



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



Борис Антић

Теорија реалног интегрисаног мерила хармоника

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Нови Сад, 2013



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА
МЕРНИ СИСТЕМИ

ТЕОРИЈА РЕАЛНОГ ИНТЕГРИСАНОГ МЕРИЛА ХАРМОНИКА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ментор: Проф. др Владимир Вујичић

Кандидат: мр Борис Антић

Нови Сад, март 2013. године



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:			
Идентификациони број, ИБР:			
Тип документације, ТД:	Монографска публикација		
Тип записа, ТЗ:	Текстуални штампани материјал		
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација		
Аутор, АУ:	мр Борис Антић		
Ментор, МН:	Проф. др Владимир Вујичић		
Наслов рада, НР:	Теорија реалног интегрисаног мерила хармоника		
Језик публикације, ЈП:	Српски		
Језик извода, ЈИ:	Српски		
Земља публиковања, ЗП:	Српски		
Уже географско подручје, УГП:	Српски		
Година, ГО:	2013.		
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринт		
Место и адреса, МА:	Нови Сад, Србија		
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страница/цитата/табела/слика/графика/прилога)	6 поглавља, 112 страна, 43 цитата, 7 табела, 39 слика, 265 једначина и израза и 5 прилога		
Научна област, НО:	Електротехника		
Научна дисциплина, НД:	Електрична мерења		
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Стохастичко мерење, електрична снага, електрична енергија, тачност, прецизност, Фуријеова трансформација		
УДК			
Чува се, ЧУ:	У Библиотеци ФТН, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад		
Важна напомена, ВН:			
Извод, ИЗ:	Један од најважнијих параметара квалитета електричне енергије у дистрибутивној мрежи је хармонијски састав напонских и струјних сигнала. У дисертацији је разматрано интегрисано мерило хармоника, на принципу стохастичке резонанце. Уопштење постојећег теоријског модела рада мерила, остварено је укидањем појединих претпоставки о идеализованим условима рада: идеални интервали мерења, позната и непроменљива основна учестаност, идеалне дитерске секвенце. На основу теоријске анализе, симулација и практичних мерења, дате су процене реда величине за сваку од наведених грешака. На крају је дато шест препорука за модификацију хардвера и начине обраде резултата мерења, које могу значајно побољшати метролошке перформансе будућих генерација ових мерила.		
Датум прихватања теме, ДП:	31. avgust 2005		
Датум одбране, ДО:			
Чланови комисије, КО:	Председник:	др Иван Жупунски	Потпис ментора
	Члан:	др Драган Ковачевић	
	Члан:	др Слободан Милованчев	
	Члан:	др Зоран Митровић	
	Члан, ментор:	др Владимир Вујичић	



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monographyc publication
Type of record, TR :	Word printed record
Contents code, CC :	PhD Thesis
Author, AU :	M.Sc. Boris Antić
Mentor, MN :	PhD Vladimir Vujičić
Title, TI :	Theory of the Real Integrated Harmonic Instrument
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian
Country of publication, CP :	Serbian
Locality of publication, LP :	Serbian
Publication year, PY :	2013
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	Novi Sad, Serbia
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	6 chapters, 112 pages, 43 references, 7 tables, 39 figures, 265 equations and 5 appendixes
Scientific field, SF :	Electrical engineering
Scientific discipline, SD :	Electrical measurements
Subject/Key words, S/KW :	Stochastic measurements, electrical power, electrical energy, accuracy, precision, Fourier's transform
UC	
Holding data, HD :	Library of the Faculty of Technical Sciences, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6
Note, N :	
Abstract, AB :	One of the most important power quality indicators in power grids is the harmonic composition of voltage and current signals. In this thesis an integrated harmonic instrument has been considered, which operates on the principle of the stochastic resonance. Generalization of the existing theoretical model of the instrument was realized by terminating several idealistic assumptions: perfect measurement intervals, known and stable fundamental frequency, ideal dithering sequences. Based on the performed theoretical analysis, simulations and practical measurements, estimates have been given for each of the measurement error sources. Finally, six recommendations were given for the modification of the hardware and the results processing in order to achieve significantly better metrological performances in future generations of this instrument.
Accepted by the Scientific Board on, ASB :	August 31 st , 2005
Defended on, DE :	
Defending Board, DB :	
President:	PhD Ivan Župunski
Member:	PhD Dragan Kovačević
Member:	PhD Slobodan Milovančev
Member:	PhD Zoran Mitrović
Member, Menthor:	PhD Vladimir Vujičić
	Menthor's signature

Sadržaj

Skraćenice, definicije i oznake	3
Skraćenice	3
Definicije osnovnih pojmova	3
Oznake.....	4
1. Uvod.....	7
1.1. Postavka problema doktorske disertacije	8
2. Problem merenja kvaliteta električne energije u elektroenergetskoj mreži.....	10
2.1. Određivanje harmonijskog sastava signala poznate osnovne učestanosti	13
2.2. Stabilnost učestanosti	14
2.3. Alternativni pristupi.....	15
3. Stohastičko integrisano merilo harmonika	17
3.1. Praktične izvedbe uređaja.....	19
3.2. Računanje nekih parametara kvaliteta električne energije na osnovu izmerenih vrednosti harmonika	21
4. Novi teorijski model rada integrisanog merila harmonika	25
4.1. Teorijska tačnost merila prema novom modelu i izvori sistematskih grešaka	28
4.2. Greške koje potiču od konstrukcionih karakteristika instrumenta	29
4.3. Merenje sa promenljivim brojem odmeraka po periodi	30
4.4. Merenje nad intervalom koji nije celobrojan umnožak periode osnovnog harmonika	31
4.5. Merenje nad signalima kod kojih osnovna učestanost odstupa od nominalne vrednosti	38
4.5.1. Greške smicanja spektra.....	39
4.5.2. Rekonstrukcija stvarnih vrednosti harmonika.....	41
4.5.3. Rezultati simulacija	44
4.5.4. Rekonstrukcija stvarnog harmonijskog sastava	44
4.5.5. Provera teorijskog koncepta u praksi	48
4.5.6. Generalizacija problema.....	50
4.6. Merenje harmonika upotrebom ditserske sekvence konačne dužine	52
4.6.1. Uticaj konačne dužine ditserske sekvence na tačnost merenja.....	55
4.6.2. Uticaj periodičnosti ditserske funkcije na tačnost merenja.....	57
4.7. Slučajna greška i teorijska preciznost merila prema novom modelu	59
5. Diskusija.....	61
5.1. Redovi veličine i mogućnosti korekcije greške neujednačenog odmeravanja i greške merenja nad intervalom koji je različit od nazivne periode	61

5.2. Red veličine i mogućnost korekcije greške smicanja spektra	63
5.3. Red veličine i mogućnosti korekcije greške konačnih deterskih sekvenci	66
5.4. Predlozi za poboljšanje konstrukcije instrumenta i načina obrade rezultata merenja	67
6. Zaključak	68
Dodatak A – Izvođenje teorijskog izraza za izlaznu funkciju SAADK-2G	70
A.1. Merenje u kontinualnom vremenu	72
A.2. Merenje na osnovu diskretnih vremenskih odmeraka	74
A.3. Slučaj kada je $f_1(t)$ deterministička transformacija $g(f_2(t))$	76
Dodatak B – Izvođenje izraza za elemente matrice rezidualnih koeficijenata	77
B.1. Izračunavanje $C_k^{(\hat{a}_m)}$	78
B.2. Izračunavanje $S_k^{(\hat{a}_m)}$	80
B.2. Izračunavanje $C_k^{(\hat{b}_m)}$	83
B.2. Izračunavanje $S_k^{(\hat{b}_m)}$	85
Dodatak C – Jakobijev iterativni postupak za rešavanje sistema jednačina.....	87
C.1. Algoritam.....	87
C.2. Konvergencija postupka	89
Dodatak D – Izvođenje izraza za rezidualne koeficijente nad intervalima merenja različitim od jedne periode	90
D.1. Slučaj kada se meri nad više celih perioda.....	90
D.2. Slučaj kada se meri nad neparnim brojem poluperioda	91
D.2.1. Izračunavanje $C_k^{(\hat{a}_n)}$	91
D.2.2. Izračunavanje $S_k^{(\hat{a}_n)}$	94
D.2.3. Izračunavanje $C_k^{(\hat{b}_n)}$	97
D.2.4. Izračunavanje $S_k^{(\hat{b}_n)}$	99
Dodatak E – Rezultati simulacija	101
E.1. Merenje nad jednom nazivnom periodom osnovnog harmonika.....	102
E.2. Merenje nad više nazivnih perioda osnovnog harmonika	105
E.3. Merenje nad neparnim brojem poluperioda osnovnog harmonika	107
Literatura.....	109

Skraćenice, definicije i oznake

Skraćenice

ASIC	-	<i>engl.</i> Application Specific Integrated Circuit / namensko integrisano kolo
DDM	-	Dijagonalno dominantna matrica
DFT	-	<i>engl.</i> Discrete Fourier Transform / diskretna Furijeova transformacija
DSP	-	<i>engl.</i> Digital Signal Processor / digitalni procesor signala
EEPROM	-	<i>engl.</i> Electrically Erasable Programmable Read-Only Memory / električnim putem izbrisiva programabilna statička memorija
FT	-	Furijeova transformacija
FFT	-	<i>engl.</i> Fast Fourier Transform / brza Furijeova transformacija
FPGA	-	<i>engl.</i> Field-Programmable Gate Array / Električnim poljem programabilna matrica kapija
LFSR		<i>engl.</i> Linear Feedback Shift Register / Pomerajući registar sa linearnom povratom spregom
THD	-	<i>engl.</i> Total Harmonic Distortion / Faktor ukupnog harmonijskog izobličenja

Definicije osnovnih pojmova

Signal	-	Funkcija koja prenosi informaciju o ponašanju ili osobinama nekog fenomena, kao npr. električnog napona ili jačine električne struje.
Perioda signala	-	Najmanji vremenski interval T , koji se vezuje za neki periodičan signal $x(t)$, takav da je $x(t + T) = x(t)$ za svako t .
Spektar signala	-	Grafička reprezentacija zavisnosti signala od učestanosti.
Spektralna komponenta	-	Uređen par (amplituda, faza) ili (kosinusna, sinusna komponenta) koji odgovara tačno jednoj učestanosti u spektru nekog signala.
Osnovna učestanost	-	Recipročna vrednost periode signala. Ujedno je i najniža učestanost u spektru periodičnog signala.
Harmonik	-	ili „talas“ je spektralna komponenta signala, koja odgovara celobrojnom umnošku osnovne učestanosti (recipročne vrednosti periode). Celobrojan umnožak definiše red harmonika. Harmonik se karakteriše uređenom trojkom (učestanost, amplituda, faza) ili (učestanost, kosinusna, sinusna komponenta). Ponekad se umesto parametra „učestanost“ koristi samo celobrojni red harmonika, posebno kada je vrednost osnovne učestanosti poznata ili se podrazumeva.

Osnovni harmonik	- spektralna komponenta signala na najnižoj (osnovnoj) učestanosti, koja se označava rednim brojem 1.
Pseudoharmonik	- Uređena trojka (učestanost, amplituda i faza) ili (učestanost, kosinusna, sinusna komponenta) u frekvencijskoj reprezentaciji merenog signala, čije se vrednosti i/ili položaj na frekvencijskoj osi ne poklapaju sa tačnim vrednostima i stvarnim položajem harmonika (bar jedan od tri elementa uređene trojke je netačan).
Harmonijski sastav	- Skup svih uređenih trojki (učestanost, amplituda, faza) ili (učestanost, kosinusna, sinusna komponenta), kojima se u potpunosti može reprezentovati neki signal u frekvencijskom domenu.
Merenje	- Postupak određivanja intervala u kome se, sa određenom verovatnoćom, nalazi brojna vrednost neke fizičke veličine, i njeno dovođenje u vezu sa dogovorenom ili opredmećenom vrednošću te fizičke veličine.
Rezultat merenja	- Interval brojnih vrednosti za koje se, sa određenom verovatnoćom, može tvrditi da obuhvataju stvarnu brojnu vrednost fizičke veličine.
Greška merenja	- Razlika stvarne brojne vrednosti fizičke veličine i brojne vrednosti te veličine određene u postupku merenja.
Pouzdanost merenja	- Verovatnoća sa kojom se može tvrditi da rezultat merenja sadrži stvarnu vrednost merene fizičke veličine.
Uticajna veličina	- Fizička veličina koja se ne meri ali utiče na rezultat, grešku ili pouzdanost merenja.
Merilo (merni instrument)	- Uređaj pomoću koga se obavlja merenje neke fizičke veličine.
Analizator spektra	- Uređaj koji meri spektralne komponente (harmonijski sastav) jednog ili više signala nad kontinualnim intervalom učestanosti.
Merilo harmonika	- Uređaj pomoću koga se određuju spektralne komponente (harmonijski sastav) jednog ili više signala nad diskretnim skupom učestanosti. Ovaj diskretan skup učestanosti, najčešće odgovara pretpostavljenim položajima harmonika datog signala i , za periodične signale, određen je celobrojnim umnošcima osnovne učestansoti.

Oznake

Oznaka	Naziv	Jedinica
A	Matrica rezidualnih koeficijenata	-
a_m	Kosinusni koeficijent m -tog harmonika merenog signala	V
b_m	Sinusni koeficijent m -tog harmonika merenog signala	V
\hat{a}_m	Kosinusni koeficijent m -tog pseudoharmonika	V

\hat{b}_m	Sinusni koeficijent m -tog pseudoharmonika	V
c_m	Kosinusni koeficijent m -tog harmonika strujnog signala	A
$C_k^{(\hat{a}_m)}$	Rezidualni kosinusni koeficijent uz k -tu komponentu kosinusnog koeficijenta a_m m -tog harmonika	-
$C_k^{(\hat{b}_m)}$	Rezidualni kosinusni koeficijent uz k -tu komponentu sinusnog koeficijenta b_m m -tog harmonika	-
d_m	Sinusni koeficijent m -tog harmonika strujnog signala	A
E	Jedinična matrica	-
f	Učestanost osnovnog harmonika merenog signala	Hz
\bar{f}	Srednja vrednost učestanosti	Hz
f_0	Nominalna (pretpostavljena) učestanost osnovnog harmonika	Hz
f_{h1}	Učestanost osnovnog harmonika deterskog signala $h_1(t)$	Hz
f_{h2}	Učestanost osnovnog harmonika deterskog signala $h_2(t)$	Hz
f_s	Učestanost odmeravanja	Hz
Δf	Razlika stvarne i nominalne vrednosti učestanosti osnovnog harmonika ($f - f_0$)	Hz
g	Referentni napon dvobitnog A/D konvertora	V
G_{ab}	Apsolutna greška merenja koeficijenta a_m ili koeficijenta b_m bez obzira na red harmonika m	V
G_x	Apsolutna greška određivanja veličine x	[x]
H_m	Amplituda m -tog harmonika prizvoljnog ulaznog signala	V (A)
$h_{1,2}(t)$	Diterski pseudoslučajan signal	V
i_0	Struja kroz nulti provodnik (zemljovodno uže)	A
i_R, i_S, i_T	Fazne struje	A
I_m	Amplituda m -tog harmonika strujnog signala	A
K	Broj perioda nad kojima se obavlja merenje	-
M	Broj harmonika koji se meri	-
M_1	Broj harmonika kojim se sa odabranom tačnošću prezentuje deterski signal $h_1(t)$	-
M_2	Broj harmonika kojim se sa odabranom tačnošću prezentuje deterski signal $h_2(t)$	-
$m_{1,2}$	Broj bita A/D konvertora ili memorijskog bloka	-
N	Broj odmeraka u toku celog intervala merenja	-
$N^?$	Broj odmeraka po periodu	1/perioda
N_1	Dužina deterske sekvence h_1	-
N_2	Dužina deterske sekvence h_2	-
$q_{1,2}$	Kvant konvertora	V
P	Aktivna snaga	W
P_m	Snaga m -tog harmonika	W
Q	Reaktivna snaga	VAr
R	Opseg A/D konvertora	V
S	Prividna snaga	VA
$S_k^{(\hat{a}_m)}$	Rezidualni sinusni koeficijent uz k -tu komponentu kosinusnog koeficijenta a_m m -tog harmonika	-
$S_k^{(\hat{b}_m)}$	Rezidualni sinusni koeficijent uz k -tu komponentu sinusnog koeficijenta b_m m -tog harmonika	-
T	Perioda osnovnog harmonika merenog signala	s
T_0	Nominalna (pretpostavljena) perioda osnovnog harmonika	s

T_{h1}	Perioda diteskog signala $h_1(t)$	s
T_{h2}	Perioda diteskog signala $h_2(t)$	s
t_1	Početni trenutak intervala merenja	s
t_2	Krajnji trenutak intervala merenja	s
t_n	n -ti trenutak odmeravanja merenog signala	s
THD_P	engl. Total Harmonic Distortion / Faktor ukupnog harmonijskog izobličenja u odnosu na snagu harmonika	-
THD_U	engl. Total Harmonic Distortion / Faktor ukupnog harmonijskog izobličenja u odnosu na efektivne vrednosti harmonika	-
u_R, u_S, u_T	fazni naponi	V
U_m	Efektivna vrednost amplitude m -tog harmonika naponskog signala	V
U_{nom}	Nazivna (nominalna) efektivna vrednost napona u elektrodistributivnoj mreži	V
$y(t)$	Mereni signal	V (A)
α_p	Kosinusni koeficijent p -te komponente razvoja ditedskog signala $h_1(t)$ u trigonometrijski polinom	V
β_p	Sinusni koeficijent p -te komponente razvoja ditedskog signala $h_1(t)$ u trigonometrijski polinom	V
Γ_x	Relativna greška određivanja veličine x	-
γ_q	Kosinusni koeficijent q -te komponente razvoja fiktivnog ditedskog signala $h_2(t)$ u trigonometrijski polinom	V
δ_q	Sinusni koeficijent q -te komponente razvoja fiktivnog ditedskog signala $h_2(t)$ u trigonometrijski polinom	V
φ_m	Fazni stav m -tog harmonika proizvoljnog ulaznog signala u odnosu na početak merenja	rad
ϕ_m	Fazni stav m -tog harmonika naponskog signala u odnosu na početak merenja	rad
ψ_m	Fazni stav m -tog harmonika strujnog signala u odnosu na početak merenja	rad
$\Psi_{1,2}$	Izlazi D/A konvertora	V
$\bar{\Psi}$	Pokazivanje merila harmonika	V ²

1. Uvod

Značaj merenja indikatora kvaliteta električne energije¹ u elektrodistributivnoj mreži je problem koji je prepoznat i dobro proučen još od pre nekoliko decenija od strane teoretičara elektroenergetskih sistema. Pokazuje se da su, uprkos nastojanjima proizvođača električne energije, režimi rada sve većeg broja i sve složenijih tipova potrošača uslovlili izobličenja naponskih i strujnih signala. To jednim delom nepovoljno utiče na performanse pojedinih uređaja, a drugim delom otežava kontrolu i naplatu električne energije. U ekstremnim slučajevima, izobličenja signala mogu biti takva da dovedu čak i do potpunog prekida u isporuci električne energije. U indikatore kvaliteta električne energije u elektrodistributivnim mrežama danas se najčešće ubrajaju stabilnost učestanosti, faktor ukupnog harmonijskog izobličenja (*THD*), ukupan harmonijski sastav napona i struja, kao i tranzijenti napona i struja u svakoj od faza.

U praksi se obično razlikuju dve osnovne situacije kod kojih parametri elektrodistributivne mreže mogu odstupiti od projektovanih vrednosti:

- kratkotrajna, ali značajna kolebanja, koja su posledica velikih promena u opterećenju sistema i
- dugotrajna, ali po pravilu manja kolebanja, koja su posledica stalno prisutnog velikog boja manjih izvora smetnji u distributivnoj mreži.

Uređaji kojima se ispituje kvalitet električne energije moraju biti u mogućnosti da mere značajan broj harmonika, daleko iznad nazivne učestanosti napona napajanja. Ovakvi uređaji zovu se merila kvaliteta električne energije (engl. *power quality meter*). Ukoliko uređaj obavlja samo analizu spektra signala u mreži, onda se on naziva merilo harmonika. Tipično trofazno merilo harmonika analizira tri fazna napona u_R , u_S i u_T , i četiri struje i_0 , i_R , i_S , i_T i za svaku ovu veličinu, određuje njen spektralni sastav u vidu amplituda i faza ili sinusnih i kosinusnih komponenti pojedinih harmonika do reda M .

Na osnovu izmerenih vrednosti harmonika napona i struja formira se parametar poznat kao faktor ukupnog harmonijskog izobličenja u oznaci *THD*. Striktno gledano, *THD* je definisan kao količnik sume snaga svih viših harmonika (reda većeg od 1) i snage osnovnog harmonika, kao što je dato izrazom 1.1.

$$THD_p = \frac{\sum_{m=2}^M P_m}{P_1} \quad (1.1)$$

Značajne vrednosti *THD* faktora ukazuju na nepožene situacije u distributivnoj mreži kao što su pikovi u potrošnji struje, grejanje vodova ili povećani reaktivni gubici potrošača.

¹ Prema anglosaksonskoj literaturi stvaran izraz koji je u upotrebi glasi „power quality“, što zapravo znači kvalitet snage, a ne energije. Međutim, u srpskom jeziku je češće u upotrebi izraz „kvalitet električne energije“. Kako energija predstavlja integral angažovane snage po vremenu, jasno je da postoji direktna veza između kvaliteta ove dve veličine u elektroenergetskoj mreži. Prema autoru ove disertacije, anglosaksonski termin je korektivniji, jer odslikava stvarnu prirodu parametara koji se mere, a koji karakterišu „kvalitet“. Ipak, ovde će u upotrebi biti izraz „kvalitet električne energije“, kako se eksperti iz oblasti energetskih sistema ne bi zbunjivali nestandardnom srpskom terminologijom.

U merenjima koja se zasnivaju samo na amplitudama pojedinog signala (npr. naponskog), *THD* se može alternativno definisati kao odnos odgovarajućih efektivnih vrednosti svih viših harmonika i osnovnog harmonika (1.2).

$$THD_U = \frac{\sqrt{\sum_{m=2}^M U_m^2}}{U_1} \quad (1.2)$$

Red najvišeg harmonika M koji se meri ranije je obično bio veoma mali (do 16), ali je u novije vreme uočeno da se na osnovu takvih merenja ne dobijaju dovoljno tačne vrednosti *THD* faktora, pa je važećim standardima ovaj broj povećan na 25, a u nekim slučajevima i do 50 ili 100.

Na Katedri za električna merenja Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu razvijeno je nekoliko uređaja za merenje harmonijskog sastava signala u elektrodistributivnoj mreži. Princip rada ovih uređaja zasniva se na primeni stohastičke metode, odnosno diterovanju vremenskih odmeraka merenih signala i potom pogodnoj obradi ovakvih odmeraka [1]. Brojne modifikacije osnovnog uređaja [2], [3] dovele su i do razvoja jednokanalnog [4], a zatim i višekanalnog integrisanog merila harmonika [5]. Integrirano višekanalno merilo harmonika može paralelno da meri do 50 harmonika svih sedam signala od interesa u elektrodistributivnoj mreži ($u_R, u_S, u_T, i_0, i_R, i_S$ i i_T).

1.1. Postavka problema doktorske disertacije

Na osnovu postojećeg teorijskog koncepta, kao i iskustva stečenog razvojem prethodnih generacija uređaja, autori stohastičkog merila harmonika istraživali su primene u kojima su mereni interval i osnovna učestanost striktno definisani (20 ms / 50 Hz) i smatraju se nepromenljivim. Prema postojećem teorijskom modelu [3], ukoliko su ispunjeni navedeni uslovi u pogledu intervala merenja i vrednosti osnovne učestanosti, merilo je tačno, a željena preciznost merila postiže se izborom broja odmeraka signala koji se meri. Naravno, ovakvo merilo se uvek mora kalibrisati kako bi se moglo uvrstiti u hijerarhiju merila postojećeg metrološkog sistema. Kalibracijom se utvrđuje stvarna tačnost merila i ona zavisi od same konstrukcije uređaja, izbora komponenti, ali i od uslova rada, odnosno parametara merenih signala.

Međutim, kada se ovakvo merilo postavi u realan elektrodistributivni sistem, javljaju se odstupanja i greške koje nisu predviđene osnovnim teorijskim modelom, jer su posledica neispunjenosti osnovnih pretpostavki na kojima se zasniva teorijski model, a samim tim i konstrukcija uređaja. Kalibracijom se ovakve greške obično ne mogu ukloniti, često ni ustanoviti, jer je standardan postupak kalibracije takav da uvažava uslove rada za koje je merilo projektovano.

Zadatak ove doktorske disertacije je da ispita ponašanje integrisanog merila harmonika, razvijenog u okviru [5], u realnim uslovima primene, da razvije nov i potpuniji teorijski model koji bi obuhvatio znatno veći broj parametara koji utiču na tačnost merenja, kao i situacije u kojima pojedini parametri odstupaju od nazivnih vrednosti, te da dâ preporuke za

unapređenje performansi merila koje bi mogle dovesti do povećanja njegove tačnosti. Dva aspekta praktične realizacije i uslova primene merila harmonika su od posebnog značaja:

1. situacija u kojoj stvarna učestanost signala u elektrodistributivnoj mreži, a samim tim i potreban interval merenja odstupaju od nazivnih vrednosti i
2. situacija kada je slučajna sekvenca, pomoću koje se diteruje odgovarajuća bazisna (referenenta) funkcija, konačne dužine, pa samim tim i periodična.

U disertaciji je prvo analiziran opšti problem merenja harmonika u elektrodistributivnoj mreži, dat je pregled najvažnijih standarda koji se odnose na kvalitet električne energije i opisani su različiti alternativni pristupi. Potom je objašnjen princip rada i mogućnosti integrisanog stohastičkog merila harmonika i uvedene su definicije svih pojmova. U glavnom delu disertacije predstavljen je nov teorijski modela rada uređaja u realnim uslovima i dat je pregled slučajnih i sistematskih grešaka merila, kao i njihovih uzroka. Na osnovu obavljenih teorijskih izvođenja, rezultata simulacija i merenja data je diskusija o svim praktičnim aspektima primene i doneti su zaključci o mogućim unapređenjima koja bi mogla biti uvedena u narednim generacijama merila. Radi lakšeg i konciznijeg praćenja izložene materije, sva duža izvođenja, posebni matematički postupci i rezultati svih simulacija izdvojeni su na kraju disertacije u dodacima A – E.

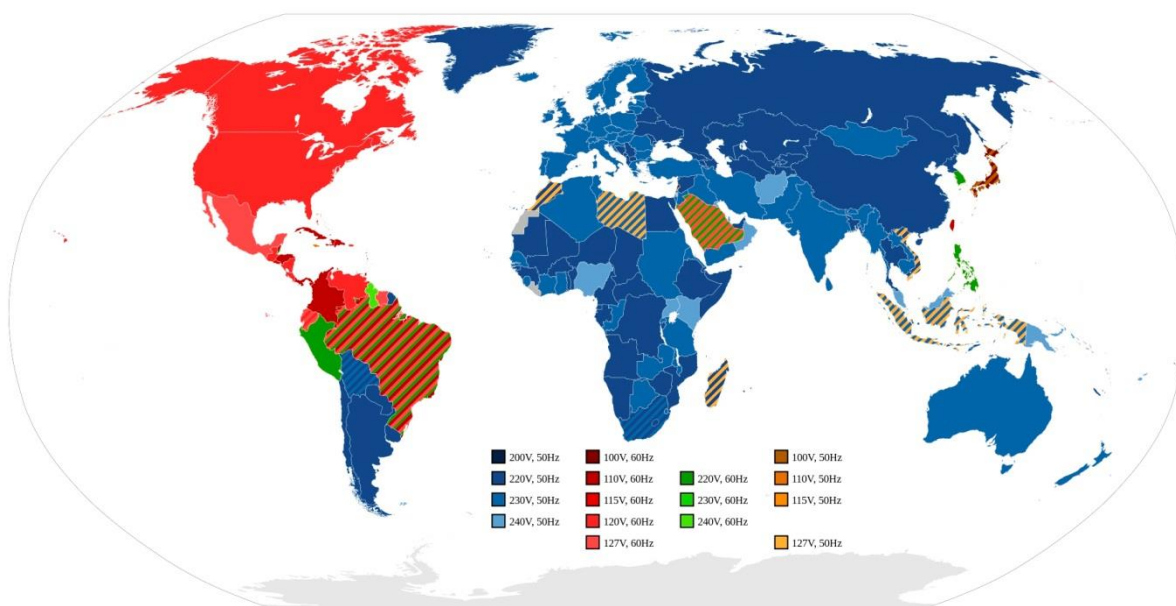
2. Problem merenja kvaliteta električne energije u elektroenergetskoj mreži

Ekonomski značaj koncepta kvaliteta električne energije na industrijski sektor [6], [7], posebno njegov uticaj na performanse savremenih elektronskih uređaja [8], i kvalitet života potrošača [9], predmet su višegodišnje diskusije eksperata iz oblasti elektroenergetskih sistema.

Potreba za sve striktnijom kontrolom „zagađenih“ elektrodistributivnih mreža dovela je do novih izazova i ograničenja vezanih za merenja [10], [11], a koja uključuju česta ili kontinualna ekonomična merenja pojedinih parametara. U Evropi je kvalitet električne energije opisan Evropskom normom EN50160 [12], prema kojoj analiza kvaliteta obuhvata sledeće osobine napona:

- naponski propadi i prekidi,
- naponska kolebanja,
- harmonici i međuharmonici,
- prelazni prenaponi,
- talasnost,
- tranzijentni prenaponi,
- naponska asimetrija,
- promene osnovne učestanosti mreže,
- prisustvo jednosmernih komponenti,
- prisustvo signalnih napona.

Prema EN50160, nazivna ili nominalna učestanost napona napajanja je 50 Hz. Ovo je slučaj i u većini zemalja Afrike, Azije, Australije i Okeanije, dok u SAD, Kanadi i Japanu i najvećem delu Latinske Amerike ona iznosi 60 Hz (slika S.1.1) [13].



Slika S.2.1. Nominalne vredosti učestanosti napona napajanja u pojedinim zemljama sveta

Pri normalnim uslovima 10-sekundna srednja vrednost osnovne učestanosti u nekoj mreži mora biti u sledećim opsezima:

- kod mreža povezanih sa elektroenergetskim sistemom: 50 Hz \pm 1 % (tj. 49,5 Hz do 50,5 Hz), u 95 % slučajeva u toku nedelju dana,
- odnosno: 50 Hz + 4 % / -6 % (tj. 47 Hz do 52 Hz) u 100 % slučajeva u toku nedelju dana.

Normiran nazivni napon U_{nom} za niskonaponske javne mreže je:

- za trofazne mreže sa četiri voda: $U_{nom} = 230$ V između faznih vodova i zemljovodnog užeta;
- za trofazne mreže sa tri voda: $U_{nom} = 230$ V između faznih vodova.

Pri normalnim uslovima, bez uzimanja u obzir prekida u napajanju, 95 % 10-minutnih srednjih vrednosti efektivne vrednosti napona svakog nedeljnog intervala (bilo kog) mora biti u opsegu: $U_{nom} \pm 10$ %. Preostalih 5 % 10-minutnih srednjih vrednosti efektivne vrednosti napona svakog nedeljnog intervala (bilo kog) mora biti u opsegu: $U_{nom} + 10$ % / -15 % (tj. maksimalno 253 V, a minimalno: 199,5 V).

U slučajevima naglih promena u opterećenju mreže, napon u mreži ostupa za oko 5% od nazivnog. Međutim, pod određenim uslovima mogu se više puta dnevno pojaviti kratkotrajne brze promene napona do 10 % U_{nom} . Promena napona koja dovodi do pada napona ispod 1 % od U_{nom} , smatra se prekidom napajanja.

Pri normalnim pogonskim uslovima, dugotrajna jačina treperenja (engl. *flicker*) usled promena napona ne sme tokom bilo koje nedelje preći vrednost: $P_{lt} = 1$.

Očekivani godišnji broj propada napona može pri normalnim uslovima biti između nekoliko desetina do hiljadu. Većina propada napona je kraća od 1 s, i dubine propada manje su od 60 % U_n . Međutim pojedini propadi mogu biti dužeg trajanja i veće dubine propada. U nekim se mrežama vrlo čestomogu javiti propadi napona dubine između 10 % i 15 % U_{nom} .

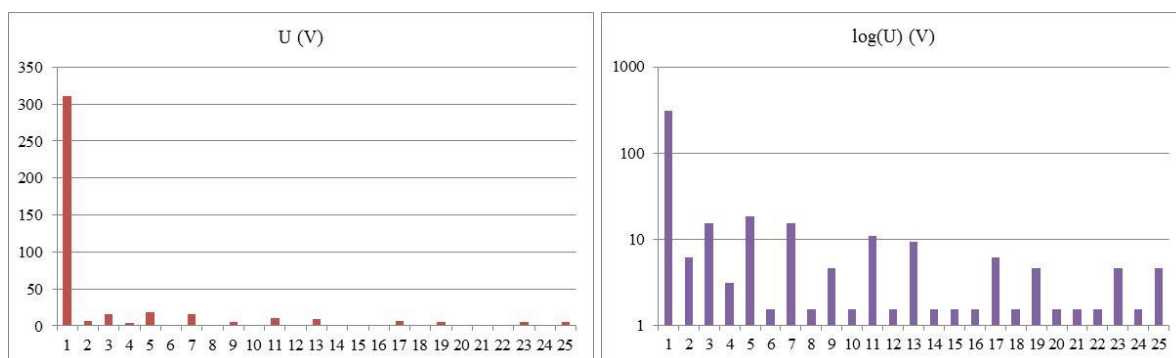
Pri normalnim uslovima kratki prekidi napona napajanja javljaju se od nekoliko desetina puta, do više stotina puta godišnje. Trajanje oko 70 % kratkih prekida napajanja mora biti kraće od 1 sekunde. Pri normalnim uslovima 10-minuta srednja vrednost efektivne vrednosti inverzne komponente napona ne sme, u 95 % slučajeva srednjih vrednosti svakog nedeljnog intervala, prelaziti 2 % odgovarajuće direktne komponente. U nekim mrežama s postrojenjima potrošača, koja su delimično priključena jednofazno ili dvofazno, mogu se pojaviti na trofaznim mestima predaje asimetrije do 3 %. EN50160 sadrži samo vrednosti za inverznu komponentu, jer je samo ona od značaja za moguće smetnje aparatima priključenim na mrežu. Tranzijentni prenaponi uobičajeno ne prelaze vršnu vrednost od 6 kV. Međutim, povremeno se pojavljuju i više vrednosti. Vremena porasta su u širokom opsegu: od milisekunde, do znatno kraće od mikrosekunde.

Pri normalnim uslovima 95 % 10-minutnih srednjih vrijednosti efektivne vrijednosti napona svakog pojedinog višeg harmonika ne sme ni u jednom nedeljnom intervalu prelaziti vrednost iz tablice T.2.1. U tabeli su date vrednosti do 25-tog harmonika.

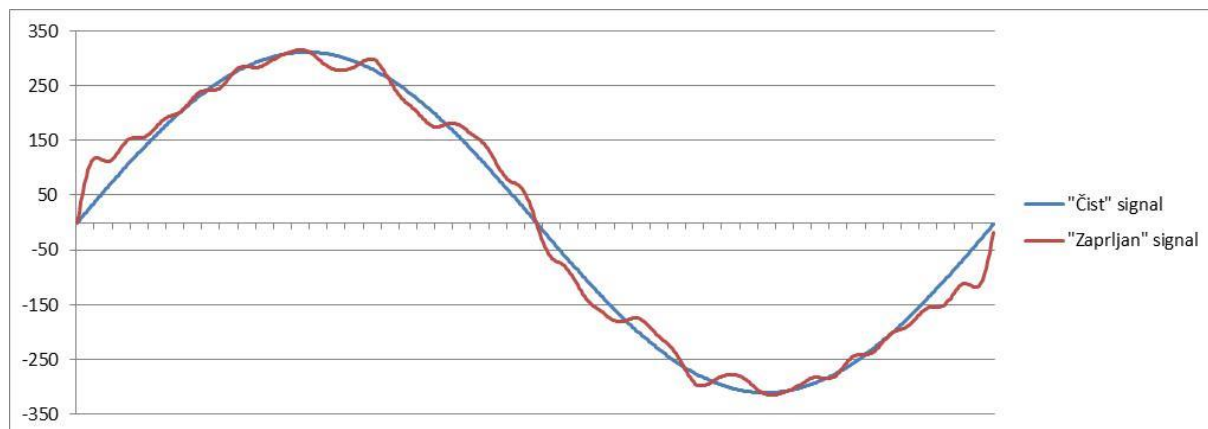
Tabela T.2.1. Maksimalne dozvoljene vrednosti pojedinih harmonika u distributivnoj mreži prema EN50160

Neparni harmonici		Parni harmonici	
Redni broj harmonika	Napon harmonika u % U_{nom}	Redni broj harmonika	Napon harmonika u % U_{nom}
3	5,0	2	2,0
5	6,0	4	1,0
7	5,0	6 do 24	0,5
9	1,5		
11	3,5		
13	3,0		
15	0,5		
17	2,0		
19	1,5		
21	0,5		
23	1,5		
25	1,5		

Vrednosti iz tabele T.2.1 su ilustrovane na slikama S.2.2 i S.2.3.



Slika S.2.2. Upoređenje nazivne vrednosti osnovnog harmonika i maksimalnih dozvoljenih vrednosti viših harmonika naponskih signala prema EN50160 na linearnoj i logaritamskoj osi



Slika S.2.3. Hipotetički izgled jedne periode maksimalno „zagađenog“ signala dozvoljenog prema EN50160, upoređen sa idealnom sinusiodom

Ovde treba napomenuti da su viši harmonici, po pravilu, uvek prisutni u niskonaponskoj mreži (do 1 kV) gde je priključen velik broj potrošača sa prekidačima energetske elektronike,

štedljive sijalice i brojni drugi elektronski uređaji koji generišu više spektralne komponente. Pored toga, harmonici se mogu javiti usled kvarova opreme ili grejanja vodova, a mogu biti i posledica naglih skokova u opterećenju sistema. Ovi viši harmonici ne propagiraju u srednjenaponski deo mreže, jer se energetske transformatori ponašaju kao niskopropusni filtri. Nezavisno od toga, i u srednjenaponskom delu mreže (10 kV do 35 kV) može doći do pojave harmonika, ukoliko postoje odgovarajući srednjenaponski konvertori i AC adapteri (češće se zovu visokonaponski, da bi se napravila razlika u odnosu na niskonaponski deo mreže). Međutim, ovi adapteri su veoma kompleksni, skupi i imaju značajne gabarite, pa se veoma mali broj korisnika odlučuje za njihovo postavljanje. Zato su u srednjenaponskom delu mreže harmonici znatno ređe zastupljeni i spektar im je ograničen. U visokonaponskom delu mreže, pojava harmonika je daleko najređe izražena i pre je rezultat havarijskog stanja u mreži, nego posledica normalne eksploatacije, te stoga ovde neće biti posebno razmatrana.

U ovoj disertaciji biće razmatran isključivo pojam kvaliteta električne energije u niskonaponskoj distributivnoj mreži, odnosno merenja parametara naponskih signala prema EN50160 u situacijama kada se mreža nalazi u normalnom (stacionarnom) režimu, pa interval merenja može trajati bar koliko i perioda signala. Merenja tranzijenata i drugih kratkotrajnih i prelanih pojava u distributivnoj mreži, koje zahtevaju analizu signala u intervalima kraćim od jedne periode, i koja se uglavnom koriste za upravljanje, dijagnostiku i zaštitu, ovde neće biti od analizirana.

2.1. Određivanje harmonijskog sastava signala poznate osnovne učestanosti

Naponski i strujni signali u elektrodistributivnoj mreži nisu ni periodični ni stacionarni, kako bi se očekivalo od zacrtanog modela. Električni potrošači su ti koji diktiraju stvarne vredosti parametara svakog signala, a oni opet neposredno zavise od nepredvidive ljudske aktivnosti. Ipak, u najdužem periodu rada, elektrodistributivna mreža se nalazi u normalnom ili ustaljenom režimu koji karakterišu veoma spore promene u vremenu. U tom režimu, signali se mogu smatrati stacionarnim u užem smislu i periodičnim u odnosu na interval merenja. Ovakvi mereni signali, prema teoremi Vajerštrasa [14], koja je specijalan slučaj Stone-Vajerštrasove teoreme [15], mogu se razviti u trigonometrijski polinom reda M (2.1), sa proizvoljno malom greškom ε , pri čemu greška aproksimacije zavisi samo od izbora reda najvišeg harmonika M .

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^M (a_m \cos 2\pi m f_0 t + b_m \sin 2\pi m f_0 t) \quad (2.1)$$

U izrazu 2.1 $f_0 = 1/T_0$ je nominalna i poznata učestanost osnovnog harmonika signala $y(t)$, a a_m i b_m su koeficijenti razvoja u trigonometrijski polinom, dati Furijeovim obrascima 2.2 i 2.3.

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) \cos \frac{2\pi m t}{T_0} dt, \quad m = 0, \dots, M \quad (2.2)$$

$$b_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) \sin \frac{2\pi m t}{T_0} dt, \quad m = 0, \dots, M \quad (2.3)$$

U teoriji, pronalaženje potrebnog reda harmonika M , koje zadovoljava zadati kriterijum tačnosti aproksimacije nije jednostavan zadatak, ali se u praksi pokazuje da je za zanemarivo malu grešku dovoljno ići do 50-og harmonika, a ponekad i do 100-og. Ovo je u potpunosti u skladu sa EN50160 [12] i predstavlja prirodniji način zadavanja reda najvišeg harmonika koji je potrebno meriti.

Merila harmonika koja svoj rad zasnivaju na pretpostavci o poznatoj vrednosti osnovne učestanosti, jednakoj nominalnoj vrednosti f_0 , mogu se konstruisati pomoću jednostavnog, a samim tim i veoma brzog, pouzdanog i jeftinog hardvera. Ovo je slučaj se većinom uređaja koji koriste diskretnu Furijeovu transformaciju (DFT), brzu Furijeovu transformaciju (FFT) ili neku njihovu modifikaciju [16][17]. Stohastički merni metod opisan u [1]-[3] iskorišćen je u dve verzije integrisanog merila harmonika [4] i [5]. Slična tehnika diterovanja u poslednje vreme često se primenjuje radi popravljavanja performansi A/D konvertora i korekcije njihove greške kvantizacije [18]. U slučaju kada su ispunjene sve pretpostavke teorijskih modela, ovakva merenja karakterisana su visokom tačnošću i predstavljaju direktnu primenu Vajerštrasove teoreme.

2.2. Stabilnost učestanosti

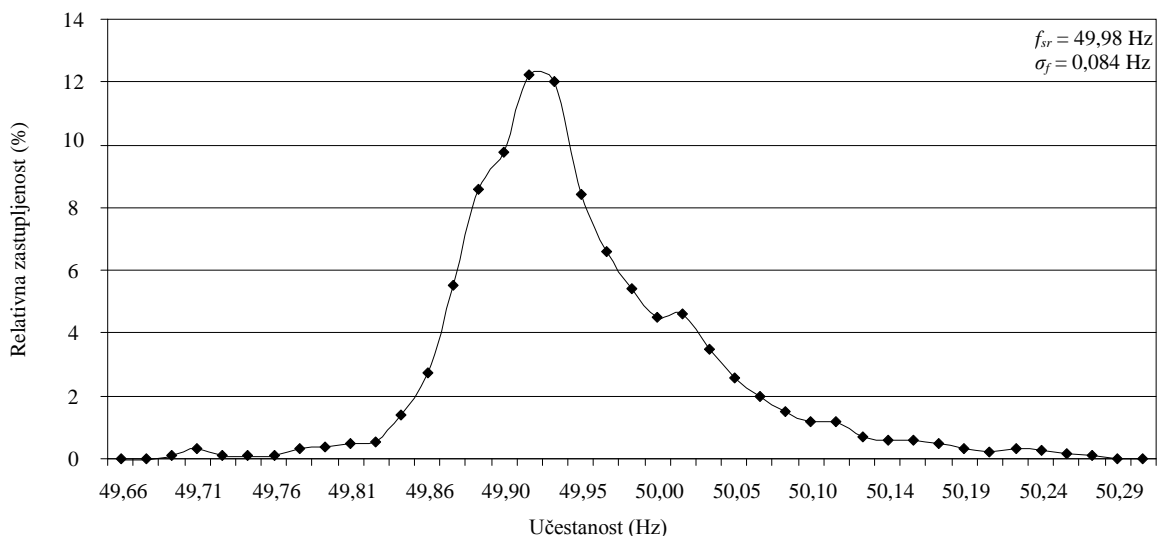
Merenja koja pretpostavljaju poznatu i stabilnu osnovnu učestanost često se opravdavaju činjenicom da je postizanje nominalne učestanosti osnovni princip kome se teži u elektrodistributivnim mrežama, kao i da su granice u kojima se kreću dozvoljena odstupanja učestanosti veoma mala. Definicija i granice stabilnosti učestanosti, kao i uticaj njenih kratkotrajnih odstupanja od nominalne vrednosti date su u [12], [20] i [21]. Ovde će biti prikazani rezultati sličnih analiza sprovedenih u Srbiji pre i posle interkonekcije na evropski energetska sistem [22][23].

