

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Светислав М. Мијатовић

ПРЕЛАЗАК СА ТРОДИМЕНЗИОНИХ НА
ДВОДИМЕНЗИОНЕ СИСТЕМЕ И УТИЦАЈ
БРОЈА СУСЕДА НА КРИТИЧНО ПОНАШАЊЕ
АТЕРМАЛНОГ НЕРАВНОТЕЖНОГ
ИЗИНГОВОГ МОДЕЛА СА СЛУЧАЈНИМ
ПОЉЕМ

докторска дисертација

Београд, 2018

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Светислав М. Мијатовић

ПРЕЛАЗАК СА ТРОДИМЕНЗИОНИХ НА
ДВОДИМЕНЗИОНЕ СИСТЕМЕ И УТИЦАЈ
БРОЈА СУСЕДА НА КРИТИЧНО ПОНАШАЊЕ
АТЕРМАЛНОГ НЕРАВНОТЕЖНОГ
ИЗИНГОВОГ МОДЕЛА СА СЛУЧАЈНИМ
ПОЉЕМ

докторска дисертација

Београд, 2018

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF PHYSICS

Svetislav M. Mijatović

CROSSOVER FROM THREE-DIMENSIONAL TO
TWO-DIMENSIONAL SYSTEMS AND IMPACT
OF NUMBER OF NEIGHBOURS ON CRITICAL
BEHAVIOUR OF THE NONEQUILIBRIUM
ZERO-TEMPERATURE RANDOM FIELD ISING
MODEL

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2018

Ментор:

Проф. др Ђорђе Спасојевић, редовни професор, Физички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

Проф. др Милан Кнежевић, редовни професор, Физички факултет, Универзитет у Београду

Др Сања Јанићевић, научни сарадник, Физички факултет, Универзитет у Београду

Доцент др Ђорђе Стратимировић, Стоматолошки факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Захвалница

Ова дисертација је урађена на Физичком факултету Универзитета у Београду, под менторством проф. др Ђорђа Спасојевића. Мало је рећи да му дугујем неизмерну захвалност за његову посвећеност и пожртвованост целокупном мом напретку, не само као физичара, него и у сваком другом аспекту моје личности и бића. Унапред му се захваљујем и на будућој сарадњи и радујем јој се.

Поред професора Спасојевића, огроман удео, како у мом целокупном раду, тако и конкретно у овој дисертацији, има Сања Јанићевић. Овом приликом се захваљујем и њој и надам се да ће нам и будућа сарадња бити једнако успешна и интересантна.

Захвалио бих се и професорима Едуарду Вивесу и Босиљки Тадић на веома корисним саветима и сугестијама у мом досадашњем научном раду, као и Драгутину Јовковићу на многим стручним дискусијама.

Желео бих да се захвалим и свим људима који нису имали директног утицаја на израду ове дисертације, али су ми својим поступцима и пажњом дали довољно снаге да истрајем у потешкоћама, као и да се радујем лепим тренуцима. Без њихове подршке и љубави не бих могао да замислим ни тренутак остатка мог живота.

Прелазак са тродимензионих на дводимензионе системе и утицај броја суседа на критично понашање атермалног неравнотежног Изинговог модела са случајним пољем

Сажетак

Услед све већег броја експеримената везаних за феромагнетике који се врше на танким филмовима и тракама поставља се питање да ли су те траке и филмови тродимензиони или се ипак ефективно понашају као дводимензиони системи, јер им је једна димензија знатно мања од остале две. Поред експерименталног, значајно је и исто питање теоријске природе. Стога се први део ове дисертације бави преласком са тродимензионих на дводимензионе системе у случају атермалног неравнотежног Изинговог модела са случајним пољем. Поменути модел се показао и као веома успешан у опису реалних експеримената, те је због тога изузетно интензивно изучаван последњих пар деценија. Питању понашања танких система у овом моделу, међутим, није посвећена довољна пажња до сада. Најбитнији резултати у дисертацији јесу: предложен аналитички облик ефективне критичне неуређености (најбитнијег параметра система), као и његова нумеричка потврда, испитивање понашања разних одговора система, њихово поређење са експериментом и потенцијалне сугестије за адекватнију интерпретацију експерименталних података. У другом делу дисертације је испитан утицај броја најближих суседа на критично понашање модела. На неколико различитих примера дводимензионих и тродимензионих решетки, показано је да скуп критичних експонената, који описују критично понашање, није функција само димензионалности система, као што се веровало. За различите решетке су добијене различите вредности неких критичних експонената и то указује да би требало преиспитати тренутне ставове о класама универзалности када је у питању критично понашање модела. Сви представљени резултати су добијени исцрпним нумеричким симулацијама помоћу програма који је описан у додатку.

Кључне речи: феромагнетизам, Изингов модел са случајним пољем, танки системи, прелазак са три на две димензије, критично понашање, димензионалност, решетке са различитим бројем суседа, нумеричке симулације

Научна област: Физика

Ужа научна област: Неравнотежна статистичка физика

УДК број: 533.9 (043.3)

Crossover from three-dimensional to two-dimensional systems and impact of number of neighbours on critical behaviour of the nonequilibrium zero-temperature random field Ising model

Abstract

In the world of rising number of ferromagnetic experiments done on thin systems, the question is whether those systems are three-dimensional or they behave effectively as two-dimensional systems, because one of their dimensions is significantly smaller than the other two. Along with experimental, the same theoretical question is important. Therefore, the first part of this dissertation deals with crossover from three-dimensional to two-dimensional systems in the nonequilibrium zero-temperature random field Ising model. This model proved to be very successful in theoretical consideration in describing real experiments and for these reasons it has been extensively studied during past few decades. Nevertheless, not enough attention has been paid to the behaviour of thin systems in the model so far. The most important results in dissertation are: proposal of analytical expression of the effective critical disorder (most relevant parameter in the model) together with its numerical verification, examination of behaviour of various system's responses, their comparison to experimental results and potential tips how to interpret the experimental data more adequately. In the second part of dissertation it is examined how different number of nearest neighbours affects the critical behaviour of the model. It is shown on a few different examples of two-dimensional and three-dimensional lattices that the set of critical exponents, that describe critical behaviour, is not the function of the system dimensionality only, as it is believed. Thus, it was found that for different lattices there are different values of some critical exponents, which points to the need of reconsideration of current beliefs about universality classes within the critical behaviour of the model. All presented results are obtained from extensive numerical simulations done with a program described in Appendix.

Key words: ferromagnetism, random field Ising model, thin systems, crossover from three to two dimensions, critical behaviour, dimensionality, lattices with different number of nearest neighbours, numerical simulations

Scientific field: Physics

Research area: Nonequilibrium statistical physics

UDC number: 533.9 (043.3)

Садржај

1	Увод	1
2	Изингов модел са случајним пољем	5
2.1	Опис модела	5
2.2	Динамика модела	7
2.2.1	Лавина и њени параметри	9
2.2.2	Адијабатски режим	11
2.2.3	Матрица за пропагацију лавине; спинске замке	12
2.2.4	Прожимајуће лавине	13
2.2.5	Ефективна критична неуређеност	14
2.2.6	Гранични услови	16
2.3	Други спински модели	17
3	Понашање основних величина у дводимензионом и тродимензионом моделу	19
3.1	Магнетизација	19
3.2	Дистрибуције спинских лавина	24
3.2.1	Дистрибуција величине лавина	24
3.2.2	Дистрибуције трајања, енергије и амплитуде лавина	27
3.3	Спектар снаге	29
3.4	Везе између експонената	31
3.5	Вредности експонената	32
4	Прелазак са три на две димензије	34
4.1	Критична неуређеност	35
4.1.1	Ефективна критична неуређеност	35
4.1.2	Аналитички изрази за $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ и $R_c(l)$	35

4.2	Скалирање дистрибуција параметара лавине	38
4.2.1	Скалирање дистрибуција величине лавина	39
4.2.2	Скалирање дистрибуција трајања и енергије лавина	42
5	Нумерички резултати за прелазак са три на две димензије	45
5.1	Нееквилатерални системи	46
5.2	Критична неуређеност	48
5.2.1	Нумеричко одређивање ефективне критичне неуређености .	48
5.2.2	Нумеричка провера теоријског израза за одређивање ефективне критичне неуређености	51
5.2.3	Термодинамички лимит	53
5.3	Нумерички резултати за скалирање дистрибуција параметара лавине	55
5.3.1	Нумерички резултати за скалирање дистрибуција величине лавина	55
5.3.2	Нумерички резултати за скалирање дистрибуција трајања лавина	58
5.3.3	Нумерички резултати за скалирање дистрибуција енергије лавина	59
5.4	Поређење са експериментом	59
6	Понашање танких система на ефективној критичној неуређености	63
6.1	Критичне лавине система различитих дебљина	68
6.1.1	Дистрибуције величине и трајања лавина	69
6.1.2	Просечна величина и просечан облик лавине	73
6.2	Поређење са експериментом	76
7	Утицај броја суседа на критично понашање модела	79
7.1	Дводимензиона решетка са троугаоном основом (шест најближих суседа)	80
7.1.1	Дистрибуције параметара лавине	82
7.1.2	Спектар снаге	84
7.1.3	Ефективна критична неуређеност	85

7.2	Двострумина решетка са хексагоналном основом (три најближа суседа)	86
7.2.1	Дистрибуције параметара лавине	88
7.2.2	Спектар снаге	91
7.2.3	Ефективна критична неуређеност	91
7.2.4	Критични параметри и критични експоненти	91
7.3	Трострумина решетка са три најближа суседа	93
7.3.1	Дистрибуције параметара лавине	96
7.3.2	Спектар снаге	99
7.3.3	Ефективна критична неуређеност	99
7.3.4	Критични параметри и критични експоненти	99
8	Закључак	102
A	Опис програма за симулације	105
A.1	Просторна ефикасност	105
A.2	Временска ефикасност	109
	Литература	111

Глава 1

Увод

Један од најважнијих праваца у физици кондензованог стања материје, како експерименталној, тако и теоријској, јесте изучавање магнетних система. У мноштву феномена, појава и ефеката који се јављају у овим системима веома битно место заузима истраживање Баркхаузеновог ефекта. Откривен двадесетих година двадесетог века [1], Баркхаузенов ефекат од самог почетка па до данас доноси доста одговора у, још увек, неразјашњеним проблемима, али исто тако отвара и нова питања. Ефекат се испољава у виду скокова магнетизације феромагнетних система при глаткој и спорој промени спољног магнетног поља коме је систем изложен. Том приликом се индукује електромоторна сила чији су временски профили стохастички, те због континуалног спектра снаге они имају карактеристике шума који се назива Баркхаузенов шум. Услед магнето-акустичке спреге се јавља звук који прати ову појаву и тај звук се такође назива Баркхаузенов шум [2, 3].

Поред значаја за експериментална истраживања, откриће и изучавање Баркхаузеновог шума су дали једну од првих потврда Вајсове теорије магнетних домена [4]. Иако је Вајсова теорија квалитативна, њена потврда је ипак много значила омогућивши детаљнији увид у понашање феромагнетика вођених променљивим спољним магнетним пољем. Временом се јавила потреба за даљим развијањем теоријских модела феромагнетика који би могли да дају и квантитативна објашњења и предвиђања њиховог понашања. Један такав модел, који је уједно и један од најважнијих модела у физици магнетизма, јесте Изингов модел. Модел је настао када је 1920. године Вилхелм Ленц (*Wilhelm Lenz*) поставио задатак свом студенту, Ернсту Изингу (*Ernst Ising*), који је потом решио модел у једној димензији у својој тези 1924. године [5]. Оригинални

(чист) Изингов модел добро описује статичко понашање чистих монодоменских феромагнетика. У једној димензији нема критичног понашања, за димензије $2 \leq d \leq 3$ модел испољава нетривијално критично понашање, док се за $d \geq 4$ понашање система описује у складу са апроксимацијом средњег поља [6, 7, 8, 9]. Већ за $d = 2$ се модел много компликује и његово аналитичко решење у случају квадратне решетке је дао Онзагер (*Lars Onsager*) 1944. године [10]. У циљу описа динамике реалних магнетних система чист Изингов модел је осамдесетих година двадесетог века проширен на Изингов модел са случајним пољем [11, 12, 13]. Овај модел се показао као веома успешан у описивању тврдих феромагнетика.

Обзиром да су у реалним системима магнетне интеракције у тврдим феромагнетцима доминантне у односу на термалне, знатно више је изучавана атермална верзија Изинговог модела са случајним пољем [14, 15]. Такви реални системи не подлежу правилу да у сваком тренутку буду у стању минималне енергије, већ из текуће конфигурације еволуирају у складу са локалним динамичким правилима. Стога је посебна пажња посвећена неравнотежној атермалној верзији Изинговог модела са случајним пољем [16, 17]. Обзиром да нема термалних флуктуација, понашање система тада зависи једино од расподеле замрзнутих нечистоћа чију ширину контролише параметар неуређености (детаљније у Глави 2). Неравнотежни модел експанзију доживљава деведесетих година прошлог века у радовима Сетне (*James Sethna*) са коауторима [18, 19, 20], са појавом јачих рачунара који су омогућили екстензивније симулације. Детаљни нумерички резултати добијени током више од 20 година рада на моделу су знатно допринели објашњењу разних експерименталних појава.

За неравнотежни Изингов модела са случајним пољем на температури $T = 0$ је показано нетривијално критично понашање, тј. постојање фазног прелаза из парамагнетне у феромагнетну фазу, при димензијама система $2 \leq d \leq 5$ [21, 22]. За димензије $d \geq 6$ се понашање модела описује у апроксимацији средњег поља [23, 24, 25]. Испоставило се да је лакше нумерички испитати критичност модела веће димензије, тако да је прво показано да постоји фазни прелаз Изинговог модела са случајним пољем на еквилатералним системима у три и више димензија [22, 26]. Потом се на потврду исте појаве у две димензије

чекало до 2011. године када је и то показано нумеричким симулацијама [27, 28].

Данас се многа експериментална истраживања у физици магнетизма, али и у разним другим гранама физике, баве изучавањем танких филмова [29, 30, 31], за које је од посебног значаја питање: да ли су ти филмови тродимензиони системи (имајући у виду да имају све три димензије) или се, ипак, понашају ефективно као дводимензиони (јер им је једна линеарна димензија знатно мања од остале две) [32, 33, 34]? Обзиром да је цела физика танких филмова доста нова област, то се овом питању још увек није посветило довољно пажње ни експериментално нити теоријски. У литератури постоји само неколико радова који се односе на изучавање ове проблематике у неравнотежним моделима [35, 36, 37] и нешто већи број радова посвећених равнотежним системима [38, 39, 40, 41]. Стога се ова дисертација бави изучавањем понашања неравнотежног атермалног Изинговог модела са случајним пољем при преласку са три на две димензије.

Изучавајући то питање спонтано се јавља и једно ново питање, чисто теоријске природе. Посматрајмо шта се дешава са системом како се једна од димензија смањује на примеру кубне решетке. Рецимо да се дебљина система смањује, док дужина и ширина остају исте. Тада, све док је дебљина већа од 2, сваки спин у чвору решетке има 6 суседа уколико су гранични услови затворени (детаљније у Глави 2). Када је дебљина једнака 2 тада сваки спин има 5 најближих суседа, док за дебљину 1 сваки спин има 4 суседа (то је у ствари дводимензионални систем). Познато је да се понашање ових система разликује, тако да се питање порекла те разлике само намеће. До сада је сматрано да на критичност модела утиче само димензионалност, што би значило да дводимензионални модел има исти скуп критичних експонената без обзира на то каква је базна решетка (квадратна, троугаона, хексагонална...). Међутим, неке новије теоријске анализе су указале да на критично понашање утиче и број најближих суседа [42, 43, 44]. Провери тачности овог тврђења у случају неравнотежног атермалног Изинговог модела са случајним пољем ће бити посвећен други део ове тезе. До сада су резултати везани за критично понашање рађени на хиперкубним решеткама, док ће овде бити приказано како се модел понаша уколико је базна решетка троугаона или хексагонална у дводимензионом случају, односно

решетка са три најближа суседа у тродимензионом случају.

Дисертација је организована на следећи начин. У глави 2 је описан Изингов модел са случајним пољем са акцентом на оним параметрима модела који су битни за овај рад. Понашање основних величина у дводимензионом и тродимензионом моделу је описано у глави 3. Ту су приложени досадашњи основни резултати у ова два модела који су од значаја за дисертацију. Потом, наредне три главе се баве понашањем модела при преласку са три на две димензије. У глави 4 су дате теоријске предикције како би требало да се понашају критична неуређеност и дистрибуције параметара лавине. Глава 5 даје нумеричке потврде поменутих предикција, док се глава 6 бави понашањем танких система на самој ефективној критичној неуређености. Како различит број суседа утиче на критично понашање модела, показано је у глави 7 на примерима дводимензионих решетака са три, односно шест најближих суседа (од раније су познати резултати за дводимензиону решетку са четири најближа суседа), као и на примеру тродимензионе решетке са три најближа суседа (од раније је познато понашање тродимензионог система са шест најближих суседа). Коначно, у глави осам је дат закључак дисертације, док се у додатку налази опис програма за симулације атермалног неравнотежног Изинговог модела са случајним пољем.

Глава 2

Изингов модел са случајним пољем

2.1 Опис модела

Чист Изингов модел описује систем од N класичних магнетних диполних момената атома потеклих од спинова чије пројекције на правац спољног магнетног поља могу да имају вредности ± 1 и који су у контакту са термостатом. Спинови су смештени у чворове неке решетке без дефеката/нечистоћа и интерагују са најближим суседима и спољним магнетним пољем, а еволуирају у складу са Глауберовом динамиком [45, 46]. Као што је речено у уводу, у једној димензији се показује да не постоји фазни прелаз, док га у вишим димензијама има. За дводимензиони модел аналитичко решење постоји само за нулто спољно поље $H = 0$, док за $H \neq 0$, као и за тродимензиони модел, постоје само нумеричка решења. За димензије веће од 3 се систем описује у апроксимацији средњег поља (другим речима, горња критична димензија овог модела је $d_u = 4^1$).

Чист Изингов модел је у најједноставнијој варијанти описан Хамилтонијаном:

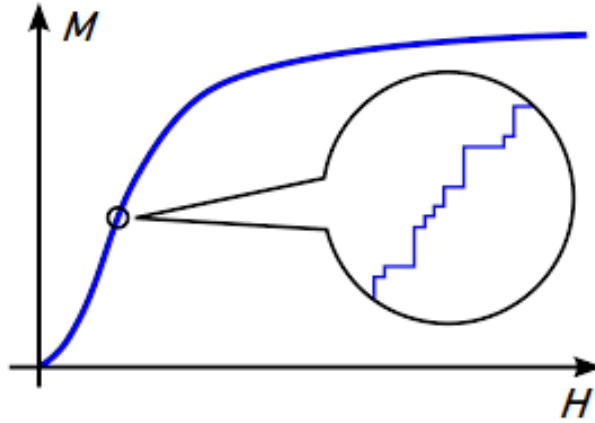
$$\mathcal{H}_0 = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i,$$

где J представља изменски интеграл, а $\langle \rangle$ означава да се сумирање врши само по најближим суседима.

¹Горња критична димензија је најнижа димензија на којој се модел описује теоријом средњег поља.

Како су у реалности дефекти/нечистоће увек присутни у систему (разни су узроци нечистоћа: недостатак атома у решетки, присуство атома неког другог елемента уместо оригиналног...), за бољи опис динамике феромагнетних система је предложен Изингов модел са случајним пољем (RFIM-Random Field Ising Model) [11, 12]. Код чистог Изинговог модела сваки спин интерагује са најближим суседима и са спољним пољем, док се код Изинговог модела са случајним пољем јавља разлика у томе што се сваком чвору решетке придружује случајно магнетно поље са којим интерагује спин из датог чвора. Према понашању тог случајног поља у времену може се говорити о два модела: онај код кога су случајна поља замрзнута у времену (*quenched*) и онај код ког се поља мењају са временом (*annealed*). Код првог није нужно реч о пољима која се никад не мењају, већ је карактеристично време промене случајних поља много веће од времена које је потребно за достизање метастабилног стања путем спинске динамике (времена које је потребно спиновима да интерагују и заузму крајњу оријентацију), што је веома чест случај у реалним системима. Код другог модела су та два времена упоредива, тако да се током промене спољног поља опажа и промена случајног поља и она ствара битан допринос у понашању феромагнетика.

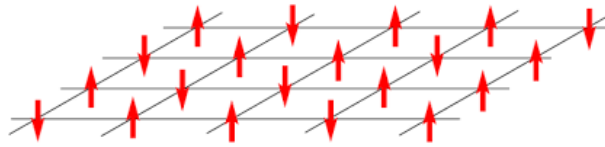
Услед постојања интеракције између спинова, промена оријентације једног спина при датој вредности магнетног поља може изазвати нестабилност његових суседа, односно и промену њихових оријентација. То даље може изазвати промену оријентације наредних суседа и тако редом, чиме долази до настанка такозване спинске лавине. Описана појава је аналогна пулсевима код Бархаузеновог шума [1]. Код многих феромагнетика хистерезисна крива није глатка, већ се састоји из мноштва малих скокова (што представља Бархаузенов шум, као што је објашњено у уводу). Ти скокови потичу управо од лавинског карактера релаксације система и њихова величина и расподела је директна последица неуређености система. Они имају стохастички карактер и настају као резултат иреверзибилне промене доменске структуре узорака. Многобројна експериментална и теоријска истраживања су показала да Бархаузенов ефекат спада у феномене који испољавају динамичко критично понашање [47]. На слици 2.1 је приказан један пример хистерезисне петље која на микро скали није глатка већ се састоји из мноштва мањих и већих скокова магнетизације.



Слика 2.1: На ниској резолуцији хистерезисна петља изгледа као глатка крива. Ако се, међутим, резолуција довољно повећа, види се да крива није глатка, већ да се магнетизовање одвија путем низа дискретних скокова магнетизације.

2.2 Динамика модела

Као и код чистог Изинговог модела и у Изинговом моделу са случајним пољем сваком чвору решетке придружујемо један спин s_i који може имати вредности ± 1 . Један пример дводимензионалне решетке је дат на слици 2.2.



Слика 2.2: Изингови спинови на дводимензионалној решетци.

Обзиром да је расподела нечистоћа у реалним узорцима стохастичка, то се и у теоријском моделу случајна поља, h_i , бирају из неке дистрибуције $\rho(h)$. Та дистрибуција мора да задовољава следеће услове:

$$\langle h_i \rangle_{RFC} \equiv 0, \quad \langle h_i h_j \rangle_{RFC} \equiv 0, \quad i \neq j$$

односно да очекивана вредност случајног поља, као и корелација између вредности случајних поља на било која два различита чвора, усредњене по свим могућим конфигурацијама случајних поља морају да буду једнаке нули. Постоје јаке индикације да, све док су ова два услова задовољена, одабир функције расподеле не утиче на критичност система [48]. У овој тези је за функцију

расподеле ρ узета Гаусова функција

$$\rho(h) = \frac{1}{R\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h^2}{2R^2}},$$

са очекиваном вредношћу 0 и стандардном девијацијом R , која представља меру неуређености система и назива се неуређеност.

Дакле, сваки спин у Изинговом моделу са случајним пољем има три врсте интеракција са околином. Прва потиче од интеракције спина са спољним магнетним пољем H и њен допринос Хамилтонијану система износи $-H_i s_i$, где су H_i и s_i спољно поље и спин у i -том чвору решетке. Друга је изменска интеракција и њен допринос је $-J_{ij} s_i s_j$, где су s_i и s_j спинови у чворовима i и j (најближи суседи), а J_{ij} изменски интеграл. Трећа врста интеракције (додатна у односу на чист Изингов модел) јесте интеракција спина s_i са случајним пољем h_i у истом чвору и њен допринос Хамилтонијану износи $-h_i s_i$. У овом раду је спољно магнетно поље хомогено, $H_i = H$, и постоји само феромагнетна интеракција између најближих суседа која је једнака на целој решетки, односно $J_{ij} \equiv J > 0$, специјално овде $J = 1$, те укупни Хамилтонијан модела гласи²:

$$\mathcal{H} = -H \sum_i s_i - \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \sum_i h_i s_i. \quad (2.1)$$

У неравнотежној варијанти Изинговог модела са случајним пољем се, даље, уводи критеријум за стабилност спина: спин у чвору i је стабилан све док је истог знака као и ефективно поље које на њега делује:

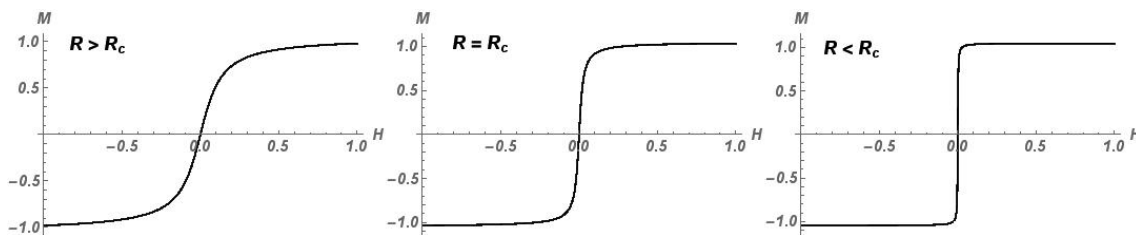
$$h_i^{eff} \equiv H + \sum_{\langle j \rangle} s_j + h_i, \quad (2.2)$$

где $\langle \rangle$ опет означава да се сумирање врши само по најближим суседима s_j спина који се налази у чвору i . Док год је оријентација спина истог знака као и ефективно поље које на њега делује стање спина је стабилно, тј. енергетски је повољније од стања спина са супротном оријентацијом. Ако се, пак, знак ефективног поља промени тада спин постаје нестабилан и у следећем тренутку дискретног времена ће променити оријентацију (флиповаће се). Из израза за ефективно поље (2.2) се види да знак тог поља може да се промени услед три

²Све величине су изражене у редукованим јединицама да би се добио што једноставнији облик Хамилтонијана.

фактора: промене спољашњег магнетног поља, промене оријентације најближих суседа или случајног поља у датом чвору³.

За димензије $d \geq 2$ неравнотежни Изингов модел са случајним пољем испољава фазни прелаз. При неуређеностима R већим од критичне неуређености R_c постоји парамагнетна фаза у којој се магнетизовање одвија кроз мале промене магнетизације. Стога је хистерезисна петља усредњена по ансамблу узорака, континуална. Када је $R = R_c$ хистерезисна петља је и даље континуална, али има бесконачан извод при критичној вредности спољног поља H_c , док при неуређеностима $R < R_c$ хистерезисна петља сваког појединачног узорка има скок који потиче од појаве великих лавина које прожимају цео систем, и више није континуална крива. Приказ описаног је дат на слици 2.3, док је детаљније објашњење дато у даљем делу текста.



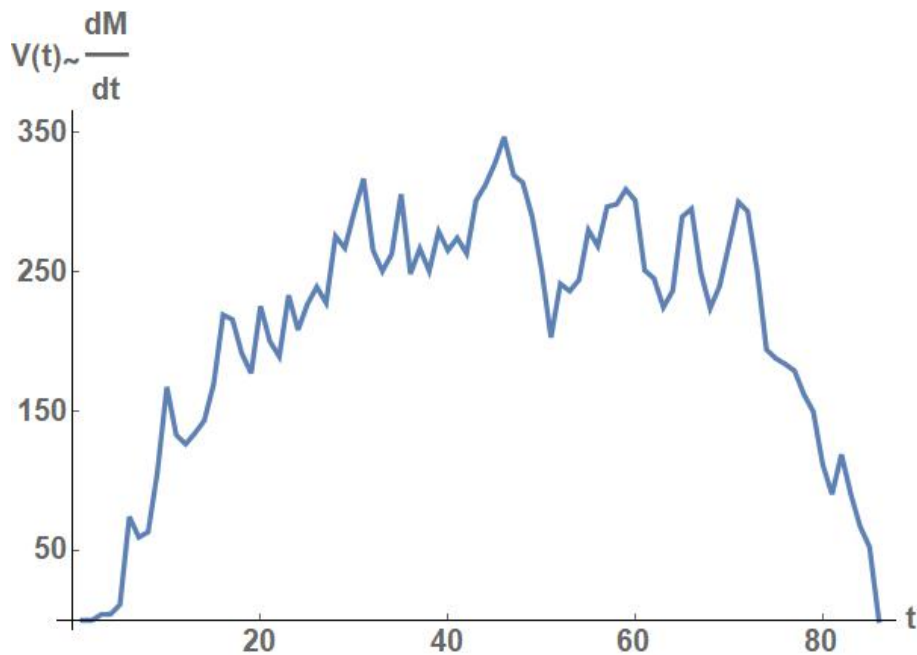
Слика 2.3: Узлазна крива хистерезисне петље за три случаја неуређености: изнад критичне, на критичној и испод критичне.

2.2.1 Лавина и њени параметри

У овом раду се проучава варијанта модела са замрзнутим случајним пољем, те оно само не може бити узрок нестабилности спина уколико се спољашње поље H и суседни спинови не мењају. Међутим, са променом оријентације једног спина мења се ефективно поље свих његових најближих суседа и неки од њих могу постати нестабилни. Сви спинови који су нестабилни у тренутку t мењају своју оријентацију у следећем тренутку $t + 1$ дискретног времена. Том променом оријентације отвара се могућност да сви њихови најближи суседи постану нестабилни, те се на тај начин ствара спинска лавина. Такође, поред утицаја најближих суседа, спинови могу постати нестабилни и услед мењања спољног магнетног поља.

³У случају замрзнутог случајног поља се знак ефективног поља може променити само услед промене оријентације најближих суседа или услед промене спољног поља.

На слици 2.4 је дат временски профил једне спинске лавине. За јачину сигнала у датом тренутку се узима број спинова који су променили оријентацију у том тренутку. Јачина сигнала је пропорционална брзини промене магнетизације (dM/dt), а то је величина која се мери у реалним експериментима. У току једне лавине максимална јачина сигнала се назива амплитуда лавине A и та величина спада у скуп најбитнијих параметара лавине.



Слика 2.4: Изглед једне лавине. На апсциси је време трајања лавине, а на ординати јачина сигнала која је пропорционална броју спинова који су променили оријентацију, односно промени магнетизације, у датом тренутку времена.

Уколико у неком тренутку нема више нестабилних спинова у систему тада је лавина угашена. Време које је протекло од почетка лавине, па до њеног гашења, се назива трајање лавине T и представља још један битан параметар који користимо за њен опис.

Најважнији параметар лавине јесте њена величина S . Она представља укупан број спинова који су променили оријентацију током трајања лавине. Геометријски је величина лавине једнака површини испод криве која представља профил лавине. На хистерезисној петљи је скок магнетизације величина која је пропорционална са S .

Поред наведених параметара често се као битан параметар наводи и енергија E ослобођена током лавине. Она се узима да је једнака суми квадрата јачине сигнала током трајања посматране лавине.

Лавине могу бити разних амплитуда, трајања, величина, енергија итд. и за сваки од ових параметара се може посматрати његова расподела. Ове расподеле зависе од неуређености R , од димензије и величине система, али и од граничних услова, начина вођења спољног поља и разних других фактора. Уколико се посматра расподела ових величина у оквиру неког прозора спољног поља, тј. интервала $H_0 - \Delta H/2 \leq H \leq H_0 + \Delta H/2$, онда та расподела зависи и од центра прозора H_0 и од његове ширине ΔH .

2.2.2 Адијабатски режим

У симулацијама спољно поље може да се мења на разне начине, али најчешће се мења константном брзином или се симулација врши у адијабатском режиму. У првом случају се спољно поље мења за константан износ δH при сваком преласку на наредни тренутак дискретног времена. То значи да је брзина промене спољног поља:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\delta H}{\delta t} = \Omega,$$

где је δt вредност за коју се повећава дискретно време⁴ [49]. Коначне брзине промене спољног поља повећавају шансу за промену оријентације спинова. Неки спинови, који би били стабилни да је $\delta H = 0$, тако постану нестабилни, те може да се деси да у истом тренутку у систему постоје две лавине које пропагирају независно једна од друге. Јасно је и да број истовремених лавина може бити и већи. Што је већа величина система, при фиксираним Ω и R , то се јавља све више истовремених лавина⁵.

Међутим, за теоријску анализу је погодније, колико год да је велики систем, да се лавине дешавају одвојено, односно да у једном тренутку може да пропагира само једна лавина кроз систем. Ово се постиже тако што се спољно поље не мења у току трајања једне лавине. Ако се погледа израз (2.2) тада је једино што у току трајања лавине може да изазове нестабилност спина промена оријентације његових суседа. Оног тренутка када се лавина угаси, спољно поље се повећава на ону вредност која је потребна да се појави први нестабилан спин и опет се не мења све док се та лавина не угаси. Режим којим се ово постиже

⁴У симулацијама се типично узима да је $\delta t = 1$; тада је $\Omega = \delta H$.

⁵Шанса расте зато што са порастом величине система расте шанса да се за $H \in (H_t, H_{t+\delta t} = H + \delta H]$ нађе спин коме ефективно поље мења знак.

се назива бесконачно спори адијабатски режим и сви резултати представљени у овом раду су рађени у том режиму.

2.2.3 Матрица за пропагацију лавине; спинске замке

У адијабатском режиму, оног тренутка када се лавина угаси једини начин да се промени оријентација следећег спина јесте променом спољног поља и то тачно за износ потребан да дође до промене

оријентације најнестабилнијег спина. При великим апсолутним вредностима спољног поља често се дешава да промена оријентације спина не проузрокује нестабилност његових суседа (тада они неће променити оријентацију, па се лавина састоји само од промене оријентације најнестабилнијег спина променом спољног поља) или да успе да утиче на суседе, али они даље не пренесу то на своје суседе и лавина буде јако мала. Тада долази до појаве великог броја малих острваца где спинови имају вредност супротну од мора спинова који се налазе око њих. Сваки спин који се налази у додиру са острвцем постаје мање стабилан због измењеног изменског фактора. Како се спољно поље приближава нули тако матрица ових острваца постаје све гушћа. Тиме се ствара окружење које олакшава појаву великих лавина које се највише јављају у околини једне карактеристичне вредности спољног поља, коју називамо коерцитивно поље.

Типичан случај је да симулација започне са спољним пољем $H = -\infty$ ⁶, а да сви спинови имају оријентацију надолу $s_i = -1$. Тада се при повећању спољног поља од веома негативних вредности стварају острвца спинова са вредностима $+1$ у мору -1 спинова. Како спољно поље расте тако и лавине постају све веће и крива магнетизације све стрмија. Лавине су највеће око вредности магнетизације $M \approx 0$. Даље је ситуација обрнута. Како спољно поље постаје позитивно и све веће тако је вредност спинова у скоро целом систему $+1$, док постоје острвца спинова са вредношћу -1 . Та острвца су формирана око спинова који имају веома негативну вредност случајног поља, те за промену њихове оријентације треба знатно повећати спољно поље. На тај начин се спречава пропагација лавина и таква острвца представљају спинске замке.

⁶Спољно поље није заиста $-\infty$, него је довољно негативно да су сви спинови стабилни у почетном тренутку.

2.2.4 Прожимајуће лавине

Специјалну врсту лавина у коначним системима представљају такозване прожимајуће лавине. То су лавине које се простиру дуж бар једне целе димензије система. Оне садрже веома велики број спинова и тада крива магнетизације има изразит скок. То представља аналогон бесконачних лавина у бесконачним системима (системи у термодинамичком лимиту) где хистерезисна крива има бесконачан извод.

Прожимајуће лавине се јављају само при довољно малим неуређеностима. У циљу објашњења тога погледајмо шта се дешава у граничном случају $R \approx 0$. Тада је ефективно поље:

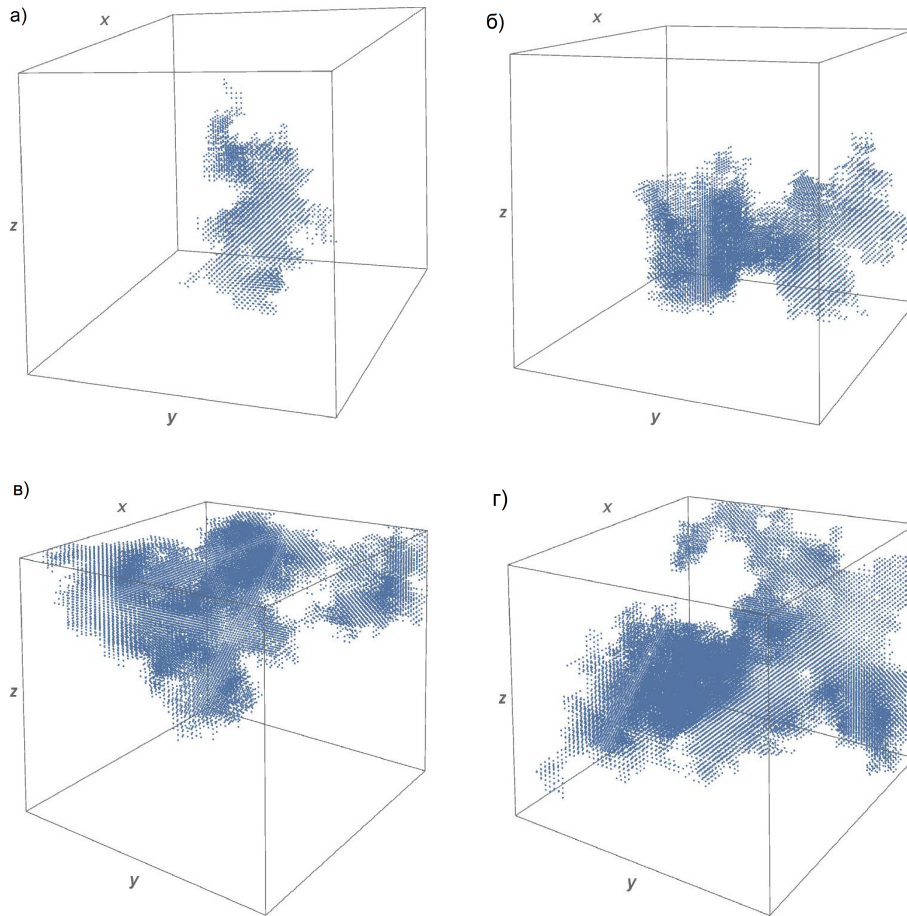
$$h_i^{eff} \approx H + \sum_{\langle j \rangle} s_j,$$

па се види да је за спинове s_i за које је $\sum_{\langle j \rangle} s_j = 0$ ефективно поље:

$$h_i^{eff} \approx H,$$

односно да ће сви они променити оријентацију при промени знака спољног поља. Како у близини $H \approx 0$ има доста спинова за које важи $\sum_{\langle j \rangle} s_j = 0$, а и такви се стварају у току саме лавине која се активира, то следи да ће се за неку вредност спољног поља која је блиска нули јавити прожимајућа лавина. Поље H_{sp} при коме се јави прожимајућа лавина се назива прожимајуће поље. Оно зависи од расподеле случајног поља $\{h_i\}_{i=1}^N$, те је и оно случајна величина чија расподела зависи од R .

Из наведеног се види да при довољно малим неуређеностима долази до појаве прожимајућих лавина. Супротно, када је неуређеност велика, односно расподела случајног поља широка, у многим чворовима ће случајно поље имати велике апсолутне вредности, односно јавиће се много спинских замки које ће спречити појаву прожимајуће лавине. На слици 2.5 се види како у коначном тродимензионалном систему лавина може бити непрожимајућа (део а)), прожимајућа по једној димензији (део б)), по две димензије (део в)), као и по све три (део г)).



