



**UNIVERZITET U NOVOM SADU**  
Građevinski fakultet Subotica



**mr Danica GOLEŠ**

**REOLOŠKO-DINAMIČKA ANALIZA**  
**ARMIRANOBETONSKIH POLIEDARSKIH LJUSKI**

- doktorska disertacija -

**Subotica, 2012.**

**Mentor:**

**prof. dr Dragan D. Milašinović, dipl. inž. građ.  
redovni profesor Građevinskog fakulteta u Subotici**

***Mojim sinovima***

Zahvaljujem se svome mentoru, prof. dr. Draganu D. Milašinoviću, na svesrdnoj pomoći, sugestijama i savetima koje mi je pružao tokom izrade ove disertacije. Njegova upornost i strpljenje pomogli su mi da savladam prepreke koje su se na ovom putu neminovno pojavljivale.

Članovima komisije, prof. dr Mirku Aćiću i prof. dr Anđeliji Ilić, zahvaljujem na dobronamernim i korisnim kritikama i sugestijama, koje su se odrazile i na krajnji izgled ovog rada i, nadam se, doprinele poboljšanju njegovog kvaliteta.

Posebno sam zahvalna kolegama dr Danijelu Kukarasu i mr Aleksandru Landoviću, pre svega na moralnoj podršci i optimizmu, kojima su me u najtežim trenucima podstakli da nastavim svoj rad. Kolegi dr Danijelu Kukarasu se zahvaljujem i na nesebičnoj pomoći oko štampanja ove disertacije.

Kolega Golub Karaman, zajedno sa grupom studenata na civilnom odsluženju vojnog roka, pomogao mi je pri izvođenju ispitivanja u Laboratoriji za ispitivanje materijala i konstrukcija na Građevinskom fakultetu u Subotici, na čemu sam im iskreno zahvalna.

Zahvaljujem se svim zaposlenima na Građevinskom fakultetu u Subotici koji su me podržavali i bodrili tokom izrade ovog rada.

Beskrajno sam zahvalna mojim roditeljima i suprugu, koji su uvek verovali u mene, nesebično me podržavali i ostali zauvek u najlepšoj uspomeni.

Moja najveća inspiracija, ponos i podsticaj su moji sinovi, Nikola i Mihailo. Uprkos nedaćama, koje su ih prerano zadesile, uspeali su da ostanu dobra deca i uzorni đaci. Bez njihovog razumevanja i pomoći ne bi bilo ni ovog rada. Zato sam im neizmerno zahvalna.

Univerzitet u Novom Sadu  
Građevinski fakultet Subotica

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:  
RBR

Identifikacioni broj:  
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija  
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal  
TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija  
VR

Ime i prezime autora: mr Danica Goleš  
AU

Mentor: dr Dragan D. Milašinović, redovni profesor  
MN

Naslov rada: Reološko-dinamička analiza armiranobetonskih  
NR poliedarskih ljuski

Jezik publikacije: srpski  
JP

Jezik izvoda: srpski / engleski  
JI

Zemlja publikovanja: Srbija  
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina  
UGP

Godina: 2012  
GO

Izdavač: autorski reprint  
IZ

Mesto i adresa: Građevinski fakultet Subotica,  
MA 24000 Subotica, Kozaračka 2a

Fizički opis rada: 7 / 224 / 62 / 179 / 71 / 77  
FO (broj poglavlja / stranica / slika / grafikona /  
tabela / referenci)

Naučna oblast: NO	građevinarstvo
Naučna disciplina: ND	betonske konstrukcije, reologija betona i čelika, numerička analiza
Predmetna odrednica, ključne reči: PO	armiranobetonske poliedarske ljuske, reološko- dinamička analogija, metod konačnih traka
UDK	
Čuva se: ČU	u biblioteci Građevinskog fakulteta u Subotici
Važna napomena: VN	
Izvod: IZ	

U ovoj disertaciji je izvršena teorijska i numerička analiza armiranobetonskih poliedarskih ljuski, tretirajući beton i armaturu kao viskoelastoplastičan materijal. Poseban naglasak je dat na istraživanje graničnih čvrstoća i deformacija ovih materijala.

U prvom delu rada je dat kratak istorijski pregled klasičnih metoda proračuna poliedarskih ljuski. Na primeru jedne armiranobetonske poliedarske ljuske upoređeni su klasični postupci analize ovih konstrukcija sa savremenijim, numeričkim postupcima - metodom konačnih traka i metodom konačnih elemenata. Kako metod konačnih traka u slučaju poliedarskih ljuski najadekvatnije opisuje ove površinske nosače, uključujući njihove kontinualne uslove oslanjanja, u radu je detaljno opisana njegova primena na rešavanje linearno elastičnih problema poliedarskih ljuski u slučaju malih pomeranja, a dat je i kratak osvrt na stanje velikih ugiba.

Na bazi reološkog modela viskoelastoplastičnog materijala, primenom reološko-dinamičke analogije (RDA), koju je predložio D. D. Milašinić, autorka rada izvodi reološko-dinamičke radne dijagrame betona i čelika, koji predstavljaju jednovremene parove napona i dilatacija. U radu je unapređen RDA postupak za određivanje graničnog (kritičnog) napona betonskih i armiranobetonskih stubova srednje vitkosti, čime je omogućena njegova primena i na stubove male vitkosti, u koje spadaju i standardni uzorci za ispitivanje čvrstoće betona na pritisak. Na ovaj način je omogućeno teorijsko određivanje radnih dijagrama betona različitih klasa iz minimalnog broja mehaničkih parametara materijala, koji se dobijaju standardnim postupcima ispitivanja. Ovako dobijeni teorijski reološko-dinamički radni dijagrami armature i betona su upoređeni sa rezultatima drugih autora, dobijenim u okviru njihovih eksperimentalnih istraživanja, te je konstatovana njihova zadovoljavajuća tačnost. Dijagrami su upoređeni i sa radnim dijagramima datim u trenutno važećim tehničkim propisima za beton i armirani beton, te je utvrđena njihova velika sličnost.

Za dalju verifikaciju teorijskih reološko-dinamičkih radnih dijagrama armature i betona, kao ilustrativni primer je detaljno obrađena jedna realno izvodljiva armiranobetonska poliedarska ljuska. Na osnovu poređenja oblika

dijagrama presečnih sila i pomeranja dobijenih linearno elastičnom analizom poliedarskih ljuski različitog raspona, zaključuje se da se granica između "kratkih" i "dugih" ljuski, za izabrani poprečni presek, nalazi između raspona  $L=10\text{m}$  i  $L=20\text{m}$ . Kako se kod ivične grede mogu javiti značajni momenti torzije (kako kod kratkih tako i kod dugih ljuski), koji mogu postati merodavni prilikom dimenzionisanja armiranobetonskog preseka grede, za dalju analizu je odabrana ljuska raspona  $L=20\text{m}$ , kod koje ovi momenti imaju minimalnu vrednost. Za sračunate presečne uticaje izvršeno je dimenzionisanje karakterističnih preseka ljuske prema PBAB'87. Granična nosivost tri karakteristična preseka poliedarske ljuske određena je primenom radnih dijagrama betona i čelika prema Evrokodu 2, te primenom reološko-dinamičkih radnih dijagrama betona i čelika. Konstruisani su dijagrami interakcije  $N_u - M_u$  za više kombinacija radnih dijagrama materijala prema Evrokodu 2 i reološko-dinamičkoj analogiji i izvršeno njihovo poređenje.

Na kraju rada su dati zaključci i smernice za buduća istraživanja.

Datum prihvatanja teme od 09.03.2009.

strane NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

dr Dragan Milašinović, redovni profesor  
Građevinskog fakulteta Subotica Univerziteta u  
Novom Sadu - mentor,

dr Mirko Ačić, redovni profesor (u penziji)  
Građevinskog fakulteta u Beogradu Univerziteta  
u Beogradu - predsednik komisije,

dr Anđelija Ilić, vanredni profesor Građevinskog  
fakulteta Subotica Univerziteta u Novom Sadu -  
član





Scientific field SF	Civil Engineering
Scientific discipline SD	Concrete structures, Rheology of concrete and steel, Numerical analysis
Subject, Key words SKW	reinforced concrete structures, rheological-dynamical analogy, finite strip method
UC	
Holding data: HD	The Library of Faculty of Civil Engineering Subotica
Note: N	
Abstract: AB	

In this dissertation, theoretical and numerical analysis of reinforced concrete folded plates, taking into account the viscoelastoplastic properties of concrete and reinforcing steel, was carried out. Particular emphasis is given to the study of ultimate strength and deformation of these materials.

The first part gives a brief overview of classical methods of analysis of folded plates. These methods are compared with more contemporary, numerical methods - the finite strip and the finite elements method. As the finite strip method is proved to be efficient tool for analyzing a great deal of structures for which both geometry and material properties can be considered as constants along a main direction, straight or curved, while only the loading distribution may vary, the application of this method on solving linear elastic problems of folded plates in case of small displacements is described in details. A short review of the state of large deflection is also given.

On the basis of rheological model of viscoelastoplastic material, applying rheological-dynamical analogy (RDA), proposed by D. D. Milašinović, so-called rheological-dynamical working diagrams of concrete and steel are built, representing simultaneous stress-strain pairs. RDA procedure for determining the ultimate (critical) stresses of concrete and reinforced concrete columns of medium slenderness is improved in this thesis, enabling its use on short columns, which include standard specimens for testing compressive strength of concrete. This made possible to determine the theoretical stress-strain relations of various concrete strength classes, knowing only the minimum number of mechanical material parameters that come from standard test procedures. Thus obtained theoretical rheological-dynamical working diagrams of concrete and reinforcement were compared with results of other authors, obtained as part of their experimental research, and ascertained their satisfactory accuracy. The diagrams are compared with working diagrams from currently valid technical regulations for concrete and reinforced concrete, and their great similarity is observed.

For further verification of the theoretical rheological-dynamical working diagrams of reinforcement and concrete, as an illustrative example, a feasible reinforced concrete folded plate is analyzed in detail. Comparing the shape of the diagrams of internal forces and displacements, obtained by liner elastic

analysis of folded plates of different spans, it is concluded that the boundary between "short" and "long" folded plates, for the selected cross-section, lies between  $L=10\text{m}$  and  $L=20\text{m}$ . It is obtained that the edge beams may experience significant torsional moments (both in short and long folded plates), which may become applicable in design of reinforced concrete cross-section of the beam, so the folded plate of  $L=20\text{m}$  span, in which minimal values of torsional moments appear, is selected for further analysis. For computed values of internal moments and forces, cross sectional area of reinforcement of characteristic cross sections of structure is calculated according to PBAB'87. The ultimate resistance of three characteristic cross sections of folded plate structure is calculated using working diagrams of concrete and steel according to Eurocode 2 and according to RDA. Diagrams of interaction  $N_u - M_u$  are drawn for several combinations of material working diagrams and are mutually compared.

Conclusions and directions of further research are given at the end of this dissertation.

Accepted on Scientific Board on: 09.03.2009.

AS

Defended:

DE

Thesis Defend Board: PhD Dragan Milašinović, full professor, Faculty of Civil Engineering Subotica, University of Novi Sad - mentor, DB

PhD Mirko Ačić, full professor (retired), Faculty of Civil Engineering Belgrade, University of Belgrade - president,

PhD Anđelija Ilić, associate professor, Faculty of Civil Engineering Subotica, University of Novi Sad - member

## SADRŽAJ

<b>1. UVOD</b> .....	<b>1</b>
1.1. Predmet istraživanja .....	1
1.2. Obrazloženje o potrebama istraživanja .....	1
1.3. Cilj istraživanja .....	2
1.4. Primenjena metodologija .....	2
1.5. Rezultati istraživanja i njihova primenljivost .....	3
1.6. Kratak sadržaj rada .....	3
<b>2. POLIEDARSKE LJUSKE</b> .....	<b>5</b>
2.1. Osnovni pojmovi i uvodna razmatranja .....	5
2.2. Primena .....	6
2.3. Istorijski pregled metoda proračuna .....	11
2.3.1. Hronološki prikaz razvoja metoda proračuna .....	11
2.3.2. Opis pojedinačnih metoda analize .....	13
2.3.3. Metod analize preporučen od strane Komisije za gradnju nabranih ploča, koja je formirana pri ASCE, 1963. godine .....	16
2.3.4. Kratak prikaz još nekih metoda proračuna .....	23
<b>3. METOD KONAČNIH TRAKA U ANALIZI POLIEDARSKIH LJUSKI</b> ...	<b>27</b>
3.1. Opis predmeta analize .....	27
3.1.1. Pločasti nosači - ravno stanje napona .....	27
3.1.2. Ploče - površinski nosači napregnuti na savijanje .....	31
3.2. Razvoj i osnove metoda konačnih traka .....	33
3.3. Aproksimativne funkcije .....	36
3.3.1. Aproksimativne funkcije u problemu savijanja .....	37
3.3.1.1. Deo aproksimativnih funkcija u $y$ pravcu: $Y_m(y)$ .....	37
3.3.1.2. Deo aproksimativnih funkcija u $x$ pravcu: $w_m(x)$ .....	38
3.3.2. Aproksimativne funkcije u problemu ravnog stanja napreznja .....	39
3.3.2.1. Deo aproksimativnih funkcija u $y$ pravcu: $Y_m(y)$ .....	39
3.3.2.2. Deo aproksimativnih funkcija u $x$ pravcu: $u_m(x)$ i $v_m(x)$ .....	40
3.3.3. Aproksimativne funkcije u analizi ravnih poliedarskih ljuski .....	40
3.4. Varijaciona formulacija za metod konačnih traka .....	41
3.4.1. Stanje deformacija .....	41
3.4.2. Energija deformacije .....	42
3.4.3. Rad spoljnih sila .....	44
3.4.4. Ukupna potencijalna energija .....	44
3.4.5. Formulacija karakteristika traka preko principa o minimumu ukupne potencijalne energije .....	45
3.4.5.1. Stacionarna vrednost ukupne potencijalne energije .....	45
3.4.5.2. Jednačine ravnoteže .....	45
3.4.5.3. Naponi i unutrašnje sile kao funkcije parametara pomeranja u čvornim linijama .....	47
3.4.6. Transformacija koordinata .....	47

3.5.	Primena MKT na linearno elastične probleme poliedarskih ljuski u slučaju malih pomeranja	49
3.5.1.	Jednačine ravnoteže	49
3.5.2.	Matrice krutosti konačnih traka	49
3.5.2.1.	Matrica krutosti konačne trake u problemu savijanja	49
3.5.2.2.	Matrica krutosti konačne trake u ravnom stanju napreznja	51
3.5.3.	Vektori opterećenja konačnih traka	53
3.5.3.1.	Vektor opterećenja konačne trake u problemu savijanja	53
3.5.3.2.	Vektor opterećenja konačne trake u ravnom stanju napreznja	53
3.5.4.	Matrice napona i momenata	54
3.5.5.	Direktno određivanje matrice krutosti konstrukcije	54
3.5.6.	Rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina	56
3.5.7.	Uvođenje poznatih komponenti pomeranja	57
3.6.	Primena MKT na dinamičku analizu konstrukcija	57
3.6.1.	Uvod	57
3.6.2.	Jednačine kretanja u matičnom obliku	58
<b>4.</b>	<b>MODELIRANJE MATERIJALA</b>	<b>61</b>
4.1.	Reološki model D. D. Milašinovića	61
4.2.	Reološko-dinamička analogija (RDA)	67
4.2.1.	Fizički mehanizam reološko-dinamičke analogije	67
4.2.2.	Rešenje homogene diferencijalne jednačine	70
4.2.3.	Harmonijska varijacija napona	73
4.2.4.	Primena RDA na modeliranje ponašanja realnih materijala	76
4.2.4.1.	Granični (kritični) napon vitkih stubova primenom RDA	76
4.2.4.2.	Primena RDA na modeliranje relaksacije napona (zamora)	82
4.2.4.3.	Primena RDA na modeliranje ponašanja metalnih šipki	86
4.2.4.4.	Primena RDA na modeliranje ponašanja betona	98
4.3.	Radni dijagram čelika (RDČ)	101
4.3.1.	RDČ prema PBAB'87	102
4.3.2.	RDČ prema EN 1992-1-1: 2004 Evrokod 2	103
4.3.3.	RDČ primenom RDA	104
4.4.	Radni dijagram pritisnutog betona (RDB)	118
4.4.1.	RDB prema PBAB'87	121
4.4.2.	RDB prema EN 1992-1-1: 2004 Evrokod 2	122
4.4.3.	RDB primenom RDA	125
4.4.3.1.	Primena RDA postupka na stubove srednje vitkosti	128
4.4.3.2.	Primena RDA postupka na kratke stubove	133
4.4.3.3.	Primena RDA postupka za dobijanje radnih dijagrama betona različitih klasa čvrstoće	141
<b>5.</b>	<b>PRIMER - PRIMENA RDA RADNIH DIJAGRAMA ČELIKA I BETONA NA ODREĐIVANJE GRANIČNE NOSIVOSTI ARMIRANOBETONSKE POLIEDARSKE LJUSKE</b>	<b>146</b>
5.1.	Numerička analiza primenom MKT	146
5.1.1.	Analiza uticaja dužine ljuske na presečne sile i pomeranja	147
5.1.2.	Analiza uticaja nagiba ploča ljuske na presečne sile i pomeranja	152
5.1.3.	Dijagrami presečnih sila i pomeranja za odabrani primer	157

5.2. Dimenzionisanje .....	164
5.2.1. Ivične grede - nosači između čvornih linija 9 i 11 .....	164
5.2.2. Ploče u nagibu - nosači između čvornih linija 1 i 9 .....	165
5.3. Analiza granične nosivosti karakterističnih preseka .....	166
5.3.1. Ivične grede - nosači između čvornih linija 9 i 11 .....	172
5.3.2. Presek ploče poliedarske ljuske u čvornoj liniji 1 .....	180
5.3.3. Presek ploče poliedarske ljuske u čvornoj liniji 8 .....	188
<b>6. ZAKLJUČAK .....</b>	<b>196</b>
<b>7. LITERATURA .....</b>	<b>202</b>
<b>PRILOG - Tabelarni prikazi presečnih uticaja, merodavnih graničnih     uticaja, potrebne i usvojene armature za karakteristične     preseke analizirane poliedarske ljuske i detalji armature ...</b>	<b>206</b>

## **REOLOŠKO-DINAMIČKA ANALIZA ARMIRANOBETONSKIH POLIEDARSKIH LJUSKI**

### **REZIME**

U ovoj disertaciji je izvršena teorijska i numerička analiza armiranobetonskih poliedarskih ljuski, tretirajući beton i armaturu kao viskoelastoplastičan materijal. Poseban naglasak je dat na istraživanje graničnih čvrstoća i deformacija ovih materijala.

U prvom delu rada je dat kratak istorijski pregled klasičnih metoda proračuna poliedarskih ljuski. Na primeru jedne armiranobetonske poliedarske ljuske upoređeni su klasični postupci analize ovih konstrukcija sa savremenijim, numeričkim postupcima - metodom konačnih traka i metodom konačnih elemenata. Kako metod konačnih traka u slučaju poliedarskih ljuski najadekvatnije opisuje ove površinske nosače, uključujući njihove kontinualne uslove oslanjanja, u radu je detaljno opisana njegova primena na rešavanje linearno elastičnih problema poliedarskih ljuski u slučaju malih pomeranja, a dat je i kratak osvrt na stanje velikih ugiba.

Na bazi reološkog modela viskoelastoplastičnog materijala, primenom reološko-dinamičke analogije (RDA), koju je predložio D. D. Milašinović, autorka rada izvodi reološko-dinamičke radne dijagrame betona i čelika, koji predstavljaju jednovremene parove napona i dilatacija. U radu je unapređen RDA postupak za određivanje graničnog (kritičnog) napona betonskih i armiranobetonskih stubova srednje vitkosti, čime je omogućena njegova primena i na stubove male vitkosti, u koje spadaju i standardni uzorci za ispitivanje čvrstoće betona na pritisak. Na ovaj način je omogućeno teorijsko određivanje radnih dijagrama betona različitih klasa iz minimalnog broja mehaničkih parametara materijala, koji se dobijaju standardnim postupcima ispitivanja. Ovako dobijeni teorijski reološko-dinamički radni dijagrami armature i betona su upoređeni sa rezultatima drugih autora, dobijenim u okviru njihovih eksperimentalnih istraživanja, te je konstatovana njihova zadovoljavajuća tačnost. Dijagrami su upoređeni i sa radnim dijagramima datim u trenutno važećim tehničkim propisima za beton i armirani beton, te je utvrđena njihova velika sličnost.

Za dalju verifikaciju teorijskih reološko-dinamičkih radnih dijagrama armature i betona, kao ilustrativni primer je detaljno obrađena jedna realno izvodljiva armiranobetonska poliedarska ljuska. Na osnovu poređenja oblika dijagrama presečnih sila i pomeranja dobijenih linearno elastičnom analizom poliedarskih ljuski različitog raspona, zaključuje se da se granica između "kratkih" i "dugih" ljuski, za izabrani poprečni presek, nalazi između raspona  $L=10m$  i  $L=20m$ . Kako se kod ivične grede mogu javiti značajni momenti torzije (kako kod kratkih tako i kod dugih ljuski), koji mogu postati merodavni prilikom dimenzionisanja armiranobetonskog preseka grede, za dalju analizu je odabrana ljuska raspona  $L=20m$ , kod koje ovi momenti imaju minimalnu vrednost. Za sračunate presečne uticaje izvršeno je dimenzionisanje karakterističnih preseka ljuske prema PBAB'87. Granična nosivost tri karakteristična preseka poliedarske ljuske određena je primenom radnih

dijagrama betona i čelika prema Evrokodu 2, te primenom reološko-dinamičkih radnih dijagrama betona i čelika. Konstruisani su dijagrami interakcije  $N_u - M_u$  za više kombinacija radnih dijagrama materijala prema Evrokodu 2 i reološko-dinamičkoj analogiji i izvršeno njihovo poređenje.

Na kraju rada su dati zaključci i smernice za buduća istraživanja.

**Ključne reči:** reološko-dinamička analogija, radni dijagrami betona i armature, armiranobetonske poliedarske ljuske, metod konačnih traka

## **RHEOLOGICAL-DYNAMICAL ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE FOLDED PLATES**

### **SUMMARY**

In this dissertation, theoretical and numerical analysis of reinforced concrete folded plates, taking into account the viscoelastoplastic properties of concrete and reinforcing steel, was carried out. Particular emphasis is given to the study of ultimate strength and deformation of these materials.

The first part gives a brief overview of classical methods of analysis of folded plates. These methods are compared with more contemporary, numerical methods - the finite strip and the finite elements method. As the finite strip method is proved to be efficient tool for analyzing a great deal of structures for which both geometry and material properties can be considered as constants along a main direction, straight or curved, while only the loading distribution may vary, the application of this method on solving linear elastic problems of folded plates in case of small displacements is described in details. A short review of the state of large deflection is also given.

On the basis of rheological model of viscoelastoplastic material, applying rheological-dynamical analogy (RDA), proposed by D. D. Milašinović, so-called rheological-dynamical working diagrams of concrete and steel are built, representing simultaneous stress-strain pairs. RDA procedure for determining the ultimate (critical) stresses of concrete and reinforced concrete columns of medium slenderness is improved in this thesis, enabling its use on short columns, which include standard specimens for testing compressive strength of concrete. This made possible to determine the theoretical stress-strain relations of various concrete strength classes, knowing only the minimum number of mechanical material parameters that come from standard test procedures. Thus obtained theoretical rheological-dynamical working diagrams of concrete and reinforcement were compared with results of other authors, obtained as part of their experimental research, and ascertained their satisfactory accuracy. The diagrams are compared with working diagrams from currently valid technical regulations for concrete and reinforced concrete, and their great similarity is observed.

For further verification of the theoretical rheological-dynamical working diagrams of reinforcement and concrete, as an illustrative example, a feasible reinforced concrete folded plate is analyzed in detail. Comparing the shape of the diagrams of internal forces and displacements, obtained by linear elastic analysis of folded plates of different spans, it is concluded that the boundary between "short" and "long" folded plates, for the selected cross-section, lies between  $L=10\text{m}$  and  $L=20\text{m}$ . It is obtained that the edge beams may experience significant torsional moments (both in short and long folded plates), which may become applicable in design of reinforced concrete cross-section of the beam, so the folded plate of  $L=20\text{m}$  span, in which minimal values of torsional moments appear, is selected for further analysis. For computed values of internal moments and forces, cross sectional area of reinforcement of characteristic cross sections of structure is calculated according to PBAB'87.



The ultimate resistance of three characteristic cross sections of folded plate structure is calculated using working diagrams of concrete and steel according to Eurocode 2 and according to RDA. Diagrams of interaction  $N_u - M_u$  are drawn for several combinations of material working diagrams and are mutually compared.

Conclusions and directions of further research are given at the end of this dissertation.

**Key words:** rheological-dynamical analogy, stress-strain relation of concrete and reinforcement, reinforced concrete folded plates, finite strip method.

## 1. UVOD

### 1.1. Predmet istraživanja

Predmet istraživanja ovoga rada su armiranobetonske poliedarske ljuske sastavljene od kruto vezanih ploča (koje čine poliedar) koje na krajnjim ivicama imaju grede kao podužna ukrućenja - otvorena poliedarska ljuska kao krovna konstrukcija. Ove ivične grede mogu imati značajnu visinu u odnosu na svoju debljinu, te one preuzimaju funkciju rebara u poprečnom preseku ljuske. Eksperimentalna analiza postojećih objekata pokazala je da su stvarne deformacije ovakvih i sličnih nosača često znatno veće nego što se dobijaju proračunom po klasičnoj teoriji savijanja. Primenom teorije ravnih preseka na analizu graničnih stanja upotrebljivosti ovih konstrukcija dobijaju se veličine ugiba koje mogu biti znatno manje nego što bi se dobile tačnijim proračunom. Sve ovo nameće potrebu za iznalaženjem što tačnijeg postupka analize poliedarskih ljuski. Zbog složenosti problema, analiza u osnovi treba da se vrši primenom numeričkih metoda zasnovanih na fizičkoj diskretizaciji konstrukcije mrežom konačnih elemenata. U ovom radu su klasični postupci proračuna poliedarskih ljuski upoređeni sa numeričkim postupcima - metodom konačnih traka i metodom konačnih elemenata. Kako željena veća tačnost izlaznih podataka nameće veću gustinu mreže (koja, međutim, ne mora doprineti većoj tačnosti zbog problema "size effect"), odnosno veći broj konačnih elemenata, to analiza poliedarskih ljuski metodom konačnih elemenata može biti krajnje zahtevna u pogledu kapaciteta računara i utroška vremena potrebnog da se analiza sprovede. Sa druge strane, primena metoda konačnih traka, koji je prvenstveno namenjen analizi konstrukcija čija je dužina znatno veća od dimenzija u poprečnom preseku (tankozidne konstrukcije, pune ploče...), sa manjim brojem elemenata i čvornih linija, doprinosi uštedi u vremenu i kompjuterskoj memoriji, povećavajući pri tome tačnost izlaznih rezultata uz istovremeno isključivanje problema "size effect". Zbog svega navedenog, za dalju analizu konstrukcije u ovom radu je odabran metod konačnih traka.

Tehnički propisi za beton i armirani beton sadrže idealizovane modele za opis ponašanja materijala, odnosno daju radne dijagrame betona i armature, koji predstavljaju idealizaciju stvarnog ponašanja materijala, uz propisivanje odgovarajućih parcijalnih koeficijenata sigurnosti. Za uobičajeni proračun poprečnih preseka koristi se dijagram napon-dilatacija pritisnutog betona u obliku parabola-pravougona, pri čemu se veličina dilatacija na granici ove dve oblasti i veličina granične dilatacije propisuju u zavisnosti od klase čvrstoće betona (Evrokod 2), odnosno usvajaju 2‰ i 3.5‰ redom (prema Pravilniku BAB'87). Evrokod 2 daje i dijagram napon-dilatacija betona za nelinearnu analizu konstrukcija, oblika parabole sa opadajućom granom nakon dostizanja pritisne čvrstoće betona. Sa mehaničke tačke gledišta ovo je konstitutivni zakon za beton kojim je u analizu uvedena nelinearnost. Prema PBAB'87 radni dijagram čelika je bilinearan sa horizontalnom gornjom granom i maksimalnim dilatacijama čelika od 10‰, dok Evrokod 2 dopušta i upotrebu bilinearnog dijagrama sa gornjom granom u nagibu. U ovoj disertaciji su konstruisani reološko-dinamički radni dijagrami betona i čelika koji verodostojnije uvode osobine materijala u analizu, jer predstavljaju jednovremene parove napona i dilatacija.

### 1.2. Obrazloženje o potrebama istraživanja

Pod opterećenjem kod poliedarskih ljuski dolazi do "vitoperenja" poprečnog preseka, što dovodi do preraspodele normalnih napona duž poprečnog preseka, zbog čega klasična analiza savijene grede ne daje zadovoljavajuće rezultate. Ovo nameće potrebu formulisanja odgovarajućeg numeričkog metoda kojim bi se istražila navedena naponska stanja.

Opisivanje ponašanja materijala (armiranog betona) je vrlo kompleksan problem, te se u inženjerskoj praksi upotrebljavaju propisani uprošćeni dijagrami kojima se opisuju veze između naponskih i deformacijskih veličina u funkciji različitih parametara. Svaki doprinos tačnijem opisivanju ponašanja materijala doprinosi i povećanju pouzdanosti proračuna armiranobetonskih konstrukcija. Primena opšteg reološkog modela za armaturu i beton i primena reološko-dinamičke analogije za određivanje jednovremene veze napon-dilatacija u čeliku i betonu ima za cilj upravo približavanje proračunskog modela stvarnom ponašanju materijala.

### 1.3. Cilj istraživanja

Dokaz pouzdanosti betonskih konstrukcija je izuzetno složen i zahtevan zadatak, danas od sve većeg značaja zbog brojnih otkaza u toku eksploatacije i zbog sve veće hraprosti u projektovanju konstrukcija zasnovane na sve većem razvoju nauke i tehnike. Cilj ovog istraživanja je sveobuhvatnija i preciznija analiza armiranobetonskih poliedarskih ljski, koje se primenom savremenih numeričkih postupaka sve više optimizuju tako da često dolaze u naponsko-deformacijska stanja koja se obično ne podrazumevaju. Za numeričku analizu je odabran najprilagodljiviji numerički metod, koji može efikasno naći napone i deformacije u karakterističnim presecima (kao lokalne veličine).

Jedan od ciljeva je i da se materijal modelira na način koji će što vernije opisati njegovo stvarno ponašanje, kako u elastičnoj oblasti tako i nakon plastifikacije, te da se izvrši komparativna analiza sa modelima predloženim u važećoj tehničkoj regulativi (Evrokod 2).

### 1.4. Primenjena metodologija

Istraživanje se u metodološkom smislu temelji na metodama savremene nauke. Na osnovu analize dostupne literature, uz apstrahovanje manje bitnih podataka, dat je prikaz i komparativna analiza najzastupljenijih metoda proračuna poliedarskih ljski. Kao rezultat ovog dela istraživanja, za dalju analizu armiranobetonskih poliedarskih ljski je izabran metod konačnih traka.

Konstrukcija je matematički modelovana na principima metoda konačnih traka, koji je detaljno prikazan u ovom radu. Modelovanje materijala je izvršeno prema važećim tehničkim propisima (EC 2 i PBAB'87). Osim ovog je sprovedeno i matematičko-fizičko modelovanje materijala (betona i čelika) primenom reološko-dinamičke analogije.

Primenom odabranog numeričkog metoda (metod konačnih traka) sprovedena je linearno elastična analiza armiranobetonske poliedarske ljske u oblasti malih pomeranja. Na osnovu ovako sračunatih presečnih sila izvršeno je dimenzionisanje karakterističnih preseka ljske u skladu sa PBAB'87. Granična nosivost preseka analizirana je kroz konstrukciju dijagrama interakcije za različite kombinacije radnih dijagrama materijala. Komparativnom analizom dobijenih dijagrama dolazi se do zaključka da se primenom RDA radnih dijagrama materijala dobija granična normalna sila koja je za maksimalno 10% veća od granične normalne sile dobijene primenom EC 2 radnih dijagrama materijala.

Osim gore navedenih, u radu su primenjene i posebne naučne metode: apstrakcija i konkretizacija, generalizacija i specijalizacija, indukcija i dedukcija, definicija i klasifikacija, dokazivanje i opovrgavanje i logička metoda.

## 1.5. Rezultati istraživanja i njihova primenljivost

U prvom delu rada izvršena je komparativna analiza klasičnih i numeričkih metoda proračuna poliedarskih ljuski. Pokazalo se da numeričke metode imaju prednost nad klasičnim, jer su u mogućnosti da tačnije prikažu naponska stanja u konstrukciji, uključujući i zone lokalne koncentracije napona. Kod konstrukcija čija je dužina znatno veća od dimenzija u poprečnom preseku (kao što su poliedarske ljuske) metod izbora je metod konačnih traka, koji sa manjim brojem elemenata i čvornih linija doprinosi uštedi u vremenu i kompjuterskoj memoriji, dajući istovremeno pouzdane izlazne rezultate o presečnim silama i deformacijama. U radu su prikazani osnovni principi i najvažniji izrazi na kojima se zasniva metod konačnih traka za primenu na poliedarskim ljuskama, kako bi se licima koja se bave analizom ove vrste konstrukcija približio jedan jednostavan, brz i tačan postupak.

Primena reološko-dinamičke analogije treba da omogući uvođenje opštijeg reološkog modela u proračun armiranobetonskih elemenata i konstrukcija, bez istovremenog usložnjavanja samog procesa proračuna. Rezultati prikazani u ovom radu treba da posluže kao solidna osnova za dalja istraživanja u pravcu dobijanja radnih dijagrama materijala koji će još realnije opisivati njihovo stvarno ponašanje. Reološko-dinamički dijagrami napon-dilatacija betona i armature, dobijeni teorijskim putem u ovom radu, mogu da se implementiraju u računarske programe namenjene analizi konstrukcija sa uvođenjem materijalne nelinearnosti, što je ujedno i jedan od mogućih daljih pravaca istraživanja.

## 1.6. Kratak sadržaj rada

U prvom poglavlju date su uvodne napomene o predmetu i potrebi istraživanja, njegovim ciljevima i metodologiji, te rezultatima i njihovoj primenljivosti. Dat je i kratak opis rada.

Osnovni pojmovi o poliedarskim ljuskama, njihovim uobičajenim oblicima, dimenzijama i primeni dati su u drugom poglavlju. Posebna pažnja posvećena je armiranobetonskim poliedarskim ljuskama, za koje su data i konstruktivna razmatranja, te prikazano nekoliko primera njihove uspešne primene. Dat je istorijski prikaz metoda proračuna poliedarskih ljuski, sa posebnim osvrtom na predlog Komisije za gradnju nabranih ploča, koju je formiralo Američko društvo građevinskih inženjera (ASCE) 1963. godine. Prema ovom predlogu izvršen je proračun armiranobetonske ljuske koja je već analizirana u literaturi (De Fries-Skene i Scordelis [15] i Cheung [13]). Rezultati ovog proračuna (poprečni momenti savijanja i podužni normalni naponi u sredini raspona ljuske) upoređeni su sa rezultatima koje je autorka dobila primenom metoda konačnih traka (računarskim programom MKTE1) i metoda konačnih elemenata (računarskim programom Tower 6).

U trećem poglavlju su prikazane osnovne jednačine ravnog stanja napona i savijanja tankih ploča, kao dva prisutna stanja naprezanja elemenata poliedarske ljuske. Kako je za dalju analizu konstrukcije odabran metod konačnih traka (MKT), to su u ovom poglavlju opisani njegov razvoj i osnovne postavke. Izvedene su aproksimativne funkcije polja pomeranja u problemu savijanja i problemu ravnog stanja naprezanja, a na osnovu njih i aproksimativne funkcije za analizu ravnih poliedarskih ljuski. Prikazana je varijaciona formulacija za metod konačnih traka, te objašnjena njena primena na linearno elastične probleme poliedarskih ljuski u slučaju malih pomeranja, u statičkoj i dinamičkoj analizi konstrukcija, a dat je i kratak osvrt na stanje velikih ugiba.

Osvrt na osnovne reološke modele dat je u četvrtom poglavlju. Opisan je složeni reološki model viskoelastoplastičnog tela i data njegova diferencijalna jednačina. Objašnjen je fizički mehanizam reološko-dinamičke analogije (RDA), predložene od strane D. D. Milašinića, zahvaljujući kojoj komplikovan nelinearan viskoelastoplastični problem može biti rešavan kao mnogo jednostavniji linearan dinamički problem. Ukratko je prikazana primena RDA na modeliranje ponašanja realnih materijala, prema već objavljenim radovima - određivanje graničnih (kritičnih) napona stubova srednje vitkosti, modeliranje zamora i modeliranje ponašanja armature, jer su zaključci ovih istraživanja neophodni za primenu u armiranom betonu. Za potrebe daljeg proračuna opisani su radni dijagrami betona i čelika prema PBAB'87 i Evrokodu 2. Na osnovu prethodno prikazane analize, RDA postupak je primenjen za dobijanje dijagrama napon-dilatacija čelika. RDA radni dijagrami čelika upoređeni su sa eksperimentalnim vrednostima i dijagramima prema EC 2 i PBAB'87, te je konstatovano njihovo odlično poklapanje. RDA dijagrami napon-dilatacija betona su konstruisani za uzorke koji su bili predmet eksperimentalnih istraživanja na Građevinskom fakultetu u Subotici. Pokazalo se da se primenom RDA postupka dobijaju radni dijagrami betona zadovoljavajuće tačnosti. RDA postupak je primenjen za konstruisanje radnih dijagrama betona raznih klasa čvrstoće. Poređenjem dobijenih dijagrama sa dijagramima koje daje EC 2 za potrebe nelinearne analize konstrukcija uočava se njihovo vrlo dobro slaganje, pri čemu se najveća razlika primećuje u oblasti nakon dostizanja maksimalnog napona, gde dijagram prema EC 2 ima opadajuću granu, dok RDA dijagram ostaje horizontalan.

Linearno elastična analiza poliedarskih ljuski različitih raspona i oblika poprečnog preseka, proračun ilustrativnog primera armiranobetonske poliedarske ljuske, dijagrami presečnih uticaja u karakterističnim presecima i opis postupka dimenzionisanja prema PBAB'87 prikazani su u petom poglavlju. Za tri odabrana karakteristična preseka poliedarske ljuske konstruisani su dijagrami interakcije  $N_u - M_u$  za različite kombinacije radnih dijagrama betona i čelika prema EC 2 i RDA. Za ove preseke i kombinacije radnih dijagrama materijala dati su tabelarni prikazi parova graničnih normalnih sila i graničnih momenata savijanja za odabrane odnose dilatacija u armaturi i betonu, te za stvarni ekscentricitet eksploatacione normalne sile određeni granični presečni uticaji i globalni koeficijenti sigurnosti.

U šestom poglavlju daju se završne napomene i zaključci. Naznačeni su pravci daljih istraživanja.

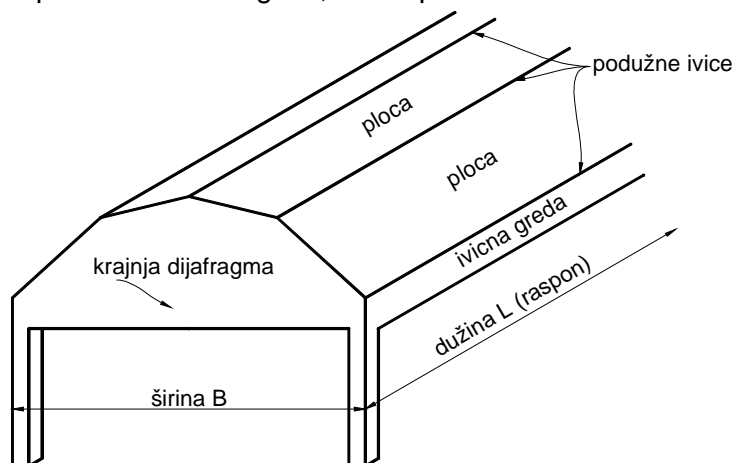
Sedmo poglavlje sadrži spisak korišćene literature od 68 jedinica i 9 korišćenih web stranica.

U prilogu je dat tabelarni prikaz presečnih uticaja, merodavnih graničnih uticaja, potrebne i usvojene armature za karakteristične preseke analizirane poliedarske ljuske i detalji armature.

## 2. POLIEDARSKE LJUSKE

### 2.1. Osnovni pojmovi i uvodna razmatranja

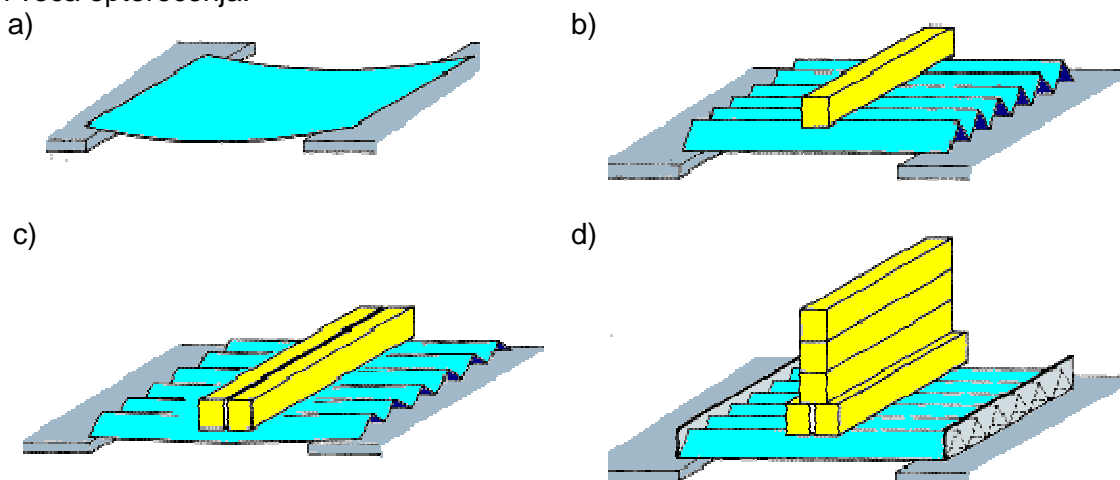
Poliedarske ljske, ili nabrane ploče (eng. „*folded plates*“, cro. „*složnice*“), su konstrukcije sastavljene od tankih ravnih ploča koje su, duž ivica, međusobno monolitno vezane pod određenim uglom, čineći prostornu noseću konstrukciju.



Slika 2.1. Elementi konstrukcije poliedarske ljske

Oslonice ovih konstrukcija čine elementi upravni na podužnu osu, kruti u svojoj ravni, koji se izvode kao dijafragme (sl. 2.1) ili kao ramovi. Oslonci mogu biti postavljeni samo na krajevima ljske, ili na krajevima i unutar raspona.

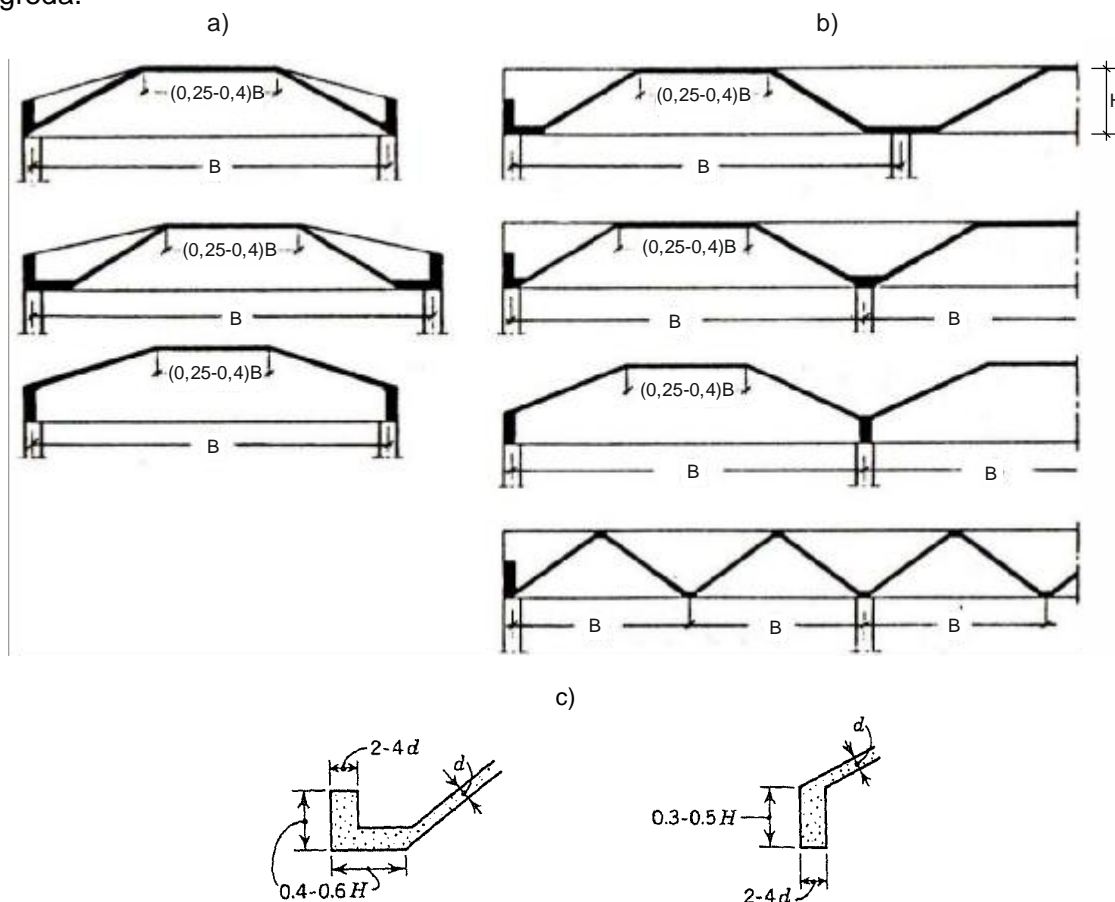
Poliedarske ljske su nastale kao rezultat težnje da se postigne velika prostorna krutost konstrukcije bez značajnog povećanja sopstvene težine, kao što je prikazano na slici 2.2 [69]. Kada list papira postavimo između dva oslonca on će se saviti, zahvaljujući činjenici da mu je čvrstoća nedovoljna za nošenje sopstvene težine (sl. 2.2.a). Ako se isti list papira nabrta biće u stanju da nosi stotruku vrednost sopstvene težine (sl. 2.2.b). Ukoliko se teret poveća, konstrukcija će popustiti, a nabori će se ispraviti (sl. 2.2.c). Ovaj problem se može rešiti postavljanjem poprečnih ukrućenja na krajevima (sl. 2.2.d). Ovakva poliedarska ljska se ponaša kao greda i može nositi čak i veća opterećenja.



Slika 2.2. Nastanak poliedarske ljske

Poliedarske ljske se mogu izvoditi kao jednorasponske ili višerasponske, u zavisnosti od broja i položaja poprečnih elemenata za ukrućenje (dijafragmi, ramova).

Uobičajeni oblici poprečnog preseka poliedarskih ljski, u evropskoj praksi, prikazani su na slici 2.3. Na istoj slici prikazane su i dve mogućnosti oblikovanja ivičnih greda.



Slika 2.3. Uobičajeni oblici poprečnog preseka poliedarskih ljski: a) - jednotalasne; b) - višetalasne; c) - ivične grede

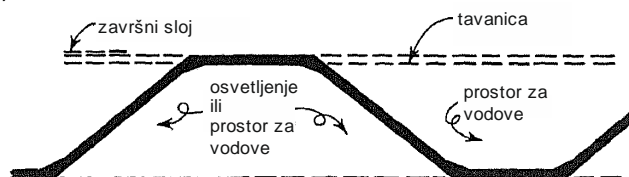
## 2.2. Primena

Gotovo neograničene mogućnosti oblikovanja i međusobnog povezivanja ravnih ploča u prostornu poliedarsku konstrukciju koja, osim uloge "zatvaranja" prostora (kao što je slučaj sa klasičnim krovim pokrivačima, koji predstavljaju sekundarnu konstrukciju i ne učestvuju u nošenju opterećenja), postaje važan deo glavne noseće konstrukcije, dovele su, naročito sredinom prošlog veka, do široke primene poliedarskih ljski. U početku najčešće korišćene kao krovne konstrukcije, poliedarske ljske nalaze svoju primenu i kod izrade objekata za skladištenje tečnosti, gasova i čvrstih materija (rezervoari, silosi), kod izrade temelja građevina, a veoma su zastupljene i u mostogradnji (sandučasti nosači).

Interesovanje za poliedarske ljske počelo je, najpre, u oblasti armiranobetonskih konstrukcija, zbog jednostavnosti njihovog oblikovanja, ali se, ubrzo, proširilo i na drvene i metalne konstrukcije.

**Betonske poliedarske ljske.** - U armiranom betonu, izmeštanje materijala iz zona u kojima je gotovo nenapregnut u zone gde će biti u potpunosti iskorišćen redukuje količinu betona po kvadratnom metru površine, čime se postiže značajno smanjenje sopstvene težine (dead load) konstrukcije. Korišćenje formiranih nabora u tavanicama i krovovima za postavljanje instalacija (sl. 2.4) doprinosi njihovoj većoj ekonomičnosti u odnosu na konvencionalne konstrukcije. Pri upotrebi klasičnog betona, prednost poliedarskih nad cilindričnim ljskama se ogleda u jednostavnosti oplata i lakšoj ugradnji betona. Iako je danas, zahvaljujući napretku tehnologije izvođenja betonskih

radova, a naročito primeni samougrađujućeg betona, ova prednost postala gotovo zanemarljiva, poliedarske ljske ostaju arhitektonski atraktivne konstrukcije, pre svega zbog velikih mogućnosti njihovog oblikovanja. U novije vreme kod nas je najčešća primena poliedarskih ljski od armiranog i/ili prednapregnutog betona u mostogradnji (sandučasti nosači).



Slika 2.4. Tipičan krov ili tavanica u obliku poliedarske ljske

**Konstruktivna razmatranja.** - Kad god je moguće, debljina pojedinačnih ploča (poliedarskih elemenata) treba da se svede na minimum, koji je diktiran uslovom obezbeđenja dovoljnog zaštitnog sloja betona do armature. Uobičajena debljina ploča je 5 do 10cm. Ovo se odražava na maksimalnu širinu (raspon u poprečnom pravcu) pojedinačnih ploča poliedra, koja najčešće ne prelazi 3,0 do 3,5m. Širina talasa poliedarske ljske obično se kreće u granicama  $B=10-12m$ . Nagibi pojedinačnih ploča ne bi trebalo da prelaze ugao od  $45^{\circ}$ , kako bi se izbegla potreba za obostranom oplatom. Najčešće se izvode ploče nagiba do  $30^{\circ}$ , čime se olakšava ugradnja betona.

Prema raspoloživoj literaturi, armiranobetonske poliedarske ljske oblika prikazanog na slikama 2.1 i 2.3 se koriste za savladavanje raspona od 20-30m, a prethodno napregnute i preko 60m. Ukupna visina ovakvog poliedra obično ne prelazi veličinu  $H=(1/20-1/10)L$ , gde je  $L$  dužina (raspon) ljske (sl. 2.1).

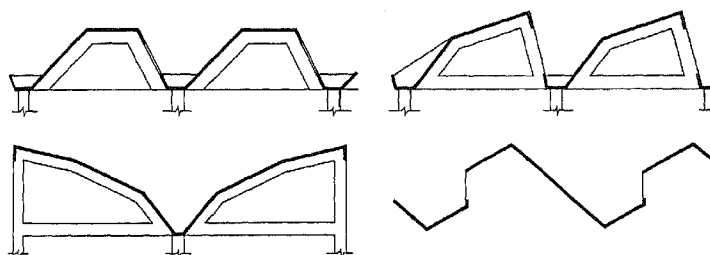
Armiranobetonske poliedarske ljske mogu biti izvedene monolitno, betoniranjem na licu mesta (sl. 2.3) ili kao montažne konstrukcije (sl. 2.5). Pri montažnom izvođenju treba posvetiti posebnu pažnju preuzimanju napona koji se javljaju tokom vađenja elemenata iz oplata, skladištenja, transporta i montaže, te izradi detalja veze između ploča i osloničkih dijafragma, kao kritičnih tačaka konstrukcije.



Slika 2.5. Neki oblici poprečnog preseka montažnih elemenata poliedarskih konstrukcija

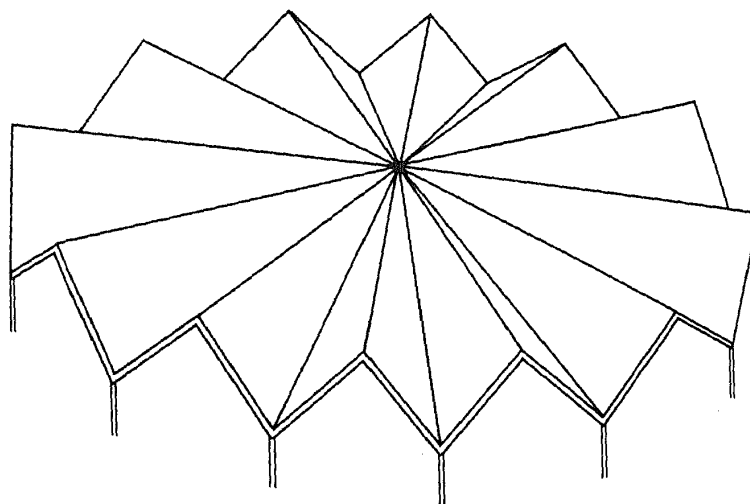
Najjednostavniji oblik poprečnog preseka poliedarske ljske sastoji se od nagnutih ploča spojenih u obliku slova V. Nedostatak ovakvog poprečnog preseka ogleda se u lošem rasporedu površine betona koja treba da prihvati pritisak usled savijanja, odnosno površine betona potrebne za pravilan smeštaj armature u zategnutoj zoni. Osim toga, "noge" slova V u krajnjim poljima se ponašaju kao dugačke konzole izložene savijanju u poprečnom pravcu. Ovi nedostaci se mogu otkloniti dodavanjem horizontalnih ploča u gornjim i donjim spojevima nagnutih ploča (sl. 2.4).

Mogućnosti oblikovanja poliedarskih ljski, u zavisnosti od načina oblikovanja i povezivanja pojedinih ploča, gotovo su neograničene (sl. 2.6. do 2.14).

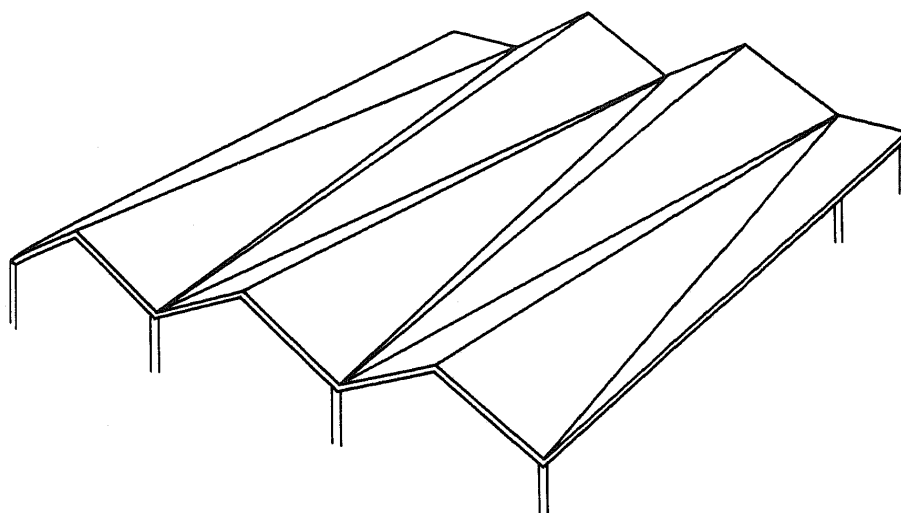


Slika 2.6. "Testerasti" krovovi





Slika 2.7. Krov u obliku kišobrana



Slika 2.8. Poliedarska ljuska od trougaonih ploča



Slika 2.9. Škola u Albuquerque, SAD [67]



Slika 2.10. Aerodromski terminal, Minneapolis, SAD [67]



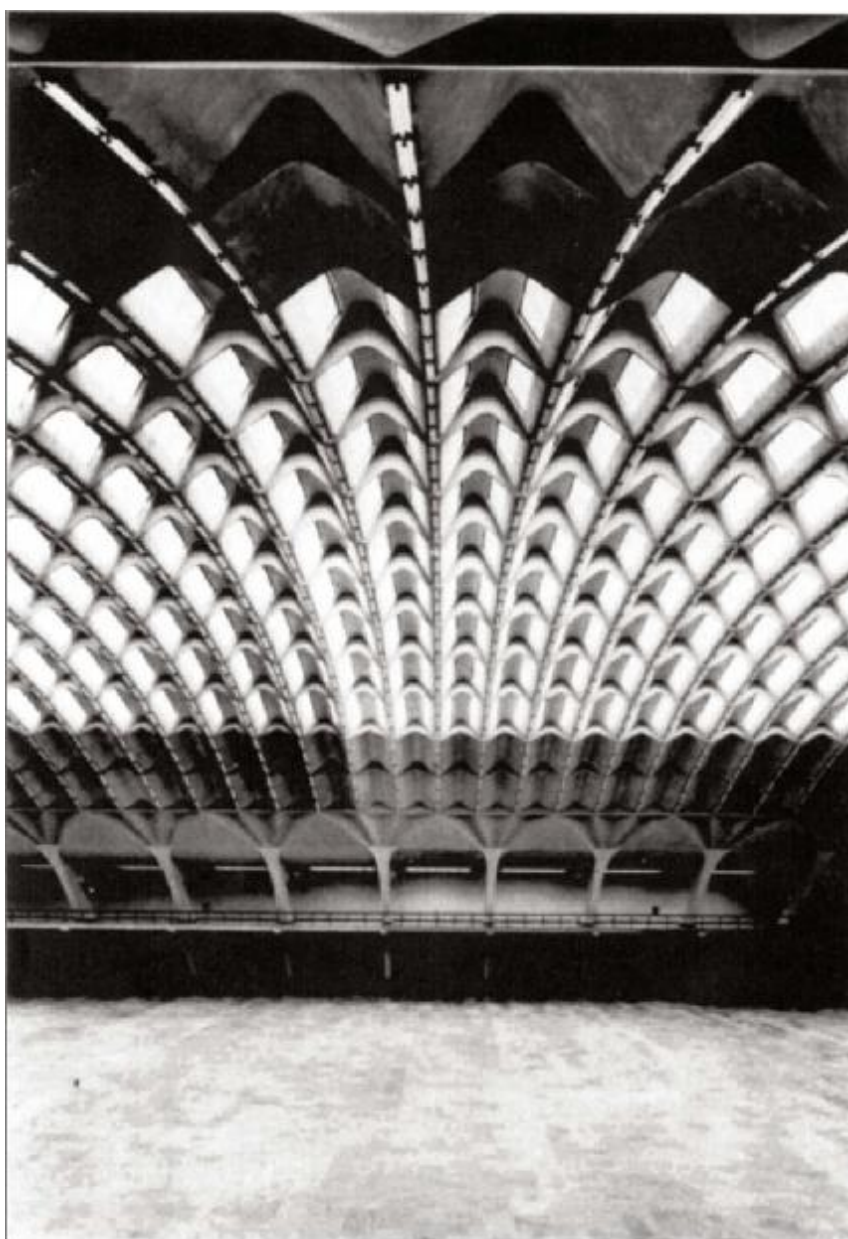
Slika 2.11. Bazen, Nottingham, Velika Bitanija [67]



Slika 2.12. Crkva u Las Vegasu, SAD, projektovao William G. Godden [70]



Slika 2.13. Krov gimnazije i kafeterije, projektovao Milo Ketchum [71]



Slika 2.14. Turinski izložbeni paviljon, Italija, projektovao P.I. Nervi [67]

### 2.3. Istorijski pregled metoda proračuna

Tokom pedesetih i šezdesetih godina prošlog veka došlo je do naglog rasta interesovanja inženjera za nabrane pločaste konstrukcije (NPK), što je rezultiralo povećanjem obima literature iz ove oblasti, ali i pojavom različitih metoda proračuna i projektovanja koje su zagovarali različiti autori. Ovom problematikom se u našoj zemlji prvi bavio M. Đurić, koji je 1953. godine odbranio doktorsku disertaciju pod nazivom *Teorija duge prizmatične poliedarske ljuske*<sup>1</sup>.

U cilju analize i ocene različitih metoda, te davanja smernica za njihovu praktičnu primenu, Američko društvo građevinskih inženjera (ASCE) formira Komisiju za gradnju nabranih ploča, pri Odboru za zidarstvo i armirani beton Odeljenja za konstrukciju (u daljem tekstu: Komisija). Komisija je u decembru 1963. godine podnela Izveštaj o konstruisanju nabranih ploča - faza I [53], u kome je, uz prikaz osnovnih pojmova vezanih za NPK, dat pregled i ocena najzastupljenijih metoda proračuna ovih konstrukcija. Iako se danas proračun NPK sprovodi gotovo isključivo primenom softvera zasnovanog na metodu konačnih elemenata (MKE) ili metodu konačnih traka (MKT), ovde će biti prezentovan deo Izveštaja [53], kao osnova iz koje su se razvile danas primenjivane numeričke i polunumeričke metode proračuna.

Komisija je metode analize NPK podelila u četiri kategorije:

- (a) Metod grede,
- (b) Teorija nabranih ploča sa zanemarenjem relativnog pomeranja čvorova,
- (c) Teorija nabranih ploča sa uzimanjem u obzir relativnog pomeranja čvorova,
- (d) Metod elastičnosti.

Pod pojmom relativnog pomeranja čvorova ovde se podrazumeva pomeranje jedne podužne strane ploče u odnosu na njenu drugu podužnu stranu.

#### 2.3.1. Hronološki prikaz razvoja metoda proračuna

Razvoj navedenih kategorija metoda analize tekao je simultano, počevši od 1930. godine, kada su se pojavili prvi radovi o ovoj temi. Hronološki prikaz literature, koji sledi, najvećim delom se bazira na Izveštaju [53].

Jedan od prvih radova o teoriji poliedarskih ljuski je napisan od strane G. Ehlers<sup>2</sup> 1930. godine, prateći izgradnju skladišta uglja i sličnih konstrukcija u Nemačkoj dvadesetih godina. On predlaže teoriju poliedarskih ljuski zasnovanu na linearnoj raspodeli podužnih napona u svakoj pojedinačnoj ploči, uz zanemarenje efekta relativnog pomeranja čvorova. Veza između pojedinih ploča se tretira kao zglobna. H. Creamer<sup>3</sup> i E. Gruber<sup>4</sup> unapređuju ovu teoriju uzimajući u obzir poprečne momente savijanja u čvorovima, koji proističu iz kontinuiteta konstrukcije. Ovaj metod je u SAD predstavljen 1947. godine kroz rad G. Winter i M. Pei<sup>5</sup>, koji opisuje teoriju poliedarskih ljuski u kojoj se zanemaruje relativno pomeranje čvorova, a razvija pogodan iterativni postupak za određivanje podužnih napona koji se određuju nakon sprovođenja postupka preraspodele momenata u poprečnom pravcu.

<sup>1</sup> Prema [52], rad Đurić, M.: Teorija duge prizmatične poliedarske ljuske, doktorska teza, Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet, Beograd, 1953.

<sup>2</sup> Prema [53], u radu Ehlers, G.: Ein neues Konstruktionsprinzip, Bauingenieur, Vol. 9, 1930, p. 125.

<sup>3</sup> Prema [53], u radovima Creamer, H.: Theorie der Faltwerke, Beton und Eisen, Vol. 29, 1930, p. 276 i Creamer, H.: Der Heutige Stand der Theorie der Scheibentraeger und Faltwerken in Eisenbeton, Beton und Eisen, Vol. 36, 1937, pp. 264-297.

<sup>4</sup> Prema [53], u radu Gruber, E.: Berechnung Prismatischer Scheibenwerke, Internatl. Assoc. of Bridge and Structural Engrg. Memoirs, Vol. 1, 1932, p. 225.

<sup>5</sup> Prema [53], u radu Winter, G. and Pei, M.: Hipped Plate Construction, Journal Amer. Concrete Inst., Vol. 43, January 1947, pp. 505-532.

Tačniju teoriju NPK, koja uzima u obzir uticaj pomeranja tačaka čvornih pravih na sile u preseccima ljske, predložili su Gruber i Gruening 1932. godine<sup>6</sup>. Izvorna metoda uključuje rešavanje velikog broja simultanih diferencijalnih jednačina četvrtog reda, sa velikim brojem nepoznatih. Ovaj sistem diferencijalnih jednačina Gruber svodi na sistem algebarskih jednačina tako što rešenje traži u obliku trigonometrijskog reda, ali sa primenom ograničenom samo na specijalan slučaj ljske kod koje su sve ploče oslonjene samo u krajnjim poprečnim preseccima na dijafragme. Prema [17], Gruber-ov pokušaj da dođe do rešenja u obliku trigonometrijskog reda i za drugačije oslonjene ljske daje veoma komplikovane postupke kojima se dobijaju samo približna rešenja. W. Z. Vlassow<sup>7</sup> je značajno pojednostavio izvorni metod Gruber-a i Gruening-a, tako što je za proračun podužnih napona i ivičnih momenata u kritičnim preseccima koristio linearne algebarske jednačine. Metode slične ovom prezentovali su K. Girkmann [53]<sup>8</sup> i Portland Cement Association<sup>9</sup>. Teoriju u kojoj je uključeno relativno pomeranje čvorova razvijaju i I. Gaafar<sup>10</sup> i D. Yitzhaki<sup>11</sup>, koji uklanjaju neke aproksimacije u prethodnoj algebarskoj metodi, tako što posmatraju odvojeno poprečni moment koji je posledica nanetog opterećenja i onaj koji je posledica relativnog pomeranja čvorova. Oba autora su prikazala različite postupke za smanjenje broja potrebnih simultanih jednačina na približno polovinu od broja u Vlassow-ljevom metodu. Uz to, razvijen je iterativni postupak za određivanje relativnog pomeranja čvorova. Načelno, ovaj metod se bazira na proračunu čvornih reakcija za slučaj kontinualnog nosača oslonjenog na nepomerljive oslonce, koje se zatim koriguju za čvorne reakcije usled relativnog pomeranja. Postupak se ponavlja dok razlike uzastupnih iteracija ne postanu dovoljno male.

Opšte rešenje problema duge prizmatične poliedarske ljske predlaže Đurić 1953. godine [17]. Polazeći od opšteg rešenja uslovnih diferencijalnih jednačina u konačnom obliku, uz određivanje integracionih konstanti iz graničnih uslova, Đurić iz opšteg rešenja izvodi rešenja za proizvoljno oslonjenu ljsku. Za slučaj kada sve ploče poliedra imaju iste uslove oslanjanja, Đurić predlaže rešenje razvijeno po sistemu ortogonalnih funkcija transversalnih oscilacija grede oslonjene na isti način kao i ploče posmatrane ljske. Kod ljske na oba kraja slobodno oslonjene na dijafragme ove funkcije su trigonometrijske, pa se Đurićevo rešenje svodi na rešenje Gruber-a.

Dalji razvoj teorije je išao u pravcu ponovnog razmatranja upotrebe teorije obične grede u svakoj ploči i teorije ploče nosive u jednom pravcu. Creamer<sup>3</sup> i Gruber<sup>12</sup> za određivanje membranskog stanja napona (normalni i smičući naponi u ravni ploče) predlažu primenu dvodimenzionalne teorije elastičnosti umesto teorije grede primenjene na svaku ploču. Konačno, A. Werfel<sup>13</sup>, a kasnije J. E. Goldberg i H. L. Leve<sup>14</sup> razvijaju pristup koji istovremeno razmatra dvodimenzionalnu teoriju elastičnosti za određivanje membranskog stanja napona i teoriju ploče nosive u dva pravca za sračunavanje savijanja i uvrtnja ploča.

<sup>6</sup> Prema [53], u gore pomenutim njihovim radovima i radu Gruening, G.: Die Nebenspannungen in Prismatischen Faltwerken, Ingenieur-Archiv., Vol. 3, No. 4, 1932.

<sup>7</sup> Prema [53], u radu Vlassow, W. Z.: Structural Mechanics of Shells (in Russian), Moskwa, 1936.

<sup>8</sup> Originalno izdanje, prema [53] - Girkmann, K.: Flachentragwerke, Springer-Verlag, Vienna, Fourth Edition, 1956.

<sup>9</sup> Prema [53], u radu: Direct Solution of Folded Plate Concrete Roofs, Advanced Engineering Bulletin No. 3, Portland Cement Assn., 1960.

<sup>10</sup> Prema [53], u radu Gaafar, I.: Hipped Plate Analysis Considering Joint Displacement, Transactions, ASCE, Vol. 119, 1954.

<sup>11</sup> Prema [53], u knjizi Yitzhaki, D.: Prismatic and Cylindrical Shell Roofs, Haifa Science Publishers, Haifa, Israel, 1958.

<sup>12</sup> Prema [53], u radu Gruber, E.: Die Genaue Membrantheorie der Prismatischen Faltwerke, Internatl. Assn. of Bridge and Structural Engr., Memoirs, Vol. II, 1951, p. 129.

<sup>13</sup> Prema [53], u radu Werfel, A.: Die Genaue Theorie der Prismatischen Faltwerke und ihre Praktische Anwendung, Internatl. Assn. of Bridge and Structural Engr., Memoirs, Vol. 14, 1954.

<sup>14</sup> Prema [53], u radu Goldberg, J. E. and Leve, H. L.: Theory of Prismatic Folded Plate Structures, Internatl. Assn. of Bridge and Structural Engr., No. 17, Zurich.

### 2.3.2. Opis pojedinačnih metoda analize

Komisija je izvršila analizu tada aktuelnih metoda proračuna poliedarskih ljuski, sa ciljem da se postave smernice za njihovo praktično korišćenje. Pri tome je primećeno da se za određene vrste opterećenja, oblike konstrukcije i ivične uslove oslanjanja dovoljno tačni rezultati postižu primenom jednostavnijih metoda analize, dok je za neke druge uslove neophodno primeniti tačniju teoriju. Zbog toga je bilo neophodno da se analiziraju glavne pretpostavke svakog od razmatranih metoda, kako bi se moglo sagledati polje njegove primene. Pri tome su u razmatranje uzete samo prizmatične konstrukcije.

#### Osnovne pretpostavke zajedničke za sve razmatrane metode analize:

1. Materijal je homogen i linearno elastičan.
2. Pomeranja su mala u odnosu na dimenzije konstrukcije. Posledica ovoga je da se uslovi ravnoteže mogu ispisati na nedeformisanoj konstrukciji.
3. Važi princip superpozicije.
4. Podužne veze ploča poliedarske ljuske tretiraju se kao monolitne, tako da se ploča u poprečnom pravcu ponaša kao kontinualni nosač.
5. Svaka krajnja oslonačka dijafragma je beskonačno kruta u svojoj ravni i idealno fleksibilna upravno na nju.

Metod grede. Primena uobičajene teorije greda na konstrukcije poliedarskih ljuski razmatrana je od strane većeg broja autora, korišćenjem različitih pristupa. U svom najjednostavnijem obliku, ovaj metod polazi od pretpostavke da je promena napona u pravcu podužne ose, kroz poprečni presek cele konstrukcije, ravna. Drugim rečima, smatra se da se konstrukcija deformiše na takav način da sve tačke jednog poprečnog preseka trpe ista pomeranja, tako da poprečni presek ostaje nepromenjenog oblika tokom deformacije.

Ova teorija se može primeniti na poliedarske ljuske sa poprečnim rebrima za ukrućenje, konstruisanim i raspoređenim tako da obezbeđuju nepromenjeni oblik poprečnog preseka konstrukcije. Razmatrani su pojedini poprečni preseki kako bi se ustanovile granice u kojima se mogu kretati debljina, širina i raspon ploča da bi se, primenom metode grede, dobili dovoljno tačni rezultati.

Ipak, tačnije analize i sprovedeni eksperimenti<sup>10,15</sup> daju rezultate koji se značajno razlikuju od onih dobijenih klasičnom teorijom grede. Zbog toga Komitet smatra da se ova metoda ne može prihvatiti kao opšte primenljiva. Gaafar i Yitzhaki<sup>10,11</sup> primenjuju modifikovan metod grede, u kojem pokazuju kako se rezultati dobijeni primenom metoda grede mogu sistematski korigovati do dostizanja rezultata zadovoljavajuće tačnosti.

Teorija poliedarskih ljuski (Opšte). U osnovi, obe grupe teorije poliedarskih ljuski (sa i bez relativnog pomeranja čvorova) posmatraju pojedine ploče u podužnom pravcu kao pločaste nosače (napregnute u svojoj ravni), a u poprečnom kao kontinualne ploče nosive u jednom pravcu.

Pretpostavke na kojim se zasniva analiza ploča u podužnom pravcu su sledeće:

1. Naponi u podužnom pravcu su linearno promenljivi po širini svake ploče, ali njihova promena može biti različita za različite ploče.
2. Membranski smičući naponi svake ploče imaju zanemarljiv uticaj na deformaciju konstrukcije.

<sup>15</sup> Prema [53], u radu Scordelis, A. C., Cory, E. L. and Stubbs, I. R.: Experimental and Analytical Study of a Folded Plate, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 87, No. ST8, Proc. Paper 3023, December 1961, pp. 139-160.

3. Normalni naponi u pločama u poprečnom pravcu su uključeni u razmatranje ravnoteže, ali imaju zanemarljiv uticaj na deformaciju konstrukcije.

Pretpostavke usvojene pri tretmanu ploče kao nosive u jednom pravcu su:

4. Savijanje ploče se javlja pretežno u poprečnom pravcu. Efekat podužnog savijanja ploča je zanemarljiv.
5. Pojedinačne ploče imaju zanemarljivu torziju krutost. Naponi smicanja koji su posledica uvrtnja ploča, kao i odgovarajuće deformacije, mogu se zanemariti.
6. Radijalni smičući naponi (upravni na ploču) imaju zanemarljiv uticaj na deformaciju konstrukcije.

*Ograničenja primene.* Kod konstrukcija sa uobičajenim odnosom raspona konstrukcije i širine pojedinačnih ploča, pretpostavke 1 i 2 neće dovesti do značajnih netačnosti rezultata. Međutim, nelinearnost raspodele podužnih napona i deformacije usled membranskih smičućih napona izraženije su kod manjih odnosa raspon-širina ploče (u slučaju konstrukcije slobodno oslonjene na krajevima, kod odnosa manjeg od 3 za podužne napone i 5 za deformacije usled membranskih smičućih napona). Deformacije usled poprečnih normalnih napona pri uobičajenim opterećenjima i ivičnim uslovima oslanjanja ploča praktično su zanemarljive, kao što je pretpostavljeno. Ipak, one će se morati uzeti u obzir ako postoje posebni uslovi, kao što je slučaj kod ploča sa sprečenim translatorskim pomeranjem ivica. Pretpostavke 4, 5 i 6 su dovoljno tačne za odnose raspon-širina ploče veće od 3 i širina-debljina ploče veće od 5.

*Teorija poliedarskih ljuski sa zanemarenjem relativnog pomeranja čvorova.* Pri oceni ove grupe metoda, kao osnova za rad Komisije poslužio je rad Winter - Pei<sup>5</sup>. Prethodno navedenim pretpostavkama oni dodaju i pretpostavku da su promene poprečnih momenata savijanja i podužnih napona, koje su posledica relativnog pomeranja čvorova, zanemarljivo male u odnosu na njihove vrednosti sračunate na osnovu pretpostavke da ne dolazi do relativnog pomeranja čvorova.

Tačnost ove teorije, kao i obim korekcija potrebnih kako bi se relativna pomeranja uzela u obzir, zavisi od podužne i poprečne krutosti ploča koje čine poliedar, kao i od oblika same konstrukcije. Kako je potrebno u obzir uzeti veliki broj nezavisnih parametara, sistematska ocena neophodnih korekcija sprovedena je samo za mali broj oblika<sup>10</sup>. Ove analize, zajedno sa rezultatima eksperimenata, ukazuju na to da korekcije koje je neophodno sprovesti nisu zanemarljive. Zbog toga Komitet smatra da je ova teorija nezadovoljavajuća za opštu primenu.

*Teorija poliedarskih ljuski koja uzima u obzir relativna pomeranja čvorova.* Ovde će biti prikazano nekoliko praktičnih metoda baziranih na ranijim pretpostavkama, uz razmatranje uticaja relativnog pomeranja čvorova na poprečne momente i membranske napone.

1. Vlassow-ljev metod<sup>7,16</sup>. Vrednost napona u kritičnom preseku konstrukcije određuje se rešavanjem sistema simultanih linearnih algebarskih jednačina dobijenih iz uslova ravnoteže u kritičnom poprečnom preseku i uslova kontinuiteta nad čvorovima u poprečnom pravcu. Opterećenje u podužnom pravcu i poprečni momenti se aproksimiraju Fourier-ovim redovima. Tačnost proračuna, naročito u presecima koji nisu kritični, zavisi od broja članova reda koji se uzimaju u obzir.

Ukupan broj simultanih jednačina je  $2n-2$ , gde je  $n$  broj ploča koje čine ljusku. Svaka jednačina može sadržati do osam nepoznatih veličina, što proračun čini veoma zahtevnim. Metod je pogodan za matrični prikaz i proračun primenom računara.

<sup>16</sup> Prema [53], u radu Traum, E.: Design of Folded Plates, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 85, No. ST8, Proc. Paper 2229, October 1959, pp. 103-123.

2. Izveštaj Udruženja za portland-cement<sup>9</sup>. U ovom izveštaju se poliedarske ljuske analiziraju na način sličan Vlassow-ljevom. Karakteristične jednačine u kojima figurišu nepoznati naponi i momenti izvedene su za slučaj jednakopodeljenog vertikalnog opterećenja na jednorasponskoj slobodno oslonjenoj konstrukciji. Tabelarno su prikazani koeficijenti za proračun poliedarskih ljuski V-oblika. Broj jednačina i nepoznatih veličina isti je kao i u Vlassow-ljevom metodu. Ovaj metod ne daje rešenja za ostale tipove opterećenja i drugačije uslove oslanjanja konstrukcije. Tačnost rezultata zavisi od broja članova uključenih u Fourier-ove redove.

3. Gaafar-ov metod<sup>10</sup>. U ovom metodu se za proračun konstrukcije koja je opterećena između spojeva ploča i duž njih koristi princip superpozicije dva stanja: (a) identična konstrukcija opterećena između spojeva ploča i duž njih, ali sa nepokretnim osloncima na mestu spojeva i (b) identična konstrukcija opterećena samo u spojevima ploča reakcijama oslonaca iz (a). Analiza pod (a) predstavlja analizu kontinualne ploče preko više nepomerljivih oslonaca. U proračunu pod (b) uvodi se pretpostavka da je elastična linija koja je posledica nanetog opterećenja jednaka uobičajenoj krivi deformacije konstrukcije (sinusni polutalas za jednorasponsku slobodno oslonjenu konstrukciju). Ovim se čini greška do približno 2% za uobičajena opterećenja, koja su simetrična u odnosu na sredinu raspona. Međutim, za izrazito nesimetrična opterećenja pretpostavka o elastičnoj liniji u obliku sinusnog polutalasa je nedovoljno tačna, te se za ove slučajeve metod mora korigovati.

Tok proračuna je sledeći: Ukupno pomeranje svake ploče u njenoj ravni, kao posledica primenjenog opterećenja u čvorovima i reakcija uzrokovanih nepoznatim diferencijalnim pomeranjima čvorova, izražava se u funkciji nepoznatih diferencijalnih pomeranja. Zatim se ispisuju jednačine veze između pomeranja ploča u njihovoj ravni i relativnih pomeranja čvorova u skladu sa geometrijom konstrukcije, te se simultano rešavaju. Broj simultanih jednačina, kao i broj nepoznatih, je  $n-2$ , gde je  $n$  broj ploča koje grade poliedar. Treba napomenuti da su i ovde u važnosti dve ranije uvedene pretpostavke - da su stvarna pomeranja mala u odnosu na dimenzije konstrukcije i da se deformacije usled normalnih napona u poprečnom pravcu mogu zanemariti.

Metod Gaafar-a se može primeniti za analizu jednorasponskih slobodno oslonjenih poliedarskih ljuski opterećenih simetrično u podužnom smislu. Proračun kontinualnih konstrukcija ovom metodom nije obuhvaćen.

4. Yitzhaki-jev metod<sup>11</sup>. U svojoj knjizi Yitzhaki je prikazao najobuhvatniju analizu poliedarskih ljuski različitih uslova oslanjanja, uključujući jednorasponске i kontinualne konstrukcije, jednotalasne i višetalasne, sa slobodnim ivicama i ivicama oslonjenim na stubove, grede ili zidove. Razmatrao je i različite slučajeve opterećenja - jednakopodeljeno, koncentrisane sile, zakošeno opterećenje i sile od prednaprezanja. Njegova analiza se zasniva na naponima razmatranim u ranije opisanim metodama, ali se proširuje korak po korak posebnim karakteristikama konstrukcije radi obuhvatanja uticaja torzije, membranskog smicanja, kao i savijanja ploča u podužnom pravcu, koji se obično zanemaruju zbog svog malog uticaja na rezultate. Yitzhaki je prikazao metod za analizu cilindričnih ljuski koji se zasniva na sistematskoj korekciji napona sračunatih za poliedarsku ljusku upisanu u cilindar. Takođe razmatra i uvođenje teorije plastičnosti u analizu poliedarskih ljuski.

Yitzhaki je prikazao više metoda analize, od kojih je najznačajniji tzv. metod partikularnih opterećenja. I u ovom metodu, kao i kod Gaafar-a, koristi se princip superpozicije. Konstrukcija se prvo proračunava sa stvarnim opterećenjem, pod pretpostavkom nepomerljivo oslonjenih ivica (kao kontinualna ploča). Ovako dobijene reakcije (nepostojećih) oslonaca se nanose na konstrukciju kao opterećenje duž ivica u kojima se sustiču ploče. Ovo opterećenje preuzimaju ploče koje su spojene u pojedinim ivicama i prenose ga na oslonce (dijafragme) savijanjem u svojoj ravni. Rezultujući ugibi ploča se, na osnovu geometrijskih odnosa, konvertuju u relativna pomeranja čvorova, koja su povezana sa poprečnim momentima savijanja u pločama. Odavde se



dobijaju tzv. prekobrojna opterećenja duž ivica, koja su neophodna za postizanje deformisanog oblika konstrukcije.

Konstrukcija se, zatim, opterećuje sa nekoliko prikladno izabranih nezavisnih ivičnih opterećenja. Ova opterećenja se pojedinačno množe nepoznatom konstantom i kombinuju tako da se eliminišu prethodno određena prekobrojna ivična opterećenja. U ovom postupku se ispisuju  $n-2$  jednačine iz kojih se sračunavaju  $n-2$  konstante, gde je  $n$  broj ploča u ljusci. Sa poznatim konstantama sračunavaju se naponi i pomeranja.

Uobičajeni Yitzhaki-jev postupak, u kojem se uzimaju u obzir samo pomeranja koja su posledica podužnih normalnih napona i poprečnih momenata, zasniva se na istim pretpostavkama kao i opisani Gaafar-ov metod, rezultati dobijeni po oba metoda su isti, te su im i ograničenja u upotrebi ista.

5. Iterativni metod<sup>17</sup>. Više autora je pokušalo da u analizu uvrsti efekat relativnog pomeranja čvorova korišćenjem uzastopnih iterativnih proračuna. Analiza ploče nosive u jednom pravcu i membranska analiza su sprovedene u uzastopnim koracima. Najpre se određuju reakcije zamišljenih nepomerljivih oslonaca kontinualne ploče nosive u jednom pravcu, a zatim se proračunavaju ugibi pločastih nosača opterećenih duž ivica prethodno sračunatim reakcijama. Ponovo se računaju reakcije u ivicama na osnovu prethodno određenih pomeranja čvorova. Ovako revidovane reakcije nanete na ploče uzrokuju dalju promenu čvornih pomeranja, što nameće potrebu dalje korekcije momenata i reakcija.

Da li će iterativni metod konvergirati ka tačnom rešenju ili ne, zavisi od relativnih krutosti ploča u podužnom pravcu (u svojoj ravni) i u poprečnom pravcu (savijanje upravno na srednju ravan), kao i od geometrije konstrukcije. U mnogo slučajeva je uočena divergencija, zbog čega se metod ne preporučuje za opštu upotrebu.

Metod elastičnosti. Goldberg i Leve<sup>14</sup> su razvili postupak određivanja napona u poliedarskim ljuskama kombinacijom rešenja klasične teorije ploča opterećenih upravno na svoju srednju ravan i rešenja teorije elastičnosti za problem ravnog stanja napona za opterećenja koja deluju u ravni ploča. Primenjeno opterećenje se aproksimira Fourier-ovim redovima. Izvedene su jednačine za jednorasponsku slobodno oslonjenu konstrukciju, koje predstavljaju vezu između čvornih sila i linearne kombinacije čvornih pomeranja. Za svaki harmonik Fourier-ovog reda treba da se reši  $4n$  simultanih algebarskih jednačina, gde je  $n$  broj čvorova sa nepoznatim silama i pomeranjima.

Glavne pretpostavke ovog metoda su iste kao ranije prikazane osnovne pretpostavke. Zbog toga se ovaj metod najviše primenjuje u konstrukcijama u kojima su pojedine ploče relativno kratke u odnosu na njihovu širinu i gde je translacija pojedinačnih čvorova potpuno sprečena. Obzirom na veliki obim proračuna, metod postaje praktično primenljiv jedino ako se koristi u računarskom programu. Analiza postaje još opsežnija za opterećenja koja nisu jednakopodeljena. U ovom slučaju je, u cilju dostizanja zadovoljavajuće tačnosti, potrebno povećati broj članova Fourier-ovog reda. Ovaj metod ne obuhvata konstrukcije koje imaju i međuoslonce u podužnom pravcu.

### 2.3.3. Metod analize preporučen od strane Komisije za gradnju nabranih ploča, koja je formirana pri ASCE, 1963. godine

Na svom sastanku u New York-u, oktobra 1961. godine, Komisija je usvojila sledeću rezoluciju:

"Za projektovanje poliedarskih ljuski (folded plates) Komisija preporučuje primenu uobičajene teorije sa korekcijama za relativna pomeranja čvorova."

<sup>17</sup> Prema [53], u radu Brielmaier, A. A.: Prismatic folded plates, Journal, Amer. Concrete Inst., March 1962.

Različiti metodi iz ove prihvatljive kategorije, uključujući one Vlassow-a, Gaafar-a, metod Gaafar-a modifikovnog od strane Simpson-a, metod Yitzhaki-a i dr., analizirani su i ocenjeni od strane Komisije. Pri tome se ocenjivala njihova teoretska ispravnost, opštost primene, brzina, tačnost, uzajamna veza analize sa fizičkim dejstvima, kao i jednostavnost za razumevanje i primenu od strane prosečnog korisnika. Najviše zbog važnosti ovog poslednjeg kriterijuma, Komitet se odlučio da sumira metod analize zasnovan na radu Gaafar-a.

Predložen metod analize za slobodno oslonjenu prizmatičnu poliedarsku ljusku.

A. Uvod: Ova analiza je podeljena na tri dela.

1. Osnovna analiza, sastavljena iz dva koraka:

(a) Poprečna analiza ploča. Smatra se da su ploče kruto oslonjene na mestima njihovog spoja (čvorovima), tako da površinsko opterećenje prenose kao kontinualne ploče nosive u jednom pravcu.

(b) Podužna analiza ploča. Sva opterećenja koja su poprečno prenetna do čvorova, u podužnom pravcu se prenose na oslonce (dijafragme, ramove) preko ploča koje se, svaka za sebe, ponašaju kao nosači napregnuti na savijanje u svojoj ravni. Usled ovoga se javljaju različiti ugibi ploča, što dovodi do pojave relativnih pomeranja između susednih čvorova, čime se krši osnovna pretpostavka poprečne analize ploča - nepomerljivost oslonaca.

2. Korekciona analiza se sastoji od određivanja korekcija, koje su rezultat relativnih pomeranja čvorova, kako u poprečnoj, tako i u podužnoj analizi ploča.

3. Superpozicija, u kojoj se rezultati osnovne analize kombinuju sa rezultatima korekcionih analiza, u cilju dobijanja konačnih vrednosti sila, momenata, napona i pomeranja.

B. Pretpostavke:

1. Materijal je elastičan, izotropan i homogen.

2. Raspodela svih opterećenja u podužnom pravcu je ista za sve ploče.

3. Ploče prenose opterećenje u poprečnom pravcu samo savijanjem upravno na njihovu srednju ravan (kao kontinualne ploče nosive u jednom pravcu).

4. Ploče prenose opterećenje u podužnom pravcu samo savijanjem u svojoj srednjoj ravni.

5. Podužni naponi se linearno menjaju po širini svake ploče.

6. Oslonci (dijafragme, ramovi, grede i dr.) su beskonačno kruti u svojoj ravni i idealno fleksibilni upravno na nju.

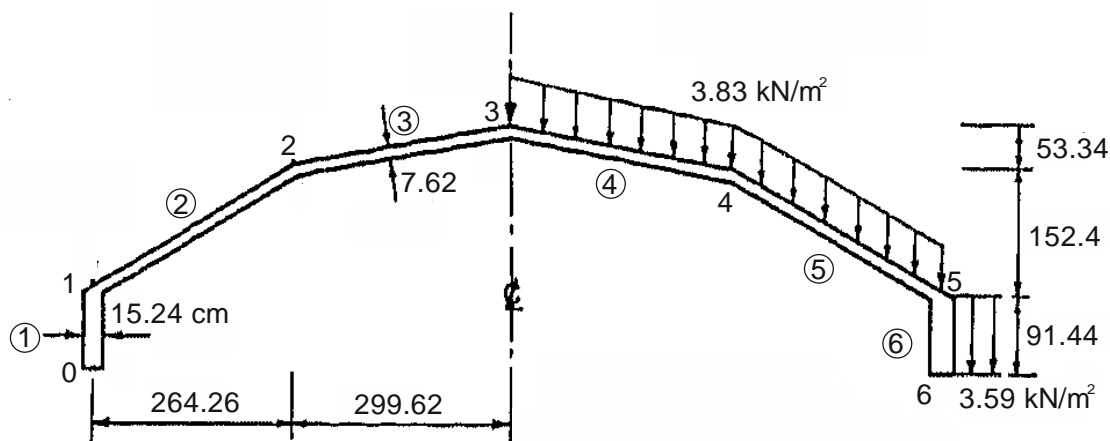
7. Ploče ne poseduju torzionu krutost upravno na svoju srednju ravan.

8. Pomeranja koja nisu posledica momenata savijanja se zanemaruju.

C. Kratak pregled analize: Predloženi metod analize biće najbolje objašnjen na primeru poliedarske ljuske koja je u ovoj disertaciji usvojena kao kontrolni model za analizu, budući da je ista analizirana u radovima De Fries-Skene-a i Scordelis-a [15] i Cheung-a [13] (slika 2.15). Raspon konstrukcije je  $L=30$  m, a modul elastičnosti betona  $E=36$  GPa. Geometrijske karakteristike konstrukcije prikazane su u tabeli 2.1.

1. Osnovna analiza.

(a) Poprečna analiza se sprovodi za kontinualnu ploču nosivu u jednom pravcu, opterećenu jednakopodeljenim opterećenjem, sa pretpostavkom da se čvorovi ponašaju kao oslonci, pri čemu su relativna pomeranja čvorova sprečena. U originalnom radu je za proračun momenata, transverzalnih sila i reakcija korišćen metod raspodele momenata (Cross-ov postupak). Pretpostavlja se da se u svakom poprečnom preseku ljuske svi čvorovi pomeraju jednako. Kako je sistem simetričan u odnosu na čvor 3, ovaj čvor se, za simetrično opterećenje, može smatrati nepomerljivim. Poprečni momenti savijanja i reakcije umetnutih oslonaca u čvorovima poprečnog preseka prikazani su u tabeli 2.2.



Slika 2.15. Jednotalasna, jednorasponska slobodno oslonjena poliedarska ljuska

Tabela 2.1. Geometrijske karakteristike konstrukcije

Ploče					
Br. ploče	Visina h (cm)	Debljina d (cm)	Površina A (cm <sup>2</sup> )	Otporni moment W (cm <sup>3</sup> )	$\phi^*$ (°)
1	91.44	15.24	1393.55	21237.63	90
2	305	7.62	2324.1	118141.75	30
3	305	7.62	2324.1	118141.75	10
Čvorovi					
Br. čvora			$\alpha^{**}$ (°)		
0			0		
1			60		
2			20		
3			20		

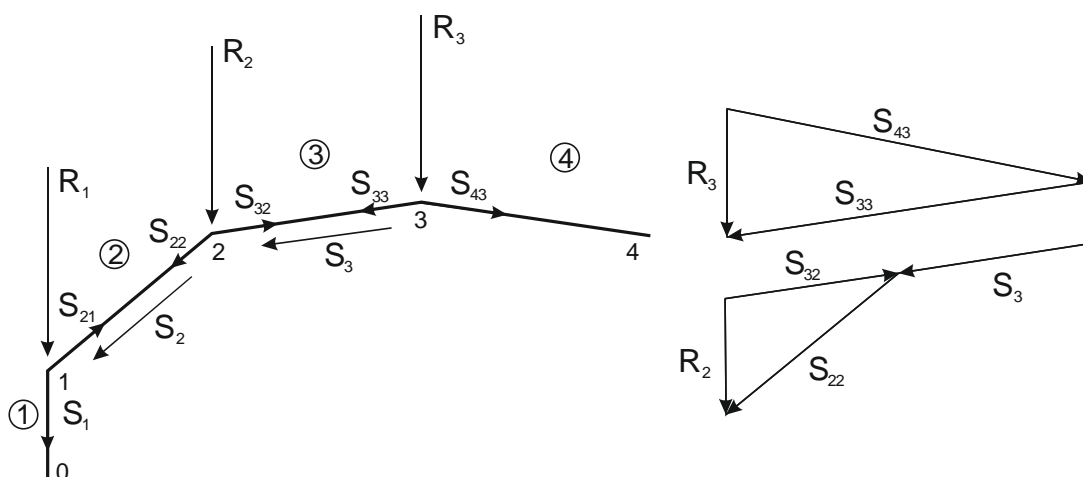
\* Ugao koji srednja ravan ploče zaklapa sa horizontalom

\*\* Promena ugla između susednih ploča u čvoru

Tabela 2.2. Poprečni momenti savijanja i reakcije oslonaca - osnovna analiza

Br. čvora	0	1	2	3
Momenat $M_{x0}$ (kNm/m)	0	0	-3.45	-2.64
Vertikalna reakcija (kN/m)	0	7.82	13.25	11.11

(b) Podužna analiza ploča sprovodi se tako što se reakcije oslonaca iz poprečne analize, sa promenjenim znakom, nanose kao čvorno opterećenje, a zamišljeni oslonci se uklanjaju. Ovo opterećenje se razlaže na komponente u ravni susednih ploča (slika 2.16). Ove ploče se, svaka za sebe, ponašaju kao pločasti nosači sistema proste grede, napregnuti u svojoj ravni. Usled savijanja, u sredini raspona se javljaju podužni normalni naponi  $s_{id}$ ,  $s_{ig}$ .



Slika 2.16. Razlaganje čvornog opterećenja u pravcu ploča

- Čvrne komponente reakcija u ravni ploča:

$$S_{10} = 0$$

$$S_{11} = 7.82 \text{ kN/m}$$

$$S_{21} = 0$$

$$S_{22} = 13.25 \cdot \frac{\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ} = 38.15 \text{ kN/m}$$

$$S_{32} = -13.25 \frac{\cos 30^\circ}{\sin 20^\circ} = -33.55 \text{ kN/m}$$

$$S_{33} = 11.11 \cdot \frac{\cos 10^\circ}{\sin 20^\circ} = 31.99 \text{ kN/m}$$

- Opterećenje u ravni pojedinačnih ploča, momenti savijanja i naponi u sredini raspona:

$$S_1 = S_{10} + S_{11} = 7.82 \text{ kN/m}$$

$$M_1 = \frac{7.82 \cdot 30^2}{8} = 879.75 \text{ kNm/m}$$

$$s_{01} = -s_{11} = \frac{879.75 \cdot 10^{-3}}{21237.63 \cdot 10^{-6}} = 41.42 \text{ MPa}$$

$$S_2 = S_{21} + S_{22} = 38.15 \text{ kN/m}$$

$$M_2 = \frac{38.15 \cdot 30^2}{8} = 4291.88 \text{ kNm/m}$$

$$s_{12} = -s_{22} = \frac{4291.88 \cdot 10^{-3}}{118141.75 \cdot 10^{-6}} = 36.33 \text{ MPa}$$

$$S_3 = S_{32} + S_{33} = -1.56 \text{ kN/m}$$

$$M_3 = \frac{-1.56 \cdot 30^2}{8} = -175.50 \text{ kNm/m}$$

$$s_{23} = -s_{33} = \frac{-175.50 \cdot 10^{-3}}{118141.75 \cdot 10^{-6}} = -1.49 \text{ MPa}$$

Kako su ploče u ovoj analizi tretirane nezavisno, naponi duž krajnjih ivica susjednih pločastih nosača u jednom čvoru nisu jednaki. Ova nekompatibilnost ne sme postojati, zbog čega se duž ivica ploča javljaju smičuće sile, koje uravnotežuju normalne napone u čvoru. Razvijeno je više postupaka za izjednačavanje ovih ivičnih

normalnih napona. Ovde će prvo biti sračunate smičuće sile duž ivica u čvorovima, a zatim konačne vrednosti normalnih napona u čvorovima, superponiranjem napona usled savijanja silama  $S$  i napona usled savijanja smičućim silama  $T$ .

Uslov kompatibilnosti u sredini raspona glasi:

$$e_{ia} = e_{ib},$$

gde je  $i=0,1,2,3$  - oznaka čvora;  $a,b=1,2,3$  - oznaka ploče, odnosno:

$$s_{ia} = s_{ib}. \quad (2.1)$$

Prvi uslov izjednačava ivične deformacije susednih pločastih nosača koji se susstiču u čvoru. Ako pretpostavimo da važi Navier-ova hipoteza linearne raspodele napona po visini preseka, dobijamo (slika 2.17):

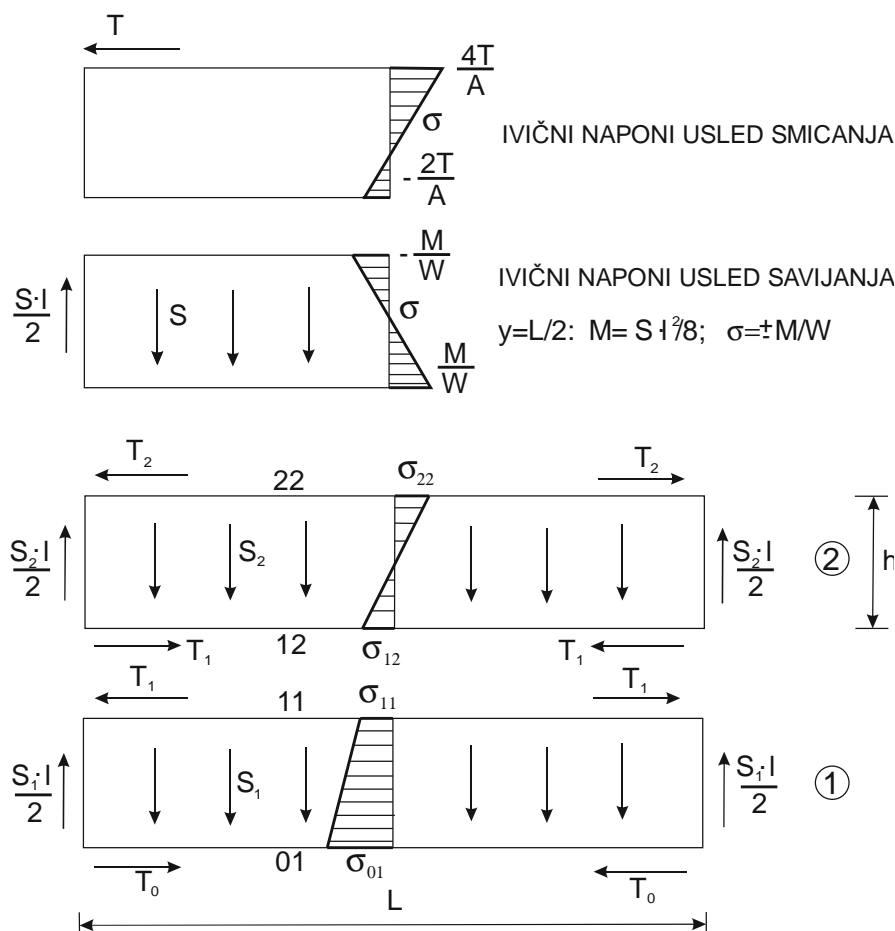
$$s_{ia} = \frac{2}{A_a} \cdot T_{i-1} + \frac{4}{A_a} \cdot T_i - \frac{M_a}{W_a}, \quad (2.2)$$

$$s_{ib} = -\frac{4}{A_b} \cdot T_i - \frac{2}{A_b} \cdot T_{i+1} + \frac{M_b}{W_b}$$

Nakon što se u jednačinu (2.1) uvrste izrazi (2.2), dobija se:

$$\frac{2}{A_a} \cdot T_{i-1} + 4 \cdot \left( \frac{1}{A_a} + \frac{1}{A_b} \right) \cdot T_i + \frac{2}{A_b} \cdot T_{i+1} = \frac{M_a}{W_a} + \frac{M_b}{W_b} \quad (2.3)$$

Postavljanjem  $n$  jednačina za  $n$  čvorova, dobija se sistem jednačina čijim se rešavanjem nalaze nepoznate smičuće sile  $T_i$ . Za slobodnu ivicu je  $T_0=0$ .



Slika 2.17. Shema delovanja sila i napona u podužnom pravcu

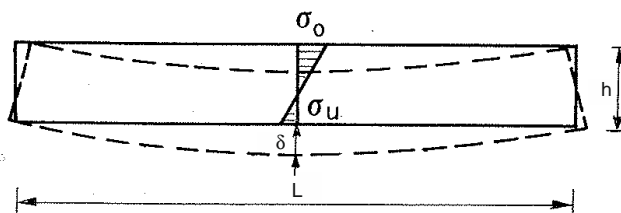
Vrednosti smičućih sila i konačne vrednosti podužnih normalnih napona u čvorovima prikazane su u tabeli 2.3.

Tabela 2.3. Smičuće sile i podužni normalni naponi - osnovna analiza

Br. čvora	0	1	2	3
Smičuće sile $T_{i0}$ (kN/m)	0	1577.74	617.77	0
Normalni naponi $\sigma_{y0}$ (MPa)	18.78	3.86	-12.12	6.81

Iz ovako određenih normalnih podužnih napona duž ivica, računaju se ugibi pojedinih pločastih nosača. Ugib nosača, za slučaj slobodnog oslanjanja (slika 2.18), može se odrediti iz izraza:

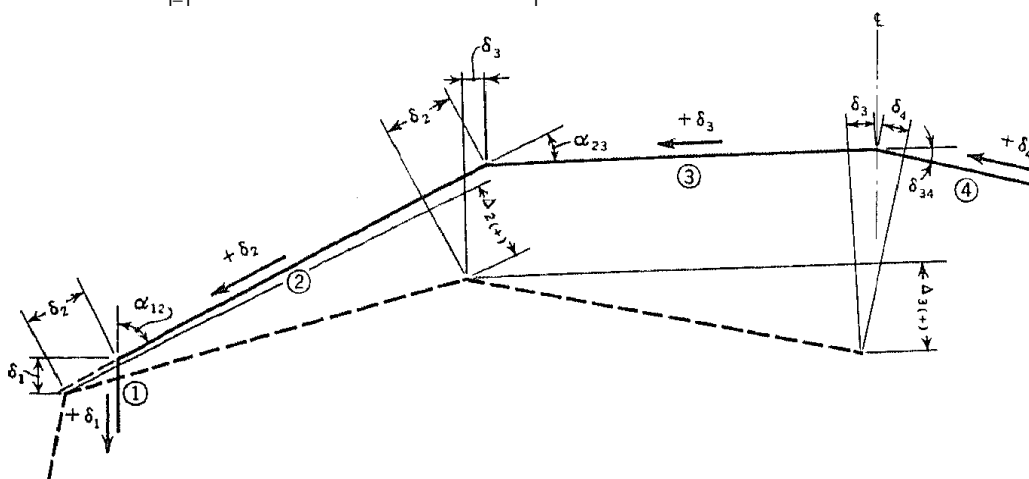
$$d = \frac{5}{48} \cdot \frac{\Delta s \cdot L^2}{h \cdot E} = \frac{5}{48} \cdot \frac{(s_u - s_o) \cdot L^2}{h \cdot E} \quad (2.4)$$



Slika 2.18. Deformacija ploča sistema

Geometrijske veze između ugiba pločastih nosača i relativnih pomeranja čvorova (slika 2.19) imaju sledeći opšti oblik:

$$\Delta_i = -\frac{d_{i-1}}{\sin a_{i-1}} + d_i(\operatorname{ctg} a_{i-1} + \operatorname{ctg} a_i) - \frac{d_{i+1}}{\sin a_i} \quad (2.5)$$



Slika 2.19. Geometrijska veza između ugiba pločastih nosača i relativnih pomeranja čvorova

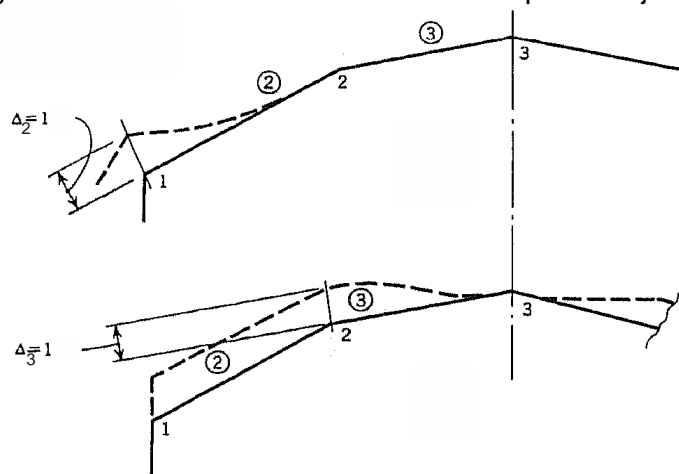
Jednačine (2.5) ispisuju se za svaki čvor čija relativna pomeranja izazivaju napone (u našem primeru - čvorovi 2 i 3). Unošenjem sračunatih vrednosti ugiba za svaki čvor, dobijaju se vrednosti relativnih pomeranja čvorova. Ove veličine su prikazane u tabeli 2.4.

Tabela 2.4. Ugibi ploča i relativna pomeranja čvorova - osnovna analiza

Br. ploče	1	2	3
Ugib $\delta_{i0}$ (m)	0.042491	0.013644	-0.01616
Relativno pomeranje $\Delta$ (m)	-	0.043557	-0.17596

Sračunata pomeranja ukazuju na pojavu deformacije poprečnog preseka, što nije u skladu sa pretpostavkom osnovne analize da se u svakom poprečnom preseku ljuske svi čvorovi pomeraju jednako. Zbog toga se sada vrši korekcija osnovne analize.

2. Korekciona analiza. U cilju korekcije relativnih pomeranja čvorova ostvarenih u osnovnoj analizi, proizvoljna relativna pomeranja čvorova  $D$  se sukcesivno nanose na svaku ploču (slika 2.20), odakle se računaju rezultujući ugibi ploča  $d$ . Postavljanjem geometrijskih veza između ovih ugiba i proizvoljnih relativnih pomeranja čvorova, dobija se sistem simultanih jednačina, čiji je broj jednak broju oslonjenih ploča. Rešavanjem ovog sistema dolazi se do stvarnih relativnih pomeranja čvorova.



Slika 2.20. Zadana relativna pomeranja čvorova

Postupak može da se podeli u pet koraka:

(a) Proizvoljno relativno pomeranje od 1m se nanosi u sredini raspona na svaku ploču, smerom naviše. Smatra se da je deformaciona linija u podužnom pravcu, za slobodno oslonjenu poliedarsku ljusku, oblika sinusne funkcije. Ako se, privremeno, spreči obrtanje u čvorovima, usled ovih relativnih pomeranja doći će do pojave čvornih momenata u poprečnom pravcu. Kao posledica ovih čvornih momenata javljaju se reakcije oslonaca kontinualne ploče nosive u jednom pravcu (poprečno), koje se određuju kao u osnovnoj analizi i dalje razlažu na pravce srednje ravni ploča. Pošto je za naneta pomeranja čvorova pretpostavljena sinusna raspodela duž raspona, to će se i reakcije i sile u ravni ploča menjati po sinusnoj funkciji. Vrednosti poprečnih momenata savijanja i reakcija na sredini raspona poliedarske ljuske prikazane su u tabeli 2.5.

Tabela 2.5. Poprečni momenti savijanja i reakcije oslonaca - korekciona analiza

	Br. čvora	0	1	2	3
$\Delta_2$	$M_{x2}$ (kNm/m)	0	0	244.23	-121.95
	$R_{\Delta_2}$ (kN/m)	0	92.42	-214.64	244.44
$\Delta_3$	$M_{x3}$ (kNm/m)	0	0	-645.02	751.51
	$R_{\Delta_3}$ (kN/m)	0	-244.08	710.19	-932.20

(b) Kao i u osnovnoj analizi, računaju se naponi duž ivica pojedinih pločastih nosača. Podužni moment savijanja u sredini raspona može se izraziti u obliku:

$$M = \frac{S \cdot L^2}{p^2} \quad (2.6)$$

a podužni normalni naponi duž ivica nosača:

$$s_u = -s_o = \frac{M}{W} = \frac{S \cdot L^2}{W \cdot p^2} \quad (2.7)$$

Ovi naponi ponovo pokazuju nekompatibilnost, pa se njihovo uravnoteženje postiže kao u osnovnoj analizi. Uvode se smičuće sile i određuju normalni podužni naponi u čvorovima (tabela 2.6), a na osnovu njih i ugibi nosača.

Tabela 2.6. Smičuće sile i podužni normalni naponi - korekciona analiza

	Br. čvora	0	1	2	3
$\Delta_2$	Smičuće sile $T_2$ (kN/m)	0	-4607.51	15264.25	0
	Normalni naponi $\sigma_{y2}$ (MPa)	463	-529	700	-831
$\Delta_3$	Smičuće sile $T_3$ (kN/m)	0	-803.87	65923.85	0
	Normalni naponi $\sigma_{y3}$ (MPa)	-1380	1700	-2420	2940

Ugib u sredini raspona svakog pločastog nosača može se sračunati iz izraza:

$$d = \frac{(s_u - s_o) \cdot L^2}{h \cdot E \cdot p^2} \quad (2.8)$$

Vrednosti ugiba za  $D_2=1\text{m}$  i  $D_3=1\text{m}$  prikazane su u tabeli 2.7.

