

УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ СА ПРИВРЕМЕНИМ СЕДИШТЕМ У
КОСОВСКОЈ МИТРОВИЦИ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА

Бранко Д. Гвоздић

**ОПТИМИЗАЦИЈА ИЗВОРА И САВРШЕНО
АПСОРБУЈУЋИХ СЛОЈЕВИТИХ ГРАНИЧНИХ
УСЛОВА У МЕТОДИ КОНАЧНИХ РАЗЛИКА У
ВРЕМЕНСКОМ ДОМЕНУ**

Докторска дисертација

Косовска Митровица, 2019.

UNIVERSITY OF PRISTINA TEMPORARY SETTLED IN
KOSOVSKA MITROVICA

FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES

Branko D. Gvozdić

**OPTIMIZATION OF SOURCES AND THE
PERFECTLY MATCHED LAYER ABSORBING
BOUNDARY CONDITIONS IN FDTD METHOD**

Doctoral Dissertation

Kosovska Mitrovica, 2019.

Ментор: _____

проф. др Душан Ђурђевић, ванредни професор

Универзитет у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици
Факултет техничких наука

Чланови комисије:

проф. др Петар Спалевић, редовни професор

Универзитет у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици
Факултет техничких наука

проф. др Небојша Раичевић, ванредни професор

Универзитет у Нишу, Електронски факултет

Датум одбране: _____

ОПТИМИЗАЦИЈА ИЗВОРА И САВРШЕНО АПСОРБУЈУЋИХ СЛОЈЕВИТИХ ГРАНИЧНИХ УСЛОВА У МЕТОДИ КОНАЧНИХ РАЗЛИКА У ВРЕМЕНСКОМ ДОМЕНУ

Сажетак

Предмет истраживања у овој дисертацији су импулсни извори електромагнетског поља и савршено апсорбујући слојевити гранични услови у методи коначних разлика у временском домену. У дисертацији је предложена употреба биполарних импулса са циљем елиминисања неповољних нефизичких наелектрисања која се јављају у симулацијама простирања електромагнетског поља са Гаусовим импулсом. Урађене су симулације са Гаусовим и Рикеровим импулсом као извором, у хомогеним и нехомогеним срединама. Добијени резултати показују да је утицај нефизичких наелектрисања код Рикеровог импулса занемарљиво мали и да је он бољи избор у симулацијама електромагнетског поља. Постоје електромагнетски проблеми у којима присуство извора унутар нумеричког домена није приоритет. Резултати су показали да је у тим случајевима примена TF/SF равних таласа бољи избор од примене импулсних извора. Нумерички резултати простирања електромагнетског поља високе фреквенције, за широк скуп коришћених параметара, омогућили су добијање оптималних коефицијената конволуционих савршено апсорбујућих слојевитих граничних услова. Добијене су оптималне корелације за коефицијент проширења координата и коефицијент померања комплексне фреквенције. Показано је да ови гранични услови, по питању апсорпције електромагнетских таласа, дају знатно боље резултате од стандардних и униаксијалних савршено апсорбујућих слојевитих граничних услова.

Кључне речи: метода коначних разлика у временском домену, гранични услови, импулсни извори, конволуциони PML

Научна област: Електротехничко и рачунарско инжењерство

Ужа научна област: Нумеричка електромагнетика

УДК број: 621.3.013.2:537.87:519.642(043.3)

OPTIMIZATION OF SOURCES AND THE PERFECTLY MATCHED LAYER ABSORBING BOUNDARY CONDITIONS IN FDTD METHOD

Abstract

The subject of research in this dissertation are pulse sources of electromagnetic field and perfectly matched layer absorbing boundary conditions in the finite-difference time-domain method. In order to eliminate unwanted nonphysical charges that occur in simulations of electromagnetic field propagation with Gaussian pulse, the use of bipolar pulses is suggested. Simulations with Gaussian and Ricker pulses were realized, for homogeneous and non-homogeneous mediums. The obtained results show that the influence of non-physical charge in Ricker pulse simulation is negligible and that it is a better choice. There are electromagnetic problems in which the presence of sources within the numerical domain is not a priority. In these cases, the use of TF/SF plane waves is a better choice than the use of pulse sources, as results showed. The optimal coefficients for convolutional PML boundary conditions, in case of high-frequency electromagnetic field propagation, were obtained for a wide set of parameters. Optimal correlations for the stretching coefficient and the complex frequency-shifted coefficient were obtained. Numerical results shown that CPML boundary conditions give significantly better results than PML and uniaxial PML boundary conditions, in terms of electromagnetic waves absorption.

Keywords: finite difference time domain, FDTD, boundary conditions, impulsive sources, CPML, UPML

Scientific field: Electrical and computer engineering

Scientific subfield: Numerical electromagnetics

UDC number: 621.3.013.2:537.87:519.642(043.3)

Садржај

1. Увод.....	3
1.1 Предмет и циљ истраживања.....	6
1.2 Хипотезе и методе које су коришћене у истраживању.....	8
1.3 План истраживања и структура рада.....	10
2. Метода коначних разлика у временском домену.....	14
2.1 Полазне диференцијалне једначине у FDTD методи	19
2.2 Дефиниција коначних разлика	21
2.3 Њее-ов алгоритам.....	24
2.4 Нумеричка стабилност и дисперзија	33
3. Извори у методи коначних разлика у временском домену.....	41
3.1 Гаусов импулс.....	43
3.2 Диференцирани Гаусов импулс и Рикеров импулс	44
3.3 Хармонијски извори.....	45
3.2 TF/SF равни таласи у FDTD симулацијама	46
4. Гранични услови у методи коначних разлика у временском домену.....	52
4.1 Мурови гранични услови другог реда.....	53
4.2 Савршено апсорбујући слојевити гранични услови - PML.....	52
4.3 Униаксијални савршено апсорбујући слојевити гранични услови - UPML.....	60
4.4 Конволуциони савршено апсорбујући слојевити гранични услови - CPML	62

5. Аналитички модели дискретизације	64
5.1 FDTD дискретизација функције Гаусовог импулса.....	64
5.2 FDTD дискретизација функције Рикеровог импулса.....	69
5.3 FDTD дискретизација хармонијског извора синусног облика.....	71
5.4 Имплементација TF/SF равних таласа у 2Д и 3Д FDTD домен	72
5.5 Имплементација UPML граничних услова у FDTD методу.....	78
5.6 Имплементација CPML граничних услова у FDTD методу	81
5.7 Градирање CPML коефицијената.....	84
6. Нумерички резултати	90
6.1. Оптимизација извора у FDTD методи	90
6.1.1 Предности коришћења Рикеровог у односу на Гаусов импулс у FDTD симулацијама.....	91
6.1.1.1 2Д FDTD симулација простирања поља Гаусовог и Рикеровог импулса у слободном простору.....	93
6.1.1.2 2Д FDTD симулација расејања поља Гаусовог и Рикеровог импулса у нехомогеној средини	97
6.1.1.3 3Д FDTD симулација простирања поља Херцовог дипола у слободном простору	101
6.1.1.4 3Д FDTD симулација простирања поља Херцовог дипола у нехомогеној средини	104
6.1.2 Предности коришћења TF/SF равних таласа у односу на импулсне изворе у FDTD симулацијама	106
6.1.2.1 2Д FDTD симулација TF/SF равних таласа у слободном простору са PEC цилиндром.....	107
6.1.2.2 3Д FDTD симулација TF/SF равних таласа у слободном простору са PEC сфером	110

6.1.2.3 2Д FDTD симулација TF/SF равних таласа у нехомогеној средини.....	112
6.2. Оптимизација CPML граничних услова у FDTD методи.....	114
6.2.1 Оптимизација CPML коефицијената.....	115
6.2.1.1 3Д FDTD симулација простирања поља диференцираног Гаусовог импулса у слободном простору.....	115
6.2.2 Поређење CPML и UPML граничних услова	123
6.2.2.1 3Д FDTD симулација простирања поља диференцираног Гаусовог импулса у слободном простору.....	124
6.2.2.2 3Д FDTD симулација простирања и расејања поља дипол антене у присуству PEC сфере.....	128
6.3. Дискусија резултата.....	133
7. Закључак	139
Литература.....	145

1. Увод

Са убрзаним развојем технологије и увећањем компјутерских ресурса метода коначних разлика у временском домену (*Finite-Difference Time-Domain* - FDTD) [1] постала је једна од најпопуларнијих нумеричких метода у данашњој нумеричкој електромагнетици. Ова нумеричка метода се користи за моделовање и нумеричку симулацију простирања и расејања електромагнетског поља и решавање динамичких проблема електромагнетике директном дискретизацијом Максвелових једначина у временском домену. Практичну примену налази у областима као што су: дизајн антена и микроталасних склопова, анализа простирања радио таласа, фотоника, биомедицина, геофизика, акустика [2]. Фотоника је једна од области у којој FDTD метода има највећу примену и то конкретно у истраживањима која укључују плазмонице, фотоничке нелинеарне и дисперзивне материјале (метаматеријали), наночестице, нанолитографију, биосензоре, биофотонику, итд.

Нумеричка електромагнетика се експоненцијално развијала последњих неколико деценија до тачке када се изузетно прецизни резултати могу добити за широк дијапазон електромагнетских проблема. Максвелове парцијалне диференцијалне једначине, формулисане пре 160 година, представиле су везу између електричног и магнетског поља. За решавање Максвелових једначина користе се нумеричке методе које су, у општем случају, подељене на методе базиране на интегралним једначинама и на оне базиране на диференцијалним једначинама. Методе базиране на интегралним једначинама врше нумеричке анализе у фреквенцијском домену и до недавно су у пракси примењиване много више од метода са диференцијалним једначинама. Са развојем информационих технологија, који је утицао на повећање брзине рачунара, дошло је до наглог повећања интересовања за методе са диференцијалним једначинама. FDTD метода припада класи диференцијалних нумеричких метода (методе коначних разлика) које су базиране на просторној решетки (*grid*). Анализе у FDTD методи се врше у временском домену, па њена решења

могу покрити широк фреквенцијски опсег у само једној нумеричкој симулацији. Метода коначних разлика у временском домену представља алгоритам „марширања“ у времену које симулира континуално простирање електромагнетског таласа у неком предефинисаном нумеричком домену. Градивне ћелије домена нумерички аналогно одговарају променљивама у компјутерској меморији. Велики број електромагнетских проблема подразумева простирање таласа у бесконачно великом простору, што значи да у компјутерским симулацијама треба дефинисати што већи нумерички домен. Због потребе за огромним компјутерским ресурсима (за то време), метода коначних разлика у временском домену је са разлогом избегавана пре деведесетих година прошлог века. Методе у временском домену омогућавају много бољи „физички“ увид у карактеристике електромагнетског проблема.

Средином двадесетог века, истраживања базирана на Максвеловим једначинама углавном су била мотивисана развојем војне индустрије. Ограничења нумеричких метода базираних на интегралним једначинама у фреквенцијском домену (затворена форма, комплексна аналитичка припрема проблема, бесконачни низови аналитичких решења) подстакла су потребу за новим алтернативним приступом. Представљена у раду *Kane S. Yee-a* [1], 1966. године, FDTD метода даје директна решења Максвелових диференцијалних једначина у временском домену. То је била прва класа нумеричке методе засноване на просторној решетки (*grid*), која подразумева просторну (просторна ћелија) и временску (временски корак) дискретизацију Максвелових једначина. Новина у раду [1] била је примена централних коначних разлика на сваку ћелију просторне решетке [*grid*] у времену и простору и то на сваки вектор јачине електричног и магнетског поља у Максвеловим једначинама. Прва решења добијена помоћу FDTD методе за 2Д и 3Д простирање и расејање електромагнетског поља у материјалној средини, као и нумеричка стабилност алгоритма, објављена су 1975. године, у раду *Taflove-a* [3]. У раду истог аутора, објављеном 1980. године, по први пут је коришћен назив „*Finite-Difference Time-Domain*“ (FDTD) и представљени су резултати простирања електромагнетског таласа кроз 3Д металну шупљину

[4]. Аналитичке апсорбујуће граничне услове (ABC), тачности другог реда, за *Yee*-ову решетку (*grid*) извео је *Mur* [5], 1981. године. У раду [6], реализована је прва FDTD симулација простирања електромагнетског поља у таласоводу. Метода коначних елемената у временском домену (*Finite-Element Time-Domain -FETD*) изведена је у раду [7], 1987. године, а потом и метода коначних „простора“ у временском домену (*Finite-Volume Time-Domain - FVTD*) у раду [8], 1990. године. Две године касније је по први пут моделована антена у FDTD методи у раду *Balanis*-а [9], извршено је моделовање закривљених структура [10] и електронских елемената [11]. Савршено апсорбујуће слојевите граничне услове (*Perfectly Matched Layer – PML*) за 2Д FDTD домен извео је *Berenger* [12] 1994. године, а следеће године *Gedney* [13] објављује униаксијалне PML (*Uniaxial PML – UPML*) граничне услове. Псеудоспектрална метода у временском домену (*Pseudospectral Time-Domain – PSTD*) објављена 1997. године у раду [14], омогућила је просторну дискретизацију са много мање тачака од стандардне FDTD методе. Нумеричка метода заснована на *alternating direction implicit* (ADI) FDTD алгоритму објављена је 2000. године, у раду [15]. Ово је безусловно стабилна метода, код које не постоји услов нумеричке стабилности (*Courant–Friedrichs–Lewy - CFL* услов), а који је један од главних ограничавајућих фактора стандардне FDTD методе. PML гранични услови засновани на конволуционим паровима, названи *convolutional PML* (CPML) изведени су у раду *Roden-a* и *Gedney-a* [16], 2000. године. Ефикаснија метода од ADI FDTD методе, која је такође безусловно стабилна, изведена је 2008. године у раду [17]. Названа је *locally one-dimensional* (LOD) FDTD метода и представља једну од најефикаснијих метода заснованих на FDTD алгоритму. Основни принципи на којима је заснована стандардна FDTD метода, њене предности и недостаци, као и поређење са другим нумеричким методама могу се наћи у другом поглављу ове дисертације.

Интензивније коришћење FDTD методе у научним истраживањима, у последњих пар деценија, довело је до развоја великог броја *open-source* (13) и комерцијалних (25) софтвера који омогућавају лакшу употребу ове методе.

Метода се, осим за научна истраживања, врло интензивно користи и у индустрији и развоју нових технологија.

Истраживања представљена у овој докторској дисертацији имају за циљ да допринесу што ефикаснијој примени FDTD методе, како у научним израчунавањима, тако и у комерцијалној употреби.

1.1. Предмет и циљ истраживања

У FDTD (*Finite-Difference Time-Domain*) рачунарским симулацијама електромагнетских поља користе се различити типови извора поља. Избор извора се врши на основу више фактора: димензије FDTD домена (1Д, 2Д, 3Д простор), геометрије нумеричког домена израчунавања (таласовод, оптички кабл, итд.), физичке структуре простора (слободан простор, полупростор, PEC (*Perfect electric conductor*) расејач). Врло често се користе импулсни (тачкасти) извори поља и то најчешће Гаусов импулс, због могућности генерисања широког спектра фреквенција и простирања поља у свим правцима [2, 18-25]. Посебан облик Гаусовог импулса, који се добија његовим диференцирањем, назива се Рикеров импулс [20]. Предмет истраживања на пољу извора биће примена Гаусовог, Рикеровог и синусоидалног импулса у FDTD методи. Како су чести случајеви када је неопходно имплементирати извор чије се поље простира искључиво у једном правцу, техника *Total Field/Scattered Field* (TF/SF) генерисања равних таласа је такође предмет истраживања [26-32].

Циљ истраживања на пољу извора електромагнетског поља у методи коначних разлика у временском домену су:

- добијање оптималног временског облика импулсног извора,
- показати да се појава нефизичких наелектрисања може смањити применом оптимизованих облика импулсних извора, конкретно применом Рикеровог импулса,
- показати да је примена TF/SF равних таласа бољи избор од примене импулсних извора у FDTD симулацијама електромагнетског поља када присуство извора унутар нумеричког домена није приоритет.

У компјутерским симулацијама простирања електромагнетског поља, у FDTD методи, врло често је неопходно симулирати бесконачан слободан простор. Свака тачка у нумеричком FDTD домену заузима локацију у меморији компјутера, због тога је FDTD нумерички домен неопходно ограничити на неки начин. Симулирање бесконачног слободног простора или просторно неограниченог система врши се имплементацијом апсорбујућих граничних услова (*Absorbing boundary condition* - ABC) на границама нумеричког домена [5]. ABC гранични услови треба да обезбеде да сви надлазећи електромагнетски таласи изађу из нумеричког домена као да је симулација извршена у нумеричком домену бесконачних димензија. Ови аналитички гранични услови су засновани на линеарном парцијално-диференцијалном оператору који се примењује на компоненте поља у свакој тачки спољне границе нумеричког простора. На тај начин се, помоћу коначних разлика, систематски сузбијају вредности простирућег таласа. Посебна врста апсорбујућих граничних услова уведена је 1994. године у раду [12]. Названи - савршено апсорбујући слојевити гранични услови (*perfectly matched layer* - PML), представљају врсту најкоришћенијих и најефикаснијих апсорбујућих граничних услова. PML гранични услови су ефикасни у нелинеарним, анизотропним и нехомогеним срединама, без обзира на врсту поларизације и угао инциденције електромагнетског таласа [12, 13, 33]. Базирани су на креирању вештачког анизотропног медијума на границама нумеричког домена, тачније на нефизичког дељењу векторских компоненти поља у Максвеловим једначинама на по две ортогоналне компоненте. Овако креирани анизотропни медијум се понаша као апсорбер електромагнетских таласа и у себи садржи операторе који утичу на слабљење и апсорпцију компоненти електромагнетског поља. Постоји неколико типова побољшаних PML граничних услова, а предмет истраживања ове дисертације су: униаксијални PML (*uniaxial PML* - UPML) [13] и конволуциони PML (*convolutional PML* - CPML) [16].

Циљ истраживања на пољу савршено апсорбујућих слојевитих граничних услова у методи коначних разлика у временском домену су:

- Побољшање ефикасности CPML граничних услова у апсорпцији електромагнетских таласа проналажењем оптималних корелација између CPML коефицијената,
- Показати да CPML гранични услови дају боље резултате при апсорпцији електромагнетских таласа од PML и UPML граничних услова у FDTD алгоритму

1.2. Хипотезе и методе које су коришћене у истраживању

Први део истраживања у овој дисертацији односи се на импулсне изворе и TF/SF (*Total Field/Scattered Field*) технику генерисања равних таласа у FDTD (*Finite-Difference Time-Domain*) методи. Због могућности генерисања широког спектра фреквенција и простирања електромагнетског поља у свим правцима, импулсни извори су, врло често, први избор у FDTD моделовању. Најчешће коришћени импулсни извор у FDTD симулацијама простирања електромагнетског поља је Гаусов импулс. Импулсни извори, генерално, нису дизајнирани за примену у FDTD методи, тј. њихова структура није прилагођена специфичностима FDTD методе. У општем случају, извори електромагнетског поља могу депоновати одређену количину нумеричких (фиктивних) наелектрисања у FDTD нумеричком домену [34]. Таква наелектрисања су нежељена и неминовно доводе до појаве нефизичке рефлексије и нумеричке дисперзије, сходно томе и до нетачних резултата симулације. Применом импулсних извора кратког трајања може се смањити појава нежељених наелектрисања, али краткотрајност трајања импулса може бити ограничавајући фактор у FDTD моделовању. Примена стандардног Гаусовог импулса, који у себи садржи једносмерну (*direct current* – DC) компоненту, такође доводи до гомилања нефизичких наелектрисања. Постоје истраживања у којима се стандардни облик Гаусовог импулса користи управо због чињенице да садржи DC компоненту [35]. Истраживања са циљем да се уклони DC компонента Гаусовог импулса модулацијама урађена су у [34, 36, 37], али имају за последицу повећавање комплексности моделовања [2]. У [38]

је предложена употреба биполарних импулса са циљем елиминације DC компоненте. Управо је сличан концепт основа прве хипотезе у овој дисертацији: модификацијом временског облика Гаусовог облика и коришћењем његових деривата (диференцирани Гаусов импулс и Рикеров импулс) могу се избећи фиктивне DC компоненте у FDTD симулацијама. Када је неопходно у FDTD симулацију имплементирати извор чије се поље простире искључиво у једном правцу један од најефикаснијих начина да се то постигне је коришћење TF/SF технике екситације. Показати да TF/SF равни таласи, када је год то могуће, треба да буду први извор у FDTD симулацијама, један је од циљева истраживања.

Два најефикаснија представника PML граничних услова, на пољу апсорпције електромагнетских таласа, су униаксијални PML (*uniaxial* PML - UPML) [13] и конволуциони PML (*convolutional* PML - CPML) гранични услови [16]. Један део истраживања, у овој дисертацији, бави се анализом ова два типа граничних услова, са циљем да се покажу боље апсорпционе карактеристике CPML у односу на UPML граничне услове. Иако су CPML гранични услови веома ефикасни, постоји простор за њихово побољшање. Пре свега, то је оптимизација CPML коефицијената у зависности од природе и геометрије електромагнетских проблема. Нумеричка дисперзија код стандардног FDTD алгоритма има за последицу погоршање перформанси код нумеричких симулација електромагнетског поља. Стога су FDTD алгоритми типа *alternating direction implicit* (ADI) [15], *pseudospectral time-domain* (PSD) [14] и друге модификоване FDTD методе, логичан избор при симулацији електромагнетских поља [39]. Међутим, резултати скорашњих истраживања су показали да, када се CPML гранични услови имплементирају у FDTD алгоритме вишег реда (ADI, PSD), њихове перформансе постају сличне перформансама CPML граничних услова у случају стандардног FDTD алгоритма [40]. Истраживања у вези CPML граничних услова углавном су усмерена на повећање тачности самог алгоритма, што се одражава на аналитичку комплексност и тежу имплементацију у FDTD алгоритам [41-48]. Већ дуже време су актуелна истраживања у вези доминантне фреквенције

CPML граничних услова [39, 43]. Међутим, истраживања заснована на нумеричкој дисперзији која потиче од самих граничних услова су тек почела [49, 50]. Проналажење адекватних бројних вредности и корелација између CPML коефицијената може знатно утицати на побољшање апсорпције електромагнетских таласа и то је једна од хипотеза ове дисертације.

За истраживање је коришћена стандардна метода коначних разлика у временском домену, са коначним разликама тачности другог реда. За све симулације простирања електромагнетског поља написан је посебан програмски код у програмском језику *C++*, а резултати нумеричких симулација представљени су помоћу графичког програма *gnuplot*.

1.3. План истраживања и структура рада

План истраживања у овој дисертацији подразумева поделу истраживања на два дела. Један део истраживања се односи на проналажење оптималног извора који ће ефикасно симулирати побуду електромагнетског поља у унутрашњости FDTD нумеричког домена. Други део истраживања бави се побољшањем CPML граничних услова у FDTD методи са аспекта апсорпције електромагнетских таласа и имплементације у FDTD алгоритам.

Докторска дисертација је подељена у седам поглавља. Поред увода који представља прво поглавље, дисертација садржи још пет тематских целина, закључак и преглед литературе.

У уводу је представљена метода коначних разлика у временском домену, њено место у данашњој нумеричкој електромагнетици, као и њена примена у савременим телекомуникационим системима и другим научним областима. Дат је кратак историјат FDTD методе, основни принцип на ком је заснована, као и начелна подела нумеричких метода у нумеричкој електромагнетици. Импулсни извори и TF/SF техника генерисања равних таласа су предмет истраживања, па је у уводу наведено на који начин се врши избор екситација и шта су циљеви истраживања на том пољу. Такође су таксативно наведени

циљеви истраживања на пољу CPML граничних услова. Увод садржи детаљан опис хипотеза које су биле почетна тачка истраживања у овој дисертацији.

Друго поглавље представља теоријску основу методе коначних разлика у временском домену (FDTD). На почетку су наведене предности и недостаци FDTD методе, као и поређење са другим нумеричким методама. Поглавље приказује полазне диференцијалне једначине за дискретизацију у FDTD методи, чија су основа Максвелове диференцијалне једначине. Описано је како се преко извода континуалних функција долази до коначних разлика, где је развојем у Тејлоров ред израчуната централна разлика другог реда тачности. Детаљан опис Yee-овог алгоритма заједно са просторном и временском дискретизацијом Максвелових једначина приказан је у овој поглављу, а потом је изведен скуп диференцијалних једначина са коначним разликама у три просторне димензије. Изведен је CFL (*Courant–Friedrichs–Lewy*) услов нумеричке стабилности FDTD алгоритма за све три димензије, као и једначина нумеричке дисперзије за 1Д случај.

Тема трећег поглавља су извори електромагнетског поља који се највише користе у нумеричким симулацијама у методи коначних разлика. Начелна подела на тврде и меке изворе у FDTD методи, претходи кратким описима њихових фундаменталних карактеристика. Тачније, приказане су временске функције и графички облици у временском и фреквенцијском домену за Гаусов, Рикеров и хармонијски извор синусног облика. На крају поглавља приказан је концепт на ком је заснована TF/SF техника генерисања равних таласа.

Четврто поглавље чине теоријске основе апсорбујућих граничних услова у FDTD методи, који су поред извора, предмет истраживања у овој дисертацији. Од аналитичких граничних услова изведени су Мурови гранични услови другог реда. Након тога су детаљно описани савршено апсорбујући слојевити гранични услови (*perfectly matched layer* - PML), који су били основа за даље извођење униаксијалних (*uniaxial* PML - UPML) и конволуционих (*convolutional* PML - CPML) граничних услова.

У петом поглављу су представљени сви аналитички модели дискретизације извора и граничних услова који су коришћени у истраживању. FDTD дискретизација и оптимизација функције Гаусовог импулса модификацијама у временском домену, детаљно је представљена на почетку петог поглавља. На примеру меког струјног извора са Гаусовом импулсном функцијом изведен је процес таложења нефизичких наелектрисања (*direct current* - DC компоненте). Предложено је коришћење биполарног импулса (Рикеровог импулса) са једнаким позитивним и негативним вредностима, као и модификација временског облика Гаусовог импулса (диференцирани Гаусов импулс) са циљем елиминисања нефизичких DC компоненти. Приказан је посебан начин имплементације TF/SF равних таласа у 2Д и 3Д FDTD нумерички домен коришћењем помоћне 1Д решетке. Такође, у овом поглављу је изведена имплементација UPML и CPML граничних услова у FDTD алгоритам, са посебним освртом на имплементацију у програмски FDTD код. Детаљно је обрађено градирање CPML коефицијената помоћу полинома, које је касније коришћено за проналажење оптималних корелација.

Шесто поглавље је резултат свих нумеричких истраживања урађених у овој докторској дисертацији. Приказани су резултати симулација простирања и расејања електромагнетског поља са Рикеровим и Гаусов импулсом као извором, за 2Д и 3Д FDTD нумерички домен. Циљ је да се покажу предности коришћења Рикеровог импулса у односу на Гаусов импулс. Симулације простирања електромагнетског поља су урађене у случају слободног простора и у случају нехомогене средине сачињене од два хомогена диелектрична полупростора. Како би се испитале предности TF/SF технике у односу на импулсне изворе, урађене су FDTD симулације простирања поља са TF/SF равним таласима за случај 2Д и 3Д слободног простора са PEC цилиндром, односно PEC сфером. Додатно, TF/SF равни таласи симулирани су и у 2Д нумеричком домену сачињеног од два хомогена диелектрична полупростора: слободан простор и слој са губицима. 3Д FDTD симулација простирања поља у слободном простору са диференцираним Гаусовим импулсом као извором искоришћена је за испитивање апсорпционих карактеристика PML, UPML и

CPML граничних услова и добијања оптималних корелација између CPML коефицијената. Додатно, за поређење апсорпционих карактеристика CPML и UPML граничних услова реализоване су 3Д FDTD симулације за два електромагнетска проблема. Први проблем је стандардни и подразумева простирање електромагнетског поља у слободном простору са диференцираних Гаусовим импулсом као извором. Други проблем испитује перформансе два типа граничних услова у случају комплексне геометрије средине. Резултати простирања и расејања у присуству савршено проводне PEC сфере графички су приказани користећи вредности амплитуде вектора јачине електричног поља у различитим тренуцима у времену. Такође, као додатни аспект у испитивању, израчуната је релативна грешка у случају две различите дебљине савршено апсорбујућих слојевитих граничних услова. На крају шестог поглавља приказана је дискусија резултата истраживања са смерницама за даљи рад.

У закључку су сумирани сви резултати истраживања у овој дисертацији, наведени су закључци до којих се дошло и представљен је план за будуће истраживање.

2. Метода коначних разлика у временском домену

Метода коначних разлика у временском домену заснована је на просторној и временској дискретизацији парцијалних диференцијалних Максвелових једначина помоћу апроксимација централних разлика. Резултат дискретизације су једначине коначних разлика у којима се компоненте вектора јачине електричног поља у једној тачки простора решавају у једном временском тренутку, а у следећем временском тренутку се решавају компоненте вектора јачине магнетског поља за исту просторну тачку. Овај поступак се константно понавља све док електромагнетско поље не уђе у стационарно стање. За решавање оваквих једначина коначних разлика углавном се користе рачунари, од персоналних до кластера супер-компјутера. С обзиром да је, приликом дискретизације, за сваку тачку у нумеричком домену од интереса и за сваки временски корак потребно обезбедити локацију у компјутерској меморији, с разлогом је FDTD метода избегавана пре деведесетих година прошлог века.

Главне предности FDTD методе су што захтева релативно кратко време програмирања и дефинисања нумеричког простора у односу на методе које раде у фреквенцијском домену (*Finite-Difference Frequency-Domain* – FDFD, *Method of Moments* - МоМ, *Finite Elements Method* - FEM, *Spectral Methods* – SD методе, итд.). На FDTD методу се не односе ограничења линеарне алгебре или инверзних матрица, која постоје код метода у фреквенцијском домену (10^6 непознатих, ограничене величине нумеричког домена). Код ове методе је могуће моделовати симулације са 10^9 или 10^{12} непознатих компоненти електромагнетског поља, тако да формално не постоје ограничења у величини симулације, осим временског ограничења самог рачунара. Иако решава проблеме у временском домену, може се користити за рачунање одзива у широком опсегу фреквенцијског домена, посредством *Фуријеове трансформације* (*Furrier Transform* – FT). FDTD метода има велику тачност и

веома је лака за разумевање. Како је метода у временском домену, могуће је у једној симулацији израчунати таласни облик широког фреквенцијског спектра или импулсни одзив на било којој фреквенцији. Могућност визуализације резултата у, практично, реалном времену једна од главних предности ове методе.

Као и свака нумеричка метода, тако и FDTD метода има својих недостатака. Један од главних недостатака су потешкоће и нарушавање тачности приликом моделовања закривљених структура или структура са оштрим ивицама. Како је FDTD нумерички простор сачињен од ћелија, спољне ивице моделованих структура неправилног облика имају степености (*staircase*) облик, па FDTD методу није погодно користити за симулацију структура комплексних геометријских облика. Други недостатак је велика потрошња компјутерских ресурса. Због услова нумеричке стабилности (*Courant–Friedrichs–Lewy* - CFL услов) [2], временски корак не може бити већи од одређене вредности, па симулације простирања електромагнетског поља у нумеричким доменима великих димензија захтевају веома дуг временски период.

Методе у временском домену су веома корисне када је потребно анализирати широк спектар фреквенција, али када је потребно израчунати решење у стационарном стању, на једној фреквенцији, FDTD метода је неефикасна. Метода коначних разлика у фреквенцијском домену (*Finite-Difference Frequency-Domain* – FDFD) [51] не захтева временску дискретизацију, а дискретизација простора је знатно простија од оне у FDTD методи. Код FDFD методе, компоненте вектора јачине електричног поља $\mathbf{E}(x, y, z)$ и магнетског поља \mathbf{H} су лоциране у истој просторној тачки нумеричког домена, што искључује рачунање просторних апроксимација. Иако је ова метода заснована на Максвеловим једначинама у фреквенцијском домену, у пракси се више користи простији приступ који подразумева коришћење таласне једначине у фреквенцијском домену. За добијање вредности вектора јачине електричног поља \mathbf{E} , потребно је решити само једну таласну једначину, а онда се вредност вектора јачине магнетског поља \mathbf{H} одређује из Максвелових једначина у фреквенцијском домену. Решења у стационарном стању, за једну фреквенцију,

добивају се помоћу инверзних матрица. Иако коришћење инверзних матрица указује на сличност са имплицитним методама (*alternating direction implicit – ADI FDTD, locally one-dimensional – LOD FDTD*), решења FDFD методе нису ни имплицитна ни експлицитна. Ова подела се односи само на методе базиране на парцијалним диференцијалним једначинама. Код FDFD методе, решења једначина стационарног стања конвергирају или дивергирају, у зависности од решења инверзних матрица. Једна од главних предности ове методе, у односу на FDTD методу, је веома лако моделовање дисперзивних материјала. У случају моделовања изотропних дисперзивних средина потребно је просто дефинисати скаларне вредности пермитивности ϵ , пермеабилности μ и специфичне проводности σ на фреквенцији од интереса. Код анизотропних дисперзивних средина уместо скаларима, константе се дефинишу векторима. FDFD метода се може искористити и за симулирање простирања електромагнетског поља широког фреквенцијског опсега, али је у том случају потребно извршити вишеструке симулације, по једну симулацију за сваку фреквенцију од интереса. То се може користити у електромагнетским проблемима моделовања дисперзивних средина, чије особине варирају у зависности од одређених фреквенција.

Метода коначних елемената (*Finite element method – FEM*) [7, 8] је, као и FDTD метода, постала популарна у последњих пар деценија. Ова варијациона метода је заснована на дељењу нумеричког домена на просторе (поддомене) коначних димензија (коначне елементе), који се могу произвољно обликовати и оријентисати. Из тог разлога, FEM метода је погодна за примену у проблемима комплексне геометрије, што је једна од главних предности ове методе. Најчешће коришћени коначни елементи су у облику троугла и тетраедра, због једноставности моделовања. За разлику од осталих метода, код FEM методе се решења Максвелових једначина апроксимирају за сваки поддомен посебном функцијом (базична функција), обично полиномом нижег реда. Потом се решења из сваког коначног елемента прилагођавају да буду континуална у односу на границу између тог поддомена и остатка нумеричког

домена. Из овога следи и главни недостатак FEM методе, а то је релативно велика комплексност.

У свим претходно описаним методама, при просторној дискретизацији потребно је 10 или више ћелија по таласној дужини, како би се постигли прихватљиви резултати. При моделовању електромагнетских проблема у великим нумеричким доменима, ово ограничење има за последицу дуго трајање нумеричких симулација. Спектралним методама, које се заснивају на Никвистовој теореме (*Nyquist*), потребно је само две тачке по таласној дужини како би правилно реконструисали неки таласни облик. Најпопуларнији представник спектралних метода је псеудоспектрална метода у временском домену (*Pseudospectral Time-Domain* – PSD) [14]. У овој методи се просторни изводи рачунају брзом Фуриеовом трансформацијом (*Fast Fourier Transform* – FFT), тако што се нумерички домен стандардно подели на просторне ћелије, али се решење у одређеном временском кораку апроксимира функцијом која покрива комплетан нумерички домен. Предност ове методе у односу на FDTD методу је што се са много мањим бројем просторних ћелија постиже релативно иста тачност резултата, самим тим је ефикаснија по питању компјутерских ресурса. Недостаци у односу на FDTD методу су строжији критеријум нумеричке стабилности и незнатно већа нумеричка дисперзија.

У FDTD методи се апроксимације парцијалних извода коначним разликама рачунају у временским интервалима $(n+1/2)$, тако да се решење у будућем временском кораку $(n+1)$ може изразити експлицитно, на основу познатих вредности у временском кораку n . Један од главних недостатака FDTD методе је да је нумерички условно стабилна (CFL услов). CFL услов ограничава дужину временског корака у FDTD методи на веома малу вредност, што је код одређених електромагнетских проблема ограничавајући фактор. Код имплицитних метода то ограничење не постоји. Ове методе су „безусловно“ стабилне, што значи да, за добијање нумерички стабилног решења, не постоји ограничење за дужину временског корака. Наравно, постоје практична ограничења временског корака која су дефинисана применом у одређеном електромагнетском проблему, али не и ограничења по питању нумеричке

стабилности. Показало се да се велика тачност може добити при дужинама временског корака које су 5 до 10 пута веће од оне коју прописује CFL услов [51].

Главни представник безусловно стабилних имплицитних метода је *alternating direction implicit* (ADI) FDTD метода [15]. Добијање решења парцијалних једначина овом методом се заснива на коришћењу двоструког временског корака (*two-step scheme*). У првом временском полу-кораку (*half-time step*) просторни изводи у правцу x ($\partial/\partial x$) се рачунају у познатом временском кораку n , док се просторни изводи у правцу y ($\partial/\partial y$) рачунају у непознатом временском кораку $(n+1)$. Код другог временског полу-корака, овај поступак је обрнут. Ово мењање (алтернирање) смера парцијалних просторних извода при напредовању нумеричког алгорита, карактеристично је за ADI методу, о чему говори и њено име. Диференцирање се врши на сваком временском полу-кораку, па компоненте поља морају бити познате у сваком полу-кораку: n и $n+1/2$. Апроксимације парцијалних извода коначним разликама се добијају из непознатих („будућих“) временских корака $(n+1)$, због чега се ове метода назива имплицитном. Овакав начин диференцирања захтева коришћење инверзних матрица и типичан је за све имплицитне методе. Поред безусловне нумеричке стабилности, као главне предности ADI FDTD методе у односу на стандардну FDTD методу, ADI метода има предност у примени код моделовања високофреквентних електромагнетских поља у дисперзивним материјалима. Код оваквих симулација стандардни FDTD алгорита је нестабилан. Такође, када је потребно моделовати изузетно мале структуре у великом нумеричком домену, ADI FDTD метода је бољи избор. Ова метода налази примену у моделовању простирања електромагнетских поља ниских фреквенција у биоелектромагнетици и VLSI (*Very-large-scale integration*) системима [51]. Главни недостатак ове методе у односу на стандарду FDTD методу су двоструко дуже време потребно за израчунавање коначних разлика (услед *two-step scheme* алгорита). За електромагнетске проблеме нумеричких домена великих димензија (преко 10000 просторних ћелија) ADI FDTD метода

није погодна, јер израчунавања инверзних матрица знатно успоравају нумеричку симулацију.

Још једна ефикасна, безусловно стабилна, имплицитна метода је *locally one-dimensional* (LOD) FDTD [17] метода. Број једначина код ове методе је исти као код ADI FDTD методе, али са много мање аритметичких операција. Такође, ова метода је 20% ефикаснија од ADI FDTD методе, по питању времена потребног за израчунавање алгорита (компјутерских ресурса) [17]. Базирана је на троструком временском кораку (*three-step scheme*), који подразумева рачунање просторних парцијалних извода у три временска тренутка: $n+1/3$, $n+2/3$, $n+1$. Алгоритам је сличан ADI алгоритму, па LOD FDTD метода има исте предности и недостатке у односу на стандардну FDTD методу као ADI FDTD метода.

2.1. Полазне диференцијалне једначине у FDTD методи

FDTD метода је заснована на просторној и временској дискретизацији парцијалних диференцијалних Максвелових једначина у временском домену. Диференцијалне Максвелове једначине у временском домену које описују понашање електромагнетског поља у реалној средини, која не садржи изворе електричног и магнетског поља су [2]:

$$1. \text{ Фарадејев закон: } \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$2. \text{ Амперов закон: } \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$3. \text{ Гаусов закон за електрично поље: } \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (2.3)$$

$$4. \text{ Гаусов закон за магнетско поље: } \operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (2.4)$$

У једначинама од 2.1 до 2.4, вектор \mathbf{E} је вектор јачине електричног поља, \mathbf{B} представља вектор магнетске индукције, \mathbf{H} - вектор јачине магнетског поља, \mathbf{D} - вектор електричне индукције, \mathbf{J} - вектор густине струје и ρ - запреминска

густина слободних наелектрисања. Вектори \mathbf{D} и \mathbf{E} , као и \mathbf{B} и \mathbf{H} додатно су везани конститутивним релацијама:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.5)$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} - \vec{M}, \quad (2.6)$$

где су ε и μ електрична пермитивност и магнетска пермеабилност, респективно, а вектор \mathbf{P} је вектор јачине поларизације. Вектори \mathbf{J} и \mathbf{M} могу бити независни извори електричног и магнетског поља ($\mathbf{J}_{\text{source}}, \mathbf{M}_{\text{source}}$), па у том случају и случају средина са слабљењем има се:

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{source}} + \sigma \vec{E}; \quad \vec{M} = \vec{M}_{\text{source}} + \sigma^* \vec{H}, \quad (2.7)$$

где је σ специфична електрична проводност, а σ^* су магнетски губици (проводност).

Заменом једначина 2.6 и 2.7 у једначине 2.1 и 2.2 и представљањем (разлагањем) у Декартовом координатном систему, добијају се шест повезаних скаларних једначина [2]:

$$\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial z} - \left(\vec{J}_{\text{source}_x} + \sigma \vec{E}_x \right) \right], \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \vec{E}_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial x} - \left(\vec{J}_{\text{source}_y} + \sigma \vec{E}_y \right) \right], \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \vec{H}_x}{\partial y} - \left(\vec{J}_{\text{source}_z} + \sigma \vec{E}_z \right) \right], \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \vec{H}_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \vec{E}_y}{\partial z} - \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial y} - \left(\vec{M}_{\text{source}_x} + \sigma^* \vec{H}_x \right) \right], \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial z} - \left(\vec{M}_{\text{source}_y} + \sigma^* \vec{H}_y \right) \right], \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial y} - \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial x} - \left(\vec{M}_{\text{source}_z} + \sigma^* \vec{H}_z \right) \right]. \quad (2.13)$$

Ових шест парцијалних диференцијалних једначина чине основу FDTD нумеричког алгоритма за интеракцију електромагнетских таласа у

тродимензионалном простору. Алгоритам функционише тако што дели геометрију електромагнетског проблема на просторну решетку (*grid*) у којој су компоненте електричног и магнетног поља смештене у одређеним дискретним позицијама у простору. FDTD алгоритам решава Максвелове једначине у временском домену у дискретним временским корацима. Временски и просторни изводи у Максвеловим једначинама се апроксимирају коначним разликама, конструишући тако скуп једначина које рачунају компоненте поља у будућем временском кораку из компоненти поља у претходном временском кораку. На тај начин се ствара алгоритам који симулира прогресију (простирање) компоненти поља у времену. Да би се у потпуности објаснило функционисање методе коначних разлика у временском домену потребно је, пре свега, дефинисати на који начин се рачунају коначне разлике.

2.2. Дефиниција коначних разлика

Ако је $f(x)$ континуална функција са слике 2.1, извод функције $f(x)$, у тачки x , је приближно једнак:

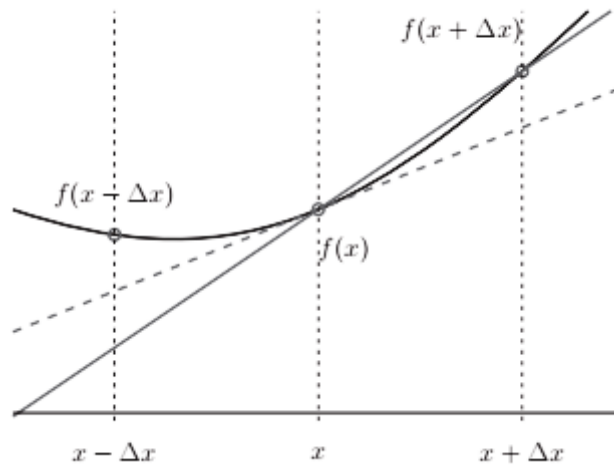
$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (2.14)$$

где је Δx прираштај у правцу x , а извод функције $f(x)$ се на слици 2.1 може видети у облику испрекидане линије. Једначина 2.14 се назива *предња коначна разлика* (*forward difference*), с обзиром да је тачка $f(x + \Delta x)$ коришћена за одређивање извода функције $f(x)$.

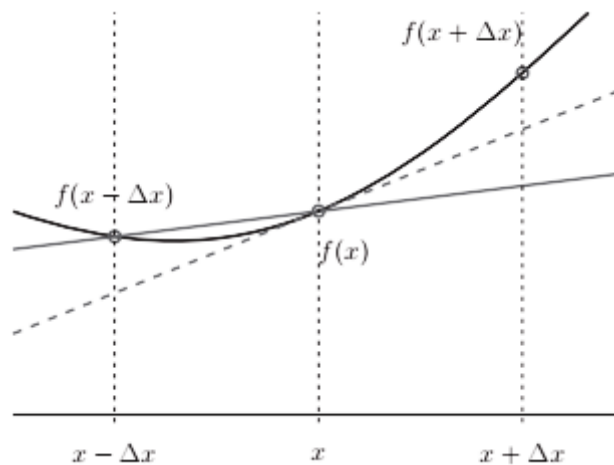
Први извод функције $f(x)$ се може израчунати и користећи тачку $f(x - \Delta x)$, као на слици 2.2, што даје:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (2.15)$$

Једначина 2.15 представља тзв. *задњу коначну разлику* (*backward difference*), због коришћења тачке $f(x - \Delta x)$, која претходи тачки $f(x)$.