Za merenja je upotrebljen instrument VMP20 opisan u [1]. VMP20 ima veoma stabilan oscilator i kvalitetan detektor prolaska kroz nulu koji ne ometa čak ni prisustvo jednosmerne komponente u signalu. U januaru 2001. godine sprovedeno je 30-dnevno merenje sa rezolucijom od 0,1 s ili 5 perioda osnovne učestanosti. Rezultati su prikazani na slici S.2.4 [24]. Izračunate vrednosti standardne devijacije i učestanosti u nebalansiranoj mreži bile su 49,98 Hz i 0,084 Hz.

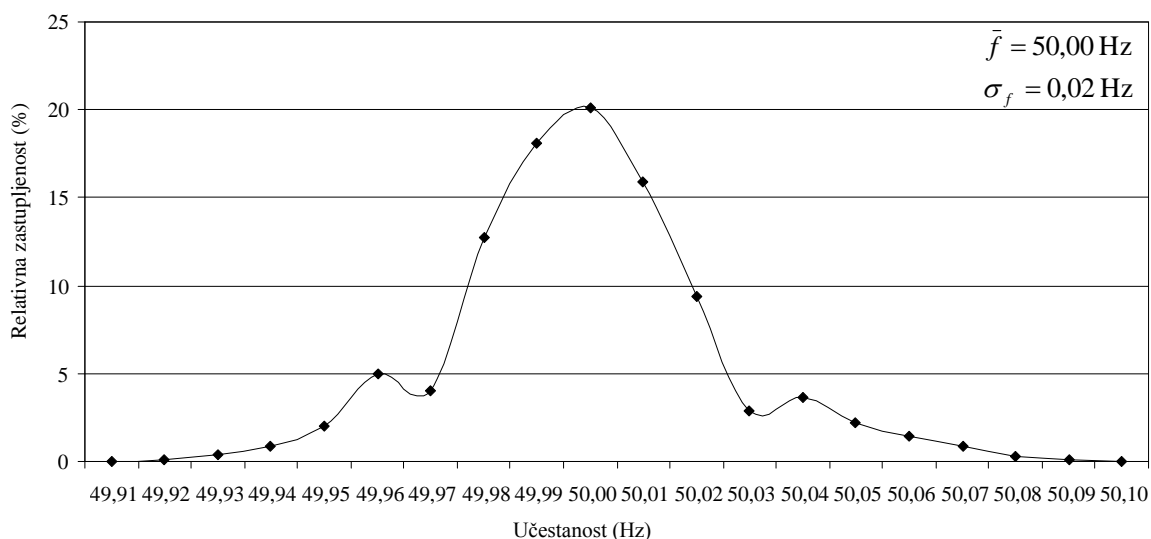
Rezultati drugog merenja sprovedenog 2005. godine, nakon povezivanja na evropski energetska sistem dati su na slici S.2.5 [25]. Srednja vrednost učestanosti popravila se na 50,00 Hz, dok je standardna devijacija opala otprilike četiri puta na vrednost od 0,02 Hz ili 0,04 %.

Prikazani rezultati objašnjavaju zašto se u elektrodistributivnoj mreži, prilikom merenja parametara kao što su efektivna vrednost ili snaga signala, koja koriste usrednjavanje nad većim brojem perioda, učestanost može smatrati stabilnim i poznatim parametrom. Treba međutim naglasiti da se kratkotrajne promene učestanosti ipak dešavaju, pre svega kada dolazi do naglih promena u potrošnji električne energije (reda 10 MW ili više). U [20] i [21] značajna odstupanja učestanosti od nominalne vrednosti opisana su kao veoma kratkotrajne pojave u distributivnim sistemima. Produženo trajanje takvog stanja obično predstavlja indiciju veoma skorog prekida u napajanju električnom energijom, kao posledica nemogućnosti generatora da obezbede dovoljnu količinu energije svim priključenim

potrošačima. Kao što je već rečeno u uvodu, u ovom radu će biti razmatran samo stacionaran režim, pa ovakve situacije neće biti dalje analizirane.



Slika S.2.4. Histogram frekvencije učestanosti u elektrodistributivnom sistemu Srbije u januaru 2001



Slika S.2.5. Histogram frekvencije učestanosti u elektrodistributivnom sistemu Srbije u januaru 2005

2.3. Alternativni pristupi

Rezultati dati u [25] i prikazani na slici S.2.5 ipak ukazuju na to da osnovna učestanost menja svoju vrednost i da je za merenja nad kraćim intervalima, npr. nad samo jednom periodom, potrebno voditi računa o njenoj stvarnoj vrednosti. Primer radi, ako osnovna učestanost odstupa od nominalne vrednosti za samo 0,02 Hz, tada će smicanje učestanosti pedesetog harmonika biti 50 puta veće i iznosiće čak 1 Hz. Tada rezultati merenja više nisu stvarni harmonici signala već pseudoharmonici koji u sebi sadrže i grešku u amplitudi i grešku u poziciji na frekvencijskoj osi.

Kako su DFT i FFT veoma osetljive na varijaciju učestanosti, sve merne metode koje se zasnivaju na ovim transformacijama sadržaće neku od tipičnih grešaka opisanih u [26]. Konstruktorima instrumenata stoje na raspolaganju dve opcije – naknadna obrada rezultata merenja ili konstrukcija adaptivnog instrumenta. Osnovna razlika između ovih pristupa se sastoji u tome što je u prvom slučaju potrebna velika procesorska snaga za obradu velikog broja numeričkih vrednosti, dok je u drugom slučaju potreban znatno skuplji i sofisticiraniji hardver.

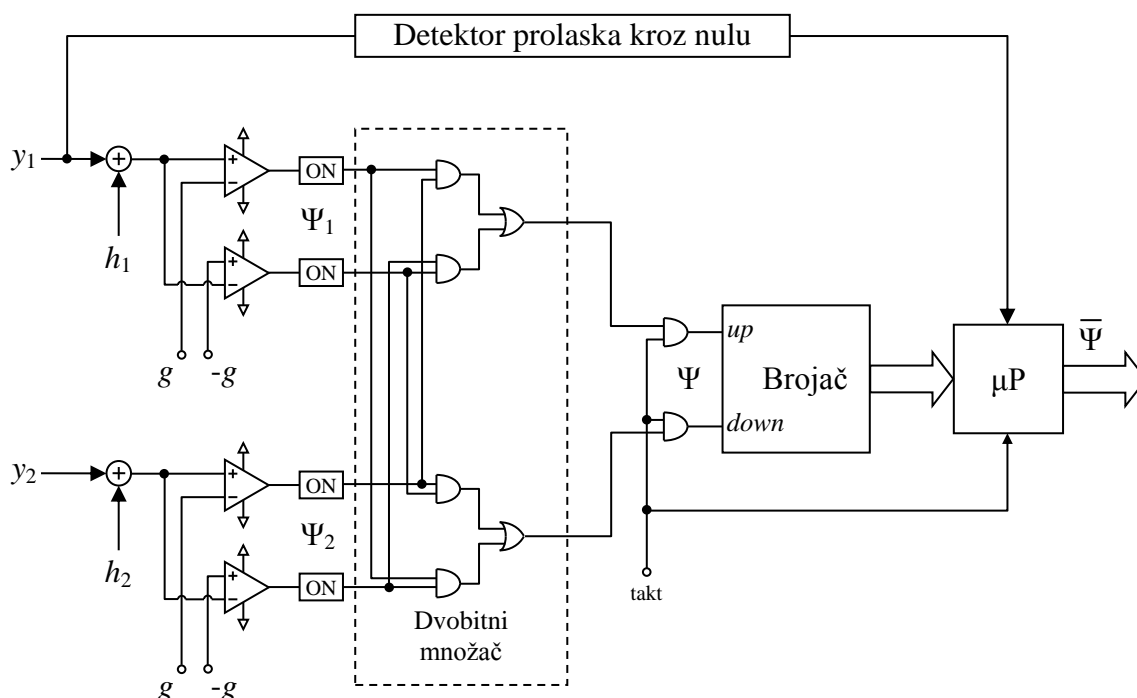
Kod merenja koja se zasnivaju na naknadnoj korekciji rezultata merenja potrebno je oceniti odstupanje učestanosti nezavisnim merenjem i , na osnovu dobijene vrednosti, obaviti korekciju rezultata merenja. Jedan od primera, koji se zasniva na dugotrajnom usrednjavanju, koristi procenu promene učestanosti i uključuje je u račun ocene njenog uticaja na tačnost merenja harmonika dat je u [27]. Ova metoda, osim što zahteva dugotrajna merenja, samo obezbeđuje ocenu greške, ali ne i korekciju samih rezultata merenja. Parcijalno rešenje za merenje nad jednom periodom može se naći u [28], ali ono je ograničeno na slučaj kada je ulazni signal čista sinusoida i ne može biti generalizovan na složeno-periodičan režim.

Druga mogućnost je konstrukcija instrumenta koji bi se automatski adaptirao promenama učestanosti ili na njih ne bi bio osetljiv. Ovakvi instrumenti uključuju metode poput merenja u frekvencijskom domenu [29], upotrebe vejevleta [19], primene tranzijentne analize [17] ili upotrebe termalnih konvetera [30].

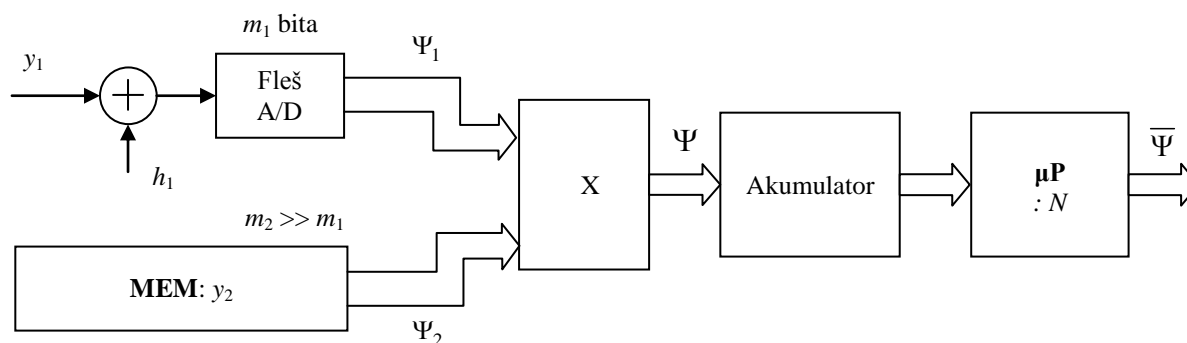
S obzirom da je po svojoj konstrukciji, integrisano merilo harmonika neadaptivan uređaj, u ovoj disertaciji razmatraće se isključivo prvi pristup, koji će ovde biti rešen u najopštijem slučaju.

3. Stohastičko integrisano merilo harmonika

Prvi instrument koji je konstruisan radi merenja harmonika u elektrodistributivnoj mreži, a koji se zasniva na stohastičkoj adicionoj A/D konverziji, bila je generalizacija niskofrekvencijskog merila efektivne vrednosti opisana u [3]. Instrument je bio zasnovan na fiktivnom povećanju broja bita A/D konvertora dodavanjem deterskog, slučajnog, uniformno raspoređenog signala neposredno na ulazu u konvertor. Principijelne šeme dvobitnog i višebitnog konvertora prikazane su na slikama S.3.1 i S.3.2. Ovakvi uređaji imaju samo jedan kanal pomoću koga se može odrediti ili sinusna ili kosinusna komponenta k -tog harmonika ulaznog signala $y_1(t)$.



Slika S.3.1. Šema dvobitnog stohastičkog adicionog A/D konvertora sa dva generatora slučajnog napona



Slika S.3.2. Šema višebitnog stohastičkog adicionog A/D konvertora sa dva generatora slučajnog napona koji može meriti sinusnu ili kosinusnu komponentu na jednoj učestanosti

h_1 je deterski signal ulaznog signala, dok memorijski blok MEM ima fiksnu digitalnu sekvencu diterovane bazisne funkcije $R \cdot \sin(m\omega t) + h_2(t)$ ili $R \cdot \cos(m\omega t) + h_2(t)$, pri čemu je R poznata konstanta obično izabrana tako da bude jednaka opsegu upotrebljenog fleš A/D konvertora.

Da bi merenje šemom sa slike S.3.1 imalo smisla, potrebno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:

$$\begin{aligned} |y_1 = f_1(t)| &\leq 2g = R \\ |y_2 = f_2(t)| &\leq 2g = R \\ |h_i| &\leq g, \quad i = 1,2 \\ p(h_i) &= \frac{1}{g}, \quad i = 1,2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

gde su h_i deterski signali uniformne raspodele sa gustinom verovatnoće $p(h_i)$, a ON - ograničavači napona. Slični uslovi važe i za višebitno merilo harmonika.

Ako su deterski signali odabrani tako da budu međusobno statistički nezavisni, uniformni, da se nalaze u opsegu polovine kvanta odabranog konvertora i da im je srednja vrednost jednaka nuli, tada oni, zbog usrednjavanja, ne utiču na konačan rezultat merenja, koji je dat izrazom 3.2.

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_1(i)y_2(i) \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} y_1(t)y_2(t)dt \stackrel{npr.}{=} \frac{R}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} y_1(t)\cos(m\omega t)dt \quad (3.2)$$

Ako je merni interval celobrojni umnožak periode osnovnog harmonika ulaznog signala, i ako je broj odmeraka po svakoj periodi kontantan ceo broj, tada izlaz instrumenta postaje 3.3.

$$\bar{\Psi} = \frac{R}{KT_0} \int_0^{KT_0} y_1(t)\cos(m\omega t)dt = \frac{R}{T_0} \int_0^{T_0} y_1(t)\cos(m\omega t)dt = \frac{R}{2} \cdot a_m \quad (3.3)$$

gde je a_m koeficijent trigonometrijskog razvoja ulaznog signala $y_1(t)$ koji se nalazi uz kosinusnu komponentu m -tog harmonika i dat je sa 3.4.

$$a_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} y_1(t)\cos(m\omega t)dt, \quad (3.4)$$

Granica greške dvobitnog uređaja data je sa 3.5.

$$G_{a_m} = \frac{1}{g} \sigma_{\bar{\Psi}} = \frac{1}{g} \frac{\sigma_{\Psi}}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{(2g)^2 \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t)f_2(t)|dt - \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t)f_2(t)dt \right]^2}{N}} \quad (3.5)$$

Potpuno konzistentni dokazi o ispravnosti relacija 3.2 i 3.5 prvi put su dati u ovoj disertaciji, a nalaze se u dodatku A.

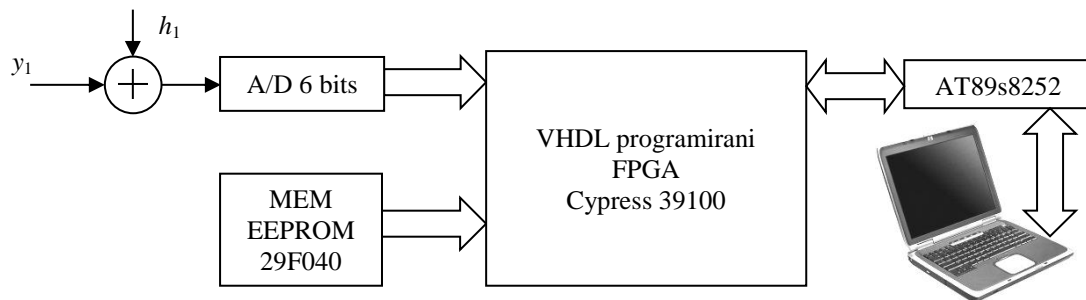
Kod višebitnih merila, greška je data u [3]. Kada je rezolucija memorijskog bloka za bar dva bita veća od rezolucije fleš A/D konvertora, gornja granica greške merenja koeficijenta a_m postaje 3.5.

$$G_{a_m} = \frac{2}{R} \sigma_{\bar{\psi}} \leq \frac{2}{R} \cdot \frac{\sqrt{\frac{q_1^2}{4} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt + \frac{q_2^2}{4} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t) dt + \frac{q_1^2 \cdot q_2^2}{16}}}{\sqrt{N}} \approx \frac{q_1}{\sqrt{2N}} \quad (3.6)$$

pri čemu su q_1 i q_2 kvanti fleš A/D konvertora i memorijskog bloka respektivno. Jasno je da u ovom slučaju merilo ima grešku koja ne zavisi od ni od talasnog oblika ulaznog signala ni od reda harmonika m koji se meri. Dobijanje koeficijenta b_m , koji predstavlja amplitudu sinusne komponente m -tog harmonika, dobija se jednostavnim reprogramiranjem memorijskog bloka i postavljanjem njegovog sadržaja na digitalizovane vrednosti signala $R \cdot \sin(m\omega t) + h_2(t)$. Druga mogućnost je uvođenje hardverskog paralelizma i upotreba jednog bloka sa slike S.3.1 za sinusnu, a drugog za kosinusnu komponentu. Ovaj drugi pristup, iako skuplji, ima mnoge predosti, od kojih su dve najvažnije da su obe komponente dostupne istovremeno i da je vreme potrebno za dobijanje obe komponente prepolovljeno.

3.1. Praktične izvedbe uređaja

Da bi se odredio kompletan spektar ulaznog signala do ramonika reda M , potreban je znatno složeniji hardver, poput onih predloženih u [4] i [5]. U [4] je opisan jednokanalni uređaj koji meri do 8 harmonika jednog ulaznog naponskog signala. On se u potpunosti zasniva na šemi prikazanoj na slici S.3.2, ali koristi paralelan harver za dobijanje 16 sinusnih i kosinusnih komponenti. Na slici S.3.3 data je kompletna šema uređaja.



Slika S.3.3. Blok šema jednokanalnog merila harmonika

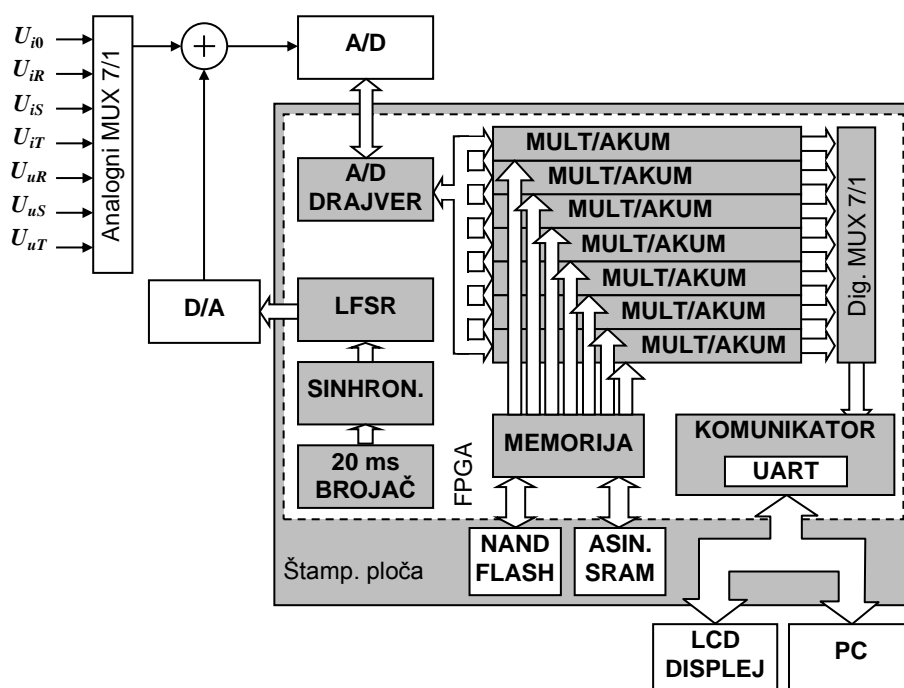
Jednokanalno merilo multipleksira svoj jedini ulaz na 16 različitih hardverskih konfiguracija radi merenja 16 koeficijenata a_m i b_m ($m = 1..8$) od ukupno osam harmonika ulaznog signala. Uređaj pretpostavlja da je učestanost osnovnog harmonika nepromenljiva i da iznosi tačno 50 Hz, kao i da je deterska sekvenca upotrebljena za generisanje bazisnih deterskih funkcija u memorijskom bloku idelana (uniformna, nekorelisana sa ostalim signalima i aperiodična).

Množenje i usrednjavanje (deljenje) implementirani su u FPGA čipu CY39100. Memorijski blok je brzi EEPROM M29F040 kapaciteta 512 Kb. Uređaj nema sopstveni displej, jer bi on znatno povećao cenu uređaja i komplikovao realizaciju. Umesto toga, uređaj je predviđen da komunicira sa eksternim PC ili laptop računarem koji preuzimaju rezultate merenja i prikazuju ih korisniku. Za realizaciju komunikacije sa računarem upotrebljen je Atmelov

procesor AT89s8252. Usko grlo realizovanog hardvera predstavlja zahtev za velikim brojem aritmetičkih operacija u ograničenom intervalu između dva uzastopna odmeka, što je ograničilo merenje na svega 8 harmonika.

Nakon uspešne primene deterskog konvertora u jednokanalnom merilu harmonika i brojnih laboratorijskih testova i analiza, sledeći korak bio je konstrukcija merila sa više ulaznih kanala i znatno većim brojem harmonika. Kako se FPGA pokazao kao optimalno rešenje za realizaciju opisanog hardvera, ideja je bila da se ceo uređaj „spakuje“ u jedan FPGA čip ostavljajući samo A/D i D/A konvertore kao eksterne komponente. Dobre strane FPGA pristupa, u poređenju sa alternativnim rešenjima sa mikroprocesorima i AISC čipovima, su: visok nivo paralelizma, hardverski pajplajning proizvoljne dubine, široko resprostranjena i dobro testirana gotova rešenja za realizaciju podkomponenti, mogućnost provere ispravnosti simulacijom pre implementacije, brz prototajping i znatno niži troškovi implementacije. Neke od mana primene FPGA čipa su niža ukupna brzina u odnosu na ASIC rešenja i znatno kompleksnije debugovanje u odnosu na mikroprocesore. Međutim, sa razvojem FPGA tehnologije njihova brzina sve više raste, a cena sve više opada, pa FPGA pristup postaje veoma primamljiv, posebno u aplikacijama koje imaju veliku računsku kompleksnost.

U [5] je opisano integrisano merilo harmonika koje meri do 50 harmonika svih sedam veličina od interesa u elektrodistributivnoj mreži (tri naponska i tri strujna signala u svakoj od faza trofaznog sistema i struju kroz zemljovodno uže). Blok šema data je naslici S.3.4.



Slika S.3.4. Blok šema sedmokanalnog merila harmonika

Instrument je realizovan početkom 2006. godine. U poređenju sa prethodnom verzijom, ima veći broj ulaznih kanala bez degradacije merne nesigurnosti. Zahvaljujući hardverskom paralelizmu i velikoj brzini obrade, moguće je povećati broj odmeraka N ulaznog signala nad kojima se obavlja merenje. Time se, u skladu sa 3.6, postiže se veća preciznost u kraćem interval merenja. Zbog toga je interval merenja redukovano na trajanje jedne nominalne periode (20 ms). To dalje znači da je ovo integrisano merilo harmonika dovoljno brzo da može zadovoljiti sve potrebe analize kvaliteta električne energije. Rekonfiguracijom ulaznog

modula i promenom sadržaja memorijskog bloka merilo bi se lako moglo podesiti da meri do 350 harmonika jednog ulaznog kanala. Kalibracija uređaja je potvrdila da je merna nesigurnost merenja pojedinačnog harmonika manja od 0,05 % kada su ispunjeni osnovni predulsovi teorijskog modela prema kome je uređaj konstruisan (stabilna učestanost, aperiodičnost i nekorelisanost deterskih sekvenci sa merenim signalom itd.)

Kako je rezolucija merila 16 bita, to znači da sa sedam ulaznih kanala i 50 harmonika, merilo daje na izlazu 2 Bajta x 100 koeficijenata x 7 kanala x 50 perioda = 70 kB mernih podataka u sekundi. Merilo se koristi za određivanje integralnih parametara elektrodistributivne mreže kao što su aktivna, reaktivna i prividna snaga, koji se dobijaju preko izmerenih vrednosti harmonika. Međutim, brzina merenja ukazuje na to da bi sličan uređaj lako mogao da se koristi kao dijagnostički instrument za ustanovljavanje smetnji u okviru jedne nominalne periode.

Izgled konačne realizacije merila dat je na slici S.3.5.



Slika S.3.5. Sedmokanalno integrisano merilo harmonika

3.2. Računanje nekih parametara kvaliteta električne energije na osnovu izmerenih vrednosti harmonika

Na osnovu izmerenih vrednosti koeficijenata a_k i b_k lako se mogu izračunati amplitude i faze odgovarajućih harmonika (izrazi 3.7 i 3.8).

$$H_m = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad m = 0, \dots, M \quad (3.7)$$

$$\varphi_m = -\arctg \frac{b_k}{a_k}, \quad m = 0, \dots, M \quad (3.8)$$

Tada bi ulazni signal bio iskazan relacijom 3.9.

$$y(t) = \sum_{m=0}^M H_m \cos(2\pi m f_0 t + \varphi_m) \quad (3.9)$$

Neka su G_{a_m} i G_{b_m} apsolutne greške merenja koeficijenata a_m i b_m . Da bi se izvele sigurne granice apsolutnih grešaka G_{H_m} i G_{φ_m} veličina H_m i φ_m koristiće se činjenica da je

$$|G_{a_m}| = |G_{b_m}| \stackrel{npr.}{=} |G_{ab}| \neq f(m) \quad (3.10)$$

kao i sledeće tablične transformacione formule za sigurne granice apsolutnih grešaka

$$|G_{f(x)}| \leq |f'(x)| |G_x| \quad (3.11)$$

$$|G_{\sqrt{x}}| \leq \frac{1}{2} \frac{|G_x|}{\sqrt{x}} \quad (3.12)$$

$$|G_{x+y}| \leq |G_x| + |G_y| \quad (3.13)$$

$$|G_{x^2}| \leq 2|x| |G_x| \quad (3.14)$$

$$|G_{x/y}| \leq \frac{1}{|y|} |G_x| + \frac{|x|}{y^2} |G_y| \quad (3.15)$$

Tada su sigurne granice apsolutnih grešaka veličina H_m i φ_m date sa 3.16 i 3.17.

$$\begin{aligned} |G_{H_m}| &= \left| G_{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|G_{a_m^2 + b_m^2}|}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{|G_{a_m^2}|}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} + \frac{1}{2} \frac{|G_{b_m^2}|}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} \leq \\ &\leq \frac{|a_m| |G_{a_m}|}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} + \frac{|b_m| |G_{a_m}|}{\sqrt{a_m^2 + b_m^2}} = \frac{|a_m| + |b_m|}{H_m} |G_{ab}| \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} |G_{\varphi_m}| &= \left| G_{-\arctg \frac{b_m}{a_m}} \right| \leq \frac{1}{1 + \frac{b_m^2}{a_m^2}} \left| G_{\frac{b_m}{a_m}} \right| = \frac{a_m^2}{a_m^2 + b_m^2} \left| G_{\frac{b_m}{a_m}} \right| \leq \\ &\leq \frac{a_m^2}{a_m^2 + b_m^2} \left(\frac{1}{|a_m|} |G_{b_m}| + \frac{|b_m|}{a_m^2} |G_{a_m}| \right) = \frac{|a_m| + |b_m|}{H_m^2} |G_{ab}| = \\ &= \frac{|\sigma_{H_m}|}{H_m} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Kako je

$$|a_m| + |b_m| = \sqrt{(|a_m| + |b_m|)^2} = \sqrt{|a_m|^2 + |b_m|^2 + 2|a_m||b_m|} = \sqrt{a_m^2 + b_m^2 + 2|a_m||b_m|} \geq \sqrt{a_m^2 + b_m^2} = H_m \quad (3.18)$$

sledi da je

$$|G_{H_m}| \geq |G_{ab}|, \quad \forall m \quad (3.19)$$

što znači da se tačnost merenja ovakvom transformacijom smanjuje, a osim toga, greška određivanja H_m , zavisi od reda harmonika m koji se meri.

Koeficijenti H_m i φ_m , osim što se dobijaju indirektno, pa samim tim i sa manjom tačnošću nego a_m i b_m , nepotrebni su i u smislu informacija koje u sebi nose, kao što će biti pokazano u nastavku ovog odeljka.

Efektivna vrednosti naponskog ili strujnog signala $f(t)$ može biti izražena, a samim tim i merena, po definiciji, kao kontinualan integral dat relacijom 3.20.

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (3.20)$$

Kako je ovo nepraktično sa stanovišta merenja, češće se izraz 3.20 aproksimira diskretnom, konačnom sumom odmeraka kao u 3.21

$$Y = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^2(t_n)} \quad (3.21)$$

gde je N broj odmeraka, a t_n trenuci odmeravanja.

Drugi način za određivanje efektivne vrednosti signala datog sa 2.1 je

$$Y = \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \sum_{m=1}^M \left(\frac{a_m^2 + b_m^2}{2} \right)} \quad (3.22)$$

Uzimajući u obzir da je jedan od osnovnih zahteva u elektrodistributivnoj mreži odsustvo jednosmerne komponente i da se tome pridaje posebna pažnja, odnosno preduzimaju specijalne mere zaštite, može se usvojiti da je $a_0 = 0$. Tada se THD_U faktor može izraziti kao

$$THD_U = \frac{\sqrt{\sum_{m=2}^M U_m^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{\sum_{m=2}^M \left(\frac{a_m^2 + b_m^2}{2} \right)}}{\sqrt{\frac{a_1^2 + b_1^2}{2}}} \quad (3.23)$$

Aktivna snaga može se izraziti kao zbir aktivnih snaga pojedinačnih harmonika, slično kao što je predloženo i u [19].

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t)i(t)dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[U_0 + \sum_{n=1}^M U_n \sin(n\omega t + \phi_n) \right] \cdot \left[I_0 + \sum_{k=1}^M I_k \sin(k\omega t + \psi_k) \right] dt = \\ &= U_0 I_0 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M U_m I_m \cos(\phi_m - \psi_m) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Izražena preko koeficijenata razvoja u Furijeov red, aktivna snaga postaje

$$P = \frac{a_0 c_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (a_m c_m + b_m d_m) \quad (3.25)$$

gde su a_m, b_m ($m = 0, 1, 2, \dots, M$) koeficijenti trigonometrijskog razvoja naponskog signala $u(t)$, a c_m, d_m ($m = 0, 1, 2, \dots, M$) su koeficijenti trigonometrijskog razvoja strujnog signala $i(t)$.

Za reaktivnu snagu definisanu sa 3.26

$$Q = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t - \frac{T_0}{4}) i(t) dt, \quad (3.26)$$

na sličan način se dobija da je

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\sum_{n=1}^M U_n \sin(n\omega(t - \frac{1}{T}) + \phi_n) \right] \cdot \left[\sum_{k=1}^M I_k \sin(k\omega t + \psi_k) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M U_m I_m \cos\left(\phi_m - \psi_m - m \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \left[(a_m c_m + b_m d_m) \cos\left(-m \frac{\pi}{2}\right) + (b_m c_m - a_m d_m) \sin\left(-m \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{M/2} (a_{2n} c_{2n} + b_{2n} d_{2n}) (-1)^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M/2+1} (b_{2k-1} c_{2k-1} - a_{2k-1} d_{2k-1}) (-1)^k \end{aligned} \quad (3.27)$$

Prividna snaga se, takođe, dobija iz definicionog izraza kao

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u^2(t) dt} \cdot \sqrt{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} i^2(t) dt} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M U_m^2} \cdot \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M I_k^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a_0^2}{4} + \sum_{m=1}^M \left(\frac{a_m^2 + b_m^2}{2} \right)} \cdot \sqrt{\frac{c_0^2}{4} + \sum_{k=1}^M \left(\frac{c_k^2 + d_k^2}{2} \right)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Na osnovu izraza 3.22 – 3.28 zaključuje se, da je sve veličine od interesa za analizu kvaliteta električne energije i merenje električne potrošnje, moguće dobiti direkto preko koeficijenata a_m i b_m , bez potrebe za transformacionim izrazima 3.7 i 3.8.

U odeljku 4 biće pokazano da je prelazak na amplitude i faze harmonika dodatno nepovoljan, jer onemogućava korekciju nekih tipova sistematskih grešaka prema novom teorijskom modelu.

4. Novi teorijski model rada integrisanog merila harmonika

U nastavku disertacije biće razmotreni realniji uslovi primene merila od onih koji su dati u 3. poglavlju. Ovi uslovi se pre svega odnose na konstantan broj odmeraka po periodu, konstantnu i poznatu učestanost osnovnog harmonika, kao i aperiodičnost i nekorelisanost deterskih sekvenci. Analiza rada merila biće sprovedena isključivo sa metroloških aspekata i sa aspekata obrade signala. Dakle, u prvi plan će biti stavljeni tačnost i preciznost, odnosno greške instrumenta, njihovi izvori i mogućnosti njihovog smanjenja ili otklanjanja. Konstrukcione karakteristike, principi projektovanja hardvera, izbor i performanse elektronskih komponenti, kao i pisanje i optimizacija softvera za merilo biće u drugom planu i na njih će biti napravljen osvrt na samom kraju u poglavlju „Diskusija“.

Za višestruka merenja, kod kojih se rezultat dobija usrednjavanjem nad velikim brojem vrednosti, tačnost merenja podrazumeva bliskost izmerene brojne vrednosti (srednje vrednosti) i stvarne brojne vrednosti merene veličine. Drugim rečima, što je srednja vrednost vrednost merenja bliža stvarnoj vrednosti za merilo se kaže da je tačnije. Kako tačnu vrednost nikada nije moguće poznavati, tačnost merila utvrđuje se kombinacijom sledećih postupaka:

- razvojem teorijskog modela koji opisuje vezu pokazivanja merila i vrednosti parametra koji se želi izmeriti
- simulacijom i
- kalibracijom, tj. dovođenjem u vezu sa hijerarhijom merila u postojećem metrološkom sistemu, koji se, sa druge strane, zasniva na etalonima

Na osnovu teorijskog modela, zaključuje se koji su transformacioni izrazi potrebni da bi se od pokazivanja merila dobila vrednost koja najtačnije predstavlja merenu fizičku veličinu. Ukoliko su transformacioni izrazi dati nizom determinističkih transformacija sa tačnim (poznatim) konstantama, tada se za merenje kaže da je tačno. U protivnom, merenje je netačno i postoji sistematska greška (otklonjiva ili neotklonjiva) koja utiče na to rezultat merenja odstupa od stvarne vrednosti za isnos ili na način koji zavisi od metode i uslova merenja.

Ponekad se teorijski model upotpunjava simulacijama, posebno u slučajevima kada je prostor rešenja nad kojim bi se morala obaviti kalibracija izuzetno velik i vremenski zahtevan. Simulacije, dakle, imaju za zadatak da ispitaju ponašanje i odziv merila za različite vrednosti ulaznih parametara i uticajnih veličina. Ispravnost zaključaka dobijenih simulacijom zavisi, naravno, od kvaliteta teorijskog modela i od njegove bliskosti sa stvarnim okolnostima pod kojima će merilo raditi.

Kalibracija je skup postupaka koji, pod određenim uslovima, uspostavljaju odnos između vrednosti koje pokazuje merni instrument ili vrednosti koje predstavlja materijalizovana mera ili referentni materijal ili vrednosti koje realizuje standard merenja. Najčešće se postupak kalibracije obavlja poređenjem dva merila, od kojih je jedno referentno (etalonsko) a drugo ispitivano. Referentno merilo mora imati unapred poznatu tačnost za svaku vrednost ulaza koja se želi ispitati i ona mora biti barem 10 puta bolja od tačnosti koja se očekuje kod ispitivanog merila. Ukoliko referentno merilo ima mogućnost generisanja pobude na ulaz ispitivanog merila, takvo referentno merilo se zove kalibrator. Kalibratorom se proverava

odziv ispitivanog merila na svaku od mogućih vrednosti pobude za koju je ispitivano merilo projektovano. Ukoliko, samom konstrukcijom ispitivanog merila, njegova pokazivanja nisu dovedena u vezu sa stvarnim vrednostima fizičke veličine koja se meri, kalibracijom se uspostavlja i ovaj odnos. U slučajevima kada sistematske greške linearno zavise od pobude, kalibracijom se one mogu veoma jednostavno ukloniti. U protivnom, ukoliko je to moguće učiniti, formiraju se kalibracione krive ili kalibracione tablice koje transformišu odziv merila u „tačnija“ pokazivanja u skladu sa pokazivanjima referentnog merila. Tom prilikom treba voditi računa o tome da se svaka tačka kabliracione krive ili vrednost u kalibracionoj tablici dobiju kao rezultat usrednjavanja rezultata višestrukih merenja, kako bi se otklonio eventualan uticaj slučajnih grešaka.

Važno je napomenuti da su za proces kabliracije veoma važni uslovi rada za koje je ispitivano merilo projektovano. Dizajn merila mora biti takav da omogući merilu da „izdrži“ uslove kalibracije u toku nekog dužeg kabliracionog intervala. Drugim rečima, konstrukcija merila mora da omogući merenja koja su u okvirima inženjerskih granica tolerancije kada se merilo koristi pod predviđenim uslovima okruženja tokom nekog razumnog perioda vremena. Konstrukcija sa ovakvim karakteristikama povećava verovatnoću da će merilo u realnosti imati performanse koje se od njega očekuju.

Sa druge strane, preciznost merila određena je njegovom sposobnošću da u višestrukim merenjima, pod istim uslovima reprodukuje bliske vrednosti, odnosno definiše se kao bliskost pojedinačnih rezultata merenja sa njihovom srednom vrednošću. U tom smislu, kao dobra mera za preciznost uređaja usvaja se standardna devijacija pojedinačnih rezultata u višestrukim merenjima.

Kod merila koja rezultat dobijaju na osnovu jedne jedine određene vrednosti (merenje u tački), jasno je da ima smisla govoriti samo o tačnosti merila, ali ne i o preciznosti. Zbog uticaja slučajne greške na svakipojedinačan rezultat, karakterisanje rezultata merenja u tački je otežano. Stoga se u postupku kalibracije, radi određivanja stvarne tačnosti, i kod ovih merila koriste višestruka merenja, odnosno njihova srednja vrednost.

Na tačnost i preciznost merila utiču različiti izvori grešaka. Greške se u merenjima obično dele na grube, sistematske i slučajne. Pod grubim greškama podrazumevaju se one greške koje se ne mogu ni na koji način dovesti u vezu sa rezultatima ili postupkom merenja, a koje su najčešće subjektivne po prirodi. Grube greške su, dakle, posledice određenih nepredvidivih okolnosti u trenutku obavljanja merenja i kao takve nisu od interesa za razvoj teorije rada merila. U sistematske greške spadaju one greške koje u sebi sadrže određenu pravilnost ili ponovljivost i kao takve, najčešće se mogu ukloniti iz rezultata merenja, njihovom naknadnom obradom. Postoje, međutim i takve sistematske greške za koje se zna da su prisutne u rezultatima merenja, da su izrazito pravilne, ali je njihovu vrednost nemoguće deterministički utanoviti bez dodatnih nezavisnih merenja ili je njihovo uklanjanje nejednoznačno (nelineran uticaj), pa ih kao takve nije ni moguće ukloniti iz rezultata originalnog merenja. Slučajnim greškama smatraju se one greške koje su posledica previše složenih procesa ili veza uticajnih veličina sa merenom veličinom zbog čega se one čine nasumičnim (stohastičkim) i mogu se uzeti u razmatranje jedino primenom alata matematičke statistike. Za slučajne greške je karakteristično da im, za svako ponovljeno merenje nije moguće odrediti ni vrednost ni predznak, pa su kao takve uvek neotklonjive iz rezultata merenja.

U metrologiji su razvijeni brojni postupci za procenu vrednosti i predznaka određenih tipova grešaka, ali će ovde biti uzeto u obzir sledeće rezonovanje:

- grube greške nije potrebno razmatrati prilikom razvijanja teorijskog modela;
- sistematske greške (otklonjive i neotklonjive) utiču podjednako na svaki pojedinačan rezultat u ponovljenim merenjima, pa samim tim smanjuju i preciznost i tačnost merila;
- slučajne greške utiču na svaki pojedinačan rezultat merenja, pa svakako menjaju preciznost merila. Međutim, stvarno slučajni procesi moraju imati srednju vrednost jednaku nuli, pa je njihov uticaj na tačnost merila zanemariva. Da je ovo ispravno rezonovanje u najvećem broju slučajeva, jasno je iz sledeće analize. Pretpostavimo da postoji proces koji, pri konstantnoj stvarnoj vrednosti merene veličine, na slučajan način menja pokazivanje merila, ali tako da srednja vrednost tog slučajnog procesa nije jednaka nuli. Tada se slučajan proces može rastaviti na dva nezavisna slučajna procesa od kojih se jedan bira tako da mu je srednja vrednost baš jednaka nuli a drugi koji predstavlja ostatak. Ukoliko srednja vrednost slučajnog procesa nije sama po sebi slučajana veličina, već konstanta, tada je proces koji predstavlja ostatak zapravo deterministički, a samim tim on je predvidiv i otklonjiv iz rezultata merenja i može se klasifikovati kao izvor sistematske, a ne slučajne greške.

Izuzetak od poslednjeg pravila predstavljaju svi oni procesi koji imaju promenljivu srednju vrednost i to takvu da se ona menja na slučajan način. U razmatranju novog teorijskog modela integrisanog merila harmonika nije uočen nijedan izvor slučajnih grešaka kod koga bi ovo bio slučaj. U skladu sa tim, u nastavku će svi izvori sistematskih grešaka biti razmatrani uporedo sa tačnošću merila. Korekcijom rezultata merenja i uklanjanjem sistematskih grešaka, postići će povećanje i tačnosti i preciznosti. Preostali izvori grešaka, koji se mogu klasifikovati kao slučajni, biće, stoga, razmatrani uporedo sa preciznošću merila.

Koncept stohastičkih merenja sa upotrebom deterskih sekvenci, poznat je u nauci kao stohastička rezonanca i našao je primenu u brojnim oblastima fizike, metrologije i inženjerstva. Osnovna prednost merenja primenom stohastičke rezonance, nad drugim mernim metodama ogleda se u sledećem:

- razvijen teorijski model pokazuje da je merenje tačno ukoliko je zadovoljen određen skup preduslova (koji je već više puta bio navođen). To je u slučaju stohastičkog merila harmonika u elektrodistributivnoj mreži potvrđeno izrazom 3.3.
- povećavanjem broja odmeraka, raste količina mernih informacija (smanjuje se entropija merenja), pa je teorijski moguće dostići proizvoljno veliku preciznost, odnosno proizvoljno malu mernu nesigurnost. Ovo je, u slučajevima stohastičkog merila harmonika, potvrđeno izrazima 3.5 i 3.6.

Najjednostavnije uopštenje teorijskog modela, koji treba da opiše rad stohastičkog merila harmonika u realnim uslovima eksploatacije, dobija se ukidanjem pojedinih pretpostavki na kojima se zasniva postojeći pojednostavljen, tj. idealizovan teorijski model. Ovde će biti razmotren odziv merila u slučajevima kada nisu ispunjene sledeće pretpostavke pojednostavljenog modela:

- sve komponente od kojih je sačinjeno merilo su idealne, a praktična izvedba merila ne utiče na njegovo ponašanje u praksi
- interval merenja je celobrojan umnožak periode osnovnog signala
- broj odmeraka po svakoj periodi je konstantan
- učestanost osnovnog harmonika je unapred poznata i nepromenljiva

- konačna dužina deterske sekvence bazisne diterovane fnkcije u memorijskom bloku ne utiče na tačnost merenja
- deterska sekvenca na ulazu u A/D konvertor predstavlja idealan slučajan uniforman aperiodičan signal

Ukidanjem svake od ovih pretpostavki biće razmotren nov izraz za pokazivanje instrumenta, red veličine geške koja pri tome nastaje i biće dati predlozi za otklanjanje ili umanjivanje uticaja ovih grešaka na rezultate merenja.

