

Универзитет у Београду
Машински факултет

Милан М. Раковић

**УТИЦАЈ СМИЦАЊА НА КОЕФИЦИЈЕНТ
ОТПОРА МЕХУРА ПРИ ДВОФАЗНОМ
МЕХУРАСТОМ СТРУЈАЊУ**

Докторска дисертација

Београд, 2023.

University of Belgrade
Faculty of Mechanical Engineering

Milan M. Rakovic

**THE INFLUENCE OF SHEAR FLOW ON THE
BUBBLE DRAG COEFFICIENT IN TWO-PHASE
BUBBLY FLOW**

Doctoral dissertation

Belgrade, 2023.

Ментор: др Александар Тоћић, ванредни професор
Универзитет у Београду - Машински факултет

Чланови Комисије: др Милан Лечић, редовни професор,
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Владимир Стевановић, редовни професор
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Снежана Милићев, ванредни професор
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Новица Јанковић, доцент
Универзитет у Београду - Машински факултет

др Душан Продановић, редовни професор
Универзитет у Београду - Грађевински факултет

Датум одбране:

Утицај смицања на коефицијент отпора мехура при двофазном мехурастом струјању

Сажетак

Докторска дисертација се бави проучавањем двофазног мехурастог струјања, тј. струјања течне (континуалне) фазе и мехурова ваздуха, који представљају распршену фазу. Да би били извршени прорачуни ове врсте струјања, потребно је нумеричким поступком решити систем основних једначина. У тим једначинама се налазе чланови који описују међусобно дејство фаза. Од посебног значаја је сила отпора, а за њено рачунање је потребно знати коефицијент отпора. У досадашњим истраживањима је показано да коефицијент отпора мехура није исти у униформној струји флуида и у струји флуида са градијентом брзине, тј. показано је да постоји утицај смицања на вредност коефицијента отпора. Да би утицај био обухваћен предлаже се увођење корекционог члана при рачунању коефицијента отпора. У овој докторској дисертацији је показано да постојећа корекција коефицијента отпора може бити коришћена само заједно са турбулентним моделима са зидним функцијама (HRN). Због тога се предлаже нова корекција коефицијента отпора која има задатак да обухвати утицај смицања, а истовремено да буде таква да се може користити и са турбулентним моделима без зидних функција (LRN). На основу доступних експерименталних резултата предложена је нова корекција. Да би она била испитана имплементирана је у софтвер OpenFOAM. Извршене су две групе нумеричких прорачуна. У првој групи прорачуна није коришћена корекција коефицијента отпора, док је у другој групи она примењена. Након прорачуна извршено је поређење експерименталних и нумеричких резултата. Резултати прорачуна који су извршени са коришћењем нове корекције коефицијента отпора имају боље слагање са експерименталним резултатима. Показано је да се нова корекција може успешно користити са турбулентним моделима без зидних функција (LRN), што предстаља њену основну предност.

Кључне речи: двофазно мехурасто струјање, коефицијент отпора, смицање, нумеричка механика флуида, OpenFOAM

Научна област: машинство

Ужа научна област: механика флуида

УДК број: 532.529:519.6(043.3)

The influence of shear flow on the bubble drag coefficient in two-phase bubbly flow

Abstract

The PhD thesis deals with the study of two-phase bubble flow, i.e. flow where the liquid is the continuous phase and the air bubbles are the dispersed phase. To perform numerical calculations of this type of flow, it is necessary to numerically solve the system of governing equations. In those equations, there are terms that describe the interaction of phases. The drag force is of particular importance, and for its calculation, it is necessary to know the drag coefficient. Previous research has shown that the drag coefficient of the bubble is not the same in a uniform fluid flow and a fluid flow with a velocity gradient, i.e. there is an influence of shear flow on the drag coefficient. To include this influence, it is suggested to introduce a correction term when calculating the drag coefficient. In this PhD thesis, it was shown that the existing correction can only be used together with high Reynolds number turbulence models. For this reason, a new correction is proposed, which has the task of including the influence of shear flow, and at the same time being such that it can also be used with low Reynolds number turbulence models. Based on the available experimental results, a new correction of the drag coefficient was proposed. To test it, it was implemented in OpenFOAM software. Two groups of numerical calculations were performed. In the first group, the correction was not used, but in the second it was. After the calculations, the experimental and numerical results were compared. The results of the calculations performed using the new drag coefficient correction have a better agreement with the experimental results. It is shown that the new correction can be successfully used with low Reynolds number turbulence models, which represents its main advantage.

Key words: two-phase bubbly flow, drag coefficient, shear flow, computational fluid dynamics, OpenFOAM

Scientific area: mechanical engineering

Specific scientific area: fluid mechanics

UDK number: 532.529:519.6(043.3)

Захвалница

Када велики људи говоре о љубави, они наглашавају да је љубав неодвојива од жртве и незамислива без ње. Својим родитељима, оцу Млађену и мајци Борки, захваљујем за сву љубав коју су исказали и на жртви коју су принели. Брату Петру и сестри Љиљани са породицом, захваљујем јер сам у њима увек имао непоколебљив ослонац.

Веома сам захвалан свим добрим педагозима које сам сретао у животу. То су људи који су марљиво и савесно радили свој посао и тиме на мене оставили дубок утисак. Подједнако сам им захвалан, било да је реч о мојим учитељима, наставницима, фудбалским тренерима, средњошколским и универзитетским професорима.

Драго ми је што сам 2011. године одлучио да упишем Машински факултет. Током студија су стечена пријатељства за цео живот. Веома ми је значила, а и данас значи, подршка мојих пријатеља, и овом приликом им на томе захваљујем.

Заједно смо похађали предавања на којима смо најрадије слушали оне предаваче који су били свесни колика је одговорност изаћи пред студенте и одржати један час. Својим односом према раду и стручношћу, у нама су изазивали поштовање и будили жељу за учењем. Професор Александар Тоћић је један од предавача које сам најрадије слушао. Незаборавањим су часови из предмета *Нумеричка механика флуида* на петој години студија. Период израде мастер рада из поменутог предмета памтим као један од најлепших периода из студентских дана. Након тога нисам имао дилему да ли желим да упишем докторске студије при Катедри за механику флуида. Веома сам захвалан професору Александру Тоћићу, ментору ове докторске дисертације, на свему што сам од њега до сада научио и на свом труду и времену које је посветио раду са мном.

Велику захвалност дугујем колеги и пријатељу доценту Дарку Раденковићу, који је уложио огроман труд и посветио много времена заједничком раду на теми докторске дисертације. Могао сам да рачунам на његову помоћ када смо се бавили математичким моделирањем, када смо вршили нумеричке прорачуне и када смо правили постројење за експериментално испитивање.

Захвалан сам професору Милану Лечићу, шефу Катедре за механику флуида, на дугим разговорима о различитим питањима, на корисним саветима и предлозима, као и на томе што је омогућио да поједине наше истраживачке идеје доживе своју реализацију.

Професоркама Невени Стевановић и Снежани Милићев захваљујем на лепој и пријатној сарадњи у претходним годинама, као и на свој помоћи коју су ми указале током докторских студија.

Не могу да говорим о механици флуида, ни о Машинском факултету, а да не поменем професора Цветка Црнојевића. Много је допринео томе да заволим и једно и друго. Жао ми је што и сада није са нама. Више је разлога што моје сећање на њега неће избледети.

Захвалан сам свим члановима Комисије за оцену и одбрану ове докторске дисертације, који су пажљиво проучили достављени материјал и дали коментаре и савете, чиме су значајно допринели квалитету дисертације.

Машинском факултету Универзитета у Београду захваљујем на могућности спровођења истраживања у области ове докторске дисертације. Истраживање је подржано и од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја кроз пројекат чији је евиденциони број ТР35046.

На почетку истраживања ове области имали смо замисао о извођењу експеримента. Тражили смо помоћ од чланова Катедре за хидрауличне машине и енергетске системе и наишли смо на жељу за заједничким радом. Захваљујем професору Ђорђу Чантраку, доценту Новици Јанковићу и асистенту Лазару Лечићу, без чије помоћи извођење експеримента не би било оствариво.

Већ је традиција да се чланови Катедре за механику флуида могу ослањати на помоћ чланова Катедре за производно машинство. Захваљујем пријатељима, асистентима Николи Воркапићу, Душану Недељковићу и Лазару Матијашевићу на спровођењу израде осетљивих делова експерименталног постројења.

Чланови техничке службе Машинског факултета су обавили обиман посао у току израде постројења. Посебно сам им захвалан што су у лабораторију бр. 014 доносили ведар дух и што су пружали пријатељску подршку.

У претходних 7 година на Машинском факултету сам упознао много даровитих студената. Ти млади људи дају овом послу лепоту и смисао, а мени додатни мотив, и ја сам им на томе захвалан.

Свима који су ми на било који начин помогли, а које овде нисам поменуо, изражавам искрену захвалност.

На Васкрс 2023. год.

XV

Садржај

1	Увод	1
1.1	Увод и основни појмови	1
1.2	Подела вишефазних струјања	2
1.2.1	Различити типови струјања течне и гасовите фазе	4
1.2.2	Приступи нумеричком моделирању вишефазног струјања	7
1.3	Преглед досадашњих истраживања	8
1.4	Циљ и структура дисертације	14
1.4.1	Задаци докторске дисертације	14
1.4.2	Структура докторске дисертације	15
2	Основне једначине вишефазних струјања	17
2.1	Процедуре осредњавања	17
2.2	Закон одржања масе	20
2.3	Закон о промени количине кретања	21
2.4	Једначина енергије	22
2.5	Размена масе, количине кретања и енергије између фаза	24
3	Турбуленција у вишефазним струјањима	26
3.1	Основна својства турбуленције	26
3.2	Теорија Колмогорова	28
3.3	Временско осредњавање основних једначина	30
3.3.1	Рејнолдсово и Фавреово осредњавање	30
3.3.2	Временско осредњавање једначине континуитета	32
3.3.3	Временско осредњавање једначине количине кретања	33
3.3.4	Временско осредњавање једначине енергије	35
3.4	Моделирање турбуленције	37
3.4.1	Концепт турбулентне вискозности и њено моделирање	37
3.4.1.1	Турбулентни модел $k - \varepsilon$	39
3.4.1.2	Турбулентни модел $k - \varepsilon$ Лаундер Шарма	41
3.4.1.3	Турбулентни модел $k - \omega$ SST	42
3.4.2	Пуни напонски модели	44
3.4.3	Симулација великих вртлога	45
3.5	Коментари и закључци о основним једначинама вишефазног струјања	48
3.5.1	Основне једначине за модел мешавине	49
3.5.2	Општи облик основних једначина погодан за нумеричко решавање	50

4	Моделирање чланова који описују међусобно дејство фаза	54
4.1	Размена количине кретања између фаза - силе на разделној површи	55
4.1.1	Сила отпора	56
4.1.2	Сила узгона	57
4.1.3	Хидродинамичка сила подмазивања	57
4.1.4	Сила турбулентне дисперзије	58
4.1.5	Виртуелна масена сила	58
4.2	Утицај смицања на коефицијент отпора	58
4.3	Ограничења постојеће корекције коефицијента отпора и увођење нове	61
5	Нумерички прорачуни двофазног мехурастог струјања	65
5.1	Поставка нумеричких прорачуна	66
5.1.1	Прорачунска мрежа	67
5.1.2	Почетни и гранични услови	70
5.1.3	Физичка својства фаза	71
5.1.4	Метод решавања система једначина	71
5.2	Приказ и тумачење резултата нумеричких прорачуна	73
5.2.1	Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Hosokawa and Tomiyama [7]	73
5.2.2	Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Liu [8]	76
5.2.3	Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Shawkat et al. [12]	78
5.3	Закључци након анализе резултата извршених нумеричких прорачуна . .	80
5.3.1	Квалификавање важности корекције (4.11) на основу вредности степенa смицања	82
6	Експериментално испитивање двофазног мехурастог струјања	85
6.1	Опис постројења	85
6.2	Поступак мерења	89
6.3	Обрада сигнала мерења	96
6.4	Приказ и анализа експерименталних резултата	99
6.4.1	Мерење брзине и удела гасовите фазе	104
7	Закључак	106
7.1	Оцена испуњености задатих циљева и најважнији закључци	107
7.2	План будућих истраживања	109
	Литература	111
	Прилог А - Калибрационе криве коришћених мерила протока	116
	Прилог Б - Подаци о мерењу запреминског протока фаза	119
	Биографски подаци	124

Списак слика

1.1	Пример система за тзв. потисни пнеуматски транспорт (део слике преузет са [50]).	2
1.2	Примери струјања течне и гасовите фазе: (а) ваздуши лифт, (б) струјање у спреју [51], (в) струјање течности са слободном површи [52].	3
1.3	Пример вишефазног струјања у вертикалној колони (реактору).	4
1.4	Типови вишефазног струјања течне и гасовите фазе у вертикалној цеви [3], [1].	5
1.5	Мапа режима струјања за двофазну мешавину течности и гаса у вертикалним цевима, Хјуитова мапа [5].	6
1.6	Типови вишефазног струјања течне и гасовите фазе у хоризонталној цеви [3], [1].	6
1.7	Мапа режима струјања за двофазну мешавину течности и гаса у хоризонталним цевима, Мандханова мапа [6].	7
1.8	Стварање мехурастог тока помоћу снопа игала [8].	9
1.9	Стварање мехурастог тока помоћу коморе за мешање.	10
1.10	Стварање мехурастог тока помоћу бризгальке са отворима [12].	12
2.1	Вишефазно струјање мехура гаса у течности: (а) скица, (б) слика настала током експерименталног испитивања, описаног у поглављу 6.	17
2.2	Запреминско осредњавање по запремини V	19
2.3	Део разделне површи која се налази између две фазе (фазе 1 и фазе 2).	24
3.1	Промена вредности физичке величине ϕ у току времена за статистички стационарну (а) и статистички нестационарну турбуленцију (б).	27
3.2	Приказ вртложних структура у контролној запремини. Са леве стране је приказан профил осредњене брзине. [40].	27
3.3	Каскада вртлога (а) и енергетски спектар турбуленције (б).	28
3.4	Прорачунски простор у близини зида: (а) са зидним функцијама и (б) без њих.	41
3.5	Приказ основне идеје симулације великих вртлога.	46
3.6	Велики и мали вртлози у струјном пољу.	47
4.1	Опструјавање сфере струјом флуида са градијентом брзине (смичућом струјом флуида).	59
4.2	Количник коефицијента отпора у смичућој струји флуида и коефицијента отпора у униформној струји C_D/C_{DU} , за различите вредности степена смицања Sr . Са (■) су означени експериментални резултати Hosokawa and Tomiyama [7], пуном линијом (—) корекција (4.10), а испрекиданом линијом (- - -) нова корекција (4.11).	63

5.1	Прорачунски домен облика четвртине цеви.	68
5.2	Попречни пресек прорачунске мреже.	68
5.3	Провера утицаја густине мреже на резултате прорачуна. Приказани су профили релативне брзине (а), удела фазе (б) и кинетичке енергије турбуленције (в) за случај Н1. Коришћене су три различите мреже: мрежа 1 (—), мрежа 2 (- - -) и мрежа 3 (⋯⋯).	69
5.4	Мапа основних корака PIMPLE алгоритма [4].	72
5.5	Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Hosokawa and Tomiyama [7]. Са (■) означени су експериментални подаци, пуном линијом (—) резултати нумеричких прорачуна без корекције коефицијента отпора, док испрекидана линија (- - -) означава резултате нумеричких прорачуна са новом корекцијом коефицијента отпора (4.11).	74
5.6	Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Liu [8]. Са (■) означени су експериментални подаци, пуном линијом (—) резултати нумеричких прорачуна без корекције коефицијента отпора, док испрекидана линија (- - -) означава резултате нумеричких прорачуна са новом корекцијом коефицијента отпора (4.11).	77
5.7	Упоређивање нумеричких и експерименталних резултата за случај Shawkat et al. [12]. Са (■) означени су експериментални подаци, пуном линијом (—) резултати нумеричких прорачуна без корекције коефицијента отпора, док испрекидана линија (- - -) означава резултате нумеричких прорачуна са новом корекцијом коефицијента отпора (4.11).	79
5.8	Вредности релативне брзине фаза U_R и коефицијента отпора C_D за случај Н2 и то: (а) без корекције коефицијента отпора и (б) са корекцијом (4.11).	81
5.9	Расподела степена смицања Sr по попречним пресецима три различите цеви, и то: (а) $D = 25$ mm за случај Н1, (б) $D = 38$ mm за случај L1 и (в) $D = 200$ mm за случај S1.	83
6.1	Приказ модела постројења за експериментално испитивање вишефазног струјања из два угла. На слици (б) изостављени су постолје и мерна опрема, ради прегледности слике. Означени су најважнији делови.	86
6.2	Снабдевање коморе за мешање водом (примарни и секундарни ток) и ваздухом. Приказ доводних цеви на моделу постројења (а) и на изведеном постројењу (б) и (в).	87
6.3	Приказ система за снабдевање коморе ваздухом на моделу (а) и на изведеном постројењу (б).	87
6.4	Комора за мешање воде и ваздуха.	88
6.5	Полупресек склопа коморе (а). Издвојени приказ зазора између делова 1 и 3 у којем се ствара мешавина воде и ваздуха (б). Завршетак зазора из којег излазе мехурови (в).	89
6.6	Положај ласера и брзих камера у односу на вертикални канал (а). Мерни пресек унутар канала и положај оса координатног система (б).	90
6.7	Приказ положаја мерних тачака дуж x и z осе.	91
6.8	Мерење уздужне компоненте брзине v^L дуж осе x : (а) и (б) мерни пресек и ласер са припадајућом вођицом, (в) ласерски зраци у води, (г) ласерски зраци у условима двофазног струјања.	92
6.9	Мерење брзине струјања воде у тачкама дуж z осе: (а) мерење попречне компоненте брзине u^L , (б) мерење уздужне компоненте брзине v^L	93

6.10	Сигнал мерења уздужне компоненте брзине воде v^L у тачки x_7 при режиму струјања J05A05.	96
6.11	Расподела брзине течне фазе U^L и кинетичке енергије турбуленције k^L дуж x осе за различите вредности удела гасовите фазе: $\alpha^G = 0\%$ за (а) и (б), $\alpha^G \approx 0,5\%$ за (в) и (г), $\alpha^G \approx 1\%$ за (д) и (ђ). На свим дијаграмима приказани су профили за четири вредности привидне брзине струјања течне фазе $J^L = 0,3 \text{ m/s}$, $J^L = 0,4 \text{ m/s}$, $J^L = 0,5 \text{ m/s}$ и $J^L = 0,6 \text{ m/s}$	100
6.12	Расподела брзине течне фазе U^L и кинетичке енергије турбуленције k^L дуж x осе за различите вредности удела гасовите фазе: $\alpha^G \approx 2\%$ за (а) и (б), $\alpha^G \approx 3\%$ за (в) и (г), $\alpha^G \approx 4\%$ за (д) и (ђ). На свим дијаграмима приказани су профили за четири вредности привидне брзине струјања течне фазе $J^L = 0,3 \text{ m/s}$, $J^L = 0,4 \text{ m/s}$, $J^L = 0,5 \text{ m/s}$ и $J^L = 0,6 \text{ m/s}$	101
6.13	Расподела брзине течне фазе U^L и кинетичке енергије турбуленције k^L дуж z осе за различите вредности удела гасовите фазе: $\alpha^G = 0\%$ за (а) и (б), $\alpha^G \approx 0,5\%$ за (в) и (г), $\alpha^G \approx 1\%$ за (д) и (ђ). На свим дијаграмима приказани су профили за четири вредности привидне брзине струјања течне фазе $J^L = 0,3 \text{ m/s}$, $J^L = 0,4 \text{ m/s}$, $J^L = 0,5 \text{ m/s}$ и $J^L = 0,6 \text{ m/s}$	102
6.14	Расподела брзине течне фазе U^L и кинетичке енергије турбуленције k^L дуж z осе за различите вредности удела гасовите фазе: $\alpha^G \approx 2\%$ за (а) и (б), $\alpha^G \approx 3\%$ за (в) и (г), $\alpha^G \approx 4\%$ за (д) и (ђ). На свим дијаграмима приказани су профили за четири вредности привидне брзине струјања течне фазе $J^L = 0,3 \text{ m/s}$, $J^L = 0,4 \text{ m/s}$, $J^L = 0,5 \text{ m/s}$ и $J^L = 0,6 \text{ m/s}$	103
6.15	Фотографије струјног простора двофазног мехурастог струјања при привидној брзини течне фазе $J^L = 0,5 \text{ m/s}$, за четири вредности удела гасовите фазе: (а) $\alpha^G = 1\%$, (б) $\alpha^G = 2\%$, (в) $\alpha^G = 3\%$ и (г) $\alpha^G = 4\%$	105
7.1	Вентури цев као мерило протока течне фазе: (а) скица полупресека са важним димензијама, (б) Вентури цев израђена од плексигласа и уграђена у мерно постројење, (в) зависност пада притиска од протока, тј. калибрациона крива Вентури цеви.	116
7.2	Протокомери за ваздух: фотографије коришћених протокомера (а) и (б), полупресек мерне бленде 1 (в), калибрациона крива мерне бленде 1 (г), полупресек Вентури цев за ваздух (д), калибрациона крива Вентури цеви (ђ), полупресек мерне бленде 2 (е), калибрациона крива мерне бленде (ж).	118

Списак табела

3.1	Изрази за изворске чланове и коефицијенте дифузије у основним једначинама.	52
4.1	Утицај смичућег струјања на коефицијент отпора сфере при малим вредностима степена смицања $Sr \leq 0,2$ [11].	60
4.2	Утицај смичућег струјања на коефицијент отпора сфере при умереним вредностима степена смицања $0,5 \leq Sr \leq 1$ [11].	60
5.1	Приказ основних података за девет изабраних случајева: пречник цеви D , дужина цеви L , удаљеност мерног пресека од улаза у цев L_m , привидне брзине гасовите J^G и течне фазе J^L , средња вредност удела гасовите фазе α^G и средња вредност пречника мехура D_B . Префикси Н, L и S указују на то из ког рада је случај преузет, редом: Hosokawa and Tomiyama [7], Liu [8] и Shawkat et al. [12].	66
5.2	Број ћелија прорачунских мрежа коришћених за проверу утицаја густине мреже на резултате прорачуна.	69
5.3	Приказ граничних услова задатих на улазној површи прорачунског простора.	70
5.4	Приказ вредности степена смицања Sr за све три цеви (Hosokawa and Tomiyama [7] Liu [8], Shawkat et al. [12]), на три различите радијалне координате.	83
6.1	Координате мерних тачака приказаних на слици 6.7.	91
6.2	Ознаке 24 изабрана режима струјања. Први део ознаке говори о вредности привидне брзине течне фазе J^L [m/s], а други део о вредности удела гасовите фазе α^G [%].	94
6.3	Поступак спровођења експерименталног испитивања.	95
6.4	Исечак табеле у којој су смештене бројевне вредности сигнала брзине приказаног на слици 6.10. Издвојено је првих 20 честица од укупно 6250.	97
7.1	Протоци фаза и остале израчунате величине приликом мрења уздужне компоненте брзине U_y дуж x осе.	120
7.2	Протоци фаза и остале израчунате величине приликом мрења попречне компоненте брзине U_z дуж x осе.	121
7.3	Протоци фаза и остале израчунате величине приликом мрења попречне компоненте брзине U_x дуж z осе.	122
7.4	Протоци фаза и остале израчунате величине приликом мрења уздужне компоненте брзине U_y дуж z осе.	123

Списак ознака

Грчке ознаке

α^G	запремински удео гасовите фазе
τ	тензор вискозних напона
χ^k	функција показивача фазе k
κ	таласни број
λ	топлотна проводљивост флуида
μ	динамичка вискозност флуида
μ_T	турбулентна динамичка вискозност
ν	кинематска вискозност флуида
ν_T	турбулентна кинематска вискозност
ω	фреквенција дисипације кинетичке енергије турбуленције
ω_s	интензитет градијента брзине
$\bar{\phi}$	физичка величина ϕ на коју је примењено Рејнолдсово осредњавање
ϕ	скаларна физичка величина
ϕ'	флуктуација физичке величине ϕ која следи из Рејнолдсовог осредњавања
ϕ''	флуктуација физичке величине ϕ која следи из Фавреовог осредњавања
ρ	густина флуида
ε	вискозна дисипација кинетичке енергије турбуленције по јединици масе и у јединици времена - дисипација
$\tilde{\phi}$	физичка величина ϕ на коју је примењено Фавреово осредњавање

Симболи

\mathbf{I}	јединични тензор
δ_{ij}	Кронекеров делта симбол

∇ векторско-диференцијални оператор „набла” (Хамилтонов оператор)

Латиничне ознаке

F_D	сила отпора
F_L	сила узгона
F_{TD}	хидродинамичка сила подмазивања
F_{VM}	виртуелна масена сила
F_{WL}	сила турбулентне дисперзије
K	количина кретања
n	јединични вектор нормале
R	тензор турбулентних напона
U	брзина
U^k	брзина фазе k
U^G	брзина гасовите фазе
U^{int}	брзина разделне површи
U^L	брзина течне фазе
U_R	релативна брзина
\dot{m}	масени проток флуида
\dot{V}	запремински проток флуида
Co	Курантов број
$Еo$	Етвешов број
Pr	Прантлов број
Re_B	Рејолдсов број за мехур
Re	Рејнолдсов број
Sr	степен смицања
A	површина
C_{Du}	кофицијент отпора мехура у униформној струји флуида
C_D	кофицијент отпора
C_L	кофицијент узгона

D	пречник
D_B	пречник мехура
D_H	хидраулички пречник
E	кинетичка енергија турбуленије сведена на јединицу таласног броја
e	јединична (специфична) унутрашња енергија
g	гравитационо убрзање Земље
H	тотална енталпија
J	привидна брзина
k	кинетичка енергија турбуленције
L	дужина
L_m	растојање од улаза у цев до мерног пресека
p	притисак
p_{int}	притисак на разделној површи
R	полупречник цеви
T	температура
t	време
u	пројекција брзине на осу x
V	запремина
v	пројекција брзине на осу y
w	пројекција брзине на осу z
y^+	бездимензијско нормално растојање од зида

Скраћенице

HRN	High Reynolds Number
LDA	Laser Doppler Anemometry
LES	Large Eddy Simulation
LRN	Low Reynolds Number
PISO	Pressure Implicit with Splitting of Operator
PIV	Particle Image Velocimetry
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations

Увод

1.1 Увод и основни појмови

Истовремено струјање више фаза је веома честа појава и у природи и у индустријским постројењима. Због тога је ова област интересантна за истраживање.