Tabela 2.7. Ugibi ploča za  $D_2=1\text{m}$  i  $D_3=1\text{m}$ 

Br. ploče	1	2	3
Ugib $\delta_{i2}$ (m)	2.748091541	-1.020791484	1.271869727
Ugib $\delta_{i3}$ (m)	-8.53395	3.425894	-4.45221

(c) Ugib svakog nosača u sredini raspona može se izraziti kao kombinacija ugiba usled opterećenja (sračunatih pod tačkom 1.) i usled zadatih relativnih pomeranja sračunatih pod tačkom 2.(b):

$$\begin{aligned} d_1 &= 0.042491 + 2.75 \cdot \Delta_2 - 8.53 \cdot \Delta_3 \\ d_2 &= 0.013644 - 1.02 \cdot \Delta_2 + 3.43 \cdot \Delta_3 \\ d_3 &= -0.01616 + 1.27 \cdot \Delta_2 - 4.45 \cdot \Delta_3 \end{aligned} \quad (2.9)$$

(d) Postavlja se geometrijska veza između ugiba iz tačke 2.(c) i relativnih pomeranja čvorova.

(e) Ispisuju se jednačine (2.5), u koje, umesto ugiba, unosimo izraze (2.9). Dobija se sistem jednačina čijim rešavanjem dolazimo do stvarnih vrednosti relativnih pomeranja čvorova.

Rešenje:  $D_2=-0.0499\text{m}$ ,  $D_3=-0.0177\text{m}$ .

3. Superpozicija - proračun stvarnih vrednosti napona, momenata i pomeranja. Rezultati osnovne i korekcionne analize se kombinuju prema sledećem:

$$F_i = F_{i0} + \Delta_2 \cdot F_{i2} + \Delta_3 \cdot F_{i3} \quad (2.10)$$

gde je  $F_i$  uticaj u posmatranom čvoru,  $F_{i0}$  uticaj u posmatranom čvoru prema osnovnoj analizi,  $F_{i2}$  i  $F_{i3}$  uticaji u posmatranom čvoru od  $D_2=1$ , odnosno  $D_3=1$ , respektivno.

U tabeli 2.8. prikazane su konačne vrednosti podužnih normalnih napona i poprečnih momenata savijanja, u sredini raspona poliedarske ljuske.

Tabela 2.8. Poprečni momenti i podužni normalni naponi u sredini raspona ljuske

Br. čvora	0	1	2	3
Moment savijanja $M_x$ (kNm/m)	0	0	-4.22	-9.86
Normalni napon $\sigma_{y0}$ (MPa)	20.10	0.17	-4.22	-3.76

### 2.3.4. Kratak prikaz još nekih metoda proračuna

1953. godine Đurić [17] razvija opšti metod analize dugih poliedarskih ljuski sastavljenih od niza pravougaonih ploča. Njegova analiza polazi od dve pretpostavke: 1) Momenti savijanja i torzioni momenti u preseccima upravnim na čvorne prave su



jednaki nuli; i 2) Poprečni preseći pojedinih ploča i posle deformacije ostaju ravni, odnosno podužne dilatacije su linearne funkcije poprečne koordinate, a klizanja i poprečne deformacije ne postoje ( $g_{xy}=0$  i  $e_y=0$ ). Za osnovne nepoznate se biraju momenti savijanja  $Y_i$  oko podužne ose, duž čvornih linija  $i=2$  do  $i=n-2$ , sile smicanja  $X_i$  duž čvornih pravih  $i=1$  do  $n-1$ , rezultante  $T_i$  smičućih sila  $n_{xy}$  po širini ploče ( $i=1, \dots, n$ ) i translatorno pomeranje  $v_i$  srednje ravni ploče u pravcu njene širine ( $i=1, \dots, n$ ). Sa  $n$  je označen broj ploča koje čine poliedar. Ukupan broj nepoznatih veličina je  $4(n-1)$ . One se određuju rešavanjem sistema od  $4(n-1)$  simultane linearne diferencijalne jednačine četvrtog reda, dobijene ispisivanjem uslova ravnoteže i geometrijskih uslova kompatibilnosti deformacija. Smatra se da se pri deformaciji ljuske ugao  $g_i$  između tangentnih ravni na elastičnu površinu dveju susednih ploča ne menja, kao i da susedne ploče duž čvorne prave relativno ne klizaju. Primenom matičnog računa Đurić dolazi do rešenja u konačnom obliku, koje je primenljivo na dugu poliedarsku ljusku proizvoljnih uslova oslanjanja i proizvoljno opterećenu, bilo da je oslonjena na dva kraja ili kontinualna. On je dokazao da su svi koreni karakteristične jednačine sistema konjugovano kompleksni, pa se za partikularne integrale mogu izabrati poznate i tabulisane funkcije Krylov-a. Integracione konstante se određuju iz uslova oslanjanja za svaki konkretan slučaj.

Kako traženje rešenja u konačnom obliku predstavlja vrlo složen i zahtevan zadatak, za specijalan slučaj kada sve ploče sistema imaju iste i homogene granične uslove po pomeranjima, Đurić predlaže približno rešenje u obliku reda sistema funkcija  $y_m$ , od kojih svaka zadovoljava date granične uslove za pomeranja i homogenu diferencijalnu jednačinu četvrtog reda:

$$y_m^{IV} = w_m^4 y_m.$$

Za funkcije  $y_m$  bira normalne funkcije koje predstavljaju glavne oblike transverzalnih oscilacija grede oslonjene na isti način kao i ploče ljuske. U slučaju slobodno oslonjene jednorasponske poliedarske ljuske karakteristične funkcije imaju oblik:

$$y_m = \sin w_m x, \quad w_m = \frac{m\pi}{l}, \quad m=1, 2, \dots,$$

gde je  $l$  polovina raspona ljuske.

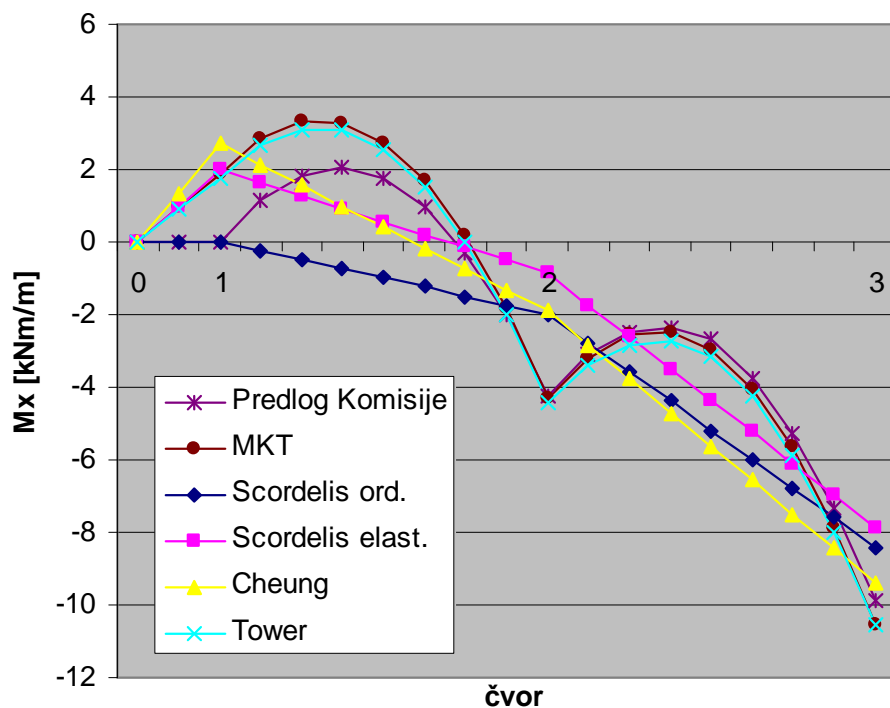
Iako uvođenjem rešenja u obliku redova Đurićev metod postaje znatno jednostavniji za primenu, njegova primena je i dalje ograničena na dugačke ljuske, kod kojih se momenti savijanja oko poprečne ose pojedinih ploča i momenti torzije mogu zanemariti.

1964. godine Scordelis i De Fries-Skene [15] prezentuju tzv. metod direktne krutosti ("direct stiffness method") za proračun prizmatičnih poliedarskih ljuski. Metod formulišu u matičnom obliku i razvijaju računarski program koji se bazira na njegovoj primeni. Ovim metodom se mogu analizirati poliedarske ljuske izložene različitim oblicima čvornih opterećenja ili nametnutih pomeranja (vertikalne, horizontalne, podužne sile ili momenti ili odgovarajuća pomeranja i rotacije), koja se u podužnom pravcu predstavljaju Fourier-ovim redom. Prvi cilj je određivanje nepoznatih čvornih pomeranja i sila (duž ivica ploča), sa kojima se dalje određuju unutrašnje sile i naponi u pločama. Pri tom se koristi matrica krutosti konstrukcije  $K$ , čija je dimenzija  $4(m+1) \times 4(m+1)$ , gde je  $m$  broj ploča koje čine poliedar. Zahvaljujući specifičnom obliku konstrukcije kod koje je jedna dimenzija naročito izražena, elementi matrice krutosti različiti od nule grupisani su uz njenu glavnu dijagonalu. Svaka ploča ima 8, a svaka ivica 4 stepena slobode kretanja (3 translacije i jednu rotaciju oko podužne ose). Matrica krutosti  $K$  dobija se postavljanjem matrice krutosti pojedinačnih elemenata (ploča) na odgovarajuća mesta u matrici krutosti konstrukcije. Za svaki pojedinačni element odvojeno se posmatraju krutost na savijanje upravno na njegovu srednju ravan i krutost za naprezanja u srednjoj ravni elementa (membransko stanje). Koeficijenti matrice krutosti elementa se određuju na dva načina: 1) prema klasičnoj teoriji ("ordinary theory") u skladu sa predlogom Komisije, tretirajući ploče u podužnom

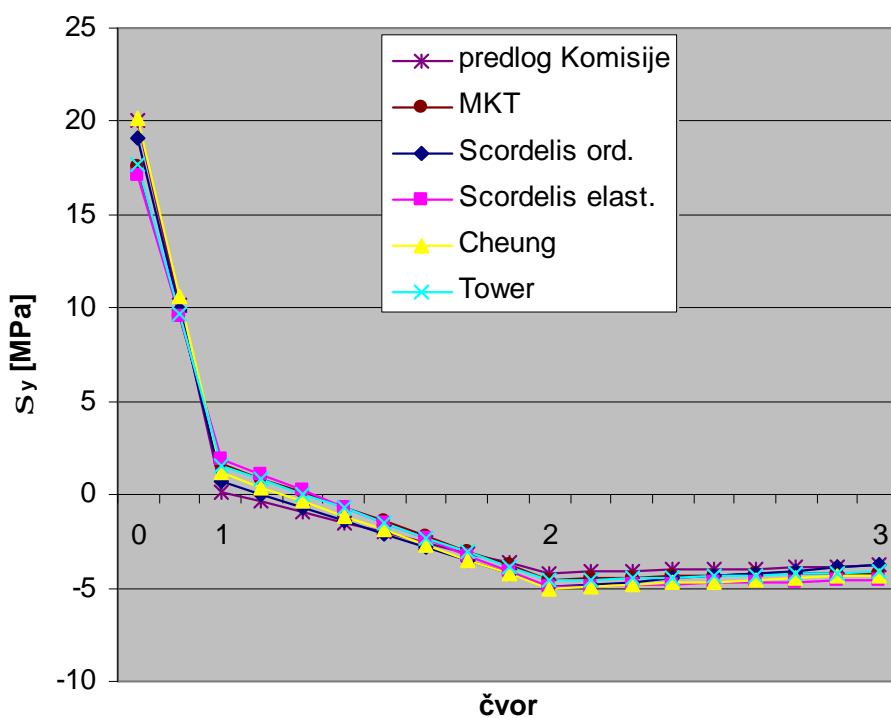
pravcu kao nosače napregnute u svojoj ravni, a u poprečnom pravcu kao ploče nosive u jednom pravcu napregnute upravno na srednju ravan i 2) primenom teorije elastičnosti. Za određivanje matrica krutosti elemenata primenom teorije elastičnosti uvode se dve pretpostavke: 1) naponi i pomeranja svake ploče usled opterećenja upravnog na srednju ravan određuju se primenom klasične teorije tankih ploča oslonjenih duž sve četiri ivice; 2) naponi i pomeranja usled opterećenja u ravni ploče (membransko stanje) određuju se primenom rešenja teorije elastičnosti za problem ravnog stanja napona. Pojedinačni koeficijenti matrice krutosti elementa preuzeti su od Goldberg-a i Leve-a<sup>14</sup>. Zahvaljujući korišćenju rešenja teorije elastičnosti za tanke ploče oslonjene duž sve četiri ivice, ovaj metod može da se primeni i na analizu poliedarskih ljusti sa malim odnosom raspon-širina (kratke ljuste). Njegova primena je, ipak, ograničena na slučajeve kada opterećenje deluje samo duž ivica u kojima su međusobno spojene ploče poliedra. U radu [15] je ovim metodom analizirana poliedarska ljusta prikazana na slici 2.15 za različite raspone, pri čemu su koeficijenti matrice krutosti elemenata određeni primenom klasične teorije i primenom teorije elastičnosti. Značajne razlike između rezultata prema ove dve teorije uočene su tek za vrlo kratke ljuste (raspona 3.05m, tj. odnosa raspon/širina ljuste= $L/B=0.27$ , pri čemu je za pojedinačne ploče odnos dužina/širina bio  $L/b=1$ ). Već pri odnosu  $L/b=3$  dobijeni naponi, momenti i pomeranja po obe teorije se tek neznatno razlikuju.

Cheung [13], 1969. godine, odbacuje klasičnu teoriju predloženu od strane Komisije, zasnovanu na modifikovanom Gaafar-ovom metodu, smatrajući je teškom za programiranje i neprimenjivom na poliedarske ljuste manjeg odnosa raspon-širina. Gore opisani metod direktne krutosti smatra previše složenim, jer u slučaju opterećenja koja ne deluju samo u čvorovima konstrukcije zahteva dodatne operacije kojima bi se ova opterećenja svela na čvorna opterećenja. Polazeći od metoda konačnih elemenata, koji smatra najopštijim metodom za analizu konstrukcija, Cheung razvija metod konačnih traka, primenljiv na specijalnu grupu konstrukcija u koju spadaju i poliedarske ljuste. Elementi više nisu pojedinačne ploče, kao u metodu direktne krutosti, nego trake čija je dužina jednaka rasponu konstrukcije, dok se širina bira u zavisnosti od željene tačnosti. Koeficijenti matrice krutosti pojedinačnih traka određuju se posebno za naprezanja u srednjoj ravni traka i posebno za naprezanja upravno na nju. U [13] je data formulacija metoda konačnih traka za poliedarske ljuste čije se ploče smatraju slobodno oslonjenim duž krajnjih dijafragmi, za proizvoljno opterećenje. Na primeru ljuste sa slike 2.15 upoređeni su rezultati koji su dobijeni primenom metoda direktne krutosti, sa koeficijentima matrice krutosti elementa prema teoriji elastičnosti, i rezultati prema metodu konačnih traka. Cheung konstatuje njihovo izuzetno dobro poklapanje, što se može videti i na dijagramima na slikama 2.21 i 2.22. Veće razlike se primećuju samo kod poprečnog momenta savijanja  $M_x$  za velike raspone (30m).

Na slikama 2.21 i 2.22 su upoređeni rezultati dobijeni primenom različitih metoda analize: metoda predloženog od strane Komisije, metoda konačnih traka (MKT) uz primenu programa MKTE1, metoda direktne krutosti Scordelis-De Fries-Skene [15], metode konačnih traka Cheung-a [13], te metoda konačnih elemenata uz primenu računarskog programa Tower 6. Pri tome se rezultati analize spovedene od strane Scordelis-De Fries-Skene-a i Cheung-a odnose na poliedarsku ljustu sa slike 2.15 kod koje je površinsko opterećenje svedeno na linijsko opterećenje duž spojeva ploča poliedra.



Slika 2.21. Poprečni momenti savijanja u sredini raspona poliedarske ljuške (prikazana je samo leva polovina konstrukcije)



Slika 2.22. Podužni normalni naponi u sredini raspona poliedarske ljuške

### 3. METOD KONAČNIH TRAKA U ANALIZI POLIEDARSKIH LJUSKI

#### 3.1. Opis predmeta analize

Kao što je već rečeno, poliedarske ljuske su prostorne noseće konstrukcije sastavljene od tankih ravnih ploča. Ovde će se analizirati samo *prizmatične poliedarske ljuske*, kod kojih su pojedine ploče, među sobom monolitno vezane, oblika pravougaonika.

Ove konstrukcije su opterećene silama koje deluju pod proizvoljnim uglom u odnosu na srednju ravan pojedinih ploča ljuske. Zbog toga svaka ploča trpi naprezanja u svojoj ravni i upravno na nju. Naponsko deformacijsko stanje u pločama ljuske opisuje se kombinacijom savijanja i ravnog stanja naprezanja. Kod linearno elastičnih problema za homogene materijale nema njihovog međudelovanja, te je moguće odvojeno posmatrati problem ravnog stanja naprezanja i problem savijanja ploča. Međutim, kod poliedarskih konstrukcija su ploče spojene pod uglom, pa ova dva stanja moraju da se kombinuju, što će biti kasnije prikazano.

U daljoj analizi razlikujemo dva pojma [23]:

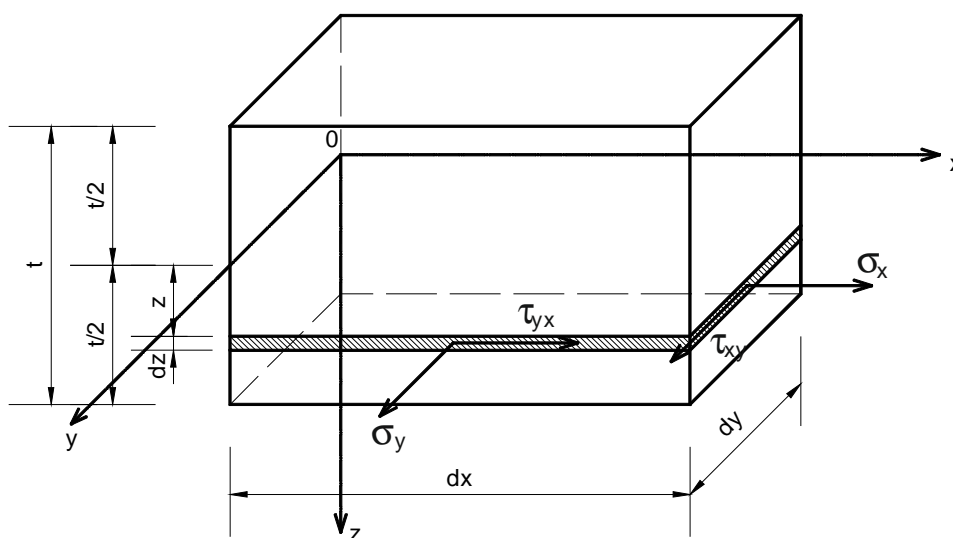
– Ravan površinski nosač koji je napregnut samo silama u svojoj srednjoj ravni i čija srednja površina pri deformaciji ostaje ravna naziva se *pločasti nosač*.

– Isto telo se označava kao *ploča* ako je podvrgnuto opterećenju koje proizvodi ispupčenost prvobitno ravne srednje površine.

U daljem tekstu će odvojeno biti prikazane osnovne jednačine ravnog stanja napona i savijanja tankih pravougaonih ploča.

##### 3.1.1. Pločasti nosači - ravno stanje napona

Razmatraćemo samo tanke pločaste nosače konstantne debljine  $t$ , opterećene površinskim i zapreminskim silama, za koje se pretpostavlja da su ravnomerno raspoređene po debljini ploče i paralelne njenoj srednjoj ravni (ravan  $xOy$ ). Iz ploče je isečen infinitezimalni element dimenzija  $dx \cdot dy \cdot t$ , prikazan na sl. 3.1.



Slika 3.1. Infinitezimalni element pločastog nosača

Kako na graničnim ravnima  $z = \pm t/2$  ne deluju spoljašnje sile, to su komponente napona  $s_z, t_{zx}, t_{zy}$  u njima jednake nuli. Ako je debljina  $t$  pločastog nosača vrlo mala, smemo smatrati da te komponente napona ostaju u unutrašnjosti nosača toliko male da se mogu zanemariti, tj.:

$$s_z = t_{xz} = t_{zx} = t_{yz} = t_{zy} = 0 \quad (3.1)$$

Ovim je pretpostavljeno da u ravnima pločastog nosača paralelnim srednjoj ravni nema napona. Naponi postoje samo u ravnima upravnim na srednju ravan ploče, pa se javlja *ravno stanje napona*. Komponente napona:  $s_x, s_y, t_{xy} = t_{yx}$  prikazane su na slici 3.1. Kod tankih pločastih nosača možemo smatrati da su one ravnomerno raspodeljene po debljini  $t$ , pa ćemo dalji proračun sprovoditi sa srednjim vrednostima napona. To znači da naponi ne zavise od koordinate  $z$ , već samo od koordinata  $x$  i  $y$ .

Integraljenjem napona po debljini nosača dobijamo tri presečne sile:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} s_x \cdot dz = t \cdot s_x \\ N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} s_y \cdot dz = t \cdot s_y \\ N_{xy} &= N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} t_{xy} \cdot dz = t \cdot t_{xy} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ako sa  $X, Y$  i  $Z$  obeležimo komponente zapreminskih sila po jedinici zapremine, imajući u vidu (3.1) i  $Z = 0$ , uslovi ravnoteže za ravno naponsko stanje postaju:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial t_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial s_y}{\partial y} + Y &= 0 \\ t_{xy} &= t_{yx} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Treća jednakost u (3.3) predstavlja poznati stav o konjugovanosti smičućih napona. Kako nam za određivanje tri nepoznate komponente napona na raspolaganju stoje samo dva uslova ravnoteže sa odgovarajućim konturnim uslovima, to je neophodno uvesti u razmatranje i deformaciju ploče.

Uvodeći pretpostavku o geometrijskoj linearnosti, a imajući u vidu da su zbog  $t_{yz} = t_{zx} = 0$  i uglovi smicanja  $g_{yz}$  i  $g_{zx}$  jednaki nuli, veze između komponentalnih deformacija i komponentalnih pomeranja mogu se napisati u sledećem obliku:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Za homogen i izotropan materijal, za koji važi Hooke-ov zakon, komponentalne deformacije se mogu prikazati u funkciji komponentalnih napona prema sledećem:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{1}{E}(s_x - n \cdot s_y), \quad e_y = \frac{1}{E}(s_y - n \cdot s_x), \quad g_{xy} = \frac{t_{xy}}{G} = \frac{2(1+n)}{E} t_{xy}, \\ e_z &= -\frac{n}{E}(s_x + s_y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

gde je  $E$  Young-ov modul elastičnosti,  $G$  modul klizanja, a  $n$  Poisson-ov koeficijent.

Funkcije  $e_x, e_y$  i  $g_{xy}$  nisu međusobno nezavisne, nego moraju zadovoljiti i uslov kompatibilnosti:

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.6)$$

Ako jednačine (3.5) rešimo po naponima i za komponentalne deformacije unesemo izraze (3.4), množenjem ovako dobijenih izraza debljinom ploče  $t$ , dobijamo izraze za presečne sile u funkciji komponentalnih pomeranja:

$$\begin{aligned} N_x &= D \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ N_y &= D \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ N_{xy} &= \frac{1}{2} \cdot D \cdot (1-n) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

gde je  $D = \frac{E \cdot t}{1-n^2}$ .

Problem ploče napregnute u svojoj ravni u potpunosti je definisan jednačinama (3.3) (prve dve jednačine), (3.5) (prve tri jednačine) i uslovom kompatibilnosti (3.6), zajedno sa uslovima na konturi. U šest jednačina javlja se šest nepoznatih veličina:  $s_x$ ,  $s_y$ ,  $s_{xy}$ ,  $e_x$ ,  $e_y$  i  $g_{xy}$ .

Ako u jednačini (3.6) komponentalne deformacije izrazimo u funkciji napona prema (3.5), dobijamo:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (s_y - n \cdot s_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (s_x - n \cdot s_y) = 2 \cdot (1+n) \cdot \frac{\partial^2 t_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.8)$$

Jednačine (3.3) i (3.8) se svode na samo jednu diferencijalnu jednačinu ako se komponente zapreminskih sila mogu izraziti kao parcijalni izvodi neke funkcije potencijala  $U$ :

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.9)$$

i uvede Airy-jeva funkcija napona  $F$ , tako da bude:

$$t_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3.10)$$

Uvođenjem (3.9) i (3.10) u izraze (3.3) i njihovim sređivanjem dolazimo do:

$$s_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + U, \quad s_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U \quad (3.11)$$

Zamenom (3.10) i (3.11) u (3.8) i sređivanjem izraza dobija se:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + (1-n) \cdot \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (3.12)$$

Sa oznakama za Laplace-ov operator:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \Delta \Delta &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{aligned}$$

jednačina (3.12) postaje:

$$\boxed{\Delta \Delta F + (1-n) \cdot \Delta U = 0} \quad (3.13)$$

Ova linearna parcijalna diferencijalna jednačina četvrtog reda naziva se jednačina pločastog nosača.

U slučaju da su sile  $X$  i  $Y$  jednake nuli u celoj oblasti, jednačina pločastog nosača se svodi na biharmonijsku jednačinu:

$$\Delta \Delta F = 0,$$

gde je  $F = F(x, y)$  biharmonijska funkcija.

Ovim je pokazano da se problem ploča napregnutih u svojoj ravni svodi na rešavanje diferencijalne jednačine (3.13) uz odgovarajuće granične uslove.

Pomeranje tačaka pločastog nosača ( $u, v$ ) određujemo integracijom prve dve jednačine iz (3.5), u koje se za deformacije uvode vrednosti prema (3.4), čime se dobija:

$$\begin{aligned} E \cdot u &= \int (s_x - n \cdot s_y) dx + \Phi(y), \\ E \cdot v &= \int (s_y - n \cdot s_x) dy + \Psi(x) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ovde se kao nepoznate javljaju dve funkcije jedne promenljive:  $\Phi(y)$  i  $\Psi(x)$ . Ako napone izrazimo preko Airy-jeve funkcije, za slučaj kada su zapreminske sile jednake nuli dobijamo:

$$\begin{aligned} E \cdot u &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot dx - n \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + \Phi(y) \\ E \cdot v &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot dy - n \cdot \frac{\partial F}{\partial y} + \Psi(x) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Funkcije  $\Phi(y)$  i  $\Psi(x)$  nisu međusobno nezavisne, već moraju zadovoljiti i uslov  $g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+n)}{E} t_{xy}$ , koji, nakon unošenja izraza (3.15) i (3.10), postaje:

$$\int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} \cdot dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \cdot dy + \frac{d\Phi(y)}{dy} + \frac{d\Psi(x)}{dx} = -2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3.16)$$

Funkcije  $\Phi(y)$  i  $\Psi(x)$  određujemo iz graničnih uslova, pri čemu mora biti ispunjen uslov (3.16). Ako je funkcija  $F(x, y)$  poznata, pomeranja  $u$  i  $v$  se određuju iz jednačina (3.15).

Rešenje graničnog zadatka ravnog stanja napona pločastog nosača može se naći i samo sa pomeranjima. U tu svrhu koristimo prve dve od jednačina ravnoteže (3.3) i veze napona i komponentalnih pomeranja koje dobijamo deljenjem jednačina (3.7) debljinom ploče  $t$ . Na raspolaganju nam stoji pet jednačina sa pet nepoznatih veličina (naponi  $s_x$ ,  $s_y$ ,  $t_{xy}$  i pomeranja  $u$  i  $v$ ). Unošenjem izraza (3.7) podeljenih sa  $t$  u prve dve jednačine (3.3), dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-n}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+n}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{X \cdot t}{D} &= 0 \\ \frac{1+n}{2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-n}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{Y \cdot t}{D} &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Uz uvođenje Laplace-ovog operatora i kubne dilatacije:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (3.18)$$

jednačine (3.17) se mogu pisati u sažetom obliku:

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{1+n}{1-n} \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0 \\ \Delta v + \frac{1+n}{1-n} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Opšte rešenje ovih jednačina izražava se preko proizvoljnih biharmonijskih funkcija  $f_1$  i  $f_2$  i konstanti  $a$ ,  $b$  i  $c$  koje karakterišu pomeranja krutog tela:

$$u = 2 \cdot \Delta f_1 - (1+n) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) + a \cdot y + b \quad (3.20)$$

$$v = 2 \cdot \Delta f_2 - (1+n) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) + a \cdot x + c$$

Biharmonijske funkcije  $f_1$  i  $f_2$  se određuju za svaki problem posebno, pa rešenje (3.20) nije opšte u pravom smislu te reči.

### 3.1.2. Ploče - površinski nosači napregnuti na savijanje

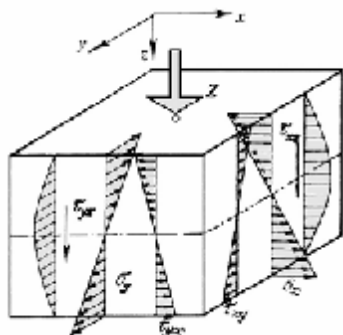
Teorija savijanja ploča, koju je postavio Kirchoff (1850. godine), zasniva se na sledećim pretpostavkama:

1. Linearni element, upravan na srednju ravan pre deformacije, ostaje prav, nepromenjene dužine i upravan na deformisanu srednju ravan (elastičnu površinu) i posle deformacije.

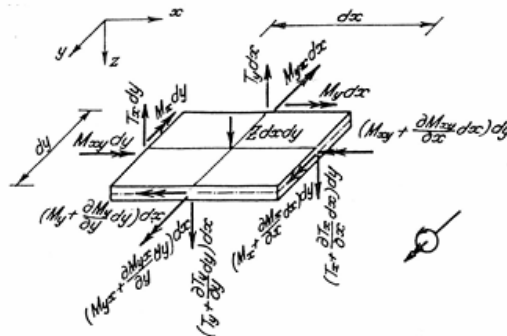
2. Ugibi ploče su mali u odnosu na njenu debljinu, zbog čega dužina i ugao između linijskih elemenata srednje ravni ploče ostaju nepromenjeni prilikom deformacije.

3. Normalni naponi  $s_z$ , za ravni paralelne srednjoj ravni, smatraju se malim u odnosu na ostale komponentalne napone i mogu se zanemariti.

a)



b)



Slika 3.2. Naponi u tankoj ploči opterećenoj na savijanje (a) i sile i momenti u diferencijalnom elementu srednje ravni savijene ploče (b) [9]

Ako tačke ploče posmatramo u odnosu na pravougli koordinatni sistem  $x, y, z$ , čija se ravan  $xy$  poklapa sa srednjom ravni nedeformisane ploče, pri čemu je osa  $z$  usmerena naniže, možemo konstatovati da tačka srednje ravni  $(x, y, 0)$  prilikom deformacije dobija u pravcu ose  $z$  pomeranja  $w$ , dok normala na srednju ravan dobija nagib određen uglovima  $\frac{\partial w}{\partial x}$  i  $\frac{\partial w}{\partial y}$ . Tačka  $(x, y, z)$  koja je na rastojanju  $z$  od srednje

ravni ploče, pri deformaciji trpi pomeranja:

$$w_z = w; \quad u_z = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v_z = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.21)$$

Veze komponenata deformacija i komponenata pomeranja za element površine koji se nalazi na rastojanju  $z$  od srednje ravni i leži paralelno njoj, možemo pisati u obliku:

$$e_x = \frac{\partial u_z}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad e_y = \frac{\partial v_z}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$g_{xy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.22)$$



Neka je opterećenje koje deluje upravno na srednju ravan ploče jednakopodeljeno na spoljašnjoj površini  $z = -t/2$ , intenziteta  $Z(x,y)$ . Ivični uslovi za spoljašnju površinu ploče su:

$$\begin{aligned} z = -t/2: s_z = -Z(x,y), \quad t_{zx} = 0, \quad t_{zy} = 0; \\ z = +t/2: s_z = 0, \quad t_{zx} = 0, \quad t_{zy} = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Prema trećoj pretpostavci, u unutrašnjosti ploče možemo zanemariti napon  $s_z$ , pa se za homogen i izotropan materijal, za koji važi Hooke-ov zakon, komponentalni naponi (slika 3.2.a) mogu prikazati u funkciji komponentalnih deformacija prema sledećem:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{E}{1-n^2} \cdot (e_x + n \cdot e_y) = -\frac{E \cdot z}{1-n^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ s_y &= \frac{E}{1-n^2} \cdot (e_y + n \cdot e_x) = -\frac{E \cdot z}{1-n^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + n \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ t_{xy} &= G \cdot g_{xy} = -2 \cdot G \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{E \cdot z}{1+n} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Iz izraza (3.24) vidi se da su komponente napona proporcionalne rastojanju  $z$  od srednje ravni ploče. Momenti i sile u presecima ploče (slika 3.2.b) mogu se odrediti integraljenjem napona po debljini ploče:

$$M_x = \int_{-t/2}^{+t/2} s_x \cdot z \, dz, \quad M_y = \int_{-t/2}^{+t/2} s_y \cdot z \, dz, \quad (3.25)$$

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{+t/2} t_{xy} \cdot z \, dz = M_{yx} = \int_{-t/2}^{+t/2} t_{yx} \cdot z \, dz,$$

$$T_x = \int_{-t/2}^{+t/2} t_{xz} \, dz, \quad T_y = \int_{-t/2}^{+t/2} t_{yz} \, dz. \quad (3.26)$$

Unoseći (3.24) u (3.25) dolazimo do momenata u presecima ploče u funkciji ugiba:

$$\begin{aligned} M_x &= -K \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -K \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + n \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{xy} &= -K \cdot (1-n) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

gde je sa

$$K = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1-n^2)} = \frac{E \cdot I}{(1-n^2)}$$

označena *krutost ploče na savijanje*.

Izraze za transverzalne sile dobijamo iz uslova ravnoteže protiv obrtanja oko težišne linije elementa, paralelne  $y$ , odnosno  $x$  osi. Ako se zanemare male veličine višeg reda, odavde dobijamo:

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}, \quad T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}, \quad (3.28)$$

odnosno, unosenjem (3.27) u (3.28):

$$T_x = -K \cdot \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x}, \quad T_y = -K \cdot \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y}. \quad (3.29)$$

Uslov ravnoteže svih sila u pravcu z ose može se svesti na oblik:

$$Z + \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0,$$

odakle, korišćenjem (3.29), dolazimo do linearne, nehomogene, parcijalne diferencijalne jednačine četvrtog reda za elastičnu površinu  $w(x,y)$ :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Z}{K}, \quad (3.30)$$

odnosno

$$\boxed{\Delta \Delta w = \frac{Z}{K}}, \quad (3.31)$$

koja se naziva jednačina ploče.

Iz prethodnih izlaganja se može zaključiti da je rešavanje problema ploča napregnutih u svojoj ravni i savijenih ploča, čak i za najjednostavnije slučajeve homogenih, izotropnih materijala, za koje važi Hooke-ov zakon, uz uvođenje pretpostavke o geometrijskoj linearnosti, veoma složen zadatak, a da se opšte rešenje teško može dobiti ili ga nema. Problem postaje još složeniji kod ploča koje su istovremeno napregnute u svojoj ravni i upravno na nju, kao što je slučaj kod poliedarskih ljuski, a naročito uvođenjem materijalne i geometrijske nelinearnosti. Numeričke metode, kojima se dobijaju približna rešenja problema, različite tačnosti, nameću se kao racionalno i ekonomično sredstvo. Među njima se, poslednjih decenija, posebno ističe metod konačnih elemenata (MKE). Ipak, u analizi specifičnih problema vezanih za poliedarske ljuske, pre svega zbog njihove geometrije, metod konačnih traka (MKT) se pokazao izuzetno efikasnim, jer ima jednostavnu pripremu podataka, brže vreme izvršavanja i preciznije rezultate. Zbog toga je u ovoj disertaciji MKT odabran kao osnovni numerički metod za analizu poliedarskih ljuski.

### 3.2. Razvoj i osnove metoda konačnih traka

Primena metoda konačnih traka počinje krajem šezdesetih godina prošlog veka, u radovima Cheung-a<sup>18,19</sup>, Powell-a i Ogden-a<sup>20</sup>. Metod se uvodi za određene klase praktičnih problema (konstrukcije pravilnog geometrijskog oblika i jednostavnih graničnih uslova, kao što su poliedarske ljuske i tankozidni nosači) kod kojih bi razlaganje u mnogo konačnih elemenata bilo preterano skupo, a za koje je MKT barem brži od MKE. Metod je uspešno uveden u analizu linearnog ponašanja, vibracija, izvijanja i nelinearnog ponašanja različitih tipova poliedarskih konstrukcija.

Gore navedeni radovi odnose se na primenu MKT u linearnoj analizi jednorasponskih sandučastih mostovskih konstrukcija. Loo i Cusens<sup>21</sup> u proračun mostova putem MKT uključuju i uticaj temperature i prednaprezanja.

<sup>18</sup> Prema [38], u radu Cheung, Y. K.: The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates With Two Opposite Simply Supported Ends, Proc. Inst. Civ. Engrs., Vol. 40, December 1968, pp. 1-7.

<sup>19</sup> Prema [38], u radu Cheung, Y. K.: Analysis of Box Girder Bridges by Finite Strip Method, Proc. Second Intl. Symposium on Concrete Bridge Design, Chicago, ACI Publications SP 26, April, 1969, pp. 357-378.

<sup>20</sup> Prema [38], u radu Powell, G. H. and Ogden, D. W.: Analysis of Orthotropic Bridge Decks, Am. Soc. Civ. Engrs. 95, ST5, May 1969, pp. 909-923.

<sup>21</sup> Prema [38], u radu Loo, W. C. and Cusens, A. R.: The Finite Strip Method in Bridge Engineering, Wexham Springs, Viewpoint Publications (C&CA), 1978.

Metod se kasnije primenjuje i na debele i sendvič ploče, formulacijom koja se bazira na Mindlin-ovoj teoriji<sup>22</sup> ili sa združenim stepenima slobode u slojevima<sup>23</sup>. Proučavaju se ortotropne ploče kod kojih se vrši modifikacija članova u matrici krutosti. Analiza se proširuje i na poprečno<sup>24</sup> i podužno zakrivljene konstrukcije<sup>25</sup>, sa različitim rubnim uslovima.

MKT se primenjuje i za rešavanje viskoelastičnih problema, kojima značajnu pažnju posvećuje Milašinović [38], [46]. Posebno se proučava beton kao viskoelastičan materijal uz primenu produženog Kelvin-ovog reološkog modela.

Primena MKT u analizi vibracija jednodimenzionalne slobodno oslonjene konstrukcije detaljno je objašnjena od strane Cheung-a<sup>24</sup>. Razmatraju se naročito slobodne vibracije grednih, pločastih i sandučastih mostova<sup>26</sup>.

MKT se često koristi i za proračun kritičnih opterećenja tankozidnih stubova opterećenih ivičnim pritiskom na vrhu, ali i u proučavanju izvijanja konstrukcija sa različitim osobinama ploča [38], [46].

Metod se koristi i kod geometrijski nelinearnih problema, počevši od radova Graves Smith-a i Sridharan-a<sup>27</sup>. Milašinović [38], [46], [36] izvodi opštu formulaciju metoda za geometrijski nelinearne probleme, u kojoj se svi članovi reda posmatraju zajedno (*harmonic coupled finite strip method - HCFSM*), primenjujući ga na analizu velikih ugiba tankih izotropnih i ortotropnih ploča. On razvija i računarski program za analizu konstrukcija metodom konačnih traka, koji rešava kako linearno elastične, tako i linearno viskoelastične, geometrijski nelinearne elastične i viskoelastične probleme, te probleme slobodnih vibracija i bifurkacione stabilnosti. Razmatra se i mogućnost uvođenja nehomogenosti armiranobetonske ljuske kroz formiranje slojevite nehomogene konačne trake.

Materijalna nelinearnost, naročito značajna za armiranobetonske preseke, obuhvaćena je u radovima Cope-a i Murtuza-a<sup>28</sup>, te Wittrick-a i Plank-a<sup>29</sup>.

Praktičan značaj metoda diskretizacije (MKE i MKT) u rešavanju problema mehanike kontinuuma se ogleda u svođenju problema na tzv. proces korak po korak, što ih čini pogodnim za programiranje na računaru. Ovaj proces se sastoji od šest osnovnih koraka [59]:

1. Diskretizacija kontinuuma (slika 3.3)
2. Izbor funkcija pomeranja koje opisuju ponašanje svakog elementa (trake). U MKT se ove funkcije biraju tako da obezbede potpunu kompatibilnost razložene konstrukcije duž čvornih linija između traka, uslove oslanjanja na krajevima i određen stepen kompatibilnosti u pravcu diskretizacije. Amplitude ovih funkcija su stepeni slobode u čvornim linijama.
3. Sračunavanje karakteristika elemenata (traka).

<sup>22</sup> Prema [38], u radu Hinton, E.: Flexure of Composite Laminates Using a Thick Finite Strip Method, *Comput. Struct.*, 7, 1977., pp. 217-220.

<sup>23</sup> Prema [38], u radu Chong, K. P., Lee, B. and Lavdas, P. A.: Analysis of Thin-Walled Structures by Finite Strip and Finite Layer Methods, *Thin-Walled Struct.*, 2, 1984, pp. 75-95.

<sup>24</sup> Prema [38], u radu Dawe, D. J.: Static Analysis of Diaphragm - Supported Cylindrical Shells Using a Curved Finite Strip, *Intl. Jnl. Numerical Methods in Engg.*, Vol. 11, 1977.

<sup>25</sup> Prema [38], u radu Cheung, Y. K.: The Finite Strip Method in Structural Analysis, Oxford, Pergamon Press, 1976.

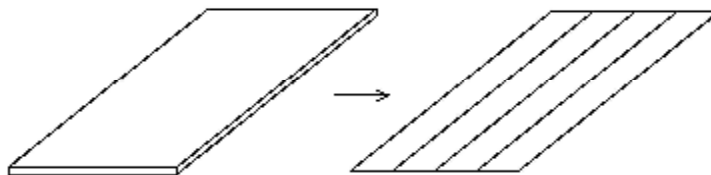
<sup>26</sup> Prema [38], u radu Cheung, Y. K. and Cheung, M. S.: Free Vibration of Curved and Straight Beam, Slab and Box Girder Bridges, *Pub. IABSE*, 32-II, 1972, pp. 41-52.

<sup>27</sup> Prema [38], u radu Graves Smith, T. R. and Sridharan, S.: Finite Strip Method for the Post-Locally-Buckled Analysis of Plate Structures, *Int. J. Mech. Sci.*, 20, 1978, pp. 833-842.

<sup>28</sup> Prema [38], u radu Cope, R. J. and Murtuza, M. A.: Finite Strip Method in Non-Linear Analysis of Reinforced Concrete, in: *Numerical Methods for Non-Linear Problems*, C. Taylor, E. Hinton and D. R. J. Owen (EDS), Vol. 2, Swansea, Pineridge Press, 1984, pp. 290-300.

<sup>29</sup> Prema [38], u radu Wittrick, W. H. and Plank, R. J.: Buckling Under Combined Loading of Thin, Flat-Walled Structures by a Complex Finite Strip Method, *Intl. J. Num. Methods in Engg.*, Vol. 8, p. 323.

4. Formiranje jednačina za mrežu konačnih elemenata (traka).
5. Rešavanje sistema jednačina.
6. Proračun željenih uticaja.



Slika 3.3. Podela pravougaone tanke ploče na podužne trakaste elemente

Priroda problema koji se rešava diktira način diskretizacije, izbor oblika elemenata i njihovog ukupnog broja. Veliki značaj ima izbor čvorova, osnovnih nepoznatih u njima i interpolacionih funkcija, pomoću kojih se definiše polje pomeranja u svakom elementu.

Karakteristike pojedinih elemenata se sračunavaju nezavisno od mreže elemenata kao celine (npr. matrice krutosti se formiraju nezavisno za pojedine elemente, a zatim se, na osnovu njih, formira matrica krutosti za sistem u celini). Ovo praktično znači da se kompleksan problem razbija na niz jednostavnih.

Jednačine ravnoteže u MKT dobijaju se primenom principa o minimumu ukupne potencijalne i kinetičke energije, koje su prethodno formulisane za razloženu konstrukciju u funkciji stepeni slobode i njihovih izvoda u vremenu.

Između MKT i MKE uočava se nekoliko bitnih razlika [38]:

1. U MKE se za aproksimaciju polja pomeranja koriste polinomi u svim pravcima, dok se u MKT polinomi koriste samo u jednom pravcu, a u drugom neprekidni diferencijabilni redovi, kojima se zadovoljavaju statički i kinematički uslovi na podužnim krajevima traka, odnosno, za funkcije pomeranja se u MKT usvajaju proizvodi polinoma i redova:

$$f = \sum_{m=1}^r c_m(x) \cdot Y_m(y). \quad (3.32)$$

2. MKE je opšti metod, koji se može primeniti na bilo koju geometriju i bilo koje konturne uslove, dok se MKT koristi za proračun ploča, mostova i različitih poliedarskih ljuski.

3. U MKT se javlja znatno manji broj jednačina i matrica nego u MKE, sa manjim zauzećem memorije računara, što proračun čini bržim, jeftinijim, a često i tačnijim.

4. U proračunu po MKT je broj ulazno - izlaznih rezultata znatno manji nego kod MKE. U ovom metodu se lako određuju samo one lokacije u kojima se traže rezultati.

U izrazu (3.32) se, umesto nezavisnih koeficijenata, usvajaju proizvodi:

$$c_m = \sum_{k=1}^c \mathbf{N}_k(x) \cdot \mathbf{q}_{km}, \quad (3.33)$$

gde su  $\mathbf{N}_k(x)$  interpolacione funkcije, a  $\mathbf{q}_{km}$  osnovne nepoznate komponente pomeranja u čvornim linijama za  $m$ -ti član reda. Sa ovim dobijamo opšti oblik polja pomeranja:

$$f = \sum_{m=1}^r \mathbf{N}(x) \cdot \mathbf{q}_m \cdot Y_m(y) = \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^c \mathbf{N}_k(x) \cdot \mathbf{q}_{km} \cdot Y_m(y). \quad (3.34)$$

Ovim se dvodimenzionalan problem prevodi u jednodimenzionalan, budući da su  $Y_m(y)$  i  $\mathbf{N}(x)$  funkcije različitih argumenata. U izrazu (3.34)  $c$  predstavlja ukupan broj čvornih linija konačne trake.

Funkcije  $Y_m(y)$  moraju biti neprekidne i do potrebnog reda diferencijabilne i moraju zadovoljavati određene uslove na konturi. One se mogu svrstati u dve osnovne grupe:

- dopustive, koje zadovoljavaju geometrijske uslove na konturi i koje su do drugog reda diferencijabilne u oblasti  $D$ , i
- uporedive, koje zadovoljavaju geometrijske i statičke uslove na konturi i koje su do drugog reda diferencijabilne u oblasti  $D$ .

Kontinuum se, dakle, deli na konačne trake čiji krajevi opisuju deo granice kontinuuma. Trake su međusobno spojene duž određenog broja linija koje se podudaraju sa njihovim podužnim granicama. Stepennost slobode svake čvorne linije predstavlja broj parametara pomeranja kojima se obezbeđuje kontinuitet na granicama između traka. Međutim, pošto se neprekidne funkcije  $Y_m(y)$  definišu za pojedine članove reda, to ukupan broj stepeni slobode u čvornoj liniji treba množiti brojem članova reda koji se koristi u proračunu. Kod većine linearnih problema, vibracija i bifurkacione stabilnosti, izborom funkcija koje zadovoljavaju uslove ortogonalnosti ili kod kojih se zanemarivanjem međudelovanja članova reda ne čini velika greška, članovi reda mogu da se razdvoje, pa se kompletno rešenje dobija sumiranjem rešenja po pojedinim članovima reda. Ovo je slučaj kod slobodno oslonjenih konstrukcija, kod kojih funkcije pomeranja zadovoljavaju uslove ortogonalnosti, ali ne i kod nelinearnih problema, kod kojih se mora raditi sa svim članovima reda zajedno.

Kada se koristi varijacioni metod, tačno rešenje  $u(x_i)$  daje ekstremnu vrednost odgovarajućem funkcionalu problema  $\Pi(u)$ . Ako se u funkcional unese približna vrednost rešenja  $f$ , data sa (3.32), dobija se novi funkcional  $\bar{\Pi}$ . Kada se na njega primene ekstremalni principi, dolazi se do jednačina iz kojih se mogu odrediti nepoznati parametri  $c_m$ . Funkcije  $Y_m$  se unapred usvajaju tako da zadovolje geometrijske konturane uslove. Poželjno je da one zadovoljavaju i statičke uslove na konturi, kao i da svojim oblikom kvalitativno odgovaraju traženom rešenju. U pogledu konvergencije je poželjno da one čine sistem ortogonalnih funkcija:

$$\int_D Y_i \cdot Y_j \cdot dD = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.35)$$

Ako se pomeranja u bilo kojoj tački konačne trake izraze u funkciji pomeranja u čvornim linijama, onda se problem određivanja pomeranja u oblasti  $D$  svodi na određivanje pomeranja u čvornim linijama. Ova pomeranja se određuju iz sistema jednačina koje predstavljaju uslove ravnoteže u čvornim linijama. Iz poznatih pomeranja dalje se određuju deformacije, naponi i rezidualna opterećenja.

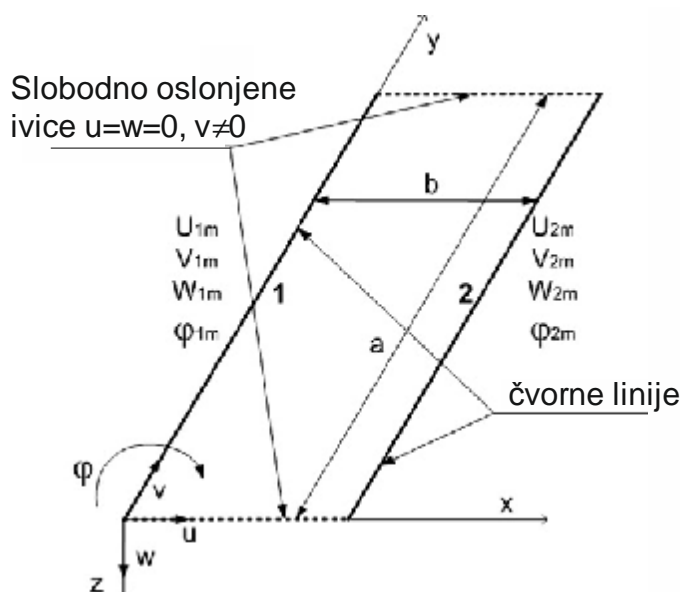
### 3.3. Aproksimativne funkcije

Polje pomeranja konačne trake (3.34) može se napisati u obliku:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{q} = \sum_{m=1}^r \mathbf{A}_m \mathbf{q}_m = \sum_{m=1}^r Y_m(y) \sum_{k=1}^c \mathbf{N}_k(x) \mathbf{q}_{km}, \quad (3.36)$$

gde je  $\mathbf{A}$  matrica aproksimativnih funkcija, a  $\mathbf{q}$  vektor parametara pomeranja u čvornim linijama. Aproksimativne funkcije se, kao što je rečeno u prethodnom odeljku, mogu izraziti u vidu proizvoda neprekidnih trigonometrijskih funkcija  $Y_m(y)$  i interpolacionih funkcija - polinoma  $\mathbf{N}_k(x)$ .

Aproksimativne funkcije predstavljaju samo približno rešenje problema, pa njihovim izborom direktno utičemo na tačnost rešenja. Izbor aproksimativnih funkcija zavisi od prirode problema. U daljem tekstu će biti prikazane aproksimativne funkcije za pravougaone konačne trake čija su oba kraja slobodno oslonjena (slika 3.4), a koje se koriste za analizu ravnih poliedarskih ljuski. Ove aproksimativne funkcije se biraju nezavisno za problem savijanja i problem ravnog stanja naprezanja.



Slika 3.4. Konačna traka ravne ljuske sa osam stepeni slobode

### 3.3.1. Aproksimativne funkcije u problemu savijanja

U problemu savijanja konačne trake aproksimativna funkcija treba da zadovolji homogenu parcijalnu diferencijalnu jednačinu četvrtog reda - homogenu jednačinu ploče:

$$\Delta \Delta w(x, y) = 0. \quad (3.37)$$

Funkciju ugiba pretpostavljamo u obliku beskonačnog reda:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(x) \cdot Y_m(y), \quad (3.38)$$

gde je  $m$  član reda ili broj harmonika.

#### 3.3.1.1. Deo aproksimativnih funkcija u $y$ pravcu: $Y_m(y)$

U problemu savijanja se za funkciju  $Y_m(y)$  mogu izabrati rešenja diferencijalne jednačine slobodnih poprečnih vibracija štapa konačne dužine  $a$ :

$$\frac{d^4 Y(y)}{dy^4} - Y(y) \left( \frac{m^4}{a^4} \right) = 0, \quad (3.39)$$

čije opšte rešenje ima oblik:

$$Y(y) = A \cdot S \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) + B \cdot T \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) + C \cdot U \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) + D \cdot V \left( \frac{m \cdot y}{a} \right), \quad (3.40)$$

gde su

$$\begin{aligned} S \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \cosh \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) + \cos \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) \right], \\ T \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \sinh \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) + \sin \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) \right], \\ U \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \cosh \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) - \cos \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) \right], \\ V \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \sinh \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) - \sin \left( \frac{m \cdot y}{a} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Konstante  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  određujemo iz uslova oslanjanja konačne trake na krajevima. Uslovi na krajevima obostrano slobodno oslonjene trake su:

$$\begin{aligned} Y(0) = Y_{,yy}(0) &= 0, \\ Y(a) = Y_{,yy}(a) &= 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ove uslove zadovoljavaju funkcije  $T(y)$  i  $V(y)$ . Rešenje (3.40) i njegov drugi izvod glase:

$$\begin{aligned} Y(y) &= B \cdot T\left(\frac{m \cdot y}{a}\right) + D \cdot V\left(\frac{m \cdot y}{a}\right), \\ Y_{,yy}(y) &= \left(\frac{m}{a}\right)^2 \cdot B \cdot V\left(\frac{m \cdot y}{a}\right) + \left(\frac{m}{a}\right)^2 \cdot D \cdot T\left(\frac{m \cdot y}{a}\right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Konstante  $B$  i  $D$  određujemo iz uslova na kraju  $y=a$ :

$$\begin{aligned} B \cdot T(m) + D \cdot V(m) &= 0, \\ \left(\frac{m}{a}\right)^2 \cdot B \cdot V(m) + \left(\frac{m}{a}\right)^2 \cdot D \cdot T(m) &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ovo je sistem od dve homogene linearne jednačine. Uslov za egzistenciju netrivialnih rešenja je da determinanta koeficijenata bude jednaka nuli, odnosno:

$$T^2(m) - V^2(m) = 0, \quad (3.45)$$

što se svodi na:

$$\sin(m) = 0. \quad (3.46)$$

Ovo je frekventna jednačina transcendentnog oblika koja ima beskonačno mnogo korena:

$$m_m = m \cdot p, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.47)$$

Nakon određivanja odnosa konstanti u jednačini (3.44) dolazimo do jednačine za svojstvene oblike:

$$Y_m(y) = C \cdot \sin\left(\frac{m_m \cdot y}{a}\right). \quad (3.48)$$

Kod svojstvenih oblika poznat je samo oblik krive, a ne i apsolutna vrednost amplitude, jer je konstanta  $C$  neodređena. Prvi ton je jedan sinusni polutalas, drugi dva, itd. Pošto amplitudu pomeranja u rešenju oblika (3.34) određujemo funkcijom  $N(x)$ , konačan oblik dela aproksimativne funkcije u smeru  $y$ , za zadate uslove na krajevima, postaje:

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m_m \cdot y}{a}\right) = Y_{wm}, \quad m_m = p, 2p, \dots, mp. \quad (3.49)$$

### 3.3.1.2. Deo aproksimativnih funkcija u $x$ pravcu: $w_m(x)$

Za bilo koji član reda možemo, kao amplitudu pomeranja  $w(x)$  pretpostaviti polinom trećeg stepena:

$$w(x) = C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3, \quad (3.50)$$

u kome su  $C_1$  do  $C_4$  generalisana pomeranja. Ovom aproksimacijom se uspostavlja kompatibilnost pomeranja  $w$  i njihovih prvih izvoda  $dw/dx$  u čvornim linijama razložene konstrukcije. Koristeći uslov da je  $j = dw/dx$  i ispisujući polinom (3.50) za čvorne linije 1 i 2, čije su koordinate  $x=0$  i  $x=b$  redom, dobijamo:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ j_1 \\ w_2 \\ j_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Inverzijom izraza (3.51) dobijamo koeficijente polinoma:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/b^2 & -2/b & 3/b^2 & -1/b \\ 2/b^3 & 1/b^2 & -2/b^3 & 1/b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ j_1 \\ w_2 \\ j_2 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Odavde možemo pisati, za proizvoljan član reda, funkciju  $w(x)$ :

$$w(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{b^2} + \frac{2x^3}{b^3}\right)w_1 + \left(x - \frac{2x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right)j_1 + \left(\frac{3x^2}{b^2} - \frac{2x^3}{b^3}\right)w_2 + \left(-\frac{x^2}{b} + \frac{x^3}{b^2}\right)j_2, \quad (3.53)$$

čime su određeni Hermite-ovi interpolacioni polinomi  $N_1, N_2, N_3$  i  $N_4$  koji čine vektor  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] = \mathbf{N}_w. \quad (3.54)$$

Napišemo li vektor parametara čvornih pomeranja konačne trake izložene savijanju, sa dve čvorne linije, za  $m$ -ti član reda:

$$\mathbf{q}_{wm}^T = [w_{1m} \ j_{1m} \ w_{2m} \ j_{2m}], \quad (3.55)$$

pomeranje konačne trake u funkciji koordinate  $x$ , za  $m$ -ti član reda, postaje:

$$w_m(x) = \mathbf{N}_w \mathbf{q}_{wm}. \quad (3.56)$$

### 3.3.2. Aproksimativne funkcije u problemu ravnog stanja naprezanja

#### 3.3.2.1. Deo aproksimativnih funkcija u $y$ pravcu: $Y_m(y)$

U slučaju pravougaone ploče napregnute u svojoj ravni, slobodno oslonjene na krajevima, funkcija data jednačinom (3.49) je pogodna za aproksimaciju komponente pomeranja  $u_0$  (komponenta pomeranja tačke srednje ravni ploče u pravcu lokalne ose  $x$ ). Za aproksimaciju komponente pomeranja  $v_0$  (komponenta pomeranja tačke srednje ravni ploče u pravcu lokalne ose  $y$ ) polazi se od pretpostavke koju je u proučavanju greda uveo Timošenko, a za MKT modifikovao Cheung. U Timošenko-voj gredi se pretpostavlja da prave normalne na neutralnu osu pre deformacije ostaju prave, ali ne i neophodno normalne na neutralnu osu posle deformacije. To znači da se aksijalno pomeranje  $v$  bilo koje tačke može izraziti preko člana rotacije normale  $q(y)$ :

$$v(x, y) = -x \cdot q(y). \quad (3.57)$$

Rotacija normale  $q(y)$  je jednaka nagibu neutralne ose  $du/dy$  umanjenom za rotaciju  $b$ , koja je posledica deformacije smicanja usled transverzalnih sila:

$$q(y) = \frac{du}{dy} - b. \quad (3.58)$$

Kako se diskretizacija nosača vrši u ravni  $xOy$ , to se kod konačne trake u ravnom stanju naprezanja rotacija  $b$  može zanemariti, odnosno:

$$v = A \cdot \frac{du}{dy}. \quad (3.59)$$

Konačan oblik dela aproksimativnih funkcija u smeru  $y$ , za konačnu traku čiji su uslovi oslanjanja na krajevima  $y=0$  i  $y=a$  određeni sa  $u=0$  i  $v \neq 0$ , postaje:

$$Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) = Y_{um}^u, \quad Y_{um}^v = \frac{dY_{um}^u}{dy} = \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (3.60)$$



### 3.3.2.2. Deo aproksimativnih funkcija u $x$ pravcu: $u_m(x)$ i $v_m(x)$

Za opisivanje ovog problema unutar konačne trake, dovoljno je pretpostaviti konstantne deformacije. To znači da se pomeranja  $u$  i  $v$  mogu aproksimirati linearnim polinomima, koji obezbeđuju kontinuitet pomeranja ili  $C_0$  kontinuitet:

$$u(x) = v(x) = C_1 + C_2 \cdot x. \quad (3.61)$$

Ako gornji polinom ispišemo za čvorne linije  $x=0$  i  $x=b$ , dobijamo:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Inverzijom gornjeg izraza dolazimo do koeficijenata polinoma:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/b & 1/b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Odavde možemo pisati, za proizvoljan član reda, funkciju  $u(x)$ :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{b}\right) u_1 + \frac{x}{b} u_2. \quad (3.64)$$

Uvedemo li vektore čvornih pomeranja konačne trake sa dve čvorne linije, u ravnom stanju naprezanja:

$$\mathbf{q}_u^{uT} = [u_1 \quad u_2], \quad \mathbf{q}_u^{vT} = [v_1 \quad v_2], \quad (3.65)$$

pomeranja konačne trake u funkciji koordinate  $x$  postaju:

$$u(x) = \mathbf{N}_u^u \mathbf{q}_u^u, \quad v(x) = \mathbf{N}_u^v \mathbf{q}_u^v, \quad (3.66)$$

gde je:

$$\mathbf{N}_u^u = \mathbf{N}_u^v = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{b} & \frac{x}{b} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Za  $m$ -ti član reda imamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{um}^{uT} &= [u_{1m} \quad u_{2m}], \quad \mathbf{q}_{um}^{vT} = [v_{1m} \quad v_{2m}], \\ u_m(x) &= \mathbf{N}_u^u \mathbf{q}_{um}^u, \quad v_m(x) = \mathbf{N}_u^v \mathbf{q}_{um}^v. \end{aligned} \quad (3.68)$$

### 3.3.3. Aproksimativne funkcije u analizi ravnih poliedarskih ljuski

Konačna traka ravne poliedarske ljuske, prikazana na slici 3.4, dobija se kombinacijom trake sa četiri stepena slobode kretanja iz problema savijanja i trake sa četiri stepena slobode kretanja iz problema ravnog stanja naprezanja. Vektor osnovnih nepoznatih pomeranja u čvornoj liniji sadrži četiri komponente, pa konačna traka ima ukupno osam stepeni slobode kretanja:

$$\mathbf{q}^T = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad j_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad j_2]. \quad (3.69)$$

Ako vektor osnovnih nepoznatih pomeranja u čvornim linijama konačne trake razložimo na tri vektora, možemo pisati:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_w^T &= [w_1 \quad j_1 \quad w_2 \quad j_2], \\ \mathbf{q}_u^{uT} &= [u_1 \quad u_2], \quad \mathbf{q}_u^{vT} = [v_1 \quad v_2], \end{aligned} \quad (3.70)$$

odnosno, za  $m$ -ti član reda:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{wm}^T &= [w_{1m} \quad j_{1m} \quad w_{2m} \quad j_{2m}], \\ \mathbf{q}_{um}^{uT} &= [u_{1m} \quad u_{2m}], \quad \mathbf{q}_{um}^{vT} = [v_{1m} \quad v_{2m}]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Sada komponente pomeranja tačaka srednje ravni ploče možemo izraziti u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} u_0 &= \mathbf{A}_u^u \mathbf{q}_u^u = \sum_{m=1}^r Y_{um}^u \mathbf{N}_u^u \mathbf{q}_{um}^u, \\ v_0 &= \mathbf{A}_u^v \mathbf{q}_u^v = \sum_{m=1}^r \frac{a}{mp} Y_{um}^v \mathbf{N}_u^v \mathbf{q}_{um}^v, \\ w &= \mathbf{A}_w \mathbf{q}_w = \sum_{m=1}^r Y_{wm} \mathbf{N}_w \mathbf{q}_{wm}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ovde je:

$$\begin{aligned} Y_{um}^u(y) &= \sin\left(\frac{m p y}{a}\right) = Y_{wm}, \quad Y_{um}^v(y) = \frac{dY_{um}^u(y)}{dy} = \left(\frac{mp}{a}\right) \cos\left(\frac{m p y}{a}\right), \\ m &= 1, 2, 3, \dots \\ \mathbf{N}_u^u &= \mathbf{N}_u^v = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{b} & \frac{x}{b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_w = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4], \\ N_1 &= 1 - 3\left(\frac{x}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{b}\right)^3, \quad N_2 = b \left[ \frac{x}{b} - 2\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^3 \right], \\ N_3 &= 3\left(\frac{x}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{b}\right)^3, \quad N_4 = b \left[ -\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

### 3.4. Varijaciona formulacija za metod konačnih traka

U ovom odeljku će, u osnovnim crtama, biti prikazana geometrijski nelinearna variaciona formulacija za metod konačnih traka, koja će kasnije biti svedena na linearno elastičan problem poliedarskih ljuski.

#### 3.4.1. Stanje deformacija

Stanje deformacija ćemo opisati Green-Lagrange-ovim tenzorom deformacije, koji u pravouglom koordinatnom sistemu ima oblik:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}). \quad (3.74)$$

Ako razmatramo samo savijanje tankih ploča prema Kirchoff-ovoj teoriji, kombinovano sa ravnim stanjem naprezanja, dobijamo:

$$\begin{aligned} e_z &= 0, & w &= w(x, y), \\ g_{yz} &= 0, & v_s &= -z \cdot w_{,y}, \\ g_{xz} &= 0, & u_s &= -z \cdot w_{,x}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

gde su indeksom  $s$  označene komponente pomeranja samo usled savijanja. Sa (3.75) stanje deformacije (3.74) može da se prikaže u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} e_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} \cdot (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \\ e_y &= v_{,y} + \frac{1}{2} \cdot (u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) \\ g_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + (u_{,y} \cdot u_{,x} + v_{,y} \cdot v_{,x} + w_{,y} \cdot w_{,x}). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Kada se u izrazu (3.76) zanemare određeni sabirci, kao male veličine višeg reda, mogu se analizirati različiti specijalni slučajevi stanja deformacija. Tako za analizu dugačkih poliedarskih konstrukcija, sastavljenih od tankih ploča i opterećenih u srednjoj ravni i/ili upravno na nju, možemo deformacije  $v_{,y}$  i  $v_{,x}$  smatrati malim veličinama. Sa navedenim pretpostavkama, komponente deformacija u proizvoljnoj tački, na udaljenosti  $z$  od srednje ravni ploče, mogu se prikazati u funkciji komponenta pomeranja tačaka srednje ravni ploče ( $u_0, v_0, w=w_0$ ):

$$\begin{aligned} e_x &= u_{0,x} + \frac{1}{2} \cdot (u_{0,x}^2 + w_{,x}^2) - z \cdot w_{,xx}, \\ e_y &= v_{0,y} + \frac{1}{2} \cdot (u_{0,y}^2 + w_{,y}^2) - z \cdot w_{,yy}, \\ g_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} + (u_{0,y} \cdot u_{0,x} + w_{,y} \cdot w_{,x}) - 2 \cdot z \cdot w_{,xy}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

### 3.4.2. Energija deformacije

Uvešćemo vektore:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{bmatrix}, & \mathbf{e}'_0 &= \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ 0 \\ u_{0,y} \end{bmatrix}, & \mathbf{e}''_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ v_{0,y} \\ v_{0,x} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\eta}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot w_{,x}^2 \\ \frac{1}{2} \cdot w_{,y}^2 \\ w_{,x} \cdot w_{,y} \end{bmatrix}, & \boldsymbol{\zeta}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot u_{0,x}^2 \\ \frac{1}{2} \cdot u_{0,y}^2 \\ u_{0,x} \cdot u_{0,y} \end{bmatrix}, & \mathbf{k} &= \begin{bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2 \cdot w_{,xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Izraz (3.77), korišćenjem (3.78), može da se napiše u obliku:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z \cdot \mathbf{k} \quad (3.79)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{e}_0 + \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\zeta}_0 = \mathbf{e}'_0 + \mathbf{e}''_0 + \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\zeta}_0$$

Kao što je pokazano u prethodnom poglavlju, polje pomeranja konačne trake aproksimiramo proizvodom polinoma i redova, a vezu između vrednosti pomeranja u bilo kojoj tački konačne trake i osnovnih nepoznatih parametara pomeranja u čvornim linijama možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{q} = \sum_{m=1}^r \mathbf{A}_m \mathbf{q}_m = \sum_{m=1}^r \sum_{k=1}^c \mathbf{A}_{km} \mathbf{q}_{km} = \sum_{m=1}^r Y_m \cdot \sum_{k=1}^c \mathbf{N}_k \mathbf{q}_{km} \quad (3.80)$$

gde je  $r$  ukupan broj članova reda koji se koriste za aproksimaciju, odnosno broj nezavisnih funkcija  $Y_m(y)$ , a  $c$  ukupan broj čvornih linija duž kojih se usvajaju osnovne nepoznate veličine za koje su definisane interpolacione funkcije  $N_k(x)$ . Komponente pomeranja tačaka srednje ravni ploče možemo izraziti u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} f_u^u &= u_0 = \mathbf{A}_u^u \mathbf{q}_u^u \\ f_u^v &= v_0 = \mathbf{A}_u^v \mathbf{q}_u^v, & \mathbf{f}_u &= \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_u \mathbf{q}_u \\ f_w &= w = \mathbf{A}_w \mathbf{q}_w \end{aligned} \quad (3.81)$$

Ovde su  $\mathbf{A}_u^u$ ,  $\mathbf{A}_u^v$  i  $\mathbf{A}_w$  odgovarajuće aproksimativne funkcije, objašnjene u odeljku 3.3., dok su vektori  $\mathbf{q}_u^u$ ,  $\mathbf{q}_u^v$  i  $\mathbf{q}_w$  dati izrazima (3.70). Ako uvedemo sledeće matrice i vektore:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_1 &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} -\partial^2/\partial x^2 \\ -\partial^2/\partial y^2 \\ -2\partial^2/\partial x\partial y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_4 = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ 0 \\ \partial/\partial y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial x \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_u &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u^u & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_u^v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u^u \\ \mathbf{q}_u^v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_w & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_w & 0 \\ 0 & \mathbf{q}_w \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_u^u &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_u^u & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_u^u \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u^u & 0 \\ 0 & \mathbf{q}_u^u \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.82}$$

vektore (3.78) možemo pisati u obliku:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_0 &= \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_u \mathbf{q}_u, \\
\boldsymbol{\eta}_0 &= \frac{1}{2} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_w \mathbf{w} \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_w \mathbf{q}_w, \\
\boldsymbol{\zeta}_0 &= \frac{1}{2} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_u^u \mathbf{U} \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_u^u \mathbf{q}_u^u, \\
\boldsymbol{\kappa} &= \mathbf{L}_3 \mathbf{A}_w \mathbf{q}_w, \\
\mathbf{e}'_0 &= \mathbf{L}_4 \mathbf{A}_u^u \mathbf{q}_u^u, \\
\mathbf{e}''_0 &= \mathbf{L}_5 \mathbf{A}_u^v \mathbf{q}_u^v.
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Uvedemo li matrice:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{u1} &= \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_u, \quad \mathbf{B}_{u1}^u = \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_u^u, \quad \mathbf{B}_{u2}^u = \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_u^u, \quad \mathbf{B}_{w1} = \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_w, \\
\mathbf{B}_{w2} &= \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_w, \quad \mathbf{B}_{w3} = \mathbf{L}_3 \mathbf{A}_w, \quad \mathbf{B}_{u4}^u = \mathbf{L}_4 \mathbf{A}_u^u, \quad \mathbf{B}_{u5}^v = \mathbf{L}_5 \mathbf{A}_u^v,
\end{aligned} \tag{3.84}$$

gde se matrice  $\mathbf{B}_{u1} \dots \mathbf{B}_{u5}^v$  dobijaju kao prvi, a matrica  $\mathbf{B}_{w3}$  kao drugi izvod odgovarajućih aproksimativnih funkcija, vektori (3.83) se mogu napisati u kraćem obliku:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_0 &= \mathbf{B}_{u1} \mathbf{q}_u, \\
\boldsymbol{\eta}_0 &= \frac{1}{2} \mathbf{B}_{w1} \mathbf{w} \mathbf{B}_{w2} \mathbf{q}_w, \\
\boldsymbol{\zeta}_0 &= \frac{1}{2} \mathbf{B}_{u1}^u \mathbf{U} \mathbf{B}_{u2}^u \mathbf{q}_u^u, \\
\boldsymbol{\kappa} &= \mathbf{B}_{w3} \mathbf{q}_w, \\
\mathbf{e}'_0 &= \mathbf{B}_{u4}^u \mathbf{q}_u^u, \\
\mathbf{e}''_0 &= \mathbf{B}_{u5}^v \mathbf{q}_u^v.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

U slučaju elastičnog ortotropnog materijala za koji važi Hooke-ov zakon, veza između tenzora napona i tenzora deformacija može da se napiše u sledećem obliku:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{3.86}$$

ili, u razvijenom obliku:

$$\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & K_1 & 0 \\ K_1 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ g_{xy} \end{bmatrix}, \tag{3.87}$$

gde su

$$K_x = \frac{E_x}{1 - n_x n_y}, \quad K_y = \frac{E_y}{1 - n_x n_y}, \quad K_1 = \frac{n_y E_x}{1 - n_x n_y} = \frac{n_x E_y}{1 - n_x n_y}, \quad K_{xy} = G_{xy}. \tag{3.88}$$

$E_x$  i  $E_y$  su Young-ovi moduli elastičnosti, a  $n_x$  i  $n_y$  Poisson-ovi koeficijenti.

Korišćenjem izraza (3.79) i (3.86) možemo napisati izraz za energiju deformacije:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0^T & z\mathbf{k}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{D} \\ \mathbf{D} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ z\mathbf{k} \end{bmatrix} dAdz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_0 dA + \int_A \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{D}_{ms} \mathbf{k} dA + \frac{1}{2} \int_A \mathbf{k}^T \mathbf{D}_s \mathbf{k} dA = \\
 &= U_m + U_{ms} + U_s
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

gde  $U_m$  predstavlja deo energije deformacije usled ravnog stanja naprezanja,  $U_{ms}$  je deo usled interakcije dejstava ravnog stanja naprezanja i savijanja, a  $U_s$  deo usled savijanja.

Za homogen materijal važi:

$$\mathbf{D}_m = \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{D} dz = t\mathbf{D}, \quad \mathbf{D}_{ms} = \int_{-t/2}^{t/2} z\mathbf{D} dz = 0, \quad \mathbf{D}_s = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 \mathbf{D} dz = \frac{t^3}{12} \cdot \mathbf{D}. \tag{3.90}$$

### 3.4.3. Rad spoljnih sila

Razmotrićemo uticaj statičkog delovanja površinskog opterećenja  $\mathbf{p}$ , koje je raspodeljeno upravno na srednju ravan ploče ili raspodeljeno po debljini ploče i paralelno srednjoj ravni. Rad spoljnih sila možemo pisati u obliku:

$$W = - \int_A \mathbf{f}^T \mathbf{p} dA \tag{3.91}$$

Ako rad spoljnih sila razložimo u komponente usled opterećenja upravno na srednju ravan i paralelno njoj, dobijamo:

$$\begin{aligned}
 W_w &= - \int_A f_w p_w dA \\
 W_u &= - \int_A \mathbf{f}_u^T \mathbf{p}_u dA.
 \end{aligned} \tag{3.92}$$

Korišćenjem izraza (3.81) možemo pisati:

$$\begin{aligned}
 W_w &= - \int_A \mathbf{q}_w^T \mathbf{A}_w^T p_w dA = -\mathbf{q}_w^T \mathbf{Q}_w, \\
 W_u &= - \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{A}_u^T p_u dA = -\mathbf{q}_u^T \mathbf{Q}_u,
 \end{aligned} \tag{3.93}$$

gde su

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_w &= \int_A \mathbf{A}_w^T p_w dA, \\
 \mathbf{Q}_u &= \int_A \mathbf{A}_u^T p_u dA.
 \end{aligned} \tag{3.94}$$

### 3.4.4. Ukupna potencijalna energija

Ukupna potencijalna energija tela jednaka je zbiru energije deformacije i rada spoljnih sila:

$$\begin{aligned}
\Pi = U + W &= (U_m + U_{ms} + U_s) + W_w + W_u = \\
&= \left( \frac{1}{2} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u1} \mathbf{q}_u dA + \frac{1}{2} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{w3} \mathbf{q}_w dA \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_A \mathbf{q}_w^T \mathbf{B}_{w3}^T \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{u1} \mathbf{q}_u dA + \frac{1}{2} \int_A \mathbf{q}_w^T \mathbf{B}_{w3}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w3} \mathbf{q}_w dA \right) + \\
&\quad \left[ \frac{1}{8} \int_A \mathbf{q}_w^T \mathbf{B}_{w2}^T \mathbf{W}^T \mathbf{B}_{w1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{w1} \mathbf{W} \mathbf{B}_{w2} \mathbf{q}_w dA + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_w^T \mathbf{B}_{w2}^T \mathbf{W}^T \mathbf{B}_{w1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u1} \mathbf{q}_u dA + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{w1} \mathbf{W} \mathbf{B}_{w2} \mathbf{q}_w dA + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_w^T \mathbf{B}_{w2}^T \mathbf{W}^T \mathbf{B}_{w1}^T \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{w3} \mathbf{q}_w dA + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_w^T \mathbf{B}_{w3}^T \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{w1} \mathbf{W} \mathbf{B}_{w2} \mathbf{q}_w dA \right] + \\
&\quad \left[ \frac{1}{8} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u2}^T \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u1} \mathbf{U} \mathbf{B}_{u2} \mathbf{q}_u dA + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u4}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u1} \mathbf{U} \mathbf{B}_{u2} \mathbf{q}_u dA + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u2}^T \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u4} \mathbf{q}_u dA + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u5}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u1} \mathbf{q}_u dA + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u2}^T \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u5}^T \mathbf{q}_u dA + \frac{1}{8} \int_A \mathbf{q}_w^T \mathbf{B}_{w2}^T \mathbf{W}^T \mathbf{B}_{w1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u1} \mathbf{U} \mathbf{B}_{u2} \mathbf{q}_u dA + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_w^T \mathbf{B}_{w3}^T \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{u1} \mathbf{U} \mathbf{B}_{u2} \mathbf{q}_u dA + \frac{1}{8} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u2}^T \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{w1} \mathbf{W} \mathbf{B}_{w2} \mathbf{q}_w dA + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \int_A \mathbf{q}_u^T \mathbf{B}_{u2}^T \mathbf{U}^T \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{w3} \mathbf{q}_w dA \right] - \\
&\quad - \mathbf{q}_w^T \mathbf{Q}_w - \mathbf{q}_u^T \mathbf{Q}_u
\end{aligned} \tag{3.95}$$

### 3.4.5. Formulacija karakteristika traka preko principa o minimumu ukupne potencijalne energije

#### 3.4.5.1. Stacionarna vrednost ukupne potencijalne energije

Iz uslova da je zbir radova spoljnih i unutrašnjih sila nekog ravnotežnog sistema pri virtualnim pomeranjima jednak nuli (princip virtualnih pomeranja), sledi stav o stacionarnoj vrednosti ukupne potencijalne energije:

$$d\Pi = dU + dW = 0. \tag{3.96}$$

Imajući u vidu izraz (3.95), u kome je potencijalna energija prikazana kao funkcija deformacijskih veličina, stav o stacionarnosti ukupne potencijalne energije se svodi na:

$$d\Pi = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}^T} \right) = 0. \tag{3.97}$$

#### 3.4.5.2. Jednačine ravnoteže

Zamenom izraza (3.95) u (3.97) i parcijalnim diferenciranjem za ukupan vektor nepoznatih parametara pomeranja u čvornim linijama konačne trake, dobijamo uslove ravnoteže:

$$\begin{aligned}
 & \left( \hat{K}_{uu} q_u + \frac{1}{2} \hat{K}_{uw} q_w + \frac{1}{2} \hat{K}_{wu} q_u + \hat{K}_{ww} q_w \right) + \\
 & + \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} K_{ww}^{vu} q_w + \frac{1}{2} K_{wu}^{vu} q_u + \frac{1}{2} K_{uu}^{uu} q_u + \frac{3}{4} K_{uu}^{uu*} q_u + \\ \frac{1}{4} K_{uu}^{vu} q_u + \frac{1}{4} K_{wu}^{vu} q_u + \frac{1}{4} K_{uw}^{vu} q_w + \frac{3}{4} K_{uu}^{vu*} q_u + \\ \frac{1}{2} K_{uu}^{uv} q_u + \frac{1}{4} K_{uw}^{uv} q_w + \frac{3}{4} K_{ww}^{uv} q_w + \frac{1}{2} K_{uw}^{uv*} q_w + \\ \frac{3}{4} K_{ww}^{uv*} q_w + \frac{1}{4} K_{wu}^{uv*} q_u \end{array} \right] - Q_w - Q_u = 0
 \end{aligned} \quad (3.98)$$

U gornjem izrazu su sa  $\hat{K}$  označene osnovne, a sa  $K$  geometrijske matrice krutosti konačne trake. Osnovne matrice krutosti su jednoznačno definisane i ne zavise od komponenti pomeranja u čvornim linijama. Za razliku od njih, geometrijske matrice krutosti zavise od izvoda komponenti pomeranja, a posredno i od parametara pomeranja u čvornim linijama. Značenje pojedinih matrica krutosti može se dobiti poređenjem izraza (3.95) i (3.98):

$$\begin{aligned}
 \hat{K}_{uu} &= \int_A B_{u1}^T D_m B_{u1} dA, & \hat{K}_{uw} &= \int_A B_{u1}^T D_{ms} B_{w3} dA, & \hat{K}_{wu} &= \int_A B_{w3}^T D_{ms} B_{u1} dA, \\
 \hat{K}_{ww} &= \int_A B_{w3}^T D_s B_{w3} dA, & K_{ww}^{vu} &= \int_A B_{w2}^T W^T G_1 W B_{w2} dA, & K_{wu}^{vu} &= \int_A B_{w2}^T W^T G_2 dA, \\
 K_{uu}^{uu} &= \int_A B_{u2}^{uT} U^T G_3 U B_{u2}^u dA, & K_{uu}^{uu*} &= \int_A G_4 U B_{u2}^u dA, & K_{uu}^{vu} &= \int_A G_5 U B_{u2}^u dA, \\
 K_{wu}^{vu} &= \int_A B_{w2}^T W^T G_6 U B_{u2}^u dA, & K_{uw}^{vu} &= \int_A G_2^T W B_{w2} dA, & K_{uu}^{uu**} &= \int_A B_{u2}^{uT} U^T G_4^T dA, \\
 K_{uu}^{uv} &= \int_A B_{u2}^{uT} U^T G_5^T dA, & K_{uw}^{uv} &= \int_A B_{u2}^{uT} U^T G_6^T W B_{w2} dA, & K_{ww}^{uv} &= \int_A B_{w2}^T W^T G_7 dA, \\
 K_{uw}^{uv*} &= \int_A B_{u2}^{uT} U^T G_8^T dA, & K_{ww}^{uv*} &= \int_A G_7^T W B_{w2} dA, & K_{wu}^{uv*} &= \int_A G_8 U B_{u2}^u dA,
 \end{aligned} \quad (3.99)$$

gde su:

$$\begin{aligned}
 G_1 &= B_{w1}^T D_m B_{w1}, & G_2 &= B_{w1}^T D_m B_{u1}, & G_3 &= B_{u1}^{uT} D_m B_{u1}^u, \\
 G_4 &= B_{u4}^{uT} D_m B_{u1}^u, & G_5 &= B_{u5}^{uT} D_m B_{u1}^u, & G_6 &= B_{w1}^T D_m B_{u1}^u, \\
 G_7 &= B_{w1}^T D_{ms} B_{w3}, & G_8 &= B_{w3}^T D_{ms} B_{u1}^u.
 \end{aligned} \quad (3.100)$$

Budući da elementi matrica geometrijske krutosti zavise od pomeranja, to uslovi ravnoteže (3.98) predstavljaju sistem nelinearnih jednačina. Ovaj sistem može da se prikaže u obliku:

$$(\hat{K} + K^0) q = Q, \quad (3.101)$$

gde su

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{uu} & \frac{1}{2} \hat{K}_{uw} \\ \frac{1}{2} \hat{K}_{wu} & \hat{K}_{ww} \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

matrica klasične ili osnovne krutosti,

$$K^0 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} K_{uw}^{vu} \\ \frac{1}{2} K_{wu}^{vu} & \frac{1}{2} K_{ww}^{vu} + \frac{3}{4} K_{ww}^{uv*} + \frac{3}{4} K_{ww}^{uv} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} K_{uw}^{vu} + \frac{1}{2} K_{uw}^{vu*} \\ \frac{1}{4} K_{wu}^{vu} + \frac{1}{4} K_{wu}^{vu*} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} K_{uu}^{uu} + \frac{3}{4} K_{uu}^{uu*} + \frac{1}{2} K_{uu}^{vu} \\ \frac{3}{4} K_{uu}^{vu*} \\ \frac{1}{4} K_{uu}^{vu} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

matrica geometrijske krutosti, a

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u^u \\ \mathbf{q}_u^v \\ \mathbf{q}_w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_u \\ \mathbf{Q}_w \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

vektori osnovnih nepoznatih parametara pomeranja i opterećenja konačne trake.

Problem koji se analizira se deli na više traka, zbog čega se moraju formirati matrice krutosti i vektor opterećenja *systema konačnih traka*. Ovo se može postići sabiranjem  $\hat{\mathbf{K}}$ ,  $\hat{\mathbf{K}}^u$  i  $\mathbf{Q}$  pojedinih konačnih traka, ako se ove prethodno prikažu prema oznakama čvornih linija u globalnom koordinatnom sistemu. Na ovaj način se dobija sistem nelinearnih jednačina razložene konstrukcije, koji se rešava primenom nekog od iterativnih postupaka.

### 3.4.5.3. Naponi i unutrašnje sile kao funkcije parametara pomeranja u čvornim linijama

Polazeći od veze (3.86), odnosno (3.87), i koristeći (3.79), smatrajući da su normalne sile ravnomerno raspoređene po debljini ploče, odnosno:

$$N_x = t s_x, \quad N_y = t s_y, \quad N_{xy} = t t_{xy},$$

možemo odrediti izraze za napone, odnosno normalne sile i momente u bilo kojoj tački konačne trake u funkciji od parametara pomeranja u čvornim linijama.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\mathbf{D}\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{D}(\mathbf{e}_0 + \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\zeta}_0 + z\boldsymbol{\kappa}) = \\ &= \mathbf{D} \left( \mathbf{B}_{u1} \mathbf{q}_u + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{w1} \mathbf{W} \mathbf{B}_{w2} \mathbf{q}_w + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{u1}^u \mathbf{U} \mathbf{B}_{u2}^u \mathbf{q}_u^u + z \mathbf{B}_{w3} \mathbf{q}_w \right) \end{aligned} \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_{-t/2}^{t/2} \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} z dz = \mathbf{D}_{ms} (\mathbf{e}_0 + \boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{\zeta}_0) + \mathbf{D}_s \boldsymbol{\kappa} = \\ &= \mathbf{D}_{ms} \left( \mathbf{B}_{u1} \mathbf{q}_u + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{w1} \mathbf{W} \mathbf{B}_{w2} \mathbf{q}_w + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{u1}^u \mathbf{U} \mathbf{B}_{u2}^u \mathbf{q}_u^u \right) + \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w3} \mathbf{q}_w \end{aligned} \quad (3.106)$$

Ako uvedemo:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{us} &= \mathbf{D} \mathbf{B}_{u1}, \quad \hat{\mathbf{H}}_{ws} = \mathbf{D} \mathbf{B}_{w1} \mathbf{W} \mathbf{B}_{w2}, \quad \hat{\mathbf{H}}_{us}^u = \mathbf{D} \mathbf{B}_{u1}^u \mathbf{U} \mathbf{B}_{u2}^u, \quad \hat{\mathbf{H}}_{ws} = z \mathbf{D} \mathbf{B}_{w3}, \\ \hat{\mathbf{H}}_{um} &= \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{u1}, \quad \hat{\mathbf{H}}_{wm} = \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{w1} \mathbf{W} \mathbf{B}_{w2}, \quad \hat{\mathbf{H}}_{um}^u = \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{u1}^u \mathbf{U} \mathbf{B}_{u2}^u, \quad \hat{\mathbf{H}}_{wm} = \mathbf{D}_{ms} \mathbf{B}_{w3}, \end{aligned} \quad (3.107)$$

dobijamo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \hat{\mathbf{H}}_{us} \mathbf{q}_u + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{H}}_{ws} \mathbf{q}_w + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{H}}_{us}^u \mathbf{q}_u^u + \hat{\mathbf{H}}_{ws} \mathbf{q}_w, \quad \mathbf{N} = t \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{M} &= \hat{\mathbf{H}}_{um} \mathbf{q}_u + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{H}}_{wm} \mathbf{q}_w + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{H}}_{um}^u \mathbf{q}_u^u + \hat{\mathbf{H}}_{wm} \mathbf{q}_w. \end{aligned} \quad (3.108)$$

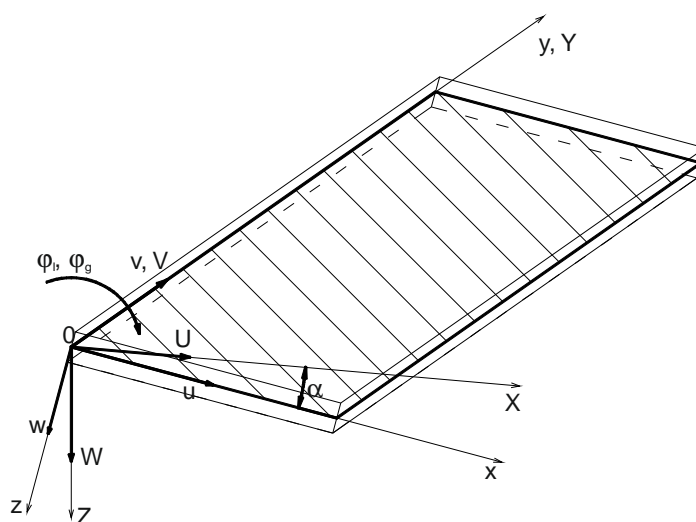
Ovde su matrice  $\hat{\mathbf{H}}$  jednoznačno definisane, dok su  $\hat{\mathbf{H}}^u$  linearne funkcije parametara pomeranja.

### 3.4.6. Transformacija koordinata

Lokalni koordinatni sistem konačnih traka, za koji se izvode matrice krutosti, postavljen je tako da se ravan  $xOy$  poklapa sa srednjom ravni konačne trake. Kod poliedarskih ljuski pojedine ploče su međusobno spojene pod različitim uglovima, pa se lokalni koordinatni sistem konačnih traka ne poklapa sa globalnim koordinatnim sistemom. Zbog ovoga se matrice krutosti, vektori parametara pomeranja i vektori opterećenja konačnih traka poliedarskih ljuski moraju prvo transformisati na globalni koordinatni sistem, pa tek onda uneti u jednačine ravnoteže (3.101).

Ovde će biti izvedena matrica transformacije konačne trake sa osam stepeni slobode, koja je odabrana za analizu ravne poliedarske ljuske, u skladu sa slikom 3.5.





Slika 3.5. Konačna traka u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu

Veza pomeranja u lokalnom ( $u, v, w$ ) i globalnom ( $U, V, W$ ) koordinatnom sistemu može se opisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} u &= U \cdot \cos a + W \cdot \sin a \\ v &= V \\ w &= -U \cdot \sin a + W \cdot \cos a \end{aligned} \quad (3.109)$$

$$j_l = j_g$$

Vektore osnovnih nepoznatih pomeranja u čvornoj liniji, u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu, možemo napisati u obliku:

$$\mathbf{q}_l^{cT} = [u \ v \ w \ j_l], \quad \mathbf{q}_g^{cT} = [U \ V \ W \ j_g] \quad (3.110)$$

Veza između ovih vektora može se napisati kao:

$$\mathbf{q}_l^c = \mathbf{r} \cdot \mathbf{q}_g^c, \quad (3.111)$$

gde je

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos a & 0 & \sin a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.112)$$

Za konačnu traku sa dve čvorne linije imamo:

$$\mathbf{q}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{q}_g = \mathbf{R} \cdot \mathbf{q}_g, \quad (3.113)$$

gde je  $\mathbf{R}$  matrica transformacije konačne trake.

Za vektor opterećenja možemo pisati:

$$\mathbf{Q}_l = \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}_g. \quad (3.114)$$

Jednačina ravnoteže konačne trake u lokalnom koordinatnom sistemu glasi:

$$\mathbf{K}_l \cdot \mathbf{q}_l = \mathbf{Q}_l, \quad (3.115)$$

a množenjem obe strane jednačine sa  $\mathbf{R}^T$  dolazimo do matrice krutosti konačne trake u globalnom koordinatnom sistemu:

$$\mathbf{K}_g = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{K}_l \cdot \mathbf{R}. \quad (3.116)$$

### 3.5. Primena MKT na linearno elastične probleme poliedarskih ljski u slučaju malih pomeranja

#### 3.5.1. Jednačine ravnoteže

U slučaju malih pomeranja jednačine (3.77), kojima je opisano stanje deformacije u proizvoljnoj tački konačne trake, mogu se napisati u obliku:

$$\begin{aligned} e_x &= u_{0,x} - Z \cdot w_{,xx}, \\ e_y &= v_{0,y} - Z \cdot w_{,yy}, \\ g_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} - 2 \cdot Z \cdot w_{,xy}. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Ako koristeći ove jednačine primenimo opšti postupak prikazan u prethodnim odeljcima, za homogene konačne trake dobijamo uslove ravnoteže koji predstavljaju sistem linearnih algebarskih jednačina:

$$\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q}, \quad (3.118)$$

gde su

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{uu} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{ww} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_u \\ \mathbf{Q}_w \end{bmatrix}. \quad (3.119)$$

#### 3.5.2. Matrice krutosti konačnih traka

##### 3.5.2.1. Matrica krutosti konačne trake u problemu savijanja

Matrica krutosti konačne trake u problemu savijanja data je izrazom

$$\hat{\mathbf{K}}_{ww} = \int_A \mathbf{B}_{w3}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w3} dA, \quad (3.120)$$

gde je

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} D_x^s & D_1^s & 0 \\ D_1^s & D_y^s & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy}^s \end{bmatrix} = \frac{t^3}{12} \cdot \begin{bmatrix} K_x & K_1 & 0 \\ K_1 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.121)$$

dok se matrice  $\mathbf{B}_{w3}$  mogu izraziti preko aproksimativnih funkcija, odvojeno za pojedine članove reda:

$$\mathbf{B}_{w3m} = \mathbf{L}_3 \mathbf{A}_{wm}, \quad m = 1, \dots, r, \quad (3.122)$$

odnosno:

$$\mathbf{B}_{w31} = \mathbf{L}_3 \mathbf{A}_{w1}, \quad \mathbf{B}_{w32} = \mathbf{L}_3 \mathbf{A}_{w2}, \quad \dots, \quad \mathbf{B}_{w3r} = \mathbf{L}_3 \mathbf{A}_{wr}. \quad (3.123)$$

Takođe se može pisati:

$$\mathbf{B}_{w3m} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{w,xx} \\ -\mathbf{A}_{w,yy} \\ -2\mathbf{A}_{w,xy} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} -\mathbf{N}_{w,xx} \cdot Y_{wm} \\ -\mathbf{N}_{w,yy} \cdot Y_{w,ym} \\ -2\mathbf{N}_{w,x} \cdot Y_{w,ym} \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Matrica (3.120) postaje

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_{ww} &= \int_A [\mathbf{B}_{w31} \quad \mathbf{B}_{w32} \quad \mathbf{K} \quad \mathbf{B}_{w3r}]^T \cdot \mathbf{D}_s \cdot [\mathbf{B}_{w31} \quad \mathbf{B}_{w32} \quad \mathbf{K} \quad \mathbf{B}_{w3r}] dA = \\ &= \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{w31}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w31} & \mathbf{B}_{w31}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w32} & \mathbf{K} & \mathbf{B}_{w31}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w3r} \\ \mathbf{B}_{w32}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w31} & \mathbf{B}_{w32}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w32} & \mathbf{K} & \mathbf{B}_{w32}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w3r} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ \mathbf{B}_{w3r}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w31} & \mathbf{B}_{w3r}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w32} & \mathbf{K} & \mathbf{B}_{w3r}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w3r} \end{bmatrix} dA \end{aligned} \quad (3.125)$$

ili

$$\hat{\mathbf{K}}_{ww} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{ww11} & \hat{\mathbf{K}}_{ww12} & \mathbf{K} & \hat{\mathbf{K}}_{ww1r} \\ \hat{\mathbf{K}}_{ww21} & \hat{\mathbf{K}}_{ww22} & \mathbf{K} & \hat{\mathbf{K}}_{ww2r} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ \hat{\mathbf{K}}_{wwr1} & \hat{\mathbf{K}}_{wwr2} & \mathbf{K} & \hat{\mathbf{K}}_{wwrr} \end{bmatrix}. \quad (3.126)$$

Pojedini elementi matrice krutosti imaju sledeći oblik:

$$\hat{\mathbf{K}}_{wwmn} = \int_A \mathbf{B}_{w3m}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w3n} dA = \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{w,xx}^T Y_{wm} D_x^s \mathbf{N}_{w,xx} Y_{wn} + \\ + \mathbf{N}_w^T Y_{w,yy} D_1^s \mathbf{N}_{w,xx} Y_{wn} + \\ + \mathbf{N}_{w,xx}^T Y_{wm} D_1^s \mathbf{N}_w Y_{w,yy} + \\ + 4 \mathbf{N}_{w,x}^T Y_{w,ym} D_{xy}^s \mathbf{N}_{w,x} Y_{w,yn} \end{bmatrix} dA \quad (3.127)$$

sa integralima:

$$I_{21} = \int_0^a Y_{wm} \cdot Y_{wn} \cdot dy, \quad I_{22} = \int_0^a Y_{w,yy} \cdot Y_{wn} \cdot dy, \quad I_{23} = \int_0^a Y_{wm} \cdot Y_{w,yy} \cdot dy, \quad (3.128)$$

$$I_{24} = \int_0^a Y_{w,yy} \cdot Y_{w,yy} \cdot dy, \quad I_{25} = \int_0^a Y_{w,ym} \cdot Y_{w,yn} \cdot dy$$

Za konačnu traku slobodno oslonjenu na krajevima iz uslova ortogonalnosti (3.35) sledi da su integrali  $I_{21}$  i  $I_{24}$  jednaki nuli za  $m \neq n$ . Imajući u vidu oblik funkcije  $Y_{wm}$  dat sa (3.49) može se dokazati da su i ostali integrali u (3.128) jednaki nuli za  $m \neq n$ . Zbog toga su svi elementi matrice krutosti za  $m \neq n$  jednaki nuli, pa matrica (3.126) dobija jednostavniji oblik:

$$\hat{\mathbf{K}}_{ww} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{ww11} & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{ww22} & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & \hat{\mathbf{K}}_{wwrr} \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

Izraz (3.129) omogućava da se proračun članova matrice krutosti izvrši analitički za  $m$ -ti član reda.

$$\hat{\mathbf{K}}_{wwmm} = \int_A \mathbf{B}_{w3m}^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_{w3m} dA = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{ww11} & \hat{\mathbf{K}}_{ww12} & \hat{\mathbf{K}}_{ww13} & \hat{\mathbf{K}}_{ww14} \\ \hat{\mathbf{K}}_{ww21} & \hat{\mathbf{K}}_{ww22} & \hat{\mathbf{K}}_{ww23} & \hat{\mathbf{K}}_{ww24} \\ \hat{\mathbf{K}}_{ww31} & \hat{\mathbf{K}}_{ww32} & \hat{\mathbf{K}}_{ww33} & \hat{\mathbf{K}}_{ww34} \\ \hat{\mathbf{K}}_{ww41} & \hat{\mathbf{K}}_{ww42} & \hat{\mathbf{K}}_{ww43} & \hat{\mathbf{K}}_{ww44} \end{bmatrix}_{mm}, \quad (3.130)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{wwijmm} = \hat{\mathbf{K}}_{wwjimmm}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

gde su:

$$\hat{\mathbf{K}}_{ww11mm} = \frac{t^3}{12} \left( \frac{1}{b^3} 12K_x I_{21} - \frac{16}{b^5} K_1 I_{22} - \frac{16}{b^5} K_1 I_{23} + \frac{13}{35} b K_y I_{24} + \frac{24}{5} \frac{1}{b} K_{xy} I_{25} \right)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{ww12mm} = \frac{t^3}{12} \left( \frac{1}{b^2} 6K_x I_{21} - \frac{11}{10} K_1 I_{22} - \frac{1}{10} K_1 I_{23} + \frac{11}{210} b^2 K_y I_{24} + \frac{2}{5} K_{xy} I_{25} \right)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{ww13mm} = \frac{t^3}{12} \left( -\frac{1}{b^3} 12K_x I_{21} + \frac{16}{b^5} K_1 I_{22} + \frac{16}{b^5} K_1 I_{23} + \frac{18}{140} b K_y I_{24} - \frac{24}{5} \frac{1}{b} K_{xy} I_{25} \right)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{ww14mm} = \frac{t^3}{12} \left( \frac{1}{b^2} 6K_x I_{21} - \frac{1}{10} K_1 I_{22} - \frac{1}{10} K_1 I_{23} - \frac{26}{840} b^2 K_y I_{24} + \frac{2}{5} K_{xy} I_{25} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \hat{K}_{ww22mm} &= \frac{t^3}{12} \left( \frac{1}{b} 4K_x l_{21} - \frac{2}{15} bK_1 l_{22} - \frac{2}{15} bK_1 l_{23} + \frac{2}{210} b^3 K_y l_{24} + \frac{8}{15} bK_{xy} l_{25} \right) \\
 \hat{K}_{ww23mm} &= -\hat{K}_{ww14mm} \\
 \hat{K}_{ww24mm} &= \frac{t^3}{12} \left( \frac{1}{b} 2K_x l_{21} + \frac{2}{60} bK_1 l_{22} + \frac{2}{60} bK_1 l_{23} - \frac{6}{840} b^3 K_y l_{24} - \frac{2}{15} bK_{xy} l_{25} \right) \quad (3.131) \\
 \hat{K}_{ww33mm} &= \hat{K}_{ww11mm}, \quad \hat{K}_{ww44mm} = \hat{K}_{ww22mm} \\
 \hat{K}_{ww34mm} &= \frac{t^3}{12} \left( -\frac{1}{b^2} 6K_x l_{21} + \frac{22}{20} K_1 l_{22} + \frac{6}{60} K_1 l_{23} - \frac{22}{420} b^2 K_y l_{24} - \frac{2}{5} K_{xy} l_{25} \right)
 \end{aligned}$$

Integrali u gornjim izrazima definisani su sa (3.128), a kada se uvede funkcija  $Y_{wm}$  prema (3.49) dobijaju se vrednosti:

$$\begin{aligned}
 l_{21} &= \frac{a}{2}, \quad l_{22} = -\frac{a}{2} \cdot \left( \frac{m_m}{a} \right)^2, \quad l_{23} = l_{22}, \\
 l_{24} &= \frac{a}{2} \cdot \left( \frac{m_m}{a} \right)^2, \quad l_{25} = -l_{22}.
 \end{aligned} \quad (3.132)$$

### 3.5.2.2. Matrica krutosti konačne trake u ravnom stanju napreznja

Matrica krutosti konačne trake u ravnom stanju napreznja data je izrazom

$$\hat{K}_{uu} = \int_A \mathbf{B}_{u1}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u1} dA, \quad (3.133)$$

gde je

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} D_x^m & D_1^m & 0 \\ D_1^m & D_y^m & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy}^m \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} K_x & K_1 & 0 \\ K_1 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.134)$$

dok se matrice  $\mathbf{B}_{u1}$  mogu izraziti preko aproksimativnih funkcija, odvojeno za pojedine članove reda:

$$\mathbf{B}_{u1m} = \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_{um} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{u,x}^u & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{u,y}^v \\ \mathbf{A}_{u,y}^u & \mathbf{A}_{u,x}^v \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u,x}^u \cdot Y_{um}^u & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_u^v \cdot Y_{u,ym}^v \\ \mathbf{N}_u^u \cdot Y_{u,ym}^u & \mathbf{N}_{u,x}^v \cdot Y_{um}^v \end{bmatrix}, \quad m = 1, \dots, r, \quad (3.135)$$

Matrica (3.133) može da se napiše u obliku:

$$\hat{K}_{uu} = \begin{bmatrix} \hat{K}_{uu11} & \hat{K}_{uu12} & \mathbf{K} & \hat{K}_{uu1r} \\ \hat{K}_{uu21} & \hat{K}_{uu22} & \mathbf{K} & \hat{K}_{uu2r} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ \hat{K}_{uur1} & \hat{K}_{uur2} & \mathbf{K} & \hat{K}_{uurr} \end{bmatrix}. \quad (3.136)$$

Pojedini elementi matrice krutosti imaju sledeće značenje:

$$\hat{K}_{uumn} = \int_A \mathbf{B}_{u1m}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u1n} dA = \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u,x}^{uT} Y_{um}^u D_x^m \mathbf{N}_{u,x}^u Y_{un}^u + & \mathbf{N}_{u,x}^{uT} Y_{um}^u D_1^m \mathbf{N}_u^v Y_{u,yn}^v + \\ + \mathbf{N}_u^{uT} Y_{u,ym}^u D_{xy}^m \mathbf{N}_u^u Y_{u,yn}^u & + \mathbf{N}_u^{uT} Y_{u,ym}^u D_{xy}^m \mathbf{N}_{u,x}^v Y_{un}^v \\ \mathbf{N}_u^{vT} Y_{u,ym}^v D_1^m \mathbf{N}_{u,x}^u Y_{un}^u + & \mathbf{N}_u^{vT} Y_{u,ym}^v D_y^m \mathbf{N}_u^v Y_{u,yn}^v + \\ + \mathbf{N}_{u,x}^{vT} Y_{um}^v D_{xy}^m \mathbf{N}_u^u Y_{u,yn}^u & + \mathbf{N}_{u,x}^{vT} Y_{um}^v D_{xy}^m \mathbf{N}_{u,x}^v Y_{un}^v \end{bmatrix} dA \quad (3.137)$$

sa integralima:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^a Y_{um}^u \cdot Y_{un}^u \cdot dy, & I_2 &= \int_0^a Y_{u,ym}^u \cdot Y_{u,yn}^u \cdot dy, & I_3 &= \int_0^a Y_{u,ym}^v \cdot Y_{un}^u \cdot dy, \\
 I_4 &= \int_0^a Y_{um}^v \cdot Y_{u,yn}^u \cdot dy, & I_5 &= \int_0^a Y_{um}^u \cdot Y_{u,yn}^v \cdot dy, & I_6 &= \int_0^a Y_{u,ym}^u \cdot Y_{un}^v \cdot dy, \\
 I_7 &= \int_0^a Y_{u,ym}^v \cdot Y_{u,yn}^v \cdot dy, & I_8 &= \int_0^a Y_{um}^v \cdot Y_{un}^v \cdot dy
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

Za konačnu traku sa slobodno oslonjenim krajevima uvedene su funkcije:

$$Y_{um}^u = \sin\left(\frac{m p y}{a}\right), \quad Y_{um}^v = \left(\frac{m p}{a}\right) \cos\left(\frac{m p y}{a}\right), \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{3.139}$$

pa su integrali  $I_1$  do  $I_8$  jednaki nuli za  $m \neq n$ . Zbog toga su svi elementi matrice krutosti za  $m \neq n$  jednaki nuli, pa matrica (3.136) poprima jednostavniji oblik:

$$\hat{\mathbf{K}}_{uu} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{uu11} & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{K}}_{uu22} & \mathbf{K} & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & \hat{\mathbf{K}}_{uurr} \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

Pojedini elementi matrice (3.140) mogu se sračunati analitički za  $m$ -ti član reda:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{K}}_{uumm} &= \int_A \mathbf{B}_{u1m}^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_{u1m} dA = \\
 &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{uu11} & \hat{\mathbf{K}}_{uu12} & \hat{\mathbf{K}}_{uu13} & \hat{\mathbf{K}}_{uu14} \\ \hat{\mathbf{K}}_{uu21} & \hat{\mathbf{K}}_{uu22} & \hat{\mathbf{K}}_{uu23} & \hat{\mathbf{K}}_{uu24} \\ \hat{\mathbf{K}}_{uu31} & \hat{\mathbf{K}}_{uu32} & \hat{\mathbf{K}}_{uu33} & \hat{\mathbf{K}}_{uu34} \\ \hat{\mathbf{K}}_{uu41} & \hat{\mathbf{K}}_{uu42} & \hat{\mathbf{K}}_{uu43} & \hat{\mathbf{K}}_{uu44} \end{bmatrix}_{mm},
 \end{aligned} \tag{3.141}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{uuijmm} = \hat{\mathbf{K}}_{uujimm}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

gde su

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{K}}_{uu11mm} &= t \cdot \left( \frac{1}{b} K_x I_1 + \frac{b}{3} K_{xy} I_2 \right), \\
 \hat{\mathbf{K}}_{uu12mm} &= t \cdot \left( -\frac{1}{b} K_x I_1 + \frac{b}{6} K_{xy} I_2 \right), \\
 \hat{\mathbf{K}}_{uu13mm} &= t \cdot \left( -\frac{1}{2} \frac{a}{m_m} K_x I_5 - \frac{1}{2} \frac{a}{m_m} K_{xy} I_6 \right), \\
 \hat{\mathbf{K}}_{uu14mm} &= t \cdot \left( -\frac{1}{2} \frac{a}{m_m} K_x I_5 + \frac{1}{2} \frac{a}{m_m} K_{xy} I_6 \right), \\
 \hat{\mathbf{K}}_{uu22mm} &= \hat{\mathbf{K}}_{uu11mm}, & \hat{\mathbf{K}}_{uu23mm} &= -\hat{\mathbf{K}}_{uu14mm}, \\
 \hat{\mathbf{K}}_{uu24mm} &= -\hat{\mathbf{K}}_{uu13mm}, \\
 \hat{\mathbf{K}}_{uu33mm} &= t \cdot \left[ \frac{b}{3} \left( \frac{a}{m_m} \right)^2 K_y I_7 + \frac{1}{b} \left( \frac{a}{m_m} \right)^2 K_{xy} I_8 \right], \\
 \hat{\mathbf{K}}_{uu34mm} &= t \cdot \left[ \frac{b}{6} \left( \frac{a}{m_m} \right)^2 K_y I_7 - \frac{1}{b} \left( \frac{a}{m_m} \right)^2 K_{xy} I_8 \right], \\
 \hat{\mathbf{K}}_{uu44mm} &= \hat{\mathbf{K}}_{uu33mm}
 \end{aligned} \tag{3.142}$$

Integrali u gornjim izrazima definisani su sa (3.138), a kada se uvede funkcija  $Y_m$  prema (3.139) oni postaju:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{a}{2}, \quad l_2 = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{m_m}{a}\right)^2, \quad l_3 = -l_2, \quad l_4 = l_2, \\ l_5 &= l_3, \quad l_6 = l_2, \quad l_7 = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{m_m}{a}\right)^4, \quad l_8 = l_2. \end{aligned} \quad (3.143)$$

### 3.5.3. Vektori opterećenja konačnih traka

Vektor opterećenja konačne trake možemo prikazati u obliku:

$$\mathbf{Q}^T = [\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2 \quad \mathbf{K} \quad \mathbf{Q}_r] \quad (3.144)$$

gde su

$$\mathbf{Q}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{um} \\ \mathbf{Q}_{wm} \end{bmatrix}, \quad m = 1, \dots, r \quad (3.145)$$

i

$$\mathbf{Q}_{um} = \int_A \mathbf{A}_{um}^T \mathbf{p}_u dA, \quad \mathbf{Q}_{wm} = \int_A \mathbf{A}_{wm}^T \mathbf{p}_w dA \quad (3.146)$$

#### 3.5.3.1. Vektor opterećenja konačne trake u problemu savijanja

Ako upravno na srednju ravan konačne trake deluje proizvoljno opterećenje  $p_w$ , vektor opterećenja možemo odrediti iz izraza

$$\mathbf{Q}_w = \int_A \mathbf{A}_w^T p_w dA = \int_A p_w \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \cdot Y_w dA \quad (3.147)$$

gde su  $N_1$  do  $N_4$  dati u (3.73). Vektor opterećenja usled ravnomerno raspodeljenog opterećenja po celoj konačnoj traci, slobodno oslonjenoj na oba kraja, za  $m$ -ti član reda, može se sračunati kao:

$$\mathbf{Q}_{wm} = \begin{bmatrix} b/2 \\ b^2/12 \\ b/2 \\ -b^2/12 \end{bmatrix} \cdot p_w \cdot \left(\frac{a}{mp}\right) \cdot (1 - \cos mp) \quad (3.148)$$

gde je  $p_w$  jednako podeljeno opterećenje u pravcu ose  $z$  lokalnog koordinatnog sistema.