Слика 2.1. Први извод функције $f(x)$ користећи предњу разлику

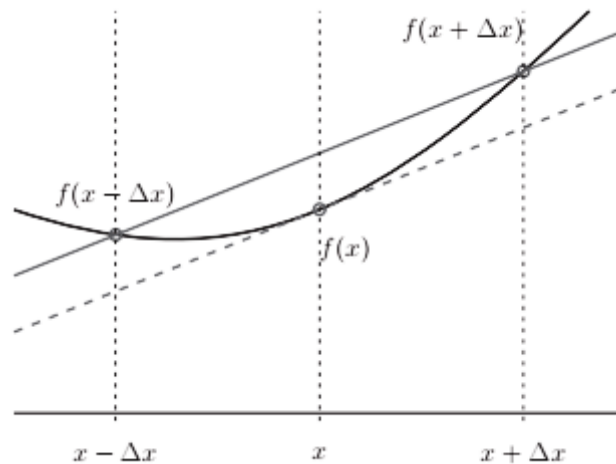


Слика 2.2. Први извод функције $f(x)$ користећи задњу разлику

Трећи начин одређивања извода $f'(x)$ је израчунавање просечне вредности између *предње* и *задње коначне разлике*, што даје:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (2.16)$$

Једначина 2.16 се назива *централна коначна разлика*, због коришћења тачке која претходи и тачке која се налази после $f(x)$, слика 2.3.



Слика 2.3. Први извод функције $f(x)$ користећи централну коначну разлику

Грешка коју проузрокују ове диференцијалне једначине се може израчунати развојем *једначина коначних разлика* (2.14, 2.15, 2.16) у Тејлоров ред. Тако, на пример, ако се једначина 2.14, за *предњу коначну разлику* $f(x+\Delta x)$, развије у Тејлоров ред и извод $f'(x)$ извуче са леве стране, добија се [18]:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} f''(x) - \frac{\Delta x^2}{6} f'''(x) - \frac{\Delta x^3}{24} f^{(4)}(x) - \dots \quad (2.17)$$

Може се видети, из једначине 2.17, да је први израз са десне стране заправо једначина за *предњу коначну разлику* (2.14), а да су остали изрази разлика између приближног и тачног извода једначине за *предњу коначну разлику* (2.14). С обзиром на то, укупна грешка је представљена управо једначином 2.14, па се израз може писати као:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (2.18)$$

где $O(\Delta x)$ представља све изразе који нису приказани са десне стране једначине. Најзначајнији израз у $O(\Delta x)$ је $\Delta x/2$, а ред Δx у том најзначајнијем изразу је 1. С обзиром на то, једначина (2.14) има тачност првог реда. Слична анализа се може применити и на једначину *задње коначне разлике* (2.15), након чега се добија:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.19)$$

Из једначине 2.19 се види да и једначина за *задњу коначну разлику* (2.15) има тачност првог реда. Ако се израчуна разлика између једначине 2.19 и 2.20, а потом извуче израз за $f'(x)$ са леве стране, има се:

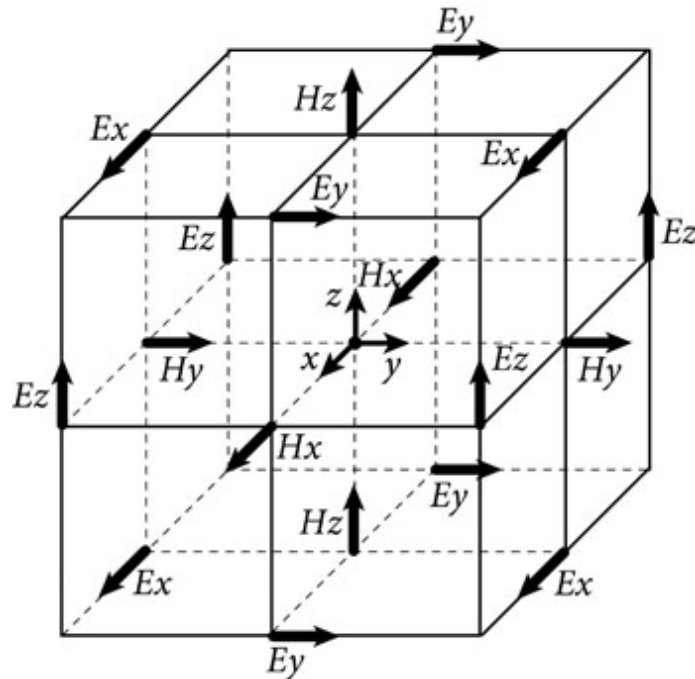
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(x) + \dots \\ &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из израза 2.20, са десне стране се може видети једначина за *централну коначну разлику* (2.16). Ред за Δx у најзначајнијем делу $O((\Delta x)^2)$ је два, па једначина за *централну коначну разлику* (2.16) поседује тачност другог реда. Стога је једначина за *централну коначну разлику* (2.16) тачнија од једначина за *предњу* (2.14) и *задњу коначну разлику* (2.15). Могуће је извести и формуле са тачношћу вишег реда, што укључује већи број суседних тачака за извођење. Конвенцијална FDTD метода је заснована на тачношћу другог реда, што се показало сасвим довољно за већину проблема примењене електромагнетике [18]. У раду ће се користити искључиво конвенционална FDTD метода другог реда тачности.

2.3. Yee-ов алгоритам

Године 1966. догодила се прекретница у нумеричкој електромагнетици. Те године је Yee (*Kane S. Yee*), амерички научник кинеског порекла, дефинисао алгоритам [1] који ће нешто касније бити назван метода коначних разлика у временском домену [4]. Yee је дефинисао скуп диференцијалних једначина са централном коначном разликом другог реда за временски зависне Максвелове једначине. У њима су сви изводи у Амперовом и Фарадејевом закону замењени коначним разликама, дискретизујући компоненте електричног и магнетног поља у времену и простору. На тај начин је 3Д електромагнетски проблем подељен на решетку (грид) сачињену од ћелија

које се називају *Yee-ове* ћелије, слика 2.4. Ћелија је сачињена од компоненти електричног и магнетног поља испреплетаних тако да се решавањем диференцијалних једначина долази до израза за будућу (непознату) компоненту поља (у времену и простору) узимајући у обзир претходну (познату). Овакав алгоритам се назива алгоритам „жабљег скока“ (*leapfrog algorithm*).



Слика 2.4. *Yee-ова* ћелија

Са слике 2.4 се види да је свака компонента електричног поља окружена са четири компоненте магнетног поља, а свака компонента магнетног поља је окружена са четири компоненте електричног поља. Алгоритам је заснован на симултаном (истовременом) решавању електричног и магнетног поља у времену и простору посредством упарених (*coupled*) Максвелових једначина, за разлику од *таласне једначине* у којој се свака од компоненти поља решава појединачно.

Ако се *Yee-ова* ћелија посматра као градивни елемент просторне 3Д решетке, униформног облика, обично се користи обележавање:

$$(i, j, k) = (i\Delta_x, j\Delta_y, k\Delta_z) \quad . \quad (2.19)$$

Овде су Δ_x , Δ_y и Δ_z просторни кораци у правцу x , y и z осе (респективно), а i , j и k цели бројеви. Ако функцију f , дискретизовану у времену и простору, обележимо са:

$$f(i\Delta_x, j\Delta_y, k\Delta_z, n\Delta_t) = f_{i,j,k}^n, \quad (2.20)$$

онда Δ_t представља временски корак, а n целобројну вредност.

Како су у Yee -овом алгоритму просторни и временски изводи представљени преко централних разлика другог реда, извод функције f по координати x , у тренутку $t_n = n\Delta_t$ ће бити:

$$\frac{df}{dx}(i\Delta_x, j\Delta_y, k\Delta_z, n\Delta_t) = \frac{f_{i+1/2,j,k}^n - f_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + O[(\Delta x)^2]. \quad (2.21)$$

Из 2.23 се види да је $\pm 1/2$ инкремент i функције f , који означава просторну коначну разлику $\pm 1/2\Delta_x$. На исти начин, као у 2.23, могу се написати изводи $\partial f/\partial y$ и $\partial f/\partial z$.

Парцијални извод функције f по времену t за фиксну просторну тачку (i, j, k) има облик:

$$\frac{df}{dt}(i\Delta_x, j\Delta_y, k\Delta_z, n\Delta_t) = \frac{f_{i,j,k}^{n+1/2} - f_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} + O[(\Delta t)^2], \quad (2.22)$$

где $\pm 1/2$ инкремент n (временска координата) функције f , означава временску коначну разлику $\pm 1/2\Delta_t$.

На основу овог начина обележавања могу се написати Максвелове једначине представљене преко Yee -овог алгоритма у три димензије. Ако се узме, на пример, електромагнетско поље у простору који може садржати материјале који апсорбују компоненте електричног и магнетског поља (ϵ , μ , σ), компонента вектора јачине електричног поља \mathbf{E}_x у правцу x осе, у тренутку t , има облик:

$$\frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial z} - \left(\vec{J}_{\text{source}_x} + \sigma \vec{E}_x \right) \right] \quad (2.23)$$

Једначина 2.25 представља Другу Максвелову једначину. Узимајући у обзир једначине 2.14, 2.15, 2.16, као и слику 2.4, поље \vec{E}_x ($i, j+1/2, k+1/2, n$) се представља на следећи начин [2]:

$$\frac{\vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \cdot \left(\frac{\vec{H}_z |_{i,j+1,k+1/2}^n - \vec{H}_z |_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} - \frac{\vec{H}_y |_{i,j+1/2,k+1}^n - \vec{H}_y |_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} - \vec{J}_{\text{source}_x} |_{i,j+1/2,k+1/2}^n - \sigma_{i,j+1/2,k+1/2} \cdot \vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^n \right) \quad . \quad (2.24)$$

Све вредности компоненти поља са десне стране једначине 2.26 су у тренутку n . Како је вредност поља \vec{E}_x у тренутку n непозната (познато је само у тренутку $n-1/2$), узима се полуимплицитна апроксимација:

$$\vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^n = \frac{\vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + \vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}}{2}, \quad (2.25)$$

како би се рачунањем аритметичке средине дошло до решења. Вредности поља \vec{E}_x у тренутку n представља аритметичку средину између претходног ($n-1/2$) и будућег ($n+1/2$) временског корака, па се заменом 2.27 у 2.26 и множењем са Δt , добија:

$$\vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} - \vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} = \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \cdot \left[\frac{\vec{H}_z |_{i,j+1,k+1/2}^n - \vec{H}_z |_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} - \frac{\vec{H}_y |_{i,j+1/2,k+1}^n - \vec{H}_y |_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} - \vec{J}_{\text{source}_x} |_{i,j+1/2,k+1/2}^n - \sigma_{i,j+1/2,k+1/2} \cdot \left(\frac{\vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} + \vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2}}{2} \right) \right] \quad . \quad (2.26)$$

Груписањем компоненти поља \vec{E}_x и извлачењем са леве стране једначине 2.28, за тренутак $n+1/2$, има се:

$$\left(1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}\right) \vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \left(1 - \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}\right) \vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \cdot \left(\frac{\vec{H}_z |_{i,j+1,k+1/2}^n - \vec{H}_z |_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} - \vec{J}_{\text{source}_x} |_{i,j+1/2,k+1/2}^n - \frac{\vec{H}_y |_{i,j+1/2,k+1}^n - \vec{H}_y |_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} \right) \quad (2.29)$$

Дељењем обе стране са $\left(1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}\right)$, добија се поље \mathbf{E}_x у тренутку $n+1/2$:

$$\vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right) \vec{E}_x |_{i,j+1/2,k+1/2}^{n-1/2} + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right) \cdot \left(\frac{\vec{H}_z |_{i,j+1,k+1/2}^n - \vec{H}_z |_{i,j,k+1/2}^n}{\Delta y} - \vec{J}_{\text{source}_x} |_{i,j+1/2,k+1/2}^n - \frac{\vec{H}_y |_{i,j+1/2,k+1}^n - \vec{H}_y |_{i,j+1/2,k}^n}{\Delta z} \right) \quad (2.30)$$

Делови израза 2.30, $\left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right)$ и $\left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+1/2,k+1/2}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}} \right)$, дефинишу се као

коэффициенти поља, $C_{a|ij,k}$ и $C_{b|ij,k}$. Они су врло важни јер одређују особине средине у којима се простире електромагнетско поље.

На исти начин као једначина 2.30, изводе се релације за остале компоненте вектора јачине електричног поља \mathbf{E}_y и \mathbf{E}_z :

$$\vec{E}_y |_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i-1/2,j+1,k+1/2} \Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1,k+1/2} \Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}} \right) \vec{E}_y |_{i-1/2,j+1,k+1/2}^{n-1/2} + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1,k+1/2} \Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1,k+1/2}}} \right) \begin{pmatrix} \frac{\vec{H}_x |_{i-1/2,j+1,k+1}^n - \vec{H}_x |_{i-1/2,j+1,k}^n}{\Delta z} - \frac{\vec{H}_z |_{i,j+1,k+1/2}^n - \vec{H}_z |_{i-1,j+1,k+1/2}^n}{\Delta x} \\ -\vec{J}_{\text{source}_y} |_{i-1/2,j+1,k+1/2}^n \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

и

$$\vec{E}_z |_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n+1/2} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i-1/2,j+1/2,k+1} \Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1/2,k+1} \Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}} \right) \vec{E}_z |_{i-1/2,j+1/2,k+1}^{n-1/2} + \left(\frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2,j+1/2,k+1} \Delta t}{2\varepsilon_{i-1/2,j+1/2,k+1}}} \right) \begin{pmatrix} \frac{\vec{H}_y |_{i,j+1/2,k+1}^n - \vec{H}_y |_{i-1,j+1/2,k+1}^n}{\Delta x} - \frac{\vec{H}_x |_{i-1/2,j+1,k+1}^n - \vec{H}_x |_{i-1/2,j,k+1}^n}{\Delta y} \\ -\vec{J}_{\text{source}_z} |_{i-1/2,j+1/2,k+1}^n \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Аналогно се изводе компоненте магнетног поља \mathbf{H}_x , \mathbf{H}_y и \mathbf{H}_z :

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_x \Big|_{i-1/2, j+1, k+1}^{n+1} &= \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i-1/2, j+1, k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i-1/2, j+1, k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2, j+1, k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i-1/2, j+1, k+1}}} \right) \vec{H}_x \Big|_{i-1/2, j+1, k+1}^n + \\
 &+ \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i-1/2, j+1, k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-1/2, j+1, k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i-1/2, j+1, k+1}}} \right) \left(\frac{\frac{\vec{E}_y \Big|_{i-1/2, j+1, k+3/2}^{n+1/2} - \vec{E}_y \Big|_{i-1/2, j+1, k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \frac{\vec{E}_z \Big|_{i-1/2, j+3/2, k+1}^{n+1/2} - \vec{E}_z \Big|_{i-1/2, j+1/2, k+1}^{n+1/2}}{\Delta y}}{\Delta y} \right. \\
 &\quad \left. - \vec{M}_{\text{source}_x} \Big|_{i-1/2, j+1, k+1}^{n+1/2} \right), \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_y \Big|_{i, j+1/2, k+1}^{n+1} &= \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i, j+1/2, k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i, j+1/2, k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i, j+1/2, k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i, j+1/2, k+1}}} \right) \vec{H}_y \Big|_{i, j+1/2, k+1}^n + \\
 &+ \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i, j+1/2, k+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i, j+1/2, k+1}^* \Delta t}{2\mu_{i, j+1/2, k+1}}} \right) \left(\frac{\frac{\vec{E}_z \Big|_{i+1/2, j+1/2, k+1}^{n+1/2} - \vec{E}_z \Big|_{i-1/2, j+1/2, k+1}^{n+1/2}}{\Delta x} - \frac{\vec{E}_x \Big|_{i, j+1/2, k+3/2}^{n+1/2} - \vec{E}_x \Big|_{i, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta z}}{\Delta x} \right. \\
 &\quad \left. - \vec{M}_{\text{source}_y} \Big|_{i, j+1/2, k+1}^{n+1/2} \right), \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_z \Big|_{i, j+1, k+1/2}^{n+1} &= \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i, j+1, k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i, j+1, k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i, j+1, k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i, j+1, k+1/2}}} \right) \vec{H}_z \Big|_{i, j+1, k+1/2}^n + \\
 &+ \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i, j+1, k+1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i, j+1, k+1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i, j+1, k+1/2}}} \right) \left(\frac{\frac{\vec{E}_x \Big|_{i, j+3/2, k+1/2}^{n+1/2} - \vec{E}_x \Big|_{i, j+1/2, k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{\vec{E}_y \Big|_{i+1/2, j+1, k+1/2}^{n+1/2} - \vec{E}_y \Big|_{i-1/2, j+1, k+1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}}{\Delta y} \right. \\
 &\quad \left. - \vec{M}_{\text{source}_z} \Big|_{i, j+1, k+1/2}^{n+1/2} \right). \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Скуп диференцијалних једначина 2.30-2.35 са коначним разликама чини језгро Yee -овог алгоритма у три просторне димензије. Дводимензионални и једнодимензиони FDTD алгоритам функционише по истом принципу, али са знатно мањим бројем диференцијалних једначина.

Извршавање FDTD алгоритма је подељено у неколико сегмената. Најбољи начин за разумевање истог је алгоритамски приказ, слика 2.5 [18]. Ово је упрошћени облик FDTD алгоритма у коме су приказани најосновнији кораци у израчунавању.

У првом кораку, на слици 2.5, приступа се подешавању димензије простора у коме се врши симулација, укључујући дефинисање објеката, типа средине, извора, као и других основних параметара. У другом кораку се израчунавају коефицијенти поља који садрже параметре средине у којој се поље простира. Они се израчунавају пре почетка временског инкрементирања. У истом кораку се врши иницијализација компоненти поља на почетну вредност, која је обично нула. Након што почне временско инкрементирање, магнетско поље се простира у временским корацима $(n+0.5)\Delta t$ користећи једначине 2.33-2.35. Онда се компоненте електричног поља крећу временским корацима $(n+1)\Delta t$, користећи једначине 2.30-2.32.

Простор у коме се симулира простирање електромагнетског поља је коначних димензија, стога се на крајевима простора имплементирају одређени гранични услови. То се ради у следећем кораку. Начин на који се рачунају компоненте поља на самим границама домена зависи од врсте имплементираних граничних услова. Након што су се компоненте поља простирале у времену и након имплементације граничних услова, тренутне вредности електричног или магнетског поља је могуће експортирати и анализирати у реалном времену, са циљем израчунавања жељених параметара. Алгоритам се наставља све до маскималног дефинисаног временског корака.



Слика 2.5. FDTD алгоритам [3]

2.4. Нумеричка стабилност и дисперзија

У класичној методи коначних разлика у временском домену постоје одређена ограничења која се тичу дужине временског корака (Δt) и величине просторног корака (Δx , Δy и Δz) FDTD нумеричког домена. Ограничења постоје како би гарантовала нумеричку стабилност самог FDTD алгоритма. Код униформних FDTD нумеричких домена, који су коришћени у овом раду, просторни кораци су једнаки у све три димензије ($\Delta x = \Delta y = \Delta z$). Како би извели опште релације које се односе на нумеричку стабилност у FDTD алгоритму, могуће је користити Максвелове једначине у једној димензији, па закључке аналогно применити на 2Д и 3Д домен.

Ако се узме у обзир Друга Максвелова једначина (Амперов закон) у слободном простору, без извора поља, поље E_z ($i\Delta x$, $(n+1/2)\Delta t$) приказано у облику са коначним разликама у 1Д домену, биће:

$$\varepsilon \frac{\vec{E}_z \Big|_i^{n+1} - \vec{E}_z \Big|_i^n}{\Delta t} = \frac{\vec{H}_y \Big|_{i+1/2}^{n+1/2} - \vec{H}_y \Big|_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}. \quad (2.32)$$

Ако се из једначине 2.37 изрази $E_z \Big|_i^{n+1}$ компонента вектора јачине електричног поља, следи:

$$\vec{E}_z \Big|_i^{n+1} = \vec{E}_z \Big|_i^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left(\vec{H}_y \Big|_{i+1/2}^{n+1/2} - \vec{H}_y \Big|_{i-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (2.33)$$

Ова једначина представља једначину за E_z поље, чија вредност зависи од претходне вредности вектора јачине електричног поља у времену, као и од суседних вредности вектора јачине магнетског поља. На исти начин се може написати једначина за вредност магнетног поља.

Коефицијент $\Delta t/\varepsilon\Delta x$ представља однос временског и просторног корака. Како је максимална брзина простирања електромагнетског таласа у слободном простору $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, тако је максимална раздаљина коју талас може прећи у једном временском кораку $c\Delta t$. Нумеричка стабилност у FDTD методи одређена је *Courant–Friedrichs–Lewy* (CFL) условом [2]:

$$S \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (2.34)$$

којим се захтева да је временски корак Δt са просторним кораком Δx у следећој вези:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}. \quad (2.35)$$

Број S , у једначини 2.39, назива се CFL услов или *Courant*-ов број и представља фактор нумеричке стабилности FDTD методе. CFL услов у случају 2Д FDTD домена је:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c\sqrt{2}}, \quad (2.36)$$

а у случају 3Д FDTD домена:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c\sqrt{3}}. \quad (2.37)$$

Код неуниформних FDTD решетки, где је $\Delta x \neq \Delta y \neq \Delta z$, CFL услов нумеричке стабилности за 3Д FDTD нумерички домен је:

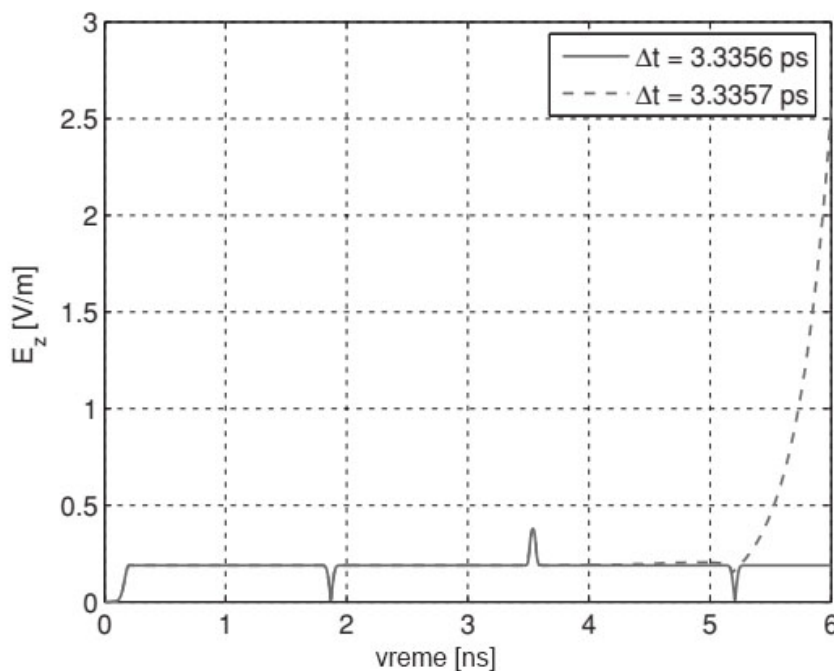
$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\Delta y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\Delta z)^2}}}}. \quad (2.38)$$

Претходне релације показују да талас у FDTD решетки не може прећи више од једне ћелије у току једног временског корака („магични“ корак). Уколико CFL услов није испуњен, тј. ако је временски корак предугачак, долази до прогресивне нестабилности у алгоритму. Нестабилност у FDTD алгоритму подразумева појаву нумеричких резултата који не представљају тачне вредности компоненти поља и чија вредност, са повећањем броја временских корака, тежи бесконачности.

У већини симулација елетромагнетских проблема, прво се приступа дефинисању параметра просторног корака Δx . Просторни корак се бира тако

да адекватно представи геометријску структуру која се симулира, након чега се дефинише вредност параметра (дужина трајања) временског корака Δt .

Ако се узме у обзир 1Д FDTD домен, сачињен од просторних ћелија $\Delta x = 1\text{mm}$, дужина временског корака који испуњава CFL услов би била $\Delta t \leq 3,3356\text{ ps}$. На слици 2.6, приказана је вредност амплитуде електричног поља E_z у случају две различите дужине временског корака: $\Delta t = 3,3356\text{ ps}$ и $\Delta t = 3,3357\text{ ps}$. Код првог типа временског корака, вредност E_z је приказана пуном линијом, види се да вредност поља опада након одређеног времена. За разлику од првог, вредност поља E_z у случају другог типа временског корака почиње да дивергира ка бесконачности како се број временских корака повећава. На слици 2.6 се види пример нумеричке нестабилности која резултате симулације простирања електромагнетског поља чини неупотребљивим.



Слика 2.6 Вредност амплитуде електричног поља E_z у случају две различите дужине временског корака: $\Delta t = 3,3356\text{ ps}$ – испуњен CFL услов, $\Delta t = 3,3357\text{ ps}$ – није испуњен CFL услов, слика преузета из референце [18]

CFL услов нумеричке стабилности важи и у случају нехомогених средина, где је брзина простирања мања од брзине c . На нумеричку стабилност битно утичу и други фактори, као што су: апсорбујући гранични услови,

неуниформне решетке и нелинеарни материјали. Иако испуњене CFL услова даје нумерички стабилно решење, то не значи да ће решење бити тачно. Стога, овај услов, пре свега, треба сматрати везом просторног и временског корака.

Поред нумеричке стабилности, која је дефинисана CFL условом, појава која значајно утиче на тачност алгоритма коначних разлика је нумеричка дисперзија. У континуалним срединама, дисперзија се односи на промене фазне брзине v_p у зависности од фреквенције или таласне дужине. Дисперзија је присутна у свим материјалним срединама, мада се она може избећи одабиром одређеног фреквенцијског подручја у коме нема дисперзије или је она занемарљиво мала. За разлику од овог типа дисперзије, нумеричка дисперзија се односи на дисперзију која настаје услед процеса дискретизације. Дискретизација може довести до појаве нумеричке анизотропије, нпр. у случају када се фазна брзина мења са променом правца простирања таласа. Оваква врста анизотропије се разликује од анизотропије средине.

Једначина за израчунавање нумеричке дисперзије се може извести за сваки алгоритам посебно. При креирању FDTD алгоритма или било ког другог алгоритма са коначним разликама, важно је знати колико је нумеричке дисперзије присутно у одабраном алгоритму и колико дисперзије алгоритам може толерисати.

Апроксимирање парцијалних извода неке континуалне функције коначним разликама доводи до појаве нумеричке грешке у решењу. На пример, и при простирању кроз хомогени слободан простор, нумеричко решење брзине простирања таласа ће неминовно одступати од брзине простирања светлости кроз вакуум. Ако се посматра раван талас који се простире у слободном простору, у правцу x осе [3]:

$$\vec{E}_z(x, t) = E_0 \cos(k_x x - \omega t), \quad (2.39)$$

$$\vec{H}_y(x, t) = H_0 \cos(k_x x - \omega t), \quad (2.40)$$

где $E_z(x, t)$ задовољава таласну једначину:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E}_z - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_z = 0. \quad (2.41)$$

Ако се 2.44 замени у 2.46, следи:

$$k_x^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2. \quad (2.42)$$

Једначина 2.47 се назива *једначина дисперзије* и представља везу између просторне фреквенције k_x и временске фреквенције ω . Ова једначина је аналитички тачна.

Једначина која описује нумеричку дисперзију се може извести на основу коначних разлика следећих Максвелових једначина. За 1Д случај равног таласа, поља $\vec{E}_z(x, t)$ и $\vec{H}_y(x, t)$ у слободном простору су:

$$\frac{\partial \vec{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{H}_y}{\partial x}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \vec{H}_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \vec{E}_z}{\partial x}. \quad (2.44)$$

Ове једначине се могу представити преко коначних разлика, као:

$$\varepsilon_0 \frac{\vec{E}_z|_i^{n+1} - \vec{E}_z|_i^n}{\Delta t} = \frac{\vec{H}_y|_i^{n+1/2} - \vec{H}_y|_{i-1}^{n+1/2}}{\Delta x}, \quad (2.45)$$

$$\mu_0 \frac{\vec{H}_y|_i^{n+1/2} - \vec{H}_y|_i^{n-1/2}}{\Delta t} = \frac{\vec{E}_z|_{i+1}^n - \vec{E}_z|_i^n}{\Delta x}, \quad (2.46)$$

Једначине равног таласа 2.44 и 2.45 су континуалне у времену и простору и могу се представити у дискретном времену и простору на следећи начин:

$$\vec{E}_z^n(i) = E_0 \cos(k_x i \Delta x - \omega n \Delta t), \quad (2.47)$$

$$\vec{E}_z^{n+1}(i) = E_0 \cos(k_x i \Delta x - \omega(n+1) \Delta t), \quad (2.48)$$

$$\vec{E}_z^n(i+1) = E_0 \cos(k_x (i+1) \Delta x - \omega n \Delta t), \quad (2.49)$$

$$\vec{H}_y^{n+1/2}(i) = H_0 \cos(k_x(i+1/2)\Delta x - \omega(n+1/2)\Delta t), \quad (2.50)$$

$$\vec{H}_y^{n+1/2}(i-1) = H_0 \cos(k_x(i-1/2)\Delta x - \omega(n+1/2)\Delta t), \quad (2.51)$$

$$\vec{H}_y^{n-1/2}(i) = H_0 \cos(k_x(i+1/2)\Delta x - \omega(n-1/2)\Delta t). \quad (2.52)$$

Из једначина 2.52, 2.53 и 2.55 се може извести:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{\Delta t} &= \left[\cos(k_x i \Delta x - \omega(n+1)\Delta t) - \cos(k_x i \Delta x - \omega n \Delta t) \right] \\ &= \frac{H_0}{\varepsilon_0 \Delta x} \left[\begin{array}{c} \cos(k_x(i+1/2)\Delta x - \omega(n+1/2)\Delta t) \\ -\cos(k_x(i-1/2)\Delta x - \omega(n+1/2)\Delta t) \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ако се узме у обзир идентитет из тригонометрије:

$$\cos(u-v) - \cos(u+v) = 2\sin(u)\sin(v), \quad (2.54)$$

са леве стране једначине 2.59, замени $u = k_x i \Delta x - \omega(n+1/2)\Delta t$ и $v = 1/2\Delta t$, а са десне стране $u = k_x i \Delta x - \omega(n+1/2)\Delta t$ и $v = -1/2\Delta t$, следи [3]:

$$\frac{E_0}{\Delta t} \sin(1/2 * \omega \Delta t) = \frac{-H_0}{\varepsilon_0 \Delta x} \sin(1/2 * k_x \Delta x). \quad (2.55)$$

Слично као код вектора електричног поља, тако се користећи се једначинама од 2.54-2.57, може извести једначина за случај вектора магнетског поља:

$$\frac{H_0}{\Delta t} \sin(1/2 * \omega \Delta t) = \frac{-E_0}{\mu_0 \Delta x} \sin(1/2 * k_x \Delta x). \quad (2.56)$$

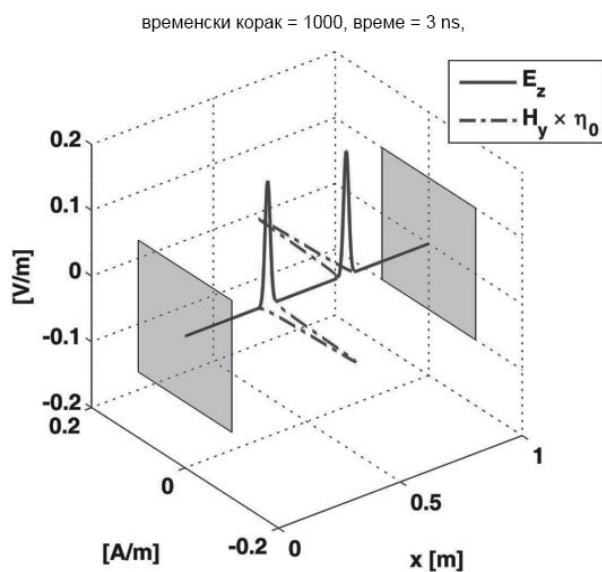
Комбиновањем једначина 2.60 и 2.61 може се извести једначина нумеричке дисперзије за 1Д случај:

$$\left[\frac{1}{c \Delta t} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right]^2. \quad (2.57)$$

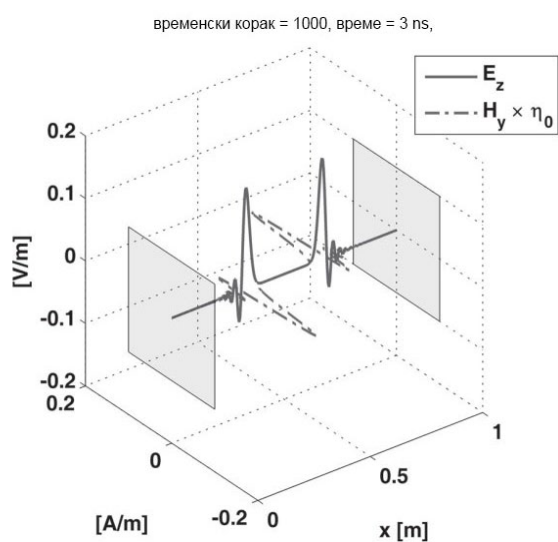
Из 2.62 се види да се једначина нумеричке дисперзије разликује од једначине дисперзије у идеалном случају (2.47). Разлике између ове две једначине показују да постоји одступање од аналитичког решења. Одступања су последица грешке која потиче од апроксимација коначних разлика. Уколико се постави да је $\Delta t = \Delta x/c$, једначина 2.62 се претвара у једначину 2.47, што значи да не постоји дисперзија при простирању таласа кроз слободан простор. Увођењем материјалне средине у нумерички простор доводи до додатне појаве дисперзије. Ово је логично, као што је логично и да се смањењем величине просторних корака, као и смањењем трајања временског корака, смањује и нумеричка дисперзија.

Приликом простирања, таласи са различитим фреквенцијама имају различите фазне брзине, што генерише дисперзију. Сваки талас је сума више синусоидалних таласа различитих фреквенција, па услед постојања нумеричке дисперзије долази до дисторзије таласног облика. Ако се, на пример, посматра 1Д случај простирања таласа у слободном простору дужине 1 метра ($\Delta x = 1\text{mm}$), са временским кораком од $\Delta t = 3\text{ps}$. Талас је са изворном функцијом Гаусовог импулса. На слици 2.7а су приказане амплитуде вектора јачине електричног и магнетног поља у тренутку $t = 3\text{ps}$. Слично, на слици 2.7б, приказане су амплитуде електричног и магнетног поља у тренутку $t = 3\text{ps}$, са $\Delta x = 4\text{mm}$. Иако су амплитуде компоненти поља скоро исте, на слици 2.7а се јасно види да Гаусов импулс није изобличен. Иако постоји нумеричка дисперзија, она је занемарљива. На слици 2.7б се примећује да постоји дисторзија импулса за $\Delta x = 4\text{mm}$ и $\Delta t = 3\text{ps}$. Повећање просторног корака као последицу има евидентну појаву нумеричке дисперзије.

Разматран 1Д случај простирања таласа у слободном простору, има за циљ дефинисање основних релација које описују дисперзију у FDTD методи. У случају материјалне средине, као и у случајевима 2Д и 3Д нумеричког простора, постоје додатни фактори који утичу на нумеричку дисперзију.



а)



б)

Слика 2.7 Амплитуде вектора јачине електричног и магнетног поља у тренутку $t = 3 \text{ ns}$, за: а) $\Delta x = 1 \text{ mm}$, б) $\Delta x = 4 \text{ mm}$, слика преузета из референце

[18]

3. Извори у методи коначних разлика у временском домену

Извори су фундаментална компонента FDTD симулација, а њихов избор зависи од типа електромагнетског проблема који се симулира. Ефикасно моделовање извора електромагнетског поља, у циљу смањења дисперзије и искоришћене компјутерске меморије, један је од главних изазова у FDTD симулацијама. Без обзира који је тип у питању, извори представљају побуђивање електричног и магнетског поља у неки таласни облик који је у функцији времена. Избор таласног облика такође зависи од електромагнетског проблема који се анализира. Осим таласног облика извора у временском домену, код одабира се у разматрање узима и таласни облик фреквенцијском домену.

У општем случају, извори се могу поделити на тврде и меке изворе. Тврди извори представљају просто додељивање жељене временске функције некој компоненти електричног или магнетског поља у FDTD решетке. Таква временска функција је потпуно независна од нумеричког домена.

Како је вредност вектора јачине електричног поља додељена тачки $T_{(i,j,k)}$ без обзирања на компоненте поља које окружују тачку, постоји велика разлика између једначина FDTD алгоритма дате тачке и једначина околних тачака. Та разлика доводи до појаве значајне количине нежељених ефеката у нумеричким резултатима, посебно у једнодимензионим FDTD симулацијама. У случају рефлектованих таласа (од неких структура у нумеричком домену) који се врате у тачку у којој је генерисана побуда, доћи ће до нежељене, нефизичке рефлексије. Тачка у којој се налази тврди извор се понаша као савршено проводно тело (*Perfect Electric Conductor* - PEC), кроз које таласи не могу проћи и од ког се рефлектују натраг у нумерички домен од интереса. На тај начин симулација губи смисао, јер извор неадекватно симулира инцидентни талас.

Један начин да се рефлексија елиминише је да се тврди извор одстрани из алгоритма, након што се његово трајање заврши. Овакав приступ се не може применити у случајевима када се за временску функцију извора користи континуална синусоида. Таква синусоида има продужено трајање, тако да извор остаје активан и након што рефлектовани таласи допру до истог.

Други начин је да се извор распореди на одређени број тачака у FDTD решетке, али то има за последицу повећање комплексности имплементације извора. Углавном, коришћење тврдог извора у 1Д симулацијама са малим бројем временских корака није препоручљиво. Напротив, код 2Д и 3Д FDTD симулација, коришћење оваквог извора може бити корисно. Наиме, тврди извор својим рефлектујућим дејством симулира Херцов дипол, антену или крај коаксијалног кабла у вишедимензионим случајевима.

Код меког (зависног) извора, начин имплементације подразумева да се временска функција извора имплементира у FDTD алгоритам и тачку решетке начини зависном од алгоритма. У том случају се тачка, у којој је извор, мења у складу једначинама алгоритма, па је нагла промена избегнута. Меки извори су знатно комплекснији за имплементацију у FDTD алгоритам од тврдых, што доводи до повећања компјутерских ресурса.

Постоји велики број различитих типова извора који се користе у симулацијама простирања електромагнетског поља помоћу FDTD методе. Осим поделе на меке и тврде, постоји и подела на интерне и екстерне изворе. Интерни су они који су лоцирани у унутрашњости нумеричког FDTD домена, а екстерни „изван“ домена. Импулсни извори који се генеришу у једној ћелији FDTD решетке називају се и тачкасти, јер фактички потичу из једне тачке домена. У овом раду су анализирани типови извора који се највише користе у FDTD симулацијама. Гаусов импулс, диференцирани Гаусов и Рикеров импулс се могу сматрати тачкастим, али и интерним изворима. Хармонијски извори могу бити интерни и екстерни. Као представник екстерних извора најбољи пример је TF/SF тип извора. Овај тип извора је таласни фронт који у нумеричком домену делује у форми равних таласа. У овом поглављу су

описане основне карактеристике извора, а у глави 5. су детаљно анализирани и оптимизовани за коришћење у FDTD методи.

3.1 Гаусов импулс

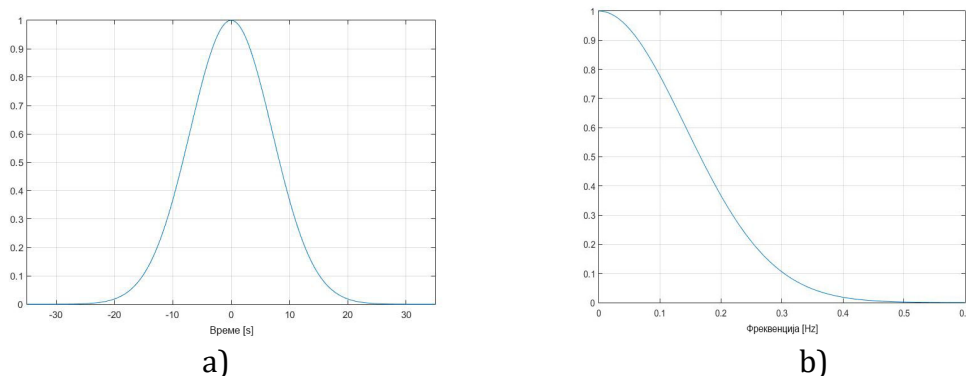
У FDTD симулацијама најчешће се користе импулсни извори због особине да генеришу широк спектар фреквенција у току једне FDTD симулације. Гаусов импулс има веома широк фреквенцијски спектар, стога је један од најпопуларнијих импулса који се користе у FDTD симулацијама. Временска функција Гаусовог импулса је:

$$g(t) = e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}, \quad (3.4)$$

где t представља време, а τ ширину Гаусовог импулса временском и фреквенцијском домену. Осим временске функције и таласног облика импулса, који су од кључног значаја за симулацију, битно је узети у обзир и облик импулса у фреквенцијском домену. Ако се на једначину 3.4 примени Фуријеова трансформација, Гаусов импулс у фреквенцијском домену ће имати облик:

$$G(\omega) = \tau\sqrt{\pi}e^{-\frac{\tau^2\omega^2}{4}}. \quad (3.5)$$

На слици 3.1 се могу видети облици Гаусовог импулса у временском и у фреквенцијском домену. Како оптимизовати Гаусов импулс у адекватно га имплементирати у FDTD алгоритам, детаљно ће бити описано у поглављу 5.



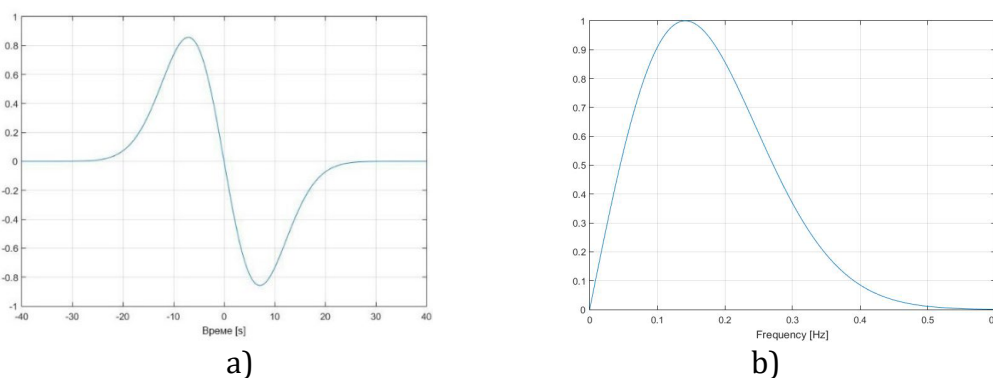
Слика 3.1 Гаусов импулс: а) временски домен; б) фреквенцијски домен

3.2 Диференцирани Гаусов импулс и Рикеров импулс

Постоје различите варијанте Гаусовог импулса, као што су основни или чист (*pure*), диференцирани и модулисани Гаусов импулс. У одређеним случајевима потребно је генерисати извор који у једној симулацији генерише широк спектар фреквенција, не укључујући нулте и веома ниске фреквенције. За такве случајеве препоручљива је примена диференцираних облика Гаусовог импулса. Један од верзија која се често користи је први извод Гаусовог импулса, чија временска функција има облик:

$$g(t) = -2 \left(\frac{t}{\tau} \right) e^{-\left(\frac{t}{\tau} \right)^2}. \quad (3.6)$$

Таласни облик првог извода Гаусовог импулса је приказан на слици 3.2а, а облик импулса у фреквенцијском домену је на слици 3.2б.



Слика 3.2 Диференцирани Гаусов импулс: а) временски домен; б) фреквенцијски домен

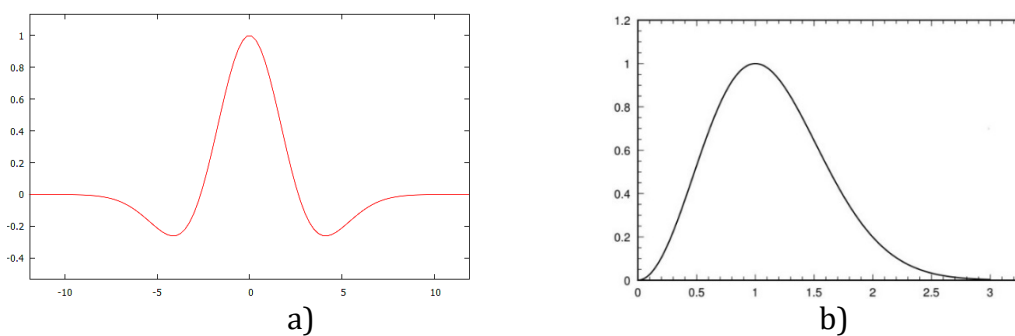
Посебан облик диференцираног Гаусовог импулса формулисао је геофизичар Norman H. Ricker (1896.–1980.) 1953. године [21], који је по њему и назван. Рикеров импулс (*wavelet*) или тзв. “Мексички шешир” (*Mexican Hat wavelet*) представља извод Гаусовог импулса четвртог реда, слика 3.3а. Осим у математици и нумеричкој анализи, највише се користи у сеизмологији, због свог симетричног облика и добрих карактеристика за симулирање земљотреса. Дефинисан је само једним параметром, f_p - “*peak*” фреквенцијом и аналитички се представља као [51]:

$$R(t) = (1 - 2\pi^2 f_p^2 t^2) e^{(-\pi^2 f_p^2 t^2)}, \quad (3.7)$$

где је f_p - фреквенција са највећом енергијом. Фуријеовом трансформацијом се долази до функције Рикеровог импулса у фреквенцијском домену:

$$R(\omega) = -\frac{2}{f_p \sqrt{\pi}} \left(\frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2 e^{-j\omega \left(\frac{\omega}{2\pi f_p} \right)^2}. \quad (3.8)$$

Рикеров импулс у временском и фреквенцијском домену приказан је на 3.3а и 3.3б.