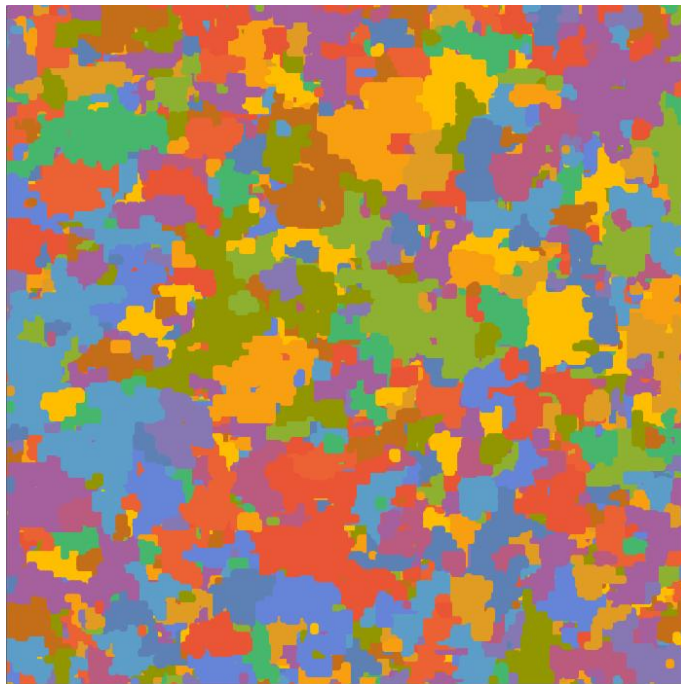
Слика 2.5: Приказ спинских лавина на решетки Изингових спинова у три димензије. а) Непрожимајућа лавина; б) прожимајућа по једној димензији; в) прожимајућа по две димензије; г) прожимајућа по три димензије.

2.2.5 Ефективна критична неуређеност

Показано је да за сваки коначан систем постоји неуређеност при којој се јављају прожимајуће лавине, односно при којој крива магнетизације има изразит скок. Највећа таква неуређеност, за систем у термодинамичком лимиту, се назива критична неуређеност R_c ⁷. У коначним системима се, пак, та неуређеност разликује од R_c , зависи од величине система и назива се ефективна критична неуређеност $R_c^{\text{eff}}(L)$. Мора се нагласити да наведени критеријум за одређивање ефективне критичне неуређености (да је то највећа неуређеност при којој се и даље јавља прожимајућа лавина у систему) није довољно поуздан. Наиме, пошто је случајно поље стохастичка величина онда постоји вероватноћа (макар и изузетно мала) да ће се јавити таква расподела поља при којој ће се јавити

⁷Дакле, за $R > R_c$ нема прожимајућих лавина, док се за $R \leq R_c$ оне јављају.

прожимајућа лавина за било које R . Та вероватноћа са порастом неуређености опада, али и даље није нулта. Тиме критеријум за одређивање ефективне критичне неуређености доводи до тога да би, теоријски, ефективна критична неуређеност требало да буде бесконачна. Свакако, у пракси то није случај, јер је шанса за реализацију такве конфигурације случајних поља веома мала, те се овај критеријум и даље користи, пре свега због своје једноставности. У овом раду је коришћен прецизнији критеријум, који ће бити описан у наредним главама.

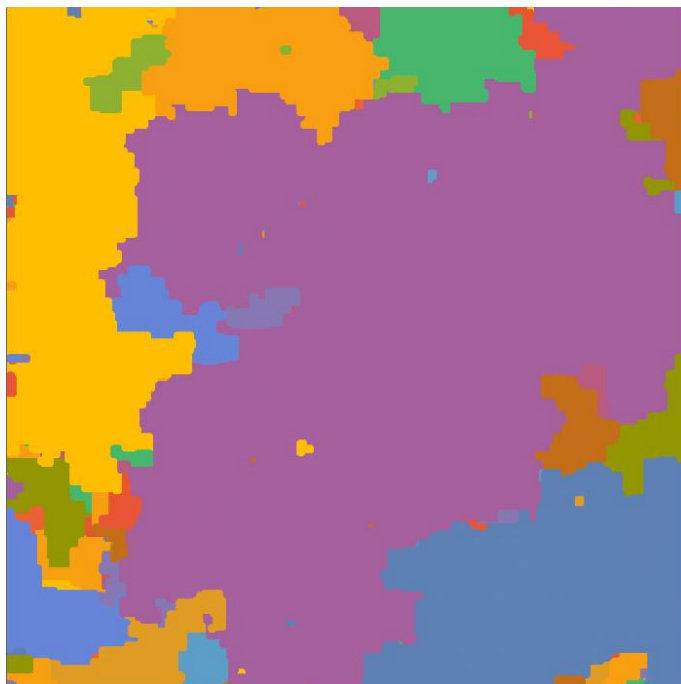


Слика 2.6: Дводимензиона решетка Изингових спинова величине 300×300 спинова са неуређеношћу изнад ефективне критичне, $R > R_c^{\text{eff}}$. Може се опазити много мањих лавина, али ниједна прожимајућа.

Ефективна критична неуређеност је увек већа од критичне неуређености и тежи њој у термодинамичком лимиту:

$$R_c^{\text{eff}}(L) \geq R_c \quad , \quad \lim_{L \rightarrow \infty} R_c^{\text{eff}}(L) \rightarrow R_c.$$

На сликама 2.6, 2.7 и 2.8 је приказано како изгледају лавине у дводимензионом систему. Свака лавина је обојена другачијом бојом. На слици 2.6 је неуређеност већа од ефективне критичне и у систему не постоји прожимајућа лавина. Слика 2.7 приказује систем у ком је неуређеност једнака ефективној критичној и ту се јавља прожимајућа лавина, али и знатан број малих острваца, док је на слици



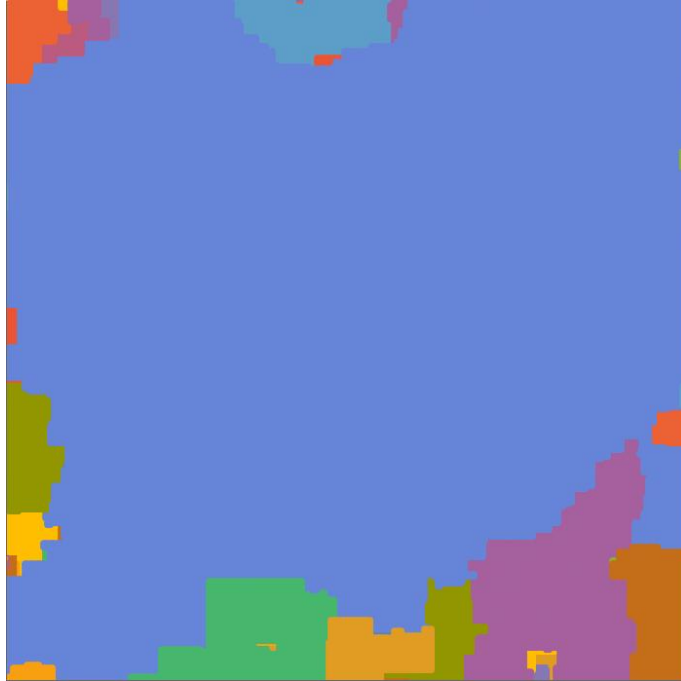
Слика 2.7: Двоструковна решетка Изингових спинова величине 300×300 са неуређеношћу која је једнака ефективној критичној, $R = R_c^{\text{eff}}$. Јавља се једна велика прожимајућа лавина представљена љубичастом бојом, али се види и да допринос осталих лавина није занемарљив.

2.8 неуређеност мања од ефективне критичне и ту се види да је прожимајућа лавина заузела скоро цео систем уз јако мало острваца који представљају мање лавине.

2.2.6 Гранични услови

У симулацијама се типично користе три типа граничних услова:

- затворени (периодични) гранични услови: решетка је тополошки затворена у хиперторус, те сви спинови имају исти број најближих суседа и позиционо су еквивалентни;
- отворени гранични услови: спинови на границама система немају исти број најближих суседа, већ је тај број мањи. Тако, на пример, на двоструковној квадратној решетки спинови на страницама квадрата немају по 4, већ само по 3 најближа суседа, док спинови на теменама имају само по 2 најближа суседа. Јасно је да ови спинови лакше мењају оријентацију од спинова у унутрашњости решетке, тако да у случају отворених граничних услова лавине најлакше крећу из темена, и/ или са страница квадрата;



Слика 2.8: Двоструковна решетка Изингових спинова величине 300×300 спинова са неуређеношћу испод ефективне критичне, $R < R_c^{\text{eff}}$. Може се запазити да прожимајућа лавина, обојена плавом бојом, прожима систем по обе димензије и преокреће практично све спинове.

- мешовити гранични услови: по неким димензијама система гранични услови су отворени, а по осталим затворени. Овај тип се примењује у случају када је потребно на одређени начин нагласити понашање система по некој од димензија у односу на остале.

Када се говори о понашању еквилатералних решетки (величина решетке по свакој димензији је иста) у термодинамичком лимиту ($L \rightarrow \infty$) онда сва три типа граничних услова дају исте резултате, само што затворени гранични услов даје бржу конвергенцију, те се стога чешће користи.

2.3 Други спински модели

Поред Изинговог модела са случајним пољем (RFIM), проучавани су и други спински модели. У Изинговом моделу са случајним везама (RBIM-Random Bond Ising Model) неуређеност система се испољава кроз флукуације у изменском интегралу $J_{i,j}$. Он узима вредности које су расподелењене око J_0 са стандардном девијацијом R . Слично Изинговом моделу са случајним пољем,

и у овом моделу се јавља фазни прелаз индукован неуређеношћу, а вредности критичних експонената су блиске у оба модела. На основу тога се сматра да та два модела припадају истој класи универзалности [50, 51].

Изингов модел са случајним чворовима (SDIM-Site Diluted Ising Model) описује присуство немагнетних примеса у разблаженим магнетцима које је моделирано случајним уклањањем спинова из чворова. Хамилтонијан има облик

$$\mathcal{H}_{SDIM} = - \sum_{ij} J_{ij} c_i c_j s_i s_j - H \sum_i c_i s_i, \quad (2.3)$$

где c_i показује да ли је спин магнетан или није, односно $c_i = 0, 1$, а спинови међусобно интерагују на свим удаљеностима, односно нису ограничени на интеракцију само са најближим суседима. Као и код Изинговог модела са случајним везама, тако и вредности експонената Изинговог модела са случајним чворовима имају вредности које су блиске онима из Изинговог модела са случајним пољем [52], те се сматра да су они сви у истој класи универзалности.

Још један модел јесте Изингов модел са случајном анизотропијом (RAIM-Random Anisotropy Ising Model). Он се добија из векторског модела

$$\mathcal{H}_{vec} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{s}_i \vec{s}_j - K_0 \sum_i (\vec{s}_i \vec{n}_i)^2 - \vec{H} \cdot \vec{s}_i,$$

у лимиту $K_0 \rightarrow \infty$, где $\langle \rangle$ означава сумирање само по паровима најближих суседа. У том случају је енергија анизотропије минимална ако је у сваком чвору решетке спин \vec{s}_i оријентисан дуж случајног правца \vec{n}_i . Тада се могу увести ефективни спинови $\sigma_i = \pm 1$ који представљају пројекцију спина \vec{s}_i дуж случајне осе \vec{n}_i . Хамилтонијан овог модела гласи:

$$\mathcal{H}_{RAIM} = - \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i H_i \sigma_i, \quad (2.4)$$

где су $J_{ij} = J \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j$ ефективне случајне везе, а $H_i = \vec{H} \cdot \vec{n}_i$ случајна поља. Симулацијама извршеним на овом моделу су добијене вредности експонената приближне као и код Изинговог модела са случајним пољем [53], те се, као и за претходна два модела, сматра да и овај припада истој класи универзалности.

Глава 3

Понашање основних величина у дводимензионом и тродимензионом моделу

У овој глави је дат кратак преглед понашања магнетизације, сусцептибилности, дистрибуција величина, трајања, енергија и амплитуда спинских лавина, као и понашање спектра снаге у дводимензионом и тродимензионом моделу симулираним на хиперкубној решетки. Обзиром да је историјски прво утврђено критично понашање тродимензионог модела [21, 22, 26], па потом дводимензионог [27, 28], то су и овде резултати приказани тим редом. Напомена: сви графици за тродимензиони модел су преузети из докторске дисертације Сање Јанићевић [54]. Иако су оригинални резултати представљени у радовима [21, 22, 26], Сања Јанићевић и коаутори су поновили већину симулација и овде је приказана та верзија графика¹. На крају је дат табеларни приказ мерених и рачунатих универзалних критичних експонената као и неуниверзалних скалирајућих варијабли.

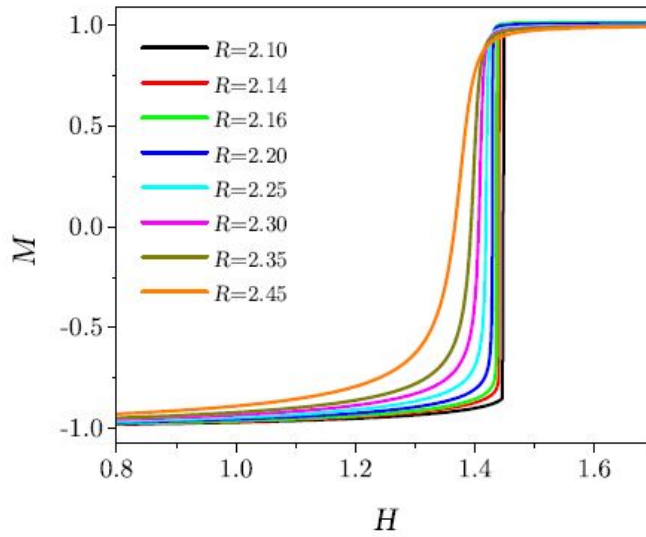
3.1 Магнетизација

Магнетизација Изинговог модела са случајним пољем у близини критичне тачке, одређене скупом варијабли (R_c, H_c, M_c) , се скалира према следећем закону:

$$m_R(H) \sim |r|^\beta \mathcal{M}_\pm \left(\frac{h'}{|r|^{\delta\beta}} \right). \quad (3.1)$$

¹Разлог за узимање графика из дисертације лежи у томе што су они рађени скоро 20 година после оригиналних, на већим решеткама, као и са већим бројем симулација, што значајно поправља квалитет графика

То значи да, уколико се величина $m_R(H)/|r|^\beta$ нацрта у функцији од $h'/|r|^{\delta\beta}$, криве које одговарају различитим неуређеностима треба да леже на кривој $\mathcal{M}_+(h'/|r|^{\delta\beta})$ при неуређеностима $R > R_c$, односно кривој $\mathcal{M}_-(h'/|r|^{\delta\beta})$ за $R < R_c$. Овде је $m_R = M_R(H) - M_c$ одступање од критичне магнетизације $M_c = M_{R_c}(H_c)$, $r = (R - R_c)/R$ је редукована неуређеност, $h' = H - H_c - br$ је редуковано магнетно поље ротирано за параметар b у циљу компензовања промене ефективног критичног поља $H_c^{\text{eff}}(r) = H_c + br$ [18], и коначно \mathcal{M}_\pm су универзалне скалирајуће функције, а β и δ критични експоненти.

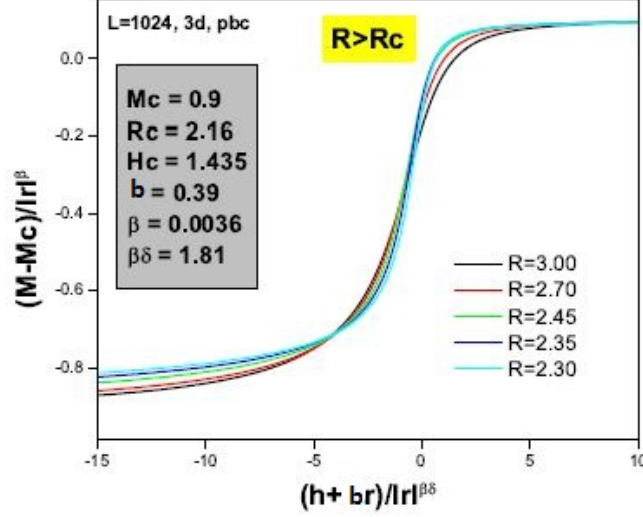


Слика 3.1: Крива магнетизације у тродимензионом моделу за систем величине $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова при неуређеностима у распону $R = 2, 10 - 2, 45$ [54].

На слици 3.1 су приказане интегралне криве магнетизације за тродимензиони модел. Величина решетке је $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова, а неуређености се крећу у интервалу $R = 2, 10 - 2, 45$, док су гранични услови периодични. Критична неуређеност за тродимензиони модел је процењена на $R_c^{3D} = 2, 16 \pm 0, 03$ [18, 19], а приказани систем је већ довољно велик да се његова ефективна критична неуређеност не разликује много од праве критичне неуређености, $R_c^{\text{eff}}(L = 1024) = 2, 21 \approx R_c^{3D}$. Са графика се види да за неуређености $R \leq R_c$ магнетизација доживљава нагли скок, а да, како R расте нагиб криве $M(H)$ постаје све мањи.

На слици 3.2 је приказан колапс интегралних кривих магнетизације за $R > R_c$. Криве добијене из система којима је неуређеност већа од критичне падају

на једну заједничку криву која представља скалирајућу функцију за магнетизацију $\mathcal{M}_+(x)$ у тродимензионом моделу у функцији скалираног редукованог поља $x = h'/|r|^{\delta\beta}$. Критични експоненти и параметри за које је овај колапс добијен су дати на графику, али и у табелама 3.1 и 3.3.



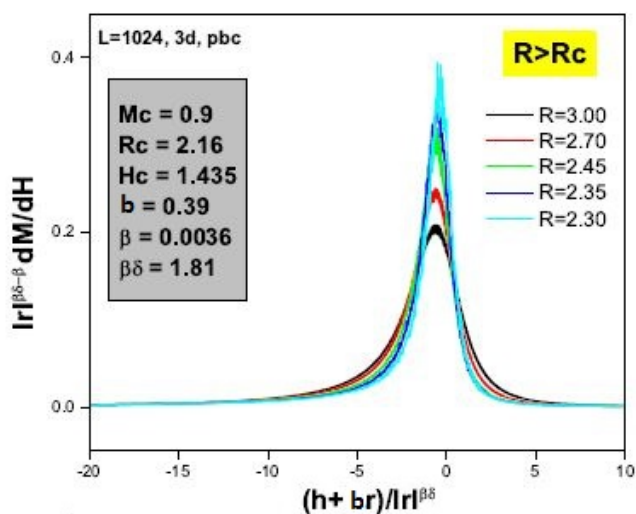
Слика 3.2: Колапс кривих магнетизације у тродимензионом моделу на функцију скалирања \mathcal{M}'_+ за неуређености $R = 2,30 - 3,00$ које су веће од критичне неуређености $R_c = 2,16$ и величину решетке $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова. У уоквиреној легенди су наведене вредности за M_c , R_c , H_c , b , β и $\beta\delta$ [54].

На основу (3.1) следи да се сусцептибилност, као први извод магнетизације $\chi = dM/dH$, скалира по закону:

$$\chi_R(H) \sim |r|^{\beta-\beta\delta} \mathcal{M}'_{\pm} \left(\frac{h'}{|r|^{\delta\beta}} \right), \quad (3.2)$$

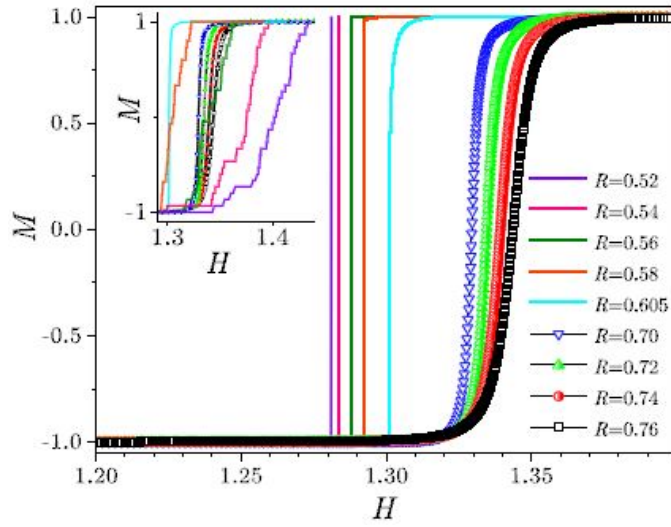
где су $\mathcal{M}'_{\pm}(x)$ изводи функција скалирања \mathcal{M}_{\pm} , односно $\mathcal{M}'_{\pm}(x) = d\mathcal{M}_{\pm}(x)/dx$. При истим параметрима као и за колапс интегралних кривих магнетизације урађен је и колапс диференцијалних кривих и то је приказано на слици 3.3.

Аналогно понашању тродимензионих система се понашају и дводимензиони системи. На слици 3.4 је приказано како изгледају интегралне криве магнетизације за систем величине 131072×131072 спинова и неуређености $R = 0,52 - 0,76$. Критична неуређеност за дводимензионални модел је процењена на $R_c^{2D} = 0,54 \pm 0,02$ [27], а ефективна критична за дату величину система је $R_c^{\text{eff}}(L = 131072) = 0,605$. Опет се види јасан прелаз на кривама $M(H)$ где је нагиб бесконачан (односно где се јављају прожимајуће лавине) у односу на криве

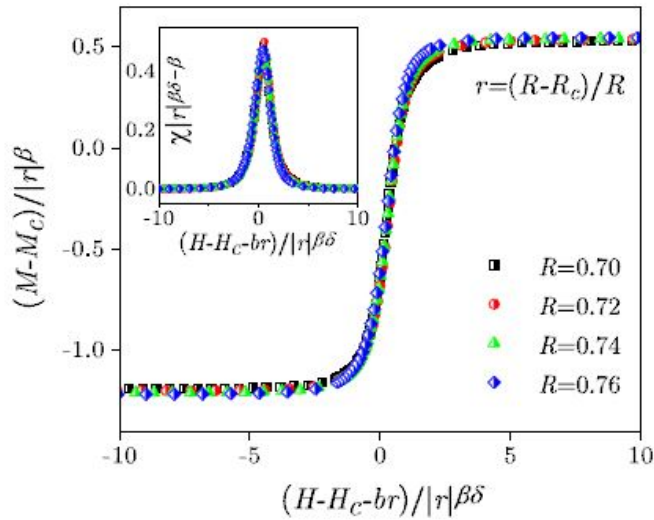


Слика 3.3: Колапс кривих суспектибилности у тродимензионом моделу за неуређености $R = 2,30 - 3,00$ веће од критичне неуређености $R_c = 2,16$ и величину решетке $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова. У уоквиреној легенди су наведене вредности за M_c , R_c , H_c , b , β и $\beta\delta$ [54].

код којих је нагиб мањи и које су глатке. Примењујући форму скалирања (3.1) и (3.2), али са другачијим вредностима критичних експонената и параметара, наведеним у табелама 3.1 и 3.3, добијају се колапси за дводимензиони модел. Графици су дати на слици 3.5. Може да се опази да колапс боље изгледа у дводимензионом случају, него у тродимензионом, али то је само привидно. Није димензионалност то што дефинише изглед колапса, него распон неуређености за који је рађен. Наиме, са слика 3.2 и 3.5 се види да у тродимензионом случају неуређености имају јако велики распон, од $R = 2,30$ до $R = 3,00$, док је у дводимензионом случају распон знатно мањи, од $R = 0,70$ до $R = 0,76$.



Слика 3.4: Криве магнетизације у дводимензионом моделу за неуређености $R = 0,52 - 0,76$ и величину решетке 131072×131072 спинова. На главној слици су приказане криве магнетизације усредњене на 30 конфигурација случајног поља, док уметнута слика приказује примере кривих магнетизације за појединачне конфигурације [28].



Слика 3.5: Колапс кривих магнетизације (главна слика) и кривих сушцептибилности (уметнута слика) у дводимензионом моделу за неуређености $R = 0,70 - 0,76$ и 131072×131072 спинова. За свако R су криве усредњене на 30 реализација случајног поља. Колапс је добијен за $M_c = 0$, $R_c = 0,54$, $H_c = 1,275$, $b = 0,24$, $\beta = 0,15$, $\beta\delta = 4,8$) [28].

3.2 Дистрибуције спинских лавина

У најопштијем облику дистрибуција спинске лавине величине S , трајања T , енергије E и амплитуде A у еквилатералним системима се скалира на следећи начин [55]:

$$D(\lambda^{a_S} S, \lambda^{a_T} T, \lambda^{a_E} E, \lambda^{a_A} A; \lambda^{b_h} h', \lambda^{b_r} r, \lambda^{b_l} /L) = \lambda D(S, T, E, A; h', r, 1/L), \quad (3.3)$$

где су $a_S, a_T, a_E, a_A, b_h, b_r, b_l$ експоненти одговарајућих величина.

Да би се добила здружена или појединачна дистрибуција неке од карактеристика лавине потребно је интегралити општу дистрибуцију по преосталим величинама. Тако, на пример, да би се добила здружена дистрибуција величине и трајања лавине потребно је интегралити по свим могућим вредностима енергије и амплитуде, односно:

$$D(S, T; h', r, 1/L) = \int_0^\infty dE \int_0^\infty dA D(S, T, E, A; h', r, 1/L),$$

а да би се добила дистрибуција само величине лавина онда се интегралити по све три преостале величине:

$$D(S; h', r, 1/L) = \int_0^\infty dT \int_0^\infty dE \int_0^\infty dA D(S, T, E, A; h', r, 1/L).$$

Скалирајуће форме здружених и појединачних дистрибуција се добијају из (3.3) на следећи начин:

$$D(\lambda^{a_S} S, \lambda^{a_T} T; \lambda^{b_h} h', \lambda^{b_r} r, \lambda^{b_l} /L) = \lambda^{1+a-a_S-a_T} D(S, T; h', r, 1/L),$$

односно:

$$D(\lambda^{a_S} S; \lambda^{b_h} h', \lambda^{b_r} r, \lambda^{b_l} /L) = \lambda^{1+a-a_S} D(S; h', r, 1/L),$$

где је $a = a_S + a_T + a_E + a_A$.

3.2.1 Дистрибуција величине лавина

Примењујући претходно, показује се да се у термодинамичком лимиту ($L \rightarrow \infty$) дистрибуција величине спинских лавина, $D_{H,R}(S)$, тригерованих при спољном пољу H и неуређености R , скалира са величином лавине S као:

$$D_{H,R}^{(S)}(S) = S^{-\tau} \mathcal{D}_{\pm}^{(S)}(S^\sigma |r|, h'|r|^{-\beta\delta}), \quad (3.4)$$

где су $\mathcal{D}_{\pm}^{(S)}$ универзалне скалирајуће функције, τ је одговарајући критични експонент, а σ је cutoff² експонент који описује дивергенцију величине највеће лавине у близини критичне неуређености

$$S_{max} \propto |r|^{-\frac{1}{\sigma}} \quad (3.5)$$

Интеграцијом расподеле $D_{H,R}^{(S)}(S)$ по свим вредностима спољног поља H од $-\infty$ до ∞ се добија интегрална дистрибуција величина лавина

$$D_R^{(S,int)}(S) = \int_{-\infty}^{\infty} D_{H,R}^{(S)}(S) dH = \int_{-\infty}^{\infty} S^{-\tau} \mathcal{D}_{\pm}^{(S)}(S^{\sigma}|r|, h'|r|^{-\beta\delta}) dh' ,$$

за коју се, уводећи смену $y = h'|r|^{-\beta\delta}$ и користећи везу (3.5), може показати да се скалира као

$$D_R^{(S,int)}(S) = S^{-(\tau+\sigma\beta\delta)} \mathcal{D}_{\pm}^{(S,int)}(S^{\sigma}|r|), \quad (3.6)$$

где су $\mathcal{D}_{\pm}^{(S,int)}$ функције скалирања интегралне дистрибуције, а $\tau + \sigma\beta\delta$ нови критични експонент, често означаван као τ_{int} . За $R = R_c$ израз (3.6) се своди на

$$D_R^{(S,int)}(S) \propto S^{-(\tau+\sigma\beta\delta)} ,$$

што је приближан закон скалирања који се очекује за $R \approx R_c$ на великим коначним решеткама.

На главном делу слике 3.6 је показано како изгледају интегралне расподеле величина лавина у тродимензионом моделу, док је на унутрашњем делу приказан колапс тих кривих на једну функцију примењујући израз (3.6). На следећој слици 3.7 на делу а) се види колапс дистрибуција величина лавина које потичу само са централног дела хистерезисне петље (тај део је биран тако да нормирана магнетизација система има вредности од $-0,08$ до $+0,08$) примењујући израз (3.4), док је на делу б) приказан колапс интегралних дистрибуција. Слика 3.7 се односи на дводимензиони модел.

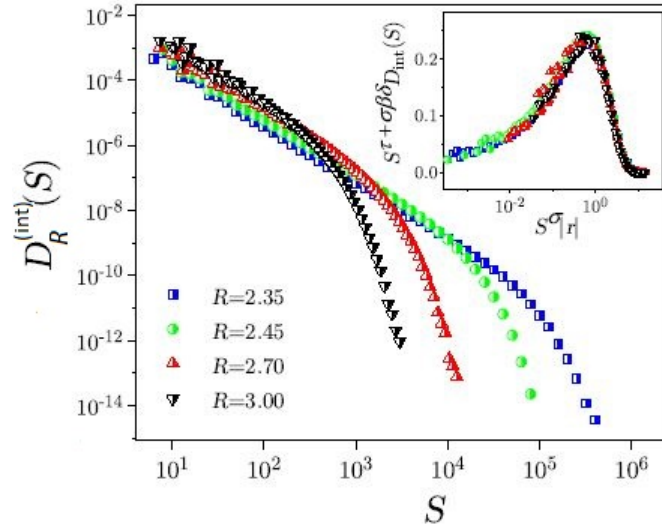
Универзална функција скалирања у дводимензионом моделу је добро апроксимирана изразом [27]:

$$\mathcal{D}_{2D,+}^{(S,int)}(X) = e^{-0,608X^{1/\sigma}} (0,193 - 1,903X + 6,432X^2 - 8,929X^3 + 4,895X^4) \quad (3.7)$$

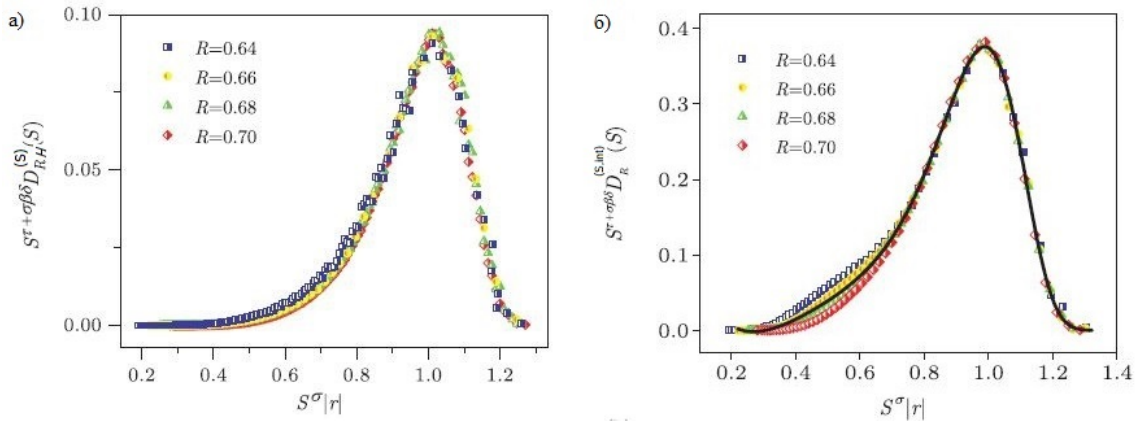
²термин за cutoff у српском језику је резни, али због широко распрострањене употребе у српском језику овде је остављен термин cutoff

и на делу б) слике 3.7 је исцртана пуном црном линијом. У тродимензионом моделу је универзална функција скалирања апроксимирана са [19]:

$$\mathcal{D}_{3D,+}^{(S,int)}(X) = e^{-0,789X^{1/\sigma}} (0,021 + 0,002X + 0,531X^2 - 0,266X^3 + 0,261X^4) \quad (3.8)$$



Слика 3.6: Главна слика: интегралне дистрибуције $D_R^{(S,int)}(S)$ величине лавина S у тродимензионом моделу за неуређености $R = 2,35-3,00$ и величину решетке 32768×32768 спинова. Уметнута слика: колапс дистрибуција са главне слике [54].



Слика 3.7: а) Колапс дистрибуција величине лавина при датом спољном пољу $D_{R,H}^{(S)}(S)$ у дводимензионом моделу; б) колапс интегралних дистрибуција $D_R^{(S,int)}(S)$ величине лавина S у дводимензионалном моделу. Неуређености су $R = 0,64 - 0,70$ и величина решетке 65536×65536 спинова. Криве су усредњаване на 600 конфигурација случајног поља за сваку неуређеност [27].

3.2.2 Дистрибуције трајања, енергије и амплитуде лавина

Аналогно поступку изложеном у претходном поглављу се из релације (3.3) може добити закон скалирања за дистрибуције трајања, енергија и амплитуда лавина.

Дистрибуције ових параметара лавина тригерованих на спољном пољу H и неуређености R су описане следећим зависностима (редом за трајање, енергију и амплитуду):

$$D_{H,R}^{(T)}(T) = T^{-\alpha} \mathcal{D}_{\pm}^{(T)}(T^{\sigma/\gamma_{T/S}} |r|, h' |r|^{-\beta\delta}); \quad (3.9)$$

$$D_{H,R}^{(E)}(E) = E^{-\epsilon} \mathcal{D}_{\pm}^{(E)}(E^{\sigma/\gamma_{E/S}} |r|, h' |r|^{-\beta\delta}); \quad (3.10)$$

$$D_{H,R}^{(A)}(A) = A^{-\mu} \mathcal{D}_{\pm}^{(A)}(A^{\sigma/\gamma_{A/S}} |r|, h' |r|^{-\beta\delta}), \quad (3.11)$$

где су $\mathcal{D}_{\pm}^{(T)}$, $\mathcal{D}_{\pm}^{(E)}$ и $\mathcal{D}_{\pm}^{(A)}$ универзалне функције скалирања за дате параметре лавина, α , ϵ и μ одговарајући експоненти, а $\gamma_{T/S}$, $\gamma_{E/S}$ и $\gamma_{A/S}$ представљају експоненте који описују како се понаша средња вредност датог параметра лавине (нпр трајање T) која има величину S : $\langle T \rangle_S = S^{\gamma_{T/S}}$, $\langle E \rangle_S = S^{\gamma_{E/S}}$ и $\langle A \rangle_S = S^{\gamma_{A/S}}$.

Интеграљењем израза (3.9), (3.10) и (3.11) по свим вредностима спољног поља се добијају интегралне дистрибуције:

$$D_R^{(T,int)}(S) = T^{-(\alpha+\sigma\beta\delta/\gamma_{T/S})} \mathcal{D}_{\pm}^{(T,int)}(T^{\sigma/\gamma_{T/S}} |r|), \quad (3.12)$$

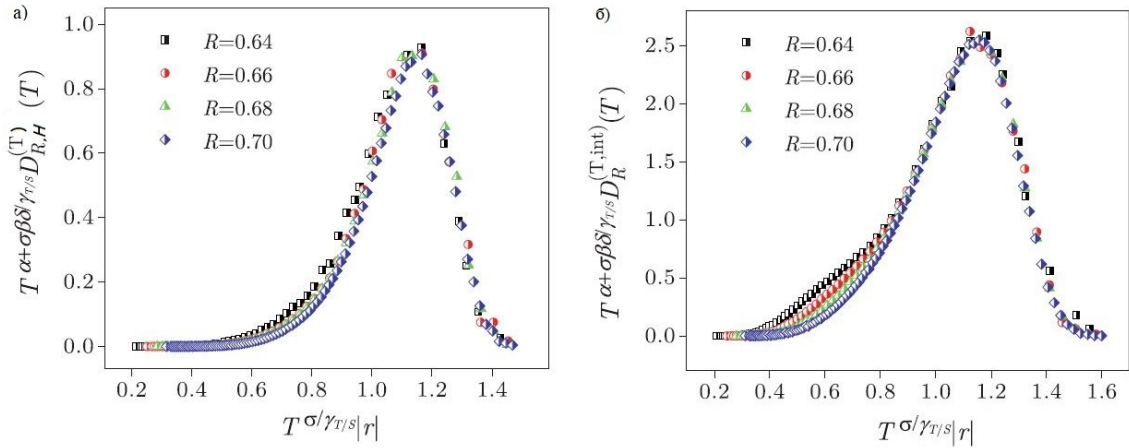
$$D_R^{(E,int)}(S) = E^{-(\epsilon+\sigma\beta\delta/\gamma_{E/S})} \mathcal{D}_{\pm}^{(E,int)}(E^{\sigma/\gamma_{E/S}} |r|), \quad (3.13)$$

$$D_R^{(A,int)}(S) = A^{-(\mu+\sigma\beta\delta/\gamma_{A/S})} \mathcal{D}_{\pm}^{(A,int)}(A^{\sigma/\gamma_{A/S}} |r|), \quad (3.14)$$

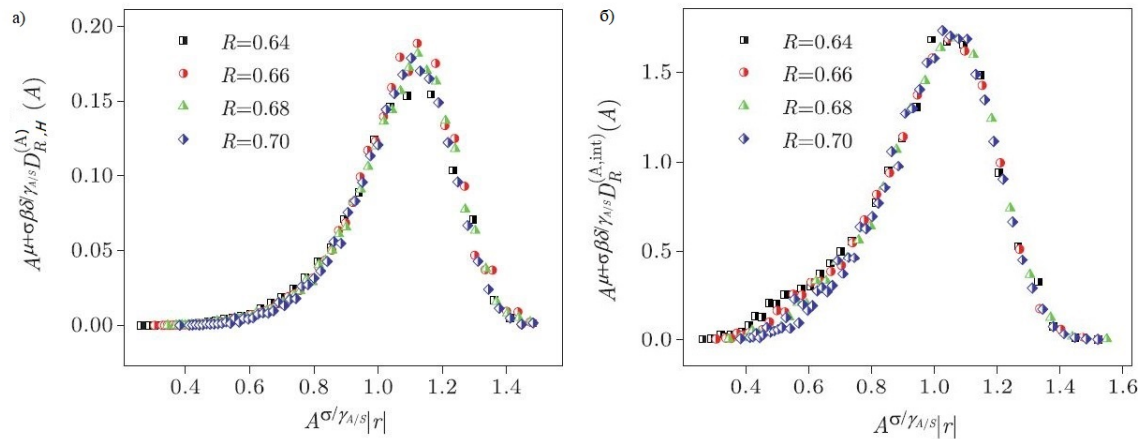
где су $\mathcal{D}_{\pm}^{(T,int)}$, $\mathcal{D}_{\pm}^{(E,int)}$ и $\mathcal{D}_{\pm}^{(A,int)}$ функције скалирања интегралних дистрибуција, а аналогно као код дистрибуције величине лавина, $\alpha + \sigma\beta\delta/\gamma_{T/S}$, $\epsilon + \sigma\beta\delta/\gamma_{E/S}$ и $\mu + \sigma\beta\delta/\gamma_{A/S}$ су нови критични експоненти, често означавањем као α_{int} , ϵ_{int} и μ_{int} .