За вишефазна струјања је карактеристично да се могу јављати у различитим облицима. Својства различитих облика вишефазног струјања се могу међусобно веома разликовати. Због тога је тешко, за сада и немогуће, направити јединствени математички модел који ће успешно описати све облике вишефазног струјања.

Размотримо неколико примера. За транспорт чврстих материја (зрна житарица, брашна, соли, цемента, гранула пластике, пепела) може се користити ваздух као носећи флуид. Оваква врста транспорта се назива пнеуматски транспорт. У овом случају ваздух је континуална (носећа) фаза, док честице чврсте материје представљају распршену (ношену) фазу. Други пример је коришћење „ваздушног лифта” за транспорт воде. У води, која је континуално распоређена (континуална фаза), налазе се мехурови ваздуха (распршена фаза). Слична ситуација је присутна у вертикалним испаривачким цевима великих индустријских и енергетских парних котлова. Вода постепено испарава и кроз цев струје заједно вода и мехурови водене паре. Овде распршену фазу представљају мехурови који дуж цеви могу да мењају облик, запремину, да се деле или спајају. Јасно је да се ови процеси не догађају са чврстим честицама приликом пнеуматског транспорта, тако да је тешко користити исти математички модел за описивање ова два типа струјања. Области вишефазног струјања припадају и струјања течности са слободним површима. Овде су две фазе подељене најчешће само једном разделном површи. Из ова три примера се види разноликост области вишефазних струјања. Због тога је потребно развити више математичких модела, при чему ће сваки од њих бити намењен одређеном типу струјања.

Потребно је дефинисати појмове једнофазног, вишефазног, једнокомпонентног и вишекомпонентног струјања. Као пример користиће се струјање ваздуха. Фаза је термодинамички појам који дефинише стање материје и оно може бити чврсто, течност и гасовито. Компонента је хемијски појам и дефинише нпр. врсте гасова који се налазе у ваздуху. Следи да је струјање ваздуха, при нормалним условима, једнофазно и истовремено вишекомпонентно. Једнофазно је јер у струјању учествује само гасовита фаза, а вишекомпонентно је јер у струјању учествује више врста гасова: азот, кисеоник, аргон, угљен-диоксид. Уобичајено је да се ваздух третира као мешавина, тј. једна компонента чија својства зависе од својстава компоненти које чине ту мешавину и њихове заступљености у мешавини. У посебним случајевима то није могуће. Нпр. при веома

ниским температурама доћи ће до кондензације појединих компоненти из ваздуха. Тиме струјање постаје и вишефазно.

Струјање мехурова ваздуха у води, које се јавља при коришћењу ваздушних лифтова за транспорт воде, је вишефазно и вишекомпонентно. Струјање воде и мехурова водене паре, који настају услед испаравања воде, је вишефазно и једнокомпонентно. Јасно је да случај пнеуматског транспорта представља пример вишефазног и вишекомпонентног струјања.

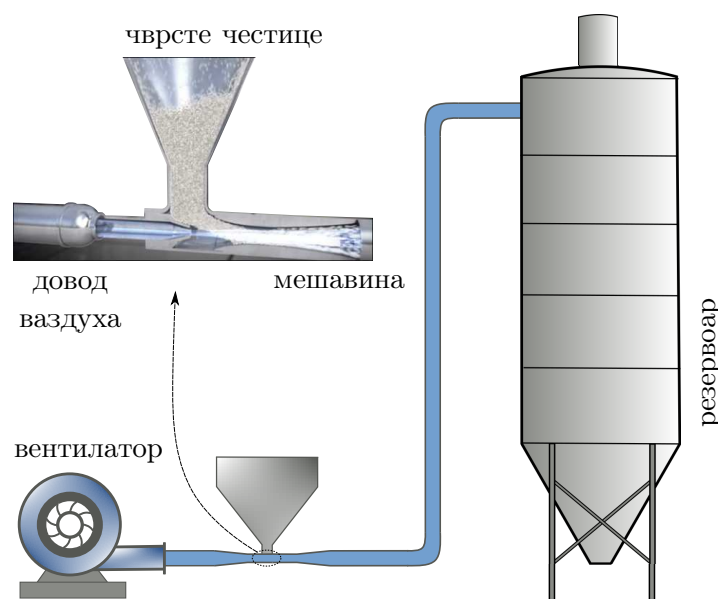
У овом раду неће бити разматрани случајеви у којима разлике између компоненти долазе до изражаја, већ је пажња усмерена на присуство различитих фаза у струјању и њихово међусобно дејство, тако да ће надаље бити речи само о томе да ли је струјање вишефазно или не.

1.2 Подела вишефазних струјања

На основу тога које фазе учествују у струјању, може се извршити груба подела вишефазних струјања на следеће групе:

- ① струјање гасовите и чврсте фазе,
- ② струјање течне и гасовите фазе,
- ③ струјање течне и чврсте фазе,
- ④ струјање у којем учествују три фазе.

Струјање гасовите и чврсте фазе ① је већ поменуто, када је наведен пример пнеуматског транспорта (слика 1.1). У овом случају континуалну фазу представља гас, а распршену фазу чврсте честице које се налазе у гасу. И у оквиру ове категорије могу се појавити различити типови струјања који захтевају различито математичко моделирање. То зависи од удела или заступљености чврсте фазе. При малој концентрацији честица, могу се занемарити њихови међусобни судари. Тада је доминантан међусобни утицај гаса и честица. Таква струјања се сматрају **ретким** (струјања са малом концентрацијом чврстих честица).



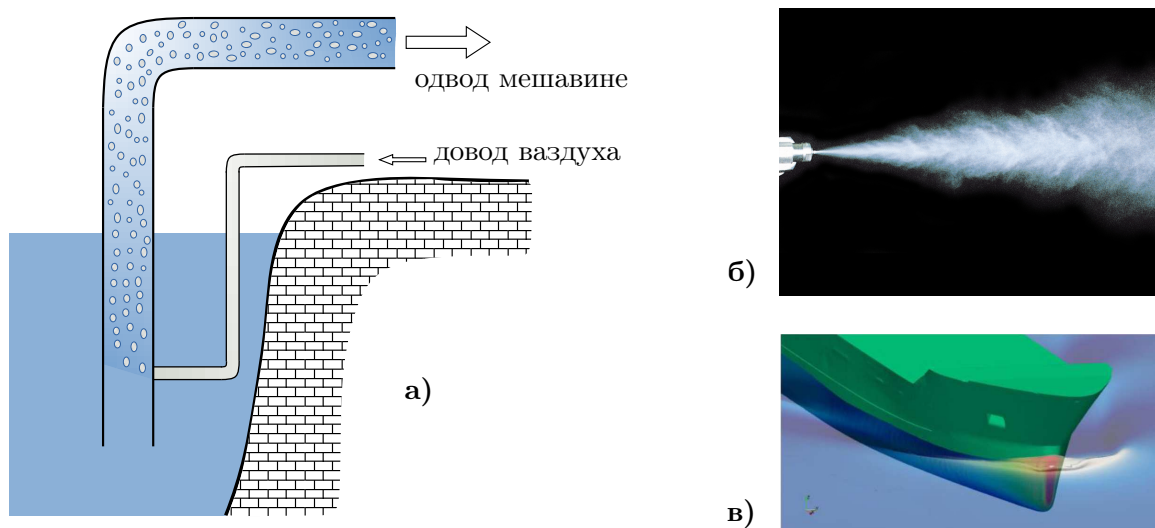
Слика 1.1. Пример система за тзв. потисни пнеуматски транспорт (део слике преузет са [50]).

У посебном случају, када је концентрација честица веома мала и када су маса и димензије честица мале, тада се њихов утицај на струјно поље ваздуха може занемарити. Кретање честица потпуно зависи од кретања гаса. Такве честице се могу користити за одређивање струјног поља ваздуха. Управо је то искоришћено у експерименталним методама PIV (енгл. *Particle Image Velocimetry*) и LDA (енгл. *Laser Doppler Anemometry*), о којима ће касније бити речи. Ситне честице (просејање флуида) се убацују у струјни ток ваздуха¹. Струјни простор је обасјан ласерским зрацима, а брзе камере бележе одсјај ласерског зрака када чврста честица, која има рефлексивне особине, наиђе на ласерски зрак. Кретање ситних честица представља кретање гаса.

У супротном случају, када је концентрација чврстих честица у гасу велика, тада доминантан утицај на кретање честица имају њихови међусобни судари. Оваква струјања се сматрају **густим**. Повећавањем концентрације честица или смањивањем брзине гаса, може доћи до издвајања и таложења чврсте фазе, што је непожељно.

Постоје веома различити типови струјања у којима учествују течна и гасовита фаза ②. У случају поменутог ваздушног лифта, слика 1.2 (а), којим се транспортује вода, мехурови ваздуха представљају распршену фазу, а вода континуалну фазу. Супротно је у случају струјања гаса који са собом носи капљице течности, као што је то струјање у спреју, које је приказано на слици 1.2 (б). Још један пример оваквог струјања је случај олујног времена, када су присутни и ветар и киша. За разлику од чврстих честица, мехурови гаса и капљице воде могу током струјања мењати облик, спајати се и раздвајати на ситније делове, што усложњава математичко моделирање оваквих врста струјања.

Посебна врста струјања у којој учествују течна и гасовита фаза је струјање течности које имају слободну површ (енгл. *Free surface flows*). Овде су фазе раздвојене само једном разделном површи, а то је слободна површ течности. Овај случај је присутан нпр. приликом прорачуна опструјавања пловних објеката (слика 1.2 в), или прорачуна струјања воде у отвореним каналима.



Слика 1.2. Примери струјања течне и гасовите фазе: (а) ваздушни лифт, (б) струјање у спреју [51], (в) струјање течности са слободном површи [52].

Двофазни ток у којем је вода континуална фаза, а ваздух у виду мехурова распршена фаза, среће се у различитим индустријским постројењима. Један од карактеристичних

¹Ове методе се могу применити и при струјању течне фазе.

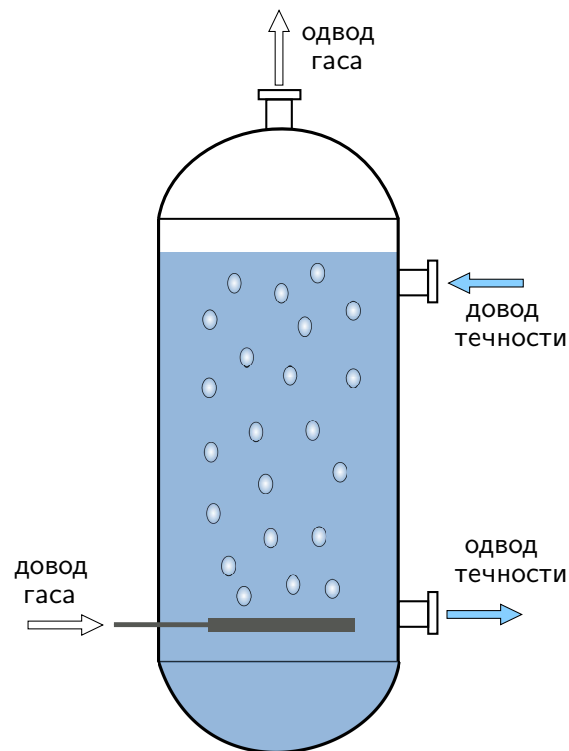
примера јесу вертикални реактори - колоне. Реактор је облика цилиндра на чијем дну се убацује гас. Под дејством силе потиска мехурови гаса се крећу ка врху реактора. У реактор се убацује и течност. Она може бити убачена такође на дну реактора, тако да реактор напушта при врху. У овом случају кретање фаза је истосмерно. Друга могућност је да течна фаза буде убачена у горњем делу реактора и да се креће ка дну, где напушта реактор, што је приказано на слици 1.3. У овом случају фазе се крећу у супротним смеровима. Избор конструкције реактора зависи од конкретне намене. Користе се у хемијској, биохемијској, нафтној индустрији и у металургији итд.

Гас се уводи у реактор у виду великог броја мехурова. Ово значи да је укупна разделна површина фаза велика што је значајно за процесе размене масе и енергије. Од значаја за одвијање процеса су величина мехурова и релативна брзина фаза. Да би се постигла жељена величина мехурова, важно је контролисати процесе њиховог спајања и раздвајања. Све је ово потребно познавати да би се реактор конструисао на исправан начин.

Веома честа примена струјања течне и гасовите фазе је у цевима термоелектрана и нуклеарних електрана у којима се догађа постепено испаравање воде.

Било је речи о пнеуматском транспорту, где се за транспорт чврсте фазе користе гасови, али поред тога за транспорт чврстих материја могу се користити и течности (хидраулички транспорт). Пример струјања течне и чврсте фазе (3) је транспорт песка који се меша са водом. За покретање ове мешавине користе се наменски направљене пумпе. Вода представља континуалну фазу, а песак распршену. Да ли ће приликом струјања доћи до издвајања и таложена чврсте фазе зависи од више параметара, као што су режим струјања и величина честица чврсте фазе. У ову групу струјања спада и пумпање бетона на градилиштима. Свеж бетон представља веома густу мешавину течне и чврсте фазе.

Најкомпликованији случај је када су у струјном простору присутне три различите фазе (4). Пример за то је када се у води, која је континуална фаза, истовремено налазе мехурови гаса и чврсте честице, као распршене фазе.



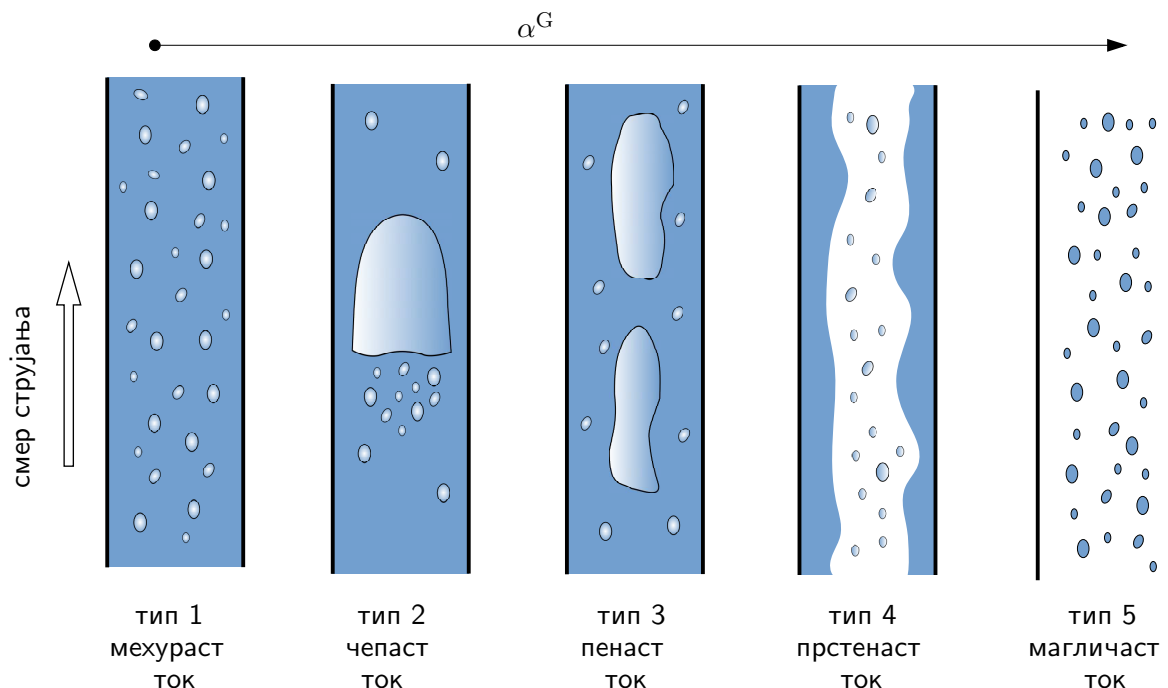
Слика 1.3. Пример вишефазног струјања у вертикалној колони (реактору).

1.2.1 Различити типови струјања течне и гасовите фазе

Ова дисертација се посебно врстом двофазног струјања у којем учествују течна и гасовита фаза. Ове две фазе могу образовати различите типове струјања у зависности од различитих утицаја, као што су промена притиска, геометрија струјног простора, оријентација цеви у којој се одвија струјање, удео фаза, брзина струјања, итд.

На слици 1.4 приказани су типови режима струјања који се могу јавити у вертикал-

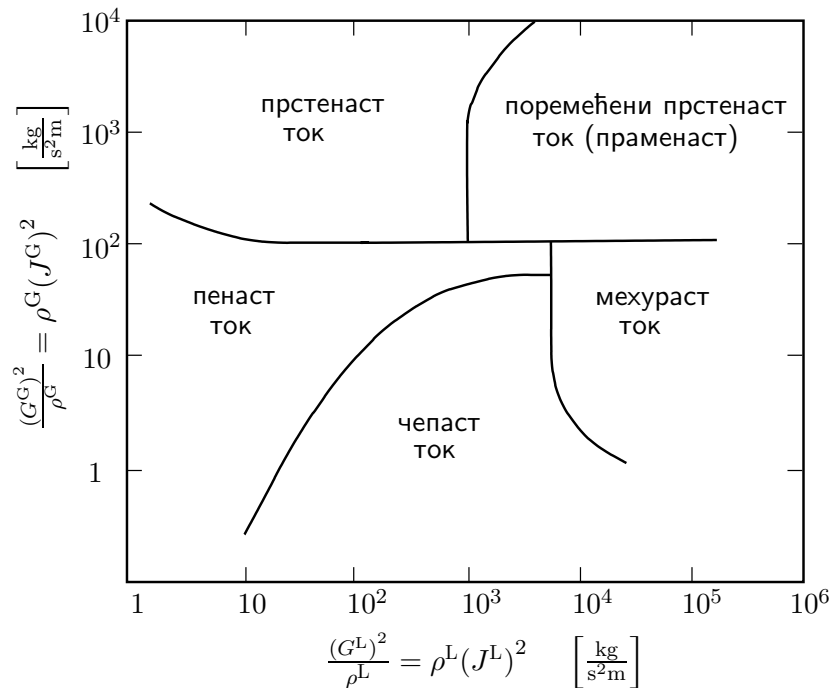
ним цевима. У овом случају, тип струјања највише зависи од удела гасовите фазе α^G . Тип 1 означава **мехурасти ток**. Удео гасовите фазе је мали. Гас се креће у виду великог броја малих мехурова. Повећавање удела гасовите фазе довешће до образовања великог мехура (тип 2 - **чепаст ток**), који је са горње стране заобљен, а са доње има оштрију ивицу. Кретање великог мехура, који може заузети скоро цео попречни пресек, прате мањи мехурови. Овај режим је пожељно избећи због нестабилности кретања великог мехура, што утиче на цео систем. Даљим повећавањем удела гасовите фазе појављује се више великих мехурова, што за последицу такође има нестабилност струјања (тип 3 - **пенаст ток**). При још већем уделу гасовите фазе јавља се **прстенасти режим** струјања (тип 4). Уз зид цеви налази се само течна фаза, а у унутрашњем делу струјног простора гасовита фаза која у себи садржи капљице течности. На крају, при довољно великом уделу гасовите фазе вода постаје распршена фаза, а гас континуална (тип 5 - **магличаст ток**).



Слика 1.4. Типови вишефазног струјања течне и гасовите фазе у вертикалној цеви [3], [1].

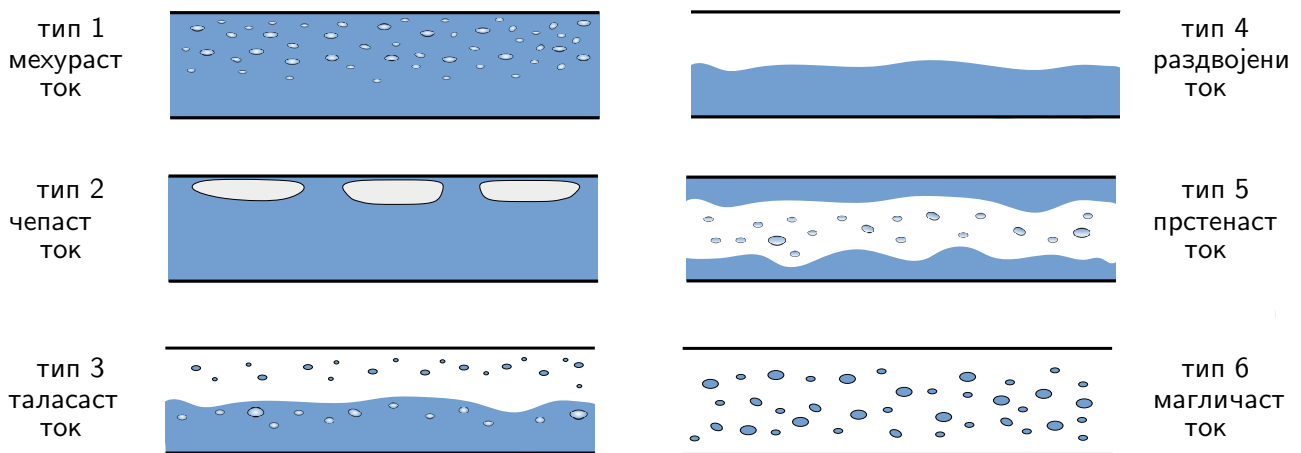
Сви ови режими се јављају у једној испаривачкој цеви парних котлова. Кроз отвор на дну у цев улази загрејана вода ($\alpha^G = 0$). Она постепено испарава и настаје мехурасти ток. Даљим испаравањем повећава се удео гасовите фазе α^G , па се редом смењују чепаст, пенаст, прстенаст и магличаст ток. Даљим загревањем мешавине сва вода промени своје агрегатно стање, тако да на врху испаривачке цеви струји само водена пара ($\alpha^G = 1$), која затим одлази у прегрејач паре.

Режими струјања се могу приказати на дијаграму, тј. на мапи. Мапу режима струјања за случај двофазне мешавине течности и гаса у вертикалним цевима дали су Хјуит и Робертс (Hewitt and Roberts [5]). Она је приказана на слици 1.5 и односи се на струјање које се одвија вертикално навише. Са G^L означен је масени проток воде по површини попречног пресека цеви $G^L = \dot{m}^L / A$. Ако се масени проток изражава на основу целе површине попречног пресека цеви потребно је користити привидну брзину фазе $\dot{m}^L = \rho^L J^L A$. На основу познатих густина фаза и њихових привидних брзина, из дијаграма се може уочити који режим двофазног струјања ће бити остварен у вертикалној цеви.



Слика 1.5. Мапа режима струјања за двофазну мешавину течности и гаса у вертикалним цевима, Хјуитова мапа [5].

Ако се цев налази у хоризонталном положају, утицај силе гравитације доводи до другачијег изгледа могућих типова струјања, као што је приказано на слици 1.6.

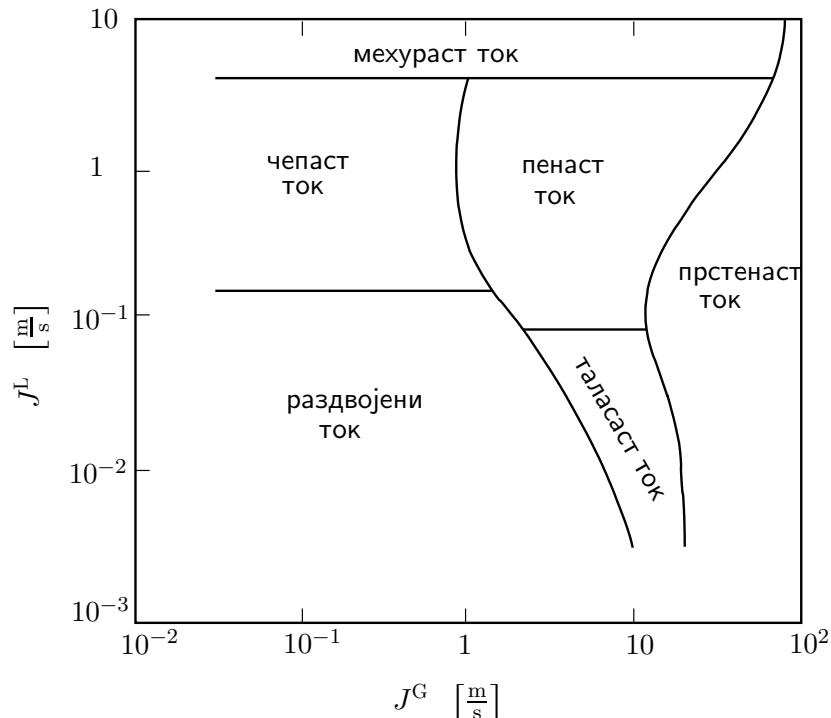


Слика 1.6. Типови вишефазног струјања течне и гасовите фазе у хоризонталној цевима [3], [1].

При малом уделу гасовите фазе, она је распоређена у виду мехурова, али сада сила потиска доводи до тога да у доњем делу цеви нема мехурова, већ су они груписани у горњем делу цеви (тип 1 - **мехурасти ток**). Повећавање удела гасовите фазе доводи до спајања мехурова и стварања *чепова* (тип 2 - **чепаст ток**), који се такође налазе у горњем делу цеви. Овај тип се образује при мањим и умереним брзинама струјања фазе. Приликом повећавања удела фазе и повећавања брзине струјања, долази до интензивнијег мешања фазе. Иако постоји изражена разделна површ (тип 3 - **таласаст ток**), она је променљивог облика, а у свакој фази има распршене друге фазе. Уколико се струјање одвија при истом уделу фазе али при мањим брзинама, доћи ће до потпуног раздвајања фазе, тако да се под дејством силе гравитације течна фаза издвоји на доњем делу цеви, а гасовита на горњем (тип 4 - **раздвојен ток**). Даље повећавање удела

гасовите фазе ће довести најпре до **прстенастог тока** (тип 5), а затим до тога да капљице течности струје у гасовитој фази (тип 6 - **магличаст ток**).

И за случај струјања воде и ваздуха у хоризонталној цеви постоји мапа режима струјања. Њу су дали Мандхане и Грегори (Mandhane and Gregory [6]) и она је приказана на слици 1.7.