Слика 3.3 Рикеров импулс: а) временски домен; б) фреквенцијски домен

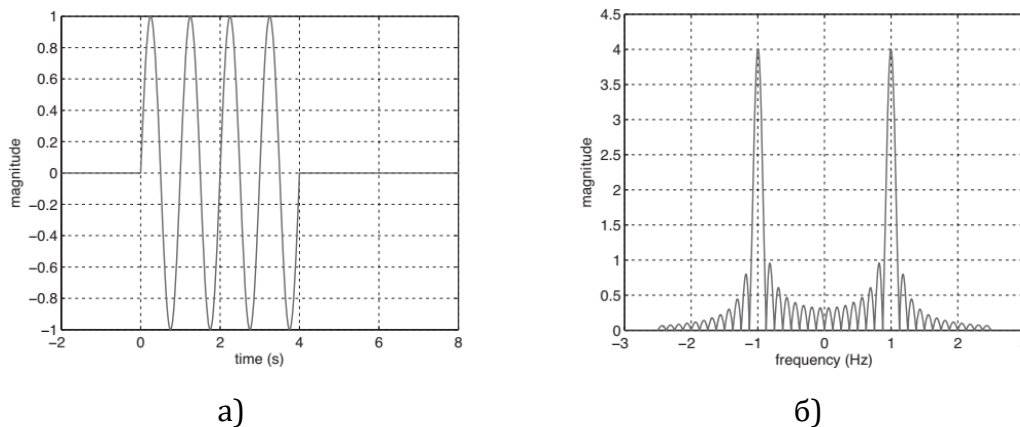
3.3 Хармонијски извори

У случајевима када је потребно симулирати извор са једном фреквенцијом, погодно је користити хармонијске изворе. Такви извори могу имати синусне или косинусне временске функције и бити континуални или кратког трајања. У случајевима FDTD симулација са хармонијским изворима кратког трајања, приликом „укључења“ и „искључења“ временске функције импулса долази до појаве нежељених компоненти импулса у временском и фреквенцијском домену. Та појава доводи до нумеричке дисперзије која је нарочито изражена код хармонијских извора који имају косинусну временску функцију као основу. Иницијална вредност косинусне функције је 1, па је „укључење“ такве временске функције у FDTD алгоритму увек праћено појавом нежељене нумеричке дисперзије [2]. Коришћење таквих извора у FDTD симулацијама се избегава, па су зато у раду анализирани само хармонијски извори са синусном

временском функцијом. Ако је временска функција неког извора синусна, он може имати следећи облик:

$$h(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad (3.9)$$

где f_0 представља фреквенцију импулса, а t време. На слици 3.4а, приказан је импулс синусног облика са фреквенцијом од 1 Hz и трајањем од $0 < t < 4$ у временском домену. У фреквенцијском домену импулс има облик као на слици 3.4б. Хармонијски извори су као основна временска функција погодни за коришћење и код других врста извора, као код модулисаног Гаусовог импулса или у симулацијама TF/SF равних таласа.



Слика 3.4 Хармонисјки извор синусног облика [18]: а) временски домен, б) фреквенцијски домен

3.4 TF/SF равни таласи у FDTD симулацијама

Карактеристика претходно описаних типова извора је да се њихова поља простиру у свим правцима усвојеног FDTD нумеричког домена. Међутим, постоје проблеми поља када је неопходно у FDTD симулацију имплементирати извор чије се поље простире искључиво у једном правцу. Показано је да је један од најефикаснијих начина да се то постигне ако се користи TF/SF (*Total Field/Scattered Field*) [27] техника екситације. TF/SF техника омогућава FDTD моделовање дуготрајних или краткотрајних импулсних или синусоидних екситација у облику равних таласа који се могу простирати у било ком правцу у изабраном нумеричком домену. Многи проблеми електромагнетских поља, као што су израчунавање површине радарског пресека (*Radar cross-section*),

као и анализа поља антена у далекој зони, могу се решавати користећи ову технику. TF/SF техника је први пут уведена у [52], полазећи од Хајгенсових површина (*Huygen's surfaces*), док је детаљна дискусија и имплементација TF/SF равних таласа дата у [2]. Историјски гледано, TF/SF техника је развијена како би се омогућило генерисање равних таласа у FDTD методи, али у теорији је, помоћу ове технике, могуће генерисати било који тип инцидентног таласа. У овој дисертацији су разматрани искључиво равни таласи који се простиру само у једном правцу.

Формулација TF/SF технике базирана је на особинама линеарности Максвелових једначина и на суперпозицији компоненти вектора јачине тоталног електричног и магнетног поља \mathbf{E}_{tot} и \mathbf{H}_{tot} :

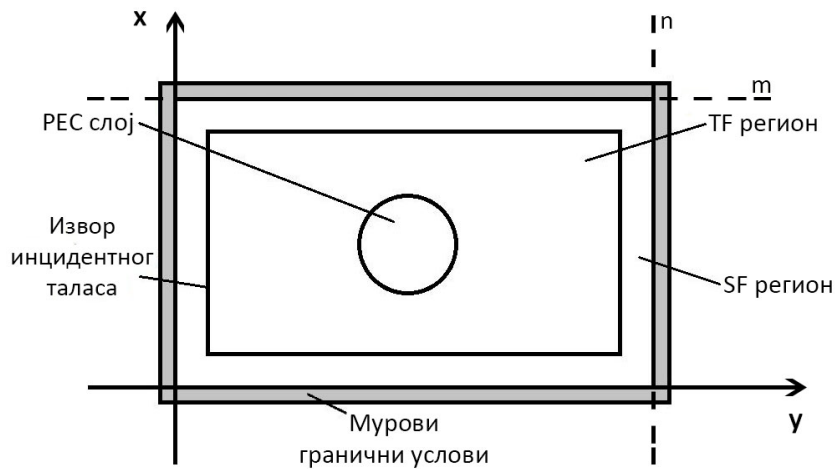
$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{scat}}, \quad \mathbf{H}_{\text{tot}} = \mathbf{H}_{\text{inc}} + \mathbf{H}_{\text{scat}}, \quad (3.10)$$

где су \mathbf{E}_{inc} и \mathbf{H}_{inc} вредности инцидентног поља, за које се претпоставља да је познато у свим тачкама просторне FDTD матрице, и то у сваком временском кораку, а \mathbf{E}_{scat} и \mathbf{H}_{scat} су вредности расејаног (рефлектованог, скатерованог) поља, чије вредности, иницијално, нису познате.

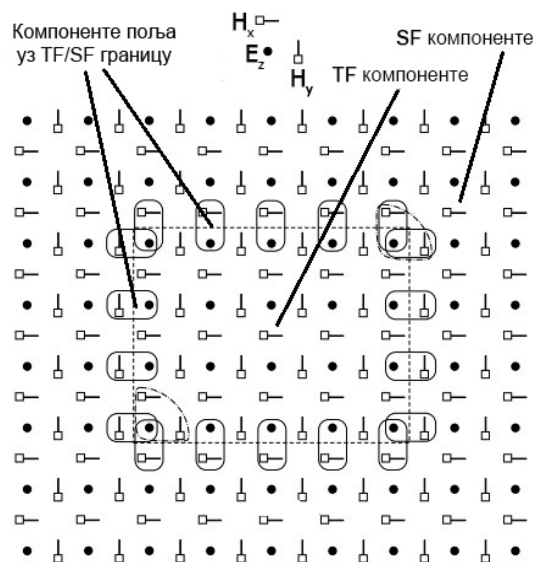
На сл. 3.5, приказан је нумерички 2D FDTD домен са TF/SF границом (*boundary*), на којој се види како је Y_{ee} -ова решетка подељена на две области: TF (*Total field*) регион (област компоненти тоталног поља) и SF (*Scattered Field*) регион (област компоненти рефлектованог поља). TF/SF граница је виртуелна површина која повезује ове две области и у њој се генерише инцидентни талас. Локација и облик ове границе је донекле произвољна, али је обично позиционирана тако да савршено проводни расејач (*Perfect electric conductor* - PEC), уколико га има, буде у TF региону.

У TF региону (области), који обухвата унутрашњи део FDTD домена, Y_{ee} -ов алгоритам оперише са компонентама тоталног поља, које су сума компоненти инцидентног и рефлектованог поља. У TF региону се, углавном, налазе PEC слојеви, или слојеви са губицима. У SF региону (области), који обухвата спољни део FDTD домена, Y_{ee} -ов алгоритам оперише само са компонентама рефлектованог поља, што значи да у овом региону нема компоненти

инцидентног поља. Око SF региона, налази се ABC (*Absorbing Boundary Condition*) слој, слој којим је затворен (завршен) FDTD домен.



Слика 3.5 Илустрација FDTD домена са TF/SF границом и PEC цилиндром



Слика 3.6 2Д FDTD домен са имплементираним TF/SF границом

На слици 3.6 је приказан 2Д FDTD нумерички домен са имплементираним TF/SF границом и са назначеним компонентама вектора јачине електричног и магнетног поља који се налазе уз TF/SF границу. Како би се одржао континуитет FDTD алгоритма потребно је извршити одређене корекције уз саму TF/SF границу, тј. мењати вредности поља чије се суседне зависне компоненте (зависне у смислу Yee-овог алгоритма) налазе са друге стране границе. Када се, на пример, TM_z тип таласа генерише на левој страни

нумеричког домена, компонента електричног поља у TF региону има облик [27]:

$$\vec{E}_z^{tot} \Big|_{i_0, j_0}^{n+1/2} = C_{eze} \Big|_{i_0, j_0} \vec{E}_z^{tot} \Big|_{i_0, j_0}^n + C_{ezh} \Big|_{i_0, j_0} \begin{pmatrix} \frac{\vec{H}_y^{tot} \Big|_{i+1/2, j_0}^{n+1/2} - \vec{H}_y^{scat} \Big|_{i_0-1/2, j_0}^{n+1/2}}{\Delta x} \\ - \frac{\vec{H}_x^{tot} \Big|_{i_0, j_0+1/2}^{n+1/2} - \vec{H}_x^{scat} \Big|_{i_0, j_0-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

У једначини 3.11, $C_{eze}|_{i,j}$ и $C_{ezh}|_{i,j}$ су коефицијенти који садрже параметре средине у којој се поље простира и једнаки су:

$$C_{eze} \Big|_{i_0, j_0} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sigma_{i_0, j_0} \Delta t}{2\varepsilon_{i_0, j_0}} \\ \frac{\sigma_{i_0, j_0} \Delta t}{2\varepsilon_{i_0, j_0}} \end{pmatrix}, \quad C_{ezh} \Big|_{i_0, j_0} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t}{\varepsilon_{i_0, j_0}} \\ 1 + \frac{\sigma_{i_0, j_0} \Delta t}{2\varepsilon_{i_0, j_0}} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Једначина 3.11 је „нетачна“ јер просторни изводи магнетског поља садрже компоненте расејаног поља којима недостају компоненте инцидентног поља. Оне би просторно требало да се налазе у SF региону, а како у SF региону не постоје компоненте инцидентног поља, потребно је у свим тачкама на самој TF/SF граници извршити одређене корекције. Могуће је искористити линеарност Максвелових једначина, на основу које је:

$$\vec{H}_y^{tot} \Big|_{i-1/2, j}^{n+1/2} = \vec{H}_y^{inc} \Big|_{i-1/2, j}^{n+1/2} + \vec{H}_y^{scat} \Big|_{i-1/2, j}^{n+1/2}, \quad (3.13)$$

па корекцијом једначине 3.11, одржати тачност алгорита на следећи начин:

$$\vec{E}_z^{tot} \Big|_{i_0, j_0}^{n+1/2} = C_{eze} \Big|_{i_0, j_0} \vec{E}_z^{tot} \Big|_{i_0, j_0}^n + C_{ezh} \Big|_{i_0, j_0} \begin{pmatrix} \frac{\vec{H}_y^{tot} \Big|_{i+1/2, j_0}^{n+1/2} - \vec{H}_y^{scat} \Big|_{i_0-1/2, j_0}^{n+1/2}}{\Delta x} \\ - \frac{\vec{H}_x^{tot} \Big|_{i_0, j_0+1/2}^{n+1/2} - \vec{H}_x^{scat} \Big|_{i_0, j_0-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y} \end{pmatrix} - C_{ezh} \Big|_{i_0, j_0} \frac{\vec{H}_y^{inc} \Big|_{i_0-1/2, j_0}^{n+1/2}}{\Delta x} - C_{ezh} \Big|_{i_0, j_0} \frac{\vec{H}_x^{inc} \Big|_{i_0, j_0-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y}. \quad (3.14)$$

Једначина 3.14 представља компоненту тоталног електричног поља на самој граници између TF и SF региона и то у углу TF региона. Корекција са обе компоненте инцидентног магнетског поља, \vec{H}_x и \vec{H}_y , неопходна је само у угловима TF региона. Претпоставља се да су ове компоненте инцидентног

поља „унапред“ познате. На преосталим спољним тачкама TF домена, на TF/SF граници, неопходна је корекција само са \mathbf{H}_x или са \mathbf{H}_y .

С друге стране, у SF региону, компоненте рефлектованог поља, лоцираним поред TF/SF границе, неопходно је извршити корекције на компонентама инцидентног поља. Компоненте рефлектованог магнетског поља \mathbf{H}_x и \mathbf{H}_y из једначине 3.11, у SF региону имају облик:

$$\begin{aligned} \vec{H}_x^{scat} \Big|_{i_0, j_0-1/2}^{n+1/2} = & C_{hxx} \Big|_{i_0, j_0-1/2} \vec{H}_x^{scat} \Big|_{i_0, j_0-1/2}^{n-1/2} - \\ & - C_{hxe} \Big|_{i_0, j} \left(\frac{\vec{E}_z^{tot} \Big|_{i_0, j}^n - \vec{E}_z^{scat} \Big|_{i_0, j-1}^n}{\Delta y} \right) + C_{hxe} \Big|_{i_0, j} \frac{\vec{E}_z^{inc} \Big|_{i_0, j}^n}{\Delta y} \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_y^{scat} \Big|_{i_0-1/2, j}^{n+1/2} = & C_{hyh} \Big|_{i_0-1/2, j_0} \vec{H}_y^{scat} \Big|_{i_0-1/2, j}^{n-1/2} + \\ & + C_{hye} \Big|_{i_0, j} \left(\frac{\vec{E}_z^{tot} \Big|_{i_0, j}^n - \vec{E}_z^{scat} \Big|_{i_0-1, j}^n}{\Delta x} \right) - C_{hye} \Big|_{i_0, j} \frac{\vec{E}_z^{inc} \Big|_{i_0, j}^n}{\Delta x} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Коефицијенти за \mathbf{H}_x у једначини 3.15, једнаки су:

$$C_{hxx} \Big|_{i_0, j-1/2} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i_0, j-1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i_0, j-1/2}}}{1 + \frac{\sigma_{i_0, j-1/2}^* \Delta t}{2\mu_{i_0, j-1/2}}} \right); \quad C_{hxe} \Big|_{i_0, j} = \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i_0, j}}}{1 + \frac{\sigma_{i_0, j}^* \Delta t}{2\mu_{i_0, j}}} \right). \quad (3.17)$$

Коефицијенти за \mathbf{H}_y у једначини 3.16, су:

$$C_{hyh} \Big|_{i_0-1/2, j_0} = \left(\frac{1 - \frac{\sigma_{i_0-1/2, j_0}^* \Delta t}{2\mu_{i_0-1/2, j_0}}}{1 + \frac{\sigma_{i_0-1/2, j_0}^* \Delta t}{2\mu_{i_0-1/2, j_0}}} \right); \quad C_{hye} \Big|_{i_0, j} = \left(\frac{\frac{\Delta t}{\mu_{i_0, j}}}{1 + \frac{\sigma_{i_0, j}^* \Delta t}{2\mu_{i_0, j}}} \right). \quad (3.18)$$

На исти начин се могу извести једначине за остале компоненте поља на TF/SF граници. Са слике 3.6 се види да компонентама магнетског поља, у TF региону, које се налазе у угловима није потребна корекција.

Предности TF/SF технике су могућност генерисања произвољног типа таласа, са произвољном временском функцијом, таласним обликом, трајањем, углом инциденције и типом поларизације. Граница осигурава да се инциденти талас унутар TF региона простира само у жељеном правцу. Релативно просто имплементирање интеракционих структура у FDTD нумерички домен проистиче из чињенице да се различити материјали, структуре и расејачи налазе искључиво у TF региону.

Добра страна TF/SF технике је и веома широк динамички нумерички опсег, посебно у случајевима када је потребно прецизно израчунати електромагнетско поље у „скривеним“ деловима FDTD домена, где су компоненте поља за ред величине мање од јачине поља инцидентног таласа. Јасна раздвојеност SF региона од TF региона, тј. јасна раздвојеност компоненти инцидентног поља од компоненти рефлектованог поља, омогућава лаку и ефикасну имплементацију граничних услова.

У петом поглављу аналитички је детаљно описан један ефикасан начин имплементације TF/SF равних таласа и оптимизован је за коришћење у FDTD симулацијама.

4. Гранични услови у методи коначних разлика у временском домену

У FDTD моделовању простирања електромагнетских таласа, већина проблема разматрана је у „отвореном“ простору, па се у тим случајевима FDTD нумерички домен сматра неограниченим. Како је једна тачка у простору нумеричког домена одговара једној локацији у меморији компјутера, неограничени домен је теоријски немогућ. У општем случају, величина нумеричког FDTD домена треба да буде довољно велика да обухвати све компоненте и структуре од интереса за симулацију. Како је меморија рачунара коначна, FDTD нумерички домен је неопходно ограничити, а притом задржати својство „физички“ неограниченог простора. То је могуће урадити применом апсорбујућих граничних услова (*Absorbing Boundary Conditions* - ABC) [5] на спољним границама FDTD домена. Осим симулирања неограниченог простора, ABC имају за циљ да минимизују величину нумеричког домена ради смањења утрошене рачунарске меморије. Симулирање неограниченог слободног простора заправо значи постављање границе на спољним границама нумеричког домена која неће рефлековати надолазеће електромагнетске таласе натраг у нумерички домен. Један од главних изазова у FDTD је ефикасна имплементација ABC-а.

ABC се не могу директно извести из FDTD нумеричког алгоритма Максвелових једначина. То је зато што је FDTD алгоритам заснован на централним разликама (2.17), где је за функционисање потребно знати компоненте поља које су померене за пола просторног корака, са обе стране тачке од интереса. Централне разлике не могу бити примењене на спољним површинама FDTD нумеричког домена, јер су, по дефиницији, зависне компонентне поља у тачкама изван домена непознате. У суштини, ABC заправо покушавају да екстраполирају тачке које се налазе унутар FDTD решетке у тачке на рубовима домена, са циљем да „преваре“ алгоритам како се домен простире у бесконачност [53]. То је могуће ефикасно извести у случају 1Д

домена, где се таласи простиру само у два правца ($\pm x$). Међутим, како су примарни интереси FDTD симулација 2Д и 3Д домени, у којима се таласи крећу у бесконачно много праваца, ABC престају да буду тако ефикасни. Досадашњи ABC ефикасно апсорбују таласе који наилазе на границу у само неколико углова, посебно под правим углом. Друга лоша особина ових граничних услова је њихова примена у симулацијама са нехомогеним срединама. Већина ABC-а је формулисано само за хомогене материјале на границама, па у случају нехомогених материјала могу постати нестабилни.

У овој дисертацији су од класичних аналитичких ABC коришћени Мурови гранични услови другог реда [5] и то само у симулацијама у ком се вршило испитивање различитих типова извора и екситација. Како ефикасност граничних услова у тим симулацијама није приоритет, проста имплементација Мурових граничних услова је разлог њихове примене. У осталим симулацијама, у којим је вршено испитивање граничних услова у FDTD методи коришћена је посебна врста ABC-а која се назива савршено апсорбујући слојевити гранични услови (*perfectly matched layer* – PML) [12].

У поглављу 4.1 представљене су теоријске основе и начин имплементације Мурових граничних услова. Савршено апсорбујући слојевити гранични услови (PML)[12] и њихове подрврсте (UPML [13], CPML [16]) обрађени су у поглављима 4.2, 4.3 и 4.4, респективно.

4.1 Мурови гранични услови другог реда

Мурови гранични услови [5] засновани су на линеарном парцијално-диференцијалном оператору који садржи суму три типа извода поља: просторних извода у правцу таласа ка спољним границама домена, просторних извода нормалних на правац таласа ка спољним границама домена и временских извода [2]. У свакој тачки спољне границе нумеричког простора, применом овог оператора на компоненте поља таласа који се креће ка споља, помоћу коначних разлика систематски се сузбијају вредности простирућег таласа.

Мурови гранични услови другог реда [5] користе тзв. једносмерну таласну једначину која дозвољава простирање таласа само у одређеном смеру (*one-way wave equation*) [55]. На основу [55], у случају 2Д домена, као на слици 4.1, парцијалне диференцијалне једначине које се могу нумерички имплементирати као АВС другог реда (за равни: $x=0, x=m, y=0, y=n$) су:

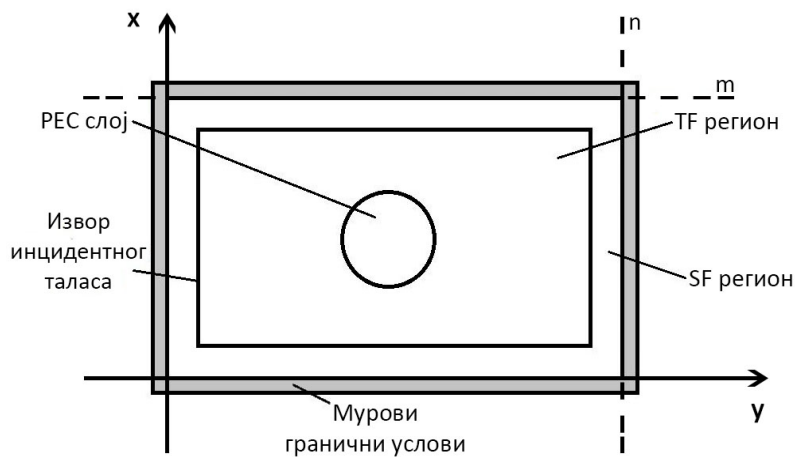
$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial t} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} = 0, \quad x=0 \text{ раван} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x \partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - \frac{v}{2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} = 0, \quad x=m \text{ раван} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial t} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} + \frac{v}{2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} = 0, \quad y=0 \text{ раван} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y \partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - \frac{v}{2} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} = 0, \quad y=n \text{ раван} \quad (4.4)$$

У једначинама 4.1-4.4, \bar{U} је променљива која може имати вредност компоненте вектора јачине електричног поља \mathbf{E} или магнетског поља \mathbf{H} , док је v фазна брзина таласа. За случај 3Д домена, једначине се аналогно изводе.



Слика 4.1 Мурови гранични услови

У раду [5], изведен је прост и ефикасан начин имплементације једначина 4.1-4.4 у алгоритам коначних разлика. Само алгоритам за границу $x=0$ је овде изведен, слика 4.1. Алгоритми за остале границе се могу извести аналогно.

Нека је $\mathbf{W}|_{0,j}$ компонента електричног или магнетског поља лоцирана у координатном почетку осе x ($x=0$), у углу FDTD нумеричког домена. Парцијални изводи из једначине 4.1 се могу развити у централне разлике око тачке $(1/2, j)$ на следећи начин. У првом кораку су изведени заједнички изводи за x и t [5, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial x \partial t} \Big|_{1/2, j}^n &= \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial x} \Big|_{1/2, j}^{n+1} - \frac{\partial \vec{W}}{\partial x} \Big|_{1/2, j}^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\frac{\vec{W} \Big|_{1, j}^{n+1} - \vec{W} \Big|_{0, j}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{\vec{W} \Big|_{1, j}^{n-1} - \vec{W} \Big|_{0, j}^{n-1}}{\Delta x} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

У следећем кораку је временски извод другог реда изведен за суседне тачке $(0, j)$ и $(1, j)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial t^2} \Big|_{1/2, j}^n &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial t^2} \Big|_{0, j}^n - \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial t^2} \Big|_{1, j}^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\vec{W} \Big|_{0, j}^{n+1} - 2\vec{W} \Big|_{0, j}^n + \vec{W} \Big|_{0, j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right) + \left(\frac{\vec{W} \Big|_{1, j}^{n+1} - 2\vec{W} \Big|_{1, j}^n + \vec{W} \Big|_{1, j}^{n-1}}{(\Delta t)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Након тога је изведен други извод по y координати, као средња вредност других извода у за тачке $(0, j)$ и $(1, j)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial y^2} \Big|_{1/2, j}^n &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial y^2} \Big|_{0, j}^n + \frac{\partial^2 \vec{W}}{\partial y^2} \Big|_{1, j}^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\vec{W} \Big|_{0, j+1}^n - 2\vec{W} \Big|_{0, j}^n + \vec{W} \Big|_{0, j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) + \left(\frac{\vec{W} \Big|_{1, j+1}^n - 2\vec{W} \Big|_{1, j}^n + \vec{W} \Big|_{1, j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Заменом једначина коначних разлика 4.5, 4.6 и 4.7 у 4.1 и решавањем по $\mathbf{W}|^{n+1}_{0,j}$ добија се временски алгоритам за границу $x=0$:

$$\begin{aligned} \vec{W} \Big|_{0, j}^{n+1} &= -\vec{W} \Big|_{1, j}^{n-1} + \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \left(\vec{W} \Big|_{1, j}^{n+1} + \vec{W} \Big|_{0, j}^{n-1} \right) \\ &+ \frac{2\Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \left(\vec{W} \Big|_{0, j}^n + \vec{W} \Big|_{1, j}^n \right) \\ &+ \frac{(v\Delta t)^2 \Delta x}{2(\Delta y)^2 (v\Delta t + \Delta x)} \left(\vec{W} \Big|_{0, j+1}^n - 2\vec{W} \Big|_{0, j}^n - \vec{W} \Big|_{0, j-1}^n + \vec{W} \Big|_{1, j+1}^n - 2\vec{W} \Big|_{1, j}^n + \vec{W} \Big|_{1, j-1}^n \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Када је ћелија FDTD решетке у облику квадрата ($\Delta x = \Delta y = \Delta$), Мурови ABC другог реда се могу написати као:

$$\begin{aligned} \vec{W}\Big|_{0,j}^{n+1} = & -\vec{W}\Big|_{1,j}^{n-1} + \frac{v\Delta t - \Delta}{v\Delta t + \Delta} \left(\vec{W}\Big|_{1,j}^{n+1} + \vec{W}\Big|_{0,j}^{n-1} \right) \\ & + \frac{2\Delta}{v\Delta t + \Delta} \left(\vec{W}\Big|_{0,j}^n + \vec{W}\Big|_{1,j}^n \right) \\ & + \frac{(v\Delta t)^2}{2\Delta(v\Delta t + \Delta)} \left(\vec{W}\Big|_{0,j+1}^n - 2\vec{W}\Big|_{0,j}^n - \vec{W}\Big|_{0,j-1}^n + \vec{W}\Big|_{1,j+1}^n - 2\vec{W}\Big|_{1,j}^n + \vec{W}\Big|_{1,j-1}^n \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Уколико се уместо \mathbf{W} у једначини 4.9 замени вектор електричног поља \mathbf{E} или магнетског поља \mathbf{H} , добија се једначина за имплементацију Мурових ABC другог реда. У свим истраживањима у овој дисертацији коришћена је ћелија квадратног облика, стога је у FDTD симулацијама са Муровим ABC другог реда за имплементацију коришћена једначина 4.9.

Заменом једначина коначних разлике 4.5, 4.6, 4.7 у једначине 4.2, 4.3, 4.4 на исти начин се могу извести Мурови ABC другог реда за границе $x=m, y=0$ и $y=n$.

4.2 Савршено апсорбујући слојевити гранични услови - PML

У раду [12], концепт на коме су засновани класични ABC потпуно је измењен. Беринџер је у [12], уместо извођења апсорбујућих граничних услова, извео апсорбујуће граничне слојеве које је назвао *савршено апсорбујући слојевити гранични услови* (*perfectly matched layer* – PML). Апсорбујући гранични слој је слој од вештачког апсорбујућег материјала који је смештен на самој ивици нумеричког домена и потпуно је независан од границе домена. Овај слој од апсорбијућег материјала представља анизотропни слој у коме је дефинисана комплексна проводност ($-\sigma^*$). Када талас уђе у апсорбујући слој, долази до експоненцијалног слабљења амплитуде таласа. Иако се талас пробије до спољне границе овог слоја и рефлектује натраг, долази до потпуног исчезавања таласа приликом проласка кроз апсорбујући слој. Главни изазов са овим концептом је отклањање рефлексије на граничној раздвојној

површини између нумеричког домена и апсорбујућег слоја, јер се рефлексација неминовно јавља на раздвојним површинама различитих материјала. Управо је конструкција специјалног апсорбујећег слоја у [12], који не рефлектује таласе на раздвојној површини довело до назива *савршено апсорбујући слојевити гранични услови*.

Неколико еквивалентних формулација је изведено након рада из 1994. године. PML са униаксијалним анизотропним медијумом (*uniaxial* PML - UPML), базиран на тензорима пермитивности и пермеабилности изведен је у [56], а имплементиран у [13]. PML са проширеним координатама и помереним комплексним фреквенцијама изведен је у [16]. Теоријски осврт на основе UPML-а и CPML-а је урађен у поглављима 4.2 и 4.3, респективно.

Нефизички апсорбујући слој који је, на раздвојној површини, прилагођен унутрашњем домену, без обзира на угао инциденције или фреквенцију надолазећег таласа, заснован је на „дељењу“ компоненти поља (*split-field* PML). У раду [12], *split-field* PML ABC су постигли 3×10^{-3} пута мањи коефицијент рефлексације на раздвојној површини од класичних аналитичких ABC [5].

Ако TE_z талас наилази из нумеричког FDTD домена на равну површину $x=0$ апсорбујућег PML-а, који се може обележити као средина 2, Максвелове једначине унутар PML-а модификоване на основу [12] имају следећу форму:

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial t} + \sigma_y \vec{E}_x = \frac{\partial \vec{H}_z}{\partial y} \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \vec{E}_y}{\partial t} + \sigma_x \vec{E}_y = -\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial x} \quad (4.11)$$

Једначине 4.10 и 4.11 представљају компоненту вектора јачине електричног поља. Ако се компонента вектора јачине магнетског поља \vec{H}_z подели на две зависне компоненте:

$$\vec{H}_z = \vec{H}_{zx} + \vec{H}_{zy}, \quad (4.12)$$

онда се могу написати преостале две једначине за TE_z талас:

$$\mu_2 \frac{\partial \vec{H}_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* \vec{H}_{zx} = -\frac{\partial \vec{E}_y}{\partial x} \quad (4.13)$$

$$\mu_2 \frac{\partial \vec{H}_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* \vec{H}_{zy} = \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial y}. \quad (4.14)$$

Параметри у претходним једначина σ_x и σ_y представљају специфичне електричне проводности, а σ_x^* и σ_y^* представљају магнетске губитке (проводности). За $\sigma_x = \sigma_y = 0$ и $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$, једначине 4.10-4.14 постају Максвелове једначине за случај средине без губитака. Ако је $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$, једначине 4.10-4.14 постају Максвелове једначине за електрично проводну средину. У случају да је $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ и $\sigma_x^* = \sigma_y^* = \sigma^*$, тада једначине 4.10-4.14 описују апсорбујућу средину чија је импеданса прилагођена средини 1, тј нумеричком домену ($x < 0$). Једначине 4.10-4.14 изражене у $j\omega$ домену за PML медијум, имаће следећи облик:

$$j\omega\epsilon_2 \left(1 + \frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_2} \right) \vec{E}_x = \frac{\partial}{\partial y} (\vec{H}_{zx} + \vec{H}_{zy}), \quad (4.15)$$

$$j\omega\epsilon_2 \left(1 + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_2} \right) \vec{E}_y = -\frac{\partial}{\partial x} (\vec{H}_{zx} + \vec{H}_{zy}), \quad (4.16)$$

$$j\omega\mu_2 \left(1 + \frac{\sigma_x^*}{j\omega\mu_2} \right) \vec{H}_{zx} = -\frac{\partial \vec{E}_y}{\partial x}, \quad (4.17)$$

$$j\omega\mu_2 \left(1 + \frac{\sigma_y^*}{j\omega\mu_2} \right) \vec{H}_{zy} = \frac{\partial \vec{E}_x}{\partial y}, \quad (4.18)$$

Ови изрази се могу поједноставити, ако се уведе смена:

$$s_w = \left(1 + \frac{\sigma_w}{j\omega\epsilon_2} \right), \quad (4.19)$$

$$s_w^* = \left(1 + \frac{\sigma_w^*}{j\omega\mu_2} \right), \quad (4.20)$$

за $w=x,y$. Онда се једначине 4.15 и 4.16 могу написати као:

$$j\omega\varepsilon_2 s_y \vec{E}_x = \frac{\partial}{\partial y} (\vec{H}_{zx} + \vec{H}_{zy}), \quad (4.21)$$

$$j\omega\varepsilon_2 s_x \vec{E}_y = -\frac{\partial}{\partial x} (\vec{H}_{zx} + \vec{H}_{zy}). \quad (4.22)$$

Једначине 4.21 и 4.22 престављају парцијалне изводе по y и по x , респективно. Ако се изводи вектора јачине електричног поља по x и по y из једначина 4.17 и 4.18 замене у једначине 4.21 и 4.22, следи:

$$-\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \vec{H}_{zx} = -\frac{1}{s_x^*} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} (\vec{H}_{zx} + \vec{H}_{zy}), \quad (4.23)$$

$$-\omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \vec{H}_{zy} = -\frac{1}{s_y^*} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} (\vec{H}_{zx} + \vec{H}_{zy}). \quad (4.24)$$

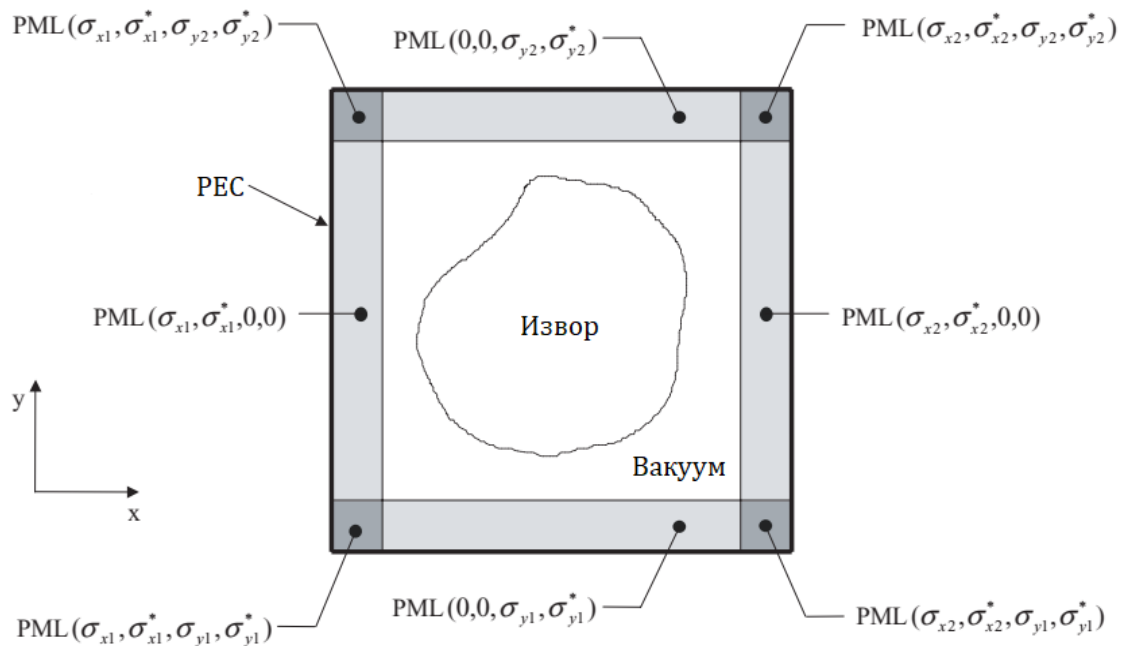
Ако се једначине 4.23 и 4.24 саберу, користећи једначину 4.12, добија се репрезентативна таласна једначина:

$$\frac{1}{s_x^*} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_z + \frac{1}{s_y^*} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_z + \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \vec{H}_z = 0. \quad (4.25)$$

У Берингеровом PML медијуму, трансмитоване компоненте поља се простиру истом брзином и правцем као компоненте инцидентног таласа, док се симултано смањује њихов интензитет дуж x осе, нормалне на развојну површину између средине 1 и 2. Фактор слабљења је потпуно независан од фреквенције, па се прилагођеност, без обзира на угао инцидентног таласа, може сматрати савршено прилагођеним слојевитим апсорбујућим граничним условима.

На слици 4.2, приказана је структура PML ABC у 2Д FDTD нумеричком домену. Са слике 4.2, на левој и десној страни домена (x_1 и x_2), сваки PML има σ_x и σ_x^* прилагођен са условом $\sigma_x/\varepsilon_1 = \sigma_x^*/\mu_1$. Заједно са условом $\sigma_y = 0 = \sigma_y^*$, омогућава се трансмисија дуж целе границе вакуум-PML без рефлексија. На доњој и горњој страни домена (y_1 и y_2) сваки PML има σ_y и σ_y^* прилагођен са условом $\sigma_y/\varepsilon_1 = \sigma_y^*/\mu_1$, заједно са $\sigma_x = 0 = \sigma_x^*$. У угловима нумеричког домена

долази до преклапања PML-ова, па фигуришу сва четири типа губитка (σ_x, σ_x^* , σ_y и σ_y^*), а вредности су им једнаке као у осталим PML-овима.



Слика 4.2 Структура 2Д PML-а у случају TE_z таласа

Анализа имплементације у FDTD домен и градирање PML параметара са циљем оптимизације граничних услова приказано је у поглављу 5.

4.3 Униаксијални савршено апсорбујући слојевити гранични услови - UPML

Класичан PML (*split-field* PML) је хипотетички медијум базиран на математичком моделу. С обзиром да код PML-а, у параметрима за губитке (s_w и s_w^* , $w=x,y$) постоји зависност у координатама, када би постојао такав физички медијум, морао би да буде анизотропан [2]. Физички модел, базиран на анизотропном, савршено прилагођеном медијуму у ком је избегнуто „нефизичко“ дељење поља, формулисан је у [13]. Назван униаксијални PML (*uniaxial* PML – UPML), сачињен је од тензора пермитивности и пермеабилности.

Конститутивни тензор $\overline{\overline{s}}$ омогућава прилагођеност раздвојне површине између нумеричког FDTD домена и UPML-а, тако што је инкорпориран у

главни FDTD алгоритам у читавом домену. Максвелове једначине у UPML-у, у општем облику су:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\bar{\bar{S}}\vec{E}; \quad \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\bar{\bar{S}}\vec{H}, \quad (4.35a,б)$$

где је $\bar{\bar{S}}$ 3Д дијагонални тензор дефинисан као:

$$\bar{\bar{S}} = \begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 1/s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_x s_z}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

За разлику од PML-а, код UPML-а је уведен нови параметар у изразу за проширене координате 4.19 и 4.20, па су компоненте у дијагоналним елементима тензора $\bar{\bar{S}}$ дати у облику:

$$s_x = k_x + \frac{\sigma_x}{j\omega\epsilon_0}; \quad s_y = k_y + \frac{\sigma_y}{j\omega\epsilon_0}; \quad s_z = k_z + \frac{\sigma_z}{j\omega\epsilon_0}. \quad (4.37)$$

У једначини 4.37, уведени параметар је реална променљива k који се назива *кофицијент проширења координата* ($k \geq 1$).

UPML је садржан у главном алгоритму, ра је приликом имплементације на жељеним позицијама у FDTD домену (на спољним ивицама домена), потребно је само кондуктивности поставити различитим од нуле. Када се тензор коефицијенти s_x , s_y и s_z , тј. њихови параметри k_x , k_y , k_z , σ_x , σ_y и σ_z изразе као једнодимензионалне функције ($k \geq 1$, $\sigma > 0$), тензор $\bar{\bar{S}}$ у унутрашњости FDTD нумеричког домена постаје јединични пар, док у UPML простору симулира анизотропни медијум.

Анализа имплементације у FDTD домен и градирање UPML параметара са циљем оптимизације граничних услова приказано је у поглављу 5.

4.4 Конволуциони савршено апсорбујући слојевити гранични услови - CPML

Услед лоших резултата PML-а и UPML-а при апсорпцији компоненти електромагнетских поља на ниским фреквенцијама [33, 57], развијена је посебна врста PML-а, базирана на PML-у са проширеним координатама (SC-PML) [58-61]. Један од узрока пораста рефлексије код PML-а и UPML-а при ниским фреквенцијама је чињеница да тензор коефицијент $s_w (w=x,y,z)$ има пол (сингуларност) у нултој фреквенцији [62, 63]. Тај проблем је решен измештањем пола координатног почетка у горњу половину комплексне равни [64, 65]. Облик тензор коефицијента који је назван коефицијент са измештеном (помереном) комплексном фреквенцијом (*complex frequency-shifted* - CFS) је следећи:

$$s_w = k_w + \frac{\sigma_w}{\alpha_w + j\omega\epsilon_0}. \quad (4.38)$$

У једначини 4.38, α_w представља параметар који дефинише померање фреквенције и има особину хомогене проводности. Просторни изводи код CFS PML-а са проширеним координатама имају облик [60]:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.39)$$

Амперов закон и комплексном облику, изведен са CFS PML-ом са проширеним координатама је:

$$j\omega\epsilon_0 \vec{E} = \hat{x} \left(\frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_z - \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_y \right) + \hat{y} \left(\frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_x - \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_z \right) + \hat{z} \left(\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_y - \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_x \right). \quad (4.40)$$

Након конверзије у временски домен следи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E}) = & \hat{x} \left(\bar{s}_y * \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_z - \bar{s}_z * \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_y \right) + \\ & + \hat{y} \left(\bar{s}_z * \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_x - \bar{s}_x * \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_z \right) + \hat{z} \left(\bar{s}_x * \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_y - \bar{s}_y * \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_x \right) \end{aligned} \quad (4.41)$$

где * представља конволуцију која је последица зависности фреквенције и проширених координата, а \bar{s}_w је инверзна Лапласова трансформација тензор коефицијената s_w , која је једнака:

$$\begin{aligned} \bar{s}_w(t) = F^{-1} \left[\frac{1}{s_w(\omega)} \right] = F^{-1} \left(\frac{1}{k_w + \frac{\sigma_w}{\alpha_w + j\omega\varepsilon_0}} \right) = \\ = \frac{\delta(t)}{k_w} - \frac{\sigma_w}{\varepsilon_0 k_w^2} e^{-\left(\frac{\sigma_w}{\varepsilon_0 k_w} + \frac{\alpha_w}{\varepsilon_0}\right)t} h(t) = \frac{\delta(t)}{k_w} + \eta_w(t) \end{aligned} \quad (4.42)$$

У једначини 4.42, $\delta(t)$ је јединична импулсна функција, а $h(t)$ је јединична степ функција. Ако се једначина 4.42 примени на једначину 4.41, Амперов закон ће имати следећи облик:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E}) = & \hat{x} \left(\frac{1}{k_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_z - \frac{1}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_y + \eta_y(t) * \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_z - \eta_z(t) * \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_y \right) + \\ & + \hat{y} \left(\frac{1}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_x - \frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_z + \eta_z(t) * \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_x - \eta_x(t) * \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_z \right) + \\ & + \hat{z} \left(\frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_y - \frac{1}{k_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_x + \eta_x(t) * \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_y - \eta_y(t) * \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_x \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Једначина 4.43 представља аналитички облик Амперовог закона са имплементираним CPML граничним условима. Следећи корак је FDTD дискретизација и имплементација која је урађена у поглављу 5.

5. Аналитички модели дискретизације

У овом поглављу су представљени аналитички модели који су коришћени као нумеричка основа у истраживању. Све изведене и оптимизоване релације и једначине приказане у овом поглављу су програмиране у програмском језику C++, након чега су коришћене у FDTD нумеричким симулацијама.