4.1. Teorijska tačnost merila prema novom modelu i izvori sistematskih grešaka

Kao što je već napomenuto, smatraće se da je tačnost merila određena je isključivo sistematskim greškama. Ukoliko se ove greške ne predvide u teorijskom modelu, mogu se javiti dve situacije:

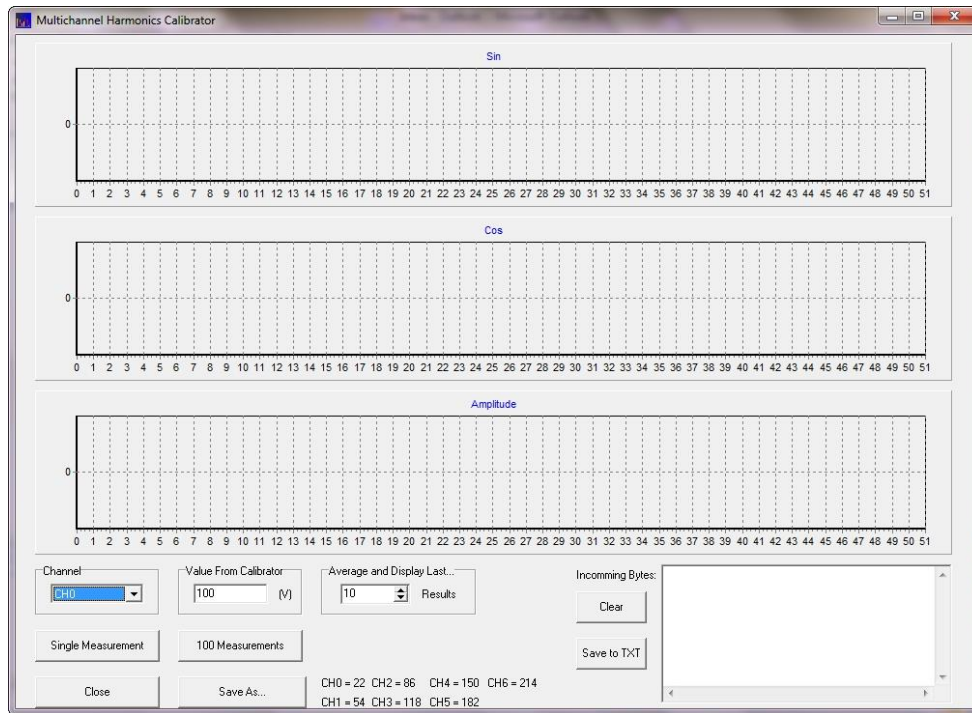
- prilikom kalibracije ustanoviće se veća greška od one koju predviđa teorijski model
- deo sistematskih grešaka može ostati neotkriven nakon kalibracije, zbog pogrešno pretpostavljenih uslova primene uređaja koji su dati teorijskim modelom, a koji se moraju poštovati prilikom kalibracije. Ove greške će se ispoljiti tokom primene uređaja u praksi i velika je verovatnoća da će ostati neotkrivene, čak i od strane korisnika.

Upravo iz tog razloga u ovoj disertaciji će sistematskim greškama biti posvećeno najviše pažnje. U nastavku su analizirani pojedini izvori sistematskih grešaka i, u slučajevima gde se to moglo učiniti, data je procena njihovog reda veličine.

Integrisano merilo harmonika poseduje serijski port preko koga može komunicirati sa personalnim računarom koristeći RS-232 standard brzinom od 115200 Boda. Izgled programa za dobijanje rezultata merenja i kalibracije instrumenta, dat je na slici S.4.1.

Pomoću ovog programa mogu se nadzirati vrednosti svih izlaza instrumenta i njihovim poređenjem sa zadatim naponima i strujama na ulazu merila, dobijaju se kalibracioni koeficijenti za dati uređaj.

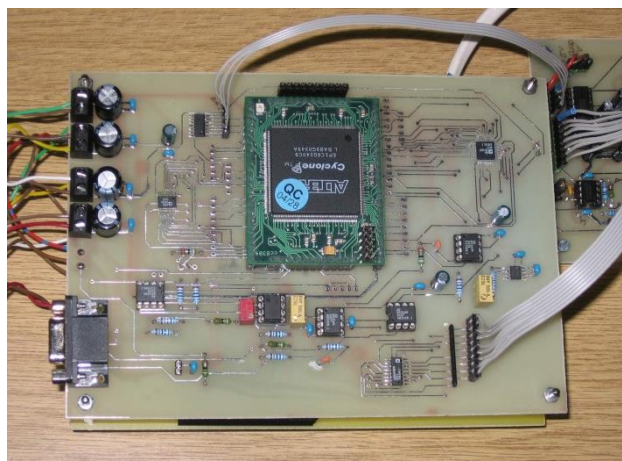
Iz praktičnih razloga ovde će biti prikazani samo najvažniji rezultati dobijeni ovim programom, koji su grafički obrađeni u programu Excel, a koji su od značaja za teorijska razmatranja data u ovoj disertaciji.



Slika S.4.1. Program za kalibraciju i vizuelizaciju rezultata merenja

4.2. Greške koje potiču od konstrukcionih karakteristika instrumenta

Dobro je poznato iz inženjerske prakse da u konstrukciji merila najveći uticaji na njegovu tačnost može imati izbor nedovoljno kvalitetnih elektronskih komponenti ili njihov nepovoljan fizički raspored. Pod pretpostavkom da se vodi računa o osnovnim ograničenjima i projektovanoj tačnosti uređaja, uticaj komponenti može se lako dovesti pod kontrolu. Nakon izlaza iz A/D konvertora, zbog prelaska na digitalnu obradu signala, uticaj izbora komponenti može se svesti samo na njihovu brzinu i numeričku tačnost. Međutim, ulazne komponente i prilagodni stepeni koji uvode signale u merilo, kao i sam A/D i D/A konvertor predstavljaju usko grlo konstrukcije (slika S.4.2). Njihov stvaran uticaj moguće je proceniti tek u postupku kalibracije. Ukoliko se ustanovi problem, merilo se mora projektovati iznova.



Slika S.4.2. Digitalna ploča postavljena na ploču za kondicioniranje signala ([31])

U [31] analiziran je uticaj pojedinih komponenti i data su objašnjenja njihovog očekivanog uticaja na performanse sistema, kao što je npr. stepen iskorišćenosti (moguća preopterećenost i pregrevanje) FPGA čipa. Što se tiče elemenata na ploči za kondicioniranje signala, najviše se vodilo računa o njihovoj robusnosti, tj. kratkotrajnoj i dugotrajnoj stabilnosti, kao i maloj osetljivosti na promene ulaza. Ovakav pristup omogućio je da se njihov uticaja na tačnost u potpunosti eliminiše postupkom kalibracije.

Kalibracioni koeficijenti za integrisano merilo harmonika određeni su upotrebom programa sa slike S.4.1 i njima je minimizovana ukupna sistematska greška pod sledećim idealizovanim uslovima:

- ulazni signal je digitalno sintetizovan napon sinusnog oblika, učestanosti koja je umnožak vrednosti $50 \text{ Hz} \pm 1 \text{ mHz}$, efektivne vrednosti $220 \text{ V} \pm 5 \text{ mV}$;
- ulazni signal signal je digitalno sintetizovana električna struja, sinusnog oblika, učestanosti koja je umnožak $50 \text{ Hz} \pm 1 \text{ mHz}$, efektivne vrednosti $1 \text{ A} \pm 0,1 \text{ mA}$;
- ulazni signal je maksimalno „zaprljan“ električni napon prema EN50160, osnovne učestanosti koja je umnožak vrednosti $50 \text{ Hz} \pm 1 \text{ mHz}$, ukupne efektivne vrednosti $220 \text{ V} \pm 5 \text{ mV}$;

Nakon kalibracije, ustanovljene su rezidualne greške merenja efektivne vrednosti napona od od $\pm 0,5 \%$ i merenja efektivne vrednosti struje od $\pm 2 \%$ za slučaj kada je merenje sprovedeno nad tačno jednom periodom. Nešto veća greška u merenju električne struje najverovatnije se može pripisati dodatnim prilagodnim kolima i konverziji struje u napon pre uvođenja u A/D konvertor. Nešto detaljniji rezultati kalibracije dati su u nastavku ovog dela, nakon što su u obzir uzete (i otklonjene) neke od sistematskih grešaka.

Pre toga, u nastavku će biti razmotreno na koji način se ove greške menjaju promenom pojedinih uslova rada merila.

4.3. Merenje sa promenljivim brojem odmeraka po periodi

Stohastičko merilo harmonika predviđeno je da radi sa stalnim taktom internog oscilatora. To ne znači da će samim tim i broj odmeraka po svakoj periodi ulaznog signala obavezno biti konstantan. Neka je učestanost kojom se odmerava ulazni signal označena sa f_s , neka je broj perioda T_0 obuhvaćenih merenjem označen sa K i neka je ukupan broj odmeraka uzetih u toku intervala merenja $t_2 - t_1 = KT_0$ označen sa N . Tada je broj odmeraka N dat sa

$$N = (t_2 - t_1)f_s = KT_0f_s \quad (4.1)$$

Prosečan broj odmeraka po svakoj periodi osnovnog harmonika iznosi

$$N' = \frac{N}{K} = T_0f_s \quad (4.2)$$

Kada je merenjem obuhvaćena samo jedna perioda ($K = 1$), jasno je da je $N' = N$.

Pri regularnim (idelanim) uslovima merenja N , K i N' su celi brojevi, odnosno N je deljivo sa K bez ostatka i N' je nepromenljivo za svaki mereni interval. Tada važi da je

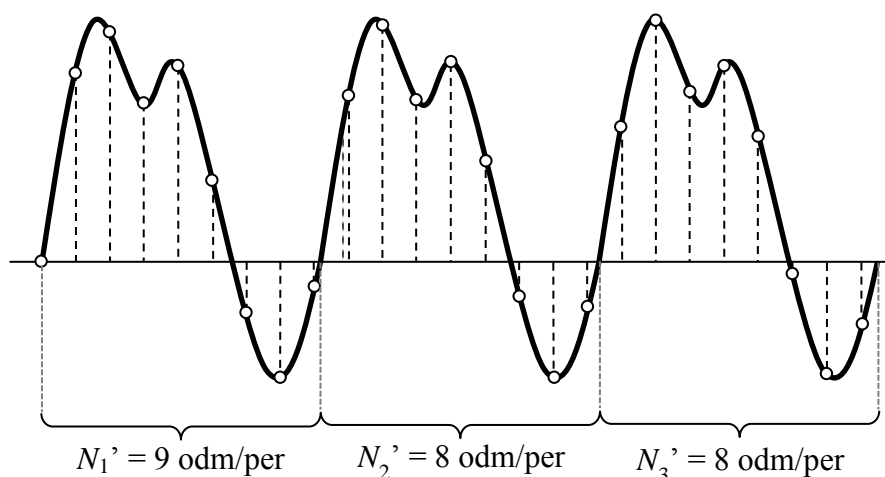
$$\bar{\Psi} = \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} y_1(t)y_2(t)dt = \frac{1}{KT_0} K \int_0^{T_0} y_1(t)y_2(t)dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y_1(t)y_2(t)dt \quad (4.3)$$

jer je rezultat merenja nakon svake periode identičan.

Međutim, može se desiti da N' ne bude konstantno tokom celog intervala merenja. To se dešava kada:

- stvarna učestanost osnovnog harmonika ulaznog signala varira, pa postaje malo veća ili malo manja od nazivne učestanosti u svakom podintervalu merenja (situacija koja će biti razmatrana u odeljku 4.5);
- kada detektor prolaska kroz nulu ne uspeva svaki put provremeno da resetuje merenje na kraju periode, npr. zbog povećanog nivoa šuma na ulazu;
- kada interni oscilator koji generiše takt, pa samim tim i učestanost odmeravanja ima džiter;
- kada učestanosti odmeravanja f_s nije deljiva sa nazivnom učestanošću f_0 , tj. proizvod $T_0 f_s$ nije ceo broj.

Primer koji ilustruje sve gore navedene slučajeve dat je na slici S.4.3.



Slika S.4.3. Neravnomerno odmeravanje po periodama

Sa slike S.4.3 je jasno da se problem promenljivog broja odmeraka svodi na problem nedeljivosti bez ostatka ukupnog intervala merenja sa stvarnim trajanjem periode ulaznog signala, odnosno, na problem merenja nad intervalom koji nije celobrojan umnožak periode. Stoga će ova dva uzroka grešaka biti analizirana istovremeno u odeljku 4.4.

4.4. Merenje nad intervalom koji nije celobrojan umnožak periode osnovnog harmonika

Interval merenja ne mora biti celobrojan umnožak perioda osnovnog harmonika ulaznog signala. Osim razloga navedenih u odeljku 4.3, prevremen ili zakasneo završetak merenja u odnosu na prolazak signala kroz nulu može se desiti u još jednom važnom slučaju u praksi, a to je kada se umesto detektora nule, kao okidača početka i kraja merenja, koristi unapred

podešen fiksni broj odmeraka N projektovan na osnovu odabira učestanosti f_s . Tada će za svako odstupanje stvarne periode ulaznog signala T od T_0 , kao i u svim slučajevima razdešavanja oscilatora internog takta u uređaju, merenjem biti obuhvaćen interval $t_2 - t_1$ za koji neće važiti izraz 4.3. Neka je stvaran broj perioda obuhvaćenih merenjem dat sa 4.4

$$K = K_0 + \Delta K \quad (4.4)$$

pri čemu je K_0 ceo broj iz skupa $\{0,1,2,\dots\}$, a ΔK pozitivan realan broj takav da je $0 \leq \Delta K < 1$. Tada će, umesto izraza 4.3, važiti

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} y_1(t)y_2(t)dt = \frac{1}{(K_0 + \Delta K)T_0} \int_0^{(K_0 + \Delta K)T_0} y_1(t)y_2(t)dt = \\ &= \frac{1}{(K_0 + \Delta K)T_0} \int_0^{K_0 T_0} y_1(t)y_2(t)dt + \frac{1}{(K_0 + \Delta K)T_0} \int_0^{\Delta K T_0} y_1(t)y_2(t)dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

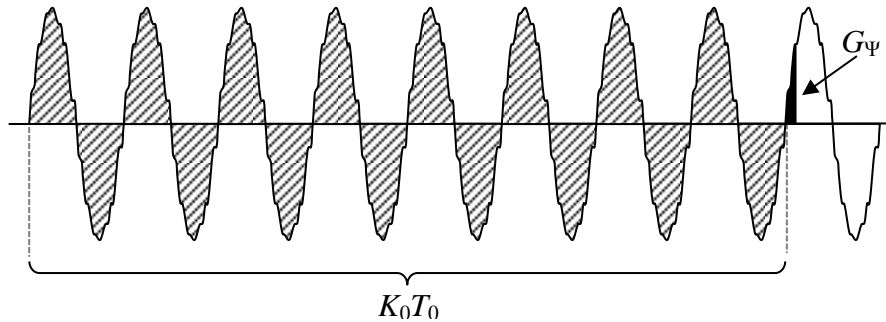
$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= \frac{K_0}{K_0 + \Delta K} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y_1(t)y_2(t)dt + \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{1}{T_0} \int_0^{\Delta K T_0} y_1(t)y_2(t)dt = \\ &= \frac{K_0 + \Delta K - \Delta K}{K_0 + \Delta K} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y_1(t)y_2(t)dt + \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{1}{T_0} \int_0^{\Delta K T_0} y_1(t)y_2(t)dt = \\ &= \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y_1(t)y_2(t)dt}_{\text{tačan_izraz}} + \underbrace{\frac{-\Delta K}{K_0 + \Delta K} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y_1(t)y_2(t)dt + \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{1}{T_0} \int_0^{\Delta K T_0} y_1(t)y_2(t)dt}_{\text{greška}} = \\ &= \bar{\Psi} + G_\Psi \end{aligned} \quad (4.6)$$

Kada je merenjem obuhvaćen velik broj perioda ili kada je ΔK veoma malo, tada je $K_0 \gg \Delta K$, pa su

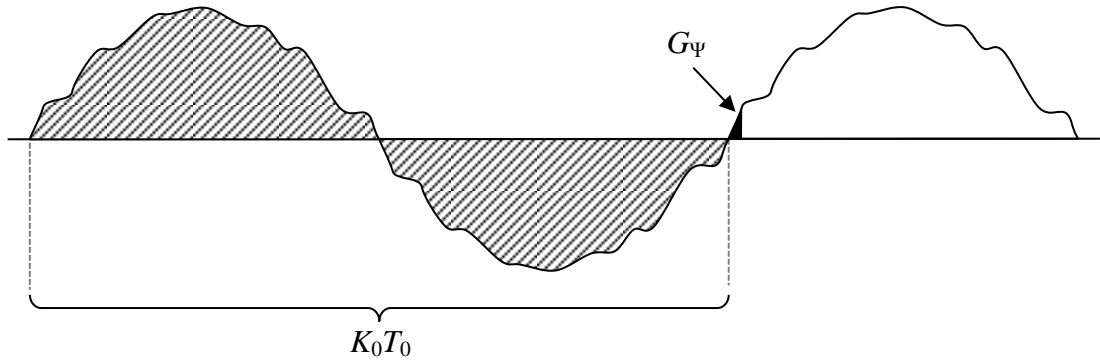
$$\frac{-\Delta K}{K_0 + \Delta K} \approx 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{K_0 + \Delta K} \approx 0 \quad (4.8)$$

odnosno G_Ψ je zanemarivo malo. Prvi slučaj (K_0 veliko) ilustrovan je na slici S.4.4, a drugi slučaj (ΔK je malo), na slici S.4.5.



Slika S.4.4. Za veliko K_0 , površina obuhvaćena intervalom $K_0 T_0$ je mnogo veća od površine obuhvaćene intervalom $\Delta K T_0$ bez obzira na vrednost ΔK



Slika S.4.5. Za malo ΔK , površina obuhvaćena intervalom $\Delta K T_0$ je mnogo manja od površine obuhvaćene intervalom $K_0 T_0$ bez obzira na vrednost K_0

Za određivanje najnepovoljnijeg ΔK , za koje se dobija najveća aspolutna vrednost greške G_Ψ , potrebno je analitički rešiti integral 4.6 u funkciji od ΔK i potom odrediti njegov maksimum. Da bi se to uradilo potrebno je pretpostaviti konkretnu podintegralnu bazisnu funkciju $y_2(t)$. Ova funkcija može imati neki od oblika dat sa 4.9 ili 4.10.

$$y_2(t) = R \cos(2\pi m f_0 t), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (4.9)$$

$$y_2(t) = R \sin(2\pi m f_0 t), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (4.10)$$

Za slučaj da je $y_2(t)$ dato izrazom 4.9, dobija se da je

$$\begin{aligned} G_\Psi &= \frac{-\Delta K}{K_0 + \Delta K} \frac{R}{T_0} \int_0^{T_0} \underbrace{y_1(t) \cos(2\pi m f_0 t)}_{a_m/2} dt + \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{T_0} \int_0^{\Delta K T_0} y_1(t) \cos(2\pi m f_0 t) dt = \\ &= \frac{-\Delta K}{K_0 + \Delta K} \frac{R a_m}{\underbrace{2}_{\bar{\Psi}}} + \\ &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{T_0} \int_0^{\Delta K T_0} \sum_{k=1}^M [a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)] \cos(2\pi m f_0 t) dt \\ &= \frac{-\Delta K}{K_0 + \Delta K} \bar{\Psi} + \\ &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{T_0} \sum_{k=1}^M \left[a_k \int_0^{\Delta K T_0} \cos(2\pi k f_0 t) \cos(2\pi m f_0 t) dt \right] \\ &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{T_0} \sum_{k=1}^M \left[b_k \int_0^{\Delta K T_0} \sin(2\pi k f_0 t) \cos(2\pi m f_0 t) dt \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Primenom trigonometrijskih adicionih formula, dalje se dobija

$$\begin{aligned}
 G_\Psi &= \frac{-\Delta K}{K_0 + \Delta K} \bar{\Psi} + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2T_0} \sum_{k=1}^M a_k \left[\int_0^{\Delta K T_0} \cos(2\pi(k+m)f_0 t) + \cos(2\pi(k-m)f_0 t) dt \right] + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2T_0} \sum_{k=1}^M b_k \left[\int_0^{\Delta K T_0} \sin(2\pi(k+m)f_0 t) + \sin(2\pi(k-m)f_0 t) dt \right]
 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
 G_\Psi &= \frac{-\Delta K}{K_0 + \Delta K} \bar{\Psi} + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2T_0} a_m \left[\int_0^{\Delta K T_0} \cos(4\pi m f_0 t) dt + \int_0^{\Delta K T_0} \cos(0) dt \right] + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2T_0} b_m \left[\int_0^{\Delta K T_0} \sin(4\pi m f_0 t) dt + \int_0^{\Delta K T_0} \sin(0) dt \right] + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2T_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M a_k \left[\int_0^{\Delta K T_0} \cos(2\pi(k+m)f_0 t) dt + \int_0^{\Delta K T_0} \cos(2\pi(k-m)f_0 t) dt \right] + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2T_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M b_k \left[\int_0^{\Delta K T_0} \sin(2\pi(k+m)f_0 t) dt + \int_0^{\Delta K T_0} \sin(2\pi(k-m)f_0 t) dt \right]
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Uzimanjem u obzir da je $T_0 f_0 = 1$, dalje je

$$\begin{aligned}
 G_\Psi &= \frac{-\Delta K}{K_0 + \Delta K} \bar{\Psi} + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2T_0} \left\{ a_m \left[\frac{\sin(4\pi m f_0 t)}{4\pi m f_0} + t \right] \Big|_0^{\Delta K T_0} + b_m \left[\frac{-\cos(4\pi m f_0 t)}{4\pi m f_0} \right] \Big|_0^{\Delta K T_0} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2T_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M a_k \left[\frac{\sin(2\pi(k+m)f_0 t)}{2\pi(k+m)f_0} + \frac{\sin(2\pi(k-m)f_0 t)}{2\pi(k-m)f_0} \right] \Big|_0^{\Delta K T_0} + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2T_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M b_k \left[\frac{-\cos(2\pi(k+m)f_0 t)}{2\pi(k+m)f_0} + \frac{-\cos(2\pi(k-m)f_0 t)}{2\pi(k-m)f_0} \right] \Big|_0^{\Delta K T_0}
 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Konačnim sređivanjem se dobija da je

$$\begin{aligned}
 G_\Psi &= \\
 &= \underbrace{\frac{-\Delta K}{K_0 + \Delta K} \bar{\Psi} + \frac{\Delta K}{K_0 + \Delta K} \bar{\Psi}}_0 \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2} \left\{ a_m \left[\frac{\sin(4\pi m \Delta K)}{4\pi m} \right] + b_m \left[\frac{-\cos(4\pi m \Delta K) + 1}{4\pi m} \right] \right\} + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M a_k \left[\frac{\sin(2\pi(k+m)\Delta K)}{2\pi(k+m)} + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta K)}{2\pi(k-m)} \right] + \\
 &+ \frac{1}{(K_0 + \Delta K)} \frac{R}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M b_k \left[\frac{-\cos(2\pi(k+m)\Delta K) + 1}{2\pi(k+m)} + \frac{-\cos(2\pi(k-m)\Delta K) + 1}{2\pi(k-m)} \right] \\
 &+ \frac{1}{K_0 + \Delta K} \frac{R}{2} \left\{ a_m \left[\frac{\sin(4\pi m \Delta K)}{4\pi m} \right] + b_m \left[\frac{-\cos(4\pi m \Delta K) + 1}{4\pi m} \right] \right\} + \\
 &+ \frac{1}{K_0 + \Delta K} \frac{R}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M a_k \left[\frac{\sin(2\pi(k+m)\Delta K)}{2\pi(k+m)} + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta K)}{2\pi(k-m)} \right] + \\
 &+ \frac{1}{K_0 + \Delta K} \frac{R}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M b_k \left[\frac{-\cos(2\pi(k+m)\Delta K) + 1}{2\pi(k+m)} + \frac{-\cos(2\pi(k-m)\Delta K) + 1}{2\pi(k-m)} \right] \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Greška merenja koeficijenta a_m je

$$\begin{aligned}
 G_{a_m} &= \frac{2}{R} G_\Psi = \frac{1}{K_0 + \Delta K} \left\{ a_m \left[\frac{\sin(4\pi m \Delta K)}{4\pi m} \right] + b_m \left[\frac{-\cos(4\pi m \Delta K) + 1}{4\pi m} \right] \right\} + \\
 &+ \frac{1}{K_0 + \Delta K} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M a_k \left[\frac{\sin(2\pi(k+m)\Delta K)}{2\pi(k+m)} + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta K)}{2\pi(k-m)} \right] + \\
 &+ \frac{1}{K_0 + \Delta K} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M b_k \left[\frac{-\cos(2\pi(k+m)\Delta K) + 1}{2\pi(k+m)} + \frac{-\cos(2\pi(k-m)\Delta K) + 1}{2\pi(k-m)} \right] \tag{4.16} \\
 &= \frac{S(\Delta K)}{K_0 + \Delta K}
 \end{aligned}$$

Jasno je da je greška funkcija i talasnog oblika merenog signala i reda harmonika koji se meri. Prvo će biti pokazano čemu je jednak izvod od $S(\Delta K)$ po ΔK .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S(\Delta K)}{\partial \Delta K} &= a_m \cos(4\pi m \Delta K) + b_m \sin(4\pi m \Delta K) + \\
 &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M a_k [\cos(2\pi(k+m)\Delta K) + \cos(2\pi(k-m)\Delta K)] + \\
 &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M b_k [\sin(2\pi(k+m)\Delta K) + \sin(2\pi(k-m)\Delta K)] \\
 &= -a_m + \sum_{k=1}^M a_k [\cos(2\pi(k+m)\Delta K) + \cos(2\pi(k-m)\Delta K)] + \\
 &+ \sum_{k=1}^M b_k [\sin(2\pi(k+m)\Delta K) + \sin(2\pi(k-m)\Delta K)]
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

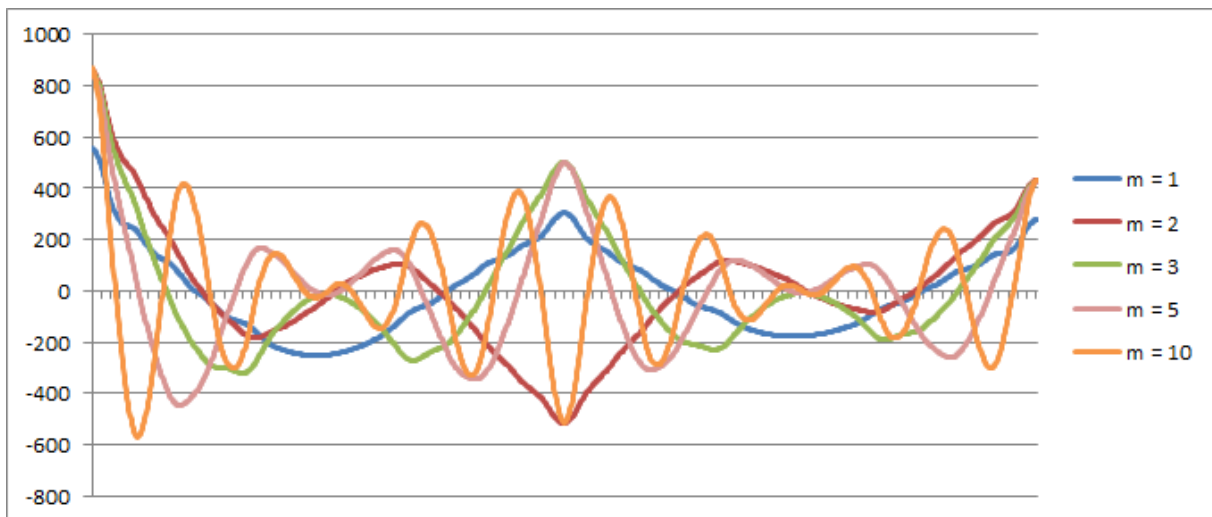
Konačno sreden izraz je

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial S(\Delta K)}{\partial \Delta K} &= -a_m + \sum_{k=1}^M 2a_k \cos(2\pi k \Delta K) \cos(2\pi m \Delta K) + \sum_{k=1}^M 2b_k \sin(2\pi k \Delta K) \cos(2\pi m \Delta K) \\
 &= -a_m + 2 \sum_{k=1}^M [a_k \cos(2\pi k \Delta K) + b_k \sin(2\pi k \Delta K)] \cos(2\pi m \Delta K) = \\
 &= -a_m + \frac{2}{R} \sum_{k=1}^M [a_k \cos(2\pi k \Delta K) + b_k \sin(2\pi k \Delta K)] R \cos(2\pi m \Delta K) = \\
 &= \frac{2}{R} y_1 \left(\frac{\Delta K}{f_0} \right) y_2 \left(\frac{\Delta K}{f_0} \right) - a_m
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

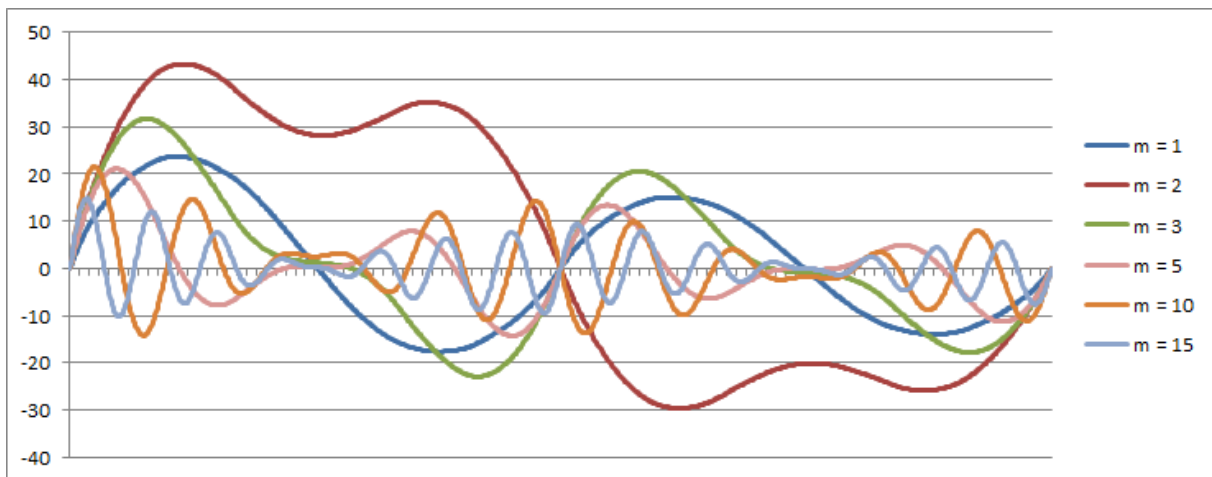
Sličan izraz dobija se i za slučaj da je $y_2(t)$ oblika 4.10. Izvod greške sada je:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_{a_m}}{\partial \Delta K} &= \frac{\partial}{\partial \Delta K} \left[\frac{S(\Delta K)}{K_0 + \Delta K} \right] = \frac{\frac{\partial S(\Delta K)}{\partial \Delta K} (K_0 + \Delta K) - S(\Delta K)}{(K_0 + \Delta K)^2} = \\
 &= \frac{1}{K_0 + \Delta K} \left[\frac{\partial S(\Delta K)}{\partial \Delta K} - G_{a_m} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

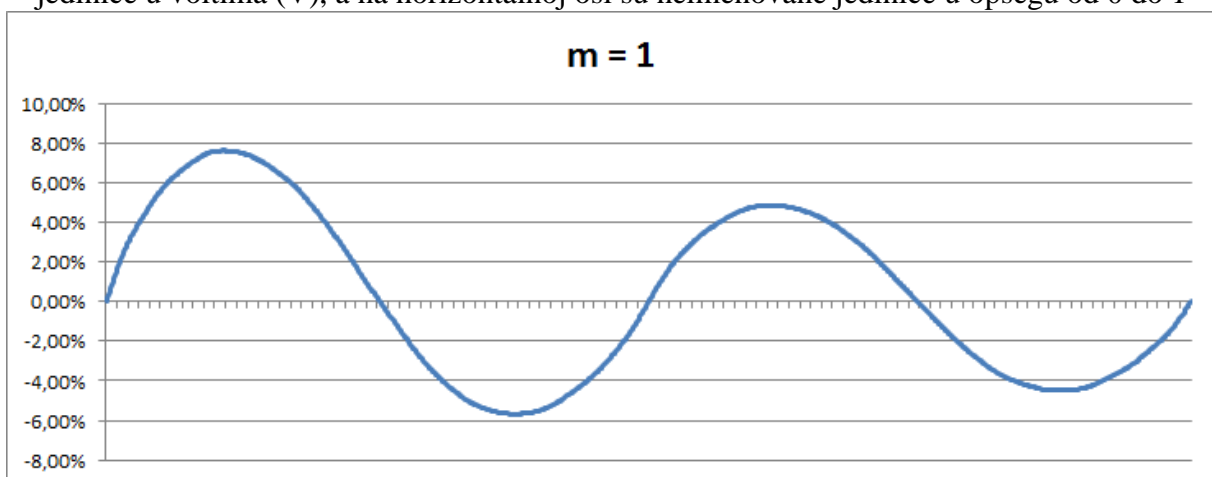
Ponovo je jasno da se sa povećavanjem K_0 ova greška smanjuje. Slučaj za $K_0 = 0$ će biti posebno razmotren. Od preostalih vrednosti, najgori slučaj dobija se za $K_0 = 1$, pa će jednakost 4.19 biti rešena uravo za tu vrednost. Jednačinu 4.19, naravno, nije moguće rešiti analitički, ali je ona ovde rešena grafički, a potom i numerički za svako m i za one oblike funkcije $y_1(t)$ kod kojih dominira prvi harmonik. Najvažniji rezultati, prikazani su na slici S.4.6 na kojoj je prikazan prvi izvod za u u zavisnosti od parametara ΔK i m , i na slici S.4.7 na kojoj je prikazana sama funkcija u zavisnosti od ΔK i m .



Slika S.4.6. Prvi izvod funkcije greške G_{am} u zavisnosti od ΔK za nekoliko vrednosti m . Na vertikalnoj osi su jedinice u voltima (V), a na horizontalnoj osi su neimenovane jedinice u opsegu od 0 do 1



Slika S.4.7. Funkcija greške u zavisnosti od ΔK za nekoliko vrednosti m . Na vertikalnoj osi su jedinice u voltima (V), a na horizontalnoj osi su neimenovane jedinice u opsegu od 0 do 1



Slika S.4.8. Relativna greška merenja osnovnog harmonika u zavisnosti od ΔK . Na vertikalnoj osi su neimenovane jedinice u procentima (%), a na horizontalnoj osi su neimenovane jedinice u opsegu od 0 do 1

Detaljnim uvidom u sva rešenja u kojima u merenom signalu dominira prvi harmonik, došlo se do sledećih zaključaka:

- prvi izvod greške ima $2(m + 1)$ nula;
- od svih maksimuma i minimuma, po apsolutnoj vrednosti je najveći prvi ekstrem, i to baš onaj koji se dobija za $m = 2$;
- najveća relativna greška dobija se za najmanje vrednosti harmonika, a kritičan slučaj je kada je neki od harmonika jednak nuli, usled čega relativna greška neograničeno raste, što je veoma nepovoljno.

Za $K_0 = 0$, nema smisla analizirati slučajeve za koje je ΔK malo. Umesto toga, ako se napiše da je

$$K = K_0 + \Delta K = 0 + \Delta K = 1 - \Delta \hat{K} \quad (4.20)$$

pri čemu ima smisla govoriti samo o maloj vrednosti $\Delta \hat{K}$, tada se ovaj slučaj svodi na prethodno analizirani.

4.5. Merenje nad signalima kod kojih osnovna učestanost odstupa od nominalne vrednosti

Kada se osnovna učestanost razlikuje od nominalne vrednosti, a instrument nije u mogućnosti da se prilagodi ovoj promeni, ponovo dolazi do greške merenja. U ovom slučaju rezultati merenja nisu harmonici, već pseudoharmonici koji sadrže grešku u amplitudi i fazi, ali i u poziciji na frekvencijskoj osi. Ovo je posebno nepovoljna situacija kada se za određivanje harmonijskog sastava signala koriste DFT ili FFT. S obzirom na dozvoljena odstupanja učestanosti definisana u EN50160, i na stvarna maksimalna odstupanja koja se javljaju u praksi, ovaj tip greške mora se uzeti u razmatranje. Merila koja su u mogućnosti da odrede stvaran spektar signala bez obzira na ovu promenu, poput spektroanalizatora, ili merila koja se mogu adaptirati promeni učestanosti, koriste znantno kompleksnije postupke obrade vremenskih ili frekvencijskih odmeraka. Iako je takav pristup napredniji i nije podložan greškama smicanja spektra, on zahteva znantno skuplji i složeniji hardver sa daleko naprednijim procesorskim mogućnostima.

Ovde će biti razmotren slučaj neadaptivnog merila, koje pretpostavlja poznatu nominalnu vrednost osnovne učestanosti u merenom signalu i biće pokazano da je i kod njega, pod određenim ograničenjima i na osnovu jednog dodatnog, nezavisnog merenja, moguće otkloniti nastalu grešku iz kosinusnih i sinusnih koeficijenata signala čiji se harmonijski sastav određuje.

Neka je, prema Vajerštrasovoj teoremi, mereni signal $y(t)$ aproksimiran trigonometrijskim polinomom reda M , kod koga su perioda i učestanost osnovnog harmonika T i f (izraz 4.21).

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^M \left(a_m \cos \frac{2\pi mt}{T} + b_m \sin \frac{2\pi mt}{T} \right) \quad (4.21)$$

Tada su izrazima 4.22 i 4.23 dati koeficijenti njegovog razvoja u furijeov red.

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos \frac{2\pi mt}{T} dt, \quad m = 0, \dots, M \quad (4.22)$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin \frac{2\pi mt}{T} dt, \quad m = 0, \dots, M \quad (4.23)$$

Merenje u praksi zasnovano je na pretpostavci da je učestanost merenog signala poznata i nepromenljiva. U skladu sa time, bazisne diterovane funkcije u merilu podešene su tako da im periode odgovaraju celobrojnim umnošcima nominalne, tj. očekivane vrednosti učestanosti f_0 (recipročne vrednosti nominalne periode T_0) u elektrodistributivnoj mreži. Ova učestanost i perioda ne moraju biti jedanke vrednostima učestanosti f i periode T ulaznog signala. Tada je

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_0 + \Delta f} \neq T_0 \quad (4.24)$$

pa će rezultat merenja, zapravo, biti pseudoharmonici definisani izrazima 4.25 i 4.26.

$$\hat{a}_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt, \quad m = 0, \dots, M \quad (4.25)$$

$$\hat{b}_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) \sin \frac{2\pi mt}{T_0} dt, \quad m = 0, \dots, M \quad (4.26)$$

Zamenom 4.21 u 4.25 i 4.26 dobijaju se izrazi 4.27 i 4.28.

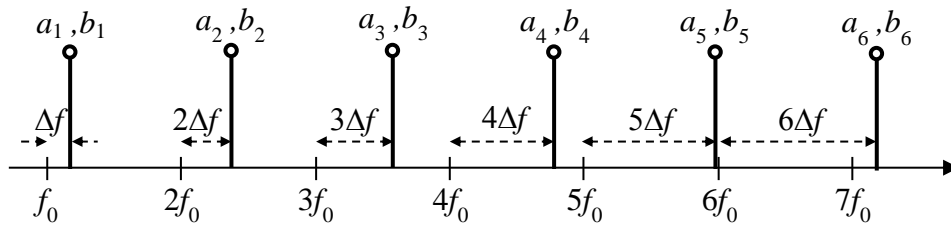
$$\hat{a}_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \right] \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt, \quad m = 0, \dots, M \quad (4.27)$$

$$\hat{b}_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \right] \sin \frac{2\pi mt}{T_0} dt, \quad m = 0, \dots, M \quad (4.28)$$

4.27 i 4.28 predstavljaju stvarne rezultate merenja i očigledno je da u sebi sadrže grešku koja je posledica razlikovanja stvarne učestanosti osnovnog harmonika merenog signala od nominalne vrednosti.

4.5.1. Greške smicanja spektra

Ako se stvarna učestanost osnovnog harmonika f razlikuje od nominalne vrednosti f_0 za vrednost Δf , tada će se učestanost n -tog harmonika, koja iznosi nf , razlikovati od nominalne vrednosti n -tog harmonika, koja bi trebalo da iznosi nf_0 , za tačno $n\Delta f$. Očigledno, što je veći red harmonika n , to je i odstupanje pozicije tog harmonika veće. Ova pojava se naziva „smicanje“ ili „klizanje“ spektra i predstavlja jednu od najvećih prepreka za primenu Furijeove transformacije u bilo kojoj varijanti (FT, FFT, DFT) [16], [17], [26]. Na slici S.4.9 upoređen je hipotetički spektar merenog signala periode osnovnog harmonika f sa pretpostavljenim položajima harmonika koji odgovaraju umnošcima nominalne učestanosti f_0 .



Slika S.4.9. Primer poređenja očekivanih i stvarnih položaja harmonika merenog signala na frekvencijskoj osi

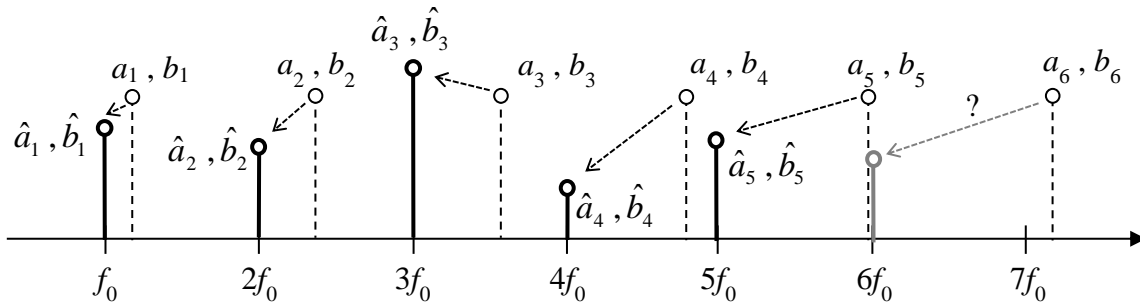
Ukoliko ne postoji informacija o smicanju spektra, rezultati merenja pojedinih komponenti harmonika će sadržati apsolutne greške date izrazima 4.29 i 4.30, a položaji harmonika će biti interpretirani kao na slici S.4.10.

$$G_{a_m} = \hat{a}_m - a_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \right] \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt - a_m = \quad (4.29)$$

$$= f(T, a_0, a_1, \dots, a_M, b_0, b_1, \dots, b_M) \quad , m = 0, \dots, M$$

$$G_{b_m} = \hat{b}_m - b_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \right] \sin \frac{2\pi mt}{T_0} dt - b_m \quad (4.30)$$

$$= f(T, a_0, a_1, \dots, a_M, b_0, b_1, \dots, b_M) \quad , m = 0, \dots, M$$



Slika S.4.10. Interpretacija rezultata merenja

Osim ovih direktnih posledica na grešku merenja, u ovakvom merenju postoji i još jedan manje očigledan problem. Naime, postavlja se pitanje, šta se dešava u slučaju kada je broj harmonika koji se mere dovoljno velik da razlike učestanosti $m\Delta f$ dovedu do preskakanja jedne ili više spektralnih komponenti izvan opsega merenja? Primera radi, slučaj ilustrovan na slici S.4.10, kada šesti harmonik prelazi vrednost od $7f_0$. Ukoliko bi, konstrukcijom merila, opseg merenja bio ograničen na $6f_0$, u rezultatima merenja ne bi postojala informacija o šestom harmoniku i njega ne bi bilo moguće jednoznačno odrediti.

Da bi se pojednostavili izrazi, uveće se veličina ξ kojom će se označiti relativno odstupanje stvarne učestanosti osnovnog harmonika merenog f signala od nominalne vrednosti f_0 .

$$\xi = \frac{f - f_0}{f_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \quad (4.31)$$

Logičan zaključak, na osnovu prethodnog razmatranja je da je minimalan potreban uslov za merenje M spektralnih komponenti, u slučaju kada postoji pomeraj učestanosti osnovnog harmonika od Δf , dat relacijom 4.32, odnosno 4.33.

$$Mf_0 + M\Delta f < (M + 1)f_0 \quad (4.32)$$

$$M \frac{\Delta f}{f_0} < 1 \quad (4.33)$$

Izraženo preko relativne razlike učestanosti ovo postaje

$$M \cdot \xi < 1 \quad (4.34)$$

Kasnije će biti pokazano da je ovo ujedno i dovoljan uslov za rekonstrukciju svih M harmonika ulaznog signala. Ovde je interesnato primetiti da uslov 4.34 važi samo za pozitivne vrednosti parametra ξ , dok za negativne vrednosti ne postoji potreban uslov, tj. rekonstrukcija svih M harmonika moguća je za bilo koje negativno ξ .

