UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA

Marija Paunović

MERE NEODREĐENOSTI I PRIMENA U AKTUARSTVU

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2019.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска документација
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, **ВР**:	Докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Марија Пауновић
Ментор, **МН**:	Проф. др Небојша Ралевић
Наслов рада, **НР**:	Мере неодређености и примена у актуарству
Језик публикације, **ЈП**:	Српски
Језик извода, **ЈИ**:	Српски, Енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Република Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина
Година, **ГО**:	2019
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	7/108/99/11/21/0/0
Научна област, **НО**:	Примењена математика
Научна дисциплина, **НД**:	Теорија мере, Теорија неодређености, Актуарство
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	фази мере, c-кредибилитет, неодређеност
УДК	
Чува се, **ЧУ**:	Библиотека Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Предмет истраживања овог рада су мере неодређености, посебно мера кредиблитета, као и могућност њихове примене у актуарству. У циљу генерализације теорије кредибилитета, уведена је нова мера, названа мера c-кредибилитета. Мера *c*-кредибилитета на *X* је скуповна функција таква да су задовољене особине нормалности, монотоности, самодуалности и максималности. За њу су доказане неке особине као што су нпр. субадитивност и полунепрекидност. Надаље, дефинисан је интеграл заснован на мери *c*-кредибилитета, а наведена су и доказана одређена својства. Нова мера је уведена и у фази окружењу као агрегирана вредност мера могућности и неопходности.
Датум прихватања теме, **ДП**:	
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	академик Градимир Миловановић редовни професор у пензији	
	Члан:	др Љиљана Гајић, редовни професор	
	Члан:	др Јелена Кочовић, редовни професор	
	Члан:	др Драган Ђорђевић, редовни професор	Потпис ментора
	Члан:		
	Члан, ментор:	др Небојша Ралевић, редовни професор	

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monographic publication
Type of record, **TR**:	Textual printed material
Contents code, **CC**:	PhD thesis
Author, **AU**:	Marija Paunović
Mentor, **MN**:	Professor Nebojša Ralević, PhD
Title, **TI**:	Uncertainty measures and actuarial application
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian, English
Country of publication, **CP**:	Republic of Serbia
Locality of publication, **LP**:	Province of Vojvodina
Publication year, **PY**:	2019
Publisher, **PB**:	Author's reprint
Publication place, **PP**:	Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	7/108/99/11/21/0/0
Scientific field, **SF**:	Applied Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Measure theory, Uncertainty theory, Actuarial mathematics
Subject/Key words, **S/KW**:	fuzzy measures, c-credibility measure, uncertainty
UC	
Holding data, **HD**:	Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	This thesis studies uncertainty measures, especially credibility measure, as well as the possibility of their application in actuaries. In order to generalize credibility theory, a new fuzzy measure is proposed, called $c-$ credibility measure. $C-$ credibility measure on X is a set function that satisfies normality, monotonicity, self-duality and maximality. Certain properties of the $c-$credibility measure are proved, such as, for example, subadditivity and semicontinuity. Furthermore, an integral based on this measure is defined, in analogy to the existing integrals, and its properties are proved. Then, the credibility measure in a fuzzy environment is introduced as the aggregate value of the possibility and necessity measures.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	
Defended on, **DE**:	

Defended Board, **DB**:	President:	academic Gradimir V. Milovanović full professor	
	Member:	Ljiljana Gajić, PhD, full professor	
	Member:	Jelena Kočović, PhD, full professor	
	Member:	Dragan Đorđević, PhD, full professor	Menthor's sign
	Member		
	Member, Mentor:	Nebojša Ralević, PhD, full professor	

Predgovor

Predmet istraživanja ove teze su mere neodređenosti, posebno mera kredibliteta, kao i mogućnost njihove primene u aktuarstvu. Aktuarska procena je neophodna pri izboru, razvoju ili upotrebi kredibiliteta u uslovima neodređenosti. S obzirom na neke nedostatke klasične teorije kredibiliteta razvijena je teorija kredibiliteta u fazi okruženju. Mera kredibiliteta je predstavljena kao neaditivna mera sa osobinom samodualnosti i to kao prosek mere mogućnosti i mere neophodnosti. Ovako definisana mera rešila je neka otvorena pitanja u teoriji kredibiliteta u uslovima neodređenosti, naročito osobina samodulanosti ove mere. Savremenost problematike nameće potrebu za daljim istraživanjem ove oblasti.

Jedan od pravaca ovog istraživanja je uvođenje nove mere, nazvana mera c-kredibiliteta, sa odgovarajućom aksiomatskom zasnovanošću. U disertaciji su razmatrana neka svojstva ove mere, ali imajući u vidu obimnost problematike, ostala su određena otvorena pitanja za budući rad. Drugi pravac istraživanja je razvoj ove mere u fazi okruženju koristeći funkcije agregacije i sa dualnim merama, merom mogućnosti i merom neophodnosti, kao monotonim i poluneprekidnim merama, pružaju mogućnost široke primene ne samo u akuarstvu, već i drugim oblastima nauke.

Posebnu zahvalnost dugujem mentoru prof. dr Nebojši M. Raleviću na ukazanom poverenju, izdvojenom vremenu i svesrdnoj pomoći u izradi disertacije.
Zahvaljujem se prof. dr Jeleni Kočović koja me je uvela u oblast aktuarstva i svim korisnim sugestijama u toku dugogodišnjeg zajedničkog rada.
Zahvaljujem se i članovima komisije za ocenu i odbranu doktorske disertacije, akademiku Gradimiru V. Milovanoviću, prof. dr Ljiljani Gajić i prof. dr Draganu Đorđeviću na sugestijama koje su disertaciju učinile kvalitetnijom.

Doktorat posvećujem svojoj majci koja je u svakom trenutku bila uz mene.

Autor

Rezime

Predmet istraživanja ovog rada su mere neodređenosti, posebno mera kredibliteta, kao i mogućnost njihove primene u aktuarstvu. U cilju generalizacije teorije kredibiliteta, uvedena je nova mera, nazvana mera c-kredibiliteta. Mera c-kredibiliteta na X je skupovna funkcija takva da su zadovoljene osobine normalnosti, monotonosti, samodualnosti i maksimalnosti. Za nju su dokazane neke osobine kao što su na primer subaditivnost i poluneprekidnost. Nadalje, definisan je integral zasnovan na meri c-kredibiliteta, a navedena su i dokazana određena svojstva. Nova mera je uvedena i u fazi okruženju kao agregirana vrednost mera mogućnosti i neophodnosti.

Abstract

This thesis studies uncertainty measures, especially credibility measure, as well as the possibility of their application in actuaries. In order to generalize credibility theory, a new fuzzy measure is proposed, called $c-$ credibility measure. $C-$ credibility measure on X is a set function that satisfies normality, monotonicity, self–duality and maximality. Certain properties of the c–credibility measure are proved, such as, for example, subadditivity and semicontinuity. Furthermore, an integral based on this measure is defined, in analogy to the existing integrals, and its properties are proved. Then, the credibility measure in a fuzzy environment is introduced as the aggregate value of the possibility and necessity measures.

Sadržaj

Glava 1

Uvod

U disertaciji će biti povezane tri oblasti, teorija neodređenosti, aktuarstvo i teorija kredibiliteta. U procesima odlučivanja, odluka se obično donosi u uslovima neodređenosti, odnosno odsustva informacija ili znanja o određenom problemu, pa se pokazalo kao neophodno da se vrše različite procene i iznađu drugačija rešenja za dati problem. Neodređenost podrazumeva pojave čiji ishodi se ne mogu tačno predvideti unapred. Teorija neodređenosti je deo matematike koji se, između ostalog, bavi modeliranjem stepena verovanja.

Tako, u aktuarstvu je česta pojava da se i posle detaljnog analiziranja raspoložive statistike dolazi do teškoća u postavljanju i rešavanju neodređenosti pojave ili procesa. U aktuarstvu, u slučaju složenog procesa sa većim brojem parametara i rizika koji utiču na posmatranu pojavu, gde svaki rizik ima posebne karakteristike i uticaj na proces, itd., aktuari treba da utvrde, odnosno procene određene parametre. Pored toga, treba da pronađu rešenje za uporedno sagledavanje verodostojnih podataka koji su na raspolaganju, podataka industrije osiguranja ili regulatora (drugi izvori), kao i važne ekonomske i poslovne pokazatelje.

Procedura kredibiliteta se koristi da se poboljša procena parametra u datom zadatku. Aktuar treba da obavi stručnu procenu i pažljivo izabere i koristi relevantno iskustvo. Upotreba metoda kredibiliteta nije uvek precizan matematički proces. Na primer, u nekim situacijama prihvatljiva procedura za spajanje iskustva društva sa relevantnim iskustvom može se zasnivati na tome da aktuar dodeli potpuno, delimično ili nikakvo iskustvo društva bez upotrebe strogog matematičkog modela. Aktuar treba da koristi stručnu procenu pri izboru, razvoju ili upotrebi kredibiliteta [1]. Kredibilitet se može koristiti za određivanje cene, izračunavanje premijske stope, utvrđivanje buduće premijske stope na osnovu iskustva, rezervisanja i dr. Različiti pristupi se koriste u procedurama kredibiliteta. U zavisnosti od problema, pristup se zasniva na proceni, matematičkim modelima ili njihovoj kombinaciji. U klasičnoj teoriji kredibiliteta postoje dve osnovne metode, Metod ograničene fluktuacije i Metod najveće preciznosti. Klasične procedure kredibiliteta uvode pretpostavku u vezi oblika osnovne raspodele verovatnoće. Na osnovu ove funkcije raspodele verovatnoća izračunavaju se odgovarajući broj šteta, iznos premije i drugo, tako da je verovatnoća kretanja šteta u okviru naznačenog procenta očekivane vrednosti. Kako bi se u praksi primenile formule faktora kredibiliteta koje predlažu ove metode, aktuarima su potrebne procene vrednosti parametara, međutim nema opšte prihvaćenih načina procene ovih parametara, zasnovanih na naučnoj osnovi, što ograničava praktičnu primenu nekih formula kredibiliteta [2], [3].

Aktuarstvo je multidisciplinarno, spoj nauke i praktične primene, pa je subjektivnost aktuara u oceni parametara značajno izražena, ali i neodređenost pojava u određenim zadacima. Zbog toga se kredibilitet retko zasniva na čisto statističkim osnovama. Praksa je ukazala na teškoće u ispravnom postavljanju problema, kao i subjektivnog tumačenja rezultata eksperimenta. Takođe, u praksi osiguranja često se javlja i visok stepen složenosti posmatranog problema, kada se u obzir uzima iskustvo na osnovu ljudske ekspertize, umesto preciznih obračuna [4]. Teorija fazi matematike i fazi sistema pokazale su se kao primenljive u oceni rizika [5],[6] i drugim segmentima teorije i prakse osiguranja [7], [8], [9], kao što su klasifikacija, preuzimanje rizika [10], projektovanje obaveza, određivanje buduće i sadašnje vrednosti [11], formiranje premija osiguranja [12],[13], kod raspodele aktive, novčanih tokova, investicija i drugo [14], [15]. Takođe, u prirodi ljudskog, odnosno ekspertskog zaključivanja je da se neizvesni događaji precene [16]. Zbog napred navedenog, potrebno je iznaći alternativna rešenja za primenu ideja kredibiliteta u uslovima neodređenosti.

U pokušaju da prognozira buduće zahteve po osnovu šteta, aktuar ne zna uvek vrednost parametara raspodele. Takođe, postoje mnoge moguće i različite vrednosti koje mogu biti "najbolje ocene"osnovnih parametara. Jedna od ovih vrednosti se dobija ako se posmatra nedavno istorijsko iskustvo kompanije. Druge su vrednosti koje su prijavljene u različitim studijama o osiguranicima koji se smatraju "sličnim"osiguranim licima kompanije za koje aktuar pokušava da predvidi troškove po osnovu zahteva. Kako aktuar može odabrati "najbolju procenu"koja će se koristiti u predviđanju i kako mogu opravdati njihov postupak izbora? Teorija kredibiliteta, pokušava da reši problem kompromisnim rešenjem: umesto da se izabere jedna ili druga "najbolja procena", bira se vrednost koja je linearna kombinacija ili ponderisani prosek najbolje ocene.

Osnovna formula kredibiliteta je

Procena = $Z\cdot$ [Opservacija] + $(1-Z)\cdot$ [Ostale informacije], gde je $0 < Z < 1$, Z faktor kredibiliteta dodeljen posmatranju, a $1-Z$ se naziva komplementom faktora kredibiliteta. Kredibilitet podrazumeva linearnu procenu pravog očekivanja izvedenog kao rezultat kompromisa između opservacije i prethodne hipoteze.

Zbog neodređenosti pojava nailazimo na određene teškoće u realnoj primeni.

Predmet istraživanja ove teze su mere neodređenosti, sa posebnim akcentom na merama mogućnosti, verovanja i kredibliteta, kao i mogućnost njihove primene u

aktuarstvu.
Teorija mogućnosti je deo teorije neodređenosti za obradu nepotpunih informacija i zasnovana je na paru dualnih mera, meri mogućnosti i meri neophodnosti. Fazi mere su generalizacija klasičnih mera. Ova generalizacija se dobija zamenom aksioma aditivnosti klasičnih mera, koja se pokazala previše restriktivnom u primenama, sa slabijim aksiomama monotonosti i neprekidnosti. Mere mogućnosti i neophodnosti [17], [19], kao monotone i puluneprekidne mere nalaze sve veću primenu u realnim problemima.
Alternativna verzija teorije kredibiliteta u fazi okruženju, kao grana matematike za proučavanje ponašanja fazi fenomena, formulisana je od strane Liu [20]. Mera kredibiliteta [21] je predstavljena kao neaditivna mera sa osobinom samodualnosti i to kao prosek mere mogućnosti i mere neophodnosti:

$$Cr(A) = \frac{1}{2}(pos(A) + nec(A)),$$

gde je A skup u prostoru mogućnosti $(X, \mathcal{P}(X), pos)$.
U klasičnoj teoriji kredibiliteta, glavni zadatak je naći težine mera. Međutim, ovde je težina unapred određena i iznosi 0,5. Upravo iz ovog razloga potrebna je generalizovati meru kredibiliteta, što je i cilj ove disertacije.

Teza je organizovana u sedam poglavlja.

U uvodnom poglavlju razmatrani su pojmovi neodređenosti i kredibiliteta, predmet i cilj disertacije. Ukratko je data motivacija za izradu disertacije i ukazano na problematiku aktuarskih procena.

Specijalne operacije, koje se nazivaju standardnim fazi operacijama, fazi komplement, presek i unija, uvedene su u drugom poglavlju. Standardne fazi operacije su generalizacija odgovarajućih operacija koje važe za klasične skupove kada je stepen pripadnosti iz intervala $[0, 1]$. Za svaku od ovih operacija postoji široka klasa funkcija, kao sto su t-norme i t-konorme. Budući da fazi komplement, presek i unija nisu jedinstvene operacije, za razliku od odgovarajućih klasičnih operacija, različite funkcije mogu biti prikladne za predstavljanje tih operacija u određenim kontekstima.

Fazi skupovi kao generalizacija konvencionalne teorije skupova uvedeni su u trećem poglavlju. Navedene su osnovne definicije i svojstva fazi skupa, definisan je fazi broj na $\overline{\mathbb{R}}$, fazi logika [17] i fazi sistemi, sa naglaskom na pojmove koji će biti korišćeni u disertaciji.

U četvrtom poglavlju uvedena je teorija fazi mera kao generalizacija klasične teorije mere. Ova generalizacija se dobija zamenom aksioma aditivnosti klasične mere slabijim aksiomama monotonosti i neprekidnosti. Razvoj teorije fazi mera motivisan je činjenicom da svojstvo aditivnosti u nekim primenama suviše restriktivno, i shodno tome, nerealno. Zbog toga neki autori koriste termin monotone mere umesto fazi mere. Posebna pažnja posvećena je meri verovanja i plauzibiliteta, kao i meri neohodnosti i mogućnosti kao jedinim polunprekidnim merama.

U petom poglavlju objašnjena je Teorija kredibiliteta postavljena od strane Liu 2007. godine u okviru njegove Teorije neodređenosti. Kako bi definisali samodualnu meru, Liu i Liu [21] predstavili su koncept mere kredibiliteta 2002. godine, a zatim dalje razvijali Li i Liu [22] i Liu [23]. Naglasak u ovom poglavlju se uglavnom odnosi na meru kredibiliteta, prostor kredibiliteta, fazi promenljivu, očekivanu vrednost i procese neodređenosti.

Originalni rezultati koji se odnose na generalizaciju mere kredibiliteta date od strane Liu predstavljeni su u šestom poglavlju. Uvedena je nova mera, nazvana mera c-kredibiliteta [24]. Mera $c-$kredibiliteta na X je skupovna funkcija $\mathsf{cr} : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ takva da su zadovoljene osobine normalnosti, monotonosti, samodualnosti i maksimalnosti. Za nju su dokazane neke osobine kao što su npr. subaditivnost i poluneprekidnost. Nadalje, definisan je integral zasnovan na meri $c-$kredibiliteta, a navedena su i dokazana određena svojstva. Zatim je nova mera uvedena u fazi okruženju kao agregirana vrednost mera mogućnosti i neophodnosti.

Sedmo poglavlje sadrži primene teorije neodeđenosti u određenim aktuarskim zadacima. Dati su primeri određivanja klasičnog kredibiliteta, sa istaknutim problemima sa kojima se sreću aktuari u praksi [25],[26]. Nakon toga navedeni su primeri primene $c-$kredibiliteta i poređenje sa rezultatima dobijenih primenom klasičnih aktuarskih tehnika za određivanje premijskih stopa u osiguranju i dat je model za određivanje premije osiguranja pomoću tehnika fazi sistema.

Nakon sedmog poglavlja izvedeni su određeni zaključci, dati su predlozi i ideje za buduća istraživanja, kao i literatura korišćena u izradi teze.

Glava 2

Operacije na intervalu $[0, 1]$

U ovom poglavlju su uvedene specijalne operacije, fazi komplement, presek i unija. Standardne fazi operacije su generalizacija odgovarajućih operacija koje važe za klasične skupove kada je stepen pripadnosti iz intervala $[0, 1]$. Za svaku od ovih operacija postoji široka klasa funkcija, kao što su t-norme i t-konorme. Budući da fazi komplement, presek i unija nisu jedinstvene operacije, za razliku od odgovarajućih klasičnih operacija, različite funkcije mogu biti prikladne za predstavljanje tih operacija u različitim kontekstima.

Pored velike raznolikosti ovih funkcija, njihova određena svojstva im daju posebno značenje. Tako, standardni fazi presek (min operator) određuje, za bilo koji dati fazi skup, najveći od onih koji su određeni svim mogućim fazi presecima (t-norme). Nasuprot tome, standardna fazi unija (max operator) određuje najmanji fazi skup od fazi skupova određenih svim mogućim fazi unijama ($t-$konorme). Standardne fazi operacije imaju značajnu osobinu da ne umnožavaju vrednost greške. Tako, ukoliko greška povezana sa pripadnošću $A(x)$ i $B(x)$ ima određenu vrednost, maksimalna vrednost greške povezana sa pripadnošću x komplementu, preseku i uniji ostaje ista vrednost. Mnoge alternativne operacije fazi skupova nemaju ovu osobinu.

Fazi presek ($t-$norme) i fazi unija ($t-$konorme) ne pokrivaju sve operacije pomoću kojih se mogu sabirati fazi skupovi, ali obuhvataju sve operacije agregacija sa osobinom asocijativnosti. Zbog nedostatka osobine asocijativnosti, preostale operacije agregacija moraju biti definisane kao funkcija n argumenata za $n > 2$.

2.1 Binarne operacije na intervalu $[0, 1]$

Koncept trougaone norme, u opštoj formi, uveo je Menger [27] kako bi se generalizovala nejednakost trougla metričkih prostora. Sadašnji pojam t-norme i dualne operacije t-konorme je rezultat istraživanja Schveizer-a i Sklar-a [28], koji su dodali osobinu asocijativnosti i neutralni element. Trougaone norme su postale posebno interesantne kao modeli za definisanje preseka fazi skupova (videti [29], [30]). Primenjuju se i u verovatnosnim metričkim prostorima, teoriji fazi skupova, fazi logici, neaditivnim merama i integralima, itd. Za više detalja pogledati [31],[32], [33], [34].

2.1.1 Trougaone norme i trougaone konorme

Neka su proizvoljni fazi skupovi A i B definisani nad $X \neq \emptyset$, tj. $A, B \in \mathcal{F}(X)$. Fazi presek je binarna operacija na jediničnom intervalu $[0, 1]$, takva da daje željene osobine skupovnog fazi preseka. Klasa $t-$normi je prihvaćena kao ekvivalent klasi skupovnog fazi preseka, odnosno za proizvoljnu $t-$normu i $A, B \in \mathcal{F}(X)$, njihov fazi presek je fazi skup $A \cap B$, čija je funkcija pripadanja

$$(A \cap B)(u) = T(A(u), B(u))$$

gde je $u \in X$.

Slično, fazi unija je binarna operacija na $[0, 1]$, gde za proizvoljnu $t-$konormu i $A, B \in \mathcal{F}(X)$, njihova fazi unija je fazi skup $A \cup B$, čija je funkcija pripadanja

$$(A \cup B)(u) = S(A(u), B(u))$$

gde je $u \in X$.

Proizvoljna $t-$konorma definiše uniju fazi skupova. Zbog toga, za fazi skupove sa vrednostima funkcije pripadanja iz jediničnog intervala "poistovećujemo" pojam $t-$konorme sa fazi unijom.

Definicija 2.1.1 Trougaona norma *($t-$norma kraće) je binarna operacija $T : i^2 \to i$, $i = [0, 1]$ koja je komutativna, asocijativna, neopadajuća i ima neutralni element 1 (zadovoljava granični uslov), tj. za $u, v, w \in [0, 1]$ važi*

(τn_1) $T(u, v) = T(v, u)$,

(τn_2) $T(u, T(v, w)) = T(T(u, v), w)$,

(τn_3) $T(u,v) \leq T(u,w)$ *kada* $v \leq w$,

(τn_4) $T(u,1) = u$.

Često je poželjno dodati još neke osobine za $t-$normu. Najvažnije od tih dodatnih osobina su neprekidnost, subidempotentnost i striktna monotonost:

(τn_5) T je neprekidna funkcija,

(τn_6) $T(u,u) < u$, za svako $u \in (0,1)$,

(τn_7) $(u_1 < v_1 \wedge u_2 < v_2) \Rightarrow T(u_1,u_2) < T(v_1,v_2)$.

Neprekidnu i subidempotentnu $t-$normu nazivamo Archimede-ova. Striktnom Archimede-ovom nazivamo striktno monotonu $t-$normu. Osobina τn_6 daje specijalan slučaj u kome oba stepena pripadnosti skupovima A i B imaju istu vrednost u i ograničava da stepen pripadnosti u $A \cap B$, u ovom specijalnom slučaju, ne sme premašiti u.

Definicija 2.1.2 Trougaona konorma *(kraće $t-$konorma) je binarna operacija $S : i^2 \to i$, koja je komutativna, asocijativna, neopadajuća i ima neutralni element 0 (zadovoljava granični uslov), tj. važi*

(κn_1) $S(u,v) = S(v,u)$,

(κn_2) $S(u, S(v,w)) = S(S(u,v),w)$,

(κn_3) $S(u,v) \leq S(u,w)$ *kada* $v \leq w$,

(κn_4) $S(u,0) = u$.

Ekvivalentno $t-$normama, za $t-$konorme možemo dodati osobine neprekidnosti, superidempotentnosti i striktne monotonosti, respektivno:

(κn_5) S je neprekidna funkcija,

(κn_6) $S(u,u) > u$, za svako $u \in (0,1)$,

(κn_7) $(u_1 < v_1 \wedge u_2 < v_2) \Rightarrow S(u_1,u_2) < S(v_1,v_2)$.

Bilo koja neprekidna i superidempotentna $t-$konorma se naziva Archimede-ova. Striktnom Archimede-ovom nazivamo striktno monotonu $t-$konormu.

Definicija 2.1.3 *Element* $\mathbf{a} \in A$ *se naziva* **anihilatorom** *ili nula elementom operacije* $* : A \times A \to A$, *ako je ispunjeno* $u * \mathbf{a} = \mathbf{a} * u = \mathbf{a}$.

Iz definicije se vidi da operacija može imati najviše jedan anihilator. Ukoliko postoji anihilator, on je uvek idempotentan element.
Za t-normu anihilator je 0, a za t-konormu anihilator je 1.

Napomena 2.1.1 : Za svaku T normu važi $T(u,u) \leq u$, jer je $u \leq 1 \Rightarrow T(u,u) \leq T(u,1) = u$. Za svaku konormu važi $S(u,u) \geq u$, jer je $S(u,u) \geq S(u,0) = u$.

Najčešće upotrebljavane $t-$konorme i njima odgovarajuće $t-$norme su:

s_i) $S_M(u,v) = \max(u,v) = u \vee v$, standardna unija, max funkcija;

s_{ii}) $S_P(u,v) = u + v - uv$, probabilistička suma;

s_{iii}) $S_L(u,v) = \min(1, u+v)$, ograničena suma;

s_{iv}) $S_W(u,v) = \begin{cases} \max(u,v), & \min(u,v) = 0 \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$, drastična unija.

t_i) $T_M(u,v) = \min(u,v) = u \wedge y$, standardni presek, min funkcija;

t_{ii}) $T_P(u,v) = uv$, algebarski proizvod;

t_{iii}) $T_L(u,v) = \max(0, u+v-1)$, ograničena razlika;

t_{iv}) $T_W(u,v) = \begin{cases} \min(u,v), & \max(u,v) = 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$, drastični presek.

Archimede-ove $t-$konorme su S_L i S_P, dok S_M i S_W to nisu. Trougaone norme T_P i T_L su Archimede-ove, dok $t-$norme T_M i T_W to nisu.

Teorema 2.1.1 *Trougaona norma T_M je jedina $t-$norma koja ispunjava da je $T(u,u) = u$ za svako $u \in (0,1)$.*
Trougaona norma T_W je jedina $t-$norma koja ispunjava da je $T(u,u) = 0$ za svako $u \in (0,1)$.

Definicija 2.1.4 *Neka su T_1 i T_2 $t-$norme. Tada*

$$T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow (\forall (u,v) \in [0,1]^2),\ T_1(u,v) \leq T_2(u,v).$$

Slično se definiše i poredak kod $t-$konormi.

U sledećoj teoremi date su osobine poretka.

Teorema 2.1.2 *Važi*

i) $T_{\mathbf{W}} \leq T_{\mathbf{L}} \leq T_{\mathbf{P}} \leq T_{\mathbf{M}}$,

ii) $T_{\mathbf{W}} \leq T \leq T_{\mathbf{M}}$, *gde je* T *proizvoljna norma.*

iii) $S_{\mathbf{M}} \leq S_{\mathbf{P}} \leq S_{\mathbf{L}} \leq S_{\mathbf{W}}$,

iv) $S_{\mathbf{M}} \leq S \leq S_{\mathbf{W}}$, *gde je* S *proizvoljna konorma.*

Osim navedenih postoji i veliki broj drugih $t-$normi i $t-$konormi pa tako na primer navodimo familije Sugenovih $t-$konormi i $t-$normi za $\lambda > -1$ koje su date sa

$$S_{\lambda}^{\mathbf{S}}(u, v) = \min(u + v + \lambda uv, 1),$$

$$T_{\lambda}^{\mathbf{S}}(u, v) = \frac{1}{\lambda}[(1 + \lambda u)^{\log(1+\lambda v)/\log(1+\lambda)} - 1],$$

kao i familije Frankovih $t-$normi i $t-$konormi

$$T_s^{\mathbf{F}}(u, v) = \begin{cases} \min(u, v), & s = 0 \\ u \cdot v, & s = 1 \\ \max(u + v - 1, 0), & s = \infty \\ \log_s(1 + \frac{(s^u - 1)(s^v - 1)}{s - 1}), & s \in (0, \infty) \setminus \{1\} \end{cases}$$

$$S_s^{\mathbf{F}}(u, v) = \begin{cases} \max(u, v), & s = 0 \\ u + v - u \cdot v, & s = 1 \\ \min(u + v, 1), & s = \infty \\ 1 - \log_s(1 + \frac{(s^{1-u} - 1)(s^{1-v} - 1)}{s - 1}), & s \in (0, \infty) \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Definicija 2.1.5 *Stepen* $t-$*norme za niz* $\{u_n\}$ *dat je formulom*

$$T^1(u_1, u_2) = T(u_1, u_2),$$

$$T^n(u_1, ..., u_n, u_{n+1}) = T(T^{n-1}(u_1, ..., u_n), u_{n+1}).$$

Napomena 2.1.2 Zbog osobine asocijativnosti T, važi

$$T^n(u_1, ..., u_n, u_{n+1}) = T(u_1, T^{n-1}(u_2, ..., u_n, u_{n-1})).$$

Na primer:
$T^2(u_1, u_2, u_3) = T(T(u_1, u_2), u_3) = T(u_1, T(u_2, u_3))$,
$T^3(u_1, u_2, u_3, u_4) = T(T^2(u_1, u_2, u_3), u_4)$
$= T(T(T(u_1, u_2), u_3), u_4) = T(T(u_1, u_2), T(u_3, u_4))$
$= T(u_1, T(u_2, T(u_3, u_4))) = T(T(u_1, T(u_2, u_3)), u_4)$
$= T(u_1, T(T(u_2, u_3), u_4))$, itd.

Lema 2.1.1 *Za stepen $t-$norme važi*

$$T^{n-1}(u_1, ..., u_n) = T^{n-1}(u_{i_1}, ..., u_{i_n}),$$

gde je $u_{i_1}, ..., u_{i_n}$ proizvoljna permutacija elemenata u_1, ..., u_n.

Napomena 2.1.3 Za proizvoljnu $t-$normu T je

$$T(u_1, u_2) = 1 \Leftrightarrow \ u_1 = u_2 = 1,$$

$$T^n(u_1, u_2, ..., u_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow \ u_1 = ... = u_{n+1} = 1.$$

Dokaz. Kako je, $u_1 \leq 1 \Rightarrow 1 = T(u_1, u_2) \leq T(1, u_2) = u_2$ i $u_2 \leq 1 \Rightarrow 1 = T(u_1, u_2) \leq T(u_1, 1) = u_1$, tj. $u_1 = u_2 = 1$.
Obrnuto tvrđenje sledi iz graničnog uslova.
Dokaz za T^n sledi induktivno. $\square$

Definicija 2.1.6 *Stepen $t-$konorme za niz $\{u_n\}$ dat je formulom*

$$S^1(u_1, u_2) = S(u_1, u_2),$$

$$S^n(u_1, ..., u_n, u_{n+1}) = S(S^{n-1}(u_1, ..., u_n), u_{n+1}).$$

Napomena 2.1.4 Zbog osobine asocijativnosti S, imamo

$$S^n(u_1, ..., u_n, u_{n+1}) = S(u_1, S^{n-1}(u_2, ..., u_n, u_{n-1})).$$

Na primer:
$S^2(u_1, u_2, u_3) = S(S(u_1, u_2), u_3) = S(u_1, S(u_2, u_3))$,
$S^3(u_1, u_2, u_3, u_4) = S(S^2(u_1, u_2, u_3), u_4)$
$= S(S(S(u_1, u_2), u_3), u_4) = S(S(u_1, u_2), S(u_3, u_4))$
$= S(u_1, S(u_2, S(u_3, u_4))) = S(S(u_1, S(u_2, u_3)), u_4)$
$= S(u_1, S(S(u_2, u_3), u_4))$, itd.

Lema 2.1.2 *Za proizvoljnu $t-$konormu S, važi*

$$S^{n-1}(u_1, ..., u_n) = S^{n-1}(u_{i_1}, ..., u_{i_n}),$$

gde je $u_{i_1}, ..., u_{i_n}$ proizvoljna permutacija elemenata u_1, ..., u_n.

Lema 2.1.3 *Ako je S striktna trougaona konorma, tada je S^n striktna rastuća funkcija.*

Napomena 2.1.5 Ako je S proizvoljna $t-$konorma, tada je:

$$S(u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow \ u_1 = u_2 = 0.$$

$$S^n(u_1, u_2, ..., u_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \ u_1 = ... = u_{n+1} = 0.$$

Dokaz. Zaista, $0 \leq u_1 \Rightarrow u_2 = S(0, u_2) \leq S(u_1, u_2) = 0$ i $0 \leq u_2 \Rightarrow u_1 = S(u_1, 0) \leq S(u_1, u_2) = 0$, tj. $u_1 = u_2 = 0$.
Obrnuto, direktno iz graničnog uslova sledi da je $S(u_1, u_2) = S(0, 0) = 0$.

Dokaz za S^n sledi induktivno. □

Napomena 2.1.6 Ako je S striktna $t-$konorma, tada:

$$S(u_1, u_2) = 1 \Leftrightarrow \ u_1 = 1 \vee u_2 = 1.$$

$$S^n(u_1, u_2, ..., u_{n+1}) = 1 \Leftrightarrow \ u_1 = 1 \vee ... \vee u_{n+1} = 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da iz $S(u_1, u_2) = 1$ sledi $\neg(u_1 = 1 \vee u_2 = 1) \Leftrightarrow u_1 < 1 \wedge u_2 < 1$. Međutim tada $u_1 < 1 \wedge u_2 < 1 \Rightarrow S(u_1, u_2) < S(1, 1) = 1$, što je kontradikcija.
U suprotnom smeru dokaz sledi iz činjenice da je 1 anihilator za $t-$konormu.
Dokaz za S^n sledi induktivno. □

Na sličan način se može definisati stepen t-norme elementa u:

$$u_T^{(2)} = T\left(u, u\right)$$
$$u_T^{(n)} = T_{i=1}^{n} u = T\left(T_{i=1}^{n-1} u, u\right).$$

Analogno se definiše za $t-$konormu.

Dalje navodimo teoremu o reprezentaciji $t-$normi i $t-$konormi [35], koja nam daje metodu generisanja Archimede-ovih $t-$normi ($t-$konormi) ili klasa $t-$normi ($t-$konormi) pomoću opadajućih i rastućih generatora.
Tako, svaka Archimede-ova $t-$norma može se dobiti korišćenjem nekog opadajućeg generatora, i obrnuto, svaki opadajući generator definiše jednu $t-$normu. Takođe, analogno se $t-$konorme mogu predstaviti pomoću rastućeg generatora.

Teorema 2.1.3 *Funkcija $S : i \times i \to i$ je Archimede-ova $t-$konorma akko postoji rastuća neprekidna funkcija $\eta : i \to [0, \infty]$ sa $\eta(0) = 0$ (rastući generator) takva da je*

$$S(u, v) = \eta^{(-1)}(\eta(u) + \eta(v)), \tag{2.1}$$

gde je $\eta^{(-1)}$ pseudo inverzna funkcija od η, definisana sa

$$\eta^{(-1)}(v) = \begin{cases} \eta^{-1}(v), & v \in [0, \eta(1)] \\ 1, & v \in [\eta(1), \infty] \end{cases}$$

Osim toga, S je striktna $\Leftrightarrow \eta(1) = \infty$.

Teorema 2.1.4 *Funkcija $T : i \times i \rightarrow i$ je Archimede-ova $t-$norma akko postoji opadajuća neprekidna funkcija $\eta : i \rightarrow [0, \infty]$ sa $\eta(1) = 0$ (opadajući generator) takva da je*

$$T(u, v) = \eta^{(-1)}(\eta(u) + \eta(v)), \tag{2.2}$$

gde je $\eta^{(-1)}$ pseudo inverzna funkcija od η, definisana sa

$$\eta^{(-1)}(v) = \begin{cases} \eta^{-1}(v), & v \in [0, \eta(0)] \\ 0, & v \in [\eta(0), \infty] \end{cases}$$

Osim toga, T je striktna $\Leftrightarrow \eta(0) = \infty$.

Funkcija η je nazvana aditivni generator od S i T.

