanja u posmatranom vremenskom koraku, član razmene mase između aktivnog sloja i aktivnog stratuma i njegovi izvodi po svim promenljivama zagađivača se računaju u *AggLayCoB*. Nakon rešavanja sistema jednačina u posmatranoj računskoj tački, podprogram *ActStr* eksplicitno određuje koncentracije zagađujuće materije adsorbovane na pojedine granulometrijske intervale u aktivnom stratumu. Poslednje zahteva dodatno objašnjenje jer se isti podprogram spominje i u proračunu nanosa. Ako nema proračuna transporta zagađivača onda se *ActStr* poziva samo od strane *SedCom* i vrše se samo operacije u vezi sa nanosom (debljina aktivnog stratuma i zastupljenost granulometrijskih intervala u njemu), međutim ako ima proračuna transporta zagađivača onda se *ActStr* poziva samo od strane *CoCom* i vrše se operacije vezane i za nanos i za zagađenje. Potreba za ovakvim algoritmom proizilazi iz eksplicitnog karaktera proračuna aktivnog stratuma. Nakon ovoga podprogram *CoDer1* sračuna prve izvode koncentracije rastvorenog zagađivača,

odnosno zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa svih granulometrijskih intervala, sve za oba koordinatna pravca.

Za numerički proračun difuzionog koraka modela transporta zagađivača, koji se zasniva na primeni ADI metode, je zadužen podprogram *CDiff*. Koeficijenti difuzije/disperzije se preuzimaju iz proračuna nanosa. Članovi jednačine koji sadrže veličine iz prethodnog računskog koraka se računaju u *CDCoeff*. *Thomas*-ov algoritam duž ξ koordinatnih linija se sprovodi u *CDSupKsi*, a duž η koordinatnih linija u *CDSupEta*. Navedeni postupak proračuna difuzionog koraka se sprovodi za koncentraciju rastvorenog zagađivača i za koncentraciju zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa svih granulometrijskih intervala posebno.

5.3. Potrebe za ulaznim podacima

Da bi se razvijeni programski kôd primenio na konkretni problem neophodan je set podataka, koji pored numeričkih i fizičkih parametara sadrži geometrijske podatke, kao i odgovarajuće početne odnosno granične uslove. Specifičnost ulaznih podataka je uslovljena ravanskim karakterom proračuna, postojanjem aktivnog sloja i stratuma ispod njega, razlikovanjem nanosa u suspenziji i nanosa u aktivnom sloju, predstavljanjem mešavine nanosa u vidu niza granulometrijskih intervala, postojanjem rastvorenog zagađivača, zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa i zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa u aktivnom sloju i u stratumima ispod njega.

Početni uslov geometrije računskog domena je definisan koordinatama računске mreže i kotama dna. Početni uslov za proračun tečenja podrazumeva vrednosti obe komponente brzine osrednjene po dubini toka, kao i vrednosti kote slobodne površine vode. Sa druge strane, početni uslov za proračun nanosa zahteva vrednosti koncentracije suspendovanog nanosa za sve granulometrijske intervale, debljine aktivnog sloja i stratuma ispod njega, kao i zastupljenost pojedinih granulometrijskih intervala u istim. Analogno ovome, početni uslov za proračun transporta zagađivača iziskuje poznate vrednosti koncentracije rastvorenog zagađivača, koncentracije zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa za sve granulometrijske intervale, kao i koncentracije zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa svih granulometrijskih intervala u aktivnom sloju i svim stratumima ispod njega.

Simuliranje strujanja zahteva granične uslove na svim granicama računskog domena. Ovi granični uslovi mogu biti poznati jedinični protok, kriva zavisnosti jediničnog protoka i nivoa, poznat nivo slobodne površine vode ili nepropusna granica. Proračun nanosa zahteva granične uslove samo na uzvodnoj granici domena, gde je neophodno zadati vrednosti za sve primarne promenljive (kota dna, koncentracija suspendovanog nanosa za sve granulometrijske intervale i zastupljenost svih granulometrijskih intervala u aktivnom sloju). Polazeći od identičnog matematičkog karaktera jednačina, granični uslovi za simuliranje transporta zagađivača su analogni onima za nanos. Naime, i u ovom slučaju je neophodno deklarirati uzvodnu granicu (koja mora biti u skladu sa uzvodnom granicom za proračun nanosa) i zadati vrednosti za sve primarne promenljive (koncentracija rastvorenog zagađivača, koncentracija zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa svih granulometrijskih intervala i koncentracija zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa aktivnog sloja svih granulometrijskih intervala).

Pošto je razvijeni programski kôd pre svega namenjen primeni na prirodne vodotoke, terenska merenja predstavljaju glavni izvor podataka za konstruisanje početnih i graničnih uslova. Međutim, redovno se dešava da zbog finansijskih i/ili tehničkih razloga nije moguće neposredno i kontinualno meriti sve veličine neophodne za formulisanje idealnog

seta ulaznih podataka. U ovakvim slučajevima ne preostaje drugo rešenje, nego da se na najbolji mogući način naprave procene početnih i graničnih uslova iz dostupnih terenskih podataka.

6. Analiza rezultata

JEDNA od najbitnijih faza u procesu matematičkog modelisanja prirodnih aluvijalnih vodotokova je kalibracija i verifikacija modela. Cilj primene razvijenog modela na adekvatne test-primere je da se ustanovi valjanost dobijenih rezultata, stabilnost primenjenih numeričkih metoda, kao i određivanje broječnih vrednosti za niz parametara. Pojedini aspekti modela su testirani na šematskim primerima sa jasno definisanim graničnim uslovima. Međutim korišćeni su i test-primeri Dunava kao najvećeg prirodnog aluvijalnog vodotoka u Srbiji. Korišćenje „prirodnih” test-primera je neizostavno zbog njihovih kompleksnih geometrijskih i morfoloških uslova, neujednačene i neustaljene strujne slike, kao i zbog složenog kretanja nanosne mešavine u njima.

Razvijen numerički model je primenjen na dve grupe šematskih i dva terenska test-primera. Prva grupa šematskih primera je služila za sticanje uvida u tačnost modelisanja advektivnog koraka, koji ima presudan uticaj na modelisanje transportnih procesa u vodotocima. Druga grupa šematskih primera je osmišljena radi testiranja modela transporta zagađujuće materije. Na deonici Dunava u pograničnoj zoni između Mađarske i Republike Srbije su skupljani terenski podaci u dva navrata radi testiranja razvijenog ravanskog modela tečenja i ponašanja nanosa. Drugi terenski test-primer je deonica Dunava kod Beograda na kojoj je pored ravanskog modela tečenja i ponašanja nanosa testiran i model transporta zagađujuće materije.

6.1. Šematski testovi linearne i nelinearne advekcije

Metoda razlomljenih koraka, koja se koristi i u ovom radu, se često primenjuje u hidrauličkoj analizi korita brodova, aeronautici, modelisanju reka itd. Međutim, za razliku od aeronautike i brodogradnje, gde su računski domeni diktirani izgradnjom jasno definisanih objekata, u modelisanju reka se javljaju domeni nametnuti nepravilnom geometrijom korita podložnoj morfološkim promenama, što predstavlja izvor dodatnih problema. Primena metode razlomljenih koraka na jednačine tečenja je rezultovala u tri koraka (advekcija, difuzija i propagacija), dok je primena iste metode na jednačine ponašanja nanosa i zagađujuće materije dala dva računska koraka (advekcija i difuzija), kao što je to navedeno u poglavlju 4. Dok su ostali koraci numerički benigni, za advektivni korak je vezan niz problema. Jedna od najvećih poteškoća je stohastički karakter *Courant*-ovog broja po prostoru i vremenu, koji se javlja usled stohastičkog karaktera geometrije korita i graničnih uslova. Dakle, osnovni zahtev pri rešavanju advektivnog koraka je održavanje prihvatljive tačnosti numeričkog rešenja uz minimiziranje numeričke difuzije i oscilacija.

Numeričko rešavanje linearne advekcije zasnovano na metodi konačnih razlika je razmatrano od strane niza autora zbog njene jednostavnosti i lakog programiranja (Fletcher, 1991; Strikwerda, 2004; Hirsch, 2007; Wu, 2008). Iako su jednačine strujanja nelinearne, razvoj numeričkih šema obično počinje sa njihovom primenom na linearnu advekciju (uz sprovođenje *Von Neumann*-ove analize). Nakon ovoga bi se pristupilo prilagođavanju razvijene šeme nelinearnoj advekciji korišćenjem numeričkih eksperimenata i testova. Na primer, *Lax* i *Wendroff* su razvili šemu drugog reda metode konačnih razlika koja je primenjena na problem linearne advekcije (Lax i Wendroff, 1960). *Lax* je takođe predložio šemu koja je originalno bila napisana za nelinearnu advekciju, ali je moguća njena primena i na linearnu advekciju (Lax, 1954). *MacCormack* je predložio dvostepenu šemu za proračun nelinearne advekcije (MacCormack, 1969). Istorijski pregled šema metode konačnih razlika za simuliranje advekcije su dali autori Ewing i Wang (2001).

Metoda karakteristika je razvijana od strane više autora u cilju poboljšanja tačnosti

numeričkog rešavanja linearne advekcije, koja se javlja u jednačinama transportnih procesa. Tačnost ove metode neposredno zavisi od interpolacije korišćene u njoj. Leonard (1979) je predložio primenu uzvodne kvadratne interpolacije, dok su Holly i Preissmann (1977) predložili primenu lokalnog interpolacionog polinoma trećeg reda. Navedena problematika je dalje analizirana od strane više autora (Holly i Usseglio-Polatera, 1984; Yang i Hsu, 1991; Ahmad i Kothiyari, 2001; Tsai et al., 2006; Isic et al., 2013). Benqué et al. (1982) su predložili primenu metode karakteristika na nelinearnu advekciju u ravanskim jednačinama strujanja, doduše sa veoma malo detalja.

Pošto su jednačine advektivnog koraka strujanja vode nelinearne, a jednačine advektivnog koraka transporta suspendovanog nanosa i zagađujuće materije linearne, slede testovi za linearnu i nelinearnu advekciju. Razmatrane numeričke šeme i metode su primenjene na nezavisnu jednačinu linijske advekcije (čista advekcija), pa je njihova pogodnost za simuliranje razmatrane pojave ocenjivana na osnovu numeričke disperzije (oscilacije) i disipacije (difuzija) koju one proizvode (Takacs, 1985). Numerički testovi čiste advekcije su sprovedeni na test-primerima *Gauss*-ove raspodele (Al-Lawatia et al., 1999; Cecchi i Pirozzi, 2005; Company et al., 2009) i skokovite (diskontinualne) funkcije (Al-Lawatia et al., 1999; Cecchi i Pirozzi, 2005).

6.1.1. Linearna advekcija

Da bi se stekla saznanja koja mogu biti korisna pri simulaciji transportnih procesa, razmatra se linearna advekcija kao nezavisni računski korak. Cilj je procena tačnosti, stabilnosti i primenljivosti pojedinih numeričkih metoda. Linijska jednačina linearne advekcije i odgovarajući početni uslov su dati jednačinama

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad C(x, 0) = C_0(x),$$

gde C predstavlja proizvoljnu skalarnu veličinu (npr. koncentraciju), C_0 je početni uslov, t vreme, x prostorna koordinata, dok je u poznata konstantna brzina advekcije. Tačno rešenje razmatrane jednačine se svodi na transliranje početnog uslova $C_0(x)$ sa brzinom u u desnom pravcu kada je $u > 0$, odnosno u levom pravcu kada je $u < 0$, bez promene njegovog oblika (Toro, 2009).

U ovom poglavlju se razmatra metoda karakteristika, pomoću koje se linijska jednačina linearne advekcije može napisati kao

$$\frac{dC}{dt} = 0, \quad \text{duž karakteristične linije} \quad \frac{dx}{dt} = u,$$

što nakon integraljenja od polazne tačke $D(x_D, t^n)$ do dolazne tačke $A(x_i, t^{n+1})$ karakteristične linije (trajektorije) postaje

$$C_i^{n+1} = C_D^n, \quad x_D = x_i - u \Delta t.$$

U testovima se za određivanje advektovane veličine u polaznoj tački trajektorije koristi uzvodni kvadratni interpolacioni polinom MC2 (Ferziger i Perić, 2002), lokalni interpolacioni polinom trećeg reda HP3 (Holly i Preissmann, 1977; Tsai et al., 2006) i lokalni interpolacioni polinom petog reda HP5 (Isic et al., 2013). Iz grupe metoda konačnih razlika je razmatrana *upwind* šema UW prvog reda u prostoru i vremenu, *Lax-Friedrich*-ova šema LF prvog reda u prostoru i vremenu, *Lax-Wendroff*-ova šema LW drugog reda u prostoru i vremenu, kao i *Runge-Kutta* šema RK četvrtog reda (Hirsch, 2007).

Izabrani test-primer za linijsku jednačinu linearne advekcije je analitičko rešenje opisano *Gauss*-ovom krivom

$$C(x) = e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}},$$

gde x_0 označava mesto maksimuma *Gauss*-ove raspodele, dok je $\sigma_x = 250 m$ parametar standardne devijacije. Početni uslov se zadaje nametanjem mesta maksimuma raspodele u $x_0 = 0 m$ u trenutku $t = 0 s$, dok se odgovarajući granični uslov dobija „upuštanjem” ostatka *Gauss*-ove krive u računski domen u vremenu $t > 0 s$. Ostali parametri proračuna su ukupna dužina domena $L = 10 km$, simulirano vreme $T = 160 min$, računski korak po prostoru $\Delta x = 200 m$ i brzina advekcije $u = 0.5 m/s$. Računski korak je dat preko vrednosti *Courant*-ovog broja, koji je definisan jednačinom

$$Cr = \frac{u \Delta t}{\Delta x}.$$

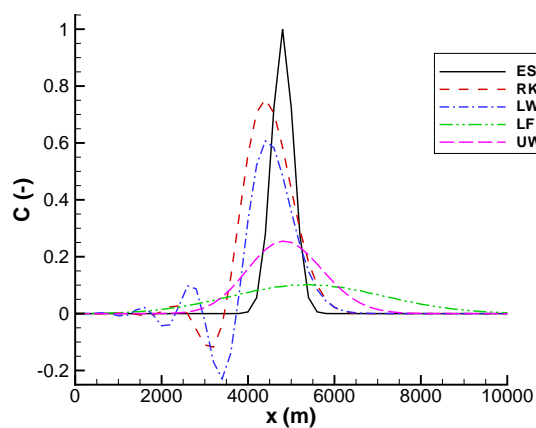
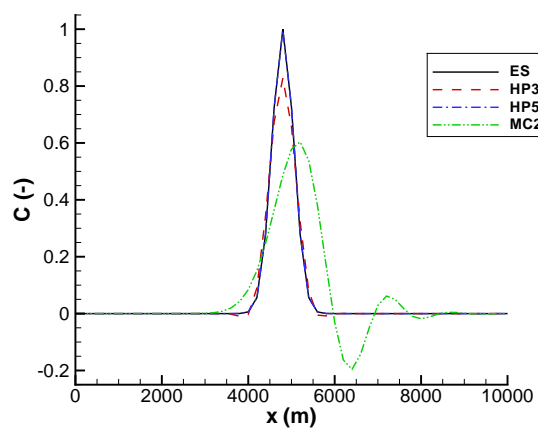
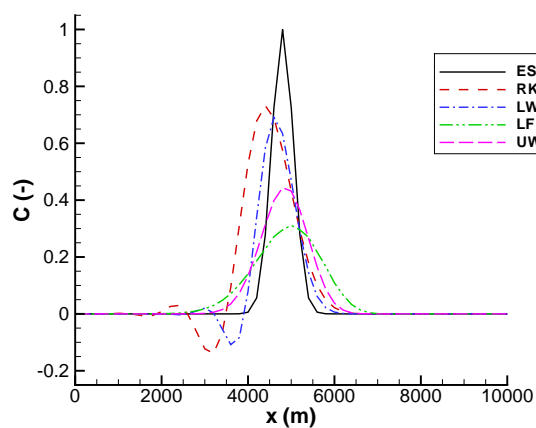
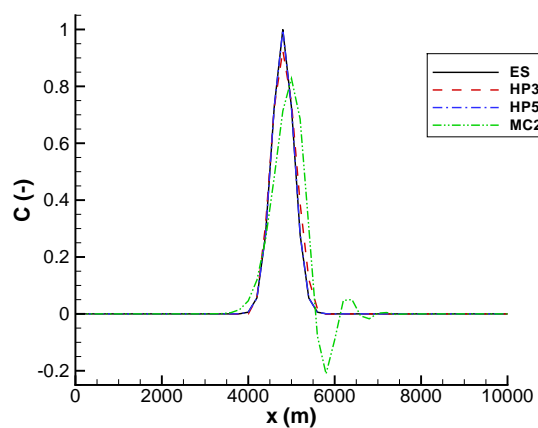
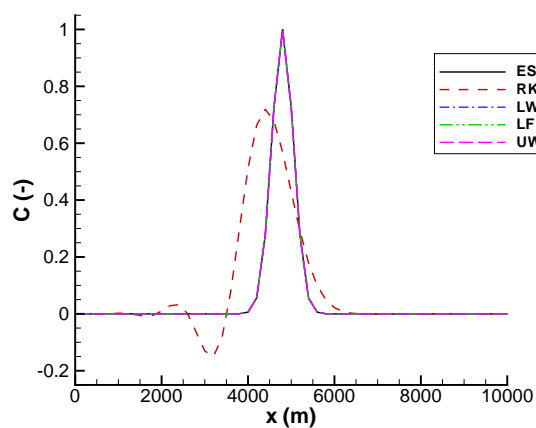
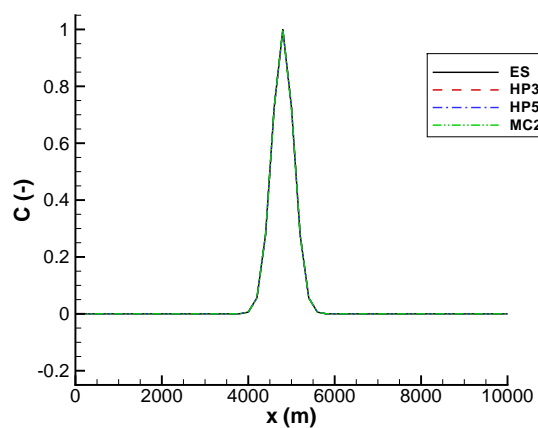
Kvantifikacija razlike numeričkog i tačnog rešenja je izvršena tako što je sračunat vektor $R_i = C_i^{\text{anal}} - C_i^{\text{num}}$, na koji su primenjene vektorske norme

$$\|L\|_1 = \sum_{i=1}^I |R_i|, \quad \|L\|_2 = \left(\sum_{i=1}^I |R_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|L\|_\infty = \max(|R_1|, \dots, |R_I|).$$

Rezultati test-primera su prikazani na slici 26 (tačno rešenje je označeno sa ES). Kada je vrednost *Courant*-ovog broja $Cr = 1$ dobijaju se najbolji rezultati i sve šeme, izuzev RK, daju tačno rešenje. Za $Cr < 1$ se javljaju numeričke oscilacije i/ili numerička difuzija različitog intenziteta u zavisnosti od konkretne numeričke metode. Detaljnijom analizom slike 26 se može zaključiti da su razlike rezultata između metoda MC2 i HP3 daleko veće u odnosu na razliku između HP3 i HP5, što čini prelazak sa polinoma drugog na polinom trećeg reda isplativim. Sa druge strane, korišćenje lokalnog interpolacionog polinoma petog umesto trećeg reda nije naročito korisno, uzimajući u obzir dobitak na tačnosti u odnosu na potencionalne poteškoće koje se mogu javiti. Jedan od presudnih nedostataka metode konačnih razlika je njihova ograničenost *Courant-Friedrichs-Lewy*-jevim uslovom (Thomas, 1995), dok u slučaju metode karakteristika ovo ograničenje ne postoji. Pregled grešaka numeričkog rešenja u tabeli 9 jasno ukazuje na to da je među razmatranim metodama najtačnija HP5. Međutim, u razvijenom numeričkom modelu je korišćena metoda karakteristika sa lokalnim interpolacionim polinomom trećeg reda HP3, jer se smatra da daje dovoljno tačne rezultate bez nepotrebnog komplikovanja sistema.

<i>Courant</i> -ov broj	Vektorska norma L_k	Numerička metoda						
		LW	RK	LF	UW	HP3	MC2	HP5
$Cr = 0.25$	$k = 1$	3.42601	3.59985	4.13945	3.22401	0.50295	3.44921	0.013381
	$k = 2$	0.99927	1.18737	1.33368	1.08618	0.21323	1.01972	0.005896
	$k = \infty$	0.51501	0.65093	0.90508	0.74519	0.17202	0.51387	0.004322
$Cr = 0.75$	$k = 1$	1.78614	3.54939	3.01285	2.2315	0.32499	1.94874	0.004549
	$k = 2$	0.64308	1.14501	1.03319	0.7998	0.15333	0.67258	0.002024
	$k = \infty$	0.36598	0.62234	0.70457	0.55621	0.10968	0.40708	0.001495
$Cr = 1.00$	$k = 1$	0.0	3.53719	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$k = 2$	0.0	1.12623	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$k = \infty$	0.0	0.60709	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 9: Greške numeričkog rešenja za test linearne advekcije

(a) Metoda konačnih razlika, $Cr = 0.25$ (b) Metoda karakteristika, $Cr = 0.25$ (c) Metoda konačnih razlika, $Cr = 0.75$ (d) Metoda karakteristika, $Cr = 0.75$ (e) Metoda konačnih razlika, $Cr = 1$ (f) Metoda karakteristika, $Cr = 1$ **Slika 26:** Numerički test simuliranja linearne advekcije

6.1.2. Nelinearna advekcija

U ovom poglavlju se razmatra tačnost, stabilnost i primenljivost razmatranih numeričkih metoda u slučaju linijske jednačine nelinearne advekcije date sa

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

gde je u nepoznata brzina, a u_0 početni uslov. Napisana jednačina se u literaturi javlja i pod imenom neviskozna *Burger*-ova jednačina i može se napisati u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [f(u)] = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad f = \frac{u^2}{2}.$$

U razmatranom slučaju karakteristična brzina (tj. brzina advekcije) je deo rešenja, pa dolazi do distorzije početnog uslova usled činjenice da vrednosti rešenja sa većom brzinom „putuju” brže nego vrednosti sa manjom brzinom. Ovo neizbežno dovodi do prelamanja talasa u trenutku koji je moguće predvideti (Toro, 2009). Detalji vezani za ponašanje nelinearne advekcije i način određivanja vremena prelamanja su dati u poglavlju 4.2.1.

Slično kao kod linearne advekcije i ovde se razmatra metoda karakteristika pomoću koje se linijska jednačina nelinearne advekcije može napisati kao

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \text{duž karakteristične linije} \quad \frac{dx}{dt} = u,$$

što nakon integraljenja od polazne tačke $D(x_D, t^n)$ do dolazne tačke $A(x_i, t^{n+1})$ karakteristične linije (trajektorije) postaje

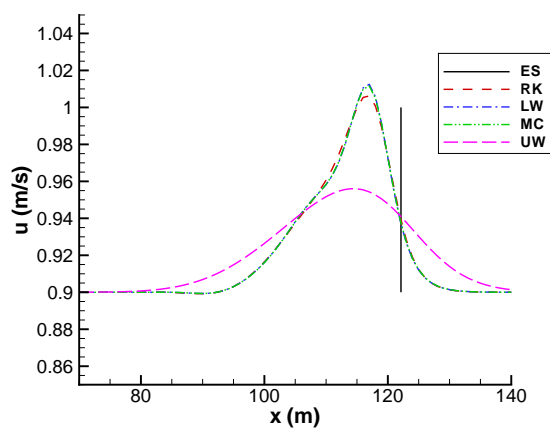
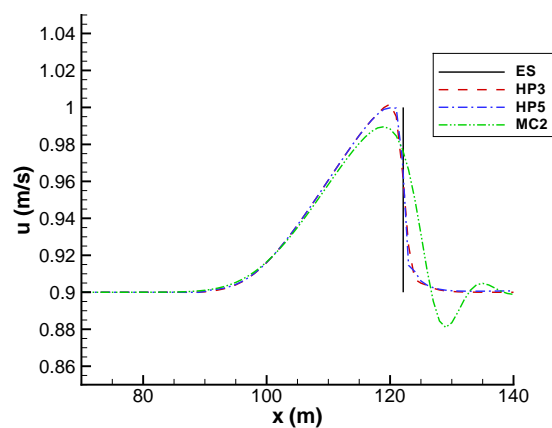
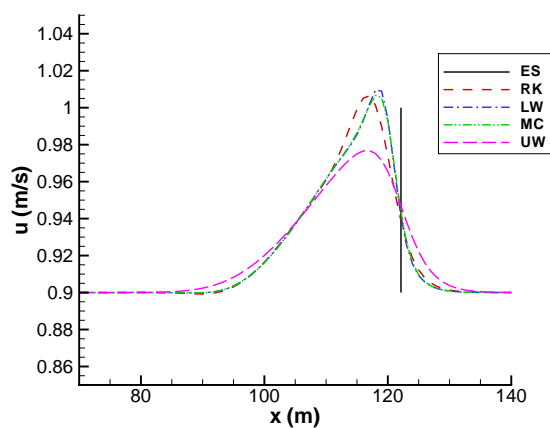
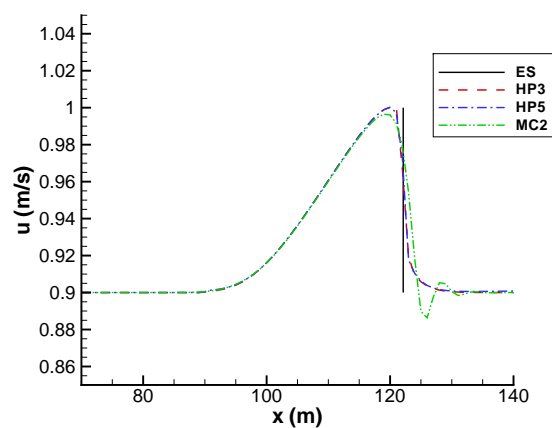
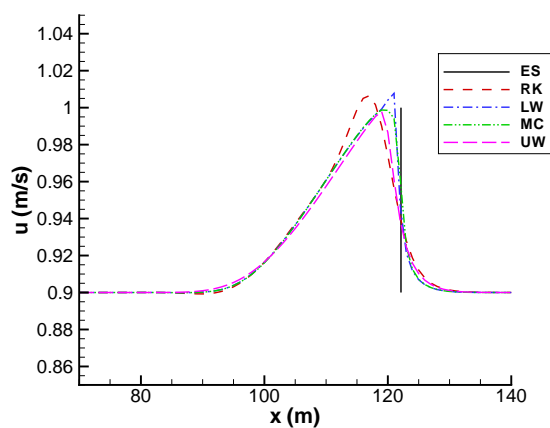
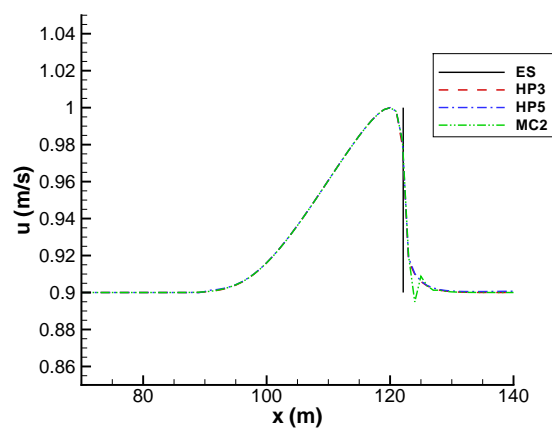
$$u_i^{n+1} = u_D^n, \quad x_D = x_i - u_i^{n+1} \Delta t.$$

U testovima se za određivanje nepoznate brzine u polaznoj tački trajektorije koristi uzvodni kvadratni interpolacioni polinom MC2 (Ferziger i Perić, 2002), lokalni interpolacioni polinom trećeg reda HP3 (Holly i Preissmann, 1977; Tsai et al., 2006) i lokalni interpolacioni polinom petog reda HP5 (Isic et al., 2013). Iz grupe metoda konačnih razlika je razmatrana *upwind* šema UW, *Lax-Wendroff*-ova šema LW, *MacCormack*-ova šema MC, kao i *Runge-Kutta* šema RK četvrtog reda (Hirsch, 2007).

Prvi test-primer za nelinearnu advekciju podrazumeva početni uslov zasnovan na *Gauss*-ovoj raspodeli

$$u(x, 0) = U_1 + U_2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}},$$

gde su $U_1 = 0.9 \text{ m/s}$ i $U_2 = 0.1 \text{ m/s}$ konstante, $x_0 = 20 \text{ m}$ je mesto maksimuma raspodele, a $\sigma_x = 6.0563 \text{ m}$ je parametar standardne devijacije. Uzvodni granični uslov je dat sa $u(0, t) = U_1$. Iako razmatrani test-primer nema analitičko rešenje, usled čega je nemoguće sračunati grešku numeričkog rešenja, on daje uvid u intenzitet numeričke difuzije i oscilacija koje se javljaju primenom različitih metoda. Pored ovoga, koristeći jednačinu (4.14), moguće je ustanoviti da dolazi do prelamanja talasa u trenutku $t_b = 100 \text{ s}$ na koordinati $x_b = 122.131 \text{ m}$. Ova informacija se koristi kao „referenca” za razmatrani test-primer. Preostali parametri numeričke simulacije su ukupna dužina domena $L = 200 \text{ m}$, simulirano vreme $T = 100 \text{ s}$ i računski korak po prostoru $\Delta x = 1 \text{ m}$. Rezultati su prikazani na slici 27, gde je kriterijum za ocenu tačnosti numeričkih metoda strmost talasa u x koordinati, označenoj ES. Konstatuje se da metode karakteristika načelno daju bolje rezultate od metode konačnih razlika. Zasebna analiza metode karakteristika dovodi do zaključka da primena HP3 i HP5 prednjači u odnosu na MC2.

(a) Metoda konačnih razlika, $\Delta t = 0.2 \text{ s}$ (b) Metoda karakteristika, $\Delta t = 0.2 \text{ s}$ (c) Metoda konačnih razlika, $\Delta t = 0.8 \text{ s}$ (d) Metoda karakteristika, $\Delta t = 0.8 \text{ s}$ (e) Metoda konačnih razlika, $\Delta t = 1 \text{ s}$ (f) Metoda karakteristika, $\Delta t = 1 \text{ s}$ **Slika 27:** Numerički test simuliranja nelinearne advekcije, test-primer br. 1

Drugi test-primer za nelinearnu advekciju podrazumeva početni uslov definisan na tri podintervala računskog domena

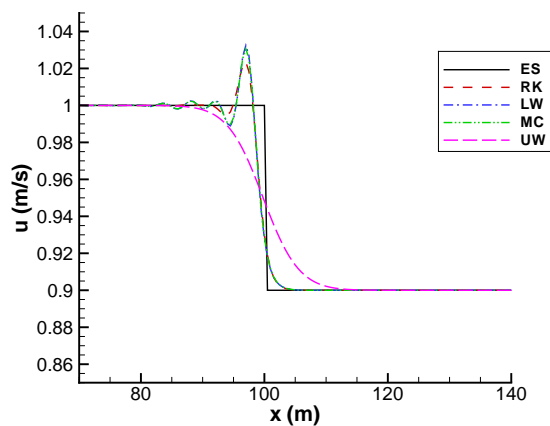
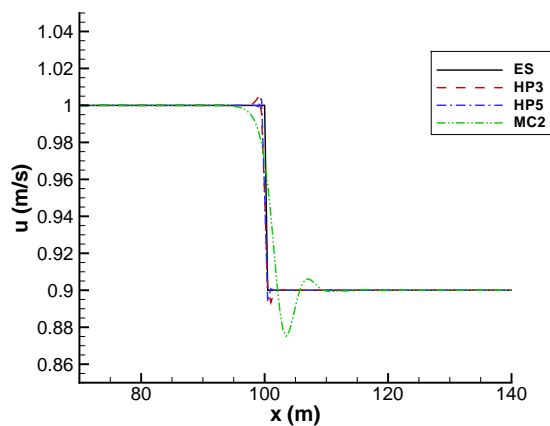
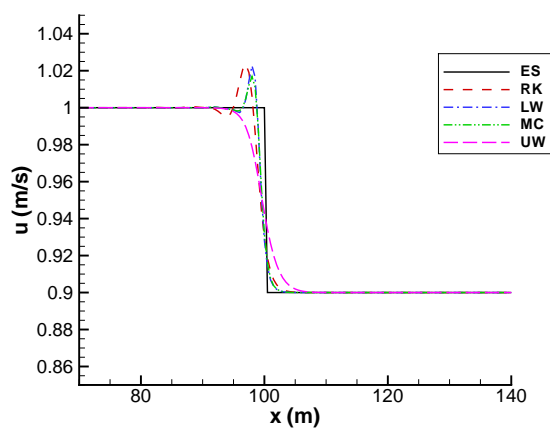
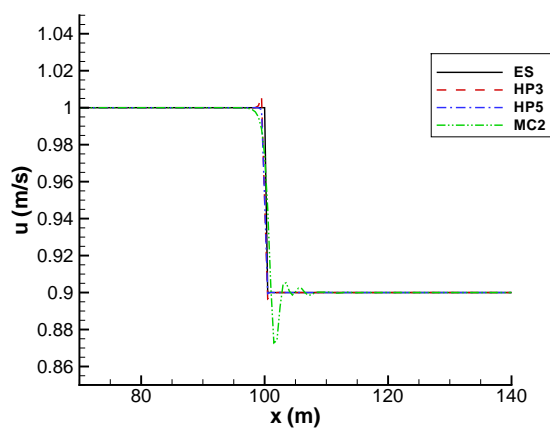
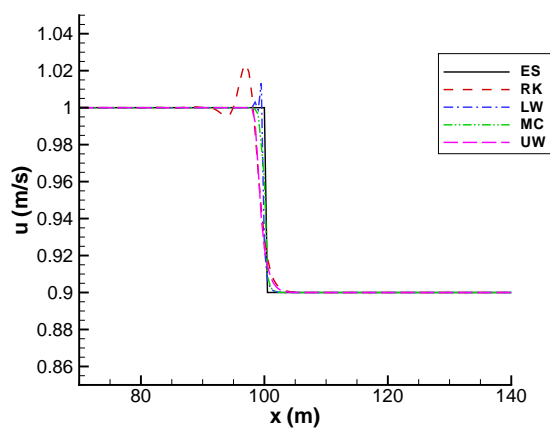
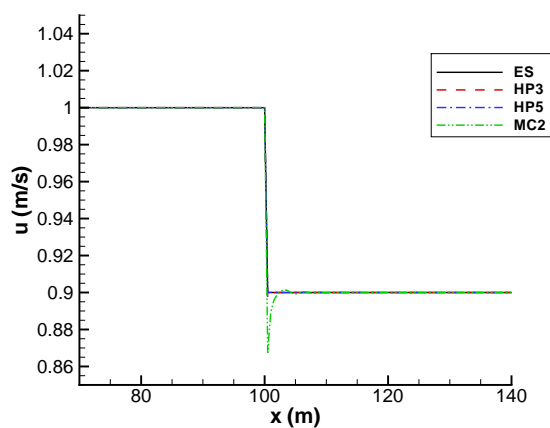
$$\begin{aligned} u(x, 0) &= U_1, & x &= 0 m, \\ u(x, 0) &= U_2 + U_3 \frac{x_0 - x}{x_0}, & 0 m < x < 10 m, \\ u(x, 0) &= U_2, & x &\geq 10 m, \end{aligned}$$

gde su $U_1 = 1 m/s$, $U_2 = 0.9 m/s$, $U_3 = 0.1 m/s$ i $x_0 = 10 m$ konstante. Ovako definisan početni uslov *nije* skokovita (diskontinualna) funkcija, međutim usled postojanja razlike u brzinama njegovih podintervala dolazi do distorzije u diskontinualnu funkciju u trenutku prelamanja talasa. Uzvodni granični uslov je dat kao konstanta tokom vremena $u(0, t) = U_1$. Vremenski trenutak i mesto prelamanja talasa su definisani sa $t_b = 100 s$ i $x_b = 100 m$, uz napomenu da je ovim ujedno određeno i tačno rešenje. Preostali računski parametri su ukupna dužina domena $L = 150 m$, simulirano vreme $T = 100 s$ i računski korak po prostoru $\Delta x = 0.5 m$. Rezultati simulacije razmatranog test-prимера su dati na slici 28, gde je prikazan deformisani početni uslov u trenutku prelamanja talasa. Kao u slučaju prethodnog test-prимера najtačnije rezultate daje metoda karakteristika sa lokalnim interpolacionim polinomom trećeg, odnosno petog stepena. Ovaj zaključak je potvrđen greškama numeričkog rešenja, koje su računare koristeći vektorske norme i identičan princip kao u slučaju testa linearne advekcije (tabela 10).

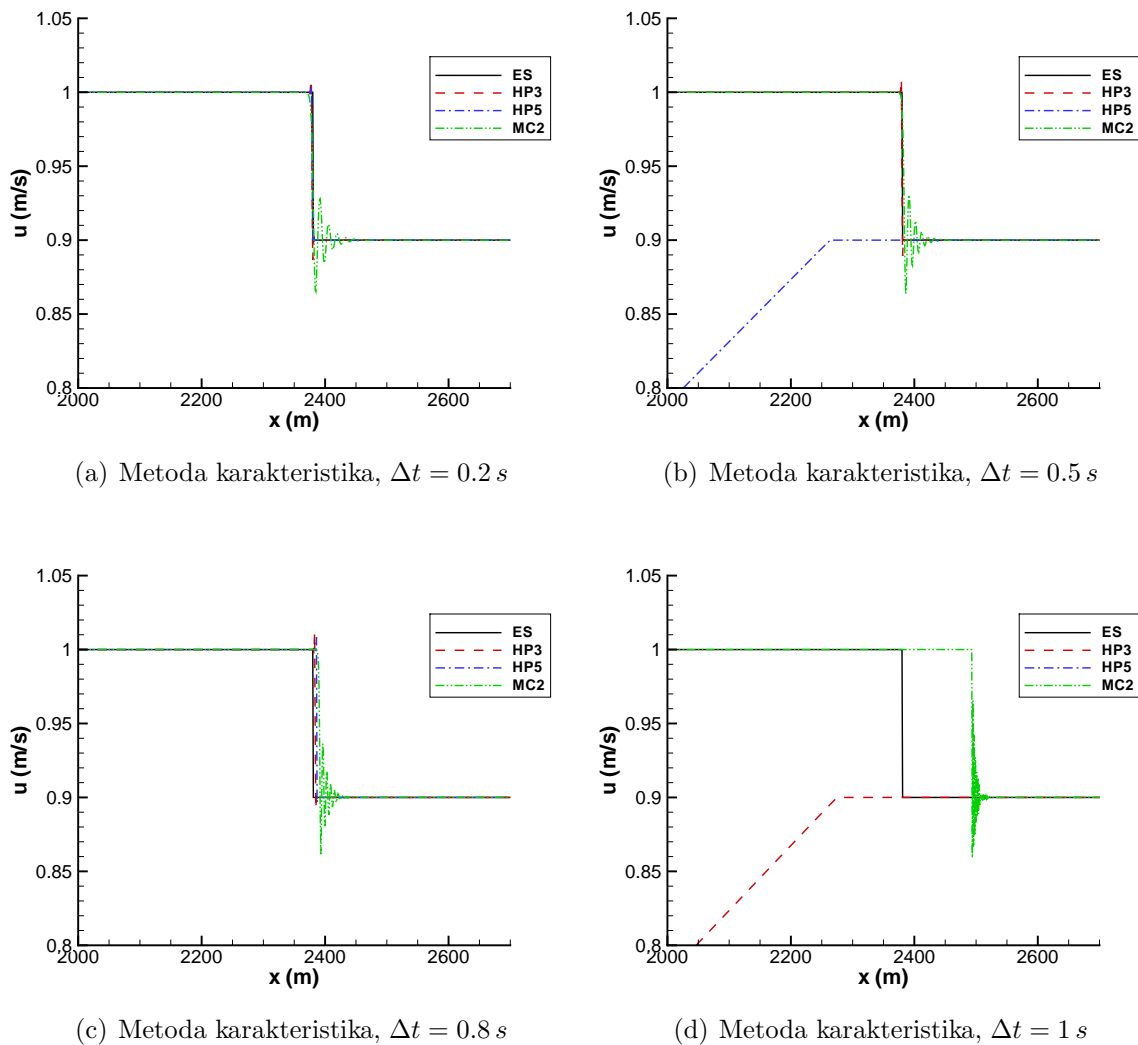
Vremenski korak	Vektorska norma L_k	Numerička metoda						
		LW	RK	MC	UW	HP3	MC2	HP5
$\Delta t = 0.1 s$	$k = 1$	0.40606	0.33858	0.39558	0.76664	0.07043	0.35642	0.0605
	$k = 2$	0.11721	0.10777	0.11479	0.14875	0.04929	0.09655	0.04853
	$k = \infty$	0.07205	0.06994	0.07134	0.05175	0.04834	0.05725	0.04789
$\Delta t = 0.4 s$	$k = 1$	0.22476	0.33388	0.2057	0.37115	0.06417	0.17917	0.05136
	$k = 2$	0.09306	0.10762	0.08633	0.10658	0.05125	0.06672	0.04947
	$k = \infty$	0.07174	0.07031	0.0683	0.05681	0.05069	0.0456	0.04945
$\Delta t = 0.5 s$	$k = 1$	0.10258	0.33317	0.07691	0.21026	0.00373	0.05635	0.00024
	$k = 2$	0.07667	0.10767	0.04471	0.10382	0.00300	0.03459	0.00016
	$k = \infty$	0.07513	0.07043	0.0384	0.0759	0.00291	0.03257	0.00013

Tabela 10: Greške numeričkog rešenja za test nelinearne advekcije

Na kraju se posmatra prethodni test-primer, ali za vreme *nakon* trenutka prelamanja talasa definisanog sa $t_b = 100 s$. U ovom slučaju je moguće odrediti tačno rešenje koristeći jednačinu (4.14) i *Rankine-Hugoniot*-ov uslov za brzinu putovanja diskontinuiteta (Toro, 2009). Poznato je da metoda karakteristika *ne* funkcioniše nakon vremena prelamanja talasa, jer upravo u tom trenutku dolazi do ukrštanja karakterističnih linija kao što je to nagovešteno u poglavlju 4.2.1. Radi sticanja uvida u navedeno ograničenje, upravo se metodi karakteristika posvećuje dodatna pažnja. Dakle, sproveden je numerički test za simulirano vreme $T = 2500 s$ i računski korak po prostoru $\Delta x = 1 m$. Nakon vremena prelamanja talasa metoda karakteristika postaje nepredvidiva, kao što se to vidi sa slike 29. Naime, za neke vremenske korake se dobija tačan položaj diskontinuiteta, dok se za druge vremenske korake dobijaju položaji diskontinuiteta manje ili više ispred tačnog rešenja. Takođe je bitno naglasiti da se numeričko rešenje HP5 za neke vrednosti odnosa vremenskog i prostornog koraka raspada, dok za duge vrednosti ovog odnosa i HP3 i HP5 daju netačne rezultate.

(a) Metoda konačnih razlika, $\Delta t = 0.1$ s(b) Metoda karakteristika, $\Delta t = 0.1$ s(c) Metoda konačnih razlika, $\Delta t = 0.4$ s(d) Metoda karakteristika, $\Delta t = 0.4$ s(e) Metoda konačnih razlika, $\Delta t = 0.5$ s(f) Metoda karakteristika, $\Delta t = 0.5$ s

Slika 28: Numerički test simuliranja nelinearne advekcije, test-primer br. 2



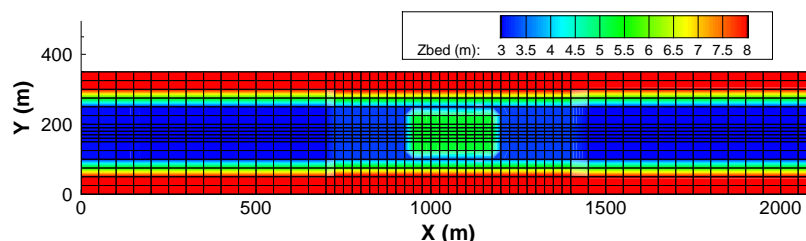
Slika 29: Numerički test simuliranja nelinearne advekcije, test-primer br. 3

Na osnovu prikazanih test-primera je zaključeno da od razmatranih metoda najtačnije rezultate daje metoda karakteristika sa lokalnim interpolacionim polinomom trećeg HP3, odnosno petog HP5 stepena. Međutim, ona se ne može koristiti za vremena simulacije veća od vremena prelamanja talasa. Ranije je rečeno da se primenom metode razlomljenih koraka na jednačine strujanja, pored advektivnog koraka, javljaju i difuzioni i propagacioni korak koji takođe vrše transformaciju (rasplinjavanje) strujnog polja, pa u tom slučaju opasnost od prelamanja talasa postoji samo unutar *jednog* vremenskog koraka. Dakle, pošto se u razvijenom modelu za rešavanje advektivnog koraka modela tečenja koristi metoda karakteristika HP3, neophodno je ograničiti vremenski korak tako da on bude manji od vremena prelamanja talasa.

6.2. Šematski testovi modela transporta zagađujuće materije

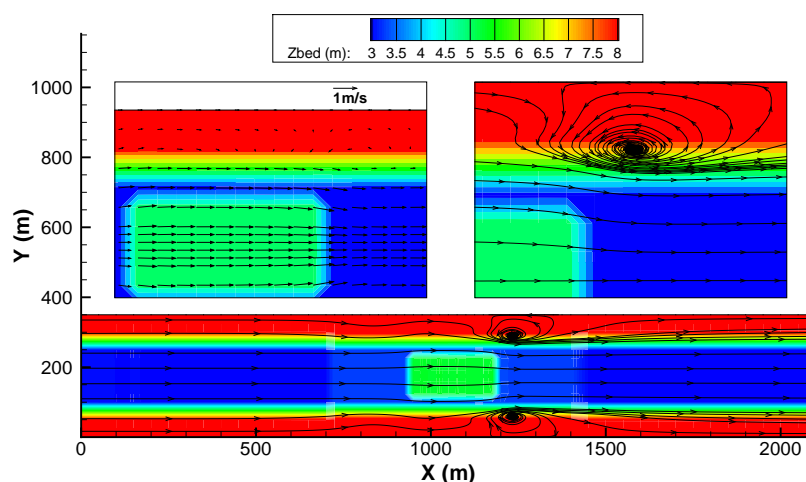
U ovom poglavlju se prikazuju šematski testovi modela transporta zagađujuće materije, koji za cilj imaju kvalitativnu ocenu funkcionisanja razvijenog matematičkog modela. Izabran je računski domen koji obuhvata relativno jednostavan kanal širine 350 m i dužine 2100 m sa kotama dna prikazanim na slici 30. Kanal je plići u blizini obala (inundacije)

a dublji na središnjem delu (glavno korito), pri čemu se na sredini nalazi zona sa kotama dna izdignutim za 2 m što u hidrauličkom smislu predstavlja prepreku tečenju. Računska mreža je neuniformna, pri čemu rastojanje između računskih tačaka u ξ pravcu varira od 25 m do 50 m , dok u η pravcu ovo rastojanje iznosi od 10 m do 25 m . Model sadrži 1026 računskih tačaka. Vreme simulacije transporta zagađivača je iznosilo 8 h , čemu je prethodilo 24 h namenjenih za ustaljivanje hidrauličkog proračuna i proračuna ponašanja nanosa.



Slika 30: Računski domen za numerički test transporta zagađivača

Hidraulički proračun je za početne uslove koristio horizontalni nivo slobodne površine vode, pri čemu su obe komponente brzine u svim tačkama nula (*zero-flow*). Granični uslov na uzvodnom i nizvodnom kraju je bila nametnuta kota slobodne površine vode, pri čemu je ona na uzvodnom kraju iznosila 8.63 m a na nizvodnom kraju 8.6 m . Usvojeni vremenski korak za proračun tečenja je iznosio 30 s .



Slika 31: Strujna slika za numerički test transporta zagađivača

Na slici 31 je prikazano nekoliko detalja strujne slike za razmatrani šematski test-primer. Model daje rezultate koji su ispravni sa stanovišta fizike stvari. Naime, vektori brzine su veći kada struja prolazi preko prepreke u glavnom koritu što je posledica smanjene dubine. Pošto zona sa izdignutom kotom dna sa hidrauličkog stanovišta predstavlja prepreku, dolazi do preraspodele protoka što za posledicu ima zakrivljenje strujnica i formiranje vrtložnog strujanja u inundacijama neposredno nizvodno od razmatrane zone.

U cilju implementacije ravanskog modela transporta nanosa i morfoloških promena uzeta je nanosna mešavina sa deset granulometrijskih intervala (tabela 11). Napominje se da iako postoji deset granulometrijskih intervala, u interakciji sa zagađivačem učestvuje samo prvih četiri u skladu sa izlaganjem u poglavlju 4.4. pa se analiza u nastavku usredređuje samo na ove frakcije. Vremenski korak za proračun nanosa je iznosio 60 s .

Granulometrijski interval k_s	Karakteristični prečnik D_{k_s} (mm)	Granulometrijski interval k_s	Karakteristični prečnik D_{k_s} (mm)
1	0.00224	6	0.112
2	0.00707	7	0.177
3	0.0141	8	0.354
4	0.0316	9	0.707
5	0.0707	10	4.0

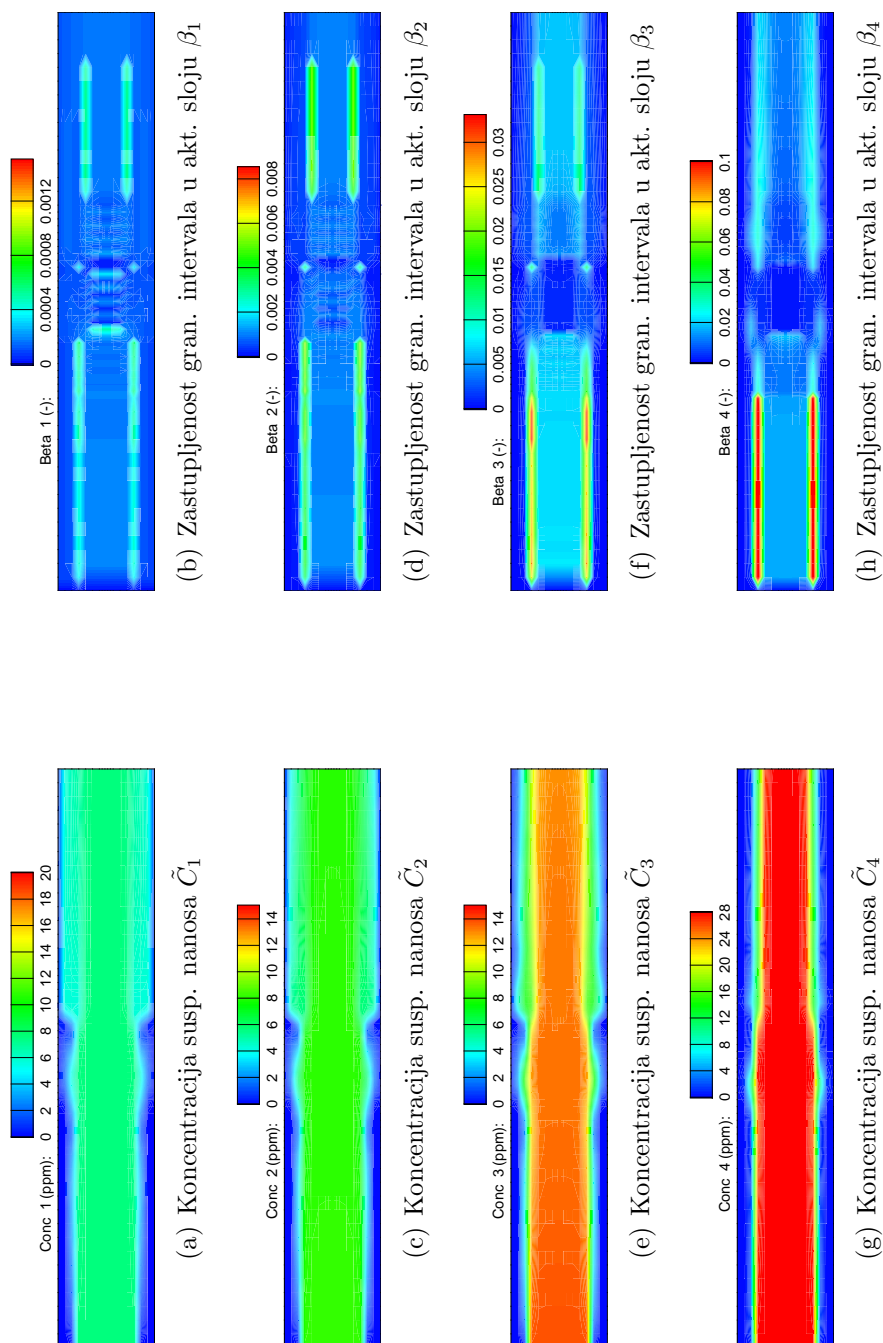
Tabela 11: *Granulometrijski intervali mešavine nanosa*

Početni uslov je podrazumevao da nema prisutnog suspendovanog nanosa, dok je inicijalni granulometrijski sastav u aktivnom sloju i svim stratumima ispod njega (aktivnom i dubljim) prikazan u tabeli 12 (i identičan je tamo navedenom graničnom uslovu). Granični uslovi za nanosne veličine su nametnuti kao konstante tokom vremena. U tabeli 12 su navedene vrednosti koje su zadavane u računskim tačkama uzvodne granice razmatranog domena od $j = 4$ do $j = 15$, što odgovara glavnom koritu. Kota dna i granulometrijska zastupljenost u aktivnom sloju su u svim tačkama uzvodne granice ostale iste u odnosu na početni uslov. Formulisan numerički model ne zahteva nizvodne granične uslove za proračun nanosa.

Granulometrijski interval k_s	Koncentracija suspendovanog nanosa \tilde{C}_{k_s} (-)	Granulometrijska zastupljenost β_{k_s} (-)
1	$7.59 \cdot 10^{-6}$	0.0001
2	$8.25 \cdot 10^{-6}$	0.0001
3	$1.39 \cdot 10^{-5}$	0.0001
4	$2.86 \cdot 10^{-5}$	0.0001
5	$2.38 \cdot 10^{-5}$	0.0048
6	$4.92 \cdot 10^{-6}$	0.0048
7	0.0	0.32
8	0.0	0.63
9	0.0	0.02
10	0.0	0.02

Tabela 12: *Granični uslovi proračuna nanosa*

Na slici 32 su prikazani rezultati proračuna nanosa u trenutku završetka perioda ustaljivanja proračuna, tj. trenutka neposredno pre početka simuliranja transporta zagađivača. Kao što je to najavljeno ranije, predmet analize su samo granulometrijski intervali koji učestvuju u interakciji sa zagađujućom materijom. Vrednosti koncentracije suspendovanog nanosa su načelno uslovljeni nametnutim uzvodnim graničnim uslovom. Međutim, može se zapaziti tendencija da se suspendovani nanos manjeg karakterističnog prečnika može naći i u plićim zonama računskog domena, dok se suspendovani nanos većeg karakterističnog prečnika uglavnom zadržava u dubljim zonama računskog domena. Zastupljenost granulometrijskih intervala u aktivnom sloju za razmatrani vremenski trenutak je posledica početnog uslova i procesa razmene mase između nanosa na dnu i suspenzije tokom perioda namenjenog ustaljivanju proračuna nanosa. Povećano prisustvo pojedinih frakcija u aktivnom sloju je u ovom slučaju uglavnom posledica deponovanja. Uočava se da ove zone odgovaraju mestima prelaza iz glavnog korita u inundaciju što se podudara sa mestima smanjenja brzina pa ujedno i kinetičke energije toka. Takođe je jasno da je proces deponovanja intenzivniji za granulometrijske intervale sa većim karakterističnim prečnikom, što opet ima fizičku opravdanost.



Slika 32: *Proračun nanosa za numerički test transporta zagađivača*

6.2.1. Test-primer zagađene vode

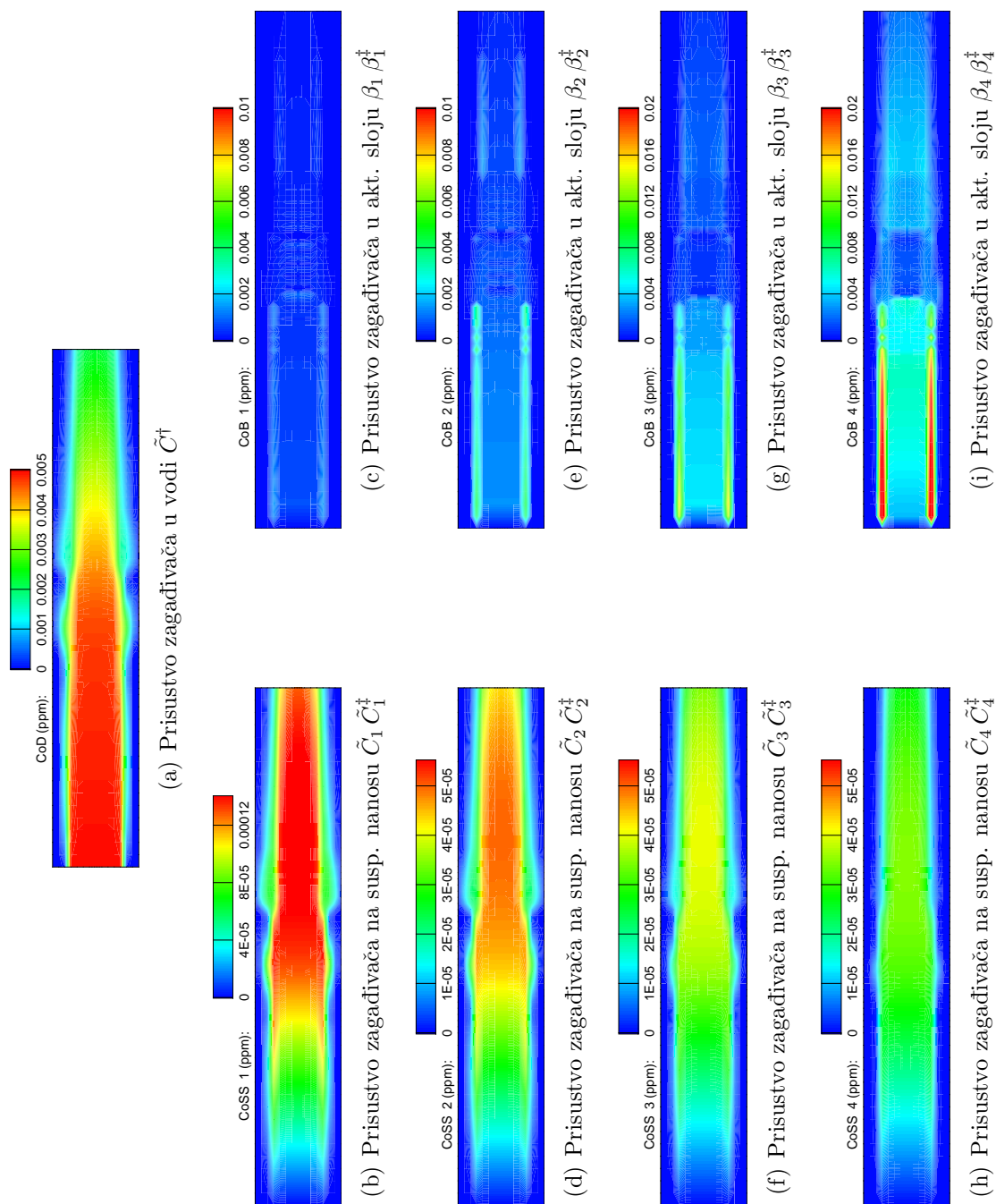
U prvom numeričkom testu modela transporta zagađujuće materije se razmatra slučaj kada se u domen upušta „zagađena” voda, tj. rastvoreni zagađivač. Početni uslov je podrazumevao da zagađujuća materija nije prisutna ni u jednom obliku (rastvoreni ili adsorbovani). Granični uslovi proračuna su nametnuti kao funkcije tokom vremena. U tabeli 13 su date vrednosti koje su zadavane u računskim tačkama uzvodne granice razmatranog domena od $j = 4$ do $j = 15$, što odgovara glavnom koritu. U preostalim tačkama uzvodnog graničnog uslova zagađivač nije bio prisutan. Formulisan numerički model ne zahteva nizvodne granične uslove, jer difuzioni korak podrazumeva da je na svim granicama gradijent koncentracije nula. Usvojeni vremenski korak za proračun je iznosio 60 s.

Vreme (h):	0.0	1.0	2.0	3.0	8.0
$\tilde{C}^\dagger (-)$	0.0	$5 \cdot 10^{-9}$	$5 \cdot 10^{-9}$	0.0	0.0
$\tilde{C}_{k_s=1,2,3,4}^\ddagger (-)$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\beta_{k_s=1,2,3,4}^\ddagger (-)$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 13: Granični uslovi proračuna transporta zagađivača

Na slici 33 su prikazani rezultati proračuna za trenutak $T = 1.5 h$. Upuštanjem rastvorenog zagađivača na uzvodnoj granici domena dolazi do njegovog transporta mehanizmima advekcije i difuzije, koji su posledica strujanja vode. Međutim, usled dejstva kinetičkih koeficijenata i članova razmene, dolazi do vezivanja transportovane materije na zrna suspendovanog nanosa odnosno zrna nanosa u aktivnom sloju. Zanimljivo je primetiti prostornu dispoziciju vrednosti koncentracija. Na uzvodnom kraju kanala je veće prisustvo rastvorenog zagađivača a manje prisustvo zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos, dok je na nizvodnom kraju kanala obrnuto. Ovo je posledica vezivanja materije za zrna suspendovanog nanosa koja u domen ulaze „čista”, pa imaju kapacitet za adsorpciju materije na njih. Naravno, ovo se ne dešava u neposrednoj blizini uzvodne granice nego nešto nizvodnije, pošto ovaj proces nije trenutnog karaktera. U aktivnom sloju se takođe pojavljuje zagađujuća materija u adsorbovanom obliku. Na uzvodnom delu računskog domena se zagađivač vezuje za zrna nanosa u aktivnom sloju usled neposredne adsorpcije iz rastvorenog oblika. Naravno ovaj mehanizam je direktno vezan za prisustvo nanosa pojedinih granulometrijskih intervala na dnu, pa se transportovana materija u aktivnom sloju javlja u većoj količini na mestima gde postoji veća količina nanosnog materijala pogodnog za adsorpciju. Međutim, na nizvodnom kraju domena gde je rastvorena zagađujuća materija prisutna u manjoj količini, deponovanje nanosa iz suspenzije (i adsorbovane materije na njemu) je primarni mehanizam dospevanja zagađivača u aktivni sloj. Dakle, rezultati numeričke simulacije potvrđuju činjenicu da su procesi transporta nekonzervativne materije usko vezani za parametre tečenja, odnosno ponašanje nanosa.

Za prikazani vremenski trenutak je proveravana kumulativna relativna greška jedinačine održanja mase celog računskog domena. U slučaju rastvorenog zagađivača greška je bila reda veličine 0.0008%. Vrednost greške za zagađivač adsorbovan na nanos u aktivnom sloju je oko $1.1 \cdot 10^{-16}\%$ (za 3. frakciju), dok je zbir relativne greške za sve aktivne frakcije iznosio oko $1.0 \cdot 10^{-17}\%$. Za zagađivač adsorbovan na suspendovani nanos greška je iznosila približno 0.005% (za 2. frakciju), dok zbir relativne greške po svim aktivnim frakcijama nije prevazilazio 0.02%.