Слика 1.7. Мапа режима струјања за двофазну мешавину течности и гаса у хоризонталним цевима, Мандханова мапа [6].

Пенаст ток, који се појављује на дијаграму 1.7 се јавља на прелазу између таласастог тока ка прстенастом. Још увек није образован прстен течне фазе по ободу. Гасовите фазе је све више у струјном простору.

1.2.2 Приступи нумеричком моделирању вишефазног струјања

Већ је поменуто да је једно од основних својстава вишефазног струјања разноликост. Оно се јавља у веома различитим облицима, па је очекивано да се неће користити један, општи приступ нумеричким симулацијама вишефазног струјања. У литератури [1], [2] је дата подела на неколико основних приступа у нумеричким прорачунима вишефазног струјања:

- модел Ојлер-Лагранж,
- модел Ојлер-Ојлер или модел два флуида,
- модел мешавине,
- модел раздвојених фаза (*VOF - volume of fluid*)

Модел Ојлер-Лагранж се може користити за прорачун струјања чврстих честица у течной или гасовитој фази, као и за случај струјања капљица течности у гасовитој фази. Модел предвиђа да се континуална фаза третира као континуум и да се за

њу решавају Навије-Стоксове једначине, док се истовремено Лагранжевим приступом прати кретање сваке честице (капљице) посебно, или групе честица (капљица) за које се сматра да се крећу на исти начин. Континуална и распршена фаза могу размењивати масу, количину кретања и енергију током струјања. Овај модел се у литератури назива и модел праћења трајекторије (енгл. *trajectory model*). Услед ограничености рачунарских капацитета, детаљно праћење сваке честице се примењује на системе са малим уделом распршене фазе.

Модел Ојлер-Ојлер или **модел два флуида** (енгл. *two-fluid model*) предвиђа да се свака фаза која учествује у струјању третира као засебан флуид и да се за сваку фазу решавају Навије-Стоксове једначине. Од посебног значаја у овом моделу су допунски чланови који описују међусобно дејство фаза, односно, размену масе, количине кретања и енергије. Овај модел се често користи за симулирање струјања мехурова гаса у течnoj фази.

Постоје два поједностављења модела два флуида. Прво поједностављење је **модел мешавине** (енгл. *mixture model*). Он подразумева да се двофазни ток посматра као један флуид - мешавина, и да физичка својства мешавине зависе од својстава појединих фаза и њихове заступљености у мешавини (фазног удела). Овакав модел је стабилнији и нумерички прорачун траје краће. Његова мана у односу на модел два флуида је мања тачност, па се модел мешавине може користити и за добијање почетних услова за прорачун моделом два флуида.

У посебним случајевима, као што је струјање са слободним површима, струјање где су фазе раздвојене или струјање великих мехурова гаса кроз течност, може се користити модел раздвојених фаза (VOF модел), који представља друго поједностављење модела два флуида. Он је сличан моделу два флуида, са том разликом што се овде најчешће прати једна разделна површ. Са различитих страна разделне површи врши се прорачун једнофазног струјања флуида за сваку од фаза. Овај модел није погодан за прорачун струјања великог броја мањих мехурова или капљица.

1.3 Преглед досадашњих истраживања

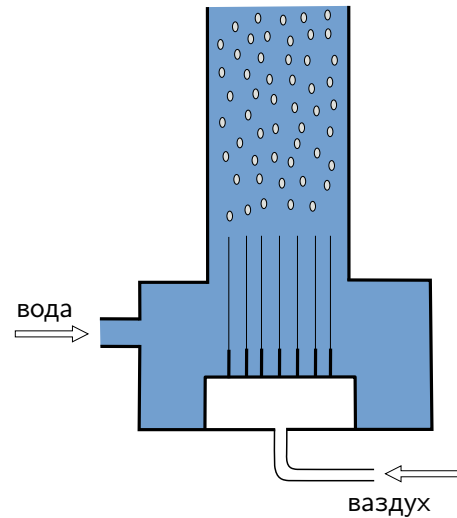
Зидови ложишта великих индустријских котлова термоелектрана су са унутрашње стране прекривени вертикалним цевима кроз које струји и испарава вода. У њима двофазни ток воде и мехурова водене паре струји вертикално навише. Постоје и други примери тога да се у индустријским и енергетским објектима сусреће двофазно струјање овог типа. Због овако важне и распрострањене индустријске примене феномен двофазног струјања мехурова гаса и течности у вертикалним цевима је био тема бројних научних истраживања.

Професор Мане Шашић, описујући ову врсту струјања, у уводу [3] каже *Хидродинамика двофазног шока сложености је од хидродинамике једнофазног шока и недовољно је изучена*. Од времена писања ове књиге (1982.) уложени су велики напори у истраживању ове области али се и савремени истраживачи слажу са тим да је у појединим областима неопходно достизање нових, потпунијих решења.

Због сложености математичког апарата којим је описана оваква врста струјања, теоријски приступ је имао ограничене могућности. Због тога се често прибегавало експерименталним методама. Међутим, тек појавом софистицираних мерних уређаја и техника као што су анемометар са врелим влакном (енгл. *hot wire anemometer*), ласер-доплер анемометар LDA (енгл. *Laser Doppler Anemometer*), PIV метода (енгл.

Particle Image Velocimetry), и са појавом брзих камера које могу направити велики број квалитетних слика у кратком временском периоду, било је могуће имати детаљније податке о расподели значајних физичких величина унутар струјног простора.

Једно од обимнијих експерименталних истраживања мехурастог двофазног тока спровео је Liu [8] у оквиру докторске дисертације из 1989. године. Резултати су касније објављени и у радовима Liu and Bankoff [9] и [10]. Он је користио цев кружног попречног пресека унутрашњег пречника $D = 38 \text{ mm}$ и укупне дужине $L = 2800 \text{ mm}$. Пресек у којем су извршена мерења се налази на растојању $L_m = 1368 \text{ mm}$ ($L_m/D = 36$) од улаза у цев, што је довољно растојање да се оствари развијено струјање. Постоје различити начини за стварање мешавине воде и мехурава ваздуха. Liu [8] је користио скуп од 64 паралелно постављене игле, које се налазе на равномерном међусобном растојању по целој површини попречног пресека цеви. Сноп игала пречника $0,1 \text{ mm}$ се налази у комори на коју се надовезује вертикална цев. Кроз игле се удувава ваздух. Услед деловања површинског напона на врху игала се образују мехурови ваздуха који се одвајају од игала и улазе у вертикалну цев у којој се врше мерења, слика 1.8. Овакав начин стварања мешавине воде и мехурава ваздуха је изабран у тежњи да мехурови буду уједначених величина и што равномерније распоређени на почетку цеви како би се смањило сударање и спајање мехурава у струјном току.



Слика 1.8. Стварање мехурастог тока помоћу снопа игала [8].

Пре стварања мешавине, помоћу мерних бленди измерени су протоци обе фазе. У мерном пресеку коришћене су једнокомпонентна (TSI 1218-20W, $0,05 \text{ mm o.d.} \times 1 \text{ mm}$) и двокомпонентна сонда (TSI 1246-60W, X-type, $0,15 \text{ mm o.d.} \times 2 \text{ mm}$) са врелим влакном. Њима су мерени брзина течне фазе и турбулентни напони. Анализом сигнала који је добијен од сонди са врелим влакном може се уочити када на сонду наилази мехур ваздуха. Коришћена је и сонда за мерење електричне отпорности. Померањем сонди по оси цеви у изабраном мерном пресеку и детаљном анализом сигнала које оне дају, добијају се профили брзине течне и гасовите фазе, профил кинетичке енергије турбуленције течне фазе и профил удела гасовите фазе.

Због коришћења сонди са врелим влакном било је потребно одржавати температуру воде сталном. Вода је хлађена у резервоару, тако да у мерном пресеку температура воде има вредност $10 \pm 0,01 \text{ C}^\circ$.

У раду је приказано 48 случајева стујања, који су добијени комбиновањем различитих вредности протока фаза. Као што је поменуто, пре стварања мешавине, помоћу мерних бленди измерени су протоци обе фазе. На основу протока фаза и површине попречног пресека цеви у којој се врши испитивање, могу се израчунати привидне брзине фаза [3] (енгл. *gas and liquid volumetric fluxes* или *superficial velocities*) и означавају се као J^G и J^L [m/s]. Називају се привидним брзинама, зато што представљају средње брзине струјања за случај када би се кроз цев кретала само једна фаза. Међутим, након мешања фаза, ни једној фази није на располагању цела површина попречног пресека што утиче на поље брзина фаза. О овоме ће касније бити више речи. Привидне брзине фаза у експерименталним испитивањима Liu [8] се крећу у следећим границама: за

течност $J^L = [0,376 - 1,391] \text{ m/s}$ и за гас $J^G = [0,027 - 0,347] \text{ m/s}$.

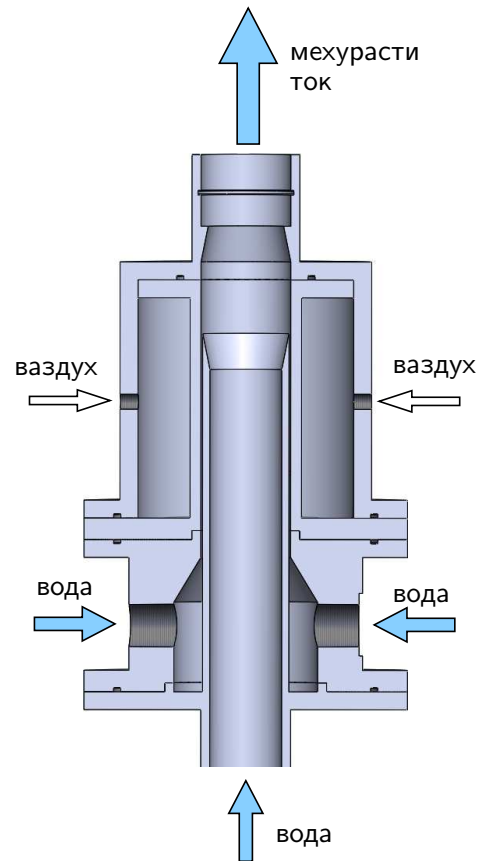
Слично истраживање, у цеви мањег пречника, приказано је у раду Hosokawa and Tomiyama [7]. Коришћена је провидна цев кружног попречног пресека, унутрашњег пречника $D = 25 \text{ mm}$ и дужине $L = 2 \text{ m}$. Мерни пресек се налази на растојању $L_m = 1,7 \text{ m}$ ($L_m/D = 68$) од улаза у цев.

На улазу у цев постављена је комора за мешање воде и ваздуха. Пресек сличне коморе је приказан на слици 1.9. Узструјно од ње, мерилима протока се мере протоци обе фазе и на основу њих и попречног пресека вертикалне цеви у којој се врше главна испитивања, израчунавају се привидне брзине фаза. Оне се у овом експерименту крећу у границама $J^L = [0,5 - 1,0] \text{ m/s}$ и $J^G = [0,018 - 0,036] \text{ m/s}$.

За мерење профила брзине течне фазе у мерном пресеку коришћен је LDA систем (Laser Doppler velocimetry system, DANTEC, optics: 60×83 , processor: 68N10). Померањем мерне тачке у радијалном правцу добијају се жељени подаци о расподели брзине и кинетичке енергије турбуленције течне фазе по попречном пресеку. Истовремено са коришћењем LDA система, коришћене су две брзе камере (Kodak Motion Coder Analyzer SR-1000, учесталост снимања: 250 fps) које су постављене под углом од 90° једна у односу на другу. Пошто је цев провидна, омогућен је визуелни приступ струјном простору, и камерама је снимано кретање мехура. Усклађивањем фотографија које су истовремено добијене са две камере и њиховом обрадом одређени су облик и запремина мехура, еквивалентни пречник мехура D_B , степен деформације мехура који се мери односом дијагонала, уколико мехур има облик елипсе E , и удео гасовите фазе α^G . Праћењем ученог мехура, одређено је померање центра мехура на две узастопне фотографије, а како је позната временска разлика између две фотографије, израчуната је и брзина ученог мехура. На овај начин добијена је расподела профила брзине гасовите фазе по попречном пресеку.

Добијене експерименталне резултате, Hosokawa and Tomiyama [7] су искористили као основу за тестирање различитих математичких модела који се користе за симулирање ове врсте вишефазног струјања. Низом нумеричких прорачуна потврдили су да коефицијент отпора мехура C_D у близини зида има веће вредности услед деловања смичућег струјања и да је потребно обухватити овај утицај смицања на коефицијент отпора како би се добили тачнији резултати нумеричких прорачуна. Наиме, узимање у обзир овог утицаја доводи до смањења релативне брзине фаза у близини зида. Овакво понашање профила релативне брзине је потврђено експериментима које су спровели. Hosokawa and Tomiyama [7] су користили корекцију за коефицијент отпора коју су предложили Legendre and Magnaudet [11]. За моделирање турбуленције користили су стандардни $k - \epsilon$ турбулентни модел.

Legendre and Magnaudet [11] су објавили обиман и значајан рад чији је основни задатак одређивање утицаја смицања на коефицијенте отпора и узгона сферне честице.



Слика 1.9. Стварање мехурастог тока помоћу коморе за мешање.

Добијени резултати се могу применити и за случај опструјавања мехура.

Постојећи изрази за коефицијент отпора су добијени под претпоставком да су честица или мехур опструјавани униформном (уједначеном) струјом флуида. Међутим, честице и мехурови су често изложени струји флуида у којој постоји градијент брзине, тј. смичућој струји флуида. Градијент брзине утиче на расподелу смицајног напона и притиска на површини честице (мехура), па на тај начин утиче на силе отпора и узгона.

Да би одредили утицај смицања на коефицијент отпора сфере Legendre and Magnaudet [11] су извршили низ директних нумеричких симулација опструјавања сферне честице. Прорачуни су извршени за различите вредности Рејнолдсовог броја Re_B , који је дефинисан за честицу (мехур), и за различите вредности градијента брзине. Као мера интензитета смицања у флуиду користи се бездимензијска величина степен смицања Sr .

Да би се одредио утицај смицања, најпре су извршени прорачуни опструјавања сфере униформном струјом флуида, а затим прорачуни опструјавања сфере струјом флуида у којој постоји градијент брзине. Резултати коефицијента отпора у смичућој струји флуида C_D су поређени са вредношћу коефицијента отпора у униформној струји флуида C_{DU} . Исто се односи на коефицијент узгона (C_L и C_{LU}).

Резултати су показали да је утицај смицања на коефицијент узгона мањи него на коефицијент отпора. Показано је да при малим вредностима Рејнолдсовог броја $Re_B \leq 5$ коефицијент узгона опада са порастом Рејнолдсовог броја и да зависи од интензитета смицања. Даљим порастом Рејнолдсовог броја коефицијент узгона благо расте, док истовремено не зависи од степена смицања.

Уочено је да постоји пораст вредности коефицијента отпора услед присуства смичућег струјања ($C_D > C_{DU}$), али да је он при малим вредностима степена смицања мали. Највећи релативни пораст коефицијента отпора услед деловања смицања износи 1% за степен смицања $Sr = 0,02$ и приближно 4% за степен смицања $Sr = 0,2$.

Legendre and Magnaudet [11] су извршили прорачуне и при већим вредностима степена смицања, у области $Sr \leq 1$, за две вредности Рејнолдсовог броја $Re_B = 300$ и $Re_B = 500$. Резултати показују да при већим вредностима степена смицања Sr утицај смицања на коефицијент отпора значајно расте и да при вредности степена смицања $Sr = 1$ релативни пораст коефицијента отпора износи чак 53%.

Добијени резултати указују на значајан утицај смицања на вредност коефицијента отпора. Због тога су Legendre and Magnaudet [11] предложили корекцију за рачунање коефицијента отпора која зависи од степена смицања Sr . Према њиховој претпоставци вредност коефицијента отпора зависи од квадрата степена смицања. Корекциони члан гласи $(1 + 0,55 Sr^2)$.

Горе поменути Hosokawa and Tomiyama [7] су у нумеричким прорачунима користили управо корекцију коефицијента отпора коју су Legendre and Magnaudet [11] предложили. Резултати њихових нумеричких прорачуна указују на то да увођење ове претпоставке даје резултате који имају боље слагање са експерименталним резултатима. Корекција Legendre and Magnaudet [11] је тестирана само уз коришћење турбулентних модела са зидним функцијама или HRN (енгл. High Reynolds Number) модела.

Примећено је да за ову врсту вишефазног струјања значајан параметар представља количник пречника цеви и пречника мехура D/D_B . Због тога су Shawkat et al. [12] спровели експериментална истраживања у вертикалној цеви значајно већег пречника ($D = 200$ mm). Цев је укупне дужине $L = 9560$ mm, а мерни пресек је постављен на растојању $L_m = 8400$ mm ($L_m/D = 42$) од улаза у цев. И у овом случају испитивано је вишефазно струјање мехурова ваздуха у води кроз вертикалну цев кружног попречног пресека. Струјање се одвија вертикално навише.

Пре мешања фаза, мерилима протока је одређен запремински проток течне и гасовите фазе. Вредности привидних брзина течне и гасовите фазе за које је извршен експеримент се налазе у опсегу $J^L = [0,2 - 0,68] \text{ m/s}$ и $J^G = [0,005 - 0,18] \text{ m/s}$. Да би се у ток воде убацили мехурови ваздуха коришћена је бризгаљка која у себи има 550 отвора пречника 1 mm . Отвори су постављени на међусобно равномерним растојањима да би се смањило спајање мехурова приликом протицања од дна цеви до мерног пресека, (слика 1.10).

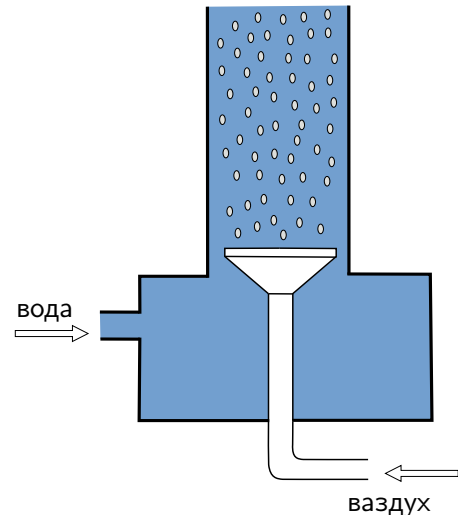
За мерење брзине течне фазе и кинетичке енергије турбуленције коришћена је сонда са врелим влакном TSI 1210-60W и X-сонда (Dantec 55R63). Због тога је важно одржавати сталном температуру воде. Задата вредност температуре је $24,5 \pm 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$. Величина мехурова, удео и брзина гасовите фазе мерени су снимањем струјног простора и обрадом слика.

Shawkat et al. [12] су анализирали како се мења расподела мехурова по попречном пресеку, за различите односе протока течне и гасовите фазе. За расподелу мехурова по попречном пресеку одговорне су силе које делују на мехур у попречном правцу, што је у овом случају хоризонтални правац. Ту су од значаја сила узгона, сила турбулентне дисперзије и сила хидродинамичког подмазивања која делује у непосредној близини зида. Од односа ових сила зависи да ли ће се мехурови груписати уз зид или уз осу цеви. Сила турбулентне дисперзије потискује мехурове ка оси цеви, док сила узгона делује ка зиду цеви, мада су Shawkat et al. [12] показали да при одређеним условима она може променити смер (нпр. ово се догодило при повећавању пречника мехурова). Није до краја разјашњено шта све утиче на расподелу мехурова по попречном пресеку, али је показано да значајан параметар представља количник пречника цеви и пречника мехура D/D_B .

Поред експерименталних истраживања, у новије време развој рачунарске технике омогућава да се на рачунару изврше захтевне нумеричке симулације различитих врста вишефазног струјања.

Директна нумеричка симулација (нумеричко решавање пуних Навије-Стоксових једначина) при којој се прати сваки мехур и разделне површи фаза, даје најпотпунији увид у расподелу физичких величина у двофазном мехурастом току (Lu and Tryggvason [13] [14], Adoua et al. [15], Bois and du Cluzeau [16]). Због тренутне ограничености рачунарских капацитета овакви прорачуни су вршени само при мањим вредностима Рејнолдсовог броја и са ограниченим бројем мехурова (око неколико стотина).

Ако је потребно извршити прорачун у струјном простору већих димензија, при већим вредностима Рејнолдсовог броја, још увек се користи Рејнолдсов приступ за описивање турбуленције, тј. решавају се временски осредњене Навије-Стоксове једначине (RANS). И у овом случају постоји разлика у зависности од тога који турбулентни модел се користи. Време трајања прорачуна и потреба за рачунарским капацитетима зависе од тога да ли се прорачун врши у целом струјном простору или се промена физичких величина у непосредној близини зида описује зидним функцијама. У првом случају користе се турбулентни модели без зидних функција броја (енгл. *Low-Reynolds number turbulence*



Слика 1.10. Стварање мехурастог тока помоћу бризгаљке са отворима [12].

models - *LRN*; овде је реч о локалној вредности Рејнолдсовог броја, тј. о вредности бездимензијске координате y^+), нумеричка мрежа има већи број прорачунских ћелија што захтева дуже време прорачуна, док се у другом случају користе турбулентни модели са зидним функцијама (енгл. *High-Reynolds number turbulence model* - *HRN*), прорачунска мрежа има мање ћелија због коришћења зидних функција па последично прорачун краће траје. Због уштеде у времену и смањених захтева у погледу рачунарских ресурса, чешће се користе турбулентни модели са зидним функцијама, као што је то случај у следећим радовима: Hosokawa and Tomiyama [7], Lubchenko et al. [17], Magolan et al. [18], Parekh and Rzehak [19], Colombo et al. [20], Lopez de Bertodano et al. [21], Rzehak and Krepper [22] [23] [24] [25], Rzehak and Kriebitzsch [26] Rzehak et al. [27] Troshko and Hassan [28].

Међутим, важно је напоменути да се овде користе зидне функције развијене за једнофазно струјање флуида и да не постоји усаглашеност истраживача око тога да ли је то оправдано или не, тј. да ли зидне функције које се користе у прорачуну вишефазног струјања могу изгледати исто као зидне функције за случај једнофазног струјања (Troshko and Hassan [28], Colin et al. [29]).

Да би се избегла дилема око оправданости коришћења зидних функција за чист флуид у прорачунима вишефазног струјања, потребно је користити турбулентне моделе без зидних функција (*LRN*). Постоји мали број радова који користи овакав приступ у моделирању вишефазног мехурастог струјања (Colombo et al. [20], Colombo and Fairweather [30]). Овакав приступ захтева прорачунску мрежу за чију прву прорачунску тачку бездимензијско нормално растојање има вредност $y^+ < 1$. Ово доводи до значајног повећања броја прорачунских ћелија али и до веће тачности прорачуна, посебно у области близу зида где су присутне велике вредности градијента појединих физичких величина. Colombo et al. [20] су нагласили да постоје два феномена која захтевају додатно појашњење у будућим истраживањима, а то је моделирање струјања у близини зида и одређивање пораста интензитета турбуленције течне фазе које је последица присуства мехурова (енгл. *bubble-induced turbulence* - *BIT*).

Када мешавина мехурова гаса и течности струји навише кроз вертикалну цев, услед деловања силе потиска брзина гасовите фазе је већа у односу на брзину течне фазе. Постојање релативног кретања мехурова и воде, доводи до повећања интензитета турбуленције у течној фази. Ова појава се у једначинама моделира допунским изворским члановима који се називају *BIT* модели. Према Magolan et al. [18] није постигнута коначна сагласност око облика ових допунских чланова. Rzehak and Krepper [24] су спровели опсежно истраживање поредећи ефикасност различитих доступних *BIT* модела. Закључили су да општи облик ових изворских чланова није одређен и да је неопходно даље истраживање. У циљу решавања овог проблема они су предложили два правца: први је развој нових облика изворских чланова који ће имати сложенију структуру, а други је увођење допунске једначине којом треба описати утицај мехурова на интензитет турбуленције течне фазе.

Поред наведених изазова које сусрећу истраживачи приликом симулирања двофазног струјања флуида, посебну пажњу привлачи моделирање сила које описују међусобно деловање фаза. Њихов задатак је да опишу различите механизме којима једна фаза делује на другу. У случају мехурастог двофазног струјања то су силе отпора, узгона, сила подмазивања, сила турбулентне дисперзије и виртуелна масена сила. Њихово тачно моделирање је од суштинског значаја за успешно симулирање вишефазног струјања. У овој дисертацији у центру пажње је сила отпора.

1.4 Циљ и структура дисертације

На основу приказаног прегледа досадашњих истраживања могу се извести најважнији закључци. На њих се надовезују задаци које треба остварити у оквиру ове дисертације. Закључци гласе:

- због значајне примене, двофазно мехрasto струјање је чест предмет научних истраживања. Истраживачи се најчешће ослањају на извођење експеримената и нумеричких прорачуна;
- за успешно извршавање нумеричких прорачуна важно је на који начин се моделирају чланови који описују међусобно деловање фаза. Од посебног значаја је сила отпора;
- изрази за рачунање коефицијента отпора су изведени на основу претпоставке да се мехур налази у униформној струји флуида;
- Legendre and Magnaudet [11] су показали да се вредност коефицијента отпора мења када се мехур (или сферна честица) налази у струји флуида са градијентом брзине, тј. у смичућој струји флуида. Због тога су предложили корекциони члан при рачунању коефицијента отпора, који узима у обзир утицај смицања;
- Hosokawa and Tomiyama [7] су користили предложену корекцију коефицијента отпора и доказали да она доприноси бољим резултатима нумеричких прорачуна. Прорачуни су извршени уз коришћење турбулентног модела са зидним функцијама (HRN);
- мана корекције коефицијента отпора, коју су предложили Legendre and Magnaudet [11], је та да се она не може користити са турбулентним моделима без зидних функција (LRN). Ови турбулентни модели омогућавају прорачунавање струјања у непосредној близини зида.