На сликама 3.8, 3.9 и 3.10 се види како предвиђене форме скалирања описују понашање дводимензионог система величине 65536×65536 спинова и за неуређености у опсегу $R = 0,64 - 0,70$ [27]. На деловима слика под а) су приказани колапси дистрибуција лавина само из околине централног дела хистерезисне петље, где магнетизација система узима вредности од $-0,08$ до $0,08$ (као и у

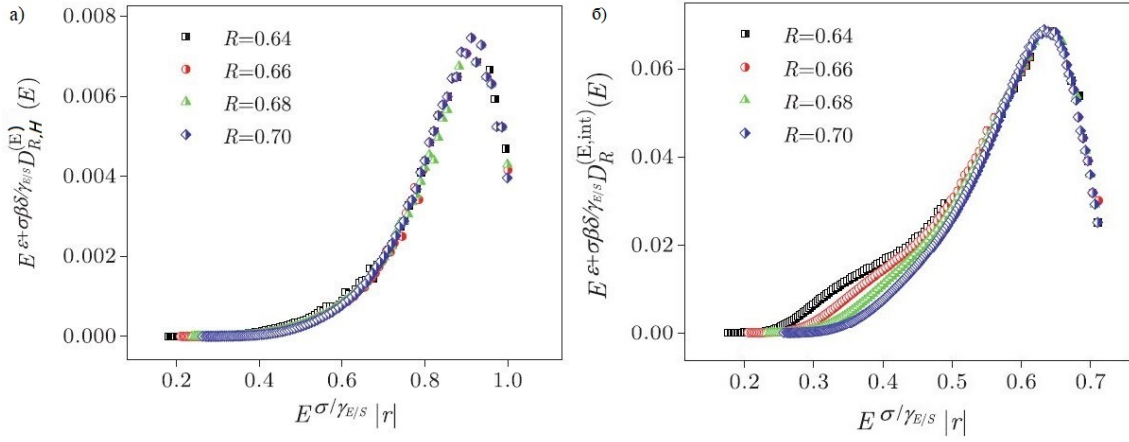
случају за дистрибуцију величине лавина), а на деловима под б) су приказани колапси интегралних дистрибуција.



Слика 3.8: а) Колапс дистрибуција трајања лавина при датом спољном пољу $D_{R,H}^{(T)}(T)$ у дводимензионом моделу; б) колапс интегралних дистрибуција $D_R^{(T,int)}(T)$ трајања лавина T у дводимензионом моделу. Неуређености су $R = 0,64 - 0,70$ и величина решетке 65536×65536 спинова. Криве су усредњаване на 600 конфигурација случајног поља за сваку неуређеност [27].



Слика 3.10: а) Колапс дистрибуција амплитуде лавина при датом спољном пољу $D_{R,H}^{(A)}(A)$ у дводимензионом моделу; б) колапс интегралних дистрибуција $D_R^{(A,int)}(A)$ амплитуде лавина A у дводимензионом моделу. Неуређености су $R = 0,64 - 0,70$ и величина решетке 65536×65536 спинова. Криве су усредњаване на 600 конфигурација случајног поља за сваку неуређеност [27].



Слика 3.9: а) Колапс дистрибуција енергије лавина при датом спољном пољу $D_{R,H}^{(E)}(E)$ у дводимензионом моделу; б) колапс интегралних дистрибуција $D_R^{(E,int)}(E)$ енергије лавина E у дводимензионом моделу. Неуређености су $R = 0,64 - 0,70$ и величина решетке 65536×65536 спинова. Криве су усредњаване на 600 конфигурација случајног поља за сваку неуређеност [27].

3.3 Спектар снаге

Спектар снаге на датој фреквенцији представља снагу која се ослободила у систему на тој фреквенцији (или интервалу фреквенција око дате фреквенције). На слици 2.4 је приказана јачина сигнала, односно напон $V(t)$, једне лавине. Нека је $\hat{V}(\omega)$ Фурије трансформ тог напона $V(t)$:

$$\hat{V}(\omega) = \sum_{t=t_0}^{t_0+T} e^{i\omega t} V(t).$$

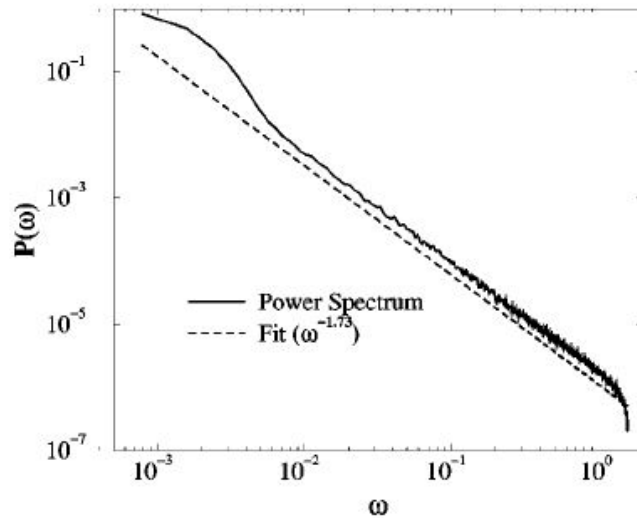
Ако се у сваком тренутку t мери сигнал $V(t)$ онда се спектар снаге дефинише као квадрат амплитуде Фурије трансформа напона, односно јачине мереног сигнала [56, 28, 57]:

$$P(\omega) = |\hat{V}(\omega)|^2. \quad (3.15)$$

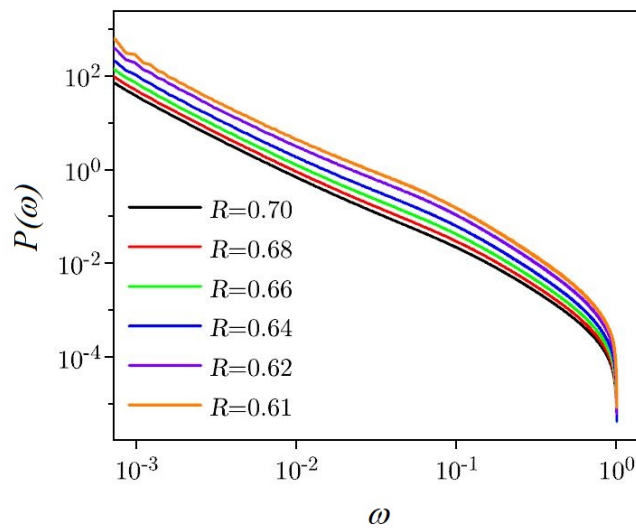
Спектар снаге се може описати степеним законом, али морају се раздвојити два случаја. Када је $\tau > 2$ тада важи $P(\omega) \sim \omega^{(\tau-3)/\sigma\nu z}$, док се за $\tau < 2$ спектар снаге скалира као $P(\omega) \sim \omega^{-1/\sigma\nu z}$ [58], где је ω фреквенција на којој се посматра снага.

На сликама 3.11 и 3.12 су приказани спектри снаге за тродимензиони и дводимензиони Изингов модел са случајним пољем. Приказана је и крива $\omega^{-1/\sigma\nu z}$

која показује да тај степени закон добро описује спектре снаге у тродимензионом моделу. У дводимензионом моделу се види како ти спектри изгледају при разним неуређеностима, као и то да у стабилној регији све криве имају једнак нагиб и понашају се према истом степеном закону.



Слика 3.11: Спектар снаге за тродимензиони Изингов модел са случајним пољем на логаритамској скали, заједно са кривом $\omega^{-1/\sigma\nu z}$ [59].



Слика 3.12: Спектар снаге за дводимензиони Изингов модел са случајним пољем на логаритамској скали, за неуређености $R = 0,61 - 0,70$ [54].

3.4 Везе између експонената

Експоненти који фигуришу у изразима у претходним поглављима су у разним релацијама једни са другима. Овде су наведене неке од њих. За експонент α који је везан за дистрибуцију трајања лавина и експонент $\gamma_{T/S}$ здружене дистрибуције трајања и величине лавина се показује да важи:

$$\alpha = 1 + \frac{\tau - 1}{\sigma\nu z}, \quad (3.16)$$

$$\gamma_{T/S} = \sigma\nu z. \quad (3.17)$$

Аналогни изрази се добијају и за експоненте везане за енергију и амплитуду лавине:

$$\epsilon = 1 + \frac{\tau - 1}{2 - \sigma\nu z}, \quad (3.18)$$

$$\gamma_{E/S} = 2 - \sigma\nu z, \quad (3.19)$$

$$\mu = 1 + \frac{\tau - 1}{1 - \sigma\nu z}, \quad (3.20)$$

$$\gamma_{A/S} = 1 - \sigma\nu z. \quad (3.21)$$

Даље, експоненти уведени код скалирања магнетизације су такође у одређеној релацији са осталим експонентима:

$$\beta - \beta\delta = \frac{\tau - 2}{\sigma}. \quad (3.22)$$

Када је реч о најопштијој форми скалирања (3.3), потребно је и експоненте који се у њој јављају довести у везу са осталима. Показује се да важи:

$$\tau = 1 - \frac{1+a}{a_S}, \quad \alpha = 1 - \frac{1+a}{a_T}, \quad \epsilon = 1 - \frac{1+a}{a_E}, \quad \mu = 1 - \frac{1+a}{a_A}, \quad (3.23)$$

односно уколико се изрази сваки од експонената a_S , a_T , a_E и a_A и сабере добије се:

$$\frac{a}{1+a} = \frac{1}{1-\tau} + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\epsilon} + \frac{1}{1-\mu}. \quad (3.24)$$

Даље, за експоненте који стоје уз редуковану неуређеност, редуковано спољно поље и величину система важи:

$$b_r = -a_S\sigma, \quad b_h = -a_S\sigma\beta\delta, \quad b_L = -a_S\sigma\nu. \quad (3.25)$$

3.5 Вредности експонената

У наредним табелама су дате вредности критичних експонената и параметара који су поменути у претходним поглављима у тродимензионом и дводимензионом моделу добијени из симулација на хиперкубним решеткама. У табели 3.1 су приказане вредности појединачних експонената, табела 3.2 приказује комбинације експонената који се често користе, док су у последњој табели 3.3 приказани критични параметри [55, 28].

Табела 3.1: Вредности појединачних експонената

Експонент	Вредност у 2D	Вредност у 3D
σ	$0,10 \pm 0,01$	$0,24 \pm 0,02$
β	$0,15 \pm 0,04$	$0,035 \pm 0,028$
δ	32 ± 10	52 ± 50
ν	$5,15 \pm 0,20$	$1,4 \pm 0,2$
z	$1,25 \pm 0,17$	$1,7 \pm 0,4$
η	$1,05 \pm 0,06$	$0,73 \pm 0,28$
τ	$1,54 \pm 0,05$	$1,60 \pm 0,06$
α	$1,87 \pm 0,18$	$2,05 \pm 0,20$
ϵ	$1,42 \pm 0,15$	$1,42 \pm 0,21$
μ	$2,55 \pm 0,30$	$2,4 \pm 0,41$
$\gamma_{T/S}$	$0,64 \pm 0,08$	$0,58 \pm 0,09$
$\gamma_{E/S}$	$1,35 \pm 0,15$	$1,43 \pm 0,19$
$\gamma_{A/S}$	$0,39 \pm 0,02$	$0,43 \pm 0,07$
a	$-0,859 \pm 0,09$	$-0,851 \pm 0,08$
a_S	$-0,255 \pm 0,08$	$-0,248 \pm 0,06$
a_T	$-0,142 \pm 0,03$	$-0,164 \pm 0,04$
a_E	$-0,34 \pm 0,08$	$-0,355 \pm 0,11$
a_A	$-0,10 \pm 0,01$	$-0,11 \pm 0,02$
b_r	$0,025 \pm 0,002$	$0,060 \pm 0,016$
b_h	$0,12 \pm 0,02$	$0,11 \pm 0,03$
b_L	$0,13 \pm 0,04$	$0,084 \pm 0,018$

Табела 3.2: Вредности комбинација експонената

Комбинација	Вредност у 2D	Вредност у 3D
$\tau + \sigma\beta\delta$	$2,02 \pm 0,06$	$2,03 \pm 0,03$
$\sigma\beta\delta$	$0,48 \pm 0,08$	$0,43 \pm 0,07$
$\beta\delta$	$4,8 \pm 0,8$	$1,81 \pm 0,32$
$d + \beta/\nu$	$2,04 \pm 0,26$	$3,07 \pm 0,30$
$1/\nu$	$0,19 \pm 0,01$	$0,71 \pm 0,09$
$1/\sigma$	10 ± 1	$4,2 \pm 0,3$
β/ν	$0,029 \pm 0,020$	$0,025 \pm 0,020$
$\sigma\nu z$	$0,64 \pm 0,07$	$0,57 \pm 0,03$
$\sigma\nu$	$0,515 \pm 0,15$	$0,34 \pm 0,05$

Табела 3.3: Вредности критичних параметара

Параметар	Вредност у 2D	Вредност у 3D
R_c	$0,54 \pm 0,02$	$2,16 \pm 0,03$
H_c	$1,275 \pm 0,020$	$1,435 \pm 0,004$
M_c	$0,00 \pm 0,01$	$0,90 \pm 0,05$
b	$0,24 \pm 0,04$	$0,39 \pm 0,08$

Глава 4

Прелазак са три на две димензије

У досадашњим радовима на преласку са три на две димензије у равнотежним термалним моделима је показано да се системи који имају константну дебљину l и растуће остале две димензије, $L \rightarrow \infty$, понашају као дводимензиони у смислу критичних експонената. Показано је, такође, да критична температура зависи од дебљине система $T_c(l)$ и да је у два карактеристична лимеса једнака критичној температури у две, односно три димензије, $T_c(l = 1) = T_c^{2D}$ и $T_c(l \rightarrow \infty) = T_c^{3D}$. За довољно велике дебљине l , одступање $T_c(l)$ од критичне температуре у три димензије у првој апроксимацији дато је изразом $T_c(l) - T_c^{3D} \sim l^{-1/\nu_{3D}}$, где је ν_{3D} критични експонент који контролише дивергенцију корелационе дужине у три димензије [29, 33, 60]. Као што је већ речено у уводу, радови на сличну тему на неравнотежним моделима су малобројни, те се стога ова и наредна глава дисертације баве питањем понашања атермалног неравнотежног Изинговог модела са случајним пољем при преласку са три на две димензије. Иако је систем које се испитује у експерименталним истраживањима најчешће тракаст или неког другог облика коме су све три димензије различите овде ће се, ради једноставности, испитивати решетке које имају квадратну основу, $L \times L$, тј. исту имају исту дужину и ширину, а мења им се дебљина l , односно решетке типа $L \times L \times l$ и добијени резултати су објављени у раду [61].

4.1 Критична неуређеност

Услед нулте температуре у овом моделу, параметар који контролише понашање целог система датих димензија јесте неуређеност. Познате су вредности неуређености за дводимензиони и тродимензиони модел у термодинамичком лимиту $R_c^{2D} = 0,54$ и $R_c^{3D} = 2,16$, али остало је отворено питање колика је критична неуређеност $R_c(l)$ у термодинамичком лимиту система дебљине l , где је $1 \leq l \leq \infty$. Овде термодинамички лимит подразумева да димензије основе теже бесконачности $L \rightarrow \infty$, док је дебљина l фиксирана и у том светлу израз $l = \infty$ представља у ствари прави тродимензиони случај када све три димензије постају бесконачне. Критична неуређеност је и овде неуређеност при којој систем прелази из парамагнетне у феромагнетну фазу. За свако $R < R_c(l)$ је систем дебљине l феромагнетан и хистерезисна петља доживљава скок, док је за $R > R_c(l)$ систем парамагнетан и хистерезисна крива је глатка.

4.1.1 Ефективна критична неуређеност

У симулацијама је немогуће анализирати бесконачан систем, већ само систем неке коначне димензије $L \times L \times l$, те се стога и не може говорити о правој, већ о ефективној критичној неуређености $R_c^{\text{eff}}(l, L)$, која зависи од величине система. Ефективна критична неуређеност је увек већа од праве, $R_c^{\text{eff}}(l, L) \geq R_c(l)$, и конвергира ка њој у термодинамичком лимиту, $\lim_{L \rightarrow \infty} R_c^{\text{eff}}(l, L) = R_c(l)$. За неуређености које нису веома блиске ефективној критичној неуређености систем доживљава скок магнетизације када је $R < R_c^{\text{eff}}$, док је за $R > R_c^{\text{eff}}$ крива магнетизације глатка. Стога ефективна критична неуређеност у коначним системима игра улогу праве критичне неуређености у бесконачним системима.

4.1.2 Аналитички изрази за $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ и $R_c(l)$

Да би се добио аналитички израз за $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ полази се од раније познатих резултата прилагођених овом проблему. Систем дебљине l се близу критичне неуређености понаша ефективно као дводимензиони систем, јер велике лавине брзо достигну дебљину система и такве се шире само по дужини и ширини, што подсећа на лавине у дводимензионом систему. Колико год да је велика дебљина l она је фиксирана и у једном тренутку она, повећавањем димензија основе, постаје мала у датом систему и велике лавине лако прожимају систем

по дебљини и виде га ефективно као дводимензиони. Тада се, по узору на [28] и израз за релативно одступање ефективне критичне неуређености $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ од праве критичне неуређености $R_c(l) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} R_c^{\text{eff}}(l, L)$, може претпоставити следећа зависност:

$$\frac{R_c^{\text{eff}}(l, L) - R_c(l)}{R_c^{\text{eff}}(l, L)} = \frac{A(l)}{L^{1/\nu_{2D}}}, \quad (4.1)$$

где је $A(l)$ нека функција дебљине, а ν_{2D} критични експонент који контролише дивергенцију корелационе дужине у дводимензионом моделу. Израз (4.1) описује понашање релативног одступања ефективне критичне неуређености система величине $L \times L \times l$ од праве критичне неуређености за дебљину l , које опада са порастом дужине и ширине када систем тежи термодинамичком лимиту. При томе, непозната, функција $A(l)$ не утиче на асимптотско понашање, јер зависи само од дебљине l која је фиксирана.

Даље, аналогно понашању релативног одступања критичне температуре за систем одређене дебљине од критичне температуре тродимензионог система у равнотежним моделима [62, 39], уводи се претпоставка:

$$\frac{R_c(l) - R_c^{3D}}{R_c(l)} = \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}}, \quad (4.2)$$

где је Δ константа, а ν_{3D} критични експонент који контролише дивергенцију корелационе дужине у тродимензионом моделу. Овим изразом се добија релативно одступање критичне неуређености за систем дебљине l од критичне неуређености R_c^{3D} у тродимензионом случају. Вредност константе Δ се може добити из израза (4.2) уколико се посматра случај $l = 1$. Тада је $R_c(l)$ једнако R_c^{2D} , јер је $l = 1$ чист дводимензиони случај, па пошто је

$$\Delta = \frac{\Delta}{1^{1/\nu_{3D}}} = \frac{R_c^{2D} - R_c^{3D}}{R_c^{2D}},$$

заменом бројних вредности $R_c^{2D} = 0,54$ и $R_c^{3D} = 2,16$ следи да је $\Delta \approx -3$.

Изрази (4.1) и (4.2) садрже у себи критичну неуређеност $R_c(l)$ која не може да се добије директном анализом података из симулација, обзиром да могу да се симулирају само коначни системи. Тиме ти изрази не дају аналитички облик

за $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ који може да се провери неким добијеним вредностима из симулација. У циљу добијања одговарајућег израза за ефективну критичну неуређеност $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ било би добро видети како изгледа њено релативно одступање од неке познате вредности, нпр.

$$\frac{R_c^{\text{eff}}(l, L) - R_c^{3D}}{R_c^{\text{eff}}(l, L)} .$$

Директним поређењем овог израза са неким претходним резултатима не може се доћи до закључка о његовом асимптотском понашању. Међутим, тај израз може да се трансформише на следећи начин:

$$\begin{aligned} \frac{R_c^{\text{eff}}(l, L) - R_c^{3D}}{R_c^{\text{eff}}(l, L)} &= \frac{R_c^{\text{eff}}(l, L) - R_c(l)}{R_c^{\text{eff}}(l, L)} + \frac{R_c(l) - R_c^{3D}}{R_c(l)} \cdot \frac{R_c(l)}{R_c^{\text{eff}}(l, L)} = \\ &= \frac{R_c^{\text{eff}}(l, L) - R_c(l)}{R_c^{\text{eff}}(l, L)} + \frac{R_c(l) - R_c^{3D}}{R_c(l)} \left(1 - \frac{R_c^{\text{eff}}(l, L) - R_c(l)}{R_c^{\text{eff}}(l, L)} \right) , \end{aligned} \quad (4.3)$$

одакле се види да у њему фигуришу само фактори који су дати изразима (4.1) и (4.2), односно да је:

$$\begin{aligned} \frac{R_c^{\text{eff}}(l, L) - R_c^{3D}}{R_c^{\text{eff}}(l, L)} &= \frac{A(l)}{L^{1/\nu_{2D}}} + \frac{\Delta}{l^{\nu_{3D}}} \left(1 - \frac{A(l)}{L^{1/\nu_{2D}}} \right) = \\ &= \frac{A(l)}{L^{1/\nu_{2D}}} \left(1 - \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}} \right) + \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

И даље је функција $A(l)$ непозната и у циљу њеног одређивања се посматра специјалан случај када је $l = L$. Тада је то коначни еквилатерални тродимензиони систем те је $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ једнако ефективној критичној неуређености тродимензионог система $R_c^{\text{eff}}(l)$ за коју важи

$$\frac{R_c^{\text{eff}}(l) - R_c^{3D}}{R_c^{\text{eff}}(l)} = \frac{A}{l^{1/\nu_{3D}}} ,$$

где је A константа [55]. Узимајући ово у обзир, израз (4.4) постаје:

$$\frac{R_c^{\text{eff}}(l) - R_c^{3D}}{R_c^{\text{eff}}(l)} = \frac{A}{l^{1/\nu_{3D}}} = \frac{A(l)}{l^{1/\nu_{2D}}} \left(1 - \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}} \right) + \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}} , \quad (4.5)$$

односно облик функције $A(l)$ је:

$$A(l) = \frac{(A-\Delta)}{1 - \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}}} . \quad (4.6)$$

Простом алгебарском трансформацијом израза (4.4) и заменом функције $A(l)$ обликом добијеним у (4.6) следи аналитички облик ефективне критичне неуређености:

$$R_c^{\text{eff th}}(l, L) = R_c^{3D} \left(1 - \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}} - \frac{A - \Delta}{L^{1/\nu_{2D}} l^{1/\nu_{3D} - 1/\nu_{2D}}} \right)^{-1}. \quad (4.7)$$

Важна особина предложеног аналитичког облика је у томе што зависи само од једног слободног параметра A . Уколико би из симулација могле да се одреде ефективне критичне неуређености $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ за разне величине система, онда би се параметар A добио фитовањем података $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ на предложену форму (4.7).

На самој ефективној критичној неуређености се у датом систему испољава мноштво феномена и појава које су од великог значаја за изучавање модела. Услед тога ће једна глава у овој дисертацији бити посвећена понашању лавина и њених параметара за разне дебљине система управо на ефективној критичној неуређености за тај систем.

Осим израза за ефективну критичну неуређеност могуће је извести и аналитички израз за праву критичну неуређеност система дебљине l . Простом трансформацијом израза (4.2) се добија:

$$R_c(l) = \frac{R_c^{3D}}{1 - \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}}}, \quad (4.8)$$

одакле се види да овде нема слободних параметара, односно да је могуће одредити критичну неуређеност за систем дебљине l само заменом вредности те дебљине у датом изразу.

4.2 Скалирање дистрибуција параметара лавине

После одређивања критичне неуређености поставља се питање теоријских предикција понашања дистрибуција неких величина модела. Форма (3.3) даје општу форму скалирања за еквилатералне системе. Уколико се димензије система разликују по разним правцима онда је потребно кориговати ту форму и

узети у обзир сваку димензију система засебно. За систем величине $L_1 \times L_2 \times L_3$ скалирање би изгледало на следећи начин:

$$\begin{aligned} D(\lambda^{aS} S, \lambda^{aT} T, \lambda^{aE} E, \lambda^{aA} A; \lambda^{b_h} h', \lambda^{b_r} r, \lambda^{b_{L_1}}/L_1, \lambda^{b_{L_2}}/L_2, \lambda^{b_{L_3}}/L_3) = \\ = \lambda D(S, T, E, A; h', r, 1/L_1, 1/L_2, 1/L_3) . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Уколико у систему не постоји неки преферирани правац у смислу структуре решетке онда су сви експоненти b_{L_1} , b_{L_2} , b_{L_3} једнаки, односно $b_{L_1} = b_{L_2} = b_{L_3} = b_l$. Обзиром да у системима рађеним у овој дисертацији не постоји неки преферирани правац онда форма (4.9) примењена на те системе типа $L \times L \times l$ гласи:

$$\begin{aligned} D(\lambda^{aS} S, \lambda^{aT} T, \lambda^{aE} E, \lambda^{aA} A; \lambda^{b_h} h', \lambda^{b_r} r, \lambda^{b_l}/L, \lambda^{b_l}/L, \lambda^{b_l}/l) = \\ = \lambda D(S, T, E, A; h', r, 1/L, 1/L, 1/l) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.1 Скалирање дистрибуција величине лавина

Да би се из опште форме скалирања (4.10) добила форма за скалирање дистрибуције величине лавина потребно је интегралити је по осталим параметрима лавине. Уколико се интеграл и по свим могућим вредностима спољног поља добија се закон скалирања интегралних дистрибуција¹:

$$\begin{aligned} D^{(int)}(\lambda^{aS} S; \lambda^{b_r} r, \lambda^{b_l}/L, \lambda^{b_l}/L, \lambda^{b_l}/l) = \\ = \lambda^{1+a-aS+b_h} D^{(int)}(S; r, 1/L, 1/L, 1/l) . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Могуће је тестирати предложено скалирање на неколико начина. Прво могу све димензије да буду фиксирани, односно $l = const$, $L = const$, тако да је једини слободан параметар неуређеност R . Потом, могуће је фиксирати дебљину l , а пустити да се мења величина основе $L \times L$, као и неуређеност R . Овај случај је занимљив, јер према претпоставкама би систем тада требало да се понаша ефективно као дводимензиони, односно да сви критични експоненти и параметри имају вредности као у дводимензионом моделу, осим критичне неуређености, која зависи од дебљине $R_c(l)$. И на крају, уколико су све димензије система променљиве (уз услов да је $l/L = const$), као и неуређеност, систем би

¹У даљем тексту ће због једноставности све интегралне дистрибуције бити обележене са $D^{(int)}$ без обзира на то о ком параметру лавине је реч, а на основу аргумената ће бити јасно о којој дистрибуцији се ради.

требало да испољава тродимензионо понашање, односно да сви критични експоненти и параметри имају вредности које одговарају тродимензионом моделу.

Уколико су све димензије система фиксирани, а само неуређеност променљива, тада се ради о колапсирању које је најчешће примењивано у досадашњој литератури [18, 55]. Такође, колапс овог типа је наведен и у претходној глави у изразу (3.6), с тим што овде није у питању еквилатералан систем, тако да форма скалирања гласи:

$$D^{(int)}(S; r, 1/L, 1/L, 1/l) = S^{-(\tau+\sigma\beta\delta)} \times \mathcal{D}_{\pm}^{(int)}(S^{\sigma}|r|, S^{\sigma\nu}/L, S^{\sigma\nu}/L, S^{\sigma\nu}/l), \quad (4.12)$$

где су $\mathcal{D}_{\pm}^{(int)}$ функције скалирања интегралне дистрибуције, а $r = (R - R_c(l))/R$ је релативно одступање неуређености од критичне за дату дебљину система l , док су вредности свих критичних експонената једнаке онима за дводимензиони модел уколико важи да је дебљина система доста мања од остале две димензије.

Да би се добило скалирање које ће тестирати преостала два предложена облика потребно је на одговарајући начин одабрати скалирајући параметар λ . Приступи за оба облика су аналогни, тако да ће овде бити прво дат приступ за случај када су све димензије променљиве.

Показано је да за чисте тродимензионе и дводимензионе системе између величине лавине S и њене линеарне димензије² l_A важи релација

$$S \sim l_A^{D_f}, \quad (4.13)$$

где је D_f фрактална димензија лавине. Она у тродимензионом моделу у случају субкритичних прожимајућих лавина има вредност $D_f = 2,98$, а за остале, мање, лавине износи $D_f = 1/\sigma\nu = 2,78$ [63]. Уколико је у систему $l \ll L$ тада лавине врло брзо достигну границе система по дебљини и њихово даље простирање није тродимензионо. Дакле, да би се применила релација (4.13) на системе типа $L \times L \times l$ потребно је посматрати мале лавине које још увек нису достигле границе система чак ни по дебљини и за које систем изгледа као да је тродимензиони. Максимална линеарна димензија једне такве лавине је заправо

²За линеарну димензију лавине се може узети нпр. њен пречник, односно максимално растојање између два спина који припадају лавини.

дебљина система, $l_{A,max} = l$. Тада се максимална величина малих лавина које и даље систем виде као да је тродимензиони понаша као:

$$S_{max} \sim l^{D_f}, \quad (4.14)$$

где је $D_f = 1/\sigma\nu = 2,78$ фрактална димензија непрожимајућих лавина у тродимензионом моделу.

Тада, ако се скалирајући параметар изабере у облику

$$\lambda = l^{-D_f/a_S}, \quad (4.15)$$

важи

$$\begin{aligned} \lambda^{a_S} &= \frac{1}{l^{D_f}}, \\ \lambda^{b_r} &= l^{(-b_r/a_S)D_f} = l^{\sigma D_f} = l^{1/\nu}, \\ \lambda^{b_i} &= l^{-(b_i/a_S)D_f} = l^{\sigma\nu D_f} = l, \\ \lambda^{1+a-a_S+b_h} &= l^{-(1+a-a_S+b_h)D_f/a_S} = l^{\left(1-\frac{1+a}{a_S}-\frac{b_h}{a_S}\right)D_f} = l^{(\tau+\sigma\beta\delta)D_f}, \end{aligned}$$

где је искоришћено да је $D_f = 1/\sigma\nu$. Након избора скалирајућег параметра (4.15) у форми (4.11) следи израз за скалирање дистрибуције величине лавина у системима којима се све димензије мењају:

$$\begin{aligned} D^{(int)}(S/l^{D_f}; r l^{1/\nu}, l/L, l/L, 1) &= \\ = l^{(\tau+\sigma\beta\delta)D_f} D^{(int)}(S; r, 1/L, 1/L, 1/l), \end{aligned} \quad (4.16)$$

где сви експоненти имају вредности као у тродимензионом моделу³[28, 64]. Једначина (4.16) указује да у циљу добијања жељеног колапса величина лавина, у нееквилатералним системима који имају променљиве величине по свим димензијама, треба водити рачуна о изразима $r l^{1/\nu}$ и l/L и држати их констатним подешавањем вредности дебљине l , дужине и ширине L , као и редуковане неуређености $r = 1 - R_c^{3D}/R$. У том случају се испоставља да уколико се на апсцисну осу нанесу вредности величина лавина подељене са l^{D_f} , а на ординатну осу дистрибуција величине лавина помножена фактором $l^{(\tau+\sigma\beta\delta)D_f}$, тачке свих дистрибуција би требало да леже на истој кривој.

³Било би исправније писати на сваком од експонента индекс $2D$ или $3D$, али у том случају би изрази изгледали превише гломазно и не би били разумљиви, те је остављено овако.

Као што је речено, аналогним поступком се може извести и израз за колапс дистрибуције величина лавина у случају да је дебљина система фиксирана и да је доста мања од остале две димензије система. Избором скалирајућег параметра λ у облику:

$$\lambda = L^{-D_f/a_S}, \quad (4.17)$$

где је $D_f = 2$ у дводимензионом моделу [64], чиниоци и аргументи у изразу (4.11) постају:

$$\begin{aligned} \lambda^{a_S} &= \frac{1}{L^{D_f}}, \\ \lambda^{b_r} &= L^{(-b_r/a_S)D_f} = L^{\sigma D_f} = L^{1/\nu}, \\ \lambda^{b_l} &= L^{-(b_l/a_S)D_f} = L^{\sigma\nu D_f} = L, \\ \lambda^{1+a-a_S+b_h} &= L^{-(1+a-a_S+b_h)D_f/a_S} = L^{\left(1-\frac{1+a}{a_S}-\frac{b_h}{a_S}\right)D_f} = L^{(\tau+\sigma\beta\delta)D_f}. \end{aligned}$$

Тиме се добија форма скалирања дистрибуција величине лавина у системима типа $L \times L \times l$ где је дебљина l фиксирана

$$\begin{aligned} &D^{(int)}(S/L^{D_f}; rL^{1/\nu}, 1, 1, L/l) = \\ &= L^{(\tau+\sigma\beta\delta)D_f} D^{(int)}(S; r, 1/L, 1/L, 1/l). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Овде сви експоненти имају вредности из дводимензионог модела [27, 28], док критична неуређеност зависи од дебљине према формули (4.8), те је редукована неуређеност $r = 1 - R_c(l)/R$.

4.2.2 Скалирање дистрибуција трајања и енергије лавина

У системима којима се све димензије мењају занимљиво је видети и како се понашају дистрибуције неких других параметара лавине, као што су трајање и енергија. Полазећи од форме (4.10) могу се добити изрази за скалирање дистрибуција само трајања или енергије лавина уколико се интегрални по свим осталим параметрима. Специјално, ако је од интереса скалирање интегралних дистрибуција потребно је интегралити и по свим вредностима спољног поља. Тиме се добија израз за скалирање интегралних дистрибуција трајања лавина

$$\begin{aligned} &D^{(int)}(\lambda^{a_T} T; \lambda^{b_r} r, \lambda^{b_l}/L, \lambda^{b_l}/L, \lambda^{b_l}/l) = \\ &= \lambda^{1+a-a_T+b_h} D^{(int)}(T; r, 1/L, 1/L, 1/l), \end{aligned} \quad (4.19)$$

као и интегралних дистрибуција енергије лавина

$$\begin{aligned}
& D^{(int)}(\lambda^{a_E} E; \lambda^{b_r} r, \lambda^{b_l} / L, \lambda^{b_l} / L, \lambda^{b_l} / l) = \\
& = \lambda^{1+a-a_E+b_h} D^{(int)}(E; r, 1/L, 1/L, 1/l).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Потребно је опет на одговарајући начин изабрати скалирајући параметар λ . У системима типа $L \times L \times l$ максимално трајање малих лавина (лавина којима систем још увек изгледа као да је тродимензиони, односно оне које нису достигле границе система по дебљини) се скалира са њиховом линеарном димензијом као

$$T_{max} \sim l^z, \tag{4.21}$$

где је z динамички критични експонент у тродимензионалном моделу.

Аналогним избором скалирајућег параметра као код дистрибуције величине лавина

$$\lambda = l^{-z/a_T}, \tag{4.22}$$

и користећи релације (3.16), (3.23) и (3.25) добијају се фактори у изразу (4.19)

$$\begin{aligned}
\lambda^{a_T} &= \frac{1}{l^z}, \\
\lambda^{b_r} &= l^{(-b_r/a_T)z} = l^{\frac{1-\alpha}{1-\tau}\sigma z} = l^{1/\nu}, \\
\lambda^{b_l} &= l^{-(b_l/a_T)z} = l^{\frac{1-\alpha}{1-\tau}\sigma \nu z} = l, \\
\lambda^{1+a-a_T+b_h} &= l^{-(1+a-a_T+b_h)z/a_T} = l^{\left(1-\frac{1+a}{a_T}-\frac{b_h}{a_T}\right)z} = l^{(\alpha+\sigma\beta\delta(1-\alpha)/(1-\tau))z}.
\end{aligned}$$

Користећи предложени параметар (4.22) у форми (4.19) следи израз за скалирање дистрибуције трајања лавина у системима којима се све димензије мењају:

$$\begin{aligned}
& D^{(int)}(T/l^z; r l^{1/\nu}, l/L, l/L, 1) = \\
& = l^{(\alpha+\sigma\beta\delta\frac{1-\alpha}{1-\tau})z} D^{(int)}(T; r, 1/L, 1/L, 1/l),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

где сви експоненти имају вредности из тродимензионог модела, а редукована неуређеност је $r = 1 - R_c^{3D}/R$. Овај израз каже да уколико се у системима типа $L \times L \times l$ држи константним однос l/L , као и ако се подесе неуређености тако да је $r l^{1/\nu}$ константно, тада дистрибуције трајања лавина помножене са $l^{(\alpha+\sigma\beta\delta\frac{1-\alpha}{1-\tau})z}$

⁴Показано је у претходном делу текста да је максимална линеарна димензија малих лавина једнака дебљини система l

леже на истој кривој уколико је на апсцисној оси трајање лавина подељено са l^z .

Аналогним поступком се добија и форма скалирања за дистрибуције енергије лавина. Максимална енергија мале лавине у систему $L \times L \times l$, за коју дати систем и даље изгледа као да је тродимензиони, се скалира са линеарном димензијом те лавине као

$$E_{max} \sim l^{\gamma_{E/S} D_f}, \quad (4.24)$$

где је $\gamma_{E/S}$ експонент који описује како се понаша средња енергија лавине у зависности од величине лавине.

Бирањем скалирајућег параметра на следећи начин

$$\lambda = l^{-\gamma_{E/S} D_f / a_E}, \quad (4.25)$$

и користећи релације (3.18), (3.19), (3.23) и (3.25) добијају се фактори у изразу (4.20)

$$\lambda^{a_E} = \frac{1}{l^{\gamma_{E/S} D_f}},$$

$$\lambda^{b_r} = l^{(-b_r/a_E)\gamma_{E/S} D_f} = l^{\frac{1-\epsilon}{1-\tau}\gamma_{E/S} D_f \sigma} = l^{1/\nu},$$

$$\lambda^{b_l} = l^{-(b_l/a_E)\gamma_{E/S} D_f} = l^{\frac{1-\epsilon}{1-\tau}\gamma_{E/S} \sigma \nu D_f} = l,$$

$$\lambda^{1+a-a_E+b_h} = l^{-(1+a-a_E+b_h)\gamma_{E/S} D_f / a_E} = l^{\left(1-\frac{1+a}{a_E}-\frac{b_h}{a_E}\right)\gamma_{E/S} D_f} = l^{(\epsilon+\sigma\beta\delta(1-\epsilon)/(1-\tau))\gamma_{E/S} D_f}.$$

Користећи (4.25) у форми (4.20) следи израз за скалирање дистрибуције енергије лавина у системима којима се све димензије мењају:

$$\begin{aligned} D^{(int)}(E/l^{\gamma_{E/S} D_f}; r l^{1/\nu}, l/L, l/L, 1) = \\ = l^{(\epsilon+\sigma\beta\delta\frac{1-\epsilon}{1-\tau})\gamma_{E/S} D_f} D^{(int)}(T; r, 1/L, 1/L, 1/l), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где сви експоненти имају вредности као у тродимензионом моделу. Израз (4.26) тврди да уколико се на апсцисну осу нанесе енергија лавина подељена са $l^{\gamma_{E/S} D_f}$, а на ординатну осу дистрибуције енергије лавина помножене фактором $l^{(\epsilon+\sigma\beta\delta\frac{1-\epsilon}{1-\tau})\gamma_{E/S} D_f}$ и при томе су констатнтне величине l/L и $r l^{1/\nu}$ онда све криве колапсирају, односно леже на једној заједничкој кривој.