Slika 33: Numerički test transporta zagađivača, test-primer br.1

6.2.2. Test-primer zagađenog suspendovanog nanosa

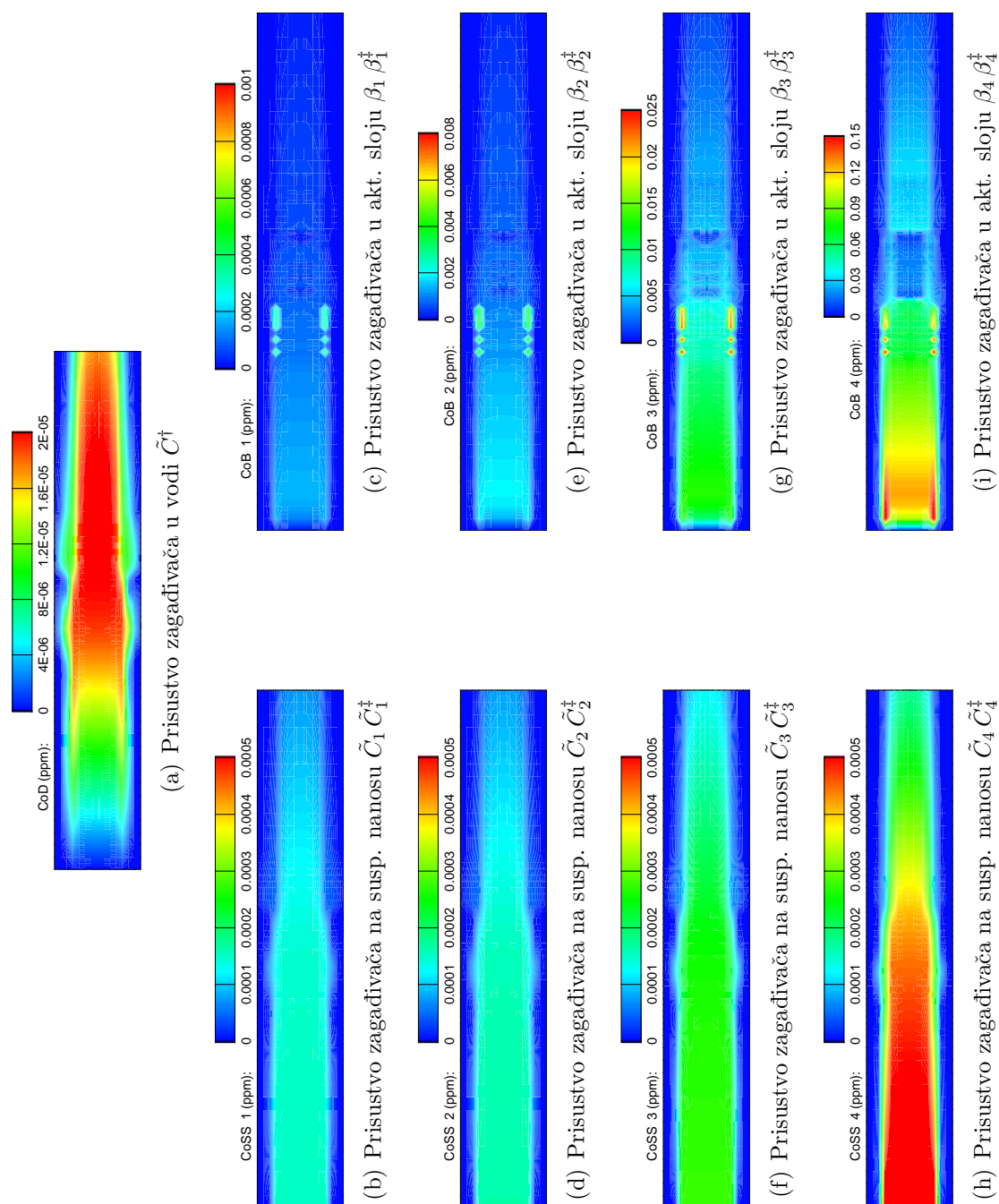
Drugi numerički test modela transporta zagađujuće materije obuhvata slučaj kada se u domen upušta „zagađen” suspendovani nanos, tj. zagađivač adsorbovan na zrna suspendovanog nanosa. Kao i u prethodnom primeru, početni uslov je podrazumevao da zagađujuća materija nije prisutna ni u jednom obliku (rastvoreni ili adsorbovani). Granični uslovi proračuna su nametnuti kao funkcije tokom vremena, pri čemu su u tabeli 14 prikazane vrednosti koje su zadavane u računskim tačkama uzvodne granice razmatranog domena od $j = 4$ do $j = 15$. U ostalim tačkama uzvodnog graničnog uslova zagađivač nije bio prisutan. Formulisan numerički model ne zahteva nizvodne granične uslove, jer difuzioni korak podrazumeva da je na svim granicama gradijent koncentracije nula. Vremenski korak za proračun je iznosio 60 s.

Vreme (h):	0.0	1.0	2.0	3.0	8.0
$\tilde{C}^\dagger (-)$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\tilde{C}_{k_s=1,2,3,4}^\dagger (-)$	0.0	$20 \cdot 10^{-6}$	$20 \cdot 10^{-6}$	0.0	0.0
$\beta_{k_s=1,2,3,4}^\dagger (-)$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tabela 14: Granični uslovi proračuna transporta zagađivača

Na slici 34 su prikazani rezultati proračuna za trenutak $T = 1.5 h$. Upuštanjem zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa dolazi do njegovog transporta mehanizmima advekcije i difuzije. Međutim, usled dejstva kinetičkih koeficijenata i članova razmene, transportovana materija se desorbuje sa zrna suspendovanog nanosa. Zanimljivo je primetiti prostornu raspodelu sračunatih vrednosti koncentracija. Na uzvodnom kraju kanala je veće prisustvo zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa a manje prisustvo rastvorenog zagađivača, dok je na nizvodnom kraju kanala obrnuto. Ovo je posledica oslobađanja transportovane materije sa zrna suspendovanog nanosa koja u domen ulaze „zagađena”. Naravno, predmetna pojava se ne dešava u neposrednoj blizini uzvodne granice nego nešto nizvodnije, pošto ovaj proces nije trenutnog karaktera. U aktivnom sloju se takođe pojavljuje zagađujuća materija u adsorbovanom obliku. Na uzvodnom delu računskog domena adsorbovani zagađivač se deponuje iz suspenzije (zajedno sa zrnima nanosa koje ih nose) i tako dospeva na dno. Međutim, na nizvodnom kraju domena, gde je rastvorena zagađujuća materija prisutna u većoj količini, dolazi i do intenzivnije adsorpcije zagađivača (iz rastvorenog oblika) na zrna nanosa u aktivnom sloju. Dakle, opisana prostorna dispozicija uzrokuje da na uzvodnom kraju kanala prisustvu rastvorene zagađujuće materije doprinose neposredna desorpcija sa zagađenih zrna suspendovanog nanosa i desorpcija sa istaloženih zagađenih zrna u aktivnom sloju. Sa druge strane, na nizvodnom kraju kanala prisustvo zagađivača u aktivnom sloju je posledica deponovanja zagađenih zrna iz suspenzije i neposredne adsorpcije materije iz njenog rastvorenog oblika.

Za prikazani vremenski trenutak je proveravana kumulativna relativna greška jedinačine kontinuiteta celog računskog domena za sve vidove pojave zagađujuće materije. U slučaju rastvorenog zagađivača vrednost greške je bila reda veličine 0.007%. Vrednost relativne greške za zagađivač adsorbovan na nanos u aktivnom sloju je iznosila oko $9.0 \cdot 10^{-16}\%$ (za 4. frakciju), dok je zbir relativne greške za sve aktivne frakcije iznosio oko $8.8 \cdot 10^{-16}\%$. U slučaju zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos, greška je iznosila približno 0.004% (za 4. frakciju), dok zbir relativne greške po svim aktivnim frakcijama nije prevazilazio vrednost od 0.002%.



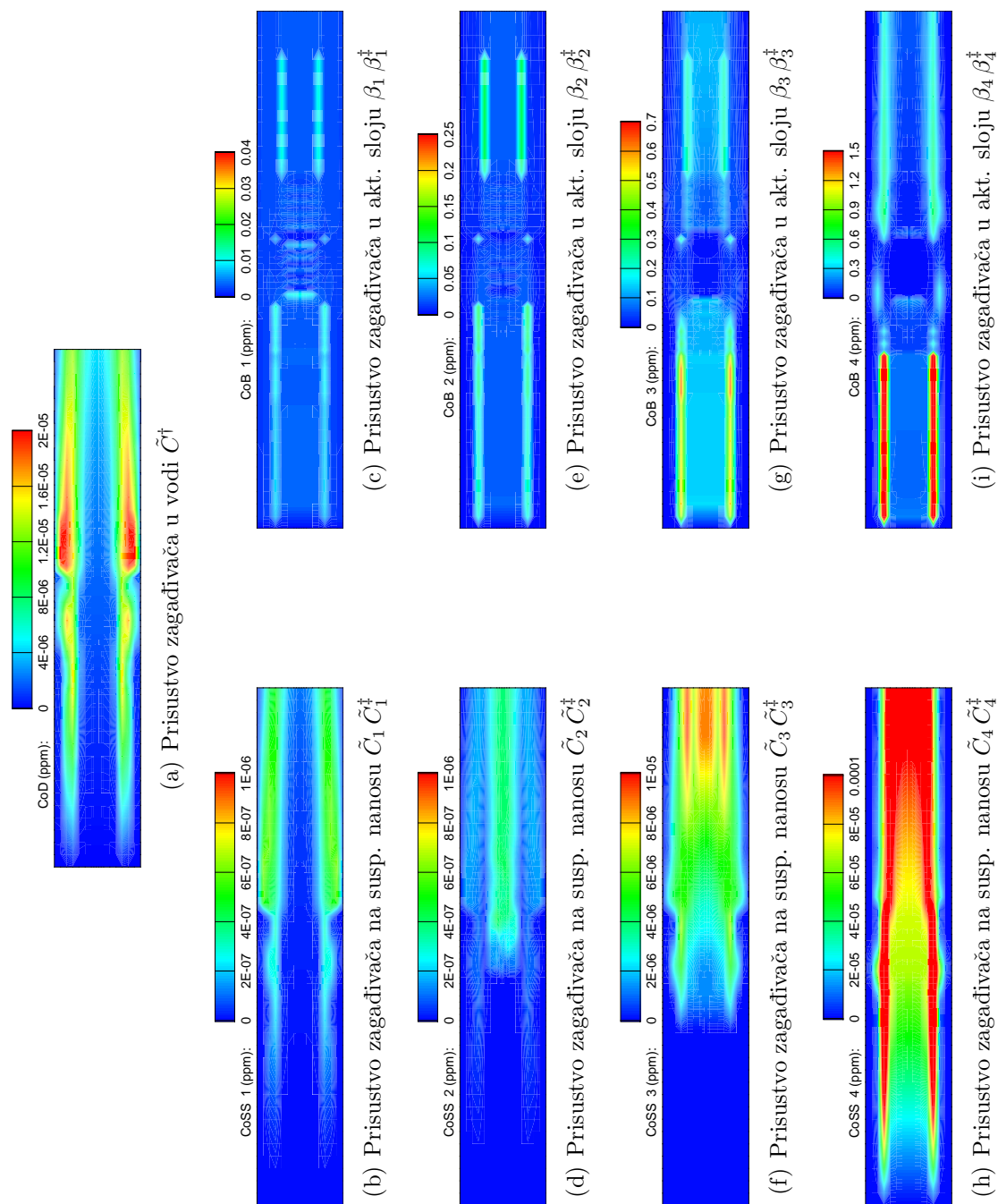
Slika 34: Numerički test transporta zagađivača, test-primer br.2

6.2.3. Test-primer zagađenog nanosa na dnu

Na kraju se prikazuje i treći numerički test modela transporta zagađujuće materije, koji obuhvata slučaj kada se u računskom domenu nalazi „zagađen” nanos na dnu, tj. zagađivač adsorbovan na zrna nanosa na dnu. Početni uslov je podrazumevao da zagađujuća materija nije prisutna ni u rastvorenom obliku ni kao adsorbovana na zrna suspendovanog nanosa. Međutim, za sve frakcije nanosne mešavine sa karakterističnim prečnikom zrna dovoljno malim da učestvuju u razmeni sa zagađivačem, a koje se nalaze u aktivnom sloju i u svim stratimima ispod njega, početni uslov je podrazumevao nametnutu vrednost bezdimenzionalne koncentracije $\beta_{k_s=1,2,3,4}^{\ddagger} = 20 \cdot 10^{-6}$ (-). Granični uslovi proračuna su zadavani kao konstante tokom vremena i podrazumevano je da zagađujuća materija ne ulazi u računski domen ni u rastvorenom ni u adsorbovanom obliku. Formulisan numerički model ne zahteva nizvodne granične uslove, jer difuzioni korak podrazumeva da je na svim granicama gradijent koncentracije nula. Vremenski korak za proračun je i za ovaj test-primer iznosio 60 s.

Na slici 35 su prikazani rezultati proračuna za vremenski trenutak $T = 1.5 h$. Na samom početku je neophodno objasniti da se početni uslov za model transporta zagađujuće materije implementira *nakon* perioda ustaljivanja proračuna tečenja i nanosa. Zbog ovoga je prostorna raspodela adsorbovane materije u aktivnom sloju neposredna posledica ponašanja nanosa a ne zadatog početnog uslova, pa je činjenica da nanos iz četvrtog granulometrijskog intervala nosi najveću količinu adsorbovane materije uslovljena njegovim velikim prisustvom na dnu. Započinjanjem simulacije transporta dolazi do neposrednog desorbovanja zagađujuće materije sa zrna nanosa u aktivnom sloju. Konstatuje se da položaj „oblaka” rastvorenog zagađivača odgovara lokacijama većeg prisustva adsorbovane materije na dnu, jer je neposredna desorpcija sa zagađenih zrna u aktivnom sloju glavni mehanizam izvora rastvorenog zagađivača. Napominje se da je desorbovana materija po definiciji u rastvorenom obliku, te je podložna adsorpciji na zrna suspendovanog nanosa koja u računski domen ulaze „čista”. Međutim u ovom test-primeru postoji i drugi mehanizam izvora zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos. Od ranije je poznato da je član izvora suspendovanog nanosa posledica zbirnog dejstva uvlačenja zrna nanosa u suspenziju i deponovanja istih iz suspenzije. Sa druge strane, član izvora zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos je razlika mase materije adsorbovane na zrna koja se uvlače u suspenziju i mase materije adsorbovane na zrnima koja se deponuju. Dakle, ako se „čist” nanos koji ulazi u domen deponuje, a „zagađen” nanos sa dna uvlači u suspenziju, onda je član izvora zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos pozitivan uprkos činjenici da je član izvora suspendovanog nanosa negativan (tj. masa *nanosa* koja se deponuje je veća od mase nanosa koja se uvlači u suspenziju). Opisani fenomen je, u ovom slučaju, najizraženiji za četvrti granulometrijski interval nanosne mešavine. Takođe je korisno napomenuti da je prisustvo zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa posledica zbirnog dejstva neposredne adsorpcije materije iz rastvorenog oblika i podizanja „zagađenih” zrna iz aktivnog sloja, pri čemu je drugi mehanizam nešto intenzivniji.

Za prikazani vremenski trenutak je proveravana kumulativna relativna greška jednačine održanja mase celog računskog domena za sve vidove pojave zagađujuće materije. U slučaju rastvorenog zagađivača vrednost greške je bila reda veličine 0.05%. Vrednost greške za zagađivač adsorbovan na nanos u aktivnom sloju je iznosila oko $4 \cdot 10^{-16}\%$ (za 4. frakciju), dok je zbir relativne greške za sve aktivne frakcije bio oko $6.6 \cdot 10^{-16}\%$. U slučaju zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos greška je iznosila približno 0.02% (za 4. frakciju), dok zbir greške po svim aktivnim frakcijama takođe nije prevazilazio 0.02%.



Slika 35: Numerički test transporta zagađivača, test-primer br.3

6.2.4. Dodatne napomene

Na samom kraju poglavlja o šematskim testovima modela transporta zagađujuće materije se konstatuje da je razvijeni model dao fizički opravdane rezultate uz prihvatljivu relativnu grešku jednačine održanja mase. Testirana su sva tri aspekta pojave zagađivača, tj. kada on u računski domen dospeva u rastvorenem obliku, adsorbovan na zrna suspendovanog nanosa ili kada je na samom početku simulacije već prisutan u adsorbovanom obliku na dnu. Usled delovanja mehanizama razmene, transportovana materija se uvek pojavljuje u sva tri oblika bez obzira na činjenicu da u računski domen dospeva samo u jednom obliku. Zaključuje se da prikazana formulacija matematičkog modela obuhvata sve relevantne procese interakcije između nanosa i nekonzervativne materije koja nije podložna biološkom i/ili hemijskom nastajanju i/ili nestajanju.

6.3. Deonica Dunava između Mohača (H) i Bezdana (SRB)

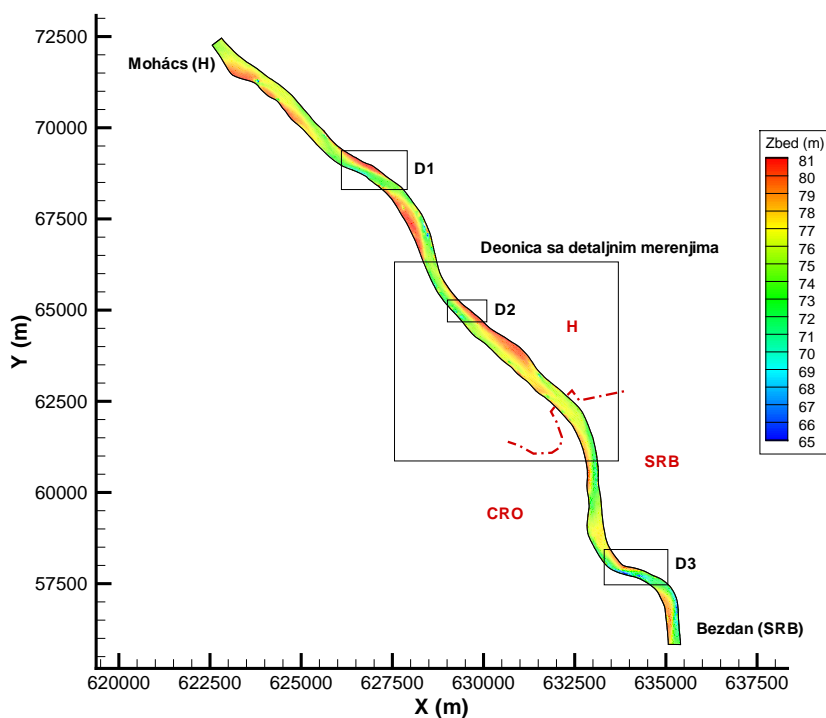
Na deonici Dunava između Mohača (Mohács) u Mađarskoj i Bezdana u Republici Srbiji (*rkm* 1446.9–1425.5) su vršena detaljna merenja radi sakupljanja terenskih podataka u vezi sa tečenjem vode i ponašanjem nanosa u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Najbliži objekti sa značajnijim uticajem na režim toka reke su u uzvodnom smeru hidroelektrana Gabičkovo u Slovačkoj (cca. *rkm* 1818), odnosno hidroelektrana Đerdap I (*rkm* 943) u nizvodnom smeru. Pošto je razmatrana deonica na velikoj udaljenosti od navedena dva objekta, može se smatrati da ona predstavlja karakterističnu deonicu aluvijalne reke koja nije pod neposrednim uticajem veštački nametnutih nivoa i protoka. Testiranje razvijenog matematičkog modela na deonicama prirodnih vodotokova, gde je pored složenih geometrijskih karakteristika korita izvršeno i terensko merenje zavisno promenljivih veličina, predstavlja najstrožiji vid potvrde valjanosti i pouzdanosti modela. Kompleksna geometrija prirodnih vodotokova, koja uslovljava složene uslove tečenja vode i ponašanja nanosne mešavine omogućava potvrđivanje sposobnosti modela da reprodukuje realna terenska stanja.

Merenja korišćena u ovom poglavlju su finansirana od strane Evropske Unije preko projekta Hungary-Serbia IPA Cross-border Co-operation Programme, naziv projekta *Co-operation in Education: Environmental-Hydraulics Field Training Reach on the Danube River (Danube-EHT-2010)*, broj projekta HUSRB/0901/221/001.

6.3.1. Sakupljanje merenih podataka

Terenska merenja su izvršena na deonici Dunava u pograničnom području između Mađarske i Republike Srbije u dva navrata. Prvi set merenja je sproveden u trajanju od pet dana od 23. do 27. maja 2011. godine. Unutar odabrane deonice, ograničene naseljima Bezdán (*rkm* 1425.5) u Srbiji i Moháč (*rkm* 1446.9) u Mađarskoj (slika 36), rađena su detaljna merenja morfologije korita. Kota dna je merena eho-sonarom približno na svakih 100 m, dok je položaj plovila određivan GPS uređajem. Tačnost batimetrijskih merenja je bila 0.01 m. Ovako je izmereno 215 poprečnih preseka duž razmatrane deonice reke, čijom obradom je formiran trodimenzionalni digitalni model korita koji je potom korišćen u numeričkim simulacijama tečenja i ponašanja nanosa. Konstatuje se da reka na posmatranoj deonici umereno meandrira, pri čemu je prelaz matice od jedne obale ka drugoj evidentan, a najupadljiviji neposredno uzvodno od Bezdana. Pod-deonica sa detaljnim merenjima, naznačena na slici 36, takođe obuhvata prelazak matice reke sa desne na levu obalu uz proširenje korita na njenom srednjem delu. Takođe se primećuje

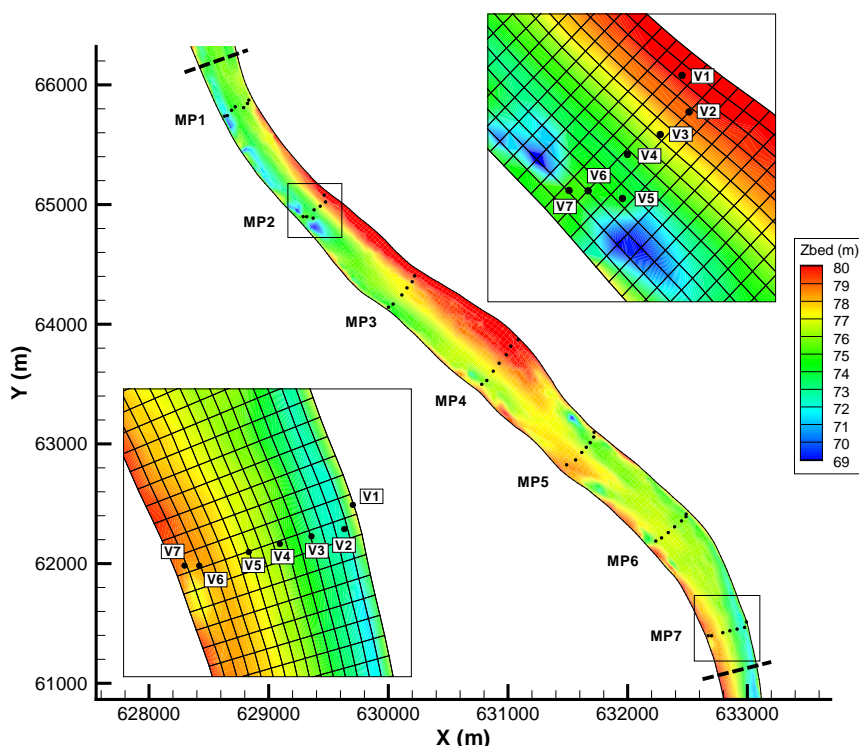
da je leva obala pod-deonice plića u odnosu na desnu, pogotovo u predelu pomenutog proširenja.



Slika 36: Deonica Dunava između Mohača i Bezdana

Unutar ranije definisane deonice izabrano je sedam preseka za detaljno merenje parametara tečenja i nanosa (slika 37). Ovi merni preseki, označeni redom od uzvodnog kraja sa MP1, MP2,... MP7, bili su postavljeni između rečnih kilometara 1438 i 1432 na približnom međusobnom rastojanju od 1 km. U svakom preseku se nalazilo sedam vertikala, označeni redom od leve obale sa V1, V2, ... V7, gde su merene brzine pomoću ADCP-a (*Acoustic Doppler Current Profiler*) pričvršćenog za usidreno plovilo. Ovaj instrument koristi fizički princip koji se zasniva na podvodnom emitovanju zvučnih signala male talasne dužine duž tzv. akustičnih zraka. Nailaskom ovog signala na sitne čestice u vodi (npr. suspendovani nanos), eho-signal se vraća u prijemnik noseći informaciju o komponenti brzine koja ima isti pravac kao i emitovani zrak. Kako bi se dobile sve tri komponente brzine, ADCP koristi tri snopa koja se emituju pod različitim uglovima u odnosu na vertikalu, dok se postprocesorskom obradom dobijene komponente razlažu na osnovne x, y, z pravce. Uređaj deli povratni signal na određen broj diskretnih visina po dubini (oko 0.3 m), čime se definiše broj mernih tačaka po vertikali, a koji zavisi od lokalne dubine. Tačnije, instrument emituje četiri zvučna snopa od kojih tri služe za određivanje tri komponente brzine (kao što je to opisano ranije), a četvrti za procenu greške. Merenje rasporeda brzina je sprovedeno u saglasnosti sa istraživanjima autora Muste et al. (2004b) i Muste et al. (2004a), na osnovu kojih je utvrđeno da vreme uzorkovanja signala instrumenta kraće od 7 min može prouzrokovati razliku od 45% u srednjoj i 15% u standardnoj devijaciji u odnosu na vrednosti merenih tokom dužeg vremenskog perioda. Naime, usled vrtložnog strujanja u rekama trenutno izmeren profil brzina značajno odstupa od osrednjenog po vremenu. Uzevši ovo u obzir, vreme merenja brzina sa usidrenog plovila je bilo 10 min, čime je obezbeđeno osrednjavanje „trenutnih” profila brzina u mernim

vertikalama, čiji je položaj utvrđen GPS uređajem. Naknadna obrada podataka je dala raspored tri komponente brzine po dubini toka. Karakteristični primer ovoga je prikazan na slici 70 u prilogu I, gde se vidi da je vertikalna komponenta brzine zanemarljiva u odnosu na dve horizontalne komponente, što opravdava primenu ravanskog modela. Nivo slobodne površine vode je u svakom mernom profilu izmeren jednom u toku pet dana trajanja kampanje sakupljanja podataka. Granični uslovi, neophodni za numeričku simulaciju tečenja, su dobijeni sa hidrometeoroloških stanica merenjem proticaja kod Mohača, odnosno nivoa kod Bezdana.



Slika 37: Detalj deonice Dunava između Mohača i Bezdana - prvi set merenja

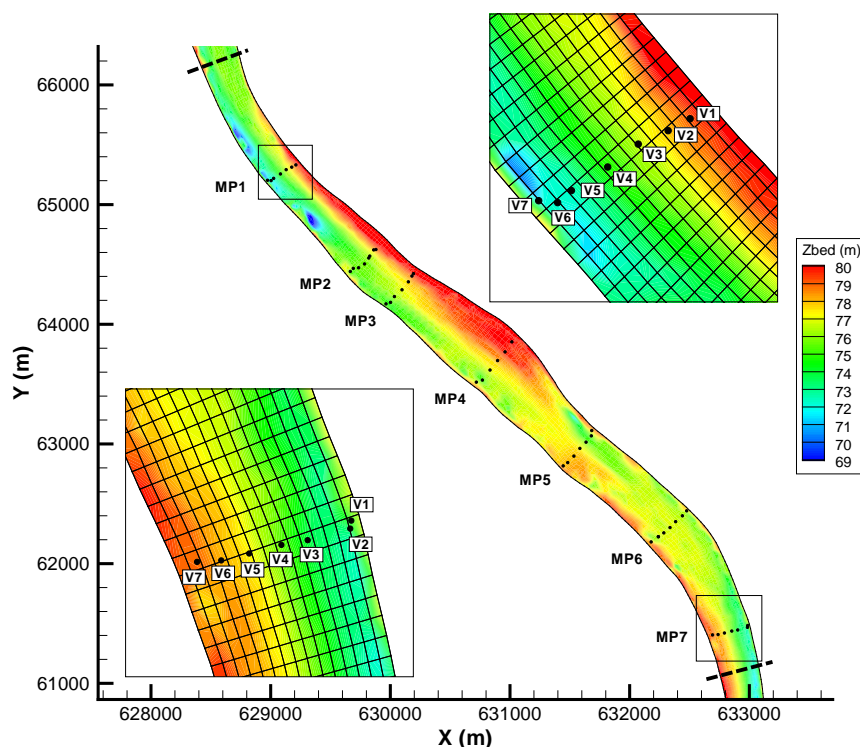
Od sedam vertikalna u svakom mernom preseku (slika 37) u pet su sakupljeni uzorci suspendovanog nanosa i nanosa na dnu. Predmetna merenja su vršena *istovremeno* sa merenjima brzina, tj. dok je jedno plovilo merilo parametre tečenja drugo je bilo usidreno u neposrednoj blizini i zahvatalo uzorke nanosa. Na svakoj vertikali namenjenoj za merenje nanosnih veličina, koncentracija suspendovanog nanosa (za sve granulometrijske intervale) je određivana u pet približno uniformno raspoređenih tačaka, kao što je to prikazano na slici 71 u prilogu I. Odgovarajući terenski rad je podrazumevao uzimanje uzoraka vode (zajedno sa suspendovanim nanosom), približne zapremine od pet litara u svakoj od pet tačaka nanosne vertikale posebno, što je rezultovalo u 175 uzoraka suspendovanog nanosa, čija je granulometrijska analiza sprovedena metodom taloženja čestica u fluidu. Ova metodologija koristi poznate empirijske zavisnosti za brzinu tonjenja sfere u stajaćoj vodi. Dakle, nepoznati prečnik zrna nanosa se određuje kao ekvivalentan prečnik sferne čestice koja tone istom brzinom kao posmatrano zrno nanosa. Način zahvatanja nanosa sa rečnog korita, primenjivan tokom kampanje, je obezbedio isključivo *poremećene* uzorke koji nisu pogodni za definisanje stratifikacije nanosnog materijala. Međutim, ovako dobijeni podaci su naknadno obrađeni u cilju formulisanja verodostojnog početnog uslova na dnu za numeričke simulacije kretanja nanosa i morfoloških promena.

Ukupan broj uzoraka nanosnog materijala sa dna je bio 35, čija je granulometrijska analiza izvršena pomoću mašinskog prosejavanja kroz niz sita standardnih otvora. Masa koja ostane između dva sita se meri da bi se utvrdio udeo određenog granulometrijskog intervala (frakcije) u ukupnom uzorku. Položaj plovila za merenje nanosnih veličina je utvrđen GPS uređajem.

Nakon obrade sakupljenih podataka, koja je rezultovala rasporedima brzina i rasporedima koncentracije suspendovanog nanosa, izvršeno je njihovo osrednjavanje po dubini da bi se dobile vrednosti uporedive sa rezultatima ravanskog modela.

§ § §

Radi sakupljanja drugog seta podataka, terenska merenja su izvršena na istoj deonici Dunava i drugi put u trajanju od pet dana od 12. do 16. septembra 2011. godine. Metodologija merenja parametara tečenja, uzorkovanja nanosa zajedno sa njihovom obradom je bila *identična* kao i za prvi set merenja, pa se ovde neće ponavljati. Konvencija obeležavanja mernih preseka i vertikalala je ostala ista, pri čemu se na slici 38 daje digitalni model korita sa naznačenim mernim lokacijama drugog seta merenja.



Slika 38: Detalj deonice Dunava između Mohača i Bezdana - drugi set merenja

6.3.2. Rezultati numeričkih simulacija

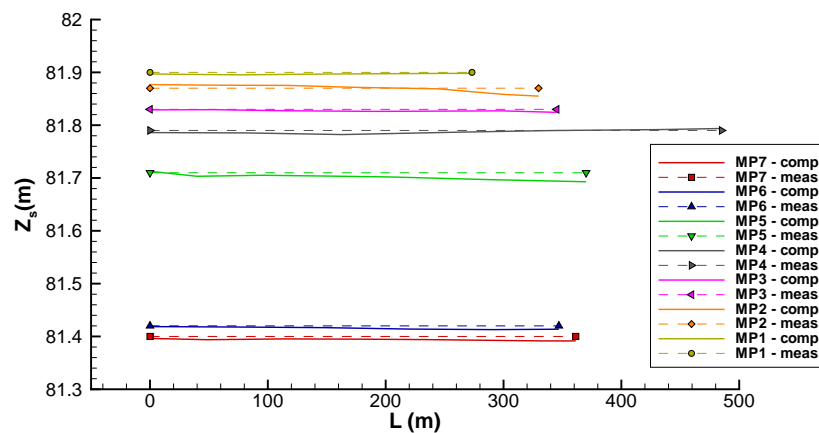
Razvijen matematički model za simuliranje tečenja vode, transporta nanosa i morfoloških promena u aluvijalnim vodotocima je primenjen na deonicu reke Dunav, opisanu u poglavlju 6.3.1. Ukupna dužina računskog domena je 22 km , sa merenim protocima na uzvodnom kraju kod Mohača, odnosno merenim nivoima na nizvodnom kraju kod Bezdana (tabela 15). Prosečna širina domena je približno 400 m . Konstruisana je neuniformna računaska mreža, čije ćelije imaju prosečnu dužinu od 36.9 m u ξ koordinatnom pravcu (tj. u pravcu toka), odnosno 25.7 m u η koordinatnom pravcu. Ravanski

hidraulički model se prostire duž celog domena da bi se mogli koristiti ranije pomenuti granični uslovi, pa sadrži 9696 računskih tačaka. Međutim, zbog dostupnosti merenih podataka, proračun nanosa je vršen samo na srednjem delu deonice obuhvatajući merne preseke od 1 do 7. Pod-domen na kojem je primenjen ravanski model ponašanja nanosa je obeležen na slici 37 debelim isprekidanim linijama i sarži 2960 računskih tačaka. Vreme simulacije je iznosilo pet dana (kao i vreme trajanja terenskih merenja), čemu prethodi pet dana namenjenih za ustaljivanje sistema.

Datum (2011. god.):	23.05.	24.05.	25.05.	26.05.	27.05.
Mohač Q (m^3/s)	1650.0	1600.0	1580.0	1560.0	1540.0
Bezdan z_s (mm)	81.380	81.258	81.191	81.147	81.112

Tabela 15: Granični uslovi hidrauličkog proračuna

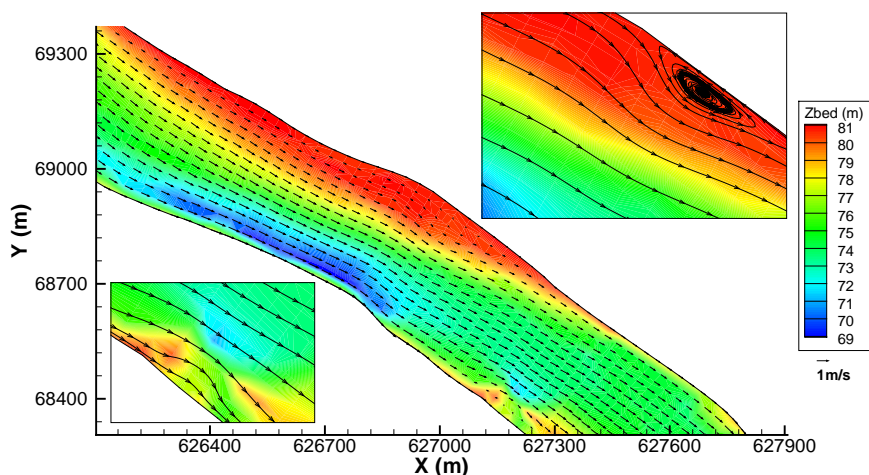
Hidraulički proračun je za početne uslove koristio horizontalni nivo slobodne površine vode, pri čemu su obe komponente brzine u svim tačkama nula (*zero-flow*). Primena algoritma za proračun nelinearne advekcije, koji podrazumeva metodu karakteristika i putovanje trajektorije duž više računskih ćelija je omogućio primenu vremenskog koraka od 30 s. Odabrani računski korak po vremenu je rezultovao u najdužoj trajektoriji od tri segmenta. U slučaju primene konvencionalnog postupka proračuna, kada se dužina trajektorije ograničava na jedan segment, maksimalna vrednost vremenskog koraka bi bila ograničena na 14 s što bi rezultovalo u dužem vremenu rada računara. Kalibracija hidrauličkog modela je sprovedena menjanjem *Manning*-ovog koeficijenta dok se ne dobije odgovarajuće slaganje merenih i računatih nivoa slobodne površine vode.



Slika 39: Mereni i računati nivoi slobodne površine vode

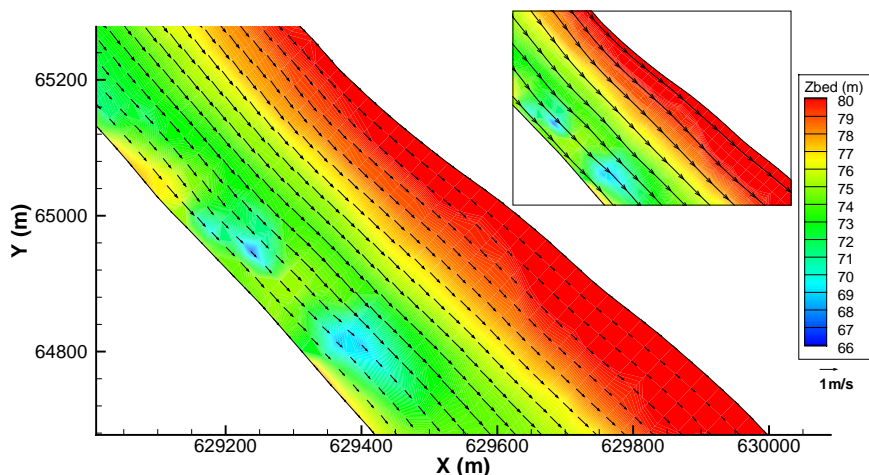
Nakon izvršene kalibracije razlika između merenih i računatih nivoa se kretala u intervalu od $+0.7\text{ cm}$ do -1.7 cm (slika 39). Prosečna vrednost *Manning*-ovog koeficijenta trenja je iznosila $0.02\text{ m}^{-1/3}\text{ s}$, pri čemu je očekivana vrednost ovog parametra za merene vrednosti granulometrijskog sastava rečnog dna $0.017\text{ m}^{-1/3}\text{ s}$ (Julien, 2002), što se može pripisati aluvijalnim otporima. Tokom numeričke simulacije je praćena relativna greška jednačine kontinuiteta, kao dodatna provera verodostojnosti modela. Brojčana vrednost ovog pokazatelja je, posmatrajući svaku računsku ćeliju posebno, ostala ispod 0.03%. Najveća relativna greška jednačine kontinuiteta za ceo računski domen (tj. njena kumulativna vrednost) je iznosila manje od $4.0 \cdot 10^{-8}\%$.

Na slikama 40, 41 i 42 su prikazani detalji hidrauličkog proračuna na lokacijama D1, D2 i D3, naznačenim ranije na slici 36. Na ovim detaljima je prikazana lokalna batimetrija, sračunati vektori brzina, odnosno odgovarajuće strujnice. Cilj analize koja sledi je identifikacija situacija u kojima je iz fizike stvari opravdano *kvalitativno* oceniti ponašanje modela. Na slici 40 je prikazana lokacija gde postoji značajna razlika kote dna u blizini desne, odnosno leve obale. Pošto je jedinični protok vode kroz dublje delove korita veći, delom zbog većeg protočnog profila a delom zbog manjeg otpora usled trenja, u plićem delu se javlja vrtložno strujanje. Takođe je prikazano lokalno zakrivljenje strujnica usled naglih promena kote dna. Naime, kada tok naiđe na naglo smanjenje dubine dolazi do povećanja otpora tečenju i preraspodele protoka. Ovo se manifestuje u tendenciji strujnica da „zaobiđu” ovakve lokacije.



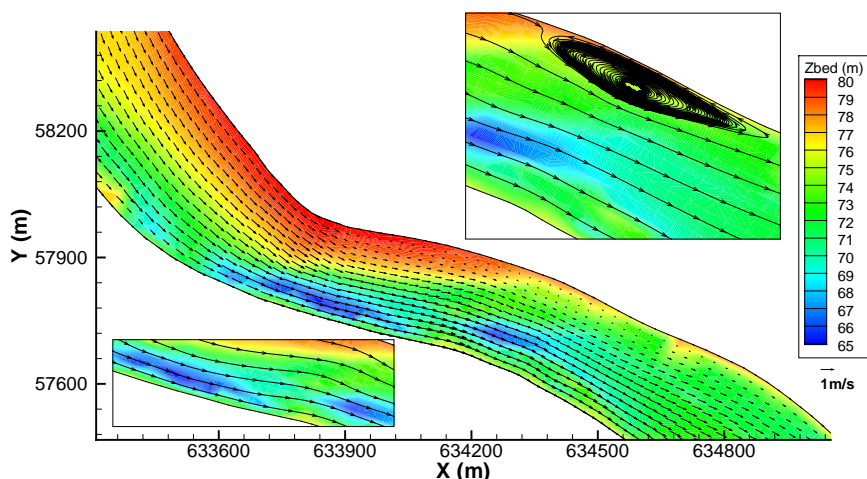
Slika 40: Detalj hidrauličkog proračuna D1

Na slici 41 je prikazan detalj računskog domena sa relativno uniformnim strujnim poljem. Zanimljivo je primetiti lokalitete sa većim dubinama, gde su i vektori brzine značajno manji u odnosu na njihovu neposrednu okolinu. Ova mesta poseduju preduslove za značajnije deponovanje nanosa iz suspenzije usled manje kinetičke energije struje. Međutim, za razliku od prethodnog slučaja promena batimetrije je blaža, pa se ne javlja značajnija preraspodela protoka.



Slika 41: Detalj hidrauličkog proračuna D2

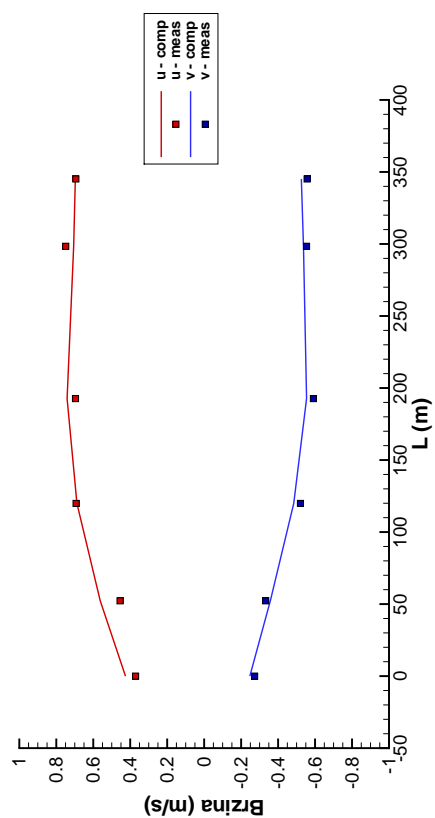
Poslednji detalj hidrauličkog proračuna je prikazan na slici 42, gde se vidi krivina sa značajnom razlikom kote dna. Struja ulazi u krivinu čija desna obala ima znatno veću dubinu u odnosu na levu. Ovo uslovljava preraspodelu protoka, pa se na strani sa manjim proticajem formira vrtložno strujanje kao posledica viskozne interakcije glavne struje i usporene mase vode. Nizvodno od krivine vektori brzine ukazuju na tendenciju vraćanja ka ravnomernijem rasporedu. Takođe je prikazano zakrivljenje strujnica, koje pokušavaju da „prate” zone sa većim dubinama jer je tu otpor tečenju manji.



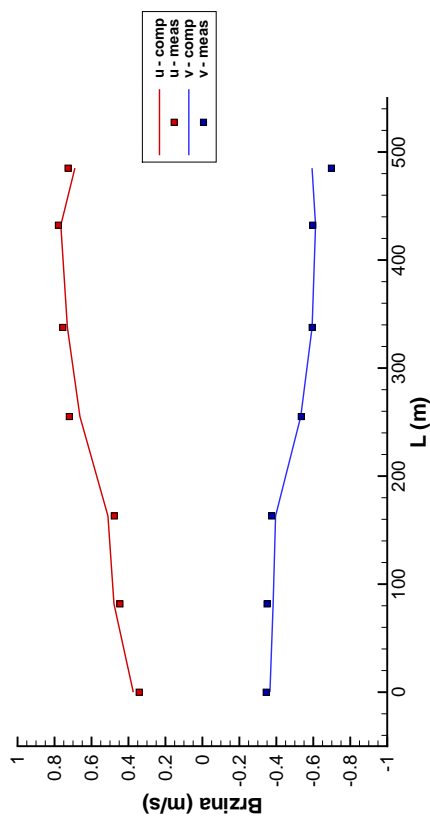
Slika 42: Detalj hidrauličkog proračuna D3

Iako za detalje hidrauličkog proračuna na slikama 40, 41 i 42 *ne* postoje mereni podaci, oni predstavljaju situacije u kojima se može kvalitativno oceniti sposobnost modela da reprodukuje očekivane pojave. Dakle, konstatuje se da je razvijen ravanski hidraulički model produkovao fizički realne strujne slike, zadovoljavajućeg kvaliteta.

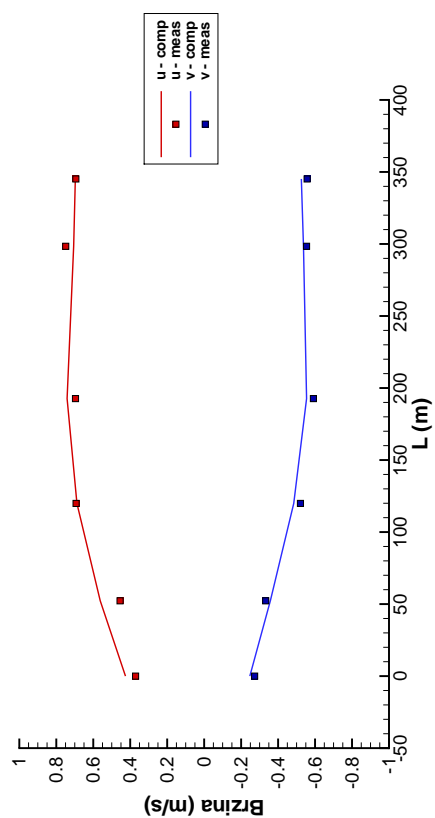
Na slici 43 su prikazane merene i računate brzine u mernim presecima 2, 3, 4 i 6. Rezultati mernih preseka 1, 5 i 7 su dati na slici 72 u prilogu I. Na horizontalnoj osi dijagrama je naznačeno rastojanje između vertikalala. Intenziteti osmotrenih vektora brzina su se kretali u dijapazonu od 1 m/s do 0.45 m/s . Konstatuje se da je razlika između merenih i računatih brzina relativno mala i kreće se u intervalu od -0.23 m/s do 0.16 m/s , dok je srednja vrednost odstupanja 0.02 m/s . Ovo dovodi do zaključka da je razvijen ravanski model pouzdan i sposoban da reprodukuje realne situacije u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Međutim, puko upoređivanje sračunatih i merenih vrednosti ume da bude zavaravajuće ako se pri tome ne analizira i sposobnost modela da potvrdi *tendencije* koje su osmotrene na terenu. Pre svega, merene brzine se u posmatranim presecima mogu dovesti u neposrednu vezu sa lokalnom morfologijom korita. U slučaju manjih dubina (tj. visoke kote dna) dolazi do većeg otpora tečenju i manjih vrednosti brzina, dok se u slučaju većih dubina očekuju i veće vrednosti brzine. Zanimljivo je primetiti da se u mernim presecima 2, 3 i 4 vrednosti brzina (merenih i sračunatih) smanjuju prema levoj obali usled veće kote dna, tj. manjih dubina koje se tu javljaju. Sa druge strane, usled relativno uniformne batimetrije u preseku 6, raspored brzina postaje ravnomerniji. Činjenica da su i numeričkom simulacijom dobijene tendencije potvrđene merenjima ukazuje na pouzdanost razvijenog ravanskog modela. Bitno je primetiti brzinu u vertikali 1 (na levoj obali) mernog preseka 7, koja značajno odstupa od susednih vertikalala. Na slici 37 se ne može naći nikakvo opravdanje morfološkog karaktera za ovo, a pošto ni simulacija nije mogla da reprodukuje osmotrenu brzinu u ovoj vertikali, pretpostavlja se da se radi o nedostatku merenih podataka.



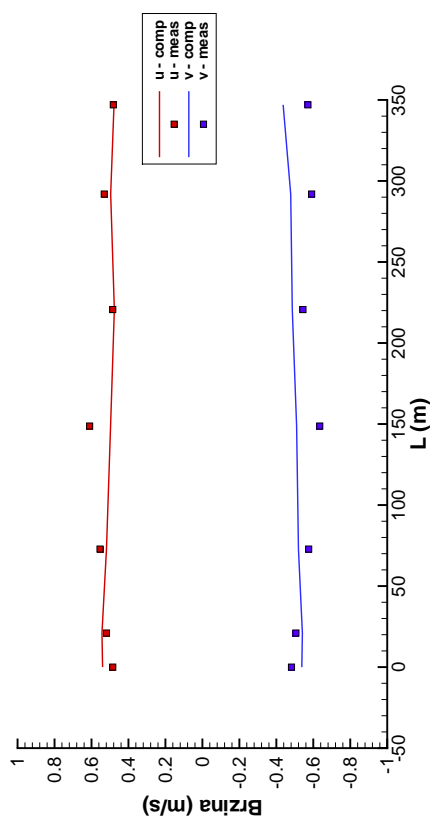
(a) Merni presek MP2



(c) Merni presek MP4



(b) Merni presek MP3



(d) Merni presek MP6

Slika 43: Merene i računate brzine u mernim presecima 2, 3, 4 i 6

Nakon uspostavljanja modela tečenja na razmatranoj deonici reke Dunav i definisanja potrebnih hidrauličkih parametara, sledi modelisanje nanosnih procesa i njihovog uticaja na morfologiju korita. Kao što je detaljno navedeno u poglavljima 3.3. i 4.3. nanosni deo matematičkog modela se sastoji od tri osnovna elementa: transport suspendovanog nanosa, deformacija rečnog korita i promena granulometrijskog sastava dna. Navedeni aspekti ponašanja nanosa se nalaze u jakoj međuzavisnosti preko člana izvora suspendovanog nanosa (uvlačenje zrna sa dna u suspenziju i njihovo deponovanje iz suspenzije na dno), kao i zbog postojanja *mešavine* nanosnog materijala. Usvojeni koncept modelisanja podrazumeva da se nanosni procesi posmatraju sa stanovišta pojedinog granulometrijskog intervala. Dakle, proračunom se pokriva celokupan opseg frakcija nanosnog materijala bilo da se radi o suspenziji ili samom koritu. U cilju implementacije ravanskog modela transporta nanosa i morfoloških promena, nanosna mešavina je, nakon obrade merenih podataka, podeljena na deset granulometrijskih intervala sa karakterističnim prečnicima zrna datim u tabeli 16.

Granulometrijski interval k_s	Karakteristični prečnik D_{k_s} (mm)	Granulometrijski interval k_s	Karakteristični prečnik D_{k_s} (mm)
1 \diamond	0.00224	6 $\diamond\clubsuit$	0.112
2 \diamond	0.00707	7 \clubsuit	0.177
3 \diamond	0.0141	8 \clubsuit	0.354
4 \diamond	0.0316	9 \clubsuit	0.707
5 $\diamond\clubsuit$	0.0707	10 \clubsuit	4.0

\diamond nađeno u suspenziji

\clubsuit nađeno na dnu

Tabela 16: *Granulometrijski intervali mešavine nanosa*

Početni uslovi za koncentracije suspendovanog nanosa su dobijeni kao prosečna vrednost svih izmerenih koncentracija za svaku frakciju posebno. Ranije je nagovešteno da je uzorkovanje nanosa sa rečnog dna podrazumevalo metodologiju koja nije mogla obezbediti neporemećene uzorke, zbog čega je početna stratifikacija nanosnog materijala na dnu pretpostavljena. Pošto je debljina aktivnog sloja reda veličine nekoliko milimetara, razumno je smatrati da je njegov doprinos ukupnom uzorku nanosa sa dna zanemarljiv. Rukovodeći se ovom činjenicom, početni uslov granulometrijskog sastava u svim stratumima (aktivnom i dubljim) odgovara najbližoj merenoj vrednosti, dok je početni uslov granulometrijskog sastava za aktivni sloj dobijen kao prosek svih merenja.

Granulometrijski interval k_s	Koncentracija suspendovanog nanosa \tilde{C}_{k_s} (-)	Granulometrijska zastupljenost β_{k_s} (-)
1	$7.59 \cdot 10^{-6}$	0.0
2	$8.25 \cdot 10^{-6}$	0.0
3	$1.39 \cdot 10^{-5}$	0.0
4	$2.80 \cdot 10^{-5}$	0.0
5	$2.38 \cdot 10^{-5}$	0.0008
6	$9.84 \cdot 10^{-6}$	0.0006
7	0.0	0.3342
8	0.0	0.6311
9	0.0	0.0215
10	0.0	0.0118

Tabela 17: *Granični uslovi proračuna nanosa*

Zbog dostupnosti merenih podataka granični uslovi za nanosne veličine su nametnuti kao konstante tokom vremena. U tabeli 17 su navedene vrednosti koje su zadavane u svim računskim tačkama uzvodne granice razmatranog domena. Kota dna se u predmetnim tačkama nije menjala u odnosu na početni uslov. Formulisan numerički model ne zahteva nizvodne granične uslove za proračun nanosa, jer je u difuzionom koraku usvojen stav da nema promene mase suspendovanog nanosa u domenu, pa je gradijent koncentracije na svim granicama nula.

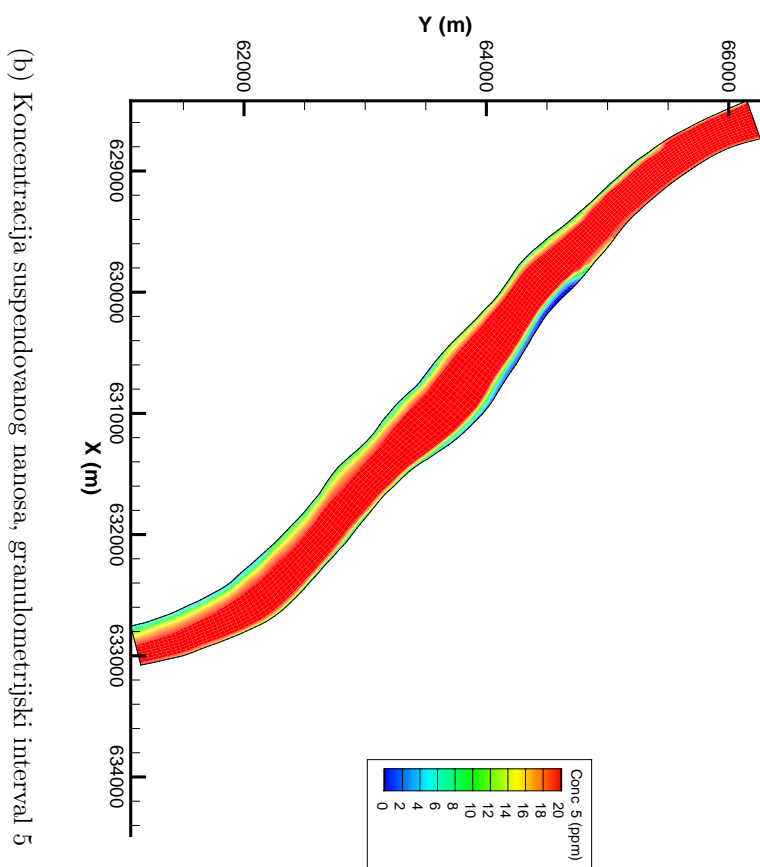
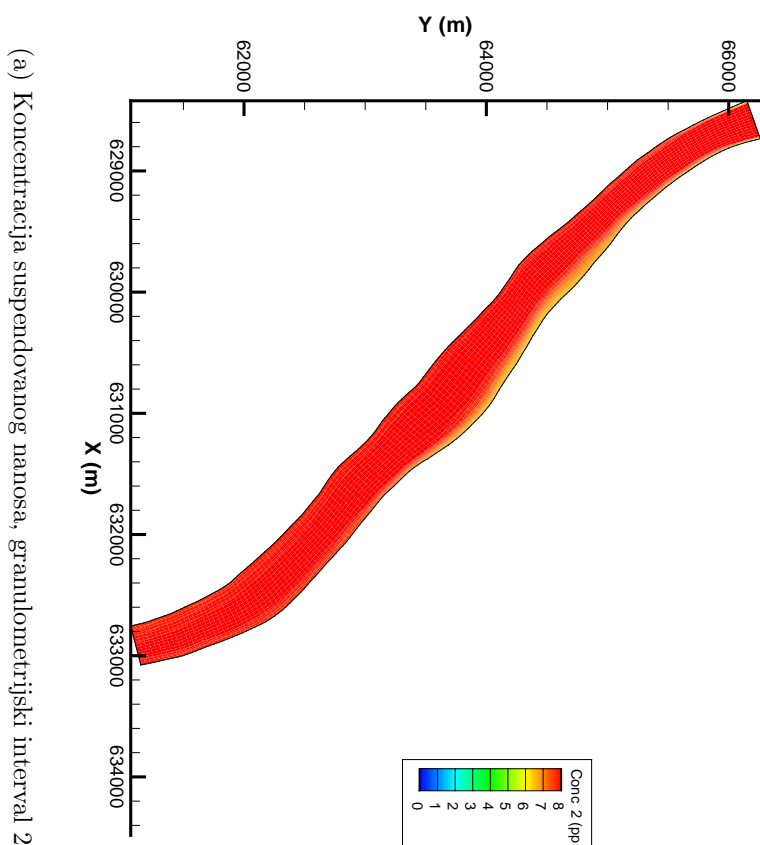
Primena algoritma za proračun linearne advekcije, koji omogućava da trajektorija putuje kroz više računskih ćelija, dozvolila je usvajanje računskog koraka za proračun nanosa od 90 s. Najduža trajektorija se sastojala od šest segmenata. Napominje se da bi trajektorija dužine jednog segmenta ograničila ovaj vremenski korak na 14 s. Dobitak na brzini proračuna usled primene poboljšanog algoritma za proračun advekcije (linearne i nelinearne) u vidu vremena rada računara je prikazan u tabeli 18. Naime, povećanje vremenskog koraka od 2.1 puta za proračun tečenja, odnosno 6.4 puta za proračun nanosa je prouzrokovalo smanjenje vremena rada računara od 8.4 puta. Tokom numeričkih simulacija je primećeno da je proračun trajektorije od više segmenata pogodniji za linearnu nego nelinearnu advekciju. Veliki broj segmenata pri proračunu tečenja prouzrokuje neprihvatljive greške jednačine kontinuiteta, dok je proračun nanosa daleko manje osetljiv. Objašnjenje ovoga se krije u *nelinearnosti* advektivnog koraka jednačina održanja količine kretanja, kao i u činjenici da u tom slučaju proračun trajektorije nije nezavistan od proračuna nepoznate veličine, kao što je to slučaj sa linearnom advekcijom u modelu kretanja nanosa i morfoloških promena. Međutim, kada se javlja kompleksna geometrija korita koja zahteva gustu računsku mrežu, odnosno kada se javlja potreba za velikim brojem granulometrijskih intervala nanosne mešavine neophodnih radi tačnog modelisanja nanosnih procesa, isplativost ovde korišćenog proračuna advekcije postaje veoma očigledna u pogledu vremena rada računara.

Vremenski korak za proračun nanosa	Vremenski korak za proračun tečenja	Vreme rada računara
90 s	30 s	7.08 h
14 s	14 s	59.17 h

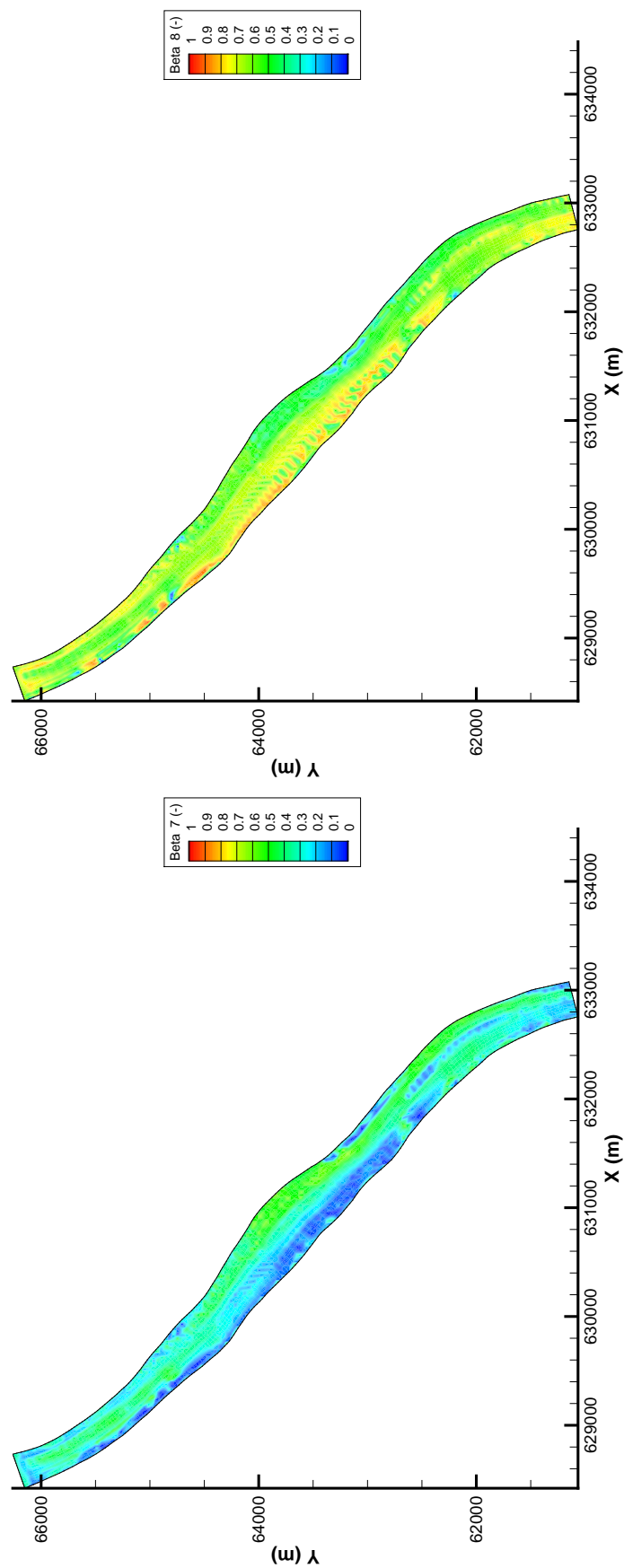
Tabela 18: Vreme rada računara

Primarni mehanizam kalibracije ravanskog modela transporta nanosa i morfoloških promena je sadržan u zadavanju parametara a_{k_s} i Δa_{k_s} jednačine za član izvora suspendovanog nanosa iz poglavlja 4.3. Ovaj vid kalibracije modela je „prirodan”, jer upravo ovaj član predstavlja glavni mehanizam razmene između raznih vidova kretanja nanosa, pa time i uslovljava usku povezanost nanosnih jednačina. Tokom numeričkih simulacija je proveravana kumulativna relativna greška jednačine kontinuiteta celog računskog domena za sve granulometrijske intervale nanosne mešavine. U slučaju nanosa na dnu relativna greška je zanemarljiva i bila je reda veličine $10^{-13}\%$. Sa druge strane, za suspendovani nanos je najveća relativna greška iznosila približno 0.2% (za 8. frakciju), dok zbir relativnih grešaka po svim frakcijama nije prevazilazio 0.3%. Suma zastupljenosti granulometrijskih intervala nanosa na dnu je u svim računskim tačkama ostala jedan.

Na slici 44 su prikazane sračunate koncentracije suspendovanog nanosa za granulometrijske intervale 2 i 5 u celom računskom domenu. Model ukazuje na to da je druga frakcija suspendovanog nanosa u potpunoj suspenziji, dok je peta frakcija u delimičnoj suspenziji. U blizini obala, gde su brzine manje, koncentracije frakcija sa većim karakterističnim prečnikom zrna opadaju usled manje kinetičke energije toka.