#### 3.5.3.2. Vektor opterećenja konačne trake u ravnom stanju naprezanja

Kada u srednjoj ravni konačne trake deluje proizvoljno opterećenje  $\mathbf{p}_u$ , sa komponentama  $p_u$  u pravcu ose  $x$  i  $p_v$  u pravcu ose  $y$  lokalnog koordinatnog sistema, vektor opterećenja možemo napisati u obliku

$$\mathbf{Q}_{um} = \int_A \begin{bmatrix} (1-x/b) \cdot Y_{um}^u & 0 \\ x/b \cdot Y_{um}^u & 0 \\ 0 & (a/mp) \cdot (1-x/b) \cdot Y_{um}^v \\ 0 & (a/mp) \cdot (x/b) \cdot Y_{um}^v \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix} dA \quad (3.149)$$

Vektor opterećenja usled ravnomerno raspodeljenog opterećenja u smeru ose  $x$ , po celoj konačnoj traci slobodno oslonjenoj na oba kraja, za  $m$ -ti član reda, može se sračunati kao

$$\mathbf{Q}_{um} = \begin{bmatrix} b/2 \\ b/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot p_u \cdot \left( \frac{a}{mp} \right) \cdot (1 - \cos mp), \quad (3.150)$$

gde je  $p_u$  jednako podeljeno opterećenje u pravcu ose  $x$  lokalnog koordinatnog sistema.

### 3.5.4. Matrice napona i momenata

Matrica napona  $\hat{\mathbf{H}}_{usm}$  data sa (3.107), za obostrano slobodno oslonjenu konačnu traku u ravnom stanju naprezanja, može se napisati u razvijenom obliku:

$$\hat{\mathbf{H}}_{usm} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} Y_m K_x & \frac{1}{b} Y_m K_x & \frac{a}{m_n} (1-z) Y_{,yym} K_1 & \frac{a}{m_n} z Y_{,yym} K_1 \\ -\frac{1}{b} Y_m K_1 & \frac{1}{b} Y_m K_1 & \frac{a}{m_n} (1-z) Y_{,yym} K_y & \frac{a}{m_n} z Y_{,yym} K_y \\ (1-z) Y_{,ym} K_{xy} & z Y_{,ym} K_{xy} & -\frac{1}{b} \frac{a}{m_n} Y_{,ym} K_{xy} & \frac{1}{b} \frac{a}{m_n} Y_{,ym} K_{xy} \end{bmatrix}, \quad (3.151)$$

gde su  $z = \frac{x}{b}$  i  $Y_m = Y_{um}^u = \sin\left(\frac{m_n y}{a}\right)$ .

Matrica momenata  $\hat{\mathbf{H}}_{wMm}$  data sa (3.107), za obostrano slobodno oslonjenu konačnu traku u problemu savijanja, može se prikazati u razvijenom obliku:

$$\hat{\mathbf{H}}_{wMm} = \frac{t^3}{12} \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{b^2} (1-2z) Y_m K_x - & \frac{2}{b} (2-3z) Y_m K_x - \\ -(1-3z^2+2z^3) Y_{,yym} K_1 & -b(z-2z^2+z^3) Y_{,yym} K_1 \\ \frac{6}{b^2} (1-2z) Y_m K_1 - & \frac{2}{b} (2-3z) Y_m K_1 - \\ -(1-3z^2+2z^3) Y_{,yym} K_y & -b(z-2z^2+z^3) Y_{,yym} K_y \\ -\frac{2}{b} (-6z+6z^2) Y_{,ym} K_{xy} & -2(1-4z+3z^2) Y_{,ym} K_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{b^2} (-1+2z) Y_m K_x - & \frac{2}{b} (1-3z) Y_m K_x - \\ -(3z^2-2z^3) Y_{,yym} K_1 & -b(-z^2+z^3) Y_{,yym} K_1 \\ \frac{6}{b^2} (-1+2z) Y_m K_1 - & \frac{2}{b} (1-3z) Y_m K_1 - \\ -(3z^2-2z^3) Y_{,yym} K_y & -b(-z^2+z^3) Y_{,yym} K_y \\ -\frac{2}{b} (6z-6z^2) Y_{,ym} K_{xy} & -2(-2z+3z^2) Y_{,ym} K_{xy} \end{bmatrix}$$

gde je  $z = \frac{x}{b}$  i  $Y_m = Y_{wm} = \sin\left(\frac{m_n y}{a}\right)$ .

### 3.5.5. Direktno određivanje matrice krutosti konstrukcije

Kod poliedarskih konstrukcija su konačne trake međusobno spojene pod određenim uglom, pa čak i u slučaju homogenog materijala nije moguće odvojeno posmatrati problem savijanja i ravnog stanja naprezanja, kako je prikazano u (3.119), nego se ova dva stanja kombinuju.

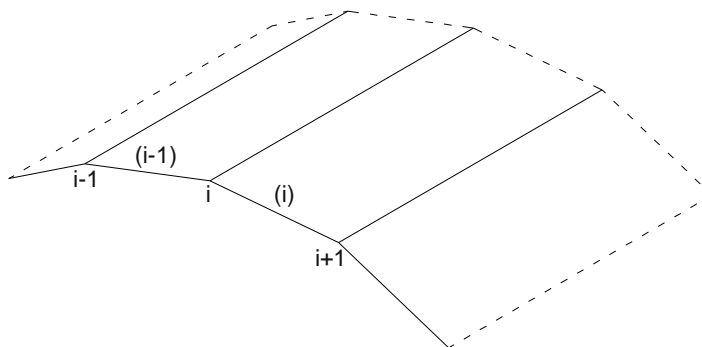
U odeljku 3.5.2. je pokazano da, budući da smo za funkcije  $Y(y)$  izabrali funkcije koje zadovoljavaju uslov ortogonalnosti (3.35), a isto važi i za njihove parcijalne izvode,

kod homogene obostrano slobodno oslonjene konačne trake svi blokovi matrica krutosti van glavne dijagonale postaju jednaki nuli. Ovo omogućava da se zanemari međudelovanje članova reda, odnosno da se proračun komponenata pomeranja sprovede posebno za svaki član reda, te da se na kraju izvrši sumiranje rezultata. Na ovaj način se cela procedura pojednostavljuje i postiže velika ušteda računarskog vremena.

Način formiranja matrice krutosti konstrukcije za  $m$ -ti član reda se poklapa sa standardnim načinom u MKE. Postupak se sastoji na sledećih osnovnih koraka:

1. Formira se kvadratna matrica reda  $N \times N$  i nula vektor reda  $N \times 1$ , gde je  $N$  broj stepeni slobode sistema.
2. Polazi se od prve konačne trake, transformiše se njena matrica krutosti i vektor opterećenja iz lokalnog u globalni koordinatni sistem.
3. Koristeći se neposrednom korespondencijom između oznaka čvornih linija u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu, vrši se unošenje transformisane matrice krutosti konačne trake u odgovarajuće pozicije matrice krutosti konstrukcije. Slično se radi sa transformisanim vektorom opterećenja u čvornim linijama konačne trake.
4. Prethodni postupak se ponavlja redom za sve konačne trake sistema.

Na slici 3.7. je data šema formiranja matrice krutosti i vektora opterećenja konstrukcije, za  $m$ -ti član reda, za sistem sa  $n-1$  konačnom trakom i  $n$  čvornih linija, čiji je jedan deo prikazan na slici 3.6.



Slika 3.6. Deo poliedarske ljuske diskretizovan konačnim trakama

čvorna linija	1	...	i-1	i	i+1	...	n
1	$K_{11mm}^1$	...	0	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...
i-1	0	...	$K_{(i-1)(i-1)mm}^{i-2} + K_{(i-1)(i-1)mm}^{i-1}$	$K_{(i-1)im}^{i-1}$	0	...	0
i	0	...	$K_{i(i-1)mm}^{i-1}$	$K_{iim}^{i-1} + K_{iim}^i$	$K_{i(i+1)mm}^i$	...	0
i+1	0	...	0	$K_{(i+1)im}^i$	$K_{(i+1)(i+1)mm}^i + K_{(i+1)(i+1)mm}^{i+1}$	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...
n	0	...	0	0	0	...	$K_{nnmm}^{n-1}$

$Q_{1m}^1$
...
$Q_{(i-1)m}^{i-2} + Q_{(i-1)m}^{i-1}$
$Q_{im}^{i-1} + Q_{im}^i$
$Q_{(i+1)m}^i + Q_{(i+1)m}^{i+1}$
...
$Q_{nm}^{n-1}$

Slika 3.7. Matrica krutosti i vektor opterećenja konstrukcije za  $m$ -ti član reda



### 3.5.6. Rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina

Za linearno elastičnu analizu poliedarske ljuske u ovoj disertaciji je korišćen program MKTE1, autora D. D. Milašinića. Program je detaljno opisan u [38], [46]. U ovom programu se, za rešavanje sistema linearnih jednačina, primenjuje Gauss-ov metod eliminacije.

Za linearno elastične probleme konstrukcija od homogenog materijala, u MKT se javljaju dve bitne pogodnosti vezane za primenu Gauss-ovog metoda eliminacije:

1. Matrice krutosti konstrukcije uvek imaju trakastu strukturu (osobina koja važi uopšte za MKT), odnosno većina elemenata različitih od nule je smeštena u blizini glavne dijagonale matrice krutosti.

2. U analizi linearno elastičnih problema matrice krutosti su simetrične, pa se u postupku eliminacije koriste samo elementi smešteni na dijagonali i iznad nje (gornji trougao matrice krutosti).

Postupak eliminacije se sastoji iz sledećih koraka:

1. Formira se submatrica  $\mathbf{K}_{11}$  vezana za osnovne nepoznate prvog čvora i submatrica  $\mathbf{K}_{1T}$  čija veličina zavisi od problema koji se razmatra.

2. Nakon eliminacije čvornih parametara pomeranja  $\mathbf{q}_1$  iz druge jednačine, formiraju se nove submatrice i vektori opterećenja:

$$\mathbf{K}_{TT}^* = \mathbf{K}_{TT} - \mathbf{K}_{1T}^T \cdot \mathbf{K}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{1T} \quad (3.153)$$

$$\mathbf{P}_T^* = \mathbf{P}_T - \mathbf{K}_{1T}^T \cdot \mathbf{K}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{P}_1 \quad (3.154)$$

gde su, u skladu sa sl.3.7:

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{11mm}^1, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{Q}_{1m}^1, \quad \mathbf{K}_{1T} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12mm}^1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{TT} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22mm}^1 + & \mathbf{K}_{23mm}^2 \\ +\mathbf{K}_{22mm}^2 & \\ \mathbf{K}_{32mm}^2 & \mathbf{K}_{33mm}^2 + \\ & +\mathbf{K}_{33mm}^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{2m}^1 + \\ +\mathbf{Q}_{2m}^2 \\ \mathbf{Q}_{3m}^2 + \\ +\mathbf{Q}_{3m}^3 \end{bmatrix} \quad (3.155)$$

3. Novoformirane submatrice se koriste za eliminaciju  $\mathbf{q}_2$  iz treće jednačine i tako redom. Opšti izrazi za novoformirane submatrice u matrici krutosti konstrukcije i novoformirane vektore opterećenja za jednačinu  $i$ -te čvorne linije, po eliminaciji  $\mathbf{q}_{i-1}$ , za primer na slici 3.6, kome odgovaraju matrica krutosti konstrukcije i vektor opterećenja prema slici 3.7, glase:

$$\mathbf{K}_{TT}^* = \mathbf{K}_{TT} - \mathbf{K}_{(i-1)T}^T \cdot \mathbf{K}_{(i-1)(i-1)}^{-1*} \cdot \mathbf{K}_{(i-1)T} \quad (3.156)$$

$$\mathbf{P}_T^* = \mathbf{P}_T - \mathbf{K}_{(i-1)T}^T \cdot \mathbf{K}_{(i-1)(i-1)}^{-1*} \cdot \mathbf{P}_{(i-1)}^*$$

gde su:

$$\mathbf{K}_{(i-1)(i-1)}^* = \left( \mathbf{K}_{(i-1)(i-1)mm}^{i-2} + \mathbf{K}_{(i-1)(i-1)mm}^{i-1} \right)^*, \quad \mathbf{P}_{(i-1)}^* = \left( \mathbf{Q}_{(i-1)m}^{i-2} + \mathbf{Q}_{(i-1)m}^{i-1} \right)^*,$$

$$\mathbf{K}_{(i-1)T} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(i-1)imm}^{i-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{TT} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{iimm}^{i-1} + & \mathbf{K}_{i(i+1)mm}^i \\ +\mathbf{K}_{iimm}^i & \\ \mathbf{K}_{(i+1)imm}^i & \mathbf{K}_{(i+1)(i+1)mm}^i + \\ & +\mathbf{K}_{(i+1)(i+1)mm}^{i+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{im}^{i-1} + \\ +\mathbf{Q}_{im}^i \\ \mathbf{Q}_{(i+1)m}^i + \\ +\mathbf{Q}_{(i+1)m}^{i+1} \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

Očigledno je da se postupak eliminacije u svakom koraku ne mora vršiti na kompletnoj matrici konstrukcije, nego samo na submatricama formiranim od elemenata koji se odnose na posmatranu i dve susedne čvorne linije.

4. Postupak eliminacije se ponavlja sve dok se ne dođe do jednačine oblika:

$$\mathbf{K}_{nmm}^{(n-1)*} \cdot \mathbf{q}_n = \mathbf{Q}_{nmm}^{(n-1)*}, \quad (3.158)$$

čije je rešenje:

$$\mathbf{q}_n = \mathbf{K}_{nnm}^{(n-1)*-1} \cdot \mathbf{Q}_{nm}^{(n-1)*} \quad (3.159)$$

Nakon sračunavanja  $\mathbf{q}_n$ , ostale modifikovane jednačine se rešavaju zamenom unazad.

### 3.5.7. Uvođenje poznatih komponenti pomeranja

U MKT su uslovi oslanjanja krajeva konačnih traka obuhvaćeni programski, izborom odgovarajućih aproksimativnih funkcija. Međutim, u nekim slučajevima (simetričan nosač u odnosu na podužnu osu i sl.) se može javiti potreba za uvođenjem poznatih parametara pomeranja duž čvornih linija.

Ovo se rešava tako što se u matrici krutosti dijagonalni član (npr. član  $q_i$ ), koji odgovara poznatom pomeranju veličine  $d$ , množi velikim brojem od  $10^6$  do  $10^{10}$ . Odgovarajući član vektora opterećenja se formira kao proizvod novoformiranog elementa matrice krutosti i veličine poznatog parametra pomeranja  $d$ . Drugim rečima, u sistemu jednačina:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \mathbf{K} & K_{i1} & \mathbf{K} & K_{n1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{MM} & \mathbf{M} & \mathbf{MM} & \mathbf{M} \\ K_{i1} & \mathbf{K} & K_{ii} & \mathbf{K} & K_{in} \\ \mathbf{M} & \mathbf{MM} & \mathbf{M} & \mathbf{MM} & \mathbf{M} \\ K_{n1} & \mathbf{K} & K_{ni} & \mathbf{K} & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ \mathbf{M} \\ q_i \\ \mathbf{M} \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \mathbf{M} \\ Q_i \\ \mathbf{M} \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

$i$ -ta jednačina se transformiše u:

$$K_{i1} \cdot q_1 + \dots + K_{i(i-1)} \cdot q_{i-1} + K_{ii} \cdot 10^8 \cdot q_i + K_{i(i+1)} \cdot q_{i+1} + \dots + K_{in} \cdot q_n = K_{ii} \cdot 10^8 \cdot d \quad (3.161)$$

Nakon izvršenog postupka eliminacije, zamenom unazad za  $i$ -tu jednačinu dobijamo:

$$\frac{K_{ii}^* \cdot 10^8}{K_{ii}^* \cdot 10^8} \cdot q_i + \frac{K_{i(i+1)}^*}{K_{ii}^* \cdot 10^8} \cdot q_{i+1} + \dots + \frac{K_{in}^*}{K_{ii}^* \cdot 10^8} \cdot q_n = \frac{K_{ii}^* \cdot 10^8}{K_{ii}^* \cdot 10^8} \cdot d \quad (3.162)$$

Ovde su zbog deljenja velikim brojem svi sabirci približno jednaki nuli, osim prvog, pa jednačina (3.162) postaje

$$q_i = d, \quad (3.163)$$

što je i bio početni uslov.

## 3.6. Primena MKT na dinamičku analizu konstrukcija

### 3.6.1. Uvod

Kada na konstrukciju deluju spoljni uticaji promenljivi tokom određenog vremenskog intervala, pomeranja i naponsko-deformacijske veličine, koji su posledica ovih uticaja, takođe se menjaju tokom vremena. Ova pomeranja se obavljaju određenom brzinom i ubrzanjem, pri čemu ubrzanje delova konstrukcije ima za posledicu pojavu inercijalnih sila kao dopunskog spoljnog opterećenja.

U konstrukciji se javlja otpor kretanju (tzv. viskozno prigušenje), koji se opisuje koeficijentom viskoznog prigušenja. Ovaj koeficijent je jednak sili potrebnoj da pokreće klip u cilindru prigušivača jediničnom brzinom.

Pomeranja konstrukcije koja prouzrokuju pojavu inercijalnih sila i sila otpora i sama su zavisna od njihove veličine, što dovodi do formulacije problema u vidu diferencijalnih jednačina kretanja. Analitička rešenja ovih jednačina mogu se naći za veoma mali broj zadataka, zbog čega se u dinamičkoj analizi konstrukcija najviše koriste numeričke metode.

Definisaćemo nekoliko osnovnih pojmova:

*Slobodne vibracije* su vibracije sistema koji nakon izvođenja iz ravnotežnog položaja nastavlja da vibrira bez dodatnih pobuda, odnosno bez spoljnih uticaja (npr.

oscilacije klatna). *Prinudne vibracije* su vibracije sistema na koji deluje poremećajna sila (npr. vibracije usled zemljotresa, vetra, vibrirajućih mašina i dr.).

Ako tokom vibracija ne dolazi do gubitaka energije usled unutrašnjeg i spoljašnjeg trenja, kažemo da su vibracije *neprigušene*, a u protivnom su vibracije *prigušene*.

Vibracija je *linearna* kada se sve komponente dinamičkog sistema ponašaju linearno. Ako masa, prigušenje ili krutost zavise od pomeranja, vibracije smatramo *nelinearnim*.

Ako je funkcija poremećajne sile u vremenu poznata, rezultujuće vibracije su *determinističke* (određene). Vibracije sistema na koji deluje slučajno (nedeterminističko) opterećenje, kao što je slučaj sa većinom opterećenja u prirodi, nazivamo *stohastičkim*. Takav sistem može biti opisan samo pomoću statističkih veličina.

*Periodična* su opterećenja koja se ponavljaju u jednakim vremenskim intervalima. Poseban slučaj je *harmonijsko* opterećenje, kome je srednja vrednost konstantna. Ako je srednja vrednost harmonijskog opterećenja jednaka nuli, nazivamo ga *oscilatornim*.

*Udarno* je opterećenje koje se na konstrukciju nanosi u kratkom vremenskom periodu i ostaje na njoj duže ili kraće vreme. Poseban slučaj udarnog opterećenja je *impulsno*, koje na konstrukciju deluje veoma kratko, a može biti velikog intenziteta. Ovo opterećenje se može javljati periodično, kada govorimo o *seriji impulsa*.

*Vibrirajući sistem* je dinamički sistem kod koga su ulaz (pobuda) i izlaz (kretanje) vremenski zavisne veličine. Analiza dinamičkog sistema obuhvata sledeće korake:

1. Matematičko modeliranje, kojim se opisuju svi važni činioci sistema. U zavisnosti od ponašanja delova sistema model može biti linearan ili nelinearan.

2. Izvođenje jednačina koje opisuju ponašanje sistema. Za diskretan sistem se obično dobija sistem običnih diferencijalnih jednačina, dok se za kontinualan sistem dobija sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina. Ove jednačine mogu biti linearne ili nelinearne, u zavisnosti od ponašanja delova sistema.

3. Rešavanje jednačina kretanja. Danas uobičajen način rešavanja jednačina kretanja je primena numeričkih metoda uz upotrebu računara.

4. Tumačenje rezultata. Rešavanjem jednačina kretanja dolazimo do veličina pomeranja, brzine i ubrzanja masa sistema, na osnovu kojih se dalje određuju naponi i deformacije.

### 3.6.2. Jednačine kretanja u matičnom obliku

Jednačine kretanja dinamičkog sistema se mogu izvesti na tri načina:

1. Direktnim ispisivanjem uslova ravnoteže na osnovu D'Alembert-ovog principa,

2. Primenom principa virtuelnih radova,

3. Primenom Hamilton-ovog varijacionog principa.

Prvi način je pogodan za jednostavne sisteme sa malim brojem stepeni slobode, dok su ostala dva načina pogodnija za primenu na kompleksnije dinamičke sisteme sa velikim brojem stepeni slobode kretanja. Ovde će biti primenjen Hamilton-ov varijacioni princip prema [38].

Ako se ukupna kinetička energija sistema označi sa  $T$ , ukupna potencijalna energija spoljnih i unutrašnjih sila sa  $\Pi$ , a rad nekonzervativnih sila sistema, uključujući i sile prigušenja, sa  $W_{nc}$ , tada se Hamilton-ov varijacioni princip može prikazati sledećim izrazom:

$$\int_{t_1}^{t_2} d(T - \Pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} dW_{nc} dt = 0, \quad (3.164)$$

odnosno

$$d \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (3.165)$$

gde je  $L$  funkcional Lagrange-a:

$$L = T - \Pi + W_{nc}. \quad (3.166)$$

Hamilton-ovim principom se iskazuje sledeći stav: Od svih mogućih pomeranja koja zadovoljavaju uslove kompatibilnosti i geometrijske uslove na konturi  $S_u$ , kao i inicijalne uslove u trenucima  $t_1$  i  $t_2$ , stvarna pomeranja su ona za koja Lagrange-ov funkcional (3.166) ima stacionarnu vrednost. U specijalnom slučaju, za  $T=0$  i  $W_{nc}=0$  iz (3.165) proizilazi stav o stacionarnoj vrednosti ukupne potencijalne energije

$$d\Pi = 0$$

koji smo već koristili u prethodnim odeljcima za izvođenje jednačina statičke ravnoteže.

Ako pretpostavimo postojanje sledećih funkcionalnih zavisnosti:

$$T = T(q_i, \dot{q}_i), \quad \Pi = \Pi(q_i), \quad dW_{nc} = Q_i \cdot dq_i, \quad (i=1,2,\dots,N), \quad (3.167)$$

gde  $q_i$  predstavljaju generalisana pomeranja,  $\dot{q}_i$  generalisane brzine, a  $Q_i$  generalisane sile, tada primenom Hamilton-ovog principa (3.164) mogu da se izvedu Lagrange-ove jednačine kretanja:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i. \quad (3.168)$$

U jednačinama (3.168) su u generalisanim silama  $Q_i$  sadržana nekonzervativna opterećenja, dok su konzervativna obuhvaćena potencijalnom energijom  $\Pi$ .

Kinetička energija konačne trake napregnute u svojoj srednjoj ravni i upravno na nju može se prikazati sledećim izrazom:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \int_V r \dot{w}^2 dV + \frac{1}{2} \cdot \int_V r \dot{f}_u^T \dot{f}_u dV, \quad (3.169)$$

gde je  $r$  gustina materijala trake,  $\dot{w}$  brzina tačkica trake u pravcu ose  $z$ , a  $\dot{f}_u$  vektor brzina tačkica u pravcima osa  $x$  i  $y$ .

Parametri pomeranja u čvornim linijama i komponente pomeranja i deformacija u konačnoj traci su, u dinamičkoj analizi, funkcije vremena  $t$ , dok aproksimativne funkcije zavise samo od geometrije trake. Ako se jednačine (3.81) diferenciraju po vremenu, dobija se veza između brzina u traci i generalisanih brzina u čvornim linijama:

$$\begin{aligned} \dot{f}_u &= \mathbf{A}_u \cdot \dot{q}_u, \\ \dot{w} &= \mathbf{A}_w \cdot \dot{q}_w. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Unošenjem (3.170) u (3.169) dolazi se do izraza za kinetičku energiju u matičnom obliku:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \dot{q}_w^T \cdot \left( \int_V \mathbf{A}_w^T r \mathbf{A}_w dV \right) \cdot \dot{q}_w + \frac{1}{2} \cdot \dot{q}_u^T \cdot \left( \int_V \mathbf{A}_u^T r \mathbf{A}_u dV \right) \cdot \dot{q}_u \quad (3.171)$$

u kojem su nepoznate generalisane brzine u čvornim linijama konačne trake.

Nekonzervativne sile koje se javljaju u traci su sile prigušenja, za koje se pretpostavlja da su proporcionalne brzinama:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_w^p &= -c_w \cdot \dot{w} = -c_w \cdot \mathbf{A}_w \cdot \dot{q}_w, \\ \mathbf{F}_u^p &= -c_u \cdot \dot{f}_u = -c_u \cdot \mathbf{A}_u \cdot \dot{q}_u, \end{aligned} \quad (3.172)$$

dok im je smer delovanja suprotan od smera brzine. Ako sile prigušenja shvatimo kao podeljene po jedinici zapremine, tada se izrazi za odgovarajuće generalisane sile u čvornim linijama mogu pisati u obliku:

$$\mathbf{Q}_w^p = \int_V \mathbf{A}_w^T \mathbf{F}_w^p dV = \left( - \int_V \mathbf{A}_w^T c_w \mathbf{A}_w dV \right) \cdot \dot{q}_w \quad (3.173)$$

$$\mathbf{Q}_u^p = \int_V \mathbf{A}_u^T \mathbf{F}_u^p dV = \left( - \int_V \mathbf{A}_u^T c_u \mathbf{A}_u dV \right) \cdot \mathbf{q}_u. \quad (3.174)$$

Smenom (3.171), (3.98) odnosno, u sažetom obliku, (3.101), te (3.174) i (3.173) u Lagrange-ove jednačine kretanja (3.168), vodeći računa da je  $\partial T / \partial q_i = 0$ , dobijamo:

$$\begin{aligned} & \left( \int_V \mathbf{A}_w^T r \mathbf{A}_w dV \right) \cdot \mathbf{q}_w + \left( \int_V \mathbf{A}_u^T r \mathbf{A}_u dV \right) \cdot \mathbf{q}_u + (\hat{\mathbf{K}} + \mathring{\mathbf{K}}) \cdot \mathbf{q} - \mathbf{Q}_w - \mathbf{Q}_u = \\ & = - \left( \int_V \mathbf{A}_w^T c_w \mathbf{A}_w dV \right) \cdot \mathbf{q}_w - \left( \int_V \mathbf{A}_u^T c_u \mathbf{A}_u dV \right) \cdot \mathbf{q}_u. \end{aligned} \quad (3.175)$$

Uvedimo sledeće vektore:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \end{bmatrix}, \quad \mathring{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathring{\mathbf{q}}_u \\ \mathring{\mathbf{q}}_w \end{bmatrix}, \quad (3.176)$$

i matrice:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{uu} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{ww} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu} & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{ww} \end{bmatrix}, \quad (3.177)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{uu} &= \int_V \mathbf{A}_u^T r \mathbf{A}_u dV, \\ \mathbf{M}_{ww} &= \int_V \mathbf{A}_w^T r \mathbf{A}_w dV, \\ \mathbf{C}_{uu} &= \int_V \mathbf{A}_u^T c_u \mathbf{A}_u dV, \\ \mathbf{C}_{ww} &= \int_V \mathbf{A}_w^T c_w \mathbf{A}_w dV. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Sada Lagrange-ove jednačine kretanja konačne trake (3.175) možemo pisati u matricnom obliku:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{C} \cdot \mathring{\mathbf{q}} + (\hat{\mathbf{K}} + \mathring{\mathbf{K}}) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q}. \quad (3.179)$$

$\mathbf{M}$  je matrica masa,  $\mathbf{C}$  matrica prigušenja konačne trake, a ostali članovi su ranije objašnjeni. Ako posmatramo linearno elastičan problem, geometrijska matrica krutosti  $\mathring{\mathbf{K}}$  može da se isključi iz gornjeg izraza, pa dobijamo sistem linearnih diferencijalnih jednačina kretanja konačne trake:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{C} \cdot \mathring{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{Q} \quad (3.180)$$

Treba primetiti da se jednačine kretanja konačne trake mogu shvatiti i kao uslovi ravnoteže u proizvoljnom vremenu  $t$ .

U izrazu (3.180) matrica krutosti odgovara onoj datoj u proučavanju linearno elastičnih statičkih problema, izraz (3.119).

Na osnovu jednačina kretanja jedne konačne trake formiraju se jednačine kretanja za sistem konačnih traka. Način dobijanja matrica masa i matrica prigušenja konstrukcije od matrica masa i matrica prigušenja pojedinih traka u svemu je isti kao i način dobijanja matrice krutosti konstrukcije, koji je objašnjen u delu 3.5.5.

Za određivanje pomeranja, deformacija i napona u bilo kom trenutku vremena  $t$ , odnosno za određivanje tzv. dinamičkog odgovora konstrukcije, potrebno je rešiti nehomogen sistem jednačina. U tu svrhu se, u dinamici konstrukcija, najčešće koriste dve metode: metoda direktne integracije i metoda modalne superpozicije. Pri tome treba imati na umu da druga metoda podrazumeva važenje zakona superpozicije, pa se može koristiti samo za linearnu analizu.

## 4. MODELIRANJE MATERIJALA

Analitičko modeliranje nelinearnog ponašanja materijala i konstrukcija pod vremenski promenljivim (dinamičkim) opterećenjem predmet je velikog broja istraživanja tokom poslednjih decenija. Budući da je mnogo složenih pojava koje direktno utiču na nelinearan odgovor, za formiranje matematičkog modela, kojim se može opisati nelinearno ponašanje bilo kog materijala, konstruktivnog elementa ili konstruktivnog sistema, od neprocenjivog su značaja rezultati eksperimentalnih istraživanja. Pri tome treba imati na umu da su analitičko modeliranje i analiza nelinearnog odgovora konstrukcija praktično nemogući bez upotrebe računara velikih kapaciteta i brzine, zbog izuzetno velikog broja potrebnih proračuna u rešavanju problema [46].

Rezultati eksperimentalnih istraživanja pokazuju da su razvoj i veličina deformacija zavisni od vremena, što nameće primenu reološke analize. Elastičnost, plastičnost, viskoznost i čvrstoća su osnovna reološka svojstva, iz kojih se može izvesti većina ostalih složenih svojstava<sup>30</sup>. Osnovna svojstva idealnih tela - elastičnost, plastičnost i viskoznost, opisuju se pomoću tri osnovna reološka modela (Hooke-ov, Saint Venant-ov i Newton-ov), čijom se kombinacijom dobijaju složeni reološki modeli za opisivanje veze napona i deformacija raznih tehničkih medija.

U ovom poglavlju će biti predstavljen složeni reološki model D. D. Milašinića [46], kojim je moguće opisati uzajamnu vezu elastičnosti, viskoelastičnosti i viskoplastičnosti. Takođe će biti prikazan analitički model i analitički postupak koji se, korišćenjem reološkog modela D. D. Milašinića, može upotrebiti za predviđanje neelastičnog odgovora inženjerskih konstrukcija izloženih vremenski promenljivom opterećenju.

Ovaj analitički model i postupak će, konačno, biti prilagođen i primenjen na modeliranje ponašanja armature i betona pod vremenski promenljivim opterećenjem, te na dobijanje jednovremenih dijagrama napon - dilatacija, koji se mogu koristiti za dimenzionisanje i proračun granične nosivosti karakterističnih preseka elemenata armiranobetonskih konstrukcija.

### 4.1. Reološki model D. D. Milašinića

U dosadašnjem izlaganju je materijal tretiran prema klasičnoj teoriji elastičnosti, koja se bazira na sledećim pretpostavkama:

- veze između deformacija i napona su linearne i nezavisne od vremena,
- zakon superpozicije važi i za napone i za deformacije,
- veze između napona i deformacija ne zavise od trenutka kada je naneto opterećenje (tj. od starosti materijala u trenutku nanošenja opterećenja), niti od brzine nanošenja opterećenja i dužine njegovog trajanja.

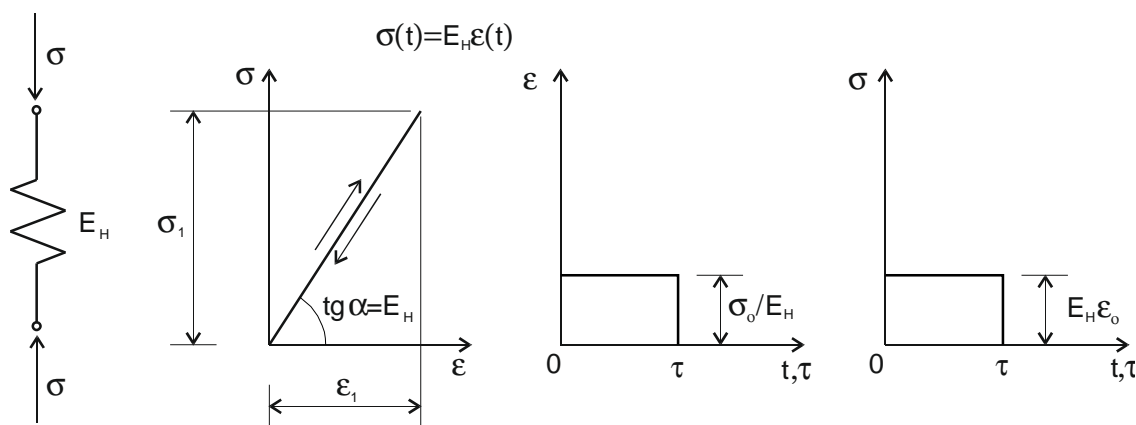
Ispitivanja vršena na realnim materijalima ukazuju na to da njihovo ponašanje u većoj ili manjoj meri odstupa od gore navedenih pretpostavki. Ova odstupanja se najviše ogledaju u sledećem:

- Veza napona i deformacija je funkcija brzine nanošenja opterećenja. Pri brzom nanošenju opterećenja, do loma materijala dolazi pri višem nivou napona i pri manjim deformacijama nego u slučaju sporog opterećivanja;
- Pri konstantnom naponu dolazi do promene deformacije tokom vremena (*tečenje*). Pri konstantnoj deformaciji napon se kroz vreme menja (*relaksacija*);
- Mehanička svojstva nekih materijala (kao što je, npr., beton) su funkcija vremena, odnosno njihove starosti u trenutku nanošenja opterećenja;
- Ekstremne temperature utiču na promenu mehaničkih svojstava materijala.

<sup>30</sup> Prema [46], u Reiner, M.: *Rhéologie théorique*, Dunod, Paris, 1955.

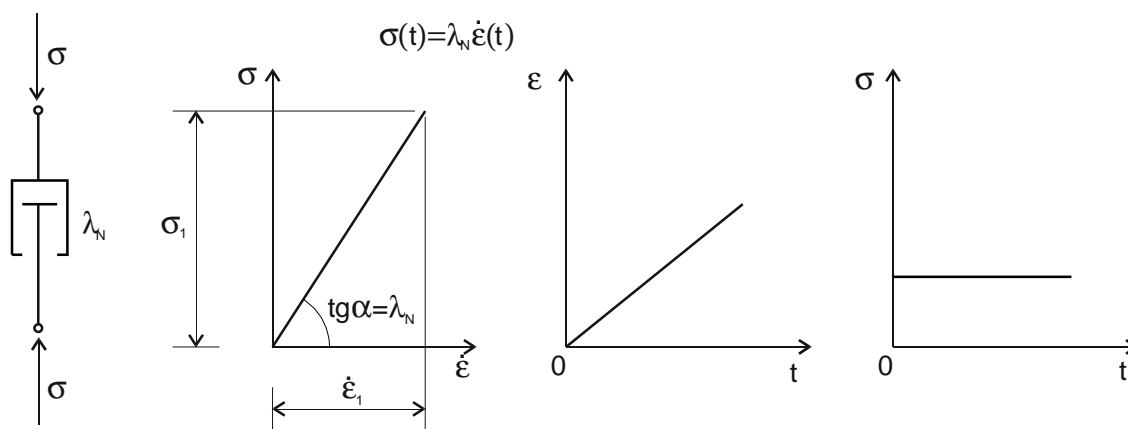
Dakle, mehaničke karakteristike materijala su funkcija vremena i temperature. Ponašanje materijala koje se ispoljava kroz zavisnost mehaničkih svojstava (pre svega čvrstoće) od vremenskog toka pojava nazivamo *viskoznost*.

Materijali koji poseduju elastične i viskozne osobine nazivaju se *viskoelastičnim*. Pri naglom nanošenju opterećenja ovaj materijal pruža veliki otpor, uz male deformacije, a veza napona i deformacija je u skladu sa teorijom elastičnosti. Ako naneto opterećenje dalje ostaje trajno, izazivajući stalne napone, deformacije se s vremenom povećavaju, a posle rasterećenja postepeno smanjuju. Mehaničke osobine viskoelastičnih materijala opisuju se reološkim modelom koji nastaje kombinacijom Hooke-ovog modela idealno elastičnog tela (elastične opruge - sl. 4.1) i Newton-ovog modela idealnog fluida (klipa koji se kreće u viskoznoj tečnosti - sl. 4.2).

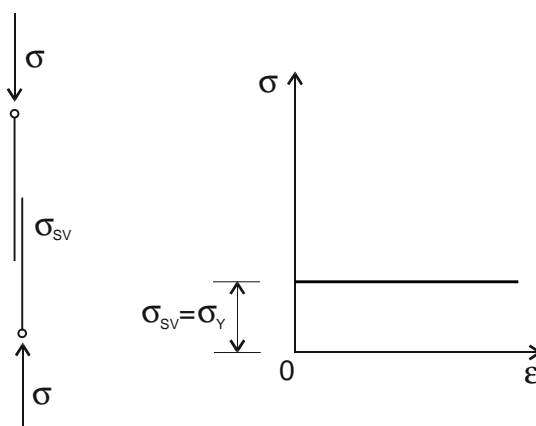


Slika 4.1. Hooke-ov model idealno elastičnog tela

Vremenski zavisne deformacije realnih materijala nisu u potpunosti reverzibilne. Kada naponi dostignu određeni nivo, javljaju se tzv. plastične (nepovratne) deformacije, koje ostaju nepromenjene i nakon rasterećenja. Pri konstantnim trajnim naponima i ove deformacije se vremenom povećavaju, zbog čega se nazivaju *viskoplastičnim* deformacijama. Mehaničke osobine viskoplastičnih materijala opisuju se reološkim modelom koji nastaje kombinacijom Newton-ovog modela idealnog fluida i Saint Venant-ovog modela (međusobno klizanje dve ploče između kojih je Coulomb-ovo trenje - sl. 4.3).



Slika 4.2. Newton-ov model za idealni fluid



Slika 4.3. Saint Venant-ov model idealno plastičnog tela

Mehaničke osobine realnih materijala pokušavaju se, dakle, opisati primenom složenih reoloških modela koji nastaju kombinacijom osnovnih reoloških modela idealnih tela (Hooke-ov, Newton-ov i Saint Venant-ov).

Većina realnih materijala se pri niskim nivoima naprežanja nalazi u uslovima elastičnosti, odnosno viskoelastičnosti, a nakon dostizanja napona tečenja prelazi u uslove viskoplastičnosti - tzv. *viskoelastoplastični materijali*. Predlog modela kojim se objašnjava prelaz sa elastičnog na viskoelastičan i dalje na viskoplastičan materijal dao je D. D. Milašinić [38]. Ovaj model će biti opisan u daljem tekstu.

Pretpostavlja se da se deformacija meri u momentu kada je određen napon dostignut. Pri tome je  $e_e$  "trenutna" deformacija (nezavisna od vremena), dok su  $e_{ve}$  i  $e_{vp}$  vremenski zavisne, ili "zakasnele" deformacije.

Elastično ponašanje materijala može se opisati Hooke-ovom idealno elastičnom oprugom ( $H$ ) sa konstantom  $E_H$ , a trenutna deformacija se određuje iz izraza:

$$e_e = \frac{s_0}{E_H}, \quad (4.1)$$

gde je  $E_H$  modul elastičnosti materijala. Viskoelastična deformacija  $e_{ve}$  se opisuje Kelvin-ovim modelom ( $K=H\frac{1}{2}N$ ), u kojem su paralelno vezani Hooke-ov model elastičnog tela sa konstantom  $E_K$  i Newton-ov model viskoznog tela sa koeficijentom viskoznosti  $I_K$ . Zakasnela plastična (viskoplastična) deformacija  $e_{vp}$  se opisuje modelom ( $N\frac{1}{2}StV$ ) u kome su paralelno vezani Saint Venant-ov model idealno plastičnog tela sa konstantom  $s_{SV}$  i Newton-ov model viskoznog fluida ( $I_N$ ). Pri tome frikcioni klizač razvija napon  $s_{SV}$  i postaje aktivan tek po dostizanju napona  $s \geq Y$ , gde je  $s$  ukupni napon, a  $Y$  nivo napona u proizvoljnoj fazi viskoplastičnog tečenja. Frikcioni klizač se ne vraća u početno stanje pomeranja ni nakon smanjenja napona.

Na osnovu gore opisanog, strukturna formula ovog modela, prikazanog na slici 4.4.a), može se napisati u obliku:

$$H-K-(N | StV) = H-(H | N)-(N | StV) \quad (4.2)$$

Napon u frikcionom klizaču dostiže sledeće vrednosti:

$$s_{SV} = s(t) \quad \text{za sve } s(t) < Y, \quad (4.3)$$

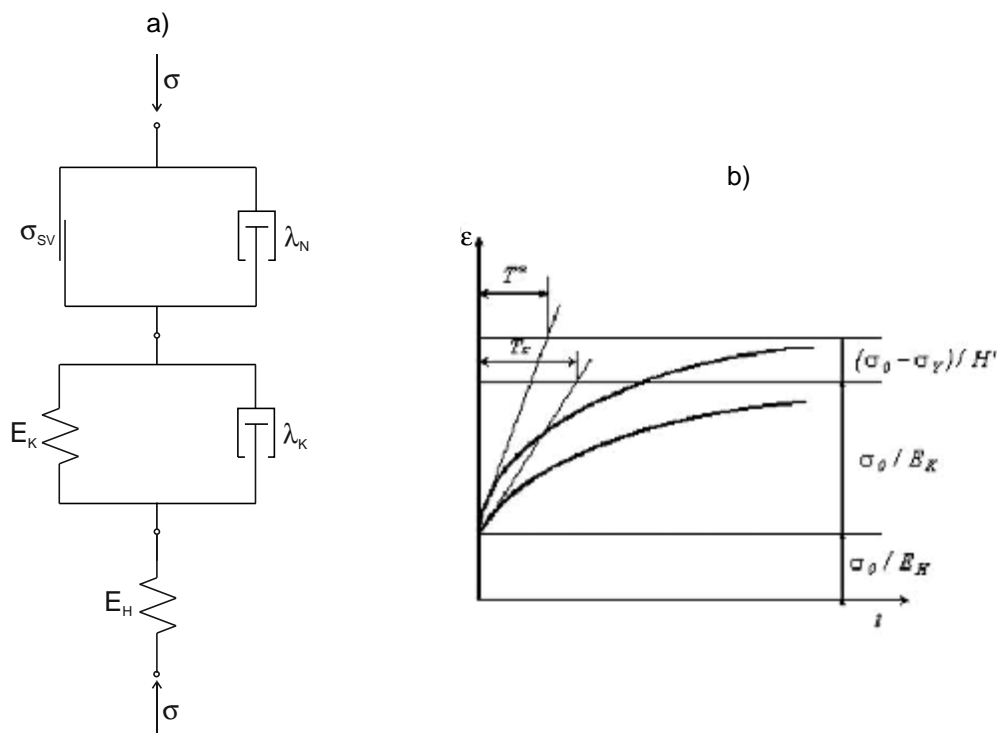
$$s_{SV} = Y \quad \text{za sve } s(t) \geq Y,$$

gde je

$$Y = s_Y + H' \cdot e_{vp}(t). \quad (4.4)$$

$s_Y$  je jednoaksijalni napon tečenja, dok  $H'$  predstavlja nagib linearnog ojačanja po uklanjanju elastične komponente (nagib viskoplastičnih deformacija).





Slika 4.4. a) - Model viskoelastoplastičnog materijala D. D. Milašinovića. b) - Vremenski razvoj deformacija pri konstantnom naponu  $s_0$

Naponi u pojedinim delovima modela, zbog paralelne veze komponenti, mogu se opisati sledećim izrazima:

$$s(t) = E_H e_e(t) \quad \text{za "H" telo,}$$

$$s(t) = E_K e_{ve}(t) + I_K \dot{e}_{ve}(t) \quad \text{za "K" telo,} \quad (4.5)$$

$$s(t) = H' e_{vp}(t) + I_N \dot{e}_{vp}(t) + s_Y \quad \text{za "N | StV" telo.}$$

Obzirom na serijsku vezu pojedinih elemenata, ukupna deformacija se može izraziti u obliku:

$$e(t) = e_e(t) + e_{ve}(t) + e_{vp}(t). \quad (4.6)$$

Ako razdvojimo deformacije i njihove brzine od napona, te diferenciramo prvi od izraza (4.5), ove izraze možemo napisati u obliku:

$$\dot{e}_e(t) = \frac{\dot{s}(t)}{E_H},$$

$$\dot{e}_{ve}(t) + e_{ve}(t) \frac{E_K}{I_K} = \frac{\dot{s}(t)}{I_K}, \quad (4.7)$$

$$\dot{e}_{vp}(t) + e_{vp}(t) \frac{H'}{I_N} = \frac{\dot{s}(t)}{I_N} - \frac{s_Y}{I_N}$$

Diferenciranjem izraza (4.7) dobijamo:

$$\dot{\dot{e}}_e(t) = \frac{\dot{\dot{s}}(t)}{E_H},$$

$$\dot{\dot{e}}_{ve}(t) + \dot{e}_{ve}(t) \frac{E_K}{I_K} = \frac{\dot{\dot{s}}(t)}{I_K}, \quad (4.8)$$

$$\dot{\dot{e}}_{vp}(t) + \dot{e}_{vp}(t) \frac{H'}{I_N} = \frac{\dot{\dot{s}}(t)}{I_N}$$

Ako se saberu treća od jednačina (4.7), pomnožena sa  $E_K/I_K$ , i druga od jednačina (4.8), možemo pisati:

$$\varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{vp}(t) \frac{E_K}{I_K} + \varepsilon_{vp}(t) \frac{E_K}{I_K} + e_{vp}(t) \frac{E_K H'}{I_K I_N} = \frac{s(t)}{I_K} + \frac{E_K [s(t) - s_Y]}{I_K I_N} \quad (4.9)$$

Sabiranjem druge od jednačina (4.7), pomnožene sa  $H'/I_N$ , sa trećom od jednačina (4.8) dobijamo:

$$\varepsilon_{vp}(t) + \varepsilon_{vp}(t) \frac{H'}{I_N} + \varepsilon_{ve}(t) \frac{H'}{I_N} + e_{ve}(t) \frac{E_K H'}{I_K I_N} = \frac{s(t)}{I_N} + \frac{H' s(t)}{I_K I_N}. \quad (4.10)$$

Sabiranjem poslednje dve jednačine dobijamo:

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{vp}(t)] + [\varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{vp}(t)] \left( \frac{E_K}{I_K} + \frac{H'}{I_N} \right) + [e_{ve}(t) + e_{vp}(t)] \frac{E_K H'}{I_K I_N} = \\ & = s(t) \left( \frac{1}{I_K} + \frac{1}{I_N} \right) + s(t) \left( \frac{E_K}{I_K I_N} + \frac{H'}{I_K I_N} \right) - s_Y \frac{E_K}{I_K I_N} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Kako važi:

$$\begin{aligned} e_{ve}(t) + e_{vp}(t) &= e(t) - e_e(t) = e(t) - \frac{s(t)}{E_H}, \\ \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{vp}(t) &= \varepsilon(t) - \varepsilon_e(t) = \varepsilon(t) - \frac{s(t)}{E_H}, \\ \varepsilon_{ve}(t) + \varepsilon_{vp}(t) &= \varepsilon(t) - \varepsilon_e(t) = \varepsilon(t) - \frac{s(t)}{E_H}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

to se, na osnovu (4.10) i (4.11), može formirati sledeća diferencijalna jednačina:

$$\begin{aligned} & \varepsilon(t) + \varepsilon(t) \left( \frac{E_K}{I_K} + \frac{H'}{I_N} \right) + e(t) \frac{E_K H'}{I_K I_N} = \frac{s(t)}{E_H} + \\ & + s(t) \left( \frac{E_K}{I_K E_H} + \frac{H'}{I_N E_H} + \frac{1}{I_K} + \frac{1}{I_N} \right) + s(t) \left( \frac{E_K}{I_K I_N} + \frac{H'}{I_K I_N} + \frac{E_K H'}{I_K I_N E_H} \right) - s_Y \frac{E_K}{I_K I_N}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Izraz (4.13) predstavlja diferencijalnu jednačinu viskoelastoplastičnog tela izloženog jednoaksijalnom naprezanju pri čemu se promena napona tokom vremena, usled zadatog opterećenja, opisuje funkcijom  $s(t)$ .

Analiziramo ponašanje modela u slučaju tečenja sa nesprečenim deformacijama pri zatom opterećenju, nanetom u punom iznosu u trenutku  $t=0$ , koje izaziva konstantni napon  $s_0$ . U ovom slučaju jednačina (4.13) postaje:

$$\varepsilon(t) + \varepsilon(t) \left( \frac{E_K}{I_K} + \frac{H'}{I_N} \right) + e(t) \frac{E_K H'}{I_K I_N} = s_0 \left( \frac{E_K}{I_K I_N} + \frac{H'}{I_K I_N} + \frac{E_K H'}{I_K I_N E_H} \right) - s_Y \frac{E_K}{I_K I_N}. \quad (4.14)$$

Opšte rešenje ove nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda je

$$e(t) = C_1 e^{-\frac{H't}{I_N}} + C_2 e^{-\frac{E_K t}{I_K}} + s_0 \left( \frac{1}{H'} + \frac{1}{E_K} + \frac{1}{E_H} \right) - s_Y \frac{1}{H'}. \quad (4.15)$$

Početni uslovi u  $t=0$  su:

$$\begin{aligned} e(0) &= \frac{s_0}{E_H}, \\ \varepsilon(0) &= s_0 \left( \frac{1}{I_K} + \frac{1}{I_N} \right) - s_Y \frac{1}{I_N}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Iz (4.15) i (4.16) se mogu odrediti tražene konstante  $C_1$  i  $C_2$ :

$$C_1 = -(s_0 - s_Y) \frac{1}{H'}, \quad C_2 = -\frac{s_0}{E_K}, \quad (4.17)$$

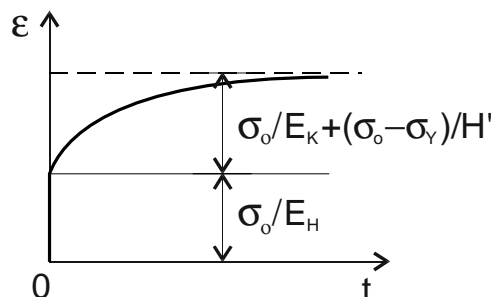
a konačno rešenje jednačine (4.14) postaje:

$$e(t) = \left( -\frac{(s_0 - s_Y)}{H'} \right) e^{-\frac{H't}{I_N}} + \left( -\frac{s_0}{E_K} \right) e^{-\frac{E_K t}{I_K}} + s_0 \left( \frac{1}{H'} + \frac{1}{E_K} + \frac{1}{E_H} \right) - s_Y \frac{1}{H'}. \quad (4.18)$$

Kada  $t \rightarrow \infty$  izraz (4.18) se može napisati u obliku:

$$e(t) = \frac{s_0 - s_Y}{H'} + s_0 \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \right). \quad (4.19)$$

Razvoj deformacija kroz vreme, za analizirani reološki model, pri konstantnom naponu  $s_0$  nanetom u  $t=0$ , prikazan je na slici 4.5.



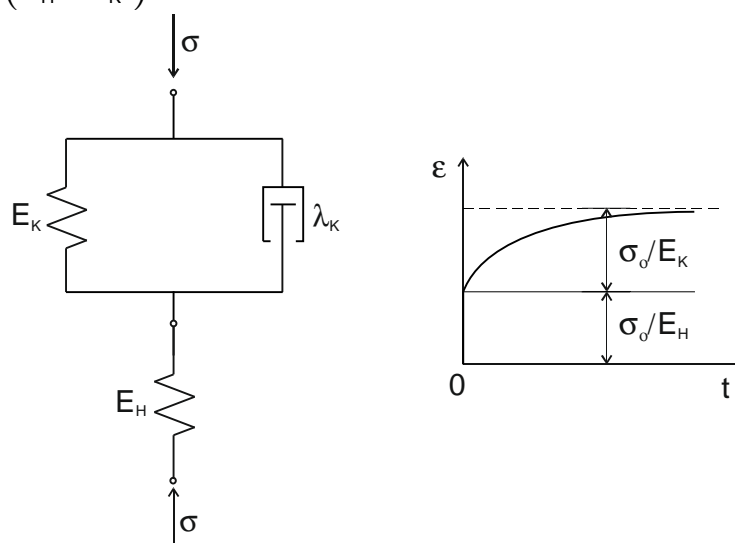
Slika 4.5. Razvoj deformacija kroz vreme za  $s(t) = s_0 = \text{const.}$  prema reološkom modelu  
D. D. Milašinovića

Treći element u nizu (N|StV) prikazanog modela postaje aktivan tek pri veličini ukupnog napona  $s(t) \geq Y$ , gde je  $Y$  dato sa (4.4). Napon u frikcionom klizaču tada postaje  $s_{SV} = Y$ . U slučaju kada je ukupni nanoseni napon  $s(t) < Y$ , poslednji od spojenih modela u nizu postaje neaktivan, pa se model redukuje na već poznati model viskoelastičnog materijala (slika 4.6). Deformacija u ovom modelu, uz početni uslov  $e(0) = s_0/E_H$ , može se sračunati prema izrazu:

$$e(t) = s_0 \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \right) - \frac{s_0}{E_K} e^{-\frac{E_K t}{I_K}} \quad (4.20)$$

Kada  $t \rightarrow \infty$ , izraz (4.20) postaje:

$$e(t) = s_0 \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} \right). \quad (4.21)$$



Slika 4.6. Model viskoelastičnog materijala i razvoj deformacija kroz vreme  
za  $s(t) = s_0 = \text{const.}$

## 4.2. Reološko-dinamička analogija (RDA)

### 4.2.1. Fizički mehanizam reološko-dinamičke analogije

Osnovni problem koji se javlja u primeni reološkog modela viskoelastoplastičnog tela, prikazanog na slici 4.4. i opisanog diferencijalnom jednačinom (4.13), na realne materijale jeste utvrđivanje numeričkih vrednosti ulaznih parametara, sadržanih u navedenoj diferencijalnoj jednačini. Od svih potrebnih parametara jedino se modul elastičnosti  $E_H$  može dobiti relativno jednostavnim eksperimentalnim ispitivanjem. Da bi se ovaj problem rešio, potrebno je ostale parametre izraziti u funkciji alternativnih fizičkih veličina, koristeći njihovu matematičku sličnost. Ovde će biti razmatran problem u kojem je opterećenje vremenski promenljivo, tako da se u telu javljaju dinamička naprezanja.

Za potrebu analize odgovora materije na mehanički poremećaj (opterećenje) posmatraćemo, za početak, slučaj prostiranja mehaničkog talasa kroz elastični medij. Da bi se proizveli mehanički talasi potreban je izvor energije za izazivanje poremećaja, kao i elastični medij kroz koji će se nastali poremećaj prenositi. Elastični medij se ponaša u skladu sa Hooke-ovim zakonom. Širenje talasa kroz homogenu izotropnu sredinu može da se opiše talasnom jednačinom:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (4.22)$$

gde je  $u$  pomeranje čestica, a  $c$  konstanta koja predstavlja brzinu prostiranja talasa.

Talasna jednačina se odnosi na *sinusoidalne oscilacije*. Međutim, i pojave koje nisu periodične mogu da se tretiraju na sličan način jer se svaki neperiodični proces može predstaviti superpozicijom talasa različitih talasnih dužina [72].

Ako analizu ograničimo na jednodimenzionalni problem, kao što je, npr., aksijalno naprezanje (zatezanje ili pritisak) tankog dugog štapa, talasna jednačina se svodi na sledeći oblik:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.23)$$

Brzina propagacije ovakvih talasa je konstanta materijala, koja se može napisati u obliku [40]:

$$c = \sqrt{\frac{E_H}{r}}, \quad (4.24)$$

gde je  $E_H$  modul elastičnosti, a  $r$  zapreminska masa materijala.

Maksimalno pomeranje vibrirajućih čestica sredine naziva se *amplituda* talasnog kretanja. Ona je determinisana energijom talasa. Kako se u realnim sistemima ova energija rasipa (tzv. disipacija energije), to se i amplituda talasa postepeno smanjuje. Pojava smanjenja amplitude usled disipacije energije prilikom udaljavanja talasa od njegovog izvora se naziva *prigušenje*.

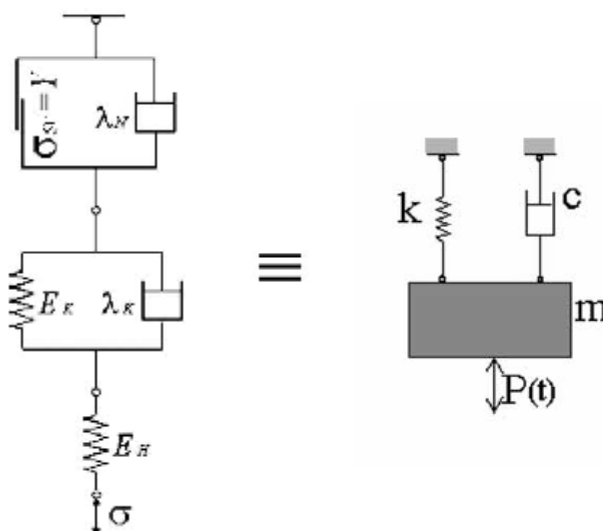
Kao što je gore pokazano, mehanički poremećaj (deformacija) u elastičnoj sredini propagira konačnom brzinom  $c$ , datom sa (4.24). Ako posmatramo tanak, dug elastični štap, te na jednom njegovom kraju izazovemo mehanički poremećaj u trenutku vremena  $t_0$ , deformacija će dostići proizvoljnu tačku  $M$  štapa u nekom trenutku  $t > t_0$ . Što je veće rastojanje  $l$  koje talas treba da pređe od svog izvora do tačke  $M$ , to će biti veća i vremenska razlika  $t - t_0 = l/c$ . Zbog ovoga vibracija tačke  $M$  zaostaje u fazi za izvorom talasa. Ako sa  $l_0$  označimo rastojanje između krajeva štapa, onda vreme potrebno da talas pređe celu dužinu štapa možemo izraziti u obliku:

$$T_k^D = t - t_0 = \frac{l_0}{c} \quad (4.25)$$

Kružna frekvencija slobodnih neprigušenih vibracija aksijalno napregnutog (zategnutog ili pritisnutog) štapa, čiji je dinamički model prikazan na slici 4.7, je:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{E_H A}{l_0} \cdot \frac{1}{r A l_0}} = \sqrt{\frac{E_H}{r} \frac{1}{l_0}} = \frac{c}{l_0} = \frac{1}{T_K^D} \quad (4.26)$$

$$Y = \sigma_v + H' \varepsilon_v$$



Slika 4.7. Analogija između reološkog modela D.D. Milašinovića i dinamičkog modela sa viskoznom prigušenjem [40]

Posmatračemo, dalje, reološki model D.D. Milašinovića (slike 4.4 i 4.7). Početna brzina deformacije pri konstantnom naponu, prema ovom modelu, je [40]:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{ve} + \dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{s_0}{I_K} + \frac{s_0 - s_Y}{I_N}. \quad (4.27)$$

Posmatrajući dijagram na slici 4.4.b), brzina deformacije se može napisati i u obliku:

$$\dot{\varepsilon}_{ve} + \dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{s_0}{E_K T^*} + \frac{s_0 - s_Y}{H' T^*}. \quad (4.28)$$

Upoređujući poslednje dve jednačine, dobijamo:

$$\frac{s_0}{I_K} + \frac{s_0 - s_Y}{I_N} = \frac{s_0}{E_K T^*} + \frac{s_0 - s_Y}{H' T^*}, \quad (4.29)$$

odakle je

$$I_N = \frac{s_0 - s_Y}{\frac{s_0}{E_K T^*} + \frac{s_0 - s_Y}{H' T^*} - \frac{s_0}{I_K}}. \quad (4.30)$$

Brzine deformacije  $s_0/(E_K T^*)$  i  $s_0/I_K$  su vrlo male veličine u odnosu na brzinu deformacije u viskoplastičnom tečenju  $(s_0 - s_Y)/(H' T^*)$ , zbog čega se one mogu zanemariti bez značajnog uticaja na rezultat. Viskoplastični koeficijent viskoznosti se sada može pisati u obliku:

$$I_N = H' T^*. \quad (4.31)$$

Posmatrajući samo stanje viskoelastičnosti prema Kelvin-vom modelu, dolazimo do viskoelastičnog koeficijenta viskoznosti:

$$I_K = E_K T_K, \quad (4.32)$$

gde je  $T_K$  vreme retardacije.

Napišimo homogenu jednačinu nehomogene diferencijalne jednačine (4.13) u sledećem obliku:

$$\ddot{x}(t)I_K I_N + \dot{x}(t)(E_K I_N + H' I_K) + e(t)E_K H' = 0, \quad (4.33)$$

gde su  $I_K$ ,  $I_N$ ,  $E_K$  i  $H'$  date konstante ( $I_K$  i  $I_N$  su koeficijenti linearne viskoznosti,  $E_K$  viskoelastični modul, a  $H'$  viskoplastični modul).

Kružnu frekvenciju  $w$  možemo dobiti i iz jednačine (4.33) posmatrajući stanje kritičnog deformisanja, za koje je  $E_K/I_K = H'/I_N$  (odnosno, iz (4.31) i (4.32):

$$T_K = T^* = T_K^D \text{ [40]:}$$

$$\sqrt{\frac{E_K H'}{I_K I_N}} = \sqrt{\frac{1}{T_K T^*}} = \frac{1}{T_K^D} = w, \quad (4.34)$$

gde je  $T_K^D$  dinamičko vreme retardacije.

Upoređujući izraze (4.26) i (4.34), zaključujemo sledeće:

$$\sqrt{\frac{E_H}{r} \frac{1}{l_0}} = \sqrt{\frac{E_K H'}{I_K I_N}} \Rightarrow I_K I_N = \frac{E_K H' g l_0^2}{E_H g} \Rightarrow \frac{I_K I_N}{g} = \frac{E_K H' A l_0^2 r}{E_H g A} = \frac{E_K H'}{g k} m, \quad (4.35)$$

gde je  $g = rg$  zapreminska težina materijala. Možemo, dalje, usvojiti:

$$m = \frac{I_K I_N}{g}, \quad k = \frac{E_K H'}{g}, \quad (4.36)$$

dok je kritično prigušenje, prema [40]:

$$c = c_c = 2\sqrt{km} = 2\sqrt{\frac{E_K I_N}{g}}. \quad (4.37)$$

Zamenimo li  $I_K I_N$  sa  $mg$ ,  $E_K I_N + H' I_K$  sa  $cg$  i  $E_K H'$  sa  $kg$ , diferencijalna jednačina (4.33) postaje:

$$\ddot{x}(t)m + \dot{x}(t)c + e(t)k = 0, \quad (4.38)$$

gde su masa  $m$ , prigušenje  $c$  i krutost  $k$  dati sledećim izrazima:

$$m = \frac{I_K I_N}{g} = k(T_K^D)^2, \quad c = \frac{E_K I_N + H' I_K}{g} = 2kT_K^D, \quad k = \frac{E_K H'}{g}. \quad (4.39)$$

Očigledno je da se parametri u jednačinama (4.39) i dimenziono slažu [46]:

$$\begin{aligned} [I_K], [I_N] &= ML^{-1}T^{-1}, \\ [E_K], [H'] &= ML^{-1}T^{-2}, \\ [r] &= ML^{-3}, \\ [g] &= LT^{-2}, \\ [g] = [rg] &= ML^{-2}T^{-2}, \\ [I_K I_N] &= M^2L^{-2}T^{-2} = M[g] = [mg], \\ [E_K I_N + H' I_K] &= M^2L^{-2}T^{-3} = MT^{-1}[g] = [cg], \\ [E_K H'] &= M^2L^{-2}T^{-4} = MT^{-2}[g] = [kg]. \end{aligned} \quad (4.40)$$

U gornjim izrazima  $M$  označava masu,  $L$  dužinu, a  $T$  vreme.

Očigledna je analogija između homogene diferencijalne jednačine reološkog modela viskoelastoplastičnog materijala prikazane u obliku (4.38) i diferencijalne jednačine prigušenih slobodnih vibracija sistema sa jednim stepenom slobode, čiji je dinamički model prikazan na slici 4.7. Na ovaj način je postavljena matematičko-fizička analogija između reološkog modela D.D. Milašinovića i dinamičkog modela sa viskoznim prigušenjem - reološko-dinamička analogija (slika 4.7). Na osnovu RDA komplikovan nelinearan viskoelastoplastični problem može biti rešavan kao mnogo jednostavniji linearan dinamički problem.

Postojanje RDA analogije ukazuje na činjenicu da je materijalno nelinearan odgovor inženjerskih konstrukcija u osnovi dinamički problem [46].

#### 4.2.2. Rešenje homogene diferencijalne jednačine

Homogenu diferencijalnu jednačinu (4.38) možemo napisati u obliku:

$$\ddot{e}(t) + \frac{c}{m} \dot{e}(t) + \frac{k}{m} e(t) = 0, \quad (4.41)$$

odnosno:

$$\ddot{e}(t) + 2x\dot{e}(t) + w^2 e(t) = 0,$$

gde je, u skladu sa (4.26), (4.34) i (4.39):

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{E_K H'}{I_K I_N}}, \quad \frac{c}{2m} = x = \frac{E_K I_N + H' I_K}{2I_K I_N}. \quad (4.42)$$

Rešenje ove homogene diferencijalne jednačine može da se potraži u obliku  $e(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$  [10], gde su koreni karakteristične jednačine:

$$r_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 - w^2}. \quad (4.43)$$

Potkorena veličina u prethodnom izrazu može biti pozitivna, negativna ili jednaka nuli, pa možemo posmatrati ova tri karakteristična slučaja:

a) Kritično prigušenje:  $x^2 - w^2 = 0$  i  $H' \geq 0$ . U ovom slučaju, prema (4.42) dobijamo kritično prigušenje:

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2mw \quad (4.44)$$

Uvedemo li pojam *relativnog prigušenja*, kao odnos stvarnog i kritičnog prigušenja:

$$z = \frac{c}{c_c}, \quad (4.45)$$

možemo uspostaviti sledeće odnose:

$$\frac{c}{2m} = z \frac{c_c}{2m} = zw, \quad r_{1,2} = (-z \pm \sqrt{z^2 - 1})w \quad (4.46)$$

Na ovaj način se analiza vibracija može vršiti u zavisnosti od potkorene veličine  $z^2 - 1$ . U slučaju kritičnog prigušenja je  $z = 1$ .

b) Prigušenje manje od kritičnog:  $x^2 - w^2 < 0$ , odnosno  $z < 1$ . Zbog toga što su masa, prigušenje i krutost definisani u funkciji reoloških parametara u stanju kritičnog deformisanja (4.39), diferencijalna jednačina (4.41) u ovom slučaju nema rešenje.

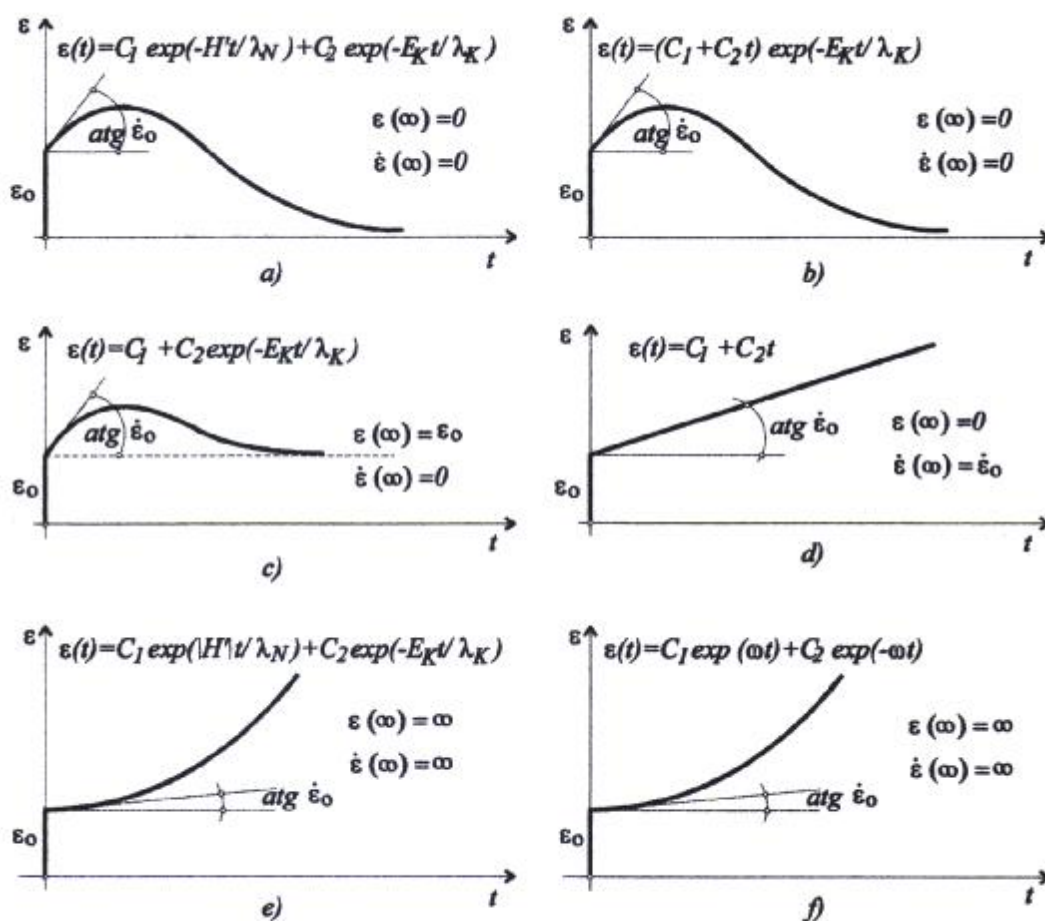
c) Prigušenje veće od kritičnog:  $x^2 - w^2 > 0$ , odnosno  $z > 1$ . Za ovaj slučaj koreni karakteristične jednačine su realni. Deformacije su *aperiodičke*, odnosno nema vibracija.

Na slici 4.8. je prikazano šest različitih dijagrama deformacija u funkciji vremena, koji zavise od predznaka potkorene veličine u (4.43) i predznaka viskoplastičnog modula  $H'$ . Ovde su prikazane funkcije puzanja (tečenja) za čvrsta tela (sl. 4.8. a, b i c), idealne tečnosti (sl. 4.8. d) i tečnosti sa parametrima čvrstih materijala ili čvrstih tela sa viskoplastičnim ponašanjem (sl. 4.8. e i f). Izrazi na osnovu kojih su nacrtani ovi dijagrami su dati u tabeli 4.1. U ovim izrazima je sa  $e_0$  označena početna deformacija, a sa  $\dot{e}_0$  početna brzina deformacije u trenutku  $t=0$ .

Prema [46] reološki je aksiom da svaki realni materijal poseduje sva reološka svojstva, ali su ona različitog intenziteta (slika 4.9).

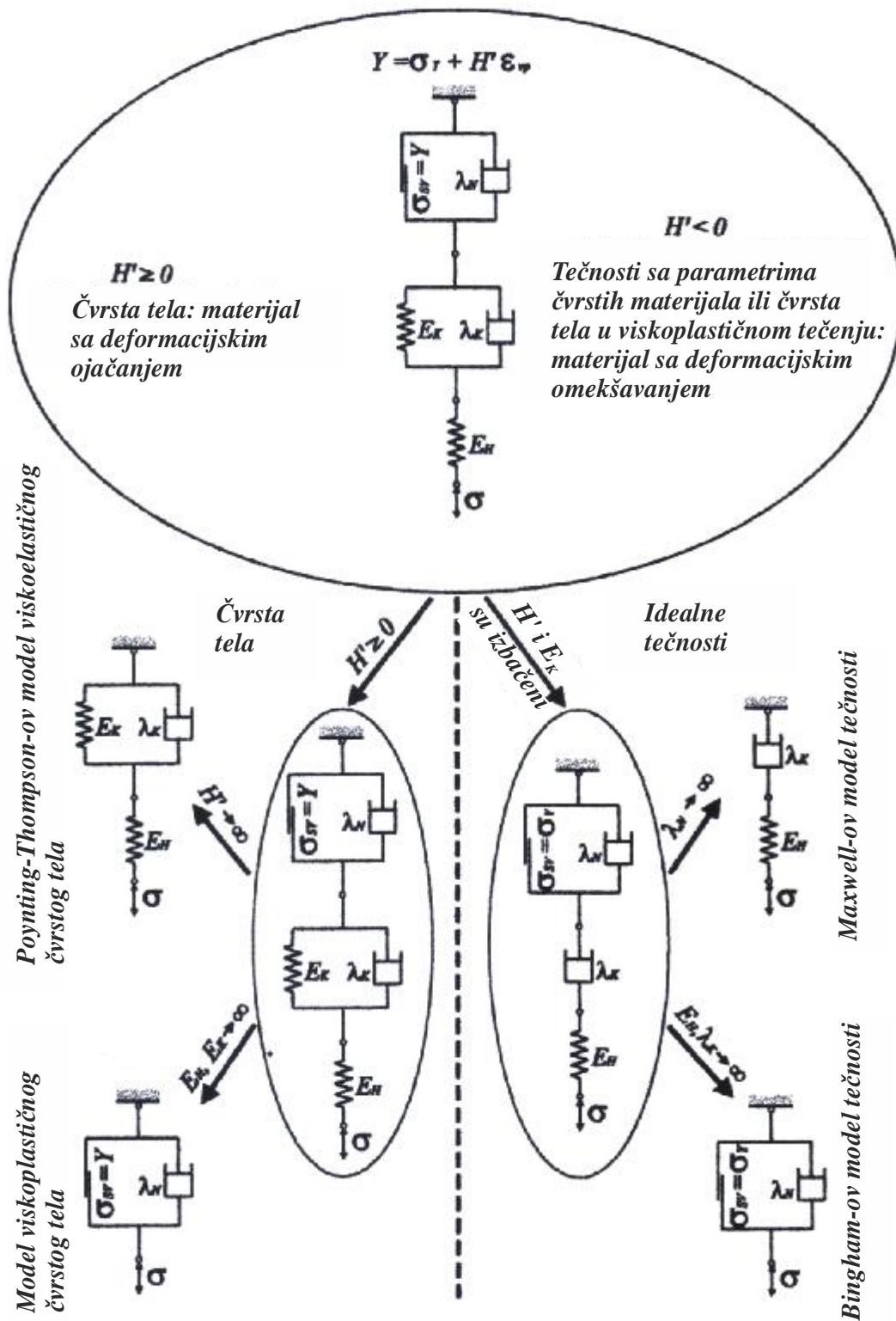
Tabela 4.1. Funkcije tečenja (puzanja) [46]

Prigušenje veće od kritičnog ( $x^2 > w^2$ )		Kritično prigušenje ( $x^2 = w^2$ i $H' \geq 0$ )	
$e(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$ $C_1 = \frac{-e_0 r_2 + \dot{\epsilon}_0}{r_1 - r_2}, \quad C_2 = e_0 - C_1.$		$r_{1,2} = -x,$ $e(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-xt},$ $C_1 = e_0, \quad C_2 = \dot{\epsilon}_0 + x e_0.$	
Materijal sa deformacijskim ojačanjem ( $H' > 0$ )	Materijal sa deformacijskim omekšavanjem ( $H' < 0$ )	Materijal sa deformacijskim ojačanjem ( $E_K I_N = H' I_K$ )	Idealna tečnost ( $E_K = H' = 0$ )
$r_1 = \frac{-H'}{I_N}, \quad r_2 = \frac{-E_K}{I_K}$	$r_1 = \frac{ H' }{I_N}, \quad r_2 = \frac{-E_K}{I_K}$	$x = \frac{E_K}{I_K}$	$x = 0$
Nepriugušena slobodna deformacija, materijal sa deformacijskim omekšavanjem ( $H' < 0$ )			
$e(t) = C_1 e^{wt} + C_2 e^{-wt},$ $c = x = 0, \quad w_c = iw, \quad r_{1,2} = \pm w, \quad C_1 = \frac{e_0 w + \dot{\epsilon}_0}{2w}, \quad C_2 = e_0 - C_1.$			
Deformacija materijala bez deformacijskog ojačanja ili omekšavanja ( $H' = 0$ )			
$e(t) = C_1 + C_2 e^{\frac{-E_K t}{I_K}}, \quad C_1 = e_0 + \dot{\epsilon}_0 \frac{I_K}{E_K}, \quad C_2 = e_0 - C_1$			



Slika 4.8. Krive deformacija-vreme: a) - prigušenje veće od kritičnog, materijal sa deformacijskim ojačanjem; b) - kritično prigušenje, materijal sa deformacijskim ojačanjem; c) - deformacije bez deformacijskog ojačanja ili omekšavanja materijala; d) - kritično prigušenje, idealna tečnost; e) - prigušenje veće od kritičnog, materijal sa deformacijskim omekšavanjem; f) - nepriugušena slobodna deformacija, materijal sa deformacijskim omekšavanjem [41]





Slika 4.9. Reološki model D.D. Milašinovića obuhvata čvrsta tela i tečnosti. Kada se usvoje granične vrednosti pojedinih parametara, model se raščlanjuje na poznate reološke modele [41]

### 4.2.3. Harmonijska varijacija napona

Na osnovu gore opisanog, odgovor (deformacija) aksijalno napregnutog tela na opterećenje (napon) čija se promena u toku vremena opisuje funkcijom  $s(t)$ , može se odrediti rešavanjem nehomogene diferencijalne jednačine reološkog modela viskoelastoplastičnog materijala, date sa (4.13). Reološki parametri koji figurišu u ovoj jednačini, a koji nisu predmet standardnih eksperimentalnih ispitivanja materijala, te je njihove vrednosti teško utvrditi, dovode se, preko reološko-dinamičke analogije, u vezu sa poznatim parametrima (modul elastičnosti materijala, kružna frekvencija sopstvenih vibracija i kružna frekvencija opterećenja). Kako je harmonijsko opterećenje jedno od najvažnijih u tehničkoj praksi, to će se u daljem tekstu analizirati deformacije pri jednoaksijalnom naprezanju usled harmonijski zadate funkcije napona u vremenu. Opšti oblik harmonijske funkcije napona glasi:

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(npt) + b_n \sin(npt)), \quad (4.47)$$

gde se član  $a_0/2$  vezuje za početne uslove i ne utiče na oscilacije. Za  $n=1$  dobija se rešenje za osnovni ili fundamentalni ton. Za  $n>1$  dobijaju se viši harmonijski tonovi ("harmonici"). U daljoj analizi će se za harmonijski deo funkcije napona usvojiti samo jedna sinusna funkcija, budući da harmonijsko puzanje ne zavisi mnogo od oblika vremenske krive unutar ciklusa.

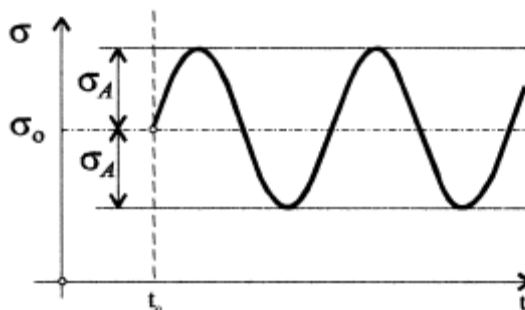
$$s(t) = s_0 + s_A \sin(w_s t). \quad (4.48)$$

Grafik funkcije napona prikazan je na slici 4.10. Ovde su uvedene sledeće oznake:

$s_0$  - konstantna komponenta napona,

$s_A$  - amplituda napona,

$w_s$  - kružna frekvencija opterećenja (napona).



Slika 4.10. Harmonijski promenljivi naponi [41]

Najveći napon ciklusa, po apsolutnoj vrednosti, označava se sa  $s_{max}$ , a najmanji sa  $s_{min}$ . Odnos između minimalnog i maksimalnog napona, uzimajući u obzir njihove predznake, naziva se koeficijent asimetrije ciklusa naprezanja:

$$r = \frac{s_{min}}{s_{max}} \quad (4.49)$$

i uzima vrednosti između -1 i +1. Konstantna komponenta naprezanja (napona), odnosno srednje naprezanje ciklusa, može se odrediti kao polovina zbira maksimalnog i minimalnog napona u ciklusu (uzimajući u obzir njihove predznake):

$$s_0 = \frac{s_{max} + s_{min}}{2} = \frac{1+r}{2} s_{max}. \quad (4.50)$$

Amplituda napona u ciklusu, koja se naziva i promenljiva komponenta ciklusa, predstavlja polovinu razlike maksimalnog i minimalnog napona u ciklusu (uzimajući u obzir njihove predznake):

$$s_A = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2} = \frac{1-r}{2} s_{\max}. \quad (4.51)$$

Diferencijalna jednačina reološkog modela D.D. Milašinovića (4.13), ako se funkcija vremenske promene napona opiše izrazom (4.48) i iskoriste veze (4.39), poprima oblik:

$$\begin{aligned} e''(t)m + e''(t)c + e'(t)k = s_A \left( \frac{k}{E_H} + \frac{E_K + H'}{g} - w_s^2 \frac{m}{E_H} \right) \sin(w_s t) + \\ + s_A \left( \frac{c}{E_H} + \frac{I_K + I_N}{g} \right) w_s \cos(w_s t) + s_0 \left( \frac{k}{E_H} + \frac{E_K + H'}{g} \right) - s_Y \frac{E_K}{g} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Rešenje ove nehomogene diferencijalne jednačine drugog reda sa konstantnim koeficijentima se može prikazati kao zbir opšteg rešenja pripadajuće homogene jednačine (tzv. komplementarno rešenje), prikazanog u tabeli 4.4, i jednog partikularnog rešenja nehomogene jednačine (4.52) :

$$e(t) = e_h + e_p \quad (4.53)$$

Partikularno rešenje je dato u obliku [46]:

$$e_p = A \sin(w_s t) + B \cos(w_s t) + C, \quad (4.54)$$

gde su  $A$ ,  $B$  i  $C$  konstante:

$$\begin{aligned} A &= \frac{P_s (k - mw_s^2) + Q_s cw_s}{(k - mw_s^2)^2 + (cw_s)^2}, \\ B &= \frac{Q_s (k - mw_s^2) - P_s cw_s}{(k - mw_s^2)^2 + (cw_s)^2}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$C = s_0 \left( \frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} + \frac{1}{H'} \right) - s_Y \frac{1}{H'},$$

i:

$$\begin{aligned} P_s &= s_A \left( \frac{k}{E_H} + \frac{E_K + H'}{g} \right) - s_A w_s^2 \frac{m}{E_H}, \\ Q_s &= s_A \left( \frac{c}{E_H} + \frac{I_K + I_N}{g} \right) w_s. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Rešenje diferencijalne jednačine reološkog modela D.D. Milašinovića za slučaj delovanja konstantnog opterećenja, koje izaziva napon  $s_0$ , već je ranije određeno i dato jednačinom (4.18). Ukupna deformacija pri konstantnom naponu  $s_0 < s_Y$  ( $H' \rightarrow \infty$ ) je viskoelastična i, uz uvažavanje veze (4.32) i imajući u vidu (4.53) i (4.54), može da se napiše u sledećem obliku:

$$e'(t) = e_h + C = \frac{s_0}{E_H} + \frac{s_0}{E_K} (1 - e^{-(t/T_K)}) = \frac{s_0}{E_H(t_0)} [1 + j(t)], \quad (4.57)$$

gde je  $j = j(t)$  viskoelastični koeficijent tečenja (puzanja) dat sa:

$$j(t) = \frac{e_{ve}}{e_{el}} = \frac{E_H(t_0)}{E_K} (1 - e^{-(t/T_K)}). \quad (4.58)$$

Harmonijska viskoelastoplastična deformacija je:

$$e''(t) = A \sin(w_s t) + B \cos(w_s t), \quad (4.59)$$

ili:

$$e''(t) = e_A \sin(w_s t - a). \quad (4.60)$$

Amplituda harmonijske deformacije i fazna razlika (ugao) za koju deformacija kasni za naponom su:

$$e_A = \sqrt{\frac{P_s^2 + Q_s^2}{(k - mw_s^2)^2 + (cw_s)^2}}, \quad (4.61)$$

$$\tan a = \frac{P_s cw_s - Q_s (k - mw_s^2)}{P_s (k - mw_s^2) + Q_s cw_s}.$$

Ciklična promena napona u vremenu može se izraziti preko eksponencijalne funkcije:

$$s''(t) = S_A e^{i w_s t}. \quad (4.62)$$

Deformacija kasni za naponom za fazni ugao  $a$ , pa se može napisati u obliku:

$$e''(t) = e_A e^{i(w_s t - a)}. \quad (4.63)$$

Kompleksni modul predstavlja odnos promenljivog napona i promenljive deformacije:

$$E^* = \frac{s''}{e''} = \frac{S_A}{e_A} e^{ia}. \quad (4.64)$$

Prema Euler-ovoj formuli, možemo pisati:

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a, \quad (4.65)$$

pa jednačina (4.64) postaje:

$$E^* = \frac{S_A}{e_A} (\cos a + i \sin a). \quad (4.66)$$

Označićemo:

$$E_R = \operatorname{Re} E^* = \frac{S_A}{e_A} \cos a, \quad E_I = \operatorname{Im} E^* = \frac{S_A}{e_A} \sin a. \quad (4.67)$$

Brzinu deformacije ćemo dobiti diferenciranjem (4.63) po vremenu:

$$\dot{e} = i w_s e_A e^{i(w_s t - a)}. \quad (4.68)$$

Kompleksni koeficijent viskoznosti predstavlja odnos napona i brzine deformacije, stoga:

$$I^* = \frac{s''}{\dot{e}} = \frac{S_A}{i w_s e_A} e^{ia}. \quad (4.69)$$

Unesemo li (4.65) u gornji izraz, dobijamo:

$$I^* = \frac{S_A}{i w_s e_A} (\cos a + i \sin a) = \frac{S_A}{w_s e_A} (\sin a - i \cos a). \quad (4.70)$$

Ovaj kompleksni koeficijent viskoznosti možemo razdvojiti na realni (dinamički koeficijent viskoznosti) i imaginarni deo (izgubljeni koeficijent viskoznosti):

$$I_R = \operatorname{Re} I^* = \frac{S_A}{w_s e_A} \sin a, \quad I_I = \frac{S_A}{w_s e_A} \cos a. \quad (4.71)$$

Kompleksna kompliansa je jednaka recipročnoj vrednosti kompleksnog modula:

$$I^* = \frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_R + i E_I} = \frac{E_R - i E_I}{E_R^2 + E_I^2}, \quad (4.72)$$

a možemo je razdvojiti na realni (dinamička kompliansa) i imaginarni deo:

$$I_R = \operatorname{Re} I^* = \frac{E_R}{E_R^2 + E_I^2} = \frac{e_A}{S_A} \cos a, \quad (4.73)$$

$$I_I = \operatorname{Im} I^* = \frac{E_I}{E_R^2 + E_I^2} = \frac{e_A}{S_A} \sin a.$$

Korišćenjem izraza (4.61) nalazimo reološko-dinamički (RDA) modul i RDA kompliansu:

$$E_R = S_A \frac{P_s (k - mw_s^2) + Q_s cw_s}{P_s^2 + Q_s^2}, \quad (4.74)$$

$$I_R = \frac{1}{S_A} \frac{P_s (k - mw_s^2) + Q_s cw_s}{(k - mw_s^2)^2 + (cw_s)^2}. \quad (4.75)$$

#### 4.2.4. Primena RDA na modeliranje ponašanja realnih materijala

Nakon što je otkrio reološko-dinamičku analogiju, D.D. Milašinović je primenjuje na predviđanje ponašanja građevinskih materijala (čelik, drvo, beton) i konstruktivnih elemenata usled različitih naprezanja. Rezultati njegovih teorijskih i eksperimentalnih istraživanja prezentovani su u nizu naučnih radova objavljenih u renomiranim međunarodnim časopisima. RDA je prvo primenjena na predviđanje krivih izvijanja aksijalno opterećenih čeličnih, drvenih i betonskih stubova [41], [47]. Sledi modeliranje zamora [40], [44], [45], te analiza ponašanja i projektovanje čeličnih i betonskih dampera [39], [42]. Analiza viskoelastoplastičnog ponašanja čeličnih šipki, primenom RDA, data je u radu [43]. Formulacija RDA je sa jednodimenzionalnih proširena i na dvodimenzionalne i trodimenzionalne probleme [45].

Prema [41], iako je RDA razvijena u cilju rešavanja dinamičkih problema, ona se može primeniti i na objašnjenje statičkih problema, posmatranjem odgovarajućih graničnih vrednosti datih matematičkih izraza.

Rezultati prikazani u nekim od gore navedenih radova poslužili su u ovoj disertaciji kao osnova za razvijanje postupka dobijanja radnih dijagrama čelika i betona primenom RDA. Zbog toga će u nastavku ukratko biti izloženi najvažniji stavovi i izrazi sadržani u ovim radovima.

##### 4.2.4.1. Granični (kritični) napon vitkih stubova primenom RDA

Prema [41], reološko ponašanje aksijalno opterećenog vitkog stuba može se okarakterisati vremenom retardacije  $T_K^D$  u stanju kritičnog (graničnog) deformisanja:

$$T_K^D = \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{w} = \sqrt{\frac{I_K I_N}{E_K H}}, \quad (4.76)$$

gde je

$$w = \sqrt{\frac{E_H g}{g} \frac{1}{L}}. \quad (4.77)$$

Stavimo li (4.56) i (4.76) u jednačinu (4.74) možemo napisati izraz za RDA modul, koji povezuje graničnu deformaciju i granični napon, u sledećem obliku:

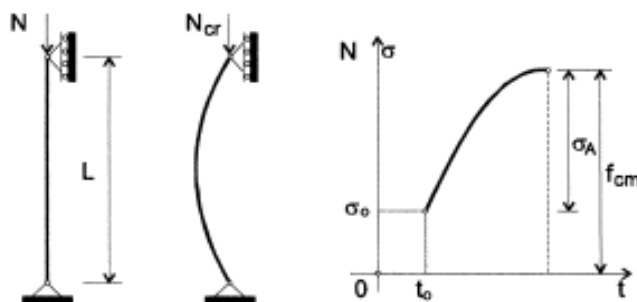
$$E_R(t, t_0) = \frac{\frac{1+d^2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^D(t, t_0)}}{\frac{1+d^2}{E_H^2(t_0)} + \left( \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^D(t, t_0)} \right) \left( \frac{2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^D(t, t_0)} \right)}, \quad (4.78)$$

gde je

$$d = \frac{w_s}{w} = w_s T_K^D. \quad (4.79)$$

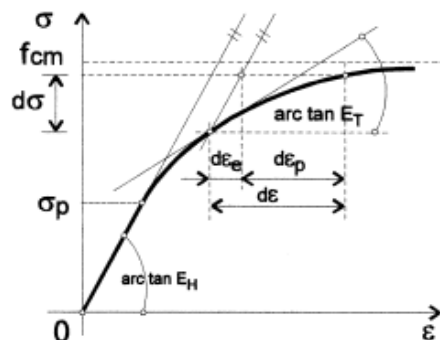
Dva su moguća načina dimenzionisanja pritisnutog elementa: prvi se zasniva na analizi elementa primenom teorije drugog reda, u kojoj se uslovi ravnoteže momenata i

sila ispisuju za deformisani element konstrukcije. Po drugom pristupu, pad čvrstoće realnih stubova, u odnosu na čvrstoću pritisnutog elementa beskonačne savojne krutosti, određuje se primenom krivih izvijanja. Ovde se primenjuje drugi pristup, uz korišćenje RDA modula. Analiza pada kapaciteta nosivosti biće prikazana u funkciji vitkosti, za element koji je zglobno vezan na krajevima (sl. 4.11).



Slika 4.11. Obostrano zglobno vezan stub izložen vremenski promenljivoj opterećenju [41]

Kriva napon-deformacija je linearna do napona  $s \leq s_p$ , dok za napone  $s \geq s_p$  postaje nelinearna, sa značajnim viskoelastoplastičnim deformacijama (sl. 4.12).



Slika 4.12. Dijagram napon-dilatacija:  $f_{cm}$  predstavlja čvrstoću na pritisak [41]

Gračni (kritični) napon je definisan sa:

$$s_{cr} = \begin{cases} \frac{p^2}{(L/k_z)^2} E_H(t_0) & \text{za } s_{cr} \leq s_p, \\ E_R(t, t_0) E_H(t_0) & \text{za } s_{cr} \geq s_p. \end{cases} \quad (4.80)$$

Nagib plastičnih deformacija, prema slici 4.12, je:

$$H'(e_p) = \frac{ds}{de_p} = \frac{ds}{de - de_e} = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E_H}}, \quad (4.81)$$

gde je  $e_p$  plastična deformacija, a  $E_T$  tangenti modul u posmatranoj tački dijagrama. Ako isključimo uticaj periodički promenljivog opterećenja, odnosno za  $d \rightarrow 0$ , nastupa slučaj statičkog opterećenja. U ovom specijalnom slučaju RDA modul postaje:

$$E_R(t, t_0) = \frac{1}{\frac{1}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^D(t, t_0)}} = \frac{1}{\frac{1}{E_H^2(t_0)} + \left( \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^D(t, t_0)} \right) \left( \frac{2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^D(t, t_0)} \right)} \quad (4.82)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^D(t, t_0)}}.$$

Ovim je dinamički problem sveden na statički.

Ako čvrsto telo nema viskoelastične deformacije, radi se o viskoplastičnom čvrstom telu, kod kojeg  $E_K^D \rightarrow \infty$ , pa se dobija granična vrednost izraza (4.82) u obliku:

$$E_R(t, t_0) = \frac{1}{\frac{1}{E_H(t_0)} + \frac{1}{H^D(t, t_0)}} = \frac{E_H(t_0)H^D(t, t_0)}{E_H(t_0) + H^D(t, t_0)} = \frac{H^D(t, t_0)}{1 + \frac{H^D(t, t_0)}{E_H(t_0)}}, \quad (4.83)$$

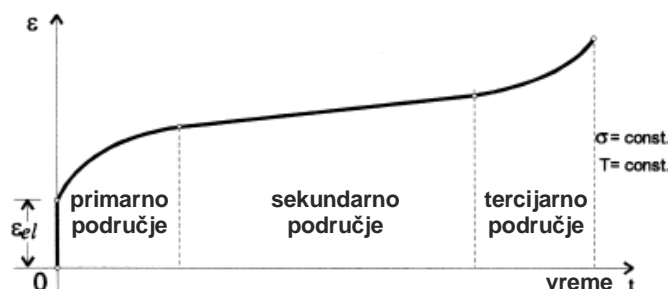
odakle sledi:

$$H^D(t, t_0) = \frac{E_R(t, t_0)}{1 - \frac{E_R(t, t_0)}{E_H(t_0)}}. \quad (4.84)$$

Uporedimo li izraze (4.81) i (4.84) dolazimo do zaključka da se za materijal iznad tačke proporcionalnosti RDA modul može izjednačiti sa tangentskim modulom:

$$E_R(t, t_0) = E_T. \quad (4.85)$$

Tipična kriva tečenja većine materijala izloženih konstantnim naprežanjima, pri konstantnoj temperaturi, prikazana je na slici 4.13. Početna ili trenutna deformacija je označena sa  $e_{el}$ . Deformacija raste tokom vremena, prolazeći kroz tri faze: primarno, sekundarno i tercijarno tečenje. U primarnom području brzina tečenja opada tokom vremena, da bi se u sekundarnom području uspostavili stacionarni uslovi, sa konstantnom brzinom tečenja (puzanja). U tercijarnom području je izražen uticaj redukcije poprečnog preseka, pa brzina deformacije raste sve do pojave loma. U prvom i drugom području javlja se viskoelastoplastično ponašanje, dok je u tercijarnom području izraženo viskoplastično ponašanje praćeno redukcijom poprečnog preseka.



Slika 4.13. Dijagram tečenja (puzanja) većine materijala [41]

Krive tečenja su zavisne od nivoa napona i temperature. Za različite materijale koriste se odgovarajući zakoni tečenja. Pri određivanju RDA modula, a time i graničnog napona u funkciji vremena, presudnu ulogu ima poznavanje koeficijenta tečenja materijala  $j(t, t_0)$ , koji se definiše kao odnos deformacije tečenja u posmatranom trenutku vremena  $t$  i trenutne elastične deformacije u trenutku nanošenja opterećenja  $t_0$ . Ako se ograničimo na viskoelastično ponašanje elementa aksijalno napregnutog konstantnim naponom, deformacija tečenja, prema (4.18), iznosi:

$$e_{ve} = e^c = \frac{s_0}{E_K} \left( 1 - e^{-\frac{E_K t}{I_K}} \right), \quad (4.86)$$

pa je koeficijent tečenja:

$$j(t, t_0) = \frac{e_{ve}(t, t_0)}{e_{el}(t_0)} = \frac{e^c}{e_{el}} = \frac{E_H(t_0)}{E_K(t, t_0)} \left( 1 - e^{-\frac{E_K t}{I_K}} \right), \quad (4.87)$$

odakle nalazimo:

$$E_K(t, t_0) = \frac{E_H(t_0)}{j(t, t_0)} \left( 1 - e^{-\frac{E_K t}{I_K}} \right), \quad (4.88)$$

gde je

$$I_K = E_K T_K. \quad (4.89)$$

Za potrebe analize graničnog (kritičnog) napona aksijalno napregnutih stubova od realnih materijala, neophodno je poznavati koeficijent tečenja. Za betonske stubove ovaj koeficijent se usvaja u skladu sa Evrokodom 2, što će biti prikazano u delu koji će se baviti modeliranjem betona. Za potrebe određivanja koeficijenta tečenja čelika, D. D. Milašinović, za fazu stacionarnog puzanja, primenjuje jednoaksijalni zakon puzanja čelika<sup>31</sup> dat u obliku:

$$e^c = a_0 s^{a_1} t^{a_2}, \quad (4.90)$$

gde su  $a_0$ ,  $a_1$  i  $a_2$  konstante materijala. Sada se koeficijent tečenja čelika može prikazati sledećim izrazom:

$$j(t, t_0) = \frac{e^c}{e_{el}} = \frac{a_0 s^{a_1} t^{a_2}}{s} = E_H(t_0) a_0 s^{(a_1-1)} t^{a_2}. \quad (4.91)$$

Sa poznatim koeficijentom tečenja možemo odrediti dinamički viskoelastični modul:

$$E_K^D(t, t_0) = \frac{E_H(t_0)}{j(t, t_0)} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T_K^D}} \right). \quad (4.92)$$

Korišćenjem jednačine (4.77) dobijamo

$$E_K^D(t, t_0) = \frac{E_H(t_0)}{j(t, t_0)} (1 - e^{-wt}) \cong \frac{E_H(t_0)}{j(t, t_0)}, \quad (4.93)$$

gde je usvojeno:

$$e^{-wt} = e^{-\sqrt{\frac{E_H g}{L}} t} \cong 0.$$

Na osnovu izraza (4.36), sa poznatim  $E_K^D(t, t_0)$  možemo odrediti dinamički viskoplastični modul:

$$H^D(t, t_0) = \frac{kg}{E_K^D(t, t_0)} = \frac{kg}{E_H(t_0)} j(t, t_0) = \frac{E_H(t_0) Ag}{L E_H(t_0)} j(t, t_0), \quad (4.94)$$

gde je  $A$  površina poprečnog preseka stuba, pa RDA modul (4.82) postaje:

$$E_R(t, t_0) = \frac{1}{\frac{1}{E_H(t_0)} + \frac{j(t, t_0)}{E_H(t_0)} + \frac{L}{Agj(t, t_0)}}. \quad (4.95)$$

Pri proračunu viskoplastičnog deformisanja prema RDA, elastične i viskoelastične deformacije su vrlo male veličine ( $\frac{1}{E_H(t_0)} \cong 0$  i  $\frac{j(t, t_0)}{E_H(t_0)} \cong 0$ ), stoga izraz (4.95) postaje:

$$E_R(t, t_0) = \frac{1}{\frac{L}{Agj(t, t_0)}}, \quad (4.96)$$

odnosno:

$$E_R(t, t_0) = \frac{1}{\frac{l_z L}{A l_z} \frac{1}{gj(t, t_0)}} = \frac{1}{k_z^2 \frac{l_z}{l_z} \frac{1}{gj(t, t_0)}} = \frac{1}{\left(\frac{L}{k_z}\right) \frac{k_z^3}{l_z} \frac{1}{gj(t, t_0)}}, \quad (4.97)$$

gde je  $l_z$  moment inercije poprečnog preseka,  $k_z = \sqrt{l_z/A}$  poluprečnik inercije, a  $L/k_z = I$  vitkost stuba.

<sup>31</sup> Prema [41], u radu Kojić, M.: Opšti koncept implicitne integracije konstitutivnih relacija pri neelastičnom deformisanju materijala, Centar za naučna istraživanja SANU i Univerzitet u Kragujevcu, Kragujevac, 1993, str. 21 i 67.



Na osnovu (4.80) i (4.97) možemo napisati izraze za granični (kritični) napon aksijalno pritisnutog, obostrano zglobno vezanog stuba, u funkciji njegove vitkosti:

$$s_{cr} = \begin{cases} \frac{p^2}{(L/k_z)^2} E_H(t_0) & \text{za } s_{cr} \leq s_p, \\ \frac{1}{\left(\frac{L}{k_z}\right) \frac{k_z^3}{I_z} g_j(t, t_0)} E_H(t_0) & \text{za } s_{cr} \geq s_p. \end{cases} \quad (4.98)$$

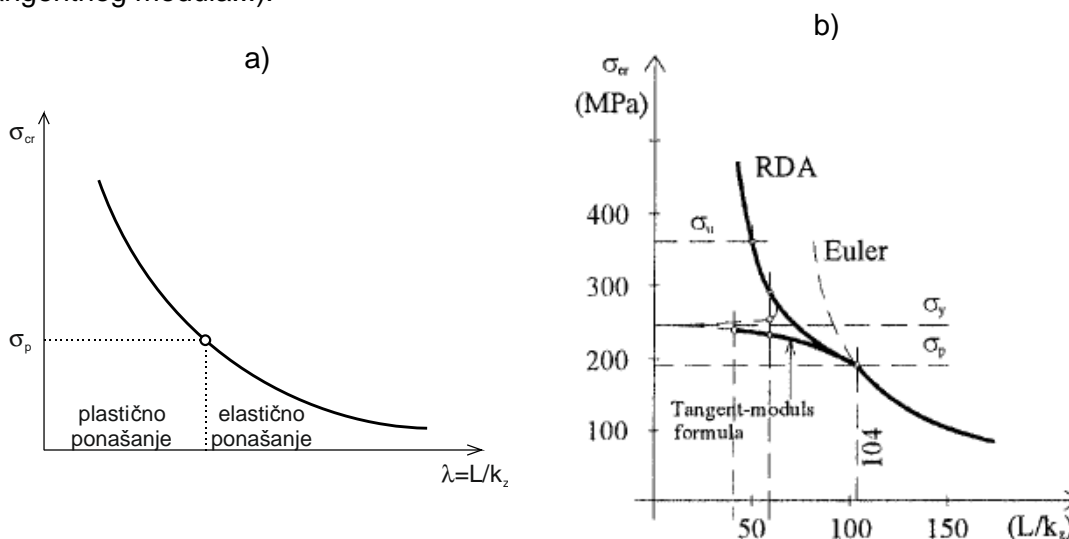
Prema izrazima (4.98) konstruišu se krive izvijanja, čija svaka tačka predstavlja karakterističnu nosivost stuba odgovarajuće vitkosti. Gornji izraz odgovara poznatoj Euler-ovoj krivi izvijanja obostrano zglobno oslonjenog štapa, koja se može primeniti samo u elastičnom području. Poznato je da za stubove čija je vitkost ispod određene granične vrednosti prestaje da važi Euler-ova hiperbola. Ovi stubovi imaju izražene viskoelastoplastične deformacije. Donji izraz u (4.98) predstavlja granični (kritični) napon po RDA za stubove čija je vitkost manja od granične.

Jasno je da se na osnovu (4.98) može odrediti granična vitkost štapa za koju se seku Euler-ova i RDA kriva kritičnog napona:

$$\left(\frac{L}{k_z}\right)_p = p^2 \frac{k_z^3}{I_z} \frac{1}{g_j(t_p, t_0)}. \quad (4.99)$$

Treba uočiti da se u preseku dveju krivih nalazi napon na granici proporcionalnosti  $s_p$  i njemu odgovarajući koeficijent tečenja  $j(t_p, t_0)$ . Na slici 4.14.a

je prikazana zavisnost graničnog napona od vitkosti stuba. U radu [41] su prikazana četiri primera određivanja kritičnog napona aksijalno napregnutih stubova, poznatih iz literature, prema Euler-ovoj krivi izvijanja i primenom RDA. Pokazano je da su rezultati dobijeni na osnovu RDA u dobroj saglasnosti sa drugim teorijskim pristupima (teorija tangentnog modula). Na slici 4.14.b je dat uporedni dijagram rezultata dobijenih primenom RDA i teorije tangentnog modula za jedan čelični stub analiziran u [41]. Na ovoj slici se može uočiti i granica između oblasti u kojoj važi Euler-ova hiperbola i oblasti manjih vitkosti, za koju se primenjuju drugi teorijski postupci (RDA, teorija tangentnog modula...).



Slika 4.14. a) - Zavisnost graničnog (kritičnog) napona od vitkosti stuba. b) - Uporedni dijagram rezultata teorije RDA i teorije tangentnog modula [47]

Eksperimentalno je utvrđeno da kod čelika Č.0361 i Č.0561 Euler-ova hiperbola prestaje da važi pri vitkosti štapa  $(L/k_z) \cong 103.9$  odnosno  $(L/k_z) \cong 84.8$ , pri čemu je  $s_p = 0.8s_v$ . Ovde je sa  $s_v$  označena granica gnječenja/razvlačenja čelika.

Na osnovu izloženog, izvodi se zaključak da se RDA može uspešno koristiti za određivanje graničnog napona vitkih stubova od čelika, drveta i betona, pod uslovom da su glavni parametri materijala (koeficijent tečenja, zapreminska težina i modul elastičnosti) tačno određeni.

U opisanom RDA modelu za predviđanje krivih izvijanja stubova zanemarena je činjenica da, po dostizanju napona proporcionalnosti ( $s_{cr} \geq s_p$ ), modul  $E_H(t)$  više nije konstanta, već se izjednačava sa  $E_R(t)$ , kao što se može videti sa slike 4.12 i iz (4.85). Sa povećanjem napona  $s(t)$  opada vrednost modula  $E_R(t)$ . Rezultati opisanog RDA metoda se mogu unaprediti korišćenjem dijagrama veze napona  $s(t)$  i modula  $E_R(t)$ , koji se takođe dobijaju primenom RDA. Postupak će ukratko biti objašnjen u daljem tekstu.

Smatraćemo da su parametri materijala (početni modul elastičnosti  $E_H$ , zapreminska težina materijala  $g$  i koeficijent tečenja u trenutku dostizanja granice proporcionalnosti  $j(t_p)$ ) poznati, kao i zakon i brzina nanošenja opterećenja. Neka je funkcija opterećivanja opisana sa:

$$s(t) = s_{cr} \sin(w_s t), \quad (4.100)$$

gde je  $s_{cr}$  granični napon određen prema ranije opisanom RDA modelu za određenu vitkost, dok je, prema [41]:

$$w_s = \frac{P}{2t_p}. \quad (4.101)$$

Uzimajući u obzir viskoelastične deformacije, RDA modul (4.78) postaje:

$$E_R(t) = \frac{\frac{1+d^2}{E_H} + \frac{1}{E_K^D(t)}}{\frac{1+d^2}{E_H^2} + \frac{1}{E_K^D(t)} \left( \frac{2}{E_H} + \frac{1}{E_K^D(t)} \right)}, \quad (4.102)$$

gde je

$$d = \frac{w_s}{w} = w_s T_K^D = \frac{P}{2t_p} T_K^D, \quad (4.103)$$

$$T_K^D = \sqrt{\frac{m}{k}} = L \sqrt{\frac{g}{E_H g}}, \quad (4.104)$$

dok se koeficijent tečenja u određenom trenutku vremena određuje u zavisnosti od usvojenog zakona tečenja. Za čelične elemente, ako usvojimo zakon tečenja (4.90), koeficijent tečenja možemo odrediti prema:

$$j(t) = E_H(t_0) a_0 s^{(a_1-1)} t^{a_2}, \quad (4.105)$$

pa je viskoelastični modul:

$$E_K^D(t) = \frac{E_H}{j(t)}. \quad (4.106)$$

Za element zadate vitkosti sada se može konstruisati kriva zavisnosti napona  $s(t)$  i modula  $E_R(t)$ , pri čemu se napon kreće u granicama od  $s(0) = 0$  do ranije određene kritične vrednosti  $s_{cr}$  za zadatu vitkost. Postupak korekcije graničnog napona za zadatu vitkost sprovodi se iterativno, tako što se za početnu vrednost graničnog napona, dobijenog po ranije opisanom RDA modelu, očitava odgovarajući modul  $E_R$ . Granični napon prve iteracije se određuje iz izraza:

$$s_{cr}^{RDA(1)} = E_R \frac{1}{\left( \frac{L}{k_z} \right) l_z k_z^3 \frac{1}{g j(t_p)}}. \quad (4.107)$$

Za ovako sračunat granični napon očitava se novi odgovarajući RDA modul  $E_R^{(1)}$ . Opšti izraz za granični napon  $i$ -te iteracije je:

$$s_{cr}^{RDA(i)} = E_R^{(i-1)} \frac{1}{\left(\frac{L}{k_z}\right) k_z^3 \frac{1}{l_z g_j(t_p)}}. \quad (4.108)$$

Iterativni postupak se dalje ponavlja do postizanja željene tačnosti.