Глава 5

Нумерички резултати за прелазак са три на две димензије

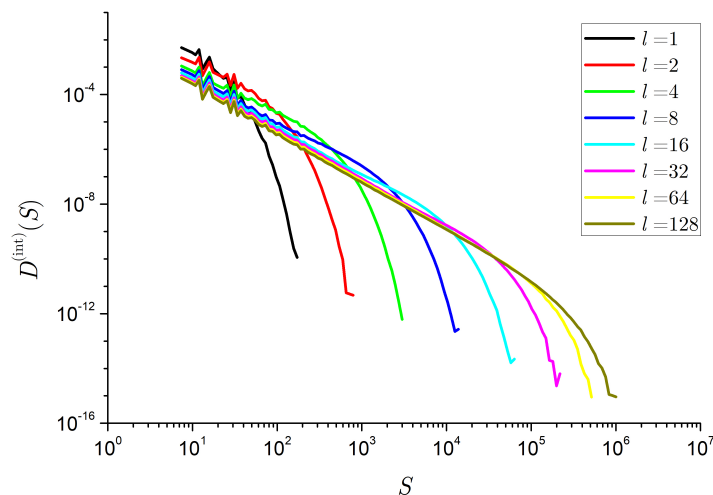
У овој глави су представљени резултати симулација рађених на системима описаним у претходној глави, који имају квадратну основу димензија $L \times L$ и дебљину l , где је $l \leq L$. Показано је у којој мери се све предложене теоријске релације из претходне главе слажу са нумеричким резултатима, а на крају је урађено и поређење нумеричких резултата са неким експерименталним везаним за Бархаузенов шум у танким филмовима и тракама. Све симулације везане за ове системе су рађене у адијабатском режиму, док су гранични услови периодични (затворени) дуж димензија основе, а отворени дуж дебљине. Овакви гранични услови су уведени из практичних разлога. Наиме, напоменуто је како отворени и затворени гранични услови дају исте резултате у термодинамичком лимиту. Јасно је, свакако, да се у случају веома малих система ти резултати разликују. Обзиром да дебљина овде варира све до $l = 1$ (чист дводимензиони случај), лавине врло лако „пробијају” систем по тој димензији. Уколико би гранични услови били периодични тада би се пропација лавина настављала и даље, односно не би се зауставила на граници система. Међутим, оно што је потребно нагласити у оваквим системима јесте управо то да границе система представљају један од ограничавајућих фактора за простирање лавина, као што је случај и у експерименталним истраживањима на танким филмовима и тракама. Услед тога се по дебљини примењују отворени гранични услови који спречавају даљу пропацију дуж те димензије оних лавина које „стижу” до граница система.

У циљу добијања резултата са жељеном тачношћу и прецизношћу број симу-

лација са различитим конфигурацијама случајног поља при истој неуређености је ишао од 16 за највеће системе (који садрже преко 17 милијарди спинова) до 60 000 за најмање системе.

5.1 Нееквилатерални системи

На слици 5.1 је приказано како изгледају криве интегралних дистрибуција величине лавина за системе са истом основом $L = 8192$, истом неуређеношћу $R = 2,3$ али разним дебљинама у опсегу од $l = 1$ до $l = 128$. Обзиром да ова вредност неуређености премашује вредност критичне неуређености за тродимензиони модел R_c^{3D} , следи да су лавине у датим системима мале и да је сваки од система у парамагнетној фази. Стога криве на слици (у скалирајућем региону, пре cutoff-а) имају чист степени пад који потиче управо од тога што се у систему појављују само мале лавине. Такође се види и да је нагиб ових кривих у скалирајућем региону исти без обзира на дебљину, али разликује се величина самог тог региона, и то тако да што је дебљина већа (односно систем већи, јер је основа иста), то је и регион већи, и обратно.



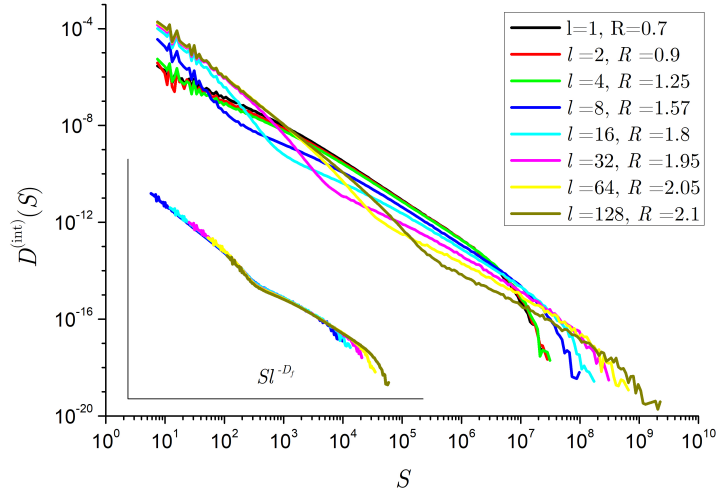
Слика 5.1: Интегралне дистрибуције величине лавина у системима који имају исту основу $L = 8192$, исту неуређеност $R = 2,3$ а различите дебљине које се крећу од $l = 1$ до $l = 128$.

Изглед интегралних дистрибуција величине лавина постаје значајно другачији уколико неуређености имају мање вредности, односно уколико се појављују велике лавине у систему. У том случају је лавина ограничена између горње и

доње границе система и надаље се понаша ефективно као лавина у дводимензионом систему. С друге стране и даље постоје мале лавине у систему које не досегну границе по дебљини и које се понашају као обичне тродимензионе лавине. На главном делу слике 5.2 приказане су криве интегралних дистрибуција величине лавина за системе који имају исту основу, $L = 8192$, али се дебљина мења од $l = 1$ до $l = 128$, с тим да је неуређеност за сваки систем нешто већа од ефективне критичне, што обезбеђује да неће бити лавина које прожимају систем по једној од већих димензија, ширини или дужини.

Може се приметити да криве дистрибуција код којих је дебљина $l > 4$ имају превој (у даљем делу текста колена) који раздваја понашање лавина у зависности од величине. Као што је речено у претходном делу текста, док су лавине мале оне не досежу границе система по дебљини и простиру се неометано као тродимензионе лавине. И делови дистрибуција малих који одговарају региону малих лавина се понашају као дистрибуције у тродимензионом моделу. Уколико је лавина велика, она релативно брзо у току пропагације досегне границе система по дебљини и надаље се шири као дводимензиона лавина. У делу где су лавине велике дистрибуције се понашају као у дводимензионом моделу. Регион где се јавља колена је у ствари граница; лавине мање од величине лавина на колена су „тродимензионе”, док су оне веће ефективно дводимензионе. Види се, такође, да се за веће дебљине система колена налази на већим величинама лавина. То је у складу са претпоставком (4.14) из претходне главе о томе да је величина највеће „тродимензионе” лавине сразмерна са l^{D_f} , где је l дебљина система, а D_f фрактална димензија. На уметнутој слици је приказано како исте криве изгледају уколико на апсцисној оси није величина лавине него величина Sl^{-D_f} . Обзиром да се сва колена поклапају, следи да је претпоставка (4.14) тачна. Међутим, колапс ових кривих није задовољавајућег квалитета услед разлиставања крајева дистрибуција. То долази стога што остали аргументи дистрибуције нису подешени као што је предложено у (4.16).

Са друге стране, за вредности дебљине $l \leq 4$ се не може опазити појава колена на кривама. То се лако објашњава уколико се израчуна максимална величина тродимензионе лавине за $l = 4$. Она износи $4^{D_f} \approx 50$, док је за $l < 4$ та вредност још мања и није је могуће опазити на графику, тако да криве које одговарају дебљини $l \leq 4$ имају само дводимензиони део.



Слика 5.2: Главна слика: интегралне дистрибуције величине лавина у системима који имају исту основу $L = 8192$, а различите дебљине које се крећу од $l = 1$ до $l = 128$, док су неуређености за сваки систем мало изнад ефективне критичне. Уметнута слика: интегралне дистрибуције величине лавина са главне слике за $l \geq 8$ нацртане у функцији од величине лавина рескалиране на величину највеће тродимензионалне лавине у систему, односно $S l^{-D_f}$.

5.2 Критична неуређеност

У претходној глави су дата теоријска предвиђања како би требало да се понашају критична неуређеност $R_c(l)$ и ефективна критична неуређеност $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ у зависности од димензија система. Да би се провериле предложене релације потребно је да се одреде вредности за $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ на основу података из нумеричких симулација.

5.2.1 Нумеричко одређивање ефективне критичне неуређености

У раду [64] је показано да се у дводимензионом систему величине $L \times L$ и при неуређености R број прожимајућих лавина по обе димензије $N_2^{2D}(R, L)$ може аналитички апроксимирати уз помоћ комплементарне функције грешке $\text{erfc}(x) = (2/\sqrt{\pi}) \int_x^\infty e^{-t^2} dt$. У термодинамичком лимиту број прожимајућих лавина тежи Хевисајдовој функцији¹ са центром у тачки R_c^{2D} , односно критичној

¹Хевисајдова функција може да се дефинише на више начина, један од њих јесте $U(x) = \frac{d}{dx} \max(x, 0)$. Овим изразом вредност функције у нули није одређена, а постоји неколико поједнако коришћених дефиниција, међу којима су најчешће $U(0) = 0$, $U(0) = 1/2$ и $U(0) = 1$.

неуређености за дводимензиони модел:

$$N_2^{2D}(R, L) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(B(L)(R - C(L))); \quad (5.1)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} N_2^{2D}(R, L) = N_2^{2D}(R) = U(R_c^{2D} - R), \quad (5.2)$$

где су $B(L)$ и $C(L)$ неке функције које зависе од величине система, док је $U(x)$ Хевисајдова функција.

По угледу на овај приступ у дводимензионом моделу може се увести критеријум за одређивање ефективне критичне неуређености у системима типа $L \times L \times l$. Раније је објашњен појам прожимајуће лавине у коначним системима и речено је да је то лавина која се простире дуж бар једне целе димензије система. Такође, наведено је да се као веома једноставан, али не и довољно прецизан, критеријум за одређивање ефективне критичне неуређености може узети да је то максимална неуређеност при којој се и даље јављају прожимајуће лавине. Овде се тај критеријум прецизније дефинише. Обзиром да лавина много лакше може да прожме систем дуж дебљине (посебно када је l мало, па је скоро свака лавина прожимајућа по дебљини) онда се прожимање по дебљини уопште не узима као фактор за одређивање ефективне критичне неуређености. Дакле, посматрају се прожимајуће лавине само по дужини и ширини система и нека је њихов просечан број по једној реализацији случајног поља за дату неуређеност $N(R; l, L)$. Тада је тај број једнак збиру просечног броја прожимајућих лавина дуж само једне од димензија основе и просечног броја прожимајућих лавина дуж обе димензије основе, односно

$$N(R; l, L) = N_1(R; l, L) + N_2(R; l, L).$$

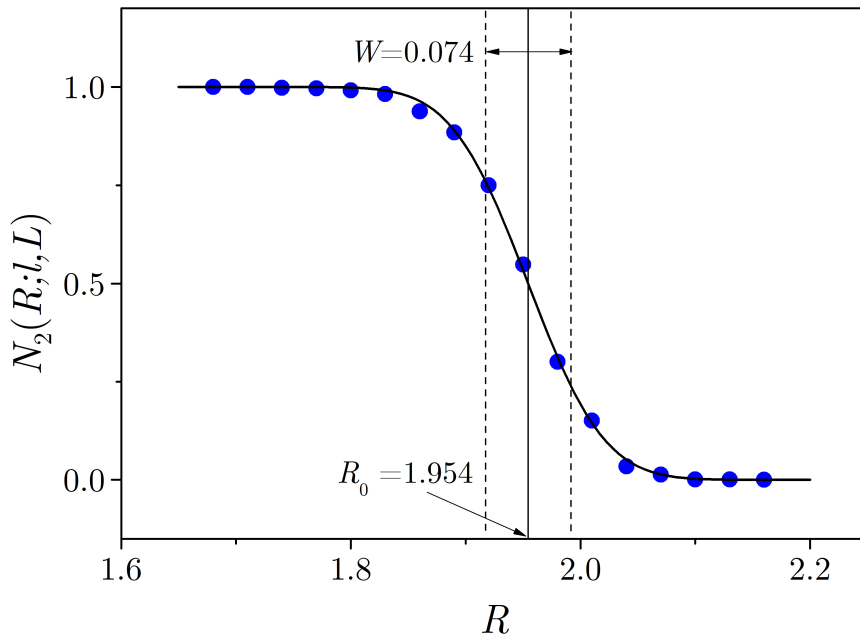
Даље, аналогно изразу (5.1) може се увести приближна аналитичка форма величине $N_2(R; l, L)$

$$N_2(R; l, L) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}((R - R_0)/W), \quad (5.3)$$

где су $W = W(l, L)$ и $R_0 = R_0(l, L)$ неке функције које зависе од величине система, али због једноставности записа су изостављени њихови аргументи. Тачка $R = R_0$ је превојна тачка комплементарне функције грешке, док W представља ширину транзиционог региона дефинисаног као интервал неуређености у

коме се вредности $N_2(R; l, L)$ смањују од приближно 0,75 до приближно 0,25, односно узимају половину средишњег дела криве. Пошто W тежи нули у термодинамичком лимиту $L \rightarrow \infty$, може се видети да вредност функције R_0 тада представља критичну неуређеност, односно да се за $R \leq R_0$ јављају прожимајуће лавине у бесконачном систему, док их за $R > R_0$ нема. Тиме се намеће закључак да и у коначним системима R_0 представља ефективну критичну неуређеност, што омогућава да се ефективна критична неуређеност идентификује са параметром $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ у формули:

$$N_2(R; l, L) = \frac{1}{2} \text{erfc}((R - R_c^{\text{eff}}(l, L))/W). \quad (5.4)$$



Слика 5.3: Пример одређивања ефективне критичне неуређености за систем коме су димензије $l = 16$ и $L = 256$. Плавим тачкама су приказани резултати добијени из симулација који показују колико дводимензионих прожимајућих лавина се јави у систему по једној релазацији случајног поља за дату неуређеност. Да би се добила одговарајућа прецизност за сваку неуређеност је извршено по 500 различитих реализација случајног поља. Пуном линијом која пролази кроз тачке је приказана функција $0,5 \text{erfc}((R - R_0)/W)$ која најбоље фитује дате тачке. Вертикалном пуном линијом је назначена вредност R_0 , а испрекиданим вертикалним линијама регион у ком вредност функције N_2 опадне са 0,75 на 0,25.

На слици 5.3 је приказано како се одређује ефективна критична неуређеност на примеру система код кога је $l = 16$, $L = 256$. Из фита се добије $W =$

$0,074 \pm 0,002$ и $R_0 = 1,954 \pm 0,001$, одакле следи да је ефективна критична неуређеност $R_c^{\text{eff}}(l = 16, L = 256) = 1,954$. Јасно је да се критеријум дат изразом (5.4) разликује од раније наведеног критеријума по коме је ефективна критична неуређеност максимална неуређеност при којој се и даље јављају прожимајуће лавине. Овде то свакако није случај, јер ако се погледа слика 5.3 види се да се и за вредности неуређености $R > R_c^{\text{eff}}(l, L)$ јављају прожимајуће лавине (постоје плаве тачке којима ординатна вредност није нула, а апсцисна је већа од 1,954). Међутим, овај критеријум је далеко робуснији, јер на њега не утиче изузетно мала вероватноћа да се јави прожимајућа лавина и на великим неуређеностима у коначним системима. Чак и ако би се јавила нека прожимајућа лавина на великој неуређености, она не би, услед великог броја различитих реализација случајног поља, представљала значајну промену у параметрима фита W и R_0 .

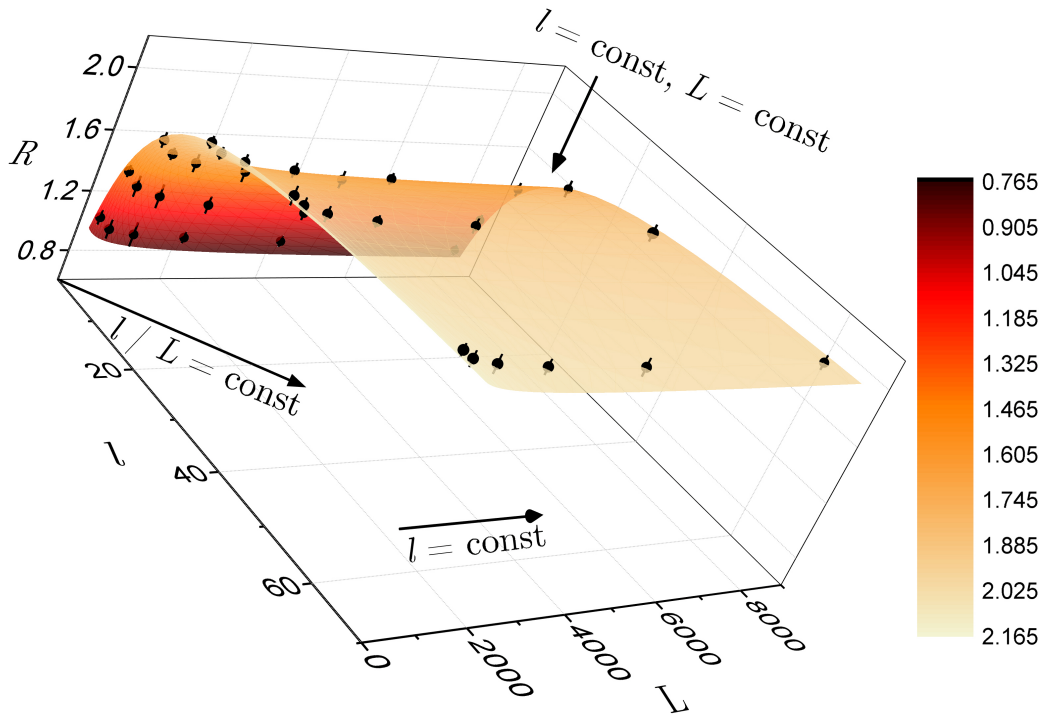
5.2.2 Нумеричка провера теоријског израза за одређивање ефективне критичне неуређености

У претходној глави је предложен аналитички израз за ефективну критичну неуређеност (4.7). У циљу његове провере одређене су вредности ефективних критичних неуређености за разне величине система методом предложеном у (5.4). Фитовањем тих вредности на форму (4.7) је могуће добити слободни параметар A и потом имати теоријске вредности $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ за било које l и L .

На слици 5.4 је приказан график зависности ефективне критичне неуређености од дужине (ширине) и дебљине система. Црним тачкама су приказане нумерички добијене вредности за $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ за разне димензије система. За сваку комбинацију l и L је у симулацијама добијен просечан број прожимајућих лавина по симулацији $N_2(R; l, L)$ за 17 различитих неуређености, одабраних тако да број тачака испод и изнад критичне неуређености буде приближно једнак да би се добио график попут 5.3. За добијање што тачнијих вредности плавих тачака на 5.3 је за сваку неуређеност вршено усредњавање по 200 конфигурација случајног поља за сваку неуређеност. Укупно то даје $17 \times 200 = 3400$ симулација за добијање једне вредности $R_c^{\text{eff}}(l, L)^2$. Стога је грешка одређивања вредности величина W и R_0 (односно R_c^{eff}) толико мала да оригиналне грешке

²Рађено је 36 различитих вредности R_c^{eff} приказаних на графику, што укупно значи преко 100000 симулација само за потврду израза (4.7)

не би биле видљиве на слици 5.4. Из тог разлога су грешке повећане 5 пута и представљене црним линијама, које пролазе кроз тачке добијене нумеричким симулацијама, дуж осе на којој се налази неуређеност. Површ са слике (обојена нијансама наранџасте боје) представља теоријску предикцију вредности ефективних критичних неуређености дату изразом (4.7). Тамније нијансе наранџасте приказују регион са мањим неуређеностима, док су светлије нијансе резервисане за веће вредности неуређености-видети легенду слике.



Слика 5.4: График зависности ефективних критичних неуређености од дебљине система l и димензије основе L . Ефективне критичне неуређености су означене црним тачкама, док су грешке увећане 5 пута у циљу боље видљивости. Приказана површ на графику представља теоријску предикцију за израчунавање $R_c^{\text{eff,th}}(l, L)$ дату изразом (4.7). Стрелице показују три карактеристична правца за које је рађено скалирање дистрибуција величина лавина. Прва стрелица: променљиве све димензије система, али са константним односом l/L ; друга стрелица: променљива само дужина и ширина система, док је дебљина константна $l = \text{const}$; трећа стрелица: систем је константне величине $l, L = \text{const}$. У сва три случаја је променљива и неуређеност.

Јасно се види да површ пролази кроз све тачке добијене нумеричким путем. Обзиром да се димензије система крећу у широким границама, дебљина се мења

од $l = 2$ до $l = 64$, а дужина од $L = 256$ до $L = 8190$, и израз (4.7) добро фитује све тачке, следи да је он адекватан за одређивање ефективне критичне неуређености за системе типа $L \times L \times l$. Још један битан закључак јесте и да су све претпостављене релације из којих је изведен израз (4.7), односно (4.1) и (4.2) адекватне.

Фитовањем добијених нумеричких вредности за ефективну критичну неуређеност на форму (4.7) се добија слободан параметар $A = 0,63 \pm 0,18$. Тиме је омогућено одређивање ефективне критичне неуређености било ког система који има квадратну основу $L \times L$, дебљину $l \leq L$ и чија је базна решетка кубна на основу формуле:

$$R_c^{\text{eff,th}}(l, L) = R_c^{3D} \left(1 - \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}} - \frac{0,63 - \Delta}{L^{1/\nu_{2D}} l^{1/\nu_{3D} - 1/\nu_{2D}}} \right)^{-1}. \quad (5.5)$$

5.2.3 Термодинамички лимит

Као што је већ напоменуто, уколико величине основе теже бесконачности, тада говоримо о правој критичној неуређености за систем дебљине l и њој морају да теже ефективне критичне неуређености система исте дебљине којима величина основе теже бесконачности, тј.

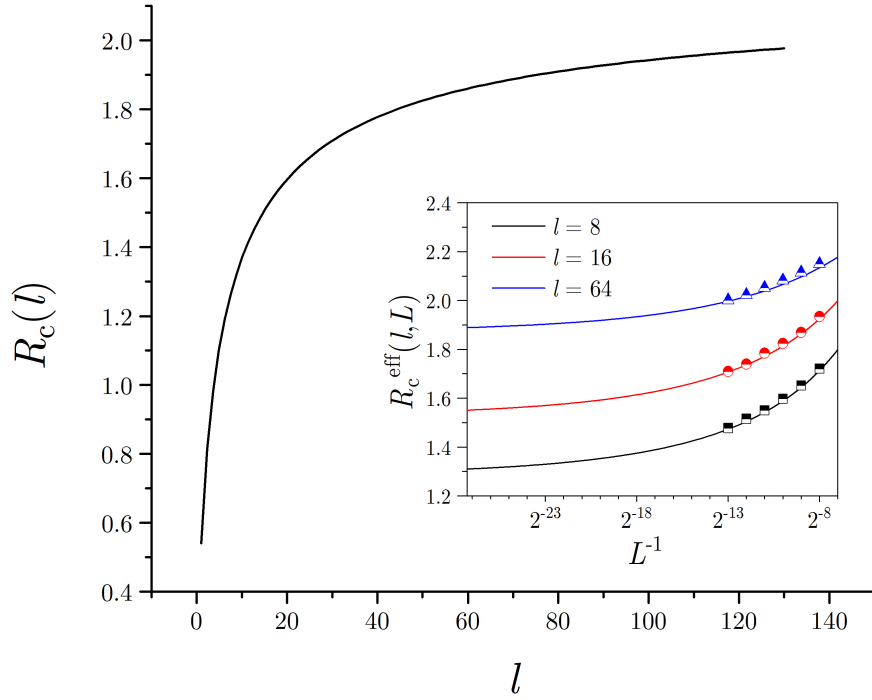
$$\lim_{L \rightarrow \infty} R_c^{\text{eff}}(l, L) = R_c(l).$$

У глави 4 је наведен и израз (4.8) који се из провере у претходном делу показао као тачан. Он показује како критична неуређеност бесконачног система дате дебљине зависи од те дебљине и нема ниједан слободан параметар:

$$R_c(l) = \frac{R_c^{3D}}{1 - \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}}},$$

и на главном делу слике 5.5 је дат график функције $R_c(l)$ у зависности од дебљине l . Виде се два лимита, за $l = 1$ је вредност $R_c(l) = 0,54 = R_c^{2D}$, док за веће дебљине функција асимптотски тежи неуређености у правом тродимензионом моделу $\lim_{l \rightarrow \infty} R_c(l) = R_c^{3D}$.

На уметнутом делу слике је приказано како израз (5.5) за константне дебљине фитује нумерички добијене вредности ефективних критичних неуређености. За дебљине $l = 8, 16, 64$ су тачкама приказане црном, црвеном и плавом



Слика 5.5: Главна слика: график аналитичке зависности критичне неуређености система типа $L \times L \times l$ од дебљине l . Уметнута слика: фитовање вредности ефективних критичних неуређености добијених из симулација функцијом $R_c^{\text{eff,th}}(l, L)$. На апсцисној оси је реципрочна вредност дужине система, док је на ординатној ефективна критична неуређеност. Тачкама су представљени нумерички добијени подаци, док су линијама приказане функције $R_c^{\text{eff,th}}(l, L)$ за фиксиране дебљине. Црна боја је за дебљину система $l = 8$, црвена за $l = 16$ и плава за $l = 64$.

бојом респективно подаци из симулација за $R_c^{\text{eff}}(l, L)$, а линијама теоријско предвиђање $R_c^{\text{eff,th}}(l, L)$. Види се да линије за сваку дебљину пролазе кроз тачке и тиме је још једном потврђена исправност претпостављеног израза за ефективну критичну неуређеност. Како се вредност на апсциси, L^{-1} , смањује, односно како се димензије основе повећавају, тако свака од линија улази у сатурацију, тј. тежи правој критичној неуређености за дату дебљину.

Познавање вредности $R_c(l)$ отвара могућности провере других појава као што већ наведено у глави 4 (колапс дистрибуција величине лавина, трајања лавина...).

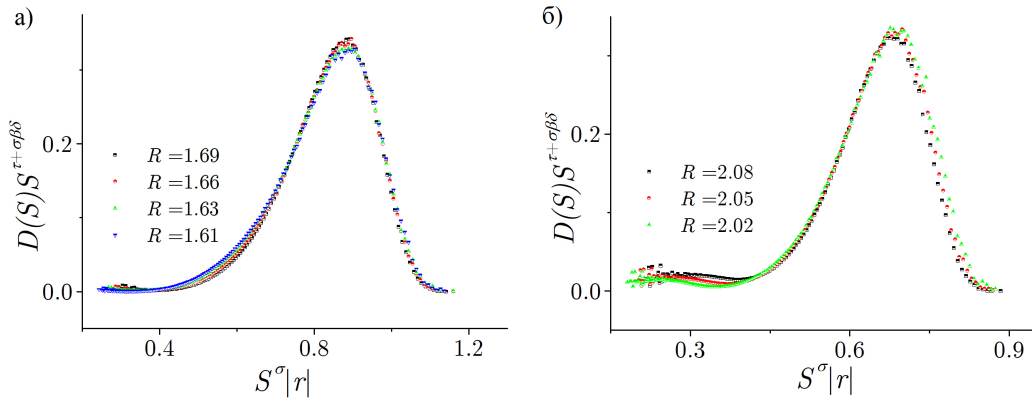
5.3 Нумерички резултати за скалирање дистрибуција параметара лавине

У делу 4.2 претходне главе је показано како изгледа најопштија форма скалирања за нееквилатералне системе, а потом је та форма прилагођена системима којима је дужина и ширина иста. На основу ње су изведени закони скалирања разних параметара лавине, као и закони за различите приступе у смислу променљиве величине система по разним димензијама. Овде је резултатима добијеним из нумеричких симулација проверена свака од предложених форми скалирања.

5.3.1 Нумерички резултати за скалирање дистрибуција величине лавина

Као што је речено у глави 4, провери општег закона скалирања (4.11) је могуће приступити са три различите стране. Прво, уколико се не мења ниједна од величина димензија система, тј. величина система је константна, онда је предложено скалирање формом (4.12). На слици 5.6³ је приказано како изгледају дати колапси за две различите дебљине система. На апсцисној оси је дата вредност производа величине лавина на степен σ и редуковане неуређености, док је на ординатној оси дистрибуција величине лавина помножена величином лавина подигнутом на степен $\tau_{int} = \tau + \sigma\beta\delta$. Део а) показује колапс за систем дебљине $l = 8$, док је у б) $l = 32$. Применом критичне неуређености $R_c(l)$ за дате дебљине у формули (4.12) (као подсетник се опет наводи да је у том изразу $r = (R - R_c(l))/R$) се добијају приказани колапси. Дужина и ширина система су $L = 4096$ у оба случаја. Критичне неуређености износе $R_c(l = 8) = 1,28$, односно $R_c(l = 32) = 1,72$, док се неуређености за дате системе на слици крећу у распону а) $R = 1,61 - 1,69$ и б) $R = 2,02 - 2,08$. Могло би се рећи да су неуређености доста веће од критичних за дату дебљину, међутим оне треба да буду веће од ефективних критичних за дате системе (а оне износе $R_c^{\text{eff}}(l = 8, L = 4096) = 1,50$ и $R_c^{\text{eff}}(l = 32, L = 4096) = 1,90$) да би колапс био могућ.

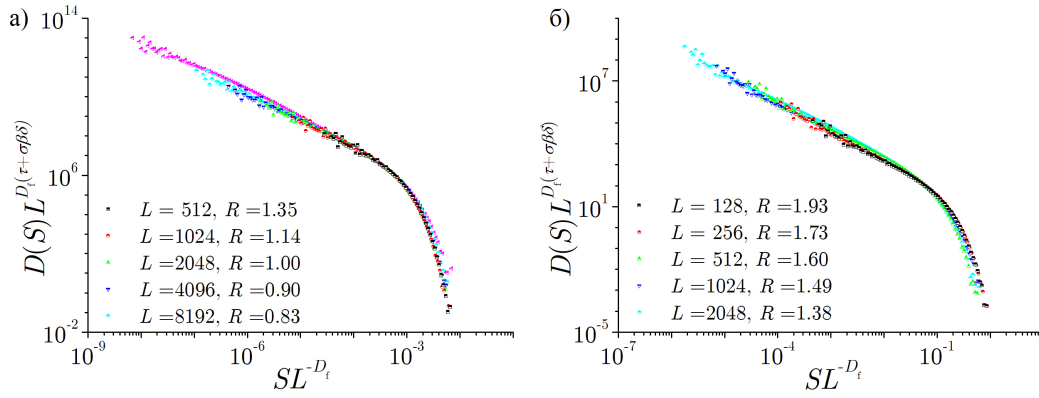
³На свим сликама у овом поглављу су ради прегледности графика изостављени аргументи дистрибуција осим једног који говори о ком параметру лавине се ради, као и ознака (*int*) која указује на то да се ради о интегралним дистрибуцијама.



Слика 5.6: Колапс дистрибуција величине лавина при фиксираној величини система дат изразом (4.12) за дебљину система а) $l = 8$ и б) $l = 32$, док је у оба случаја $L = 4096$. Неуређености су дате у легенди уз важну напомену да оне морају бити веће од ефективне критичне неуређености за дати систем.

Следећи тип провере јесте скалирање када је дебљина система фиксирана, док се величина основе мења. То скалирање је предложено формом (4.18) и на слици 5.7 се могу видети два примера. На апсцисној оси је количник величине лавина и дужине система подигнуте на степен D_f , док је на ординатној оси производ дистрибуције величине лавина и дужине система подигнуте на степен $D_f(\tau + \sigma\beta\delta)$. На делу а) је дебљина система $l = 1$, а димензије основе се мењају у распону $L = 512 - 8192$, док неуређености узимају вредности за које је величина $rL^{1/\nu_{2D}}$ константна да би се добило адекватно скалирање. На делу б) је дебљина $l = 4$, а димензије основе узимају вредности $L = 128 - 2048$ уз одговарајуће неуређености. Напоменуто је већ да ово скалирање није у потпуности тачно, зато што последњи аргумент функције дистрибуције са леве стране једнакости у изразу (4.18) не може да се одржава константним уколико се мењају само дужина и ширина, а не и дебљина система. Ипак, уколико је допринос тог члана укупној вредности функције дистрибуције релативно мали онда се може очекивати добар колапс кривих, што се може видети на слици. Вредности свих експонената су исте као у дводимензионом моделу, док се редукована неуређеност рачуна у односу на критичну неуређеност за дату дебљину, односно $r = (R - R_c(l))/R$.

Последња провера општег закона скалирања (4.11) јесте колапсирање кривих дистрибуције величине лавина уколико су променљиве све димензије система, односно када се мењају и дужина и ширина и дебљина. Предвиђање

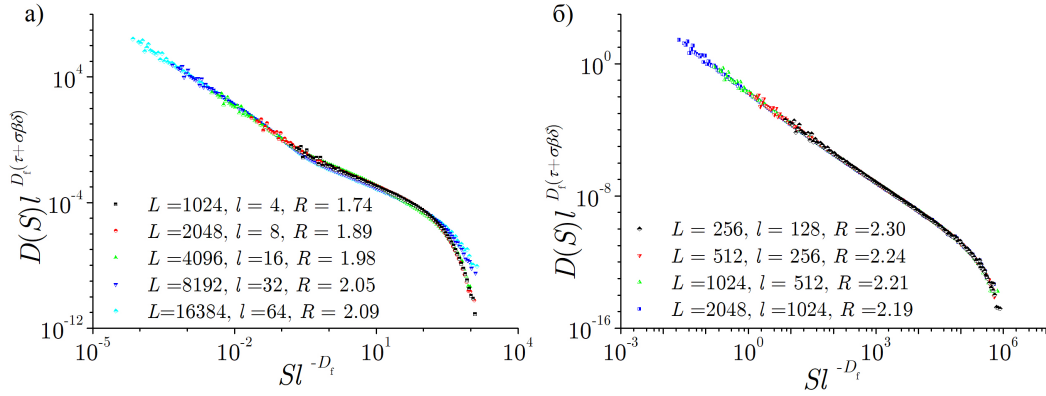


Слика 5.7: Колапс дистрибуција величине лавина при фиксираној дебљини система и променљивим димензијама основе дат изразом (4.18). Дебљина система је: а) $l = 1$ и б) $l = 4$. У легенди су написане димензије основе, као и неуређености, где се водило рачуна о томе да је $rL^{1/\nu_{2D}} = const$.

дато формом (4.16) је тестирано и резултат је приказан на слици 5.8. На апсцисној оси је количник величине лавина и дебљине система подигнуте на степен D_f , док је на ординатној оси производ дистрибуције величине лавина и дебљине система подигнуте на степен $D_f(\tau + \sigma\beta\delta)$. На делу слике под а) је однос дебљине и дужине система константан и износи $l/L = 1/256$, односно системи су веома танки. Дебљине се крећу од $l = 4$ до $l = 64$, а дужине од $L = 1024$ до $L = 16384$. На делу слике под б) је приказана друга крајност када је дебљина система толико велика да се може сматрати приближно еквилатералним тродимензионим системом, однос дебљине и дужине система је $l/L = 1/2$. Дебљине се у овом случају мењају од $l = 128$ до $l = 1024$, а дужине од $L = 256$ до $L = 2048$. Неуређености су у оба случаја биране тако да је $rl^{1/\nu_{3D}} = const$, где је редукована неуређеност $r = (R - R_c^{3D})/R$. Сви експоненти имају вредности као у тродимензионом моделу услед тога што се све димензије система мењају.

На слици 5.9 је показано како изгледају колапси кривих предвиђени формом (4.16) када однос дебљине и дужине система узима разне вредности које су између $1/256$ и $1/2$. Вредности l/L су редом а) $1/256$, б) $1/32$, в) $1/16$, г) $1/8$, д) $1/4$ и њ) $1/2$. Неуређености су опет биране у складу са тим да је $rl^{1/\nu_{3D}} = const$.

Свака од предложених форми скалирања (4.12), (4.16) и (4.18) даје добре резултате, односно криве на свим сликама се поклапају, тј. формирају заједничку криву. На основу овога може се закључити да је претпостављена општа форма

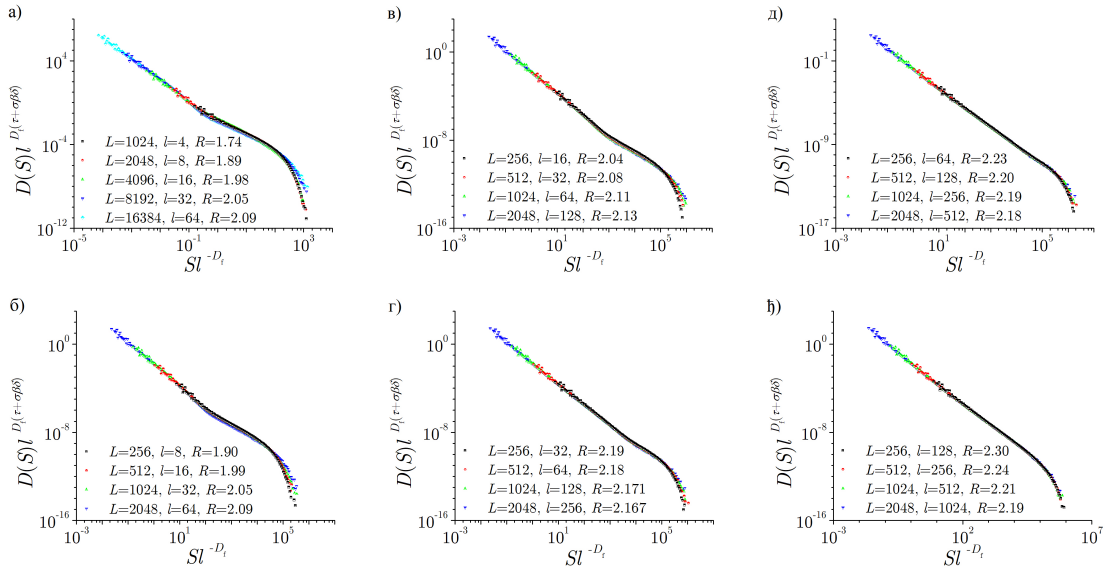


Слика 5.8: Колапс дистрибуција величине лавина за системе којима се све димензије мењају дат изразом (4.16). Односи дебљине и дужине система су: а) $l/L = 1/256$ и б) $l/L = 1/2$. У легенди су наведене димензије система, као и неуређености. Ове величине су одабране тако да је $rl^{1/\nu_{3D}} = const$.

скалирања (4.11) валидна и да би се приликом колапсирања кривих требало, у циљу ваљаности тог колапса, водити њом и не занемаривати ефекте димензија система.

5.3.2 Нумерички резултати за скалирање дистрибуција трајања лавина

Аналогним поступком као за величину лавина се добија и израз (4.23) за скалирање трајања лавина код система коме се све димензије мењају. На слици 5.10 је приказано како криве падају на једну заједничку уколико се примени предложена форма на одговарајући начин. На апсцисну осу су нанете вредности количника трајања лавина и дебљине система подигнуте на критични динамички експонент z . На ординатној оси је производ дистрибуције трајања лавина и дебљине система подигнуте на степен $z\alpha_{int}$, где је $\alpha_{int} = \alpha + \sigma\beta\delta(1-\alpha)/(1-\tau)$. Односи дебљине и дужине система су исти као код дистрибуција величине система, односно редом је l/L једнако а) $1/256$, б) $1/32$, в) $1/16$, г) $1/8$, д) $1/4$ и њ) $1/2$. У легендама су дате вредности тих дебљина и дужина као и неуређености, где је поштован исти услов $rl^{1/\nu_{3D}} = const$, као и за дистрибуције величине лавина. Вредности свих критичних параметара и експонената су исте као у тродимензионом моделу.