Slika 44: *Sračunate koncentracije suspendovanog nanosa*



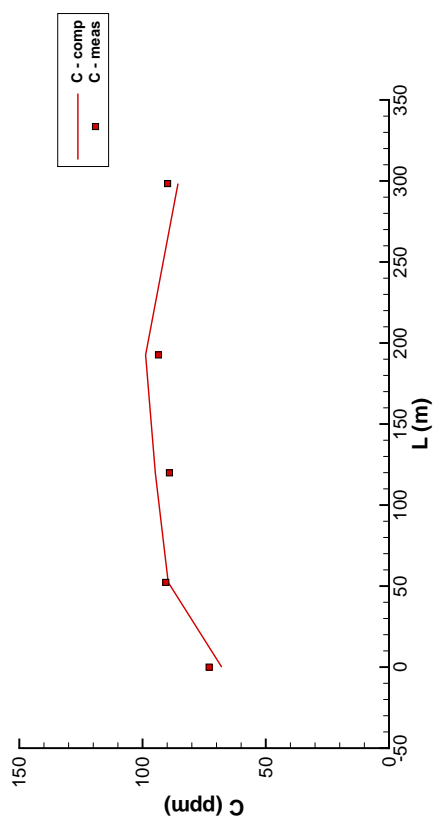
(a) Zastupljenost granulometrijskog intervala 7

(b) Zastupljenost granulometrijskog intervala 8

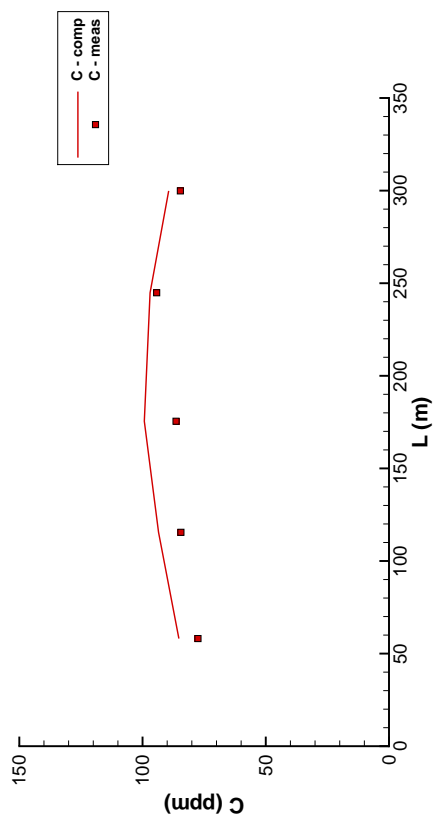
Slika 45: *Sračunata zastupljenost granulometrijskih intervala u mešavini nanosa aktivnog sloja*

Veza između suspendovanog nanosa i materijala na rečnom dnu se ostvaruje preko člana izvora suspendovanog nanosa. Međutim, nanosni proces obuhvaćen ovim članom jednačine nije jedini koji utiče na to koja će se količina materijala neke frakcije naći na određenoj lokaciji toka, ili na promenu kote dna. Proces koji kao što su kretanje vučenog nanosa i razmena materijala sa stratovima ispod, neposredno menjaju strukturu i vertikalni položaj kote rečnog korita, što podrazumeva i promenu granulometrijskog sastava materijala dna i stratuma. Definisanjem međusobne interakcije navedenih elemenata, formirani numerički model kao rezultat daje prostorne raspodele zastupljenosti granulometrijskih intervala, i priraštaja kote dna. Terenska merenja su potvrdila da je u razmatranom slučaju nanosna mešavina dna sastavljena prevashodno od frakcija 7 i 8, koje u proseku čine oko 96% materijala. Zbog ovoga je na slici 45 prikazana sračunata zastupljenost granulometrijskih intervala 7 i 8 u mešavini nanosa koja čini dno razmatrane deonice. Najupadljivija prostorna varijacija ovih veličina se uočava na sredini domena, gde je na desnoj obali više zastupljena frakcija 8, čiji je karakteristični prečnik veći u odnosu na frakciju 7. Fizička opravdanost za ovakav rezultat numeričke simulacije se može naći u osmotrenim (a i sračunatim) brzinama, koje imaju veći intenzitet u blizini desne obale. Dakle, usled veće kinetičke energije toka zrna granulometrijskog intervala 7 se ispiraju sa dna u blizini desne obale, pa je tu rečno korito sačinjeno uglavnom od zrna frakcije 8. Mogućnost numeričkog modela da reprodukuje ovu, fizički opravdanu, pojavu kvalitativno ukazuje na njeno ispravno funkcionisanje. Na slici 73 u prilogu I su prikazane sračunate vrednosti ukupne koncentracije suspendovanog nanosa i debljine aktivnog sloja na čitavom domenu.

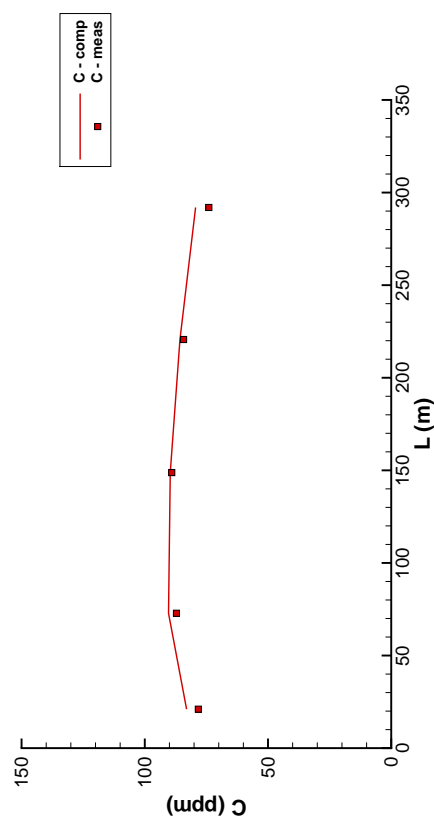
Na slici 46 su prikazane merene i računate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa za merne preseke 2, 3, 4 i 6. Rezultati za merne preseke 1, 5 i 7 su dati na slici 74 u prilogu I. Osmotrene vrednosti ukupnih koncentracija suspendovanog nanosa se nalaze u dijapazonu od 67 ppm do 119 ppm. Razlika između merenih i računatih vrednosti ove veličine je relativno mala i kreće se u intervalu od -20 ppm do 19 ppm, dok je srednja vrednost odstupanja -3 ppm. Vrednosti koncentracija za sve granulometrijske intervale nanosne mešavine su date na slikama 75, 76, 77, 78, 79 i 80 u prilogu I, gde se primećuje da postoje i značajnija odstupanja između sračunatih i merenih vrednosti za pojedine frakcije nanosne mešavine. Primera radi, u mernom preseku 7, granulometrijski interval 6 pokazuje izrazito velike koncentracije koje model nije reprodukovao jer ova frakcija nije registrovana u materijalu na dnu, pa se zaključuje da se radi o lokalnom poremećaju koji merenja nisu uspela identifikovati. Kao drugi primer ovoga se navodi merni presek 3 gde je na desnoj obali merenjima konstatovano veliko prisustvo frakcije 4 u suspenziji, dok su koncentracije granulometrijskih intervala 5 i 6 identički jednake nuli. Bez obzira na ova lokalna odstupanja, sprovedena analiza dovodi do zaključka da je razvijen ravanski model pouzdan i sposoban da reprodukuje realne situacije u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Međutim, učiniće se dodatni napor da se preispita i sposobnost modela da potvrdi *tendencije* koje su osmotrene na terenu. Razumno je očekivati da postoji međusobna zavisnost vrednosti koncentracije suspendovanog nanosa i intenziteta brzine vode. U zonama sa velikim brzinama i turbulencija mora biti veća, pa se više nanosnog materijala održava u suspenziji usled čega se tu dobijaju i veće vrednosti koncentracije. Ova pojava se može identifikovati u mernim presecima 2 i 3, gde i intenzitet vektora brzine i koncentracija suspendovanog nanosa opada prema levoj obali. Međutim, zanimljivo je primetiti da u mernom preseku 4 raspored brzina prati tendenciju opadanja ka levoj obali (slika 43), dok je koncentracija suspendovanog nanosa približno uniformna što se pripisuje intenzivnoj disperziji. Pošto su i numeričkom simulacijom dobijene tendencije opažene merenjima, potvrđuje se da je razvijen ravanski model transporta nanosa i morfoloških promena pouzdan.



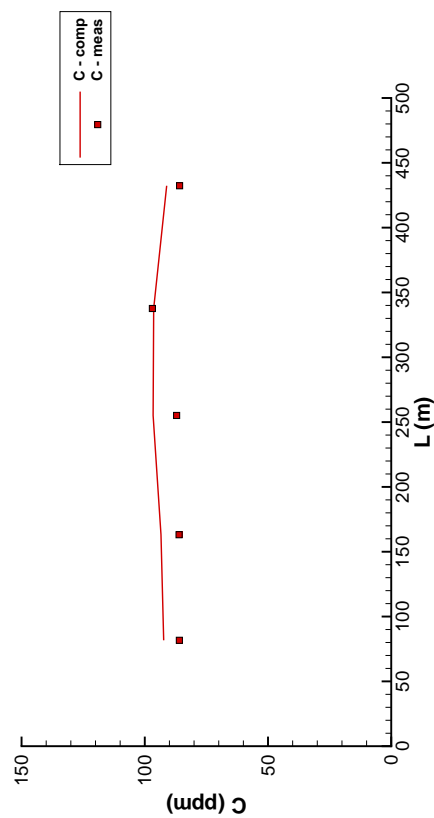
(a) Merni presek MP2



(b) Merni presek MP3



(c) Merni presek MP4



(d) Merni presek MP6

Slika 46: Merene i računate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa u mernim presecima 2, 3, 4 i 6

Da bi se sagledala efikasnost numeričkog modela navode se maksimalne vrednosti iteracija koje se javljaju tokom proračuna, nakon početnog perioda stabilizacije sistema. Najveći broj iteracija pri proračunu tečenja je bio 4 za advektivni, 2 za difuzioni i 2 za propagacioni korak. U slučaju proračuna nanosa advektivno-morfološki korak je zahtevao maksimalni broj iteracija od 5, dok je difuzioni korak završavao proračun nakon 7 iteracija.

§ § §

Slede rezultati numeričkih simulacija za drugi set merenih podataka razmatrane deonice Dunava. Ovaj set podataka je korišćen za *verifikaciju* razvijenog ravanskog modela tečenja, transporta nanosa i morfoloških promena. Svi parametri (numerički i fizički), čija je vrednost utvrđena prvim setom podataka su ostali nepromenjeni. Za simulacije je korišćena identična računaska mreža, odnosno identična podela nanosne mešavine na granulometrijske intervale kao ranije. Početni uslovi tečenja, odnosno nanosnih procesa su prilagođeni merenim vrednostima, uz napomenu da je njihov princip zadavanja ostao isti. Prvo se razmatra verifikacija ravanskog modela tečenja. Granični uslovi hidrauličkog proračuna su dati u tabeli 19.

Datum (2011. god.):	12.09.	13.09.	14.09.	15.09.	16.09.
Mohač $Q (m^3/s)$	1583.2	1559.2	1549.6	1530.8	1448.0
Bezdan $z_s (mm)$	81.160	81.115	81.095	81.033	80.867

Tabela 19: *Granični uslovi hidrauličkog proračuna*

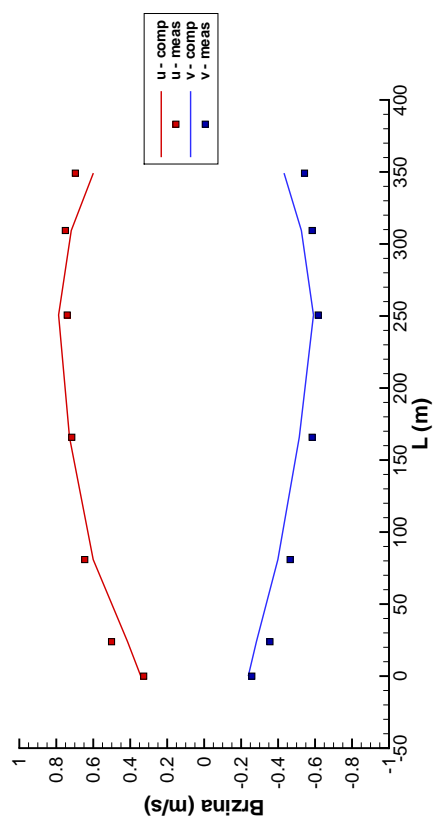
Vrednosti izmerenih i sračunatih brzina za merne preseke 2, 3, 4 i 6 su dati na slici 47, dok su merni preseki 1, 5 i 7 prikazani na slici 81 u prilogu I. Konstatuje se da je model sa zadovoljavajućom tačnošću reprodukovao osmotreno strujno polje bez dodatnih promena numeričkih ili fizičkih parametara simulacije. Uočene tendencije su slične kao u prvom setu merenih podataka.

Nakon hidrauličkog proračuna izvršena je i verifikacija ravanskog modela kretanja nanosa. Uzvodni granični uslovi proračuna nanosa su dati u tabeli 20.

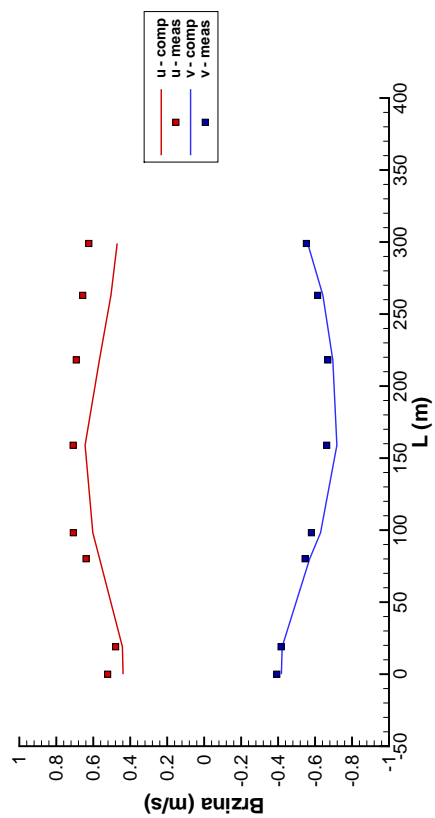
Granulometrijski interval k_s	Koncentracija suspendovanog nanosa \tilde{C}_{k_s} (-)		Granulometrijska zastupljenost β_{k_s} (-)
	12.-13.9.2011.	14.-16.9.2011.	12.-16.9.2011.
1	$5.85 \cdot 10^{-6}$	$3.18 \cdot 10^{-6}$	0.0
2	$6.51 \cdot 10^{-6}$	$3.53 \cdot 10^{-6}$	0.0
3	$1.11 \cdot 10^{-5}$	$6.00 \cdot 10^{-6}$	0.0
4	$1.89 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-5}$	0.0
5	$1.43 \cdot 10^{-5}$	$7.77 \cdot 10^{-6}$	0.0012
6	$8.46 \cdot 10^{-6}$	$4.59 \cdot 10^{-6}$	0.0008
7	0.0	0.0	0.3065
8	0.0	0.0	0.6335
9	0.0	0.0	0.0391
10	0.0	0.0	0.0219

Tabela 20: *Granični uslovi proračuna nanosa*

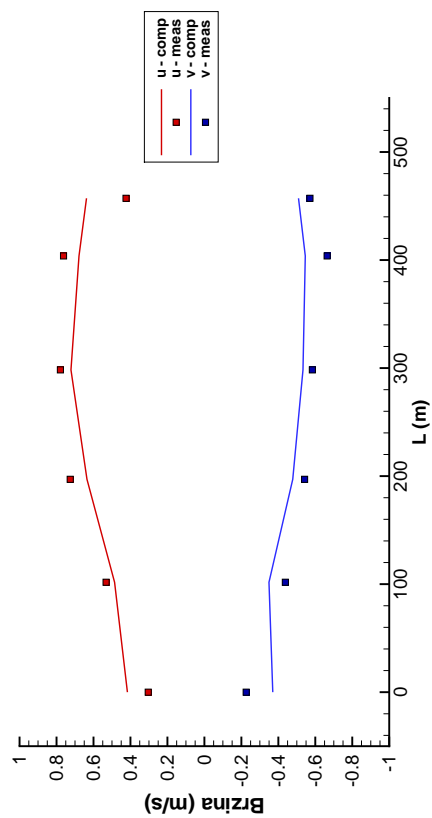
Vrednosti izmerenih i sračunatih ukupnih koncentracija suspendovanog nanosa za merne preseke 2, 3, 4 i 6 su dati na slici 48, dok su merni preseki 1, 5 i 7 prikazani na slici 83 u prilogu I. Uočava se da je model sa zadovoljavajućom tačnošću reprodukovao osmotrene koncentracije. Na slici 82 u prilogu I su prikazane sračunate vrednosti ukupne koncentracije suspendovanog nanosa i debljine aktivnog sloja za razmatranu deonicu.



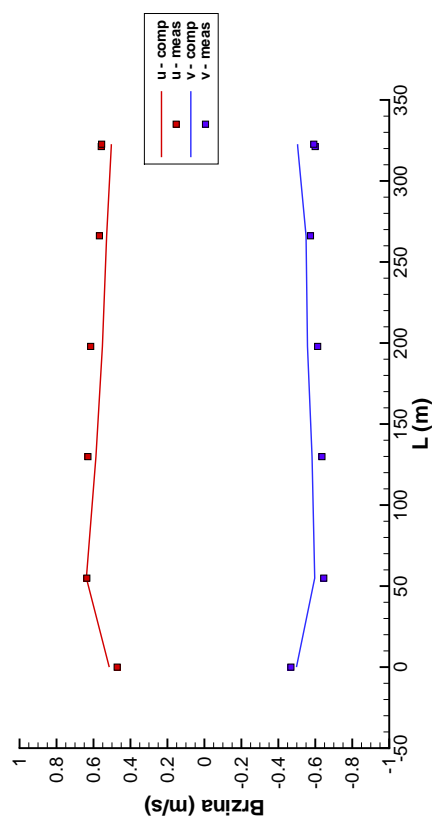
(a) Merni presek MP2



(b) Merni presek MP3

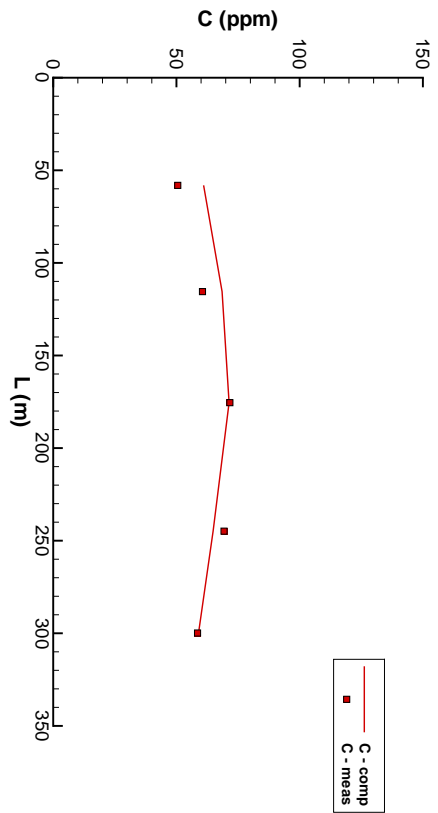


(c) Merni presek MP4

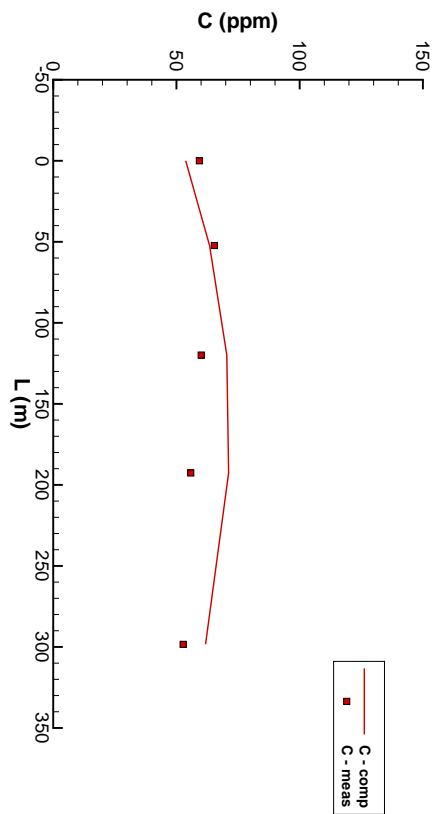


(d) Merni presek MP6

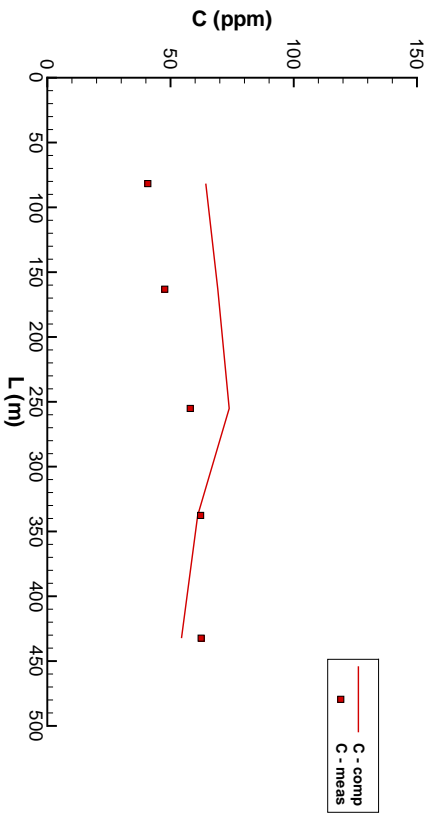
Slika 47: Merene i računate brzine u mernim presecima 2, 3, 4 i 6



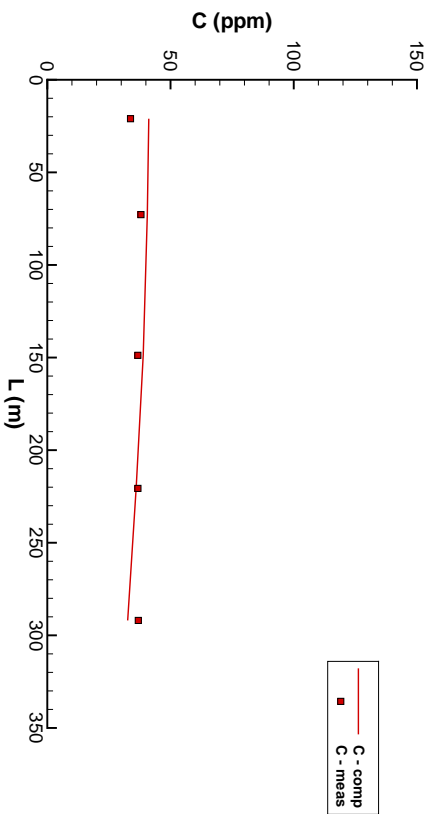
(a) Merni presjek MP2



(b) Merni presjek MP3



(c) Merni presjek MP4



(d) Merni presjek MP6

Slika 48: *Merene i računute ukupne koncentracije suspendivnog nanosa u mernim presjecima 2, 3, 4 i 6*

6.4. Deonica Dunava kod Beograda

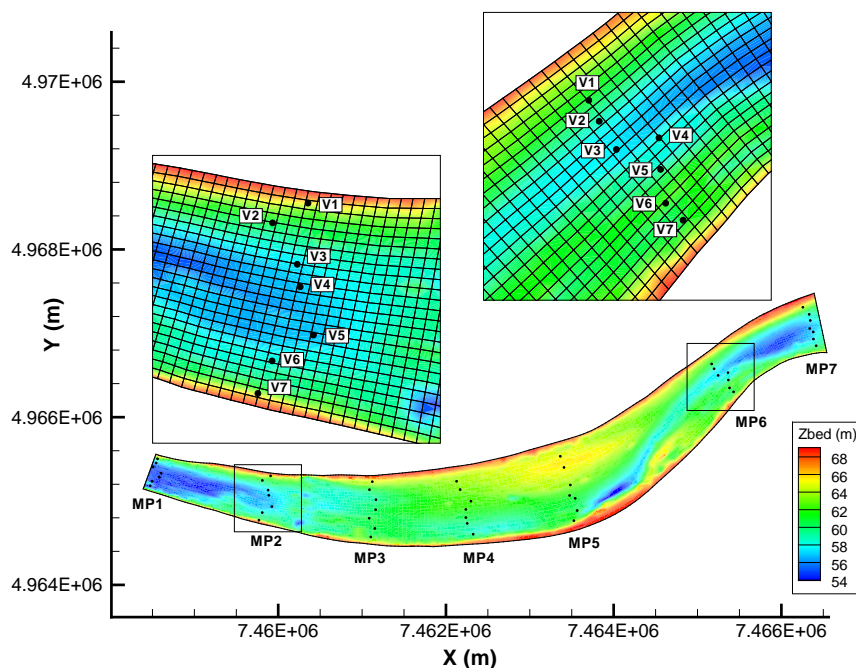
Na deonici Dunava kod Beograda (*rkm* 1168.00–1159.54) su vršena detaljna merenja radi sakupljanja terenskih podataka u vezi sa tečenjem vode, ponašanjem nanosa i transportom teških metala (zagađujuće materije) u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Najbliži objekat sa značajnijim uticajem na režim toka reke je hidroelektrana Đerdap I (*rkm* 943) u nizvodnom smeru. Sa hidrauličkog stanovišta razmatrana deonica se nalazi u akumulaciji HE Đerdap I i pod blagim je uticajem veštački nametnutih nivoa i protoka. Testiranje razvijenog matematičkog modela na deonicama prirodnih vodotokova, gde je pored složenih geometrijskih karakteristika korita izvršeno i terensko merenje zavisno promenljivih veličina, predstavlja najstrožiji vid potvrde valjanosti i pouzdanosti modela. Kompleksna geometrija, koja uslovljava složene uslove tečenja vode, ponašanja nanosne mešavine i transporta zagađujuće materije omogućava realan uvid u sposobnost modela da reprodukuje stanja zatečena na terenu.

Merenja korišćena u ovom poglavlju su finansirana od strane Ministarstva za obrazovanje, nauku i tehnološki razvoj Republike Srbije, naziv projekta *Merenje i modeliranje fizičkih, hemijskih, bioloških i morfodinamičkih parametara reka i vodnih akumulacija*, broj projekta TR 37009.

6.4.1. Sakupljanje merenih podataka

Terenska merenja su izvršena na deonici reke Dunav kod Beograda u trajanju od sedam dana od 11. do 17. jula 2013. godine. Unutar odabrane deonice, koja se nalazi između *rkm* 1168.00 i *rkm* 1159.54 (slika 49), rađena su detaljna merenja morfologije korita. Kota dna je merena eho-sonarom približno na svakih 100 m, dok je položaj plovila određivan GPS uređajem. Tačnost batimetrijskih merenja je bila 0.01 m. Ovako je izmereno 89 poprečnih preseka duž razmatrane deonice reke, čijom obradom je formiran trodimenzionalni digitalni model korita koji je potom korišćen u numeričkim simulacijama tečenja, ponašanja nanosa i transporta zagađujuće materije. Konstatuje se da reka na posmatranoj deonici umereno meandrira, pri čemu je prelaz matice od jedne obale ka drugoj evidentan na njenoj nizvodnoj polovini. Korito se na srednjem delu domena širi nakon čega se ponovo sužava. Takođe se primećuje da postoje tri zone sa većim dubinama od kojih se najveća nalazi na uzvodnom kraju razmatranog dela reke.

Unutar ranije definisane deonice, prikazane na slici 49, izabrano je sedam preseka za detaljno merenje parametara tečenja, nanosa i teških metala (zagađujuće materije). Ovi merni preseki, označeni redom od uzvodnog kraja sa MP1, MP2, ... MP7, bili su postavljeni na međusobnom rastojanju koje je variralo od 1.1 km do 2.33 km. U svakom preseku se nalazilo sedam vertikalna, označeni redom od leve ka desnoj obali sa V1, V2, ... V7, gde su merene brzine pomoću ADCP-a (*Acoustic Doppler Current Profiler*) pričvršćenog za usidreno plovilo. Princip rada ovog instrumenta je objašnjen ranije u poglavlju 6.3.1. zbog čega se ovde neće ponavljati. Merenje rasporeda brzina je i u ovom slučaju sprovedeno u saglasnosti sa istraživanjima autoa Muste et al. (2004b) i Muste et al. (2004a), pa je vreme merenja brzina sa usidrenog plovila bilo oko 10 min, čime je obezbeđeno osrednjavanje „trenutnih” profila brzina u mernim vertikalama. Naknadna obrada podataka je dala raspored tri komponente brzine po dubini toka. Karakteristični primer ovoga je prikazan na slici 84 u prilogu J, gde se vidi da je vertikalna komponenta brzine zanemarljiva u odnosu na dve horizontalne komponente, što za razmatranu deonicu reke opravdava primenu ravanskog modela. Granični uslovi, neophodni za numeričku simulaciju tečenja, dobijeni su pomoću linijskog modela koji je koristio merene podatke sa najbližih dostupnih hidrometeoroloških stanica.



Slika 49: Deonica Dunava kod Beograda

Od sedam vertikala u svakom mernom preseku (slika 49), iz pet su sakupljani uzorci suspendovanog nanosa i nanosa na dnu (uz napomenu da je uzorak nanosa sa dna u nekim mernim presecima uziman iz više od pet vertikala). Predmetna merenja su vršena *istovremeno* sa merenjima brzina. Na svakoj vertikali namenjenoj za merenje nanosnih veličina, koncentracija suspendovanog nanosa (za sve granulometrijske intervale) je određivana u pet tačaka, kao što je to prikazano na slici 85 u prilogu J. Odgovarajući terenski rad je podrazumevao uzimanje uzoraka vode (zajedno sa suspendovanim nanosom) približne zapremine od deset litara u svakoj od pet tačaka nanosne vertikale posebno, što je rezultovalo u 175 uzoraka suspendovanog nanosa, čija je granulometrijska analiza sprovedena metodom taloženja čestica u fluidu. Ova metodologija je objašnjena u poglavlju 6.3.1. pa se ovde neće ponavljati. Način zahvatanja nanosa sa rečnog korita, primenjivan tokom kampanje, je obezbedio isključivo *poremećene* uzorke koji nisu pogodni za definisanje stratifikacije nanosnog materijala. Međutim, ovako dobijeni podaci su naknadno obrađeni u cilju formulisanja verodostojnog početnog uslova na dnu za numeričke simulacije kretanja nanosa i morfoloških promena. Ukupan broj uzoraka nanosnog materijala sa dna je bio 44, čija je granulometrijska analiza izvršena pomoću mašinskog prosejavanja kroz niz sita standardnih otvora. Položaj plovila za merenje nanosnih veličina je utvrđen GPS uređajem.

Nakon obrade sakupljenih podataka, koja je rezultovala rasporedima brzina i rasporedima koncentracije suspendovanog nanosa, izvršeno je njihovo osrednjavanje po dubini da bi se dobile vrednosti uporedive sa rezultatima ravanskog modela.

Od zagađujućih materija izabrana su tri teška metala, cink (Zn), olovo (Pb) i živa (Hg). Teški metali spadaju u kategoriju nekonzervativnih zagađivača koji nisu podložni hemijskom i/ili biološkom raspadanju i/ili nastajanju, a stupaju u interakciju sa sitnim česticama nanosnog materijala što ih čini pogodnim pri implementaciji razvijenog modela transporta zagađujuće materije. Predmetna merenja su vršena *istovremeno* sa merenjima brzina i prikupljanjem podataka o nanosnim veličinama. Rastvoreni zagađivač je uzorkovan iz tri vertikale (V2, V4 i V6) svakog mernog preseka, što je dalo 21 izmereni podatak.

Iz istih vertikala su zahvatani i uzorci zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa na dnu, pri čemu je od prikupljenih 21 uzoraka, 5 bilo neupotrebljivo, jer u njima nije bilo dovoljno sitnih čestica za koje se adsorbuju razmatrani teški metali. Podaci o zagađujućoj materiji adsorbovanoj na zrna suspendovanog nanosa su uzimani iz svake vertikale svakog mernog preseka, obezbeđujući 49 uzoraka. Napominje se da su uzorci rastvorenog zagađivača bili integralni po mernoj vertikali. Sa druge strane, prisustvo zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa je određivano iz uzoraka koji su zahvatani sa dubine od oko 0.4 m da bi u njima bilo što više sitnih zrna nanosa koji učestvuju u interakciji sa zagađivačem. Dakle, za navedene dve koncentracije je dobijena samo jedna vrednost za pojedinu vertikalu, te raspored ovih veličina po dubini ostaje nepoznat. Položaj plovila za merenje prisustva zagađujuće materije je utvrđen GPS uređajem.

Bitno je naglasiti da uzorke adsorbovanog zagađivača nije bilo moguće podvrgnuti granulometrijskoj analizi. Obrada sakupljenih uzoraka je dala brojčanu vrednost koja opisuje prisustvo adsorbovane zagađujuće materije u vidu mase zagađivača po masi nanosnog materijala u zahvaćenom uzorku. Izlazne vrednosti numeričkih simulacija su prilagođene da budu uporedive sa terenskim merenjima parametara prisustva zagađujuće materije u skladu sa stavovima iz poglavlja 4.5.

6.4.2. Rezultati numeričkih simulacija

Razvijen matematički model za simuliranje tečenja vode, ponašanja nanosa i transporta zagađivača u aluvijalnim vodotocima je primenjen na deonicu reke Dunav, opisanu u poglavlju 6.4.1. Ukupna dužina računskog domena je 8.5 km. Granični uslovi za hidraulički proračun su dobijeni iz linijskog modela i svode se na poznati protok na uzvodnom kraju, odnosno poznati nivo slobodne površine vode na nizvodnom kraju (tabela 21). Prosečna širina domena je približno 650 m. Konstruisana je neuniformna računaska mreža, čije ćelije imaju prosečnu dužinu od 42.7 m u ξ koordinatnom pravcu (tj. u pravcu toka), odnosno 30.2 m u η koordinatnom pravcu. Model sadrži 5100 računskih tačaka. Vreme simulacije je iznosilo sedam dana (kao i vreme trajanja terenskih merenja), čemu prethodi osam dana namenjenih za ustaljivanje sistema.

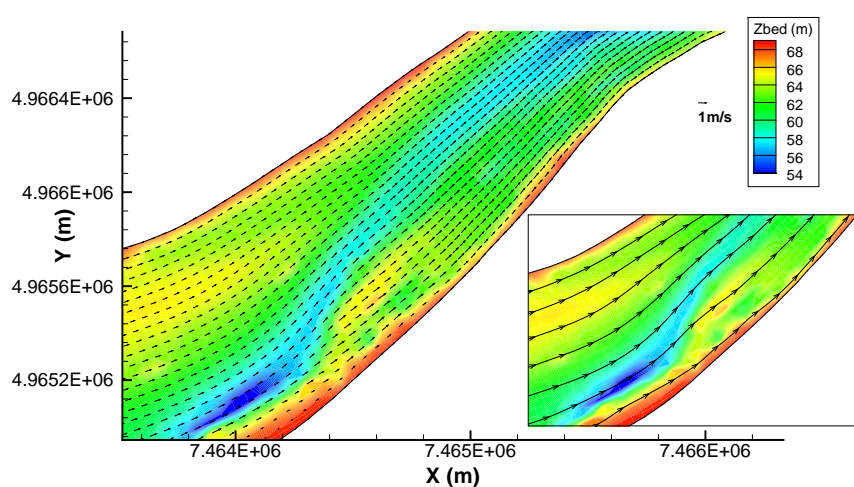
Datum (2013. god.):	11.07.	12.07.	13.07.	14.07.	15.07.	16.07.	17.07.
Uzv. Q (m^3/s)	5393.58	5281.21	5055.84	4945.80	4808.70	4608.82	4315.43
Nizv. z_s (mm)	70.99	70.94	70.90	70.83	70.76	70.62	70.56

Tabela 21: Granični uslovi hidrauličkog proračuna

Hidraulički proračun je za početne uslove koristio horizontalni nivo slobodne površine vode, pri čemu su obe komponente brzine u svim tačkama nula (*zero-flow*). Primena algoritma za proračun nelinearne advekcije, koji podrazumeva metodu karakteristika i putovanje trajektorije duž više računskih ćelija je omogućio primenu vremenskog koraka od 45 s. Odabrani računski korak po vremenu je rezultovao u najdužoj trajektoriji od tri segmenta. Kalibracija hidrauličkog modela je sprovedena menjanjem *Manning*-ovog koeficijenta hrapavosti, čija je prosečna vrednost iznosila $0.02 m^{-1/3}s$. Očekivana vrednost ovog parametra za zatečeni granulometrijski sastav rečnog dna iznosi $0.016 m^{-1/3}s$ (Julien, 2002). Nešto veća vrednost kalibrisanog koeficijenta trenja u odnosu na očekivanu se može pripisati aluvijalnim otporima. Tokom numeričke simulacije je praćena relativna greška jednačine kontinuiteta, kao dodatna provera verodostojnosti modela. Brojčana vrednost ovog pokazatelja je, posmatrajući svaku računsku ćeliju posebno, ostala ispod 0.02%. Najveća relativna greška jednačine kontinuiteta za ceo računski domen (tj. njena

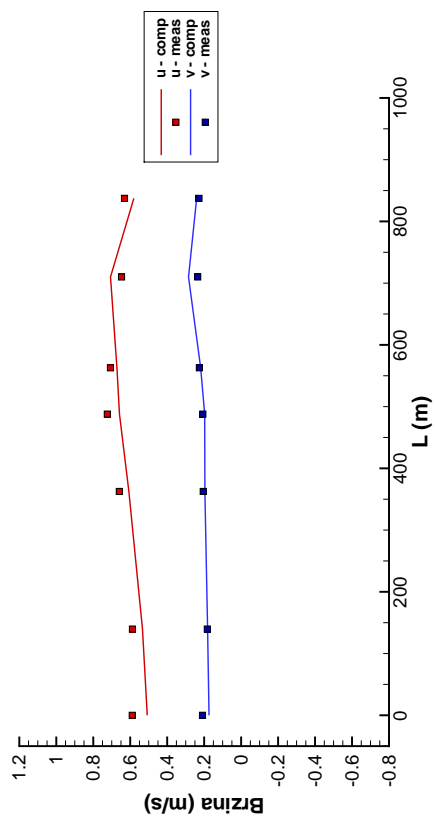
kumulativna vrednost) je iznosila manje od $2.0 \cdot 10^{-7}\%$.

Na slici 50 je dat detalj hidrauličkog proračuna. Prikazana je lokalna batimetrija, sračunati vektori brzina, odnosno odgovarajuće strujnice. Cilj analize koja sledi je da se identifikuju pojave, pomoću kojih je iz fizike stvari opravdano *kvalitativno* oceniti ponašanje modela. Na prikazanom detalju se vidi lokacija gde se korito sužava uz prebacivanje matice toka sa desne obale na levu. Usled sužavanja korita dolazi do smanjenja protočnog profila, a time i do povećanja vrednosti brzina. Takođe se može osmotriti zakrivljenje strujnica, koje je delom izazvano krivinom same rečne deonice, a delom usled toga što tok pokušava da „prati” zone sa većom dubinom (tj. manjim hidrauličkim otporom). Iako za detalj proračuna na slici 50 *ne* postoje mereni podaci, on predstavlja situaciju kad se može kvalitativno oceniti sposobnost modela da reprodukuje očekivane pojave. Dakle, konstatuje se da je razvijeni ravanski hidraulički model produkovao fizički realne strujne slike, zadovoljavajućeg kvaliteta.

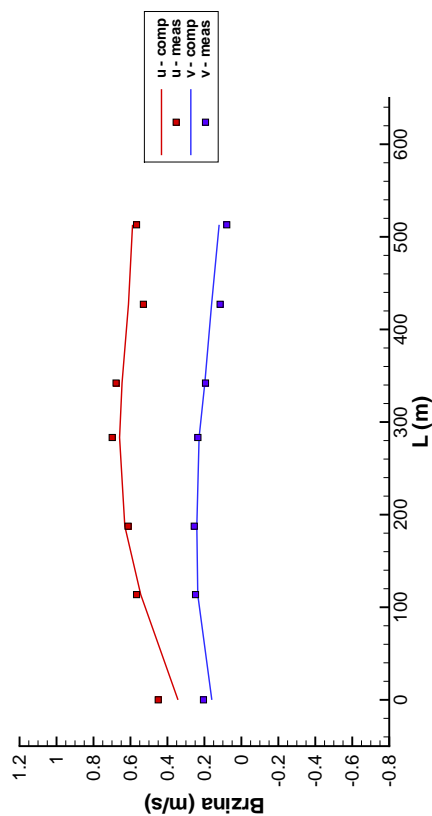


Slika 50: Detalj hidrauličkog proračuna

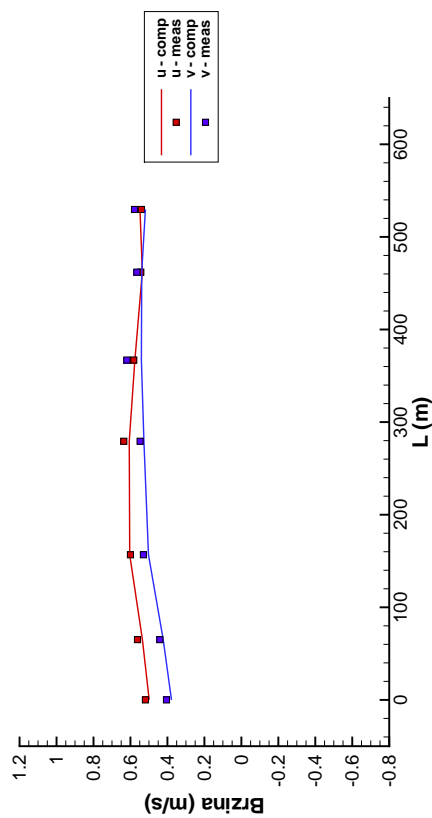
Na slici 51 su prikazane merene i računate brzine u mernim presecima 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih pesaka 1, 2 i 4 su dati na slici 86 u prilogu J. Na horizontalnoj osi dijagrama je naznačeno rastojanje između vertikalala. Intenziteti osmotrenih vektora brzina su se kretali u dijapazonu od 1.03 m/s do 0.42 m/s . Konstatuje se da je razlika između merenih i računatih brzina relativno mala i kreće se u intervalu od -0.28 m/s do 0.22 m/s , dok je srednja vrednost odstupanja 0.02 m/s . Ovo dovodi do zaključka da je razvijeni ravanski model pouzdan i sposoban da reprodukuje realne situacije u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Međutim, puko upoređivanje sračunatih i merenih vrednosti ume da bude zavaravajuće ako se pri tome ne analizira i sposobnost modela da potvrdi *tendencije* koje su osmotrene na terenu. Primera radi, na merenim i sračunatim vrednostima komponenti brzina u mernim presecima 5 i 6 se vidi preraspodela protoka usled prebacivanja matice toka sa desne obale (u mernom preseku 5) na središnji deo toka (merni presek 6). Naime, u mernom preseku 5 se veće vrednosti brzina javljaju na desnoj obali, dok se u mernom preseku 6 lokacija najvećih vrednosti brzina premešta na srednji deo preseka. Opisani fenomen je usko povezan sa lokalnom batimetrijom (slika 49). Druga pojava, vredna pomena, je krivudanje toka usled čega se vrednosti dve komponente brzine značajno menjaju po prostoru. U mernom preseku 3 su v komponente brzine mali negativni brojevi, dok su u mernom preseku 6 v komponente brzine pozitivni brojevi istog reda veličine kao u komponenta brzine. Činjenica da su i numeričkom simulacijom dobijene tendencije potvrđene merenjima ukazuje na pouzdanost razvijenog ravanskog modela.



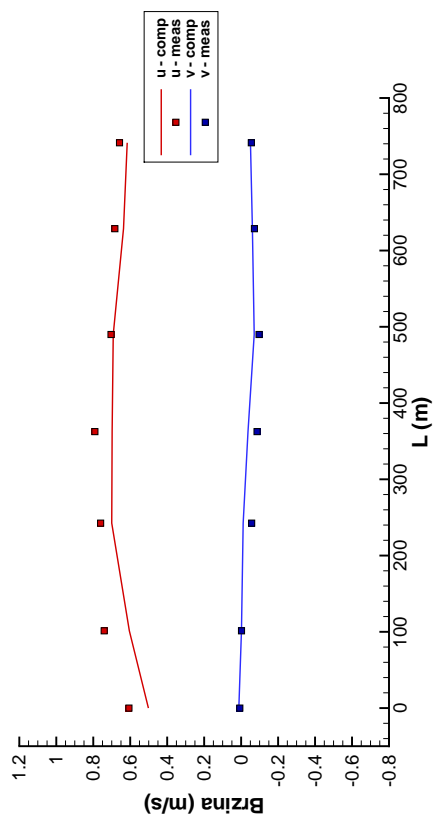
(a) Merni presek MP3



(b) Merni presek MP5



(c) Merni presek MP6



(d) Merni presek MP7

Slika 51: Merene i računate brzine u mernim presecima 3, 5, 6 i 7

Nakon uspostavljanja modela tečenja na razmatranoj deonici reke Dunav i definisanja potrebnih hidrauličkih parametara, sledi modelisanje ponašanja nanosa. Kao što je to naglašeno u poglavlju 6.3.2. proračunom je neophodno pokriti celokupan opseg frakcija nanosnog materijala, pa je nanosna mešavina, nakon obrade merenih podataka, podeljena na dvanaest granulometrijskih intervala (tabela 22).

Granulometrijski interval k_s	Karakteristični prečnik D_{k_s} (mm)	Granulometrijski interval k_s	Karakteristični prečnik D_{k_s} (mm)
1 \diamond	0.000707	7 $\diamond\clubsuit$	0.112
2 $\diamond\clubsuit$	0.00224	8 $\diamond\clubsuit$	0.177
3 $\diamond\clubsuit$	0.00707	9 \clubsuit	0.354
4 $\diamond\clubsuit$	0.0141	10 \clubsuit	1.000
5 $\diamond\clubsuit$	0.0316	11 \clubsuit	4.000
6 $\diamond\clubsuit$	0.0707	12 \clubsuit	16.000

\diamond nađeno u suspenziji

\clubsuit nađeno na dnu

Tabela 22: *Granulometrijski intervali mešavine nanosa*

Početni uslovi za koncentracije suspendovanog nanosa su dobijeni kao prosečna vrednost svih izmerenih koncentracija za svaku frakciju posebno. Ranije je nagovešteno da je uzorkovanje nanosa sa rečnog dna podrazumevalo metodologiju koja nije mogla obezbediti neporemećene uzorke, zbog čega je početna stratifikacija nanosnog materijala na dnu pretpostavljena. Pošto je debljina aktivnog sloja reda veličine nekoliko milimetara, razumno je smatrati da je njegov doprinos ukupnom uzorku nanosa sa dna zanemarljiv. Rukovodeći se ovom činjenicom, početni uslov granulometrijskog sastava u svim stratumima (aktivnom i dubljim) odgovara najbližoj merenoj vrednosti, dok je početni uslov granulometrijskog sastava za aktivni sloj dobijen kao prosek svih merenja.

Granulometrijski interval k_s	Koncentracija suspendovanog nanosa \check{C}_{k_s} (-)	Granulometrijska zastupljenost β_{k_s} (-)
1	$3.77 \cdot 10^{-6}$	0.0
2	$3.71 \cdot 10^{-6}$	0.00067
3	$5.74 \cdot 10^{-6}$	0.00165
4	$1.23 \cdot 10^{-5}$	0.00252
5	$1.85 \cdot 10^{-5}$	0.01123
6	$1.44 \cdot 10^{-5}$	0.01941
7	$1.45 \cdot 10^{-5}$	0.00978
8	0.0	0.51569
9	0.0	0.38197
10	0.0	0.01846
11	0.0	0.01286
12	0.0	0.02576

Tabela 23: *Granični uslovi proračuna nanosa*

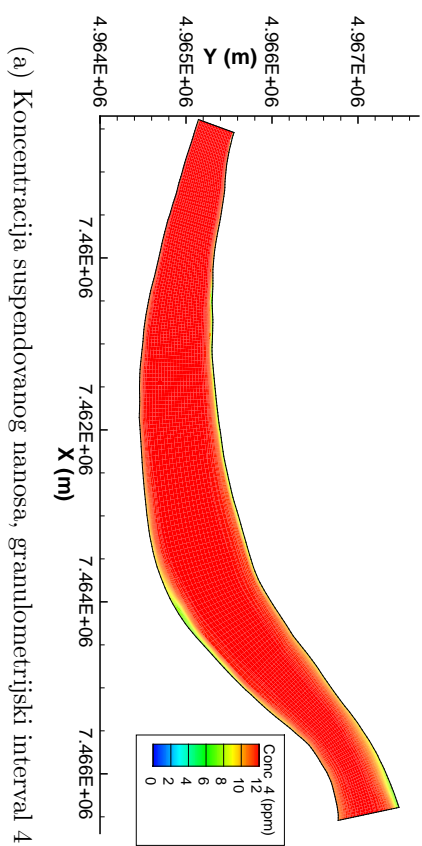
Zbog dostupnosti merenih podataka granični uslovi za nanosne veličine su nametnuti kao konstante tokom vremena. U tabeli 23 su navedene vrednosti koje su zadavane u svim računskim tačkama uzvodne granice razmatranog domena. Kota dna se u predmetnim tačkama nije menjala u odnosu na početni uslov. Formulisan numerički model ne zahteva nizvodne granične uslove za proračun nanosa, jer je u difuzionom koraku usvojen stav da nema promene mase suspendovanog nanosa u domenu pa je gradijent koncentracije na

svim granicama nula. Primena algoritma za proračun linearne advekcije, koji omogućava da trajektorija putuje kroz više računskih ćelija, dozvolila je usvajanje računskog koraka za proračun nanosa od 90 s. Najduža trajektorija se sastojala od četiri segmenta.

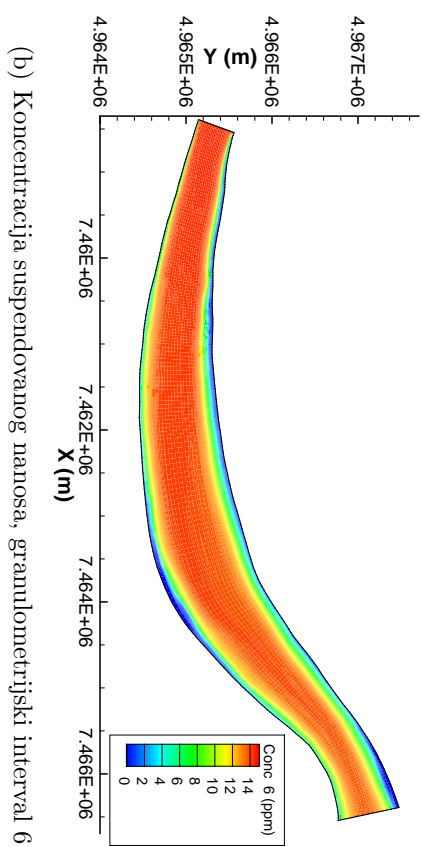
Primarni mehanizam kalibracije ravanskog modela transporta nanosa i morfoloških promena je sadržan u zadavanju parametara a_{k_s} i Δa_{k_s} jednačine za član izvora suspendovanog nanosa iz poglavlja 4.3. Ovaj vid kalibracije modela je „prirodan”, jer upravo ovaj član predstavlja glavni mehanizam razmene između raznih vidova kretanja nanosa, pa time i uslovljava usku povezanost nanosnih jednačina. Tokom numeričkih simulacija je proveravana kumulativna relativna greška jednačine kontinuiteta celog računskog domena za sve granulometrijske intervale nanosne mešavine. U slučaju nanosa na dnu relativna greška je zanemarljiva i bila je reda veličine $7.0 \cdot 10^{-14}\%$. Sa druge strane, za suspendovani nanos je najveća relativna greška iznosila približno 0.04% (za 9. frakciju), dok zbir relativnih grešaka po svim frakcijama nije prevazilazio 0.05%. Suma zastupljenosti granulometrijskih intervala nanosa na dnu je u svim računskim tačkama ostala jedan.

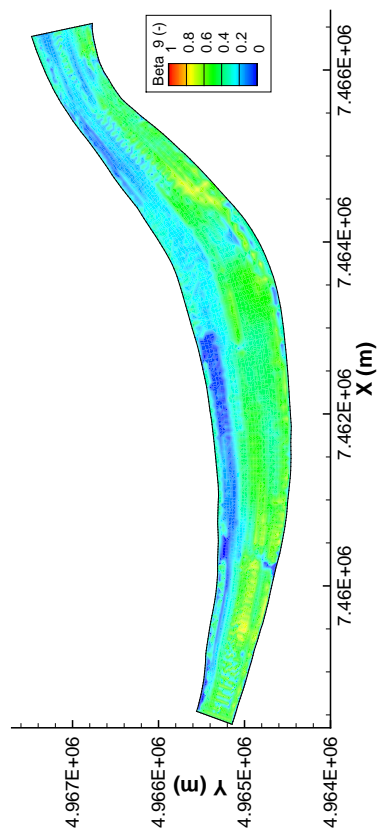
Na slici 52 su prikazane sračunate koncentracije suspendovanog nanosa za granulometrijske intervale 4 i 6 u celom računskom domenu. Model ukazuje na to da je četvrta frakcija suspendovanog nanosa u potpunoj suspenziji, dok je šesta frakcija već u delimičnoj suspenziji. U blizini obala, gde su brzine manje, koncentracije frakcija sa većim karakterističnim prečnikom zrna opadaju usled manje kinetičke energije toka. Kao što je to ranije rečeno, formirani numerički model kao rezultat daje prostorne raspodele zastupljenosti granulometrijskih intervala, i priraštaja kote dna. Terenska merenja su potvrdila da je u razmatranom slučaju nanosna mešavina dna sastavljena prevashodno od frakcija 8 i 9, koje u proseku čine oko 90% materijala. Zbog ovoga je na slici 53 prikazana sračunata zastupljenost granulometrijskih intervala 8 i 9 u mešavini nanosa, koja čini dno razmatrane deonice. Najupadljivija prostorna varijacija ovih veličina se manifestuje u tome da je na desnoj obali više zastupljena frakcija 9, čiji je karakteristični prečnik veći u odnosu na frakciju 8. Na slici 87 u prilogu J su date sračunate vrednosti ukupne koncentracije suspendovanog nanosa i debljine aktivnog sloja na čitavom domenu.

Na slici 54 su prikazane merene i računute ukupne koncentracije suspendovanog nanosa za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 88 u prilogu J. Osmotrene vrednosti ukupne koncentracije suspendovanog nanosa variraju u dijapazonu od 46 ppm do 89 ppm. Razlika između merenih i računatih vrednosti ove veličine se kreće u intervalu od -21 ppm do 20 ppm, dok je srednja vrednost odstupanja -1.3 ppm. Vrednosti koncentracija za sve granulometrijske intervale nanosne mešavine su date na slikama 89, 90, 91, 92, 93, 94 i 95 u prilogu J, gde se primećuje da postoje i značajnija odstupanja između sračunatih i merenih vrednosti za pojedine frakcije nanosne mešavine. Primera radi, u čitavom mernom preseku 7 su zabeležene visoke vrednosti koncentracije granulometrijskog intervala 7 koje model nije uspeo reprodukovati. Ova frakcija nanosnog materijala je na dnu u okolini mernog preseka 7 prisutna u količini od oko 0.3%, što nikako ne opravdava njeno veliko prisustvo u suspenziji. Zaključuje se da su osmotrene vrednosti najverovatnije posledica prolaska „talasa” zrna nanosa frakcije 7 koji, usled organizacije sakupljanja terenskih podataka, ne figuriše u uzvodnom graničnom uslovu. Bez obzira na uočena odstupanja, sprovedena analiza dovodi do zaključka da je razvijen ravanski model pouzdan i sposoban da reprodukuje realne situacije u prirodnim aluvijalnim vodotocima. Takođe je bitno primetiti da su merene vrednosti ukupne koncentracije suspendovanog nanosa na uzvodnom delu domena veće (u proseku oko 73 ppm) u odnosu na nizvodne delove modela (u proseku oko 58 ppm). Konstatuje se da je razvijeni model uspešno reprodukovao ovu tendenciju ponašanja suspendovanog nanosa.

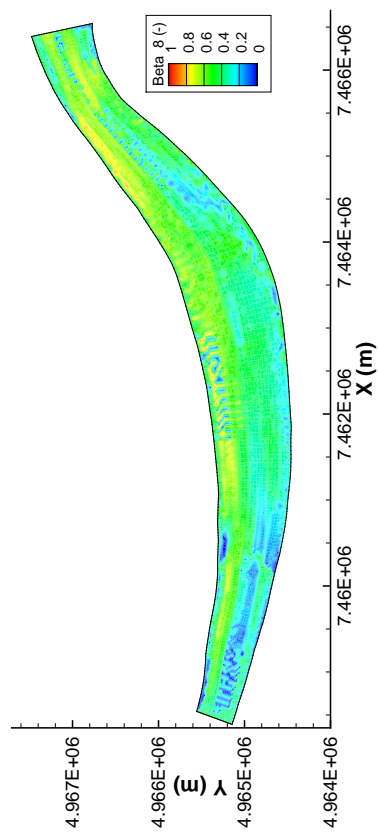


Slika 52: *Sračunate koncentracije suspendovanog nanosa*



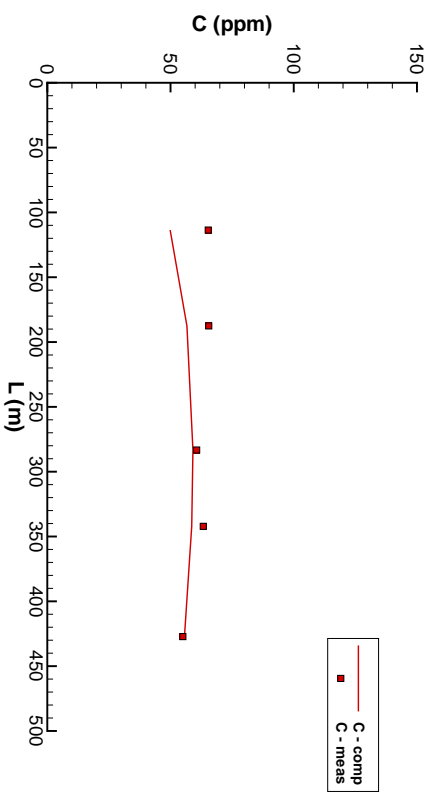
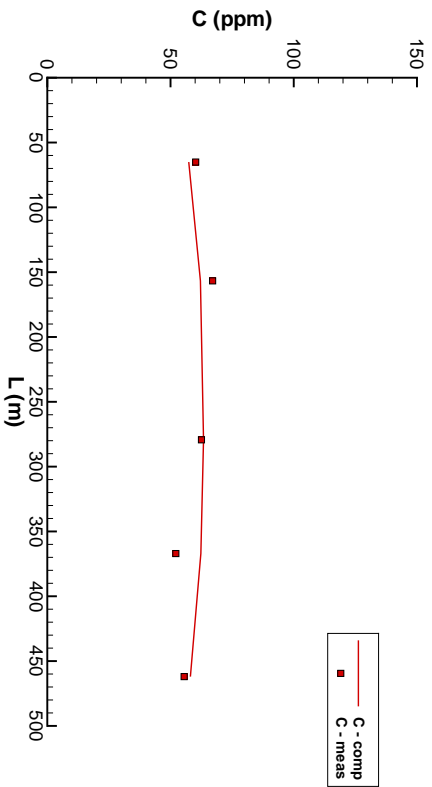
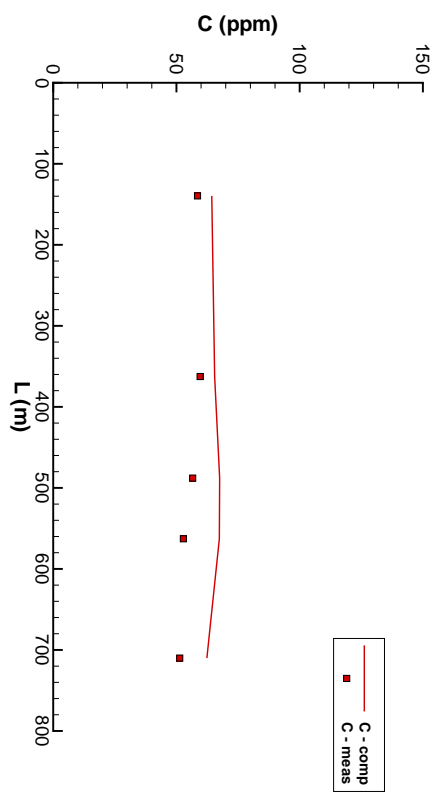
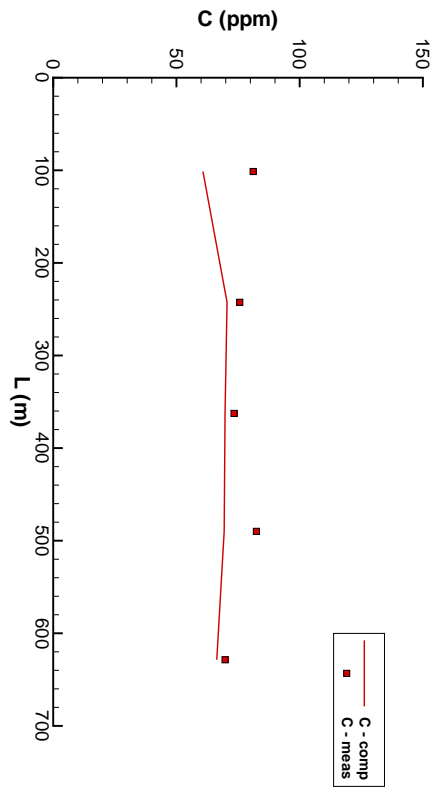


(a) Zastupljenost granulometrijskog intervala 8



(b) Zastupljenost granulometrijskog intervala 9

Slika 53: *Sračunata zastupljenost granulometrijskih intervala u mešavini nanosa aktivnog sloja*



Slika 54: *Merene i računate ukupne koncentracije suspendivnog nanosa u mernim presjecima 3, 5, 6 i 7*

Nakon uspostavljanja modela tečenja i ponašanja nanosa na razmatranoj deonici reke Dunav, sledi modelisanje transporta zagađujuće materije. Kao što je to detaljno navedeno u poglavljima 3.4. i 4.4. matematički model transporta zagađujuće materije se sastoji od tri osnovna elementa: transport rastvorenog zagađivača, transport zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos i transport/ponašanje zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa u aktivnom sloju. Navedeni vidovi pojave zagađujuće materije stoje u jakoj međusobnoj sprezi preko članova razmene, od kojih se neposredna razmena javlja preko procesa adsorpcije/desorpcije. Razmena adsorbovane materije preko nanosnih procesa se vezuje za uvlačenje zrna iz aktivnog sloja u suspenziju i njihovo deponovanje iz suspenzije u aktivni sloj. Usvojeni koncept modelisanja podrazumeva da se svi procesi posmatraju sa stanovišta pojedinog granulometrijskog intervala. Dakle, pre svega je potrebno naglasiti da je podela nanosne mešavine na granulometrijske intervale ostala potpuno identična kao u slučaju proračuna nanosa, pa i ovde važi tabela 22. Međutim, u skladu sa kriterijumom iznetim u poglavlju 4.4. samo prvih pet frakcija nanosa učestvuje u interakciji sa zagađujućom materijom i one se nazivaju *aktivnim* frakcijama.

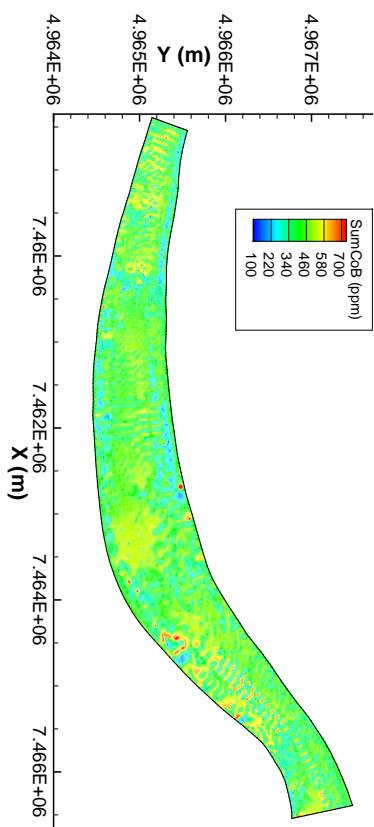
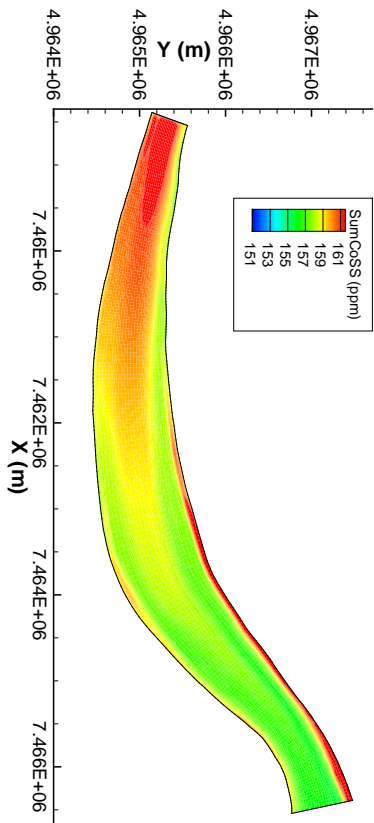
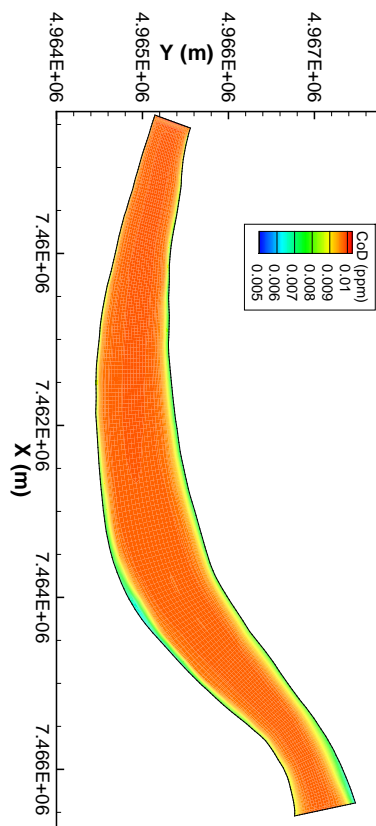
U poglavlju 6.4.1. je rečeno da su od zagađujućih materija izabrana tri teška metala: cink, olovo i živa. Teški metali spadaju u kategoriju nekonzervativnih zagađivača koji nisu podložni hemijskom i/ili biološkom raspadanju i/ili nastajanju, a stupaju u interakciju sa sitnim česticama nanosnog materijala što ih čini pogodnim pri implementaciji razvijenog modela. Od navedenih elemenata se prvo razmatra *cink*.