5.1 FDTD дискретизација функције Гаусовог импулса

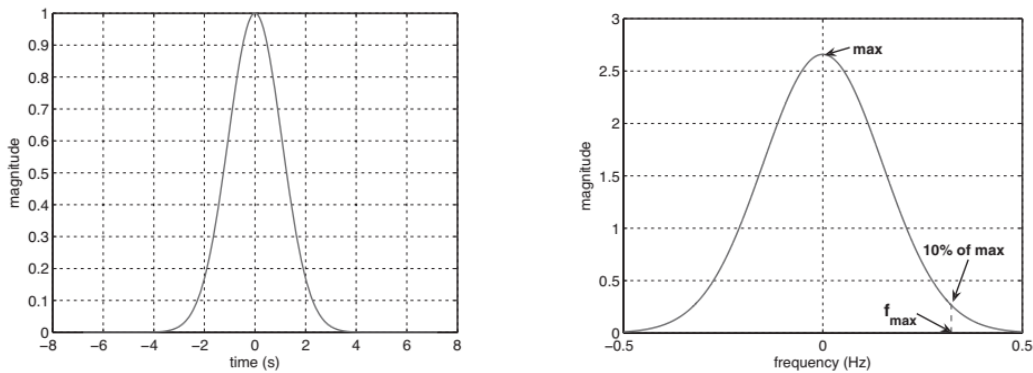
Иако је главни циљ анализе Гаусовог импулса његова примена у FDTD методи у временском домену, постоје аспекти фреквентног домена који се морају узети у обзир. Фреквенцијски спектар импулса одређује распон фреквенција за које се могу добити валидни резултати симулације. Како се фреквенција повећава, тако се таласна дужина смањује, па таласна дужина постаје блиска величини ћелије FDTD решетке. Импулс треба бирати тако да таласна дужина при највећој фреквенцији у спектру импулса не буде мања од величине ћелије у нумеричком домену. Такође, ако је величина ћелије превелика у односу на таласну дужину, доћи ће до појаве нетачних резултата приликом симулације. Постављање таласне дужине највише фреквенције импулса да буде већа од 20 ћелија је сасвим довољно да се добију тачни резултати у већини FDTD симулација. Постоји фактор који представља однос таласне дужине при највишој фреквенцији и величине ћелије. Тај фактор се назива - *број ћелија по таласној дужини*. Ако поновимо једначину 3.5, која представља Гаусов импулс у фреквенцијском домену:

$$G(\omega) = \tau \sqrt{\pi} e^{-\frac{\tau^2 \omega^2}{4}}, \quad (5.1)$$

где је τ – ширина импулса, може се извести релација која даје везу између фреквенције и фактора *број ћелија по таласној дужини*. До највише фреквенције при којој се добијају тачни резултати може се доћи помоћу релације [18]:

$$f_{\max} = \frac{c}{\lambda_{\min}} = \frac{c}{n_c \Delta S_{\max}}, \quad (5.2)$$

где је n_c број ћелија по таласној дужини, c брзина простирања таласа у слободном простору, Δs_{max} максимална димензија ћелије ($\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$), а λ_{min} је таласна дужина при највишој фреквенцији. Након што се одреди највиша фреквенција, у конструисању жељеног Гаусовог импулса, преостаје одредити w (ширину импулса). На слици 5.1б је приказан фреквенцијски домен Гаусовог импулса, при чему је фреквенцијска скала померена у лево, како би се приказао цео импулс.



а)

б)

Слика 5.1 Гаусов импулс: а) временски, б) фреквенцијски домен

Ако се сматра да је максимална валидна фреквенција Гаусовог спектра фреквенција на месту где је $G(\omega)$ 10% од своје максималне вредности, слика 5.1б, онда се τ може извести на следећи начин [18]:

$$0,1 = e^{-\frac{\tau^2 \omega_{max}^2}{4}}, \quad (5.3)$$

из које се може извести веза између τ и f_{max} :

$$\tau = \frac{\sqrt{2.3}}{\pi f_{max}}. \quad (5.4)$$

Користећи претходне две једначине, n_c и Δs_{max} се могу повезати са τ , на следећи начин:

$$\tau = \frac{\sqrt{2.3} n_c \Delta s_{max}}{\pi c} \approx \frac{n_c \Delta s_{max}}{2c}. \quad (5.5)$$

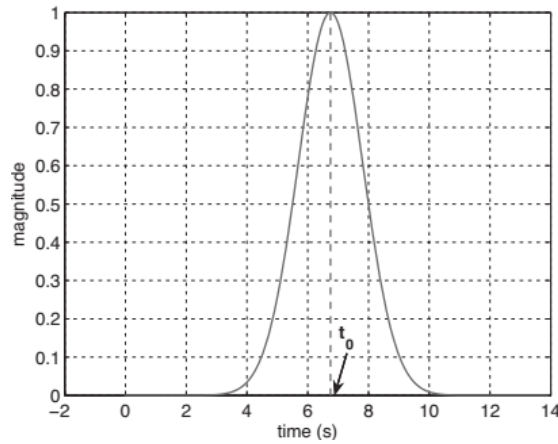
Када се дефинишу n_c и Δs_{max} , из претходне једначине се лако долази до вредности за τ , која се може користити за конструисање изворне временске функције Гаусовог импулса:

$$g(t) = e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} . \quad (5.6)$$

На слици 5.1а се види да се максимална вредност Гаусовог импулса поклапа са временским тренутком $t=0$. У FDTD симулацијама иницијалне вредности свих компоненти поља је нула, па и вредности извора у тренутку $t=0$ треба да буду нула. Померање у временском домену не утиче на фреквенцијски домен. Временска функција Гаусовог импулса са променљивом t_0 , која представља померање импулса у времену, има следећи облик:

$$g(t) = e^{-\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2} . \quad (5.7)$$

Помоћу овог облика временске функције могуће је померати Гаусов импулс у временском домену и на тај начин оптимизовати га за симулацију. На слици 5.2, приказан је импулс померен за $t_0 = 4,5\tau$.



Слика 5.2 Гаусов импулс померен у времену за $t_0 = 4,5\tau$

Израз у једначини 5.7 је функција времена, а ако се примени FDTD дискретизација, биће функција од $n\Delta_t$. Оба случаја захтевају експлицитно дефинисање временског корака Δ_t . То је могуће избећи ако се временско кашњење t_0 и ширина импулса τ представе у функцији временског корака. Тако се, после дискретизације, нпр. за $t = n\Delta_t$, $t_0 = 30\Delta_t$, $\tau = 10\Delta_t$, добија:

$$g(t) = g(n\Delta_t) = e^{-\left(\frac{n\Delta_t - 30\Delta_t}{10\Delta_t}\right)^2} , \quad (5.8)$$

$$g(n) = e^{-\left(\frac{n-30}{10}\right)^2} . \quad (5.9)$$

Из 5.9 је јасно да се временски корак Δt не појављује у изразу, па $g(t)$ после дискретизације има облик $g(n)$, тј. не зависи од временског корака. Израз 5.9 је коришћен за сваку симулацију у овом раду у којој Гаусов импулс извор.

Поред својих добрих особина, Гаусов импулс има недостатак који је веома неповољан при коришћењу у FDTD симулацијама. Он садржи једносмерну (*Direct Current - DC*) компоненту, која у случају Гаусовог импулса представља и фреквенцију електромагнетског таласа са највећом енергијом. Извори са DC компонентама узрокују таложeње нефизичких компоненти у симулацију, где одређена количина наелектрисања “остаје” у домену и након завршетка трајања импулса [34]. Ова неповољна карактеристика умањује ефикасност Гаусовог импулса у FDTD симулацијама кратког трајања и при симулацијама у којима су нежељене ниске фреквенције. У Yee-овој решетки нема наелектрисања у слободном простору без извора поља [2]. Међутим, неки извори одређене геометрије и временске расподеле ипак доводе до појаве наелектрисања, која су по природи нефизичка (нумеричка). Везу између вектора јачине електричног поља \mathbf{E} и запреминске густине наелектрисања ρ даје Гаусов закон:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho. \quad (5.10)$$

На основу једначине 5.10 следи да вектор јачине електричног поља \mathbf{E} ствара наелектрисања вредности веће од нуле. Веза између вектора густине струје \mathbf{J} и запреминске густине наелектрисања је једначина континуитета [2]:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.11)$$

Компоненте вектора густине струје \mathbf{J} су просторно рапорeђене поред одговарајућих компоненти вектора јачине електричног поља \mathbf{E} у Yee-овој решетки, са размаком половине временског корака. Ако се количина наелектрисања $Q_{\text{затворено}}$ на једном крају неког струјног извора у облику нити, просторном и временском интеграцијом једначине (5.11), представи као [34]:

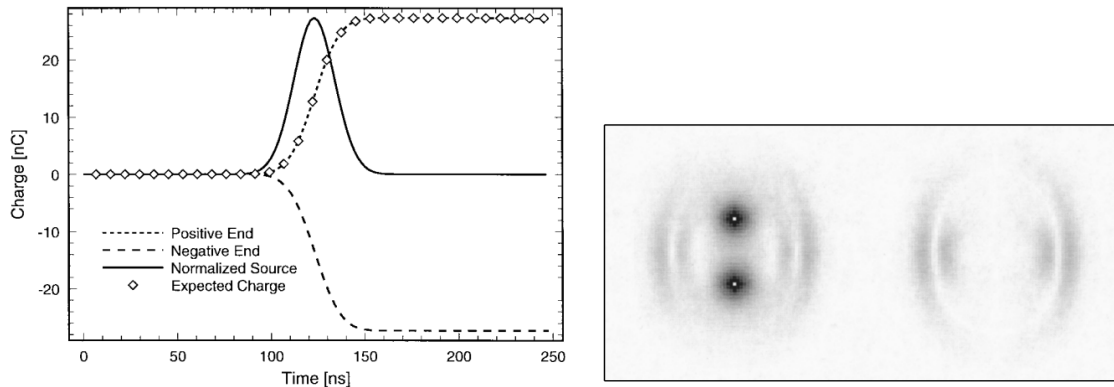
$$-\int_{-\infty}^t \left(\oiint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \right) dt = \int_{-\infty}^t I(t) dt = Q_{\text{затворено}}, \quad (5.12)$$

где је $I(t)$ укупна струја која улази у површину s на крају струјне нити. Наелектрисање $Q_{\text{затворено}}$ је затворено унутар површине s и може се добити интеграцијом $I(t)$ у времену. Такође, $Q_{\text{затворено}}$ је могуће одредити нумерички, FDTD симулацијом дискретне запреминске интеграције Гаусовог закона (5.10). Ако је запремина која садржи наелектрисање једна просторна ћелија у облику коцке и ако је ивица ћелије дужине L , интеграцијом једначине 5.10, добија се:

$$\varepsilon_0 \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varepsilon_0 L^2 \sum_{\text{шест страна}} \vec{E}_{\text{страна}} = Q_{\text{затворено}}, \quad (5.13)$$

где је $\vec{E}_{\text{страна}}$ укупна јачина вектора електричног поља једне стране коцке. Да би се показало таложење наелектрисања и повезаност између „очекиваног“ наелектрисања датог временским интегралом струје у једначини 5.12 и „измереног“ наелектрисања добијеног из интеграла флукса вектора јачине електричног поља у једначини 5.13, симулиран је струјни елемент са Гаусовим импулсом као извором. Урађена је симулација простирања поља генерисаног струјним извором (Херцов дипол), смештеног у центру домена димензија $81 \times 81 \times 81$, са ћелијом од $\Delta_x = 1\text{m}$. Добијени резултати, слика 5.3, приказују очекивана и измерена наелектрисања у функцији времена, на крајевима струјног извора [34]. На слици 5.3а, види се да су измерени резултати FDTD симулацијом потпуно одговарају оним предвиђеним једначином 5.12. На слици 5.3а се види да количина наелектрисања не опада у зависности од времена, што значи да она остају у FDTD нумеричком домену до краја симулације и као таква су непожељна. У симулацији транспарентног (меког) извора са Гаусовим импулсом као изворном функцијом, такође у раду [34], резултати приказани на слици 5.3б јасно показују постојање нежељених наталожених наелектрисања у унутар FDTD нумеричког домена од интереса. Појава DC компоненти се може избећи модулацијом Гаусовог импулса, на тај начин да се задрже све његове добре карактеристике, а нежељена DC компонента одстрани. То се може постићи употребом биполарних импулса са једнаким позитивним и негативним вредностима. Модификацијом временског облика Гаусовог облика и коришћењем његових деривата (диференцирани Гаусов импулс и Рикеров импулс) могуће је умањити

присуство DC компоненти у FDTD симулацијама простирања електромагнетског поља и свести их на занемарљиво мали ниво.



а)

б)

Слика 5.3 а) Наелектрисање на крајевима дипола са Гаусовим импулсом као изворном функцијом, б) Интензитет електричног поља E након 100 временских корака, у случају Херцовог дипола са Гаусовим импулсом, слика преузета из референце [34]

5.2 FDTD дискретизација функције Рикеровог импулса

Једначина која описује Рикеров импулс у временском домену је [54]:

$$R(t) = \left(1 - 2(\pi f_p (t - t_0))^2\right) e^{-(\pi f_p (t - t_0))^2}, \quad (5.14)$$

где је f_p - "peak" фреквенција (frekvenciја са највећом енергијом), а t_0 - временско кашњење. Временско кашњење t_0 може имати било коју вредност, али је погодно изразити га као функцију од f_p :

$$t_0 = \frac{1}{f_p}. \quad (5.15)$$

Одговарајућа таласна дужина λ_p фреквенције f_p може се изразити у функцији просторних корака, као $\lambda_p = n_c \Delta_x$, где је n_c - број ћелија по таласној дужини,

$$f_p = \frac{c}{\lambda_p} = \frac{c}{n_c \Delta_x}. \quad (5.16)$$

Како је CFL број:

$$S = \frac{c \Delta_t}{\Delta_x}, \quad (5.17)$$

из 5.17 се може изразити просторни корак:

$$\Delta_x = \frac{c\Delta_t}{S}, \quad (5.18)$$

па се f_p може написати у облику:

$$f_p = \frac{S}{n_c \Delta_t}. \quad (5.19)$$

Временско кашњење t_0 се може изразити као:

$$t_0 = \frac{1}{f_p} = \frac{n_c \Delta_t}{S}. \quad (5.20)$$

Ако је $t = n\Delta_t$, и ако се у 5.14 замене 5.19 и 5.20, добија се:

$$R(n) = \left[1 - 2\pi^2 \left(\frac{Sn}{n_c} - 1 \right)^2 \right] e^{-\pi^2 \left(\frac{Sn-1}{n_c} \right)^2}. \quad (5.21)$$

Из 5.21 се види да $R(n)$ не зависи експлицитно од временског и просторног корака, али зато зависи од њиховог односа преко CFL броја S , броја ћелија по таласној дужини n_c . Овакав облик импулса је функција само од времена. При имплементацији у FDTD симулацију непоходно је извор дискретизовати и у времену и у простору. Када се функција $R(t)$, представи у облику таласа који се простира као $R(t \pm x/c)$, дискретизован Рикеров импулс који се простира у простору и времену биће:

$$R(t \pm x/c) = \left(1 - 2\left(\pi f_p (t \pm x/c - t_0) \right)^2 \right) e^{-\left(\pi f_p (t \pm x/c - t_0) \right)^2}. \quad (5.22)$$

Као и раније, ако се t_0 и f_p модификују у зависности од S и n_c и ако је $t = n\Delta_t$, $x = i\Delta_x$, $x/c = i\Delta_x/c = i\Delta_t/S$, следи:

$$R(i, n) = \left[1 - 2\pi^2 \left(\frac{Sn \pm i}{n_c} - 1 \right)^2 \right] e^{-\pi^2 \left(\frac{Sn \pm i}{n_c} - 1 \right)^2}. \quad (5.23)$$

Израз 5.23 представља функцију Рикеровог импулса која је коришћена у FDTD симулацијама приликом истраживања.

5.3 FDTD дискретизација хармонијског извора синусног облика

Хармонијски извор синусног таласног облика се може дискретизовати на следећи начин. Ако је:

$$h(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad (5.24)$$

временска функција синусног извора, заменом t са $n\Delta_t$ функција је изражена само преко временског корака. Како у нумеричкој електромагнетици постоји повезаност између фреквенције и таласне дужине, за равне таласе у слободном простору се може писати:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda}. \quad (5.25)$$

а таласна дужина λ се може, као у претходном поглављу, представити у функцији просторног корака:

$$\lambda = n_c \Delta_x. \quad (5.26)$$

У једначини 5.26, n_c је број ћелија по таласној дужини. Заменом једначине 5.25 и 5.26 у једначину 5.24 може се написати дискретизован облик извора са синусном функцијом:

$$h(n\Delta_t) = \sin\left(\frac{2\pi c}{n_c \Delta_x} n\Delta_t\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{n_c} \frac{c\Delta_t}{\Delta_x} n\right). \quad (5.27)$$

Из једначине 5.27 следи да се извор може ослободити експлицитно дефинисаног временског корака, на следећи начин:

$$h(n) = \sin\left(\frac{2\pi S}{n_c} n\right), \quad (5.28)$$

где променљива S представља CFL број, тј. услов нумеричке стабилности алгоритма. Дискретизован импулс на овај начин захтева само дефинисање CFL броја и броја ћелија по таласној дужини n_c . Након временске и просторне дискретизације, као у случају Рикеровог импулса, функција синусног извора која је коришћена у FDTD симулацијама електромагнетског поља TF/SF равним таласима је следећа:

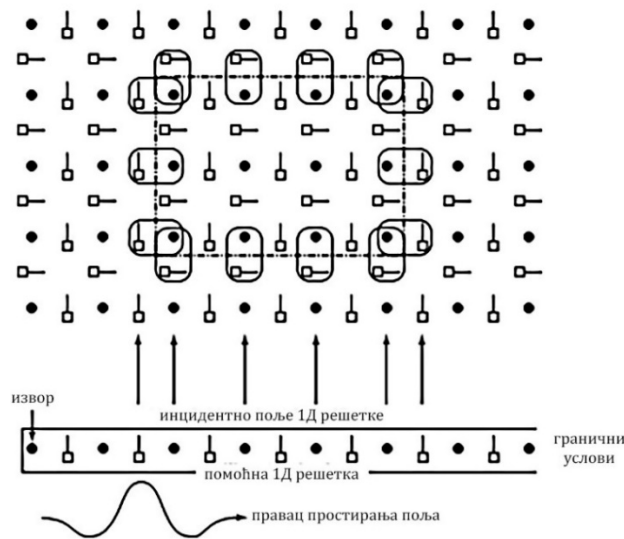
$$h(i, t) = \sin\left(\frac{2\pi}{n_c} \left(Sn - \sqrt{\mu_r \varepsilon_r} i \right)\right). \quad (5.32)$$

5.4 Имплементација TF/SF равних таласа у 2Д и 3Д FDTD домен

У 2Д и 3Д FDTD симулацијама електромагнетског поља, имплементација TF/SF равних таласа је комплекснија од имплементације у случају 1Д FDTD домена. Из тог разлога постоје различити приступи овом проблему [67-75]. У овом раду је анализиран један ефикасан приступ из [2], који подразумева коришћење помоћне 1Д FDTD симулације. Како би се ефикасно имплементирала TF/SF граница неопходно је знати компоненте инцидентног поља у свакој тачки TF региона која има зависну компоненту поља са друге стране TF/SF границе. Компоненте инцидентног поља је неопходно знати у сваком временском кораку. У FDTD нумеричком домену, у општем случају, инцидентно поље се не простире на исти начин као инцидентно поље у континуалном домену. Стога, уколико се за генерисање инцидентног поља у FDTD домену користе изрази (једначине) из континуалног домена, поља у FDTD домену биће неусклађена са тако генерисаним компонентама поља [20]. Ова неусклађеност проузрокује знатну нумеричку дисперзију дуж целе TF/SF границе. Поред нежељене нумеричке дисперзије, коришћење континуалних релација за генерисање инцидентног поља има за последицу знатно повећање компјутерске меморије. Наиме, око 240 000 калкулација по једном временском кораку је неопходно за 100x100x100 FDTD решетку са имплементираним TF/SF границом. Ефикасан начин да се то избегне је коришћење помоћне 1Д FDTD решетке [2].

На слици 5.6 је приказана илустација имплементације помоћне 1Д решетке заједно са 2Д FDTD доменом од интереса, који садржи TF/SF границу. Имплементација TF/SF границе са помоћном 1Д FDTD решетком подразумева позиционирање компоненте инцидентног поља 1Д решетке тако да буде паралелна компоненти инцидентног поља TF региона 2Д или 3Д домена од интереса. Компоненте инцидентног поља које недостају TF домену на TF/SF

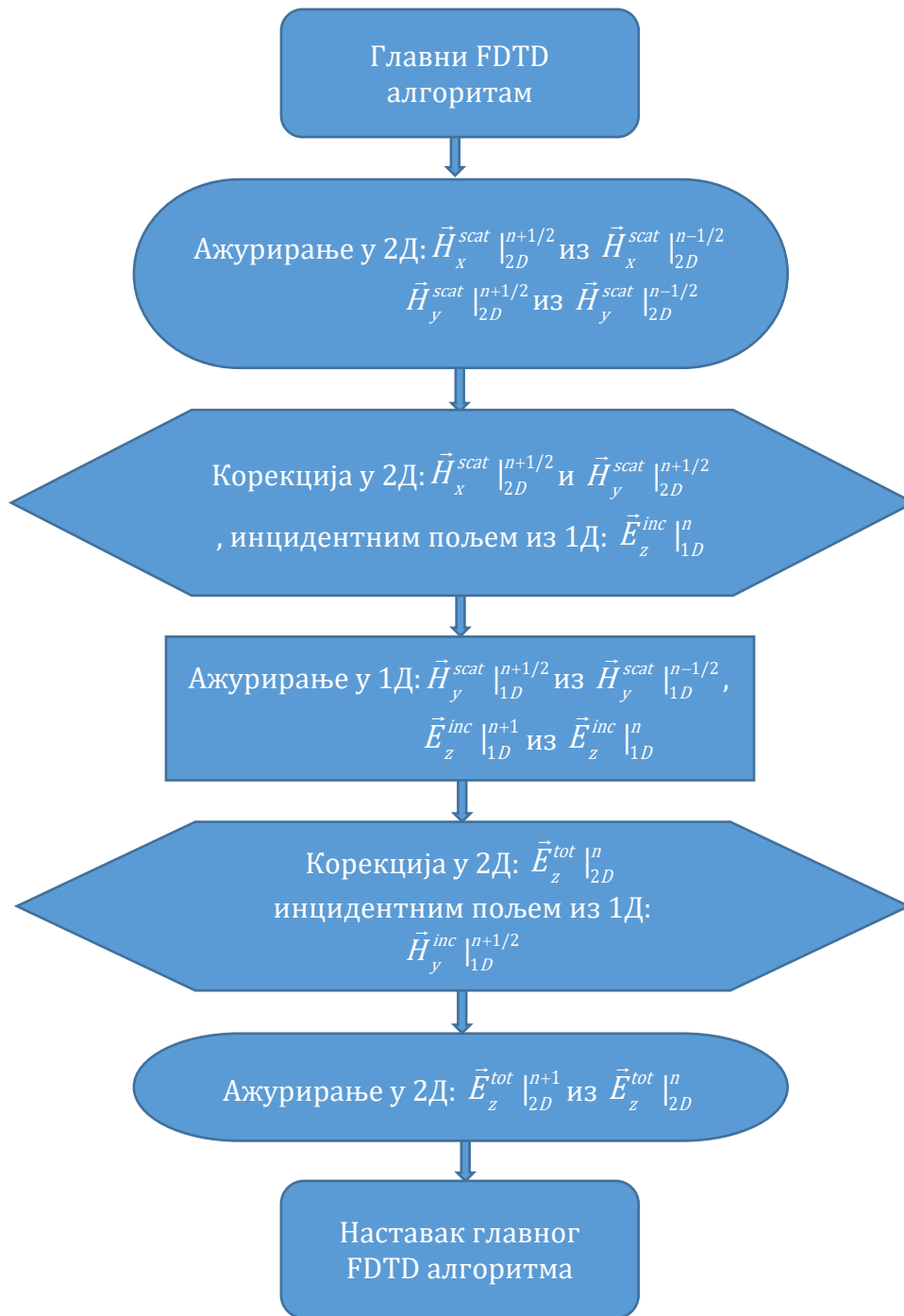
границу добијају се интерполацијом са одговарајућим компонентама које су израчунате у помоћној 1Д решетки.



Слика 5.6 Помоћна 1Д решетка заједно са 2Д TF/SF FDTD доменом

Вертикалне стрелице, на слици 5.6, које су усмерене од 1Д ка 2Д решетки показују из којих тачака 1Д домена су тачке 2Д домена преузеле вредности инцидентног поља. То се односи само на тачке 2Д домена које су уз TF/SF границу, тј. којима недостају компоненте инцидентног поља. Иако је на слици 5.6 приказано да је 1Д домен исте ширине као 2Д домен, то не мора увек да буде случај. Потребно је само да 1Д домен буде довољно широк да обезбеди вредности инцидентног поља за све тачке на TF/SF граници, тј. тачке ка којима су усмерене стрелице. Додатно је неопходно да се у помоћном 1Д домену извор позиционира на левој страни, док се десна страна мора „затворити“ адекватним граничним условима, како би се спречила евентуална рефлексија инцидентног поља. 1Д симулација простирања поља у помоћној решетки користи исти CFL услов и исте параметре средине (пермитивност, пермеабилност) као и 2Д FDTD симулација од интереса, али је потпуно одвојена од 2Д домена. Више и 1Д додатној решетки у FDTD се може наћи у [2].

Начин на који је овај тип TF/SF имплементације инкорпориран у програмски код FDTD алгоритма коришћеног у овом раду приказан је на слици 5.7.



Слика 5.7 Начин имплементације 1Д додатне решетке у програмски код 2Д TF/SF FDTD алгоритма

Функција која дефинише додатну 1Д решетку издвојена је у односу на главну FDTD петљу. Она се позива посебно, ради иницијализације, а онда се у одређеном тренутку вредности из 1Д решетке инкорпорирају у главну FDTD петљу. За пример је узет TMz тип таласа, једначине 3.14, 3.15 и 3.16 из поглавља 3.4:

$$\vec{E}_z^{tot} |_{i_0, j_0}^{n+1/2} = C_{eze} |_{i_0, j_0} \vec{E}_z^{tot} |_{i_0, j_0}^n + C_{ezh} |_{i_0, j_0} \left(\frac{\vec{H}_y^{tot} |_{i+1/2, j_0}^{n+1/2} - \vec{H}_y^{scat} |_{i_0-1/2, j_0}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{\vec{H}_x^{tot} |_{i_0, j_0+1/2}^{n+1/2} - \vec{H}_x^{scat} |_{i_0, j_0-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} \right), \quad (5.33)$$

$$-C_{ezh} |_{i_0, j_0} \frac{\vec{H}_y^{inc} |_{i_0-1/2, j_0}^{n+1/2}}{\Delta x} - C_{ezh} |_{i_0, j_0} \frac{\vec{H}_x^{inc} |_{i_0, j_0-1/2}^{n+1/2}}{\Delta y}$$

$$\vec{H}_x^{scat} |_{i_0, j_0-1/2}^{n+1/2} = C_{hxx} |_{i_0, j_0-1/2} \vec{H}_x^{scat} |_{i_0, j_0-1/2}^{n-1/2} -$$

$$-C_{hxe} |_{i_0, j} \left(\frac{\vec{E}_z^{tot} |_{i_0, j}^n - \vec{E}_z^{scat} |_{i_0, j-1}^n}{\Delta y} \right) + C_{hxe} |_{i_0, j} \frac{\vec{E}_z^{inc} |_{i_0, j}^n}{\Delta y}$$

$$\vec{H}_y^{scat} |_{i_0-1/2, j}^{n+1/2} = C_{hyh} |_{i_0-1/2, j_0} \vec{H}_y^{scat} |_{i_0-1/2, j}^{n-1/2} +$$

$$+ C_{hye} |_{i_0, j} \left(\frac{\vec{E}_z^{tot} |_{i_0, j}^n - \vec{E}_z^{scat} |_{i_0-1, j}^n}{\Delta x} \right) - C_{hye} |_{i_0, j} \frac{\vec{E}_z^{inc} |_{i_0, j}^n}{\Delta x}$$

$$, \quad (5.34)$$

$$-C_{hxe} |_{i_0, j} \left(\frac{\vec{E}_z^{tot} |_{i_0, j}^n - \vec{E}_z^{scat} |_{i_0, j-1}^n}{\Delta y} \right) + C_{hxe} |_{i_0, j} \frac{\vec{E}_z^{inc} |_{i_0, j}^n}{\Delta y}$$

$$\vec{H}_y^{scat} |_{i_0-1/2, j}^{n+1/2} = C_{hyh} |_{i_0-1/2, j_0} \vec{H}_y^{scat} |_{i_0-1/2, j}^{n-1/2} +$$

$$+ C_{hye} |_{i_0, j} \left(\frac{\vec{E}_z^{tot} |_{i_0, j}^n - \vec{E}_z^{scat} |_{i_0-1, j}^n}{\Delta x} \right) - C_{hye} |_{i_0, j} \frac{\vec{E}_z^{inc} |_{i_0, j}^n}{\Delta x}$$

$$. \quad (5.35)$$

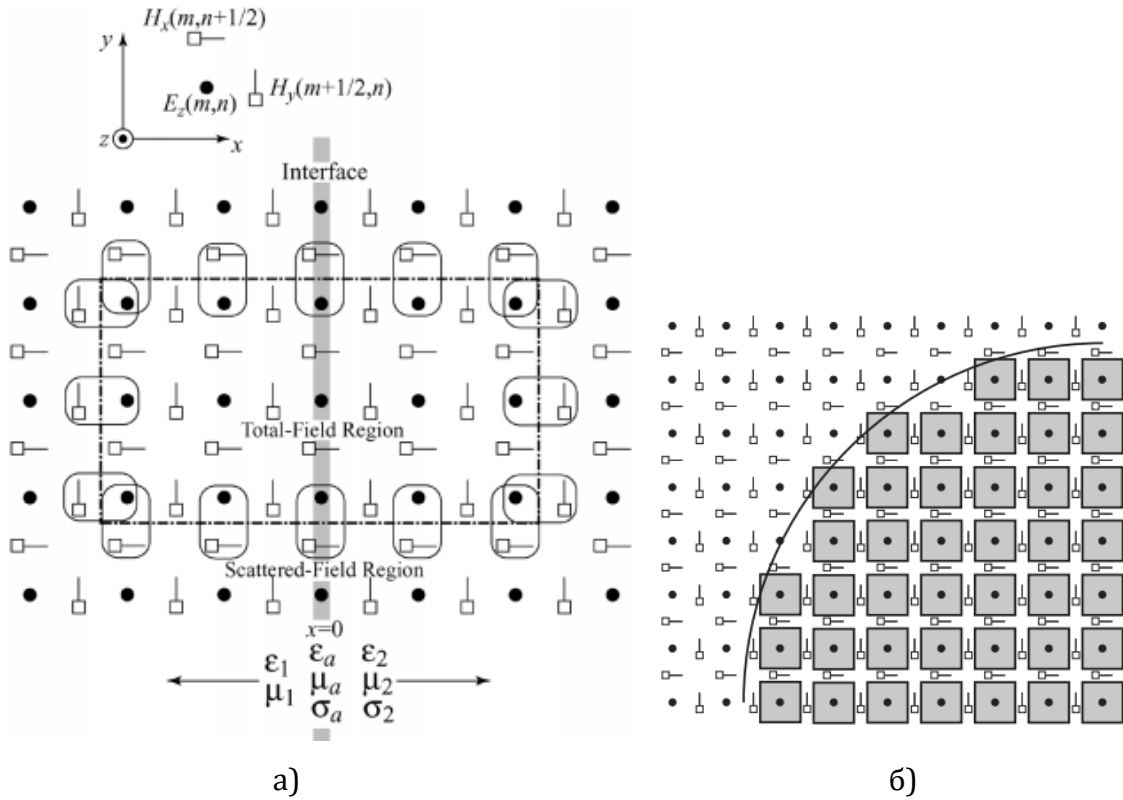
Инстанце просторних корака су изостављене на слици 5.7 због упрошћавања објашњења. Индекси 1Д и 2Д које садрже компоненте поља одређују из које решетке је компонента поља. Прво се ажурирају компоненте рефлектованог магнетског поља у 2Д решетки у главном FDTD алгоритму ($\vec{H}_x^{scat} |_{2D}^{n+1/2}, \vec{H}_y^{scat} |_{2D}^{n+1/2}$), без узимања у обзир TF/SF границе. Онда се врши њихова корекција коришћењем компоненте инцидентног електричног поља из 1Д решетке ($\vec{E}_z^{inc} |_{1D}^n$). Након тога следи ажурирање компоненти рефлектованог магнетског поља и компоненти инцидентног електричног поља у 1Д решетки ($\vec{H}_y^{scat} |_{1D}^{n+1/2}, \vec{E}_z^{inc} |_{1D}^{n+1}$).

У следећем кораку се врши корекција тоталне компоненте електричног поља у 2Д решетки коришћењем инцидентног магнетског поља из 1Д решетке ($\vec{E}_z^{tot} |_{2D}^n$ из $\vec{H}_y^{inc} |_{1D}^{n+1/2}$). У конкретном случају $\vec{H}_x^{inc} |_{1D}^{n+1/2}$ компоненте инцидентног магнетског поља из 1Д решетке није потребно читавати. После извршених корекција, наставља се главни FDTD алгоритам ажурирањем електричног поља у 2Д решетки ($\vec{E}_z^{tot} |_{2D}^{n+1}$).

Осим 2Д домена, у овом раду су анализирани TF/SF равни таласи у 3Д FDTD домену. Имплементација у 3Д домену није много различита од имплементације у 2Д домену, осим повећања броја променљивих, што је последица додавања још једне димензије.

Како је један од циљева истраживања испитивање предности коришћења TF/SF равних таласа у односу на тачкасте (импулсне) изворе, истраживање је ограничено на случајеве са равним таласима који наилазе под правим углом на раздвојну површину између две средине или PEC расејач. Осим слободног простора, простирање TF/SF равних таласа је анализирано у случају два диелектрична полупростора, као и у случају PEC расејача.

У поглављу 3.4 приказани су принципи на којима су засновани TF/SF равни таласи у FDTD методи. Једначине 3.14, 3.15 и 3.16 представљају Максвелове једначине у методи коначних разлика у временском домену са имплементираним TF/SF границом за случај TMz типа таласа. У тим једначинама, коефицијенти $C_{eze}|_{ij,k}$ и $C_{ezh}|_{ij,k}$ у себи садрже параметре средине у којој се поље простира ($\epsilon, \mu, \sigma, \sigma^*$). Променом вредности диелектричних константи и специфичне проводности, мењају се вредности коефицијената који множе компоненте вектора јачине електричног и магнетског поља, па се на тај начин мењају особине средина. Код средина са губицима (*lossy* материјали) електрична проводност σ или магнетска σ^* су различите од нуле. У том случају амплитуда таласа експоненцијално опада у току простирања. У [20] се може наћи детаљно описан начин имплементације слоја са губицима у FDTD алгоритам са TF/SF равним таласима, слика 5.8а.



Слика 5.8 а) TF/SF слој са губицима, б) PEC у FDTD решетки, [20]

Једначина [20]:

$$\frac{\sigma \Delta_t}{2\varepsilon} = \frac{\pi}{n_c} S \left(\left[1 + \frac{n_c^2}{2\pi^2 n_g^2 \varepsilon_r \mu_r} \right]^2 - 1 \right)^{1/2}, \quad (5.36)$$

је од великог значаја за дефинисање особина диелектрика са губицима и она ће бити коришћена у истраживању за добијање бројне вредности која изражава губитке. На пример, ако се претпостави да је CFL улсов $S=1$, $\varepsilon_r=4$, $\mu_r=1$, заменом бројних вредности у једначину 5.36, добија се да је $\sigma \Delta_t / 2\varepsilon = 0,0253146$. Ова бројна вредност ће се користити као константа за губитке у програмском коду, у FDTD симулацијама која садрже средину са губицима.

Поред простирања у срединама са губицима, предмет истраживања ће бити и анализа расејања електромагнетског поља у присуству 2Д и 3Д расејача у виду савршено проводног PEC (*Perfect Electric Conductor*) објеката. Код моделовања PEC-а, у општем случају, све тачке електричног поља које се налазе унутар PEC-а иницијализују се на нулту вредност. У недисперзивним срединама, које су предмет истраживања, компоненте магнетског поља се

ажурирају стандарно и није неопходно њихово анулрирање. PEC објекти, имплементирани на овај начин, не утичу на простирање компоненти магнетског поља. На слици 5.8б приказан је део 2D FDTD решетке са TM_z типом таласа, где се види које се компоненте електричног поља анулирају. Закривљена граница је површина PEC-а кружног облика и тачке FDTD решетке обојене сивом бојом означавају компоненте електричног поља чије се вредности постављају на нулу. Постоји неколико начина да се вредности електричног поља у PEC-у поставе на нулу: (1) да се компоненте иницијализују нулом и никад се не ажурирају, (2) да се ажурирају али да су им коефицијенти постављени на нулту вредност или (3) да се ажурирају стандардним алгоритмом па да се у додатној петљи вредности поставе на нулу. У раду је примењен први начин (1).

У раду ће се користити 3Д PEC објект кружног облика (савршено проводна PEC сфера), за који је начин имплементације исти као и у 2Д случају, уз додавање још једне димензије. Моделовање PEC-а закривљеног облика је један од изазова у FDTD методи зато што граничне површине PEC-а нису у „поравнању“ са FDTD решетком [76]. То је последица FDTD дискретизације, па површина PEC-а постаје „степеничаста“ (*staircase*), што неповољно утиче на нумеричке резултате. У овом истраживању анализа PEC структура неког одређеног облика није приоритет, већ само анализа расејања TF/SF равних таласа од PEC-а било ког облика. Стога, дискретизација површине PEC структура није у првом плану.

5.5 Имплементација UPML граничних услова у FDTD методу

При имплементацији UPML граничних услова, тачније њихових тензор коефицијената ($s_x = k_x + \sigma_x / j\omega\epsilon_0$) који дефинишу анизотропни медијум, примењен је посебан приступ базиран на помоћним диференцијалним једначинама (*auxiliary differential equation* – ADE) [13, 77]. Амперов закон са UPML-ом у матричној форми има следећи облик:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_y \\ \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_x - \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_y - \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_x \end{bmatrix} = j\omega\varepsilon \begin{bmatrix} \frac{s_y s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_x s_z}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_x s_y}{s_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_x \\ \vec{E}_y \\ \vec{E}_z \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

У FDTD алгоритам се компонента вектора јачине електричног поља, из једначине 5.47, не може ефикасно ажурирати на стандардан начин због нелинеарне зависности фреквенције елемената тензор коефицијената [13]. Поље $\vec{E}_{x,y,z}$ се може ажурирати на различите начине, али најефикаснија метода је ADE метода од два корака, увођењем електричне индукције $\vec{D}_{x,y,z}$:

$$\vec{D}_x = \varepsilon \frac{s_z}{s_x} \vec{E}_x, \quad \vec{D}_y = \varepsilon \frac{s_x}{s_y} \vec{E}_y; \quad \vec{D}_z = \varepsilon \frac{s_y}{s_z} \vec{E}_z \quad (5.48)$$

Ако се једначина 5.48 замени у једначину 5.47, добија се:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_z - \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_y \\ \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_x - \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_y - \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_x \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} s_y & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{D}_x \\ \vec{D}_y \\ \vec{D}_z \end{bmatrix}. \quad (5.49)$$

Након преласка у временски домен, помоћу Фуријеове трансформације, као и временске и просторне дискретизације, диференцијална једначина за рачунање поља \vec{D}_x у FDTD алгоритму изгледа овако:

$$\begin{aligned} \bar{D}_x \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1} &= \left(\frac{2\varepsilon_0 k_y - \sigma_y \Delta t}{2\varepsilon_0 k_y + \sigma_y \Delta t} \right) \bar{D}_x \Big|_{i+1/2,j,k}^n + \\ &+ \left(\frac{2\varepsilon_0 \Delta t}{2\varepsilon_0 k_y - \sigma_y \Delta t} \right) \left(\frac{\bar{H}_z \Big|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} - \bar{H}_z \Big|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} - \frac{\bar{H}_y \Big|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} - \bar{H}_y \Big|_{i-1/2,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} \right) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Поље \mathbf{E}_x се, након замене тензор коефицијената и преласка у временски домен, може израчунати из једначина 5.48, на следећи начин:

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_x \bar{D}_x) + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} \bar{D}_x = \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial t} (k_z \bar{E}_x) + \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} \bar{E}_x \right]. \quad (5.51)$$

У оваквом облику, помоћу вектора електричне индукције, поље \mathbf{E}_x је могуће ефикасно ажурирати стандардним FDTD алгоритмом, на следећи начин:

$$\begin{aligned} \bar{E}_x \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1} &= \left(\frac{2\varepsilon_0 k_z - \sigma_z \Delta t}{2\varepsilon_0 k_z + \sigma_z \Delta t} \right) \bar{E}_x \Big|_{i+1/2,j,k}^n + \\ &+ \left[\frac{1}{(2\varepsilon_0 k_z + \sigma_z \Delta t) \varepsilon} \right] \left[(2\varepsilon_0 k_x + \sigma_x \Delta t) \bar{D}_x \Big|_{i+1/2,j,k}^{n+1} - (2\varepsilon_0 k_x + \sigma_x \Delta t) \bar{D}_x \Big|_{i+1/2,j,k}^n \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

На исти начин се могу извести и остале компоненте вектора јачине електричног и магнетског поља. На крају, у једначини 5.52, могу се приметити два корака при израчунавању компоненте вектора јачине електричног поља: 1) израчунавање нових вредности вектора електричне индукције једначином 5.50 и 2) користећи нове вредности вектора електричне индукције израчунати нове вредности вектора јачине електричног поља једначином 5.52. Имплементиран на овај начин, методом од два корака, UMPL је лако инкорпорирати у постојећи FDTD програмски код. UPML испуњава читав FDTD нумерички простор, са $\sigma_w = 0$ и $k_w = 1$ у унутрашњости нумеричког домена, а у региону UMPL-а ови параметри су градирано помоћу полинома. На овај начин је извршена имплементација UPML граничних услова у FDTD алгоритам, у овој дисертацији.

5.6 Имплементација CPML граничних услова у FDTD методу

Када је у питању имплементација CPML граничних услова, главни изазов је имплементација дискретних конволуционих парова који садрже η_w , са десне стране једначине 4.43, у поглављу 4.4. Она представља Амперов закон у слободном простору са имплементираним CPML-ом и поново је приказана због прегледности поступка FDTD дискретизације [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \vec{E}) = & \hat{x} \left(\frac{1}{k_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_z - \frac{1}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_y + \eta_y(t) * \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_z - \eta_z(t) * \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_y \right) + \\ & + \hat{y} \left(\frac{1}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_x - \frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_z + \eta_z(t) * \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_x - \eta_x(t) * \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_z \right) + \\ & + \hat{z} \left(\frac{1}{k_x} \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_y - \frac{1}{k_y} \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_x + \eta_x(t) * \frac{\partial}{\partial x} \vec{H}_y - \eta_y(t) * \frac{\partial}{\partial y} \vec{H}_x \right) \end{aligned} \quad (5.53)$$

При имплементацији у FDTD алгоритам, конволуциони парови троше огромну количину рачунарске меморије [16, 2]. Постоји доста ефикасних апроксимација конволуционих парова, од којих су најефикасније *recursive-convolution* (RC) [78] и *piecewise-linear recursive-convolution* (PLRC) [79]. PLRC има већу тачност од RC [78], али приликом имплементирања исте долази до повећања комплексности алгоритма и потребне рачунарске меморије. Како RC [78] даје сасвим солидне резултате и како је њена имплементација релативно проста, она ће бити коришћена у програмском коду.