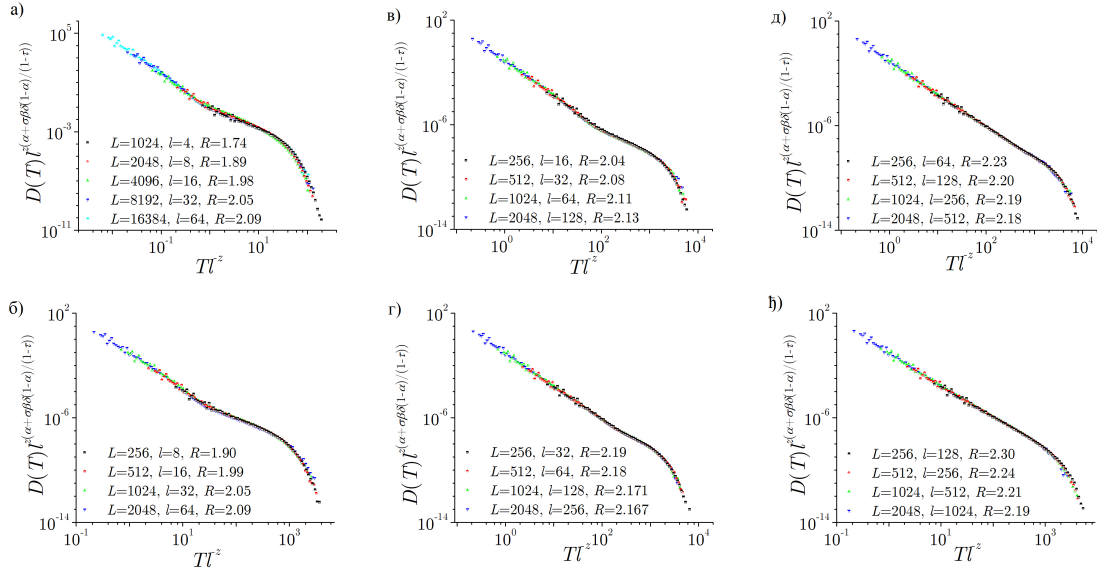
Слика 5.9: Колапс дистрибуција величине лавина за системе којима се све димензије мењају дат изразом (4.16). Односи дебљине и дужине система су: а) $l/L = 1/256$, б) $l/L = 1/32$, в) $l/L = 1/16$, г) $l/L = 1/8$, д) $l/L = 1/4$, њ) $l/L = 1/2$. У легенди су написане димензије система, као и неуређености, где се водило рачуна о томе да је $rl^{1/\nu_{3D}} = const$.

5.3.3 Нумерички резултати за скалирање дистрибуција енергије лавина

Једнако добри колапси као и у случају величине и трајања лавина се добијају и за дистрибуције енергије лавина примењујући форму (4.26). На слици 5.11 су приказани колапси за разне односе дебљине и дужине система који су исти као и за претходна два параметра лавине, односно редом је l/L једнако а) $1/256$, б) $1/32$, в) $1/16$, г) $1/8$, д) $1/4$ и њ) $1/2$. На апсцисној оси је, у складу са (4.26), приказан количник енергије лавина и дебљине система подигнуте на степен $\gamma_{E/S} D_f$, док је на ординатној оси производ дистрибуције енергије лавина и дебљине подигнуте на степен $\gamma_{E/S} D_f \epsilon_{int}$, где је $\epsilon_{int} = \epsilon + \sigma\beta\delta(1-\epsilon)/(1-\tau)$. Као и за претходне параметре лавине, потребно је водити рачуна да су неуређеност и дебљина система у таквом односу да је $rl^{1/\nu_{3D}} = const$. Сви критични параметри и експоненти имају вредности као у тродимензионалном моделу.

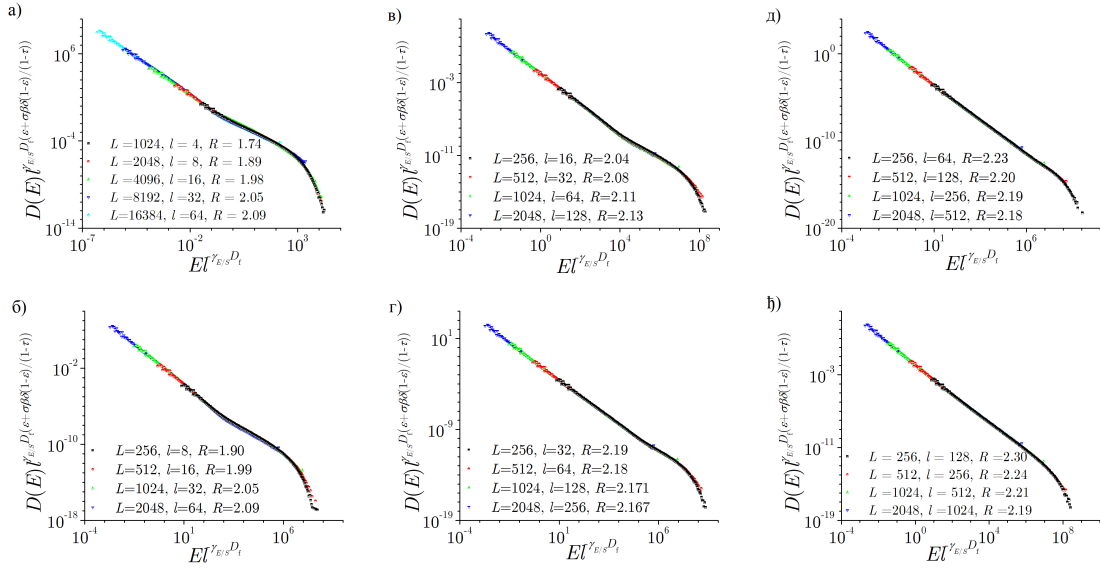
5.4 Поређење са експериментом

Изрази предложени у претходној глави који су тестирани нумеричким симулацијама могу да буду релевантни за анализу експерименталних података.



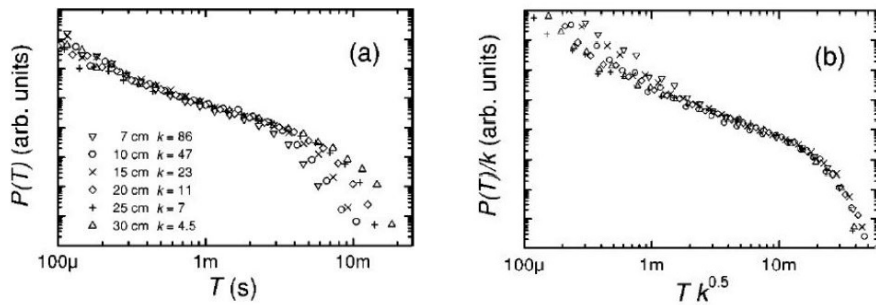
Слика 5.10: Колапс дистрибуција трајања лавина за системе којима се све димензије мењају дат изразом (4.23). Односи дебљине и дужине система су: а) $l/L = 1/256$, б) $l/L = 1/32$, в) $l/L = 1/16$, г) $l/L = 1/8$, д) $l/L = 1/4$, е) $l/L = 1/2$. У легенди су написане димензије система, као и неуређености, где се водило рачуна о томе да је $rl^{1/\nu_{3D}} = const$.

Неки од параметара, као што је нпр. неуређеност, веома тешко могу бити контролисани у експериментима везаним за Баркхаузенов шум [65, 66, 67]. За експериментално истраживање Баркхаузеновог шума се данас врло често користе траке дебљине до неколико микрометара, а дужине и до неколико десетина центиметара. Те траке се обично добијају у калемовима већих дужина и потом се секу до дужина потребних за дати експеримент. На овом месту је потребно истаћи да би требало очекивати да је неуређеност у целом калему једнака, јер је калем добијен комерцијалном израдом. Даље, уколико се мења дужина узорка онда се мења и дистрибуција величине или трајања лавина, јер се састоји из другачијег односа малих тродимензионих и великих, ефективно дводимензионих, лавина. То значи да променом дужине узорка не може да се постигне жељени колапс дистрибуција параметара лавина, јер оба израза (4.18) и (4.16) подразумевају да се у циљу колапса кривих мора држати константним величина у којој фигуришу димензија система и неуређеност ($rl^{1/\nu_{2D}}$ односно $rl^{1/\nu_{3D}}$). На левом делу слике 5.12 је приказано како изгледају дистрибуције трајања лавина на узорку $Fe_{21}Co_{64}B_{15}$ за различите дебљине узорка [34]. На десном делу слике је приказан покушај колапса датих дистрибуција, међутим јасно се види да



Слика 5.11: Колапс дистрибуција енергије лавина за системе којима се све димензије мењају дат изразом (4.26). Односи дебљине и дужине система су: а) $l/L = 1/256$, б) $l/L = 1/32$, в) $l/L = 1/16$, г) $l/L = 1/8$, д) $l/L = 1/4$, е) $l/L = 1/2$. У легенди су дате димензије система, као и неуређености, где се водило рачуна о томе да је $rl^{1/\nu_{3D}} = const.$

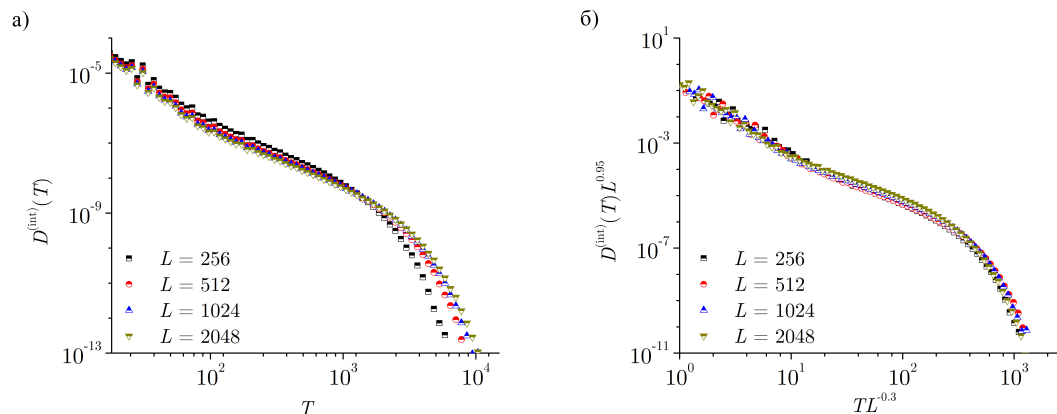
криве на падају на једну заједничку, већ да постоји извесно разилажење у пределу лавина које трају краће. Као што је речено, услед исте неуређености у тракама свих дужина није било могуће ускладити неуређеност са променом димензија система тако да одговарајуће величине остану константне и тиме није било могуће ни добити одговарајућ колапс.



Слика 5.12: Леви део: дистрибуције трајања лавина за различите дужине узорака. Десни део: покушај колапса кривих са горње слике. Мерење је вршено на узорцима $Fe_{21}Co_{64}B_{15}$. Слика преузета из [34].

На слици 5.13 је приказан сличан проблем који се јавља у нумеричким симулацијама на системима типа $L \times L \times l$. На делу а) се види како изгледају

дистрибуције трајања лавина за системе којима је неуређеност $R = 2.00$, дебљина $l = 16$, а дужина се мења од $L = 256$ до $L = 2048$. На делу под б) је приказан колапс датих кривих, тако што је на апсцисној оси величина $TL^{-0,3}$, а на ординатној $D^{int}(T)L^{0,95}$. Експоненти 0,30 и 0,95 нису проистекли из неке комбинације познатих експонената у дводимензионом или тродимензионом моделу, већ су просто добијени као најбољи параметри колапса. Штавише, они чак нису ни константни већ зависе од опсега у ком се крећу дужине L система. Дакле, или је немогуће постићи колапс кривих дистрибуција параметара лавина, уколико се не води рачуна о томе да мора да се прилагођава вредност неуређености заједно са димензијама система, или ако се и постигне неки колапс прихватљивог квалитета он нема никакво теоријско објашњење и није одржив у смислу константности експонената. Закључак је да, у циљу постизања колапса жељеног квалитета, неопходно је водити рачуна о геометрији система, односно о међусобном усклађивању фактора, који утичу на изглед функција дистрибуција параметара лавина.



Слика 5.13: а) Дистрибуције трајања лавина у системима у којима су неуређености и дебљине исте, $R = 2,00$ и $l = 16$, док се дужина мења од $L = 256$ до $L = 2048$. б) Колапс приказаних кривих дистрибуција трајања лавина: а) постигнут тако што је на апсцисној оси трајање лавине подељено са $L^{0,3}$, а на ординатној оси дистрибуција трајања помножена са $L^{0,95}$. Вредности 0,3 и 0,95 нису ни у каквој релацији са правим експонентима у дводимензионом и тродимензионом моделу.

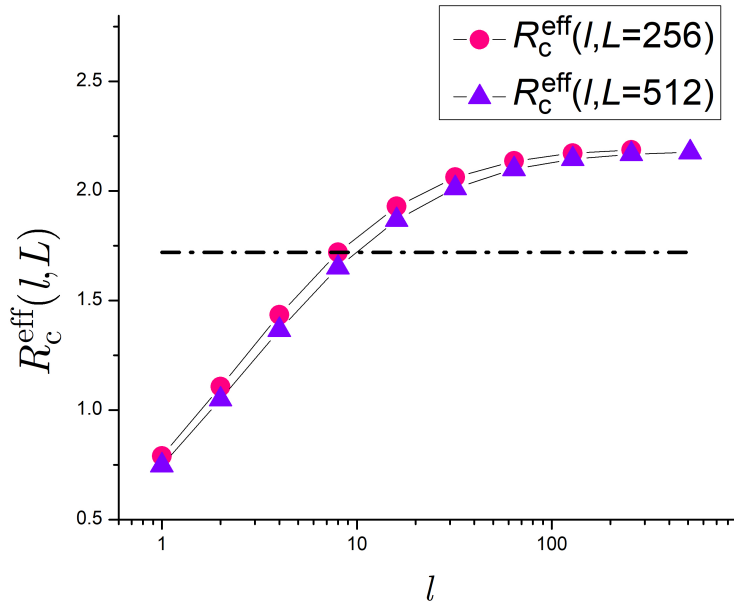
Глава 6

Понашање танких система на ефективnoj критичној неуређености

Понашање система на ефективnoj критичној неуређености је од посебног значаја услед мноштва појава које се тада јављају. Пре свега, то је неуређеност на којој се дешава фазни прелаз, односно за неуређености које су веће од ње је систем у парамагнетној фази, а за мање у феромагнетној. Лавине мењају своје карактеристике, те се уместо малих и коначних лавина за $R > R_c^{\text{eff}}$ јављају велике и прожимајуће лавине за $R < R_c^{\text{eff}}$, при чему ове друге постају бесконачне у термодинамичком лимиту $L \rightarrow \infty$. Стога се ова глава бави питањем понашања неких одговора система на самој ефективnoj критичној неуређености. Симулације су рађене на већ описаним системима типа $L \times L \times l$. На овом месту су приказани резултати симулација два сета система чије су дужине $L = 256$ и $L = 512$, са дебљинама које се, почевши од $l = 1$, дуплирају до $l = L$.

На слици 6.1 су приказане вредности ефективних критичних неуређености за два поменута система чије су основе 256×256 , односно 512×512 и разних дебљина. R_c^{eff} брзо расте са порастом дебљине до неке вредности и потом улази у сатурациони део где се приближава критичној вредности за тродимензиони модел R_c^{3D} , што и јесте очекивано, јер са порастом дебљине систем све више личи на тродимензиони. Поред тога, може се приметити да је свака тачка приказана на слици љубичастом бојом испод одговарајуће тачке приказане розе бојом, односно да су ефективне критичне неуређености за исте дебљине мање уколико је величина основе већа. То је такође очекивано, јер уколико је основа већа онда тај систем више личи на дводимензиони од оног са мањом основом

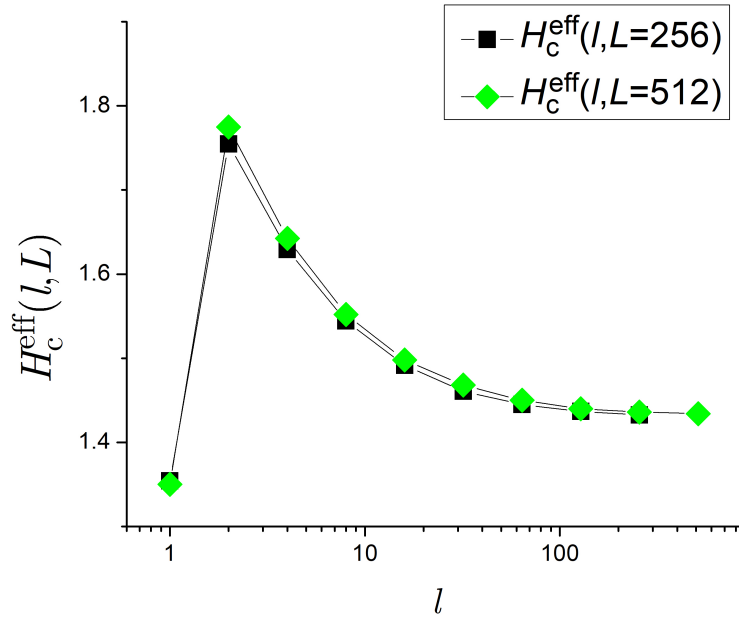
(уколико је дебљина иста), те му је и ефективна критична неуређеност мања. Исти закључци би се добили и ако се погледа израз (5.5). Одатле се јасно види да се вредност R_c^{eff} повећава са повећањем дебљине l , односно опада са повећањем дужине и ширине L . Хоризонтална линија на графику приказује вредност ефективне критичне неуређености за $l = 8$ и $L = 256$. Таква линија би могла бити корисна за поређење са експериментом, што је детаљније описано у последњем делу ове главе.



Слика 6.1: Ефективна критична неуређеност за системе којима је дужина $L = 256$ (розе боја) и $L = 512$ (љубичаста боја) за разне дебљине у опсегу од $l = 1$ до $l = L$. Приказана хоризонтална линија има ординатну вредност $R = 1,72$ што је једнако вредности $R_c^{\text{eff}}(l = 8, L = 256)$.

Поред ефективне критичне неуређености од користи је посматрати и ефективно критично спољно поље за дати систем $H_c^{\text{eff}}(l, L)$. Под ефективним критичним спољним пољем се овде сматра вредност спољног поља на коме, за систем типа $L \times L \times l$ коме је неуређеност $R = R_c^{\text{eff}}(l, L)$, суцептибилност система има максималну вредност. На слици 6.2 је приказано како се мења $H_c^{\text{eff}}(l, L)$ за системе којима су величине основа 256×256 и 512×512 , а дебљине се мењају од $l = 1$ до $l = L$. Са слике се види да за $l \geq 2$ ефективно поље опада са порастом дебљине система и тежи критичном спољном пољу у тродимензионом моделу H_c^{3D} . То је очекивано, обзиром да се са порастом дебљине и ефективне

критичне неуређености сужава хистерезисна крива чинећи и H_c^{eff} мањим. Са друге стране се види да се за $l \geq 2$ црне тачке налазе испод зелених на графику, односно да је $H_c^{\text{eff}}(l, L = 256) < H_c^{\text{eff}}(l, L = 512)$. То је такође очекивано, јер је за исту дебљину система онај са већом основом „даљи” од чистог тродимензионог система.

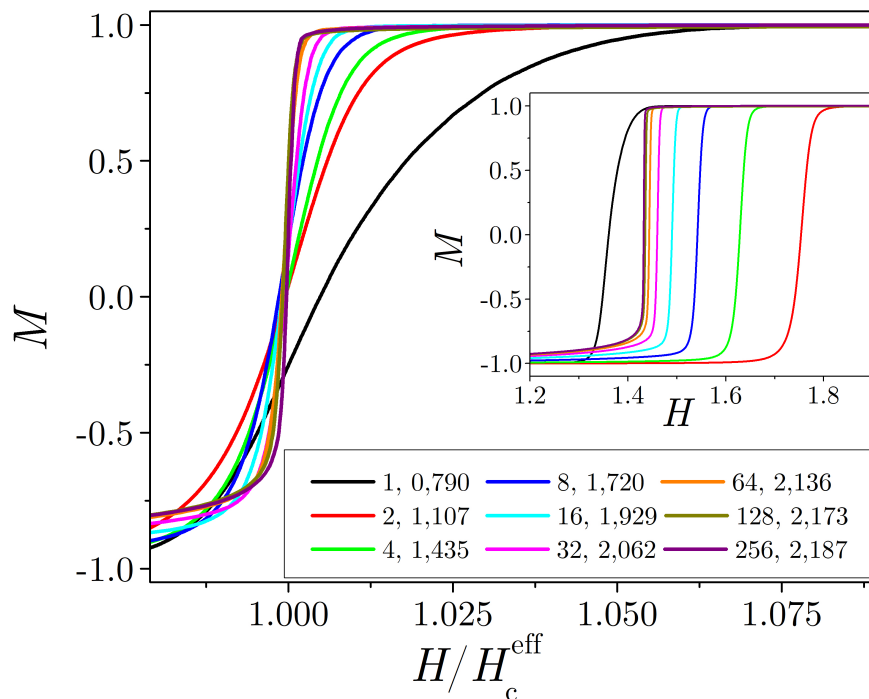


Слика 6.2: Ефективно критично спољно поље за системе којима је дужина $L = 256$ (црна боја) и $L = 512$ (зелена боја) за разне дебљине од $l = 1$ до $l = L$.

Оно што се такође може приметити јесте да вредност ефективног критичног спољног поља нема континуалан прелаз са јако танких система на дводимензиони систем. Постоји скок са $H_c^{\text{eff}}(l = 1, L)$ на $H_c^{\text{eff}}(l = 2, L)$, па потом континуални пад ка H_c^{3D} . За сада не постоји неко друго објашњење зашто је то тако осим да постоји фундаментална разлика у системима са 4 најближа суседа у односу на оне са више најближих суседа.

Поменуто понашање хистерезисне петље је приказано на слици 6.3. На уметном делу се види како се ефективно критично спољно поље смањује како расте дебљина за $l \geq 2$, односно да се хистерезисна петља сужава са повећањем дебљине и неуређености (R_c^{eff} је веће за веће дебљине уколико је основа иста). На главном делу слике се види како изгледају хистерезисне петље уколико се спољно поље подели ефективним критичним спољним пољем за дати систем.

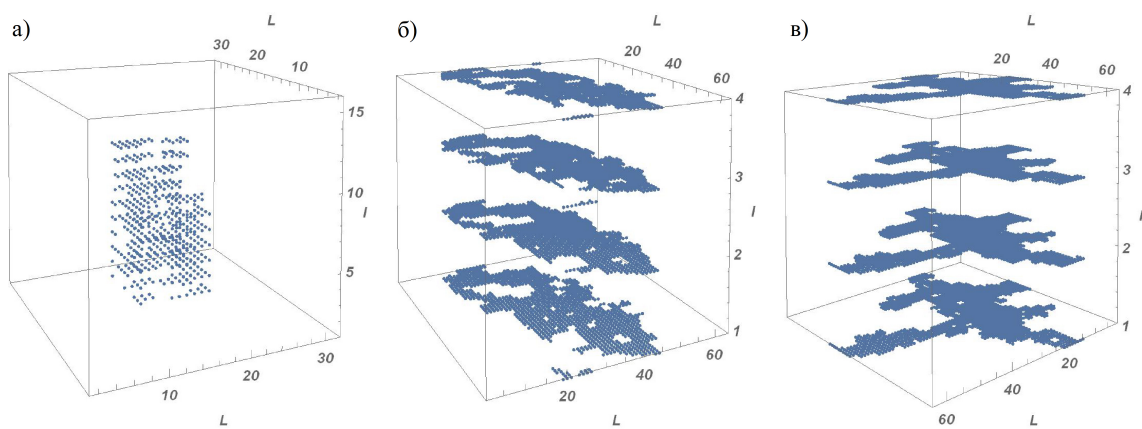
Види се да се за дебљине $l \geq 2$ криве свих петљи секу у једној тачки чија је ординатна вредност $M \approx 0$. И овде може да се примети да постоји одступање дводимензионог система ($l = 1$) од осталих, те црна линија не сече преостале у $M \approx 0$.



Слика 6.3: Уметнута слика: узлазни делови хистерезисних петљи за системе са величином основе 256×256 , дебљинама од $l = 1$ до $l = 256$ и неуређеностима које су једнаке ефективним критичним за дате системе. Главна слика: узлазне криве хистерезисних петљи уколико је на апсцисној оси јачина спољног поља подељена ефективним критичним спољним пољем за дати систем. Дебљина система и неуређености су дати у легенди.

Мала дебљина система утиче и на облик лавине. Уколико је дебљина система приближна дужини и ширини као на делу а) слике 6.4, а неуређеност довољно велика, онда лавина не досеже до граница система по дебљини и има изглед стандардних непрожимајућих лавина у тродимензионог систему. Међутим, уколико је дебљина система мала, као на деловима б) и в) слике 6.4, онда лавина лако досеже границе система по дебљини и тада отворене границе по тој димензији спречавају њено даље простирање у том правцу. Лавина ће наставити пропацију, али ефективно као дводимензиона. Зависно од тога колика је неуређеност система, лавина може, а не мора да буде прожимајућа по дужини и ширини. На делу слике под б) је неуређеност система $R = 1,9$ а при-

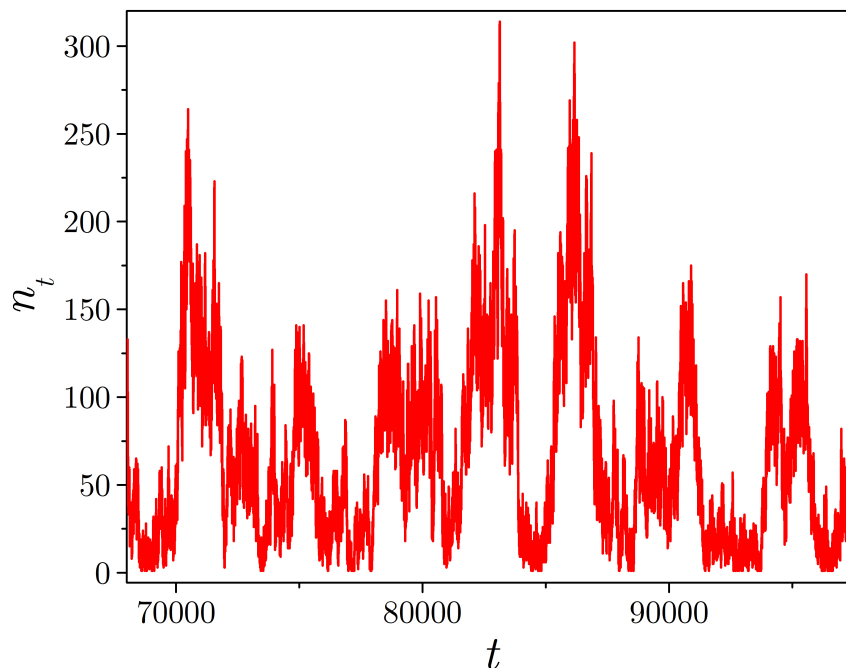
казана лавина је прожимајућа по једној димензији основе, док је на делу под в) неуређеност $R = 1,8$ и јавља се лавина која прожима систем по обе димензије. Оно што је приметно јесте да лавина у свим слојевима по дебљини, која је у оба случаја $l = 4$ (док су дужина и ширина $L = 64$), пропагира на скоро идентичан начин. Приметне су мале разлике, наравно, услед тога што постоје другачија случајна поља у чворовима, али у општем смислу лавина ефективно изгледа као дводимензиона. Да је дебљина система већа и да лавина може слободно да пропагира и по тој димензији наишла би на препреке индуковане неуређеношћу система и пропација по слојевима више не би била овако слична.



Слика 6.4: Изглед лавина у функцији од дебљине система и његове неуређености. На делу а) је систем величине $32 \times 32 \times 16$ спинова, а неуређеност је $R = 2,5$, лавина не достиже границе система ни по једној димензији. На делу б) је величина система $64 \times 64 \times 4$, неуређеност $R = 1,9$ и јавља се прожимајућа лавина по једној димензији основе, док по дебљини врло брзо достиже границе система. На делу в) су димензије исте као под б), само је неуређеност $R = 1,8$, те се јавља лавина која прожима систем по обе димензије основе.

Поред утицаја на облик лавине, мала дебљина утиче и на облик сигнала. На слици 6.5 је приказан сигнал из централног дела хистерезисне петље за систем коме је дебљина $l = 4$ и дужина и ширина $L = 256$, односно веома танак систем, и на неуређености која је ефективна критична за дати систем. На апсцисној оси је време t , а на ординатној број спинова n_t који су променили оријентацију у тренутку t . При постављеним условима би се очекивало да сигнал у централном делу петље има само велике скокове, међутим на слици се могу видети и мали скокови који се налазе између великих. Они потичу управо од мале дебљине система и тамо где би лавина наставила своју пропацију у

правом тродимензионом систему овде „удари” у границе система и због тога сигнал има малу вредност у том тренутку.



Слика 6.5: Јачина сигнала (број спинова који промене оријентацији у тренутку t) n_t у функцији времена t у централном делу хистерезисне петље. Величина система је $256 \times 256 \times 4$ спинова, а неуређеност $R = 1,435$ која је ефективна критична за дати систем. Види се доста малих вредности јачине сигнала који потичу од тога што су лавине ограничене по дебљини система.

Дакле, поред неуређености, на одговоре система утиче значајно и његова дебљина. Што је дебљина мања то лавине лакше досежу до њених граница и „насилно” мењају пропагацију, дајући, при одређеним условима, ефективно дводимензионо понашање система који није прави дводимензиони.

6.1 Критичне лавине система различитих дебљина

Поред утицаја на ефективну критичну неуређеност, ефективно критично спољно поље, хистерезисне петље, облик лавина и облик сигнала, дебљина система утиче и на облик дистрибуција параметара лавине, као што је показано у претходној глави. Међутим, у претходној глави су све приказане дистрибуције биле за неуређености које су изнад ефективне критичне. За очекивати је да,

што је неуређеност мања, то ће лавине бити веће и више њих ће досезати до граница система по дебљини, мењајући тиме облик функције дистрибуције параметара лавине (већи број лавина ће бити у „дводимензионом” делу кривих, а мањи у „тродимензионом”). Овде су испитиване дистрибуције параметара лавина, понашање просечне величине лавина и просечног облика лавина датог трајања на ефективној критичној неуређености.

6.1.1 Дистрибуције величине и трајања лавина

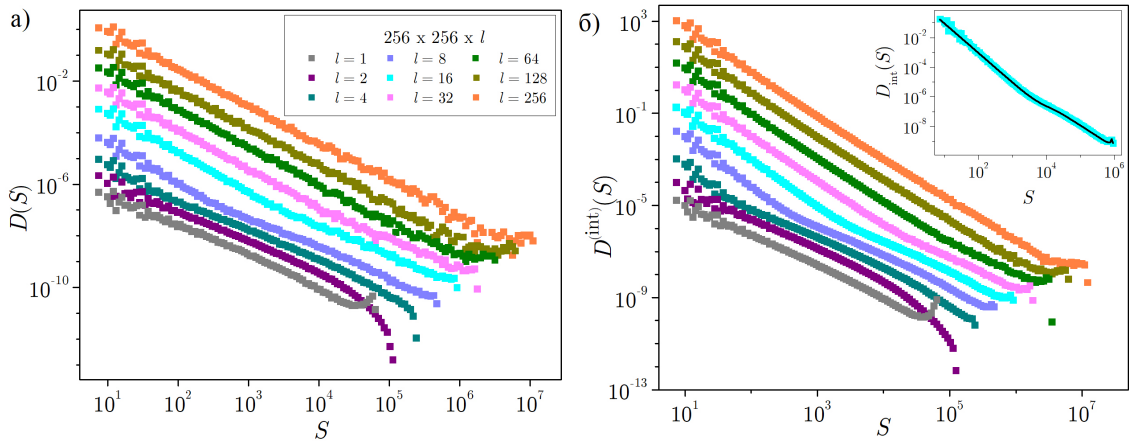
На слици 6.6 је приказано како изгледају дистрибуције величине лавина за системе разних дебљина на неуређеностима једнаким ефективним критичним. На делу а) су приказане дистрибуције величине лавина $D(S)$ у уском прозору спољног поља око централног дела узлазне хистерезисне петље, односно око дела где је магнетизација система $M \approx 0$, а на делу б) интегралне дистрибуције величине лавина $D^{(int)}(S)$. Дужина и ширина свих система је $L = 256$, а дебљина се креће од $l = 1$ до $l = 256$.

У дводимензионом и тродимензионом лимесу дистрибуције се понашају по степенском закону као $D(S, L) = AS^{-\tau} \mathcal{D}_{\pm}(S/L^{D_f})$, где је $D_f = 2$ фрактална димензија у дводимензионом, односно $D_f = 2,78$ у тродимензионом случају [22, 63, 68]. Вредности експонената су $\tau^{3D} = 1,60$ у тродимензионом моделу, а $\tau^{2D} = 1,54$ у дводимензионом. Скалирајућа функција \mathcal{D}_+ се односи на случај када је неуређеност већа од критичне за дати модел $R \geq R_c$ [69, 58], док се \mathcal{D}_- односи на субкритични случај $R < R_c$ [22, 63, 68]. У случају када систем није еквилатералан онда се и облик функције која најбоље фитује дистрибуцију величине лавина мења. Мора се обратити пажња на то да постоје два региона, један са малим лавинама које не „осећају” дебљину система, и један са великим лавинама које су ефективно дводимензионе. Следи да функција мора да буде састављена из два дела који ће имати и другачије критичне експоненте. Предложена форма функције на коју се врши фитовање гласи:

$$D(S) = (1 - \tanh(S/B)) \frac{A_1}{S^{\tau_1}} + \tanh(S/B) \frac{A_2}{S^{\tau_2}} e^{-(S/C)^a}, \quad (6.1)$$

где су τ_1 и τ_2 одговарајући критични експоненти и сваки од њих описује степено понашање једног од два горе поменути типа лавина. Експонент τ_1 описује

степенно понашање дела дистрибуције где су лавине мање, а τ_2 степенно понашање дела дистрибуције где су лавине ефективно дводимензионе. Превојна тачка између ова два типа лавина је $S \approx B$, а у претходним главама је показано да је $B \propto l^{D_f}$. Дакле у делу $S \ll B$ доминира први сабирак у изразу (6.1), односно експонент τ_1 , док за $S \gg B$, па све до cutoff-а доминира други сабирак и експонент τ_2 . Фитовање cutoff-а врши се на експоненцијални део функције облика $e^{-(S/C)^a}$ у случајевима када су неуређености система веће или једнаке ефективној критичној. Међутим, за фитовање кривих дистрибуција величине лавина у случају када је неуређеност система испод ефективне критичне облик cutoff функције није тако једноставан, тј. у том делу би морале да се узму у обзир и прожимајуће лавине и израз би био компликованији. A_1 и A_2 су амплитуде одговарајућих региона, док параметар S у првој апроксимацији има вредност величине лавина за које почиње cutoff део.



Слика 6.6: а) Дистрибуције величине лавина унутар уског прозора око централног дела хистерезисне петље. б) Главна слика: интегралне дистрибуције величине лавина. Уметнута слика: пример једног фита дистрибуције величине лавина према предложеном изразу (6.1). Величине система су $256 \times 256 \times l$, где је дебљина l дата у легенди и узима вредности од $l = 1$ до $l = L = 256$. Неуређености су једнаке ефективним критичним за сваки систем.

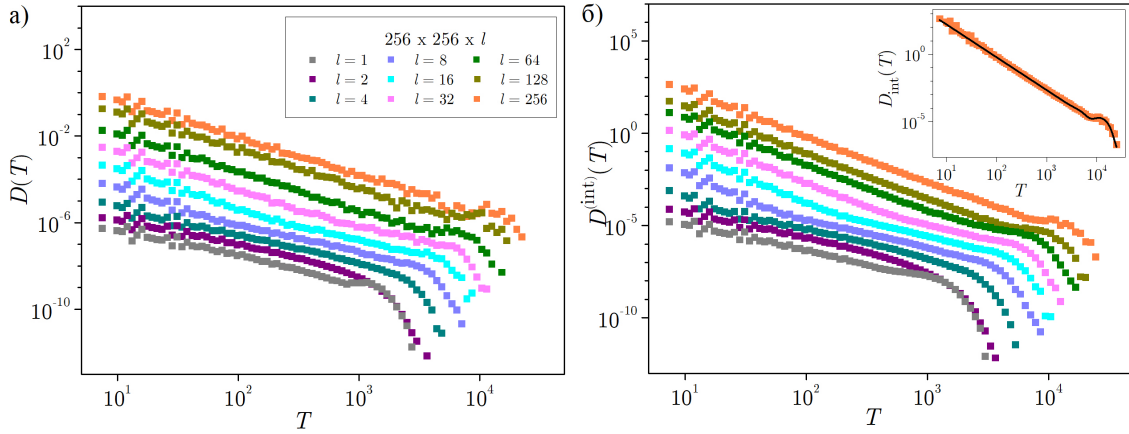
На уметном делу слике 6.6 под б) се види како предложена форма (6.1) фитије дистрибуцију величине лавина за дебљину $l = 16$. На основу фитова за разне дебљине могу се одредити експоненти τ_1 и τ_2 за интегралне, односно за дистрибуције у уском прозору спољног поља. У табелама 6.1 и 6.2 су приказане вредности експонената добијених фитовањем на предложену функцију за интегралне дистрибуције и за дистрибуције из уског прозора у центру хистерезисне

петље.

Аналоган поступак се може применити и на дистрибуције трајања лавина, које су приказане на слици 6.7. На слици су приказани резултати добијени за исте системе као и на 6.6, те се неће посебно наводити параметри система. Функција на коју се фитују дистрибуције трајања лавина је истог облика као и она за дистрибуције величина лавина, само се параметри разликују. Експоненти који описују степено понашање у дводимензионом и тродимензионом лимиту су $\alpha^{2D} = 1,87$ и $\alpha^{3D} = 2,05$. Јасно је да је неопходно извршити модификацију моделне функције због нееквилатералног система. Моделна функција која се надаље користи гласи:

$$D(T) = (1 - \tanh(T/B)) \frac{A_1}{T^{\alpha_1}} + \tanh(T/B) \frac{A_2}{T^{\alpha_2}} e^{-(T/C)^a}, \quad (6.2)$$

где су α_1 и α_2 критични експоненти који показују како се понаша дистрибуција трајања лавина за мале лавине које не досежу границе по дебљини система ($T \ll B$, а раније је показано да је $B \propto l^z$, где је $z = 1,7$ динамички критични експонент у тродимензионом моделу), односно за велике лавине које су ефективно дводимензионе ($T \gg B$).



Слика 6.7: а) Дистрибуције трајања лавина унутар уског прозора око централног дела хистерезисне петље. б) Главна слика: интегралне дистрибуције трајања лавина. Уметнута слика: пример једног фита дистрибуције трајања лавина према предложеном изразу (6.2). Величине система су $256 \times 256 \times l$, где је дебљина l дата у легенди и узима вредности од $l = 1$ до $l = L = 256$. Неуређености су једнаке ефективним критичним за сваки систем.

На делу а) слике 6.7 су дистрибуције трајања лавина за уски прозор спољног поља, док су на главној слици дела б) интегралне дистрибуције трајања лавина,

а на уметнутој слици пример фита датог изразом (6.2) за систем дебљине $l = 256$. Вредности експонената α_1 и α_2 добијене из фита интегралних, односно дистрибуција из централног прозора хистерезисне петље, су дате у табелама 6.1 и 6.2.

За дебљине $l < 8$ нема региона са малим лавинама, односно веома је мали број лавина које не досегну границе система по дебљини, тако да при тим условима не фигуришу експоненти τ_1 и α_1 . Супротно томе, за дебљине $l > 32$ се скоро све лавине понашају као у правом тродимензионом систему, односно деблија система не утиче на њих и нема лавина које су ефективно дводимензионе, те у том делу нема експонената τ_2 и α_2 . Ако се погледају слике са дистрибуцијама параметара лавина види се да на неким постоји двоструки нагиб (за $8 \leq l \leq 32$), док на осталима нема, односно понашају се као чисти дводимензиони и тродимензиони системи. Ово важи за систем са основом $L = 256$, међутим за $L = 512$ су те границе другачије, и износе $16 \leq l \leq 64$, што наводи на закључак да су границе за дебљину унутар којих се опажа двоструки нагиб у систему са основом $L \times L$ једнаке $L/32 \leq l \leq L/8$.