4.5.2. Rekonstrukcija stvarnih vrednosti harmonika

Postavlja se pitanje da li je, na osnovu ovakvog merenja, sa prisutnim sistematskim greškama datim izrazima 4.29 – 4.30, ipak moguće rekonstruisati stvaran spektar signala. Da bi se ovo ustanovilo prvo je potrebno ispitati uslove egzistencije takvog rešenja, zatim njegovu jednoznačnost i na kraju proveriti da li postoji neki posebno pogodan postupak za primenu u praksi.

Zahvaljujući svojstvu linearnosti integrala, operacije integraljenja i sabiranja se mogu zameniti, pa se izrazi 4.27 i 4.28 mogu svesti na izraze 4.35 – 4.38.

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \right] dt = \\ &= a_0 + \frac{2}{T_0} \sum_{k=1}^M \left[\underbrace{a_k \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} dt}_{\neq 0} + \underbrace{b_k \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} dt}_{\neq 0} \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right) \right] \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt = \\ &= \frac{a_0}{T_0} \underbrace{\int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt}_{=0} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt + b_k \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt \right) = \\ &= \sum_{k=1}^M a_k \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt + \sum_{k=1}^M b_k \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt \\ &\quad , m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\hat{b}_0 = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M (a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t) \right] \cdot 0 \cdot dt = 0 \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \cos \frac{2\pi k t}{T} + b_k \sin \frac{2\pi k t}{T} \right) \right] \sin \frac{2\pi m t}{T_0} dt = \\ &= \frac{a_0}{T_0} \underbrace{\int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi m t}{T_0} dt}_{=0} + \sum_{k=1}^M \left(a_k \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi k t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T_0} dt + b_k \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi k t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T_0} dt \right) = \\ &= \sum_{k=1}^M a_k \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi k t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T_0} dt + \sum_{k=1}^M b_k \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi k t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T_0} dt \end{aligned} \quad , m = 1, \dots, M \quad (4.38)$$

Izraz 4.37 je trivijalan i ne mora se dalje uzimati u razmatranje. Pojedinačni integrali u izrazima 4.35, 4.36 i 4.38 biće označeni na sledeći način:

$$\begin{aligned} C_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi k t}{T} \cos \frac{2\pi m t}{T_0} dt & k = 1, \dots, M \\ S_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi k t}{T} \cos \frac{2\pi m t}{T_0} dt & m = 0, \dots, M \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} C_k^{(\hat{b}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi k t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T_0} dt & k = 1, \dots, M \\ S_k^{(\hat{b}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi k t}{T} \sin \frac{2\pi m t}{T_0} dt & m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.40)$$

Pri čemu su 4.35 i 4.36 obuhvaćeni izrazom 4.39.

U dodatku B pokazano je da se ovi koeficijenti svode na izraze

$$\begin{aligned} C_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} & k = 1, \dots, M \\ S_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} & m = 0, \dots, M \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} C_k^{(\hat{b}_m)} &= -\frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} & k = 1, \dots, M \\ S_k^{(\hat{b}_m)} &= \frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} & m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.42)$$

Koeficijenti $C_k^{(\hat{a}_m)}$, $S_k^{(\hat{a}_m)}$, $C_k^{(\hat{b}_m)}$ i $S_k^{(\hat{b}_m)}$ će biti nazvani rezidualni koeficijenti. Relacije 4.35, 4.36 i 4.38 sada postaju 4.43 – 4.45.

$$\hat{a}_0 = a_0 + \sum_{k=1}^M a_k C_k^{(\hat{a}_0)} + \sum_{k=1}^M b_k S_k^{(\hat{a}_0)} \quad (4.43)$$

$$\hat{a}_m = \sum_{k=1}^M a_k C_k^{(\hat{a}_m)} + \sum_{k=1}^M b_k S_k^{(\hat{a}_m)}, \quad m = 1, \dots, M \quad (4.44)$$

$$\hat{b}_m = \sum_{k=1}^M a_k C_k^{(\hat{b}_m)} + \sum_{k=1}^M b_k S_k^{(\hat{b}_m)}, \quad m = 1, \dots, M \quad (4.45)$$

Izrazi 4.44 i 4.45 predstavljaju kvadratni sistem od $2M$ jednačina po nepoznatima a_m i b_m , dok izraz 4.43 predstavlja dopunsku jednačinu po nepoznatoj a_0 , koja može biti naknadno rešena. 4.44 i 4.45 se mogu kraće zapisati kao

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_m \\ \hat{b}_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_m \\ b_m \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

pri čemu je A matrica kvadratna matrica $2M \times 2M$ definisana sa 4.47.

$$A = \begin{bmatrix} C_1^{(a_1)} & C_2^{(a_1)} & \dots & C_M^{(a_1)} & S_1^{(a_1)} & S_2^{(a_1)} & \dots & S_M^{(a_1)} \\ C_1^{(a_2)} & C_2^{(a_2)} & \dots & C_M^{(a_2)} & S_1^{(a_2)} & S_2^{(a_2)} & \dots & S_M^{(a_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^{(a_M)} & C_2^{(a_M)} & \dots & C_M^{(a_M)} & S_1^{(a_M)} & S_2^{(a_M)} & \dots & S_M^{(a_M)} \\ \hline C_1^{(b_1)} & C_2^{(b_1)} & \dots & C_M^{(b_1)} & S_1^{(b_1)} & S_2^{(b_1)} & \dots & S_M^{(b_1)} \\ C_1^{(b_2)} & C_2^{(b_2)} & \dots & C_M^{(b_2)} & S_1^{(b_2)} & S_2^{(b_2)} & \dots & S_M^{(b_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_1^{(b_M)} & C_2^{(b_M)} & \dots & C_M^{(b_M)} & S_1^{(b_M)} & S_2^{(b_M)} & \dots & S_M^{(b_M)} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Egzistencija rešenja za problem rekonstrukcije stvarnog spektra merenog signala (svih M harmonika) sada se svodi na problem provere slučajeva za koje postoji inverzna matrica A^{-1} , tj. za koje je A regularna matrica. Jasno je da će kvadratna matrica A biti regularna ako je njena determinanta različita od nule.

Interesnanto je primetiti da su elementi matrice A isključive funkcije parametra ζ , pa se kriterijm za egzistenciju rešenja svodi na određivanje skupa vrednosti ζ i M za koje je A regularna matrica.

U slučaju da je $\zeta = 0$, matrica A jednaka je jediničnoj matrici E za svako M i rešenje sistema jednačina 4.46 je trivijalno.

Za ostale vrednosti $\zeta \neq 0$ jedan od mogućih pristupa problemu određivanja egzistencije rešenja jeste izvođenje komplikovanog analitičkog izraza za determinantu matrice A u opštem slučaju, zatim njeno upoređivanje sa nulom i potom rešavanje odgovarajuće nejednačine po ζ . S obzirom da su elementi matrice A , veoma složene funkcije po ζ (izrazi 4.41 i 4.42), koje uključuju proizvode racionalnih funkcija i trigonometrijskih funkcija, ovakav analitički pristup nije praktičan. Stvar se dodatno komplikuje ako se broj harmonika M , koji se meri,

ostavi kao promenljiv parametar, jer je njime određena dimenzija matrice A , a samim tim i konkretan analitički izraz za njenu determinantu. Dakle rešavanje dobijene jednačine po ζ bilo bi moguće isključivo numerički, odnosno približno.

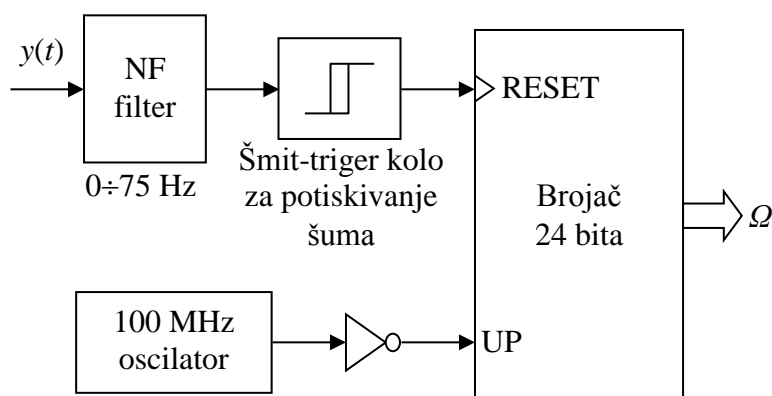
Drugi mogući pristup uključuje simulaciju različitih vrednosti elemenata matrice A za sve moguće vrednosti parametra ζ i za različit broj harmonika M , i potom proveru konkretnih brojnih vrednosti determinante za svaki od tih slučajeva. Ovde je odabran ovaj drugi pristup.

4.5.3. Rezultati simulacija

S obzirom da je matrica A zavisna samo od dva parametra, od kojih je jedan ceo broj (M), a drugi iz ograničenog opsega datog relacijom 4.34, simulacija predstavlja daleko praktičniji pristup. Detaljni rezultati svih obavljenih simulacija dati su dodatku E. Na slici S.E.3 i u tabeli T.E.1 dati su rezultati simulacija kada se meri nad jednom nazivnom periodom. Za slučajeve merenja nad više nazivnih perioda, rezultati su dati u tabeli T.E.2 i na slikama S.E.4 i S.E.5. Simulacija je ponovljena i za slučaj da trajanje merenja odgovara neparnom umnošku nazivnih poluperioda. Rezultati su dati u tabeli T.E.4 i na slikama S.E.6 i S.E.7. Na osnovu dobijenih rezultata simulacije, došlo se do zaključka da je izraz 4.34 potreban i dovoljan uslov za egzistenciju jedinstvenog rešenja sistema jednačina 4.46. Rešavanjem sistema 4.46 dobijaju se korigovane (tačne) vrednosti harmonika a_m i b_m . Njihov položaj na frekvencijskoj osi određen je poznavanjem parametra ζ , odnosno Δf . Pojedini koraci rekonstrukcije stvarnog spektra na osnovu dobijene matrice A će biti prodiskutovani u nastavku.

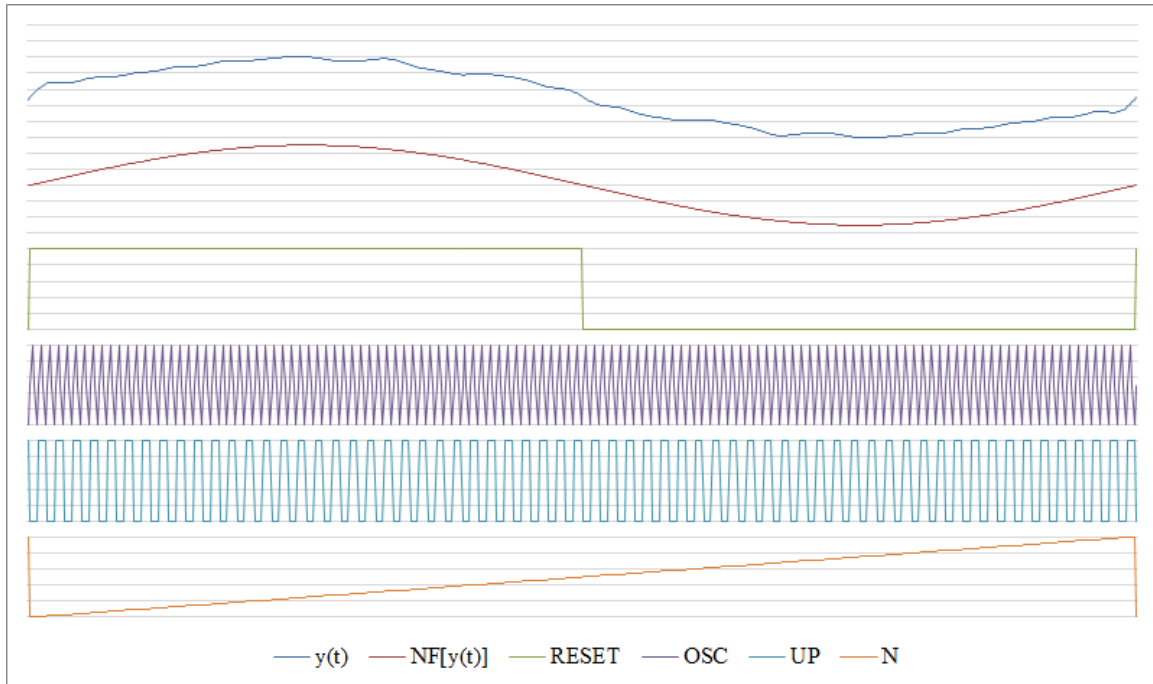
4.5.4. Rekonstrukcija stvarnog harmonijskog sastava

Da bi se na osnovu izmerenih pseudoharmonika rekonstruisao stvaran spektar signala i da bi se rešio sistem 4.46, potrebno je poznavati ζ , tj. stvarnu učestanost osnovnog harmonika f . Ova vrednost ne može biti poznata unapred, ali postoje brojne metode za njenu estimaciju. Savremene metode za procenu stvarne učestanosti u elektrodistributivnoj mreži zasnivaju se uglavnom na izračunavanju učestanosti iz izmerenih DFT ili FFT koeficijenata u okolini vršne vrednosti osnovnog harmonika [32]. Ali ovakav postupak, baziran na pseudoharmonicima, koji u sebi već sadrže grešku i koji će tu grešku višestruko preneti na procenu učestanosti, nije adekvatan pristup za problem koji se ovde rešava. Umesto toga, neophodno je obezbediti potpuno nezavisno merenje učestanosti, paralelno sa merenjem pseudoharmonika. Ovde se predlaže upotreba šeme date na slici S.4.11, koja obezbeđuje izuzetno precizno merenje učestanosti osnovnog harmonika na kraju svakog mernog intervala.



Slika S.4.11. Šema električnog kola za merenje učestanosti i dobijanje parametara ζ

Ulazni NF filter ima zadatak da iz merenog signala potisne sve komponente izuzev osnovnog harmonika, kao i da eliminiše sav visokofrekvencijski šum. Dodatno smanjivanje osetljivosti na prisustvo šuma postiže se Šmit-triger kolom, kako bi se eliminisali eventualni višestruki prolasci kroz nulu. Veoma je bitno i to da RESET signal brojača bude osetljiv na samo jednu ivicu, kako se brojač ne bi resetovao na polovini periode. Rad kola ilustrovan je na slici S.4.12. Faktori od kojih će zavistiti greška merenja su izbor učestanosti i stabilnost referentnog oscilatora, odnosno prisustvo niskofrekvencijskog šuma u merenom signalu $y(t)$. Zbog toga je izabran oscilator učestanosti ne veće od 100 MHz.



Slika S.4.12. Ilustracija rada kola za merenje učestanosti.

Korišćenjem kola sa slike S.4.11, $\hat{\xi}$ se može proceniti kao

$$\hat{\xi} = \frac{100 \text{ MHz}}{\Omega \cdot f_0} - 1 = \frac{2 \cdot 10^6}{\Omega} - 1 \quad (4.48)$$

Izraz 4.48 pokazuje da bi za realizaciju ovog kola bio dovoljan i brojač od 21 bita, ali se u praksi češće sreću integrisani brojači od po 24 bita.

Neka je sa $\Omega_0 = 2 \cdot 10^6$ označen izlaz brojača kada je stvarna učestanost jednaka nominalnoj vrednosti ($f = f_0$). Za Ω_0 parametar $\hat{\xi}$ je jednak nuli. Najmanja nenulta vrednost za $\hat{\xi}$ se dobija kada je

$$\Omega = \Omega_0 \pm 1 \quad (4.49)$$

i iznosi $\pm 5 \cdot 10^{-7}$ za $f_0 = 50 \text{ Hz}$ odnosno $\pm 6 \cdot 10^{-7}$ kada je $f_0 = 60 \text{ Hz}$. Ovo je ujedno i rezolucija sa kojom se meri $\hat{\xi}$. Kao što je pokazano tabelom T.E.1 u dodatku E, ove vrednosti su dovoljne da se pokriju svi slučajevi od interesa, odnosno kompletan opseg vrednosti za koje je matrica A regularna, čak i kada se meri preko 100 harmonika. Naravno, za $f_0 = 60 \text{ Hz}$

povoljnije bi bilo izabrati referentni oscilator učestanosti koja je deljiva sa 60, pa bi se stvarna rezlucija za ζ mogla neznatno razlikovati.

Procena za ζ dobijena iz 4.48 nezavisna je od merenja harmonika i na raspolaganju je na kraju svakog mernog intervala. Prema tome, uoprebom šeme sa slike S.4.11, može se obezbediti da ζ bude poznat parametar, koji se može koristiti za popunjavanje matrice A i sprovođenje korekcionog algoritma.

Za kreiranje matrice A mogu se koristiti tablične vrednosti trigonometrijskih funkcija, pod uslovom da su na rasolaganju dovoljni memorijski kapaciteti, što je u praksi retko. Koeficijenti se mogu računati i prema formulama 4.41 i 4.42. U slučaju tabličnog memorisanja realnih brojeva sa jednostrukom preciznošću u pokretnom zarezu (32 bita = 3 bajta za mantisu i predznak i 1 bajt za eksponent) i rezolucije određivanja ζ od 10^{-4} (pokriveni svi slučajevi iz T.E.1 do stotog harmonika) potrebno je imati na raspolaganju memoriju veličine:

$$10000 \cdot 4 \text{ B} \cdot \frac{0,5 - 0,0008}{10^{-4}} = 190,43 \text{ MB} \quad (4.50)$$

U slučaju dvostruke preciznosti, potrebna memorija je, naravno duplo veća.

Ukoliko se za kreiranje matrice A koriste formule 4.41 i 4.42, sinusne i kosinusne funkcije će najverovatnije biti realizovane razvojem u Tejlorov polinom određenog stepena. Za Tejlorov polinom 10. stepena potreban je sledeći broj računskih operacija:

$$75 \cdot (2M)(2M + 1) + 2M \text{ množenja i} \quad (4.51)$$

$$13 \cdot (2M)(2M + 1) \text{ sabiranja} \quad (4.52)$$

Primeru radi, kada je $M = 50$ broj množenja je 757700, a broj sabiranja je 131300.

Nakon formiranja matrice A , za rešavanje sistema 4.46 na izboru stoji velik broj metoda, od kojih je najpoznatija i u opštem slučaju najbrža metoda Gausova eliminacija, poznata još i pod nazivom Gaus-Zajdelov postupak. Ovim postupkom matrica A se postupno svodi na trougaonu matricu, nakon čega se računa jedan po jedan koeficijent, počev od b_M , preko b_1 i a_M sve do a_1 . Sa stanovišta merenja, Gausova eliminacije je veoma nepovoljna jer se greška sa kojom je izmeren koeficijent b_M propagira u grešku sa kojom se određuju svi ostali koeficijenti. Na kraju je razumno očekivati da bi u svim slučajevima a_1 bilo izračunato sa najvećom mogućom greškom, koja bi zavisila od grešaka svih ostalih koeficijenata. Veštom zamenom vrsta u matrici A ovo je moguće izbeći i podesiti da se npr. koeficijenti koji nose najveću snagu (b_1 i a_1) računaju sa najmanjom greškom. Međutim, svakako će ostati bar jedan par koeficijenata koji će biti određen sa veoma značajnom metrološkom i numeričkom greškom, većom od one koju sadrže pseudoharmonici. Time bi postupak korekcije postao besmislen.

Dodatan problem sa Gausovom eliminacijom odnosi se na nezgrapnost i sporost algoritma, zbog stalne potrebe za proverom vrednosti elemenata na glavnoj dijagonali matrice A . Ukoliko se ispostavi da je neki od koeficijenata na glavnoj dijagonali u toku postupka postao

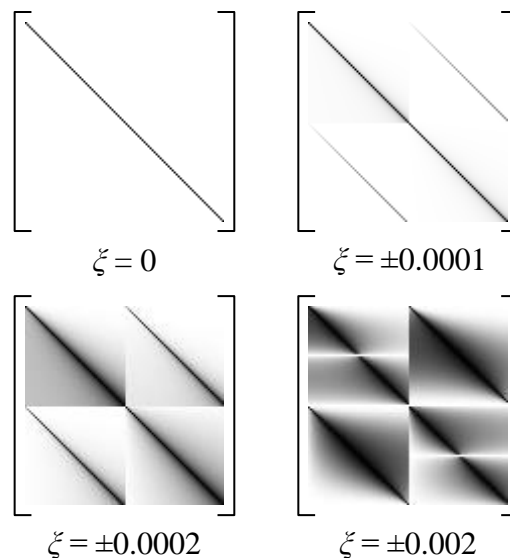
jednak ili veoma blizak nuli, potrebno je pronaći neki drugi element u istoj vrsti različit od nule i potom obaviti zamenu odgovarajućih kolona matrice A . Zbog potrebe za poređenjem, permutacijom i grananjem algoritma, postupak nije ni direktan niti je čisto numerički, pa opterećuje centralni procesor i može usporiti rad merila, dovodeći u pitanje mogućnost korekcije harmonika u realnom vremenu.

Na kraju, treba konstatovati i da je Gausova eliminacija veoma osetljiva na promenu koeficijenata matrice A . Mogu se lako konstruisati primeri koji pokazuju da male promene koeficijenata matrice A mogu dovesti do značajnih promena u vektoru konačnih rešenja.

Zato je u ovoj disertaciji istraživana poseban slučaj kada se sistem može rešiti drugim, podesnijim algoritmima. Kao prvo analizirani su slučajevi kada ζ polazi od nulte vrednosti (matrica A je jedinična) ka malim pozitivnim i negativnim vrednostima. Pokazuje se da su, u dovoljno širokom opsegu promena ζ oko nulte vrednosti, koeficijenti matrice A takvi da među njima, po apsolutnoj vrednosti, dominiraju elementi na glavnoj dijagonali. Za kvadratnu matricu $X = [x_{ij}]_{N \times N}$ kod koje je ispunjen uslov da su svi elementi glavne dijagonale po apsolutnoj vrednosti veći od sume apsolutnih vrednosti svih ostalih elemenata pripadajuće vrste, odnosno

$$|x_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |x_{ij}|, \quad i = 1..N \quad (4.53)$$

kaže se da je dijagonalno dominantna matrica (DDM). Primeri dijagonalno dominantne matrice A za različite vrednosti parametra ζ dati su na slici S.4.13. Svaki piksel na slici S.4.13 predstavlja jedan koeficijent matrice A . Tamni tonovi ukazuju na veće vrednosti, dok svetli tonovi odgovaraju manjim vrednostima. Crna boja odgovara apsolutnoj vrednosti od ± 1 , a bela je jednaka nuli.



Slika S.4.13. Nekoliko primera dijagonalno dominantne matrice A reda 100×100 za merenje do 50 harmonika

U tabeli T.E.1 u posebnoj koloni su, za svako zadato M , određene granične vrednosti ζ za koje je A DDM. DDM imaju nekoliko osobina od značaja za postupak korekcije

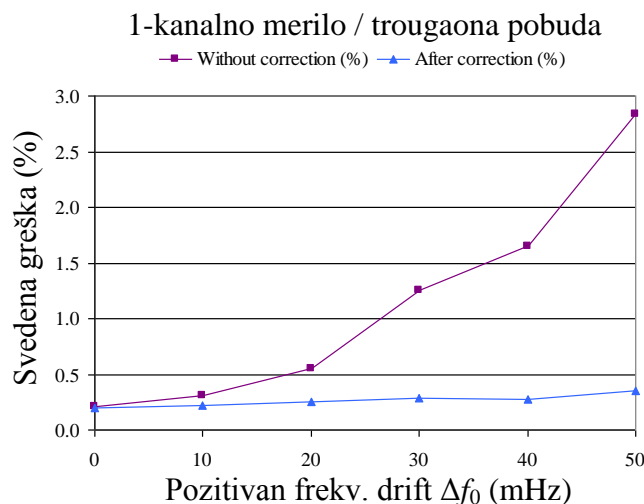
pseudokoeficijenata u tačne vrednosti [33]:

- sve DDM su regularne
- sisemi definisani pomoću DDM mogu se rešiti Jakobijevim iterativnim postupkom (videti dodatak C), koji ima sledeće osobine:
 - postupak uvek konvergira, a broj iteracija je relativno mali;
 - dobijanje rešenja je direktno, bez uključivanja logičkih operacija i poređenja realnih brojeva, poput onog u Gausovoj eliminaciji;
 - nema potrebe za permutacijom vrsta ili kolona u toku postupka;
 - vrednosti iz određenog koraka iteracije se dobijaju samo na osnovu vrednosti iz prethodnog korak, pri čemu svaki element vektora rešenja zavisi samo od ostalih vrednosti, a ne i od samog sebe, pa greška sporo propagira kroz iterativan postupak;
 - postupak nije osetljiv na male promene ulaznih vektora pseudoharmonika.

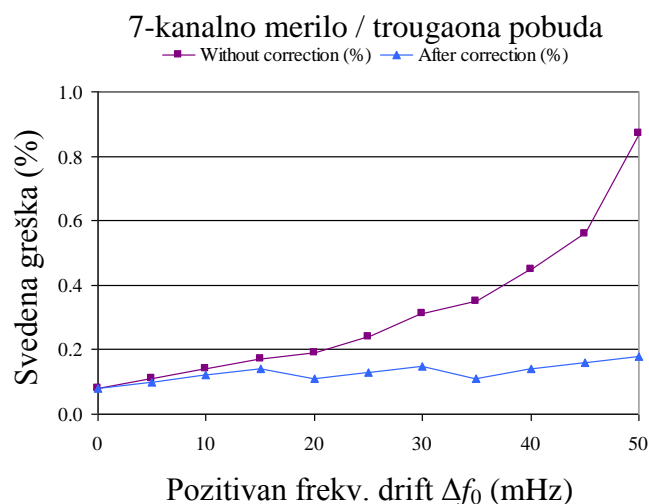
Važno je napomenuti da dobijeni rezultati i doneti zaključci prevazilaze primenu korekcionne metode samo na stohastičko integrisano merilo harmonika. Ova korekciona metoda podjednako je primenljiva i značajna za sva merila harmonika koja kao rezultat dobijaju DFT ili FFT koeficijente, kako ona koja mogu da se prilagode promeni učestanosti, tako i ona koja to ne mogu. S obzirom na jednostavnost i skromne zahteve za procesorskim resursima, metoda se lako može implementirati u sve nove tipove uređaja, ali i u već postojeća merila, nudeći značajno poboljšanje merne nesigurnosti uz minimalne softverske izmene.

4.5.5. Provera teorijskog koncepta u praksi

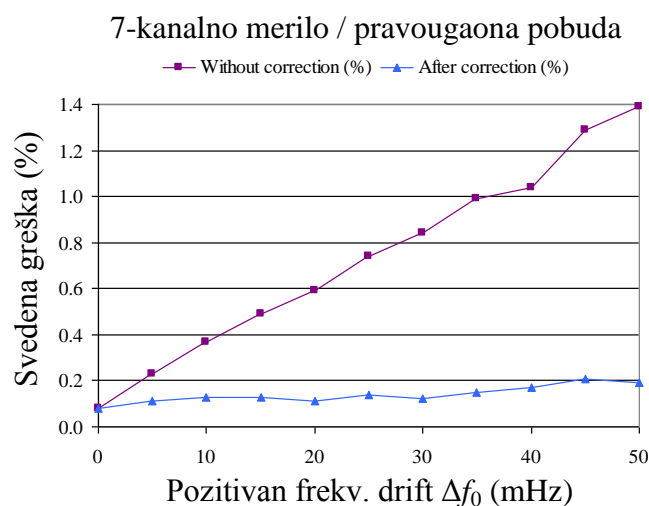
Da bi se pokazala ispravnost teorijskog koncepta u praksi, obavljena su kontrolna kalibraciona merenja čiji je osnovni cilj bio dokazivanje okoravanja greške u slučaju primene korekcionog postupka, u odnosu na situaciju kada se, u neadaptivnom instrumentu, ovaj postupak ne primenjuje.



Slika S.4.14. Svedena greška 1-kanalnog merila harmonika sa i bez korekcionog računa za slučaj trougaonog ulaznog signala efektivne vrednosti 220 V



Slika S.4.15. Svedena greška 7-kanalnog merila harmonika sa i bez korekcionog računa za slučaj trougaonog ulaznog signala efektivne vrednosti 220 V



Slika S.4.16. Svedena greška 7-kanalnog merila harmonika sa i bez korekcionog računa za slučaj pravougaone povorke impulsa efektivne vrednosti 220 V

Sva merenja obavljena su za slučaj da je nazivna učestanost 50 Hz i da je efektivna vrednost signala jednaka nominalnoj efektivnoj vrednosti napona u elektrodistributivnoj mreži. Na likama S.4.14 – S.4.16 vertikalna osa predstavlja relativnu grešku svedenu na opseg instrumenta, kako bi se ravnopravno tretirale greške merenja napona i greške merenja struja. Osim toga, time je izbegnut rast relativne greške u slučajevima kada su viši harmonici mali, odnosno nije pridat značaj malim apsolutnim greškama merenja malih vrednosti. S obzirom da merilo meri do 50 harmonika, opseg na horizontalnoj osi izabran je tako da odgovara relativnoj promeni učestanosti od 0 do 10^{-3} . Prema vrednostima iz tabele T.E.1 ispunjeni su uslovi primene Jakobijevog iterativnog postupka.

Zaključuje se da su, čak i u ekstremnim slučajevima ulaznih signala, poput „trouganog“ ili „čtvrte“, gde viši harmonici imaju značajne vrednosti, svedene greške merenja pod kontrolom, kada se primenjuje predloženi korekcionni račun.

4.5.6. Generalizacija problema

S obzirom da je kompletna analiza u delu 4.5 data za slučajeve kada se harmonici mere preko kosinusnih i sinusnih koeficijenata spektralnih komponenti, postavlja se logično pitanje da li bi isti ili slični zaključci važili i kada bi se oni određivali preko amplituda i faza.

Kosinusni i sinusni koeficijenti a_m i b_m , povezani su sa odgovarajućim amplitudama i fazama harmonika H_m , i φ_m relacijama 3.7 i 3.8. Ista relacija povezuje i odgovarajuće koeficijente pseudoharmonika, pa postoji sistem jednačina dat sa 4.54, koji je analogan sa 4.46.

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_m \\ \hat{\varphi}_m \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} H_m \\ \varphi_m \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Matrica B je kvadratna matrica reda $2M \times 2M$, čiji bi elementi, slično matrici A , bilo poželjno da zavise samo od parametra ξ . Pokazaćemo da ovakva matrica B , u opštem slučaju ne postoji.

Po definicij Furijeove transformacije \hat{H}_m je dato sa 4.55.

$$\begin{aligned} \hat{H}_m &= \left| \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t) e^{-2\pi j m f_0 t} dt \right| = \left| \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{k=1}^M H_k \cos(2\pi k t + \varphi_k) e^{-2\pi j m f_0 t} dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{k=1}^M H_k \frac{e^{2\pi j k t + j \varphi_k} + e^{-2\pi j k t - j \varphi_k}}{2} e^{-2\pi j m f_0 t} dt \right| = \\ &= \left| \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{k=1}^M H_k \frac{e^{2\pi j (k f - m f_0) t + j \varphi_k} + e^{-2\pi j (k f + m f_0) t - j \varphi_k}}{2} dt \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^M H_k \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{e^{2\pi j (k f - m f_0) t + j \varphi_k} + e^{-2\pi j (k f + m f_0) t - j \varphi_k}}{2} dt \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{H_k}{2} \left[e^{j \varphi_k} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{2\pi j (k f - m f_0) t} dt + e^{-j \varphi_k} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} e^{-2\pi j (k f + m f_0) t} dt \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{H_k}{2} \left[\frac{e^{j \varphi_k}}{2\pi j (k f - m f_0) T_0} \left(e^{2\pi j (k f - m f_0) T_0} - 1 \right) - \frac{e^{-j \varphi_k}}{2\pi j (k f + m f_0) T_0} \left(e^{-2\pi j (k f + m f_0) T_0} - 1 \right) \right] \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{H_k}{4\pi j} \left[\frac{e^{j \varphi_k} \left(e^{2\pi j (k(1+\xi) - m)} - 1 \right)}{k(1+\xi) - m} - \frac{e^{-j \varphi_k} \left(e^{-2\pi j (k(1+\xi) - m)} - 1 \right)}{k(1+\xi) + m} \right] \right| \end{aligned} \quad (4.55)$$

Kako je

$$e^{2\pi j (k \pm m)} = \underbrace{\cos[2\pi(k \pm m)]}_1 \pm j \underbrace{\sin[2\pi(k \pm m)]}_0 = 1 \quad (4.56)$$

sledi da se 4.55 može napisati kao

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_m &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{H_k}{4\pi j} \left[\frac{e^{j\varphi_k} (e^{2\pi j k \xi} - 1)}{k(1+\xi) - m} - \frac{e^{-j\varphi_k} (e^{-2\pi j k \xi} - 1)}{k(1+\xi) + m} \right] \right| = \\
 &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{H_k}{2\pi} \left[\frac{e^{j\varphi_k} e^{\pi j k \xi} \sin(\pi k \xi)}{k(1+\xi) - m} + \frac{e^{-j\varphi_k} e^{-\pi j k \xi} \sin(\pi k \xi)}{k(1+\xi) + m} \right] \right| = \\
 &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{H_k \sin(\pi k \xi)}{2\pi} \left[\frac{e^{j(\pi k \xi + \varphi_k)}}{k(1+\xi) - m} + \frac{e^{-j(\pi k \xi + \varphi_k)}}{k(1+\xi) + m} \right] \right| = \\
 &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{H_k \sin(\pi k \xi)}{2\pi} \left[\frac{[k(1+\xi) + m] e^{j(\pi k \xi + \varphi_k)} + [k(1+\xi) - m] e^{-j(\pi k \xi + \varphi_k)}}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] \right| = \\
 &= \left| \sum_{k=1}^M \frac{H_k \sin(\pi k \xi)}{\pi} \left[\frac{[k(1+\xi)] \cos(\pi k \xi + \varphi_k) - jm \sin(\pi k \xi + \varphi_k)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] \right| = \\
 &= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^M \frac{H_k \sin(\pi k \xi)}{\pi} \left[\frac{[k(1+\xi)] \cos(\pi k \xi + \varphi_k)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^M \frac{H_k \sin(\pi k \xi)}{\pi} \left[\frac{m \sin(\pi k \xi + \varphi_k)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] \right)^2}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Očigledno je iz izraza 4.57, da se ne može izvući linearna zavisnost amplituda i faza pseudoharmonika i stvarnih harmonika. Umesto toga, oni se mogu izraziti preko sinusnih i kosinusnih koeficijenata, kao

$$\hat{H}_m = \sqrt{\hat{a}_m^2 + \hat{b}_m^2} = \sqrt{\hat{a}_m^2 + \hat{b}_m^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^M a_k C_k^{(\hat{a}_m)} + \sum_{k=1}^M b_k S_k^{(\hat{a}_m)} \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^M a_k C_k^{(\hat{b}_m)} + \sum_{k=1}^M b_k S_k^{(\hat{b}_m)} \right)^2} \tag{4.58}$$

što u opštem slučaju nije moguće svesti na oblik 4.54. Međutim, ako su dostupni pseudoharmonici u obliku \hat{H}_m i $\hat{\varphi}_m$, tada se mogu izračunati

$$\begin{aligned}
 \hat{a}_m &= \hat{H}_m \cos \hat{\varphi}_m \\
 \hat{b}_m &= -\hat{H}_m \sin \hat{\varphi}_m
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

pa se, umesto sistema 4.54 može rešavati sistem 4.46 uz povratne jednačine

$$\begin{aligned}
 H_m &= \sqrt{a_m^2 + b_m^2} \\
 \varphi_m &= -\arctg \frac{b_m}{a_m}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Dakle, korekcionni račun je moguć samo ako se sprovodi preko sinusnih i kosinusnih koeficijenata, kada egzistencija rešenja zavisi od relativne varijacije učestanosti ζ .

4.6. Merenje harmonika upotrebom deterske sekvence konačne dužine

Pretpostavka o besonačnoj i aperiodičnoj deterskoj sekvenci narušena je onog trenutka kada se bazisne funkcije ne generišu pomoću realnog signala (veoma komplikovano, skupo i neprecizno), već se realizuju digitalno u vidu memorisanih diterovanih odmeraka (šeme sa slika S.3.1, S.3.2 i S.3.4).

Trajnim memorisanjem diterovanih odmeraka M bazisnih funkcija postižu se sledeći efekti:

1. značajno se pojednostavljuje hardver i povećava tačnost generisanja odmeraka;
2. pojeftinjuje se izvedba uređaja;
3. umesto kompletne deterske sekvence, uzima se samo jedan njen segment;
4. deterska sekvenca postaje periodična sa periodom koja je jednaka T_0 .

Uzimanjem samo jednog segmenta deterske sekvence narušava se uslov njene uniformnosti i postoji mogućnost da njena srednja vrednost ne bude jednaka 0, kao i da se u instrumentu vremenom akumulira sistematska greška merenja. Periodičnošću deterske sekvence narušava se uslov vremenske nekorelisanosti deterskog signala i merenog signala. Ovi zaključci ilustrovani su izrazom 4.61.

$$\begin{aligned}
 \hat{\Psi} &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} [y_1(t) + h_1(t)][y_2(t) + h_2(t)] dt = \\
 &= \underbrace{\frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} y_1(t)y_2(t) dt}_{\bar{\Psi}} + \underbrace{\frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} y_1(t)h_2(t) dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} y_2(t)h_1(t) dt}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} h_1(t)h_2(t) dt}_{I_3} = \\
 &= \bar{\Psi} + I_1 + I_2 + I_3
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Da bi se razjasnilo čemu su jednaki integrali I_1 , I_2 i I_3 , prvo će biti razmotreno nekoliko činjenica vezanih za deterske sekvence, koje su se u poznatoj literaturi retko uzimali u obzir. Kao prvo, svi „slučajni“ signali koji se generišu u instrumentima su zapravo pseudoslučajni, tj. deterministički, periodični signali. Oni su generisani složenim matematičkim formulama zahvaljujući kojima signal deluje sothastički (nepravilno) i obično obezbeđuju ispunjavanje nekih formalnih kriterijuma poput tipa slučajne raspodele, širine spektra itd. Ako se ova činjenica uzme u obzir, tada je jasno da se, na osnovu teroeme Vajerštrasa, i ovi signali mogu razviti u odgovarajući trigonometrijski red. Za potrebe tog razvoja prvo će biti uvedeno nekoliko definicija.

Neka je $T_{h_1} = 1/f_{h_1}$ perioda deterskog signala $h_1(t)$, koji se dodaje na mereni signal, a koji je dobijen na osnovu diskretne deterske sekvence $h_1(n)$. Perioda ove sekvence je

$$N_1 = \frac{f_s}{f_{h_1}} \tag{4.62}$$

pri čemu je f_s učestanost odmeravanja merenog signala, tj. učestanost kojom se generišu slučajni odmerci, a f_{h_1} učestanost osnovnog harmonika u deterskom signalu. Dalje, neka je N_2

perioda deterske sekvence $h_2(n)$ koja je dodata na odmerke bazisne funkcije $y_2(t_n)$. Tada se može razmatrati fiktivni deterski signal $h_2(t)$, čije su perioda i učestanost

$$T_{h_2} = \frac{1}{f_{h_2}} = \frac{f_s}{N_2} = \frac{f_s}{N} = KT_0 = \frac{K}{f_0} \quad (4.63)$$

Deterski signali $h_1(t)$ i $h_2(t)$ se, prema Vajerštrasovoj teoremi, mogu, sa proizvoljnom tačnošću, razviti u trigonometrijske polinome date izrazima 4.64 i 4.65.

$$h_1(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{p=1}^{M_1} [\alpha_p \cos(2\pi p f_{h_1} t) + \beta_p \sin(2\pi p f_{h_1} t)] \quad (4.64)$$

$$h_2(t) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{q=1}^{M_2} \left[\gamma_q \cos\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) + \delta_q \sin\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) \right] \quad (4.65)$$

pri čemu redovi polinoma M_1 i M_2 , zavise od tačnosti sa kojom se aproksimacija želi izvršiti. U praksi, M_1 i M_2 mogu biti veoma veliki.

Za sekvencu h_1 još važi i da je veoma duge periode u odnosu na interval merenja ($N_1 \gg N$), što je u analognom domenu iskazano sa

$$T_{h_1} \gg KT_0 \quad (4.66)$$

Shodno tome je i

$$f_{h_1} \ll \frac{f_0}{K} \quad (4.67)$$

odnosno

$$f_{h_1} T_0 \ll \frac{1}{K} \quad (4.68)$$

Pogledajmo najpre čemu je jednak integral I_2 iz izraza 4.61.

Neka je $y_2(t)$ proizvoljna bazisna funkcija. Bez gubljenja na opštosti, pretpostaviće se da je ona jednaka $R\cos(2\pi m f_0 t)$, odnosno da je podešena za merenje koeficijenta a_m (identični zaključci se dobijaju i za izbor bilo koje od funkcija $R\sin(2\pi m f_0 t)$). Tada je

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} y_2(t) h_1(t) dt = \\ &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} R \cos(2\pi m f_0 t) \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{p=1}^{M_1} [\alpha_p \cos(2\pi p f_{h_1} t) + \beta_p \sin(2\pi p f_{h_1} t)] \right] dt = \\ &= \frac{R\alpha_0}{2KT_0} \underbrace{\int_0^{KT_0} \cos(2\pi m f_0 t) dt}_0 + \\ &\quad + \sum_{p=1}^{M_1} \left[\frac{R\alpha_p}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos(2\pi m f_0 t) \cos(2\pi p f_{h_1} t) dt + \frac{R\beta_p}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos(2\pi m f_0 t) \sin(2\pi p f_{h_1} t) dt \right] \end{aligned} \quad (4.69)$$

Ako važi 4.68, tada je, za većinu merenja ispunjeno i da je $m f_0 \gg p f_{h_1}$, odnosno da je

$$m \gg pf_{h1}T_0, \quad \forall p \quad (4.70)$$

Dalje je

$$I_2 = \sum_{p=1}^{M_1} \left[\frac{R\alpha_p}{2KT_0} \int_0^{KT_0} [\cos(2\pi(mf_0 - pf_{h1})t) + \cos(2\pi(mf_0 + pf_{h1})t)] dt + \right. \\ \left. + \frac{R\beta_p}{KT_0} \int_0^{KT_0} [\sin(2\pi(mf_0 + pf_{h1})t) - \sin(2\pi(mf_0 - pf_{h1})t)] dt \right] \quad (4.71)$$

Zamenom konačne sume i određenog integrala, 4.71 se razvija u 4.72.

$$I_2 = \frac{R\alpha_m}{2KT_0} \int_0^{KT_0} [1 + \cos(4\pi mf_0 t)] dt + \frac{R\beta_m}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin(4\pi mf_0 t) dt + \\ + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m \frac{f_0}{f_{h1}}}}^{M_1} \left[\frac{R\alpha_p}{2KT_0} \int_0^{KT_0} [\cos(2\pi(mf_0 - pf_{h1})t) + \cos(2\pi(mf_0 + pf_{h1})t)] dt + \right. \\ \left. + \frac{R\beta_p}{2KT_0} \int_0^{KT_0} [\sin(2\pi(mf_0 + pf_{h1})t) - \sin(2\pi(mf_0 - pf_{h1})t)] dt \right] \\ = \frac{R\alpha_m}{2} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m \frac{f_0}{f_{h1}}}}^{M_1} \left[\frac{R\alpha_p}{2KT_0} \left(\frac{\sin(2\pi(mf_0 - pf_{h1})t)}{2\pi(mf_0 - pf_{h1})} + \frac{\sin(2\pi(mf_0 + pf_{h1})t)}{2\pi(mf_0 + pf_{h1})} \right) \Big|_0^{KT_0} + \right. \\ \left. + \frac{R\beta_p}{2KT_0} \left(\frac{-\cos(2\pi(mf_0 - pf_{h1})t)}{2\pi(mf_0 - pf_{h1})} + \frac{-\cos(2\pi(mf_0 + pf_{h1})t)}{2\pi(mf_0 + pf_{h1})} \right) \Big|_0^{KT_0} \right] \\ = \frac{R\alpha_m}{2} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m \frac{f_0}{f_{h1}}}}^{M_1} \left[\frac{R\alpha_p}{2} \left(\frac{\sin(2\pi K(m - pf_{h1}T_0))}{2\pi K(m - pf_{h1}T_0)} + \frac{\sin(2\pi K(m + pf_{h1}T_0))}{2\pi K(m + pf_{h1}T_0)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{R\beta_p}{2} \left(\frac{1 - \cos(2\pi K(m - pf_{h1}T_0))}{2\pi K(m - pf_{h1}T_0)} + \frac{1 - \cos(2\pi K(m + pf_{h1}T_0))}{2\pi K(m + pf_{h1}T_0)} \right) \right] \quad (4.72)$$

Uzimajući u obzir 4.70, dobija se da je

$$\begin{aligned}
 I_2 &\approx \frac{R\alpha_m}{2} + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq m \frac{f_0}{f_{h1}}}}^{M_1} \left[\frac{R\alpha_p}{2} \underbrace{\left(\frac{-\sin(2\pi K p f_{h1} T_0)}{2\pi K m} + \frac{\sin(2\pi K p f_{h1} T_0)}{2\pi K m} \right)}_0 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{R\beta_p}{2} \left(\frac{1 - \cos(2\pi K p f_{h1} T_0)}{2\pi K m} + \frac{1 - \cos(2\pi K p f_{h1} T_0)}{2\pi K m} \right) \right] \\
 &= \frac{R\alpha_m}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Član $\frac{R\alpha_m}{2}$ postoji samo ako postoji p takvo da je $mf_0 = pf_{h1}$. Međutim, ovo je u suprotnosti sa pretpostavljenom relacijom 4.70, pa sledi da I_2 mora biti jednako nuli. Drugim rečima, ako je deterska sekvenca h_1 dovoljno duga, greška koju čini sabirak I_2 u izrazu 4.61 neće postojati.