Početni uslovi za koncentracije rastvorenog cinka i cinka adsorbovanog za suspendovani nanos su dobijeni kao prosečna vrednost svih izmerenih koncentracija. Ranije je nagovešteno da je uzorkovanje nanosa sa rečnog dna podrazumevalo metodologiju koja nije mogla obezbediti neporemećene uzorke, zbog čega je početni raspored prisustva zagađivača po dubini nanosnog materijala na rečnom dnu pretpostavljen. Rukovodeći se istim principom kao pri modelisanju nanosa, početni uslov koncentracije cinka u svim stratimima (aktivnom i dubljim) odgovara najbližoj merenoj vrednosti, dok je početni uslov koncentracije za aktivni sloj dobijen kao prosek svih merenja.

Koncentracija rastvorenog zagađivača \tilde{C}^{\ddagger} (-)	Granulometrijski interval k_s	Koncentracija zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos $\tilde{C}_{k_s}^{\ddagger}$ (-)	Koncentracija zagađivača adsorbovanog na nanos u aktivnom sloju $\beta_{k_s}^{\ddagger}$ (-)
$9.6 \cdot 10^{-9}$	1	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$
	2	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$
	3	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$
	4	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$
	5	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$

Tabela 24: Granični uslovi proračuna zagađivača - cink

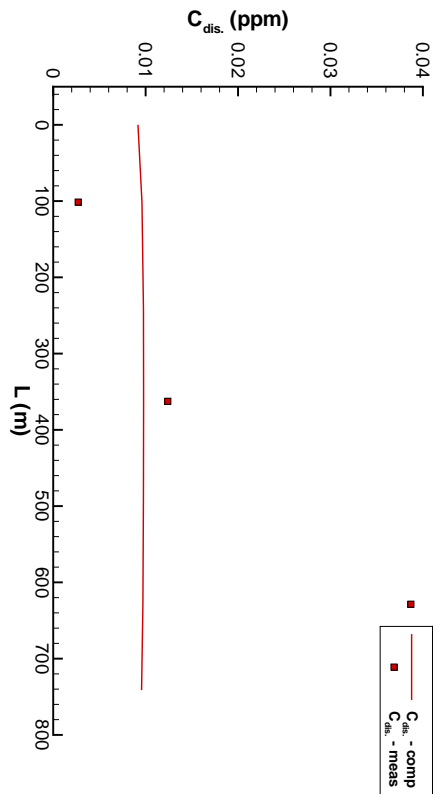
U poglavlju 6.4.1. je rečeno da nije bilo moguće izvršiti granulometrijsku analizu uzorka zagađivača adsorbovanog na zrna nanosa, pa su za sve aktivne frakcije zadavane iste vrednosti koncentracija. Zbog dostupnosti merenih podataka, granični uslovi za proračun transporta zagađivača su nametnuti kao konstante tokom vremena. U tabeli 24 su navedene vrednosti koje su zadavane u svim računskim tačkama uzvodne granice razmatranog domena. Formulisan numerički model ne zahteva nizvodne granične uslove za proračun zagađivača, jer je u difuzionom koraku usvojen stav da nema promene mase u domenu pa je gradijent koncentracije na svim granicama nula. Primena razvijenog algoritma za proračun linearne advekcije, koji omogućava da se trajektorija prostire duž više računskih ćelija, dozvolila je usvajanje računskog koraka od 90 s.



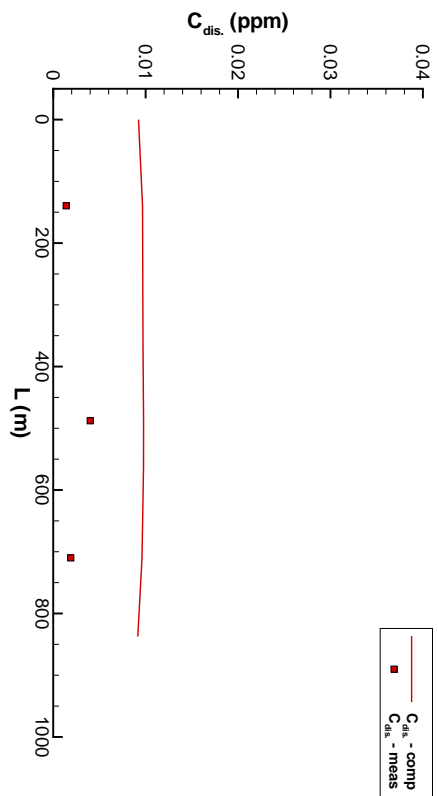
Slika 55: *Sračunate koncentracije cinka*

Primarni mehanizam kalibracije ravanskog modela transporta zagađujuće materije je sadržan u zadavanju parametara $\chi_{k_s}^{ss}$ i $\chi_{k_s}^{bs}$, koji se redom javljaju u jednačinama za određivanje kinetičkog koeficijenta procesa adsorpcije na zrna suspendovanog nanosa, odnosno na zrna nanosa u aktivnom sloju (poglavlje 4.4.). Kao parametar kalibracije je takođe poslužio i kinetički koeficijent procesa desorpcije sa zrna nanosa. Ovaj vid kalibracije modela je „prirodan”, jer se neposredno utiče na glavne mehanizme razmene između raznih vidova pojave nekonzervativne zagađujuće materije. Tokom numeričkih simulacija je proveravana kumulativna relativna greška jednačine održanja mase celog računskog domena za sve granulometrijske intervale nanosne mešavine. U slučaju rastvorenog zagađivača relativna greška je bila reda veličine $2.8 \cdot 10^{-5}\%$. Sa druge strane, u slučaju zagađivača adsorbovanog na zrna aktivnih frakcija suspendovanog nanosa, najveća relativna greška je iznosila približno $-1.8 \cdot 10^{-3}\%$ (za 5. frakciju), dok zbir relativnih grešaka po svim frakcijama nije prevazilazio $-2.6 \cdot 10^{-3}\%$. I konačno, u slučaju zagađivača vezanog na zrna nanosa aktivnih frakcija u aktivnom sloju, najveća relativna greška se kretala oko $-6.5 \cdot 10^{-18}\%$ (za 5. frakciju), dok je zbir relativnih grešaka po svim frakcijama ostao ispod vrednosti od $-6.7 \cdot 10^{-17}\%$.

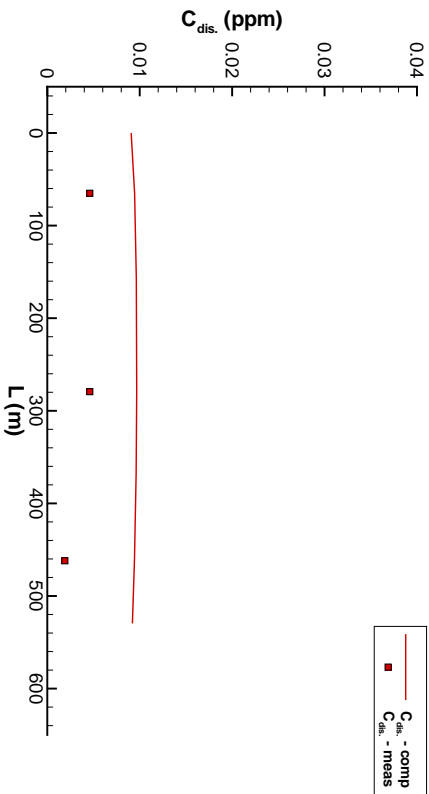
Na slici 55 su prikazane sračunate koncentracije za sve vidove pojave cinka u celom računskom domenu. Koncentracija rastvorenog cinka je prevashodno diktirana nametnutim uzvodnim graničnim uslovom, pri čemu su vrednosti ove veličine manje u blizini obala. Takođe se konstatuje izuzetno blago smanjenje prisustva rastvorenog cinka duž toka od oko 0.0097 ppm na uzvodnom kraju do 0.0089 ppm na nizvodnom kraju. Pre nego što se pređe na analizu rezultata adsorbovanog zagađivača korisno je još jednom naglasiti da su ovde prikazane koncentracije u skladu sa merenim vrednostima i one predstavljaju masu zagađivača po jedinici mase nanosa. Dakle, prikaze (b) i (c) na slici 55 treba shvatiti kao „zagađenost” nanosa a ne kao „maseno” prisustvo transportovanog teškog metala po jedinici zapremine vode ili bilo šta slično. Konstatuje se da nakon ulaska zagađenog suspendovanog nanosa u računski domen, dolazi do blage desorpcije cinka sa zrna nanosa, usled čega se razmatrana koncentracija smanjuje sa 161 ppm na uzvodnom kraju do 156 ppm na nizvodnom kraju. Koncentracija adsorbovanog cinka u aktivnom sloju se kreće oko 500 ppm uz prisustvo umerenih prostornih varijacija, koje ne ukazuju na bilo kakvu vidljivu tendenciju. U prethodnim izlaganjima je rečeno da pored neposredne razmene između raznih vidova zagađujuće materije, koja je modelisana kinetičkim procesima prvog reda i odgovarajućim koeficijentima razmene, nanosne pojave su takođe od presudne važnosti za sagledavanje mehanizama transporta nekonzervativnog zagađivača. Ranije prikazanim proračunom nanosa je ustanovljeno da se na razmatranoj deonici javlja umereno *deponovanje* nanosa iz suspenzije. Ovaj zaključak se zasniva na tome da merene (i računate) koncentracije suspendovanog nanosa opadaju od uzvodnog ka nizvodnom kraju domena. U kontekstu proračuna transporta cinka navedena pojava znači da se zagađen suspendovani nanos deponuje i sa sobom u aktivni sloj „nosi” koncentraciju od oko 150 ppm . Međutim, kao što je to već navedeno, koncentracija adsorbovanog cinka u aktivnom sloju iznosi oko 500 ppm , pa se adsorpcijom rastvorenog zagađivača na zrna nanosa u aktivnom sloju nadoknađuje razlika koncentracije cinka između istaloženog nanosa i nanosa koji se već nalazi u aktivnom sloju. Navedeni mehanizam ponašanja zagađujuće materije ujedno daje i odgovor na pitanje gde se „troši” masa cinka koja se desorbuje sa suspendovanog nanosa i masa cinka koja ulazi u domen u vidu rastvorene materije. Opisani fenomen se jasno vidi i na rezultatima numeričke simulacije. Dakle, smanjenje koncentracije rastvorenog cinka i smanjenje koncentracije cinka adsorbovanog na suspendovani nanos duž razmatrane rečne deonice se objašnjava vezivanjem ove mase na zrna nanosa koja se deponuju iz suspenzije i postaju deo aktivnog sloja.



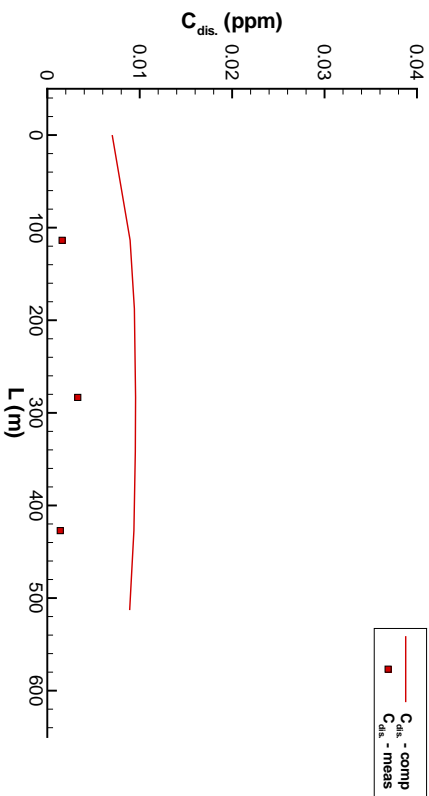
(a) Merni presjek MP3



(b) Merni presjek MP5

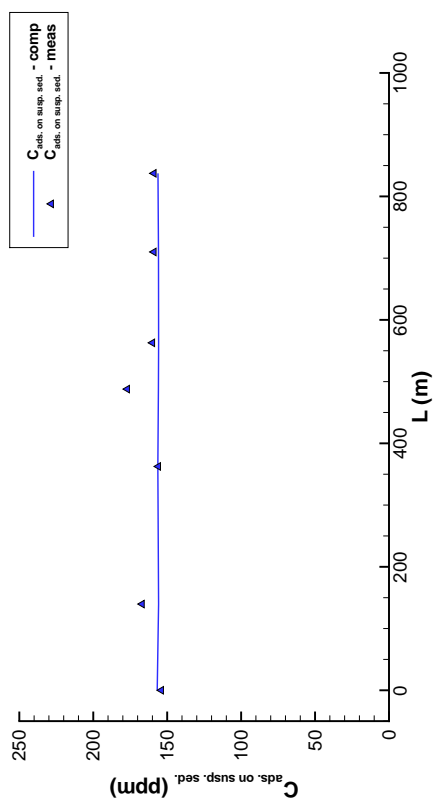


(c) Merni presjek MP6

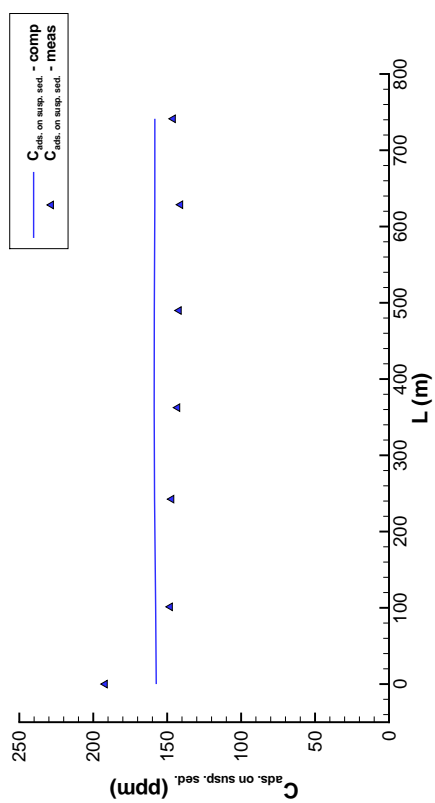


(d) Merni presjek MP7

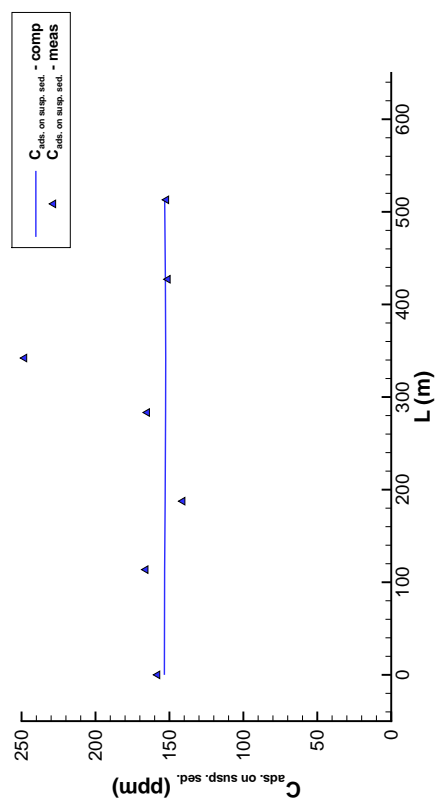
Slika 56: *Merene i računute koncentracije rastvorenog cinka u mernim presjecima 3, 5, 6 i 7*



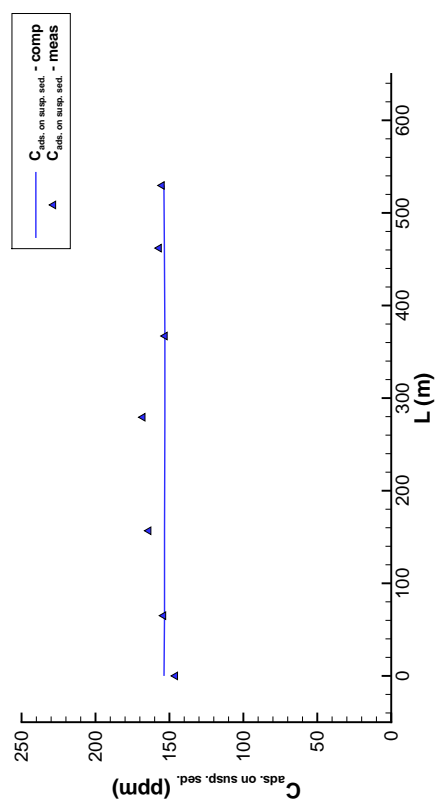
(a) Merni presek MP3



(b) Merni presek MP5

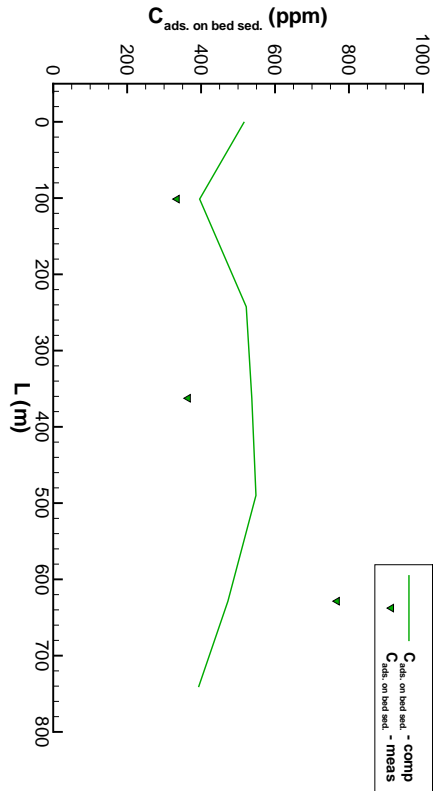


(c) Merni presek MP6

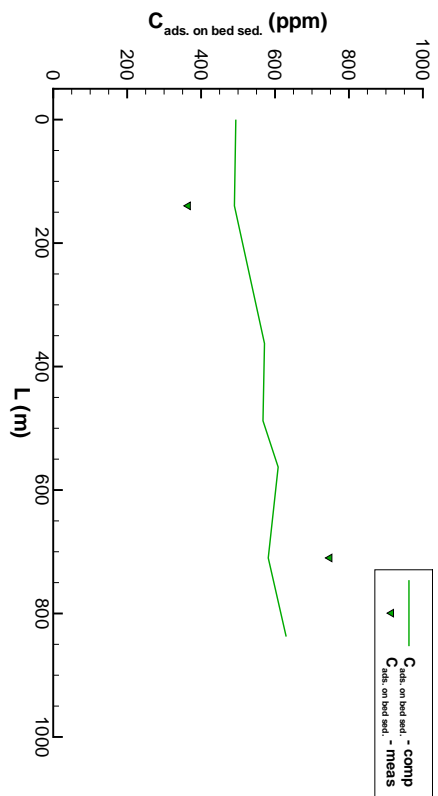


(d) Merni presek MP7

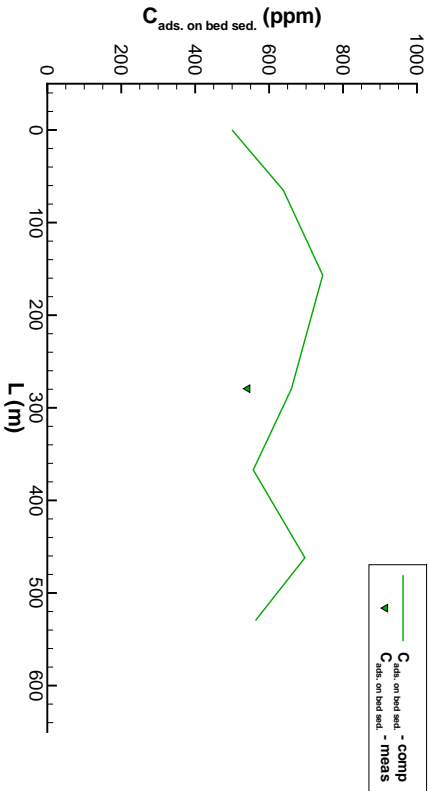
Slika 57: Merene i računate koncentracije cinka adsorbovanog na suspendovanom na mernim preseccima 3, 5, 6 i 7



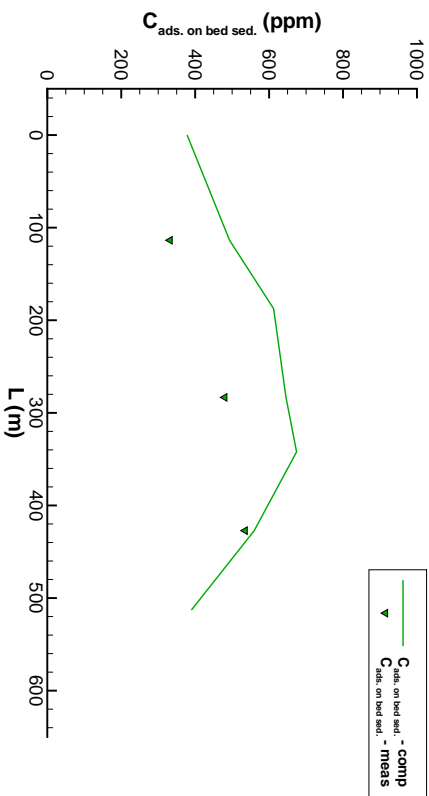
(a) Merni presek MP3



(b) Merni presek MP5



(c) Merni presek MP6



(d) Merni presek MP7

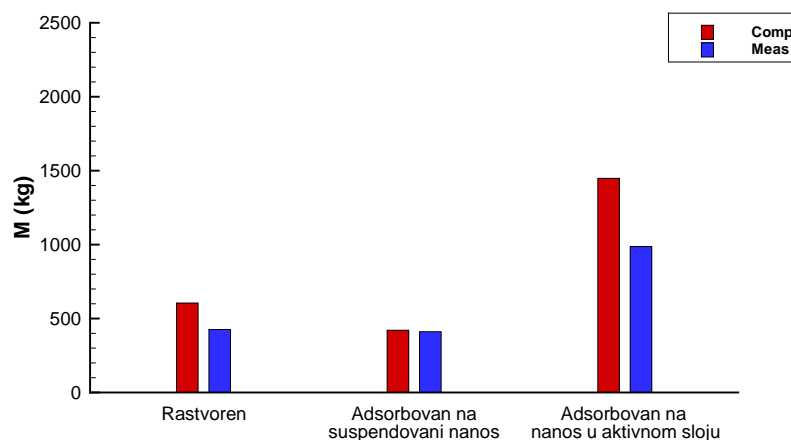
Slika 58: Merni i računata koncentracije cinka adsorbovanog na nanos aktivnog sloja u mernim presecima 3, 5, 6 i 7

Na slici 56 su prikazane merene i računate koncentracije rastvorenog cinka za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 96 u prilogu J. Osmotrene vrednosti koncentracije variraju u dijapazonu od 0.0014 *ppm* do 0.0387 *ppm*. Razlika između merenih i računatih vrednosti ove veličine se kreće u intervalu od -0.008 *ppm* do 0.029 *ppm*, dok je srednja vrednost odstupanja -0.003 *ppm*. Pre svega je bitno primetiti ekstremno velike vrednosti koncentracije blizu obala u mernim presecima 3 (slika 56) i 4 (slike 96). Treba imati u vidu da za razliku od nanosnog materijala, koji čini sastavni deo prirodnog korita, teški metali u reku dospevaju pre svega preko kanalizacionih sistema usled spiranja sa urbanih slivova ili kao nusprodukt industrije. Tako i u ovom slučaju, pošto se razmatrana deonica nalazi kraj Beograda, ekstremno velike vrednosti rastvorenog cinka u blizini oblala su najverovatnije posledica ispuštanja zagađene otpadne vode u reku. Međutim, ne računajući ove slučajeve, model daje koncentracije rastvorenog zagađivača koje su veće u odnosu na merene vrednosti. Razlog za ovakav ishod numeričke simulacije se mora tražiti u prisustvu cinka u adsorbovanoj formi i nametnutim graničnim uslovima. Naime, u nastavku će se pokazati da model sa zadovoljavajućom tačnošću reprodukuje merene vrednosti zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos i nanos u aktivnom sloju. Ako se na ovu „najavu” doda činjenica da je greška jednačine održanja mase zanemarljiva, kao što je to ranije navedeno, onda se dolazi do zaključka da su veće sračunate vrednosti u odnosu na merene posledica nametnutog uzvodnog graničnog uslova. Potseća se da uzvodni granični uslov za koncentraciju rastvorenog cinka nije meren kontinualno tokom kampanje skupljanja terenskih podataka, pa je moguće da se vrednost ove veličine menjala tokom razmatranog perioda što presudno utiče na njenu vrednost unutar računskog domena.

Na slici 57 su prikazane merene i računate koncentracije cinka adsorbovanog na suspendovani nanos za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 97 u prilogu J. Osmotrene vrednosti koncentracije variraju u dijapazonu od 139 *ppm* do 248 *ppm*. Razlika između merenih i računatih vrednosti ove veličine se kreće u intervalu od -18.2 *ppm* do 95.5 *ppm*, dok je srednja vrednost odstupanja 0.43 *ppm*. Poređenjem sračunatih i izmerenih vrednosti se zaključuje da je model sa zadovoljavajućom tačnošću reprodukovao osmotreno stanje na terenu. Takođe se konstatuje da merene vrednosti imaju prilično uravnotežen raspored po gotovo svim poprečnim presecima. Ova tendencija je dobijena i numeričkom simulacijom, što ukazuje na sposobnost modela da verno predvidi ponašanje zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa u prirodnom vodotoku. Bitno je primetiti merni presek 7, gde se uočava merena vrednost koncentracije cinka koja znatno odudara od susednih vrednosti, a koju model nije mogao reprodukovati. Pošto se za pomenutu anomaliju ne može naći fizičko opravdanje, pretpostavlja se da se radi o grešci merenja ili o postojanju uzroka koji se merenjima nije mogao nedvosmisleno identifikovati.

Konačno se razmatra i poslednji vid pojave transportovane materije u razmatranoj rečnoj deonici. Na slici 58 su prikazane merene i računate koncentracije cinka adsorbovanog na nanos u aktivnom sloju za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 98 u prilogu J. Osmotrene vrednosti koncentracije variraju u dijapazonu od 295 *ppm* do 802 *ppm*. Razlika između merenih i računatih vrednosti ove veličine se kreće u intervalu od -217 *ppm* do 295 *ppm*, dok je srednja vrednost odstupanja 7.5 *ppm*. Konstatuje se da razvijen matematički model daje koncentracije koje odgovaraju redu veličine osmotrenih vrednosti. U mernim presecima 5 i 7 (slika 58), kao i u mernim presecima 1 i 2 (slika 98) numerički rezultati imaju tendenciju koja se podudara sa terenskim merenjima. Poslednja konstatacija nagoveštava sposobnost modela da verno predvidi ponašanje zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa aktivnog

sloja u prirodnom vodotoku. Jedina lokacija gde je sračunata tendencija jednoznačno suprotna od osmotrene je merni presek 4.



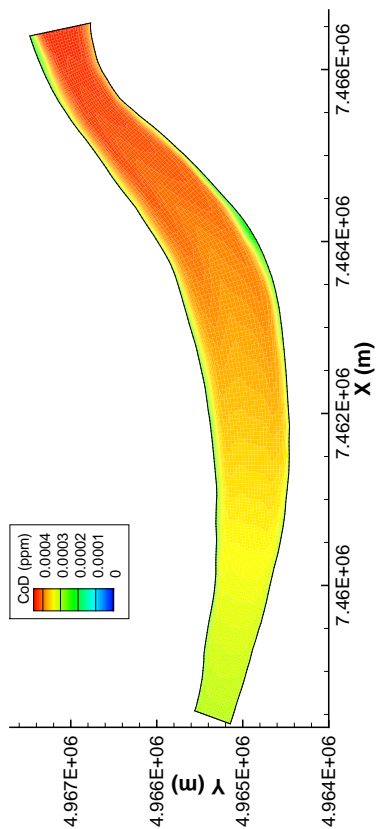
Slika 59: Bilans mase cinka u računskom domenu

Na kraju analize rezultata simulacije transporta cinka učiniće se dodatni napor radi sticanja boljeg uvida u zatečeno stanje, odnosno u sposobnost modela da reprodukuje osmotrene tendencije. Na slici 59 je prikazan bilans mase cinka u računskom domenu na osnovu kojeg se konstatuje da su proračunom dobijene vrednosti bliske terenskim merenjima. Model predviđa nešto veće prisustvo mase cinka u domenu, međutim raspodela te mase je veoma slična osmotrenim vrednostima. Naime, obradom terenskih podataka je konstatovano da se od ukupne mase razmatranog teškog metala 23% nalazi u rastvorenom obliku, 23% je adsorbovano na suspendovani nanos, a 54% je adsorbovano na nanos u aktivnom sloju. Rezultati numeričke simulacije predviđaju da je 24% mase u rastvorenom obliku, 18% mase je adsorbovano na suspendovani nanos, a 58% mase je adsorbovano na nanos u aktivnom sloju. Bitno je napomenuti da se ovde prikazane količine moraju shvatiti kao gruba procena, imajući u vidu raspoloživost merenih podataka.

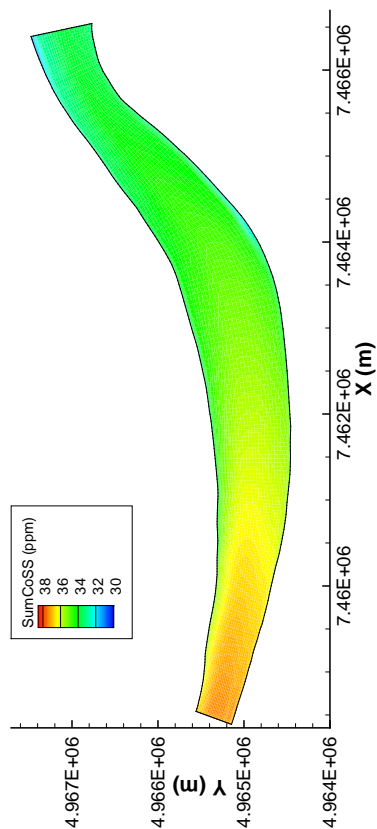
Prelazi se na simulaciju transporta *olova*, kao drugog od ukupno tri teška metala čije je prisustvo mereno tokom kampanje sakupljanja terenskih podataka. Svi principi koji se odnose na formiranje početnih uslova simulacije su identični kao ranije, pa se ovde neće ponavljati. Zbog dostupnosti merenih podataka granični uslovi za proračun transporta zagađivača su nametnuti kao konstante tokom vremena. U tabeli 25 su navedene vrednosti koje su zadavane u svim računskim tačkama uzvodne granice razmatranog domena. Formulisan numerički model ne zahteva nizvodne granične uslove za proračun zagađivača. Računski korak po vremenu je iznosio 90 s.

Koncentracija rastvorenog zagađivača \tilde{C}^{\ddagger} (-)	Granulometrijski interval k_s	Koncentracija zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos $\tilde{C}_{k_s}^{\ddagger}$ (-)	Koncentracija zagađivača adsorbovanog na nanos u aktivnom sloju $\beta_{k_s}^{\ddagger}$ (-)
$3.0 \cdot 10^{-10}$	1	$3.68 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$
	2	$3.68 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$
	3	$3.68 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$
	4	$3.68 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$
	5	$3.68 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-4}$

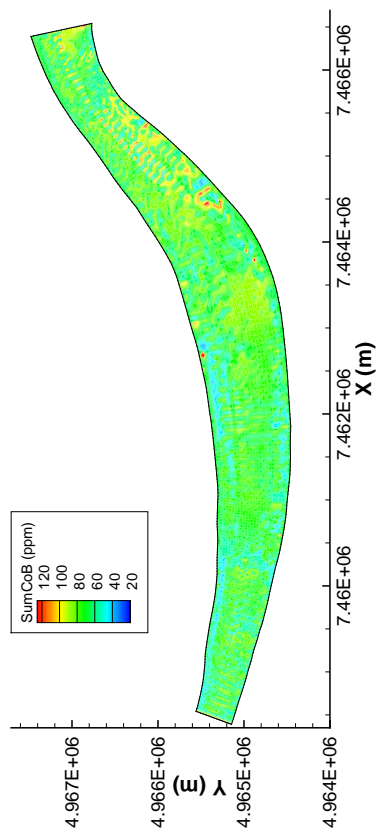
Tabela 25: Granični uslovi proračuna zagađivača - olovo



(a) Koncentracija rastvorenog olova



(b) Koncentracija olova adsorbovanog na suspendovani nanos



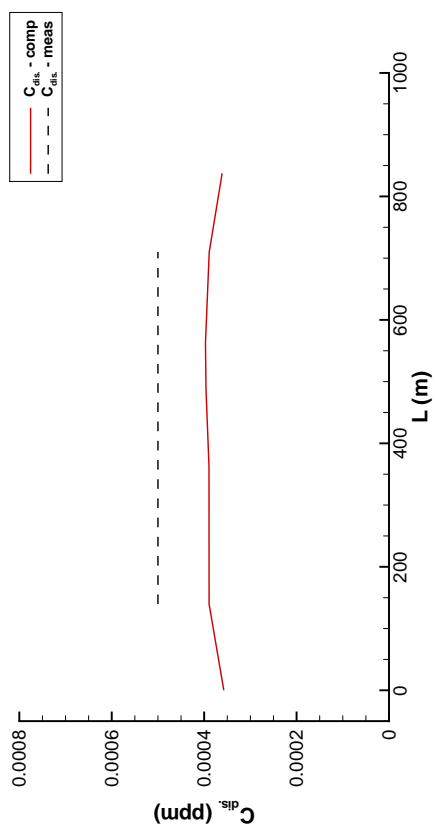
(c) Koncentracija olova adsorbovanog na nanos aktivnog sloja

Slika 60: Sračunate koncentracije olova

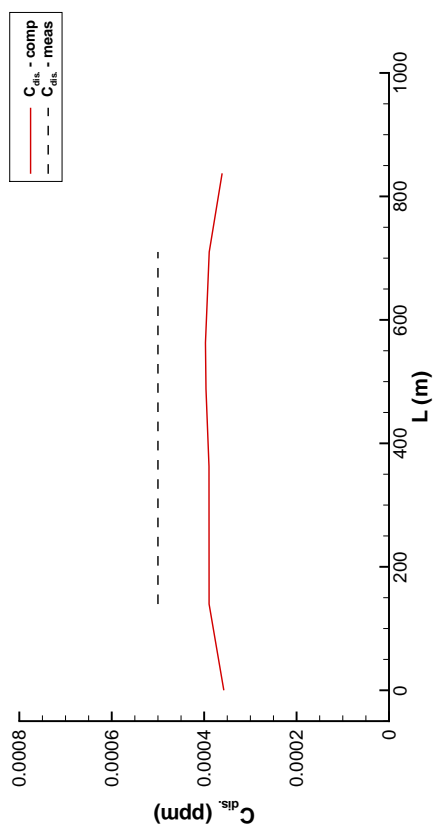
Primarni mehanizam kalibracije transporta zagađivača se i ovde svodi na zadavanje parametara $\chi_{k_s}^{ss}$ i $\chi_{k_s}^{bs}$, koji se redom javljaju u jednačinama za određivanje kinetičkog koeficijenta procesa adsorpcije na zrna suspendovanog nanosa, odnosno na zrna nanosa u aktivnom sloju (poglavlje 4.4.). Kao parametar kalibracije je takođe poslužio i kinetički koeficijent procesa desorpcije sa zrna nanosa. Tokom numeričkih simulacija je proveravana kumulativna relativna greška jednačine održanja mase celog računskog domena za sve granulometrijske intervale nanosne mešavine. U slučaju rastvorenog zagađivača relativna greška je bila reda veličine $-3.3 \cdot 10^{-4}\%$. Sa druge strane, u slučaju zagađivača adsorbovanog na zrna aktivnih frakcija suspendovanog nanosa, najveća relativna greška je iznosila približno $-1.7 \cdot 10^{-3}\%$ (za 5. frakciju), dok zbir relativnih grešaka po svim frakcijama nije prevazilazio $-2.4 \cdot 10^{-3}\%$. I konačno, u slučaju zagađivača vezanog na zrna nanosa aktivnih frakcija u aktivnom sloju, najveća relativna greška se kretala oko $-9.3 \cdot 10^{-17}\%$ (za 5. frakciju), dok je zbir relativnih grešaka po svim frakcijama ostao ispod vrednosti od $-6.4 \cdot 10^{-17}\%$.

Na slici 60 su prikazane sračunate koncentracije svih vidova pojave olova u celom računskom domenu. Za razliku od prethodno razmatranog teškog metala, koncentracija rastvorenog olova *nije* prevashodno diktirana nametnutim uzvodnim graničnim uslovom. Konstatuje se povećanje prisustva rastvorenog olova duž toka od oko 0.00031 ppm na uzvodnom kraju do 0.00041 ppm na nizvodnom kraju, uz blago smanjenje u blizini obala. Kao i ranije, koncentracije adsorbovanog zagađivača na prikazima (b) i (c) slike 60 treba shvatiti kao „zagađenost” nanosa a ne kao „maseno” prisustvo transportovanog teškog metala po jedinici zapremine vode ili bilo šta slično. Analizom prikazanih rezultata se konstatuje da nakon ulaska zagađenog suspendovanog nanosa u računski domen, dolazi do desorpcije olova sa zrna nanosa, usled čega se razmatrana koncentracija smanjuje sa 37 ppm na uzvodnom kraju do 32 ppm na nizvodnom kraju. Koncentracija adsorbovanog olova u aktivnom sloju se kreće oko 80 ppm uz prisustvo umerenih prostornih varijacija, bez bilo kakve vidljive tendencije. Pošto prisustvo zagađujuće materije nema nikakav uticaj na tečenje i nanosne procese, isto kao u slučaju transporta cinka, i ovde se konstatuje umereno *deponovanje* nanosa iz suspenzije. U kontekstu proračuna transporta olova navedena pojava znači da se zagađen suspendovani nanos deponuje i sa sobom u aktivni sloj „nosi” koncentraciju od oko 35 ppm. Međutim, kao što je to već navedeno, koncentracija adsorbovanog olova u aktivnom sloju iznosi oko 80 ppm, pa se adsorpcijom rastvorenog zagađivača na zrna nanosa u aktivnom sloju nadoknađuje razlika koncentracije olova između istaloženog nanosa i nanosa koji se već nalazi u aktivnom sloju. Navedeni mehanizam ponašanja zagađujuće materije ujedno daje i odgovor na pitanje gde se „troši” deo mase olova koja se desorbuje sa suspendovanog nanosa i deo mase olova koja ulazi u domen u rastvorenom obliku. Međutim, količina mase olova koja se desorbuje sa suspendovanog nanosa je više nego dovoljna za „pokrivanje” procesa adsorpcije na zrna istaloženog nanosa u aktivnom sloju, pa višak ostaje u rastvoru. Opisani fenomen se vidi i na prikazanim rezultatima. Dakle, povećanje koncentracije rastvorenog olova duž deonice se objašnjava „viškom” mase koja se desorbuje sa suspendovanog nanosa a ne adsorbuje na zrna nanosa koja se iz suspenzije talože u aktivni sloj.

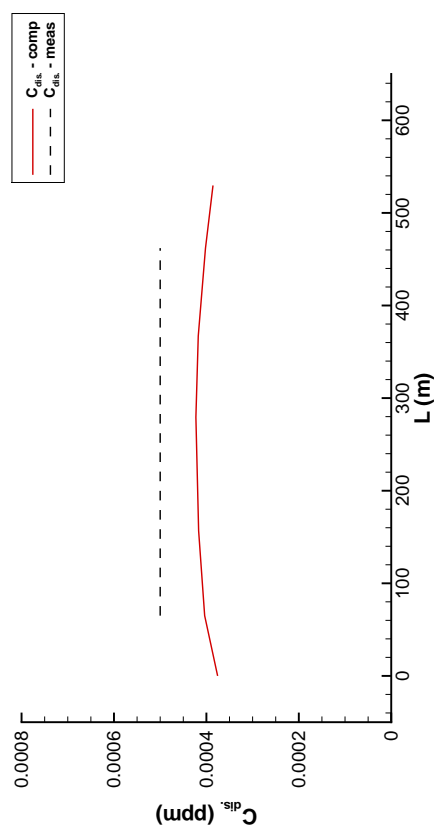
Na slici 61 su prikazane merene i računute koncentracije rastvorenog olova za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 99 u prilogu J. Laboratorijske analize sakupljenih uzoraka su kao rezultat dale vrednosti koncentracije *manje* od 0.0005 ppm, bez mogućnosti određivanja tačne vrednosti. Ovo je na slikama obeleženo isprekidanim linijama i ovu vrednost treba shvatiti kao *maksimalnu moguću*. Konstatuje se da su sve sračunate koncentracije ostale ispod ustanovljenog maksimuma uz tendenciju povećavanja duž domena, koja je objašnjena u ranijem izlaganju.



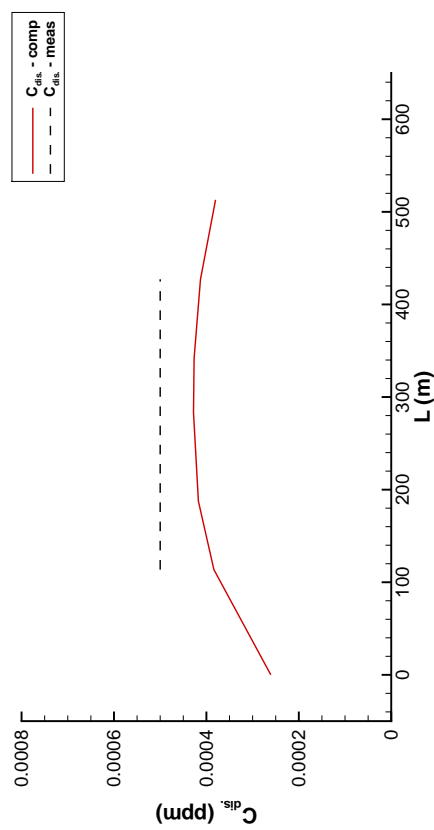
(a) Merni presek MP3



(b) Merni presek MP5

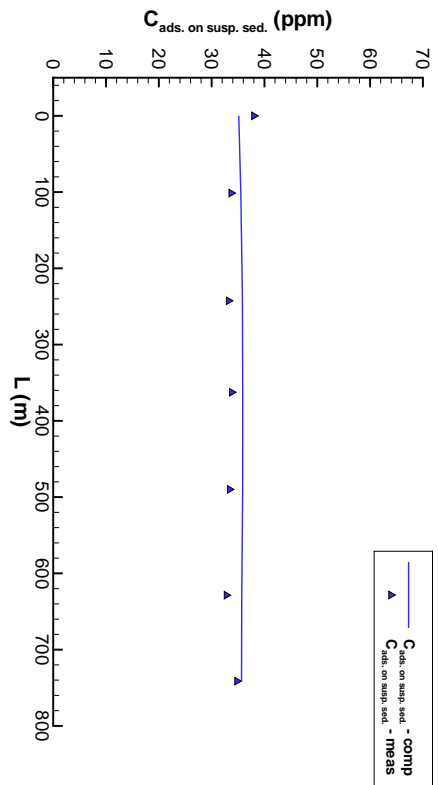


(c) Merni presek MP6

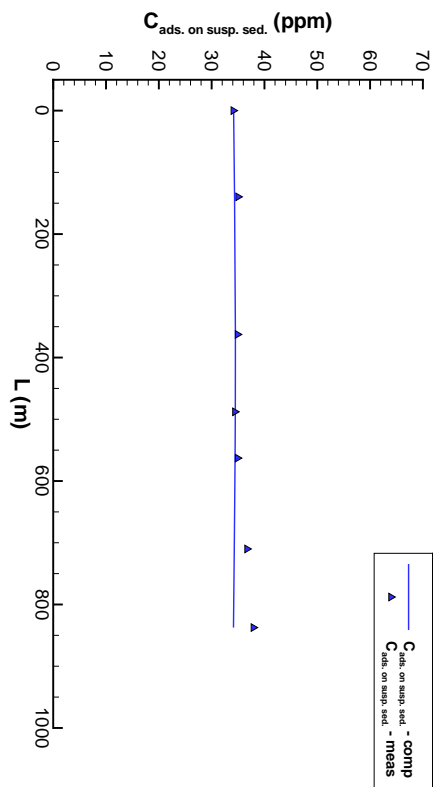


(d) Merni presek MP7

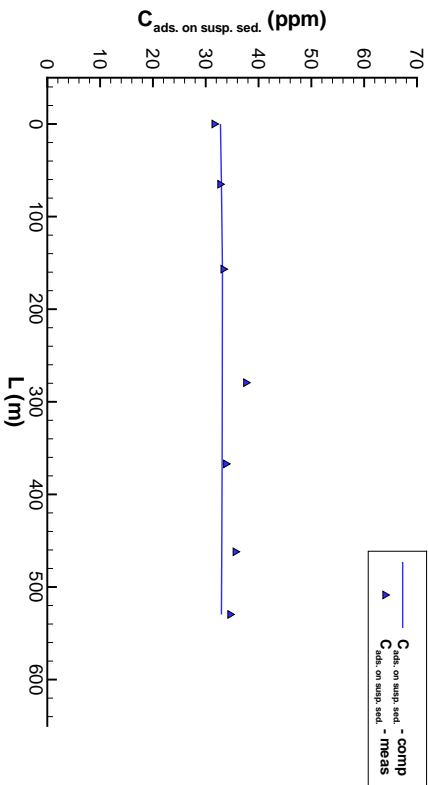
Slika 61: Merene i računate koncentracije rastvorenog olova u mernim presecima 3, 5, 6 i 7



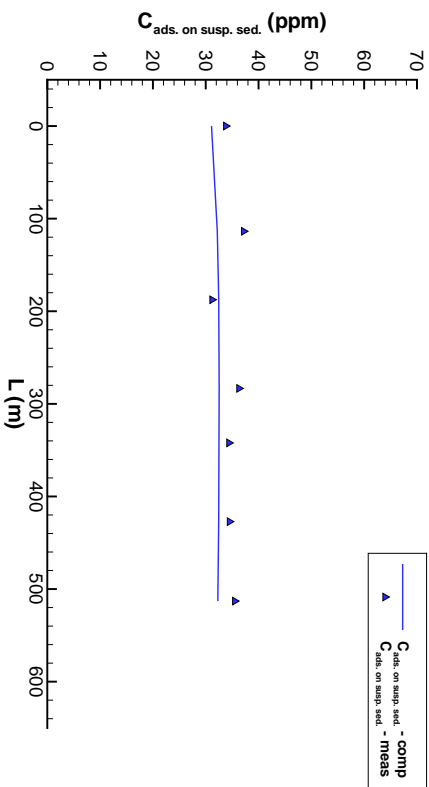
(a) Merni presek MP3



(b) Merni presek MP5

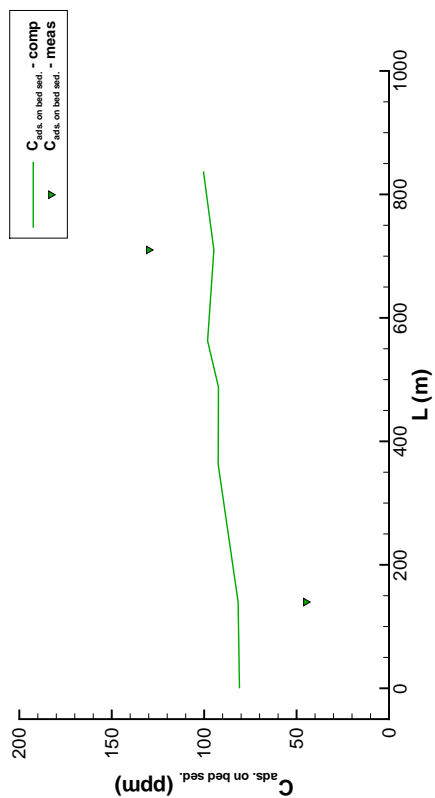


(c) Merni presek MP6

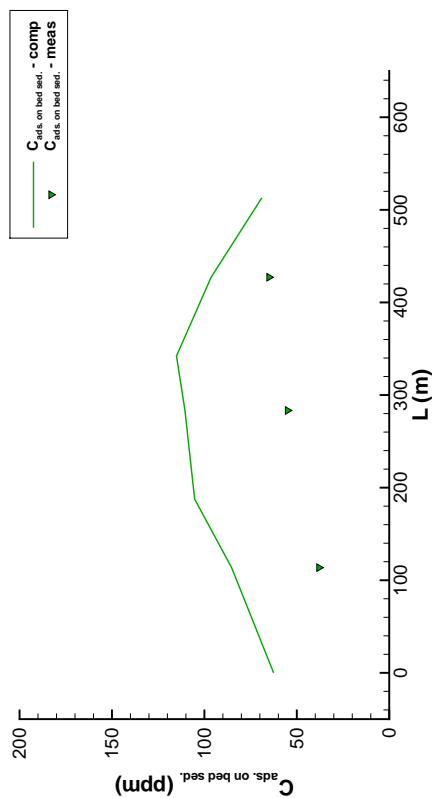


(d) Merni presek MP7

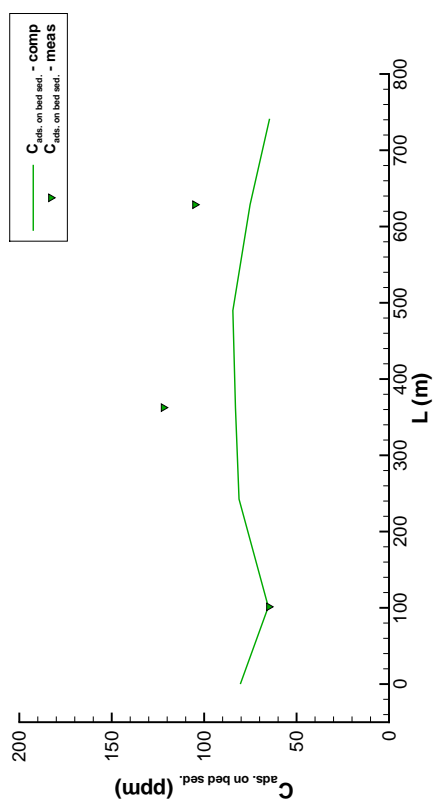
Slika 62: Merenje i računate koncentracije olova adsorbovanog na suspendovani nanos u mernim presecima 3, 5, 6 i 7



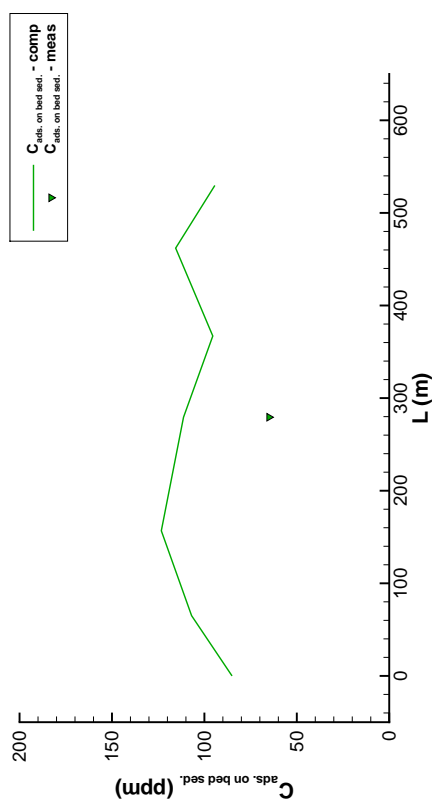
(a) Merni presek MP3



(b) Merni presek MP5



(c) Merni presek MP6

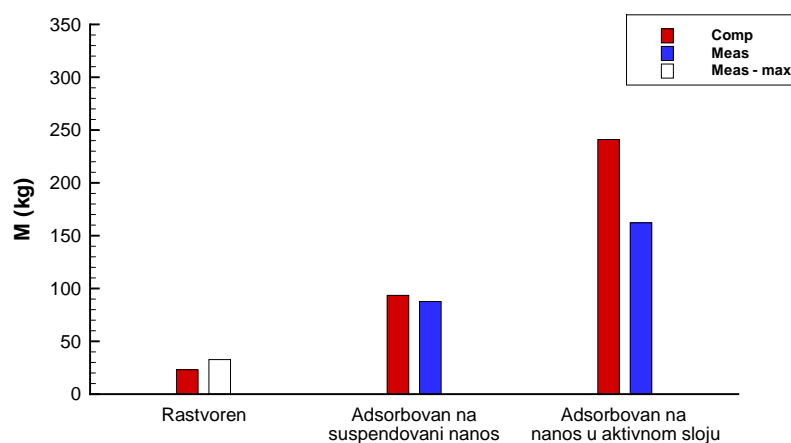


(d) Merni presek MP7

Slika 63: Merene i računate koncentracije olova adsorbovanog na nanos aktivnog sloja u mernim presjecima 3, 5, 6 i 7

Na slici 62 su prikazane merene i računane koncentracije olova adsorbovanog na suspendovani nanos za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 100 u prilogu J. Osmotrene vrednosti koncentracije variraju u dijapazonu od 31.2 ppm do 41 ppm. Razlika između merenih i računatih vrednosti ove veličine se kreće u intervalu od -3.6 ppm do 5.0 ppm, dok je srednja vrednost odstupanja 0.14 ppm. Poređenjem sračunatih i izmerenih vrednosti se zaključuje da je model sa zadovoljavajućom tačnošću reprodukovao osmotreno stanje na terenu. Merene vrednosti imaju prilično uravnotežen raspored po gotovo svim poprečnim presecima uz jasno izraženu tendenciju opadanja duž razmatrane rečne deonice (od mernog preseka 1 ka mernom preseku 7). Ove pojave su dobijene i numeričkom simulacijom što iznova ukazuje na sposobnost modela da verno reprodukuje ponašanje zagađivača adsorbovanog na zrna suspendovanog nanosa u prirodnom vodotoku. Jedina lokacija gde rezultati simulacije daju nešto veće vrednosti od izmerenih je merni presek 4 (slika 100).

Konačno se razmatra i poslednji vid pojave transportovane materije u razmatranoj rečnoj deonici. Na slici 63 su prikazane merene i računane koncentracije olova adsorbovanog na nanos u aktivnom sloju za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 101 u prilogu J. Osmotrene vrednosti koncentracije variraju u dijapazonu od 38 ppm do 148 ppm. Razlika između merenih i računatih vrednosti ove veličine se kreće u intervalu od -55.5 ppm do 91.1 ppm, dok je srednja vrednost odstupanja 3.7 ppm. Analizom prikazanih rezultata se zaključuje da razvijen matematički model daje koncentracije koje odgovaraju redu veličine osmotrenih vrednosti. U mernim presecima 3 i 5 (slika 63), kao i u mernom preseku 2 (slika 101) numerički rezultati imaju tendenciju koja se podudara sa terenskim merenjima. Poslednja konstatacija, i u ovom slučaju, nagoveštava sposobnost modela da verno predvidi ponašanje zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa aktivnog sloja u prirodnom vodotoku. Jedina lokacija gde je sračunata tendencija jednoznačno suprotna od osmotrene je merni presek 4.



Slika 64: Bilans mase olova u računskom domenu

Na kraju sprovedene analize transporta olova sledi dodatni osvrt na simulirane i merene vrednosti radi sticanja boljeg uvida u zatečeno stanje, odnosno u sposobnost modela da reprodukuje osmotrene tendencije. Na slici 64 je prikazan bilans mase olova u računskom domenu na osnovu kojeg se konstatuje da su proračunom dobijene vrednosti bliske terenskim merenjima. Model predviđa nešto veće prisustvo mase olova u domenu, međutim raspodela te mase je veoma slična osmotrenim vrednostima. Napominje se da u ovom slučaju laboratorijske analize prikupljenih uzoraka za rastvoreni zagađivač nisu

bile u mogućnosti da daju tačne vrednosti, pa na prikazanom bilansu merena vrednost rastvorenog olova zapravo predstavlja njenu *potencijalno maksimalnu* vrednost. Rezultati numeričke simulacije predviđaju da je 7% mase u rastvorenom obliku, 26% mase je adsorbovano na suspendovani nanos, a 67% mase je adsorbovano na nanos u aktivnom sloju. Ovde se ne daje procentualo učešće nabrojanih vidova pojave zagađivača na osnovu terenskih merenja, jer ne postoje tačne merene vrednosti za olovo u rastvorenom obliku nego samo njena potencijalno maksimalna vrednost.

Na samom kraju se prelazi na simulaciju transporta *žive*, kao poslednjeg od ukupno tri teška metala čije je prisustvo mereno tokom kampanje sakupljanja terenskih podataka. Svi principi koji se odnose na formiranje početnih uslova simulacije su identični kao ranije, pa se ovde neće ponavljati. Zbog dostupnosti merenih podataka granični uslovi za proračun transporta zagađivača su nametnuti kao konstante tokom vremena. U tabeli 26 su navedene vrednosti koje su zadavane u svim računskim tačkama uzvodne granice razmatranog domena. Iz identičnih razloga kao i ranije, formulisan numerički model ne zahteva nizvodne granične uslove za proračun zagađivača. Računski korak po vremenu je iznosio 90 s.

Koncentracija rastvorenog zagađivača \tilde{C}^{\dagger} (-)	Granulometrijski interval k_s	Koncentracija zagađivača adsorbovanog na suspendovani nanos $\tilde{C}_{k_s}^{\ddagger}$ (-)	Koncentracija zagađivača adsorbovanog na nanos u aktivnom sloju $\beta_{k_s}^{\ddagger}$ (-)
$7.0 \cdot 10^{-11}$	1	$2.09 \cdot 10^{-7}$	$2.50 \cdot 10^{-7}$
	2	$2.09 \cdot 10^{-7}$	$2.50 \cdot 10^{-7}$
	3	$2.09 \cdot 10^{-7}$	$2.50 \cdot 10^{-7}$
	4	$2.09 \cdot 10^{-7}$	$2.50 \cdot 10^{-7}$
	5	$2.09 \cdot 10^{-7}$	$2.50 \cdot 10^{-7}$

Tabela 26: Granični uslovi proračuna zagađivača - živa

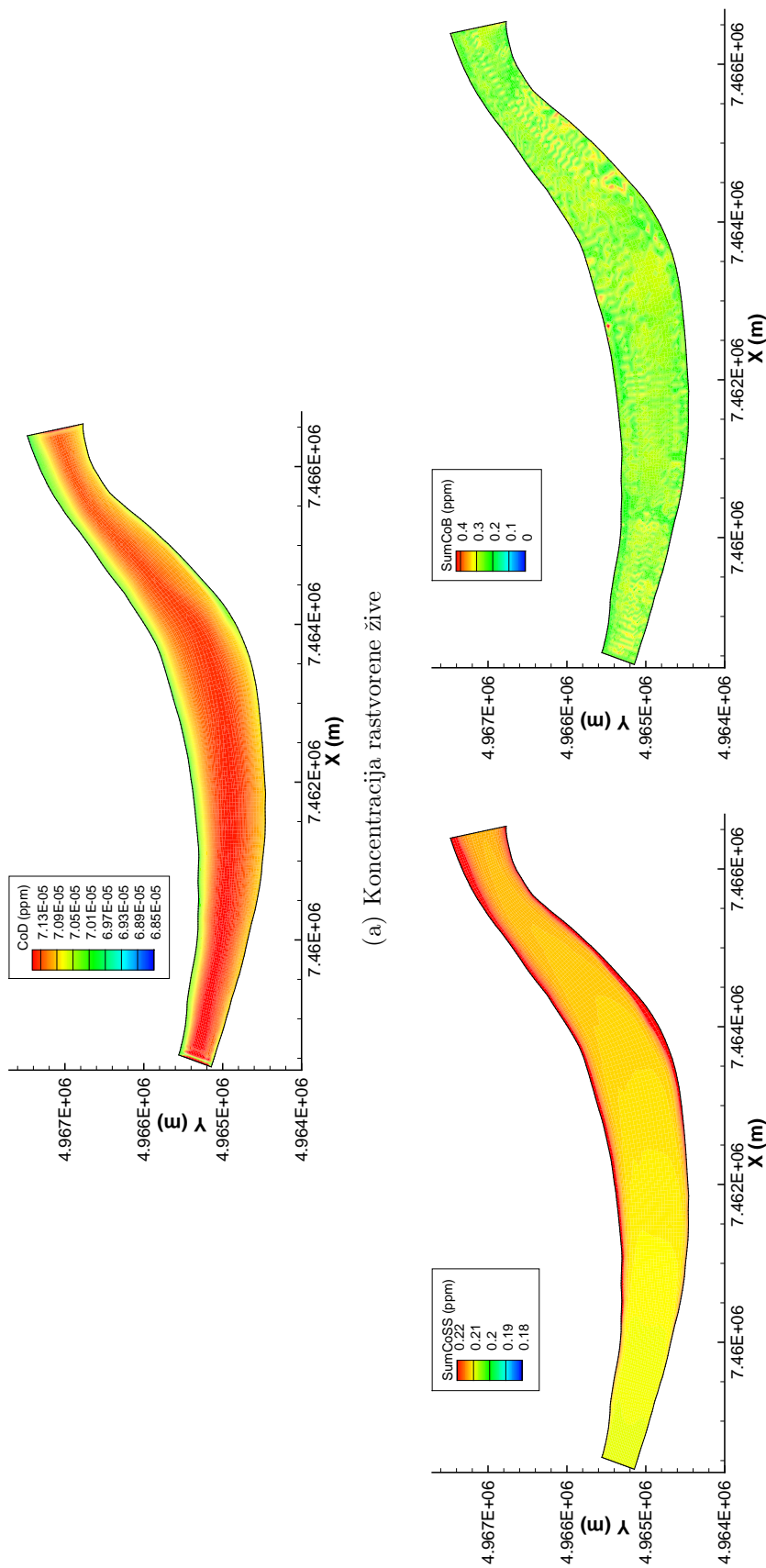
Slično kao u slučaju prva dva teška metala i ovde se primarni mehanizam kalibracije transporta zagađivača svodi na zadavanje parametara $\chi_{k_s}^{ss}$ i $\chi_{k_s}^{bs}$, koji se redom javljaju u jednačinama za određivanje kinetičkog koeficijenta procesa adsorpcije na zrna suspendovanog nanosa, odnosno na zrna nanosa u aktivnom sloju (poglavlje 4.4.). Kao parametar kalibracije je takođe poslužio i kinetički koeficijent procesa desorpcije sa zrna nanosa. Tokom numeričkih simulacija je proveravana kumulativna relativna greška jedinačine održanja mase celog računskog domena za sve granulometrijske intervale nanosne mešavine. U slučaju rastvorenog zagađivača relativna greška je bila reda veličine $-1.4 \cdot 10^{-4}\%$. Sa druge strane, u slučaju zagađivača adsorbovanog na zrna aktivnih frakcija suspendovanog nanosa, najveća relativna greška je iznosila približno $-1.0 \cdot 10^{-3}\%$ (za 5. frakciju), dok zbir relativnih grešaka po svim frakcijama nije prevazilazio $-2.1 \cdot 10^{-3}\%$. I konačno, u slučaju zagađivača vezanog na zrna nanosa aktivnih frakcija u aktivnom sloju, najveća relativna greška se kretala oko $-9.9 \cdot 10^{-17}\%$ (za 5. frakciju), dok je zbir relativnih grešaka po svim frakcijama ostao ispod vrednosti od $-1.1 \cdot 10^{-16}\%$.