Табела 6.1: Вредности експонената τ_1 , α_1 , τ_2 и α_2 за разне дебљине у системима са основом 256×256 , добијене фитовањем интегралних функција дистрибуција величине и трајања лавина.

l	τ_1	α_1	τ_2	α_2
1	—	—	$1,41 \pm 0,07$	$1,54 \pm 0,04$
2	—	—	$1,36 \pm 0,07$	$1,51 \pm 0,02$
4	—	—	$1,31 \pm 0,10$	$1,50 \pm 0,03$
8	$2,26 \pm 0,08$	$2,98 \pm 0,10$	$1,30 \pm 0,08$	$1,47 \pm 0,02$
16	$2,11 \pm 0,07$	$2,80 \pm 0,15$	$1,30 \pm 0,03$	$1,51 \pm 0,02$
32	$2,00 \pm 0,06$	$2,68 \pm 0,09$	$1,27 \pm 0,02$	$1,59 \pm 0,02$
64	$1,94 \pm 0,08$	$2,60 \pm 0,07$	—	—
128	$1,89 \pm 0,05$	$2,53 \pm 0,06$	—	—
256	$1,88 \pm 0,05$	$2,50 \pm 0,06$	—	—

Очекивало би се да у дводимензионом, односно тродимензионом лимиту важи $\tau_1 \rightarrow \tau^{3D}$, $\tau_2 \rightarrow \tau^{2D}$, $\alpha_1 \rightarrow \alpha^{3D}$ и $\alpha_2 \rightarrow \alpha^{2D}$. Ипак, примећује се да су вредности експонената у дводимензионом и тродимензионом лимесу другачије од наведених вредности τ^{3D} , τ^{2D} , α^{3D} и α^{2D} . То је стога што се фитовањем дистрибуција величине и трајања лавина на предложене моделне функције (6.1) и (6.2) не добијају исправни одговарајући експоненти. У циљу добијања правих

Табела 6.2: Вредности експонената τ_1 , α_1 , τ_2 и α_2 за разне дебљине у системима са основом 256×256 , добијене фитовањем функција дистрибуција величине и трајања лавина из уског средишњег дела хистерезисне петље.

l	τ_1	α_1	τ_2	α_2
1	—	—	$1,09 \pm 0,04$	$1,28 \pm 0,01$
2	—	—	$1,14 \pm 0,03$	$1,22 \pm 0,02$
4	—	—	$1,11 \pm 0,06$	$1,21 \pm 0,06$
8	$1,64 \pm 0,06$	$1,94 \pm 0,17$	$1,12 \pm 0,05$	$1,24 \pm 0,02$
16	$1,56 \pm 0,04$	$1,90 \pm 0,12$	$1,12 \pm 0,03$	$1,37 \pm 0,13$
32	$1,54 \pm 0,04$	$1,88 \pm 0,07$	$1,17 \pm 0,03$	$1,45 \pm 0,22$
64	$1,48 \pm 0,03$	$1,82 \pm 0,07$	—	—
128	$1,46 \pm 0,04$	$1,80 \pm 0,05$	—	—
256	$1,46 \pm 0,01$	$1,78 \pm 0,04$	—	—

вредности експонената потребно је наћи универзалну скалирајућу функцију за сваку дебљину система, што овде није рађено. Поставља се питање због чега се онда уопште и фитују дистрибуције на функције које не дају као резултат исправну вредност. Одговор је да је то једини начин поређења са експериментом, јер у експерименталним резултатима се дистрибуције фитују на форме аналогне оним датим изразима (6.1) и (6.2).

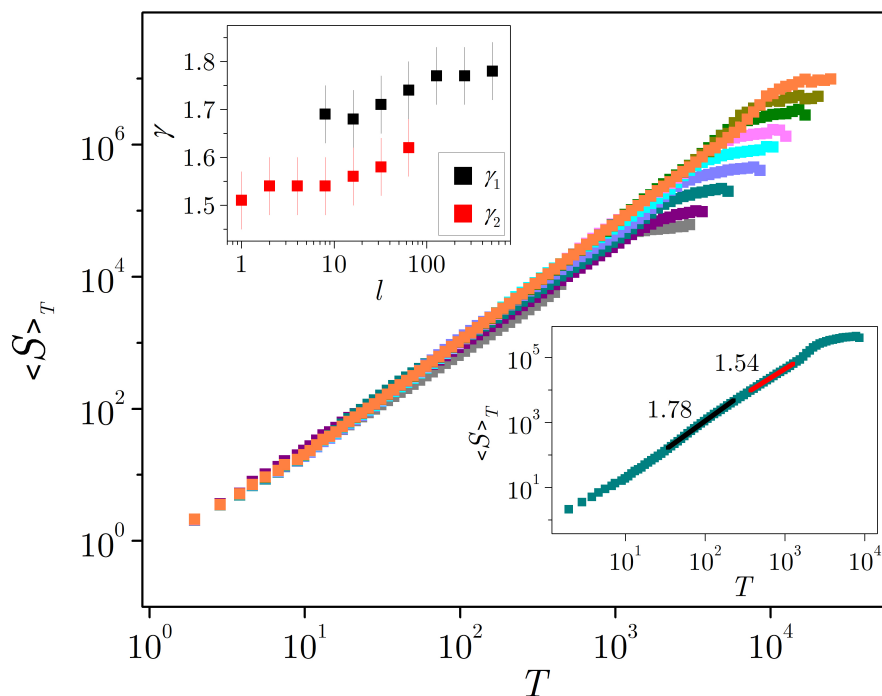
6.1.2 Просечна величина и просечан облик лавине

Просечна величина лавине датог трајања T , обележена са $\langle S \rangle_T$, подразумева средњу вредност величина свих лавина којима је трајање T . Она се скалира са трајањем преко експонента γ као

$$\langle S \rangle_T \propto T^\gamma. \quad (6.3)$$

Обзиром да опет постоје два различита региона, један са малим и други са великим лавинама, онда постоје и два различита експонента γ_1 и γ_2 у системима типа $L \times L \times l$. На слици 6.8 је приказано како изгледа просечна величина лавина датог трајања. Линеарним фитом два скалирајућа региона на log-log скали се добијају експоненти γ_1 и γ_2 . Њихове вредности су дате на графику у горњем левом углу слике. Са графика се види да и овде, као и за дистрибуције параметара лавина постоје дебљине при којима се јављају два различита скалирајућа региона, док се за мање и веће дебљине систем понаша као дводимензиони, односно тродимензиони, респективно. Примећује се да вредности γ_1 и γ_2 имају мање флукуације у том распону дебљина где постоје два нагиба,

док су тамо где постоји само један, вредности експонената одрживе. Вредности експонената су приказане у табели 6.3.



Слика 6.8: Главна слика: просечна величина лавина датог трајања за системе типа $L \times L \times l$, где је $L = 256$, а дебљина варира од $l = 1$ до $l = 256$. Легенда је иста као на претходним сликама, односно истим бојама одговарају исте дебљине система. Уметнута слика доле десно: засебно фитовање два дела криве, једног који одговара малим лавинама (које имају и мало трајање) и одакле се добија γ_1 , и другог који одговара великим лавинама одакле се добија γ_2 . Уметнута слика горе лево: вредности за γ_1 и γ_2 за све дебљине.

Са друге стране, могуће је експонент γ одредити и из просечног облика лавине. Просечан облик лавине говори колика је средња вредност јачине сигнала n_t у тренутку t свих лавина које имају дато трајање T (односно средња вредност броја спинова који промене оријентацију у тренутку t у свим лавинама које имају трајање T). У циљу одређивања експонента γ користи се аналитичка предикција понашања функције просечног облика лавине [64]:

$$\langle n_t \rangle_{AAS} = c_{AAS} \left[\frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{b_{AAS}} \right]^{\gamma-1}. \quad (6.4)$$

На главном делу слике 6.9 је приказано како изгледа просечан облик лавине за трајање $T = 64$ и разне дебљине (иста боја одговара истим дебљинама као на

¹AAS долази од енеглеске скраћенице израза Average avalanche shape.

Табела 6.3: Вредности експонената γ_1 и γ_2 за разне дебљине у системима са основом 256×256 , добијени фитовањем просечне величине лавина.

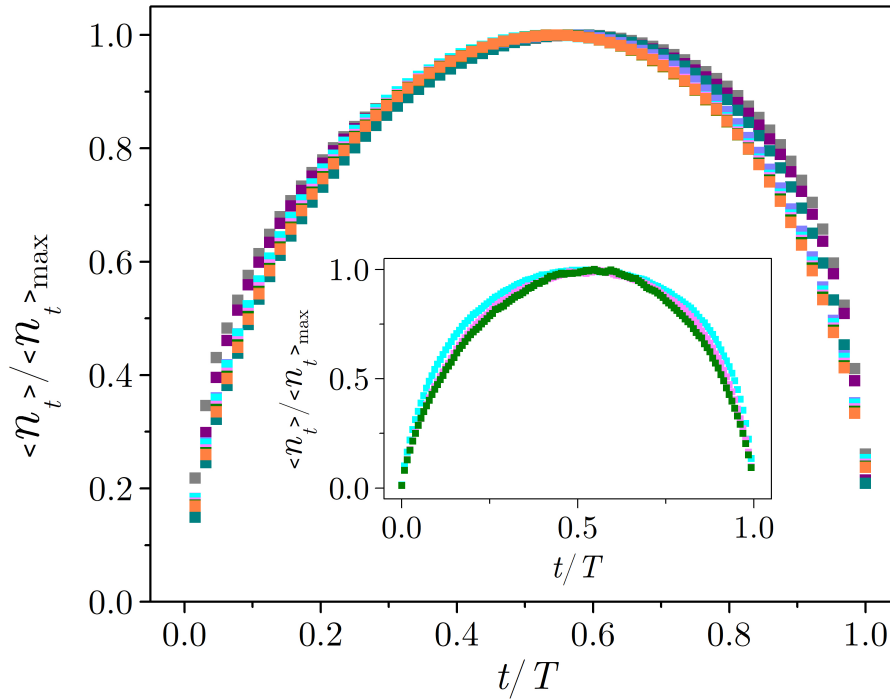
l	γ_1	γ_2
1	—	$1,51 \pm 0,01$
2	—	$1,54 \pm 0,01$
4	—	$1,54 \pm 0,02$
8	$1,69 \pm 0,02$	$1,54 \pm 0,01$
16	$1,68 \pm 0,01$	$1,56 \pm 0,02$
32	$1,71 \pm 0,02$	$1,58 \pm 0,03$
64	$1,74 \pm 0,04$	—
128	$1,77 \pm 0,02$	—
256	$1,78 \pm 0,02$	—

претходним сликама). Јачина сигнала, као и време протекло у току лавине су нормализовани на њихове максималне вредности, односно на апсцисној оси је величина t/T , а на ординатној $\langle n_t \rangle / \langle n_t \rangle_{max}$. На уметнутој слици је исто то само за трајање лавине $T = 2048$. Фитовањем добијених кривих на предложени израз (6.4) за разна трајања лавина добијају се вредности експонената γ приказани у табели 6.4.

Табела 6.4: Вредности експонента γ за разне дебљине у системима са основом 256×256 и разна трајања лавина, добијени фитовањем функција просечног облика лавине.

l	$T = 64$	$T = 128$	$T = 256$	$T = 512$	$T = 1024$	$T = 2048$
1	$1,48 \pm 0,03$	$1,49 \pm 0,05$	$1,49 \pm 0,04$	$1,50 \pm 0,05$	$1,52 \pm 0,07$	—
2	$1,53 \pm 0,02$	$1,52 \pm 0,04$	$1,52 \pm 0,04$	$1,52 \pm 0,03$	$1,51 \pm 0,06$	$1,48 \pm 0,11$
4	$1,58 \pm 0,04$	$1,56 \pm 0,03$	$1,53 \pm 0,08$	$1,52 \pm 0,09$	$1,52 \pm 0,06$	$1,51 \pm 0,09$
8	$1,54 \pm 0,07$	$1,62 \pm 0,04$	$1,61 \pm 0,10$	$1,55 \pm 0,15$	$1,52 \pm 0,12$	$1,51 \pm 0,11$
16	$1,55 \pm 0,08$	$1,58 \pm 0,09$	$1,63 \pm 0,04$	$1,65 \pm 0,05$	$1,58 \pm 0,13$	$1,55 \pm 0,08$
32	$1,57 \pm 0,04$	$1,59 \pm 0,03$	$1,60 \pm 0,07$	$1,62 \pm 0,03$	$1,67 \pm 0,04$	$1,65 \pm 0,08$
64	$1,58 \pm 0,06$	$1,61 \pm 0,04$	$1,62 \pm 0,05$	$1,63 \pm 0,04$	$1,63 \pm 0,07$	$1,71 \pm 0,08$
128	$1,58 \pm 0,05$	$1,61 \pm 0,04$	$1,63 \pm 0,07$	$1,63 \pm 0,04$	$1,65 \pm 0,04$	$1,63 \pm 0,06$
256	$1,59 \pm 0,02$	$1,62 \pm 0,03$	$1,63 \pm 0,06$	$1,65 \pm 0,07$	$1,65 \pm 0,04$	$1,69 \pm 0,07$

Јасно је да одређивање експонента γ овом другом методом, преко просечног облика лавине, доноси као резултат само једно γ , односно не постоји γ_1 и γ_2 у овом случају. То је зато што се посматра сваки систем одвојено и његов просечан облик лавине датог трајања фитује на (6.4). Међутим, и даље ти резултати могу да се пореде. На пример, за трајање $T = 128$ и дебљину система $l = 2$ би се очекивало да су то лавине које су ефективно дводимензионе, те да вредност експонента γ треба да буде слична вредности γ_2 из табеле 6.3. Види



Слика 6.9: Главни део: просечан облик лавине за трајање $T = 64$ за системе типа $L \times L \times l$, где је $L = 256$, а дебљина иде од $l = 1$ до $l = 256$. Легенда је иста као на претходним сликама, односно истим бојама одговарају исте дебљине система. Уметнута слика: исто то само за трајање од $T = 2048$.

се да то и јесте случај и да је тако са свим танким системима, односно свуда за $l \leq 4$ се γ поклапа са γ_2 из табеле 6.3 у оквиру грешке. Супротно томе, када је дебљина система велика онда би се очекивало да се те вредности експонента γ поклапају са γ_1 из табеле 6.3. Види се из приложених података да то поклапање није тако добро као код танких система са γ_2 , али опет је у оквиру грешке доста блиско и са повећањем димензија система би било још ближе.

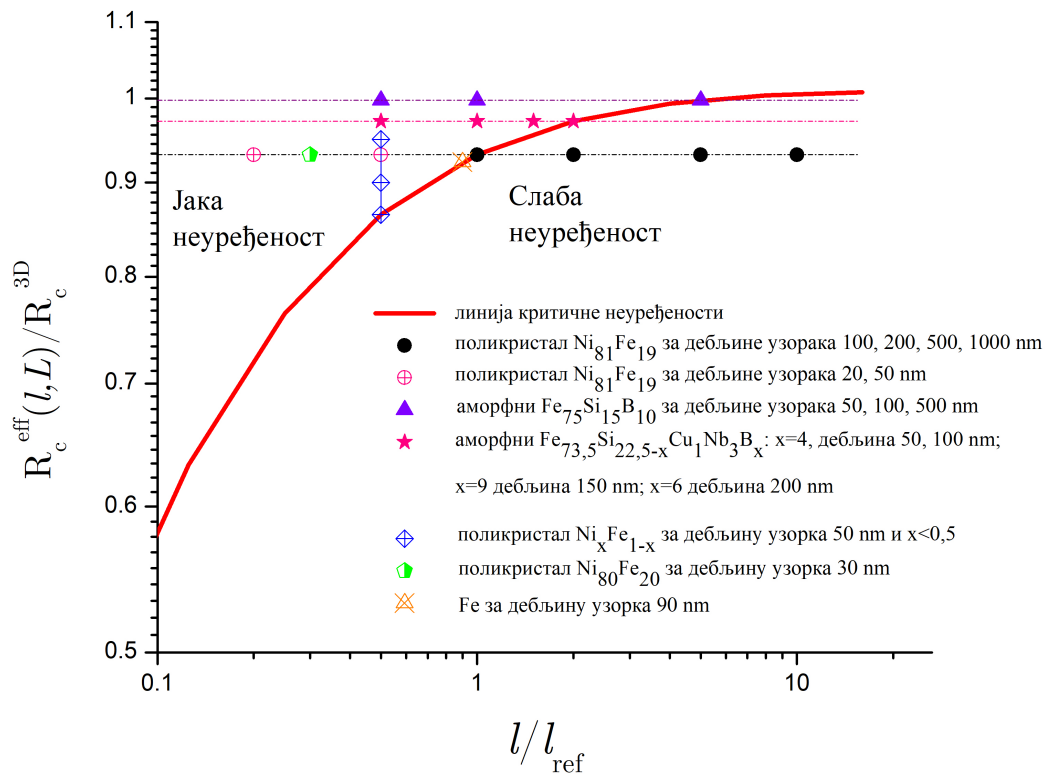
6.2 Поређење са експериментом

Као што је наведено у вези хоризонталне линије са слике 6.1, она може да послужи у поређењу нумеричких резултата са експериментом. На слици 6.10 је приказан потенцијални начин како се може искористити познавање критичних неуређености дате дебљине у процени непознатих параметара експерименталног узорка. Уколико се нормирају вредности тако да на ординатној оси буде величина $R_C^{\text{eff}}(l, L)/R_c^{3D}$, а на апсцисној l/l_{ref} , где је l_{ref} погодно изабрана референтна дебљина система, онда се добија крива приказана црвеном линијом на

слици 6.10. Та црвена линија више није специфична за систем са датом основном, већ сада може да се тумачи као универзална линија за било какав систем, небитно да ли се ради о симулацијама или експерименту, уз неопходан услов да величина l_{ref} буде на адекватан начин дефинисана. Свакако, рећи да је линија универзална није у потпуности оправдано, стриктно говорећи, требало би да се води рачуна о многим параметрима система. Чак и случају симулација та линија би другачије изгледала у зависности од величине система, а нарочито у експерименту, где није могуће утврдити колика је вредност неуређености, где је однос l/L знатно другачији него у овде приказаним симулацијама и где се не ради у адијабатском режиму, те може да се стави доста примедби на овај приступ. Међутим, обзиром да тренутно не постоји ниједан метод који би могао да каже нешто више о неуређености система у експерименту онда је овај приступ прихватљив као одређена врста пробоја (ако ништа друго онда квалитативног) у смислу указивања на неуређеност експерименталних узорака.

Идеја како поредити нумеричке и експерименталне резултате се састоји у следећем: видети које су вредности неких параметара (најчешће неких експонената) система у експерименту и да ли се они мењају при промени дебљине узорка, па потом то поредити са адекватним вредностима параметара из симулације. Конкретно, у раду [33] је рађено са узорцима $Ni_{81}Fe_{19}$ за 6 различитих дебљина, 20nm, 50nm, 100nm, 200nm, 500nm и 1000nm. Пошто је све време у питању исти материјал онда је разумно претпоставити да је његова неуређеност иста без обзира на дебљину. Испоставило се да вредности експонената τ и α имају две различите вредности, једну за системе дебљине 20nm и 50nm, а другу за 100nm, 200nm, 500nm и 1000nm. То би било аналогно раније описаним експонентима τ_1 , α_1 , τ_2 и α_2 , односно да је за неке дебљине (дебљине мање од $l_{ref} = 100$) систем дате неуређености позициониран „лево” од црвене линије са слике, да му је дебљина мала и тада су у питању експоненти τ_2 и α_2 , односно обрнуто за системе који су „десно” од црвене критичне линије. Аналогно је извршено поређење и са осталим експериментима сличног типа, с тим што су неки извршени за исте дебљине, а различиту структуру система, односно различите неуређености. Тиме се, поређењем неких критичних експонената може доћи до закључка о томе колика је неуређеност експерименталног узорка.

Као што је речено, тачност ове методе је дискутабилна, али било би од



Слика 6.10: Поређење експерименталних и нумеричких резултата на танким системима. Црвена линија показује нумерички добијене резултате за критичну неуређеност, док су тачкама приказани одговарајући експериментални резултати добијени у радовима [29, 30, 70, 32].

изузетног значаја за експериментална истраживања феромагнетика да се зна колика је њихова неуређеност, те се стога ово може узети као нека почетна тачка кретања ка том циљу која ће бити касније унапређивана.

Глава 7

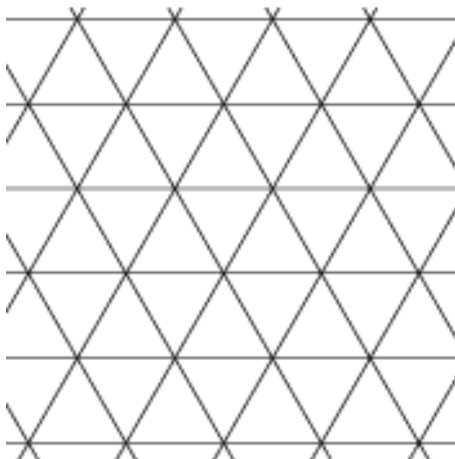
Утицај броја суседа на критично понашање модела

До радова Шукле са коауторима, али и других аутора [42, 43, 44] се сматрало да у атермалном неравнотежном Изинговом моделу са случајним пољем само димензионалност система утиче на његово критично понашање. То би значило, на пример, да је сваки дводимензиони систем који испољава критично понашање описан истим скупом критичних експонената без обзира на то каква је базна решетка система, односно да ли је квадратна, троугаона или нека друга. Све вредности критичних експонената презентоване у досадашњим радовима су добијене из симулација на хиперкубној решетки. Међутим, у радовима на примеру Бетеове решетке [42] се показало да се одговори система мењају у зависности од броја најближих суседа. Испоставило се да у случају Бетеове решетке систем испољава критично понашање само у случају када је број најближих суседа 4 или већи. Стога су у овој глави представљени резултати испитивања да ли се и како мењају критични експоненти и параметри система са променом базне решетке. Што се осталих услова симулација тиче, оне су рађене у адијабатском режиму, а гранични услови су затворени по свим правцима.

Напомиње се да су у трнутку писања ове дисертације резултати везани за дводимензиону решетку са троугаоном основом објављени [71], док су резултати приказани у преостала два поглавља прелиминарни и тек треба да буду публиковани уз, евентуалне, мање корекције.

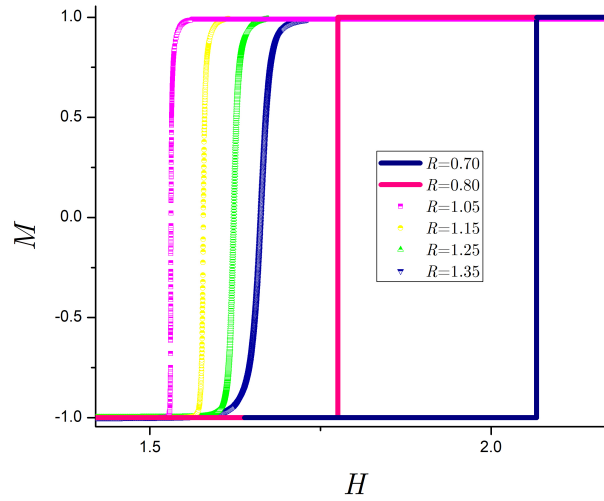
7.1 Двостандимензиона решетка са троугаоном основом (шест најближих суседа)

Пример двостандимензионе решетки са троугаоном основом је дат на слици 7.1. У чворове решетки су смештени Изингови спинови и може се видети да сваки спин има шест најближих суседа (осим евентуално спинова на ивицама решетки у случају отворених граничних услова).



Слика 7.1: Двостандимензиона решетка са троугаоном основом.

У извођењима закона скалирања по којима се понашају одређени одговори система (магнетизација, сусцептибилност, дистрибуције величина лавина...) није се помињао број најближих суседа као фактор. То значи да сви закони скалирања приказани у претходним главама имају исти облик и за системе чије решетки имају другачије основе, само што вредности експонената и параметара могу бити другачији. Такође, уколико систем са оваквом решетком испољава нетривијално критично понашање тада ће у термодинамичком лимиту криве магнетизације бити глатке за неуређености мање од критичне, на критичној неуређености и при критичној вредности спољног поља ће им први извод бити бесконачан, док ће за неуређености испод критичне крива магнетизације имати скок. На слици 7.2 је приказано како изгледају криве магнетизације на узлазном делу хистерезисне петље за неуређености од $R = 0,70$ до $R = 1,35$. Примећује се да на неуређеностима $R = 0,70$ и $R = 0,80$ криве магнетизације имају скок, односно да је систем у феромагнетној фази, док су за веће неуређености криве магнетизације глатке, односно систем је у парамагнетној фази.

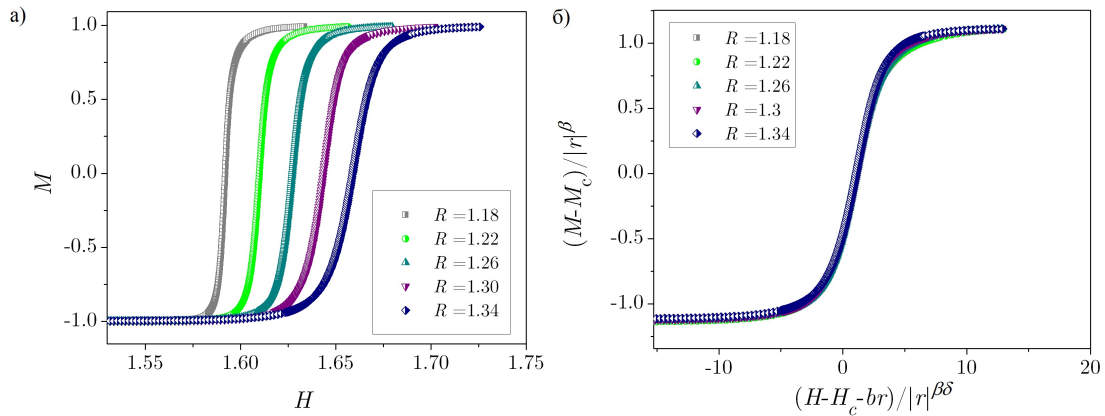


Слика 7.2: Криве магнетизације на узлазном делу хистерезисне петље за неуређености у распону од $R = 0,70$ до $R = 1,35$ при једној конфигурацији случајног поља. Величина система је 65536×65536 спинова.

На делу а) слике 7.3 је приказано како изгледају криве магнетизације система на растућем делу хистерезисне петље за неуређености у интервалу од $R = 1,18$ до $R = 1,34$. Величина система је 65536×65536 спинова, а криве су за сваку неуређеност усредњене на 100 различитих конфигурација случајног поља. Види се да су све криве глатке и да нема наглог скока магнетизације. На делу б) исте слике је приказано како дате криве колапсирају на једну заједничку криву примењујући колапс дат изразом (3.1). Одатле су одређени критични експоненти и параметри: $R_c = 0,85 \pm 0,02$, $H_c = 1,40 \pm 0,02$, $b = 0,69 \pm 0,05$, $\beta = 0,13 \pm 0,03$, $\beta\delta = 5,2 \pm 0,2$.¹

Оно што може одмах да се примети јесте да је критична неуређеност већа него у случају квадратне базне решетке. То и јесте очекивано, јер са порастом броја најближих суседа лавина може лакше да „нађе” пут и да настави пропацију, јер постоји већа шанса да неки од најближих суседа има вредност случајног поља такву да постане нестабилан и промени оријентацију у наредном тренутку. Такође, теже се формирају спинске замке, те је зато и потребна већа

¹Да би се разликовали критични експоненти и параметри за другачије базне решетке требало би да се обележи у индексу о којој решетки је реч. Међутим то би веома компликовало запис, тако да је изостављено означавање типа решетки, а из контекста је јасно о чему се ради и биће посебно наглашено уколико се помиње критични експонент или параметар за неку другу решетку.



Слика 7.3: а) Криве магнетизације на узлазном делу хистерезисне петље за неуређености у распону од $R = 1,18$ до $R = 1,34$. Величина система је 65536×65536 спинова, а за сваку неуређеност резултати су усредњени на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих магнетизације са дела а).

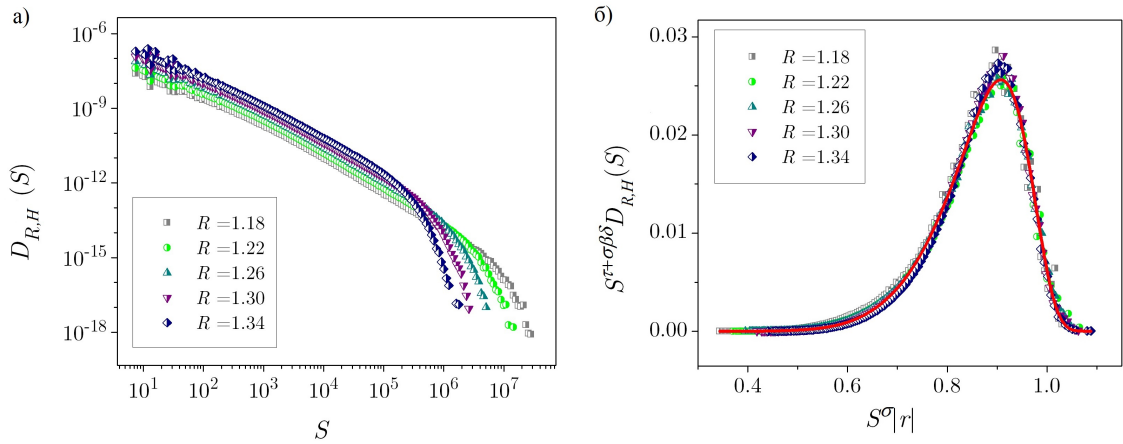
неуређеност да би систем био у парамагнетној фази, тј. да нема прожимајућих лавина.

7.1.1 Дистрибуције параметара лавине

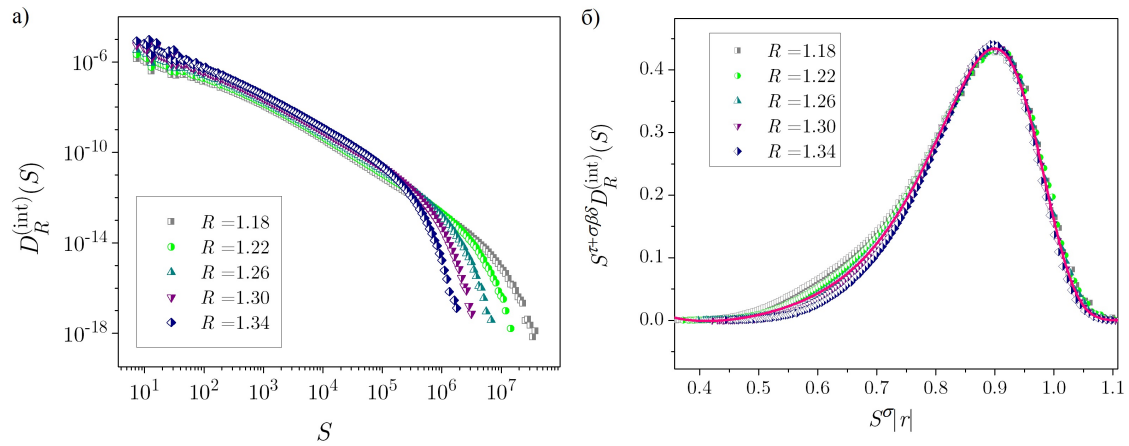
У овом делу је приказано како изгледају дистрибуције величине и трајања лавина као и њихови колапси. Одатле је одређено још неколико експонената који ће касније послужити за поређење критичног понашања система са различитим базним решеткама.

На делу а) слике 7.4 је приказано како изгледају криве дистрибуција величине лавина у уском прозору спољног поља одређеном тако да магнетизација има вредности од $-0,08$ до $0,08$. Примењујући форму (3.4) за колапсирање кривих дистрибуција величине лавина добија се део б) исте слике. Види се да криве падају на једну заједничку криву.

Аналогним поступком се добија и колапс кривих интегралних дистрибуција величине лавина, што се може видети на слици 7.5. Одатле се добијају критични експоненти и њихове комбинације $\tau + \sigma\beta\delta = 2,05 \pm 0,06$, $\sigma = 0,063 \pm 0,012$ и $\tau = 1,64 \pm 0,05$.



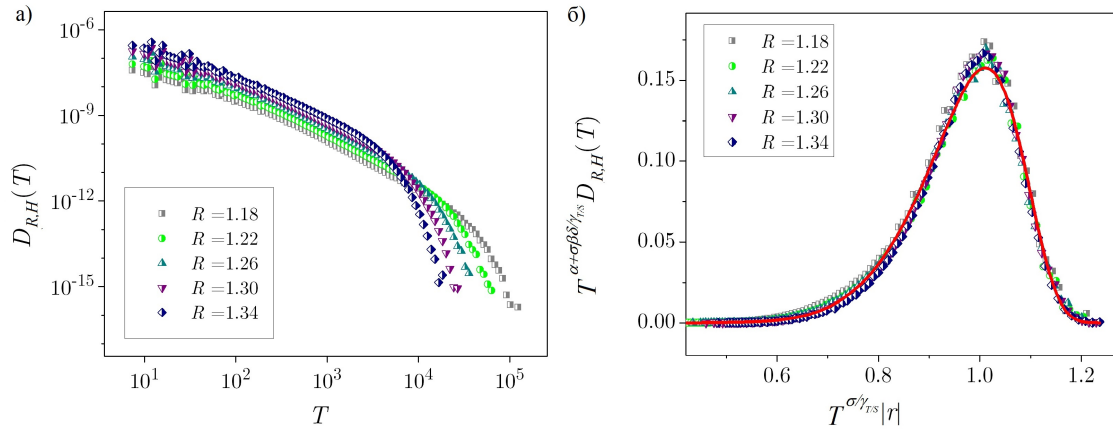
Слика 7.4: а) Криве дистрибуција величине лавина у уском прозору спољног поља за неуређености у распону од $R = 1,18$ до $R = 1,34$. Величина система је 65536×65536 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.6).



Слика 7.5: а) Криве интегралних дистрибуција величине лавина за неуређености у распону од $R = 1,18$ до $R = 1,34$. Величина система је 65536×65536 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс датих кривих добијен применом израза (3.6).

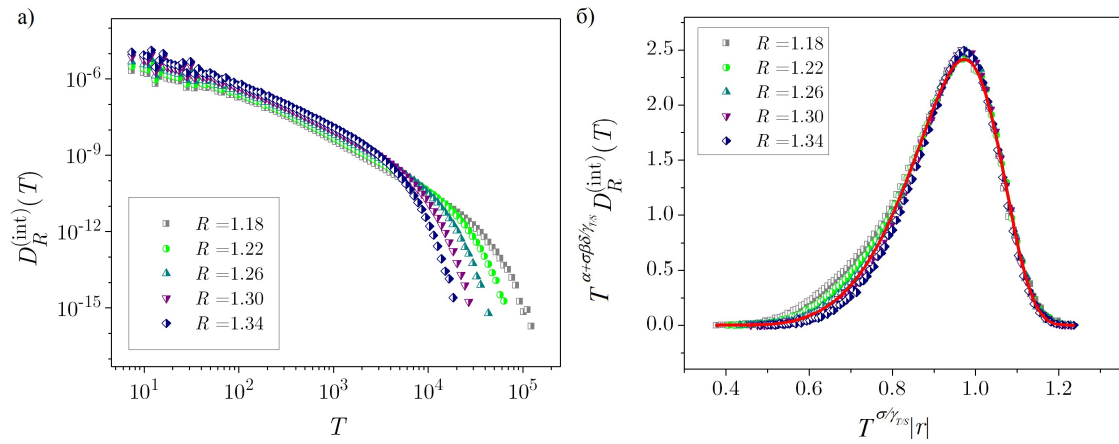
На делу а) слике 7.6 су приказане криве дистрибуција трајања лавина добијених из уског прозора спољног поља у коме се магнетизација система мења од $-0,08$ до $0,08$. На делу б) је приказан колапс тих кривих применом израза (3.12).

Аналогним поступком се добија и колапс кривих интегралних дистрибуција трајања лавина, што је приказано на слици 7.7. Одатле се добијају критични



Слика 7.6: а) Криве дистрибуција трајања лавина у уском прозору спољног поља за неуређености у распону од $R = 1,18$ до $R = 1,34$. Величина система је 65536×65536 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.12).

експоненти и њихове комбинације $\alpha + \sigma\beta\delta/\gamma_{T/S} = 2,70 \pm 0,05$, $\sigma/\gamma_{T/S} = 0,11 \pm 0,02$ и $\alpha = 2,05 \pm 0,06$ (имајући у виду да је $\gamma_{T/S} = \sigma\nu z$).

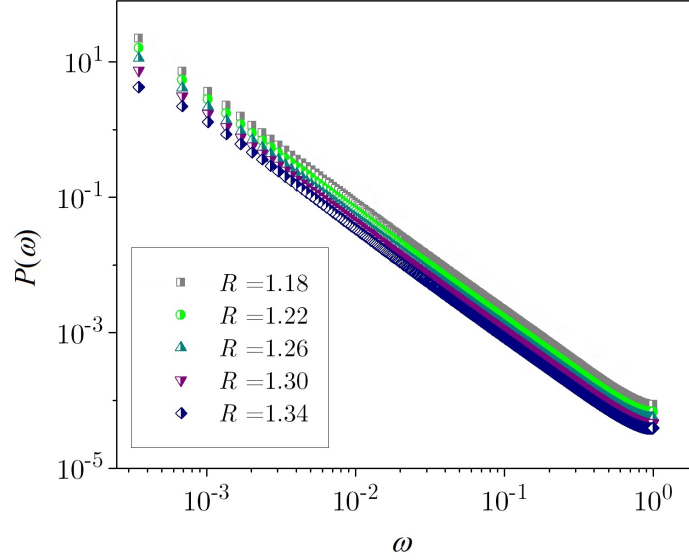


Слика 7.7: а) Криве интегралних дистрибуција трајања лавина за неуређености у распону од $R = 1,18$ до $R = 1,34$. Величина система је 65536×65536 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.12).

7.1.2 Спектар снаге

Из нагиба спектра снаге (на log-log скали) се добија комбинација критичних експонената $1/\sigma\nu z$. На слици 7.8 је приказано како изгледају спектри снаге за

случајеве за које су приказани и претходни графици у овој глави и добија се да је $1/\sigma\nu z = 1,65 \pm 0,01$.



Слика 7.8: Спектри снаге за неуређености у распону од $R = 1,18$ до $R = 1,34$. Величина система је 65536×65536 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља.

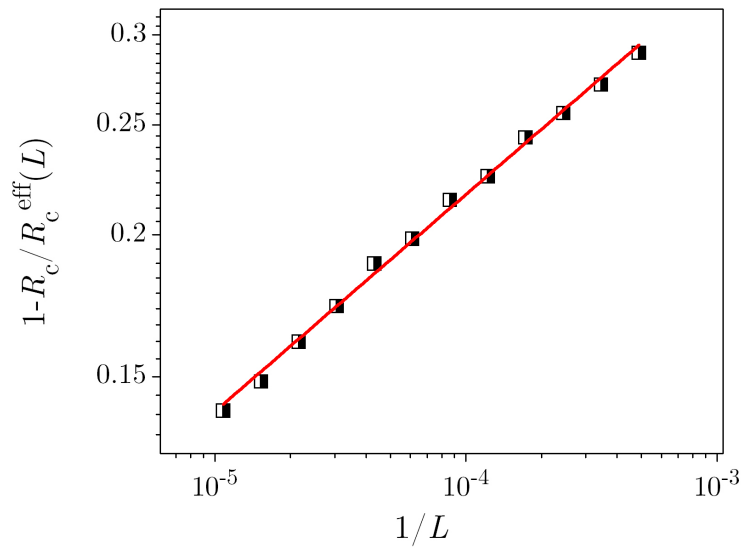
7.1.3 Ефективна критична неуређеност

Како се величина система смањује тако расте ефективна критична неуређеност R_c^{eff} . Обзиром да је вредност критичне неуређености одређена онда се из закона по ком се скалира ефективна критична неуређеност

$$\frac{R_c^{\text{eff}}(L) - R_c}{R_c^{\text{eff}}(L)} \propto L^{-1/\nu} \quad (7.1)$$

може одредити критични експонент ν .