1.4.1 Задаци докторске дисертације

На основу приказаних закључака о прегледу досадашњих истраживања, која су у вези са задатом темом, дефинишу се задаци које је потребно остварити у оквиру дисертације:

- (1) утврдити разлог због којег постојећа корекција коефицијента отпора (Legendre and Magnaudet [11]) и турбулентни модели без зидних функција (LRN) не могу да се користе заједно у нумеричким прорачунима двофазног мехурастог струјања;
- (2) на основу анализе постојећих, и у литератури доступних, експерименталних резултата треба предложити нову корекцију коефицијента отпора која ће успешно узети у обзир утицај смицања на вредност коефицијента отпора. Нова корекција треба да буде таква да се може користити и са турбулентним моделима без зидних функција (LRN). Та могућност треба да представља њену основну предност у односу на постојећу корекцију;
- (3) имплементирати нову корекцију коефицијента отпора у програмски пакет отвореног кода OpenFOAM;

- (4) извршити две групе нумеричких прорачуна. У првој користити нову корекцију коефицијента отпора, а у другој групи извести исте прорачуне али без корекције коефицијента отпора. Прорачуне извршити за различите услове струјања. Упоредити добијене резултате међусобно и са постојећим експерименталним резултатима;
- (5) на основу поређења експерименталних резултата и резултата нумеричких прорачуна извести закључке о утицају нове корекције коефицијента отпора.

У другом делу дисертације дефинишу се следећи задаци:

- (6) осмислити и изградити експериментално постројење за испитивање двофазног мехурастог струјања у вертикалним цевима и каналима. Постројење направити тако да цев или канал у којем се врши испитивање буду изменљиви, како би постојала могућност испитивања у цевима и каналима различитог попречног пресека;
- (7) по угледу на решење Hosokawa and Tomiyama [7] пројектовати и израдити комору за мешање фаза која ће створити двофазни мехурасти ток;
- (8) коришћењем савремене мерне опреме извршити експериментално испитивање мехурастог струјања у вертикалном каналу правоугаоног попречног пресека;
- (9) приказати и анализирати добијене резултате.

1.4.2 Структура докторске дисертације

У поглављу 1 је дата уводна реч и преглед досадашњих истраживања. Дефинисан је задатак докторске дисертације.

У поглављу 2 је дат приказ система једначина које представљају основне законе механике флуида у области вишефазног струјања. Да би се систем основних једначина решио нумеричким путем потребно је све једначине свести на општи, заједнички облик, што је приказано у поглављу 2.

Математичко описивање једнофазног струјања флуида још увек садржи проблеме који немају опште решење, као нпр. проблем моделирања турбуленције. Ови проблеми су задржани и у области вишефазног струјања где се истраживачи сусрећу и са новим потешкоћама. У поглављу 3 је приказано како се проблем турбуленције третира у области вишефазног струјања.

Посебну пажњу заслужују чланови који у основним једначинама имају улогу да опишу међусобно деловање фаза. Они су приказани у поглављу 4. Ту је највише простора посвећено сили отпора која делује на мехур. У овом поглављу је, поред постојеће корекције коефицијента отпора Legendre and Magnaudet [11], приказана и нова корекција.

Да би нова корекција била тестирана, њу је потребно имплементирати у програмски код софтвера OpenFOAM и потом извршити серију нумеричких прорачуна мехурастог струјања. Прорачуне треба извршити са новом корекцијом и без ње. Резултате и једне и друге групе нумеричких прорачуна треба упоредити са експерименталним резултатима који су доступни у литератури. Оваквим поређењем могуће је извести закључке о утицају нове корекције коефицијента отпора. Поступак спровођења нумеричких прорачуна и анализа добијених резултата су приказани у поглављу 5.

Након нумеричког испитивања следи поглавље 6 које је посвећено експерименталном испитивању двофазног мехурастог струјања у вертикалном каналу правоугаоног

попречног пресека. У овом поглављу је описано постројење за експериментално испитивање, коришћена мерна опрема и поступак спровођења експеримента.

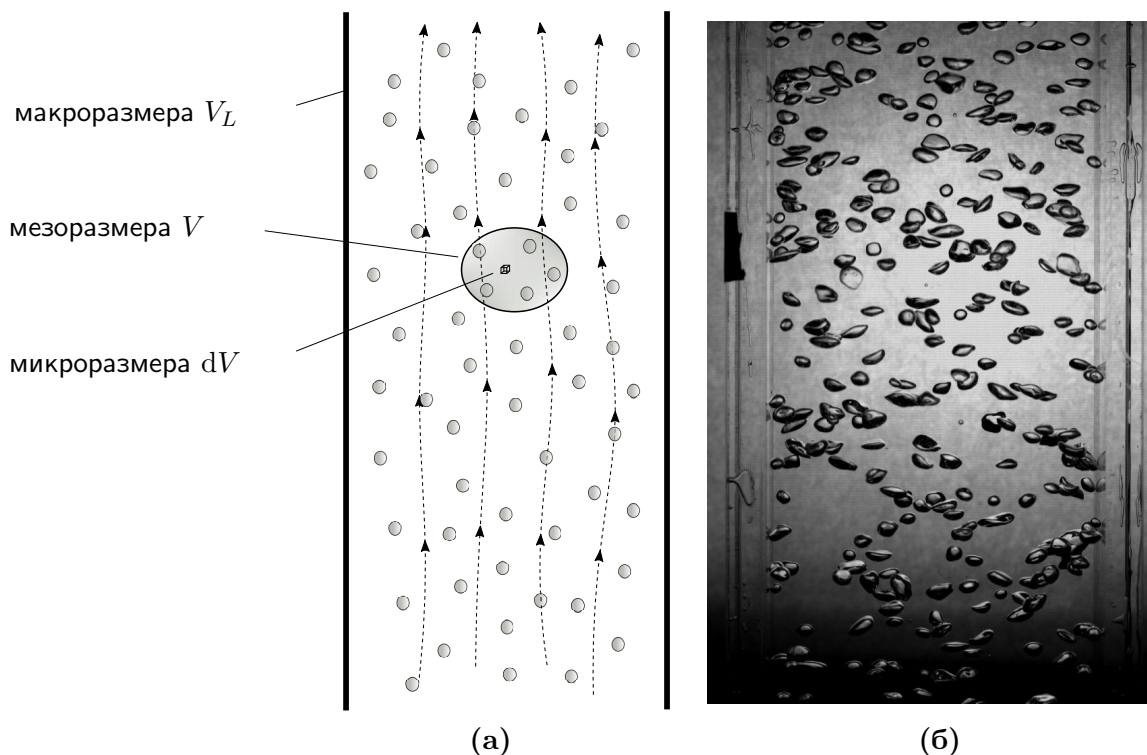
Последње поглавље 7 представља закључак. Још једном је дат преглед онога што је урађено и приказано у дисертацији. У овом поглављу су наведени најважнији закључци до којих се дошло. Закључује се да ли су остварени задати циљеви дисертације и наводи се који су правци даљих истраживања.

Основне једначине вишефазних струјања

2.1 Процедуре осредњавања

На слици 2.1 је приказано вишефазно струјање које чине вода и мехурови ваздуха. Струјање се одвија навихе кроз вертикалну цев. На слици 2.1 (б) је приказано како мехурасто струјање изгледа у стварности. Слика је део резултата експерименталног испитивања описаног у поглављу 6. На слици 2.1 (а) приказана је скица двофазног мехурастог струјања, на којој се виде границе струјног простора и присуство једне и друге фазе.

Да би се дошло до основних једначина механике флуида које описују вишефазно струјање, најпре ће се разматрати једноставнији случај, а то је једнофазно струјање. Замислимо да се унутар приказаног струјног простора налази само једна фаза. Диференцијалне једначине механике флуида важе у свакој тачки струјног тока, тачније, у свакој елементарној запремини dV посматраног флуида који струји.



Слика 2.1. Вишефазно струјање мехурова гаса у течности: (а) скица, (б) слика настала током експерименталног испитивања, описаног у поглављу 6.

За случај једнофазног струјања флуида, закон одржања масе, закон о промени количине кретања и једначина енергије гласе:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F}_m \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{U} + \Phi_H \quad (2.3)$$

Физичке величине које се појављују у основним једначинама (2.1) - (2.3) су диференцијабилне у свакој тачки струјног простора. Могу ли се ове једначине искористити за описивање вишефазног струјања?

Модел два флуида предвиђа да се свака од фаза које учествују у струјању третира као засебан флуид. Свака фаза има свој систем основних једначина (2.1) - (2.3). Како би се означило којој фази одговарају једначине уводи се горњи индекс k , тако да систем основних једначина постаје:

$$\frac{\partial \rho^k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^k \mathbf{U}^k) = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho^k \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial t} + \rho^k \mathbf{U}^k \cdot \nabla \mathbf{U}^k = -\nabla p^k + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^k + \mathbf{F}_m^k \quad (2.5)$$

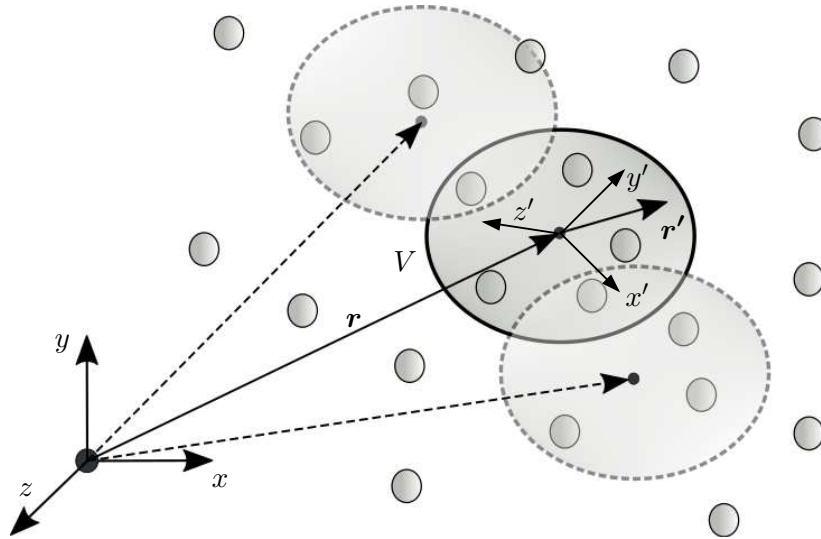
$$\rho^k \frac{DH^k}{Dt} = \frac{\partial p^k}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q}^k + \mathbf{F}_m^k \cdot \mathbf{U}^k + \Phi_H^k \quad (2.6)$$

Систем једначина (2.4) - (2.6) се разликује од система једначина (2.1) - (2.3) по томе што произвољна физичка величина ϕ^k није диференцијабилна у свакој тачки струјног простора. То се може објаснити на примеру брзине. Ако се унутар струјног простора (слика 2.1) уочи тачка у којој се налази вода, може се дефинисати њена брзина. У њеној близини се може налазити мехур ваздуха, тако да се у овој суседној тачки не може дефинисати вредност брзине воде. То значи да ће све разделне површи, којих је у случају мехурастог струјања много, представљати површи дисконтинуитета, односно, функције које описују промену физичких величина у простору, на овим површима имају прекид прве врсте.

Због тога је потребно извршити запреминско, тј. просторно осредњавање. Тако осредњене физичке величине ће бити диференцијабилне у свакој тачки струјног простора.

У ту сврху, на слици 2.1 (а) се уочава запремина V . Важно је на који начин се одређују димензије ове запремине. Запремина V по којој се врши осредњавање (мезоразмера) треба да буде таква да је њена карактеристична димензија довољно већа од карактеристичних димензија елемената појединих фаза (нпр. пречника честице или пречника мехура), како би садржала репрезентативне узорке свих фаза које струје. Са друге стране, запремина V треба да буде довољно мања од целокупног струјног простора (макроразмера V_L) у којем се струјање одвија. Ово подсећа на дефиницију флуидног делића (микроразмера dV) при једнофазном струјању флуида. Флуидни делић мора бити довољно велики да садржи довољан број молекула флуида како би била оправдана претпоставка о коонтинуму (непрекидности материје), али мора бити и довољно мали да би било оправдано сматрати да нема промена вредности физичких величина по флуидном делићу. На овај начин постављене су горња и доња граница за величину флуидног делића. Слично је и са контролном запремином V по којој се врши просторно (запреминско) осредњавање при вишефазном струјању.

Око сваке тачке струјног простора се уочава запремина V која у себи садржи једну и другу фазу. Положај те тачке (центра запремине V) је дефинисан вектором положаја \mathbf{r} преко координатног система x, y, z , како је приказано на слици 2.2. Унутар контролне запремине V користи се локални координати систем (x', y', z') и вектор положаја \mathbf{r}' .



Слика 2.2. Запреминско осредњавање по запремини V .

Физичка величина ϕ се запремински осредњавања следећим поступком:

$$\langle \phi \rangle_V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V} \iiint_V \phi(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t) dV' \quad \langle \phi \rangle_V = \langle \phi \rangle_V(x, y, z, t) \quad (2.7)$$

Када се поступак запреминског осредњавања (2.7) примени за сваку тачку струјног простора (слика 2.2), добија се поље физичке величине $\langle \phi \rangle_V$ које је запремински осредњено. Поље ове физичке величине нема дисконтинуитете, што значи да је оно диференцијабилно у свакој тачки струјног простора.

Проблем појаве дисконтинуитета услед присуства различитих фаза је решен запреминским осредњавањем. Поред тога, струјање свих или неке од фаза се често одвија у турбулентном режиму, тако да је потребно применити и временско осредњавање. За статистички стационарну турбуленцију примењује се Рејнолдсово осредњавање по временском интервалу T :

$$\bar{\phi} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi(x, y, z, t) dt \quad \bar{\phi} = \bar{\phi}(x, y, z) \quad (2.8)$$

За случај статистички нестационарне турбуленције примењује се осредњавање по ансамблу:

$$\langle \phi \rangle_E = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(x, y, z, t) \quad \langle \phi \rangle_E = \langle \phi \rangle_E(x, y, z, t) \quad (2.9)$$

Захваљујући поступку осредњавања основне једначине вишефазног струјања могу бити коришћене у прорачуну јер се осредњавањем елиминишу локалне и тренутне варијације физичких величина (флукуације). Са друге стране, ово значи да се губи део информација о пољима ових физичких величина.

Осредњавањем основних једначина поступцима осредњавања било по ансамблу или

по запремини, добија се њихов исти облик. Надаље ће се користити ознака $\langle \phi \rangle$ да се представи запремински осредњена вредност величине ϕ .

2.2 Закон одржања масе

Већ је показана једначина (2.4), која представља закон одржања масе за фазу k :

$$\frac{\partial \rho^k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^k \mathbf{U}^k) = 0.$$

Она важи за инфинитезималну запремину dV која је испуњена фазом k . У једном тренутку времена елементарна запремина dV испуњена је само једном фазом флуида. Како би се означило у којим тачкама струјног простора се у тренутку t налази фаза k уводи се **функција показивача (распознавања) фазе** $\chi^k = \chi^k(x, y, z, t)$. Она има вредност:

$$\chi^k(x, y, z, t) = \begin{cases} 1, & \text{ако се у тачки } (x, y, z) \text{ у тренутку } t \text{ налази фаза } k, \\ 0, & \text{у супротном случају.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Свака фаза k има своју функцију χ^k (слика 2.3). Потребно је функцију распознавања фазе увести у једначину (2.4) да би она важила за фазу k у целом струјном пољу. У оним деловима струјног поља где се не налази фаза k , функција ће имати вредност $\chi^k = 0$. Због тога се једначина континуитета (2.4) за фазу k множи функцијом χ^k :

$$\chi^k \frac{\partial \rho^k}{\partial t} + \chi^k \nabla \cdot (\rho^k \mathbf{U}^k) = 0. \quad (2.11)$$

Да би се претходна једначина довела до облика који је погодан за даље решавање потребно је искористити тврдњу да је материјални извод функције χ^k дефинисан помоћу брзине разделне површи \mathbf{U}^{int} , једнак нули [32]:

$$\frac{D\chi^k}{Dt} = \frac{\partial \chi^k}{\partial t} + \mathbf{U}^{\text{int}} \cdot \nabla \chi^k = 0 \quad (2.12)$$

Објашњење за ову тврдњу је следеће: ако се флуидни делић или тачка коју посматрамо, креће брзином разделне површи ($\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^{\text{int}}$) она неће стићи разделну површ и у тој тачки неће доћи до промене вредности функције χ^k .

Коришћењем једначине (2.12) први сабирак из једначине (2.11) се може представити на следећи начин:

$$\chi^k \frac{\partial \rho^k}{\partial t} = \frac{\partial(\chi^k \rho^k)}{\partial t} - \rho^k \frac{\partial \chi^k}{\partial t} \xrightarrow{(2.12)} \chi^k \frac{\partial \rho^k}{\partial t} = \frac{\partial(\chi^k \rho^k)}{\partial t} + \rho^k \mathbf{U}^{\text{int}} \cdot \nabla \chi^k,$$

а на основу теорије поља, други сабирак из једначине (2.11) се може записати као:

$$\chi^k \nabla \cdot (\rho^k \mathbf{U}^k) = \nabla \cdot (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k) - \rho^k \mathbf{U}^k \cdot \nabla \chi^k.$$

Каде се претходни изрази уврсте у једначину (2.11) добија се:

$$\frac{\partial(\chi^k \rho^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k) = \rho^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k. \quad (2.13)$$

На претходну једначину се примењује осредњавање по контролној запремини V (2.7), при чему важе следећа правила осредњавања $\langle\langle a \rangle\rangle = \langle a \rangle$, $\langle a+b \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle$, $\langle\langle a \rangle b \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle$, $\langle \frac{\partial a}{\partial t} \rangle = \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial t}$, $\langle \frac{\partial a}{\partial x_j} \rangle = \frac{\partial \langle a \rangle}{\partial x_j}$, тако да једначина (2.13) постаје:

$$\frac{\partial \langle \chi^k \rho^k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \rangle = \underbrace{\langle \rho^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k \rangle}_{\Gamma^k}. \quad (2.14)$$

За разлику од једначине (2.11), једначина (2.14) има облик који је погодан за нумеричко решавање јер се на левој страни једначине налазе временски члан и конвективни члан који је записан у облику дивергенције (конзервативни облик). Ово омогућава да се све основне једначине сведу на општи, заједнички облик, што олакшава нумеричко решавање. На десној страни се појављује изворски члан Γ^k који представља прелазак материје из једне фазе у другу. Овај транспорт масе се одвија преко разделне површи између две фазе. Унутар запремине V , по којој је осредњена претходна једначина, може бити много разделних површи између фаза.

2.3 Закон о промени количине кретања

Изразом (2.5) је приказано како гласи векторски облик једначине која проистиче из закона о промени количине кретања фазе k :

$$\rho^k \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial t} + \rho^k \mathbf{U}^k \cdot \nabla \mathbf{U}^k = -\nabla p^k + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^k + \mathbf{F}_m^k.$$

Лева страна једначине садржи локални и конвективни члан који описују промену количине кретања флуида. На десној страни се налазе јединичне силе које делују на флуид унутар инфинитезималне запремине dV , а то су сила притиска, јединична површинска сила која потиче од вискозности и јединична запреминска сила (у пољу силе земљине теже то је $\rho^k g$ [N/m³]). Ако се из једначине изостави горњи индекс k она важи за случај када се у струјном простору налази један флуид у једном фазном облику (једнофазно струјање флуида).

Да би локални облик једначине кретања фазе k (2.5) важио у целом струјном пољу, потребно је једначину помножити са функцијом показивача (распознавања) фазе χ^k :

$$\underbrace{\chi^k \rho^k \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial t}}_1 + \underbrace{\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \cdot \nabla \mathbf{U}^k}_2 = \underbrace{-\chi^k \nabla p^k}_3 + \underbrace{\chi^k \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^k}_4 + \underbrace{\chi^k \mathbf{F}_m^k}_5. \quad (2.15)$$

Као што је дефинисано једначином (2.10), у оним тачкама струјног простора у којима се налази фаза k , функција има вредности $\chi^k = 1$. У супротном, њена вредност је $\chi^k = 0$. Да би једначина (2.15) била доведена до облика који је погоднији за нумеричко решавање (облик дивергенције), њени чланови ће бити приказани у измењеним облицима. Тако први сабирач постаје:

$$\textcircled{1} \quad \chi^k \rho^k \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial t} = \frac{\partial (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k)}{\partial t} - \mathbf{U}^k \frac{\partial (\chi^k \rho^k)}{\partial t},$$

На основу једначине континуитета (2.13) и теорије поља последњи сабирак у претходној једначини се може даље трансформисати, тако да следи:

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k)}{\partial t} + \mathbf{U}^k \cdot \nabla (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k) - \rho^k \mathbf{U}^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k. \quad (2.16)$$

Остали чланови једначине (2.15) се могу приказати као:

$$\textcircled{2} \quad \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \cdot \nabla \mathbf{U}^k = \nabla \cdot \left(\chi^k \rho^k \underbrace{\mathbf{U}^k \mathbf{U}^k}_* \right) - \mathbf{U}^k \cdot \nabla (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k), \quad (2.17)$$

$$\textcircled{3} \quad -\chi^k \nabla p^k = -\nabla (\chi^k p^k) + p^k \nabla \chi^k, \quad (2.18)$$

$$\textcircled{4} \quad \chi^k \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^k = \nabla \cdot (\chi^k \boldsymbol{\tau}^k) - \boldsymbol{\tau}^k \nabla \cdot \chi^k. \quad (2.19)$$

Члан који је у једначини (2.17) означен (*) представља тензорски или дијадни производ два вектора, што за резултат даје тензор. Овај производ може бити означен и на следећи начин $\mathbf{U}^k \otimes \mathbf{U}^k$. Када се изрази од (2.16) до (2.19) уврсте у једначину (2.15) она постаје:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k) &= -\nabla (\chi^k p^k) + \nabla \cdot (\chi^k \boldsymbol{\tau}^k) + \chi^k \mathbf{F}_m^k + \\ &+ \rho^k \mathbf{U}^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k + p^k \nabla \chi^k - \boldsymbol{\tau}^k \cdot \nabla \chi^k. \end{aligned}$$

Сада се на добијену једначину примењује осредњавање по запремини V која је приказана на слици 2.2. Поступак осредњавања је дефинисан једначином (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k \rangle &= -\nabla \langle \chi^k p^k \rangle + \nabla \cdot \langle \chi^k \boldsymbol{\tau}^k \rangle + \langle \chi^k \mathbf{F}_m^k \rangle + \\ &+ \underbrace{\langle \rho^k \mathbf{U}^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k \rangle + \langle p^k \rangle \langle \nabla \chi^k \rangle - \langle \boldsymbol{\tau}^k \cdot \nabla \chi^k \rangle}_{\Omega^k}. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Једначина (2.20) представља векторску једначину кретања фазе k , у конзервативном облику, која је осредњена по запремини V . Последњи сабирак Ω^k је изворски члан количине кретања. Овај члан, као и изворски члан у једначини континуитета (2.14), захтевају детаљније појашњење.

2.4 Једначина енергије

Закон одржања енергије, или први закон термодинамике, за флуидни делић запремине dV у којем се налази фаза k , и који је изражен преко тоталне енталпије, према изразу (2.6) гласи:

$$\rho^k \frac{DH^k}{Dt} = \frac{\partial p^k}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{q}^k + \mathbf{F}_m^k \cdot \mathbf{U}^k + \Phi_H^k$$

Промена тоталне енталпије зависи од снаге сила притиска, доведене количине топлоте, снаге запреминских сила и вискозне дисипације. Ако се из једначине енергије изостави ознака фазе k , једначина важи за једнофазно струјање.

Да би се добила једначина енергије за фазу k која је применљива у целом струјном простору кроз које се одвија струјање више фаза, једначина промене тоталне енталпије (2.6) ће најпре бити помножена функцијом показивача фазе χ^k . Материјални извод тоталне енталпије се представља као збир локалног и конвективног дела:

$$\chi^k \rho^k \frac{\partial H^k}{\partial t} + \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \cdot \nabla H^k = \chi^k \frac{\partial p^k}{\partial t} - \chi^k \nabla \cdot \mathbf{q}^k + \chi^k \mathbf{F}_m^k \cdot \mathbf{U}^k + \chi^k \Phi_H^k. \quad (2.21)$$

Како би што више сабирака у једначини (2.21) било приказано у облику дивергенције, примењују се следеће једнакости [1]:

$$\begin{aligned} \chi^k \rho^k \frac{\partial H^k}{\partial t} &= \frac{\partial(\chi^k \rho^k H^k)}{\partial t} + H^k \nabla \cdot (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k) - \rho^k H^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k, \\ \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \cdot \nabla H^k &= \nabla \cdot (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k H^k) - H^k \nabla \cdot (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k), \\ \chi^k \frac{\partial p^k}{\partial t} &= \frac{\partial(\chi^k p^k)}{\partial t} - p^k \frac{\partial \chi^k}{\partial t}, \\ \chi^k \nabla \cdot \mathbf{q}^k &= \nabla \cdot (\chi^k \mathbf{q}^k) - \mathbf{q}^k \cdot \nabla \chi^k, \\ \chi^k \Phi_H^k &= \chi^k \nabla \cdot (\mathbf{U}^k \cdot \boldsymbol{\tau}^k) = \underbrace{\nabla \cdot (\chi^k \mathbf{U}^k \cdot \boldsymbol{\tau}^k)}_{\Phi_H^k} - \underbrace{\mathbf{U}^k \cdot \boldsymbol{\tau}^k \cdot \nabla \chi^k}_{\Phi^{\text{II}}}. \end{aligned}$$

Узевши у обзир приказане једнакости, једначина (2.21) постаје:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\chi^k \rho^k H^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\chi^k \rho^k \mathbf{U}^k H^k) &= \frac{\partial(\chi^k p^k)}{\partial t} - \nabla \cdot (\chi^k \mathbf{q}^k) + \chi^k \mathbf{F}_m^k \cdot \mathbf{U}^k + \Phi_H^k + \\ &+ \rho^k H^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k + \mathbf{q}^k \cdot \nabla \chi^k - p^k \frac{\partial \chi^k}{\partial t} + \Phi^{\text{II}}. \end{aligned}$$

Сабирци у другом реду ће бити проглашени за изворски члан, након што се изврши осредњавање једначине по запремини V дефинисано једначином (2.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \chi^k \rho^k H^k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k H^k \rangle &= \frac{\partial \langle \chi^k p^k \rangle}{\partial t} - \nabla \cdot \langle \chi^k \mathbf{q}^k \rangle + \langle \chi^k \rangle \langle \mathbf{F}_m^k \cdot \mathbf{U}^k \rangle + \langle \Phi_H^k \rangle + \\ &+ \underbrace{\langle \rho^k H^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k \rangle + \langle \mathbf{q}^k \cdot \nabla \chi^k \rangle - \langle p^k \rangle \langle \frac{\partial \chi^k}{\partial t} \rangle}_{\Pi_H^k} + \langle \Phi^{\text{II}} \rangle. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Једначина (2.22) представља закон промене енергије изражен преко тоталне енталпије. Једначина је осредњена по контролној запремини V , а последњи сабирак Π_H^k представља изворски члан који је одговоран за размену енталпије између фаза, која се одвија кроз разделну површ.