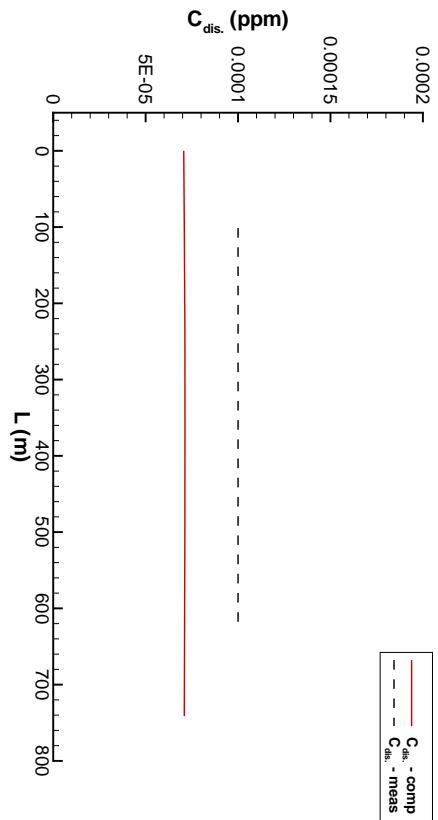
Na slici 65 su prikazane sračunate koncentracije svih vidova pojave žive u celom računskom domenu. Na samom početku se može konstatovati da su dobijene tendencije ponašanja različite od prethodna dva teška metala. Ovo predstavlja dodatnu priliku da se razvijeni numerički model testira na još jednom od mogućih situacija transporta zagađivača u prirodnim vodotocima. Koncentracija rastvorene žive je prevashodno diktirana nametnutim uzvodnim graničnim uslovom, pri čemu su vrednosti ove veličine manje u blizini obala. Takođe se konstatuje izuzetno blago smanjenje prisustva rastvorenog cinka duž rečnog toka od oko $7.1 \cdot 10^{-5}$ ppm na uzvodnom kraju do $7.05 \cdot 10^{-5}$ ppm na nizvod-

nom kraju. Potpuno analogno kao u slučaju prva dva teška metala i ovde koncentracije adsorbovanog zagađivača na prikazima (b) i (c) slike 65 treba shvatiti kao „zagađenost” nanosa a ne kao „maseno” prisustvo transportovanog teškog metala po jedinici zapremine vode ili bilo šta slično. Analizom prikazanih rezultata se konstatuje da nakon ulaska zagađenog suspendovanog nanosa u računski domen, dolazi do veoma blage adsorpcije žive sa zrna nanosa, usled čega se razmatrana koncentracija povećava sa 0.21 ppm na uzvodnom kraju do 0.22 ppm na nizvodnom kraju. Koncentracija adsorbovane žive u aktivnom sloju se kreće oko 0.27 ppm uz prisustvo umerenih prostornih varijacija, bez bilo kakve vidljive tendencije što je u skladu sa ponašanjem prva dva razmatrana teška metala. U teorijskom izlaganju je naglašeno da prisustvo zagađujuće materije nema nikakav uticaj na tečenje i nanosne procese, pa se i ovde konstatuje umereno *deponovanje* nanosa iz suspenzije. Imajući u vidu proračun transporta žive, navedena pojava znači da se zagađen suspendovani nanos deponuje i sa sobom u aktivni sloj „nosi” koncentraciju od oko 0.22 ppm . Međutim, kao što je već navedeno, koncentracija adsorbovane žive u aktivnom sloju iznosi oko 0.27 ppm , pa se adsorpcijom rastvorenog zagađivača na zrna nanosa u aktivnom sloju nadoknađuje razlika koncentracije žive između istaloženog nanosa i nanosa koji se već nalazi u aktivnom sloju. Navedeni mehanizam ponašanja zagađujuće materije ujedno daje i odgovor na pitanje gde se „troši” deo mase žive koja ulazi u domen u rastvorenom obliku. Međutim, razlika „zagađenosti” između suspendovanog nanosa koji se taloži i nanosa koji čini aktivni sloj je prilično mala, pa je količina rastvorene mase koja se „troši” na ovaj proces takođe mala. Ovo ostavlja mogućnost da se deo rastvorene žive adsorpcijom vezuje za zrna suspendovanog nanosa, kao što se to može videti na prikazanim rezultatima. Dakle, povećanje „zagađenosti” suspendovanog nanosa duž rečne deonice se objašnjava „viškom” rastvorene materije koja se ne adsorbuje na zrna nanosa koja čine aktivni sloj. Na kraju se mora naglasiti da opisane tendencije, iako nesumnjivo postoje, nisu izražene, pa se može se reći da u razmatranom rečnom domenu vlada gotovo ravnotežno stanje transporta žive.

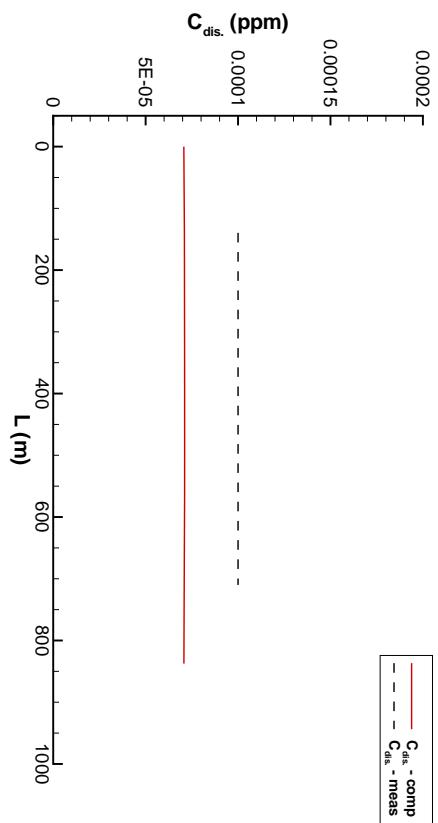
Na slici 66 su prikazane merene i računute koncentracije rastvorene žive za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 102 u prilogu J. Laboratorijske analize sakupljenih uzoraka su kao rezultat dale vrednosti koncentracije *manje* od 0.0001 ppm , bez mogućnosti određivanja tačne vrednosti. Ovo je na slikama obeleženo isprekidanim linijama i ovu vrednost treba shvatiti kao *maksimalnu moguću*. Konstatuje se da su sve sračunate koncentracije ostale ispod ustanovljenog maksimuma uz tendenciju izuzetno blagog smanjivanja duž domena. Mehanizmi i razlozi koji stoje iza ove pojave su oblaštnjeni u prethodnom izlaganju, pa nema potrebe za njihovim ponavljanjem.

Na slici 67 su prikazane merene i računute koncentracije žive adsorbovane na suspendovani nanos za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 103 u prilogu J. Osmotrene vrednosti koncentracije variraju u dijapazonu od 0.17 ppm do 0.23 ppm . Razlika između merenih i računatih vrednosti ove veličine se kreće u intervalu od -0.043 ppm do 0.021 ppm , dok je srednja vrednost odstupanja -0.017 ppm . Merene vrednosti imaju relativno uravnotežen raspored po gotovo svim poprečnim presecima. Poređenjem sračunatih i izmerenih vrednosti se zaključuje da je model sa zadovoljavajućom tačnošću reprodukovao osmotreno stanje na terenu. Jedina lokacija gde rezultati simulacije daju nešto veće vrednosti od izmerenih je merni presek 2 (slika 103) i merni presek 3 (slika 67). Međutim, merene vrednosti koncentracija žive adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa načelno potvrđuju, iako ne uniformnu, tendenciju povećavanja duž razmatrane deonice. Konstatovana pojava je uočljiva i u rezultatima numeričke simulacije.

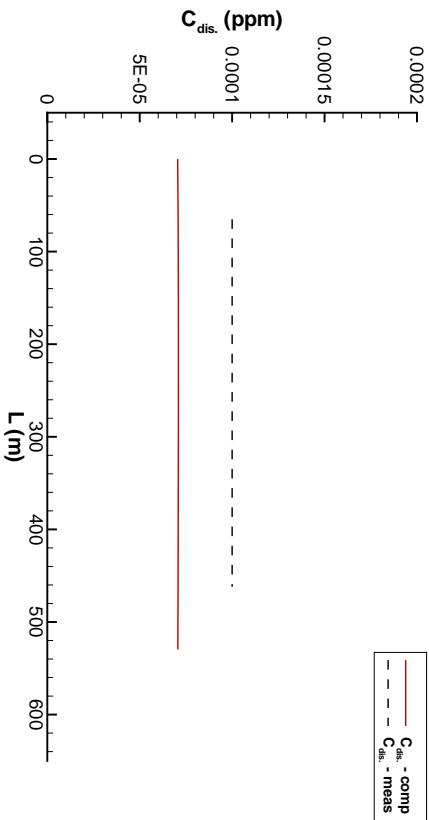




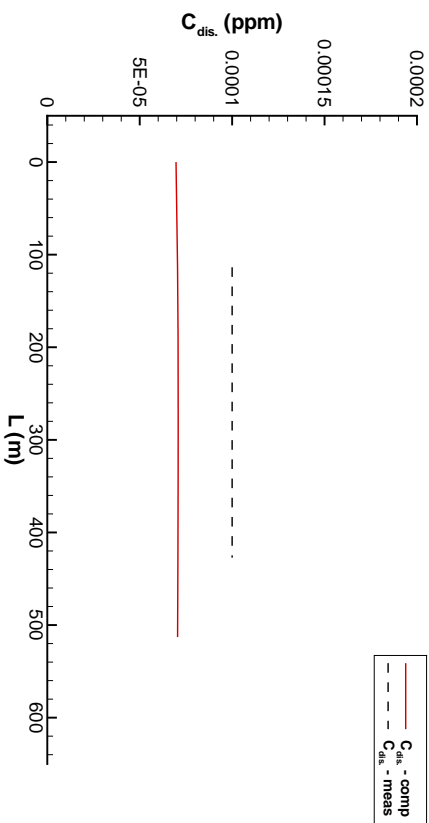
(a) Merni presek MP3



(b) Merni presek MP5

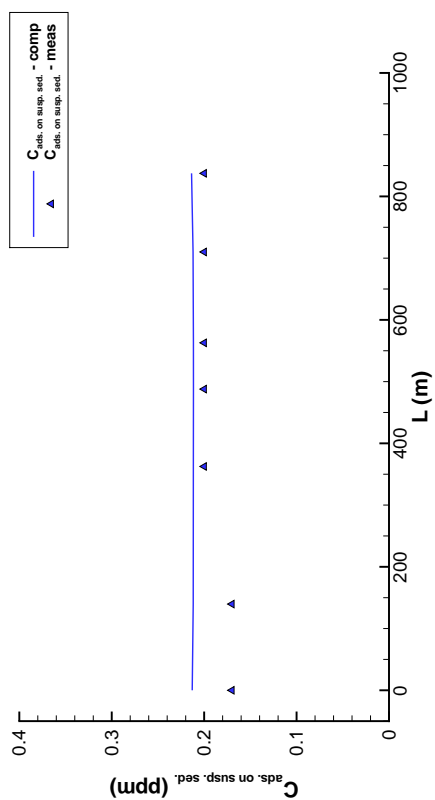


(c) Merni presek MP6

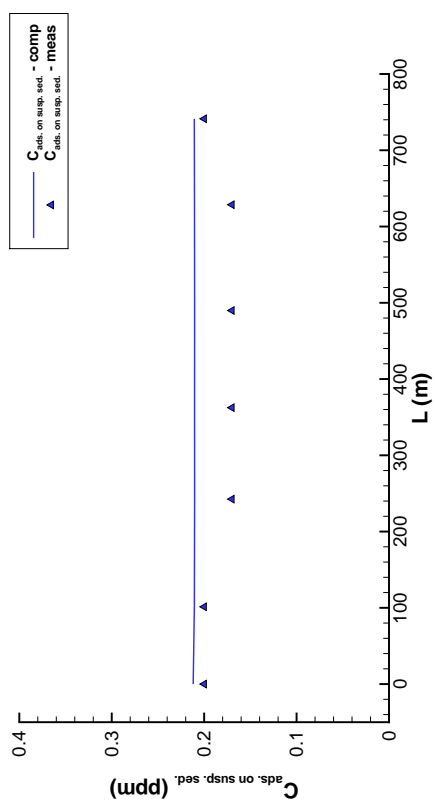


(d) Merni presek MP7

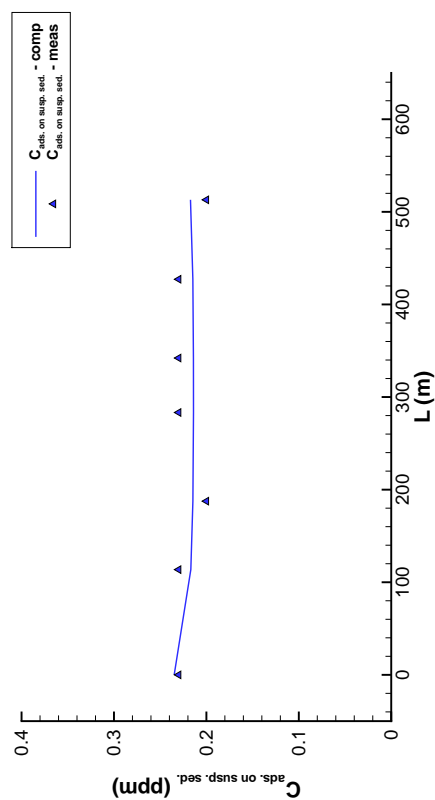
Slika 66: Merene i računute koncentracije rastvorene žive u mernim presjecima 3, 5, 6 i 7



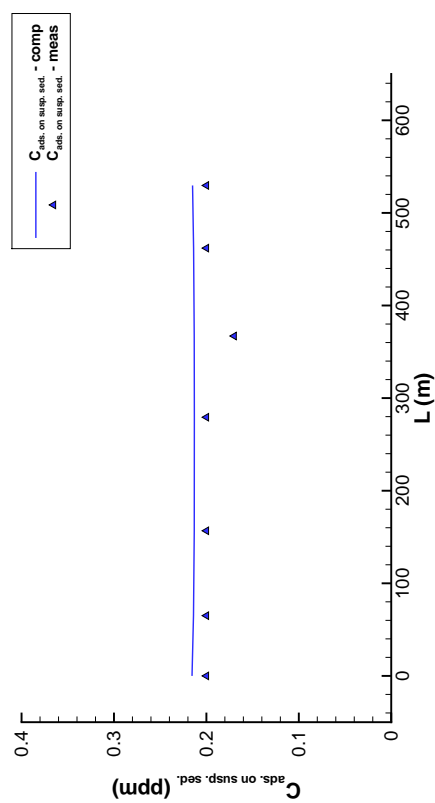
(a) Merni presek MP3



(b) Merni presek MP5

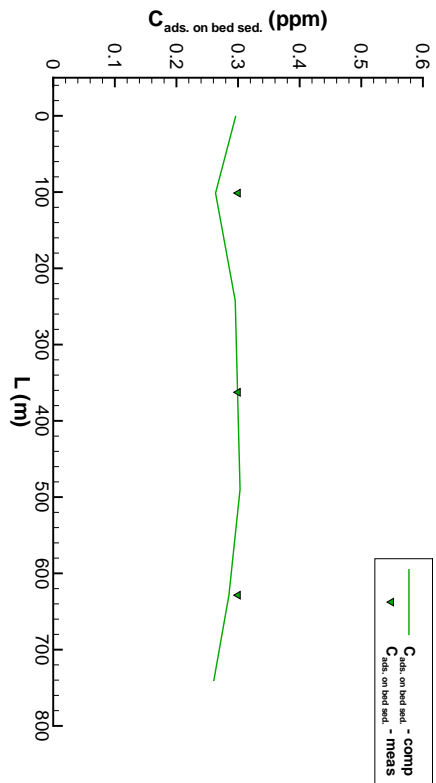


(c) Merni presek MP6

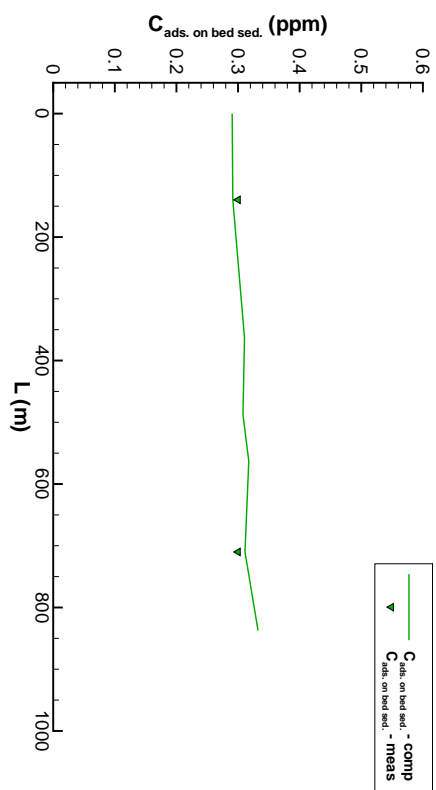


(d) Merni presek MP7

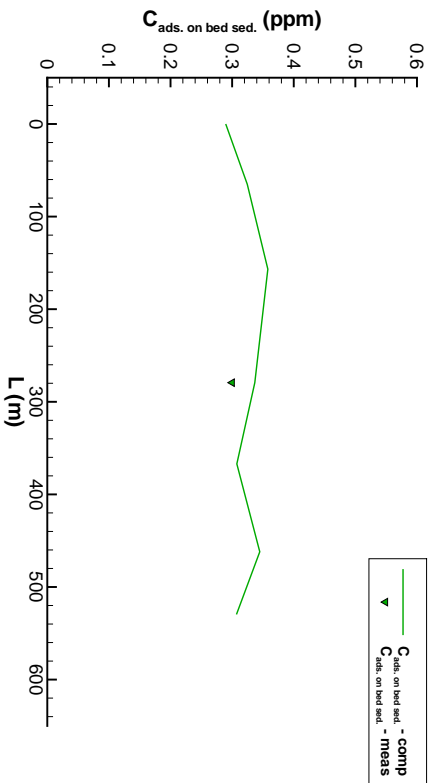
Slika 67: Merene i računate koncentracije žive adsorbovane na suspendovani nanos u mernim presecima 3, 5, 6 i 7



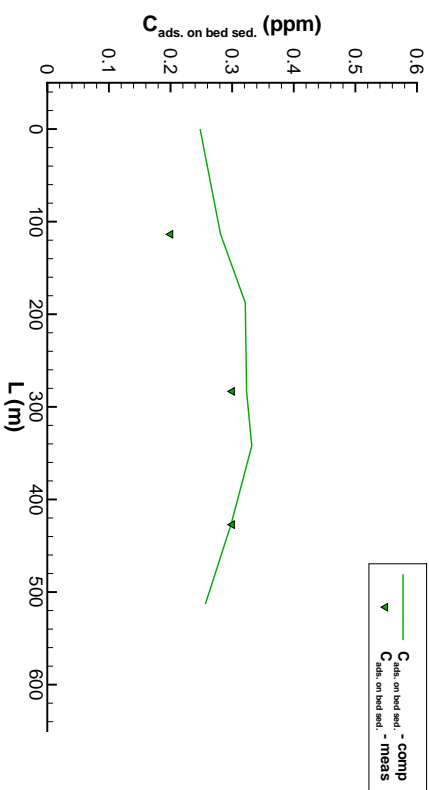
(a) Merni presek MP3



(b) Merni presek MP5



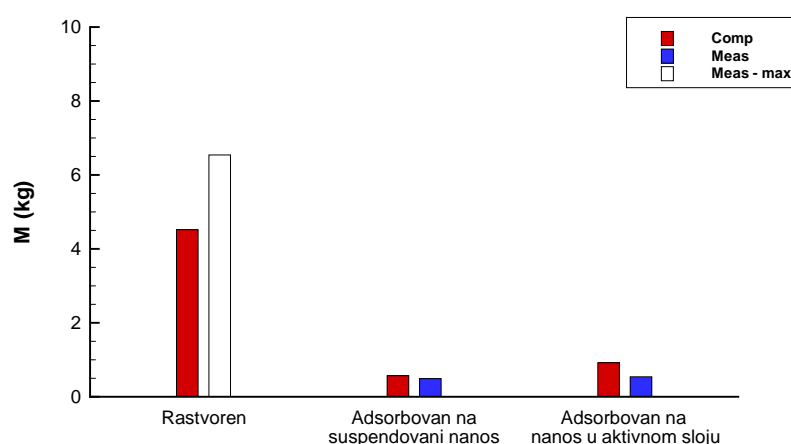
(c) Merni presek MP6



(d) Merni presek MP7

Slika 68: Merene i računate koncentracije žive adsorbovane na nanos aktivnog sloja u mernim presecima 3, 5, 6 i 7

Konačno se razmatra i poslednji vid pojave transportovane materije u razmatranoj rečnoj deonici. Na slici 68 su prikazane merene i računate koncentracije žive adsorbovane na nanos u aktivnom sloju za merne preseke 3, 5, 6 i 7. Rezultati mernih preseka 1, 2 i 4 su dati na slici 104 u prilogu J. Osmotrene vrednosti koncentracije variraju u dijapazonu od 0.2 ppm do 0.3 ppm. Razlika između merenih i računatih vrednosti ove veličine se kreće u intervalu od -0.096 ppm do 0.037 ppm, dok je srednja vrednost odstupanja -0.022 ppm. Analizom prikazanih rezultata se zaključuje da numerička simulacija daje koncentracije koje odgovaraju redu veličine osmotrenih vrednosti. Takođe se konstatuje da numerički rezultati gotovo u svim mernim presecima imaju tendenciju koja odgovara terenskim merenjima. Poslednja konstatacija, i u ovom slučaju, nagoveštava sposobnost modela da verno predvidi ponašanje zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa aktivnog sloja u prirodnom vodotoku.



Slika 69: Bilans mase žive u računskom domenu

Na kraju analize rezultata simulacije transporta žive učiniće se dodatni napor radi sticanja boljeg uvida u zatečeno stanje, odnosno u sposobnost modela da reprodukuje osmotrene tendencije. Na slici 69 je prikazan bilans mase žive u računskom domenu na osnovu kojeg se konstatuje da su proračunom dobijene vrednosti bliske terenskim merenjima. Model predviđa nešto veće prisustvo mase razmatranog teškog metala u domenu, međutim raspodela te mase je veoma slična osmotrenim vrednostima. Napominje se da i u ovom slučaju laboratorijske analize prikupljenih uzoraka za rastvoreni zagađivač nisu bile u mogućnosti da daju tačne vrednosti, pa na prikazanom bilansu merena vrednost rastvorene žive zapravo predstavlja njenu *potencijalno maksimalnu* vrednost. Rezultati numeričke simulacije predviđaju da je 75% mase u rastvorenom obliku, 10% mase je adsorbovano na suspendovani nanos, a 15% mase je adsorbovano na nanos u aktivnom sloju. Ovde se ne daje procentualo učešće nabrojanih vidova pojave zagađivača na osnovu terenskih merenja, jer ne postoje tačne merene vrednosti za živu u rastvorenom obliku nego samo njena potencijalno maksimalna vrednost.

Da bi se sagledala efikasnost numeričkih procedura sadržanih unutar razvijenog modela interakcije vode, nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima, navode se maksimalne vrednosti iteracija koje se javljaju tokom proračuna, nakon početnog perioda stabilizacije sistema. Najveći broj iteracija pri proračunu tečenja je bio 4 za advektivni, 2 za difuzioni i 2 za propagacioni korak. U slučaju proračuna nanosa advektivno-morfološki korak je zahtevao maksimalni broj iteracija od 5, dok je difuzioni korak završavao proračun nakon 8 iteracija. I konačno, proračun transporta zagađujuće materije je podrazumevao

advektivno-interakcioni korak gde je najveći broj iteracija bio 2, odnosno difuzioni korak sa maksimalnim brojem iteracija koji je iznosio 9.

7. Zaključak

RAZVIJEN je ravanski model sa pratećim računskim procedurama za simuliranje interakcije vode, nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima. Za opisivanje strujanja vode je korišćen set ravanskih jednačina (jednačine osrednjene po dubini) održanja mase i održanja količine kretanja, dok je za modelisanje transporta nanosa i deformacije korita korišćen koncept aktivnog sloja i aktivnog stratuma zasnovan na podeli nanosne mešavine na proizvoljan broj granulometrijskih intervala (frakcija). Navedeni principi matematičkog modelisanja obuhvataju mehanizme strujanja vode, oba vida transporta nanosa (suspendovani i vučeni), mehanizme razmene mase između nanosa u suspenziji i nanosa u aktivnom sloju, promenu kote dna, kao i mehanizme razmene mase nanosne mešavine između aktivnog sloja i aktivnog stratuma. U okviru rada je razvijen koncept modelisanja transporta nekonzervativne zagađujuće materije, koja nije podložna biološkom i/ili hemijskom nastajanju i/ili nestajanju, a stupa u interakciju sa pojedinim zrnima nanosne mešavine preko procesa adsorpcije/desorpcije. Ovo obuhvata pojavu zagađivača u rastvorenom i adsorbovanom obliku, pri čemu se posebno prati masa materije adsorbovane na suspendovani nanos, nanos u aktivnom sloju, odnosno nanos u stratimima ispod njega. Takođe su formulisani i mehanizmi razmene između navedenih vidova pojave zagađujuće materije, koji obuhvataju procese adsorpcije i desorpcije, odnosno procese transporta adsorbovane materije vezane za zrna svih vidova pojave nanosa (suspendovani, vučeni, stratumi, itd.). Implementirani koncepti matematičkog modelisanja su prilagođeni uslovima složene geometrije prirodnih vodotokova transformacijom jednačina u ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem uz primenu odgovarajućih numeričkih postupaka. Pored formulisanja koncepta modelisanja transporta zagađujuće materije, sprovedena su i poboljšanja u numeričkim aspektima razvijenog modela, kao i pri formulisanju ključnih procesa modelisanja interakcije vode, nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima. U okviru ovog rada su ostvarena poboljšanja u sledećim oblastima:

- Kompletan set parcijalnih diferencijalnih jednačina, kojim se opisuje strujanje vode, transport mešavine nanosa i morfološke promene korita, transport zagađujuće materije, kao i njihova interakcija, transformisan je u ortogonalni krivolinijski koordinatni sistem.
- Primenom metode etapnog rešavanja (razlomljenih koraka) advektivni članovi (linearni u slučaju transportne jednačine i nelinearni u slučaju dinamičke jednačine) su računati metodom karakteristika sa lokalnim interpolacionim polinomom višeg reda. Razvijen algoritam podrazumeva mogućnost prostiranja trajektorije duž više računskih ćelija, što je rezultovalo u korišćenju većeg računskog koraka po vremenu i smanjenju vremena rada računara.
- Formulisanje mehanizama razmene između rastvorene i adsorbovane zagađujuće materije preko kinetičkih procesa prvog reda, pri čemu je modelisanje koeficijenata razmene usko povezano sa dostupnom površinom za adsorpciju.
- Formulisanje mehanizama razmene zagađujuće materije adsorbovane na sve vidove pojave nanosa. Ovi mehanizmi podrazumevaju transport zagađivača adsorbovanog na zrna vučenog nanosa, uvlačenje zrna nanosa koja na sebi mogu „nositi” zagađujuću materiju iz aktivnog sloja u suspenziju, odnosno njihovo deponovanje iz suspenzije.

- Formulisanje koncepta modelisanja transporta zagađujuće materije, koji je u skladu sa konceptom aktivnog sloja i aktivnog stratuma pri modelisanju ponašanja nanosne mešavine (posebno formulisanje jednačina održanja mase za pojedine granulometrijske intervale, itd.).
- Formulisanje koncepta modelisanja transporta zagađujuće materije, koji omogućava rešavanje implicitnog sistema linearizovanih algebarskih jednačina u pojedinačnoj računskoj tački primenom *Newton-Raphson*-ovog iterativnog postupka, a nezavisno od susednih računskih tačaka.

Razvijen algoritam za proračun advektivnih članova je testiran na linijskim jednačinama linearne i nelinearne (*Burger*-ova jednačina) advekcije. Tokom sprovođenja ovih numeričkih testova vršeno je upoređivanje tačnog rešenja sa numeričkim rešenjima dobijenim pomoću nekih od šema metode konačnih razlika, odnosno šema koje se zasnivaju na metodi karakteristika sa interpolacijom drugog, trećeg i petog stepena. Konstatovano je da razvijeni algoritam daje rezultate zadovoljavajuće tačnosti uz minimalnu pojavu numeričkih oscilacija i/ili difuzije, što je osnovni preduslov za modelisanje transportnih procesa u prirodnim vodotocima. Takođe je identifikovana slabost primene metode karakteristika u slučaju nelinearne advekcije, koja se ogleda u ograničavanju vremenskog koraka tako da tokom njega ne dođe do „prelamanja” talasa.

Radi ocene razvijenog modela transporta zagađujuće materije, sprovedeni su numerički testovi koji su za cilj imali kvalitativnu ocenu ponašanja samog modela i mehanizama razmene i interakcije. Konstatuje se da su proračuni dali fizički opravdane rezultate uz prihvatljivu relativnu grešku jednačine održanja mase. Testirana su sva tri aspekta pojave zagađivača, tj. kada on u računski domen dospeva u rastvorenom obliku, adsorbovan na zrna suspendovanog nanosa ili kada je na samom početku simulacije već prisutan u adsorbovanom obliku na dnu. Usled delovanja mehanizama razmene, transportovana materija se uvek pojavljivala u sva tri oblika bez obzira na činjenicu da u računski domen dospeva samo u jednom obliku. Zaključuje se da prikazana formulacija matematičkog modela obuhvata sve relevantne procese interakcije između nanosa i nekonzervativne materije koja nije podložna biološkom i/ili hemijskom nastajanju i/ili nestajanju.

Nakon provere pojedinih elemenata razvijenog modela na šematskim primerima, sprovedene su numeričke simulacije na prirodnim vodotocima. U ovu svrhu su korišćene dve deonice reke Dunav, kao najveće aluvijalne reke u Srbiji. Na prvoj izabranoj lokaciji, koja se nalazi u pograničnoj zoni između Mađarske i Republike Srbije, organizovane su dve kampanje terenskih merenja koje su podrazumevale prikupljanje podataka o geometriji korita, odnosno hidrauličkim i nanosnim veličinama. Druga izabarana deoncia se nalazi kod Beograda, odakle potiče jedan set merenja koji je pored geometrijskih, hidrauličkih i nanosnih parametara podrazumevao određivanje parametara prisustva zagađujuće materije u vidu tri teška metala (cink, olovo i živa).

Kalibrisanjem hidrauličkog modela na prvom setu merenja pogranične deonice Dunava se pokazalo da prikazan matematički model može reprodukovati hidrauličke uslove osmotrene na terenu. Slaganje rezultata simulacije sa terenskim merenjima je pored brojčane vrednosti podrazumevalo uspešnu reprodukciju osmotrenih tendencija. Nakon ovoga je sproveden hidraulički proračun na drugom setu podataka iste deonice reke bez promene kalibrisanih parametara, koji je takođe dao zadovoljavajuće slaganje sa izmerenim vrednostima. Numerički model je uspešno implementiran i na deonici reke Dunav kod Beograda. Kritičkom analizom rezultata sprovedenih simulacija je zaključeno da je hidraulički model, formulisan u ovom radu, pogodan za proračun hidrodinamičkih veličina u prirodnim vodotocima.

Nakon sprovedenih simulacija tečenja, pristupilo se kalibraciji parametara proračuna transporta nanosa i deformacije korita koristeći prvi set merenja pogranične deonice reke Dunav. Nakon postizanja zadovoljavajućeg slaganja između sračunatih i izmerenih vrednosti, simulacija je ponovljena na drugom setu merenih podataka iste deonice bez promene numeričkih i fizičkih parametara. Kritička analiza rezultata obe simulacije je ukazala na sposobnost korišćenog koncepta modelisanja da reprodukuje kretanje nanosa u uslovima složene geometrije i strujnog polja. Razvijeni numerički model je primenjen i u slučaju deonice reke Dunav kod Beograda. Sve simulacije su, pored zadovoljavajućeg brojčanog slaganja sa terenskim merenjima, uspele da reprodukuju zapažene tendencije ponašanja nanosa. Zaključuje se da je implementacijom razvijenog modela moguće sagledati i predvideti bitne aspekte interakcije vode i nanosa u prirodnim vodotocima.

Usled raspoloživosti merenih podataka razvijeni model transporta zagađujuće materije je primenjen samo na deonici reke Dunav kod Beograda. Matematički model je implementiran pomoću prikupljenih terenskih podataka za tri teška metala (cink, olovo i živa). Merenja ukazuju na činjenicu da se ponašanje navedene tri materije znatno razlikuje pri identičnim uslovima strujanja, odnosno identičnim uslovima ponašanja nanosne mešavine. Međutim, analizom sračunatih i merenih vrednosti koncentracija rastvorenog i adsorbovanog teškog metala je ustanovljeno da formulisani koncept modelisanja nekonzervativnog zagađivača može uspešno simulirati sve vidove transporta materije koji su dokumentovani u okviru sprovedenih terenskih merenja. Štaviše, rezultati prikazani u ovom radu nagoveštavaju sposobnost modela da verno predvidi ponašanje rastvorene i adsorbovane zagađujuće materije u prirodnom vodotoku. Sprovedene analize takođe sadrže provere bilansa mase odgovarajućeg teškog metala unutar razmatrane rečne deonice na osnovu kojih se konstatuje da su proračunom dobijene vrednosti bliske terenskim merenjima i u pogledu raspodele materije na razne vidove njene pojave (rastvoreni oblik, adsorbovan na suspendovani nanosa i adsorbovan na nanos u aktivnom sloju).

Na samom kraju je opravdano zaključiti da razvijeni model može simulirati interakciju vode, nanosa i zagađivača u prirodnim vodotocima sa zadovoljavajućom tačnošću i pouzdanošću.

§ § §

U cilju daljeg razvoja formulisanog numeričkog modela, predlaže se njegovo testiranje na terenskim merenjima koja bi podrazumevala konstantno praćenje uzvodnog graničnog uslova za parametre nanosa i zagađivača. Simulacije sprovedene na ovakvim setovima podataka bi svakako dale bolji uvid u ispravnost i tačnost koncepta modelisanja razmene između suspendovanog nanosa i nanosa u aktivnom sloju, kao i tačnost koncepta modelisanja razmene između rastvorenog i adsorbovanog zagađivača.

Predlaže se razvoj i/ili implementacija postojećih algoritama koji bi obuhvatili procese sušenja i kvašenja obala vodotoka. Ovo bi doprinelo verodostojnijem hidrauličkom proračunu pri izrazito neustaljenim uslovima tečenja.

Pošto je strujanje u prirodnim tokovima po pravilu turbulentno, poboljšanje razvijenog modela bi trebalo da obuhvati tačnije i sveobuhvatnije modelisanje turbulencije. Razvoj u ovom smeru bi poboljšao kvalitet proračuna transporta suspendovanog nanosa i zagađujuće materije.

U ovom radu je primenom razvijenog algoritma za proračun advekcije smanjeno vreme rada računara. Međutim, gusta računaska mreža u kombinaciji sa velikim brojem granulometrijskih intervala nanosne mešavine još uvek uslovljava dugo vreme trajanja simulacija. Dakle, u cilju daljeg poboljšanja efikasnosti, programski kôd bi trebalo prilagoditi paralelnom procesiranju.

Prilog A Transformacija operatora

Razmatra se trodimenzionalni prostor i vektor \vec{F} , koji ima kontravarijantne komponente u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu F^m za pravce $m = i, j, k$, odnosno komponente f^m za pravce $m = i, j, k$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu. Divergencija proizvoda skalara i vektora $s\vec{F}$ (ili vektora \vec{F} ako se uzme da je $s = 1$) se u kartezijanskom koordinatnom sistemu piše kao

$$\nabla \cdot (s\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x^i} (sf^i) + \frac{\partial}{\partial x^j} (sf^j) + \frac{\partial}{\partial x^k} (sf^k),$$

dok je ekvivalentni zapis u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\nabla \cdot (s\vec{F}) = (sF^i)_{,i} + (sF^j)_{,j} + (sF^k)_{,k}.$$

Operator advekcije $\vec{F} \cdot \nabla$ se u kartezijanskom koordinatnom sistemu piše kao

$$\vec{F} \cdot \nabla = f^i \frac{\partial}{\partial x^i} () + f^j \frac{\partial}{\partial x^j} () + f^k \frac{\partial}{\partial x^k} (),$$

dok je ekvivalentni zapis u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\vec{F} \cdot \nabla = F^i ()_{,i} + F^j ()_{,j} + F^k ()_{,k}.$$

U nastavku se razmatra trodimenzionalni prostor i tenzor drugog reda ϖ , koji ima kontravarijantne komponente u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu ϖ^{mn} , $m = i, j, k$, $n = i, j, k$, odnosno komponente π^{mn} , $m = i, j, k$, $n = i, j, k$ u kartezijanskom koordinatnom sistemu. Dakle, na kraju se navodi divergencija tenzora drugog reda ϖ , koja se u kartezijanskom koordinatnom sistemu piše kao

$$\nabla \cdot \varpi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \pi^{ii}}{\partial x^i} + \frac{\partial \pi^{ij}}{\partial x^j} + \frac{\partial \pi^{ik}}{\partial x^k} \\ \frac{\partial \pi^{ji}}{\partial x^i} + \frac{\partial \pi^{jj}}{\partial x^j} + \frac{\partial \pi^{jk}}{\partial x^k} \\ \frac{\partial \pi^{ki}}{\partial x^i} + \frac{\partial \pi^{kj}}{\partial x^j} + \frac{\partial \pi^{kk}}{\partial x^k} \end{bmatrix},$$

dok je ekvivalentni zapis u opštem krivolinijskom koordinatnom sistemu

$$\nabla \cdot \varpi = \begin{bmatrix} (\varpi^{ii})_{,i} + (\varpi^{ij})_{,j} + (\varpi^{ik})_{,k} \\ (\varpi^{ji})_{,i} + (\varpi^{jj})_{,j} + (\varpi^{jk})_{,k} \\ (\varpi^{ki})_{,i} + (\varpi^{kj})_{,j} + (\varpi^{kk})_{,k} \end{bmatrix}.$$

Prilog B Advektivni korak modela tečenja

Suma po segmentima trajektorije u jednačini advektivnog koraka modela tečenja za ξ koordinatni pravac (4.16) je

$$\begin{aligned} \sum_{D_L}^{D_1} \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \Delta t &= \frac{t_{D_{L-1}} - t_{D_L}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_L} + \\ &+ \sum_{\ell=L-1}^2 \frac{t_{D_{\ell-1}} - t_{D_{\ell+1}}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_\ell} + \\ &+ \frac{t^{n+1} - t_{D_2}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{v}^2 - \frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_1}. \end{aligned}$$

Suma po segmentima trajektorije u jednačini advektivnog koraka modela tečenja za η koordinatni pravac (4.17) je

$$\begin{aligned} \sum_{D_L}^{D_1} \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \Delta t &= \frac{t_{D_{L-1}} - t_{D_L}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_L} + \\ &+ \sum_{\ell=L-1}^2 \frac{t_{D_{\ell-1}} - t_{D_{\ell+1}}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_\ell} + \\ &+ \frac{t^{n+1} - t_{D_2}}{2} \left[\frac{1}{h_\xi h_\eta} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \tilde{u}^2 - \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \tilde{u} \tilde{v} \right) \right]_{D_1}. \end{aligned}$$

Razlika vremena u (4.16) i (4.17) je data sa

$$\Delta t_1 = \frac{t^{n+1} - t_{D_1}}{2}.$$

Prilog C Difuzioni korak modela tečenja

Radi lakšeg pisanja uvodi se skraćeno obeležavanje za koeficijent ponderacije

$$\theta^* = \frac{\theta}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}}, \quad \theta^{**} = \frac{(1-\theta)}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}},$$

kao i za indekse računskih tačaka u skladu sa slikom 14.

$$e = i + \frac{1}{2}, j \quad w = i - \frac{1}{2}, j \quad n = i, j + \frac{1}{2} \quad s = i, j - \frac{1}{2}$$

$$E = i + 1, j \quad W = i - 1, j \quad N = i, j + 1 \quad S = i, j - 1$$

$$NE = i + 1, j + 1 \quad NW = i - 1, j + 1 \quad SE = i + 1, j - 1 \quad SW = i - 1, j - 1$$

Daju se izrazi za koeficijente A_1 , A_2 , A_3 i A_4

$$A_1 = \frac{2\theta^{**}}{d_{i,j}^n} \left[(\tilde{v}_t)_e \left(\frac{(h_\eta)_e}{(h_\xi)_e} (\tilde{u}_E^a - \tilde{u}_{i,j}^a) + \frac{1}{(h_\xi)_e} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_e \frac{1}{2} (\tilde{v}_E^a + \tilde{v}_{i,j}^a) \right) d_e^n - \right. \\ \left. - (\tilde{v}_t)_w \left(\frac{(h_\eta)_w}{(h_\xi)_w} (\tilde{u}_{i,j}^a - \tilde{u}_W^a) + \frac{1}{(h_\xi)_w} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_w \frac{1}{2} (\tilde{v}_{i,j}^a + \tilde{v}_W^a) \right) d_w^n \right],$$

$$A_2 = \frac{\theta^{**}}{d_{i,j}^n} \left\{ (\tilde{v}_t)_n \left(\frac{(h_\xi)_n}{(h_\eta)_n} (\tilde{u}_N^a - \tilde{u}_{i,j}^a) - \frac{1}{(h_\eta)_n} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_n \frac{1}{2} (\tilde{v}_N^a + \tilde{v}_{i,j}^a) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} (\tilde{v}_{NE}^a + \tilde{v}_E^a - \tilde{v}_{NW}^a - \tilde{v}_W^a) - \frac{1}{(h_\eta)_n} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_n \frac{1}{2} (\tilde{u}_N^a + \tilde{u}_{i,j}^a) \right) d_n^n - \right. \\ \left. - (\tilde{v}_t)_s \left(\frac{(h_\xi)_s}{(h_\eta)_s} (\tilde{u}_{i,j}^a - \tilde{u}_S^a) - \frac{1}{(h_\eta)_s} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_s \frac{1}{2} (\tilde{v}_{i,j}^a + \tilde{v}_S^a) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{4} (\tilde{v}_{SE}^a + \tilde{v}_E^a - \tilde{v}_{SW}^a - \tilde{v}_W^a) - \frac{1}{(h_\eta)_s} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_s \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j}^a + \tilde{u}_S^a) \right) d_s^n \right\},$$

$$A_3 = \frac{\theta^{**}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} (\tilde{v}_t)_{i,j} \left((h_\xi)_{i,j} \frac{1}{2} (\tilde{u}_N^a - \tilde{u}_S^a) - \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \tilde{v}_{i,j}^a + \right. \\ \left. + (h_\eta)_{i,j} \frac{1}{2} (\tilde{v}_E^a - \tilde{v}_W^a) - \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \tilde{u}_{i,j}^a \right),$$

$$A_4 = \frac{2\theta^{**}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} (\tilde{v}_t)_{i,j} \left((h_\xi)_{i,j} \frac{1}{2} (\tilde{v}_N^a - \tilde{v}_S^a) + \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \tilde{u}_{i,j}^a \right),$$

odnosno izrazi za koeficijente B_1 , B_2 , B_3 i B_4

$$B_1 = \frac{2\theta^{**}}{d_{i,j}^n} \left[(\tilde{v}_t)_n \left(\frac{(h_\xi)_n}{(h_\eta)_n} (\tilde{v}_N^a - \tilde{v}_{i,j}^a) + \frac{1}{(h_\eta)_n} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_n \frac{1}{2} (\tilde{u}_N^a + \tilde{u}_{i,j}^a) \right) d_n^n - \right. \\ \left. - (\tilde{v}_t)_s \left(\frac{(h_\xi)_s}{(h_\eta)_s} (\tilde{v}_{i,j}^a - \tilde{v}_S^a) + \frac{1}{(h_\eta)_s} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_s \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j}^a + \tilde{u}_S^a) \right) d_s^n \right],$$

$$\begin{aligned}
B_2 = & \frac{\theta^{**}}{d_{i,j}^n} \left\{ (\tilde{v}_t)_e \left(\frac{1}{4} (\tilde{u}_N^a + \tilde{u}_{NE}^a - \tilde{u}_S^a - \tilde{u}_{SE}^a) - \frac{1}{(h_\xi)_e} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_e \frac{1}{2} (\tilde{v}_E^a + \tilde{v}_{i,j}^a) + \right. \right. \\
& + \frac{(h_\eta)_e}{(h_\xi)_e} (\tilde{v}_E^a - \tilde{v}_{i,j}^a) - \frac{1}{(h_\xi)_e} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_e \frac{1}{2} (\tilde{u}_E^a + \tilde{u}_{i,j}^a) \left. \right) d_e^n - \\
& - (\tilde{v}_t)_w \left(\frac{1}{4} (\tilde{u}_N^a + \tilde{u}_{NW}^a - \tilde{u}_S^a - \tilde{u}_{SW}^a) - \frac{1}{(h_\xi)_w} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_w \frac{1}{2} (\tilde{v}_{i,j}^a + \tilde{v}_W^a) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{(h_\eta)_w}{(h_\xi)_w} (\tilde{v}_{i,j}^a - \tilde{v}_W^a) - \frac{1}{(h_\xi)_w} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_w \frac{1}{2} (\tilde{u}_{i,j}^a + \tilde{u}_W^a) \right) d_w^n \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3 = & \frac{\theta^{**}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} (\tilde{v}_t)_{i,j} \left[(h_\xi)_{i,j} \frac{1}{2} (\tilde{u}_N^a - \tilde{u}_S^a) - \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \tilde{v}_{i,j}^a \right. \\
& \left. + (h_\eta)_{i,j} \frac{1}{2} (\tilde{v}_E^a - \tilde{v}_W^a) - \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \tilde{u}_{i,j}^a \right],
\end{aligned}$$

$$B_4 = \frac{2\theta^{**}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} (\tilde{v}_t)_{i,j} \left((h_\eta)_{i,j} \frac{1}{2} (\tilde{u}_E^a - \tilde{u}_W^a) + \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \tilde{v}_{i,j}^a \right).$$

Izrazi za koeficijente u jednačinama (4.20) su

$$\begin{aligned}
P_i = & - \frac{2\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^n} (\tilde{v}_t)_w d_w^n \frac{(h_\eta)_w}{(h_\xi)_w}, \\
Q_i = & 1 + \theta^* \Delta t \left[\frac{(\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left(2 \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j}^2 + \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j}^2 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{2}{d_{i,j}^n} \left((\tilde{v}_t)_e d_e^n \frac{(h_\eta)_e}{(h_\xi)_e} + (\tilde{v}_t)_w d_w^n \frac{(h_\eta)_w}{(h_\xi)_w} \right) \right], \\
R_i = & - \frac{2\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^n} (\tilde{v}_t)_e d_e^n \frac{(h_\eta)_e}{(h_\xi)_e}, \\
{}^{(m)}S_i = & G_{i,j} + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^n} \left\{ \frac{(\tilde{v}_t)_n d_n^n}{2 (h_\eta)_n} \left[2 (h_\xi)_n (\tilde{u}_{i,j+1}^d - \tilde{u}_{i,j}^d) - \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_n (\tilde{v}_{i,j+1}^d + \tilde{v}_{i,j}^d) + \right. \right. \\
& + \frac{(h_\eta)_n}{2} (\tilde{v}_{i+1,j+1}^d + \tilde{v}_{i+1,j}^d - \tilde{v}_{i-1,j+1}^d - \tilde{v}_{i-1,j}^d) - \left. \left. \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_n (\tilde{u}_{i,j+1}^d + \tilde{u}_{i,j}^d) \right] - \right. \\
& - \frac{(\tilde{v}_t)_s d_s^n}{2 (h_\eta)_s} \left[2 (h_\xi)_s (\tilde{u}_{i,j}^d - \tilde{u}_{i,j-1}^d) - \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_s (\tilde{v}_{i,j}^d + \tilde{v}_{i,j-1}^d) + \right. \\
& + \frac{(h_\eta)_s}{2} (\tilde{v}_{i+1,j-1}^d + \tilde{v}_{i+1,j}^d - \tilde{v}_{i-1,j-1}^d - \tilde{v}_{i-1,j}^d) - \left. \left. \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_s (\tilde{u}_{i,j}^d + \tilde{u}_{i,j-1}^d) \right] + \right. \\
& + \frac{(\tilde{v}_t)_e d_e^n}{(h_\xi)_e} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_e (\tilde{v}_{i+1,j}^d + \tilde{v}_{i,j}^d) - \frac{(\tilde{v}_t)_w d_w^n}{(h_\xi)_w} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_w (\tilde{v}_{i,j}^d + \tilde{v}_{i-1,j}^d) + \\
& + \frac{d_{i,j}^n (\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left[\left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \left[(h_\xi)_{i,j} \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^d - \tilde{u}_{i,j-1}^d}{2} + (h_\eta)_{i,j} \frac{\tilde{v}_{i+1,j}^d - \tilde{v}_{i-1,j}^d}{2} \right] - \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \left[\left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \tilde{v}_{i,j}^d + (h_\xi)_{i,j} (\tilde{v}_{i,j+1}^d - \tilde{v}_{i,j-1}^d) \right] \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_i &= -\theta^* \Delta t \frac{1}{2 d_{i,j}^n} \left[\frac{(\tilde{v}_t)_w d_w^n}{(h_\xi)_w} \left(\left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_w + 2 (h_\eta)_w \right) - \frac{d_{i,j}^n (\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\xi)_{i,j}} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \right], \\
M_i &= 1 + \theta^* \Delta t \left[\frac{(\tilde{v}_t)_e d_e^n}{2 d_{i,j}^n (h_\xi)_e} \left(\left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_e + 2 (h_\eta)_e \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\tilde{v}_t)_w d_w^n}{2 d_{i,j}^n (h_\xi)_w} \left(- \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_w + 2 (h_\eta)_w \right) + \frac{(\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left(\left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j}^2 + 2 \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j}^2 \right) \right], \\
N_i &= -\theta^* \Delta t \frac{1}{2 d_{i,j}^n} \left[\frac{(\tilde{v}_t)_e d_e^n}{(h_\xi)_e} \left(- \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_e + 2 (h_\eta)_e \right) + \frac{d_{i,j}^n (\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\xi)_{i,j}} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \right], \\
({}^m)O_i &= F_{i,j} + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^n} \left\{ \frac{(\tilde{v}_t)_e d_e^n}{2 (h_\xi)_e} \left(\tilde{u}_{i,j+1}^d + \tilde{u}_{i+1,j+1}^d - \tilde{u}_{i,j-1}^d - \tilde{u}_{i+1,j-1}^d \right) - \right. \\
&\quad \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_e \left(\tilde{u}_{i+1,j}^d + \tilde{u}_{i,j}^d \right) - \frac{(\tilde{v}_t)_w d_w^n}{2 (h_\xi)_w} \left(\frac{(h_\xi)_w}{2} \left(\tilde{u}_{i,j+1}^d + \tilde{u}_{i-1,j+1}^d - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \tilde{u}_{i,j-1}^d - \tilde{u}_{i-1,j-1}^d \right) - \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_w \left(\tilde{u}_{i,j}^d + \tilde{u}_{i-1,j}^d \right) \right) + \\
&\quad + \frac{(\tilde{v}_t)_n d_n^n}{(h_\eta)_n} \left(2 (h_\xi)_n \left(\tilde{v}_{i,j+1}^d - \tilde{v}_{i,j}^d \right) + \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_n \left(\tilde{u}_{i,j+1}^d + \tilde{u}_{i,j}^d \right) \right) - \\
&\quad - \frac{(\tilde{v}_t)_s d_s^n}{(h_\eta)_s} \left(2 (h_\xi)_s \left(\tilde{v}_{i,j}^d - \tilde{v}_{i,j-1}^d \right) + \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_s \left(\tilde{u}_{i,j}^d + \tilde{u}_{i,j-1}^d \right) \right) + \\
&\quad + \frac{d_{i,j}^n (\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left[\left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} (h_\xi)_{i,j} \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^d - \tilde{u}_{i,j-1}^d}{2} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \left(\left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \tilde{u}_{i,j}^d + (h_\eta)_{i,j} \left(\tilde{u}_{i+1,j}^d - \tilde{u}_{i-1,j}^d \right) \right) \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

uz napomenu da se u koeficijentima $({}^m)S_i$ i $({}^m)O_i$ za sve brzine uzimaju vrednosti iz prethodne iteracije (m) u skladu sa primenom *ADI* metode, pa se radi lakšeg pisanja to neće pojedinačno označavati.

Izrazi za koeficijente u jednačinama (4.21) su

$$\begin{aligned}
P_j &= -\theta^* \Delta t \frac{1}{2 d_{i,j}^n} \left\{ \frac{(\tilde{v}_t)_s d_s^n}{(h_\eta)_s} \left[2 (h_\xi)_s + \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_s \right] - \frac{d_{i,j}^n (\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j}} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \right\}, \\
Q_j &= 1 + \theta^* \Delta t \left[\frac{(\tilde{v}_t)_n d_n^n}{2 d_{i,j}^n (h_\eta)_n} \left(2 (h_\xi)_n + \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_n \right) + \frac{(\tilde{v}_t)_s d_s^n}{2 d_{i,j}^n (h_\eta)_s} \left(2 (h_\xi)_s - \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_s \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left(2 \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j}^2 + \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j}^2 \right) \right], \\
R_j &= -\theta^* \Delta t \frac{1}{2 d_{i,j}^n} \left\{ \frac{(\tilde{v}_t)_n d_n^n}{(h_\eta)_n} \left[2 (h_\xi)_n - \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_n \right] + \frac{d_{i,j}^n (\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j}} \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \right\}, \\
({}^*)S_j &= G_{i,j} + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^n} \left\{ \frac{(\tilde{v}_t)_e d_e^n}{(h_\xi)_e} \left[2 (h_\eta)_e \left(\tilde{u}_{i+1,j}^d - \tilde{u}_{i,j}^d \right) + \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_e \left(\tilde{v}_{i+1,j}^d + \tilde{v}_{i,j}^d \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\tilde{v}_t)_w d_w^n}{(h_\xi)_w} \left[2 (h_\eta)_w \left(\tilde{u}_{i,j}^d - \tilde{u}_{i-1,j}^d \right) + \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_w \left(\tilde{v}_{i,j}^d + \tilde{v}_{i-1,j}^d \right) \right] + \rightarrow \text{nastavlja se} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow + \frac{(\tilde{v}_t)_n d_n^n}{2(h_\eta)_n} \left[\frac{(h_\eta)_n}{2} (\tilde{v}_{i+1,j+1}^d + \tilde{v}_{i+1,j}^d - \tilde{v}_{i-1,j+1}^d - \tilde{v}_{i-1,j}^d) - \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_n (\tilde{v}_{i,j+1}^d + \tilde{v}_{i,j}^d) \right] - \\
& - \frac{(\tilde{v}_t)_s d_s^n}{2(h_\eta)_s} \left[\frac{(h_\eta)_s}{2} (\tilde{v}_{i+1,j-1}^d + \tilde{v}_{i+1,j}^d - \tilde{v}_{i-1,j-1}^d - \tilde{v}_{i-1,j}^d) - \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_s (\tilde{v}_{i,j}^d + \tilde{v}_{i,j-1}^d) \right] + \\
& + \frac{d_{i,j}^n (\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left[\left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \left((h_\eta)_{i,j} \frac{\tilde{v}_{i+1,j}^d - \tilde{v}_{i-1,j}^d}{2} - \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \tilde{v}_{i,j}^d \right) - \right. \\
& \left. - (h_\xi)_{i,j} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} (\tilde{v}_{i,j+1}^d - \tilde{v}_{i,j-1}^d) \right] \Bigg\},
\end{aligned}$$

$$L_j = - \frac{2\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^n} (\tilde{v}_t)_s d_s^n \frac{(h_\xi)_s}{(h_\eta)_s},$$

$$\begin{aligned}
M_j = & 1 + \theta^* \Delta t \left[\frac{2}{d_{i,j}^n} \left((\tilde{v}_t)_n d_n^n \frac{(h_\xi)_n}{(h_\eta)_n} + (\tilde{v}_t)_s d_s^n \frac{(h_\xi)_s}{(h_\eta)_s} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{(\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left(\left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j}^2 + 2 \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j}^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

$$N_j = - \frac{2\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^n} (\tilde{v}_t)_n d_n^n \frac{(h_\xi)_n}{(h_\eta)_n},$$

$$\begin{aligned}
(*)O_j = & F_{i,j} + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^n} \left\{ \frac{(\tilde{v}_t)_e d_e^n}{2(h_\xi)_e} \left(2(h_\eta)_e (\tilde{v}_{i+1,j}^d - \tilde{v}_{i,j}^d) - \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_e (\tilde{u}_{i+1,j}^d + \tilde{u}_{i,j}^d) + \right. \right. \\
& + \frac{(h_\xi)_e}{2} (\tilde{u}_{i,j+1}^d + \tilde{u}_{i+1,j+1}^d - \tilde{u}_{i,j-1}^d - \tilde{u}_{i+1,j-1}^d) - \left. \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_e (\tilde{v}_{i+1,j}^d + \tilde{v}_{i,j}^d) \right) - \\
& - \frac{(\tilde{v}_t)_w d_w^n}{2(h_\xi)_w} \left(2(h_\eta)_w (\tilde{v}_{i,j}^d - \tilde{v}_{i-1,j}^d) - \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_w (\tilde{u}_{i,j}^d + \tilde{u}_{i-1,j}^d) + \right. \\
& + \frac{(h_\xi)_w}{2} (\tilde{u}_{i,j+1}^d + \tilde{u}_{i-1,j+1}^d - \tilde{u}_{i,j-1}^d - \tilde{u}_{i-1,j-1}^d) - \left. \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_w (\tilde{v}_{i,j}^d + \tilde{v}_{i-1,j}^d) \right) + \\
& + \frac{d_{i,j}^n (\tilde{v}_t)_{i,j}}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}} \left[\left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \left((h_\xi)_{i,j} \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^d - \tilde{u}_{i,j-1}^d}{2} + (h_\eta)_{i,j} \frac{\tilde{v}_{i+1,j}^d - \tilde{v}_{i-1,j}^d}{2} \right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\partial h_\xi}{\partial \eta} \right)_{i,j} \left(\left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_{i,j} \tilde{u}_{i,j}^d + (h_\eta)_{i,j} (\tilde{u}_{i+1,j}^d - \tilde{u}_{i-1,j}^d) \right) \right] + \\
& \left. + (\tilde{v}_t)_n d_n^n \frac{\tilde{u}_{i,j+1}^d + \tilde{u}_{i,j}^d}{(h_\eta)_n} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_n - (\tilde{v}_t)_s d_s^n \frac{\tilde{u}_{i,j}^d + \tilde{u}_{i,j-1}^d}{(h_\eta)_s} \left(\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} \right)_s \right\},
\end{aligned}$$

uz napomenu da se u koeficijentima $(*)S_j$ i $(*)O_j$ za sve brzine uzimaju vrednosti iz iteracije po ξ pravcu u skladu sa primenom *ADI* metode, što se radi lakšeg pisanja neće pojedinačno označavati.