Ovaj zaključak biće tačniji što je K manje, odnosno I_2 će biti najbliže nuli kada se merenjem obuhvati $K = 1$ perioda ulaznog signala.

4.6.1. Uticaj konačne dužine deterske sekvence na tačnost merenja

Pogledajmo sada čemu je jednak integral I_3 u izrazu 4.61.

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} h_1(t)h_2(t)dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{p=1}^{M_1} [\alpha_p \cos(2\pi p f_{h1} t) + \beta_p \sin(2\pi p f_{h1} t)] \right\} \times \\
 &\quad \times \left\{ \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{q=1}^{M_2} \left[\gamma_q \cos\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) + \delta_q \sin\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) \right] \right\} dt \\
 &= \frac{\alpha_0 \gamma_0}{4} + \frac{\alpha_0}{2} \underbrace{\frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sum_{q=1}^{M_2} \left[\gamma_q \cos\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) + \delta_q \sin\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) \right] dt}_0 + \\
 &\quad + \frac{\gamma_0}{2} \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sum_{p=1}^{M_1} [\alpha_p \cos(2\pi p f_{h1} t) + \beta_p \sin(2\pi p f_{h1} t)] dt + \\
 &\quad + \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \underbrace{\left\{ \sum_{p=1}^{M_1} [\alpha_p \cos(2\pi p f_{h1} t) + \beta_p \sin(2\pi p f_{h1} t)] \right\}}_{\approx 0} \underbrace{\left\{ \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{q=1}^{M_2} \left[\gamma_q \cos\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) + \delta_q \sin\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) \right] \right\}}_{(4.74)} dt
 \end{aligned}$$

Poslednji sabirak u izrazu 4.74 jednak je nuli iz istog razloga iz koga je i 4.73 jednako nuli.

Ako se može smatrati da kvalitetno generisan deterski signal $h_1(t)$ nema jednosmernu komponentu, tada je, zapravo, $\alpha_0 = 0$, pa je

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{\gamma_0}{2} \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sum_{p=1}^{M_1} [\alpha_p \cos(2\pi p f_{h_1} t) + \beta_p \sin(2\pi p f_{h_1} t)] dt = \\
 &= \frac{\gamma_0}{2} \frac{1}{KT_0} \sum_{p=1}^{M_1} \left[\alpha_p \int_0^{KT_0} \cos(2\pi p f_{h_1} t) dt + \beta_p \int_0^{KT_0} \sin(2\pi p f_{h_1} t) dt \right] = \\
 &= \frac{\gamma_0}{2} \frac{1}{KT_0} \sum_{p=1}^{M_1} \left[\alpha_p \left(\frac{\sin(2\pi p f_{h_1} t)}{2\pi p f_{h_1}} \right) \Big|_0^{KT_0} + \beta_p \left(\frac{-\cos(2\pi p f_{h_1} t)}{2\pi p f_{h_1}} \right) \Big|_0^{KT_0} \right] = \\
 &= \frac{\gamma_0}{2} \sum_{p=1}^{M_1} \left[\alpha_p \left(\frac{\sin(2\pi K p f_{h_1} T_0)}{2\pi K p f_{h_1} T_0} \right) + \beta_p \left(\frac{1 - \cos(2\pi K p f_{h_1} T_0)}{2\pi K p f_{h_1} T_0} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Uzimajući ponovo u obzir da je perioda od $h_1(t)$ veoma velika, dobija se

$$\begin{aligned}
 \lim_{T_{h_1} \rightarrow \infty} I_3 &= \frac{\gamma_0}{2} \lim_{T_{h_1} \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{M_1} \left[\alpha_p \left(\frac{\sin(2\pi K p f_{h_1} T_0)}{2\pi K p f_{h_1} T_0} \right) + \beta_p \left(\frac{1 - \cos(2\pi K p f_{h_1} T_0)}{2\pi K p f_{h_1} T_0} \right) \right] = \\
 &= \frac{\gamma_0}{2} \lim_{f_{h_1} \rightarrow 0} \sum_{p=1}^{M_1} \left[\alpha_p \left(\frac{\sin(2\pi K p f_{h_1} T_0)}{2\pi K p f_{h_1} T_0} \right) + \beta_p \left(\frac{1 - \cos(2\pi K p f_{h_1} T_0)}{2\pi K p f_{h_1} T_0} \right) \right] = \\
 &= \frac{\gamma_0}{2} \sum_{p=1}^{M_1} \left[\alpha_p \lim_{f_{h_1} \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi K p f_{h_1} T_0)}{2\pi K p f_{h_1} T_0} + \beta_p \lim_{f_{h_1} \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2\pi K p f_{h_1} T_0)}{2\pi K p f_{h_1} T_0} \right] \stackrel{x=2\pi K p f_{h_1} T_0}{=} \\
 &= \frac{\gamma_0}{2} \sum_{p=1}^{M_1} \left[\alpha_p \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_1 + \beta_p \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - \cos(x)}{x}}_1 \right] = \\
 &= \frac{\gamma_0}{2} \sum_{p=1}^{M_1} (\alpha_p + \beta_p)
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Dakle, greška koju čini sabirak I_3 upravo je proporcionalna srednjoj vrednosti deterskog signala h_2 .

Ako je deterski signal beo, tj. ima ravnomernu raspodelu snaga po svim učestanostima, svi koeficijenti α_p i β_p su približno isti i mogu se zameniti konstantom α . Tada 4.76 postaje

$$I_3 = \gamma_0 M_1 \alpha \tag{4.77}$$

Parametri M_1 , α_p i β_p se teško mogu projektovati unapred, pa je jedini način da se ova greška drži pod kontrolom taj da se strogo vodi računa da nad intervalom KT_0 konačna dužina deterske sekvence ne utiče na pojavu značajne jednosmerne vrednosti γ_0 .

Ovim je pokazan uticaj konačnosti sekvence $h_2(n)$ na tačnost merenja. Stvarnu vrednost izraza 4.77 moguće je odrediti tek poznavanjem kontrukcionih karakteristika konkretnog merila, odnosno nakon izbora:

- generatora pseudoslučajnog signala,
- opsega A/D konvertora R ,
- kvanta (rezolucije) A/D konvertora a ,
- broja bita (rezolucije) memorijskog bloka m_2 ,
- učestanosti odmeravanja f_s .

Ponovo važi napomena da su svi približni izrazi i svi uslovi pod kojima oni važe, tačniji i strožije ispunjeni ako K ima minimalnu vrednost 1.

4.6.2. Uticaj periodičnosti ditterske funkcije na tačnost merenja

Na kraju proverimo i čemu je jednak integral I_1 u izrazu 4.61.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} y_1(t)h_2(t)dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\sum_{m=1}^M a_m \cos(2\pi mf_0 t) + b_m \sin(2\pi mf_0 t) \right] \left\{ \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{q=1}^{M_2} \left[\gamma_q \cos\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) + \delta_q \sin\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) \right] \right\} dt \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\sum_{m=1}^M a_m \cos(2\pi mf_0 t) + b_m \sin(2\pi mf_0 t) \right] \left\{ \sum_{q=1}^{M_2} \left[\gamma_q \cos\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) + \delta_q \sin\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) \right] \right\} dt \\
 &= \frac{1}{KT_0} \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^{M_2} \left[a_m \gamma_q \int_0^{KT_0} \cos(2\pi mf_0 t) \cos\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) dt + a_m \delta_q \int_0^{KT_0} \cos(2\pi mf_0 t) \sin\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) dt + \right. \\
 &\quad \left. + b_m \gamma_q \int_0^{KT_0} \sin(2\pi mf_0 t) \cos\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) dt + b_m \delta_q \int_0^{KT_0} \sin(2\pi mf_0 t) \sin\left(2\pi q \frac{f_0}{K} t\right) dt \right] \\
 &= \sum_{m=1}^M \sum_{q=1}^{M_2} \left[\frac{a_m \gamma_q}{2KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\cos\left(2\pi \left(mf_0 + q \frac{f_0}{K}\right) t\right) + \cos\left(2\pi \left(mf_0 - q \frac{f_0}{K}\right) t\right) \right] dt + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_m \delta_q}{2KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\sin\left(2\pi \left(mf_0 + q \frac{f_0}{K}\right) t\right) - \sin\left(2\pi \left(mf_0 - q \frac{f_0}{K}\right) t\right) \right] dt + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_m \gamma_q}{2KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\sin\left(2\pi \left(mf_0 + q \frac{f_0}{K}\right) t\right) + \sin\left(2\pi \left(mf_0 - q \frac{f_0}{K}\right) t\right) \right] dt + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b_m \delta_q}{2KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\cos\left(2\pi \left(mf_0 + q \frac{f_0}{K}\right) t\right) - \cos\left(2\pi \left(mf_0 - q \frac{f_0}{K}\right) t\right) \right] dt \right]
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{m=1}^{\max\{M, M_2\}} \left(\frac{a_m \gamma_{Km}}{2} + \frac{b_m \delta_{Km}}{2} \right) + \\
 &+ \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq Km}}^{M_2} \left[\frac{a_m \gamma_q}{2KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\cos \left(2\pi \left(mf_0 + q \frac{f_0}{K} \right) t \right) + \cos \left(2\pi \left(mf_0 - q \frac{f_0}{K} \right) t \right) \right] dt + \right. \\
 &+ \frac{a_m \delta_q}{2KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\sin \left(2\pi \left(mf_0 + q \frac{f_0}{K} \right) t \right) - \sin \left(2\pi \left(mf_0 - q \frac{f_0}{K} \right) t \right) \right] dt + \\
 &+ \frac{b_m \gamma_q}{2KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\sin \left(2\pi \left(mf_0 + q \frac{f_0}{K} \right) t \right) + \sin \left(2\pi \left(mf_0 - q \frac{f_0}{K} \right) t \right) \right] dt + \\
 &\left. + \frac{b_m \delta_q}{2KT_0} \int_0^{KT_0} \left[\cos \left(2\pi \left(mf_0 + q \frac{f_0}{K} \right) t \right) - \cos \left(2\pi \left(mf_0 - q \frac{f_0}{K} \right) t \right) \right] dt \right] \\
 &= \sum_{m=1}^{\max\{M, M_2\}} \left(\frac{a_m \gamma_{Km}}{2} + \frac{b_m \delta_{Km}}{2} \right) + \\
 &+ \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq Km}}^{M_2} \left[\frac{a_m \gamma_q}{2} \underbrace{\left(\frac{\sin 2\pi(Km+q)}{2\pi(Km+q)} + \frac{\sin 2\pi(Km-q)}{2\pi(Km-q)} \right)}_0 + \right. \\
 &+ \frac{a_m \delta_q}{2} \underbrace{\left(\frac{1 - \cos 2\pi(Km+q)}{2\pi(Km+q)} - \frac{1 - \cos 2\pi(Km-q)}{2\pi(Km-q)} \right)}_0 + \\
 &+ \frac{b_m \gamma_q}{2} \underbrace{\left(\frac{1 - \cos 2\pi(Km+q)}{2\pi(Km+q)} + \frac{1 - \cos 2\pi(Km-q)}{2\pi(Km-q)} \right)}_0 + \\
 &\left. + \frac{b_m \delta_q}{2} \underbrace{\left(\frac{\sin 2\pi(Km+q)}{2\pi(Km+q)} - \frac{\sin 2\pi(Km-q)}{2\pi(Km-q)} \right)}_0 \right] \\
 &= \sum_{m=1}^{\max\{M, M_2\}} \left(\frac{a_m \gamma_{Km}}{2} + \frac{b_m \delta_{Km}}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Izraz 4.79 predstavlja dodatnu sistematsku grešku koja je posledica korelacije periodičnog deterskog signala sa merenim signalom. Stvarnu vrednost greške ponovo je veoma teško kvantifikovati jer ona zavisi od konkretne realizacije merila, ali i od talasnog oblika merenog signala. Međutim, može se naći njena gornja granica, sledećim rezonovanjem.

Diterski signal, pa samim tim i svaka njegova spektralna komponenta, moraju biti po apsolutnoj vrednosti manji od polovine kvanta memorijskog bloka.

$$|h_2(t)| < \frac{q_2}{2} = \frac{R}{2^{m_2-2}} \quad (4.80)$$

Za Q spektralnih komponenti približno uniformno raspoređenih (beo šum) važi da je

$$|\gamma_{Km}| \approx |\delta_{Km}| \leq \frac{1}{M_2 \sqrt{2}} \cdot \frac{R}{2^{m_2-2}} \quad (4.81)$$

Na osnovu 4.81, 4.79 se može napisati kao

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \sum_{m=1}^{\max\{M, M_2\}} \left(\frac{a_m \gamma_{Km}}{2} + \frac{b_m \delta_{Km}}{2} \right) \right| \leq \sum_{m=1}^{\max\{M, M_2\}} \left(\left| \frac{a_m \gamma_{Km}}{2} \right| + \left| \frac{b_m \delta_{Km}}{2} \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{M_2 \sqrt{2}} \cdot \frac{R}{2^{m_2-2}} \sum_{m=1}^{\max\{M, M_2\}} (|a_m| + |b_m|) \leq \frac{1}{2} \frac{1}{M_2 \sqrt{2}} \cdot \frac{R}{2^{m_2-2}} U_n \sqrt{2} = \\ &= \frac{R U_n}{M_2 2^{m_2-2}} \end{aligned} \quad (4.82)$$

gde je U_n nominalna efektivna vrednost ulaznog napona prema EN50160.

Minimizacija greške se postiže povećanjem rezolucije memorijskog bloka, ali je manevarski prostor koji stoji na raspolaganju konstruktorima instrumenata u tom smislu često veoma ograničen. Ako se 4.82 uporedi sa izrazom za $\bar{\Psi}$, sledi da je za malu grešku merenja potrebno ispuniti uslov

$$\frac{1}{M_2 2^{m_2-2}} \ll \max_{m=1, \dots, M} \left\{ \frac{a_m}{U_n}, \frac{b_m}{U_n} \right\} \quad (4.83)$$

Za merenje harmonika visokog reda, koji su po pravilu slabo izraženi (imaju veoma male vrednosti kosinusnih i sinusnih koeficijenata), nije dovoljno samo da važi da je $m_2 \gg 2$, već i M_2 mora biti veliko, tj. deterski signal mora biti takav da ima što više značajnih spektralnih komponenti.

4.7. Slučajna greška i teorijska preciznost merila prema novom modelu

Pod pretpostavkom da su izvori sistematskih i slučajnih grešaka nezavisni, ukupna greška merenja data je sa:

$$|\Delta| = |G| + |\sigma| \quad (4.84)$$

pri čemu je G ukupna sistematska greška, a σ ukupna slučajna greška.

Kao što je već obrazloženo u uvodu ovog poglavlja, smatraće se da slučajne greške utiču na preciznost merenja, pa će mera ukupne slučajne greške, ujedno biti i mera preciznosti merila.

U razmatranju izraza za slučajnu grešku smatraće se da su sve sistematske greške otklonjene, odnosno da je merenje tačno. Sličan pristup je usvojen u [1], [2], [3], [4], [5], [22] i [23], s tom razlikom da je u svim pomenutim slučajevima, a priori usvojeno da je merenje tačno zbog oblika izraza A.2 uz zanemarivanje izvora sistematskih grešaka.

Grubo gledano, za preciznost merenja određenog harmonika mogla bi se usvojiti vrednost,

$$\sigma_{a_m, b_m} = \frac{2}{R} \sigma_{\bar{\Psi}} \quad (4.85)$$

gde $\sigma_{\bar{\Psi}}$ predstavlja standardnu devijaciju izlazne veličine $\bar{\Psi}$ datu sa A.23. Međutim, na osnovu prethodnog razmatranja sledi da na stvarnu grešku utiče samo varijansa slučajne komponenta izlaza koja je data sa 4.86.

$$e = 2g\bar{\Psi} - y_1 y_2 \quad (4.86)$$

Zbog toga je preciznost merenja harmonika data sa 4.87.

$$\sigma_{a_m, b_m} = \frac{2}{R} \sigma_e \quad (4.87)$$

Ovo je pokazano u [34] i ne predstavlja originalan doprinos ove disertacije, ali je po mišljenju autora rezultat koji je značajno spomenuti, radi kompletnosti obuhvaćene materije. U [34] je pokazano da σ_e^2 ima sledeću vrednost

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N} \left\{ \frac{4g^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t)f_2(t)| dt - \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1^2(t)f_2^2(t) dt \right\} \quad (4.88)$$

4.88 je niža granica merne nesigurnosti stohastičkog merila od one koja je data sa A.20 i A.23, jer je prema osobinama određenog integrala

$$\left[\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right]^2 \leq \int_{x_1}^{x_2} f^2(t) dt \quad (4.89)$$

Preciznost merenja je funkcija učestanosti odmeravanja, odabira intervala merenja i nepoznatog talasnog oblika ulazne funkcije $f_1(t)$, jer je $f_2(t)$ poznato za svako odabrano a_k i b_k . Na osnovu izraza za preciznost merenja, u [34] je predložen jednostavan hardver za njeno „on-line“ merenje. Ovaj hardver istovremeno izračunava i ukupnu i trenutnu preciznost merenja, pa je pomoću predloženog uređaja moguće u bilo kom trenutku dobiti i merenu veličinu i preciznost sa kojom je ona određena. U primeni u energetske mreži, pokazano je da relativna proširena merna nesigurnost, usled rasipanja izlaza A/D konvertora, postaje manja od 0,01 % nakon intervala merenja od 20 minuta, a zanemarivo mala nakon perioda od jednog dana.

5. Diskusija

U novom teorijskom modelu analizirani su neke od najznačajnijih sistematskih grešaka koje se odnose na ograničenja koncepta stohastičkog merenja u praktičnoj izvedbi merila ili realnim uslovima primene. Ovde će biti data diskusija svakog od učenog tipova sistematskih grešaka, i to redom po odeljcima 4.2, 4.3, 4.4 i 4.5. Deo diskusije, koji se odnosi na odeljak 4.4, preuzet je iz [41], gde su po prvi put objavljeni najvažniji rezultati iz ove disertacije.

5.1. Redovi veličine i mogućnosti korekcije greške neujednačenog odmeravanja i greške merenja nad intervalom koji je različit od nazivne periode

Promenljivost intervala merenja, odnosno promenljivost broja odmeraka po periodu dovodi do greške koja, po apsolutnoj vrednosti i u najopštijem slučaju, dostiže svoj maksimum na drugom harmoniku (slika S.4.7). Međutim, treba uzeti u obzir da je moguća varijacija broja odmeraka po periodu veoma mala, jer su konstrukcijom instrumenta preduzete mere da se odnos nominalne učestanosti i učestanosti odmeravanja drži veoma stabilnim. U tom smislu, na slici S.4.7 treba objektivno razmatrati samo nekoliko početnih vrednosti za ΔK , koje odgovaraju varijaciji periode od najviše ± 1 ili ± 2 periode takta

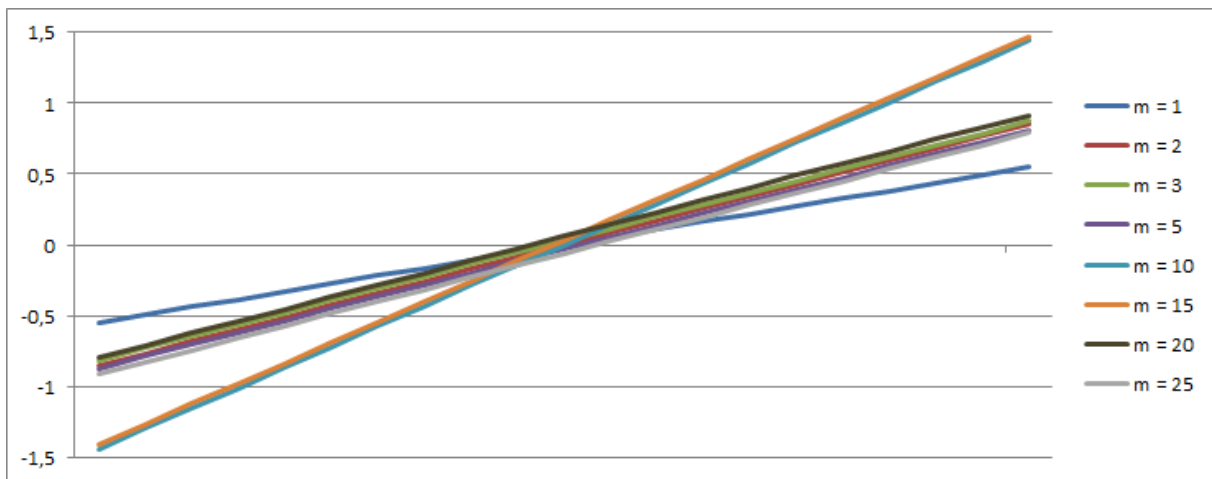
$$\Delta K_{tipicno} \approx \pm 2 \frac{f_0}{f_s} \quad (5.1)$$

U tom smislu, najnepovoljniji slučaj se dobija za harmonik kod koga je funkcija greške najstrmija, a, prema slici S.4.7, to je upravo najviši harmonik obuhvaćen merenjem. Jasno je, dakle, da će u praksi ovaj tip greške opadati sa porastom učestanosti odmeravanja, a rasti sa rednim brojem harmonika. Pri tome su najkritičniji parni harmonici kod kojih je dozvoljena vrednost amplitude ionako mala.

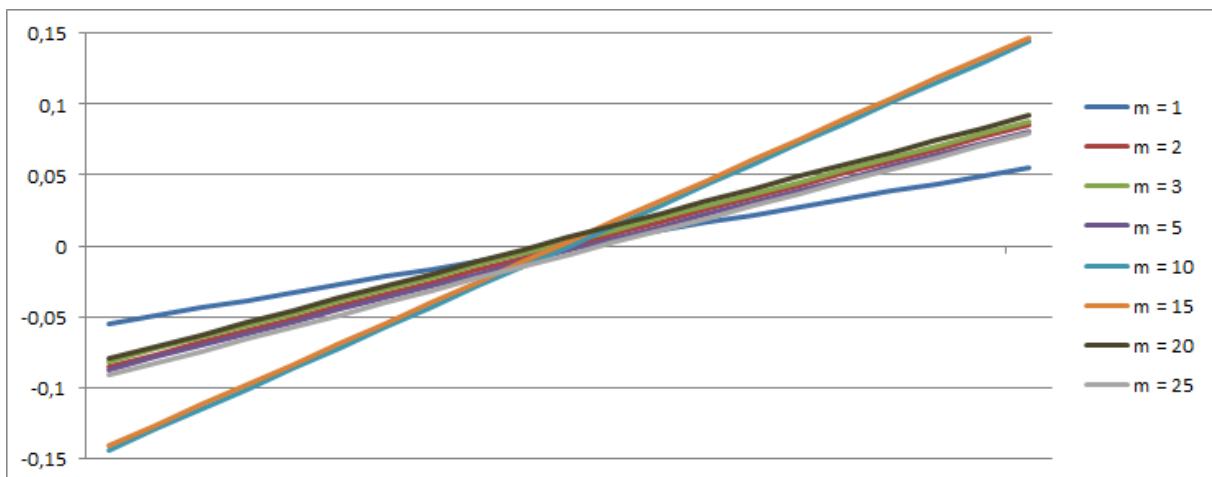
Za slučaj kada je $K_0 = 1$, i opsegom varijacije intervala merenja ograničenim sa 5.1, slika S.4.7 može se svesti na slike S.5.1 i S.5.3, kada je $f_s = 100$ kHz, odnosno na slike S.5.2 i S.5.4 kada je $f_s = 1$ MHz.

Dakle, sistematska greška koja je posledica neravnomernog odmeravanja, za malo ΔK koje je jedino od interesa u praksi, može se aproksimirati funkcijom koja linearno raste sa ΔK , odnosno opada sa učestanošću odmeravanja f_s . U realnim uslovima primene, kada f_s pređe 100 MHz, greška pada ispod 0,1 % i ne mora se uzimati u obzir. U ostalim slučajevima, poznat je tačan izraz za grešku, pa je lako izvršiti neophodnu korekciju.

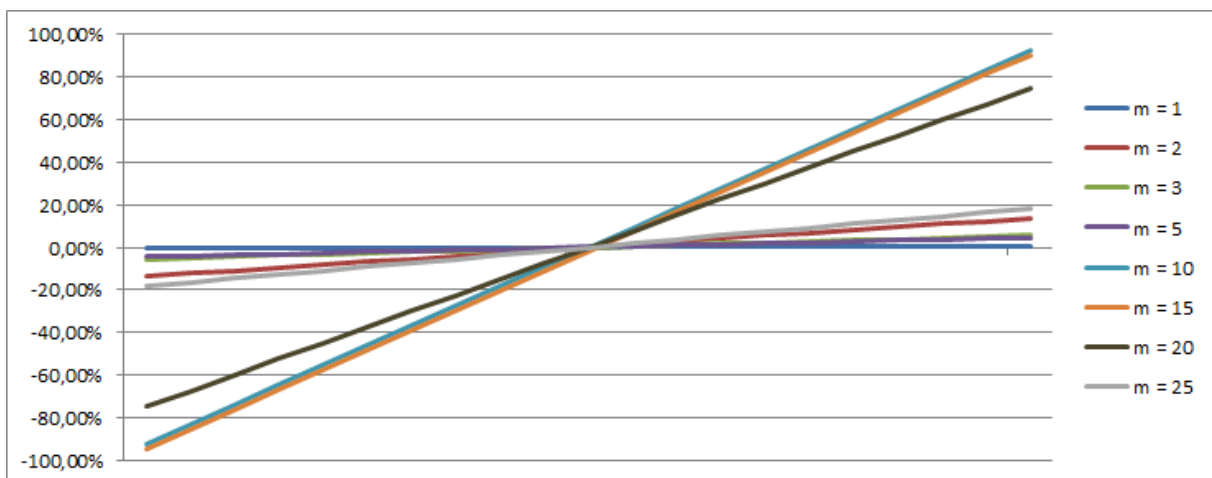
Jedan poseban slučaj od interesa je neravnomernost odmeravanja zbog toga što učestanost osnovnog harmonika ulaznog signala nije jednaka nominalnoj vrednosti. Tada se, iz drugih razloga od onih koji su razmatrani u 4.4, takođe dešava da se trajanje merenja ne poklapa sa trajanjem punog broja perioda. Međutim, ovaj oblik greške se automatski koriguje postupkom opisanim u 4.5, pa nema potrebe za višestrukom primenom formule 4.16. To takođe znači da se ova dva oblika sistematske greške mogu korigovati potpuno nezavisno.



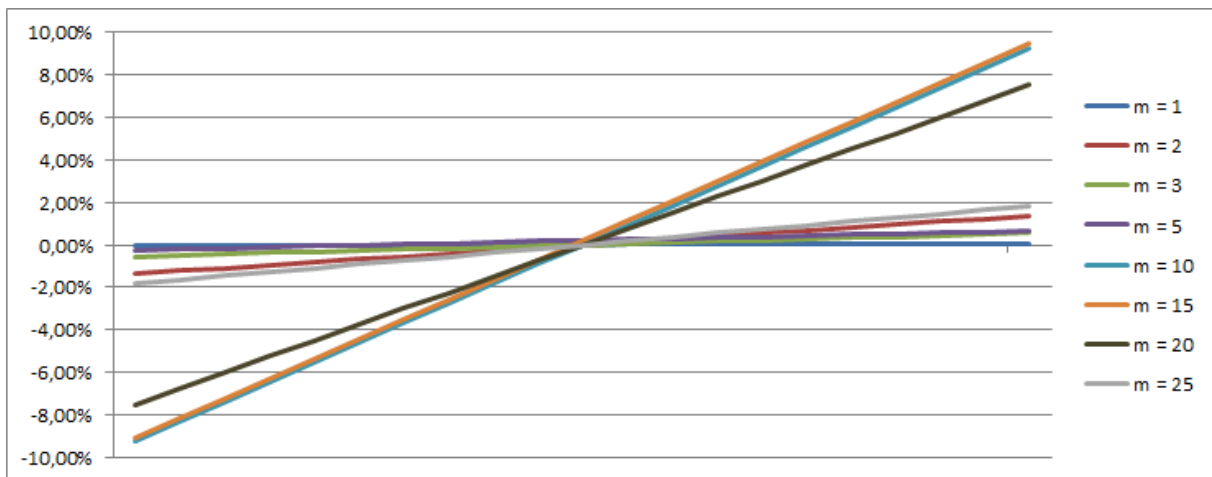
Slika S.5.1. Funkcija greške u zavisnosti od ΔK za nekoliko vrednosti m i za $f_s = 100$ kHz. Na vertikalnoj osi su jedinice u voltima (V), a na horizontalnoj osi su neimenovane jedinice u opsegu od -0,001 do 0,001



Slika S.5.2. Funkcija greške u zavisnosti od ΔK za nekoliko vrednosti m i za $f_s = 1$ MHz. Na vertikalnoj osi su jedinice u voltima (V), a na horizontalnoj osi su neimenovane jedinice u opsegu od -0,0001 do 0,0001



Slika S.5.3. Relativna greška merenja osnovnog harmonika u zavisnosti od ΔK za $f_s = 100$ kHz. Na vertikalnoj osi su neimenovane jedinice u procentima (%), a na horizontalnoj osi su neimenovane jedinice u opsegu od -0,001 do 0,001



Slika S.5.4. Relativna greška merenja osnovnog harmonika u zavisnosti od ΔK za $f_s = 1$ MHz. Na vertikalnoj osi su neimenovane jedinice u procentima (%), a na horizontalnoj osi su neimenovane jedinice u opsegu od -0,0001 do 0,0001

5.2. Red veličine i mogućnost korekcije greške smicanja spektra

Kao što je analizirano u dodatku C, za svaku iteraciju u sistemu reda 100 ($M = 50$ harmonika) potrebno je

$$(2M)^2 = 10.000 \text{ množenja i} \quad (5.2)$$

$$(2M)^2 = 10.000 \text{ sabiranja} \quad (5.3)$$

Za najnepovoljniji slučaj parametra ζ , za koji je matrica A na granici dijaonalne dominantnosti, dovoljno je do 500 iteracija da bi se postigla greška postpuka manja od 0,01 %. Ovo je bar 10 puta manje od merne nesigurnosti svih komercijalno dostupnih merila kvaliteta električne energije, odnosno postpukom korekcije se doprinos ove greške može svesti na zanemarivo malu vrednost. Potreban broj iteracija može se lako postići u bilo kom savremenom procesoru ili PFGA čipu sa skromnih 1 GFlops. Takav uređaj teorijski može obezbediti i do 750 iteracija u toku jedne periode merenog signala (20,0 ms ili 16,7 ms). U proseku, potreban broj iteracija je znatno manji i retko prelazi 50.

Radi poređenja, u tabeli T.5.1 je dato poređenje vremena izvršavanja korekcionog postupka na različitim platformama u jednostrukoj preciznosti (32 bita) pod najekstremnijim uslovima: $M = 100$ harmonika ili 80.000 operacija u pokretnom zarezu uz pretpostavku maksimalnih 500 iteracija po koeficijentu. Podaci su preuzeti iz [35], [36], [37], [38], [39] i [40]. U analizi su razmotrene i platforme pogodne za mainframe uređaje visokih performansi, ali i one pogodne za terenske robusne uređaje gde se zahteva niži odnos GFlops/W. Međutim, vremena u tabeli T.5.1 ne uključuju vreme pristupa memoriji. Kod nekih procesora postoji značajna interna memorija (npr. FPGA), pa su podaci iz T.5.1 bliski realnosti, dok je kod drugih procesora memorija isključivo eksterna (npr. NVidia), te je potrebno korigovati date procene da bi se dobile verodostojnije procene. Ovde to nije urađeno zbog kompleksnosti tog pitanja i zavisnosti vremena pristupa od konkretne realizacije pristupne magistrale.

Bez obzira na to, na osnovu tabele T.5.1 jasno je da komercijalno dostupna tehnologija omogućava implementaciju predloženog korekcionog postupka na proizvoljnoj platformi (μP , mobile μP , embedded μP , DSP, FPGA itd.)

Tabela T.5.1. Procene trajanja algoritma na različitim platformama pri korekciji vrednosti 100 pseudoharmonika u 500 iteracija

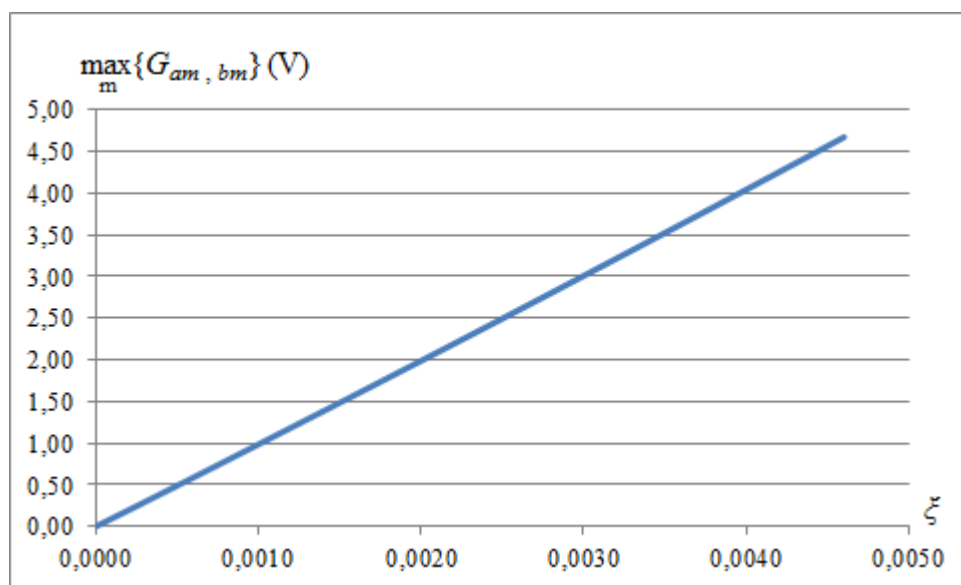
Platforma	Tip procesora	GFlops	Procenjeno trajanje algoritma
Intel i5-3570T	μP	106	377 μs
Intel i7-990x	μP	90	444 μs
Intel Core i7-3770	mobile μP	225	178 μs
Intel Core Duo L7700	mobile μP	14,4	2.778 μs
AMD Opteron 6284 SE	embedded μP	346	116 μs
AMD Radeon HD	mobile μP	4.300	9 μs
TI Sitara Cortex-A8	μP	4	10.000 μs
TI TMS320 C6655	DSP	165	242 μs
NVidia GTX 690	mobile μP	5.621	7 μs
NVidia Tesla K10	mobile μP	4.577	9 μs
IBM Power A2	mobile μP	204	196 μs
Altera Stratix IV	FPGA	171	234 μs
Altera Stratix V	FPGA	1.000	40 μs
Adapteva Epiphany-IV	mobile μP	100	400 μs

Dalje će biti razmotreni uslovi pod kojima je matrica A , dijagonalno dominantna. Ovo je od posebnog interesa, kada su na raspolaganju skromniji računarski resursi, pre svega ograničena memorija. Na prvi pogled može se činiti da je DDM zona (slika S.E.3 i tabela T.E.1 u dodatku E) veoma uska. Međutim, pokazuje se da ona pokriva gotovo sve slučajeve od interesa. Ako je npr. potrebno meriti 50 harmonika u evropskoj distributivnoj mreži (50 Hz) i primeniti Jakobijev iterativni metod, parametar ζ treba približno da bude unutar intervala $\pm 0,002$ ($\pm 0,2\%$). Ovaj interval za ζ odgovara apsolutnoj promeni učestanosti od $\pm 0,1$ Hz, što se retko dešava, čak u tokom dužih vremenskih perioda. Odstupanja učestanosti preko $\pm 0,1$ Hz mogu se javiti, ali su povezana sa naglim promenama u potrošnji električne energije (preko 10 MW) i traju veoma kratko. Čak i u slučajevima kada A nije DDM ali jeste regularna matrica, može se smanjiti broj harmonika M koji se želi odrediti, tako da se tačka (ζ , M) translira u DDM zonu (slika S.E.3). Primera radi, neka je početni zahtev bio da se odredi $M = 65$ harmonika, a osnovna učestanost se menja za $\pm 0,08$ Hz ($\zeta = \pm 0,0016$). Odgovarajući par (ζ , M) leži van DDM zone. Međutim smanjivanjem broja harmonika na $\hat{M} = 60$ dovoljno je da se obezbedi dijagonalna dominantnost matrice A , jer par (ζ , \hat{M}) leži unutar DDM zone.

Dodatna dobra strana predloženog korekcionog postupka je u tome što se uslov za njegovu primenu odnosi na relativnu promenu učestanosti a ne na apsolutan, fiksni interval oko 50 Hz ili 60 Hz. To je od značaja kada tokom dužeg mernog intervala postoji stalan drift učestanosti na novu centralnu vrednost. Čak i merilo koje se može adaptirati na takvu novu „nominalnu“ učestanost, takođe ima koristi od predloženog postupka korekcije. Korekcija je, zapravo, uvek neophodna, jer se adaptacija može uraditi samo sa nekim konačnim korakom δf . Kolo za ekstrakciju učestanosti (sinhronizaciono kolo), kao što je npr. PLL može se iskoristiti da se „pride“ stvarnoj učestanosti veoma blizu, ostavljajući veoma malu razliku za korekcionu račun

[29]. Ova razlika biće manja od rezolucije sinhronizacionog kola δf . Kada je δf dovoljno malo (kolo dovoljno brzo), može se lako obezbediti ispunjenost uslova dijagonalnosti matrice A . Metod sinhronizacije opisan u [29] mogao bi se čak koristiti i za izbegavanje korekcionog računa, ali bi tada, za velik broj harmonika, sinhronizaciono kolo mora biti brže od bilo kojeg trenutno komecijalno dostupnog rešenja.

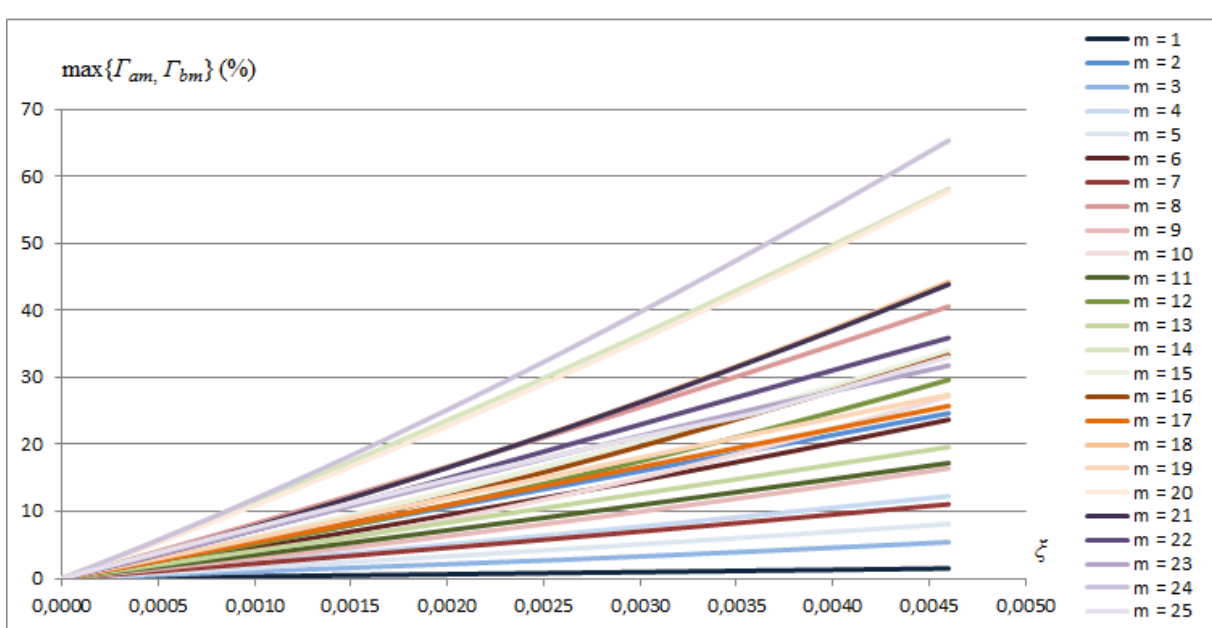
Red veličine ove greške veoma je teško ekyaktno proceniti ili simulirati, s obzirom na izuzetno velik broj stepeni slobode u računanju izraza 4.29 i 4.30, odnosno njihovu zavisnost od talasnog oblika signala koji se dovodi na ulaz merila. Umesto sveobuhvatne simulacije ovde će biti analiziran samo slučaj maksimalno izobličenog talasnog oblika prema EN50160 u zavisnosti od ζ . Prema tabeli T.E.1, za $M = 25$, ζ je ograničeno na $\pm 0,004645$. Rezultati su sumirani na grafiku S.5.5.



Slika S.5.5. Apsolutna greška merenja sinusnih i kosinusnih koeficijenata maksimalno izobličenog signala prema EN50160 u zavisnosti od relativne promene učestanosti ζ u zoni dijagonalne dominantnosti za $M = 25$ harmonika. Svi maksimumi dobijeni su za $m = 1$

Zanimljivo je primetiti da je zavisnost apsolutne greške od ζ priližno linearna i da se maksimalna apsolutna greška uvek dobija na osnovnom harmoniku ($m = 1$), tj. pri merenju a_1 ili b_1 . Svedena na opseg od 500 V, ova greška ne prelazi 1 %, što je u skladu sa rezultatima datim na graficima S.4.14 – S.4.16.

Radi nešto realnijeg poređenja, na slici S.5.6 je data i relativna greška merenja u funkciji ζ i m . Dakle, relativna greška, za razliku od svedene greške, unutar DDM zone raste nešto brže nego linearno. Ipak mnogo je značajniji zaključak koji se odnosi na vrednosti relativne greške. Sa slike S.5.6 se vidi da greška smicanja spektra drastično utiče na ukupnu mernu nesigurnost, pa je jasno da je korekcionni algoritam neophodno primeniti čak i za veoma male driftove učestanosti oko nominalne vrednosti f_0 .



Slika S.5.6. Relativna greška merenja sinusnih i kosinusnih koeficijenata maksimalno izobličenog signala prema EN50160 u zavisnosti od relativne promene učestanosti ζ i reda koeficijenta m u zoni dijagonalne dominantnosti za $M = 25$ harmonika

5.3. Red veličine i mogućnosti korekcije greške konačnih deterskih sekvenci

U razmatranju uticaja deterskih sekvenci pokazano je da je najmanji uticaj ditera velike periode $h_1(t)$, koji se dodaje merenom signalu na ulazu u A/D konvertor (izraz 4.73). Kada je deterska sekvenca $h_2(t)$ takva da ima značajne visokofrekvencijske komponente i kada je rezolucija memorijskog bloka dovoljno velika, uticaj korelisanosti ove deterske sekvence sa ulaznim signalom se može zanemariti (izraz 4.82, uz uslov 4.83). Najveći doprinos ukupnoj sistematskoj grešci merenja daje srednja vrednost deterskog signala $h_2(t)$, tj. signala koji predstavlja naponski ekvivalent upotrebljene deterske sekvence $h_2(n)$, prema izrazu 4.76. Zato je idealno koristiti generatore slučajnih, koji će biti lokalno uniformni sa lokalnom srednjom vrednošću jednakoj nuli. Alternativno, može se izabrati i takav generator slučajnih brojeva koji će, za zadato f_s imati periodu jednaku broju odmeraka po svakom merenju:

$$N = K \frac{f_s}{f_0} \quad (5.4)$$

Ovo nije lako ostvariti, pogotovo ako se sekvence generišu linearnim feedback shift registrima, kod kojih je perioda oblika $2^n - 1$, pri čemu je n dužina registra. Zato je jedini parametar kojim se ovo može regulisati u praksi, učestanosti odmeravanja f_s .