Примењујући израз (5.1) могуће је одредити ефективне критичне неуређености за разне величине система. Уколико се потом на ординатну осу нанесе величина $(R_c^{\text{eff}}(L) - R_c)/R_c^{\text{eff}}(L)$, а на апсцисну L^{-1} онда је нагиб те криве на log-log скали једнак $1/\nu$. На слици 7.9 су приказани резултати примене помануте процедуре. Вредност експонента је $\nu = 5,25 \pm 0,20$, што онда омогућава и израчунавање динамичког критичног експонента $z = 1,83 \pm 0,18$.



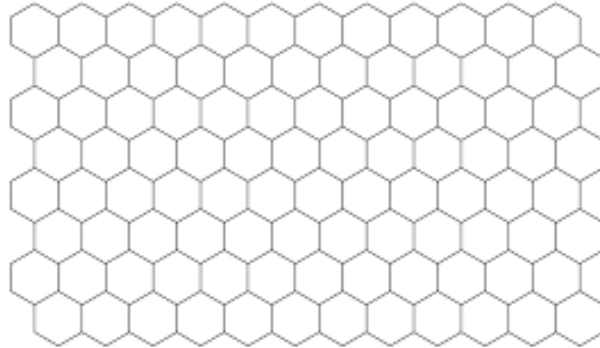
Слика 7.9: Зависност ефективне критичне неуређености од величине система.

Сви критични параметри и експоненти су дати у табели на крају поглавља 7.2 где се врши поређење вредности параметара и експонената у зависности од типа решетке.

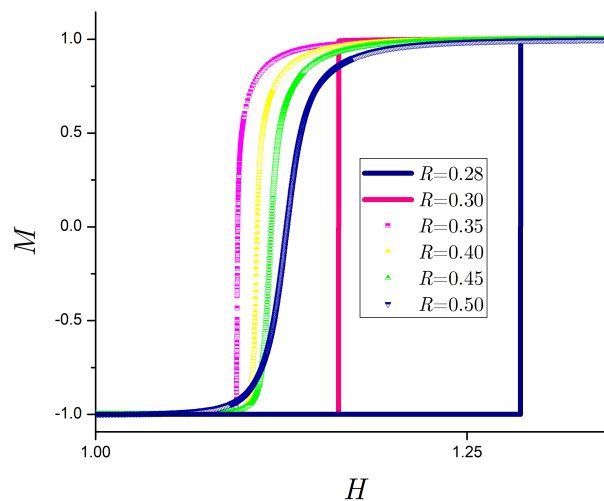
7.2 Двоструковна решетка са хексагоналном основом (три најближа суседа)

Вредности критичних експонената за двоструковни модел, које се наводе у литератури, добијене су на решетки са квадратном основом, односно на решетки где сваки спин има четири најближа суседа. У претходном поглављу је приказано колике су вредности тих експонената у случају решетки са троугаоном основом, односно када сваки спин има више најближих суседа него што је у случају са квадратном решетком (шест најближих суседа). Наредни корак јесте да се испита колике су вредности критичних експонената и параметара када је број најближих суседа мањи него у случају решетки са квадратном основом. Стога је изучавано критично понашање модела на хексагоналној решетки, где сваки спин има три најближа суседа. На слици 7.10 је приказано како изгледа хексагонална решетка, док је на слици 7.11 приказано како изгледају криве магнетизације на узлазном делу хистерезисне петље за неуређености од $R = 0,28$ до $R = 0,50$. Може се видети како криве приказане криве имају скок при неуређеностима $R = 0,28$ и $R = 0,30$, док су за веће неуређености глатке. То опет

показује да постоји фазни прелаз из парамагнетне у феромагнетну фазу при смањењу неуређености система.



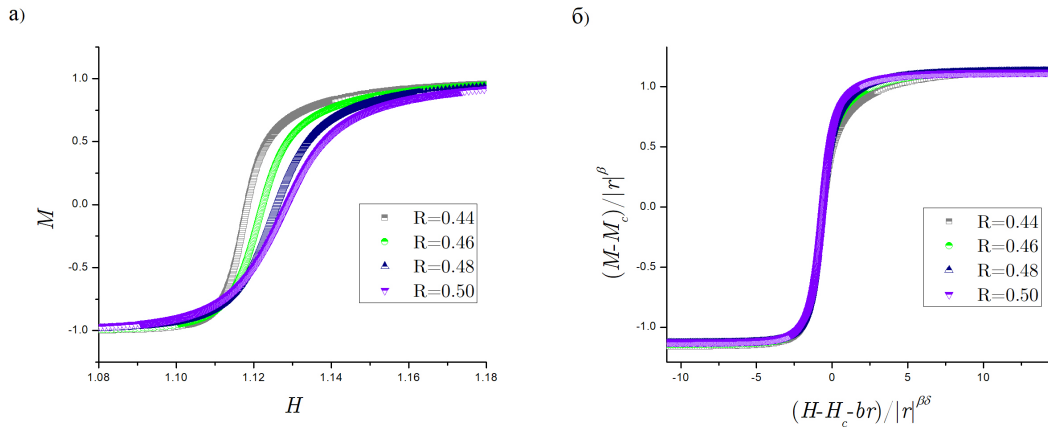
Слика 7.10: Дводимензиона решетка са хексагоналном основом.



Слика 7.11: Криве магнетизације на узлазном делу хистерезисне петље за неуређености у распону од $R = 0,28$ до $R = 0,50$ при једној конфигурацији случајног поља. Величина система је 32768×32768 спинова.

Као што је напоменуто у претходном поглављу, сви наведени закони скалирања имају облик независан од базне решетке. Тако је применом израза (3.1) добијен колапс кривих магнетизације приказан на делу б) слике 7.12. На делу а) исте слике су приказани оригинални подаци узлазних делова хистерезисних петљи за системе величине 32768×32768 спинова са неуређеностима које узимају вредности од $R = 0,44$ до $R = 0,50$. За сваку неуређеност је симулирано

по 100 различитих конфигурација случајног поља и извршено је усредњавање по тим конфигурацијама. Из колапса се добијају вредности критичних параметара и експонената: $R_c = 0,31 \pm 0,03$, $H_c = 1,06 \pm 0,03$, $b = 0,21 \pm 0,04$, $\beta = 0,12 \pm 0,04$, $\beta\delta = 4,15 \pm 0,3$.



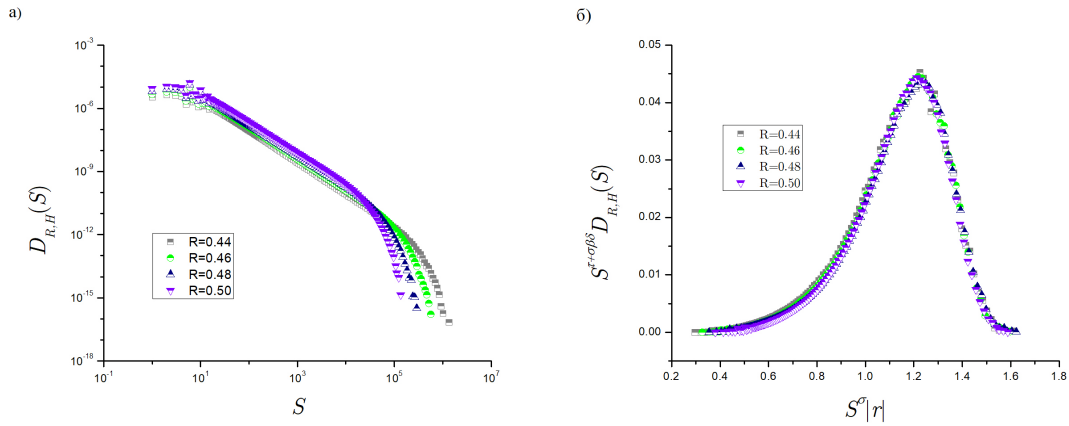
Слика 7.12: а) Криве магнетизације на узлазном делу хистерезисне петље за неуређености у распону од $R = 0,44$ до $R = 0,50$. Величина система је 32768×32768 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих магнетизације са дела а) извршен применом израза (3.1).

Супротно од троугаоне решетке, код хексагоналне је критична неуређеност мања него у случају квадратне решетке. То је такође очекивано, зато што је теже лавини да „нађе пут” којим би пропагирала зато што сваки спин има само три најближа суседа и лакше се стварају спинске замке. Због тога неуређеност мора да буде мања него у случају решетке са квадратном основом да би се јавиле прожимајуће лавине и да би магнетизација имала бесконачан скок.

7.2.1 Дистрибуције параметара лавине

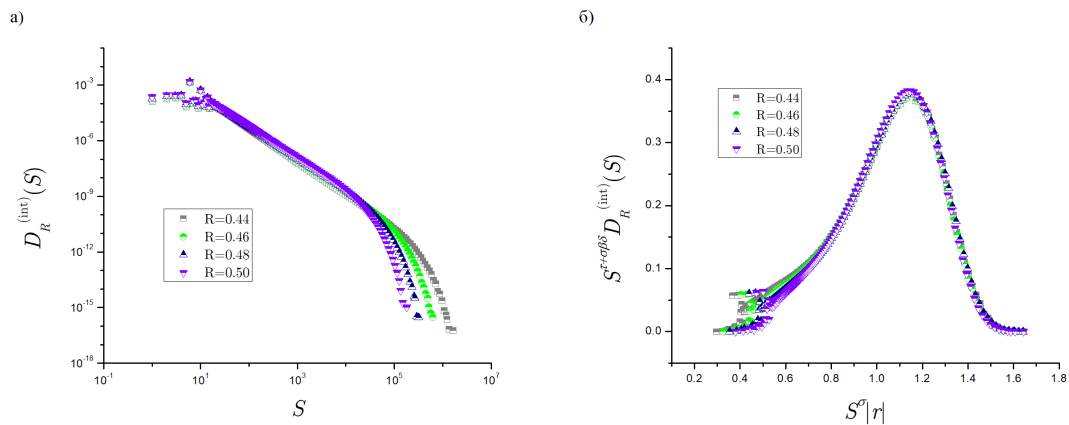
У циљу даљег одређивања вредности критичних експонената нађени су колапси дистрибуција параметара лавина. На делу а) слике 7.13 су приказане криве дистрибуција величине лавина добијених у уском прозору спољног поља где магнетизација система има вредности од $-0,08$ до $0,08$. На делу б) се види како изгледа колапс тих кривих уколико се примени израз (3.6).

Аналогним поступком се добија колапс кривих дистрибуција величине лавина добијених дуж целог узлазног дела хистерезисне петље. На слици 7.14 су



Слика 7.13: а) Криве дистрибуција величине лавина у уском прозору спољног поља за неуређености у распону од $R = 0,44$ до $R = 0,50$. Величина система је 32768×32768 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.6).

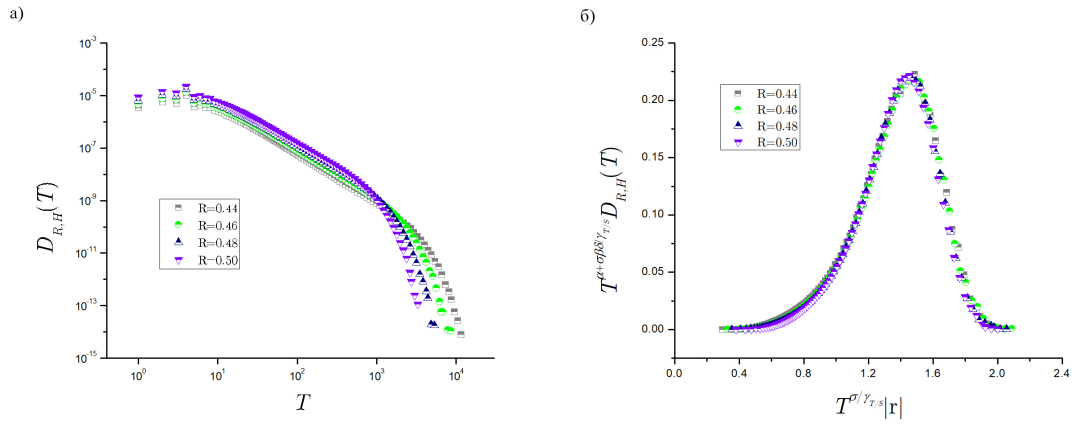
на делу а) приказани оригинални подаци, док је на делу б) поменути колапс добијен применом израза (3.6). Вредности критичних експонената и њихових комбинација су $\tau + \sigma\beta\delta = 2,06 \pm 0,05$, $\sigma = 0,12 \pm 0,02$ и $\tau = 1,56 \pm 0,06$. Величина система и вредности неуређености су исте као и за магнетизацију.



Слика 7.14: а) Криве дистрибуција величине лавина дуж целе хистерезисне петље за неуређености у распону од $R = 0,44$ до $R = 0,50$. Величина система је 32768×32768 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.6).

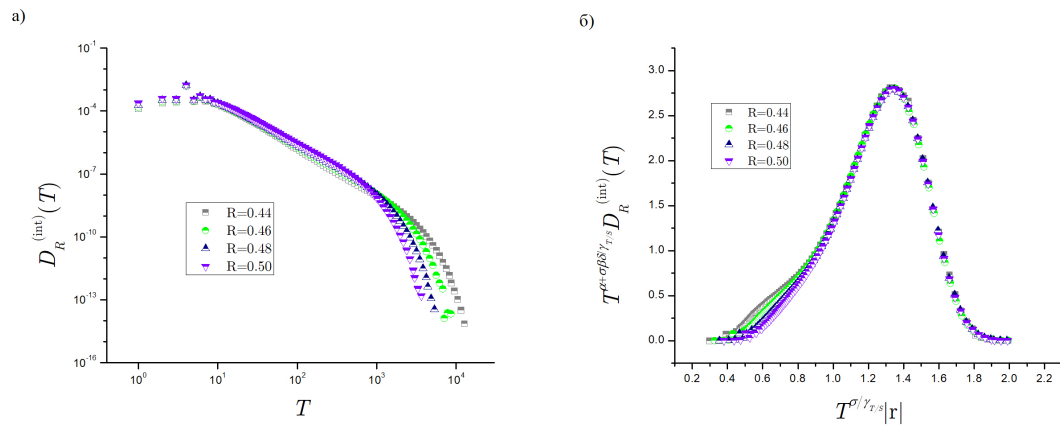
Сличним поступком се добијају аналогни резултати за дистрибуције трајања лавина. На делу а) слике 7.15 су приказане криве дистрибуција трајања лавина

добијених из већ поменутог уског прозора спољног поља, док је на делу б) колапс тих кривих добијен применом израза (3.12).



Слика 7.15: а) Криве дистрибуција трајања лавина у уском прозору спољног поља за неуређености у распону од $R = 0,44$ до $R = 0,50$. Величина система је 32768×32768 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.12).

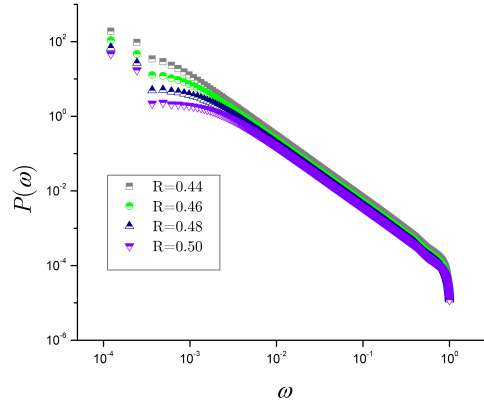
Аналогним поступком се добија колапс кривих дистрибуција трајања лавина добијених дуж целог опсега спољног поља. То је приказано на слици 7.16, а вредности експонената и њихових комбинација добијених овим путем су $\alpha + \sigma\beta\delta/\gamma_{T/S} = 2,75 \pm 0,07$, $\sigma/\gamma_{T/S} = 0,205 \pm 0,03$ и $\alpha = 1,93 \pm 0,09$.



Слика 7.16: а) Криве дистрибуција трајања лавина дуж целог узлазног дела хистерезисне петље за неуређености у распону од $R = 0,44$ до $R = 0,50$. Величина система је 32768×32768 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.12).

7.2.2 Спектар снаге

Као што је наведено у случају троугаоне решетке, из нагиба спектра снаге се добија комбинација критичних експонената $1/\sigma\nu z$. На слици 7.17 је приказано како изгледају спектри снаге за исте системе као и на претходним графицима из текућег поглавља и добија се да је $1/\sigma\nu z = 1,67 \pm 0,02$.



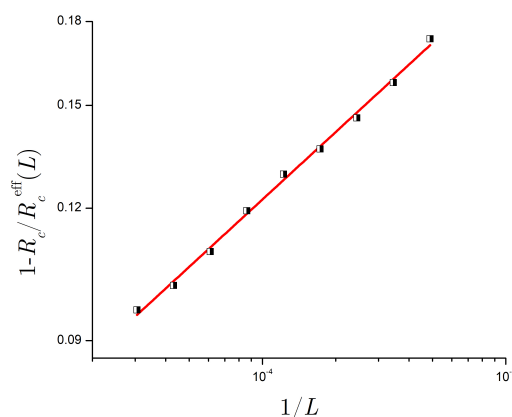
Слика 7.17: Спектри снаге за неуређености у распону од $R = 0,44$ до $R = 0,50$. Величина система је 32768×32768 спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља.

7.2.3 Ефективна критична неуређеност

Пошто је позната вредност критичне неуређености $R_c = 0,31$, онда је могуће одредити и експонент ν као реципрочну вредност нагиба праве која се добија на log-log скали када се на ординатну осу нанесе вредност $(R_c^{\text{eff}}(L) - R_c)/R_c^{\text{eff}}(L)$, а на апсцисну $1/L$, што је објашњено изразом (7.1). На слици 7.18 је приказано како изгледа та линеарна зависност за разне величине система, одакле се добија вредност експонента $\nu = 4,82 \pm 0,18$. То даље даје вредност динамичког критичног експонента $z = 1,05 \pm 0,11$.

7.2.4 Критични параметри и критични експоненти

У табелама 7.1 и 7.2 су приказане вредности критичних експонената, односно параметара за хексагоналну, квадратну и троугаону решетку. Већ је коментарисано како је промена критичне неуређености очекивана, исти је случај и са свим осталим критичним параметрима, тј. очекује се да се они могу мењати



Слика 7.18: Зависност ефективне критичне неуређености Изинговог модела са случајним пољем на дводимензионој хексагоналној решетки од величине система.

са променом базне решетке. Међутим, може се запазити да и неки критични експоненти имају различите вредности, што није очекивано, бар према досадашњим убеђењима да критично понашање зависи само од димензије модела. Пре свега је то случај са експонентима σ и z , док остали бар у оквиру грешке имају блиске вредности. Могуће објашњење у промени експонента σ и z лежи у томе што број најближих суседа има већи утицај на њихове вредности него на остале експоненте. Наиме, експонент σ је везан за скалирање величине највеће лавине као $S_{max} \propto |r|^{-\frac{1}{\sigma}}$. Очекивано је да највећа лавина у систему буде мања што је мање најближих суседа у решетки, што самим тим значи да σ расте са смањењем броја најближих суседа. Овај след може да звучи нетачно, међутим треба имати у виду да је $|r| < 1$,² те тада пораст величине највеће лавине значи и опадање вредности експонента σ .

Са друге стране, експонент z је динамички експонент и указује на то како се понаша трајање лавине у зависности од њене линеарне димензије, $T \propto l^z$. Уколико се посматрају лавине исте линеарне димензије у системима са различитим базним решеткама, јасно је да ће величина лавине бити већа код решетки са већим бројем најближих суседа, а самим тим се очекује да и њено трајање буде веће. Дакле, уколико је l исто, онда се очекује да је T највеће за троугаону решетку, па потом за квадратну и најмање за хексагоналну. Обзиром на помену

²Ако вредност S_{max} расте онда расте и $|r|^{-\frac{1}{\sigma}}$, односно $|r|^{\frac{1}{\sigma}}$ опада, па расте вредност $1/\sigma$ (јер је $|r| < 1$), тј. опада σ .

везу између трајања лавине и њене линеарне димензије следи да и експонент z мора да буде већи за решетке са већим бројем најближих суседа, што и јесте у складу са вредностима приказаним у табели 7.1.

Табела 7.1: Вредности критичних експонената и њихових комбинација за три димензионе решетке са различитим базама.

решетка	β	$\beta\delta$	τ	$\tau + \sigma\beta\delta$	σ
хекс.	$0,12 \pm 0,04$	$4,2 \pm 0,2$	$1,56 \pm 0,05$	$2,06 \pm 0,06$	$0,12 \pm 0,02$
квадратна	$0,15 \pm 0,04$	$4,8 \pm 0,2$	$1,54 \pm 0,05$	$2,02 \pm 0,06$	$0,10 \pm 0,01$
троугаона	$0,13 \pm 0,03$	$5,2 \pm 0,2$	$1,64 \pm 0,05$	$2,05 \pm 0,06$	$0,063 \pm 0,012$
	ν	$1/\sigma\nu z$	α	$\alpha + \sigma\beta\delta/\gamma_{T/S}$	z
	$4,82 \pm 0,18$	$1,67 \pm 0,02$	$1,93 \pm 0,09$	$2,75 \pm 0,07$	$1,05 \pm 0,11$
	$5,15 \pm 0,20$	$1,55 \pm 0,02$	$1,87 \pm 0,06$	$2,65 \pm 0,05$	$1,25 \pm 0,17$
	$5,25 \pm 0,20$	$1,65 \pm 0,01$	$2,05 \pm 0,06$	$2,70 \pm 0,05$	$1,83 \pm 0,18$

Табела 7.2: Вредности критичних параметара за три димензионе решетке са различитим базама.

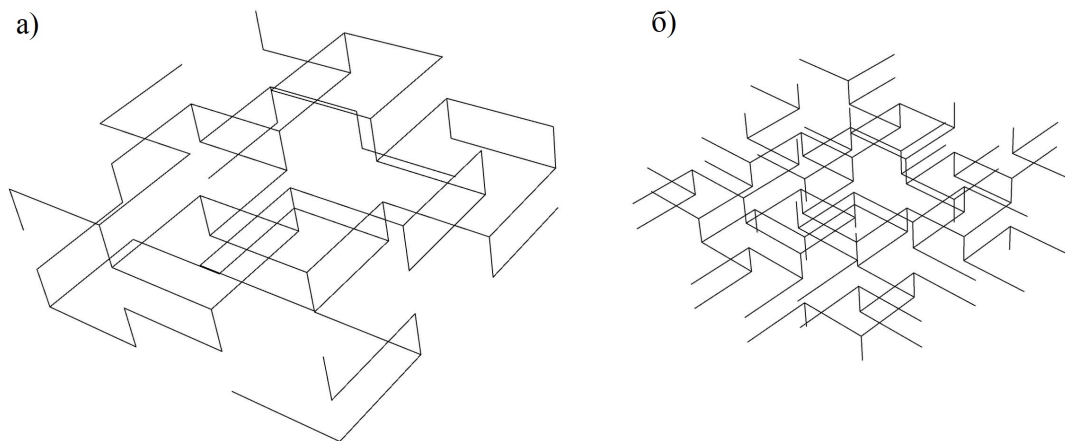
решетка	R_c	H_c	b
хекс.	$0,31 \pm 0,03$	$1,06 \pm 0,03$	$0,21 \pm 0,04$
квадратна	$0,54 \pm 0,02$	$1,275 \pm 0,020$	$0,24 \pm 0,04$
троугаона	$0,85 \pm 0,02$	$1,40 \pm 0,02$	$0,69 \pm 0,05$

Вредности осталих експонената нису у толикој мери вођене бројем најближих суседа, те се и њихова разлика јавља у оквирима грешке. Свакако, овакви резултати доводе до закључка да број најближих суседа утиче на критично понашање система иако се ради о истој димензији (у овом случају димензиони системи), тако да би требало на другачији начин дефинисати класе универзалности и преиспитати досадашња знања о томе шта све утиче на критичност модела, као и који скуп експонената дефинише ту критичност.

7.3 Тродимензиона решетка са три најближа суседа

Претходна два поглавља ове главе су се бавила разним типовима димензионе решетке. Као што су сви до сада презентовани експоненти и параметри у литератури за димензиони модел били добијени на системима са квадратном базном решетком, тако су, аналогно, у тродимензионом моделу сви презентовани резултати добијени на системима са кубном базном решетком. Стога су у

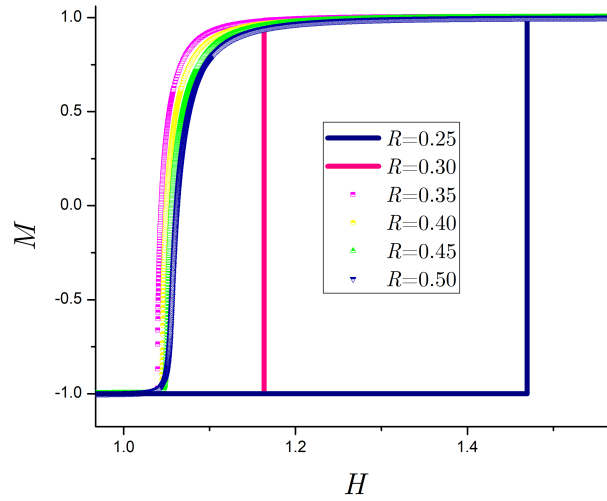
овом поглављу приказани резултати тродимензионе решетке у којој сваки спин има три најближа суседа. Пример такве решетке је дат на слици 7.19, с тим што је на делу а) приказана решетка од $4 \times 4 \times 4$ спинова са отвореним граничним условима, а на делу б) са затвореним. Слика 7.20 приказује како изгледају криве магнетизације на узлазном делу хистерезисне петље у зависности од неуређености. Види се да за неуређености $R = 0,25$ и $R = 0,30$ криве имају скок, што говори да су у феромагнетној фази, док су за веће неуређености криве глатке, односно у парамагнетној фази.



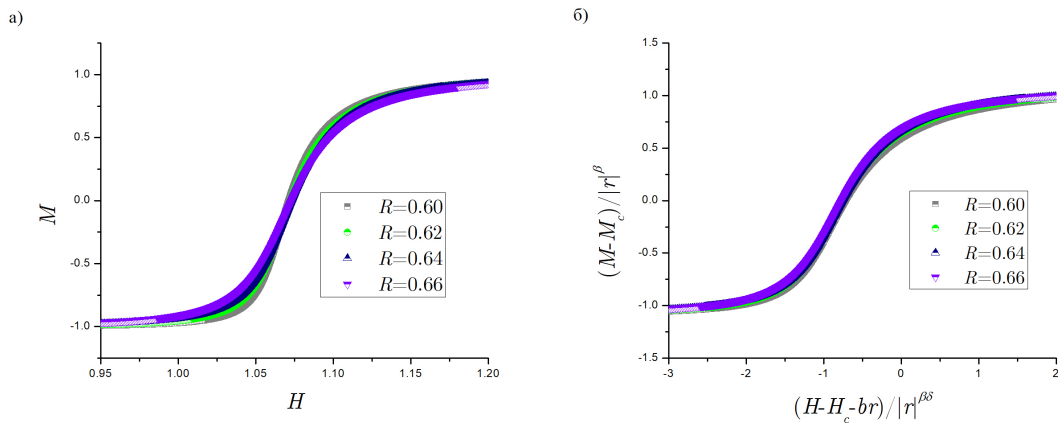
Слика 7.19: Тродимензиона решетка у којој сваки спин има три најближа суседа. а) Отворени гранични услови; б) затворени гранични услови.

Још једном се напомиње да сви закони скалирања имају исти облик без обзира на број најближих суседа, односно димензију решетке. Тако су на делу а) слике 7.21 приказане суспектибилности система за тродимензиону решетку са три најближа суседа величине $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова са затвореним граничним условима, док је на делу б) приказан колапс тих кривих применом формуле (3.2). Неуређености система су од $R = 0,60$ до $R = 0,66$.

Осим кривих суспектибилности могуће је остварити и колапс (3.1) кривих магнетизације. То је, за податке добијене из истог сета симулација, приказано на слици 7.22.

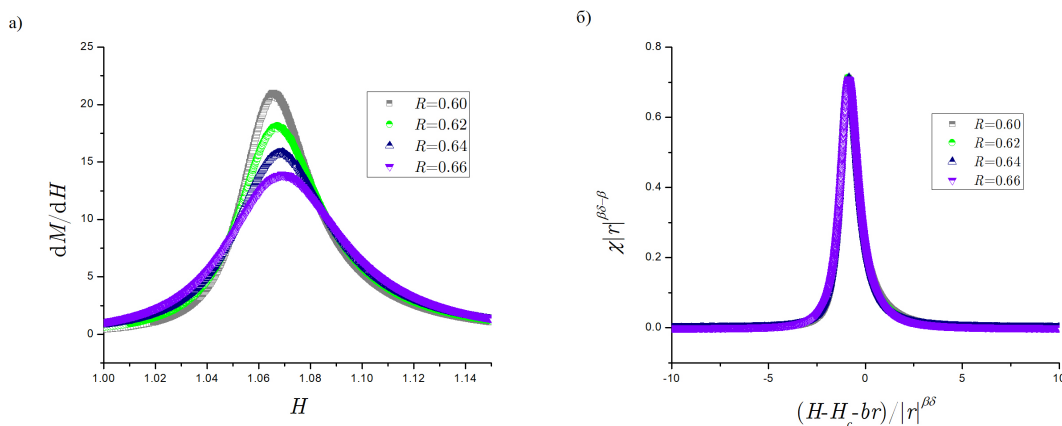


Слика 7.20: Криве магнетизације за неуређености у распону од $R = 0,25$ до $R = 0,50$ на тродимензионој решетки са три најближа суседа. Величина система је $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова, а приказане су криве при једној реализацији случајног поља.



Слика 7.22: а) Криве магнетизације за неуређености у распону од $R = 0,60$ до $R = 0,66$ на тродимензионој решетки са три најближа суседа. Величина система је $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих магнетизације са дела а).

Из ових колапса се добијају вредности параметара и експонената $R_c = 0,28 \pm 0,02$, $H_c = 0,88 \pm 0,04$, $b = 0,38 \pm 0,04$, $\beta = 0,14 \pm 0,02$ и $\beta\delta = 5,8 \pm 0,3$. У поређењу са вредности критичне неуређености за тродимензиони модел са кубном базном решетком која износи 2,16 ова вредност је знатно мања. Објашњење је дато у претходним поглављима, где је дискутовано како је са мањим

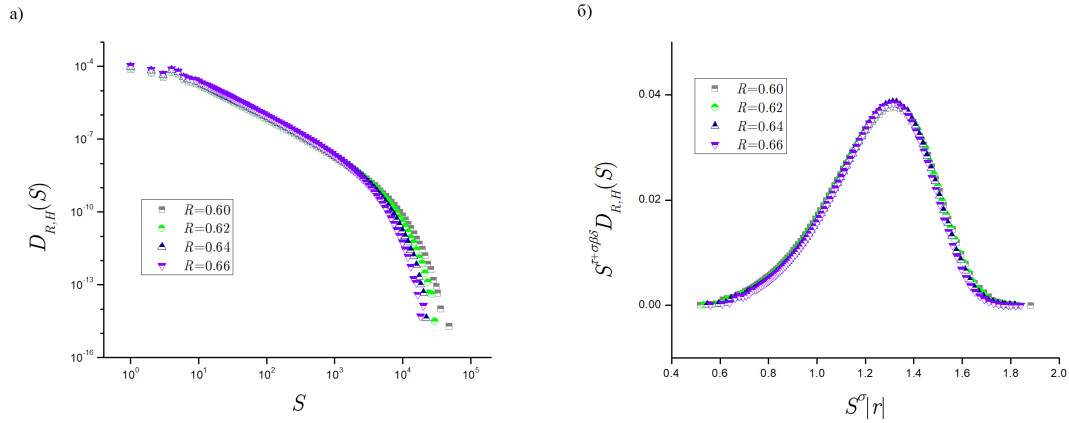


Слика 7.21: а) Суспендибилност за неуређености у распону од $R = 0,60$ до $R = 0,66$ на тродимензионој решетки са три најближа суседа. Величина система је $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова, а за сваку неуређеност је извршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих суспендибилности са дела а).

бројем суседа лавинама „теже” да пропагирају и лакше се стварају спинске замке, те се критична неуређеност смањује. Међутим, оно што је занимљиво да се примети јесте да је критична неуређеност тродимензионог модела са три најближа суседа веома блиска критичној неуређености дводимензионог модела са хексагоналном базном решетком, односно са три најближа суседа. То може да наведе на закључак да се решетке са три најближа суседа понашају слично и да димензија ту не игра претерано битну улогу, али за такав закључак би требало спровести детаљнија истраживања и проверити још неколико решетака које имају исти број најближих суседа (овде су специјално наглашени системи са три најближа суседа, не помињу се други, јер се видело у провм поглављу ове главе да доддимензиона решетка са шест најближих суседа има знатно другачије вредности критичне неуређености, а и осталих параметара и експонената, од тродимензионе решетке са шест суседа).

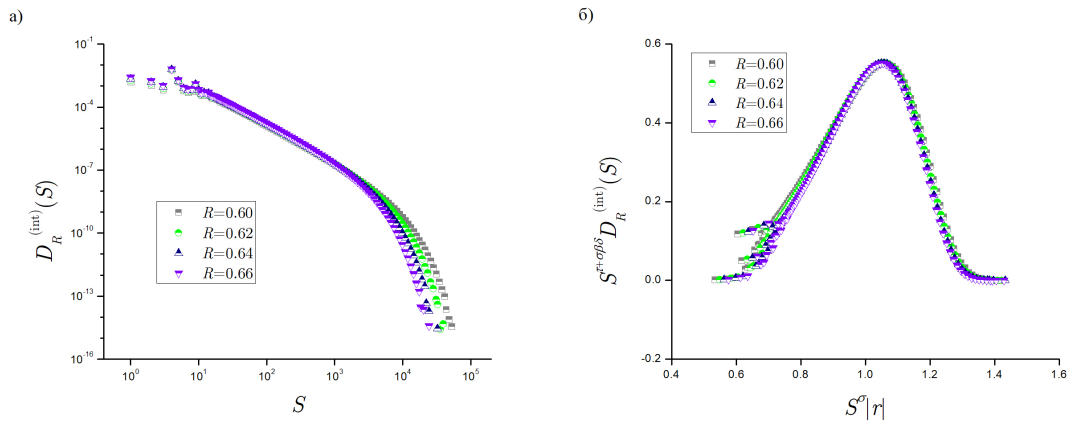
7.3.1 Дистрибуције параметара лавине

На делу а) слике 7.23 су приказане криве дистрибуција величине лавина у уском прозору спољног поља где се магнетизација креће у распону од $-0,08$ до $0,08$. На делу б) исте слике је приказан колапс датих кривих применом израза (3.6).



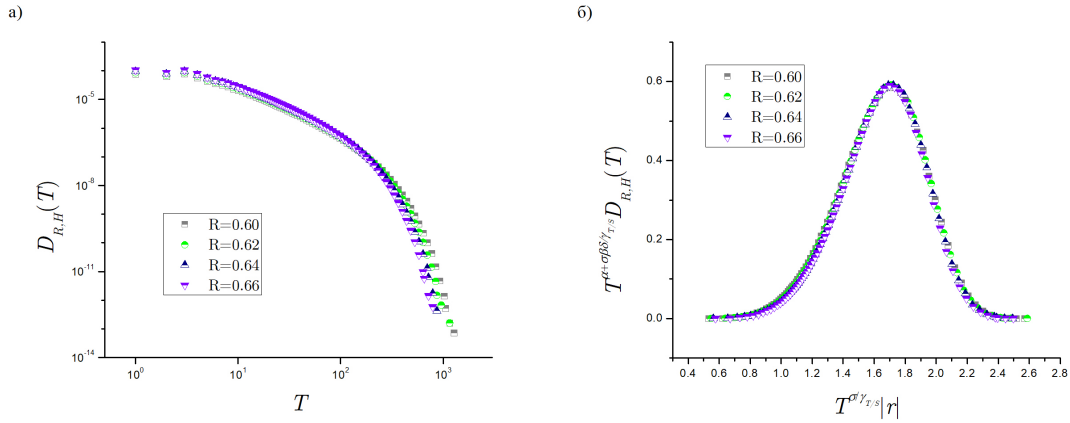
Слика 7.23: а) Криве дистрибуција величине лавина у уском прозору спољног поља за неуређености у распону од $R = 0,60$ до $R = 0,66$ на тродимензионој решетки са три најближа суседа. Величина система је $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова, а за сваку неуређеност је вршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.6).

Аналогно се добија и колапс кривих интегралних дистрибуција величине лавина приказан на слици 7.24. Из ових колапса се добијају критични експоненти и њихове комбинације $\tau + \sigma\beta\delta = 2,08 \pm 0,08$, $\sigma = 0,12 \pm 0,01$ и $\tau = 1,38 \pm 0,09$.



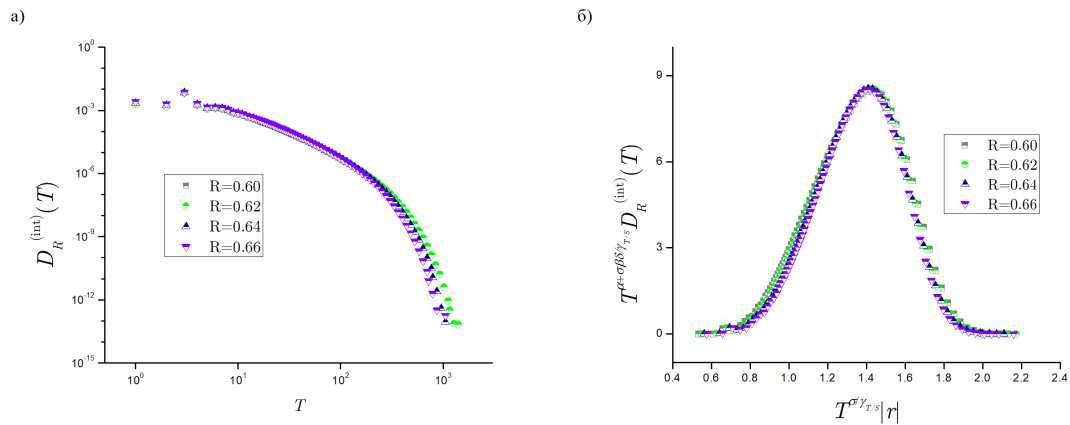
Слика 7.24: а) Криве интегралних дистрибуција величине лавина за неуређености у распону од $R = 0,60$ до $R = 0,66$ на тродимензионој решетки са три најближа суседа. Величина система је $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова, а за сваку неуређеност је вршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.6).

На делу а) слике 7.25 су приказане криве дистрибуција трајања лавина добијених из, већ помињаног, уског прозора спољног поља, док је на делу б) приказан колапс тих кривих применом израза (3.12).



Слика 7.25: а) Криве дистрибуција трајања лавина у уском прозору спољног поља за неуређености у распону од $R = 0,60$ до $R = 0,66$ на тродимензионој решетки са три најближа суседа. Величина система је $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова, а за сваку неуређеност је вршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.12).

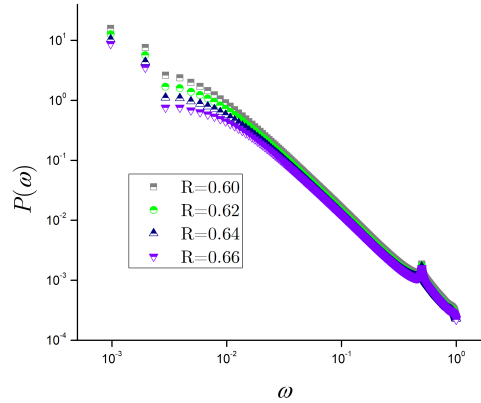
Аналогним поступком се добија и колапс кривих дистрибуција трајања лавина добијених дуж целог узлазног дела хистерезисне петље и он је приказан на слици 7.26. Експоненти и њихове комбинације који се добијају из ових колапса су $\alpha + \sigma\beta\delta/\gamma_{T/S} = 3,05 \pm 0,11$, $\sigma/\gamma_{T/S} = 0,20 \pm 0,03$ и $\alpha = 1,89 \pm 0,13$.