#### 4.2.4.2. Primena RDA na modeliranje relaksacije napona (zamora)

Detaljna analiza ponašanja materijala i konstrukcija izloženih opterećenju čiji se vremenski tok može opisati harmonijskom funkcijom data je u radovima D. D. Milašinovića [40], [44], [45] i [42]. Na ovom mestu će samo ukratko biti prikazani rezultati analize vezani za dobijanje relaksacije napona, koja se istovremeno odvija sa puzanjem, koji će biti korišćeni za konstruisanje radnih dijagrama čelika i betona.

U poglavlju 4.2.3. su objašnjeni neki osnovni pojmovi vezani za harmonijsku varijaciju opterećenja (napona). Amplituda harmonijske deformacije i fazni ugao za koji deformacija kasni u odnosu na napon se, za slučaj napona datih sa (4.48), dobijaju u obliku (4.61).

Posmatračemo, za početak, slučaj viskoelastičnih deformacija, kada napon ne dostiže granicu tečenja. Dinamički viskoelastični modul već je opisan sa (4.92), koji, ako se usvoji  $e^{-t/T_R^D} \cong 0$ , može da se napiše u obliku (4.93). Unošenjem ovih vrednosti u (4.61) dobijamo amplitudu harmonijske viskoelastične deformacije i fazni ugao:

$$e_A = \frac{s_A}{E_H(t_0)} \sqrt{\frac{(1+j)^2 + d}{1+d^2}}, \quad (4.109)$$

$$\tan a = \frac{dj}{1+d^2+j},$$

gde  $d$  predstavlja odnos kružne frekvencije opterećenja i kružne frekvencije slobodnih neprigušenih vibracija (4.103).

RDA dinamički koeficijent predstavlja odnos između amplitude harmonijske deformacije (4.109) i deformacije usled konstantnog napona (4.57):

$$h = \frac{e_A}{e'(t)} = \frac{s_A}{s_0} \sqrt{\frac{(1+j)^2 + d}{1+d^2}} \frac{1}{1+j}. \quad (4.110)$$

Pri statičkom opterećivanju ( $d \rightarrow 0$ ) ili u slučaju elastičnog ponašanja materijala ( $j \rightarrow 0$ ) imamo specijalan slučaj:

$$h = \frac{s_A}{s_0}. \quad (4.111)$$

Prema [40], granica relaksacije napona (zamora) materijala izloženog harmonijskom opterećenju sa konstantnom amplitudom može da se napiše kao:

$$s_e = s_0 + s_A \sqrt{\frac{(1+j)^2 + d}{1+d^2}} \frac{1}{1+j}. \quad (4.112)$$

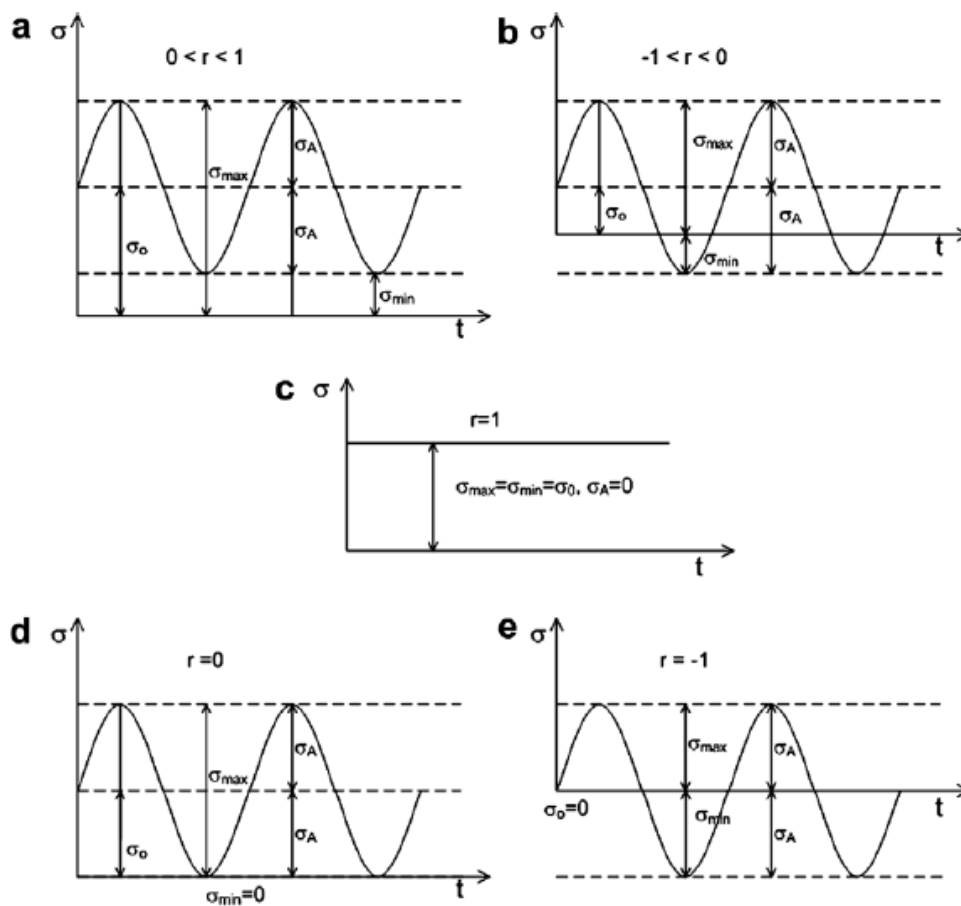
Uvrstimo li (4.50) i (4.51) u gornju jednačinu, dobijamo:

$$s_e(r) = \frac{1}{2} s_{\max} \left[ 1+r+(1-r) \sqrt{\frac{(1+j)^2 + d}{1+d^2}} \frac{1}{1+j} \right]. \quad (4.113)$$

Granične vrednosti relaksacije napona, za različite vrednosti koeficijenta asimetrije ciklusa  $r$ , pri  $d \rightarrow \infty$ , iznose:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} s_e(1) = s_{\max}, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} s_e(0) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{1+j} \right) s_{\max}, \quad \lim_{d \rightarrow \infty} s_e(-1) = \frac{1}{1+j} s_{\max}. \quad (4.114)$$

Oblici krive opterećenja, za različite vrednosti  $r$ , prikazani su na slici 4.15.



Slika 4.15. Različiti dijagrami harmonijski promenljivih napona u zavisnosti od koeficijenta asimetrije ciklusa  $r$  [42]

Uvešćemo novu RDA konstantu - strukturalni koeficijent tečenja  $j^*$ , koji odgovara koeficijentu tečenja  $j(t_p)$  u trenutku dostizanja granice proporcionalnosti  $s(t) = s_p$ . U svrhu njegovog određivanja posmatraćemo tanku dugu šipku čelične armature kružnog poprečnog preseka površine  $A$  (sl. 4.16). Kako napon proporcionalnosti predstavlja granicu do koje važi Euler-ova (elastična) teorija izvijanja, to dužinu šipke biramo tako da njena vitkost odgovara upravo graničnoj vitkosti  $I_p$ :

$$s_p = s_{cr} = \frac{E_H p^2}{\left(\frac{l_0}{k_z}\right)_p^2} = \frac{E_H p^2}{I_p^2} \quad (4.115)$$

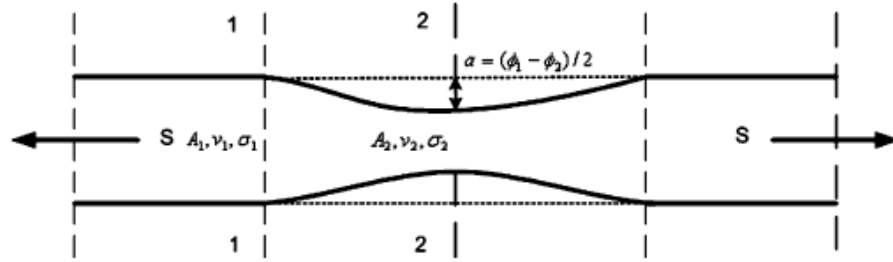
Eksperimentalno je dokazano da je granična vitkost za čelične stubove  $I_p : 100$ . Dužina šipke će biti  $l_0 = l_p = I_p k_z$ , gde je  $k_z$  poluprečnik inercije poprečnog preseka.

Naponu (4.115), u skladu sa gornjom definicijom strukturalnog koeficijenta tečenja, odgovaraju dinamički viskoelastični modul, prema (4.93):

$$E_K^D = \frac{E_H}{j^*} \quad (4.116)$$

i dinamički viskoplastični modul, prema (4.94):

$$H^D = j^* \frac{A g}{l_0} \quad (4.117)$$



Slika 4.16. Transfer energije kroz dugu šipku sa deonicom redukovanoг prečnika [40]

Tokom kratkog vremenskog intervala  $Dt$  fiktivni presek  $A_1$  će se pomeriti za malo rastojanje  $Dl_1$ , dok će se za isto vreme fiktivni presek  $A_2$  pomeriti za veće rastojanje  $Dl_2$  tako da je  $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2 = V$  fiktivna zapremina. Energija prolazi kroz fiktivnu zapreminu bez fizičkog transfera materijala od izvora bilo kojim poprečnim presekom šipke u vremenu  $Dt$ . Zbog toga je:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (4.118)$$

odakle dobijamo:

$$A_2 = A_1 \frac{v_1}{v_2} \quad \text{i} \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1. \quad (4.119)$$

Redukovana površina  $A_2$  može da se odredi primenom Bernoulli-jeve jednačine održanja energije:

$$s_1 + \frac{1}{2} r v_1^2 = s_2 + \frac{1}{2} r v_2^2 = s_2 + \frac{1}{2} r \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 v_1^2, \quad (4.120)$$

gde je  $s_1 = s_p$  gustina statičke energije, a  $r v_1^2 / 2$  gustina kinetičke energije. Ako u (4.120) stavimo  $v_1 = c$ , pri čemu je  $c$  dato izrazom (4.24), nalazimo:

$$A_2 = \frac{A_1}{\sqrt{\frac{2(s_1 - s_2)}{E_H} + 1}}. \quad (4.121)$$

$s_2$  predstavlja RDA relaksaciju napona (napon zamora) u simetričnom ciklusu (4.114):

$$s_2 = s_e (-1) = \frac{s_p}{1 + j^*}. \quad (4.122)$$

Izraz za redukovanu površinu  $A_2$  možemo napisati u obliku:

$$A_2 = \frac{A_1}{\sqrt{\frac{2s_p}{E_H} \left( \frac{j^*}{1 + j^*} \right) + 1}}. \quad (4.123)$$

Kako smo za maksimalni napon izabrali napon na granici proporcionalnosti, to ćemo se u daljim razmatranjima ograničiti na ponašanje tela kao idealno elastičnog, koje sledi Hooke-ov zakon. Kada se šipka aksijalno optereti, osim deformacije u pravcu naprežanja (aksijalna ili podužna dilatacija), javlja se i deformacija upravno na osu štapa (poprečna dilatacija). Odnos poprečne prema podužnoj dilataciji u elastičnoj oblasti, za slučaj jednoaksijalnog naprežanja, naziva se Poisson-ov koeficijent ( $n$ ). Eksperimentalno je pokazano da se dužina štapa izloženog jednoaksijalnom zatezanju povećava za veličinu  $Dl$ , uz istovremeno smanjenje širine za veličinu  $2a = f_1 - f_2$  (sl. 4.16). Podužna dilatacija može da se napiše u obliku:

$$e_a = \frac{s_p}{E_H}, \quad (4.124)$$

dok je poprečna dilatacija:

$$e_t = n e_a. \quad (4.125)$$

Poprečna dilatacija može da se prikaže i u funkciji promene prečnika šipke:

$$e_t = \frac{f_1 - f_2}{f_1}. \quad (4.126)$$

Na osnovu gornja tri izraza možemo pisati:

$$n = \frac{f_1 - f_2}{f_1} \frac{E_H}{s_p}. \quad (4.127)$$

Iz (4.123) možemo odrediti redukovani prečnik šipke:

$$f_2 = \frac{f_1}{\sqrt[4]{\frac{2s_p}{E_H} \left( \frac{j^*}{1+j^*} \right) + 1}}, \quad (4.128)$$

pa se Poisson-ov koeficijent može napisati u obliku:

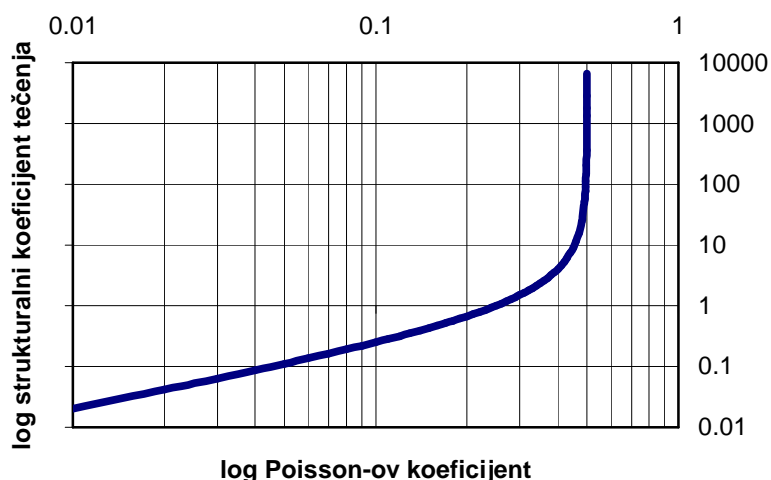
$$n = \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2s_p}{E_H} \left( \frac{j^*}{1+j^*} \right) + 1}} \right] \frac{E_H}{s_p}. \quad (4.129)$$

Na osnovu (4.129) možemo dobiti izraz za strukturalni koeficijent tečenja  $j^*$  u funkciji poznatih materijalnih konstanti  $E_H$  i  $n$ :

$$j^* = \frac{\left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{ns_p}{E_H}} \right)^4 - 1 \right] \frac{E_H}{2s_p}}{1 - \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{ns_p}{E_H}} \right)^4 - 1 \right] \frac{E_H}{2s_p}}. \quad (4.130)$$

Analizom gornjeg izraza dolazimo do zaključka da promena podužne dilatacije na granici proporcionalnosti ( $e_p = s_p/E_H$ ) vrlo malo utiče na promenu veličine strukturalnog koeficijenta tečenja. S druge strane, evidentan je značajan uticaj veličine Poisson-ovog koeficijenta, koji je, za usvojenu vrednost  $e_p = 0.001$ , prikazan na slici 4.17. Karakteristične vrednosti strukturalnog koeficijenta za čelik i beton, dobijene iz izraza (4.130) usvajanjem odgovarajućih vrednosti Poisson-ovog koeficijenta, iznose:

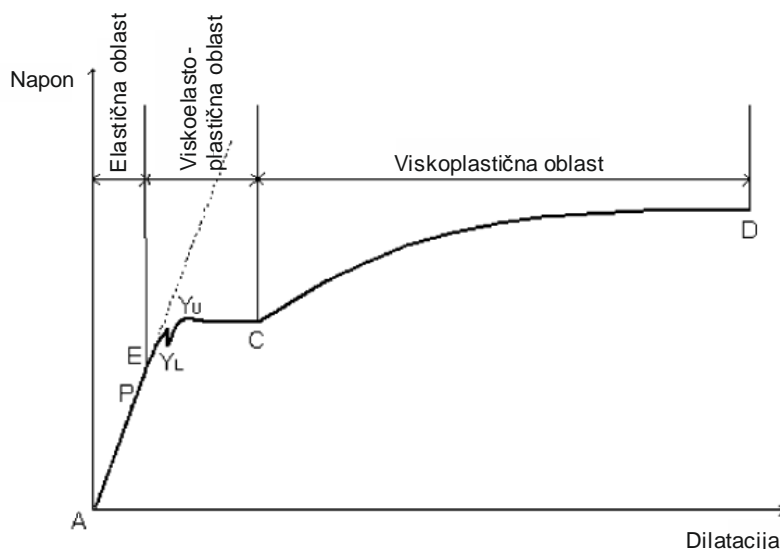
- za čelik ( $n = 1/3$ ):  $j^* = 2$
- za beton ( $n = 0.2$ ):  $j^* = 0.667$ .



Slika 4.17. Zavisnost strukturalnog koeficijenta tečenja od Poisson-ovog koeficijenta

#### 4.2.4.3. Primena RDA na modeliranje ponašanja metalnih šipki

Dijagram jednovremenih parova napon-dilatacija aksijalno napregnutih metalnih šipki može se dobiti eksperimentalnim ispitivanjem. U većini slučajeva ovaj dijagram ima oblik sličan prikazanom na sl. 4.18.



Slika 4.18. Dijagram jednovremenih parova napon-dilatacija [43]

Ovde se uočavaju tri karakteristične oblasti. U oblasti APE deformacija je elastična, pri čemu je veza napon-dilatacija linearna do tačke P (granica proporcionalnosti). Oblast  $EY_UY_LC$  je oblast viskoelastoplastičnog ponašanja, dok je viskoplastična oblast, sa pojavom redukcije poprečnog preseka, ograničena tačkama C i D. Dijagram prikazan na slici 4.18 može se dobiti i primenom iterativnog RDA postupka uz korišćenje poznatih parametara materijala. Postupak će biti prikazan u daljem tekstu.

#### Napon na granici proporcionalnosti

Ako se izolovana čelična šipka izloži velikom broju ciklusa zatezanja i pritiska pod naponom  $s_{\max} = s_p$  (aksijalni zamor), posle konačnog broja ovih promena napona primetiće se viskozno tečenje čelika a deformacija će kasniti za naponom. Ovo je trenutak pojave relaksacije napona (zamora).

Kada se šipka zategne, u materijalu se akumulira elastična potencijalna energija (sl. 4.19). Rad potreban za razvlačenje ili gnječenje šipke ne zavisi od težine same šipke. Zbog toga gravitacija ne figuriše u izrazu za elastičnu potencijalnu energiju  $U_1$ . Umesto toga, rad potreban za rastezanje ili gnječenje zavisi od elastičnosti modela:

$$U_1 = \frac{s_p^2}{2E_H} A l_0. \quad (4.131)$$

Posmatraćemo eliptičku petlju reološko-dinamičkog modela prikazanu na slici 4.19. Ovde je, prema [43]:

$$s''(t) = c \&(t) = c w_s e_A \cos(w_s t - a) \quad (4.132)$$

Pri jednom ciklusu promene napona, količina oslobođene viskoelastične energije (rad utrošen pri jednom ciklusu opterećenja koji se unutrašnjim trenjem pretvara u toplotu) jednaka je površini petlje:

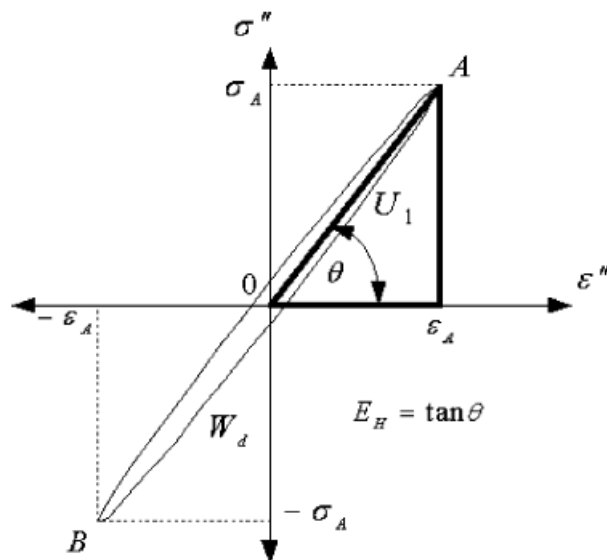
$$W_{d,ve} = p c w_s e_A^2 \left[ \frac{J}{m^2} \right]. \quad (4.133)$$

Ako u (4.133) unesemo cikličnu amplitudu deformacije prema izrazu (4.109), gde će biti  $s_A = s_{\max} = s_p$  i  $j = j^*$ , dinamičko vreme retardacije  $T_K^D = 1/w$  i kritično prigušenje:

$$c = 2kT_K^D = c_c, \quad (4.134)$$

količinu oslobođene viskoelastične energije dobijamo u obliku:

$$W_{d,ve}(r) = pk \frac{1}{E_H^2} \frac{(1-r)^2}{2} s_p^2 \frac{(1+j^*)^2 + d^2}{1+d^2} d. \quad (4.135)$$



Slika 4.19. Elastična potencijalna energija i disipacija histerezisne petlje kroz dijagram napon-dilatacija [43]

Površina kroz koju se energija prenosi je površina poprečnog preseka  $A$ , pa je disipacija energije data sa:

$$U_d = AW_{d,ve}. \quad (4.136)$$

U specijalnom slučaju, kada  $j^* \rightarrow 0$ , materijal se ponaša elastično, a količina oslobođene elastične energije, na osnovu (4.135), je:

$$W_{d,E}(r) = pk \frac{1}{E_H^2} \frac{(1-r)^2}{2} s_p^2 d. \quad (4.137)$$

Posledica prvog zakona termodinamike je da, kada se toplota pretvara u drugi oblik energije, ili kada se drugi oblici energije pretvaraju u toplotu, nema gubitaka energije, pa imamo:

$$U_2 - U_1 = Q - W, \quad (4.138)$$

gde je  $U_1 - U_2$  promena unutrašnje energije,  $Q$  je toplotna energija, a  $W$  potencijalna energija spoljašnjih sila. Proces u kojem se toplota ne dodaje niti oduzima od supstance naziva se *adijabatski proces*. U tom slučaju je  $Q=0$  i  $U_2=U_1-W$ . Ako dobro izolovan idealno elastični sistem izložimo cikličnom opterećenju, tako da nema ulaska niti izlaska toplote tokom procesa, rad spoljašnjih sila se izjednačava sa promenom unutrašnje energije.

Može se dokazati da ukupna potencijalna energija sistema  $P=U_2=U_1-W$  opada sa porastom temperature sistema. Kada se sva elastična potencijalna energija konvertuje kroz disipaciju histerezisne petlje, postaje:

$$U_d = U_1, \quad (4.139)$$

a relativna frekvencija  $d_e$  za teoretsku procenu veka trajanja usled zamora je:

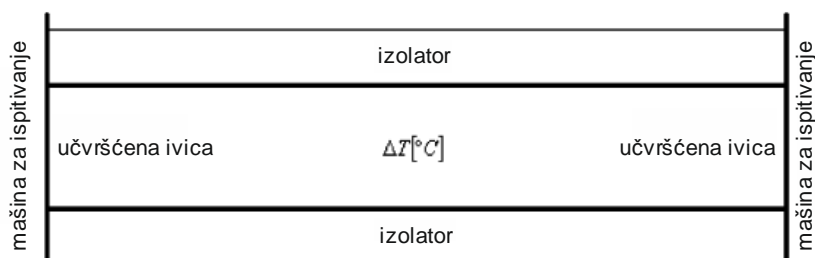


$$\frac{(1+j^*)^2 + d_e^2(r)}{1+d_e^2(r)} d_e(r) = U_1 \frac{2E_H^2}{Apk(1-r)^2 s_p^2} = \frac{l_0 E_H}{pk(1-r)^2}. \quad (4.140)$$

Broj ciklusa koji odgovara životnom veku usled zamora je:

$$N_e(r) = \frac{d_e(r)}{d_1}, \quad (4.141)$$

gde je  $d_1 = 2pT_K^D/t_p$  relativna frekvencija prvog ciklusa, a  $t_p$  vreme za koje se dostiže napon  $s_p$ .



Slika 4.20. Šematski prikaz šipke pri ispitivanju zamora

Ako se izolovana šipka sa učvršćenim krajevima izloži cikličnom adijabatskom procesu, dolazi do značajnog porasta njene temperature (sl. 4.20), pa je rad na termičkom širenju jednak:

$$W_T = \frac{E_H (a_T \Delta T)^2}{2} Al_0, \quad (4.142)$$

gde je  $a_T$  koeficijent linearnog termičkog širenja a  $\Delta T$  [°C] razlika između krajnje temperature i početne temperature uzorka. Kao što je ranije rečeno, elastična potencijalna energija se u potpunosti pretvara u rad na termičkom širenju:

$$U_d = W_T. \quad (4.143)$$

Razliku temperature šipke na kraju i na početku procesa možemo izraziti u obliku [43]:

$$\Delta T_{ve} = \frac{1}{a_T} \sqrt{\frac{1}{d_e(r)} \frac{(1+j^*)^2 + d^2}{1+d^2}} d \frac{s_p}{E_H}. \quad (4.144)$$

U idealno elastičnom stanju ( $j^* \rightarrow 0$ ) imamo:

$$\Delta T_E = \frac{1}{a_T} \sqrt{\frac{d}{d_e(r)}} \frac{s_p}{E_H}, \quad (4.145)$$

gde je  $d = d_1 N$  ( $N$  je broj ciklusa). Kada se dostigne zamor,  $d = d_e(r)$ , pa je:

$$\Delta T_E = \frac{1}{a_T} \frac{s_p}{E_H}. \quad (4.146)$$

Količina fiktivne toplote koja bi se u izotermalnom procesu morala dodati metalnoj šipki za simuliranje uočene promene temperature iznosi:

$$Q = mc\Delta T_E = rAl_0c\Delta T_E, \quad (4.147)$$

gde je  $c$  specifična toplota metala. Prema Hooke-ovom zakonu, unutar granica idealne elastičnosti dilatacija je direktno proporcionalna naponu. Zbog toga možemo formulisati prvi zakon termodinamike u sledećem obliku: Kada se sva elastična potencijalna energija u adijabatskom procesu, kroz disipaciju preko histerezisne petlje, utroši na promenu temperature ili kada se fiktivna toplota doda metalnoj šipki radi simuliranja uočene promene temperature, nema gubitaka energije. Odatle:

$$W_T = Q = \frac{E_H a_T^2 \Delta T_E^2}{2} A l_0 = r A l_0 c \Delta T_E \Rightarrow \Delta T_E = \frac{2rc}{E_H a_T^2}. \quad (4.148)$$

Unošenjem (4.148) u (4.146) dolazimo do izraza za napon na granici proporcionalnosti:

$$s_p = \frac{2rc}{a_T}, \quad (4.149)$$

obostrano ukleštene metalne šipke izložene procesu aksijalnog zamora. Ovaj napon je dobijen korišćenjem samo fizičkih karakteristika metala (specifična toplota, koeficijent linearnog termičkog širenja i gustina), te ne zavisi od dimenzija uzorka.

Dilatacija na granici proporcionalnosti je  $e_p = s_p / E_H$ .

**Prototip.** D. D. Milašinović je sproveo eksperimentalno ispitivanje čelične šipke na aksijalni zamor, koje je opisano u radu [40]. Kako se opisani model u ovom radu koristi kao prototip, to će neki od podataka iz ispitivanja biti i ovde prikazani.

Sproveden je eksperiment aksijalnog zamora na čeličnoj šipki sledećih geometrijskih karakteristika: prečnik  $f = 1.9$  cm,  $l_0 = 50$  cm. Konstante materijala su usvojene iz literature:  $E_H = 2.1 \times 10^5$  MPa, Poisson-ov koeficijent  $n = 1/3$ , gustina  $r = 7860$  kg/m<sup>3</sup>, specifična toplota  $c = 0.113$  kcal/(kg°C), koeficijent linearnog termičkog širenja  $a_T = 1.25 \times 10^{-5}$  1/°C. Šipka je termički izolovana i izložena cikličnom sinusoidalnom opterećenju simetričnog ciklusa:  $s_0 = 0$ ,  $s_A = s_p = 141$  MPa, frekvencije  $f = 20$  Hz.

Na osnovu merenih vrednosti temperature uzorka u određenim vremenskim intervalima - nakon određenog broja ciklusa, u radu [43] je pokazano da je elastična potencijalna energija jednaka radu na termičkom širenju, odnosno da tokom eksperimenta nije došlo do gubitaka energije. Zbog toga se prema (4.149) dobija napon na granici proporcionalnosti:

$$s_p = \frac{2rc}{a_T} = \frac{2 \cdot 7860 \cdot 0.113}{1.25 \times 10^{-5}} = 142\,108\,800 \text{ Pa} = 142 \text{ MPa}$$

Ovom naponu odgovara dilatacija:

$$e_p = \frac{s_p}{E_H} = \frac{142}{2.1 \times 10^5} = 0.000676.$$

### Napon na granici elastičnosti

U svrhu uspostavljanja veze između ponašanja prototipa opisanog u gornjem tekstu i realnih uzoraka, bilo je neophodno da se sprovede dimenzionalna analiza i definišu neki važni brojevi korišćenjem RDA. Ovo je urađeno u radu [43], a na ovom mestu će biti ukratko opisano.

U izrazu (4.36)

$$m = \frac{I_K I_N}{g}$$

$I$  je Trouton-ova viskoznost, koja predstavlja ekstenzionu viskoznost, pa se za Newton-ovu idealnu tečnost može uspostaviti veza između ekstenzione  $I$  i smičuće viskoznosti  $h$ :

$$I = 3h. \quad (4.150)$$

Gornja jednakost je poznata kao Trouton-ova formula. Proizvod mase tela i brzine kretanja se naziva impuls:  $m \cdot v$ . Viskoznost je transfer impulsa. Odatle:

$$I = \frac{mv}{A}, \quad (4.151)$$

gde je  $A$  površina kroz koju se vrši transfer.

Ako kvadrat gornjeg izraza podelimo sa proizvodom RDA koeficijenata viskoznosti dobijamo:

$$\frac{\left(\frac{mv}{A}\right)^2}{I_K I_N} = \frac{\left(\frac{rAl_0 v}{A}\right)^2}{I_K I_N} = \frac{r^2 l_0^2 v^2}{I_K I_N}. \quad (4.152)$$

Kvadratni koren ovog izraza

$$N_R^{RDA} = \frac{r l_0 v}{\sqrt{I_K I_N}}, \quad (4.153)$$

može se nazvati Reynolds-ovim brojem, koji je u mehanici fluida poznat kao

$$N_R = \frac{rv l_0}{h}. \quad (4.154)$$

Newton-ov drugi zakon kretanja može da se izrazi na različite načine. Ako koristimo RDA vezu (4.36), imamo:

$$m = \frac{I_K I_N}{g} = \frac{I_K I_N}{ra} \Rightarrow ma = F = \frac{I_K I_N}{r}. \quad (4.155)$$

Napon je:

$$s = \frac{f}{A} = \frac{I_K I_N}{Ar} = \frac{r^2 l_0^2 v^2}{Ar} = \frac{r l_0^2 v^2}{A}. \quad (4.156)$$

Deljenjem gornjeg izraza sa naponom dobijamo RDA Euler-ov broj:

$$N_E^{RDA} = \frac{r l_0^2 v^2}{sA}. \quad (4.157)$$

Ovaj broj je poznat u mehanici fluida i obliku:

$$N_E = \frac{rv^2}{p}, \quad (4.158)$$

gde je  $p$  pritisak. Elastična sila potrebna za razvlačenje Hooke-ove opruge je data izrazom:

$$F_E = k\Delta l, \quad (4.159)$$

gde je  $k$  aksijalna krutost:

$$k = \frac{E_H A}{l_0}. \quad (4.160)$$

Deljenjem unutrašnje sile  $F$  elastičnom silom  $F_E$  dobijamo RDA Cauchy-jev broj:

$$N_C^{RDA} = \frac{r l_0^2 v^2}{\frac{E_H A}{l_0} \Delta l} = \frac{rv^2}{E_H} \frac{l_0^3}{A \Delta l}, \quad (4.161)$$

koji je u mehanici fluida poznat kao

$$N_C = \frac{rv^2}{E_H}. \quad (4.162)$$

Kvadratni koren ovog broja je poznat kao Mach-ov broj

$$N_M = \frac{v}{\sqrt{\frac{E_H}{r}}}. \quad (4.163)$$

Deljenjem unutrašnje sile  $F$  gravitacionom silom  $F = mg = rAl_0 g$  dobijamo:

$$\frac{r l_0^2 v^2}{rAl_0 g} = \frac{v^2}{g} \frac{l_0}{A}. \quad (4.164)$$

Kvadratni koren gornjeg izraza može da se smatra RDA Froude-ovim brojem:

$$N_F^{RDA} = v \sqrt{\frac{l_0}{gA}}, \quad (4.165)$$

koji je u mehanici fluida poznat u obliku:

$$N_F = \frac{v}{\sqrt{l_0 g}}. \quad (4.166)$$

Smatraćemo, dalje, da će kriva napon-dilatacija biti linearna do napona na granici elastičnosti. Stoga napon na granici elastičnosti pritisnute obostrano zglobno vezane šipke možemo izraziti preko Euler-ove formule:

$$s_E = \frac{E_H p^2}{\left(\frac{l_0}{k_z}\right)_E^2}, \quad (4.167)$$

gde je  $(l_0/k_z)_E = I_E^*$  vitkost na granici elastičnosti,  $E$ . Na ovaj način napon na granici elastičnosti postaje zavisn i od dimenzija šipke (dužine i prečnika), a ne više samo od fizičkih karakteristika materijala.

Prototip. Geometrijske karakteristike prototipa su:

$$I_z = \frac{f^4 p}{64} = 0.6397 \text{ cm}^4; \quad A = \frac{f^2 p}{4} = 2.8353 \text{ cm}^2; \quad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = \frac{f}{4} = 0.475 \text{ cm};$$

$$\left(\frac{l_0}{k_z}\right)_E = \frac{4 \cdot 50}{1.9} = 105.26; \quad \frac{k_z^3}{I_z} = \frac{1}{fp} = 0.1675315$$

Vidi se da je vitkost elementa dobro izabrana, budući da, kao što je naveo D. D. Milašinović u [41], Euler-ova teorija ne važi za čelične šipke ovog kvaliteta (prema prEN 10113: Fe E275.  $s_Y = 275 \text{ N/mm}^2$ ;  $s_C = 390 \text{ N/mm}^2$ ) vitkosti manje od 104.

Napon i dilatacija na granici elastičnosti za prototip su:

$$s_E = \frac{2.1 \times 10^5 p^2}{105.26^2} = 187 \text{ MPa}, \quad e_E = \frac{s_E}{E_H} = \frac{187}{2.1 \times 10^5} = 0.000891.$$

Pretpostavljajući RDA sličnost metalnih šipki, napon i dilataciju na granici elastičnosti za realne modele možemo odrediti korišćenjem RDA Euler-ovog broja [43]. Usvajimo li za brzinu čestica  $v = s/\sqrt{E_H r}$ , dobijamo:

$$N_E^{RDA} = \frac{r l_0^2 v^2}{s A} = \frac{r l_0^2 s^2}{s A E_H A} = \frac{l_0^2 s}{E_H A}. \quad (4.168)$$

U tački proporcionalnosti,  $P$ , RDA sličnost metalnih šipki istog poprečnog preseka,  $A$ , se može izraziti kao:

$$N_E^{RDA} = \frac{l_0^2 s_p}{A E_H} = \frac{l_0^2}{A} e_p \Rightarrow \frac{l_{0,pr}^2}{A} e_{p,pr} = \frac{l_{0,tm}^2}{A} e_{p,tm} \Rightarrow l_{0,tm} = l_{0,pr} \sqrt{\frac{e_{p,pr}}{e_{p,tm}}}. \quad (4.169)$$

U slučaju šipki različitih poprečnih preseka gornji izraz postaje:

$$l_{0,tm} = l_{0,pr} \sqrt{\frac{A_{tm} e_{p,pr}}{A_{pr} e_{p,tm}}}, \quad (4.170)$$

gde su indeksom  $pr$  označene karakteristike prototipa, a indeksom  $tm$  karakteristike stvarnog modela. Na ovaj način je uspostavljena veza između prototipa i realnih modela.

**Određivanje strukturalnog (viskoelastičnog) koeficijenta tečenja metalnih šipki**

Stavimo li Euler-ov napon na granici elastičnosti u izraz za RDA Euler-ov broj, pretpostavljajući kružni poprečni presek šipke, prečnika  $f$ , dobijamo:

$$N_E^{RDA} = \frac{l_0^2 S_E}{A E_H} = \frac{l_0^2}{4} \frac{1}{f^2 p} \frac{E_H p^2}{E_H \left(\frac{4l_0}{f}\right)^2} = \frac{p}{4}. \quad (4.171)$$

RDA izraz za napon na granici elastičnosti je, prema (4.98):

$$S_E^{RDA} = \frac{E_H}{\frac{l_0}{k_z} \frac{k_z^3}{l_z} \frac{1}{g j^*}}, \quad (4.172)$$

gde je, za kružni poprečni presek,  $k_z^3/l_z = 1/(fp)$ . Unošenjem (4.172) u izraz za Euler-ov broj dobijamo:

$$N_E^{RDA} = \frac{l_0^2 S_E^{RDA}}{A E_H} = \frac{l_0^2}{4} \frac{1}{f^2 p} \frac{E_H g j^*}{E_H \frac{4l_0}{f} \frac{1}{fp}} = l_0 g j^*. \quad (4.173)$$

Poređenjem gornja dva izraza za Euler-ov broj, dolazimo do strukturalnog koeficijenta tečenja:

$$\frac{p}{4} = l_0 g j^* \Rightarrow j^* = \frac{p}{4 l_0 g}. \quad (4.174)$$

Na isti način se može odrediti strukturalni koeficijent tečenja modela kvadratnog poprečnog preseka, koji iznosi:

$$j^* = \frac{p^2}{12 l_0 g}. \quad (4.175)$$

Prema [43], u skladu sa definicijom strukturalnog koeficijenta tečenja, možemo odrediti viskoelastičnu deformaciju prema:

$$e_{ve} = j^* e_E. \quad (4.176)$$

**Viskoelastoplastično područje**

Realni deo kompleksnog modula (4.78) predstavlja meru disipacije mehaničke energije kroz viskoelastoplastično tečenje

$$E_R(t, t_0) = \frac{\frac{1+d^2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^{D}(t, t_0)}}{\frac{1+d^2}{E_H^2(t_0)} + \left( \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^{D}(t, t_0)} \right) \left( \frac{2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^{D}(t, t_0)} \right)}.$$

U specijalnom slučaju, kada  $d \rightarrow 0$ , nastupa statičko opterećenje, pa je RDA modul:

$$E_R = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} + \frac{1}{H'}}. \quad (4.177)$$

Kao što je već rečeno, u slučaju niskog nivoa opterećenja većina materijala se nalazi u području viskoelastičnosti ( $H' \rightarrow \infty$ ) sa RDA modulom

$$E_R = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K}}, \quad (4.178)$$

gde je  $E_K$ , prema (4.93):

$$E_K = \frac{E_H}{j^*}. \quad (4.179)$$

Sa sračunatom prvom vrednošću  $E_R$  možemo odrediti odgovarajući prvi nagib plastične deformacije:

$$H'(e_p) = \frac{ds}{de_p} = \frac{ds}{de - de_E} = \frac{E_R}{1 - \frac{E_R}{E_H}}. \quad (4.180)$$

Nakon dostizanja napona na granici tečenja  $s_Y$ , proces deformacije prelazi u viskoelastoplastičnu oblast sa RDA modulom prema (4.177), koji se može odrediti korišćenjem  $H'$  prema (4.180). Ovde se bavimo proračunom  $E_R$  i  $H'$  koji se sistematski ponavlja.

Prva vrednost RDA modula  $E_R$  je:

$$E_R^{(1)} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K}} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{j^*}{E_H}} = \frac{E_H}{1+j^*}. \quad (4.181)$$

Prvi odnos modula je:

$$j_Y^{(1)} = \frac{E_H}{E_R^{(1)}} = \frac{e_Y^{(1)}}{e_p} = 1+j^*, \quad (4.182)$$

gde je prva ukupna dilatacija:

$$e_Y^{(1)} = (1+j^*)e_p. \quad (4.183)$$

$e_p = s_p/E_H$  je dilatacija na granici proporcionalnosti. Veličina napona na granici tečenja može da se odredi korišćenjem RDA:

$$s_Y = s_Y^{RDA} = \frac{E_H}{\frac{l_0}{k_z} \frac{k_z^3}{l_z} \frac{1}{g j_Y^{(1)}}} = s_E \frac{j_Y^{(1)}}{j^*} = s_E \frac{1+j^*}{j^*}. \quad (4.184)$$

Veza  $j^*(n)$ , data sa (4.130), uspostavlja novi odnos između napona na granici tečenja i Poisson-ovog koeficijenta. Odavde se može zaključiti da veličina napona na granici tečenja zavisi od veličine napona na granici elastičnosti i od Poisson-ovog koeficijenta. Za slučaj kada je  $n = 0.5$  (deformacija bez promene zapremine) naponi  $s_Y$  i  $s_E$  su jednaki.

Odgovarajući (prvi) nagib plastične deformacije je:

$$H^{(1)} = \frac{E_R^{(1)}}{1 - \frac{E_R^{(1)}}{E_H}} = \frac{\frac{E_H}{1+j^*}}{1 - \frac{1}{1+j^*}} = \frac{E_H}{j^*}. \quad (4.185)$$

Donja granica tečenja može da se odredi iz RDA uslova tečenja, koji se zasniva na pretpostavci plastičnosti:

$$Y_p^{(1)} = Y_L = s_Y + H^{(1)}e_p^{(1)}, \quad (4.186)$$

gde je  $e_p^{(1)}$  prva plastična dilatacija

$$e_p^{(1)} = \frac{e_{vp}^{(1)}}{j_Y^{(1)}} = \frac{e_{vp}^{(1)}}{1+j^*}. \quad (4.187)$$

$e_{vp}^{(1)}$  je prva viskoplastična dilatacija, koja može da se odredi iz prve ukupne dilatacije prema:

$$e_{vp}^{(1)} = e_Y^{(1)} - e_E - e_{ve} = (1+j^*)e_p - (1+j^*)e_E = (1+j^*)(e_p - e_E). \quad (4.188)$$

Na osnovu ovoga je

$$Y_p^{(1)} = Y_L = s_Y + \frac{E_H}{j^*} (e_p - e_E). \quad (4.189)$$

Kod duktilnih materijala, kao što su metali, dilatacija na granici elastičnosti  $e_E$  je veća od dilatacije na granici proporcionalnosti  $e_p$ , zbog čega se formira područje materijalne nestabilnosti pri prelasku sa gornje na donju granicu tečenja.

Brzina konvergencije napona  $Y_p$  u ovom iterativnom postupku zavisi od fizičkih karakteristika materijala i dimenzija šipke. Postupak određivanja ostalih nivoa napona za plastično tečenje  $1 < i < n$  se nastavlja sve dok veličina greške vezane za nivo napona ne postane manja od neke unapred određene vrednosti:

$$E_R^{(i)} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} + \frac{1}{H^{(i-1)}}} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{j^*}{E_H} + \frac{(i-1)j^*}{E_H}} = \frac{E_H}{1 + ij^*},$$

$$j_Y^{(i)} = \frac{E_H}{E_R^{(i)}} = \frac{e_Y^{(i)}}{e_p} = 1 + ij^*,$$

$$e_Y^{(i)} = (1 + ij^*) e_p,$$

$$H^{(i)} = \frac{E_R^{(i)}}{1 - \frac{E_R^{(i)}}{E_H}} = \frac{\frac{E_H}{1 + ij^*}}{1 - \frac{1}{1 + ij^*}} = \frac{E_H}{ij^*}, \quad (4.190)$$

$$e_{vp}^{(i)} = e_Y^{(i)} - e_E - e_{ve} = (1 + ij^*) e_p - (1 + j^*) e_E,$$

$$e_p^{(i)} = \frac{e_{vp}^{(i)}}{j_Y^{(i)}} = e_p - \frac{1 + j^*}{1 + ij^*} e_E,$$

$$Y_p^{(i)} = s_Y + H^{(i)} e_p^{(i)} = s_Y + \frac{E_H}{ij^*} \left( e_p - \frac{1 + j^*}{1 + ij^*} e_E \right).$$

Poslednji izraz u (4.190), ako unesemo  $s_Y$  iz (4.184) i stavimo  $e_p = s_p/E_H$ ,  $e_E = s_E/E_H$ , možemo napisati u obliku:

$$s_{\max}^{(i)} = Y_p^{(i)} = \frac{s_p (1 + ij^*) + s_E (1 + j^*) [i(1 + ij^*) - 1]}{ij^* (1 + ij^*)} \quad (4.191)$$

**Prototip.** Strukturalni koeficijent tečenja može da se odredi iz izraza (4.130):

$$j^* = \frac{\left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{0.001}{3}} \right)^4 - 1 \right] \frac{1}{2 \cdot 0.001}}{1 - \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{0.001}{3}} \right)^4 - 1 \right] \frac{1}{2 \cdot 0.001}} = 2.$$

Istu vrednost dobijamo i korišćenjem izraza (4.174):

$$j^* = \frac{P}{4l_0g} = \frac{P}{4 \cdot 50 \cdot 7.86 \times 10^{-3}} = 2.$$

Napon na granici tečenja i donja granica tečenja se mogu sračunati iz prve iteracije gore opisanog iterativnog postupka:

$$E_R^{(1)} = \frac{E_H}{1+j^*} = \frac{E_H}{3},$$

$$j_Y^{(1)} = 1+j^* = 3,$$

$$e_Y^{(1)} = (1+j^*)e_p = 3 \cdot 0.000677 = 0.002029,$$

$$s_Y = s_Y^{RDA} = \frac{E_H}{\frac{l_0}{k_z} \frac{k_z^3}{l_z} \frac{1}{g j_Y^{(1)}}} = \frac{2.1 \times 10^5 \cdot 7.86 \times 10^{-3} \cdot 3}{105.26 \cdot 0.1675315} = 280.66 \text{ MPa},$$

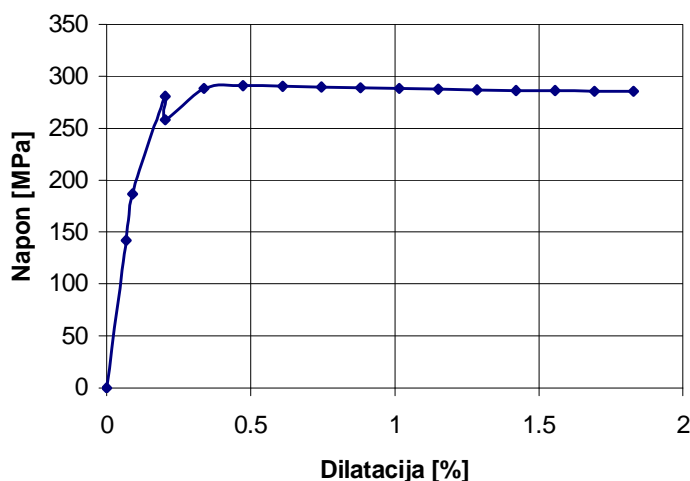
$$e_{vp}^{(1)} = (1+j^*)(e_p - e_E) = 3 \cdot (e_p - e_E),$$

$$e_p^{(1)} = \frac{e_{vp}^{(1)}}{1+j^*} = e_p - e_E = 0.000677 - 0.000891,$$

$$H^{(1)} = \frac{E_H}{j^*} = \frac{E_H}{2},$$

$$Y_L = s_Y + \frac{E_H}{j^*}(e_p - e_E) = 280.66 + \frac{2.1 \times 10^5}{2}(0.000677 - 0.000891) = 258.17 \text{ MPa}.$$

Rezultati za sledeće iteracije dati su u radu [43]. Na slici 4.21 je prikazan prosečan RDA dijagram napon-dilatacija za analizirani prototip.



Slika 4.21. Prosečan RDA dijagram napon-dilatacija čelične šipke kao prototipa

### Viskoplastično područje

Složen problem interpretacije uticaja viskoplastičnih deformacija na nivo napona, sa pojavom deformacijskog ojačanja, u analizi odgovora metalne šipke izložene aksijalnom zatezanju, rešavan je primenom opisanog RDA postupka u radu [43]. Nivo napona u oblasti deformacijskog ojačanja može da se odredi prema:

$$Y_{vp} = s_Y + H' e_{vp}. \quad (4.192)$$

Postupak se sastoji u sledećem: za prvu sračunatu vrednost RDA modula  $E_R^{(1)}$  može se sračunati prvi nivo napona u oblasti deformacijskog ojačanja  $Y_{vp}^{(1)}$ , a zatim novi RDA modul. Postupak određivanja narednih nivoa napona za  $1 < j < m$  se nastavlja sve dok veličina greške vezane za nivo napona ne postane manja od neke unapred određene vrednosti:



$$\begin{aligned}
E_R^{(1)} &= \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} + \frac{1}{H'}} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{j^*}{E_H} + \frac{j^*}{E_H}} = \frac{E_H}{1+2j^*}, \\
j_Y^{(1)} &= \frac{E_H}{E_R^{(1)}} = 1+2j^*, \\
e_Y^{(1)} &= j_Y^{(1)} e_p = (1+2j^*) e_p, \\
e_{vp}^{(1)} &= (1+2j^*) e_p - (1+j^*) e_E, \\
H^{(1)} &= \frac{E_R^{(1)}}{1 - \frac{E_R^{(1)}}{E_H}} = \frac{\frac{E_H}{1+2j^*}}{1 - \frac{1}{1+2j^*}} = \frac{E_H}{2j^*}, \\
Y_{vp}^{(1)} &= s_Y + H^{(1)} e_{vp}^{(1)} = s_Y + \frac{E_H}{2j^*} [(1+2j^*) e_p - (1+j^*) e_E].
\end{aligned} \tag{4.193}$$

Za  $j$ -tu iteraciju imamo:

$$\begin{aligned}
E_R^{(j)} &= \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} + \frac{1}{H^{(j-1)}}} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{j^*}{E_H} + \frac{j^*}{E_H}} = \frac{E_H}{1+(1+j)j^*}, \\
j_Y^{(j)} &= \frac{E_H}{E_R^{(j)}} = 1+(1+j)j^*, \\
e_Y^{(j)} &= j_Y^{(j)} e_p = [1+(1+j)j^*] e_p, \\
e_{vp}^{(j)} &= [1+(1+j)j^*] e_p - (1+j^*) e_E, \\
H^{(j)} &= \frac{E_R^{(j)}}{1 - \frac{E_R^{(j)}}{E_H}} = \frac{\frac{E_H}{1+(1+j)j^*}}{1 - \frac{1}{1+(1+j)j^*}} = \frac{E_H}{(j+1)j^*}, \\
Y_{vp}^{(j)} &= s_Y + H^{(j)} e_{vp}^{(j)} = s_Y + \frac{E_H}{(j+1)j^*} \{ [1+(1+j)j^*] e_p - (1+j^*) e_E \}.
\end{aligned} \tag{4.194}$$

**Prototip.** Za prvu iteraciju imamo:

$$\begin{aligned}
E_R^{(1)} &= \frac{E_H}{1+2j^*} = \frac{E_H}{5}, \\
j_Y^{(1)} &= 1+2j^* = 5, \\
e_Y^{(1)} &= (1+2j^*) e_p = 5 \cdot e_p, \\
e_{vp}^{(1)} &= (1+2j^*) e_p - (1+j^*) e_E = 5 \cdot 0.000677 - 3 \cdot 0.000891 = 0.000707, \\
H^{(1)} &= \frac{E_H}{2j^*} = \frac{E_H}{4}, \\
Y_{vp}^{(1)} &= s_Y + H^{(1)} e_{vp}^{(1)} = 280.66 + \frac{2.1 \times 10^5}{4} 0.000707 = 317.99 \text{ MPa}.
\end{aligned}$$

Rezultati za ostale iteracije prikazani su u radu [43]. Na slici 4.22 je prikazan prosečan RDA dijagram napon-dilatacija za analizirani prototip, kroz sva tri područja deformacije. Za određivanje ukupnih dilatacija za fazu deformacijskog ojačanja vodilo

se, pri tome, računa i o redukciji poprečnog preseka, prema postupku koji će dalje biti objašnjen.

U početnoj fazi ispitivanja aksijalnim zatezanjem, poprečni presek šipke,  $A$ , ostaje gotovo konstantan. Međutim, sa ulaskom u oblast deformacijskog ojačanja, dolazi do njegove primetne redukcije, koja je u početku ujednačena po celoj dužini uzorka da bi se, po prelasku faze deformacijskog ojačanja, lokalizovala. Nakon formiranja suženja poprečnog preseka ('vrata') relativno izduženje takođe postaje zavisno od dimenzija šipke (dužine i prečnika), te više nije karakteristika samo materijala.

Ukupna dilatacija u viskoelastoplastičnoj oblasti je, kao što je već rečeno, data sa:

$$e_Y^{(i)} = j_Y^{(i)} e_p. \quad (4.195)$$

Ako poznamo poslednju sračunatu vrednost  $e_Y^{(n)}$ , u mogućnosti smo da sračunamo promenu veličine izduženja šipke usled zatezanja za oblast deformacijskog ojačanja kao:

$$e_Y^{*(j)} = e_Y^{(n)} + \frac{A}{A_{red}} e_Y^{(j)}. \quad (4.196)$$

$A_{red}$  je redukovana površina poprečnog preseka na najužem delu 'vrata'. Kao što je već ranije pokazano (4.120) ova površina može da se odredi primenom Bernoulli-jeve jednačine održanja energije, uzimajući u obzir minimalnu brzinu deformacije tečenja  $s_p/I_K$ :

$$s_1 + \frac{1}{2} r A^* l_0 \alpha^2 \frac{1}{l_0} = s_2 + \frac{1}{2} r A^* l_0 \alpha^2 \frac{1}{l_0} = s_2 + \frac{1}{2} r A^* \left( \frac{A}{A_{red}} \right)^2 \alpha^2, \quad (4.197)$$

gde je  $s_1 = s_p$  primenjen napon na granici proporcionalnosti,  $\alpha = \frac{s_1}{\sqrt{E_H r}} \frac{j^*}{l_0}$  je početna

brzina deformacije,  $A^* = 1$  je jedinična površina poprečnog preseka a  $s_2 = s_p / (1 + j^*)$  je RDA granica zamora u simetričnom ciklusu. Odavde dobijamo:

$$\frac{A}{A_{red}} = \sqrt{\frac{2E_H l_0^2}{s_p j^*} \frac{1}{1+j^*}} + 1. \quad (4.198)$$

**Prototip.** Napon na granici proporcionalnosti je ranije određen i iznosi  $s_p = 142$  MPa, a poslednja sračunata vrednost viskoelastoplastične dilatacije je  $e_Y^{13} = 0.018258$  pa dobijamo:

$$\frac{A}{A_{red}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.1 \times 10^5 \cdot 0.5^2}{142 \cdot 2} \frac{1}{1+2}} + 1 = 11.15$$

i

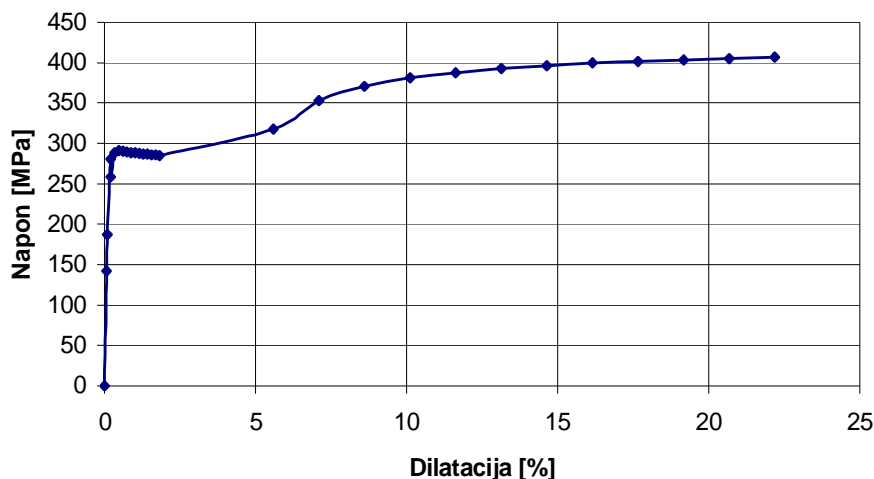
$$e_Y^{*(j)} = e_Y^{(13)} + \frac{A}{A_{red}} e_Y^{(j)} = e_Y^{(13)} + 11.15 \cdot e_Y^{(j)}.$$

Sada možemo odrediti sledeće:

$$e_Y^{(1)} = (1 + 2 \cdot j^*) e_p = 5 \cdot e_p,$$

$$e_Y^{*(j)} = 0.018258 + 11.15 \cdot 5 \cdot 0.000677 = 0.056001.$$

Rezultati ostalih iteracija prikazani su na slici 4.22.



Slika 4.22. Prosečan RDA dijagram napon-dilatacija čelične šipke kao prototipa

#### 4.2.4.4. Primena RDA na modeliranje ponašanja betona

Posmatračemo betonski element izložen aksijalnom opterećenju koje izaziva vremenski promenljiv napon  $s(t)$ . Za opisivanje reoloških osobina betona korišćemo složeni reološki model D. D. Milašinovića. Veza napona i dilatacija ovoga modela, za slučaj harmonijske varijacije napona, opisana je diferencijalnom jednačinom (4.52), čije je opšte rešenje dato sa (4.53). Kako bi se ovo rešenje moglo primeniti na beton, neophodno je uspostaviti vezu između nepoznatih parametara reološkog modela i poznatih fizičkih veličina za konkretan model.

Ako funkciju napona izrazimo u obliku (4.48):

$$s(t) = s_0 + s_A \sin(w_s t),$$

odgovor betonskog elementa možemo analizirati posebno za slučaj konstantnog napona  $s(t) = s_0 = \text{const.}$  i slučaj ciklične varijacije napona  $s(t) = s_A \sin(w_s t)$ .

#### Slučaj konstantnog opterećenja

Ukupna dilatacija reološkog modela D. D. Milašinovića, izloženog konstantnom opterećenju  $s_0$  od vremena  $t_0$  do  $t$ , opisana je izrazom (4.18), koji predstavlja opšte rešenje diferencijalne jednačine (4.52). Korišćenjem RDA veza (4.31) i (4.32), ovo rešenje se može napisati u obliku:

$$e_c(t, t_0) = \frac{s_0}{E_H(t_0)} + \frac{s_0}{E_K(t, t_0)} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{T_K(t_0)}} \right) + \frac{s_0 - s_Y}{H'(t, t_0)} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{T^*(t_0)}} \right), \quad (4.199)$$

odnosno:

$$e_c(t, t_0) = s_0 l_c(t, t_0), \quad (4.200)$$

gde je  $l_c(t, t_0)$  kompliansa (funkcija tečenja), koja predstavlja dilataciju u vremenu  $t$  izazvanu jediničnim konstantnim naponom nanetim u trenutku  $t_0$ . Korišćenjem (4.88), možemo pisati:

$$l_c(t, t_0) = \frac{1+j(t, t_0)}{E_H(t_0)} + \frac{s_0 - s_Y}{s_0 H'(t, t_0)} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{T^*(t_0)}} \right). \quad (4.201)$$

Uvedemo li viskoplastični koeficijent tečenja:

$$j^*(t, t_0) = \frac{e_{vp}(t, t_0)}{e_{el}(t_0)} = \frac{s_0 - s_Y}{s_0 H'(t, t_0)} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{T^*(t_0)}} \right), \quad (4.202)$$

funkcija tečenja pri konstantnom naponu postaje:

$$l_c(t, t_0) = \frac{1}{E_H(t_0)} [1 + j(t, t_0) + j^*(t, t_0)]. \quad (4.203)$$

U gornjim izrazima figurišu tri nepoznate veličine koje je potrebno definisati za konkretan materijal -  $j(t, t_0)$ ,  $H'(t, t_0)$  i  $T^*(t_0)$ . Koeficijent tečenja može da se usvoji prema nekom od važećih standarda, npr. Evrokodu 2 [20].

Veza između viskoplastičnog  $H'(t, t_0)$  i viskoelastičnog modula  $E_K(t, t_0)$  je uspostavljena jednačinom (4.36):

$$H'(t, t_0) = \frac{kg}{E_K(t, t_0)}.$$

S druge strane, viskoelastični modul zavisi od vremena retardacije  $T_K(t_0)$  i koeficijenta tečenja prema (4.88):

$$E_K(t, t_0) = \frac{E_H(t_0)}{j(t, t_0)} \left( 1 - e^{-\frac{t-t_0}{T_K(t_0)}} \right). \quad (4.204)$$

Vreme retardacije u viskoplastičnoj oblasti može da se izrazi u obliku (4.34):

$$T^*(t_0) = \frac{1}{T_K(t_0) w^2}, \quad (4.205)$$

gde je  $w$  opisano izrazom (4.42), u funkciji krutosti  $k$  i mase  $m$  elementa.

Ovim su preostale nepoznate veličine u jednačini (4.200) izražene preko vremena retardacije, pa se njihovo određivanje svodi na određivanje samo jednog nepoznatog parametra:  $T_K(t_0)$ .

Usvojicemo koeficijent tečenja prema Evrokodu 2 [20]:

$$j(t, t_0) = j_0 b_c(t, t_0), \quad (4.206)$$

gde je

$j_0$  - nominalna vrednost koeficijenta tečenja:

$$j_0 = j_{RH} b(f_{cm}) b(t_0), \quad (4.207)$$

$j_{RH}$  - koeficijent kojim se uzima u obzir uticaj relativne vlažnosti na nominalnu vrednost koeficijenta tečenja:

$$j_{RH} = 1 + \frac{1 - RH}{0.1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \quad \text{za } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa}$$

$$j_{RH} = \left[ 1 + \frac{1 - RH}{0.1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} a_1 \right] a_2 \quad \text{za } f_{cm} > 35 \text{ MPa}, \quad (4.208)$$

$RH$  - relativna vlažnost sredine u %,

$b(f_{cm})$  - koeficijent kojim se uzima u obzir uticaj čvrstoće betona na nominalnu vrednost koeficijenta tečenja:

$$b(f_{cm}) = \frac{16.8}{\sqrt{f_{cm}}}, \quad (4.209)$$

$f_{cm}$  - srednja vrednost čvrstoće betona pri pritisku u starosti od 28 dana,

$b(t_0)$  - koeficijent kojim se uzima u obzir uticaj starosti betona u trenutku opterećenja na vrednost nominalnog koeficijenta tečenja:

$$b(t_0) = \frac{1}{(0.1 + t_0^{0.20})}, \quad (4.210)$$

$h_0$  - nominalna veličina elementa u mm:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u}, \quad (4.211)$$

$A_c$  - površina poprečnog preseka elementa,

$u$  - obim elementa u kontaktu sa atmosferom,

$b_c(t, t_0)$  - koeficijent kojim se definiše dijagram tečenja u zavisnosti od vremena posle opterećenja:

$$b_c(t, t_0) = \left[ \frac{t - t_0}{b_H + (t - t_0)} \right]^{0.3}, \quad (4.212)$$

$t$  - starost betona u posmatranom trenutku vremena u danima,

$t_0$  - starost betona u trenutku opterećenja u danima,

$(t-t_0)$  - stvarno trajanje opterećenja u danima,

$b_H$  - koeficijent koji zavisi od relativne vlažnosti ( $RH$  u %) i nominalne veličine elementa ( $h_0$  u mm):

$$b_H = 1.5 \left[ 1 + (0.012 \cdot RH)^{18} \right] h_0 + 250 \leq 1500 \quad \text{za } f_{cm} \leq 35, \quad (4.213)$$

$$b_H = 1.5 \left[ 1 + (0.012 \cdot RH)^{18} \right] h_0 + 250 a_3 \leq 1500 a_3 \quad \text{za } f_{cm} > 35,$$

$a_{1/2/3}$  - koeficijenti kojima se uzima u obzir uticaj čvrstoće betona:

$$a_1 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.7} \quad a_2 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.2} \quad a_3 = \left[ \frac{35}{f_{cm}} \right]^{0.5}. \quad (4.214)$$

Vreme retardacije  $T_K(t_0)$  možemo odrediti ako usvojimo sledeći odnos [46]:

$$\frac{j(t, t_0)}{j(t_\infty, t_0)} = 1 - e^{-\frac{t-t_0}{T_K(t_0)}}, \quad (4.215)$$

te ispišemo izraz za koeficijent tečenja u vremenu  $t = T_K(t_0) + t_0$ :

$$j(T_K(t_0) + t_0, t_0) = j(t_\infty, t_0) (1 - e^{-1}) = 0.63212 j(t_\infty, t_0). \quad (4.216)$$

Korišćenjem izraza (4.206) možemo pisati:

$$j(T_K(t_0) + t_0, t_0) = j_0 b_c(T_K(t_0) + t_0, t_0) = j_0 \left[ \frac{T_K(t_0)}{b_H + T_K(t_0)} \right]^{0.3}, \quad (4.217)$$

$$j(t_\infty, t_0) = j_0 b_c(t_\infty, t_0) = j_0 \left[ \frac{t_\infty - t_0}{b_H + (t_\infty - t_0)} \right]^{0.3}.$$

Uvrstimo li gornje izraze u (4.216), vreme retardacije postaje:

$$T_K(t_0) = \frac{0.21677(t_\infty - t_0) b_H}{b_H + 0.78323(t_\infty - t_0)}. \quad (4.218)$$

### Slučaj cikličnog opterećenja

Slučaj cikličnog opterećenja razmatran je u odeljku 4.2.3. Ako se u izraze za RDA modul (4.74) i RDA kompliansu (4.75) unese dinamičko vreme retardacije (4.76):

$$T_K^D = \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{w},$$

RDA modul postaje (4.78):

$$E_R(t, t_0) = \frac{\frac{1+d^2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^{D'}(t, t_0)}}{\frac{1+d^2}{E_H^2(t_0)} + \left( \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^{D'}(t, t_0)} \right) \left( \frac{2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^{D'}(t, t_0)} \right)},$$

a dinamička kompliansa:

$$I_R(t, t_0) = \frac{1}{E_H(t_0)} + \left( \frac{1}{E_K^D(t, t_0)} + \frac{1}{H^{D'}(t, t_0)} \right) \frac{1}{1+d^2}, \quad (4.219)$$

gde je (4.93), (4.94), (4.79):

$$E_K^D(t, t_0) = \frac{E_H(t_0)}{j(t, t_0)},$$

$$H^{D'}(t, t_0) = \frac{kg}{E_K^D(t, t_0)} = \frac{kg}{E_H(t_0)} j(t, t_0),$$

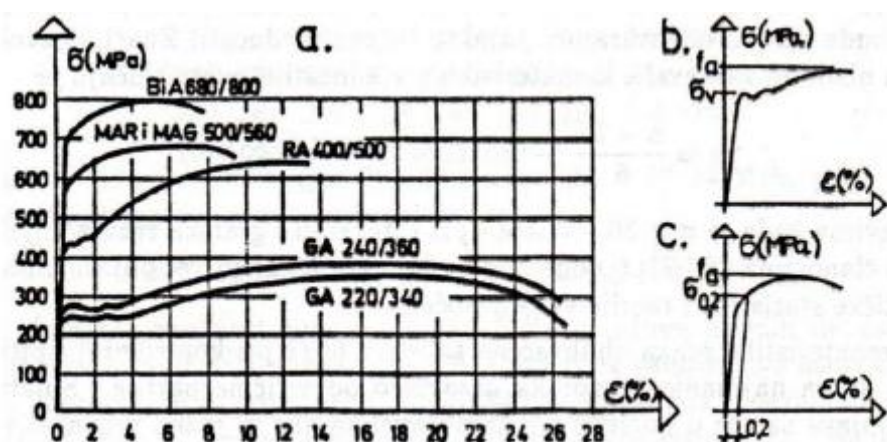
$$d = \frac{w_s}{w} = w_s T_K^D.$$

Ukupna dilatacija aksijalno pritisnutog betonskog stuba pod harmonijski promenljivim naponom opisanom funkcijom (4.48), može da se napiše kao zbir dilatacija usled konstantne i usled ciklične komponente napona:

$$e(t, t_0) = s_{0C} l_C(t, t_0) + s_A I_R(t, t_0) \sin(w_s t). \quad (4.220)$$

### 4.3. Radni dijagram čelika (RDC)

Za potrebe proračuna poprečnih preseka armiranobetonske poliedarske ljuske (njihovo dimenzionisanje i određivanje granične nosivosti), koji će biti sproveden na konkretnom primeru u narednom poglavlju, neophodno je definisati računске veze napon - dilatacija (radne dijagrame) za armaturni čelik i beton. Budući da će ovaj proračun biti urađen na bazi dva standarda - PBAB'87 i Evrokod 2 (EC 2), te da će ovako dobijeni rezultati biti poređeni sa rezultatima iz analize preseka korišćenjem radnih dijagrama prema RDA, to će na ovom mestu biti prikazani oblici računskih dijagrama materijala prema oba standarda, te izvedeni radni dijagrami na osnovu primene RDA.



Slika 4.23. Radni dijagrami betonskih čelika: a) - Radni dijagrami svih betonskih čelika koji se primenjuju prema PBAB'87; b) - Čelik sa izraženom granicom razvlačenja; c) - Čelik sa konvencionalno utvrđenom granicom razvlačenja [24]

S obzirom na razlike u označavanju osnovnih veličina, u tabeli 4.2 su uporedo prikazane oznake bitnih veličina po EC 2, PBAB'87 i RDA.

Tabela 4.2. Uporedni prikaz oznaka veličina prema EC 2, PBAB'87 i RDA

Značenje	Oznaka prema:		
	EC 2	PBA'87	RDA
površina poprečnog preseka betona	$A_c$	$A_b$	$A_c$
površina poprečnog preseka armature	$A_s$	$A_a$	$A_s$
sekantni modul elastičnosti betona	$E_{cm}$	$E_b$	$E_{Hc}$
proračunska (početna) vrednost modula elastičnosti za armaturu	$E_s$	$E_a$	$E_{Hs}$
ukupna visina poprečnog preseka	$h$	$d$	-
statička visina poprečnog preseka	$d$	$h$	-
računska čvrstoća betona pri pritisku	$f_{cd}$	$f_B$	$f_{cd}$
karakteristična čvrstoća betona pri pritisku	$f_{ck}$	$f_{bk}$	$f_{ck}$
srednja vrednost čvrstoće betona pri pritisku	$f_{cm}$	$f_{bm}$	$f_{cm}$
karakteristična vrednost granice razvlačenja (tečenja) armature	$f_{0,2k}$	$\sigma_{0,2k}$	-
čvrstoća pri zatezanju armature	$f_t$	$f_a$	$f_t$
granica razvlačenja (tečenja) armature	$f_y$	$\sigma_v$	$\sigma_Y$
računska granica razvlačenja armature	$f_{yd}$	$\sigma_v$	-
poluprečnik inercije	$i$	$i$	$k_z$
debljina elementa	$t$	$d$	$t$
parcijalni koeficijent za beton	$\gamma_c$	-	-
parcijalni koeficijent za stalna dejstva	$\gamma_G$	$\gamma_{ug}$	-
parcijalni koeficijent za promenljiva dejstva	$\gamma_Q$	$\gamma_{up}$	-
parcijalni koeficijent za čelik za armaturu	$\gamma_S$	-	-
dilatacija betona	$\epsilon_c$	$\epsilon_b$	$\epsilon_c$
dilatacija betona pri najvećem naponu pritiska	$\epsilon_{c1}, \epsilon_{c2}$	2 ‰	$e_{c1}^{RDA}, e_{c2}^{RDA}$
granična dilatacija betona pri pritisku	$\epsilon_{cu1}, \epsilon_{cu2}$	$\epsilon_B$	$e_{cu1}^{RDA}, e_{cu2}^{RDA}$
dilatacija armature	$\epsilon_s$	$\epsilon_a$	$\epsilon_s$
Poisson-ov koeficijent	$\nu$	$\nu$	$\nu$
koeficijent armiranja	$\rho_1$	$\mu$	-

#### 4.3.1. RDČ prema PBAB'87

U Pravilniku za beton i armirani beton (PBAB'87) je usvojena proračunska zavisnost između napona i dilatacija čelika za armiranje u obliku bilinearnog dijagrama (sl. 4.24). Izrazi za napon, koji važe kako za aksijalni pritisak tako i za zatezanje, su dati sa:

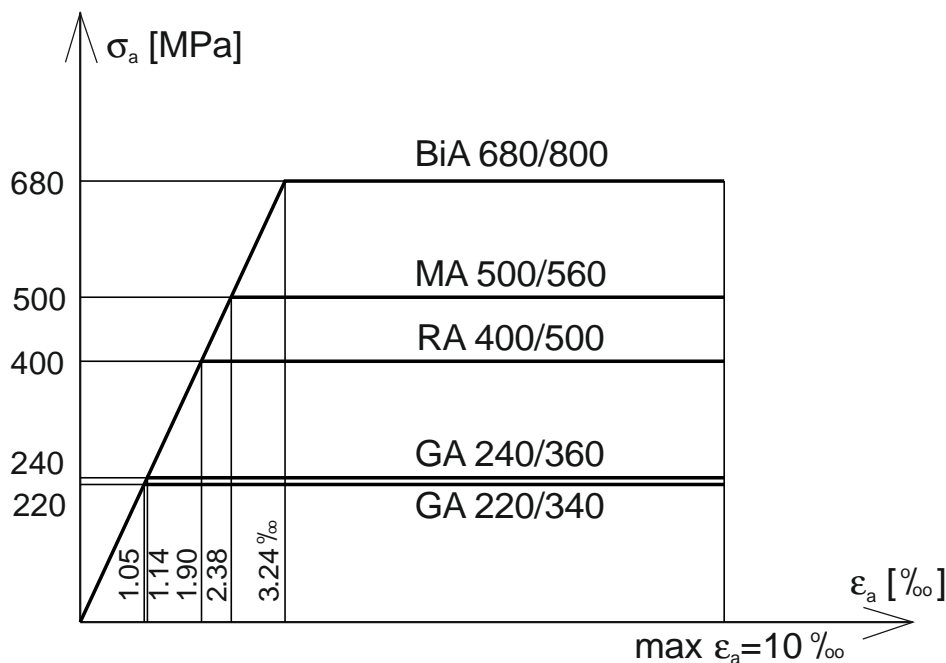
$$s_a = E_a \cdot e_a \quad \text{za } |e_a| \leq \frac{s_v}{E_a}, \quad (4.221)$$

$$s_a = s_v \quad \text{za } \frac{s_v}{E_a} \leq |e_a| \leq 10\text{‰}$$

Karakteristične vrednosti granice razvlačenja i modula elastičnosti, u zavisnosti od vrste čelika, prikazane su u tabeli 4.3.

Tabela 4.3. Granice razvlačenja čelika koji se koristi prema PBAB'87

	GA 220/340	GA 240/360	RA 400/500	MA 500/560	BiA 680/800
$\sigma_v$ [MPa]	220	240	400	500	680
$E_a$ [GPa]	200 - 210			190 - 200	

Slika 4.24. Računski (idealizovani) dijagrami  $s_a$ - $e_a$  za betonske čelike prema PBAB'87

#### 4.3.2. RDČ prema EN 1992-1-1: 2004 Evrokod 2

Evrokod 2 važi za rebrastu armaturu i armaturu koja se može zavarivati, a pravila za proračun i konstrukcijsku dispoziciju detalja, sadržana u ovom standardu, važe za propisani opseg granice razvlačenja čelika  $f_{yk}=400$  do 600MPa. Ipak, za potrebe poređenja rezultata proračuna prema PBAB'87 i EC 2, područje primene ovog drugog se često proširuje i na čelike koji su predviđeni za upotrebu samo prema PBAB'87.

EC 2 nudi dva moguća oblika proračunskih dijagrama napon-dilatacija za armaturni čelik (sl.4.25):

a) Dijagram sa gornjom granom u nagibu, sa ograničenjem dilatacije na vrednost  $e_{ud}$  i maksimalnim naponom  $kf_{yk}/g_s$  pri graničnoj dilataciji  $e_{uk}$ , gde je  $k = (f_t/f_y)_k$  (indeks  $k$  označava karakteristične vrednosti). Vrednost računске dilatacije  $e_{ud}$  se daje Nacionalnim aneksima, a preporučena vrednost je  $e_{ud} = 0.9e_{uk}$ . Napon se može izraziti u obliku:

$$s_s = E_s \cdot e_s \quad \text{za } |e_s| \leq \frac{f_{yd}}{E_s},$$

$$s_s = f_{yd} + \frac{f_{yd}(k-1)}{e_s - \frac{f_{yd}}{E_s}} \quad \text{za } \frac{f_{yd}}{E_s} \leq |e_s| \leq e_{ud}, \quad (4.222)$$

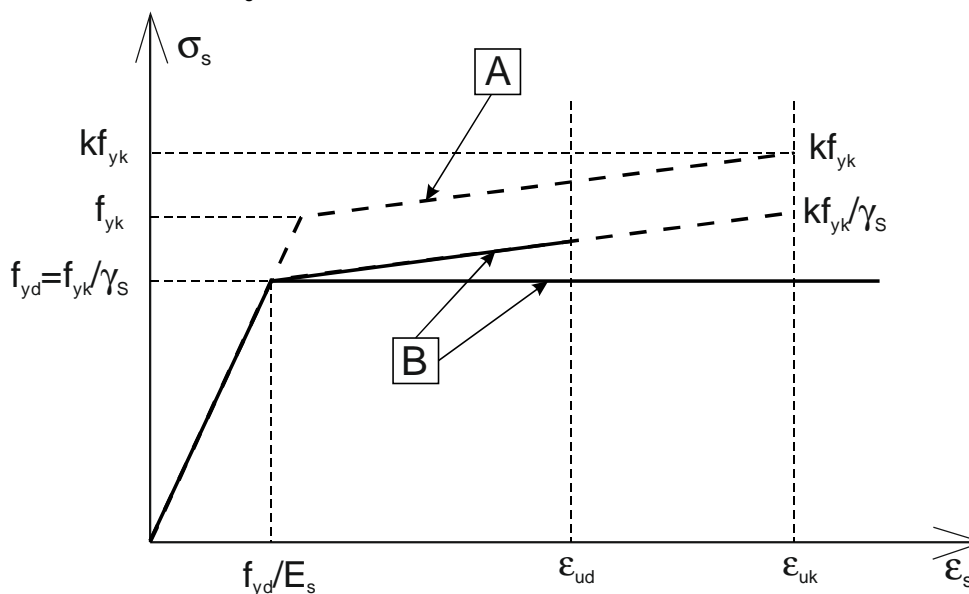


gde je  $f_{yd} = \frac{f_{yk}}{g_s}$ . Vrednosti parcijalnog koeficijenta  $g_s$ , u zavisnosti od proračunske situacije, su date u tabeli 2.1N Evrokoda 2 [20]. Za stalne i prolazne proračunske kombinacije je  $g_s = 1.15$ .

b) Dijagram sa horizontalnom gornjom granom, bez ograničenja dilatacije:

$$s_s = E_s \cdot e_s \quad \text{za } |e_s| \leq \frac{f_{yd}}{E_s},$$

$$s_s = f_{yd} \quad \text{za } \frac{f_{yd}}{E_s} \leq |e_s|.$$
(4.223)



Slika 4.25. Idealizovani (A) i računski (B) dijagrami  $s_s$ - $e_s$  za betonski čelik prema EC 2 (za zatezanje i za pritisak)

Minimalne vrednosti koeficijenta  $k = (f_t/f_y)_k$  i karakteristične dilatacije pri maksimalnoj sili  $e_{uk}$  date su u Aneksu C Evrokoda 2 [20], u zavisnosti od vrste i klase armature. Ove veličine su propisane radi obezbeđenja adekvatne duktilnosti primenjene armature.

Za proračunsku vrednost modula elastičnosti ovaj standard preporučuje  $E_s = 200 \text{ GPa}$ .

#### 4.3.3. RDC primenom RDA

U delu 4.2.4.3. je prikazan postupak dobijanja radnog dijagrama čelika primenom RDA. Preduslov za direktnu primenu ovog postupka na realne čelike jeste poznavanje nekoliko fizičkih veličina za dati materijal: specifične toplote  $c$ , koeficijenta linearnog termičkog širenja  $\alpha_T$ , gustine  $r$ , Poisson-ovog koeficijenta  $\nu$  i modula elastičnosti  $E_H$ , koje se određuju eksperimentalnim putem.

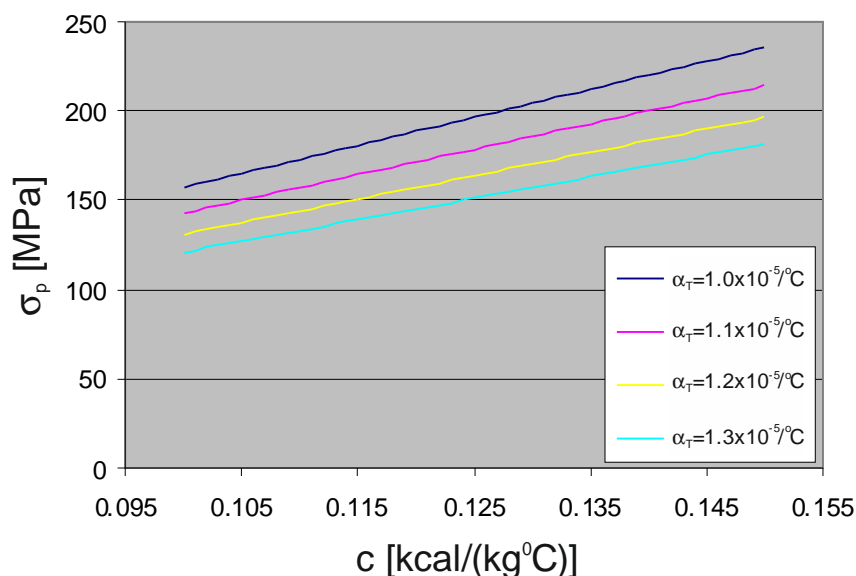
U odgovarajućim pravilnicima i standardima se preporučuju proračunske vrednosti samo za neke od veličina potrebnih za primenu RDA. Njihov paralelni prikaz prema PBAB'87 i EC 2 je dat u tabeli 4.4.

Tabela 4.4. Karakteristike betonskih čelika, potrebne za primenu RDA, prema PBAB'87 i EC 2

Standard	$E_H$ [GPa]	$r$ [kg/m <sup>3</sup> ]
PBAB'87	190-210	-
EC 2	200	7850

Veličine koje ovim nisu obuhvaćene (specifična toplota  $c$  i koeficijent linearnog termičkog širenja  $a_T$ ), se moraju usvojiti na neki drugi način. Prema podacima u dostupnoj literaturi [73], koeficijent linearnog termičkog širenja  $a_T$  za čelik se kreće u granicama  $a_T = (10 - 13) \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ . Specifična toplota čelika se, najčešće, kreće u granicama  $c = (0.1 - 0.12) \text{ kcal}/(\text{kg}^\circ\text{C})$  [74], mada ima izvora prema kojima ona dostiže vrednost i do  $c = 0.15 \text{ kcal}/(\text{kg}^\circ\text{C})$  [75].

Prema RDA, napon na granici proporcionalnosti je linearna funkcija od  $c$  i  $a_T$  (4.149). Dijagram zavisnosti ovog napona od specifične toplote, za različite vrednosti koeficijenta  $a_T$ , prikazan je na slici 4.26.

Slika 4.26. Zavisnost napona na granici proporcionalnosti  $s_p$  od specifične toplote  $c$ 

Za uobičajene vrednosti specifične toplote  $c = (0.1 - 0.12) \text{ kcal}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ , napon  $s_p$  se kreće u granicama od 120.92MPa do 176.06MPa, zavisno od usvojene veličine koeficijenta  $a_T$ . Ako se za specifičnu toplotu usvoji maksimalna vrednost  $c = 0.15 \text{ kcal}/(\text{kg}^\circ\text{C})$ , najveći napon  $s_p$  dostiže veličinu od 235.80MPa, gotovo dvostruko veću od najmanje vrednosti. Izaberemo li neku srednju vrednost  $c = 0.115 \text{ kcal}/(\text{kg}^\circ\text{C})$  i  $a_T = 12 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ , dobićemo napon na granici proporcionalnosti  $s_p = 150.65 \text{ MPa}$ .

Iz gornje analize je jasno da se, bez tačnih podataka o veličini specifične toplote i koeficijenta linearnog termičkog širenja, napon na granici proporcionalnosti po RDA ne može odrediti sa zadovoljavajućom tačnošću. Kako se, primenom RDA, dilatacije pri višim nivoima napona određuju u funkciji dilatacija na granici proporcionalnosti, to se ni ove veličine ne mogu pouzdano odrediti primenom gore opisanog pristupka.

Zbog svega navedenog, RDA postupak za dobijanje RDC, opisan u delu 4.2.4.3, se preporučuje samo u slučajevima kada postoje pouzdani podaci o veličini specifične toplote i koeficijenta linearnog termičkog širenja za primenjenu vrstu čelika (dobijeni eksperimentalnim ispitivanjem).

U okviru ovog istraživanja RDA postupak je prilagođen tako da ga je moguće primeniti i za dobijanje RDC u slučajevima kada se raspolaže samo podacima o nazivnoj granici razvlačenja čelika (sadržanoj u njegovoj oznaci - videti tabelu 4.3) i nazivnoj granici kidanja, što je uobičajena situacija u projektantskoj praksi. Postupak se sprovodi kroz nekoliko koraka:

1. Usvajanje modula elastičnosti čelika prema odgovarajućem standardu. Za računsku granicu tečenja izabranog čelika usvaja se njegova nazivna granica razvlačenja. Tako se, npr., za GA 240/360 usvaja  $s_Y = 240$  MPa, dok je za B500B računsa granica tečenja  $s_Y = 500$  MPa.

2. Poisson-ov koeficijent za čelik, prema literaturi, iznosi  $n = 1/3$ . Strukturalni koeficijent tečenja se proračunava prema izrazu (4.130):

$$j^* = \frac{\left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{n s_p}{E_H}} \right)^4 - 1 \right] \frac{E_H}{2 s_p}}{1 - \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{n s_p}{E_H}} \right)^4 - 1 \right] \frac{E_H}{2 s_p}}.$$

Veličina odnosa  $s_p/E_H$  neznatno utiče na veličinu  $j^*$ , pa se može usvojiti vrednost  $s_p/E_H = e_p = 0.001$ . Na ovaj način se, nezavisno od vrste čelika, dobija strukturalni koeficijent tečenja  $j^* = 2$ .

3. Napon na granici elastičnosti se određuje na osnovu izraza (4.184):

$$s_E = s_Y \frac{j^*}{1 + j^*}. \quad (4.224)$$

Odgovarajuća dilatacija je:

$$e_E = \frac{s_E}{E_H}. \quad (4.225)$$

4. Napon na granici elastičnosti se može izraziti i u funkciji vitkosti (Euler-ov kritični napon) (4.167), odakle sračunavamo vitkost fiktivnog uzorka:

$$I = \sqrt{\frac{E_H p^2}{s_E}} = I_{tm}. \quad (4.226)$$

5. Između prototipa, koji je ranije prikazan, i posmatranog fiktivnog uzorka postoji veza (4.170). Za uzorke kružnog poprečnog preseka ova veza se može napisati i u obliku:

$$l_{0,tm} = l_{0,pr} \sqrt{\frac{A_{tm} e_{p,pr}}{A_{pr} e_{p,tm}}} = l_{0,pr} \sqrt{\frac{f_{tm}^2 p}{4} \frac{e_{p,pr}}{e_{p,tm}}} = l_{0,pr} \frac{f_{tm}}{f_{pr}} \sqrt{\frac{e_{p,pr}}{e_{p,tm}}}. \quad (4.227)$$

Kako je

$$I = \frac{l_0}{k_z} = \frac{l_0}{\frac{f}{4}} = \frac{4l_0}{f}, \quad (4.228)$$

to izraz (4.227) možemo napisati u obliku:

$$I_{tm}^2 e_{p,tm} = I_{pr}^2 e_{p,pr}, \quad (4.229)$$

odakle je:

$$e_{p,tm} = e_{p,pr} \frac{I_{pr}^2}{I_{tm}^2} = e_p, \quad (4.230)$$

$$s_p = E_H e_p.$$

6. Određivanje jednovremenih parova napon-dilatacija za viskoelastoplastičnu i viskoplastičnu oblast se svodi na primenu iterativnih postupaka opisanih u odeljku 4.2.4.3. Dilatacija na granici tečenja se određuje kao dilatacija prve iteracije iterativnog postupka za viskoelastoplastičnu oblast, (4.183):

$$e_Y^{(1)} = (1 + j^*) e_p.$$

Ovoj dilataciji odgovaraju dve vrednosti napona - gornja ( $s_Y$ ) i donja ( $Y_L$ ) granica tečenja. Donja granica tečenja je, prema izrazu (4.189)

$$Y_p^{(1)} = Y_L = s_Y + \frac{E_H}{j^*} (e_p - e_E)$$

Za praktičnu primenu RDC-a je pogodno da se ovaj korak izostavi, pa se iterativni postupak u viskoelastoplastičnoj oblasti može nastaviti sa  $i=2$ , prema (4.190):

$$E_R^{(i)} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} + \frac{1}{H^{(i-1)}}} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{j^*}{E_H} + \frac{(i-1)j^*}{E_H}} = \frac{E_H}{1 + ij^*},$$

$$j_Y^{(i)} = \frac{E_H}{E_R^{(i)}} = \frac{e_Y^{(i)}}{e_p} = 1 + ij^*,$$

$$e_Y^{(i)} = (1 + ij^*) e_p,$$

$$H^{(i)} = \frac{E_R^{(i)}}{1 - \frac{E_R^{(i)}}{E_H}} = \frac{\frac{E_H}{1 + ij^*}}{1 - \frac{1}{1 + ij^*}} = \frac{E_H}{ij^*},$$

$$e_{vp}^{(i)} = e_Y^{(i)} - e_E - e_{ve} = (1 + ij^*) e_p - (1 + j^*) e_E,$$

$$e_p^{(i)} = \frac{e_{vp}^{(i)}}{j_Y^{(i)}} = e_p - \frac{1 + j^*}{1 + ij^*} e_E,$$

$$Y_p^{(i)} = s_Y + H^{(i)} e_p^{(i)} = s_Y + \frac{E_H}{ij^*} \left( e_p - \frac{1 + j^*}{1 + ij^*} e_E \right).$$

Postupak se nastavlja sve dok veličina greške vezane za nivo napona ne postane manja od neke unapred određene vrednosti. Po završetku iterativnog postupka u viskoelastoplastičnoj oblasti sledi iterativni postupak određivanja parova napon-dilatacija u viskoplastičnoj oblasti, prema (4.194):

$$E_R^{(j)} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{1}{E_K} + \frac{1}{H^{(j-1)}}} = \frac{1}{\frac{1}{E_H} + \frac{j^*}{E_H} + \frac{jj^*}{E_H}} = \frac{E_H}{1 + (1 + j)j^*},$$

$$j_Y^{(j)} = \frac{E_H}{E_R^{(j)}} = 1 + (1 + j)j^*,$$

$$e_Y^{(j)} = j_Y^{(j)} e_p = [1 + (1+j)j^*] e_p,$$

$$e_{vp}^{(j)} = [1 + (1+j)j^*] e_p - (1+j^*) e_E,$$

$$H^{(j)} = \frac{E_R^{(j)}}{1 - \frac{E_R^{(j)}}{E_H}} = \frac{\frac{E_H}{1 + (j+1)j^*}}{1 - \frac{1}{1 + (j+1)j^*}} = \frac{E_H}{(j+1)j^*},$$

$$Y_{vp}^{(j)} = s_Y + H^{(j)} e_{vp}^{(j)} = s_Y + \frac{E_H}{(j+1)j^*} \{ [1 + (1+j)j^*] e_p - (1+j^*) e_E \}.$$

U ovoj oblasti dolazi do primetne redukcije poprečnog preseka uzorka, pa se njen uticaj na veličinu dilatacija više ne može zanemariti. Odnos početne i redukovane površine poprečnog preseka dat je izrazom (4.198):

$$\frac{A}{A_{red}} = \sqrt{\frac{2E_H l_0^2}{s_p j^*} \frac{1}{1+j^*}} + 1,$$

gde je  $l_0$  dužina fiktivnog uzorka, određena iz

$$l_0 = l_{0,tm} = l_{tm} k_z. \quad (4.231)$$

Ukupna dilatacija  $j$ -te iteracije u viskoplastičnoj oblasti može se dobiti iz izraza (4.196):

$$e_Y^{*(j)} = e_Y^{(n)} + \frac{A}{A_{red}} e_Y^{(j)},$$

gde  $e_Y^{(n)}$  predstavlja poslednju sračunatu vrednost dilatacije u viskoelastoplastičnoj oblasti. I ovaj postupak se nastavlja sve dok veličina greške vezane za nivo napona ne postane manja od neke unapred određene vrednosti.

Oblik radnog dijagrama čelika, dobijenog primenom RDA postupka, zavisi i od izbora granice između viskoelastoplastične (VEP) i viskoplastične (VP) oblasti, koja je određena poslednjom iteracijom postupka u VEP oblasti. Odabir poslednje iteracije je stvar procene korisnika, koja treba da se zasniva na poznavanju oblika stvarnog dijagrama napon-dilatacija za odabrani čelik.

**Primer.** Primena prilagođenog RDA postupka biće prikazana kroz primer određivanja radnog dijagrama čelika RA 400/500, za šipku prečnika  $f10$ . Geometrijske karakteristike preseka su sledeće:

$$A = \frac{f^2 p}{4} = 0.7854 \text{ cm}^2, \quad k_z = \frac{f}{4} = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ cm}, \quad I_z = \frac{f^4 p}{64} = 0.0491 \text{ cm}^4.$$

Modul elastičnosti čelika je  $E_H = 210 \text{ GPa}$ , napon na granici razvlačenja  $s_Y = s_v = 400 \text{ MPa}$ , Poisson-ov koeficijent  $n = 1/3$ . Strukturalni koeficijent tečenja, za usvojeno  $s_p/E_H = e_p = 0.001$ , iznosi:

$$j^* = \frac{\left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{0.001}{3}} \right)^4 - 1 \right] \frac{1}{2 \cdot 0.001}}{1 - \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{0.001}{3}} \right)^4 - 1 \right] \frac{1}{2 \cdot 0.001}} = 2.$$

Napon i dilatacija na granici elastičnosti su:

$$s_E = s_Y \frac{j^*}{1+j^*} = 400 \cdot \frac{2}{1+2} = 266.67 \text{ MPa}, \quad e_E = \frac{266.67}{210000} = 0.00127.$$

Vitkost fiktivnog uzorka je:

$$I_{tm} = \sqrt{\frac{210000 \cdot p^2}{266.67}} = 88.161,$$

pa je, korišćenjem rezultata ispitivanja prototipa, prikazanih u odeljku 4.2.4.3,

$$e_p = e_{p,tm} = e_{p,pr} \frac{I_{pr}^2}{I_{tm}^2} = 0.000677 \cdot \frac{105.26^2}{88.161^2} = 0.000965.$$

Ako ponovo sračunamo strukturalni koeficijent tečenja, uz korišćenje dilatacije  $e_p = 0.000965$ , dobijamo istu vrednost kao ranije ( $j^* = 2$ ).

Napon na granici proporcionalnosti je

$$s_p = E_H e_p = 210000 \cdot 0.000965 = 202.67 \text{ MPa}.$$

Dilataciju na granici tečenja ćemo sračunati prema:

$$e_Y^{(1)} = (1+j^*) e_p = (1+2) \cdot 0.000965 = 0.002895.$$

Donja granica tečenja je:

$$Y_p^{(1)} = Y_L = s_Y + \frac{E_H}{j^*} (e_p - e_E) = 400 + \frac{210000}{2} (0.000965 - 0.00127) = 368.00 \text{ MPa}.$$

Veličine napona i dilatacija za ostale iteracije u VEP oblasti su prikazane u tabeli 4.5.

Tabela 4.5. Jednovremeni parovi napon-dilatacija čelične šipke  $\phi 10$  od RA 400/500 u VEP oblasti

i	$j_Y^{(i)}$	$s^{(i)}$ [MPa]	$e^{(i)}$
		0	0
		202.67 = $\sigma_p$	0.000965 = $\varepsilon_p$
		266.67 = $\sigma_E$	0.001270 = $\varepsilon_E$
1	3	400.00 = $\sigma_Y$	0.002895 = $\varepsilon_Y$
1	3	368.00 = $Y_L$	0.002895
2	5	410.67	0.004825
3	7	414.73	0.006756
4	9	414.22	0.008686
5	11	412.99	0.010616
6	13	411.76	0.012546
7	15	410.67	0.014476
8	17	409.73	0.016406
9	19	408.92	0.018337
10	21	408.23	0.020267

Dužina fiktivnog uzorka je:

$$l_{0,tm} = I_{tm} k_z = 88.161 \cdot 0.25 = 22.04 \text{ cm},$$

pa je odnos početne i redukovane površine poprečnog preseka:

$$\frac{A}{A_{red}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 210000 \cdot 0.2204^2}{202.67 \cdot 2} \frac{1}{1+2}} + 1 = 4.216.$$

Za napon u prvoj iteraciji u VP oblasti dobijamo:

$$Y_{vp}^{(i)} = 400 + \frac{210000}{(1+1) \cdot 2} \left\{ \left[ 1 + (1+1) \cdot 2 \right] \cdot 0.000965 - (1+2) \cdot 0.00127 \right\} = 453.33 \text{ MPa},$$

dok je prva ukupna dilatacija:

$$e_Y^{*(1)} = e_Y^{(10)} + \frac{A}{A_{red}} e_Y^{(1)} = e_Y^{(10)} + \frac{A}{A_{red}} [1 + (1+1)j^*] e_p =$$

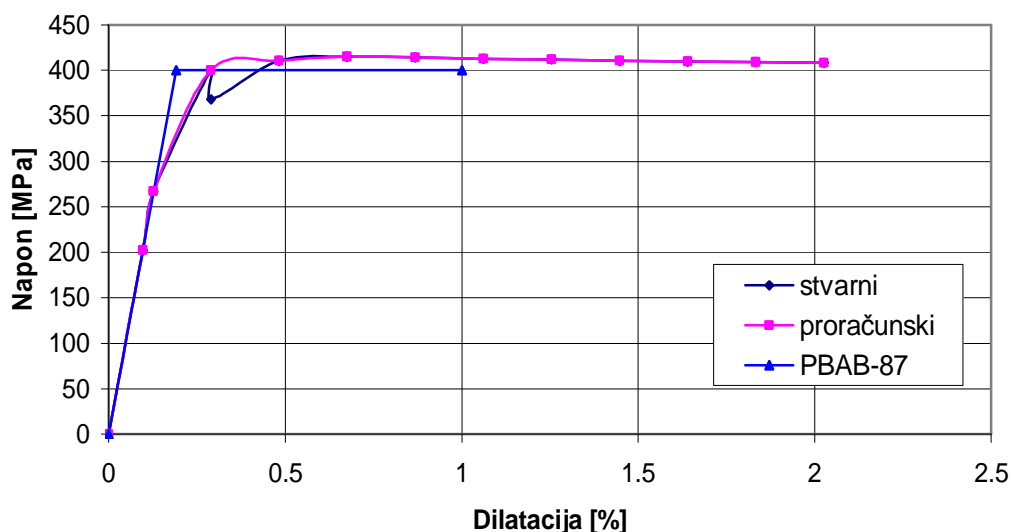
$$= 0.020267 + 4.216 \cdot (1 + 2 \cdot 2) \cdot 0.000965 = 0.040613$$

Veličine napona i dilatacija za ostale iteracije u VP oblasti su prikazane u tabeli 4.6.

Tabela 4.6. Naponi i ukupne dilatacije čelične šipke  $\phi 10$  od RA 400/500 u VP oblasti

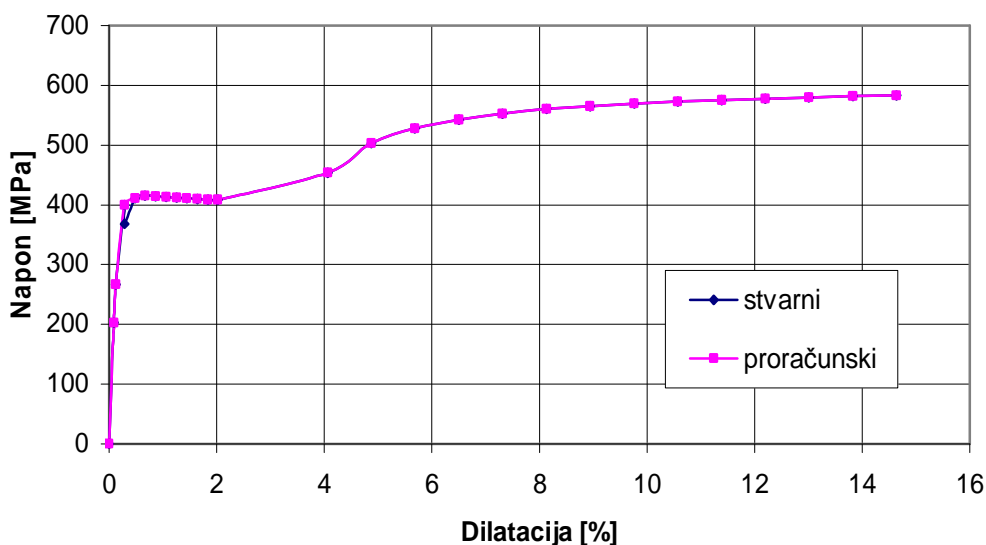
j	$j_Y^{(j)}$	$s^{(j)}$ [MPa]	$e^{(j)}$
1	5	453.33	0.040613
2	7	503.11	0.048751
3	9	528.00	0.05689
4	11	542.93	0.065028
5	13	552.89	0.073166
6	15	560.00	0.081305
7	17	565.33	0.089443
8	19	569.48	0.097581
9	21	572.80	0.10572
10	23	575.52	0.113858
11	25	577.78	0.121997
12	27	579.69	0.130135
13	29	581.33	0.138273
14	31	582.76	0.146412

Na slici 4.27 su prikazani dijagrami  $s - e$  čelika iz gornjeg primera u elastičnoj i VEP oblasti, dobijeni prema RDA postupku i prema PBAB'87. "Stvarni" je dijagram kod kojeg je prikazana i donja granica tečenja  $Y_L$ , dok je kod "proračunskog" dijagrama ova granica izostavljena. Uočljiva je razlika u veličini dilatacija na granici tečenja dobijena prema RDA i prema PBAB'87. Ovo je posledica idealizacije koju uvodi PBAB'87, usvajajući da se čelični uzorak ponaša linearno elastično sve do dostizanja granice razvlačenja.



Slika 4.27. Uporedni prikaz dijagrama napon-dilatacija čelične šipke RA 400/500 prema RDA postupku i PBAB'87 ( $i=10$ )

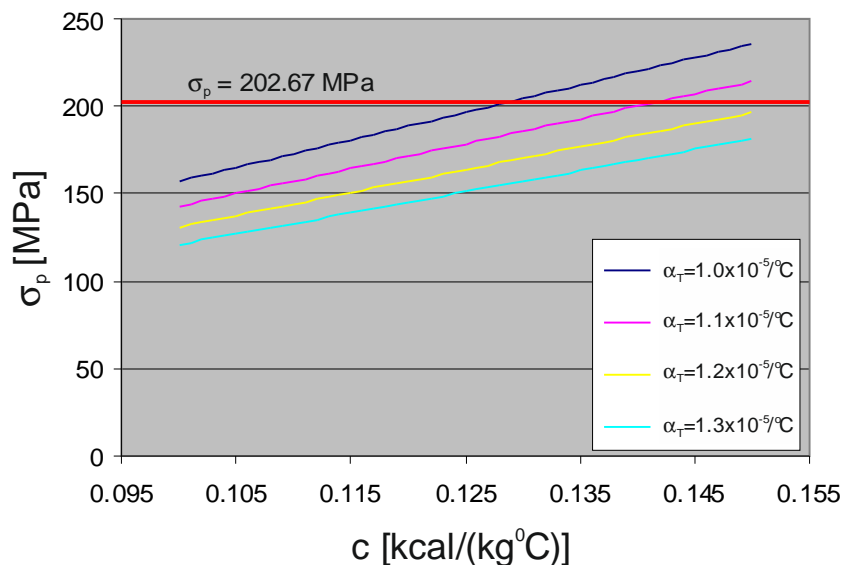
Slika 4.28 prikazuje radni dijagram čelika kroz sve oblasti (elastična, VEP i VP), dobijen primenom RDA postupka, za analizirani primer.



Slika 4.28. Radni dijagram čelika RA 400/500, za šipku prečnika  $f10$ , dobijen primenom RDA postupka ( $i=10$ ,  $j=14$ )

Sa poznatim naponom na granici proporcionalnosti, iz (4.149) možemo odrediti i odgovarajuće parove veličina  $c$  i  $a_T$ . Za analizirani primer čelika RA 400/500 napon proporcionalnosti je  $s_p = 202.67$  MPa. Usvojicemo  $r = 7860$  kg/m<sup>3</sup>, pa dobijamo sledeće parove (sl. 4.29):

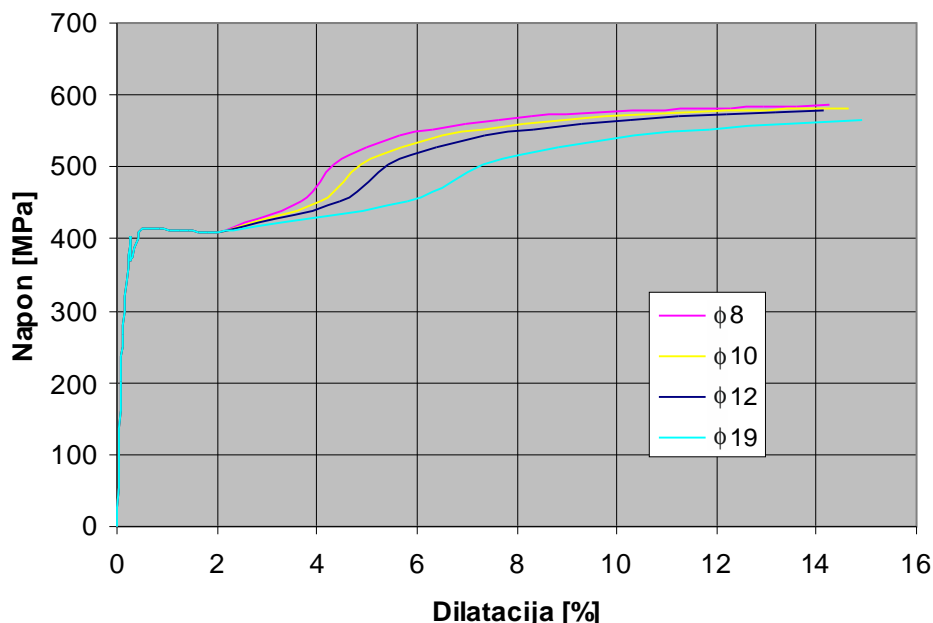
- za  $a_T = 1.0 \times 10^{-5}$ :  $c = \frac{s_p a_T}{2r} = \frac{202.67 \times 10^6 \cdot 0.00001}{2 \cdot 7860} = 0.1289$ ,
- za  $a_T = 1.1 \times 10^{-5}$ :  $c = \frac{s_p a_T}{2r} = \frac{202.67 \times 10^6 \cdot 0.000011}{2 \cdot 7860} = 0.1418$ .



Slika 4.29. Određivanje parova  $c$ - $a_T$  pri poznatoj vrednosti napona  $s_p$



Uočava se da vrednosti napona i dilatacija, sračunatih primenom RDA postupka, u VEP oblasti ne zavise od prečnika šipke. Prečnik šipke postaje bitan tek nakon ulaska u VP područje, kada dolazi do primetne redukcije površine poprečnog preseka (sl. 4.30).



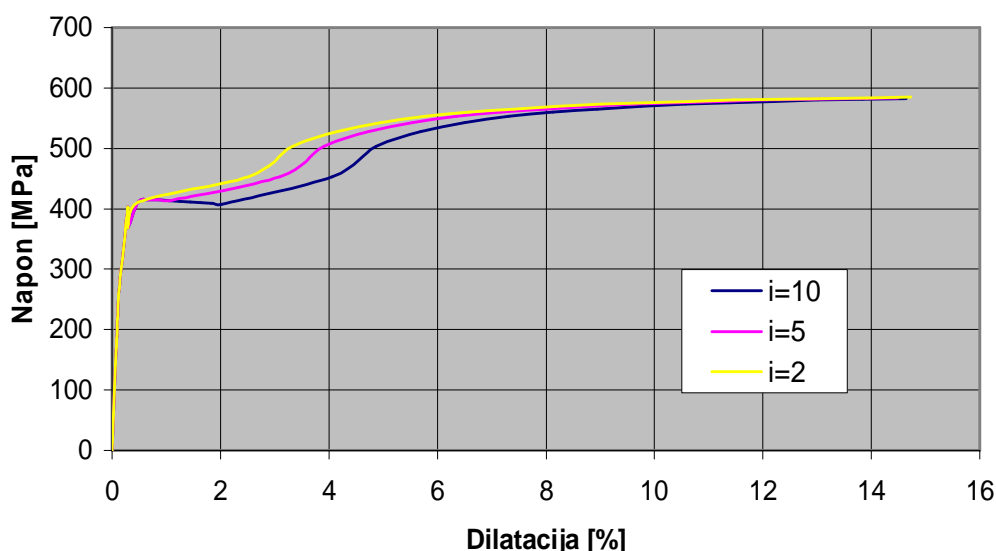
Slika 4.30. Uporedni prikaz RDA radnog dijagrama čelika RA 400/500 za različite prečnike uzoraka, sa  $i=10$  iteracija u VEP oblasti

Značajno je primetiti da se, usvojimo li  $i=10$  iteracija, VEP oblast za RA 400/500 završava približno pri dilataciji od 2.0%. Ovo je interesantno sa aspekta primene RDČ za određivanje granične nosivosti armiranobetonskih preseka. Ravnajući se prema PBAB'87, dilatacije u čeliku se ograničavaju na 10‰, što znači da je za primenu RDČ-a, dobijenog prema RDA postupku, od značaja samo VEP oblast. S druge strane, pri proračunu AB preseka napregnutih na čisto savijanje ili savijanje sa normalnom silom u oblasti velikog ekscentriciteta, iako EC 2 ne ograničava maksimalnu dilataciju armature (za slučaj idealizovanog dijagrama napon-dilatacija bez deformacijskog ojačanja), pri dilatacijama čelika većim od 20‰ doći će do značajne redukcije pritisnute površine betonskog preseka, usled čega se povećavaju dilatacije u krajnjem pritisnutom vlaknu betona, te lom nastupa po betonu, a ne usled kidanja zategnute armature. Sve ovo navodi na zaključak da bi, za potrebe analize graničnog stanja nosivosti AB preseka, bilo dovoljno odrediti RDČ samo za elastičnu i viskoelastoplastičnu oblast.