Први корак код решавања проблема конволуционих парова на основу [68] је рачунање дискретног одзива за η_w :

$$\begin{aligned} Z_w(m) = & \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \eta_w(\tau) d\tau = \\ & = -\frac{\sigma_w}{\varepsilon_0 k_w^2} \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} e^{-\left(\frac{\sigma_w + \alpha_w}{\varepsilon_0 k_w} + \frac{\alpha_w}{\varepsilon_0}\right)\tau} d\tau = c_w e^{-\left(\frac{\sigma_w + \alpha_w}{\varepsilon_0 k_w} + \frac{\alpha_w}{\varepsilon_0}\right)m\Delta t} \end{aligned} \quad (5.54)$$

где је:

$$c_w = \frac{\sigma_w}{k_w (\sigma_w + \alpha_w k_w)} [b_w - 1], \quad (5.55)$$

а b_w је једнак:

$$b_w = e^{-\left(\frac{\sigma_w + \alpha_w}{\varepsilon_0 k_w} \right) \Delta t}. \quad (5.56)$$

Следећи корак је имплементација конволуције на дискретан начин користећи апроксимацију константи за η_w и $\partial \vec{H}_v / \partial w$:

$$\psi_{w,v}(n) = \eta_w(t) * \frac{\partial}{\partial w} \vec{H}_v(t) \Big|_{t=n\Delta t} = \sum_{m=0}^{n-1} Z_w(m) \frac{\partial}{\partial w} \vec{H}_v(n-m). \quad (5.57)$$

Ако би се приступило имплементацији дискретне конволуције у овом облику довело би до експоненцијалног повећања рачунарских ресурса. Уместо тога, рекурзивна веза која ефикасно рачуна померање дискретне конволуције ψ у времену, изведена је у [78] и изражена је на следећи начин:

$$\psi_{w,v}(n) = b_w \psi_{w,v}(n-1) + c_w \frac{\partial}{\partial w} H_v(n). \quad (5.58)$$

У овом облику, конволуциони парови са десне стране једначине 5.53, могу се имплементирати са великом ефикасношћу [16]. На пример, ако се узме у обзир само пројекција у правцу x , Амперовог закона у једначини 5.53, под претпоставком да се електрично поље простире кроз неку средину проводности σ , следи:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E}_x) + \sigma \vec{E}_x = \left(\frac{1}{k_y} \frac{\partial}{\partial y} \overline{H_z} - \frac{1}{k_z} \frac{\partial}{\partial z} \overline{H_y} \right) + \left(\eta_y(t) * \frac{\partial}{\partial y} \overline{H_z} - \eta_z(t) * \frac{\partial}{\partial z} \overline{H_y} \right). \quad (5.59)$$

Након временске и просторне дискретизације, као и примене рекурзивне конволуције, једначина 5.53 има следећи облик:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i+1/2,j,k} & \left(\frac{\vec{E}_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{E}_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \sigma_{i+1/2,j,k} \frac{\vec{E}_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \vec{E}_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right) = \\
 & = \left(\frac{\vec{H}_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - \vec{H}_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^n}{k_y \Delta y} - \frac{\vec{H}_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - \vec{H}_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^n}{k_z \Delta z} \right) + \\
 & \quad + \psi_{\vec{E}_{x,y}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - \psi_{\vec{E}_{x,z}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

где су $\Psi_{E_{x,y}}$ и $\Psi_{E_{x,z}}$ коефицијенти који постоје само у CPML-у. Они се ажурирају не следећи начин:

$$\psi_{\vec{E}_{x,y}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n = b_{y_j} \psi_{\vec{E}_{x,y}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-1} + c_{y_j} \left(\frac{\vec{H}_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - \vec{H}_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^n}{\Delta y} \right), \tag{5.61}$$

$$\psi_{\vec{E}_{x,z}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n = b_{z_k} \psi_{\vec{E}_{x,z}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-1} + c_{z_k} \left(\frac{\vec{H}_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - \vec{H}_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^n}{\Delta z} \right). \tag{5.62}$$

Дискретни коефицијенти c_w и b_w су различити од нуле само у CPML-у и рачунају се на помоћу једначина 5.55 и 5.56, респективно. Експлицитни израз за компоненту вектора јачине електричног поља \vec{E}_x се на крају може извести:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}} & = C_a \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} \cdot \vec{E}_x \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n-\frac{1}{2}} + \\
 & \quad + C_b \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} \cdot \left(\frac{\vec{H}_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^n - \vec{H}_z \Big|_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^n}{k_y \Delta y} - \frac{\vec{H}_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^n - \vec{H}_y \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^n}{k_z \Delta z} \right) \\
 & \quad + \psi_{\vec{E}_{x,y}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n - \psi_{\vec{E}_{x,z}} \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k}^n
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

где су C_a и C_b коефицијенти који су једнаки:

$$C_a \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\left(1 - \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}} \right)}{\left(1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}} \right)}, \quad C_b \Big|_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\left(\frac{\Delta t}{\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}} \right)}{\left(1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta t}{2\varepsilon_{i+\frac{1}{2},j,k}} \right)}. \quad (5.64)$$

Ако се упореде једначина 5.63 из овог поглавља и једначина 2.31 (поглавље 2.3), може се приметити да обе рачунају поље \mathbf{E}_x и да су идентичне. Једина разлика је у коефицијентима, у једначини 5.63, који се односе на конволуцију у CPML-у. Конволуциони коефицијенти у једначини 5.63 се „понашају“ као индукване временски зависне поларизационе струје, чије зрачење анулира компоненте таласа који се простире кроз CPML.

Једначина 5.63 представља основну једначину FDTD алгоритма за рачунање вектора јачине електричног поља \mathbf{E}_x са имплементираним CPML граничним условима и у овом облику је имплементирана у програмски код FDTD симулација у овој дисертацији. Остале компоненте поља \mathbf{E}_y , \mathbf{E}_z , \mathbf{H}_x , \mathbf{H}_y и \mathbf{H}_z 3D FDTD домена се могу извести на исти начин, са адекватном изменом индекса (i,j,k) и (x,y,z) .

5.7 Градирање CPML коефицијената

Теоријски гледано, у континуалном домену, на раздвојној површини између FDTD нумеричког домена и PML слоја нема рефлексије, иако постоји дисконтинуитет специфичне проводности σ и σ^* . Међутим, приликом временске и просторне дискретизације Максвелових једначина у FDTD алгоритму, неминовна је појава рефлексије на раздвојној површини. Због тога, имплементирање PML-а на начин да се у једном просторном кораку направи дисконтинуитет специфичне проводности σ и σ^* , није препоручљиво.

Градирање PML параметара је један од начина да се рефлексија на раздвојној површини умањи, као и да се ефикасност апсорпције електромагнетских таласа у унутрашњости PML-а повећа. Како би се боље

представио значај параметара који утичу на ефикасност PML, UPML и CPML граничних услова, у Табели 1 приказане су њихове ознаке, значење и кратак опис утицаја који имају.

Табела 1. Кључни параметри који утичу на апсорпцију у PML-у

Ознака	Значење	Ефекат у PML-у
k	коэффициент проширења координата	проширује простор са циљем да ослаби енергију ЕМ таласа
σ	специфична проводност	трансформише енергију ЕМ таласа у топлотну енергију
α	коэффициент померања комплексне фреквенције	одређује карактеристичну фреквенцију апсорпције, сузбија дисперзију

У следећим једначинама приказани су коефицијенти проширених координата за PML [12], UPML [13] и CPML [16], респективно:

$$s_w = 1 + \frac{\sigma_w}{j\omega\epsilon_0}, \quad (5.65)$$

$$s_w = k_w + \frac{\sigma_w}{j\omega\epsilon_0}, \quad (5.66)$$

$$s_w = k_w + \frac{\sigma_w}{\alpha_w + j\omega\epsilon_0}. \quad (5.67)$$

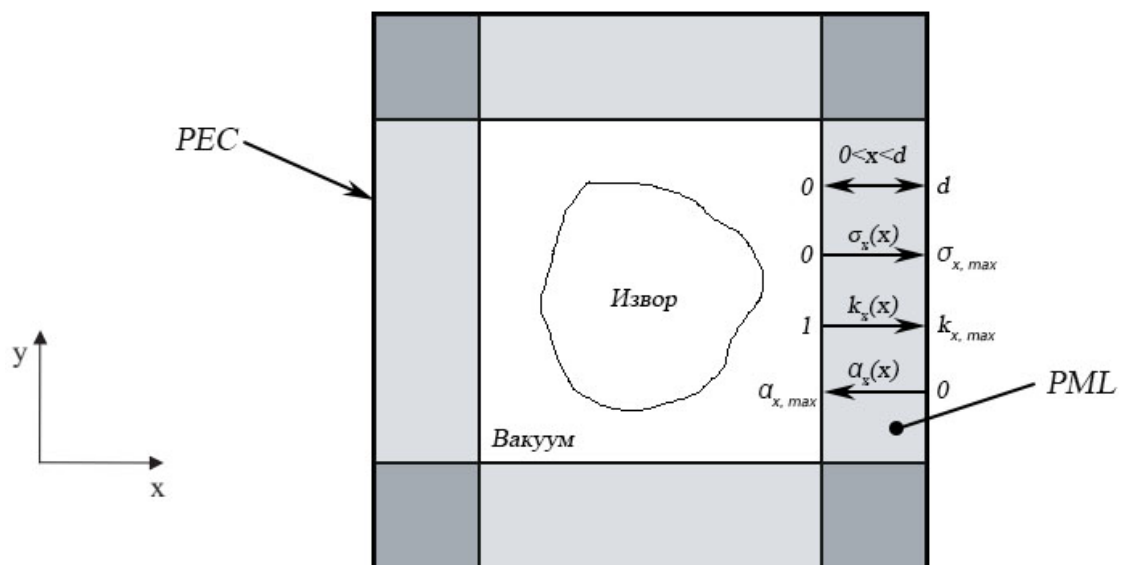
Предложено је неколико начина за градирање PML параметара од којих су два најефикаснија: помоћу полинома и геометријско градирање [80, 81, 2]. У овој дисертацији је коришћено градирање помоћу полинома [81, 12]:

$$k_x(x) = 1 + (k_{x,\max} - 1) \left(\frac{x}{d} \right)^m, \quad (5.70)$$

$$\sigma_x(x) = \sigma_{x,\max} \left(\frac{x}{d} \right)^m, \quad (5.71)$$

$$\alpha_x(x) = \alpha_{x,\max} \left(\frac{d-x}{d} \right)^{m_a}, \quad 0 \leq x \leq d, \quad (5.72)$$

где су x дубина продирања у PML-у, d дебљина PML-а, m и m_a су фактори скалирања. Илустрација на којој се види на који начин су функције параметара скалиране (градиране) у PML-у, приказана је на слици 5.10.



Слика 5.10 Градирање параметара унутар PML-а

Специфична проводност σ_x ($\sigma_x \geq 0$) код PML-а, UPML-а и CPML-а је скалирана тако да има вредност 0 на PML површини окренутој ка унутрашњости нумеричког домена ($x=0$), а $\sigma_{x,\max}$ на спољној површини PML-а ($x=d$). Коефицијент проширења k_x ($k_x \geq 1$) код UPML-а и CPML-а има вредност 1 на почетку PML-а ($x=0$), а максималну вредност $k_{x,\max}$ на крају PML-а ($x=d$). Параметар који дефинише померање комплексне фреквенције α_x ($\alpha_x \geq 0$) код CPML-а има свој максимум на предњој страни PML-а, а минимум је на граници $x=d$.

Велика вредност фактора m доприноси релативно равној дистрибуцији σ_x по предњој површини PML-а, док, у унутрашњости PML-а, вредност σ_x брзо

расте. То није случај кад фактор m има малу вредност. У унутрашњости PML-а амплитуде поља знатно опадају, па је утицај рефлексije која потиче од дискретизације мањи. Оптималне вредности за фактор скалирања m може се наћи у [81, 82, 84, 13] и креће се од 3 до 4.

Адекватан избор PML, UMPL и CPML параметара је кључан за ефикасност граничних услова. То је једна од хипотеза ове дисертације. Доћи до баланса између рефлексije на спољној површини PML-а ($x=d$) и рефлексije услед дискретизације на унутрашњој површини PML-а ($x=0$) је највећи изазов у PML моделовању. Ако $\sigma_{x,max}$ има превише малу вредност, рефлексija која потиче од PEC-а који окружује PML је доминантна. Када је вредност $\sigma_{x,max}$ превелика, рефлексija услед дискретизације која потиче од FDTD апроксимације на раздвојној површини је у значајном порасту. Показало се у [81, 82], да се највећа рефлексija услед дискретизације јавља на унутрашњој површини PML-а ($x=0$), логично, услед дисконтинуитета проводности σ и σ^* . Ублажавање утицаја дисконтинуитета на раздвојној површини јесте примарни циљ, али и постепени раст утицаја σ_x у унутрашњости PML-а треба бити приоритет. Ако је слабљење енергије таласа које потиче од σ_x нагло, долази до појаве рефлексije из унутрашњости PML-а.

У [13, 16, 85] је демонстрирано да је, у случају градирања помоћу полинома, могуће израчунати оптимално $\sigma_{w,opt}$ помоћу следеће једначине:

$$\sigma_{w,opt} = \frac{0.8(m+1)}{Z_0 \Delta_w \sqrt{\epsilon_{r,eff} \mu_{r,eff}}}, \quad (5.74)$$

где је Z_0 импеданса у слободном простору, Δ_w је просторни корак у $w=x,y,z$ правцу, $\epsilon_{r,eff}$ и $\mu_{r,eff}$ су ефективна релативна пермитивност и пермеабилност, респективно. Истраживања су показала да овај начин израчунавања $\sigma_{w,opt}$ даје врло прецизне резултате и да је примењив на широк спектар електромагнетских проблема [2]. Из тог разлога је ова формула примењена у свим FDTD симулацијама у дисертацији, у нумеричким експериментима са граничним условима.

Истраживања су показала да PML и UPML дају лоше резултате при апсорпцији таласа са углом инциденције који је близак углу од 90 степени [81]. Такође, апсорпција је лоша и код електромагнетских таласа са ниским фреквенцијама и када су компоненте таласа непостојане (*evanescent*) [82, 86]. Разлог за то је постојање споропроменљивих поља и таласа који имају дугу интеракцију са PML-ом [81, 82].

Код PML-а и UPML-а, може се дефинисати гранична фреквенција [81]:

$$f_g = \frac{\sigma_x(\Delta_x/2)}{2\pi\epsilon_0} = 1.8 \times 10^{10} \sigma_x(\Delta_x/2), \quad (5.76)$$

из које следи да, када је $f > f_g$, већина компоненти поља је трансмитовано у PML. Када је $f < f_g$, већина поља је рефлектована од PML површине. Нежељена рефлексију је могуће маскирати смањењем $\sigma_x(\Delta_x/2)$ или повећањем величине нумеричког домена. То има за последицу повећање рефлексије на раздвојној површини или потребне рачунарске меморије.

Један од разлога за рефлексију при ниским учестаностима је што тензор коефицијент s_x има пол (сигуларитет) на нултој фреквенцији. Увођењем CFS тензор коефицијента у облику једначине 5.67 [16, 33, 85], проблем је решен. То се, пре свега, односи на увођење коефицијента померања комплексне фреквенције α_x , параметра који доминантно утиче на апсорпцију таласа са ниским учестаностима. Једна од хипотеза ове дисертације је да се адекватном корелацијом између PML параметара може доћи до ефикасније апсорпције. У [65] се може видети детаљна анализа коефицијента рефлексије за CPML граничне услове. Гранична фреквенција код CPML-а се рачуна као:

$$f_{g,CPML} = \frac{\alpha_x}{2\pi\epsilon_0}. \quad (5.80)$$

Када је $f \ll f_{g,CPML}$ долази до врло мале апсорпције, док је случај $f \gg f_{g,CPML}$, тренутак значајне апсорпције. Коефицијент померања комплексне фреквенције α_x треба да буде што већи на предњој површини CPML-а, док у унутрашњости треба постепено да опада до минимума.

Градирање PML параметара, описано у овом поглављу, коришћено је у свим реализованим FDTD нумеричким симулацијама са PML, UPML, и CPML граничним условима, у овој дисертацији.

6. Нумерички резултати

Нумерички резултати, у овој дисертацији, производ су великог броја различитих FDTD симулација простирања електромагнетског поља. Како би се извршиле FDTD симулације простирања електромагнетског поља написан је програмски код у C++ програмском језику за сваку симулацију посебно. Нумерички резултати симулација простирања електромагнетског поља представљени су помоћу *open-source* графичког програма *gnuplot*.

Познато је да је у случају FDTD симулација простирања електромагнетског поља унутар фотоничких или микроталасних структура потребно извршити бар неколико хиљада временских корака. Међутим, у истраживањима у овој дисертацији, да би се добили резултати моделованих електромагнетских проблема, било је потребно неколико стотина временских корака симулацији.

6.1 Оптимизација извора у FDTD методи

Први део истраживања ове дисертације су импулсни извори и TF/SF техника генерисања равних таласа. Нумерички експерименти су осмишљени са циљем да докажу хипотезу да се адекватним избором извора поља може знатно повећати ефикасност и ефективност FDTD симулација простирања електромагнетског поља. Као што је поменуто, постоје електромагнетски проблеми у којима је неопходно да се извор налази унутар FDTD нумеричког домена. Нумерички резултати из овог поглавља имају за циљ да испитају ефикасност примене Рикеровог у односу на Гаусов импулс у тим случајевима. Када је потребно симулирати поље извора чије се поље простира искључиво у једном правцу, а још постоји потреба за смањењем рачунарских ресурса, погодна је примена TF/SF технике генерисања равних таласа. Нумерички резултати симулација простирања са TF/SF равних таласа треба да демонстрирају да је коришћење ове технике прави избор у свим електромагнетским проблемима у којима не постоји потреба постојања извора поља у унутрашњости нумеричког домена.

6.1.1 Предности коришћења Рикеровог у односу на Гаусов импулс у FDTD симулацијама

За одређене симулације простирања електромагнетског поља, извор енергије се мора налазити унутар FDTD решетке. На пример, симулација екситације резонатора или антена захтева да извор буде позициониран унутар FDTD решетке. Популарна имплементација извора је позната као „тврди“ извор, при којој се поље, са одговарајућом временском функцијом, просто „додели“ некој тачки решетке. Како се једначина FDTD алгоритма не примењује на тачку извора, а вредност у тачки је дефинисана само функцијом извора, све компоненте таласа из нумеричког домена која се простиру ка тачки извора биће рефлектоване. У неким симулацијама, рефлексивност од тачке извора генерише знатну нумеричку дисперзију, што доводи до деградације квалитета симулације. Један од приступа да се елиминише расејање на месту извора је коришћење импулсних извора. Изворна функција, код импулсних извора, има коначно време трајања, стога на завршетку има вредност нула. Након што функција извора дође на нулту вредност, вредност у тачки извора се ажурира једначином FDTD алгоритма.

Импулсни извори, генерално, нису дизајнирани за примену у FDTD методи, тј. не узимају у обзир специфичности FDTD методе. Због тога је правилан избор извора, адекватан за специфичан електромагнетски проблем, од кључног значаја у FDTD моделовању. У FDTD решетки, посебно у 2Д и 3Д, извори електромагнетског поља J и M могу депоновати („наталожити“) одређену количину оптерећења (наелектрисања) [34].

Један начин да се избегну ова нежељена наелектрисања, заснован на увођењу капацитивности и индуктивности FDTD решетки, предложен је у [34]. Међутим, моделовање локалних капацитивности и индуктивности захтева дефинисање посебне димензије ћелије на одређеним местима у FDTD решетки. Такође, потребно је дефинисати мање вредности пермитивности или пермеабилности од оних за слободан простор и то по једној ћелији. Ово

додатно моделовање је врло комплексно и у случају грешке може доћи до нумеричке нестабилности FDTD алгоритма [2].

Струјни извори који у себи садрже једносмерну компоненту (*direct current* – DC) депонују фиктивна нумеричка наелектрисања, док извори без DC компоненте могу произвести привремена наелектрисања [34]. У FDTD симулацији у [34], као извор је коришћен стандардни Гаусов импулс који у себи садржи DC компоненту. Постоје истраживања у којима се стандардни облик Гаусовог импулса користи управо због чињенице да садржи DC компоненту [35]. Истраживања са циљем да се уклони DC компонента Гаусовог импулса модулацијама урађена су у [34, 36, 37]. Коришћење биполарног импулса са једнаким позитивним и негативним вредностима, са циљем да се избегну DC компоненте Гаусовог импулса су предложене у [38]. Управо је сличан концепт основа хипотезе у овој дисертацији, да се манипулацијом временског облика Гаусовог облика могу елиминисати нежељене DC компоненте.

Како геометрија и временски облик импулса диктирају количину DC компоненти, самим тим и количину нежељених наелектрисања, у поглављу 5 је приказана анализа са смерницама на који начин оптимизовати стандардни облик Гаусовог импулса и прилагодити га за FDTD моделовање. Након великог броја испитивања и симулирања простирања поља са Гаусовим импулсом и његовим дериватима (диференцирани Гаусов импулс и Рикеров импулс), у овом поглављу су приказани резултати истраживања.

Први извод временске функције Гаусовог импулса, тзв. диференцирани Гаусов импулс је због својих добрих перформанси коришћен у FDTD симулацијама испитивања граничних услова, у поглављу 6.2.

У следећем поглављу су приказани резултати испитивања перформанси Рикеровог и Гаусовог импулса у FDTD симулацијама.

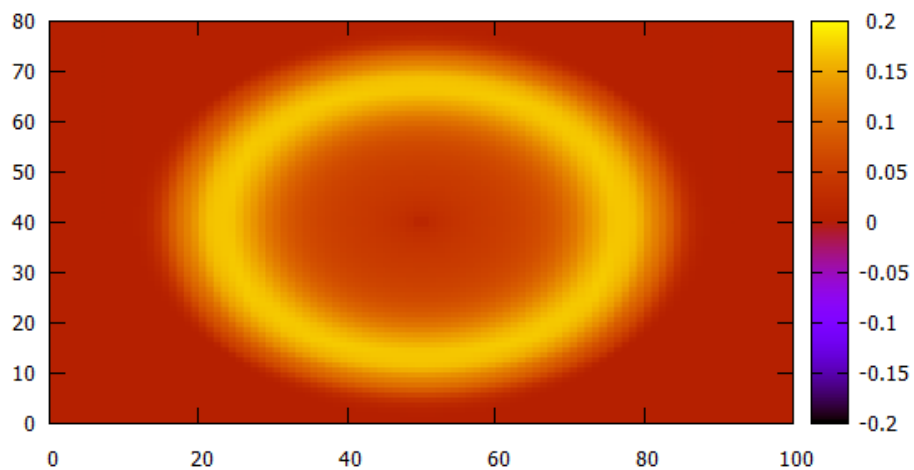
У нумеричким FDTD симулацијама простирања електромагнетског поља, објављеним у раду [87], извршено је поређење простирања и расејања електромагнетског поља екситованог Гаусовим, затим и Рикеровим импулсом

у 2Д и 3Д слободном простору. Такође, простирање и расејање ова два типа извора је анализирано у 2Д и 3Д нехомогеној средини састављеној из два хомогена полупростора.

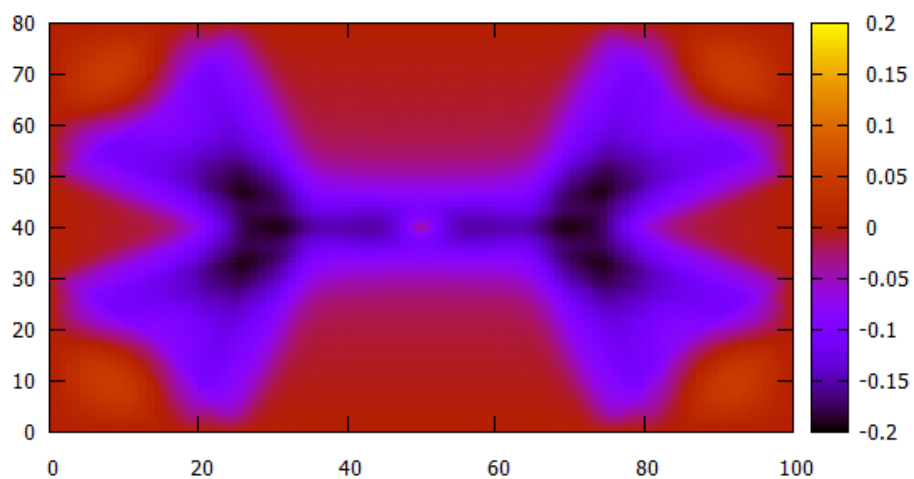
6.1.1.1 2Д FDTD симулација простирања поља Гаусовог и Рикеровог импулса у слободном простору

У овој 2Д FDTD симулацији [87] електромагнетско поље је екситовано у слободном простору у облику Гаусовог, па у облику Рикеровог импулса, а затим је извршено поређење резултата за поље. Циљ симулације је био да се региструју нежељени ефекти коришћења Гаусовог импулса у FDTD симулацијама. Простирани су ТМ тип таласа, а функције извора су једначина 5.9 за Гаусов и 5.19 за Рикеров импулс. Параметри Гаусовог импулса су: $t_0=10$ и $\tau=10$, а Рикеровог: $n_c=10$. FDTD просторни 2Д домен је $x = 100$, $y = 80$ ћелија. Гаусов и Рикеров импулс су побуђени у центру домена, а домен није завршен нумеричким граничним условима. Гранични услови нису имплементирани да би се таласи рефлектовани од граница нумеричког домена искористили за анализу центра домена у ком се претпоставља да ће бити наталожених DC компоненти.

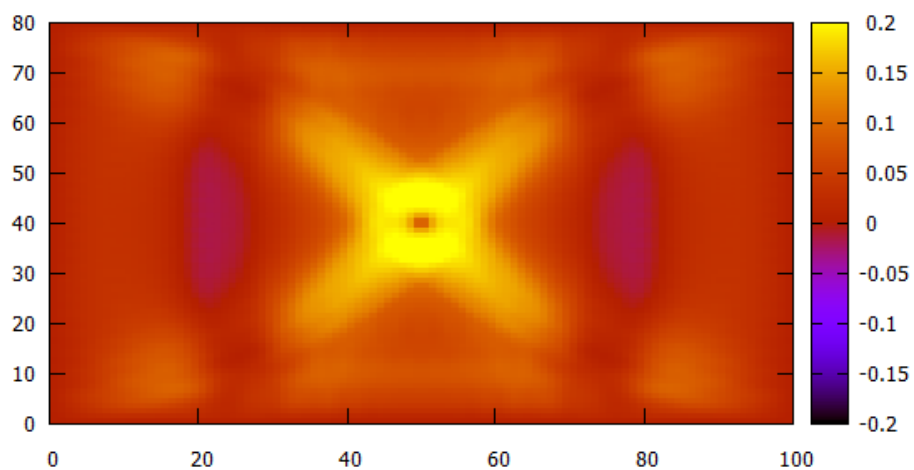
На слици 6.3 приказани су интензитети E_z компоненте вектора јачине електричног поља за случај екситације у облику Гаусовог импулса у слободном простору. Компонента E_z вектора јачине електричног поља је приказана у трансверзалној равни, коришћен је ТМ типа таласа, а слика 6.3а, б, в, приказије амплитуду E_z после 50, 120 и 190 временских корака, респективно. Слика 6.3а, приказије тренутак након генерисања Гаусовог импулса, у ком се, у тачки у којој је смештен извор поља, називу статичне компоненте поља. Ове статичке DC компоненте, у тренутку након 50 временских корака, не уносе знатну нумеричку дисперзију која може утицати на лоше резултате симулације. Јасно уочљива DC компонента, у центру домена, приказана је на слици 6.3б. Овде се види да се рефлектовани таласи од граница домена враћају на место извора поља, где долази до рефлексije са наталоженим DC компонентама.



а)



б)



в)

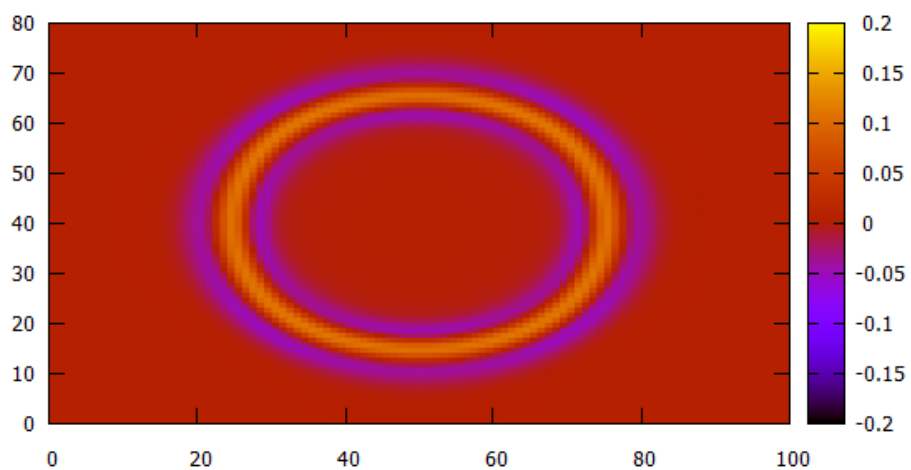
Слика 6.3 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E_z трансверзалној равни при екситацији Гаусовим импулсом после: а) 50, б) 120, в) 190 временских корака, [87]

Слика 6.3в, приказује тренутак након 190 временских корака, где се види интеракција рефлектованих таласа од граница домена са нежељеним DC компонентама Гаусовог импулса, смештених на месту генерисања поља. Тешко је проценити тачно простирање и рефлексију поља импулса у домену FDTD симулације, ако је таква нерегуларност присутна.

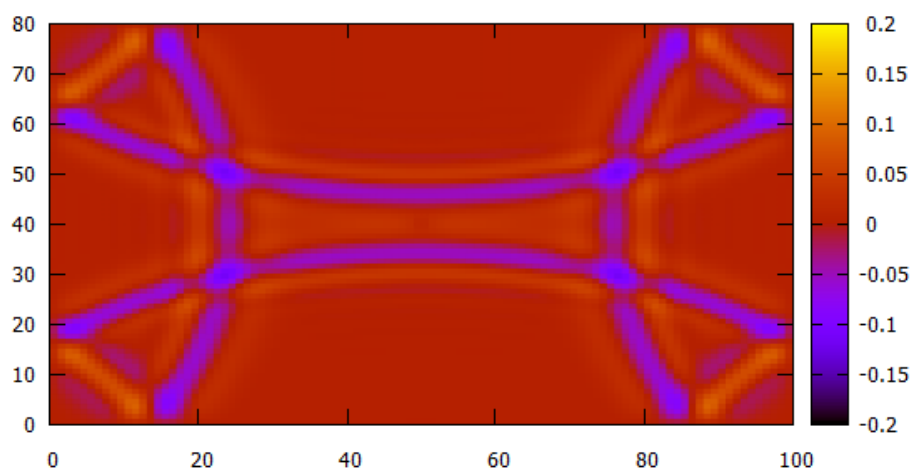
На слици 6.4а, б, в, приказан је интензитет z компоненте вектора јачине електричног поља E за случај екситације у виду Рикеровог импулса, после 50, 120 и 190 FDTD корака, респективно. Средина је слободан простор, а простиран је ТМ тип таласа.

Слика 6.4а, приказује тренутак након генерисања Рикеровог импулса, у ком се, у тачки у којој је смештен извор поља, не виде компоненте поља. Рефлектовани таласи од граница домена који се враћају на место извора поља, приказани су на слици 6.4б. Овде се види да на месту где је генерисано поље нема DC компоненти које би реметиле простирање рефлектованих таласа. Такође, на слици 6.4в, нису видљиве DC компоненте и простирање рефлектованих таласа је неометано и након 190 временских корака.

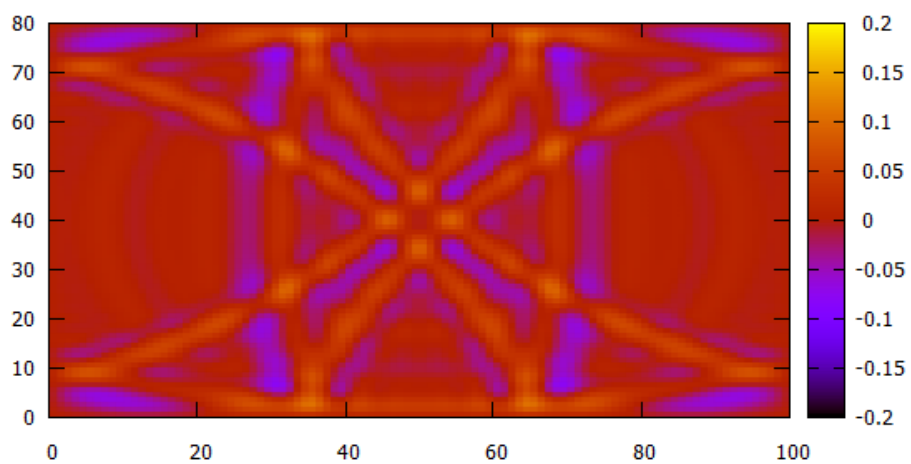
Са слика 6.4а, б, в јасно се уочава да простирање поља после екситације у облику Рикеровог импулса не прате нумеричке нерегуларности као у случају екситације Гаусовим импулсом. Обзиром да DC компонента поља не постоји у овом случају, нема ни непожељних рефлексија.



а)



б)



в)

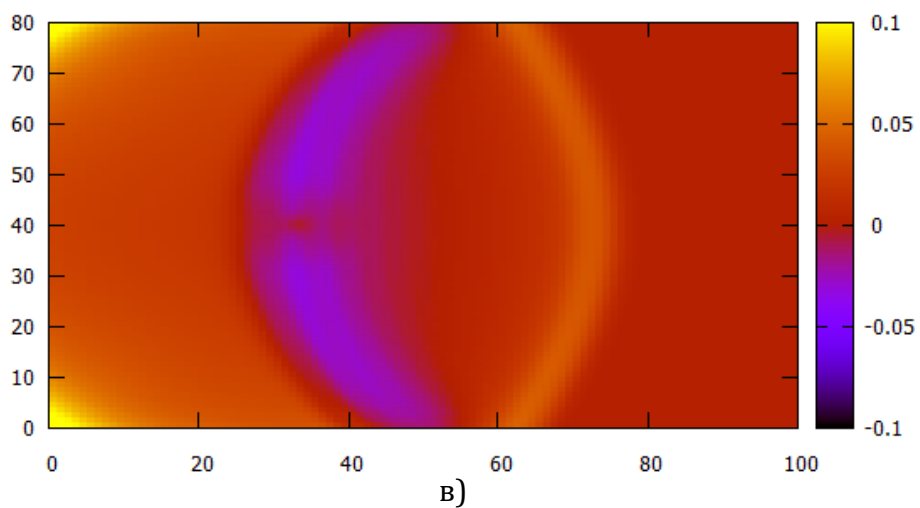
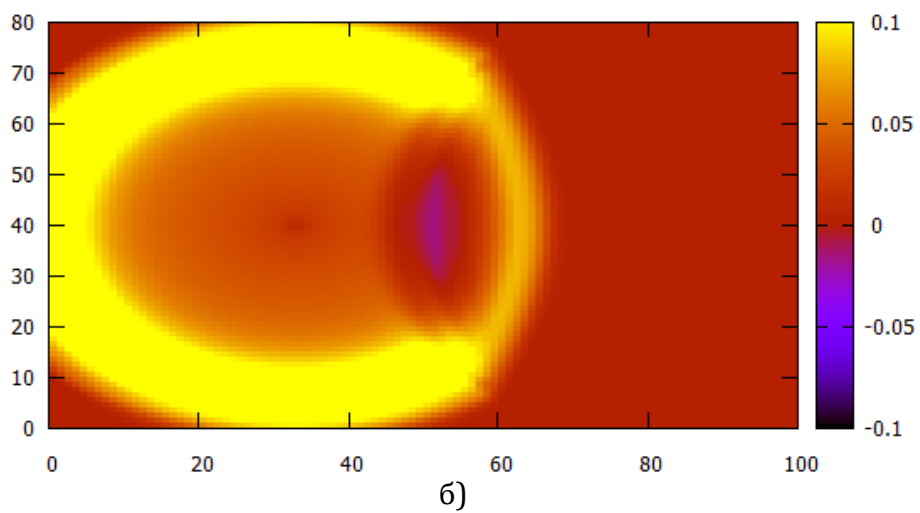
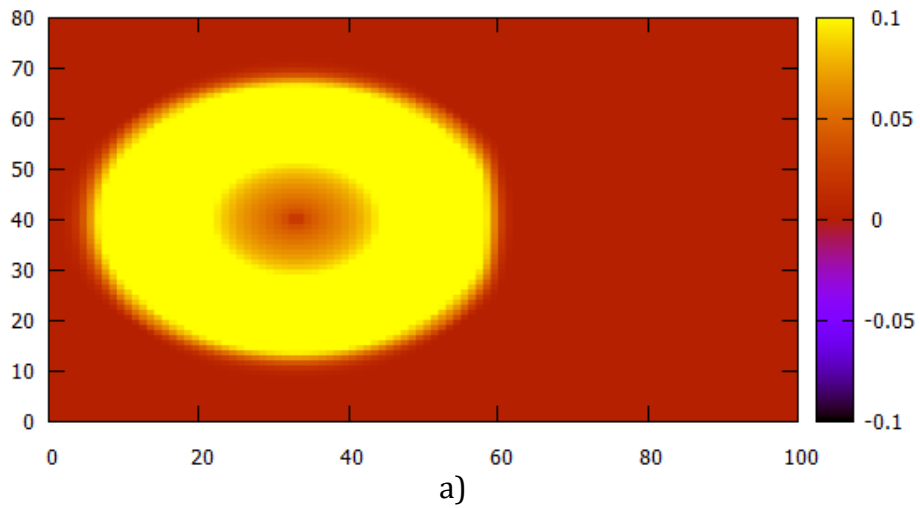
Слика 6.4 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E_y трансверзалној равни при екситацији Рикеровим импулсом после: а) 50, б) 120, в) 190 временских корака, [87]

6.1.1.2 2Д FDTD симулација расејања поља Гаусовог и Рикеровог импулса у нехомогеној средини

У овој 2Д FDTD симулацији расејања електромагнетског поља [87] извршено је поређење простирања, односно расејања, поља при екситацији Гаусовим, а затим и Рикеровим импулсом у нехомогеној средини састављеној из два хомогена диелектрична полупростора. Параметри коришћених импулса су исти као у претходној симулацији, као и димензије FDTD домена. Слободан полупростор се простира до 60. просторне ћелије у правцу x осе, а од 61. до 100. је полупростор с губицима. Константа слабљења у полупростору са губицима је $\alpha=0.0253146$, релативна пермитивност је $\epsilon_r=4$, а релативна пермеабилност је $\mu_r=1$. Нумерички домен FDTD симулације је ограничен Муровим граничним условима другог реда [5]. У оба случаја импулс је побуђен у центру дела домена који обухвата слободни полупростор. У односу на претходну симулацију, у нумеричким резултатима, границе у трансверзалној равни су измењене са $-0.2:0.2$ на $-0.1:0.1$ у циљу што бољег уочавања нежељене DC компоненте у случају екситације поља у облику Гаусовог импулса.

На слици 6.5а, б, в, приказан је интензитет z компоненте вектора јачине електричног поља E , за екситацију у облику Гаусовог импулса, после 40, 60 и 90 временских корака FDTD симулације, респективно. Простиран је ТМ тип таласа у нехомогеној средини састављеној из два диелектрична полупростора.

Тренутак непосредно пре прве интеракције таласа са раздвојном површином између слободног простора и слоја са губицима, након 40 временских корака симулације, приказан је на слици 6.5а. На месту генерисања Гаусовог импулса приметна је мала количина статичких DC компоненти. На слици 6.5б се већ види како трансмитоване компоненте инцидентног таласа пролазе кроз слој са губицима и постепено слабе. DC компоненте још увек не утичу знатно на простирање рефлектованих компоненти таласа



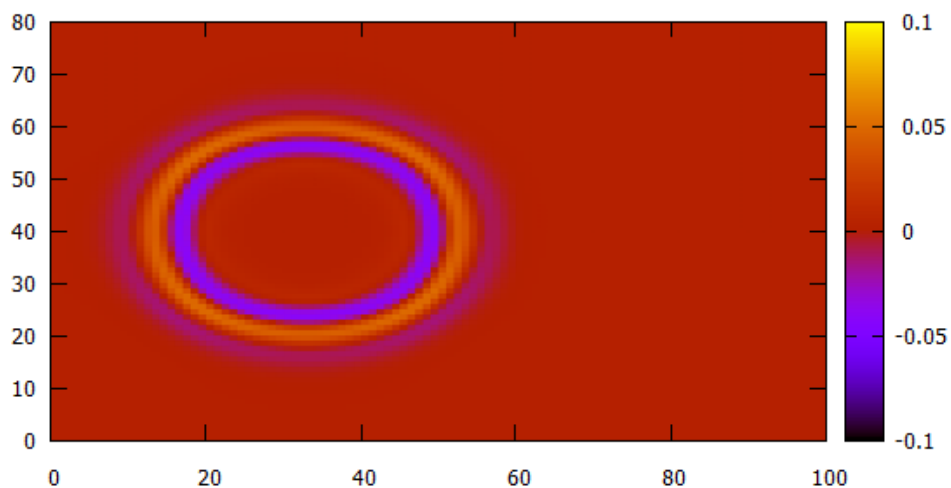
Слика 6.5 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E у трансверзалној равни при екситацији Гаусовим импулсом после: а) 40, б) 60, в) 90 временских корака, [87]

Рефлектоване компоненте поља, које потичу од раздвојне површине између два полупростора, пролазе кроз простор на ком је генерисан Гаусов импулс, на слици 6.5в. Види се да долази до генерисања рефлексије са DC компонентама, услед које је прецизна анализа резултата симулације отежана.

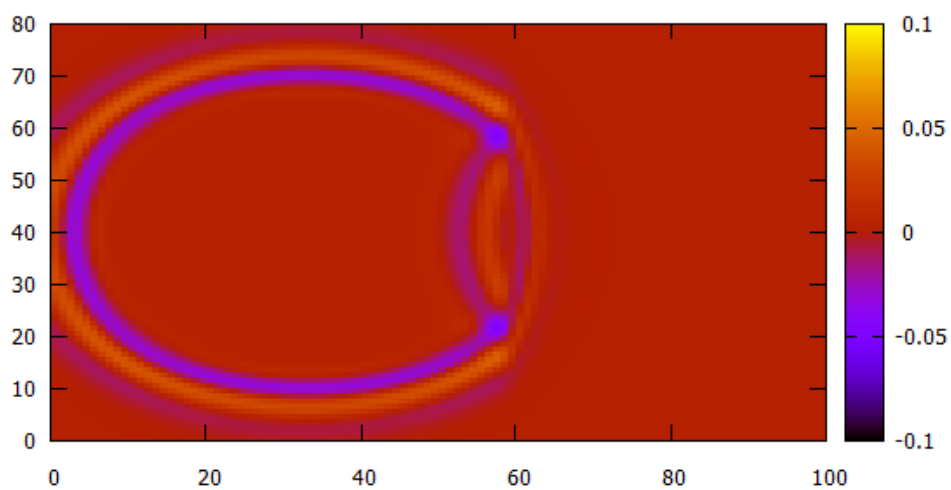
Резултати симулације простирања поља у нехомогеној средини са Рикеровим импулсом као извором, приказани су на слици 6.6а, б, в. Приказан је интензитет z компоненте вектора јачине електричног поља E поља у трансверзалној равни, после 40, 60 и 90 временских корака.

Након 40 временских корака симулације, приказаних на слици 6.6а, види се простируће поље Рикеровог импулса. Тренутак интеракције са раздвојном површином је приказан на слици 6.6б. У оба случаја нема видљивих DC компоненти на месту генерисања импулса које могу пореметити простирање таласа. Слика 6.6в, приказује интензитет z компоненте вектора јачине електричног поља E након 90 временских корака симулације. Вредности трансмитованог таласа су у знатном опадању у слоју са губицима, док рефлектовани талас од раздвојне површине нема опструкција при проласку кроз место генерисања таласа.

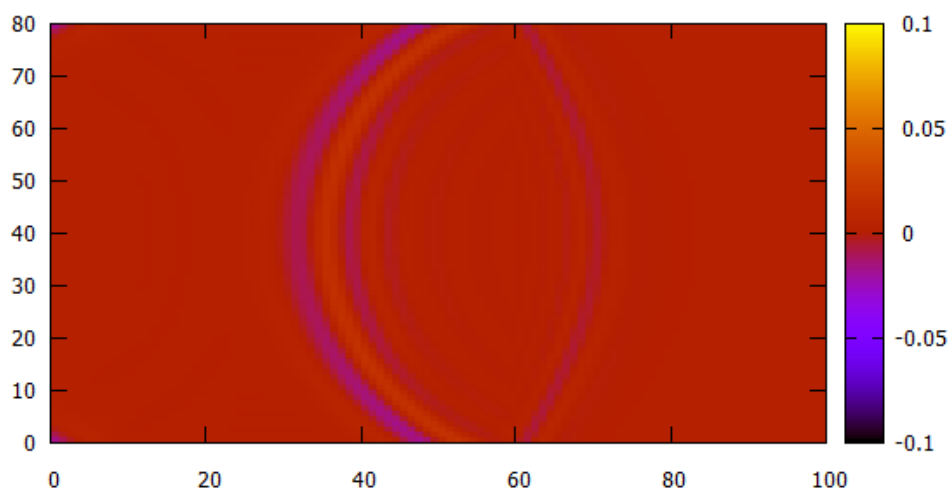
Као у случају простирања импулсног поља кроз слободан простор, и у случају нехомогене средине, види се да простирање Рикеровог импулса не прате нумеричке нерегуларности и да, поново, екситација у облику Рикеровог импулса има уочљиву предност у односу на екситацију Гаусовим импулсом, тј. да екситацију у виду Рикеровог импулса не прати DC компонента.