Prilog D Propagacioni korak modela tečenja

Koeficijenti α_1 , β_1 i γ_1 iz jednačine (4.27) su

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{g}{h_\xi} \frac{\Delta t}{c_\xi} \theta d^n, \\ \beta_1 &= \tilde{u}^d - \frac{g \Delta t}{c_\xi} \left[\frac{\theta}{h_\xi} \frac{\partial z_b^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{1-\theta}{h_\xi} \frac{\partial z_b^n}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial d^n}{\partial \xi} \right] - \\ &\quad - \frac{g \Delta t}{2 c_\xi} \left[\frac{2\theta}{h_\xi} \frac{d^n}{\rho^{n+1}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^{n+1} + \frac{1-\theta}{h_\xi} \frac{d^n}{\rho^n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^n \right] - \\ &\quad - (1-\theta) \frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\xi^b)^n} \frac{\Delta t}{c_\xi} \left(\frac{\tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^d, \\ \gamma_1 &= \left\{ \tilde{u}^d - \frac{g \Delta t}{c_\xi} \left[\frac{\theta}{h_\xi} \frac{\partial z_b^{n+1}}{\partial \xi} + \frac{1-\theta}{h_\xi} \frac{\partial z_b^n}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial d^n}{\partial \xi} \right] - \right. \\ &\quad - \frac{g \Delta t}{2 c_\xi} \left[\frac{\theta}{h_\xi} \frac{d^n}{\rho^{n+1}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^{n+1} + \frac{1-\theta}{h_\xi} \frac{d^n}{\rho^n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^n \right] - \\ &\quad \left. - \frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\xi^b)^n} \frac{\Delta t}{c_\xi} \left(\frac{\tilde{u} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^d \right\} d^n.\end{aligned}$$

Koeficijenti α_2 , β_2 i γ_2 iz jednačine (4.28) su

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= -\frac{g}{h_\eta} \frac{\Delta t}{c_\eta} \theta d^n, \\ \beta_2 &= \tilde{v}^d - \frac{g \Delta t}{c_\eta} \left[\frac{\theta}{h_\eta} \frac{\partial z_b^{n+1}}{\partial \eta} + \frac{1-\theta}{h_\eta} \frac{\partial z_b^n}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial d^n}{\partial \eta} \right] - \\ &\quad - \frac{g \Delta t}{2 c_\eta} \left[\frac{2\theta}{h_\eta} \frac{d^n}{\rho^{n+1}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^{n+1} + \frac{1-\theta}{h_\eta} \frac{d^n}{\rho^n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^n \right] - \\ &\quad - (1-\theta) \frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\eta^b)^n} \frac{\Delta t}{c_\eta} \left(\frac{\tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^d, \\ \gamma_2 &= \left\{ \tilde{v}^d - \frac{g \Delta t}{c_\eta} \left[\frac{\theta}{h_\eta} \frac{\partial z_b^{n+1}}{\partial \eta} + \frac{1-\theta}{h_\eta} \frac{\partial z_b^n}{\partial \eta} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial d^n}{\partial \eta} \right] - \right. \\ &\quad - \frac{g \Delta t}{2 c_\eta} \left[\frac{\theta}{h_\eta} \frac{d^n}{\rho^{n+1}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^{n+1} + \frac{1-\theta}{h_\eta} \frac{d^n}{\rho^n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^n \right] - \\ &\quad \left. - \frac{C_f^n}{\cos(\varphi_\eta^b)^n} \frac{\Delta t}{c_\eta} \left(\frac{\tilde{v} \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{d} \right)^d \right\} d^n.\end{aligned}$$

Radi lakšeg pisanja uvodi se skraćeno obeležavanje za indekse računskih tačaka u skladu sa slikom 14.

$$e = i + \frac{1}{2}, j \quad w = i - \frac{1}{2}, j \quad n = i, j + \frac{1}{2} \quad s = i, j - \frac{1}{2}$$

Koeficijenti P_i , Q_i , R_i i S_i iz jednačine (4.32) su

$$P_i = -\theta (h_\eta)_w (b_1)_{i-1,j},$$

$$Q_i = \theta \left((h_\eta)_e (b_1)_{i,j} - (h_\eta)_w (a_1)_{i-1,j} \right) + \frac{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}}{\Delta t},$$

$$R_i = \theta (h_\eta)_e (a_1)_{i,j},$$

$$\begin{aligned} S_i = & \theta (h_\xi)_s (b_2)_{i,j-1} \Delta d_{i,j-1}^{(m)} - \left[\theta \left((h_\xi)_n (b_2)_{i,j} - (h_\xi)_s (a_2)_{i,j-1} \right) \right] \Delta d_{i,j}^{(m)} - \\ & - \theta (h_\xi)_n (a_2)_{i,j} \Delta d_{i,j+1}^{(m)} - \\ & - \theta \left((h_\eta)_e (c_1)_{i,j} - (h_\eta)_w (c_1)_{i-1,j} \right) - (1-\theta) \left((h_\eta)_e (U^{st})_{i,j}^n - (h_\eta)_w (U^{st})_{i-1,j}^n \right) - \\ & - \theta \left((h_\xi)_n (c_2)_{i,j} - (h_\xi)_s (c_2)_{i,j-1} \right) - (1-\theta) \left((h_\xi)_n (V^{st})_{i,j}^n - (h_\xi)_s (V^{st})_{i,j-1}^n \right). \end{aligned}$$

Koeficijenti P_j , Q_j , R_j i S_j iz jednačine (4.33) su

$$P_j = -\theta (h_\xi)_s (b_2)_{i,j-1},$$

$$Q_j = \theta \left((h_\xi)_n (b_2)_{i,j} - (h_\xi)_s (a_2)_{i,j-1} \right) + \frac{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}}{\Delta t},$$

$$R_j = \theta (h_\xi)_n (a_2)_{i,j},$$

$$\begin{aligned} S_j = & \theta (h_\eta)_w (b_1)_{i-1,j} \Delta d_{i-1,j}^{(*)} - \left[\theta \left((h_\eta)_e (b_1)_{i,j} - (h_\eta)_w (a_1)_{i-1,j} \right) \right] \Delta d_{i,j}^{(*)} - \\ & - \theta (h_\eta)_e (a_1)_{i,j} \Delta d_{i+1,j}^{(*)} - \\ & - \theta \left((h_\eta)_e (c_1)_{i,j} - (h_\eta)_w (c_1)_{i-1,j} \right) - (1-\theta) \left((h_\eta)_e (U^{st})_{i,j}^n - (h_\eta)_w (U^{st})_{i-1,j}^n \right) - \\ & - \theta \left((h_\xi)_n (c_2)_{i,j} - (h_\xi)_s (c_2)_{i,j-1} \right) - (1-\theta) \left((h_\xi)_n (V^{st})_{i,j}^n - (h_\xi)_s (V^{st})_{i,j-1}^n \right). \end{aligned}$$

Prilog E Advektivno-morfološki korak modela ponašanja nanosa

Suma u jednačini (4.37) je definisana sa

$$\begin{aligned} \sum_{D_L}^{D_1} \frac{S_{k_s}}{\rho d} \Delta t = & (1 - \theta) (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) \frac{(S_{k_s})_{D_L}}{\rho d_{D_L}} + \\ & + \sum_{\ell=L-1}^2 [(1 - \theta) t_{D_{\ell-1}} + (2\theta - 1) t_{D_\ell} - \theta t_{D_{\ell+1}}] \frac{(S_{k_s})_{D_\ell}}{\rho d_{D_\ell}} + \\ & + [(1 - \theta) t^{n+1} + (2\theta - 1) t_{D_1} - \theta t_{D_2}] \frac{(S_{k_s})_{D_1}}{\rho d_{D_1}}, \end{aligned}$$

dok je razlika vremena obeležena kao

$$\Delta t_1 = (t^{n+1} - t_{D_1}).$$

Diskretizovana divergencija fluksa vučenog nanosa u jednačinama (4.38) i (4.39) je data sa

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{dis}}(\phi_{k_s}) = & \theta \frac{(h_\eta)_{i+\frac{1}{2},j} [(\phi_\xi)_{k_s}]_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - (h_\eta)_{i-\frac{1}{2},j} [(\phi_\xi)_{k_s}]_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}} + \\ & + (1 - \theta) \frac{(h_\eta)_{i+\frac{1}{2},j} [(\phi_\xi)_{k_s}]_{i+\frac{1}{2},j}^n - (h_\eta)_{i-\frac{1}{2},j} [(\phi_\xi)_{k_s}]_{i-\frac{1}{2},j}^n}{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}} + \\ & + \theta \frac{(h_\xi)_{i,j+\frac{1}{2}} [(\phi_\eta)_{k_s}]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (h_\xi)_{i,j-\frac{1}{2}} [(\phi_\eta)_{k_s}]_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}} + \\ & + (1 - \theta) \frac{(h_\xi)_{i,j+\frac{1}{2}} [(\phi_\eta)_{k_s}]_{i,j+\frac{1}{2}}^n - (h_\xi)_{i,j-\frac{1}{2}} [(\phi_\eta)_{k_s}]_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}}. \end{aligned}$$

§ § §

Daju se izrazi za koeficijente iz sistema linearizovanih algebarskih jednačina (4.43). Prvo se navodi globalna jednačina održanja mase nanosa na dnu F^\dagger

$$\begin{aligned} a_{11} \Delta \mathfrak{s}_1 + a_{12} \Delta \mathfrak{s}_2 + a_{13} \Delta \mathfrak{s}_3 + \dots + a_{1,2k_s^*} \Delta \mathfrak{s}_{2k_s^*} + a_{1,2k_s^*+1} \Delta \mathfrak{s}_{2k_s^*+1} + \dots \\ \dots + a_{1,2K_s^*} \Delta \mathfrak{s}_{2K_s^*} + a_{1,2K_s^*+1} \Delta \mathfrak{s}_{2K_s^*+1} = b_1, \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left[\frac{\partial F^\dagger}{\partial z_b} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F^\dagger}{\partial \mathfrak{s}_1} \right]_{(m)}^{n+1} = \frac{\rho_s (1 - p_s)}{\Delta t} + \theta \frac{\partial S_1}{\partial z_b} + \dots + \theta \frac{\partial S_{K_s}}{\partial z_b}, \\ a_{12} &= \left[\frac{\partial F^\dagger}{\partial \tilde{C}_1} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F^\dagger}{\partial \mathfrak{s}_2} \right]_{(m)}^{n+1} = \theta \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{C}_1} + \dots + \theta \frac{\partial S_{K_s}}{\partial \tilde{C}_1}, \\ a_{13} &= \left[\frac{\partial F^\dagger}{\partial \beta_1} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F^\dagger}{\partial \mathfrak{s}_3} \right]_{(m)}^{n+1} = \theta \frac{\partial S_1}{\partial \beta_1} + \dots + \theta \frac{\partial S_{K_s}}{\partial \beta_1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \vdots \\
 a_{1,2k_s^*} &= \left[\frac{\partial F^\downarrow}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F^\downarrow}{\partial \mathfrak{s}_{2k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \theta \frac{\partial S_1}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}} + \dots + \theta \frac{\partial S_{K_s}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}}, \\
 a_{1,2k_s^*+1} &= \left[\frac{\partial F^\downarrow}{\partial \beta_{k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F^\downarrow}{\partial \mathfrak{s}_{2k_s^*+1}} \right]_{(m)}^{n+1} = \theta \frac{\partial S_1}{\partial \beta_{k_s^*}} + \dots + \theta \frac{\partial S_{K_s}}{\partial \beta_{k_s^*}}, \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

a slobodni član je

$$\begin{aligned}
 b_1 &= - [F^\downarrow]_{(m)}^{n+1} = - \rho_s (1 - p_s) \frac{{}^{(m)}z_b^{n+1} - {}^{(m)}z_b^n}{\Delta t} \\
 &\quad - \sum_{k_s=1}^{K_s} \left[\nabla_{\text{dis}}(\phi_{k_s}) + \theta {}^{(m)}S_{k_s}^{n+1} + (1 - \theta) S_{k_s}^n \right].
 \end{aligned}$$

Nakon ovoga se navodi advektivni korak jednačine održanja mase suspendovanog nanosa $F_{k_s}^{\rightsquigarrow}$ za proizvoljni granulometrijski interval (frakciju) k_s mešavine nanosa

$$\begin{aligned}
 & a_{2k_s,1} \Delta \mathfrak{s}_1 + a_{2k_s,2} \Delta \mathfrak{s}_2 + a_{2k_s,3} \Delta \mathfrak{s}_3 + \dots + a_{2k_s,2k_s^*} \Delta \mathfrak{s}_{2k_s^*} + a_{2k_s,2k_s^*+1} \Delta \mathfrak{s}_{2k_s^*+1} + \dots \\
 & \dots + a_{2k_s,2K_s^*} \Delta \mathfrak{s}_{2K_s^*} + a_{2k_s,2K_s^*+1} \Delta \mathfrak{s}_{2K_s^*+1} = b_{2k_s},
 \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}
 a_{2k_s,1} &= \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial z_b} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathfrak{s}_1} \right]_{(m)}^{n+1} = - \frac{\theta \Delta t_1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}}{\partial z_b}, \\
 a_{2k_s,2} &= \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \tilde{C}_1} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathfrak{s}_2} \right]_{(m)}^{n+1} = - \frac{\theta \Delta t_1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \tilde{C}_1}, \\
 a_{2k_s,3} &= \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \beta_1} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathfrak{s}_3} \right]_{(m)}^{n+1} = - \frac{\theta \Delta t_1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \beta_1}, \\
 & \vdots \\
 a_{2k_s,2k_s^*} &= \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathfrak{s}_{2k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \begin{cases} - \frac{\theta \Delta t_1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}}, & k_s \neq k_s^* \\ 1 - \frac{\theta \Delta t_1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}}, & k_s = k_s^* \end{cases} \\
 a_{2k_s,2k_s^*+1} &= \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \beta_{k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathfrak{s}_{2k_s^*+1}} \right]_{(m)}^{n+1} = - \frac{\theta \Delta t_1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \beta_{k_s^*}}, \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

a slobodni član je

$$b_{2k_s} = - [F_{k_s}^{\rightsquigarrow}]_{(m)}^{n+1} = - {}^{(m)}\tilde{C}_{k_s}^a + (\tilde{C}_{k_s})_{D_L} + \Delta t_1 \theta \frac{{}^{(m)}S_{k_s}^{n+1}}{\rho d^{n+1}} + \sum_{D_L}^{D_1} \frac{S_{k_s}}{\rho d} \Delta t.$$

Na kraju se navodi jednačina održanja mase nanosa u aktivnom sloju $F_{k_s}^{\curvearrowright}$ za proizvoljni granulometrijski interval (frakciju) k_s mešavine nanosa

$$a_{2k_s+1,1} \Delta \mathfrak{s}_1 + a_{2k_s+1,2} \Delta \mathfrak{s}_2 + a_{2k_s+1,3} \Delta \mathfrak{s}_3 + \dots + a_{2k_s+1,2k_s^*} \Delta \mathfrak{s}_{2k_s^*} + \\ + a_{2k_s+1,2k_s^*+1} \Delta \mathfrak{s}_{2k_s^*+1} + \dots + a_{2k_s+1,2K_s^*} \Delta \mathfrak{s}_{2K_s^*} + a_{2k_s+1,2K_s^*+1} \Delta \mathfrak{s}_{2K_s^*+1} = b_{2k_s+1},$$

gde je

$$a_{2k_s+1,1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial z_b} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial \mathfrak{s}_1} \right]_{(m)}^{n+1} = \frac{\rho_s (1-p_s)}{\Delta t} {}^{(m)}\beta_{k_s}^{n+1} \frac{\partial E_a}{\partial z_b} + \theta \frac{\partial S_{k_s}}{\partial z_b} - \frac{\partial (S_f)_{k_s}}{\partial z_b},$$

$$a_{2k_s+1,2} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial \tilde{C}_1} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial \mathfrak{s}_2} \right]_{(m)}^{n+1} = \frac{\rho_s (1-p_s)}{\Delta t} {}^{(m)}\beta_{k_s}^{n+1} \frac{\partial E_a}{\partial \tilde{C}_1} + \theta \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \tilde{C}_1} - \frac{\partial (S_f)_{k_s}}{\partial \tilde{C}_1},$$

$$a_{2k_s+1,3} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial \beta_1} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial \mathfrak{s}_3} \right]_{(m)}^{n+1} = \frac{\rho_s (1-p_s)}{\Delta t} {}^{(m)}\beta_{k_s}^{n+1} \frac{\partial E_a}{\partial \beta_1} + \theta \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \beta_1} - \frac{\partial (S_f)_{k_s}}{\partial \beta_1},$$

$$\vdots$$

$$a_{2k_s+1,2k_s^*} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial \mathfrak{s}_{2k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \frac{\rho_s (1-p_s)}{\Delta t} {}^{(m)}\beta_{k_s}^{n+1} \frac{\partial E_a}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}} + \theta \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}} - \frac{\partial (S_f)_{k_s}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}},$$

$$a_{2k_s+1,2k_s^*+1} = \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial \beta_{k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} =$$

$$= \left[\frac{\partial F_{k_s}^{\curvearrowright}}{\partial \mathfrak{s}_{2k_s^*+1}} \right]_{(m)}^{n+1} = \begin{cases} \frac{\rho_s (1-p_s)}{\Delta t} {}^{(m)}\beta_{k_s}^{n+1} \frac{\partial E_a}{\partial \beta_{k_s^*}} + \\ + \theta \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \beta_{k_s^*}} - \frac{\partial (S_f)_{k_s}}{\partial \beta_{k_s^*}}, & k_s \neq k_s^*, \\ \frac{\rho_s (1-p_s)}{\Delta t} {}^{(m)}E_a^{n+1} + \frac{\rho_s (1-p_s)}{\Delta t} {}^{(m)}\beta_{k_s}^{n+1} \frac{\partial E_a}{\partial \beta_{k_s^*}} + \\ + \theta \frac{\partial S_{k_s}}{\partial \beta_{k_s^*}} - \frac{\partial (S_f)_{k_s}}{\partial \beta_{k_s^*}}, & k_s = k_s^*, \end{cases}$$

$$\vdots$$

a slobodni član je

$$b_{2k_s+1} = - \left[F_{k_s}^{\curvearrowright} \right]_{(m)}^{n+1} = - \rho_s (1-p_s) \frac{{}^{(m)}\beta_{k_s}^{n+1} {}^{(m)}E_a^{n+1} - \beta_{k_s}^n E_a^n}{\Delta t} - \nabla_{\text{dis}}(\phi_{k_s}) - \\ - \theta {}^{(m)}S_{k_s}^{n+1} - (1-\theta) S_{k_s}^n + {}^{(m)}(S_f)_{k_s}.$$

§ § §

Prilog F Difuzioni korak modela ponašanja nanosa

Radi lakšeg pisanja uvodi se skraćeno obeležavanje za koeficijent ponderacije

$$\theta^* = \frac{\theta}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}}, \quad \theta^{**} = \frac{(1-\theta)}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}},$$

kao i za indekse računskih tačaka u skladu sa slikom 14.

$$\begin{aligned} e &= i + \frac{1}{2}, j & w &= i - \frac{1}{2}, j & n &= i, j + \frac{1}{2} & s &= i, j - \frac{1}{2} \\ E &= i + 1, j & W &= i - 1, j & N &= i, j + 1 & S &= i, j - 1 \end{aligned}$$

Daju se izrazi za koeficijente A_1 i A_2

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\theta^{**}}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e \left((\tilde{C}_{k_s})_E^a - (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a \right) d_e^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w \left((\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s})_W^a \right) d_w^{m+1} \right], \\ A_2 &= \frac{\theta^{**}}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n \left((\tilde{C}_{k_s})_N^a - (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a \right) d_n^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s \left((\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s})_S^a \right) d_s^{m+1} \right]. \end{aligned}$$

Izrazi za koeficijente u jednačinama (4.47) su

$$\begin{aligned} P_i &= - \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w d_w^{m+1}, \\ Q_i &= 1 + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e d_e^{m+1} + \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w d_w^{m+1} \right], \\ R_i &= - \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e d_e^{m+1}, \\ {}^{(m)}S_i &= G_{i,j} + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n \left({}^{(m)}(\tilde{C}_{k_s})_N^d - {}^{(m)}(\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d \right) d_n^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s \left({}^{(m)}(\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d - {}^{(m)}(\tilde{C}_{k_s})_S^d \right) d_s^{m+1} \right]. \end{aligned}$$

uz napomenu da se u koeficijentima ${}^{(m)}S_i$ za sve koncentracije uzimaju vrednosti iz prethodne iteracije (m) u skladu sa primenom ADI metode, pa se radi lakšeg pisanja to neće pojedinačno označavati.

Izrazi za koeficijente u jednačinama (4.48) su

$$\begin{aligned} P_j &= - \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s d_s^{m+1}, \\ Q_j &= 1 + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n d_n^{m+1} + \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s d_s^{m+1} \right], \\ R_j &= - \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n d_n^{m+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
^{(*)}S_j = G_{i,j} + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{n+1}} & \left[\left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e \left(^{(*)}(\tilde{C}_{k_s})_E^d - ^{(*)}(\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d \right) d_e^{n+1} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w \left(^{(*)}(\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d - ^{(*)}(\tilde{C}_{k_s})_W^d \right) d_w^{n+1} \right],
\end{aligned}$$

uz napomenu da se u koeficijentima $^{(*)}S_j$ za sve koncentracije uzimaju vrednosti iz iteracije po ξ pravcu u skladu sa primenom *ADI* metode, što se radi lakšeg pisanja neće pojedinačno označavati.

Prilog G Advektivno-interakcioni korak transporta zagađivača

Skraćeno obeležavanje članova izvora i članova interakcije iz jednačine (4.53) je dato sa izrazima

$$\Lambda^\dagger = \frac{1}{\rho d} \sum_{k_s=1}^{K_a} S_{k_s}^\dagger - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger + \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger,$$

$$\Lambda_{k_s}^\dagger = \frac{S_{k_s}^\dagger}{\rho d} + (\mu_1)_{k_s} \tilde{C}^\dagger - (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger.$$

Sume u jednačini (4.54) i (4.55) su definisane sa

$$\begin{aligned} \sum_{D_L}^{D_1} (\Lambda^\dagger) \Delta t &= (1 - \theta) (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) (\Lambda^\dagger)_{D_L} + \\ &+ \sum_{\ell=L-1}^2 [(1 - \theta) t_{D_{\ell-1}} + (2\theta - 1) t_{D_\ell} - \theta t_{D_{\ell+1}}] (\Lambda^\dagger)_{D_\ell} + \\ &+ [(1 - \theta) t^{n+1} + (2\theta - 1) t_{D_1} - \theta t_{D_2}] (\Lambda^\dagger)_{D_1}, \\ \sum_{D_L}^{D_1} (\Lambda_{k_s}^\dagger) \Delta t &= (1 - \theta) (t_{D_{L-1}} - t_{D_L}) (\Lambda_{k_s}^\dagger)_{D_L} + \\ &+ \sum_{\ell=L-1}^2 [(1 - \theta) t_{D_{\ell-1}} + (2\theta - 1) t_{D_\ell} - \theta t_{D_{\ell+1}}] (\Lambda_{k_s}^\dagger)_{D_\ell} + \\ &+ [(1 - \theta) t^{n+1} + (2\theta - 1) t_{D_1} - \theta t_{D_2}] (\Lambda_{k_s}^\dagger)_{D_1}, \end{aligned}$$

dok je razlika vremena obeležena kao

$$\Delta t_1 = (t^{n+1} - t_{D_1}).$$

Diskretizovana divergencija fluksa zagađivača adsorbovanog na zrna vučenog nanosa u jednačini (4.56) je data sa

$$\begin{aligned} \nabla_{\text{dis}} (\epsilon_{k_s}) &= \theta \frac{(h_\eta)_{i+\frac{1}{2},j} [(\epsilon_\xi)_{k_s}]_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - (h_\eta)_{i-\frac{1}{2},j} [(\epsilon_\xi)_{k_s}]_{i-\frac{1}{2},j}^{n+1}}{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}} + \\ &+ (1 - \theta) \frac{(h_\eta)_{i+\frac{1}{2},j} [(\epsilon_\xi)_{k_s}]_{i+\frac{1}{2},j}^n - (h_\eta)_{i-\frac{1}{2},j} [(\epsilon_\xi)_{k_s}]_{i-\frac{1}{2},j}^n}{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}} + \\ &+ \theta \frac{(h_\xi)_{i,j+\frac{1}{2}} [(\epsilon_\eta)_{k_s}]_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (h_\xi)_{i,j-\frac{1}{2}} [(\epsilon_\eta)_{k_s}]_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}} + \\ &+ (1 - \theta) \frac{(h_\xi)_{i,j+\frac{1}{2}} [(\epsilon_\eta)_{k_s}]_{i,j+\frac{1}{2}}^n - (h_\xi)_{i,j-\frac{1}{2}} [(\epsilon_\eta)_{k_s}]_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{(h_\xi)_{i,j} (h_\eta)_{i,j}}. \end{aligned}$$

§ § §

Daju se izrazi za koeficijente iz sistema linearizovanih algebarskih jednačina (4.60). Prvo se navodi jednačina održanja mase rastvorene zagađujuće materije G^\odot

$$\begin{aligned} a_{11} \Delta \mathbf{c}_1 + a_{12} \Delta \mathbf{c}_2 + a_{13} \Delta \mathbf{c}_3 + \dots + a_{1,2k_s^*} \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*} + a_{1,2k_s^*+1} \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*+1} + \dots \\ \dots + a_{1,2K_a^*} \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*} + a_{1,2K_a^*+1} \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*+1} = b_1, \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \tilde{C}^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \mathbf{c}_1} \right]_{(m)}^{n+1} = 1 - \Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \sum_{k_s=1}^{K_a} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}^\dagger} - \sum_{k_s=1}^{K_a} (\mu_1)_{k_s} \right), \\
a_{12} &= \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \mathbf{c}_2} \right]_{(m)}^{n+1} = -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \sum_{k_s=1}^{K_a} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} + (\mu_2)_1 \tilde{C}_1^{n+1} \right), \\
a_{13} &= \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \beta_1^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \mathbf{c}_3} \right]_{(m)}^{n+1} = -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \sum_{k_s=1}^{K_a} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_1^\dagger} \right), \\
&\vdots \\
a_{1,2k_s^*} &= \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \mathbf{c}_{2k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \sum_{k_s=1}^{K_a} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger} + (\mu_2)_{k_s^*} \tilde{C}_{k_s^*}^{n+1} \right), \\
a_{1,2k_s^*+1} &= \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G^\circ}{\partial \mathbf{c}_{2k_s^*+1}} \right]_{(m)}^{n+1} = -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \sum_{k_s=1}^{K_a} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger} \right), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

a slobodni član je

$$b_1 = - [G^\circ]_{(m)}^{n+1} = - {}^{(m)}(\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^a + (\tilde{C}^\dagger)_{DL} + \Delta t_1 \theta {}^{(m)}(\Lambda^\dagger)_{i,j}^{n+1} + \sum_{D_L}^{D_1} (\Lambda^\dagger) \Delta t.$$

Nakon ovoga se navodi advektivni korak jednačine održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna suspendovanog nanosa granulometrijskog intervala (frakcije) k_s mešavine nanosa $G_{k_s}^{\rightsquigarrow}$

$$\begin{aligned}
&a_{2k_s,1} \Delta \mathbf{c}_1 + a_{2k_s,2} \Delta \mathbf{c}_2 + a_{2k_s,3} \Delta \mathbf{c}_3 + \dots + a_{2k_s,2k_s^*} \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*} + a_{2k_s,2k_s^*+1} \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*+1} + \dots \\
&\dots + a_{2k_s,2K_a^*} \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*} + a_{2k_s,2K_a^*+1} \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*+1} = b_{2k_s},
\end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned}
a_{2k_s,1} &= \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \tilde{C}^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_1} \right]_{(m)}^{n+1} = -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}^\dagger} + (\mu_1)_{k_s} \right), \\
a_{2k_s,2} &= \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_2} \right]_{(m)}^{n+1} = -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} \right), \\
a_{2k_s,3} &= \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \beta_1^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_3} \right]_{(m)}^{n+1} = -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_1^\dagger} \right), \\
&\vdots \\
a_{2k_s,2k_s^*} &= \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_{2k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \begin{cases} -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger} \right), & k_s \neq k_s^* \\ (\tilde{C}_{k_s})^a - \\ -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger} - (\mu_2)_{k_s} \tilde{C}_{k_s} \right), & k_s = k_s^* \end{cases}
\end{aligned}$$

$$a_{2k_s, 2k_s^*+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_{2k_s^*+1}} \right]_{(m)}^{n+1} = -\Delta t_1 \theta \left(\frac{1}{\rho d^{n+1}} \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger} \right),$$

$$\vdots$$

a slobodni član je

$$b_{2k_s} = - \left[G_{k_s}^{\rightsquigarrow} \right]_{(m)}^{n+1} = - (\tilde{C}_{k_s}^{(m)} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)^a + (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\dagger)_{DL} + \sum_{DL}^{D_1} (\Lambda_{k_s}^\dagger) \Delta t + \Delta t_1 \theta^{(m)} (\Lambda_{k_s}^\dagger)^{n+1}.$$

Na kraju se navodi jednačina održanja mase zagađujuće materije adsorbovane na zrna nanosa granulometrijskog intervala (frakcije) k_s mešavine nanosa u aktivnom sloju $F_{k_s}^{\rightsquigarrow}$

$$a_{2k_s+1,1} \Delta \mathbf{c}_1 + a_{2k_s+1,2} \Delta \mathbf{c}_2 + a_{2k_s+1,3} \Delta \mathbf{c}_3 + \dots + a_{2k_s+1, 2k_s^*} \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*} +$$

$$+ a_{2k_s+1, 2k_s^*+1} \Delta \mathbf{c}_{2k_s^*+1} + \dots + a_{2k_s+1, 2K_a^*} \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*} + a_{2k_s+1, 2K_a^*+1} \Delta \mathbf{c}_{2K_a^*+1} = b_{2k_s+1},$$

gde je

$$a_{2k_s+1,1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_1} \right]_{(m)}^{n+1} = \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} + \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} - \frac{\partial (S_f^\dagger)_{k_s}}{\partial \tilde{C}_1^\dagger},$$

$$a_{2k_s+1,2} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_2} \right]_{(m)}^{n+1} = \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} + \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_1^\dagger} - \frac{\partial (S_f^\dagger)_{k_s}}{\partial \tilde{C}_1^\dagger},$$

$$a_{2k_s+1,3} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \beta_1^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_3} \right]_{(m)}^{n+1} = \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_1^\dagger} + \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_1^\dagger} - \frac{\partial (S_f^\dagger)_{k_s}}{\partial \beta_1^\dagger},$$

$$\vdots$$

$$a_{2k_s+1, 2k_s^*} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_{2k_s^*}} \right]_{(m)}^{n+1} = \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger} + \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger} - \frac{\partial (S_f^\dagger)_{k_s}}{\partial \tilde{C}_{k_s^*}^\dagger},$$

$$a_{2k_s+1, 2k_s^*+1} = \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger} \right]_{(m)}^{n+1} =$$

$$= \left[\frac{\partial G_{k_s}^{\rightsquigarrow}}{\partial \mathbf{c}_{2k_s^*+1}} \right]_{(m)}^{n+1} = \begin{cases} \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger} + \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger} - \frac{\partial (S_f^\dagger)_{k_s}}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger}, & k_s \neq k_s^*, \\ \frac{\rho_s (1-p_s)}{\Delta t} (\beta_k E_a)^{n+1} + \\ + \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger} + \theta \frac{\partial S_{k_s}^\dagger}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger} - \frac{\partial (S_f^\dagger)_{k_s}}{\partial \beta_{k_s^*}^\dagger}, & k_s = k_s^*, \end{cases}$$

$$\vdots$$

a slobodni član je

$$b_{2k_s+1} = - \left[G_{k_s}^{\rightsquigarrow} \right]_{(m)}^{n+1} = - \rho_s (1-p_s) \frac{(\beta_{k_s}^{(m)} \beta_{k_s}^\dagger E_a)^{n+1} - (\beta_{k_s} \beta_{k_s}^\dagger E_a)^n}{\Delta t} - \nabla_{\text{dis}}(\epsilon_{k_s}) -$$

$$- \theta \left({}^{(m)}S_{k_s}^\dagger + {}^{(m)}S_{k_s}^\dagger \right)^{n+1} - (1-\theta) (S_{k_s}^\dagger + S_{k_s}^\dagger)^n + {}^{(m)}(S_f^\dagger)_{k_s}.$$

Prilog H Difuzioni korak transporta zagađivača

Radi lakšeg pisanja uvodi se skraćeno obeležavanje za koeficijent ponderacije

$$\theta^* = \frac{\theta}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}}, \quad \theta^{**} = \frac{(1-\theta)}{(h_\eta)_{i,j} (h_\xi)_{i,j}},$$

kao i za indekse računskih tačaka u skladu sa slikom 14.

$$\begin{aligned} e &= i + \frac{1}{2}, j & w &= i - \frac{1}{2}, j & n &= i, j + \frac{1}{2} & s &= i, j - \frac{1}{2} \\ E &= i + 1, j & W &= i - 1, j & N &= i, j + 1 & S &= i, j - 1 \end{aligned}$$

Daju se izrazi za koeficijente A_1^\dagger i A_2^\dagger

$$\begin{aligned} A_1^\dagger &= \frac{\theta^{**}}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e \left((\tilde{C}^\dagger)_E^a - (\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^a \right) d_e^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w \left((\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^a - (\tilde{C}^\dagger)_W^a \right) d_w^{m+1} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^\dagger &= \frac{\theta^{**}}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n \left((\tilde{C}^\dagger)_N^a - (\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^a \right) d_n^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s \left((\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^a - (\tilde{C}^\dagger)_S^a \right) d_s^{m+1} \right]. \end{aligned}$$

Daju se izrazi za koeficijente A_1^\ddagger i A_2^\ddagger

$$\begin{aligned} A_1^\ddagger &= \frac{\theta^{**}}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e \left((\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_E^a - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^a \right) d_e^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w \left((\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_W^a \right) d_w^{m+1} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^\ddagger &= \frac{\theta^{**}}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n \left((\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_N^a - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^a \right) d_n^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s \left((\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^a - (\tilde{C}_{k_s} \tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_S^a \right) d_s^{m+1} \right]. \end{aligned}$$

Izrazi za koeficijente u jednačinama (4.63) su

$$\begin{aligned} P_i^\dagger &= -\frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w d_w^{m+1}, \\ Q_i^\dagger &= 1 + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e d_e^{m+1} + \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w d_w^{m+1} \right], \\ R_i^\dagger &= -\frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e d_e^{m+1}, \\ {}^{(m)}S_i^\dagger &= G_{i,j}^\dagger + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n \left({}^{(m)}(\tilde{C}^\dagger)_N^d - {}^{(m)}(\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^d \right) d_n^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s \left({}^{(m)}(\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^d - {}^{(m)}(\tilde{C}^\dagger)_S^d \right) d_s^{m+1} \right]. \end{aligned}$$

uz napomenu da se u koeficijentima ${}^{(m)}S_i^\dagger$ za sve koncentracije uzimaju vrednosti iz prethodne iteracije (m) u skladu sa primenom *ADI* metode, pa se radi lakšeg pisanja to neće pojedinačno označavati.

Izrazi za koeficijente u jednačinama (4.64) su

$$\begin{aligned} P_i^\dagger &= -\frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w d_w^{m+1} (\tilde{C}_{k_s})_W^d, \\ Q_i^\dagger &= \left\{ 1 + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e d_e^{m+1} + \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w d_w^{m+1} \right] \right\} (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d, \\ R_i^\dagger &= -\frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e d_e^{m+1} (\tilde{C}_{k_s})_E^d, \\ {}^{(m)}S_i^\dagger &= G_{i,j}^\dagger + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n^d \left((\tilde{C}_{k_s})_N^d {}^{(m)}(\tilde{C}_{k_s})_N^d - (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d {}^{(m)}(\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d \right) d_n^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s^d \left((\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d {}^{(m)}(\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d - (\tilde{C}_{k_s})_S^d {}^{(m)}(\tilde{C}_{k_s})_S^d \right) d_s^{m+1} \right]. \end{aligned}$$

uz napomenu da se u koeficijentima ${}^{(m)}S_i^\dagger$ za sve koncentracije uzimaju vrednosti iz prethodne iteracije (m) u skladu sa primenom *ADI* metode, pa se radi lakšeg pisanja to neće pojedinačno označavati.

Izrazi za koeficijente u jednačinama (4.65) su

$$\begin{aligned} P_j^\dagger &= -\frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s d_s^{m+1}, \\ Q_j^\dagger &= 1 + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n d_n^{m+1} + \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s d_s^{m+1} \right], \\ R_j^\dagger &= -\frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n d_n^{m+1}, \\ {}^{(*)}S_j^\dagger &= G_{i,j}^\dagger + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e \left({}^{(*)}(\tilde{C}^\dagger)_E^d - {}^{(*)}(\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^d \right) d_e^{m+1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w \left({}^{(*)}(\tilde{C}^\dagger)_{i,j}^d - {}^{(*)}(\tilde{C}^\dagger)_W^d \right) d_w^{m+1} \right], \end{aligned}$$

uz napomenu da se u koeficijentima ${}^{(*)}S_j^\dagger$ za sve koncentracije uzimaju vrednosti iz iteracije po ξ pravcu u skladu sa primenom *ADI* metode, što se radi lakšeg pisanja neće pojedinačno označavati.

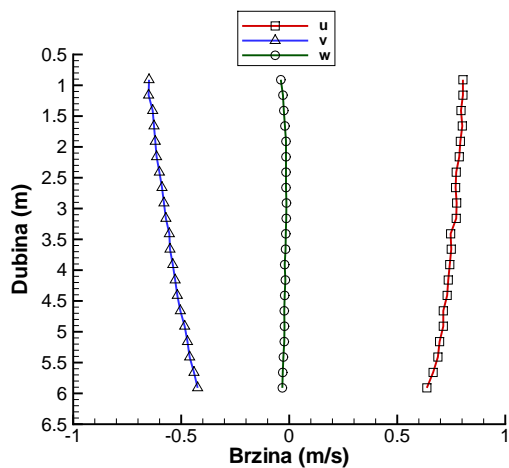
Izrazi za koeficijente u jednačinama (4.66) su

$$\begin{aligned} P_j^\dagger &= -\frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s d_s^{m+1} (\tilde{C}_{k_s})_S^d, \\ Q_j^\dagger &= \left\{ 1 + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left[\left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n d_n^{m+1} + \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_s (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_s d_s^{m+1} \right] \right\} (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d, \\ R_j^\dagger &= -\frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{m+1}} \left(\frac{h_\xi}{h_\eta} \right)_n (\tilde{D}_\eta^{\text{dd}})_n d_n^{m+1} (\tilde{C}_{k_s})_N^d, \end{aligned}$$

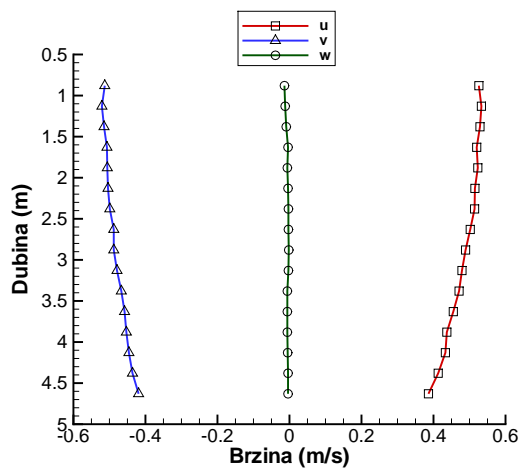
$$\begin{aligned}
^{(*)}S_j^\ddagger = & G_{i,j}^\ddagger + \frac{\theta^* \Delta t}{d_{i,j}^{n+1}} \left[\left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_e (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_e \left((\tilde{C}_{k_s})_E^d \ ^{(*)}(\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_E^d - (\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d \ ^{(*)}(\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^d \right) d_e^{n+1} - \right. \\
& \left. - \left(\frac{h_\eta}{h_\xi} \right)_w (\tilde{D}_\xi^{\text{dd}})_w \left((\tilde{C}_{k_s})_{i,j}^d \ ^{(*)}(\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_{i,j}^d - (\tilde{C}_{k_s})_W^d \ ^{(*)}(\tilde{C}_{k_s}^\ddagger)_W^d \right) d_w^{n+1} \right],
\end{aligned}$$

uz napomenu da se u koeficijentima $^{(*)}S_j^\ddagger$ za sve koncentracije uzimaju vrednosti iz iteracije po ξ pravcu u skladu sa primenom *ADI* metode, što se radi lakšeg pisanja neće pojedinačno označavati.

Prilog I Deonica Dunava između Mohača (H) i Bezdana (SRB)

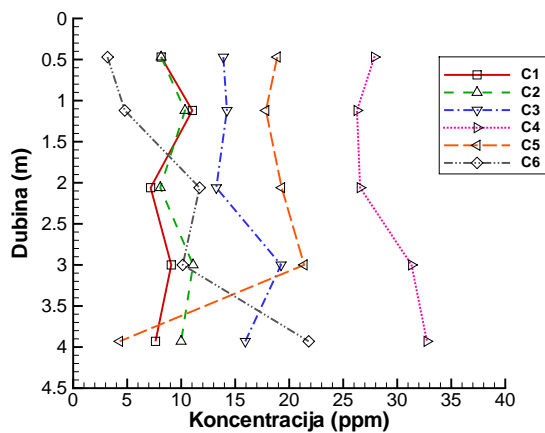


(a) MP3-V5

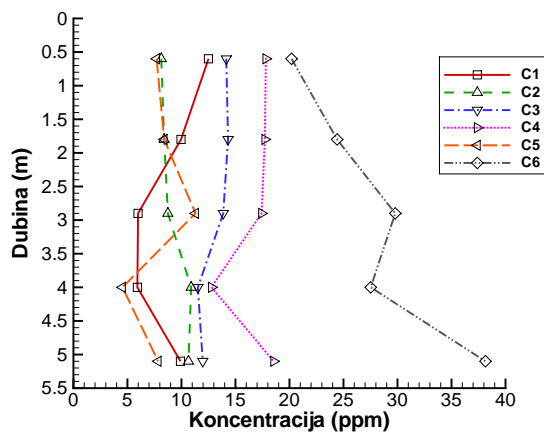


(b) MP6-V1

Slika 70: Raspored brzina po dubini toka

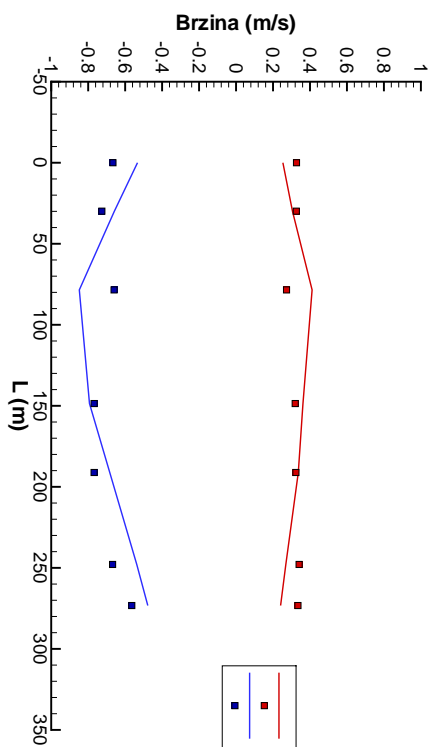


(a) MP3-V3

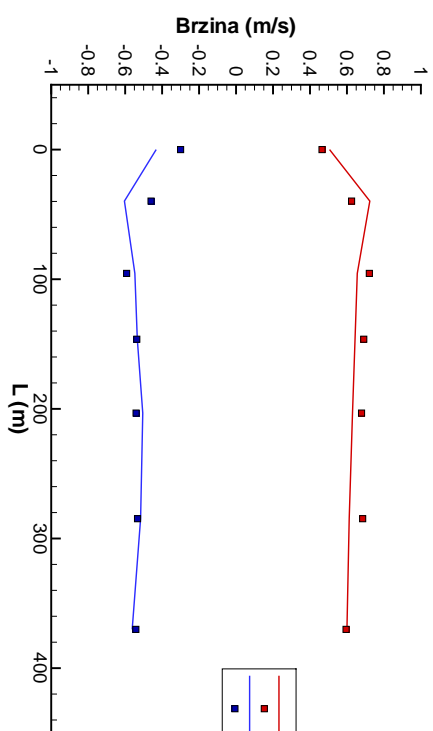


(b) MP7-V4

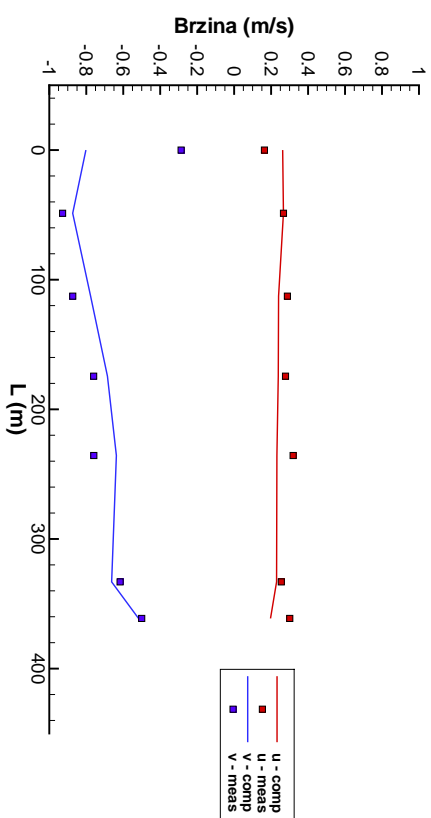
Slika 71: Raspored koncentracija suspendovanog nanosa po dubini toka



(a) Merni presjek MP1

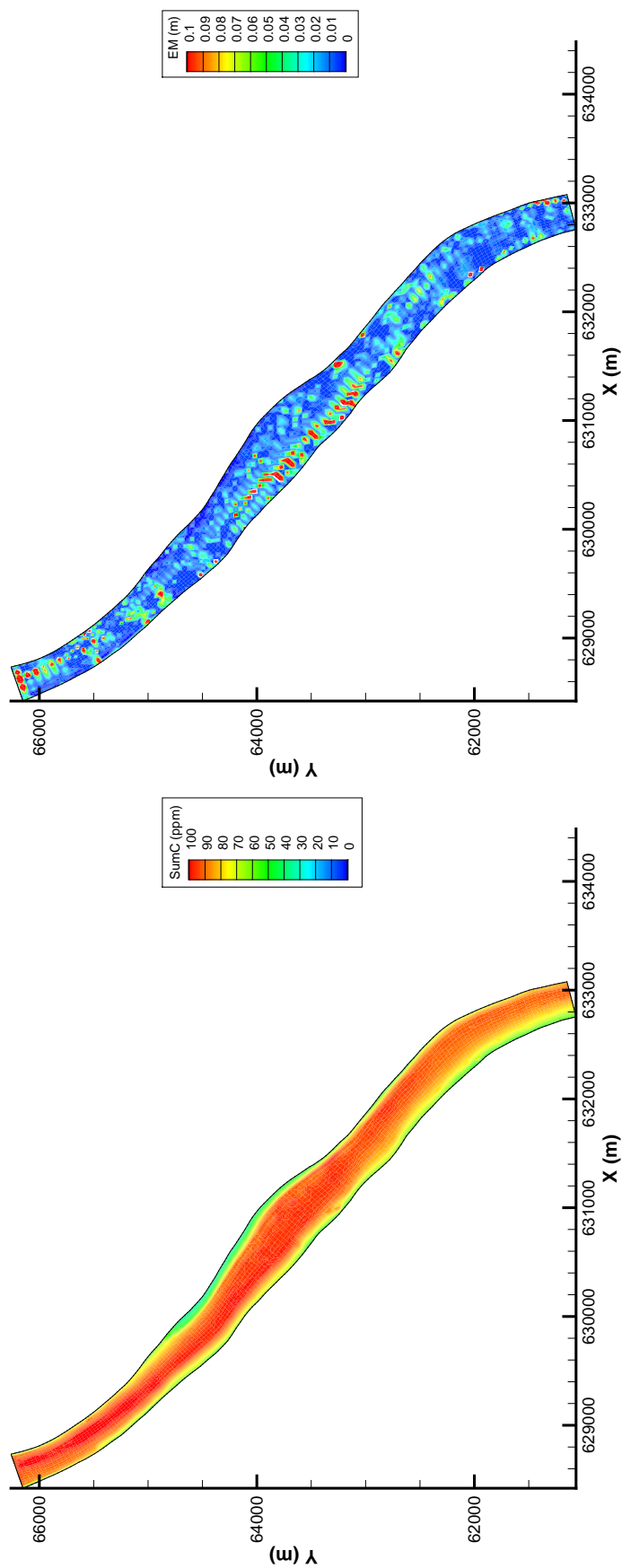


(b) Merni presjek MP5



(c) Merni presjek MP7

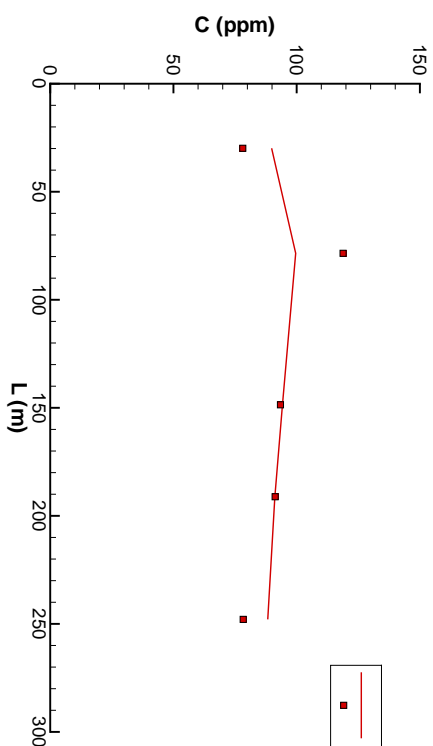
Slika 72: Merene i računute brzine u mernim presjecima 1, 5 i 7



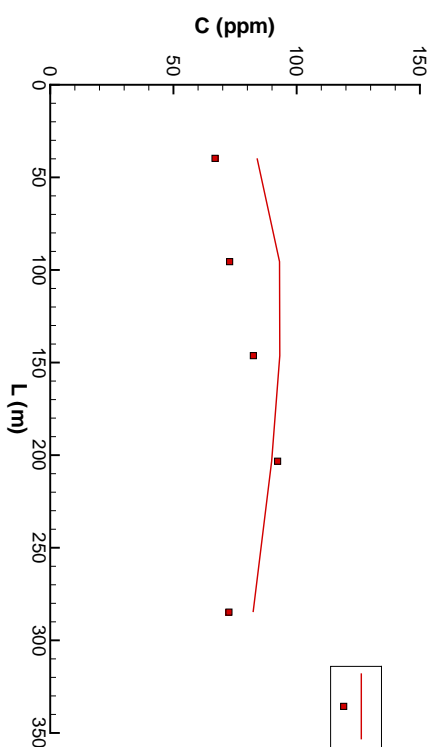
(a) Ukupna koncentracija suspendovanog nanosa

(b) Debljina aktivnog sloja

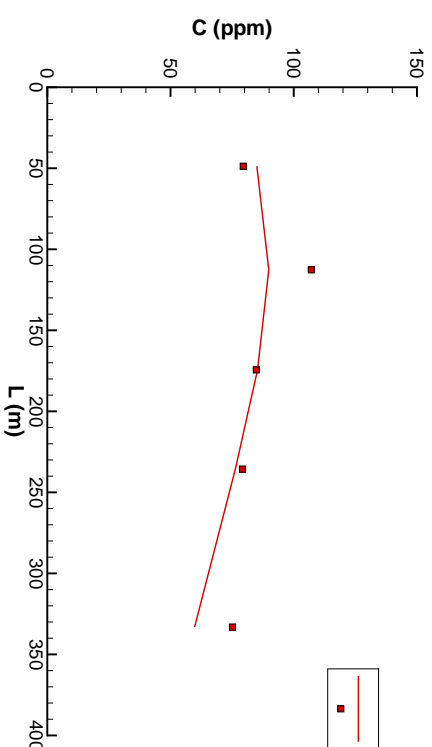
Slika 73: Sračunata ukupna koncentracija suspendovanog nanosa i debljina aktivnog sloja



(a) Merni presjek MP1

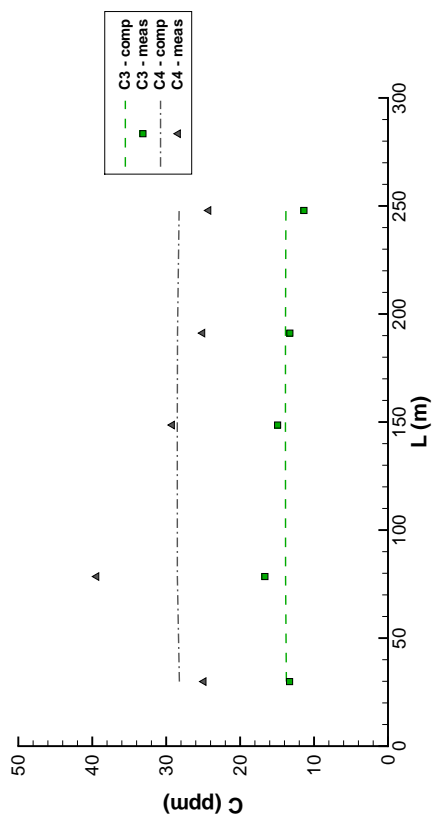


(b) Merni presjek MP5

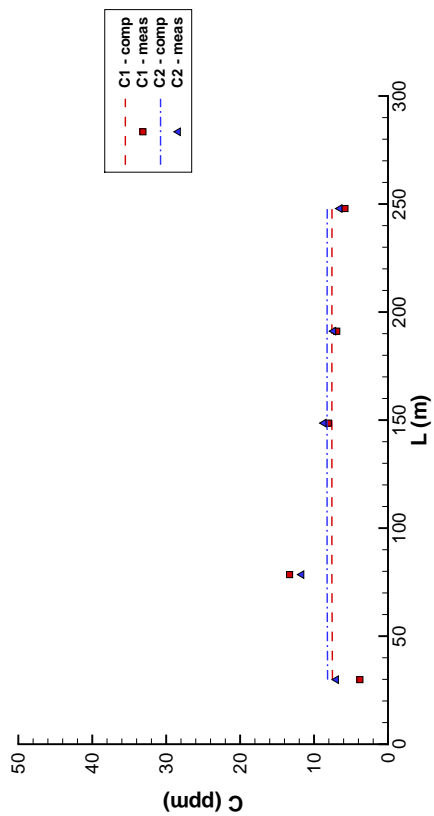


(c) Merni presjek MP7

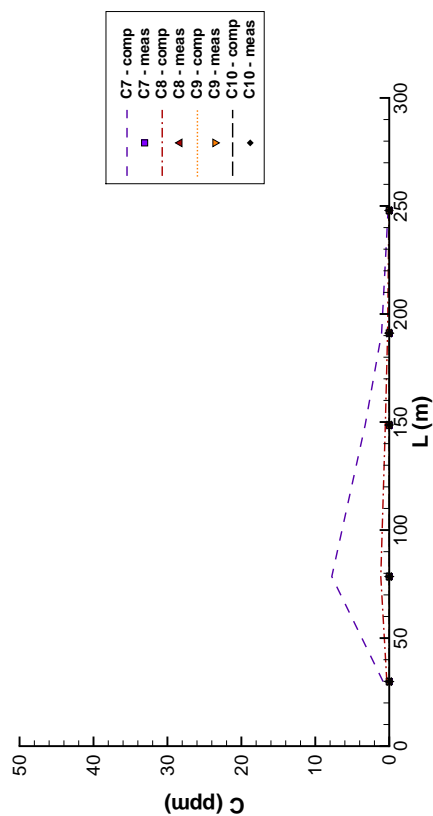
Slika 74: *Merene i računute ukupne koncentracije suspendovanog nanosa u mernim presjecima 1, 5 i 7*



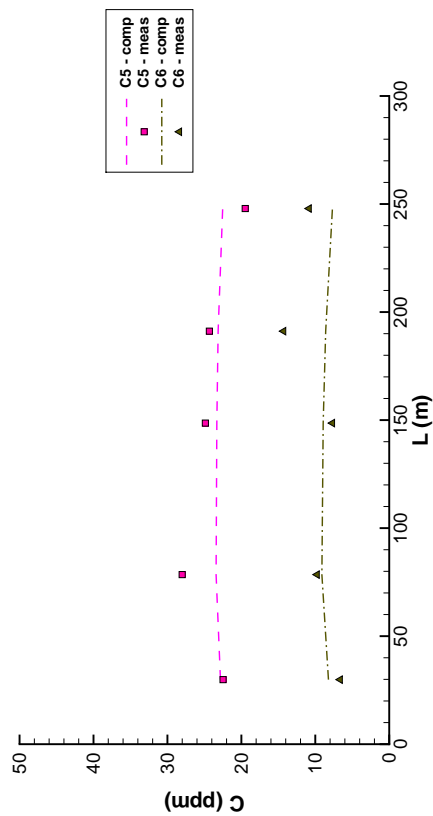
(a) Merni presek MP1, $k_s = 1, 2$



(b) Merni presek MP1, $k_s = 3, 4$

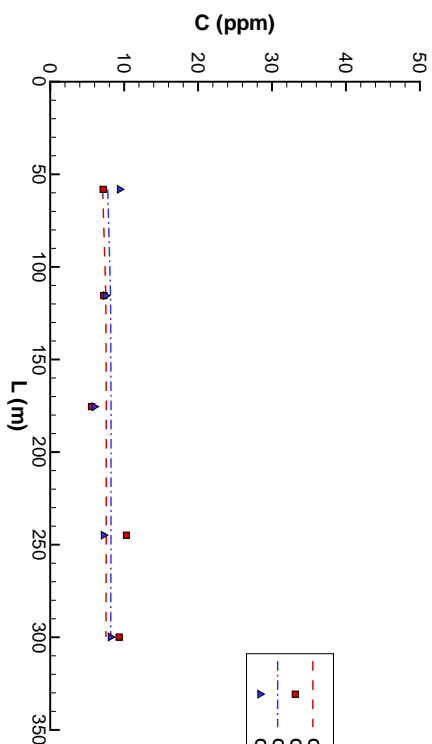
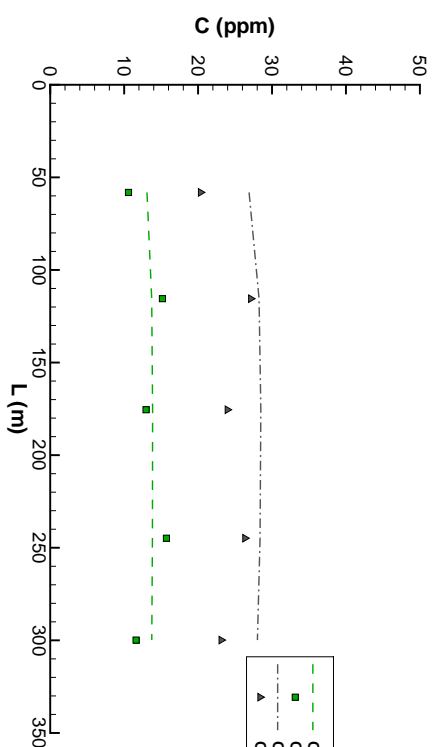
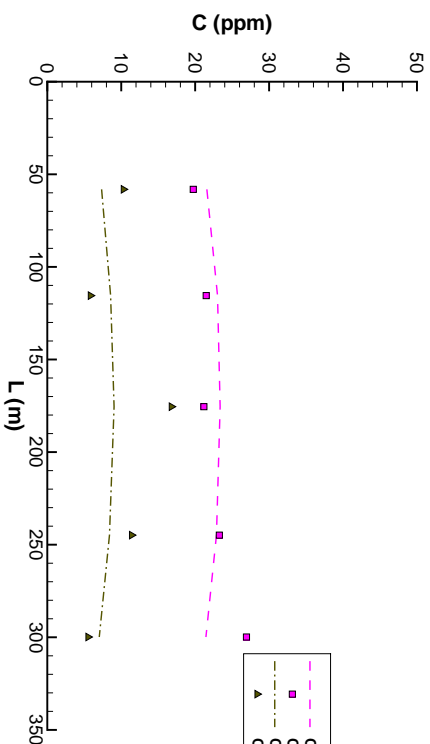
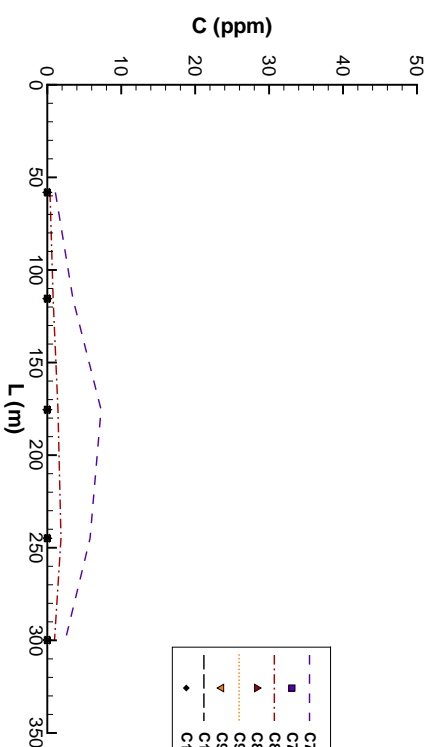


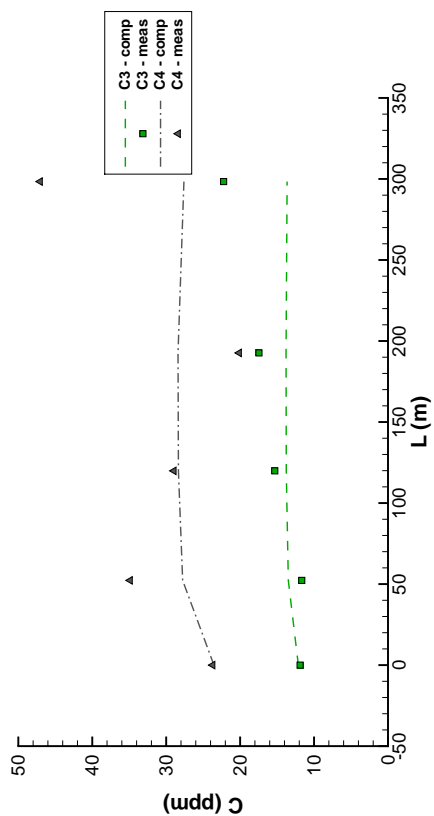
(c) Merni presek MP1, $k_s = 5, 6$



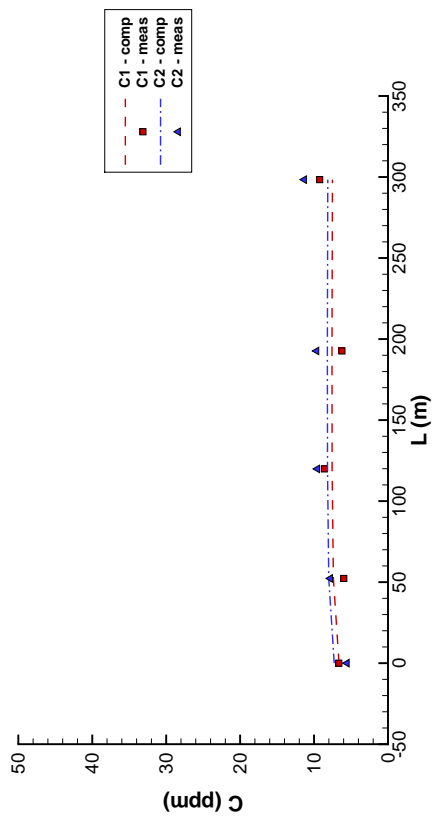
(d) Merni presek MP1, $k_s = 7, 8, 9, 10$

Slika 75: Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u mernom preseku 1

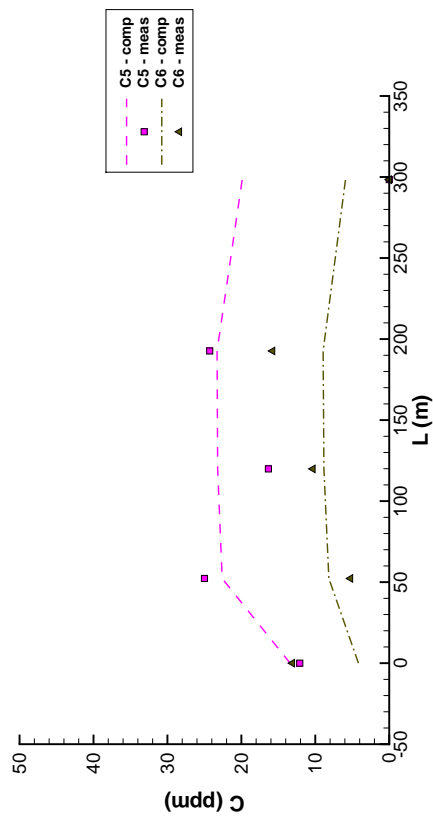
(a) Merni presjek MP2, $k_s = 1, 2$ (b) Merni presjek MP2, $k_s = 3, 4$ (c) Merni presjek MP2, $k_s = 5, 6$ (d) Merni presjek MP2, $k_s = 7, 8, 9, 10$ **Slika 76:** *Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u mernom presjeku 2*



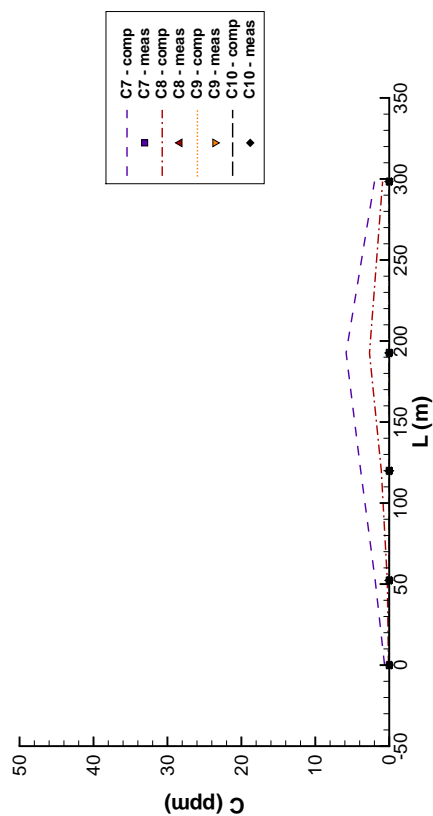
(a) Merni presek MP3, $k_s = 1, 2$



(b) Merni presek MP3, $k_s = 3, 4$

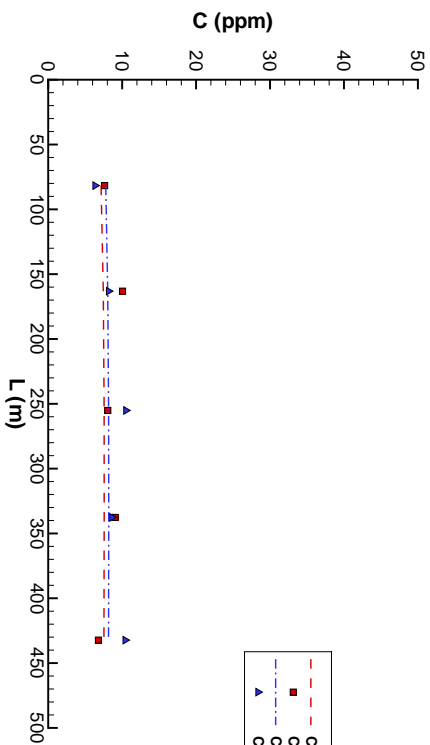


(c) Merni presek MP3, $k_s = 5, 6$

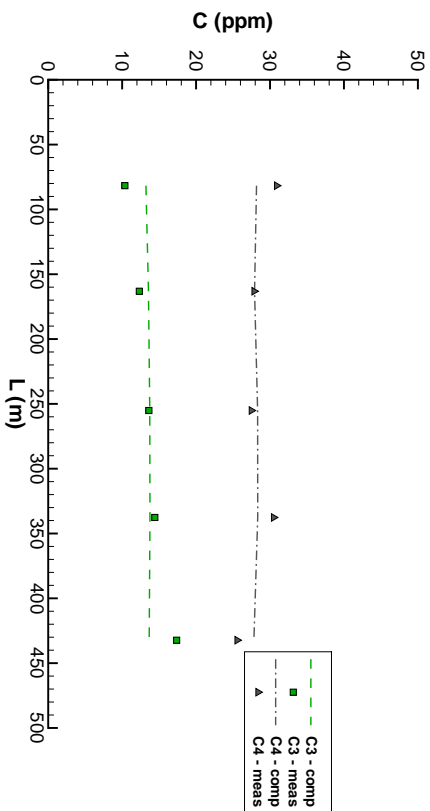


(d) Merni presek MP3, $k_s = 7, 8, 9, 10$

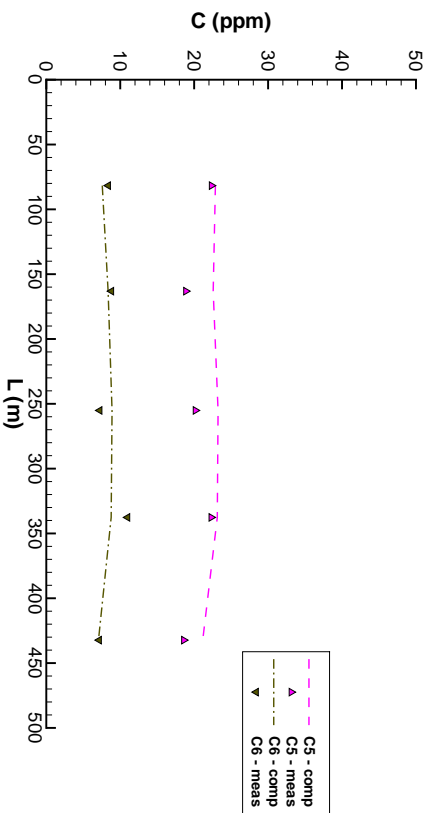
Slika 77: Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u mernom preseku 3