2.5 Размена масе, количине кретања и енергије између фаза

У основним једначинама се појављују изворски чланови који потичу од размене масе, количине кретања (импулса) и енергије између фаза. Размена се одвија преко разделне површи, која је приказана на слици 2.3. **Изворски члан у једначини континуитета** (2.14) гласи:

$$\Gamma^k = \langle \rho^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k \rangle.$$

У делу струјног простора који је испуњен фазом k вредност функције показивача фазе се не мења и износи 1, према једначини (2.10). Према истој једначини, са друге стране разделне површи где се не налази фаза k , вредност функције показивача фазе је 0. У оба случаја важи $\chi^k = \text{const}$, па следи да изворски члан у овим областима не постоји $\nabla \chi^k = 0 \Rightarrow \Gamma^k = 0$. Једино на разделној површи где се мења вредност функције $\chi^k \neq \text{const}$ може постојати изворски члан Γ^k . Још један услов за постојање размене масе кроз разделну површ (Γ^k) јесте да брзина фазе k на разделној површи није једнака брзини саме разделне површи, тј. да постоји релативна брзина фазе k у односу на разделну површ. Показано је да се члан $\nabla \chi^k$ понаша као *делта функција* δ_s [33], која зависи од положаја тачке у којој се дефинише, положаја разделне површи и временског тренутка, тако да се може записати $\nabla \chi^k = \mathbf{n}^k \delta_s$, при чему је \mathbf{n}^k јединични вектор нормале на разделну површ, који је усмерен ка фази k . Узевши ово у обзир, изворски члан једначине континуитета постаје:

$$\Gamma^k = \langle \rho^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \mathbf{n}^k \delta_s \rangle, \quad (2.23)$$

и представља масени проток из суседне фазе у фазу k кроз разделну површ. Овом приликом материја само мења облик (фазу), тако да је добитак масе за једну фазу уједно губитак масе за другу фазу ($\Gamma^1 = -\Gamma^2$). Према закону одржања масе важи:

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma^k = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^2 \langle \rho^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \mathbf{n}^k \delta_s \rangle = 0.$$

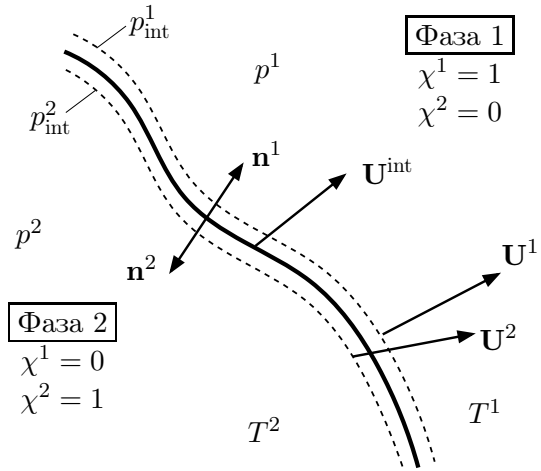
Такође, у било којој тачки разделне површи важи $\mathbf{n}^1 = -\mathbf{n}^2$.

Изворски члан у једначини количине кретања фазе k (2.20) је:

$$\Omega^k = \langle \rho^k \mathbf{U}^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k \rangle + \langle p^k \rangle \langle \nabla \chi^k \rangle - \langle \boldsymbol{\tau}^k \nabla \cdot \chi^k \rangle$$

Као што се види на слици 2.3, притисак на разделној површи са стране која је у додиру са фазом k (p_{int}^k), се може представити као збир притиска у фази k (p^k) и разлике ова два притиска (Δp_{int}^k):

$$p_{\text{int}}^k = p^k + \Delta p_{\text{int}}^k \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} p^k = p_{\text{int}}^k - \Delta p_{\text{int}}^k \\ \Delta p_{\text{int}}^k = p_{\text{int}}^k - p^k \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad p^k = p_{\text{int}}^k + (p^k - p_{\text{int}}^k).$$



Слика 2.3. Део разделне површи која се налази између две фазе (фаза 1 и фаза 2).

Као и при приказивању изворског члана у једначини континуитета, користи се да је $\nabla\chi^k = \mathbf{n}^k\delta_s$. Сада изворски члан Ω^k постаје:

$$\Omega^k = \underbrace{\langle \rho^k \mathbf{U}^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \mathbf{n}^k \delta_s \rangle}_1 + \underbrace{\langle p_{\text{int}}^k \rangle \langle \nabla \chi^k \rangle + \langle (p^k - p_{\text{int}}^k) \nabla \chi^k - \boldsymbol{\tau}^k \nabla \cdot \chi^k \rangle}_2. \quad (2.24)$$

Приликом размене масе кроз разделну површ уједно се врши и размена количине кретања, јер сваки покретни део материје има своју количину кретања коју носи са собом. То је у једначини (2.24) приказано првим сабирком ①, који означава конвективни пренос количине кретања. Други сабирак ② представља пренос количине кретања кроз разделну површ услед неравномерности поља притиска и дејства вискозних сила. Као што ће бити приказано, овај сабирак се моделира различитим силама које имају задатак да опишу ове процесе преноса количине кретања. Сума размење количине кретања између фаза је:

$$\sum_{k=1}^2 \Omega^k = \sum_{k=1}^2 \left(\langle \rho^k \mathbf{U}^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \mathbf{n}^k \delta_s \rangle + \langle p_{\text{int}}^k \rangle \langle \nabla \chi^k \rangle + \langle (p^k - p_{\text{int}}^k) \nabla \chi^k - \boldsymbol{\tau}^k \nabla \cdot \chi^k \rangle \right) = \mathbf{F}_\sigma. \quad (2.25)$$

За разлику од једначине континуитета, у једначини кретања сума изворских чланова није једнака нули, јер неће сва количина кретања, коју изгуби једна фаза, да пређе у количину кретања друге фазе. Када се примењује модел мешавине, тј. када се вишефазно струјање третира као струјање једне фазе промењених својстава, тада се ова сума представља као допунски члан \mathbf{F}_σ у једначини кретања мешавине.

Изворски члан у једначини енергије (2.22) гласи:

$$\Pi_H^k = \langle \rho^k H^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k \rangle + \langle \mathbf{q}^k \cdot \nabla \chi^k \rangle - \langle p^k \rangle \langle \frac{\partial \chi^k}{\partial t} \rangle + \langle \Phi^\Pi \rangle.$$

Изворски члан се састоји од четири сабирка. Први представља преношење енергије кроз разделну површ услед размене материје. Количина материје која од суседне фазе l пређе ка фази k кроз разделну површ, носи са собом одређену количину енергије. Други сабирак $\langle \mathbf{q}^k \cdot \nabla \chi^k \rangle = \langle \mathbf{q}^k \cdot \mathbf{n}^k \delta_s \rangle$ представља флукс топлотне енергије од суседне фазе l ка фази k кроз разделну површ. Размена топлоте се одвија као последица термодинамичке неравнотеже, тј. ако је $T^1 \neq T^2$ (слика 2.3). Преостала два сабирка представљају рад сила притиска и вискозних сила које делују на разделну површ.

Сума изворских чланова свих фаза које учествују у струјању је:

$$\sum_{k=1}^2 \Pi_H^k = \sum_{k=1}^2 \left[\langle \rho^k H^k (\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \nabla \chi^k \rangle + \langle \mathbf{q}^k \cdot \nabla \chi^k \rangle - \langle p^k \rangle \langle \frac{\partial \chi^k}{\partial t} \rangle + \langle \Phi^\Pi \rangle \right] = \zeta. \quad (2.26)$$

У моделу мешавине ова сума изворских чланова, означена са ζ , представља рад у јединици времена који се изврши услед деловања површинског напона на разделној површи.

Турбуленција у вишефазним струјањима

До сада је на основне једначине у локалном облику примењено осредњавање по контролној запремини V дефинисано једначином (2.7). Уколико се струјање барем једне фазе одвија у турбулентном режиму, што најчешће јесте случај, изведене основне једначине (2.14), (2.20) и (2.22) нису применљиве у практичним прорачунима. Разлог је што се физичке величине мењају хаотично, како у времену, тако и у простору, што представља једну од карактеристика турбулентног струјања. Због тога је потребно на одговарајући начин анализирати феномен турбуленције. Постоји више праваца за остваривање тог циља:

- концепт турбулентне вискозности,
- симулација великих вртлога,
- директна нумеричка симулација.

3.1 Основна својства турбуленције

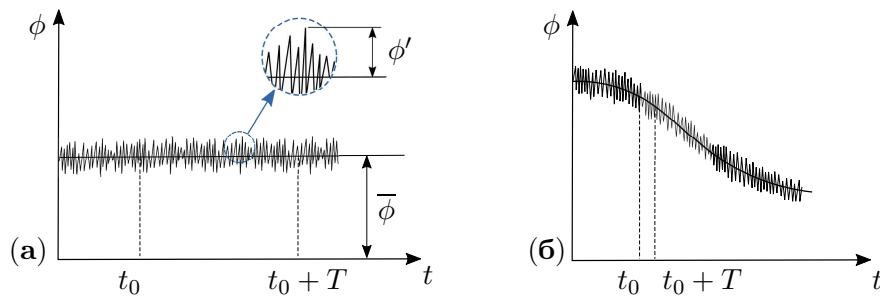
Струјање флуида се може одвијати у ламинарном или турбулентном режиму. У ламинарном режиму слојеви флуида струје у уређеном поретку, док у турбулентном режиму струјање има својства хаотичности и непредвидивости. Бездимензијска величина на основу које се може одредити режим струјања је Рејнолдсов број Re , који представља однос инерцијалних и вискозних сила у флуиду.

Не постоји општа дефиниција која обухвата и објашњава појаву турбуленције, али се могу издвојити својства турбулентног режима струјања која су очигледна приликом његовог посматрања.

- Турбулентно струјање је неуређено, хаотично и непредвидиво. Струјни ток садржи вртлоге различитих димензија. Кроз једну тачку струјног простора у току времена прођу различити делови различитих вртлога, тако да је промена физичких величина флуида у тој тачки у току времена напредвидива. Уобичајено је да она изгледа онако како је приказано на слици 3.1 (а) за статистички стационарну и (б) за статистички нестационарну турбуленцију.

Са оваквим подацима је отежано баратати, а поред тога, инжењерска пракса најчешће захтева осредњене вредности, па је Рејнолдс предложио да се изврши временско осредњавање посматране физичке величине. Тиме је тренутно поље неке физичке величине ϕ растављено на осредњено $\bar{\phi}$ и флукутирајуће ϕ' . Флукутација

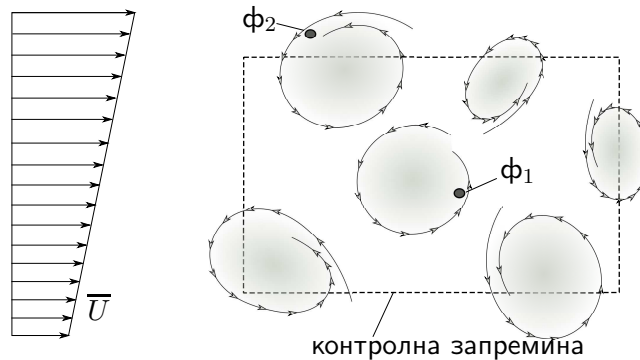
представља тренутно одступање вредности физичке величине од њене средње вредности.



Слика 3.1. Промена вредности физичке величине ϕ у току времена за статистички стационарну (а) и статистички нестационарну турбуленцију (б).

- Турбулентно струјање ствара процес турбулентне дифузије. Процес мешања се врши брже и боље него при ламинарном струјању. Ако се уоче два флуидна делића ϕ_1 и ϕ_2 (слика 3.2) који припадају различитим вртлозима, они у једном тренутку времена могу бити удаљени један од другог, а затим доћи у непосредну близину услед ротације и деформисања вртлога. Услед неуређеног кретања флуидних делића боља је њихова међусобна размена количине кретања и енергије. Ово својство бољег мешања је у неким процесима пожељно, а у другим штетно.

На слици 3.2 у струјном току флуида уочена је контролна запремина која садржи вртоге различитих величина. Јасно је да ће услед вртложног кретања размена количине кретања и енергије између флуида унутар контролне запремине и изван ње, бити већа. Што је турбуленција интензивнија то ће се процес мешања обављати боље и брже.



Слика 3.2. Приказ вртложних структура у контролној запремини. Са леве стране је приказан профил осредњене брзине. [40]

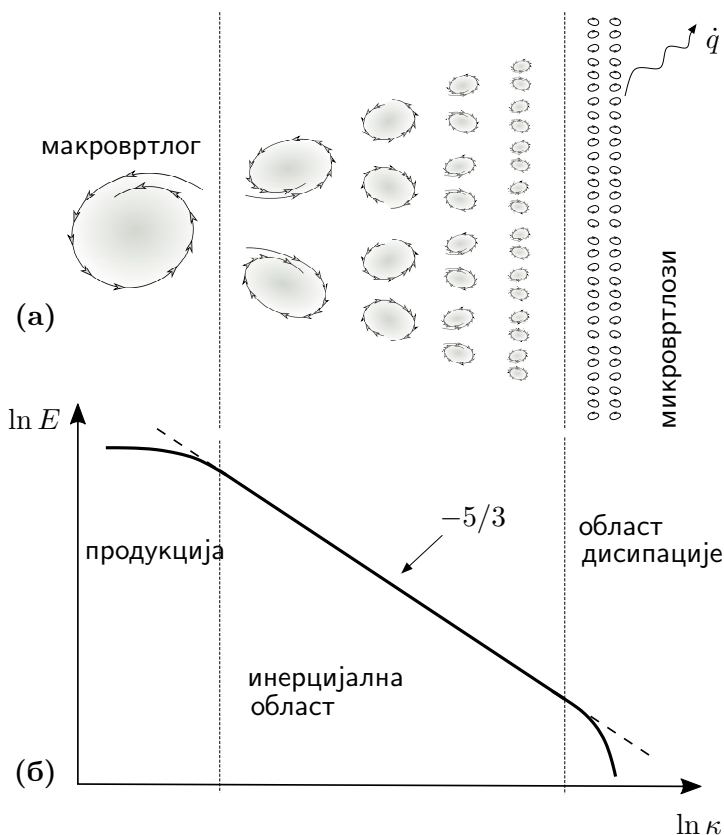
- Велике вредности Рејнолдсовог броја Re владају у струјном пољу. Нпр. за остваривање тубулентног струјања у цеви потребно је да буде испуњен услов $Re_D > 2300$, а да би струјање унутар граничног слоја на равной плочи било турбулентно $Re_x > 500000$, при чему је карактеристична димензија у првом случају пречник цеви, а у другом низструјно растојање од почетка равне плоче.
- Турбуленција је увек тродимензионална. Када се у нумеричким прорачунима третирају осредњене једначине, струјање може бити посматрано као дводимензијско или једнодимензијско.

- Приликом турбулентног струјања долази до дисипације, тј. расипања енергије, јер се услед трења кинетичка енергија малих вртлога претвара у топлоту, чиме се повећава унутрашња енергија флуида. Мали вртлози кинетичку енергију добијају од већих, они од још већих и све тако до макровртлога, тј. највећих вртлога у струјном пољу, који енергију узимају од главног струјног тока. Овај процес преношења енергије од највећих до најмањих вртлога се назива процес каскадног распадања вртлога или каскада вртлога.

3.2 Теорија Колмогорова

У турбулентном струјном пољу налазе се вртлози различитих величина и фреквенција. Размера највећих вртлога зависи од геометрије струјног простора, нпр. пречника цеви, степена наглог проширења итд. Они узимају енергију од главног тока флуида. Услед нестабилности, они се у низструјном току распадају на мање вртлоге, предајући њима своју кинетичку енергију. Ови вртлози се распадају на још мање и тако се наставља процес каскадног распадања вртлога. На крају овог процеса се налазе најмањи вртлози чије даље распадање не дозвољавају вискозне силе. Силе унутрашњег трења у микровртлозима, односно вискозне силе, противе се даљем распадању и кинетичку енергију претварају у топлоту. Ово се назива расипање или дисипација енергије. Дисипација је означена са ε [m^2/s^3] и представља енергију флуида по јединици масе која се у јединици времена расипа, тј. неповратно претвара у топлоту.

Процес каскадног распадања вртлога је приказан на слици 3.3 (а). Он је описан теоријом Колмогорова, према којој се цео процес састоји из три дела. У првом делу, који се назива **продукција**, услед постојања смичућег струјања (градијента брзине) и довољног интензитета инерцијалних сила, долази до стварања макровртлога. Они поседују кинетичку енергију која је преузета од главног струјног тока. Услед нестабилности макровртлози се распадају на ситније вртлоге и тиме почиње друга област која се назива **инерцијална област**. У овој области непрестаним распадањем већих вртлога на више мањих врши се пренос кинетичке енергије, а губици енергије услед вискозности се занемарују. Када, услед распадања и уситњавања, вртлози постану довољно мали да у њима примат имају вискозне силе, тада наступа трећа област која се назива **област дисипације**.



Слика 3.3. Каскада вртлога (а) и енергетски спектар турбуленције (б).

кровртлога се назива размера Колмогорова.

Може се увести таласни број κ који је обрнуто пропорционалан вредности дужинске размере вртлога l (карактеристична димензија), и одређује се као:

$$\kappa = \frac{2\pi}{l}.$$

Енергетски спектар турбуленције се може дефинисати као кинетичка енергија вртлога по јединици масе, која је сведена на јединицу таласног броја и означава се са $E(\kappa)$, а димензија је $[\text{m}^3/\text{s}^2]$. Промена енергетског спектра турбуленције са таласним бројем је приказана на слици 3.3.

Види се да вртлози великих размера (малог таласног броја) имају велику кинетичку енергију. Распадањем вртлога смањује се њихова карактеристична димензија, повећава се таласни број, а кинетичка енергија опада. Мањи вртлог има мању кинетичку енергију, али оваквих вртлога је све више, тако да укупна кинетичка енергија у инерцијалној области остаје приближно иста, јер је утицај вискозних сила мали. Када таласни број довољно порасте, а то значи да вртлози постану веома мали и достигну размеру Колмогорова, кинетичка енергија се расипа (дисипира) и прелази у топлоту, као што се види на слици 3.3.

Може се дефинисати локални Рејнолдсов број за вртлог, који ће зависити од карактеристичне димензије вртлога, његове карактеристичне брзине (што може бити тангенцијална компонента брзине на ободу вртлога) и кинематске вискозности флуида. У каскадном процесу од великих вртлога ка најмањим вртлозима који нестају, Рејнолдсов број опада. Ово значи да при малом таласном броју (велики вртлози), доминантне су инерцијалне силе, а вискозне имају мали утицај. Однос ових сила се у инерцијалној области мења у корист вискозних сила, али оне су и даље мале. У области дисипације вискозне силе имају доминантан утицај на понашање вртлога.¹

Инерцијална област се још може назвати и транспортна област. Она енергија која у јединици времена буде претворена у топлоту у области дисипације ε , јесте она енергија која је у јединици времена транспортована од вртлога до вртлога у инерцијалној области. Овај енергетски флуks је за инерцијалну област приближно константан.² Колмогоров је дефинисао законитост која важи за енергетски спектар турбуленције у инерцијалној области:

$$E(\kappa) = C_\kappa \varepsilon^{\frac{5}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} \quad \text{или} \quad \ln E(\kappa) = \ln \left(C_\kappa \varepsilon^{\frac{5}{3}} \right) - \frac{5}{3} \ln \kappa.$$

C_κ представља коефицијент Колмогорова, чија је вредност је одређена експериментално и износи $C_\kappa \approx 1,5$. Ова зависност енергетског спектра турбуленције од таласног броја приказана је на дијаграму (слика 3.3 (б)). Види се да крива има нагиб $-5/3$. Експериментално је потврђено да овај закон важи за струјања са високом вредношћу Рејнолдсовог броја.

¹У уобичајеним инжењерским примерима турбулентног струјања, дужинска размера микровртлога (пречник) износи од 0,01 до 0,1 mm, а фреквенција обртања је реда величине 10 kHz [40]. Ако је флуид вода и ако је карактеристична брзина тангенцијална компонента брзине на ободу микровртлога, онда при наведеним условима Рејнолдсов број за вртлог има вредност реда величине 1. Даљим деловањем вискозних сила Рејнолдсов број опада.

²Смичуће силе постоје у свим размерама вртлога, али оне су изражене у вртлозима размере Колмогорова. Сматра се да од укупне енергије великих вртлога 10% дисипира у процесу распадања вртлога, а да 90% доспе до микровртлога, где се сва та енергија претвори у топлоту [41].

3.3 Временско осредњавање основних једначина

Веома је захтевно извршавање прорачуна коришћењем основних једначина у којима фигуришу физичке величине чија је промена у времену хаотична, као што је приказано на слици 3.1. Због тога је потребно над једначинама извршити временско осредњавање.

3.3.1 Рејнолдсово и Фавреово осредњавање

Рејнолдс је предложио да се тренутна вредност физичке величине ϕ прикаже као збир осредњене вредности $\bar{\phi}$ и флукуације ϕ' (видети слику 3.1):

$$\phi = \bar{\phi} + \phi', \quad \text{при чему је} \quad \bar{\phi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi dt.$$

Флукуација ϕ' представља тренутно одступање величине ϕ од средње вредности $\bar{\phi}$. Према дефиницији средње вредности, сума свих флукуација је једнака нули, тј. $\overline{\phi'} = 0$.

Процедура Рејнолдсовог осредњавања са својим правилима је довољна да се од основних једначина које описују једнофазно струјање нестишљивог флуида добију временски осредњене једначине (енгл. *Reynolds Averaged Navier Stokes equations - RANS*). Применом овакве процедуре из једначина је одстрањено хаотично понашање вредности физичких величина и оне се могу користити за даљи прорачун. Међутим, када се третирају једначине које описују стишљиво струјање флуида, сам поступак Рејнолдсовог осредњавања није довољан да би се добиле осредњене једначине. Као пример приказаће се поступак осредњавања једначине континуитета за стишљиво струјање флуида. Она гласи:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0.$$

Када се примени Рејнолдсов поступак раздвајања тренутне вредности физичке величине на осредњену и флукуирајућу, једначина континуитета постаје:

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{U}} + \rho' \bar{\mathbf{U}} + \bar{\rho} \mathbf{U}' + \rho' \mathbf{U}') = 0.$$

Након примене Рејнолдсовог осредњавања, једначина континуитета гласи:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{U}} + \overline{\rho' \mathbf{U}'}) = 0. \quad (3.1)$$

За разлику од једначине континуитета струјања нестишљивог флуида, овде се појављује средња вредност производа флукуација ($\overline{\rho' \mathbf{U}'}$). За решавање ове једначине потребно би било увести додатну претпоставку за овај члан.

Када се изврши осредњавање једначине кретања и једначине енергије за стишљиво струјање флуида, појављује се још оваквих чланова, укључујући и средњу вредност тро-струког производа флукуација. Да би се избегло појављивање оваквих чланова Фавре [34],[35] је предложио процедуру осредњавања по густини (осредњавање прерачунато по густини), која се за величину ϕ дефинише на следећи начин:

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\bar{\rho}} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} \rho \phi dt = \frac{\overline{\rho \phi}}{\bar{\rho}}. \quad (3.2)$$

Са леве стране се налази величина $\tilde{\phi}$ на коју је примењено Фавреово осредњавање по густини, а са десне стране једначине се налазе величина ϕ и густина на које је примењено Рејнолдсово (временско) осредњавање. Ако на место произвољне величине ϕ поставимо вектор брине добија се следеће:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \frac{\overline{\rho \mathbf{U}}}{\bar{\rho}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\rho} \tilde{\mathbf{U}} = \overline{\rho \mathbf{U}}$$

Ако се тренутне вредности величина на десној страни прикажу као збир временски осредњених и флукутирајућих вредности, а затим се примени Рејнолдсово осредњавање добија се:

$$\bar{\rho} \tilde{\mathbf{U}} = \overline{(\bar{\rho} + \rho') (\bar{\mathbf{U}} + \mathbf{U}')} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\rho} \tilde{\mathbf{U}} = \bar{\rho} \bar{\mathbf{U}} + \overline{\rho' \mathbf{U}'}} \quad (3.3)$$

У једначини (3.3) се види значај увођења Фавреовог означавања, а то је да оно у себи садржи спорни члан из једначине (3.1). Када се једначина (3.3) уврсти у једначину континуитета (3.1) следи:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{U}}) = 0. \quad (3.4)$$

Применом Фавреовог означавања за осредњавање по густини у једначини (3.4) је избегнуто појављивање додатних чланова који се јављају у једначини (3.1), што је био циљ. Једначина (3.4) представља једначину континуитета за стишљиво струјање флуида. Она изгледа веома слично једначини континуитета за струјање нестишљивог флуида која је осредњена на Рејнолдсов начин. Поступак Фавреовог означавања вредности осредњених по густини се може применити и на једначину количине кретања (Навије-Стоксову једначину) за стишљив флуид, чиме се добија осредњена једначина кретања (енгл. *Favre-averaged Navier-Stokes equations - FANS*). Наравно, исти поступак се може применити на једначину која описује закон о промени енергије.