Međutim, kao što je već rečeno, oblik radnog dijagrama čelika, dobijenog primenom RDA postupka, zavisi i od izbora granice između viskoelastoplastične (VEP) i viskoplastične (VP) oblasti, odnosno od usvojenog broja iteracija u VEP oblasti. Ovo se jasno vidi sa dijagrama na slici 4.31. Za analizirani primer (RA 400/500,  $f_{10}$ ), u zavisnosti od broja VEP iteracija, dobijaju se sledeći parovi napon-dilatacija na granici VEP i VP oblasti:

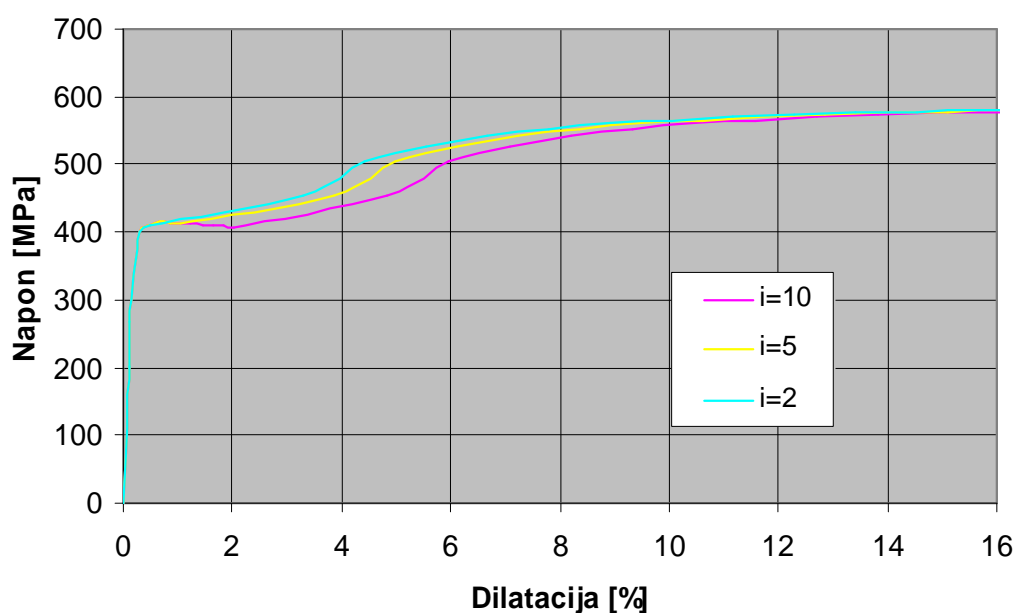
- za  $i=10$ :  $s = 408.23$  MPa;  $e = 0.020267$ ,
- za  $i=5$ :  $s = 412.99$  MPa;  $e = 0.010616$ ,
- za  $i=2$ :  $s = 410.67$  MPa;  $e = 0.004825$ .

Dakle, iako je napon na granici između VEP i VP oblasti gotovo nezavisan od broja VEP iteracija, granične dilatacije se kreću u širokom opsegu od 0.4825 do 2.0267%, pa gornji zaključak da je za potrebe analize graničnog stanja nosivosti AB preseka dovoljno odrediti RDČ samo do kraja VEP oblasti, ne stoji, već se on mora konstruisati i za VP oblast. Za pravilno usvajanje broja iteracija u VEP oblasti potrebno je poznavati, barem približno, oblik stvarnog dijagrama  $s - e$  za izabrani materijal.



Slika 4.31. RDA radni dijagrami čelika RA 400/500,  $f_{10}$ , za različit broj iteracija u VEP oblasti

Analiziraćemo RDC za armaturu RA 400/500, prečnika  $f_{14}$ . Dijagram dobijen RDA postupkom, za različit broj iteracija u VEP oblasti, prikazan je na slici 4.32. Stvarni oblik RDC-a, za ovu armaturu i prečnik, određen je eksperimentalnim ispitivanjem koje je sproveo R. Zejak za potrebe izrade svoje doktorske disertacije [68] (sl. 4.33.a). Karakteristična vrednost modula elastičnosti ispitivanog čelika iznosila je  $E_s = 201$  GPa, karakteristična granica razvlačenja  $s_{vs} = 470$  MPa, maksimalni napon zatezanja  $s_s = 571$  MPa, dok je srednje ukupno izduženje pri najvećoj sili bilo  $A_{gt} = 10.6\%$ .

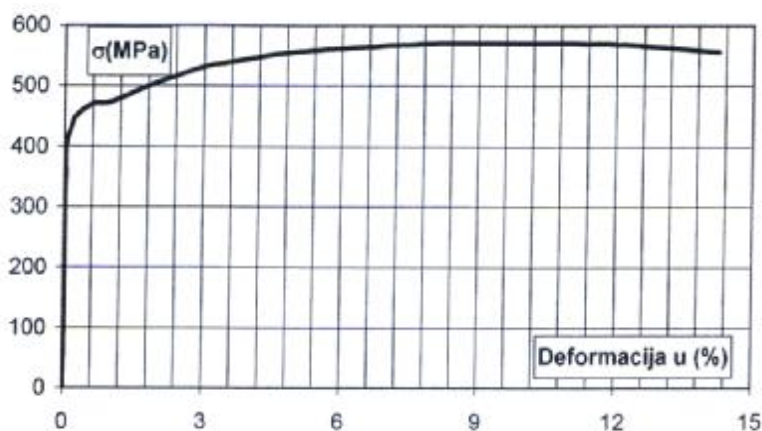


Slika 4.32. RDA radni dijagrami čelika RA 400/500,  $f_{14}$ , za različit broj iteracija u VEP oblasti

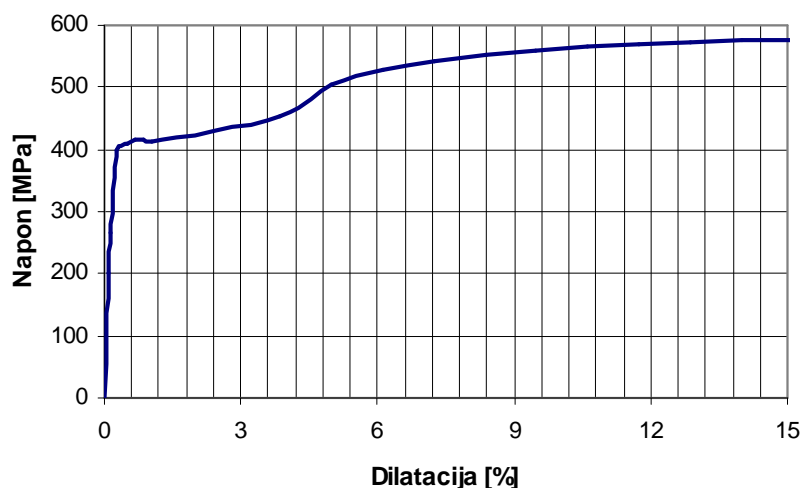
Analizom dijagrama sa slike 4.33.a) možemo uočiti da donja granica razvlačenja, za ovu vrstu betonskog čelika, nije izražena, što opravdava stav da se pri izradi proračunskog RDC-a korišćenjem RDA postupka ova granica može izostaviti. Dalje uočavamo da do pojave deformacijskog ojačanja (grana u usponu) dolazi već pri dilataciji od oko 10‰, zbog čega je potrebno smanjiti broj iteracija u VEP oblasti (prema tabeli 4.5, ovoj dilataciji odgovara  $i=5$ ). Radi poređenja, na slici 4.33.b) je prikazan RDC dobijen prema RDA postupku za RA 400/500 prečnika  $f_{14}$ , uz izostavljanje donje granice tečenja i za  $i=5$  iteracija u VEP oblasti. Treba imati na umu

da je ovaj dijagram konstruisan za idealan slučaj  $s_v = 400$  MPa, prema nazivnoj granici razvlačenja rebraste armature, a ne prema  $s_{vs} = 470$  MPa, kao kod ispitanog čelika.

a)



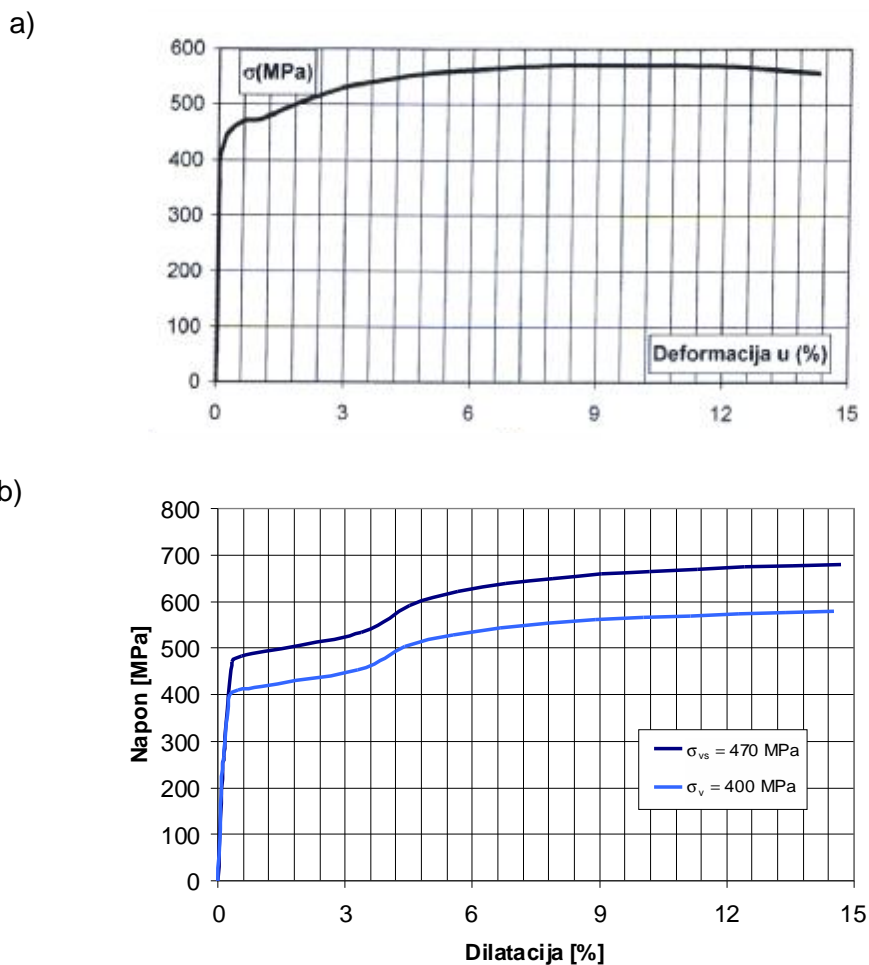
b)



Slika 4.33. Radni dijagram čelika RA 400/500,  $f_{14}$ : a) - Zapis na kidalici, prema [68] i b) - Primenom RDA postupka za  $i=5$

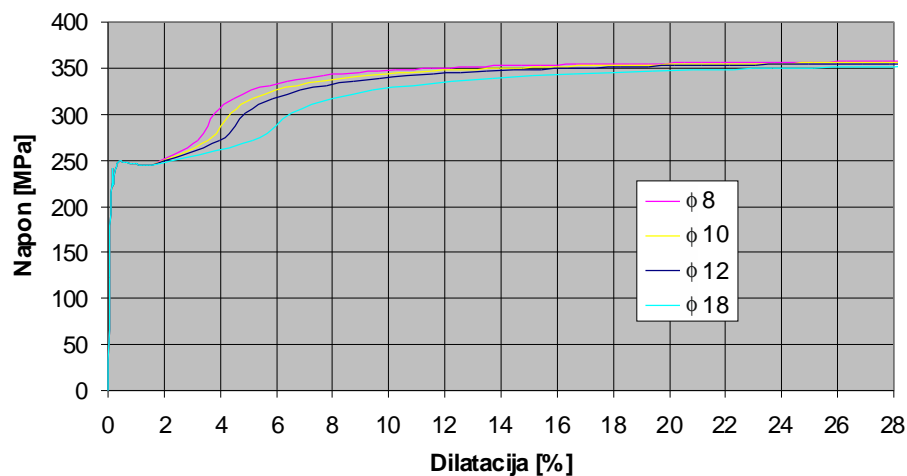
Poređenjem dijagrama sa slike 4.33 možemo uočiti njihovu veliku sličnost do kraja VEP oblasti, ali i osetno manji početni nagib uzlazne grane na RDA dijagramu u VP oblasti. Kako se ovo dešava pri dilatacijama čelika većim od 10‰, to je razlika u nagibu dijagrama od malog značaja pri dimenzionisanju AB elemenata, naročito u poređenju sa PBAB'87 koji, kao što je rečeno, dilatacije zategnute armature ograničava na 10‰. Ipak, ako se proceni da značaj nagiba uzlazne grane nije zanemarljiv, dijagram prikazan na slici 4.33.b) se može korigovati smanjenjem broja iteracija u VEP oblasti na minimalan broj (sl. 4.32).

Radi lakšeg poređenja, na slici 4.34 je dat još jedan uporedni prikaz dijagrama napon-dilatacija za RA 400/500 prečnika  $f_{14}$ , s tim što je na RDA dijagramu variran napon na granici razvlačenja, a broj iteracija u VEP oblasti je  $i=2$ . Usvajanjem eksperimentalne granice  $s_{vs} = 470$  MPa za gornju granicu tečenja, dobija se izuzetno dobro poklapanje eksperimentalnog i RDA dijagrama sve do dilatacije od oko 3.0%, što se može smatrati prihvatljivim za potrebe dimenzionisanja AB elemenata.



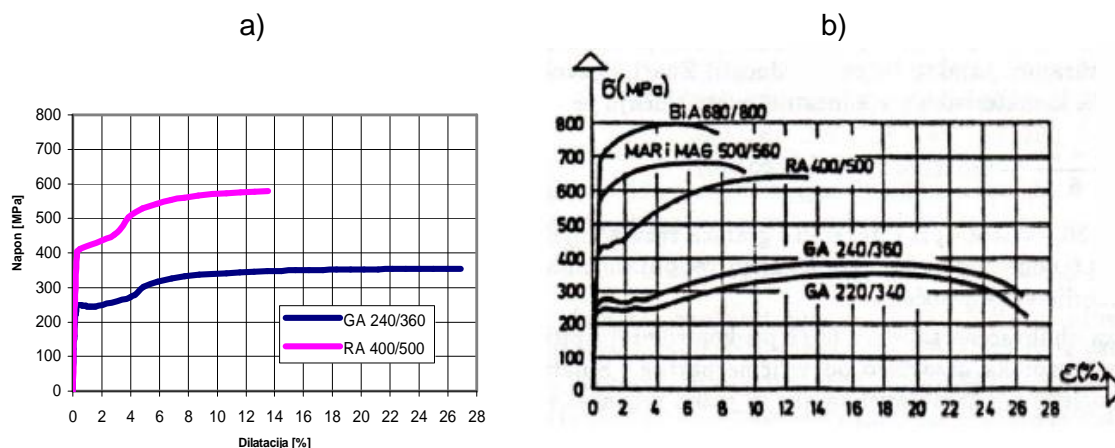
Slika 4.34. Radni dijagram čelika RA 400/500,  $f_{14}$ : a) - Zapis na kidalici, prema [68] i  
b) - Primenom RDA postupka za  $i=2$

Prema podacima iz dostupne literature, VEP oblast kod armature GA 240/360 je znatno duža nego kod RA 400/500 i proteže se do ukupnih dilatacija 3-4%. Zbog toga je i broj VEP iteracija za ovu vrstu čelika veći (sl. 4.35). Nameće se zaključak da je za analizu graničnog stanja nosivosti AB preseka armiranih ovim čelikom, dovoljno razmatrati samo elastičnu i VEP oblast.



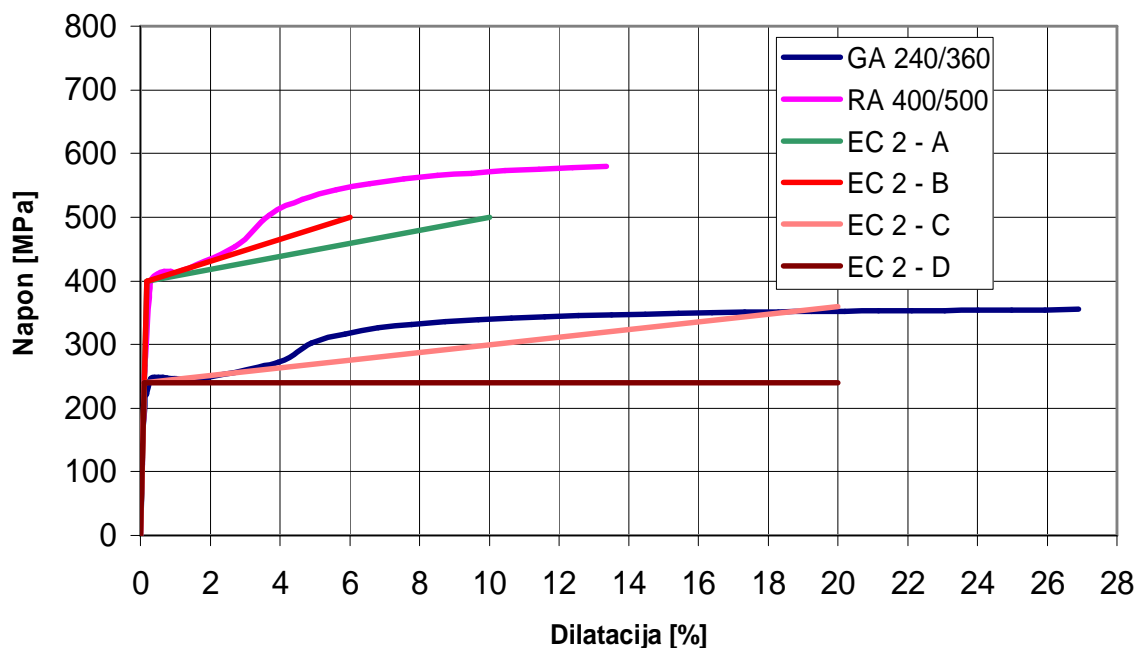
Slika 4.35. Uporedni prikaz RDA radnog dijagrama čelika GA 240/360 za različite prečnike uzoraka, sa  $i=13$  iteracija u VEP oblasti

Na slici 4.36 su uporedo prikazani radni dijagrami čelika GA 240/360 i RA 400/500 prema RDA (za  $f_{12}$ ) i literaturi [24]. Za konstruisanje RDA dijagrama korišćeno je  $i=2$  VEP iteracija za RA 400/500, odnosno  $i=13$  za GA 240/360. U oba slučaja je evidentno izuzetno dobro slaganje RDA i dijagrama prema literaturi.



Slika 4.36. Uporedni prikaz radnih dijagrama čelika RA 400/500 i GA 240/360 prema: a) - RDA (za  $f_{12}$ ) i b) - literaturi [24]

Slika 4.37 daje poređenje računskih dijagrama čelika prema EC 2 sa računskim dijagramima dobijenim primenom RDA postupka, za armaturu prečnika  $f_{12}$ . Dijagrami EC 2 - A do EC 2 - D su konstruisani za odgovarajući čelik bez koeficijenta sigurnosti, uz variranje veličine dilatacije pri maksimalnoj sili (EC 2 - A za  $e_{uk}=10\%$ , EC 2 - B za  $e_{uk}=6\%$ , EC 2 - C za  $e_{uk}=20\%$  sa gornjom granom u nagibu i EC 2 - D za  $e_{uk}=20\%$  bez ojačanja). RDA dijagram za RA 400/500 je konstruisan sa  $i=5$  VEP iteracija, a za GA 240/360 sa  $i=13$ . Uočava se vrlo dobro slaganje teoretskih vrednosti sa vrednostima dobijenim prema EC 2, naročito do dilatacija od 2.0%, koje još imaju praktičnog značaja za dimenzionisanje AB preseka.



Slika 4.37. RDA radni dijagrami čelika GA 240/360 i RA 400/500  $f_{12}$  i računski dijagrami prema EC 2

Na osnovu gornje analize možemo zaključiti da se primenom RDA postupka dobijaju radni dijagrami betonskog čelika GA 240/360 i RA 400/500 koji se vrlo dobro poklapaju sa dijagramima napon-dilatacija dobijenim eksperimentalnim putem, kao i sa računskim dijagramima prema važećim standardima. Broj VEP iteracija za konstruisanje radnog dijagrama GA 240/360 treba da se bira između  $i=13$  i  $i=15$ , dok se za RA 400/500 zadovoljavajući oblik dijagrama postiže sa manjim brojem VEP iteracija, od  $i=2$  do  $i=5$ .

Kako su RDA radni dijagrami čelika dobijeni na osnovu analitičkih izraza prikazanih u ovom poglavlju, to je i njihova primena na dimenzionisanje AB preseka analitički određena. Nakon što se, za odabranu vrstu čelika i odabrani prečnik šipke, odrede granice  $s_p$ ,  $e_p$ ,  $s_E$ ,  $e_E$ ,  $s_Y$  i  $e_Y$ , na osnovu odabranog broja VEP iteracija ( $i=n$ ) određuju se napon ( $Y_p^{(n)}$ ) i dilatacija ( $e_Y^{(n)}$ ) na granici VEP i VP oblasti. Faktor redukcije poprečnog preseka se određuje prema (4.198), čime su definisane i ukupne dilatacije u VP oblasti.

Postupak određivanja odgovarajućeg napona  $s$  iz poznate dilatacije  $e$  je sledeći:

a) Uočava se oblast u kojoj se nalazi dilatacija (elastična, VEP ili VP).

b) U zavisnosti od uočene oblasti, izraz za napon je sledeći:

- U elastičnoj oblasti ( $e = e_{el} \leq e_E$ ):

$$s = E_H \cdot e$$

- U VEP oblasti ( $e = e_Y^{(i)}$ ):

$$s = Y_p^{(i)} = s_Y + \frac{E_H}{ij^*} \left( e_p - \frac{1+j^*}{1+ij^*} e_E \right),$$

gde je, iz  $e_Y^{(i)} = (1+ij^*) e_p$ :

$$i = \frac{1}{j^*} \left( \frac{e}{e_p} - 1 \right). \quad (4.232)$$

Ako je  $i \leq 1$ , napon treba računati prema izrazu (4.233):

$$s = s_E + \frac{s_Y - s_E}{e_Y - e_E} (e - e_E). \quad (4.233)$$

- u VP oblasti ( $e = e_Y^{*(i)}$ ):

$$s = Y_{vp}^{(i)} = s_Y + \frac{E_H}{(j+1)j^*} \left\{ \left[ 1 + (1+j)j^* \right] e_p - (1+j^*) e_E \right\},$$

gde je, iz (4.196) i (4.194):

$$j = \frac{1}{j^*} \left( \frac{e - e_Y^{(n)}}{e_p} \frac{A_{red}}{A} - 1 \right) - 1. \quad (4.234)$$

Postupak određivanja odgovarajuće dilatacije  $e$  iz poznatog napona  $s$  je sledeći:

a) Uočava se oblast u kojoj se nalazi napon (elastična, VEP ili VP).

b) U zavisnosti od uočene oblasti, izraz za dilataciju je sledeći:

- U elastičnoj oblasti ( $s = s_{el} \leq s_E$ ):

$$e = \frac{s}{E_H}$$

- U VEP oblasti ( $s = Y_p^{(i)}$ ):

$$e = (1+ij^*) e_p,$$

gde je, iz  $s = s_Y + \frac{E_H}{j j^*} \left( e_p - \frac{1+j^*}{1+j^*} e_E \right)$ :

$$i = -\frac{1}{2j^*} \left[ 1 - \frac{s_p}{(s - s_Y)} \right] + \sqrt{\frac{1}{4j^{*2}} \left[ 1 - \frac{s_p}{(s - s_Y)} \right]^2 - \frac{1}{(s - s_Y)j^{*2}} [s_E (1+j^*) - s_p]} \quad (4.235)$$

Ako je  $i \leq 1$ , dilataciju treba računati prema izrazu

$$e = e_E + \frac{(e_Y - e_E)}{(s_Y - s_E)} (s - s_E) \quad (4.236)$$

- u VP oblasti ( $s = Y_{vp}^{(j)}$ ):

$$e = e_Y^{(n)} + \frac{A}{A_{red}} e_Y^{(j)} = e_Y^{(n)} + \frac{A}{A_{red}} [1 + (1+j)j^*] e_p,$$

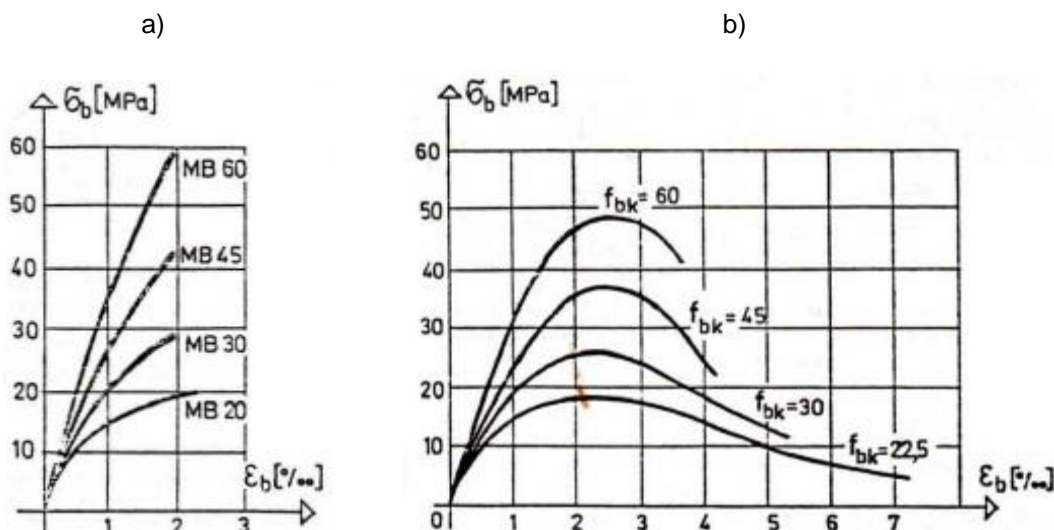
gde je, iz  $s = s_Y + \frac{E_H}{(j+1)j^*} \{ [1 + (1+j)j^*] e_p - (1+j^*) e_E \}$ :

$$j = \frac{s_p - (1+j^*)s_E}{j^*(s - s_Y - s_p)} - 1 \quad (4.237)$$

#### 4.4. Radni dijagram pritisnutog betona (RDB)

Polazna osnova pri modeliranju ponašanja betona za potrebe analize armiranobetonske konstrukcije ili elementa, jeste uspostavljanje veze napon-dilatacija za betonski element, odnosno definisanje *radnog dijagrama betona*. Ova veza, kao što je poznato, nije jednoznačno određena, budući da njen stvarni oblik zavisi od više faktora, među kojima ćemo izdvojiti samo neke:

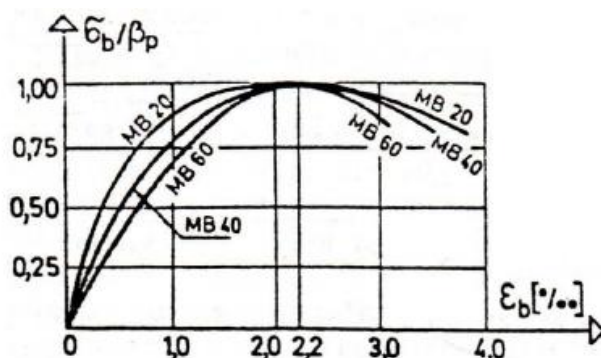
- Vrsta naprezanja. Oblik dijagrama napon-dilatacija zavisi od toga da li je uzorak opterećen centričnom silom ili momentom savijanja sa ili bez normalne sile (slike 4.38 i 4.39).



Slika 4.38. Naponsko-deformacijski dijagrami dobijeni na centrično pritisnutim betonskim prizmama različitog kvaliteta betona, pri: a) - konstantnoj brzini nanošenja opterećenja i b) - konstantnoj brzini deformacije [24]

- Način nanošenja opterećenja. Dijagram  $s_b - e_b$  centrično pritisnutog betonskog elementa se razlikuje za slučaj konstantne brzine nanošenja opterećenja i

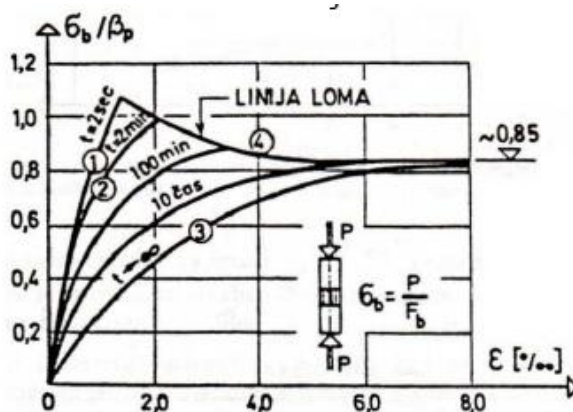
slučaj konstantne brzine deformacija (slike 4.38. a i b). Dilatacije pri maksimalnom naponu su približno jednake za oba načina opterećivanja i kreću se oko 2‰.



Slika 4.39. Naponsko-deformacijski dijagram na pritisnutoj ivici pravougaonog preseka napretnutog na savijanje [24]

- Kvalitet betona. Sa dijagrama na slikama 4.38 i 4.39 se može uočiti uticaj pritisne čvrstoće betona na oblik krive  $s_b - e_b$ . Pri nižim markama betona svi dijagrami su zakrivljeniji. Dilatacija pri lomu centrično pritisnutih uzoraka sa konstantnom brzinom opterećivanja neznatno opada sa porastom kvaliteta betona. Dilatacija pri maksimalnom naponu centrično pritisnutih elemenata opterećenih tako da brzina deformacije bude konstantna i savijenih elemenata raste sa porastom pritisne čvrstoće betona. S druge strane, uočava se pad dilatacije pri lomu kod betona viših marki (klasa čvrstoće). Početni nagib krive  $s_b - e_b$  raste sa porastom pritisne čvrstoće betona.

- Brzina nanošenja opterećenja. Na slici 4.40 je prikazan uticaj brzine nanošenja opterećenja na vezu napon-dilatacija i graničnu nosivost aksijalno opterećene betonske prizme. Većim brzinama nanošenja opterećenja odgovaraju veće čvrstoće i manje dilatacije pri lomu preseka, a veza  $s_b - e_b$  je skoro linearna. Smanjenjem brzine nanošenja opterećenja povećava se zakrivljenost dijagrama, granična čvrstoća opada, a raste granična dilatacija. Kriva (4) predstavlja anvelopu jednoosnih čvrstoća na pritisak betonske prizme pri različitim brzinama nanošenja opterećenja. Treba imati u vidu da se pri vrlo sporom nanošenju opterećenja javljaju značajne deformacije tečenja betona.

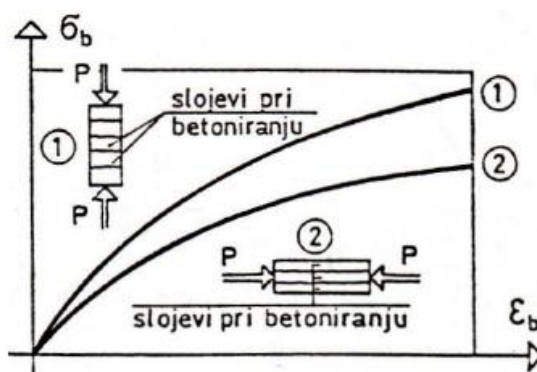


Slika 4.40. Uticaj brzine nanošenja opterećenja na naponsko-deformacijsku vezu i graničnu nosivost aksijalno pritisnute betonske prizme [24]

- Ugao koji zaklapa pravac delovanja opterećenja sa pravcem betoniranja elementa. Sa slike 4.41 se može uočiti da se veća čvrstoća na pritisak postigne opterećivanjem uzorka upravno na pravac betoniranja, nego opterećivanjem paralelno sa pružanjem slojeva pri betoniranju. Ova razlika, prema [24], može iznositi i do 25%.

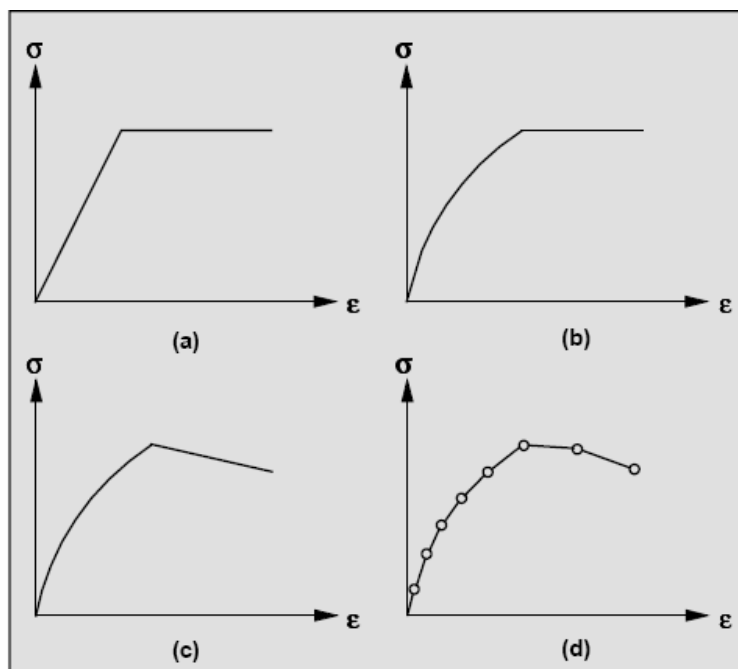
- Oblik poprečnog preseka nosača.
- Količina i gustina uzengija (stepen utegnutosti nosača)...





Slika 4.41. Uticaj odnosa između pravca delovanja opterećenja i pravca betoniranja na naponsko-deformacijsku vezu i graničnu nosivost betona [24]

Veliki je broj predloga idealizovanih, računskih krivih  $s_b - e_b$  betona, opisanih odgovarajućim nelinearnim analitičkim vezama između napona i dilatacija, koji teže da, s jedne strane, budu što jednostavniji za primenu i, s druge, što vernije opišu ovu vezu, uvažavajući istovremeno sve faktore koji utiču na njen oblik. Neki od predloga veze napon-dilatacija, za jednoosno naprezanje, prikazani su na slici 4.42.



Slika 4.42. Neki predlozi idealizovanih veza napon-dilatacija jednoosijalno napregnutog betonskog elementa [34]

Najjednostavniji nelinearni model jednoosijalnog ponašanja betona je linearno elastičan - idealno plastičan model (sl. 4.42.a), koji su koristili Lin i Scordelis (1975) za analizu armiranobetonskih ploča i zidova. Model na slici 4.42.b je viskoelastičan-idealno plastičan model, koji odgovara računskom radnom dijagramu betona prema PBAB'87 i EC 2. Model na slici 4.42.c je predložen od strane Hognestad-a (1951), dok je na slici 4.42.d prikazan multilinearan model, kod kojeg je nelinearna veza napon-dilatacija aproksimirana nizom pravolinijskih segmenata. Iako je ovaj model u stanju da opiše širok spektar krivih napon-dilatacija betona, njegova upotreba se najčešće ograničava na slučajeve kada su dostupni eksperimentalni podaci o jednoosijalnoj  $s_b - e_b$  vezi.

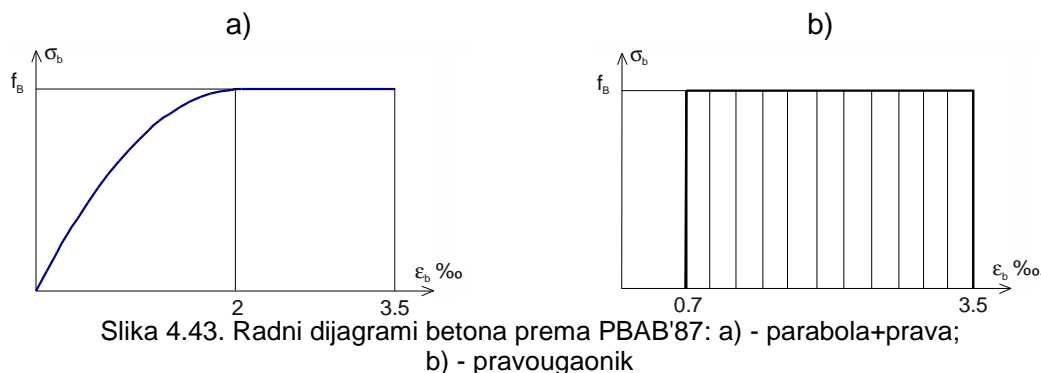
#### 4.4.1. RDB prema PBAB'87

Za proračun (dimenzionisanje) prema graničnom stanju nosivosti - lomu preseka koji su napregnuti na savijanje sa i bez normalne sile, ili su centrično pritisnuti, PBAB'87 propisuje naponsko-deformacijski dijagram pritisnutog betona (sl. 4.43.a) u obliku kvadratne parabole:

$$s_b = \frac{f_B}{4} (4 - e_b) e_b \quad \text{pri } 0\% \leq e_b \leq 2\% \quad (4.238)$$

i prave:

$$s_b = f_B \quad \text{pri } 2\% \leq e_b \leq 3.5\% \quad (4.239)$$



Slika 4.43. Radni dijagrami betona prema PBAB'87: a) - parabola+prava; b) - pravougaonik

Računska čvrstoća betona pri pritisku  $f_B$  je funkcija kvaliteta (marke) betona i data je u tabeli 15. Pravilnika PBAB'87 (tabela 4.7).

Tabela 4.7. Računske čvrstoće betona pri pritisku prema PBAB'87 [24]

MB	10	15	20	30	40	50	60
$f_B$ [MPa]	7	10.5	14	20.5	25.5	30	33

Za elemente konstrukcije visine preseka manje od 12cm, računski čvrstoća se umanjuje za 10% u odnosu na vrednosti date u tabeli 4.7.

Kod poprečnih preseka kod kojih je pritisnuta zona betona kružnog ili trougaonog oblika, kod preseka nepravilnog oblika, kao i kod pravougaonih preseka napregnutih na koso savijanje sa ili bez normalne sile, sa neutralnom linijom unutar poprečnog preseka, umesto računskog dijagrama parabola+prava (sl. 4.43.a), za proračun preseka po graničnoj nosivosti može se koristiti uprošćeni dijagram u obliku pravougaonika (sl. 4.43.b), sa graničnom čvrstoćom  $f_B$  i položajem neutralne linije:

$$x = \frac{0.8}{1 + e_a/e_b} h, \quad \text{gde je } e_b > 3\% . \quad (4.240)$$

Pravilnik PBAB'87 ograničava dilatacije u krajnjem pritisnutom vlaknu poprečnog preseka na 3.5‰ u slučaju savijanja sa ili bez normalne sile, dok je u slučaju centrično pritisnutih elemenata dilatacija betona ograničena na 2‰.

Treba naglasiti da marka betona (MB), prema PBAB'87, predstavlja normiranu čvrstoću na pritisak u MPa, koja se zasniva na karakterističnoj čvrstoći pri starosti betona od 28 dana. Čvrstoća betona pri pritisku bi trebala da se ispituje prema tada važećim standardima JUS U.M1.005 i JUS U.M1.020, na *kockama ivice 20cm*. Karakteristična čvrstoća se određuje statističkom obradom sa *10%-nim fraktilom*.

Statički modul elastičnosti betona pri jednoaksijalnom pritisku se određuje ekperimentalno. Kada se ne raspolaže rezultatima ispitivanja, za napone pritiska  $s_b \leq 0.4f_{bk}$  se mogu usvojiti srednje vrednosti modula elastičnosti betona prema tabeli 8 Pravilnika PBAB'87 (tabela 4.8). Vrednosti iz tabele 4.8 odgovaraju starosti betona od 28 dana, a određene su iz izraza:

$$E_b = 9.25^3 \sqrt{f_{bk} + 10}, \quad \text{gde je } f_{bk} \text{ u MPa, a } E_b \text{ u GPa} . \quad (4.241)$$

Tabela 4.8. Modul elastičnosti betona prema PBAB'87 [24]

$f_{bk}$ [MPa]	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$E_b$ [GPa]	27	28.5	30	31.5	33	34	35	36	37	38

Za slučaj kada se uticaj poprečnih deformacija betona ne može zanemariti, PBAB'87 propisuje Poisson-ov koeficijent  $n_b = 0.2$ .

Modul smicanja betona se izračunava prema izrazu:

$$G_b = \frac{E_b}{2(1+n_b)}. \quad (4.242)$$

Koeficijent termičke dilatacije betona, prema PBAB'87, iznosi  $a_T = 10^{-5} \frac{1}{K}$ .

#### 4.4.2. RDB prema EN 1992-1-1: 2004 Evrokod 2

Za potrebe *nelinearne analize konstrukcija*, EC 2 propisuje dijagram napon-dilatacija betona, za kratkotrajno jednoosijalno opterećenje (pritisak), oblika prikazanog na slici 4.44. Odgovarajuća analitička veza napon-dilatacija glasi:

$$\frac{s_c}{f_{cm}} = \frac{kh - h^2}{1 + (k-2)h}, \quad (4.243)$$

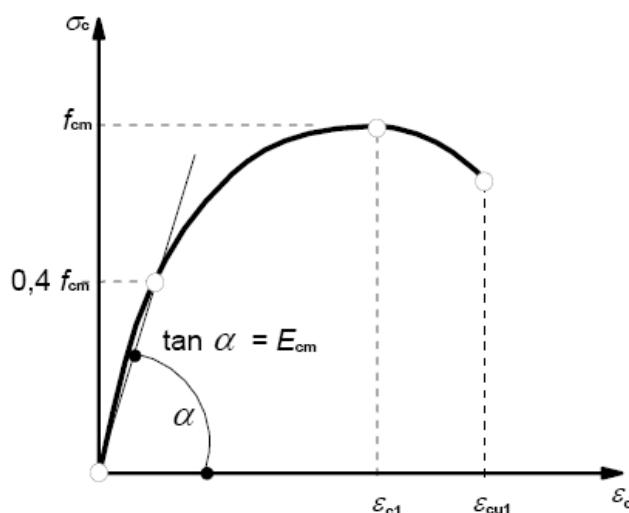
gde je:

$$h = e_c / e_{c1}$$

$e_{c1}$  dilatacija pri najvećem naponu, prema tabeli 4.9

$$k = 1.1 \cdot E_{cm} \cdot |e_{c1}| / f_{cm} \quad (\text{prema [511]})$$

Izraz (4.243) važi za  $0 < |e_c| < |e_{cu1}|$ , gde je  $e_{cu1}$  nominalna granična dilatacija. Srednja vrednost čvrstoće betona pri pritisku  $f_{cm}$  je data u tabeli 4.9, u zavisnosti od klase čvrstoće betona, a dobija se uvećanjem karakteristične čvrstoće cilindra za 8MPa.



Slika 4.44. Dijagram napon-dilatacija za nelinearnu analizu konstrukcija, prema EC 2 [20]

Treba uočiti razliku u definisanju marke betona (prema PBAB'87) i klase čvrstoće betona (prema EC 2). Dok se, kao što je već rečeno, marka betona zasniva na karakterističnoj čvrstoći (10%-nom fraktilu) određenoj na uzorcima oblika kocke ivice 20 cm, dotle se u EC 2 čvrstoća betona pri pritisku označava klasama čvrstoće betona, koje odgovaraju karakterističnoj vrednosti (sa *fraktilom* 5%) čvrstoće betona pri pritisku na *cilindar* prečnika 15cm i visine 30cm ( $f_{ck}$ ) ili čvrstoće betona pri pritisku na *kocku*

ivice 15cm ( $f_{ck,cube}$ ), prema EN 206-1. U svim slučajevima je starost betona pri određivanju pritiskne čvrstoće 28 dana. Imajući u vidu ove razlike, poređenje marke betona (MB) i klase čvrstoće betona (C) zahteva konverziju koja će uzeti u obzir kako razlike u obliku i dimenzijama uzoraka, tako i razlike u statističkoj obradi merenih vrednosti (10%-ni ili 5%-ni fraktil). Bez ulaska u detaljniju analizu, u praksi se, najčešće, grubo usvaja da čvrstoća betona pri pritisku na kocku ivice 15cm prema EC 2 ( $f_{ck,cube}$ ) odgovara marci betona prema PBAB'87.

Mehaničke karakteristike betona do klase C 50/60 prikazane su u tabeli 4.9.

Tabela 4.9. Čvrstoće i deformacijske karakteristike betona prema EC 2 [19]

oznaka	C 12/15	C 16/20	C 20/25	C 25/30	C 30/37	C 35/45	C 40/50	C 45/55	C 50/60
$f_{ck}$ [MPa]	12	16	20	25	30	35	40	45	50
$f_{ck,cube}$ [MPa]	15	20	25	30	37	45	50	55	60
$f_{cm}$ [MPa]	20	24	28	33	38	43	48	53	58
$E_{cm}$ [GPa]	27	29	30	31	33	34	35	36	37
$\epsilon_{c1}$ [‰]	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.25	2.3	2.4	2.45
$\epsilon_{cu1}$ [‰]	3.5								
$\epsilon_{c2}$ [‰]	2.0								
$\epsilon_{cu2}$ [‰]	3.5								

Modul elastičnosti betona  $E_{cm}$  se definiše kao sekantni modul između napona  $s_c = 0$  i  $s_c = 0.4 \cdot f_{cm}$ . U tabeli 4.9 su date približne vrednosti modula elastičnosti za betone sa agregatom od kvarcита, koje su sračunate prema izrazu:

$$E_{cm} = 22 \left[ \frac{f_{cm}}{10} \right]^{0.3} \quad (f_{cm} \text{ u MPa}). \quad (4.244)$$

Za agregate od krečnjaka ove vrednosti treba da se smanje za 10%, a za agregate od peščara za 30%. Za bazaltne agregate date vrednosti treba da se povećaju za 20%.

Za Poisson-ov koeficijent može da se usvoji vrednost  $n_c = 0.2$  za beton bez prslina, odnosno  $n_c = 0$  za beton sa prslinama. Koeficijent linearne termičke dilatacije, ako se ne raspolaže tačnijim podacima, i prema EC 2 može da se usvoji veličine  $a_T = 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{K}}$ .

Proračunska čvrstoća betona pri pritisku se određuje iz izraza:

$$f_{cd} = \frac{a_{cc} f_{ck}}{g_c}, \quad (4.245)$$

gde je:

$g_c$  - parcijalni koeficijent sigurnosti za beton, čije su vrednosti date u tabeli 2.1N Evrokoda 2 [20]. Za stalne i prolazne proračunske kombinacije je  $g_c = 1.5$ , i

$a_{cc}$  - koeficijent kojim se uzimaju u obzir uticaji dugotrajnosti dejstva na čvrstoću betona pri pritisku i nepovoljni uticaji usled načina na koji deluje opterećenje. Vrednost ovog koeficijenta se kreće u granicama od 0.8 do 1.0, što se reguliše Nacionalnim aneksima. Preporučena vrednost je 1.0.

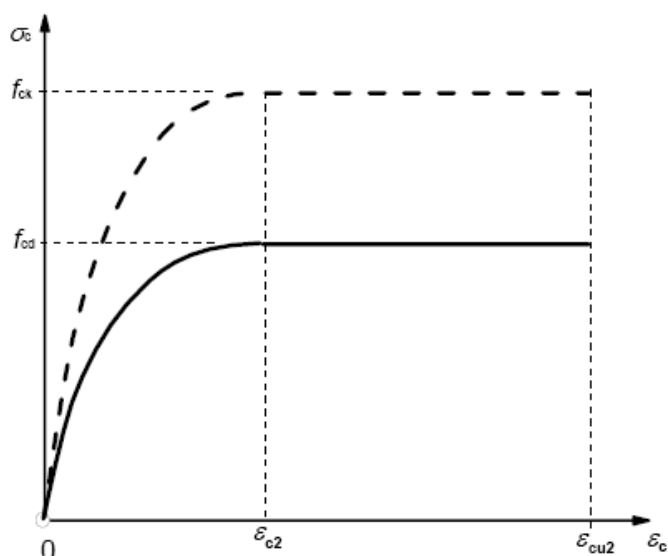
Za proračun (dimenzionisanje) poprečnih preseka, EC 2 daje dijagram napon-dilatacija u obliku parabola-pravougaonik, prikazan na slici 4.45, kojem odgovara analitička veza:

$$s_c = f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{e_c}{e_{c2}} \right)^n \right] \quad \text{za } 0 \leq e_c \leq e_{c2} \quad (4.246)$$

$$s_c = f_{cd} \quad \text{za } e_{c2} \leq e_c \leq e_{cu2} \quad (4.247)$$

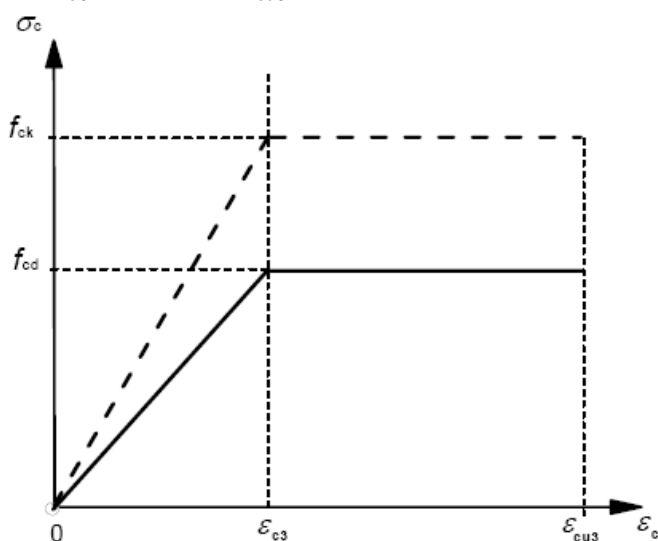
gde je:

- $n$  - eksponent, koji za betone klase čvrstoće do C 50/60 ima vrednost 2,
- $e_{c2}$  - dilatacija koja odgovara maksimalnoj čvrstoći, prema tabeli 4.9,
- $e_{cu2}$  - granična dilatacija, prema tabeli 4.9.



Slika 4.45. Dijagram parabola-pravougaonik za beton pri pritisku, prema EC 2 [20]

EC 2 dozvoljava i upotrebu drugačijih, uprošćenih dijagrama napon-dilatacija, ukoliko su ekvivalentni ili na strani sigurnosti u odnosu na dijagram sa slike 4.45. Jedan od mogućih dijagrama je i bilinearni dijagram (sl. 4.46), kod kojeg, za betone klase do C 50/60 treba usvojiti  $e_{c3} = 1.75\text{‰}$  i  $e_{cu3} = 3.5\text{‰}$ .



Slika 4.46. Bilinearni dijagram napon-dilatacija za beton pri pritisku, prema EC 2 [20]

Može se koristiti i pravougaoni dijagram napona (sl. 4.47), pri čemu su koeficijent  $I$ , kojim se definiše efektivna visina pritisnute zone, i koeficijent  $h$ , kojim se definiše odgovarajuća efektivna čvrstoća, dati izrazima [20]:

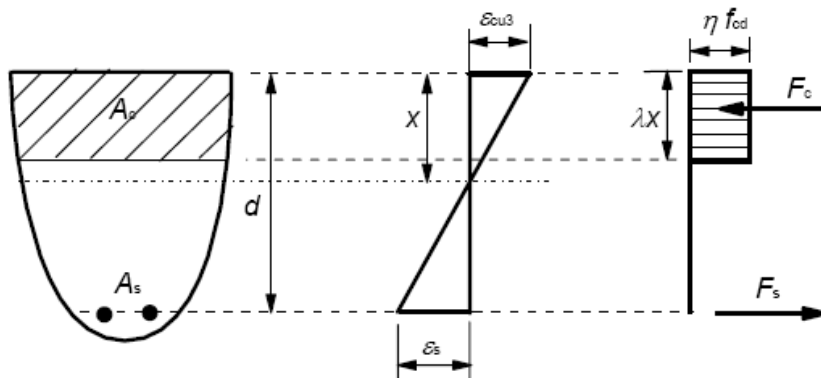
$$I = 0.8 \quad \text{za } f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \quad (4.248)$$

$$I = 0.8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400} \quad \text{za } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{MPa} \quad (4.249)$$

i

$$h = 0.8 \quad \text{za } f_{ck} \leq 50 \text{MPa} \quad (4.250)$$

$$h = 0.8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{200} \quad \text{za } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{MPa} . \quad (4.251)$$



Slika 4.47. Pravougaoni dijagram napona, prema EC 2 [20]

#### 4.4.3. RDB primenom RDA

Primena RDA postupka na određivanje graničnog napona (čvrstoće) pritisnutih vitkih stubova detaljno je opisana u delu 4.2.4.1. Veza napon-dilatacija pritisnutih betonskih stubova takođe može da se izvede primenom RDA postupka. Ovaj postupak je prezentovan u radu [37]<sup>32</sup>, gde je data i njegova eksperimentalna verifikacija na kratkim stubovima i stubovima srednje vitkosti.

Polazimo od pretpostavke da se kod pritisnutih betonskih stubova poklapaju granica proporcionalnosti i granica elastičnosti ( $s_p = s_E$ ). Ova granica se, kod betona normalnih čvrstoća, pretpostavlja oko vrednosti  $(0.35-0.4)f_{cm}$ . Sa poznatim (merenim) vrednostima Poisson-ovog koeficijenta  $n$  i početnog modula elastičnosti  $E_H$ , izraz za strukturalni koeficijent tečenja betona (4.130), prema [40], postaje:

$$j^* = \frac{\left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{n s_E}{E_H}} \right)^4 - 1 \right] \frac{E_H}{2 s_E}}{1 - \left[ \left( \frac{1}{1 - \frac{n s_E}{E_H}} \right)^4 - 1 \right] \frac{E_H}{2 s_E}} . \quad (4.252)$$

Već je konstatovano da je uticaj veličine dilatacija na granici elastičnosti ( $e_E = s_E/E_H$ ) na veličinu strukturalnog koeficijenta tečenja neznan, te se, nezavisno od marke (klase čvrstoće) betona, može usvojiti vrednost  $e_E = 0.0003$ . Zavisnost veličine strukturalnog koeficijenta tečenja od veličine Poisson-ovog koeficijenta je

<sup>32</sup> Milašinović, D.D., Landović, A., Vlajić, L.J., Goleš, D.: Rheological-dynamical inelastic buckling in the short to intermediate column range: Experimental verification of concrete strengths, Mechanics of Time-Dependent Materials - rad na recenziji

prikazana u delu 4.2.4.2. na slici 4.17. Za krte materijale (kao što je beton) veza  $\log j^* - \log n$  je linearna, te joj odgovara gornja granica vrednosti Poisson-ovog koeficijenta  $n = 0.25$  [37].

Strukturalni koeficijent tečenja predstavlja koeficijent tečenja u trenutku dostizanja granice proporcionalnosti (u ovom slučaju - elastičnosti), koja je zajednička za obe krive izvijanja - Euler-ovu i RDA. Zbog toga se ovaj koeficijent može odrediti i iz uslova granične vitkosti (preseka Euler-ove i RDA krive izvijanja) (4.99), odnosno vitkosti stuba za koju se dobijaju iste vrednosti kritičnog napona prema linearno-elastičnoj Euler-ovoj teoriji i prema RDA postupku, koji tretira neelastično ponašanje materijala. Iz:

$$\left(\frac{L}{k_z}\right)_E = p^2 \frac{k_z^3}{l_z} \frac{1}{g^j(t_E, t_0)}, \quad (4.253)$$

gde je

$$j(t_E, t_0) = j^*,$$

sledi:

$$j^* = p^2 \frac{k_z^2}{l_z} \frac{1}{g\left(\frac{L}{k_z}\right)_E}. \quad (4.254)$$

Veličina  $(L/k_z)_E$  predstavlja graničnu vitkost. To je donja granica vitkosti za koju važi Euler-ova teorija i gornja granica vitkosti za RDA postupak.

Koeficijent tečenja je funkcija vremena, pa je i RDA modul  $E_R(t)$  vremenski zavisian (4.97):

$$E_R(t) = \frac{1}{\left(\frac{L}{k_z}\right)_E \frac{k_z^3}{l_z} \frac{1}{g^j(t)}}. \quad (4.255)$$

RDA kriva izvijanja je opisana drugim od izraza (4.98). Pre korekcije ona se može opisati sledećim izrazom:

$$s^{RDA} = \frac{1}{\left(\frac{L}{k_z}\right)_E \frac{k_z^3}{l_z} \frac{1}{g^{j^*}}} E_H. \quad (4.256)$$

U delu 4.2.4.1. je objašnjen postupak korekcije RDA krive izvijanja, kako bi se uzeo u obzir i uticaj promene modula  $E_H$  sa povećanjem napona, nakon dostizanja granice elastičnosti ( $s^{RDA} \geq s_E$ ). Pri naponima većim od  $s_E$  modul elastičnosti  $E_H$  više nije konstantan, nego se izjednačava sa vremenski promenljivim RDA modulom  $E_R(t)$ . Povećanjem napona  $s(t)$  veličina RDA modula opada. Korišćenjem krive  $E_R(t) - s(t)$  (sl. 4.48) može se popraviti rešenje dobijeno prema izrazu (4.256)

Uzećemo za primer slučaj opterećenja koji izaziva harmonijsku promenu napona do četvrtine sinusnog talasa, čime se obuhvata i slučaj konstantne brzine nanošenja opterećenja:

$$s(t) = s^{RDA} \sin(w_s t). \quad (4.257)$$

Odgovarajući koeficijent tečenja može se napisati u obliku:

$$j(t) = s(t) \frac{L_E k_z^3}{k_z l_z E_H} \frac{1}{g} = s(t) K_j, \quad (4.258)$$

gde je  $K_j$  konstanta stuba:

$$K_j = \frac{L_E k_z^3}{k_z l_z E_H} \frac{1}{g}, \quad (4.259)$$

dok je sa  $L_E$  označena dužina stuba pri graničnoj vitkosti  $I_E = L_E/k_z$ . Dinamički RDA modul viskoelastičnosti (4.102) je, prema [41]:

$$E_R(t) = \frac{\frac{1+d^2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t)}}{\frac{1+d^2}{E_H^2(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t)} \left( \frac{2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t)} \right)}, \quad (4.260)$$

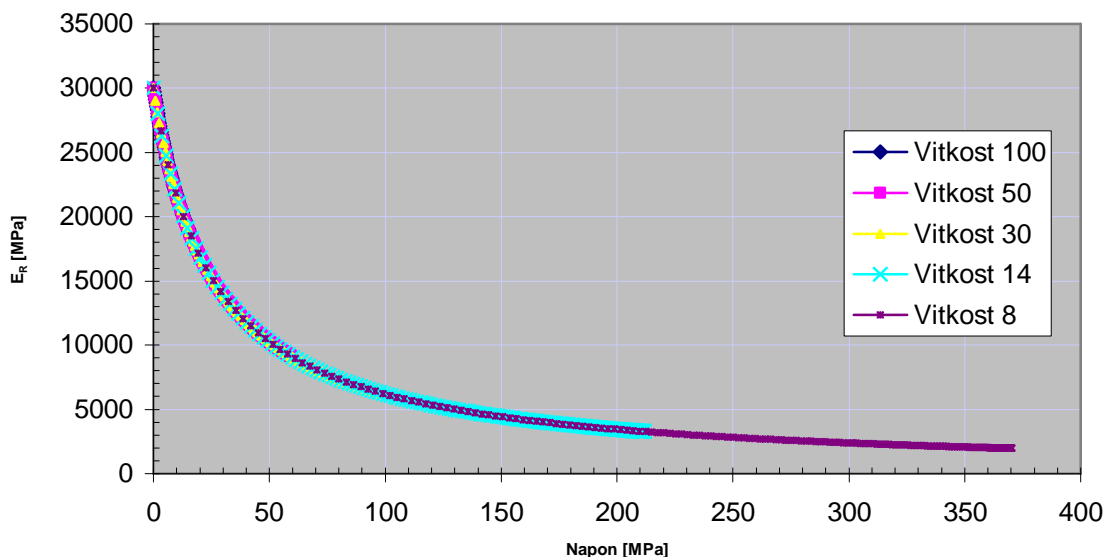
gde je:

$$w_s = \frac{p}{2t_E}, \quad d = \frac{p}{2t_E} T_K^D \quad \text{i} \quad E_K^D = \frac{E_H}{j(t)}. \quad (4.261)$$

Vreme  $t_E$ , kada napon dostiže granicu elastičnosti, treba da se odredi eksperimentalnim putem. Strukturalni koeficijent tečenja  $j^*$  se prethodno određuje korišćenjem izraza (4.252) za kratke, odnosno izraza (4.254) za srednje vitke stubove.

Kao što je objašnjeno u delu 4.2.4.1, dalji postupak određivanja kritičnog napona (pritisne čvrstoće) betonskog stuba je iterativan. Iz izraza (4.256) se određuje prva vrednost napona  $s^{RDA}$ , za koju se odgovarajući modul  $E_R(t)$  očitava sa dijagrama kao na slici 4.48. ili se određuje analitički, korišćenjem izraza (4.260). Nova vrednost napona određuje se iz izraza (4.107), pa se za nju sračunava odgovarajući RDA modul. Ovaj iterativni postupak konvergira naponu  $s_{RDAi}$ , kojem odgovara modul  $E_{RDAi}$ . Napon u  $i$ -toj iteraciji je određen izrazom (4.108):

$$s_{cr}^{RDA(i)} = E_R^{(i-1)} \frac{1}{\left( \frac{L}{k_z} \right) k_z^3 \frac{1}{l_z g j^*}}. \quad (4.262)$$



Slika 4.48. Veza modula  $E_R(t)$  i napona  $s(t)$  za različite vitkosti stuba iz eksperimenta [37]

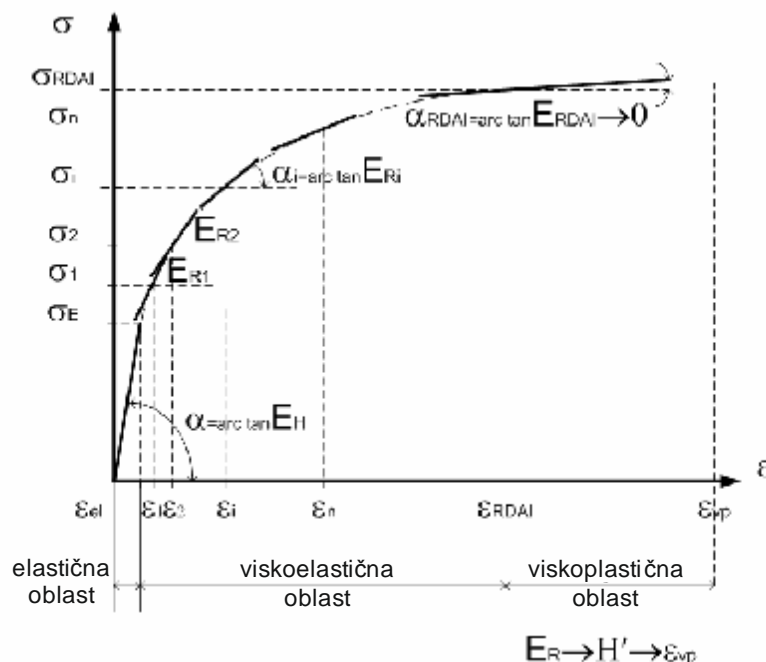
Sa poznatim kritičnim naponom (čvrstoćom aksijalno pritisnutog betonskog stuba) i poznatom vezom  $E_R(t) - s(t)$ , može se konstruisati dijagram napon-dilatacija jednoaksijalno pritisnutog stuba. Ovaj dijagram se konstruiše kao poligon (sl. 4.49), pri čemu početna dilatacija  $e_E = s_E/E_H$  odgovara poznatoj granici elastičnosti. Za  $i$ -ti interval možemo uspostaviti sledeće veze:

$$E_{Ri} = \frac{s_i - s_{i-1}}{e_i - e_{i-1}} \Rightarrow e_i = \frac{s_i - s_{i-1}}{E_{Ri}} + e_{i-1}. \quad (4.263)$$

Dakle, određivanje dilatacija iz poznatih napona se svodi na postupak korak po korak, gde se za određivanje dilatacije jednog koraka koristi već poznata dilatacija prethodnog koraka:



$$\begin{aligned}
 e_E &= \frac{S_E}{E_H}, & e_1 &= \frac{S_1 - S_E}{E_{R1}} + e_E, & e_2 &= \frac{S_2 - S_1}{E_{R2}} + e_1, \\
 e_i &= \frac{S_i - S_{i-1}}{E_{Ri}} + e_{i-1}, & e_{RDAI} &= \frac{S_{RDAI} - S_n}{E_{RDAI}} + e_n, \\
 e_{vp} &= \frac{S_{RDA} - S_{RDAI}}{E_H} + e_{RDAI}.
 \end{aligned}
 \tag{4.264}$$



Slika 4.49. RDA veza napon-dilatacija za betonske pritisnute stubove [37]

Opisani RDA postupak je u radu [37] primenjen na određivanje pritiskne čvrstoće i dijagrama napon-dilatacija za centrično opterećene elemente koji su bili predmet eksperimentalnih ispitivanja i čiji eksperimentalni podaci postoje u literaturi. Za uporednu analizu su izabrani centrično pritisnuti armiranobetonski stubovi srednje vitkosti, eksperimentalno ispitani na Građevinskom fakultetu u Subotici u okviru izrade magistarske teze mr Landović, A., koji su prikazani u radu [66], i prizme koje su ispitali Hirst i Neville [28], kao primer centrično pritisnutih kratkih betonskih stubova. Pokazalo se da se rezultati dobijeni primenom RDA postupka odlično slažu sa eksperimentalno dobijenim podacima. Na ovom mestu ćemo primenu RDA postupka na stubove srednje vitkosti prikazati na primeru iz [66], dok će verifikacija postupka za kratke stubove biti sprovedena na primeru uzoraka oblika kocke, koji su eksperimentalno ispitani u okviru izrade doktorske disertacije dr Kukaras, D. [33].

#### 4.4.3.1. Primena RDA postupka na stubove srednje vitkosti

Eksperimentalno ispitivanje [66] je sprovedeno u Laboratoriji za ispitivanje materijala i konstrukcija na Građevinskom fakultetu u Subotici, na tri armiranobetonska stuba kvadratnog poprečnog preseka dimenzija 10x10cm, visine 85cm. Maseni odnos sastojaka mešavine betona je bio voda:cement:pesak:krupan agregat=0.5:1.0:1.2:3.6. Sitan agregat u betonskoj mešavini je bio silikatni pesak, dok je za krupan agregat upotrebljen karbonatni kamen. Mehaničke karakteristike betona su ispitane hidrauličnim uređajem Controls Automax 5, kapaciteta 3000kN, pri starosti uzoraka od 28 dana. Ove karakteristike su prikazane u tabeli 4.10.

Stubovi su armirani glavnom armaturom 4φ5mm i uzengijama uφ4mm na rastojanju od 3cm u gornjih i donjih 20cm visine stuba, odnosno 6cm u sredini. Ispitivanje je sprovedeno hidrauličnim uređajem kapaciteta 2000kN. Uzorci su

postavljeni direktno na krutu čeličnu ploču uređaja (sl. 4.50). Aksijalno opterećenje je nanošeno preko čeličnih ležišta. Intenzitet opterećenja je meren sa tačnošću  $\pm 1$  kN. Ispitivanje je sprovedeno na temperaturi od  $20^{\circ}\text{C}$  i pri relativnoj vlažnosti sredine od 40%. Opterećenje je nanošeno u koracima. Prvi korak ("tehnička nula") je iznosio 2kN, nakon čega je opterećenje nanošeno u koracima po 50kN do dostizanja 50% od očekivane nosivosti, zatim u koracima po 25kN, da bi blizu očekivane granične nosivosti koraci bili smanjeni na 10kN. Brzina nanošenja opterećenja u svakom koraku je bila 2kN/sec, a svaki korak opterećenja je održavan približno 2 do 3 minute. Za sve uzorke snimani su i analizirani sledeći podaci: promena stanja napona i deformacije, granična nosivost  $P_u$ , oblik globalne deformacije pri lomu, učešće pojedinih materijala u nosivosti stuba i razvoj prslina u AB stubovima. Deformacije su merene u sredini visine stubova pomoću 8 mernih traka. Izmerene sile pri lomu uzoraka su prikazane u tabeli 4.11.



Slika 4.50. Dispozicija uzorka i mernih uređaja [66]

Tabela 4.10. Mehaničke karakteristike betona, prema [37]

Pritisna čvrstoća kocke ivice 15cm	$f_{ck,cube}$ [MPa]	57.2
Pritisna čvrstoća cilindra $\phi 15 \times 30$ cm	$f_{ck}$ [MPa]	40.6
Statički modul elastičnosti	$E_{cm}$ [GPa]	30.0
Poisson-ov koeficijent	$\nu$	0.19

Tabela 4.11. Izmerene sile pri lomu stubova, prema [37]

Oznaka stuba	Granična sila $P_u$ [kN]
S1	305
S2	391
<b>S3</b>	<b>407</b>
Srednja vrednost	368

Primenićemo RDA postupak na stub oznake S3 (tabela 4.11). Njegove geometrijske karakteristike su sledeće:  $A_c = 10^2 = 100\text{cm}^2$ ,  $I_z = 10^4/12 = 833.333\text{cm}^4$ ,  $k_z = \sqrt{I_z/A_c} = 2.887\text{cm}$ ,  $k_z^3/I_z = 0.028867\text{cm}^{-1}$ . Zapreminska težina materijala je  $g = 25\text{kN/m}^3$ . Za kritičnu vitkost, pri kojoj se seku Euler-ova i RDA kriva, usvojena je vitkost  $I_E = 100$ , što se poklapa sa donjom granicom važenja Euler-ove krive prema literaturi. Stvarna vitkost stuba je  $I = 85/2.887 = 29.45$ , pa ga možemo smatrati

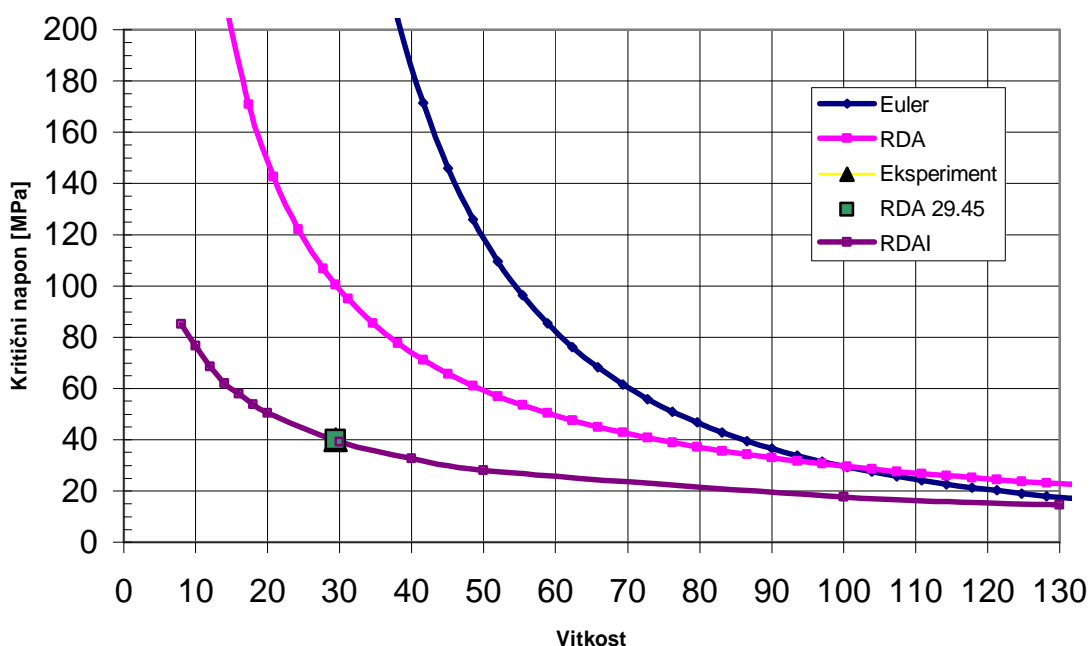
stubom srednje vitkosti. Strukturalni koeficijent tečenja se, za stubove srednje vitkosti, određuje iz izraza (4.254):

$$j^* = p^2 \frac{k_z^2}{I_z} \frac{1}{g \left( \frac{L}{k_z} \right)_E} = p^2 \cdot 0.028867 \cdot \frac{1}{2.5 \cdot 10^{-3} \cdot 100} = 1.14$$

Neelastična RDA kriva izvijanja je opisana izrazom:

$$s^{RDA} = \frac{1}{\left( \frac{L}{k_z} \right) k_z^3 \frac{1}{I_z} g j^*} E_H = \frac{30000 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.14}{\frac{L}{k_z} \cdot 0.028867}$$

Krive izvijanja stuba prema Euler-u i RDA prikazane su na slici 4.51.



Slika 4.51. Uporedni prikaz krivih izvijanja za stub S3

Za stub granične vitkosti  $I_E = 100$  napon na granici elastičnosti i odgovarajuća dilatacija iznose:

$$s^{RDA} = s_E = \frac{30000 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.14}{100 \cdot 0.028867} = 29.6 \text{ MPa}, \quad e_E = \frac{s_E}{E_H} = \frac{29.6}{30000} = 0.000986$$

Granični napon, dobijen eksperimentalnim putem, za stub S3, je:

$$s_{\text{exp}} = \frac{P_u}{A_c} = \frac{407 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-4}} = 40.7 \text{ MPa}.$$

RDA analizu ćemo dalje sprovesti za stub opterećen aksijalno, opterećenjem koje izaziva harmonijsku promenu napona:

$$s(t) = s^{RDA} \sin(w_s t),$$

sa ranije sračunatom amplitudom  $s^{RDA}$  i kružnom frekvencijom:

$$w_s = \frac{p}{2 \cdot t_E} = \frac{p}{2 \cdot 900}.$$

Eksperimentalno određeno vreme  $t_E = 900 \text{ s}$  je podeljeno u 180 koraka, tako da svaki korak traje  $t = 5 \text{ s}$ . Uzimajući u obzir

$$E_K^D = \frac{E_H}{j(t)},$$

gde je

$$j(t) = s(t) \cdot K_j = s(t) \cdot 100 \cdot 0.28867 \cdot \frac{1}{30000} \cdot \frac{1}{2.5 \cdot 10^{-3}} = s(t) \cdot 0.038489,$$

možemo odrediti dinamički RDA modul

$$E_R(t) = \frac{\frac{1+d^2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t)}}{\frac{1+d^2}{E_H^2(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t)} \left( \frac{2}{E_H(t_0)} + \frac{1}{E_K^D(t)} \right)},$$

gde je

$$d = \frac{w_s}{w} = \frac{p}{2 \cdot 900} \cdot T_K^D = \frac{p}{1800} \cdot L \cdot \sqrt{\frac{g}{E_H \cdot g}} =$$

$$= \frac{p}{1800} \cdot L \cdot \sqrt{\frac{25}{30000000 \cdot 10}} = 0.503 \cdot 10^{-6} \cdot L, \dots\dots d^2 \rightarrow 0,$$

pa se dinamički RDA modul može približno sračunati prema:

$$E_R(t) \cong \frac{E_H}{1+s(t) \cdot K_j}.$$

Na slici 4.48 je prikazana veza  $E_R(t)$  i  $s(t)$  za različite vitkosti stuba. Uočava se da jedna kriva obuhvata sve pojedinačne krive, što znači da se za sve dužine stubova može koristiti isti izraz.

Vrednost graničnog napona za ispitani stub, stvarne vitkosti  $I = 29.45$ , je

$$s_{RDA} = \frac{30000 \cdot 2.5 \cdot 10^{-3} \cdot 1.14}{29.45 \cdot 0.028867} = 100.59 \text{ MPa},$$

dok je odgovarajući dinamički RDA modul

$$E_R(t) = \frac{30000}{1+100.59 \cdot 0.038489} = 6159.8 \text{ MPa}.$$

Sa ovom vrednošću RDA modula može da se sračuna novi napon, te se iterativni postupak primenjuje do konvergencije ka naponu  $s_{RDAI}$  sa odgovarajućim modulom  $E_{RDAI}$  (tabela 4.12).

Tabela 4.12. Vrednosti napona i RDA modula, po iteracijama, za stub S3

Iteracija	$s_{cr}^{RDA(i)}$ [MPa]	$E_R^{(i)}$ [MPa]
0	100.5882	6159.8
1	20.6535	16623.5
2	55.7376	9500.0
3	31.8529	13464.6
4	45.1462	11001.5
5	36.8873	12404.6
6	41.5918	11516.4
7	38.6138	12091.5
8	40.5419	11750.0
9	39.3971	<b>11941.5 = <math>E_{RDAI}</math></b>
10	<b>40.0393 = <math>s_{RDAI}</math></b>	

Dakle, za ispitani stub S3 ( $l = 85\text{cm}$ ,  $I = 29.45$ ) sračunata je čvrstoća pri izvicanju  $s_{RDAI} = 40.04\text{MPa}$ , što je veoma blisko eksperimentalno utvrđenoj vrednosti  $s_{exp} = 40.7\text{MPa}$  (sl. 4.51).

RDA dijagram napon-dilatacija za analizirani stub S3 ćemo dobiti primenom izraza (4.264). U tu svrhu su nam potrebni parovi vrednosti napona  $s(t)$  i modula  $E_R(t)$  u različitim trenucima nanošenja opterećenja. Ovi podaci su prikazani u tabeli 4.13.

Tabela 4.13. Vrednosti funkcije napona  $s(t)$  i modula  $E_R(t)$  za stub S3, u različitim vremenima opterećivanja

t [sec]	$\sigma$ (t) [MPa]	$\varphi$ (t)	$E_k^D$ (t) [MPa]	$E_R$ (t) [MPa]
0.00001	0.0000	0.00000	4.44121E+11	30000.0
5	0.8778	0.03377	888254.062	29019.9
10	1.7555	0.06755	444143.9427	28101.8
15	2.6331	0.10131	296114.7538	27240.2
20	3.5105	0.13507	222105.7991	26430.1
25	4.3876	0.16882	177704.9398	25666.9
30	5.2644	0.20255	148108.1299	24946.9
35	6.1408	0.23627	126970.7787	24266.4
40	7.0167	0.26998	111120.5912	23622.5
45	7.8921	0.30366	98795.18151	23012.2
50	8.7668	0.33732	88937.11831	22433.0
55	9.6410	0.37095	80873.491	21882.6
60	10.5143	0.40455	74155.69273	21359.1
65	11.3869	0.43813	68473.14971	20860.5
70	12.2586	0.47167	63604.02368	20385.0
75	13.1294	0.50517	59385.63343	19931.3
80	13.9992	0.53864	55695.96819	19497.8
85	14.8679	0.57206	52441.72576	19083.2
90	15.7355	0.60544	49550.33791	18686.4
95	16.6018	0.63878	46964.51405	18306.3
100	17.4670	0.67207	44638.42183	17941.9
105	18.3307	0.70530	42534.95899	17592.2
110	19.1931	0.73848	40623.76928	17256.4
115	20.0541	0.77161	38879.77586	16933.8
120	20.9135	0.80468	37282.08151	16623.5
125	21.7713	0.83768	35813.13265	16324.9
130	22.6274	0.87062	34458.07634	16037.4
135	23.4819	0.90350	33204.2602	15760.5
140	24.3345	0.93631	32040.8394	15493.4
145	25.1853	0.96904	30958.46505	15235.8
150	26.0342	1.00170	29949.03486	14987.2
155	26.8810	1.03429	29005.49209	14747.2
160	27.7259	1.06679	28121.66218	14515.2
165	28.5686	1.09922	27292.11906	14291.0
<b>170</b>	<b>29.4092</b>	<b>1.13156</b>	<b>26512.07514</b>	<b>14074.2</b>
<b>175</b>	<b>30.2475</b>	<b>1.16382</b>	<b>25777.29002</b>	<b>13864.4</b>
180	31.0835	1.19598	25083.99455	13661.3
185	31.9171	1.22806	24428.82715	13464.6
190	32.7483	1.26004	23808.78012	13274.1
195	33.5770	1.29193	23221.15436	13089.4
200	34.4032	1.32371	22663.52072	12910.4
205	35.2267	1.35540	22133.68712	12736.7
210	36.0476	1.38698	21629.67033	12568.2
215	36.8657	1.41846	21149.67165	12404.6
220	37.6810	1.44983	20692.05599	12245.7
225	38.4935	1.48109	20255.33365	12091.5
230	39.3030	1.51224	19838.14454	11941.5
<b>235</b>	<b>40.1095</b>	<b>1.54327</b>	<b>19439.2444</b>	<b>11795.8</b>

$$e_E = \frac{29.6}{30000} = 0.000986, \quad s_1 = 30.2 \text{ MPa},$$

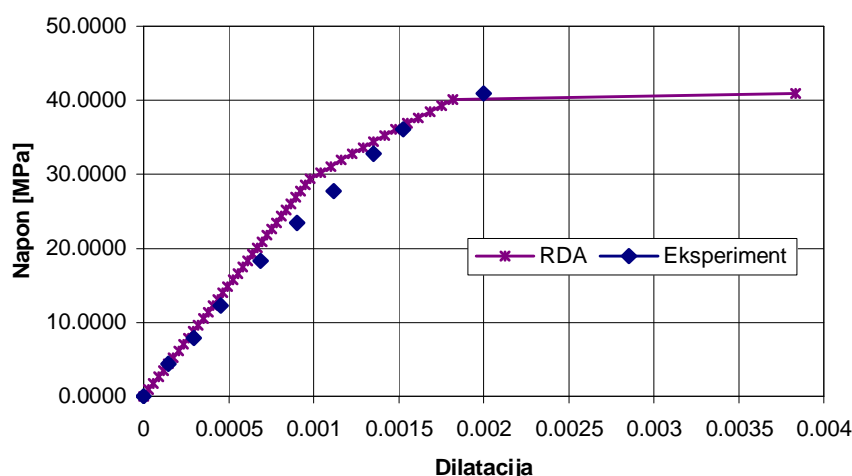
$$e_1 = \frac{30.2 - 29.6}{13864.4} + 0.000986 = 0.001041,$$

$$e_2 = \frac{31.1 - 30.2}{13661.3} + 0.001041 = 0.001102, \dots,$$

$$e_{\text{RDAI}} = \frac{40.1 - 39.3}{11795.8} + 0.001751 = 0.001820,$$

$$e_{\text{vp}} = \frac{100.6 - 40.9}{30000} + 0.001820 = 0.003809.$$

Dijagrami napon-dilatacija stuba S3, dobijeni eksperimentalno i primenom RDA postupka, uporedo su prikazani na slici 4.52. Može se zaključiti da dijagram dobijen primenom RDA postupka vrlo malo odstupa od merenih vrednosti.



Slika 4.52. Uporedni prikaz dijagrama napon-dilatacija za stub S3, dobijenih RDA postupkom i eksperimentalno

#### 4.4.3.2. Primena RDA postupka na kratke stubove

Slično kao i kod drugih postupaka za određivanje kritičnog napona centrično pritisnutih stubova u plastičnoj oblasti (npr. teorija tangentnog modula, koju su razvili Considère (1891) i Engesser (1889) [37], upotreba Tetmayer-ove prave (1883-95) i sl.), primena RDA postupka je ograničena na određeni opseg vitkosti. Već ustanovljena, gornja granica vitkosti  $I_E$  predstavlja vitkost pri kojoj se seku Euler-ova i RDA kriva izvijanja. Ovo je vitkost koja odgovara granici elastičnosti materijala i za sve manje vitkosti izvijanje se dešava u plastičnoj oblasti.

U ovom istraživanju je uočeno da je primena opisanog RDA postupka za predviđanje kritičnog napona ograničena i sa donje strane. Donja granica vitkosti stuba  $I_D$  je vitkost ispod koje se kritični napon ne dostiže usled izvijanja, već on postaje jednak pritisnoj čvrstoći  $f_{cm}$  materijala, odnosno njegovoj granici gnječenja  $s_y$  (sl. 4.57).

Pre korekcije RDA krive izvijanja, izraz (4.98) možemo napisati u obliku:

$$s_{cr} = \begin{cases} \frac{p^2}{(L/k_z)^2} E_H & \text{za } l = \frac{L}{k_z} \geq I_E, \\ \frac{E_H}{\left(\frac{L}{k_z}\right)^3 k_z^3 \frac{1}{g_j^*}} & \text{za } I_{D,n} \leq l \leq I_E, \\ f_{cm} & \text{za } l \leq I_{D,n}. \end{cases} \quad (4.265)$$

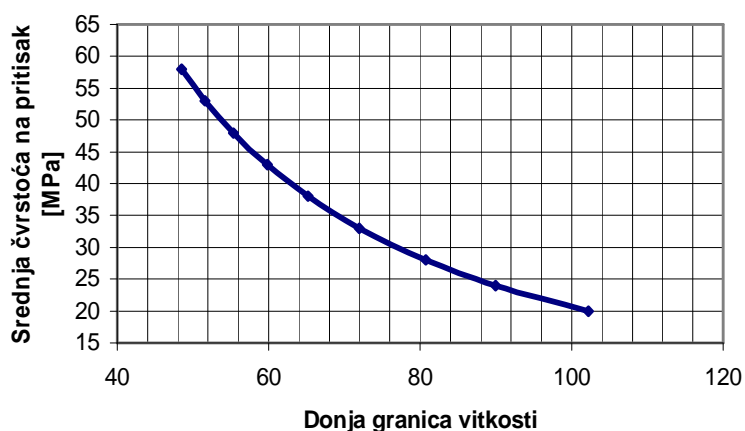
Donja granica vitkosti se sada može dobiti izjednačavanjem donja dva izraza za kritični napon:

$$s_{cr} = \frac{E_H}{\left(\frac{L}{k_z}\right)_{D,n} \frac{k_z^3}{l_z} \frac{1}{g_j^*}} = f_{cm} \Rightarrow I_{D,n} = \left(\frac{L}{k_z}\right)_{D,n} = \frac{E_H}{f_{cm} \frac{k_z^3}{l_z} \frac{1}{g_j^*}} \quad (4.266)$$

Iz izraza (4.266) se vidi da je donja granična vitkost funkcija oblika i dimenzija poprečnog preseka stuba, čvrstoće betona na pritisak, početnog modula elastičnosti, zapreminske težine betona i strukturalnog koeficijenta tečenja. Strukturalni koeficijent tečenja je funkcija dilatacija na granici elastičnosti i Poisson-ovog koeficijenta (4.252). Poisson-ov koeficijent se može utvrditi eksperimentom, a ukoliko ne postoje ekperimentalni podaci, preporučuje se usvajanje vrednosti  $n=0.2$ . Početni modul elastičnosti zavisi od kvaliteta betona (njegove marke, odnosno karakteristične čvrstoće). U nedostatku eksperimentalnih podataka mogu se koristiti analitički izrazi kojima je iskazana veza početnog modula elastičnosti i karakteristične ili srednje čvrstoće betona na pritisak, prema odgovarajućem standardu (4.241) i (4.244). Iz ove analize sledi zaključak da donja granica vitkosti zavisi od geometrije poprečnog preseka, čvrstoće betona na pritisak i Poisson-ovog koeficijenta. Sa usvojenom vrednošću Poisson-ovog koeficijenta  $n=0.2$ , donje granice vitkosti uzoraka kružnog poprečnog preseka prečnika 150 mm, za različite klase čvrstoće betona, prikazane su u tabeli 4.14 i na slici 4.53.

Tabela 4.14. Granična vitkost  $I_{D,n}$  za različite klase čvrstoće betona, za stubove kružnog poprečnog preseka prečnika 150 mm

Klasa čvrstoće	$f_{cm}$ [MPa]	$E_H=E_{cm}$ [GPa]	$I_{D,n}$
C 12/15	20	27.08518	102.1597668
C 16/20	24	28.6079	89.91932138
C 20/25	28	29.96195	80.72169411
C 25/30	33	31.47581	71.951712
C 30/37	38	32.83657	65.18570579
C 35/45	43	34.07715	59.78234836
C 40/50	48	35.22046	55.35183508
C 45/55	53	36.28319	51.64256218
C 50/60	58	37.27787	48.48431837



Slika 4.53. Promena granične vitkosti  $I_{D,n}$  u funkciji srednje čvrstoće betona na pritisak, za stubove kružnog poprečnog preseka prečnika 150mm

Donja granica vitkosti iz korigovane RDA krive izvijanja ( $I_D$ ), budući da se korekcija vrši za svaku vitkost posebno, očitava se sa dijagrama napon-vitkost, kao presečna tačka korigovane RDA krive izvijanja i prave koja predstavlja pritisnu čvrstoću materijala (sl. 4.57).

Na ovaj način smo utvrdili da se primenom opisanog RDA postupka ne može predvideti kritični napon za stubove vitkosti manje od donje granične vitkosti  $I_D$ . Ipak, ovim postupkom se mogu dobiti dijagrami napon-dilatacija za sve centrično pritisnute stubove čija vitkost ne prelazi veličinu  $I_E$ . Naime, za vitkost koja predstavlja donju granicu primenljivosti RDA postupka, kritični napon usled izvijanja je jednak čvrstoći betona na pritisak, pa dijagram napon-dilatacija, koji se dobija RDA postupkom za ovu, graničnu vitkost, važi i za sve vitkosti manje od  $I_D$ . Zbog ovoga se radni dijagrami betona različitih čvrstoća mogu dobiti ako se opisani RDA postupak primeni na standardne uzorke za ispitivanje pritisne čvrstoće betona (cilindre i kocke).

**Primer.** Primena opisanog postupka biće ilustrovana na primeru betonskih kocki koje su korišćene za eksperimentalno određivanje čvrstoće betona na pritisak u okviru izrade doktorske disertacije dr Kukaras, D. [33]. Eksperimentalno ispitivanje je sprovedeno u Laboratoriji za ispitivanje materijala i konstrukcija na Građevinskom fakultetu u Subotici. Na ovaj način će biti izvršena i verifikacija predloženog RDA postupka na ekperimentalno utvrđenim podacima.

Za potrebe utvrđivanja mehaničkih karakteristika betona ugrađenog u gredne elemente koji su bili predmet istraživanja u radu [33], paralelno su pripremljena probna tela od istog betona, i to:

- Za određivanje pritisne čvrstoće - tri kocke ivice 15cm,
- Za određivanje Poisson-ovog koeficijenta i početnog modula elastičnosti - šest prizmi dimenzija 10x10x40cm.

Beton je spravljen po recepturi za MB 35: voda  $m_v=195.28\text{kg/m}^3$ , cement PC 35  $m_c=406.25\text{kg/m}^3$  (vodocementni faktor  $m_v/m_c = 0.48$ ), agregat: pesak (0-4mm)  $607.971\text{kg/m}^3$ , šljunak (4-8mm)  $454.49\text{kg/m}^3$ , šljunak (8-16mm)  $757.61\text{kg/m}^3$ . Uzorci su negovani i čuvani na isti način kao i grede. Rezultati ispitivanja pritisne čvrstoće uzoraka prikazani su u tabeli 4.15.

Tabela 4.15. Pritisna čvrstoća ispitanih uzoraka [33]

Uzorak	Pritisna čvrstoća $f_{\text{cube}}$ [MPa]	Srednja vrednost pritisne čvrstoće $f_{\text{cm}}$ [MPa]
1	45.1	47.2
2	48.5	
3	48.5	

Određivanje Poisson-ovog koeficijenta i modula elastičnosti je izvršeno na šest betonskih prizmi dimenzija 10x10x40cm. Svaka prizma je bila opremljena sa po četiri merne trake, od kojih su po dve zalepljene na naspramnim stranama prizmi - dve za registrovanje vertikalnih, a dve za registrovanje horizontalnih dilatacija. Dilatacije su praćene preko Vitston-ovog mernog mosta (sl. 4.54). Uzorci su ispitivani u presi, a sila je, osim na skali prese, praćena i preko digitalnog dinamometra koji je bio spojen na Vitston-ov most (sl. 4.55).

Dobijene vrednosti modula elastičnosti su date u tabeli 4.16. Na slici 4.56 je prikazan odnos merenih vrednosti horizontalnih i vertikalnih dilatacija (crvenom linijom su povezane srednje vrednosti). Isprekidana linija predstavlja linearnu funkciju kojom su aproksimirane merene vrednosti, primenom metode najmanjih kvadrata. Na osnovu nagiba ove linije usvojena je vrednost Poisson-ovog koeficijenta  $\mu=0.197$ .





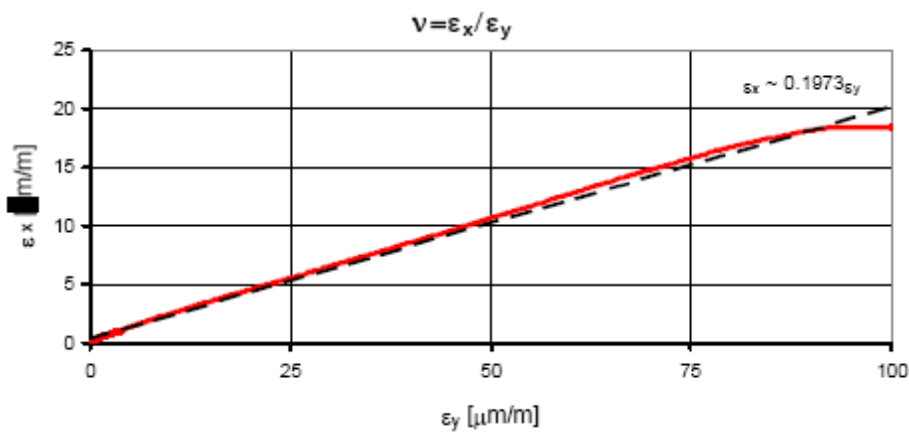
Slika 4.54. Uzorci za ispitivanje modula elastičnosti i Poisson-ovog koeficijenta i uzorak spojen na digitalni merni most [33]



Slika 4.55. Uzorak sa digitalnim dinamometrom pre i posle ispitivanja [33]

Tabela 4.16. Početni modul elastičnosti ispitanih uzoraka [33]

Uzorak	Početni modul elastičnosti $E_c$ [MPa]	Srednja vrednost modula elastičnosti $E_{cm}$ [MPa]
1	33390	35110
2	36570	
3	34800	
4	35900	
5	35020	
6	34970	



Slika 4.56. Odnos poprečnih i podužnih dilatacija - Poisson-ov koeficijent [33]

Geometrijske karakteristike poprečnog preseka uzoraka na kojima je ispitana pritisna čvrstoća betona su sledeće:  $A_c = 15^2 = 225\text{cm}^2$ ,  $I_z = 15^4/12 = 4218.75\text{cm}^4$ ,  $k_z = \sqrt{I_z/A_c} = 4.330\text{cm}$ ,  $k_z^3/I_z = 0.019245\text{cm}^{-1}$ . Usvojena je zapreminska težina betona  $g = 24\text{kN/m}^3$ .

Sa eksperimentalno utvrđenim vrednostima Poisson-ovog koeficijenta ( $\nu=0.197$ ), početnog modula elastičnosti ( $E_{cm}=35.11\text{GPa}$ ) i srednje vrednosti pritisne čvrstoće ( $f_{cm}=47.2\text{MPa}$ ) možemo odrediti:

- Strukturalni koeficijent tečenja betona (sa pretpostavljenim  $e_E=0.0003$ )

$$j^* = \frac{\left[ \left( \frac{1}{1-0.197 \cdot 0.0003} \right)^4 - 1 \right] \frac{1}{2 \cdot 0.0003}}{1 - \left[ \left( \frac{1}{1-0.197 \cdot 0.0003} \right)^4 - 1 \right] \frac{1}{2 \cdot 0.0003}} = 0.6503$$

- Vitkost na granici elastičnosti

$$I_E = p^2 \frac{k_z^3}{I_z} \frac{1}{gj^*} = p^2 \cdot 0.019245 \cdot \frac{1}{2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6503} = 121.701$$

- Napon i dilataciju na granici elastičnosti

$$s_E = \frac{35110 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6503}{121.701 \cdot 0.019245} = 23.40\text{MPa}, \quad e_E = \frac{s_E}{E_H} = \frac{23.40}{35110} = 0.000666476$$

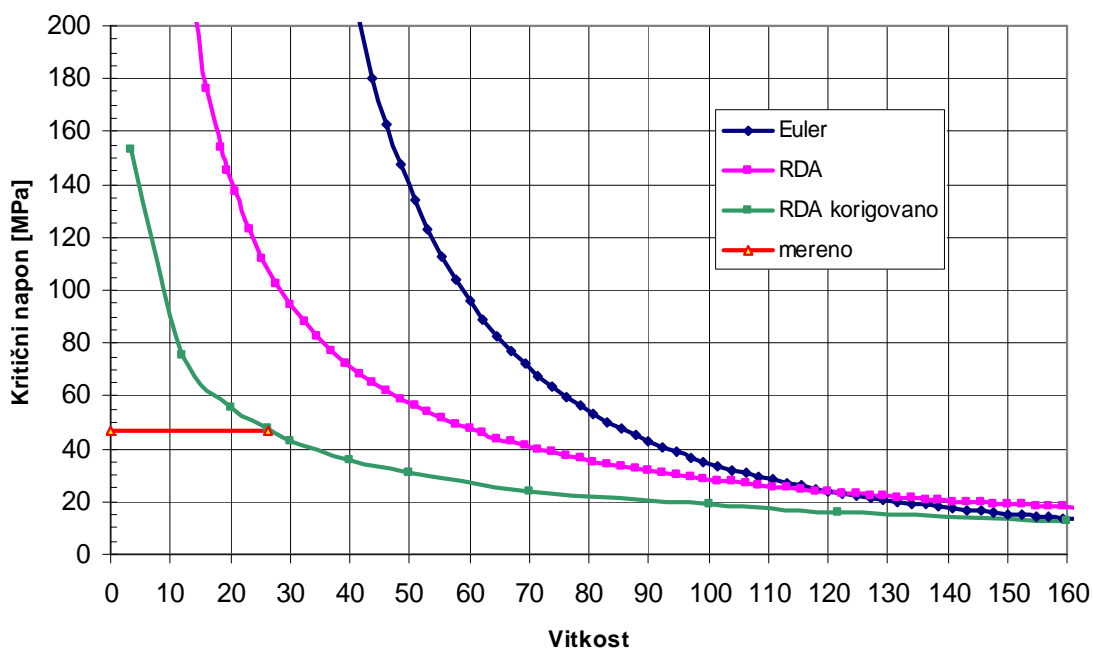
- Nekorogovanu RDA krivu izvijanja (sl. 4.57)

$$s^{RDA} = \frac{1}{I} \frac{k_z^3}{I_z} \frac{1}{gj^*} E_H = \frac{35110 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6503}{I \cdot 0.019245} = \frac{2847.33}{I}$$

- Donju granicu vitkosti za nekorogovanu RDA krivu izvijanja

$$I_{D,n} = \frac{35110 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6503}{47.2 \cdot 0.019245} = 60.32$$

- Korigovanu RDA krivu izvijanja, iterativnim postupkom opisanim u delu 4.4.3.1, koji se ponavlja za različite vitkosti  $I$  (sl. 4.57)



Slika 4.57. Krive izvijanja i merena srednja čvrstoća na pritisak betonske kocke ivice 15cm

- Donju granicu vitkosti za korigovanu RDA krivu izvijanja, očitavanjem sa dijagrama na slici 4.57 presečne tačke korigovane RDA krive izvijanja i horizontalne prave koja predstavlja merenu srednju čvrstoću na pritisak:  $I_D = 26.2$ . Stvarna vitkost uzorka je  $I = 15/4.33 = 3.464 < I_D$ .

- Nekorigovani RDA kritični napon za donju granicu vitkosti

$$s^{RDA} = \frac{1}{I_D \frac{k_z^3}{I_z} \frac{1}{g_j^*}} E_H = \frac{35110 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6503}{26.2 \cdot 0.019245} = 108.68 \text{MPa}$$

- Parove  $s(t) - E_R(t)$  pri vitkosti  $I_D$  za različite trenutke nanošenja opterećenja, korišćenjem izraza

$$E_R(t) \cong \frac{E_{cm}}{1 + s(t) \cdot K_j}, \text{ gde je}$$

$$K_j = I_E \frac{k_z^3}{I_z} \frac{1}{E_H} \frac{1}{g} = 121.701 \cdot 0.019245 \cdot \frac{1}{35110} \cdot \frac{1}{2.4 \cdot 10^{-3}} = 0.027795212.$$

Ovi parovi su prikazani u tabeli 4.18.

- Korigovana vrednost kritičnog napona se poklapa sa srednjom vrednošću čvrstoće betonske kocke, odnosno:

$$s_{RDAI} = f_{cm} = 47.2 \text{MPa},$$

što se dobija i iterativnim postupkom primenjenim na parove  $s(t) - E_R(t)$  na donjoj granici vitkosti  $I_D$  (tabela 4.17).

Tabela 4.17. Vrednosti napona i RDA modula, po iteracijama, za kocku

Iteracija	$s_{cr}^{RDA(i)}$ [MPa]	$E_R^{(i)}$ [MPa]
0	108.6767	8732.3
1	27.0294	19990.7
2	61.8775	12951.3
3	40.0883	16285.0
4	50.4074	14661.0
5	45.3803	15422.1
6	47.7365	15106.4
7	46.7591	15262.3
8	<b>47.2417 = <math>s_{RDAI}</math></b>	<b>15179.12 = <math>E_{RDAI}</math></b>

- RDA dijagram napon-dilatacija, primenom izraza (4.264).

$$e_E = \frac{23.40}{35110} = 0.000666476, \quad s_1 = 23.5219 \text{MPa},$$

$$e_1 = \frac{23.5219 - 23.40}{21229.9} + 0.000666476 = 0.000672218$$

$$e_2 = \frac{24.4469 - 23.5219}{20905.0} + 0.000672218 = 0.000716466, \dots,$$

$$e_{RDAI} = \frac{47.2417 - 46.7865}{15179.12} + 0.002005529 = 0.002035517,$$

$$e_{vp} = \frac{108.68 - 47.2417}{35110} + 0.002035517 = 0.003785397.$$

Gore analizirani podaci su dati u tabeli 4.18. Na slici 4.58 je prikazan dijagram napon-dilatacija za analizirani uzorak. Uporedo sa sračunatim vrednostima prikazan je i dijagram napon-dilatacija za nelinearnu analizu (4.243), prema EC 2, pri čemu su kao

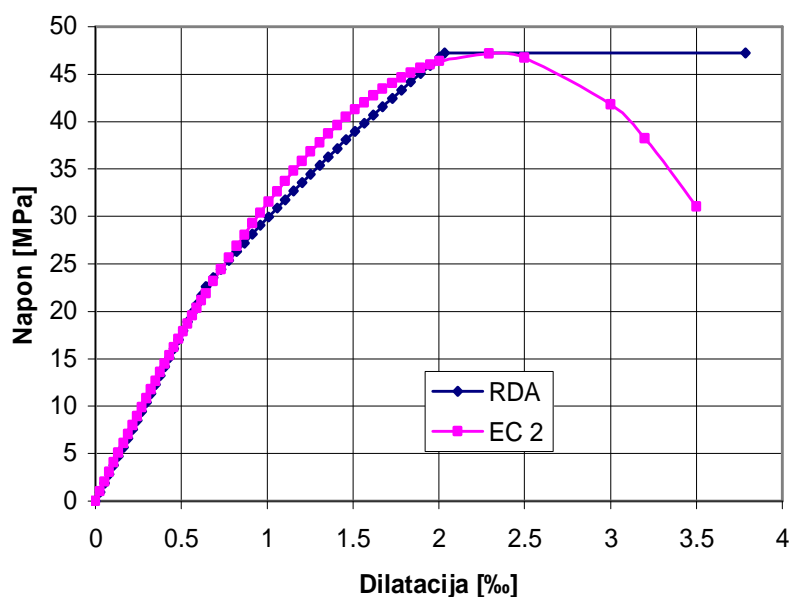
ulazni podaci korišćene merene vrednosti  $E_{cm}$  i  $f_{cm}$ , dok je za dilataciju pri najvećem naponu usvojena vrednost koja se dobija iz tabele 3.1 Evrokoda 2 [20] za merenu vrednost  $f_{cm}$ , linearnom interpolacijom.

Tabela 4.18. Vrednosti funkcije napona  $s(t)$ , modula  $E_R(t)$  i dilatacija  $e(t)$  u različitim vremenima opterećivanja

t [sec]	$\sigma$ (t) [MPa]	$E_R$ (t) [MPa]	$\epsilon(t)$ [‰]
0.00001	0.0000	35110.0	0.0000
5	0.9484	34208.3	0.0270
10	1.8967	33351.8	0.0540
15	2.8448	32537.2	0.0810
20	3.7928	31761.7	0.1080
25	4.7404	31022.5	0.1350
30	5.6877	30317.1	0.1620
35	6.6346	29643.5	0.1890
40	7.5809	28999.5	0.2159
45	8.5267	28383.2	0.2429
50	9.4718	27793.0	0.2698
55	10.4162	27227.2	0.2967
60	11.3598	26684.5	0.3235
65	12.3026	26163.4	0.3504
70	13.2444	25662.8	0.3772
75	14.1852	25181.5	0.4040
80	15.1249	24718.4	0.4308
85	16.0634	24272.6	0.4575
90	17.0008	23843.2	0.4842
95	17.9368	23429.2	0.5109
100	18.8715	23030.0	0.5375
105	19.8048	22644.7	0.5641
110	20.7365	22272.6	0.5906
115	21.6666	21913.2	0.6171
120	22.5952	21565.9	0.6436
125	23.5219	21229.9	0.6872
130	24.4469	20905.0	0.7315
135	25.3701	20590.4	0.7763
140	26.2913	20285.8	0.8217
145	27.2105	19990.7	0.8677
150	28.1276	19704.7	0.9142
155	29.0426	19427.4	0.9613
160	29.9554	19158.4	1.0090
165	30.8658	18897.5	1.0571
170	31.7740	18644.2	1.1059
175	32.6797	18398.2	1.1551
180	33.5829	18159.3	1.2048
185	34.4836	17927.2	1.2551
190	35.3817	17701.6	1.3058

Tabela 4.18. (nastavak)

t [sec]	$\sigma$ (t)	$E_R$ (t) [MPa]	$\varepsilon$ (t) [‰]
195	36.2770	17482.2	1.3570
200	37.1696	17268.9	1.4087
205	38.0594	17061.4	1.4609
210	38.9462	16859.4	1.5135
215	39.8301	16662.8	1.5665
220	40.7110	16471.4	1.6200
225	41.5888	16285.0	1.6739
230	42.4634	16103.5	1.7282
235	43.3347	15926.5	1.7829
240	44.2028	15754.1	1.8380
245	45.0675	15586.0	1.8935
250	45.9288	15422.1	1.9493
255	46.7865	15262.3	2.0055
260	47.2417	15179.12	2.0360
	47.2147		3.7850



Slika 4.58. Uporedni prikaz dijagrama napon-dilatacija za ispitanu kocku, dobijenih RDA postupkom i prema EC 2 (za nelinearnu analizu)

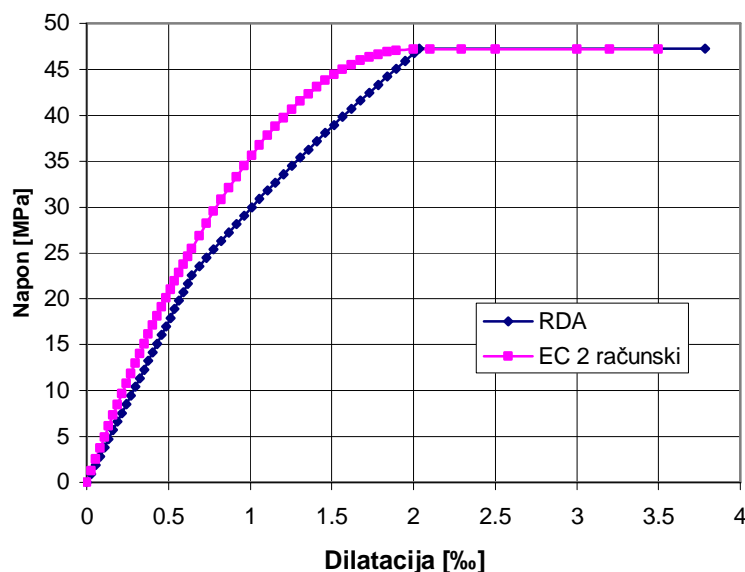
Primećuje se vrlo dobro slaganje dijagrama sve do dostizanja maksimalnog napona. Najveća razlika se ogleda u nedostatku opadajuće grane RDA dijagrama.

Na žalost, u radu [33] nisu date dilatacije betona za razne nivoe napona, pa se dobijeni RDA dijagram ne može uporediti sa eksperimentalnim vrednostima. Može se konstatovati da se dilatacije pri maksimalnom naponu (2.036‰) nalaze unutar uobičajenih vrednosti za ovu klasu čvrstoće betona (2.0 - 2.3‰).

Na slici 4.59 je dat uporedni prikaz dobijenog RDA dijagrama napon-dilatacija sa računskim dijagramom prema EC 2, pri čemu je, umesto računskog napona  $f_{cd}$ , u izrazima (4.246) i (4.247) korišćena srednja čvrstoća betona  $f_{cm}$ , odnosno:

$$s_c = f_{cm} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{e_c}{e_{c2}} \right)^n \right] \quad \text{za } 0 \leq e_c \leq e_{c2}$$

$$s_c = f_{cm} \quad \text{za} \quad e_{c2} \leq e_c \leq e_{cu2} .$$



Slika 4.59. Uporedni prikaz dijagrama napon-dilatacija za ispitanu kocku, dobijenih RDA postupkom i prema EC 2 (računski)

Primećuje se veća "ispruženost" RDA dijagrama između granice elastičnosti i najvećeg napona. Dilatacije pri najvećem naponu se neznatno razlikuju, ali se krajnje dilatacije prema RDA dobijaju nešto veće nego po EC 2 (3.785‰ spram graničnih 3.5‰ prema EC 2).

#### 4.4.3.3. Primena RDA postupka za dobijanje radnih dijagrama betona različitih klasa čvrstoće

Na osnovu rečenog u prethodnom delu, može se zaključiti da se primenom RDA postupka za kratke stubove (opisanog u delu 4.4.3.2) na uzorke za ispitivanje pritisne čvrstoće betona može konstruisati dijagram napon-dilatacija za bilo koju klasu čvrstoće betona, ako su poznati: modul elastičnosti  $E_{cm}$ , srednja vrednost čvrstoće na pritisak  $f_{cm}$ , zapreminska težina  $g$  i Poisson-ov koeficijent  $n$ . Ovi parametri se određuju eksperimentalnim putem na prethodno spravljenim uzorcima.