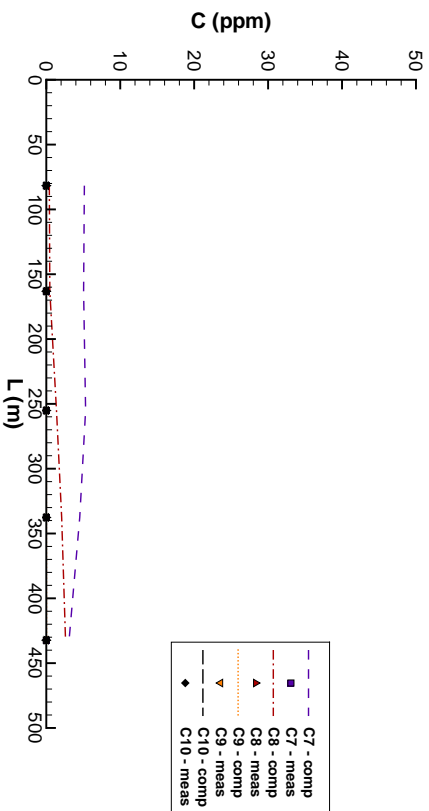
(a) Meriti presjek MP4, $k_s = 1, 2$



(b) Meriti presjek MP4, $k_s = 3, 4$

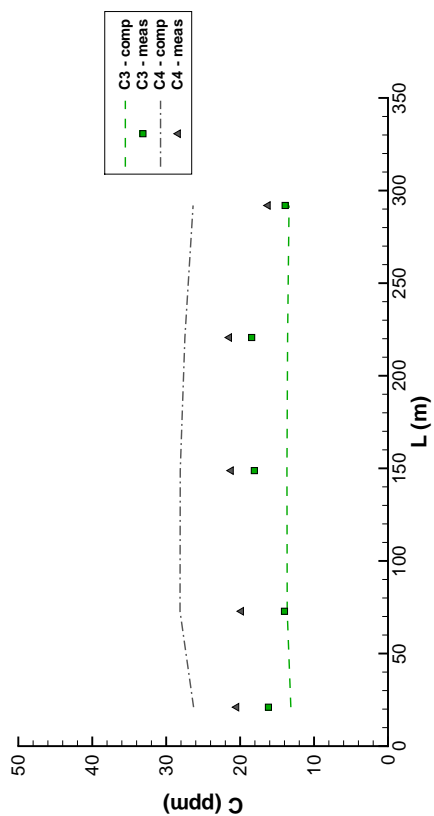


(c) Meriti presjek MP4, $k_s = 5, 6$

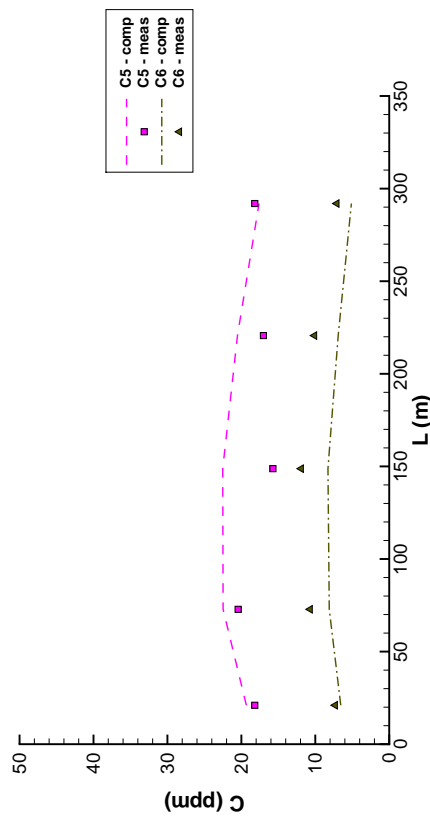


(d) Meriti presjek MP4, $k_s = 7, 8, 9, 10$

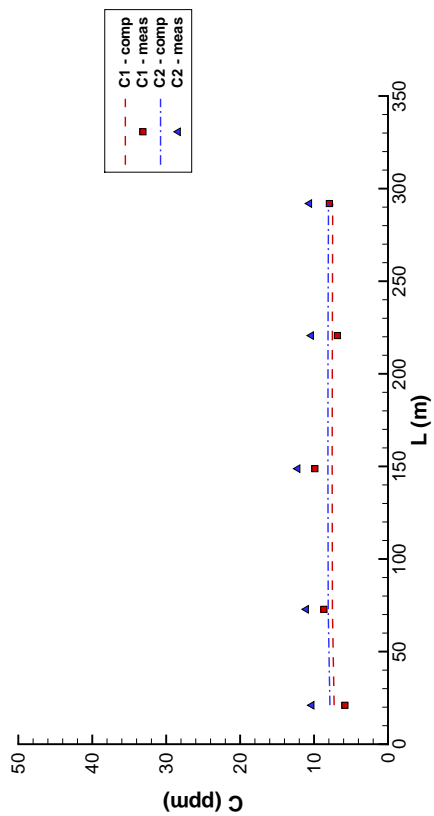
Slika 78: *Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u mernom presjeku 4*



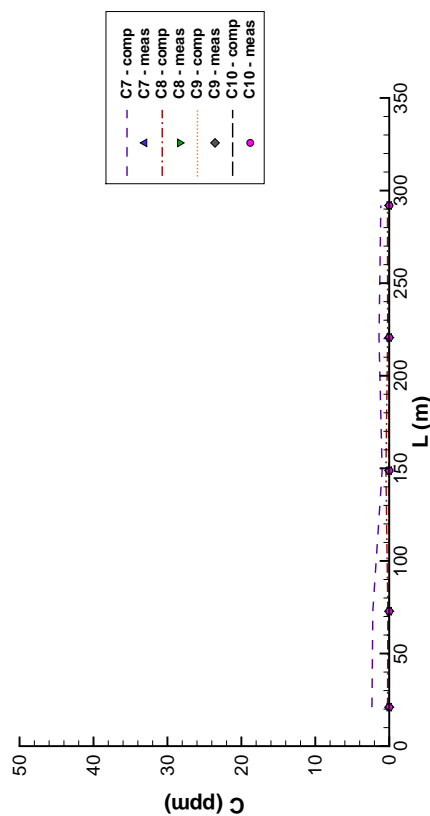
(a) Merni presek MP6, $k_s = 1, 2$



(b) Merni presek MP6, $k_s = 3, 4$

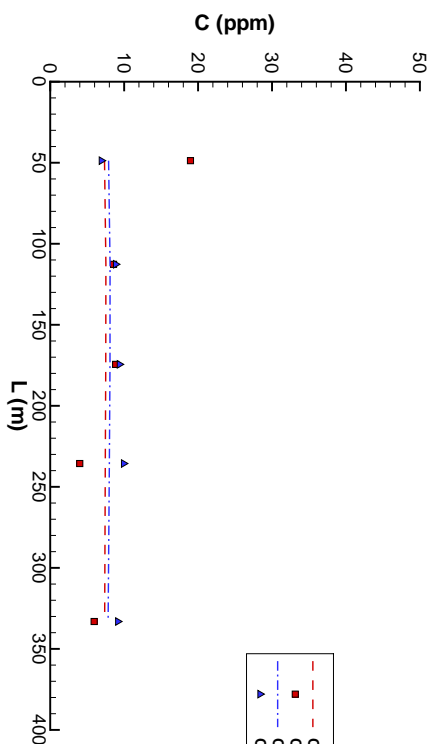
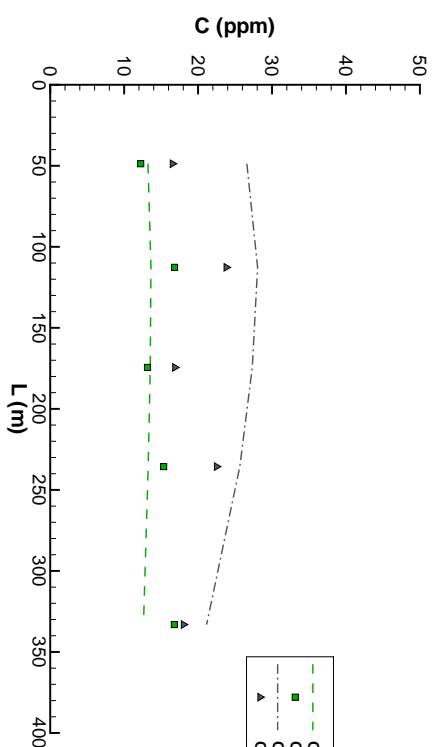
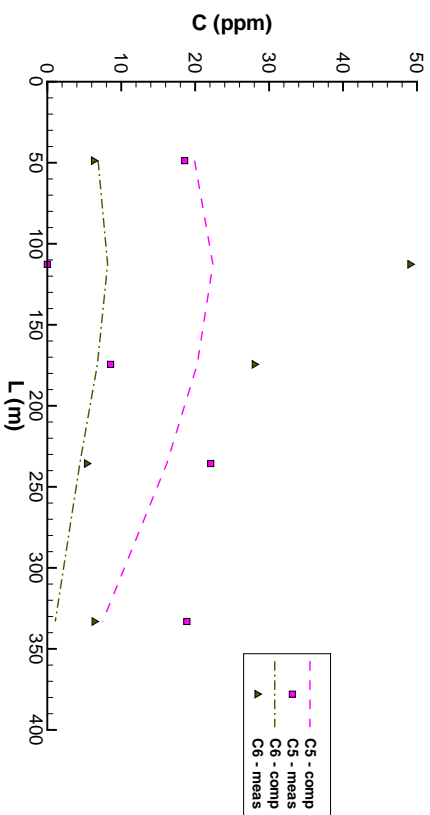
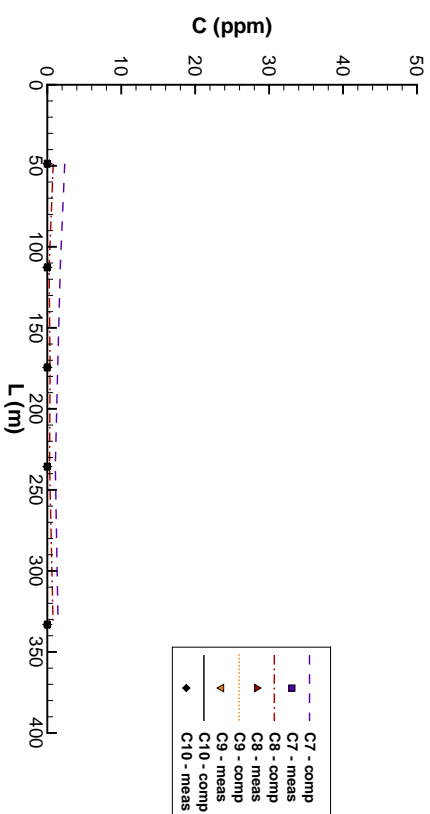


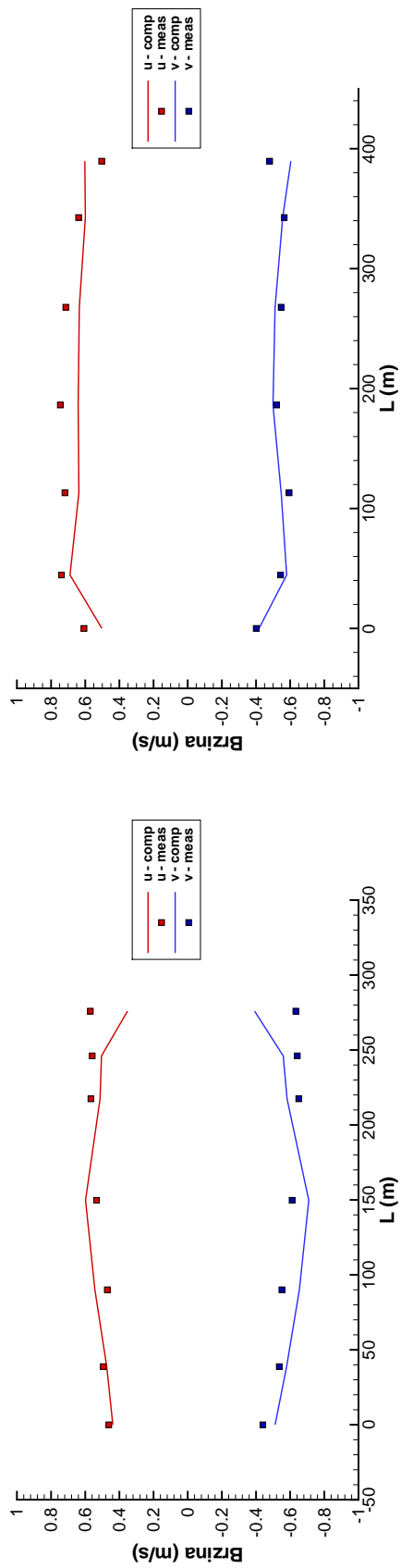
(c) Merni presek MP6, $k_s = 5, 6$



(d) Merni presek MP6, $k_s = 7, 8, 9, 10$

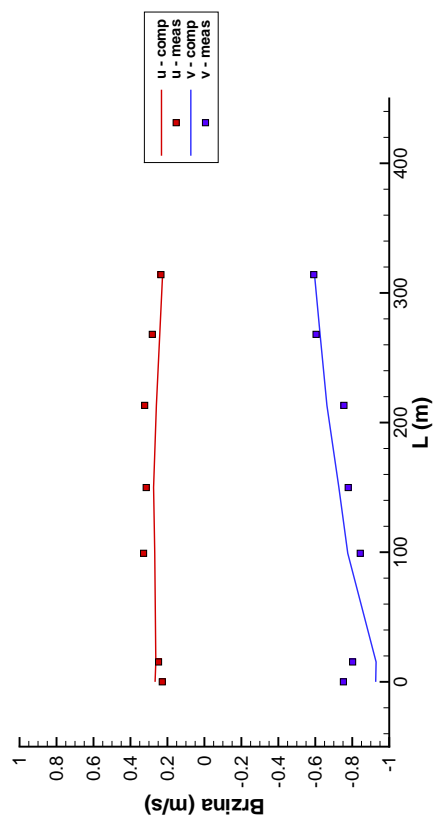
Slika 79: Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u mernom preseku 6

(a) Merni presjek MP7, $k_s = 1, 2$ (b) Merni presjek MP7, $k_s = 3, 4$ (c) Merni presjek MP7, $k_s = 5, 6$ (d) Merni presjek MP7, $k_s = 7, 8, 9, 10$ **Slika 80:** *Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u mernom presjeku 7*



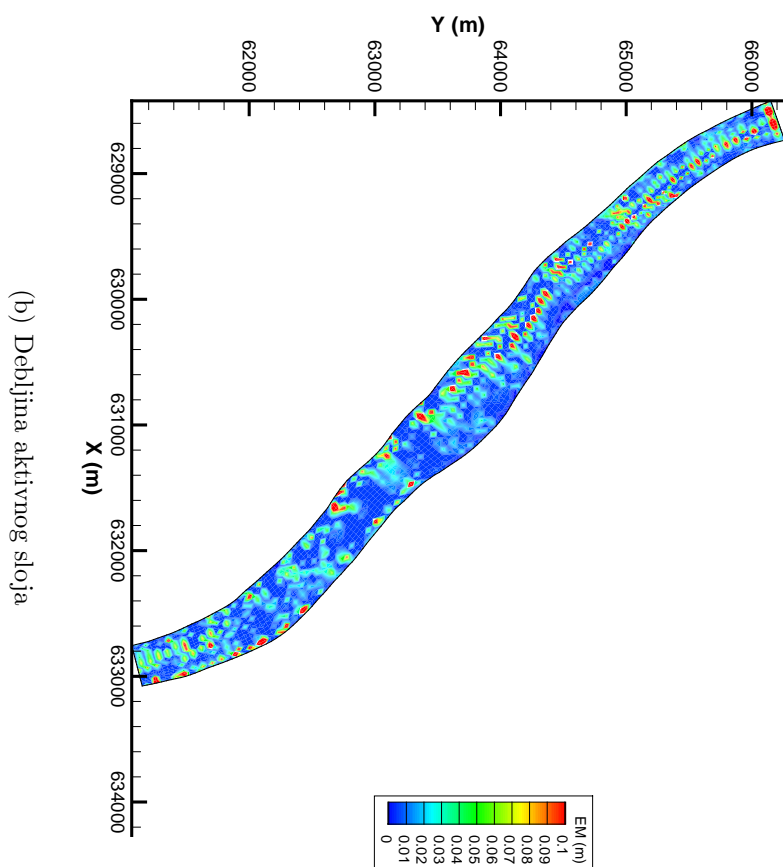
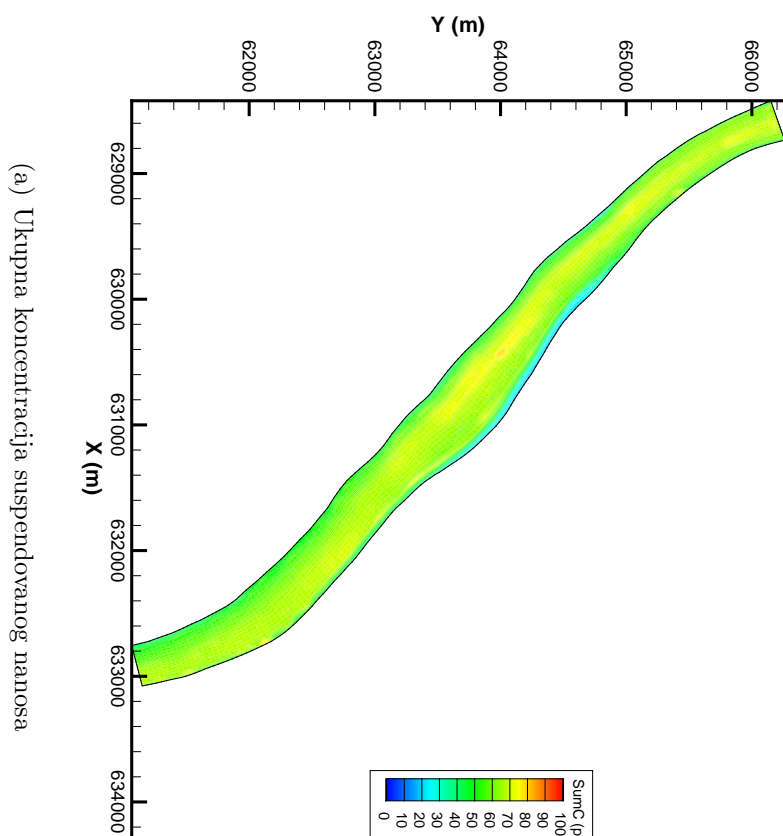
(a) Merni presek MP1

(b) Merni presek MP5

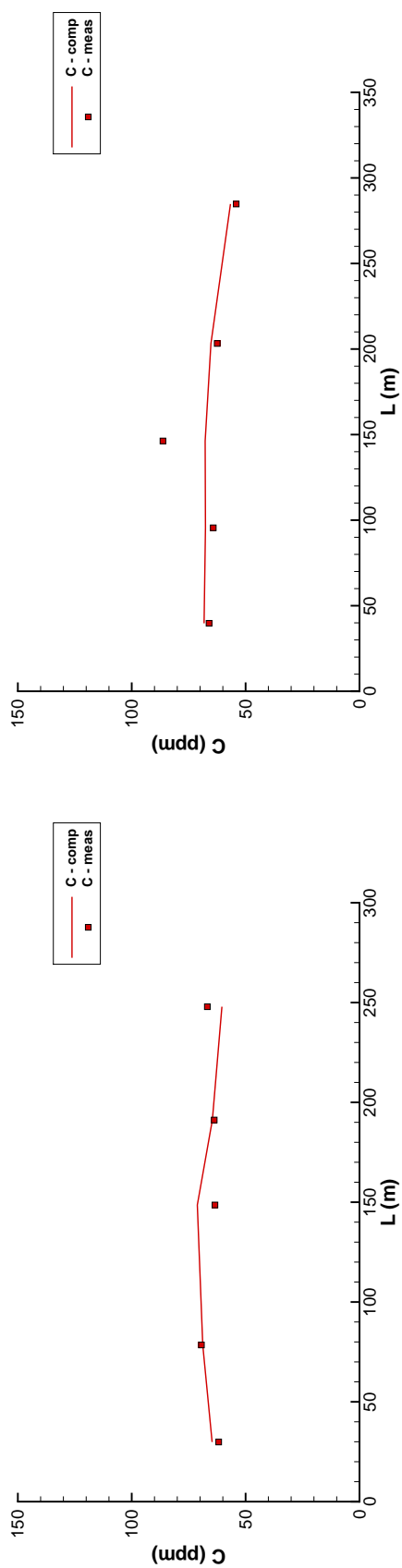


(c) Merni presek MP7

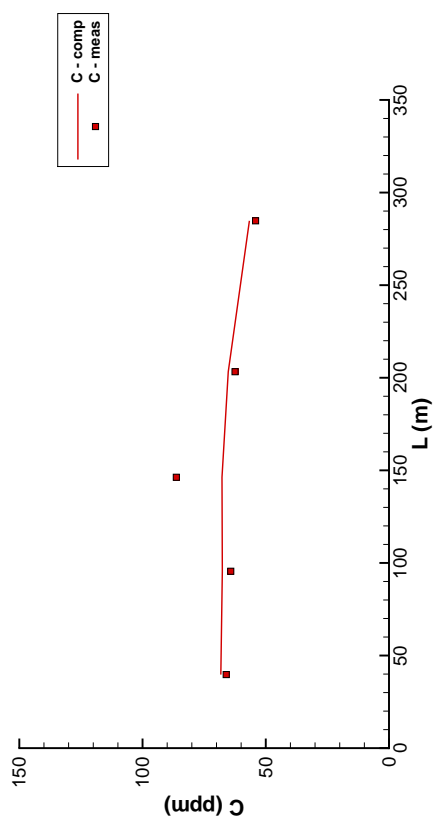
Slika 81: Merene i računane brzine u mernim presecima 1, 5 i 7



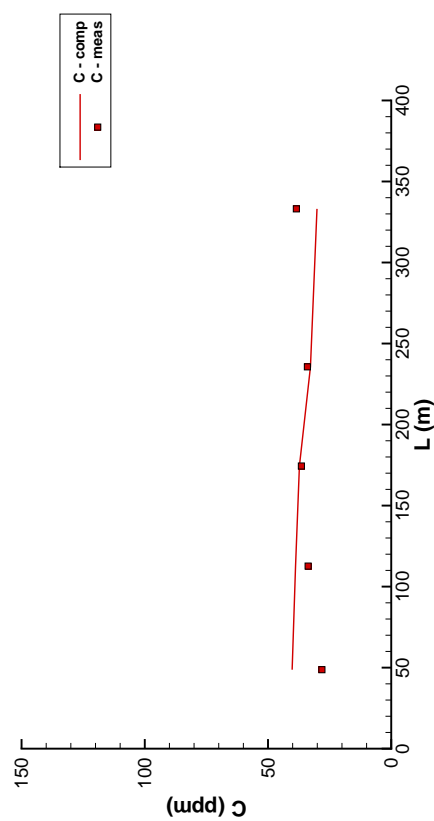
Slika 82: *Sračunata ukupna koncentracija suspendovanog nanosa i debljina aktivnog sloja*



(a) Merni presek MP1



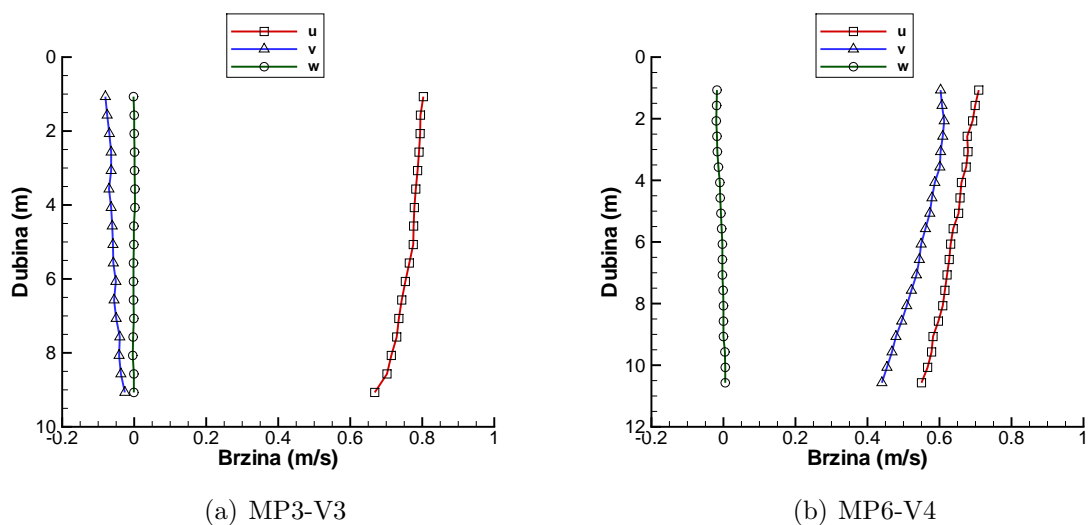
(b) Merni presek MP5



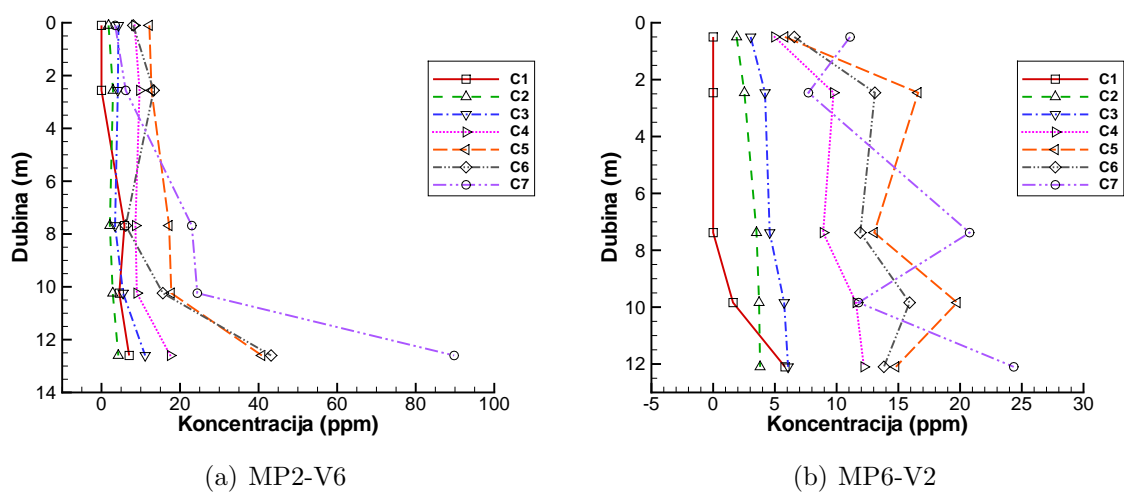
(c) Merni presek MP7

Slika 83: Merene i računate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa u mernim presecima 1, 5 i 7

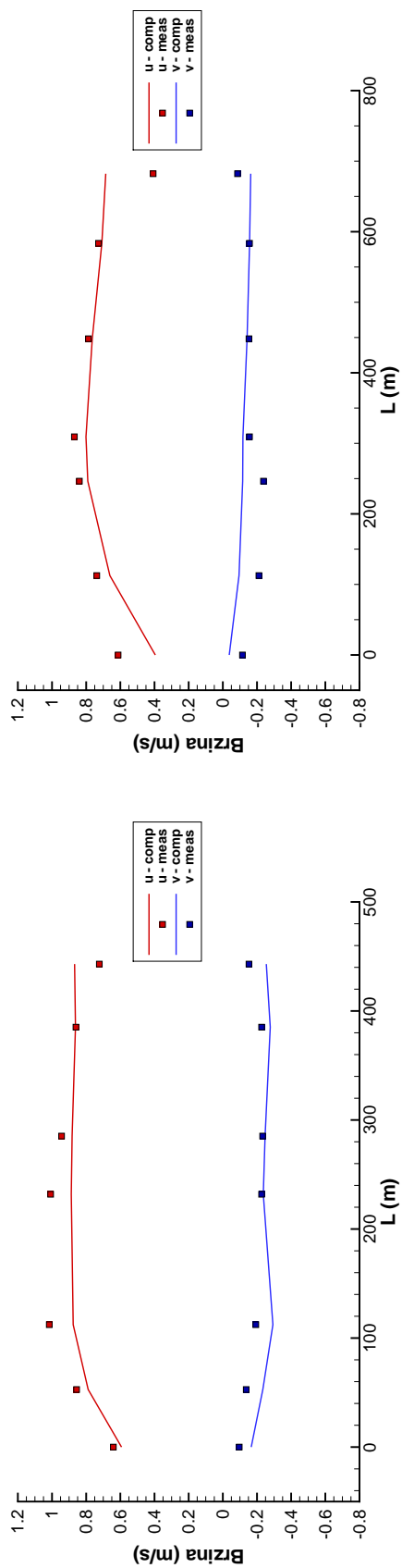
Prilog J Deonica Dunava kod Beograda



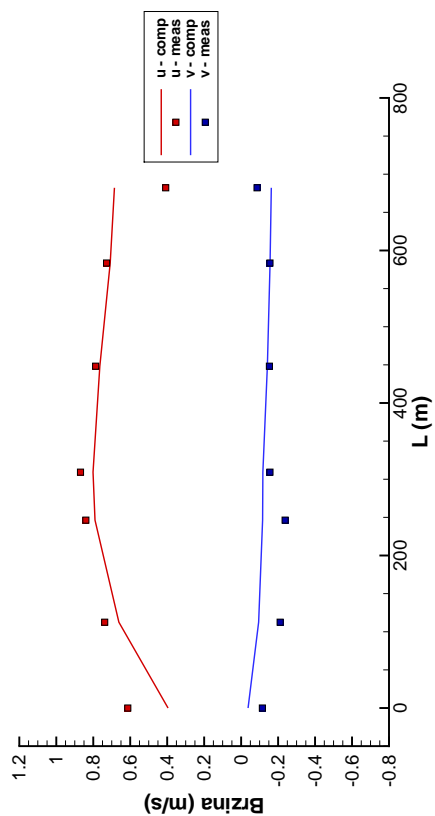
Slika 84: Raspored brzina po dubini toka



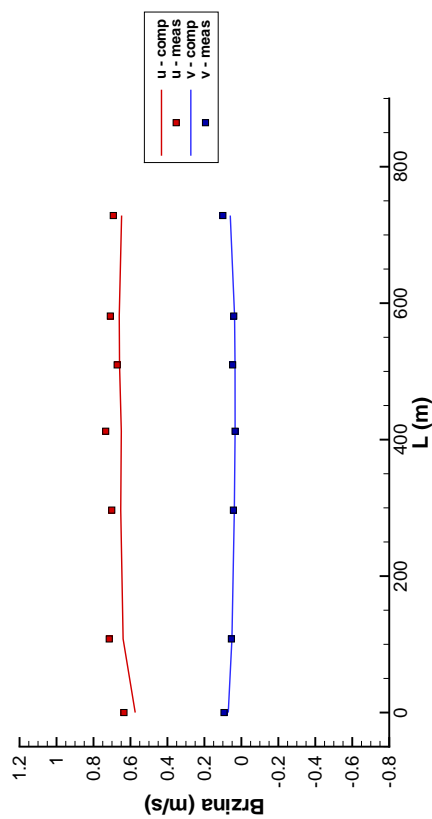
Slika 85: Raspored koncentracija suspendovanog nanosa po dubini toka



(a) Merni presek MP1

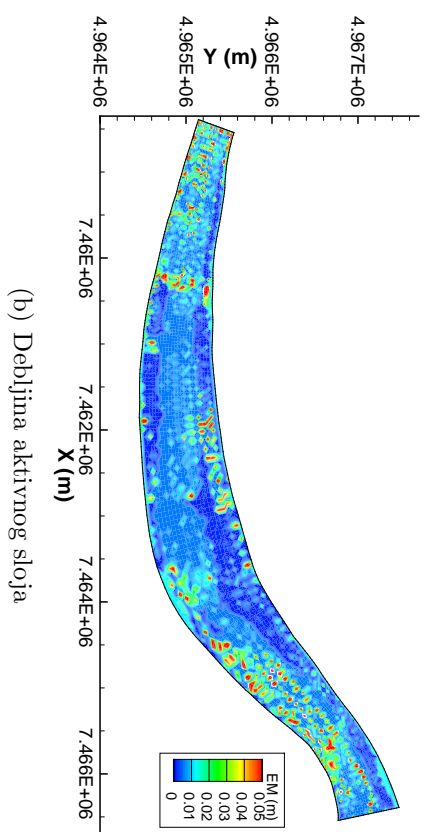
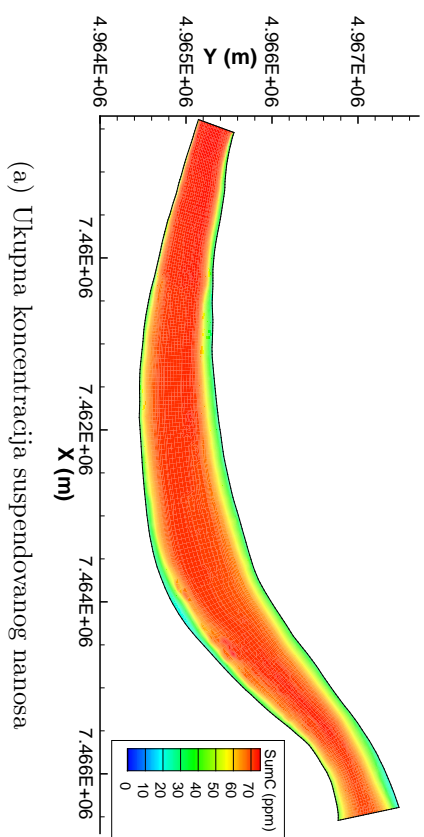


(b) Merni presek MP2

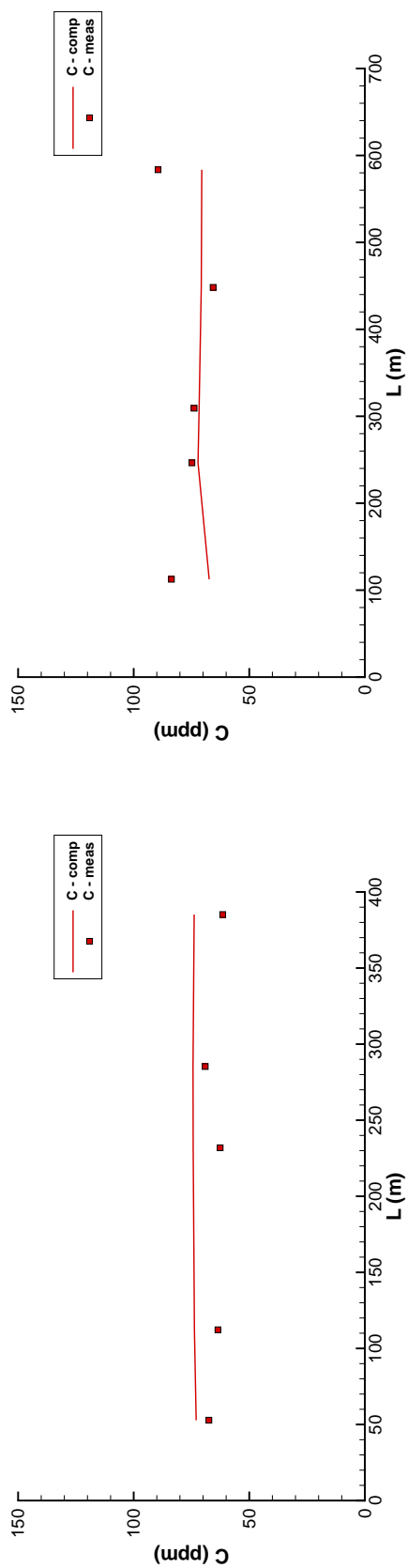


(c) Merni presek MP4

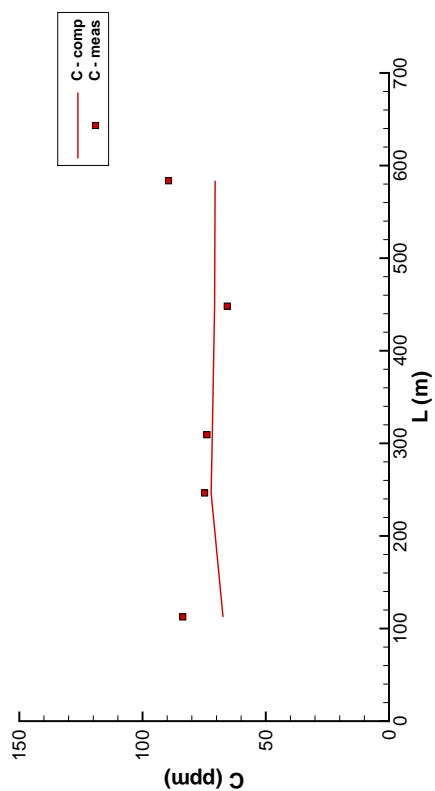
Slika 86: Merene i računane brzine u mernim presecima 1, 2 i 4



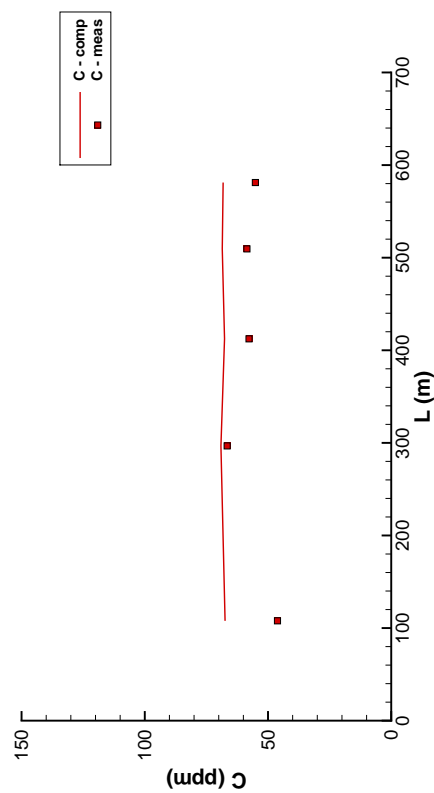
Slika 87: *Sračunata ukupna koncentracija suspendovanog nanosa i debljina aktivnog sloja*



(a) Merni presek MP1

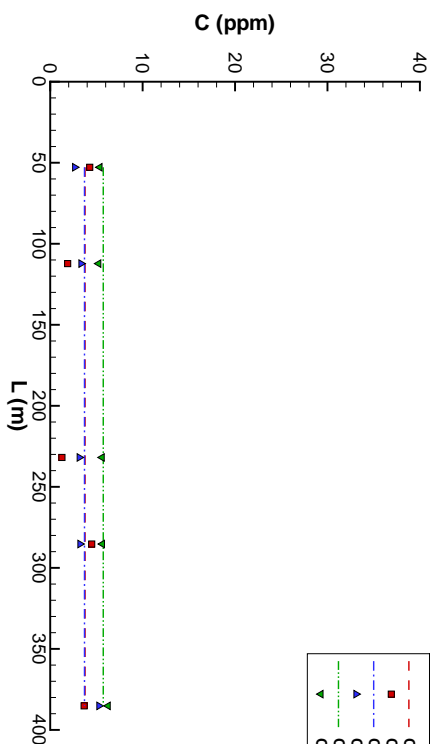


(b) Merni presek MP2

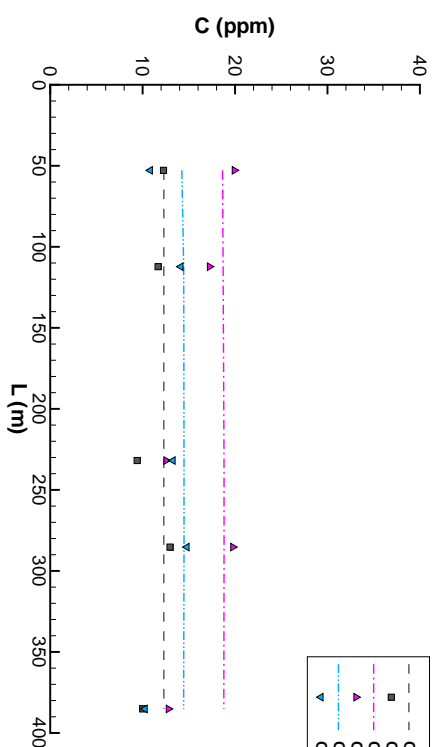


(c) Merni presek MP4

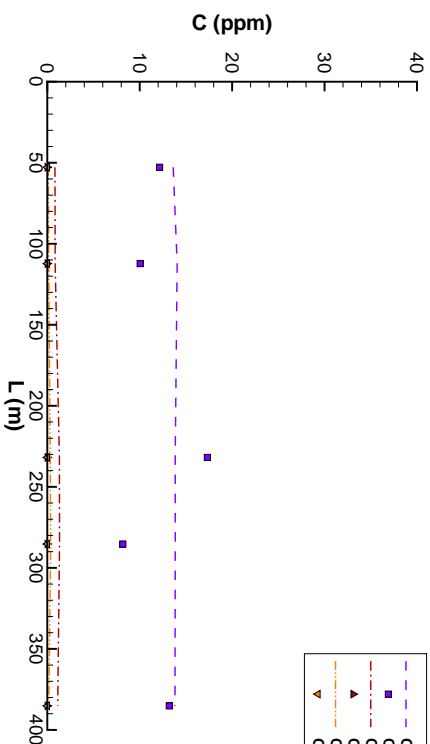
Slika 88: Merene i računate ukupne koncentracije suspendovanog nanosa u mernim presecima 1, 2 i 4



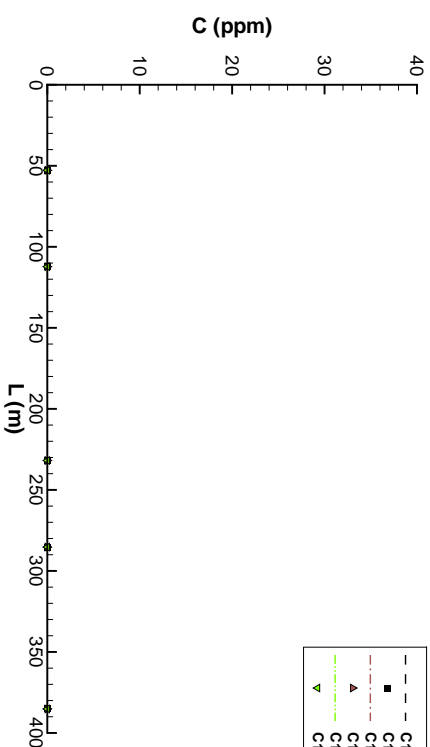
(a) Merini presek MPI1, $k_s = 1, 2, 3$



(b) Merini presek MPI1, $k_s = 4, 5, 6$

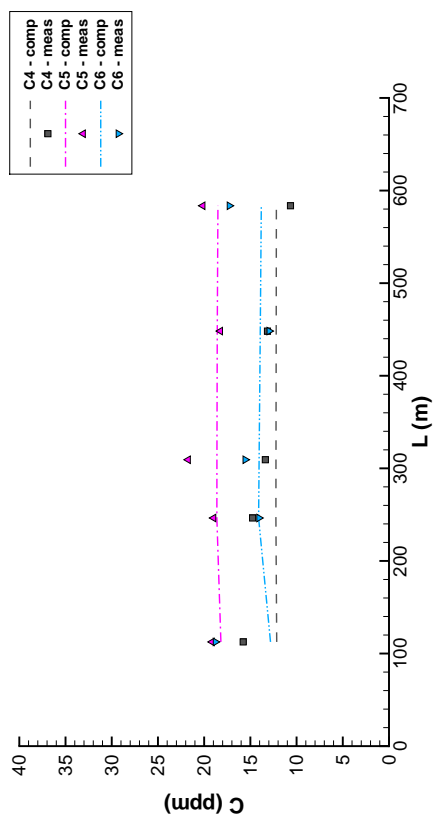


(c) Merini presek MPI1, $k_s = 7, 8, 9$

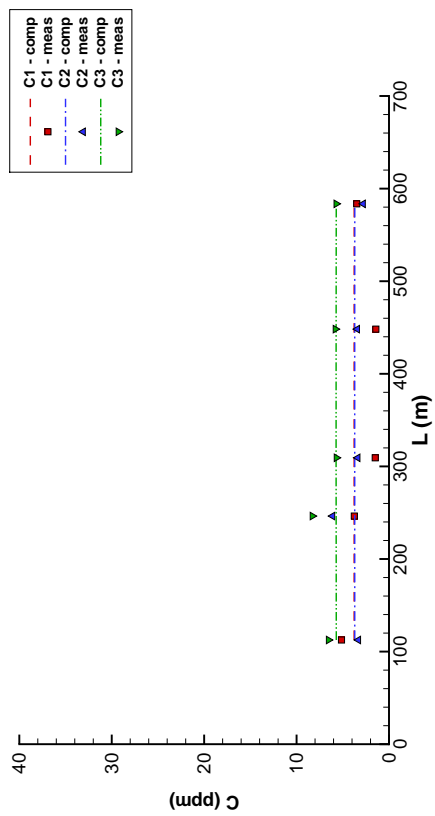


(d) Merini presek MPI1, $k_s = 10, 11, 12$

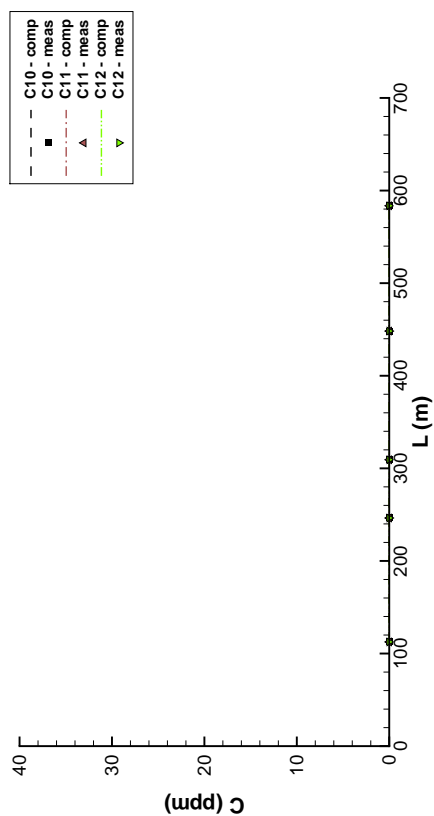
Slika 89: Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u merinom preseku 1



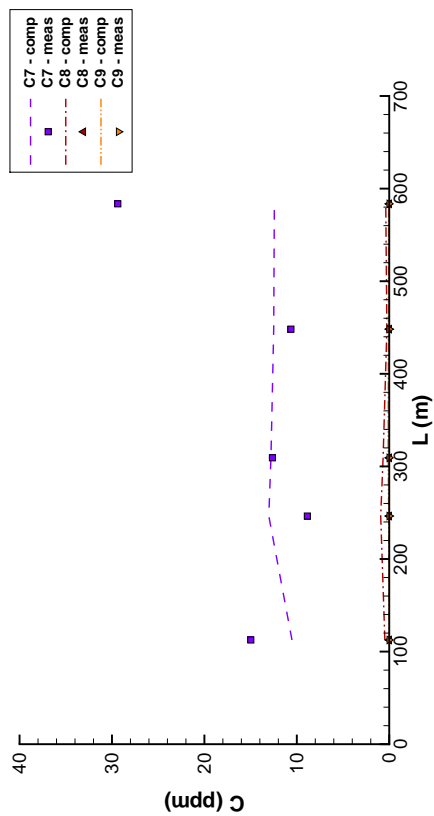
(a) Merni presek MP2, $k_s = 1, 2, 3$



(b) Merni presek MP2, $k_s = 4, 5, 6$

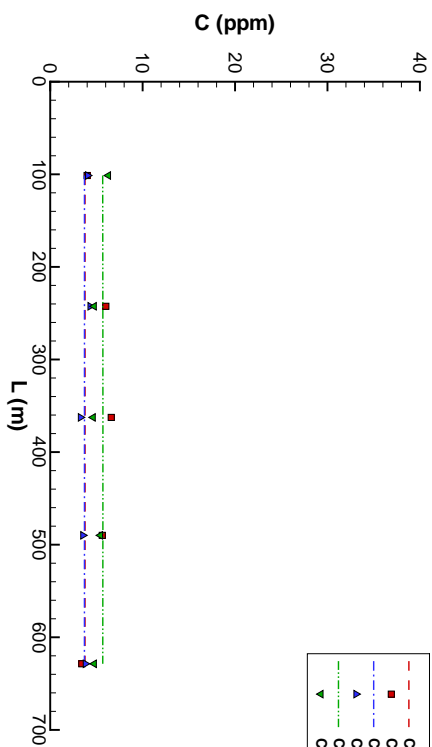


(c) Merni presek MP2, $k_s = 7, 8, 9$

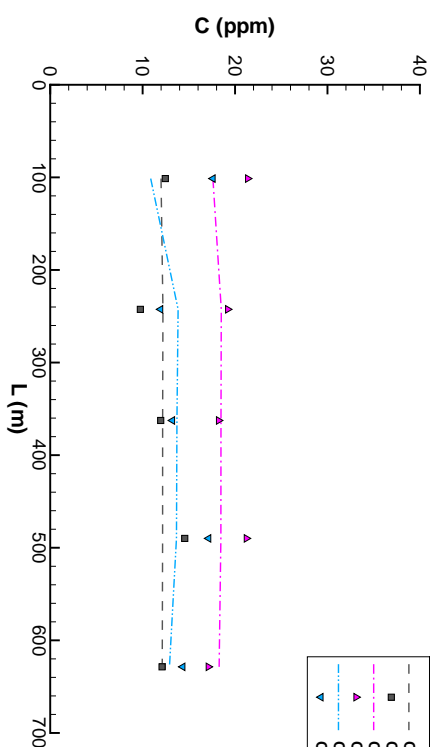


(d) Merni presek MP2, $k_s = 10, 11, 12$

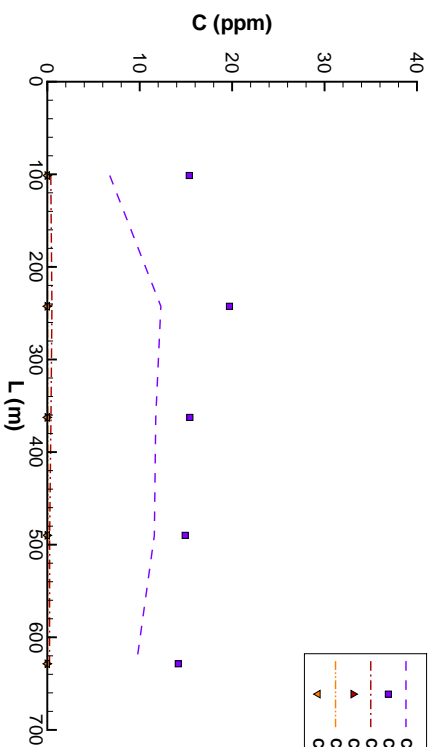
Slika 90: Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u mernom preseku 2



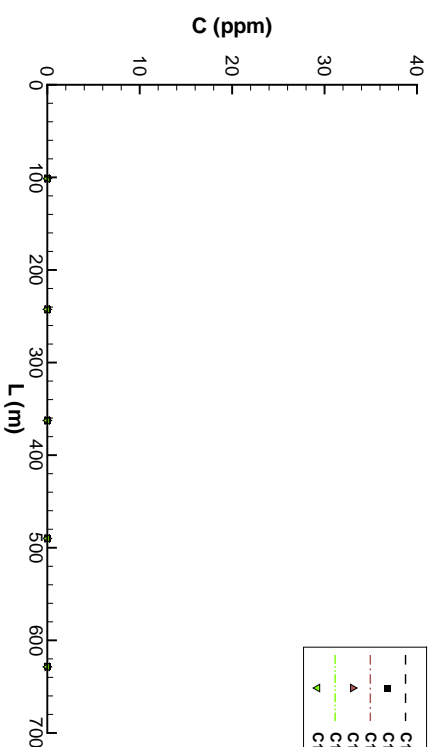
(a) Merini presjek MP3, $k_s = 1, 2, 3$



(b) Merini presjek MP3, $k_s = 4, 5, 6$

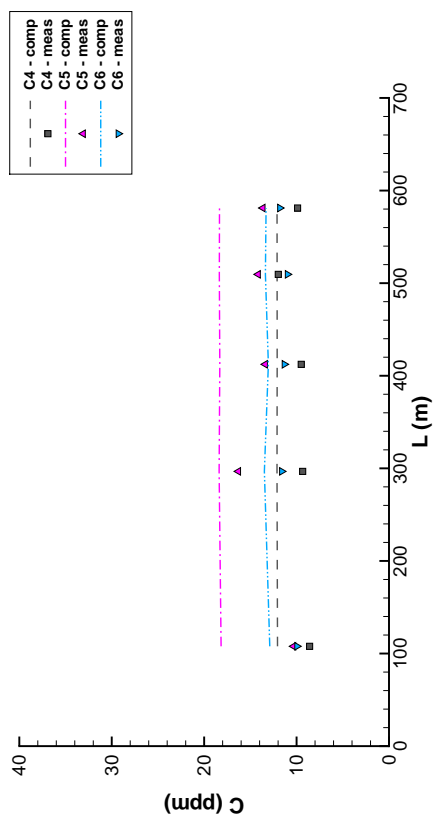


(c) Merini presjek MP3, $k_s = 7, 8, 9$

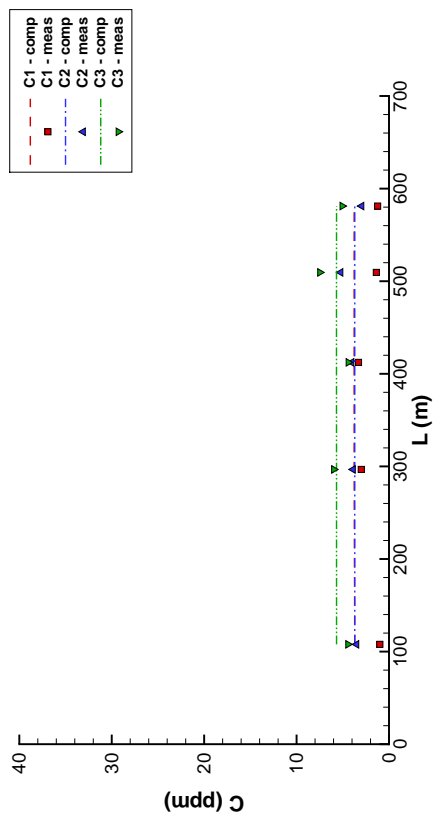


(d) Merini presjek MP3, $k_s = 10, 11, 12$

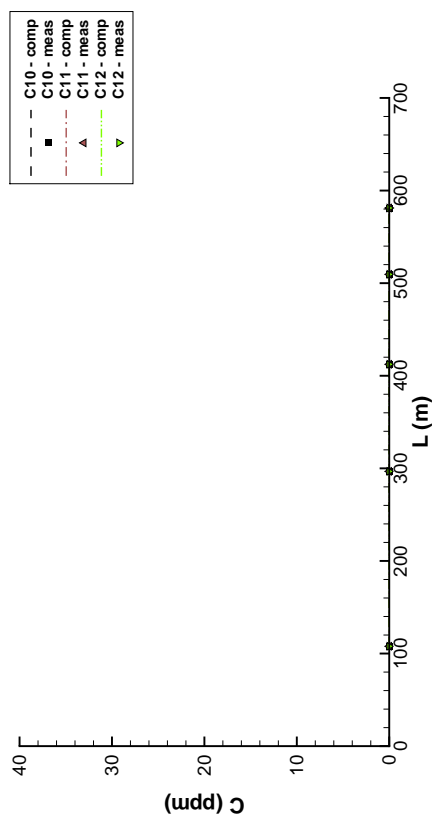
Slika 91: Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u merinom presjeku 3



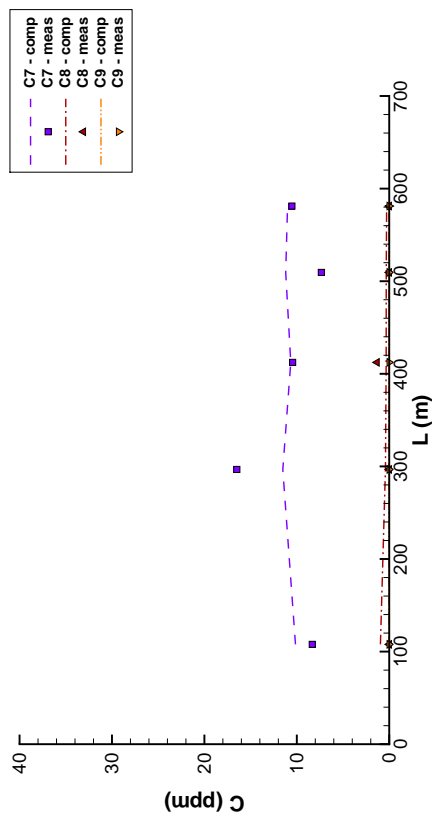
(a) Merni presek MP4, $k_s = 1, 2, 3$



(b) Merni presek MP4, $k_s = 4, 5, 6$

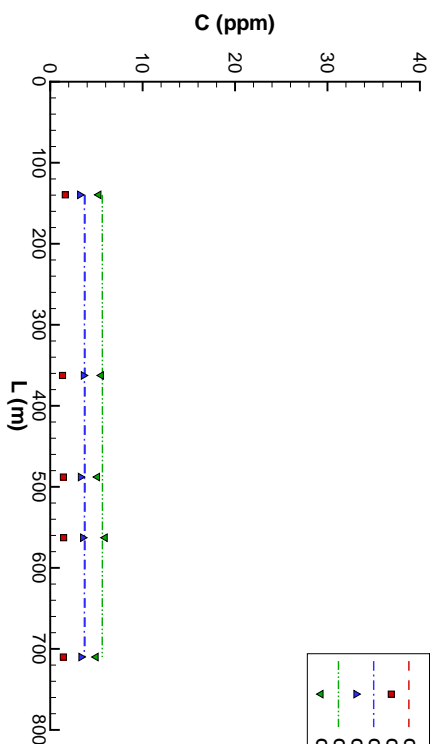


(c) Merni presek MP4, $k_s = 7, 8, 9$

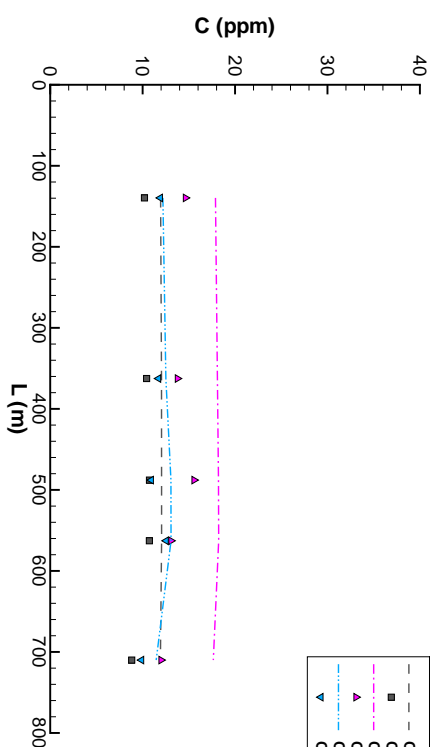


(d) Merni presek MP4, $k_s = 10, 11, 12$

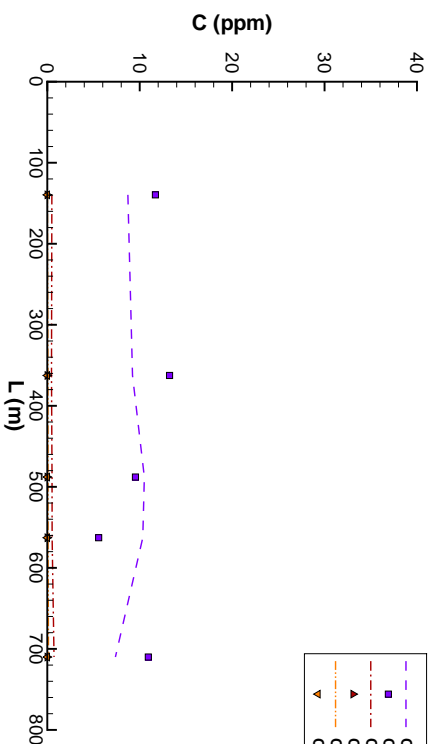
Slika 92: Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u mernom preseku 4



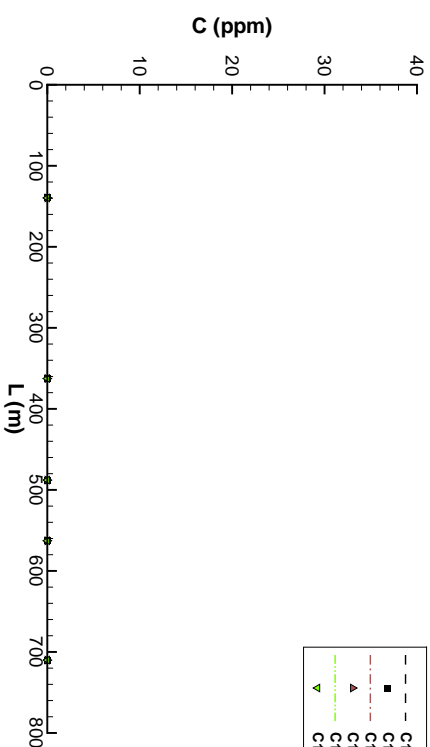
(a) Merini presjek MP5, $k_s = 1, 2, 3$



(b) Merini presjek MP5, $k_s = 4, 5, 6$

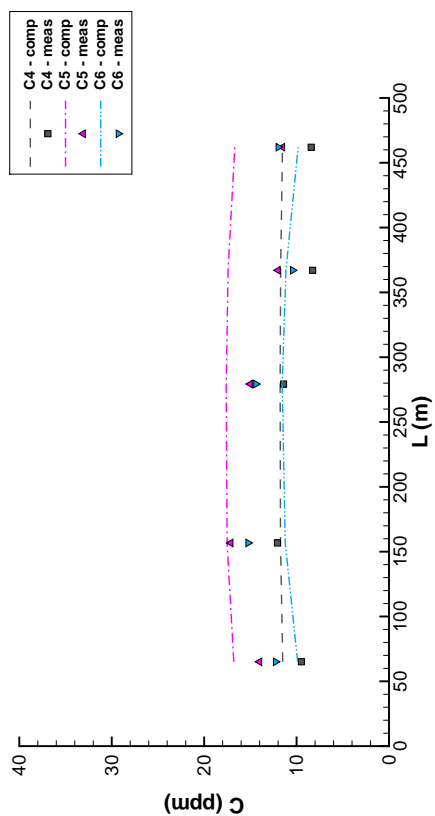


(c) Merini presjek MP5, $k_s = 7, 8, 9$

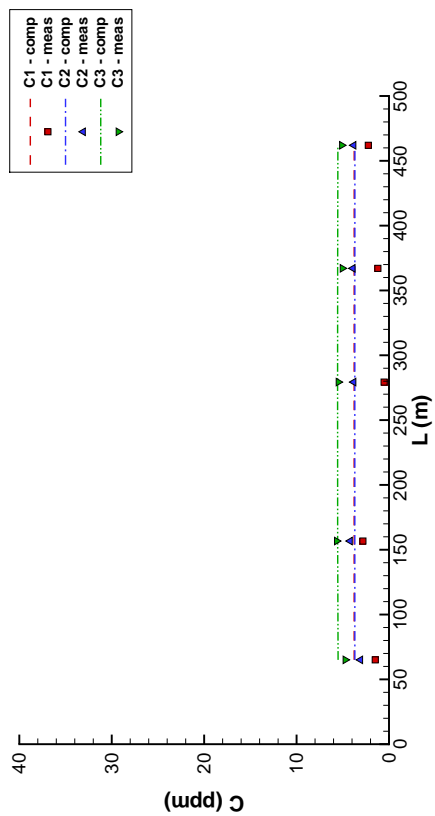


(d) Merini presjek MP5, $k_s = 10, 11, 12$

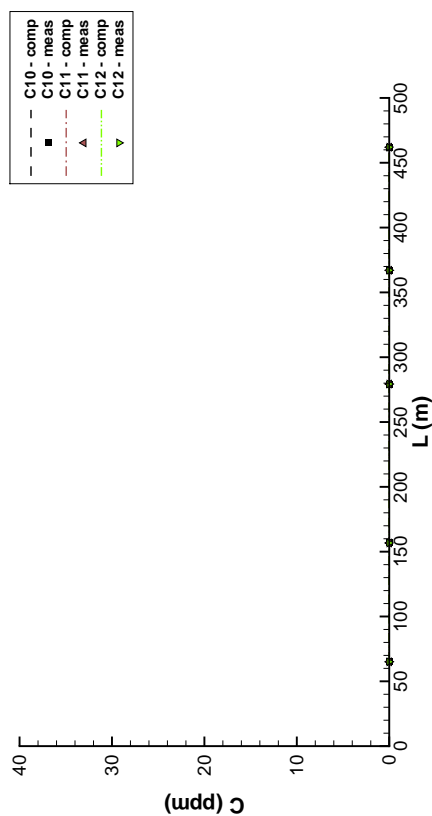
Slika 93: Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u merinom presjeku 5



