



**УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И
ИНФОРМАТИКУ**



Радослав Божић

**МЕТОДИЧКА ОБРАДА ФУНКЦИЈА СА ПАРАМЕТРИМА
УЗ ПОМОЋ РАЧУНАРА**

- докторска дисертација -

Нови Сад, 2019.

Предговор

Наставни садржаји који се односе на функције присутни су у настави математике, почевши од основне школе, па све до универзитетског образовања. Ови садржаји су од изузетне важности, пре свега због примене функција у другим наукама и математичком моделирању појава из свакодневног живота. Такође, бројна ранија истраживања су показала да ученици и студенти имају потешкоћа у савладавању градива које се односи на функције, а посебно када се ради о функцијама са параметрима и трансформацијама функција. Из тог разлога, дошао сам на идеју да истражим могућности креирања и примене наставних метода које би олакшале ученицима и студентима савладавање овог наставног градива.

У докторској дисертацији је елаборирано истраживање које се односи на примену савремених технологија у настави математике на универзитетском нивоу. Истраживање се заснива на комбиновању различитих наставних метода, са циљем унапређења квалитета знања студената у области реалних функција и њихових особина. Бројна ранија истраживања бавила су се применом методе колаборативног рада у настави, као и имплементацијом савремене технологије у наставни процес.

У докторској дисертацији описане су наставне методе које се заснивају на примени динамичког софтвера у испитивању особина функција, односно класа (фамилија) функција, комбиноване са методама колаборативног, односно индивидуалног рада студената. Коришћењем погодног динамичког софтвера, израђени су едукативни материјали који се могу користити у настави. Спроведена су појединачна истраживања, која су имала за циљ утврђивање степена утицаја примене новог методског приступа на постигнућа студената у посматраној области. Резултати сваког од истраживања су статистички анализирани. Дата су закључна разматрања, која садрже дискусију о резултатима спроведених истраживања, као и смернице за имплементацију новог методског приступа у наставни процес и евентуална даља истраживања.

Неизмерну захвалност исказујем свом ментору, проф. др Ђурђици Такачи, за помоћ, подршку, мотивацију и разумевање током спровођења истраживања, као и израде дисертације. Њене идеје, савети и примедбе су допринели побољшању квалитета дисертације и дали јој коначан облик.

Захваљујем се Департману за математику и информатику на Природно–математичком факултету у Новом Саду, као и свим професорима, колегама и пријатељима који су ми помогли током спровођења истраживања.

Садржај

1. Уводни део.....	5
1.1. Циљеви докторске дисертације	9
1.2. Организација рада	11
2. Теоријска основа.....	14
2.1. Конструктивизам	14
2.2. Колаборативни рад у оквиру наставног процеса.....	18
2.3. Репрезентације у математици	23
2.4. Вишеструке репрезентације.....	26
2.5. Вишеструке репрезентације у рачунарском окружењу	30
2.6. Вишеструке репрезентације функција.....	33
3. Примена динамичког софтвера у раду са функцијама.....	38
3.1. Изучавање функција у оквиру математичких садржаја у Србији.....	38
3.2. Истраживања у циљу унапређења знања студената у области функција	39
3.3. Преглед расположивих софтверских пакета који омогућавају рад у оквиру вишеструких репрезентација	41
3.4. Наставни материјал Утицај динамичких особина софтверских пакета <i>Mathematica</i> и <i>GeoGebra</i> на испитивање особина и цртање графика функција са параметрима	47
3.5. Наставни материјал Испитивање особина и цртање графика функције	48
3.6. Испитивање особина функције у динамичком окружењу софтверског пакета <i>GeoGebra</i>	51
4. Опис тока експерименталног истраживања спроведеног 2015/2016. године	56
4.1. Циљеви истраживања спроведеног 2015/2016. године	56
4.2. Прелиминарно тестирање студената (пре-тест).....	56
4.2.1. <i>Анализа резултата пре-теста по задацима</i>	57
4.2.2. <i>Статистичка анализа резултата пре-теста</i>	61
4.3. Рад студената на трансформацијама функција током експерименталног истраживања.....	62
4.3.1. <i>Формирање колаборативних група</i>	62

4.3.2. <i>Анализа рада студената у колаборативним групама на трансформацијама функција</i>	63
4.4. Тестирање студената након процеса колаборативног рада	71
4.4.1. <i>Анализа резултата теста по задацима</i>	71
4.4.2. <i>Статистичка анализа резултата теста</i>	81
5. Опис тока првог експерименталног истраживања спроведеног 2016/2017. године	84
5.1. Истраживање у циљу унапређења знања студената у области функција са параметрима	84
5.2. Циљеви првог истраживања спроведеног 2016/2017. године.....	85
5.3. Прелиминарно тестирање студената.....	86
5.3.1. <i>Анализа резултата пре-теста по задацима</i>	87
5.3.2. <i>Статистичка анализа резултата пре-теста</i>	90
5.4. Рад студената током првог експерименталног истраживања 2016. године	91
5.4.1. <i>Анализа рада студената са функцијама са параметрима</i>	91
5.5. Тестирање студената.....	95
5.5.1. <i>Анализа резултата теста по задацима</i>	95
5.5.2. <i>Статистичка анализа резултата теста</i>	101
6. Опис тока другог експерименталног истраживања спроведеног 2016/2017. године.....	103
6.1. Истраживање у циљу унапређења знања студената о особинама функција и њихових извода	103
6.2. Циљеви другог истраживања спроведеног 2016/2017. године.....	104
6.3. Процес рада студената током експерименталног истраживања.....	105
6.3.1. <i>Анализа рада студената на испитивању функција и њихових извода у оквиру динамичких вишеструких репрезентација</i>	106
6.4. Анализа резултата теста	115
6.4.1. <i>Анализа резултата теста по задацима</i>	115
6.4.2. <i>Статистичка анализа резултата теста</i>	117
7. Опис тока експерименталног истраживања спроведеног 2017/2018 године	119
7.1. Истраживање у циљу унапређивања знања студената о особинама фамилија функција и њихових извода	119
7.2. Циљеви истраживања спроведеног 2017/2018. године	120
7.3. Анализа рада студената током експерименталног истраживања	120

7.3.1. <i>Анализа колаборативног рада студената на испитивању функција са параметрима у окружењу динамичких вишеструких репрезентација..</i>	122
7.3.2. <i>Анализа приложених материјала студената (решења задатака)</i>	129
7.4. <i>Анализа резултата теста</i>	132
7.4.1. <i>Статистичка анализа резултата теста</i>	132
8. <i>Закључна разматрања</i>	134
<i>Литература</i>	142
<i>Прилози</i>	149
<i>Биографија</i>	162

1. Уводни део

Један од кључних циљева образовања, у готово свим образовним системима, јесте оспособљавање ученика, односно студената, за успешну примену стеченог знања у пракси. Наравно, студенти морају најпре стећи квалитетно знање, како би га касније могли применити. Имајући у виду чињеницу да се потреба друштва за кадровима одређене струке мења, између осталог, под утицајем свакодневног развоја технологије, неопходно је да тај развој буде адекватно пропраћен и у оквиру образовања, односно да наставне методе које се примењују, као и наставни садржаји који се изучавају, прате потребе савременог друштва.

Последњих деценија велики број истраживања у области образовања усмерен је на унапређивање наставног процеса применом савремене технологије, али и унапређивањем технологије у циљу што бољег прилагођавања потребама наставе (Baylor & Ritchie, 2002; Martin Blas & Serrano Fernandez, 2009; Ozgun-Koca, 2008; Rau, Michaelis, & Fay, 2015; Sever & Yerushalmy, 2007). Осмишљен је велики број програмских пакета, апликација за паметне телефоне, па и самих уређаја намењених примени у образовању. Такође, многи програмски пакети, којима то није била примарна намена, нашли су своје место у савременим образовним системима, тако да су неки од њих, иако то првобитно није било планирано, развијани у том смеру.

Оно што је такође било неопходно учинити, јесте прилагођавање наставних програма савременим наставним методама, које подразумевају примену савремене технологије. Такође је било неопходно израдити одговарајући педагошко – дидактички материјал, како за ученике, односно студенте, тако и за наставнике, које је неопходно оспособити са примену нових наставних метода, те прибавити потребна наставна средства. Из наведених разлога, многи образовни системи, широм света, пролазили су и још увек пролазе кроз сложене реформске процесе, који имају за циљ прилагођавање образовних система потребама савременог друштва, али и формирање образовних система који би, у будућности, могли знатно брже и лакше да се модернизују него што је то био случај у прошлости.

Модернизација једног образовног система, поред времена, које је неопходно за спровођење потребних истраживања, стручно усавршавање наставног кадра и опремање образовних установа, захтева и значајна финансијска средства. То је један од разлога због кога модернизација појединих образовних система још увек није достигла жељени ниво.

Ипак, није неопходно нити довољно да само институције спроводе реформе. У великом броју случајева је могуће да сам наставник, без обзира на ниво образовања којим се бави, унапреди и осавремени наставни процес применом савремених наставних метода и технологије. Овде нарочито долази до изражаја креативност појединих наставника, али и истраживача у области образовања. Поред своје наставе, успешан наставник и/или истраживач у области образовања може, у значајној мери, допринети унапређењу

наставног процеса других наставника, који би били вољни да у пракси примене резултате његовог рада.

Један од приступа у настави, којим су се бавили бројни истраживачи у другој половини двадесетог и у двадесет првом веку, а за који се сматра да може допринети побољшању квалитета знања ученика, односно студената, јесте конструктивистички приступ (Bodner, 1986; von Glasersfeld, 1995; Lorschach & Tobin, 1992; Sjoberg, 2010; Taber, 2011; Tobin & Tippins, 1993). Овај приступ подразумева да ученик самостално креира, односно конструише знање, на основу информација којима располаже. Улога наставника, код оваквог приступа, јесте да оспособи ученике за квалитетно конструисање знања, што подразумева усмеравање ка поузданим изворима информација, као и оспособљавање за одабир одговарајућих информација, те њихову даљу обраду. Поред тога, једна од најважнијих улога наставника у конструктивистичком учењу јесте да обезбеди адекватно окружење за рад.

Ради што успешније примене конструктивистичког приступа у учењу, примењују се различите методе. Једна од њих је колаборативни рад, које се, у највећој мери, заснива управо на конструктивизму. Колаборативни рад подразумева процес сарадничког учења групе ученика, односно студената, који заједно раде на остварењу циља, односно конструисању одређеног знања. Највећа предност колаборативног рада огледа се у могућности да ученици, односно студенти, радећи у групи, кроз дискусију, изнесу своје, али и да чују туђа мишљења о истом проблему, која се могу разликовати од њихових. На овај начин, отвара се могућност за рађање нових идеја и креирање нових приступа у решавању одређеног проблема од стране ученика, односно студената. Поред тога, ученици и студенти се, још током школовања, оспособљавају за тимски рад, а оспособљеност за тимски рад се, у данашње време, сматра изузетно важном за развој каријере појединца. Због свега наведеног, колаборативни рад је био предмет већег броја истраживања последњих деценија (Gokhale, 1995; Golub, 1988; Johnson & Johnson, 1986; Laal & Ghodsi, 2012; Такаћи, Stankov, Milanović, 2015).

Значајан број истраживања, која су имала за циљ унапређивање наставног процеса применом савремене технологије, али и применом колаборативног рада, односио се на наставне садржаје и методе у области математике као наставног предмета (Borba & Confrey, 1996; Fulton, 2012; Lazakidou & Retalis, 2010; Wenglinsky, 1998). Ово није необично, с обзиром на чињеницу да велики број ученика, односно студената, има потешкоћа када је у питању савладавање математичког градива. Због тога су спроведена бројна истраживања у области образовања, која су имала за циљ приближавање математичких садржаја ученицима, односно студентима, те увођење нових приступа у настави математике, који би унапредили знање ученика и студената у овој области.

Многа од поменутих истраживања дала су значајан допринос унапређењу наставе математике и допринела креирању савремених програмских пакета који се успешно примењују у настави и који се из дана у дан развијају и осавремењују. Истраживања у области наставе математике су се, углавном равномерно, односила на различите наставне

теме и садржаје, што је омогућило да се настава математике унапреди у свим областима. Ипак, још увек постоје потешкоће када је у питању савладавање математичког градива од стране ученика, што указује на потребу за даљим истраживањима у циљу побољшања квалитета наставе математике.

Реалне функције, као један од садржаја у настави математике, на готово свим нивоима образовања, биле су често предмет поменутих истраживања. Функције су заступљене већ у основном образовању, док се детаљније изучавају у средњим школама и високом образовању, без обзира на подручје рада и образовни профил. Зато је неопходно да ученици, односно студенти, у што већој мери усвоје знања из области функција. Нарочито је значајно да разумеју особине функција, како би касније могли успешно да их примењују тамо где се за тим укаже потреба. У настави се, највећим делом, изучавају елементарне функције и њихове особине. Пракса је показала да ученици, односно студенти, неретко имају потешкоћа са разумевањем ових особина, те да често праве грешке приликом испитивања најважнијих особина функције, што за последицу може имати недовољну оспособљеност ученика и студената за каснију примену стеченог знања из области функција.

Дакле, разлога за спровођење истраживања у циљу побољшања квалитета знања ученика и студената у области функција има неколико. Пре свега, важност функција као математичког садржаја је изузетно велика. Један од разлога томе је примена функција у другим наукама, као што су физика, хемија, техничке науке, економија и друге, али и у моделирању појава и решавању проблема из свакодневног живота. Због потреба за применом, неопходно је да ученици, односно студенти, током свог образовања, у довољној мери овладају знањем у области функција и њихових особина. Други разлог због кога се функцијама, као математичком садржају, придаје велика важност јесте њихова примена у изучавању других, такође веома значајних, математичких садржаја.

Поред наведених, један од разлога због кога се значајан број истраживања, нарочито током последњих деценија, бави унапређивањем квалитета знања ученика и студената у области функција јесу потешкоће са којима се ученици и студенти срећу у раду са функцијама и испитивању њихових особина.

Ранија истраживања су показала да ученици, односно студенти, без обзира на ниво образовања, када је у питању испитивање особина функција, имају највише потешкоћа у раду са функцијама са променљивим параметрима, као и са трансформацијама функција (Borba & Confrey, 1996; Daher & Anabousi, 2015). Оспособљеност студената за рад са функцијама са параметрима, а нарочито познавање утицаја вредности параметара на особине функција је од значаја за разумевање особина функције и појма функције у целисти. Због тога су, у протеклом периоду, нека од истраживања у области функција посвећена управо раду на трансформацијама функција под утицајем параметара. Код већине ових истраживања испитује се допринос примене савремене технологије у обради математичких садржаја који се односе на функције.

Поједини аутори нарочито истичу важност трансформација функција, јер оне пружају могућност анализе познавања особина функција од стране ученика/студената. Код оваквих трансформација често се појављују конфликтне ситуације у којима долази до изражаја да ли су ученици/студенти разумели поједине особине функције, те су из тог разлога спроведена истраживања која су имала за циљ да се утврди какав метод рада би допринео побољшању разумевања ових особина (Borba & Confrey, 1996; Daher & Anabousi, 2015; Sever & Yerushalmy, 2007; Tall, 1992).

Нека од поменутих истраживања, спроведених у овој области, показала су да коришћење различитих начина да се представе функције, то јест, вишеструких репрезентација функција, доприноси бољим постигнућима ученика, односно студената, у овој области. Највећи број савремених истраживања бави се унапређивањем вишеструких репрезентација функција уз помоћ савремене технологије, односно уз помоћ различитих програмских пакета, погодних за формирање вишеструких репрезентација.

Функцијом се представља зависност двеју величина, а како би се ученицима, односно студентима, ова зависност што јасније представила, најчешће се користе четири репрезентације – алгебарска, визуелна (графичка), нумеричка (табеларна) и вербална. Традиционални методски приступ у обради функција, који је и данас веома заступљен у систему математичког образовања, даје предност алгебарској репрезентацији, док се визуелна репрезентација поставља на друго место, тј. пред ученике/студенте се поставља проблем у коме егзистира алгебарски задата функција, а од њих се очекује да, након испитивања одређених особина тако задате функције, дају и њен графички приказ. Ради једноставнијег графичког представљања функције, алгебарска репрезентација се често комбинује са нумеричком, односно табеларном.

Пракса је показала да код оваквог приступа ученици/студенти не схватају суштину појединих особина, што се неретко манифестује бројним грешкама у радовима, а које нарочито долазе до изражаја приликом графичког приказивања функције чије су особине претходно анализиране. Насупрот томе, визуелни приступ подразумева да ученици, односно студенти, на основу датог графика функције, анализирају њене особине, што се показало успешнијим, јер се неке од особина једноставније уочавају на графику функције, па их је лакше разумети када се визуелна репрезентација комбинује са алгебарском.

Некада је било готово немогуће дати визуелну репрезентацију функције уколико нису познате, тј. уколико нису испитане њене особине. У данашње време постоје бројни софтверски пакети који омогућавају графичко приказивање функције на основу одговарајуће алгебарске репрезентације. Вербална репрезентација функције је слабије заступљена у образовању од претходно поменутих, иако је веома важна за квалитетан опис и разумевање особина функције. Понекад није једноставно функцију представити вербално, али би, у неким случајевима, управо вербални приказ (опис) омогућио боље разумевање појединих особина, те би га, попут нумеричког, било пожељно комбиновати са преостала два. У сваком случају, ниједна репрезентација није довољно добра уколико

се користи самостално, већ је неопходно користити више репрезентација паралелно, односно радити у оквиру вишеструких репрезентација.

Познато је да се елементарне функције могу поделити у више класа (фамилија). Функције исте класе имају и већи број заједничких, односно веома сличних особина. У алгебарској репрезентацији ове функције се углавном разликују само у вредностима појединих реалних параметара. Како би што боље упознали особине одређене класе функција, ученици/студенти би требали испитати што више различитих функција те класе, јер би им то омогућило да сагледају особине које су заједничке за читаву класу функција, факторе који утичу на особине, као и начин на који се тај утицај остварује. Због тога је потребно оспособити ученике, односно студенте, за испитивање особина функција са параметрима, као и за анализу утицаја појединих параметара на особине функција. Ово захтева много времена уколико се испитивање особина функција врши традиционалном методом. Зато се, поред потребе за изналажењем одговарајуће репрезентације, односно најподеснијег комбиновања четири поменуте репрезентације, јавља и потреба за скраћивањем поступка испитивања особина функције (барем оних најважнијих), а у циљу омогућавања да се, кроз вежбу, испита што више различитих функција, што би се могло постићи коришћењем такозваног динамичког, односно манипулативног софтвера приликом методичке обраде функција са параметрима.

Развој динамичког софтвера пружа нове могућности за унапређење квалитета вишеструких репрезентација функција. Под динамичким софтвером се подразумевају програмски пакети са динамичким особинама, који омогућавају кориснику да, мењањем једне величине истовремено мења више зависних величина и да прати настале промене. Примена оваквог софтвера омогућила је боље динамичко повезивање различитих репрезентација функција. Овако повезане репрезентације функција једним именом се могу назвати динамичком, односно манипулативном, репрезентацијом функција.

Иако су, у протеклом периоду, спроведена одређена истраживања у циљу унапређивања наставних метода које се примењују у обради наставних садржаја који се односе на функције у математици, остало је још доста простора за унапређење постојећих и креирање нових методских приступа у овој области. Под овим се подразумева комбиновање различитих наставних метода, које би имало за циљ креирање нових, још ефикаснијих метода. Тако се, на пример, значајан број истраживања у протеклом периоду бавио комбиновањем колаборативног рада са применом савремене технологије, односно применом колаборативног рада у рачунарском окружењу (Кауе, 2012; Lipponen, 2002; Weinberger & Fischer, 2006).

1.1. Циљеви докторске дисертације

На основу изнетог, проистекла је идеја да се осмисли нови методски приступ у методичкој обради функција са параметрима, који би омогућио да се равноправно и у корелацији користе алгебарска и визуелна (графичка) репрезентација функције, те да се

оне, по потреби, комбинују са нумеричком и вербалном репрезентацијом, а у циљу што квалитетнијег представљања појединих особина функције, које су се раније показале слабије разумљивим ученицима и студентима. Поред наведеног, нови методски приступ би требало да, без умањења квалитета, убрза поступак испитивања најважнијих особина функције, што би омогућило испитивање већег броја функција у релативно кратком времену. То би било постигнуто имплементацијом динамичког софтвера у процес обраде и увежбавања поменутих наставних садржаја.

Такође, идеја је да нови методски приступ буде такав да се може успешно комбиновати са другим наставним методама, као што је колаборативни рад уз помоћ рачунара, што би требало да омогући да ученици/студенти, разменом мишљења кроз дискусију, долазе до тачнијих закључака, али и да развијају склоности ка тимском раду и навику коришћења рачунара као наставног средства. Осим тога, потребно је да се нови методски приступ може успешно применити и код индивидуалног рада.

Главни циљ докторске дисертације је осмишљавање методског приступа који би био заснован на коришћењу рачунара, са нагласком на коришћењу динамичког софтвера, а у циљу што успешније примене вишеструких репрезентација функције у обради наставних садржаја и приликом решавања разних проблема, као и тестирање новог методског приступа у циљу испитивања његове ефикасности.

Поред наведеног главног циља, докторска дисертација се, у циљу давања доприноса савременој методици наставе математике, бави:

- Унапређивањем теоријских принципа примене вишеструких репрезентација функција у динамичком окружењу.
- Унапређивањем теоријских принципа колаборативног рада уз помоћ рачунара.
- Могућностима интегрисања новог методског приступа у наставу математике.
- Осмишљавањем математичких проблема са одговарајућим садржајима и захтевима, који би били обрађивани у оквиру новог методског приступа.
- Израдом едукативних материјала који би омогућили ученицима и студентима квалитетније оспособљавање за рад са функцијама у динамичком окружењу.
- Осмишљавањем задатака који би омогућили квалитетну процену постигнућа ученика/студената у области обухваћеној новим методским приступом.

Очекује се да ће реализација истраживачких радњи и активности код студената у одговарајућој мери утицати на:

- Стицање и продубљивање математичког знања, неопходног за наставак даљег школовања и праћење савременог технолошког развоја;
- Развијање визуелног мишљења, способности интерпретације графичких приказа, способности графичког представљања математичких објеката;
- Развијање способности преласка са једне репрезентације садржаја на другу и повезивање различитих репрезентација
- Развијање способности графичког представљања реалних појава и процеса;

- Развијање способности сагледавања проблема са различитих аспеката, примене стеченог знања на нове ситуације и способности критичког мишљења;
- Развијање способности логичког мишљења, закључивања, математичке аргументације;
- Развијање позитивног става према математици као науци са великим могућностима за примену у другим наукама и реалном окружењу.

1.2. Организација рада

У другом поглављу дисертације направљен је упоредни преглед радова који се односе на конструктивизам, колаборативни рад, колаборативни рад уз помоћ рачунара, затим на примену одређених софтверских пакета, који су везани за визуелизацију наставних садржаја из области функција и улогу динамичке геометрије у обради оваквих садржаја, као и других радова који се односе на рад са функцијама у динамичком окружењу и функција са параметрима, чиме су постављене теоријске основе даљег истраживања и саме дисертације.

У трећем поглављу представљен је нови методски приступ у обради функција са параметрима и испитивању њихових особина, заснован на колаборативном раду уз помоћ рачунара, а у циљу развоја визуелног мишљења, које омогућава тумачење визуелног (графичког) приказа функција, геометријску интерпретацију њихових особина, те повезивање и комбиновање различитих видова репрезентације функција. Такође је представљена могућност имплементације овог методског приступа у наставу математике у складу са основама методике математике. Описани методски приступ је експериментално примењен у наставној пракси, а у ту сврху је спроведено истраживање о примени динамичког софтвера у методичкој обради функција са параметрима, које је описано у четвртом поглављу дисертације.

Главни циљ овог истраживања био је утврђивање степена утицаја примене динамичког софтвера у колаборативном раду на квалитет знања студената и разумевање одређених сегмената наставних садржаја из области функција. Акценат је стављен на рад студената на трансформацијама функција. У четвртом поглављу је дата и статистичка анализа резултата тестирања студената.

У петом, шестом и седмом поглављу дисертације описана су додатна истраживања, спроведена у циљу даљег тестирања и унапређивања новог методског приступа. Основни циљ истраживања описаног у петом поглављу је утврђивање степена утицаја примене динамичког софтвера на постигнућа студената у области функција са параметрима, као и знање студената о утицају параметара на особине функције, док се остали циљеви не разликују у односу на истраживање описано у четвртом поглављу. Код оба истраживања дата је статистичка анализа резултата теста. У истраживању описаном у шестом поглављу акценат је стављен на утврђивање степена утицаја примене динамичких вишеструких репрезентација функција и њихових извода на постигнућа студената у области особина

функција. Поред тога што је анализиран и рад са изводима функција, ово истраживање се разликује од претходна два и по томе што студенти нису радили у колаборативним групама, већ индивидуално.

У истраживању описаном у седмом поглављу, анализиран је утицај примене колаборативног рада на постигнућа студената. Сви студенти, обухваћени истраживањем, имали су могућност коришћења софтвера током увежбавања испитивања особина функција. Циљ овог истраживања, за разлику од претходних, био је анализирање рада студената унутар колаборативних група и сагледавање њихових приступа у решавању задатака. Током процеса учења, анализираног у овом истраживању, свака група студената добијала је задатак да испитује особине и ради са вишеструким репрезентацијама класа (фамилија) функција добијених трансформацијама од исте, или сродних класа елементарних функција (рационалних, експоненцијалних, логаритамских, тригонометријских и функција квадратног и кубног корена).

Сва истраживања су спроведена на Природно–математичком факултету Универзитета у Новом Саду, у оквиру курса Математика 1 за студенте физике, односно Општа математика за студенте хемије и Анализа 1 за студенте информатике и рачунарства, а њима су обухваћени студенти прве године основних академских студија различитих студијских програма – хемије, физике и информатике и рачунарства. Садржаји који се односе на функције и њихове особине заједнички је за сва три наведена курса.

Студенти су, током спровођења истраживања, распоређени у експерименталну и контролну групу. Како би се постигла уједначеност група по питању предзнања студената из области функција, спроведено је прелиминарно тестирање, а резултати овог тестирања коришћени су као критеријум приликом формирања експерименталне и контролне групе. У прва три истраживања, студенти експерименталне групе су, приликом методичке обраде функција са параметрима, радили уз помоћ рачунара, док су студенти контролне групе радили без рачунара. Након завршетка експерименталног периода, у сваком од поменута три истраживања, спроведено је тестирање знања студената. Студенти експерименталне и контролне групе радили су идентичне задатке приликом овог тестирања, при чему ни једни ни други за време тестирања нису имали могућност коришћења рачунара. У последњем (четвртог) истраживању, с обзиром на сам циљ истраживања, у експерименталној групи је примењен метод колаборативног рада, док је у контролној групи примењен метод индивидуалног рада.

Методски приступ, чија је примена била предмет ових истраживања, заснива се на примени савремене технологије, која, између осталог, има за циљ обезбеђивање квалитетног окружења за конструктивистичко учење. Поред наведеног, у три од четири спроведена истраживања, примењен је колаборативни рад.

Примена колаборативног рада у рачунарском окружењу имала је за циљ омогућавање студентима да раде на испитивању особина функција помоћу савремених програмских пакета, у оквиру динамичких вишеструких репрезентација, при чему би

дошла до изражаја креативност сваког од студената појединачно, али и да омогући студентима да, кроз сталну дискусију и размену мишљења, обогате свој приступ у учењу новим идејама. Слушање идеја сарадника, тј. осталих чланова групе, подстиче сваког појединца на додатно размишљање, што подстиче његову креативност и доводи до рађања нових идеја.

Током једног од истраживања примењена је метода индивидуалног рада, како би се анализирао утицај примене динамичког софтвера на постигнућа студената када раде самостално, тј. када нису у могућности да размењују идеје са другим студентима.

У осмом поглављу дисертације дата су закључна разматрања проистекла из истраживања. Наглашен је научни допринос спроведених истраживања. Такође су дате смернице за примену методског приступа креираног и тестираног у оквиру спроведених истраживања у наставној пракси, а дате су и смернице за даља истраживања.

2. Теоријска основа

У истраживањима на којима се заснива докторска дисертација коришћене су вишеструке репрезентације у циљу оспособљавања студената за самостално конструисање знања, што је у складу са конструктивистичком теоријом учења. У два истраживања примењен је колаборативни рад, који је такође заснован на конструктивизму.

2.1. Конструктивизам

Предавање не мора за последицу имати учење. Ови процеси су одвојени и чињеница да су студенти присуствовали квалитетном предавању не значи нужно и да су на том предавању стекли одређено знање. Традиционално виђење предавања, односно преношења знања, подразумева прављење копија знања наставника у умовима ученика, односно студената. При томе је важно да знање наставника буде истинито, а истинитим се сматра оно што одговара реалности. Међутим, критичари оваквог приступа постављају питање шта се сматра реалношћу (Bodner, 1986). Von Glasersfeld (1995) сматра да се реалност разликује када се посматра са различитих аспеката. Тако, на пример, растојање између две звезде није исто за астронома и некога ко је лаик у овој области.

Ранија истраживања су показала да традиционално преношење знања ретко даје добре резултате. Показало се да знање стечено на овакав начин није довољно квалитетно и трајно, као и да ученици често завршавају школу неспособљени за примену стеченог знања (von Glasersfeld, 1995). Они, наиме, долазе на факултет углавном добро припремљени за решавање стандардних, уџбеничких, проблема, али се тешко сналазе са нестандартним (измењеним) проблемима, ма колико они били једноставни.

Тако је, на пример, једно од истраживања показало да више од четвртине студената прве године факултета техничке струке не зна да постави аналитички израз којим би изразили зависност броја студената од броја наставника на факултету, уколико је познато да је студената шест пута више него наставника (Kaput & Clement, 1979). Они су најчешће правили грешку постављајући израз $6S = P$, при чему P означава број наставника, а S број студената. Овај проблем је био предмет више истраживања у наредном периоду, а једно од запаженијих спровео је Rosnick (1981), који је установио да у једној групи студената, који су већ положили математичку анализу, има 22% оних који су одговорили да у једначини $S = 6P$ променљива S означава број наставника.

Због наведених и сличних проблема, често се поставља питање који приступ у учењу би дао боље излазне резултате ученика, односно који приступ би на најбољи могући начин поспесио квалитет знања и оспособљеност ученика за примену истог. Бројни теоретичари сматрају да је један од приступа који би, макар у већој мери, дао овакве резултате управо конструктивистички приступ учењу (Bodner, 1986; von Glasersfeld, 1995; Sjoberg, 2010; Taber, 2011).

Конструктивизам као теорија учења заснива се на искуству ученика и подразумева да је начин стицања знања јединствен за сваког ученика. Оно што је, код

конструктивистичког модела учења, заједничко за све ученике, јесте самостално и активно конструисање знања од стране ученика. Конструисање знања је процес у коме се знање гради и континуирано тестира. Дакле, ученици неће просто пресликавати и репродуковати добијене информације, него ће тражити законитости и везе међу догађајима, чак и онда када не располажу свим потребним подацима (Bodner, 1986).

Код конструктивистичког модела учења, ученик самостално креира нове идеје и повезује их са својим ранијим знањем. Током овог процеса постојеће знање се обогаћује новим и прилагођава новом искуству. За разлику од традиционалног приступа учењу, где се знање повезује са стварношћу и представља својеврсну копију онога што одговара стварности, овде се знање прилагођава стварности, односно потребама свакодневног живота. Конструктивистички модел подразумева да је знање квалитетно ако је примењиво, односно ако нам користи у остваривању неких циљева. Стога појединци неће конструисати било какво знање, већ оно које им је исплативо (von Glasersfeld, 1995).

Традиционално учење често доводи до третирања знања као скупа правила или неповезаних чињеница од стране ученика. Са друге стране, конструктивистички приступ третира знање као креацију људског ума са сопственим садржајима и концептима (Kuhn, 1970). Знање се, током процеса учења, развија и унапређује, услед чега постаје сложеније. Оно, у великој мери, зависи и од околине, а не само од појединца. Околина ученика, а на првом месту наставник, има изузетно велики утицај на креирање знања и његово прилагођавање потребама свакодневног живота (Dogru & Kalender, 2007; Такаћи, Stankov, Milanović, 2015).

Sjoberg (2010, p.486) сматра да је “Знање активно конструисано од стране ученика, а не пасивно добијено споља,” те да је „учење нешто што ученик ради, а не нешто што је ученику наметнуто.” Према Taber (2011, p.47) то је итеративни процес у коме појединац учи на следећи начин: “...поредити нова искуства са предвиђањима, тако да развије разумевање (модификујући моделе на основу повратних информација).” У конструктивистичкој учионици ученици “...организују информације, истражују окружење за учење, спроводе активности везане за учење и прате своје сопствено учење.” Iran-Nejad (1995, p. 17) и Sjoberg (2010, p. 486) истичу да: “Иако је знање у једном смислу лично и индивидуално, ученици конструишу своје знање кроз њихову интеракцију са физичким светом, заједнички у друштвеном, културном и језичком окружењу.”

Иако се, на први поглед, може учинити да је улога наставника у конструктивистичком учењу мање важна него код традиционалног приступа, ово није тачно. Напротив, улога наставника у конструктивистичком учењу је од изузетне важности. Као што је већ поменуто, наставник има изузетно велики утицај на креирање знања ученика. Због тога је веома важно да наставник пажљиво води ученике кроз процес конструкције знања. На почетку, он уводи ученике у нову област, а затим му, током даљег откривања нових појмова и њихових особина, помаже да их разумеју на што једноставнији начин, као и да савладају евентуалне потешкоће на које наилазе током учења. Имајући у виду чињеницу да се знање не може копирати из ума наставника у ум

ученика, као и то да ученици покушавају да схвате предавање тако што се труде да повежу оно што чују са својим искуствима, неопходно је да наставник који жели да омогући ученицима квалитетно конструктивистичко учење најпре измени своју улогу, тј. да изврши прелаз са онога ко предаје на онога ко покушава да суочи ученике са учењем (Bodner, 1986; Lorschach & Tobin, 1992).

Са конструктивистичке тачке гледишта, обавеза наставника је да структурирају такво окружење за учење које помаже студентима да стекну нова искуства и знања (Tobin & Tippins, 1993). Квалитетно предавање треба да активира релевантне идеје које су ученицима већ доступне, а које ће, уз нове чињенице, омогућити конструисање квалитетног знања. Taber (2011) сматра да наставник своје знање најбоље преноси кроз дијалог са учеником. Због тога је важно да, током учења, наставник води стални дијалог са ученицима. Такође је важан и квалитет тог дијалога, јер ће, у случају да нису добро вођени од стране наставника, ученици изградити своје ново знање на основу нетачних сазнања или небитних чињеница. Према Brooks & Brooks (1993) наставници морају да охрабре студенте да истраже своје окружење за учење и да дискутују међусобно, као и са наставником.

Како би вођење ученика кроз процес конструисања знања било што квалитетније, неопходно је да наставник континуирано прати размишљање ученика, усвајање нових идеја од стране ученика, као и њихово повезивање са ранијим знањима, а у циљу благовременог откривања евентуалних пропуста и грешака код конструисања знања. Ово такође изискује потребу за сталним квалитетним дијалогом између ученика и наставника. Задатак наставника у овим дијалозима је, између осталог, да сагледа начин на који ученик усваја нова знања, како би, у оној мери у којој је то могуће, прилагодио своје предавање сваком ученику појединачно. Нарочито је важно имати у виду чињеницу да логички след представљања градива у уму стручњака није увек најбољи след за почетнике (Bodner, 1986). Велики број ученика, нарочито у млађем узрасту, на основу властитих искустава, конструисање знања која се разликују од онога што наставник предаје. Неретко су знања која су ученици раније конструисали на основу погрешних или непотпуних информација толико укорењена у њиховим умовима да их је веома тешко изменити и отклонити недостатке. Овде такође долази до изражаја способност наставника да проникне у начин размишљања и конструисања знања од стране ученика (Sjoberg, 2010).

Како би ученици конструисали квалитетно и трајно знање неопходно је да за тим осете потребу. Они ће потребу за новим знањем најбоље осетити уколико им је оно неопходно за решавање проблема који их је заинтересовао. Још једна од кључних улога наставника јесте да постави проблем који ће ученике заинтересовати, такав проблем који ће они имати потребу да решавају (von Glasersfeld, 1995). Како би створио проблемску ситуацију која ће заинтересовати ученике, наставник мора, пре свега, познавати њихова интересовања, за шта је опет неопходан квалитетан дијалог са ученицима. Самим постављањем проблема посао наставника није завршен. Неопходно је и правилно вођење ученика кроз процес решавања проблема, као и помоћ у одређеним ситуацијама. Ово је

нарочито важно у почетним фазама конструктивистичког учења, где се ученици први пут срећу са проблемским ситуацијама, како би се они оспособили да самостално, корак по корак, решавају проблеме, као и да препознају која су им знања потребна за решавање тих проблема. Када осете потребу за одређеним знањем, они ће сами тражити пут до тог знања и конструисати га на квалитетан начин (Bodner, 1986).

У новијим истраживањима истиче се значај примене савремених технологија у унапређењу конструктивистичког приступа учењу. Taber (2017) сматра да примена савремене технологије омогућава наставнику да организује квалитетнију наставу у конструктивистичком окружењу, али да се технологија може користити само као наставно средство, односно да њена употреба не може постати циљ. Под овим се подразумева да се технологија у настави треба користити само онда када је потребна, односно када доприноси побољшању квалитета наставног процеса, те да је, у неким случајевима, када наставник процени да њена употреба не би унапредила квалитет наставе, није неопходно користити. Jonassen (1999) истиче да је примена савремене технологије у настави важна због тога што омогућава бољу визуелизацију и квалитетније представљање проблема, као и због тога што омогућава ученицима да квалитетније конструишу менталну слику посматраног појма и да визуелизују своје активности.

Предмет истраживања била је и примена конструктивистичког приступа у математици. Skemp (1976) дефинише два типа разумевања – односно и инструментално. Под односним разумевањем подразумева разумевање веза међу појмовима и процедурама. Сматра да је односно разумевање задовољавајуће уколико појединац за шта треба да ради и због чега то треба да ради. Са друге стране, под инструменталним разумевањем подразумева познавање правила без разумевања разлога за њихову примену. Он наглашава да већина класичних приступа у настави математике подстиче инструментално разумевање, као и да би било неопходно побољшати односно разумевање. Истиче да томе може допринети примена конструктивистичке методе.

Анализа утицаја примене конструктивистичког приступа на побољшање квалитета наставе математике присутна је и у истраживањима новијег датума (Major & Mangore, 2012; Maloney, 2008; Thompson, 2013). Bhowmik (2014) говори о корисности примене конструктивистичког приступа, али наглашава да он представља велики изазов за наставника.

Ради обogaћивања знања новим идејама важна је размена искустава, не само са наставником, него и са другим ученицима. Good & Brophy (1994) мисле да је социјална интеракција ученика најбоља када уче у мањим групама, где су у могућности да упореде своје идеје и да дискутују о њима. Будући да је, за успешно учење засновано на конструктивизму, неопходно обезбедити што бољу сарадњу, како ученика са наставником, тако и ученика међусобно, наставници који организују овакав вид рада често примењују разне интерактивне методе. У циљу обезбеђивања што је могуће бољих услова својим ученицима за ефикасно конструктивистичко учење, неретко организују такозвани колаборативни рад (Такаћи, Stankov, Milanović, 2015).

2.2. Колаборативни рад у оквиру наставног процеса

Прегледом литературе може се наћи много дефиниција колаборативног рада. Колаборативни рад у оквиру наставног процеса је уопштени термин за различите приступе у образовању који укључују заједничке напоре ученика, или заједничке напоре наставника и ученика. То је наставна метода која подразумева да ученици раде заједно, у малим групама, на остварењу заједничког циља, односно на решавању проблема који је пред њих постављен (Gokhale, 1995).

Колаборативни рад се значајно разликује од класичног предавања. Током колаборативног рада је најизраженија активност ученика. Овакав вид учења је усмерен управо на активности ученика, а не на предавање наставника, односно на наставну јединицу. Поменуте активности ученика нису увек исте, већ се прилагођавају потребама конкретног колаборативног рада. Предавање, слушање и записивање белешки су, у одређеној мери, присутни и у колаборативном раду, међутим, значај ових процеса је мањи него код класичног предавања. Ови процеси прате друге, кључне процесе, који су засновани на дискусији ученика и активном раду (Goodsell et al., 1992).

Колаборативни рад представља један вид проблемски орјентисане наставе, током које се ученици уводе у сложене проблеме, које затим заједнички анализирају и траже решења. Golub (1988) представља колаборативни рад као форму индиректног предавања где наставник поставља проблем и организује ученике који ће тај проблем заједнички решавати. Код оваквог решавања проблема, међусобни разговор ученика не само да је дозвољен, него је и неопходан, како би се успешније реализовале заједничке активности. Управо у овим разговорима долази до учења и стварања нових знања. Оваквим приступом код ученика се развија способност решавања проблема, али и разумевања сложених веза и односа, као и способност доношења одлука у сложеним ситуацијама.

За разлику од класичног приступа, где се полази од теорије, а затим се учи примена, код колаборативног рада се пред ученике поставља проблем, а они, да би га решили, морају користити постојећа, али и тражити нова знања. Уместо да буду посматрачи решавања проблема, ученици активно учествују у решавању. Управо активно учешће у решавању проблема подстиче ученике да траже нове информације и конструишу нова знања. Тражећи изворе информација неопходних за решавање одређеног проблема, ученици временом стичу способност да разликују битне информације од небитних. Ученици новостечено знање морају интегрисати са постојећим, али је неопходно и да реорганизују постојеће знање у складу са новим. Поред нових знања, важно је и да конструишу значење појмова (Goodsell et al., 1992).

Што се тиче проблема са којима се ученици, током колаборативног рада могу суочити, они се такође међусобно разликују. Smith & MacGregor (1992) наводе три групе проблема који се примењују у настави. Прву групу чини такозвани вођени дизајн. То је један од најпажљивије припреманих проблемски орјентисаних приступа у настави, чији је

основни циљ увежбавање доношења одлука. У другу групу спадају студије случаја, где се анализира проблем из свакодневног живота посматрањем неке познате ситуације. За студенте најсложеније проблеме представљају симулације, где се од њих захтева да опонашају неки стварни догађај.

Један од најстаријих облика колаборативног рада у Америци је такозвана вршњачка настава, која подразумева да студенти предају једни другима лекције коју су самостално припремили. Један од најчешће примењиваних облика колаборативног рада су математичке радионице, које су доживеле експанзију осамдесетих година, након што су се показале као веома успешне током истраживања спроведеног на универзитету Беркли. Семинари и групе за дискусију се такође наводе као примери колаборативног рада, јер су погодни за дискусију и размену идеја. Ови облици учења су често намењени старијим слушаоцима, који већ имају доста искуства, а неки од семинара и нису добар пример колаборативног рада, јер су орјентисани ка предавачу (Smith & MacGregor, 1992).

Према Johnson (2009), појединац у свом раду може предузимати три врсте радњи у односу на радње других:

- Може да ради заједно са њима на остварењу заједничког циља.
- Може радити против других, са циљем да успори и отежа њихово деловање.
- Може радити на остварењу својих циљева, индиферентан према другима.

У данашње време се све више инсистира на тимском раду и удруживању снага ради остваривања заједничких циљева, а оспособљеност за рад у тиму се често поставља као услов за пријем у радни однос, као и за напредовање у служби. Због тога се, још током образовања, тежи ка оспособљавању ученика и студената за тимски рад. Један од начина на који се то може постићи је примена колаборативног рада, код кога сваки од учесника предузима прву од наведених радњи, односно ради са другим члановима групе на решавању постављеног проблема, а у циљу стицања одређених знања (Laal & Ghodsi, 2012).

Током колаборативног рада, ученици раде тимски. Пред њих се поставља проблем, а они, како би га решили, морају да разговарају о њему, да га анализирају, дају предлоге, идентификују знања која су им потребна за решавање проблема, сагледају која знања већ поседују као тим (не мора нужно сваки од чланова тима поседовати исто знање), а до којих информација тек треба да дођу како би конструисали нова знања, као и да сагледају на који начин да поделе улоге у тиму. Комплетан процес решавања проблема је веома сложен, а како би био успешан, неопходно је да тим добро функционише и да сарадња међу члановима групе буде што успешнија. Поред тога, приликом учења у групи, сваки члан групе сноси одговорност, не само своје, него и за учење осталих чланова групе (Gokhale, 1995).

Како би се успешно реализовале наведене активности, неопходно је да међу ученицима постоји стални дијалог, током кога они размењују мишљења. Активна размена идеја током колаборативног рада доприноси расту интересовања код ученика, али и развоју критичког мишљења. Ученици стичу навику да изнесу своје мишљење, али и да

саслушају мишљења и ставове осталих чланова групе, те да пажљиво прате њихов рад, као и да се критички осврну на свој и рад осталих чланова групе. Кроз заједнички рад, ученици се срећу са идејама које се разликују од њихових и какве они раније нису имали, што подстиче развој креативности. Ученици се, применом колаборативног рада, у великој мери оспособљавају за тимски рад и доношење заједничких одлука (Goodsell et al., 1992; Gokhale, 1995).

Поред оспособљавања за тимски рад, значајан је допринос колаборативног рада оспособљавању ученика за решавање проблема и сналажење у проблемским ситуацијама. Такође, евидентан је и позитиван утицај на квалитет наставе, као и активно укључивање ученика у наставни процес. За разлику од класичне наставе, где се, углавном, ученици оспособљавају за решавање проблема применом шаблонских процедура са којима су упознати, применом колаборативног рада ученици се оспособљавају да сами праве шаблоне какви су им потребни за конкретан случај, а које ће, уз одређене измене и прилагођавања, моћи и убудуће да примењују у решавању сличних проблема (Laal et al., 2013).

Према Johnson & Johnson (1986), учењем у групи ученици достижу виши ниво знања, а информације до којих су дошли остају у сећању дуже него приликом индивидуалног учења.

Поред наведених предности, примена колаборативног рада значајно доприноси развоју критичког мишљења, сарадње, одговорности према сарадницима и према заједничком раду. Будући да се, радећи у групи, ученици лакше сналазе у новим и непознатим ситуацијама, овај облик рада значајно доприноси отклањању треме и стида, те смањењу анксиозности. Као споредни, али не мање важни ефекти колаборативног рада, наводе се оспособљавање ученика за социјализацију, те развој пријатељстава и развијање спремности за прихватање различитости међу људима (Laal & Ghodsi, 2012).

Иако је на првом месту активност ученика, веома је изражена и улога наставника у колаборативном раду. Ученике најпре треба оспособити за рад у групама, јер процес колаборативног рада, због своје сложености, може, уколико није организован како треба, бити веома конфузан и дезорјентисан (Romer & Whipple, 1990).

Неопходно је да наставник, барем у почетку, води ученике кроз процес колаборативног рада, све док се они не оспособе за овакав начин рада и не схвате шта треба да постигну њиме. У почетним фазама, пре него што се ученици оспособе за колаборативни рад, препоручује се примена такозваног кооперативног рада, које се такође заснива на заједничком раду ученика у малим групама, с тим да је, код кооперативног рада, улога наставника више изражена, односно, наставник контролише већину дешавања током рада у групи него што је то случај код колаборативног рада (Такачи, Stankov, Milanović, 2015).

Kagan (1994) истиче четири кључна критеријума неопходна за успешну реализацију кооперативног, али и колаборативног рада:

- Стварање позитивне међузависности, при чему се појединци повезују и расподељују улоге ради успешне сарадње.
- Развијање индивидуалне одговорности сваког члана групе за заједнички рад и остварење циља.
- Обезбеђивање уједначеног учешћа и равномерне расподеле обавеза у оквиру групе.
- Обезбеђивање симултане интеракције, односно стварање услова у којима ће сви учесници моћи да делују истовремено.

На испуњењу ових критеријума, код кооперативног учења, односно у почетним фазама примене колаборативног учења, мора највише радити наставник, а касније, када стекну довољно искуства, ученици треба да имају већу аутономију у организацији заједничког рада.

Код колаборативног рада, наставник више није давалац информација, већ он добија улогу приручника, односно водича за ученике, који ће их усмерити и научити како да сами пронађу информације које су им потребне (Golub, 1988).

Наставници који примењују колаборативни рад су углавном мотивисани потребом за већом ангажованошћу и активнијем учешћу ученика у наставном процесу. Они не виде себе у улози некога ко преноси знање ученицима, већ у улози некога ко ствара ученицима интелектуална искуства, помоћу којих ће они сами конструисати знање (Smith & MacGregor, 1992).

Колаборативни рад је такође велики изазов за наставника, јер, поред бројних предности, има и одређене недостатке. Ови недостаци се углавном огледају у организационим потешкоћама. Организовање рада група, координисање и надзирање истог захтева много труда, нарочито када се ради са великим бројем ученика. Важно је одржати рад групе, како не би дошло до одступања од садржаја, али је често потребно попунити празнине у времену, до којих долази када једна група брже заврши. Такође је захтеван посао прилагођавање плана рада колаборативном раду, у смислу обезбеђивања адекватног простора, припремања часова и сл, али и прилагођавање колаборативног рада наставном плану и програму. Упорност наставника је такође од велике важности, јер се, код примене колаборативног рада, жељени резултати не постижу брзо. Наставник мора бити стрпљив, јер је ученицима потребно одређено време да би се навикли на овакву наставну методу, али и спреман да унапређује колаборативни рад отклањајући уочене недостатке (Goodsell et al., 1992).

Један од најважнијих задатака наставника приликом организовања колаборативног рада је формирање група. Групе је могуће формирати на три начина – препустити ученицима да се сами распореде, формирати групе случајним избором чланова или распоредити ученике у групе на основу неког критеријума (Gokhale, 1995). Kagan (1994) сматра да су најефикасније четворочлане хетерогене групе. Хетерогеност групе се може постићи тако што би се, приликом формирања група, користио критеријум који би на што је боље могући начин осликавао предзнање и способности ученика (пре-тест, ранији

подаци о раду ученика и сл.). Приликом формирања група неопходно је водити рачуна и о међусобним односима студената, како би се избегле касније потешкоће у сарадњи.

Наставник мора имати у виду чињеницу да су ученици различити, тако да не може имати потпуно исти приступ свим ученицима. Различитост међу ученицима може значајно допринети успешности колаборативног рада, али је неопходно да наставник ову различитост искористи на одговарајући начин. Како би сагледао начин размишљања појединих студената, наставник мора стално посматрати рад група и ангажовање појединаца у свакој од група (Goodsell et al., 1992). Ово посматрање је неопходно и због оцењивања ученика, што је такође захтеван посао. Код колаборативног рада се оцењује рад читаве групе, али и рад сваког члана групе понаособ, односно његово ангажовање и допринос остварењу заједничког циља групе. Корисно је да наставник захтева и самооцењивање ученика, које се, код колаборативног рада, показало као веома реално и успешно (Laal et al., 2013).

Код примене колаборативног рада постоје различити приступи, од учионичког, који подразумева да се класично предавање обогаћује дискусијама, до истраживачког рада тимова, који није везан за један час нити за једно место, него за један одређени период. Међу образовним установама које интензивно примењују колаборативни рад, велики је број оних које су развиле такозване „заједнице за учење“. Ове заједнице се разликују од установе до установе, али циљ њиховог формирања је, у највећој мери, свуда исти. Поред обезбеђивања услова за квалитетно одвијање процеса колаборативног рада, формирање оваквих заједница има за циљ и што боље међусобно упознавање сарадника, те навикавање на заједнички рад, али и спречавање изолације појединаца, која је често представљала озбиљан проблем, нарочито на високошколским установама са великим бројем студената (Smith & MacGregor, 1992).

Примена савремене технологије у многome је допринела развоју колаборативног рада и његовој успешнијој примени у настави. Коришћење рачунара омогућило је формирање приступа познатијег као колаборативни рад помоћу рачунара или колаборативни рад у рачунарском окружењу. Под овим приступом подразумевају се различите комбинације колаборативног рада и учења помоћу рачунара. У неким случајевима, рачунар се користи као помоћно наставно средство у раду једне колаборативне групе. Са друге стране, рачунари, као и паметни телефони, све чешће се користе као средства комуникације међу члановима унутар колаборативне групе. Примена савремене технологије омогућила је колаборативни рад на даљину, тј. сарадњу чланова колаборативне групе који се налазе на различитим местима, понекад чак и на различитим крајевима света. Примена савремене технологије у реализацији колаборативног рада постала је тема истраживања у протекле две деценије (Kaye, 2012; Lipponen, 2002; Weinberger & Fischer, 2006).

2.3. Репрезентације у математици

Репрезентација се може дефинисати као „процес моделирања конкретних објеката стварног света у апстрактне садржаје.“ (Hwang & Hu, 2013) Сврха репрезентације је да помогне прелаз са конкретног на апстрактно мишљење, што има за циљ разумевање појмова, њихових особина и међусобних односа у свету око нас. Репрезентацију карактерише коришћење апстрактног односа, тј. одговарајућих веза између два појма које посматрач упоређује. Посматрач поставља два појма један насупрот другом, па открива и упоређује сличности и разлике међу њима. На тај начин се репрезентује један од посматраних појмова (Font, Godino & D' Amore, 2007).

Репрезентације су од изузетне важности у математици због њене апстрактне природе и користе се да би се изразиле математичке идеје, да би се омогућила комуникација, расуђивање, итд. У ствари, приступ математичким идејама води кроз репрезентације тих идеја (Goldin, & Shteingold 2001; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; Nakahara, 2008). McClaran (2013) описује математичку репрезентацију као менталну или физичку конструкцију која описује аспекте инхерентне структуре појма и међусобних веза појмова и других идеја.

У процесу учења репрезентације се користе да би помогле ученицима у разумевању и повезивању садржаја у математици. Примена репрезентација омогућава ученицима боље разумевање математичких појмова, њихових особина, као и њихових међусобних веза. Због тога је, поред репрезентације математичких појмова, једнако важна и репрезентација њихових особина, као и разних проблема, процедура, итд. (Hwang & Hu, 2013; Goldin & Janvier, 1998).

Према Font et al. (2007), разликују се три врсте математичких објеката који се репрезентују:

- Основни објекти – објекти који чине математички свет, као што су тачка, број,...
- Објекти који повезују основне објекте, који дају смисао математичком свету сачињеном од основних објеката, као што су, на пример, релације.
- Објекти који описују објекте претходно наведених група у сложенијим ситуацијама, као што су математички проблеми.

Сама чињеница да се објекти који се репрезентују међусобно разликују, како по особинама тако и по улози коју имају у одређеним математичким садржајима, наводи на закључак да је често потребно применити различите врсте репрезентација ради њиховог што квалитетнијег представљања.

Велики број аутора истиче да постоје два основна система репрезентација. То су спољашње (екстерне) репрезентације, које се налазе у окружењу ученика и које он опажа, и унутрашње (интерне) репрезентације, које се често називају менталним или психолошким репрезентацијама, а које сваки ученик формира у свом уму (Hwang et al.,

1998; Goldin & Shteingold, 2001; Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001; Nakahara, 2008). Будући да унутрашња репрезентација представља лично виђење неког објекта од стране појединца, за очекивати је да ће сваки ученик имати различиту унутрашњу репрезентацију, односно различито виђење истог појма.