Red veličine ove sistematske greške nemoguće je proceniti bez poznavanja konkretnog generatora slučajnih brojeva koji će biti upotrebljen, a nekakva opšta teorija o ovome još nikada nije izvedena. Sa druge strane, kada se govori o korekciji, treba istaći da iako ovo formalno jeste sistematska greška, njen uticaj na pokazivanje merila je toliko složen, da bilo nepraktično otklanjati je iz rezultata nakon obavljenih merenja. Umesto toga, daleko je efikasnije preduzeti neophodne korake još u fazi projektovanja uređaja, da se ovaj tip greške

drži pod kontrolom, tj. da bude bar za ceo red veličine ispod ostalih sistematskih i slučajnih grešaka. Za procenu koliko bi to moglo iznositi u konkretnom slučaju potrebno je poslužiti se izrazima 4.73, 4.76 i 4.82.

5.4. Predlozi za poboljšanje konstrukcije instrumenta i načina obrade rezultata merenja

Iz svih navedenih analiza i razmatranja, moguće je izvući jasne zaključke o tome kako treba pristupiti konstrukciji narednih generacija stohastičkih integrisanih merila harmonika.

1. Kao prvo, po pitanju svih tipova sistematskih grešaka, izuzev greške merenja nad intervalom koji nije celobrojan umnožak nazivne periode, optimalna merenja su ona koja se obavljaju nad jednom periodom osnovnog hamonika.
2. Osim toga, najveći doprinos mernoj nesigurnosti daje smicanje spektra i činjenica da se stohastičko merilo ne može prilagoditi promenama nazivne učestanosti. Zato se korekcija pseudoharmonika u stvarne harmonike mora obaviti čak i za veoma mala odstupanja učestanosti. Predložen je efikasan i brzo konvergirajuć korekcionni postupak, zahvaljujući kojem se greška smicanja spektra može držati pod kontrolom u realnom vremenu. Jedino što je neophodno obezbediti je dodatan hardver za nezavisno merenje učestanosti sa dovoljno velikom rezolucijom (u zavisnosti od broja harmonika koji se želi odrediti).

Ostale preporuke vezane za projektovanje i konstrukciju stohastičkih integrisanih merila harmonika, a koje slede direktno iz rezultata ove doktorske disertacije, su:

3. Učestanost odmeravanja f_s , tj. broj odmeraka N treba da budu što veći, jer to doprinosi ne samo povećanju preciznosti ($\sim 1/\sqrt{N}$), već i povećanju tačnosti merenja ($\sim 1/N$);
4. Sekvenca $h_1(n)$ za diterovanje ulaznog signala $y_1(t)$ treba da bude što duža, ali i da ima osobine lokalne uniformnosti, tj. da joj je i lokalna srednja vrednost nad proizvoljnim intervalnom dužine N bliska nuli;
5. Prirodna perioda sekvence $h_2(n)$ treba da se poklapa sa ukupnim brojem odmeraka N , kako bi se kontrolisala njena srednja vrednost;
6. Formulu za generisanje pseudoslučajne sekvence $h_2(n)$ treba birati tako da obezbedi značajnu snagu na visokim spektralnim komponentama. Drugim rečima, treba birati takve LFSR koji naglo menjaju svoje vrednosti od malih brojeva ka velikim i obrnuto, što se postiže povratnim spregama sa bita malih težina i inverznim očitavanjem LFSH registra. Ovo je ponovo u skladu sa preporukom br. 4.

6. Zaključak

Ekonomski značaj koncepta kvaliteta električne energije na industrijski sektor, doveo je do potrebe za sve striktnijom kontrolom signala u elektrodistributivnim mrežama. To je stvorilo nove izazove i ograničenja vezane za merenja, koji uključuju sve češća ili potpuno kontinualna merenja pojedinih parametara. Jedan od najvažnijih parametara je svakako harmonijski sastav naponskih i strujnih signala u niskonaponskoj distributivnoj mreži.

Određivanje harmonika signala može se sprovesti merenjem sinusnih i kosinusnih koeficijenata razvoja signala u trigonometrijski polinom ili merenjem amplituda i faza njegovih harmonika. Pokazuje se da pristup preko trigonometrijskih koeficijenata ima brojne prednosti, kako po pitanju jednostavnosti i brzine hardvera, tako i po pitanju mogućnosti eliminacije sistematskih grešaka iz rezultata merenja. U disertaciji je pokazano kako se na osnovu sinusnih i kosinusnih koeficijenata mogu odrediti i svi ostali parametri kvaliteta električne energije. Od posebnog interesa za razmatranje je bilo integrisano stohastičko merilo harmonika, koje svoj rad zasniva na principu stohastičke rezonance. Pre svega, po prvi put su potpuno konzistentno izvedeni izrazi za izlaz merila i standardnu devijaciju. Ipak, kad god je to bilo moguće, izvođenja i diskusije odnosile su se i na znantno opštije slučajeve, koji bi se mogli primeniti u bilo kom analizatoru kvaliteta električne energije.

Analiza rada stohastičkog merila harmonika sprovedena je sa stanovišta merenja i obrade signala. Uopštenje postojećeg teorijskog modela, ostvareno je ukidanjem pojedinih pretpostavki o idealizovanim uslovima rada i konstrukcionih osobina. Tako je razmotreno ponašanje merila u slučajevima kada:

- sve komponente od kojih je sačinjeno merilo nisu idealne, a praktična izvedba merila utiče na njegovo ponašanje u praksi
- interval merenja nije celobrojan umnožak periode osnovnog signala
- broj odmeraka po svakoj periodi je promenljiv
- učestanost osnovnog harmonika nije unapred poznata i može odstupiti od nazivne vrednosti
- deterska sekvenca u memroijskom bloku ima konačnu dužinu i periodična je
- deterski signal na ulazu A/D konvertora je deterministički i periodičan.

Osnovna metodologija koja je korišćena u ovoj disertaciji za rešavanje postavljenog problema bila je teorijska analiza. U slučajevima kada neki problem nije bilo moguće rešiti analitički, primenjene su simulacije, koje su potvrđene odgovarajućim merenjima. Za potrebe ove disertacije napravljena je opsežna studija postojećih rešenja u literaturi, realizovano je šest nezavisnih aplikacija za kalibraciju i simulaciju, obavljno je preko 5000 simulacija od kojih je samo deo prikazan u celosti u dodacima, objavljena su tri rada na međunarodnim konferencijama [22], [23], [42] i jedan rad u međunarodnom časopisu [41]. Ovde će biti dat samo rezime najvažnijih zaključaka vezanih za različite izvore grešaka i mogućnosti njihovog otklanjanja.

Uticaj komponenata od kojih je sačinjeno merilo uzet je u obzir u procesu završne kalibracije, ali pod idealizovanim uslovima rada, kod kojih se ne javljaju ostali tipovi sistematskih grešaka.

Neregularni intervali merenja i neravnomernost broja odmeraka po periodi uzrokuju sistematsku grešku, koja se može kontrolisati povećanjem učestanosti odmeravanja, ali i povećavanjem broja perioda nad kojima se obavlja merenje. Ovo je jedini tip greške za koji je ustanovljeno da se smanjuje kada se meri nad intervalom većim od jedne nazivne periode.

U slučajevima kada stvarna učestanost osnovnog harmonika merenog signala odstupa od nazivne vrednosti (50 Hz ili 60 Hz), javlja se greška smicanja spektra, odnosno rezultat merenja nisu harmonici već pseudoharmonici. Ova greška predstavlja najznačajniju komponentu greške. U disertaciji je pronađen i prezentovan veoma efikasan metod za njeno potpuno otklanjanje. Kada se obezbedi nezavisno merenje stvarne učestanosti i kada njeno odstupanje nije preveliko, matrica koja definiše sistem odgovarajućih transformacionih jednačina postaje dijagonalno dominantna i iz dobijenih pseudoharmonika se lako mogu rekonstruisati tačne vrednosti harmonika primenom Jakobijevog iterativnog postupka. U slučajevima kada su odstupanja učestanosti nešto veća, radi eliminacije ove greške, može se napraviti kompromis redukovanjem reda najvišeg harmonika koji se želi odrediti i na taj način ispuniti uslov za primenu korekcionne metode. Dat je i predlog za konstrukciju dodatnih kola za sinhronizaciju, a ispravnost koncepta je proverena simulacijom i merenjima.

Uticaj osobina pseudoslučajnih sekvenci koje se koriste za diterovanje, uzet je preko tri aspekta: srednje vrednosti sekvence korišćene u bazisnoj funkciji, korelacije diterskog signala sadržanog u bazisnoj funkciji sa merenim signalom, kao i korelacije bazisne funkcije sa diterskim signalom kojim se diteruje mereni signal. Pokazano je da najveći doprinos grešci daje srednja vrednost diterskog signala sadržanog u bazisnoj funkciji. Ukoliko se ova greška drži pod kontrolom, uticaj realnih osobina generatora pseudoslučajnih brojeva biće sveden na minimum.

Diskusijom, na kraju disertacije, obuhvaćeni su još realniji uslovi primene i date procene reda veličine za svaku od navedenih sistematskih grešaka. Na kraju je dato šest preporuka za poboljšanje konstrukcije instrumenta i načina obrade rezultata merenja.

Autor se nada da će neke od ovih preporuka biti uzete u obzir već pri projektovanju naredne generacije merila, kao i da će one doprineti ukupnom poboljšanju metroloških performansi merila kvaliteta električne energije u elektrodistributivnim sistemima u svetu.

Dodatak A – Izvođenje teorijskog izraza za izlaznu funkciju SAADK-2G

Neka je dat dvobitni stohastički adicioni A/D konvertor sa dva generatora slučajnog napona kao na slici S.3.1. Da bi merenje datom šemom imalo smisla, potrebno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:

$$\begin{aligned} |y_1 = f_1(t)| &\leq 2g \\ |y_2 = f_2(t)| &\leq 2g \\ |h_i| &\leq g, \quad i = 1, 2 \\ p(h_i) &= \frac{1}{g}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

gde su h_i deterski signali uniformne raspodele sa gustinom verovatnoće $p(h_i)$.

Kada su ispunjeni uslovi iz A.1 izlaz iz instrumenta je

$$\bar{\Psi} = (2g)^2 \frac{\langle \text{Brojač} \rangle}{N} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt \quad (\text{A.2})$$

Varijansa pojedinačnog merenja je

$$\sigma_{\Psi} = \frac{(2g)^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t) f_2(t)| dt - \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt \right]^2 \quad (\text{A.3})$$

Ako su ove relacije tačne tada se, prema teoremi Bernštajna [43], ovim uređajem može meriti efektivna vrednost signala proizvoljnog talasnog oblika, pod uslovom da je taj signal neprekidan u intervalu merenja $[t_1, t_2]$. Pri tome, na oba kanala instrumenta treba dovesti isti nepoznat signal, čija se efektivna vrednost želi izmeriti.

Takođe, prema Vareštrasovoj teoremi [14] ovakvim merilom može se meriti amplituda proizvoljnog harmonika razvoja merenog signala u konačan trigonometrijski polinom, kada je interval merenja jednak celobrojnomo umnošku periode osnovnog hamonika trigonometrijskog polinoma. Pri tome, na jedan kanal instrumenta treba dovesti nepoznat signal, a na drugi kanal treba dovesti signal koji je proporcionalan kosinusnoj ili sisusnoj komponenti odgovarajućeg harmonika koji se želi izmeriti.

Pokažimo da su relacije A.2 i A.3 ispravne.

Prema teoremi o ergodičnosti, svejedno je da li je Ψ deterministička promenljiva ili slučajna promenljiva uniformne raspodele, pa je izlaz instrumenta sa slike A.1 dat relacijom A.4.

$$\bar{\Psi} = \int_D \Psi p_{\Psi}(\Psi) d\Psi \quad (\text{A.4})$$

gde je D odgovarajući domen vrednosti, a $p_{\Psi}(\Psi)$ funkcija gustine verovatnoće od Ψ . Prema šemi sa slike je

$$\Psi = \Psi_1 \Psi_2 \quad (\text{A.5})$$

Ψ zavisi od y_1, y_2, h_1 i h_2 , pa je

$$p_{\Psi}(\Psi) = p_{y_1 y_2 h_1 h_2}(y_1, y_2, h_1, h_2) = p_{y_1 y_2}(y_1, y_2) p_{h_1}(h_1) p_{h_2}(h_2) \quad (\text{A.6})$$

Diterski signali su, prema uslovu merenja, međusobno nekorelisani, a nekorelisani su i sa signalima $y_1 = f_1(t)$ i $y_2 = f_2(t)$.

Sada je

$$p_{\Psi}(\Psi) = p_{y_1 y_2 | t}(y_1, y_2 | t) p_t(t) p_{h_1}(h_1) p_{h_2}(h_2) \quad (\text{A.7})$$

jer su y_1 i y_2 združeno zavisni od vremena. Pri tome su

$$p(y_1 | t) = \delta(y_1 - f_1(t)) \quad (\text{A.8})$$

$$p(y_2 | t) = \delta(y_2 - f_2(t)) \quad (\text{A.9})$$

$$p(h_1) = p(h_2) = \frac{1}{2g} \quad (\text{A.10})$$

Što se tiče vremenske promenljive t , moguća su dva pristupa:

- a) t je kontinualna promenljiva sa uniformnom gustinom raspodele datom sa A.11

$$p_t(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \quad (\text{A.11})$$

- b) t je diskretna promenljiva sa diskretnom gustinom raspodele datom sa A.12

$$P_t(t = t_n) = \frac{1}{N}, \quad t_n = t_1 + n \frac{t_2 - t_1}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{A.12})$$

Uniformnost raspodele ovde je usvojena aksiomatski. Opravdanje za uniformnu raspodelu može se naći u činjenici da su tačke odmeravanja merenih signala ekvidistantne u vremenu, pa nema nagomilavanja vrednosti oko određenog trenutka. Potpun dokaz bi uključivao i potvrdu da u toku trajanja merenja vreme protiče ravnomerno (nerelativistički), ali kako to izlazi izvan okvira ove disertacije, smatraće se da u slučajevima od interesa nema relativističke dilatacije vremena.

Izbor promenljive t kao diskretne je bliži realnosti jer se merenje uvek obavlja nad konačnim brojem odmeraka u vremenu, a ne nad beskonačnim brojem infitezimalno malih intervala. Biće pokazano da izbor pristupa ipak ne utiče bitno na zaključke o načinu rada uređaja, kao i da se slučaj diskretne promenljive t , za dovoljno velik broj odmeraka N u intervalu merenja svodi na slučaj kontinualne promenljive.

Važno je uočiti i činjenicu da su $y_1|t$ i $y_2|t$, po prirodi stvari u merenjima, ili statistički potpuno nezavisne promenljive ili su povezane determinističkom transformacijom. Iako signali $f_1(t)$ i $f_2(t)$ mogu biti korelisani u vremenu, parametri signala $f_1(t)$ ne zavise od parametara signala $f_2(t)$, osim kada su oni baš povezani determinističkom transformacijom, one nisu statistički uslovljene, tj. nisu uzrok jedna drugoj. To je zbog toga što je korelacija potreban, ali ne i dovoljan uslov za statističku zavisnost, čak i kada se radi o ergodičnim funkcijama. Povezanost vremenske korelacije i uslovljenosti procesa je česta „iskustvena“ zabluda povezana sa antičkim filozofskim nasleđem. Ovo nasleđe oslikano je u latinskim sentencijama *cum hoc ergo propter hoc* (lat. sa tim, znači zbog toga) i *post hoc ergo propter hoc* (lat. posle toga, znači zbog toga). Da je reč o zabludi jasno je iz posmatranja bilo koja dva događaja a i b koji imaju isti uzrok, i stoga jesu korelisani, ali nisu uzrok jedan drugom, pa nisu ni statistički zavisni, tj. realizacija događaja a ne mora uticati na realizaciju događaja b .²

Dakle, ako $f_1(t)$ ne predstavlja determinističku transformaciju $g(f_2(t))$, tada je

$$p_{y_1 y_2 | t}(y_1, y_2 | t) = p_{y_1 | t}(y_1 | t) p_{y_2 | t}(y_2 | t) \quad (\text{A.13})$$

Kada je $f_1(t) = g(f_2(t))$, što uključuje i slučaj $f_1(t) \equiv f_2(t)$, tada je

$$\begin{aligned} p_{y_1 y_2 | t}(y_1, y_2 | t) &= p_{(y_1 | y_2) | t}((y_1 | y_2) | t) p_{y_1 | t}(y_1 | t) = \\ &= p_{(y_1 | y_2) | t}(y_1 | y_2) p_{y_1 | t}(y_1 | t) = \\ &= \delta(y_2 - g(y_1)) p_{y_1 | t}(y_1 | t) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

U delovima A.1 i A.2 biti analizirana situacija kada su y_1 i y_2 statistički nezavisni, dok će u delu A.3 biće obrađen slučaj kada je $f_1(t) = g(f_2(t))$.

A.1. Merenje u kontinualnom vremenu

Sada A.5 postaje

$$p_{\Psi}(\Psi) = p_{y_1 | t}(y_1 | t) p_{y_2 | t}(y_2 | t) p_t(t) p_{h_1}(h_1) p_{h_2}(h_2) \quad (\text{A.15})$$

Uvrštavanjem A.15 u A.4, dobija se

² U dobro poznatom primeru iz medicine, brojne epidemiološke studije pokazale su da žene koje se podvrgavaju kombinovanoj hormonalnoj terapiji (HRT) imaju manje šanse da obole od koronarnih srčanih oboljenja (CHD), kao što su npr. ateroskleroza ili infarkt miokarda. Ovo je navelo doktore u SAD da predlože HRT kao preventivni tretman protiv CHD-a. Međutim, nasumična kontrolna ispitivanja pokazala su da HRT u malom, ali statistički značajnom broju slučajeva zapravo *povećava* rizik od CHD-a. Ponovne analize podataka obavljenih epidemioloških studija pokazale su da žene koje se podvrgavaju THD terapiji uglavnom pripadaju višim socio-ekonomskim grupacijama, sa natprosečnim kvalitetom ishrane i režimom telesnih aktivnosti. Upotreba HRT-a i niska incidencija CHD-a imali su isti uzrok (u ovom slučaju bolji socio-ekonomski status), a nisu jedno drugom posledica i uzrok, kao što je prvobitno bilo pretpostavljeno. Ovaj primer je doveo do preispitivanja mnogih epidemioloških studija i ispravnosti ranije donetih zaključaka o uspešnosti pojedinih tipova terapija. <http://ije.oxfordjournals.org/content/33/3/464>

$$\begin{aligned}
 \overline{\Psi} &= \int \int \int \int \Psi_1 \Psi_2 \cdot p_t(t) dt \cdot p_{y_1|t}(y_1|t) dy_1 \cdot p_{y_2|t}(y_2|t) dy_2 \cdot p_{h_1}(h_1) dh_1 \cdot p_{h_2}(h_2) dh_2 = \\
 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-2g}^{2g} \delta(y_1 - f_1(t)) dy_1 \int_{-2g}^{2g} \delta(y_2 - f_2(t)) dy_2 \underbrace{\int_{-g}^g \Psi_1 \frac{dh_1}{2g}}_{y_1} \underbrace{\int_{-g}^g \Psi_2 \frac{dh_2}{2g}}_{y_2} = \\
 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\int_{-2g}^{2g} y_1 \delta(y_1 - f_1(t)) dy_1}_{f_1(t)} \underbrace{\int_{-2g}^{2g} y_2 \delta(y_2 - f_2(t)) dy_2}_{f_2(t)} = \\
 &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt
 \end{aligned} \tag{A.16}$$

Ovde se vidi koliko je važna razlika između vremenske korelisanosti, bez koje bi A.16 bio identički jednak nuli i statističke korelisanosti, bez koje A.16 ne bi bilo moguće izračunati.

Preciznost merenja određena je varijansom greške izlazne veličine:

$$\sigma_\Psi^2 = e^2 = \overline{(\Psi - \overline{\Psi})^2} = \overline{\Psi^2} - \overline{\Psi}^2 \tag{A.17}$$

Može se pokazati da važi

$$\Psi_i^k = \text{sign}^k \{\Psi_i\} \cdot |\Psi_i| \cdot (2g)^{k-1}, \quad i = 1, 2 \tag{A.18}$$

pa je, slično kao u A.16,

$$\begin{aligned}
 \overline{\Psi^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2 \cdot dP_\Psi = \\
 &= \frac{(2g)^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-2g}^{2g} \delta(y_1 - f_1(t)) dy_1 \int_{-2g}^{2g} \delta(y_2 - f_2(t)) dy_2 \underbrace{\int_{-g}^g |\Psi_1| \frac{dh_1}{2g}}_{|y_1|} \underbrace{\int_{-g}^g |\Psi_2| \frac{dh_2}{2g}}_{|y_2|} = \\
 &= \frac{(2g)^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\int_{-2g}^{2g} |y_1| \delta(y_1 - f_1(t)) dy_1}_{|f_1(t)|} \underbrace{\int_{-2g}^{2g} |y_2| \delta(y_2 - f_2(t)) dy_2}_{|f_2(t)|} = \\
 &= \frac{(2g)^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t) f_2(t)| dt
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

A.17 postaje

$$\sigma_\Psi^2 = \frac{(2g)^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f_1(t) f_2(t)| dt - \left[\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt \right]^2 \tag{A.20}$$

Treći centralni moment veličine Ψ je

$$M_3 = \overline{(\Psi - \bar{\Psi})^3} = \overline{\Psi^3 - 3\Psi^2\bar{\Psi} + 3\Psi\bar{\Psi}^2 - \bar{\Psi}^3} = \bar{\Psi}^3 - 3\bar{\Psi}\sigma_\Psi^2 - \bar{\Psi}^3 \quad (\text{A.21})$$

Kako su σ_Ψ^2 i $\bar{\Psi}$ ograničeni ostaje još samo da se vidi da li je i $\bar{\Psi}^3$ ograničeno.

$$\bar{\Psi}^3 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^3 \cdot dP_\Psi = (2g)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}\{\Psi\}|\Psi| \cdot dP_\Psi = (2g)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \cdot dP_\Psi \leq (2g)^4 \quad (\text{A.22})$$

S obzirom da je treći centralni moment veličine Ψ ograničen, važe Centralna granična teorema i Teorija uzoraka, pa je greška izlazne veličine $\bar{\Psi}$, ujedno i greška merenja

$$\sigma_{\bar{\Psi}}^2 = \frac{\sigma_\Psi^2}{N} \quad (\text{A.23})$$

A.2. Merenje na osnovu diskretnih vremenskih odmeraka

Za t kao diskretnu promenljivu A.5 postaje

$$p_\Psi(\Psi) = p_{y_1|t_i}(y_1 | t_n) p_{y_2|t_n}(y_2 | t_n) P_t(t = t_n) p_{h_1}(h_1) p_{h_2}(h_2) \quad (\text{A.24})$$

Uvrštavanjem A.24 u A.4, dobija se

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \sum_t \int_{y_1} \int_{y_2} \int_{h_1} \int_{h_2} \Psi_1 \Psi_2 \cdot P_t(t = t_n) \cdot p_{y_1|t_i}(y_1 | t_n) dy_1 \cdot p_{y_2|t_n}(y_2 | t_n) dy_2 \cdot p_{h_1}(h_1) dh_1 \cdot p_{h_2}(h_2) dh_2 = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int_{-2g}^{2g} \delta(y_1 - f_1(t_n)) dy_1 \int_{-2g}^{2g} \delta(y_2 - f_2(t_n)) dy_2 \underbrace{\int_{-g}^g \Psi_1 \frac{dh_1}{2g}}_{y_1} \underbrace{\int_{-g}^g \Psi_2 \frac{dh_2}{2g}}_{y_2} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\int_{-2g}^{2g} y_1 \delta(y_1 - f_1(t_n)) dy_1}_{f_1(t_n)} \underbrace{\int_{-2g}^{2g} y_2 \delta(y_2 - f_2(t_n)) dy_2}_{f_2(t_n)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_1(t_n) f_2(t_n) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Preciznost merenja određena je varijansom greške izlazne veličine:

$$\sigma_{\bar{\Psi}}^2 = e^2 = \overline{(\Psi - \bar{\Psi})^2} = \bar{\Psi}^2 - \bar{\Psi}^2 \quad (\text{A.26})$$

pa je, slučajno kao u A.25,

$$\begin{aligned}
 \overline{\Psi^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^2 \cdot dP_{\Psi} = \\
 &= \frac{(2g)^2}{N} \sum_{n=1}^N \int_{-2g}^{2g} \delta(y_1 - f_1(t_n)) dy_1 \int_{-2g}^{2g} \delta(y_2 - f_2(t_n)) dy_2 \underbrace{\int_{-g}^g |\Psi_1| \frac{dh_1}{2g}}_{|y_1|} \underbrace{\int_{-g}^g |\Psi_2| \frac{dh_2}{2g}}_{|y_2|} = \\
 &= \frac{(2g)^2}{N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\int_{-2g}^{2g} |y_1| \delta(y_1 - f_1(t_n)) dy_1}_{|f_1(t_n)|} \underbrace{\int_{-2g}^{2g} |y_2| \delta(y_2 - f_2(t_n)) dy_2}_{|f_2(t_n)|} = \\
 &= \frac{(2g)^2}{N} \sum_{i=1}^N |f_1(t_i) f_2(t_i)|
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

A.26 postaje

$$\sigma_{\Psi}^2 = \frac{(2g)^2}{N} \sum_{n=1}^N |f_1(t_n) f_2(t_n)| - \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_1(t_n) f_2(t_n) \right]^2 \tag{A.28}$$

Treći centralni moment veličine Ψ je ponovo ograničen, pa se opet dolazi do zaključka da je greška izlazne veličine $\overline{\Psi}$ ujedno i greška merenja

$$\sigma_{\Psi}^2 = \frac{\sigma_{\Psi}^2}{N} \tag{A.29}$$

Kada je broj odmeraka N velik, a odmerci se uzimaju ekvidistantno u intervalima

$$t_n = t_1 + n\Delta t, \quad n = 1, 2, \dots, N \tag{A.30}$$

gde je

$$\Delta t = \frac{t_1 - t_2}{N} \tag{A.31}$$

važiće da Δt teži nuli kada N teži beskonačnosti.

Izraz A.25 se može proširiti

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_1(t_n) f_2(t_n) = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=1}^N f_1(t_n) f_2(t_n) \Delta t \tag{A.32}$$

pa je

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \overline{\Psi}_{diskr} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{1}{N\Delta t} \sum_{n=1}^N f_1(t_1 + n\Delta t) f_2(t_1 + n\Delta t) \Delta t \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = \overline{\Psi}_{kont} \tag{A.33}$$

Slično se pokazuje i za σ_{Ψ}^2 u slučaju diskretne sume i kontinualnog integrala.

A.3. Slučaj kada je $f_1(t)$ deterministička transformacija $g(f_2(t))$

Isti zaključak će važiti i za t kao kontinualnu i za t kao diskretnu promenljivu, pa će ovde biti urađen samo prvi slučaj. Sada A.5 postaje

$$p_\Psi(\Psi) = p_{y_1|t}(y_1 | t) \delta(y_2 - g(y_1)) p_t(t) p_{h_1}(h_1) p_{h_2}(h_2) \quad (\text{A.34})$$

Uvrštavanjem A.14 u A.4, dobija se

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} &= \int \int \int \int \Psi_1 \Psi_2 \cdot p_t(t) dt \cdot p_{y_1|t}(y_1 | t) dy_1 \cdot \delta(y_2 - g(y_1)) dy_2 \cdot p_{h_1}(h_1) dh_1 \cdot p_{h_2}(h_2) dh_2 = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-2g}^{2g} \delta(y_1 - f_1(t)) dy_1 \int_{-2g}^{2g} \delta(y_2 - g(y_1)) dy_2 \underbrace{\int_{-g}^g \Psi_1 \frac{dh_1}{2g}}_{y_1} \underbrace{\int_{-g}^g \Psi_2 \frac{dh_2}{2g}}_{y_2} = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\int_{-2g}^{2g} y_1 \delta(y_1 - f_1(t)) dy_1}_{f_1(t)} \underbrace{\int_{-2g}^{2g} y_2 \delta(y_2 - g(y_1)) dy_2}_{g(y_1)} = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} dt \underbrace{\int_{-2g}^{2g} y_1 g(y_1) \delta(y_1 - f_1(t)) dy_1}_{f_1(t)g(f_1(t))} = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) g(f_1(t)) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Dakle, ponovo se dobijaju identični izrazi i važe svi zaključci iz odeljaka A1. i A.2. Slično se pokazuje i za slučaj diskretnih vremenskih odmeraka.

Dodatak B – Izvođenje izraza za elemente matrice rezidualnih koeficijenata

Neka su izrazima B.1 – B.4 definisani rezidualni koeficijenti $C_k^{(\hat{a}_m)}$, $S_k^{(\hat{a}_m)}$, $C_k^{(\hat{b}_m)}$ i $S_k^{(\hat{b}_m)}$.

$$C_k^{(\hat{a}_m)} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 0, \dots, M \end{matrix} \quad (\text{B.1})$$

$$S_k^{(\hat{a}_m)} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 0, \dots, M \end{matrix} \quad (\text{B.2})$$

$$C_k^{(\hat{b}_m)} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} \sin \frac{2\pi mt}{T_0} dt, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 1, \dots, M \end{matrix} \quad (\text{B.3})$$

$$S_k^{(\hat{b}_m)} = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \sin \frac{2\pi mt}{T_0} dt, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 1, \dots, M \end{matrix} \quad (\text{B.4})$$

I neka je relativno odstupanje učestanosti osnovne periode ζ merenog signala takvo da su ispunjene nejednakosti $\zeta \neq 0$ i $\zeta > -1$. U protivnom, za $\zeta = 0$, rezidualne koeficijente ne bi bilo potrebno ni računati, $\zeta < -1$ bi značilo da su učestanosti svih harmonika negativne, što je nemoguće, dok bi za $\zeta = -1$, učestanost osnovnog i svih ostalih harmonika merenog signala bile 0 Hz, što je besmislen slučaj u praksi.

U ovom dodatku biće izvedeni izrazi za rezidualne koeficijente koji se dobijaju kada se reše određeni integrali u njihovim definicionim izrazima. Prilikom izvođenja koristiće se sledeće osobine trigonometrijskih funkcija

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2} \quad (\text{B.5})$$

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2} \quad (\text{B.6})$$

$$\cos x \sin y = \frac{\sin(x + y) - \sin(x - y)}{2} \quad (\text{B.7})$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2} \quad (\text{B.8})$$

Radi pojednostavljenja kasnijih izraza, koristiće se i sledeća jednakost

$$fT_0 = (f_0 + \Delta f)T_0 = f_0T_0 + \Delta fT_0 = 1 + \frac{\Delta f}{f_0} = 1 + \zeta \quad (\text{B.9})$$

B.1. Izračunavanje $C_k^{(\hat{a}_m)}$

Za $m = 0$ dobija se da je

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi k t}{T} \cos 0 \cdot dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(2\pi k f t) dt \\
 &= \frac{2}{T_0} \left[\frac{\sin(2\pi k f t)}{2\pi k f} \right]_0^{T_0} = \frac{\sin(2\pi k f T_0) - \sin 0}{\pi k f T_0}, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 0 \end{matrix} \\
 &= \frac{\sin 2\pi k(1 + \xi)}{\pi k(1 + \xi)} = \frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi k(1 + \xi)}
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Za $m \neq 0$, kombinovanjem B.5 i B.1 dobija se

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(2\pi k f t) \cos(2\pi m f_0 t) dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\cos(2\pi k f t - 2\pi m f_0 t) + \cos(2\pi k f t + 2\pi m f_0 t)] dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(kf - mf_0)t] dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(kf + mf_0)t] dt
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Pretpostavimo da je $kf - mf_0 \neq 0$. Na osnovu tabličnih vrednosti integrala, ovo postaje

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{1}{T_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf - mf_0)t]\}_0^{T_0}}{2\pi(kf - mf_0)} + \frac{1}{T_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf + mf_0)t]\}_0^{T_0}}{2\pi(kf + mf_0)} = \\
 &= \frac{1}{T_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf - mf_0)T_0] - \sin 0\}}{2\pi(kf - mf_0)} + \frac{1}{T_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf + mf_0)T_0] - \sin 0\}}{2\pi(kf + mf_0)} = \\
 &= \frac{\sin\left(2\pi k f T_0 - 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1\right)}{2\pi k f T_0 - 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1} + \frac{\sin\left(2\pi k f T_0 + 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_{1a}\right)}{2\pi k f T_0 + 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1} = \\
 &= \frac{\sin(2\pi k f T_0 - 2\pi m)}{2\pi k f T_0 - 2\pi m} + \frac{\sin(2\pi k f T_0 + 2\pi m)}{2\pi k f T_0 + 2\pi m} = \frac{\sin(2\pi k f T_0)}{2\pi k f T_0 - 2\pi m} + \frac{\sin(2\pi k f T_0)}{2\pi k f T_0 + 2\pi m} = \\
 &= \sin(2\pi k f T_0) \left[\frac{1}{2\pi k f T_0 - 2\pi m} + \frac{1}{2\pi k f T_0 + 2\pi m} \right] = \\
 &= \frac{\sin(2\pi k f T_0)}{2\pi} \left[\frac{1}{k f T_0 - m} + \frac{1}{k f T_0 + m} \right]
 \end{aligned} \tag{B.12}$$

Dakle, B.12 se svodi na

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{\sin(2\pi k \xi)}{2\pi} \left[\frac{1}{k(1+\xi)-m} + \frac{1}{k(1+\xi)+m} \right] = \\
 &= \frac{\sin(2\pi k \xi)}{2\pi} \cdot \frac{k(1+\xi)+m+k(1+\xi)-m}{k^2(1+\xi)^2-m^2}
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Uslov $kf - mf_0 \neq 0$, može se napisati i kao

$$kf - mf_0 = k(f_0 + \Delta f) - mf_0 = (k - m)f_0 + k\Delta f \neq 0 \tag{B.14}$$

Odnosno

$$\begin{aligned}
 k\Delta f &\neq (m - k)f_0 \\
 \frac{\Delta f}{f_0} &\neq \frac{m - k}{k} \\
 \xi &\neq \frac{m - k}{k}
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Konačnim sređivanjem dobija se da je

$$C_k^{(\hat{a}_m)} = \frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2}, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 1, \dots, M \end{matrix}, \quad \xi \neq \frac{m - k}{k} \tag{B.16}$$

Pretpostavimo sada da je $kf - mf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{m - k}{k}$. B.11 tada postaje

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos 0 \cdot dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(nf_0 + nf_0)t] dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(4\pi n f_0 t) dt
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

Kako je $n \neq 0$, sledi da je

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_m)} &= 1 + \frac{1}{T_0} \left[\frac{\sin(4\pi n f_0 t)}{4\pi n f_0} \right]_0^{T_0} \\
 &= 1 + \frac{\sin(4\pi n f_0 T_0)}{4\pi n f_0 T_0} - \frac{\sin(0)}{4\pi n f_0 T_0}, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 1, \dots, M \end{matrix}, \quad \xi = \frac{m - k}{k} \\
 &= 1 + \frac{\sin(4\pi n)}{4\pi n} \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

Potrebno je uočiti da izraz B.16 obuhvata i izraze B.10 i B.18 što će biti pokazano u nastavku. Za $m = 0$ izraz B.16 postaje

$$C_k^{(\hat{a}_m)} \stackrel{m=0}{=} \frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - 0} = \frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi k(1+\xi)} \quad (\text{B.19})$$

dok za $m \neq 0$ i $kf - mf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{m-k}{k}$ B.16 postaje

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} C_k^{(\hat{a}_m)} &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} \left[\frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] = \lim_{k\xi \rightarrow m-k} \left[\frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] = \\ &= \lim_{k+k\xi \rightarrow m} \left[\frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] \stackrel{\lambda=k(1+\xi)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\lambda \sin[2\pi(\lambda - k)]}{\pi(\lambda^2 - m^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Dalje se dobija da je

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} C_k^{(\hat{a}_m)} &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\lambda \sin(2\pi \lambda)}{\pi(\lambda^2 - m^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\frac{d}{d\lambda} [\lambda \sin(2\pi \lambda)]}{\frac{d}{d\lambda} [\pi(\lambda^2 - m^2)]} = \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\sin(2\pi \lambda) + 2\pi \lambda \cos(2\pi \lambda)}{2\pi \lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \left[\cos(2\pi \lambda) + \frac{\sin(2\pi \lambda)}{2\pi \lambda} \right] = 1 + \frac{0}{2\pi \lambda} = 1 \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Dakle, izrazi B.10, B.16 i B.18 mogu se obuhvatiti jedinstvenim izrazom

$$C_k^{(\hat{a}_m)} = \frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - m^2}, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 0, \dots, M \end{matrix} \quad (\text{B.22})$$

□

B.2. Izračunavanje $S_k^{(\hat{a}_m)}$

Za $m = 0$ dobija se da je

$$\begin{aligned} S_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi k t}{T} \cos 0 \cdot dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin(2\pi k f t) dt \\ &= -\frac{2}{T_0} \left[\frac{\cos(2\pi k f t)}{2\pi k f} \right]_0^{T_0} = -\frac{\cos(2\pi k f T_0) - 1}{\pi k f T_0}, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 0 \end{matrix} \\ &= \frac{1 - \cos 2\pi k(1+\xi)}{\pi k(1+\xi)} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Za $m \neq 0$, kombinovanjem B.2 i B.6 dobija se

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\sin(2\pi kft + 2\pi mf_0 t) + \sin(2\pi kft - 2\pi mf_0 t)] dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin[2\pi(kf + mf_0)t] dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin[2\pi(kf - mf_0)t] dt
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

Pretpostavimo da je $kf - mf_0 \neq 0$. Na osnovu tabličnih vrednosti integrala, ovo postaje

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_m)} &= -\frac{1}{T_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + mf_0)t]\}_0^{T_0}}{2\pi(kf + mf_0)} - \frac{1}{T_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf - mf_0)t]\}_0^{T_0}}{2\pi(kf - mf_0)} = \\
 &= -\frac{1}{T_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + mf_0)T_0] - \cos 0\}}{2\pi(kf + mf_0)} - \frac{1}{T_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf - mf_0)T_0] - \cos 0\}}{2\pi(kf - mf_0)} = \\
 &= \frac{1 - \cos\left(2\pi kfT_0 + 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1\right)}{2\pi kfT_0 + 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1} + \frac{1 - \cos\left(2\pi kfT_0 - 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_{1a}\right)}{2\pi kfT_0 - 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1} = \\
 &= \frac{1 - \cos(2\pi kfT_0 + 2\pi m)}{2\pi kfT_0 + 2\pi m} + \frac{1 - \cos(2\pi kfT_0 - 2\pi m)}{2\pi kfT_0 - 2\pi m} = \\
 &= \frac{1 - \cos(2\pi kfT_0)}{2\pi kfT_0 + 2\pi m} + \frac{1 - \cos(2\pi kfT_0)}{2\pi kfT_0 - 2\pi m}
 \end{aligned} \tag{B.25}$$

Daljim sređivanjem dobija se

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_m)} &= [1 - \cos(2\pi kfT_0)] \left[\frac{1}{2\pi kfT_0 + 2\pi m} + \frac{1}{2\pi kfT_0 - 2\pi m} \right] = \\
 &= \frac{1 - \cos(2\pi kfT_0)}{2\pi} \left[\frac{1}{kfT_0 + m} + \frac{1}{kfT_0 - m} \right]
 \end{aligned} \tag{B.26}$$

Uvođenjem parametra ξ , B.26 se svodi na

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{1 - \cos(2\pi k\xi)}{2\pi} \left[\frac{1}{k(1 + \xi) + m} + \frac{1}{k(1 + \xi) - m} \right] = \\
 &= \frac{1 - \cos(2\pi k\xi)}{2\pi} \cdot \frac{k(1 + \xi) - m + k(1 + \xi) + m}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2}
 \end{aligned} \tag{B.27}$$

Konačnim sređivanjem dobija se

$$S_k^{(\hat{a}_n)} = \frac{1 - \cos(2\pi k\xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2}, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 1, \dots, M \end{matrix}, \quad \xi \neq \frac{m - k}{k} \tag{B.28}$$

Pretpostavimo sada da je $kf - mf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{m-k}{k}$. Tada B.24 postaje

$$S_k^{(\hat{a}_m)} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin 0 \cdot dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin[2\pi(nf_0 + mf_0)t] dt = 0 + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin(4\pi mf_0 t) dt \quad (\text{B.29})$$

Kako je $m \neq 0$, sledi da je

$$\begin{aligned} S_k^{(\hat{a}_m)} &= \frac{1}{T_0} \left[-\frac{\cos(4\pi mf_0 t)}{4\pi mf_0} \right]_0^{T_0} = -\frac{\cos(4\pi mf_0 T_0)}{4\pi mf_0 T_0} + \frac{\cos(0)}{4\pi mf_0 T_0}, \quad k = 1, \dots, M \\ &= -\frac{1}{4\pi mf_0 T_0} + \frac{1}{4\pi mf_0 T_0} = 0 \end{aligned} \quad m = 1, \dots, M, \quad \xi = \frac{m-k}{k} \quad (\text{B.30})$$

Izraz B.28 obuhvata izraze B.23 i B.30, kao što će biti pokazano u nastavku. Za $m = 0$, B.28 se svodi na

$$S_k^{(\hat{a}_m)} = \frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - 0} = \frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi k(1 + \xi)} \quad (\text{B.31})$$

Za slučaj kada je $m \neq 0$, $kf - mf_0 = 0$, tj. $\xi = \frac{m-k}{k}$, B.28 postaje

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} S_k^{(\hat{a}_m)} &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} \left[\frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2} \right] = \\ &= \lim_{k\xi \rightarrow m-k} \left[\frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2} \right] = \\ &= \lim_{k+k\xi \rightarrow m} \left[\frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2} \right] \stackrel{\lambda=k(1+\xi)}{=} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\lambda \{1 - \cos[2\pi(\lambda - k)]\}}{\pi(\lambda^2 - m^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\lambda [1 - \cos(2\pi\lambda)]}{\pi(\lambda^2 - m^2)} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\frac{d}{d\lambda} \{ \lambda [1 - \cos(2\pi\lambda)] \}}{\frac{d}{d\lambda} [\pi(\lambda^2 - m^2)]} = \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{1 - \cos(2\pi\lambda) + 2\pi\lambda \sin(2\pi\lambda)}{2\pi\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \left[\sin(2\pi\lambda) + \frac{1 - \cos(2\pi\lambda)}{2\pi\lambda} \right] = 0 + \frac{1-1}{2\pi\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Dakle, izrazi B.23, B.28 i B.30 mogu se obuhvatiti jedinstvenim izrazom

$$\boxed{S_k^{(\hat{a}_m)} = \frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ m = 0, \dots, M \end{array}} \quad (\text{B.33})$$

□

B.2. Izračunavanje $C_k^{(\hat{b}_m)}$

Kombinovanjem B.3 i B.7 dobija se

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{b}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} \sin \frac{2\pi mt}{T_0} dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos(2\pi kft) \sin(2\pi mf_0 t) dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\sin(2\pi kft + 2\pi mf_0 t) - \sin(2\pi kft - 2\pi mf_0 t)] dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin[2\pi(kf + mf_0)t] dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin[2\pi(kf - mf_0)t] dt
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

Pretpostavimo da je $kf - mf_0 \neq 0$. Na osnovu tabličnih vrednosti integrala, ovo postaje