Specijalno, na osnovu Aczél-ove teoreme za svaku striktnu konormu S postoji monotona funkcija η (generator za S, $\eta : i \rightarrow [0, \infty]$ takva da je $\eta(0) = 0$ ili $\eta(1) = 0$ i

$$S(u, v) = \eta^{-1}(\eta(u) + \eta(v)).$$

Možemo primetiti da je η izomorfizam polugrupe $([0, 1], S)$ na polugrupu $([0, \infty], +])$.
Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $\eta : i \rightarrow [0, +\infty]$ neprekidna, striktna monotono opadajuća funkcija, $\eta(1) = 0$, te da je T dato sa (2.2). Komutativnost i monotonost za T su očigledne. Granični uslov sledi na osnovu toga da za sve $u \in [0, 1]$ imamo

$$T(u, 1) = \eta^{-1}(\min(\eta(u) + \eta(1), \eta(0))) = \eta^{-1}(\min(\eta(u), \eta(0))) = u.$$

Pošto za sve $u, v, w \in [0, 1]$ važi

$$\begin{aligned} T(T(u, v), w) &= \eta^{-1}(\min(\eta(T(u, v)) + \eta(w), \eta(0))) \\ &= \eta^{-1}(\min(\min(\eta(u) + \eta(v), \eta(0)) + \eta(w), \eta(0))) \\ &= \eta^{-1}(\min(\eta(u) + \eta(u) + \eta(w), \eta(0)) \\ &= \eta^{-1}(\min(\eta(u) + \min(\eta(v) + \eta(w), \eta(0)), \eta(0))) \\ &= \eta^{-1}(\min(\eta(u) + \eta(T(v, w)), \eta(0))) \\ &= T(u, T(v, w)), \end{aligned}$$

zaključujemo da je T i asocijativna, pa na osnovu svega i t-norma.

Da bi smo dokazali i obrnuto, pretpostavimo da je T neprekidna Archimede-ova t-norma.
Primetimo da ako za neko $u \in [0,1]$ i neko $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ imamo

$$u_T^{(n)} = u_T^{(n+1)} \text{ tada indukcijom sledi}$$

$$u_T^{(n)} = u_T^{(2n)} = \left(u_T^{(n)}\right)_T^{(2)},$$

te pošto je T neprekidna Archimede-ova t-norma to $u_T^{(n)} \in \{0,1\}$. Zato uvek važi $u_T^{(n)} > u_T^{(n+1)}$ za $u_T^{(n)} \in (0,1)$.
Uvedimo sada za $u \in [0,1]$ i $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} u_T^{(\frac{1}{n})} &= \sup\{v \in [0,1] | v_T^{(n)} = u\}, \\ u_T^{(\frac{m}{n})} &= \left(u_T^{(\frac{1}{n})}\right)_T^{(m)}. \end{aligned}$$

Pošto je T Archimede-ova t-norma, za sve $u \in (0,1)$ važi

$$\lim_{n\to\infty} u_T^{(\frac{1}{n})} = 1.$$

Izraz $u_T^{(\frac{m}{n})}$ je dobro definisan jer je $u_T^{(\frac{m}{n})} = u_T^{(\frac{km}{kn})}$ za sve $k \in \mathbb{N}$.
Štaviše za sve $u \in [0,1]$ i $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ važi

$$\begin{aligned} u_T^{(\frac{m}{n}+\frac{p}{q})} &= u_T^{(\frac{mq+np}{nq})} \\ &= \left(u_T^{(\frac{1}{nq})}\right)_T^{(mq+np)} \\ &= T\left(\left(u_T^{(\frac{1}{nq})}\right)_T^{(mq)}, \left(u_T^{(\frac{1}{nq})}\right)_T^{(np)}\right) \\ &= T\big(u_T^{(\frac{m}{n})}, u_T^{(\frac{p}{q})}\big). \end{aligned}$$

Neka je $c \in (0,1)$ proizvoljno ali fiksno. Označimo sa $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q} \cap [0,+\infty)$. Definišemo funkciju $h : \mathbb{Q}^+ \to [0,1]$ sa $h(r) = c_T^{(r)}$. Kako je T neprekidno i važi $\lim\limits_{n\to\infty} u_T^{(n)} = 0$, to je za sve $u \in (0,1]$ funkcija h neprekidna. Sa druge strane, pošto je

$$h(r+s) = c_T^{(r+s)} = T(c_T^{(r)}, c_T^{(s)}) \le c_T^{(r)} = h(r),$$

to je h i monotono ne-rastuća funkcija. Ona je i striktno monotono-opadajuća na $h^{-1}((0,1])$ jer za sve $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ za koje je $h(\frac{m}{n}) > 0$ važi

$$h(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\leq h\Big(\frac{mq+1}{nq}\Big)=\big(c^{(\frac{1}{nq})}\big)^{(mq+1)}<\big(c^{(\frac{1}{nq})}\big)^{(mq)}=h(\frac{m}{n}).$$

Na osnovu monotonosti i neprekidnosti funkcije h na $\mathbb{Q}^+$ možemo je jednostavno proširiti na funkciju $\bar{h}:[0,+\infty]\to[0,1]$ pomoću

$$\bar{h}(u)=\inf\{h(r)|r\in\mathbb{Q}^+,r\leq u\}.$$

Lako je videti da je $\bar{h}$ neprekidna i monotono nerastuća funkcija i da važi

$$\bar{h}(u+v)=T(\bar{h}(u),\bar{h}(v)).$$

Funkcija $\bar{h}$ je striktno monotono opadajuća na $\bar{h}^{-1}((0,1])$. Uvedimo funkciju $f:[0,1]\to[0,+\infty]$ definisanu sa

$$f(u)=\sup\{v\in[0,+\infty]|\bar{h}(v)>u\},$$

gde je $\sup\emptyset=0$. Na osnovu definicije sledi da je f neprekidna, striktno monotono opadajuća funkcija i $f(1)=0$. Primetimo da je $\bar{h}(u)=0$ ako i samo ako $u\geq f(0)$, i da za sve $u\in[0,+\infty]$ za koje je $\bar{h}(u)>0$ važi $\bar{h}(u)=f^{-1}(u)$. Zato za sve $(u,v)\in[0,1]^2$ važi

$$\begin{aligned}T(u,v)&=T(\bar{h}(f(u)),\bar{h}(f(v)))\\&=\bar{h}(f(u)+f(v))\\&=f^{-1}(\min(f(u)+f(v),f(0))).\end{aligned}$$

To znači da (2.2) važi za sve $u,v\in[0,1]$.
Pokažimo još da se dva aditivna generatora razlikuju do na multiplikativnu konstantu. Neka su $f,g:[0,1]\to[0,+\infty]$ dve neprekidne, striktno monotono opadajuće funkcije sa osobinom $f(1)=g(1)=0$ i takve da $\forall u,v\in[0,1]$ važi

$$f^{-1}(\min(f(u)+f(v),f(0)))=g^{-1}(\min(g(u)+g(v),g(0))).$$

Uvodeći oznake $u'=g(u)$ i $v'=g(v)$ dobijamo da je za sve $u',v'\in[0,g(0)]$

$$g\circ f^{-1}(\min(f\circ g^{-1}(u')+f\circ g^{-1}(v'),f(0)))=\min(u'+v',g(0)).$$

Ako uvedemo neprekidnu i striktno monotono rastuću funkciju $k:[0,g(0)]\to[0,+\infty]$ sa $k=f\circ g^{-1}$, imamo na osnovu prethodne jednakosti da je za sve $u',v'\in[0,g(0)]$

$$\min(k(u')+k(v'),f(0))=k(\min(u'+v',g(0))).$$

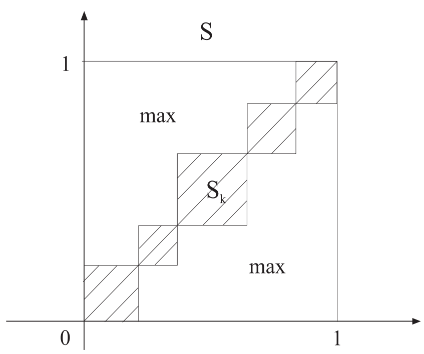
Zato na osnovu neprekidnosti funkcije k za sve $u', v' \in [0, g(0)]$ za koje je $u' + v' \in [0, g(0)]$ važi

$$k(u') + k(v') = k(u' + v').$$

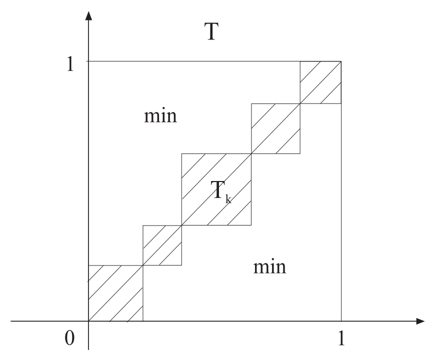
Kao što je dobro poznato ova Cauchy-eva funkcionalna jednačina ima jedino neprekidno i striktno monotono rastuće rešenje oblika $k(u') = c \cdot u'$ za sve $u' \in [0, g(0)]$ i neku pozitivnu konstantu $c \in \mathbb{R}$. Zato je $f = c \cdot g$. $\square$

Teorema 2.1.5 *Potreban i dovoljan uslov da je S neprekidna $t-$konorma jeste da je S ordinalna suma neprekidnih Archimede-ovih $t-$konormi, tj. postoji jedinstvena po parovima disjunktna prebrojiva familija $\{(a_k, b_k)\}_{k\in K}$ zatvorenih podintervala intervala $[0, 1]$ i jedinstvena familija neprekidnih Archimede-ovih $t-$konormi $\{S_k\}_{k\in K}$ takva da je S ordinalna suma $(\langle a_k, b_k, S_k\rangle)_{k\in K}$ od $((a_k, b_k), S_k), k \in K$ od (slika 2.1), tj.*

$$S(u,v) = \begin{cases} a_k + (b_k - a_k)S_k(\frac{u-a_k}{b_k-a_k}, \frac{v-a_k}{b_k-a_k}), & u, v \in [a_k, b_k] \\ \max(u, v), & \textit{inače.} \end{cases}$$



Slika 2.1 t-konorma



Slika 2.2 t-norma

Teorema 2.1.6 *[44] Potreban i dovoljan uslov da je T neprekidna $t-$norma jeste da je T ordinalna suma neprekidnih Archimede-ovih $t-$normi, tj. postoji jedinstvena po parovima disjunktna prebrojiva familija $\{(a_k, b_k)\}_{k\in K}$ otvorenih podintervala intervala $[0, 1]$ i jedinstvena familija neprekidnih Archimede-ovih $t-$normi $\{T_k\}_{k\in K}$ takva da je T ordinalna suma $(\langle a_k, b_k, T_k\rangle)_{k\in K}$ od $((a_k, b_k), T_k), k \in K$ (slika 2.2), tj.*

$$T(u,v) = \begin{cases} a_k + (b_k - a_k)T_k(\frac{u-a_k}{b_k-a_k}, \frac{v-a_k}{b_k-a_k}), & u, v \in (a_k, b_k) \\ \min(u, v), & \textit{inače .} \end{cases}$$

Dokaz. Očigledno je svaka ordinalna suma neprekidnih $t-$normi jedna neprekidna $t-$norma.

Pretpostavimo sada da je T jedna neprekidna $t-$norma. Prvo ćemo ispitati da li je skup I_T svih idempotentnih elemenata za T jedan zatvoren podskup intervala $[0,1]$. Ako je $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jedan niz idempotentnih elemenata za T koji konvergira ka $u \in [0,1]$, tada na osnovu neprekidnosti T imamo $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} T(u_n, u_n) = T(u,u)$, pa je i u idempotentni elemenat za T, odnosno I_T je zatvoren skup.
Ako je $I_T = [0,1]$, tada je $T = T_M$ na osnovu teoreme 2.1.1 je $K = \emptyset$. Ako je I_T pravi podskup intervala $[0,1]$, tada postoji najviše prebrojiv neprazan skup indeksa K i familija po parovima disjunktnih otvorenih podintervala $\{(a_k, e_k)\}_{k\in K}$ od $[0,1]$ tako da je

$$[0,1]\backslash I_T = \bigcup_{k\in A}(a_k, e_k).$$

Za proizvoljno, ali fiksno $k \in K$ primetimo da su oba elementa a_k i e_k idempotentna za T, a da ni jedan elemenat iz otvorenog intervala (a_k, e_k) nije idempotentan za T. Na osnovu monotonosti T sledi da za sve $(u,v) \in [a_k, e_k]^2$ važi

$$a_k = T(a_k, a_k) \leq T(u,v) \leq T(e_k, e_k) = e_k,$$

tj. T preslikava $[a_k, e_k]^2$ na interval $[a_k, e_k]$. Kako je za svako $u \in [a_k, 1]$

$$a_k = T(a_k, 1) \geq T(a_k, u) \geq T(a_k, a_k) = a_k,$$

to je a_k anihilator za $T|_{[a_k,1]^2}$.
Pošto je T neprekidna funkcija, onda je "na", $\{T(u, e_k) | u \in [0,1]\} = [0, e_k]$, to za svako $v \in [0, e_k]$, postoji $u \in [0,1]$ tako da je $v = T(u, e_k)$, te na osnovu asocijativnosti T važi

$$T(v, e_k) = T(T(u, e_k), e_k) = T(u, T(e_k, e_k)) = T(u, e_k) = v.$$

Sledi da je e_k neutralni elemenat za $T|_{[0,e_k]^2}$.
Na osnovu prethodnih rezultata i neprekidnosti T, sledi da je funkcija $T_k : [0,1]^2 \to [0,1]$ data sa

$$T_k(u,v) = \varphi_k(T(\varphi_k^{-1}(u), \varphi_k^{-1}(v))),$$

gde je $\varphi_k : [a_k, e_k] \to [0,1]$ striktno monotono rastuća bijekcija data sa

$$\varphi_k(\omega) = \frac{\omega - a_k}{e_k - a_k},$$

neprekidna $t-$norma.
Kako nema idempotentnih elemenata za T u intervalu (a_k, e_k) to je $T_k(u,u) < u$ za sve $u \in (0,1)$, te T_k je neprekidna Archimede-ova $t-$norma.

Za $(u,v) \in (a_k,e_k)^2$ je očigledno $T(u,v) = \varphi_k^{-1}(T_k(\varphi_k(u),\varphi_k(v)))$. Za $(u,v) \notin (a_k,e_k)^2$ za svako $k \in A$ te $u \leq v$, uvek postoji idempotentni element $c \in I_T$ tako da $u \leq c \leq v$.
Primetimo da je c neutralni elemenat za $T|_{[0,c]^2}$ i anihilator za $T|_{[c,1]^2}$. Zbog toga je

$$T(u,v) = T(T(u,c),v) = T(u,T(c,v)) = T(u,c) = u = \min(u,v).$$

Tako konačno imamo $T \approx (\langle a_k, e_k, T_k\rangle)_{k\in A}$. $\square$

2.1.2 Uninorme i nulnorme

Trougaone norme i konorme razlikuju se samo u graničnom uslovu, pa ih je moguće uopštiti.

Definicija 2.1.7 Uninorma *je binarna operacija* $\Upsilon : i^2 \to i$ *za koju važi komutativnost, asocijativnost, neopadajuća je, sa neutralnim elementom* $e \in (0,1)$ *(zadovoljava granični uslov), tj. za* $u,v,w \in [0,1]$ *važi*

(vn₁) $\Upsilon(u,v) = \Upsilon(v,u)$,

(vn₂) $\Upsilon(u,\Upsilon(v,w)) = \Upsilon(\Upsilon(u,v),w)$,

(vn₃) $\Upsilon(u,v) \leq \Upsilon(u,w)$ *kada* $v \leq w$,

(vn₄) $\Upsilon(u,e) = u$.

Svaka uninorma Υ ima prekid bar u jednoj tački domena [36].

Za proizvoljnu uninormu Υ čiji je neutralni element $e \in (0,1)$ operacije $T_\Upsilon, S_\Upsilon : i^2 \to i$ definisane sa

$$T_\Upsilon(u,v) = \frac{1}{e}\Upsilon(eu,ev)$$

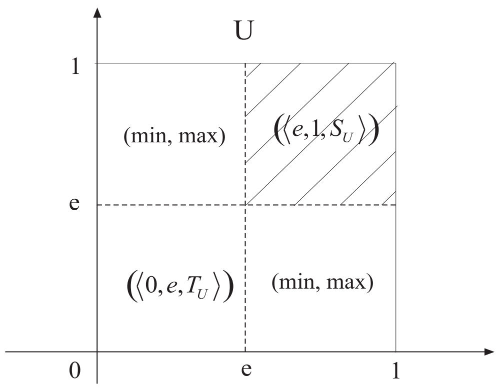
$$S_\Upsilon(u,v) = \frac{1}{1-e}\left(\Upsilon\left(e+(1-e)\,u, e+(1-e)\,v\right) - e\right)$$

su $t-$norma i $t-$konorma respektivno, odnosno važi

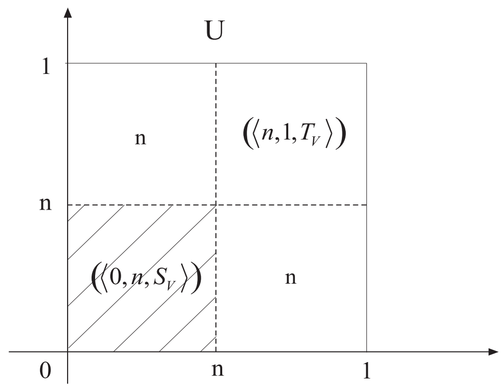
$$\Upsilon|_{[0,e]^2} = (\langle 0, e, T_\Upsilon\rangle)|_{[0,e]^2}, \quad \Upsilon|_{[e,1]^2} = (\langle e, 1, S_\Upsilon\rangle)|_{[e,1]^2}$$

$$(\forall (u,v) \in [0,1]^2 \setminus ([0,e]^2 \cup [e,1]^2)) \;\; \min(u,v) \leq \Upsilon(u,v) \leq \max(u,v)$$

Iz osobine asocijativnosti uninorme sledi da $\Upsilon(0,1) \in \{0,1\}$. Ako je $\Upsilon(0,1) = 0$ tu uninormu zovemo **konjunktivna**, a u slučaju $U(0,1) = 1$, uninormu zovemo **disjunktivna**.



Slika 2.3 Uninorma



Slika 2.4 Nulanorma

Poznate klase uninormi su:

$$\Upsilon^c_{T,S,e}(u,v) = \begin{cases} e \cdot T\left(\frac{u}{e}, \frac{v}{e}\right), & (u,v) \in [0,e)^2 \\ e + (1-e) \cdot S\left(\frac{u-e}{1-e}, \frac{v-e}{1-e}\right), & (u,v) \in [e,1]^2 \\ \min\{u,v\}, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\Upsilon^d_{T,S,e}(u,v) = \begin{cases} e \cdot T\left(\frac{u}{e}, \frac{v}{e}\right), & (u,v) \in [0,e]^2 \\ e + (1-e) \cdot S\left(\frac{u-e}{1-e}, \frac{v-e}{1-e}\right), & (u,v) \in (e,1]^2 \\ \max\{u,v\}, & \text{inače} \end{cases}$$

i važi

$$\Upsilon^c_{T,S,e}(u,v) \leq \Upsilon \leq \Upsilon^d_{T,S,e}(u,v)$$

Uninorme koje se mogu prikazati pomoću realne funkcije jedne promenljive (aditivnog ili multiplikativnog generatora) kao u slučaju neprekidnih Archimede-ovih t-normi i t-konormi i nazivaju se reprezentabilne teoreme [38], [44].

Teorema 2.1.7 *Neka je* $\Upsilon : i^2 \to i$ *preslikavanje sa neutralom* $e \in (0,1)$. *Sledeće je ekvivalentno:*

1) Υ *je uninorma sa neutralom* e *tako da je ona sriktno monotono rastuća i neprekidna na* $[0,1]^2 \backslash \{(0,1),(1,0)\}$.

2) *Postoji striktno rastuće biunivoko* $\eta : [0,1] \to [-\infty, \infty]$ *sa* $\eta(e) = 0$ *takvo da*

$\forall (u,v) \in [0,1]^2$ imamo

$$U(u,v) = \eta^{-1}(\eta(u) + \eta(v)),$$

gde za konjuktivnu uninormu Υ je $\infty + (-\infty) = -\infty$, dok je u slučaju disjunktne $\infty + (-\infty) = \infty$.

Postoji jaka povezanost nulanormi sa t-normama i t-konormama, odnosno takođe predstavljaju njihovu generalizaciju [45].

Definicija 2.1.8 *Binarnu operaciju $H : i^2 \to i$ nazivamo* **nulanorma** *ako zadovoljava sledeće aksiome:*

(vn_1) $(\forall u, v_1, v_2 \in [0,1])\ v_1 \leq v_2 \Rightarrow H(u,v_1) \leq H(u,v_2)$ *(monotonost);*

(vn_2) $(\forall u, v \in [0,1])\ H(u,v) = H(v,u)$ *(komutativnost);*

(vn_3) $(\forall u, v, w \in [0,1])\ H(u, H(v,w)) = H(H(u,v), w)$ *(asocijativnost);*

(vn_4) $(\exists \mathsf{n} \in (0,1))[(\forall u \in [0,\mathsf{n}])\ H(u,0) = a \ \ \wedge \ \ (\forall u \in [\mathsf{n},1])\ H(u,1) = u]$.

Očigledno je $(\forall u \in [0,1])\ H(u,\mathsf{n}) = \mathsf{n}$, tj. n je anihilator za H.

Za proizvoljnu nulanormu H sa anihilatorom n operacije $T_H, S_H : i^2 \to i$ definisane sa

$$T_H(u,v) = \frac{1}{1-\mathsf{n}}\left(H\left(\mathsf{n} + (1-\mathsf{n})\,u, \mathsf{n} + (1-\mathsf{n})\,v\right) - \mathsf{n}\right)$$

$$S_H(u,v) = \frac{1}{\mathsf{n}} H\left(\mathsf{n}u, \mathsf{n}v\right)$$

su $t-$norma i $t-$konorma respektivno, tj. važi

$$H|_{[0,\mathsf{n}]^2} = (\langle 0, \mathsf{n}, S_H \rangle)|_{[0,\mathsf{n}]^2}, \quad H|_{[\mathsf{n},1]^2} = (\langle \mathsf{n}, 1, T_H \rangle)|_{[\mathsf{n},1]^2}$$

2.2 Funkcije fazi komplementa

Obeležimo sa $c : [0,1] \to [0,1]$ funkciju koja transformiše funkciju pripadnosti fazi skupa A u funkciju pripadnosti fazi skupa komplement od A, odnosno

$$c\left(\mu_A\left(u\right)\right) = \mu_{\bar{A}}\left(u\right)$$

za sve $u \in X$.

Primećuje se da je funkcija c potpuno nezavisna od elemenata u kojima su dodeljene vrednosti $\mu_A\left(u\right)$, odnosno zavisi samo od sopstvene vrednosti. Zbog toga se nadalje može ignorisati u i pretpostaviti da je argument c proizvoljan broj iz jediničnog intervala.

Od praktičnog značaja je uzeti u obzir dodatne osobine fazi komplementa, tako da svaka od ovih osobina smanjuje klase fazi komplementa u specijalne podklase sa dobrim svojstvima skupovnog fazi komplementa. Takve osobine su involutivnost i neprekidnost.

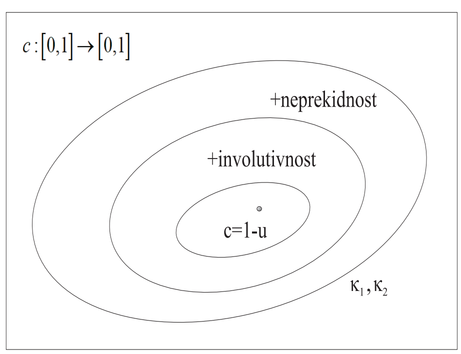
Definicija 2.2.1 *Preslikavanje* $c : [0,1] \to [0,1]$ *zovemo* **fazi komplement**, *ako zadovoljava sledeće uslove:*

κ_1*)* $c(0) = 1$ *i* $c(1) = 0$, *(granični uslov)*

κ_2*)* $(\forall u, v \in [0,1])\ u \leq v \Rightarrow c(u) \geq c(v)$ *(monotonost).*

Ako je $c(c(u)) = u$ *ispunjeno, za sve* $u \in [0,1]$, *tada je funkcija* c **involutivna**.
Ako je c *neprekidna funkcija, tada kažemo da je* c **neprekidni fazi komplement**.

Definicija fazi komplementa u užem i širem smislu se može ilustrovati sledećom slikom.



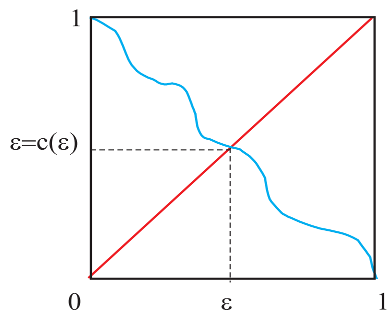
Slika 2.5 Fazi komplement u užem i širem smislu

Date osobine fazi komplementa nisu nezavisne, što je dato u sledećoj lemi.

Lema 2.2.1 *[46]. Ako je $c : [0,1] \to [0,1]$ involutivna monotono neopadajuća funkcija, tada je c neprekidna bijektivna funkcija za koju važi granični uslov.*

Definicija 2.2.2 *Ekvilibrijum fazi komplementa je element $\epsilon \in [0,1]$, takav da je $c(\epsilon) = \epsilon$ ispunjeno.*

Definicija se može ilustrovati slikom 2.6.



Slika 2.6 Ekvilibrijum

Teorema 2.2.1 *Svaki fazi komplement ima najviše jedan ekvilibrijum.*
Ukoliko za fazi komplement c postoji ekvilibrijum, tada je

$$u \geq \epsilon \Rightarrow \epsilon \geq c(u), \quad u \leq \epsilon \Rightarrow \epsilon \leq c(u).$$

Ako je c neprekidan fazi komplement, tada c ima jedinstven ekvilibrijum.

Iz prethodnog se zaključuje da je ekvilibrijum nepokretna tačka funkcije c i ako c ima ekvilibrium on je jedinstven.

Najčešče korišćeni neprekidni involutivni fazi komplementi su:

1) $c(u) = 1 - u$, (standardni fazi komplement), sa ekvilibrijumom $\epsilon = 1/2$;

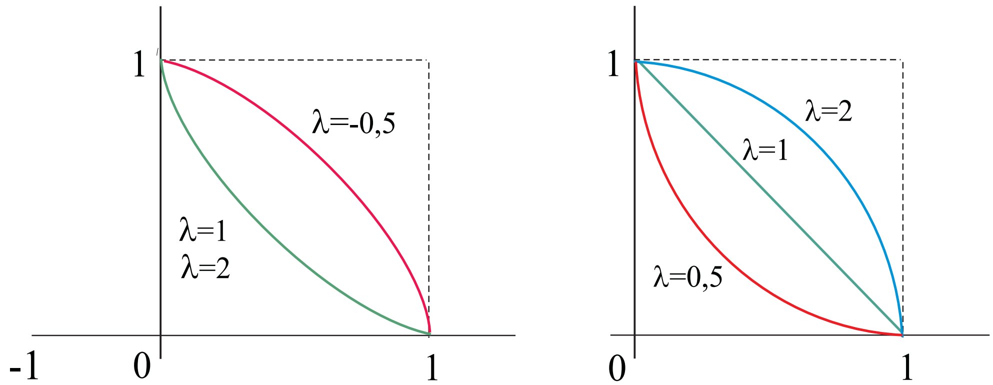
2) $c_\lambda(u) = \frac{1-u}{1+\lambda u}$, $\lambda \in (-1, \infty)$ (Sugeno-va klasa fazi komplementa), sa ekvilibrijumom

$$\varepsilon_\lambda = \begin{cases} 1/2, & \lambda = 0 \\ \frac{\sqrt{1+\lambda}-1}{\lambda}, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Za $\lambda = 0$ dobijamo standardni fazi komplement.

3) $c_\lambda(u) = (1 - u^\lambda)^{1/\lambda}$, $\lambda \in (0, \infty)$ (Yager-ova klasa fazi komplementa), sa ekvilibrijumom $\varepsilon_\lambda = 1/\sqrt[\lambda]{2}$. Primećujemo da za $\lambda = 1$ dobijamo standardni fazi komplement.

Na slici 2.7 su prikazani ekvilibrijumi Sugeno-ve i Yager-ove klase fazi komplemenata.



Slika 2.7 Sugenov i Yager-ov fazi komplement

Dualnost između skupovnog preseka i unije u odnosu na skupovni komplement iskazana je kroz De Morganov zakon u klasičnoj teoriji skupova, što je poželjna osobina i za fazi skupove.

Lema 2.2.2 *De Morganov zakon važi, tj.*

$$c(u \vee v) = c(u) \wedge c(v), \quad c(u \wedge v) = c(u) \vee c(v).$$

Samo neke kombinacije $t-$normi, $t-$konormi i fazi komplemenata zadovoljavaju dualnost.
Kažemo da su trougaona norma T i trougaona konorma S **dualne** u odnosu na c ako i samo ako je

$$c(T(u,v)) = S(c(u), c(v)) \quad \text{i} \quad c(S(u,v)) = T(c(u), c(v)).$$

Trojka (T, S, c) je **dualna**.

Primer 2.2.1 Za standardni fazi komplement c dualne trojke su: (T_M, S_M, c) , (T_P, S_P, c) , (T_L, S_L, c) i (T_D, S_D, c).

Značajno je napomenuti, da za involutivne fazi komplemente postoji više pravilnosti koje važe i za ostale fazi komplemente.
Za trougaonu normu T i involutivni fazi komplement c, binarna operacija S na $[0, 1]$ definisana sa

$$S(u,v)) = c(T(c(u), c(v)))$$

za sve $u, v \in [0,1]$, je trougaona konorma S gde je (T, S, c) dualna trojka.

Neka je S trougaona konorma i involutivni fazi komplement c. Binarna operacija T na $[0,1]$ definisana sa

$$T(u,v)) = c(S(c(u), c(v)))$$

za sve $u, v \in [0,1]$, je triangularna norma T gde je (T, S, c) dualna trojka.

Nadalje ćemo kroz primere pokazati da su date funkcije fazi komplementi.

Primer 2.2.2 Funkcija $c_\lambda(u) = (1-u^\lambda)^{1/\lambda}, \lambda > 0$ je fazi komplement.

Dokaz. Ispitujemo da li je funkcija $c_\lambda(u)$ fazi komplement, proveravajući sve uslove iz definicije fazi komplementa. Najpre, funkcija je dobro definisana, za $u \in [0,1]$ imamo da i $c_\lambda(u) \in [0,1]$.

1) Granični uslov
   $c_\lambda(0) = (1-0^\lambda)^{1/\lambda} = (1-0)^{1/\lambda} = 1^{1/\lambda} = 1,$
   $c_\lambda(1) = (1-1^\lambda)^{1/\lambda} = (1-1)^{1/\lambda} = 0^{1/\lambda} = 0.$

2) Monotonost
   $u \le v \Rightarrow u^\lambda \le v^\lambda \Rightarrow 1-u^\lambda \ge 1-v^\lambda \Rightarrow (1-u^\lambda)^{1/\lambda} \ge (1-v^\lambda)^{1/\lambda} \Rightarrow c(u) \ge c(v).$

3) Involutivnost
   $c_\lambda(c_\lambda(u)) = c_\lambda((1-u^\lambda)^{1/\lambda}) = (1-((1-u^\lambda)^{1/\lambda})^\lambda)^{1/\lambda} = (1-(1-u^\lambda))^{1/\lambda} = u,$
   funkcija je involutivna.

4) Neprekidnost
   Na osnovu Leme 2.2.1 da ako funkcija c zadovoljava uslov monotonosti i involutivna je, onda zadovoljava i uslov neprekidnosti, pa sledi neprekidnost funkcije c_λ.

Primer 2.2.3 Neka je $\eta : [0,1] \to \mathbb{R}$ striktno rastuća neprekidna funkcija takva da $\eta(0) = 0$ i neka važi $(\forall u \in [0,1])\ c(u) = \eta^{-1}(\eta(1) - \eta(u))$. Pokažimo da je c fazi komplement.

Dokaz. Dokazaćemo dovoljan uslov.

1) Granični uslov: $c(0) = 1, c(1) = 0,$
   $c(0) = \eta^{-1}(\eta(1) - \eta(0)) = \eta^{-1}(\eta(1) - 0) = \eta^{-1}(\eta(1)) = 1$
   $c(0) = \eta^{-1}(\eta(1) - \eta(1)) = \eta^{-1}(0) = 0.$

2) Kako je funkcija η striktno rastuća, ona mora biti "1-1", pa je bijektivna nad intervalom [0,1]. Svaka bijektivna funkcija ima inverznu funkciju. Kako je η striktno rastuća i η^{-1} je striktno rastuća.
   Monotonost: $u \leq v \Rightarrow c(u) \geq c(v)$.
   $c(u) \geq c(v) \Leftrightarrow \eta^{-1}(\eta(1) - \eta(u)) \geq \eta^{-1}(\eta(1) - \eta(v)) \Leftrightarrow \eta(\eta^{-1}(\eta(1) - \eta(u))) \geq \eta(\eta^{-1}(\eta(1) - \eta(v))) \Leftrightarrow \eta(1) - \eta(u) \geq \eta(1) - \eta(v) \Leftrightarrow \eta(v) \geq \eta(u)$, što jeste tačno jer je η striktno rastuća funkcija.

3) Neprekidnost: c je neprekidna funkcija. Kako je η neprekidna funkcija i njena inverzna funkcija η^{-1} je neprekidna. Razlika dve neprekidne funkcije, kao i kompozicija dve neprekidne funkcije je neprekidna funkcija, te sledi da je i c neprekidna funkcija.

4) Involutivnost: $c(c(u)) = u$,
   $c(c(u)) = c(\eta^{-1}(\eta(1) - \eta(u))) = \eta^{-1}(\eta(1) - \eta(\eta^{-1}(\eta(1) - \eta(u)))) = \eta^{-1}(\eta(1) - (\eta(1) - \eta(u))) = \eta^{-1}(\eta(u)) = u$.

2.3 Agregacione funkcije

Agregacija informacija zauzima značajno mesto u mnogim sistemima zasnovanim na znanju, gde je agregiranje podataka ili vrednosti potrebno. Uopšteno, može se reći da se pomoću agregacije simultano koriste različiti delovi informacija iz različitih izvora, u cilju donošenja zaključka ili odluke. Operatori agregacije se koriste u teorijskoj matematici i njenim primenama, informatici i inženjerstvu, finansijama, kao i drugim primenjenim oblastima nauka, videti [37]. Agregatori su matematički modeli sa funkcijom redukovanja skupa brojeva na jedinstveni smisleni broj. Problem agregacije sastoji se u agregiranju n-torki objekata određenog skupa u jedan objekat tog skupa. Za više detalja o agregacionim funkcijama pogledati na primer Grabish, Marichal, Mesiar i Pap [38], Dubois i Prade[39], Yager [40] i Yager i Rybalov [41], Dombi [42].
U smislu ovog rada, operacije agregacije fazi skupa su operacije koje više fazi skupova kombinuju, na poželjan način, u jedan fazi skup.

U većini slučajeva, agregacijski operatori se definišu na čisto aksiomatskoj osnovi i tumače se ili kao logički veznici (kao što su $t-$norme i $t-$konorme) ili kao operatori uopštene sredine.

Definicija 2.3.1 **Agregaciona funkcija** *je funkcija* $\mathsf{A} : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1]^n \to [0,1]$ *takva da je*

g_1) $\mathsf{A}(0,...,0) = 0$ *i* $\mathsf{A}(1,...,1) = 1$ *(granični uslov).*

g_2) $\mathsf{A}(u_1,...,u_n) \leq \mathsf{A}(v_1,...,v_n)$ *kada je* $u_i \leq v_i$ *za sve* $i \in \{1,...,n\}$ *(*A *je monotono neopadajuća funkcija za svaki njen argument).*

g_3) $\mathsf{A}(u) = u$ *za sve* $u \in [0,1]$ *(*A *je idempotentna funkcija za* $n = 1$*).*

Uslov $\mathsf{A}(0,...,0) = 0$ znači da ako posmatramo samo potpuno loše, netačne ili nezadovoljavajuće kriterijume, ukupna agregacija mora biti takođe potpuno loša, netačna ili nezadovoljavajuća. Interpretacija uslova $\mathsf{A}(1,...,1) = 1$ je da ako posmatramo samo potpuno tačne ili potpuno zadovoljavajuće kriterijume, tada ukupna agregacija mora biti takođe potpuno tačna ili potpuno zadovoljavajuća. U svom radu Mesiar i Komorníková [43] su istakli granični uslov kao fundamentalan u definisanju operatora agregacije.