Постоје неслагања око тога да ли се прво формира унутрашња, па онда спољашња репрезентација или обрнуто, али доминира став да унутрашња репрезентација може постојати без спољашње, али да спољашња без унутрашње не може. Спољашња репрезентација представља инструмент којим појединац своју унутрашњу репрезентацију неког објекта приказује другим људима. Са друге стране, унутрашња репрезентација се формира на основу сазнања стечених перцепцијом одређене спољашње репрезентације (Font et al, 2007).

Спољашња репрезентација обухвата од најједноставнијих симбола до сложених окружења за учење, као што су различити манипулативни материјали и рачунарски микросветови. Унутрашња репрезентација обухвата личну симболизацију и доделу значења математичким појмовима од стране ученика, као и њихову визуелну представу и стратегије решавања проблема. Интеракција између унутрашње и спољашње репрезентације је од изузетне важности за ефикасно предавање и учење. У процесу учења, ученик, на основу спољашње репрезентације, формиране од стране наставника, изграђује сопствену унутрашњу репрезентацију. Због тога је неопходно да ученици, на основу спољашње репрезентације, формирају што квалитетнију унутрашњу репрезентацију. Није могуће видети нечију унутрашњу репрезентацију. Због тога наставници морају да изводе закључке о унутрашњој репрезентацији ученика, а на основу дискусије са њима, њиховог изражавања, односно њихове спољашње репрезентације. Овакви закључци имају за циљ процену квалитета унутрашње репрезентације коју је формирао ученик, односно рад на побољшању унутрашње репрезентације ученика, уколико је то потребно. Због тога искуснији наставници обраћају пажњу на детаље помоћу којих могу сагледати унутрашњу репрезентацију ученика, најчешће тако што траже да на више начина формира спољашњу репрезентацију анализираниог појма, односно особине, процедуре и сл. (Goldin & Shteingold, 2001).

Није редак случај да различити ученици на потпуно другачији начин разумеју исти појам, што може бити последица различитих унутрашњих репрезентација. Управо зато корисност спољашњих репрезентација зависи од тога колико их студенти разумеју, односно колико им те спољашње репрезентације омогућавају формирање квалитетне унутрашње репрезентације. Goldin & Shteingold (2001) се, у одређеној мери, слажу са заступницима тврдње да већина ученика није ограничена када је математика у питању (Bruner, 1964) и сматрају да ова привидна ограничења настају услед погрешно формираних унутрашњих репрезентација. Због тога би један од циљева математичког образовања требало да буде и развој ефикасних унутрашњих система репрезентација ученика, који су сагласни са општеприхваћеним спољашњим системима репрезентација.

Како би се побољшао квалитет унутрашњих репрезентација ученика, неопходно је разумети начине њиховог формирања, као и евентуалне разлике које постоје међу одређеним унутрашњим репрезентацијама. Према Goldin (1987, 1998а) постоји више врста унутрашњих когнитивних репрезентација:

- Вербална (синтатичка) – представља језичке капацитете појединца, односно оспособљеност појединца да употребом познатих речи и фраза опише себи неки појам.
- Имагистичка (репрезентација менталних слика) – представља начин на који појединац замишља неки појам, везу међу појмовима и сл.
- Формално нотациона – представља унутрашњи поступак који појединац примењује приликом рачунања, визуелизације корака у решавању алгебарских једначина,...
- Стратешка (хеуристичка) – репрезентација којом се представљају процеси решавања проблема од стране појединца – како појединац приступа решавању проблема, како поставља циљеве, које методе користи, каква му је стратегија,... (Чест проблем код ове репрезентације је недовољно разумевање исте од стране ученика, што за последицу има немогућност формирања одговарајуће спољашње репрезентације, односно немогућност ученика да објасне шта су радили приликом решавања одређеног проблема.)
- Афективни систем репрезентација – укључује промене емоција, уверења и вредности везаних за математику од стране ученика или уверења ученика о себи у односу на математику.

О преласку са спољашње на унутрашњу, односно формирању унутрашње репрезентације, говоре и Goldin & Janvier (1998), истичући да постоје четири врсте репрезентација:

- Спољашња – структурирана ситуација у физичком окружењу, која се може математички описати.
- Језичко отеловљење проблема – обухвата дискусију о проблему, односно опис истог.
- Формална математичка конструкција – приказ проблема и/или његових сегмената математичким симболима.
- Унутрашња – индивидуална когнитивна конфигурација, лично виђење појма од стране појединца.

Уочавамо да се, међу наведеним врстама репрезентација, спомињу језичко отеловљење проблема и формална математичка конструкција, које нису сврстане ни међу спољашње ни међу унутрашње репрезентације. Аутори ове репрезентације сматрају прелазом између спољашњих и унутрашњих, односно помоћним репрезентацијама, које олакшавају разумевање спољашњих и формирање квалитетнијих унутрашњих

репрезентација. Ипак, данас је став многих аутора су поменуте две репрезентације врсте спољашњих репрезентација (Hwang & Hu, 2013; Nakahara, 2008; Ozgun-Koca, 1998).

Начином формирања унутрашњих репрезентација интензивно су се бавили Goldin & Karut (1996), који наводе три фазе у формирању унутрашње репрезентације појединца:

- Усвајање нових ознака и симбола, додељивање значења усвојеним симболима, те њихово повезивање са раније формираним системима репрезентација који чине базу за нове репрезентације.
- Формирање нове репрезентације на основу раније формираних система, који се у овој фази користе као шаблон.
- Осамостаљивање новоформиране репрезентације.

Раније поменути проблем погрешног разумевања значења неког појма од стране ученика, односно студената, обично настаје у првој фази, приликом додељивања значења неком симболу. У великом броју случајева овако додељено значење остаје трајно или се веома тешко мења. Управо је прва фаза у директној вези са спољашњим репрезентацијама, јер се нови симболи усвајају на основу опажања тих симбола у некој спољашњој репрезентацији. Такође, ни додељивање значења овим симболима се не врши само на основу ранијих сазнања, него је и ту велики утицај спољашње репрезентације.

На основу наведеног произилази да је за формирање квалитетне унутрашње репрезентације неопходна квалитетна спољашња репрезентација. На квалитет спољашње репрезентације утиче много фактора, а један од њих је свакако и природа објеката који учествују у репрезентацији. Font et al. (2007) истичу да је код репрезентација у математици од изузетне важности проблем репрезентације генеришућег елемента. Под генеришућим елементом се подразумева скуп система елемената у једној јединици, помоћу које се дефинише неки други елемент (појам, особина,...). Сваки појединачни елемент је део ланца чији су претходни чланови генеришући елементи, а и он сам је генеришући елемент за своје следбенике у ланцу. У оваквом ланцу неопходно је да сваки елемент буде представљен на што бољи начин. Имајући у виду чињеницу да се ови елементи често међусобно разликују по својој природи, закључујемо да је немогуће квалитетно представити особине свих математичких објеката – делова једне целине помоћу исте спољашње репрезентације, већ да је неопходно да имамо више врста спољашњих репрезентација.

2.4. Вишеструке репрезентације

Не само да је већи број врста спољашњих репрезентација важан због прилагођавања различитим математичким објектима, него је понекад неопходно особине истог објекта сагледати из више углова, односно представити исти објекат помоћу различитих репрезентација. Спољашње репрезентације, које пружају исту информацију у више од једног облика, називају се вишеструке репрезентације. Под вишеструким

репрезентацијама се подразумевају различити начини симболизације и описивања истог појма, те упућивања на тај појам. Оне омогућавају погодно окружење за апстраховање и разумевање главних појмова у математици од стране ученика, те због тога има много истраживача у области математичког образовања који се баве вишеструким репрезентацијама (Borba & Confrey, 1996; Hwang & Hu, 2013; Ozgun-Koca, 1998; Kostić, Stankov-Jovanović, Sekulić & Takači, 2016).

Ниједна репрезентација се не може у довољној мери разумети ако је изолована. Репрезентација има смисла само ако се посматра у ширем систему, односно када се посматра заједно са другим репрезентацијама и када се анализира њихова међусобна повезаност. Квалитет међусобних веза репрезентација у систему је од велике важности за разумевање репрезентација од стране појединца. Везе међу репрезентацијама су неретко условљене двосмерном природом репрезентација. Тако се, на пример, алгебарска једначина може представити графички, а график једначином (Goldin & Shteingold, 2001).

Кроз историју математике доста пажње је посвећено креирању и усавршавању репрезентација, а значајан део наставе се посвећује и оспособљавању ученика за рад са репрезентацијама. Оспособљавање ученика за рад са репрезентацијама обухвата и њихово оспособљавање за избор одговарајуће репрезентација. Често се, на пример, разликују репрезентације којима се приказују појмови од оних којима се приказују везе међу појмовима. Репрезентације се разликују по својим особинама. Тако их Goldin & Shteingold (2001) класификују у две велике групе – статичке и динамичке репрезентације. Под статичким репрезентацијама се подразумевају класичне репрезентације, као што су формула, слика и сл, док су динамичке репрезентације савремене, настале са развојем рачунара и софтвера и оне се још увек истражују и постепено уводе у употребу.

Font et al. (2007) се у својим истраживањим баве и проблемом вишеструких репрезентација истог математичког објекта. Они разликују три основне врсте спољашњих математичких репрезентација – графичку, симболичку и табеларну. Наводе и постојање четврте, геометријске репрезентације, за коју сматрају да се у неким случајевима, али не увек, може сврстати међу графичке репрезентације. Такође истичу да је дискусија о репрезентацијама од изузетне важности за њихово међусобно повезивање. Ова дискусија се текође може сматрати засебном врстом репрезентација, такозваном вербалном репрезентацијом.

Према Nakahara (2008) постоји пет врста спољашњих математичких репрезентација:

- Симболичка – репрезентација заснована на симболима у којој доминирају математичке формуле
- Лингвистичка (вербална) – репрезентација која се заснива на вербалном опису неког појма, његових особина и сл.
- Илустративна – репрезентација у којој доминирају слике и графици, обухвата раније поменуто графичку и геометријску репрезентацију

- Манипулативна – спада у новије, динамичке репрезентације, формира се помоћу одговарајућег динамичког софтвера
- Реалистичка – репрезентација заснована на конкретним објектима, као што су тродимензионални модели геометријских тела и сл.

У својим истраживањима, Bruner (1966) наводи да постоје три врсте репрезентација:

- Енактивна – репрезентација која се састоји од низа конкретних радњи праћених употребом манипулативних наставних средстава које омогућују ученицима да формирају свест о неком појму и његовим особинама.
- Иконичка – репрезентација која подразумева визуелни приказ математичких објеката и њихових особина или међусобних веза
- Симболичка – репрезентација која се састоји од низа логички повезаних симбола, речи бројева,...

Bruner сматра да наведени редослед треба поштовати и приликом увођења репрезентација, односно да је, приликом упознавања ученика са новим појмом најбоље применити енактивну репрезентацију, како би се формирала свест ученика о најважнијим особинама тог појма. У наредној фази, тј. када већ ученик у довољној мери познаје особине појма, може се прећи на визуелни приказ, односно проширити знање о појму помоћу иконичке репрезентације. Симболичка репрезентација би требала бити примењена тек када ученик довољно добро познаје карактеристике посматраног појма. Bruner такође наводи да је неопходно три поменуте репрезентације посматрати и користити као умрежену целину, те комбиновати исте како би се сви појмови могли представити на што квалитетнији начин.

У новијим истраживањима везаним за репрезентације значајну улогу има такозвано „правило тројке“, које подразумева три врсте репрезентација – графичку, нумеричку и симболичку (аналитичку). Све три наведене репрезентације сматрају се равноправним. Убрзо је уочена неопходност употребе речи у представљању неког математичког појма. Речи су често неопходне за опис особина појма, али и за опис математичког проблема и поступка његовог решавања. Ово је довело до увођења вербалне репрезентације, која, заједно са претходне три чини систем репрезентација познатији као „правило четворке“ (Tall, 2003).

Tall истиче недостатак енактивне репрезентације из Bruner-овог модела у „правилу четворке“ као веома битан. Такође сматра да је неопходно више значаја посветити вербалној репрезентацији, као и да би требало више пажње посветити формирању репрезентације којом би се представили појмови, особине и односи међу објектима у области аксиоматске геометрије. На основу својих истраживања, он формира три групе репрезентација:

- Отеловљене репрезентације

- Символично – процептуалне репрезентације
- Формално – аксиоматске репрезентације

Отеловљене репрезентације се заснивају на људској перцепцији и активностима у свакодневном животу. Оне садрже енактивне и визуелне аспекте, али се не ограничавају само на њих. Међу отеловљене репрезентације сврставају се енактивна репрезентација дефинисана у оквиру Bruner-овог модела, као и графичка репрезентација дефинисана у оквиру „правила четворке“.

Да бисмо говорили о особинама симболично – процептуалне репрезентације, најпре морамо дефинисати термин „процепт“. Према Tall (2003), процепт се састоји од процеса којим се ствара неки математички објекат, као и симбола којима се тај објекат и процес представљају. Код симболично – процептуалне репрезентације се комбинују улоге симбола који учествују у приказивању појма, али и процеса његовог настанка. Ова репрезентација обухвата нумерички и алгебарски аспект Bruner-овог модела, те нумеричку и симболичку репрезентацију дефинисану у оквиру „правила четворке“.

Формално – аксиоматска репрезентација се заснива на формалном приступу који полази од одабраних аксиома формирајући логичке дедукције у циљу доказивања теорема. Ова репрезентација обухвата преостале видове Bruner-ове симболичке репрезентације, као и вербалну репрезентацију дефинисану у оквиру „правила четворке“. Ова репрезентација се користи за представљање појмова и особина у оквиру аксиоматске геометрије.

У свом истраживању, Ozgun-Коса (1998) истиче усвајање и разумевање значења нових појмова и особина од стране ученика као најважнији циљ вишеструких репрезентација. Репрезентације посматра као саставни део математике, које се користе у циљу превазилажења потешкоћа и како би се постигло да градиво буде занимљивије ученицима. Сматра да је због тога од изузетне важности да репрезентације буду формиране у складу са потребама ученика, односно да буду прилагођене њиховом начину размишљања. Да би се то постигло, неопходно је, пре свега кроз дискусију, анализирати начин размишљања ученика. Такође је неопходно сагледати најважније карактеристике појединих врста репрезентација, како би се, за сваки од наставних садржаја, одабрала репрезентација која у том случају ученицима највише одговара.

Ozgun-Коса такође истиче важност оспособљавања ученика за самосталан избор репрезентације која је најпогоднија у конкретном случају. С тим у складу, она детаљније анализира факторе који утичу на избор репрезентације од стране ученика и дели их на спољашње и унутрашње.

Међу спољашње факторе спадају:

- Природа проблема који се решава
- Начин на који желимо да представимо проблем
- Курикулум и евентуална доминација одређене репрезентације у настави
- Технологија којом располажемо

У унутрашње факторе убрајају се:

- Личне склоности ученика
- Раније знање и искуство ученика
- Уверења ученика о математици и склоности ка математици као науци и наставном предмету
- Начин учења ученика

Истраживања су показала да сви наведени фактори имају велики утицај на избор репрезентације од стране ученика, али да већина ученика бира репрезентацију на основу свог ранијег искуства. Због тога је веома важно да предавачи омогуће ученицима рад са што више различитих репрезентација, како би они упознали различите могућности приказа истог појма, те се на тај начин оспособили да, у сваком конкретном случају, одаберу репрезентацију која ће у том случају бити најпогоднија (Ozgun-Коса, 1998).

У појединим истраживањима велики значај се придаје и оспособљавању ученика за разумевање веза између различитих репрезентација истог појма. Сматра се да разумевање оваквих веза доприноси бољем разумевању сваке од репрезентација појединачно, што за последицу има формирање квалитетније унутрашње репрезентације ученика (Goldin & Shteingold, 2001). Вршњачко учење у значајној мери доприноси бољем разумевању веза међу репрезентацијама. Наиме, сваки ученик формира сопствену унутрашњу репрезентацију, односно сопствено виђење неког појма или особине. Сарадња међу ученицима, праћена дискусијом, омогућава размену мишљења, што омогућава сваком од ученика – учесника у процесу учења да стекне сазнања о унутрашњим репрезентацијама других ученика, те да их упореди са својом унутрашњом репрезентацијом (Hwang & Hu, 2013). Да би се наведени циљ остварио, неходно је обезбедити услове у којима ученици могу да дискутују и размењују мишљења, што се у значајној мери може остварити применом колаборативног рада.

2.5. Вишеструке репрезентације у рачунарском окружењу

Вишедеценијски рад на унапређењу квалитета спољашњих репрезентација у математици добио је нову димензију увођењем савремене технологије као наставног средства. Коришћењу технологије за испитивање вишеструких репрезентација придат је велики значај у протеклој деценији (Rau, Michaelis & Fay, 2015; Sever, & Yerushalmy, 2007). Ozgun-Коса (2008) објашњава један важан разлог за то: “Повезаност између репрезентација у рачунарском окружењу била је моћан алат који је обезбедио студентима визуелно окружење да развијају и тестирају њихове математичке претпоставке.” Tall (2003) наглашава да рачунар омогућава кориснику да комуницира на физички начин, показујући, означавајући и превлачећи објекте на екрану како би што боље разумео особине објеката у стварном свету представљених помоћу посматраних објеката.

Коришћење савремене технологије код формирања вишеструких репрезентација у великој мери доприноси побољшању квалитета репрезентација. Употреба рачунара значајно је допринела развоју визуелизације кроз унапређење графичке репрезентације. Такође, бројни програми су омогућили квалитетнију алгебарску репрезентацију. Међутим, корисност примене рачунара у формирању спољашњих репрезентација је нарочито изражена код повезивања различитих репрезентација. Наиме, постоје софтверски пакети који омогућавају истовремени приказ две до три репрезентације истог објекта. Кроз развој технологије појављивали су се различити софтверски пакети који су омогућавали овакво формирање репрезентација.

У новије време нарочито су значајни софтверски пакети који омогућавају да промена у једној репрезентацији проузрокује истовремену промену у осталим репрезентацијама истог објекта, односно динамички софтверски пакети који омогућавају формирање вишеструких репрезентација (Hwang & Hu, 2013). О важности оваквих софтверских пакета говоре Egmeter и др. (2017), који истичу неопходност динамичког повезивања вишеструких репрезентација математичких садржаја, са циљем унапређивања способности ученика, односно студената, да повезују овакве садржаје.

Важно је напоменути да не спадају сви софтверски пакети који омогућавају формирање вишеструких репрезентација у ред динамичких софтверских пакета, нити сви динамички софтверски пакети омогућавају формирање вишеструких репрезентација. Тако, на пример, програм *Cabri 3D* представља динамички софтверски пакет, али омогућава формирање само једне – графичке репрезентације. Са друге стране, као пример се може навести програм *Advanced Grapher*, који омогућава истовремено формирање алгебарске и графичке репрезентације (постоји и могућност формирања табеларне репрезентације), али не дозвољава могућност трансформације већ формираног објекта, односно нема динамичке особине.

У новије време придаје се посебан значај софтверским пакетима који имају динамичке особине и омогућавају формирање вишеструких репрезентација. Развој оваквих софтверских пакета омогућио је и развој такозване виртуелне манипулативне репрезентације. Ова репрезентација представља интерактивну визуелну репрезентацију динамичког објекта, која омогућава ученицима да манипулишу објектима, односно да мењају једну особину објекта и да истовремено посматрају како промена те особине утиче на остале особине објекта. Наведена могућност доприноси бољем разумевању особина посматраних објеката од стране ученика, нарочито када су у питању тродимензионални објекти, попут геометријских тела, које је тешко представити сликом. Поједини софтверски пакети, попут *Cabri 3D* и *GeoGebra*, омогућавају веома квалитетну репрезентацију геометријских тела и њихових особина, чак и бољу у односу на тродимензионалне моделе геометријских тела, јер је број тела која се могу анализирати помоћу тродимензионалних модела ограничен. За успешну примену манипулативног софтвера и виртуелне манипулативне репрезентације неопходно је да су ученицима и наставницима доступни одговарајући дигитални наставни материјали. Често је недостатак

оваквих материјала препрека примени и даљем развоју репрезентација, па се доста пажње посвећује и њиховој изради (Hwang & Hu, 2013).

Велики је број динамичких софтверских пакета који се користе у настави за рад са вишеструким репрезентацијама, као што су, на пример, *GeoGebra*, *Wolfram Mathematica* и други. Због своје доступности, већ дужи низ година интензивно се примењује образовни софтвер *GeoGebra*. Најважније карактеристике овог софтвера су следеће: у исто време се појављују две репрезентације истог математичког објекта, алгебарска и графичка, на екрану у алгебарском и графичком прозору, респективно. Поред наведених, *GeoGebra* омогућава и рад са табеларном репрезентацијом. Промена код једне репрезентације узрокује истовремено ажурирање друге. Велики је број радова у којима истраживачи извештавају о унапређењу учења математике, а нарочито математичке анализе, коришћењем образовног софтвера *GeoGebra* (Arzarello, Ferrara, & Robutti, 2012; Doruk, Aktumen, & Aytakin, 2013; Такаћи et al., 2015).

Образовни софтвер *GeoGebra* има велике могућности када је у питању представљање и рад са математичким садржајима. Поред тога, *GeoGebra* има још неколико важних особина:

- Програм је близак кориснику, обука за његово коришћење је једноставна, а поседује и вишејезични мени.
- Подстиче ученике да самостално истражују, као и да уче путем експеримената и открића.
- Омогућава кориснику да подешавања радног окружења прилагођава сопственим потребама.
- Програм је креиран тако да помаже ученицима да боље овладају одређеним математичким садржајима користећи његове динамичке особине – ученици могу једноставно померати „слободне“ објекте на радној површини, посматрајући их из различитих углова, а могу и, користећи клизач, мењати вредности одређене променљиве и посматрати како промена ових вредности утиче на особине зависних објеката (објеката који зависе од наведене променљиве).
- Коришћење софтвера *GeoGebra* омогућава формирање радног окружења у коме би класично предавање било замењено проблемски оријентисаном наставом. Овај програм је погодан за рад у проблемским ситуацијама, јер подстиче ученика на размишљање, изналажење решења и доношење одлука, али истовремено и омогућава, у највећем броју случајева, проверу тачности решења и сагледавање евентуалних грешака, што доприноси формирању квалитетније унутрашње репрезентације.
- *GeoGebra* је одлично наставно средство за рад у малим групама, који се сматра изузетно корисним за успешно конструисање знања од стране ученика.

- Стимулише наставнике да истражују и унапређују наставу математике, да користе технологију у циљу визуелизације наставних садржаја, као и да организују интерактивну наставу и учење на даљину.

Ове особине образовног софтвера *GeoGebra* допринеле су његовој популарности, па се он данас све више користи, широм света, као наставно средство у настави математике, од основне школе до универзитетског нивоа, те као један од најважнијих алата у раду са вишеструким репрезентацијама математичких садржаја (Abu Bakar, Mohd Ayub, & Ahmad Tarmizi, 2010).

2.6. Вишеструке репрезентације функција

Функције спадају у математичке појмове који се могу представити на више начина, односно помоћу различитих репрезентација. Приликом представљања функција и њених особина, као и приликом представљања других математичких садржаја, важно је водити рачуна о томе да репрезентација буде максимално прилагођена ученицима, односно да им омогући да што боље разумеју појам функције и њене особине. Једна репрезентација најчешће није довољна да би се квалитетно представиле све особине неке функције. Због тога се за приказ особина функције обично користе вишеструке репрезентације. Обично се највише значаја придаје алгебарској, графичкој и табеларној репрезентацији, али у новије време на важности све више добија и вербална репрезентација, која употпуњује систем вишеструких репрезентација, тако што омогућава да се одређене особине опишу говорним језиком, а самим тим омогућава боље прилагођавање ученицима. Употреба рачунара донела је значајне новине у репрезентацији функција, а простора за унапређење репрезентација уз помоћ рачунара и даље има. Вишеструке репрезентације функција у рачунарском окружењу, истраживане су у многим радовима (Goldin & Kaput, 1996; Borba & Confrey, 1996; Doogman, Drijvers, Gravemeijer, Boon, & Reed, 2012).

Свака репрезентација функције омогућава студентима одговарајући поглед на функцију, али ниједна репрезентација не даје општи преглед. Због тога студенти морају да раде са различитим репрезентацијама функције у циљу разумевања њених особина, у оквиру могућности сваке од репрезентација (Doogman et al, 2012). За разумевање појма функције било би нарочито важно оспособити ученике да анализирају везе између различитих репрезентација, јер би на тај начин могли уочити карактеристике функција које, посматрајући сваку репрезентацију засебно, можда не би уочили (Borba & Confrey, 1996).

Веома значајан, али истовремено и компликован садржај у оквиру наставне теме функције су трансформације функција. Трансформације функција су значајне због тога што омогућавају боље разумевање особина функције, односно особина читавих класа функција, али и због оспособљавања студената за каснију примену савладаног градива везаног за функције. Истраживања у области трансформација функција су интензивирана

у последње две деценије и све је више истраживача који се њима баве (Borba & Confrey, 1996; Consciencia & Oliveira, 2011; Daher & Anabousi, 2015; Tall, 1992).

Трансформације се, када је функција дата алгебарском репрезентацијом, повезују са променљивим параметрима који егзистирају у аналитичком запису функције. Променом вредности ових параметара мења се и аналитички израз функције, као и неке од њених особина. Студенти имају највише потешкоћа када раде са трансформацијама у алгебарској репрезентацији, не користећи притом ниједну другу репрезентацију. Студенти, у овом случају, најчешће имају потешкоћа да разликују параметре од променљивих, а затим да схвате како да поступају са њима. Због тога је од изузетног значаја употреба вишеструких репрезентација функција, а нарочито графичке репрезентације, јер она омогућава визуелизацију промена особина функције проузрокованих променама вредности параметара. Сматра се да ће се студенти боље снаћи са трансформацијама функција у оквиру алгебарске репрезентације ако су претходно визуелно анализирали особине функције и њене трансформације (Borba & Confrey, 1996).

Већина новијих истраживања обухвата и анализу рада рада са трансформацијама функција у рачунарском окружењу. Заједнички став великог броја аутора је да би примена савремених наставних средстава, пре свега софтверских пакета који омогућавају рад са вишеструким репрезентацијама, у значајној мери поправило квалитет знања студената када су у питању трансформације функција, али и појам функције и особине функције уопште (Anabousy, Daher, Baya'a & Abu-Naja, 2014; Borba & Confrey, 1996; Daher & Anabousi, 2015; Sever & Yerushalmy, 2007).

Студенти упознају параметре и трансформације веома рано, током учења линеарне функције, разматрајући утицај параметара на особине функције и могу да повежу алгебарску, табеларну и вербалну репрезентацију са графичком. Касније, приликом учења квадратне функције, такође се срећу са параметрима и трансформацијама ове функције и имају бројне потешкоће да повежу алгебарску и графичку репрезентацију. Један од начина да се ове потешкоће превазиђу јесте да студенти раде са трансформацијама најпре у оквиру графичке репрезентације, а затим да повежу графичку репрезентацију са табеларном, а да се веза између графичке и алгебарске репрезентације формира тек у трећој фази рада (Borba & Confrey, 1996).

Трансформације функција се, у оквиру графичке репрезентације, посматрају кроз промене које настају на графику функције, односно геометријске трансформације графика функције. Разликују се четири врсте геометријских трансформација произвољне реалне функције $f(x)$:

- Вертикална транслација – проузрокована додавањем реалног параметра a функцији; описује се аналитичким изразом $f(x) + a$
- Хоризонтална транслација – проузрокована додавањем реалног параметра a независно променљивој, односно аргументу функције; описује се аналитичким изразом $f(x + a)$

- Дилатација (ширење и скупљање графика функције) – проузрокована множењем независно променљиве (аргумента) или функције реалним параметром a ; описује се једним од аналитичких израза $f(ax)$ или $af(x)$
- Рефлексија – осносиметрично пресликавање графика функције у координатном систему у односу на апсцисну осу; описује се аналитичким изразом $-f(x)$; поједини аутори рефлексијом сматрају и централно-симетрично пресликавање графика функције у односу на координатни почетак, које је примењиво само код неких функција и описује се аналитичким изразом $f(-x)$

У истраживањима, као и у настави, највише пажње се посвећује вертикалној и хоризонталној translацији, које се сматрају мање компликованим у односу на преостале две. Међутим, све трансформације су подједнако важне (Zazkis, Liljedahl, Gadowsky, 2003).

Поједини аутори су се бавили поређењем вертикалне и хоризонталне translације, те дошли до закључка да већина студената боље разуме вертикалну translацију, док са хоризонталном имају потешкоћа (Vorba & Confrey, 1996; Anabousy et al, 2014). Студенте највише збуњује то што се, када се независно променљивој додаје позитиван број, график функције помера улево, док додавање негативног броја независно променљивој има за последицу померање графика функције удесно. Велики број студената грешком, приликом решавања задатака, замене ова два случаја. Zazkis et al, (2003) објашњавају ову појаву чињеницом да вертикална трансформација настаје као последица додавања реалног броја функцији, односно вредности функције, а хоризонтална додавањем реалног броја независно променљивој, што је студентима компликованије, јер се у том случају мења аргумент функције. Сличан је и пример који наводе Vorba и Confrey (1996). У овом примеру, студенти разумеју утицај параметара a и b функције $f(x) = ax^2 + b$ на особине функције, у оквиру алгебарске и графичке репрезентације, али имају потешкоћа са функцијом $f(x) = (x - a)^2 + b$.

Са друге стране, Sever и Yerushalmy (2007), више пажње посвећују дилатацији графика функције. Они сматрају да студенти добро разумеју круто померање, односно translацију графика функције, али да имају знатно више потешкоћа са дилатацијом. Anabousy и др. (2014) закључују да је велики број студената који се слабије сналазе са рефлексијом, што нарочито долази до изражаја приликом анализе трансформација кубне функције.

Daheг и Anabousy (2015) наглашавају да су у већини ранијих истраживањима трансформације примењиване на једноставније функције, као што су линеарна, квадратна и кубна. Због тога су спровели истраживање у коме анализирају како се студенти, који су раније радили трансформације поменутих функција у рачунарском окружењу, сналазе са трансформацијама сложенијих функција, као што је рационална функција. Проблеми које су студенти имали са трансформацијама ових функција слични су раније уоченим проблемима, а односе се на потешкоће са хоризонталном translацијом и дилатацијом.

Међутим, они су учили да значајан број студената има потешкоћа и са вертикалном транслацијом рационалне функције $f(x) = 1/(1 + x^2)$. Сматрају да студенте збуњује то што се код ове функције у имениоцу, поред променљиве, јавља и константа. Такође, примећено је да студенти имају потешкоћа са трансформацијама функција у којима се променљива појављује више пута. Поред тога, ово истраживање је показало да се студенти лакше сналазе са свим типовима трансформација када су оне представљене графички.

Lage и Geisman (2006) истичу да је познавање трансформација функција и њихових особина од изузетне важности за разумевање особина класа функција. Посебно наглашавају важност оспособљавања студената да међусобно упореде трансформације функција, као и да разумеју везу између њих, а нарочито везу трансформација које се врше у оквиру алгебарске репрезентације одређене функције са променама које, услед тих трансформација, настају код графика посматране функције. Приликом вршења трансформације одређене функције, долазе до изражаја неке од особина читаве класе функција које иначе нису толико уочљиве.

Једнако је важно оспособити студенте да, на основу извршене трансформације, анализирају особине класе функција. Приликом овакве анализе полази се од одређивања полазне функције на основу особина трансформисане функције. Полазна функција, која је била предмет трансформације, представља родитељску функцију читаве једне класе функција. Неке особине родитељске функције заједничке су за све функције одговарајуће класе (Lage & Geisman, 2006; McClaran, 2013).

Током свог истраживања, Lage и Geisman (2006) су дошли до закључка да знање студената о функцијама није довољно да би се, без проблема, могло радити са трансформацијама функција. Нарочито истичу недовољно познавање особина функција, односно класа функција, што за последицу има немогућност студената да предвиде до каквих ће промена доћи код особина функције приликом одређене трансформације. Студенти су, такође, имали потешкоћа да, на основу насталих промена, одреде каква је трансформација извршена на одређеној функцији. Што се тиче грешака током самог рада, примећено је да је већина студената посматрала промене читаве функције, односно графика функције, а да нису придавали значаја појединим детаљима, односно тачкама домена функција, попут тачака пресека са координатним осама, екстремума и сл. Они сматрају да би у настави требало посветити више пажње трансформацијама функција, те њиховом утицају на особине функције, а нарочито на поједине значајне тачке у домену функције.

У свим поменутих истраживањима се показало да употреба софтвера, те рад са вишеструким репрезентацијама, значајно доприноси разумевању појма функције и њених особина од стране студената, укључујући и трансформације функција. Као најважнија предност посматраних софтверских пакета истиче се могућност истовременог рада у оквиру више различитих репрезентација, нарочито алгебарске и графичке. Такође,

наглашава се погодност коришћења динамичких особина појединих софтверских пакета, попут *GeoGebra* – е.

Ворба и Confrey (1996) истичу да је за успешну примену софтвера кључна добра координација са студенатима. Стална комуникација са студентима је неопходна како би се сагледао њихов начин размишљања и њихове потребе, а да би се, у складу с тим, дизајнирали наставни материјали. Они, такође, сматрају, да се образовни софтвер мора унапређивати у складу са потребама студената, те да се и наставне методе, као и курикулум, морају прилагођавати њиховим потребама, али и доступним ресурсима.

Што се тиче вишеструких репрезентација, Anabousy и др. (2014) напомињу да се у истраживањима и настави, у последње време, придаје доста значаја алгебарској и графичкој, као и табеларној репрезентацији функција, док је, са друге стране, вербална репрезентација запостављена. Сматрају да бу управо унапређење рада у оквиру вербалне репрезентације допринело превазилажењу одређених потешкоћа које су студенти имали приликом анализе трансформација функција, као што је недовољно познавање дилатације и рефлексije, те да би, с тим у складу, требало и развијати софтвер и наставни материјал. Да би се то постигло, неопходно је спровести више истраживања у којима би се анализирао рад са различитим типовима функција и анализа њихових особина у оквиру вишеструких репрезентација. Такође је неопходно истражити и анализирати трансформације функција у оквиру вишеструких репрезентација, а у циљу разумевања веза између различитих типова функција и њихових особина.

3. Примена динамичког софтвера у раду са функцијама

У овом поглављу представљен је нови методски приступ у обради функција са параметрима и испитивању њихових особина, као и могућност његове имплементације у наставу математике.

3.1. Изучавање функција у оквиру математичких садржаја у Србији

Поучавање и учење функција (у оквиру математичких садржаја) у Србији почиње на крају основне школе (у осмом разреду, када је већина ученика узраста тринаест или четрнаест година) и наставља се у средњим школама и на студијама. Према важећем Наставном програму за осми разред основног образовања и васпитања, ученици се упознају са појмом линеарне функције, њеним аналитичким изразом ($y = ax + b$), графиком линеарне функције, нулама функције, затим имплицитним обликом задавања линеарне функције, те цртањем и читањем графика линеарних функција. Од ученика се очекује да науче да цртају график линеарне функције, али и да читају особине функције са графика. Притом се општи појам функције не уводи у основној школи. Ученици се, такође, оспособљавају за примену линеарне функције у решавању проблема.

Према важећим стандардима постигнућа, од свих ученика се очекује да по завршетку основног образовања, у области функција, знају да одреде вредност функције дате таблицом или формулом, док се од ученика који су били успешнији у савладавању градива очекује да уочавају зависност међу променљивим, да познају линеарну функцију и њене особине, као и да знају да је интерпретирају графички (Станојевић и др., 2010).

У првом разреду средње школе ученици се детаљније упознају са општим појмом и неким од најважнијих особина функције и продубљују знање о линеарној функцији и њеној примени, стечено у осмом разреду основне школе. У другом разреду се детаљније изучавају одређени типови реалних елементарних функција, као што су квадратна, експоненцијална, логаритамска и тригонометријске функције. Ученици се детаљније упознају са њиховим особинама и оспособљавају се за испитивање особина и цртање графика ових функција, али и за примену функција у решавању проблема (Правилник о наставном плану и програму за гимназију; Правилник о општим стандардима постигнућа за крај општег средњег образовања и средњег стручног образовања у делу општеобразовних предмета).

У завршном разреду средње школе функције се изучавају више уопштено него у ранијим разредима, према њиховим дефиницијама, репрезентацијама, типовима и особинама. Ученици се упознају са појмом граничне вредности и извода функције. Детаљно се испитују особине елементарних функција уз примену извода, ученици се оспособљавају за њихову графичку интерпретацију, али и за анализу особина функција на основу графика. Ученици гимназија и техничких школа се упознају са појмом одређеног и неодређеног интеграла, те одређивањем интеграла елементарних функција, као и

применом извода и интеграла функција у решавању проблема (Правилник о наставном плану и програму за гимназију, Правилник о општим стандардима постигнућа за крај општег средњег образовања и средњег стручног образовања у делу општеобразовних предмета).

У високом, академском и струковном образовању, функције су неизоставни део курса математике или математичке анализе. У оквиру ових курсева продубљује се знање студената о функцијама стечено током средњошколског образовања, а детаљније се изучава могућност примене функција у решавању проблема.

Током читавог периода изучавања функција, ученици се срећу са функцијама у којима егзистирају променљиви параметри. Од њих се очекује да умеју да анализирају особине функције у зависности од параметара, као и да решавају проблеме у којима се користе функције са параметрима. Од ученика, односно студената, се углавном захтева да са променљивим параметрима раде у оквиру алгебарске репрезентације. Ученици често имају потешкоће са оваквим задацима. Успешно савладавање дела градива у области функција, који се односи на рад са параметрима, предвиђено је средњим и напредним нивоом постигнућа прописаним образовним стандардима за крај средњег образовања, што значи да се од ученика који су мање успешни у савладавању градива не очекује да у потпуности овладају знањем и вештинама у овој области, иако би то било потребно због њиховог потпунијег оспособљавања за примену знања везаних за функције у пракси.

3.2. Истраживања у циљу унапређења знања студената у области функција

Функције представљају веома обимну наставну тему која се, због могућности широке примене у пракси, детаљно изучава у средњим школама и на факултетима, без обзира на образовни профил, односно подручје рада. Линеарна функција и могућности њене примене се изучавају још у основној школи. Самим тим, од изузетне је важности да сви ученици, односно студенти, савладају градиво ове наставне теме макар у оној мери која ће им омогућити да, приликом обављања посла у својој струци, без потешкоћа излазе на крај са проблемима за чије је решавање неопходно применити знања из области функција.

Да би се могло сматрати да су ученици, односно студенти, у довољној мери савладали градиво везано за функције, неопходно је, између осталог, да разликују класе елементарних функција и да познају њихове особине. За што бољи преглед класа функција, као и уочавање веза међу њима, важно је оспособљавање студената за рад са функцијама у којима егзистирају променљиви параметри, јер једна функција са променљивим параметром, за различите вредности тог параметра, може припадати, на изглед, потпуно различитим класама функција, а промена вредности тог параметра, која проузрокује трансформације функције, може довести до значајних промена појединих особина посматране функције.

Имајући у виду наведене чињенице, као и то да су бројна ранија истраживања показала да ученици, односно студенти, имају проблема управо у раду са функцијама са променљивим параметрима и трансформацијама функција (Anabousy et al, 2014; Borba & Confrey, 1996; Lage & Geisman, 2006), дошли смо на идеју да спроведемо истраживања која би омогућила да се сагледају најизраженији проблеми студената у раду са функцијама, нарочито у раду са променљивим параметрима, трансформацијама функција и изводима функција, као и да се пронађе начин да се ови проблеми превазиђу.

Узимајући у обзир важност визуелизације и примену вишеструких репрезентација у раду са функцијама, о чему је раније било речи, као и то да је све већи број софтверских пакета који омогућавају квалитетније репрезентације математичких садржаја, укључујући и функције, одлучено је да за ова истраживања буде одабран софтверски пакет (или више њих) који омогућава рад у оквиру вишеструких репрезентација, као и повезивање ових репрезентација. Кроз истраживања би било проверено да ли употреба одабраног софтверског пакета приликом обраде наставних садржаја везаних за функције, доприноси побољшању квалитета знања студената о особинама функција и њиховим трансформацијама, као и о утицају параметара на особине функција и њихових извода.

Један од циљева првог од планираних истраживања би био сагледавање могућности превазилажења потешкоћа које студенти имају у раду са функцијама и трансформацијама функција, а које су дошле до изражаја приликом ранијих истраживања (Borba & Confrey, 1996; Daher & Anabousi, 2015; Lage & Geisman, 2006; Sever & Yerushalmy, 2007). У осталим истраживањима пажња би била посвећена утицају параметара на особине функција и њихових извода, али циљеви преосталих истраживања би били прецизније формулисани тек након анализе резултата првог истраживања.

Пре спровођења првог од планираних истраживања, планирано је да се израде едукативни материјали, који ће омогућити студентима изучавање особина и трансформација елементарних функција (наставни материјали са апликацијама израђеним помоћу динамичких софтверских пакета – *GeoGebra* и *Wolfram Mathematica*).

Узимајући у обзир ставове аутора ранијих истраживања о значају дискусије и размене мишљења студената, као и тврдње да се оваква дискусија може обезбедити групним радом (Goodsell et al., 1992; Gokhale, 1995), одлучено је да студенти у првом истраживању, током обраде и увежбавања наставних садржаја везаних за испитивање особина и цртање графика функција, те рад са функцијама са променљивим параметрима и трансформацијама функција, раде у колаборативним групама, односно да у истраживању буде примењен метод колаборативног рада. Примена методе колаборативног рада би требала да допринесе побољшању квалитета вербалне репрезентације анализираних садржаја, кроз међусобну дискусију студената унутар групе. За очекивати је да би размена мишљења студената, до које би дошло током овакве дискусије, допринела повећању интересовања сваког појединачног студента за тражењем решења проблема са којим се група суочава, као и конструисању квалитетнијег знања.

Студенти би, током истраживања у којима се примењује метода колаборативног рада, били подељени у две групе, експерименталну и контролну. И у једној и у другој групи била би примењена метода колаборативног рада, а на почетку истраживања студенти експерименталне и контролне групе би радили идентичан пре-тест. Током колаборативног рада, студенти у експерименталној групи би радили уз помоћ рачунара, док би у контролној групи радили без рачунара. По завршетку увежбавања наставних садржаја, обе групе студената би биле тестиране, а резултати ових тестирања би били предмет поређења и детаљне анализе. За време израде теста, као и за време израде пре-теста, студенти не би могли користити рачунар. Процес истраживања у којима би била примењена метода индивидуалног рада би био сличан претходно описаном, с тим да студенти не би били распоређивани у групе, него би радили самостално.

Истраживања су спроведена током академске 2015/2016. и 2016/2017. године на Природно-математичком факултету Универзитета у Новом Саду, а њима су обухваћени студенти прве године основних академских студија физике и хемије, као и информатике и рачунарства у 2015/2016. години. Сва истраживања су спроведена у оквиру курса наставног предмета Општа математика за студенте хемије, односно Математика 1 и Анализа 1 за студенте физике и информатике и рачунарства, респективно. Наставни програм за сва три наведена предмета је, када је реч о садржајима који се односе на функције, готово идентичан, што је омогућило да се са свим студентима који су обухваћени истраживањима примењују исте методе рада и да им се презентују исти садржаји, као и да, приликом провере знања, решавају исте тестове, што је омогућило бољи увид, како у рад студената за време наставе, тако и у савладаност градива приликом провере знања.

3.3. Преглед расположивих софтверских пакета који омогућавају рад у оквиру вишеструких репрезентација

Да би истраживања била успешно организована било је неопходно, између осталог, одабрати одговарајући софтвер, који би био коришћен као наставно средство током обраде и увежбавања градива везаног за функције. Притом је размотрено неколико софтверских пакета који омогућавају рад са функцијама у оквиру вишеструких репрезентација, са нагласком на особине ових програма које се односе на рад са функцијама. Софтверски пакети чије су особине анализиране су *GeoGebra*, *Wolfram Mathematica*, *Advanced Grapher*, *Graph* и *Microsoft Mathematics*.

GeoGebra је образовни софтвер са особинама интерактивне геометрије и алгебре. Омогућава рад у оквиру вишеструких репрезентација, алгебарске, графичке и табеларне, с тим да је нарочит значај придат алгебарској и графичкој репрезентацији. Могуће је све три репрезентације посматрати истовремено, у три различита прозора, а алгебарска и графичка репрезентација се, по потреби, могу посматрати заједно у графичком прозору.

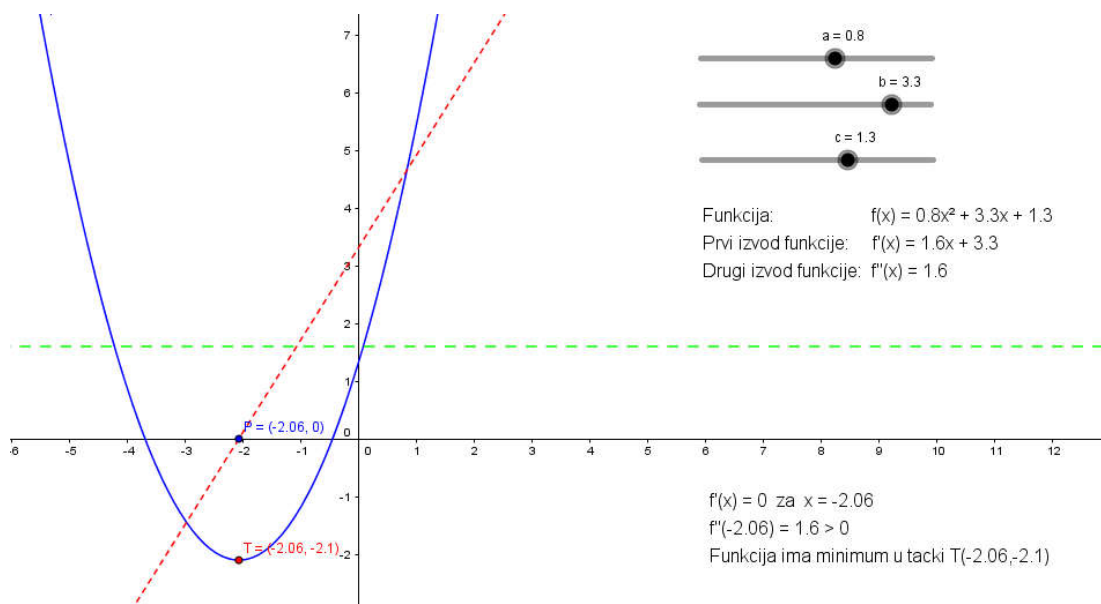
Све три репрезентације су повезане, тако да промена у оквиру једне репрезентације доводи до одговарајуће промене у оквиру преосталих репрезентација.

GeoGebra је, због својих особина, веома погодна за коришћење приликом испитивања функција. Поред могућности графичке интерпретације функције, постоје и бројне друге могућности, које се превасходно односе на израчунавање елемената неопходних за испитивање особина функција. Овај софтвер има динамичке особине и погодан је за рад са функцијама које садрже променљиве параметре. Параметре је могуће дефинисати помоћу клизача, тако да им се, померањем клизача, може мењати вредност у унапред одређеним границама. Након дефинисања параметара, корисник може задати функцију уношењем аналитичког израза у поље за унос и добиће истовремено алгебарску и графичку репрезентацију задате функције. Уколико жели да посматра и табеларну репрезентацију, неопходно је само да отвори одговарајући прозор и унесе жељене вредности независно променљиве. У даљем раду, може унети аналитичке изразе неопходне за одређивање нула функције, екстремних вредности итд. Када у потпуности заврши са испитивањем функције, корисник може, померањем клизача, мењати вредности променљивих параметара и посматрати на који начин ови параметри, односно њихове вредности, утичу на особине и график функције. Померање клизача истовремено доводи до промена код свих елемената који зависе од параметра дефинисаног тим клизачем.

Оваква примена вишеструких репрезентација у динамичком окружењу је посебно погодна за анализу промене класа функције, односно преласка функције из једне класе у другу, наизглед различиту. Тако се, на пример, помоћу клизача може дефинисати целобројни параметар n , а затим степена функција $f(x) = x^n$. Након тога се може посматрати како дата функција, за различите вредности параметра n , постаје линеарна, квадратна, константна, рационална и сл. и како јој се мењају особине. Динамичка својства образовног софтвера *GeoGebra* омогућавају кориснику да за веома кратко време испита особине и анализира графике великог броја функција исте класе, за шта би му, без оваквог софтвера, односно без употребе клизача, требало неупоредиво више времена. Пример графичке и алгебарске репрезентације функције $f(x) = x^n$, где је n целобројни параметар дефинисан помоћу клизача, у *GeoGebra* окружењу, приказан је на Слици 1. Овде су приказане алгебарска и графичка репрезентација извода функције, као и тачка минимума функције.

Предности образовног софтвера *GeoGebra* су, поред наведених, су његова доступност и једноставност за коришћење. *GeoGebra* је бесплатан софтвер, који се, без икаквих ограничења, може преузимати и користити. Тиме је омогућено да га користе и образовне установе, али и наставници и ученици, односно студенти. Такође, овај софтвер је прилагођен и корисницима који немају програмерске вештине и једноставан је за коришћење. Већина ученика се упознаје са основама рада у *GeoGebra* окружењу још током основног образовања, у оквиру предмета Информатика и рачунарство. Такође, доступан је велики број наставних материјала који се могу користити као помоћна средства при раду у *GeoGebra* окружењу. Постоји могућност да наставник креира

апликацију помоћу програма *GeoGebra*, коју би, по потреби, могли користити ученици, односно студенти који нису у довољној мери овладали овим програмом. Поред свих наведених особина, треба напоменути да *GeoGebra* омогућава рад на српском језику.



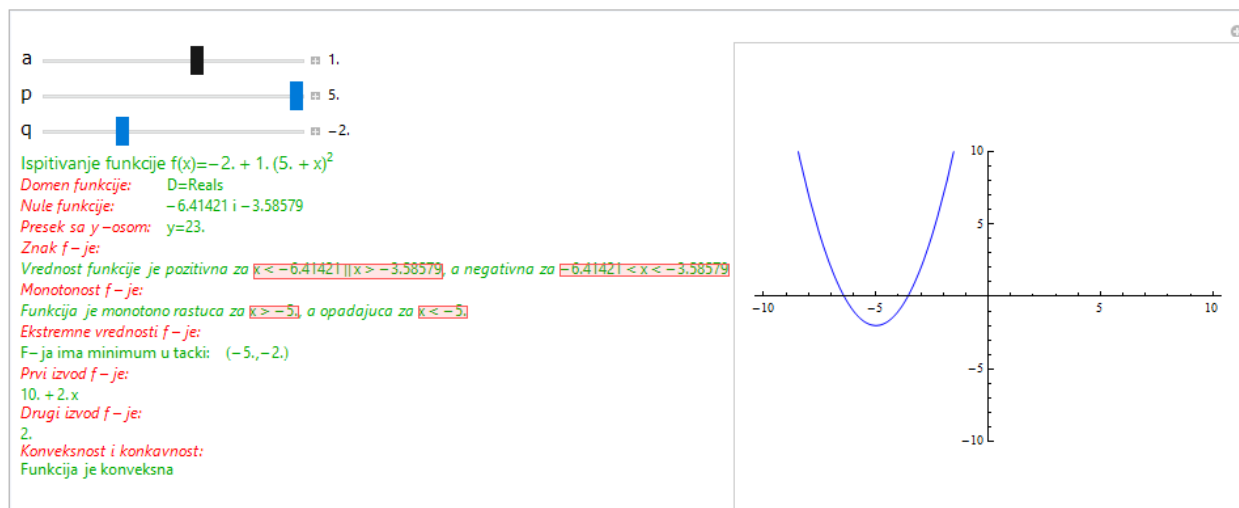
Слика 1. Рад са функцијом са параметром у *GeoGebra* окружењу.

Wolfram Mathematica је софтверски пакет намењен за симболичко рачунање. Спада у ред комерцијалног власничког софтвера, а дизајнирала га је компанија *Wolfram Research*. Могућности овог програма су изузетно велике и стално се ради на његовом усавршавању. Могуће га је користити за испитивање функција и рад у оквиру алгебарске и графичке репрезентације истовремено. *Mathematica* је манипулативни софтвер и омогућава рад са клизачима и променљивим параметрима. Постоји могућност креирања динамичке апликације, у којој се могу комбиновати и заједно посматрати алгебарска и графичка репрезентација. У оквиру ове апликације налазе се и клизачи, које је могуће померати и истовремено, на једном месту, посматрати промене које настају у алгебарској и графичкој репрезентацији посматране функције, као и промене код особина функције.

Оно што отежава рад са програмом *Mathematica* јесте потреба за познавањем програмског језика *Wolfram* и поседовање одређених програмерских вештина. То значи да је ученицима и студентима који би користили овај програм као помоћно наставно средство, али и наставницима који би га користили за припремање наставе и израду наставних материјала, потребна посебна обука за његово коришћење. Такође, овај програм није бесплатан и његова цена није нарочито приступачна.

Међутим, ови недостаци се могу делимично отклонити коришћењем програма *CDF Player*. *CDF Player* је бесплатан програм, такође дизајниран од стране компаније *Wolfram Research*, који омогућава преглед докумената креираних помоћи програма *Mathematica*. Програм *Mathematica* омогућава креирање *CDF* документа, у коме се налазе све

процедуре, израчунавања и сл. које је корисник креирао у програму *Mathematica*. Овакав документ се може очитати помоћу програма *CDF Player*, с тим да се у њега не могу уносити никакве измене. *CDF Player* омогућава и рад са динамичком апликацијом, односно дозвољава померање клизача у *CDF* документу. Динамичка апликација, односно динамички радни лист, за испитивање квадратне функције са променљивим параметрима, креирана помоћу програма *Mathematica*, приказан је на Слици 2.

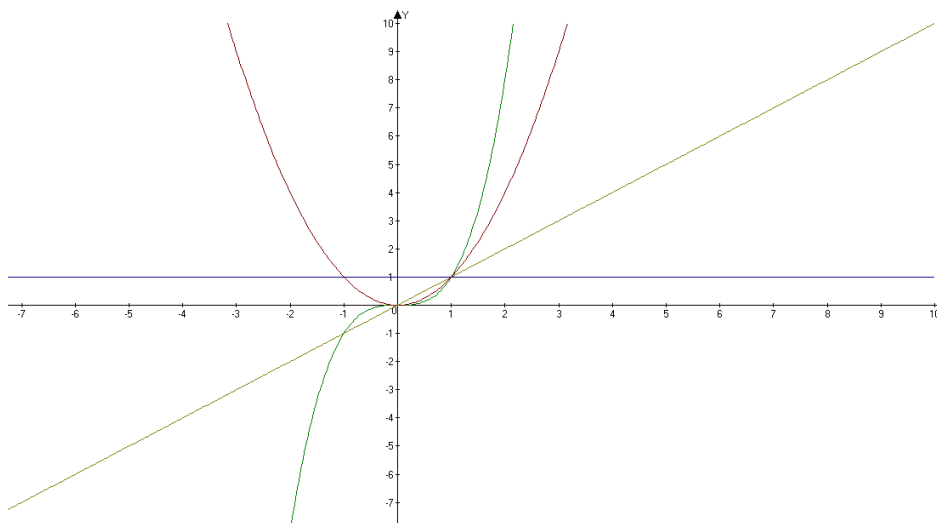


Слика 2. Рад са функцијом са параметрима у окружењу *Wolfram Mathematica*.