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{b}_m)} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin[2\pi(kf + mf_0)t] dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin[2\pi(kf - mf_0)t] dt \\
 &= -\frac{1}{T_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + mf_0)t]\}_0^{T_0}}{2\pi(kf + mf_0)} + \frac{1}{T_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf - mf_0)t]\}_0^{T_0}}{2\pi(kf - mf_0)} = \\
 &= -\frac{1}{T_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + mf_0)T_0] - \cos 0\}}{2\pi(kf + mf_0)} + \frac{1}{T_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf - mf_0)T_0] - \cos 0\}}{2\pi(kf - mf_0)} = \\
 &= \frac{1 - \cos\left(2\pi kf T_0 + 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1\right)}{2\pi kf T_0 + 2\pi m} - \frac{1 - \cos\left(2\pi kf T_0 - 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_{1a}\right)}{2\pi kf T_0 - 2\pi m} = \\
 &= \frac{1 - \cos(2\pi kf T_0 + 2\pi m)}{2\pi kf T_0 + 2\pi m} - \frac{1 - \cos(2\pi kf T_0 - 2\pi m)}{2\pi kf T_0 - 2\pi m} = \frac{1 - \cos(2\pi kf T_0)}{2\pi kf T_0 + 2\pi m} - \frac{1 - \cos(2\pi kf T_0)}{2\pi kf T_0 - 2\pi m} = \\
 &= [1 - \cos(2\pi kf T_0)] \left[\frac{1}{2\pi kf T_0 + 2\pi m} - \frac{1}{2\pi kf T_0 - 2\pi m} \right] = \\
 &= \frac{1 - \cos(2\pi kf T_0)}{2\pi} \left[\frac{1}{kf T_0 + m} - \frac{1}{kf T_0 - m} \right] = \\
 &= \frac{1 - \cos(2\pi kf T_0)}{2\pi} \left[\frac{1}{k(1 + \xi) + m} - \frac{1}{k(1 + \xi) - m} \right] = \\
 &= \frac{1 - \cos(2\pi kf T_0)}{2\pi} \cdot \frac{k(1 + \xi) - m - k(1 + \xi) - m}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2}
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

Konačnim sređivanjem dobija se da je

$$C_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{1 - \cos(2\pi k\xi)}{\pi} \cdot \frac{-m}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2}, \quad k = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, M, \quad \xi \neq \frac{m - k}{k} \tag{B.36}$$

Pretpostavimo sada da je $kf - mf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{m-k}{k}$. B.34 tada postaje

$$C_k^{(\hat{b}_m)} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin 0 \cdot dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin[2\pi(mf_0 + mf_0)t] dt = 0 + \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin(4\pi mf_0 t) dt \quad (\text{B.37})$$

Kako je $m \neq 0$, sledi da je

$$\begin{aligned} C_k^{(\hat{b}_m)} &= -\frac{1}{T_0} \left[\frac{\cos(4\pi mf_0 t)}{4\pi mf_0} \right]_0^{T_0} \\ &= -\frac{\cos(4\pi mf_0 T_0)}{4\pi mf_0 T_0} + \frac{\cos(0)}{4\pi mf_0 T_0}, \quad k = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, M, \quad \xi = \frac{m-k}{k} \\ &= \frac{1 - \cos(4\pi m)}{4\pi m} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Potrebno je uočiti da izraz B.36 obuhvata izraz B.38, što se ponovo pokazuje graničnim računom. Za $m \neq 0$ i $kf - mf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{m-k}{k}$ B.36 postaje

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} C_k^{(\hat{b}_m)} &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} \left[\frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{-m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] = \\ &= \lim_{k\xi \rightarrow m-k} \left[\frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{-m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] = \\ &= \lim_{k+k\xi \rightarrow m} \left[\frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{-m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] \stackrel{\lambda=k(1+\xi)}{=} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{-m\{1 - \cos[2\pi(\lambda - k)]\}}{\pi(\lambda^2 - m^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

Dalje se dobija da je

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} C_k^{(\hat{b}_m)} &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{-m[1 - \cos(2\pi\lambda)]}{\pi(\lambda^2 - m^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\frac{d}{d\lambda} \{-m[1 - \cos(2\pi\lambda)]\}}{\frac{d}{d\lambda} [\pi(\lambda^2 - m^2)]} = \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{2\pi m \sin(2\pi\lambda)}{2\pi\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{m \sin(2\pi\lambda)}{\lambda} = m \frac{0}{m} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Dakle, izrazi B.36 i B.38 mogu se obuhvatiti jedinstvenim izrazom

$$C_k^{(\hat{b}_m)} = \frac{1 - \cos(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{-m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2}, \quad k = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, M \quad (\text{B.41})$$

□

B.2. Izračunavanje $S_k^{(\hat{b}_m)}$

Kombinovanjem B.4 i B.8 dobija se

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{b}_m)} &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \sin \frac{2\pi mt}{T_0} dt = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} \sin(2\pi kt) \sin(2\pi mf_0 t) dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [\cos(2\pi kt - 2\pi mf_0 t) - \sin(2\pi kt + 2\pi mf_0 t)] dt = \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(kf - mf_0)t] dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(kf + mf_0)t] dt
 \end{aligned} \tag{B.42}$$

Pretpostavimo da je $kf - mf_0 \neq 0$. Na osnovu tabličnih vrednosti integrala, ovo postaje

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{b}_m)} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(kf - mf_0)t] dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(kf + mf_0)t] dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf - mf_0)t]\}_0^{T_0}}{2\pi(kf - mf_0)} - \frac{1}{T_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf + mf_0)t]\}_0^{T_0}}{2\pi(kf + mf_0)} = \\
 &= \frac{1}{T_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf - mf_0)T_0] - \sin 0\}}{2\pi(kf - mf_0)} - \frac{1}{T_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + mf_0)T_0] - \sin 0\}}{2\pi(kf + mf_0)} = \\
 &= \frac{\sin\left(2\pi kf T_0 - 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1\right)}{2\pi kf T_0 - 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1} - \frac{\sin\left(2\pi kf T_0 + 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_{1a}\right)}{2\pi kf T_0 + 2\pi m \underbrace{f_0 T_0}_1} = \\
 &= \frac{\sin(2\pi kf T_0 - 2\pi m)}{2\pi kf T_0 - 2\pi m} - \frac{\sin(2\pi kf T_0 + 2\pi m)}{2\pi kf T_0 + 2\pi m} = \frac{\sin(2\pi kf T_0)}{2\pi kf T_0 - 2\pi m} - \frac{\sin(2\pi kf T_0)}{2\pi kf T_0 + 2\pi m} = \\
 &= \sin(2\pi kf T_0) \left[\frac{1}{2\pi kf T_0 - 2\pi m} - \frac{1}{2\pi kf T_0 + 2\pi m} \right] = \\
 &= \frac{\sin(2\pi kf T_0)}{2\pi} \left[\frac{1}{kf T_0 - m} - \frac{1}{kf T_0 + m} \right] = \frac{\sin(2\pi kf T_0)}{2\pi} \left[\frac{1}{k(1 + \xi) - m} - \frac{1}{k(1 + \xi) + m} \right] = \\
 &= \frac{\sin(2\pi kf T_0)}{2\pi} \cdot \frac{k(1 + \xi) + m - k(1 + \xi) + m}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2}
 \end{aligned} \tag{B.43}$$

Konačnim sređivanjem dobija se da je

$$S_k^{(\hat{b}_m)} = \frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{m}{k^2(1 + \xi)^2 - m^2}, \quad k = 1, \dots, M, \quad m = 1, \dots, M, \quad \xi \neq \frac{m - k}{k} \tag{B.44}$$

Pretpostavimo sada da je $kf - mf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{m - k}{k}$. B.42 tada postaje

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{b}_m)} &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(kf - mf_0)t] dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(kf + mf_0)t] dt \\
 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos 0 \cdot dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos[2\pi(nf_0 + mf_0)t] dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} dt - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin(4\pi n f_0 t) dt = \text{(B.45)} \\
 &= 1 - \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin(4\pi n f_0 t) dt
 \end{aligned}$$

Kako je $m \neq 0$, sledi da je

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{b}_m)} &= 1 - \frac{1}{T_0} \left[\frac{\sin(4\pi n f_0 t)}{4\pi n f_0} \right]_0^{T_0} \\
 &= 1 - \frac{\sin(4\pi n f_0 T_0)}{4\pi n f_0 T_0} + \frac{\sin(0)}{4\pi n f_0 T_0}, \quad k = 1, \dots, M, \quad \xi = \frac{m-k}{k} \\
 & \quad n = 1, \dots, M, \quad \text{(B.46)} \\
 &= 1 - \frac{\sin(4\pi n)}{4\pi n} = 1
 \end{aligned}$$

Izraz B.44 obuhvata izraz B.46, što se ponovo pokazuje graničnim računom. Za $m \neq 0$ i $kf - mf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{m-k}{k}$ B.44 postaje

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} S_k^{(\hat{b}_m)} &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} \left[\frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] = \lim_{k\xi \rightarrow m-k} \left[\frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] = \\
 &= \lim_{k+k\xi \rightarrow m} \left[\frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2} \right] \stackrel{\lambda=k(1+\xi)}{=} \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{n \sin[2\pi(\lambda - k)]}{\pi(\lambda^2 - m^2)} \quad \text{(B.47)}
 \end{aligned}$$

Dalje se dobija da je

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow \frac{m-k}{k}} S_k^{(\hat{b}_m)} &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{m \sin(2\pi\lambda)}{\pi(\lambda^2 - m^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{\frac{d}{d\lambda} [m \sin(2\pi\lambda)]}{\frac{d}{d\lambda} [\pi(\lambda^2 - m^2)]} = \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{2\pi m \cos(2\pi\lambda)}{2\pi\lambda} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow m} \frac{m \cos(2\pi\lambda)}{\lambda} = m \frac{1}{m} = 1 \quad \text{(B.48)}
 \end{aligned}$$

Sledi da se izrazi B.44 i B.46 mogu objediniti u jedinstven izraz B.49.

$$\boxed{S_k^{(\hat{b}_m)} = \frac{\sin(2\pi k \xi)}{\pi} \cdot \frac{m}{k^2(1+\xi)^2 - m^2}, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ m = 1, \dots, M \end{matrix}} \quad \text{(B.49)}$$

□

Dodatak C – Jakobijev iterativni postupak za rešavanje sistema jednačina

Izuzev odeljka C.1, sadržaj ovog dodatka delimično je preuzet iz literature [33]. Njegova svrha je upotpunjavanje dela originalnog doprinosa ove doktorske disertacije opisanog u odeljku 4.5.

Neka je zadat kvadratni sistem od n linearnih jednačina

$$A \cdot x = b \quad (\text{C.1})$$

gde je A kvadratna matrica reda $n \times n$, x vektor nepoznatih promenljivih, a b vektor poznatih konstanti. Ove veličine date su sa C.2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Ako matricu A dekomponujemo na dijagonalu komponentu D i ostatak R , kao u izrazu C.3,

$$A = D + R \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

tada se rešenje sistema može dobiti iterativno, korišćenjem Jakobijeve formule C.4,

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Rx^{(k)}) \quad (\text{C.4})$$

gde je k korak iteracije. Izraz C.4 za svaki od elemenata vektora x pojedinačno postaje C.5.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{C.5})$$

C.1. Algoritam

Prilikom primene Jakobijevog iterativnog postupka u računaru, izračunavanje elementa $x_i^{(k+1)}$ zahteva svaki element iz $x^{(k)}$, osim samog sebe. Zato je, prilikom implementacije iterativnog algoritma na računaru, minimalan zahtev za memorijum dva vektora (niza) dužine n . Primera radi Gaus-Zajdelov metod zahteva samo jedan vektor dužine n , pa je pogodniji za sisteme sa

veoma velikim n . Međutim Kako je u merenjima u pristupnoj mreži n ograničeno da ide najviše do $2M_{max} = 200$, ovo ne predstavlja značajno ograničenje. Sa druge strane Jakobijev iterativni postupak ima brojne druge prednosti kao što su brzina konvergencije, direktnost računa bez poređenja i grananja, kao i račun u kome nema zamene vrsta u matrici A , odnosno vektorima x i b .

Postupak rešavanja sistema jednačina u meta jeziku je

```

Izaberi vektor početnih vrednosti  $x^{(0)}$ 
k ← 0
while (nije dostignut uslov konvergencije) do {
  for i := 1 to n do {
    Sum ← 0
    for j := 1 to n do {
      if j <> i then Sum ← Sum +  $a_{ij}$  *  $x_j^{(k)}$ 
    } // j petlja
     $x_i^{(k+1)}$  ← ( $b_i$  - Sum) /  $a_{ii}$ 
  } // i petlja
  k ← k + 1
} // while-do petlja
kraj

```

Primer programskog koda u jeziku PASCAL, dat je u nastavku

```

var i,j : Integer;
    b, x, x_prethodno: Array [1..2 * M] of Real;
    A: Array [1..M] of Array [1..2 * M] of Real;
    max_greska, greska: Real;

... // Popuni matricu A i vektor b

// Izaberi proizvoljnu početnu vrednost za vektor x
for i := 1 to 2 * M do x[i] := b[i] / x[i, i];
// Ovako najbrže konvergira !!!

// Usvoj grešku iterativnog postupka
greska := 1e-6; // npr.

repeat

    x_prethodno := x;
    for i := 1 to 2 * M do
        begin
            sum := 0;
            for j := 1 to 2 * M do
                if j <> i then sum := sum + A[i, j] * x[j];
            x[i] := (b[i] - sum) / A[i, i];
        end; //i loop
    // Nađi najveću grešku u vektoru x
    max_greska := abs(x[1] - x_prethodno[1]);
    for i := 2 to 2 * M do
        if max_greska < abs(x[i] - x_prethodno[i]) then
            max_greska := abs(x[i] - x_prethodno[i]);

until max_greska > greska;

```

C.2. Konvergencija postupka

Standardan uslov konvergencije za bilo koji iterativni metod jeste da je spektralni radijus iterativne matrice manji od 1 (izraz C.6) [33].

$$\rho(D^{-1}R) < 1 \tag{C.6}$$

Jakobijev iterativni postupak garantovano konvergira ako je matrica A striktno ili nesvodljivo dijagonalno dominantna [33]. Striktne dijagonalne dominantnosti znači da je u svakoj vrsti matrice element na glavnoj dijagonali po apsolutnoj vrednosti veći od sume apsolutnih vrednosti svih ostalih elemenata u toj vrsti (C.7).

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \tag{C.7}$$

Jakobijev iterativni metod ponekad konvergira čak i ako ovi uslovi nisu ispunjeni.

Dodatak D – Izvođenje izraza za rezidualne koeficijente nad intervalima merenja različitim od jedne periode

Neka su izrazima D.1 – D.4 definisani rezidualni koeficijenti $C_k^{(\hat{a}_n)}$, $S_k^{(\hat{a}_n)}$, $C_k^{(\hat{b}_n)}$ i $S_k^{(\hat{b}_n)}$ nad proizvoljnim intervalom merenja trajanja KT_0 , pri čemu K moža, ali i ne mora biti ceo broj.

$$C_k^{(\hat{a}_n)} = \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi nt}{T_0} dt, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 0, \dots, M \end{array} \quad (D.1)$$

$$S_k^{(\hat{a}_n)} = \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi nt}{T_0} dt, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 0, \dots, M \end{array} \quad (D.2)$$

$$C_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} \sin \frac{2\pi nt}{T_0} dt, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \end{array} \quad (D.3)$$

$$S_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \sin \frac{2\pi nt}{T_0} dt, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \end{array} \quad (D.4)$$

I neka je relativno odstupanje učestanosti osnovne periode ξ merenog signala takvo da su ispunjene nejednakosti $\xi \neq 0$ i $\xi > -1$. U protivnom, za $\xi = 0$, rezidualne koeficijente ne bi bilo potrebno ni računati. $\xi < -1$ bi značilo da su učestanosti svih harmonika negativne, što je nemoguće, dok bi za $\xi = -1$, učestanost osnovnog i svih ostalih harmonika merenog signala bile 0 Hz, što je besmislen slučaj u praksi.

U ovom dodatku biće izvedeni izrazi za rezidualne za slučajeve da interval merenja ne odgovara trajanju tačno jedne nominalne periode osnovnog harmonika T_0 .

D.1. Slučaj kada se meri nad više celih perioda

Ovde će biti razmotren slučaj kada je K prirodan broj veći od 1. Po analogiji sa izvođenjima datim u dodatku B, lako se pokazuje da se dobijaju izrazi:

$$C_k^{(\hat{a}_n)} = \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - n^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 0, \dots, M \end{array} \quad (D.5)$$

$$S_k^{(\hat{a}_n)} = \frac{1 - \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - n^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 0, \dots, M \end{array} \quad (D.6)$$

$$C_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{1 - \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{-n}{k^2(1+\xi)^2 - n^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \end{array} \quad (D.7)$$

$$S_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{n}{k^2(1+\xi)^2 - n^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \end{array} \quad (D.8)$$

D.2. Slučaj kada se meri nad neparnim brojem poluperioda

S obzirom da je u delu 4.4 pokazano da je od posebnog značaja mogućnost merenja nad neparnim brojem poluperioda zbog otklanjanja greške periodičnosti deterske funkcije, ovde će biti izvedeni izrazi za rezidualne koeficijente u tom slučaju.

Neka je interval merenja $KT_0 = (L + 1/2)T_0$, pri čemu je L ceo broj.

D.2.1. Izračunavanje $C_k^{(\hat{a}_n)}$

Za $n = 0$ dobija se da je

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} \cos 0 \cdot dt = \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos(2\pi kt) dt \\
 &= \frac{2}{KT_0} \left[\frac{\sin(2\pi kt)}{2\pi k} \right]_0^{KT_0} = \frac{\sin(2\pi k f T_0) - \sin 0}{\pi k f T_0} \\
 &= \frac{\sin[2\pi k K(1 + \xi)]}{\pi k K(1 + \xi)} = \frac{\sin[2\pi k K\xi + 2\pi k(L + \frac{1}{2})]}{\pi k K(1 + \xi)}, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ n = 0 \end{matrix} \quad (D.9) \\
 &= \frac{\sin[2\pi k K\xi + 2\pi Lk + \pi k]}{\pi k K(1 + \xi)} = \frac{\sin[2\pi k K\xi + \pi k]}{\pi k K(1 + \xi)} \\
 &= (-1)^k \frac{\sin(2\pi k K\xi)}{\pi k K(1 + \xi)}
 \end{aligned}$$

Za $n \neq 0$, dobija se

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos(2\pi kt) \cos(2\pi n f_0 t) dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} [\cos(2\pi kt - 2\pi n f_0 t) + \cos(2\pi kt + 2\pi n f_0 t)] dt = \quad (D.10) \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(kf - nf_0)t] dt + \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(kf + nf_0)t] dt
 \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $kf - nf_0 \neq 0$. Na osnovu tabličnih vrednosti integrala, ovo postaje

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{1}{KT_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf - nf_0)t]\}_0^{KT_0}}{2\pi(kf - nf_0)} + \frac{1}{KT_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf + nf_0)t]\}_0^{KT_0}}{2\pi(kf + nf_0)} = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf - nf_0)KT_0] - \sin 0\}}{2\pi(kf - nf_0)} + \frac{1}{KT_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf + nf_0)KT_0] - \sin 0\}}{2\pi(kf + nf_0)} \quad (D.11)
 \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin\left(2\pi k K f T_0 - 2\pi n K \underbrace{f_0 T_0}_1\right)}{k f T_0 - n \underbrace{f_0 T_0}_1} + \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin\left(2\pi k f T_0 + 2\pi n K \underbrace{f_0 T_0}_{1a}\right)}{k f T_0 + n \underbrace{f_0 T_0}_1} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k K f T_0 - 2\pi n K)}{k f T_0 - 2\pi n} + \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k K f T_0 + 2\pi n K)}{k f T_0 + n} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k K f T_0 - 2\pi n(L + \frac{1}{2}))}{k f T_0 - n} + \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k f T_0 + 2\pi n(L + \frac{1}{2}))}{k f T_0 + n} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k K f T_0 - \pi n)}{k f T_0 - n} + \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k f T_0 + \pi n)}{k f T_0 + n}
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

Kako je

$$\sin(\alpha - \pi n) = \sin(\alpha_0 + \pi n) = (-1)^n \tag{D.13}$$

Sledi da je

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{(-1)^n}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k K f T_0)}{k f T_0 - n} + \frac{(-1)^n}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k K f T_0)}{k f T_0 + n} = \\
 &= (-1)^n \frac{\sin(2\pi k K f T_0)}{2\pi K} \left[\frac{1}{k f T_0 - n} + \frac{1}{k f T_0 + n} \right] = \\
 &= (-1)^n \frac{\sin(2\pi k K(1 + \xi))}{2\pi K} \left[\frac{1}{k(1 + \xi) - n} + \frac{1}{k(1 + \xi) + n} \right] = \\
 &= (-1)^n \frac{\sin(2\pi k K + 2\pi k K \xi)}{2\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi) + n + k(1 + \xi) - n}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2} = \\
 &= (-1)^n \frac{\sin(2\pi k K \xi + 2\pi k(L + \frac{1}{2}))}{\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2} = \\
 &= (-1)^n \frac{\sin(2\pi k K \xi + 2\pi k L + \pi k)}{\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2} = \\
 &= (-1)^n \frac{\sin(2\pi k K \xi + \pi k)}{\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2} = \\
 &= (-1)^n (-1)^k \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2}
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

Konačnim sređivanjem dobija se da je

$$C_k^{(\hat{a}_n)} = (-1)^{n+k} \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \\ \xi \neq \frac{n-k}{k} \end{array} \tag{D.15}$$

Pretpostavimo sada da je $kf - nf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{n-k}{k}$.

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos 0 \cdot dt + \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(nf_0 + nf_0)t] dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} dt + \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos(4\pi nf_0 t) dt
 \end{aligned} \tag{D.16}$$

Kako je $n \neq 0$, sledi da je

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{a}_n)} &= 1 + \frac{1}{KT_0} \left[\frac{\sin(4\pi nf_0 t)}{4\pi nf_0} \right]_0^{KT_0} = 1 + \frac{\sin(4\pi n K f_0 T_0)}{4\pi n K f_0 T_0} - \frac{\sin(0)}{4\pi n K f_0 T_0} \\
 &= 1 + \frac{\sin(4\pi n K)}{4\pi n K} = 1 + \frac{\sin(4\pi n(L + \frac{1}{2}))}{4\pi n K} = 1 + \frac{\sin(4\pi n L + \pi n)}{4\pi n K}, \quad k = 1, \dots, M \\
 &= 1 + (-1)^n \frac{0}{4\pi n K} = 1 \quad \xi = \frac{n-k}{k}
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

Izraz D.15 obuhvata izraze D.9 i D.17, jer je za $n = 0$

$$C_k^{(\hat{a}_n)} \stackrel{n=0}{=} (-1)^{0+k} \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - 0} = (-1)^k \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi k K(1+\xi)} \tag{D.18}$$

dok je za $n \neq 0$ i $kf - nf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{n-k}{k}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow \frac{n-k}{k}} C_k^{(\hat{a}_n)} &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{n-k}{k}} \left[(-1)^{n+k} \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - n^2} \right] = \\
 &= \lim_{k\xi \rightarrow n-k} \left[(-1)^{n+k} \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - n^2} \right] = \\
 &= \lim_{k+k\xi \rightarrow n} \left[(-1)^{n+k} \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - n^2} \right] \stackrel{\lambda=k(1+\xi)}{=} \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[(-1)^{n+k} \frac{\lambda \sin(2\pi K(\lambda - k))}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} \right] = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[(-1)^{n+k} \frac{\lambda \sin(2\pi K\lambda + 2\pi kL + \pi k)}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} \right] = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[(-1)^{n+2k} \frac{\lambda \sin(2\pi K\lambda)}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} \right] = \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[(-1)^n \frac{\lambda \sin(2\pi K\lambda)}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} \right] = \\
 &= (-1)^n \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{\frac{d}{d\lambda} [\lambda \sin(2\pi K\lambda)]}{\frac{d}{d\lambda} [\pi K(\lambda^2 - n^2)]} =
 \end{aligned} \tag{D.19}$$

Dalje se dobija da je

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow \frac{n-k}{k}} C_k^{(\hat{a}_n)} &= (-1)^n \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{\sin(2\pi K\lambda) + 2\pi K\lambda \cos(2\pi K\lambda)}{2\pi K\lambda} = \\
 &= (-1)^n \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[\cos(2\pi K\lambda) + \frac{\sin(2\pi K\lambda)}{2\pi K\lambda} \right] = \\
 &= (-1)^n \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[\cos(2\pi L\lambda + \pi\lambda) + \frac{\sin(2\pi L\lambda + \pi\lambda)}{2\pi K\lambda} \right] = \\
 &= (-1)^n \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[(-1)^\lambda \cos(2\pi L\lambda) + (-1)^\lambda \frac{\sin(2\pi L\lambda)}{2\pi K\lambda} \right] = \\
 &= (-1)^{2n} \left(1 + \frac{0}{2\pi Kn} \right) = 1
 \end{aligned} \tag{D.20}$$

Dakle, jedinstven izraz je

$$\boxed{C_k^{(\hat{a}_n)} = (-1)^{n+k} \frac{\sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - n^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 0, \dots, M \end{array}} \tag{D.21}$$

□

D.2.2. Izračunavanje $S_k^{(\hat{a}_n)}$

Za $n = 0$ dobija se da je

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \cos 0 \cdot dt = \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin(2\pi kft) dt \\
 &= -\frac{2}{KT_0} \left[\frac{\cos(2\pi kft)}{2\pi kf} \right]_0^{KT_0} = -\frac{\cos(2\pi kKfT_0) - 1}{\pi kKfT_0}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 0 \end{array} \\
 &= \frac{1 - \cos[2\pi kK(1+\xi)]}{\pi kK(1+\xi)} = \frac{1 - \cos[2\pi k(L + \frac{1}{2})(1+\xi)]}{\pi kK(1+\xi)} \\
 &= \frac{1 - \cos[2\pi kL + \pi k + 2\pi kK\xi]}{\pi kK(1+\xi)} = \frac{1 - (-1)^k \cos[2\pi kK\xi]}{\pi kK(1+\xi)}
 \end{aligned} \tag{D.22}$$

Za $n \neq 0$, kombinovanjem dobija se

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \cos \frac{2\pi mt}{T_0} dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} [\sin(2\pi kft + 2\pi mf_0 t) + \sin(2\pi kft - 2\pi mf_0 t)] dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin[2\pi(kf + nf_0)t] dt + \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin[2\pi(kf - nf_0)t] dt
 \end{aligned} \tag{D.23}$$

Pretpostavimo da je $kf - nf_0 \neq 0$. Na osnovu tabličnih vrednosti integrala, ovo postaje

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_n)} &= -\frac{1}{KT_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + nf_0)t]\}_0^{KT_0}}{2\pi(kf + nf_0)} - \frac{1}{KT_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf - nf_0)t]\}_0^{KT_0}}{2\pi(kf - nf_0)} = \\
 &= -\frac{1}{KT_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + nf_0)KT_0] - \cos 0\}}{2\pi(kf + nf_0)} - \frac{1}{KT_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf - nf_0)KT_0] - \cos 0\}}{2\pi(kf - nf_0)} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - \cos\left(2\pi k K f T_0 + 2\pi n K \underbrace{f_0 T_0}_1\right)}{k f T_0 + n \underbrace{f_0 T_0}_1} + \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - \cos\left(2\pi k K f T_0 - 2\pi n K \underbrace{f_0 T_0}_{1a}\right)}{k f T_0 - n \underbrace{f_0 T_0}_1} = \quad (D.24) \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - \cos(2\pi k K f T_0 + \pi n)}{k f T_0 + n} + \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - \cos(2\pi k K f T_0 - \pi n)}{k f T_0 - n} = \\
 &= \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi k K f T_0)}{2\pi K} \left[\frac{1}{k f T_0 + n} + \frac{1}{k f T_0 - n} \right]
 \end{aligned}$$

Uvođenjem parametra ξ , gorsvodnji izraz se svodi na

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi k K (1 + \xi))}{2\pi K} \left[\frac{1}{k(1 + \xi) + n} + \frac{1}{k(1 + \xi) - n} \right] = \\
 &= \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi k K + 2\pi k K \xi)}{2\pi K} \cdot \frac{2k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2} = \quad (D.25) \\
 &= \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi k L + \pi k + 2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2} = \\
 &= \frac{1 - (-1)^n (-1)^k \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2}
 \end{aligned}$$

Konačnim sređivanjem dobija se

$$S_k^{(\hat{a}_n)} = \frac{1 - (-1)^{n+k} \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi)}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \\ \xi \neq \frac{n-k}{k} \end{array} \quad (D.26)$$

Pretpostavimo sada da je $kf - nf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{n-k}{k}$. Tada je

$$S_k^{(\hat{a}_n)} = \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin 0 \cdot dt + \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin[2\pi(nf_0 + nf_0)t] dt = 0 + \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin(4\pi nf_0 t) dt \quad (D.27)$$

Kako je $n \neq 0$, sledi da je

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{1}{KT_0} \left[-\frac{\cos(4\pi m f_0 t)}{4\pi m f_0} \right]_0^{KT_0} = -\frac{\cos(4\pi m K f_0 T_0)}{4\pi m K f_0 T_0} + \frac{\cos(0)}{4\pi m K f_0 T_0} \\
 &= -\frac{\cos(4\pi m K)}{4\pi m K} + \frac{1}{4\pi m K} = -\frac{\cos(4\pi m L + 2n\pi)}{4\pi m K} + \frac{1}{4\pi m K}, \quad k = 1, \dots, M \\
 &= -\frac{\cos(4\pi m L)}{4\pi m K} + \frac{1}{4\pi m K} = -\frac{1}{4\pi m K} + \frac{1}{4\pi m K} = 0, \quad \xi = \frac{n-k}{k}
 \end{aligned} \quad (D.28)$$

Izraz D.26 obuhvata izraze D.22 i D.28, kao što će biti pokazano u nastavku. Za $n = 0$, D.26 se svodi na

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{a}_n)} &= \frac{1 - (-1)^{0+k} \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - 0} = \\
 &= \frac{1 - (-1)^k \cos(2\pi k K \xi)}{\pi k K (1+\xi)}
 \end{aligned} \quad (D.29)$$

Za slučaj kada je $n \neq 0$, $kf - nf_0 = 0$, tj. $\xi = \frac{n-k}{k}$, D.26 postaje

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow \frac{n-k}{k}} S_k^{(\hat{a}_n)} &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{n-k}{k}} \left[\frac{1 - (-1)^{n+k} \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - n^2} \right] = \\
 &= \lim_{k+k\xi \rightarrow n} \left[\frac{1 - (-1)^{n+k} \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - n^2} \right] \stackrel{\lambda=k(1+\xi)}{=} \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{\lambda \{1 - (-1)^{n+k} \cos[2\pi K(\lambda - k)]\}}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{\lambda [1 - (-1)^{n+k} \cos(2\pi K\lambda + 2\pi Lk + \pi k)]}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{\lambda [1 - (-1)^{n+2k} \cos(2\pi K\lambda)]}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{\lambda [1 - (-1)^n \cos(2\pi K\lambda)]}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{\frac{d}{d\lambda} \{ \lambda [1 - (-1)^n \cos(2\pi K\lambda)] \}}{\frac{d}{d\lambda} [\pi K(\lambda^2 - n^2)]} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi K\lambda) + (-1)^n 2\pi K\lambda \sin(2\pi K\lambda)}{2\pi K\lambda} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[\frac{1 - (-1)^{n+\lambda} \cos(2\pi L\lambda)}{2\pi K\lambda} + (-1)^{n+\lambda} \sin(2\pi L\lambda) \right] = \frac{1-1}{2\pi Kn} + 0 = 0
 \end{aligned} \quad (D.30)$$

Dakle, izraz B.31 je sveobuhvatan za sve razmatrane slučajeve.

$$\boxed{S_k^{(\hat{a}_n)} = \frac{1 - (-1)^{n+k} \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{k(1+\xi)}{k^2(1+\xi)^2 - n^2}, \quad k = 1, \dots, M, \quad n = 0, \dots, M} \quad (D.31)$$

□

D.2.3. Izračunavanje $C_k^{(\hat{b}_n)}$

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{b}_n)} &= \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos \frac{2\pi kt}{T} \sin \frac{2\pi nt}{T_0} dt = \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos(2\pi kft) \sin(2\pi nf_0 t) dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} [\sin(2\pi kft + 2\pi nf_0 t) - \sin(2\pi kft - 2\pi nf_0 t)] dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin[2\pi(kf + nf_0)t] dt - \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin[2\pi(kf - nf_0)t] dt
 \end{aligned} \tag{D.32}$$

Pretpostavimo da je $kf - nf_0 \neq 0$. Na osnovu tabličnih vrednosti integrala, ovo postaje

$$\begin{aligned}
 C_k^{(\hat{b}_n)} &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin[2\pi(kf + nf_0)t] dt - \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin[2\pi(kf - nf_0)t] dt \\
 &= -\frac{1}{KT_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + nf_0)t]\}_0^{KT_0}}{2\pi(kf + nf_0)} + \frac{1}{KT_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf - nf_0)t]\}_0^{KT_0}}{2\pi(kf - nf_0)} = \\
 &= -\frac{1}{KT_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + nf_0)KT_0] - \cos 0\}}{2\pi(kf + nf_0)} + \frac{1}{KT_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf - nf_0)KT_0] - \cos 0\}}{2\pi(kf - nf_0)} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - \cos\left(2\pi kKfT_0 + 2\pi nK \underbrace{f_0 T_0}_1\right)}{kfT_0 + n \underbrace{f_0 T_0}_1} - \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - \cos\left(2\pi kKfT_0 - 2\pi nK \underbrace{f_0 T_0}_{1a}\right)}{kfT_0 - n \underbrace{f_0 T_0}_1} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - \cos(2\pi kKfT_0 + 2\pi nL + \pi n)}{kfT_0 + n} - \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - \cos(2\pi kKfT_0 - 2\pi nL - \pi n)}{kfT_0 - n} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi kKfT_0)}{kfT_0 + n} - \frac{1}{2\pi K} \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi kKfT_0)}{kfT_0 - n} = \\
 &= \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi kKfT_0)}{2\pi K} \left[\frac{1}{kfT_0 + n} - \frac{1}{kfT_0 - n} \right] = \\
 &= \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi kKfT_0)}{2\pi K} \left[\frac{1}{kfT_0 + n} - \frac{1}{kfT_0 - n} \right] = \\
 &= \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi kK(1 + \xi))}{2\pi K} \left[\frac{1}{k(1 + \xi) + n} - \frac{1}{k(1 + \xi) - n} \right] = \\
 &= \frac{1 - (-1)^n \cos(2\pi kK\xi + 2\pi L + \pi k)}{2\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi) - n - k(1 + \xi) - n}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2}
 \end{aligned} \tag{D.33}$$

Konačnim sređivanjem dobija se da je

$$C_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{1 - (-1)^{n+k} \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{-n}{k^2(1+\xi)^2 - n^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \\ \xi \neq \frac{n-k}{k} \end{array} \quad (\text{D.34})$$

Pretpostavimo sada da je $kf - nf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{n-k}{k}$. D.31 tada postaje

$$C_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin[2\pi(nf_0 + nf_0)t] dt - \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin 0 \cdot dt + = \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin(4\pi nf_0 t) dt - 0 \quad (\text{D.35})$$

Kako je $n \neq 0$, sledi da je

$$\begin{aligned} C_k^{(\hat{b}_n)} &= -\frac{1}{KT_0} \left[\frac{\cos(4\pi nf_0 t)}{4\pi nf_0} \right]_0^{KT_0} = -\frac{\cos(4\pi K f_0 T_0)}{4\pi K f_0 T_0} + \frac{\cos(0)}{4\pi K f_0 T_0} \\ &= \frac{1}{4\pi n K} - \frac{\cos(4\pi n K)}{4\pi n K} = \frac{1}{4\pi n K} - \frac{\cos(4\pi n L + 2\pi n)}{4\pi n K}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \end{array} \\ &= \frac{1}{4\pi n K} - \frac{1}{4\pi n K} = 0 \quad \xi = \frac{n-k}{k} \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Izraz B.34 obuhvata izraz B.36, jer je za $kf - nf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{n-k}{k}$ on postaje

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \frac{n-k}{k}} C_k^{(\hat{b}_n)} &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{n-k}{k}} \left[\frac{1 - (-1)^{n+k} \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{-n}{k^2(1+\xi)^2 - n^2} \right] = \\ &= \lim_{k+k\xi \rightarrow n} \left[\frac{1 - (-1)^{n+k} \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{-n}{k^2(1+\xi)^2 - n^2} \right] \stackrel{\lambda=k(1+\xi)}{=} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{-n \{1 - (-1)^{n+k} \cos[2\pi K(\lambda - k)]\}}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{-n \{1 - (-1)^{n+k} \cos[2\pi K\lambda - 2\pi Lk - \pi k]\}}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{-n \{1 - (-1)^n \cos(2\pi K\lambda)\}}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{\frac{d}{d\lambda} \{-n[1 - (-1)^n \cos(2\pi K\lambda)]\}}{\frac{d}{d\lambda} [\pi K(\lambda^2 - n^2)]} = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{(-1)^n 2\pi K n \sin(2\pi K\lambda)}{2\pi K \lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{(-1)^n n \sin(2\pi K\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{(-1)^n n \sin(2\pi L\lambda + \pi\lambda)}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{(-1)^{n+\lambda} n \sin(2\pi L\lambda)}{\lambda} = (-1)^{n+n} \frac{n}{n} \sin(2\pi Ln) = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Dakle, izrazi D.33 i D.35 se mogu spojiti u D.38.

$$\boxed{C_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{1 - (-1)^{n+k} \cos(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{-n}{k^2(1+\xi)^2 - n^2}, \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \end{array}} \quad (\text{D.38})$$

□

D.2.4. Izračunavanje $S_k^{(\hat{b}_n)}$

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{b}_n)} &= \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin \frac{2\pi kt}{T} \sin \frac{2\pi nt}{T_0} dt = \frac{2}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin(2\pi kt) \sin(2\pi nf_0 t) dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} [\cos(2\pi kt - 2\pi nf_0 t) - \sin(2\pi kt + 2\pi nf_0 t)] dt = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(kf - nf_0)t] dt - \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(kf + nf_0)t] dt
 \end{aligned} \tag{D.39}$$

Pretpostavimo da je $kf - nf_0 \neq 0$. Na osnovu tabličnih vrednosti integrala, ovo postaje

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{b}_n)} &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(kf - nf_0)t] dt - \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(kf + nf_0)t] dt \\
 &= \frac{1}{KT_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf - nf_0)t]\}_0^{KT_0}}{2\pi(kf - nf_0)} - \frac{1}{KT_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf + nf_0)t]\}_0^{KT_0}}{2\pi(kf + nf_0)} = \\
 &= \frac{1}{KT_0} \frac{\{\sin[2\pi(kf - nf_0)KT_0] - \sin 0\}}{2\pi(kf - nf_0)} - \frac{1}{KT_0} \frac{\{\cos[2\pi(kf + nf_0)KT_0] - \sin 0\}}{2\pi(kf + nf_0)} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k K(1 + \xi) - 2\pi n K \underbrace{f_0 T_0}_1}{1}\right)}{2\pi k(1 + \xi) - 2\pi n \underbrace{f_0 T_0}_1} - \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin\left(\frac{2\pi k K(1 + \xi) + 2\pi n K \underbrace{f_0 T_0}_{1a}}{1}\right)}{k(1 + \xi) + n \underbrace{f_0 T_0}_1} = \\
 &= \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k K + 2\pi k K \xi - 2\pi L n - \pi n)}{k(1 + \xi) - n} - \frac{1}{2\pi K} \frac{\sin(2\pi k K + 2\pi k K \xi + 2\pi L n + \pi n)}{k(1 + \xi) + n} = \\
 &= \frac{(-1)^n \sin(2\pi k K \xi)}{2\pi K} \left[\frac{1}{k(1 + \xi) - n} - \frac{1}{k(1 + \xi) + n} \right] = \\
 &= \frac{(-1)^n \sin(2\pi k K \xi)}{2\pi K} \cdot \frac{k(1 + \xi) + n - k(1 + \xi) + n}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2}
 \end{aligned} \tag{D.40}$$

Konačnim sređivanjem dobija se da je

$$S_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{(-1)^{n+k} \sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{n}{k^2(1 + \xi)^2 - n^2}, \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, M \\ n = 1, \dots, M \end{matrix}, \quad \xi \neq \frac{n - k}{k} \tag{D.41}$$

Pretpostavimo sada da je $kf - nf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{n - k}{k}$. D.39 tada je

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{b}_n)} &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(kf - nf_0)t] dt - \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(kf + nf_0)t] dt \\
 &= \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos 0 \cdot dt - \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \cos[2\pi(nf_0 + nf_0)t] dt = \\
 &= 1 - \frac{1}{KT_0} \int_0^{KT_0} \sin(4\pi nf_0 t) dt
 \end{aligned} \tag{D.42}$$

Kako je $n \neq 0$, sledi da je

$$\begin{aligned}
 S_k^{(\hat{b}_n)} &= 1 - \frac{1}{KT_0} \left[\frac{\sin(4\pi nf_0 t)}{4\pi nf_0} \right]_0^{KT_0} = \\
 &= 1 - \frac{\sin(4\pi n K f_0 T_0)}{4\pi n K f_0 T_0} + \frac{\sin(0)}{4\pi n K f_0 T_0} = 1 - \frac{\sin(4\pi n K \xi)}{4\pi n K}, \quad k = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, M, \quad \xi = \frac{n-k}{k} \\
 &= 1 - \frac{\sin(4\pi n K \xi)}{4\pi n K} = 1 + 0 = 1
 \end{aligned} \tag{D.43}$$

Za $n \neq 0$ i $kf - nf_0 = 0$, odnosno $\xi = \frac{n-k}{k}$ D.41 postaje

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow \frac{n-k}{k}} S_k^{(\hat{b}_n)} &= \lim_{\xi \rightarrow \frac{n-k}{k}} \left[\frac{(-1)^{n+k} \sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{n}{k^2(1+\xi)^2 - n^2} \right] = \\
 &= \lim_{k+k\xi \rightarrow n} \left[\frac{(-1)^{n+k} \sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{n}{k^2(1+\xi)^2 - n^2} \right]^{\lambda=k(1+\xi)} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[\frac{n(-1)^{n+k} \sin(2\pi K(\lambda - k))}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} \right] = \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[\frac{n(-1)^{n+k} \sin(2\pi K\lambda - 2\pi Lk - \pi k)}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} \right] = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[\frac{n(-1)^{n+2k} \sin(2\pi K\lambda)}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} \right] = \lim_{\lambda \rightarrow n} \left[\frac{n(-1)^n \sin(2\pi K\lambda)}{\pi K(\lambda^2 - n^2)} \right] = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{\frac{d}{d\lambda} [n(-1)^n \sin(2\pi K\lambda)]}{\frac{d}{d\lambda} [\pi K(\lambda^2 - n^2)]} = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{2\pi K n (-1)^n \cos(2\pi \lambda)}{2\pi K \lambda} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{n(-1)^n \cos(2\pi K\lambda)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{n(-1)^n \cos(2\pi L\lambda + \pi \lambda)}{\lambda} = \\
 &= \lim_{\lambda \rightarrow n} \frac{n(-1)^{n+\lambda} \cos(2\pi L\lambda)}{\lambda} = n \frac{1}{n} = 1
 \end{aligned} \tag{D.44}$$

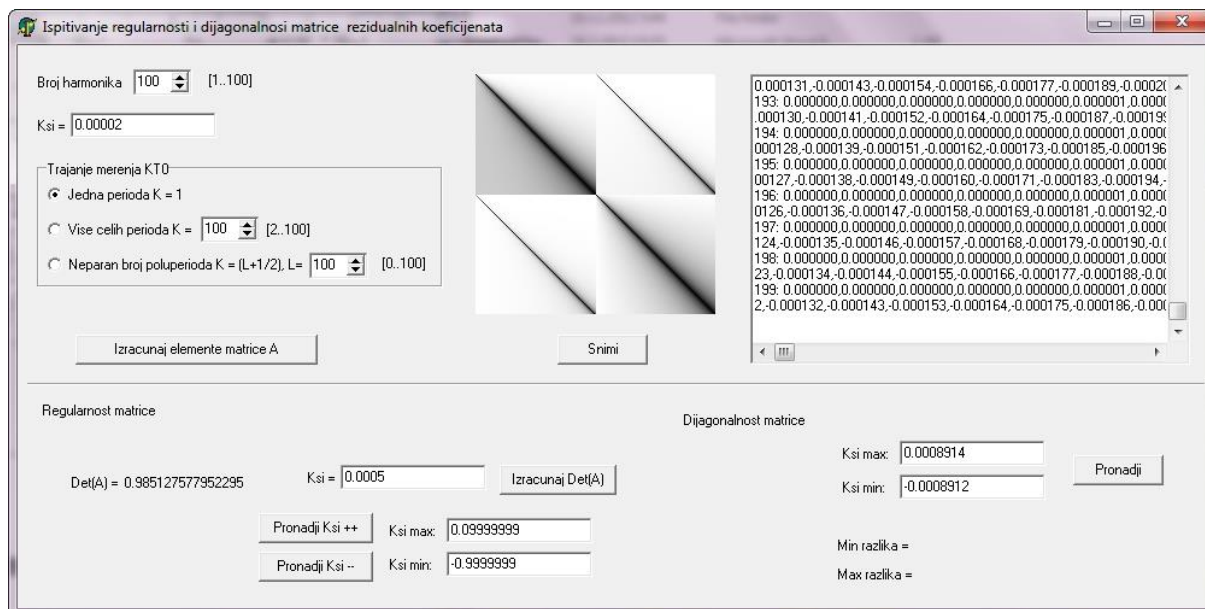
Sledi da se izrazi B.41 i B.43 mogu objediniti u D.45.

$$\boxed{S_k^{(\hat{b}_n)} = \frac{(-1)^{n+k} \sin(2\pi k K \xi)}{\pi K} \cdot \frac{n}{k^2(1+\xi)^2 - n^2}, \quad k = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, M} \tag{D.45}$$

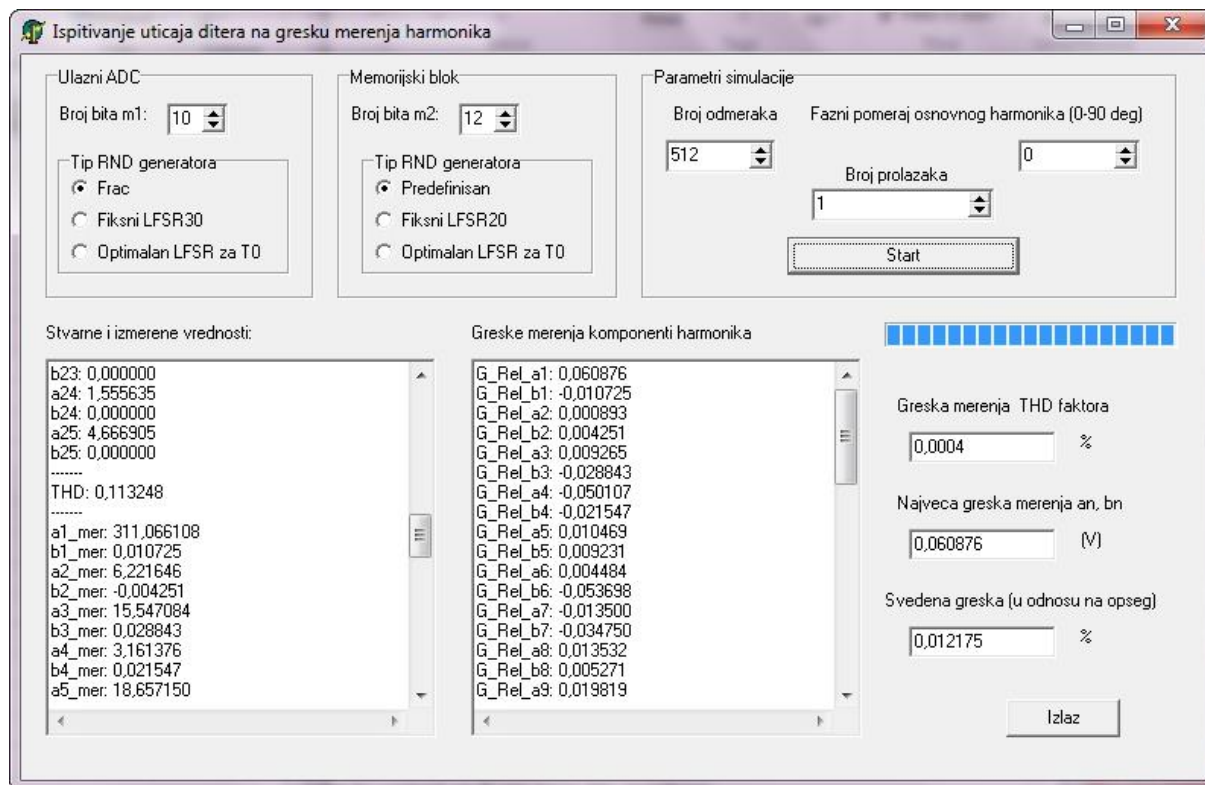
□

Dodatak E – Rezultati simulacija

U ovom dodatku prikazani su najvažniji rezultati simulacija, na osnovu kojih su doneti neki od zaključaka ove disertacije. Za potrebe ove disertacije kreirane su posebne simulacione aplikacije u programskom paketu Delphi. Izgledi aplikacija dati su na slikama S.E.1 i S.E.2.