U fazi projektovanja, međutim, biramo određenu klasu čvrstoće betona, za koju, na osnovu izabranog standarda, možemo sračunati (ili usvojiti) sve potrebne parametre. Jedini problem se javlja kod usvajanja Poisson-ovog koeficijenta. EC 2 daje preporuku da se, u nedostatku eksperimentalnih podataka, može usvojiti vrednost  $n=0.2$  za beton bez prslina, odnosno  $n=0$  za beton sa prslinama. Ovaj podatak, međutim, nije dovoljno precizan za potrebe konstruisanja RDA dijagrama napon-dilatacija. RDA postupak je primenjen na različitim klasama čvrstoće betona, sa usvojenom vrednošću  $n=0.2$  (kojoj odgovara  $j^* = 0.667$ ), za sve klase čvrstoće. Primećeno je da su, za niže klase čvrstoće, dilatacije pri maksimalnom naponu dosta ispod, a za više klase čvrstoće dosta iznad vrednosti datih u EC 2. Na žalost, u dostupnoj literaturi nije nađena veza između Poisson-ovog koeficijenta i čvrstoće na pritisak (osim nekih indicija o povećanju Poisson-ovog koeficijenta sa porastom pritisne čvrstoće [12], [51]). Poisson-ov koeficijent za beton se, prema literaturi, kreće u dosta širokim granicama od 0.15 do 0.25, pa i šire [2], [76], u zavisnosti od prisustva prslina, nivoa opterećenja, starosti betona i dr. U nedostatku tačnijih podataka, za potrebe konstruisanja radnog dijagrama različitih klasa čvrstoće betona primenom RDA postupka, postupak opisan u delu 4.4.3.2 je korigovan tako što je Poisson-ov koeficijent za određenu klasu čvrstoće betona određen iz uslova da dilatacije pri

maksimalnom naponu, dobijene RDA postupkom, budu jednake vrednostima datim u tabeli 3.1 Evrokoda 2 [20].

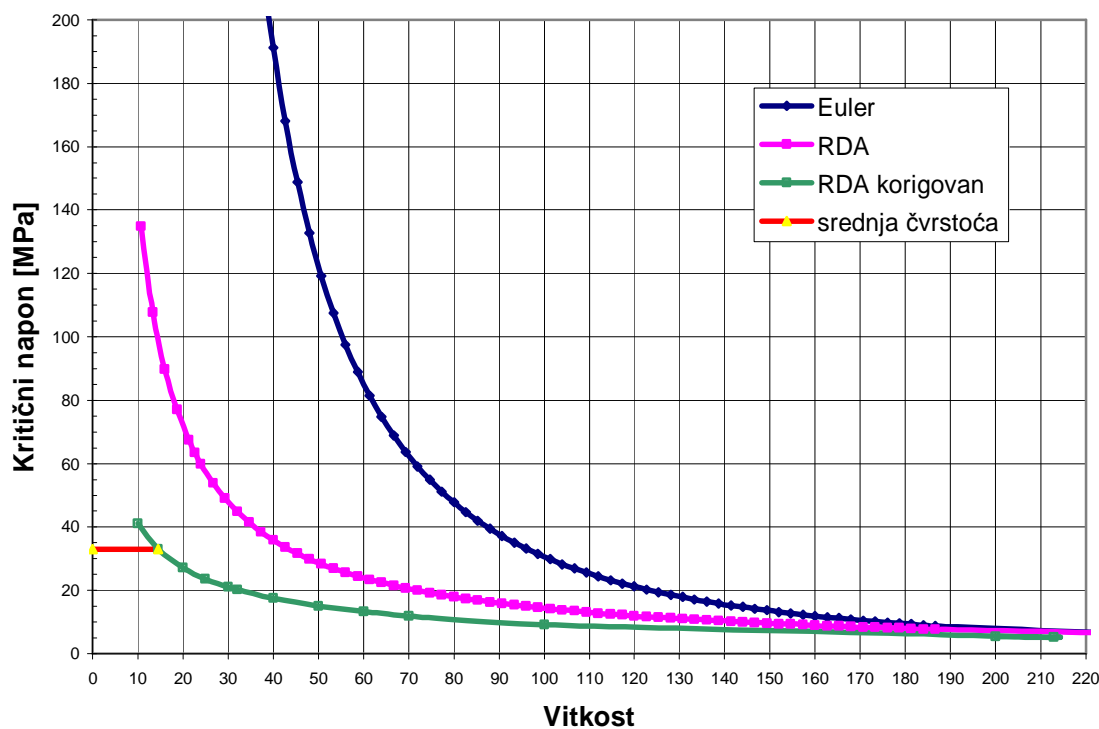
RDA postupak opisan u delu 4.4.3.2 je primenjen na uzorke za ispitivanje pritise čvrstoće betona u skladu sa EN 206-1, koji su oblika cilindra prečnika 15cm i visine 30cm. Geometrijske karakteristike poprečnog preseka su sledeće:  $A_c = 15^2 \cdot p/4 = 176.71\text{cm}^2$ ,  $I_z = 15^4 \cdot p/64 = 2485.05\text{cm}^4$ ,  $k_z = \sqrt{I_z/A_c} = 3.75\text{cm}$ ,  $k_z^3/I_z = 0.0212207\text{cm}^{-1}$ . Usvojena je zapreminska težina betona  $g = 24\text{kN/m}^3$ . Stvarna vitkost uzoraka je  $I = 30/3.75 = 8.0$  i u svim slučajevima je  $I < I_D$ . U tabeli 4.19 su prikazani ulazni podaci, sračunate karakteristične veličine i granične dilatacije prema EC 2, za različite klase čvrstoće betona.

Tabela 4.19. Ulazni i izlazni podaci RDA analize probnih tela oblika cilindra

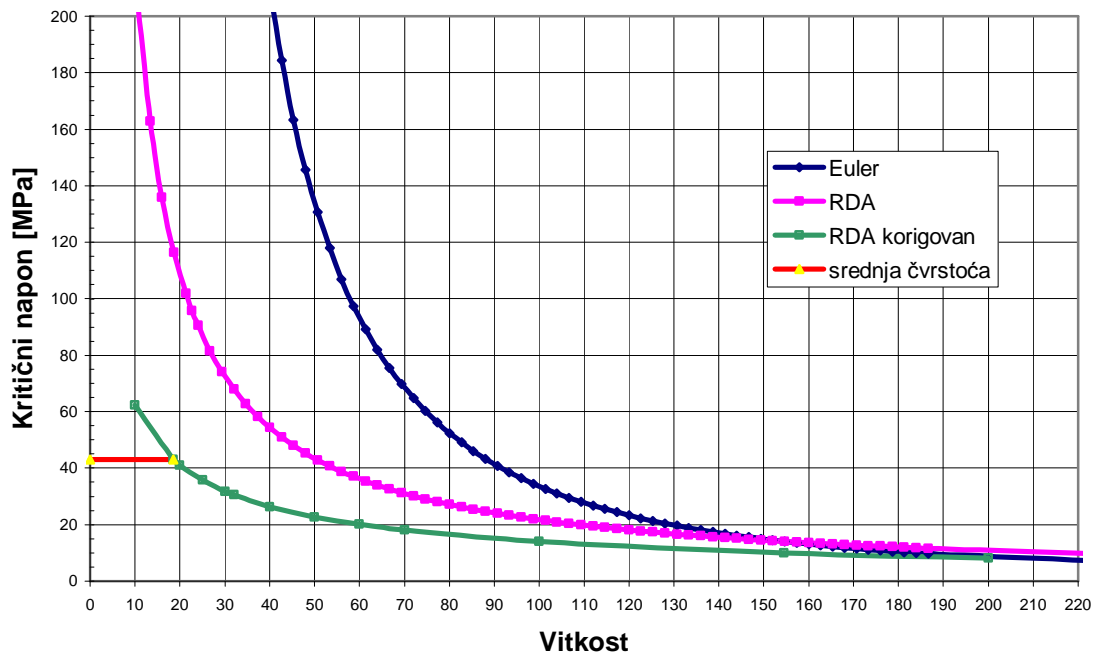
Klasa	$f_{cm}$ [MPa]	$E_{cm}$ [GPa]	$\nu$	$j^*$	$\lambda_E$	$\lambda_D$	$e_{c1}^{RDA}$ [%]	$e_{c1}^{EC2}$ [%]	$e_{cu1}^{RDA}$ [%]	$e_{cu1}^{EC2}$ [%]
C 25/30	33	31	0.1454	0.41	212.845	14.5	2.102	2.1	4.236	3.5
C 35/45	43	34	0.1805	0.565	154.454	18.5	2.257	2.25	4.447	
C 45/55	53	36	0.2092	0.72	121.203	21.455	2.414	2.4	4.737	

Uočavamo da se dobijeni Poisson-ov koeficijent, za analizirane klase čvrstoće, nalazi u granicama od 0.1454 do 0.2092, te da raste sa porastom čvrstoće betona. Ovo se sasvim dobro poklapa sa podacima iz dostupne literature, navedenim u ranijem tekstu. Takođe se može primetiti da su krajnje dilatacije prema RDA dosta iznad graničnih dilatacija prema EC 2. Kako je ova granica i eksperimentalno diskutabilna, za praktičnu primenu RDA radnih dijagrama betona možemo usvojiti ograničenje maksimalne dilatacije pri lomu na 3.5‰.

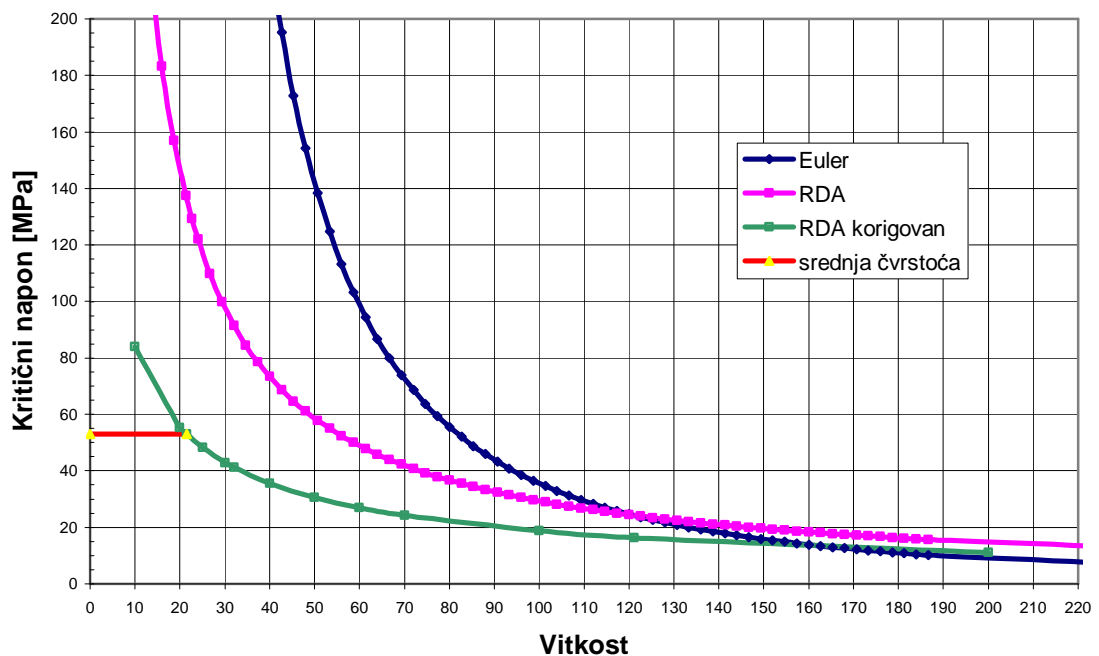
Na slikama 4.60 do 4.62 prikazane su krive izvijanja za analizirane klase čvrstoće betona. Radni dijagrami betona dati su na slikama 4.63 do 4.65, dok su na slici 4.66 uporedo prikazani radni dijagrami betona različitih klasa prema RDA (sl. 4.66.a) i EC 2 (sl. 4.66.b).



Slika 4.60. Krive izvijanja i srednja čvrstoća na pritisak za beton klase C 25/30

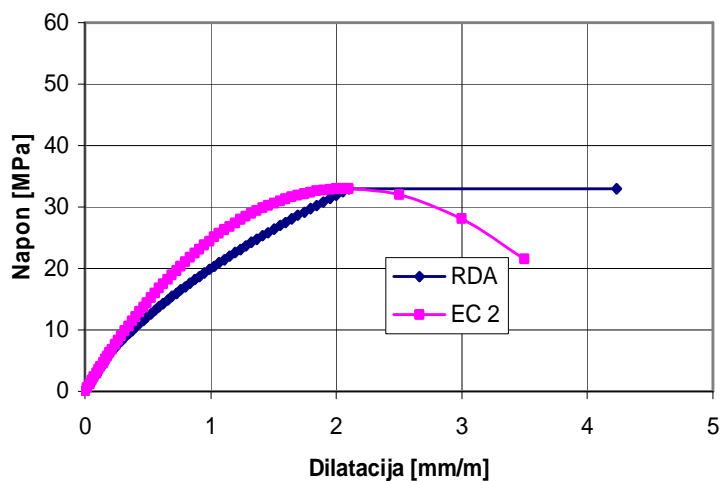


Slika 4.61. Krive izvijanja i srednja čvrstoća na pritisak za beton klase C 35/45

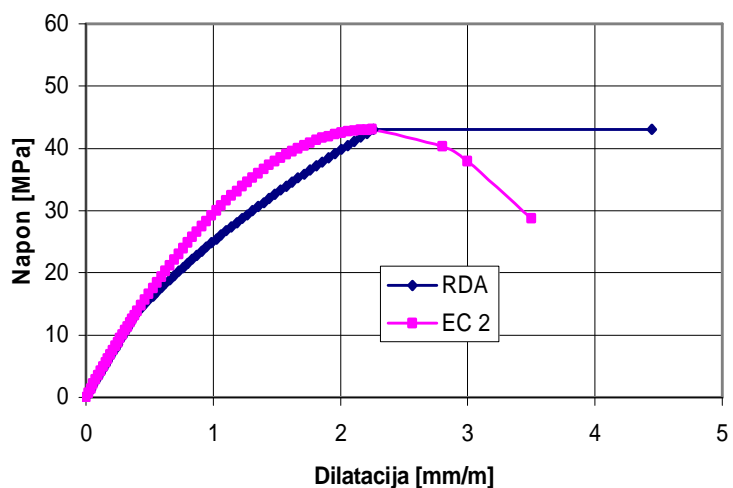


Slika 4.62. Krive izvijanja i srednja čvrstoća na pritisak za beton klase C 45/55

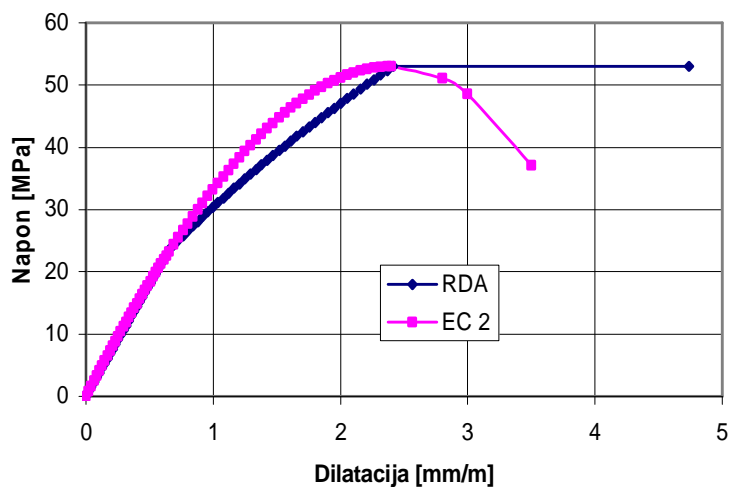




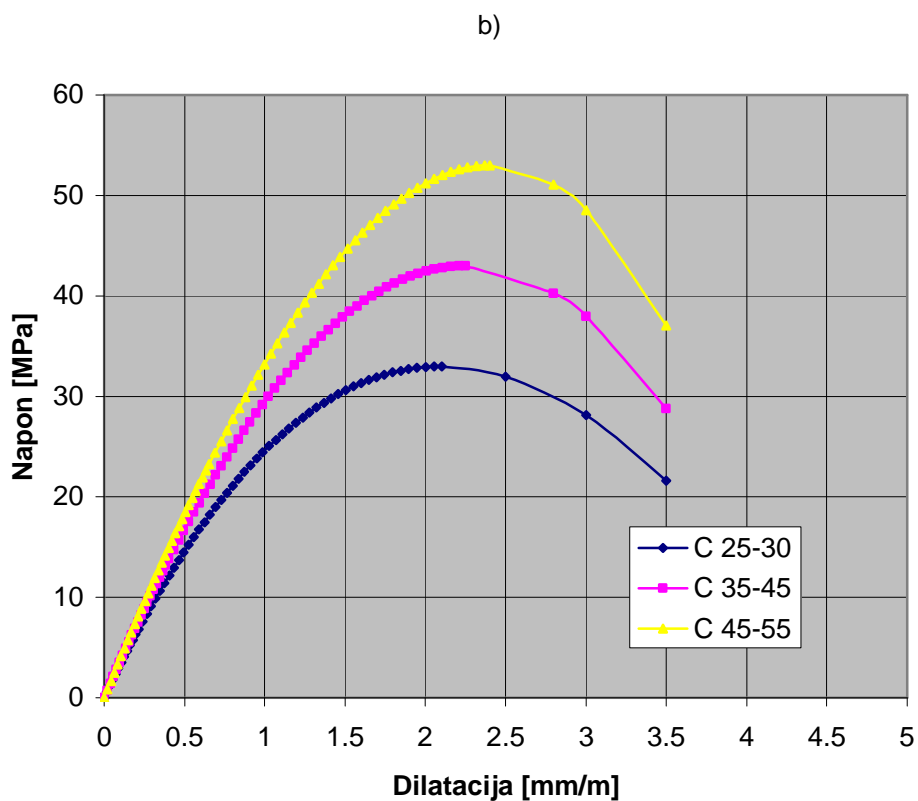
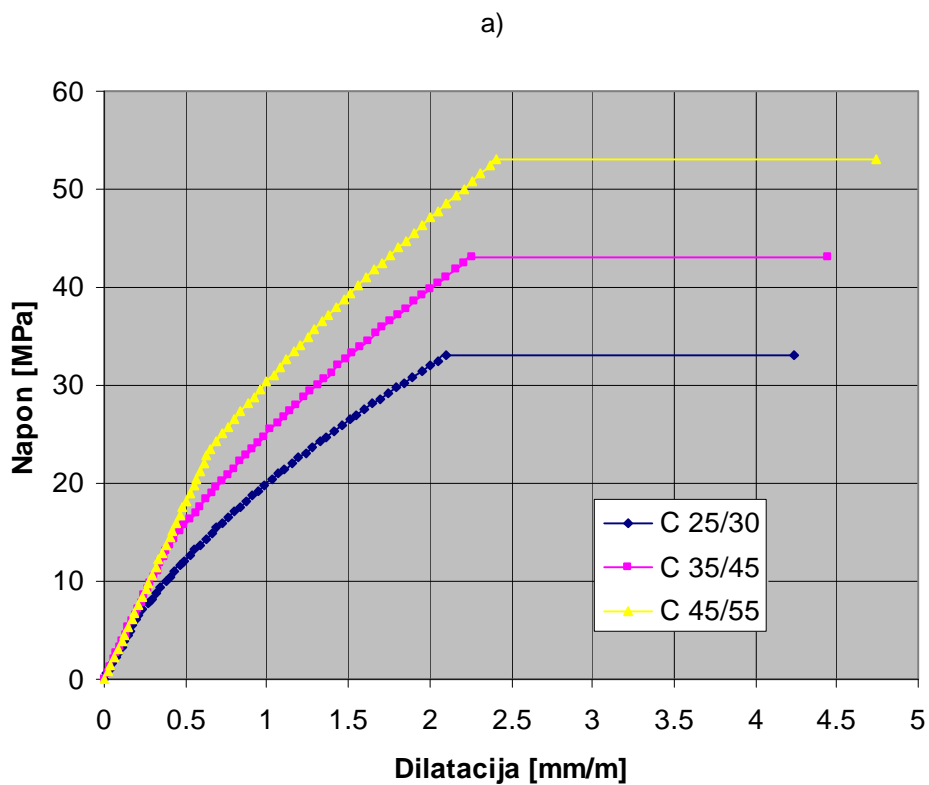
Slika 4.63. Uporedni prikaz dijagrama napon-dilatacija za beton klase C 25/30, dobijenih RDA postupkom i prema EC 2 (za nelinearnu analizu)



Slika 4.64. Uporedni prikaz dijagrama napon-dilatacija za beton klase C 35/45, dobijenih RDA postupkom i prema EC 2 (za nelinearnu analizu)



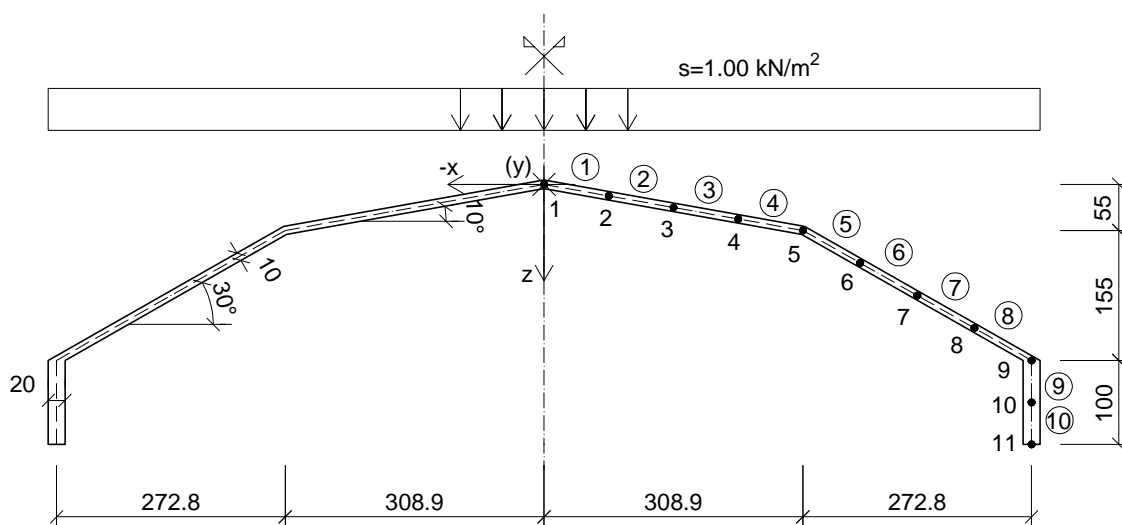
Slika 4.65. Uporedni prikaz dijagrama napon-dilatacija za beton klase C 45/55, dobijenih RDA postupkom i prema EC 2 (za nelinearnu analizu)



Slika 4.66. Uporedni prikaz dijagrama napon-dilatacija za različite klase betona:  
a) - dobijenih RDA postupkom i b) - prema EC 2 (za nelinearnu analizu)

## 5. PRIMER - PRIMENA RDA RADNIH DIJAGRAMA ČELIKA I BETONA NA ODREĐIVANJE GRANIČNE NOSIVOSTI ARMIRANOBETONSKE POLIEDARSKE LJUSKE

Za ilustraciju primene reološko-dinamičke analogije u proračunu armiranobetonskih konstrukcija poslužiće primer armiranobetonske ljuske čiji je poprečni presek prikazan na slici 5.1. Osnovne dimenzije i oblik ljuske usvojeni su u skladu sa preporukama koje je, na osnovu višedecenijskog iskustva u projektovanju i izvođenju armiranobetonskih poliedarskih ljuski, dao C. B. Wilby [67]. Pri izboru geometrije ljuske i dimenzija njenih sastavnih elemenata nije se težilo postavljanju konstruktorskih rekorda u pogledu veličine raspona ili debljine ploča, već je odabrana poliedarska ljuska koja je realno izvodljiva u prosečnim uslovima izgradnje kod nas.



Slika 5.1. Poprečni presek i opterećenje analizirane poliedarske ljuske

Odabrana konstrukcija je raspona  $L=20\text{m}$ , ukupne širine  $B=11.6\text{m}$ . Dimenzije poprečnog preseka ivične grede su  $b/d=20/100\text{cm}$ , dok je debljina ploča ljuske  $d_p=10\text{cm}$ . Poliedarska ljuska je opterećena stalnim opterećenjem: sopstvenom težinom  $g$  i težinom obloge kosih ravni intenziteta  $\Delta g=0.5\text{ kN/m}^2$ , kao i promenljivim (povremenim) opterećenjem od snega, intenziteta  $s=1.0\text{ kN/m}^2$  osnove. Poliedarska ljuska se na svojim krajevima ( $y=0$  i  $y=20\text{m}$ ) oslanja na armiranobetonske dijafragme. Konstrukcija je od betona marke MB 45 (C 35/45), sa armaturom RA 400/500-2.

### 5.1. Numerička analiza primenom MKT

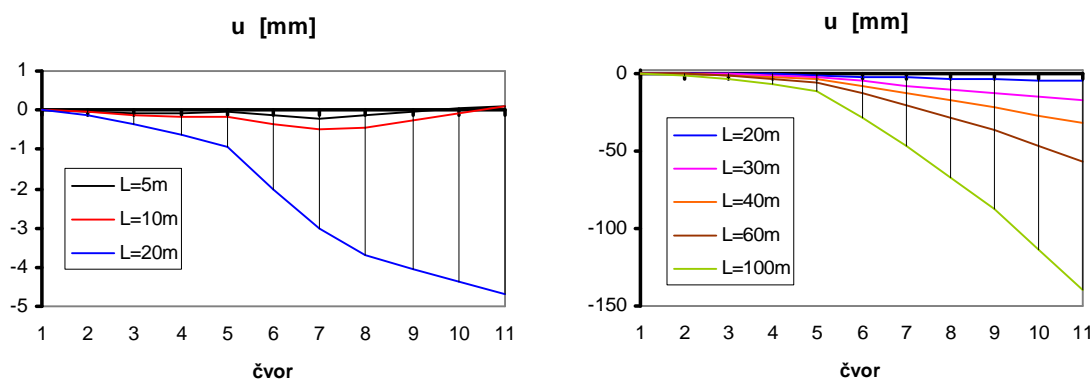
Linearno elastična analiza poliedarske konstrukcije je sprovedena primenom računarskog programa MKTE1, autora D. D. Milašinića, koji je detaljno opisan u [38]. Program se zasniva na metodu konačnih traka, opisanom u poglavlju 3, a pisan je programskim jezikom FORTRAN. Analiza je sprovedena sa sto članova reda. Iskorišćena je simetrija geometrije, uslova oslanjanja i opterećenja, pa je numerička analiza sprovedena samo za polovinu nosača. Mreža konačnih traka (ukupno 10), njihove oznake i oznake čvornih linija, kao i orijentacija globalnog koordinatnog sistema, prikazane su na slici 5.1. Trake su na krajevima slobodno oslonjene, a svaka ima po osam stepeni slobode kretanja (videti sl. 3.4). U čvoru 1 je sprečeno horizontalno pomeranje i obrtanje oko ose  $y$  ( $u=0, j=0$ ). Usvojene su sledeće elastične karakteristike materijala:  $E=34\text{GPa}$  (prema EC 2 za beton C 35/45) i  $n=0$ .

Analizom rezultata proračuna za mreže konačnih traka različite gustine, uočeno je da se izborom mreže prema slici 5.1 postiže željena tačnost, a da se izlazni podaci dobijaju u zadovoljavajućem broju tačaka. Ovo potvrđuje i uporedna analiza iste ljske primenom komercijalnog računarskog programa Tower 6, zasnovanog na metodu konačnih elemenata, koju je autorka ovog rada sprovedla za različite gustine mreže konačnih elemenata. Presečni uticaji i pomeranja dobijeni na ovaj način gotovo su u potpunosti identični sa uticajima dobijenim primenom metoda konačnih traka za linearno elastičnu analizu u slučaju malih pomeranja.

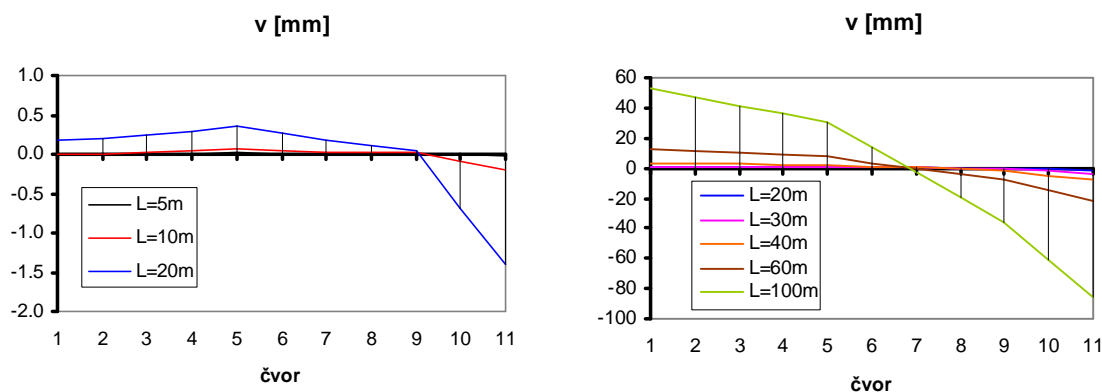
### 5.1.1. Analiza uticaja dužine ljske na presečne sile i pomeranja

Oblik dijagrama presečnih sila i pomeranja, kao i njihove veličine, zavise od dužine ljske. U cilju ilustracije uticaja dužine ljske na presečne sile i pomeranja, u okviru ovog istraživanja je, primenom računarskog programa MKTE1, sprovedena numerička analiza poliedarskih ljski različite dužine, poprečnog preseka prema slici 5.1. Proračun presečnih sila, momenata, pomeranja i obrtanja odabranih tačaka sproveden je za ukupno eksploataciono opterećenje. Na osnovu posmatranja i poređenja dobijenih dijagrama (sl. 5.2 do 5.13) može se, ukoliko je to potrebno, odrediti približna granica između "dugih" i "kratkih" poliedarskih ljski.

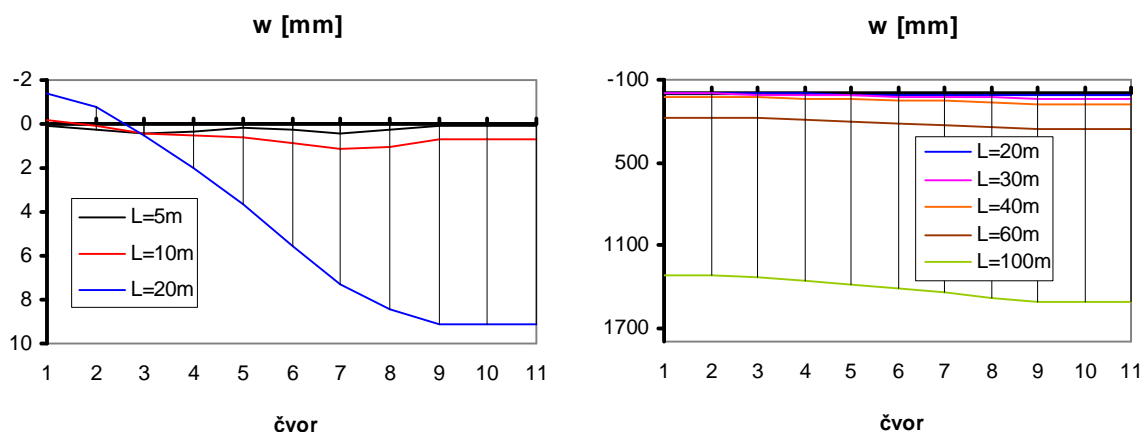
Rasponi ljske su varirani od  $L=5\text{m}$ , pri čemu je odnos dužina/širina pojedinih ploča koje čine poliedar  $l_y/l_x=1.59$ , do  $L=100\text{m}$  ( $l_y/l_x=31.87$ ). Pri tome izbor raspona većeg od  $L=30\text{m}$ , u slučaju armiranobetonske poliedarske ljske poprečnog preseka prema slici 5.1, ima samo teorijski značaj, budući da presečne sile i pomeranja ovde dostižu praktično neprihvatljive veličine.



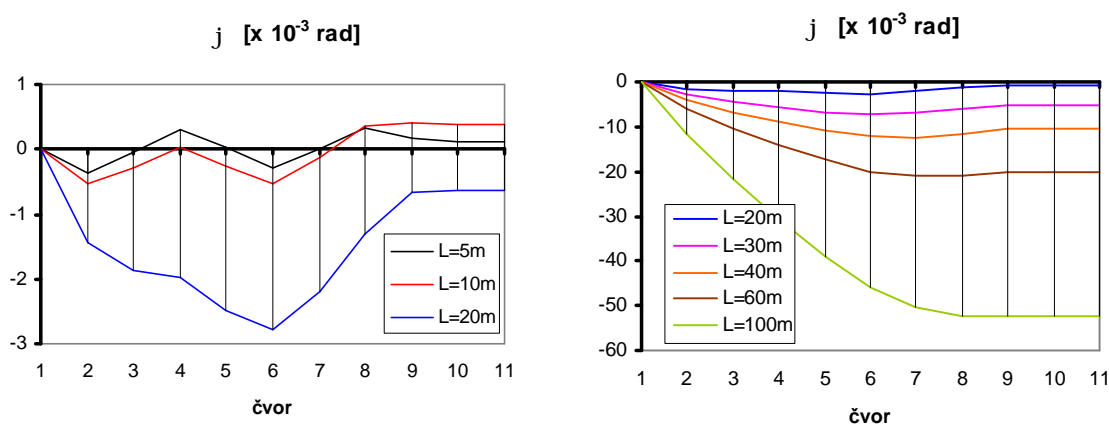
Slika 5.2. Dijagrami pomeranja u pravcu globalne x ose tačaka preseka na sredini raspona, za ljske različite dužine



Slika 5.3. Dijagrami pomeranja u pravcu globalne y ose tačaka preseka iznad oslonaca, za ljske različite dužine



Slika 5.4. Dijagrami vertikalnih pomeranja tačaka preseka na sredini raspona, za ljske različite dužine



Slika 5.5. Dijagrami obrtanja oko y ose tačaka preseka na sredini raspona, za ljske različite dužine

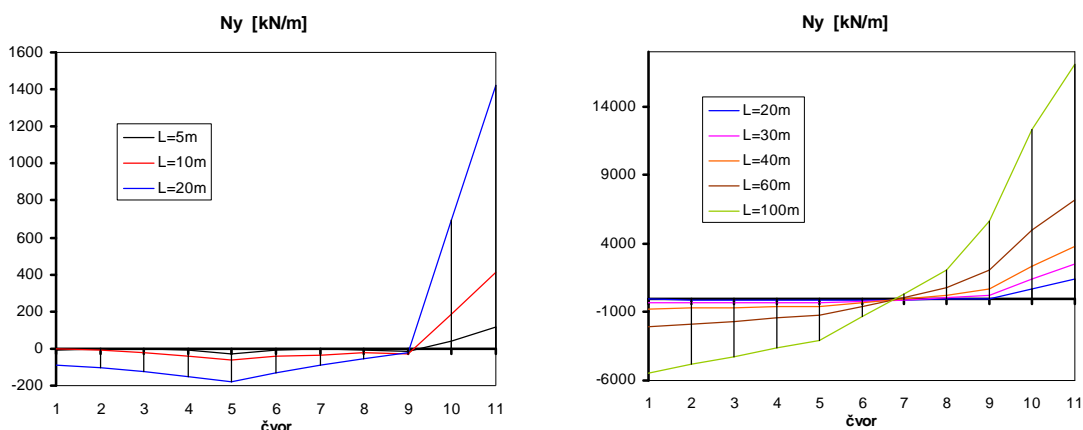
Analizom dijagrama pomeranja u pravcu globalne  $x$  ose može se uočiti da se donja linija ivične grede (čvorna linija 11) u slučaju raspona  $L=5m$  i  $L=10m$  pomera ka spolja, dok je za sve ostale raspone njeno pomeranje ka unutra (ka osi simetrije poprečnog preseka). Pri rasponu  $L=20m$  dijagram između čvornih linija 5 i 9 još ima paraboličan oblik, dok je kod većih raspona on gotovo linearan.

Primećuju se dva karakteristična oblika dijagrama pomeranja u pravcu podužne ose ljske - za raspone do  $L=10m$  i za sve veće raspone. Promena oblika ovog dijagrama u poprečnom pravcu, kod ljske raspona  $L=5m$  je izrazito krivolinijska, dok je za sve ostale raspone ova promena gotovo pravolinijska po širini pojedinih ploča poliedra.

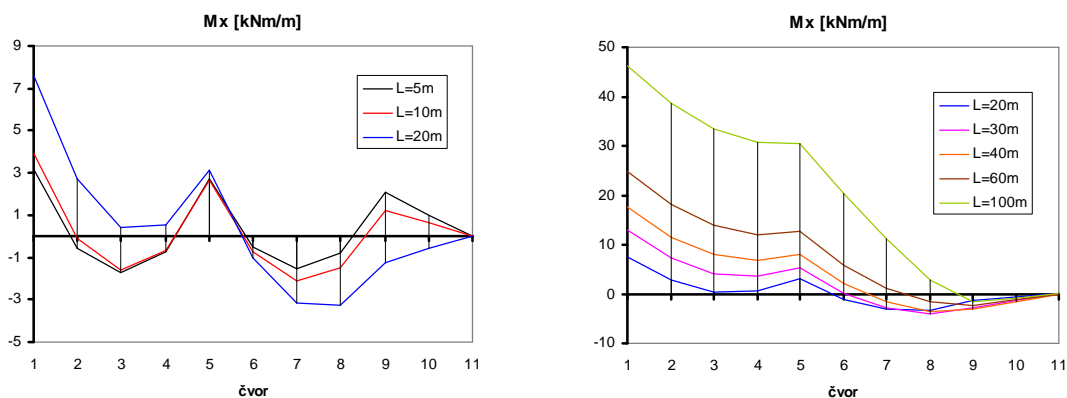
Vertikalna pomeranja tačaka u osi simetrije poprečnog preseka (čvorna linija 1) kod ljski raspona  $L=10m$  i  $L=20m$  su negativna (naviše). Kod svih ostalih raspona vertikalna pomeranja svih tačaka poprečnog preseka su pozitivna. Sve tačke poprečnog preseka ljske raspona  $L=100m$  imaju gotovo jednaka vertikalna pomeranja.

Ugao obrtanja oko podužne ose ljske ima promenljiv predznak duž poprečnog preseka ljski raspona  $L=5m$  i  $L=10m$ . Za sve ostale raspone obrtanja svih tačaka su negativna.

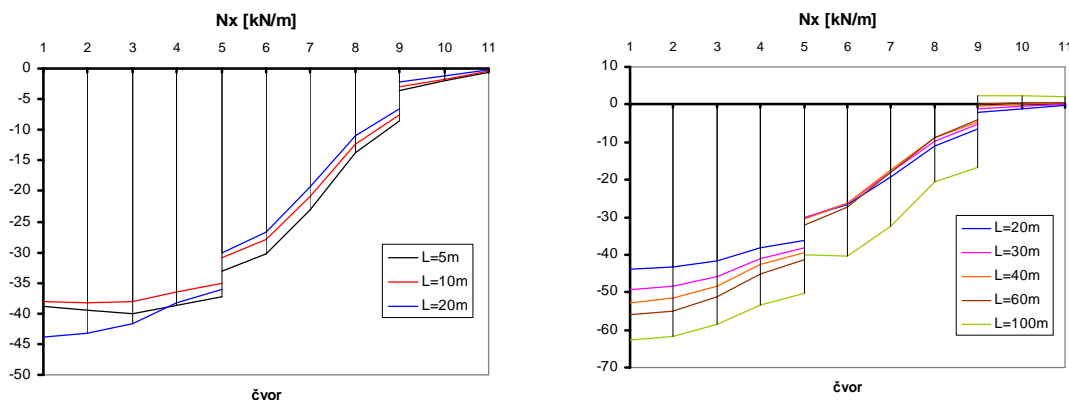
Na osnovu gornje analize pomeranja i obrtanja može se izvesti zaključak da se granica između "kratkih" i "dugih" poliedarskih ljski, poprečnog preseka prema slici 5.1, nalazi između raspona  $L=10m$  i  $L=20m$ , kojima odgovara odnos dužina/širina ljske između  $L/B=0.86$  i  $L/B=1.72$ , tj. odnos raspona pojedinih ploča poliedra između  $l_y/l_x=3.19$  i  $l_y/l_x=6.37$ .



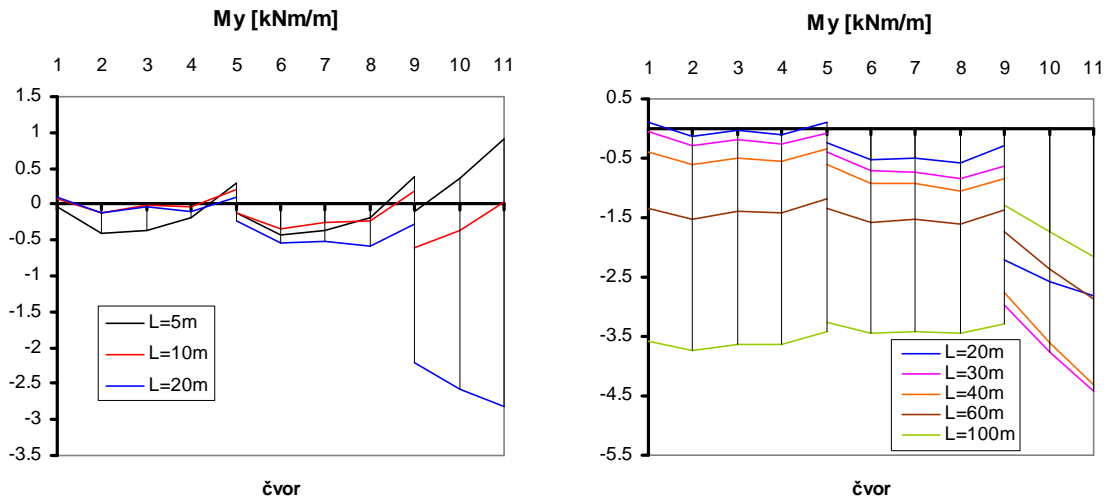
Slika 5.6. Dijagrami podužne normalne sile  $N_y$  u preseku na sredini raspona, za ljske različite dužine



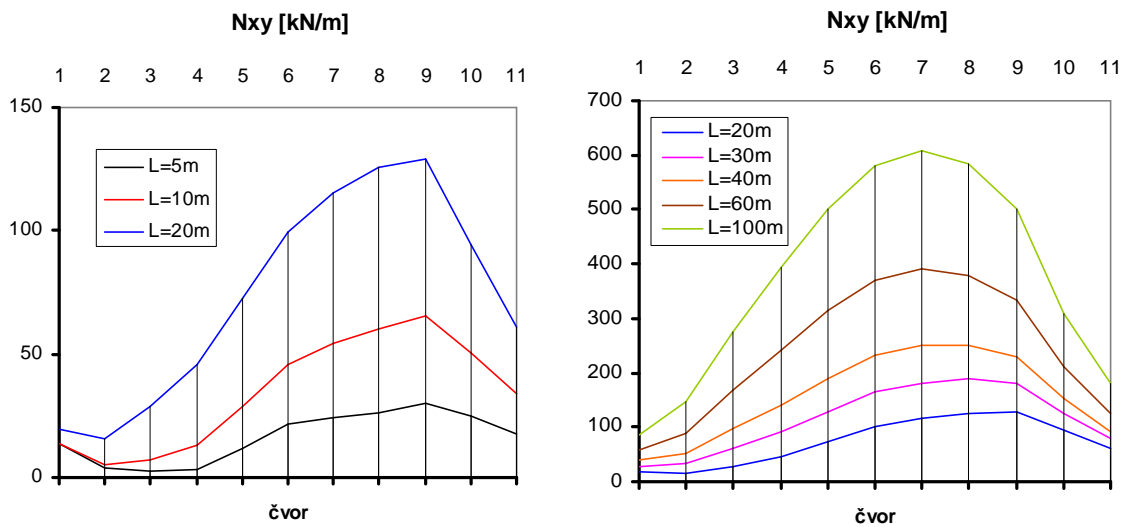
Slika 5.7. Dijagrami momenta savijanja  $M_x$  oko y ose u preseku na sredini raspona, za ljske različite dužine



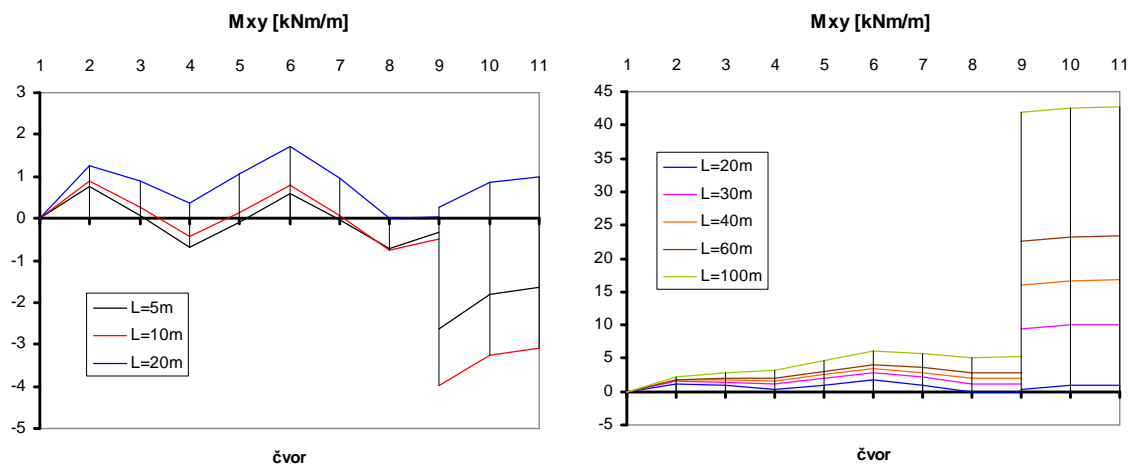
Slika 5.8. Dijagrami normalne sile  $N_x$  u poprečnom pravcu u preseku na sredini raspona, za ljske različite dužine



Slika 5.9. Dijagrami momenta savijanja  $M_y$  oko x ose u preseku na sredini raspona, za ljske različite dužine



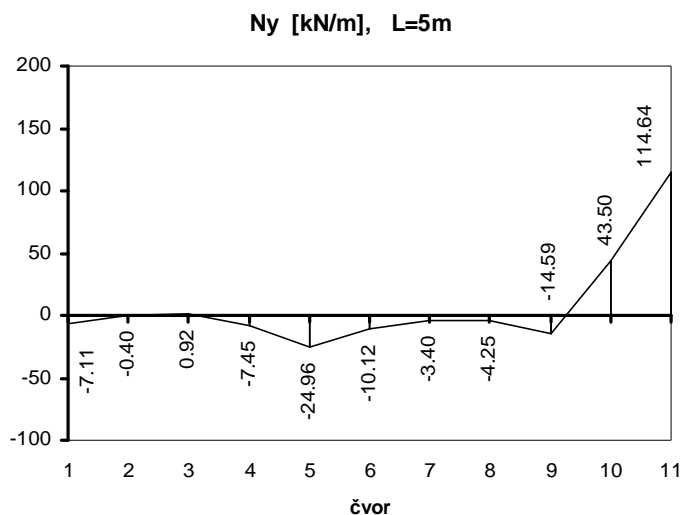
Slika 5.10. Dijagrami smičuće sile  $N_{xy}$  u preseku iznad oslonaca, za ljske različite dužine



Slika 5.11. Dijagrami torzionog momenta  $M_{xy}$  u preseku iznad oslonaca, za ljske različite dužine

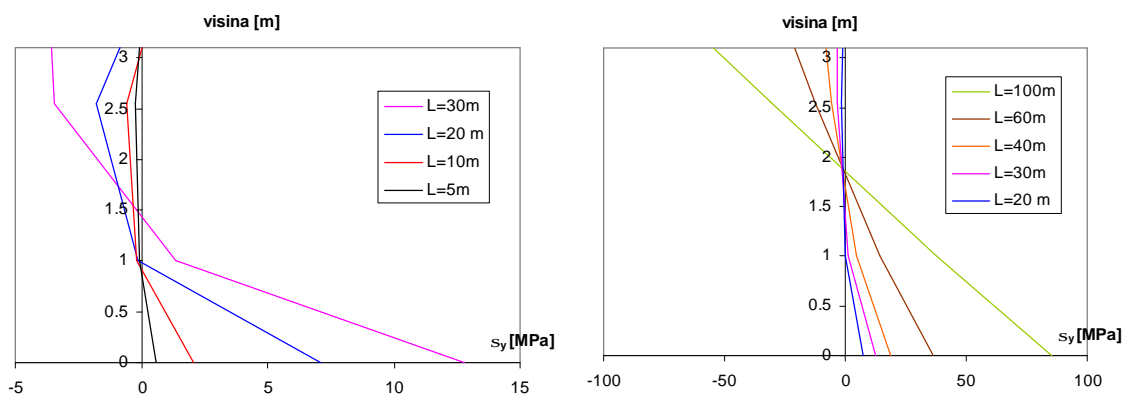
Posmatrajmo dijagrame presečnih sila i momenata prikazane na slikama 5.6 do 5.11. Lako se uočavaju dve grupe ovih dijagrama, koje se razlikuju po svom obliku - dijagrami "kratkih" ljski ( $L=5\text{m}$  i  $L=10\text{m}$ ) i dijagrami "dugih" ljski (raspona  $L=20\text{m}$  i više).

Dok je dijagram podužne normalne sile  $N_y$  dugih ljski gotovo linearan po širini pojedinih ploča, to je kod ljske raspona  $L=5\text{m}$  izražena njegoa nelinearnost (sl. 5.12).



Slika 5.12. Dijagram podužne normalne sile  $N_y$  u preseku na sredini raspona, za ljsku dužine  $L=5\text{m}$

Zanimljivo je pogledati i dijagrame podužnog normalnog napona  $s_y$  po visini poprečnog preseka ljske, u sredini raspona, za različite dužine ljske (sl. 5.13). Kod raspona do  $L=20\text{m}$  maksimalna vrednost napona pritiska ne postiže se u najvišoj tački poprečnog preseka (čvorna linija 1), nego nešto ispod nje. Sa povećanjem raspona smanjuje se visina pritisnute zone preseka (neutralna linija se podiže bliže krajnjoj pritisnutoj ivici). Tek za izrazito velike raspone ( $L=100\text{m}$ ) dijagram normalnih napona postaje linearan po visini preseka, iz čega se može zaključiti da bi primena klasične teorije grede na analizu poliedarskih ljski dala približno tačne rezultate tek za dužine preko  $L=60\text{m}$  ( $L/B=5.17$ ,  $I_y/I_x=19.12$ ), koje su neprihvatljive sa praktičnog aspekta.



Slika 5.13. Dijagrami podužnog normalnog napona  $s_y$  po visini poprečnog preseka ljske, u sredini raspona, za različite dužine ljske

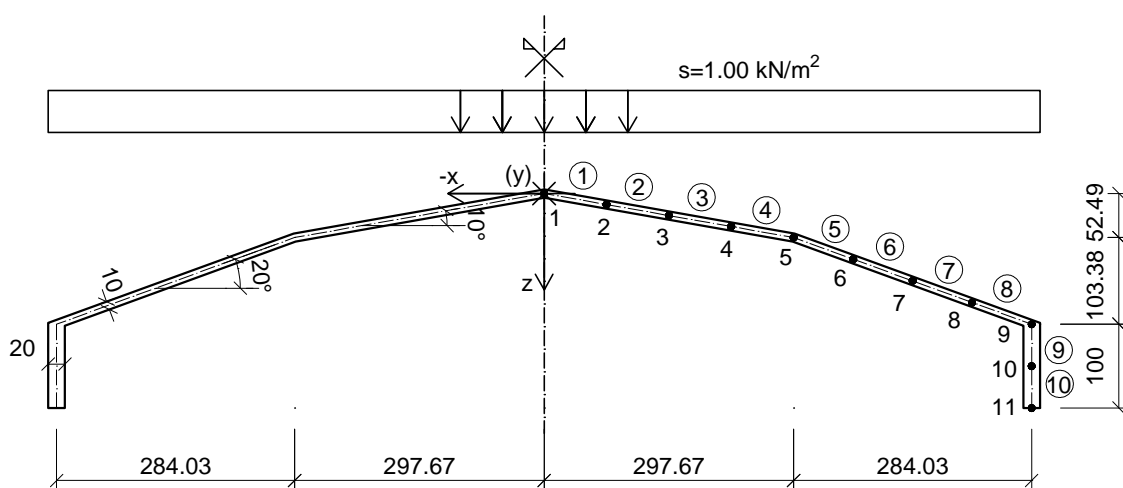
Momenti torzije  $M_{xy}$  u oslonačkim presecima ploča koje čine poliedar su mali čak i kod dugih ljski. Međutim, kod ivičnih greda oni dostižu značajnu veličinu. U nekim slučajevima ovi uticaji mogu postati merodavni za dimenzionisanje. Sa dijagrama na slici 5.11 se vidi da se predznak momenta torzije u ivičnoj gredi menja pri rasponima između  $L=10\text{m}$  i  $L=20\text{m}$ . Najmanji oslonački momenti torzije u ivičnoj gredi javljaju se upravo pri rasponu  $L=20\text{m}$ . Iz ovoga se zaključuje da je izabrani poprečni presek ljske



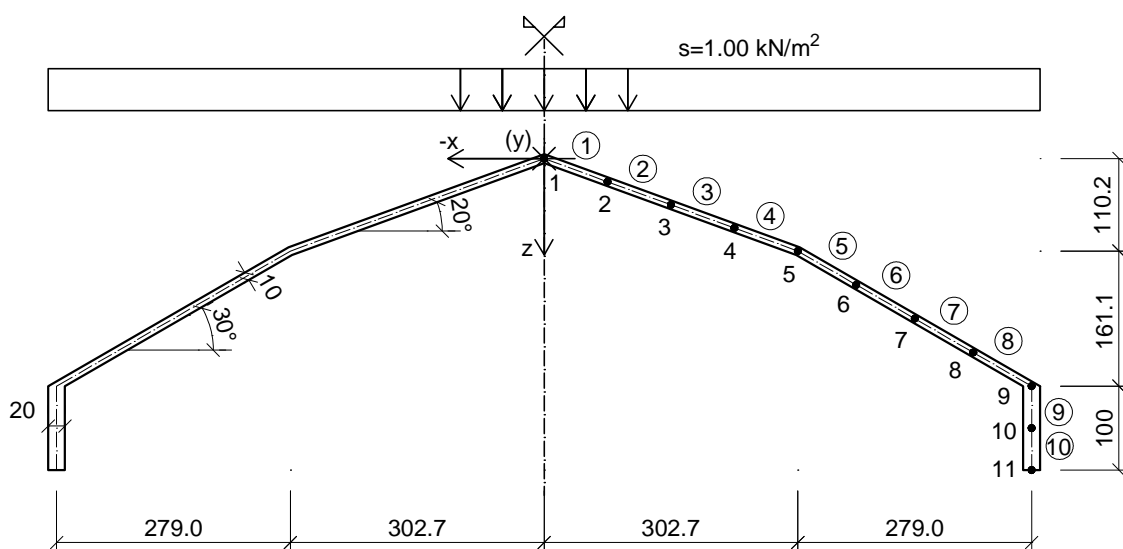
posebno pogodan za raspon  $L=20\text{m}$ , koji je u ovom radu i odabran za detaljniju analizu.

### 5.1.2. Analiza uticaja nagiba ploča ljuške na presečne sile i pomeranja

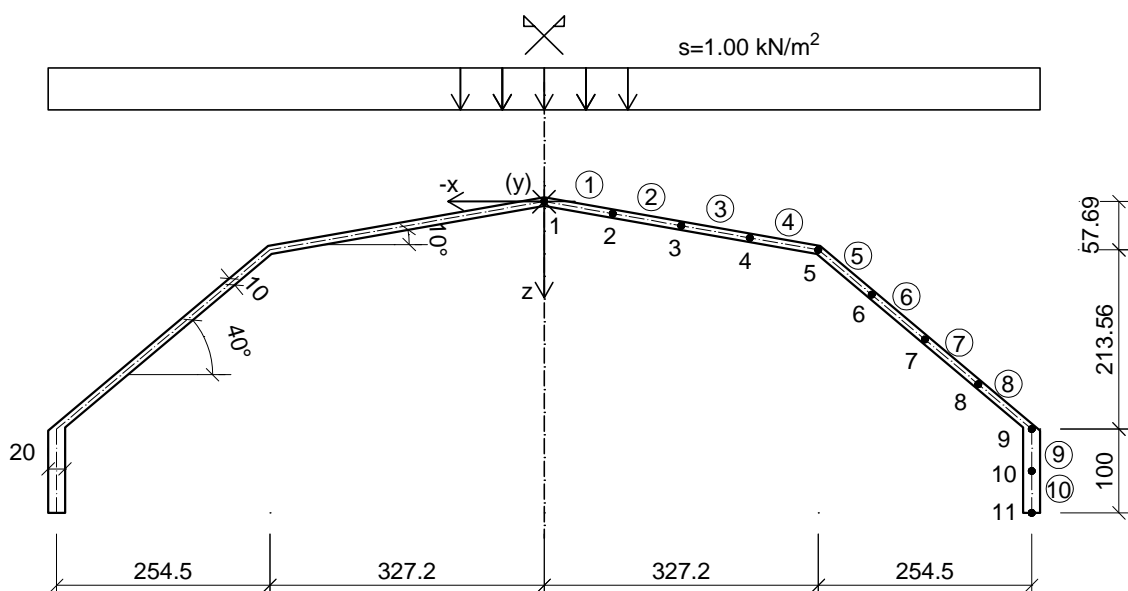
Izbor oblika poprečnog preseka poliedarske ljuške takođe utiče na oblik dijagrama presečnih sila i pomeranja i na njihovu veličinu. Zbog toga je za odabrani raspon  $L=20\text{m}$ , primenom računarskog programa MKTE1, sprovedena numerička analiza poliedarskih ljuški različite "dubine", odnosno poprečnih preseka prema slikama 5.1 ("Izabrana"), 5.14 ("plitka"), 5.15 (duboka "A") i 5.16 (duboka "B"). Primenjeni materijal je isti kao i u prethodnim analizama.



Slika 5.14. Poprečni presek i opterećenje "plitke" poliedarske ljuške

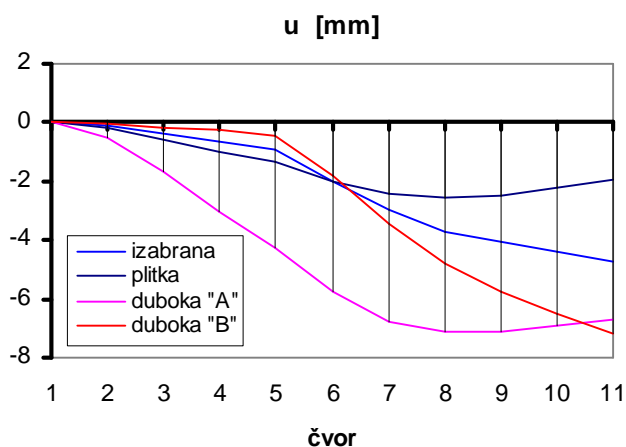


Slika 5.15. Poprečni presek i opterećenje analizirane "duboke "A"" poliedarske ljuške

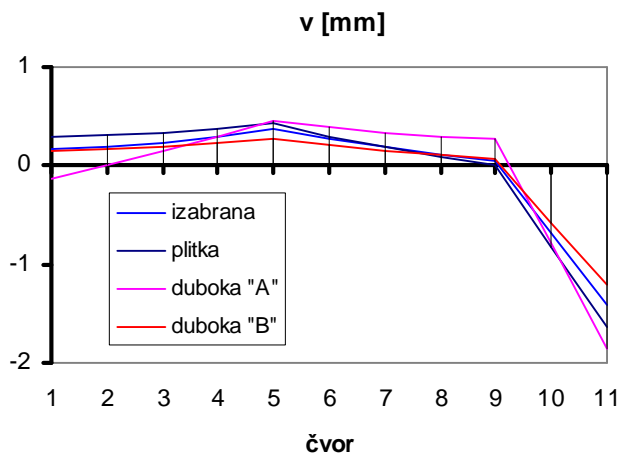


Slika 5.16. Poprečni presek i opterećenje analizirane "duboke "B"" poliedarske ljske

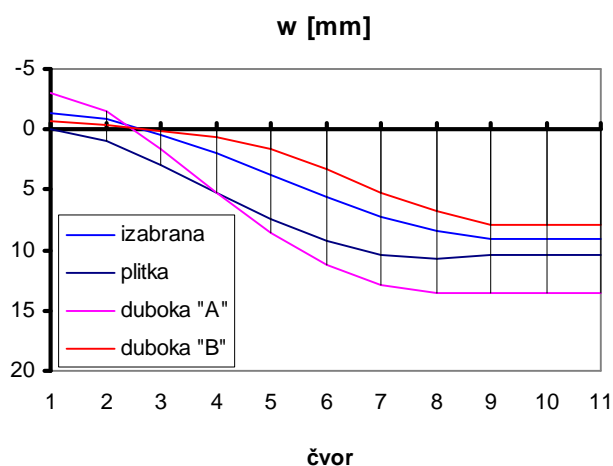
Uporedni dijagrami pomeranja, obrtanja, presečnih sila i momenata u odabranim tačkama, za ukupno eksploataciono opterećenje, prikazani su na slikama 5.17 do 5.26.



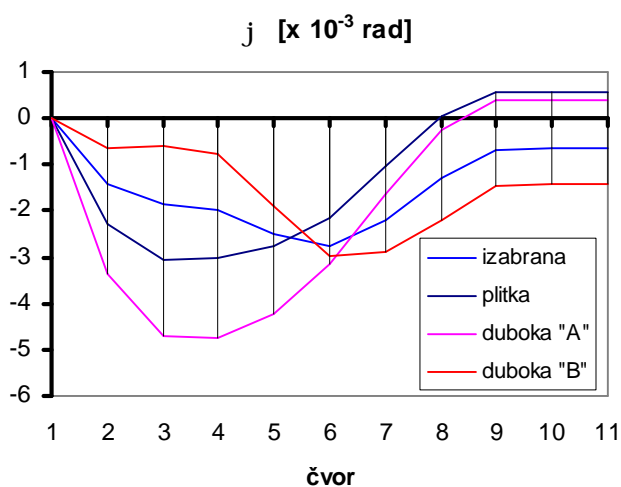
Slika 5.17. Dijagrami pomeranja u pravcu globalne x ose tačaka preseka na sredini raspona, za različite oblike poprečnog preseka ljske



Slika 5.18. Dijagrami pomeranja u pravcu globalne y ose tačaka preseka iznad oslonaca, za različite oblike poprečnog preseka ljske

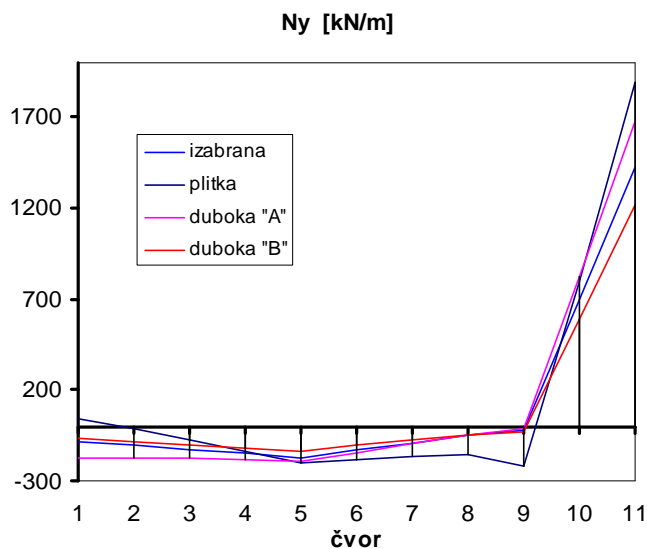


Slika 5.19. Dijagrami vertikalnih pomeranja tačaka preseka na sredini raspona, za različite oblike poprečnog preseka ljuske

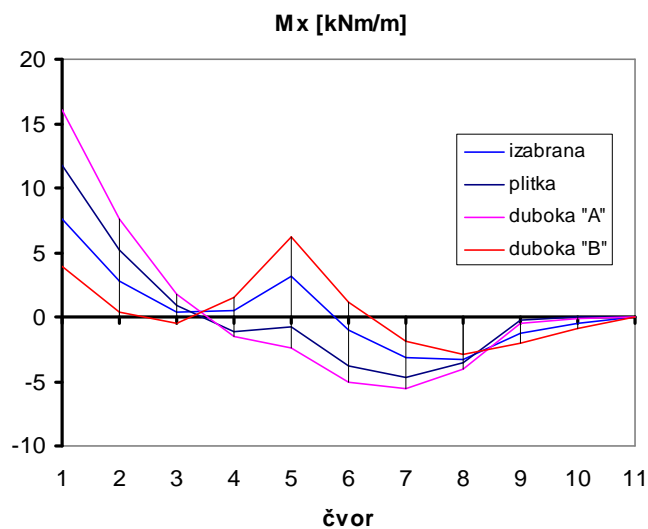


Slika 5.20. Dijagrami obrtanja oko y ose tačaka preseka na sredini raspona, za različite oblike poprečnog preseka ljuske

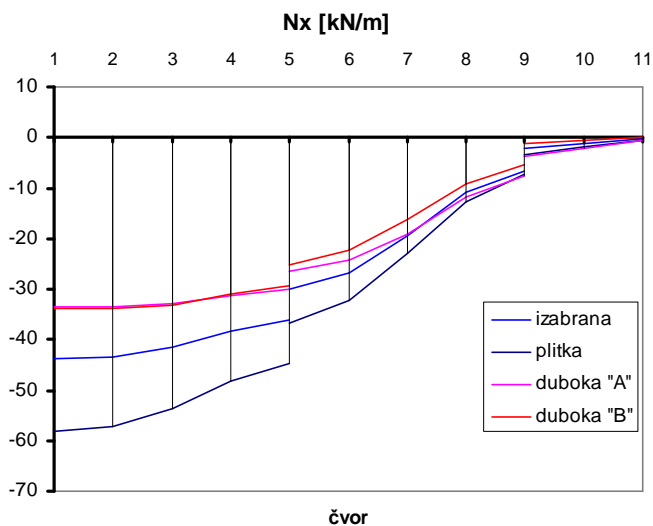
Analizom gornjih dijagrama može se zaključiti da najpovoljniju sliku pomeranja i obrtanja imaju ljuske poprečnih preseka prema slikama 5.1 i 5.16.



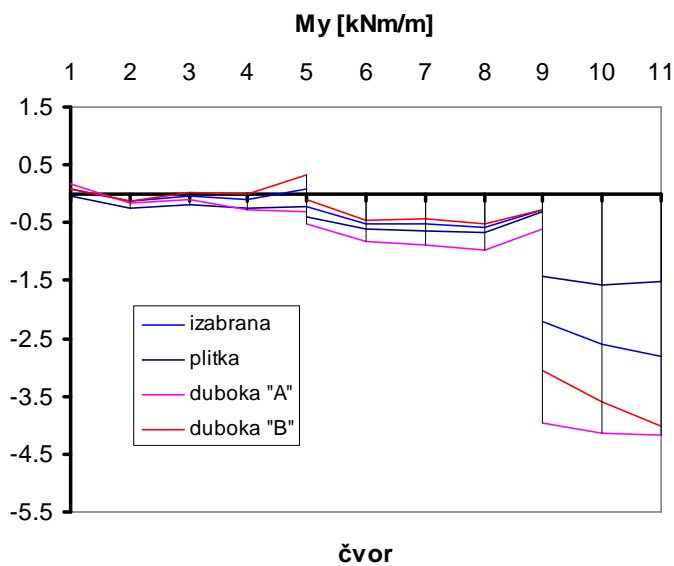
Slika 5.21. Dijagrami podužne normalne sile  $N_y$  u preseku na sredini raspona, za različite oblike poprečnog preseka ljuske



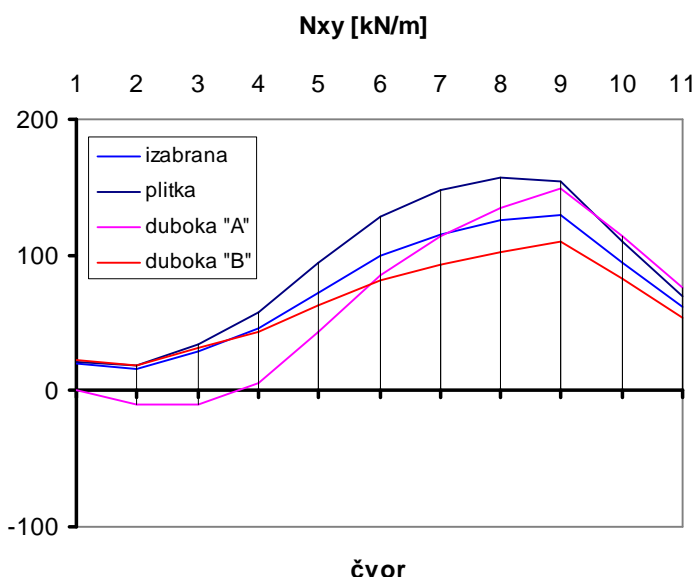
Slika 5.22. Dijagrami momenta savijanja  $M_x$  oko y ose u preseku na sredini raspona, za različite oblike poprečnog preseka ljuske



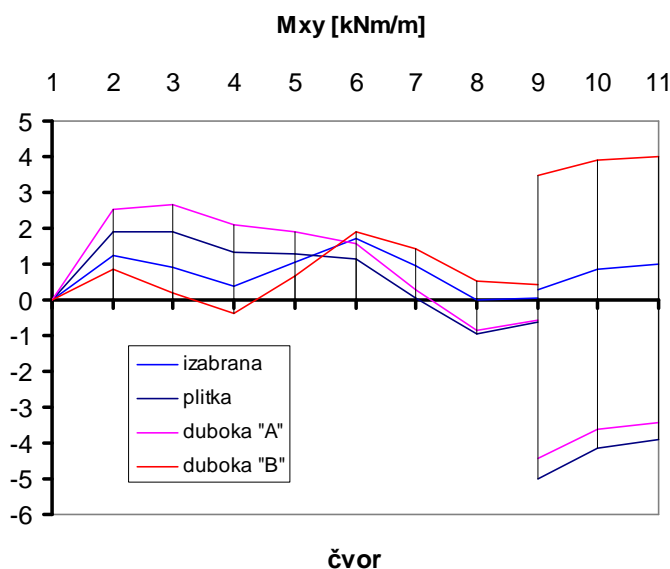
Slika 5.23. Dijagrami normalne sile  $N_x$  u poprečnom pravcu u preseku na sredini raspona, za različite oblike poprečnog preseka ljuske



Slika 5.24. Dijagrami momenta savijanja  $M_y$  oko x ose u preseku na sredini raspona, za različite oblike poprečnog preseka ljuske



Slika 5.25. Dijagrami smičuće sile  $N_{xy}$  u preseku iznad oslonaca, za različite oblike poprečnog preseka ljske



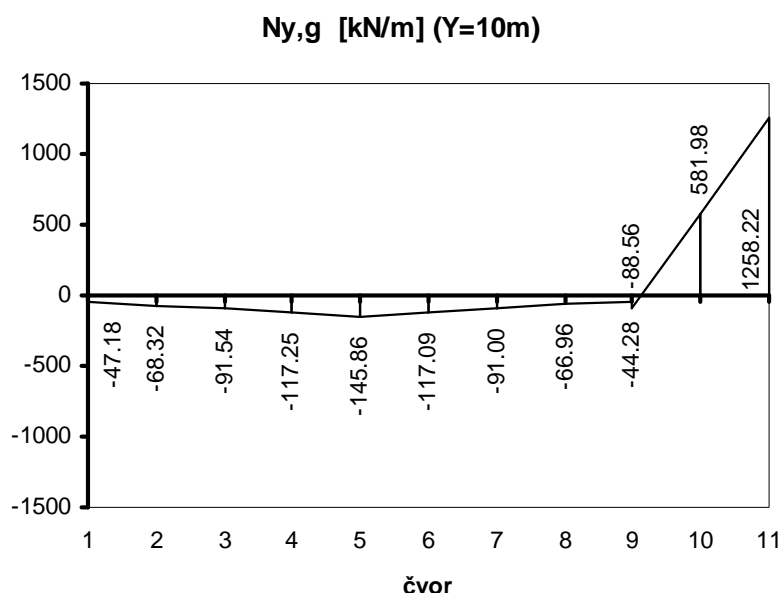
Slika 5.26. Dijagrami torzionog momenta  $M_{xy}$  u preseku iznad oslonaca, za različite oblike poprečnog preseka ljske

Iz gornjih dijagrama presečnih sila i momenata uočava se da se najmanje vrednosti podužne normalne sile  $N_y$  javljaju kod duboke "B" ljske, dok se kod izabrane ljske dobijaju nešto veće vrednosti  $N_y$ . Isti odnos veličina primećuje se i za membransku silu  $N_x$  i smičuću silu  $N_{xy}$ . Momenti torzije  $M_{xy}$  u ivičnoj gredi dostižu najmanje vrednosti za poprečni presek prikazan na slici 5.1. Kako se tokom ovog istraživanja pokazalo da upravo momenti torzije, kada prekorače određenu veličinu, mogu postati merodavni za dimenzionisanje armiranobetonske ivične grede, to se nameće zaključak da je za poliedarsku ljsku raspona  $L=20\text{m}$ , širine  $B=11.6\text{m}$ , najpovoljniji oblik poprečnog preseka onaj prikazan na slici 5.1, zbog čega je isti izabran za dalju detaljniju analizu.

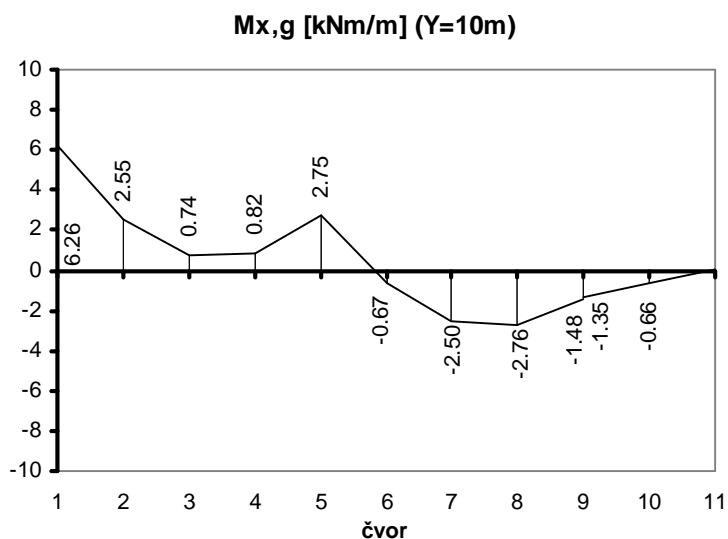
### 5.1.3. Dijagrami presečnih sila i pomeranja za odabrani primer

Aktuelna istraživanja grupe istraživača (među kojima je i autorka ovog rada), okupljene oko D. D. Milašinovića, pokazuju da je pretpostavka o malim pomeranjima u potpunosti opravdana za poliedarske ljske poprečnog preseka prema slici 5.1, raspona do  $L=15\text{m}$  ( $L/B=1.29$ ;  $I_y/I_x=4.8$ ). Geometrijska nelinearnost postaje izražena za raspone veće od  $L=25\text{m}$ . Za ljske raspona  $L=20\text{m}$  greška koja se čini usvajanjem pretpostavke o malim pomeranjima, u odnosu na rezultate dobijene geometrijski nelinearnom analizom, ne prelazi 10%. Analiza stabilnosti poliedarskih ljski, koju je u svojim novijim istraživanjima sproveo D. D. Milašinović, ukazuje na to da se problem stabilnosti ovakvih ljski javlja ili pri opterećenju mnogostruko većem od eksploatacionog ili kod veoma tankih poliedarskih ljski, koje bi bilo veoma teško ili čak nemoguće izvesti u armiranom betonu. Ovde se nećemo upuštati u detaljan opis spomenutih istraživanja i prikaz njihovih rezultata jer bi se time uveliko izašlo iz okvira teme ove disertacije. Budući da je geometrijski nelinearna analiza poliedarskih ljski veoma zahtevna u pogledu kapaciteta računara i vremena potrebnog za proračun, a imajući u vidu gorepomenute zaključke, autorka ovog rada se opredeljuje za proračun izabrane armiranobetonske poliedarske ljske primenom linearno elastične analize za slučaj malih pomeranja. Kako je u ovom radu cilj analize poliedarske ljske određivanje granične nosivosti karakterističnih preseka primenom radnih dijagrama materijala (betona i armature) dobijenih prema Evrokodu 2 i reološko-dinamičkom analogijom, te njihovo poređenje, greška koja se čini uvođenjem pretpostavke o malim pomeranjima u proračunu presečnih sila nije od značaja za izvođenje krajnjih zaključaka.

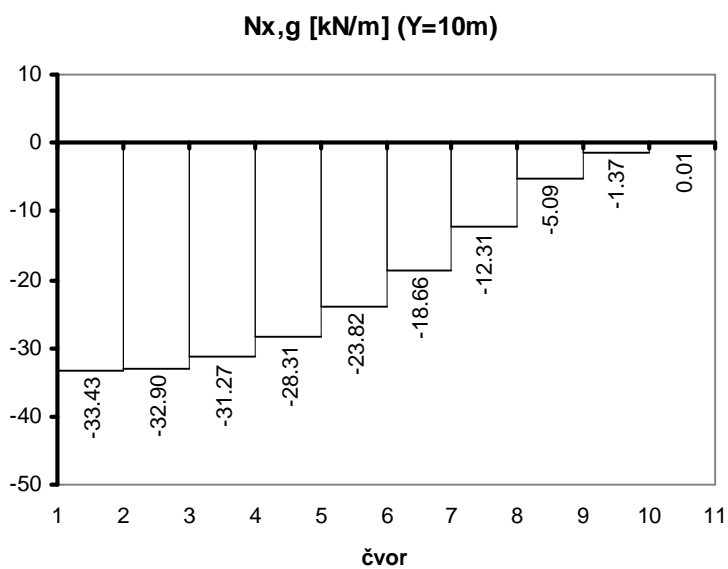
Proračun presečnih sila i momenata poliedarske ljske prikazane na slici 5.1, raspona  $L=20\text{m}$ , je urađen posebno za stalno i povremeno opterećenje, dok je proračun pomeranja i obrtanja odabranih tačaka sproveden za ukupno eksploataciono opterećenje. Na slikama 5.27 do 5.38 prikazani su dobijeni dijagrami presečnih sila i momenata za stalno i promenljivo opterećenje u karakterističnim presecima ljske. Slike 5.39 do 5.42 prikazuju veličine pomeranja u pravcu osa globalnog koordinatnog sistema i obrtanja oko  $y$  ose, od ukupnog opterećenja.



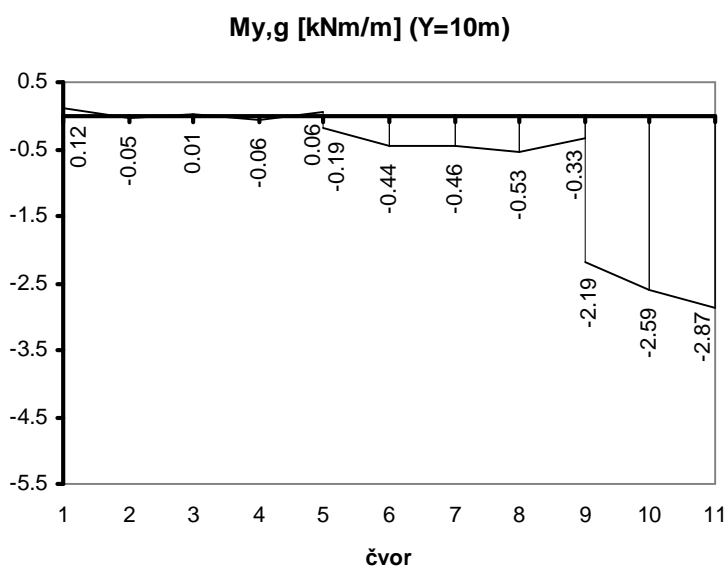
Slika 5.27. Dijagram podužne normalne sile od stalnog opterećenja u preseku na sredini raspona ljske



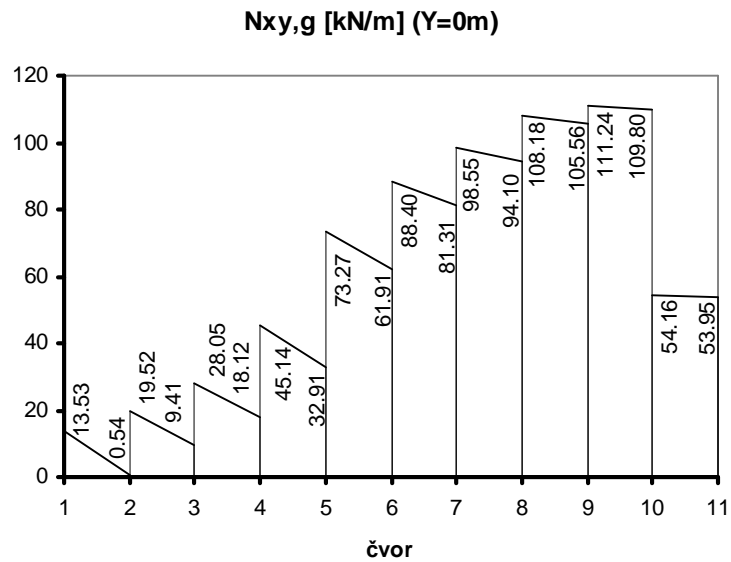
Slika 5.28. Dijagram momenta savijanja oko y ose od stalnog opterećenja u preseku na sredini raspona ljske



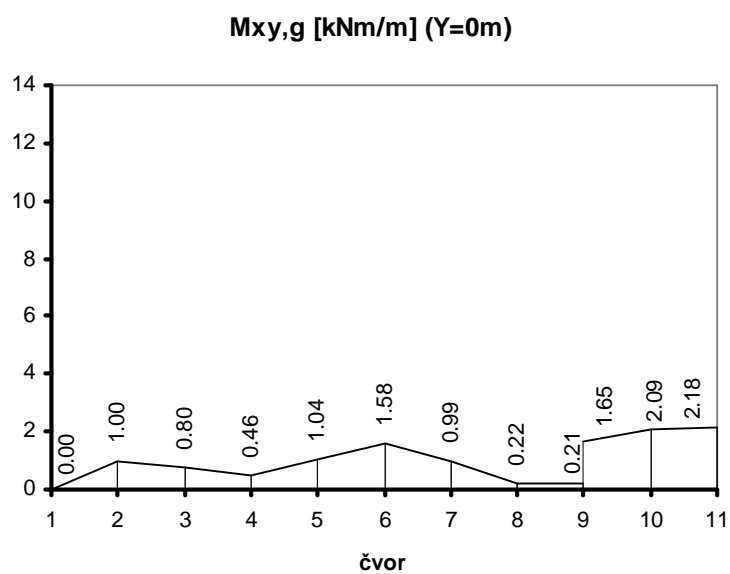
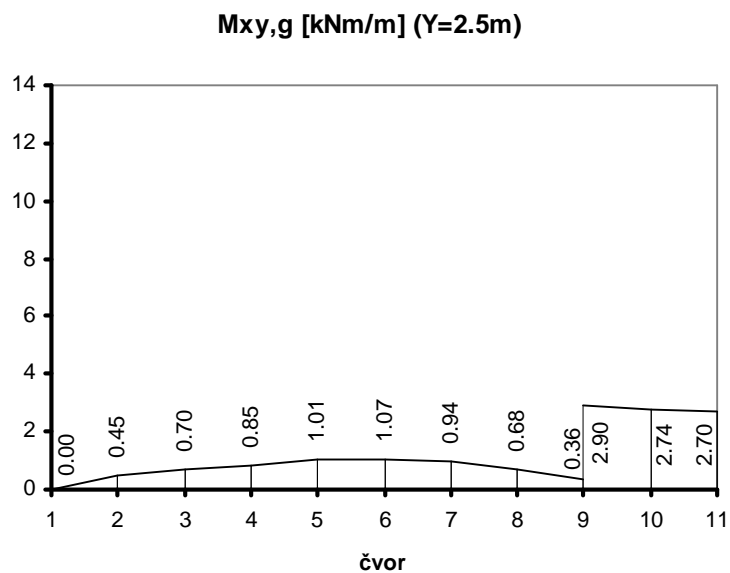
Slika 5.29. Dijagram normalne sile u poprečnom pravcu od stalnog opterećenja u preseku na sredini raspona ljske



Slika 5.30. Dijagram momenta savijanja oko lokalne x ose od stalnog opterećenja u preseku na sredini raspona ljske

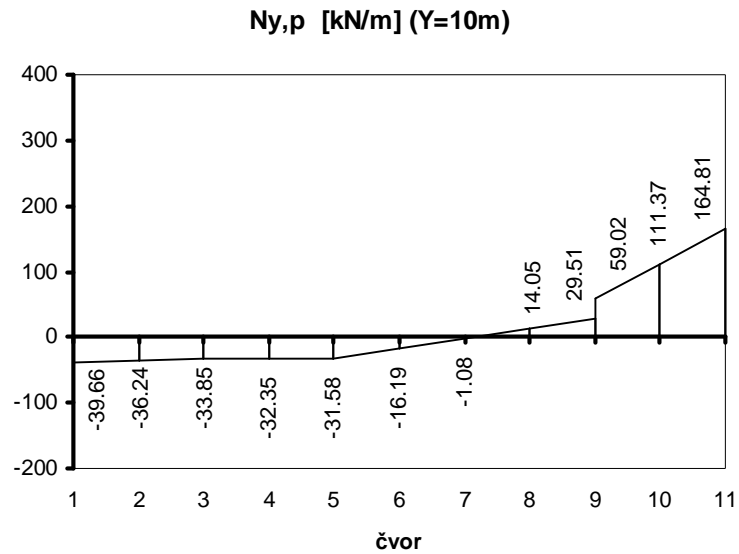


Slika 5.31. Dijagram smičuće sile od stalnog opterećenja u preseku iznad krajnjeg oslonca

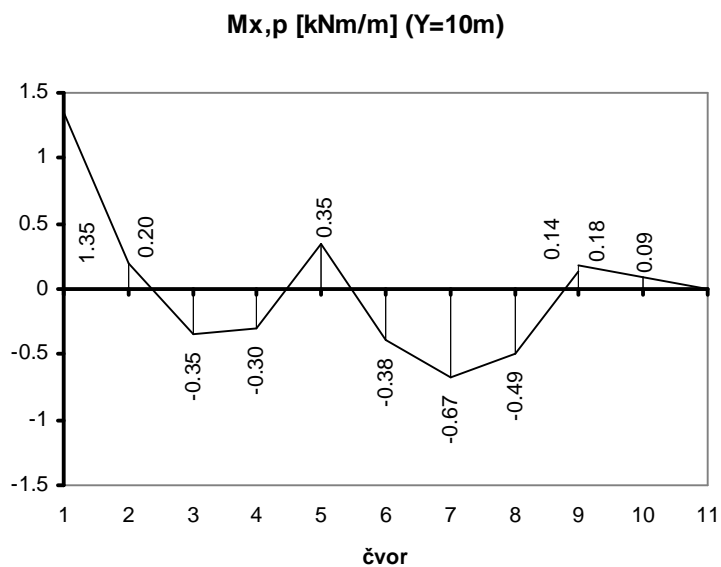


Slika 5.32. Dijagrami torzionog momenta od stalnog opterećenja u presjecima na udaljenosti 2.5m i 0m od krajnjeg oslonca

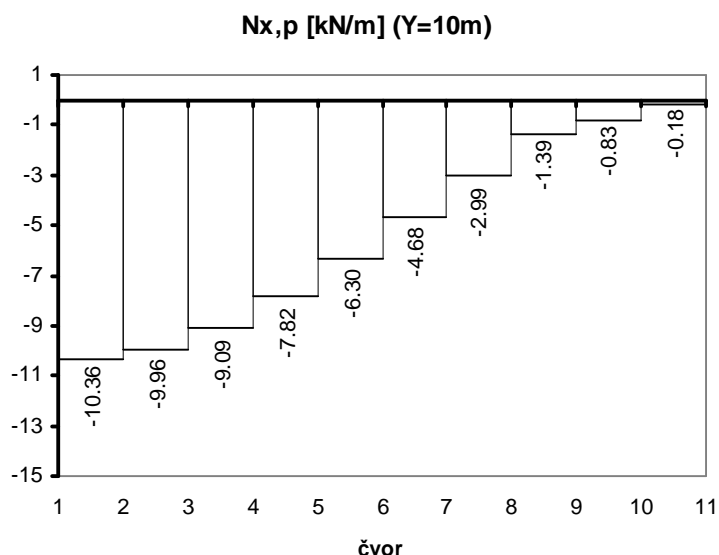




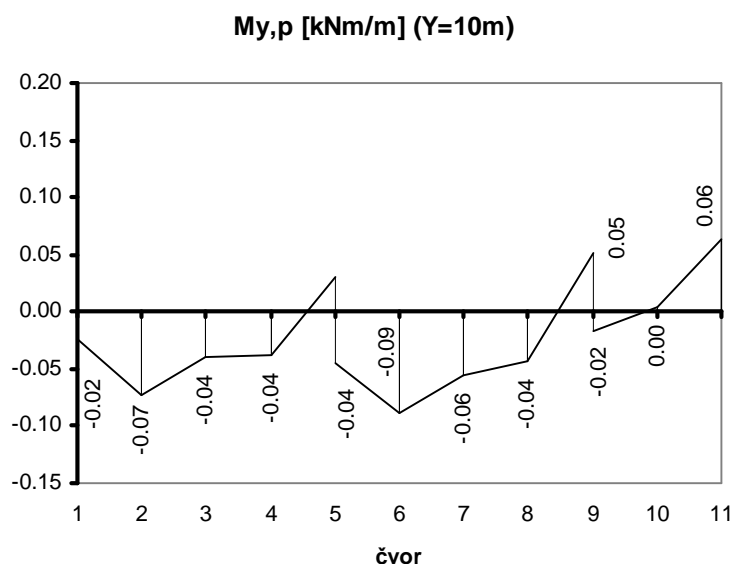
Slika 5.33. Dijagram podužne normalne sile od promenljivog opterećenja u preseku na sredini raspona ljske



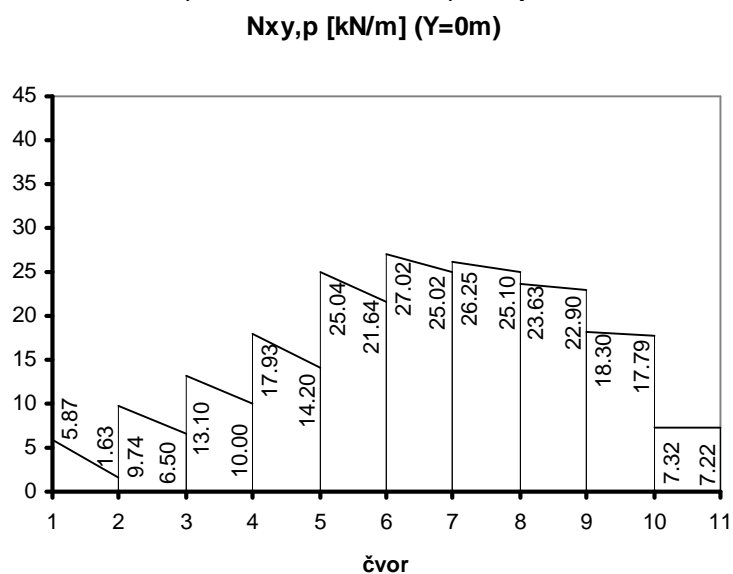
Slika 5.34. Dijagram momenta savijanja oko y ose od promenljivog opterećenja u preseku na sredini raspona ljske



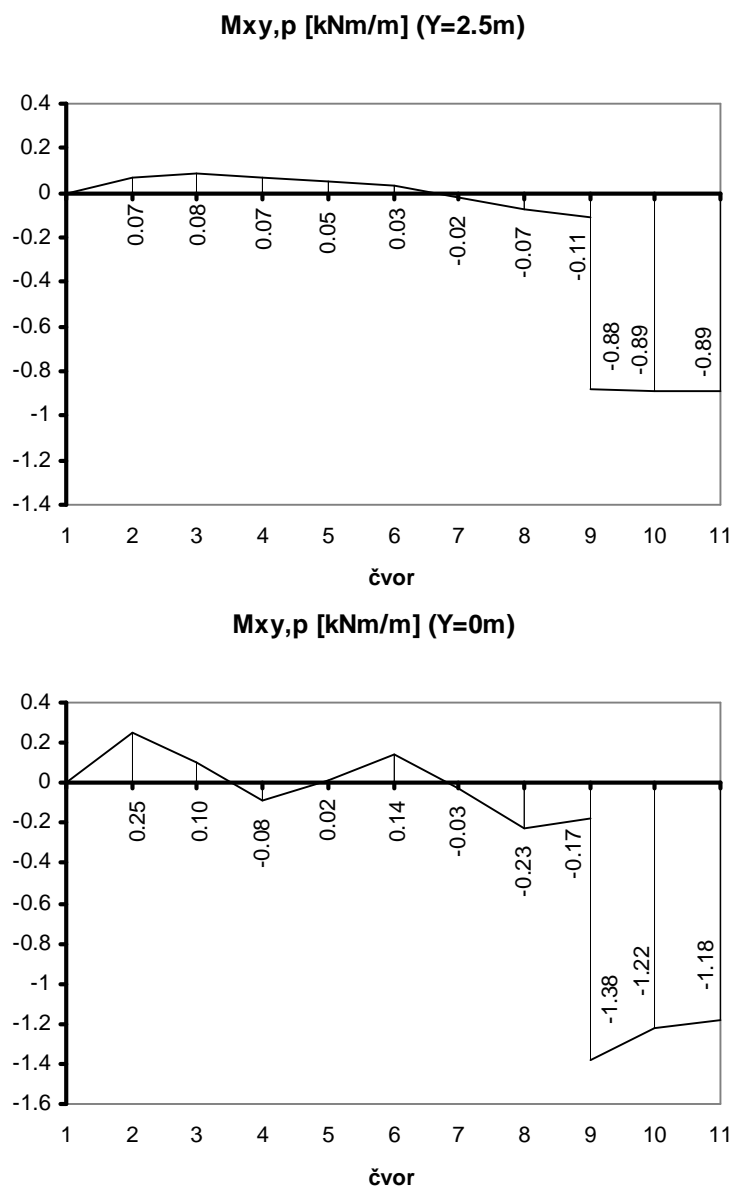
Slika 5.35. Dijagram normalne sile u poprečnom pravcu od promenljivog opterećenja u preseku na sredini raspona ljuske



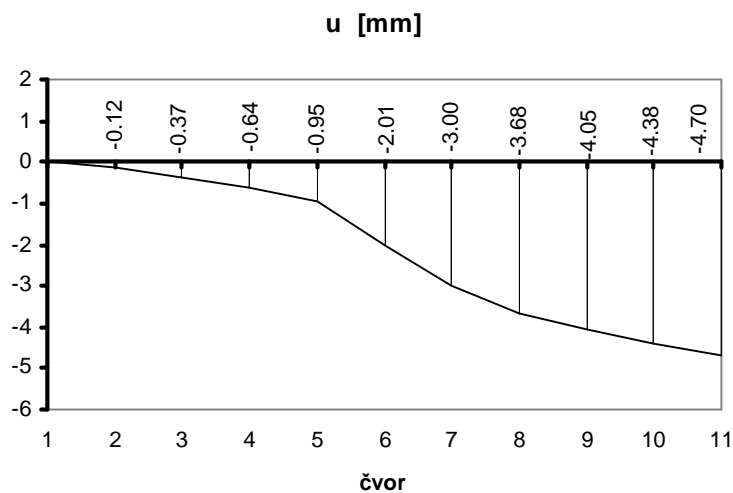
Slika 5.36. Dijagram momenta savijanja oko lokalne x ose od promenljivog opterećenja u preseku na sredini raspona ljuske



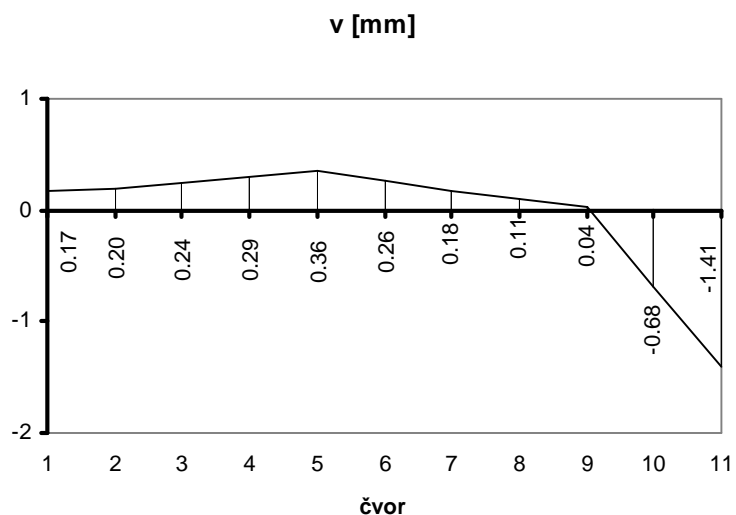
Slika 5.37. Dijagram smičuće sile od promenljivog opterećenja u preseku iznad krajnjeg oslonca



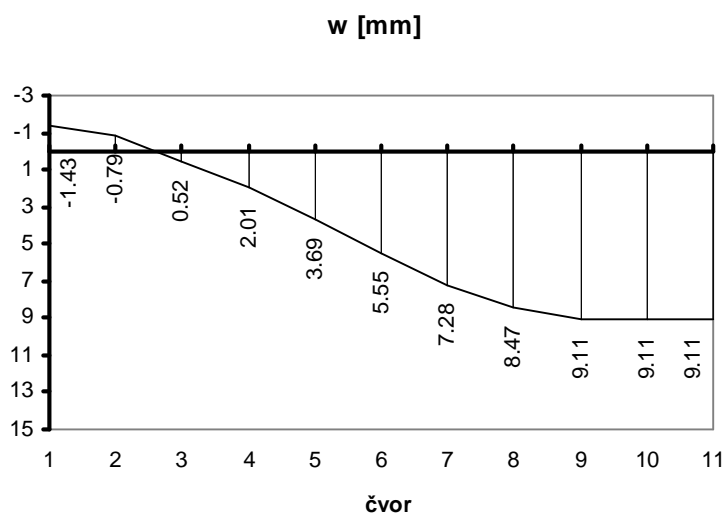
Slika 5.38. Dijagrami torzionog momenta od promjenljivog opterećenja u presecima na udaljenosti 2.5m i 0m od krajnjeg oslonca



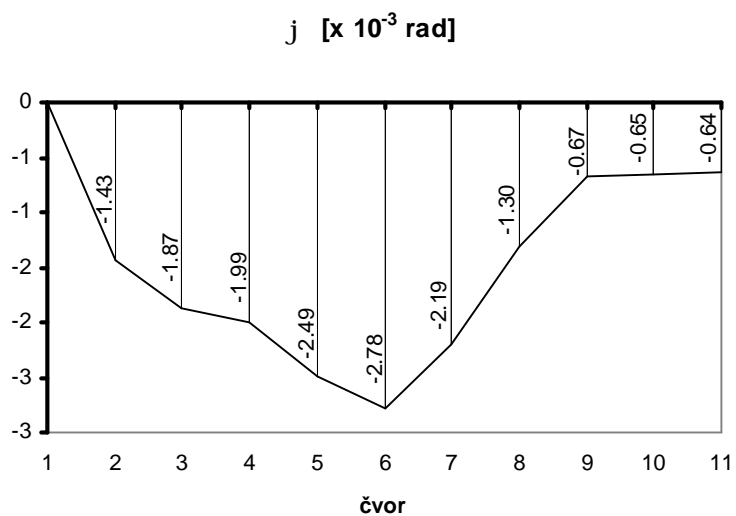
Slika 5.39. Pomeranje u pravcu globalne x ose tačkica preseka na sredini raspona ljske



Slika 5.40. Pomeranje u pravcu globalne y ose tačkaka preseka iznad oslonaca



Slika 5.41. Vertikalno pomeranje tačkaka preseka na sredini raspona ljuske



Slika 5.42. Obrtanje oko y ose tačkaka preseka na sredini raspona ljuske

## 5.2. Dimenzionisanje

Proračun potrebne površine armature u karakterističnim preseccima poliedarske ljske sproveden je prema važećem Pravilniku o tehničkim normativima za beton i armirani beton iz 1987. godine [54]. Računske karakteristike betona su prikazane u tabeli 5.1. Računski radni dijagrami betona (parabola + prava) i čelika (bilinearni dijagram) su prikazani u delu 4.4.1, odnosno 4.3.1. Usvojen je modul elastičnosti čelika  $E_a = 200 \text{ GPa}$ .

Tabela 5.1. Računske karakteristike betona MB 45 prema PBAB'87

$f_{bk}$ [MPa]	$f_B^{1)}$ [MPa]	$E_b$ [GPa]	$f_{bzm}^{2)}$ [MPa]	$\tau_r^{3)}$ [MPa]
45	27.75	35	3.15	1.4

<sup>1)</sup> Za ploče čija je debljina  $d = 10 \text{ cm} < 12 \text{ cm}$  računska čvrstoća  $f_B$  se smanjuje za 10% u odnosu na vrednost u tabeli i iznosi  $f_B = 24.975 \text{ MPa}$

<sup>2)</sup> srednja vrednost čvrstoće betona pri aksijalnom zatezanju

<sup>3)</sup> računska čvrstoća pri smicanju

Svi elementi poliedarske ljske su dimenzionisani u preseccima na udaljenosti  $y=0 \text{ m}$ ,  $y=2.5 \text{ m}$ ,  $y=5 \text{ m}$ ,  $y=7.5 \text{ m}$  i  $y=10 \text{ m}$  od krajnjih oslonaca (dijafragmi).

Granični uticaji u preseccima sračunati su prema čl.80 Pravilnika [54], pri čemu se vodilo računa o povoljnom dejstvu stalnog opterećenja u pojedinim preseccima.

### 5.2.1. Ivične grede - nosači između čvornih linija 9 i 11

Deo poliedarske ljske između čvornih linija 9 i 11 je tretiran kao linijski nosač. Na nosač deluju raspodeljena normalna sila  $N_y$  i moment savijanja  $M_y$ , promenljivi po visini poprečnog preseka, zbog čega je nosač izložen savijanju oko obe glavne ose. Kako je moment  $M_y$  u svim preseccima ivične grede izuzetno mali u odnosu na normalnu silu, to je pri dimenzionisanju grede njegov uticaj zanemaren, pa je greda dimenzionisana na ekscentrično zatezanje u oblasti malog ekscentriciteta. Merodavna granična normalna sila je određena kao površina dijagrama  $N_{yu}$  na delu između čvornih linija 9 i 11, a napadna tačka joj se nalazi u težištu istog dijagrama. Površina i raspored podužne armature za prijem ovog uticaja određeni su iz uslova da ni u jednom redu armature, usled bilo koje kombinacije dejstava, ne bude prekoračena granica razvlačenja čelika. Ovaj uslov je ispunjen takvim rasporedom armature da se njeno težište približno poklapa sa napadnom tačkom granične normalne sile  $N_{yu}$ . Nakon dimenzionisanja prema graničnom stanju nosivosti izvršena je kontrola graničnog stanja prslina. Kako je, u pojedinim preseccima grede, karakteristična širina prslina prekoračila graničnu vrednost, to je usvojena armatura korigovana. Za određivanje površine i rasporeda podužne armature u ovim preseccima bio je merodavan uslov  $a_{kq}(t) \leq a_u = 0.2 \text{ mm}$ . Proračun prslina je sproveden prema postupku opisanom u Priručniku za primenu PBAB'87 [24], knjiga 1.

Na ivičnu gredu deluju smičuće sile  $N_{xy} = T$  i momenti torzije  $M_{xy} = M_T$ , usled kojih se javljaju smičući naponi, najveći u zoni oslonaca. Pri proračunu merodavne transverzalne sile uzeta je u obzir i promena normalne sile u pravcu ose  $y$ .

$$T_{mu} = T_u - \frac{\Delta N_{yu}}{\Delta y} (z - C_a),$$

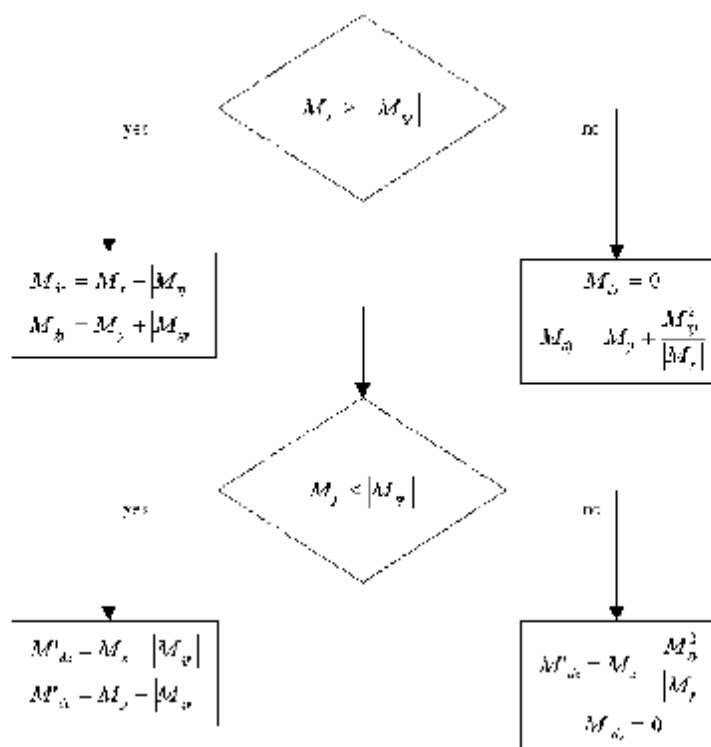
gde je  $z$  krak unutrašnjih sila, a  $C_a$  rastojanje težišta zategnute armature od težišta betonskog preseka. Na delu nosača gde ukupni smičući naponi prekoračuju računsku čvrstoću betona pri smicanju, određena je armatura za osiguranje (poprečne uzengije i podužna armatura). Kako su celom dužinom nosača smičući naponi u granicama  $0 \leq t_n (T + M_T) \leq 3t_r$ , to je proračun potrebne površine uzengija za osiguranje izvršen

prema redukovanoj transverzalnoj sili i redukovanom momentu torzije. Proračun je sproveden u skladu sa čl. 87 do 102 Pravilnika [54]. Maksimalni razmak uzengija u oslonačkim zonama, dužine  $0.2L$ , je određen prema Pravilniku o tehničkim normativima za izgradnju objekata visokogradnje u seizmičkim područjima [55], čl. 60 i iznosi  $e_{\perp}=10\text{cm}$ . Zbog jednostavnosti izvođenja usvojene su uzengije istog prečnika ( $f8$ ), celom dužinom grede.

Budući da su momenti savijanja u odnosu na podužnu osu nosača ( $M_x$ ) i normalne sile upravne na ovu osu ( $N_x$ ) izuzetno male vrednosti u svim presecima ivične grede, poprečne uzengije u presecima izvan zona osiguranja od smičućih napona usled transverzalnih sila i momenata torzije su usvojene iz uslova minimalne površine potrebne armature ploča  $m_{\min} = 0.1\%$  od  $A_b$ . Podužna armatura duž svake bočne strane ivičnog nosača određena je iz istog uslova. Raspored ove armature diktiran je uslovom maksimalnog dozvoljenog razmaka armature u pločama  $e \leq 2d$  (20 cm).

### 5.2.2. Ploče u nagibu - nosači između čvornih linija 1 i 9

Nosači između čvornih linija 1 i 9 su tretirani kao nosači u oba pravca opterećeni normalnom silom ( $N_x$ , odnosno  $N_y$ ) i momentom savijanja ( $M_x$ , odnosno  $M_y$ ). Uticaj momenata torzije je uzet u obzir prema algoritmu koji se primenjuje pri dimenzionisanju AB ploča u računarskom programu Tower [64] (sl. 5.43).



Slika 5.43. Algoritam po kome se momenti savijanja u pločama koriguju za uticaj momenata torzije, gde je:  $M_{ox}$  - merodavan moment savijanja za proračun potrebne armature u pravcu x ose, na zategnutoj strani ploče;  $M_{oy}$  - merodavan moment savijanja za proračun potrebne armature u pravcu y ose, na zategnutoj strani ploče;  $M'_{ox}$  - merodavan moment savijanja za proračun potrebne armature u pravcu x ose, na pritisnutoj strani ploče;  $M'_{oy}$  - merodavan moment savijanja za proračun potrebne armature u pravcu y ose, na pritisnutoj strani ploče [64]

Prema ovom algoritmu, merodavni momenti savijanja  $M_x$  i  $M_y$  se, u zavisnosti od njihovog međusobnog odnosa i odnosa prema momentu torzije  $M_{xy}$ , koriguju u obe

zone preseka, te se na osnovu ovako korigovanih momenata savijanja proračunava potrebna armatura. U algoritmu prikazanom na slici 5.43 usvojena je konvencija da je u posmatranoj tački  $M_y \geq M_x$ , da pozitivan moment zateže donju stranu ploče i da se pravci armiranja poklapaju sa pravcima lokalnih koordinatnih osa. Ovaj algoritam važi i za slučaj kada je  $M_x \geq M_y$ , pri čemu oznake uticaja  $M_x$  i  $M_y$  menjaju mesta. Ovde je izabrano da se nosači između čvornih linija 1 i 9 armiraju simetričnom armaturom u obe zone preseka. Zbog toga je, za korigovani moment savijanja u preseku ( $M_{xu,k}$ , odnosno  $M_{yu,k}$ ), između vrednosti  $M_d$  i  $M'_d$ , u oba pravca, birana ona koja u kombinaciji sa merodavnom graničnom normalnom silom ( $N_{xu}$ , odnosno  $N_{yu}$ ) daje najveću potrebnu površinu armature. Potrebna površina armature u presecima, u oba pravca ( $A'_{a1}$  i  $A'_{a2}$ ), za ovako usvojene granične normalne sile i momente savijanja, određena je primenom interakcionih dijagrama za simetrično armirane pravougaone preseke - prilog 2.4. Priručnika [24], knjiga 2.

Na ploče poliedarske ljske, osim prikazanih uticaja, deluju i smičuće sile  $N_{xy}$ . Smičući naponi usled ovih sila određeni su po jedinici širine ploče. Kako je u svim presecima smičući napon u granicama  $0 \leq t_n \leq 3t_r$ , to je površina armature za osiguranje, po zoni preseka (gornjoj i donjoj), određena na osnovu redukovane sile smicanja, prema sledećem:

$$T_{bu} = \frac{1}{2}(3T_r - T_n),$$

$$T_{Ru} = T_n - T_{bu},$$

$$\Delta A_a = \frac{T_{Ru}}{2s_v},$$

gde je  $T_r$  smičuća sila koja odgovara računskoj čvrstoći betona pri smicanju., a  $T_n$  smičuća sila dobijena integracijom sile  $N_{xyu}$  na jediničnoj dužini. Ovako sračunata armatura se dodaje armaturi sračunatoj za uticaje momenata savijanja i normalnih sila, u obe zone preseka, u oba pravca, pa je potrebna površina armature:

$$A_{ax1} = A'_{ax1} + \Delta A_a; \quad A_{ay1} = A'_{ay1} + \Delta A_a,$$

$$A_{ax2} = A'_{ax2} + \Delta A_a; \quad A_{ay2} = A'_{ay2} + \Delta A_a.$$

Minimalna količina armature je određena iz uslova minimalnog procenta armiranja u jednoj zoni  $m_{\min} = 0.1\%$  od  $A_b$ , a njen raspored je diktiran uslovom maksimalnog dozvoljenog razmaka armature u pločama  $e \leq 2d$  (20 cm).