Дакле, за успешну примену програма *Mathematica* као помоћног наставног средства у обради и увежбавању наставних садржаја везаних за функције, довољно је да наставник има могућност коришћења овог програма, као и да буде оспособљен за коришћење истог. У том случају, наставник може креирати апликације које би студенти могли користити помоћу *CDF Player*-а. Највећи недостатак оваквог рада би била немогућност студената да самостално креирају апликације за испитивање функција, односно да их прилагођавају тренутним потребама.

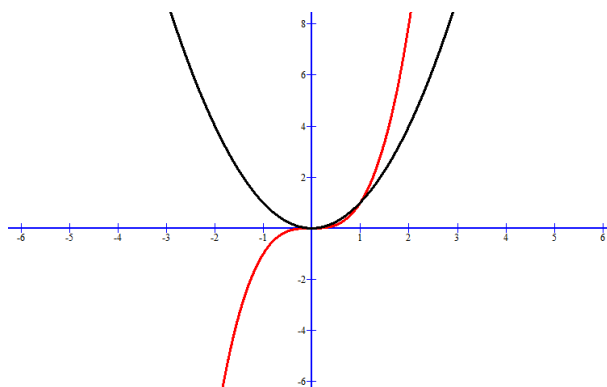
Програм *Advanced Grapher* такође спада у ред комерцијалног власничког софтвера, с тим да је цена овог програма релативно ниска. Овај софтверски пакет је једноставан за коришћење и ученици, односно студенти би се лако могли обучити за његову употребу. Програм омогућава рад са функцијама у оквиру алгебарске, табеларне и графичке репрезентације, које су међусобно повезане. Прилагођен је за испитивање особина функција, омогућава једноставно одређивање нула функције и екстремних вредности. У истом координатном систему је могуће нацртати до 100 графика различитих функција. Ову особину програма *Advanced Grapher* је неопходно користити приликом испитивања особина функција са променљивим параметрима, јер програм нема динамичке особине које би омогућиле да се променљиви параметри дефинишу преко клизача. То је, управо, највећи недостатак овог програма, јер је отежано и успорено испитивање особина функција са променљивим параметрима у оквиру алгебарске, али и у оквиру графичке

репрезентације, Наиме, и поред могућности цртања великог броја графика, за сваку функцију, односно за сваку појединачну вредност параметра, неопходно је посебно задавати одговарајуће наредбе како би она била графички приказана. Слика 3 приказује испитивање особина, односно графичку интерпретацију функције $f(x) = x^n$, у зависности од параметра n , у недостатку динамичких особина програма *Advanced Grapher*.



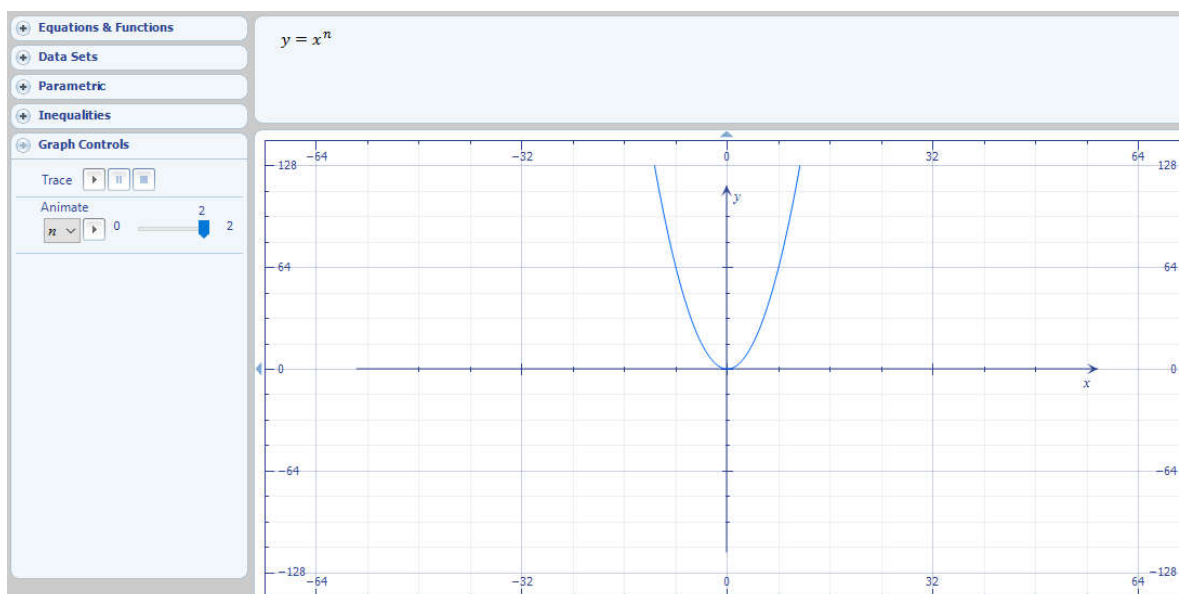
Слика 3. Рад са функцијом са параметром у *Advanced Grapher* окружењу.

Graph је бесплатан програм, који се може неограничено преузимати и делити, а намењен је за рад са функцијама, односно за испитивање њихових особина. Једноставан је за коришћење, а његове особине су сличне особинама програма *Advanced Grapher*. Једна од највећих погодности програма *Graph* је могућност задавања функције табеларно. Поред тога, овај програм, као и *GeoGebra*, омогућава рад на српском језику. Ово није нужно велика предност, јер су готово сви студенти, још током свог доуниверзитетског образовања, овладали енглеским језиком у довољној мери да би, без потешкоћа, могли користити софтвер на енглеском језику. *Graph* такође садржи велики број опција које омогућавају квалитетно испитивање особина функције и, уопште, рад са функцијама. Највећа мана овог програма је недостатак динамичких својстава, односно немогућност рада са клизачима, што је био случај и са програмом *Advanced Grapher*. Овај недостатак отежава рад са функцијама у којима егзистирају променљиви параметри, те је, за рад са таквим функцијама у окружењу програма *Graph*, неопходно користити сличне методе као и код програма *Advanced Grapher*. Рад са функцијама и њихове графичке репрезентације у оквиру програма *Graph* види се на Слици 4.



Слика 4. Рад са функцијама у *Graph* окружењу.

Microsoft Mathematics је бесплатан програм направљен за оперативне системе *Windows*. Овај програм омогућава рад у оквиру алгебраске и графичке репрезентације. Програм поседује и динамичке особине, тако да је могуће посматрати утицај вредности параметара на особине функције уз помоћ клизача. Једноставан је са коришћење и његова употреба не захтева посебну обуку. Међутим, програм није прилагођен за испитивање функција. Са клизачем се може повезати график и аналитички израз функције, што омогућава праћење промена особина функције прузрокованих променама вредности параметара истовремено у алгебарској и графичкој репрезентацији, али је сва друга израчунавања, попут извода или граничне вредности функције, неопходно посебно извршити. Графичка и алгебарска репрезентација функције $f(x) = x^n$ у динамичком окружењу *Microsoft Mathematics* приказана је на Слици 5.



Слика 5. Рад са функцијом са параметром у *Microsoft Mathematics* окружењу.

Поред наведених, постоји велики број софтверских пакета који омогућавају рад са функцијама у оквиру вишеструких репрезентација, као и неколико онлајн апликација које

омогућавају графичку интерпретацију функције задате аналитичким изразом. Све ове апликације имају особине, у одређеној мери, сличне неком од описаних софтверских пакета, али је већина њих предвиђена само за цртање графика на основу задатог аналитичког израза функције. Мали број апликација има динамичка својства, која су од изузетног значаја за рад са функцијама, а нарочито за рад са променљивим параметрима и трансформацијама функција.

На основу претходно описаних карактеристика посматраних програмских пакета, може се закључити да најбољи преглед функција и њихових особина, укључујући и функције са променљивим параметрима, у оквиру вишеструких репрезентација обезбеђују софтверски пакети *GeoGebra* и *Wolfram Mathematica*. Због доступности и једноставности за коришћење, одлучено је да студенти, током истраживања, користе образовни софтвер *GeoGebra*, са којим су, у највећем броју, упознати током ранијег школовања.

Наставни материјали, креирани са циљем да се студентима помогне да самостално вежбају и отклоне евентуалне недоумице, садржи апликације у којима су испитане неке функције са параметрима. У једном од ових наставних материјала, за сваку од испитаних функција креиран је један динамички радни лист помоћу образовног софтвера *GeoGebra*, као и одговарајући *CDF* документ. Циљ оваквог комбиновања софтвера *GeoGebra* и *Mathematica* је да се студенти упознају са различитим софтверским пакетима и њиховим особинама, као и могућностима коришћења истих приликом обраде и увежбавања наставних садржаја везаних за функције. Овај наставни материјал конципиран је тако да га могу користити наставници приликом припремања наставе, али и студенти. Други наставни материјал садржи искључиво динамичке радне листове креиране у *GeoGebra* окружењу, из разлога што је софтвер *GeoGebra* одабран за коришћење приликом спровођења истраживања.

3.4. Наставни материјал Утицај динамичких особина софтверских пакета *Mathematica* и *GeoGebra* на испитивање особина и цртање графика функција са параметрима

Овај наставни материјал намењен је ученицима завршног разреда средње школе и студентима, а креиран је са циљем упознавања ученика, односно студената, са могућностима коришћења динамичких софтверских пакета, као што су *GeoGebra* и *Mathematica*, приликом испитивања особина и цртања графика функција. Могу га користити и наставници као помоћни извор приликом припремања наставе. Наставни материјал је објављен на енглеском језику у склопу пројекта IPA HU-SRB/1203/221/024 Нестандардне форме наставе математике и физике, под оригиналним насловом „The impact of dynamic properties of the software packages *Mathematica* and *GeoGebra* to the examining and graphing of functions with parameters“ и доступан је корисницима без икаквих ограничења (Božić, 2015). Верзија овог наставног материјала на српском језику дата је у Прилогу 1 (електронски).

Студенти су, приликом истраживања, били упознати са могућношћу коришћења овог материјала, али нису били у обавези да га користе, јер су, приликом рада са функцијама са параметрима, за време наставе, добијали потребне инструкције како би самостално, користећи софтверски пакет *GeoGebra*, креирали интерактивне радне листове који би им омогућили детаљан преглед функција и њихових особина. Њима је остављена могућност да, уколико желе, приликом самосталног учења користе наставни материјал Утицај динамичких особина софтверских пакета *Mathematica* и *GeoGebra* на испитивање особина и цртање графика функција са параметрима.

У првом делу овог наставног материјала описане су могућности коришћења софтверских пакета *Mathematica* и *GeoGebra* приликом испитивања особина и цртања графика функција, као и предности рада са функцијама у динамичком окружењу. Затим су дата четири примера у којима се од студената захтева да испитају особине и нацртају графике неколико функција истог типа, са различитим коефицијентима. У првом примеру, где је посматрана класа квадратних функција, показано је како би ово испитивање изгледало без употребе икаквог софтвера, а затим су дате апликације, односно динамички радни листови, креирани помоћу програма *Mathematica* и *GeoGebra*, у којима су испитане особине родитељске функције, односно функције са параметрима која одређује наведену класу функција. Ови динамички радни листови омогућавају корисницима (студентима) да испитују особине функције посматрајући истовремено зависност ових особина од вредности параметара. У преосталим примерима испитане су нешто сложеније функције са параметрима.

У завршном делу наставног материјала дато је неколико задатака којима би се проверило знање ученика, односно студената, о особинама функција са параметрима. У овим задацима од студената се тражи да примењује знање о особинама функција са параметрима, као и утицају параметара на особина функција, при том повезујући алгебарску и графичку репрезентацију. Поједини задаци садрже захтеве за одређивањем вредности параметра на основу датог графика функције. Овде долази до изражаја оспособљеност студената да анализирају особине функције у оквиру графичке репрезентације. У неким од задатака од студената се захтева и да опише зависност особина посматране функције од вредности њених променљивих параметара. Овде се, у ствари, захтева од студената да раде у оквиру вербалне репрезентације, повезујући је, при том, са алгебарском и графичком.

3.5. Наставни материјал Испитивање особина и цртање графика функције

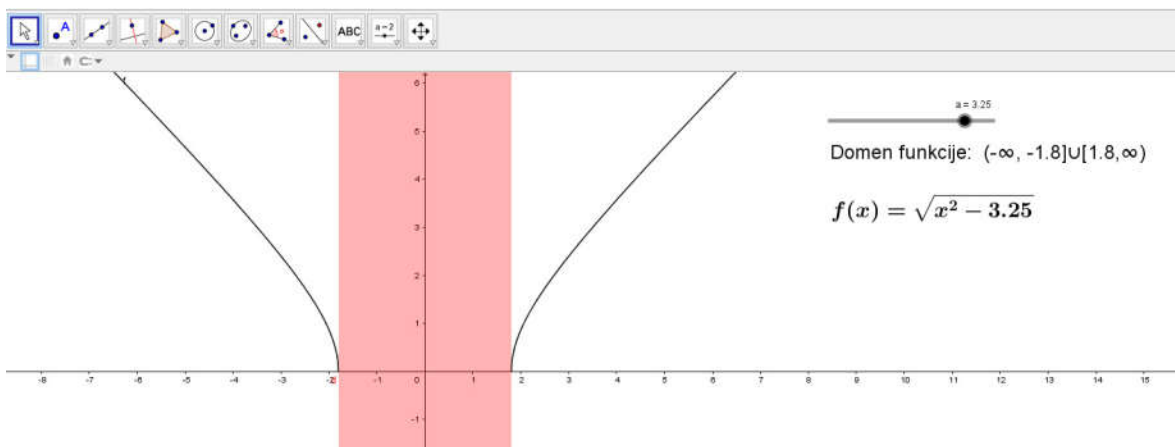
Поред наставног материјала описаног у Поглављу 3.4, за студенте обухваћене експерименталним истраживањима сачињена су још два наставна материјала. Један од ова два материјала био је прилагођен раду са рачунаром, у оквиру образовног софтвера *GeoGebra*, и намењен је студентима чије би вежбе биле реализоване уз помоћ рачунара.

Други наставни материјал прилагођен је студентима који, током реализације вежби, не би имали могућност коришћења рачунара.

Ова два наставна материјала су веома слична. Штавише, њихов теоријски садржај је идентичан. Разлика постоји једино у примерима, јер су, за студенте експерименталне групе, креирани динамички радни листови у *GeoGebra* окружењу, чији је циљ да омогуће студентима да сагледају могућности примене овог софтверског пакета и испитивању функција, као и да се оспособе за самостално креирање динамичких радних листова када се за тим укаже потреба.

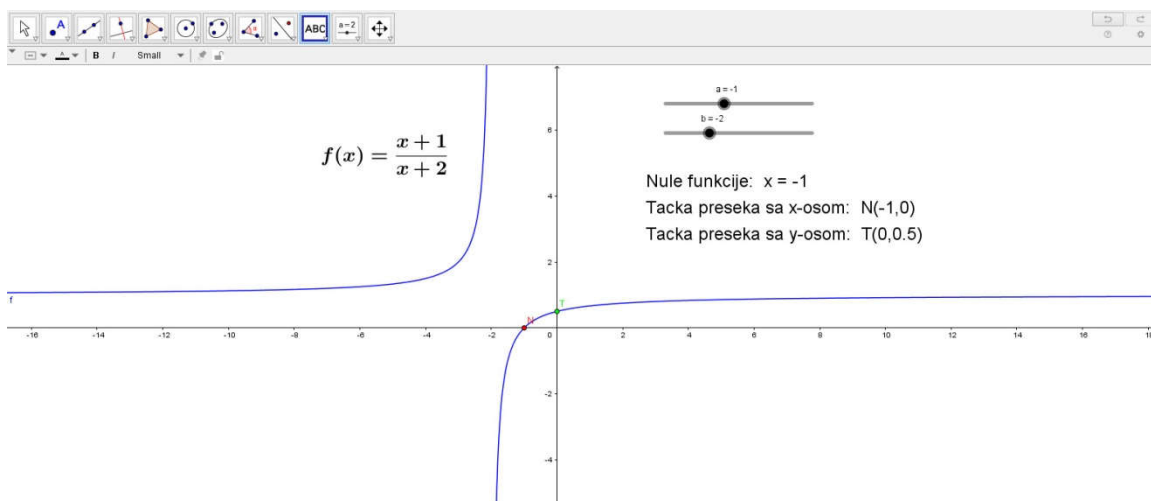
Комплетан наставни материјал дат је у Прилогу 2 (електронски), док су динамички радни листови дати у пратећем електронском материјалу. У овом материјалу је, детаљно, приказан поступак испитивања сваке од особина функције. Такође је, за сваку од особине, креиран и одговарајући динамички радни лист. Наставним материјалом су обухваћене и особине функција које се испитују применом извода функције. Студенти би, током увежбавања одговарајућих наставних садржаја, користили онај део наставног материјала који би им био потербан.

У наставном материјалу, када је реч о особинама функције, најпре се говори о домену функције, односно дискусији о скупу на коме је функција дефинисана. Неретко се од студената захтева да, приликом испитивања функције, одреде и подскуп скупа реалних бројева на коме може бити дефинисана посматрана функција. Пример како *GeoGebra* може да помогне код оваквог испитивања функције дат је на Слици 6, где је црвеном бојом означен подскуп скупа реалних бројева који зависи од вредности параметра a , а на коме посматрана функција не може бити дефинисана.



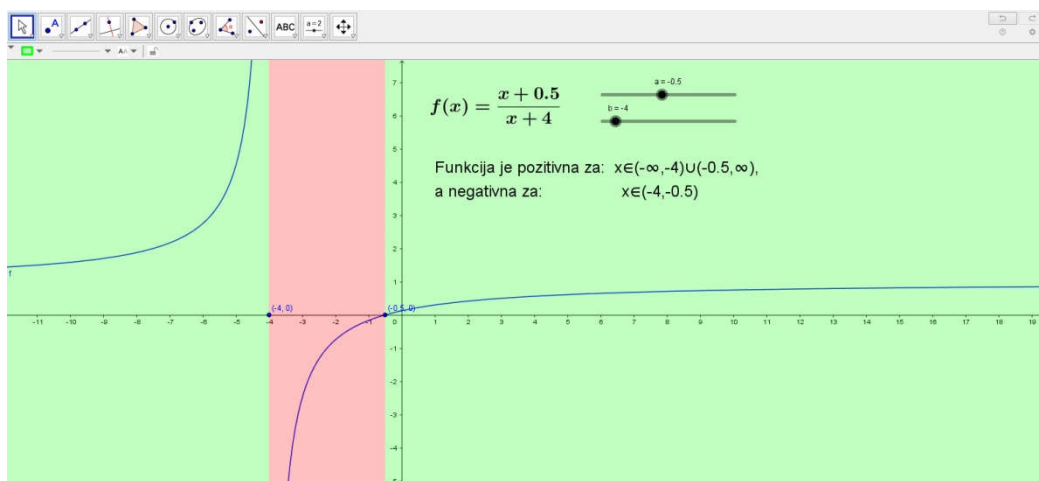
Слика 6. Испитивање особина функције у *GeoGebra* окружењу.

Након домена, испитују се нуле функције, као и тачке пресека графика функције са координатним осама. Пример коришћења својстава пакета *GeoGebra* у циљу испитивања наведених особина приказан је на Слици 7.



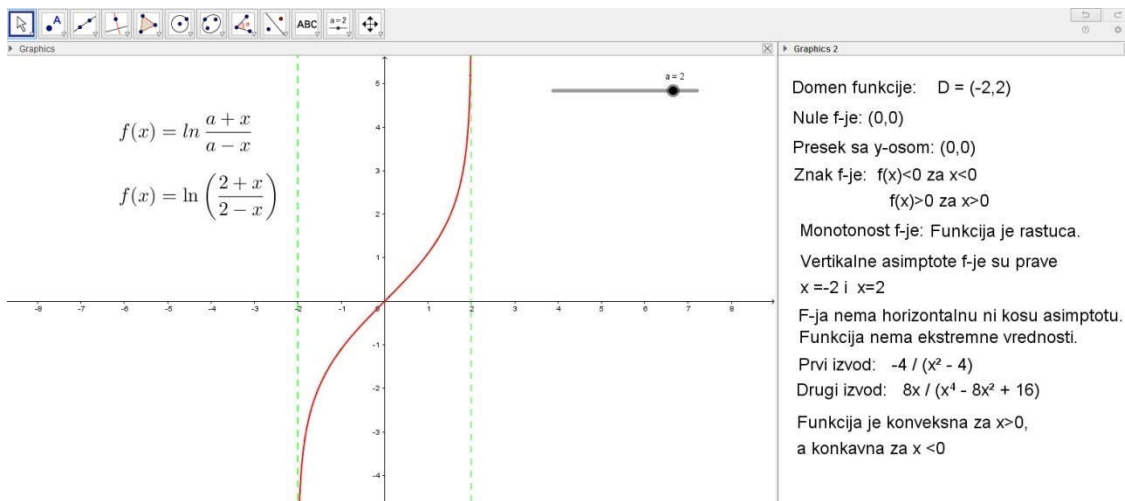
Слика 7. Испитивање особина функције у *GeoGebra* окружењу.

Даље су анализирани следеће особине функција: знак, асимптоте, парност, периодичност, први и други извод функције, монотност, екстремне вредности, конвексност функције и превојне тачке. На Сlici 8 приказан је пример испитивања знака функције у *GeoGebra* окружењу, при чему је интервал на коме функција има негативне вредности означен црвеном, а интервал на коме функција има позитивне вредности зеленом бојом. Слика 9 приказује испитивање више особина функције у оквиру истог динамичког радног листа.



Слика 8. Испитивање особина функције у *GeoGebra* окружењу.

Као што је већ поменуто, анализа сваке од особине поткрепљена је, у оном наставном материјалу који је креиран за студенте који би имали могућност коришћења рачунара, одговарајућим динамичким радним листом. На сликама 6, 7, 8 и 9 дати су примери коришћења неких од тих динамичких радних листова, док су остали приложени у електронској форми.



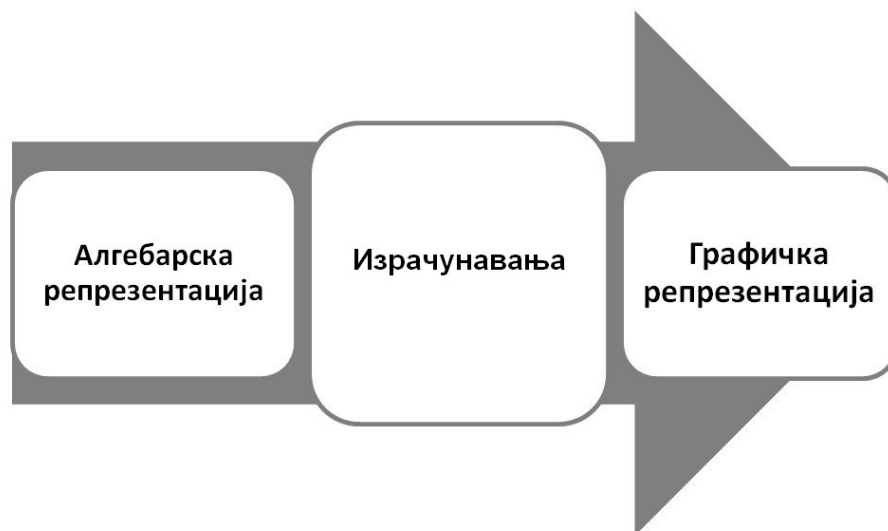
Слика 9. Испитивање особина функције у *GeoGebra* окружењу.

Што се тиче наставног материјала креираног за рад без рачунара, недостатак динамичких радних листова код примера надомештен је, у оној мери у којој је то било могуће, сликама на којима су студенти могли видети графичке репрезентације функција, са елементима важним за испитивање особина (тачке пресека са координатним осама, тачке минимума, односно максимума и сл.).

3.6. Испитивање особина функције у динамичком окружењу софтверског пакета *GeoGebra*

Што се тиче процеса испитивања особина функције без коришћења рачунара, он се може разликовати у зависности од тога којим особинама се придаје већи, а којим мањи значај, као и у зависности од начина на који се испитују поједине особине. Тако је, на пример, у неким случајевима, природу екстремних вредности могуће одредити на основу интервала монотоности, који су претходно одређени по дефиницији, док је, под одређеним условима, и интервале монотоности и екстремне вредности могуће одредити применом првог извода функције. Међутим, за сваки од наведених начина је заједничко то да се прво посматра функција у оквиру њене алгебарске репрезентације, затим да се, такође у оквиру алгебарске репрезентације, изводе неопходна израчунавања, те да се, на крају, приступи формирању графичке репрезентације, на основу претходно испитаних особина функције. Оваква процедура одговара шеми приказаној на Слици 10.

Већина процедура испитивања функције без употребе рачунара одговара приказаној шеми. Ређи је случај да се, пре рачунског дела, уз помоћ табеларне репрезентације формира графичка, која би касније била коришћена у испитивању особина функције. Што се тиче процедура које одговарају шеми на Слици 10, оне се најчешће разликују у делу преласка са алгебарске на графичку репрезентацију, јер се формирање графичке репрезентације може извршити уз помоћ табеларне, или само на основу претходно испитаних особина функције.



Слика 10. Шема испитивања функције без употребе рачунара.

Наиме, прве функције са којима се срећу студенти, односно, тада још увек ученици, су такве да њихово испитивање не захтева сложенија израчунавања, а ни графичко представљање им није компликовано. У тим случајевима, за формирање графичке репрезентације се често користи табела са неколико парова независне и зависне променљиве. Међутим, код функција чије је испитивање сложеније, формирање графичке репрезентације помоћу табеларне би било сувише компликовано, па се, у овим случајевима, график функције скицира на основу података о тачкама пресека са координатним осама, знаку функције, монотоности тока функције, екстремним вредностима, асимптотима, конвексности, односно конкавности и превојним тачкама. Међутим, као што је већ наглашено, обе процедуре се уклапају у шему дату на Слици 10.

Процедура испитивања особина функције уз помоћ рачунара, односно у окружењу образовног софтвера *GeoGebra*, се битно разликује од процедуре описане шемом на Слици 10. Наиме, *GeoGebra* омогућава истовремено формирање алгебарске и графичке репрезентације, које су међусобно зависне, тако да промена у оквиру једне репрезентације доводи до истовремене промене у оквиру друге репрезентације. Испитивање функција у *GeoGebra* окружењу описано је шемом на Слици 11. На овој слици, алгебарска и графичка репрезентација, као и процес израчунавања и примене команди у *GeoGebra* окружењу приликом испитивања особина функције, представљени су засебним зупчаницима, који су међусобно повезани, тако да покретање било ког од зупчаника доводи до истовременог покретања преосталих зупчаника. Овим механизмом је представљена међусобна зависност алгебарске и графичке репрезентације функције, као и појединачних особина функције.

Процеси израчунавања и примене команди представљен је засебним зупчаником, јер се они могу посматрати одвојено од самих репрезентација функције (неке опције образовног софтвера *GeoGebra* омогућавају да се изврши одређени рачунски процес,

неопходан за испитивање функције, али тај рачунски процес није део алгебарске репрезентације функције). Међутим, и поред тога што се ови процеси не посматрају као део једне или друге репрезентације, они су са њима уско повезани. Наиме, процес израчунавања у окружењу образовног софтвера *GeoGebra* се представља алгебарски и користи се у испитивању појединих особина функције. То је случај и са применом појединих уграђених команди софтвера *GeoGebra*. Са друге стране, неке од уграђених команди се извршавају и у оквиру графичке репрезентације, а не само у оквиру алгебарске. Пример једне од таквих команди је „пресек,“ помоћу које се одређује пресечна тачка двају графика. Задавањем ове команде, тражена пресечна тачка се појављује у графичком прозору, али се истовремено њене координате појављују у алгебарском прозору.

Дакле, приликом испитивања особина функције, сва неопходна израчунавања се врше уз истовремено посматрање алгебарске и графичке репрезентације. Коришћење различитих опција образовног софтвера *GeoGebra* омогућава да се неке од особине испитају у оквиру графичке репрезентације, тако да је обим неопходних рачунања мањи у односу на испитивање функције без употребе рачунара. Такође је могуће извршити сва потребна израчунавања у *GeoGebra* окружењу, без записивања на папиру. Уколико би се, током процеса испитивања функције, неки од података у оквиру алгебарске репрезентације променио, дошло би до истовремене промене свих података који од њега зависе, било да се ради о подацима у процесу израчунавања, било да се ради о графику функције. Исту последицу би имала и промена података у процесу израчунавања, као и промена у оквиру графичке репрезентације (попут мењања положаја одређене тачке у координатном систему и сл.).



Слика 11. Шема испитивања функције у *GeoGebra* окружењу.

Када је у питању процес испитивања особина функције дате са променљивим параметрима, без употребе рачунара, он се такође уклапа у шему приказану на Слици 10. Испитивање функције са параметрима, као и испитивање утицаја вредности параметара на поједине особине функције се врши тако што се сваком од параметара додељује одређена вредност, а затим се испитивање врши на начин приказан шемом на Слици 10. Једино што ову процедуру разликује од процедуре испитивања функције са конкретним вредностима параметара јесте потреба за вишеструким понављањем процеса испитивања функције, почевши од алгебарске репрезентације, преко израчунавања, до графичког представљања функције. Односно, процес испитивања је неопходно поновити онолико пута колико је различитих вредности, за сваки од параметара, посматрано.

Овакво испитивање функције са параметрима је сувише компликовано и захтева много времена јер, да би се што прецизније утврдила зависност особина функције од параметра, неопходно је посматрати већи број различитих вредности за сваки од параметара.

Процедура испитивања функције дате са променљивим параметрима у *GeoGebra* окружењу се, у одређеној мери, разликује од процедуре испитивања функције са конкретним вредностима параметара у *GeoGebra* окружењу. У основи, и ова процедура обухвата истовремено посматрање алгебарске и графичке репрезентације, као и сва неопходна израчунавања уз коришћење одговарајућих команди софтвера *GeoGebra*, с тим да су, за разлику од испитивања функције са конкретним вредностима параметара, овога пута обе репрезентације, алгебарска и графичка, као и сва израчунавања у *GeoGebra* окружењу, зависна од вредности параметара, који се дефинишу помоћу клизача. Процедура испитивања функције са променљивим параметрима у *GeoGebra* окружењу описана је шемом на Слици 12.



Слика 12. Шема испитивања функције са параметрима у *GeoGebra* окружењу.

Шема на Слици 12 слична је оној на Слици 11, с тим што уместо зупчаника садржи тачкове који представљају алгебарску и графичку репрезентацију, као и израчунавања која су неопходна током процеса испитивања функције. Ови тачкови су повезани ременом. Овај ремен представља параметре, односно клизаче у *GeoGebra* окружењу. Покретање ремена доводи до истовременог покретања сва три тачка. Тиме је представљен утицај вредности параметара на обе репрезентације функције, алгебарску и графичку, као и на већину особина функције. Наиме, као што промена вредности параметра проузрокује истовремене промене у особинама функције, као и у њеној алгебарској и графичкој репрезентацији, тако и покретање ремена проузрокује истовремено покретање читавог механизма у посматраној шеми.

Процедуре испитивања функција са променљивим, али и са конкретним параметрима, у *GeoGebra* окружењу, могу се међусобно разликовати далеко више него што се, између себе, могу разликовати процедуре испитивања функција без употребе рачунара. Међутим, све поменуте процедуре могу се уклопити у шеме на сликама 11, односно 12.

4. Опис тока експерименталног истраживања спроведеног 2015/2016. године

Прво у низу истраживања која су спроведена са циљем унапређивања квалитета знања студената у области функција са параметрима и њихових особина спроведено је током првог семестра академске 2015/2016. године, на Природно – математичком факултету Универзитета у Новом Саду. За рад са функцијама са параметрима одабран је, из разлога описаних у Поглављу 3.3, образовни софтвер *GeoGebra*, мада је студентима омогућено да се, током изучавања функција са параметрима, упознају и са применом софтверског пакета *Wolfram Mathematica*.

4.1. Циљеви истраживања спроведеног 2015/2016. године

Након одабира софтверског пакета који би био примењен у истраживању, као и одабира узорка који би био обухваћен истраживањем, могуће је прецизније формулисати циљеве овог истраживања. Главни циљ истраживања би било утврђивање степена утицаја примене динамичког софтвера током колаборативног рада на квалитет знања студената и разумевање одређених сегмената наставних садржаја из области функција, са посебним нагласком на трансформације функција.

Поред главног, овим истраживањем ће бити постигнути и следећи циљеви:

- Имплементација колаборативног приступа потпомогнутог коришћењем рачунара у наставни процес;
- Израђивање инструмената (тестова знања) потребних у истраживачком процесу.

4.2. Прелиминарно тестирање студената (пре-тест)

Истраживањем које је спроведено током академске 2015/2016 године обухваћен је укупно 271 студент. Од тога, студената основних академских студија хемије било је 142, док је студената основних академских студија физике, односно информатике и рачунарства, било укупно 129. Истраживање је спроведено на почетку курса математичке анализе, у оквиру раније поменутих наставних предмета.

Пре почетка истраживања сваки студент се изјаснио о томе да ли је упознат са образовним софтвером *GeoGebra*. Међу студентима хемије било је више њих који нису били упознати са радом у *GeoGebra* окружењу, док су сви студенти физике, као и студенти информатике и рачунарства, били упознати са овим програмским пакетом. Због тога је одлучено да експерименталну групу (у којој су студенти користили рачунар) чине студенти физике, односно информатике и рачунарства, а контролну групу (у којој студенти нису користили рачунар) студенти хемије.

За истраживање смо одабрали 124 студента у сваку групу, како бисмо једноставније извршили поређење резултата тестирања, како прелиминарног, тако и

главног и како би се, на основу резултата пре-теста, могле формирати групе за колаборативни рад. Будући да је студената и у једној и у другој групи било више од 124, преостали студенти су такође радили у колаборативним групама, али њихови резултати нису анализирани.

На почетку курса студенти су радили пре-тест. Циљ овог пре-теста је био да се провери знање студената у области функција и њихових особина. Задачи које су студенти радили дати су у Прилогу 3. Знање које је потребно за решавање ових задатака студенти су стекли током средњошколског образовања. Захтеви постављени пред њих су такви да им је било довољно чак и знање које су стекли пре завршне године средње школе. Пре-тест је садржао шест задатака, а време за израду је било 90 минута. Студенти за време израде задатака нису имали могућност коришћења рачунара. Максималан број поена на пре-тесту био је 50. Анализа резултата пре-теста по задацима дата је у Поглављу 4.2.1, а статистичка анализа резултата пре-теста дата је у Поглављу 4.2.2.

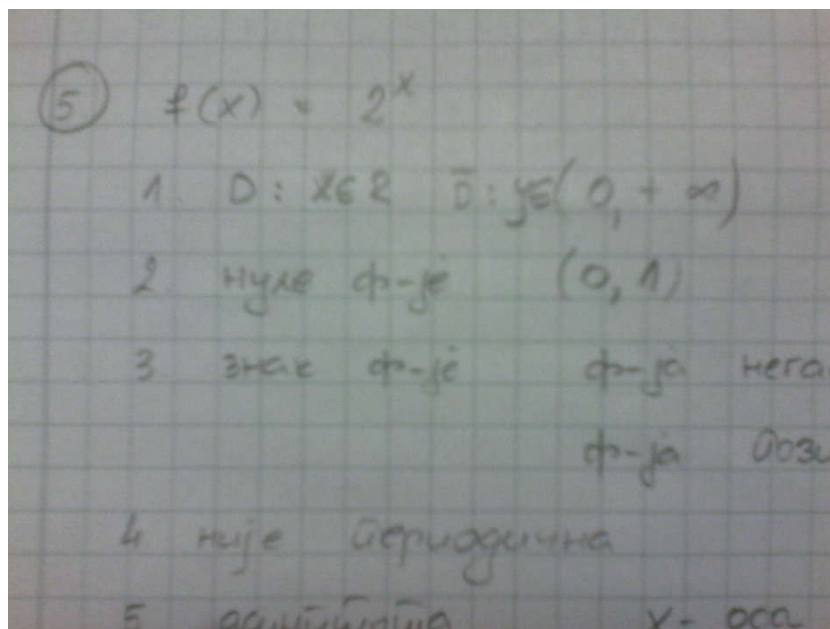
4.2.1. Анализа резултата пре-теста по задацима

У првом задатку је од студената тражено да испитају неке од особина елементарних функција (домен, нуле, знак, монотоност, конвексност) и да скицирају њихове графике. Наглашено је да особине испитују не израчунавајући граничне вредности и изводе. Имајући у виду чињеницу да су се испитивањем особина елементарних функција без рачунања извода и граничних вредности студенти бавили током већег дела средњошколског образовања, могло се очекивати да им је овај део градива близак, те да им први задатак не би требао представљати потешкоћу. Такође, за разлику од преосталих задатака, у првом задатку није требало да се ради са трансформацијама функција, нити је било потребно применити било какво знање о њима. Због тога је, у даљој анализи, овај задатак посматран као засебна целина. Први задатак је носио 24 поена (за сваку тачно испитану функцију уз коректно нацртан график студент би добијао по 2 поена), док су остали задаци (у којима је, појединачно, било мање посла за студенте него у првом задатку у целости) носили укупно 26 поена.

Прва функција у првом задатку је линеарна и са њеним особинама су се студенти сретли још у завршном разреду основне школе. Ову функцију су сви студенти коректно испитали. Са преосталим функцијама и њиховим особинама студенти су се упознали углавном током другог разреда средње школе. Будући да су је највише примењивали, квадратна функција им је била најпознатија, па су и њене особине испитали углавном без икаквих потешкоћа. Што се осталих функција тиче било је студената који се нису снашли са испитивањем њихових особина, а нарочито са цртањем графика. Просечан број поена у експерименталној групи био је 13.25, односно 53%, а у контролној 13.34, односно 53.4% од максималних 24 поена у првом задатку. Максималан број поена у овом задатку остварило је 7 студената, од чега 3 у експерименталној и 4 у контролној групи.

Студенти су, у првом задатку, морали да користе алгебарску репрезентацију током испитивања особина функција. Када је у питању цртање графика, већина студената, који су тачно решили задатак, односно део задатка, познавала је графике елементарних функција. Они су то знање искористили за цртање графика у конкретним случајевима. Значајан део њих је, поред алгебарске репрезентације и ранијег знања о графицима, користио и табеларну репрезентацију како би успешно нацртали тражене графике. Мали број студената ослањао се искључиво на табеларну репрезентацију, док је свега неколико њих радило тако што су најпре, помоћу табеларне репрезентације, цртали график функције, а затим добијени график користили у испитивању особина. Они су били делимично успешни у испитивању функција. Са друге стране, било је више оних који су, и поред тога што је у тексту задатка наглашено да се испитивање врши без израчунавања граничних вредности и извода, покушавали да користе изводе функција за испитивање монотоности и конвексности.

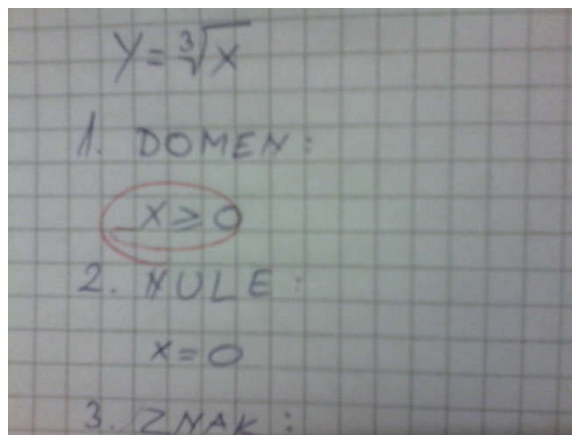
Када су у питању појединачне функције, студенти су имали највише проблема са испитивањем особина и цртањем графика логаритамских и тригонометријских функција. Грешке су најчешће биле такве да су студенти покушавали да одреде нуле експоненцијалних функција или су погрешно одређивали и примењивали период код тригонометријских функција. Иако су у мањини, није занемарив ни број оних који су правили грешке покушавајући да одреде нуле експоненцијалне функције, као што је приказано на Слици 13, или су остављали могућност да експоненцијална функција буде негативна, па у том смислу цртали и њен график. Овде се ради о студентима који за цртање графика нису користили табеларну репрезентацију.



Слика 13. Грешка код испитивања особина експоненцијалне функције.

Забележено је и неколико случајева у којима су одређивани интервали на којима је функција \sqrt{x} негативна, при чему ни домен ове функције није коректно одређен, као и неколико случајева у којима је напоменуто да је функција $\sqrt[3]{x}$ дефинисана само за позитивне вредности независно променљиве, те да ова функција не може имати негативне вредности. Један од оваквих радова приказан је на Слици 14. Може се претпоставити да је разлог оваквим грешкама недовољно познавање и/или разумевање особина елементарних функција.

У преосталих пет задатака било је неопходно применити и знање о трансформацијама функција, у комбинацији са познавањем особина елементарних функција. Други, трећи, четврти и пети задатак носили су по 5 поена, док је шести задатак, у коме је функција дата са променљивим параметрима, носио 6 поена. Студенти су просечно остварили 6.74 поена, односно 26.9% у експерименталној и 6.89 поена, односно 27.6% од максималних 26 поена у контролној групи.



Слика 14. Грешка код испитивања функције $y = \sqrt[3]{x}$

У другом задатку је од студената тражено да скицирају графике двеју функција које се могу добити од функције трећег степена (кубне функције) вертикалном, односно хоризонталном translацијом, па да затим упореде особине добијених функција са особинама елементарне функције трећег степена. Овде су сви студенти, који су радили задатак, користили табеларну репрезентацију како би нацртали графике, а након тога је већина њих покушала да испита особине функција и да их упореди са особинама кубне функције користећи алгебарску репрезентацију. Велики је број студената који се нису снашли у овом задатку, а највећи проблем им је био упоређивање особина функција. И код овог задатка је било студената који су покушавали да примене изводе у испитивању особина функција.

Трећи задатак је, према својим захтевима, био сличан другом, с тим да је требало скицирати графике функција које се могу добити од функције $\sqrt[3]{x}$, вертикалном translацијом, односно централносиметричним пресликавањем. У овом задатку студенти су правили сличне грешке као у претходном, а и број студената који су тачно урадили

други и трећи задатак био је приближно исти, с тим да је нешто већи број студената који су грешили код испитивања особина функције $\sqrt[3]{x}$. Може се, дакле, рећи да је ова функција нешто компликованија студентима, односно да имају више потешкоћа са применом њених особина него са применом особина кубне функције.

У четвртом задатку од студената је захтевано да раде са графичким репрезентацијама функција добијених трансформацијама функције \sqrt{x} . Они су требали да одреде слику на којој се налазе графици функција добијених хоризонталном translацијом, односно осносиметричним пресликавањем у односу на x -осу графика функције \sqrt{x} . Оба графика су дата само на једној од четири понуђене слике. Поред избора одговарајућег графика, од студената је тражено и да објасне свој избор. Студенти су углавном покушавали да повежу функције са одговарајућим графицима, али је било много оних који нису дали никакво објашњење.

Међу студентима који су тачно урадили четврти задатак, уз коректно објашњење, највише је оних који су одређивали нуле функција или вредности функција када је независно променљива једнака нули, па на основу тога повезивали графике са одговарајућом функцијом. Било је и оних који су, користећи табеларну репрезентацију, посебно цртали графике датих функција, па их упоређивали са датим графицима. Свега неколико студената је покушало да одреди одговарајуће графике применом знања о геометријским трансформацијама графика функција, али у томе нису били успешни или су били делимично успешни. Када је реч о делимично успешним студентима, мисли се на оне који су тачно одредили који график одговара функцији g , уочивши да су вредности ове функције супротне одговарајућим вредностима елементарне функције \sqrt{x} , из чега су закључили да и њихови графици морају бити симетрични (у односу на апсцисну осу). Будући да се овај график налазио само на једној од слика, ово им је било довољно да дају тачан одговор, иако је већина њих погрешила код одређивања графика функције f , јер нису препознали, или нису на одговарајући начин применили хоризонталну translацију. Међутим, значајан је број студената који су на овај начин решавали задатак (и одредили график функције g), али су, због погрешно одређеног графика функције f , дали погрешан коначан одговор.

Пети задатак је, према својим захтевима, сличан четвртом, с тим да су, овога пута, графици функција f и g дати на засебним сликама. Ове функције су добијене од елементарне функције $\frac{1}{x}$, хоризонталном, односно вертикалном translацијом. Приступ који су студенти имали у решавању овог задатка сличан је оном у претходном задатку, с тим да је, међу одговорима који нису пропраћени образложењем, у овом задатку било више погрешних. Међу студентима који су дали тачне и коректно образложене одговоре, поново је највише оних који су покушавали да одреде пресечне тачке са координатним осама, док је мали број студената и овај задатак решавао користећи табеларну репрезентацију. Примећено је да је неколико студената направило грешке приликом покушаја да одреде пресечне тачке са координатним осама, јер су покушавали да одреде нуле функције g . Неки од студената су, највероватније разматрајући домен сваке од

функција, покушали да одреде и асимптоте. Малобројни студенти који су покушали да реше задатак применом геометријских трансформација графика елементарне функције $\frac{1}{x}$, најчешће су били половишно успешни, тј. сналазили су се са вертикалном, али не и са хоризонталном транслацијом, што је за последицу имало да је само један од њихова два одговора био тачан.

Шести задатак је био једини задатак на пре-тесту у коме је функција дата са параметрима. Од студената је, у овом задатку, тражено да, међу понуђеним графицима, идентификују оне који могу одговарати функцији f за одређене вредности параметара a и b , те да одреде одговарајуће вредности ових параметара за сваки од одабраних графика. За успешно решавање овог задатка било је неопходно познавање особина неколико елементарних функција (константа, линеарна, квадратна, кубна), али је такође било неопходно и да студенти успешно идентификују функције које могу настати једна од друге додељивањем одговарајућих вредности параметрима. Нико од студената није потпуно тачно урадио овај задатак, а мали број њих је одредио неке од одговарајућих графика уз коректно образложење и одређивање вредности параметара. Најмање је било оних студената који су препознали да функција f , у случају када је $b = 0$, постаје константа. Примећено је да је студентима представљало потешкоћу и одређивање вредности параметра a . Мањи број студената је покушао да реши овај задатак тако што су параметрима a и b додељивали произвољне вредности, па за тако добијене функције, коришћењем табеларне репрезентације, одређивали који график је одговарајући. Сви овакви покушаји су завршени без успеха.

Анализом резултата пре-теста, можемо приметити да је први задатак урађен знатно боље од осталих, што и није необично када се узме у обзир чињеница да је у овом задатку требало применити знање о особинама елементарних функција, док је у преосталим задацима било потребно радити и са трансформацијама функција или детаљније анализирати њихове особине и применити закључке ове анализе. Најмање тачних одговора било је у шестом задатку, где је требало радити са променљивим параметрима, који студентима нису блиски, иако су се, у већини случајева, са њима срели још током средњошколског образовања.

4.2.2. Статистичка анализа резултата пре-теста

У овом поглављу представљена је кратка статистичка анализа резултата пре-теста. Примењен је Студентов t -тест разлика између аритметичких средина два велика независна узорка. Статистички резултати пре-теста су дати у Табели 1.

У пре-тесту није било статистички значајне разлике међу тестираним групама, експерименталном и контролном, на нивоу значајности 0.05 ($t(246) = 0.170$; $p = 0.865$). Можемо приметити да је аритметичка средина броја бодова освојених на пре-тесту чак нешто већа код студената контролне групе, међутим ова разлика је занемарујућа, с

обзиром на чињеницу да није статистички значајна. Такође, занемарујућа је и разлика између стандардних одступања експерименталне и контролне групе.

Табела 1

Статистички резултати пре-теста

Група	Број студената	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлике између аритметичких средина	
	n	M	SD	t	$p(2\text{-стр.})$
Експериментална	124	19.991	11.235	0.170	0.865
Контролна	124	20.233	11.123		

Резултати пре-теста указују на то да је знање студената експерименталне и контролне групе уједначено, као и да међу самим студентима (без обзира на то у коју групу су распоређени), постоје велике разлике када је у питању знање функцијама и њиховим особинама. Оно што је такође примећено анализом ових резултата, јесте да је предзнање студената, када су у питању особине елементарних функција, задовољавајуће, али не и довољно добро, јер је велики број оних који праве грешке у испитивању најважнијих особина функција. Са друге стране, ови резултати указују и на то да је знање студената о трансформацијама функција веома оскудно, а нарочито је слабо када су у питању функције дате са променљивим параметрима. Веома је мали број студената који су показали да, барем делимично, разумеју утицај параметара на особине функције, односно, у конкретном случају, да препознају како промена вредности параметара утиче на промену типа функције.

4.3. Рад студената на трансформацијама функција током експерименталног истраживања

4.3.1. Формирање колаборативних група

Као што је напред поменуто, у обе групе, експерименталној и контролној, примењена је метода колаборативног рада. Након анализе резултата пре-теста, а на основу истих, формиране су колаборативне групе, унутар којих су студенти предодређени да сарађују ради остварења заједничког циља – овладавања знањима у области функција и њихових особина.

Приликом формирања колаборативних група, коришћене су Каганове инструкције (Kagan, 1994), према којима, током колаборативног рада, најбоље функционишу четворочлане групе. Приликом формирања оваквих група неопходно је водити рачуна о разликама у знању студената и њиховим међусобним односима, због успешности сарадње унутар група. Да би се остварила што већа хетерогеност сваке од група и, колико је то могуће, уједначеност група по питању знања чланова, приликом формирања група користе

се показатељи знања у посматраној области, као што је, у нашем случају, пре-тест који су студенти радили.

Поред хетерогености и уједначености по питању знања, неопходно је да унутар групе влада позитивна атмосфера и да буде што мање несугласица, али и што мање блиских пријатељстава. Због тога се, приликом формирања група, води рачуна да студенти међу којима постоје одређена негативна осећања, као и студенти коју су у блиским пријатељским односима, не буду распоређени у исту групу. Ово се постиже тако што, пре формирања група, сваки студент формира две листе, са највише по три члана. На једној од ове две листе налазе се имена других студената са којима је он или она у пријатељским односима, а на другој листи налазе се имена студената са којима се не слаже. Ове листе се узимају у обзир приликом формирања група.

Први корак у формирању група јесте да се у експерименталној и контролној групи формирају ранг листе студената, на којима би они били поређани према броју бодова остварених на пре-тесту, у растућем редоследу, односно од најлошијег до најбољег. Као што је напред поменуто, у обе групе, експерименталној и контролној, било је по 124 студената. Након формирања ранг листа, сваком студенту експерименталне групе, ради каснијег поређења, придружен је по један студент контролне групе. При томе је вођено рачуна да разлика у броју бодова оствареном на пре-тесту, међу студентима који чине један овакав пар, не буде већа од 2 бода.

Након оваквог рангирања студената формиране су мале четворочлане групе, на следећи начин: прву групу чине први, последњи и двоје студената из средине ранг листе. Уколико међу неким од овако одабраних студената постоје негативна осећања или блискост, један од студената са средине ранг листе би био замењен следећим суседним студентом на листи и поступак би био настављен. Уколико за оваквом заменом не би било потребе, прва група је формирана, њени чланови се изостављају са листе и прелази се на формирање следеће групе, што се ради на исти начин као и код претходне. Овај поступак се понавља док сви студенти са листе не буду распоређени у колаборативне групе. Формирање колаборативних група врши се на исти начин и у експерименталној и у контролној групи.

4.3.2. Анализа рада студената у колаборативним групама на трансформацијама функција

Резултати пре-теста који су студенти радили су у сагласности са резултатима ранијих истраживања, током којих су уочене бројне потешкоће са којима се студенти суочавају приликом рада са функцијама (Borba & Confrey, 1996; Daher & Anabousi, 2015; Lage & Geisman, 2006; Sever & Yerushalmy, 2007). Ови резултати су јасно указали на неопходност унапређивања знања студената о особинама елементарних функција. С тим у складу креирани су и задаци за вежбање, током колаборативног рада. У овим задацима нарочито су биле заступљене функције са чијим особинама су студенти имали потешкоће

на пре-тесту. Такође, ови задаци су прилагођени потреби за детаљнијим упознавањем студената са трансформацијама функција, односно утицајем промена у аналитичким изразима (алгебарска репрезентација) на особине функција и њихове графике (графичка репрезентација). Процењено је да би успешнијем разумевању трансформација функција допринело оспособљавање студената за рад са променљивим параметрима, односно за испитивање особина функција датих са променљивим параметрима и анализу утицаја тих параметара на особине посматраних функција.

Колаборативни рад студената је организован на факултету. Експериментална група је радила приближно 8 четрдесетпетминутних часова, а контролна 12 часова (у два, односно три дана). Студентима контролне групе је омогућено дуже време за рад јер је процењено да ће им за решавање задатака без употребе рачунара бити потребно више времена у односу на студенте експерименталне групе, који су користили рачунар.

Током колаборативног рада, студенти експерименталне и контролне групе су решавали задатке дате у Прилогу 4. Свака група је задатке решавала самостално, а ради отклањања евентуалних недоумица по питању захтева у задацима, чланови групе су имали могућност да се консултују са наставницима. Свака од малих група је била у обавези да преда заједнички писани рад, с тим да су студенти експерименталне групе могли графике функција, добијене помоћу софтвера *GeoGebra*, доставити у електронском облику. Сви чланови мале групе су добијали по 5 бодова за успешно урађене задатке, у обе групе.

Због потребе за утврђивањем градива везаног за особине елементарних функција, први задатак је био исти као на пре-тесту. Идеја је била да студенти, радећи једни са другима у колаборативним групама, међусобном разменом идеја и искустава допринесу бољем упознавању и разумевању особина елементарних функција, али и отклањању одређених недоумица код оних студената који су на пре-тесту имали потешкоћа у овом задатку.

Студенти су били упознати са испитивањем функција датих без параметара и због тога су, током решавања првог задатка, спонтано поделили улоге између себе на начин сличан ономе који је приказан у раду (Такаћи et al., 2015) (у скоро свим малим групама). Најчешће су делили улоге тако да троје студената врше потребна израчунавања, док би један студент цртао графике испитиваних функција и надзирао читав процес решавања проблема, док су, у неким групама, улоге биле подељене тако да двоје студената врши израчунавања, један студент црта графике функција, а један надзире процес решавања проблема. Студенти су, током решавања овог задатка, повремено мењали улоге између себе.

У неколико група студенти су, на самом почетку, питали да ли могу поделити функције између себе, тако да сваки студент уради комплетан процес испитивања особина и цртања графика одређеног броја функција у првом задатку. Овим студентима је скренута пажња да то не раде, због тога што би таква подела онемогућила колаборативни рад, јер би студенти задатке радили индивидуално. Након датог објашњења и ови студенти су поделили улоге на један од два раније описана начина.