Agregaciona funkcija A je

1. idempotentna ako je $\mathsf{A}(\underbrace{u,...,u}_{n-puta}) = u$ za sve $u \in [0,1]$.

2. neprekidna ako je A neprekidna funkcija.

3. komutativna ako je A simetrična funkcija po svim njenim argumentima, tj. $\mathsf{A}(u_1,...,u_n) = \mathsf{A}(u_{p_1},...,u_{p_n})$ za svaku permutaciju $(p_1,...,p_n)$ skupa $\{1,...,n\}$.

Poslednja osobina predstavlja uopštenje komutativnosti i asocijativnosti binarnih operacija, odnosno da su agregirani fazi skupovi podjednako značajni i da redosled argumenata nema značaja na rezultat. Ukoliko ova pretpostavka nije opravdana u nekim primenama, osobina simetrije se odbacuje.

Za sve n-torke $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in [0,1]^n$, svaka operacija agregacije koja zadovoljava uslove monotonosti i idempotentnosti zadovoljava i nejednakost

$$\min(u_1, u_2, \ldots, u_n) \leq A(u_1, u_2, \ldots, u_n) \leq \max(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Agregaciona funkcija koja zadovoljava ovaj uslov je jedina operacija agregacije koja je idempotentna, jer je
$u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$: $u \leq A(u, \ldots, u) \leq u$, tj. $A(u, \ldots, u) = u$.
Takve operatore agregacije nazivamo operatorima uopštene sredine.

Definicija 2.3.2 *Agregaciona funkcija* A *ima anihilator* $\mathbf{a} \in [0,1]$ *ako je*

$$\mathsf{A}(u_1, \ldots u_{i-1}, \mathbf{a}, u_{i+1}, \ldots u_n) = \mathbf{a} \tag{2.3}$$

za svako i takvo da je $u_i = \mathbf{a}$*, tj. za* $\mathbf{a}$ *na bilo kojoj poziciji argumenata od* A *važi 2.3.*

Anihilator, ako postoji, je jedinstven i može biti bilo koji broj iz intervala $[0,1]$.

Navešćemo neke primere agregacionih funkcija.

1) $WAM(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} w_{i_n} u_i$ ponderisana aritmetička sredina sa vektorom težina $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$, $w_i \in [0,1]$.
   Ponderisana aritmetička sredina je neprekidna, idempotentna, linearna, aditivna i samodualna funkcija agregacije.

2) $M_f(\, u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n) = f^{-1}\Big(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\, u_i)\Big)$ (gde je $f : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ neprekidno i striktno monotono preslikavanje) kvazi-aritmetička sredina;

3) Stepen t-norme.

Svaka agregaciona funkcija se može preko odgovarajućeg koeficijenta svesti na neku od osnovnih funkcija agregacije.

Tako je stepena sredina $M_p(\, u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ specijalan slučaj funkcije 2). Marginalni članovi ovih klasa su $M_0 = G = M_{\log u}$, koja je geometrijska sredina, dok $M_\infty = \max$ i $M_{-\infty} = \min$ nisu u klasi kvazi-aritmetičkih sredina
Trougaone norme su primer agregacionih funkcija, specijalni slučajevi od funkcije 3) i to simetrične, zbog njihove osobina komutativnosti i asocijativnosti. Neprekidne triangularne norme i konorme, na primer Archimede-ove trougaone norme, na taj način definišu neprekidne agregacione funkcije.

Najčešće korišćene operacije agregacija navedene su u nastavku.

1) Operatori min, max, aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina su neprekidne, simetrične i idempotentne operacije agregacija.

2) OWA agregacione operacije. Neka je vektor težina
   $w = (w_1, w_2, \ldots w_n) \in [0,1]^n, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ i $u_{p_1} \geq u_{p_2} \geq \ldots \geq u_{p_n}$, za svaku permutaciju $(p_1, ..., p_n)$ skupa $\{1, ..., n\}$. Tada je OWA operacija definisana sa

$$\mathsf{A}(u_1, ..., u_n) = w_1 u_{p_1}, ..., w_n u_{p_n}.$$

   Ovu klasu operacija uveo je Yager u [40], kako bi se obezbedilo agregiranje rezultata povezanih sa ispunjenjem višestrukih kriterijuma. Operator se pokazao kao veoma koristan, jer definiše raznovrsnu parametarizovanu familiju agregacionih operatora. OWA agregacione operacije su neprekidne, simetrične i idempotentne.

3) Norma operacija agregacije je binarno preslikavanje $H : [0,1]^2 \to [0,1]$, koje zadovoljava granični uslov, asocijativnost, komutativnost i monotonost. Ako ima neutral $e \in (0,1)$ onda je to uninorma. Njihovo uvođenje je motivisano potrebom da neki izbor ocenimo sa drugačijih stanovišta. Tako, uzmimo da je svaka ocena vrednost iz [0,1] i $e \in (0,1)$ nivo zadovoljenja. Visoku vrednost dodeljujemo alternativi ako su sve ocene veće od e, u suprotnom, izboru dodeljujemo nisku vrednost. Međutim, ukoliko su neke ocene ispod, a neke iznad e, tada alternativi dodeljujemo agregiranu vrednost. Ovakav primer nije se mogao modelovati trougaonim normama, pošto su njihovi neutrali granične vrednosti intervala [0, 1].

   Za proizvoljne trougaone norme T i S, $\lambda \in (0,1)$, binarnom operacijom $A_{T,S,\lambda} : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$A_{T,S,\lambda}(u,v) = \begin{cases} \min(\lambda, S(u,v)), & u \in [0,\lambda], v \in [0,\lambda] \\ \max(\lambda, T(u,v)), & u \in [\lambda,1], v \in [\lambda,1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

   definisana je norma operacija koja se naziva λ-sredina.

   Za $\lambda \in [0,1]$ i funkciju $A_\lambda : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$A_\lambda(u,v) = \begin{cases} \max(u,v), & u \in [0,\lambda], v \in [0,\lambda] \\ \min(u,v), & u \in [\lambda,1], v \in [\lambda,1] \\ \lambda, & \text{inače} \end{cases}$$

   definisana je norma operacija koju nazivamo medijana.

Velika broj idempotentnih operatora agregacije može se definisati pomoću različitih tipova integrala. Tako, Lebesgue-ov integral vodi do ponderisanih sredina, dok Choquet-ov integral [47] do agregacijskih operatora koji uključuju OWA operatore. Takođe, Sugeno-ov integral [48] definiše generalizirane OWA operatore [49].

Dualna agregaciona funkcija agregacione funkcije A u odnosu na fazi komplement c je funkcija $\overline{\mathsf{A}}$ definisana sa [24]:

$$\overline{\mathsf{A}}_c(u_1, ..., u_n) = c(\mathsf{A}(c(u_1), ..., c(u_n))).$$

Lema 2.3.1 *Dualna agregaciona funkcija je agregaciona funkcija.*

Dokaz. g_1) Iz graničnog uslova funkcije A, imamo

$$\overline{\mathsf{A}}_c(0, ..., 0) = c(\mathsf{A}(c(0), ..., c(0))) = c(\mathsf{A}(1, ..., 1)) = c(1) = 0,$$

$$\overline{\mathsf{A}}_c(1, ..., 1) = c(\mathsf{A}(c(1), ..., c(1))) = c(\mathsf{A}(0, ..., 0)) = c(0) = 1.$$

g_2) Pretpostavimo da je $u_i \leq v_i$ za sve $i \in I = \{1, ..., n\}$. Komplement c je nerastuća funkcija, pa je $c(u_i) \geq c(v_i)$, $i \in I$, i zbog A je monotono neopadajuća funkcija po svim argumentima, pa sledi

$$\mathsf{A}(c(u_1), ..., c(u_n)) \geq \mathsf{A}(c(v_1), ..., c(v_n)),$$

$$c(\mathsf{A}(c(u_1), ..., c(u_n))) \leq c(\mathsf{A}(c(v_1), ..., c(v_n))),$$
$$\overline{\mathsf{A}}_c(u_1, ..., u_n) \leq \overline{\mathsf{A}}_c(v_1, ..., v_n).$$

g_3) Funkcija A je idempotentna za $n = 1$

$$\overline{\mathsf{A}}_c(u) = c(\mathsf{A}(c(u))) = c(c(u)) = u,$$

ako je c involutivna.
1. Ako je A idempotentna agregaciona funkcija, onda je

$$\overline{\mathsf{A}}_c(u, ..., u) = c(\mathsf{A}(c(u), ..., c(u))) = c(c(u)) = u,$$

u slučaju da je c involutivni fazi komplement.
2. Ako je A neprekidna funkcija, uz pretpostavku da je komplement c neprekidna funkcija, i iz osobine da je kompozicija neprekidnih funkcija neprekidna funkcija, sledi da je $\overline{A}_c$ neprekidna funkcija.
3. Pretpostavimo da je A simetrična funkcija po svim argumentima, tada za svaku permutaciju $(p_1, ..., p_n)$ skupa $\{1, ..., n\}$, imamo da je

$$\overline{\mathsf{A}}_c(u_1, ..., u_n) = c(\mathsf{A}(c(u_1), ..., c(u_n))) = c(\mathsf{A}(c(u_{p_1}), ..., c(u_{p_n})) = \overline{\mathsf{A}}_c(u_{p_1}, ..., u_{p_n}),$$

tj. $\overline{\mathsf{A}}_c$ je komutativna funkcija. $\square$

Primer 2.3.1 Neka je S konorma i $A_i : \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [0,1]^n \to [0,1]$, $i = 1, 2$ agregacione funkcije. Dokazaćemo da je $A(u_1, u_2, ..., a_n) = S(A_1(u_1, u_2, ..., u_n), A_2(u_1, u_2, ..., u_n))$ agregaciona funkcija.

(1) Granični uslov: $A(0, 0, \ldots, 0) = S(A_1(0, 0, \ldots, 0),$
$A_2(0, 0, \ldots, 0)) = S(0, 0) = 0.$
Prva jednakost sledi iz osobine agregacionih funkcija A_i, a druga iz osobine konorme, odnosno da je 0 neutralni element za konormu ($S(u, 0) = u$).
$A(1, 1, \ldots, 1) = S(A_1(1, 1, \ldots, 1), A_2(1, 1, \ldots, 1)) = S(1, 1) = 1.$

Navedena jednakost sledi iz graničnog uslova agregacione funkcije A_i, a $S(1, 1) = 1$, jer je 1 anihilator za konormu.

(2) Monotonost: $\forall i = 1, \ldots, n,\ u_i \leq v_i \Rightarrow A(u_1, u_2, \ldots, u_n) \leq A(v_1, v_2, \ldots, v_n)$
$A(u_1, u_2, \ldots, u_n) = S(A_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), A_2(u_1, u_2, \ldots, u_n))$
$\leq S(A_1(v_1, v_2, \ldots, v_n), A_2(v_1, v_2, \ldots, v_n)) = A(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Nejednakost važi zbog osobine monotonosti i agregacionih funkcija A_i i konorme ($u \leq v \Rightarrow S(u, w) \leq S(v, w)$).

(3) Neprekidnost: iako su A_1 i A_2 neprekidne kao agregacione funkcije, u opštem slučaju uslov neprekidnosti za konorme $S(A_1(u_1, u_2, ..., u_n), A_2(u_1, u_2, ..., u_n))$, nije zadovoljen. Ukoliko je S neprekidna, uslov je zadovoljen.

(4) Idempotentnost: $A(u, u, \ldots, u) = S(A_1(u, u, \ldots, u), A_2(u, u, \ldots, u)) = S(u, u)$

Kako u opštem slučaju ne mora da važi da je $S(u, u) = u$, A nije idempotentna (jedina idempotentna konorma je S_{max})

(5) Komutativnost: $A(u_1, u_2, \ldots, u_n) = A(u_{p(1)}, u_{p(2)}, \ldots, u_{p(n)})$, gde je p proizvoljna permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$
$A(u_{p(1)}, u_{p(2)}, \ldots, u_{p(n)}) = S(A_1(u_{p(1)}, u_{p(2)}, \ldots, u_{p(n)}), A_2(u_{p(1)}, u_{p(2)}, \ldots, u_{p(n)}))$
$= S(A_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), A_2(u_1, u_2, \ldots, u_n)) = A(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, ako su A_1 i A_2 komutativne agregacione operacije.

Glava 3

Fazi skupovi

Teoriju fazi skupova uveo je Zadeh u radu [50] objavljenom 1965. godine. Ona je inicirala razvoj preciznog matematičkog aparata za primenjena istraživanja. Teorija fazi skupova predstavlja generalizaciju konvencionalne teorije skupova i razmatra objekte čija je pripadnost skupu neprecizna.
Jedinstvenost i posebnost fazi skupova leži u modeliranju pojmova neizvesnosti koje ne možemo potpuno objasniti/utvrditi teorijom verovatnoće. Jedna takva neizvesnost je nejasnoća svojstvena ljudskoj percepciji i objašnjenju fenomena. Drugo, odlučivanje o kompleksnim problemima, posebno kada je kombinovano sa ljudskom nesposobnošču da preduzme kontrolisane eksperimente koji se tiču kompleksnosti.
Pored toga što ispituje kada neki elemenat pripada nekom skupu ili ne pripada definiše se i koliko pripada tom skupu. Drugačije rečeno, fazi skup je skup elemenata čiju meru pripadnosti tom skupu definišemo funkcijom pripadnosti.

U ovom poglavlju navode se neke osnovne definicije i svojstva fazi skupova, koji su potrebni za istraživanje u nastavku disertacije, dok se više može pročitati u [46], [53].

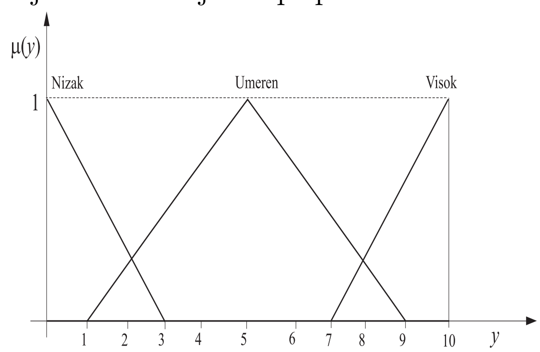
3.1 Pojam fazi skupa i osobine

Za razliku od klasičnog podskupa datog (univerzalnog) skupa X koji je potpuno određen svojom karakterističnom funkcijom, koja je mogla uzimati samo vrednosti 1 i 0, fazi podskup skupa X, odnosno fazi skup definisan nad skupom X je određen funkcijom pripadanja.

$$\mu_A : X \to [0, 1].$$

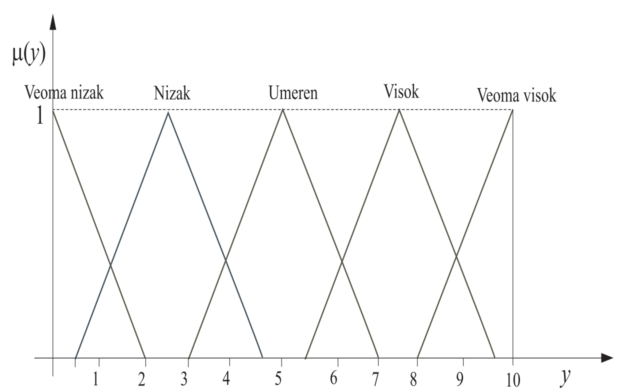
Najbitnija različitost u poređenju sa klasičnim skupovima je da element $u \in X$ pripada fazi skupu (definisanom nad X) sa određenom pripadnošću između 0 i 1. U praksi najčešće korišćeni fazi skupovi su fazi skupovi definisani na $\mathbb{R}$ sa vrednostima u [0,1] i to posebno trougaoni i trapezoidni fazi brojevi.

Primer 3.1.1 Neka je X procena rizika. a) Neka su rizici ocenjeni sa nizak, umeren ili visok rizik, koji se mogu predsaviti fazi skupovima nizak rizik, umeren rizik i visok rizik, odnosno odgovarajućim funkcijama pripadnosti datim kao na slici 3.1 a).



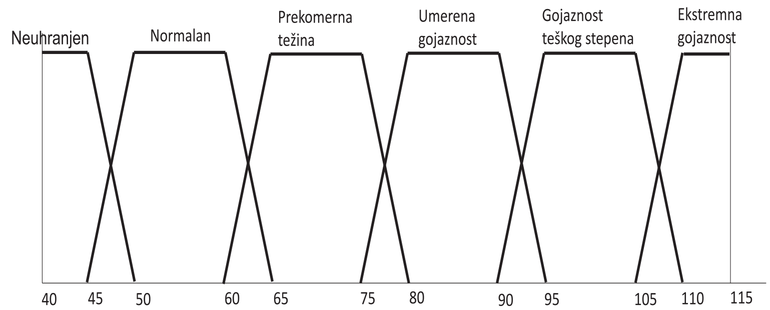
Slika 3.1 a)

Posmatrajmo pet fazi podskupova: veoma nizak A, nizak B, umeren C, visok D i veoma visok E. Odgovarajuće funkcije pripadnosti se mogu predstaviti kao na Slici 3.1 b).



Slika 3.1 b)

Telesna težina posmatranih ljudi je u nekom opsegu na primer $[40, 115]$ koje možemo, prema našoj subjektivnoj proceni, svrstati u pet fazi podskupova: neuhranjen, normalna težina, prekomerna težina, umerena gojaznost i ekstremna gojaznost, sa odgovarajućim funkcijama pripadnosti datim na Slici 3.2.



Slika 3.2.

Dobro je poznato da se stepen neodređenosti modeluje i odgovarajućom verovatnoćom koja je isto funkcija koja ima vrednosti u intervalu $[0, 1]$. Da bismo uočili različitost u primenama između verovatnoća i funkcije pripadanja, navodimo sledeći primer koji je izvorno dat od strane Bezdeka u [51].

Primer 3.1.2 Obeležimo sa X skup svih tečnosti. Uočimo fazi podskup A : "tečnosti pogodne za piće". Tako će tečnosti kao što je čista voda imati vrednost funkcije pripadnosti 1, dok recimo vino može imati stepen 0,60, voćni sok 0,80, rakija 0,20, a sona kiselina 0. Ako sada zamislimo situaciju da se žedna osoba nalazi u pustinji i da nailazi na dve posude sa tečnostima gde na prvoj piše vrednost funkcije pripadanja $\mu_A = 0, 93$, a na drugoj posudi verovatnoća da je tečnost za piće 0,93. Koju posudu će osoba odabrati? U slučaju da je funkcija pripadnosti 0.93 znači da se u posudi nalazi tečnost između vode i soka, što je prilično prihvatljivo. Za razliku od prve posude, izborom druge posude osoba može dobiti i pitku vodu, ali isto tako može dobiti i otrov. Očigledan izbor će biti prva posuda.

Definicija 3.1.1 *Neka je A fazi skup nad univerzalnim skupom X.*
i) Nosač fazi skupa A, označen sa $S(A)$ ili supp(A), je takav skup da sadrži sve elemente skupa X koji imaju nenula stepen pripadnosti u A, tj.

$$S(A) = \{u \in X \,|A\,(u) > 0\}\,.$$

ii) Jezgro fazi skupa A, u oznaci ${}^1A$ ili core(A), definisano je kao

$${}^1A = \{u \in X \,|A(u) = 1\}\,.$$

iii) Visina, u oznaci $h(A)$, fazi skupa A je najveći stepen pripadnosti bilo kog elementa tog skupa, tj.

$$h\,(A) = \sup_{u \in X} A\,(u)\,.$$

Skup A je normalan, kada mu je visina 1, a subnormalan kada je $h(A) < 1$.
iv) Nivo skup, u oznaci $\Lambda(A)$, fazi skupa A, definisan je sa

$$\Lambda\,(A) = \{A\,(u)\,|u \in X\}\,.$$

Nadalje nas interesuju operacije na fazi skupovima kao uopštenje skupovnih operacija. Tako imamo standardnu uniju, presek i komplement:

$$\mu_{A\cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u)),$$

$$\mu_{A\cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)),$$

$$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u),$$

respektivno. Na primeru 3.1.1 se može potražiti funkcija pripadnosti preseka umerenog i visokog rizika itd. Uopštenja ovih standardnih operacija fazi skupova su t-norme, t-konorme i fazi komplementi.
Dekartov proizvod dva fazi skupa A na X i B na Y daje za rezultat fazi relaciju R definisanu funkcijom pripadnosti

$$\mu_R(u,v) = \mu_{A\times B}(u,v) = \min\left(\mu_A(u,v), \mu_B(u,v)\right) \tag{3.1}$$

Lako je videti da za operacije na fazi skupovima važe osobine uobičajene kao i za operacije sa klasičnim skupovima, osim zakona kontradikcije i zakona isključenja trećeg (obično se ovakva mreža zove De Morganova mreža).

Napomena: često umesto $\mu_A(u)$ pišemo $A(u)$ zbog jednostavnosti zapisa.

Reći ćemo da je fazi podskup B podskup fazi podskupa A ako je $\mu_B(u) \leq \mu_A(u)$ za sve $u \in X$.
Važan pojam fazi skupova je njihov α-presek. Za fazi podskup A definišemo njegov α-presek, $\alpha \in [0,1]$, kao klasičan skup

$$^{\alpha}A = \{u | \mu_A(u) \geq \alpha\},$$

a strogi α-presek sa

$$^{+\alpha}A = \{u | \mu_A(u) > \alpha\},$$

Primetimo da $\alpha \leq \beta$ povlači $^{\beta}A \subset {}^{\alpha}A$ i da je za fazi podskupove A i B

$$^{\alpha}(A\cup B) = {}^{\alpha}A \cup {}^{\alpha}B \quad \text{i} \quad ^{\alpha}(A\cap B) = {}^{\alpha}A \cap {}^{\alpha}B.$$

Svaki fazi podskup se može rekonstruisati pomoću svojih α-preseka, odnosno preko specijalnih fazi podskupova $\alpha\ {}^{\alpha}A$. Važi sledeća teorema o dekompoziciji fazi skupa.

Teorema 3.1.1 *Za proizvoljan fazi podskup A važi*

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} {}_{\alpha}A = \bigcup \alpha\ {}^{\alpha}A,$$

gde je $\bigcup$ unija fazi skupova.

Dokaz. Uzmimo proizvoljan fiksan elemenat u iz X. Označimo $\mu_A(u) = r$. Tada je

$$(\bigcup_{\alpha\in[0,1]} {}^{\alpha}A)(u) = \sup_{\alpha\in[0,1]} {}_{\alpha}A(u) = \max(\sup_{\alpha\in[0,r]} {}_{\alpha}A(u), \sup_{\alpha\in[r,1]} {}_{\alpha}A(u)).$$

Kako je za $\alpha \in [0, r]$ uvek $A(u) = r \geq \alpha$, to je ${}_{\alpha}A(u) = \alpha$, a za $\alpha \in [r, 1]$ uvek je $A(u) = r < \alpha$, pa je ${}_{\alpha}A(u) = 0$, te važi

$$(\bigcup_{\alpha\in[0,1]} {}_{\alpha}A)(u) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \alpha = r = A(u). \quad \square$$

Za fazi podskup A skupa $\mathbb{R}^n$ kažemo da je konveksan ako su svi njegovi α-preseci, $\alpha \in (0, 1]$, konveksni skupovi u klasičnom smislu. Specijalno, potreban i dovoljan uslov da je fazi podskup A od $\mathbb{R}$ konveksan je

$$\mu_A(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \geq \min(\mu_A(u_1), \mu_A(u_2)),$$

za sve $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in [0, 1]$.

Mnoge operacije sa realnim brojevima se mogu preneti na fazi skupove korišćenjem tzv. principa ekstenzije. Naime, neka je data funkcija f koja preslikava klasičan skup X u klasičan skup Y. Tada definišemo funkciju f sa skupa svih fazi podskupova A od X, tj. skupa svih odgovarajućih funkcija pripadanja, u skup svih fazi podskupova od Y na sledeći način

$$\mu_{f(A)}(v) = \sup\{\mu_A(u) | u \in X, v = f(u)\}.$$

Primer 3.1.3 Neka je A fazi podskup skupa realnih brojeva "približno 2" dat funkcijom pripadnosti

$$\mu_A(u) = \begin{cases} u-1, & \text{ako je } 1 \leq u \leq 2 \\ 3-u, & \text{ako je } 2 \leq u \leq 3 \\ 0, & \text{ako je } u \notin [1,3] \end{cases}.$$

Funkcija $f(u) = u^2$ se principom ekstenzije prenosi na funkciju

$$\begin{aligned} \mu_{f(A)}(v) &= \sup\{\mu_A(u) | u \in \mathbb{R}, v = u^2\} \\ &= \begin{cases} \max(\mu_A(\sqrt{v}), \mu_A(-\sqrt{v}), & \text{ako je } v \geq 0 \\ 0, & \text{ako je } v < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sqrt{v}-1, & \text{ako je } 1 \leq v \leq 4 \\ 3-\sqrt{v}, & \text{ako je } 4 \leq v \leq 9 \\ 0, & \text{ako je } v \notin [1,9] \end{cases} \end{aligned}$$

3.2 Fazi brojevi i fazi aritmetika

Fazi broj A je specijalni fazi podskup proširenog skupa realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}$. Postoje razne definicije fazi broja, a mi ćemo ovde posmatrati samo fazi brojeve na $\overline{\mathbb{R}}$ u smislu sledeće definicije.

Definicija 3.2.1 *Fazi podskup A od $\overline{\mathbb{R}}$ je* **fazi broj** *ako je normalizovan i konveksan, tj. $\mu_A(u) = 1$ za neko $u \in \mathbb{R}$ i za sve $u, v, w \in \mathbb{R}$ takve da za $u < v < w$, važi $\mu_A(v) \geq \min((\mu_A(u), \mu_A(w))$.*

Prethodna definicija uopštava pojam intervala. Naime, za svako $\alpha \in (0,1]$, odgovarajući α-presek ${}^{\alpha}A$ fazi broja A je interval. Važi još da ako je $\mu_A(u) = 1$ za $u \in \overline{\mathbb{R}}$, tada $\mu_A|_{[-\infty,u]}$ je monotono neopadajuća funkcija, a $\mu_A|_{[u,\infty]}$ je monotono nerastuća funkcija.

i) Odozgo poluneprekidni fazi broj A, tj. $A_\alpha = \bigcup_{\beta>\alpha} A_\beta$ za sve $\alpha \in (0,1)$, se uvek može predstaviti četvorkom $A = (l, r, L, R)$, gde je $[l, r] = core(A) = A_1$, a L i R su levi odnosno desni oblik, respektivno. Primetimo da je $L = \emptyset$ za $l = -\infty, R = \emptyset$ za $r = -\infty$. Za ostale slučajeve $L, R : [0, \infty] \to [0, 1]$ su monotono neopadajuće neprekidne sa leve strane funkcije tako da je $L(u) = R(u) = 1$ akko je $u = 0$. Pa je

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1, & l \leq u \leq r \\ L(l-u), & u < l \\ R(u-r), & u > r. \end{cases}$$

ii) Odozgo poluneprekidni fazi broj sa ograničenim nosačem, tj. $\operatorname{supp} A = \partial(\{u \in \overline{\mathbb{R}} | \mu_A(u) > 0\}) = [u, v] \subset \overline{\mathbb{R}}$, gde je ∂ zatvaranje, je $L - R$ fazi interval u smislu Dubois-a i Prade-a, u oznaci $A = (l, r, \alpha, \beta)_{LR}$, gde su $\alpha = l - u$ i $\beta = v - r$ levo odnosno desno rasipanje, respektivno, i $L, R : [0, 1] \to [0, 1]$ su monotono nerastuće levo-neprekidne funkcije tako da je $L(u) = R(u) = 1$ akko je $u = 0$ i $\operatorname{supp} R \subset [0, 1]$. Tada važi

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 1, & l \leq u \leq r \\ L\left(\frac{l-u}{\alpha}\right), & l - \alpha < x < l \\ R\left(\frac{u-r}{\beta}\right), & r < u < r + \beta \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primetimo da $L - R$ fazi intervali uopštavaju izraz "$u = u_0$", kada je u_0 neki (pravi) realan broj. Realan broj u_0 se može predstaviti kao $L - R$ fazi interval sa $l = r = u_0$, nula rasipanje $\alpha = \beta = 0$ i sa proizvoljnim oblicima $L, R, u_0 = (u_0, u_0, 0, 0)_{L,R}$.

iii) Fazi reali su odozdo poluneprekidni fazi brojevi i ispunjavaju $\mu_A(+\infty) = 1$, $\mu_A(-\infty) = 0$. Što znači da je μ_A levo neprekidna monotono neopadajuća funkcija na $\overline{\mathbb{R}}$. Ako je $\inf_{u\in\mathbb{R}} \mu_A(u) = 1$ i $\sup_{u\in\mathbb{R}} \mu_A(u) = 1$, onda se fazi real A zove konačan fazi broj i njegova funkcija pripadanja se ograničava na $\overline{\mathbb{R}}$.

Neka $*$ obeležava bilo koju od četiri aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima: *sabiranje* $+$, *oduzimanje* -, *množenje* $\cdot$, i *deljenje* $/$. Onda je,

$$[u_1, u_2] * [v_1, v_2] = \{f * g | u_1 \leq f \leq u_2, v_1 \leq g \leq v_2\}, \tag{3.2}$$

opšta osobina svih aritmetičkih operacija na zatvorenim intervalima, izuzev da $[u_1, u_2]/[v_1, v_2]$ nije definisano kad $0 \in [v_1, v_2]$. To jest, rezultat aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima je opet zatvoren interval.

Četiri aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima su definisane na sledeći način:

1. $[u_1, u_2] + [v_1, v_2] = [u_1 + v_1, u_2 + v_2]$
2. $[u_1, u_2] - [v_1, v_2] = [u_1 - v_2, u_2 - v_1]$
3. $[u_1, u_2] \cdot [v_1, v_2]$
   $= [\min(u_1v_1, u_1v_2, u_2v_1, u_2v_2), \max(u_1v_1, u_1v_2, u_2v_1, u_2v_2)]$, i $0 \notin [v_1, v_2]$,
4. $[u_1, u_2]/[v_1, v_2] = [u_1, u_2] \cdot [1/v_2, 1/v_1]$
   $= [\min(u_1/v_1, u_1/v_2, u_2/v_1, u_2/v_2), \max(u_1/v_1, u_1/v_2, u_2/v_1, u_2/v_2)]$.

Primetimo da se realan broj r može takođe posmatrati kao specijalni (degenerisani) interval $[r,r]$. Kad je jedan od intervala u 1-4 degenerisan, upotrebljavamo specijalne operacije; kad su oba degenerisana, upotrebljavamo standardnu aritmetiku realnih brojeva [46].

Aritmetičke operacije na zatvorenim intervalima zadovoljavaju neke korisne osobine. Neka su $U = [u_1, u_2], V = [v_1, v_2], W = [w_1, w_2], 0 = [0, 0], 1 = [1, 1]$. Koristeći ove simbole, osobine su formulisane kao:

o1) $U + V = V + U$; $U \cdot V = V \cdot U$ *(komutativnost)*,

o2) $(U + V) + W = U + (V + W)$; $(U \cdot V) \cdot W = U \cdot (V \cdot W)$ (*asocijativnost*),

o3) $U = 0 + U = U + 0$; $U = 1 \cdot U = U \cdot 1$ *(neutralni element)*

o4) $U \cdot (V + W) \subseteq U \cdot V + U \cdot W$ *(poddistributivnost)*.

o5) Ako $v \cdot w \geq 0$ za svaki $v \in V$ i $w \in W$, onda $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$ *(distributivnost)*
Šta više, ako je $U = [u, u]$, onda $u \cdot (V + W) = u \cdot V + u \cdot W$.

o6) $0 \in U - U$ i $1 \in U/U$.

o7) Ako je $U \subseteq E$ i $V \subseteq F$, onda:
$U + V \subseteq E + F$,
$U - V \subseteq E - F$,
$U \cdot V \subseteq E \cdot F$,
$U/V \subseteq E/F \ \ , 0 \notin V, 0 \notin F$ *(uključenje monotonosti)*

Primer 3.2.1 Dokaz osobine poddistributivnosti i distributivnosti. Prvo, imamo

$$\begin{aligned} U \cdot (V + W) &= \{u \cdot (v + w) | u \in U, v \in V, w \in W\} \\ &= \{u \cdot v + u \cdot w | u \in U, v \in V, w \in W\} \\ &\subseteq \{u \cdot v + u' \cdot w | u, u' \in U, v \in V, w \in W\} \\ &= U \cdot V + U \cdot W. \end{aligned}$$

Dakle, $U \cdot (V + W) \subseteq U \cdot V + U \cdot W$.

Sada predpostavimo, bez umanjenja opštosti, da $v_1 \geq 0$ i $w_1 \geq 0$. Tada, moramo da uzmemo u obzir sledeća tri slučaja:
1. Ako $u_1 \geq 0$, onda

$$\begin{aligned} U \cdot (V + W) &= [u_1 \cdot (v_1 + w_1), u_2 \cdot (v_2 + w_2)] \\ &= [u_1 \cdot v_1, u_2 \cdot v_2] + [u_1 \cdot w_1, u_2 \cdot w_2] \\ &= U \cdot V + U \cdot W. \end{aligned}$$

2. Ako $u_1 < 0$ i $u_2 \leq 0$, onda $-u_2 \geq 0, (-U) = [-u_2, -u_1]$, i $(-U) \cdot (V + W) = (-U) \cdot V + (-U) \cdot W$, pa je $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$.
3. Ako $u_1 < 0$ i $u_2 > 0$, onda

$$\begin{aligned} U \cdot (V + W) &= [u_1 \cdot (v_2 + w_2), u_2 \cdot (v_2 + w_2)] \\ &= [u_1 \cdot v_2, u_2 \cdot v_2] + [u_1 \cdot w_2, u_2 \cdot w_2] \\ &= U \cdot V + U \cdot W. \end{aligned}$$

Da bi pokazali da distributivnost (ne važi uvek), neka je $U = [0, 1], V = [1, 2], W = [-2, -1]$. Tada, $U \cdot V = [0, 2], U \cdot W = [-2, 0], V + W = [-1, 1]$, i $U \cdot (V + W) = [-1, 1] \subset [-2, 2] = U \cdot V + U \cdot W$.

Fazi aritmetiku možemo razviti na dva načina, preko aritmetike intervala i koristeći princip ekstenzije. Pretpostavimo da su fazi brojevi A i B predstavljeni neprekidnom funkcijom pripadnosti i neka je $*$ bilo koja od četiri osnovne aritmetičke operacije. Tada, definišemo fazi skup $A * B$ nad $\mathbb{R}$, preko njegovog α-preseka ${}^{\alpha}(A * B)$, kao

$$ {}^{\alpha}(A * B) = {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B \tag{3.3}$$

za bilo koje $\alpha \in (0,1]$ (za $* \in \{+,-,\cdot,/\}$, $0 \notin {}^\alpha B$).
U skladu sa teoremom 3.1.1, $A * B$ se može napisati kao

$$A * B = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}_\alpha(A * B).$$

Kako je ${}^\alpha(A * B)$ zatvoren interval za svako $\alpha \in (0,1]$ i A, B su fazi brojevi, $A * B$ je takođe fazi broj.
Prema drugoj metodi zasnovanoj na principu ekstenzije, standardne aritmetičke operacije nad $\mathbb{R}$ proširuju se na fazi brojeve, pa se $A * B$ nad $\mathbb{R}$ može napisati kao

$$(A * B)(w) = \sup_{w = u * v} \min\{A(u), B(v)\} \tag{3.4}$$

za sve $w \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.2.1 *Obeležimo sa* $* \in \{+,-,\cdot,/\}$ *i* A *i* B *su neprekidni fazi brojevi. Tada je fazi skup* $A * B$ *definisan sa 3.4 takođe fazi broj.*

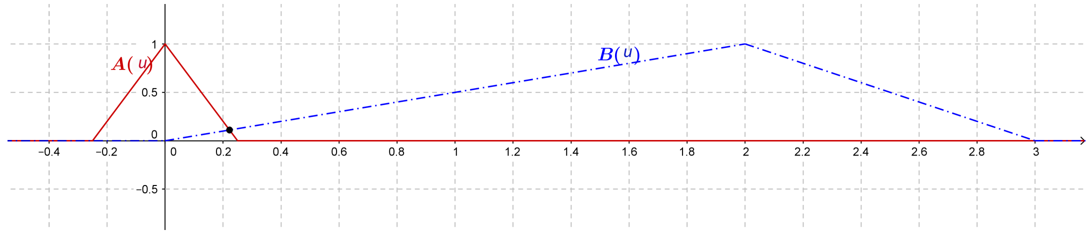
Dokaz. Prvo, dokazujemo jednakost 3.3 pokazujući da je ${}^\alpha(A * B)$ zatvoreni interval za sve $\alpha \in (0,1]$. Za bilo koje $w \in {}^\alpha A * {}^\alpha B$, postoji neko $u_0 \in {}^\alpha A$ i $v_0 \in {}^\alpha B$ takvo da $w = u_0 * v_0$. Pa je,

$$\begin{aligned} (A * B)(w) &= \sup_{w = u * v} \min[A(u), B(v)] \\ &\geq \min[A(u_0), B(v_0)] \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Pa sledi da je $w \in {}^\alpha(A * B)$.