а)



б)



в)

Слика 6.6 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E_z трансверзалној равни при екситацији Рикеровим импулсом после: а) 40, б) 60, в) 90 временских корака, [87]

6.1.1.3 3Д FDTD симулација простирања поља Херцовог дипола у слободном простору

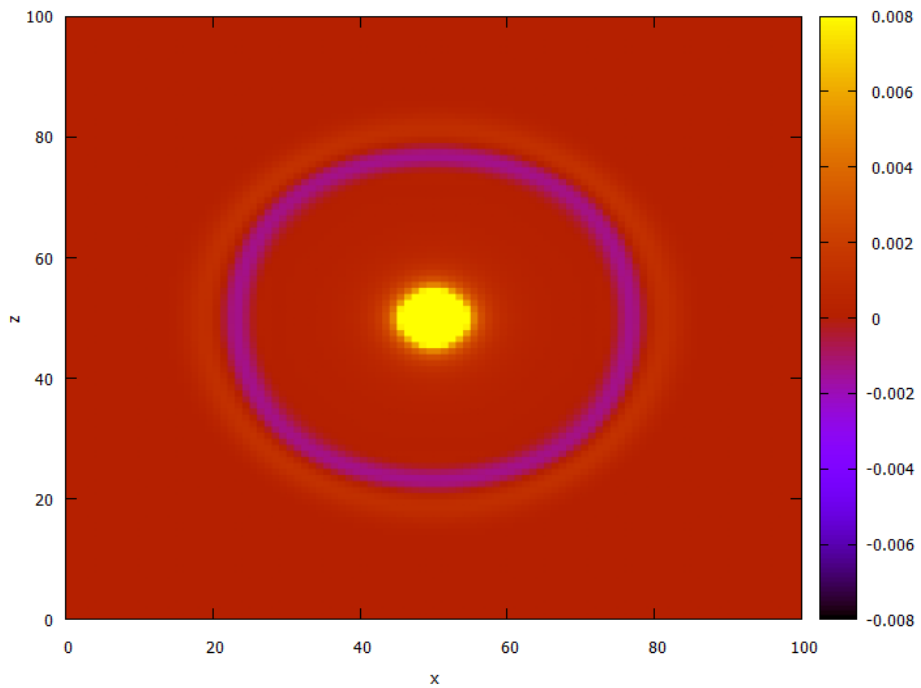
У 3Д FDTD нумеричким симулацијама простирања електромагнетског поља [87], у овом нумеричком експерименту, поље побуђује Херцов дипол. У овом примеру средина је слободан простор, а поље дипола је прво облика Гаусовог, а затим и Рикеровог импулса. Димензије домена су $x = y = z = 100$, а домен је ограничен Муровим граничним условима другог реда [5]. Задати параметри Гаусовог импулса на основу једначине 5.9 су: $t_0=30$ и $\tau=5$. За Рикеров импулс, на основу једначине 5.19, $N_p = 10$.

На слици 6.7а, б приказано је електромагнетско поље Херцовог дипола у слободном простору у облику Гаусовог импулса. На сл. 6.7а приказан је интензитет E_x компоненте вектора јачине електричног поља у xz равни, када је $y=\text{const}$, након 80 временских корака. Интензитет E_x компоненте вектора јачине електричног поља у yz равни, $x=\text{const}$, такође после 80 временских корака, види се на слици 6.7б.

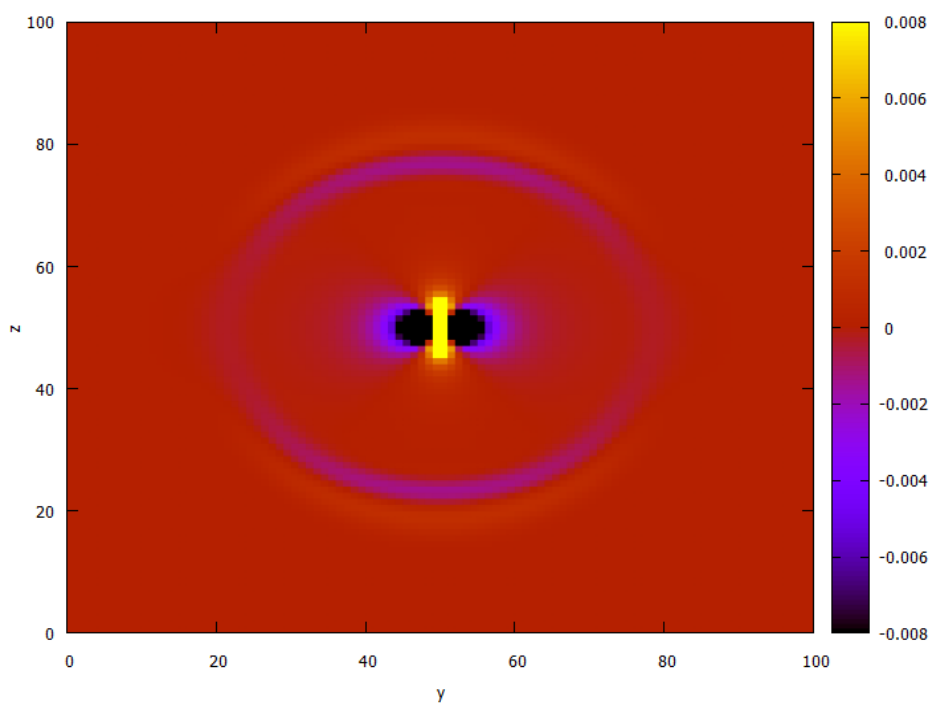
У оба случаја, на слици 6.7а и б, јасно је уочљива одређена количина статичних DC компоненти које „леже“ у нумеричком домену и својим присуством онемогућавају прецизну анализу резултата симулације.

Поље Херцовог дипола у слободном простору израчено у облику Рикеровог импулса види се на слици 6.8а, б. Интензитет E_x компоненте поља у xz равни, када је $y=\text{const}$, након 80 временских корака приказан је на слици 6.8а, док је на слици 6.8б приказан интензитет E_x компоненте поља у yz равни, када је $x=\text{const}$, након 80 временских корака.

У случају простирања Рикеровог импулса у слободном простору, слика 6.8а,б, на местима генерисања импулса не постоје нежељене DC компоненте поља, као што је то случај у симулацијама са Гаусовим импулсом.

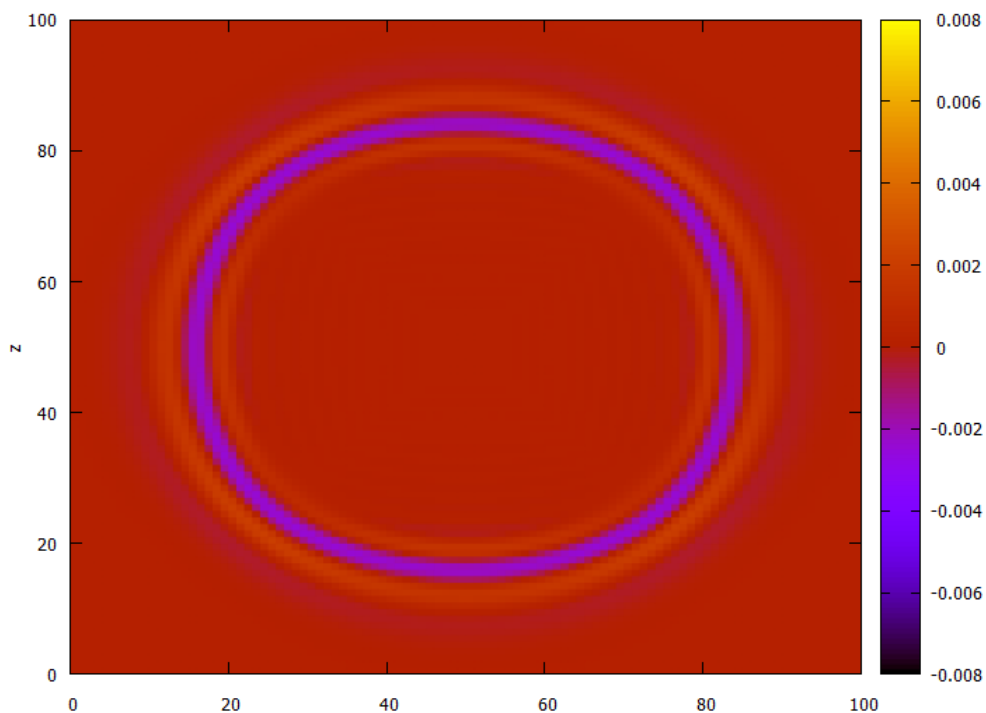


а)

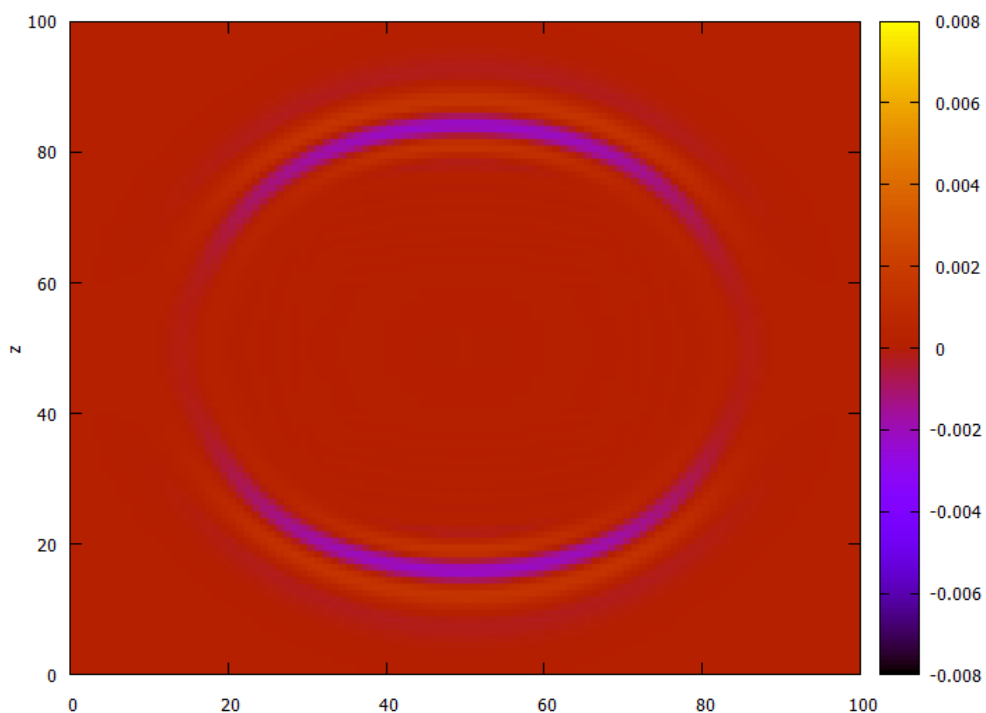


б)

Слика 6.7 Интенитет x компоненте вектора јачине електричног поља E у трансверзалној равни при екситацији Гаусовим импулсом после 80 временских корака у: а) xz равни б) yz равни, [87]



а)

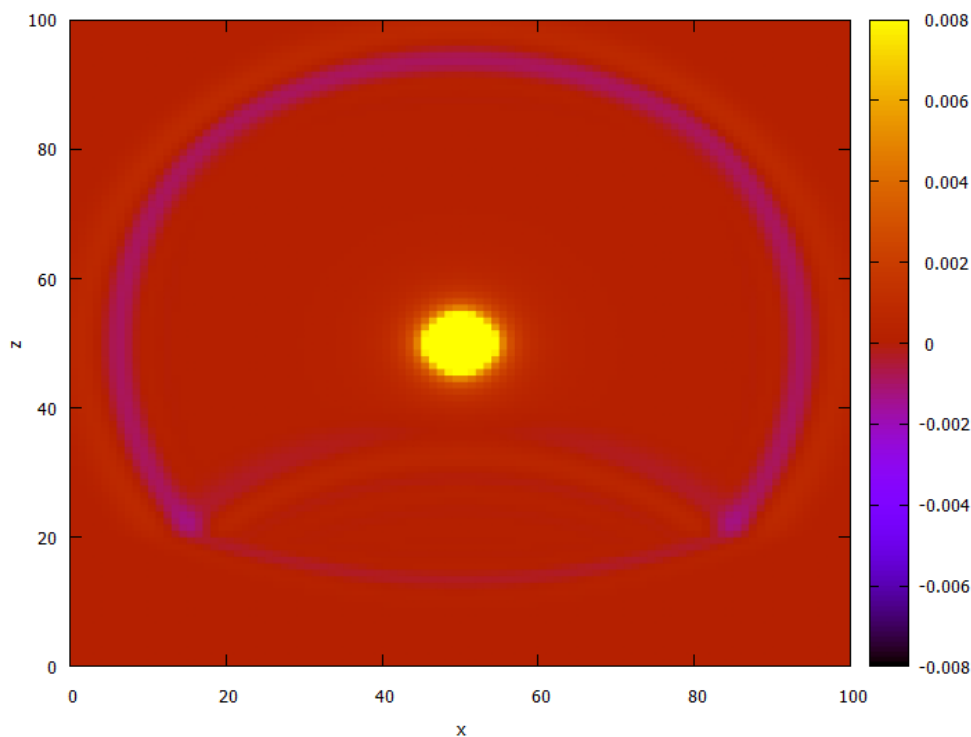


б)

Слика 6.8 Интенитет x компоненте вектора јачине електричног поља E у трансверзалној равни при екситацији Рикеровим импулсом после 80 временских корака у: а) xz равни б) yz равни, [87]

6.1.1.4 3Д FDTD симулација простирања поља Херцовог дипола у нехомогеној средини

У овој 3Д FDTD симулацији простирања електромагнетског поља [87] извршено је поређење расејаног електромагнетског поља Херцовог дипола у облику Гаусовог и Рикеровог импулса, у случају нехомогене средине састављене од два хомогена диелектрична полупростора. Параметри оба импулса су исти као у претходној симулацији, као и димензије FDTD домена и гранични услови. Део нумеричког домена са губицима је од 0. до 20. просторног корака у z равни, а слободан полупростор је од 21. до 100. просторног корака. Константа слабљења $\alpha=0.0253146$, а пермитивност је $\epsilon_r=4$, а пермеабилност $\mu_r=1$. Дипол је у оба случаја лоциран у центру слободног полупростора.



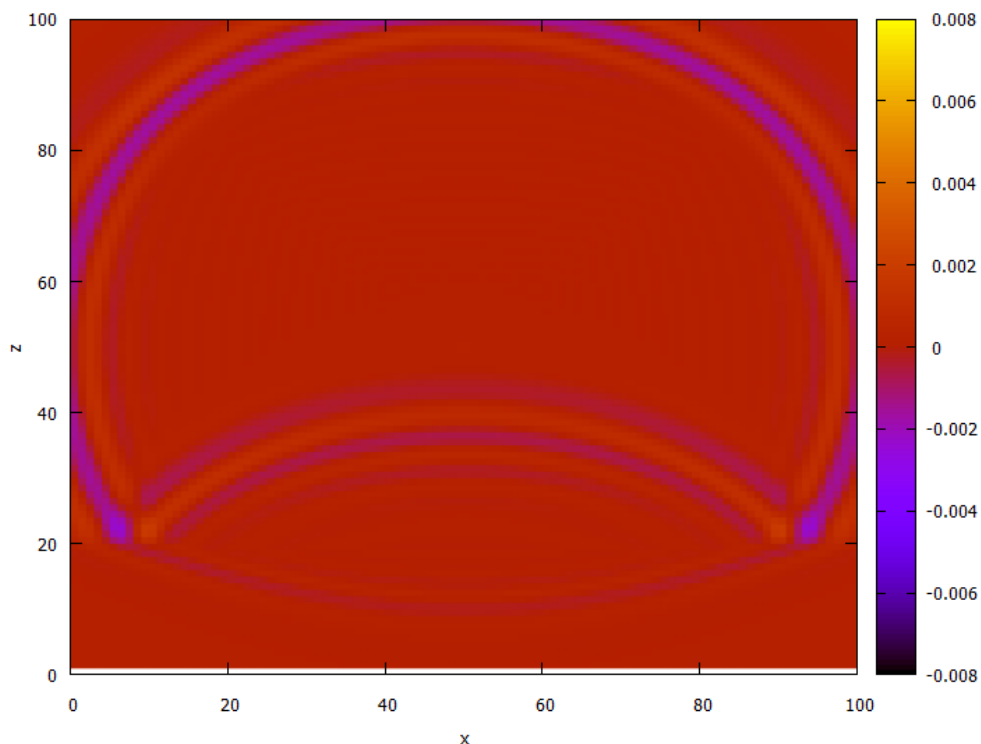
Слика 6.9 Интензитет x компоненте вектора јачине електричног поља E_x у трансверзалној равни при екситацији Гаусовим импулсом после 110 временских корака у xz равни, [87]

На слици 6.9 приказан је интензитет E_x компоненте вектора јачине електричног поља Херцовог дипола који у основи има Гаусов импулс. Поље се

простира у нехомогеној средини, а резултати интензитета вектора јачине електричног поља E_x су у xz равни, када је $y=\text{const}$, после 110 временских корака.

Статична наелектрисања која су последица постојања нефизичких DC компоненти у функцији Гаусовог импулса видљива су и на слици 6.9. Показало се да, без обзира на средину у којој се поље Гаусовог импулса простира, DC компоненте поља неповољно утичу на валидност резултата симулације.

Расејано електромагнетско поље Херцовог дипола, простирано у нехомогеној средини, које у основи има Рикеров импулс, види се на слици 6.10. Приказан је интензитет x компоненте вектора јачине електричног поља E у xz равни, када је $y=\text{const}$, након 110 временских корака. Нема видљивих нежељених DC компоненти на слици 6.10, што јасно указује да је Рикеров импулс бољи избор од Гаусовог импулса и у случају нехомогене средине.



Слика 6.10 Интензитет x компоненте вектора јачине електричног поља E у трансверзалној равни при екситацији Рикеровим импулсом после 110 временских корака у xz равни, [87]

Као и резултати претходних симулација, и ова 3Д FDTD симулација расејања електромагнетског поља Херцовог дипола у случају нехомогене средине, јасно показује предност коришћења Рикеровог импулса у односу на Гаусов.

Нумерички резултати FDTD симулација у случају екситације Гаусовим импулсом садрже и фиктивну једносмерну (DC) компоненту поља, која је узрок непожељних нефизичких рефлексија унутар домена од интереса. У случају екситације Рикеровим импулсом, штетна DC компонента поља и непожељне рефлексије нису присутне у домену. Резултати јасно указују на предности екситације поља у облику Рикеровог импулса у односу на екситације облика Гаусовог импулса у FDTD симулацијама, како у 2Д и 3Д случајевима, тако у хомогеним и у нехомогеним срединама.

6.1.2 Предности коришћења TF/SF равних таласа у односу на импулсне изворе у FDTD симулацијама

У радовима [88, 89] приказани су резултати FDTD симулација простирања електромагнетског поља у којима је циљ био да се испитају погодности примене TF/SF равних таласа у различитим електромагнетским проблемима. Као што је раније поменуто, у FDTD методи, избор екситације се врши на основу више фактора: димензије или геометрије нумеричког домена, физичке структуре простора итд. Најчешће коришћени су тачкасти извори, чија су поља заснована на Гаусовој, Рикеровој или синусоидној функцији. Карактеристика тачкастих извора је да се њихова поља простиру у свим правцима усвојеног FDTD нумеричког домена. Међутим, постоје проблеми поља када је неопходно у FDTD симулацију имплементирати извор чије се поље простира искључиво у једном правцу. Такође, честа је потреба за анализом расејања електромагнетског поља од неког PEC објекта или диелектричног полупростора. Најефикаснија анализа се врши равним таласима. Како се свако простируће електромагнетско поље може, после одређеног времена простирања, апроксимирати равним таласом, примена тачкастих извора (Гаусов, Рикеров, синусоидални имулс) је логичан избор.

Међутим, у FDTD симулацијама, главни циљ је добијање прецизних резултата са што мање утрошеног времена и простора. Техника којом је то омогућено назива се TF/SF техника [27]. Она омогућава моделовање дуготрајних или краткотрајних импулсних или синусоидних екситација у облику равних таласа који се могу простирати у било ком правцу у изабраном нумеричком домену.

У следећим нумеричким експериментима разматрани су искључиво равни таласи који се простиру само у једном правцу. Урађене су FDTD симулације за три карактеристичне геометрије: 2Д случај слободног простора са PEC цилиндром, 3Д случај слободног простора са PEC сфером и 2Д случај два хомогена диелектрична полупростора (слободан простор и слој са губицима). Добијени су резултати примене технике TF/SF равних таласа, који у основи имају синусоидни и Рикеров импулс.

6.1.2.1 2Д FDTD симулација TF/SF равних таласа у слободном простору са PEC цилиндром

У овој 2Д FDTD симулацији [88] електромагнетско поље је екситовано у облику TF/SF равних таласа који у основи има Рикеров импулс. Талас се простира у слободном простору. Расејач у облику PEC цилиндра полупречника 35 просторних ћелија, смештен је у центру нумеричког FDTD домена. Циљ симулације је да прикаже предност примене TF/SF равних таласа у FDTD симулацијама у којима се захтева равномерна илуминација неког PEC слоја, електромагнетским пољем из једног правца. Простиран је ТМ тип таласа, а функција извора је [41]:

$$R(i, n) = \left[1 - 2\pi^2 \left(\frac{Sn + i}{n_c} - 1 \right)^2 \right] e^{-\pi^2 \left(\frac{Sn + i}{n_c} - 1 \right)^2}, \quad (6.1)$$

где је S фактор стабилности CFL, n_c број просторних корака по таласној дужини којим се дефинише ширина импулса. Променљиве n и i су целобројне вредности које множе временски и просторни корак, респективно.

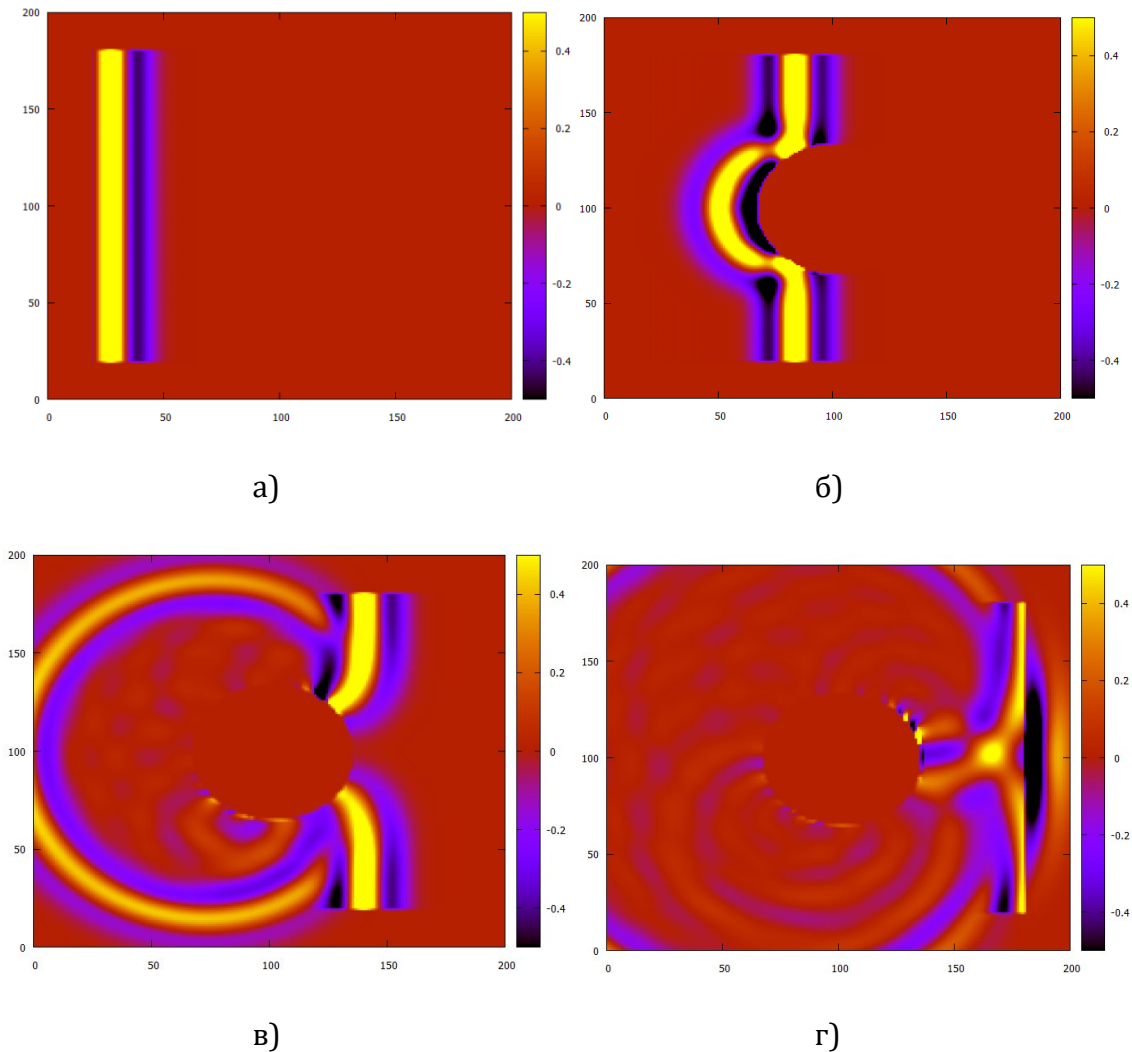
Вредност ширине Рикеровог импулса у симулацији је $n_c=30$, а CFL је, сходно 2Д нумеричком домену, $S=2$. За FDTD просторни 2Д домен усвојен је формат од $x = 200$ и $y = 200$ ћелија, а укупно трајање симулације је ограничено на 400 временских корака. TF регион се простире од 20. до 180. просторне ћелије у правцу x осе и од 20. до 180. у правцу y осе. SF регион обухвата остатак FDTD домена, тј. од 181. до 200. просторне ћелије, у оба правца. Нумерички FDTD домен је ограничен Муровим граничним условима другог реда [18]. TF/SF равни талас са Рикеровим импулсом побуђен је у TF/SF граници, дуж леве ивице домена.

На слици 6.11 приказани су интензитети z компоненте инцидентног и расејаног вектора јачине електричног поља E у трансверзалној равни, ТМ типа таласа, после 80, 160, 240 и 300 временских корака FDTD симулације. Као извор је коришћена екситација у облику TF/SF равног таласа који у основи има Рикеров импулс. Талас се простире у слободном простору и наилази на PEC слој у облику цилиндра.

Слика 6.11а, приказује интензитет z компоненте вектора јачине електричног поља E након 80 временских корака, тј. тренутак у ком је генерисан талас. Уочљиво је да је инцидентни талас ограничен само на TF регион и да се простире само у предефинисаном правцу, у правцу x осе. Такође се види да нема других нежељених компоненти које се простиру у неком другом правцу.

Слика 6.11б је тренутак равномерне илуминације PEC цилиндра и генерисање првих компоненти рефлектованог поља E_z^{scat} . Види се да инцидентни таласни фронт још увек задржава правилан облик, а простирање компоненти расејаног поља креће у супротном правцу од инцидентног.

Слике 6.11в и 6.11г илуструју рефлексију таласа од PEC цилиндра. На слици 6.11в, приказан је тренутак када компоненте рефлектованог таласа пролазе кроз простор на коме се налази TF/SF граница и место генерисања инцидентног таласа.



Слика 6.11 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E у трансверзалној равни при TF/SF екситацији Рикеровим импулсом после: а) 80, б) 160, в) 240, г) 300 временских корака, [88]

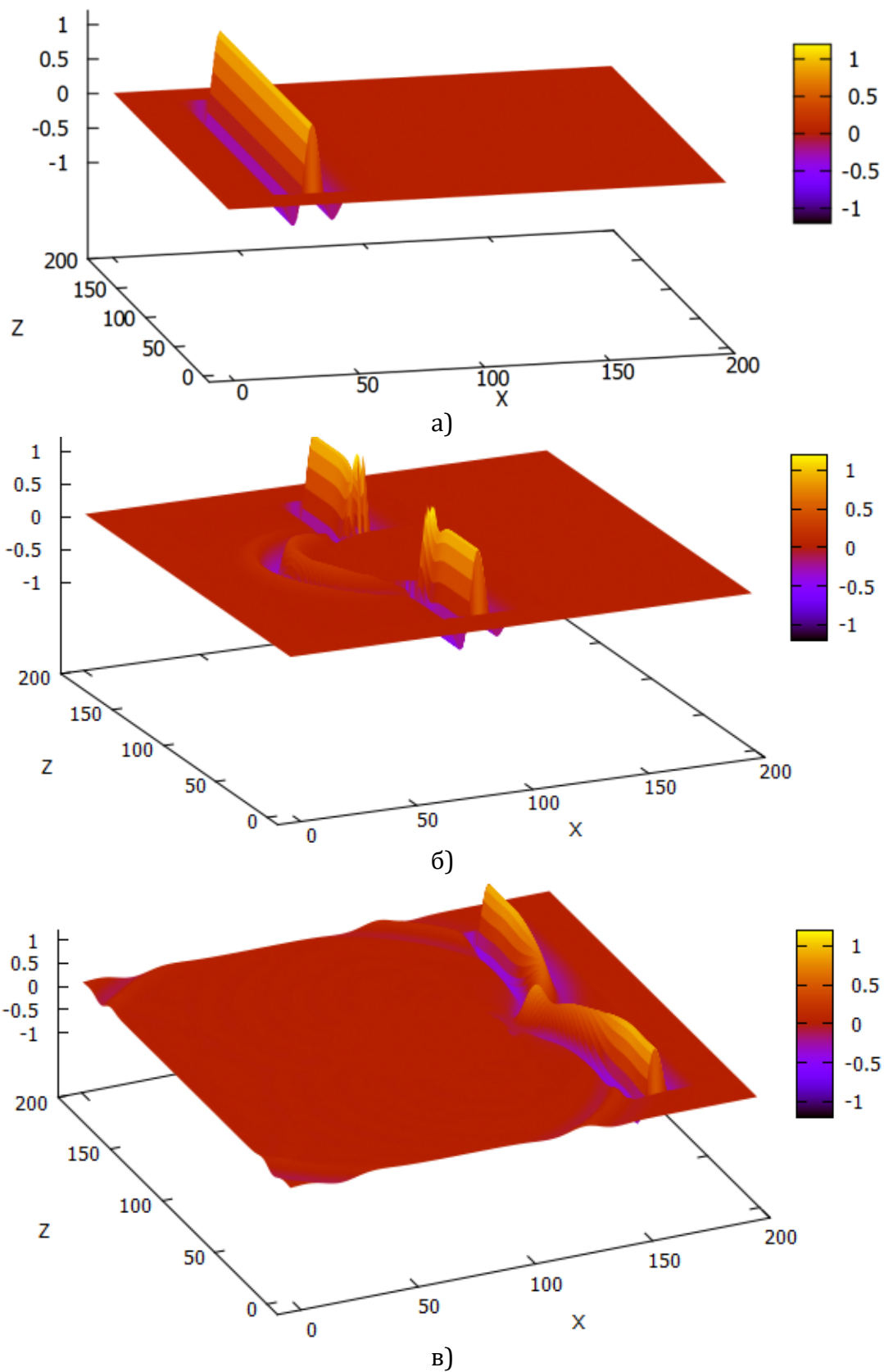
Јасно се види да, у том тренутку, нема рефлексије. То је још један повољан показатељ који истиче ефикасност имплементације електромагнетског поља у FDTD симулацију помоћу TF/SF технике. Може се приметити, на слици 6.11г, да се компоненте рефлектованог таласа простиру кроз SF регион, док компоненте инцидентног таласа остају искључиво у TF региону до краја FDTD симулације.

6.1.2.2 3Д FDTD симулација TF/SF равних таласа у слободном простору са PEC сфером

У овој 3Д FDTD симулацији [89], електромагнетско поље TF/SF равних таласа је простирано кроз слободан простор, са савршено проводном PEC сфером лоцираном у центру FDTD нумеричког домена. Инцидентно поље је поље Рикеровог импулса, са истим параметрима као у претходној симулацији. Инцидентно поље је поларизовано у z правцу, а простире се у правцу x осе. Димензије нумеричког домена су $200 \times 200 \times 200$ ћелија, а трајање симулације је 600 временских корака. TF регион се простире од 20. до 180., а SF регион обухвата простор од 181. до 200. ћелије у сва три правца. Нумерички FDTD домен је ограничен Муровим граничним условима другог реда [18]. TF/SF равни талас је генерисан дуж леве ивице домена, са Рикеровим импулсом као функцијом извора. PEC расејач је сфера, полупречника 35 ћелија, смештена у центру нумеричког домена, тј. у центру TF региона.

Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E приказан је на слици 6.12а, б и в, у трансверзалној равни, у раван, након 100, 190 и 320 временских корака, респективно. Тренутак након генерисања инцидентног TF/SF равног таласа, након 100 временских корака, приказан је на слици 6.12а. Може се видети да инцидентно поље постоји само у TF региону и да је простирање усмерено само у једном правцу (x осе), без икакве дисторзије таласа.

Тренутак прве интеракције TF/SF равних таласа и PEC сфере је приказан на слици 6.12б. Препрека доводи до генерисања комплексног рефлектованог таласа, који на крају пролази кроз све четири стране TF/SF границе. Види се да се рефлектоване компоненте поља простиру у супротном правцу од правца простирања инцидентног таласа (ретрорелфлексја).



Слика 6.12 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E у трансверзалној равни, $y=const$ раван, после 320 временских корака, [88]

Тренутак када равни таласи прођу PEC сферу, приказан је на слици 6.13в. Приметно је да су компоненте инцидентног поља (E_z^{inc}) још увек остају у TF региону, заједно са компонентама расејаног поља (E_z^{scat}). Након проласка компоненти рефлектованог поља E_z^{scat} натраг, кроз простор генерисања таласа (TF/SF граница), примећује се да нема рефлексије. Такође, приметно је да нема рефлексије ни на осталим странама TF/SF границе. Стога се може закључити да је TF/SF граница потпуно транспарентна за надолазеће компоненте таласа, без обзира на њихову природу. У SF региону су видљиве само компоненте расејаног поља (E_z^{scat}), као што је и очекивано.

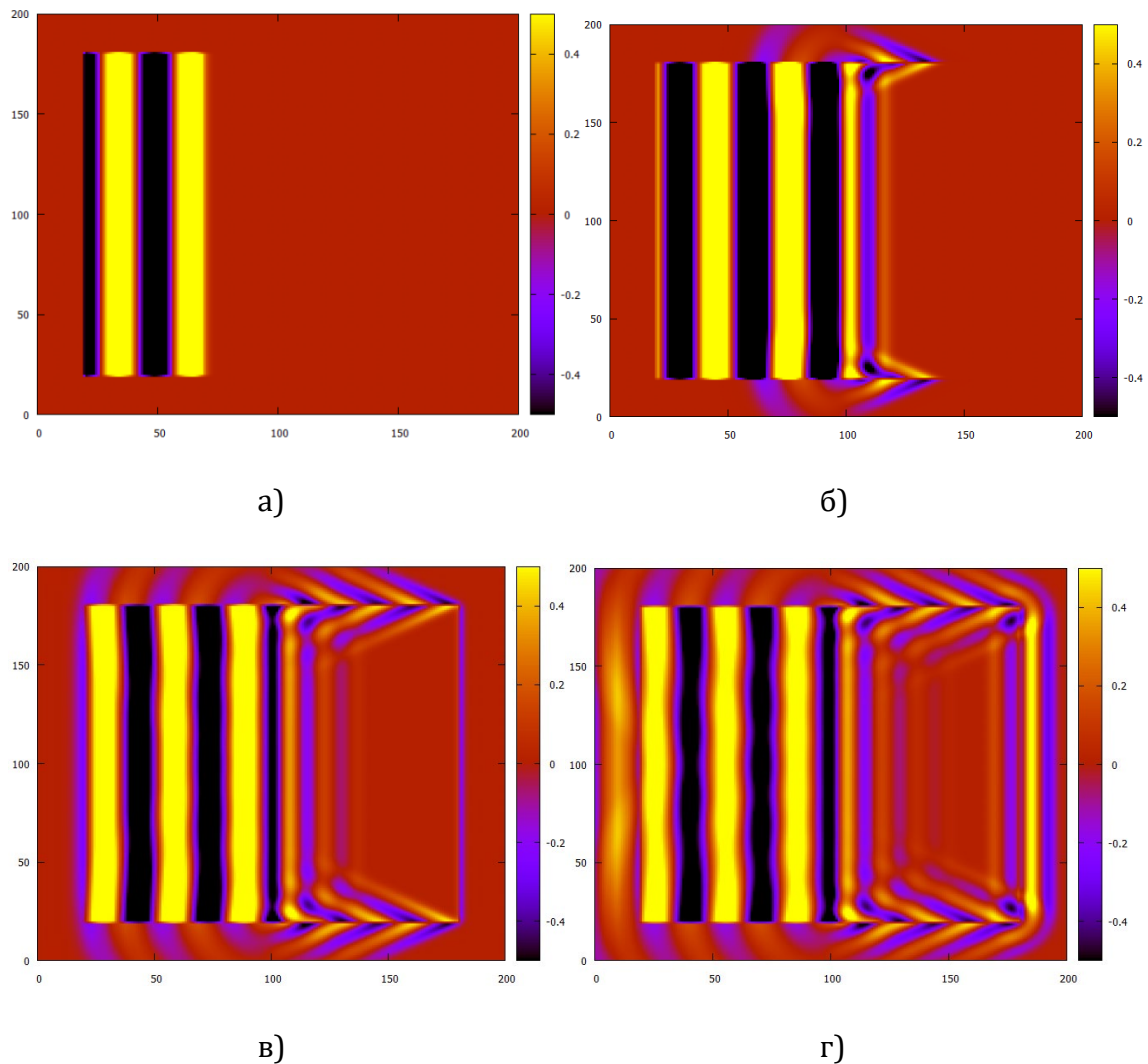
6.1.2.3 2Д FDTD симулација TF/SF равних таласа у нехомогеној средини

У овој 2Д FDTD симулацији простирања електромагнетског поља [88], поље је екситовано у облику TF/SF равног таласа који у основи има синусоидални импулс. Талас је простиран у нехомогеној средини састављеној из два хомогена диелектрична полупростора. Циљ симулације је да прикаже предност примене континуалних TF/SF равних таласа у FDTD симулацијама у којима се захтева равномерна илуминација неког PEC слоја, електромагнетским пољем из једног правца. Простиран је ТМ тип таласа, а функција и параметри извора су исти као и претходним симулацијама у овом поглављу (поглавље 6.1). Такође, димензија FDTD домена, као и трајање симулације исто је као у претходној нумеричкој симулацији. Димензије TF и SF региона су, такође, исте, као и гранични услови на границама домена. Слободан полупростор се налази у TF региону и простире се од 20. до 100. просторне ћелије, а од 101. до 180. је полупростор са губицима. Константа слабљења у полупростору с губицима је $\alpha=0.0253146$, релативна пермитивност је $\epsilon_r=4$, а релативна пермеабилност је $\mu_r=1$.

На слици 6.15а, б, в, г приказани су интензитети E_z компоненте расејаног поља у трансверзалној равни, ТМ типа таласа, после 100, 200, 260 и 300 временских корака FDTD симулације. Екситација је у облику TF/SF равног

таласа који у основи има синусоидни импулс и простира се у нехомогеној средини састављеној из два диелектрична полупростора.

Сл. 6.15а приказује тренутак генерисања таласа, где се види простирање таласа само у жељеном правцу. Нема нежељених компоненти таласа у правцу супротном од жељеног правца простирања, тј. нема рефлексије са друге стране TF/SF границе.



Слика 6.15 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E у трансверзалној равни при TF/SF екситацији синусоидалним импулсом после: а) 100, б) 200, в) 260, г) 300 временских корака, [88]

Слика 6.15б приказује тренутак када поље инцидентног таласа започиње интеракцију са раздвојном површином између слободном простора и

диелектрика са губицима. Виде се реклектоване компоненте које се простиру у сва четири правца, као и трансмитоване компоненте у диелектрику са губицима. На слици 6.15в се виде трансмитовани таласи који су стигли до SF региона кроз диелектрик са губицима. Нема видљиве рефлексije од TF/SF границе. Такође, још увек се види да су рефлектоване компоненте поља искључиво у SF региону. То омогућава прецизну анализу добијених нумеричких резултата у TF региону. Слика 6.15г приказује како талас слаби, након простирања кроз слој са губицима. И у овом случају компоненте инцидентног таласа су ограничене на TF регион, а кроз SF регион се простиру искључиво компоненте рефлектованог таласа. Може се видети и одређена количина рефлексije од спољних граница домена, тј. граничних услова. Како су овој FDTD симулацији примењени Мурови гранични услови, чија ефикасност није веома добра, рефлексija са слике 6.15г је очекивана.

6.2 Оптимизација CPML граничних услова у FDTD

методи

Како су PML ABC [12] базирани на „нефизичком“ дељењу Максвелових једначина, неминовна је појава одређене количине грешке дискретизације у FDTD домену. UPML има исту ефикасност као PML [33, 57], али знатно мању грешку дискретизације. Након валидације UPML-а у [62, 63], многе модификације PML-а су предложене у [82, 83]. Формулација Максвелових једначина са проширеним координатама (SC) омогућило је коришћење PML-а у другим координатним системима [58, 59], као и у криволинијским координатним системима [60, 61]. Овакав приступ је имао слабу каузалност. Концепт у ком је решен проблем каузалности је предложен у [64, 65]. Заснован је на „измештању“ (померању) комплексних фреквенција (CFS), тј. коришћењу тензорских коефицијената за PML параметре. Веома ефикасна PML имплементација базирана на проширеним координатама (SC), померању комплексних фреквенција (CFS) и рекурзивној конволуцији [78] изведена је у [16]. CPML [16] је потпуно независан од медијума у нумеричком FDTD домену. Такође, при имплементацији у FDTD домен са нехомогеним, дисперзивним,

нелинеарним, анизотропним или срединама са губицима не захтева никакву накнадну модификацију. Побољшани CPML гранични услови изведени су у [65, 46, 47].

Подробна студија која се односи на избор PML-а у методи коначних разлика у фреквенцијском домену [FDFD] или у методи коначних елемената [FEM] урађена је у [42].

Бројни научни радови указују на изузетну ефикасност CPML граничних услова, али још увек постоји простор за њихово побољшање, нарочито у случајевима специфичних електромагнетских проблема. Истраживања базирана на доминантној фреквенцији при којој се врши апсорпција су, у последњих неколико година, веома честа [47, 39]. Међутим, истраживања базирана на оптимизацији CPML параметара су тек почела [49]. Како је једна од теза ове дисертације да се при оптимизацији CPML граничних услова истраживање треба усмерити ка фундаменталним елементима CPML-а, основни циљ је оптимизација CPML параметара и проналажење адекватних корелација.

6.2.1 Оптимизација CPML коефицијената

Ефикасност CPML граничних услова је, поред начина имплементације у FDTD алгоритам, у великој мери зависна од правилног избора CPML параметара. Оптимизација CPML коефицијената један од примарних циљева ове дисертације.

Истраживања која имају за циљ проналажење оптималних PML коефицијената има доста [62, 63]. Резултати приказани у овој дисертацији су само мали допринос у тој великој области, у FDTD моделовању.

6.2.1.1 3Д FDTD симулација простирања поља диференцираног Гаусовог импулса у слободном простору

Нумерички експерименти са циљем проналажења оптималних вредности PML параметара, тј. корелација између њих, објављени су у [90]. 3Д FDTD симулација простирања електромагнетских таласа у слободном простору са

диференцираним Гаусовим импулсом као извором коришћена је за испитивање PML, UPML и CPML граничних услова.

Примарни циљ је био испитивање утицаја параметара: коефицијент проширења координата k и коефицијент померања комплексне фреквенције α . Параметар проводности σ није био од интереса у експериментима зато што постоји велики број истраживања [13, 16, 84, 85] који су се бавили тиме и која су дала прецизне резултате за избор оптималних вредности за σ . У овој дисертацији, за проводност σ , увек је коришћена вредност израчуната на основу једначине 6.15 [16].

Диференцирани Гаусов импулс је коришћен као извор, једначина 3.6. Основна фреквенција диференцираног Гаусовог импулса (Рикеровог импулса) је $f_{\text{основна}} \in (0, 3/\tau)$, где је τ ширина импулса [49]. Енергија импулса је максималана када је фреквенција $f=0$, а минимална када је $f=3/\tau$. У FDTD симулацијама у овом поглављу, коришћена је вредности ширине импулса $\tau=30$ ps, што резултира фреквенцијском опсегу $f_{\text{основна}} \in (0/10)$ GHz. Стога се овај нумерички експеримент може сматрати FDTD симулацијом са извором високе фреквенције.

Простирање диференцираног Гаусовог импулса у слободном простору симулирани је у 3Д FDTD домену димензија $150 \times 150 \times 150$, са ћелијама димензије $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 1 \text{ mm}$ и временским кораком $\Delta_t = 1.906575 \text{ ps}$ (0.99 пута CFL границе). Дужина симулације је $600\Delta_t$ (1,143945 ns). Високофреквентни диференцирани Гаусов импулс је постављен у центру нумеричког домена са ширином од $\tau=30$ и временским кашњењем $d=4w$.