Студенти експерименталне групе започели су свој колаборативни рад добијањем повезаних алгебарских и графичких репрезентација функција истовремено на екрану, коришћењем образовног софтвера *GeoGebra*. Затим су могли анализирати особине графика функције и повезати своје закључке са особинама функције добијеним алгебарском репрезентацијом (анализирајући аналитичке изразе). Радећи први задатак студенти нису користили клизач, нити су за тим имали потребе, јер у овом задатку није било трансформација функција. Рад са рачунаром омогућио је студентима експерименталне групе да брже ураде први задатак, јер су графике функција добили помоћу програма *GeoGebra*, а паралелна анализа графичке и алгебарске репрезентације олакшала је и испитивање особина, јер су, посматрајући графике функција, студенти могли извести закључке о неким особинама функција и без коришћења алгебарске репрезентације. Међутим, примећено је да су поједине групе студената, радећи са рачунаром, паралелно исте особине анализирала и коришћењем алгебарске репрезентације, највероватније због тога што им је алгебарска репрезентација била блиска, па су на тај начин контролисали резултате добијене коришћењем графичке репрезентације у програму *GeoGebra*.

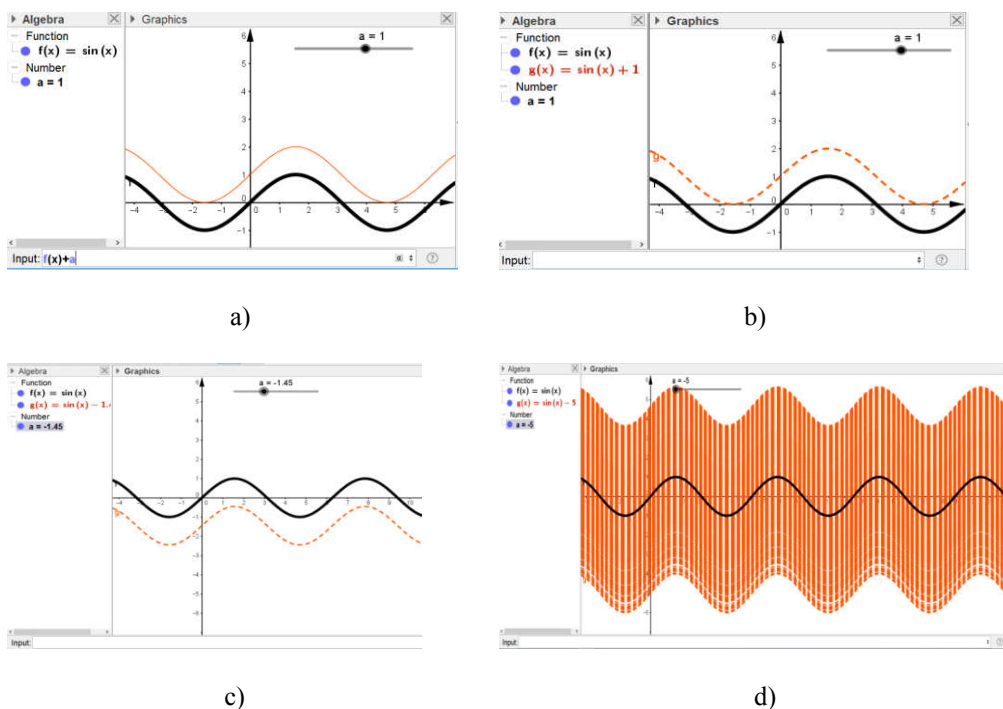
Што се тиче студената у контролној групи, они су први задатак решавали искључиво коришћењем алгебарске репрезентације, односно преласком са алгебарске на графичку репрезентацију, као што су радили и на пре-тесту, односно током ранијег изучавања функција и њихових особина. Неке групе студената су директно прелазиле са алгебарске на графичку репрезентацију, цртајући графике функција само на основу претходно испитаних особина, односно одређених тачака пресека са координатним осама, екстремних вредности, асимптота и испитане монотонсти токова функција. У осталим групама студенти су, поред испитаних особина, за цртање графика користили и табеларну репрезентацију функција. Студенти обе групе, експерименталне и контролне, урадили су први задатак коректно, и то за веома кратко време.

Почевши од другог задатка па надаље, студенти су били суочени са задацима у којима се посматрају функције са параметрима. У обе групе су прво разматрали особине сваке појединачне функције (добијене додељивањем одговарајућих вредности параметрима), а затим су доносили закључке о утицају параметара. Због тога су, већ од почетка другог задатка, у обе групе морали да мењају улоге током процеса колаборативног рада. У обе групе, један студент је записивао одговоре, а један је водио процес решавања задатка, јер је морао да предложи одговарајуће вредности параметара у циљу добијања функција чије је особине требало испитати.

- У експерименталној групи, студент који је радио на рачунару је померао клизач како би добио различите вредности параметара. Четврти студент је испитивао особине сваке од добијених функција.
- У контролној групи студенти су кретали од алгебарске репрезентације сваке функције и један студент је радио на одговарајућој табеларној и графичкој репрезентацији, док су остали испитивали особине исте функције дате алгебарски.

Затим су сво четворо студената анализирали особине сваке функције појединачно, пре него што су записали одговор.

У другом задатку је тражено од студената да, за сваку од функција из првог задатка, скицирају графике и испитају особине функција $f(x) + a$, $f(x + a)$, $af(x)$ и $f(ax)$. Дакле, требало је испитати особине функција које су настале трансформацијама (вертикалном и хоризонталном транслацијом и дилатацијом) сваке од елементарних функција испитаних у претходном задатку. Такође је захтевано да опишу утицај параметра a на особине ових функција, што су могли постићи поређењем особина сваке од функција насталих одређеном трансформацијом са особинама одговарајуће елементарне функције. Пример решавања овог задатка уз помоћ рачунара дат је на Слици 15.



Слика 15. Трансформације синусне функције добијене коришћењем пакета *GeoGebra*.

У овом задатку је било могуће употребити клизач и друге динамичке особине образовног софтвера *GeoGebra* и сви студенти експерименталне групе су почели да раде на овај начин. Почели су од опште алгебарске репрезентације посматране функције и истовремено добијали алгебарске и графичке репрезентације различитих специјалних случајева (функција). На пример, након дефинисања клизача a , уношења функције $f(x) = \sin(x)$ и уношења израза $f(x) + a$ у поље за унос, студенти су добили, према подразумеваним поставкама, график функције $\sin(x) + 1$, приказан на слици 15.a). На слици 15.b) овај график је приказан испрекидном линијом, како би се боље разликовао од графика елементарне синусне функције. Затим су, померањем клизача a , студенти

добијали различите функције, као што је приказано на слици 15.c). На слици 15.d) приказани су графици различитих одговарајућих функција, добијени померањем клизача, при чему је истовремено коришћена наредба „укључи траг“ у програму *GeoGebra*.

Студенти су наредбу „укључи траг“ користили код испитивања свих функција у овом задатку, не само код синусне. Ова наредба је омогућила да график сваке од добијених функција остаје, тј. оставља свој траг на екрану и након што се, даљим померањем клизача, промени вредност одређеног параметра, а самим тим се промени и функција. Захваљујући динамичким особинама образовног софтвера *GeoGebra*, студенти експерименталне групе су могли да, за веома кратко време анализирају, велики број функција добијених од функције f помоћу одговарајућих параметара. Поред тога, могли су да прате промене на графику функције и да, посматрањем графика, анализирају на који начин промене вредности параметара утичу на особине и график функције, што је, између осталог, од њих захтевано у овом задатку.

Студенти у контролној групи су други задатак радили тако што су кретали од алгебарских репрезентација функција. Најпре су бирали одговарајуће параметре и, за сваку појединачну функцију, формирали су табелу вредности и испитали особине функција користећи алгебарску репрезентацију. Коришћењем добијених резултата скицирали су графике функција. Као вредности параметра a углавном су бирали ± 1 , док је неколико њих покушало да додели параметру и друге целобројне вредности (углавном вредност 2). Анализом њихових резултата уочено је да су имали доста потешкоћа да опишу утицај вредности параметра на особине функција, те да нису у довољној мери разумели овај утицај.

Трећи задатак је био сличан другом, с тим да је, овога пута, функције требало посматрати са два параметра, чиме је једна функција била истовремено изложена двама трансформацијама (нпр. хоризонтална и вертикална транслација, хоризонтална транслација и дилатација и сл.). Приступ студената експерименталне групе у решавању овог задатка био је исти као и у другом задатку. За дефинисање параметара користили су два клизача у програму *GeoGebra*. Анализом одговора студената утврђено је да су они, у већини малих група, додељивали вредност једном параметру, а затим, померањем одговарајућег клизача, мењали вредност другог параметра, при чему би анализирали његов утицај на особине и график функције. Затим би фиксирали вредност тог параметра, па на исти начин анализирали утицај оног другог.

Важно је напоменути да су студенти експерименталне групе, у другом и трећем задатку, приликом описа утицаја параметара, посебно наглашавали промене, које су се, услед померања клизача и мењања вредности параметара, јављале код графика, односно особина функције, а које би им се учиниле значајним (што углавном и јесу биле). То су, најчешће, били случајеви у којима је од једне елементарне функције, одговарајућим трансформацијама, настајала функција другог типа, која, на први поглед, нема никакве везе са елементарном. Тако су, на пример, у неколико малих група студенти приметили да,

применом трансформације $af(x) + b$, $f(ax) + b$ или $f(ax + b)$ на експоненцијалну функцију, када параметру a доделе вредност нула, настаје константна функција.

Студенти у контролној групи су трећи задатак такође решавали на исти начин као други, с тим да су имали знатно више потешкоћа анализирајући утицај два параметра истовремено, него што је то био случај са једним параметром. Они су и у овом задатку узимали вредности ± 1 за параметре, при чему је, у односу на претходни задатак, било још мање оних који су покушали да посматрају било какве друге вредности параметара. Интересантно је да су, у свега три групе, посматрани случајеви када параметар b узима вредност нула, док за параметар a уопште није разматрана ова могућност.

Четврти задатак, иако према захтевима сличан другом и трећем, разликовао се од њих по томе што су, на самом почетку, функције биле дате са параметрима. Дакле, у другом и трећем задатку је требало посматрати трансформације елементарних функција које су настајале додавањем параметра или множењем функције или њеног аргумента одређеним параметром, а у четвртом задатку се полази од функције у којој егзистирају променљиви параметри. Ово је заправо први задатак у оквиру колаборативног рада у коме студенти могу посматрати однос „родитељ-дете“ међу функцијама, о коме говори McClagan (2013). Гледано из овог угла, функције f и g представљају родитељске функције, док све функције, које од њих могу настати за одређене вредности параметара a и b , представљају ћерке функције. Студенти експерименталне групе су овај задатак радили аналогно другом и трећем, односно коришћењем алгебарске и графичке репрезентације истовремено, с тим да су овде могли уочити више случајева у којима функција, за одређене вредности параметара, добија облик сасвим друге функције, односно у којима се родитељска функција и ћерке функције значајно разликују.

Код студената експерименталне групе је, такође, уочен велики број различитих приступа у решавању овог задатка. Студенти су, углавном, користили различите алгебарске и графичке репрезентације функција добијених додељивањем различитих вредности параметрима. Али, било је 7 решења четвртог задатка где су студенти приказали особине функције f (Слика 16), а затим анализирали неколико појединачних функција које потичу од функције f . Код 22 решења анализирани су нуле параметара и различити типови функција које потичу од функције f али код 9 решења није било овакве анализе. Тако су, на пример, студенти у поменуте 22 мале групе уочили да функција f може бити константна када је вредност параметра b нула, линеарна за $b = 1$, квадратна за $b = 2$ или било која друга степена функција за одговарајућу вредност параметра b . Међутим, у неколико група студенти су уочили и нагласили да од ове функције може потицати и функција квадратног корена, за $b = 1/2$, функција кубног корена за $b = 1/3$ и сл. Када је у питању функција g , студенти су уочили и неке од њених специјалних случајева, као што је, на пример, константна функција, дефинисана на целом скупу реалних бројева осим у нули, која настаје од функције g када параметри a и b имају једнаке вредности. Скоро сви студенти експерименталне групе су анализирали и геометријске трансформације функција f и g .

Што се тиче студената у контролној групи, они су четврти задатак такође радили на исти начин као и претходна два, тј. користећи алгебарску репрезентацију и, у појединим групама, табеларну, те анализирајући неколико целобројних вредности параметара a и b . За разлику од студената експерименталне групе, који су имали различите приступе у решавању овог задатка, студенти контролне групе су, углавном, користили исти приступ. Они су у овом задатку правили већи број грешака него у претходна два. Када је у питању функција f , студенти су имали највише потешкоћа да објасне како параметри утичу на особине функције. На пример, у већини случајева нису успевали да објасне утицај знака параметра a на монотоност функције. Будући да су параметру b , у овом задатку, углавном додељивали вредности 1 или 2, многи интересантни случајеви су остали неразмотрени у контролној групи. Код функције g је много више долазило до изражаја непознавање појединих особина елементарних функција, односно недовољна оспособљеност студената за њихову примену. Дешавало се да студенти помешају вредности независно променљиве за које функција није дефинисана и нуле функције, па је, у једном случају, дат одговор да функција није дефинисана за $x = a$, а да је нула функције $x = b$. У неколико радова је примећено да је студенте збуњивао случај када параметри a и b имају једнаке вредности, тј. започињали су разматрање овог случаја али би убрзо одустали од њега (што се могло видети на писаним радовима које су предавали).

$f(x) = a \cdot x^b$	
$b > 0$	
I	
1. slučaj	2. slučaj
b - паран	b - непаран
Domen: \mathbb{R}	Domen: \mathbb{R}
Kodomen: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	Kodomen: \mathbb{R}
Нуле: $x=0 \Rightarrow y=0$	Нуле: $x=0 \Rightarrow y=0$
Знак: увек ≥ 0	Знак: $y > 0$ за $x > 0$ $y < 0$ за $x < 0$
Парност: парна	Увек растућа
* примери	

Слика 16. Студентски рад.

У петом и шестом задатку студенти су добили алгебарске репрезентације функција датих са параметрима, а захтевано је да испитају утицај сваког од параметара, при чему би други параметар био фиксиран. У другом делу задатка (5.c) и 6.c)) студенти су требали да, међу понуђеним функцијама, одаберу оне које би могле потицати од дате функција са параметрима, те да за сваку од одабраних функција одреде вредности одговарајућих параметара. Приликом решавања ових задатака студенти нису били у обавези да користе графичку репрезентацију, а у задацима 5.c) и 6.c) нису ни могли да је користе, односно, њено коришћење би им, у овим случајевима, додатно отежало посао. У шестом задатку је,

поред параметара a и b , у функцији егзистирао још један, целобројни параметар k . Овај параметар је утицао на знак и вредност косинуса, па самим тим и на вредност функције.

Студенти експерименталне групе су у задацима 5.a) и 5.b), односно 6.a) и 6.b), користили и алгебарску и графичку репрезентацију, односно у програму *GeoGebra* фиксирани један параметар, а затим посматрали утицај другог или, у шестом задатку, преостала два на особине функције, кроз промене које су уочавали у алгебарској и графичкој репрезентацији посматране функције. Студенти експерименталне групе су успешно решили оба задатка, а нису имали већих потешкоћа ни са препознавањем одговарајућих функција у задацима 5.c) и 6.c), а успешно су анализирали и утицај целобројног параметра k на особине функције.

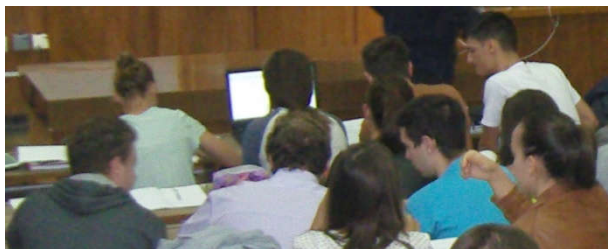
У контролној групи су студенти, у ова два задатка, користили искључиво алгебарску репрезентацију функција и, помоћу ње, испитивали утицај параметара на особине функција. Као и у претходним задацима, утицај одређеног параметра испитивали су анализирајући особине функције за целобројне вредности посматраног параметра, најчешће ± 1 . То је за резултат имало недовољно добро објашњење, тј. неадекватан опис утицаја одређеног параметра, јер су разматрана најчешће само два могућа случаја. Последица оваквог испитивања утицаја параметара видела се већ у задацима 5.c) и 6.c), где су студенти често изостављали неке од функција које могу потицати од дате родитељске функције, или бирали погрешне функције. Тако, на пример, велики број студената контролне групе није приметио да функција g_6 у петом задатку одговара функцији f када је $a = 0$ и $b = -7$. Многи су, са друге стране, функцију g_2 означили као функцију која може потицати од f , иако то није могуће ни за једну вредност променљивих параметара. У шестом задатку је било много сличних грешака, а нарочито је била упадљива чињеница да је велика већина студената контролне групе одабрала функцију g_1 као функцију која може потицати од f , иако функција f не садржи променљиву као аргумент косинусне функције, односно у функцији f косинус има константну вредност, која зависи од вредности параметра k .

По завршетку колаборативног рада, у обе групе, експерименталној и контролној, уследила је дискусија и анализа задатака. Том приликом су сви студенти могли да увиде где су грешили, како би исправили своје грешке. Студенти експерименталне групе су знатно више дискутовали о утицају параметара на особине функција, а нарочито о специјалним случајевима у којима, за одређене вредности параметара, од једне родитељске функције настају ћерке функције потпуно различитог типа. Студенти контролне групе нису ни могли много да дискутују о оваквим случајевима, јер су разматрали веома мали број вредности параметара, и то целобројних. Већина студената контролне групе уопште није разматрала случајеве када параметри узимају вредност нула, што значи да нису посматрали неке од веома интересантних случајева погодних за дискусију, док су, са друге стране, студенти из експерименталне групе, који су користили образовни софтвер *GeoGebra*, урадили много више примера разматрајући различите вредности параметара у задацима у којима је требало да раде са параметрима. Они су,

такође, ове задатке урадили знатно брже у односу на студенте контролне групе, који су радили без рачунара.

Студенти експерименталне групе су имали веће могућности за конструкцију знања, размену идеја и спровођење процеса учења на сопствени начин. Будући да су радили у малим групама са рачунарима на испитивању функција датих са параметрима, студенти из експерименталне групе су имали много више времена за испитивање исте функције са различитих тачака гледишта. Са друге стране, студенти из контролне групе нису имали такве могућности. Они су примењивали готово исти поступак за сваки задатак.

На [Слици 17](#) приказан је процес колаборативног рада студената који су користили образовни софтвер *GeoGebra*.



Слика 17. Процес колаборативног рада.

4.4. Тестирање студената након процеса колаборативног рада

Месец дана након колаборативног рада, сви студенти (обе групе, експерименталне и контролне) су радили тест, дат у Прилогу 5. Време за израду задатака на тесту било је 120 минута, а студенти приликом израде нису имали могућност коришћења рачунара. Тест је био идентичан за студенте експерименталне и контролне групе. Задаци су креирани тако да омогуће проверу савладаности градива везаног за особине функција, са нагласком на утицај променљивих параметара на ове особине и трансформације функција. Анализа резултата теста по задацима дата је у Поглављу 4.4.1, док је статистичка анализа резултата теста дата у Поглављу 4.4.2.

4.4.1. Анализа резултата теста по задацима

У овом поглављу представљен је опис сваког од задатака на тесту, са нагласком на утицај образовног софтвера *GeoGebra* на разумевање трансформација функција и особина функција. Посебно је анализиран утицај алгебарске и графичке репрезентације (коришћених заједно, у исто време) на разумевање особина функција у погледу њихових трансформација. Показано је да су студенти, који су радили са образовним софтвером *GeoGebra*, боље разумели особине функција када су учили повезујући алгебарску и графичку репрезентацију, тј. када су користили вишеструке репрезентације.

Резултати теста (Табела 2) показују да су студенти који су радили у експерименталној групи, са образовним софтвером *GeoGebra*, имали боље резултате у свим задацима него студенти у контролној групи.

Напоменимо да су студенти обе групе имали најбоље резултате у првом задатку, зато што су са квадратном функцијом и њеним особинама били боље упознати него са другим функцијама. Интересантно је приметити да су студенти контролне групе имали најлошији резултат у десетом задатку, у коме је графичка репрезентација функција била кључна у њиховој анализи и поређењу. Најмања разлика у процентима била је у четвртом задатку. То се може објаснити чињеницом да студенти увек имају потешкоћа у раду са тригонометријским функцијама, са или без рачунара.

Процент у осмом и деветом задатку је био скоро исти, у обе групе респективно. Разлика између резултата експерименталне и контролне групе је значајна (око 18%). То значи да коришћење образовног софтвера *GeoGebra* доприноси бољем разумевању трансформација функција, чак и када се посматрају њихове алгебарске репрезентације.

Табела 2

Процент тачних одговора за сваки задатак.

Задатак \ Група	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Експериментална	73	55	48	51	52	49	50	52	53	53
Контролна	53	40	33	41	33	36	37	35	35	30

У Табели 3 приказани су проценти тачних интерпретација геометријских трансформација у оквиру графичких репрезентација трансформација функција (проценти у Табели 3 представљају удео тачних интерпретација геометријских трансформација међу тачним одговорима у посматраним задацима). С обзиром на то да је транслацију функције f било неопходно посматрати како би трећи задатак био тачно урађен, било је 100% тачних примена геометријских трансформација у овом задатку. Интересантно је приметити да је разлика између процената тачних примена геометријских трансформација у експерименталној и контролној групи око 20% у сваком задатку осим у првом. То је било очекивано, зато што су студенти били упознати са геометријским трансформацијама у оквиру графичких репрезентација трансформација квадратне функције, али не и са таквим трансформацијама других функција.

Нагласимо да је било студената у експерименталној групи (њих око 20%, видети Табелу 3) који су у шестом и седмом задатку користили транслације графика у графичким репрезентацијама функција, док у контролној групи није било таквих разматрања.

Можемо закључити да примена образовног софтвера *GeoGebra* у оквиру колаборативног рада доприноси бољем разумевању геометријских трансформација у оквиру графичких репрезентација трансформација функција.

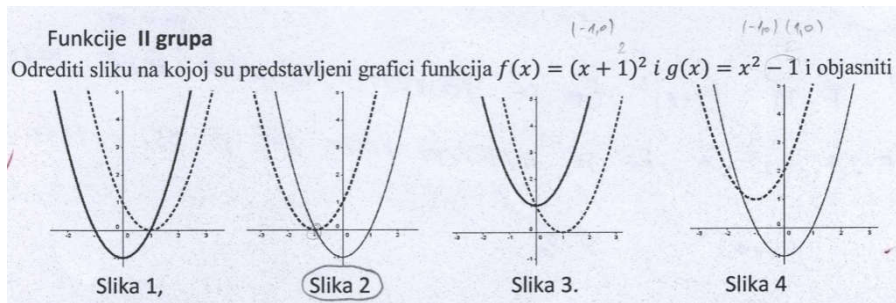
Табела 3

Процент коректних примена геометријских трансформација.

Група \ Задатак	Задатак						
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Експериментална	42	33	100	31	25	19	20
Контролна	29	11	100	10	5	0	0

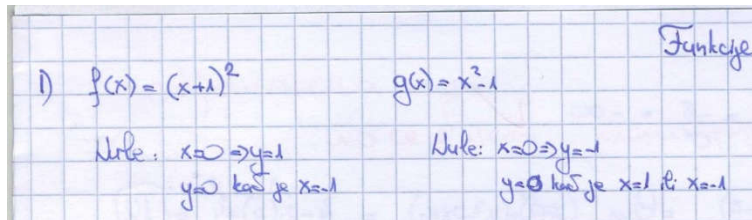
У првом и другом задатку од студената је захтевано да раде у оквиру алгебарске и графичке репрезентације исте функције.

У првом задатку дате су четири слике, а на једној од њих су представљени графици функција f и g датих у задатку. Од студената је тражено да одреде ту слику и да објасне своје одговоре. Решење првог задатка дато је на [Слици 18](#). Највећи број студената обе групе је користио табеларну репрезентацију функција у циљу повезивања алгебарске и графичке репрезентације. У ствари, они су израчунавали неке вредности функција и повезивали их са одговарајућим тачкама на графицима. Решење дато на [Слици 18](#) је интересно зато што су у њему заједничке нуле повезане са одговарајућом пресечном тачком графика.



Слика 18. Пример тачног решења првог задатка.

Примећено је да су неки од студената били збуњени са нулама функција, те да су разматрали пресечне тачке графика функција са обема осама као нуле функције ([Слика 19](#)).



Слика 19. Студентски рад.

Неки од студената су решавали први задатак анализирајући геометријске трансформације. Њих је, као што се види у Табели 2, било 42% у експерименталној,

односно 29% у контролној групи. Они су препознали да функције f и g настају трансформацијама квадратне функције, те да њихови графици настају хоризонталном, односно вертикалном транслацијом графика квадратне функције. Ови студенти су дали коректно образложење својих одговора.

У другом задатку од студената је такође тражено да одреде слику на којој су приказани графици функција f и g , да образложе свој одговор, али и да испитају особине датих функција. Студенти су овај задатак радили аналогно првом, али су њихови резултати у обе групе били лошији него у првом, зато што су студенти боље упознати са квадратном функцијом и њеним особинама него са квадратним кореном. И проценат оних који су задатак тачно решили применом геометријских трансформација био је знатно мањи у односу на први задатак. Међу студентима који су задатак решавали применом геометријских трансформација било је доста оних који су правили грешке, нарочито у контролној групи, а једна од грешака које су се најчешће појављивале у њиховим радовима било је непрепознавање оносиметричног пресликавања функције квадратног корена у функцију g . Као што је раније поменуто, овакве грешке су се јављале и у претесту, у сличном задатку, али су неки од студената имали потешкоћа са оваквим задацима и током колаборативног рада, што указује на лошије познавање особина ове и сличних функција у односу на особине квадратне функције и функција од ње добијених трансформацијама.

У трећем задатку је требао одредити који од три графика, приказана на слици, одговарају функцији $f(x) = \sqrt[3]{x}$, а затим одредити аналитичке изразе функција за преостала два графика приказана на тој слици и испитати особине тих функција. Приликом решавања овог задатка већина студената је користила табеларну репрезентацију функције f у циљу препознавања њеног графика. Било је и оних студената, нарочито у контролној групи, који су, коришћењем алгебарске репрезентације, испитали особине функције f и посебно скицирали њен график, па га упоређивали са датим графицима. Скоро сви студенти у обе групе су тачно испитали домен функције квадратног корена (**други задатак**), али било је студената (углавном у контролној групи) који су написали да функције у другом и трећем задатку имају исти домен, односно да ни функција $\sqrt[3]{x}$ није дефинисана за негативне вредности независно променљиве.

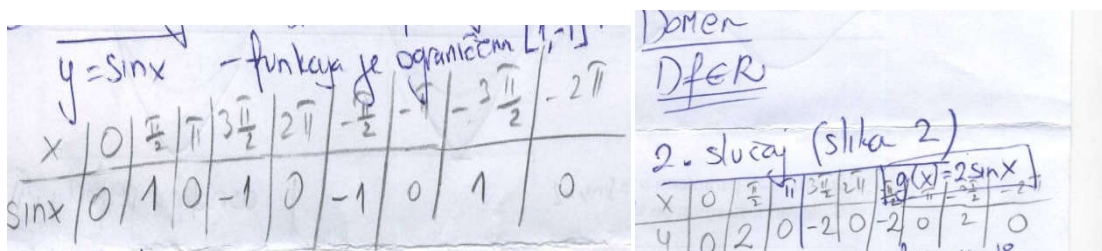
У другом делу овог задатка студенти су морали да користе графичке репрезентације. У ствари, требало је да препознају да су друга два графика настала „померањем“ графика функције f десно и доле па да, сходно томе, одреде њихове аналитичке изразе. Дакле, требало је извршити прелаз са графичке на алгебарску репрезентацију, односно применити знање о геометријским трансформацијама у оквиру графичких репрезентација функција. Резултати су показали да су студенти у експерименталној групи много боље упознати са конструкцијом одговарајућих алгебарских репрезентација у односу на студенте у контролној групи.

Као што се види из Табеле 1, овај задатак је тачно урадила свега трећина студената контролне групе и нешто мање од половине студената експерименталне групе. Студенти

су, у овом задатку, најчешће грешили код одређивања аналитичких израза функција добијених трансформацијама функције f , и то тако што, код хоризонталне транслације, у аналитичком изразу аргументу функције додавали позитиван параметар, не сетивши се при том да додавање позитивног параметра аргументу функције проузрокује померање улево, а додавање негативног параметра померање удесно. Овде је било и других грешака, као што су замена хоризонталне и вертикалне транслације, погрешно одређивање вредности параметра, грешке у испитивању особина функција и сл.

У четвртном задатку дата је графичка репрезентација синусне функције, а од студената се захтевало да скицирају графике функција добијених трансформацијама синусне функције. На првој слици је требало скицирати графике функција који настају вертикалном транслацијом графика синусне функције, а на другој дилатацијом истог. Дакле, студенти су, у овом задатку, добијали графичке репрезентације функција датих њиховим алгебарским репрезентацијама (коришћењем алгебарске и графичке репрезентације синусне функције). Од студената је такође тражено да одреде нуле, као и тачке минимума и максимума датих функција.

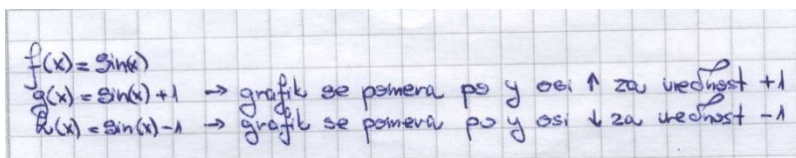
Велики број студената у обе групе користио је табеларну репрезентацију датих функција и цртао њихове графике. Рад једног од студената који су имали овакав приступ у решавању задатка, приказан је на [Слици 20](#).



Слика 20: Студентски рад.

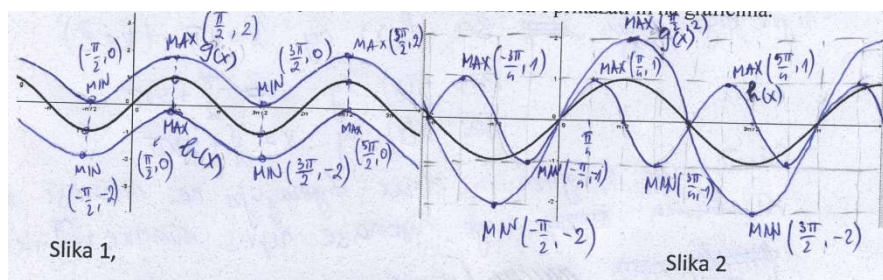
Било је много студената у обе групе који су испитали синусну функцију на почетку задатка, укључујући и њену табеларну репрезентацију, а затим, на исти начин, испитивали остале функције.

Међутим, у експерименталној групи је било више оних студената (видети [Табелу 2](#)), који су, у оквиру алгебарске репрезентације, применили знање о геометријским трансформацијама. Рад једног од студената, приказан на [Слици 21](#), пример је оваквог приступа.



Слика 21. Студентски рад.

Интересантно је напоменути да је у експерименталној групи било чак 73% тачних решења испитивања особина функције коришћењем графичких репрезентација (као што је приказано на [Слици 21](#)), са или без алгебарских репрезентација. Неки од студената који су задатак решавали на овај начин описивали су геометријске трансформације којима је био изложен график синусне функције, а услед којих су настајали графици осталих функција у овом задатку. Велики број студената експерименталне групе приказао је особине функција графички, као што је приказано на [Слици 22](#).



Слика 22. Студентски рад.

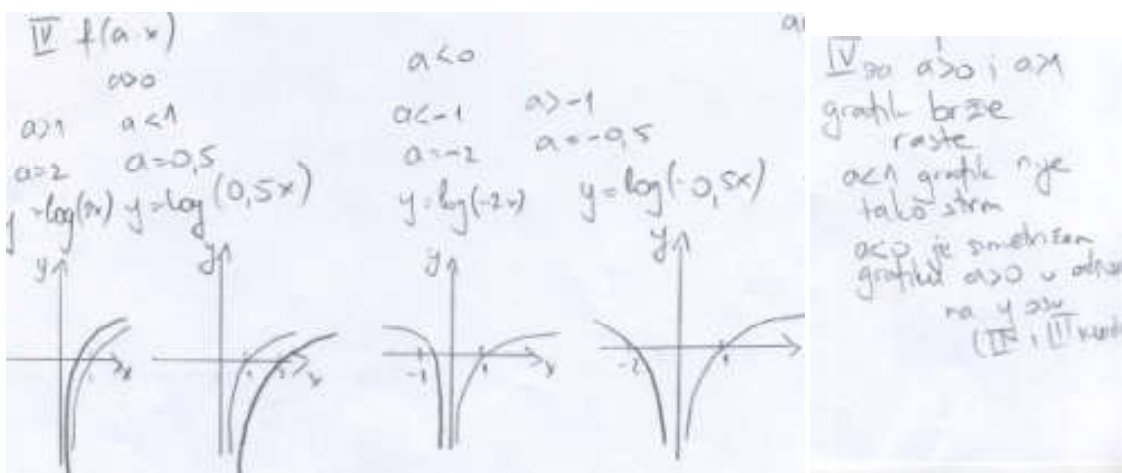
Решавајући четврти задатак, студенти контролне групе су испитивали функције само коришћењем алгебарске репрезентације. Веома мали део студената контролне групе покушао је да примени и знање о геометријским трансформацијама, али је, том приликом, у доста случајева долазило до грешака. Тако су, на пример, неки од ових студената заменили графике функција $2\sin(x)$ и $\sin(2x)$, или су нацртали графике који не одговарају ниједној од датих функција.

У петом задатку студенти су требали да одаберу произвољну функцију, а затим да испитају функције добијене одговарајућим трансформацијама одабране функције, односно да дају њихове алгебарске и графичке репрезентације и да испитају њихове особине. Један од начина да ово ураде био је да прво одреде аналитичке изразе тражених функција, па да затим, прелазећи са алгебарске на графичку репрезентацију, испитају особине и нацртају графике функција. У овом случају су, по сопственом нахођењу, могли користити и табеларну репрезентацију. Друга могућност је била да нацртају график одабране функције, користећи алгебарску и/или табеларну репрезентацију, па да затим анализирају геометријске трансформације унутар тако добијених графичких репрезентација, прузроковане трансформацијама у алгебарској репрезентацији одабране функције.

Највећи број студената у експерименталној групи је, за анализу, одабрао квадратну функцију, док је на другом месту била линеарна. Међутим, било је 24 студената експерименталне групе који су разматрали неке друге функције, као што су кубна, експоненцијална и друге. Једна студенткиња, из експерименталне групе, разматрала је одговарајуће логаритамске функције за различите вредности параметра a . Она је такође анализирала утицај параметра a на особине функције и приказала геометријске интерпретације трансформација функција ([Слика 23](#)). На основу последње две скице на слици 23, она је закључила следеће: Ако је $a < 0$, онда се график функције налази у

другом и трећем квадранту и симетричан је у односу на y -осу графику одговарајуће функције када је $a > 0$.

Интересантно је да је, чак и у експерименталној групи, број студената који су коректно применили геометријске трансформације у решавању петог задатка био знатно мањи него у претходним задацима (свега четвртина, видети Табелу 2). Један од могућих разлога томе јесте што су задатака (видети табеле 1 и 2) указују на то да се студенти експерименталне групе боље студенти и даље сигурнији у испитивање особина функција у оквиру алгебарске репрезентације, а када би већ испитали функције и скицирали графике користећи алгебарску и, евентуално, табеларну репрезентацију, нису имали потребе да накнадно анализирају и геометријске трансформације. Ово наводи на претпоставку да, иако резултати до сада анализираних сналазе у примени геометријских трансформација него студенти контролне групе, не значи да ће они изабрати примену ових трансформација за решавање задатака уколико се то од њих не захтева.



Слика 23. Студентски рад.

Сви студенти контролне групе су разматрали квадратне или линеарне функције и урадили задатак мање или више тачно (видети Табелу 2). Студенти контролне групе су, највећим делом, радили задатак на први од два раније описана начина, користећи алгебарску репрезентацију и цртајући график на основу ње, евентуално уз помоћ табеларне репрезентације. Изузетно мали број њих је анализирао геометријске трансформације добијених функција.

У шестом задатку студенти су добили алгебарску репрезентацију функције f , дате са два параметра и требало је да је повежу са датим графичким репрезентацијама додељујући одговарајуће вредности параметрима, а затим да анализирају особине одабраних функција. Од студената је, у овом задатку, захтевано и да одреде бар један пар вредности параметара, тако да функција има вредност нула. Дакле, у овом задатку је било неопходно истовремено анализирати алгебарску и графичку репрезентацију функције дате са параметрима, односно одредити која графичка репрезентација би јој могла одговарати

(прелазак са алгебарске на графичку репрезентацију), а затим, на основу одабране графичке репрезентације, одредити одговарајуће вредности параметара, тј. употпунити алгебарску репрезентацију конкретне функције. Дата функција са параметрима представља класу функција које се, одговарајућим трансформацијама, могу добити од експоненцијалне функције. Будући да елементарна експоненцијална функција нема нуле, било је интересно анализирати како ће се студенти снаћи са одређивањем нула дате функције са параметрима, односно са одређивањем пара вредности параметара за које функција има нуле. У овом делу задатка долази до изражаја познавање утицаја трансформација, односно утицаја вредности параметара на особине функције. Због тога је претходно тражено да се анализирају особине функција за вредности параметара у конкретним случајевима, јер би таквом анализом, уколико би она била коректно спроведена, студенти уочили случајеве у којима дата функција има нуле.

Највећи део студената експерименталне групе је први део задатка урадио тачно, одабравши одговарајуће графика функција и одредивши одговарајуће вредности параметара. Неки од њих су правили грешке у другом делу задатка, током анализе особина функција или током одређивања пара вредности параметара за који функција има нуле. И поред тога, отприлике половина студената експерименталне групе је цео задатак урадила тачно, као што се види у Табели 2. Мали број студената експерименталне групе је овај задатак решио применом геометријских трансформација, односно анализирајући одговарајућа померања графика експоненцијалне функције.

У контролној групи студенти, код решавања шестог задатка, нису користили геометријске трансформације. Они су задатак решавали, у највећем броју случајева, користећи познавање особина и графика експоненцијалне функције, при чему су се многи од њих помагали одређивањем тачака пресека са координатним осама и знака функције. Важно је нагласити да је у контролној групи било много студената који нису препознали да је график функције $f(a = 0, b = 0)$ дат на слици b), у задатку 6 у Прилогу 5, што би управо могла бити последица повезивања ове функције са експоненцијалном без анализе могућности да, за одређене вредности параметара, од једне функција настане функција која припада другој класи, о чему је раније било речи. Са друге стране, студенти експерименталне групе готово да нису правили овакве грешке. То значи да коришћење образовног софтвера *GeoGebra* омогућава студентима разумевање различитих типова функција које могу бити добијене као резултат трансформација функција. Тако је, на пример, функција f , дата у шестом задатку, експоненцијална, а функција чији је график дат на слици b) у шестом задатку је константа функција, али може бити добијена од функције f узимањем вредности $a = 0, b = 0$.

Седми задатак је, према својим захтевима у првом делу, био сличан шестом, с тим да су овога пута били дати аналитички изрази двеју функција са параметрима, које је требало повезати са одговарајућим графицима, а затим одредити одговарајуће вредности параметара за сваки од случајева. Дате функције се могу добити трансформацијама од елементарне функције $\frac{1}{x}$. Посматрано са аспекта геометријских трансформација, график

функције f се добија истовременом применом дилатације и вертикалне translације на график функције $\frac{1}{x}$, док се график функције g добија дилатацијом и хоризонталном translацијом графика поменуте функције. Управо је једна од идеја овог задатка била да се види колико се студенти, који одлуче да задатак решавају применом геометријских трансформација, успешно сналазе са овим трансформацијама, односно да се види колико разликују вертикалну од хоризонталне translације, односно хоризонталне translације у леву и десну страну, будући да је раније, током њиховог колаборативног рада, примећено да, у знатној мери, долази до изражаја њихово неразликовање ових случајева. Иначе, примарна идеја овог задатка је била да се провери познавање особина функција насталих трансформацијама функције $\frac{1}{x}$, будући да је, током колаборативног рада, било много грешака код испитивања основних особина ове и сродних функција, нарочито код студената који су радили без рачунара. Због тога је, у другом делу задатка, од студената тражено да испитају поједине особине сваке од добијених функција. Акцент је стављен управо на оне особине код којих су се најчешће јављале недоумице.

Процент успешности студената у решавању овог задатка био је скоро исти као у шестом задатку, у обе групе. Студенти експерименталне групе су, највећим делом, радили овај задатак тако што су одређивали тачке пресека са координатним осама и знак функције за сваки од графика, а затим их повезивали са одговарајућим функцијама. Код оваквог приступа у решавању задатка долази до изражаја познавање утицаја параметара на особине функције, нарочито, у овом случају, на знак функције (на који параметар a има већи утицај него параметар b) и тачке пресека са координатним осама (на које више утиче параметар b). Овакав приступ у решавању задатка имали су и готово сви студенти контролне групе.

Мањи број студената експерименталне групе одлучио се на примену геометријских трансформација у решавању седмог задатка, док је у томе било успешно 20% од укупног броја студената ове групе (видети Табелу 2). У контролној групи је било свега неколико студената који су задатак покушали да реше применом геометријских трансформација, међутим, они у томе нису били успешни. Најчешће се, као и током колаборативног рада, дешавало да помешају хоризонталну translацију улево и удесно, а било је и доста грешака насталих нераспознавањем хоризонталне и вертикалне translације.

Важно је приметити да је број студената, који су примењивали геометријске трансформације у решавању задатака, знатно мањи код петог, шестог и седмог задатка, у односу на први, други и четврти (у трећем задатку је било неопходно применити геометријске трансформације), као и да има тенденцију опадања гледано од првог задатка надаље. Овај податак указује на то да се студенти, приликом решавања задатака који су им мање блиски, односно који им се, због својих захтева или зато што садрже њима мање блиске функције, чине тежим, радије одлучују да примене начин решавања са којим имају више искуства, јер се, највероватније, тако осећају сигурнијим. Такође се може закључити, на основу резултата приказаних у Табели 2, да се студенти експерименталне групе чешће одлучују да примене геометријске трансформације него студенти контролне групе, као и

да су у томе успешнији. Овај податак не изненађује, имајући у виду да студенти, радећи са параметрима у оквиру образовног софтвера *GeoGebra*, непрекидно посматрају трансформације, како у оквиру алгебарске репрезентације, тако и у оквиру графичке, које повезују са геоматријским трансформацијама. Будући да се од њих, током колаборативног рада, тражило да описују утицај параметара на особине у график функције, многим је било лакше да опишу геометријске трансформације, које су посматрали на графику анализираних функције.

У преостала три задатка примена геометријских трансформација није била од кључног значаја за њихово решавање (у неким случајевима би њена примена била сувише компликована и не би била од нарочите користи, док неке од ових задатака није ни могуће решавати на овај начин). Због тога њена примена није ни анализирана када су у питању ови задаци (видети Табелу 2).

У осмом задатку је захтевано од студената да сваку од функција датих са конкретним параметрима повежу са одговарајућом функцијом датом са променљивим параметрима, односно родитељском функцијом. Овде је било потребно радити у оквиру алгебарских репрезентација датих функција.

Из Табеле 2 се види да су студенти експерименталне групе били успешнији од студената контролне групе, што указује на то да се студенти, који су током колаборативног рада радили са рачунаром, боље сналазе и када раде са трансформацијама функција у оквиру њихове алгебарске репрезентације. Што се тиче студената који нису успешно решили овај задатак, грешке које су правили биле су сличне у обе групе. Грешка која је највише долазила до изражаја била је везана за познавање утицаја параметара на особине функције. Наиме, на основу великог броја грешака код повезивања функција, може се закључити да многи студенти не разумеју на који начин знак параметра који се налази у експоненту утиче на цео аналитички израз функције.

Девети задатак је био сличан осмом. У овом задатку је дата једна функција са три променљива параметра, два реална и једним целобројним, а од студената се захтевало да, између понуђених функција, одаберу оне које могу потицати од дате функције. Другим речима, дата је родитељска функција, а требало је одредити функције које могу потицати од ње. Такође је захтевано да се, за сваку од одабраних функција, одреде вредности одговарајућих параметара. И у овом задатку требало је радити у оквиру алгебарске репрезентације, а посебно је долазило до изражаја познавање односа „родитељ-дете“ међу функцијама.

Као што се може видети у Табели 1, резултати студената, како у експерименталној, тако и у контролној групи, слични су одговарајућим резултатима у осмом задатку, што није необично имајући у виду сличност међу овим задацима. И грешке које су студенти правили сличне су у обе групе, а сличне су, у одређеној мери, и грешкама које су правили у осмом задатку. Најчешће се дешавало да студенти не препознају да функције g_2 и g_5 не могу потицати од функције f , зато што је $\sin(k\pi/2)$ константа која може имати вредности 0, 1 или -1 , у зависности од вредности параметра k .

У десетом задатку је дато, графичком репрезентацијом, осам функција које потичу од функције $f(x) = ax^b$, разврстаних по врстама и колонама табеле. Студенти су требали да одреде вредности параметара a и b за сваки од случајева, а затим да испитају утицај тих параметара на особине функција и да размотре критеријуме на основу којих су графици разврстани у редове и колоне дате табеле. Дакле, у другом делу задатка од студената се очекивало да одреде заједничке особине функција датих графичком репрезентацијом. Било је неопходно и да одреде које особине ових функција се разликују, како би закључили на основу чега су оне распоређене у исти ред, односно колону. Овде им је највише могло помоћи испитивање утицаја параметара на особине функција, што су такође требали да ураде у овом задатку.

Више од половине студената експерименталне групе урадио је овај задатак потпуно тачно (видети Табелу 2). Иначе, највећи број студената ове групе урадио је тачно први део задатка, одредивши одговарајуће вредности параметара. Међу онима који су задатак урадили делимично тачно, неки су правили грешке код испитивања утицаја параметара на особине функција, сличне онима какве су се појављивале у претходним задацима, док је највише њих грешило у другом делу задатка, непрецизно објашњавајући критеријуме на основу којих су графици разврстани по редовима и колонама.

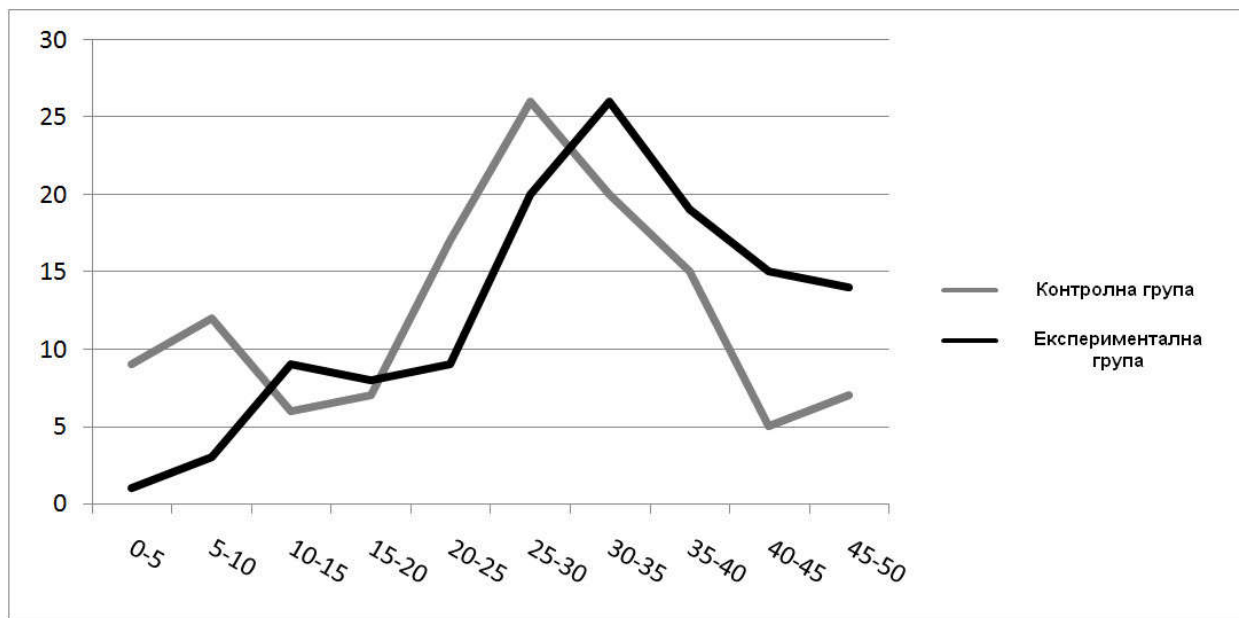
Сетимо се да су студенти у контролној групи имали најлошији резултат управо у последњем задатку, где је требало највише да раде у оквиру графичке репрезентације. Многи од њих се нису снашли ни се одређивањем вредности параметара, а они који су тај део задатка урадили тачно, код испитивања утицаја параметара су правили велике грешке, које су се одразиле на дискусију о критеријумима за разврставање у табели. Евидентно је, како на основу резултата десетог задатка, тако и на основу резултата осталих задатака у којима је заступљен рад у оквиру графичке репрезентације, да коришћење образовног софтвера *GeoGebra*, у коме су алгебарска и графичка репрезентација функције дате истовремено, омогућава студентима боље разумевање графичког приказа функција, али и особина функција, те разумевање начина на који се промене вредности параметара одражавају на особине и график функције.

4.4.2. Статистичка анализа резултата теста

Као и код анализе резултата пре-теста, у статистичкој анализи резултата теста такође је примењен Студентов t -тест разлика између аритметичких средина два велика независна узорка.

Студенти у експерименталној групи су тачно урадили 65.27% (32.637 поена), а студенти у контролној групи су тачно урадили 51.65% (25.823 поена) задатака. У обе групе је било студената који су освојили максималан број бодова (50), а у контролној групи је било и студената са нула бодова. Највећа фреквенција у експерименталној групи била је 34 поена, а у контролној 26 поена.

Расподела поена у експерименталној и контролној групи на тесту је приказана графиком на [Слици 24](#). Број поена (од 0 до 50, у интервалима по 5) је приказан на x-оси, а број студената који су освојили одговарајући број поена је приказан на y-оси. Црна линија на грфикони представља резултате студената експерименталне групе, док сива линија представља резултате студената контролне групе.



Слика 24. Расподела броја студената према броју поена (освојених на тесту).

Посматрањем [Слике 24](#) може се приметити да је црна линија (експериментална група) знатно испод сиве линије (контролна група) у делу испод 25 поена, осим у интервалима од 10 до 15 поена и од 15 до 20 поена, а да је у делу изнад 25 поена сива линија испод црне. Дакле, ако изузмемо интервал од 10 до 20 поена, знатно је мањи број студената експерименталне групе који су на тесту освојили мање од половине максималног броја поена. Са друге стране, број студената контролне групе који су освојили више од половине максималног броја поена је знатно мањи у односу на студенте контролне групе. У експерименталној групи максималан број бодова освојило је 14 студената, а у контролној 7 студената. Статистички резултати анализе теста су дати у [Табели 4](#).

Табела 4

Статистички резултати теста

Група	Број студената	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлике између аритметичких средина		Ефекат величина
	n	M	SD	t	p (2-tailed)	Cohan's d
Експериментална	124	32.637	10.781	4.64244	0.000006	0.590
Контролна	124	25.823	12.286			

Може се закључити да је разлика између резултата експерименталне и контролне групе статистички значајна на нивоима значајности 0.05 и 0.01 ($t(246)=4.64244$; $p=0.000006$). Такође се може приметити да је ефекат величина експерименталног фактора средњи (Cohen's $d = 0.590$), што значи да добијена разлика омогућава практичну предност експерименталне групе у поређењу са контролном.

У ствари, доказали смо да су студентска постигнућа и разумевање трансформација функција, као и особина функција уопште, те утицаја параметара на особине функција, бољи када користе образовни софтвер *GeoGebra* током вежбања у колаборативном групама. Овим је потврђена претпоставка формирана на основу анализе ранијих истраживања и познавања особина посматраних програмских пакета. У прилог овој претпоставци ишла су запажања настала праћењем рада студената током колаборативног рада, као и анализом резултата њиховог рада.

5. Опис тока првог експерименталног истраживања спроведеног 2016/2017. године

Будући да су у претходно описаном истраживању детаљније анализирани трансформације функција, те да су променљиви параметри и њихов утицај на особине функција анализирани углавном кроз трансформације функција, а имајући у виду важност оспособљености студената за рад са функцијама са променљивим параметрима, одлучено је да се спроведе истраживање слично претходном, у коме би се детаљније анализирао утицај коришћења динамичког софтвера на постигнућа студената у раду са функцијама са параметрима.

5.1. Истраживање у циљу унапређења знања студената у области функција са параметрима

Као што је раније поменуто, студентима је рад са функцијама са параметрима познат још од основне школе, када се упознају са линеарном функцијом. Међутим, они се са оваквим функцијама не срећу само у оквиру математичких садржаја. Функције са параметрима се користе у физици, хемији и бројним другим научним дисциплинама. Један од примера примене функције са параметрима у хемији је једначина зависности константе брзине хемијске реакције од температуре и енергије активације, познатија као Аренијусова једначина. Једначина стања идеалног гаса у физици, такође представља својеврсну примену функција са параметрима, јер се неретко посматра утицај температуре на међусобну зависност притиска и запремине, при чему се температура посматра као променљиви параметар. Поред наведених, постоји још много примера примене функција са параметрима.

Ранија истраживања су показала да студенти неретко имају доста потешкоћа у раду са функцијама са параметрима. Кључну потешкоћу им представља разликовање параметара од променљивих, те додељивање одређене вредности параметру. Поред тога, студенти имају доста потешкоћа са повезивањем алгебарских и графичких репрезентација ових функција, као и испитивање њихових особина. Због тога је и превазилажење оваквих и сличних потешкоћа било интересантна тема за истраживаче у овој области (Anabousy, Daher, Baya'a, & Abu-Naja, 2014; Borba & Confrey, 1996; Leinhardt, Zaslavsky, & Stein, 1990; McClaran, 2013; Zazkis, Liljedahl, & Gadowsky, 2003).

Савремени програмски пакети, који поседују динамичке особине, пружају веома добре могућности за рад са функцијама са параметрима, односно за њихове вишеструке репрезентације и испитивање особина, као и анализу утицаја променљивих параметара на особине функције. Имајући у виду анализу и поређење неколико различитих програмских пакета, дату у Поглављу 3.3, одлучено је да се и током овог истраживања користи образовни софтвер *GeoGebra*.

Такође, анализирајући закључке ранијих истраживања, дате у Поглављу 2, као и на основу искустава из претходно спроведеног истраживања, одлучено је да и овога пута студенти раде у колаборативним групама. Овакав рад би им омогућио размену искустава и мишљења кроз сталну дискусију, што би за последицу требало имати повећано интересовање и ангажовање појединаца у оквиру групе, добијање нових информација и, на крају, конструисање квалитетнијег и трајнијег знања о функцијама са параметрима и функцијама уопште.

На почетку истраживања, а након формирања експерименталне и контролне групе, сви студенти би радили пре-тест, којим би било проверено њихово знање о функцијама. Овај пре-тест би био идентичан за студенте обеју група и они не би могли користити рачунар приликом израде задатака на пре-тесту. И у експерименталној и у контролној групи била би примењена метода колаборативног рада, с тим да би студенти експерименталне групе, током колаборативног рада, користили рачунар, док би студенти контролне групе радили без рачунара. По завршетку колаборативног рада, студенти обеју група, експерименталне и контролне, радили би тест, а резултати тестирања би били предмет поређења и статистичке анализе. Тест би био идентичан за студенте експерименталне и контролне групе и њима, за време израде теста, не би било омогућено коришћење рачунара.