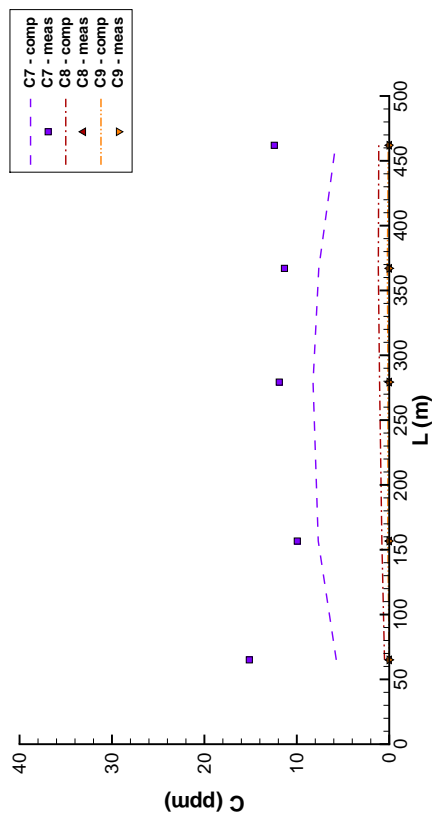
(a) Merni presek MP6, $k_s = 1, 2, 3$



(b) Merni presek MP6, $k_s = 4, 5, 6$

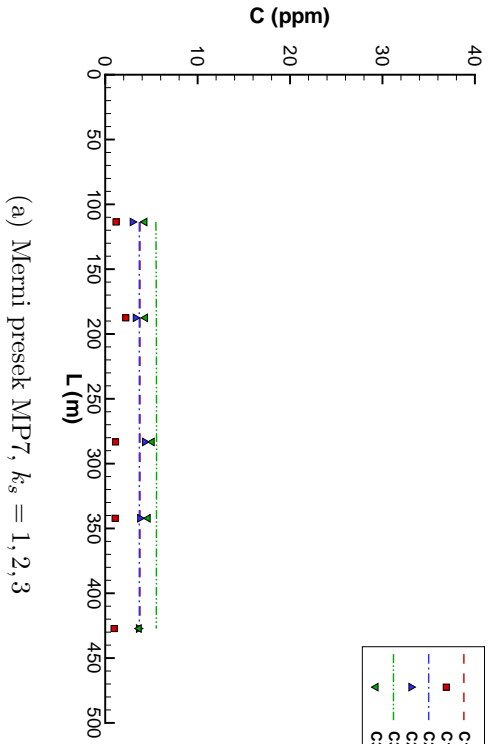


(c) Merni presek MP6, $k_s = 7, 8, 9$

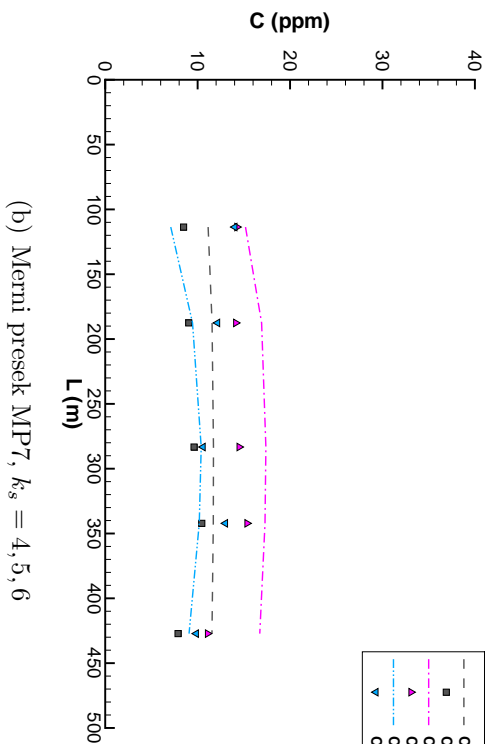


(d) Merni presek MP6, $k_s = 10, 11, 12$

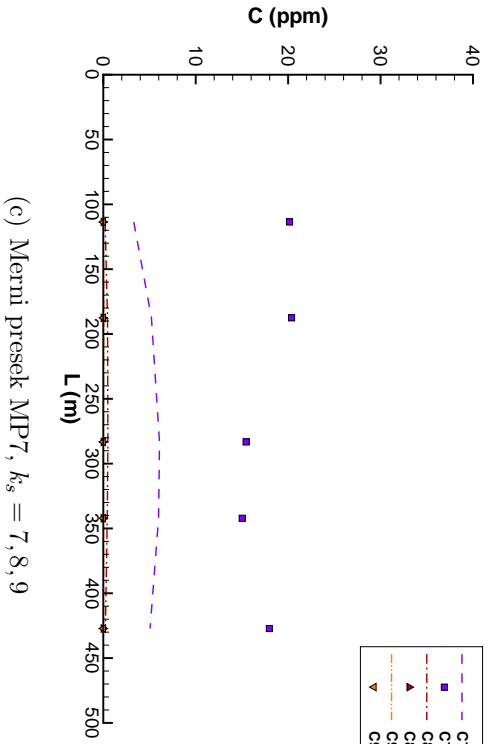
Slika 94: Merene i računata koncentracije suspendovanog nanosa u mernom preseku 6



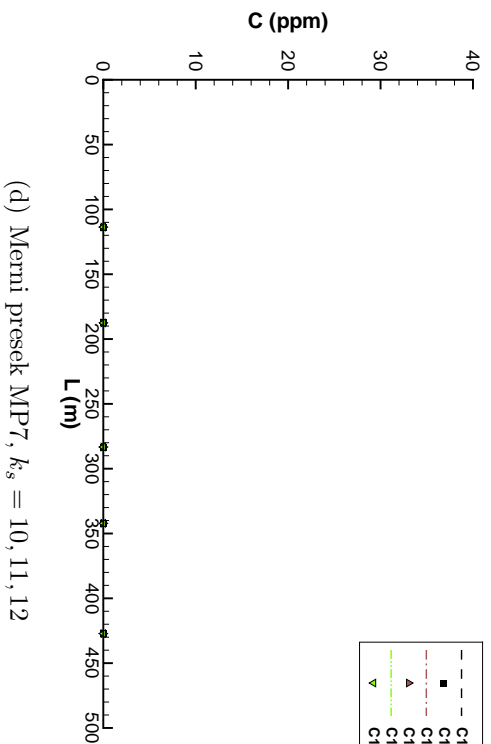
(a) Merini presjek MP7, $k_s = 1, 2, 3$



(b) Merini presjek MP7, $k_s = 4, 5, 6$

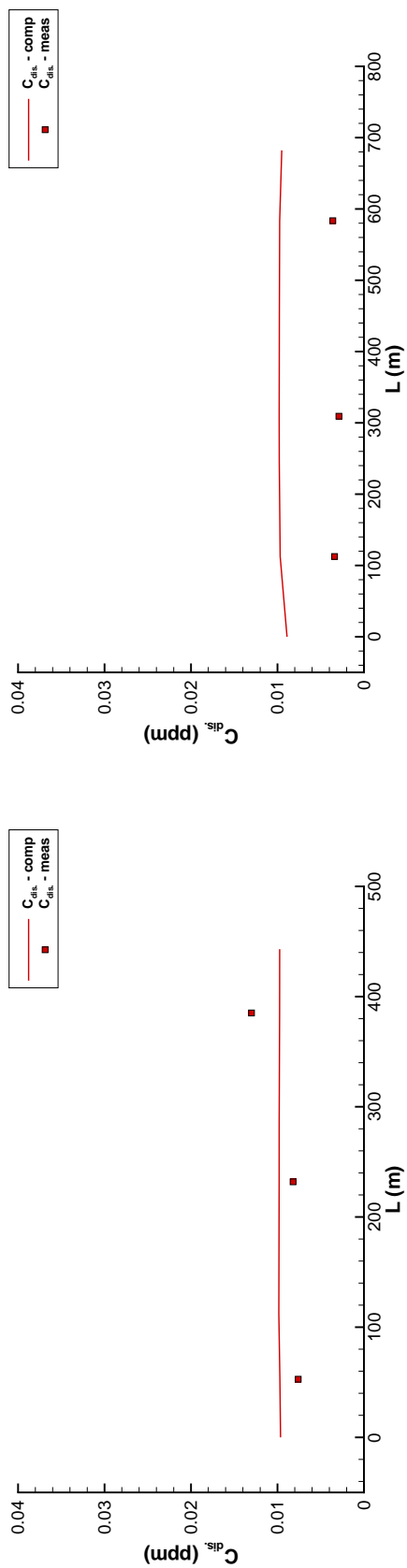


(c) Merini presjek MP7, $k_s = 7, 8, 9$

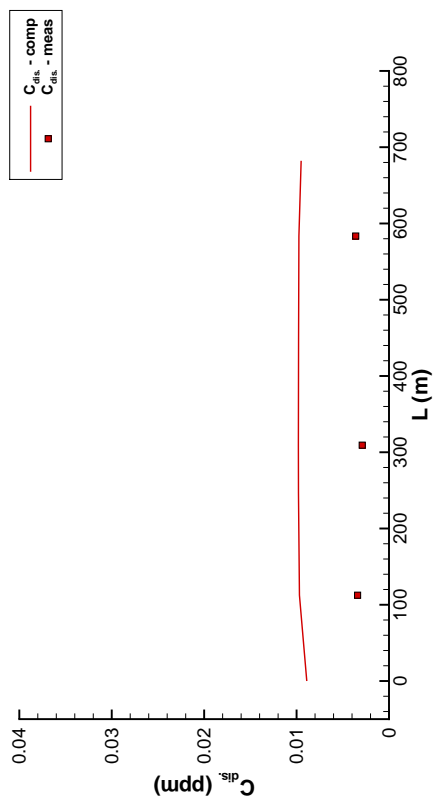


(d) Merini presjek MP7, $k_s = 10, 11, 12$

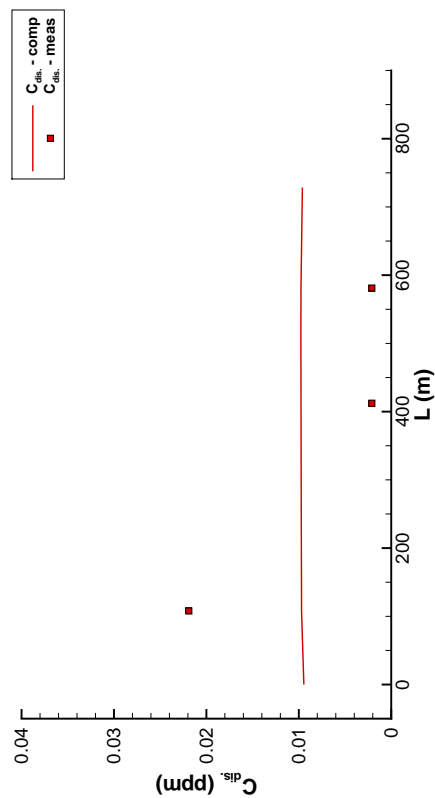
Slika 95: Merene i računate koncentracije suspendovanog nanosa u merinom presjeku 7



(a) Merni presek MP1

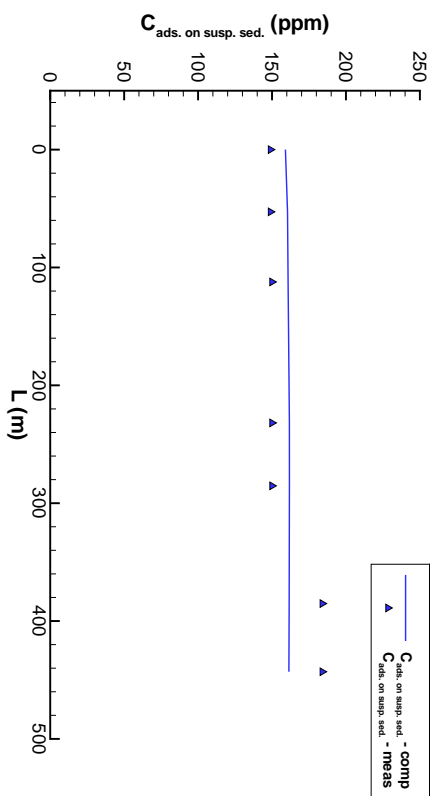


(b) Merni presek MP2

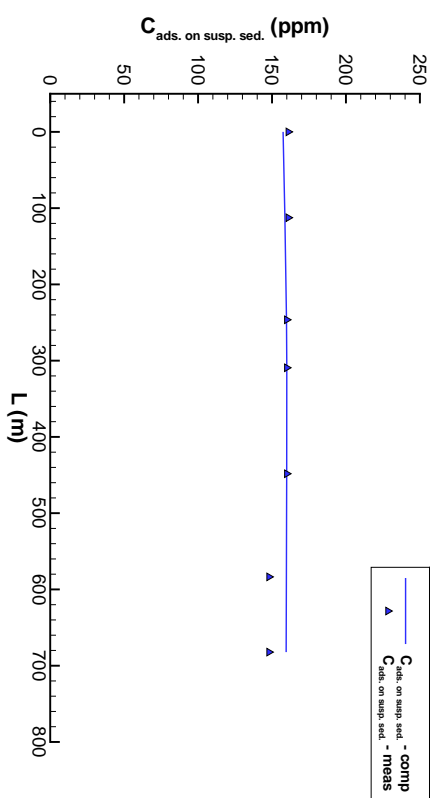


(c) Merni presek MP4

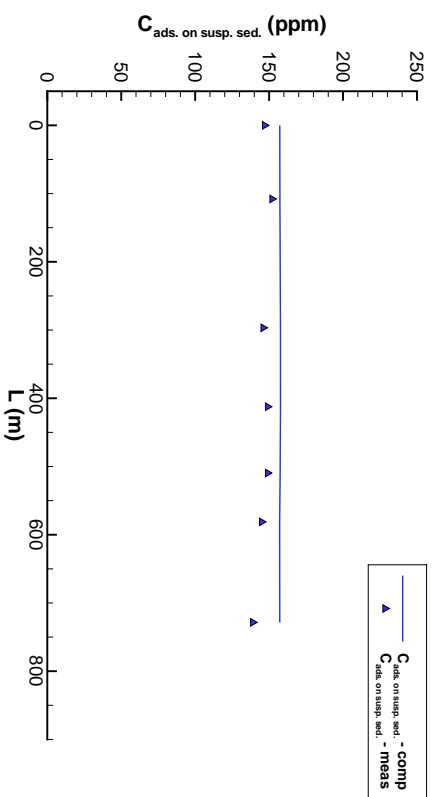
Slika 96: Merene i računate koncentracije rastvorenog cinka u mernim presecima 1, 2 i 4



(a) Merni presek MP1

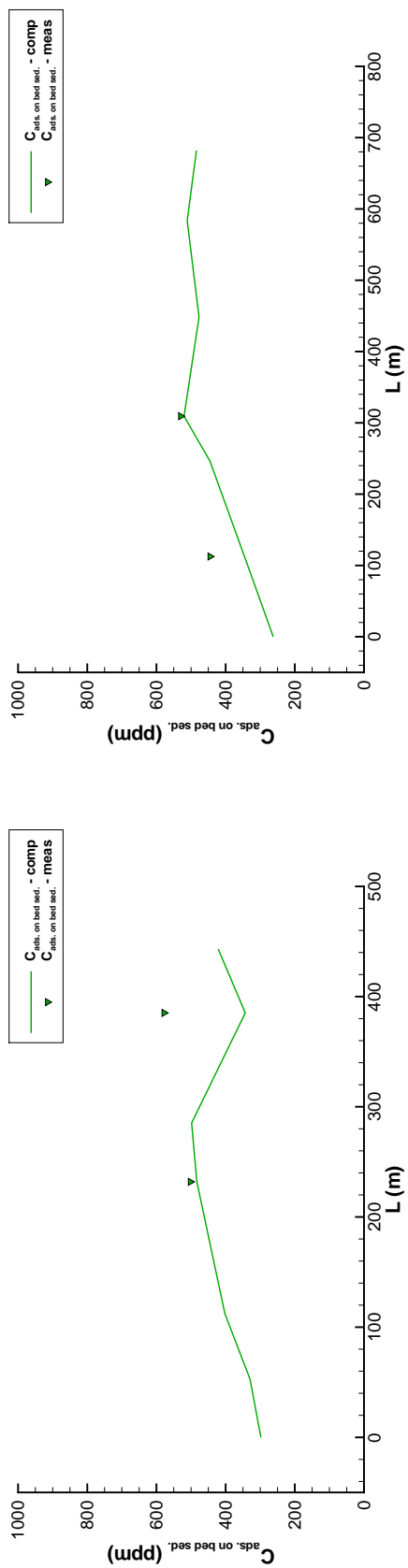


(b) Merni presek MP2

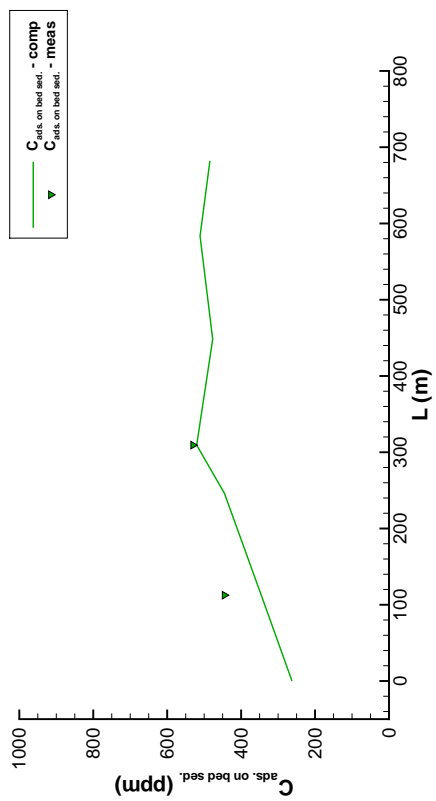


(c) Merni presek MP4

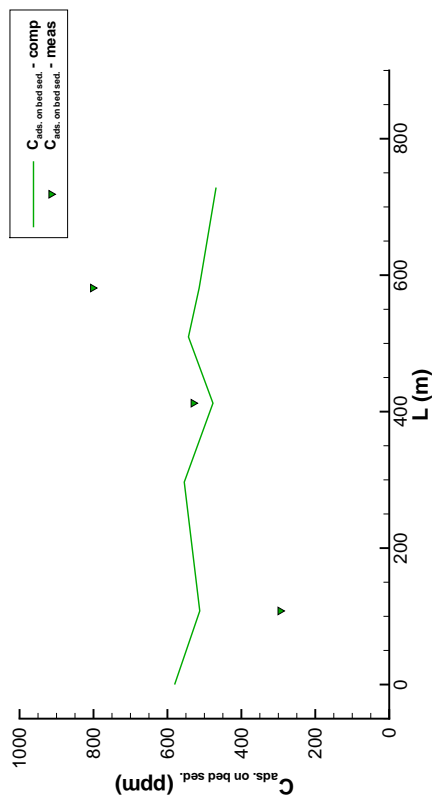
Slika 97: *Merene i računate koncentracije cinka adsorbovanog na suspendovani nanos u mernim presecima 1, 2 i 4*



(a) Merni presek MP1

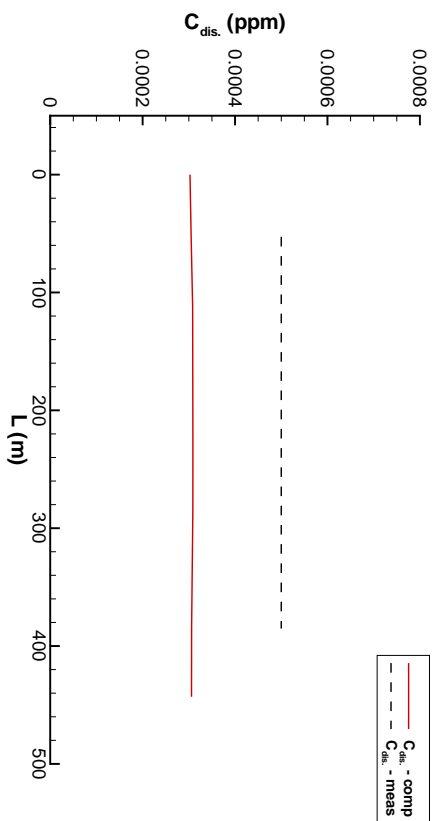


(b) Merni presek MP2

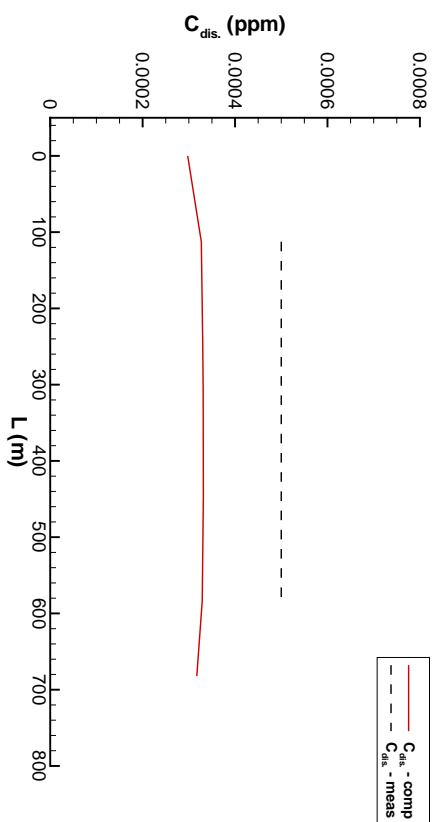


(c) Merni presek MP4

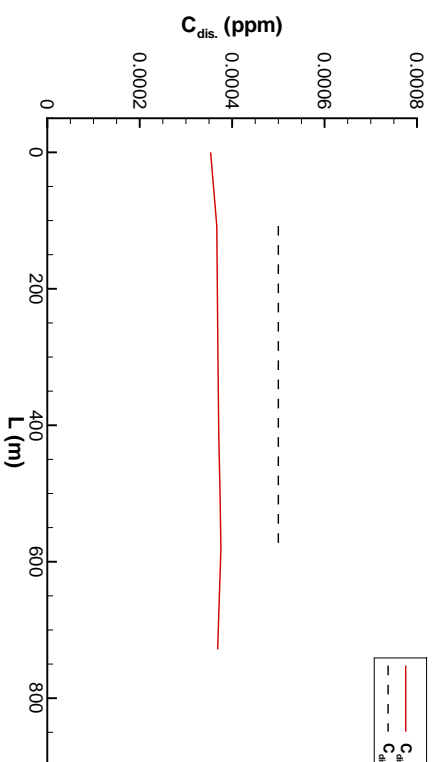
Slika 98: Merene i računate koncentracije cinka adsorbovanog na nanos aktivnog sloja u mernim presjecima 1, 2 i 4



(a) Merni presek MP1

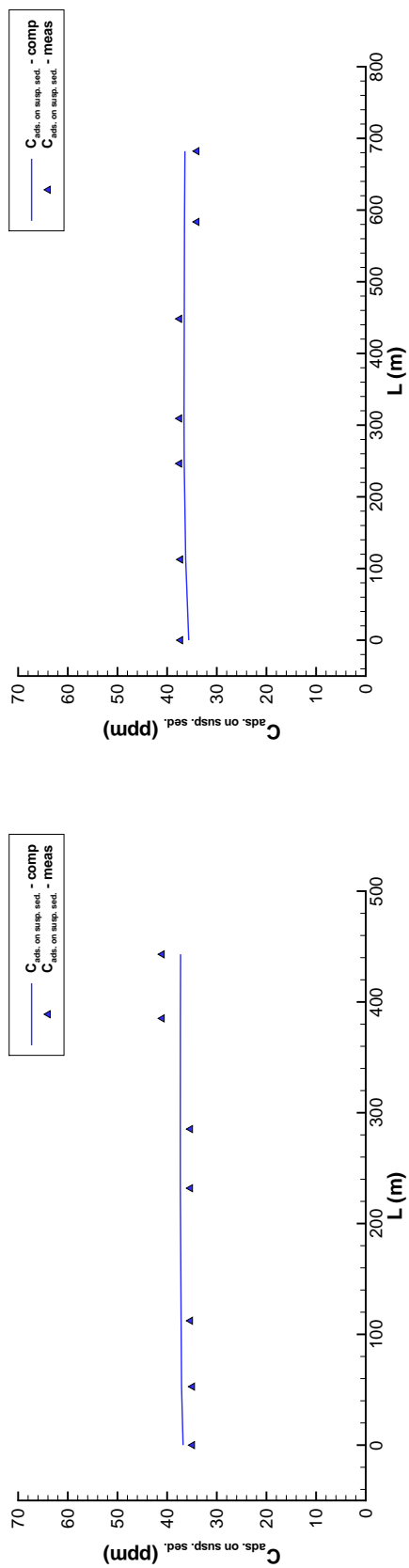


(b) Merni presek MP2

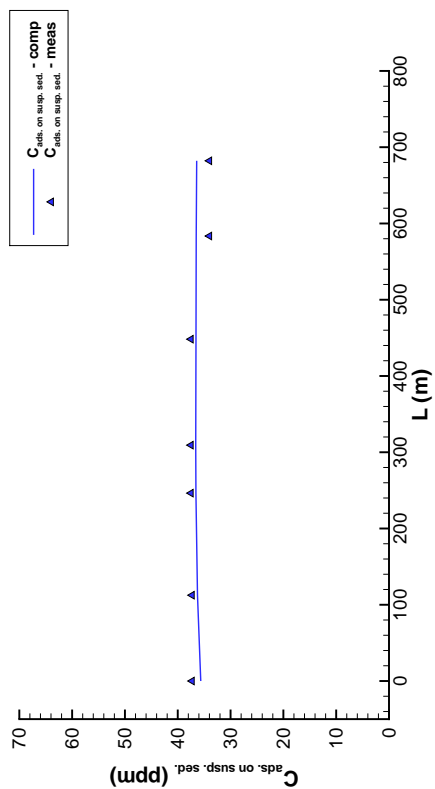


(c) Merni presek MP4

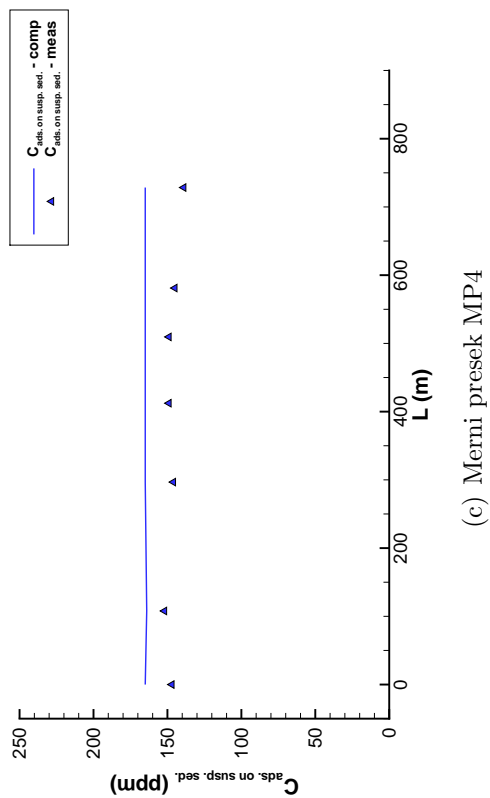
Slika 99: Merene i računute koncentracije rastvorenog olova u mernim presjecima 1, 2 i 4



(a) Merni presek MP1

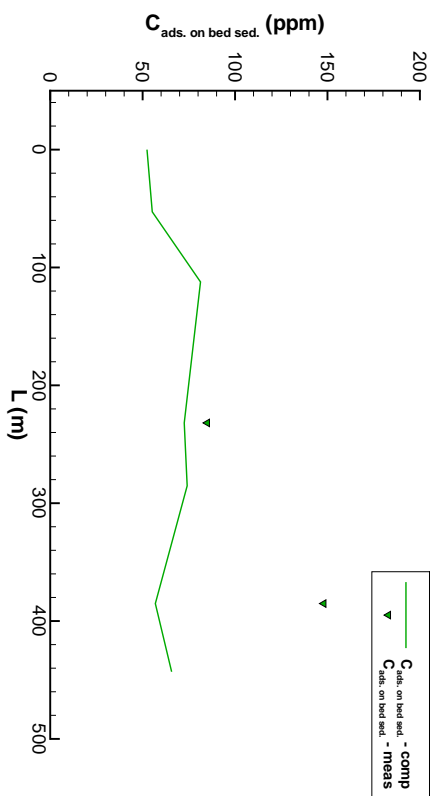


(b) Merni presek MP2

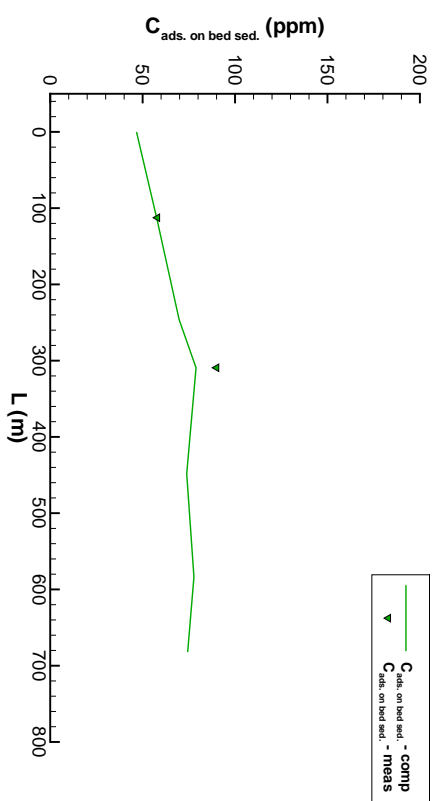


(c) Merni presek MP4

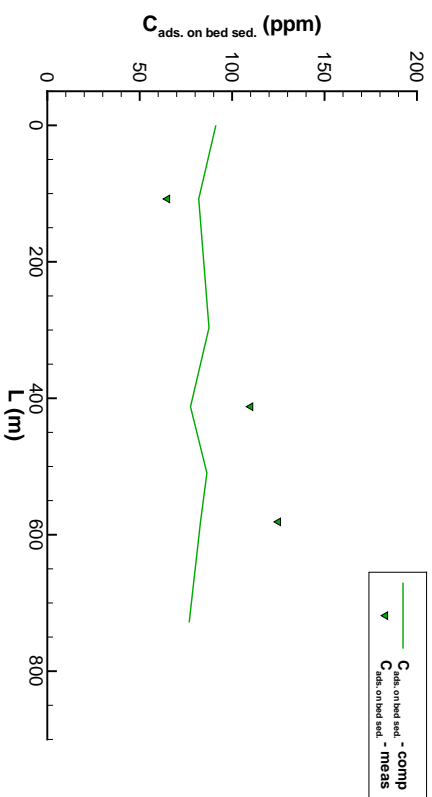
Slika 100: Merene i računata koncentracije olova adsorbovanog na suspendovani nanos u mernim presecima 1, 2 i 4



(a) Merni presek MP1

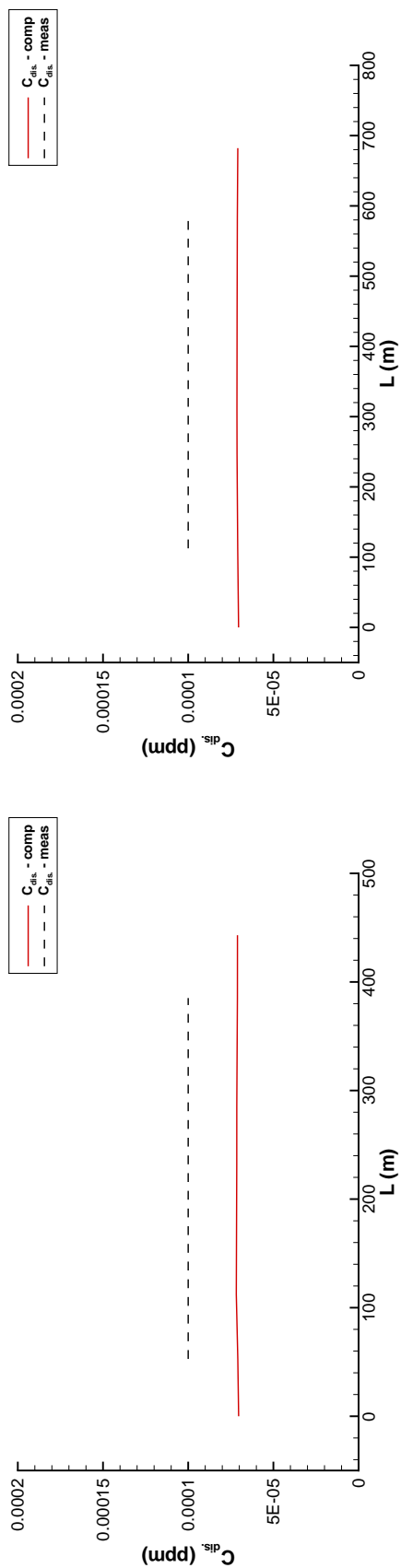


(b) Merni presek MP2

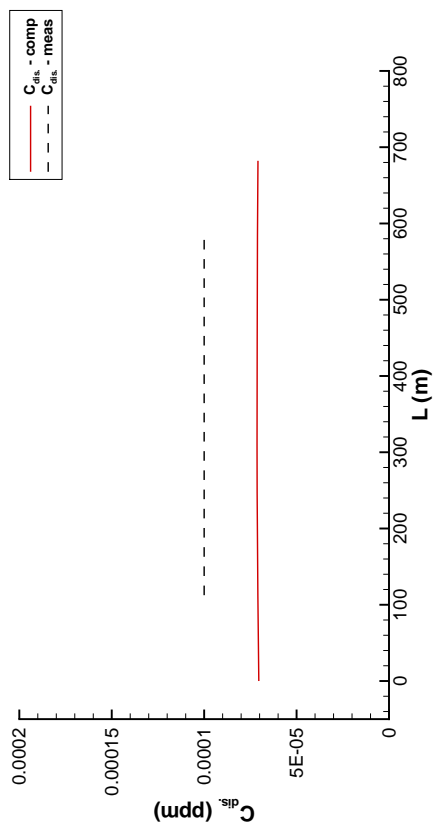


(c) Merni presek MP4

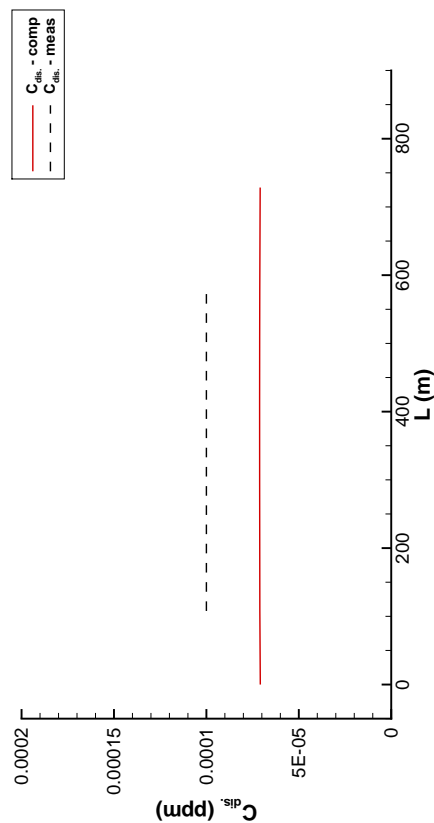
Slika 101: Merene i računate koncentracije olova adsorbovanog na nanos aktivnog sloja u mernim presecima 1, 2 i 4



(a) Merni presek MP1

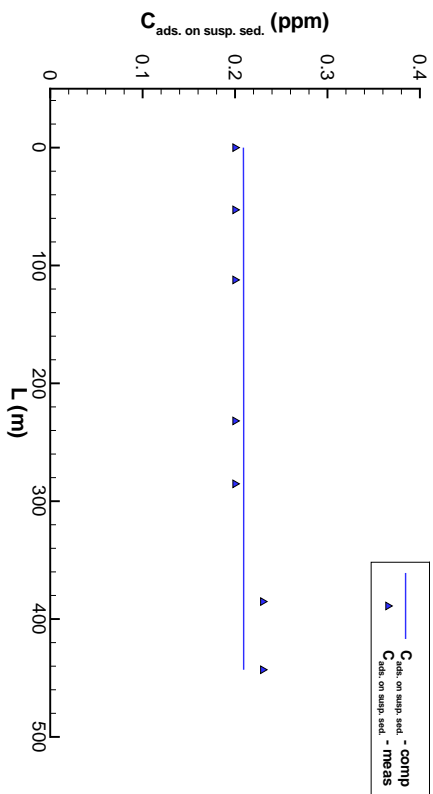


(b) Merni presek MP2

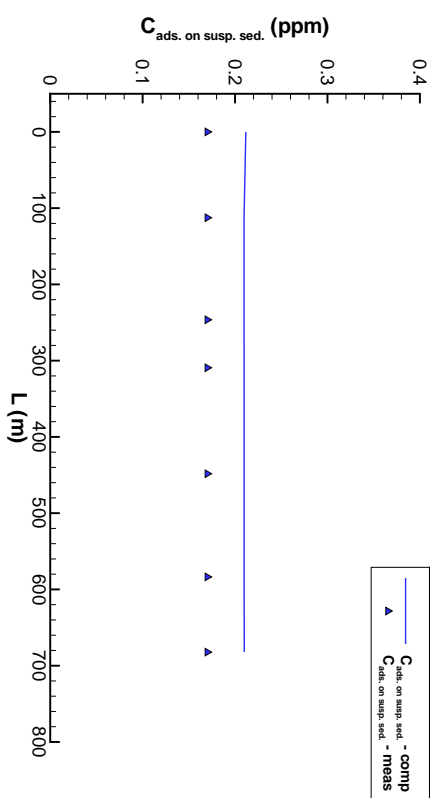


(c) Merni presek MP4

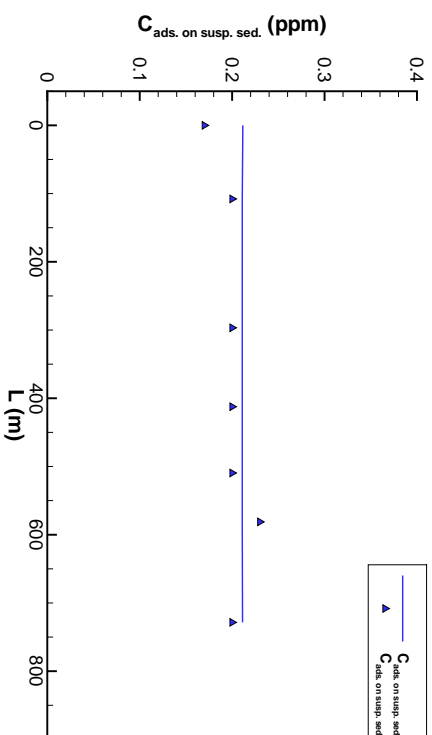
Slika 102: Merene i računate koncentracije rastvorene žive u mernim presecima 1, 2 i 4



(a) Merni presjek MP1

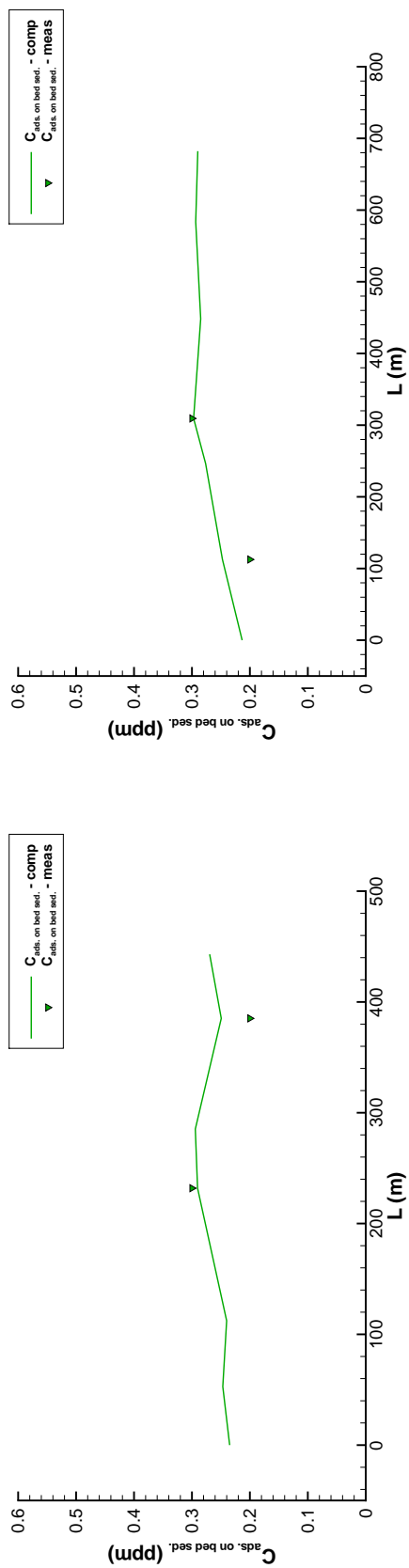


(b) Merni presjek MP2

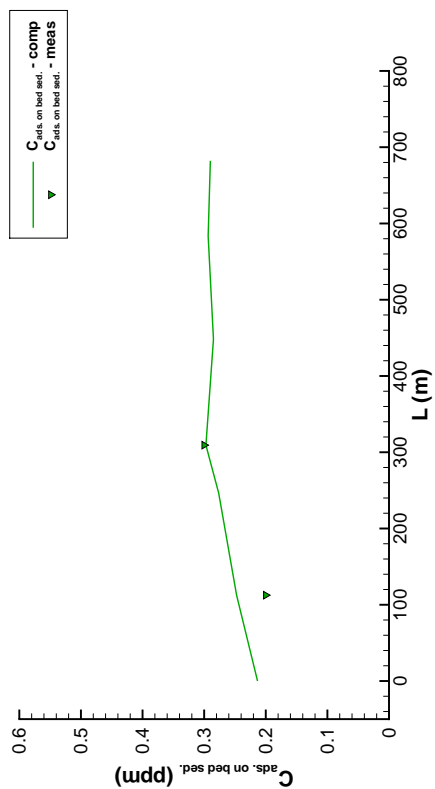


(c) Merni presjek MP4

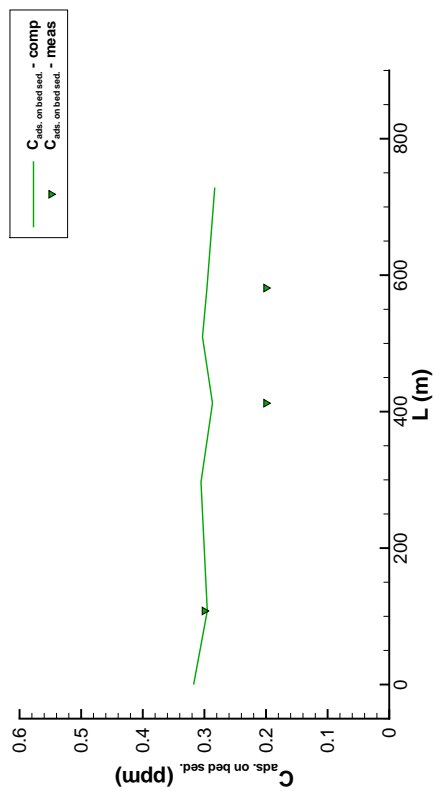
Slika 103: Merene i računate koncentracije žiwe adsorbovane na suspendovani nanos u mernim presjecima 1, 2 i 4



(a) Merni presek MP1



(b) Merni presek MP2



(c) Merni presek MP4

Slika 104: Merene i računate koncentracije žive adsorbovane na nanos aktivnog sloja u mernim presecima 1, 2 i 4

Literatura

- J. M. Abril and M. García-León. Modeling the distribution of suspended matter and the sedimentation process in a marine environment. *Ecological Modelling*, 71:197–219, 1994.
- Z. Ahmad and U. C. Kothyari. Time-line cubic spline interpolation scheme for solution of advection equation. *Computers & Fluids*, 37:767–783, 2001.
- M. Al-Lawatia, R. C. Sharpley, and H. Wang. Second-order characteristic methods for advection-diffusion equations and comparison to other schemes. *Advances in Water Resources*, 22(7):741–768, 1999.
- R. B. Ambrose, Y. Onishi, and S. E. Wise. User's Manual for the Instream Sediment Contaminant Transport Model SERATRA. Technical Report EPA 600/3-82-055, Environmental Research Laboratory Athens, Georgia, 1982.
- R. B. Jr. Ambrose, T. A. Wool, and J. L. Martin. The water quality analysis simulation program, WASP5, Part A, model documentation. Technical report, Environmental Research Laboratory Athens, Georgia, 1993.
- R. Aris. *Vectors, tensors and the basic equations of fluid mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- S. R. Aston, D. J. Assinder, and Kelly M. Plutonium in intertidal and estuarine sediments in the northern Irish Sea. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 20:761–771, 1985.
- S. Bai and W.-S. Lung. Modeling sediment impact on the transport of fecal bacteria. *Water Research*, 39:5232–5240, 2005.
- P. Benes, M. Cernik, and O. Slavik. Modelling the migration of ^{137}Cs accidentally released in a small river. *Journal of Environmental Radioactivity*, 22:279–293, 1994.
- J. P. Benett and C. F. Nordin. Simulation of Sediment Transport and Armoring. *Hydrological Sciences Bulletin XXII*, 4(12):555–569, 1977.
- J. P. Benqué, J. A. Cunge, J. Feuillet, A. Hauguel, and F. M. Jr. Holly. New Method for Tidal Current Computation. *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, 108(WW3):396–417, 1982.
- D. K. Borah. Routing Graded Sediments in Streams: Formulations. *ASCE Journal of the Hydraulic Division*, 108(HY12):1486–1505, 1982.
- A. I. Borisenko and I. E. Tarapov. *Vector and Tensor Analysis with Applications*. Dover Publications, Inc., New York, 1979.
- B. Brors. Numerical Modelnig of Flow and Scour at Pipelines. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(5):511–523, 1999.
- L. Budinski and M. Spasojević. 2-D Modeling of Flow and Sediment Interaction: Sediment Mixtures. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 140(2):199–209, 2013.

- Lj. Budinski. *Matematičko modeliranje ravanskih (osrednjenih po dubini) jednačina strujanja vode, transporta nanosa i morfoloških promena u prirodnim aluvijalnim vodotocima*. PhD thesis, Univerzitet u Novom Sadu, Građevinski fakultet Subotica, 2011.
- M. D. Bui and P. Rutschmann. A 3D numerical model of graded sediment transport in nonequilibrium condition. In *The 7th International Conference on Hydroscience and Engineering (ICHE-2006), Philadelphia*, 2006.
- M. D. Bui and P. Rutschmann. Numerical modeling of non-equilibrium graded sediment transport in a curved open channel. *Computers & Geosciences*, 36:792–800, 2010.
- M. D. Bui, Th. Wenka, and W. Rodi. Depth-Average Numerical Modelling of Flow and Sediment Transport in the Elbe River. In *Proceedings of the 3rd conference on Hydroscience and Engineering, Berlin*, 1998.
- M. D. Bui, T. Wenka, and W. Rodi. Numerical Modeling of Bed Deformation in Laboratory Channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(9):894–904, 2004.
- Z. Cao, L. Wei, and Xie. J. Sediment-Laden Flow in Open Channels from Two-Phase Flow Viewpoint. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(10):725–735, 1996.
- B. Carnahan, H. A. Luther, and J. O. Wilkes. *Applied Numerical Methods*. John Wiley & Sons, New York, 1969.
- M. M. Cecchi and M. A. Pirozzi. High order finite difference numerical methods for time-dependent convection-dominated problems. *Applied Numerical Mathematics*, 55: 334–356, 2005.
- I. Celik. Numerical modelling of sediment transport in open channel flows. In *Euromech 156: Mechanics of Sediment Transport, Istanbul*, 1982.
- I. Celik and W. Rodi. Mathematical modelling of suspended sediment transport in open channels. In *21st IAHR Congress, Melbourne*, 1985.
- N. S. Cheng. Simplified settling velocity formula for sediment particle. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(2):149–152, 1997.
- R. T. Cheng, V. Casulli, and J. W. Gartner. Tidal, Residual, Intertidal Mudflat (TRMF) Model and its Applications to San Francisco Bay, California. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 36:235–280, 1993.
- R. Company, E. Ponsoda, J.-V. Romero, and M.-D. Rosello. A second order numerical method for solving advection-diffusion models. *Mathematical and Computer Modelling*, 50:806–811, 2009.
- S. D. Conte and C. deBoor. *Elementary Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1972.
- J. Crank and P. Nicholson. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Advances in Computational Mathematics*, 6:207–226, 1996.

- D. C. Dammuller, S. M. Bhallamudi, and M. H. Chaudhry. Modeling of Unsteady Flow in Curved Channel. *Journal of Hydraulic Engineering*, 115(11):1479–1495, 1989.
- J. G. Duan and S. K. Nanda. Two-dimensional depth-averaged model simulation of suspended sediment concentration distribution in a groyne field. *Journal of Hydrology*, 327:426–437, 2006.
- J. G. Duan, S. Y. Wang, and Y. Jia. The application of the enhanced CCHE2D model to study the alluvial channel migration processes. *Journal of Hydraulic Research*, 39(5):469–480, 2001.
- E. K. Duursma and J. Carroll. *Environmental compartments*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- D. Eisma. *Suspended Matter in the Aquatic Environment*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.
- J. W. Elder. The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 5(4):544–560, 1959.
- R. E. Ewing and H. Wang. A summary of numerical methods for time-dependent advection-dominated partial differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 128:423–445, 2001.
- R. A. Falconer. Numerical Modeling of tidal Circulation in Harbors. *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, Proceedings of the ASCE*, 106(WW1):31–48, 1980.
- R. A. Falconer. Water Quality Simulation Study of a Natural Harbor. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 112(1):15–34, 1984.
- J. H. Ferziger and M. Perić. *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd edition. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2002.
- H. B. Fischer. Longitudinal Dispersion and Turbulent Mixing in Open Channel Flow. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 5:59–78, 1973.
- H. B. Fischer, E. J. List, R. C. Y. Koh, J. Imberger, and N. H Brooks. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, INC., Orlando, Florida, 1979.
- T. Fischer-Antze, N. Ruther, N. R. B. Olsen, and D. Gutknecht. Three-Dimensional (3D) modeling of non-uniform sediment transport in a channel with unsteady flow. *Journal of Hydraulic Research*, 47(5):670–675, 2009.
- C. A. J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Fundamental and General Techniques*, 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- G. Gao, R. A. Falconer, and B. Lin. Numerical modeling of sediment-bacteria interaction processes in surface waters. *Water Research*, 45:1951–1960, 2011.
- M. Garcia and G. Parker. Entrainment of Bed Sediment into Suspension. *Journal of Hydraulic Engineering*, 117(4):414–435, 1991.
- M. H. (Ed.) García. *Sedimentation Engineering Processes, Measurements, Modeling, and Practice*. American Society of Civil Engineers, Reston, Virginia, 2008.

- D. Gessler, B. Hall, M. Spasojevic, F. Holly, H. Pourtaheri, and N. Raphelt. Application of 3D Mobile Bed, Hydrodynamic Model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(7): 737–749, 1999.
- J. Glass and W. Rodi. A Higher Order Numerical Scheme for Scalar Transport. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 31:337–358, 1982.
- B. P. Greimann, M. Muste, and F. M. Jr. Holly. Two-phase formulation of suspended sediment transport. *Journal of Hydraulic Research*, 37(4):479–500, 1999.
- G. Hajdin. *Mehanika fluida, Knjiga 1, Osnove*. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2002.
- F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of Time-Dependent Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *The Physics of Fluids*, 8(12):2182–2189, 1965.
- J.-M. Hervouet and P. Bates. The Telemac modeling system. *Special Issue, Hydrological Processes*, 14(13):2207–2208, 2000.
- M. R. Hestenes and E. Stiefel. Methods for Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(6):409–436, 1952.
- C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal & External Flows, vol. 1, Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, 2nd edition*. Elsevier, Oxford, 2007.
- F. M. Jr. Holly and A. Preissmann. Accurate calculation of transport in two dimensions. *ASCE Journal of the Hydraulic Division*, 103(HY11):1259–1277, 1977.
- F. M. Jr. Holly and J.-M. Usseglio-Polatera. Dispersion simulation in two-dimensional tidal flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(7):905–926, 1984.
- F. M. Jr. Holly, J. C. Yang, P. Schwarz, J. Schaefer, S. H. Hsu, and R. Einhelling. CHARIMA Numerical simulation of unsteady water and sediment movement in multiply connected networks of mobile-bed channels. Technical Report IIHR Reprt No. 343, Iowa institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa city, Iowa, 1990.
- T. Y. Hsieh and J. C. Yang. Investigation on the Suitability of Two-Dimensional Depth-Averaged Models for Bend-Flow Simulation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(8): 597–612, 2003.
- T. Y. Hsieh and J. C. Yang. Implicit Two-Step Split-Operator Approach for Modelling Two-Dimensional Open Channel Flow. *Journal of Hydroscience and Hydraulic Engineering*, 22(2):113–139, 2004.
- M. C. Hung, T. Y. Hsieh, C. H. Wu, and J. C. Yang. Two-Dimensional Nonequilibrium Noncohesive and Cohesive Sediment Transport Model. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(5):339–382, 2009.
- M. Isic, Z. Horvat, and M. Spasojevic. Advection step in the split-operator approach applied to river modeling. *Applied Numerical Mathematics*, 72:1–18, 2013.
- Y. Jia and S. Wang. Numerical Model for Channel Flow and Morphological Change Studies. *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(9):924–933, 1999.

- M. B. Jovanović. *Regulacija reka - Rečna hidraulika i morfologija*. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2008.
- P. Y. Julien. *River Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- M. F. Karim and J. F. Kennedy. IALLUVIAL: A Computer-Based Flow and Sediment-Routing Model for Alluvial Streams and its Application to the Missouri River. Technical Report IIHR Reprt No. 250, Iowa institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa city, Iowa, 1982.
- M. F. Karim, F. M. Holly, and J. F. Kennedy. Bed armoring procedures in IALLUVIAL and application to Missouri River. Technical Report IIHR Reprt No. 269, Iowa institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa city, Iowa, 1983.
- M. F. Karim, F. M. Jr. Holly, and Y. C. Yang. IALUVIAL: Numerical Simulation of Mobile-Bed Rivers; Part I, Theoretical and Numerical Principles. Technical Report IIHR Reprt No. 309, Iowa institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa city, Iowa, 1987.
- A. Khosronejad, C. D. Rennie, A. A. Selehi Neyshabouri, and I. Gholami. Three-dimensional numerical modeling of reservoir sediment release. *Journal of Hydraulic Research*, 46(2):209–223, 2008.
- A. Kurganov and D. Levy. A third-order semidiscrete central scheme for conservation laws and convection-diffusion equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(4):1461–1488, 2000.
- Y. G. Lai. Two-Dimensional Depth-Averaged Flow Modeling with Unstructured Hybrid Mesh. *Journal of Hydraulic Engineering*, 136(1):12–23, 2010.
- P. D. Lax. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 7:159–193, 1954.
- P. D. Lax and B. Wendroff. System of Conservation Laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13:217–237, 1960.
- B. P. Leonard. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19:59–98, 1979.
- B. Lin and R. A. Falconer. Numerical modeling of three-dimensional suspended sediment for estuarine and coastal waters. *Journal of Hydraulic Research*, 34(4):435–456, 1996.
- W.-C. Liu, S.-W. Chang, K.-T. Jiann, L.-S. Wen, and K.-K. Liu. Modelling diagnosis of heavy metal (copper) transport in an estuary. *Science of the Total Environment*, 388:234–249, 2007.
- R. W. MacCormack. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. In *AIAA Hypervelocity Impact Conference in Cincinnati*, 1969.
- A. Massoudieh, F. A. Bombardelli, and T. R. Ginn. A biogeochemical model of contaminant fate and transport in river waters and sediments. *Journal of Contaminant Hydrology*, 112:103–117, 2010.

- J. J. McGuirk and W. Rodi. A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharges into open-channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 86(4):761–781, 1978.
- M. Muste, K. Yu, T. Pratt, and D. Abraham. Practical aspects of ADCP data use for quantification of mean river flow characteristics; Part II: fixed-vessel measurements. *Flow Measurement and Instrumentation*, 15:17–28, 2004a.
- M. Muste, K. Yu, and M. Spasojevic. Practical aspects of ADCP data use for quantification of mean river flow characteristics; Part I: moving-vessel measurements. *Flow Measurement and Instrumentation*, 15:1–16, 2004b.
- N. Nagata, T. Hosoda, and Y. Muramoto. Numerical analysis of river channel processes with bank erosion. *Journal of Hydraulic Engineering*, 126(4):243–252, 2000.
- A. R. Nicholas and S. J. McLelland. Computational fluid dynamics modelling of three-dimensional processes on natural river floodplains. *Journal of Hydraulic Research*, 42(2):131–143, 2004.
- N. R. B. Olsen. Two-dimensional numerical modelling of flushing processes in water reservoirs. *Journal of Hydraulic Research*, 37(1):3–16, 1999.
- N. R. B. Olsen. Three-Dimensional CFD Modeling of Self-Forming Meandering Channel. *Journal of Hydraulic Engineering*, 129(5):366–372, 2003.
- A. N. Papanicolaou, M. Elhakeem, G. Krallis, S. Prakash, and J. Edinger. Sediment Transport Modeling Review - Current and Future Developments. *Journal of Hydraulic Engineering*, 134(1):1–14, 2008.
- D. W. Peaceman and H. H. Jr. Rachford. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 3(1):28–41, 1955.
- R. Perriáñez. Three-dimensional modelling of the tidal dispersion of non-conservative radionuclides in the marine environment. Application to $^{239,240}\text{Pu}$ dispersion in the eastern Irish Sea. *Journal of Marine Systems*, 22:37–51, 1999.
- R. Perriáñez. The Enhancement of ^{226}Ra in a Tidal Estuary due to the Operation of Fertilizer Factories and Redissolution from Sediments: Experimental Results and a Modelling Study. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 54:809–819, 2002.
- R. Perriáñez. Kinetic modelling of the dispersion of plutonium in the Irish Sea: two approaches. *Journal of Marine Systems*, 38:259–275, 2003a.
- R. Perriáñez. Redissolution and long-term transport of radionuclides released from a contaminated sediment: a numerical modelling study. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 56:5–14, 2003b.
- R. Perriáñez. *Modelling the Dispersion of Radionuclides in the Marine Environment*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.
- R. Perriáñez. Environmental modelling in the Gulf of Cadiz: Heavy metal distributions in water and sediments. *Science of the Total Environment*, 407:3392–3406, 2009.

- R. Periáñez. Modelling the environmental behaviour of pollutants in Algeciras Bay (south Spain). *Marine Pollution Bulletin*, 64:221–232, 2012.
- A. Preissmann. Propagation des intumescences dans les canaux et rivières. In *First Congress of the French Association for Computation, Grenoble*, 1961.
- M. C. Richmond, H. C. Chen, and V. C. Patel. Equations of Laminar and Turbulent Flows in General Curvilinear Coordinates. Technical Report IIHR Reprt No. 300, Iowa institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa city, Iowa, 1986.
- W. Rodi. *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, A state-of-the-art review, 3rd edition*. A. A. Balkema, Rotterdam, 1993.
- W. Rodi. Numerical calculations of Flow and Sediment Transport in Rivers. In *Proceedings of International Symposium on Stochastic Hydraulics, Beijing*, 2000.
- N. Ruther and N. R. B. Olsen. Three-Dimensional Modeling of Sediment Transport in a Narrow 90° channel bend. *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(10):917–920, 2005.
- Y. Saad and M. H. Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7: 856–869, 1986.
- E. M. Scott. *Modelling radioactivity in the environment*. Elsevier, UK, 2003.
- Y. Shimizu, H. Yamaguchi, and T. Itakura. Three-dimensional computation of flow and bed deformation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 116(9):1090–1108, 1990.
- J. G. Simmonds. *A Brief on Tensor Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- F. Sotiropoulos and S. Abdallah. The Discrete Continuity Equation in Primitive Variable Solutions of Incompressible Flow. *Journal of Computational Physics*, 95:212–227, 1991.
- M. Spasojevic and F. M. Jr. Holly. 2-d bed evolution in natural watercourses - New simulation approach. *Journal of the Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, Proceedings of the ASCE*, 116(4):425–443, 1990.
- J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, 2nd edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2004.
- N. Struksima, K. W. Olsen, C. Flostra, and H. J. De Vriend. Bed deformation in curved alluvial channels. *Journal of Hydraulic Research*, 23(1):57–79, 1985.
- L. L. Takacs. A Two-Step Scheme for the Advection Equation with Minimized Dissipation and Dispersion Errors. *Monthly Weather Review*, 113(6):1050–1065, 1985.
- J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Springer-Verlag, New York, NJ., 1995.
- E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2009.
- T.-L. Tsai, S.-W. Chiang, and J.-C. Yang. Examination of characteristic method with cubic interpolation for advection-diffusion equation. *Computers & Fluids*, 35:1217–1227, 2006.

- L. C. van Rijn. Sediment Transport, Part I: Bed Load Transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(10):1431–1456, 1984a.
- L. C. van Rijn. Sediment Transport, Part II: Suspended Load Transport. *Journal of Hydraulic Engineering*, 110(11):1613–1641, 1984b.
- L. C. van Rijn. Mathematical modeling of morphological processes in the case of suspended sediment transport. Technical Report Communication No. 382, Delft Hydraulics Laboratory, 1987.
- L. C. van Rijn, H. van Rossum, and P. Termes. Field Verification of 2-D and 3-D Suspended-Sediment Models. *Journal of Hydraulic Engineering*, 116(10):1270–1288, 1990.
- M. Venutelli. Extension of Preissmann Scheme to Two-Dimensional Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 133(10):1171–1176, 2007.
- W. Wu. Depth-Averaged Two-Dimensional Numerical Modeling of Unsteady Flow and Nonuniform Sediment Transport in Open Channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 130(10):1013–1024, 2004.
- W. Wu. *Computational River Dynamics*. Taylor & Francis Group, London, 2008.
- W. Wu and S. S. Y. Wang. Formulas for Sediment Porosity and Settling Velocity. *Journal of Hydraulic Engineering*, 132(8):858–862, 2006.
- W. Wu, W. Rodi, and T. Wenka. 3D Numerical Modeling of flow and Sediment Transport in Open Channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 126(1):4–15, 2000.
- Y. Wu, R. Falconer, and B. Lin. Modeling trace metal concentration distributions in estuarine waters. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 64:699–709, 2005.
- N. N. Yanenko. *The Method of Fractional Steps, Translated by Holt M.* Springer-Verlag, New York, 1971.
- J.-C. Yang and E.-L. Hsu. On the use of the reach-back characteristics method for calculation of dispersion. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 12: 225–235, 1991.
- L. Yongjun, D. Guoren, H. Lonxi, and S. Xuejun. 3D mathematical model for suspended load transport by turbulent flows and its applications. *Science in China Ser. E Engineering & Material Science*, 47(2):237–256, 2004.
- J. Y. Yoon and V. C. Patel. Numerical Model of Turbulent Flow over Sand Dune. *Journal of Hydraulic Engineering*, 122(1):10–18, 1996.
- J. Zeng, G. Constantinescu, and L. Weber. A 3D non-hydrostatic model to predict flow and sediment transport in loose-bed channel bends. *Journal of Hydraulic Research*, 46 (3):356–372, 2008.
- G. Zhou, H. Wang, X. Shao, and D. Jia. Numerical Model for Sediment Transport and Bed Degradation in the Yangtze Channel Downstream of Three Gorges Reservoir. *Journal of Hydraulic Engineering*, 135(9):729–740, 2009.
- J. G. Zhou. Velocity-Depth Coupling in Shallow-Water Flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 121(10):717–724, 1995.