Према Фавреу, тренутна вредност физичке величине ϕ се дели на осредњену и флукутирајућу:

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi''. \quad (3.5)$$

Фавреова флукуација ϕ'' у себи садржи ефекте флукуација густине и за њу не важе иста правила као за Рејнолдсову флукуацију ϕ' , што ће управо бити показано. Ако се једначина (3.5) помножи густином и затим се примени Рејнолдсово осредњавање, добија се:

$$\overline{\rho \phi} = \overline{\rho \tilde{\phi}} + \overline{\rho \phi''} \quad \Rightarrow \quad \overline{\rho \phi} = \bar{\rho} \tilde{\phi} + \overline{\rho \phi''}.$$

Позивањем на једначину (3.2) долази се до закључка да је временски осредњена вредност производа густине и Фавреове флукуације једнака нули:

$$\overline{\rho \phi} = \bar{\rho} \frac{\overline{\rho \phi}}{\bar{\rho}} + \overline{\rho \phi''} \quad \Rightarrow \quad \overline{\rho \phi''} = 0.$$

Ради осредњавања основних једначина, које следи, овде ће бити наведена основна правила Фавреовог осредњавања:

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\phi}} &= \tilde{\phi}, & \overline{\rho \tilde{\phi}} &= \bar{\rho} \tilde{\phi}, & \overline{\rho \phi''} &= 0, \\ \overline{\phi''} &= -\frac{\overline{\rho' \phi'}}{\bar{\rho}} \neq 0, & \overline{\rho \phi \psi} &= \bar{\rho} \tilde{\phi} \tilde{\psi} + \overline{\rho \phi'' \psi''}, & \overline{\rho \phi} &= \bar{\rho} \tilde{\phi}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Укратко је објашњен сам поступак Фавреовог осредњавања и приказана је његова

примена на једначину континуитета која описује стишљиво струјање флуида. Код вишефазног струјања чест је случај да се нека од фаза понаша као стишљив флуид, тако да се при временском осредњавању основних једначина вишефазног струјања користи поступак Фавреовог осредњавања. Величине у основним једначинама (2.14) и (2.20) су осредњене по контролној запремини V тако да се појављују и ознаке $\langle \rangle$ које на то указују. Такође, постоји горњи индекс k који обележава фазу, тако да израз за Фавреово осредњавање прерачунато **по густини**, са ознакама прилагођеним вишефазном струјању гласи:

$$\langle \widetilde{\phi^k} \rangle = \frac{\langle \rho^k \phi^k \rangle}{\langle \rho^k \rangle}, \quad \Rightarrow \quad \overline{\langle \rho^k \phi^k \rangle} = \overline{\langle \rho^k \rangle} \langle \widetilde{\phi^k} \rangle \quad (3.7)$$

На сличан начин се може увести појам Фавреовог осредњавања прерачунатог **по функцији показивања фазе** χ^k , који се појављује у основним једначинама вишефазног струјања:

$$\langle \widetilde{\phi^k} \rangle = \frac{\overline{\langle \chi^k \phi^k \rangle}}{\langle \chi^k \rangle}, \quad \Rightarrow \quad \overline{\langle \chi^k \phi^k \rangle} = \overline{\langle \chi^k \rangle} \langle \widetilde{\phi^k} \rangle \quad (3.8)$$

Такође, може се показати да важи $\overline{\langle \chi^k \phi'' \rangle} = 0$.

Речено је да функција χ^k указује на то да ли се у посматраној тачки простора у тренутку t налази фаза k ($\chi^k = 1$) или не ($\chi^k = 0$). Осредњена вредност ове функције представља **локални запремински удео фазе k** и има ознаку $\overline{\langle \chi^k \rangle} = \alpha^k$. Он је од велике важности за изучавање вишефазног струјања. Обично се дефинише на следећи начин: ако се унутар струјног простора уочи једна тачка, у току времена у њој ће се налазити наизменично фазе које учествују у струјању, удео времена током којег је у посматраној тачки била фаза k представља локални запремински удео те фазе.

Може се дефинисати на још један начин. У струјном простору вишефазног струјања се уочи контролна запремина V . Унутар ње фаза k заузима запремину V^k , која може бити непрекидна запремина (нпр. вода која окружује мехурове или ваздух који окружује чврсте честице), а може представљати збир више малих запремина које испуњава распршена фаза k (нпр. збир запремина мехурова ваздуха или збир запремина чврстих честица унутар запреmine V). Тада се каже да однос запремина V^k и V представља **запремински удео фазе k** :

$$\alpha^k = \frac{V^k}{V} = \overline{\langle \chi^k \rangle} \quad (3.9)$$

За α^k постоје и следећи називи: *запреминска концентрација фазе k* и *релативно време пребивања фазе k* .

3.3.2 Временско осредњавање једначине континуитета

Као што је речено, потребно је применити временско осредњавање на основне једначине (2.14), (2.20) и (2.22), које су осредњене по запремини V , како би се поље физичких

величина, које се појављују у овим једначинама, поделило на осредњени и флукутирајући део. Једначине у којима се налазе временски осредњене величине се могу даље применити у прорачунима.

На једначину континуитета (закон одржања масе) која је осредњена по запремини (2.14) примењује се Рејнолдсово временско осредњавање:

$$\frac{\partial \overline{\langle \chi^k \rho^k \rangle}}{\partial t} + \nabla \cdot \overline{\langle \chi^k (\rho^k \mathbf{U}^k) \rangle} = \overline{\Gamma^k}.$$

Коришћењем једначина (3.8) и (3.9) претходна једначина постаје:

$$\frac{\partial (\alpha^k \langle \widetilde{\rho^k} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \langle \widetilde{\rho^k \mathbf{U}^k} \rangle) = \overline{\Gamma^k}.$$

У другом сабирку на левој страни једначине се примењује правило Фавреовог осредњавања (3.6). На десној страни се налази изворски члан, описан изразом (2.23). На њега се примењује временско осредњавање и при томе се врши позивање на једначину (3.7):

$$\frac{\partial (\alpha^k \langle \widetilde{\rho^k} \rangle)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \langle \widetilde{\rho^k \mathbf{U}^k} \rangle) = \langle \widetilde{\rho^k} \rangle \langle \overline{(\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}}) \cdot \mathbf{n} \delta_s} \rangle.$$

На десној страни једначине разлика вектора $(\mathbf{U}^k - \mathbf{U}^{\text{int}})$ представља релативну брзину фазе k у односу на разделну површ. Када се она скаларно помножи са јединичним вектором нормале разделне површи \mathbf{n}^k , добија се компонента релативне брзине управна на разделну површ. Она помножена са густином фазе даје масени проток фазе k по јединици површине разделне површи.

Када се, ради једноставности записа, изоставе ознаке осредњавања, једначина која описује закон одржања масе за **модел два флуида** гласи:

$$\frac{\partial (\alpha^k \rho^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k) = \underbrace{\sum_{l=1}^2 (\dot{m}_{lk} - \dot{m}_{kl})}_{\Gamma^k}, \quad (3.10)$$

где \dot{m}_{lk} представља масени флуks од фазе l ка фази k по јединици површине разделне површи. Са \dot{m}_{kl} означен је масени флуks у супротном смеру.

3.3.3 Временско осредњавање једначине количине кретања

На једначину кретања (2.20) која је осредњена по запремини V примењује се Рејнолдсово временско осредњавање:

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{\langle \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \rangle}}{\partial t}}_1 + \underbrace{\nabla \cdot \overline{\langle \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k \rangle}}_2 = \underbrace{-\nabla \cdot \overline{\langle \chi^k p^k \rangle}}_3 + \underbrace{\nabla \cdot \overline{\langle \chi^k \boldsymbol{\tau}^k \rangle}}_4 + \underbrace{\overline{\langle \chi^k \mathbf{F}_m^k \rangle}}_5 + \underbrace{\overline{\boldsymbol{\Omega}^k}}_6. \quad (3.11)$$

Ради једноставности за сваки сабирак из претходне једначине ће засебно бити приказано на шта се своди када се примене правила осредњавања. На први сабирак (локални члан)

се редом примењују једначине (3.8), (3.9) и (3.6), тако да он постаје:

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial \left(\overline{\langle \chi^k \rangle} \overline{\langle \rho^k \mathbf{U}^k \rangle} \right)}{\partial t} = \frac{\partial \left(\alpha^k \overline{\langle \rho^k \mathbf{U}^k \rangle} \right)}{\partial t} = \frac{\partial \left(\alpha^k \overline{\langle \rho^k \widetilde{\mathbf{U}}^k \rangle} \right)}{\partial t}. \quad (3.12)$$

На други сабирак (конвективни члан) се најпре примењују једначине (3.8), (3.9) и (3.7):

$$\textcircled{2} \quad \nabla \cdot \left(\overline{\langle \chi^k \rangle} \overline{\langle \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k \rangle} \right) = \nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\langle \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k \rangle} \right) = \nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\langle \rho^k \rangle} \overline{\langle \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k \rangle} \right)$$

У другом сабирку се појављује Фавреово осредњавање производа два вектора брзине. Примењује се дефиниција Фавреовог осредњавања (3.2), затим изрази (3.5) и (3.6):

$$\overline{\langle \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k \rangle} = \frac{\overline{\langle \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k \rangle}}{\overline{\langle \rho^k \rangle}} = \frac{\overline{\langle \rho^k \widetilde{\mathbf{U}}^k \widetilde{\mathbf{U}}^k \rangle} + \overline{\langle \rho^k \mathbf{U}^{k''} \mathbf{U}^{k''} \rangle}}{\overline{\langle \rho^k \rangle}} = \overline{\langle \widetilde{\mathbf{U}}^k \widetilde{\mathbf{U}}^k \rangle} + \frac{\overline{\langle \rho^k \mathbf{U}^{k''} \mathbf{U}^{k''} \rangle}}{\overline{\langle \rho^k \rangle}}.$$

Када се претходна једначина врати у израз за други сабирак, он постаје:

$$\textcircled{2} \quad \nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\langle \rho^k \rangle} \overline{\langle \widetilde{\mathbf{U}}^k \widetilde{\mathbf{U}}^k \rangle} + \alpha^k \overline{\langle \rho^k \mathbf{U}^{k''} \mathbf{U}^{k''} \rangle} \right) = \nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\langle \rho^k \rangle} \overline{\langle \widetilde{\mathbf{U}}^k \widetilde{\mathbf{U}}^k \rangle} \right) + \nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\langle \rho^k \mathbf{U}^{k''} \mathbf{U}^{k''} \rangle} \right). \quad (3.13)$$

У другом сабирку се појављује средња вредност производа Фавреових флукуација и овај члан није могуће у овом облику користити у прорачуну. Због тога се он, по угледу на Рејнолдсове напоне, проглашава за напон. Величина $\tau^{k''}$ представља тензор турбулентних напона. Сабирак који садржи турбулентне напоне се пребацује на десну страну једначине кретања и моделира, као што ће касније бити приказано.

Трећи, четврти и пети сабирак једначине (3.11), коришћењем израза (3.8) и (3.9) постају:

$$\textcircled{3} \quad -\nabla \cdot \left(\overline{\langle \chi^k \rangle} \overline{\langle p^k \rangle} \right) = -\nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\langle p^k \rangle} \right) = -\alpha^k \nabla \cdot \overline{\langle p^k \rangle} - \overline{\langle p^k \rangle} \nabla \alpha^k, \quad (3.14)$$

$$\textcircled{4} \quad \nabla \cdot \left(\overline{\langle \chi^k \rangle} \overline{\langle \boldsymbol{\tau}^k \rangle} \right) = \nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\langle \boldsymbol{\tau}^k \rangle} \right), \quad (3.15)$$

$$\textcircled{5} \quad \overline{\langle \chi^k \rangle} \overline{\langle \mathbf{F}_m^k \rangle} = \alpha^k \overline{\langle \mathbf{F}_m^k \rangle} = \alpha^k \overline{\langle \rho^k \mathbf{g} \rangle}. \quad (3.16)$$

Јединична запреминска сила у пољу земљине теже је $\mathbf{F}_m^k = \rho^k \mathbf{g}$. У једначини (3.15) фигурише тензор смичућих напона у флуиду $\boldsymbol{\tau}^k$. За флуиде за које важи Њутнова претпоставка о линеарној зависности смичућих напона и градијента брзине, тј. за њутновске флуиде, Стокс је 1845. године увео хипотезу о напонима која гласи: тензор вискозних напона у флуиду је линеарно пропорционалан девијаторском делу тензора брзине деформисања, а коефицијент пропорционалности је двострука вредност динамичке вискозности флуида $2\mu^k$. Ова хипотеза даје везу између стања напона и стања деформације: $\boldsymbol{\tau}^k = 2\mu^k \mathbf{D}_d^k$. Када се девијаторски део тензора брзине деформисања, који говори о промени облика флуидног делића при непромењеној запремини, представи као разлика укупног тензора и његовог сферног дела, тада се уз Стоксову хипотезу долази до израза за тензор вискозних напона који гласи:

$$\boldsymbol{\tau}^k = \mu^k \left[\nabla \mathbf{U}^k + (\nabla \mathbf{U}^k)^T - \left(\frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U}^k \right) \mathbf{I} \right]. \quad (3.17)$$

На изворски члан $\textcircled{6}$ из једначине (3.11), који је дефинисан једначином (2.24), при-

мењује се Рејнолдсово осредњавање. Поједини чланови се моделирају. Након линеаризације, изворски члан гласи:

$$\textcircled{6} \quad \overline{\Omega^k} = \sum_{l=1}^2 \overline{\langle \dot{m}_{lk} \mathbf{U}^l - \dot{m}_{kl} \mathbf{U}^k \rangle} + \overline{\langle p_{\text{int}}^k \rangle} \nabla \alpha^k + \overline{\langle \mathbf{F}^k \rangle}. \quad (3.18)$$

Када се све једначине од (3.12) до (3.18) врате у једначину (3.11) и када се, ради једноставности записа, изоставе ознаке које указују на запреминско и временско осредњавање, коначно се добија једначина количине кретања за модел два флуида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k) &= -\alpha^k \nabla p^k + \\ + \nabla \cdot \left(\alpha^k \mu^k (\nabla \mathbf{U}^k + (\nabla \mathbf{U}^k)^T) - \frac{2}{3} \alpha^k \mu^k \nabla \cdot \mathbf{U}^k \mathbf{I} \right) &- \nabla \cdot (\alpha^k \boldsymbol{\tau}^{k''}) + \alpha^k \rho^k \mathbf{g} + \\ + \underbrace{\sum_{l=1}^2 (\dot{m}_{lk} \mathbf{U}^l - \dot{m}_{kl} \mathbf{U}^k) + (p_{\text{int}}^k - p^k) \nabla \alpha^k + \mathbf{F}^k}_{\Omega'^k}. & \end{aligned} \quad (3.19)$$

У једначини се појављује тензор турбулентних напона. Поступак његовог моделирања је приказан у одељку 3.4. Унутар изворског члана Ω'^k се налази сила \mathbf{F}^k која представља међусобно дејство фаза. Њу је потребно моделирати, о чему ће бити речи у поглављу 4.

3.3.4 Временско осредњавање једначине енергије

На једначину енергије (2.22) која је осредњена по запремини V примењује се Рејнолдсово осредњавање:

$$\frac{\partial \overline{\langle \chi^k \rho^k H^k \rangle}}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot \overline{\langle \chi^k \rho^k \mathbf{U}^k H^k \rangle}}_2 = \frac{\partial \overline{\langle \chi^k p^k \rangle}}{\partial t} - \nabla \cdot \overline{\langle \chi^k \mathbf{q}^k \rangle} + \overline{\langle \chi^k \rangle} \overline{\langle \mathbf{F}_m^k \cdot \mathbf{U}^k \rangle} + \overline{\langle \Phi_H^k \rangle} + \overline{\Pi_H^k} \quad (3.20)$$

Потребно је да се детаљније прикаже поступак осредњавања другог сабирка (конвективног члана) јер се том приликом појављује нови сабирак који није могуће одредити па га је потребно моделирати. Слично се десило и приликом осредњавања конвективног члана у једначини кретања. У поступку осредњавања најпре се примењују једначине (3.8), (3.7), затим дефиниција Фавреовог осредњавања (3.2) и на крају правила осредњавања (3.6):

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \nabla \cdot \overline{\langle \alpha^k \widetilde{\rho^k \mathbf{U}^k H^k} \rangle} &= \nabla \cdot \overline{\langle \alpha^k \overline{\rho^k} \widetilde{\mathbf{U}^k H^k} \rangle} = \nabla \cdot \overline{\langle \alpha^k \overline{\rho^k} \frac{\overline{\rho^k \mathbf{U}^k H^k}}{\overline{\rho^k}} \rangle} = \nabla \cdot \overline{\langle \alpha^k \overline{\rho^k} \mathbf{U}^k H^k \rangle} = \\ &= \nabla \cdot \overline{\langle \alpha^k (\overline{\rho^k} \widetilde{\mathbf{U}^k} \widetilde{H^k} + \overline{\rho^k \mathbf{U}^{k''} H^{k''}}) \rangle} = \nabla \cdot \overline{\langle \alpha^k \overline{\rho^k} \widetilde{\mathbf{U}^k} \widetilde{H^k} \rangle} + \underbrace{\nabla \cdot \overline{\langle \alpha^k \overline{\rho^k} \mathbf{U}^{k''} H^{k''} \rangle}}_*. \end{aligned} \quad (3.21)$$

У сабирку који је означен са (*) се појављује средња вредност производа Фавреових флукуација. Овај члан није могуће израчунати, тј. користити у прорачуну, због тога

се он моделира и пребацује на десну страну једначине енергије. Моделира се изразом $\nabla \cdot (\alpha^k \mathbf{q}_H^{k''})$ и представља додатну размену енергије услед флукуационог кретања флуида (услед турбуленције). Остали чланови једначине (3.20) се једноставно осредњавају, слично као у једначини количине кретања. Када се заврши поступак осредњавања једначине (3.20) и када се изоставе ознаке за временско и запреминско осредњавање, она гласи:

$$\frac{\partial(\alpha^k \rho^k H^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k H^k) = \frac{\partial(\alpha^k p^k)}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha^k \mathbf{q}^k) - \nabla \cdot (\alpha^k \mathbf{q}_H^{k''}) + \alpha^k \mathbf{F}_m^k \cdot \mathbf{U}^k + \Phi_H^{k''} + \Pi_H^k. \quad (3.22)$$

Осредњена вредност изворског члана се моделира на следећи начин:

$$\Pi_H^k = \sum_{l=1}^2 (\dot{m}_{lk} H^l - \dot{m}_{kl} H^k) + Q_H^{\text{int}}, \quad (3.23)$$

где \dot{m}_{lk} представља масени флуks од фазе l ка фази k по јединици површине разделне површи, а са \dot{m}_{kl} је означен масени флуks у супротном смеру. Тоталне енталпије фаза k и l су означене са H^k и H^l . Величина Q_H^{int} представља размењену количину топлоте између фаза k и l кроз разделну површ и може се представити као $Q_H^{\text{int}} = \sum_{l=1}^2 C_{kl}(T^l - T^k)$. Изрази за изворске чланове у свим основним једначинама зависе од врсте вишефазног струјања и за њих не постоји опште решење. Начин моделирања изворских чланова је од велике важности за успешност прорачуна вишефазног струјања.

Под претпоставком да је флуид фазе k хомоген и изотропан и да се преношење количине топлоте одвија само кондукцијом (провођењем), члан $-\nabla \cdot (\alpha^k \mathbf{q}^k)$ у једначини (3.22) се према Фуријеовом закону може изразити као:

$$-\nabla \cdot (\alpha^k \mathbf{q}^k) = -\nabla \cdot (\alpha^k (-\lambda^k \nabla T^k)) = \nabla \cdot (\alpha^k \lambda^k \nabla T^k), \quad (3.24)$$

где је ∇T^k градијент температуре у фази k , а λ^k коефицијент кондукције фазе k или њена топлотна проводљивост.

У пољу силе земљине теже запреминска сила је $\mathbf{F}_m^k = \rho^k \mathbf{g}$. Тамо где вишефазна струјања имају практичну индустријску примену најчешће је оправдано занемарити рад сила притиска (јер је притисак унутар мале контролне запремине V скоро идентичан притиску околине), рад запреминских сила и вискозну дисипацију. Узевши у обзир ове претпоставке, као и једначине (3.23) и (3.24), једначина енергије (3.22) постаје:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha^k \rho^k H^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k H^k) &= \nabla \cdot (\alpha^k \lambda^k \nabla T^k) - \nabla \cdot (\alpha^k \mathbf{q}_H^{k''}) + \\ &+ \underbrace{\sum_{l=1}^2 (\dot{m}_{lk} H^l - \dot{m}_{kl} H^k)}_{\Pi_H^k} + Q_H^{\text{int}}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Једначина (3.25) представља једначину енергије у конзервативном облику, која у моделу два флуида важи за фазу k . Једначина је изражена преко тоталне енталпије и осредњена је по запремини и у времену.

3.4 Моделирање турбуленције

Приликом временског осредњавања једначине количине кретања и једначине енергије, тачније речено, приликом временског осредњавања конвективних чланова у овим једначинама (види једначине (3.13) и (3.21)) појављују се сабирци:

$$\nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\rho^k \mathbf{U}^{k''} \mathbf{U}^{k''}} \right) \quad \text{у једначини кретања и} \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\rho^k \mathbf{U}^{k''} H^{k''}} \right) \quad \text{у једначини енергије.} \quad (3.27)$$

То што они садрже осредњене вредности производа флукуација, указује да они представљају директан утицај флукуационог кретања. Они описују додатну размену количине кретања и енергије услед турбуленције. Услед немогућности израчунавања ових чланова њих је потребно моделирати.

3.4.1 Концепт турбулентне вискозности и њено моделирање

Концепт турбулентне вискозности увео је Бусинеск 1868. године. Средња вредност производа флукуација $\overline{\rho^k \mathbf{U}^{k''} \mathbf{U}^{k''}}$ је проглашена за Рејнолдсове или турбулентне напоне. Тензор турбулентних напона је означен са $\boldsymbol{\tau}''$. Према Бусинесковој хипотези они се моделирају по угледу на стварне, вискозне напоне који су дефинисани Стоксовом хипотезом, једначина (3.17). Дакле, турбулентни напони су пропорционални градијенту осредњеног поља брзине, а коефицијент пропорционалности је **турбулентна вискозност** μ_T :

$$\overline{\rho^k \mathbf{U}^{k''} \mathbf{U}^{k''}} = \boldsymbol{\tau}^{k''} = -\mu_T^k \left[\nabla \mathbf{U}^k + (\nabla \mathbf{U}^k)^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U}^k \mathbf{I} \right]. \quad (3.28)$$

У једначини (3.28) сви сабирци су тензори другог реда. Ако се она примени за нестишљив флуид, уз поштовање једначине континуитета $\nabla \cdot \mathbf{U}^k = 0$, она у развијеном облику гласи:

$$\rho^k \begin{bmatrix} \overline{u^{k''} u^{k''}} & \overline{u^{k''} v^{k''}} & \overline{u^{k''} \omega^{k''}} \\ \overline{v^{k''} u^{k''}} & \overline{v^{k''} v^{k''}} & \overline{v^{k''} \omega^{k''}} \\ \overline{\omega^{k''} u^{k''}} & \overline{\omega^{k''} v^{k''}} & \overline{\omega^{k''} \omega^{k''}} \end{bmatrix} = -\mu_T^k \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial u^k}{\partial x} & \frac{\partial u^k}{\partial y} & \frac{\partial u^k}{\partial z} \\ \frac{\partial v^k}{\partial x} & \frac{\partial v^k}{\partial y} & \frac{\partial v^k}{\partial z} \\ \frac{\partial w^k}{\partial x} & \frac{\partial w^k}{\partial y} & \frac{\partial w^k}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u^k}{\partial x} & \frac{\partial v^k}{\partial x} & \frac{\partial w^k}{\partial x} \\ \frac{\partial u^k}{\partial y} & \frac{\partial v^k}{\partial y} & \frac{\partial w^k}{\partial y} \\ \frac{\partial u^k}{\partial z} & \frac{\partial v^k}{\partial z} & \frac{\partial w^k}{\partial z} \end{bmatrix} \right\}$$

Кинетичка енергија турбуленције се дефинише као половина збира нормалних турбулентних напона $k = 1/2 \left(\overline{u^{k''} u^{k''}} + \overline{v^{k''} v^{k''}} + \overline{\omega^{k''} \omega^{k''}} \right)$. Ако се потражи траг сваке од матрица, односно, ако се саберу сви чланови на главним дијагоналама, са леве стране се добија двоструки производ густине и кинетичке енергије турбуленције, а десна страна је, према једначини континуитета за нестишљив флуид, једнака нули, тј. $2\rho^k k^k = 0$. Оваква претпоставка за турбулентне напоне се не може користити. Због тога се једначина (3.28) проширује чланом $2/3\rho^k k^k \delta$. Коначно, претпоставка за тензор турбулентних напона гласи:

$$-\overline{\rho^k \mathbf{U}^{k''} \mathbf{U}^{k''}} = -\boldsymbol{\tau}^{k''} = \mu_T^k \left[\nabla \mathbf{U}^k + (\nabla \mathbf{U}^k)^T \right] - \frac{2}{3} \mu_T^k (\nabla \cdot \mathbf{U}^k) \mathbf{I} - \frac{2}{3} \rho^k k^k \mathbf{I} \quad (3.29)$$

Овом претпоставком тежиште проблема је са рачунања производа флукуација пребачено на рачунање турбулентне вискозности μ_T , што није лак задатак. Ова замишљена

физичка величина не представља својство флуида већ својство струјања.

Члан (3.26) је моделиран на основу идеје о турбулентној вискозности μ_T . На сличан начин се може увести појам **турбулентне термичке (или топлотне) дифузије** Γ_T да би се моделирао члан (3.27) који потиче из једначине енергије (3.21):

$$-\overline{\rho^k \mathbf{U}^{k''} H^{k''}} = -q_H^{k''} = \Gamma_T^k \nabla H^k. \quad (3.30)$$

Релација (3.30) је аналогна Фуријеовом закону (3.24), са том разликом што се уместо температуре користи тотална енталпија и уместо топлотне проводљивости λ , користи се турбулентна термичка дифузија Γ_T .

Пошто су додатна размена количине кретања и додатна размена топлоте последице истог механизма, тј. вртложних структура и флукуационог кретања, као основних карактеристика турбуленције, то значи да између турбулентне вискозности и турбулентне термичке дифузије постоји веза. Њихов количник је дефинисан турбулентним Прантловим бројем:

$$\text{Pr}_T^k = \frac{\mu_T^k}{\Gamma_T^k}.$$

Експериментална и нумеричка испитивања турбуленције показују да је вредност турбулентног Прантловог броја константна и да износи приближно 1.