Slika S.E.1. Program za ispitivanje regularnosti i dijagonalnosti matrice rezidualnih koeficijenata



Slika S.E.2. Program za određivanje uticaja speudoslučajnih deterskih signala

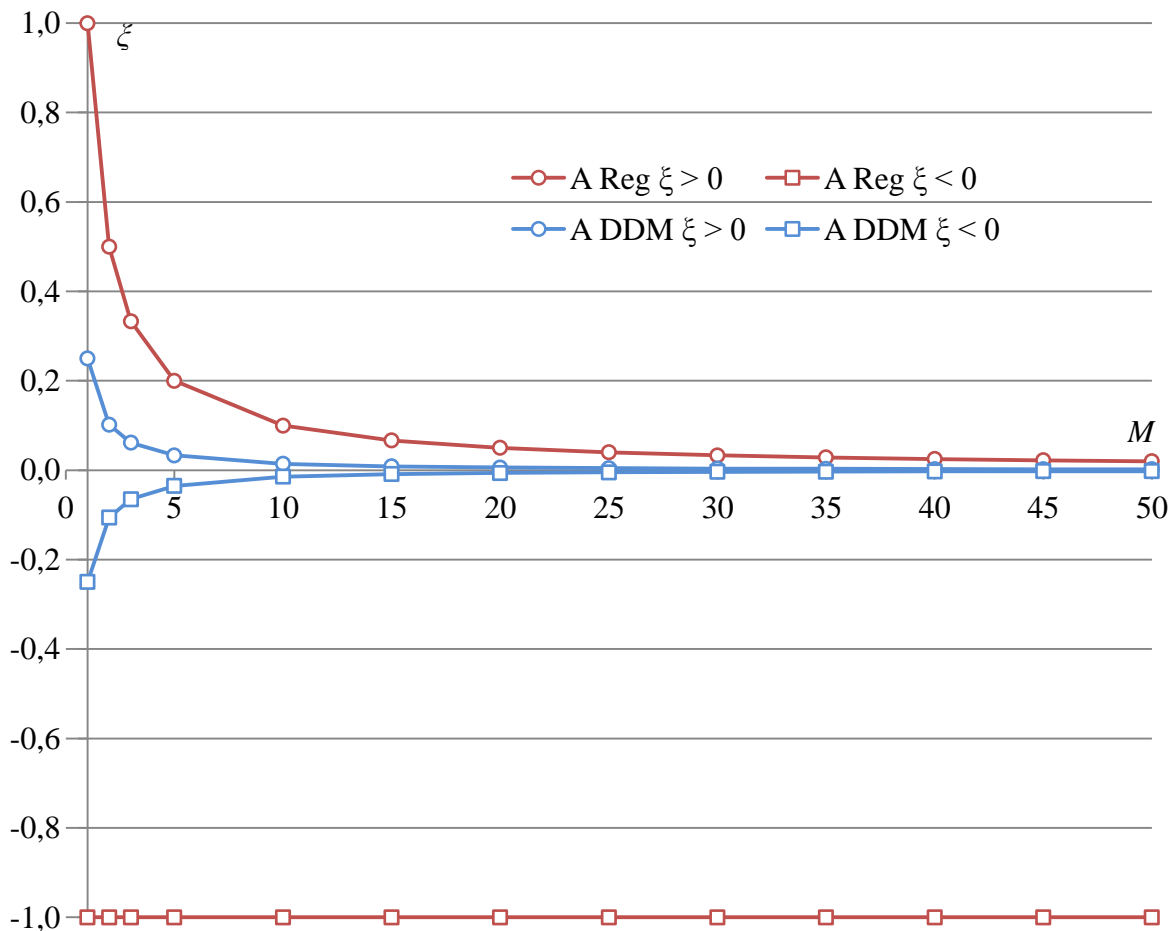
E.1. Merenje nad jednom nazivnom periodom osnovnog harmonika

U ovom delu dati su rezultati numeričkih proračuna uslova pod kojima je matrica rezidualnih koeficijenata A regularna, odnosno uslovi pod kojima je ona dijagonalno dominantna, ako je interval merenja određen nazivnom periodom osnovnog harmonika T_0 ($K = 1$). Vrednosti koeficijenata matrice za ovaj slučaj izvedeni su u dodatku B. Postoje dva stepena slobode u simulaciji. Prvi je broj harmonika M koji definiše red matrice $A_{2M \times 2M}$, a drugi je ζ - relativno odstupanje učestanosti osnovnog harmonika od nazivne vrednosti. Najjednosatvniji pristup simulaciji je prolazak kroz diskretan skup vrednosti od $M \in [1..100]$, a potom, za svako zadato M , prolazak kroz interval odgovarajućih vrednosti od $\zeta \in [-1/M..1/M]$.

Rezultati simulacije prikazani su u tabeli T.E.1.

Napomena: vrednosti date u tabeli T.E.1 koje se odnose na regularnost matrice A , ne znače da matrica A nije regularna i za još neke vrednosti ζ koje su veće od datih, već da se iznad datih vrednosti ne može garantovati regularnost u celom opsegu vrednosti. Osim toga, iznad datih maksimalnih vrednosti sistem jednačina definisan matricom A postaje u nekim slučajevima neodređen, a u nekim nestabilan, tj. osetljiv na male promene parametra ζ i vektora $[\hat{a}_n, \hat{b}_n]^T$.

Radi bolje preglednosti, dobijeni rezultati za $M < 50$ prikazani su grafički na slici S.E.3.



Slika S.E.3. Zone dijagonalne dominantnosti (DDM) i regularnosti (Reg) matrice A

Tabela T.E.1. Rezultati ispitivanja uslova regularnosti i dijagonalnosti matrice A za $K = 1$

M	ξ			
	Maksimalno pozitivno ξ za koje je A regularna matrica	Minimalno negativno ξ za koje je A regularna matrica	Maksimalno pozitivno ξ za koje je A dijagonalno dominantna matrica	Minimalno negativno ξ za koje je A dijagonalno dominantna matrica
1	0,999999	-0,999999	0,249999	-0,249999
2	0,499999	-0,999999	0,101882	-0,105962
3	0,333333	-0,999999	0,061583	-0,064900
4	0,249999	-0,999999	0,043379	-0,045968
5	0,199999	-0,999999	0,033161	-0,035227
6	0,166666	-0,999999	0,026676	-0,027517
7	0,142857	-0,999999	0,022219	-0,022450
8	0,124999	-0,999999	0,018980	-0,018894
9	0,111111	-0,999999	0,016373	-0,016269
10	0,099999	-0,999999	0,014307	-0,014257
11	0,090909	-0,999999	0,012684	-0,012668
12	0,083333	-0,999999	0,011378	-0,011383
13	0,076923	-0,999999	0,010305	-0,010324
14	0,071428	-0,999999	0,009408	-0,009437
15	0,066666	-0,999999	0,008649	-0,008684
16	0,062499	-0,999999	0,007998	-0,008037
17	0,058823	-0,999999	0,007434	-0,007456
18	0,055555	-0,999999	0,006942	-0,006942
19	0,052631	-0,999999	0,006507	-0,006492
20	0,049999	-0,999999	0,006107	-0,006094
21	0,047619	-0,999999	0,005749	-0,005740
22	0,045454	-0,999999	0,005429	-0,005423
23	0,043478	-0,999999	0,005141	-0,005138
24	0,041666	-0,999999	0,004881	-0,004880
25	0,039999	-0,999999	0,004645	-0,004646
26	0,038461	-0,999999	0,004430	-0,004432
27	0,037037	-0,999999	0,004233	-0,004236
28	0,035714	-0,999999	0,004052	-0,004056
29	0,034482	-0,999999	0,003885	-0,003888
30	0,033333	-0,999999	0,003731	-0,003730
31	0,032258	-0,999999	0,003588	-0,003584
32	0,031249	-0,999999	0,003453	-0,003449
33	0,030303	-0,999999	0,003326	-0,003322
34	0,029411	-0,999999	0,003208	-0,003205
35	0,028571	-0,999999	0,003097	-0,003095
36	0,027777	-0,999999	0,002994	-0,002992
37	0,027027	-0,999999	0,002896	-0,002896
38	0,026315	-0,999999	0,002805	-0,002805
39	0,025641	-0,999999	0,002719	-0,002719
40	0,024999	-0,999999	0,002638	-0,002639
41	0,024390	-0,999999	0,002562	-0,002562
42	0,023809	-0,999999	0,002489	-0,002490
43	0,023255	-0,999999	0,002421	-0,002420
44	0,022727	-0,999999	0,002356	-0,002354
45	0,022222	-0,999999	0,002293	-0,002291
46	0,021739	-0,999999	0,002233	-0,002232
47	0,021276	-0,999999	0,002176	-0,002175
48	0,020833	-0,999999	0,002122	-0,002121
49	0,020408	-0,999999	0,002070	-0,002070
50	0,019999	-0,999999	0,002021	-0,002020

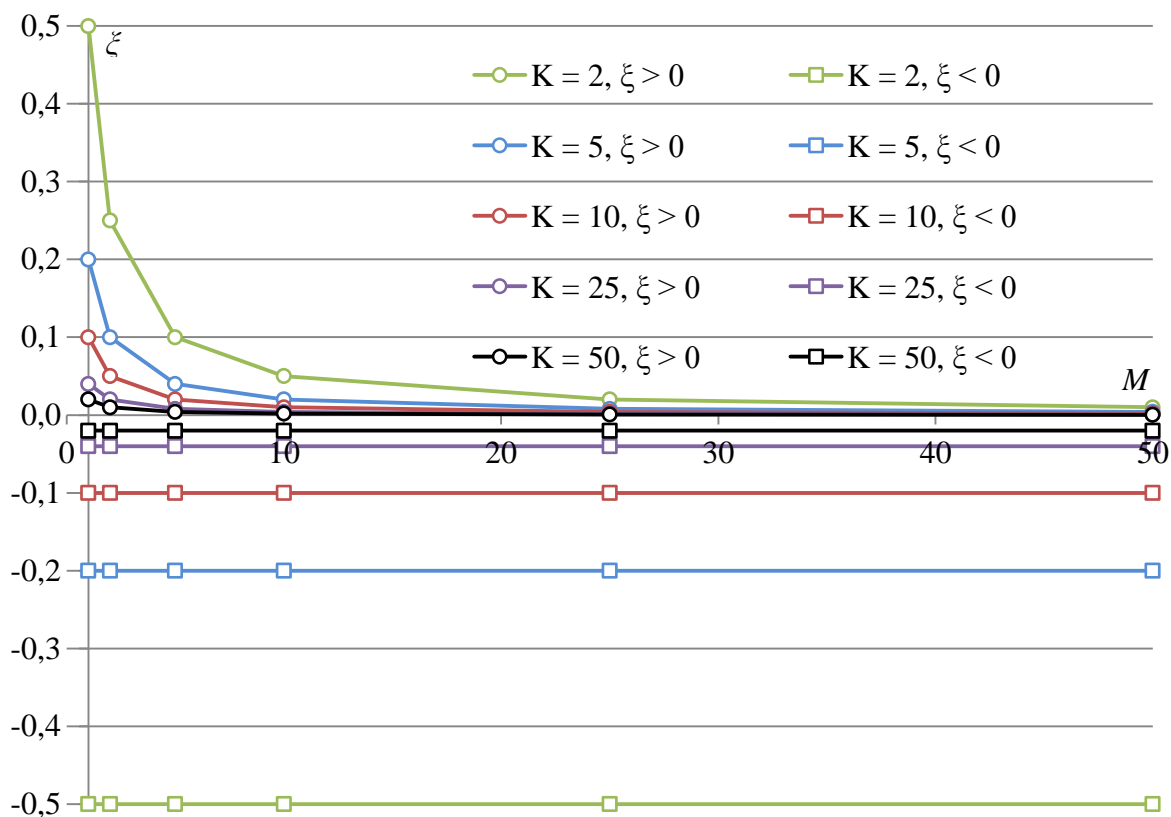
M	ξ			
	Maksimalno pozitivno ξ za koje je A regularna matrica	Minimalno negativno ξ za koje je A regularna matrica	Maksimalno pozitivno ξ za koje je A dijagonalno dominantna matrica	Minimalno negativno ξ za koje je A dijagonalno dominantna matrica
51	0,019607	-0,999999	0,001974	-0,001973
52	0,019230	-0,999999	0,001929	-0,001928
53	0,018867	-0,999999	0,001888	-0,001886
54	0,018518	-0,999999	0,001844	-0,001844
55	0,018181	-0,999999	0,001805	-0,001805
56	0,017857	-0,999999	0,001767	-0,001766
57	0,017543	-0,999999	0,001730	-0,001730
58	0,017241	-0,999999	0,001695	-0,001694
59	0,016949	-0,999999	0,001661	-0,001660
60	0,016666	-0,999999	0,001628	-0,001627
61	0,016393	-0,999999	0,001596	-0,001595
62	0,016129	-0,999999	0,001566	-0,001565
63	0,015873	-0,999999	0,001536	-0,001536
64	0,015624	-0,999999	0,001508	-0,001507
65	0,015384	-0,999999	0,001480	-0,001480
66	0,015151	-0,999999	0,001454	-0,001453
67	0,014925	-0,999999	0,001428	-0,001428
68	0,014705	-0,999999	0,001403	-0,001403
69	0,014492	-0,999999	0,001379	-0,001379
70	0,014285	-0,999999	0,001356	-0,001356
71	0,014084	-0,999999	0,001334	-0,001333
72	0,013888	-0,999999	0,001312	-0,001312
73	0,013698	-0,999999	0,001291	-0,001290
74	0,013513	-0,999999	0,001270	-0,001270
75	0,013333	-0,999999	0,001250	-0,001250
76	0,013158	-0,999999	0,001231	-0,001230
77	0,012987	-0,999999	0,001212	-0,001211
78	0,012820	-0,999999	0,001194	-0,001193
79	0,012658	-0,999999	0,001176	-0,001175
80	0,012499	-0,999999	0,001158	-0,001158
81	0,012345	-0,999999	0,001142	-0,001141
82	0,012195	-0,999999	0,001125	-0,001125
83	0,012048	-0,999999	0,001109	-0,001109
84	0,011904	-0,999999	0,001094	-0,001094
85	0,011764	-0,999999	0,001079	-0,001079
86	0,011627	-0,999999	0,001064	-0,001064
87	0,011494	-0,999999	0,001050	-0,001049
88	0,011363	-0,999999	0,001036	-0,001035
89	0,011235	-0,999999	0,001022	-0,001022
90	0,011111	-0,999999	0,001009	-0,001008
91	0,010989	-0,999999	0,000996	-0,000995
92	0,010869	-0,999999	0,000983	-0,000983
93	0,010752	-0,999999	0,000970	-0,000970
94	0,010638	-0,999999	0,000958	-0,000958
95	0,010526	-0,999999	0,000946	-0,000946
96	0,010416	-0,999999	0,000935	-0,000935
97	0,010309	-0,999999	0,000924	-0,000924
98	0,010204	-0,999999	0,000913	-0,000913
99	0,010101	-0,999999	0,000902	-0,000902
100	0,009999	-0,999999	0,000891	-0,000891

E.2. Merenje nad više nazivnih perioda osnovnog harmonika

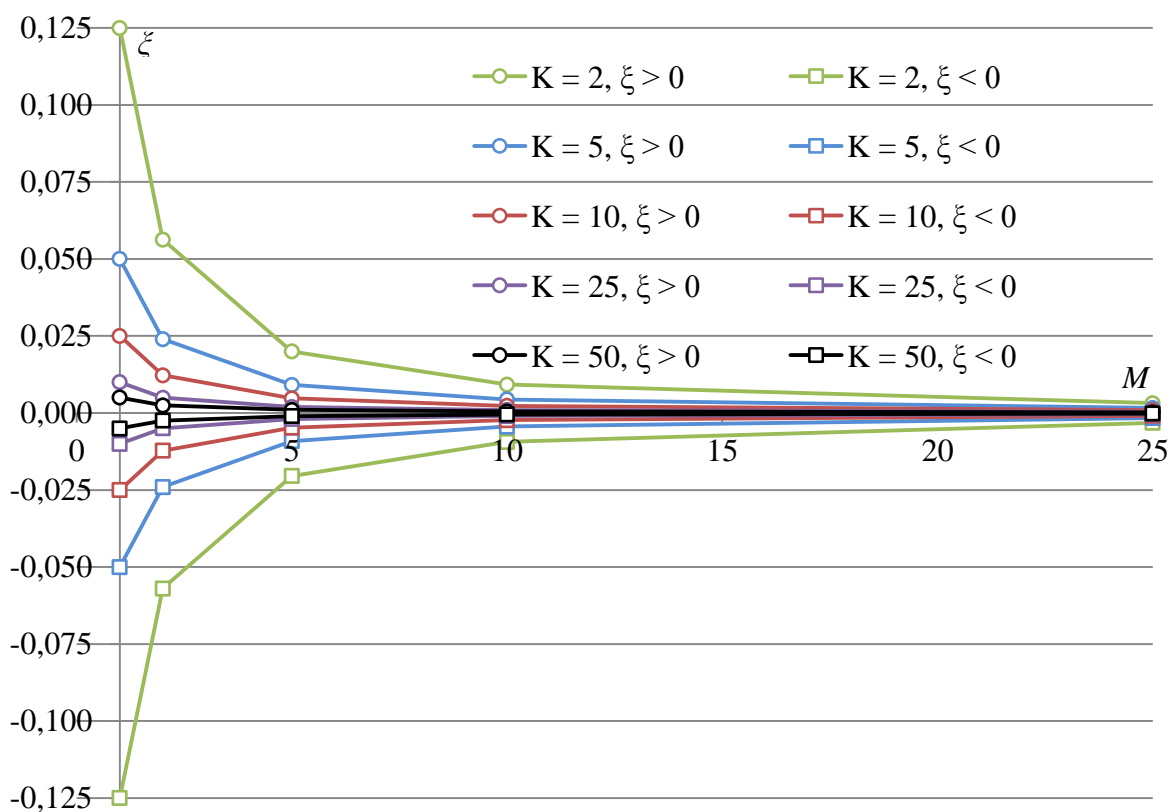
U ovom delu dati su rezultati simulacije koji pokazuju kada je matrica rezidualnih koeficijenata A regularna, odnosno dijagonalno dominantna, ako je interval merenja K puta duži od nazivne periode osnovnog harmonika T_0 ($K > 1$). Vrednosti koeficijenata matrice za ovaj slučaj izvedeni su u dodatku D. Postoje tri stepena slobode u simulaciji: K , M i ζ . Opseg mogućih vrednosti za K nije ograničen, ali će ovde iz praktičnih razloga biti razmatrani slučajevi do najviše $K = 50$. S obzirom da bi tabelarni prikaz ovako velikog broja rezultata (20.000) zahtevao mnogo prostora, ovde će biti prikazano samo nekoliko karakterističnih slučajeva datih u T.E.2, koji su ilustrovani grafički na S.E.4 i S.E.5. Ovo je opravdano time što se pokazuje da je uticaj K na moguć skup rešenja monoton.

Tabela T.E.2. Rezultati ispitivanja uslova regularnosti i dijagonalnosti matrice A za $K > 1$

K	M	ζ			
		Maksimalno pozitivno ζ za koje je A regularna matrica	Minimalno negativno ζ za koje je A regularna matrica	Maksimalno pozitivno ζ za koje je A dijagonalno dominantna matrica	Minimalno negativno ζ za koje je A dijagonalno dominantna matrica
2	1	0,499999	-0,499999	0,124999	-0,124999
2	2	0,249999	-0,499999	0,056307	-0,056990
2	5	0,099999	-0,499999	0,019985	-0,020428
2	10	0,049999	-0,499999	0,009219	-0,009354
2	25	0,019999	-0,499999	0,003204	-0,003210
2	50	0,009999	-0,499999	0,001443	-0,001444
2	100	0,004999	-0,499999	0,000655	-0,000655
5	1	0,199999	-0,199999	0,049999	-0,049999
5	2	0,099999	-0,199999	0,023967	-0,024020
5	5	0,039999	-0,199999	0,009094	-0,009136
5	10	0,019999	-0,199999	0,004377	-0,004401
5	25	0,007999	-0,199999	0,001657	-0,001660
5	50	0,003999	-0,199999	0,000783	-0,000784
5	100	0,001999	-0,199999	0,000370	-0,000370
10	1	0,099999	-0,099999	0,024999	-0,024999
10	2	0,049999	-0,099999	0,012238	-0,012245
10	5	0,019999	-0,099999	0,004763	-0,004769
10	10	0,009999	-0,099999	0,002333	-0,002337
10	25	0,003999	-0,099999	0,000909	-0,000910
10	50	0,001999	-0,099999	0,000443	-0,000443
10	100	0,000999	-0,099999	0,000214	-0,000214
25	1	0,039999	-0,039999	0,010000	-0,010000
25	2	0,019999	-0,039999	0,004957	-0,004958
25	5	0,007999	-0,039999	0,001961	-0,001961
25	10	0,003999	-0,039999	0,000972	-0,000972
25	25	0,001599	-0,039999	0,000384	-0,000384
25	50	0,000799	-0,039999	0,000190	-0,000190
25	100	0,000399	-0,039999	0,000094	-0,000094
50	1	0,019999	-0,019999	0,004999	-0,004999
50	2	0,009999	-0,019999	0,002489	-0,002489
50	5	0,003999	-0,019999	0,000990	-0,000990
50	10	0,001999	-0,019999	0,000492	-0,000493
50	25	0,000799	-0,019999	0,000196	-0,000196
50	50	0,000399	-0,019999	0,000097	-0,000097
50	100	0,000199	-0,019999	0,000048	-0,000048



Slika S.E.4. Prostor rešenja (K, M, ζ) u kome je matrica A regularna



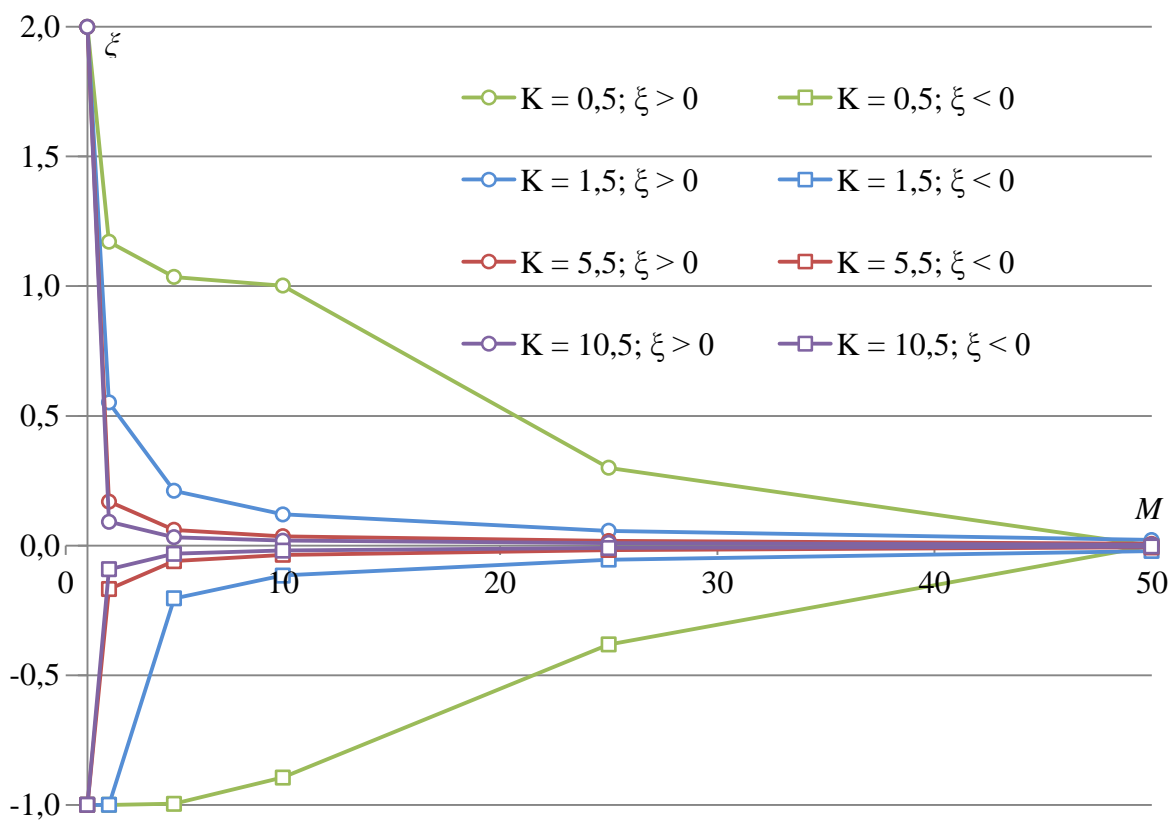
Slika S.E.5. Prostor rešenja (K, M, ζ) u kome je matrica A dijagonalno dominantna

E.3. Merenje nad neparnim brojem poluperioda osnovnog harmonika

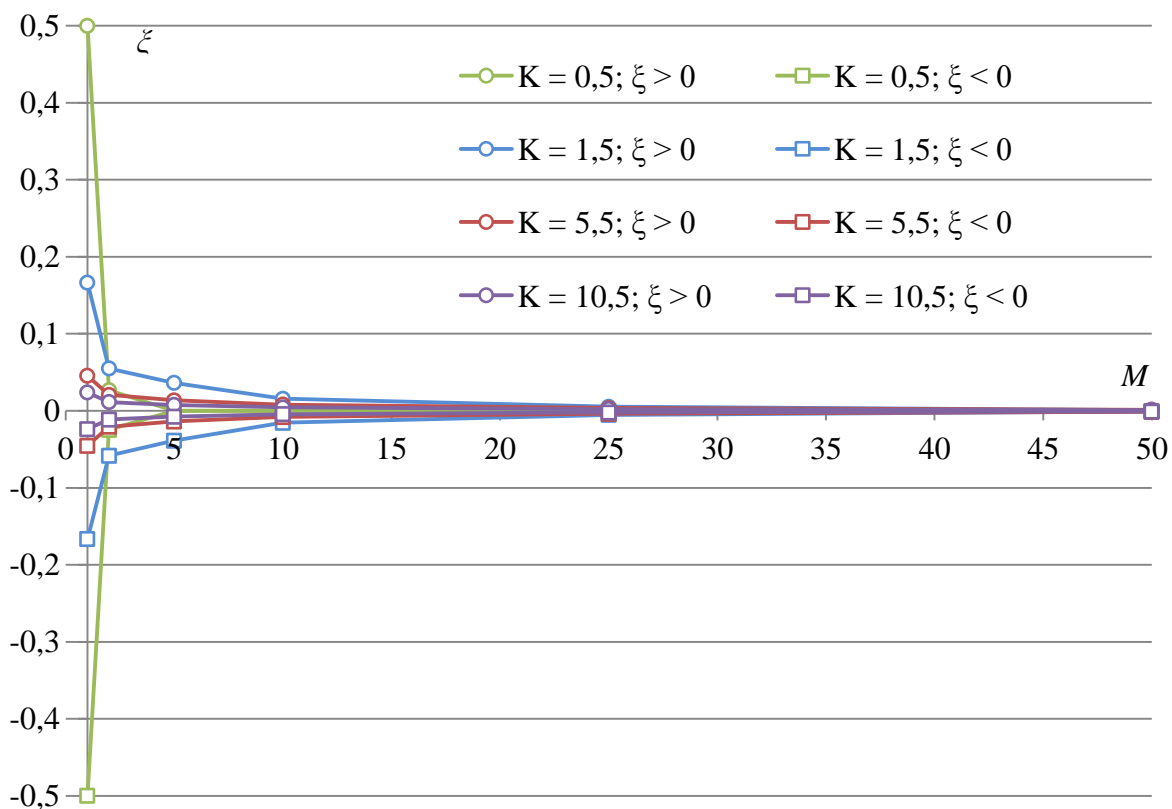
U ovom delu dati su analize uslova pod kojima je matrica rezidualnih koeficijenata A regularna, odnosno uslovi pod kojima je ona dijagonalno dominantna, ako je interval merenja neparan umnožak poluperioda harmonika ($KT_0 = (L + 1/2) T_0$). Vrednosti koeficijenata matrice za ovaj slučaj izvedeni su u dodatku D. Postoje tri stepena slobode u simulaciji: L , M i ζ . Opseg mogućih vrednosti za L nije ograničen, ali će ovde biti razmatrani slučajevi do najviše $L = 10$. Za svako $L \in [0..10]$, potrebno je u simulaciji proći kroz diskretan skup vrednosti za $M \in [1..100]$, a potom, za svako zadato L i M , kroz interval odgovarajućih vrednosti od $\zeta \in [-1/M..1/M]$. Nekoliko karakterističnih slučajeva dati su u tabeli T.E.3 i ilustrovani su grafički na S.E.6 i S.E.7. Ograničen broj prikaza je opravdan činjenicom da se pokazalo da skup mogućih rešenja monotono zavisi od L , odnosno K .

Tabela T.E.4. Rezultati ispitivanja uslova regularnosti i dijagonalnosti matrice A za $KT_0 = (L + 1/2) T_0$

L	K	M	ζ			
			Maksimalno pozitivno ζ za koje je A regularna matrica	Minimalno negativno ζ za koje je A regularna matrica	Maksimalno pozitivno ζ za koje je A dijagonalno dominantna matrica	Minimalno negativno ζ za koje je A dijagonalno dominantna matrica
0	0,5	1	1,999999	-0,999999	0,499999	-0,499999
0	0,5	2	1,171137	-0,999999	0,026789	-0,024640
0	0,5	3	1,035139	-0,995210	0	0
0	0,5	5	1,001981	-0,894461	0	0
0	0,5	10	0,299999	-0,381437	0	0
0	0,5	25	0,000001	-0,000007	0	0
0	0,5	50	$< 10^{-6}$	$> -10^{-6}$	0	0
0	0,5	100	$< 10^{-6}$	$> -10^{-6}$	0	0
1	1,5	1	1,999999	-0,999999	0,166666	-0,166666
1	1,5	2	0,551293	-0,999999	0,054969	-0,058288
1	1,5	3	0,210629	-0,203587	0,036297	-0,038741
1	1,5	5	0,120205	-0,115564	0,015735	-0,015535
1	1,5	10	0,056537	-0,054722	0,005258	-0,005273
1	1,5	25	0,021301	-0,020940	0,000808	-0,000805
1	1,5	50	0,010361	-0,010270	0,000023	-0,000023
1	1,5	100	0,005201	-0,005393	$< 10^{-6}$	$> -10^{-6}$
5	5,5	1	1,999999	-0,999999	0,045454	-0,045454
5	5,5	2	0,169837	-0,167838	0,020600	-0,020699
5	5,5	3	0,060285	-0,060227	0,013693	-0,013766
5	5,5	5	0,035918	-0,035848	0,007903	-0,007953
5	5,5	10	0,017720	-0,017664	0,003738	-0,003764
5	5,5	25	0,006937	-0,006914	0,001366	-0,001369
5	5,5	50	0,003539	-0,003535	0,000631	-0,000631
5	5,5	100	0,001692	-0,001721	0,000287	-0,000287
10	10,5	1	1,999999	-0,999999	0,023809	-0,023809
10	10,5	2	0,091703	-0,091380	0,011322	-0,011337
10	10,5	3	0,031697	-0,031693	0,007536	-0,007548
10	10,5	5	0,018978	-0,018972	0,004434	-0,004441
10	10,5	10	0,009446	-0,009440	0,002156	-0,002160
10	10,5	25	0,003742	-0,003738	0,000838	-0,000840
10	10,5	50	0,001854	-0,001974	0,000403	-0,000404
10	10,5	100	0,001149	-0,001149	0,000193	-0,000193



Slika S.E.6. Prostor rešenja (K, M, ζ) u kome je matrica A regularna



Slika S.E.7. Prostor rešenja (K, M, ζ) u kome je matrica A dijagonalno dominantna

Literatura

- [1] Vujicic, V.V., Milovancev, S.S., Pesaljevic, M.D., Pejic, D.V. & Zupunski, I.Z., „Low-frequency stochastic true RMS instrument“, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 48(2), April 1999, pp 467-470.
- [2] Vujicic, V.V., „Generalized low frequency stochastic true RMS instrument“, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 50, pp. 1089-1092.
- [3] Pjevalica V and Vujicic V.V, May 2005, “Further Generalization of the Low-Frequency True-RMS instrument”, *Proceedings of the 2005 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference*, Ottawa, Ontario, Canada, pp. 1008 – 1011.
- [4] Tomić J, “Integrirani instrument za merenje harmonika ”, *magistarska teza*, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, april 2004.
- [5] Pjevalica N., “Unapređena verzija integriranog merila”, *doktorska disertacija*, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, oktobar 2007.
- [6] Stones J., Collinson A., “Power quality”, *Power Engineering Journal*, Volume: 15, Issue: 2, April 2001, pp 58–64.
- [7] Ghandehari R., Jalilian A., “Economical impacts of power quality in power systems”, *39th International Universities Power Engineering Conference*, 2004, UPEC 2004, Vol. 2, 6-8 Sept. 2004, pp. 893 - 897 vol. 1.
- [8] Thapar A., Saha T.K., Zhao Y.D., “Investigation of power quality categorisation and simulating its impact on sensitive electronic equipment”, *IEEE Power Engineering Society General Meeting 2004*, Vol.1, 6-10 June 2004, pp. 528–533.
- [9] Sermon R.C., “An overview of power quality standards and guidelines from the end-user's point-of-view”, *Rural Electric Power Conference 2005*, 8-10 May 2005, pp. B1/1 - B1/5.
- [10] Broshi A., “Monitoring power quality beyond EN 50160 and IEC 61000-4-30”, *9th International Conference on Electrical Power Quality and Utilisation (EPQU)*, Barcelona, Spain, 9-11 Oct. 2007, pp. 1–6.
- [11] Kuhlmann V., Sinton A., Dewe M., Arnold C., “Effects of Sampling Rate and ADC Width on the Accuracy of Amplitude and Phase Measurements in Power-Quality Monitoring”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 22, No. 2, April 2007, pp. 758-764.
- [12] European Committee for Standardization, European Standard: „Voltage Characteristics of Electricity Supplied by Public Distribution Systems“, *EN 50160*, 1999.
- [13] Wikipedia the Free Encyclopedia - Mains electricity by Country, http://en.wikipedia.org/wiki/Mains_electricity_by_country, poslednji put modifikovana 21. februara 2013. u 14:00.
- [14] Weierstrass, K. „Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen“, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1885.
- [15] Stone, M. H., „The Generalized Weierstrass Approximation Theorem“, *Mathematics Magazine* 1948, Vol. 21 (4), 167–184; Vol. 21 (5), 237–254.
- [16] Mandache, L. & Al-Haddad, K. „New high precision harmonic analysis method for power quality assessment“, *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering 2005*, 1-4 May 2005, Saskatoon, Saskatchewan, Canada, pp. 1958-1961.

- [17] Szmajda, M., Gorecki, K. & Mroczka, J., „DFT algorithm analysis in low-cost power quality measurement systems based on a DSP processor“, *9th International Conference on Electrical Power Quality and Utilisation (EPQU)*, 9-11 Oct. 2007, Barcelona, Spain, pp. 1–6.
- [18] Kamenský, M. & Kováč, K., „Correction of ADC Errors by Additive Iterative Method with Dithering“, *Measurement Science Review*, 2011, Vol. 11(1), pp. 15-18.
- [19] Yoon, W.K., & Devaney, M.J., „Reactive Power Measurement Using the Wavelet Transform“, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 49(2), 2000, pp. 246-252.
- [20] IEEE/CIGRE Joint Task Force on Stability Terms and Definitions, „Definition and Classification of Power System Stability“, *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 19 No. 2, 2004, pp. 1387-1401.
- [21] Horne, J., Flynn, D. & Littler, T., „Frequency stability issues for islanded power systems“, *IEEE PES Power Systems Conference and Exposition*, 10-13 October 2004, Vol. 1, New York, NY, USA, pp 299 – 306.
- [22] Antic, B. & Pjevalica, N., „A New Approach to Power Grid Measurements - Measuring in Frequency Domain“, *Second Regional Conference and Exhibition on Electricity Distribution*, October 17-20, 2006, Zlatibor, Serbia, Book of Abstracts, JUKO CIRED Committee Novi Sad, pp. 37-38.
- [23] Antic, B.M. & Vujicic, V.V., „An Improved Version of the Stochastic Harmonic Instrument“, *Proceedings of the Metrology Congress 2007*, 26-28 September 2007, Zlatibor, Serbia.
- [24] Pakledinac J, „Research on stability of power grid“, *B.Sc. thesis*, University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, 2004.
- [25] Djukanovic M, „Determining the Stability of Power Grid Frequency and Voltage“, *B.Sc. thesis*, University of Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, 2005.
- [26] Moo, C. S., Chang, Y. N. Chang & Mok, P. P., „A digital measurement scheme for time-varying transient harmonics“, *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 10, No. 2, 1995, pp. 588-594.
- [27] Cai Z.X and Ni Y.X, „A direct method for frequency stability assessment of power systems“, *International Conference on Advances in Power System Control, Operation and Management, APSCOM-00 2000*, November 2000, Vol 1, pp. 285-289.
- [28] Hegeduš, H., Mostarac P. & Malarić. R., „Comparison of RMS Value Measurement Algorithms of Non-coherent Sampled Signals“, *Measurement Science Review*, Vol 11(3), 2011, pp. 79-84.
- [29] Karimi-Ghartemani, M. & Iravani, M.R., „Measurement of Harmonics/ Inter-harmonics of Time-Varying Frequencies“, *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 20, No. 1, 2005, pp. 23-31.
- [30] Espel, P., Poletaeff A. & Ndilimabaka H., „Traceability of Voltage Measurements for Non-Sinusoidal Waveforms“, *Measurement Science Review*, Vol 10(6), 2010, pp. 200-204.
- [31] Gordana Bojković, Nebojša Pjevalica, „FPGA realizacija preciznog višekanalnog merila harmonika“, *ETRAN 2006*, Beograd, Serbia.
- [32] Agrež, D., „Estimation and Tracking of the Power Quality Disturbances in the Frequency Domain“, *Measurement Science Review*, Vol. 10 (6), 2010, pp 189-194.
- [33] Acton, F. S., „Numerical Methods That Work“, 2nd edition, *Mathematical Association of America*, Washington, DC, 1990, pp. 161-163.
- [34] I. Župunski, V. Vujičić, Z. Mitrović, S. Milovančev, M. Pešaljević, „On-line Determination of the Measurement Uncertainty of the Stochastic Measurement

- Method“, Proceedings of XIX IMEKO World Congress, Fundamental and Applied Metrology, September 6–11, 2009, Lisbon, Portugal, pp 1048-1051.
- [35] Intel Corporation. (October 2012). Support for Processors, Retrieved October 23, 2012 from http://www.intel.com/p/en_US/support/processors
- [36] Advanced Micro Devices, Inc. (September 2012). *Products and Technologies*, Retrieved October 23, 2012 from <http://www.amd.com/us/products/Pages/products.aspx>
- [37] Altera Corporation. (2011). *Altera Floating Point Megafunctions*, Retrieved October 23, 2012 from http://www.altera.com/literature/ug/ug_altfp_mfug.pdf
- [38] Advanced Micro Devices, Inc. (July 2012). *AMD Opteron processors comparison*, Retrieved October 23, 2012 from http://sites.amd.com/us/Documents/49747D_HPC_Processor_Comparison_v3_July2012.pdf
- [39] Texas Instruments. (October 2012). *Embedded Processors*, Retrieved on October 23, 2012 from http://www.ti.com/lscds/ti/dsp/embedded_processor.page
- [40] Hindriksen, V. (2012, August). *Processors that can do 20+ GFLOPS per Watt*, Retrieved October 23, 2012 from <http://www.streamcomputing.eu/blog/2012-08-27/processors-that-can-do-20-gflops-watt/>
- [41] B.M. Antić, Z.L. Mitrović, V.V. Vujičić, “A Method for Harmonic Measurement of Real Power Grid Signals with Frequency Drift using Instruments with Internally Generated Reference Frequency”, *Measurement Science Review*, Vol. 12, No. 6, 2012, pp. 277-285.
- [42] B.M. Antić, V.V. Vujičić, “A Method for Reconstructing True Harmonic Composition in a Frequency Varying Power Grid”, IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference, Graz, Austria, May 13-16, 2012, pp. 2200-2205.
- [43] S.N. Bernstein, „Collected works, 1“, Moscow 1952, pp. 11–104.