Слика 7.26: а) Криве интегралних дистрибуција трајања лавина за неуређености у распону од $R = 0,60$ до $R = 0,66$ на тродимензионој решетки са три најближа суседа. Величина система је $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова, а за сваку неуређеност је вршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља. б) Колапс кривих са дела а) добијен применом израза (3.12).

7.3.2 Спектар снаге

Као и у претходним поглављима и овде се из нагиба спектра снаге добија комбинација експонената $1/\sigma\nu z$. На слици 7.27 је приказано како изгледају спектри снаге за разне неуређености и одатле се добија да је $1/\sigma\nu z = 1,87 \pm 0,07$.



Слика 7.27: Спектри снаге за неуређености у распону од $R = 0,60$ до $R = 0,66$ на тродимензионој решетки са три најближа суседа. Величина система је $1024 \times 1024 \times 1024$ спинова, а за сваку неуређеност је вршено усредњавање на 100 различитих конфигурација случајног поља.

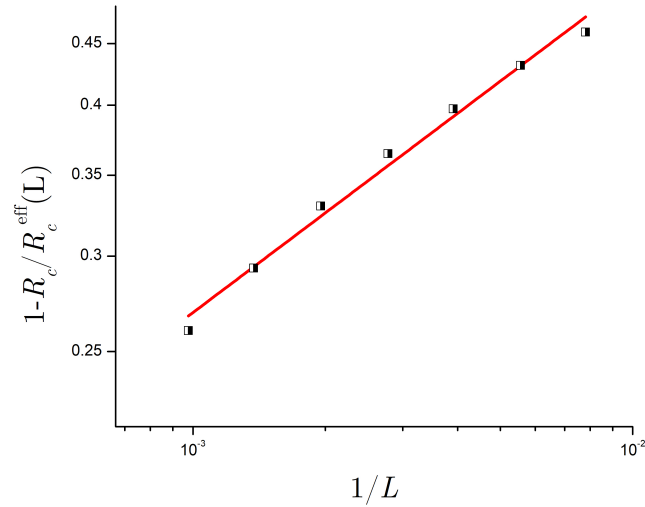
7.3.3 Ефективна критична неуређеност

Као што је објашњено у изразу (7.1) из фита адекватно подешених података за ефективну критичну неуређеност може да се добије експонент ν . На слици 7.28 је приказано како изгледа тај фит и из њега се добија вредност $\nu = 3,65 \pm 0,09$. Одатле је могућ добити и динамички критични експонент $z = 1,2 \pm 0,2$.

7.3.4 Критични параметри и критични експоненти

У табели 7.3 су дате вредности критичних експонената и њихових комбинација за тродимензиону решетку са три најближа суседа као и за тродимензиону решетку са кубном базном решетком. У табели 7.4 су дати критични параметри за наведене решетке.

Осим очекиваних разлика у критичним параметрима, могу се видети и значајна одступања у вредности неких критичних експонената и њихових комбинација. Те разлике опет долазе само од различитог броја суседа у системима,



Слика 7.28: Зависност ефективне критичне неуређености од величине система на тродимензионој решетци са три најближа суседа.

Табела 7.3: Вредности критичних експонената и њихових комбинација за две различите базне решетке.

решетка	β	$\beta\delta$	τ	$\tau + \sigma\beta\delta$	σ
3 суседа	$0,14 \pm 0,02$	$5,8 \pm 0,3$	$1,38 \pm 0,09$	$2,08 \pm 0,08$	$0,12 \pm 0,01$
кубна	$0,035 \pm 0,028$	$1,81 \pm 0,32$	$1,60 \pm 0,06$	$2,03 \pm 0,03$	$0,24 \pm 0,02$
	ν	$1/\sigma\nu z$	α	$\alpha + \sigma\beta\delta/\gamma_{T/S}$	z
	$3,65 \pm 0,09$	$1,87 \pm 0,07$	$1,89 \pm 0,13$	$3,05 \pm 0,11$	$1,2 \pm 0,2$
	$1,4 \pm 0,2$	$1,75 \pm 0,09$	$2,05 \pm 0,20$	$2,80 \pm 0,12$	$1,7 \pm 0,4$

не и од димензије решетке, уз напомену да је у ова два случаја драстичнија разлика у типовима решетки него код раније разматраних дводимензионих, па се примећују и израженије разлике у критичним експонентима.

Свеукупан закључак који би се могао извести из прелиминарних резултата истраживања приказаних у овој глави јесте да би требало редефинисати тренутне ставове о томе да једино димензионалност система утиче на критично понашање модела. Овде је показано да то није случај, али такође није ни случај да само број суседа дефинише критичност. Наиме, дводимензиона троугаона решетка има исти број суседа као и тродимензиона кубна, док дводимензиона хексагонална решетка има исти број суседа као и тродимензиона са три најближа суседа, али и у једном и у другом случају не могу да се нађу скоро никакве сличности у понашању система спинова на тим решеткама описаних

Табела 7.4: Вредности критичних параметара за две различите базне решетке.

решетка	R_c	H_c	b
3 суседа	$0,28 \pm 0,02$	$0,88 \pm 0,04$	$0,38 \pm 0,04$
кубна	$2,16 \pm 0,03$	$1,435 \pm 0,004$	$0,39 \pm 0,08$

Изинговим моделом са случајним пољем. Дакле, ни само димензионалност, ни само број најближих суседа није одговоран за критично понашање, већ би то могао да буде начин на који су спинови повезани, тј. топологија решетке.

Глава 8

Закључак

Мотивација за теоријско и нумеричко изучавање понашања атермалног неравнотежног Изинговог модела са случајним пољем при преласку са тродимензионалних на дводимензионалне системе долази из експерименталних радова [30, 33, 34]. Све већи број експерименталних испитивања феромагнетних система се ради на танким системима који су, свакако, тродимензиони, јер је дуж све три просторне димензије број атомских слојева већи од један, али обзиром да им је једна од димензија значајно мања од остале две могуће је запитати се да ли се такви системи ефективно понашају као дводимензиони. Ово питање је битно, јер када се експериментални резултати упоређују са теоријским потребно је нпр. знати да ли треба користити вредности критичних параметара и експонената за дводимензионе или тродимензионе системе да би анализа била ваљана. Исто питање се јавља и у теоријским моделима [38, 40, 14]. Од посебног значаја је Изингов модел са случајним пољем услед тога што се он већ 30-ак година користи за интерпретацију експерименталних резултата..

Главни параметар атермалног неравнотежног Изинговог модела са случајним пољем јесте његова неуређеност. За вредности неуређености изнад ефективне критичне се систем налази у парамагнетном стању, док се за вредности испод ефективне критичне налази у феромагнетном стању. Стога се прво приступило налажењу аналитичког облика функције ефективне критичне неуређености у системима којима је дебљина мања од дужине и ширине. Тај облик, дат изразом (5.5), је и нумерички потврђен и он омогућава даља истраживања у којима се поуздано зна да ли је систем у парамагнетној или феромагнетној фази. Осим израза за ефективну критичну неуређеност, показано је и како изгледа права критична неуређеност за систем дебљине l (остале две димензије теже

бесконачности) и то омугућава изучавање понашања дистрибуција параметара лавина при разним условима. Показано је како се скалирају дистрибуције параметара лавина када су све димензије система фиксирани, када је само дебљина фиксирани, као и када су све димензије система променљиве. Ови резултати су битни зато што дају идеју како би требало приступити анализи експерименталних података. Односно, да треба водити рачуна и о геометријском аспекту када се анализирају ти подаци.

У експериментима је неуређеност система непозната. Било би од веома великог значаја уколико би на неки начин могла да се квантификује та неуређеност. У глави 6 је показано како се понашају нееквилатерални системи на самој ефективној критичној неуређености. Дати су предлози функција фита за дистрибуције величине и трајања лавина, као и за просечан облик лавине и просечну величину лавине датог трајања. Ове функције дају вредности критичних експонената и потом је могуће те вредности поредити са вредностима добијеним у експерименталним радовима. Пошто је познато како изгледа крива ефективне критичне неуређености онда је на основу поређења критичних експонената добијених из нумеричких резултата са онима добијеним у експерименту могуће утврдити да ли је неуређеност датог експерименталног узорка испод или изнад ефективне критичне за тај узорак. Ова метода је још увек у развоју и може представљати пробој на пољу анализе експерименталних резултата.

Питање понашања модела при преласку са тродимензионих на дводимензионе системе је мотивисано експериментом, али се изучавањем тог питања јавља ново: како број најближих суседа утиче на критично понашање модела. На снази је тврдња да критичност модела зависи само од димензије система на којима се модел изучава. Међутим, у глави 8 су презентовани резултати који наводе на другачије закључке. Поређене су вредности критичних параметара и експонената на три различите дводимензионе и две различите тродимензионе решетке. У дводимензионом случају су у питању решетке са хексагоналном основом (три најближа суседа), са квадратном основом (четири најближа суседа, резултати познати од раније) и са троугаоном основом (шест најближих суседа). Испоставља се да се вредности неких експонената не разликују у оквирима грешака, што је и било очекивано, међутим, вредности преосталих експонената се битно

разликују и то је оно што не иде у прилог тврдњи да само димензионалност утиче на критично понашање модела. Исти је случај и са две тродимензионе решетке. Закључак који се изводи из ових резултата би могао бити да би требало редефинисати класе универзалности када је у питању критично понашање модела. Није само димензионалност та која утиче на критично понашање, већ начин на који су спинови повезани у решетки, односно топологија решетке.

Додатак А

Опис програма за симулације

У овом поглављу су описани алгоритми коришћени за симулирање неравнотежног атермалног Изинговог модела са случајним пољем. Алгоритми оригинално предложени у радовима [72, 58] и за потребе истраживања описаних у овој дисертацији су пригодно модификовани. Алгоритми за симулацију модела су кодирани у програмском језику Fortran, док су анализе добијених симулација модела извршаване уз помоћ програма написаних у програмским језицима Fortran, Visual Basic и Wolfram Mathematica.

Обзиром да је за адекватно изучавање неких појава потребно вршити симулације на изузетно великим системима онда је веома значајно водити рачуна и о ефикасном коришћењу компјутерске меморије и времена извршавања. Под ефикасним коришћењем компјутерске меморије се подразумева минимизирање радне меморије рачунара потребне за извршавање програма, док се под временском ефикасношћу мисли на брзину извршавања програма. Стога је посебно објашњен метод уштеде меморије, а посебно метод бржег извршавања програма.

А.1 Просторна ефикасност

Програм користи најмање радне меморије уколико је оријентација сваког спина записана у најмању могућу меморијску јединицу, односно у један бит. Такозвана *bit per spin* метода је развијена и коришћена и у изучавању разних других проблема [73, 74] пре него што је добила примену у нумеричком испитивању Изинговог модела са случајним пољем. У циљу даље уштеде меморије могуће је применити алгоритам који омогућава да се случајна поља не доделе сваком чвору решетке на почетку симулације, него да се искористе одређене

особине понашања модела и тиме се случајна поља практично генеришу у току трајања симулације и нема потребе да се складиште. Тиме се знатно смањи потрошња радне меморије, сведе се на један бит по спину, као и на коришћење помоћних низова и променљивих у програму, али нема потребе за генерисањем унапред и чувањем вредности случајних поља. Тај алгоритам је овде укратко описан.

Нека је тренутна вредност спољног поља H . Ефективно поље које делује на спин коме је сума вредности оријентације најближих суседа једнака S ($S = \sum_{\langle j \rangle} s_j$) је дата изразом (2.2) $h_i^{\text{eff}} = H + S + h_i$, где је h_i случајно поље у датом чвору. Обзиром да се овде описује поступак у ком се случајна поља не генеришу унапред тада је од користи посматрати део ефективног поља у ком нема дела који потиче од случајног поља, $h_i^{\text{eff,nr}}(S, H) = H + S$. Уколико посматрани спин није променио оријентацију при вредности спољног поља H , онда је вероватноћа да ће променити оријентацију када се вредност спољног поља повећа на $H + \Delta H$ једнака

$$P_{\text{flip}}(h_i^{\text{eff,nr}}(S, H), \Delta H) = \frac{P_{\downarrow}(S, H) - P_{\downarrow}(S, H + \Delta H)}{P_{\downarrow}(S, H)}, \quad (\text{A.1})$$

где је $P_{\downarrow}(S, H)$ вероватноћа да је оријентација спина -1 када је вредност ефективног поља без случајног дела једнака $h_i^{\text{eff,nr}}(S, H)$. Јасно је да ће оријентација спина у чвору i бити -1 уколико је задовољено $h_i^{\text{eff}} = h_i + h_i^{\text{eff,nr}}(S, H) \leq 0$, односно ако је $h_i \leq -h_i^{\text{eff,nr}}(S, H)$. Дакле, вероватноћу $P_{\downarrow}(S, H)$ да је оријентација спина, коме је сума најближих суседа S , једнака -1 при спољном пољу H је могуће добити као:

$$P_{\downarrow}(S, H) = \int_{-\infty}^{-h_i^{\text{eff,nr}}(S, H)} \rho(h) dh, \quad (\text{A.2})$$

где је $\rho(h)$ функција расподеле случајног поља. У конкретном случају када је $\rho(h)$ Гаусова дистрибуција онда важи

$$P_{\downarrow}(S, H) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{h_i^{\text{eff,nr}}(S, H)}{R\sqrt{2}} \right). \quad (\text{A.3})$$

На овај начин се добија вредност вероватноће да спин коме је сума оријентације најближих суседа S , при спољном пољу H има оријентацију -1 .

Једном када се лавина заврши (или на самом почетку извршавања програма) потребно је наћи почетак следеће лавине, односно најнестабилнији спин. Обзиром да случајна поља нису унапред генерисана онда је тај поступак сложенији. Потребно је одредити вредност ΔH за коју се повећава спољно поље, па потом на одређени начин и одабрати спин који је најнестабилнији. Да би се то постигло прво се посматра вероватноћа да ниједан спин није променио оријентацију при повећању спољног поља од H до $H + \Delta H$. Уз помоћ већ израчунате вероватноће у изразу (A.1) следи да је вероватноћа да се један спин коме је сума оријентације најближих суседа S не окрене при повећању спољног поља једнака $1 - P_{\text{flip}}(h_i^{\text{eff,nr}}(S, H), \Delta H) = P_{\downarrow}(S, H + \Delta H)/P_{\downarrow}(S, H)$. Уколико постоји N_S спинова којима је сума оријентације најближих суседа S онда је вероватноћа да ниједан од њих није променио оријентацију једнака

$$P_S^{\text{none}}(H, \Delta H) = \left[\frac{P_{\downarrow}(S, H + \Delta H)}{P_{\downarrow}(S, H)} \right]^{N_S}. \quad (\text{A.4})$$

Потом је могуће израчунати вероватноћу да ниједан спин у решетки не промени оријентацију при повећању спољног поља са H на $H + \Delta H$:

$$P^{\text{none}}(H, \Delta H) = \prod_{S=S_{\min}}^{S_{\max}} P_S^{\text{none}}(H, \Delta H), \quad (\text{A.5})$$

где су S_{\min} и S_{\max} најмања и највећа могућа вредност суме најближих суседа у датом систему (нпр. у случају хиперкубне решетке димензије d је $S_{\min} = -2d$, а $S_{\max} = 2d$). Да би се добила вредност ΔH , за коју треба повећати спољно поље, бира се из униформне расподеле број r између нула и један и тај број представља вероватноћу $P^{\text{none}}(H, \Delta H)$. Немогуће је аналитички добити вредност ΔH из једначине $P^{\text{none}}(H, \Delta H) = r$, али постоје различити нумерички методи за израчунавање ΔH до потребне тачности.

Када је познато ΔH онда се тражи спин који први мења оријентацију и започиње нову лавину. То се ради на следећи начин. Потребно је израчунати стопу да спин промени оријентацију при тренутном пољу $H = H_{\text{old}} + \Delta H$ за дато S :

$$\Gamma(S, H) = \frac{N_S \rho(h_i^{\text{eff,nr}}(S, H))}{P_{\downarrow}(S, H)}, \quad (\text{A.6})$$

као и укупну стопу за све спинове:

$$\Gamma(H) = \sum_{S=S_{\min}}^{S_{\max}} \Gamma(S, H). \quad (\text{A.7})$$

Најнестабилнији спин се потом одређује тако што се бира случајан број C из униформне расподеле од нула до $\Gamma(H)$. Том спину ће сума најближих суседа бити k , где је k такво да је

$$\sum_{S=S_{min}}^k \Gamma(S, H) \geq C > \sum_{S=S_{min}}^{k-1} \Gamma(S, H),$$

где се узима да је крајњи десни израз у неједнакости једнак било чему мањем од нуле за $k = S_{min}$ ¹. Када се одреди колика је сума најближих суседа спина који започиње лавину онда се случајно бира један спин коме је сума најближих суседа k из скупа свих таквих спинова и он је први спин који мења оријентацију при спољном пољу које је повећано за ΔH .²

До сада су се све рачунате вероватноће односиле на то шта се дешава при повећању спољног поља. Међутим, једном кад се лавина покрене онда спољно поље не мења своју вредност све док се та лавина не заврши (све време се говори о симулацијама у бесконачно спором адијабатском режиму). Стога је, једном кад се лавина започне, потребно израчунати вероватноће промене оријентације спинова у случају да им сума најближих суседа порасте са S на $S + 2$.³ Дакле, аналогно изразу (А.1) се може добити и вероватноћа да спин промени оријентацију при константном спољном пољу уколико му сума најближих суседа промени за 2:

$$P_{\text{flip}}(h_i^{\text{eff,nr}}(S, H), S + 2) = \frac{P_{\downarrow}(S, H) - P_{\downarrow}(S + 2, H)}{P_{\downarrow}(S, H)}, \quad (\text{A.8})$$

где су све ознаке као и у претходном делу текста. Када се израчунају ове вероватноће за свако $S < S_{max}$ онда се проверавају сви најближи суседи спина који је променио оријентацију. Помоћу дате вероватноће се из Бернулијевој расподеле одређује да ли ће дати најближи сусед спина који је променио оријентацију такође да промени оријентацију. Потребно је водити рачуна о свим најближим суседима спинова који су у претходном тренутку променили оријентацију и бити пажљив са мењањем вредности променљивих као што су N_S и

¹Ово је битно само у случају да вредност случајног броја C буде баш 0.

²Напомена: могуће је и број k одредити једноставније, односно такође случајним избором једног од целих бројева између S_{min} и S_{max} који могу да буду потенцијалне вредности суме најближих суседа (уколико су сви гранични услови у решетки затворени онда S може да узима само вредности од S_{min} до S_{max} са кораком 2), међутим приказаним поступком се олакшава нумеричко израчунавање ΔH , јер дозвољава прецизније иницијално одређивање вредности ΔH , што у нумеричком израчунавању игра веома битну улогу.

³Не може на $S + 1$, јер се променом оријентације једног суседа мења сума свих суседа за 2.

N_{S-2} и њима сличних. Једном када у датом тренутку ниједан спин не промени своју оријентацију значи да је лавина готова, па се поступак са ΔH и тражењем најнестабилнијег спина понавља све док сви спинови не промене оријентацију.

Овај метод смањује потребну радну меморију за извршавање симулације и до неколико пута у односу на било који други алгоритам који подразумева генерисање случајних поља унапред, те је стога веома погодан за симулирање великих система. Међутим, брзина извршавања овог програма није минимална могућа. У циљу постизања веће брзине се користи приступ описан у наредном делу.

А.2 Временска ефикасност

Уколико су унапред генерисане и познате вредности случајних поља h_i у сваком чвору решетке онда је могуће и до два пута убрзати извршавање симулације у односу на претходно описани алгоритам. Прво је потребно сортирати спинове у опадајућем редоследу по вредностима случајних поља. Једном када се започне лавина онда се проверавају најближи суседи спинова који су променили оријентацију у претходном тренутку и пошто су позната њихова случајна поља потребно је само утврдити да ли је вредност ефективног поља које на њих делује, датог изразом (2.2), $h_i^{\text{eff}} = H + \sum_{\langle j \rangle} s_j + h_i$, већа или мања од нуле.

Оно на чему овај алгоритам „штеди” време јесте проналажење новог спина који започиње следећу лавину једном кад се претходна заврши. Уместо да се проверава који је најнестабилнији спин кроз целу решетку овде се формира низ који прати најнестабилније спинове са датим бројем суме вредности оријентације најближих суседа, S . Потребно је пронаћи спин који би и даље био стабилан уколико би сума његових најближих суседа била S , али би био најнестабилнији од свих других спинова уколико би им сума најближих суседа била S такође. Другим речима, треба пронаћи спин коме је потребно најмање повећање спољног поља ΔH да би променио своју оријентацију уколико је сума његових најближих суседа S . S може да узима вредности од S_{min} до S_{max} , где су S_{min} и S_{max} вредности описане у претходном делу. Потом се од свих спинова који су одређени за свако могуће S бира онај коме је потребна најмања вредност

ΔH за промену оријентације и то је спин који започиње следећу лавину. Математички, за свако S описано на претходни начин се траже елементи сортираног низа случајних поља који имају највеће случајно поље h_i такво да важи

$$h_i \geq -(H + \Delta H) - S, \quad (\text{A.9})$$

где је H тренутно спољно поље, а ΔH вредност за коју то спољно поље треба да се повећа да би спин постао нестабилан. Потом се од свих тих елемената изабере онај које има најмање ΔH потребно да се задовољи неједнакост (A.9) и спин у чвору коме припада то случајно поље започиње нову лавину, а спољно поље се повећава за потребно ΔH . Број спинова који морају да се провере зависи и од граничних услова. Наиме, уколико су сви гранични услови затворени онда S може да узима вредности од S_{min} до S_{max} са кораком 2, међутим ако су гранични услови по некој од димензија отворени онда мора да се узима са кораком 1. То може да наведе на закључак да је довољно испитати $(S_{max} - S_{min} + 1)$ спинова у општем случају, али то није тачно. У пракси је потребно проверити више спинова, зато што се често дешава да спин који се означи као онај који би био најнестабилнији са сумом најближих суседа S заправо нема ту вредност суме најближих суседа. Онда је потребно тражити следећи такав потенцијални спин, видети да ли за њега заиста важи да је $S = \sum_{\langle j \rangle} s_j$ итд., док се не пронађе најнестабилнији спин. Овај алгоритам за постизање временске ефикасности познат је под називом sorted list algorithm.

У зависности од тога о каквим се системима радило, у овој дисертацији су коришћена оба алгоритма. Уколико су системи били мали користио се временски ефикаснији алгоритам, јер није заузимао превише меморије, а брже се извршавао, међутим за веома велике системе је било потребно користити алгоритам који заузима мање меморије.

Литература

- [1] H. Barkhausen. Zwei mit Hilfe der neuen Verstärker entdeckte Erscheinungen. *Physik Z.*, 20:401–403, 1919.
- [2] Dj. Spasojević, S. Bukvić, S. Milošević, and H. E. Stanley. Barkhausen noise: Elementary signals, power laws, and scaling relations. *Physical Review E*, 54(2531), 1996.
- [3] Dj. Spasojević, S. Bukvić, S. Milošević, and I. Savić. Scaling Relations of Barkhausen Noise. *Contemporary Studies in Condensed Matter Physics; Scitec Publications*, 1998.
- [4] P.-E. Weiss. L' hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J. de Phys.*, 6:661–690, 1907.
- [5] E. Ising. Contribution to the Theory of Ferromagnetism. *Doctoral Dissertation*, 1924.
- [6] T. D. Lee and C. N. Yang. Statistical Theory of Equations of State and Phase Transitions. II. Lattice Gas and Ising Model. *Physical Review*, 87(410), 1952.
- [7] K. G. Wilson and J. Kogut. The renormalization group and the ϵ expansion. *Physics Reports*, 12(2):75–199, 1974.
- [8] R. J. Baxter and F. Y. Wu. Exact Solution of an Ising Model with Three-Spin Interactions on a Triangular Lattice. *Physical Review Letters*, 31(1294), 1973.
- [9] V. A. Kazakov. Ising model on a dynamical planar random lattice: Exact solution. *Physics Letters A*, 119(3):140–144, 1986.
- [10] L. Onsager. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review, Series II*, 65(3-4):117–149, 1944.

- [11] G. Grinstein. Ferromagnetic Phase Transitions in Random Fields: The Break-down of Scaling Laws. *Physical Review Letters*, 37(944), 1976.
- [12] A. J. Bray and M. A. Moore. Scaling theory of the random-field Ising model. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 18(L927), 1985.
- [13] G. Grinstein and Shang keng Ma. Roughening and Lower Critical Dimension in the Random-Field Ising Model. *Physical Review Letters*, 49(685), 1982.
- [14] D. P. Belanger and T. Nattermann. Spin Glasses and Random Fields. *World Scientific, Singapore*, 1998.
- [15] J. P. Sethna, K. A. Dahmen, and O. Perković. The Science of Hysteresis. *Academic Press, Amsterdam*, 2006.
- [16] J. P. Sethna, K. A. Dahmen, and O. Perković. Random Field Ising Models of Hysteresis. *arXiv:cond-mat/0406320 v1*, 2004.
- [17] J. P. Sethna, K. A. Dahmen, S. Kartha, J. A. Krumhansl, B. W. Roberts, and J. D. Shore. Hysteresis and Hierarchies: Dynamics of Disordered-Driven First-Order Phase Transformation. *Physical Review Letters*, 70(3347), 1993.
- [18] O. Perković, K. A. Dahmen, and J. P. Sethna. Avalanches, Barkhausen Noise and Plain Old Criticality. *Physical Review Letters*, 70(3347), 1995.
- [19] J. P. Sethna, O. Perković, and K. A. Dahmen. Hysteresis, Avalanches, and Barkhausen Noise. *arXiv:cond-mat/9704059 v1*, 1997.
- [20] K. A. Dahmen and J. P. Sethna. Hysteresis, Avalanches, and Disorder-Induced Critical Scaling: A Renormalization-Group Approach. *Physical Review B*, 53(14872), 1996.
- [21] V. S. Dotsenko. On the Nature of the Phase Transition in the Three-Dimensional Random Field Ising Model. *arXiv:0706.0628v1*, 2007.
- [22] O. Perković, K. A. Dahmen, and J. P. Sethna. Disorder-Induced Critical Phenomena in Hysteresis: Numerical Scaling in Three and Higher Dimensions. *Physical Review B*, 59(6106), 1999.

- [23] S. Janičević. Analiza kritičnog ponašanja Izingovo modela u slučajnom polju. *Magistarska teza*, 2006.
- [24] Dj. Spasojević, S. Janičević, and M. Knezević. Exact Results for Mean Field Zero Temperature Random Field Ising Model. *Europhys. Letters*, 76(5), 2006.
- [25] G. Parisi and N. Sourlas. Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and Negative Dimensions. *Physical Review Letters*, 43(744), 1979.
- [26] K. A. Dahmen and J. P. Sethna. Hysteresis Loop Critical Exponents in $6 - \epsilon$ Dimensions. *Physical Review Letters*, 71(3222), 1993.
- [27] Dj. Spasojević, S. Janičević, and M. Knezević. Numerical Evidence for Critical Behavior of the Two-Dimensional Nonequilibrium Zero-Temperature Random Field Ising Model. *Physical Review Letters*, 106(175701), 2011.
- [28] Dj. Spasojević, S. Janičević, and M. Knezević. Avalanche Distribution in the Two-Dimensional Nonequilibrium Zero-Temperature Random Field Ising Model. *Physical Review E*, 84(051119), 2011.
- [29] E. Pupin. Statistical Properties of Barkhausen Noise in Thin Fe Films. *Physical Review Letters*, 84(5415), 2000.
- [30] A. Berger, A. Inomata, J. S. Jiang, J. E. Pearson, and S. D. Bader. Experimental Observation of Disorder-Driven Hysteresis-Loop Criticality. *Physical Review Letters*, 85(4176), 2000.
- [31] H-S. Lee, K-S. Ryu, I-S. Kang, and S-Ch. Shin. Universal Barkhausen Critical Scaling Behavior Observed in Ni_xFe_{1-x} ($x = 0.5$) Films. *Journal of applied Physics*, 109(07E101), 2011.
- [32] S-Ch. Shin, K-S. Ryu, D-H. Kim, and H. Akinaga. Two-Dimensional Critical Scaling Behavior of Barkhausen Avalanches. *Journal of applied Physics*, 103(07D907), 2008.
- [33] G. Z. dos Santos Lima, G. Corso, M. A. Correa, R. L. Sommer, P. Ch. Ivanov, and F. Bohn. Universal temporal characteristics and vanishing of multifractality in Barkhausen avalanches. *Physical Review E*, 96(022159), 2017.

- [34] F. Bohn, G. Durin, M. A. Correa, N. R. Machado, R. Domingues Della Pace, C. Chesman, and R. L. Sommer. Playing with Universality Classes of Barkhausen Avalanches. *arXiv e-prints*, 1801.09948v2, 2018.
- [35] V. Navas-Portella and E. Vives. Influence of the Aspect Ratio and Boundary Conditions on Universal Finite Size Scaling Functions in the Athermal Metastable Two-Dimensional Random Field Ising Model. *Physical Review E*, 93(022129), 2016.
- [36] B. Tadić. Dynamical Implications of Sample Shape for Avalanches in 2-Dimensional Random Field Ising Model with Saw-Tooth Domain Wall. *Physica A*, 493:330–341, 2018.
- [37] I. Balog, G. Tarjus, and M. Tissier. Criticality of the Random Field Ising Model in and out of Equilibrium: A Nonperturbative Functional Renormalization Group Description. *Physical Review B*, 97(094204), 2018.
- [38] L. L. Liu and H. E. Stanley. Some Results Concerning the Crossover Behavior of QuasiTwo-Dimensional and QuasiOne-Dimensional Systems. *Physical Review Letters*, 29(927), 1972.
- [39] K. Kaneda, Y. Okabe, and M. Kikuchi. Shape Effects of Finite-Size Scaling Functions for Anisotropic Three-Dimensional Ising Models. *Journal of Physics A Math. Gen.*, 42:7263–7271, 1999.
- [40] K. W. Lee and C. E. Lee. Size-Driven Dimensional Crossover in the Quasi-One-Dimensional Heisenberg Model. *Physical Review B*, 69(094428), 2004.
- [41] Y. Laosiritaworn, J. Poulter, and J. B. Staunton. Shape Effects of Finite-Size Scaling Functions for Anisotropic Three-Dimensional Ising Models. *Physical Review B*, 70(104413), 2004.
- [42] P. Shukla and D. Thongjaomayum. Criteria for Infinite Avalanches in the Zero-Temperature Nonequilibrium Random-Field Ising Model on a Bethe Lattice. *Physical Review E*, 95(042109), 2017.
- [43] P. Clusella, P. Grassberger, F. J. Perez-Reche, and A. Politi. Immunization and Targeted Destruction of Networks using Explosive Percolation. *Physical Review Letters*, 117(208301), 2016.

- [44] P. Grassberger. Universality of Critically Pinned Interfaces in Two-Dimensional Isotropic Random Media. *Physical Review Letters*, 120(200605), 2018.
- [45] R. J. Glauber. TimeDependent Statistics of the Ising Model. *Journal of Mathematical Physics*, 4(294), 2063.
- [46] T. Tome and M. J. de Oliveira. Dynamic Phase Transition in the Kinetic Ising Model Under a Time-Dependent Oscillating Field. *Physical Review A*, 41(4251), 1990.
- [47] K. A. Dahmen, D. Ertas, and Y. Ben-Zion. Gutenberg-Richter and Characteristic Earthquake Behavior in Simple Mean-Field Models of Heterogeneous Faults. *Physical Review E*, 58(14941501), 1998.
- [48] Y. Liu and K. A. Dahmen. Unexpected Universality in Static and Dynamic Avalanches. *Physical Review E*, 79(061124), 2009.
- [49] A. Travesset, R. A. White, and K. A. Dahmen. Crackling Noise, Power Spectra, and Disorder-Induced Critical Scaling. *Physical Review B*, 66(024430), 2002.
- [50] G. Bertotti and M. Pasquale. Hysteresis Phenomena and Barkhausen-like Instabilities in the Sherrington-Kirkpatrick Spin Glass Model. *Journal of Applied Physics*, 67(5255), 1990.
- [51] E. Vives and A. Planes. Avalanches in a Fluctuationless Phase Transition in a Random-Bond Ising Model. *Physical Review B*, 50(3839), 1994.
- [52] E. Vives and A. Planes. Hysteresis and Avalanches in Disordered Systems. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 221(164), 2000.
- [53] E. Vives and A. Planes. Hysteresis and Avalanches in the Random Anisotropy Ising Model. *Physical Review B*, 63(134431), 2001.
- [54] S. Janićević. Dinamika dvodimenzionalnog Izingovog modela u slucajnom polju. *Doktorska disertacija*, 2011.
- [55] J. P. Sethna, K. A. Dahmen, and O. Perković. RandomField Ising Models of Hysteresis. *arXiv:cond-mat/0406320 v2*, 2004.

- [56] A. Planes and E. Vives. Introduction to Phase Transition Kinetics. *Kick-off Meeting, Introductory Courses*, 1998.
- [57] R. A. White and K. A. Dahmen. Driving Rate Effects on Crackling Noise. *arXiv:condmat/0202246 v1*, 2002.
- [58] M. C. Kuntz, O. Perković, K. A. Dahmen, B. W. Roberts, and J. P. Sethna. Hysteresis, Avalanches, and Noise. *arXiv:cond-mat/9809122 v2*, 1999.
- [59] M. C. Kuntz and J. P. Sethna. "Noise in Disordered Systems: The Power Spectrum and Dynamic Exponents in Avalanche Models. *Physical Review B*, 62(11699), 2000.
- [60] F. Huang, M. T. Kief, G. J. Mankey, and R. F. Willis. Magnetism in the Few-Monolayers Limit: A Surface Magneto-Optic Kerr-effect Study of the Magnetic Behavior of Ultra Thin Films of Co, Ni, and Co-Ni alloys on Cu(100) and Cu(111). *Physical Review B*, 49(3962), 1994.
- [61] Dj. Spasojević, S. Mijatović, V. Navas-Portella, and E. Vives. Crossover from Three-Dimensional to Two-Dimensional Systems in the Nonequilibrium Zero-Temperature Random-Field Ising Model. *Physical Review E*, 97(012109), 2018.
- [62] K. Binder. Monte Carlo Study of Thin Magnetic Ising Films. *Thin Solid Films*, 20(2):367–381, 1974.
- [63] F. J. Perez-Reche and E. Vives. Finite-size Scaling Analysis of the Avalanches in the Three-Dimensional Gaussian Random Field Ising Model with Metastable Dynamics. *Physical Review B*, 67(134421), 2003.
- [64] Dj. Spasojević, S. Janičević, and M. Knezević. Analysis of Spanning Avalanches in the Two-Dimensional Nonequilibrium Zero-Temperature Random-Field Ising Model. *Physical Review E*, 89(012118), 2014.
- [65] J. S. Urbach, R. C. Madison, and J. T. Markert. Reproducibility of Magnetic Avalanches in an Fe-Ni-Co Ferromagnet. *Thin Solid Films*, 75(4694), 1995.
- [66] G. Durin and S. Zapperi. The Science of Hysteresis. *Academic Press, Amsterdam*, 2006.

- [67] J. Xu, D. M. Silevitch, K. A. Dahmen, and T. F. Rosenbaum. Barkhausen Noise in the Random Field Ising Magnet $Nd_2Fe_{14}B$. *Physical Review B*, 92(024424), 2015.
- [68] I. D. Mayergoyz and G. Bertotti. The Science of Hysteresis. *Academic Press, Amsterdam*, 2006.
- [69] V. Privman. Finite Size Scaling and Simulation of Statistical Systems. *World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong*, 1990.
- [70] K-S. Ryu, H. Akinaga, and S-Ch. Shin. Tunable Scaling Behaviour Observed in Barkhausen Criticality of a Ferromagnetic Film. *Nat. Phys.*, 3(574), 2007.
- [71] S. Janićević, S. Mijatović, and Dj. Spasojević. Critical Behavior of the Two-Dimensional Nonequilibrium Zero-Temperature Random Field Ising Model on a Triangular Lattice. *Physical Review E*, 95(042131), 2017.
- [72] O. Perković, K. A. Dahmen, and J. P. Sethna. Disorder-Induced Critical Phenomena in Hysteresis: A Numerical Scaling Analysis. *arXiv:cond-mat/9609072 v1*, 1996.
- [73] H. Ji and M. O. Robbins. Percolative, Self-Affine, and Faceted Domain Growth in Random Three-Dimensional Magnets. *Physical Review B*, 46(22), 1992.
- [74] L. Furuberg, J. Feder, A. Aharony, and T. Jossang. Dynamics of Invasion Percolation. *Physical Review Letters*, 61(18), 1988.

Биографија

Светислав Мијатовић је рођен 17.05.1991. године. Основну школу је завршио у Барајеву као ученик генерације, а потом је уписао Математичку гимназију у Београду. Средњу школу је завршио за три године, похађавши истовремено трећи и четврти разред и био је носилац Вукове дипломе. Током средње школе је освајао два трећа места на државним такмичењима из математике и једно треће и два прва места на државним такмичењима из физике. 2009. године је уписао Физички факултет Универзитета у Београду и завршио га у предвиђеном року од 4 године са просечном оценом 10. Мастер студије је радио под менторством професора др Ђорђа Спасојевића. Завршио их је са просеком 10 и одбранио мастер рад под називом „Спектри снаге у неравнотежном дводимензионом Изинговом моделу са случајним пољем”. Исте године је похађао и мастер студије на Економском факултету Универзитета у Београду и до њиховог краја му је остала одбрана мастер рада. Упловљавање у економске воде га је одвело до глобалног такмичења у симулацији вођења нафтних компанија, где је са својом екипом освојио прво место у финалу одржаном у Будимпешти. Потом је радио 6 месеци у нафтној компанији „MOL” у Будимпешти, после чега се вратио у Београд на докторске студије на Физичком факултету, где је и запослен од 2015. године. Поред професионалних ствари, у слободно време свира гитару, игра у КУД-у „Крајина” и активан је у промоцији и популаризацији физике широм Србије.

Изјава о ауторству

Потписани Светислав Мијатовић

број уписа 8003/2014

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Прелазак са тродимензионих на дводимензионе системе и утицај броја суседа на критично понашање атермалног неравнотежног Изинговог модела са случајним пољем

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 17.01.2019. године

Светислав Мијатовић

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Светислав Мијатовић

Број уписа 8003/2014

Студијски програм Физика-Статистичка физика

Наслов рада Прелазак са тродимензионих на дводимензионе системе и
утицај броја суседа на критично понашање атермалног неравнотежног
Изинговог модела са случајним пољем

Ментор проф др Ђорђе Спасојевић

Потписани Светислав Мијатовић

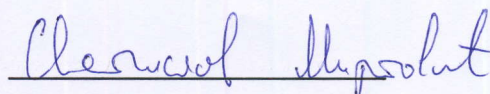
изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској
верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног
репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског
звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум
одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне
библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 17.01.2019. године



Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Прелазак са тродимензионих на дводимензионе системе и утицај броја суседа на критично понашање атермалног неравнотежног Изинговог модела са случајним пољем

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

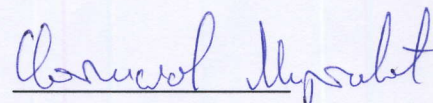
Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 17.01.2019. године



1. Ауторство - Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавање умножавања, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.