Primer 3.2.2 Razmotrimo dva trougaona fazi broja A i B prikazana na slici 3.3, definisana sa:.

$$A(u) = \begin{cases} 4u + 1, & u \in (-1/4, 0] \\ 1 - 4u, & u \in (0, 1/4) \\ 0, & u \in \mathbb{R} \setminus (-1/4, 1/4) \end{cases}, \quad B(u) = \begin{cases} u/2, & u \in (0, 2] \\ -u + 3, & u \in (2, 3) \\ 0, & u \in \mathbb{R} \setminus (0, 3) \end{cases}.$$



Slika 3.3.

1) $(A \cup B)(u) = \max\{A(u), B(u)\} = \begin{cases} 0, & u \in (-\infty, -1/4] \cup [3, \infty) \\ 4u+1, & u \in (-1/4, 0] \\ 1-4u, & u \in (0, 2/9] \\ u/2, & u \in (2/9, 2] \\ -u+3, & u \in (2, 3) \end{cases}$

2) $(A \cap B)(u) = \min\{A(u), B(u)\} = \begin{cases} 0, & u \in (-\infty, 0] \cup [1/4, \infty) \\ u/2, & u \in (0, 2/9) \\ 1-4u, & u \in [2/9, 1/4) \end{cases}$.

3) $core(A) = \{u \in \mathbb{R} | A(u) = 1\} = \{0\}$, $S(B) = \{u \in \mathbb{R} | B(u) > 0\} = (0, 3)$

4) $A + B = \bigcup\limits_{\alpha} {}_{\alpha}(A+B) = \bigcup\limits_{\alpha} \alpha \cdot {}^{\alpha}(A+B)$
${}^{\alpha}(A+B) = {}^{\alpha}A + {}^{\alpha}B = [\frac{9\alpha-1}{4}, \frac{13-5\alpha}{4}]$

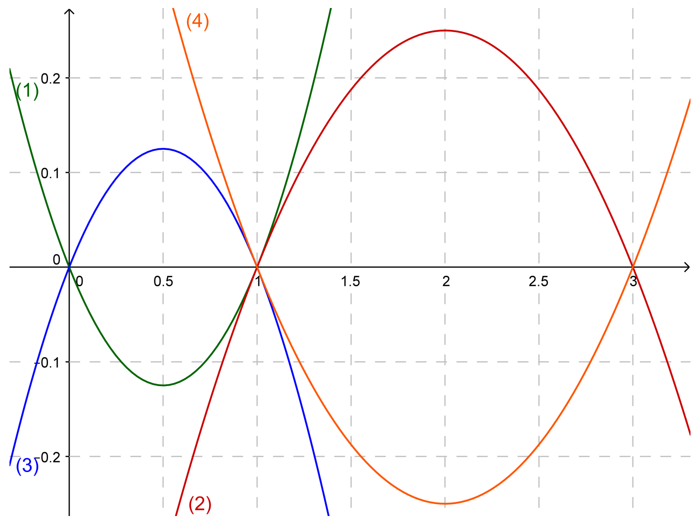
$(A+B)(u) = \begin{cases} \frac{4u+1}{9}, & u \in (-1/4, 2) \\ \frac{13-4u}{5}, & u \in [2, 13/4] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

5) $A - B = \bigcup\limits_{\alpha} {}_{\alpha}(A-B) = \bigcup\limits_{\alpha} \alpha \cdot {}^{\alpha}(A-B)$
${}^{\alpha}(A-B) = {}^{\alpha}A - {}^{\alpha}B = [\frac{\alpha-1}{4}, \frac{1-\alpha}{4}] - [2\alpha, 3-\alpha] = [\frac{\alpha-1}{4} - (3-\alpha), \frac{1-\alpha}{4} - 2\alpha] = [\frac{\alpha-1-12+4\alpha}{4}, \frac{1-\alpha-8\alpha}{4}] = [\frac{5\alpha-13}{4}, \frac{1-9\alpha}{4}]$
$(A-B)(u) = \begin{cases} \frac{4u+13}{5}, & u \in (-13/4, -2) \\ \frac{1-4u}{9}, & u \in [-2, 1/4] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

6) $A \cdot B = \bigcup\limits_{\alpha} {}_{\alpha}(A \cdot B) = \bigcup\limits_{\alpha} \alpha \cdot {}^{\alpha}(A \cdot B)$

${}^{\alpha}(A \cdot B) = {}^{\alpha}A \cdot {}^{\alpha}B = [\frac{\alpha-1}{4}, \frac{1-\alpha}{4}] \cdot [2\alpha, 3-\alpha] = [\min\{\frac{\alpha-1}{4} \cdot 2\alpha, \frac{\alpha-1}{4} \cdot (3-\alpha), \frac{1-\alpha}{4} \cdot 2\alpha, \frac{1-\alpha}{4} \cdot (3-\alpha)\}, \max\{\frac{\alpha-1}{4} \cdot 2\alpha, \frac{\alpha-1}{4} \cdot (3-\alpha), \frac{1-\alpha}{4} \cdot 2\alpha, \frac{1-\alpha}{4} \cdot (3-\alpha)\}] =$

$[\min\{\frac{\alpha^2-\alpha}{2}, \frac{-\alpha^2+4\alpha-3}{4}, \frac{-\alpha^2+\alpha}{2}, \frac{\alpha^2-4\alpha+3}{4}\},$
$\max\{\frac{\alpha^2-\alpha}{2}, \frac{-\alpha^2+4\alpha-3}{4}, \frac{-\alpha^2+\alpha}{2}, \frac{\alpha^2-4\alpha+3}{4}\}]$



Slika 3.4.

Kako nas zanimaju vrednosti samo za $\alpha \in [0, 1]$, to je

$^{\alpha}(A \cdot B) = [\frac{-\alpha^2+4\alpha-3}{4}, \frac{\alpha^2-4\alpha+3}{4}]$.

Dakle (slika 3.4),

$$(A \cdot B)(u) = \begin{cases} 2 - \sqrt{1-4u}, & u \in (-3/4, 0) \\ 2 - \sqrt{1+4u}, & u \in (0, 3/4) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

3.3 Fazi relacije

Koncept relacija se može generalizovati kako bi se omogućio različiti stepen ili jačina veze između elemenata. Fazi relacija je fazi skup definisan na prostoru $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, gde $(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n) \in X$ mogu imati različite stepene pripadnosti u relaciji.
Neka su $X_1, X_2\ \cdots X_n$ proizvoljni skupovi i $X_1 \times X_2\ \times \cdots \times X_n$ Dekartov proizvod.

Definicija 3.3.1 *Fazi skup φ definisan nad X^n $(n > 1)$ je $n-$arna* **fazi relacija** *na X.*

Za fazi relaciju φ na $X_1 \times X_2 \cdots \times X_n$, vrednost $\varphi(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)$ je stepen, odnosno mera povezanosti elemenata $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$, redom, po kriterijumu φ. Fazi relaciju poistovećujemo sa njenom funkcijom pripadanja, pa se u literaturi označava sa $\mu_\varphi(u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n)$ ili $\varphi(u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n)$.

Za fazi relaciju φ važi:

> Refleksivnost, ako je $\forall u \in X\ \varphi(u, u) = 1$.
>
> Simetričnost, ako je za svako $u, v \in X,\ \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.
>
> Antisimetričnost, ako je za svako $u, v \in X,\ u \neq v,\ \varphi(u, v) > 0 \Rightarrow \varphi(v, u) = 0$.
>
> Tranzitivnost ako je za svako $u, v, w \in X,\ \varphi(u, v) \wedge \varphi(v, w) \leq \varphi(u, w)$, odnosno $\min\{\varphi(u, v), \varphi(v, w)\} \leq \varphi(u, w)$.

Jednostavno se proverava da za refleksivnu i tranzitivnu fazi relaciju φ važi $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
Ako je fazi relacija na skupu X refleksivna, simetrična i tranzitivna, onda je fazi ekvivalencija na X.
Fazi ekvivalenciju φ na skupu nazivamo fazi jednakošću ako za sve $u,\ v \in X$, iz $\varphi(u,\ v) = 1$ sledi $u = v$.

Definicija 3.3.2 *Za binarnu fazi relaciju φ na $X \times Y$ važi:*

1) **Prva projekcija** *fazi relacije φ je fazi skup na X definisan sa*

$$pr_1(\varphi)(u) = \bigvee_{v \in Y} \varphi(u, v) = \sup_{v \in Y} \varphi(u, v)$$

2) **Druga projekcija** *fazi relacije φ je fazi skup na Y definisan sa*

$$pr_2(\varphi)(v) = \bigvee_{u \in X} \varphi(u, v) = \sup_{u \in X} \varphi(u, v)$$

Vrednost $pr_1(\varphi)(u)$ je najveći stepen povezanosti $u \in X$ sa elementima skupa Y, dok je vrednost $pr_1(\varphi)(u)$ najveći stepen povezanosti $v \in Y$ sa elementima skupa X. Neka su $X = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ i $Y = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ konačni skupovi.

Definicija 3.3.3 Matrica pripadnosti *fazi relacije je matrica* $A_\varphi = [r_{ij}]_{n\times m}$, *sa elementima* $r_{ij} = \varphi(u_i, v_j) \in [0,1]$.

Neka je φ binarna fazi relacija predstavljena matricom pripadnosti $A_\varphi = [r_{ij}]_{n\times m}$, tada je za svako $u_i \in X, v_i \in Y$
$pr_1(\varphi)(u) = \max\limits_{j\in\{1,\ldots,m\}} r_{ij}$ maksimalni element u i-toj vrsti, i
$pr_2(\varphi)(v) = \max\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} r_{ij}$ maksimalni element u j-toj koloni.

Kompozicija (proizvod) fazi relacija se može definisati na više načina. U nastavku dajemo definiciju standardnog proizvoda koja proizilazi iz operacija min i max. Neka su φ_1 i φ_2 fazi relacije redom na $X \times Y$ i $Y \times Z$.

Definicija 3.3.4 Standardni proizvod *relacije* φ_1 *i relacije* φ_2 *je relacija* ρ *na* $X \times Z$, *definisana sa*

$$\rho(u,w) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(u,w) = \sup_{v\in Y} \min\{\varphi_1(u,v), \varphi_2(v,w)\}.$$

Fazi relacija ρ može se predstaviti i preko svoje matrice pripadnosti.

Definicija 3.3.5 *Neka su* $A_{\varphi_1} = [r_{ij}]_{n\times k}$ *i* $A_{\varphi_2} = [s_{ij}]_{k\times m}$ *matrice pripadnosti fazi relacija* φ_1 *i* φ_2. *Matrica pripadnosti fazi relacije* $\rho = \varphi_1 \circ \varphi_2$ *je* $A_\rho = [t_{ij}]_{n\times m}$, *gde je* $t_{ij} = \max\limits_{p\in\{1,\ldots,k\}} \min\{r_{ip}, s_{pj}\}$ *za sve* $i \in \{1,2,...,n\}$ *i* $j \in \{1,2,...,m\}$.

Kompozicija fazi relacija može se definisati i preko drugih operacija. Postoji više načina dodele vrednosti relacijama. Metode koje pokušavaju da odrede neku vrstu sličnog obrasca ili strukture podataka kroz različite metrike, nazivaju se metode sličnosti (eng. *similarity methods*) (videti [52] ili [53]). Postoji desetine ovih metoda (videti [54]), a kroz primer pokazaćemo max-min metod.

Primer 3.3.1 Osiguravajuće društvo oformilo je tim stručnjaka da utvrde štetu na domaćinstvima nakon poplave u pet zahvaćenih oblasti. U narednoj tabeli dati su rezultati ekspertske analize prikazani nivoima oštećenja: bez oštećenja, umereno oštećenje i veliko oštećenje.

Tabela 3.1

Oblast	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_{i1}	0,2	0,1	0,5	0,6	0,3
v_{i2}	0,5	0,3	0,7	0,1	0,3
v_{i3}	0,2	0,3	0,4	0,1	0,1

Max-min metod koristi sledeću formulu za elemente fazi relacije:

$$r_{ij} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \min(v_{ik}, v_{jk})}{\sum\limits_{k=1}^{m} \max(v_{ik}, v_{jk})}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Koristeći prethodnu formulu dobijamo matricu $A\rho$ koja prikazuje sličnost šteta po oblastima.

$$A\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0,6 & 0,563 & 0,308 & 0,6 \\ 0,6 & 1 & 0,438 & 0,25 & 0,556 \\ 0,563 & 0,438 & 1 & 0,412 & 0,438 \\ 0,308 & 0,25 & 0,412 & 1 & 0,5 \\ 0,6 & 0,556 & 0,438 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

Dalje se preko relacije ekvivalencije oblasti mogu klasifikovati u određene kategorije.

3.4 Fazi logika i fazi sistemi

Logika se odnosi na studiju metoda i principa ljudskog zaključivanja. Klasična logika, kao uobičajena praksa, bavi se iskazima (npr. zaključcima ili odlukama) koji su ili istiniti ili neistiniti. Svaki iskaz ima svoju suprotnost. Ova klasična logika, dakle, bavi se kombinacijama varijabli koje predstavljaju iskaze. Pošto svaka varijabla označava hipotetički iskaz, bilo koja kombinacija iskaza na kraju uzima vrednost istinitosti (ili istinito ili neistinito), ali nikada nije između ili oboje (odnosno, nije istinito i neistinito u isto vreme).

Glavni sadržaj klasične logike je studija pravila koja omogućavaju formiranje novih logičkih varijabli u vidu funkcija određenih postojećih varijabli.

Pretpostavimo da su date n logičkih varijabli, $u_1, ..., u_n$, (čije vrednosti su istinit ili neistinit):

u_1 je istinit;
u_2 je neistinit;
$\vdots$
u_n je neistinit.

Nova logička varijabla, v, može se definisati po pravilu kao funkcija od $u_1, ..., u_n$, koja ima konkretnu vrednost istinitosti (ponovo, ili istinita ili neistinita). Jedan primer pravila je sledeće:

AKO je u_1 istinit I u_2 je neistinit I...I u_n je neistinit ONDA je v neistinit.

Zbog toga što jednu, i samo jednu vrednost istinitosti (ili istinita ili neistinita) uzima logička funkcija (određenog) broja logičkih varijabli (hipotetički iskazi), klasična logika se takođe naziva dvovrednosna logika. Sada se podrazumeva i prihvaćeno je to da su mnogi iskazi i delimično istiniti i delimično neistiniti. Da bi opisali vrednosti delimične istinitosti nekim novim pravilima, tako da proširimo i generalizujemo dvovrednosnu logiku, predložene su i razvijene viševrednosne logike. U prvom pokušaju je dobro ustanovljeno nekoliko trovrednosnih logika, sa njihovim sopstvenim logičkim osnovama. Uobičajeno je u ovim logikama uvesti *ni* između *istinit* i *neistinit*. Ispostavilo se da su trovrednosne logike uspešne kako na logičkom tako i na matematičkom polju. Motivisani korisnim trovrednosnim logikama, n-vrednosne logike su razvijene 1930-ih godina. Konkretno, n-vrednosna logika Lukasiewicz-a čak dozvoljava $n = \infty$.
Postoji izomorfizam između dvovrednosne logike i teorije klasičnih skupova, i slično tome postoji izomorfizam između Lukasiewicz-eve logike i teorije fazi skupova. U stvari, izomorfizam za prvi je standardna karakteristična funkcija

$$v = \chi_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad u \in A, \\ 0 & \text{ako je} \quad u \notin A, \end{cases}$$

koja se može tumačiti kao

$$v = \begin{cases} \text{istinita} & \text{ako} \quad \text{je } u \quad \text{istinit}, \\ \text{neistinita} & \text{ako} \quad \text{je } u \quad \text{neistinit}; \end{cases}$$

a za drugi je fazi funkcija pripadnosti.

3.4.1 Fazi logika

Uvođenjem oznaka koje označavaju preciznije opise i postepene prelaze je način kvantifikovanja neodređenosti pomoću fazi logike ([19], [55]). Fazi logika podrazumeva stepen pripadnosti nekog elementa određenom skupu. On može pripadati različitim skupovima, ali sa određenim stepenom. Između skupova postoji postepeni prelaz, i oni se u određenom stepenu mogu preklapati. Fazi logika je uopštenje klasične logike na način na koji su fazi skupovi uopštenje klasičnih skupova. Istinitosna vrednost $\tau(P)$ dodeljena (istinitosnom funkcijom τ) nekom iskazu P u fazi logici može uzeti proizvoljnu vrednost intervala $[0, 1]$, odnosno $\tau : P \to (0, 1)$. To zapravo znači da u fazi logici postoji stepen tačnosti (istinitosti) nekog iskaza.

Taj stepen tačnosti potiče od vrednosti funkcije pripadnosti fazi skupa na kom je iskaz definisan.
Pretpostavimo da je propozicija P dodeljena fazi skupu A, tada je istinitosna vrednost propozicije $\tau(P)$ data sa $\tau(P) = \mu_A(u)$, gde je $0 \leq \mu_A(u) \leq 1$, odnosno stepen istine za $P : u \in A$ je jednaka stepenu pripadnosti u fazi skupu A.
Neka je propozicija P definisana na fazi skupu A i propozicija Q definisana na skupu B, tada važi:

i) $\tau\left(\bar{P}\right) = 1 - \tau(P)$ negacija

ii) $P \vee Q : u$ je A ili B, $\tau(P \vee Q) = \max(\tau(P), \tau(Q))$ disjunkcija

iii) $P \wedge Q : u$ je A i B, $\tau(P \wedge Q) = \min(\tau(P), \tau(Q))$ konjunkcija

iv) $P \to Q : u$ je A, tada u je B, $\tau(P \to Q) = \tau\left(\bar{P} \vee Q\right) = \max\left(\tau\left(\bar{P}\right), \tau(Q)\right)$
Zadehova implikacija [56]
Jedna od poznatijih definicija implikacije je i Lukasiewicz-eva implikacija $\tau(P \to Q) = \min(1 - \tau(P) + \tau(Q), 1)$

Implikacija se može predstaviti u obliku pravila
$P \to Q$: ako je u jednako A, tada je v jednako B, što je ekvivalentno sa fazi relacijom $R = (A \times B) \cup \left(\bar{A} \times Y\right)$ kao i u klasičnoj logici.
Tada je funkcija pripadnosti od R predstavljena formulom

$$\mu_R(u, v) = \max\left[(\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)), (1 - \mu_A(u))\right] \tag{3.6}$$

Primer 3.4.1 Pretpostavimo da ocenjujemo novi proizvod osiguranja kako bismo odredili njegov komercijalni potencijal. Koristimo dve metrike za donošenje odluke o opravdanosti uvođenja proizvoda. Merne jedinice su "jedinstvenost"proizvoda, označena na skali jedinstvenosti, $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ i "veličina tržišta" za proizvod, označeno na skali tržista, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Na obe skale, najmanji brojevi su dodeljeni za "najveća jedinstvenost"i "najveće tržište". Recimo da je proizvod ocenjen sa "srednja jedinstvenost", označeno fazi skupom M i "srednja tržišna veličina", skup N. Želimo da odredimo implikacije takvog rezultata, tj. ako M tada N.
Neka su:
$M = 0,6/2 + 1/3 + 0,2/4$,
$N = 0,4/2 + 1/3 + 0,8/4 + 0,3/5$.

Koristeći formulu za Dekartov proizvod 3.1 i 3.6 dobijamo

$$M \times N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 & 0,6 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,4 & 1 & 0,8 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{M} \times Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 \end{bmatrix},$$

gde je Y vektor vrsta $Y = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6$,
pa je $R = \max\left(M \times N, \bar{A} \times Y\right)$, odnosno

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,4 & 0,4 & 0,6 & 0,6 & 0,4 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 1 & 0,8 & 0,3 & 0 \\ 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 & 0,8 \end{bmatrix}$$

Izrazi jezika, koji određuju pojmove sa neodređenim ili višeznačnim vrednostima, nazivamo jezičke promenljive ili fazi vrednosti. Fazi pravila pružaju podatke o jezičkim promenljivama pomoću zaključaka proizašlih iz informacija o promenljivim, koje se sadrže u pretpostavci.
Aproksimativno rezonovanje je proces ili procesi u kojima je moguće deduktivno zaključivanje iz kolekcije nepreciznih premisa (hipoteza) i konsekvenca (posledica) pojedinih pravila. Najčešći način predstavljanja je preko pravila AKO-ONDA. Osnovni oblik tih pravila je:

$$AKO \;\; hipoteza \;\; ONDA \;\; posledica$$

Za definisanje algoritma aproksimativnog rezonovanja neophodno je uočiti promenljive i opisati ih odgovarajućim fazi skupovima. Ovaj proces je formulisan kao kompozicijsko pravilo zaključka koji podrazumeva modus ponens kao poseban slučaj. Svako složeno pravilo se pomoću osobina i različitih operacija fazi skupova može razložiti na konjukciju ili disjunkciju određenog broja ovako definisanih pravila.

Postoje i druge tehnike da se dobije fazi relacija R, odnosno vrednosti funkcije pripadnosti fazi relacije R, zasnovane na ako-onda pravilu poznate kao fazi operatori implikacije za $u \in X$ i $v \in Y$ [63]:

1) $\mu_R(u,v) = \max\{\mu_B(v), 1 - \mu_A(u)\}$
   Ekvivalentna je Zadeh-ovoj implikaciji za $\mu_B(u) \leq \mu_A(v)$.

2) $\mu_R(u,v) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(v)\}$
   Implikacija je poznata pod nazivom Mamdani implikacija [57],[58]. Kada je

$\mu_A(u) \geq 0,5$ i $\mu_B(u) \geq 0,5$ Zadeh-ova implikacija se svodi na Mamdani implikaciju.

3) $\mu_R(u,v) = \min\{1, [1 - \mu_A(u)\mu_B(v)]\}$
Implikacija je poznata kao već navedena Lukasiewicz-ova implikacija.

4) $\mu_R(u,v) = \mu_A(u) \cdot \mu_B(v)$
Jednačina opisuje oblik implikacije korelacije-proizvoda i zasniva se na pojmovima kondicioniranja i pojačavanja.

5) $\mu_R(u,v) = \begin{cases} 1, & \mu_A(u) \leq \mu_B(v) \\ \mu_B(v), & \text{inače} \end{cases}$
Ova jednačina se često naziva Brouwerian-ova implikacija [59].

3.4.2 Mamdani i Sugeno kontroleri

U ovom odeljku, ograničićemo se na dva najvažnija i najviše korišćena fazi kontrolera (fazi sistema), Mamdani i Sugeno kontroleri.

Mamdani kontroleri imaju fazi skupove i za ulaznu i za izlaznu informaciju.

Definicija 3.4.1 *Neka je X proizvoljni prostor ulaznih veličina, $A_1, A_2, ..., A_n$ i $B_1, B_2, ..., B_n$ normalizovani fazi podskupovi od X i $\mathbb{R}^m$ sa Borel-merljivim funkcijama pripadanja, respektivno i neka je T Borel-merljiva $t-$norma uzimajući u obzir pravila $(i = 1, 2, ..., n)$*

$$\textbf{AKO } je\ u = A_i \textbf{ TADA } je\ v = B_i.$$

Tada, Mamdani kontroler definiše sledeću ulazno-izlaznu funkciju $F_M : X \to \mathbb{R}^m$

$$F_M(u) = \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^m} \mu_R(u,v)v dv}{\int\limits_{\mathbb{R}^m} \mu_R(u,v) dv}. \tag{3.7}$$

Pod uslovom $\int \mu_R(u,v)dv > 0$, gde je funkcija pripadanja μ_R fazi relacije R na $X \times \mathbb{R}^m$ data sa

$$\mu_R(u,v) = \max\{T(\mu_{A_1}(u), \mu_{B_1}(v)), T(\mu_{A_2}(u), \mu_{B_2}(v)), ..., T(\mu_{A_n}(u), \mu_{B_n}(v))\} \tag{3.8}$$

Drugi važan tip fazi kontrolera je tzv. Sugeno kontroler koji koristi realne (krisp) vrednosti u prostoru izlaznih veličina. Na jedan način ovo znači da inferencija ima ugrađenu defazifikaciju.

Definicija 3.4.2 *Neka je X proizvoljni prostor ulaznih veličina, i neka je $A_1, A_2, ..., A_n$ normalizovani fazi podskup od X sa $\sum \mu_{A_i}(u) > 0$ za svako $u \in X$, i $f_1, f_2, ..., f_n$ funkcija iz X u $\mathbb{R}^m$, uzimajući u obzir pravila $(i = 1, 2, ..., n)$.*

$$\textbf{AKO } je\ u = A_i \textbf{ TADA } je\ v = f_i(u).$$

Tada Sugeno kontroleri definišu sledeću ulazno-izlaznu funkciju $F_S : X \to \mathbb{R}^m$

$$F_S(u) = \frac{\sum \mu_{A_i}(u) f_i(u)}{\sum \mu_{A_i}(u)}. \tag{3.9}$$

U specijalnoj slučaju, kada su za $i = 1, 2, ..., n$ funkcije f_i konstante, odnosno $f_i(u) = v_i$, Sugeno kontroler može biti shvaćen kao Mamdani kontroler.

Teorema 3.4.1 *Neka je X proizvoljni prostor ulaznih veličina, i neka je $A_1, A_2, ..., A_n$ normalizovani fazi podskup od X sa $\sum \mu_{A_1}(u) > 0$ za svako $u \in X$, i $v_1, v_2, ..., v_n$ različiti elementi od R^m, uzimajući u obzir pravila $(i = 1, 2, ..., n)$.*

$$\textbf{AKO } je\ u = A_i \textbf{ TADA } je\ v = v_i.$$

I neka je F_S ulazno-izlazna funkcija sa odgovarajućim Sugeno kontrolerom. Onda postoji Mamdani kontroler sa proizvoljnim prostorom ulaznih veličina X tako da se njegova odgovarajuća ulazno-izlazna funkcija F_M poklapa sa F_S.

Dokaz. Za svaki pozitivan ε i svako $i = 1, 2, ..., n$ posmatrajući zatvorene ε-lopte $B_i^{(\varepsilon)}$ sa centrom $v_i = (v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, ..., v_i^{(m)}) \in \mathbb{R}^m$

$$B_i^{(\varepsilon)} = \{(v^{(1)}, v^{(2)}, ..., v^{(m)}) \in \mathbb{R}^m | \max\{|v^{(1)} - v_i^{(1)}|, |v^{(2)} - v_i^{(2)}|, ..., |v^{(m)} - v_i^{(m)}| \leq \varepsilon\}$$

i pravila $(i = 1, 2, ..., n)$

$$\textbf{AKO } \text{je } u = A_i \textbf{ TADA } \text{je } v = B_i^{(\varepsilon)}.$$

Onda postoji $\varepsilon_0 > 0$ tako da za svako $i \neq j$ imamo $B_i^{(\varepsilon_0)} \cap B_j^{(\varepsilon_0)} = \emptyset$ i za svaku proizvoljnu $t-$normu T fazi relacije $R^{(\varepsilon_0)}$ opisane u (3.8) indukovane odgovarajućim fazi kontrolerom postaje

$$\mu_{R^{(\varepsilon_0)}}(u, v) = \max\{T(\mu_{A_i}(u), \mu_{B_i^{(\varepsilon_0)}}(v)) | i \in \{1, 2, ..., n\}\} = \begin{cases} \mu_{A_i}(u), & u \in B_i^{(\varepsilon_0)} \\ 0, & u \notin B_i^{(\varepsilon_0)} \end{cases}$$

Rezultujuća ulazno-izlazna funkcija $F_M^{(\varepsilon_0)}$ daje rezultat

$$
\begin{aligned}
F_M^{(\varepsilon_0)} &= \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^m} \mu_R^{(\varepsilon_0)}(u,v)v\,dv}{\int\limits_{\mathbb{R}^m} \mu_R^{(\varepsilon_0)}(u,v)\,dv} \\
&= \frac{\sum \Big(\int\limits_{B_i^{(\varepsilon_0)}} \mu_{A_i}(u)v\,dv\Big)}{(2\varepsilon_0)^m \sum \mu_{A_i}(u)} \\
&= \frac{\sum \Big(\mu_{A_i}(u) \int\limits_{B_i^{(\varepsilon_0)}} v\,dv\Big)}{(2\varepsilon_0)^m \sum \mu_{A_i}(u)} \\
&= \frac{(2\varepsilon_0)^m \sum \mu_{A_i}(u) v_i}{(2\varepsilon_0)^m \sum \mu_{A_i}(u)} \\
&= F_S(u).
\end{aligned}
$$

Pokazali smo da se ulazno-izlazna funkcija $F_M^{(\varepsilon_0)}$ Mamdani kontrolera poklapa sa ulazno-izlaznom funkcijom F_S Sugeno kontrolera od koje smo krenuli. $\square$

Fazi pravila u Mamdani sistemu prikazaćemo na primeru u nastavku.

Primer 3.4.2 Označimo sa $v_1, v_2\, v_3, v_4, v_5$ ulazne vrednosti koje opisuju rizike, ocenjene sa nizak, umeren i visok rizik. Pravila dozvoljavaju da se podaci predstavljeni kao kvantitativne i kvalitativne vrednosti integrišu na jedinstven način. Aproksimativni algoritam tako uključuje 243 pravila, $v_1 \times v_2 \times v_3 \times v_4 \times v_5 \times$ ukupan rizik osiguranja (URO). Nivo ukupnog rizika može biti veoma nizak, nizak, umeren, visok i veoma visok (pogledati primer 3.1.1), i dalje pravila definišemo na sledeći način [60]:

Pravilo (1): Ako je v1 nizak i v2 je nizak i v3 nizak i v4 nizak i v5 nizak tada je URO veoma nizak
Pravilo (2): Ako je v1 nizak and v2 nizak i v3 nizak i v4 i v5 umeren tada je URO veoma nizak
. . .

Pravilo (120): Ako je v1 umeren i v2 umeren i v3 umeren i v4 nizak i v5 visok tada je URO umeren
Pravilo (121): Ako je v1 umeren i v2 umeren i v3 umeren i v4 umeren i v5 nizak tada je URO nizak
. . .

Pravilo (242): Ako je v1 visok i v2 visok i v3 visok i v4 visok i v5 umeren tada je URO veoma visok
Pravilo (243): Ako je v1 visok i v2 visok i v3 visok i v4 visok i v5 visok tada je URO veoma visok

Proces, izlazne podatke svih pravila, agregira u jedinstven skup. Kako bi smo dobili jasnu informaciju o izlaznoj vrednosti, često je neophodno transformisati izlaznu vrednost u običan skup ili jednu skalarnu vrednost, što se postiže defazifikacijom. Postoji više različitih metoda za dobijanje defazifikovane veličine od kojih se najčešće koriste:

i) Metod maksimalne pripadnosti.
Rezultat defazifikacije je vrednost x' gde funkcija pripadnosti posmatranog fazi skupa dostiže najveću vrednost, odnosno visinu fazi skupa: $\mu_A(u') \geq \mu_A(u)$ za sve $u \in A$.

ii) Metod centroida.
Metodom centroida se brzo i efikasno dolazi do najbolje moguće vrednosti lingvističke promenljive koristeći formulu

$$x' = \frac{\int \mu_A(u)\, u\, du}{\int \mu_A(u)\, du}$$

U definiciji 3.4.1 je implicitno izabran metod centroida (3.7).

iii) Metod ponderisane sredine.

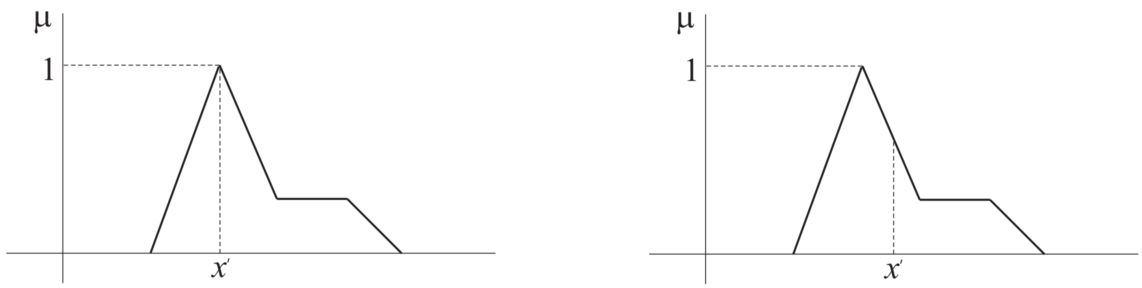
$$x' = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(u^c) \cdot u^c}{\sum_{i=1}^{n} \mu_A(u^c)}$$

gde je u^c centroid svake simetrične funkcije pripadnosti. Metod se koristi samo za simetrične funkcije pripadnosti i gde se svakom fazi skupu dodeljuje najveća vrednost funkcije pripadnosti.

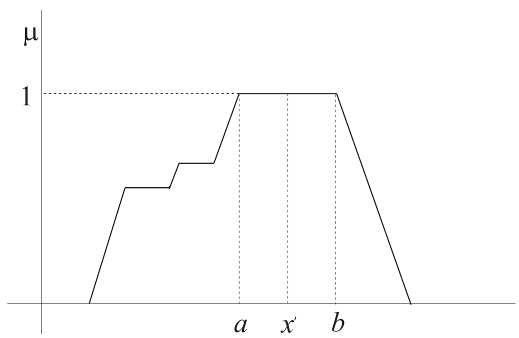
iv) Metod sredine maksimuma, metod početka maksimuma i metod kraja maksimuma.
Metod se definiše sa $x' = \frac{a+b}{2}$, gde je $[a, b]$ interval na kojem funkcija pripadnosti fazi skupa dostiže maksimum. Metodom početka maksimuma defazifikacija određuje početak intervala kao izlaznu skalarnu veličinu, a metod kraja maksimuma u krajnjoj tački intervala.

Odabir metode defazifikacije nije jednoznačno određen. Analizom se, u zavisnosti od vrste podataka, tumačenja ulaznih i izlaznih vrednosti, cilja njihove obrade, ali i intuitivnog tumačenja, vrši izbor najbolje metode. Više o ovim metodama pogledati radove [61], [62] i monografiju [63].

Na slici 3.5 su redom prikazani Metod maksimalne pripadnosti i Metod centroida, dok je na slici 3.6 prikazan metod sredine maksimuma.



Slika 3.5.



Slika 3.6.

Glava 4

Fazi mere

Osamdesetih godina veći broj autora ukazao je na jaku vezu između Dempster-Shafer-ove teorije, teorije verovatnoće i teorije mogućnosti zasnovanoj na fazi merama. Teorija fazi mera je generalizacija klasične teorije mere. Ova generalizacija se dobija zamenom aksioma aditivnosti klasične mere slabijim aksiomama monotonosti i neprekidnosti. Razvoj teorije fazi mera motivisan je činjenicom da svojstvo aditivnosti u nekim primenama suviše restriktivno, i shodno tome, nerealno. Zbog toga neki autori koriste termin monotone mere umesto fazi mere. Tako se, fazi mera prema Sugenu dobija zamenom osobine aditivnosti sa uslovima monotonosti (u odnosu na postavljenu inkluziju) i neprekidnosti, ali je kasnije utvrđeno da je neprekidnost takođe restriktivna, pa je zamenjena uslovom poluneprekidnosti. Mere verovanja i plauzibiliteta, kao i mere neohodnosti i mogućnosti su jedine poluneprekidne mere.