Tabelarni prikazi presečnih uticaja, merodavnih graničnih uticaja, potrebne i usvojene armature za karakteristične preseke poliedarske ljske, praćeni potrebnim skicama usvojene armature, dati su u Prilogu na kraju ovog rada.

### 5.3. Analiza granične nosivosti karakterističnih preseka

Granična nosivost je analizirana za tri odabrana karakteristična preseka, sva tri na sredini raspona poliedarske ljske ( $y=10m$ ):

- Presek ivične grede - nosača između čvornih linija 9 i 11 (sl. 5.35), za pravo složeno savijanje ekscentričnom normalnom silom  $N_y$ ,
- Presek ploče poliedarske ljske u čvornoj liniji 1 (sl. 5.59), za pravo složeno savijanje ekscentričnom normalnom silom  $N_x$ ,
- Presek ploče poliedarske ljske u čvornoj liniji 8 (sl. 5.67), za pravo složeno savijanje ekscentričnom normalnom silom  $N_x$ .

Proračun ovih preseka se zasniva na četiri osnovne pretpostavke:

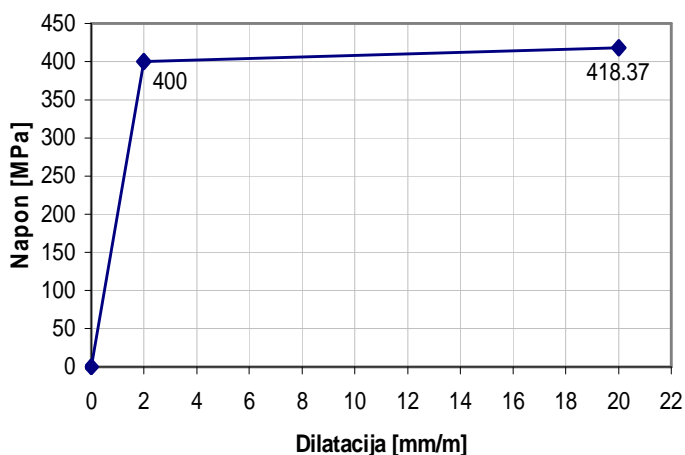
1. Raspodela dilatacija po visini preseka je linearna,
2. Beton u zategnutoj zoni preseka ne prima sile zatezanja,

3. Poznata je veza napon-dilatacija za armaturu,
4. Poznata je veza napon-dilatacija za beton.

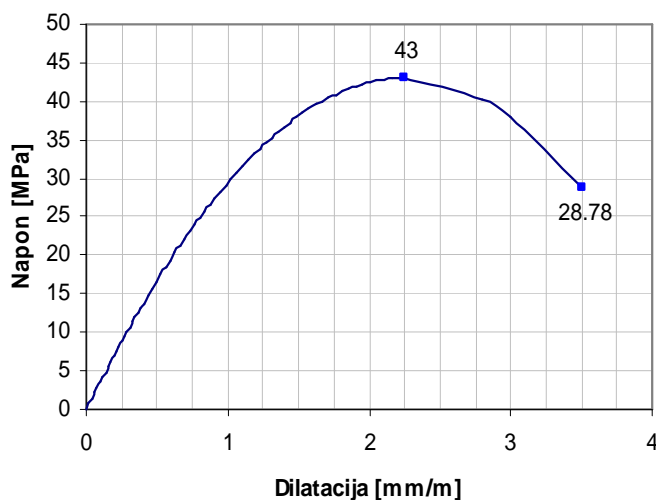
Analiza granične nosivosti karakterističnih preseka je sprovedena na osnovu dijagrama interakcije  $N_u - M_u$ , koji su konstruisani za svaki odabrani presek ponaosob, prema njegovim geometrijskim karakteristikama i usvojenoj armaturi. Dijagrami interakcije su konstruisani sa različitim radnim dijagramima betona i čelika i njihovim kombinacijama, prema sledećem:

- A. Radni dijagrami betona i čelika prema EC 2 (sl. 5.45 i 5.44),
- B. Radni dijagrami čelika prema RDA (sl. 5.46, 5.47, 5.48) i radni dijagram betona prema RDA sa maksimalnom ivičnom dilatacijom 4.447‰ (sl. 5.49),
- C. Radni dijagrami čelika prema RDA i radni dijagram betona prema RDA sa maksimalnom ivičnom dilatacijom 3.5‰ (sl. 5.50),
- D. Radni dijagram betona prema EC 2 i radni dijagrami čelika prema RDA,
- E. Radni dijagram čelika prema EC 2 i radni dijagram betona prema RDA sa maksimalnom ivičnom dilatacijom 4.447‰,
- F. Radni dijagrami čelika prema EC 2 i radni dijagram betona prema RDA sa maksimalnom ivičnom dilatacijom 3.5‰.

U cilju dobijanja uporedivih rezultata analize, dilatacije zategnute armature su ograničene na 20‰ i kod radnog dijagrama čelika prema EC 2 i kod radnih dijagrama čelika prema RDA. Radni dijagram čelika prema EC 2 je bilinearan, sa gornjom granom u nagibu. Nagib gornje grane je usvojen na osnovu pretpostavke da se čvrstoća na kidanje čelika dostiže pri dilatacijama od 10%, što je u saglasnosti i sa eksperimentalnim podacima [68] prikazanim u delu 4.3.3.

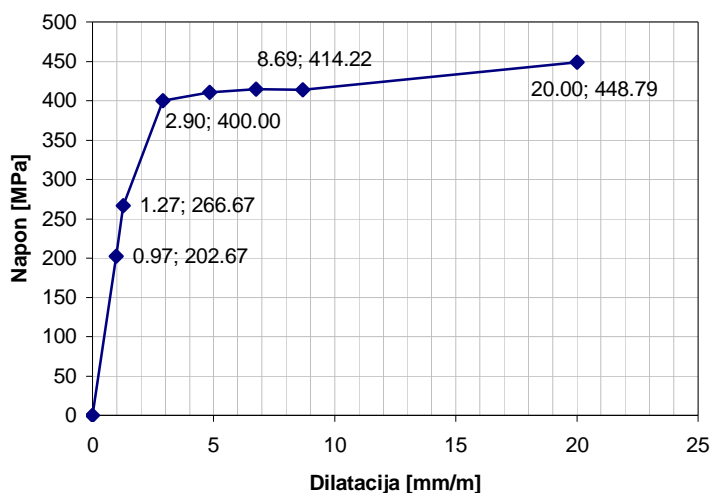
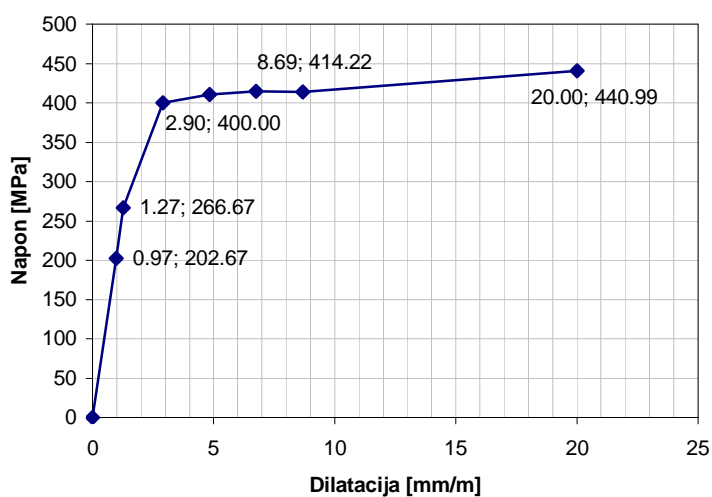
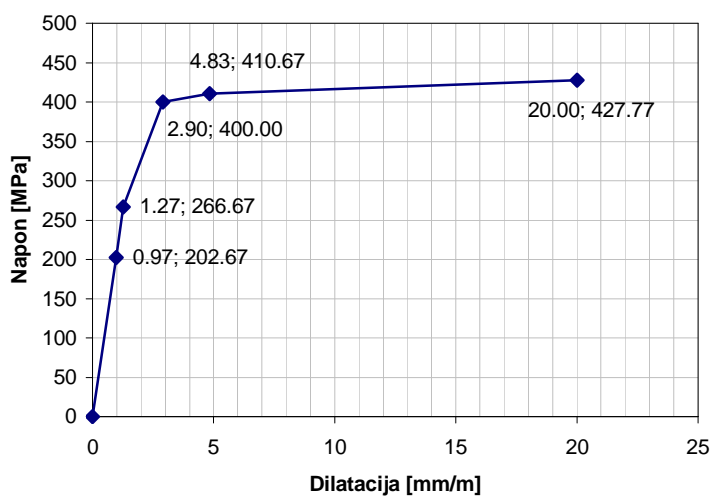


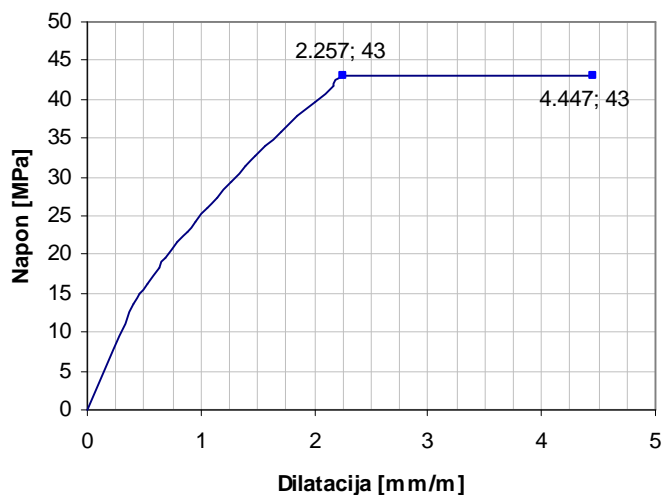
Slika 5.44. Radni dijagram čelika RA 400/500 prema EC 2



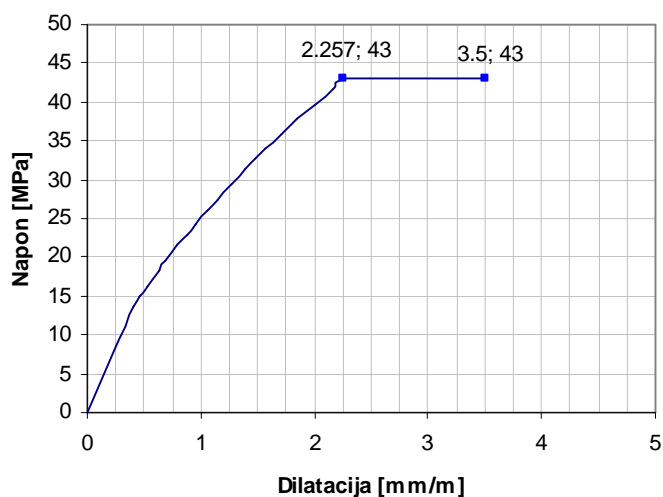
Slika 5.45. Radni dijagram betona C 35/45 prema EC 2



Slika 5.46. Radni dijagram čelika RA 400/500, za šipku prečnika  $\phi 6$ , prema RDASlika 5.47. Radni dijagram čelika RA 400/500, za šipku prečnika  $\phi 8$ , prema RDASlika 5.48. Radni dijagram čelika RA 400/500, za šipku prečnika  $\phi 19$ , prema RDA

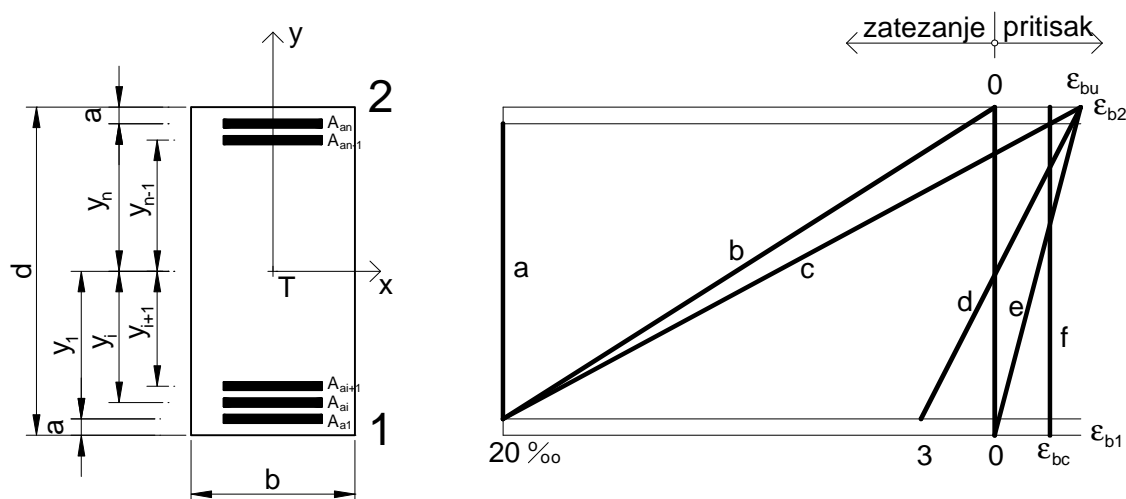


Slika 5.49. Pun radni dijagram betona C 35/45 prema RDA



Slika 5.50. Radni dijagram betona C 35/45 prema RDA, sa maksimalnom ivičnom dilatacijom 3.5‰

Dijagrami interakcije  $N_u - M_u$  konstruisani su za izabrane karakteristične dilatacije betona i armature, koje u potpunosti opisuju karakteristična naponsko-deformacijska stanja preseka napregnutih na složeno pravo savijanje (sl. 5.51).



Slika 5.51. Moguće raspodele dilatacija u armiranobetonskom preseku kod dostizanja granične nosivosti

Na slici 5.51 je sa  $\epsilon_{bc}$  označena dilatacija pri dostizanju maksimalnog napona pritiska u betonu (prema EC 2:  $\epsilon_{bc}=2.25‰$ , a prema RDA:  $\epsilon_{bc}=2.257‰$ ). Ovo je ujedno i maksimalna dopuštena dilatacija u betonu za slučaj centričnog pritiska.  $\epsilon_{bu}$  predstavlja maksimalnu ivičnu dilataciju betona (prema EC 2 i RDA sa ograničenom krajnjom dilatacijom:  $\epsilon_{bu}=3.5‰$ , a prema punom RDA dijagramu:  $\epsilon_{bu}=4.447‰$ ).

Preseci ploča poliedarske ljuske su simetrično armirani, pa je njihova ukupna armatura modelirana sa  $A_{a1}$  - zategnutom armaturom, sa udaljenošću težišta od težišta betonskog preseka  $y_1$ , i  $A_{a2}$  - pritisnutom armaturom, sa udaljenošću težišta od težišta betonskog preseka  $y_2$ . U slučaju da su obe armature napregnute normalnom silom istog znaka,  $A_{a1}$  predstavlja jače zategnutu, odnosno slabije pritisnutu armaturu.

Ivična greda je, sa druge strane, armirana u više redova (3 u jače i 2 reda u slabije zategnutoj zoni preseka). Da bi se izbeglo prekoračenje dilatacija zategnute armature u redovima najudaljenijim od težišta betonskog preseka, pri proračunu granične nosivosti se vodilo računa o udelu svakog pojedinačnog reda armature, pri čemu se granična dilatacija  $\epsilon_{au}=20‰$  odnosi na red koji je najudaljeniji od težišta betonskog preseka.

Ukratko ćemo opisati granične odnose dilatacija prema oznakama na slici 5.51, koje su korišćene i za označavanje karakterističnih oblasti na dijagramima interakcije.

Oblast koju zatvaraju linije "a" i "b" obuhvata slučajeve kod kojih je ceo poprečni presek zategnut. Linija "a" predstavlja dilatacije pri zatezanju silom koja deluje u težištu armature (ali ne nužno i u težištu betonskog preseka), dok linija "b" predstavlja granični slučaj ekscentričnog zatezanja pri kojem je dilatacija betona u ivici 2 jednaka nuli.

Oblast zatvorena linijama "b" i "c" odgovara savijanju sa normalnom silom u fazi velikog ekscentriciteta. Linija "c" predstavlja raspodelu dilatacija u preseku pri kojoj dolazi do istovremenog loma po pritisnutom betonu i armaturi u redu koji je najudaljeniji od težišta betonskog preseka.

Između linija "c" i "d" se nalazi oblast naprezanja na savijanje bez normalne sile ili savijanje sa normalnom silom kod velikog ili srednjeg ekscentriciteta, sa punim iskorišćenjem dilatacija u krajnjem pritisnutom vlaknu betona.

Linijama "d" i "e" je omeđena oblast savijanja sa normalnom silom čiji ekscentricitet nije velik. Zategnuta armatura nije dovoljno iskorišćena, dok su dilatacije i naponi u krajnjem pritisnutom vlaknu betona (ivica 2) potpuno iskorišćeni.

Slučajevi ekscentričnog delovanja sile pritiska u fazi malog ekscentriciteta obuhvaćeni su oblašću između linija "e" i "f". Linija "f" predstavlja slučaj kada sila pritiska deluje u težištu idealnog preseka, koji se nalazi u naponskoj fazi Ia - bez prslina.

Dijagrami interakcije  $N_u - M_u$  su konstruisani na sledeći način:

Za izabrane parove dilatacija u betonu i armaturi, određen je koeficijent položaja neutralne linije u odnosu na krajnju pritisnutu ivicu preseka:

$$s = \frac{1}{1 + \frac{e_{azt}}{e_{b2}}}, \quad (5.1)$$

gde  $e_{azt}$  predstavlja dilataciju u težištu (jače) zategnute armature (ili slabije pritisnute, u slučaju pritiska u oblasti malog ekscentriciteta), dok je sa  $e_{b2}$  označena dilatacija u krajnjoj pritisnutoj ivici betonskog preseka (sl. 5.51). Pozitivna dilatacija u armaturi odgovara zatezanju, a u betonu - pritisku. Udaljenost neutralne linije od krajnje pritisnute ivice preseka određuje se iz:

$$x = s \cdot h, \quad (5.2)$$

gde je  $h$  statička visina preseka, odnosno udaljenost težišta (jače) zategnute armature od krajnje pritisnute ivice preseka.

Dilatacija u težištu zategnute armature se dobija iz usvojenih dilatacija u prvom redu zategnute armature ( $e_{a1}$ ) i u krajnjoj pritisnutoj ivici betona ( $e_{b2}$ ):

$$e_{azt} = e_{b2} + \frac{(e_{a1} - e_{b2})}{(d - a)} \cdot \left( \frac{d}{2} - y_{zt} \right) \quad (5.3)$$

Dilatacija u određenom redu armature se određuje iz izraza:

$$e_{ai} = e_{b2} + \frac{(e_{azt} - e_{b2})}{h} \cdot \left( \frac{d}{2} - y_i \right). \quad (5.4)$$

U prethodna dva, kao i u svim narednim izrazima, dilatacije koje odgovaraju sili pritiska se unose sa negativnim predznakom. Koordinatni početak je postavljen u težište betonskog preseka, a udaljenosti pojedinih tačaka od težišta preseka ( $y_i$ ) se unose kao algebarske vrednosti.

Kada je presek izložen sili zatezanja sa malim ekscentricitetom, biraju se dilatacije u redovima armature najudaljenijim od težišta preseka ( $e_{a1}$  i  $e_{an}$ ), dok se u ostalim redovima armature dilatacija određuje prema:

$$e_{ai} = e_{an} + \frac{(e_{a1} - e_{an})}{(y_n - y_1)} (y_n - y_i). \quad (5.5)$$

Pri delovanju sile pritiska sa malim ekscentricitetom, na osnovu usvojenih dilatacija u krajnjim vlaknima betona ( $e_{b1}$  i  $e_{b2}$ ) određuje se dilatacija u armaturi iz:

$$e_{ai} = e_{b1} + \frac{(e_{b2} - e_{b1})}{d} \cdot \left( \frac{d}{2} + y_i \right). \quad (5.6)$$

Na osnovu ovako sračunate dilatacije u armaturi, koristeći usvojeni radni dijagram čelika, određuje se napon u posmatranom redu armature ( $s_{ai}$ ). Pri tome se smatra da veza napon-dilatacija čelika ne zavisi od predznaka napona, odnosno da je ona ista za zatezanje i za pritisak. Sila u posmatranom redu armature je:

$$Z_{ai} = A_{ai} \cdot s_{ai}. \quad (5.7)$$

Sila pritiska u betonu ( $D_{bu}$ ) se dobija integraljenjem usvojenog radnog dijagrama betona po površini pritisnute zone poprečnog preseka:

$$D_{bu} = b \cdot \int_0^x s_b(y) dy = b \cdot h \cdot \int_0^s s_b(x) dx, \quad (5.8)$$

gde je  $x = \frac{y}{h}$ .

Granična normalna sila i granični moment savijanja se određuju iz dva uslova ravnoteže:

$$\sum N_u = 0: \quad N_u = D_{bu} - \sum_{i=1}^n Z_{ai} \quad (5.9)$$

$$\sum M_{u(y=0)} = 0: \quad M_u = D_{bu} \cdot \left( \frac{d}{2} - x + y_b \right) - \sum_{i=1}^n Z_{ai} \cdot y_i \cdot \quad (5.10)$$

Položaj napadne tačke sile pritiska u betonu u odnosu na neutralnu liniju ( $y_b$ ) se određuje iz izraza:

$$y_b = \frac{b \cdot \int_0^x s_b(y) y dy}{D_{bu}} = \frac{b \cdot h^2 \cdot \int_0^s s_b(x) x dx}{D_{bu}} \cdot \quad (5.11)$$

Integrali u izrazima (5.8) i (5.11) rešavani su numerički za sva tri analizirana radna dijagrama betona.

Svaki ovako dobijen par normalna sila - moment savijanja predstavljen je sa po jednom tačkom u dijagramu  $N_u - M_u$ . Spajanjem ovih tačaka dolazimo do dijagrama interakcije za posmatrani presek.

U posmatranom preseku se, usled eksploatacionih dejstava, javljaju normalna sila i moment savijanja

$$N = N_g + N_p, \quad M = M_g + M_p, \quad (5.12)$$

odnosno normalna sila sa ekscentricitetom

$$e = \frac{M}{N}. \quad (5.13)$$

Za ovaj ekscentricitet se sa dijagrama interakcije očitava granična normalna sila  $N_u$ , odnosno granični moment savijanja  $M_u$ .

Globalni koeficijent sigurnosti preseka u odnosu na lom je:

$$g_u = \frac{N_u}{N}, \quad \text{odnosno} \quad g_u = \frac{M_u}{M}. \quad (5.14)$$

U prikazanim dijagramima interakcije sila pritiska je naneta na pozitivan deo ordinate. Pozitivan moment savijanja zateže donju ivicu preseka.

### 5.3.1. Ivične grede - nosači između čvornih linija 9 i 11

Interakcioni dijagrami za ivičnu gredu konstruisani su za sve moguće raspodele dilatacija po visini preseka, uključujući i stanje u kojem se dostiže maksimalna dilatacija krajnjeg gornjeg ( $n=5$ ) reda armature ( $e_{a5}=20\%$ ) uz istovremenu maksimalnu dilataciju donjeg ivičnog vlakna betona ( $e_{b1}=-3.5\%$ ). Armatura ivičnog nosača je nesimetrična, raspoređena u pet redova (sl. 5.35), pa se pri postavljanju uslova ravnoteže (5.9) i (5.10) vodilo računa o stvarnim dilatacijama i stvarnoj sili u svakom pojedinačnom redu armature. Granične normalne sile i granični momenti savijanja prikazani u tabeli 5.2 deluju u težištu betonskog preseka.

Usled eksploatacionog opterećenja u težištu betonskog preseka ivične grede javljaju se zatežuća normalna sila  $N=696.747\text{kN}$  i moment savijanja  $M=121.05\text{kNm}$ , odnosno normalna sila  $N=696.747\text{kN}$  sa ekscentricitetom  $e=-17.373\text{cm}$  u odnosu na težište betonskog preseka. Za ovaj ekscentricitet su sa dijagrama interakcije očitane granične normalne sile i granični momenti savijanja, te određeni globalni koeficijenti sigurnosti preseka u odnosu na lom prema (5.14), za sve analizirane kombinacije radnih dijagrama betona i čelika. Dobijeni koeficijenti sigurnosti se među sobom vrlo malo razlikuju. Kako je ceo poprečni presek grede usled zadatog opterećenja zategnut, to njegova granična nosivost zavisi samo od granične nosivosti usvojene armature. Iz poslednjeg reda u tabeli 5.2 uočavamo da se primenom radnog dijagrama čelika prema RDA dobijaju koeficijenti sigurnosti za 3.26% veći od koeficijenata dobijenih uz primenu radnog dijagrama čelika prema EC 2. Ovo svedoči o dobrom slaganju usvojenih radnih dijagrama čelika.

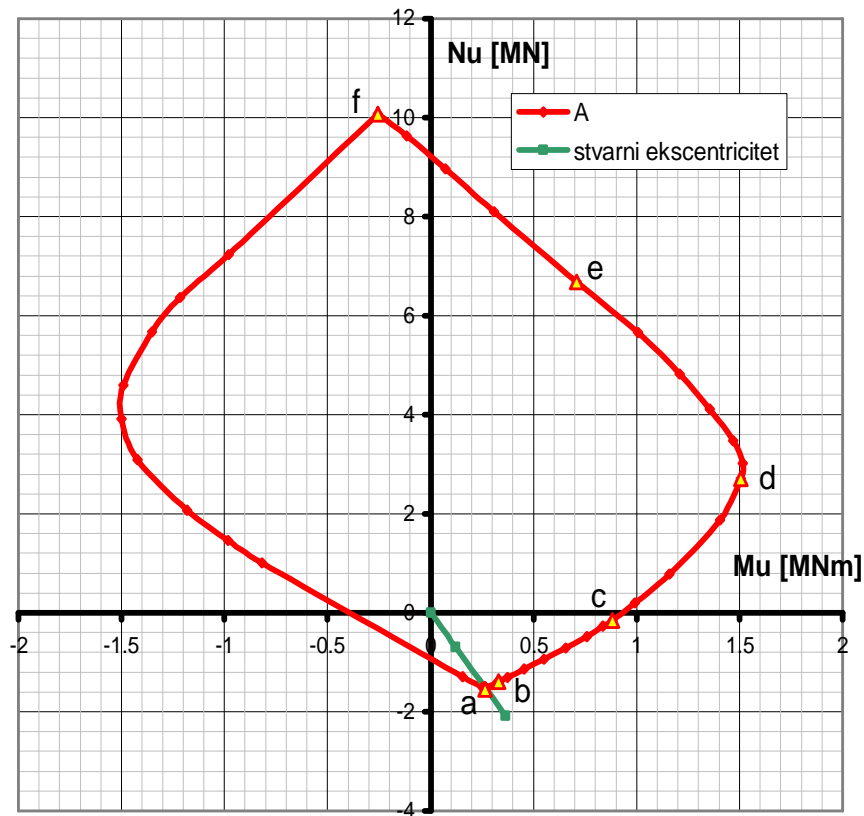
Tabela 5.2. Granična nosivost ivične grede u sredini raspona poliedarske ljuske za odabrane kombinacije radnih dijagrama betona i čelika

linija	$\epsilon_{a1}$ [%]	$\epsilon_{a5}$ [%]	$\epsilon_{b1}$ [%]	$\epsilon_{b2}$ [%]	Granični uticaji za kombinaciju radnih dijagrama betona i čelika												
					A		B		C		D		E		F		
					$N_u$ [kN]	$M_u$ [kNm]	$N_u$ [kN]	$M_u$ [kNm]	$N_u$ [kN]	$M_u$ [kNm]	$N_u$ [kN]	$M_u$ [kNm]	$N_u$ [kN]	$M_u$ [kNm]	$N_u$ [kN]	$M_u$ [kNm]	
	0		$\epsilon_{bu}$		7234.41	-977.96	7690.82	-1090.20	7197.88	-1144.91	7239.33	-977.28	7674.93	-1087.14	7192.96	-1145.60	
	0.5		$\epsilon_{bu}$		6366.74	-1214.32	6922.08	-1293.17	6329.77	-1341.38	6366.04	-1215.30	6911.82	-1288.44	6330.48	-1340.40	
	1		$\epsilon_{bu}$		5669.30	-1352.84	6274.77	-1427.01	5627.11	-1452.01	5659.35	-1354.18	6270.14	-1420.62	5637.06	-1450.67	
	2		$\epsilon_{bu}$		4599.37	-1490.96	5284.43	-1558.12	4595.22	-1531.04	4621.60	-1467.95	5238.07	-1572.65	4572.99	-1554.05	
	3		$\epsilon_{bu}$		3908.90	-1499.84	4553.47	-1601.87	3878.07	-1529.04	3900.38	-1485.58	4541.40	-1600.00	3886.58	-1543.29	
	5		$\epsilon_{bu}$		3089.60	-1421.52	3649.79	-1555.19	3007.75	-1424.72	3024.82	-1401.32	3648.90	-1550.93	3072.53	-1444.93	
	10		$\epsilon_{bu}$		2067.26	-1180.50	2529.80	-1336.30	1984.27	-1166.06	1995.01	-1158.78	2576.43	-1346.13	2056.51	-1187.79	
	15		$\epsilon_{bu}$		1461.94	-982.10	1931.76	-1160.91	1399.69	-969.14	1407.53	-966.32	1983.28	-1173.27	1454.10	-984.92	
	20		$\epsilon_{bu}$		1003.81	-816.31	1489.77	-1010.93	967.12	-811.36	973.29	-810.27	1546.65	-1026.51	997.64	-817.40	
	20	0			-1289.25	155.51	-1253.02	133.11	-1253.02	133.11	-1253.02	133.11	-1289.25	155.51	-1253.02	133.11	
a	20	20			-1542.05	266.48	-1576.70	272.47	-1576.70	272.47	-1576.70	272.47	-1542.05	266.48	-1542.05	266.48	
	20	15			-1536.20	268.12	-1570.23	274.28	-1570.23	274.28	-1570.23	274.28	-1536.20	268.12	-1536.20	268.12	
	20	10			-1530.35	269.77	-1563.77	276.10	-1563.77	276.10	-1563.77	276.10	-1530.35	269.77	-1530.35	269.77	
	20	5			-1524.50	271.41	-1557.31	277.91	-1557.31	277.91	-1557.31	277.91	-1524.50	271.41	-1524.50	271.41	
	20	2			-1520.99	272.40	-1507.55	299.99	-1507.55	299.99	-1507.55	299.99	-1520.99	272.40	-1520.99	272.40	
	20	1			-1406.98	324.35	-1440.80	330.30	-1440.80	330.30	-1440.80	330.30	-1406.98	324.35	-1406.98	324.35	
b	20			0	-1394.19	330.17	-1427.36	336.42	-1427.36	336.42	-1427.36	336.42	-1394.19	330.17	-1394.19	330.17	
	20			-0.1	-1381.53	336.02	-1414.29	342.45	-1414.29	342.45	-1414.16	342.51	-1381.67	335.95	-1381.67	335.95	
	20			-0.5	-1299.10	374.98	-1330.67	381.84	-1330.67	381.84	-1329.20	382.56	-1300.58	374.26	-1300.58	374.26	
	20			-1	-1138.73	454.02	-1179.76	452.68	-1179.76	452.68	-1165.16	459.82	-1153.34	443.62	-1153.34	443.62	
	20			-1.5	-935.71	551.41	-995.39	537.96	-995.39	537.96	-958.47	555.70	-972.63	527.42	-972.63	527.42	
	20			-2	-711.16	656.58	-784.90	633.56	-784.90	633.56	-730.25	659.19	-765.81	621.54	-765.81	621.54	
	20			-2.5	-484.84	759.27	-573.26	727.49	-573.26	727.49	-517.05	752.78	-541.04	721.66	-541.04	721.66	
	20			-3	-275.34	835.64	-380.36	809.21	-380.36	809.21	-335.51	827.86	-320.19	816.98	-320.19	816.98	
c	20			$\epsilon_{bu}$	-151.79	881.59	157.24	1014.23	-181.39	888.29	-175.21	887.20	155.64	997.92	-157.97	882.69	
	15			$\epsilon_{bu}$	200.00	989.98	593.93	1142.44	152.61	995.43	160.45	992.61	617.76	1133.43	192.16	992.80	
	10			$\epsilon_{bu}$	785.47	1158.62	1276.92	1325.53	753.59	1174.42	764.34	1167.13	1291.71	1314.94	774.72	1165.91	
	5			$\epsilon_{bu}$	1876.08	1403.78	2455.31	1549.11	1844.88	1434.49	1861.95	1411.08	2507.75	1551.56	1859.01	1427.18	
d	3			$\epsilon_{bu}$	2714.88	1505.85	3393.28	1587.68	2717.25	1520.16	2739.57	1476.70	3340.30	1615.42	2692.57	1549.30	
	2.5			$\epsilon_{bu}$	3024.77	1514.61	3772.97	1555.21	3088.80	1505.14	3112.98	1453.14	3658.57	1605.70	3000.59	1566.61	
	2			$\epsilon_{bu}$	3476.86	1469.81	4203.11	1508.33	3516.83	1478.93	3543.20	1415.83	4116.57	1547.41	3450.48	1532.91	
	1.5			$\epsilon_{bu}$	4109.01	1354.34	4735.18	1425.46	4042.85	1426.11	4071.86	1348.31	4738.27	1423.04	4080.00	1432.13	
	1			$\epsilon_{bu}$	4827.81	1207.97	5414.00	1280.69	4751.36	1307.79	4783.60	1209.96	5429.66	1271.67	4795.58	1305.80	
	0.5			$\epsilon_{bu}$	5665.77	1007.59	6208.68	1081.79	5603.27	1132.22	5639.54	1006.14	6211.85	1077.62	5629.51	1133.67	
	0			$\epsilon_{bu}$	6673.95	709.37	7124.79	813.77	6624.24	872.11	6601.70	730.61	7115.47	814.46	6632.50	877.01	
e				0	$\epsilon_{bu}$		7511.50	685.80	6971.80	768.41			7497.47	688.33	6974.70	774.33	
				-0.5	$\epsilon_{b2,c}$ *	8097.30	309.07	8226.60	415.62	7829.11	469.33	8101.18	297.59	8203.87	423.14	7825.70	481.07
				-1.0	$\epsilon_{b2,c}$ *	8968.26	73.70	8836.64	189.27	8562.06	220.09	8974.77	55.96	8814.66	198.97	8555.22	237.69
				-1.5	$\epsilon_{b2,c}$ *	9624.63	-115.33	9296.58	17.21	9130.81	27.02	9518.30	-99.96	9387.69	-10.45	9236.77	11.37
f	$\epsilon_{bc}$		$\epsilon_{bc}$	$\epsilon_{bc}$	10075.29	-254.94	9881.37	-221.43	9881.37	-221.43	9879.25	-221.07	10075.32	-254.95	10075.32	-254.95	
za e = -0.17373 m					-1500	260.6	-1550	269.28	-1550	269.28	-1550	269.28	-1500	260.6	-1500	260.6	
$\gamma_u$					2.15		2.22		2.22		2.22		2.15		2.15		

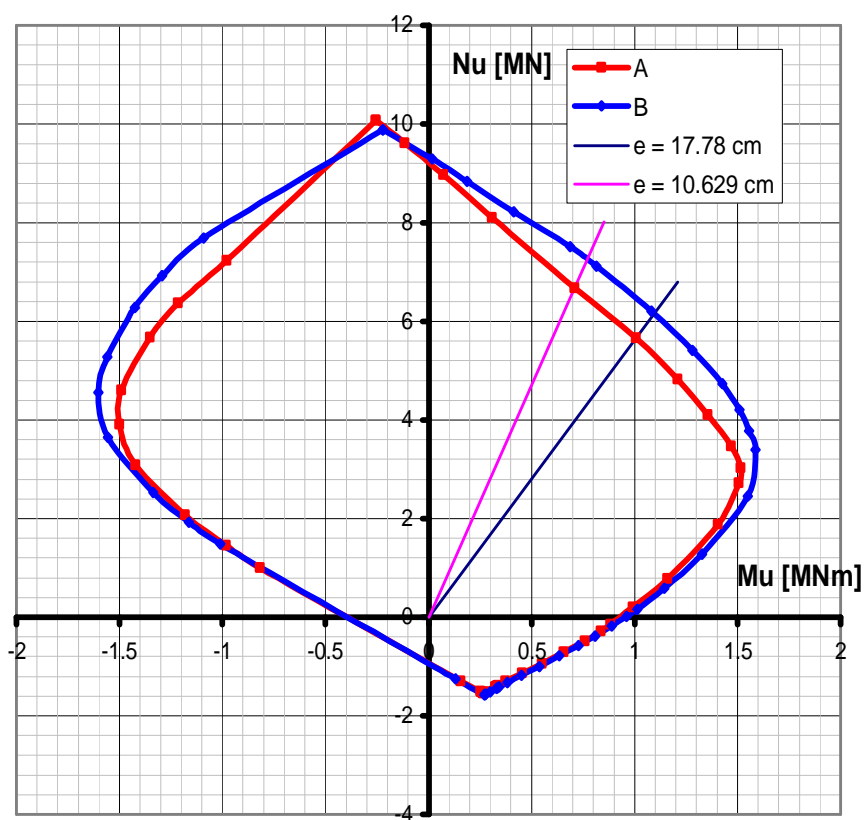
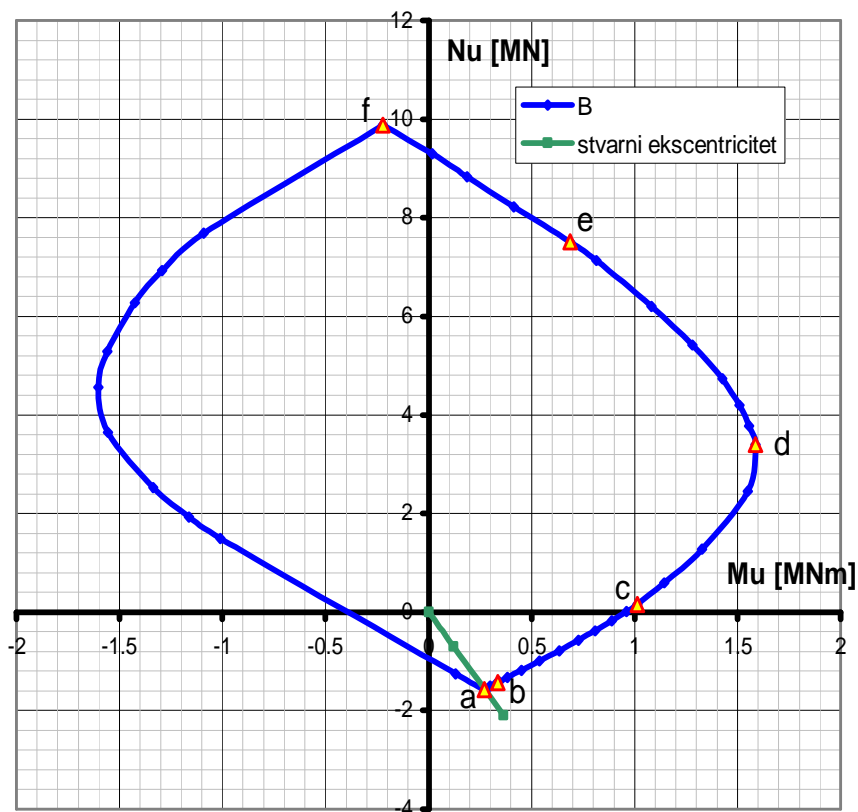
$$* e_{b2,c} = e_{bu} - \frac{e_{bu} - e_{bc}}{e_{bc}} e_{b1}$$

Na slikama 5.52 do 5.58 su prikazani dijagrami interakcije ivične grede u sredini raspona poliedarske ljuske, za sve odabrane kombinacije radnih dijagrama materijala, kao i njihovo pojedinačno poređenje sa interakcionim dijagramom koji odgovara radnim dijagramima betona i čelika prema EC 2. Najmanja odstupanja od interakcionog dijagrama prema EC 2 dobijaju se primenom samo RDA radnog dijagrama čelika uz

radni dijagram betona prema EC 2. Najveća odstupanja se uočavaju kod primene punog RDA dijagrama betona i to u oblasti srednjeg ekscentriciteta (između linija d i e) i dalje kroz oblast malog ekscentriciteta sa silom pritiska. Tako se za normalnu silu pritiska sa ekscentricitetom  $e=10.629\text{cm}$  očitavaju vrednosti  $N_{li}=5600\text{kN}$  - prema EC 2 i  $N_{li}=6150\text{kN}$  - prema kombinaciji B. Dakle, primenom punog RDA radnog dijagrama betona i RDA dijagrama čelika dobija se granična nosivost preseka za 9.82% veća nego primenom radnih dijagrama oba materijala prema EC 2.

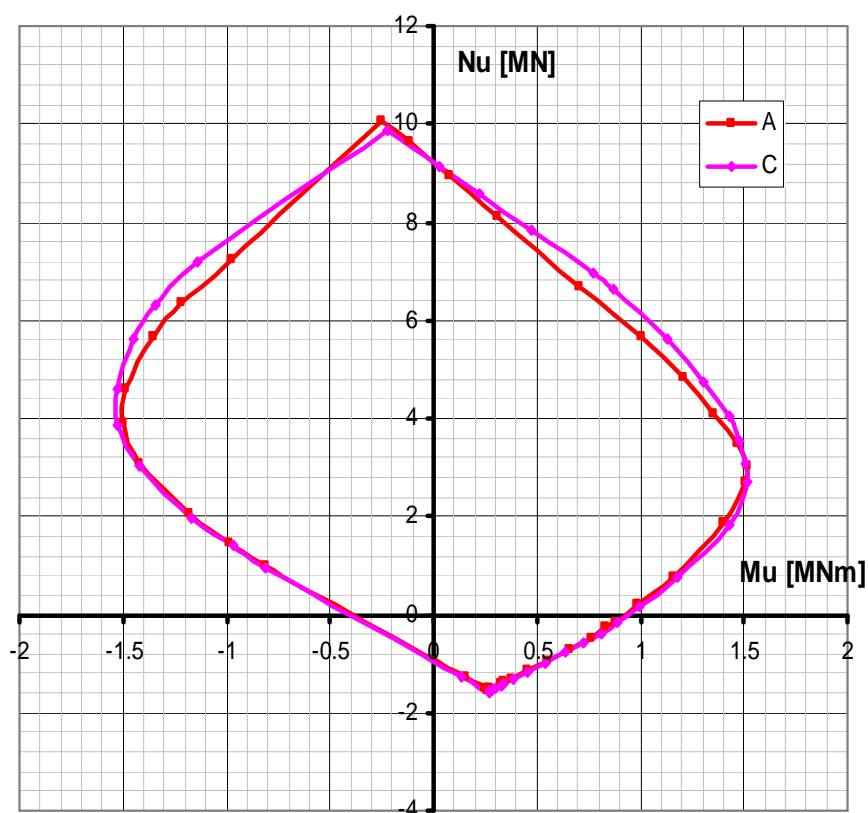
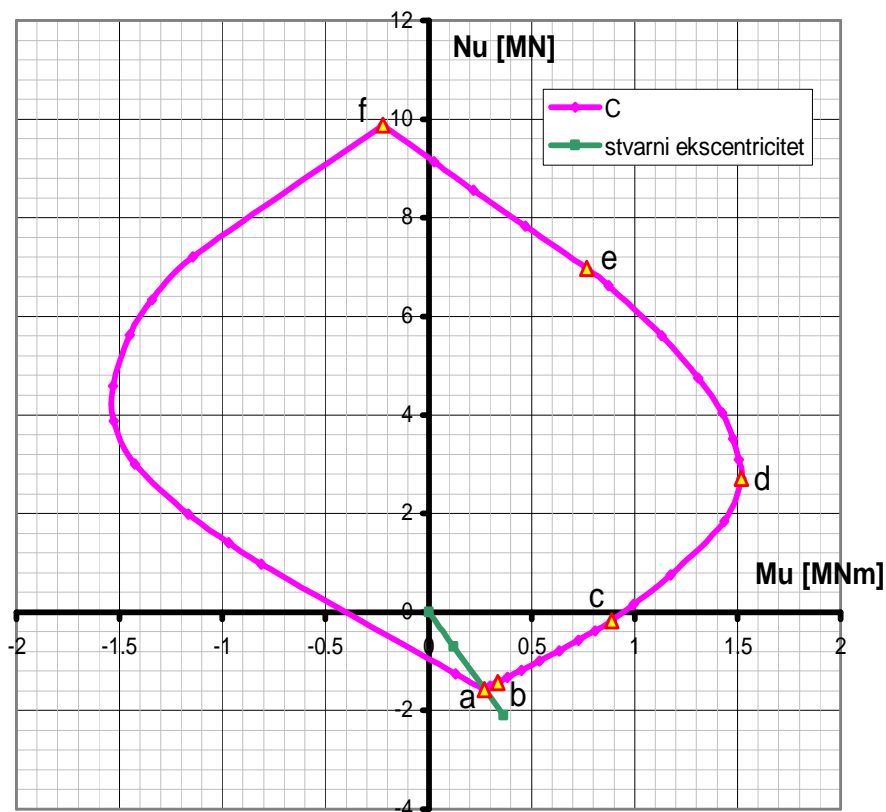


Slika 5.52. Dijagram interakcije ivične grede u preseku  $y=10\text{m}$  za radne dijagrame betona i čelika prema EC 2

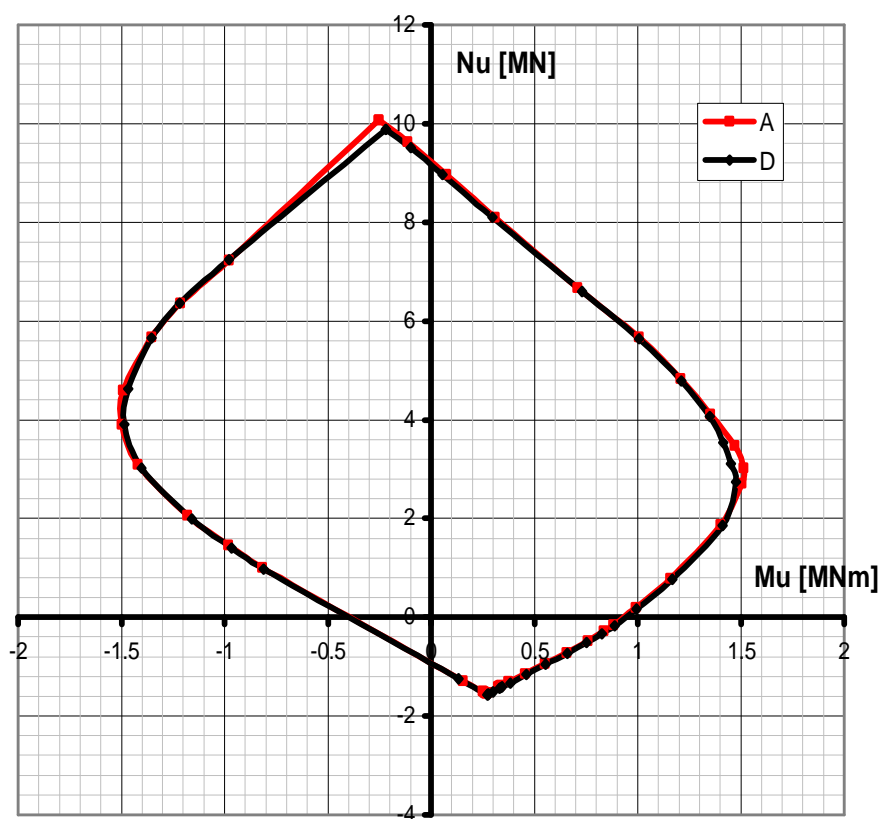
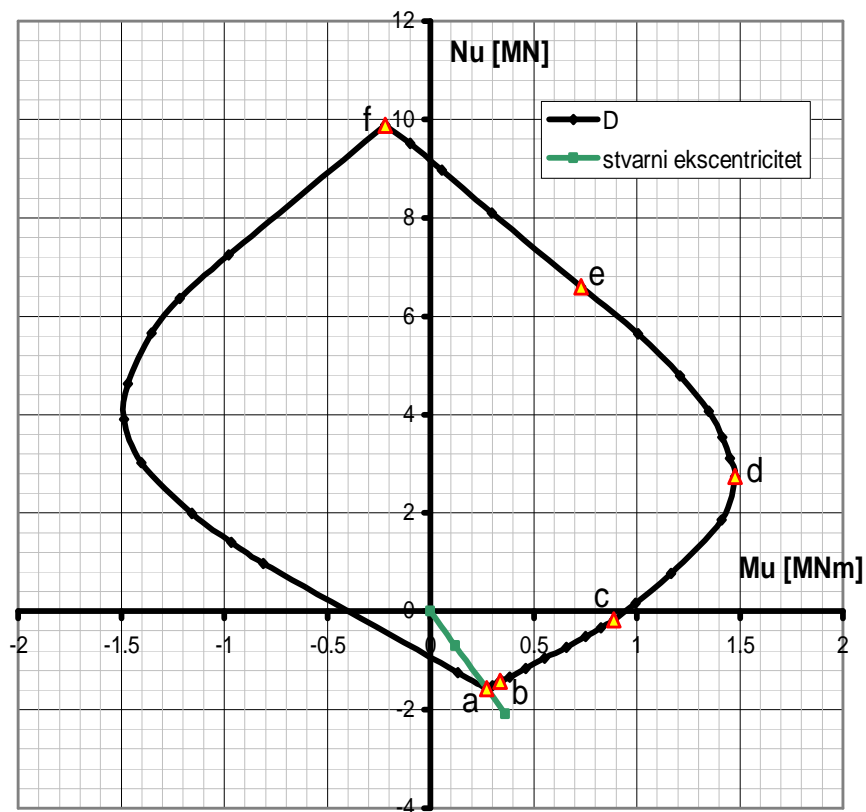


Slika 5.53. Dijagram interakcije ivične grede u preseku  $y=10\text{m}$  za pun RDA radni dijagram betona i RDA dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)

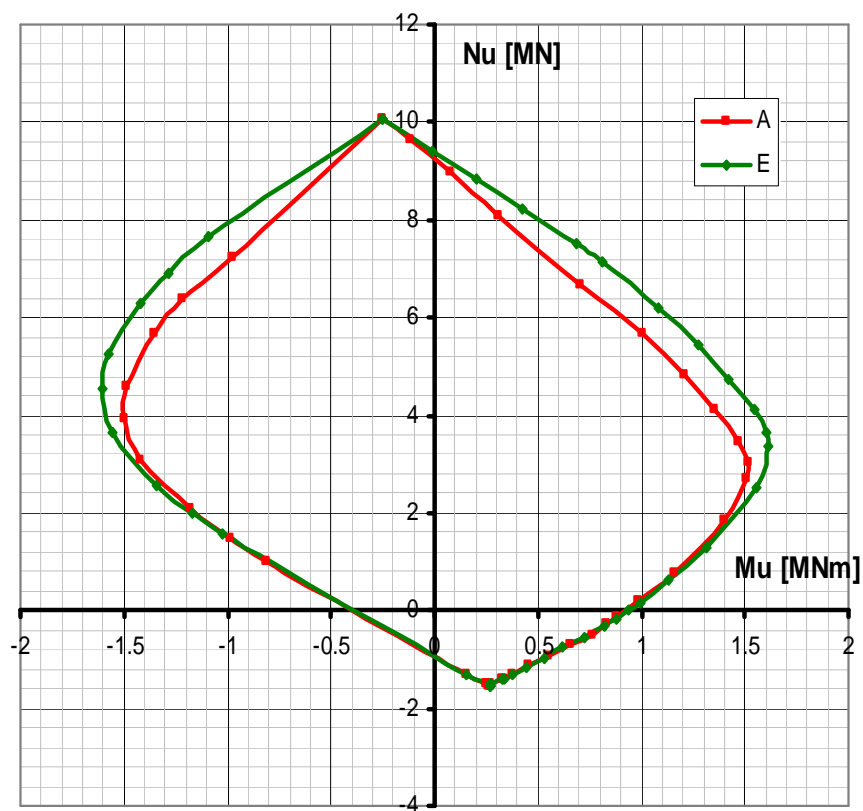
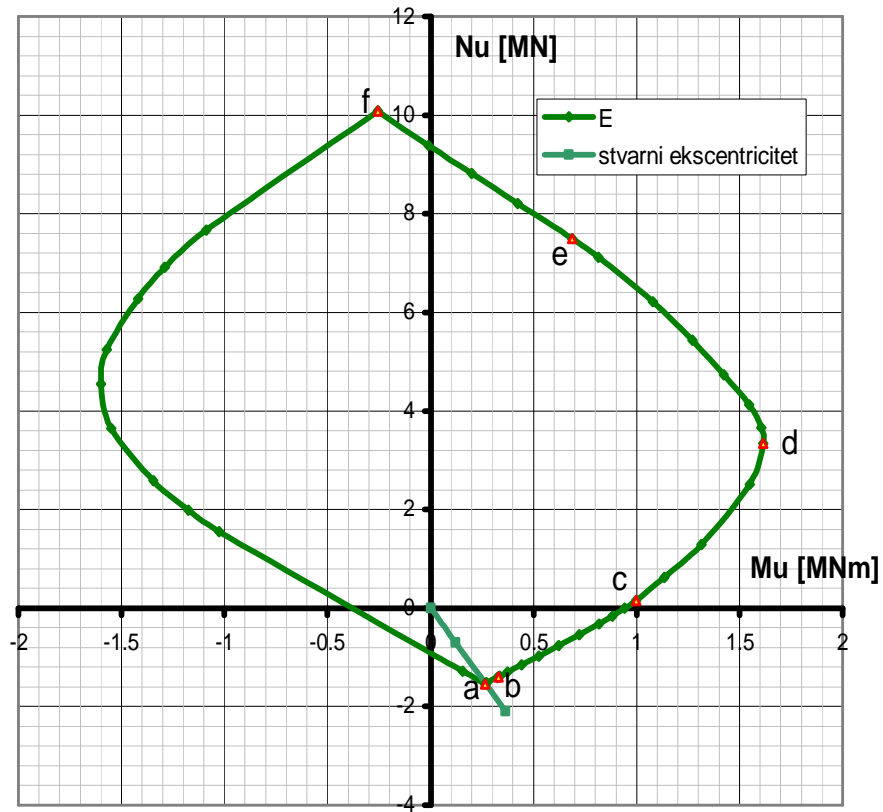




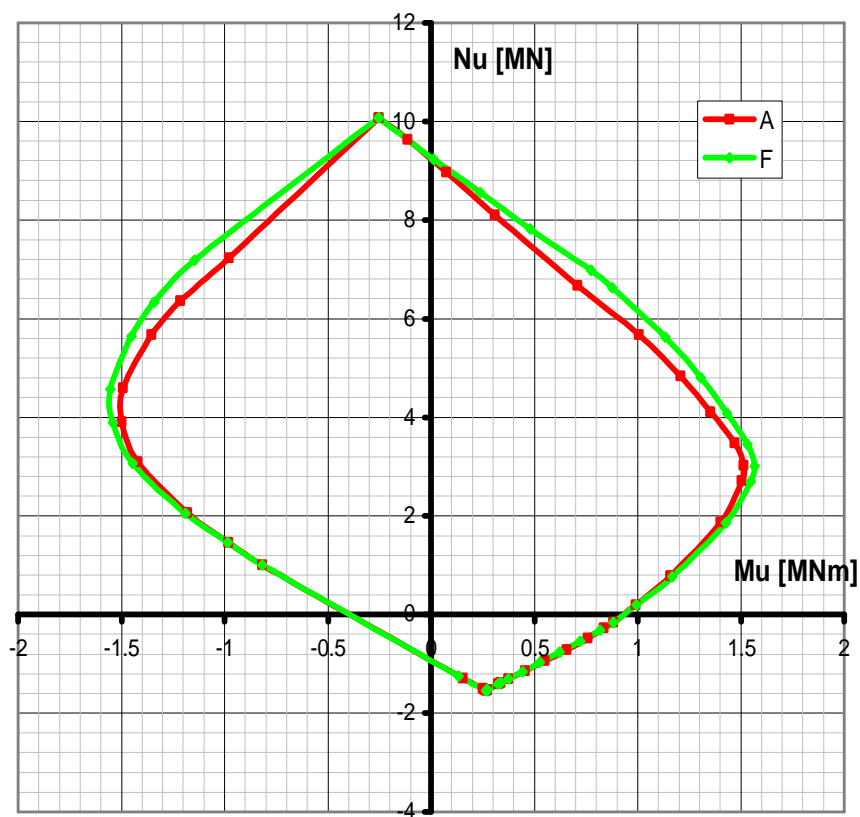
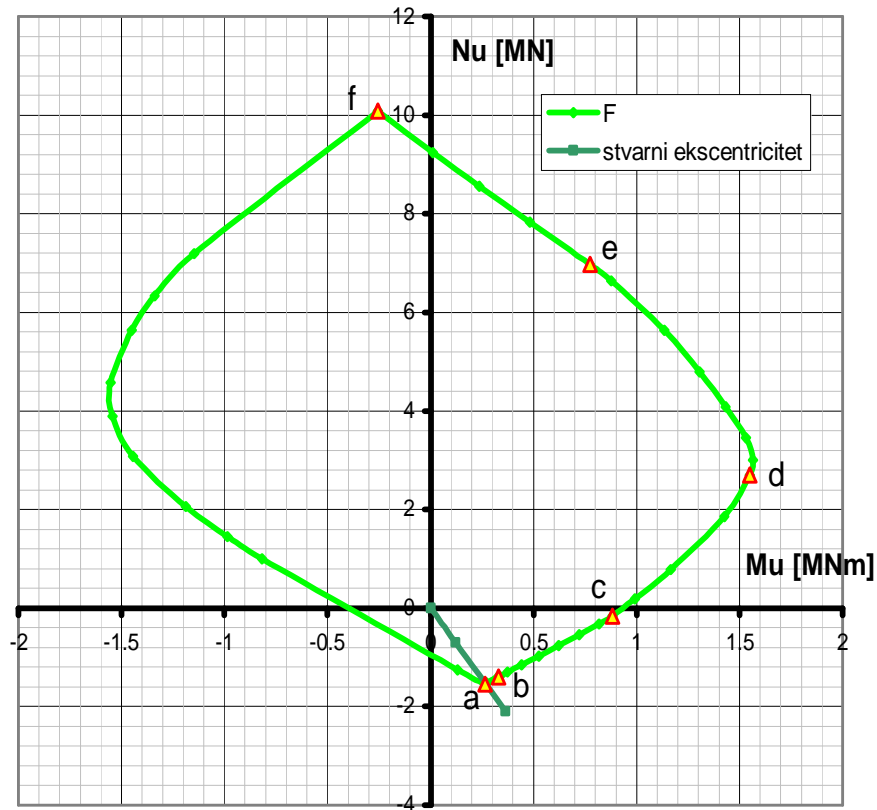
Slika 5.54. Dijagram interakcije ivične grede u preseku  $y=10m$  za RDA radni dijagram betona sa  $e_{bu}=-3.5\%$  i RDA dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



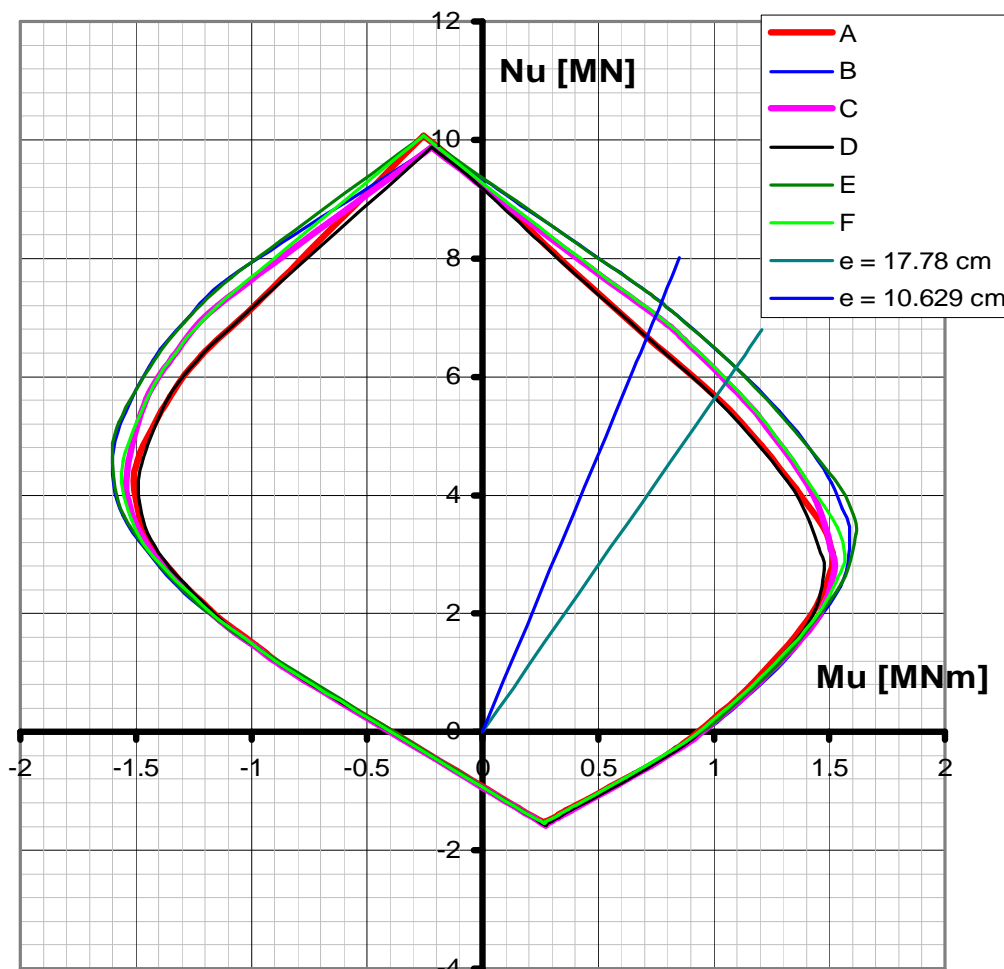
Slika 5.55. Dijagram interakcije ivične grede u preseku  $y=10\text{m}$  za radni dijagram betona prema EC 2 i RDA dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



Slika 5.56. Dijagram interakcije ivične grede u preseku  $y=10\text{m}$  za pun RDA radni dijagram betona i EC 2 dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



Slika 5.57. Dijagram interakcije ivične grede u preseku  $y=10\text{m}$  za RDA radni dijagram betona sa  $e_{bu}=-3.5\text{‰}$  i EC 2 dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



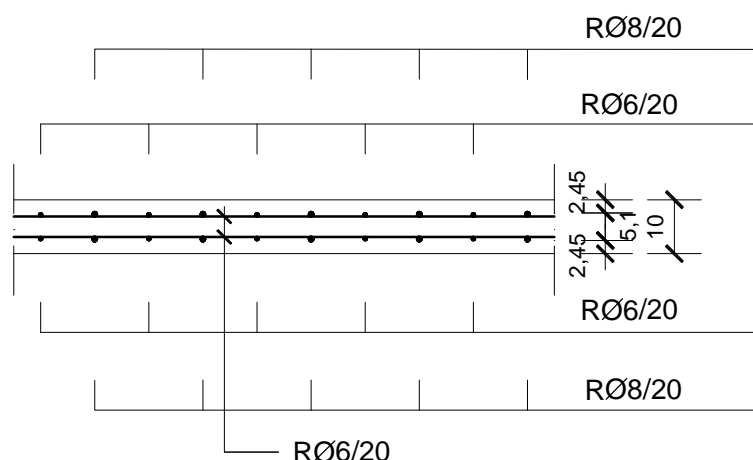
Slika 5.58. Upporedni prikaz dijagrama interakcije ivične grede u preseku  $y=10\text{m}$  za različite kombinacije radnih dijagrama betona i čelika

### 5.3.2. Presek ploče poliedarske ljske u čvornoj liniji 1

Ploče poliedarske ljske su simetrično armirane, pa je ukupna armatura raspoređena u dva reda, tako da je  $e_{a1}=e_{a2t}$  i  $e_{an}=e_{a2}$  (sl. 5.59). Usled eksploatacionog opterećenja, u težištu betonskog preseka ploče u čvornoj liniji 1 javljaju se normalna sila pritiska  $N_x=-43.785\text{kN/m}$  i moment savijanja  $M_x=7.61\text{kNm/m}$ , odnosno normalna sila  $N_x=-43.785\text{kN/m}$  sa ekscentricitetom  $e=17.379\text{cm}$  u odnosu na težište betonskog preseka. Najveće odstupanje sračunatih koeficijenata sigurnosti (tabela 5.3) od koeficijenata dobijenih prema EC 2 javlja se kod B kombinacije radnih dijagrama materijala, kod koje je ova razlika 7.6%. Najmanje odstupanje, od 2.4%, se uočava kod primene kombinacija dijagrama D i F (jedan materijal prema EC 2 a drugi prema RDA, sa  $e_{bu}=-3.5\text{‰}$ ).

Analizom dijagrama interakcije prikazanih na slikama 5.60 do 5.66 uočavamo da se najmanja odstupanja od interakcionog dijagrama prema EC 2 dobijaju primenom RDA radnog dijagrama čelika uz radni dijagram betona prema EC 2. Najveća odstupanja se uočavaju kod primene punog RDA dijagrama betona (kombinacije B i E) i to u oblasti ekscentričnog delovanja sile pritiska (između linija d i f). Tako se za normalnu silu pritiska sa ekscentricitetom  $e=0.801\text{cm}$  očitavaju vrednosti  $N_{xu}=3410\text{kN/m}$  - prema EC 2 i  $N_{xu}=3740\text{kN/m}$  - prema kombinaciji B. Dakle, primenom punog RDA radnog dijagrama betona i RDA dijagrama čelika dobija se granična nosivost preseka za 9.68% veća nego primenom radnih dijagrama oba materijala

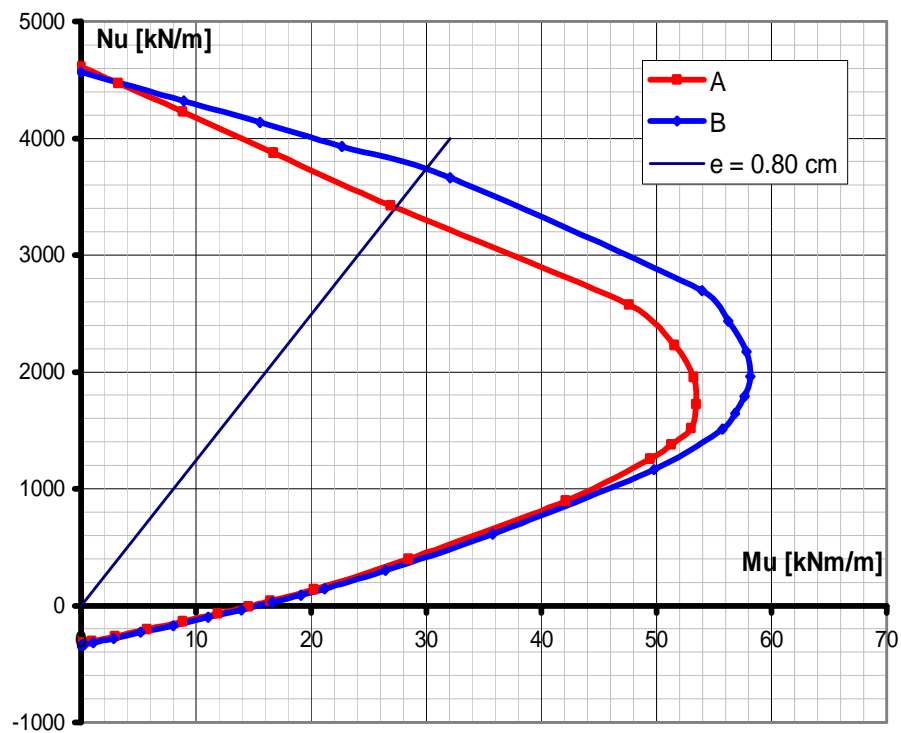
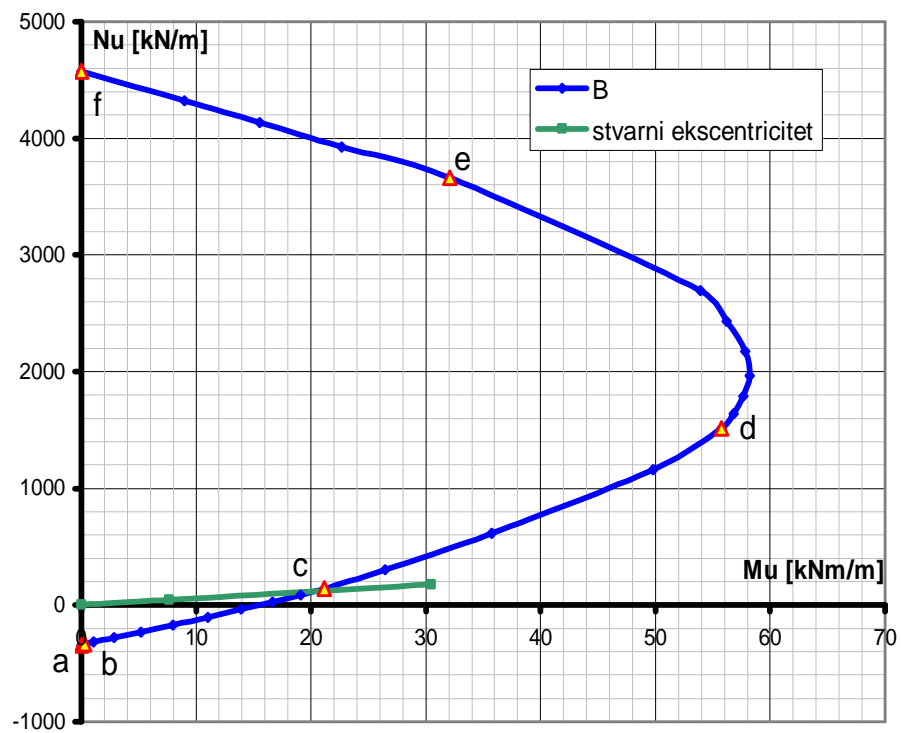
prema EC 2. Kod primene RDA radnog dijagrama betona sa  $e_{bu} = -3.5\text{‰}$  ova razlika se smanjuje na 6.32%. Kao i u slučaju ivične grede, i ovde se najbolja slaganja interakcionih dijagrama dobijaju u oblasti dilatacija između linija *a* i *d*, odnosno kod preseka izloženih centričnom ili ekscentričnom zatezanju u oblasti velikog ili srednjeg ekscentriciteta.



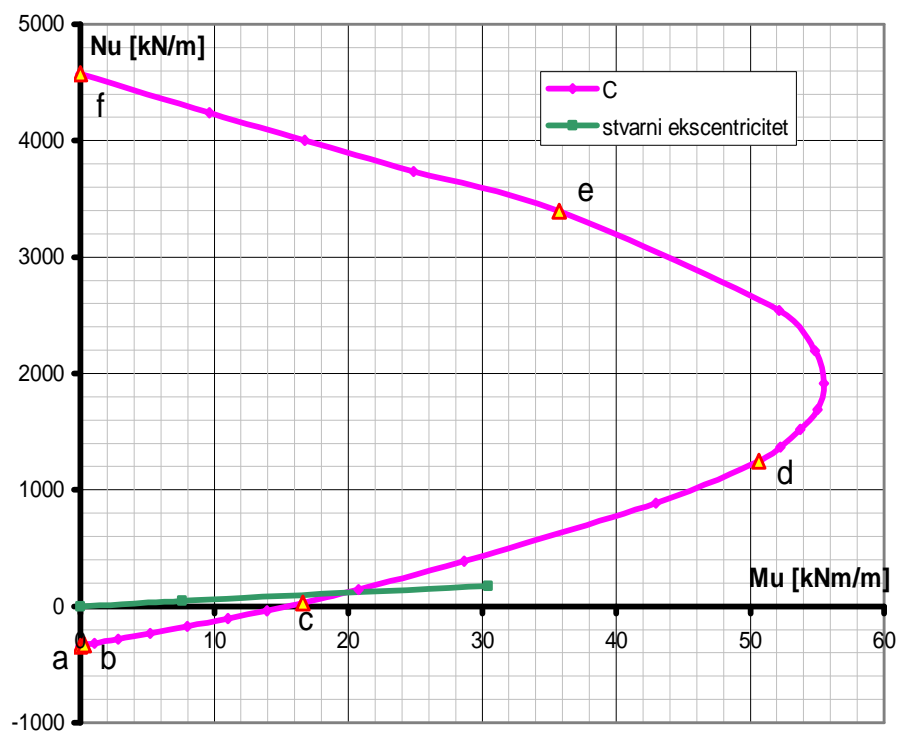
Slika 5.59. Presek ploče poliedarske ljske u čvornoj liniji 1 u sredini raspona

Tabela 5.3. Granična nosivost ploče poliedarske ljske u čvornoj liniji 1, u sredini raspona, za odabrane kombinacije radnih dijagrama betona i čelika

linija	$\epsilon_{a1}$ [%o]	$\epsilon_{a5}$ [%o]	$\epsilon_{b1}$ [%o]	$\epsilon_{b2}$ [%o]	Granični uticaji za kombinaciju radnih dijagrama betona i čelika											
					A		B		C		D		E		F	
					$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]
a	20	20			-326.33	0.00	-343.97	0.00	-343.97	0.00	-343.97	0.00	-326.33	0.00	-326.33	0.00
	20	15			-324.34	0.05	-339.36	0.12	-339.36	0.12	-339.36	0.12	-324.34	0.05	-324.34	0.05
	20	10			-322.35	0.10	-334.75	0.24	-334.75	0.24	-334.75	0.24	-322.35	0.10	-322.35	0.10
b	20			0	-320.95	0.14	-333.51	0.27	-333.51	0.27	-333.51	0.27	-320.95	0.14	-320.95	0.14
	20			-0.1	-320.23	0.17	-332.82	0.30	-332.82	0.30	-332.77	0.30	-320.28	0.17	-320.28	0.17
	20			-0.5	-304.81	0.93	-317.81	1.04	-317.81	1.04	-317.23	1.06	-305.39	0.90	-305.39	0.90
	20			-1	-262.92	2.96	-280.95	2.82	-280.95	2.82	-275.20	3.10	-268.68	2.68	-268.68	2.68
	20			-1.5	-204.22	5.75	-230.91	5.18	-230.91	5.18	-216.35	5.89	-218.77	5.04	-218.77	5.04
	20			-2	-137.03	8.86	-170.57	7.98	-170.57	7.98	-149.02	9.00	-158.58	7.83	-158.58	7.83
	20			-2.5	-69.14	11.91	-103.12	11.04	-103.12	11.04	-80.96	12.06	-91.30	10.89	-91.30	10.89
	20			-3	-7.89	14.54	-36.79	13.94	-36.79	13.94	-19.11	14.71	-25.57	13.78	-25.57	13.78
c	20			$\epsilon_{bu}$	39.81	16.44	139.99	21.19	26.74	16.63	29.18	16.62	149.50	20.98	37.37	16.45
	15			$\epsilon_{bu}$	139.69	20.22	299.53	26.44	143.14	20.76	146.23	20.70	283.35	25.71	136.60	20.27
	10			$\epsilon_{bu}$	398.46	28.44	611.55	35.76	387.21	28.62	391.45	28.44	616.06	35.69	394.22	28.62
	5			$\epsilon_{bu}$	895.44	42.14	1161.63	49.80	888.50	42.95	895.23	42.29	1164.91	49.73	888.72	42.79
d	3			$\epsilon_{bu}$	1252.95	49.42	1512.62	55.72	1243.71	50.66	1252.51	49.40	1540.14	56.43	1244.15	50.68
	2.5			$\epsilon_{bu}$	1374.21	51.27	1641.56	56.81	1369.45	52.25	1378.98	50.74	1651.28	57.71	1364.68	52.79
	2			$\epsilon_{bu}$	1515.18	53.00	1790.83	57.65	1517.88	53.73	1528.28	51.88	1779.63	58.82	1504.78	54.85
	1.5			$\epsilon_{bu}$	1720.58	53.45	1961.64	58.18	1691.77	55.02	1703.21	52.72	1968.31	58.63	1709.14	55.75
	1			$\epsilon_{bu}$	1957.05	53.23	2173.39	57.81	1913.06	55.54	1925.77	52.63	2184.47	57.89	1944.34	56.13
	0.5			$\epsilon_{bu}$	2231.00	51.58	2432.42	56.21	2192.49	54.83	2206.79	51.06	2436.43	56.21	2216.70	55.35
	0			$\epsilon_{bu}$	2572.05	47.59	2695.15	53.92	2538.58	52.20	2554.92	47.16	2736.26	52.88	2555.71	52.63
e			0	$\epsilon_{bu}$	3423.01	26.87	3663.26	32.06	3396.37	35.76	3418.02	26.57	3658.55	32.15	3401.37	36.06
			-0.5	$\epsilon_{b2,c}$	3877.72	16.70	3928.83	22.66	3735.14	24.89	3871.17	16.30	3927.45	22.70	3741.63	25.29
			-1.0	$\epsilon_{b2,c}$	4227.69	8.81	4136.76	15.53	4002.80	16.78	4209.29	8.57	4148.53	15.29	4021.15	17.01
			-1.5	$\epsilon_{b2,c}$	4470.65	3.24	4319.43	8.97	4241.38	9.64	4435.25	3.30	4350.74	8.62	4276.68	9.58
f	$\epsilon_{bc}$		$\epsilon_{bc}$	$\epsilon_{bc}$	4612.20	0.00	4571.16	0.00	4571.16	0.00	4570.71	0.00	4612.21	0.00	4612.21	0.00
za $e = 0.17379$ m					109.33	19	117.96	20.5	113.93	19.8	112.20	19.5	113.93	19.8	112.20	19.5
$\gamma_u$					2.5		2.69		2.60		2.56		2.60		2.56	

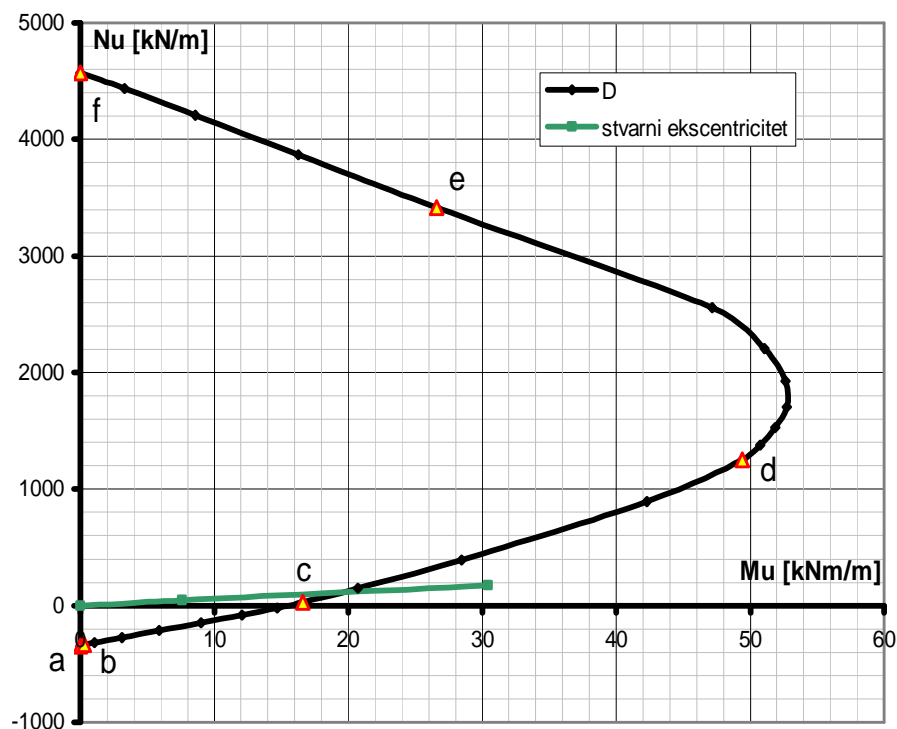


Slika 5.60. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuske u čvornoj liniji 1 u preseku  $y=10\text{m}$  za pun RDA radni dijagram betona i RDA dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)

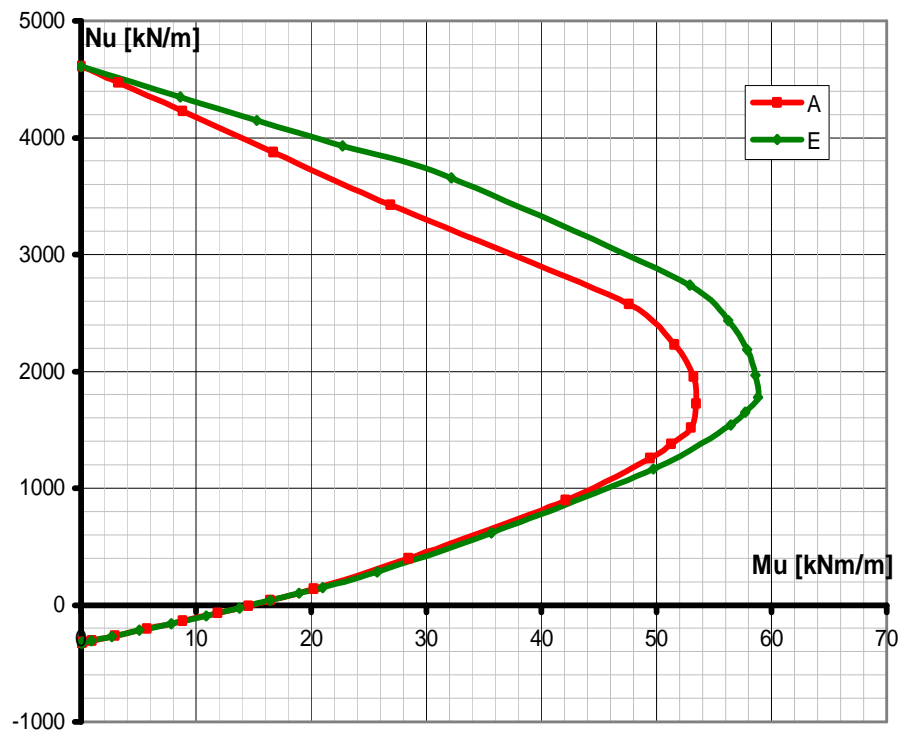
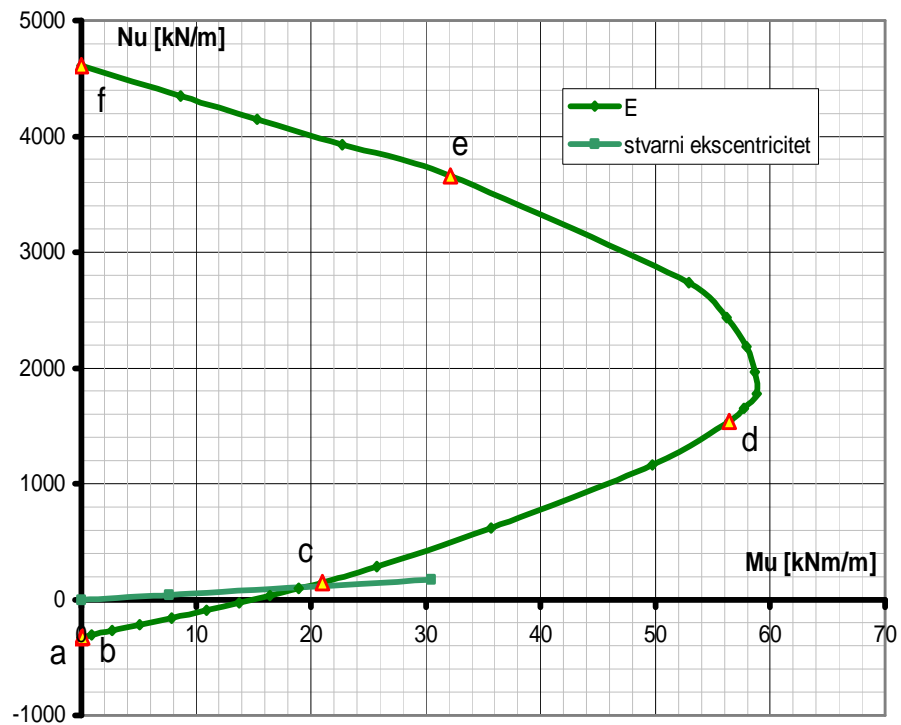


Slika 5.61. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuške u čvrnoj liniji 1 u preseku  $y=10\text{m}$  za RDA radni dijagram betona sa  $e_{bu}=-3.5\%$  i RDA dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)

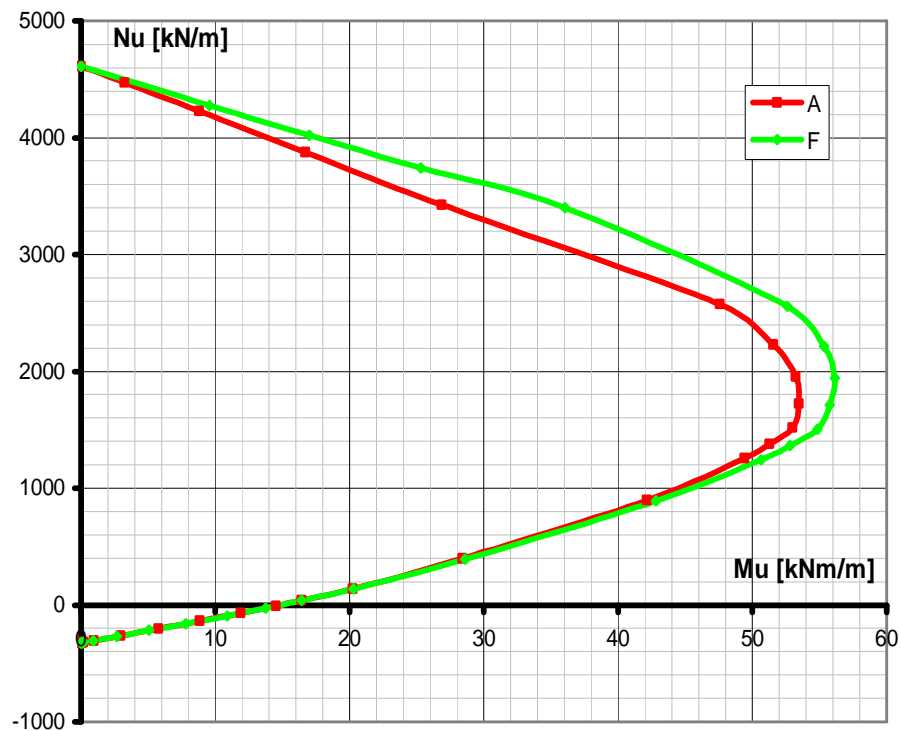
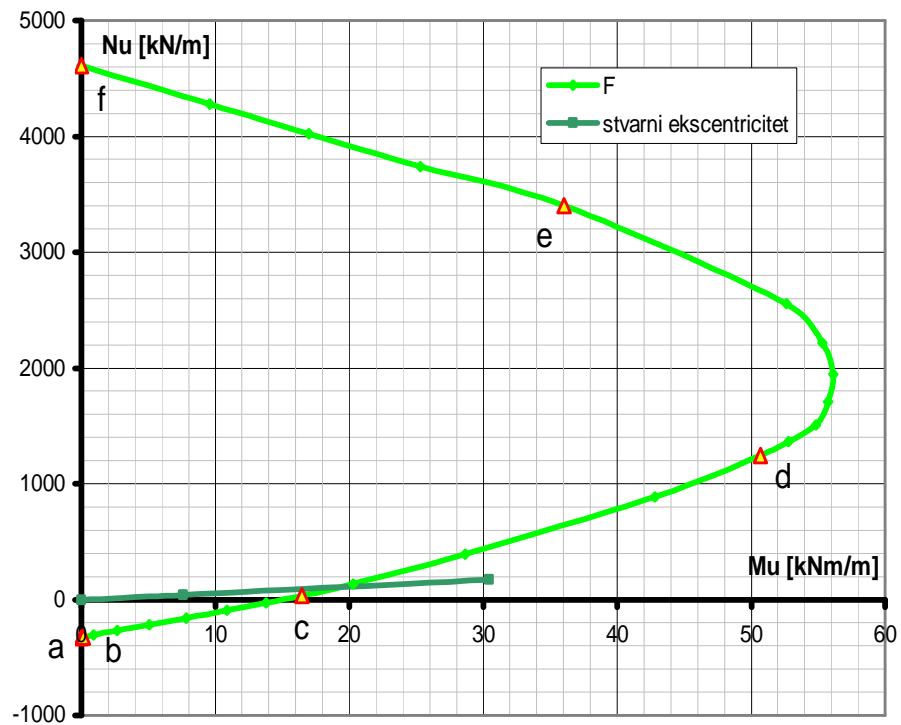




Slika 5.62. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljustke u čvornoj liniji 1 u preseku  $y=10\text{m}$  za radni dijagram betona prema EC 2 i RDA dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



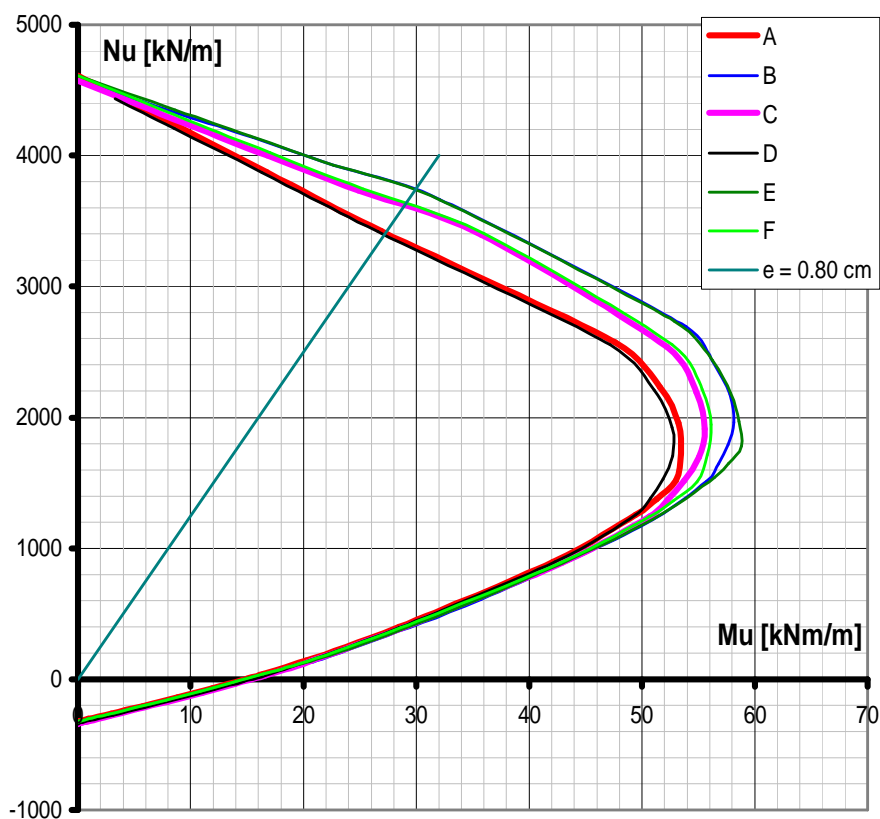
Slika 5.63. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuške u čvornoj liniji 1 u preseku  $y=10\text{m}$  za pun RDA radni dijagram betona i EC 2 dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



Slika 5.64. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuske u čvornoj liniji 1 u preseku  $y=10m$  za RDA radni dijagram betona sa  $e_{bu}=-3.5\%$  i EC 2 dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



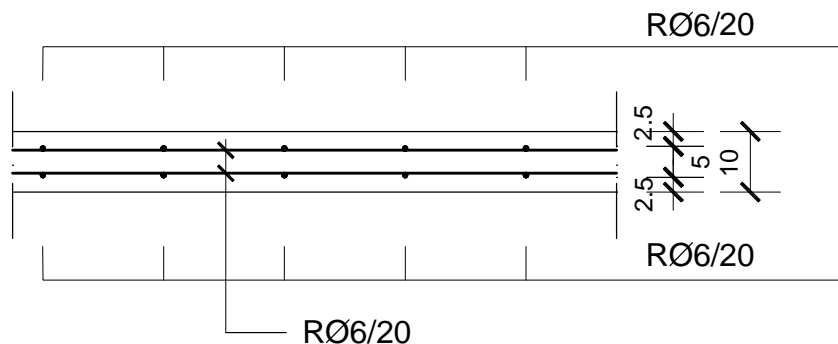
Slika 5.65. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuške u čvornoj liniji 1 u preseku  $y=10\text{m}$  za radne dijagrame betona i čelika prema EC 2



Slika 5.66. Uporedni prikaz dijagrama interakcije ploče poliedarske ljuške u čvornoj liniji 1 u preseku  $y=10\text{m}$  za različite kombinacije radnih dijagrama betona i čelika

**5.3.3. Presek ploče poliedarske ljske u čvornoj liniji 8**

Usled eksploatacionog opterećenja, u težištu betonskog preseka ploče u čvornoj liniji 8 (sl. 5.67) javljaju se normalna sila pritiska  $N_x = -15.298 \text{ kN/m}$  i moment savijanja  $M_x = 3.257 \text{ kNm/m}$ , odnosno normalna sila  $N_x = -15.298 \text{ kN/m}$  sa ekscentricitetom  $e = 21.292 \text{ cm}$  u odnosu na težište betonskog preseka. Sračunati koeficijenti sigurnosti u odnosu na lom analiziranog preseka su isti za sve kombinacije radnih dijagrama materijala i iznose  $\gamma_u = 2.3$ .

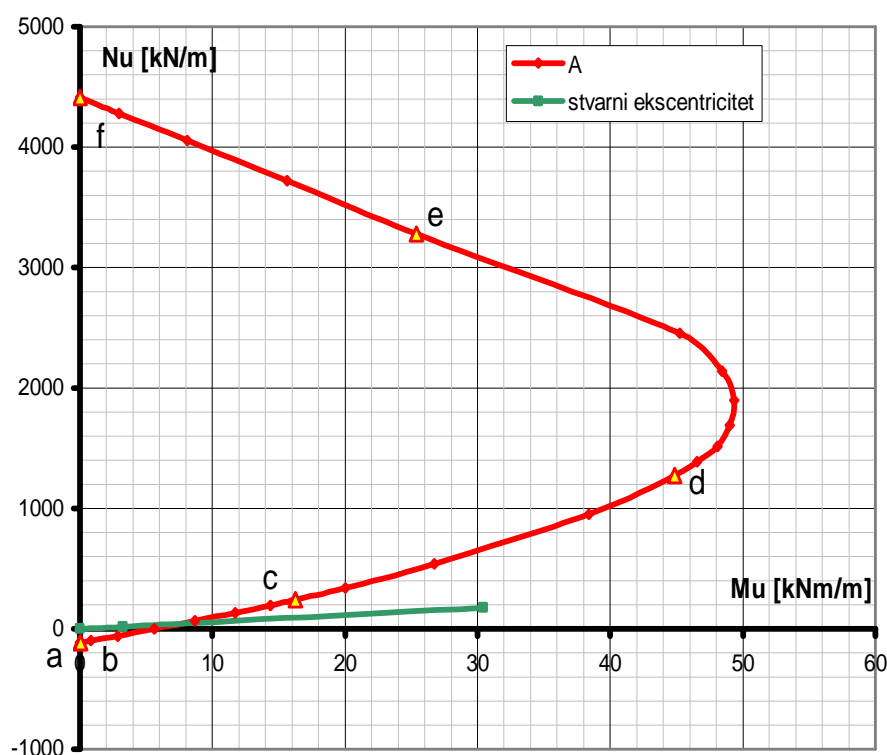


Slika 5.67. Presek ploče poliedarske ljske u čvornoj liniji 8 u sredini raspona

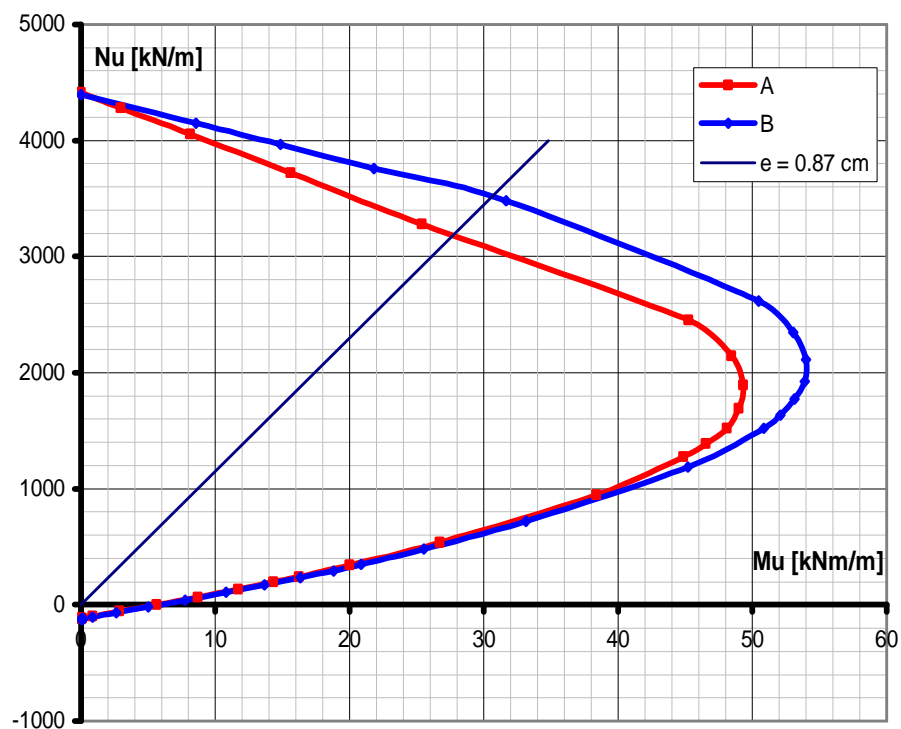
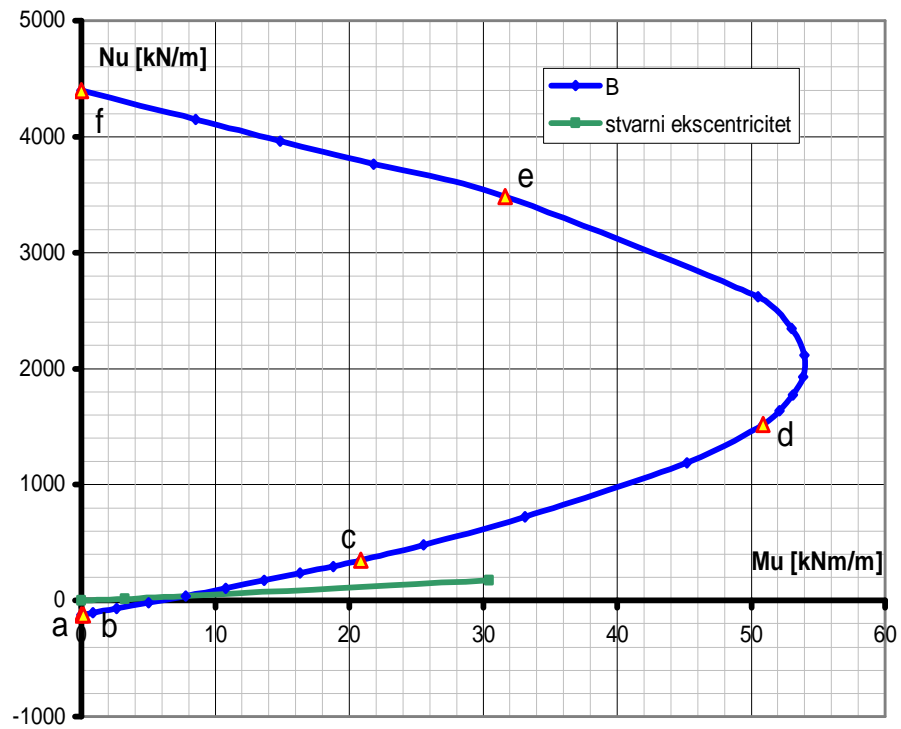
Tabela 5.4. Granična nosivost ploče poliedarske ljske u čvornoj liniji 8, u sredini raspona, za odabrane kombinacije radnih dijagrama betona i čelika

linija	$\epsilon_{a1}$ [%o]	$\epsilon_{a5}$ [%o]	$\epsilon_{b1}$ [%o]	$\epsilon_{b2}$ [%o]	Granični uticaji za kombinaciju radnih dijagrama betona i čelika											
					A		B		C		D		E		F	
					$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]	$N_u$ [kN/m]	$M_u$ [kNm/m]
a	20	20			-117.14	0.00	-125.66	0.00	-125.66	0.00	-125.66	0.00	-117.14	0.00	-117.14	0.00
	20	15			-116.43	0.02	-123.52	0.05	-123.52	0.05	-123.52	0.05	-116.43	0.02	-116.43	0.02
	20	10			-115.71	0.04	-121.38	0.11	-121.38	0.11	-121.38	0.11	-115.71	0.04	-115.71	0.04
b	20			0	-115.24	0.05	-120.87	0.12	-120.87	0.12	-120.87	0.12	-115.24	0.05	-115.24	0.05
	20			-0.1	-114.54	0.08	-120.21	0.15	-120.21	0.15	-120.16	0.15	-114.59	0.08	-114.59	0.08
	20			-0.5	-99.29	0.83	-105.44	0.88	-105.44	0.88	-104.86	0.91	-99.86	0.81	-99.86	0.81
	20			-1	-57.76	2.85	-69.01	2.64	-69.01	2.64	-63.29	2.92	-63.48	2.57	-63.48	2.57
	20			-1.5	0.46	5.61	-19.47	4.99	-19.47	4.99	-5.01	5.69	-14.00	4.91	-14.00	4.91
	20			-2	67.12	8.70	40.29	7.76	40.29	7.76	61.70	8.78	45.72	7.69	45.72	7.69
	20			-2.5	134.47	11.73	107.09	10.80	107.09	10.80	129.10	11.81	112.46	10.72	112.46	10.72
	20			-3	195.23	14.35	172.42	13.67	172.42	13.67	189.99	14.43	177.67	13.59	177.67	13.59
	20			$\epsilon_{bu}$	242.53	16.24	346.69	20.85	235.07	16.33	237.49	16.33	351.33	20.75	240.11	16.25
c	15			$\epsilon_{bu}$	340.08	20.02	479.18	25.53	336.90	20.21	339.97	20.16	472.14	25.21	337.01	20.07
	10			$\epsilon_{bu}$	537.05	26.72	719.42	33.14	530.04	26.90	534.24	26.72	721.34	33.12	532.85	26.90
	5			$\epsilon_{bu}$	950.43	38.37	1186.42	45.18	943.57	39.07	950.25	38.42	1186.23	45.12	943.75	39.02
d	3			$\epsilon_{bu}$	1273.45	44.87	1519.55	50.87	1265.50	46.12	1274.24	44.88	1529.18	51.11	1264.71	46.10
	2.5			$\epsilon_{bu}$	1385.87	46.53	1636.23	52.10	1378.99	47.86	1388.46	46.37	1640.42	52.44	1376.40	48.02
	2			$\epsilon_{bu}$	1517.88	48.08	1771.12	53.15	1513.05	49.53	1523.38	47.71	1767.75	53.58	1507.55	49.91
	1.5			$\epsilon_{bu}$	1689.27	49.01	1927.41	53.90	1672.40	51.03	1683.76	48.77	1930.40	54.07	1677.90	51.27
	1			$\epsilon_{bu}$	1894.59	49.35	2115.82	53.99	1870.29	52.00	1882.91	49.13	2120.34	54.03	1881.97	52.22
	0.5			$\epsilon_{bu}$	2141.94	48.43	2343.92	53.05	2118.65	51.95	2132.85	48.24	2345.85	53.07	2127.74	52.15
	0			$\epsilon_{bu}$	2455.95	45.23	2618.83	50.50	2433.22	50.04	2449.45	45.07	2618.92	50.50	2439.72	50.20
e			0	$\epsilon_{bu}$	3280.46	25.38	3482.77	31.66	3256.85	34.46	3278.49	25.27	3481.10	31.69	3258.82	34.57
			-0.5	$\epsilon_{b2,c}$	3719.61	15.61	3760.44	21.83	3511.57	25.79	3717.12	15.47	3760.24	21.84	3583.49	24.20
			-1.0	$\epsilon_{b2,c}$	4054.02	8.12	3963.76	14.86	3840.56	16.24	4047.15	8.04	3968.32	14.77	3847.42	16.32
f			-1.5	$\epsilon_{b2,c}$	4281.42	2.96	4146.07	8.56	4074.53	9.32	4268.55	2.98	4157.52	8.44	4087.37	9.30
			$\epsilon_{bc}$	$\epsilon_{bc}$	4412.07	0.00	4397.34	0.00	4397.34	0.00	4397.18	0.00	4412.07	0.00	4412.07	0.00
	za $e = 0.21292 \text{ m}$					35.22	7.5	35.22	7.5	35.22	7.5	35.22	7.5	35.22	7.5	35.22
$\gamma_u$					2.3		2.3		2.3		2.3		2.3		2.3	

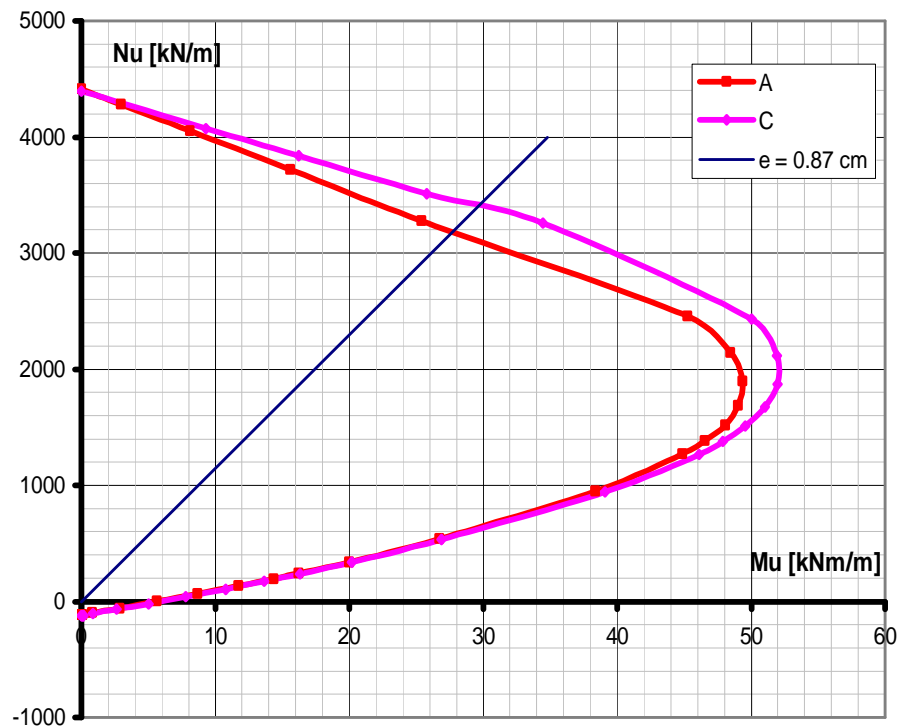
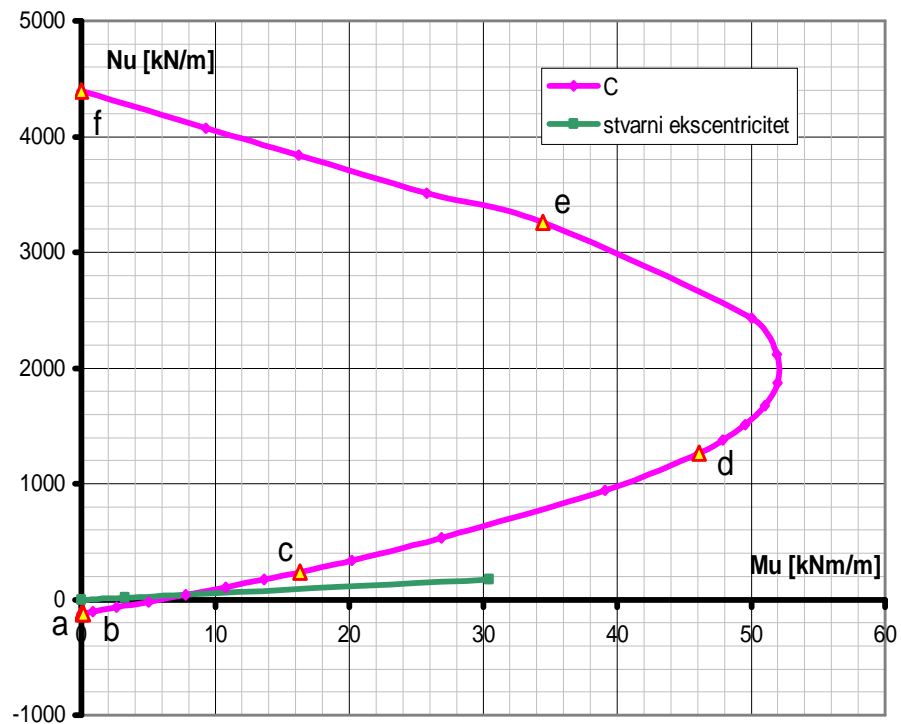
Analizom dijagrama interakcije prikazanih na slikama 5.68 do 5.74 uočavamo da se najmanja odstupanja od interakcionog dijagrama prema EC 2 dobijaju primenom RDA radnog dijagrama čelika uz radni dijagram betona prema EC 2. Najveća odstupanja se uočavaju kod primene punog RDA dijagrama betona (kombinacije B i E) i to u oblasti ekscentričnog delovanja sile pritiska (između linija *d* i *f*). Tako se za normalnu silu pritiska sa ekscentricitetom  $e=0.87\text{cm}$  očitavaju vrednosti  $N_{xu}=3190\text{kN/m}$  - prema EC 2 i  $N_{xu}=3520\text{kN/m}$  - prema kombinaciji B. Dakle, primenom punog RDA radnog dijagrama betona i RDA dijagrama čelika dobija se granična nosivost preseka za 10.34% veća nego primenom radnih dijagrama oba materijala prema EC 2. Kod primene RDA radnog dijagrama betona sa  $e_{bu}=-3.5\%$  ova razlika se smanjuje na 6.9%. Kao i u ostalim preseccima, i ovde se najbolja slaganja interakcionih dijagrama dobijaju u oblasti dilatacija između linija *a* i *d*, odnosno kod preseka izloženih centričnom ili ekscentričnom zatezanju u oblasti velikog ili srednjeg ekscentriciteta.