Истраживање је спроведено током академске 2016/2017. године на Природно-математичком факултету Универзитета у Новом Саду, а њиме су обухваћени студенти прве године основних академских студија физике и хемије. Истраживање је спроведено у оквиру курса наставног предмета Општа математика за студенте хемије, односно Математика 1 за студенте физике. Као што је поменуто у Поглављу 3.1, сличност међу садржајима програма наведених наставних предмета је омогућила примену исте методе рада, презентацију истих садржаја и решавање истих тестова приликом провере знања, за све студенте који су обухваћени истраживањем.

5.2. Циљеви првог истраживања спроведеног 2016/2017. године

Кључна разлика у циљевима истраживања спроведеног током академске 2016/2017 године, у односу на истраживање описано у Поглављу 4, јесте у томе што је у новом истраживању основни циљ утврђивање степена утицаја примене динамичког софтвера на постигнућа студената у области функција са параметрима, као и знање студената о утицају параметара на особине функције. Са друге стране, у претходном истраживању је, током анализе рада и резултата тестирања студената, више пажње посвећено анализи познавања трансформација функција проузрокованих додавањем, односно множењем, конкретне функције или независно променљиве реалним параметром, као и анализи познавања утицаја трансформација на особине конкретне функције.

У овом, као и у претходном истраживању, доста пажње би било посвећено примени вишеструких репрезентација у раду са функцијама, јер је рад у оквиру вишеструких

репрезентација кључан за испитивање функција са параметрима, због тога што омогућава визуелни преглед зависности особина функција од параметара, о чему је детаљније говорено у Поглављу 3.3. Током оба истраживања примењивана је метода колаборативног рада.

Остали циљеви, као и очекивани доприноси овог истраживања, не разликују се значајно у односу на претходно истраживање. За ово истраживање није била потребна израда нових едукативних материјала, с обзиром на то да су наставни материјали, израђени за претходно истраживање, о којима је говорено у поглављима 3.4 и 3.5, адекватни и за ново. Штавише, у поменутих наставних материјалима је рад са функцијама са параметрима више заступљен у односу на рад са трансформацијама функција. Такође, тестови коришћени у претходном истраживању су, углавном, само прилагођена потребама, односно циљевима новог истраживања, у смислу измена код одређених задатака, док потребе за израдом потпуно нових тестова није било.

5.3. Прелиминарно тестирање студената

Истраживањем које је спроведено током академске 2016/2017 године обухваћено је укупно 227 студената. Од тога, студената основних академских студеја хемије било је 153, док је студената основних академских студија физике било укупно 74. Истраживање је спроведено на почетку курса математичке анализе, у оквиру раније поменутих наставних предмета.

На самом почетку истраживања сваки студент се изјаснио о томе да ли је упознат са образовним софтвером *GeoGebra*. На основу резултата овог изјашњавања, формиране су експериментална и контролна група. Студената који нису раније били упознати са радом у оквиру образовног софтвера *GeoGebra* било је знатно мање, тако да су сви они, без икаквих потешкоћа, распоређени у контролну групу која, током истраживања, није користила рачунар. У експерименталној групи, у којој су студенти радили са рачунаром, није било оних који нису били упознати са образовним софтвером *GeoGebra*.

За истраживање је одабрано по 108 студената у сваку групу, како би даља анализа била што једноставнија. Имајући у виду чињеницу да је укупан број студената обухваћених истраживањем 227, те да их је и у експерименталној и у контролној групи било више од 108, важно је напоменути да су преостали студенти такође радили у колаборативним групама, те да су имали исте услове за рад као студенти који су обухваћени истраживањем, али њихови резултати нису анализирани.

Након формирања експерименталне и контролне групе, студенти су радили пре-тест којим је проверено њихово знање у области функција и њихових особина. Задаци које су студенти решавали на пре-тесту дати су у Прилогу 6. Неки од задатака били су идентични задацима које су студенти радили на пре-тесту годину дана раније, а који је дат у Прилогу 3. Задаци који су промењени у односу на претходно истраживање такође су обухватили градиво које су студенти савладали током средњошколског образовања. Овај

пре-тест је, такође садржао шест задатака, а ни време за израду се није мењало у односу на претходу годину (90 минута). Максималан број поена на пре-тесту био је 50. Анализа резултата пре-теста по задацима дата је у Поглављу 5.3.1, а статистичка анализа ових резултата дата је у Поглављу 5.3.2.

5.3.1. Анализа резултата пре-теста по задацима

Први задатак на пре-тесту остао је непромењен у односу на пре-тест у претходно спроведеном истраживању, 2015. године. Разлог овоме је неопходност провере познавања особина елементарних функција од стране студената, као и оспособљеност студената за испитивање функција и цртање графика. Број бодова по задацима на пре-тесту је такође остао непромењен у односу на претходно истраживање, тако да је први задатак носио 24 поена (за сваку тачно испитану функцију уз коректно нацртан график студент би добијао по 2 поена), док су остали задаци носили укупно 26 поена.

Као и у претходном истраживању, студенти су први задатак урадили знатно боље него остале, што је очекивано, с обзиром на чињеницу да су се са особинама елементарних функција, а нарочито са њиховим испитивањем без примене извода, сретали током неколико година средњошколског образовања. И овога пута је било студената који су имали потешкоћа са испитивањем особина, а нарочито са графичким представљањем појединих функција. Највише потешкоћа су имали када су у питању тригонометријске функције и логаритамска функција, а доста грешака је било и код испитивања функција квадратног и кубног корена. Просечан број поена у експерименталној групи био је 13.57, односно 56.5%, а у контролној 13.67, односно 57% од максималних 24 поена у првом задатку. Максималан број поена у овом задатку остварило је 8 студената, од чега 4 у експерименталној и 4 у контролној групи.

Што се тиче приступа који су студенти имали приликом решавања овог задатка, као и што се тиче грешака које су правили, нема битнијих разлика у односу на приступе и грешке описане у Поглављу 4.2.1.

Преостали задаци су носили по 5 поена, осим шестог, који је носио 6 поена. Просечан број поена који су студенти остварили у овој групи задатака је 7.13 у експерименталној, односно 7.27 у контролној групи, што представља 27.4% и 28% од максималних 26 поена у експерименталној и контролној групи, респективно.

У другом задатку је од студената захтевано да скицирају графике двеју линеарних функција, а затим да објасне везу између датих функција и линеарне функције облика $f(x) = ax + b$. Функције дате у задатку могу се добити од идентичке функције применом вертикалне транслације, односно дилатације. Са оваквим задацима студенти су имали прилике да се сретну још у завршном разреду основне школе. Циљ овог задатка је био да студенти постепено, на основу нечега што им је од раније познато, буду наведени на размишљање о утицају параметара, пре свега на аналитички израз функције.

Иако су, у првом делу задатка, користили графичку репрезентацију (јер је то од њих захтевано), већина студената, када је реч о онима који су тачно решили овај задатак, објашњавали су везе међу датим функцијама искључиво користећи алгебарску репрезентацију. Они су, углавном, препознали да су две дате функције линеарне, па су их повезали са функцијом $f(x) = ax + b$ одређујући вредности параметара a и b за сваки од конкретних случајева. Веома мали број студената је применио трансформације идентичке функције у решавању овог задатка. Углавном су графике скицирали користећи табеларну репрезентацију. Међу студентима који овај задатак нису тачно решили, најчешћа грешка је била погрешно одређивање вредности параметара.

У првом делу трећег задатка од студената је захтевано да скицирају графике три квадратне функције, које могу бити добијене од основне квадратне функције применом трансформација – вертикалне и хоризонталне трансформације, односно дилатације. У другом делу задатка захтевано је да објасне везе између функција чије су графике скицирали и функције облика $f(x) = a(x + b)^2 + c$. Функција f је такође квадратна функција, а њен аналитички израз, у коме егзистирају три реална параметра, формиран је тако да свака од функција, које су студенти требали да скицирају, одговара функцији f за одређене вредности параметара.

Као и у другом задатку, већина студената је графике датих функција скицирала користећи табеларну репрезентацију, док је знатно мањи број оних који су примењивали трансформације функција на основну квадратну функцију. Значајан број и једних и других је правио грешке приликом скицирања графика. Међу студентима који су користили табеларну репрезентацију најчешћа грешка је била непрецизно скицирање графика, што је, у већини случајева, била последица одабира недовољног броја вредности независно променљиве. Са друге стране, студенти који су, приликом решавања овог задатка, користили трансформације основне квадратне функције, најчешће су имали потешкоћа да разликују хоризонталну од вертикалне трансформације или да одреде у коју страну се помера график код хоризонталне трансформације. Било је и неколико случајева где су студенти погрешно применили трансформацију уместо дилатације.

Значајне потешкоће студенти су имали приликом објашњавања веза између датих функција и функције f . У овом делу су, као и у претходном задатку, углавном користили алгебарску репрезентацију. Многи од њих нису схватили на који начин се, од функције f , могу добити функције f_1 и f_3 . Највероватнији разлог овоме је што се нису усуђивали да, приликом ове анализе, трансформишу алгебарски израз којим је дата функција f . Већина студената је ипак претпоставила да се функције, које су претходно скицирали, могу добити од функције f , за одређене вредности реалних параметара, али највећи број њих није успео да одреди одговарајуће вредности тих параметара за сваки од случајева.

У четвртном задатку дате су, аналитичким изразима, две функције. Од студената је захтевано да дате функције повежу са одговарајућом сликом, на којој се налазе графици обеју функција, да објасне свој одговор, а затим да објасне везе између датих функција и функције $f(x) = (ax + b)^3 + c$. Дате функције се могу добити од основне кубне функције

вертикалном транслацијом, односно рефлексijом (осном симетријом у односу на апсцисну осу). Такође, обе функције могу потицати од функције f , за одређене вредности реалних параметара a , b и c .

Четврти задатак, као и претходна два, садржи сличне захтеве по питању одређивања веза између функција са конкретним параметрима и функције дате са променљивим параметрима. Међутим, у другом и трећем задатку се од студената захтева да, на основу аналитичког израза сами формирају графичке репрезентације датих функција, док је у четвртом задатку дато више графичких репрезентација, а од студената се захтева да одреде одговарајуће.

Студенти су први део четвртог задатка урадили мало боље него први део другог, односно трећег задатка. Може се претпоставити да је разлог овоме то што се поједини студенти лакше сналазе када треба да раде паралелно у оквиру алгебарске и графичке репрезентације и да их повезују. Ипак, велики је број студената који су погрешно одредили слику на којој су приказани графици обеју функција.

Већина студената покушавала је да реши овај задатак одређујући нуле или анализирајући друге особине датих функција, а затим их упоређујући са графички приказаним функцијама. Такође, велики је број студената који су, помоћу табеларних репрезентација, формирали графичке репрезентације функција f_1 и f_2 , а затим их упоређивали са датим графицима, док је мали број оних који су задатак решавали применом геометријских трансформација. Они су имали потешкоћа да разликују вертикалну од хоризонталне транслације, што је за последицу имало погрешно одабран график прве функције. Мање потешкоћа имали су код рефлексije (осне симетрије), у случају друге функције.

У другом делу четвртог задатка резултати су били слични онима у другом делу претходна два задатка, јер су их студенти решавали на готово исти начин. Било је неколико покушаја да се везе функција f_1 и f_2 са функцијом f објасне применом графичке репрезентације, али ови покушаји су, углавном, остали без успеха.

Пети задатак се, у првом делу, не разликује нарочито од петог задатка на пре-тесту у претходном истраживању. Он је, према својим захтевима, сличан четвртом, с тим да су графици функција f_1 и f_2 , добијених од елементарне функције $\frac{1}{x^2}$, хоризонталном, односно вертикалном транслацијом, дати на засебним сликама. Највећи број студената је решавао овај задатак одређујући пресечне тачке са координатним осама, или анализирајући друге особине датих функција, док је веома мали број студената користио табеларну репрезентацију. И овога пута, као и годину дана раније, неколико студената је направило грешке приликом покушаја да одреде пресечне тачке са координатним осама, јер су покушавали да одреде нуле функције f_2 , а било је и оних који су одређивали асимптоте функција.

Студената који су одлучили да код решавања овог задатка примене геометријске трансформације графика елементарне функције $\frac{1}{x}$ било је, као и код осталих задатака, веома мало. Они су најчешће погрешно примењивали хоризонталну транслацију, док су се

са вертикалном боље сналазили. То је и највероватнији разлог што су многи од њих тачно одабрали график добијен вертикалном транслацијом графика функције $\frac{1}{x}$, док су други график одабрали погрешно.

Као и претходна три задатка и пети задатак садржи део који се односи на повезивање датих функција са функцијом у којој егзистирају променљиви параметри. Овога пута, у питању је функција $f(x) = \frac{1}{x+a} + b$. Интересантан је податак да су студенти, приликом решавања овог дела задатка, били нешто успешнији него приликом испуњавања сличних захтева у претходним задацима. Највероватнији разлог овоме јесте сличност аналитичког израза функције са параметрима са функцијама f_1 и f_2 , па студенти нису имали потешкоћа да одреде вредности параметара a и b у овим случајевима.

Шести задатак је био непромењен у односу на претходно истраживање, а и приступи студената у његовом решавању се нису значајније разликовали. За разлику од истраживања спроведеног годину дана раније, где нико од студената није дао потпуно тачно решење овог задатка, сада је то урадио један студент. Он је комбиновао своје знање о особинама елементарних функција са особинама функција датих графички, поредио их, тачно одредио вредности параметара за сваки од случајева и дао одговарајуће образложење. Што се осталих студената тиче, они нису били нарочито успешни у решавању овог задатка. Нарочито су изражене потешкоће приликом одређивањ вредности параметра a , а ни овога пута велики број студената није препознао константну функцију као функцију која може потицати од функције f , када је вредност параметра b једнака нули.

Анализа резултата пре-теста показала је да је први задатак, у коме је требало применити знање о особинама елементарних функција, урађен је знатно боље од осталих, у којима је требало радити и са променљивим параметрима. Најлошији резултати били су у трећем и четвртном задатку, у делу у коме је требало одредити везе датих функција са функцијом са параметрима.

5.3.2. Статистичка анализа резултата пре-теста

У овом поглављу представљена је кратка статистичка анализа резултата пре-теста. Примењен је Студентов t -тест разлика између аритметичких средина два велика независна узорка. Статистички резултати пре-теста су дати у Табели 5.

У пре-тесту није било статистички значајне разлике међу тестираним групама, експерименталном и контролном, на нивоу значајности 0.05 ($t(206) = 0.142$; $p = 0.887$). Аритметичка средина броја бодова студената контролне групе освојених на пре-тесту је незнатно већа у односу на аритметичку средину броја бодова који су освојили студенти експерименталне групе. Ова разлика није статистички значајна, а занемарујућа је и разлика између стандардних одступања код експерименталне и контролне групе.

Табела 5*Статистички резултати пре-теста*

Група	Број студената	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлике између аритметичких средина	
	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>t</i>	<i>p</i> (2-стр.)
Експериментална	104	20.711	11.779	0.142	0.887
Контролна	104	20.942	11.686		

Резултати пре-теста показали су, слично као и годину дана раније, уједначеност знања студената експерименталне и контролне групе, али и постојање изражених разлика у знању појединих студената (независно од групе у коју су распоређени). Знање студената, када су у питању функције са параметрима, као ни познавање утицаја ових параметара на особине функција, према резултатима пре-теста, нису на задовољавајућем нивоу, а исто се може рећи и за познавање трансформација функција. Познавање особина елементарних функција је знатно боље, али није занемарујући ни број студената који су правили грешке управо код испитивања или примене ових особина.

5.4. Рад студената током првог експерименталног истраживања 2016. године

Током увежбавања испитивања особина функција са параметрима у обе групе, експерименталној и контролној, примењена је метода колаборативног рада. На основу резултата пре-теста формиране су колаборативне групе, на начин који је детаљније описан у Поглављу 4.3.1, а сам процес колаборативног рада организован је као и током истраживања 2015. године, на начин који је описан у Поглављу 4.3.2.

5.4.1. Анализа рада студената са функцијама са параметрима

Имајући у виду чињеницу да се резултати пре-теста који су студенти радили на почетку истраживања спроведеног 2016/2017 године нису битније разликовали у односу на резултате пре-теста који су радили студенти обухваћени истраживањем годину дана раније, могло се закључити да је неопходно да се, током процеса учења, посвети више пажње особинама елементарних функција, затим вишеструким репрезентацијама функција, са акцентом на прелазак са једне репрезентације на другу и, нарочито, на функције са параметрима и утицај параметара на особине функција.

Због свега наведеног, одлучено је да задаци, које су студенти решавали током рада са функцијама, буду исти као и у претходном истраживању, с тим што је изостављен последњи (шести) задатак. Ови задаци дати су у Прилогу 4. Студенти обеју група задатке су углавном решавали као и студенти који су били обухваћени истраживањем

спроведеним 2015. године. Приступи појединих група студената у решавању ових задатака детаљније су описани у Поглављу 4.3.2.

Решавању првог задатка, који је био непромењен у односу на пре-тест, студенти обеју група, експерименталне и контролне, приступили су веома озбиљно и пажљиво анализирали особине сваке од датих функција. Будући да су се студенти са оваквим задацима сретали и током средњошколског образовања, приступи код решавања се нису значајније разликовали ни међу студентима унутар група, односно међу колаборативним групама.

За решавање овог задатка није било потребно коришћење динамичких особина софтвера *GeoGebra*, тако да су приступи које су имали студенти експерименталне групе приликом решавања овог задатка били слични онима које су имали студенти контролне групе, с том разликом да су студенти експерименталне групе најпре, помоћу софтвера *GeoGebra*, формирали графичке репрезентације, а потом анализирали особине функција у оквиру њихових алгебарских репрезентација. Иако графичка репрезентација у многоме олакшава испитивање особина, јер пружа могућност визуелизације истих, примећено је да у две мале групе, у оквиру експерименталне групе, студенти не користе бенефите рада са рачунаром у довољној мери, односно да испитују особине функција и цртају графике не базирајући се много на графичку репрезентацију формирану помоћу софтвера *GeoGebra*.

Што се тиче студената контролне групе, они су овај задатак, у највећем броју случајева, решавали испитујући особине сваке од датих функција у оквиру алгебарске репрезентације, да би затим, на основу испитаних особина, формирали одговарајућу графичку репрезентацију функције. У неколико колаборативних група студенти су користили и табеларну репрезентацију. Само у једној колаборативној групи, у оквиру контролне групе, студенти су неколико датих функција графички приказали пре испитивања особина. Они су ове графичке репрезентација формирали на основу ранијег знања о елементарним функцијама, а код неких функција су користили и табеларну репрезентацију.

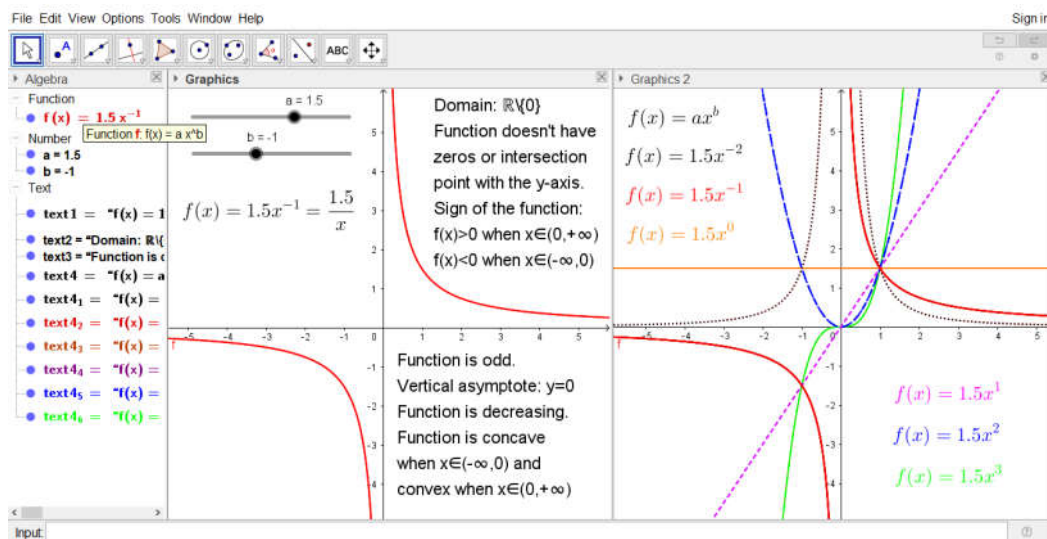
У другом и трећем задатку, студенти експерименталне групе су веома детаљно анализирали особине функција, али и утицај параметара на особине функција. Већина студената је решавао ове задатке тако што би, након увођења параметара додавањем, односно множењем функције или њеног аргумента поменути параметром, посматрали добијени аналитички израз као нову функцију у којој егзистира један, односно два променљива параметра. Користећи динамичка својства образовног софтвера *GeoGebra*, посматрали су, истовремено, алгебарску и графичку репрезентацију те функције и, померањем клизача, мењали вредности параметара и описивали сваку значајнију промену до које је дошло под утицајем мењања вредности параметара. И поред тога, у неколико колаборативних група је примећено да студенти имају потешкоћа да на адекватан начин опишу промене особина функције до којих долази приликом промена у вредности параметара. Овај проблем је дошао до изражаја код трећег задатка, где су функције дате са по два параметра. Грешке које су у овим случајевима студенти правили углавном су

настајале као последица тога што они нису били у могућности да разликују који од два параметра је утицао на одређену особину. Мањи број студената експерименталне групе је решавао задатке анализирајући одговарајуће трансформације датих елементарних функција.

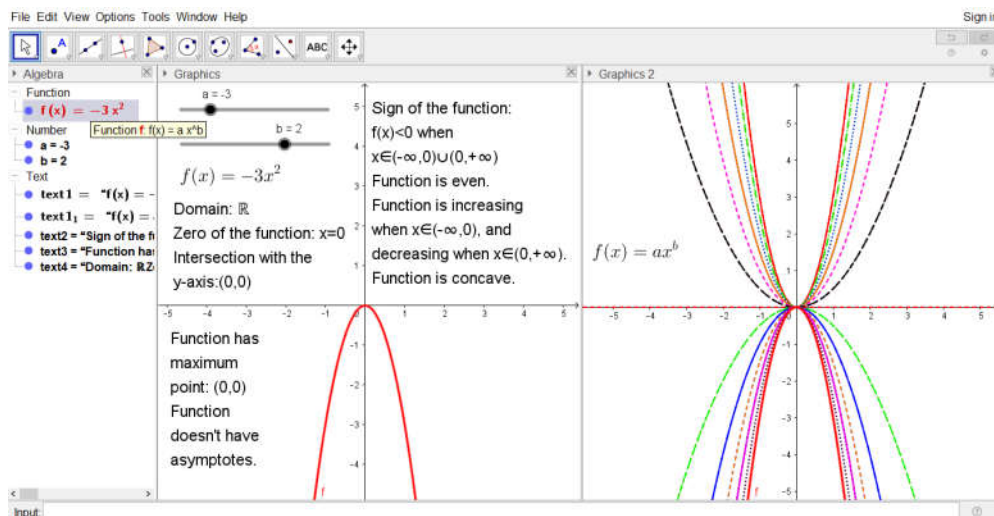
У контролној групи поменутих грешака је било знатно више. Студенти контролне групе, у већини случајева, нису на адекватан начин могли да опишу утицај параметара на особине функције јер су, током њиховог испитивања, додељивали свега неколико вредности параметрима, што најчешће није било довољно да би се сагледале све разлике између функција које настају додељивањем конкретних вредности параметрима. У већини колаборативних група, студенти су, већ у другом задатку, имали потешкоћа са испитивањем датих функција, а нарочито са анализом утицаја параметра на њихове особине. У трећем задатку овај проблем је био знатно више изражен, јер је студентима било веома тешко да сагледају који од параметара утиче на коју особину.

Четврти задатак се разликовао од другог и трећег по томе што су параметри дати у аналитичком изразу полазне функције. Већина студената обеју група, експерименталне и контролне, решавала је четврти задатак на неки од начина описаних у Поглављу 4.3.2.

У већем броју малих група у оквиру експерименталне групе, студенти су први део четвртог задатка решавали тако што би најпре једном од параметара доделили вредност 1 или 2, а затим посматрали утицај промена другог параметра на особине функције. Они су веома детаљно описали уочене промене и извели закључак о томе на који начин на особине функције утиче један, а на који начин други параметар. Ове анализе су, највећим делом, биле потпуне и тачне. Међутим, примећено је да се, у појединим групама, студенти не сналазе најбоље када описују промене до којих долази приликом истовременог мењања вредности оба параметра. Употреба програма у ову сврху приказана је на сликама 25 и 26. Слично је решаван и други део овог задатка, с тим да је, у највећем броју случајева, једном од параметара додељивана вредност нула, како би се посматрао утицај другог параметра.



Слика 25. Испитивање утицаја параметра a на особине функције.



Слика 26. Испитивање утицаја параметра b на особине функције.

Што се тиче контролне групе, у већини малих група студенти су приступили решавању четвртог задатка на сличан начин као и студенти експерименталне групе, с тим да су, услед недостатка рачунара, односно одговарајућег динамичког софтвера, посматрали недовољан број вредности параметара да би извели потпун и тачан закључак о утицају параметара на особине функција. Због тога су студенти контролне групе имали знатно више потешкоћа приликом решавања овог задатка у односу на студенте експерименталне групе.

У петом задатку је била најизраженија разлика између студената експерименталне и контролне групе када је у питању приступ и успешност у решавању, а приступ који су студенти примењивали приликом решавања овог задатка није се разликовао од приступа описаног у Поглављу 4.3.2.

Иако у задатку од студената није захтеван рад у оквиру графичке репрезентације, студенти експерименталне групе су успешно користили бенефите рада у динамичком окружењу образовног софтвера *GeoGebra* и посматрали алгебарску и графичку репрезентацију. Ово им је омогућило успешно испитивање утицаја параметара на особине датих функција, али и одређивање одговарајућих „ћерки функција“, које потичу од дате „родитељске функције“.

Са друге стране, студенти контролне групе нису користили графичку репрезентацију приликом решавања овог задатка, а многи се нису снашли ни са алгебарском репрезентацијом, што је за последицу имало доношење погрешних закључака о утицају параметара на особине функције, али и погрешно одређивање функција које потичу од дате функције са параметрима.

Након завршетка рада са функцијама са параметрима, сви задаци су детаљно анализирани са предавачем, а студенти су имали могућност да дискутују о својим решењима. Оваква анализа задатака спроведена је и у експерименталној и у контролној групи. Примећено је да су студенти експерименталне групе знатно активније учествовали

у дискусији, у односу на студенте контролне групе. Највероватнији разлог овоме јесте то што су, током рада у динамичком окружењу, боље сагледали утицај параметара на особине функција, али и боље конструисали знање о особинама функција, што их је подстакло да кроз дискусију даље размењују мишљења и заступају ставове које су изградили током колаборативног рада.

5.5. Тестирање студената

Знање студената обеју група, експерименталне и контролне, у области функција са параметрима и њихових особина, проверено је помоћу теста који су студенти радили неколико недеља након спровођења процеса колаборативног рада са функцијама. Овај тест је дат у Прилогу 7. Студенти експерименталне и контролне групе су радили исти тест, на коме су били заступљени задаци за чију израду није била потребна (а ни омогућена) употреба рачунара. Тест је, већим делом, био сличан ономе који су радили студенти обухваћени претходним истраживање спроведеним 2015. године, а који је дат у Прилогу 5. За решавање задатака било је предвиђено 120 минута. Анализа резултата теста по задацима дата је у Поглављу 5.5.1, док је статистичка анализа резултата теста дата у Поглављу 5.5.2.

5.5.1. Анализа резултата теста по задацима

За разлику од претходног истраживања, овде је приликом анализе задатака, уместо на примену геометријских трансформација, нагласак стављен на допринос динамичког софтвера разумевању утицаја параметара на особине функција, познавању особина читавих фамилија функција од стране студената. Допринос динамичког софтвера огледа се у могућности формирања манипулативне репрезентације, односно динамичког повезивања алгебарске и графичке репрезентације, што омогућава квалитетнији рад са функцијама са параметрима, односно детаљније испитивање њихових особина и прецизније сагледавање утицаја промене вредности параметара на особине функција. С тим у складу, делимично су измењени и задаци на тесту у односу на тест дат у Прилогу 5.

Резултати теста по задацима дати су у Табели 6. На основу ових резултата можемо закључити да су студенти експерименталне групе, који су испитивање особина функција са параметрима увежбавали користећи рачунар, сваки од задатака урадили боље у односу на студенте контролне групе.

Табела 6

Просечан број поена за сваки задатак.

Група \ Задатак	Задатак									
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Експериментална	4.40	3.67	3.19	3.34	3.13	3.17	3.12	3.02	3.06	3.54
Контролна	3.76	2.96	2.49	2.88	2.43	2.38	2.35	2.76	2.61	2.26

Први задатак је допуњен у односу на претходно истраживање захтевом за објашњењем веза између датих функција и функције $f(x) = (x + a)^2 + b$. Функција f представља родитељску функцију за функције f_1 и f_2 , односно, обе наведене функције могу се добити од функције f за одређене вредности параметара a и b . Од студената је очекивано да, радећи у оквиру алгебарске репрезентације, уоче сличност функција f_1 и f_2 са функцијом f , а затим да одреде одговарајуће вредности параметара. Овакав захтев је постављен како би се сагледала оспособљеност студената за рад са функцијама са параметрима, односно за рад са фамилијама функција, дефинисаним помоћу једне родитељске функције.

Већина студената експерименталне групе је тачно решила овај задатак, укључујући и део који се односи на објашњавање везе са функцијом f . Студенти контролне групе су имали лошији резултат у односу на студенте експерименталне групе, с тим да је, у обе групе, резултат у првом задатку био знатно бољи него у осталим задацима, што се може приписати добром познавању особина квадратне функције, која је једна од најчешће примењиваних у досадашњем образовању студената.

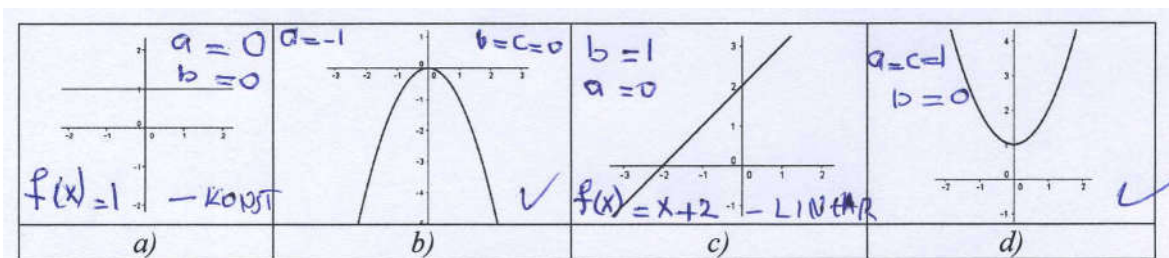
У првом делу задатка било је неопходно наћи везу између алгебарске и графичке репрезентације посматраних функција, што је већина студената, у обе групе, радила користећи табеларну репрезентацију, слично као што је описано у Поглављу 4.4.1. Мањи број студената експерименталне групе решавао је задатак примењујући трансформације основне квадратне функције. Ови студенти су углавном коректно образложили своје одговоре, мада су забележена два случаја где су студенти грешком заменили вертикалну и хоризонталну транслацију. Други део задатка је такође већина студената експерименталне групе урадила добро, док су студенти контролне групе, у великом броју случајева, имали потешкоћа у раду са параметрима, што се огледало у погрешном одређивању вредности параметара.

У другом задатку од студената је захтевано да повежу алгебарску репрезентацију дате функције са одговарајући графичким репрезентацијама, као и да одреде нуле функције у зависности од параметара. И у овом задатку дата функција са параметрима одређује једну класу квадратних функција, у случају када је вредност параметра a различита од нуле. Међутим, алгебарска репрезентација, као и особине дате функције, делимично се разликују у односу на квадратну функцију из претходног задатка. Параметри a , b и c у функцији $f(x) = (ax + b)x + c$ су позиционирани тако да могу утицати на више особина него што је то био случај у првом задатку, тако да сваки од датих графика, за одређене вредности параметара, може одговорати функцији f . Другим речима, када параметар a има вредност нула, функција је линеарна, а ако параметри a и b истовремено имају вредност нула функција је константна.

Студенати експерименталне групе су овај задатак урадили лошије него претходни, али ипак знатно боље у односу на студенте контролне групе. Већина студената, у обе групе, најпре је, радећи у оквиру алгебарске репрезентације, трансформисала дати

аналитички израз у облик $ax^2 + bx + c$, што представља уобичајен аналитички израз квадратне функције, а затим повезивала алгебарску и графичку репрезентацију на један од два начина – или анализирајући особине квадратне функције у зависности од параметара или користећи табеларну репрезентацију, мада је било и оних који су комбиновали ове две методе. Студенти који нису трансформисали дати аналитички израз користили су табеларну репрезентацију како би повезали алгебарску и графичку.

Највећи број студената, који су други задатак урадили погрешно, имао је потешкоћа приликом одређивања вредности параметара у посматраним случајевима. Многи су, нарочито у контролној групи, превидели могућност да линеарна и константна функција могу потицати од дате функције са параметрима. Сличних случајева је било и у експерименталној групи. Један студентски рад са сличном грешком, где је студент препознао све типове функција датих графички, али је само параболе посматрао као тачне одговоре, јер је аналитички израз дате функције повезао са квадратном функцијом, дат је на Слици 27. Нико од студената није примењивао трансформације функције у решавању овог задатка.

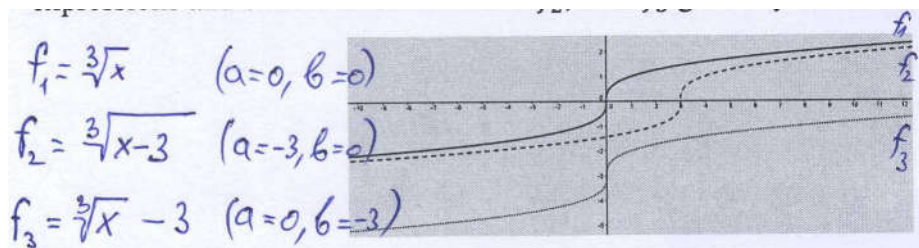


Слика 27. Пример решавања другог задатка.

Трећи задатак је, у првом делу, био идентичан трећем задатку са теста који је дат у Прилогу 5, а који су решавали студенти обухваћени претходним истраживањем. Студенти су и овога пута имали задатак да посматрају три функције, дате заједно графичком репрезентацијом, при чему је једна од њих, функција кубног корена, дата и алгебарски, те да повежу дати аналитички израз са одговарајућим графиком, а затим да одреде аналитичке изразе за преостале две функције. Други део задатка се састојао од захтева за одређивањем веза између датих функција и функције $f(x) = \sqrt[3]{x+a} + b$.

Студенти обе групе су решавали први део задатка слично као што је описано у Поглављу 4.4.1. Приступи кој су користили при решавању били су слични као код првог и другог задатка. Други део задатка су углавном решавали у оквиру алгебарске репрезентације, а примећено је да су студенти, који су приликом одређивања аналитичких израза функција f_2 и f_3 тачно примењивали трансформације основне функције кубног корена, без потешкоћа објаснили везе између датих функција и функције f , док су они, који су грешили код примена трансформација, правили углавном исте грешке код одређивања вредности параметара функције f . Ове грешке су се најчешће састојале у погрешном одређивању знака параметра a , који проузрокује хоризонталну translацију.

Ипак, студената који су примењивали трансформације било је знатно мање у односу на оне који су задатак решавали анализирајући и упоређујући особине посматраних функција. Пример једног тачног решења другог задатка дат је на Слици 28.



Слика 28. Пример решавања трећег задатка.

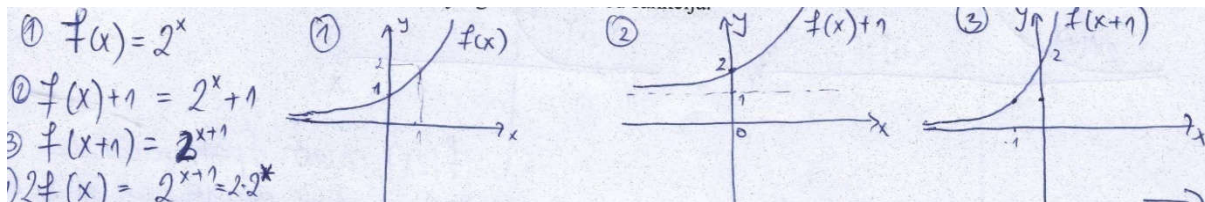
У четвртном задатку дата је функција $f(x) = a(bx)^2$, као и четири графика. Од студената је, у првом делу задатка, захтевано да одреде који од датих графика одговара функцији f , као и да одреде одговарајуће вредности параметара a и b . Функција f одређује једну класу квадратних функција у случају када су вредности оба параметра различите од нуле. Међутим, ова функција, због позиција параметара у аналитичком изразу, не може имати линеарни нити слободан члан, што значи да се њена нула нити екстремна вредност не могу разликовати у односу на основну квадратну функцију. Ово се, у оквиру графичке репрезентације, манифестује тако што се тачка минимума, односно максимума, мора поклапати са координатним почетком. У другом делу задатка од студената је захтевано да одреде један пар вредности параметара, такав да функција има максимум. Циљ овог захтева био је да се провери да ли студенти познају зависност природе екстремних вредности од параметара.

Већина студената је задатак решавала одређујући нуле функције f , за произвољно одабране вредности параметара (углавном 1 или 2), које би, затим, упоредили са нулама функција датих графички. Неки су, поред нула, посматрали и знак функције, а у ређим случајевима монотоност или екстремне вредности. Мањи број студената експерименталне групе анализирао је трансформације графика функције у зависности од вредности параметара. Неки од њих, који су задатак решили тачно, констатовали су да променама вредности параметара a и b долази до дилатације, али не и до транслације графика функције, чиме су елиминисани сви графици осим трећег, који је одговарајући. Студената који су применили овај приступ било је веома мало. Нешто више је било оних који су трансформације применили погрешно.

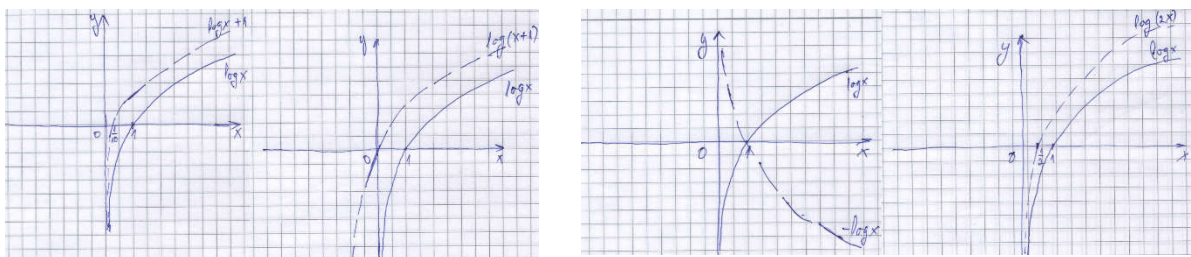
Преостали задаци, изузев деветог, нису се разликовали у односу на претходно спроведено истраживање, а студенти су их решавали слично као што је описано у Поглављу 4.4.1. Девети задатак је измењен тако што је, из аналитичког израза дате функције са параметрима, елиминисана тригонометријска функција.

У петом задатку, где је требало произвољно одабрати функције, студенти су најчешће бирали линеарну, квадратну или кубну. У експерименталној групи седамнаест

студената је посматрало експоненцијалну или логаритамску функцију, док је један студент одабрао функцију $f(x) = \frac{1}{x}$. Примери испитивања експоненцијалне и логаритамске функције у петом задатку дати су на сликама 29 и 30, респективно.

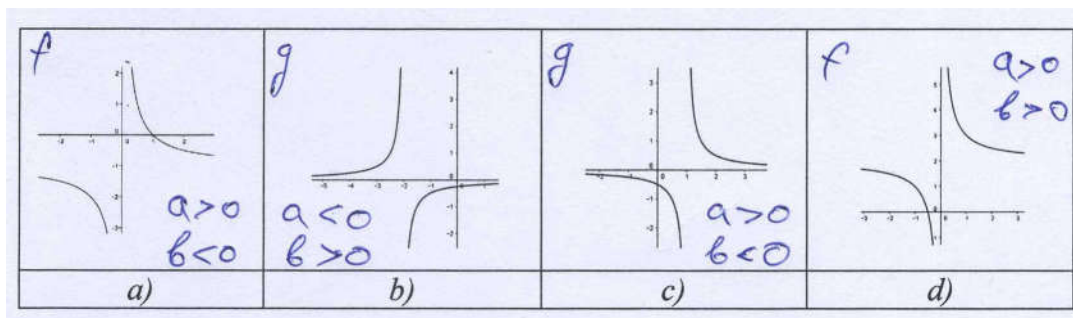


Слика 29. Испитивање експоненцијалне функције у петом задатку.



Слика 30. Испитивање логаритамске функције у петом задатку.

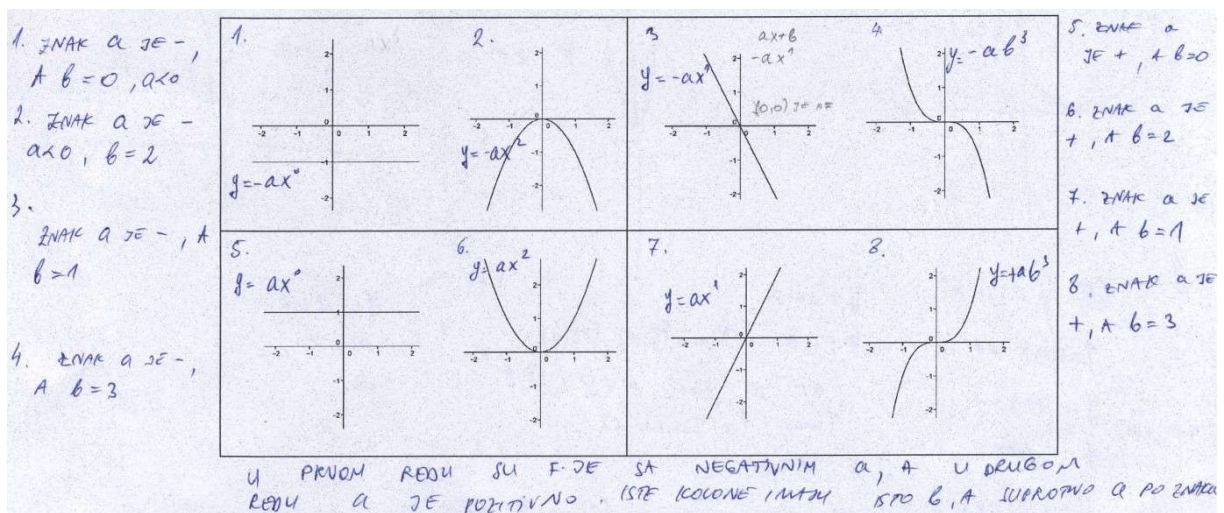
Примећено је да су студенти у обе групе имали потешкоћа када је у питању седми задатак. Ове потешкоће су нарочито дошле до изражаја у контролној групи. Најчешћи проблем било је разликовање случаја када се параметар b додаје функцији и случаја када се поменути параметар додаје аргументу функције. У ова два случаја параметар b на различите начине утиче на особине функције као што су, на пример, нуле и знак. Када бисмо посматрали график функције, параметар b у првом случају проузрокује вертикалну, а у другом хоризонталну translацију, а такође овај параметар утиче и на тачке пресека графика са координатним осама, што је већина студената разматрала. Што се тиче утицаја параметра a , многи студенти су погрешно закључили да он може утицати на знак функције. Пример тачног решења седмог задатка дат је на Слици 31.



Слика 31. Решење седмог задатка.

У осмом и деветом задатку забележене су најмање разлике у броју бодова студената експерименталне и контролне групе. У ова два задатка није било неопходно радити у оквиру графичке репрезентације, а студенти се нису ни одлучивали за њену примену јер би им то било знатно компликованије у односу на рад у оквиру алгебарске репрезентације. Резултати у осмом и деветом задатку указују на то да се студенти, који су особине функција и утицај параметара на особине увежбавали користећи рачунар, боље сналазе и радећи у оквиру алгебарске репрезентације, али да разлика у односу на студенте који нису користили рачунар приликом увежбавања није толико изражена као у оним задацима где је требало радити повезујући вишеструке репрезентације функција.

У десетом задатку од студената је очекивано да примене своје знање о утицају параметара на особине функција у оквиру графичке репрезентације. Студенти контролне групе су, слично као и у истраживању спроведеном годину дана раније, у овом задатку остварили најлошији резултат, а разлика у броју бодова између студената експерименталне и контролне групе била је најизраженија. На Слици 32 приказано је једно решење десетог задатка.



Слика 32. Решење десетог задатка.

Студенткиња чији је рад приказан на слици 32 коректно је објаснила знак параметра a и вредност параметра b за сваки од датих графика, али није тачно одредила одговарајуће алгебарске репрезентације. Њена грешка се састојала у томе што је, у случајевима у којима параметар a има негативне вредности, у аналитичким изразима уписивала предзнак „минус“ испред овог параметра. Након прегледа задатака, ова студенткиња је позвана на интервју, како би објаснила разлог због којег је начинила поменути пропуст. Том приликом је изјавила да је, дописивањем предзнака, желела да нагласи да параметар a , у посматраним случајевима, има негативну вредност.

Студенткиња је, такође, описала критеријуме на основу којих су графици разврстани по врстама и колонама. Овај опис је приказан на Слици 33.

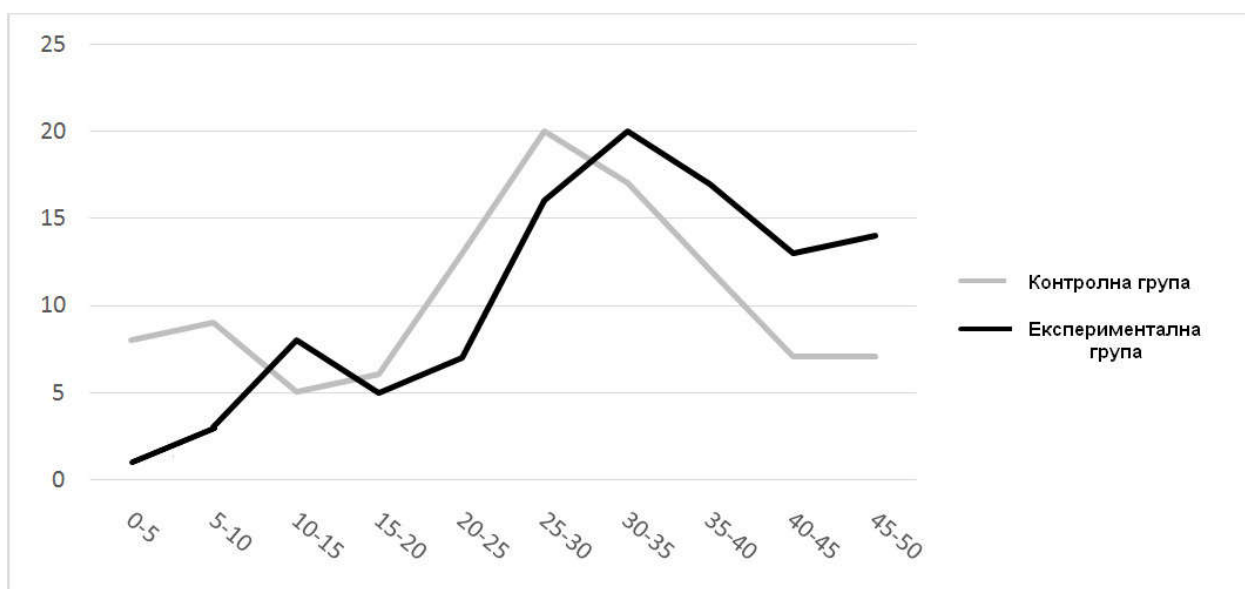
GRAFIČI SU RAZVRSTANI PO VRSTAMA NA TAJ NAČIN ZATO ŠTO SU U PRVOM REDU NEGATIVNE F-JE (PRVE DVE), PA OPAZAJUĆE F-JE (DRUGE DVE), A U DRUGOM REDU SU PRVO POZITIVNE F-JE (PRVE DVE), PA DVE RASTUĆE F-JE. PRVA KOLONA POKAZUJE F-JE KOJE SU SUPROTNE PO ZNAKU ISPRED α , A ISPO IM JE β , SU POKAZUJE I DRUGA KOLONA.

Слика 33. Други део решења дестог задатка.

5.5.2. Статистичка анализа резултата теста

Студенти у експерименталној групи су просечно освојили 33.635 поена, односно 67.27% од укупног броја поена, док су студенти контролне групепросечно освојили 26.875 поена, односно 53.75% од укупног броја поена. У контролној групи је било студената без поена, односно са нула поена, а у студената са максималним бројем поена је било у обе групе. У експерименталној групи максималан број поена освојило је 7 студената, док је у контролној групи студената са максималним бројем поена било троје. Највећа фреквенција у експерименталној групи била је око 35 поена, а у контролној око 30 поена. Наведени резултати се незнатно разликују од резултата које су остварили студенти обухваћени претходним истраживањем, спроведеним 2015. године.

Расподела поена у експерименталној и контролној групи на тесту приказана је графиком на [Слици 34](#). Број поена (од 0 до 50, у интервалима по 5) је приказан на x-оси, а број студената који су освојили одговарајући број поена је приказан на y-оси.



Слика 34. Расподела броја студената према броју поена (освојених на тесту).

Посматрањем Сликe 34 уочићемо да је, међу студентима који су освојили мање од половине укупног броја поена, знатно мање студената експерименталне групе, док је, када су у питању студенти који су остварили бољи резултат, ситуација обрнута.

Као и код анализе резултата пре-теста и резултата тестова у претходном истраживању, спроведеном годину дана раније, у статистичкој анализи резултата теста примењен је Студентов *t*-тест разлика између аритметичких средина два велика независна узорка. Статистички резултати анализе теста дати су у Табели 7.

Табела 7
Статистички резултати теста.

Група	Бр. студената	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлике између аритметичких средина		Ефекат величина	Оцена поузданости
	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>t</i>	<i>p</i> (2-стр.)	Cohan's <i>d</i>	Cronbach's alpha
Експериментална	104	33.635	11.629	3.9846	0.000094	0.553	0.801
Контролна	104	27.875	12.808				0.803

Можемо закључити да је разлика између резултата тестова у експерименталној и контролној групи статистички значајна на нивоима значајности 0.05 и 0.01 ($t(206) = 3.98463$; $p = 0.000094$). Ефекат величина експерименталног фактора је средњи (Cohan's $d = 0.553$). Овај податак указује на то да добијена разлика омогућава практичну предност експерименталне у односу на контролну групу. Поузданост теста је оцењена помоћу Cronbach-овог алфа коефицијента за обе групе, експерименталну и контролну. Вредност овог коефицијента у експерименталној групи је 0.803, а у контролној 0.801. Ове вредности су добре, што значи да је тест поуздан.

На основу добијених података, можемо закључити да су студентска постигнућа у области функција са параметрима и њихових особина боља када приликом увежбавања одговарајућих наставних садржаја користе рачунар, односно, конкретном случају, када користе образовни софтвер *GeoGebra* и његове динамичке радне листове као помоћно наставно средство приликом увежбавања.

6. Опис тока другог експерименталног истраживања спроведеног 2016/2017. године

У истраживањима описаним у поглављима 4 и 5 анализирани су трансформације функција и особине функција са параметрима, али без примене извода. Међутим, између особина функције и особина њеног првог извода постоји међузависност. Неопходно је да студенти познају ову међузависност, јер им то може значајно олакшати испитивање особина функције. Штавише, примена извода функције има једну од кључних улога у испитивању њених особина. Наиме, монотоност тока функције се може одредити помоћу знака првог извода, екстремне вредности функција помоћу нула првог извода и сл. Такође, познавање особина извода функције је од изузетног значаја за даљу примену извода у физици, математичком моделирању и сл.

6.1. Истраживање у циљу унапређења знања студената о особинама функција и њихових извода

Имајући у виду наведене чињенице, закључено је да би било важно, током анализирања утицаја примене динамичког софтвера на постигнућа студената у области функције, посветити више пажње испитивању особина функција применом извода, као и анализи међузависности особина функције и особина њеног првог извода. Такође, узимајући у обзир податке из претходна два истраживања, који су указали на важност познавања утицаја параметара на особине функција, дошли смо до закључка да би било корисно обогатити знање студената бољим упознавањем са утицајем параметара на први извод функције и његове особине, када је реч о функцијама датим са променљивим параметрима. С тим у складу, одлучено је да буде спроведено додатно истраживање, у коме би акценат био на раду студената са функцијама са параметрима и њиховим изводима у динамичком окружењу.

Извод функције и његова примена представљају један од важних садржаја курсева математичке анализе, односно математике, на већини факултета. Поред тога, студенти се са појмом извода функције, његовим особинама и применом упознају у доуниверзитетском образовању. Прецизније, извод функције се изучава у завршном разреду средње школе, код највећег броја образовних профила и подручја рада. Касније, током високог образовања, на појединим факултетима се посвећује доста пажње и примени извода. Примена извода функције представља неизоставан садржај курсева математичког моделирања, без обзира на студијски програм.

Употреба савремене технологије у циљу побољшања квалитета обраде наставних садржаја који се односе на изводе функција, као и рад са изводима у оквиру вишеструких репрезентација, били су теме неколико ранијих истраживања (Amoah & Laridon, 2004; Goerd, 2007; Kendal & Stacey, 2000). Динамички софтверски пакети дали су нову димензију раду са изводима функција у оквиру вишеструких репрезентација.

Ново истраживање је такође спроведено у оквиру курса наставног предмета Општа математика за студенте хемије, односно Математика 1 за студенте физике, током академске 2016/2017 године. Дакле, овим истраживањем су обухваћени исти студенти који су учествовали у истраживању описаном у Поглављу 5. Може се рећи да ово истраживање представља наставак претходног, с тим да је, овога пута, пажња посвећена раду са изводима функција датих са параметрима.

Током овог истраживања је, такође, коришћен образовни софтвер *GeoGebra*, с тим да, овога пута, студенти нису радили у колаборативним групама, него индивидуално. Идеја је била да се сагледа да ли примена динамичког софтвера омогућава квалитетнији конструктивистички приступ у раду, односно да се допусти студентима да свако на свој начин приступи решавању задатака.

Будући да су, за потребе истраживања описаног у Поглављу 5, а на основу резултата пре-теста датог у Прилогу 6, већ формиране експериментална и контролна група, није било потребе за новим прелиминарним тестирањем студената. Предвиђено је да студенти обеју група реализују посматрани део вежби на факултету, с тим да би, као и у претходним истраживањима, студенти експерименталне групе радили уз помоћ рачунара, док би студенти контролне групе радили без рачунара. По завршетку процеса учења, знање студената обеју група, експерименталне и контролне, било би проверено тестом, а резултати овог тестирања би били предмет поређења и статистичке анализе. Тест би био рађен без употребе рачунара и не би се разликовао за студенте експерименталне и контролне групе.