4.1 Skupovne strukture

U ovoj odeljku navode se neke osnovne definicije i svojstva skupovnih struktura [64]. Za zadati niz $\{E_n\}$ podskupova od X, **limes superior** tog niza u oznaci $\limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ ili $\overline{\lim} E_n$, je skup svih tačaka iz X koje pripadaju E_n za beskonačno mnogo vrednosti $n \in \mathbb{N}$.
Skup svih tačaka iz X koje pripadaju E_n za sve ali konačne vrednosti $n \in \mathbb{N}$ zovemo **limes inferior** tog niza i označavamo sa $\liminf\limits_{n\to\infty} E_n$ ili $\underline{\lim} E_n$.

Teorema 4.1.1

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i}^{\infty} E_i,$$

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i}^{\infty} E_i.$$

Teorema 4.1.2

$$\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n.$$

Ukoliko je $\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n = E$, taj skup nazivamo **limes niza** $\{E_n\}$ i označavamo sa $\lim_{n\to\infty} E_n$. Često pišemo i $E_n \to E$.

Za niz skupova $\{E_n\}$ kažemo da je **neopadajući** niz (**gotovo rastući** niz) ako je $E_n \subseteq E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (za sve $n \geq n_0$ za neko $n_0 \in \mathbb{N}$), a **nerastići** ako je $E_n \supseteq E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ (za sve $n \geq n_0$ za neko $n_0 \in \mathbb{N}$).
Ako je $\{E_n\}$ rastući niz skupova i $\lim_{n\to\infty} E_n = E$, obično pišemo $E_n \nearrow E$, a ukoliko je $\{E_n\}$ opadajući niz skupova pišemo $E_n \searrow E$.

U nastavku će biti prikazane familije podskupova.

Neka je X neprazan skup.

Definicija 4.1.1 Prsten *podskupova skupa X je neprazna familija $\mathcal{R} \subset P(X)$ zatvorena u odnosu na skupovne operacije unije i razlike, tj.*

$$(\forall M, N \in \mathcal{R}) \;\; M \cup N, M \setminus N \in \mathcal{R}.$$

Svaki prsten sadrži $\emptyset$.

Teorema 4.1.3 *Operacije simetrične razlike i preseka (eng. symmetric difference, intersection) su zatvorene operacije za prsten. Važi i da je svaka familija skupova zatvorena za simetričnu razliku i presek, prsten.*

Dokaz.
$(\Rightarrow)$

$$(\forall M, N \in \mathcal{R}) M \triangle N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M) \in \mathcal{R},$$

$$(\forall M, N \in \mathcal{R}) M \cap N = (M \cup N) \setminus (M \triangle N) \in \mathcal{R}.$$

$(\Leftarrow)$

$$(\forall M, N \in \mathcal{R}) M \cup N = (M \triangle N) \triangle (M \cap N) \in \mathcal{R},$$

$$(\forall M, N \in \mathcal{R}) M \setminus N = (M \triangle N) \cap M \in \mathcal{R}. \quad \square$$

Teorema 4.1.4 *Svaka familija skupova zatvorena za razliku, presek i uniju disjunktnih skupova je prsten.*

Iz prethodne teoreme i
$(\forall M, N \in \mathcal{R})\ \ M \triangle N = [M \setminus (M \cap N)] \cup [N \setminus (M \cap N)] \in \mathcal{R}.$ $\square$

Familija svih konačnih podskupova od X je prsten.

Definicija 4.1.2 **Algebra** *podskupova skupa X je familija zatvorena za uniju i komplement (ili presek i komplement), tj. važi*

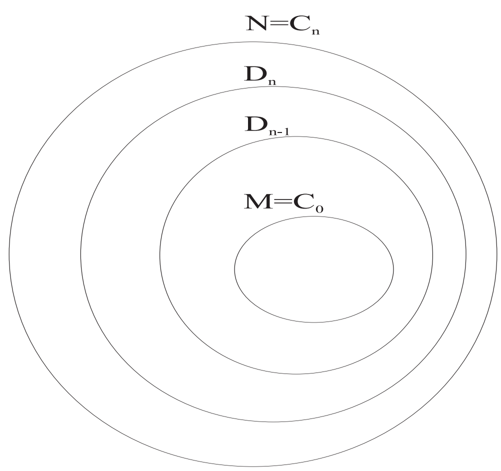
$$(\forall M, N \in \mathcal{R})\ M \cup N, \overline{M} \in \mathcal{R}.$$

$$((\forall M, N \in \mathcal{R})\ M \cap N, \overline{M} \in \mathcal{R}).$$

Teorema 4.1.5 *Algebra je prsten koji sadrži X. Svaki prsten koji sadrži X je algebra.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Iz $M \setminus N = M \cap \overline{N} = \overline{\overline{M} \cup N}$, sledi da je algebra prsten. Iz $M \in \mathcal{R}$ sledi $X = M \cup \overline{M} \in \mathcal{R}$.
Ako pretpostavimo da $X \in \mathcal{R}$, tada $\overline{M} = X \setminus M \in \mathcal{R}$ za sve $M \in \mathcal{R}$. $\square$

Familija svih konačnih podskupova od X i njihovih komplemenata je algebra.
Ako je $\mathcal{R}$ prsten, onda je $\mathcal{R} \cup \{M | \overline{M} \in \mathcal{R}\}$ algebra.



Slika 4.1

Definicija 4.1.3 **Poluprsten** *podskupova skupa X je neprazna familija $\mathcal{S} \subset P(X)$ takva da je*

1) zatvorena u odnosu na operaciju preseka, tj.

$$(\forall M, N \in \mathcal{S}) M \cap N \in \mathcal{S}.$$

2) $(\forall M, N \in \mathcal{S}) M \subset N$ *postoji konačna familija* $\{C_0, C_1, ..., C_n\}$, $C_i \in \mathcal{S}$ *tako da* $M = C_0 \subset C_1 \subset ... \subset C_n = N$ *i* $D_i = C_i \setminus C_{i-1}$, $i = 1, ..., n$.

Svaki prsten je i poluprsten. Svaki poluprsten sadrži $\emptyset$.

Definicija 4.1.4 $\sigma-$**Prsten** *podskupova skupa* X *je neprazna familija* $\mathcal{R} \subset P(X)$ *zatvorena u odnosu na skupovne operacije razlike i prebrojive unije, tj.*

$$(\forall M, N \in \mathcal{R}) M \setminus N \in \mathcal{R},$$

$$(\forall M_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \mathcal{R}.$$

Familija svih prebrojivih podskupova nekog skupa je $\sigma-$prsten

Teorema 4.1.6 *Ako je* Σ $\sigma-$*prsten, onda* $\Sigma \cup \{M | \overline{M} \in \Sigma\}$ $\sigma-$*algebra.*

Definicija 4.1.5 $\sigma-$*prsten koji sadrži* X *se naziva* $\sigma-$**algebra**.

Familija svih prebrojivih podskupova nekog skupa i njihovih komplemenata je $\sigma-$prsten

Definicija 4.1.6 *Neprazna familija* $\mathcal{M} \subset P(X)$ *je* **monotona familija** *ako za svaki monotoni niz* $\{M_n\}$, $M_n \in \mathcal{M}$ *imamo da* $\lim_{n \to \infty} M_n \in \mathcal{M}$.

Neka je X topološki prostor. Tada najmanja σ - algebra $B \subset \mathcal{P}(X)$ koja sadrži familiju svih otvorenih skupova se naziva Borel-ova σ- algebra, a njene članove zovemo Borel-ovi skupovi. Po definiciji, sledi da su i zatvoreni skupovi Borelovi, a isto tako i proizvoljne unije zatvorenih skupova.

4.2 Teorija mogućnosti

Ime Teorija mogućnosti uveo je Zadeh [17], inspirisan radom Gainesa i Kohouta [18]. U velikoj meri, može se uporediti sa teorijom verovatnoće, jer je zasnovana na skupovnim funkcijama. Razlikuju se u korišćenju para dualnih (mera) funkcija (mera mogućnosti i mera neophodnosti) umesto samo jedne. Osim toga, nije aditivna i ima smisla na ordinalne strukture. Više se može naći u radovima D. Dubois, M. Prade [19], [46],[64].

4.2.1 Fazi mere

Definicija 4.2.1 *Uzmimo da je X neprazan skup i Σ $\sigma-$algebra na X. Fazi mera (u širem smislu) m na $\sigma-$ algebri Σ je preslikavanje $m : \Sigma \to [0, \infty]$ sa svojstvima*

(Mf_1) $m(\emptyset) = 0$,

(Mf_2) $(\forall E, F \in \Sigma)\ E \subset F \ \Rightarrow\ m(E) \leq m(F)$.

Često se stavlja i uslov $m(X) = 1$ i tada kažemo da je mera **regularna**.
Trojku (X, Σ, m) nazivamo **prostor sa fazi merom**.
Ukoliko je ispunjen i uslov

$$(Mf_3)\quad E_n \subset E_{n+1}\ ,\ E_n \in \Sigma\ ,\ n \in \mathbb{N}, \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma \ \Rightarrow\ m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n),$$

odnosno

$$(Mf_4)\quad E_n \supset E_{n+1}\ ,\ E_n \in \Sigma\ ,\ n \in \mathbb{N}, \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma \text{ i postoji } n_0 \text{ takvo da je } m(E_{n_0}) < \infty$$
$$\Rightarrow\ m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n),$$

datu fazi meru nazivamo neprekidna od dole, odnosno od gore fazi mera ili fazi mera u užem smislu.

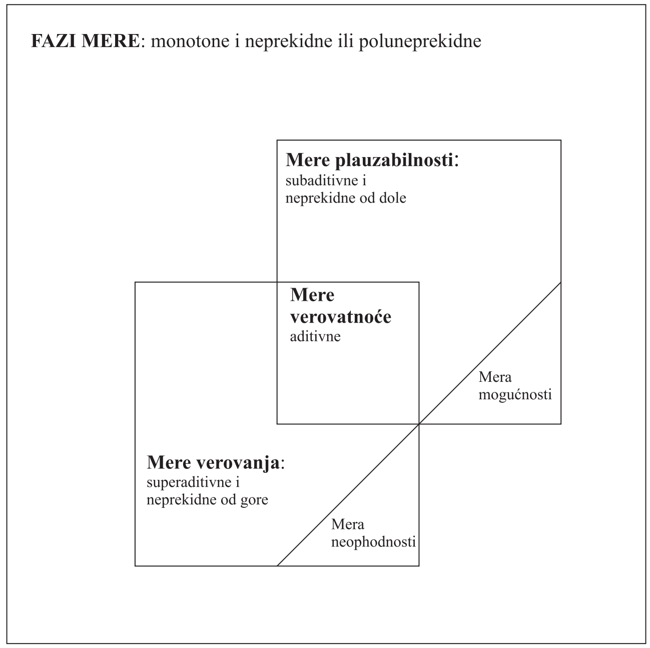
Regularna fazi mera je od dole (odnosno od gore) poluneprekidna fazi mera ako važi Mf_1, Mf_2, Mf_3 (neprekidna od dole) (Mf_1, Mf_2, Mf_4 (neprekidna odgore)). Ako je jedno od toga, onda kažemo da je poluneprekidna fazi mera (eng. *semicontinuos fuzzy measure*).
Važi

$$\begin{aligned} E \cap F \subset E \wedge E \cap F \subset F \ &\Rightarrow\ m(E \cap F) \leq m(E) \wedge m(E \cap F) \leq m(F) \\ &\Rightarrow\ m(E \cap F) \leq \min\{m(E), m(F)\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} E \cup F \supset E \wedge E \cup F \supset F \ &\Rightarrow\ m(E \cup F) \geq m(E) \wedge m(E \cup F) \geq m(F) \\ &\Rightarrow\ m(E \cup F) \geq \max\{m(E), m(F)\}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ako je (X, Σ) merljiv prostor a Y topološki prostor, tada je funkcija $f : X \to Y$ merljiva ako $f^{-1}(O) \in \Sigma$ za svaki otvoren skup O iz Y. U slučaju da je $E = B$ tada za kažemo da je Borel merljiva, a kada je Y baš realna osa ili kompleksna ravan

Borel-ova funkcija (neprekidne funkcije su Borel-ove).



Slika 4.2 Odnos između klasa fazi mera

Primere važnih specijalnih fazi mera navodimo u nastavku.

4.2.2 Mera verovanja i mera plauzabilnosti

Mere verovanja i plauzibliteta su posebni oblici monotonih mera. Mera povezana sa unapred stvorenim utiskom se naziva mera verovanja. Mera povezana sa informacijama koje su moguće ili prihvatljive (plauzibilne), naziva se mera plauzibiliteta, videti [19] i [66].

Definicija 4.2.2 *Skupovna funkcija* $b : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$, $b(\emptyset) = 0$, $b(X) = 1$ *se naziva* **funkcija (mera) verovanja** *(eng. belief function) ako zadovoljava još i uslov:*

$$b(M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n) \geq \sum_{i=1}^{n} b(M_i) - \sum_{i<j} b(M_i \cap M_j) + ... + (-1)^{n+1} b(M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n). \tag{4.3}$$

Ako je X beskonačan skup zahteva se uslov Mf_4.
Kada su u uslovu (4.3) skupovi M_i po parovima disjunktni, tj. $M_i \cap M_j = \emptyset$, imamo

$$b(M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n) \geq b(M_1) + b(M_2) + ... + b(M_n). \tag{4.4}$$

U specijalnom slučaju za $n = 2$, imamo dva disjunktna skupa, pa nejednakost 4.4 postaje

$$b\,(M) + b(\bar{M}) \leq 1 = b(M \cup \bar{M}) = b(X). \tag{4.5}$$

Mera verovanja u osnovi je veličina $b(A)$, koja izražava stepen dokaza.

Definicija 4.2.3 *Skupovna funkcija $pl : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$, $pl(\emptyset) = 0$, $pl(X) = 1$ se naziva* **funkcija (mera) plauzabiliteta** *(eng. plausability function) ako zadovoljava i uslov:*

$$pl(M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n) \leq \sum_{i=1}^{n} pl(M_i) - \sum_{i<j} pl(M_i \cup M_j) + ... + (-1)^{n+1} pl(M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_n).$$

Ako je X beskonačan skup zahteva se uslov Mf_3.

Za mere verovanja i plauzibiliteta važi

$$pl\,(M) = 1 - b(\bar{M})$$
$$b\,(M) = 1 - pl(\bar{M}). \tag{4.6}$$

Kada je $n = 2$, iz prethodne jednakosti dobijamo

$$pl\,(M) + pl(\bar{M}) \geq 1.$$

Iz nejednakosti 4.5 i 4.6 imamo da je

$$pl\,(M) \geq b\,(M)\,.$$

4.2.3 Mera neophodnosti i mera mogućnosti

Definicija 4.2.4 Funkcija (mera) neophodnosti *nec (eng. necessity function) je fazi mera na (X, Σ) ako važi*

$$nec(\bigcap_{i \in I} M_i) = \inf_{i \in I} nec(M_i),$$

za bilo koju familiju podskupova $\{M_i | i \in I\}$ u Σ takvu da $\bigcap_{i \in I} M_i \in \Sigma$, gde je I proizvoljan skup indeksa.

Definicija 4.2.5 Funkcija (mera) mogućnosti *pos (eng. possibility function) je funkcija za koju važi*

$$pos(\bigcup_{i\in I} M_i) = \sup_{i\in I} pos(M_i),$$

za bilo koju familiju podskupova $\{M_i | i \in I\}$ *u* Σ *takvu da* $\bigcup_{i\in I} M_i \in \Sigma$, *za proizvoljan skup indeksa* I.

Imamo

$$nec(M) = 1 - pos(\bar{M}).$$

Funkcija neophodnosti je specijalan slučaj funkcije verovanja i ima osobinu (pogledati 4.1)

$$nec(M \cap N) = nec(M) \wedge nec(N) = \min\{nec(M), nec(N)\}.$$

Funkcija mogućnosti je specijalan slučaj funkcije plauzibiliteta i ima osobinu (pogledati 4.2)

$$pos(M \cup N) = pos(M) \vee pos(N) = \max\{pos(M), pos(N)\}.$$

Takođe, mera mogućnosti je specijalna mera plauzibiliteta, pa mere zadovoljavaju i

$$pos\,(M) = 1 - nec(\bar{M})$$
$$nec\,(M) + nec(\bar{M}) \leq 1.$$
$$pos\,(M) + pos(\bar{M}) \geq 1.$$

Teorema 4.2.1 *Svaka funkcija mogućnosti pos na skupu* $\mathcal{P}(X)$ *je funkcija data sa*

$$pos(M) = \sup_{u\in M} f(u),$$

za svako $M \in \mathcal{P}(M)$, *gde je* f *nazivamo funkcijom raspodele mere mogućnosti sa* X *u* $[0,1]$.

U slučaju da je X konačan skup onda možemo pisati

$$pos(M) = \max_{u\in M} f(u),$$

Definicija 4.2.6 *Neka je* S $t-$*konorma i* m *(neprekidna od dole) fazi mera. Kažemo da je* m $S-$*dekompozabilna mera u odnosu na trougaonu konormu* S, *ako važi sledeća osobina:*

$$m(M \cup B) = m(M)Sm(N),$$

za $M, N \in \Sigma$ *i* $M \cap N = \emptyset$.

Videti na primer S. Weber [67],[68], E. Pap [69], [70].

Specijalan slučaj je Sugeno-va mera g_λ

$$g_\lambda(M \cup N) = g_\lambda(M) + g_\lambda(N) + \lambda g_\lambda(M) g_\lambda(N),$$

za $M \cap N = \emptyset$, gde je $-1 < \lambda < \infty$, koja je dekompozabilna mera u odnosu na Sugeno-vu $t-$konormu (videti 2.1).

Vrlo opšta klasa skupovnih funkcija koja obuhvata i dekompozabilne mere je data sledećom definicijom.

Definicija 4.2.7 *Nul-aditivna fazi mera m, je ona fazi mera za koju važi:*

$$m(M \cup N) = m(M),$$

kada $M, N \in \Sigma, \;\; M \cap N = \emptyset$, i $m(N) = 0$.

Monografija E. Pap [71] je posebno posvećena ovoj klasi skupovnih funkcija.
Druge važne klase fazi mera se mogu naći u radovima I. Dobrakov [72], L. Drewnowski [73], H. Ichihashi, M. Tanaka, K. Asai [74], T. Murofushi, M. Sugeno [75], E. Pap [76],[77], H. Suzuki [78], Z. Wang [79].

Dalja uopštenja se odnose na tzv. uopštene mere, funkcije definisane na mrežama i sa vrednostima u mreži sa nekom algebarskom operacijom [80]. Tako se izučavaju i mere definisane na fazi $\sigma-$agebrama i sa vrednostima koje su fazi realni brojevi.

Glava 5

Teorija kredibiliteta

Teorija kredibiliteta postavljena je od strane Liu [81] 2004. godine, a koju je unapredio [20] 2007. godine, kao granu matematike za proučavanje ponašanja fazi fenomena. Kako bi definisali samodualnu meru, Liu i Liu [21] predstavili su koncept mere kredibiliteta 2002. godine, a dovoljan i neophodan uslov za meru kredibiliteta dali su Li i Liu [22]. Naglasak u ovom poglavlju se uglavnom odnosi na meru kredibiliteta, prostor kredibiliteta, fazi promenljivu, očekivanu vrednost i procese neizvesnosti.

5.1 Definisanje mere kredibiliteta

Označimo sa $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup nepraznog skupa X i svaki njegov element ćemo zvati događaj. Kako bi se prezentovala aksiomatska definicija kredibiliteta, neophodno je dodeliti svakom događaju A broj $Cr(A)$, odnosno kredibilitet da će se događaj A desiti.

Definicija 5.1.1 *[21] Neka je X neprazan skup i J proizvoljan skup indeksa. Skupovnu funkciju $Cr : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ takvu da za sve $A, B \subset X$ imamo:*
C_1) $Cr(X) = 1$ (normalnost);
C_2) $A \subset B \Rightarrow Cr(A) \leq Cr(B)$ (monotonost);
C_3) $Cr(A) + Cr(\overline{A}) = 1$ (samodualnost);
C_4) $Cr(\bigcup_{j\in J} A_j) = \sup_{j\in J} Cr(A_j)$, za bilo koje skupove $A_j \subset X, j \in J$
za koje je $\sup_{j\in J} Cr(A_j) < 1/2$,
nazivamo **mera kredibiliteta** *na X.*

Mera kredibiliteta je neaditivna mera sa osobinom samodualnosti.

Trojka $(X, \mathcal{P}, Cr)$ se naziva prostor kredibiliteta.

5.2 Fazi promenljive i osobine

Fazi promenljiva ζ je definisana kao merljiva funkcija iz prostora kredibiliteta na skup realnih brojeva, tj. za Borel-ov skup B realnih brojeva je

$$\{\zeta \in B\} = \{u \in X \,|\zeta(\theta) \in B\} \in \mathcal{P}$$

odnosno ζ je merljiva funkcija, a $\{\zeta \in A\}$ je uvek događaj.

Osobine fazi promenljive:

1) nenegativna je ako $\mathrm{Cr}\{\zeta < 0\} = 0$;

2) pozitivna ako je $\mathrm{Cr}\{\zeta \leq\ 0\} = 0$;

3) neprekidna, ako je $\mathrm{Cr}\{\zeta =\ u\}$ neprekidna funkcija od u;

4) prosta ako postoji konačan niz $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$ tako da $\mathrm{Cr}\{\zeta \neq u_1,\ \zeta \neq u_2, \ldots, \zeta \neq u_k\} = 0$;

5) diskretna ako postoji prebrojivi niz $\{u_1, u_2, \ldots\}$ tako da $\mathrm{Cr}\{\zeta \neq u_1, \zeta \neq u_2, \ldots\} = 0$.

Definicija 5.2.1 *Neka su ζ_1 i ζ_2 fazi promenljive definisane na prostoru kredibiliteta. Kažemo da je $\zeta_1 = \zeta_2$, ako je $\zeta_1(u) = \zeta_2(u)$, za skoro sve $u \in X$.*

Definicija 5.2.2 *$n-$dimenzionalni fazi vektor je definisan kao funkcija iz prostora kredibiliteta na skup $n-$dimenzionalnih realnih vektora.*

Teorema 5.2.1 *Vektor $(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ je fazi vektor ako i samo ako su $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ fazi promenljive.*

Kako bi smo uveli fazi aritmetiku, pretpostavimo da su sve fazi promenljive definisane na prostoru kredibiliteta i neka je funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ fazi promenljive na prostoru kredibiliteta. Tada je fazi promenljiva $\zeta = f(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ definisana sa $\zeta(\theta) = f(\zeta_1(\theta), \zeta_2(\theta), \ldots, \zeta_n(\theta))$ za svako $\theta \in \Theta$.

Teorema 5.2.2 *Neka je ζ $n-$ dimenzionalni fazi vektor i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcija. Tada je $f(\zeta)$ fazi promenljiva.*

Dokaz. Kako je $f(\zeta)$ funkcija iz prostora kredibiliteta na skup realnih brojeva, ona je fazi promenljiva. $\square$

Sada možemo definisati zbir i proizvod fazi promenljivih na prostoru kredibiliteta

$$(\zeta_1+\zeta_2)(\theta)=\zeta_1(\theta)+\zeta_2(\theta) \quad \text{i} \quad (\zeta_1\times\zeta_2)(\theta)=\zeta_1(\theta)\times\zeta_2(\theta),$$

sa svako $\theta\in\Theta$.

Fazi promenljiva ima jedinstvenu funkciju pripadnosti koja predstavlja stepen mogućnosti da ζ uzme pripisane vrednosti. Funkcija pripadnosti fazi promenljive definisana je na sledeći način

$$\mu(u)=(2Cr(\{\zeta=u\})\wedge 1,\ u\in\mathbb{R}.$$

Teorema 5.2.3 *(Inverzna teorema). Neka je ζ fazi promenljiva i μ njena funkcija pripadnosti. Tada za bilo koji skup B realnih brojeva, imamo*

$$Cr(\{\zeta\in B\})=\frac{1}{2}\left(\sup_{u\in B}\mu(u)+1-\sup_{u\in\bar{B}}\mu(u)\right).$$

Sledeća teorema daje potreban i dovoljan uslov za funkciju pripadnosti.

Teorema 5.2.4 *Funkcija $\mu:\mathbb{R}\to[0,1]$ je funkcija pripadnosti ako i samo ako* $\sup\mu(u)=1$.

Osobine fazi promenljive sa funkcijom pripadnosti μ:

i) ne negativna akko $\mu(u)=0$ za sve $u<0$;

ii) pozitivna akko $\mu(u)=0$ za sve $u\leq 0$;

iii) prosta akko μ uzima ne nula vrednosti na konačnom broju tačaka;

iv) diskretno akko μ uzima ne nula vrednosti na prebrojivom skupu tačaka;

v) neprekidan akko je μ neprekidna funkcija.

5.3 Očekivana vrednost

Operator očekivane vrednosti slučajnih promenljivih je veoma značajan u teoriji mogućnosti. Za fazi promenljive postoji vise načina definisanja očekivane vrednosti [82], [83], [84] i [85]. Uopštenje definicije operatora očekivane vrednosti fazi promeljive (neprekidnog i diskretnog tipa) dali su Liu i Liu u [21].

Definicija 5.3.1 *Očekivana vrednost fazi promenljive ζ definisana je sa*

$$E[\zeta] = \int_0^\infty Cr(\{\zeta \geq s\})ds - \int_{-\infty}^0 Cr(\{\zeta \leq s\})ds$$

gde je bar jedan integral konačan.

Primer 5.3.1 Neka je ζ jednakomoguća (eng. *equipossible) fazi promenljiva* (m, r). *Ako je* $m \geq 0$, *tada je* $Cr(\{\zeta \leq s\}) \equiv 0$ *kada je* $s < 0$, *i*

$$Cr(\{\zeta \geq s\}) = \begin{cases} 1, & s \leq m \\ 0,5, & m < s \leq r \\ 0, & s > r. \end{cases}$$

$E[\zeta] = \left(\int_0^m ds + \int_m^r 0,5ds + \int_r^\infty 0ds\right) - \int_{-\infty}^0 0ds = \frac{m+r}{2}$. *Ako je* $r \leq 0$, *onda je* $Cr(\{\zeta \geq s\}) \equiv 0$ *kada je* $s > 0$, *i*

$$Cr(\{\zeta \leq s\}) = \begin{cases} 1, & s \geq r \\ 0,5, & m \leq s < r \\ 0, & s < m. \end{cases}$$

$E[\zeta] = \int_0^\infty 0ds - \left(\int_{-\infty}^m 0ds + \int_m^r 0,5ds + \int_r^0 1ds\right) = \frac{m+r}{2}$.
Ako je $m < 0 < r$, *tada je*

$$Cr(\{\zeta \geq s\}) = \begin{cases} 0,5, & 0 \leq s \leq r \\ 0, & s > r, \end{cases}$$

$$Cr(\{\zeta \leq s\}) = \begin{cases} 0, & s < m \\ 0,5, & m \leq s \leq 0, \end{cases}$$

$E[\zeta] = \left(\int_0^r 0,5ds + \int_r^\infty 0ds\right) - \left(\int_{-\infty}^m 0ds + \int_m^0 0,5ds\right) = \frac{m+r}{2}$.
Pa je očekivana vrednost uvek jednaka $\frac{m+r}{2}$.

Primer 5.3.2 Trougaona fazi promenljiva $\zeta = (l, m, r)$ ima očekivanu vrednost

$$E[\zeta] = (l + 2m + r)/4,$$

dok je za trapezoidnu fazi promenljivu $\zeta = (k, l, m, r)$, očekivana vrednost jednaka

$$E[\zeta] = (k + l + m + r)/4.$$

5.4 Procesi neodređenosti

Inspirisan Brown-ovim kretanjem i geometrijskim Brown-ovim kretanjem, Liu je u [86] uveo koncepte fazi procesa, nazvane C proces i geometrijski C proces.

Definicija 5.4.1 *Za dati skup indeksa J prostor kredibiliteta $(X, \mathcal{P}, Cr)$, fazi proces je funkcija iz $J \times (X, \mathcal{P}, Cr)$ u skup realnih brojeva.*

Drugim rečima, fazi proces $X(t, \theta)$ je funkcija dve promenljive, takva da je funkcija $X(t^*, \theta)$ fazi promenljiva za svako t^*. Nadalje će fazi proces $X(t, \theta)$ biti obeležen sa X_t zbog jednostavnijeg zapisa.

Definicija 5.4.2 *Fazi proces X_t ima nezavisne korake ako su $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ nezavisne fazi promenljive u bilo kom vremenu $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$. Fazi proces ima stacionarne korake (priraštaj) ako su za svako $s > 0$ koraci $X_{s+t} - X_s$ jednako raspodeljene fazi promenljive za sve $t > 0$.*

Definicija 5.4.3 *Fazi proces C_t je C proces ako*

i) $C_0 = 0$,

ii) *C_t ima stacionarne i nezavisne priraštaje,*

iii) *svaki priraštaj $C_{s+t} - C_s$ je fazi promenljiva sa normalnom raspodelom, očekivanom vrednošću et i varijansom $\sigma^2 t^2$, čija je funkcija pripadnosti*

$$\mu(u) = 2\left(1 + e^{\frac{\pi|u-et|}{\sqrt{6}\sigma t}}\right)^{-1},$$

gde je $u \in \mathbb{R}$.

Za C proces se kaže da je standardni proces ako su parametri $e = 0$ i $\sigma = 1$.

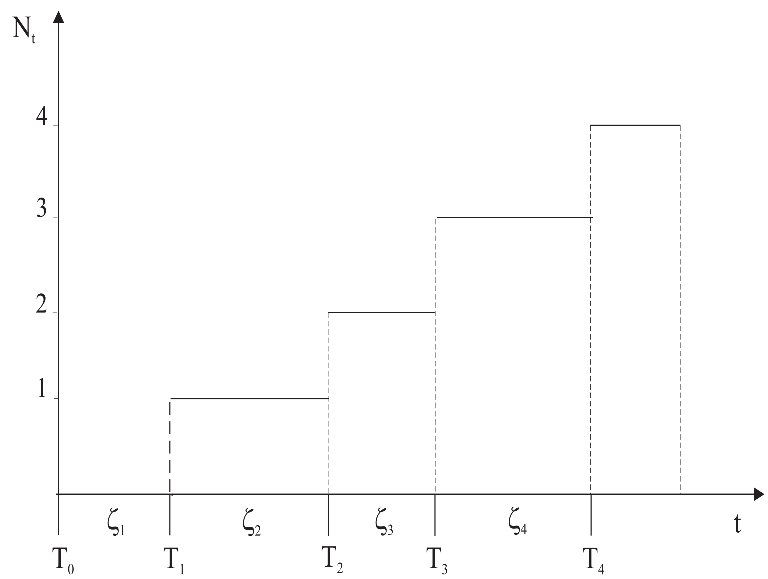
Definicija 5.4.4 *Neka je C_t standardni C proces. Fazi proces $G_t = e^{(et+\sigma C_t)}$ je geometrijski C proces sa funkcijom pridanosti*

$$\mu(u) = 2\left(1 + e^{\frac{\pi|\ln u - et|}{\sqrt{6}\sigma t}}\right)^{-1},$$

i očekivanom vrednošću $E[\zeta] = e^e\sqrt{6}\sigma \csc\left(\sqrt{6}\sigma\right), \sigma < \pi/\sqrt{6}$.

Primer 5.4.1 Pretpostavimo da su zadovoljeni uslovi iz definicije 5.4.3, odnosno X_t ima stacionarne i nezavisne priraštaje i svaki priraštaj $C_{s+t} - C_s$ je trougaona fazi promenljiva (lt, mt, rt). Tada je X_t fazi proces.

Neodređeni proces obnavljanja je proces u kojem se događaji odvijaju kontinuirano i nezavisno jedan od drugog u neodređenim vremenima.



Slika 5.1. Grafički prikaz puta procesa obnavljanja

Neka su nezavisne slučajne fazi promenljive $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$sa jednakim raspodelama koje označavaju uzastopne događaje u jednakim vremenskim koracima i definisanim $T_0 = 0$ i $T_n = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n$ za $n \geq 1$. Tada se T_n može interpretirati kao vreme čekanja do pojave n-tog događaja. Za bilo koje $t > 0$ neka je N_t broj prebrajanja u $(0, t]$, odnosno $N_t = \max\limits_{n \geq 0} \{n \,| T_n \leq t\}$, tada se N_t naziva fazi proces obnavljanja.

Skaki korak je neprekidna sdesna rastuća funkcija koja uzima samo cele brojeve i svaki skok ove funkcije je 1. Proces nema skok u vremenu 0. Kako je $N_t \geq n$ ako i samo ako je $S_t \leq t$, imamo

$$Cr\{N_t \geq n\} = Cr\{T_n \leq t\} = Cr\left\{\zeta_1 \leq \frac{t}{n}\right\}$$

Liu u [86] daje i druge procese, D proces, hibridni proces i proces koji je nazvan Liu proces.

Definicija 5.4.5 *Neka je $(X, \mathcal{P}, Cr)$ prostor neodređenosti i neka je $T \times (X, \mathcal{P}, Cr)$ potpuno uređen skup (tj. vreme). Neodređen proces je funkcija $X_t(\gamma)$ iz T na skup realnih brojeva takav da je $\{X_t \in B\}$ događaj za svaki Borelov skup B realnih brojeva u svakom vremenu t.*

Definicija 5.4.6 *Za neodređeni proces C_t se kaže da je* **Liu-ov proces** *ako*

(i) $C_0 = 0$ i skoro svi putevi su Lipschitz neprekidni,

(ii) C_t ima stacionarne i nezavisne priraštaje,

(iii) svaki priraštaj $C_{s+t} - C_s$ je normalna neodređena promenljiva sa očekivanom vrednosti 0 i varijansom t^2, čija je raspodela

$$\Phi(u) = (1 + exp(-\frac{\pi u}{\sqrt{3}t}))^{-1}, \quad u \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Liu-ov integral omogućava nam da integralimo neodređeni proces (*integrand*) u odnosu na Liu-ov proces (*integrator*). Rezultat Liu integrala je još jedan neizvesni proces.

Definicija 5.4.7 *Neka je X_t neodređeni proces i C_t je Liu-ov proces. Za svaku particiju zatvorenog intervala $[u, v]$, gde je $u = t_1 < t_2 < ... < t_{m+1} = v$, imamo*

$$\Delta = \max_{1 \leq j \leq m} |t_{j+1} - t_j|. \tag{5.2}$$

Tada je Liu-ov integral od X_t u odnosu na C_t definisan kao

$$\int_u^v X_t dC_t = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{j=1}^{m} X_{t_j}(C_{t_{j+1}} - C_{t_j}),$$

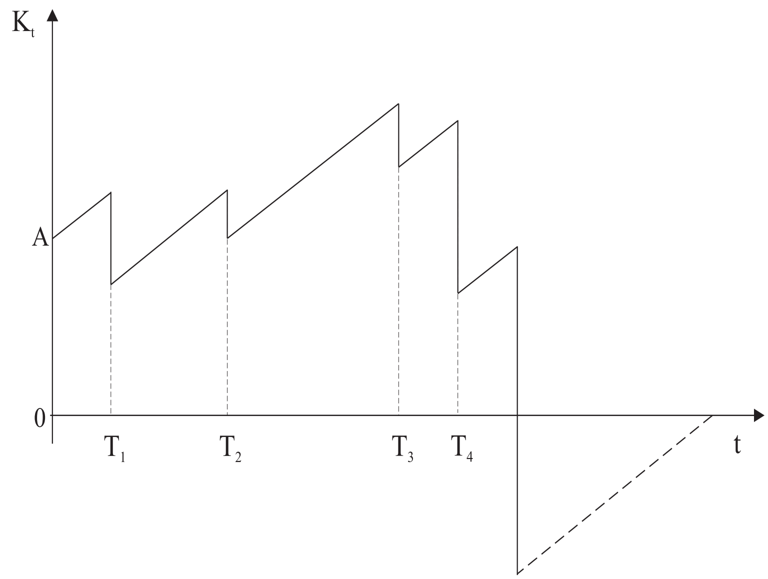
pod uslovom da granična vrednost postoji skoro sigurno i da je konačna. U ovom slučaju, neodređeni proces X_t se smatra Liu integrabilnim.