Slika 5.68. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuske u čvornoj liniji 8 u preseku  $y=10\text{ m}$  za radne dijagrame betona i čelika prema EC 2

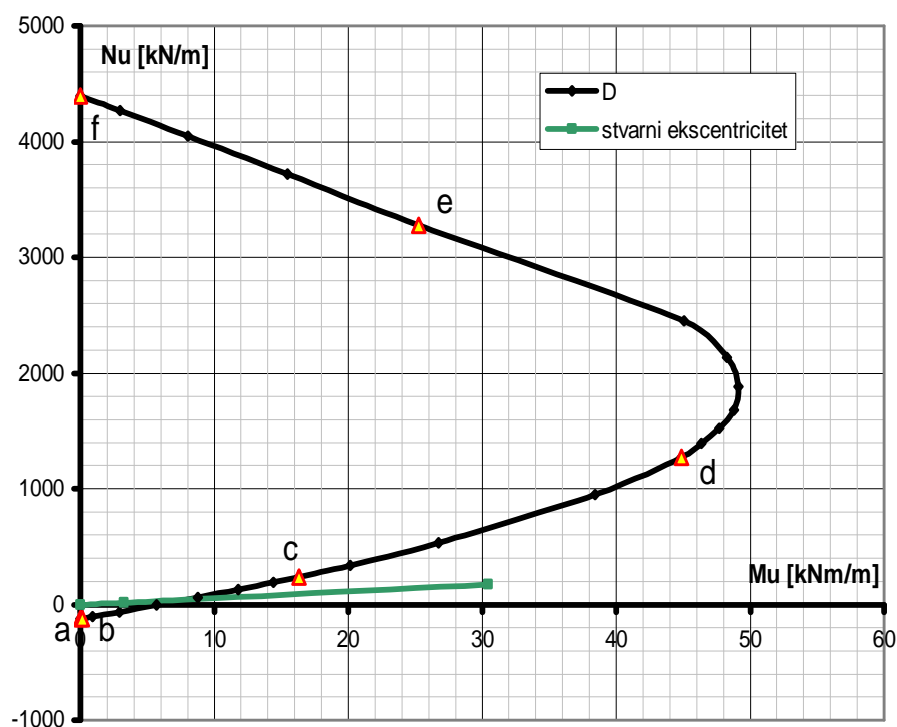


Slika 5.69. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuške u čvornoj liniji 8 u preseku  $y=10\text{m}$  za pun RDA radni dijagram betona i RDA dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)

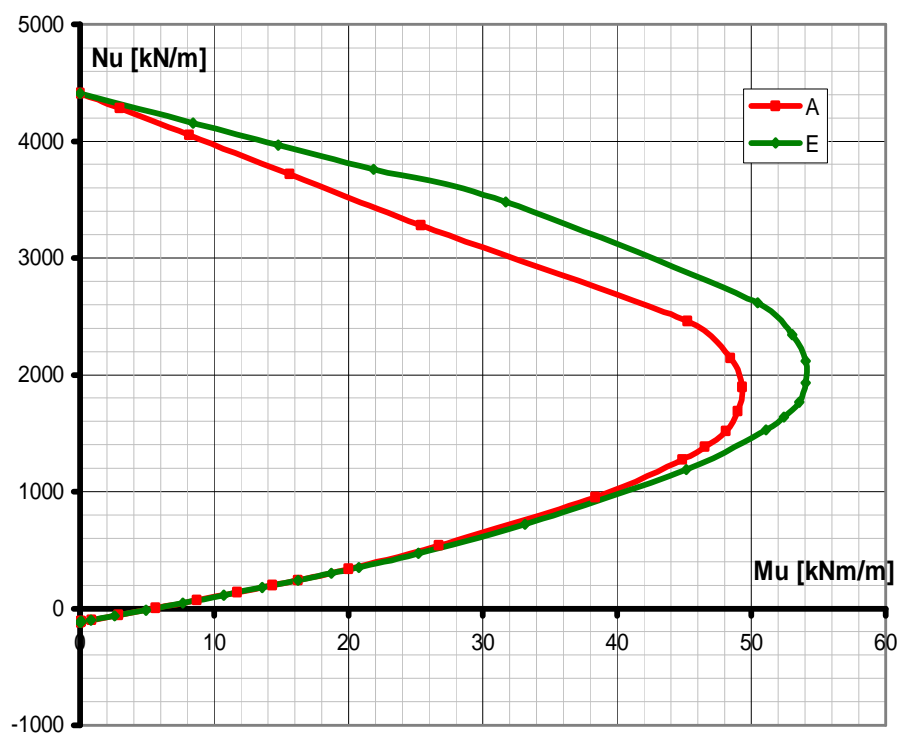
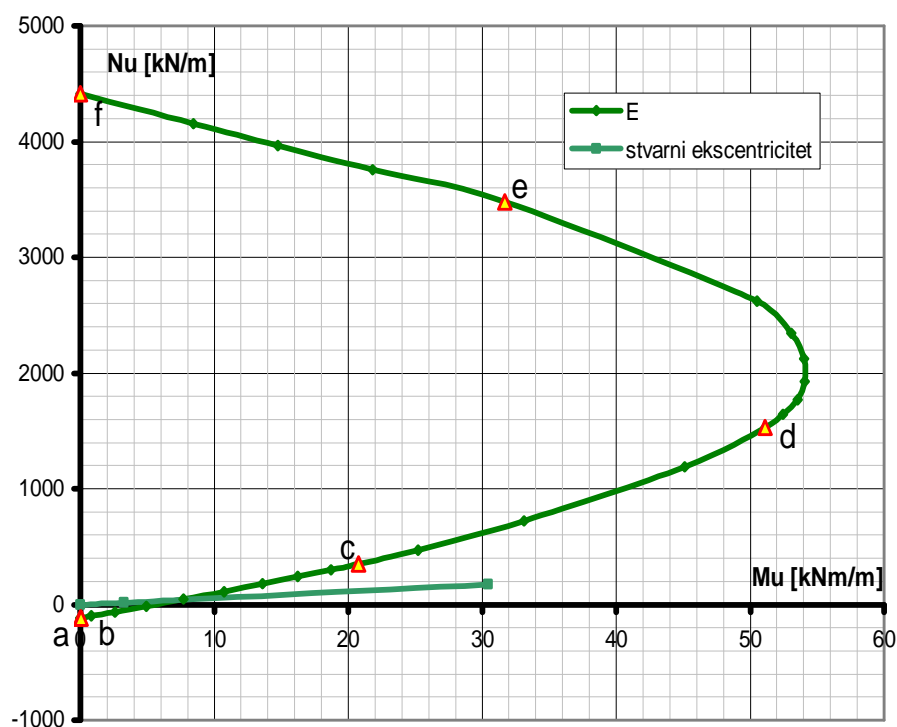


Slika 5.70. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuske u čvornoj liniji 8 u preseku  $y=10\text{m}$  za RDA radni dijagram betona sa  $e_{br}=-3.5\%$  i RDA dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)

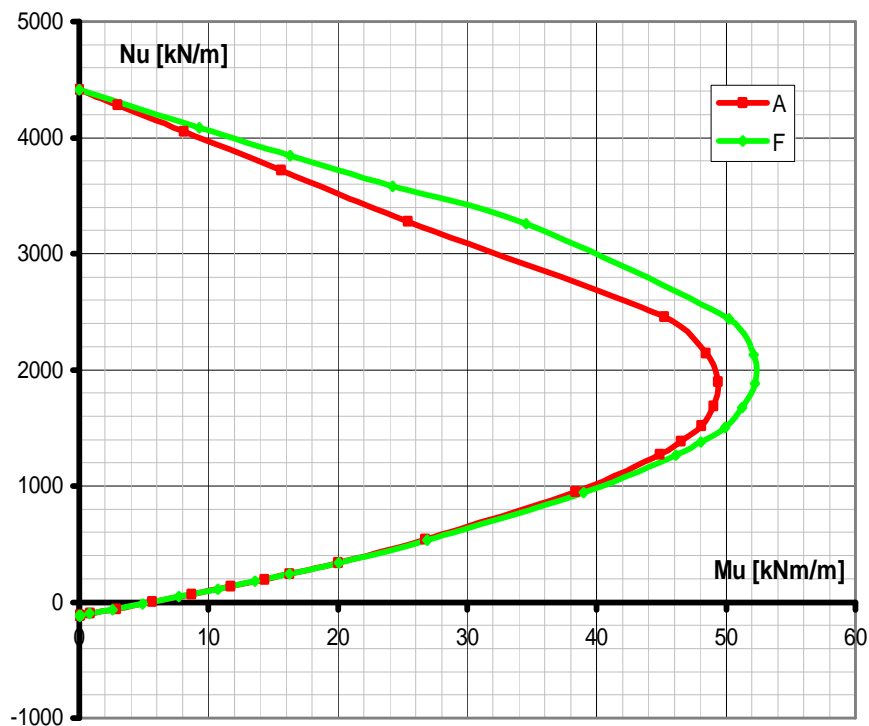
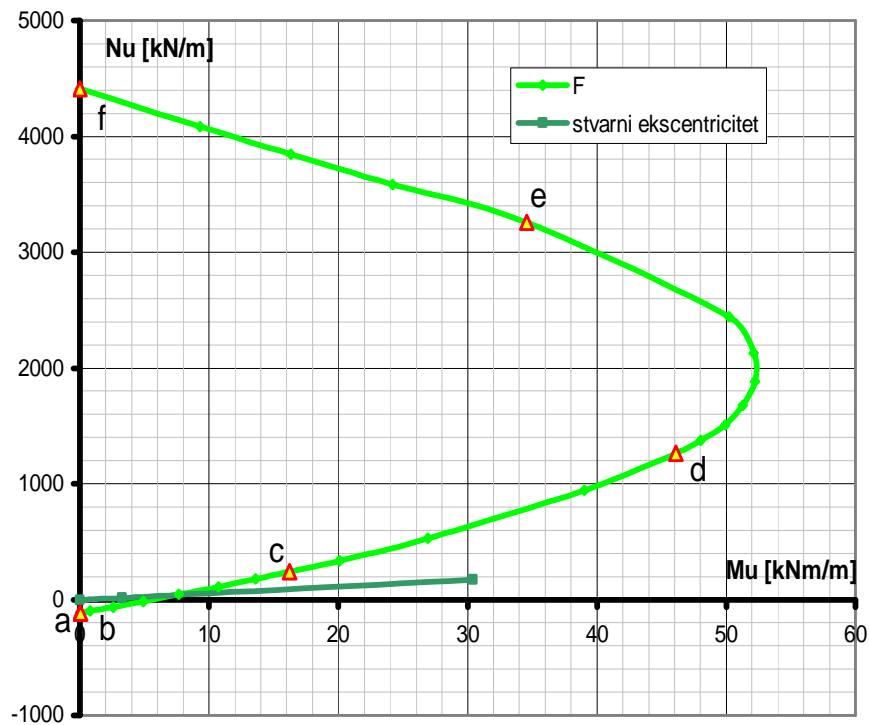




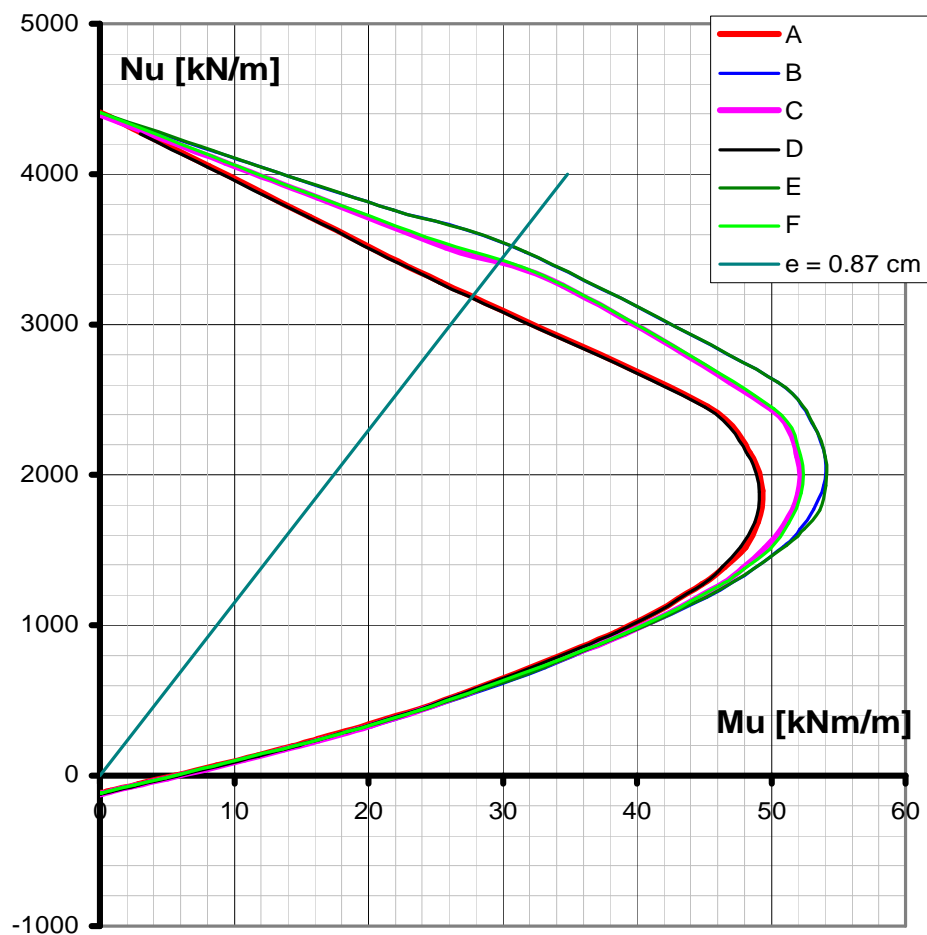
Slika 5.71. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuške u čvrnoj liniji 8 u preseku  $y=10\text{m}$  za radni dijagram betona prema EC 2 i RDA dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



Slika 5.72. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuške u čvrnoj liniji 8 u preseku  $y=10m$  za pun RDA radni dijagram betona i EC 2 dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



Slika 5.73. Dijagram interakcije ploče poliedarske ljuške u čvornoj liniji 8 u preseku  $y=10\text{m}$  za RDA radni dijagram betona sa  $e_{bu}=-3.5\text{‰}$  i EC 2 dijagram čelika (slika gore) i njegov uporedni prikaz sa dijagramom prema EC 2 (slika dole)



Slika 5.74. Uporedni prikaz dijagrama interakcije ploče poliedarske ljuške u čvornoj liniji 8 u preseku  $y=10$ m za različite kombinacije radnih dijagrama betona i čelika

## 6. ZAKLJUČAK

U ovom radu je izvršena teorijska i numerička analiza armiranobetonskih poliedarskih ljuski. Beton i armatura su tretirani kao viskoelastoplastičan materijal, a poseban naglasak je dat na istraživanje graničnih čvrstoća i deformacija ovih materijala. Krajnji cilj je bio teorijsko istraživanje graničnih čvrstoća armiranog betona kao kompozita uz poređenje sa podacima drugih autora dobijenim u okviru eksperimentalnih istraživanja na Građevinskom fakultetu u Subotici. Ovaj deo, kao i poređenje sa klasičnim pristupima tretiranja ovog materijala u poliedarskim strukturama je ključno pitanje armiranog betona kod koga se objašnjenje graničnog stanja može postići jedino uz logično objašnjenje teorijskih i eksperimentalnih rezultata.

Klasični postupci proračuna poliedarskih ljuski upoređeni su sa savremenijim, numeričkim postupcima - metodom konačnih traka i metodom konačnih elemenata. Detaljno je opisan i primenjen metod konačnih traka, koji je po načinu diskretizacije i numeričkim šemama koje iz toga slede najefikasniji za rešavanje kako kratkih tako i dugih poliedarskih ljuski u slučaju malih i velikih pomeranja.

U radu je prikazan reološki model viskoelastoplastičnog materijala, kao i reološko-dinamička analogija (RDA), sa objašnjenjem njene primene na predviđanje ponašanja građevinskih materijala i konstruktivnih elemenata usled različitih naprezanja. Autorka na osnovu poznatih parametara materijala ustanovljenih na prototipu i osnovnih mehaničkih parametara analiziranih čeličnih šipki, koji se standardno ispituju, teorijskim putem dobija dijagrame napon-dilatacija za armaturu. Autorka razmatra uticaj broja iteracija u viskoelastoplastičnoj oblasti na oblik radnog dijagrama armature, te daje preporuku za usvajanje broja iteracija za armature GA 240/360 i RA 400/500.

RDA postupak za određivanje kritičnog napona stubova srednje vitkosti u ovom radu je unapređen, čime je omogućena njegova primena i na stubove male vitkosti, u koje mogu da se ubroje i standardni uzorci za ispitivanje čvrstoće betona na pritisak. Autorka uočava da je domen primene RDA postupka na određivanje graničnog (kritičnog) napona aksijalno pritisnutih betonskih stubova ograničen ne samo sa gornje strane (vitkošću na granici između Euler-ove i RDA krive izvijanja, odnosno na granici između elastične i viskoelastoplastične oblasti), nego i sa donje strane, vitkošću koja odgovara preseku RDA krive izvijanja i horizontalnog pravca koji predstavlja pritisnu čvrstoću materijala. Autorka izvodi zaključak da dijagram napon-dilatacija određen RDA postupkom za ovu, donju granicu vitkosti, važi i za sve vitkosti manje od ove granične, zbog čega se dijagrami napon-dilatacija jednoaksijalno pritisnutog betona različitih čvrstoća mogu dobiti primenom RDA postupka na standardne uzorke za ispitivanje pritisne čvrstoće betona. Autorka u nastavku primenjuje RDA postupak i na teorijsko određivanje radnih dijagrama betona različitih klasa iz minimalnog broja mehaničkih parametara materijala, koji se dobijaju standardnim postupcima ispitivanja.

Ovako dobijeni teorijski RDA radni dijagrami armature i betona su upoređeni sa rezultatima drugih autora dobijenim u okviru njihovih eksperimentalnih istraživanja, te je konstatovana njihova zadovoljavajuća tačnost. Dijagrami su upoređeni i sa radnim dijagramima datim u trenutno važećim tehničkim propisima za beton i armirani beton, koji predstavljaju *idealizaciju* stvarnog ponašanja materijala, te je utvrđena njihova velika sličnost.

Za dalju verifikaciju teorijskih reološko-dinamičkih radnih dijagrama armature i betona, kao ilustrativni primer je detaljno obrađena jedna realno izvodljiva armiranobetonska poliedarska ljuska raspona 20m, na koju deluje opterećenje od snega. Oblik poprečnog preseka i raspon ljuske odabrani su na osnovu prethodno sprovedene linearno elastične analize poliedarskih ljuski različitog raspona i oblika poprečnog preseka. Za sračunate presečne uticaje izvršeno je dimenzionisanje karakterističnih preseka ljuske prema PBAB'87. Granična nosivost tri karakteristična preseka poliedarske ljuske određena je primenom radnih dijagrama betona i čelika prema Evrokodu 2 (nelinearni dijagram betona i bilinearni dijagram čelika sa gornjom granom u nagibu), te primenom reološko-dinamičkih radnih dijagrama betona i čelika.

Konstruisani su dijagrami interakcije  $N_u - M_u$  za više kombinacija radnih dijagrama materijala prema Evrokodu 2 i reološko-dinamičkoj analogiji i izvršeno njihovo poređenje.

Na osnovu sprovedenog istraživanja i prikazanih rezultata autorka izvodi sledeće zaključke i smernice za buduća istraživanja:

1. Na osnovu izvršene analize armiranobetonske poliedarske ljuske raspona 30m, širine 11.28m, koja je bila predmet analize De Fries-Skene-a i Scordelis-a [15] i Cheung-a [13], primenom metoda predloženog od strane Komisije za gradnju nabranih ploča, koja je formirana pri ASCE, 1963. godine, te programom MKTE1 (primenom metoda konačnih traka), kao i programom Tower 6, zasnovanom na metodu konačnih elemenata, poređenjem dobijenih veličina podužnih normalnih napona u sredini raspona ljuske može se uočiti veoma dobro slaganje rezultata dobijenih primenom metoda predloženog od strane Komisije, metoda konačnih traka (MKTE1) i metoda konačnih elemenata (Tower 6). Najveća razlika rezultata dobijenih po ove tri metode uočava se na slobodnoj ivici ivične grede (čvorna linija 0) i ona ovde iznosi oko 10%, s tim što su rezultati po MKTE1 i Tower 6 gotovo identični. Veće razlike dobijenih rezultata se uočavaju kod poprečnih momenata savijanja u sredini raspona ljuske. MKTE1 daje nešto veće pozitivne i nešto manje negativne momente nego Tower 6, ali su ove razlike manje od 5%. Poprečni moment savijanja u sredini raspona prve nagnute ploče je po metodu predloženom od strane Komisije za oko 50% manji od vrednosti dobijenih prema MKTE1 i Tower 6. U drugoj nagnutoj ploči ova odstupanja su znatno manja i ne prelaze 20%. Ovako velike razlike u veličini poprečnog momenta savijanja su posledica zanemarenja torziona krutosti ivične grede u klasičnoj teoriji (prema predlogu Komisije), zbog čega je poprečni moment savijanja u čvornoj liniji koja spaja ivičnu gredu i prvu nagnutu ploču jednak nuli. Iz analize dijagrama poprečnog momenta savijanja, koja je u poglavlju 5 sprovedena za različite raspone ljuske, može se zaključiti da se njegova veličina u čvornoj liniji između ivične grede i prve nagnute ploče neznatno povećava sa povećanjem raspona ljuske, pa se i njegov uticaj na veličinu momenta savijanja u ostalim (unutrašnjim) tačkama poprečnog preseka ljuske smanjuje sa povećanjem raspona. Zbog toga se razlika u veličini poprečnih momenata savijanja u unutrašnjim tačkama poprečnog preseka, dobijenim prema predlogu Komisije i primenom numeričkih metoda, smanjuje sa povećanjem raspona ljuske.

2. Primenom RDA postupka konstruisani su radni dijagrami čelika GA 240/360 i RA 400/500, za različite prečnike šipki. Autorka uočava da vrednosti napona i dilatacija, sračunatih primenom RDA postupka, u VEP oblasti ne zavise od prečnika šipke. Prečnik šipke postaje bitan tek nakon ulaska u VP područje, kada dolazi do primetne redukcije površine poprečnog preseka. Oblik radnog dijagrama čelika zavisi od usvojenog broja iteracija u viskoelastoplastičnoj oblasti. Poređenjem RDA radnih dijagrama čelika sa eksperimentalnim rezultatima iz dostupne literature, kao i sa idealizovanim radnim dijagramom čelika prema EC 2, možemo zaključiti da se primenom RDA postupka dobijaju radni dijagrami betonskog čelika GA 240/360 i RA 400/500 koji se vrlo dobro poklapaju sa dijagramima napon-dilatacija dobijenim eksperimentalnim putem, kao i sa računskim dijagramima prema važećim standardima. Broj VEP iteracija za konstruisanje radnog dijagrama GA 240/360 treba da se bira između  $i=13$  i  $i=15$ , dok se za RA 400/500 zadovoljavajući oblik dijagrama postiže sa manjim brojem VEP iteracija, od  $i=2$  do  $i=5$ . Kako kod RA 400/500 donja granica razvlačenja nije izražena, to se i pri konstruisanju radnog dijagrama čelika primenom RDA ova granica može izostaviti.

3. Veza napon-dilatacija pritisnutih betonskih stubova takođe može da se izvede primenom RDA postupka. Postupak je prezentovan u ovom radu a prikazana je i njegova eksperimentalna verifikacija na kratkim stubovima i stubovima srednje vitkosti.

Može se zaključiti da se primenom RDA postupka na aksijalno opterećene betonske stubove srednje vitkosti dobija dijagram napon-dilatacija koji se vrlo dobro poklapa sa eksperimentalnim vrednostima. Uočava se nešto veća "ispupčenost" RDA dijagrama u početnom delu dijagrama u odnosu na eksperimentalne vrednosti.

4. Primena RDA postupka za određivanje graničnog (kritičnog) napona vitkih betonskih stubova je ograničena na određeni opseg vitkosti. Gornja granica vitkosti  $I_E$  predstavlja vitkost pri kojoj se seku Euler-ova i RDA kriva izvijanja. Autorka zapaža da postoji i donja granica vitkosti stuba  $I_D$ , na koju se još može primeniti RDA postupak za predviđanje kritičnog napona. To je vitkost ispod koje se kritični napon ne dostiže usled izvijanja, već on postaje jednak pritisnoj čvrstoći  $f_{cm}$ , odnosno granici gnječenja materijala  $s_V$ . Ova vitkost zavisi od geometrije poprečnog preseka, čvrstoće betona na pritisak i Poisson-ovog koeficijenta. Donja granica vitkosti se očitava sa dijagrama napon-vitkost, kao presečna tačka korigovane RDA krive izvijanja i prave koja predstavlja pritisnu čvrstoću materijala. Za vitkost koja predstavlja donju granicu primenljivosti RDA postupka, kritični napon usled izvijanja je jednak čvrstoći betona na pritisak, pa dijagram napon-dilatacija, koji se dobija RDA postupkom za ovu, graničnu vitkost, važi i za sve vitkosti manje od  $I_D$ . Zbog ovoga se radni dijagrami betona različitih čvrstoća mogu dobiti ako se RDA postupak primeni na standardne uzorke za ispitivanje pritisne čvrstoće betona (cilindre i kocke). Za eksperimentalnu verifikaciju postupka upotrebljeni su rezultati ispitivanja pritisne čvrstoće betonskih kocki, sprovedenog u okviru izrade doktorske disertacije dr Kukaras, D. Radni dijagram betona dobijen primenom RDA postupka na ispitanim uzorcima upoređen je sa dijagramom napon-dilatacija koji je predložen u Evrokodu 2 za nelinearnu analizu i konstatovano je njihovo izuzetno dobro slaganje. Primenjeni RDA postupak nije u mogućnosti da opiše opadajuću granu dijagrama napon-dilatacija (ova grana inače i nije eksperimentalno potvrđena ni u jednom od pomenutih eksperimenata), ako se ne uvede pojam sekantnog modula prema mehanici oštećenja. Opadajuća grana predstavlja paradoks kod dijagrama napon-deformacija u pritisku, koju teorijska mehanika oštećenja predviđa, a eksperimentalni rezultati ne potvrđuju. Ovo uzrokuje i najveću razliku između upoređenih dijagrama prema RDA i EC 2. Takođe se uočava nešto veća "ispruženost" RDA dijagrama između granice elastičnosti i najvećeg dostignutog napona, koja je ipak mnogo bliža eksperimentalnim podacima nego što predviđa EC 2.

5. Primenom RDA postupka za kratke stubove na uzorke za ispitivanje pritisne čvrstoće betona može se konstruisati dijagram napon-dilatacija za bilo koju klasu čvrstoće betona, ako su poznati: modul elastičnosti  $E_{cm}$ , srednja vrednost čvrstoće na pritisak  $f_{cm}$ , zapreminska težina  $g$  i Poisson-ov koeficijent  $n$ . Ovi parametri se određuju eksperimentalnim putem na prethodno spravljanim uzorcima.

6. U nedostatku tačnijih podataka, za potrebe konstruisanja radnog dijagrama različitih klasa čvrstoće betona, može se primeniti RDA postupak u kojem se Poisson-ov koeficijent za određenu klasu čvrstoće betona određuje iz uslova da dilatacije pri maksimalnom naponu, dobijene RDA postupkom, budu jednake vrednostima datim u tabeli 3.1 Evrokoda 2. Postupak je primenjen na uzorke za ispitivanje pritisne čvrstoće betona u skladu sa EN 206-1, koji su oblika cilindra prečnika 15cm i visine 30cm. Dobijeni Poisson-ov koeficijent, za analizirane klase čvrstoće, nalazi se u granicama od 0.1454 do 0.2092 i raste sa porastom čvrstoće betona. Ovo se sasvim dobro poklapa sa podacima iz dostupne literature. Dobijene krajnje dilatacije prema RDA su iznad 4%, što je dosta iznad graničnih dilatacija prema EC 2, i rastu sa porastom pritisne čvrstoće uzorka. Kako je ova granica i eksperimentalno diskutabilna, za praktičnu primenu RDA radnih dijagrama betona možemo ograničiti maksimalne dilatacije pri lomu na 3.5%.

7. U cilju dalje verifikacije RDA postupka izvršena je analiza armiranobetonske poliedarske ljske prikazane u poglavlju 5. Sile u presecima ljske određene su računarskim programom MKTE1. Iako to nije prikazano u samom radu, izvršena je i uporedna analiza primenom računarskog programa Tower 6, koja je dala gotovo istovetne rezultate. Na osnovu poređenja oblika dijagrama presečnih sila i pomeranja dobijenih linearno elastičnom analizom poliedarskih ljski različitog raspona, zaključuje se da se granica između "kratkih" i "dugih" ljski, za izabrani poprečni presek, nalazi između raspona  $L=10\text{m}$  i  $L=20\text{m}$ . Kako se kod ivične grede mogu javiti značajni momenti torzije (kako kod kratkih tako i kod dugih ljski), koji mogu postati merodavni prilikom dimenzionisanja armiranobetonskog preseka grede, za dalju analizu je odabrana ljska raspona  $L=20\text{m}$ , kod koje ovi momenti imaju minimalnu vrednost. Aktuelna istraživanja, u kojima učestvuje i sama autorka, ukazuju na to da je pretpostavka o malim pomeranjima u analizi poliedarske ljske izabranog poprečnog preseka u potpunosti opravdana za raspone do  $L=15\text{m}$ , dok se uz ovu pretpostavku za ljske raspona većeg od  $L=25\text{m}$  čini osetna greška, te se kod njih proračun mora vršiti pod pretpostavkom geometrijske nelinearnosti. Dosadašnja istraživanja pokazuju da se uvođenjem pretpostavke o malim pomeranjima kod ljske raspona  $L=20\text{m}$  dobijaju rezultati koji od rezultata geometrijski nelinearne analize ne odstupaju više od 10%. S obzirom na to da navedena razlika nema značaja za krajnji cilj ovog rada, a imajući u vidu složenost i zahtevnost geometrijski nelinearne analize, proračun presečnih sila i pomeranja je sproveden linearno elastičnom analizom u oblasti malih pomeranja. Za sračunate presečne uticaje izvršeno je dimenzionisanje karakterističnih preseka ljske u skladu sa PBAB'87, za granično stanje nosivosti i granično stanje prslina. Izabrana su tri karakteristična preseka ljske, te su za njih konstruisani interakcioni dijagrami  $N_u$  -  $M_u$  za različite kombinacije radnih dijagrama betona i čelika datih u EC 2 i dobijenih primenom RDA postupka. Na osnovu analize ovih dijagrama i tabelarno prikazanih vrednosti graničnih normalnih sila sa zadatim ekscentricitetom i globalnih koeficijenata sigurnosti u odnosu na lom preseka, autorka ove disertacije izvodi sledeće ključne zaključke:

- Kod svih karakterističnih preseka najbolje slaganje dijagrama ostvareno je u slučaju centričnog i ekscentričnog zatezanja u oblasti malog ekscentriciteta. Razlike se povećavaju ulaskom u oblast manjeg ekscentriciteta sa silom pritiska, a najveće su u oblasti centričnog i ekscentričnog pritiska sa malim ekscentricitetom. Objašnjenje leži u činjenici da su radni dijagrami čelika po EC 2 i RDA veoma slični, što rezultira gotovo identičnim vrednostima granične nosivosti i koeficijenata sigurnosti u oblastima u kojima nosivost preseka prevashodno zavisi od nosivosti zategnute armature.
- Globalni koeficijenti sigurnosti u odnosu na lom preseka dobijeni kombinacijom različitih radnih dijagrama materijala, za zadati ekscentricitet normalne sile, međusobno se razlikuju za maksimalno 7.6% (kod preseka ploče u čvornoj liniji 1), odnosno 3.26% (kod ivične grede), s tim što se primenom RDA dijagrama dobijaju veći koeficijenti sigurnosti nego primenom radnih dijagrama materijala prema EC 2. Najveća odstupanja od koeficijenata sigurnosti dobijenih primenom radnih dijagrama prema EC 2 dobijaju se korišćenjem punog RDA dijagrama betona i RDA dijagrama armature. Kada se krajnje dilatacije betona u RDA dijagramu ograniče na 3.5‰, ova razlika se smanjuje za oko 50%.
- Najveća odstupanja granične normalne sile od veličine dobijene primenom radnih dijagrama materijala prema EC 2 dobijaju se za puni RDA radni dijagram betona. Ova razlika se kreće od 9.82% kod ivične grede do 10.34% kod preseka ploče u čvornoj liniji 8. Veća granična nosivost dobija se primenom RDA dijagrama.
- U svim presecima ljske, najbolje poklapanje sa dijagramom interakcije dobijenim primenom radnih dijagrama materijala prema EC 2, postiže se kombinacijom radnog dijagrama betona prema EC 2 i RDA radnog dijagrama čelika.



- Ograničenjem maksimalnih dilatacija u RDA radnom dijagramu betona postiže se smanjenje razlike u odnosu na graničnu nosivost prema EC 2 za oko 30%.

8. Iz gore navedenog može se zaključiti da se RDA postupkom dobijaju teorijski radni dijagrami čelika koji se mogu primeniti za dimenzionisanje i/ili određivanje granične nosivosti preseka armiranobetonskih elemenata.

9. Primena radnih dijagrama betona dobijenih RDA postupkom na određivanje granične nosivosti preseka armiranobetonskih elemenata daje rezultate koji nisu na strani sigurnosti u odnosu na vrednosti dobijene prema nelinearnim EC 2 dijagramima. Ova odstupanja se kreću oko 10% i najvećim delom su posledica oblika RDA radnog dijagrama betona bez opadajuće grane nakon dostizanja njegove pritisne čvrstoće. Ovakav pristup je odabran zbog toga što ni jedan analizirani eksperiment u ovoj disertaciji nije potvrdio opadajuću granu. Uključenjem sekantnog modula materijala nakon dostizanja pritisne čvrstoće mogla bi se opisati opadajuća grana radnog dijagrama betona u pritisku koju mehanika oštećenja predviđa, s tim što bi ovo bilo teorijsko tendenciozno odstupanje od eksperimentalnih podataka, a što naučno ne bi bilo korektno.

Iz dosadašnjeg razmatranja jasno se uočava da se RDA postupak može primeniti na analizu armiranobetonskih konstrukcija. Njegova primena je verifikovana na primeru realno izvodljive armiranobetonske poliedarske ljske. Primena radnih dijagrama betona i čelika dobijenih RDA postupkom za analizu granične nosivosti daje rezultate prihvatljive tačnosti, naročito u oblastima dominantnog uticaja čelika na nosivost elementa (centrično i ekscentrično zatezanje u oblasti malog ekscentriciteta).

U ovom radu je reološko-dinamička analogija primenjena na analizu graničnog stanja nosivosti armiranobetonske konstrukcije. Jedan od mogućih daljih pravaca istraživanja je prilagođavanje RDA postupka za primenu na analizu stanja upotrebljivosti armiranobetonskih konstrukcija, gde bi do izražaja došla sposobnost modela da opiše viskozne komponente deformacija. Kako je primenom RDA moguće prikazati ponašanje materijala pri svim nivoima opterećenja od eksploatacionog do graničnog (ultimativnog), dalje unapređenje RDA metoda može ići upravo u pravcu ocene stanja armiranobetonske (kompozitne) konstrukcije kroz sve nivoe opterećivanja. Ovo je naročito korisno u analizi sigurnosti postojećih armiranobetonskih konstrukcija kod promenjenih uslova korišćenja (npr. promena opterećenja), kada naponi i deformacije materijala izlaze izvan elastičnog područja, ali još ne dostižu svoje granične vrednosti. Ako bi se ovakav model uneo u računarski kod nekog od programa za analizu konstrukcija, moglo bi se simulirati ponašanje armiranobetonske konstrukcije za razne scenarije njene eksploatacije.

Jedna od osnovnih razlika u radnim dijagramima betona i čelika dobijenim RDA postupkom i onim predviđenim Evrokodom 2 za nelinearnu analizu je nepostojanje opadajuće ("omekšavajuće") grane kod RDA dijagrama. Zbog toga je jedan od mogućih pravaca daljih istraživanja primena mehanike oštećenja u RDA na opisivanje opadajuće grane dijagrama napon-dilatacija u betonu i čeliku, ali samo pod uslovom da se ona i eksperimentalno dokaže kod dijagrama betona u pritisku. Mehanika oštećenja se bazira na meri oštećenja  $D$ , koja je rezultat ravnomerne raspodele mikrodefekata u vidu mikroprslina. Kod jednoaksijalno zategnutog štapa, primenom mehanike oštećenja može se uspostaviti sledeća relacija između napona i deformacija:

$$s = E(1 - D)e,$$

gde se  $D$  naziva i gustina površinskih defekata:

$$D = \frac{A_c - A_{\text{eff}}}{A_c}$$

i kreće se u granicama  $0 \leq D \leq 1$ .  $A_c$  predstavlja površinu poprečnog preseka štapa pre pojave oštećenja, dok je  $A_{eff}$  površina efektivnog dela poprečnog preseka nakon pojave oštećenja određenog stepena. Kod analize armaturnog čelika se parametar  $D$  može odrediti primenom RDA, jer ovaj metod sračunava redukovanu površinu preseka, te bi se mogla dobiti i opadajuća grana dijagrama napon-dilatacija nakon dostignute zatezne čvrstoće čeličnih šipki.

Mehanika oštećenja se može primeniti i u analizi pritisnute zone betona, na čemu su radili Bažant, Krajčinović, Hognestad i drugi, dolazeći do parabolične veze napon-deformacija. Poboljšanje RDA radnog dijagrama pritisnutog betona primenom mehanike oštećenja po Hognestad-u išlo bi u pravcu opisivanja opadajuće grane dijagrama, dok bi se za ojačavajući deo krive napon-dilatacija zadržala RDA formulacija.

U ovom radu je doprinos zategnutog betona nosivosti preseka u potpunosti zanemaren. Jedan od mogućih daljih pravaca istraživanja je i analiza ponašanja zategnute zone armiranobetonskih elemenata primenom mehanike loma, bazirana na radovima Griffith-a, Bažant-a [6], Šumarca i Krajčinovića [61] i preporukama ACI [1].

## 7. LITERATURA

1. ACI Committe 446, Fracture Mechanics: Fracture mechanics of concrete: Concepts, models and determination of material properties, Special publication, ACI 446, 1R-91, American Concrete Institute, Detroit, 1991.
2. Adnan, A., Suhatri, M., Taib, I., M.: The Mechanical Properties of High Strength Concrete for Box Girder Bridge Deck in Malaysia, Concrete Research Letters, Vol. 1 (1), March 2010, pp. 35-44.
3. Bažant, Z.P., Baweja, S.: Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures: Model B3, Adam Neville Symposium: Creep and Shrinkage - Structural Design Effects, ACI SP-194, A. Al-Manaseer, ed., ACI, Farmington Hills, Michigan, 2000, pp. 1-83.
4. Bažant, Z.P.: Criteria for rational prediction of creep and shrinkage of concrete, Revue Française de Génie Civil 3 (3-4), 1999, pp. 61-89.
5. Bažant, Z.: Mathematical Modeling of Concrete and Shrinkage of Concrete, John Wiley & Sons Ltd, 1988.
6. Bažant, Z.P.: Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete structures, Chapter 1 in Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation, G.C. Sih and A. DiTommaso, eds., Martinus Nijhoff, Dordrecht & Boston 1985, pp. 1-94.
7. Bažant, Z.P.: Prediction of concrete creep and shrinkage: Past, present, future, Nuclear Engineering and Design 203(1), 2001, pp. 27-38.
8. Bergamini, A., Biondini, F.: Finite strip modeling for optimal design of prestressed folded plate structures, Engineering Structures, No. 26, 2004, pp. 1043-1054.
9. Borković, A.: Dinamička analiza površinskih konstrukcija metodom konačnih traka, Magistarski rad, Arhitektonsko-građevinski fakultet Univerziteta u Banjoj Luci, 2010.
10. Brčić, V.: Dinamika konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd, 1981.
11. Brčić, V.: Otpornost materijala, Građevinska knjiga, Beograd, 1985.
12. Chen, W., F.: Plasticity in Reinforced Concrete, McGraw-Hill, New York, 1982.
13. Cheung, Y. K.: Folded Plate Structures by Finite Strip Method, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, December, 1969, pp. 2963-2979.
14. Crisfield, M.A.: A faster modified Newton-Raphson iteration, Computer methods in applied mechanics and engineering, 20, 1979, pp 267-278.
15. De Fries-Skene, A., Scordelis, A. C.: Direct Stiffness Solution for Folded Plates, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, August, 1964, pp. 15-47.
16. Đurić, M.: Statika konstrukcija, Građevinska knjiga, Beograd, 1983.
17. Đurić, M.: Teorija duge prizmatične poliedarske ljuste, Zbornik Građevinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, 1955, str. 119-163.
18. EN 1990:2002 Evrokod 0: Osnove proračuna konstrukcija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, februar 2006.
19. EN 1991-1-1 Eurocode 1: Actions on structures - Part 1-1: General actions - Densities, self-weight, imposed loads for buildings, CEN, Brussels, April 2002.
20. EN 1992-1-1:2004 Evrokod 2: Proračun betonskih konstrukcija - deo 1-1: Opšta pravila i pravila za zgrade, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, februar 2006.

21. EN 1993-1-1:2005 Evrokod 3: Proračun čeličnih konstrukcija - deo 1-1: Opšta pravila i pravila za zgrade, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, februar 2006.
22. Folić, R.: Analiza aktivne širine ploče i graničnih stanja kod elemenata od armiranog i prethodno napregnutog betona, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, OOUR Naučno-obrazovni institut za industrijsku gradnju, Novi Sad, 1985.
23. Girkman, K.: Površinski sistemi nosača, Građevinska knjiga, Beograd, 1965.
24. Grupa autora: Beton i armirani beton prema BAB 87, Knjiga 1 i 2, Građevinska knjiga, Beograd, 1991.
25. Goleš, D.: Numerička analiza duge debele cilindrične cevi zatvorene sa oba kraja, izložene unutrašnjem pritisku koji se postepeno povećava do potpune plastifikacije preseka, Seminarski rad iz predmeta Numerička analiza, mentor Milašinović, D. D., Magistarske studije Građevinskog fakulteta u Subotici, april 1996.
26. Goleš, D.: Proračun graničnog opterećenja krstato armiranih betonskih ploča pravougaone osnove različitih uslova oslanjanja i opterećenja primenom teorije plastičnosti, Seminarski rad iz predmeta Teorija plastičnosti, mentor Ačić, M., Magistarske studije Građevinskog fakulteta u Beogradu, april 1995.
27. Hajdin, N.: Teorija površinaskih nosača, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
28. Hirst, G. A., Neville, A. M.: Activation energy of creep of concrete under short-term static and cyclic stresses, Magazine of Concrete Research 29 (98), 1977, pp. 13-18.
29. Ivković, M., Radojičić, T., Ačić, M.: Granična stanja betonskih konstrukcija, Naučna knjiga, Beograd, 1988.
30. Ivković, M., Radojičić, T.: Reologija i opšta teorija loma betona, Naučna knjiga, Beograd, 1987.
31. Jevtić, D.: Prednapregnuti beton 1, Građevinska knjiga, Beograd, 1979.
32. Křistek, V., Bažant, Z. P.: Shear Lag Effect and Uncertainty in Concrete Box Girder Creep, Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 3, March 1987.
33. Kukaras, D.: Eksperimentalno-teorijska analiza i računsko modeliranje ponašanja montažnih nosača spojenih visokovrednim zavrtnjima, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Novom Sadu, Subotica, 2007.
34. Kwak, H. G., Filippou, F. C.: Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads, Report No. UCB/SEMM-90/14, Structural Engineering, Mechanics and Materials, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, November 1990.
35. Mihailović, V.: Spregnute i prednapregnute konstrukcije, Naučna knjiga, Beograd, 1989.
36. Milašinović, D. D.: Geometric non-linear analysis of thin plate structures using the harmonic coupled finite strip method, Thin-Walled Structures, 49, 2011, pp. 280-290.
37. Milašinović, D. D., Landović, A., Vlajić, LJ., Goleš, D.: Rheological-dynamical inelastic buckling in the short to intermediate column range: Experimental verification of concrete strengths, Mechanics of Time-Dependent Materials - *rad na recenziji*
38. Milašinović, D. D.: Metod konačnih traka u teoriji konstrukcija, Student, Novi Sad, 1994.
39. Milašinović, D. D.: Rheological-dynamical analogy: design of viscoelastic and viscoplastic bar dampers, Mech Time-Depend Mater 14, 2010, pp. 389-409.

40. Milašinović, D. D.: Rheological-dynamical analogy: modeling of fatigue behavior, *International Journal of Solids and Structures* 40, 2003, pp. 181-217.
41. Milašinović, D. D.: Rheological-dynamical analogy: prediction of buckling curves of columns, *International Journal of Solids and Structures* 37, 2000, pp. 3965-4004.
42. Milašinović, D. D.: Rheological-dynamical analogy: Prediction of damping parameters of hysteresis damper, *International Journal of Solids and Structures* 44, 2007, pp. 7143-7166.
43. Milašinović, D. D.: Rheological-dynamical analogy: viscoelastoplastic behavior of metallic bars, *International Journal of Solids and Structures* 41, 2004, pp. 4599-4634.
44. Milašinović, D. D.: Rheological-dynamical theory of visco-elasto-plasticity and fatigue: Part 1, *Multidiscipline Modeling in Mat. and Str.*, Vol. 2, No. 1, 2006, pp. 1-30.
45. Milašinović, D. D.: Rheological-dynamical theory of visco-elasto-plasticity and fatigue: Part 2, *Multidiscipline Modeling in Mat. and Str.*, Vol. 2, No. 2, 2006, pp. 127-166.
46. Milašinović, D. D.: *The Finite Strip Method in Computational Mechanics*, Faculty of Civil Engineering, Subotica, Technical University, Budapest, Faculty of Civil Engineering, Belgrade, 1997.
47. Milašinović, D. D., Vlajić, L.J. M., Miličić, I. M.: Analiza izvijanja čeličnih stubova metodom reološko-dinamičke analogije, *Materijali i konstrukcije*, vol. 46, br. 3-4, 2003, str. 8-13.
48. Muravljov, M.: *Osnovi teorije i tehnologije betona*, Građevinska knjiga, Beograd, 1991.
49. Nevil, A. M.: *Svojstva betona*, Građevinska knjiga, Beograd, 1976.
50. Perišić, Ž., Pecić, N., Stojanović, N.: Nove evropske norme za projektovanje - Evrokod 2 za proračun betonskih konstrukcija, *Sveske 1 i 2, Predavanje u okviru Programa permanentnog usavršavanja Inženjerske komore Srbije*, Beograd, 19. maj 2008.
51. Persson, B.: Poisson's ratio of high-performance concrete, *Cement and Concrete Research* 29, 1999, pp. 1647-1653.
52. Petronijević, M.: Milan Đurić - život i delo, *Teorija konstrukcija, Monografija posvećena uspomeni na pokojnog akademika prof. dr Milana Đurića*, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Katedra za tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija, Beograd, 2008, str. 13-27.
53. Phase I Report on Folded Plate Construction, Report of the Task Committee on Folded Plate Construction Committe on Masonry and Reinforced Concrete Structural Division, *Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, December, 1963, pp. 365-406.
54. Pravilnik o tehničkim normativima za beton i armirani beton, *Službeni list SFRJ*, br. 11, 23.02.1987.
55. Pravilnik o tehničkim normativima za izgradnju objekata visokogradnje u seizmičkim područjima, *Službeni list SFRJ*, br. 31/81, 49/82, 29/83, 21/88 i 52/90.
56. Radnić, J., Harapin, A., Matešan, D.: *Betonske ploče i ljuske, Numerički model za statičku, dinamičku i vremenski ovisnu analizu*, Građevinsko-arhitektonski fakultet Sveučilišta u Splitu i Institut građevinarstva Hrvatske, 2004.
57. Radnić, J., Harapin, A.: *Osnove betonskih konstrukcija*, Interna skripta, Sveučilište u Splitu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, Split, 2007.

58. Radosavljević, Ž.: Armirani beton 1, Građevinska knjiga, Beograd, 1985.
59. Sekulović, M.: Metod konačnih elemenata, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.
60. Structural concrete, Textbook on Behaviour, Design and Performance, *fib* Bulletin N°1, Introduction - Design process - Materials, July 1999.
61. Structural concrete, Textbook on Behaviour, Design and Performance, *fib* Bulletin N°2, Basis of design, July 1999.
62. Šumarac, D., Krajčinović, D.: Osnovi mehanike loma, Naučna knjiga, Beograd, 1990.
63. Tomičić, I.: Betonske konstrukcije, Školska knjiga, Zagreb, 1984.
64. Tower 6, Uputstvo za rad sa programom (ažurirano za Build 1300), Copyright (c) Radimpex, <http://www.radimpex.rs>.
65. Trost, H.: Auswirkungen des Superpositionspritzips auf Kriech- und Relaxationsprobleme bei Beton and Spannbeton, Beton- und Stahlbetonbau, 61, 1967, pp. 230-238.
66. Vlajić, L.J., Bešević, M., Landović, A., Kukaras, D.: Experimental analysis of reinforced concrete columns strenghtened with steel tubes, The 5<sup>th</sup> PSU-UNS International Conference on Engineering and Technology (ICET-2011), Phuket, Thailand, May 2-3, 2011.
67. Wilby, C. B.: Concrete Folded Plate Roofs, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 1998.
68. Zejak, R.: Prilog analizi vitkih armiranobetonskih elemenata sa kosim savijanjem, Doktorska disertacija, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2002.

#### KORIŠĆENE WEB-STRANICE:

69. <http://www.ul.ie/~gaughran/Gildea/page10.htm>
70. <http://nisee.berkeley.edu/elibrary/getpkg?id=GoddenE42-44>
71. <http://www.ketchum.org/shellpix.html>
72. <http://fizikaa5.blogspot.ba/arhiva/2010/01/21/2413600>
73. [www.grf.bg.ac.rs/mm/files/.../57GM1-10%20-%20Prvo%20predavanje.pdf](http://www.grf.bg.ac.rs/mm/files/.../57GM1-10%20-%20Prvo%20predavanje.pdf)
74. [http://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-metals-d\\_152.html](http://www.engineeringtoolbox.com/specific-heat-metals-d_152.html)
75. [http://wiki.answers.com/Q/Specific\\_heat\\_for\\_alluminium\\_and\\_mild\\_steel](http://wiki.answers.com/Q/Specific_heat_for_alluminium_and_mild_steel)
76. <http://www-classes.usc.edu/enr/ce/334/PPT-7.ppt>
77. <http://www.radimpex.rs>

## PRILOG - Tabelarni prikazi presečnih uticaja, merodavnih graničnih uticaja, potrebne i usvojene armature za karakteristične preseke analizirane poliedarske ljuske i detalji armature

Presek na udaljenosti  $y=10\text{m}$  od krajnjih oslonaca (sredina raspona)

- Ivična greda

Tabela P.1. Merodavni uticaji u  $y$  pravcu ivične grede u preseku  $y=10\text{m}$

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$N_{yu}$ [kN]	$e_u$ [m]
9	-88.56	59.02	1137.1786	0.17186374
10	581.98	111.368		
11	1258.22	164.814		

predznak "-" odgovara sili pritiska

Tabela P.2. Usvojena podužna armatura, naponi u armaturi usled ekscentrične granične sile i karakteristična širina prslina ivične grede u preseku  $y=10\text{m}$

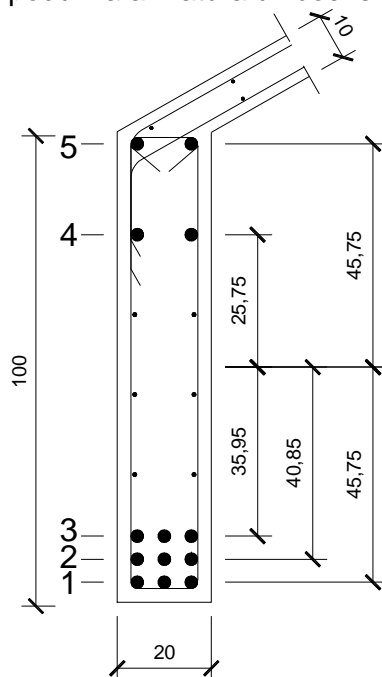
red	armatura u redu	$y_{Ti}$ [cm] <sup>1)</sup>	$y_T$ [cm] <sup>2)</sup>	$\sigma_{au}$ [kN/cm <sup>2</sup> ] <sup>3)</sup>	$a_{kq}(t)$ [mm]
1	<b>3Rf19</b>	-45.75	-17.281	30.79	0.199
2	<b>3Rf19</b>	-40.85		30.80	
3	<b>3Rf19</b>	-35.95		30.81	
4	<b>2Rf19</b>	25.75		30.95	
5	<b>2Rf19</b>	45.75		30.99	

1) Rastojanje težišta reda armature od težišta betonskog preseka

2) Rastojanje težišta ukupne armature od težišta betonskog preseka

3) Napon u posmatranom redu armature usled granične sile sa zadatim ekscentricitetom

U ovom preseku su smičuće sile  $N_{xy}$  i momenti torzije  $M_{xy}$  jednaki nuli, pa su usvojene uzengije **uRf8/20** i podužna armatura uz bočne ivice preseka **Rf8/20**.



Slika P.1. Raspored armature u ivičnoj gredi u preseku  $y=10\text{m}$ , oznake redova armature i njihove udaljenosti od težišta betonskog preseka

*- Prva ploča u nagibu - između čvornih linija 5 i 9*

Smičuće sile i momenti torzije u ovom preseku su jednaki nuli, te se ne vrši korekcija momenata savijanja, niti je potrebna armatura za prijem napona smicanja.

Tabela P.3. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu prve ploče u preseku  $y=10m$

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> /m]	usvojeno
5	-145.86	-31.58	-0.19	-0.04	-343.46	-0.45	1.00	<b>Rf6/20</b>
6	-117.09	-16.19	-0.44	-0.09	-256.47	-1.03	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-91.00	-1.08	-0.46	-0.06	-175.18	-0.98	1.00	<b>Rf6/20</b>
8	-66.96	14.05	-0.53	-0.04	-127.22	-1.11	1.00	<b>Rf6/20</b>
9	-44.28	29.51	-0.33	0.05	-84.13	-0.63	1.00	<b>Rf6/20</b>

Tabela P.4. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu prve ploče u preseku  $y=10m$

čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> /m]	usvojeno
5	-23.82	-6.30	2.75	0.36	-49.46	5.05	1.00	<b>Rf6/20</b>
6	-23.82	-6.30	-0.67	-0.38	-49.46	-1.76	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-18.66	-4.68	-2.50	-0.67	-38.29	-5.20	1.00	<b>Rf6/20</b>
8	-12.31	-2.99	-2.76	-0.49	-25.07	-5.31	1.25	<b>Rf6/20</b>
9	-5.09	-1.39	-1.48	0.14	-10.65	-2.37	1.25	<b>Rf6/20</b>

*- Druga ploča u nagibu - između čvornih linija 1 i 5*

Smičuće sile i momenti torzije u ovom preseku su jednaki nuli, te se ne vrši korekcija momenata savijanja, niti je potrebna armatura za prijem napona smicanja.

Tabela P.5. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu druge ploče u preseku  $y=10m$

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> /m]	usvojeno
1	-47.18	-39.66	0.12	-0.02	-172.92	0.23	1.00	<b>Rf6/20</b>
2	-68.32	-36.24	-0.05	-0.07	-205.91	-0.24	1.00	<b>Rf6/20</b>
3	-91.54	-33.85	0.01	-0.04	-245.03	-0.07	1.00	<b>Rf6/20</b>
4	-117.25	-32.35	-0.06	-0.04	-290.71	-0.19	1.00	<b>Rf6/20</b>
5	-145.86	-31.58	0.06	0.03	-343.46	0.19	1.00	<b>Rf6/20</b>

Tabela P.6. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu druge ploče u preseku  $y=10m$

čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> /m]	usvojeno
1	-33.43	-10.36	6.26	1.35	-72.13	12.45	2.50	<b>Rf6/20 + +Rf8/20*</b>
2	-33.43	-10.36	2.55	0.20	-72.13	4.43	1.00	<b>Rf6/20</b>
3	-32.90	-9.96	0.74	-0.35	-70.57	1.19	1.00	<b>Rf6/20</b>
4	-31.27	-9.09	0.82	-0.30	-66.39	1.31	1.39	<b>Rf6/20</b>
5	-28.31	-7.82	2.74	0.34	-59.37	5.01	1.00	<b>Rf6/20</b>

\* Usvojeno iz uslova  $a_{kq}(t) \leq 0.2 \text{ mm}$



Preseci na udaljenosti  $y=7.5m$  od krajnjih oslonaca

- Ivična greda

Tabela P.7. Merodavni uticaji u  $y$  pravcu ivične grede u preseku  $y=7.5m$ 

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$N_{yu}$ [kN]	$e_u$ [m]
9	-85.04	55.70	1067.72	0.17225
10	546.26	104.51		
11	1183.30	154.42		

Tabela P.8. Usvojena podužna armatura, naponi u armaturi usled ekscentrične granične sile i karakteristična širina prslina ivične grede u preseku  $y=7.5m$ 

red	armatura u redu	$y_{Ti}$ [cm]	$y_T$ [cm]	$\sigma_{au}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$a_{kq}(t)$ [mm]
1	<b>3Rf19</b>	-45.75	-15.725	32.42	0.195
2	<b>3Rf19</b>	-40.85		32.25	
3	<b>2Rf19</b>	-35.95		32.08	
4	<b>2Rf19</b>	25.75		29.95	
5	<b>2Rf19</b>	45.75		29.27	

U ivičnoj gredi su predviđene uzengije  $uf8$ . Njihov razmak je određen prema potrebi za osiguranjem od smičućih napona, koji se javljaju usled transverzalne sile i momenta torzije (tabela P.9). Kada čvrstoća pri smicanju nije prekoračena, usvaja se maksimalni razmak uzengija  $e_u=20cm$ .

Tabela P.9. Smičuće sile, momenti torzije, granična transverzalna sila i moment torzije, smičući napon i maksimalni računski razmak uzengija ivične grede u preseku  $y=7.5m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$T_u$ [kN]	$M_{Tu}$ [kNm]	$\tau_n(T+M_T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	max $e_u$ [cm]
9	26.70	4.59	1.62	-0.22	37.07	2.52	0.111	20
10	19.55	3.22	1.57	-0.23				
11	12.40	1.84	1.55	-0.23				

U ovom preseku čvrstoća pri smicanju nije prekoračena, pa nije potrebna dodatna armatura za osiguranje. Usvojene su uzengije **uRf8/20** i podužna armatura uz bočne ivice preseka **Rf8/20**.

- Prva ploča u nagibu - između čvornih linija 5 i 9

Tabela P.10. Smičuće sile, momenti torzije, smičući napon, redukovana transverzalna sila i potrebna armatura za osiguranje prve ploče u preseku  $y=7.5m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$N_{xyu}$ [kN/m]	$M_{xyu}$ [kNm/m]	$\tau_n(T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$T_{Ru}$ [kN/m]	$\Delta A_a$ [cm <sup>2</sup> /m]
5	17.91	5.98	0.39	0.02	39.43	0.66	0.04	-	0
6	22.25	6.48	0.40	0.01	47.25	0.65	0.05	-	0
7	25.57	6.49	0.37	0.00	52.60	0.59	0.06	-	0
8	27.84	6.47	0.30	-0.02	56.18	0.49	0.06	-	0
9	27.86	5.93	0.20	-0.03	55.26	0.32	0.06	-	0

Tabela P.11. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu prve ploče u preseku  $y=7.5m$ 

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$M_{yu,k}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	-137.43	-30.04	-0.18	-0.03	-324.20	-0.39	0.48	1.00	<b>Rf6/20</b>
6	-110.18	-15.42	-0.36	-0.07	-241.72	-0.83	1.48	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-85.72	-1.12	-0.43	-0.05	-165.20	-0.91	1.51	1.00	<b>Rf6/20</b>
8	-63.38	13.20	-0.51	-0.04	-120.43	-1.07	1.55	1.00	<b>Rf6/20</b>
9	-42.52	27.85	-0.45	0.01	-80.79	-0.85	1.17	1.00	<b>Rf6/20</b>

Tabela P.12. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu prve ploče u preseku  $y=7.5m$ 

čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$M_{xu,k}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	-23.85	-6.35	2.72	0.37	-49.57	5.01	5.67	1.25	<b>Rf6/20</b>
6	-23.85	-6.35	-0.65	-0.37	-49.57	-1.70	2.35	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-18.75	-4.72	-2.42	-0.65	-38.50	-5.05	5.64	1.25	<b>Rf6/20</b>
8	-12.41	-3.02	-2.63	-0.47	-25.29	-5.06	5.55	1.25	<b>Rf6/20</b>
9	-5.17	-1.39	-1.29	0.18	-10.79	-2.07	2.39	1.00	<b>Rf6/20</b>

*- Druga ploča u nagibu - između čvornih linija 1 i 5*Tabela P.13. Smičuće sile, momenti torzije, smičući napon, redukovana transverzalna sila i potrebna armatura za osiguranje druge ploče u preseku  $y=7.5m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$N_{xyu}$ [kN/m]	$M_{xyu}$ [kNm/m]	$\tau_n(T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$T_{Ru}$ [kN/m]	$\Delta A_a$ [cm <sup>2</sup> /m]
1	1.42	0.89	0.00	0.00	3.87	0.00	0.00	-	0
2	4.54	2.48	0.15	0.02	11.73	0.27	0.01	-	0
3	8.35	3.86	0.27	0.03	20.31	0.43	0.02	-	0
4	12.90	5.05	0.35	0.03	29.73	0.55	0.03	-	0
5	17.91	5.98	0.39	0.02	39.43	0.63	0.04	-	0

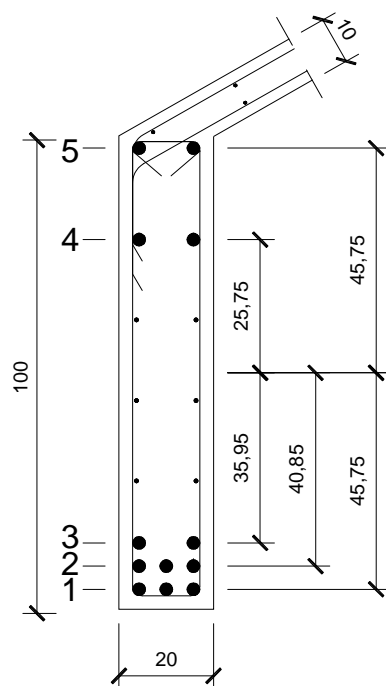
Tabela P.14. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu druge ploče u preseku  $y=7.5m$ 

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$M_{yu,k}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
1	-43.13	-36.72	0.12	-0.02	-159.05	0.22	-0.22	1.00	<b>Rf6/20</b>
2	-63.30	-33.68	0.02	-0.05	-191.00	0.04	-0.31	1.00	<b>Rf6/20</b>
3	-85.43	-31.64	0.02	-0.03	-228.75	0.03	-0.46	1.00	<b>Rf6/20</b>
4	-109.97	-30.46	-0.06	-0.04	-272.90	-0.19	0.46	1.00	<b>Rf6/20</b>
5	-137.43	-30.04	-0.06	-0.01	-324.20	-0.13	-0.50	1.00	<b>Rf6/20</b>

Tabela P.15. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu druge ploče u preseku  $y=7.5m$ 

čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$M_{xu,k}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	-32.98	-10.28	5.98	1.32	-71.28	11.95	-11.95	2.50	<b>Rf6/20 + +Rf8/20</b>
6	-32.98	-10.28	2.34	0.18	-71.28	4.06	-4.33	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-32.53	-9.91	0.59	-0.36	-69.88	0.94	-1.37	1.00	<b>Rf6/20</b>
8	-31.02	-9.08	0.72	-0.30	-65.96	1.15	-1.70	1.00	<b>Rf6/20</b>
9	-28.20	-7.84	2.70	0.36	-59.22	4.97	-5.60	1.00	<b>Rf6/20</b>

Usvojeno iz uslova  $a_{kq}(t) \leq 0.2 \text{ mm}$

Slika P.2. Raspored armature u ivičnoj gredi u preseku  $y=7.5m$ , oznake redova armature i njihove udaljenosti od težišta betonskog preseka

### Preseci na udaljenosti $y=5.0 \text{ m}$ od krajnjih oslonaca

#### - Ivična greda

Tabela P.16. Merodavni uticaji u y pravcu ivične grede u preseku  $y=5.0m$ 

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$N_{yu}$ [kN]	$e_u$ [m]
9	-73.28	45.48	858.14	0.17354
10	438.40	83.84		
11	956.04	123.34		

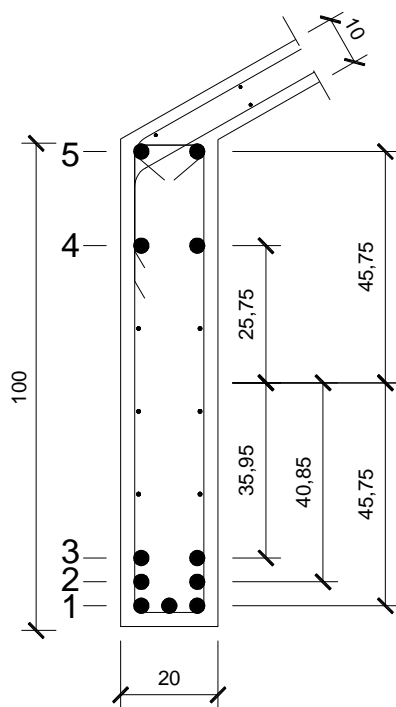
Tabela P.17. Usvojena podužna armatura, naponi u armaturi usled ekscentrične granične sile i karakteristična širina prslina ivične grede u preseku  $y=5.0m$ 

red	armatura u redu	$y_{Ti}$ [cm]	$y_T$ [cm]	$\sigma_{au}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$a_{kq}(t)$ [mm]
1	<b>3Rf19</b>	-45.75	-13.441	29.95	0.152
2	<b>2Rf19</b>	-40.85		29.58	
3	<b>2Rf19</b>	-35.95		29.21	
4	<b>2Rf19</b>	25.75		24.56	
5	<b>2Rf19</b>	45.75		23.06	

Tabela P.18. Smičuće sile, momenti torzije, granična transversalna sila i moment torzije, smičući napon i maksimalni računski razmak uzengija ivične grede u preseku  $y=5.0m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$T_u$ [kN]	$M_{Tu}$ [kNm]	$\tau_n(T+M_T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	max $e_u$ [cm]
9	54.06	9.20	2.77	-0.50	75.00	4.27	0.203	20
10	39.64	6.44	2.65	-0.51				
11	25.19	3.67	2.61	-0.51				

Usvojene su uzengije **uRf8/20** i podužna armatura uz bočne ivice preseka **Rf8/20**.

Slika P.3. Raspored armature u ivičnoj gredi u preseku  $y=5.0m$ , oznake redova armature i njihove udaljenosti od težišta betonskog preseka

*- Prva ploča u nagibu - između čvornih linija 5 i 9*Tabela P.19. Smičuće sile, momenti torzije, smičući napon, redukovana transverzalna sila i potrebna armatura za osiguranje prve ploče u preseku  $y=5.0m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$N_{xyu}$ [kN/m]	$M_{xyu}$ [kNm/m]	$\tau_n(T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$T_{Ru}$ [kN/m]	$\Delta A_a$ [cm <sup>2</sup> /m]
5	35.25	11.93	0.75	0.04	77.86	1.26	0.09	-	0
6	44.17	13.02	0.76	0.01	94.10	1.24	0.10	-	0
7	51.16	13.06	0.70	-0.01	105.35	1.11	0.12	-	0
8	56.05	13.07	0.56	-0.04	113.21	0.90	0.13	-	0
9	56.12	11.97	0.35	-0.06	111.35	0.55	0.12	-	0

Tabela P.20. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu prve ploče u preseku  $y=5.0m$ 

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$M_{yu,k}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	-111.65	-25.10	-0.15	-0.04	-264.85	-0.37	-0.89	1.00	<b>Rf6/20</b>
6	-89.06	-12.93	-0.32	-0.06	-196.35	-0.74	1.97	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-69.37	-1.14	-0.36	-0.05	-134.20	-0.78	1.90	1.00	<b>Rf6/20</b>
8	-52.12	10.61	-0.43	-0.04	-99.02	-0.89	1.78	1.00	<b>Rf6/20</b>
9	-36.64	22.74	-0.33	0.02	-69.62	-0.63	1.19	1.00	<b>Rf6/20</b>

Tabela P.21. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu prve ploče u preseku  $y=5.0m$ 

čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$M_{xu,k}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	-23.94	-6.50	2.59	0.43	-50.01	4.92	6.19	1.00	<b>Rf6/20</b>
6	-23.94	-6.50	-0.60	-0.31	-50.01	-1.51	2.74	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-19.07	-4.87	-2.19	-0.59	-39.28	-4.57	5.68	1.25	<b>Rf6/20</b>
8	-12.80	-3.12	-2.22	-0.41	-26.09	-4.30	5.19	1.25	<b>Rf6/20</b>
9	-5.44	-1.43	-0.71	0.22	-11.27	-1.14	1.69	1.00	<b>Rf6/20</b>

*- Druga ploča u nagibu - između čvornih linija 1 i 5*Tabela P.22. Smičuće sile, momenti torzije, smičući napon, redukovana transverzalna sila i potrebna armatura za osiguranje druge ploče u preseku  $y=5.0m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$N_{xyu}$ [kN/m]	$M_{xyu}$ [kNm/m]	$\tau_n(T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$T_{Ru}$ [kN/m]	$\Delta A_a$ [cm <sup>2</sup> /m]
1	2.52	1.66	0.00	0.00	7.02	0.00	0.01	-	0
2	8.34	4.70	0.29	0.03	21.79	0.52	0.02	-	0
3	15.83	7.45	0.51	0.05	38.72	0.91	0.04	-	0
4	25.00	9.90	0.66	0.06	57.83	1.16	0.06	-	0
5	24.98	9.94	0.75	0.04	57.85	1.26	0.06	-	0

Tabela P.23. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu druge ploče u preseku  $y=5.0m$ 

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$M_{yu,k}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
1	-31.89	-28.27	0.10	-0.01	-119.96	0.19	-0.19	1.00	<b>Rf6/20</b>
2	-48.91	-26.24	0.01	-0.04	-148.04	-0.08	-0.45	1.00	<b>Rf6/20</b>
3	-67.36	-25.03	0.01	-0.03	-180.54	-0.04	0.95	1.00	<b>Rf6/20</b>
4	-88.07	-24.66	-0.05	-0.03	-219.13	-0.17	1.33	1.00	<b>Rf6/20</b>
5	-111.65	-25.10	-0.03	0.00	-264.85	-0.04	-1.22	1.00	<b>Rf6/20</b>

Tabela P.24. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu druge ploče u preseku  $y=5.0m$ 

čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$M_{xu,k}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	-31.76	-10.05	5.19	1.22	-68.91	10.49	-10.49	2.50	<b>Rf6/20 + +Rf8/20*</b>
6	-31.58	-10.05	1.72	0.11	-68.62	2.95	-3.47	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-31.58	-9.78	0.13	-0.38	-68.13	-0.56	1.47	1.00	<b>Rf6/20</b>
8	-30.42	-9.08	0.43	-0.28	-65.01	0.69	-1.85	1.00	<b>Rf6/20</b>
9	-27.92	-7.94	2.57	0.42	-58.95	4.87	-6.14	1.00	<b>Rf6/20</b>

\* Usvojeno iz uslova  $a_{kq}(t) \leq 0.2 \text{ mm}$

### Preseci na udaljenosti $y=2.5 \text{ m}$ od krajnjih oslonaca

#### - Ivična greda

Tabela P.25. Merodavni uticaji u y pravcu ivične grede u preseku  $y=2.5m$ 

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$N_{yu}$ [kN]	$e_u$ [m]
9	-51.27	26.85	503.57	0.17782
10	255.82	48.91		
11	569.28	72.21		

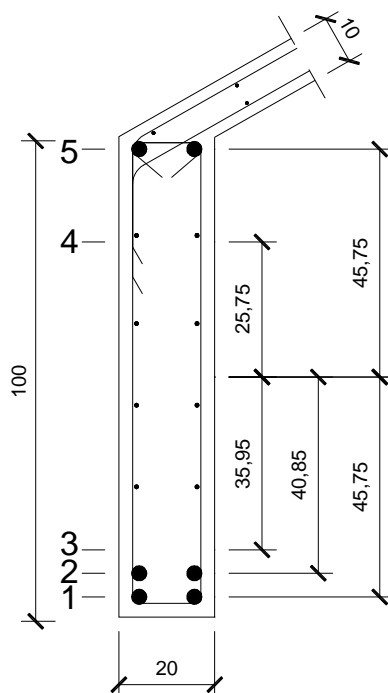
Tabela P.26. Usvojena podužna armatura, naponi u armaturi usled ekscentrične granične sile i karakteristična širina prslina ivične grede u preseku  $y=2.5m$ 

red	armatura u redu	$y_{Ti}$ [cm]	$y_T$ [cm]	$\sigma_{au}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$a_{kq}(t)$ [mm]
1	<b>2Rf19</b>	-45.75	-13.61667	31.84	0.136
2	<b>2Rf19</b>	-40.85		31.50	
3	-	-35.95		31.16	
4	-	25.75		26.85	
5	<b>2Rf19</b>	45.75		25.46	

Tabela P.27. Smičuće sile, momenti torzije, granična transverzalna sila i moment torzije, smičući napon i maksimalni računski razmak uzengija ivične grede u preseku  $y=2.5m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$T_u$ [kN]	$M_{Tu}$ [kNm]	$\tau_n(T+M_T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	max $e_u$ [cm]
9	83.02	13.95	2.90	-0.88	114.95	4.43	0.244	20
10	60.93	9.71	2.74	-0.89				
11	38.78	5.47	2.70	-0.89				

Ovaj presek se nalazi unutar zone osiguranja od  $0.2L = 4.0$  m prema [55], zbog čega su usvojene uzengije **uRf8/10**. Podužna armatura uz bočne ivice preseka je **Rf8/20**.



Slika P.4. Raspored armature u ivičnoj gredi u preseku  $y=2.5$ m

- Prva ploča u nagibu - između čvornih linija 5 i 9

Tabela P.28. Smičuće sile, momenti torzije, smičući napon, redukovana transverzalna sila i potrebna armatura za osiguranje prve ploče u preseku  $y=2.5$ m

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$N_{xyu}$ [kN/m]	$M_{xyu}$ [kNm/m]	$\tau_n(T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$T_{Ru}$ [kN/m]	$\Delta A_a$ [cm <sup>2</sup> /m]
5	51.30	17.69	1.01	0.05	113.91	1.70	0.13	-	0.00
6	65.44	19.69	1.07	0.03	140.15	1.77	0.16	0.22	0.00
7	77.31	20.08	0.94	-0.02	159.83	1.50	0.18	29.75	0.37
8	85.70	20.10	0.68	-0.07	173.30	1.08	0.19	49.95	0.62
9	85.75	18.49	0.36	-0.11	170.48	0.58	0.19	45.71	0.57

Tabela P.29. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu prve ploče u preseku  $y=2.5$ m

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$M_{yu,k}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	-69.80	-16.61	-0.12	-0.04	-167.51	-0.31	-1.39	1.00	<b>Rf6/20</b>
6	-52.28	-8.06	-0.30	-0.07	-116.25	-0.71	2.48	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-39.45	-0.55	-0.33	-0.06	-76.11	-0.75	2.25	1.00	<b>Rf6/20</b>
8	-30.96	6.35	-0.31	-0.04	-58.83	-0.67	1.75	1.00	<b>Rf6/20</b>
9	-25.63	13.42	-0.12	0.04	-48.70	-0.23	0.55	1.00	<b>Rf6/20</b>

Tabela P.30. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu prve ploče u preseku  $y=2.5m$ 

čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$M_{xu,k}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	-24.70	-7.02	2.36	0.52	-52.16	4.72	6.43	1.25	<b>Rf6/20</b>
6	-24.70	-7.02	-0.51	-0.22	-52.16	-1.20	2.97	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-20.12	-5.39	-1.74	-0.48	-41.89	-3.64	5.14	1.62	<b>Rf6/10</b>
8	-13.81	-3.48	-1.49	-0.30	-28.36	-2.93	4.01	1.25	<b>Rf6/20</b>
9	-6.09	-1.58	0.30	0.33	-12.59	1.07	-1.65	1.00	<b>Rf6/20</b>

*- Druga ploča u nagibu - između čvornih linija 1 i 5*Tabela P.31. Smičuće sile, momenti torzije, smičući napon, redukovana transverzalna sila i potrebna armatura za osiguranje druge ploče u preseku  $y=2.5m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$N_{xyu}$ [kN/m]	$M_{xyu}$ [kNm/m]	$\tau_n(T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$T_{Ru}$ [kN/m]	$\Delta A_a$ [cm <sup>2</sup> /m]
1	2.33	1.97	0.00	0.00	7.26	0.00	0.01	-	0
2	10.41	6.26	0.45	0.07	27.92	0.85	0.03	-	0
3	22.45	10.67	0.70	0.08	55.12	1.27	0.06	-	0
4	36.64	14.64	0.85	0.07	84.98	1.48	0.09	-	0
5	36.53	14.66	1.01	0.05	84.83	1.70	0.09	-	0

Tabela P.32. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu druge ploče u preseku  $y=2.5m$ 

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$M_{yu,k}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
1	-19.62	-16.54	0.04	-0.01	-72.01	0.08	-0.08	1.00	<b>Rf6/20</b>
2	-26.46	-14.44	-0.11	-0.06	-80.60	-0.33	0.95	1.00	<b>Rf6/20</b>
3	-36.10	-13.56	-0.12	-0.06	-97.05	-0.36	2.83	1.00	<b>Rf6/20</b>
4	-50.50	-14.31	-0.10	-0.05	-126.00	-0.29	1.95	1.00	<b>Rf6/20</b>
5	-69.80	-16.61	0.03	0.01	-167.51	0.08	-1.78	1.00	<b>Rf6/20</b>

Tabela P.33. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu druge ploče u preseku  $y=2.5m$ 

čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$M_{xu,k}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	-30.66	-9.90	3.90	1.03	-66.87	8.09	-8.09	1.25	<b>Rf6/20 + +Rf8/20</b>
6	-31.04	-9.90	0.73	0.00	-67.49	1.18	-2.03	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	-31.04	-9.85	-0.51	-0.41	-67.39	-1.55	1.58	1.00	<b>Rf6/20</b>
8	-30.39	-9.36	-0.02	-0.25	-65.48	-0.47	1.73	1.00	<b>Rf6/20</b>
9	-28.19	-8.35	2.35	0.51	-60.14	4.67	-6.38	1.25	<b>Rf6/20</b>

*Preseci iznad krajnjih oslonaca**- Ivična greda*

Normalne sile i momenti savijanja u ivičnom nosaču u preseku iznad krajnjih oslonaca su jednaki nuli. Zbog toga je u ovim presecima usvojena ista podužna armatura ivične grede kao u preseku  $y=2.5m$  (sl. P.4).



Tabela P.34. Smičuće sile, momenti torzije, granična transverzalna sila i moment torzije, smičući napon i maksimalni računski razmak uzengija ivične grede u preseku  $y=0m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$T_u$ [kN]	$M_{T_u}$ [kNm]	$\tau_n(T+M_T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	max $e_u$ [cm]
9	111.24	18.30	1.65	-1.38	154.44	3.20	0.231	20
10	81.98	12.55	2.09	-1.22				
11	53.95	7.22	2.18	-1.18				

Ovaj presek se nalazi unutar zone osiguranja od  $0.2L = 4.0$  m prema [55], zbog čega su usvojene uzengije **uRf8/10**. Podužna armatura uz bočne ivice preseka je **Rf8/20**.

- Prva ploča u nagibu - između čvornih linija 5 i 9

Tabela P.35. Smičuće sile, momenti torzije, smičući napon, redukovana transverzalna sila i potrebna armatura za osiguranje prve ploče u preseku  $y=0m$ 

čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$N_{xyu}$ [kN/m]	$M_{xyu}$ [kNm/m]	$\tau_n(T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$T_{Ru}$ [kN/m]	$\Delta A_a$ [cm <sup>2</sup> /m]
5	73.27	25.04	1.04	0.02	162.31	1.69	0.18	33.46	0.42
6	88.40	27.02	1.58	0.14	190.08	2.77	0.21	75.12	0.94
7	98.55	26.25	0.99	-0.03	204.92	1.59	0.23	97.38	1.22
8	108.18	25.10	0.22	-0.23	218.27	0.36	0.24	117.41	1.47
9	105.56	22.90	0.21	-0.17	210.12	0.33	0.23	105.18	1.31

Tabela P.36. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu prve ploče u preseku  $y=0m$ 

čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$M_{yu,k}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	0	0	0	0	0	0	1.69	1.04	<b>Rf6/20</b>
6	0	0	0	0	0	0	2.77	1.56	<b>Rf6/10</b>
7	0	0	0	0	0	0	1.59	1.72	<b>Rf6/10</b>
8	0	0	0	0	0	0	0.36	1.78	<b>Rf6/10</b>
9	0	0	0	0	0	0	0.33	1.63	<b>Rf6/10</b>

Tabela P.37. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu prve ploče u preseku  $y=0m$ 

čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$M_{xu,k}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	0	0	0	0	0	0	1.69	1.00	<b>Rf6/20</b>
6	0	0	0	0	0	0	2.77	1.56	<b>Rf6/10</b>
7	0	0	0	0	0	0	1.59	1.53	<b>Rf6/10</b>
8	0	0	0	0	0	0	0.36	1.47	<b>Rf6/10</b>
9	0	0	0	0	0	0	0.33	1.31	<b>Rf6/20</b>

## - Druga ploča u nagibu - između čvornih linija 1 i 5

Tabela P.38. Smičuće sile, momenti torzije, smičući napon, redukovana transverzalna sila i potrebna armatura za osiguranje druge ploče u preseku  $y=0m$ 

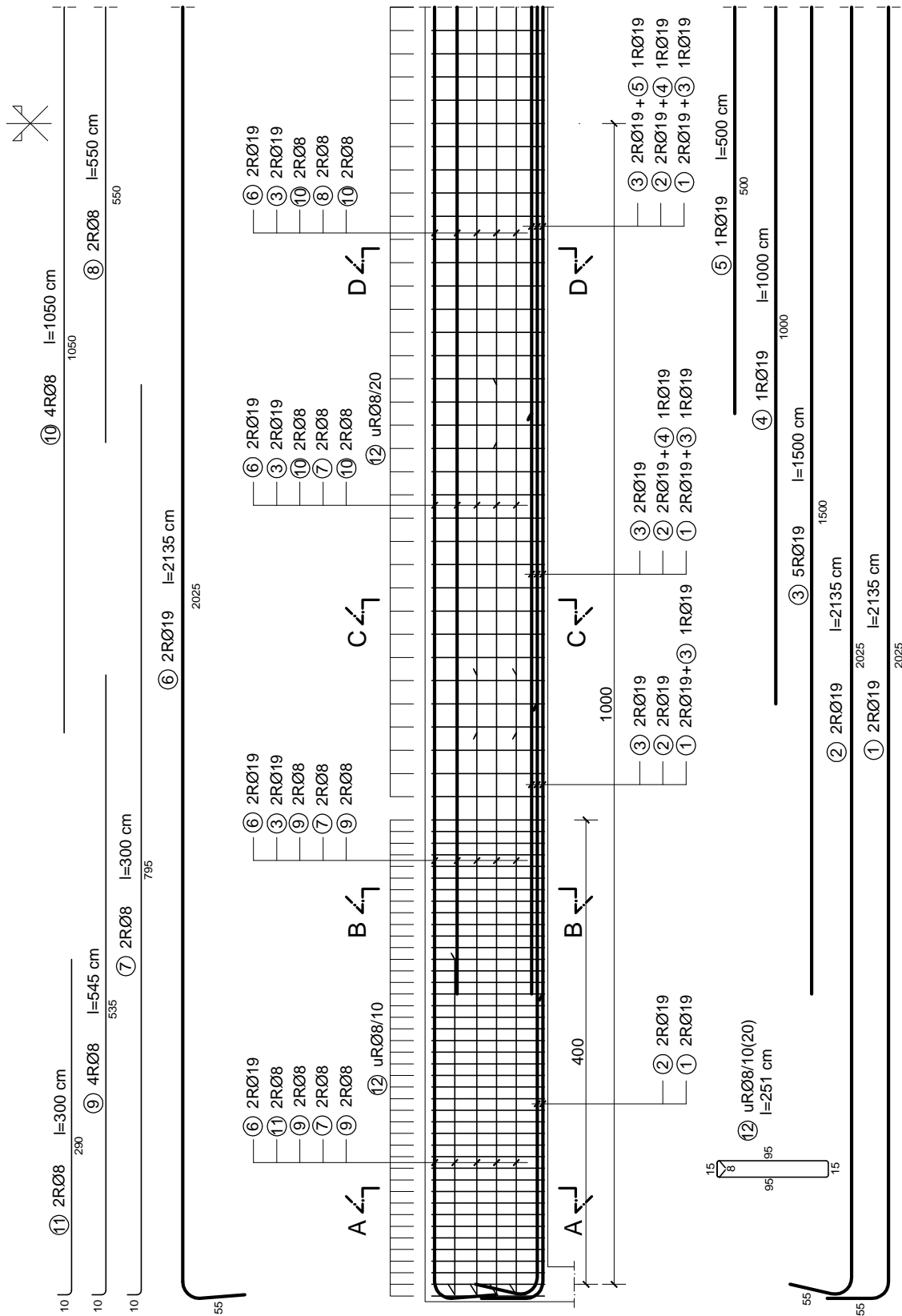
čvor	$N_{xyg}$ [kN/m]	$N_{xyp}$ [kN/m]	$M_{xyg}$ [kNm/m]	$M_{xyp}$ [kNm/m]	$N_{xyu}$ [kN/m]	$M_{xyu}$ [kNm/m]	$\tau_n(T)$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$T_{Ru}$ [kN/m]	$\Delta A_a$ [cm <sup>2</sup> /m]
1	13.53	5.87	0.00	0.00	32.21	0.00	0.04	-	0
2	19.52	9.74	1.00	0.25	48.76	2.05	0.05	-	0
3	28.05	13.10	0.80	0.10	68.46	1.27	0.08	-	0
4	45.14	17.93	0.46	-0.08	104.50	0.74	0.12	-	0
5	32.91	14.20	1.04	0.02	78.21	1.67	0.09	-	0

Tabela P.39. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u y pravcu druge ploče u preseku  $y=0m$ 

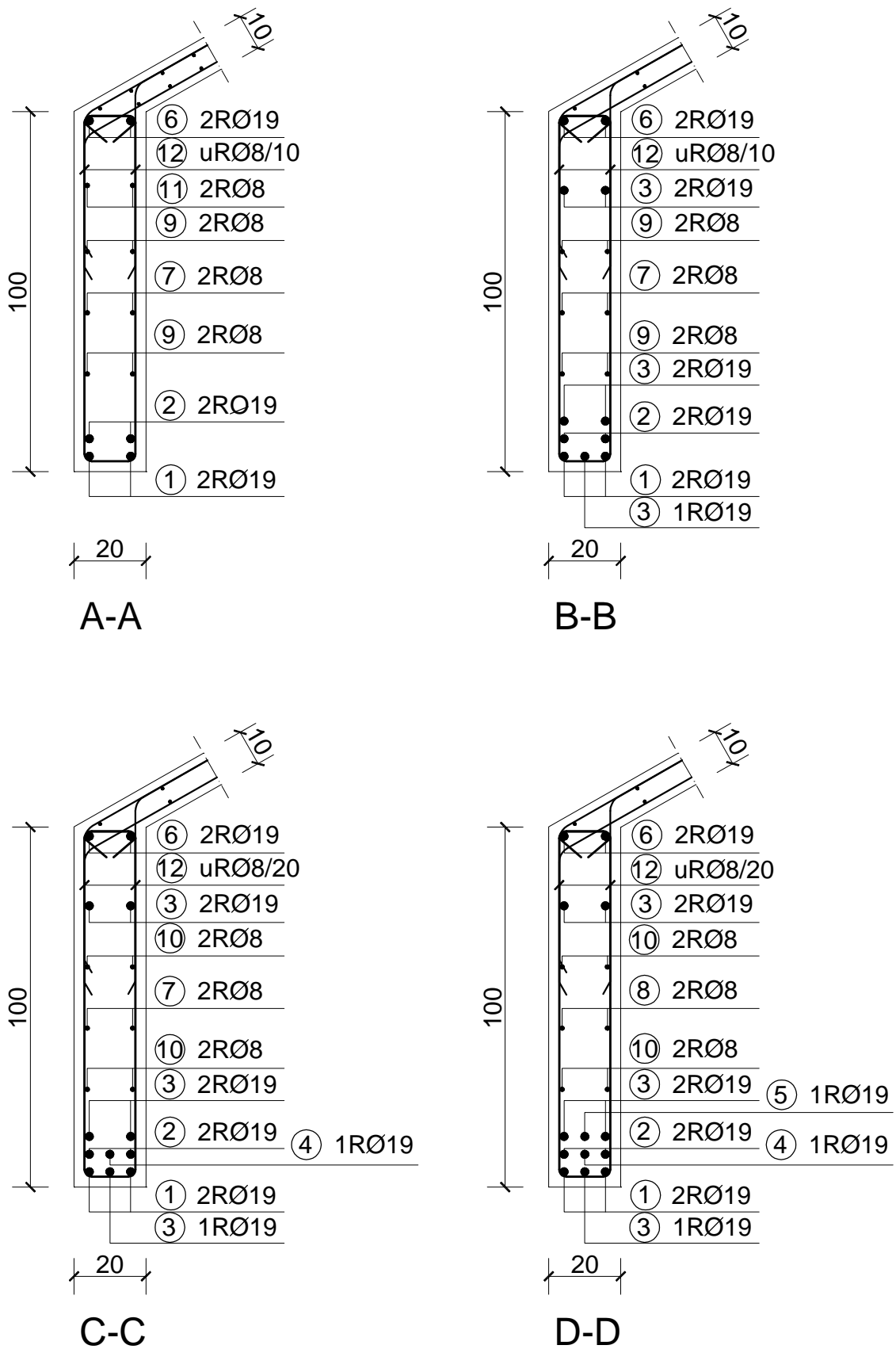
čvor	$N_{yg}$ [kN/m]	$N_{yp}$ [kN/m]	$M_{yg}$ [kNm/m]	$M_{yp}$ [kNm/m]	$N_{yu}$ [kN/m]	$M_{yu}$ [kNm/m]	$M_{yu,k}$ [kNm/m]	$A_{ay1}=A_{ay2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
1	0	0	0	0	0	0	0.00	1.00	<b>Rf6/20</b>
2	0	0	0	0	0	0	-2.05	1.00	<b>Rf6/20</b>
3	0	0	0	0	0	0	-1.27	1.00	<b>Rf6/20</b>
4	0	0	0	0	0	0	0.74	1.00	<b>Rf6/20</b>
5	0	0	0	0	0	0	-1.67	1.00	<b>Rf6/20</b>

Tabela P.40. Merodavni uticaji, potrebna površina armature i usvojena armatura u x pravcu druge ploče u preseku  $y=0m$ 

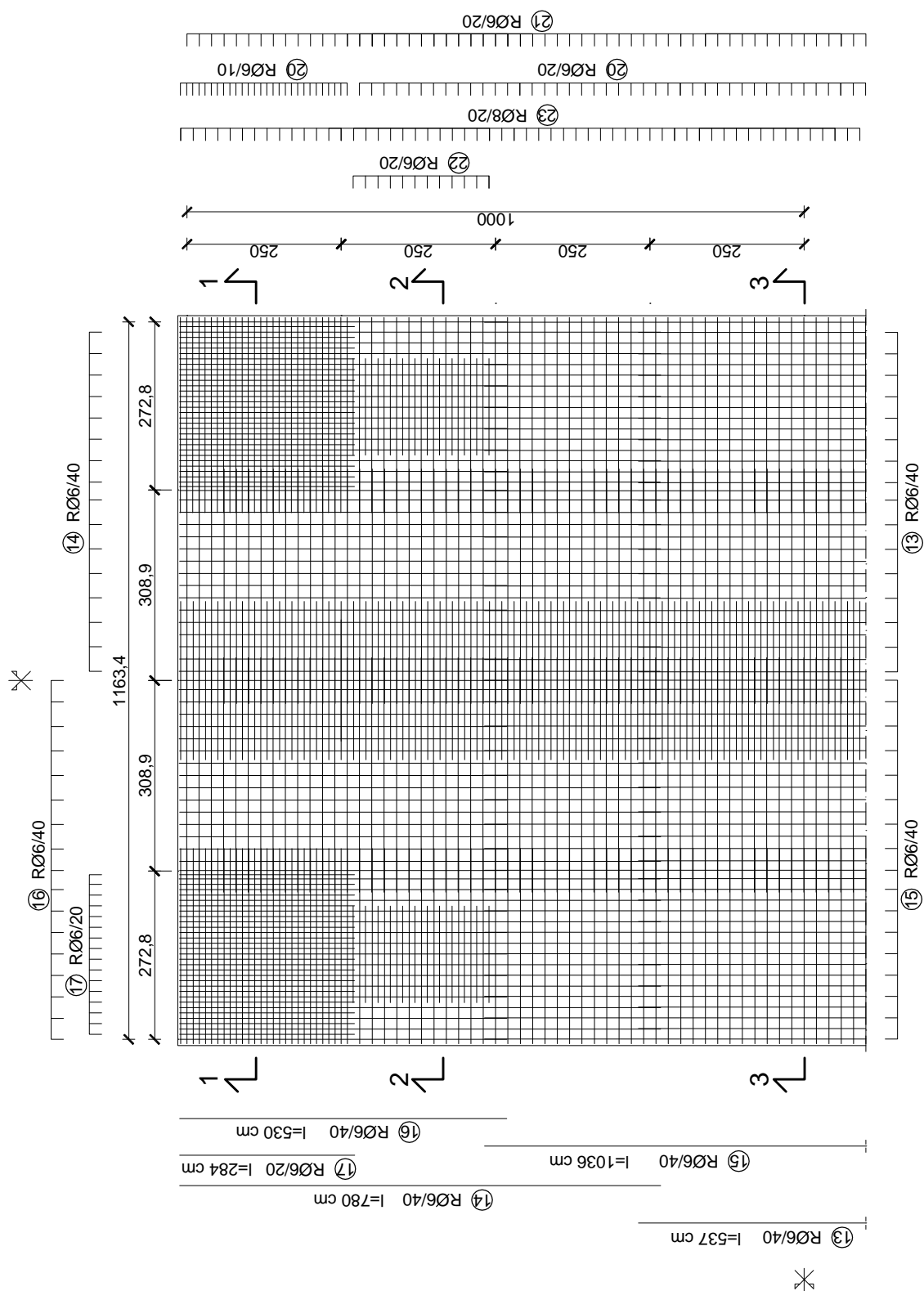
čvor	$N_{xg}$ [kN/m]	$N_{xp}$ [kN/m]	$M_{xg}$ [kNm/m]	$M_{xp}$ [kNm/m]	$N_{xu}$ [kN/m]	$M_{xu}$ [kNm/m]	$M_{xu,k}$ [kNm/m]	$A_{ax1}=A_{ax2}$ [cm <sup>2</sup> ]	usvojeno
5	0	0	0	0	0	0	0.00	1.00	<b>Rf6/20 + +Rf8/20</b>
6	0	0	0	0	0	0	-2.05	1.00	<b>Rf6/20</b>
7	0	0	0	0	0	0	-1.27	1.00	<b>Rf6/20</b>
8	0	0	0	0	0	0	-0.74	1.00	<b>Rf6/20</b>
9	0	0	0	0	0	0	-1.67	1.00	<b>Rf6/20</b>



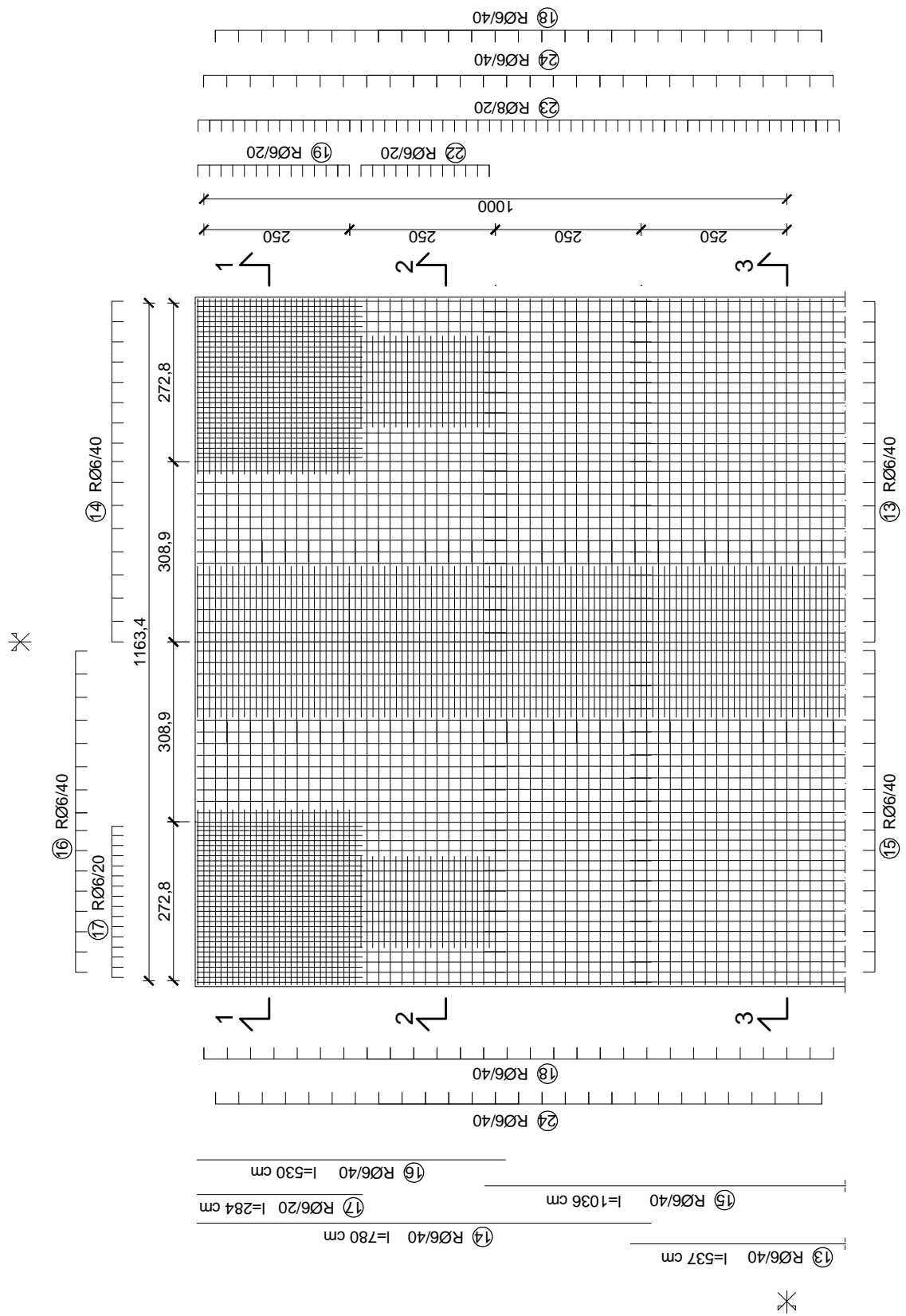
Slika P.5. Plan armature poliedarske ljuske - podužni presek ivične grede



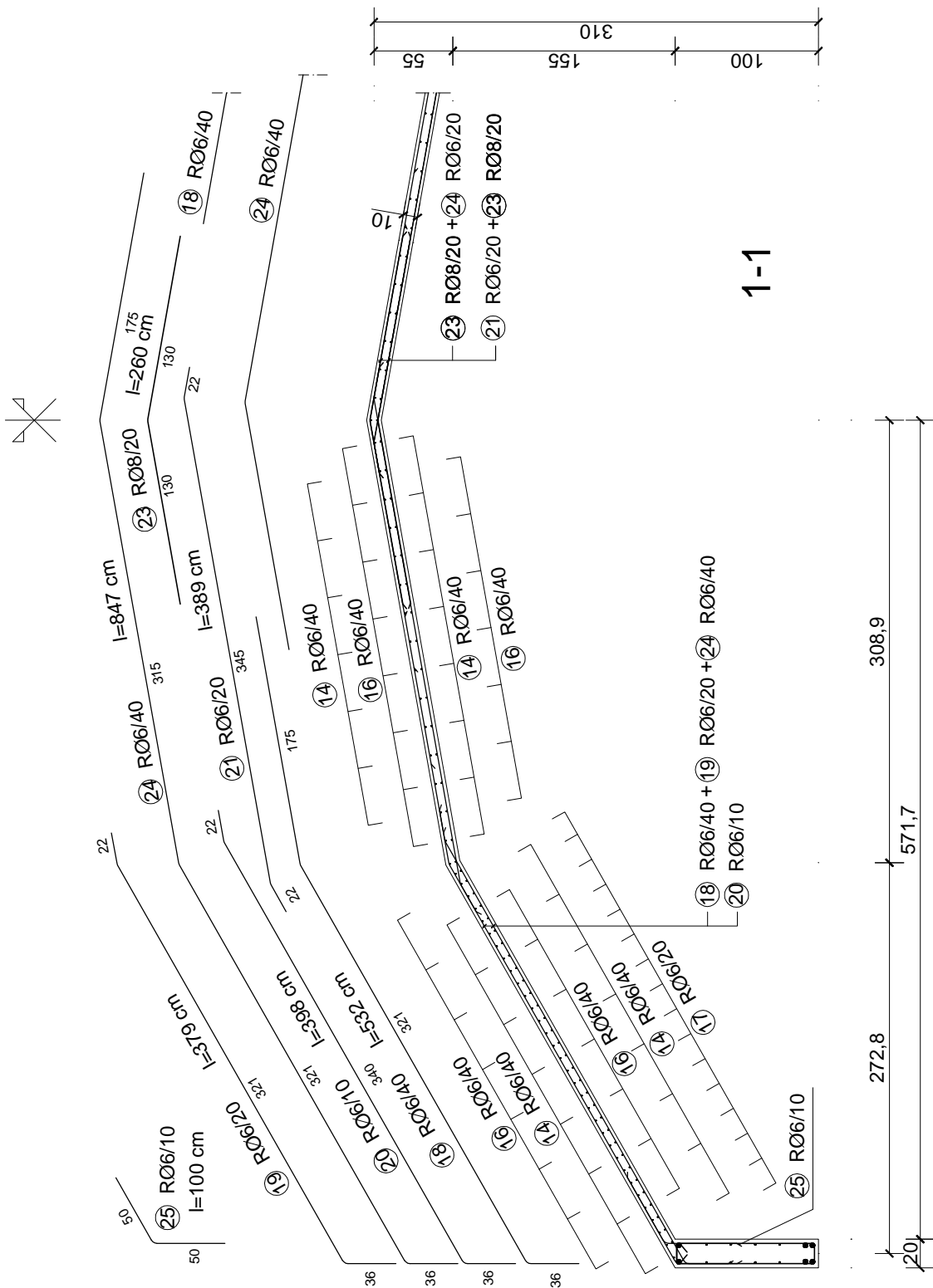
Slika P.6. Plan armature poliedarske ljuske - poprečni preseki ivične grede



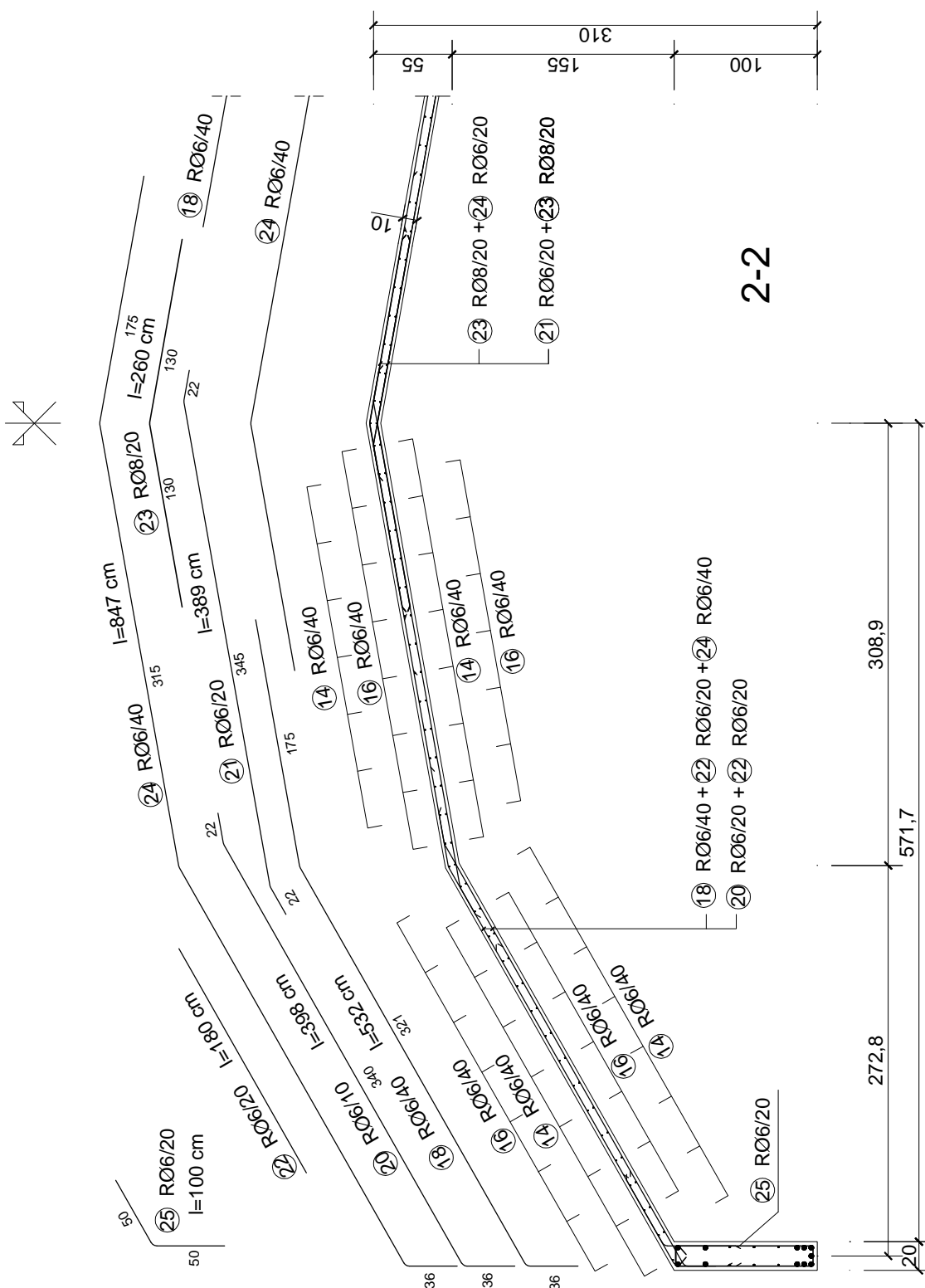
Slika P.7. Plan armature poljedarske ljuške - armatura ploča u nagibu, donja zona



Slika P.8. Plan armature poljedarske ljuške - armatura ploča u nagibu, gornja zona

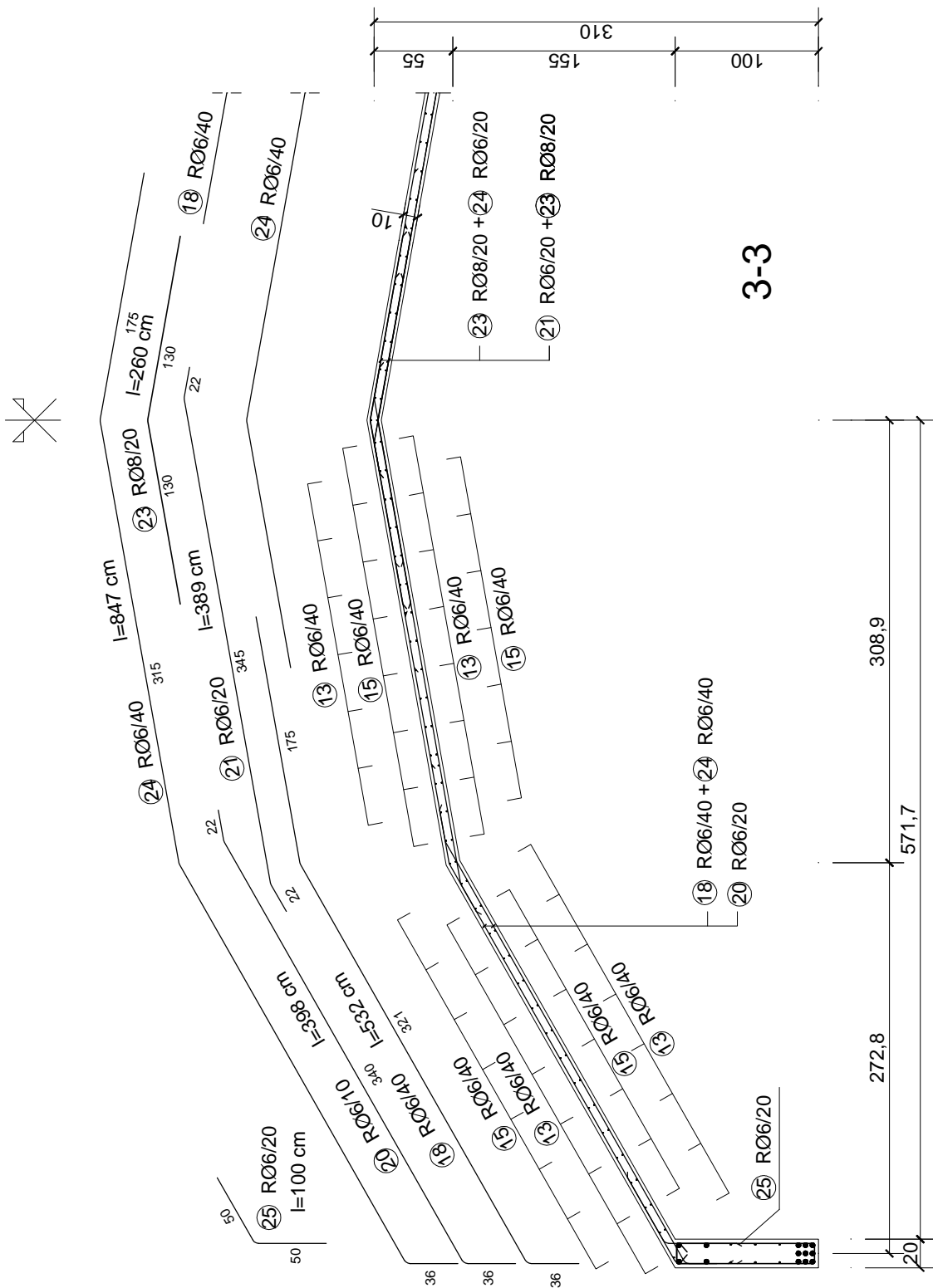


Slika P.9. Plan armature poliedarske ljuške - presek 1-1



Slika P.10. Plan armature poliedarske ljuške - presek 2-2





Slika P.11. Plan armature poliedarske ljuske - presek 3-3