6.2. Циљеви другог истраживања спроведеног 2016/2017. године

Циљеви овог истраживања се делимично поклапају са циљевима истраживања описаних у поглављима 4 и 5. Главни циљ овог истраживања јесте утврђивање степена утицаја примене динамичких вишеструких репрезентација функција и њихових извода на постигнућа студената у области особина функција. Једна од кључних разлика у односу на претходна два истраживања јесте што се анализира рад са изводима функција са параметрима. Нагласак је на доприносу примене динамичког софтвера познавању особина првог извода функције од стране студената, као и познавању веза између особина функције и особина њеног првог извода.

Друга битна разлика је то што, током овог истраживања, није примењивана метода колаборативног, него индивидуалног рада студената, како би се показало да примена динамичког софтвера доприноси бољим постигнућима студената и када нису у могућности да сарађују и размењују мишљења са другим студентима.

У овом истраживању, као и у претходном, анализира се испитивање функција са параметрима, као и утицај параметара на особине функције, с тим да се сада посматра и зависност особина првог извода функције од параметара. Студентима је остављена могућност да посматрају утицај параметара на особине функције и њеног првог извода

кроз трансформације проузроковане променом вредности параметара, на сличан начин као што је то рађено са особинама функција током истраживања описаног у Поглављу 3.

Значајна пажња је поново посвећена раду у оквиру вишеструких репрезентација, али са посебним нагласком на динамичком повезивању репрезентација, односно раду у оквиру динамичких репрезентација, који је омогућен применом одговарајућег динамичког софтвера.

Предвиђено је да током овог истраживања буду коришћени су наставни материјали описани у поглављима 3.4 и 3.5. Оба поменута наставна материјала обухватају и испитивање функција уз примену првог извода. Креирани су тако да се могу посматрати особине функција са или без примене извода. Предвиђено је да, за потребе овог истраживања, буду креирани нови тестови знања, који би омогућили да се провери у којој мери студенти познају особине функција, али и извода функција. Такође је предвиђено да знање студената буде тестирано непосредно по завршетку курса.

6.3. Процес рада студената током експерименталног истраживања

Као што је речено у Поглављу 5, истраживањем које је спроведено током академске 2016/2017 године обухваћено је укупно 227 студената. За ово истраживање је одабрано по 92 студента у сваку групу, како би даља анализа била што једноставнија. Оваква измена у односу на истраживање описано у Поглављу 5, где је у свакој од група, експерименталној и контролној, било по 108 студената, начињена због тога што су поједини студенти у међувремену одустали.

Наиме, тестирање студената обављено је у испитном року, при чему нису сви студенти приступили полагању испита у том испитном року. Будући да су експериментална и контролна група формиране тако да је сваки студент једне од група имао одговарајућег пара у другој групи, резултати студената чији су парови изостали са тестирања нису узети у обзир приликом даље анализе. Важно је напоменути да, изузев поменутог изостављања појединих из анализе, парови студената експерименталне и контролне групе нису мењани, што значи да није могло доћи до нарушавања принципа формирања ових група, детаљније описаног у Поглављу 4.

Студенти су задатке решавали на факултету, где су имали могућност коришћења интернета, као и потребне литературе. Поред тога, за евентуална питања или помоћ, могли су се обратити наставницима. Студенти експерименталне групе су радили укупно 6 четрдесетпетоминутних часова, док су студенти контролне групе радили укупно 12 часова. Од студената обеју група захтевано је да, по завршетку вежби, предају своје радове у писаној форми, док је, поред наведеног, од студената експерименталне групе захтевано да, путем електронске поште, доставе динамичке радне листове, које су креирали користећи образовни софтвер *GeoGebra*. Сви студенти су добили по 5 поена за успешно решене задатке.

Важно је напоменути да су студенти, пре ових вежби, упознати са дефиницијом извода, његовим особинама и применом, те да су доказивали неопходне теореме и вежбали одговарајуће задатке, који се могу наћи у готово свим уџбеницима и збиркама задатака из математичке анализе. Након тога су увежбавали испитивање особина функција уз примену извода, а у даљем раду се анализирају они задаци који се односе на функције дате са променљивим параметрима.

6.3.1. Анализа рада студената на испитивању функција и њихових извода у оквиру динамичких вишеструких репрезентација

Задаци за вежбу су креирани тако да су студенти обе групе, експерименталне и контролне, могли да их решавају. Како би сви студенти били равноправни, студентима контролне групе је омогућено да раде дуже (њихове вежбе су реализоване током 3 дана, док су вежбе студената експерименталне групе реализоване током два дана). Задаци које су студенти решавали дати су у Табели 8.

Табела 8

Задаци за вежбе – испитивање особина функција и њихових извода

1. Скицирати графике функција $f(x) + a$, $f(x + a)$, $af(x)$, $f(ax)$, и њихових извода, где је функција f дата у даљем тексту, док је a реални параметар. Испитати особине сваке од функција, у зависности од вредности параметра a , и дискутовати о међусобној зависности осовина функције и особина њеног првог извода.				
a) $f(x) = x^2$	b) $f(x) = x^3$	c) $f(x) = \frac{1}{x}$	d) $f(x) = 2^x$	e) $f(x) = \log_2 x$
f) $f(x) = \sin x$		g) $f(x) = \frac{(x+2)(x+3)(x+1)x(x-2)(x-1)(x-3)}{30}$		
2. Испитати функцију $f(x) = \frac{x-b}{x^2-a} e^{cx}$, за различите вредности параметара a , b и c .				

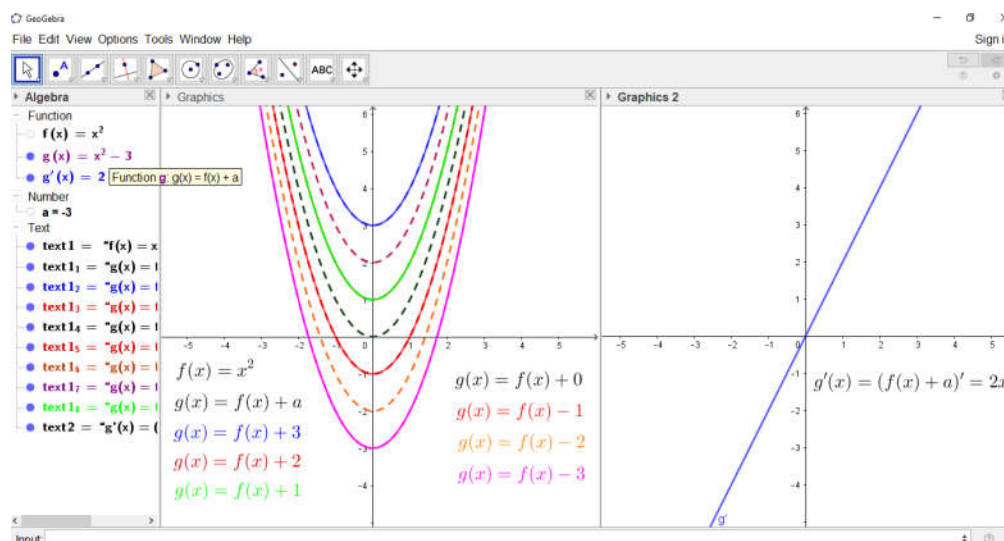
Студенти експерименталне групе су решавали задатке на начин сличан ономе који је описан шемом на Слици 12, користећи динамичка, али и друга својства образовног софтвера *GeoGebra*. Међутим, иако су сви приступи студената експерименталне групе у решавању ових задатака одговарали поменутој шеми, они су се, између себе, значајно разликовали.

Будући да су радили самостално, дошла је до изражаја креативност сваког од студената, као и њихова способност да самостално формирају процедуре за решавање проблема, у духу конструктивизма. Иако су, углавном, радили под утицајем ранијих предавања и вежби, као и наставног материјала који им је био доступан, већина студената експерименталне групе је, барем делимично, дала свој допринос креирању процедура испитивања и графичког приказивања функција, што се могло уочити увидом у динамичке

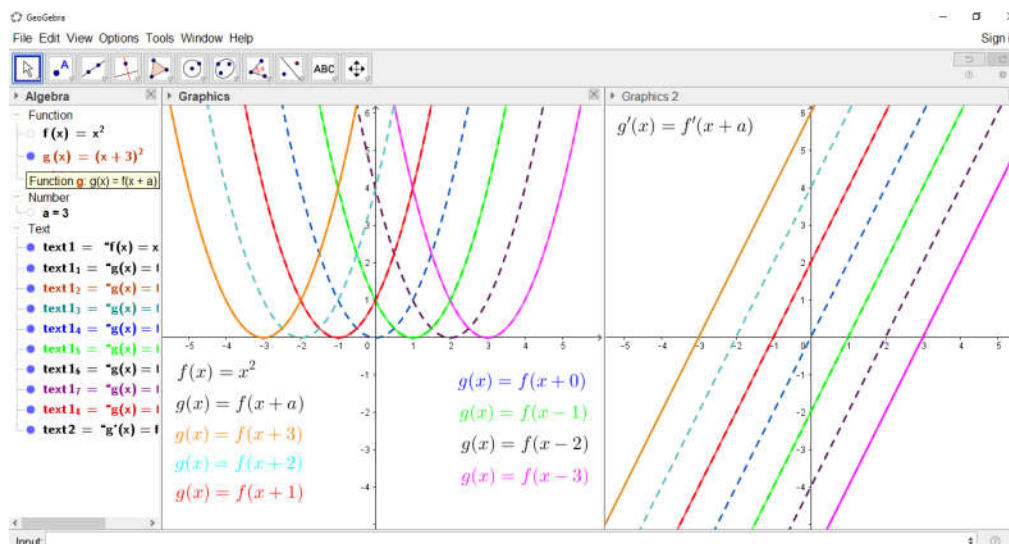
радне листове које су студенти самостално креирали у *GeoGebra* окружењу, а затим доставили путем електронске поште, као и писаних радова које су предали. Међу бројним радовима студената, издвајају се, у зависности од приступа који су применили, односно својстава образовног софтвера *GeoGebra* које су користили, три групе студената, односно три различита приступа у испитивању особина функције и њеног првог извода.

Прву од три уочене групе, која је уједно и најбројнија, чини око 52% студената експерименталне групе. Они су користили графичку репрезентацију функције и њеног првог извода истовремено, како би испитали одређене особине функције. Дакле, посматрањем графика функције и њеног првог извода, одређивали су нуле функције, односно тачке пресека са координатним осама, монотоност функције, знак, асимптоте, екстремне вредности и сл. Своја запажања о особинама функције и њеног првог извода, као и о међусобној повезаности особина функције и првог извода, бележили су на посебан папир, који су касније предали. Они су, такође, већину потребних израчунавања извршили на поменутом папиру.

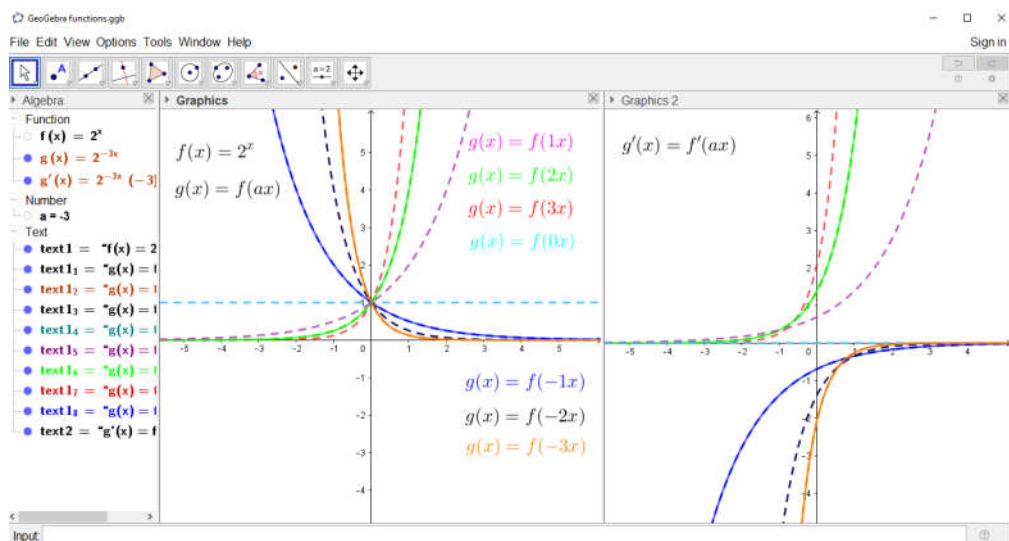
Већина ових студената је цртала неколико графика дате функције, за различите вредности посматраног параметра, добијене у истом динамичком радном листу коришћењем клизача, као и одговарајуће графике првог извода. Неки су све графике цртали у истом графичком прозору, док су неки користили два графичка прозора и тиме постигли бољу прегледност добијене графичке репрезентације. Четресторо студената је користило опцију „траг“ приликом цртања графика функција $f(x) + a$, $f(x + a)$, $af(x)$, $f(ax)$ и њихових првих извода. Ова опција омогућава да, након промене која наступа као последица померања клизача, график функције оставља свој траг на површини за цртање, чиме се постиже да се на тој површини истовремено виде графици посматране функције за различите вредности одређеног параметра. Примери оваквог приступа у решавању првог задатка приказани су на сликама 35, 36, и 37. На овим сликама се налазе снимци екрана једне студенткиње која је у раду примењивала претходно описану методу.



Слика 35. Студентски рад.



Слика 36. Студентски рад.

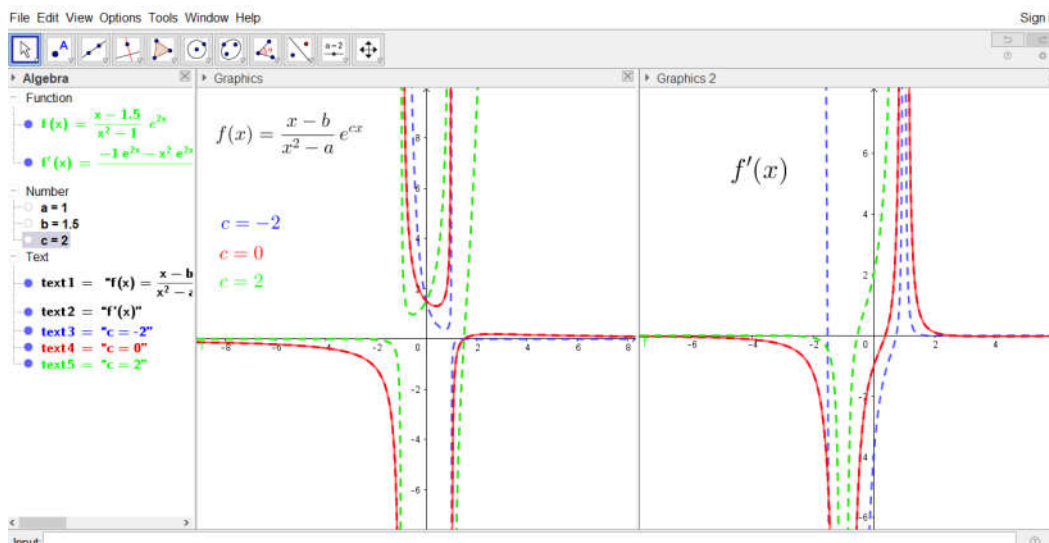


Слика 37. Студентски рад.

Посматрањем Сликe 35 уочавамо да је, у алгебарском прозору, аналитичким изразом дата само функција $g(x) = x^2 - 3$, док су у првом графичком прозору видљиви графици функције $f(x) + a$, за $a = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, где је $f(x) = x^2$. Ови графици су међусобно различитих стилова, а различито су и обојени. У другом графичком прозору, који је студенткиња предвидела за графичко представљање првих извода сваке од функција приказаних у првом графичком прозору, уочавамо само један график. Разлог томе је што је први извод исти за све посматране функције и параметар a , у овом случају, не утиче на први извод. То је закључила и ова студенткиња, посматрајући и међусобно поредећи графичке репрезентације функција и извода. Она је свој закључак записала и детаљно образложила.

На Слици 36 дати су графици функције $f(x + a)$, за исту функцију f и исте вредности параметра a као на Слици 35. Међутим, овде се уочава да се, за различите вредности посматраног параметра, разликују први изводи функције $f(x + a)$. Поредићи случајеве приказане на сликама 35 и 36, студенткиња је уочила и истакла разлике између особине функције $f(x) + a$ и $f(x + a)$. На пример, записала је да параметар a , са једне стране, нема никаквог утицаја на први извод функције $f(x) + a$, јер овај извод не зависи од вредности параметра a , али да, са друге стране, утиче на први извод функције $f(x + a)$.

Посматрањем Слике 37, видимо да је студенткиња на сличан начин испитивала и особине функције $f(ax)$, где је $f(x) = 2^x$. На исти начин је испитала и особине преосталих функција, као и њихових извода. Све испитане особине је детаљно описала. Такође је међусобно поредила особине функције и особине њеног првог извода и описала међусобну зависност ових особина. Анализирала је и утицај параметра a на особине функције и извода, за сваку од посматраних функција. Она је задатке решавала служећи се, углавном, графичком репрезентацијом посматраних функција, док је алгебарску репрезентацију користила као помоћну, онолико колико јој је то било потребно. Исти приступ је применила и код решавања другог задатка, што је приказано на Слици 38. Важно је напоменути да су на овој слици, због прегледности, дати графици функције и њеног првог извода за свега три различите вредности посматраног параметра.

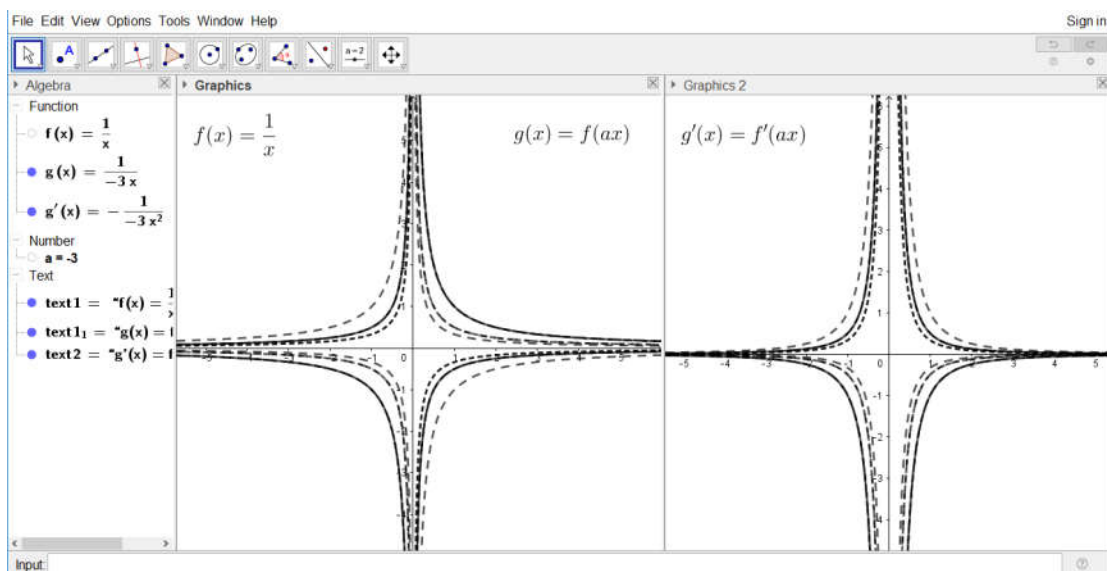


Слика 38. Студентски рад.

Претходно описани приступ у испитивању особина функција и њихових извода се показао као успешан, јер су студенти који су применили овакав приступ коректно описали особине и међусобну зависност особина функција и њихових извода. Недостатак овог приступа се огледа у мањку транспарентности графичке репрезентације појединих функција, до чега долази уколико се не користе све расположиве опције образовног

софтвера *GeoGebra* које су поребне за успешну примену описаног приступа, односно уколико се оне не користе на одговарајући начин.

Један овакав пример приказан је на Слици 39. Ова слика приказује графичку репрезентацију фамилије функција $f(ax)$, где је $f(x) = \frac{1}{x}$. Студенткиња која је креирала приказани динамички радни лист је применила сличан приступ као студенткиња која је креирала радне листове приказане на сликама 35, 36, 37 и 38, али није користила различите боје за цртање графика функције $f(ax)$, добијених додељивањем различитих вредности параметру a . Услед недостатка транспарентности у графичкој репрезентацији, студенткиња је донела погрешне закључке о везама између особина појединачних функција и њихових извода. Она је у својој анализи, приложеној у писаној форми, посматрала извод функције $f(2x)$ као извод функције $f(-2x)$. Недовољна прегледност овако формиране графичке репрезентације се јасно уочава са Сlike 39. Очигледно је коришћена опција „траг“, као и различити стилови за графике, али без коришћења различитих боја.



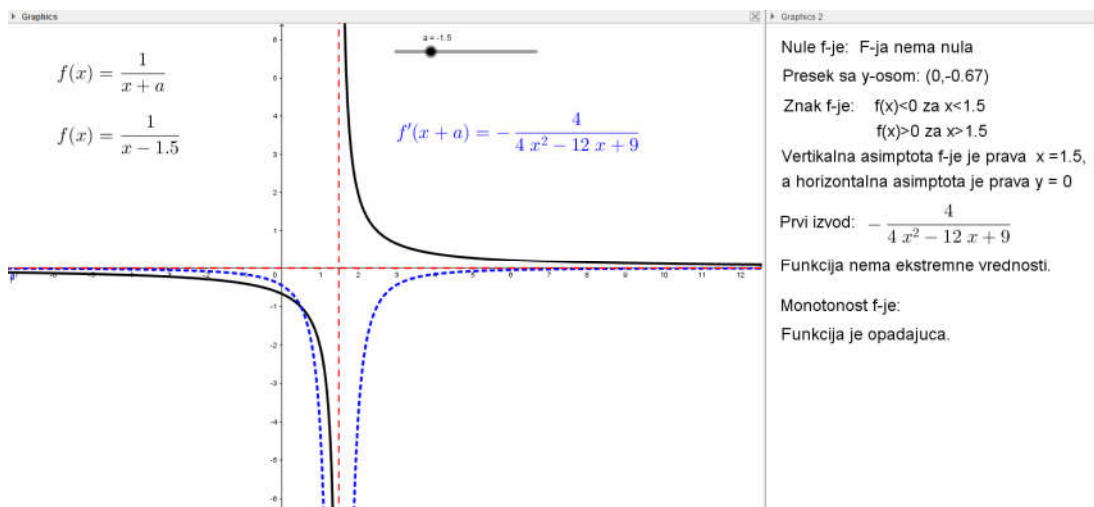
Слика 39. Студентски рад.

Други најзаступљенији приступ који су студенти експерименталне групе примењивали у испитивању особина функција и њихових извода подразумевао је коришћење великог броја различитих својстава образовног софтвера *GeoGebra*. Овај приступ је применило приближно 24% студената. Студенти који су примењивали овај приступ, креирали су динамичке радне листове који садрже графичку репрезентацију функције и њеног првог извода, дате истовремено, у истом графичком прозору. Поред тога, ови динамички радни листови садржали су поступке израчунавања, као и алгебарске репрезентације, како функције и њеног првог извода, тако и њихових особина. За приказивање поменутих алгебарских репрезентација и рачунских поступака употребљен је други графички прозор (графички прозор се, по потреби, применом одговарајућих

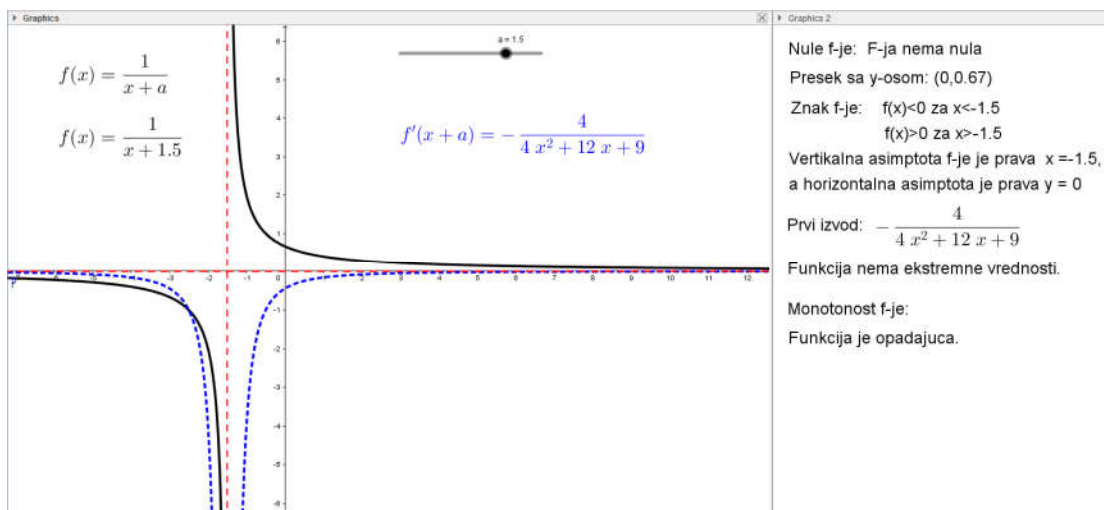
особина образовног софтвера *GeoGebra*, може прилагодити за алгебарску репрезентацију, док обрнуто, са алгебарским прозором, није могуће учинити). Овим је постигнуто да се, посматрањем оба графичка прозора, истовремено, на екрану могу посматрати алгебарска и графичка репрезентација функције која је предмет испитивања, као и сам процес њеног испитивања.

Студентима који су применили овакав приступ папир је био потребан само како би описали везе између особина функција и њихових извода, као и утицај параметара на особине функција. Међутим, неки од њих су, иако то није било неопходно, одређена израчунавања вршили на папиру који су касније приложили.

Један пример коректног испитивања особина функције $f(x + a)$, где је $f(x) = \frac{1}{x}$, применом описаног приступа, дат је на сликама 40 и 41.



Слика 40. Студентски рад.



Слика 41. Студентски рад.

Важно је напоменути да је динамички радни лист, који је овај студент креирао, прилагођен за испитивање особина функције за велики број различитих вредности параметра a , али да су, на приложеним сликама, приказана само два случаја. У питању су случајеви када параметар a има супротне вредности, тако да се, са ове две слике, већ може анализирати утицај знака параметра a на неке од особина посматране функције, али и утицај његове вредности на вертикалну асимптоту и знак функције.

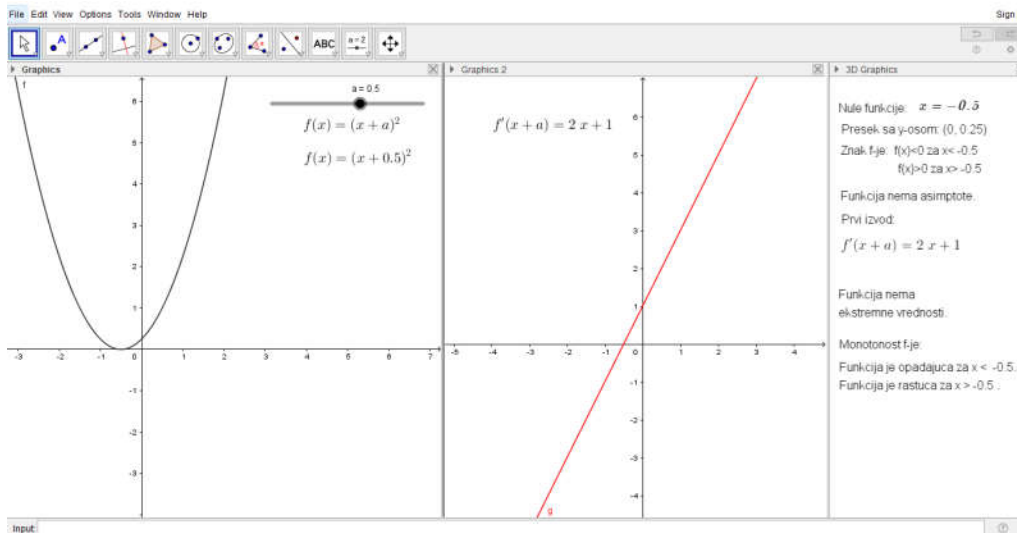
Динамички радни листови студената који су применили овај приступ су, поред суштинске сличности, имали и одређене међусобне разлике. Ове разлике су се најчешће огледале у редоследу и начину испитивања појединих особина функције, те у коришћењу различитих својстава образовног софтвера *GeoGebra*, што поново указује на то да употреба рачунара, односно динамичког софтвера, омогућава долажење до изражаја креативности појединца.

Неки од студената су имали потешкоћа и код овог приступа. Ове потешкоће су, углавном, проузроковане грешкама у процесу израчунавања, што је често имало за последицу доношење погрешних закључака о утицају вредности параметра на особине функције, али и о међусобним везама особина функције и њеног првог извода. Постоји могућност да се неке од поменутих грешака настале због недовољно поједностављених аналитичких израза првих извода, креираних од стране образовног софтвера *GeoGebra*. Ово је уједно и једини недостатак уочен код оваквог приступа. Велики број студента је овај приступ применио и код решавања другог задатка.

Трећи најзаступљенији приступ, примењен од стране приближно 18% студената експерименталне групе, представља комбинацију два претходно описана приступа. Студенти који су примењивали овај приступ креирали су динамичке радне листове који су садржали графичке репрезентације функција и њихових извода одвојено, у два различита графичка прозора. За израчунавања и алгебарску репрезентацију искористили су трећи графички прозор, који је иначе предвиђен за представљање тродимензионалних објеката.

Овим је постигнуто да се, без умањења транспарентности графичке репрезентације, могу користити опције образовног софтвера *GeoGebra* као што је „траг“, а да се притом и рачунски део процеса испитивања особина функције изврши у оквиру програма *GeoGebra*. Један пример успешне примене овог приступа у испитивању особина функције дат је на Слици 42. У питању је испитивање функције $f(x + a)$, где је $f(x) = x^2$. Поред тога што су графичке репрезентације функције и њеног првог извода одвојене, односно дате у различитим графичким прозорима, овај студент је њихове графике приказао различитим бојама.

Слично као и код претходна два приступа, студенти који су примењивали трећи приступ су, у највећем броју случајева, били успешни. Већина их је и други задатак решавала на исти начин. Код оних који су правили грешке, најчешће се дешавало да погреше у процесу израчунавања, или да, из одређеног разлога, донесу погрешне закључке (слично као студенти који су применили други приступ).



Слика 42. Студентски рад.

Преостали студенти су, у највећем броју случајева, примењивали поступке који представљају комбинације претходно описаних поступака, или су, у малом броју случајева, покушавали да примене неки други приступ. Неки од ових покушаја су остали без успеха. Ако бисмо сваки од претходно описаних поступака поредили са шемом испитивања функција са параметрима, датој на Слици 12 у Поглављу 3.7, учили бисмо да се сви поступци примењивани од стране студената експерименталне групе, највећим делом, уклапају у поменуту шему.

Иако је у првом од описаних поступака доминантна графичка репрезентација, ни он не одступа од шеме на Слици 12. Може се рећи да се у поменуту шему још боље уклапају други и трећи поступак, код којих су обе репрезентације, алгебарска и графичка, подједнако заступљене, као и потребна израчунавања, која су представљена заједно са алгебарском репрезентацијом.

Студенти експерименталне групе су покушали да испитају све задате функције и, највећим делом, били успешни у томе. Примећено је да су неки од студената експерименталне групе, поред првог извода, разматрали и изводе вишег реда (углавном други извод). Највероватнији разлог томе је што програмски пакет *GeoGebra* омогућава одређивање извода вишег реда и њихово графичко представљање без сложених рачунских поступака. Међутим, до изражаја је дошло и то што аналитички изрази извода, формиранги од стране софтвера *GeoGebra*, нису довољно поједностављени, што је мањем броју студената проузроковало потешкоће у раду.

Генерално гледано, сви студенти експерименталне групе су користили графичке репрезентације функција и њихових извода у циљу испитивања особина функција. Код неких је графичка репрезентација била више заступљена у односу на алгебарску. Нико од студената ове групе није применио класичан поступак за одређивање извода функције, нула или асимптота. Било је неколико студената који су проверавали резултате, добијене помоћу графика, уношењем одређених вредности у одговарајућу формулу, углавном

користећи при томе рачунар. Било је и неколико студената који су све урадили помоћу рачунара и нису прилагали никакав папир.

Неки од студената су анализирали везе између трансформација функције и трансформација њеног првог извода, али само у случају функције $f(x) = x^2$. Ови студенти су успешно закључили, на пример, да параметар који се додаје функцији проузрокује вертикалну translацију њеног графика, али да не доводи ни до какве трансформације првог извода. Са друге стране, констатовали су да додавање параметра аргументу функције проузрокује истовремене хоризонталне translације графика функције и графика њеног првог извода.

Наведени су само неки од примера успешне примене образовног софтвера *GeoGebra* од стране студената експерименталне групе. Описани различити приступи, које су студенти примењивали у решавању задатака, указују на успешно конструктивистичко учење. Коришћење рачунара омогућило им је да своје учење организују на различите начине, у зависности од сопствене креативности и предзнања, односно да га прилагоде сопственим потребама. Прецизан опис и закључци које су студенти доносили указују на то да је већина њих успешно конструисала знање у овој области, које ће бити у стању да примене у конструисању нових знања.

Са друге стране, студенти контролне групе, који су решавали идентичне задатке, нису имали могућност коришћења рачунара приликом њиховог решавања. Увидом у њихове радове, који су предати у писаној форми, могло се закључити да су сви имали готово исти приступ у решавању задатака. Тачније, њихови начини решавања су се, у одређеној мери, разликовали, али су сви одговарали шеми на Слици 10 у Поглављу 3.7. Другим речима, сви студенти контролне групе су започели свој рад у оквиру алгебарске репрезентације, да би затим приступили неопходним израчунавањима, након чега су формирали графичку репрезентацију. Разлике које су се појављивале у њиховим решењима углавном су се односиле на редослед испитивања појединих особина, као и на то да ли су или нису користили табеларну репрезентацију приликом цртања графика функције, односно првог извода, о чему је и раније било речи.

Број грешака које су начинили студенти контролне групе био је далеко већи у односу на студенте експерименталне групе. Њихове грешке су најчешће настајале током сложених поступака израчунавања које, за разлику од студената који су користили рачунар, нису могли да заобиђу. Такође, често су изводили погрешне закључке о утицају параметара на особине функције или првог извода, а детаљном анализом њихових радова може се закључити да је разлог томе посматрање малог броја различитих вредности параметара.

Такође, рад студената контролне групе захтевао је знатно више времена у односу на студенте експерименталне групе, што је и предвиђено приликом планирања организације њихових вежби. Будући да су се, највећим делом, држали познатог шаблона испитивања функција, описаног шемом на Слици 10, креативност појединаца није дошла до изражаја у довољној мери. Наравно, било је и оних који су, уложивши изузетно велики

труд, успешно решили задатке. Њихови приступи у решавању задатака се такође уклапају у шему на Слици 10.

6.4. Анализа резултата теста

6.4.1. Анализа резултата теста по задацима

Око месец дана након вежби описаних у Поглављу 6.3, тестирано је знање студената у области функција и њихових особина. Тестирањем су обухваћени сви студенти, независно од тога да ли припадају експерименталној или контролној групи, а тестови које су решавали нису се разликовали. Такође, сви студенти су решавали тест без употребе рачунара. Тест је садржао три задатка, а време за израду задатака ограничено је 120 минута. Тест је носио 30 поена, једнако распоређених по задацима (сваки задатак је носио по 10 поена). Задаци које су студенти решавали на тесту дати су у Табели 9.

Табела 9

Задаци за тест

1. Испитати особине функције $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$ и скицирати њен график.
2. Испитати функцију $f(x) = e^{0.5x(3x^2+x-2)}$ користећи дати график:
3. Дата је функција $f(x) = \frac{x-a}{x-b}$, где су a и b реални параметри. За различите вредности параметара a и b одредити:
а) нуле, б) асимптоте, с) знак првог извода дате функције.

У првом задатку, од студената је захтевано да, радећи у оквиру алгебарске репрезентације, испитају особине дате функције, а затим да формирају њену графичку репрезентацију. Наравно, није било забрањено да, уколико би то неко од студената желео, проба на самом почетку да формира графичку репрезентацију која би касније била коришћена у испитивању особина функције.

У другом задатку студенти су имали задатак да паралелно посматрају обе репрезентације, алгебарску и графичку, те да испитају особине функције користећи дати график. Од њих се очекивало да највећи број особина функције испитају помоћу графика, али није изричито забрањено нити захтевано да врше израчунавања у ту сврху. Дакле, могли су, у одређеној мери, да прилагоде начин решавања својим потребама, односно предзнању.

Трећи задатак је уједно био и једини на овом тесту који је садржао функцију са параметрима. Од студената је, у овом задатку, захтевано да испитају неке од особина дате функције, за различите вредности реалних параметара, присутних у аналитичком изразу функције. Овај задатак је дат како би било проверено у којој мери студенти познају утицај вредности параметара на особине функције, чему је посвећена значајна пажња током процеса учења.

Просечан број поена за сваки од задатака, за студенте експерименталне и контролне групе засебно, као и просечан број поена који су студенти остварили на тесту, дат је у Табели 10.

Табела 10

Просечан број поена остварених на тесту (по задацима и укупно)

Група \ Задатак	Први задатак	Други задатак	Трећи задатак	Укупан број поена
Експериментална група	6.68	7.62	6.30	20.60
Контролна група	6.07	6.02	4.17	16.26

Анализом резултата датих у Табели 10, можемо уочити да су студенти експерименталне групе имали, у сваком задатку, бољи резултат у односу на студенте контролне групе. Оно што је упадљиво, јесте да су студенти експерименталне групе имали најбољи резултат у другом задатку. Највероватнији разлог томе је њихова добра оспособљеност за рад у оквиру вишеструких репрезентација, односно комбиновање различитих репрезентација функција, на начин који је описан шемом на Слици 11 у Поглављу 3.7. Што се тиче резултата студената експерименталне групе у првом и трећем задатку, очито да је први задатак урађен нешто боље, али та разлика није нарочито изражена.

Што се контролне групе тиче, резултати студената у првом и другом задатку су били готово исти. Могући разлог томе је тај што су студенти који су, приликом увежбавања радили без рачунара, увек испитивали функције на сличан начин, описан шемом на Слици 10 у Поглављу 3.7. Они нису користили вишеструке репрезентације на начин на који су то радили студенти експерименталне групе, тако да им графичка репрезентација, дата у другом задатку, није била од нарочите помоћи код испитивања особина функције. Увидом у њихове радове могло се приметити да је значајан број ових студената, приликом решавања другог задатка на тесту, комплетан процес испитивања

особина функције спровео у оквиру алгебарске репрезентације, чак и не користећи дати график.

Најлошији резултат у обе групе, експерименталној и контролној, забележен је у трећем задатку, највероватније због потешкоћа које студенти имају у раду са променљивим параметрима. Овај задатак је био нарочито тежак студентима који су вежбали без рачунара, јер они нису били у могућности да, у довољној мери, сагледају промене особина функција проузроковане променама вредности параметара, јер нису имали могућност да посматрају довољно велики број различитих вредности параметара. Са друге стране, студенти експерименталне групе су направили значајан помак у решавању оваквих задатака, што се могло видети, како на овом тесту, тако и током рада на испитивању функција са параметрима, али и на тесту и током рада у претходном истраживању, описаном у Поглављу 5. Уколико бисмо поредили разлику у просечном броју поена, за сваки задатак, уочили бисмо да је она најизраженија управо у трећем задатку.

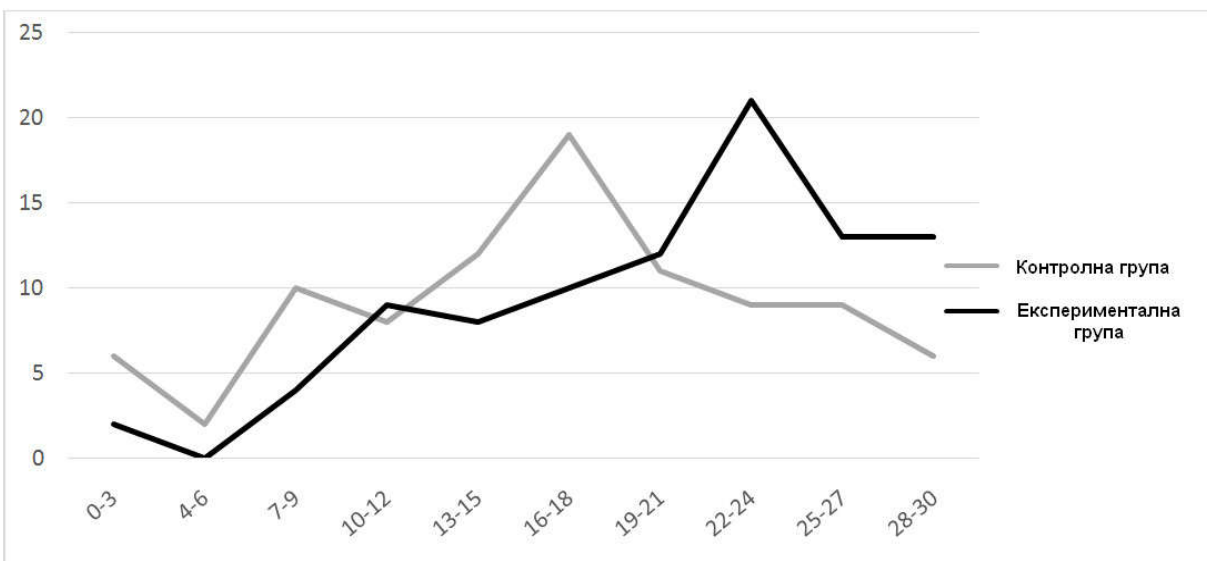
Можемо закључити да резултати, представљени у Табели 10, указују на то да примена динамичких вишеструких репрезентација функција и њихових извода, у оквиру образовног софтвера *GeoGebra*, доприноси бољим постигнућима студената у учењу особина функција, што је била претпоставка овог истраживања.

6.4.2. Статистичка анализа резултата теста

Као што је речено у Поглављу 6.4.1, максималан број поена на тесту био је 30 (10 поена по задатку). Просечан број поена који су остварили студенти експерименталне групе био је 20.60 (68.66% од максималног могућег броја поена), док је просечан број поена у контролној групи износио 16.26 (54.20%). У контролној групи је било студената који нису освојили ниједан поен, док је у обе групе било студената са максималним бројем поена. Највеће фреквенције су биле 30 и 16 поена, у експерименталној и контролној групи, респективно.

Расподеле броја поена студената експерименталне и контролне групе на тесту представљена је графички на Слици 43. Број освојених поена (од 0 до 30, у интервалима по 3 поена) представљен је на x -оси, док је број студената који су остварили одговарајући број поена представљен на y -оси.

Посматрањем Слике 43 може се приметити да је црна линија, којом су представљени резултати студената експерименталне групе, знатно испод сиве линије, којом су представљени резултати студената контролне групе, у делу испод 20 поена, изузев у интервалу од 10 до 12 поена. Са друге стране, у делу изнад 20 поена, сива линија је знатно испод црне. У експерименталној групи 13 студената је остварило максималан број поена, урадивши све тачно, док је максималан број поена у контролној групи остварило њих четворо. Статистички резултати теста дати су у Табели 11.



Слика 43. Расподела броја студената према броју поена (оствареном на тесту).

Табела 11

Статистички резултати теста

Група	Број студената	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлика између аритметичких средина		Ефекат величина
	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>t</i>	<i>p</i> (2-стр.)	Cohan's <i>d</i>
Експериментална	92	20.598	6.837	4.085	0.000066	0.602
Контролна	92	16.261	7.545	6		

Може се закључити да је разлика између резултата теста експерименталне и контролне групе статистички значајна на нивоима значајности 0.05 и 0.01 ($t(182) = 4.0856$; $p = 0.000066$).

Такође је могуће приметити да је ефекат величина експерименталног фактора средњи (Cohan's $d = 0.602$), што значи да добијена разлика обезбеђује практичну предност експерименталне групе у поређењу са контролном групом. Дакле, овим је доказано да се постигнућа студената у учењу особина функција боља када вежбају у оквиру динамичких вишеструких репрезентација функција и њихових извода. Тиме је остварен главни циљ овог истраживања.

7. Опис тока експерименталног истраживања спроведеног 2017/2018 године

У претходним истраживањима студенти су радили са већим бројем различитих функција, с тим да се од њих, у неколико конкретних случајева, захтевало да, на одговарајући начин, повезују функције исте класе (фамилије), односно да утврђују сличности и разлике међу појединим функцијама које могу потицати од исте функције са параметрима (родитељске функције). Рад са класама функција је значајан јер помаже студентима да јасније сагледају утицај вредности параметара на особине функције и њеног првог извода, као и да створе јаснију слику о узроцима појединих трансформација функција, о чему је било више речи у претходним поглављима.

7.1. Истраживање у циљу унапређивања знања студената о особинама фамилија функција и њихових извода

Будући да су студенти до сада радили са функцијама различитих класа, дошли смо на идеју да спроведемо додатно истраживање, у коме би се посматрао рад студената са функцијама исте класе, односно сродних класа. Под сродним класама функција подразумевају се класе у којима доминира иста елементарна функција, тј. које су настале композицијом једне елементарне функције са функцијама других класа.

У истраживањима описаним у поглављима 4 и 5 примењена је метода колаборативног рада. Резултати ових истраживања су показали да студенти, радећи са функцијама у динамичком окружењу, долазе до различитих идеја и креирају различите приступе у решавању задатака. Примећено је, увидом у писане радове студената, али и посматрањем процеса испитивања функција и њихових извода у динамичком окружењу, да њихова креативност нарочито долази до изражаја када раде у колаборативним групама. Због тога је одлучено да се у новом истраживању, поред детаљнијег испитивања особина функција сродних класа, посебна пажња посвети и самом раду колаборативних група, односно функционисању сваке од група као целине и сарадњи међу члановима унутар групе.

Ово истраживање је спроведено у оквиру курса наставног предмета Општа математика за студенте хемије, односно Математичке методе 1 за студенте физике, током академске 2017/2018. године. Будући да је у претходним истраживањима показано да примена динамичког софтвера приликом обраде и током увежбавања наставних садржаја који се односе на функције са параметрима има велики позитиван утицај на постигнућа студената у наведеној области, овога пута није било потребе за поређењем резултата студената који су радили са, односно без рачунара. Сви студенти су користили рачунар, како би било омогућено да њихова креативност дође до изражаја у што већој мери, те како би се створило погодно тле за конструктивистичко учење студената. У циљу формирања

динамичког окружења, као и у претходна три истраживања, коришћен образовни софтвер *GeoGebra*.

На почетку курса, 2017. године, студенти су решавали пре-тест, идентичан оном који су решавали студенти обухваћени истраживањем 2016/2017. године, а који је дат у Прилогу 6. Резултати пре-теста коришћени су приликом формирања колаборативних група. Студенти су, на овом пре-тесту, остварили просечно 20.853 поена од могућих 50, а приступи у решавању задатака, као и најчешће грешке које су правили, нису се значајније разликовали у односу на пре-тест из 2016. године, чија је детаљнија анализа дата у Поглављу 5.3. Резултати овог пре-теста коришћени су приликом распоређивања студената у експерименталну и контролну групу, тако да разлика у просечном броју поена оствареном на пре тесту не буде статистички значајна. Током истраживања, у експерименталној групи је примењена метода колаборативног рада, док је у контролној групи примењена метода индивидуалног рада студената.

7.2. Циљеви истраживања спроведеног 2017/2018. године

У овом истраживању, за разлику од истраживања описаних у поглављима 4, 5 и 6, не испитује се утицај примене динамичког софтвера на постигнућа студената у области функција, јер је тај утицај већ испитан и потврђен. Циљ овог истраживања је да се сагледа на који начин студенти, радећи у колаборативним групама, размењују мишљења и доносе заједничке одлуке и закључке, а у циљу омогућавања конструисања квалитетнијег знања. Такође, циљ је да се сагледа на који начин рад у динамичком окружењу помаже члановима колаборативних група да донесу тачне закључке о сличностима и разликама, те о међусобној зависности особина функција сродних класа, као и њихових извода. Акцент је стављен на утврђивање степена утицаја рада у колаборативном окружењу на постигнућа студената у раду са особинама класа функција.

Као и претходна, и ово истраживање је засновано на примени вишеструких репрезентација у динамичком окружењу, те њиховом динамичком повезивању, односно формирању динамичких репрезентација. Очекивано је да ће примена динамичког софтвера, у комбинацији са колаборативним радом, омогућити студентима да, за кратко време, испитају особине већег броја сродних класа функција (дакле, не само више функција исте класе). Ово је, током индивидуалног рада, отежано због времена које испитивање толиког броја функција захтева, а без примене динамичког софтвера би било готово неизводљиво. Такође се очекује да примена наведене методе омогући успешно конструктивистичко учење студената.

7.3. Анализа рада студената током експерименталног истраживања

Истраживањем, које је спроведено током првог семестра академске 2017/2018. године, обухваћено је 120 студената прве године основних академских студија студијских

програма Физика и Хемија, на Природно-математичком факултету у Новом Саду. Иако је укупан број студената наведеног студијског програма био нешто већи, истраживањем је обухваћено њих 120, јер су неки од студената у међувремену одустали или су били одсутни за време спровођења истраживања. Студенти су решавали задатке на факултету, а овај процес је трајао приближно 7 сати, распоређених у два дана (први дан 3 сата, а други дан 4 сата). На почетку су студенти експерименталне групе подељени у четворочлане групе, на начин описан у Поглављу 4.3.1.

Важно је напоменути да су студенти, пре вежби које су предмет овог истраживања, а у оквиру истог курса, били упознати са функцијама и њиховим особинама, као и особинама њихових извода, те да су већ радили у динамичком окружењу образовног софтвера *GeoGebra*. Истраживањем које је тема овог поглавља обухваћено је увежбавање испитивања особина функција са параметрима, односно сродних класа функција.

Након што су подељени у групе, студенти су добили наставне листиће са задацима које је требало да решавају. Њихов задатак је био да детаљно испитају особине функција које су им задате, као и утицај параметара на особине задатих функција, те да анализирају сличности и разлике међу функцијама сродних класа. Напоменуто је да сваки одговор детаљно и прецизно образложе. Задаци које су студенти решавали дати су у Прилогу 8. Имајући у виду чињеницу да су сви студенти користили рачунар током решавања задатака, креирано је неколико задатака које би без употребе рачунара било веома тешко или готово немогуће решити, а који су корисни студентима из разлога што омогућавају сагледавање веза између особина наизглед различитих, а сродних класа функција.

Током решавања задатака, свакој групи је на располагању био рачунар, укључујући и образовни софтвер *GeoGebra*, а имали су и могућност коришћења интернета. Ток учења надзиран је од стране наставника, који су пратили рад студената у групама и, уколико је то било потребно, давали упутства (нарочито код употребе одређених наредби софтвера *GeoGebra*).

Током испитивања функција, наставници су пратили рад колаборативних група, као и унутрашњу организацију група и комуникацију међу члановима. Оваквим праћењем уочени су различити приступи које су студенти имали, пре свега у организацији рада групе, а затим и у решавању задатака. По завршетку рада од студената је захтевано да предају своја решења са детаљним образложењима. Студентима је остављена могућност да решења предају у писаној или електронској форми, или као комбинацију писаних и електронских докумената. Сви студенти су, за успешно решене задатке, добили по 5 бодова.

7.3.1. Анализа колаборативног рада студената на испитивању функција са параметрима у окружењу динамичких вишеструких репрезентација

У овом поглављу описан је ток решавања задатака студената експерименталне групе, а дата је и анализа резултата њиховог рада. Издвојени су и детаљније описани поједини приступи у решавању задатака, који су омогућили квалитетнији преглед особина испитиваних класа (фамилија) функција. Сам рад група наставници су пратили непосредно, посматрањем, али и повременим дискусијама са члановима група, док су њихова решења анализирана накнадно, прегледом достављеног писаног и електронског материјала.

Пре почетка колаборативног рада студенти су били упознати са процедуром рада, као и са тим у коју групу су распоређени. Сачинили су план активности и поделили улоге у оквиру група пре него што су почели да раде. Након што су добили задатке (Прилог 8), почели су са радом придржавајући се својих планова. У 9 група студенти су донели своје лаптопове и по један од чланова малих група је радио на рачунару, док су преостала три члана анализирали задатке и предлагали начин решавања. У преосталих 6 колаборативних група студенти су користили паметне телефоне, на којима је био инсталиран образовни софтвер *GeoGebra*. Након извесног времена, један од студената у свакој групи је почињао да води и усмерава активности у оквиру групе, са циљем добијања квалитетнијих вишеструких репрезентација функција са параметрима.

Сви студенти експерименталне групе су активно сарађивали и доприносили стварању атмосфере тимског рада у оквиру малих група. Трудиле су се да формирају вишеструке репрезентације функција са параметрима на начин који би им омогућио што успешније испитивање њихових особина. Сви чланови групе су заједнички, кроз дискусију, доносили закључке у вези са особинама датих фамилија функција и утицајем параметара на ове особине, користећи предности рада у *GeoGebra* динамичком окружењу. Студенти су често били принуђени да мењају првобитни план рада групе, како би сваки члан групе био подједнако укључен у посматрање промена у динамичким радним листовима, проузрокованих променама вредности параметара. Подједнако укључивање свих студената у рад омогућује доношење тачнијих закључака кроз дискусију. У свим малим групама студенти су прилагођавали план рада тренутним потребама, односно захтевима конкретних задатака које су решавали. Студенти који су радили на рачунару су се такође укључивали у дискусију, а смењивали су се с времена на време, како би свако од чланова групе преузео ову дужност у једном тренутку.

Све мале групе су, углавном, радиле само са једним рачунаром или паметним телефоном. У групама у којима су коришћени паметни телефони дешавало се да, у почетку, студенти користе више телефона, али да током рада задрже само један. Било им је знатно јеноставније да дискутују о сличностима и разликама у оквиру фамилије

функција када су посматрали само један екран, него у случају када је свако посматрао засебан екран.

У наредном делу дати су примери организације рада у две колаборативне групе. У једној од њих (четвртој) студенти су користили лаптоп, док су у другој (деветој) користили паметне телефоне.

У четвртој групи, која је користила лаптоп, студенти су, на почетку, поделили улоге у на следећи начин:

- Први студент је радио у оквиру образовног софтвера *GeoGebra*, уносећи аналитичке изразе датих функција и дефинишући одговарајуће параметре помоћу клизача, те предузимајући радње у циљу промене вредности параметара и употребе наредби софтвера *GeoGebra* током испитивања функција.
- Други студент је имао задатак да анализира текст задатка и да усмерава рад првог студента, како би били испуњени сви захтеви постављени пред групу.
- Трећи студент је био задужен да посматра промене настале услед промене вредности параметара, те да изводи закључке у вези са особинама функције, које би саопштавао остатку групе.
- Четврти студент је био задужен за бележење резултата на папир, који је, по завршетку рада, предат наставницима. Поред наведеног, четврти студент је имао задужење да од првог студента преузме сачуване динамичке радне листове, креиране у *GeoGebra* окружењу, те да их пошаље путем електронске поште наставнику.