Pošto su X_t i C_t neodređene promenljive u svakom trenutku t, granica u (5.2) je takođe neodređena promenljiva pod uslovom da granica postoji gotovo sigurno i konačna je. Stoga je proces X_t integrabilan u odnosu na C_t akko je granica u (5.2) neodređena promenljiva.

Liu je u [87] dao model osiguranja u uslovima neodređenosti. Neka je osnovni kapital osiguravajuće kompanije A, r premijska stopa, rt je ukupan prihod od premija do vremena t. Proces nastanka šteta u osiguranju je proces neodređenosti.

Neka su nezavisne i identično raspodeljene slučajne promenljive $\eta_1, \eta_2, \eta_3...$ iznosi isplaćenih šteta u trenucima $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ koje su takođe nezavisne i identično raspodeljene slučajne promenljive. Tada je $R_t = \sum_{i=1}^{N_t} \eta_i$ obnovljiv proces ukupnih šteta i $N = (Nt : t \geq 0)$ pripadajući brojeći proces. Sada se kapital osiguravajuće kompanije u trenutku t može predstaviti sa

$$K_t = A + rt - R_t.$$



Slika 5.2. Proces rizika u osiguranju

5.5 Kredibilistička logika

Cilj fazi logike je modelovanje neodređenih ili nepreciznih, ili suviše kompleksnih, ili nedovoljno definisanih opisa koje je teško analizirati konvencionalnim metodama. Osim objektivnih zakona u njihovom funkcionisanju značajne su i subjektivne ocene, odnosno faktori [88]. Drugo, u slučaju kada se izdvaja podsistem iz njegovog sistema, uvode se granice koje ustvari ne postoje, što rezultuje stvaranje skokovitih prelaza umesto neprekidnih [4]. Najveću primenu ima u ekspertnim sistemima, veštačkoj inteligenciji, teoriji odlučivanja, kao i drugim oblastima tehnike i savremeninih informacionih tehnologija. Na primer, u ekspertskim sistemima, većina pravila se dobija od strane eksperata i korisnika, i kao takva nisu potpuno pouzdana.

Istraživači su ukazali na kontroverze praktičnog tumačenja istine vrednosti formula. Nilsson je, u svom radu [89], to objasnio kao verovatnu vrednost i dokazao da kada su vrednosti verovatnoće svih propozicija ili 0 ili 1, verovatnoća vrednosti istine se svodi na klasičnu vrednost istine. Dubois i Prade u [90] je razmatraju kao vrednosti neophodnosti i mogućnosti i uvode logiku mogućnosti kao novu granu neizvesnih logičkih sistema. Detaljno istraživanje o značenju vrednosti istine u višeznačnoj logici dato je u [91].
Li i Liu u svom radu [92] uvode kredibilističku logiku, koju dalje razvijaju u [93].

Obeležimo sa ζ fazi propoziju gde vrednost 1 označava istinitu vrednost sa kredibilitetom Z, a vrednost 0 označava neistinitu vrednost.
Fazi formula je definisana kao član minimalnog skupa M konačnog niza primarnih simbola koji ih povezuju i koji zadovoljavaju:

(i) $\zeta \in M$ za svaku fazi propoziciju ζ,

(ii) ako je $X \in M$ tada je $\neg X \in M$,

(iii) ako je $X_1 \in M$ i $X_2 \in M$ tada je $X_1 \vee X_2 \in M$.

Primećujemo da je fazi formula X fazi varijabla koja uzima vrednosti 0 i 1. Iz poslednjeg uslova imamo da, kako su X_1 i X_2 fazi varijable, $X_1 \vee X_2$ je fazi varijabla definisana sa $X_1 \vee X_2 = \max\{X_1,\ X_2\}$, gde $X = 1$ označava da je X istinito, a $X = 0$ da je X neistinito. Konjukcija i implikacija se dalje mogu definisati sa

$$X_1 \wedge X_2 = \neg(\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

$$X_1 \Rightarrow X_2 = \neg X_1 \vee X_2.$$

Istinita vrednost je ključni koncept u kredibilističkoj logici, definisana sa

$$\tau\left(X\right) = Cr\left\{X = 1\right\}.$$

Istinita vrednost fazi propozicije je njegova vrednost kredibiliteta, $Cr\left\{p = 1\right\} = Z$. Ako je $\tau\left(X\right) > 0,5$ tada je fazi formula donekle tačna, a $\tau\left(X\right) = 1$ da je X sigurno tačno. Ako je $\tau\left(X\right) < 0,5$ tada je X donekle netačno i $\tau\left(X\right) = 0$ znači da je X sigurno netačno. Posebno, $\tau\left(X\right) = 0,5$ označava da je X potpuno neodređeno.

Teorema 5.5.1 *Neka je X fazi formula koja sadrži fazi propozicije $\zeta_1, \ldots \zeta_n$ čija je istinita funkcija $f\left(u_1, \ldots, u_n\right)$. Tada je istinita vrednost data sa*

$$\tau\left(X\right) = \frac{1}{2}\left(\max_{f(u_1,\ldots,u_n)=1} \mu\left(u_1, \ldots, u_n\right) + 1 - \max_{f(u_1,\ldots,u_n)=0} \mu\left(u_1, \ldots, u_n\right)\right)$$

gde je μ zajednička funkcija pripadnosti fazi promenljivih $\zeta_1, \ldots \zeta_n$.

Dokaz teoreme direktno sledi iz inverzne teoreme.

Ovako definisana istinita vrednost zadovoljava uslove normalnosti, samodulanosti, monotonosti i subaditivnosti. U poređenju sa posibilističkom logikom [90] prisutna je doslednost kredibilističke logike sa klasičnom logikom. Naime, fazi propozicija je definisana kao par (ζ, α) gde je ζ izjava, a α vrednost neophodnosti.
Neka je X fazi formula koja sadrži fazi propozicije $(\zeta_1, \alpha_1), \ldots, (\zeta_n, \alpha_n)$. Ako je istinita funkcija f, onda je mera mogućnosti definisana sa

$$pos\,(X) = \max_{f(u_1,\ldots,u_n)=1} \min_{1\le j\le n} \mu_j\,(u_j)\,,$$

gde je $\mu_j\,(u_j) = 1$ ako je $u_j = 1$ i $\mu_j\,(u_j) = 1 - \alpha_j$ ako je $u_j = 0$, dok je mera neophodnosti definisana sa

$$nec\,(X) = 1 - pos\,(\neg X)\,.$$

Primer 5.5.1 Neka je fazi propozicija "Milica je muško sa istinitosnom vrednošću 0,1". Jasno je da je "Milica je žensko"verovatnije od "Milica je muško". Dalje je $pos\,(\zeta) = 1, pos\,(\neg\zeta) = 1 - 0,1 = 0,9$ odnosno $pos\,(\zeta) > pos\,(\neg\zeta)\,.$
Iz definicije mere neophodnosti nec imamo da je $nec\,(\zeta) = 1-0,9 = 0,1$ i $nec\,(\neg\zeta) = 1-1 = 0$, odnosno $nec\,(\zeta) > nec\,(\neg\zeta)\,.$ Poslednja nejednakost implicira da je "Milica je muško"više moguće od "Milica je žensko".
Sa druge strane, ako je 0,1 objašnjeno kao vrednost kredibiliteta, tada iz definicije istinite vrednosti $\tau\,(X) = Cr\,\{X = 1\}\,,$ imamo da je $\tau\,(\zeta) = 0,1$ i $\tau\,(\neg\zeta) = 0,9.$ Poslednje implicira "Milica je žensko"je više moguće od "Milica je muško".
Dalje, neka je ζ fazi propozicija sa vrednošću mere neophodnosti 0 i imamo $nec\,(\zeta) = 0$ i $pos\,(\zeta) = 1$, pa je dalje lako dokazati da je $nec\,(\neg\zeta) = 0$ i $pos\,(\neg\zeta) = 1$, što nije u saglasnosti sa klasičnom logikom.

Glava 6

Teorija generalizovanog kredibiliteta

U ovom delu rada prikazani su originalni rezultati koji predstavljaju teoriju generalizovanog kredibiliteta [24]. Rezutate možemo podeliti u tri grupe. Prvo je definisana nova mera koja je nazvana mera $c-$kredibiliteta. Mera $c-$kredibiliteta na X je skupovna funkcija $\mathsf{cr} : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ sa involutivnim fazi komplementom c, takva da su zadovoljene osobine normalnosti, monotonosti, samodualnosti i maksimalnosti. Nadalje su za meru c-kredibiliteta uvedene i dokazane bitnije osobine, između ostalog subaditivnost i poluneprekidnost. U drugoj grupi rezultata definisan je integral zasnovan na meri $c-$kredibiliteta sa njegovim glavnim svojstvima. Treći deo rezultata odnose se na $c-$kredibilitet u fazi okruženju. Mera je uvedena kao regularna mera u relaciji sa agregiranom vrednošću mera mogućnosti i neophodnosti.

6.1 Mera c-kredibiliteta

Neka je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup nepraznog skupa X.

Definicija 6.1.1 *Neka je* $c : [0,1] \to [0,1]$ *involutivni fazi komplement, čiji je ekvilibrium* ϵ. *Mera* $\boldsymbol{c-}$ ***kredibiliteta*** *na* X *je skupovna funkcija* $\mathsf{cr} : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ *takva da*

CR_1) $\mathsf{cr}(\emptyset) = 0$;

CR_2) $(\forall M, N \in \mathcal{P}(X))\ \ M \subset N \Rightarrow \mathsf{cr}(M) \le \mathsf{cr}(N)$;

CR_3) $(\forall M \in \mathcal{P}(X))\ \ \mathsf{cr}(\overline{M}) = c(\mathsf{cr}(M))$;

CR_4) $\mathsf{cr}(\bigcup_{j\in J} M_j) = \sup_{j\in J} \mathsf{cr}(M_j)$, *za bilo koje skupove* $M_j \in \mathcal{P}(X)$, $j \in J$, *za koje je* $\sup_{j\in J} \mathsf{cr}(M_j) < \epsilon$, *gde je* J *proizvoljan skup indeksa.*

Trojka $(X, \mathcal{P}(X), \mathsf{cr})$ *se naziva prostor* $\boldsymbol{c-}$ ***kredibiliteta.***

Kako je komplement c involutivna funkcija važi

$$\mathsf{cr}(M) = c(\mathsf{cr}(\overline{M})).$$

Jasno je da $\mathsf{cr}(X) = \mathsf{cr}(\overline{\emptyset}) = c(\mathsf{cr}(\emptyset)) = c(0) = 1$.
Takođe je

$$0 \leq \mathsf{cr}(M) \leq 1$$

za bilo koje $M \in \mathcal{P}(X)$.
Zaista $\emptyset \subset A \subset X \Rightarrow 0 = \mathsf{cr}(\emptyset) \leq \mathsf{cr}(M) \leq \mathsf{cr}(X) = 1$.

Teorema 6.1.1 *Neka je* cr *mera* $c-$*kredibiliteta, tada za sve* $M, N \in \mathcal{P}(X)$ *važe uslovi*

$$i)\ \mathsf{cr}(M \cup N) \leq \epsilon \ \Rightarrow\ \mathsf{cr}(M \cup N) = \mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(N).$$

$$ii)\ \mathsf{cr}(M \cap N) \geq \epsilon \ \Rightarrow\ \mathsf{cr}(M \cap N) = \mathsf{cr}(M) \wedge \mathsf{cr}(N).$$

Dokaz. i) Ako je $\mathsf{cr}(M \cup N) < \epsilon$, tada iz monotonosti $\mathsf{cr}(M) \leq \mathsf{cr}(M \cup N)$ i $\mathsf{cr}(N) \leq \mathsf{cr}(M \cup N)$, tj. $\mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(M) \leq \mathsf{cr}(M \cup N)$, $\mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(M) < \epsilon$, zbog CR_4) važi $\mathsf{cr}(M \cup N) = \mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(N)$.
Pretpostavimo da je $\mathsf{cr}(M \cup N) = \epsilon$ i $\mathsf{cr}(M \cup N) = \mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(N)$, tada mora biti da je $\mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(N) < \epsilon$, i možemo primeniti uslov CR_4), odakle dobijamo

$$\mathsf{cr}(M \cup N) = \mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(N) < \epsilon,$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom.

ii) Iz $\mathsf{cr}(M \cap N) \geq \epsilon$, osobine monotnosti fazi komplementa i činjenice da je ϵ ekvilibrijum, sledi $\epsilon = c(\epsilon) \geq c(\mathsf{cr}(M \cap N))$. Dalje, iz osobine CR_2) imamo $c(\mathsf{cr}(M \cap N)) = c(\mathsf{cr}(\overline{\overline{M} \cup \overline{N}})) = \mathsf{cr}(\overline{M} \cup \overline{N})$ i iz osobine i), dobijamo

$$\mathsf{cr}(M \cap N) = c(\mathsf{cr}(\overline{M \cap N})) = c(\mathsf{cr}(\overline{M} \cup \overline{N}))$$

odakle je

$$c(\mathsf{cr}(\overline{M}) \vee \mathsf{cr}(\overline{N})) = c(\mathsf{cr}(\overline{M})) \wedge c(\mathsf{cr}(\overline{N})) = \mathsf{cr}(M) \wedge \mathsf{cr}(N)$$

što je trebalo dokazati. $\square$

Teorema 6.1.2 *(Zakon subaditivnosti) Neka je c involutivni fazi komplement takav da $c(u) \geq 1 - u$ za sve $u \in [0,1]$. Tada važi subaditivnost, tj.*

$$(\forall M, N \in \mathcal{P}(X)) \quad \mathsf{cr}(M \cup N) \leq \mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(N).$$

Dokaz. Ako je $\mathsf{cr}(M), \mathsf{cr}(N) \in [0, \epsilon)$, tada iz osobine CR_4) sledi

$$\mathsf{cr}(M \cup N) = \mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(N) \leq \mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(N).$$

Neka je $\mathsf{cr}(M) \in [\epsilon, 1]$ ili $\mathsf{cr}(N) \in [\epsilon, 1]$ i $\mathsf{cr}(M) \geq \epsilon$. Tada je

$$\mathsf{cr}(\overline{M}) = c(\mathsf{cr}(M)) \leq c(\epsilon) = \epsilon.$$

Iz $\overline{M} = \overline{M} \cap (N \cup \overline{N}) = (\overline{M} \cap N) \cup (\overline{M} \cap \overline{N})$, i iz $\overline{M} \cap N \subset \overline{M} \Rightarrow \mathsf{cr}(\overline{M} \cap N) \leq \mathsf{cr}(\overline{M}) \leq \epsilon$, $\overline{M} \cap \overline{N} \subset \overline{M} \Rightarrow \mathsf{cr}(\overline{M} \cap \overline{N}) \leq \mathsf{cr}(\overline{M}) \leq \epsilon$, možemo primeniti osobinu i), pa je

$$\mathsf{cr}(\overline{M}) = \mathsf{cr}((\overline{M} \cap N) \cup (\overline{M} \cap \overline{N})) = \mathsf{cr}(\overline{M} \cap N) \vee \mathsf{cr}(\overline{M} \cap \overline{N}).$$

Iz Leme 2.2.2 imamo $c(u \vee v) = c(u) \wedge c(v)$ i sledi da je

$$\mathsf{cr}(M) = c(\mathsf{cr}(\overline{M})) = c(\mathsf{cr}(\overline{M} \cap N)) \wedge c(\mathsf{cr}(\overline{M} \cap \overline{N})).$$

Sada, iz osobine $(u \wedge v) + w = (u + w) \wedge (v + w)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(N) &= [c(\mathsf{cr}(\overline{M} \cap N)) + \mathsf{cr}(N)] \wedge [c(\mathsf{cr}(\overline{M} \cap \overline{N})) + \mathsf{cr}(N)] \\ &= [c(\mathsf{cr}(\overline{M \cup \overline{N}})) + \mathsf{cr}(N)] \wedge [c(\mathsf{cr}(\overline{M \cup N})) + \mathsf{cr}(N)] \\ &= [\mathsf{cr}(M \cup \overline{N}) + \mathsf{cr}(N)] \wedge [\mathsf{cr}(M \cup N) + \mathsf{cr}(N)]. \end{aligned}$$

Kako bi subaditivnost bila ispunjena, tj. $\mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(N) \geq \mathsf{cr}(M \cup N)$, mora biti

$$\mathsf{cr}(M \cup \overline{N}) + \mathsf{cr}(N) \geq \mathsf{cr}(M \cup N) \quad \text{i} \quad \mathsf{cr}(M \cup N) + \mathsf{cr}(N) \geq \mathsf{cr}(M \cup N).$$

Druga nejednakost je očigledna.
Da bi smo dokazali prvu nejednakost, pretpostavićemo suprotno tj. $\mathsf{cr}(M \cup N) > \mathsf{cr}(M \cup \overline{N}) + \mathsf{cr}(N)$. Sada se koriste aksiome CR_2) i CR_3) i pretpostavka $c(u) \geq 1 - u$, pa imamo

$$\mathsf{cr}(M \cup N) > \mathsf{cr}(M \cup \overline{N}) + \mathsf{cr}(N) \geq \mathsf{cr}(\overline{N}) + \mathsf{cr}(N) = c(\mathsf{cr}(N)) + \mathsf{cr}(N) \geq 1,$$

što je nemoguće.
Prema tome, nejednakost je tačna i subaditivnost je ispunjena. $\square$

Teorema 6.1.3 *Neka je* $M_n \downarrow$ *tj.* $M_n \supset M_{n+1}$, $M_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) = 0$. *Tada za sve* $M \in \mathcal{P}(X)$ *važi:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M \cup M_n) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M \setminus M_n) = \mathsf{cr}(M).$$

Dokaz. Iz osobina monotonosti i subaditivnosti mere cr, dobijamo

$$M \subset M \cup M_n \Rightarrow \mathsf{cr}(M) \leq \mathsf{cr}(M \cup M_n) \leq \mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(M_n).$$

Iz teoreme o uklještenju, zbog $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) = 0$, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M \cup M_n) = \mathsf{cr}(M)$. Analogno,

$$M \setminus M_n \subset M \subset (M \setminus M_n) \cup M_n \Rightarrow$$

$$\mathsf{cr}(M \setminus M_n) \leq \mathsf{cr}(M) \leq \mathsf{cr}((M \setminus M_n) \cup M_n) \leq \mathsf{cr}(M \setminus M_n) + \mathsf{cr}(M_n).$$

Dalje sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M \setminus M_n) \leq \mathsf{cr}(M) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M \setminus M_n) = \mathsf{cr}(M)$, i tada je

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M \setminus M_n) = \mathsf{cr}(M). \quad \square$$

Teorema 6.1.4 *(Zakon poluneprekidnosti) Za bilo koji niz* $\{M_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) = \mathsf{cr}(\lim\limits_{n\to\infty} M_n)$ *je tačno ako je ispunjen jedan od sledećih uslova*
i) $M_n \uparrow M$ *i* $(\mathsf{cr}(M) \leq \epsilon$ *ili* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) < \epsilon)$;
ii) $M_n \downarrow M$ *i* $(\mathsf{cr}(M) \geq \epsilon$ *ili* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) > \epsilon)$.

Dokaz. *i*) Prvo možemo primetiti da je za sve monotone nizove skupova $\{M_n\}$ postoji $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$ i da je jednak $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$, tj. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n$, odnosno $M_n \uparrow M$, tj. $M_n \downarrow M$, respektivno. Takođe postoji i $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{M_n}$ i imamo $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{M_n} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} M_n}$.
Kako je $\mathsf{cr}(M) \leq \epsilon$, to je iz osobine monotonosti kredibiliteta je $M_n \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n = M$ $\Rightarrow$ $\mathsf{cr}(M_n) \leq \mathsf{cr}(M) \leq \epsilon$ za svako $n \in \mathbb{N}$.
Iz $M_n \subset M_{n+1}$ imamo $\mathsf{cr}(M_n) \leq \mathsf{cr}(M_{n+1})$, pa je niz realnih brojeva $\{\mathsf{cr}(M_n)\}$, ograničen (sa gornje strane) i konvergira svom supremumu.
Zbog toga, iz aksiome CR_4) imamo $\mathsf{cr}(M) = \mathsf{cr}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{cr}(M_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n)$.
U slučaju da je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) < \epsilon$, iz prethodnog razmatranja dobijamo $\lim\limits_{i\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) = \sup\limits_{n} \mathsf{cr}(M_n) < \epsilon$, i iz aksiome CR_4), sledi da je $\mathsf{cr}(M) = \mathsf{cr}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} M_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{cr}(M_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n)$.

ii) Pretpostavimo da je $\mathsf{cr}(M) \geq \epsilon$. Tada iz aksiome CR_3) dobijamo $\mathsf{cr}(\overline{M}) = c(\mathsf{cr}(M)) \leq c(\epsilon) = \epsilon$, a iz $M_n \downarrow M$, tj. $M_n \supset M_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ i iz osobine monotonosti fazi komplementa sledi da je $\overline{M_n} \subset \overline{M_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, odnosno $\overline{M_n} \uparrow \overline{M}$. Sada, iz i), $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(\overline{M_n}) = \mathsf{cr}(\overline{M})$ i osobine neprekidnosti c (sledi iz Leme 2.2.1), imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) = \lim_{n\to\infty} c(\mathsf{cr}(\overline{M_n})) = c(\lim_{n\to\infty} \mathsf{cr}(\overline{M_n})) = c(\mathsf{cr}(\overline{M})) = \mathsf{cr}(M).$$

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) > \epsilon$. Na osnovu prethodnog, i iz pretpostavke $M_n \downarrow M$, sledi da je $\overline{M_n} \uparrow \overline{M}$.
Iz Leme 2.2.1 sledi da je fazi komplement c bijektivna funkcija, te je ona monotono opadajuća funkcija. Zbog toga je $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) > \epsilon \;\Rightarrow\; c(\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n)) < c(\epsilon)$.
Sada, iz neprekidnosti c imamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{cr}(\overline{M_n}) = \lim_{n\to\infty} c(\mathsf{cr}(M_n)) = c(\lim_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n)) < c(\epsilon) = \epsilon.$$

Koristeći uslov i), dobijamo $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(\overline{M_n}) = \mathsf{cr}(\lim\limits_{n\to\infty} \overline{M_n})$, tj.
$\lim\limits_{n\to\infty} c(\mathsf{cr}(M_n)) = \mathsf{cr}(\overline{\lim\limits_{n\to\infty} M_n})$, i iz $c(\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n)) = c(\mathsf{cr}(\lim\limits_{n\to\infty} M_n))$, je konačno $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{cr}(M_n) = \mathsf{cr}(\lim\limits_{n\to\infty} M_n)$. $\square$

Teorema 6.1.5 *Mera kredibiliteta na X je aditivna ako i samo ako postoje najviše dva singltona u $\mathcal{P}(X)$ koji uzimaju nenula vrednost kredibiliteta.*

Dokaz. Neka je mera kredibiliteta cr aditivna. Pretpostavimo da postoji više od dva singltona koji uzimaju nenula vrednost kredibiliteta, na primer $\{u_1\}, \{u_2\}$ i $\{u_3\}$: $\mathsf{cr}(\{u_1\}) \geq \mathsf{cr}(\{u_2\}) \geq \mathsf{cr}(\{u_3\}) > 0$.
Ako je $\mathsf{cr}(\{u_1\}) \geq \epsilon$, tada iz CR_3) sledi $\mathsf{cr}(\overline{\{u_1\}}) = c(\mathsf{cr}(\{u_1\})) \leq c(\epsilon) = \epsilon$, i imamo $\{u_2, u_3\} \subset \overline{\{u_1\}}$, i dalje iz CR_2) dobijamo da je

$$\mathsf{cr}(\{u_2, u_3\}) \leq \mathsf{cr}(\overline{\{u_1\}}) \leq \epsilon.$$

Koristeći aksiomu CR_4) imamo

$$\mathsf{cr}(\{u_2, u_3\}) = \mathsf{cr}(\{u_2\}) \vee \mathsf{cr}(\{u_3\}) < \mathsf{cr}(\{u_2\}) + \mathsf{cr}(\{u_3\}),$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom aditivnosti.
Ako je $\mathsf{cr}(\{u_1\}) < \epsilon$, tada je $\mathsf{cr}(\{u_3\}) \leq \mathsf{cr}(\{u_2\}) < \epsilon$, i koristeći CR_4) imamo da je

$$\mathsf{cr}(\{u_2, u_3\}) = \mathsf{cr}(\{u_2\}) \vee \mathsf{cr}(\{u_3\}) < \epsilon.$$

Dalje sledi da je

$$\mathsf{cr}(\{u_2, u_3\}) = \mathsf{cr}(\{u_2\}) \vee \mathsf{cr}(\{u_3\}) < \mathsf{cr}(\{u_2\}) + \mathsf{cr}(\{u_3\}),$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom aditivnosti, pa postoje najviše dva singltona koji uzimaju nenula vrednost kredibiliteta.

Obrnuto, pretpostavimo da postoje najviše dva singltona, na primer $\{u_1\}$ i $\{u_2\}$: $\mathsf{cr}(\{u_1\}), \mathsf{cr}(\{u_2\}) > 0$.
Razmotrimo dva proizvoljna disjunktna skupa M i N. Ako je $\mathsf{cr}(M) = 0$ ili $\mathsf{cr}(N) = 0$, tada iz teoreme o poluneprekidnosti imamo

$$\mathsf{cr}(M \cup N) \leq \mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(N) = \mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(N),$$

i koristeći osobinu monotonosti kredibiliteta $M, N \subset M \cup N \Rightarrow \mathsf{cr}(M), \mathsf{cr}(N) \leq \mathsf{cr}(M \cup N)$, imamo $\mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(N) \leq \mathsf{cr}(M \cup N)$, i pa je $\mathsf{cr}(M \cup N) = \mathsf{cr}(M) \vee \mathsf{cr}(N)$, ispunjeno i u slučaju subaditivnosti.
U slučaju da je $\mathsf{cr}(M) > 0$ i $\mathsf{cr}(N) > 0$, sledi da svaki od skupova M i N mora sadržati po jedan od elemenata u_1 i u_2, na primer $u_1 \in M$ i $u_2 \in N$.
U suprotnom, da je na primer $u_1, u_2 \notin M$, bilo bi $\mathsf{cr}(M) = \mathsf{cr}(\bigcup_{u \in M} \{u\}) = \sup_{u \in M}(\{u\}) = 0$.
Iz istog razloga, svaki skup $(\overline{M \cup N})$ koji ne sadrži u_1 i u_2 je mere 0, tj. $\mathsf{cr}(\overline{M \cup N}) = 0$.
Iz monotonosti i subaditivnosti mere kredibiliteta, dalje imamo

$$\mathsf{cr}(M \cup N) \leq \mathsf{cr}(M \cup N \cup \overline{M \cup N}) \leq \mathsf{cr}(M \cup N) + \mathsf{cr}(\overline{M \cup N}) = \mathsf{cr}(M \cup N),$$

i iz $\mathsf{cr}(M \cup N \cup \overline{M \cup N}) = \mathsf{cr}(X) = 1$, tada je $\mathsf{cr}(M \cup N) = 1$.
Slično,

$$\mathsf{cr}(M) \leq \mathsf{cr}(M \cup \overline{M \cup N}) \leq \mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(\overline{M \cup N}) = \mathsf{cr}(M),$$

$\mathsf{cr}(M \cup \overline{M \cup N}) = \mathsf{cr}(M)$, tada je

$$\mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(N) = \mathsf{cr}(M \cup \overline{M \cup N}) + \mathsf{cr}(N) \geq \mathsf{cr}(M \cup \overline{M \cup N} \cup N) = \mathsf{cr}(X) = 1,$$

i mora biti da je $\mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(N) = 1$.
Iz prethodnog sledi da je

$$\mathsf{cr}(M \cup N) = \mathsf{cr}(M) + \mathsf{cr}(N),$$

pa je aditivnost dokazana. $\square$

Pretpostavimo da je dat kredibilitet svakog singltona.

Teorema 6.1.6 *Neka je X neprazan skup i $\mathsf{cr} : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ mera kredibiliteta. Tada važe tzv. uslovi ekstenzije kredibiliteta:*

$$\sup_{u \in X} \mathsf{cr}(\{u\}) \geq \epsilon \tag{6.1}$$

$$\mathsf{cr}(\{u^*\}) \geq \epsilon \;\; \Rightarrow \;\; \sup_{u \neq u^*} \mathsf{cr}(\{u\}) = c(\mathsf{cr}(\{u^*\})). \tag{6.2}$$

Dokaz. Ako je $\sup_{u\in X} \mathsf{cr}(\{u\}) < \epsilon$, tada koristeći CR_4) imamo $1 = \mathsf{cr}(X) = \mathsf{cr}(\bigcup_{u\in X} \{u\}) = \sup_{u\in X} \mathsf{cr}(\{u\}) < \epsilon$, što je kontradikcija, pa je $\sup_{u\in X} \mathsf{cr}\{u\} \geq \epsilon$.
Pretpostavimo da je $\mathsf{cr}(\{u^*\}) \geq \epsilon$, za neko $u^* \in X$.
Primenom CR_4), dobijamo

$$c(\mathsf{cr}(\{u^*\})) = \mathsf{cr}(\bigcup_{u\in X\setminus\{u^*\}} \{u\}) = \sup_{u\in X\setminus\{u^*\}} \mathsf{cr}(\{u\}) = \sup_{u\neq u^*} \mathsf{cr}(\{u\}),$$

pa je i druga formula tačna. $\square$

Važi Teorema ekstenzije $c-$kredibiliteta:

Teorema 6.1.7 *Neka je* $c : [0,1] \to [0,1]$ *involutivni fazi komplement, čiji je ekvilibrijum* ϵ, *i* $\mathsf{cr} : \{\{u\} | u \in X\} \to \mathbb{R}_0^+$, $X \neq \emptyset$ *skupovna funkcija takva da važe (6.1) i (6.2). Tada* cr *ima jedinstvenu ekstenziju na meru* $c-$*kredibiliteta* $\mathsf{cr} : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+$, *koja je definisana sa*

$$\mathsf{cr}(M) = \begin{cases} \sup_{u\in M} \mathsf{cr}(\{u\}), & \sup_{u\in M} \mathsf{cr}(\{u\}) < \epsilon \\ c(\sup_{u\in \overline{M}} \mathsf{cr}(\{u\})), & \sup_{u\in M} \mathsf{cr}(\{u\}) \geq \epsilon \end{cases} \tag{6.3}$$

Dokaz. Dokažimo prvo da je skupovna funkcija cr definisana sa (6.3) mera kredibiliteta.
CR_1) Kako uzimamo da je $\sup_{u\in\emptyset} f(u) = 0$, to je $\sup_{u\in\emptyset} \mathsf{cr}(\{u\}) = 0 < \epsilon$, pa je $\mathsf{cr}(\emptyset) = \sup_{u\in\emptyset} \mathsf{cr}(\{u\}) = 0$.
CR_2) Ako je $M \subset N$, tada je $\overline{M} \supset \overline{N}$. Primetimo da je supremum funkcije nad nadskupom veći nego nad podskupom, te važi $\sup_{u\in M} \mathsf{cr}(\{u\}) \leq \sup_{u\in N} \mathsf{cr}(\{u\})$ i $\sup_{u\in\overline{M}} \mathsf{cr}(\{u\}) \geq \sup_{u\in\overline{N}} \mathsf{cr}(\{u\})$.
Neka je $\sup_{u\in M} \mathsf{cr}(\{u\}) < \epsilon$. Tada imamo

$$\mathsf{cr}(M) = \sup_{u\in M} \mathsf{cr}(\{u\}) \leq \sup_{u\in N} \mathsf{cr}(\{u\}) \leq \mathsf{cr}(N).$$

Ukoliko je $\sup_{u\in M} \mathsf{cr}(\{u\}) \geq \epsilon$, zbog $\sup_{u\in M} \mathsf{cr}(\{u\}) \leq \sup_{u\in N} \mathsf{cr}(\{u\})$, imamo da je $\sup_{u\in N} \mathsf{cr}(\{u\}) \geq \epsilon$, pa iz (6.3) sledi $\mathsf{cr}(M) = c(\sup_{u\in\overline{M}} \mathsf{cr}(\{u\}))$ i $\mathsf{cr}(N) = c(\sup_{u\in\overline{N}} \mathsf{cr}(\{u\}))$.
Kako je c nerastuća funkcija, iz $\sup_{u\in\overline{M}} \mathsf{cr}(\{u\}) \geq \sup_{u\in\overline{N}} \mathsf{cr}(\{u\})$ sledi $c(\sup_{u\in\overline{M}} \mathsf{cr}(\{u\})) \leq c(\sup_{u\in\overline{N}} \mathsf{cr}(\{u\}))$, odnosno $\mathsf{cr}(M) \leq \mathsf{cr}(N)$.

$CR_3)$ $\sup\limits_{u\in X}\mathsf{cr}(\{u\}) = \max\{\sup\limits_{u\in M}\mathsf{cr}(\{u\}), \sup\limits_{u\in \overline{M}}\mathsf{cr}(\{u\})\} \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \sup\limits_{u\in M}\mathsf{cr}(\{u\}) \geq \epsilon \vee$ $\sup\limits_{u\in \overline{M}}\mathsf{cr}(\{u\}) \geq \epsilon$.
$u^* \in M \;\Rightarrow\; u^* \notin \overline{M} \subset X\setminus\{u^*\} = \bigcup\limits_{u\in X\setminus\{u^*\}}\{u\} \;\Rightarrow\; \sup\limits_{u\in\overline{M}}\mathsf{cr}(\{u\}) \leq \sup\limits_{u\in X\setminus\{u^*\}}\mathsf{cr}(\{u\}) \leq \epsilon$,
$u^* \in \overline{M} \;\Rightarrow\; u^* \notin M \subset X\setminus\{u^*\} = \bigcup\limits_{u\in X\setminus\{u^*\}}\{u\} \;\Rightarrow\; \sup\limits_{u\in\overline{M}}\mathsf{cr}(\{u\}) \leq \sup\limits_{u\in X\setminus\{u^*\}}\mathsf{cr}(\{u\}) \leq \epsilon$,
$\mathsf{cr}(\{u^*\}) \geq \epsilon \;\Rightarrow\; \sup\limits_{u\neq u^*}\mathsf{cr}(\{u\}) = c(\mathsf{cr}(\{u^*\})) \leq c(\epsilon) = \epsilon$.

$$\mathsf{cr}(\overline{M}) = c\left(\sup_{u\in(\overline{\overline{M}})}\mathsf{cr}(\{u\})\right) = c\left(\sup_{u\in M}\mathsf{cr}(\{u\})\right) = c(\mathsf{cr}(M)).$$

$CR_4)$ Za bilo koju kolekciju $\{M_i\}$ sa $\sup_i \mathsf{cr}(M_i) < \epsilon$, imamo

$$\mathsf{cr}(\bigcup_i M_i) = \sup_{u\in\bigcup_i M_i}\mathsf{cr}(\{u\}) = \sup_i \sup_{u\in M_i}\mathsf{cr}(\{u\}) = \sup_i \mathsf{cr}(M_i).$$

Dakle, cr zadovoljava sve četiri aksiome, pa je mera $c-$kredibiliteta.