Једначинама (3.29) и (3.30) дефинисано је чему су једнаке величине $\tau^{k''}$ и $q_H^{k''}$. Када се оне уврсте у једначину количине кретања (3.19) и једначину енергије (3.25), у којима се појављују, следи да систем основних једначина за стишљиво вишефазно струјање прилагођен моделу два флуида гласи:

$$\frac{\partial (\alpha^k \rho^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k) = \sum_{l=1}^2 (\dot{m}_{lk} - \dot{m}_{kl}), \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k) &= -\alpha^k \nabla p^k + \\ &+ \nabla \cdot \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) (\nabla \mathbf{U}^k + (\nabla \mathbf{U}^k)^T) - \frac{2}{3} \alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) (\nabla \cdot \mathbf{U}^k) \mathbf{I} - \frac{2}{3} \alpha^k \rho^k k^k \mathbf{I} \right] + \\ &+ \alpha^k \rho^k \mathbf{g} + \sum_{l=1}^2 (\dot{m}_{lk} \mathbf{U}^l - \dot{m}_{kl} \mathbf{U}^k) + (p_{\text{int}}^k - p^k) \nabla \alpha^k + \mathbf{F}^k. \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha^k \rho^k H^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k H^k) &= \nabla \cdot (\alpha^k \lambda^k \nabla T^k) + \nabla \cdot \left(\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\text{Pr}_T^k} \nabla H^k \right) + \\ &+ \sum_{l=1}^2 (\dot{m}_{lk} H^l - \dot{m}_{kl} H^k) + Q_H^{\text{int}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

У овом систему једначина нова непозната је турбулентна динамичка вискозност μ_T . По угледу на стварну динамичку вискозност μ , која је својство флуида, и турбулентна

динамичка вискозност се може представити као производ густине и кинематске турбулентне вискозности $\mu_T = \rho \nu_T$.

У циљу одређивања турбулентне вискозности коришћени су различити приступи:

- алгебарски модели,
- једноједначински модели,
- двоједначински модели,
- пуни напонски модели.

Димензијска анализа показује да је турбулентна динамичка вискозност пропорционална производу густине, карактеристичне дужине (дужинске размене) и карактеристичне брзине. Ако се за дефинисање карактеристичне брзине искористи градијент брзине у правцу управно на зид, а за дужинску размеру путања мешања, тада настаје Прантлов алгебарски модел турбулентне вискозности који се назива модел путање мешања:

$$\mu_T = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|.$$

Основна мана овог и других алгебарских модела је потреба да се за сваки тип струјања експериментално одреде вредности карактеристичних величина, као што је у овом случају путања мешања. Тај захтев није увек могуће испунити.

Једноједначински и двоједначински модели проширују систем основних једначина са једном, односно две једначине које су потребне за дефинисање величина преко којих се изражава турбулентна вискозност. У једноједначинским моделима најчешће је то кинетичка енергија турбуленције. Поред ње, за дефинисање турбулентне вискозности, користи се још једна величина која има своју алгебарску једначину, често је то путања мешања. Ово значи да и једноједначински модели имају потребу за алгебарским једначинама, што представља њихову ману.

У различитим двоједначинским моделима поред кинетичке енергије турбуленције могу се појавити дисипација ε и специфична дисипација, односно фреквенција дисипације ω . То су величине преко којих се изражава турбулентна вискозност. Свака од њих има своју допунску, транспортну једначину која постаје део система основних једначина. У наставку ће бити приказани поједини двоједначински модели који се често користе у инжењерским прорачунима. Они у свом оригиналном облику решавају проблем турбуленције једнофазног струјања, али се уз извесне корекције успешно користе за решавање турбуленције у вишефазним струјањима. Овде ће бити приказан облик транспортних једначина који одговара случају стишљивог, вишефазног струјања.

3.4.1.1 Турбулентни модел $k - \varepsilon$

Већ је речено да димензијска анализа показује да је турбулентна динамичка вискозност пропорционална производу густине, карактеристичне брзине и карактеристичне дужине $\mu_T^k \propto \rho^k l^k U^k$. Пожељно је да се за дефинисање ових величина користе физичке величине које су својствене турбуленцији. Карактеристична брзина се може представити као квадратни корен кинетичке енергије турбуленције $\sqrt{k^k}$, а за одређивање карактеристичне дужине користе се и кинетичка енергија турбуленције и турбулентна дисипација

$(k^k)^{\frac{3}{2}}/\varepsilon^k$. На овај начин настаје $k - \varepsilon$ турбулентни модел који служи за одређивање турбулентне вискозности фазе k :

$$\mu_T^k = C_\mu \rho^k \frac{(k^k)^2}{\varepsilon^k}. \quad (3.34)$$

Модел су направили Лаундер и Спалдинг 1974. године [42]. За одређивање кинетичке енергије турбуленције и дисипације користе се две додатне једначине. Њихово детаљно извођење приказано је у књизи [41]. Транспортне једначине за кинетичку енергију турбуленције k^k и дисипацију ε^k прилагођене вишефазном стишљивом струјању редом гласе:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^k \rho^k k^k) + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k k^k) = \nabla \cdot \left(\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\sigma_k} \nabla k^k \right) + \alpha^k (P^k + G^k - \rho^k \varepsilon^k) + S_{k^k}^{\text{int}} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^k \rho^k \varepsilon^k) + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k \varepsilon^k) = \nabla \cdot \left(\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon^k \right) + \alpha^k \frac{\varepsilon^k}{k^k} (C_{\varepsilon 1} P^k + \|G^k\| - C_{\varepsilon 2} \rho^k \varepsilon^k) + S_{\varepsilon^k}^{\text{int}} \quad (3.36)$$

Члан P^k представља продукцију кинетичке енергије турбуленције услед смичућег струјања, а члан G^k услед деловања гравитационе силе. Ови чланови имају следећи облик:

$$P^k = \mu_T^k \nabla \mathbf{U}^k : [\nabla \mathbf{U}^k + (\nabla \mathbf{U}^k)^T] - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U}^k (\mu_T^k \nabla \cdot \mathbf{U}^k - \rho^k k^k),$$

$$G^k = - \frac{\mu_T^k}{\rho^k \sigma_{\rho^k}} \mathbf{g} \cdot \nabla \rho^k.$$

У оригиналним транспортним једначинама [42] не постоје изворски чланови $S_{k^k}^{\text{int}}$ и $S_{\varepsilon^k}^{\text{int}}$. Они представљају повећавање или смањење турбуленције услед међусобног деловања фаза. Нпр. велике честице у ваздуху или велики мехурови у води ће повећати интензитет турбуленције у континуалној фази (ваздуху, односно води), услед вртложног трага који се јавља иза њих. Са друге стране, присуство веома малих честица или мехурова доводи до смањења интензитета турбуленције континуалне фазе.

Константе које се јављају у једначинама (3.35) и (3.36) су одређене на основу детаљне анализе различитих врста слободног турбулентног струјања. То је било потребно да би њихове вредности биле универзалне. Оне гласе:

$$C_\mu = 0,09 \quad \sigma_k = 1,0 \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92.$$

У свом раду Лаундер и Спалдинг [42] напомињу да су се предложене константе показале добро у симулацијама струјања слободног турбулентног млаза и мешајућих слојева, али да у неким случајевима у непосредној близини зида модел не даје добре резултате.

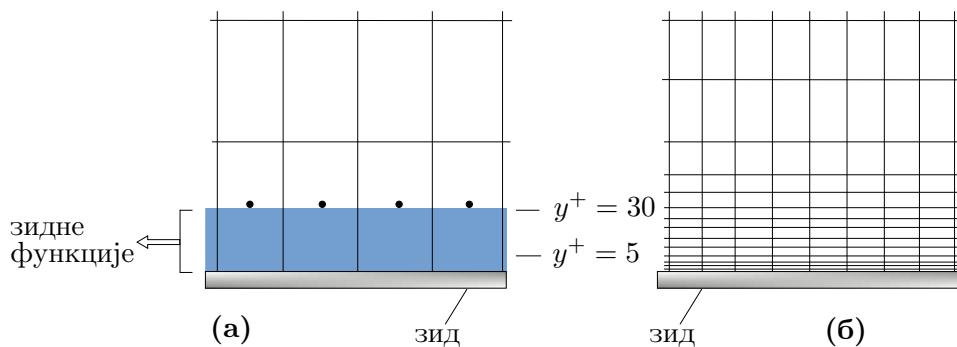
Један од начина да се премости недостатак $k - \varepsilon$ модела јесте коришћење **зидних функција**. Тиме се не прорачунава струјање у близини зида, већ се овај простор прескаче, сматрајући да се уз зид налази потпуно развијени турбулентни гранични слој, тј. да је у овој области турбуленција статистички стационарна.

У развијеном турбулентном граничном слоју уочено је више области, а њихова граница одређена је вредношћу бездимензијске турбулентне координате $y^+ = \frac{\rho U_T y}{\mu}$, чији

израз има облик Рејнолдсовог броја. U_T је брзина трења, преко које се може изразити смичући напон на зиду $\tau_w = \rho U_T^2$. Брзина трења служи за дефинисање бездимензијске брзине $U^* = U/U_T$. У изразу за y^+ појављује се и y што представља нормално растојање од зида.

Област дефинисана са $y^+ < 5$, назива се вискозни подслој. Карактеристике је то да су вискозни напони доминантни, док се турбулентни могу занемарити. Супротно је у области турбулентног језгра, за коју важи $y^+ > 30$. У њој се посебно издваја логаритамска област, за коју је $30 < y^+ < 500$, и у којој важи логаритамска зависност између бездимензијске брзине и бездимензијске турбулентне координате $U^+ = \frac{1}{C_\kappa} \ln(Ey^+)$. За струјање кроз глатке цеви са великом вредношћу Рејнолдсовог броја, константе имају вредности $C_\kappa \approx 0,4$ и $E \approx 9,8$. Између вискозног подслоја и турбулентног језгра ($5 < y^+ < 30$) налази се прелазна област. Подаци о профилу бездимензијске брзине у овој области су добијени експериментално.

Када се користе зидне функције, за тежиште прве прорачунске тачке уз зид треба да важи $y^+ \approx 30$. Струјање у вискозном подслоју и прелазној области се не прорачунава, већ се вредности физичких величина на растојању од зида $y^+ \approx 30$ претпостављају на основу зидних функција, које користе претпоставку да је уз зид развијен турбулентни гранични слој. Овим је премошћена област у близини зида, која је проблематична за стандардни $k - \varepsilon$ турбулентни модел.



Слика 3.4. Прорачунски простор у близини зида: (а) са зидним функцијама и (б) без њих.

На слици 3.4 (а) је приказан део прорачунске мреже у близини зида за случај када се користе зидне функције. У случају када се оне не користе, већ се прорачунава струјање до самог зида, слика 3.4 (б), потребно је да прорачунска мрежа има знатно већи број ћелија. Такође, тада је неопходно користити турбулентне моделе који су у стању да предвиде струјно поље у овој области.

3.4.1.2 Турбулентни модел $k - \varepsilon$ Лаундер Шарма

Претпоставка о универзалности расподеле физичких величина у близини зида није увек оправдана, тако да коришћење зидних функција може довести до одређене грешке. Постоје случајеви када је од велике важности прецизније одредити промене физичких величина у близини зида. Тада не треба користити зидне функције већ целу област до зида испунити ситним прорачунским ћелијама. У тежњи да се стандардни модел $k - \varepsilon$ оспособи за прорачун и у прелазној области и вискозном подслоју, унете су измене. На тај начин настаје верзија $k - \varepsilon$ модела у коме се прорачунава и област струјног домена која одговара вискозном подслоју и прелазној области (ниским вредности локалног Рејнолдсовог броја). То је турбулентни модел без зидних функција (LRN). Треба напоменути да се не мисли на глобални Рејнолдсов, број који се рачуна нпр. на основу

пречника цеви или дужине аеропрофила, већ се мисли на локалну вредност Рејнолдсовог броја која зависи од интензитета турбуленције. У поглављу 3 је дефинисан Рејнолдсов број за вртлог. Локални Рејнолдсов број има вредност 100 или више у развијеном турбулентном струјању, и та вредност се смањује до нуле са приближавањем зиду [41]. Тако да се под називом турбулентног модела за ниске вредности Рејнолдсовог броја (енгл. *Low Reynolds number turbulence model* - LRN) подразумева турбулентни модел који се може користити у целом струјном простору, па и у непосредној близини зида. Овакав је турбулентни модел $k - \varepsilon$ Лаундер Шарма [43], који је настао изменом постојећег стандардног $k - \varepsilon$ модела. У једначини за турбулентну вискозност се појављује пригушна функција f_μ :

$$\mu_T^k = C_\mu f_\mu \rho^k \frac{(k^k)^2}{\varepsilon^k}. \quad (3.37)$$

Транспортне једначине за кинетичку енергију турбуленције и дисипацију су:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^k \rho^k k^k) + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k k^k) = \nabla \cdot \left[\alpha^k \left(\mu^k + \frac{\mu_T^k}{\sigma_k} \right) \nabla k^k \right] + \alpha^k (P^k + G^k - \rho^k (\varepsilon^k + D_\varepsilon)) + S_{k^k}^{\text{int}} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^k \rho^k \varepsilon^k) + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k \varepsilon^k) = \nabla \cdot \left[\alpha^k \left(\mu^k + \frac{\mu_T^k}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon^k \right] + \alpha^k \frac{\varepsilon^k}{k^k} (C_{\varepsilon 1} f_1 P^k + \|G^k\| - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho^k \varepsilon^k) + \alpha^k \rho^k E_\varepsilon + S_{\varepsilon^k}^{\text{int}} \quad (3.39)$$

Продукциони чланови P^k и G^k имају исти облик као у моделу $k - \varepsilon$. Исто важи и за вредности константи σ_k , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$ и $C_{\varepsilon 2}$. За разлику од стандардног модела $k - \varepsilon$, овде се у транспортним једначинама појављују пригушне функције f_μ , f_1 и f_2 , величине D_ε , E_ε и молекуларна вискозност μ^k , која за вредности $y^+ > 30$ може бити занемарена у односу на турбулентну вискозност μ_T^k . Пригушне функције су одређене следећим изразима:

$$f_\mu = \exp \left[\frac{-3,4}{(1 + \text{Re}_t/50)^2} \right], \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0,3 \exp \left[-\min(\text{Re}_t^2, 50) \right],$$

где је $\text{Re}_t = (k^k)^2 / (\nu^k \varepsilon^k)$. Допунски изворски чланови D_ε и E_ε постоје само у близини зида и рачунају се на следећи начин:

$$D_\varepsilon = 2\nu^k \left(\frac{\partial \sqrt{k^k}}{\partial y} \right)^2, \quad E_\varepsilon = 2\nu^k \nu_T^k \left(\frac{\partial^2 u^k}{\partial y^2} \right)^2.$$

3.4.1.3 Турбулентни модел $k - \omega$ SST

Турбулентни модел $k - \omega$ SST у ствари представља хибридни модел, односно спој два двоједначинска модела, поменутог $k - \varepsilon$ модела и стандардног $k - \omega$ модела који је развио Вилкокс [44]. У $k - \omega$ моделу турбулентна вискозност је изражена преко кинетичке енергије турбуленције k и фреквенције дисипације $\omega = \varepsilon/k$. Овај модел се показао добро приликом решавања струјања у близини зида, посебно у области граничног слоја. То није случај када је у питању слободно струјање флуида удаљено од чврсте границе.

Увиђа се да модел $k - \omega$ може надоместити ману $k - \varepsilon$ модела, и супротно. На тај начин је створен хибридни $k - \omega$ SST модел, који у близини зида користи предности $k - \omega$ модела, а у области која је удаљена од зида ради као $k - \varepsilon$ турбулентни модел. Да би модел „препознао” у којој области се налази прорачунска тачка и да ли треба да се понаша као $k - \varepsilon$ или $k - \omega$ модел, користи се тежинска функција F_1 .

Промењен је облик допунских једначина из модела $k - \varepsilon$ тако да оне буду сличне једначинама $k - \omega$ модела. Допунска једначина за дисипацију ε је изражена преко фреквенције дисипације ω . Затим су једначине модела $k - \omega$ помножене тежинском функцијом F_1 , а промењене једначине модела $k - \varepsilon$ функцијом $(1 - F_1)$. Ако ϕ_1 представља вредност константе у моделу $k - \omega$, а ϕ_2 вредност исте константе у модификованом моделу $k - \varepsilon$, онда се вредност константе у новом $k - \omega$ SST моделу рачуна као: $\phi_3 = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2$. Ако је $F_1 = 1$, што је случај у близини зида, онда констатна узима вредност из $k - \omega$ модела, а ако је $F_1 = 0$, што одговара области удаљеној од зида, онда констатна узима вредност из модела $k - \varepsilon$. Сабирањем одговарајућих парова допунских једначина, добијају се допунске једначине новог $k - \omega$ SST турбулентног модела [45].

Не разликују се само коефицијенти у транспортним једначинама у зависности од тога да ли се прорачунска тачка налази близу зида или далеко од њега, већ се разликује и начин рачунања турбулентне вискозности. Ово представља још једну предност $k - \omega$ SST модела. Далеко од зида, турбулентна вискозност се рачуна као у моделу $k - \varepsilon$, а у близини зида се за њено рачунање користи и интензитет вртложности Ω . За разликовање ова два случаја служи тежинска функција F_2 [46]. Турбулентна вискозност је одређена на следећи начин:

$$\mu_T^k = \frac{\rho^k a_1 k^k}{\max(a_1 \omega^k, \Omega F_2)}.$$

У неким каснијим дорадама $k - \omega$ SST модела, за моделирање турбулентне вискозности у граничном слоју користи се брзина деформисања уместо интензитета вртложности.

Две допунске једначине за k и ω гласе:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^k \rho^k k^k) + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k k^k) = \nabla \cdot \left[\alpha^k \left(\mu^k + \frac{\mu_T^k}{\sigma_{k3}} \right) \nabla k^k \right] + \alpha^k (P^k + G^k - \rho^k \beta' k^k \omega^k) + S_{k^k}^{\text{int}} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha^k \rho^k \omega^k) + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k \omega^k) = \nabla \cdot \left[\alpha^k \left(\mu^k + \frac{\mu_T^k}{\sigma_{\omega 3}} \right) \nabla \omega^k \right] + 2\alpha^k \rho^k (1 - F_1) \frac{1}{\sigma_{\omega 2} \omega^k} \nabla k^k \cdot \nabla \omega^k + \alpha^k \alpha_3 \frac{\omega^k}{k^k} (P^k + C_3 \|G^k\|) - \alpha^k \rho^k \beta_3 (\omega^k)^2 + S_{\omega^k}^{\text{int}} \quad (3.41)$$

Продукциони чланови P^k и G^k имају исти облик као у моделу $k - \varepsilon$. У једначини (3.41), сабирак који садржи функцију $(1 - F_1)$ постоји изван граничног слоја и настао је приликом трансформације допунске једначине за дисипацију из модела $k - \varepsilon$. Коефицијенти чије вредности се рачунају на основу тежинске функције F_1 су:

$$\begin{aligned} \sigma_{k3} &= F_1 \sigma_{k1} + (1 - F_1) \sigma_{k2}, & \sigma_{\omega 3} &= F_1 \sigma_{\omega 1} + (1 - F_1) \sigma_{\omega 2}, \\ \alpha_3 &= F_1 \alpha_1 + (1 - F_1) \alpha_2, & \beta_3 &= F_1 \beta_1 + (1 - F_1) \beta_2. \end{aligned}$$

Од велике важности су тежинске функције које се рачунају на следећи начин: $F_1 = \tanh(\Phi_1^4)$ и $F_2 = \tanh(\Phi_2^2)$, при чему је:

$$\Phi_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k^k}}{0,09\omega^k d_n}, \frac{500\mu^k}{\rho^k \omega^k d_n^2} \right), \frac{4\rho^k k^k}{D_\omega^2 \sigma_{\omega 2} d_n^2} \right], \quad \Phi_2 = \max \left(\frac{2\sqrt{k^k}}{0,09\omega^k d_n}, \frac{500\mu^k}{\rho^k \omega^k d_n^2} \right)$$

Са d_n означено је растојање од зида. Константе модела имају следеће вредности:

$$\begin{aligned} \beta' &= 0,09 & \sigma_{k1} &= 1,176 & \sigma_{\omega 1} &= 2,0 & \alpha_1 &= 5,0/9,0 & \beta_1 &= 0,075 \\ a_1 &= 0,31 & \sigma_{k2} &= 1,0 & \sigma_{\omega 2} &= 1,168 & \alpha_2 &= 0,44 & \beta_2 &= 0,0825 \end{aligned}$$

Изворски чланови S_{kk}^{int} и $S_{\omega k}^{\text{int}}$ описују пораст или смањење интензитета турбуленције као последицу међусобног деловања фаза.

За разлику од $k-\varepsilon$ модела, чије једначине се не могу користити у непосредној близини зида, турбулентни модел $k-\omega$ SST се може користити у целом струјном простору.

3.4.2 Пуни напонски модели

До сада је приказан концепт турбулентне вискозности као начин за решавање проблема турбуленције. Бусинесковом претпоставком покушано је да се изврши „ламинаризација” турбуленције. Користи се претпоставка да су турбулентни напони пропорционални брзини деформисања, која је изражена преко осредњених физичких величина, видети једначину (3.29). Коефицијент пропорционалности је турбулентна вискозност μ_T , која је својство струјања, а не флуида. Ово није увек најбољи начин за рачунање турбулентних напона, јер они у физичком смислу нису напони, већ представљају додатну размену количине кретања услед флукуационог кретања флуида и настали су приликом временског осредњавања конвективног члана у једначини количине кретања.

На овај начин може се у одређеној мери предвидети интензитет турбуленције али не и анизотропност као својство струјања.

Струјање у турбулентном граничном слоју је анизотропно, али двоједначински модели са концептом турбулентне вискозности дају добре резултате. Међутим, у одређеним случајевима струјања где анизотропност долази до изражаја, ови модели неће дати добра решења. То су следећи примери: вихорна струјања, струјање са израженом закривљеношћу струјног простора, нагло убрзавање или успоравање флуидне струје, изражено деловање масених сила. Приликом оваквих струјања изражена је анизотропност тензора турбулентних напона, па је за добијање тачних резултата потребно уместо одређивања турбулентне вискозности, одредити сваки од турбулентних напона засебно. Овакав приступ предложен је од стране Лаундера 1975. године [47].

У том циљу, изводи се транспортна једначина за тензор турбулентних напона, по угледу на извођење транспортне једначине за кинетичку енергију турбуленције. Тензор турбулентних напона

$$\mathbf{R}^k = \frac{\boldsymbol{\tau}^{k''}}{\rho^k} = \begin{bmatrix} \overline{u^{k''} u^{k''}} & \overline{u^{k''} v^{k''}} & \overline{u^{k''} \omega^{k''}} \\ \overline{v^{k''} u^{k''}} & \overline{v^{k''} v^{k''}} & \overline{v^{k''} \omega^{k''}} \\ \overline{\omega^{k''} u^{k''}} & \overline{\omega^{k''} v^{k''}} & \overline{\omega^{k''} \omega^{k''}} \end{bmatrix}$$

је симетричан, тако да је број допунских скаларних једначина једнак шест. Уз њих користи се и допунска скаларна једначина за дисипацију, тако да укупно постоји седам

допунских једначина:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha^k \rho^k \mathbf{R}^k) + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{R}^k) - \nabla \cdot \left[\alpha^k \rho^k C_s \frac{k^k}{\varepsilon^k} \mathbf{R}^k (\nabla \mathbf{R}^k)^T \right] = \alpha^k [\mathbf{P}^k + \mathbf{G}^k - \\ - \rho^k C_1 \frac{\varepsilon^k}{k^k} \left(\mathbf{R}^k - \frac{2}{3} k^k \mathbf{I} \right) - C_2 \left(\mathbf{P}^k - \frac{2}{3} P^k \mathbf{I} \right) - C_3 \left(\mathbf{G}^k - \frac{2}{3} G^k \mathbf{I} \right) - \frac{2}{3} \rho^k \varepsilon^k \mathbf{I}] + \mathbf{S}_{\mathbf{R}^k}^{\text{int}} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha^k \rho^k \varepsilon^k) + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k \varepsilon^k) - \nabla \cdot \left(\alpha^k \rho^k C_\varepsilon \frac{k^k}{\varepsilon^k} \mathbf{R}^k \cdot \nabla \varepsilon^k \right) = \\ = \alpha^k \frac{\varepsilon^k}{k^k} (C_{\varepsilon 1} P^k + C_3 \|G^k\| - C_{\varepsilon 2} \rho^k \varepsilon^k) + S_{\varepsilon^k}^{\text{int}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

На левој страни једначине (3.42) се редом налазе локални, конвективни и дифузиони члан. Сабирци на десној страни једначине \mathbf{P}^k и \mathbf{G}^k представљају продукционе чланове услед деловања смичућих напона и масених сила, затим, чланови који садрже константе C_i ($i = 1, 2, 3$) су продукциони чланови који потичу од деловања сила притиска, док претпоследњи и последњи сабирак представљају дисипацију и изворски члан услед међусобног деловања фаза.

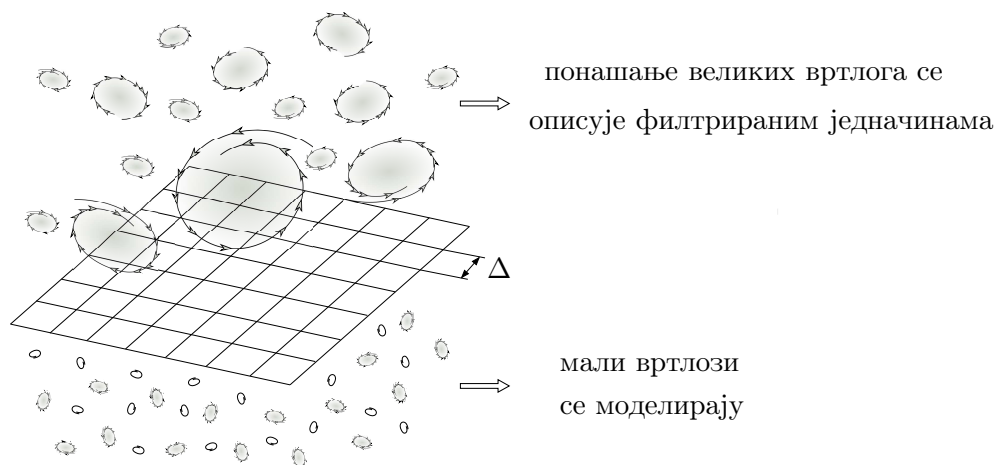
Овакав приступ је општији и има боље способности да опише турбуленцију. Негативне последице постојања већег броја транспортних једначина су већа сложеност система једначина, већи захтеви за рачунским ресурсима и проблеми са конвергенцијом прорачуна, јер се у једначинама не појављује турбулентна вискозност која има ту особину да својим присуством повећава нумеричку стабилност прорачуна.