3Д FDTD нумерички домен је затворен са граничним условима дебљине од 10 просторних ћелија, са неколико сетова параметара. Наиме, у табели 2, приказани су параметри за: PML [12], UPML [13], CPML [16], CPML-A и CPML-B граничне услове. Како је истраживање параметра проводности σ секундарно, за све сетове параметара постављена је фиксна вредност проводности $\sigma_{\text{max}}=0.75\sigma_{\text{opt}}$. Такође, фактори скалирања су заједнички за све анализирани

граничне услове: $m=3$ и $m_a=1$. Вредности заједничких параметара су узете из [16].

Табела 2. Скупови параметара за различите PML граничне услове

Врста PML-а	k_{\max}	σ_{\max}	α_{\max}
<i>PML</i>	1	$0.75\sigma_{\text{opt}}$	/
UPML	10	$0.75\sigma_{\text{opt}}$	/
CPML	20	$0.75\sigma_{\text{opt}}$	0.2
CPML-A	5	$0.75\sigma_{\text{opt}}$	9×10^{-4}
CPML-B	1	$0.75\sigma_{\text{opt}}$	3×10^{-4}

На слици 6.17, приказане су вредности z компоненте вектора јачине електричног поља E за 5 различитих група параметара (из Табеле 2) у три различита временска корака. Сви скупови параметера су приказани на једној слици да би се што боље уочила разлика у апсорпцији граничних услова, која је често врло слична. Раван xu на слици 6.17 представља раван нормалну на правац z координате 3Д FDTD нумеричког домена. Колорна шема представља вредности интенитета z компоненте вектора јачине електричног поља E .

Скуп параметара за PML, на слици 6.17 (a1-a3) је: $k_{\max} = 1$, $\sigma_{\max} = 0.75\sigma_{\text{opt}}$; параметри за UPML на слици 6.17 (b1-b3) су: $k_{\max} = 10$, $\sigma_{\max} = 0.75\sigma_{\text{opt}}$; сет параметара који дефинише CPML на слици 6.17 (c1-c3) је: $k_{\max} = 20$, $\sigma_{\max} = 0.75\sigma_{\text{opt}}$, $\alpha_{\max} = 0.2$; сет CPML-A на слици 6.17 (d1-d3) има параметре: $k_{\max} = 5$, $\sigma_{\max} = 0.75\sigma_{\text{opt}}$, $\alpha_{\max} = 9 \times 10^{-4}$; параметри за CPML-B на слици 6.17 (e1-e3) су: $k_{\max} = 1$, $\sigma_{\max} = 0.75\sigma_{\text{opt}}$, $\alpha_{\max} = 3 \times 10^{-4}$.

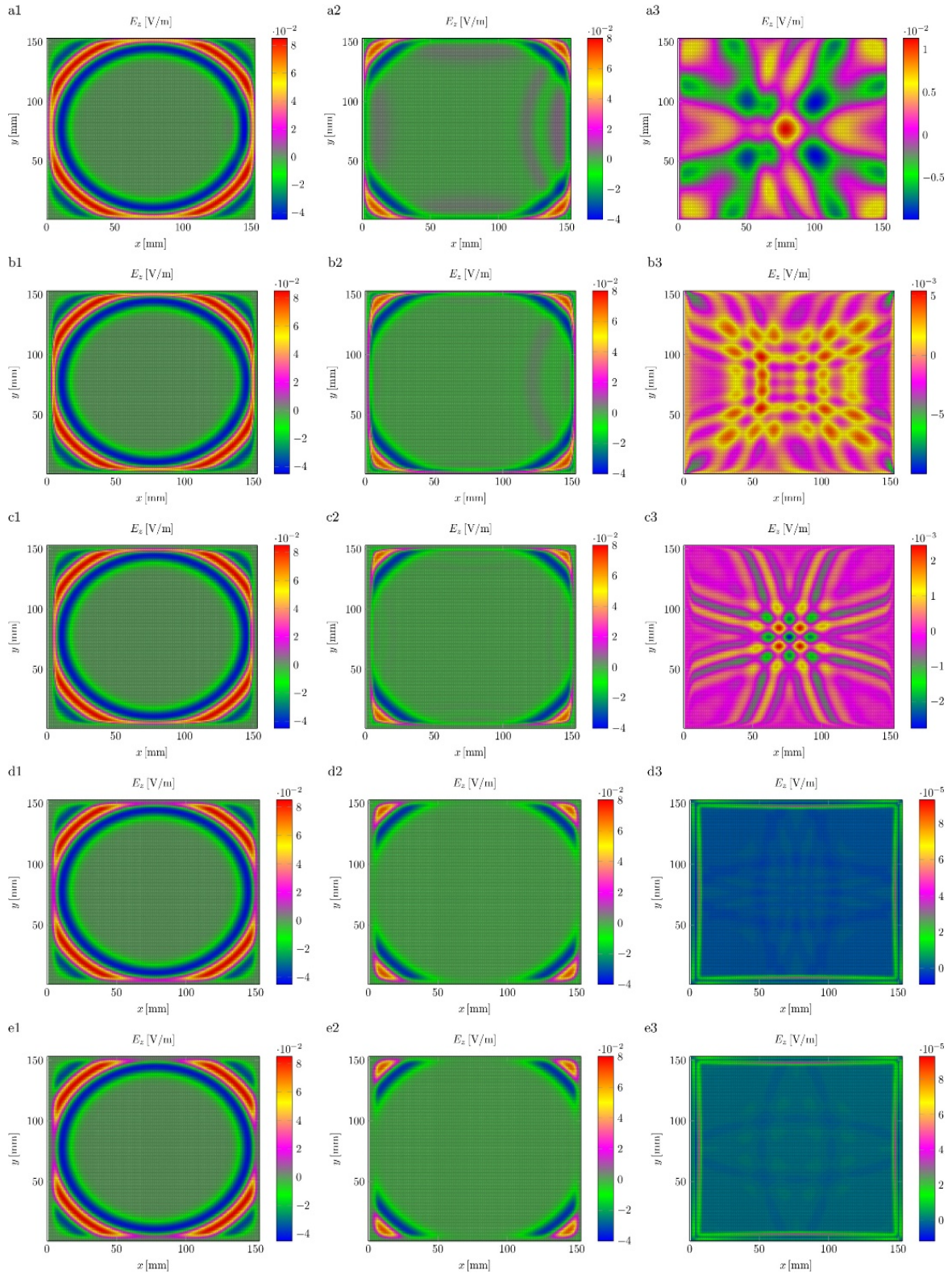
Разлог увођења PML и UPML граничних услова у ову анализу је испитивање утицаја коефицијента проширења координата k на апсорпцију електромагнетских таласа високе фреквенције, без утицаја коефицијента померања комплексне фреквенције α . Сетови параметара CPML, CPML-A и CPML-B дају резултате за апсорпцију са различитим k и α , у циљу проналажења што боље корелације између њих.

На слици 6.17 (a1-e1) приказан је тренутак (200ти временски корак) када компоненте електромагнетског таласа започињу интеракцију са унутрашњим слојевима PML-а. Рефлексија од раздвојне површине PML-ова се не примећује на слици 6.17 (a1-e1), али се ипак може приметити мала разлика у апсорпцији. Ако се, на пример, упореде (a1) и (b1) на слици 6.17, уочљиво је да су компоненте таласа ближе спољним слојевима PML-а у (a1), што указује да је брзина простирања таласа мања у (b1). Врло слаба рефлексија се може приметити на (b1) на слици 6.17. Таласи су апсорбовани пре него што стигну до спољних слојева PML-а, али слаба рефлексија, која потиче од унутрашњих слојева, је видљива.

Упоређујући (c1-e1) на слици 6.17, на (c1) видљив је пораст рефлексије, иако таласи нису стигли до спољних слојева. На (d1) и (e1), види се да су таласи линеарно апсорбовани, без интеракције са спољним слојевима.

Како у (b1) (UPML) и (c1) (CPML) параметар k_{\max} има вредност 10 и 20, респективно, може се закључити да се повећањем вредности k_{\max} смањује брзина простирања у PML слојевима.

У следећем временском кораку (230ом) приказаном на слици 6.17 (a2-e2), сви таласи су стигли до спољних слојева, па се може направити анализа различитих апсорпција. На слици 6.17 (a2-b2), таласни облик је благо искривљен, што је праћено значајном количином дисперзије. Мања дисперзија се може видети на слици 6.17 (c2). Таласи апсорбовани у великој мери од стране CPML-A и CPML-B сета параметара приказани су на слици 6.17 (d2-e2). Како параметар α_{\max} није дефинисан код PML-а и UPML-а, а код CPML-а има вредност 0,2, јасно је да постојање α_{\max} значајно утиче на апсорпцију. С обзиром да α_{\max} и k_{\max} имају много мање вредности у CPML-A и CPML-B него у CPML, може се извући веома важан закључан: апсорпција у PML граничним условима не зависи толико од вредности параметара, колико зависи од њиховог односа.



Слика 6.17 Интензитет z компоненте вектора јачине електричног поља E у ху равни: од (a1) до (a3) је PML; од (b1) до (b3) је UPML; од (c1) до (c3) је CPML; од (d1) до (d3) је CPML-A; од (e1) до (e3) је CPML-B. Од (a1) до (e1) је 200. временски корак; од (a2) до (e2) је 230. временски корак; од (a3) до (e3) је 300. временски корак, [90].

Слика 6.17 (а3-е3) приказује дисперзију за различите сетове PML параметара након 300 временских корака симулације. Када се упореде (а3), (b3) и (с3) на слици 6.17, примећује се лоша апсорпција на (а3) и (b3). Резултати са слике 6.17 (с3), као и PML, UPML и CPML сетови параметара показују да је утицај параметра α_{\max} веома значајан за апсорпцију, као што је то био случај и код претходног временског корака.

С друге стране, на слици 6.17 (d3) и (е3), приметна је веома мала дисперзија, иако је вредност параметра α_{\max} много мања него у (с3). Стога, намећу се закључци да дисперзија има позитивну зависност са повећањем параметра k_{\max} и да се апсорпција мора прецизно контролисати избором вредности параметра α_{\max} .

Иако је вредност k_{\max} већа у (d3) него у (е3), уочљива је боља апсорпција у (d3). То је зато што је вредност α_{\max} већа у (d3) него у (е3), што значи да веће α_{\max} омогућава CPML-у већу ефикасност при апсорпцији. Са слике 6.17 (d3), јасно је да већа вредност k_{\max} утиче да брзина простирања таласа буде мања, што омогућава да α_{\max} доминантно утиче на апсорпцију.

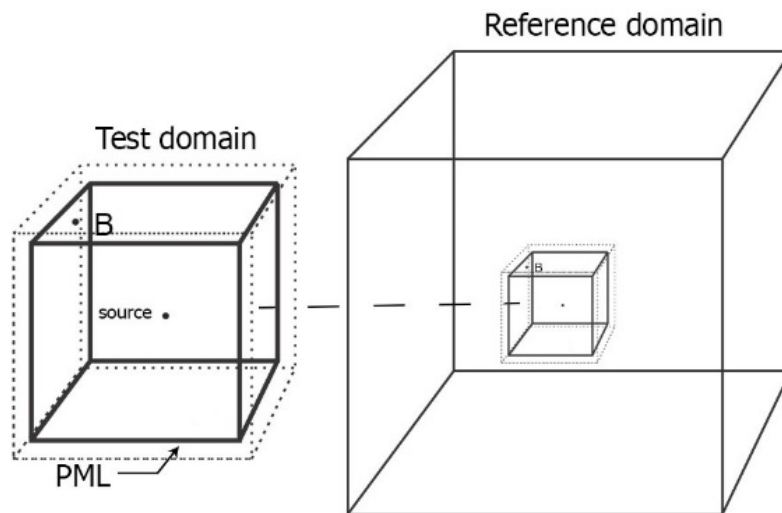
Како би се подробније анализирао апсорпција електромагнетских таласа са различитим сетовима PML параметара, израчуната је релативна грешка за електрично поље \mathbf{E} у пробној тачки В. За рачунање релативне грешке коришћен је тест домен домензија 40x40x40 и референтни домен димензија 400x400x400, слика 6.18. Релативна грешка је рачуната по формули:

$$R \Big|_{i,j,k}^n = 20 \log_{10} \frac{\left| \vec{E} \Big|_{i,j,k}^n - \vec{E}_{ref} \Big|_{i,j,k}^n \right|}{\left| \vec{E}_{ref \max} \Big|_{i,j,k} \right|}. \quad (6.2)$$

У једначини 6.2, $\mathbf{E} \Big|_{i,j,k}^n$ је електрично поље у тачки В у временском кораку n у тест домену, а $\mathbf{E}_{ref} \Big|_{i,j,k}^n$ је електрично поље у тачки В у временском кораку n у референтном домену. Максимална вредност референтног електричног поља у тачки В у референтном домену је обележена са $\mathbf{E}_{ref \max} \Big|_{i,j,k}$. Величина референтног домена је довољно велика, како би се избегла рефлексија од

спољних зидова FDTD нумеричког домена током трајања симулације од 1000 временских корака.

Иста временска функција извора је коришћена као у случају диференцираног Гаусовог импулса у слободном простору, са ширином импулса $\tau = 30$ ps, $d = 4w$. Ове вредности важе и за тест и референтни домен. Такође, локација извора је идентична (центар FDTD нумеричког домена) за оба домена, а пробне тачке B су на истој релативној позицији у односу на извор. Тачка B (38,20,38) у тестном домену одговара тачки B (218,200,218) у референтном домену.

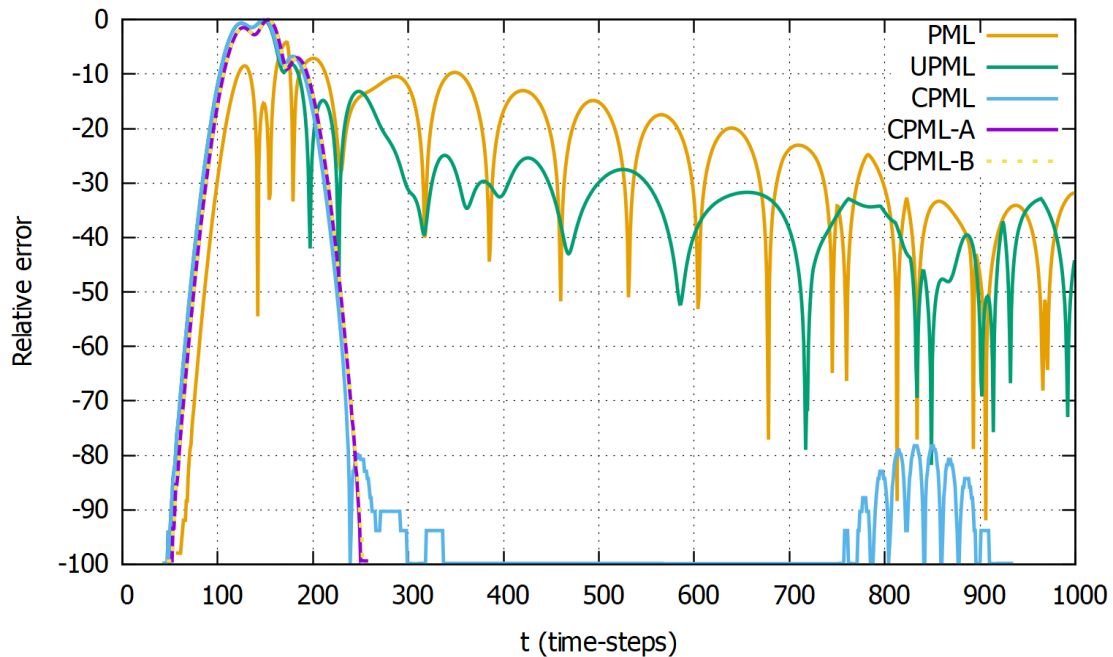


Слика 6.18 Илустрација тест-домена и референтног FDTD домена за рачунање релативне грешке, [90]

Релативна грешка, приказана на слици 6.19, израчуната је за све три компоненте електричног поља (E_x , E_y , E_z) у тачки B, у случају различитих PML граничних услова дебљине 10 ћелија. Сетови параметара за PML, UPML, CPML, CPML-A и CPML-B су из Табеле 2.

Као последица грешке дискретизације, на слици 6.19, могу се видети маскимуми релативне грешке у ранијем временском периоду симулације. Ови маскимуми полако опадају са повећањем временских корака. Ако се упореде графици за PML и UPML, примећује се да се код UPML-а грешка смањује. То је последица веће вредности параметра k_{\max} код UPML-а ($k_{\max} = 10$), у односу на

PML ($k_{\max} = 1$). График за CPML приказује солидну апсорпцију у поређењу са графицима PML-а и UPML-а. Иако је апсорпција CPML-а знатно боља, дисперзија која се јавља у каснијем временском периоду (од 760 до 920 временског корака) потиче од рефлектованих таласа насталих због повећања параметра k_{\max} .



Слика 6.19 Релативна грешка за различите типове PML граничних услова дебљине 10 просторних ћелија, [90]

Графици за CPML-A и CPML-B приказују фактички исту релативну грешку, на слици 6.19. Како су сетови параметара за CPML-A и CPML-B блиских вредности, истоветност релативне грешке је логичан резултат. У поређењу са PML, UPML и CPML графицима, умањење грешке знатно је веће. Такође, код CPML-A и CPML-B графика не постоји дисперзија у каснијим временским корацима. С обзиром на резултате са слике 6.17 (d3-e3) и графике са слике 6.19, јасно је да оптималне параметре треба бирати у осегу између CPML-A и CPML-B сета параметара.

У 3Д FDTD симулацији простирања електромагнетских таласа у слободном простору са извором високе фреквенције, тестирано је пет различитих сетова PML параметара. Коришћена је функција извора која има временски облик

дифернцираног Гаусовог импулса. Циљ овог нумеричког експеримента је био да се добију оптималне вредности PML параметара са којим ће апсорпција електромагнетских таласа бити побољшана. Добијени резултати на сликама 6.17 и 6.19, показују на који начин треба бирати параметре ако се жели ефикаснија апсорпција. Показало се да избор већих вредност за коефицијент проширења координата k_{max} доводи до повећања апсорпције, али и дисперзије. Стога, вредност параметара k_{max} треба бити што мања, по могућности минимална ($k_{min}=1$), а ефикасност апсорпције контролисати коефицијентом померања комплексних фреквенција α_{max} и проводношћу σ .

Закључци се могу извући на основу слика 6.17 и 6.19. Избор вредности коефицијента проширења координата k_{max} има веома велики утицај, како на ефикасност апсорпције, тако и на дисперзију. Евидентна је позитивна зависност између дисперзије и апсорпције. Када се FDTD метода користи за моделовање простирања електромагнетских таласа са извором високих фреквенција, неизбежни површински ефекат (*skin-effect*) се не може занемарити. У таквим случајевима, сетовање CPML параметара да зависе више од параметара проводности σ и коефицијента померања комплексне фреквенције α_{max} је препоручљиво. Такође, подешавање вредности коефицијента проширења k_{max} да буде довољно мала резултираће смањењем дисперзије.

6.2.2 Поређење CPML и UPML граничних услова

Нумерички експерименти објављени у [91], имали су за циљ испитивање ефикасности различитих граничних услова при апсорпцији електромагнетских таласа. Конкретно, урађена је анализа предности CPML [16] над UPML [13] граничним условима у FDTD методи и добијени су резултати за два различита електромагнетска проблема. Први проблем је 3Д FDTD симулација простирања електромагнетског таласа у слободном простору са диференцираним Гаусовим импулсом као извором. Он преставља стандардни проблем простирања таласа и спада у просте електромагнетске проблеме. Други проблем је 3Д FDTD симулација простирања

електромагнетског таласа, генерисаног од стране дипол антене, у присуству PEC сфере. Расејање електромагнетских таласа од 3Д структуре и поређење перформанси CPML и УПМЛ граничних услова је пример комплексног електромагнетског проблема.

6.2.2.1 3Д FDTD симулација простирања поља диференцираног Гаусовог импулса у слободном простору

У првом нумеричког експерименту, у ком је циљ поређење UPML и CPML граничних услова, урађена је 3Д FDTD симулација простирања диференцираног Гаусовог импулса у слободном простору. Нумерички домен је димензија 200 x 200 x 200, са квадратним ћелијама димензије 1 mm и временским кораком дужине $\Delta t=1,906575$ ps (0.99 пута CFL-а). Трајање симулације је 600 временских корака, тачније $t=1.143945$ ns. Диференцирани Гаусов импулс са временском функцијом облика:

$$J_{(x,y,z,t)} = -2 \left[(t - t_0) / \tau \right]^{-1} \exp \left[-\left[(t - t_0) / \tau \right]^2 \right], \quad (6.3)$$

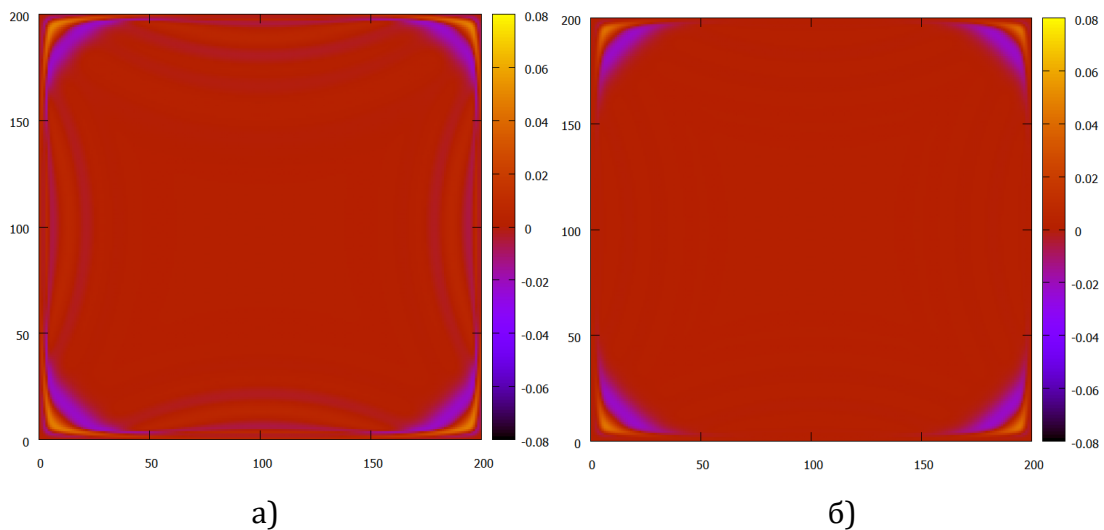
смештен је у центар нумеричког домена. Ширина Гаусовог импулса је $\tau=30$ ps, а временско кашњење је $t_0=4\tau$.

Како би се извршило адекватно поређење, FDTD нумерички домен је завршен UPML и CPML граничним условима дебљине 10 просторних ћелија, са полиномно градираним параметрима, једначине 6.11, 6.12 и 6.13.

На слици 6.20а приказана је амплитуда електричног поља E_z , у ху равни, након 300 временских корака, за случај UPML граничних услова дебљине 10 просторних ћелија. Фактор скалирања m има вредност $m=3$, проводност $\sigma_{w,max}=0.75\sigma_{w,opt}$ [16] (једначина 6.15), коефицијент проширења координата $k_{w,max}=15$. Коефицијент померања комплексне фреквенције има вредност $\alpha_w=0$, чиме се тензор коефицијент CPML, једначина 6.8, своди на тензор коефицијент за UPML, једначина 6.7.

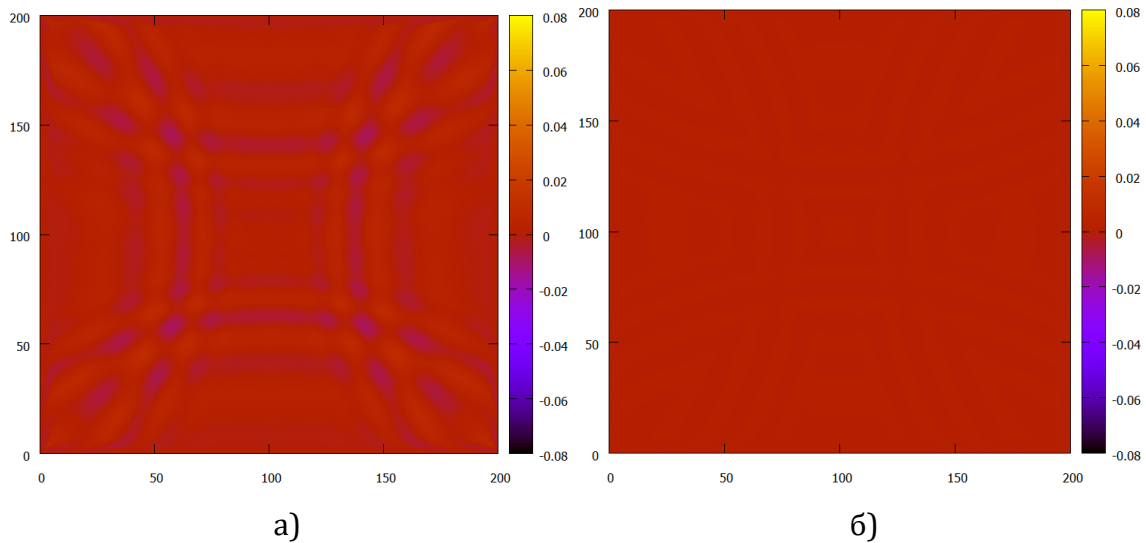
Амплитуда E_z компоненте електричног поља, у ху равни, за случај CPML граничних услова дебљине 10 просторних корака, након 300 временских

корака, приказана је на слици 6.20б. Параметри m , $\sigma_{w,max}$ и $k_{w,max}$ имају исте вредности као у случају UPML-а, с тим што је вредност коефицијента померања комплексне фреквенције $\alpha_w=0.24$ и фактора скалирања $m_a=1$. На слици 6.20а, види се значајна количина дисперзије. Видљиве су рефлектоване компоненте електричног поља од спољних граница нумеричког домена које се враћају натраг у нумерички домене од интереса. Насупрот томе, ефикасна апсорпција се види на слици 6.20б, на којој нема видљивих рефлектованих компоненти електричног поља.



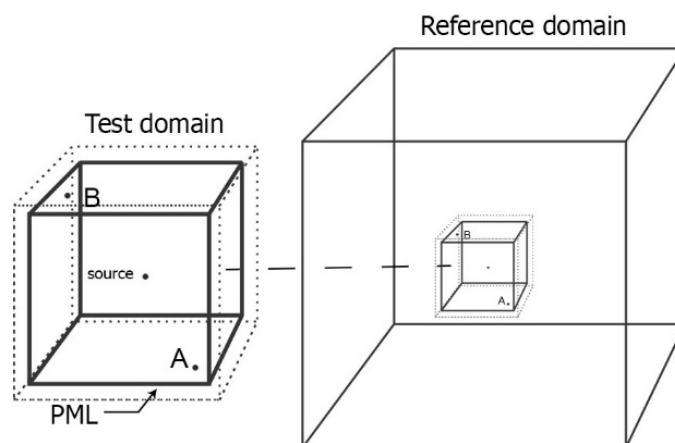
Слика 6.20 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E у xy равни за случај: а) UPML-а, б) CPML-а, дебљине 10 ћелија, након 300 временских корака, [91]

Нумерички резултати приказани на слици 6.21, приказују компоненту електричног поља E_z , у xy равни, за случај UPML и CPML граничних услова дебљине 10 ћелија, после 400 временских корака симулације. На слици 6.21а, уочљиво је повећање нумеричке дисперзије, које је последица рефлектованих компоненти електричног поља од UPML-а. Оволика количина нежељене рефлесије се не толерише у FDTD симулацијама у којима су прецизни резултати приоритет. Напротив, на слици 6.21б, ефикасна апсорпција компоненти електричног поља са CPML граничним условима се може видети.



Слика 6.21 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E у xy равни за случај: а) UPML-а, б) CPML-а, дебљине 10 ћелија, након 400 временских корака, [91]

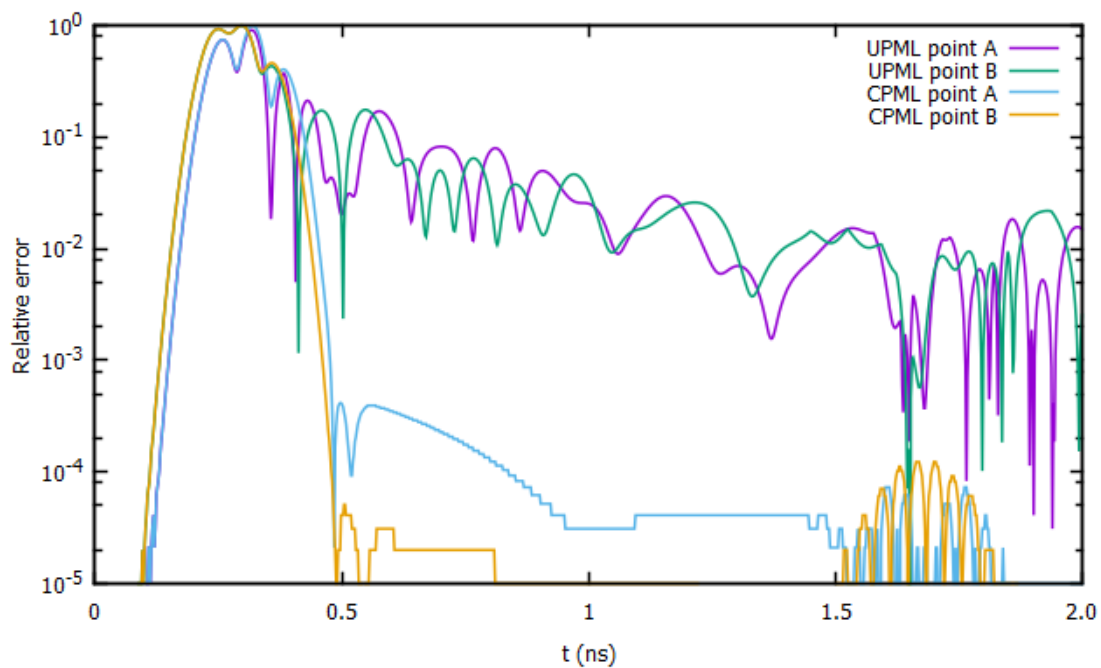
Како би се додатно демонстрирали бенефити CPML граничних услова у односу на UPML, извршено је израчунавање релативне грешке за електрично поље. Релативна грешка се рачунала за две пробне тачке А и В, у тестном домену димензија 40 x 40 x 40 ћелија и референтном домену 400 x 400 x 400 ћелија, слика 6.22. Формула коришћена за рачунање релативне грешке је као у претходном експерименту, једначина 6.22. Функција Гаусовог извора је једначина 5.9, са ширином импулса $\tau=50$ ps и временским кашњењем $t_0=4\tau$.



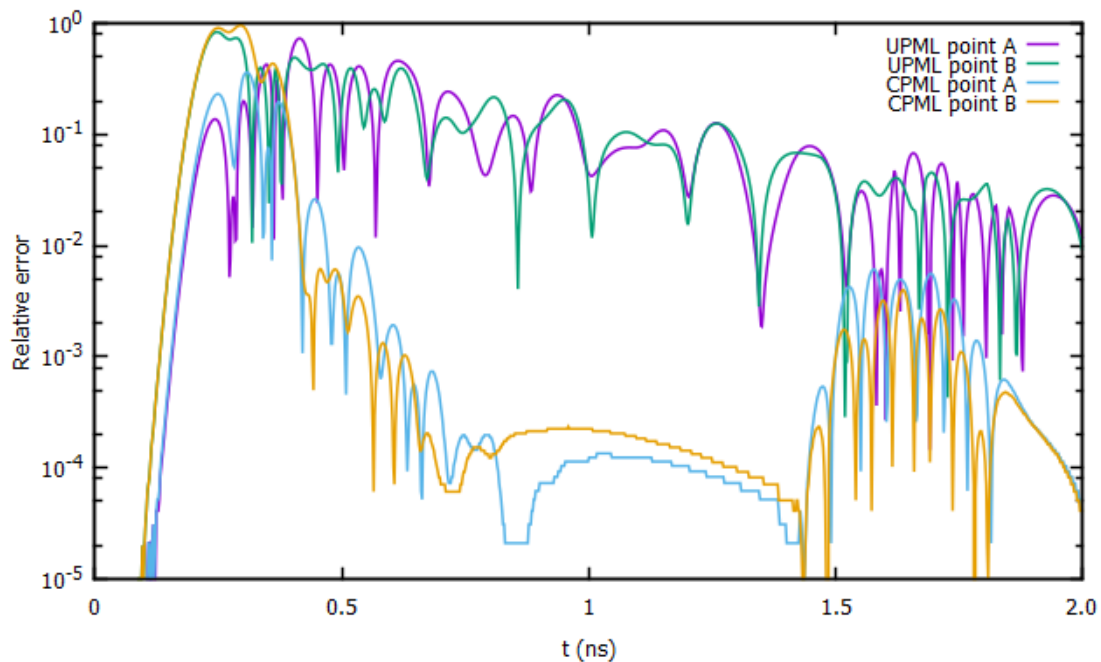
Слика 6.22 Илустрација тест-домена и референтног FDTD домена коришћених за израчунавање релативне грешке, [91]

Идентична локација извора (у центру домена) је и код тестног и код референтног домена, а пробне тачке су на истој позицији у односу на извор, слика 6.22. Тачка А (2,2,2) и тачка В (38,20,38) у тестном домену одговарају тачки А (182,182,182) и тачки В (218,200,218) у референтном домену. Релативна грешка за UMPL и CPML дебљине 10 ћелија и 5 ћелија је израчуната, а сет PML параметара је исти као у случају нумеричких резултата (слика 6.21).

На слици 6.23, приказана је релативна грешка за електрично поље E у две пробне тачке за CPML и UPML дебљине 10 ћелија. Упоредјујући UPML и CPML графике, евидентно је да CPML обезбеђује умањење релативне грешке за више од три реда величине, на логаритамској скали. На UPML графику се види споро опадање релативне грешке у каснијем временском периоду симулације. То је последица интеракције компоненти електромагнетских таласа ниске фреквенције са унутрашњом површином UMPL-а.



Слика 6.23 Релативна грешка за CPML и UPML дебљине 10 ћелија у случају простирања ЕМ таласа у слободном простору, [91]



Слика 6.24 Релативна грешка за CPML и UPML дебљине 5 ћелија у случају простирања ЕМ таласа у слободном простору, [91]

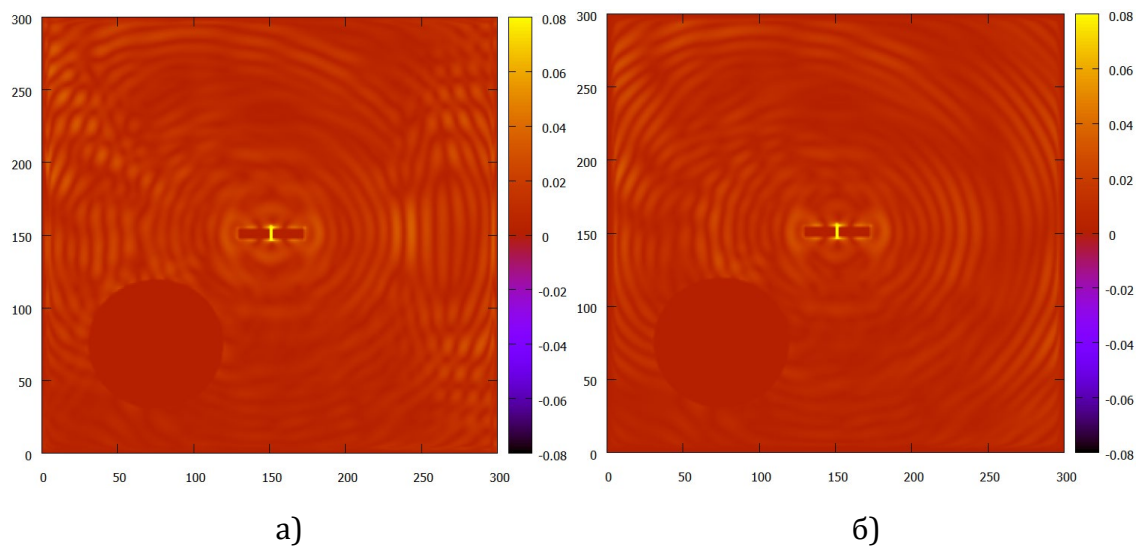
Релативна грешка у пробним тачкама А и В, у случају CPML и UPML граничних услова дебљине 5 ћелија, приказана је на слици 6.24. На графику CPML-а се у раном временском периоду симулације примећују максимуми (*peak*) који су последица грешке дискретизације. Са повећањем броја временских корака, видљиво је опадање нивоа грешке. Ако се график CPML-а упореди са графиком UPML-а, на слици 6.24, и у случају дебљине од 5 ћелија се види да су вредности релативне грешке мањи за три реда величине.

6.2.2.2 3Д FDTD симулација простирања и расејања поља дипол антене у присуству PEC сфере

Као пример комплексног електромагнетског проблема, урађена је 3Д FDTD симулација простирања електромагнетског таласа у слободном простору у присуству PEC сфере. Извор електромагнетског поља је дипол антена са диференцираним Гаусовим импулсом као временском функцијом извора. Димензија нумеричког домена је 300 x 300 x 300, са ћелијом од 1mm и временским кораком од $\Delta t = 1,906575$ ps (0.99 пута CFL-а). Трајање симулације је 1000 временских корака. Дипол антена је смештена у центру FDTD

нумеричког домена. РЕС сфера је од алуминијума и њена позиција се може видети на слици 3. Временска функција извора је као у једначини 5.9, са ширином импулса $\tau=30$ ps и временским кашњењем од $t_0 = 4\tau$. Нумерички домен је затворен PML-ом са полиномно градираним параметрима, једначине 6.11, 6.12 и 6.13.

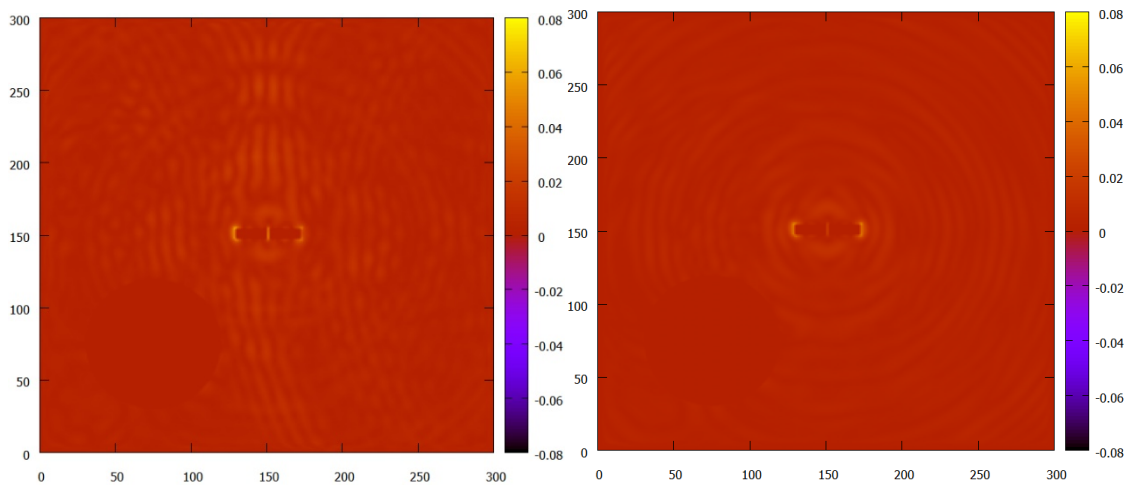
Нумерички резултати на слици 6.25, приказују E_z компоненту поља, у xy равни, након 500 временских корака за а) UPML и б) CPML, дебљине 10 ћелија. Параметри UPML-а су: $m = 3$, $\sigma_{w,max} = 0.75\sigma_{w,opt}$ ($\sigma_{w,opt}$ из једначине 6.15) и $k_{w,max} = 15$. Као и у претходном нумеричком експерименту, коефицијент померања комплексних фреквенција α_w код UPML-а има вредност нула, јер UPML у аналитичком облику не садржи тај параметар. Код CPML-а, сви параметри имају исте вредности као UPML, са изузетком $\alpha_w = 0.24$ и $m_a=1$, који су параметри који карактеришу CPML граничне услове.



Слика 6.25 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E у xy равни за случај: а) UPML-а, б) CPML-а, дебљине 10 ћелија, након 500 временских корака, [91]

Резултати на слици 6.25а, приказују рефлексију компоненти електромагнетског поља инцидентног таласа од UPML-а. Такође, приметна је рефлексија од UPML-а и компоненти електромагнетског поља расејаних од РЕС сфере. Овакви резултати показују да је, услед значајне количине рефлексије, интерпретација резултата веома отежана. Насупрот овим

результатима, на слици 6.25б, види се линеарна апсорпција свих надолазећих компоненти поља од стране CPML граничних услова.

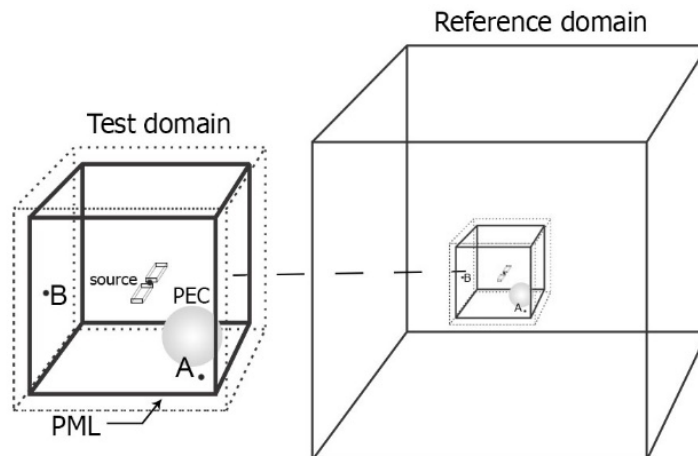


Слика 6.26 Интенитет z компоненте вектора јачине електричног поља E у xy равни за случај: а) UPML-а, б) CPML-а, дебљине 10 ћелија, након 700 временских корака, [91]

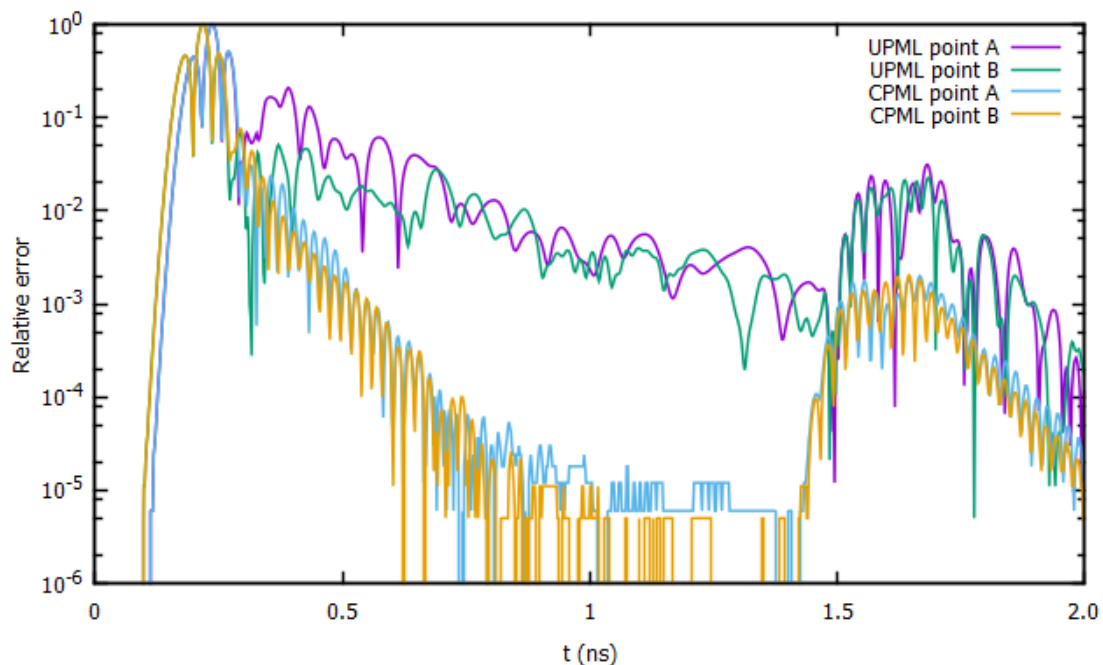
Слика 6.26 даје резултате за амплитуду електричног поља E_z у симулацији расејања поља од PEC сфере са а) UPML и б) CPML граничним условима. Дебљина граничних услова је 10 ћелија, а резултати су за временски период након 700 временских корака. На слици 6.26а, јасно су видљиве рефлектоване компоненте поља које се враћају ка диполу, који се налази у центру домена. Додатно, долази до појаве дисперзије, услед интеракције рефлектованих таласа са закаснелим компонентама инцидентног поља. CPML гранични услови су апсорбовали све инцидентне и рефлектоване компоненте до 700ог временског корака. Остале су видљиве само, занемарљиво мале, закаснеле компоненте инцидентног поља у околини дипола, које убрзо улазе у стабилно стање. С обзиром на добру апсорпцију, CPML гранични услови омогућавају да се величина нумеричког домена смањи, што повољно утиче на утрошену рачунарску меморију неопходну за симулацију.