Dokažimo sada jedinstvenost. Pretpostavimo da su cr_1 i cr_2 mere kredibiliteta takve da je $\mathsf{cr}_1(\{u\}) = \mathsf{cr}_2(\{u\})$ za svako $u \in X$. Pokažimo da je $\mathsf{cr}_1(M) = \mathsf{cr}_2(M)$, za svako $M \in \mathcal{P}(X)$. Razmatramo tri slučaja.
1) $\mathsf{cr}_1(M) < \epsilon$.
Za $u \in M \;\Leftrightarrow\; \{u\} \subset M$ iz monotonije je $\mathsf{cr}_1(\{u\}) \leq \mathsf{cr}_1(M)$, pa imamo

$$\sup_{u\in M}\mathsf{cr}_1(\{u\}) \leq \mathsf{cr}_1(M), \tag{6.4}$$

tj. $\sup\limits_{u\in M}\mathsf{cr}_1(\{u\}) < \epsilon$. Slično važi i za meru cr_2, pa možemo primeniti aksiomu $CR_4)$. Sledi

$$\mathsf{cr}_1(M) = \mathsf{cr}_1(\bigcup_{u\in M}\{u\}) = \sup_{u\in M}\mathsf{cr}_1(\{u\}) = \sup_{u\in M}\mathsf{cr}_2(\{u\}) = \mathsf{cr}_2(\bigcup_{u\in M}\{u\}) = \mathsf{cr}_2(M).$$

2) $\mathsf{cr}_1(M) > \epsilon$. Iz samodualnosti mere i monotonije komplementa je $\mathsf{cr}_1(\overline{M}) = c(\mathsf{cr}_1(M)) < c(\epsilon) = \epsilon$. Na osnovu prvog slučaja sledi da je $\mathsf{cr}_1(\overline{M}) = \mathsf{cr}_2(\overline{M})$, što dalje implicira $\mathsf{cr}_1(M) = c(\mathsf{cr}_1(\overline{M})) = c(\mathsf{cr}_2(\overline{M})) = \mathsf{cr}_2(M)$.
3) $\mathsf{cr}_1(M) = \epsilon$. Sada imamo $\mathsf{cr}_1(\overline{M}) = c(\mathsf{cr}_1(M)) = c(\epsilon) = \epsilon$ i analogno (6.4):

$$\mathsf{cr}_2(M) \geq \sup_{u\in M}\mathsf{cr}_2(\{u\}) = \sup_{u\in M}\mathsf{cr}_1(\{u\}) = \mathsf{cr}_1(M) = \epsilon,$$

i $\mathsf{cr}_2(\overline{M}) \geq \sup\limits_{u\in\overline{M}}\mathsf{cr}_2(\{u\}) = \sup\limits_{u\in\overline{M}}\mathsf{cr}_1(\{u\}) = \mathsf{cr}_1(\overline{M}) = \epsilon$.
I konačno je $\mathsf{cr}_2(M) = \epsilon = \mathsf{cr}_1(M)$, čime je jedinstvenost dokazana. $\square$

6.2 Integral baziran na meri c-kredibiliteta

Integrali zasnovani na različitim fazi merama mogu se definisati na razne načine (pogledati na primer [38], [46], [64], [94]).
G.Choquet [65] je uveo integral

$$(C)\int hdm = \int_0^\infty m(\{u : h(u) \geq r\})dr,$$

koji se u slučaju da je m Lebesgue-ova mera svodi na Lebesgue-ov integral.
Sugeno je uveo integral u odnosu na fazi meru $m : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ na podskupu S od Ω

$$(S)\int_S h(u)dm = \sup_{\alpha\in[0,1]} \min[\alpha, m(S \cap \{u : h(u) \geq \alpha\})].$$

Ovaj integral se, u slučaju da je m Lebesgue-ova mera, ne svodi na Lebesgue-ov integral.

U ovom delu rada, uvešćemo integral baziran na meri $c-$ kredibiliteta. Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{P}(X), \mathsf{cr})$ prostor $c-$ kredibiliteta i
S neprekidna $t-$konorma na $[0,1]$ i $\mu \in \mathcal{M} = \{\mu\,|\mu : X \to [0,1]\}$ fazi skupovi na X, tj. njihova funkcija pripadnosti.

Definicija 6.2.1 *Integral baziran na meri $c-$kredibiliteta u odnosu na konormu S, od $\mu \in \mathcal{M}$ definisan je sa*

$$\int\limits_M \mu\,(u)d\mathsf{cr} = \inf_{\alpha\in[0,1]} S\left(\alpha, \mathsf{cr}\left(M \cap {}^{\alpha}\mu\right)\right),$$

gde je ${}^{\alpha}\mu = \{u \in X|\mu(u) \geq \alpha\}$ $\alpha-$ *presek.*

Teorema 6.2.1 *Neka su* $\mathsf{cr}, \mathsf{cr}_1$ *i* cr_2 *mere $c-$kredibiliteta. Za proizvoljne skupove* $M, N \subset X$ *i* $\mu, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$, *sledeća tvrđenja važe:*

i) $\int\limits_M \mu(u)d\mathsf{cr} \in [0,1]$;

ii) $\mu_1 \leq \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_M \mu_1(u)d\mathsf{cr} \leq \int\limits_M \mu_2(u)d\mathsf{cr}$;

iii) $M \subset N \quad \Rightarrow \quad \int\limits_M \mu(u)d\mathsf{cr} \leq \int\limits_N \mu(u)d\mathsf{cr}$;

iv) $\mathsf{cr}_1 \leq \mathsf{cr}_1 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_M \mu(u)d\mathsf{cr}_1 \leq \int\limits_M \mu(u)d\mathsf{cr}_2$;

v) $\mathsf{cr}(M) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_M \mu(u) d\mathsf{cr} = 0;$

vi) $k \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \int\limits_M k d\mathsf{cr} = \mathsf{cr}\,(M) \wedge k.$

Dokaz.
$i)$ Kako infimum čuva poredak, tj. $f(\alpha) \leq g(\alpha) \Rightarrow \inf\limits_{\alpha} f(\alpha) \leq \inf\limits_{\alpha} g(\alpha)$, iz $0 \leq S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu)) \leq 1$ sledi tvrđenje.

$ii)$ Iz osobine $\alpha-$preseka da je $\mu_1 \leq \mu_2 \Rightarrow {}^{\alpha}\mu_1 \subset {}^{\alpha}\mu_2$, monotonosti mere i konorme, i osobine infimuma, dobijamo $A \cap {}^{\alpha}\mu_1 \subset M \cap {}^{\alpha}\mu_2 \Rightarrow \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu_1) \leq \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu_2)$ $\Rightarrow S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu_1)) \leq S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu_2)) \Rightarrow \inf\limits_{\alpha \in [0,1]} S(\mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu_1)) \leq \inf\limits_{\alpha \in [0,1]} S(\mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu_2)).$

$iii)$ Iz $M \subset N \Rightarrow M \cap {}^{\alpha}\mu \subset N \cap {}^{\alpha}\mu$ sledi $\mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu) \leq \mathsf{cr}\,(N \cap {}^{\alpha}\mu)$ $\Rightarrow S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu)) \leq S(\alpha, \mathsf{cr}\,(N \cap {}^{\alpha}\mu)) \Rightarrow \inf\limits_{\alpha \in [0,1]} S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu)) \leq \inf\limits_{\alpha \in [0,1]} S(\alpha, \mathsf{cr}\,(N \cap {}^{\alpha}\mu)).$

$iv)$ $\mathsf{cr}_1 \leq \mathsf{cr}_2 \Rightarrow \mathsf{cr}_1\,(M \cap {}^{\alpha}\mu) \leq \mathsf{cr}_2\,(M \cap {}^{\alpha}\mu) \Rightarrow S(\alpha, \mathsf{cr}_1\,(M \cap {}^{\alpha}\mu)) \leq S(\alpha, \mathsf{cr}_2\,(M \cap {}^{\alpha}\mu)) \Rightarrow \inf\limits_{\alpha \in [0,1]} S(\alpha, \mathsf{cr}_1\,(M \cap {}^{\alpha}\mu)) \leq \inf\limits_{\alpha \in [0,1]} S(\alpha, \mathsf{cr}_2\,(M \cap {}^{\alpha}\mu)).$

$v)$ $M \cap {}^{\alpha}\mu \subset M \Rightarrow \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu) \leq \mathsf{cr}\,(M) = 0 \Rightarrow \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu) = 0 \Rightarrow S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu)) = S(\alpha, 0) = \alpha \Rightarrow \inf\limits_{\alpha \in [0,1]} S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}\mu)) = 0.$

$vi)$ Na osnovu činjenice da je $\alpha \in [0,k] \Rightarrow {}^{\alpha}k = \{u \in u | k \geq \alpha\} = X,\ \alpha \in (k,1] \Rightarrow {}^{\alpha}k = \{u \in X | k \geq \alpha\} = \emptyset$, imamo

$$\begin{aligned}
\int\limits_M k d\mathsf{cr} &= \inf_{\alpha \in [0,1]} S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}k)) \\
&= \inf_{\alpha \in [0,k]} S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}k)) \wedge \inf_{\alpha \in (k,1]} S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M \cap {}^{\alpha}k)) \\
&= \inf_{\alpha \in [0,k]} S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M)) \wedge \inf_{\alpha \in (k,1]} S(\alpha, \mathsf{cr}\,(\emptyset)) \\
&= \inf_{\alpha \in [0,k]} S(\alpha, \mathsf{cr}\,(M)) \wedge \inf_{\alpha \in (k,1]} S(\alpha, 0) \\
&= S(0, \mathsf{cr}\,(M)) \wedge S(k, 0) \\
&= \mathsf{cr}\,(M) \wedge k. \qquad \square
\end{aligned}$$

6.3 C-kredibilitet u fazi okruženju

U svom radu [21] Liu i Liu su predstavili kredibilitet u fazi okruženju, kao prosek mere mogućnosti i mere neophodnosti:

$$Cr(A) = \frac{1}{2}(pos(A) + nec(A)),$$

gde je A skup u prostoru mogućnosti $(X, \mathcal{P}(X), pos)$. U klasičnoj teoriji kredibiliteta, glavni zadatak je naći težinu mera. Međutim, ovde je težina unapred određena i iznosi 0.5. U ovom delu radu, uvešćemo meru c-kredibiliteta u fazi okruženje.

Neka je X trougaoni fazi broj na $(X, \mathcal{P}(X), pos)$, sa funkcijom pripadnosti

$$\mu(u) = \begin{cases} \frac{u-\ell}{m-\ell}, & \ell < u < m \\ \frac{r-u}{r-m}, & m \leq u < r \\ 0, & u \leq \ell \vee r \leq u \end{cases}$$

Mogućnost fazi događaja $\{X \leq u\}$ definišemo sa

$$pos(\{X \leq u\}) = \sup_{w \leq u} \mu(w)$$

i za trougaoni fazi broj data je sa

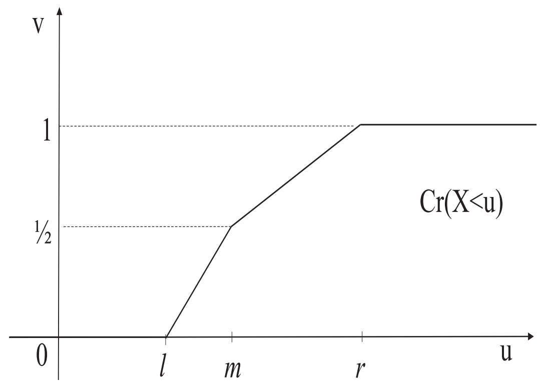
$$pos_\alpha(\{X \leq u\}) = \begin{cases} 0, & u \leq \ell \\ \frac{u-\ell}{r-\ell}, & \ell < u < r \\ 1, & r \leq u \end{cases}$$

Neminovnost fazi događaja $\{X \leq u\}$ data je sa

$$nec(\{X \leq u\}) = 1 - pos(\{X > u\}) = 1 - \sup_{w > u} \mu(w) = \begin{cases} 0, & u \leq m \\ \frac{u-m}{r-m}, & m < u < r \\ 1, & r \leq u \end{cases}$$

Pa je kredibilitet fazi događaja $\{X \leq u\}$ prosek mere moćnosti i mere neophodnosti (slika 6.1), odnosno

$$Cr(\{X \leq u\}) = \frac{1}{2}(pos(\{X \leq u\}) + nec(\{X \leq u\})) = \begin{cases} 0, & u \leq \ell \\ \frac{u-\ell}{2(m-\ell)}, & \ell < u < m \\ \frac{u+r-2m}{2(r-m)}, & m \leq u < r \\ 1, & r \leq u \end{cases}$$



Slika 6.1. Liu kredibilitet

Sada možemo definisati ***c*-kredibilitet u fazi okruženju** u odnosu na agregacionu funkciju h, sa

$$\mathsf{cr}_h(M) = h(pos(M), nec(M)) \tag{6.5}$$

Teorema 6.3.1 *$c-$kredibilitet u fazi okruženju je regularna fazi mera.*

Dokaz. Kako je $\mathsf{cr}_h(\emptyset) = h(pos(\emptyset), nec(\emptyset))$, to je $h(0,0) = 0$.
Takođe, $\mathsf{cr}_h(X) = h(pos(X), nec(X)$, pa je $h(1,1) = 1$.
Za $M \subset N$ sledi da je

$$pos(M) \leq pos(N) \wedge nec(M) \leq nec(N),$$

pa dalje dobijamo

$$\mathsf{cr}_h(M) = h(pos(M), nec(M)) \leq h(pos(N), nec(N)) = \mathsf{cr}_h(M). \quad \square$$

Ako je c standardni fazi komplement, važi i dodatna osobina:

$$\mathsf{cr}_h(\overline{M}) = 1 - \mathsf{cr}_{\overline{h}}(M).$$

Zaista je

$$\begin{aligned} \mathsf{cr}_h(\overline{M}) &= h(pos(\overline{M}), nec(\overline{M})) \\ &= h(1 - nec(M), 1 - pos(M)) = h(1 - pos(M), 1 - nec(M)) \\ &= 1 - \overline{h}(pos(M), nec(M)) = 1 - \mathsf{cr}_{\overline{h}}(M). \end{aligned}$$

Ako je agregaciona funkcija ponderisana aritmetička sredina:

$$h(u, v) = \lambda \cdot u + (1 - \lambda) \cdot v, \lambda \in [0, 1]$$

(koja nije simetrična u opštem slučaju), tada je $c-$kredibilitet u fazi okruženju

$$\mathsf{cr}_\lambda(M) = \lambda \cdot pos(M) + (1-\lambda)\cdot nec(M), \tag{6.6}$$

i $c-$kredibilitet (u fazi okruženju) fazi događaja $\{X \le u\}$ dat je sa (pogledati sliku 6.2)

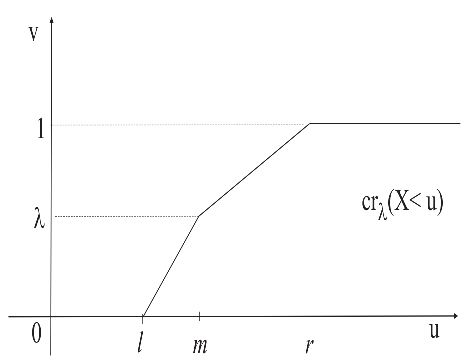
$$\begin{aligned}\mathsf{cr}_\lambda(\{X \le u\}) &= \lambda \cdot pos(\{X \le u\}) + (1-\lambda)\cdot nec(\{X \le u\}) \\ &= \begin{cases} 0, & u \le \ell \\ \lambda \cdot \frac{u-\ell}{m-\ell}, & \ell < u \le m \\ \lambda + (1-\lambda)\cdot \frac{u-m}{r-m}, & m < u < r \\ 1, & r \le u \end{cases}\end{aligned}$$

$c-$kredibilitet (u fazi okruženju) (u odnosu na agregacionu funkciju h) fazi događaja $\{X \le u\}$ (slika 6.3) je dat sa

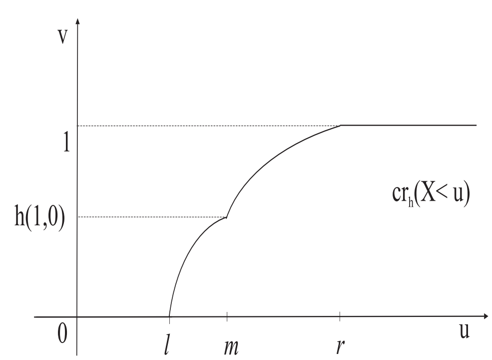
$$\mathsf{cr}_h(\{X \le u\}) = h(pos(\{X \le u\}), nec(\{X \le u\})) = \begin{cases} 0, & u \le \ell \\ h(\frac{u-\ell}{m-\ell}, 0), & \ell < u \le m \\ h(1, \frac{u-m}{r-m}), & m < u < r \\ 1, & r \le u \end{cases}$$

Očekivana vrednost (koju ćemo koristiti u primeni) definišemo sa

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \mathsf{cr}_\lambda(\{X \ge u\})du - \int_{-\infty}^{0} \mathsf{cr}_\lambda(\{X \le u\})du. \tag{6.7}$$



Slika 6.2 $c-$kredibilitet u fazi okruženju fazi događaja $\{X \le u\}$



Slika 6.3 $c-$kredibilitet u fazi okruženju u odnosu na agregacionu funkciju h

Glava 7

Primena teorije neodređenosti u aktuarstvu

U ovom poglavlju su prikazane osnovne procedure klasičnog kredibiliteta, sa odgovarajućim primerima. Nakon toga je dat primer utvrđivanja premije osiguranja primenom c-kredibiliteta koristeći premijsku metodu određivanja budućih premijskih stopa.
Većinu dinamičkih sistema izuzetno je teško modelirati prema tačnim i preciznim matematičkim relacijama, budući da su strukture sistema složene. Metode fazi sistema našle su široku primenu u oceni rizika i drugim segmentima teorije i prakse osiguranja, kao što su klasifikacija i preuzimanje rizika, projektovanje obaveza, određivanje buduće i sadašnje vrednosti, formiranje premija osiguranja, zatim u raspodeli aktive, novčanim tokovima, u investicijama i drugo. Takođe, prikazan je jedan od načina utvrđivanja premije osiguranja koristeći fazi sisteme.

7.1 Pojam i značaj klasičnog kredibiliteta u aktuarstvu

Kredibilitet je procena prediktivne vrednosti u datoj primeni koju aktuar dodaje određenom skupu podataka (prediktivno se ovde koristi u statističkom smislu, a ne u smislu predviđanja budućnosti). Procedura kredibiliteta se koristi i da se poboljša procena parametra u datom zadatku. U aktuarstvu, kredibilitet se može koristiti za određivanje cene, izračunavanje premijske stope, utvrđivanje buduće premijske stope na osnovu iskustva i rezervisanja i dr.
Prilikom primene kredibiliteta, potrebno je razmatrati karakteristike kako iskustva osiguravajućeg društva (kompanije) tako i relevantnog iskustva (iskustvo slično iskustvu društva). Takođe, treba razmotriti najnovije iskustvo u poređenju sa iskustvom iz ranijih perioda. Aktuar treba da obavi stručnu procenu i pažljivo

izabere i koristi relevantno iskustvo. Karakteristike koje treba uzeti u obzir obuhvataju demografiju, pokrića rizika, učestalost, ili druge karakteristike rizika koje se mogu odrediti, a za koje aktuar očekuje da su slične iskustvu društva.
Upotreba metoda kredibiliteta nije uvek precizan matematički proces. Na primer, u nekim situacijama prihvatljiva procedura za spajanje iskustva osiguravajućeg društva sa relevantnim iskustvom može se zasnivati na tome da aktuar dodeli potpuno, delimično ili nikakvo iskustvo osiguravajućegdruštva bez upotrebe strogog matematičkog modela. Aktuar treba da koristi stručnu procenu pri izboru, razvoju ili upotrebi kredibiliteta. Prilikom odlučivanja, aktuar treba da uzme u obzir obim u kojem je iskustvo društva uključeno u relevantno iskustvo. Ako je iskustvo društva bitan deo relevantnog iskustva, aktuar treba na osnovu stručne procene da odluči da li, i kako koristiti to relevantno iskustvo. Takođe, potrebno je uzeti u obzir i homogenost ovih iskustava, pri čemu se mogu isključiti segmenti koji nisu tipični predstavnici iskustva u celini i tako dobiti bolju prediktivnu vrednost. Aktuar takođe treba da uzme u obzir ravnotežu između homogenosti podataka i veličine skupa podataka.

Primer 7.1.1 [95] Pretpostavimo da nedavno iskustvo ukazuje na to da se za osiguranje radnika od posledica nesrećnog slučaja treba naplaćivati premija i iznosu od 5 nj za osiguranje radnika, dok je trenutna premija 10 nj. Postavlja se pitanje iznosa nove premije. Prema opštoj formuli kredibiliteta imamo sledeću ocenu
$Z \cdot [5nj] + (1 - Z) \cdot [10nj]$.
Razmotrimo sledeći primer. U velikoj populaciji vozača automobila, prosečan vozač ima jednu štetu svakih pet godina tj. godišnja učestalost je 0,20 štete godišnje. Slučajno je izabran vozač sa tri štete u toku poslednjih pet godina sa učestalošću od 0,60 šteta godišnje. Potrebna nam je procena očekivane buduće stope učestalosti nezgoda za ovog vozača? Ukoliko nemamo dodatne informacije o vozaču, osim da je iz posmatrane populacije, koristila bi se stopa 0,20. Međutim, znamo na osnovu prošlih podataka da je učestalost šteta posmatranog vozača 0,60. Postoji korelacija između prethodne frekvence šteta i buduće frekvence šteta, ali one nisu u savršenoj korelaciji. Štete su slučajne i čak dobri vozači sa niskim očekivanim frekvencijama šteta imaće nezgode. Takođe, lošim vozačima se ne mora desiti nezgoda više godina. Bolji odgovor od 0,20 ili 0,60 najverovatnije je nešto između: Prema opštoj formuli kredibiiteta očekivana vrednost budućih frekvencija nezgoda vozača je $Z \cdot 0,6 + (1 - Z) \cdot 0,2$.

7.1.1 Tekuća praksa u primeni klasičnog kredibiliteta

Različiti pristupi se koriste u procedurama kredibiliteta. U zavisnosti od problema, pristup se zasniva na proceni, matematičkim modelima ili njihovoj kombinaciji. Neke izabrane matematičke procedure kredibiliteta su razmatrane u nastavku (videti

[2], [3] i [25]).
Klasične procedure kredibiliteta postavljaju pretpostavke u vezi oblika osnovne raspodele verovatnoće. Na osnovu ove funkcije raspodele verovatnoća se izračunavaju odgovarajući broj šteta, iznos premije i drugo, tako da je verovatnoća kretanja šteta društva u okviru naznačenog procenta očekivane vrednosti. Jedan takav pristup koji pretpostavlja da štete prate normalnu raspodelu jeste kredibilitet ograničene fluktuacije. U ovom pristupu se delimični kredibilitet dodeljuje iskustvu društva na osnovu kvadratnog korena odnosa stvarnih šteta u odnosu na standard potpunog kredibiliteta.
Količinu neophodnih podataka za krediblitet nazivamo standardom za potpuni kredibilitet. Tako neki regulatori propisuju potrebnu veličinu uzorka neophodnu za pun kredibiitet za pojedine vrste osiguranja. Na primer, u osiguranju od autoodgovornosti u Kanadi to je 3.246, dok je za osiguranje u slučaju sudara propisan broj 1.082.
Empirijske procedure kredibiliteta mere statističke odnose iskustva društva i njegove srednje vrednosti i uporediva iskustva ranijih perioda, bez referenci na osnovnu raspodelu.
Jedan primer primene Bayes-ovog kredibiliteta je kredibilitet visoke preciznosti koji se takođe naziva linearni Bayes-ov kredibilitet ili Bulmann-ov kredibilitet.
Najnoviji metode kredibiliteta uključuju procenu kredibiliteta u generalizovane linearne modele ili druge multivarijatne tehnike modelovanja [25]. Najuobičajeniji oblici ovih modela se u literaturi često nazivaju generalizovani linearni mešoviti modeli, hijerarhijski modeli i modeli mešovitih efekata. Kod tih modela se kredibilitet može proceniti na osnovu statističkog značaja procene parametra, uticaja modela na podeljenom skupu podataka, ili konzistentnosti bilo kojih od tih mera.

Faktor kredibiliteta Z ima sledeće osobine:

i) $0 \leq Z \leq 1$. Ako je $Z = 1$ podaci zadovoljavaju kriterijum za potpuni kredibilitet. Ako je $Z = 0$ podaci koji su razmatrani nemaju kredibilitet za posmatrani proces. Ukoliko je $0 < Z < 1$, posmatrana količina podataka nije dovoljna i to je tzv. parcijalni kredibilitet.

ii) $\frac{\partial Z}{\partial \xi} > 0$, implicira da kredibilitet podataka raste sa rastom količine istorijskih podataka.

iii) $\frac{\partial}{\partial \xi}(\frac{Z}{\xi}) < 0$, implicira da povećanje broja posmatranih podataka za iznos od 100 jedinica (npr. šteta) imaće veći uticaj na podatke ukoliko je dosadašnji broj posmatranih jedinica bio 500, nego da je broj posmatranih jedinica bio 2.000.

Koristeći teoriju kredibiliteta, aktuar može predvideti buduće vrednosti pojave koju posmatra, na sledeći način: početi sa procenom troškova potraživanja koji proizilazi iz najnovijeg istorijskog iskustva kompanije - μ_k i procene npr. troškova izvedenih iz najprikladnijeg eksternog izvora - μ_i.
Neka je:
n_0 - minimalna veličina uzorka (ako troškovi potraživanja kompanije potiču iz veličine uzorka koji je manji od n_0, onda se zanemaruje iskustvo kompanije i koriste se procena iz drugih izvora).
n^{cr} - veličina uzorka potrebna za pun kredibilitet (ako troškovi za štete kompanije potiču iz veličine uzorka koji je veći od n^{cr}, koristi se iskustvo kompanije i ignoriše se procena iz drugih izvora).
$n^{(k)}$ - broj osiguranika u najskorijem istorijskom periodu društva
C - procenjena vrednost.

Prema teoriji kredibiliteta, C se procenjuje na sledeći način:
Ako je $n^{(k)} \leq n_0$, onda je $C = \mu_i$
Ako je $n^{(k)} \geq n^{cr}$, onda je $C = \mu_k$
Ako je $n^{(k)} > n_0$ i $n^{(k)} < n^{cr}$, onda je $C = Z\mu_k + (1 - Z)\mu_i$.

Postoje dve metode za određivanje težine Z u gornjoj formuli.
Prema metodi ograničene fluktuacije, Z se određuje prema sledećoj formuli:

$$Z = \min\left(\sqrt{\frac{n^{(k)}}{n^{cr}}}, 1\right) \tag{7.1}$$

Prema drugoj metodi, koriste se modeli najveće preciznosti i Z se određuje na sledeći način:

$$Z = \frac{n^{(k)}}{n^{(k)} + \kappa}, \quad \kappa = \frac{\tau}{\alpha} \tag{7.2}$$

gde je κ količnik očekivane vrednosti procesne varijanse i varijanse hipotetičkih sredina.
Za primenu navedenih formula u praksi, aktuarima su potrebne procene vrednosti n_0, n^{cr}, Z i κ. Međutim, nema jednostavnih i opšte prihvaćenih načina procene ovih parametara, što ograničava praktičnu primenu nekih formula kredibiliteta. Aktuarska literatura ne pruža određeni metod procene n_0 koji je opšte prihvaćen i zasnovan na naučnoj osnovi. Ne postoje dobre i prihvatljive procene ni za vrednosti τ i α. Bez dobrih procena ove dve veličine, procena κ, a time i procena Z, postaje problematična [2]. Pristup ograničene fluktuacije daje sledeću formulu za izračunavanje n^{cr}:

$$n^{cr} = \frac{z^2_{(1-p)}\sigma^2}{{m_e}^2\mu^2}$$

Međutim, za primenu ograničenog kredibiliteta potrebno je odrediti četiri veličine: p, m_e, μ i σ^2. Parametri p i m_e, su redom interval poverenja i marginalna greška, za koje se prema definiciji mogu izabrati bilo koje vrednosti. Činjenica je da se u praksi najčešće koristi interval poverenja od 95 % i 5 % za marginalnu grešku. U praksi, aktuar može da koristi druge vrednosti za ove parametre. Tako, za isto osiguranje, jedan aktuar može uzeti u obzir recimo 400 za veličinu uzorka koji proizvodi potpuni kredibilitet za iskustvene podatke, dok drugi aktuar može smatrati da uzorak manji od 1100 nije dovoljan za potpuni kredibilitet. Zakonskom regulativom se u nekim zemljama propisuje veličina uzorka za pojedine vrste osiguranja, međutim ovih slučajeva nema puno i veličine uzorka za potpuni kredibilitet se znatno razlikuju od zemlje do zemlje.

Razvoj formula za metodu ograničenog kredibiliteta

Posmatra se n osiguranika u određenom periodu, odnosno delu godine f_i. Označimo sa q_i stvarnu stopu smrtnosti i sa q_i^t stopu smrtnosti iz Tablica mortaliteta i pretpostavimo da je $q_i = mq_i^t$, gde je m stvarni racio. Ukoliko je posmatrano lice živo, parametar d_i uzima vrednost 0, suprotnom je vrednost 1.
Neka je suma osiguranja B_i i označimo sa A stvarnu, a sa E očekivanu vrednost ukupne osigurane sume.
Sada možemo odrediti sledeće veličine:

$$A = \sum_{i=1}^{n} B_i d_i, \quad E = \sum_{i=1}^{n} B_i f_i q_i^t, \quad \hat{m} = A/E$$

.

$$\mu = E(\hat{m}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i E(d_i)}{E} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i f_i q_i}{E}$$

$$\sigma^2 = Var(\hat{m}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^2 Var(d_i)}{E^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^2 f_i q_i (1 - f_i q_i)}{E^2}.$$

Dalje, sa pretpostavkom $q_i = mq_i^s$, dobijamo sledeće formule:

$$\mu = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i f_i m q_i^t}{E} = m, \quad \sigma^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^2 f_i m q_i^t (1 - f_i m q_i^t)}{E^2}.$$

Napomena: Prethodne formule odnose se na iznose, ukoliko se vrši obračun za na primer, broj polisa, broj odštetnih zahteva, broj odustajanja od osiguranja, odnosno

raskida ugovora, jednostavno se suma osiguranja zameni jedinicom.
Tada imamo

$$\mu = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i m q_i^t}{E} = m,$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i m q_i^t \left(1 - f_i m q_i^t\right)}{E^2} \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i m q_i^t}{E^2} = \frac{m}{E} = \frac{A}{E^2}.$$

Formula kredibiliteta sada postaje $Z\hat{m} + (1 - Z)\,\alpha$, gde treba utvrditi Z i α, pri čemu metoda ne navodi kako treba utvrditi ove parametre. Izbor α može imati značajan uticaj na konačan rezultat. Za $Z = 1$ imamo pun kredibilitet ako je $Pr\ (\mid \hat{m}\ - m \mid \leq\ rm)\ \geq\ p$, što predstavlja relativnu grešku. Metod takođe ne navodi kako se određuju vrednosti za r i p. Ako ovaj uslov nije ispunjen, onda Z biramo na taj način da smanji varijansu procene kredibiliteta do vrednosti gde ima željenu tačnost. Uobičajeno je da se koristi normalna aproksimacija i tada je faktor kredibiliteta

$$Z = \min\left(\frac{r\hat{m}}{z\hat{\sigma}}, 1\right)$$

Primer 7.1.2 Želimo da procenimo stopu smrtnosti q, za grupu osiguranika starosti od 55 do 65 godina. Poznati su podaci iz prethodne godine za 1.000 osiguranika i osigurane sume kao u narednoj tabeli.

Tabela 7.1

broj polisa	osigurana suma	broj umrlih
120	8.000	5
270	27.000	9
460	45.000	7
150	80.000	2

Procena stope smrtnosti izračnava se po formuli: $\hat{q} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{1000} B_i d_i}{\sum\limits_{i=1}^{1000} B_i}$

Metod nam ne pruža smernice u postavljanju parametara kako bi procena imala potpuni kredibilitet, već ostavlja slobodan izbor. Postavićemo da je verovatnoća relativne greške manja ili jednaka 5 % najmanje 90 %, i da Z ima standardizovanu normalnu raspodelu, odnosno proveravamo da li je

$$\Pr\left(\frac{|\hat{q} - q|}{q} \leq 0,05\right) \text{ najmanje } 90\ \%.$$

Uvodimo sledeće tri pretpostavke:
a) može se primeniti Centralna granična teorema,

b) iznosi suma osiguranja nisu slučajni, i
c) posmatrani osiguranici su međusobno nezavisni sa istom vrednosti q.
Tada je

$$\Pr\left(-0,05q \leq \hat{q} - q \leq 0,05q\right) = \Pr\left(\frac{-0,05q}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0,05q}{\sigma}\right).$$

Odakle dobijamo, $\hat{q} = 0,0185$, $\sigma = 0,005$ i $\Pr\left(-0,2035 \leq Z \leq 0,2035\right) = 0,1586$, što je manje od 0,9 pa procena nema pun kredibilitet.
Kako nije dostignut pun kredibilitet, koristi se pravilo kvadratnog korena, tj. kvadratni koren stvarnog broja podataka i broja neophodnog za potpuni kredibilitet $\sqrt{\frac{n^k}{n^{cr}}}$ (videti formulu 7.1).
Postoji nekoliko opravdanja za ovaj pristup, ali sva imaju nedostatke. Na primer, parcijalni faktor verodostojnosti je 0,2022/1,64485=0,1229. Ovo ukazuje na to da se težina od 12,29 % treba dodeliti posmatranoj verovatnoći smrtnosti (relativna učestalost). Metod ne određuje šta uraditi sa preostalim delom težine, odnosno na koju veličinu primeniti.
U nastavku će biti prikazan način obračuna kredibiliteta za odustajanje od osiguranja, tačnije raskida ugovora osiguranja (*eng.* lapse) kod životnog osiguranja, obeležimo sa l_i.

Primer 7.1.3 U Tabeli 7.2 su dati podaci 6 kompanija o broju i iznosu stvarnih i očekivanih raskida ugovora. Radi ilustracije odabrana je grupa sastavljena od velikih, srednjih i malih društava. Neka su l_{ia} i l_{ib} redom iznos po raskinutim ugovorima i broj raskinutih ugovora.

Tabela 7.2

	l_{ib}	l_{ia}	E (l_{ib})	E (l_{ia})
k_1	12.012	789.113.322	9.620,54	590.962.948,06
k_2	1.066	69.840.534	1.170,55	115.278.432,01
k_3	3.874	880.443.656,00	3.331,02	670.024.330,00
k_4	1.230	56.965.533,00	890,00	33.593.401,80
k_5	1.803	291.423.661,00	1.902,12	340.221.381,20
k_6	4	1.250.400,00	2,33	688.105,65
$\sum$	19.989	2.089.037.106,00	16.916,56	1.750.768.598,72

U prvom koraku izračunava se odnos stvarnih i očekivanih ugovora (A/E racio) za broj i iznos po raskinutim ugovorima, kao i njihova varijansa i rezultati su prikazani u Tabeli 7.3.

Tabela 7.3

	$A/E(l_{ib})$	$A/E(l_{ia})$	$\sigma^2(l_{ib})$	$\sigma^2(l_{ia})$
k_1	1,25	1,34	0,00014	0,00022
k_2	0,91	0,61	0,00076	0,00525
k_3	1,16	1,31	0,00035	0,00126
k_4	1,38	1,70	0,00224	0,16792
k_5	0,95	0,86	0,00049	0,00219
k_6	1,72	1,82	0,53334	1,60133

Racio A/E po ukupnom broju ugovora je 1,18, dok je racio za ukupan iznos raskinutih ugovora 1,19. U narednoj tabeli prikazani su rezultati sa intervalom poverenja p = 90 % i p = 95 % posebno po broju i iznosu, pri čemu je osnovna formula kredibiliteta postaje

$$C_l = Z[A/E \text{ racio kompanije}] + (1 - Z)[\text{ukupni } A/E \text{ racio}].$$

Tabela 7.4

	po broju ugovora					po iznosu				
	Z		A/E	C_l		Z		A/E	C_l	
p	0,9	0,95	(%)	0,9	0,95	0,9	0,95	(%)	0,9	0,95
k_1	1,000	1,000	124,9	124,9	124,9	1,000	1,000	133,5	133,5	133,5
k_2	1,000	1,000	91,1	91,1	91,1	1,000	0,420	60,6	60,6	94,6
k_3	1,000	1,000	116,3	116,3	116,3	1,000	0,859	131,4	131,4	129,7
k_4	1,000	0,637	138,2	138,2	130,9	0,177	0,074	169,6	128,2	123,1
k_5	1,000	1,000	94,8	94,8	94,8	1,000	0,650	85,7	85,7	97,4
k_6	0,098	0,041	171,7	123,4	120,4	0,057	0,024	181,7	122,9	120,8

Prednost modela je u jednostavnoj implementaciji i razumljivosti metoda. Nedostatak modela je u nekim teorijskim poteškoćama ovog pristupa.
Model odražava samo varijabilnost uzorkovanih podataka, ignorišući sve ostale uzorke. Kod recimo procene vrednosti premije, pokušavamo da utvrdimo koliko je pouzdano μ_k, umesto da se postavi pitanje koliko je pouzdanije od μ_i [96]. Parametre m_e i p biramo proizvoljno i tačnost parametra α nije uračunata u izračunavanje Z. Kao što se vidi iz primera 7.1.3, pristup pretpostavlja da je ukupni odnos A/E konstantan tokom vremena. Ova pretpostavka za kraći period, za smrtnost, može biti rereprezentativna.
Ako je broj posmatranja, npr. broj podnetih odštetnih zahteva jednak nuli ili je jako mali, centralna granična teorema nije primenljiva. Pretpostavljamo normalnu aproksimaciju, što ne mora biti dobra pretpostavka u praksi, pogotovo u ovoj situaciji, kada raspolažemo sa ograničenim skupom podataka.