Студенти су веома брзо, још током решавања првог задатка, закључили да оваква подела, иако омогућава рад групе, није у потпуности одржива. Наиме, током испитивања особина функција у *GeoGebra* динамичком окружењу, било је неопходно да сви чланови групе, заједнички, кроз дискусију, изводе закључке о особинама датих функција и утицају параметара на те особине. Оваква промена првобитног плана наметнула се као неопходна јер су, већ током испитивања прве од наведених функција са параметром, студенти који нису били за то задужени, примећивали појаве које студент задужен за посматрање промена у особинама функција (трећи студент) није приметио.

Због тога су изменили план рада групе, тако да је сваки члан равноправно учествовао у посматрању насталих промена у динамичким радним листовима, а закључке су доносили заједнички, кроз дискусију. У складу са новонасталим околностима, донели су одлуку да ће се студенти задужени за рад на рачунару и бележење резултата смењивати, тако да сваки члан групе преузме на себе део ових задужења.

Студенти девете групе, који су користили паметне телефоне, у почетку су се организовали тако да је сваки члан групе користио свој телефон (на коме је био инсталиран образовни софтвер *GeoGebra*). Потом су дискутовали о својим запажањима и изводили закључке. Међутим, убрзо су увидели да, када свако од њих посебно креира и

посматра динамичке радне листове у *GeoGebra* окружењу, долази до потешкоћа у комуникацији. Наиме, свако од чланова групе је, у почетку, користио опције софтвера *GeoGebra* према сопственом нахођењу, што је довело до тога да студенти у оквиру исте колаборативне групе посматрају различите динамичке радне листове. То је за последицу имало дужу дискусију, јер је било неопходно да свако од студената објасни осталим члановима групе на који начин је користио наредбе софтвера *GeoGebra*. Због тога су, веома брзо након почетка колаборативног рада, студенти ове групе променили свој првобитни план и организовали се тако да цела група посматра исти динамички радни лист, односно да користе један телефон. Слична реорганизација је начињена у свим малим групама које су у почетку користиле више паметних телефона.

У првом задатку, од студената се захтевало да посматрају класе функција, настале додавањем реалног параметра функцији, односно њеном аргументу, или множењем функције, односно аргумента параметром. Студенти су требали да посматрају укупно пет група функција, односно фамилије функција настале њиховим трансформацијама, те да испитају њихове особине, као и да анализирају утицај реалних параметара на особине функција и њихових првих извода.

Прву групу функција чиниле су функције $g(x) = x$ и $h(x) = x^2$, а од студената је захтевано да испитају особине функције настале дељењем наведених функција. Циљ оваквог задавања функције био је да се студенти подстакну на размишљање о вези између полинома (међу које се могу сврстати посматране функције – идентичка и квадратна) и рационалних функција, као и да уоче да од функција које они сматрају најједноставнијим могу настати и сложеније функције. У првом делу задатка захтевано је да испитају особине и скицирају графике функција насталих додавањем, односно множењем функције или њеног аргумента једним реалним параметром, док је у другом делу задатка захтевано да раде са два реална параметра. Другу групу функција чиниле су четири основне експоненцијалне функције (са различитим основама), а од студената је захтевано да испитају класе функција добијених трансформацијама датих експоненцијалних функција. Трећу групу чиниле су логаритамске, четврту тригонометријске, а пету функције квадратног и кубног корена.

Наставници који су пратили рад група сугерисали су студентима да користе клизач, доступан у оквиру образовног софтвера *GeoGebra*, у циљу представљања функција са параметрима. Студенти су најпре (у првом делу првог задатка) мењали вредности једног од параметара померањем клизача и, за сваку вредност параметра, добијали истовремено алгебарску и графичку репрезентацију функције и њених извода. Они су били веома задовољни радом у *GeoGebra* окружењу, због тога што овај програмски пакет садржи све алатке потребне за успешно испитивање особина функција. У другом делу првог задатка, студенти су морали да воде рачуна о мењању вредности два параметра. Након краће дискусије, за ту сврху су увели други клизач. Затим су фиксирали вредност једног параметра и, мењањем другог, долазили у сличне ситуације као и првом задатку. Као што

је очекивано, рад са више параметара био је компликованији студентима, али они су и овај део задатка решили успешно.

Студенти су посветили значајну пажњу испитивању утицаја параметара на особине функција. Трудили су се да максимално искористе могућности које пружа образовни софтвер *GeoGebra*, а које су им биле познате од раније. Такође су уложили додатни напор како би упознали и неке нове особине овог динамичког софтверског пакета. У вези са опцијама образовног софтвера *GeoGebra*, које им нису биле познате, повремено су се обраћали за помоћ наставницима. Након смерница које би добили, самостално су испробавали нове могућности. Тако су, на пример, током анализе алгебарске репрезентације функција и њихових извода, студенти уочили потешкоће у одређивању првог извода. Наиме, аналитички израз је, након што су они задавали одговарајућу наредбу, био сувише компликован за читање и анализу, због чега су студенти покушали да одређују прве изводе без рачунара. Веома брзо су закључили да им та процедура захтева много времена, па су се обратили за помоћ наставнику. Тада су упознати са могућношћу коришћења CAS приказа (*Computer Algebra System*) у оквиру образовног софтвера *GeoGebra*. Овај приказ омогућава поједностављење сложенијих аналитичких израза, али пружа и бројне друге могућности, које олакшавају рад у оквиру алгебарске репрезентације, као и процес израчунавања. Са могућношћу коришћења CAS приказа упознати су и студенти у осталим групама.

Студенти већине малих група су максимално искористили погодности рада у динамичком окружењу и давали врло детаљан опис промена особина посматраних функција, које настају услед промена вредности параметара, након чега су изводили закључке о утицају параметара на особине функција. Радећи у динамичком окружењу, студенти су користили истовремено и алгебарску и графичку репрезентацију посматраних функција. Притом су посматрали и описивали везе између ових репрезентација, те промене које су настајале у једној, односно у другој репрезентацији, услед померања клизача и мењања вредности одговарајућих параметара. Поред тога што су посматрали појединачне особине функција, неки од њих су, за сваку од функција, анализирали и геометријске трансформације њеног графика, проузроковане додавањем, односно множењем аргумента или саме функције реалним параметром.

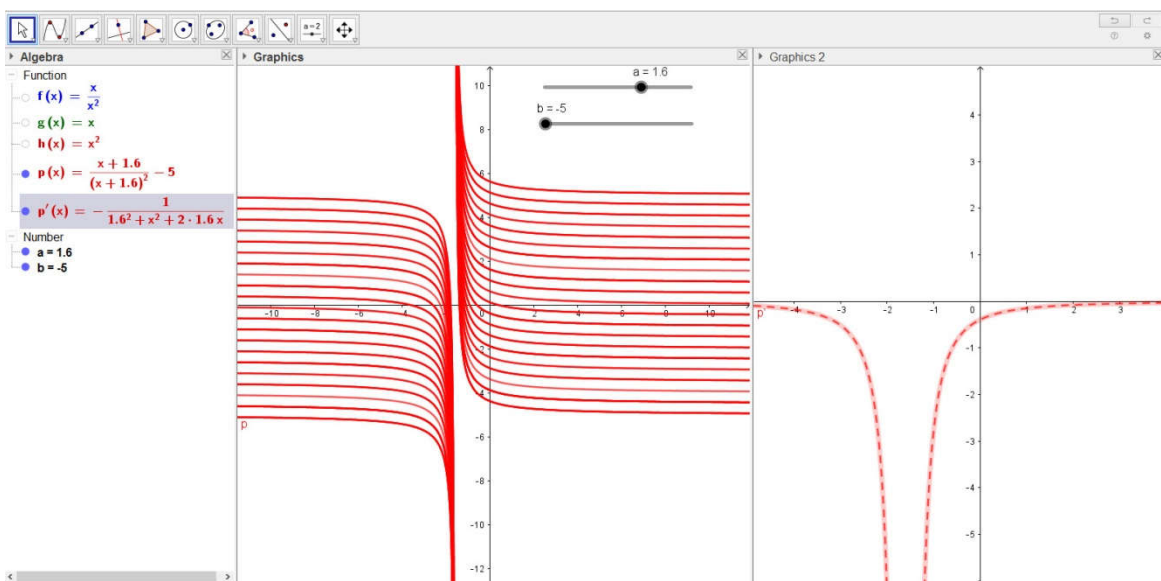
Наставници су приметили да су студенти, у различитим групама, примећивали различите приступе и да су, кроз дискусију, до закључака долазили на различите начине. Такође, није било идентичних динамичких радних листова приложених на крају рада, без обзира на чињеницу да су задаци били исти, као и да су решења била тачна. Користили су различите могућности које пружа образовни софтвер *GeoGebra*, тако да су добијали различите, али занимљиве алгебарске и графичке репрезентације фамилија функција.

У наредном делу дато је неколико примера студентских решења. На Слици 44 приказан је динамички радни лист четврте групе, у оквиру којег су испитиване особине фамилије функција $f(x + a) + b$, где је f рационална функција. Студенти су, у овом конкретном случају, фиксирали вредност параметра $a = 1.6$ и користили наредбу „траг“ у

циљу добијања различитих графичких репрезентација функције, у зависности од вредности параметра b . Функција p је представљена алгебарски и графички, за вредност $b = -5$. Извод је исти, дат алгебарски и графички у „графичком приказу 2“. Такође, у оквиру овог радног листа, студенти су користили различите боје и стилове линија.

Студенти ове групе су, најпре, посматрали графичку репрезентацију дате функције, где су описали геометријске трансформације проузроковане променама вредности реалних параметара a и b и објаснили узрочно-последичне везе између вредности параметра и положаја графика функције у координатном систему. Након тога су испитивали особине датих класа функција у оквиру алгебарске репрезентације, повезујући их са закључцима које су извели радећи у оквиру графичке репрезентације. Посебно су истакли на које особине утичу оба параметра, на које само један.

Тако су, на пример, закључили да, пошто услед мењања вредности параметра b није дошло до трансформација графика првог извода функције $f(x+a)+b$, овај параметар нема утицаја на особине првог извода. Касније су, у оквиру алгебарске репрезентације, дали детаљније образложење ове тврдње, односно закључили су да у аналитичком изразу првог извода наведене функције не егзистира параметар b , па самим тим не може утицати ни на његове особине. На Слици 44 приказане су трансформације проузроковане додавањем параметра b функцији, што је довело до вертикалне translације графика функције, али није утицало на график првог извода.

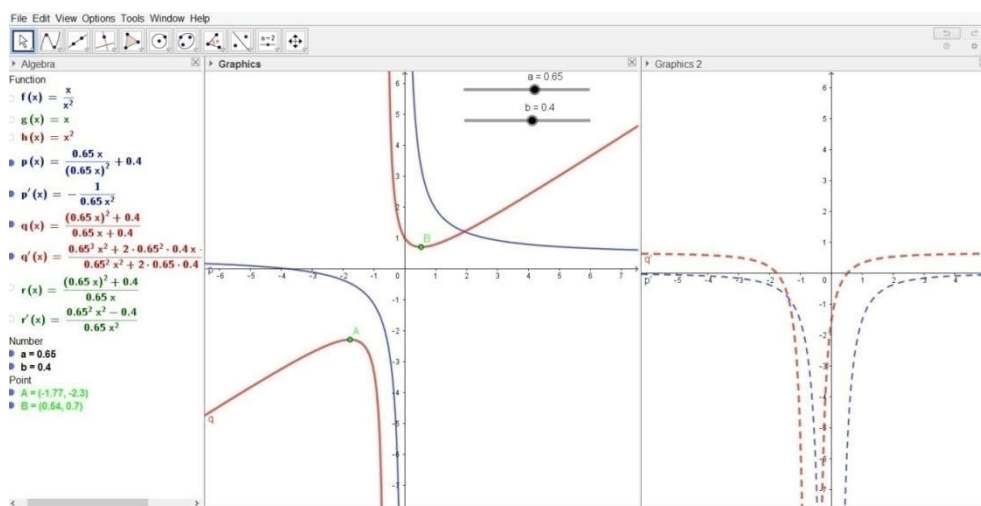


Слика 44. Рад четврте групе студената

Динамички радни лист студената дванаесте групе (Слика 45) је интересантан због поређења једне функције која припада фамилији $f(ax)+b = \frac{g(ax)}{h(ax)} + b$ и друге, која припада фамилији $\frac{g(ax)+b}{h(ax)+b}$. У првом графичком приказу дати су графици функција $\frac{h(ax)+b}{g(ax)+b}$

и $f(ax) + b$, док су у другом графичком приказу дати графици њихових првих извода. На овај начин су студенти поредили особине датих функција у другом задатку. Лако је могуће уочити да су користили опцију програмског пакета *GeoGebra* која омогућава одређивање екстремних вредности функција, што им је помогло да одреде тачке минимума и максимума функције $\frac{h(ax)+b}{g(ax)+b}$, односно да констатују да функција $f(ax) + b$ нема екстремне вредности.

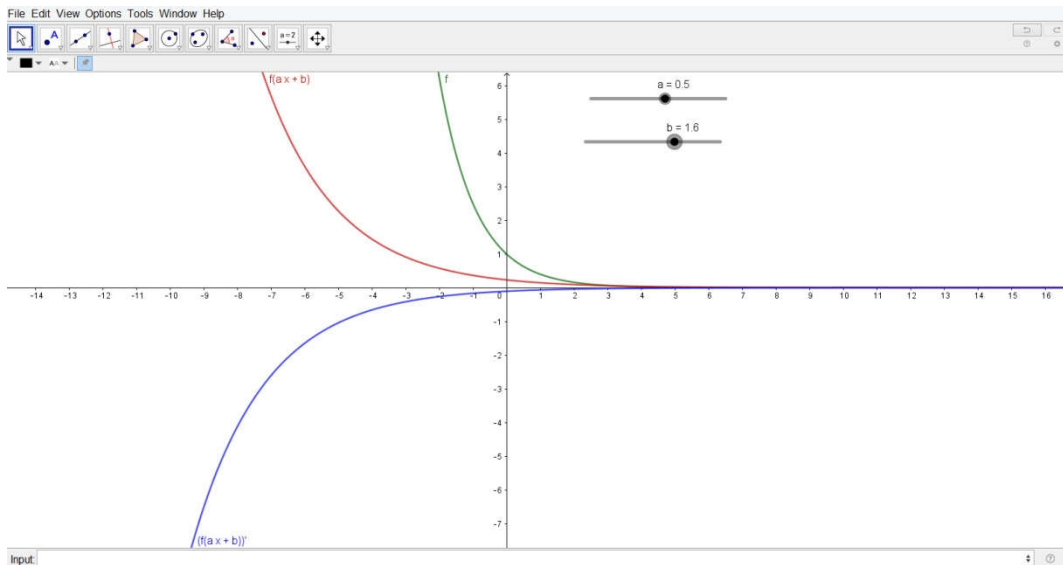
Студенти дванаесте групе су детаљно анализирали утицај параметара на особине наведених функција. Поред поменуте разлике у постојању екстремних вредности, учили су и објаснили и друге разлике између ових двеју функција, а нарочито су посветили пажњу утврђивању разлика у утицају параметара. Тако су, на пример, закључили да параметар b не утиче на вертикалну асимптоту функције $f(ax) + b$, као ни на њен први извод.



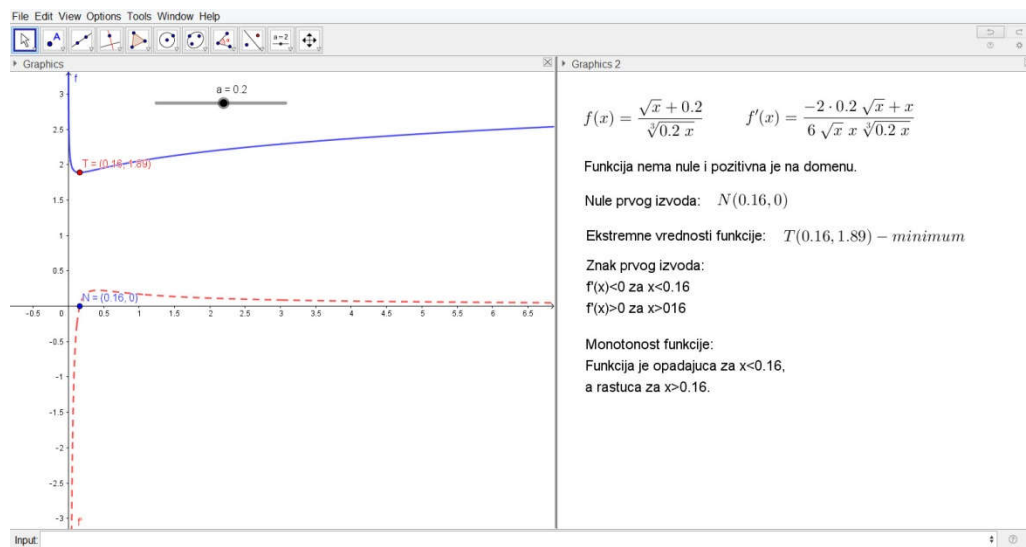
Слика 45. Рад дванаесте групе студената

На Слици 46 приказан је динамички радни лист студената треће групе, помоћу којег су испитивали особине функције $f(ax + b)$, где је f експоненцијална функција. Они су, у истом графичком приказу, представили основну функцију, која им је дата у задатку, одговарајућу функцију добијену трансформацијама, као и њену изводну функцију. Студенти ове групе нису користили други графички прозор у решавању задатака.

Динамички радни лист студената седме групе (Слика 47) је интересантан из разлога што су студенти користили графички приказ 2 како би представили особине функција. Овај динамички радни лист је креиран уз коришћење динамичких особина у приказивању особина функција, тако да сваки посматрач/корисник може да мења вредности параметара и да, истовремено, прати промене које настају у особинама функције. Овде се ради о испитивању класе функција добијене трансформацијама функција квадратног корена. Испитивање ових функција било би веома отежано без коришћења рачунара.



Слика 46. Рад треће групе студената



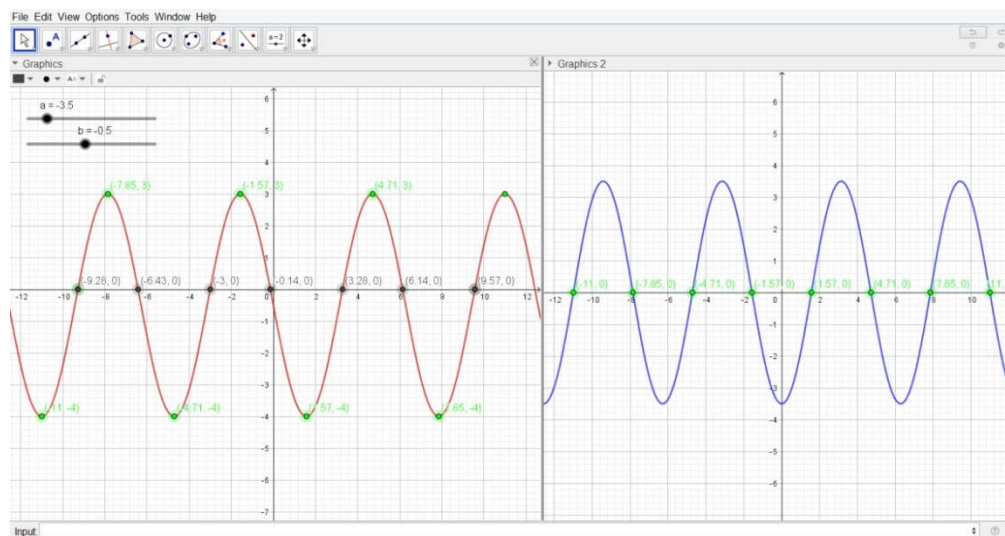
Слика 47. Рад седме групе студената

Четрнаеста група студената решавала је своје задатке слично осталим групама. Њихова почетна подела улога разликовала се од других група по томе што су они покушали да направе такав распоред унутар групе, да један од студената креира и ради у оквиру динамичког радног листа, а да остали анализирају особине и бележе запажања, али тако што би сваки студент испитивао одређене особине, независно од осталих.

Веома брзо су схватили да је таква подела улога неодржива и то, како су касније објаснили, из два разлога. Први је тај што студент који ради у оквиру динамичког радног листа не може истовремено да подешава параметре према различитим захтевима преостала три члана групе, а други је тај што су особине функција међусобно повезане и

зависе једна од друге, па су, спонтано, током рада, били принуђени да сарађују и размењују мишљења и запажања. Због свега наведеног, веома брзо су одустали од првобитног плана поделе улога и организовали се слично као раније описане групе.

На Слици 48 приказано је испитивање функције $f(ax) + b$, где је f синусна функција, на интервалу $[-4\pi, 4\pi]$. Студенти четрнаесте групе су детаљно испитали све особине функција и, код сваке од њих, посебно се осврнули на периодичност. Студенти ове групе су, код неколико испитиваних функција, након констатације да је функција периодична и одређивања периода, посматрали функцију на интервалу $[-4\pi, 4\pi]$ и, на овом интервалу, испитивали њене особине, док су код преосталих функција испитивали особине у зависности од периода функције.



Слика 48. Рад четрнаесте групе студената

Са Сlike 48 се јасно види да су студенти користили уграђене функције образовног софтвера *GeoGebra* како би одредили екстремне вредности и тачке пресека графика функције са апсцисном осом. У једном графичком прозору су посматрали графичку репрезентацију дате функције, а у другом, истовремено, графичку репрезентацију њеног првог извода. Може се уочити да су тачке пресека графика првог извода функције обележене истом бојом као тачке екстремума функције, што су студенти образложили везама које постоје између нула првог извода и екстремних вредности функције.

7.3.2. Анализа приложених материјала студената (решења задатака)

Наставници нису сугерисали у којој форми би требало да буду предати радови студената, односно решења задатака, тако да су они могли да их испишу на папиру, да их припреме у електронској форми, или да комбинују поменута два начина.

Свака колаборативна група је припремила коначна решења на различите начине. Осам радова је предато у комбинацији писаних решења и електроских докумената, а седам

радова је предато само у електросној форми. Све групе које су користиле паметне телефоне (њих 6) припремиле су решења комбиновањем писаних радова и електронских докумената, док је седам група које су радиле са рачунаром припремило само електронске верзије решења. Ниједна мала група, у оквиру експерименталне групе, није користила искључиво руком писане радове, док су у контролној групи предата 24 писана рада (видети Табелу 12).

Табела 12. *Начин на који су креирани приложени материјали*

Група \ Начин креирања материјала	Рачунар	Писана форма	Комбиновано
Експериментална група	7 група * 4 = 28	0	8 група * 4 = 32
Контролна група	6	29	25

Важно је напоменути да је једна од предности студената који су радили у колаборативним групама управо та што су користили рачунар у припремању завршних решења (било као једино средство или у комбинацији са писаним радовима), док је у контролној групи чак 48% студената предало класичне писане радове. Коришћење електронских докумената омогућило је бољи приказ особина функција са параметрима.

На пример, решења четврте и дванаесте колаборативне групе (Слике 44 и 45) креирана су као комбинација писаних радова и електронских докумената, док су студенти седме колаборативне групе сва решења креирали само у електронској форми. Једно од тих решења приказано је на Слици 47.

Табела 13. *Коришћење алгебарске и графичке репрезентације од стране малих група/студената*

Начин креирања приложеног материјала	Рачунар		Писана форма		Комбиновано	
	Обе репр.	Графичка	Обе репр.	Графичка	Обе репр.	Графичка
Група \ Коришћена репрезентација						
Експериментална група	6 група	1 група	0	0	8 група	0
Контролна група	4	2	29	0	16	9

Окружење образовног софтвера *GeoGebra* омогућава испитивање функција коришћењем искључиво графичке репрезентације и геометријских опција, као што су одговарајући пресеци објеката. На пример, у оквиру експерименталне групе, четврта колаборативна група (Слика 44) је користила графичку репрезентацију, добијену коришћењем наредбе „траг“. У контролној групи 11 студената (18%) је користило искључиво графичку репрезентацију, док су у експерименталној групи скоро сви студенти користили обе, алгебарску и графичку репрезентацију. У Табели 13 дат је број студената (група) који су користили графичку, односно обе репрезентације. Нико од студента није користио искључиво алгебарску репрезентацију за испитивање особина фамилија функција.

Већина студената експерименталне групе је водила рачуна о свим особинама фамилија функција и њиховој зависности од параметара, али су неки од њих, као и студенти контролне групе, изоставили поједине особине. У наредној анализи представљени су, са математичке тачке гледишта најзанимљивији, делови студентских радова. Преглед броја студената који су коректно објаснили утицаја параметара на одговарајућу особину функција дат је у Табели 14.

Домен: У експерименталној групи дванаест малих група, тј. 48 студената је дискутовало о утицају параметара на домен функције, док су то у контролној групи радила свега 34 студента.

Период: Скоро сви студенти експерименталне групе (изузев једне мале групе) водили су рачуна о периодичности тригонометријских функција приликом одређивања утицаја параметара на особине функција, док је то у контролној групи радило 37 студената.

Нуле: Сви студенти, у обе групе, дискутовали су успешно о нулама функција, с тим да су се студенти експерименталне групе боље снашли са нулама периодичних функција.

Асимптоте: У експерименталној групи било је 6 малих група које су анализирале вертикалну асимптоту логаритамске функције и хоризонталну асимптоту експоненцијалне функције, као и њихову зависност од параметара, у оквиру одговарајуће фамилије функција. У контролној групи су само два студента анализирала ове особине.

Изводи: Сви студенти су, радећи у *GeoGebra* окружењу, добијали изводе функција користећи одговарајуће наредбе и повезивали њих и њихове особине са особинама одговарајућих функција. Понекад су алгебарске репрезентације извода биле сувише компликоване за анализу, па су студенти користили опцију CAS у циљу формирања једноставнијих алгебарских репрезентација, или су користили алгебарску репрезентацију за поређење особина.

Монотоност и екстремне вредности: Интересантно је напоменути да је 5 малих група (20 студената) у оквиру експерименталне групе користило искључиво графичку репрезентацију код одређивања екстремних вредности и дискусије о монотоности рационалних, експоненцијалних и логаритамских функција. Они, код испитивања ових особина, нису водили рачуна о изводима функција. У контролној групи су само 3 студента повезивала особине извода са одговарајућим особинама функција.

Табела 14. Број студената који су коректно објаснили утицај параметара на одређену особину функције

Особина функције \ Група	Експериментална	Контролна
Домен	48	34
Период	56	37
Нуле	60	54
Асимптоте	24	2
Изводи, монотоност, екстремне вредности	44	33

7.4. Анализа резултата теста

Око две недеље након вежби описаних у поглављу 7.3, знање студената о особинама фамилија функција је тестирано. Тест се састојао од два задатка, од којих је сваки носио по 10 бодова. Време предвиђено за израду задатака било је 120 минута. За време решавања теста, студенти нису имали могућност коришћења рачунара. Задаци за тест дати су у Прилогу 9.

У првом задатку, од студената је захтевано да раде у оквиру алгебраске и графичке репрезентације истовремено. Овај задатак је садржао захтеве који омогућавају проверу знања студената у области утицаја параметара на особине функција. У другом задатку, студенти су најпре требали да раде у оквиру алгебарске репрезентације и да испитају особине дате функције, а затим да скицирају њен график. Просечан број поена по задацима, као и за цео тест, дат је у Табели 15.

Табела 15. Просечан број поена остварених на тесту (по задацима и укупно)

Група \ Задатак	Први задатак	Други задатак	Укупан број поена
Експериментална група	7.62	5.58	13.20
Контролна група	5.97	4.85	10.82

Анализом резултата датих у Табели 15, можемо уочити да су студенти обеју група, експерименталне и контролне, имали бољи резултат у првом него у другом задатку, због тога што је, према мишљењу аутора, у првом задатку била дата и графичка репрезентација функције.

7.4.1. Статистичка анализа резултата теста

У овом поглављу дата је статистичка анализа резултата теста.

Максималан број поена на тесту је био 20 (по 10 за сваки задатак). Просечан број поена који су на тесту остварили студенти експерименталне групе износио је 13.20 (66.00%), а просечан број поена који су остварили студенти контролне групе износио је 10.82 (54.08%). У контролној групи је било студената са 0 поена, док је студената са максималним бројем поена било у обе групе. Највећа учесталост била је око 16 поена у експерименталној, односно 10 поена у контролној групи.

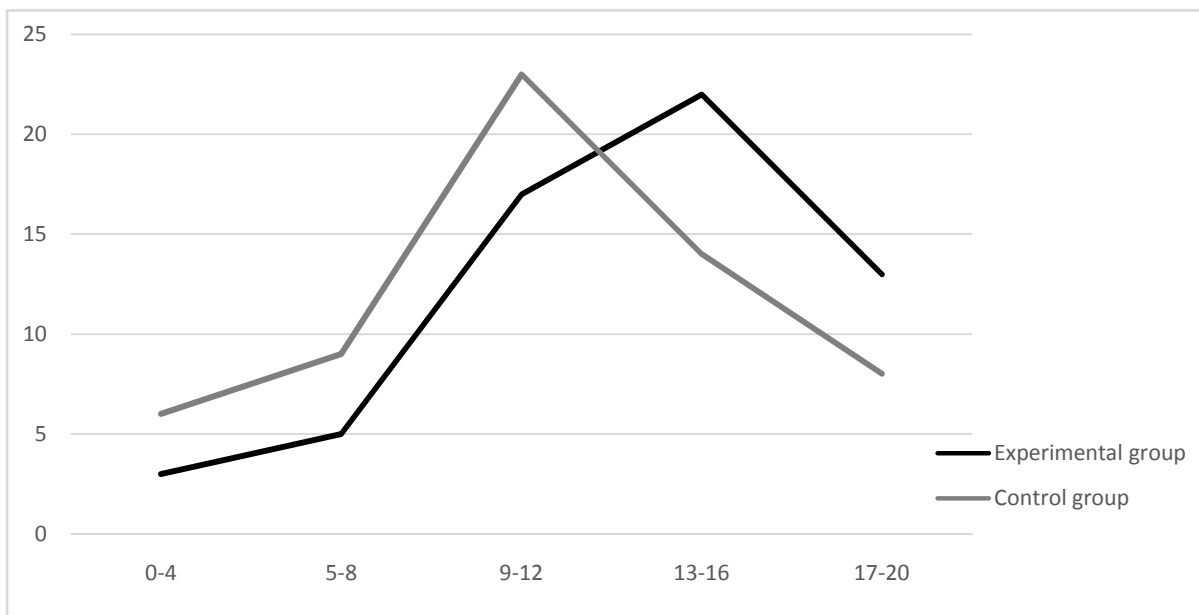
Расподела поена на тесту, у експерименталној и контролној групи, приказана је графиком на Слици 47. Број поена (од 0 до 20, у интервалима по 4) приказан је на x -оси, а број студената који су остварили одговарајући број поена приказан је на y -оси.

Псматрајући Сliku 47 можемо уочити да је црна линија (која представља експерименталну групу) знатно испод сиве (контролна група), у делу испод 13 поена, док је сива линија испод црне у итервалима од 13 до 20 поена. У експерименталној групи, максималан број поена остварила су 3 студента, док је, у контролној групи, максималан

број поена остварио 1 студент. Статистички резултати, добијени анализом теста, дати су у Табели 16.

Може се закључити да је разлика у резултатима теста експерименталне и контролне групе статистички значајна на нивоима значајности 0.05 и 0.01 ($t(118) = 2.9211$; $p = 0.00418$).

Такође можемо приметити да је величина ефекта експерименталног фактора средња (Cohan's $d = 0.533$), што значи да добијена разлика омогућава практичну предност експерименталне групе у поређењу са контролном. У ствари, доказано је да су постигнућа студената у учењу особина функција боља када вежбају у колаборативним групама.



Слика 49. Расподела броја студената према броју поена (остварених на тесту).

Табела 16. Статистички резултати теста

Група	Број студената	Аритметичка средина	Стандардна девијација	Тест разлика између аритметичких средина		Величина ефекта
	n	M	SD	t	$p(2\text{-стр.})$	Cohan's d
Експериментална	60	13.200	4.505	2.9211	0.00418	0.533
Контролна	60	10.817	4.432			

8. Закључна разматрања

Током последњих деценија, у образовним системима широм света, урађено је много на имплементацији савремене технологије у наставни процес. И поред тога, остало је доста простора за даље унапређивање наставног процеса применом нових наставних метода, које су, углавном, засноване на примени савремене технологије и њеном комбиновању са другим методама. Како би један образовни систем био успешан, односно како би ученици и студенти, по завршетку образовања, били у довољној мери оспособљени за рад у оквиру одређене делатности и конкурентни на тржишту рада, неопходно је да тај образовни систем, између осталог, прати иновације и развој технологије, те да, у континуитету, буде усавршаван и прилагођаван потребама савременог друштва.

Потреба за применом савремене технологије изражена је и у математичком образовању. У новије време се све више ради на унапређивању и осавремењавању наставе математике, а примена технологије има водећу улогу у том процесу. Пракса је показала да заступљеност савремене технологије у настави математике још увек није на задовољавајућем нивоу. Због тога, као и због сталних иновација, имплементација технологије у наставу математике је и даље важна тема за многе истраживаче у области математичког образовања.

Реалне функције представљају важан садржај у настави математике, нарочито у средњошколском и високом образовању, без обзира на подручје рада и образовни профил. Један од разлога што се функцијама придаје толики значај у наставним програмима математике јесте њихова распрострањена примена. У новије време се нарочито ставља акценат на изучавање математичког моделирања, које се све више примењује, у разним делатностима. Математичко моделирање се, у значајној мери, заснива на примени реалних функција. Из свега наведеног произилази и неопходност да ученици, односно студенти, стекну квалитетно знање о функцијама и њиховим особинама, као и о њиховој примени.

Методичка обрада функција се нарочито може унапредити применом рачунара, односно применом одговарајућег софтвера. Рад са функцијама у рачунарском окружењу био је предмет бројних савремених истраживања. Због њихове важности у детаљнијем упознавању особина функција, рад са функцијама са параметрима, као и са трансформацијама функција, у рачунарском окружењу, такође је био предмет истраживања у протекле две до три деценије. У овим истраживањима је придат посебан значај унапређивању вишеструких репрезентација функција применом разних програмских пакета.

Истраживања описана у докторској дисертацији баве се испитивањем утицаја примене динамичког софтвера и динамичких вишеструких репрезентација на студентска постигнућа у испитивању функција са параметрима и њихових особина. Коришћен је образовни софтвер *GeoGebra*. У три истраживања анализиран је колаборативни рад студената на испитивању функција са параметрима, у *GeoGebra* окружењу.

Циљ првог истраживања, које је детаљно описано у Поглављу 4, био је да се покаже да колаборативни рад, уз помоћ динамичког софтвера *GeoGebra*, омогућава студентима да боље савладају трансформације функција, појам функције и да, самим тим, доприноси бољим постигнућима студената у оквиру почетног дела курса математичке анализе. Детаљно је анализиран колаборативни рад студената на трансформацијама функција, а дати су и примери студентских решења појединих задатака. Анализирани су различити приступи које су студенти имали у решавању задатака, како током колаборативног рада, тако и за на тесту, који су решавали индивидуално и без коришћења рачунара. Задаци за тест су креирани тако да омогућавају да се провери у којој мери су студенти савладали трансформације функција, али и појам функције и особине функције уопште.

У Табели 2 дати су проценти тачних одговора за сваки задатак на тесту. Из ове табеле јасно се види да су студенти експерименталне групе сваки задатак на тесту урадили боље у односу на студенте контролне групе. Доказано је да примена динамичког образовног софтвера *GeoGebra* у оквиру колаборативног рада доприноси бољим постигнућима студената у области трансформација функција и уопште функција са параметрима, што потврђује и статистичка анализа резултата теста, дата у Поглављу 4.4.2. Алгебарска и графичка репрезентација функције, посматране заједно, као и динамичке особине образовног софтвера *GeoGebra*, омогућавају квалитетнији приказ трансформација функција, проузрокованих променом вредности параметара, што доприноси бољем разумевању, како трансформација функција, тако и утицаја параметара на особине функција од стране студената.

Доказано је да примена образовног софтвера *GeoGebra* у оквиру колаборативног рада доприноси побољшању квалитета знања студената у области геометријских трансформација заснованих на трансформацијама функција. Студенти експерименталне групе су, приликом решавања задатака, коректно применили алгебарску и графичку репрезентацију функција, док су студенти контролне групе углавном користили само алгебарску репрезентацију у сврху испитивања функција. На основу резултата датих у Табели 3, може се закључити да студенти експерименталне групе боље познају геометријске трансформације у оквиру графичке репрезентације функција.

Коначно, у овом истраживању је анализирано да ли примена вишеструких репрезентација у рачунарском окружењу, током колаборативног рада, доприноси бољем познавању појма функције од стране студената. Показано је да су студенти, који су примењивали вишеструке репрезентације функција, у оквиру образовног софтвера *GeoGebra*, за краће време урадили знатно више задатака у односу на студенте који су радили без рачунара. Примена вишеструких репрезентација у *GeoGebra* окружењу омогућава различите конструктивистичке приступе у раду са трансформацијама функција. Анализом процедура решавања тачно решених задатака, како током колаборативног рада, тако и на тесту, примећено је да су се оне међусобно знатно више разликовале у оквиру експерименталне, него у оквиру контролне групе. То значи да су студенти

експерименталне групе имали знатно више добрих идеја у вези са испитивањем функција у односу на студенте контролне групе. Чињеница да су студенти експерименталне групе примењивали знатно више различитих приступа у испитивању функција са параметрима него студенти контролне групе указује на то да примена образовног софтвера *GeoGebra* током колаборативног рада доприноси бољем познавању појма функције, што је неопходно за успешно савладавање преосталог градива у оквиру курса математичке анализе.

Током овог истраживања уочено је да студенти недовољно добро познају особине функција са параметрима, односно да слабије познају утицај вредности параметара на особине функције. Будући да је потврђено да примена динамичког софтвера доприноси побољшању квалитета знања студената о трансформацијама функција, насталих под утицајем одређених параметара, очекивано је да ће примена динамичког софтвера значајно допринети побољшању постигнућа студената у области испитивања особина функција са параметрима и анализе утицаја параметара на особине функција.

Како би ова претпоставка била проверена, 2016. године је спроведено истраживање слично претходном, а циљ овог истраживања је био да се докаже да примена вишеструких репрезентација у *GeoGebra* окружењу, током колаборативног рада, помаже студентима у учењу особина функција датих са променљивим параметрима, укључујући и анализу утицаја параметара на особине функција. Ово истраживање је детаљно описано у Поглављу 5.

Слично као и у претходном истраживању, студенти који су радили уз помоћ рачунара показали су знатно више креативности у односу на студенте који нису имали могућност коришћења рачунара. Њихова креативност је нарочито дошла до изражаја у задацима у којима је захтевано да дискутују о утицају параметара на особине функције. У оваквим задацима студенти експерименталне групе су дали исцрпнију анализу утицаја параметара, а њихови одговори су били тачнији и потпунији у односу на студенте контролне групе. Детаљном анализом студентских радова уочено је да су студенти, који су радили без рачунара, посматрали веома мали број различитих вредности параметара, те да то није било довољно како би извели потпуне и тачне закључке о утицају параметара на особине функција. Са друге стране, велики број различитих вредности параметара, које су посматрали студенти експерименталне групе, омогућио им је да у целисти сагледају зависност особина функција од параметара.

Анализом тестова које су студенти решавали уочено је да је најизраженија разлика између решења студената експерименталне и контролне групе управо у деловима задатака где је захтевано да објасне везе између функције са конкретним параметрима и одговарајуће функције са променљивим параметрима. Ове разлике су значајно утицале и на коначне резултате теста, који су студенти експерименталне групе знатно боље урадили, што се види из Табеле 6, у којој су дати резултати теста. Статистичка анализа резултата теста, дата у Поглављу 5.5.2. потврђује да је разлика између резултата студената експерименталне и контролне групе статистички значајна, што потврђује претпоставку да

примена динамичког образовног софтвера *GeoGebra* доприноси бољим постигнућима студената у учењу особина функција са параметрима, као и утицају вредности параметара на особине функција.

Током прва два истраживања није придат значај испитивању особина функција применом извода функције. Познавање особина извода функције, као и оспособљеност за примену извода, од изузетног је значаја за испитивање функција уопште, али и за даље успешно савладавање градива математичке анализе. Из тог разлога 2016. године је спроведено још једно истраживање, које се надовезује на истраживање описано у Поглављу 6. Циљ овог истраживања био је да се покаже да примена динамичких вишеструких репрезентација, у *GeoGebra* окружењу, током индивидуалног рада, омогућава студентима да боље савладају особине извода функције и међусобну зависност особина функције и особина њеног првог извода, те да се боље оспособе за примену извода у испитивању особина функција.

Током увежбавања градива, од студената је захтевано да испитују особине функција са и без параметара, као и њихових извода. Такође је захтевано да упореде особине функција и њихових извода и да опишу међусобну зависност ових особина. Посматране су фамилије квадратних, рационалних, експоненцијалних, логаритамских, тригонометријских и полиномних функција, због тога што се поменуте функције најчешће изучавају у оквиру математичке анализе, као и због тога што имају највећу примену у науци, економији и сл. У анализи рада студената, описаној у Поглављу 6, највећи значај је придат раду са функцијама са параметрима.

Резултати теста студената, дати у Табели 10, показују да су студенти експерименталне групе, који су вежбали уз помоћ рачунара, били знатно успешнији у односу на студенте контролне групе, који су вежбали без рачунара.

Детаљнијом анализом студентских радова, како за време увежбавања, тако и за време теста, може се закључити да је приступ у учењу, који су имали студенти експерименталне групе, био знатно ближи конструктивистичком него што је то случај са студентима контролне групе. Студенти експерименталне групе су организовали свој рад на испитивању особина функција и њихових извода на различите начине, у зависности од свог предзнања, креативности и оспособљености за рад у динамичком окружењу образовног софтвера *GeoGebra*. Поред великог броја различитих процедура које су применили, приступи студената експерименталне групе у раду са функцијама са параметрима и њиховим изводима углавном одговарају шеми приказаној на Слици 12.

Што се тиче студената контролне групе, они су, приликом испитивања особина функција и њихових извода, углавном примењивали сличне процедуре, који одговарају шеми на Слици 10. Њихове анализе међусобне зависности особина функција и њихових извода биле су, у великом броју случајева, непотпуне, а било је и много погрешних закључака, за разлику од студената експерименталне групе, који су, у највећем броју случајева, давали исцрпне и тачне анализе. Слично као у претходна два истраживања, студенти контролне групе су, иако су имали дупло више времена за реализацију вежби,

посматрали знатно мањи број различитих вредности параметара у односу на студенте експерименталне групе, што је и очекивано, с обзиром на могућности које пруже рад у *GeoGebra* окружењу.

Статистичка анализа резултата теста, у оквиру овог истраживања, која је дата у Поглављу 6.4.2, потврђује претпоставку да примена динамичких вишеструких репрезентација у *GeoGebra* окружењу доприноси бољем познавању особина функција са параметрима и њихових извода од стране студената.

У Поглављу 7 описано је истраживање које се, према свом главном циљу, разликовало у односу на претходна три истраживања. Наиме, у овом истраживању циљ није био утврђивање степена утицаја примене динамичког софтвера на постигнућа студената, јер је овај значај, у колаборативном или индивидуалном окружењу, доказан у претходно спроведеним истраживањима. Ово истраживање је имало за циљ испитивање утицаја примене колаборативног рада на постигнућа студената, те ближе сагледавање организација рада студената унутар колаборативних група и да се упореде њихови приступи у решавању задатака у динамичком окружењу. Такође, студенти су, током овог истраживања, решавали неке од задатака које би, без употребе софтвера било готово немогуће решити (због времена које би то решавање захтевало). Ови задаци су од значаја за потпуније сагледавање особина одређене класе (фамилије) функција и утицаја параметара не те особине.

Анализа резултата рада студената у овом истраживању вршена је непосредним посматрањем рада колаборативних група, анализом писаних и електронских радова које су студенти доставили. По потреби, појединим студентима су постављена питања у циљу отклањања недоумица у вези са њиховим идејама, односно приступима њихових група у решавању задатака. Ова анализа је показала да употреба динамичког софтвера омогућава студентима да, из потпуно новог угла, сагледају особине једне или више класа функција, те да упоређују и утврђују сличности и разлике између особина сродних класа функција. Такође, уочено је да примена колаборативног рада омогућава формирање окружења за квалитетно конструктивистичко учење, јер су студенти самостално, уз непрекидну дискусију и размену мишљења, успевали да изводе закључке и конструишу знања о особинама функција и њихових извода, као и њиховим међусобним везама.

Резултати свих истраживања, описаних у докторској дисертацији, потврђују претпоставку да примена описаног методског приступа, заснованог на употреби динамичког софтвера, који се може комбиновати са колаборативним, али и са индивидуалним радом, у обради и приликом увежбавања наставних садржаја који се односе на функције са параметрима, доприноси бољим постигнућима студената у наведеној области, као и унапређењу квалитета њиховог знања о функцијама и њиховим особинама. Примена динамичког софтвера омогућава квалитетније (динамичко) повезивање вишеструких репрезентација функција, али и формирање такозване манипулативне репрезентације, која се показала као веома корисна у испитивању особина функција са параметрима.

Из наведених разлога, било би пожељно интегрисати поменути методски приступ у наставу математике, у оним сегментима у којима његова примена може да допринесе побољшању квалитета наставе и унапређењу квалитета знања ученика, односно студената. Методски приступ заснован на примени динамичког софтвера, уз примену колаборативног рада или без исте, могуће је интегрисати у наставу математике на свим нивоима образовања, у областима у којима се изучавају функције, почевши од основне школе, па све до универзитетског образовања.

Наиме, наставним програмом за осми разред основног образовања и васпитања за предмет математика предвиђено је изучавање особина линеарне функције, укључујући и рад са променљивим параметрима, у оквиру наставне теме линеарна функција (Правилник о наставном програму за осми разред основног образовања и васпитања). Такође, наставним програмом за шести разред основног образовања и васпитања за предмет информатика и рачунарство предвиђена је могућност да се ученици упознају са радом у окружењу образовног софтвера *GeoGebra* (Правилник о наставном програму за шести разред основног образовања и васпитања).

Имајући у виду чињеницу да је информатика и рачунарство до 2017. године у Србији био изборни предмет (Правилник о наставном плану за други циклус основног образовања и васпитања и наставном програму за пети разред основног образовања и васпитања), као и то да су се ученици могли одредити за изучавање других садржаја у оквиру овог наставног предмета, постоји могућност да неки од њих, до осмог разреда, нису упознати са радом у *GeoGebra* окружењу. Чак и они који познају рад у оквиру образовног софтвера *GeoGebra*, нису довољно упознати са динамичким својствима овог програма. Због тога је пожељно, током првог часа увежбавања испитивања особина линеарне функције, детаљније упознати ученике са коришћењем образовног софтвера *GeoGebra*. Упознавање ученика са коришћењем софтвера *GeoGebra* и њеним особинама не одузима сувише времена, јер је програм једноставан за употребу и за очекивати је, што је и ранија пракса показала, да ће ученици брзо овладати овим програмом. Због ученика којима би рад у оквиру образовног софтвера *GeoGebra* евентуално представљао потешкоћу, могуће је организовати колаборативни рад током часова увежбавања у оквиру наставне теме линеарна функција. Уз правилно формирање колаборативних група, обезбедило би се да у свакој групи буде најмање један ученик који је у одговарајућој мери овладао коришћењем образовног софтвера *GeoGebra*.

За очекивати је, имајући у виду резултате претходних истраживања, да би испитивање линеарне функције са променљивим параметрима, као и утицаја параметара на особине ове функције, у динамичком окружењу, допринео квалитету знања ученика осмог разреда о линеарној функцији уопште, али и њиховој оспособљености за рад са функцијама са параметрима у динамичком окружењу касније, током средњошколског образовања. Ипак, пре интегрисања оваквог методског приступа у наставу математике у основној школи, било би пожељно спровести истраживање у којем би била тестирана примена тог приступа, односно којим би било проверено у којој мери рад на испитивању

функција у окружењу динамичког софтвера доприноси побољшању квалитета знања ученика осмог разреда основне школе о линеарној функцији и њеним особинама. Потреба за оваквим истраживањем постоји, из разлога што су претходним истраживањима обухваћени студенти основних академских студија, а из чињенице да примена динамичког софтвера доприноси бољим постигнућима студената не може се, без претходне провере, закључити да ће овакав приступ имати исти, односно сличан позитиван ефекат на ученике основне школе.

Методски приступ описан у докторској дисертацији може бити примењен и у изучавању линеарне функције и њених особина у првом разреду средњег образовања и васпитања, уз претходно оспособљавање ученика за рад у *GeoGebra* окружењу. Наиме, детаљније изучавање линеарне функције, односно проширивање знања ученика о истој, уз увођење дефиниције функције, предвиђено је наставним програмима за први разред гимназије и средњих стручних школа за предмет математика (Правилник о наставном плану и програму за гимназију, Правилник о наставном плану и програму општеобразовних предмета средњег стручног образовања). Важно је напоменути да се наставни програми средњих стручних школа, када је математика у питању, значајно разликују међу подручјима рада, па и самим образовним профилима. Међутим, изучавање функција и њихових особина, без обзира на разред, заступљено је, у мањој или већој мери, у готово свим подручјима рада у оквиру наставног предмета математика.

Примена новог методског приступа нарочито би могла бити успешна у другом, односно каснијим разредима средње школе, током изучавања особина других елементарних функција, као што су квадратна, степена, експоненцијална, логаритамска и тригонометријска функција. Ове функције се, у гимназијама и већини средњих стручних школа, изучавају у другом разреду (Правилник о наставном плану и програму за гимназију, Правилник о наставном плану и програму општеобразовних предмета средњег стручног образовања). На овом нивоу образовања, особине поменутих функција се испитују без примене извода, са чијом ће се дефиницијом ученици упознати касније. Овде је нарочито примењив приступ описан у Поглављу 3, који је коришћен и у истраживању описаном у Поглављу 4.

Елементарне функције се нарочито детаљно изучавају у завршном разреду средњег образовања и васпитања. На овом нивоу ученици се упознају и са појмом и особинама извода функције, па се и испитивање особина функција врши уз примену извода (Правилник о наставном плану и програму за гимназију, Правилник о наставном плану и програму општеобразовних предмета средњег стручног образовања). Градиво предвиђено наставним програмом за четврти разред гимназије, као и средњих стручних школа, односно њихових четворогодишњих образовних профила, а које се односи на реалне функције, њихове особине и примену, слично је одговарајућем градиву које се изучава у оквиру математичке анализе у високом образовању. Тачније, поменути део градива у високом образовању представља проширење одговарајућег градива завршног разреда средње школе. Због тога је у изучавању функција у завршном разреду средње школе

могуће, уз мања прилагођавања, применити методски приступ сличан ономе који је коришћен у свим истраживањим описаним у докторској дисертацији.

Слично као када је у питању примена новог методског приступа у основној школи, иако је врло вероватно, није могуће са сигурношћу тврдити да ће примена динамичког софтвера у обради функција са параметрима бити једнако успешна са ученицима средње школе, као што је то био случај са студентима прве године основних академских студија. Због тога би било пожељно спровести истраживања у којима би се анализирао утицај примене методског приступа заснованог на коришћењу динамичког софтвера у обради и приликом увежбавања градива које се односи на функције, а нарочито функције са параметрима, на постигнућа ученика средње школе у поменутој области.

Резултати истраживања описаних у овој дисертацији оправдавају даљу примену новог методског приступа, заснованог на примени динамичког софтвера, током колаборативног, али и током индивидуалног рада, у обради наставних садржаја који се односе на функције и особине функција. Будући да су реалне функције, њихове особине и примена, предмет изучавања свих курсева математичке анализе, односно да се изучавају у оквиру готово свих студијских програма у чијим је курикулумима заступљена математика као наставни предмет, примена новог методског приступа, описаног у овој докторској дисертацији, може значајно допринети побољшању постигнућа студената када је у питању математичка анализа, односно математика као наставни предмет.

За очекивати је да би примена динамичког софтвера, као и колаборативни рад, могли, у знатној мери, допринети побољшању квалитета знања и постигнућа студената, као и ученика средњих школа, у другим сегментима математичког градива, који обухватају примену функција и њихових извода, а који се изучавају у оквиру већег броја студијских програма високих школа и факултета, али и образовних профила средњих школа. Овде се, пре свега мисли, интегрални рачун, као и на примену функција и извода функција у математичком моделирању, али и на друге наставне садржаје, као што су, на пример, диференцијалне једначине и њихова примена. Примена динамичког софтвера би могла бити од користи и у изучавању садржаја других наставних предмета, у којима се примењују поменути математички садржаји, као што су, на пример, физика, хемија и сл.

С тим у складу, потребно је осмислити и креирати одговарајуће наставне материјале, задатке и тестове, који би омогућили примену методског приступа, заснованог на коришћењу динамичког софтвера, у обради поменутих наставних садржаја. Примена новог методског приступа у области интегралног рачуна, диференцијалних једначина, математичког моделирања и сл. би, такође, требала бити тестирана у оквиру одговарајућег истраживања. Било би пожељно да се слична истраживања спроведу и у оквиру других наставних предмета, у којима се примењују поменуте математичке области. Оваква истраживања би била корисна за даље унапређивање квалитета знања студената у области математике, као и других сродних наука.

Литература

- Abu Bakar, K., Mohd Ayub, A. F., & Ahmad Tarmizi, R. (2010). Utilization of computer technology in learning transformation. *International Journal of Education and Information Technologies*, 4(2), 91-99.
- Amoah, V., & Laridon, P. (2004). *Using multiple representations to assess students' understanding of the derivative concept*. Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 24(1), 1- 6.
- Anabousy, A., Daher, W., Baya'a N., & Abu-Naja, M. (2014). Conceiving function transformations in different representations: Middle school student working with technology. *Mathematics Education*, 9 (2), 99-114.
- Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 31(1), 20-30.
- Baylor, A. L., & Ritchie, D. (2002). What factors facilitate teacher skill, teacher morale, and perceived student learning in technology-using classrooms? *Computers and Education* 39, 395-414.
- Bhowmik, M. (2014). Constructivism approach in mathematics teaching and assessment of mathematical understanding. *Basic Research Journal of Education Research and Review ISSN 2315-6872* Vol. 4(1), pp. 08-12.
- Bodner, G. M. (1986). Constructivism: A Theory of Knowledge. *Journal of Chemical Education*, 63 (10), 873-878.
- Borba, M., & Confrey, J. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, 31: 319-337.
- Bozic, R. (2015). *The Impact of Dynamic Properties of the Software Packages Mathematica and GeoGebra to The Examining and Graphing of Functions with Parameters*. European Union: Departemen of Mathematics and Informatics University of Novi Sad, Faculty Of Sciences.
- Brooks, J. G., & Brooks, M. G. (1993). *In search of understanding: the case for constructivist classrooms*. Alexandria, VA: American Society for Curriculum Development.
- Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19(1), 1– 15.
- Consciência, M. & Oliveira, H. (2011). Function concept and functions' transformations: The role of the graphic calculator. *The Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Educatio*, February 7-13, 2011, Rzeszów, Poland.
- Daher, W.M., & Anabousi, A.A. (2015). Students' recognition of function transformations' themes associated with the algebraic representation. *REDIMAT, Vol 4(2)*, 179-194.