Релативна грешка за случај простирања електромагнетских таласа и расејања од PEC сфере од алуминијума, такође је израчуната коришћењем једначине 6.22. Тестни домен димензија 40 x 40 x 40 ћелија и референтни

домен од $400 \times 400 \times 400$ ћелија, са пробним тачкама А (2,2,2) и В (38,2,20) у тестном и тачкама А (182,182,182) и В (218,182,200) у референтном домену, омогућили су рачунање релативне грешке. Илустрација наведених домена са обележеним позицијама пробних тачака, дипола и сфере приказана је на слици 6.27.



Слика 6.27 Илустрација тест-домена и референтног FDTD домена коришћеног за рачунање релативне грешке у случају дипола и сфере, [91]



Слика 6.28 Релативна грешка за CPML и UPML дебљине 10 ћелија у случају простирања ЕМ таласа од дипол антене и расејања од PEC сфере, [91]

Параметри симулације, параметри извора, као и параметри UPML-а и CPML-а су исти као и код нумеричког експеримента приказаног на слици 6.25 и 6.26. Израчуната грешка за UPML и CPML дебљине 10 ћелија може се видети на слици 6.28. Знатно боље перформансе CPML граничних услова при апсорпцији електромагнетских таласа у односу UPML граничне услове, могу се видети и на слици 6.28. Графици показују да је и у случају комплексног електромагнетског проблема простирања и расејања електромагнетских таласа, у случају дипол антене и PEC сфере, избор CPML граничних услова бољи од UPML-а.

Приликом FDTD моделовања симулација на основу којих су добијени претходно приказани резултати дошло се до одређених закључака по питању имплементације UMPL и CPML граничних услова у FDTD програмски код.

UMPL гранични услови су имплементирани помоћним диференцијалним једначина (ADE) на начин који је представљен у поглављу 5.5.1. На основу тог приступа, било је неопходно увођење нових променљивих за вектор електричне индукције \mathbf{D} и вектор магнетске индукције \mathbf{B} . Једначине коришћене за имплементацију су 5.46 и 5.48, из поглавља 5.5.1. UPML имплементиран на овај начин испуњава читав FDTD нумерички домен, што је олакшавајућа околност у програмирању. Међутим, неопходност дефинисања нових променљивих (\mathbf{D} и \mathbf{B}) и пратећих једначина дуплира потребну рачунарску меморију. Алтернатива овоме је коришћење троструких петљи за поља у унутрашњости домена и посебних петљи за сваки од UPML страница (као и углова домена). У том случају је потребно обезбедити меморију само за помоћне променљиве у UMPL региону, што утиче на смањење меморије. С друге стране, комплексност програмирања овакве алтернативе је велика.

Када је у питању CPML имплементација, компоненте електричног поља су ажуриране у читавом FDTD нумеричком домену, користећи једначину 10 из поглавља 5.5.2, на исти начин као и класичан FDTD алгоритам. У посебним петљама се рачунају вредности конволуционих коефицијената, једначине 5.57 и 5.58 у поглављу 5.5.2, па се онда убацују у FDTD једначине за електрично поље само у CPML региону. То значи да је потребно дефинисати само две нове

променљиве (за конволуционе коефицијенте $\Psi_{Ex,y}$ и $\Psi_{Ex,z}$) и то само у CPML региону. Из овога се закључује да је имплементација CPML много ефикаснија, по питању неопходне рачунарске меморије, од имплементације UPML.

У случајевима нелинеарних, дисперзивних и средина са губицима, при имплементацији UPML граничних услова неопходно је увести две нове помоћне променљиве по једној компоненти поља [67, 78]. Код CPML имплементације у поменутим срединама, никакве промене у програмском коду нису потребне.

7. Дискусија резултата

Због могућности генерисања широког спектра фреквенција и простирања поља у свим правцима импулсни извори су први избор при FDTD моделовању, пре свих Гаусов импулс. У раду [34], указано је на веома неповољне карактеристике Гаусовог импулса, нарочито у 2Д и 3Д FDTD симулацијама. Као последица постојања једносмерних (*direct current* – DC) компоненти у временском облику функције извора, долази до таложења фиктивних (нумеричких) наелектрисања која могу остати у FDTD домену и након што сва инцидентна и рефлектована поља нестану. Овако настала наелектрисања неминовно доводе до појаве нефизичке рефлексије и нумеричке дисперзије, сходно томе и до нетачних резултата симулације. Један начин да се избегну ова нежељена наелектрисања, заснован на увођењу капацитивности и индуктивности FDTD решетке, предложен је у [34]. Међутим, моделовање локалних капацитивности и индуктивности захтева дефинисање посебне димензије ћелије на одређеним местима у FDTD решетки, па у случају грешке може доћи до нумеричке нестабилности FDTD алгоритма [2]. Струјни извори који у себи садрже једносмерну компоненту (*direct current* – DC) депонују (таложе) трајна наелектрисања, док извори без DC компоненте могу произвести привремена наелектрисања [34]. Коришћење биполарног импулса са једнаким позитивним и негативним вредностима, са циљем да се избегну DC компоненте Гаусовог импулса су предложене у [37]. Управо је овакав концепт хипотеза у овој дисертацији, да се манипулацијом временског

облика Гаусовог облика могу елиминисати нежељене DC компоненте. Сходно томе, у овој дисертацији, предложено је коришћење диференцираног Гаусовог импулса и Рикеровог импулса у FDTD симулацијама, уместо стандардног облика Гаусовог импулса.

Како би се испитале предности Рикеровог импулса, у нумеричким FDTD симулацијама, приказаним у поглављу 6.1.1 и објављеним у раду [87], извршено је поређење простирања и расејања електромагнетског поља екситованог Гаусовим, затим и Рикеровим импулсом у 2Д и 3Д слободном простору. Додатно, простирање и расејање ова два типа извора је анализирано је и у 2Д и 3Д нехомогеној средини састављеној из два хомогена полупростора. Простиран је ТМ тип таласа, а гранични услови нису имплементирани да би се таласи рефлектовани од граница нумеричког домена искористили за анализу центра домена у ком се претпоставља да ће бити наталожених DC компоненти. На сликама 6.3, 6.5, 6.7 и 6.9, у поглављу 6.1.1, приказани су интензитети E_z компоненте електричног поља за случај екситације у облику Гаусовог импулса. На сликама су евидентно присутне нежељене једносмерне (DC) компоненту поља. У случају екситације Рикеровим импулсом, на сликама 6.4, 6.6, 6.8 и 6.10, штетна DC компонента поља и непожељне рефлексије нису присутне у домену. Резултати јасно указују на предности екситације поља у облику Рикеровог импулса у односу на екситације облика Гаусовог импулса у FDTD симулацијама, како у 2Д и 3Д случајевима, тако у хомогеним и у нехомогеним срединама.

Посебан начин имплементације TF/SF равних таласа у 2Д и 3Д FDTD нумерички домен коришћењем помоћне 1Д решетке [2] искоришћен је за испитивање предности примене TF/SF равних таласа у нумеричких симулацијама где присуство самог извора унутар FDTD нумеричког домена није неопходно. На овај начин смањена је комплексност програмирања TF/SF равних таласа и њихова имплементација у FDTD алгоритам. FDTD симулације са TF/SF равним таласима приказане у поглављу 6.1.2 и у радовима [88, 89], за случај 2Д и 3Д слободног простора са PEC цилиндром, односно PEC сфером, као и за 2Д случај два хомогена диелектрична полупростора (слободан простор и

слој са губицима. На сликама 6.11, 6.12, 6.13, 6.14 и 6.15, у поглављу 6.1.2, приказани су интензитети E_z компоненте инцидентног и расејаног поља у трансверзалној равни, ТМ типа таласа. На сликама се види простирање таласа само у жељеном правцу, нема нежељених компоненти таласа у правцу супротном од жељеног правца простирања, тј. нема рефлексије са друге стране TF/SF границе. Такође, не постоје наталожене DC компоненте ни у једном делу нумеричког домена, као што је то био случај код Гаусовог импулса.

Истраживања CPML граничних услова, базирана на доминантној фреквенцији при којој се врши апсорпција су, у последњих неколико година, веома честа [39, 47]. Међутим, истраживања базирана на оптимизацији CPML параметара су тек почела [49]., Примарни циљ у овој дисертацији био је испитивање утицаја параметара: коефицијент проширења координата k и коефицијент померања комплексне фреквенције α . Параметар проводности σ није био од интереса у експериментима зато што постоји велики број истраживања [13, 16, 84, 85] који су се бавили тиме и која су дала прецизне резултате за избор оптималних вредности за σ . У овој дисертацији, за проводност σ , увек је коришћена вредност израчуната на основу једначине 6.15 [16]. Поред проналажења адекватних корелација CPML коефицијената, циљ је био и испитивање перформанси и поређење CPML граничних услова са PML и UPML граничним условима. 3Д FDTD симулација простирања поља у слободном простору са диференцираним Гаусовим импулсом као извором високе фреквенције искоришћена је за испитивање апсорпционих карактеристика PML, UPML и CPML граничних услова. Резултати истраживања су приказани у поглављу 6.2.1 и објављени у раду [90]. Разлог увођења PML и UPML граничних услова у ову анализу је испитивање утицаја коефицијента проширења координата k на апсорпцију електромагнетских таласа високе фреквенције, без утицаја коефицијента померања комплексне фреквенције α . Скупови параметара PML [12], UPML [13], CPML [16], CPML-A и CPML-B дају резултате за апсорпцију са различитим k и α , у циљу проналажења што боље корелације између њих. 3Д FDTD нумерички домен је затворен са граничним

условима дебљине од 10 просторних ћелија, а на слици 6.17, у поглављу 6.2.1, приказане су интензитети z компоненте вектора јачине електричног поља \mathbf{E} за различите скупове параметара (из Табеле 2), у три различита временска корака. Резултати са слике 6.17 (с3), као и PML, UPML и CPML скупови параметара показују да је утицај параметра α_{\max} веома значајан за апсорпцију. Како параметар α_{\max} није дефинисан код PML-а и UPML-а, а код CPML-а има вредност 0,2, јасно је да постојање α_{\max} значајно утиче на апсорпцију. С обзиром да α_{\max} и k_{\max} имају много мање вредности у CPML-A и CPML-B него у CPML, може се извући веома важан закључан: апсорпција у PML граничним условима не зависи толико од вредности параметара, колико зависи од њиховог односа. С друге стране, на слици 6.17 (d3) и (e3), приметна је веома мала дисперзија, иако је вредност параметра α_{\max} много мања него у (с3). Стога, намећу се закључци да дисперзија има позитивну зависност са повећањем параметра k_{\max} и да се апсорпција мора прецизно контролисати избором вредности параметра α_{\max} . Иако је вредност k_{\max} већа у (d3) него у (e3), уочљива је боља апсорпција у (d3). То је зато што је вредност α_{\max} већа у (d3) него у (e3), што значи да веће α_{\max} омогућава CPML-у већу ефикасност при апсорпцији. Са слике 6.17 (d3), јасно је да већа вредност k_{\max} утиче да брзина простирања таласа буде мања, што омогућава да α_{\max} доминантно утиче на апсорпцију.

Релативна грешка, приказана на слици 6.19, израчуната је за све три компоненте вектора јачине електричног поља (E_x, E_y, E_z) у тачки В, у случају различитих скупова PML параметара за дебљине апсорпционог слоја од 10 ћелија. Ако се упореде графици за PML и UPML, примећује се да се код UPML-а грешка смањује. То је последица веће вредности параметра k_{\max} код UPML-а ($k_{\max} = 10$), у односу на PML ($k_{\max} = 1$). График за CPML приказује солидну апсорпцију у поређењу са графицима PML-а и UPML-а. Графици за CPML-A и CPML-B приказују фактички исту релативну грешку, што је логично, јер су сетови параметара блиских вредности. У поређењу са PML, UPML и CPML графицима, умањење грешке знатно је веће код CPML-A и CPML-B графика, код којих не постоји дисперзија у каснијим временским корацима. С обзиром на

резултате са слике 6.17 (d3-e3) и графике са слике 6.19, јасно је да оптималне параметре треба бирати у оспегу између CPML-A и CPML-B скупа параметара:

- CPML-A: $k_{\max} = 5$, $\sigma_{\max} = 0.75\sigma_{\text{opt}}$, $\alpha_{\max} = 9 \times 10^{-4}$
- CPML-B: $k_{\max} = 1$, $\sigma_{\max} = 0.75\sigma_{\text{opt}}$, $\alpha_{\max} = 3 \times 10^{-4}$.

Показало се да избор већих вредност за коефицијент проширења координата k_{\max} доводи до повећања апсорпције, али и дисперзије. Стога, вредност параметара k_{\max} треба бити што мања, по могућности минимална ($k_{\min}=1$), а ефикасност апсорпције контролисати коефицијентом померања комплексних фреквенција α_{\max} и проводношћу σ . Евидентна је позитивна зависност између дисперзије и апсорпције. Када се FDTD метода користи за моделовање простирања електромагнетских таласа са извором високих фреквенција, неизбежни површински ефекат (*skin-effect*) се не може занемарити. Истраживања која имају за циљ проналажење оптималних PML параметара има доста [62, 63]. Резултати приказани у овој дисертацији су само мали допринос у тој великој области, у FDTD моделовању.

Нумерички експерименти приказани у поглављу 6.2.2 и објављени у [91], имали су за циљ испитивање ефикасности различитих граничних услова при апсорпцији електромагнетских таласа. Конкретно, урађена је анализа предности CPML над UPML граничним условима у FDTD методи и добијени су резултати за два различита електромагнетска проблема при простирању диференцираног Гаусовог импулса. На сликама 6.20, 6.21, 6.25 и 6.26, у поглављу 6.2.2, приказана је амплитуда z компоненте вектора јачине електричног поља E , за случај два поменута типа граничних услова, дебљине 10 просторних ћелија. У случају UPML граничних услова видљиве су рефлектоване компоненте електричног поља од спољних граница нумеричког домена које се враћају натраг у нумерички домене од интереса. Насупрот томе, ефикасна апсорпција се види у случају CPML граничних услова, на којој нема видљивих рефлектованих компоненти електричног поља. На сликама 6.23, 6.24 и 6.28 у истом поглављу, могу се видети графици вредности релативне грешке у две пробне тачке, за случај UPML и CPML граничних

услова. Упоредјујући UPML и CPML графике, евидентно је да CPML обезбеђује умањење релативне грешке за више од три реда величине, на логаритамској скали. На UPML графику се види споро опадање релативне грешке у каснијем временском периоду симулације. То је последица интеракције компоненти електромагнетских таласа ниске фреквенције са унутрашњом површином UMPL-а.

UMPL гранични услови су у програмски код имплементирани помоћним диференцијалним једначина (ADE) увођењем нових променљивих за вектор електричне индукције \mathbf{D} и вектор магнетске индукције \mathbf{B} , што доводи до дуплирања количине компјутерске меморије потребне за смештање свих променљивих. Алтернатива овоме је коришћење троструких петљи за поља у унутрашњости домена и посебних петљи за сваки од UPML страница (као и углова домена), али је комплексност програмирања у том случају знатно већа. Када је у питању CPML имплементација, вредности конволуционих коефицијената се рачунају у посебним петљама, при чему је потребно накнадно дефинисати само две посебне променљиве и то само у CPML региону. Из овога се закључује да је имплементација CPML много ефикаснија, по питању неопходне рачунарске меморије, од имплементације UMPL. У случајевима нелинеарних, дисперзивних и средина са губицима, при имплементацији UPML граничних услова неопходно је увести две нове помоћне променљиве по једној компоненти поља [67, 78]. Код CPML имплементације у поменутиим срединама, никакве промене у програмском коду нису потребне.

7. Закључак

Метода коначних разлика у временском домену (*Finite-Difference Time-Domain* - FDTD) је данас једна од најкоришћенијих и најпопуларнијих метода у нумеричкој електромагнетици. Правилно постављен електромагнетски проблем и прави избор параметара FDTD нумеричке симулације простирања електромагнетског поља кључан је за резултате истраживања. Предмет истраживања ове докторске дисертације били су извори електромагнетског поља и апсорбујући гранични услови, као фактори који имају кључан утицај на ефикасност FDTD компјутерске симулације простирања електромагнетског поља.

Поред увода који представља прво поглавље и закључка као последњег поглавља, дисертација садржи још пет тематских целина. О методи коначних разлика у временском домену и њеном месту у данашњој нумеричкој електромагнетици било је речи у уводу. Дат је кратак историјат FDTD методе и њена примена у савременим телекомуникационим системима и другим научним областима. Након кратког описа основних принципа на којима је заснована FDTD метода, објашњено је шта ће бити предмети и који су циљеви истраживања. Наведено је на који начин се врши избор екситација у FDTD методи и постављена прва хипотеза: да се појава нефизичких наелектрисања код Гаусовог импулса може смањити применом оптимизованих облика импулсних извора, конкретно Рикеровог импулса. Друга хипотеза постављена у уводу је: оптимизацију CPML (*Convolutional Perfectly Matched Layer*) граничних услова треба засновати на тражењу адекватних бројних вредности и корелација између CPML коефицијената.

Друго поглавље представља теоријску основу методе коначних разлика у временском домену. Указано је на предности и недостатке FDTD методе, као и поређење са осталим методама. Из Максвелових једначина изведене су полазне диференцијалне једначине и уведен полазни Yee-ов алгоритам на којима је заснована FDTD метода. Изведене су коначне разлике са тачношћу другог реда и изведен је CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*) услов нумеричке

стабилности. Такође, дати су главни узроци дисперзије у нумеричком алгоритму FDTD методе.

Тема трећег поглавља су извори електромагнетског поља који се највише користе у нумеричким симулацијама електромагнетског поља у FDTD методи. Приказане су временске функције и графички облици у временском и фреквенцијском домену за Гаусов импулс, Рикеров импулс и хармонијски извор синусног облика, као и концепт на ком је заснована TF/SF (*Total Field/Scattered Field*) техника генерисања равних таласа.

У четвртном поглављу су дефинисани апсорбујући гранични услови у FDTD методи, који су предмет истраживања у овој дисертацији. Изведени су Мурови аналитички гранични услови другог реда и савршено апсорбујући слојевити гранични услови (*perfectly matched layer* - PML). Из PML граничних услова изведени су униаксијални (*uniaxial* PML - UPML) и конволуциони (*convolutional* PML - CPML) савршено апсорбујући слојевити гранични услови, чија је оптимизација циљ истраживања.

У петом поглављу су изведени аналитички модели дискретизације извора и граничних услова који су коришћени у истраживању. Предложени су начини FDTD дискретизације и оптимизације Гаусовог, Рикеровог и хармонијског извора, као и посебан случај имплементације TF/SF равних таласа у 2Д и 3Д FDTD домен коришћењем 1Д помоћне решетке. Предложено је да се коришћењем биполарног импулса (Рикеровог импулса) са једнаким позитивним и негативним вредностима, као и модификацијом временског облика Гаусовог импулса (диференцирани Гаусов импулс) може смањити појава нумеричких (нефизичких) компоненти наелектрисања. У овом поглављу су приказани начини имплементације UPML и CPML граничних услова, са посебним освртом на имплементацију у програмски FDTD код. Детаљно је обрађено градирање CPML коефицијената помоћу полинома, које је касније коришћено за проналажење оптималних корелација.

У шестом поглављу су презентовани и дискутовани резултати нумеричких 2Д и 3Д FDTD симулација простирања и расејања електромагнетског поља.

Упоредени су нумерички резултати добијени за случај побуде поља Рикеровим и Гаусовим импулсом. Нумеричке симулације су урађене за случај простирања електромагнетског поља у слободном простору и простирања кроз нехомогену средину сачињену од два хомогена диелектрична полупростора. Урађене су FDTD симулације простирања поља са TF/SF равним таласима како би се испитале предности ове технике у односу на импулсне изворе и то за случај 2Д и 3Д слободног простора са савршено проводним (*Perfect Electric Conductor* – PEC) цилиндром, односно PEC сфером. Додатно, симулирано је простирање TF/SF равних таласа у 2Д нумеричком домену сачињеног од два хомогена диелектрична полупростора: слободан простор и слој са губицима. 3Д FDTD симулација простирања поља у слободном простору са диференцираним Гаусовим импулсом као извором искоришћена је за испитивање апсорпционих карактеристика PML, UPML и CPML граничних услова и добијања оптималних корелација између CPML коефицијената. Додатно, за поређење апсорпционих карактеристика CPML и UPML граничних услова реализоване су 3Д FDTD симулације за два електромагнетска проблема. Први проблем подразумева простирање електромагнетског поља у слободном простору са диференцираним Гаусовим импулсом као извором. Други проблем испитује перформансе два типа граничних услова у случају комплексне геометрије средине. Резултати простирања и расејања електромагнетског поља у присуству PEC сфере графички су приказани користећи вредности амплитуде вектора јачине електричног поља у различитим тренуцима у времену. Такође, као додатни аспект у испитивању, израчуната је релативна грешка у случају две различите дебљине савршено апсорбујућих слојевитих граничних услова. На крају су дате смернице за даљи рад.

Поређење простирања електромагнетског поља са Гаусовим и Рикеровим импулсом као извором имало је за циљ да покаже да је Рикеров импулс подобнији за примену у FDTD симулацијама. Извршене су симулације простирања електромагнетског поља у слободном простору и нехомогеним срединама, у присуству и без савршено проводног PEC расејача

електромагнетског поља. Овакав приступ омогућава примену остварених резултата на већи број електромагнетских проблема. Резултати показују да Рикеров импулс има занемарљиво малу нефизичку DC компоненту и да је бољи избор од Гаусовог импулса у FDTD симулацијама простирања електромагнетског поља. Резултати 2Д и 3Д FDTD симулација простирања TF/SF равних таласа јасно су показали да је коришћене ове технике ефикасније од коришћења импулсних извора. То важи за случајеве када је потребна анализа простирања електромагнетског поља у једном правцу нумеричког домена и када присуство самог извора унутар FDTD нумеричког домена није неопходно. Гасов импулс је, као математичка функција, неизоставни модел извора у великом броју научних истраживања, не само у теоријској електротехници, већ и у акустици, геофизици и другим научним областима. Резултати у овој дисертацији, који указују на недостатке Гаусовог импулса и упућују на алтернативне изворне функције, имају значајну примену у научној и стручној пракси.

Добијени резултати поређења PML, UPML и CPML граничних услова при апсорпцији електромагнетских таласа за различите скупове параметара по први пут су дали корелације CPML коефицијената из којих су извучени битни закључци и смернице. Примарни циљ је био испитивање утицаја коефицијента проширења координата и коефицијента померања комплексне фреквенције при апсорпцији електромагнетских таласа високе фреквенције. На основу добијених резултата и графички приказаних вредности амплитуда вектора јачине електричног поља за неколико временских корака, као и додатних прорачуна релативне грешке за PML слој дебљине 10 ћелија, добијене су оптималне корелације CPML коефицијената. Графички резултати и вредности релативне грешке 3Д FDTD симулација простог и комплексног електромагнетског проблема у којима су упоређене перформансе PML, UPML и CPML граничних услова указују на то да CPML гранични услови имају најбоље апсорпционе карактеристике. Овако оптимизовани CPML гранични услови могу се применити у изради комерцијалних и *open-source* софтвера који FDTD методу користе за дизајн антена и микроталасних склопова,

анализе простирања радио таласа, у фотоници, биомедицини, геофизици, акустици.

Након великог броја нумеричких симулација простирања и расејања електромагнетског поља, у слободном простору и нехомогеним срединама, са и без РЕС расејача, и анализе добијених резултата, у овој дисертацији, изведени су следећи закључци:

- модификацијом временског облика Гаусовог импулса и коришћењем његових деривата (диференцирани Гаусов импулс и Рикеров импулс) могуће је знатно умањити присуство нефизичке DC компоненте у FDTD симулацијама,
- упоредна анализа примене Рикеровог импулса у односу на Гаусов импулс у FDTD методи показала је да је у случају Рикеровог импулса утицај нефизичких DC компоненти занемарљиво мали,
- примена TF/SF равних таласа је бољи избор од примене импулсних извора у FDTD симулацијама простирања електромагнетског поља када присуство извора унутар нумеричког домена није приоритет,
- показано је да апсорпција електромагнетских таласа са примењеним CPML граничним условима знатно боља од апсорпције PML и UPML граничних услова,
- имплементација CPML граничних услова у FDTD алгоритам је знатно простија и ефикаснија, по питању искоришћене компјутерске меморије, од имплементације PML и UPML граничних услова,
- показано је да апсорпција електромагнетских таласа CPML граничних услова више зависи од корелације између CPML коефицијената, а мање од њихових вредности,
- показано је да у случају FDTD симулација са импулсним извором високих фреквенција вредности CPML параметара треба више да зависе од коефицијента специфичне проводности σ и коефицијента померања комплексне фреквенције α , него од коефицијента проширења координата k

- показано је да мања вредност коефицијента проширења координата k повољно утиче на смањење нумеричке дисперзије код CPML граничних услова.

Резултати добијени у овој дисертацији дају смернице по питању одабира оптималног извора електромагнетског поља у FDTD моделовању. Показано је да је Рикеров импулс добар избор када је неопходно симулирати простирање електромагнетског поља у свим правцима FDTD нумеричког домена. Бројна истраживања апсорбујућих граничних услова у данашњој нумеричкој електромагнетици имају за циљ проналажење оптималних CPML параметара. Резултати приказани у овој дисертацији су само мали допринос у тој великој области, у FDTD моделовању. Даљи ток истраживања на пољу CPML граничних услова биће усмерен ка испитивању утицаја коефицијента специфичне проводности σ на апсорпцију електромагнетског поља ниских фреквенција. Такође, нумеричке симулације простирања електромагнетског поља у унутрашњости реалних фотоничних структура биће један од циљева даљег истраживања.

Литература

- [1] Yee, Kane. "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media." *IEEE Transactions on antennas and propagation* 14.3 (1966): 302-307.
- [2] Taflove, Allen, and Susan C. Hagness. *Computational electrodynamics*. Artech house, 2005.
- [3] Taflove, Allen, and Morris E. Brodwin. "Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations." *IEEE transactions on microwave theory and techniques* 23.8 (1975): 623-630.
- [4] Taflove, Allen. "Application of the finite-difference time-domain method to sinusoidal steady-state electromagnetic-penetration problems." *IEEE Transactions on electromagnetic compatibility* 3 (1980): 191-202.
- [5] Mur, Gerrit. "Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations." *IEEE transactions on Electromagnetic Compatibility* 4 (1981): 377-382.
- [6] Choi, Dok Hee, and Wolfgang JR Hoefer. "The finite-difference-time-domain method and its application to eigenvalue problems." *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 34.12 (1986): 1464-1470.
- [7] Shankar, Vijaya, Alireza H. Mohammadian, and William F. Hall. "A time-domain, finite-volume treatment for the Maxwell equations." *Electromagnetics* 10.1-2 (1990): 127-145.
- [8] Madsen, Niel K., and Richard W. Ziolkowski. "A three-dimensional modified finite volume technique for Maxwell's equations." *Electromagnetics* 10.1-2 (1990): 147-161.
- [9] Tirkas, Panayiotis A., and Constantine A. Balanis. "Finite-difference time-domain method for antenna radiation." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 40.3 (1992): 334-340.
- [10] Jurgens, Thomas G, et al. "Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 40.4 (1992): 357-366.
- [11] Sui, Wenquan, Douglas A. Christensen, and Carl H. Durney. "Extending the two-dimensional FDTD method to hybrid electromagnetic systems with active and passive lumped elements." *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 40.4 (1992): 724-730.

- [12] Berenger, Jean-Pierre. "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves." *Journal of computational physics* 114.2 (1994): 185-200.
- [13] Gedney, Stephen D. "An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices." *IEEE transactions on Antennas and Propagation* 44.12 (1996): 1630-1639.
- [14] Liu, Qing H. "The pseudospectral time-domain (PSTD) method: A new algorithm for solutions of Maxwell's equations." *Antennas and Propagation Society International Symposium, 1997. IEEE., 1997 Digest. Vol. 1. IEEE, 1997.*
- [15] Zhen, Fenghua, Zhizhang Chen, and Jiazong Zhang. "Toward the development of a three-dimensional unconditionally stable finite-difference time-domain method." *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 48.9 (2000): 1550-1558.
- [16] Roden, J. Alan, and Stephen D. Gedney. "Convolutional PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media." *Microwave and optical technology letters* 27.5 (2000): 334-338.
- [17] Ahmed, Iftikhar, et al. "Development of the three-dimensional unconditionally stable LOD-FDTD method." *IEEE Transactions on antennas and propagation* 56.11 (2008): 3596-3600.
- [18] Elsherbeni, Atef Z., and Veysel Demir. *The finite-difference time-domain method for electromagnetics with MATLAB simulations*. The Institution of Engineering and Technology, 2016.
- [19] Sullivan, Dennis M. *Electromagnetic simulation using the FDTD method*. John Wiley & Sons, 2013.
- [20] John B. Schneider, *Understanding the Finite-Difference Time-Domain Method*, www.eecs.wsu.edu/~schneidj/ufdtd, 2010.
- [21] Ricker, Norman. "The form and laws of propagation of seismic wavelets." *Geophysics* 18.1 (1953): 10-40.
- [22] Cayón, L., et al. "Spherical Mexican hat wavelet: an application to detect non-Gaussianity in the COBE-DMR maps." *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 326.4 (2001): 1243-1248.
- [23] Gonzalez-Nuevo, Joaquin, et al. "The Mexican hat wavelet family: application to point-source detection in cosmic microwave background maps." *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 369.4 (2006): 1603-1610.
- [24] Brinks, Ralph. "On the convergence of derivatives of B-splines to derivatives of the Gaussian function." *Computational & Applied Mathematics* 27.1 (2008): 79-92.

- [25] Debnath, Lokenath, ed. *Wavelets and signal processing*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [26] Anantha, Veeraraghavan, and Allen Taflove. "Efficient modeling of infinite scatterers using a generalized total-field/scattered-field FDTD boundary partially embedded within PML." *IEEE transactions on antennas and propagation* 50.10 (2002): 1337-1349.
- [27] Schneider, John B. "Plane waves in FDTD simulations and a nearly perfect total-field/scattered-field boundary." *IEEE transactions on antennas and propagation* 52.12 (2004): 3280-3287.
- [28] Abdijalilov, Kakhkhor, and John B. Schneider. "Analytic field propagation TFSF boundary for FDTD problems involving planar interfaces: Lossy material and evanescent fields." *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* 5.1 (2006).
- [29] Schneider, John B., and Kakhkhor Abdijalilov. "Analytic field propagation TFSF boundary for FDTD problems involving planar interfaces: PECs, TE, and TM." *IEEE transactions on antennas and propagation* 54.9 (2006): 2531-2542.
- [30] Jiang, Yan-Nan, De-Biao Ge, and Shi-Jing Ding. "Analysis of TF-SF boundary for 2D-FDTD with plane p-wave propagation in layered dispersive and lossy media." *Progress In Electromagnetics Research* 83 (2008): 157-172.
- [31] Schneider, John B., and Zhen Chen. "Incorporating the G-TFSF concept into the analytic field propagation TFSF method." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 59.9 (2011): 3296-3304.
- [32] Rumpf, Raymond C. "Simple implementation of arbitrarily shaped total-field/scattered-field regions in finite-difference frequency-domain." *Progress In Electromagnetics Research B* 36 (2012): 221-248.
- [33] Berenger, J-P. "Numerical reflection from FDTD-PMLs: A comparison of the split PML with the unsplit and CFS PMLs." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 50.3 (2002): 258-265.
- [34] Wagner, Christopher L., and John B. Schneider. "Divergent fields, charge, and capacitance in FDTD simulations." *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 46.12 (1998): 2131-2136.
- [35] Panayappan, Kadappan, and Raj Mittra. "An efficient and accurate method to solve low frequency and non-conformal problems using finite difference time domain (FDTD)." *Progress In Electromagnetics Research* 150 (2015): 183-196.
- [36] Jeong, Hyok, and Yiu Wai Lam. "Source implementation to eliminate low-frequency artifacts in finite difference time domain room acoustic simulation." *The Journal of the Acoustical Society of America* 131.1 (2012): 258-268.

- [37] Costen, Fumie, Jean-Pierre Bérenger, and Anthony K. Brown. "Comparison of FDTD hard source with FDTD soft source and accuracy assessment in Debye media." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 57.7 (2009): 2014-2022.
- [38] Furse, Cynthia M., et al. "The problem and treatment of DC offsets in FDTD simulations." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 48.8 (2000): 1198-1201.
- [39] Lee, P., and J-L. Vay. "Efficiency of the Perfectly Matched Layer with high-order finite difference and pseudo-spectral Maxwell solvers." *Computer Physics Communications* 194 (2015): 1-9.
- [40] Feng, Naixing, et al. "Second-order PML: Optimal choice of nth-order PML for truncating FDTD domains." *Journal of Computational Physics* 285 (2015): 71-83.
- [41] Mirzavand, R., et al. "CFS-PML implementation for the unconditionally stable FDLTD method." *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 25.5-6 (2011): 879-888.
- [42] Shin, Wonseok, and Shanhui Fan. "Choice of the perfectly matched layer boundary condition for frequency-domain Maxwell's equations solvers." *Journal of Computational Physics* 231.8 (2012): 3406-3431.
- [43] Bérenger, Jean-Pierre. "An Optimized CFS-PML for Wave-Structure Interaction Problems." *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 54.2 (2012): 351-358.
- [44] Chen, Juan, and Jianguo Wang. "Convolutional Perfectly Matched Layer (CPML) for the Pseudospectral Time-Domain (PSTD) Method." *Applied Computational Electromagnetics Society Journal* 28.8 (2013).
- [45] Feng, Nai-Xing, Jian-Xiong Li, and Xiao-Ming Zhao. "Efficient FDTD implementations of the higher-order PML using DSP techniques for arbitrary media." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 61.5 (2013): 2623-2629.
- [46] Giannakis, Iraklis, and Antonios Giannopoulos. "Time-synchronized convolutional perfectly matched layer for improved absorbing performance in FDTD." *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* 14 (2015): 690-693.
- [47] Li, Zhan-Hui, and Qing-Hua Huang. "Application of the complex frequency shifted perfectly matched layer absorbing boundary conditions in transient electromagnetic method modeling." *Chinese J. Geophys* 57.4 (2014): 1292-1299.
- [48] Feng, Naixing, et al. "Second-order PML: Optimal choice of nth-order PML for truncating FDTD domains." *Journal of Computational Physics* 285 (2015): 71-83.

- [49] Fang, Sinan, et al. "Crosswell electromagnetic modeling from impulsive source: Optimization strategy for dispersion suppression in convolutional perfectly matched layer." *Scientific Reports* 6 (2016).
- [50] De la Kethulle de Ryhove, Sébastien, and Rune Mittet. "3D marine magnetotelluric modeling and inversion with the finite-difference time-domain method." *Geophysics* 79.6 (2014): E269-E286.
- [51] Inan, Umran S., and Robert A. Marshall. *Numerical electromagnetics: the FDTD method*. Cambridge University Press, 2011.
- [52] Merewether, D. E., R. Fisher, and F. W. Smith. "On implementing a numeric Huygen's source scheme in a finite difference program to illuminate scattering bodies." *IEEE Transactions on Nuclear Science* 27.6 (1980): 1829-1833.
- [53] Johnson, Steven G. "Notes on perfectly matched layers (PMLs)." *Lecture notes, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts* 29 (2008).
- [54] Schneider, John B., Christopher L. Wagner, and Omar M. Ramahi. "Implementation of transparent sources in FDTD simulations." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 46.8 (1998): 1159-1168.
- [55] Engquist, Björn, and Andrew Majda. "Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 74.5 (1977): 1765-1766.
- [56] Sacks, Zachary S., et al. "A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition." *IEEE transactions on Antennas and Propagation* 43.12 (1995): 1460-1463.
- [57] D. Correia, J. M. Jin, "Performance of regular PML, CFS-PML, and Second-order PML for waveguide problems", *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 48, pp. 2121–2126, 2006.
- [58] Chew, Weng Cho, and William H. Weedon. "A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell's equations with stretched coordinates." *Microwave and optical technology letters* 7.13 (1994): 599-604.
- [59] Rappaport, Carey M. "Perfectly matched absorbing boundary conditions based on anisotropic lossy mapping of space." *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 5.3 (1995): 90-92.
- [60] Teixeira, F. L., and W. C. Chew. "PML-FDTD in cylindrical and spherical grids." *IEEE microwave and guided wave letters* 7.9 (1997): 285-287.
- [61] Teixeira, F. L., et al. "Conformal PML-FDTD schemes for electromagnetic field simulations: A dynamic stability study." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 49.6 (2001): 902-907.

- [62] Katz, Daniel S., Eric T. Thiele, and Allen Taflove. "Validation and extension to three dimensions of the Berenger PML absorbing boundary condition for FD-TD meshes." *IEEE microwave and guided wave letters* 4.8 (1994): 268-270.
- [63] De Moerloose, Jan, and Maria A. Stuchly. "Reflection analysis of PML ABCs for low-frequency applications." *IEEE microwave and guided wave letters* 6.4 (1996): 177-179.
- [64] Kuzuoglu, Mustafa, and Raj Mittra. "Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers." *IEEE Microwave and Guided wave letters* 6.12 (1996): 447-449.
- [65] Abarbanel, Saul, and David Gottlieb. "A mathematical analysis of the PML method." *Journal of Computational Physics* 134.2 (1997): 357-363.
- [66] Anantha, Veeraraghavan, and Allen Taflove. "Efficient modeling of infinite scatterers using a generalized total-field/scattered-field FDTD boundary partially embedded within PML." *IEEE transactions on antennas and propagation* 50.10 (2002): 1337-1349.
- [67] Schneider, John B. "Plane waves in FDTD simulations and a nearly perfect total-field/scattered-field boundary." *IEEE transactions on antennas and propagation* 52.12 (2004): 3280-3287.
- [68] Abdijalilov, Kakhkhor, and John B. Schneider. "Analytic field propagation TFSF boundary for FDTD problems involving planar interfaces: Lossy material and evanescent fields." *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* 5.1 (2006).
- [69] Schneider, John B., and Kakhkhor Abdijalilov. "Analytic field propagation TFSF boundary for FDTD problems involving planar interfaces: PECs, TE, and TM." *IEEE transactions on antennas and propagation* 54.9 (2006): 2531-2542.
- [70] Jiang, Yan-Nan, De-Biao Ge, and Shi-Jing Ding. "Analysis of TF-SF boundary for 2D-FDTD with plane p-wave propagation in layered dispersive and lossy media." *Progress In Electromagnetics Research* 83 (2008): 157-172.
- [71] Schneider, John B., and Zhen Chen. "Incorporating the G-TFSF concept into the analytic field propagation TFSF method." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 59.9 (2011): 3296-3304.
- [72] Rumpf, Raymond C. "Simple implementation of arbitrarily shaped total-field/scattered-field regions in finite-difference frequency-domain." *Progress In Electromagnetics Research* 36 (2012): 221-248.
- [73] O'Halloran, Martin, Martin Glavin, and Edward Jones. "Comparison of a planar and finite difference time domain technique to simulate the propagation of electromagnetic waves in biological tissue." *Microwaves, Radar & Wireless Communications, 2006. MIKON 2006. International Conference on.* IEEE, 2006.

- [74] Chang, Jiuan-Her, and Allen Taflove. "Three-dimensional diffraction by infinite conducting and dielectric wedges using a generalized total-field/scattered-field FDTD formulation." *IEEE transactions on antennas and propagation* 53.4 (2005): 1444-1454.
- [75] Sandeep, Srikumar. "Electromagnetic simulation of radiometer calibration targets using Finite Difference Time Domain (FDTD) method." (2009).
- [76] Häggblad, Jon, and Olof Runborg. "Accuracy of staircase approximations in finite-difference methods for wave propagation." *Numerische Mathematik* 128.4 (2014): 741-771.
- [77] Gedney, Stephen D. "An anisotropic PML absorbing media for the FDTD simulation of fields in lossy and dispersive media." *Electromagnetics* 16.4 (1996): 399-415.
- [78] Luebbers, Raymond J., and Forrest Hunsberger. "FDTD for Nth-order dispersive media." *IEEE transactions on Antennas and Propagation* 40.11 (1992): 1297-1301.
- [79] Kelley, David F., and Raymond J. Luebbers. "Piecewise linear recursive convolution for dispersive media using FDTD." *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 44.6 (1996): 792-797.
- [80] Fang, Jiayuan, and Zhonghua Wu. "Generalized perfectly matched layer-an extension of Berenger's perfectly matched layer boundary condition." *IEEE microwave and guided wave letters* 5.12 (1995): 451-453.
- [81] Berenger, J-P. "Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems." *IEEE Transactions on antennas and propagation* 44.1 (1996): 110-117.
- [82] Berenger, J-P. "Improved PML for the FDTD solution of wave-structure interaction problems." *IEEE transactions on Antennas and Propagation* 45.3 (1997): 466-473..
- [83] Sullivan, Dennis M. "A simplified PML for use with the FDTD method." *IEEE Microwave and guided wave letters* 6.2 (1996): 97.
- [84] Wu, Z., and J. Fang, "High-performance PML algorithms," *IEEE Microwave Guided Wave Leu.*, Vol. 6,1996, pp. 335-337
- [85] Gedney, S., "The perfectly matched layer absorbing medium," Ch. 5 in *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Taflove, A., (ed.), Norwood, MA, Artech House, 1998
- [86] Berenger, Jean-Pierre. "A perfectly matched layer for free-space simulation in finite-difference computer codes." *Annales des télécommunications*. Vol. 51. No. 1-2. Springer-Verlag, 1996.

- [87] Branko D. Gvozdić, D.Ž. Đurđević, "Prednosti korišćenja Rikerovog u odnosu na Gausov impuls u FDTD simulacijama", INFOTEH 2014, Jahorina - Bosna i Hercegovina, Vol. 13., pp. 382-387, Mart 2014, ISBN 978-99955-763-3-2;
- [88] Branko D. Gvozdić, D.Ž. Đurđević, "Primena TF/SF eksitacije kod računarskih FDTD simulacija elektromagnetskih polja", SINTEZA 2014, Beograd - Srbija, pp. 948-952, April 2014, ISBN: 978-86-7912-539-2;
- [89] Branko D. Gvozdić, D.Ž. Đurđević, "FDTD simulations of TF/SF plane waves in the presence of PEC scatterers", ERK 2014, Portorož - Slovenia, Vol. A, pp. 163-166, ISSN: 1581-4572
- [90] Gvozdić, Branko, Dušan Đurđević, and Nebojša Raičević. "CPML PARAMETER OPTIMIZATION IN FDTD MODELING OF IMPULSIVE SOURCE." *Facta Universitatis, Series: Automatic Control and Robotics* 16.3 (2018): 229-240.
- [91] Gvozdic, Branko D., and Dusan Z. Djurdjevic. "Performance advantages of CPML over UPML absorbing boundary conditions in FDTD algorithm." *Journal of Electrical Engineering* 68.1 (2017): 47-53.

Биографија аутора

Бранко Гвоздић, рођен је 30.12.1985. године у Косовској Митровици. Средњу техничку школу „Михајло Петровић Алас“ завршио је 2004. године, у Косовској Митровици. Основне и дипломске академске студије, смер електроника и телекомуникације, завршио је 2010. године на Факултету техничких наука у Косовској Митровици. Докторске студије, на студијском програму електротехничког и рачунарског инжењерства, уписао је на истом факултету 2011. године. Студије је завршио са просечном оценом 9.8. Марта 2012. године изабран је на место асистента за ужу научну област Теоријска електротехника и електрична мерења и од тада до данас обавља лабораторијске и нумеричке вежбе на предметима из те области. Учесник је једног међународног *Erasmus+* пројекта. Области интересовања Бранка Гвоздића су: теоријска електротехника, нумеричке методе у електромагнетици, моделовање простирања електромагнетског поља, фотоника. Аутор је више научних радова који су објављени у међународним часописима и на међународним скуповима, а чија је тематика директно везана за докторску дисертацију,

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани: Гвоздић Бранко

Број индекса: 1/2010

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

„Оптимизација извора и савршено апсорбујућих слојевитих граничних услова у
методи коначних разлика у временском домену“

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Косовској Митровици, _____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: Бранко Гвоздић

Број индекса: 1/2010

Студијски програм: Електротехничко и рачунарско инжењерство

Наслов рада: Оптимизација извора и савршено апсорбујућих слојевитих граничних
услова у методи коначних разлика у временском домену

Ментор: проф. др Душан Ђурђевић

Потписани: Бранко Гвоздић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици.

Потпис докторанда

У Косовској Митровици, _____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Приштини, са привременим седиштем у Косовској Митровици унесе моју докторску дисертацију под насловом:

„Оптимизација извора и савршено апсорбујућих слојевитих граничних услова у методи коначних разлика у временском домену“

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Приштини са привременим седиштем у Косовској Митровици могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

Потпис докторанда

У Косовској Митровици, _____

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.