Razvoj formula za metodu najveće preciznosti

Metode najveće preciznosti, takođe se nazivaju i Bayes-ovim kredibilitetom, linearnim Bayes-ovim kredibilitetom i Buhlmann-ovim kredibilitetom (među ostalim imenima). Faktor kredibiliteta određuje se formulom 7.2. Sa porastom broja opservacija (veće n), faktor kredibiliteta Z teži ka 1 kao asimptotskoj vrednosti, ali je ne dostiže. Kao što je već rečeno, potrebno je izračunati parametar kredibiliteta κ, koji zahteva analizu varijanse: proračun očekivane vrednosti procesne varijanse i varijanse hipotetičkih sredina.

Primer 7.1.4 Pretpostavimo da posmatramo grupu u kojoj je 2000 osiguranika živo i 23 umrlo i drugu grupu sa 3000 živih i 67 umrlih. Empirijski Bayes-ov pristup izračunavanja dat je u nastavku.

Tabela 7.5

br. živih	br. umrlih	q	1-q	var
2000	23	0,0115	0,9885	22,7355
3000	67	0,0223	0,9777	65,5037
5000	90			88,2392
$\mu =$	0,018		$\tau =$	0,01765

Varijansa se određuje procenom varijansi za svaku grupu, a zatim se ponderišu njihovom veličinom uzorka, uz pretpostavku beta raspodele, $\tau = 0,01765$. Dalje,

$$\alpha = \frac{2000(0,0115 - 0,018)^2 + 3000(0,02233 - 0,018)^2 - 0,0176}{5000 - \frac{2000^2 + 3000^2}{5000}} = 0,00005132.$$

Prema formuli 7.2, za prvu posmatranu grupu imamo

$$Z = \frac{2000}{2000 + 0,01765/0,00005132} = 0,8532$$

i dalje primenom opšte formule kredibiliteta dobijamo ocenjenu vrednost 0,0124. Isti postupak se primenjuje za drugu posmatranu grupu osiguranika.

U nastavku je predstavljen Buhlmann-ov empirijski Bayes-ov metod zasnovan na linearnom Bayes-ovom modelu koji se oslanja samo na prva dva momenta raspodele. Metoda pretpostavlja da postoji više od jedne osiguravaju[c]e kompanije w sa indeksom k i n_k posmatranih osiguranika sa indeksom k_i u posmatranoj kompaniji k, koje imaju svoje raspodele verovatnoća. Druga pretpostavka je da se ove raspodele verovatnoća distribuiraju među kompanijama u skladu sa drugom raspodelom vjerovatnoća. Cilj je da se koriste ove informacije za procene raspodela verovatnoća (ili ključne parametre te raspodele) za jednu ili sve kompanije. Svako d_{ki} je slučajna vrednost, takva da je

$$P(d_{ki}=1)=m_k f_{ki} q_{ki}^t,\ P(d_{ki}=0)=1-m_k f_{ki} q_{ki}^t,$$

gde je m_k stvarna stopa smrtnosti, $E(m_k)=\mu$ i $Var(m_k)=\sigma^2$.

Za svaku kompaniju mogu se izračunati $\hat{m_k}=\frac{\sum_{i=1}^{n_k} B_{ki}d_{ki}}{\sum_{i=1}^{n_k} B_{ki}f_{ki}q_{ki}^t}$, gde je $\hat{m_k}$ A/E racio.

Uvedimo sledeće oznake

$S_k=\sum_{i=1}^{n_k} B_{ki}^2 f_{ki} q_{ki}^t,$

$S_k^{'}=\sum_{i=1}^{n_k} B_{ki}^2 f_{ki} q_{ki}^t,$

$E_k=\sum_{i=1}^{n_k} B_{ki} f_{ki} q_{ki}^t.$

Faktor kredibiliteta se računa prema sledećoj formuli

$$Z=\frac{E_k}{E_k+\frac{\mu}{\sigma^2 E_k}S_k-\frac{\mu^2+\sigma^2}{\sigma^2 E_k}S_k^{'}} \tag{7.3}$$

Imamo $\hat{\mu}=\frac{\sum_{k=1}^{j}\sum_{i=1}^{n_k} B_{ki}d_{ki}}{\sum_{k=1}^{j} S_k^{''}}$ i ocena je nepristrasna $E\left(\hat{\mu}\right)=\mu$.

Sada se varijansa može predstaviti sledećom formulom

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{j} E_k(\hat{m}_i-\hat{\mu})^2-\hat{\mu}\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{S_k}{E_k}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{j}E_k}\sum_{i=1}^{j}S_k\right)+\hat{\mu}^2\left(\sum_{i=1}^{j}\frac{S_k^{'}}{E_k}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{j}E_k}\sum_{i=1}^{j}S_k^{'}\right)}{\sum_{i=1}^{j}E_k-\frac{1}{\sum_{i=1}^{j}E_k}\sum_{i=1}^{n}E_k^2-\sum_{i=1}^{j}\frac{S_k^{'}}{E_k}+\frac{1}{\sum_{i=1}^{j}E_k}\sum_{i=1}^{j}S_k^{'}}$$

Više detalja za razvoj formula ove metode može se naći u [3].

Primer 7.1.5 Prema podacima iz primera 7.1.3 o broju raskinutih ugovora i broju izloženih ugovora (l_{ie}), rezultat Buhlmann empirijskog Bayes-ovog modela prikazan je u narednoj tabeli.

Koristeći formulu za varijansu dobijamo da je $\hat{\sigma}^2=0,03$ i dalje se prema formuli 7.3 računa Z.

Tabela 7.6

	l_{ie}	Komp. A/E (%)	Z	Buhlmann A/E (%)
k_1	272.308	124,9	0,995	124,8
k_2	24.687	91,1	0,963	92,1
k_3	88.959	116,3	0,987	116,3
k_4	36.998	138,2	0,958	137,4
k_5	44.993	94,8	0,977	95,3
k_6	77	171,7	0,050	120,8

Prednost metoda najveće preciznosti je u korišenju podataka o svim vrednostima u procenama pojedinačnih parametara. Nepoznati parametri posmatraju se kao slučajne promenljive, a njihova raspodela se povezuje sa dostupnim podacima. Svi aspekti procesa, aproksimacije ili pretpostavke su jasno definisane i navedene, nakon čega se rešenje dobija iz osnovnih principa verovatnoće. Cilj pristupa je da se minimizuje srednjekvadratna greška između ocene i stvarne vrednosti parametra koji se ocenjuje.
Metod može dati loše rezultate u slučaju debelih repova raspodela. Rep raspodele može se stanjiti [95] tako što se umesto originalnih podataka, koristiti logaritam vrednosti podatka.
Oba pristupa pretpostavljaju da je srednja vrednost (ukupni odnos A/E) konstantna tokom vremena. Ova pretpostavka, za recimo period od 5 godina, za smrtnost može biti rereprezentativna. Međutim, stope raskida ugovora variraju sa faktorima kao što su ekonomski uslovi, kao i događaji u oblasti osiguranja, uključujući uvođenje novih proizvoda ili promene u regulativi. Zbog toga aktuari ograničavaju ovu pretpostavku na kraći period.
Rezltati modela su veoma slični i razlikuju se za manje od 5%, kada posmatramo obračun za raskinute ugovore.

7.1.2 Primena generalizovanog kredibiliteta u određivanju premijske stope

Za osiguravača, prihod mora biti najmanje jednak rashodu. Prihod uključuje premiju i investicioni prihod, a rashod sve štete, troškove izviđaja, procene, likvidacije i isplate šteta, troškove provizije, administrativne troškove itd. Na osnovu iskustvenih informacija aktuar izrađuje tarife za budući period.
Prilikom određivanja stopa premija, aktuari pri obuhvatu podataka koje će koristiti pokušavaju da usklade stabilnost i odzivnost tih podataka, iako su ove osobine donekle u kontradikciji. Tako, ukoliko se preferira odzivnost, potrebno je koristiti novije podatke. Ukoliko su ovi podaci retki, uzima se veći obim podataka, što dovodi

do korišćenja starijih podataka. S obzirom na to da je cilj odrediti odgovarajuće stope premija za buduće, važno je prilagoditi prošlu premiju na vrednost koja se očekuje u budućem vremenskom periodu. Tako, aktuar mora da računa i na promenu troškova u budućnosti zbog uticaja inflacije, promena u regulativi, napretka tehnologije i sl. Normalno je da premija sadrži i deo za profit i za nepredviđene situacije. Pored toga, premija se mora prilagoditi i da odražava sve trendove premije, što se postiže preko tzv. trend faktora.
Glavni zadatak je odrediti nove premijske stope za svaku premijsku klasu u funkciji mere potencijalnog gubitka, što zajedno daje ukupnu prosečnu promenu stope. Aktuar zatim utvrđuje kolika je promena neophodna po različitim klasama rizika (tako što odredi baznu klasu i poredi sve ostale klase sa njom), a zatim prilagođava promenjene premijske stope po klasama tako da dobije iznos prosečne promene premije koju je prvobitno utvrdio. Konačan je cilj odrediti nove stope za svaku premijsku klasu koja meri svoj potencijal za gubitak i zajedno će generisati naznačenu ukupnu prosečnu promenu stope. Ako je skup posmatranih podataka veliki, parametar neće mnogo da varira od jednog do drugog perioda, i onda će Z biti bliži 1. Postoje dve metode za utvrđivanje promene ukupne premijske stope, premijska metoda i metoda racija šteta. U nastavku je prikazan primer određivanja buduće premije zasnovan na metodi racia šteta (videti [97] i [98]), a izračunavanja su urađena koristeći klasičnu aktuarsku tehniku i primenom mere c-kredibiliteta.

Primer 7.1.6 Za svaku klasu rizika postoji vektor diferencijala (relativitet). Pretpostavimo da postoje 3 klase rizika x, y i z, sa diferencijalima respektivno i, j i k, i da su diferencijali multiplikativni. Osnovnu formulu kredibiliteta možemo transformisati u

$$\text{Novi diferencijal} = Z\,[d_i] + (1-Z)\,[d_t]\,, \tag{7.4}$$

$$\text{Novi diferencijal (usvojen)} = \sqrt[p]{Z \cdot d_i^p + (1-Z) d_t^p} \tag{7.5}$$

gde su

$d_i = d_t^i \frac{L_{ri}}{L_{rb}}$, indikovani diferencijal sa L_r raciom šteta i
$d_t = \frac{P_{rc}^i}{P_{rb}}$, trenutni diferencijal sa P_r premijskom stopom.

Neka su dati podaci osiguravajuće kompanije kao u narednoj tabeli.

Tabela 7.7

Klasa	Trenutna premijska stopa	Zarađena premija po trenutnim stopama	Nastale štete
x	150	850000	330000
y	64	970000	525000
z	100	600000	290000

Iz podatka da je klasa y najviše izložena riziku, za osnovnu stopu prilikom obračuna uzimamo premijsku stopu koja iznosi 64. Za ovu klasu diferencijal je jednak 1, a sve ostale klase se porede sa ovom bazičnom klasom.

Tabela 7.8

Klasa	d_t	L_r	d_i	Z	Novi dif.	p=1	p=2	p=3	p=4
x	2,344	0,388	1,681	0,850	1,781	1,781	1,796	1,814	1,834
y	1,000	0,541	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
z	1,563	0,483	1,395	0,550	1,471	1,471	1,473	1,475	1,478

U krajnjem rezultatu imamo $i \cdot j \cdot k$ stope. Tako, osiguraniku sa karakteristikama x_i, y_j i z_k pripisana je premijska stopa $r_i \cdot s_j \cdot u_k$. Premijska stopa u imovinskom osiguranju obračunava se na prosečnom nivou, tako da primena mere c-kredibiliteta u tom smislu može dati tačnije premijske stope približavajući ih karakteristikama svakog osiguranika.

7.2 Određivanje premija osiguranja primenom fazi sistema

Fazi sistemi omogućuju da se pojedine neodređene informacije matematički modeliraju, u cilju dalje računarske obrade tih informacija. Korišćenje metode fazi sistema korisno je u složenim procesima sa velikim brojem parametara koji ostvaraju međusobne uticaje, ali utiču i na proces u celini svojim specifičnim osobinama. U aktuarstvu, u mnogim vrstama osiguranja postoje navedene specifičnosti. Na osnovu primera 3.4.2 i modifikovanog fazi sistema datog u [99], u ovom delu disertacije predložen je fazi sistem za obračun premijskih stopa osiguranja. Primer je generalizovan i ne odnosi se na neki poseban vid osiguranja, tako da se predložena metodologija može koristiti kako u aktuarstvu, tako i u drugim složenim sistemima.

Primer 7.2.1 Neka je izdvojeno pet glavnih grupa rizika $v_1, v_2\, v_3, v_4, v_5$, sa svojim uticajnim elementima, podrizicima. Svaki element rizika opisuje se ocenama nizak, umeren ili visok, što se dalje može predstaviti fazi skupovima mali rizik, umeren rizik i visok rizik. Ocene rizika su u intervalu [0 100] date od strane grupe odgovarajućih eksperata. Ekperti utvrđuju vrednost u_{ij}, gde je u_{ij} trougaoni fazi broj, $u_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$, odnosno interval I_{ij} za svaki pojedinačni rizik.

Funkcije pripadnosti fazi skupova, obeležimo ih sa μ_{X_n} (nizak rizik), μ_{X_u} (umeren rizik) i μ_{X_v} (visok rizik), prikazane su na slici 3.1 a). Na taj način definisane su ulazne vrednosti sistema, odnosno grupe rizika (tabela 7.9).

Tabela 7.9

Rizik	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
Ocene	0,19	0,3912	0,1286	0,01586	0,2743
mali rizik	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
	5,700	11,736	3,858	0,476	8,230
umeren rizik	1,900	3,912	1,286	0,159	2,743
	9,500	19,560	6,430	0,793	13,717
	17,100	35,208	11,574	1,427	24,691
visok rizik	1,563	0,483	1,395	0,550	1,471
	13,000	27,384	9,002	1,110	19,204
	19,000	39,120	12,860	1,586	27,434
	19,000	39,120	12,860	1,586	27,434

Prilikom obračuna, korišen je Matlab Fuzzy Logic Designer, u kome su ulazne vrednosti prikazane na sledeći način:

[Ulaz]
Naziv='v_i'
Raspon=[0 Ii1]

Funkcija pripadnosti 1: nizak rizik, [0 0 vi1]
Funkcija pripadnosti 2: umeren rizik, [vi1 vi3 vi5]
Funkcija pripadnosti 3: visok rizik, [vi4 vi6 vi6]

Tako je za npr. prvi rizik v_1, ulaz definisan sa:
Raspon=[0 19]
Funkcija pripadnosti 1: nizak rizik, [0 0 5.7]
Funkcija pripadnosti 2: umeren rizik, [1.9 9.5 17.1]
Funkcija pripadnosti 3: visok rizik, [13.3 19 19]

Pravila u algoritmu aproksimativnog rezonovanja definišemo na način da obuhvate relacije svih mogućih kombinacija ulaznih i izlaznih veličina. Pravila koja će se koristiti u sistemu prikazana su u primeru 3.4.2, zasnovana na Mamdani tehnici. Mathlab-ov FIS (skaćeno od eng. Fuzzy Inference System) dopušta upotrebu različitih operatora agregacije. U ovom primeru koričćen je max operator.

Izlazna vrednost fazi sistema je ukupan rizik osiguranja (URO), koji može uzeti sledeće vrednosti: $\mu_{Y_{vn}}(u)$ (veoma nizak), $\mu_{Y_n}(u)$ (nizak), $\mu_{Y_{um}}(u)$ (umeren), $\mu_{Y_v}(u)$ (visok) i $\mu_{Y_{vv}}(u)$ (veoma visok). Funkcije pripadnosti odgovarajućih nivoa rizika prikazane su u nastavku.

$$\mu_{Y_{vn}}(u) = \begin{cases} \frac{2-u}{2}, & 0 < u \leq 2 \\ 0, & u > 2 \end{cases}$$

$$\mu_{Y_n}(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0,5 \\ \frac{u-0,5}{2}, & 0,5 < u \leq 2,5 \\ \frac{4,5-u}{2}, & 2,5 < u \leq 4,5 \\ 0, & u > 4,5 \end{cases}$$

$$\mu_{Y_{um}}(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 3 \\ \frac{u-3}{2}, & 3 < u \leq 5 \\ \frac{7-u}{2}, & 5 < u \leq 7 \\ 0, & u > 7 \end{cases}$$

$$\mu_{Y_v}(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 5,5 \\ \frac{u-5,5}{2}, & 5,5 < u \leq 7,5 \\ \frac{9,5-u}{2}, & 7,5 < u \leq 9,5 \\ 0, & u > 95 \end{cases}$$

$$\mu_{Y_{vv}}(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 8 \\ \frac{u-8}{2}, & 8 < u \leq 10 \end{cases}$$

Funkcije pripadnosti izlazne vrednosti se u Matlab-u prikazuje na sledeći način:

[Izlaz]
Naziv ='URO'
Raspon=[0 10]
Funkcija pripadnosti 1: veoma nizak URO, [0 0 2]
Funkcija pripadnosti 2: nizak URO, [0.5 2.5 4.5]
Funkcija pripadnosti 3: umeren URO, [3 5 7]
Funkcija pripadnosti 4: visok URO, [5.5 7.5 9.5]
Funkcija pripadnosti 5: veoma visok URO, [8 10 10]

U procesu defazifikacije korišćen je Metod centroida opisan u poglavlju 3. Na skupu slučajnih vrednosti ulaznih podataka izvršeno je 10.000 simulacija. Svaki element je simuliran kao nezavisna promenljiva sa uniformnom raspodelom na zadatom intervalu (0, Ii). Izlaz sistema je vrednost ukupnog rizika osiguranja posmatranog procesa. Rezultat simulacije prikazan je u narednoj tabeli.

Tabela 7.10

URO	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
	0,1811	0,3879	0,1368	0,0155	0,2787

Fazi sistem uspostavljen na ovaj način smanjuje stepen subjektivnosti u aktuarskoj proceni. Stručnjaci iz oblasti osiguranja, prema svojoj ekspertizi, procenjuju vrednost za svaki element rizika, dok se procena ukupne evaluacije ostvaruje korišćenjem ovog modela. Dalje, dobijeni rezultat aktuar koristi u određivanju premijskih stopa. Prednost modela je u brzoj implementaciji ulaznih parametara i praćenju međusobnih uticaja podelemenata rizika, što ima značajnu ulogu u aktuarskoj analizi.

Zaključna razmatranja i pravci daljeg istraživanja

Jedna od karakteristika osiguranja je da se često javlja visok stepen složenosti posmatranog problema i tada se, usled nemogućnosti upotrebe standardnih aktuarskih tehnika i preciznih obračuna, koristi iskustvo na osnovu ljudske ekspertize. U procesima odlučivanja, odluka se obično donosi u uslovima neodređenosti, odnosno odsustva informacija ili znanja o određenom problemu, pa se pokazalo kao neophodno da se vrše različite procene i iznađu drugačija rešenja za dati problem. Aktuarska procena je neophodna pri izboru, razvoju ili upotrebi kredibiliteta u uslovima neodređenosti. U disertaciji je ukazano na neke nedostatke klasične teorije kredibiliteta, posebno u delu procene parametara u uslovima neodređenosti, nedostatka informacija i statističkih podataka.

U disertaciji je generalizovana mera kredibiliteta data od strane Liu. Originalni rezultati predstavljeni u disertaciji mogu se podeliti u tri grupe. Prvu grupu rezultata čini uvođenje nove mere. Mera c-kredibiliteta, na X je skupovna funkcija $\mathsf{cr} : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ takva da su zadovoljene osobine normalnosti, monotonosti, samodualnosti i maksimalnosti. U disertaciji su razmatrana neka svojstva ove mere, kao što su subaditivnost, poluneprekidnost i data je teorema ekstenzije kredibilita, ali imajući u vidu obimnost problematike, ostala su određena otvorena pitanja za budući rad. Zatim je definisan integral zasnovan na meri $c-$kredibiliteta. Navedena su i dokazana određena svojstva ovog integrala.

Drugu grupu rezultata ovog istraživanja čini razvoj ove mere u fazi okruženju koristeći funkcije agregacije i sa dualnim merama, merom mogućnosti i merom neophodnosti, kao monotonim i poluneprekidnim merama, pružaju mogućnost široke primene ne samo u akuarstvu, već i drugim oblastima nauke.

Treća grupa rezultata su primene prikazane u sedmoj glavi. Tehnike teorije neodređenosti primenjene su u rešavanju određenih aktuarskih problema u osiguranju. Premijska stopa u imovinskom osiguranju često se obračunava na prosečnom nivou i utvrđivanje adekvatne premije osiguranja jedan od najvažnijih segmenata osiguranja i aktuarstva. Primena mere c-kredibiliteta u fazi okruženju i metode racia šeta može dati tačnije pokazatelje za buduće premijske stope približavajući ih karakteristikama svakog osiguranika. U okviru primene fazi tehnika u aktuarskoj analizi, predložen je model zasovan na fazi sistemu za utvrđivanje premijskih stopa osiguranja, u cilju smanjenja stepena subjektivnosti u aktuarskoj proceni. Prednost modela je u brzoj implementaciji ulaznih parametara i praćenju međusobnih uticaja podelemenata rizika, što ima značajnu ulogu u aktuarskoj analizi.

Pravci budućeg istraživanja su svakako dalji razvoj mere c-kredibiliteta kako u teorijskom smislu i njenim svojstvima, tako i mogućim primenama.

Bibliografija

[1] Actuarial Standard of Practice No. 25. Credibility Procedures Applicable to Accident and Health, Group Term Life, and Property/Casualty Coverage.

[2] American Academy of Actuaries, Credibility Practice Note, 2008.

[3] Klugman S., Rhodes, T., Purushotham, M., Gill, S., MIB Solutions. Credibility Theory Practices, Society of Actuaries, 2009.

[4] Gajović, V., Paunović, M. Applying fuzzy mathematics to risk assessment in insurance industry, Tokovi osiguranja, 1 (2018) 23-38. UDK: 678.01:519.87:368.025.61:51-7:581.8:159.9.015

[5] De Wit, G.W. Underwriting and Uncertainty, Insurance: Mathematics and Economics, (1982) 277-285.

[6] Gajović, V., Kerkez, M., Kočović, J. (2018). Modeling and simulation of logistic processes: risk assessment with a fuzzy logic technique. Simulation: Transactions of the Society for Modeling and Simulation International, Vol. 94(6), 507–518.

[7] Shapiro, A. Fuzzy logic in insurance, Insurance mathematics and economics. 35 (2004) 399-424.

[8] Shapiro, A. Insurance Applications of Fuzzy Logic, Institute of Actuaries of Australia, 2005.

[9] Shapiro, A. An Overview of Insurance Uses of Fuzzy Logic, Computational Intelligence in Economics and Finance, 2 (2007) 25-61.

[10] Kerkez, M., Gajović, V. Underwriting risk assessment in marine cargo insurance, Risk management in the financial services sector, (Kočović, J. et al. eds), University of Belgrade, Faculty of Economics Publishing Centre, (2016) 381–399. 978-86-403-1487-9, 005.334:336.1.07 005.334:658.15, 978-86-403-1487-9.

[11] Cummins,D., Derrig, R. A. Fuzzy Financial Pricing of Property-Liability Insurance, North American Actuarial Journal, 1, 4 (1997) 21-40.

[12] Young, V. R. Insurance Rate Changing: a Fuzzy Logic Approach, Journal of Risk and Insurance, 63, 3 (1996) 461-484.

[13] Hosler, V. R. The application of fuzzy sets to group health underwriting, ARCH 2 (1992) 1-63.

[14] Lemaire, J. Fuzzy Insurance, ASTIN Bulletin, 20,1 (1990) 33-55.

[15] Ostaszewski, K. Fuzzy sets Methods in Actuarial Science, Schaumburg IL, Society of Actuaries, 1993.

[16] Kahneman, D., Tversky, A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, Econometrica, Econometric Society, 47, 2 (1979) 263-291.

[17] Zadeh, L. Fuzzy Sets as a basis for a theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 3–28.

[18] Gaines, B.R., Kohout, L. Possible automata. Proc. Int. Symp. Multiple-Valued logics, Bloomington, IN (1975) 183-196.

[19] Dubois, D., Prade, H. Necessity measure and resolution principle. IEEE Transactions on Man Cybenet, 17 (1987) 474-478.

[20] Liu, B. Uncertainty Theory, (2nd ed.), Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[21] Liu, B., Liu, Y. K. Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10 (2002) 445–450.

[22] Li, X., Liu, B. A sufficient and necessary condition for credibility measures, International Journal of Uncertainty, Fuzziness & Knowledge-Based Systems, 14 (2006) 527–535.

[23] Liu, B. A survey of credibility theory, Fuzzy Optimization and Decision Making, 5 (2006) 387-408.

[24] Ralević N., Paunović M. c-Credibility Measure. FILOMAT, Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš, Serbia, (2018) http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat, ISSN: 2406-0933; (rad prihvaćen)

[25] Kerkez, M., Ralević, N. M. Uncertainty analysis and risk modeling in insurance, Insurance in the post-crisis era, (Kočović, J., Jovanović Gavrilović, B., Boričić, B., Radović Marković, M., eds), University of Belgrade, Faculty of Economics Publishing Centre, 2018, Chapter 18, 309-326, (ISBN: 978-86-403-1548-7)

[26] Ralević, M.N., Kerkez, M. Analiza neodređenosti i modeliranje rizika u osiguranju, XVI međunarodni simpozijum, Novi izazovi na tržištu osiguranja, Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet, Aranđelovac, 17.-20. maj 2018.

[27] Menger, K. Statistical metrics, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 8 (1942) 535-537.

[28] Schweizer, B., Sklar, A. Statistical metric spaces, Pacific J. Math. 10 (1960) 313-334.

[29] Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E. Triangular Norms, volume 8 of Trends in Logic- Studia Logica Library. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[30] Lowen, R. Fuzzy Set Theory. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[31] Alsina, C., Frank, M. J., Schweizer, B. Associative Functions: Triangular Norms and Copulas. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Hackensack, NJ, 2006.

[32] Schweizer, B., Sklar, A. Probabilistic Metric Spaces. North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics. North-Holland Publishing Co., New York, 1983.

[33] Schweizer, B., Sklar, A. Probabilistic Metric Spaces. Dover Publications, New York, 2005.

[34] Nguyen, H. T., Kreinovich, V., Wojciechowski, P. Strict archimedean t-norms and t-conorms as universal approximators. International Journal of Approximate Reasoning, 18 (1998) 239-249.

[35] Schweizer, B., Sklar, A. Associative functions and abstract semigroups.Publ. Math. Debrecen, 10 (1963) 69-81.

[36] Fodor, J.C., Yager, R.R., Rybalov, A. Structure of uninorms, Internat. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 5 (1997) 411-427.

[37] Beliakov, G., Pradera, A., Calvo, T. Aggregation Functions: a Guide for Practitioners, Springer, Heidelberg 2007.

[38] Grabish, M., Marichal, J-L., Mesiar, R., Pap, E. Aggregation Functions, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[39] Dubois, D., Prade, H. On the use of aggregation operations in information fusion processes, Fuzzy Sets and Systems, 142 (2004) 143–161.

[40] Yager, R. R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, IEEE transactions on Systems, Man and Cybernetics, 18 (1988) 183-190.

[41] Yager,R. R., Rybalov, A. Uninorm aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems, (1996) 111–120

[42] Dombi, J. A general class of fuzzy operators, the demorgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators. Fuzzy Sets and Systems, 8(2) (1982) 149-163.

[43] Mesiar R., Komorníková M., Aggregation Operators, Proceeding of the XI Conference on applied Mathematics PRIM' 96, Herceg D., Surla K. (eds.), Institute of Mathematics, Novi Sad, 193-211, 1997.

[44] Klement, E. P., Mesiar, R., Pap, E. Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[45] Calvo, T., De Baets, B., Fodor, J. The functional equations of Frank and Alsina for uninorms and nullnorms, Fuzzy Sets and Systems, 120 (2001), 385-394.

[46] Klir, G. J., Yuan, B. Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications, Prentice Hall, New Jersey, 1995. '

[47] Choquet, G. Theory of capacities. Ann. Inst . Fourier (Grenoble) 5 (1953-1954) 131- 292.

[48] Sugeno, M. Theory of fuzzy integrals and its applications. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, 1974.

[49] Ralescu, A. L., Ralescu, D.A. Extensions of fuzzy aggregation. Fuzzy Sets and Systems, 86 (1997) 321- 330.

[50] Zadeh, L.A. Fuzzy sets. Information and control, 8(3)(1965) 338-353.

[51] Bezdek, J.C. Fuzzy models-What are they, and why? IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1(1) (1993) 1-6.

[52] Zadeh, L.A. Similarity relations and fuzzy orderings, Information Sciences, 3 (2) (1971) 177-200.

[53] Dubois, D., Prade, H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. Academic Press, Boston, 1980.

[54] Ross, T. Fuzzy Logic and Engineering Applications, 1st ed., McGraw-Hill, New York, 1995.

[55] Dubois, D.,Prade, H. Possibilistic logic, preference models, non-monotonicity and related issues. Proceedings of 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence (pp. 419-424), Sydney, Australia, August 24-30, 1991.

[56] Zadeh, L. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, IEEE Trans. Syst. Man, Cybern., 3 (1973) 28-44.

[57] Mamdani, E.H. Advances in linguistic synthesis of fuzzy controllers, Int. J. Man Mach.Stud., 8 (1976) 669-678.

[58] Mamdani, E.H., Gaines, B.R. Fuzzy Reasoning and Its Applications, New York, Academic Press, 1981.

[59] Sanchez, E. Resolution of composite fuzzy relation equations, Inf. Control, 30 (1976) 38-48.

[60] Paunović, M., Ralević, N.M., V. Gajović, V., Mladenović-Vojinović, B., Milutinović, O . Two-Stage Fuzzy Logic Model for Cloud Service Supplier Selection and Evaluation, Mathematical Problems in Engineering, MATH PROBL ENG, (2018) ISSN: 1024-123X, Hindawi Publishing Corporation.

[61] Sugeno, M. An introductory survey of fuzzy control, Inf. Sci., 36 (1985) 59-83.

[62] Lee, C. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controller, Parts I and II, IEEE Trans.Syst., Man, Cybern., 20 (1990) 404-435.

[63] Ross, T.J. Fuzzy Logic with Engineering Applications, Third Edition, Wiley, 2010.

[64] Wang, Z., Klir, G. J. Fuzzy measure theory, Springer science+Business media, LLC, New York, 1992.

[65] Choquet, G. Theory of capacities. Ann. Institut Fourier (U. Grenoble), 5, 131-295, 1954.

[66] Chateauneuf, A. On the existence of a probability measure compatible with a total preorder on a Boolean algebra, Journal of Mathematical Economics, 14 (1985) 43-52. North-Holland.

[67] Weber, S. L-decomposable measures and integrals for Archimedean t-conorms, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 101 (1984) 114-138.

[68] Weber, S. Conditional measures and their applications to fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 42 (1991) 73-85.

[69] Pap, E. Fazi mere i njihova primena, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 1999.

[70] Pap, E. Applications of Decomposable Measures, U: U. Hohle, S.E. Rodabaugh: Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, (1999) 675- 700.

[71] Pap, E. Null-Additive Set Function, Kluwer, Dordrecht-Boston-London, Ister Science, Bratislava (1995).

[72] Dobrakov, L. On submeasures I. Dissertationes Math. 112, Warszawa.

[73] Drewnowski, I. On the continuity of certain nonadditive set functions, Coll. Math. 38 (1978) 243–253.

[74] Ichihashi, H., Tanaka,M., Asai, K. Fuzzy integrals based on pseudo-additions and multiplications, Journal of Mathematical Analysis and Applications 130(2)(1988) 354-364.

[75] Murofljshi, T., Sugeno, M., An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, Fuzzy Sets and Systems 29 (1989) 201–221.

[76] Pap, E. An integral generated by decomposable measure, Univ. NovomSadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 20,1 (1990) 135–144.

[77] Pap, E. (ed.): Handbook of Measure Theory, North-Holland, 2002

[78] Suzuki, H. On fuzzy measures defined by fuzzy integrals. J. Math. Anal. 132 (1988) 87–101.

[79] Wang, Z., Klir, G.J. Fuzzy measure theory, Plenum Press, New York and London, Ister Science, Bratislava (1995).

[80] Klement,E.P, Weber,S. Generalized measure, Fuzzy sets and systems, 40 (1991) 375-394.

[81] Liu, B. Uncertainty Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[82] Dubois, D., Prade, H, The mean value of a fuzzy number, Fuzzy Sets and Systems, 24 (1987) 279-300.

[83] Heilpern, S. The expected value of a fuzzy number, Fuzzy Sets and Systems, 47 (1992) 81-86.

[84] Gonzalez, A, A study of the ranking function approach through mean values, Fuzzy Sets and Systems, 35 (1990) 29-41.

[85] Yager, R.R. On the evaluation of uncertain courses of action, Fuzzy Optimization and Decision Making, 1 (2002) 13-41.

[86] Liu, B. Fuzzy process, hybrid process and uncertain process, Journal of Uncertain Systems, 2 (2008) 3–16.

[87] Liu, B, Extreme value theorems of uncertain process with application to insurance risk model, Soft Computing, 17 (4) (2013) 549-556.

[88] Milutinović, O., Kerkez, M. Matematički model za ocenu rizika u funkciji ljudskih resursa, Megatrend revija, 14, 3, (2017) 135 - 148.

[89] Nilsson, Nils. Probabilistic Logic, Artificial Intelligence, 28 (1986) 71-88.

[90] Dubois, D.,Prade, H. Possibilistic logic, preference models, non-monotonicity and related issues. Proceedings of 12th International Joint Conference on Artificial Intelligence 419–424, Sydney, Australia, August 24–30, 1991.

[91] Dubois, D., Lang, J., Prade, H. Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 2: Logical approaches. Fuzzy Sets and Systems, 40 (1991) 203–244.

[92] Li, X., Baoding Liu, B. Foundation of credibilistic logic, Fuzzy Optim Decis Making, 8 (2009) 91-102.

[93] Li, X., Liu, B. Hybrid logic and uncertain logic, Journal of Uncertain Systems 3 (2009) 83–94.

[94] Hu, B. Q., Ip, W. C., Wong,H. Fuzzy Integral on Credibility Measure, Fuzzy Inf. Eng., 4 (2010) 389–397.

[95] Mahler, H.C., Dean, C.G. Foundations of Casualty Actuarial Science, Chapter 8th, Credibility by Casualty Actuarial Society , 4th Ed., 2001.

[96] Klugman, S., Sample size selection for multiple samples-A brief introduction to credibility theory and an example featuring rate-based insurance premiums, Drake University, for presentation at NYU-March 4, 2004.

[97] Brown, R., Gottlieb, L. Introduction to Ratemaking and Loss Reserving for Property and Casualty Insurance. 2nd Edition. ACTEX Publications Inc., 2001.

[98] Klugman, S.A., Panjer, H.H., Willmot, G.E. The Loss Models: From Data to Decisions. John Wiley and Son, 2004.

[99] Paunović, M., Ralević, N., Milutinović, O., Vojinović, Ž., Mladenović-Vojinović,B. Integrated Fuzzy System and Multi-Expression Programming Techniques for Supplier Selection, Tehnički vjesnik - Technical Gazette, 26 (1) (2019) 122-127.