- Dogru, M., & Kalender, S. (2007). Applying the Subject “Cell” Through Constructivist Approach during Science Lessons and the Teacher’s View. *Journal of Environmental & Science Education, 2 (1)*, 3-13.
- Doruk, B. K., Aktumen, M., & Aytakin, C. (2013). Pre-service elementary mathematics teachers' opinions about using GeoGebra in mathematics education with reference to ‘teaching practices’. *Teaching Mathematics and Its Applications, 32(3)*, 140-157.
- Doorman, M., Drijvers, P., Gravemeijer, K., Boon, P., & Reed, H. (2012). Tool use and the development of the function concept: from repeated calculations to functional thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education 10*: 1243-1267.
- Duncan, H., & Dick, T. (2000). Collaborative Workshops and Student Academic Performance in Introductory College Mathematics Courses: A Study of a Treisman Model Math Excel Program. *School Science and Mathematics, Vol. 100*, 365-373.
- Ermete, M., Brackett, N., Powell, K., Krause, E., & Lapp, D. (2010). The Role of Dynamic Representations in Students’ Development of Algebraic Concepts. Program Reports. Retrieved from https://www.cmich.edu/colleges/cst/math/Documents/LURE_2010_Program_Reports.pdf.
- Fulton, K. (2012). Upside down and inside out: Flip Your Classroom to Improve Student Learning. *Learning & Leading with Technology, 39(8)*, 12-17.
- Font, J. D., Godino, J. D. & D Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27(2)*, 3-9.
- Glaserfeld, E. von (1995). Radical constructivism: A way of knowing and learning. Washington, DC: Falmer Press.
- Goerdt, L. S. (2007). *The effect of emphasizing multiple representations on calculus students’ understanding of the derivative concept*. Unpublished doctoral dissertation, Education, Curriculum and Instruction, The University of Minnesota.
- Gokhale, A. (1995). Collaborative Learning Enhances Critical Thinking. *Journal of Technology Education, 7(1)*, 22-30.
- Goldin, G. A. (1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. In C. Janvier (Ed.). Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 125-145). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. Inc.
- Goldin, G. A. (1998). Representations, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*, 137- 165.
- Goldin, G., & Janvier, C. (1998). Representation and the psychology of mathematics education. *Journal of Mathematics Behaviour, 17 (1)*, 1-4, The onto-semiotic approach to mathematics education 209.
- Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397-430). Mahwah, NJ: Erlbaum.

- Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23). Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.
- Golub, J. (Ed.) (1988). *Focus on collaborative learning*. Urbana, IL: National Council of Teachers of English.
- Good, T.L., & Brophy, J.E. (1994). *Looking in Classrooms*. Harper Collins College Publishers, New York, NY.
- Goodsell, A. S., Maher, M. R., Tinto, V., Leigh Smith, B., & MacGregor, J. (1992). *Collaborative Learning: A Sourcebook for Higher Education*. University Park, Pennsylvania: National Center on Postsecondary Teaching, Learning, and Assessment.
- Hwang, L. H., Lau, L. F., Smith, D. L., Mistrot, C. A., Hardwick, K. G., Hwang, E. S., Amon, A., & Murray, A. W. (1998). Budding yeast Cdc 20: A Target of the Spindle Checkpoint. *Science*, 279, 1041.
- Hwang, W. Y., & Hu, S. S. (2013). Analysis of peer learning behaviors using multiple representations in virtual reality and their impacts on geometry problem solving. *Computers and Education*, Vol. 62, 308-319.
- Hataru, V., & Erbas, A., K. (2015). Mathematical Knowledge for Teaching the Function Concept and Student Learning Outcomes. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI 10.1007/s10763-015-9707-5.
- Iran-Nejad, A. (1995). Constructivism as substitute for memorization in learning: meaning is created by learner. *Education*, 116, 16-32.
- Johnson, R. T., & Johnson, D. W. (1986). Action research: Cooperative learning in the science classroom. *Science and Children*, 24, 31-32.
- Johnson, R. T., & Johnson, D. W. (2009). An Educational Psychology Success Story: Social Interdependence Theory and Cooperative Learning. *Educational Researcher*, 38(5), 365-379.
- Jonassen, D. H. (1999). Designing constructivist learning environments. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory* (Vol. II, pp. 215-39). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kagan, S. (1994). *Cooperative learning*. San Clemente, CA: Kagan Publishing.
- Kaput, J. & Clement, J. (1979). Interpretations of algebraic symbols. *Journal of Mathematical Behavior*, 2, 208.
- Kaye, A. R. (2012). Computer Supported Collaborative Learning. In C. O' Malley (Ed.). *Computer Supported Collaborative Learning* (Vol. 128, pp. 125-144). New York: Springer Science & Business Media.

- Kendal, M., & Stacey, K. (2001). The impact of teacher privileging on learning differentiation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(2), 143–165.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Kostić, V., Stankov-Jovanović, V., Sekulić T., & Takači, Dj. (2016). Visualization of problem solving related to the quantitative composition of solutions in the dynamic *GeoGebra* environment, *Chemistry education research and practice*, vol. 17no. 1, 120-138.
- Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions (2nd ed.)*. Chicago: University of Chicago Press.
- Laal, M., & Ghodsi, S. M. (2012). Benefits of collaborative learning, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, v. 31, 486–490.
- Laal, M., Naseri, A. S., Laal, M., & Khattami - Kermanshashi, Z. (2013). What do we achieve from learning in collaboration? *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 93, 1427–1432.
- Lage, A. E., & Gaisman, M. T. (2006). An analysis of students' ideas about transformations of functions. In A. S., Cortina, J.L., Sáiz, and Méndez, A.(Eds), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional, (Vol. 2, pp. 68-70).
- Lazakidou, G., & Retalis, S. (2010). Using computer supported collaborative learning strategies for helping students acquire self-regulated problem-solving skills in mathematics. *Computers & Education*, 54, 3-13.
- Leikin, R., & Zaslavsky, O. (1997). Facilitating student interactions in mathematics in a cooperative learning setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 331-354.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1–64.
- Lipponen, L. (2002). Exploring foundations for computer-supported collaborative learning. In G. Stahl (Ed.), *Proceedings of Computer Supported Collaborative Learning*, Boulder, Colorado, USA, 72-81.
- Lorsbach, A., & Tobin, K. 1992. Constructivism as a referent for Science Teaching. *NARST Research Matters-to the Science Teacher*, 30.
- Major, T. E., & Mangope, B. (2012). The Constructivist Theory in Mathematics: The Case of Botswana Primary Schools. *International Review of Social Sciences and Humanities*, 3(2), 139-147.
- Maloney, M. (2008). Constructivism: A Realistic Approach to Math? Retrieved from <http://www.homsigmaa.org/malc.pdf>.

- Martín-Blas, T., & Serrano-Fernández, A. (2009). The role of new technologies in the learning process: Moodle as a teaching tool in Physics. *Computers & Education*, 52 (1), 35-44.
- McClaran, R. (2013). *Investigating the Impact of Interactive Applets on Students' Understanding of Parameter Changes to Parent Functions: An Explanatory Mixed Methods Study*. Theses and Dissertations-Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education.
- Nakahara, T. (2008). "Cultivating mathematical thinking through representation-utilizing the representational system", APEC-TSUKUBA International Congress, Japan.
- Ozgun-Koca, S. A. (1998). *Students' use of representations in mathematics education*. Paper presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Raleigh, NC.
- Ozgun-Koca, S. A. (2008) Ninth Grade Students Studying the Movement of Fish to Learn about Linear Relationships: The Use of Video-Based Analysis Software in Mathematics Classrooms. *The Mathematics Educator*, Vol. 18, No. 1, 15–25.
- Rau, M., Michaelis, J., & Fay, N. (2015). Connection making between multiple graphical representations: A multi-methods approach for domain-specific grounding of an intelligent tutoring system for chemistry, *Computers and Education*, Vol. 82, 460-485.
- Romer, K., & Whipple, W. (1990). Collaboration across the Power Line. *College Teaching*, 39(2), 66 – 70.
- Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. Are you careful about defining your variables?. *Mathematics Teacher*, 74, 418-420, 450.
- Sever, G., & Yerushalmy, M. (2007). To sense and to visualize functions: The case of graphs' stretching. In P. P. Demetra & P. George (Eds.), *The Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5)* (pp. 1509-1518). Larnaca, Deptment of Education, University of Cyprus.
- Sjoberg, S. (2010). Constructivism and learning. In: Baker, E.; McGaw, B. & Peterson P (Eds.), *International encyclopaedia of education, 3rd Edition* (pp. 485-490). Elsevier: Oxford.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Smith, B. L., & MacGregor, J. T. (1992). Collaborative Learning: A Sourcebook for Higher Education. University park, PA: National Center on Postsecondary Teaching, Learning and Assessment (NCTLA), 9-22.
- Taber, K. S. (2011). Constructivism as educational theory: contingency in learning, and optimally guided instruction. In: Hassaskhan J. (Eds.), *Educational theory* (pp. 39-61). New York: Nova Science Publishers, Hauppauge.
- Takači, Đ., Marić, M., Stankov, G., Djenić, A. (2017). Efficiency of using VNS algorithm for forming heterogeneous groups for CSCL learning. *Computers and Education*, Vol. 109, 98-108.

- Takači, Dj., Pešić, D., & Tatar, J. (2006). On the continuity of functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(7), 783–791. Taylor & Francis.
- Takači, Dj., Stankov, G., & Milanović, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers and Education*, Vol. 82, 421-431.
- Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus, *Visualization in Mathematics* (ed. Zimmermann & Cunningham), M. A. A., Notes No. 19, 105 – 119.
- Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In Grouws D.A. (Eds.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495– 511). New York: Macmillan.
- Tall, D. (2003). *Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics*, In L. M. Carvalho & L. C. Guimarães, *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brasil.
- Tall, D., & Vinner, A. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Education Studies in Mathematics*, 12, 159-169.
- Thompson, P. W. (2013). Constructivism in mathematics education. In Lerman, S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education: SpringerReference* (www.springerreference.com). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/SpringerReference_313210.
- Tobin, K., & Tippins, D. (1993). Constructivism as a Referent for Teaching and Learning. In: Tobin K. (Eds.), *The Practice of Constructivism in Science Education* (pp. 3-22). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.
- Weinberger, A., & Fischer, F. (2006). A framework to analyze argumentative knowledge construction in computer-supported collaborative learning. *Computers & Education*, 46 (1), 71-95.
- Wenglinsky, H. (1998). *Does It Compute? The Relationship Between Educational Technology and Student Achievement in Mathematics*. Policy Information Center, Educational Testing Service, Princeton, New Jersey.
- Zazkis, R., Liljedahl, P., & Gadowsky, K. (2003). Conceptions of Function Translation: Obstacles, Intuitions, and Rerouting. *Journal of Mathematical Behaviour*, 22, 437–450.
- Станојевић и др., (2010). Образовни стандарди за крај обавезног образовања за наставни предмет Математика. Београд: Министарство просвете, Завод за вредновање образовања и васпитања.
- Правилник о наставном плану за други циклус основног образовања и васпитања и наставном програму за пети разред основног образовања и васпитања. У *Службени гласник РС - Просветни гласник*, бр. 6/2007, 2/2010, 7/2010, 3/2011, 1/2013, 4/2013, 11/2016, 6/2017, 8/2017.

Правилник о наставном плану и програму за гимназију. У *Службени гласник РС – Просветни гласник*, бр. 11/16.

Правилник о наставном плану и програму општеобразовних предмета средњег стручног образовања. У *Службени гласник РС - Просветни гласник*, бр. 10/2014.

Правилник о наставном програму за осми разред основног образовања и васпитања. У *Службени гласник РС – Просветни гласник*, бр. 2/2010, 3/2011, 8/2013, 5/2014, 11/2016, 11/2016, 7/2017, 12/2018.

Правилник о наставном програму за шести разред основног образовања и васпитања. У *Службени гласник РС – Просветни гласник*, бр. 5/2008, 3/2011, 1/2013.

Правилник о општим стандардима постигнућа за крај општег средњег образовања и средњег стручног образовања у делу општеобразовних предмета. У *Службени гласник РС*, бр. 117/2013.

Прилози

Прилог 1. Наставни материјал Утицај динамичких особина програмских пакета *Mathematica* и *GeoGebra* на испитивање и цртање графика функција са параметрима (у електронском додатку)

Прилог 2. Наставни материјал Испитивање особина и цртање графика функције (у електронском додатку)

Прилог 3. Задаци за пре-тест 2015 године

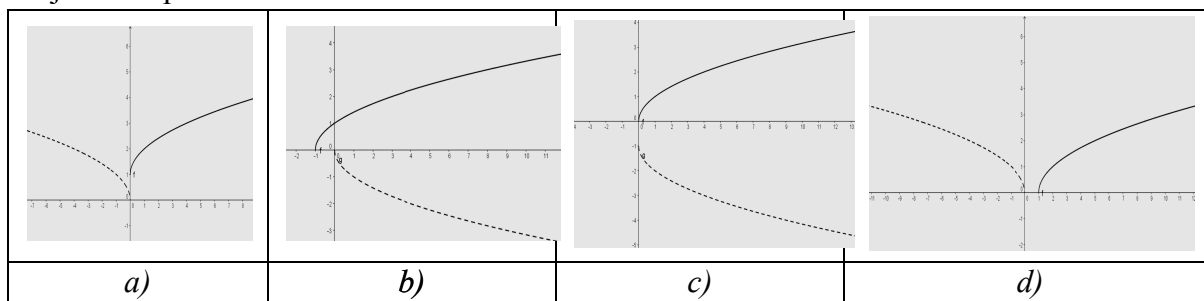
1. Испитати особине функција (домен, нуле, знак, монотоност, конвексност), без одређивања граничних вредности и извода и нацртати њихове графике.

1) $f(x) = 2x + 3$	2) $f(x) = x^2$	3) $f(x) = x^3$	4) $f(x) = \frac{1}{x}$
5) $f(x) = 2^x$	6) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	7) $f(x) = \sin x$	8) $f(x) = \cot x$
9) $f(x) = \log x$	10) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	11) $f(x) = \sqrt{x}$	12) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

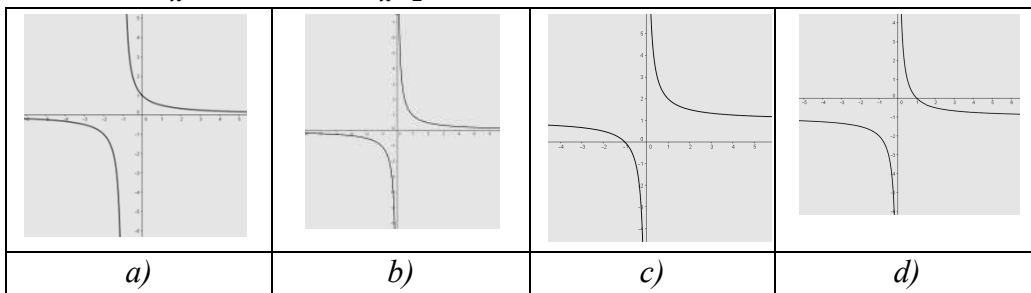
2. Скицирати графике функција $g(x) = x^3 + 1$ и $h(x) = (x + 1)^3$. Упоредити особине ових функција са особинама функције $f(x) = x^3$.

3. Скицирати графике функција $g(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ и $h(x) = -\sqrt[3]{x}$. Упоредити особине ових функција са особинама функције $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

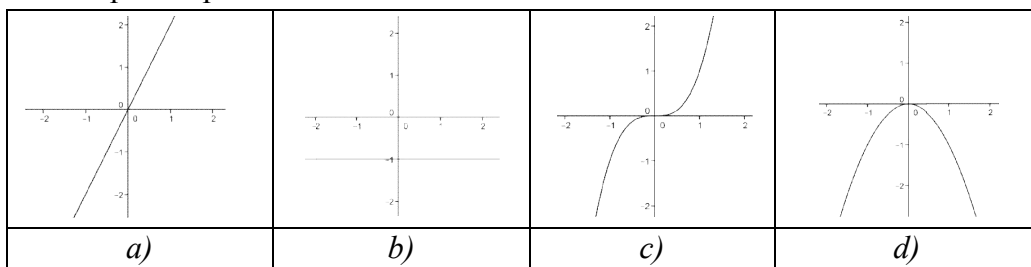
4. Повезати функције $f(x) = \sqrt{x+1}$ и $g(x) = -\sqrt{x}$ са одговарајућим графицима и објаснити решење.



5. Повезати $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ и $g(x) = \frac{1}{x-1}$ са одговарајућим графицима и објаснити решење.



6. Повезати функцију $f(x) = ax^b$ са одговарајућим графицима и одредити одговарајуће вредности параметара a и b .



Прилог 4. Задаци за колаборативни рад 2015 године

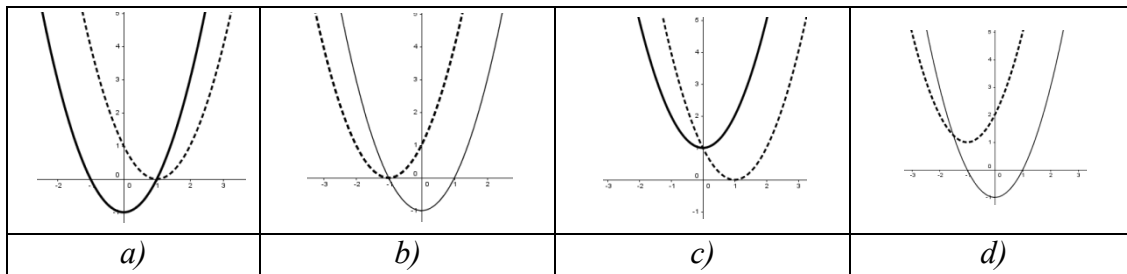
1. Први задатак за колаборативни рад био је исти као први задатак на пре-тесту.
2. Скицирати графике и испитати особине функција $f(x) + a$, $f(x + a)$, $af(x)$ и $f(ax)$, где су функције f дате у претходном задатку. Испитати утицај параметра a на особине функција.
3. Скицирати графике и испитати особине функција $f(x + a) + b$, $af(x) + b$, $f(ax) + b$ и $f(ax + b)$. Испитати утицај параметара a и b на особине функција.
4. Скицирати графике и испитати особине функција: а) $f(x) = ax^b$,
б) $g(x) = \frac{x-a}{x-b}$.

Испитати утицај параметара a и b на особине функција.

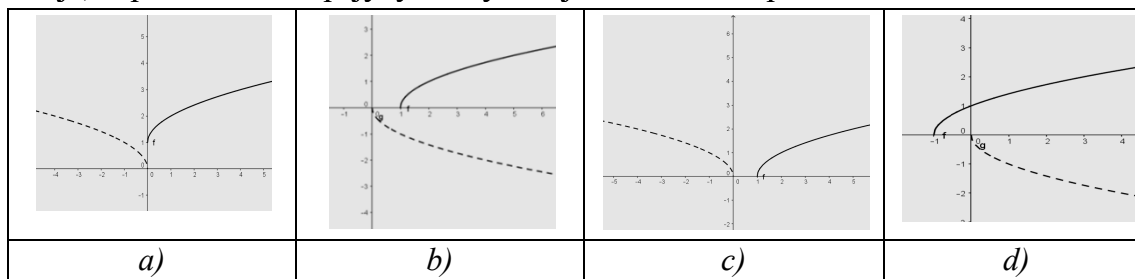
5. Дата је функција $f(x) = \frac{xe^{ax}}{x^2+b}$, где су a и b реални бројеви.
 - а) За $a = 1$, испитати утицај параметра b на особине функције.
 - б) За $b = 1$, испитати утицај параметра a на особине функције.
 - с) Одредити функције $g_i, i = 1, 2, \dots, 7$:
$$g_1 = \frac{1}{xe^x}, g_2 = \frac{e^{3x}}{x^2-8}, g_3 = \frac{xe^x}{x^2-5}, g_4 = \frac{1}{x}, g_5 = \frac{-9}{xe^x}, g_6 = \frac{x}{x^2-7}, g_7 = \frac{xe^{2x}}{3+x^2}$$
које би могле потицати од функције f , и за одабране функције одредити вредности параметара a и b .
6. Дата је функција $f(x) = \frac{\cos(k\pi/2)}{ax^2+b}$, где је k цео број, док су a и b реални бројеви.
 - а) За $a = 1$, испитати утицај параметара b и k на особине функције.
 - б) За $b = 1$, испитати утицај параметара a и k на особине функције.
 - с) Одредити функцију $g_i, i = 1, 2, \dots, 7$:
$$g_1 = \frac{\cos x}{x^2+3}, g_2 = \frac{1}{8-x^2}, g_3 = \frac{\cos \pi}{3+x^2}, g_4 = \frac{1}{x}, g_5 = \frac{9}{x^2 \cos x}, g_6 = \frac{5}{x^2-7}, g_7 = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{2x^2+1}, g_8 = \frac{1}{x^2}$$
која би могла потицати од функције f , и за сваку од одабраних функција одредити вредности параметара a , b и k .

Прилог 5. Задаци за тест 2015 године

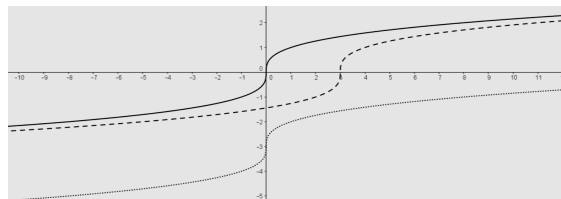
1. На истој слици дати су графици функција $f(x) = (x + 1)^2$ и $g(x) = x^2 - 1$. Одредити одговарајућу слику и објаснити одговор.



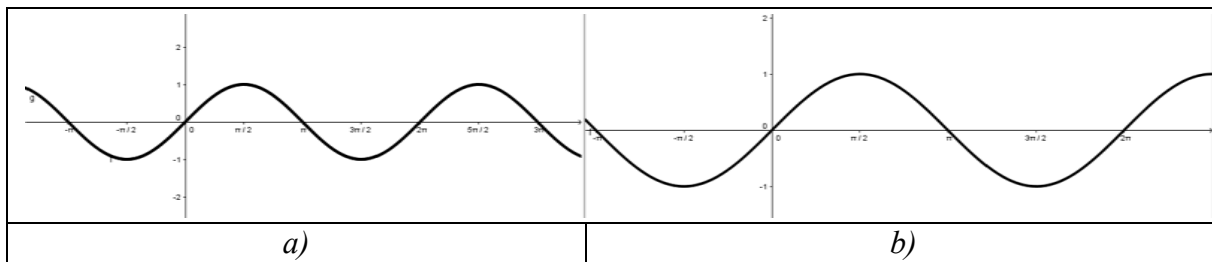
2. На истој слици дати су графици функција $f(x) = \sqrt{x-1}$ и $g(x) = -\sqrt{x}$. Испитати ове функције, одредити одговарајућу слику и објаснити одговор.



3. Повезати функцију $f(x) = \sqrt[3]{x}$ са одговарајућим графиком на слици испод; одредити аналитичке изразе и испитати особине функција датих са преостала два графика.

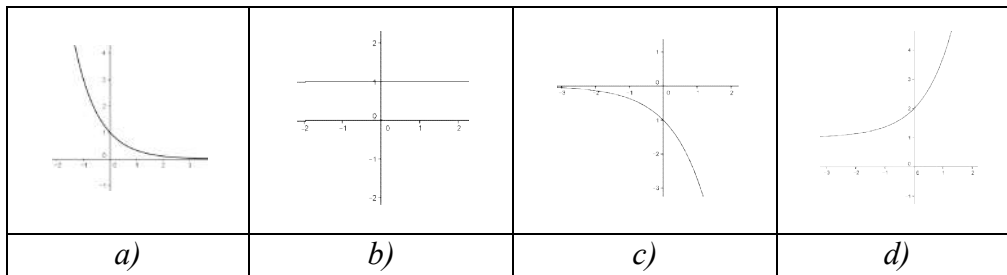


4. График функције $f(x) = \sin(x)$ је дат на обе слике испод. На слици а) скицирај графике функција $g(x) = \sin(x) + 1$ и $h(x) = \sin(x) - 1$. На слици б) скицирај графике функција $g(x) = 2\sin(x)$ и $h(x) = \sin(2x)$. Одредити нуле свих наведених функција и обележити њихове тачке минимума и максимума на графицима.

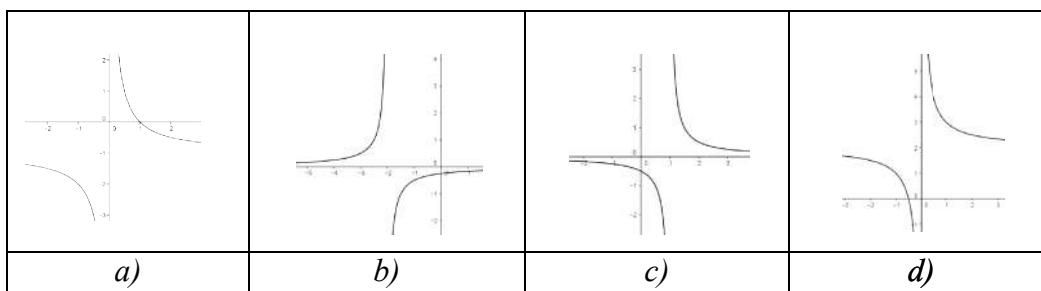


5. Произвольно одабрати функцију $f(x)$. Испитати функције $f(x + 1)$, $f(x) + 1$, $2f(x)$, $-f(x)$ и скицирати њихове графике.

6. Повезати функцију $f(x) = 3^{ax} + b$ са одговарајућим графицима и одредити одговарајући знак параметра a и вредност параметра b . Анализирати особине посматраних функција. Одредити бар један пар вредности параметара a и b , тако да је $f(x) = 0$.



7. Повезати функције $f(x) = \frac{a}{x} + b$, $g(x) = \frac{a}{x+b}$ са одговарајућим графицима. Одредити одговарајуће знакове параметара a и b , испитати домен, нуле и монотоност сваке од функција.

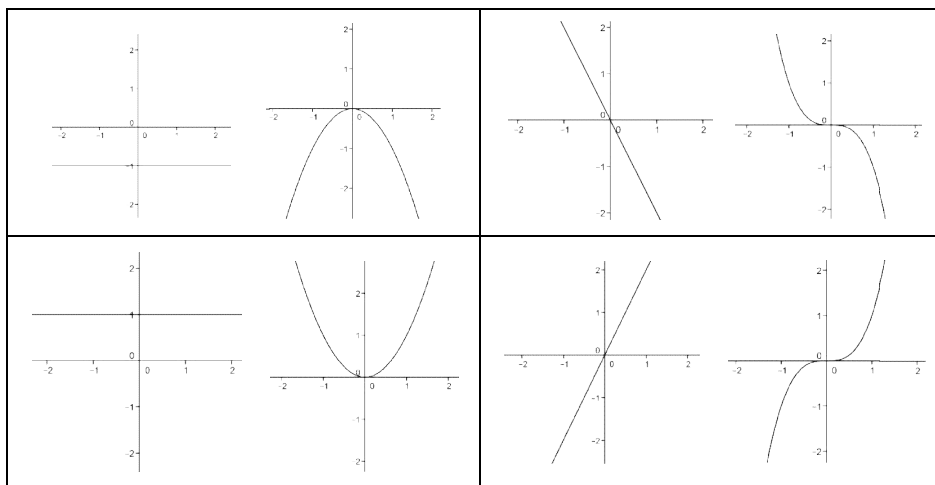


8. Повезати функције f_i , са одговарајућим функцијама g_i , где је $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$f_1(x) = \frac{1}{x}$	$f_2(x) = \frac{e^x}{x^2}$	$f_3(x) = (x + 3)x^2$	$f_4(x) = \frac{2x}{3x + 3}$	$f_5(x) = \frac{x^2}{(x - 3)^2}$	$f_6(x) = 0$
$g_1(x) = \frac{x^2 - a}{(x - b)^2}$	$g_2(x) = \frac{ax}{x + 1}$	$g_3(x) = (x - a)(2x - b)^2$	$g_4(x) = \frac{e^{ax}}{x}$	$g_5(x) = \frac{e^x}{a + x^2}$	$g_6(x) = \frac{x + a}{x^b}$

9. Међу наведеним функцијама одабрати оне које могу потицати од функције $f(x) = \frac{2^{ax} \sin(k\frac{\pi}{2})}{x - b}$, где су a и b реални бројеви, а k цео број: $g_1(x) = \frac{1}{2^x}$, $g_2(x) = \frac{2^{3x} \sin x}{x - 8}$, $g_3(x) = \frac{e^x}{x^2 - 5}$, $g_4(x) = \frac{1}{x}$, $g_5(x) = \frac{-9 \sin \frac{\pi}{4}}{x 2^x}$, $g_6(x) = \frac{1}{x + 7}$, $g_7(x) = \frac{-2^{2x}}{x}$ и одредити одговарајуће параметре.

10. Дата је функција $f(x) = ax^b$ (a и b су реални параметри). Одредити вредности параметара a и b за сваки график на слици испод, испитај утицај параметара на особине функција и размотрити критеријуме на основу којих су графици разврстани у редове и колоне.

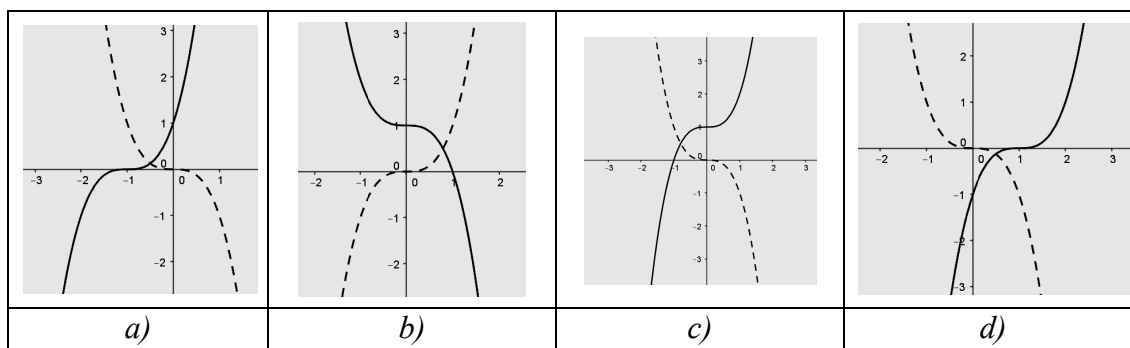


Прилог 6. Задаци за пре-тест 2016 године

1. Испитати особине датих функција (домен, нуле, знаке, асимптоте, монотоност, конвексност (без одређивања граничних вредности и извода) и скицирати њихове графике.

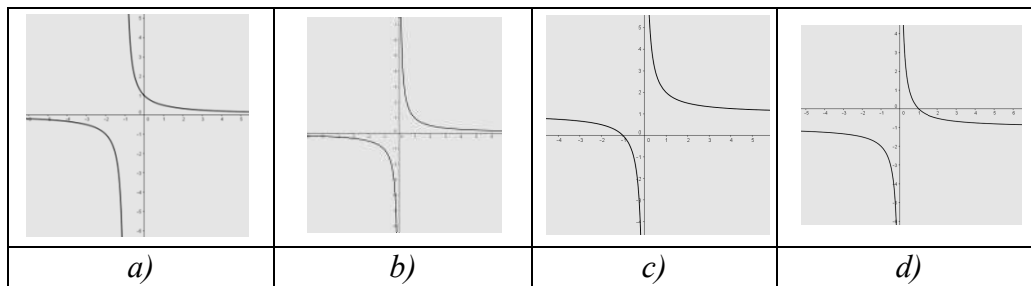
1) $f(x) = 2x + 3$	2) $f(x) = x^2$	3) $f(x) = x^3$	4) $f(x) = \frac{1}{x}$
5) $f(x) = 2^x$	6) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	7) $f(x) = \sin x$	8) $f(x) = \cot x$
9) $f(x) = \log x$	10) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	11) $f(x) = \sqrt{x}$	12) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

2. Скицирати графике функција $f_1(x) = x - 3$ и $f_2(x) = 3x$.
Објаснити везе између функције $f(x) = ax + b$ и функција f_1 и f_2 .
3. Скицирати графике функција $f_1(x) = x^2 - 2$, $f_2(x) = (x - 2)^2$ и $f_3(x) = -2x^2$.
Објаснити везе између функције $f(x) = a(x + b)^2 + c$ и функција f_1 , f_2 и f_3 .
4. Повезати функције $f_1(x) = x^3 + 1$ и $f_2(x) = -x^3$ са одговарајућим графицима и објаснити решење.



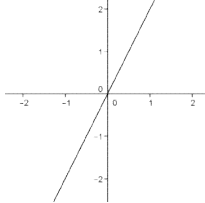
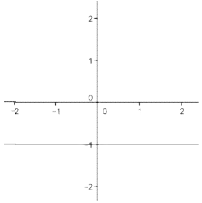
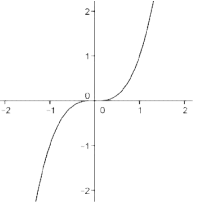
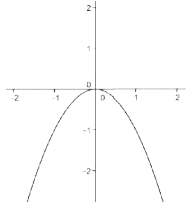
Објаснити везе између функције $f(x) = (ax + b)^3 + c$ и функција f_1 , f_2 и f_3 .

5. Повезати функције $f_1(x) = \frac{1}{x} + 1$, $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ са одговарајућим графицима и објаснити решење.



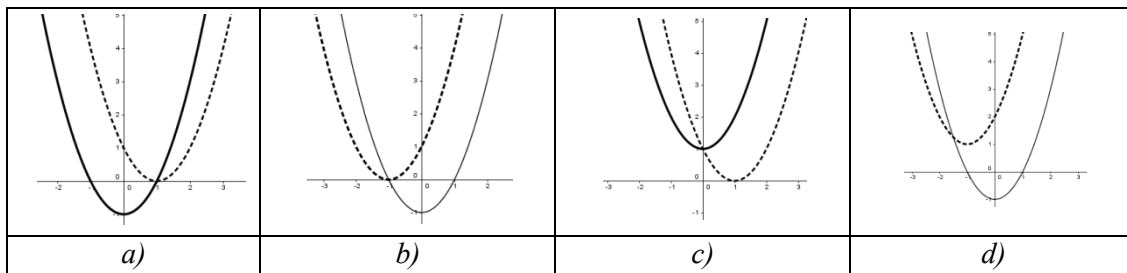
Објаснити везе између функције $f(x) = \frac{1}{x+a} + b$ и функција f_1 и f_2 .

6. Повезати функцију $f(x) = ax^b$ са одговарајућим графицима и одредити одговарајуће вредности параметара a и b .

			
<i>a)</i>	<i>b)</i>	<i>c)</i>	<i>d)</i>

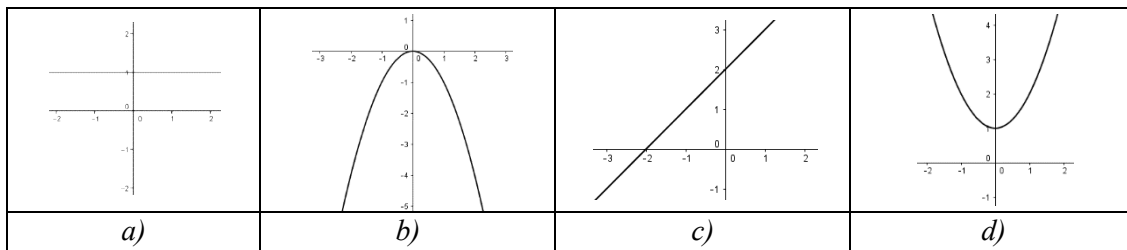
Прилог 7. Задаци за тест 2016 године

1. Графици функција $f_1(x) = (x + 1)^2$ и $f_2(x) = x^2 - 1$ приказани су заједно на једној од слика испод. Одредити ту слику и објаснити одговор.

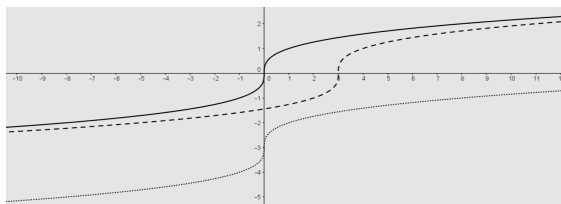


Објаснити везе између функције $f(x) = (x + a)^2 + b$ и функција f_1 и f_2 .

2. Повезати функцију $f(x) = (ax + b)x + c$ са одговарајућим графицима и одредити одговарајуће вредности параметара a , b и c . Одредити нуле функције f у зависности од параметара a , b , c .

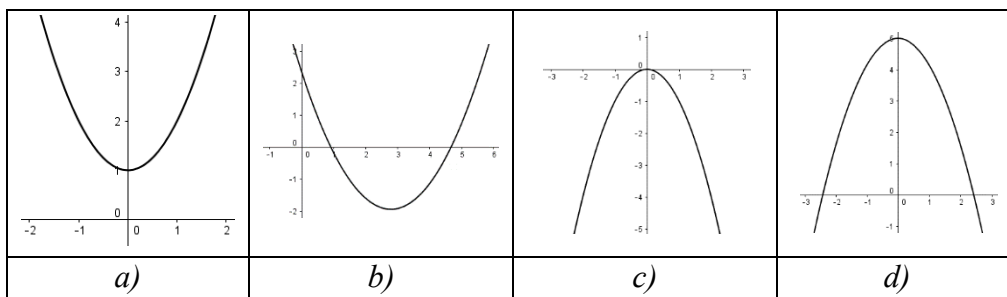


3. Повезати функцију $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ са одговарајућим графиком на слици испод; одредити аналитичке изразе и испитати функције f_2 и f_3 , приказане помоћу преостала два графика.

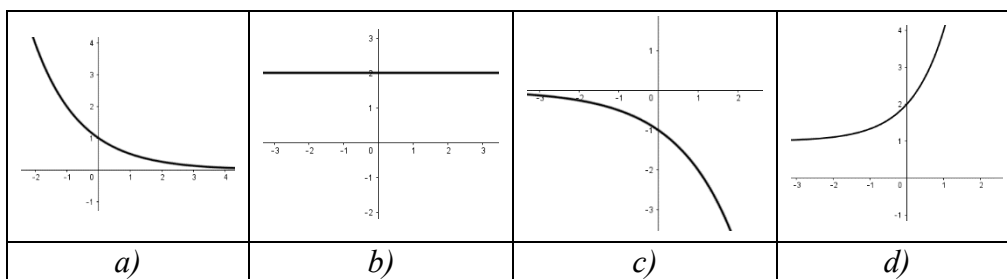


Објаснити везе између функције $f(x) = \sqrt[3]{x + a} + b$ и функција f_1 , f_2 , f_3 .

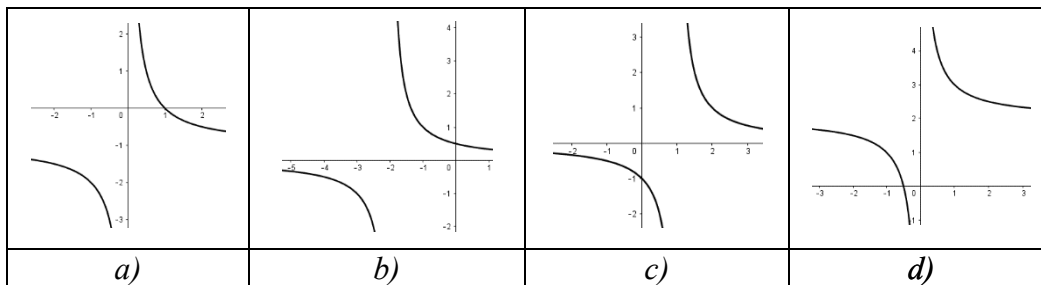
4. Повезати функцију $f(x) = a(bx)^2$ са одговарајућим графицима и одредити одговарајуће вредности параметара a и b . Одредити најмање један пар вредности параметара a и b , тако да функција f има максимум, а затим одредити тај максимум.



5. Одабрати произвољну функцију $f(x)$. Испитати особине функција $f(x + 1)$, $f(x) + 1$, $2f(x)$, $f(2x)$, $-f(x)$, и скицирати њихове графике.
6. Повезати функцију $f(x) = 3^{ax} + b$ са одговарајућим графицима, а затим одредити одговарајући знак параметра a и вредност параметра b . Испитати особине одабране функције. Одредити најмање један пар вредности параметара a и b , тако да је $f(x) = 0$.



7. Повезати функције $f(x) = \frac{a}{x} + b$, $g(x) = \frac{a}{x+b}$ са одговарајућим графицима. Одредити одговарајући знак параметара a и b , испитати домен, нуле и монотоност сваке од функција.



8. Повезати функције f_i , са одговарајућим функцијама g_i , где је $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

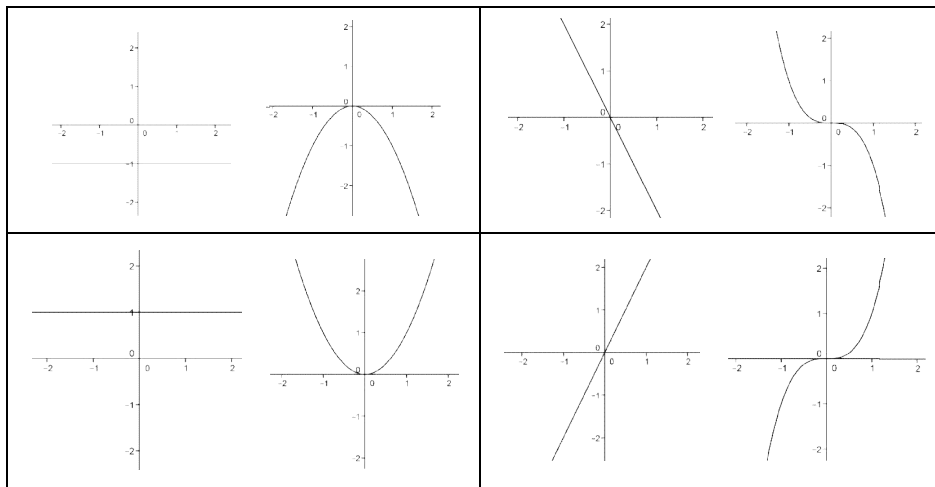
$f_1(x) = \frac{1}{x}$	$f_2(x) = \frac{e^x}{x^2}$	$f_3(x) = (x+3)x^2$	$f_4(x) = \frac{2x}{3x+3}$	$f_5(x) = \frac{x^2}{(x-3)^2}$	$f_6(x) = 0$
$g_1(x) = \frac{e^{ax}}{x}$	$g_2(x) = \frac{ax}{x+1}$	$g_3(x) = x(2x-b)^2$	$g_4(x) = \frac{x^2-a}{(x-b)^2}$	$g_5(x) = \frac{e^x}{a+x^2}$	$g_6(x) = \frac{x+a}{x^b}$

9. Међу датим функцијама g_i , одредити оне које потичу од функције $f(x) = \frac{2ax}{x-b}$, где су a и b реални параметри:

$$g_1(x) = \frac{1}{2x}, \quad g_2(x) = \frac{2^{3x}}{x-8}, \quad g_3(x) = \frac{e^x}{x^2-5}, \quad g_4(x) = \frac{1}{x}, \quad g_5(x) = \frac{-9}{x^{2x}}, \quad g_6(x) = \frac{1}{x+7}, \quad g_7(x) = \frac{-2^{2x}}{x}$$

Одредити одговарајуће вредности параметара.

10. Дата је функција $f(x) = ax^b$ (a и b су реални параметри). Одредити знак параметра a и вредност параметра b за сваки од графика приказаних на слици испод, испитати утицај параметара на особине функција и дискутовати о критеријуму на основу којег су графици разврстани по врстама и колонама дате табеле.



Прилог 8. *Задаци које су студенти решавали током процеса увежбавања 2017. године*

1. За различите вредности параметара a и b скицирати графике и испитати особине датих функција и њихових првих извода:

1) $f(x) + a$, $f(x + a)$, $af(x)$ и $f(ax)$,

2) $f(x + a) + b$, $af(x) + b$, $f(ax) + b$ и $f(ax + b)$,

где су функције f дате у табели испод. Испитати утицај параметара a и b на особине функција (нуле, знак, монотоност), као и на особине првог извода.

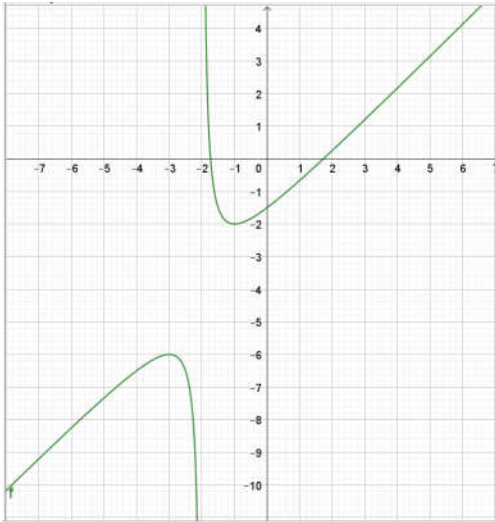
A)	$g(x) = x$	$h(x) = x^2$	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	
B)	$f(x) = 2^x$	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$f(x) = 1.5^x$	$f(x) = 0.4^x$
C)	$f(x) = \log_2 x$	$f(x) = \log_{1/3} x$	$f(x) = \ln x$	$f(x) = \log_{0.4} x$
D)	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f(x) = \operatorname{ctg} x$
E)	$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

2. Испитати особине и скицирати график функције $f(x) = \frac{x^2 - a}{x - b} e^{cx}$, у зависности од вредности параметара a , b и c .

Прилог 9. Задаци за тест 2017. године

1. Дат је график функције $f(x) = \frac{x^2-3}{x+a}$.

- a) Одредити вредност параметра a , тако да график одговара функцији f .
- b) Испитати особине функције за одређену вредност параметра и прикажи особине на графику.



2. Испитати особине и скицирати график функције $f(x) = \frac{x-2}{x-6} e^{\frac{x}{8}}$.

Биографија



Радослав Божић рођен је 14.11.1987. у Новом Саду. Завршио је основну школу у Беочину и Гимназију „Јован Јовановић Змај“ у Новом Саду. Дипломирао је на Природно – математичком факултету у Новом Саду 2010. године и стекао звање Дипломирани математичар. Мастер студије је завршио на Природно – математичком факултету у Новом Саду 2012. године и стекао звање Мастер математичар.

Запослен је и ради као наставник математике. Од фебруара 2013. до августа 2015. године радио је у Основној школи „Јован Јовановић Змај“ у Сремској Каменици. Од септембра 2015. до децембра 2018. године радио је у Основној школи „Вук Караџић“ у Новом Саду. Од септембра 2014. до јуна 2017. године изводио је наставу у Средњој стручној школи у Новом Саду (раније Средња саобраћајна школа у Новом Саду). Од септембра 2017. године ради у Гимназији „Светозар Марковић“ у Новом Саду, где је од децембра 2018. године запослен са пуним радним временом.

Од фебруара 2017. године ангажован је на Департману за математику и информатику Природно – математичког факултета у Новом Саду у својству сарадника – практичара за ужу научну област Методика наставе математике.

У периоду од 1.1.2013. до 31.12.2018. године похађао је програме обуке стручног усавшавања, акредитоване од стране Министарства просвете Републике Србије, у трајању од укупно 215 сати. Учествовао је као слушалац или излагач у већем броју домаћих и међународних стручних скупова и конференција. У оквиру Темпус пројекта „*Visuality & Mathematics*“, 2014. године је похађао летњу школу „2nd European Summer School for Visual Mathematics and Education.“

Радови и саопштења:

Božić, R., *The impact of dynamic properties of the software packages Mathematica and GeoGebra to the examining and graphing of functions with parameters – teaching material (EN)*, Non-Standard Forms of Teaching Mathematics and Physics: Experimental and Modeling Approach IPA HU-SRB/1203/221/024, University of Szeged, Bolyai Institute, 2015, Szeged, doi: http://www.model.u-szeged.hu/index.php?action=edoc&cmd=show_edoc&edoc_id=41

Božić, R. (2015). On Comparative Analysis of Mathematical Education of Serbia, Croatia and Finland. In *Proceedings of the ISIS Summit Vienna 2015*, 3–7 June 2015; Vienna, Austria, T1.1006; doi:10.3390/isis-summit-vienna-2015-T1.1006

Božić, R., Hasić, A. and Romano, D. A. (2018). *Models of the Mathematical Curriculum for the VI Middle School grades developed in B&H, Croatia, Montenegro and Serbia*. In: MackShelley and Mustafa Pehlivan (Eds.). *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2018*.

Božić, R., Hasić, A., Jovanova, B. and Romano, D. A. (2018). *Geometrics Objects in the Final Grade of Middle Schools in B&H, Croatia, Macedonia, Montenegro, Serbia, and Turkey and Students' Progress of Geometrical Thinking which their Mathematical Curricula Enable*. *IMVI Open Mathematical Educational Notes*, 8(2), 47-59, DOI: 10.7251/OMEN1802047B

Bozic, R., *Dynamic Geometry and Parametric Presentation of Functions, Non-Standard Forms of Teaching Mathematics and Physics: Experimental and Modeling Approach*, 6.2.2015-8.2.2015, Novi Sad.

Божић, Р., (2018). *Употреба динамичког софтвера код испитивања функција са параметрима*. Симпозијум МАТЕМАИТКА И ПРИМЕНЕ, Математички факултет, Универзитет у Београду, Београд, Vol. IX(1).

Božić, R., Takači, Đ. & Stankov, G. (2019). *Influence of dynamic software environment on students' achievement of learning functions with parameters*. *Interactive Learning Environments*. DOI: 10.1080/10494820.2019.1602842.

Такачи, Ђ., Божић, Р. (2019). Нове могућности динамичког софтвера GeoGebra и њихова примена у настави математике. *Државни семинар о настави математике и рачунарства*, Друштво математичара Србије, Београд. https://dms.rs/wp-content/uploads/2019/02/15-Takaci_Bozic_GeoGebra.pdf.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО – МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број:

РБР

Идентификациони број:

ИБР

Тип документације:

ТД

Монографска публикација

Тип записа:

ТЗ

Текстуални штампани документ

Врста рада:

ВР

Докторска дисертација

Аутор:

АУ

Радослав Божић

Ментор:

МН

др Ђурђица Такачи, редовни професор

Наслов рада:

НР

Методичка обрада функција са параметрима уз помоћ рачунара

Језик публикације:

ЈП

српски (ћирилица)

Језик извода:

ЈИ

српски/енглески

Земља публикавања:

ЗП

Република Србија

Уже географско подручје:

УГП

Војводина

Година:

ГО

2019.

Издавач:

ИЗ

ауторски репринт

Место и адреса:

МА

Природно-математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 3, Нови Сад

Физички опис рада:

ФО

(бр. поглавља / страница / цитата / табела / слика / графикона / прилога)
(8 / 167 / 87 / 16 / 49 / 4 / 9)

Научна област:

НО

Математика

<i>Научна дисциплина:</i> НД	Методика наставе математике
<i>Предметна одредница/ кључне речи:</i> РО УДК	Вишеструке репрезентације, динамички софтвер, образовни софтвер <i>GeoGebra</i> , функције са параметрима, извод функције.
<i>Чува се:</i> ЧУ	Библиотека Департмана за математику и информатику, ПМФ-а у Новом Саду
<i>Важна напомена:</i> ВН	нема
<i>Извод:</i> ИЗ	
	У докторској дисертацији је елаборирано истраживање које се односи на примену савремених технологија у настави математике на универзитетском нивоу. Истраживање се заснива на комбиновању различитих наставних метода, са циљем унапређења квалитета знања студената у области реалних функција и њихових особина. Бројна ранија истраживања бавила су се применом методе колаборативног рада у настави, као и имплементацијом савремене технологије у наставни процес. У докторској дисертацији описане су наставне методе које се заснивају на примени динамичког софтвера у испитивању особина функција, односно класа (фамилија) функција, комбиноване са методама колаборативног, односно индивидуалног рада студената. Коришћењем погодног динамичког софтвера, израђени су едукативни материјали који се могу користити у настави. Спроведена су појединачна истраживања, која су имала за циљ утврђивање степена утицаја примене новог методског приступа на постигнућа студената у посматраној области. Резултати сваког од истраживања су статистички анализирани. Дана су закључна разматрања, која садрже дискусију о резултатима спроведених истраживања, као и смернице за имплементацију новог методског приступа у наставни процес и евентуална даља истраживања.
<i>Датум прихватања теме од стране НН већа:</i> ДП	23.11.2017.
<i>Датум одбране:</i> ДО	
<i>Чланови комисије:</i> КО	
<i>Председник:</i> <i>члан:</i> <i>члан:</i> <i>члан:</i> <i>члан:</i>	проф. др Ненад Теофанов, ред. проф., ПМФ, Нови Сад проф. др Ђурђица Такачи, ред. проф., ПМФ, Нови Сад проф. др Мирјана Ивановић, ред. проф., ПМФ, Нови Сад проф. др Петар Ђапић, ванр. проф., ПМФ, Нови Сад проф. др Светлана Шпановић, ред. проф., Педагошки факултет у Сомбору

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

Monographic publication

DT

Type of record:

Textual printed material

TR

Content code:

PhD thesis

CC

Author:

Radoslav Božić

AU

Mentor/comentor:

Đurđica Takači, PhD, full professor

MN

Title:

Methodical approach to teaching functions with parameters with the help of computer

TI

Language of text:

Serbian (cyrilic)

LT

Language of abstract:

Serbian/English

LA

Country of publication:

Republic of Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2019.

PY

Publisher:

Author's reprint

PU

Publication place:

Faculty of Sciences, Trg Dositeja Obradovića 3, Novi Sad

PP

Physical description:

(chapters / pages / references / tables / figures / graphics / appendices)
(8 / 167 / 87 / 16 / 49 / 4 / 9)

PD

Scientific field:

Mathematics

SF

Scientific discipline: Teaching methodology of mathematics
SD

Subject/ Key words: Multiple representations, dynamic software, educational software *GeoGebra*, functions with parameters, derivative of the function.
SKW
UC

Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, Novi Sad
HD

Note: none
N

Abstract:
AB

In the doctoral thesis, a research on the application of modern technologies in teaching mathematics at the university level is elaborated. The research is based on the combination of different teaching methods, with the aim of improving the quality of students' knowledge of real functions and their properties. Numerous previous research was carried out using the method of collaborative teaching work in teaching, as well as the implementation of modern technology in the teaching process. In the doctoral thesis, teaching methods are described based on the application of dynamic software in the examination of the properties of functions, i.e. classes (families) of functions, combined with methods of collaborative, or individual work of students. By using suitable dynamic software, educational materials that can be used in teaching are created. Individual research was conducted, aimed at determining the degree of impact of the application of a new didactic approach on students' achievements in the observed field. The results of each study were statistically analyzed. Final conclusions are provided, which contain a discussion of the results of the conducted research, as well as guidelines for the implementation of the new didactic approach in the teaching process and possible further research.

Accepted by the Scientific Board: 23.11.2017.
ASB

Defended on:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Nenad Teofanov, PhD, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member: Đurđica Takači, PhD, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member: Mirjana Ivanović, PhD, full professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member: Petar Đapić, PhD, associate professor, Faculty of Sciences, Novi Sad
Member: Svetlana Španović, PhD, full professor, Faculty of Education in Sombor