3.4.3 Симулација великих вртлога

Један од разлога за непостојање универзалног турбулентног модела заснованог на концепту турбулентне вискозности је разлика у понашању малих и великих вртлога. Понашање великих вртлога, који су повезани са главним струјним током од којег добијају енергију, не зависи од вискозних сила већ од инерцијалних сила, масених сила, геометрије струјног простора и граничних услова, тако да они могу бити изразито анизотропни. Супротно томе, услед утицаја вискозних сила, мали вртлози су приближно изотропни, међусобно се понашају слично и њих је лакше моделирати³.

Да би се, за одређени проблем струјања, предвидело понашање великих вртлога у току времена потребно је извршити прорачун коришћењем једначина које нису временски осредњене, за разлику од Рејнолдсових једначина. Са друге стране, понашање малих вртлога се може са задовољавајућом тачношћу предвидети моделирањем. Идеја о подели вртложних структура на *велике* и *мале*, и њихово различито третирање, представља основну идеју **симулације великих вртлога** (енгл. Large Eddy Simulation - LES). Ова идеја је приказана скицом 3.5.

³Са смањењем величине вртлога повећава се њихова изотропност. Микровртлози размере Колмогорова су изотропни. Ова турбуленција је хомогена, изотропна и статистички уравнотежена.



Слика 3.5. Приказ основне идеје симулације великих вртлога.

Овакав приступ се разликује од раније приказаног Рејнолдсовог статистичког приступа проблему турбуленције. Тамо се врши временско осредњавање једначина, а овде **просторно филтрирање** са циљем да се раздвоје велики од малих вртлога. Један од најважнијих појмова је **величина филтера** Δ . Она одговара димензији отвора на мрежи (ситу), односно филтеру (слика 3.5). Управо она је критеријум који одређује да ли се неки вртлог третира као велики или као мали. Уколико је пречник вртлога, као његова карактеристична димензија, већи од величине филтера Δ , тада се вртлог сматра великим и он подлеже нестационарном нумеричком прорачуну, у супротном случају, када је пречник вртлога мањи од величине филтера Δ , вртлог је мали и он се моделира коришћењем одговарајућег модела.

Поступак филтрирања се не примењује на вртлоге, како је илустративно приказано на слици 3.5, већ на основне једначине. Процес филтрирања у математичком смислу представља поступак интеграљења. Величина $\bar{\phi}$ у Рејнолдсовим једначинама представља временски осредњену вредност величине ϕ , а овде представља филтрирану вредност величине ϕ (осредњену по запремини) и добија се на следећи начин:

$$\bar{\phi}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Delta) \phi(\mathbf{r}, t) dx' dy' dz', \quad (3.44)$$

где су: \mathbf{r} - вектор положаја тежишта запремине по којој се врши осредњавање, \mathbf{r}' - положај тачке за коју се проверава да ли припада запремини по којој се врши осредњавање, Δ - величина филтера.

Функција кутијастог филтера гласи:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \Delta) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq \Delta/2 \\ 0 & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > \Delta/2 \end{cases}$$

Њеном применом се у процесу интеграљења по контролној запремини $V = \Delta_x \Delta_y \Delta_z$ узимају у обзир само оне тачке које се налазе унутар контролне запремине. У случају да је она облика квадра, величина филтера се рачуна као $\Delta = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$.

Када се прорачун струјања врши применом методе коначних запремина, тада је већ одређена доња граница за величину филтера. Унутар једне коначне запремине (прорачунске ћелије) налази се једна тачка која је представља, и у њој су дефинсане физичке величине флуида. Вредности у осталим тачкама које припадају истој контролној запре-

мини су непознате, тако да нема смисла примењивати величину филтера која је мања од димензије прорачунске ћелије. Најчешће се усваја да је величина филтера једнака димензији ћелије прорачунске мреже $\Delta = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$.

Да би се предочило како процес филтрирања (за који је показано да у математичком смислу представља процес интеграљења) задржава велике вртлоге и одстрањује мале, користи се слика 3.6. Процес филтрирања не задржава само велике вртлоге, већ све оне струјне структуре чије су димензије веће од величине филтера. Усвојено је да величина филтера Δ одговара димензији прорачунске ћелије. Осредњавањем по уоченој коначној запремини V , сви подаци о пољу брзине унутар ње су сведени на вектор брзине у тежишту, тако да су подаци о вртлозима унутар коначне запремине изгубљени и тиме су мали вртлози одбачени. Када се интеграљење изврши и по осталим коначним запреминама, остаће вектори брзина у тежиштима тих запремина који ће описати присуство великог вртлога. Информације о овом вртлогу остају зато што је његова димензија већа од величине филтера Δ .

Када се процедура осредњавања (3.44) примени на основне једначине, добија се систем филтерованих једначина које описују кретање великих вртлога. Једначина континуитета гласи:

$$\boxed{\frac{\partial(\alpha^k \bar{\rho}^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k) = \bar{\Gamma}^k} \quad (3.45)$$

Користи се Фавреов запис филтрираних величина $\tilde{\phi}$, у чијој дефиницији $\bar{\phi}$ означава филтрирану величину ϕ , а не временски осредњену. Једначина кретања гласи:

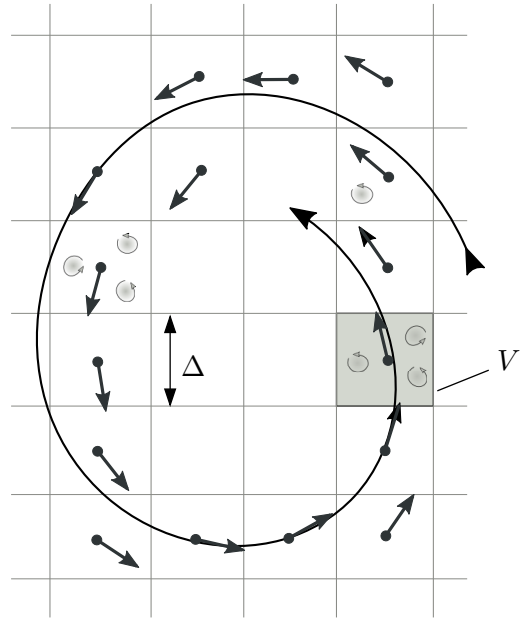
$$\frac{\partial(\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \tilde{\mathbf{U}}^k) = -\nabla(\alpha^k \bar{p}^k) - \nabla \cdot (\alpha^k \bar{\tau}^k) + \alpha^k \bar{\mathbf{F}}_m + \bar{\Omega}^k.$$

И овде је, као при Рејнолдсовом временском осредњавању, проблематичан конвективни члан. Он се може приказати на следећи начин:

$$\nabla \cdot (\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \tilde{\mathbf{U}}^k) = \nabla \cdot (\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \tilde{\mathbf{U}}^k) + \left[\nabla \cdot (\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \tilde{\mathbf{U}}^k) - \nabla \cdot (\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \tilde{\mathbf{U}}^k) \right]$$

Члан у угластој загради ће бити пребачен на десну страну једначине и затим моделиран. Једначина количине кретања постаје:

$$\boxed{\frac{\partial(\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \tilde{\mathbf{U}}^k) = -\nabla(\alpha^k \bar{p}^k) - \nabla \cdot (\alpha^k \bar{\tau}^k) + \alpha^k \bar{\mathbf{F}}_m + \bar{\Omega}^k - \underbrace{\left[\nabla \cdot (\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \tilde{\mathbf{U}}^k) - \nabla \cdot (\alpha^k \bar{\rho}^k \tilde{\mathbf{U}}^k \tilde{\mathbf{U}}^k) \right]}_*} \quad (3.46)$$



Слика 3.6. Велики и мали вртлози у струјном пољу.

Филтриране основне једначине подсећају на Рејнолдсове осредњене једначине. Тамо се као последица осредњавања конвективног члана јавља сабирак који је проглашен за турбулентне напоне, а овде се као последица операције филтрирања над конвективним чланом јавља сабирак који је у једначини (3.46) означен са (*). И овај сабирак може бити приказан као дивергенција тензора напона $\tau^{f,k}$:

$$\nabla \cdot \left(\alpha^k \overline{\rho^k} \widetilde{\mathbf{U}^k \mathbf{U}^k} - \alpha^k \overline{\rho^k} \widetilde{\mathbf{U}^k} \widetilde{\mathbf{U}^k} \right) = \nabla \cdot \tau^{f,k}.$$

Пројекција тензора на осу i гласи:

$$\tau_{i,j}^{f,k} = \alpha^k \overline{\rho^k} \widetilde{u_i^k \mathbf{U}^k} - \alpha^k \overline{\rho^k} \widetilde{u_i^k} \widetilde{\mathbf{U}^k} = \alpha^k \overline{\rho^k} \widetilde{u_i^k u_j^k} - \alpha^k \overline{\rho^k} \widetilde{u_i^k} \widetilde{u_j^k}.$$

Даљом анализом овог напона показује се да он узима у обзир утицај двоструког процеса филтрирања на струјно поље, јер за разлику од временског осредњавања важи $\overline{\overline{\phi}} \neq \overline{\phi}$. Затим, он представља међусобно дејство великих вртлога који се прорачунавају и малих вртлога који су одбачени у процесу филтрирања, као и утицај малих вртлога једних на друге. Ове чланове је потребно моделирати.

3.5 Коментари и закључци о основним једначинама вишефазног струјања

До сада су изведене једначина континуитета (3.10), једначина количине кретања (3.19) и једначина енергије (3.25) за модел два флуида. Једначине су осредњене по запремини и по времену. Приказане основне једначине, које представљају математички израз основних закона физике, су темељ анализе области вишефазног струјања флуида.

Напоменуто је да се занемаривањем изворских чланова који потичу од размене масе, количине кретања и енергије између фаза, као и изостављањем удела фазе α^k и горњег индекса k који означава фазу, ове основне једначине свде на облик који описује једнофазно струјање. Основне једначине и једнофазног и вишефазног струјања представљају нелинеарни систем парцијалних диференцијалних једначина који нема аналитичко решење. Ове једначине захтевају нумерички поступак решавања, са том разликом што се у случају вишефазног струјања у систему основних једначина појављује значајно већи број непознатих величина.

Треба проверити да ли је систем основних једначина затворен. Систем се састоји од једначине континуитета, три пројекције једначине кретања и једначине енергије, дакле пет једначина. У њему се појављују следеће непознате α^k , ρ^k , u^k , v^k , w^k , p^k , H^k . Више је непознатих него расположивих једначина. Потребно је увести једначину стања за дефинисање густине која има облик $\rho^k = \rho^k(T^k, p^k)$. Тотална енталпија је изведена физичка величина па се за њу може искористити конститутивна релација $H^k = H^k(T^k, p^k, U^k)$.

Дакле, постоји 8 непознатих величина које описују стање једне фазе. Ако у струјању учествују две фазе, укупан број непознатих величина у систему је 16. На располагању је 7 једначина, које ако се примене за обе фазе дају систем од 14 једначина. Ово значи да систем није затворен. Као додатна, петнаеста једначина може се искористити алгебарско ограничење за збир удела фаза који мора бити једнак 1, тј. $\sum_{k=1}^k \alpha^k = 1$. И након увођења ове додатне једначине, број непознатих је за један већи од броја једначина у систему. Да би се затворио систем једначина уводи се претпоставка да све фазе, које

учествују у струјању, имају заједничко поље притиска, $p^k = p$. Ова претпоставка је оправдана у случају када релативна брзина фаза није велика и када не постоји значајна промена запремине распршене фазе, што одговара великом броју случајева вишефазног струјања. Пошто фазе имају заједничко поље притиска, број непознатих величина је смањен на 15 и тиме изједначен са бројем расположивих једначина у систему, чиме систем постаје затворен.

Чланове који потичу од природе турбулентног струјања је потребно моделирати, као што је приказано у одељку 3.4. За сваку фазу која учествује у струјању се користи начин моделирања турбуленције као у случају једнофазног струјања флуида.

Изворске чланове Γ'^k , Ω'^k и $\Pi'_H{}^k$ у једначинама, редом (3.10) (3.19) и (3.25), који представљају размену масе, количине кретања и енергије између фаза кроз разделну површ, је потребно моделирати. Не постоје универзални модели изворских чланова који ће бити применљиви на све врсте вишефазног струјања, већ свака врста има моделе изворских чланова који јој одговарају. То је неопходно због различите природе различитих врста вишефазног струјања. Моделирање изворских чланова има велики утицај на стабилност и тачност нумеричких прорачуна струјања.

3.5.1 Основне једначине за модел мешавине

Уместо да се посматра систем једначина понаособ за обе фазе, може се посматрати један систем једначина за мешавину коју граде ове две фазе. Та мешавина се посматра као нови флуид (једна фаза). Основни закони: одржања масе, количине кретања и енергије за модел мешавине гласе:

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{U}^m) = 0. \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho^m \mathbf{U}^m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{U}^m \mathbf{U}^m) = & -\nabla p + \\ & + \nabla \cdot \left(\mu^m (\nabla \mathbf{U}^m + (\nabla \mathbf{U}^m)^T) - \frac{2}{3} \mu^m \nabla \cdot \mathbf{U}^m \mathbf{I} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}^{m''} + \rho^m \mathbf{g} + \mathbf{F}_\sigma - \\ & - \nabla \cdot \sum_{k=1}^2 (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^{d,k} \mathbf{U}^{d,k}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho^m H^m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^m \mathbf{U}^m H^m) = & \nabla \cdot (\lambda^m \nabla T^m) - \nabla \cdot \mathbf{q}_H^{m''} + \zeta - \\ & - \nabla \cdot \sum_{k=1}^2 (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^{d,k} H^k) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Карактеристике мешавине зависе од карактеристика и удела појединих фаза. Важи претпоставка да фазе деле исто поље притиска, а густина, динамичка вискозност и топлотна проводљивост мешавине се рачунају на следећи начин:

$$\rho^m = \sum_{k=1}^2 \alpha^k \rho^k, \quad \mu^m = \sum_{k=1}^2 \alpha^k \mu^k, \quad \lambda^m = \sum_{k=1}^2 \alpha^k \lambda^k.$$

Брзина мешавине и тотална енталпија су изражене на следећи начин:

$$\mathbf{U}^m = \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k}{\sum_{k=1}^2 \alpha^k \rho^k}, \quad H^m = \frac{\sum_{k=1}^2 \alpha^k \rho^k H^k}{\sum_{k=1}^2 \alpha^k \rho^k}.$$

Брзина $\mathbf{U}^{d,k}$ која се појављује у једначинама (3.48) и (3.49) представља релативну брзину фазе k у односу на мешавину $\mathbf{U}^{d,k} = \mathbf{U}^k - \mathbf{U}^m$.

Једначина континуитета за модел мешавине (3.47) изгледа исто као једначина континуитета за једнофазно струјање, док се једначине кретања (3.48) и енергије (3.49) разликују од једначина које описују једнофазно струјање по последња два сабирка, који су последица неједнакости брзина фаза и утицаја површинског напона на разделној површи. Чланови \mathbf{F}_σ и ζ су дефинисани једначинама (2.25) и (2.26).

У посебним случајевима када су брзине фаза међусобно једнаке, тада се модел мешавине назива модел хомогене мешавине и за њега важи да је $\mathbf{U}^k = \mathbf{U}^m$, односно $\mathbf{U}^{d,k} = 0$.

3.5.2 Општи облик основних једначина погодан за нумеричко решавање

Основне једначине механике флуида се могу свести на универзалнији облик, што значајно олакшава писање програмских кодова за добијање нумеричких решења. Сабирци који се појављују у свим основним једначинама: (3.10), (3.19), (3.25), (3.35) и (3.36), као што се нпр. појављује извод по времену, тј. локални члан, улазе у општи облик основних једначина, а сви они сабирци који су карактеристика само за једну од основних једначина се групишу у изворске чланове S_i^k .

Овде су приказане основне једначине за нестационарно, тродимензионално, турбулентно, вишефазно, стишљиво струјање њутновског флуида. Користи се модел два флуида, а за решавање проблема турбуленције користи се стандардни $k - \varepsilon$ турбулентни модел. Једначине су приказане у развијеном облику, а закон кретања је приказан преко три скаларне једначине.

Закон одржања масе:

$$\frac{\partial(\alpha^k \rho^k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k)}{\partial z} = S_{m^k}^{\text{int}} \quad (3.50)$$

Пројекција једначине количине кретања на осу x :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k u^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k u^k)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k u^k)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial u^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial u^k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial u^k}{\partial z} \right] + S_{u^k}^k \end{aligned} \quad (3.51)$$

Пројекција једначине количине кретања на осу y :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k v^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k v^k)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k v^k)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial v^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial v^k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial v^k}{\partial z} \right] + S_{v^k}^k \end{aligned} \quad (3.52)$$

Пројекција једначине количине кретања на осу z :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k w^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k w^k)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k w^k)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial w^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial w^k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial w^k}{\partial z} \right] + S_{w^k}^k \end{aligned} \quad (3.53)$$

Једначина енергије:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha^k \rho^k H^k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k H^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k H^k)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k H^k)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\text{Pr}_T^k} \frac{\partial H^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\text{Pr}_T^k} \frac{\partial H^k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\text{Pr}_T^k} \frac{\partial H^k}{\partial z} \right] + S_H^k \end{aligned} \quad (3.54)$$

Једначина за кинетичку енергију турбуленције:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha^k \rho^k k^k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k k^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k k^k)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k k^k)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\sigma_k} \frac{\partial k^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\sigma_k} \frac{\partial k^k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\sigma_k} \frac{\partial k^k}{\partial z} \right] + S_{k^k}^k \end{aligned} \quad (3.55)$$

Једначина за дисипацију кинетичке енергије турбуленције:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\alpha^k \rho^k \varepsilon^k)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k \varepsilon^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k \varepsilon^k)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k \varepsilon^k)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon^k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k \frac{\mu_T^k}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon^k}{\partial z} \right] + S_{\varepsilon^k}^k \end{aligned} \quad (3.56)$$

Све, овде приказане, основне једначине имају заједнички облик. Он ће бити написан за физичку величину ϕ^k :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial(\alpha^k \rho^k \phi^k)}{\partial t}}_1 + \underbrace{\frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k \phi^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k \phi^k)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k \phi^k)}{\partial z}}_2 = \\ & = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k \Gamma_{\phi^k}^k \frac{\partial \phi^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k \Gamma_{\phi^k}^k \frac{\partial \phi^k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k \Gamma_{\phi^k}^k \frac{\partial \phi^k}{\partial z} \right]}_3 + \underbrace{S_{\phi^k}^k}_4 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Једначина (3.57) представља општи облик основних једначина механике флуида, за нестационарно, тродимензионално, турбулентно, вишефазно, стишљиво струјање Њутновског флуида. Уколико се из једначина изостави горњи индекс k који уазује на фазу, и ознака за удео фазе α^k , добија се општи облик основних једначина који важи за једнофазно струјање флуида. Општи облик основних једначина састоји се од четири члана:

- 1 - локални члан,
- 2 - конвективни члан,

- 3 - дифузиони члан,
- 4 - изворски члан.

Из општег облика (3.57) добијају се различити основни закони у зависности од избора величине ϕ^k :

$\phi = 1$	једначина континуитета
$\phi^k = u^k$	пројекција једн. кол. кретања на осу x
$\phi^k = v^k$	пројекција једн. кол. кретања на осу y
$\phi^k = w^k$	пројекција једн. кол. кретања на осу z
$\phi^k = H^k$	једначина енергије
$\phi^k = k^k$	једначина кин. енер. турб.
$\phi^k = \varepsilon^k$	једначина дисипације

Оно што се разликује од једначине до једначине, јесте величина ϕ^k , као што је управо показано, затим изворски чланови и коефицијенти у дифузионом члану, који се стога називају коефицијенти дифузије. Њихове вредности су приказане у табели 3.1.

Табела 3.1. Изрази за изворске чланове и коефицијенте дифузије у основним једначинама.

ϕ^k	$\Gamma_{\phi^k}^k$	$S_{\phi^k}^k$
1	0	$S_{m^k}^{\text{int}}$
u^k	$\mu^k + \mu_T^k$	$-\alpha^k \frac{\partial p'^k}{\partial x} + \alpha^k \rho^k g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial u^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial v^k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial w^k}{\partial x} \right] + S_{u^k}^{\text{int}}$
v^k	$\mu^k + \mu_T^k$	$-\alpha^k \frac{\partial p'^k}{\partial y} + \alpha^k \rho^k g_y + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial u^k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial v^k}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial w^k}{\partial y} \right] + S_{v^k}^{\text{int}}$
w^k	$\mu^k + \mu_T^k$	$-\alpha^k \frac{\partial p'^k}{\partial z} + \alpha^k \rho^k g_z + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial u^k}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial v^k}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) \frac{\partial w^k}{\partial z} \right] + S_{w^k}^{\text{int}}$
H^k	$\frac{\mu_T^k}{\text{Pr}_T^k}$	$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha^k \lambda^k \frac{\partial T^k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha^k \lambda^k \frac{\partial T^k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha^k \lambda^k \frac{\partial T^k}{\partial z} \right) + S_{H^k}^{\text{int}}$
k^k	$\frac{\mu_T^k}{\sigma_k}$	$\alpha^k (P^k + G^k - \rho^k \varepsilon^k) + S_{k^k}^{\text{int}}$
ε^k	$\frac{\mu_T^k}{\sigma_\varepsilon}$	$\alpha^k \frac{\varepsilon^k}{k^k} (C_{\varepsilon 1} P^k + C_3 G^k - C_{\varepsilon 2} \rho^k \varepsilon^k) + S_{\varepsilon^k}^{\text{int}}$

Као што се у табели 3.1 види, изворски чланови $S_{\phi^k}^k$ садрже у себи оригиналне изворске чланове $S_{\phi^k}^{\text{int}}$ који су раније одређени. Поред њих, изворски чланови $S_{\phi^k}^k$ садрже све оне сабирке из основних једначина који својим обликом не припадају локалном, конвективном, ни дифузионом члану. Оригинални изворски чланови $S_{\phi^k}^{\text{int}}$ гласе:

$$\begin{aligned} S_{m^k}^{\text{int}} &= \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} - \dot{m}_{kl}) \\ S_{u^k}^{\text{int}} &= \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} u^l - \dot{m}_{kl} u^k) + (p_{\text{int}}^k - p) \frac{\partial \alpha^k}{\partial x} + F_x^k \\ S_{v^k}^{\text{int}} &= \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} v^l - \dot{m}_{kl} v^k) + (p_{\text{int}}^k - p) \frac{\partial \alpha^k}{\partial y} + F_y^k \\ S_{w^k}^{\text{int}} &= \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} w^l - \dot{m}_{kl} w^k) + (p_{\text{int}}^k - p) \frac{\partial \alpha^k}{\partial z} + F_z^k \\ S_{H^k}^{\text{int}} &= \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} H^l - \dot{m}_{kl} H^k) + Q_H^{\text{int}} \end{aligned}$$

N_p представља број фаза које учествују у струјању. У табели 3.1 се појављује величина p'^k која представља модификовани притисак, који је одређен изразом:

$$p'^k = p^k + \frac{2}{3} \rho^k k^k + \frac{2}{3} (\mu^k + \mu_T^k) \nabla \cdot \mathbf{U}^k.$$

Једначина (3.57) представља општи запис основних једначина у диференцијалном облику. За примену методе коначних запремина потребно је најпре интегралити ову једначину по запремини, тако се добија интегрални облик:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \frac{\partial(\alpha^k \rho^k \phi^k)}{\partial t} dV + \iiint_V \left[\frac{\partial(\alpha^k \rho^k u^k \phi^k)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k v^k \phi^k)}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha^k \rho^k w^k \phi^k)}{\partial z} \right] dV = \\ & = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha^k \Gamma_{\phi^k}^k \frac{\partial \phi^k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha^k \Gamma_{\phi^k}^k \frac{\partial \phi^k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha^k \Gamma_{\phi^k}^k \frac{\partial \phi^k}{\partial z} \right) \right] dV + \iiint_V S_{\phi^k}^k dV \end{aligned}$$

На конвективни и дифузиони члан се примењује теорема Гаус-Остроградског, тако да претходна једначина постаје:

$$\boxed{\begin{aligned} & \iiint_V \frac{\partial(\alpha^k \rho^k \phi^k)}{\partial t} dV + \oiint_A [(\alpha^k \rho^k u^k \phi^k) n_x + (\alpha^k \rho^k v^k \phi^k) n_y + (\alpha^k \rho^k w^k \phi^k) n_z] dA = \\ & = \oiint_A \left[\alpha^k \Gamma_{\phi^k}^k \frac{\partial \phi^k}{\partial x} n_x + \alpha^k \Gamma_{\phi^k}^k \frac{\partial \phi^k}{\partial y} n_y + \alpha^k \Gamma_{\phi^k}^k \frac{\partial \phi^k}{\partial z} n_z \right] dA + \iiint_V S_{\phi^k}^k dV \end{aligned}} \quad (3.58)$$

Даље се, интегрални апроксимирају одговарајућим сумама, чиме се од диференцијалних једначина добијају дискретизоване алгебарске једначине.

Транспортна једначина за фреквенцију дисипације и једначине за Рејнолдсове турбулентне напоне, које се користе у напонским моделима, могу се такође написати у складу са општим обликом основних једначина (3.57) и (3.58). Ово има велики значај јер олакшава нумеричко решавање система основних једначина.

Моделирање чланова који описују међусобно дејство фаза

Једначине од (3.50) до (3.54) представљају основне законе: одржања масе, количине кретања и енергије, примењене на модел два флуида. У њима се појављују изворски чланови. Сви они су приказани табелом 3.1. Ту се виде чланови $S_{m^k}^{\text{int}}$, $S_{u^k}^{\text{int}}$, $S_{v^k}^{\text{int}}$, $S_{w^k}^{\text{int}}$ и $S_{H^k}^{\text{int}}$, који представљају размену: масе, количине кретања и енергије између фаза. Те размене се одвијају кроз разделну површ, на шта указује ознака int (енгл. interface).

Дакле, модел два флуида подразумева да свака фаза има свој систем основних једначина у којем се, између осталих, налазе и чланови који описују међусобно деловање једне фазе са другом, суседном фазом. То су управо поменути чланови. Њих је потребно моделирати. Веома је важно да изрази за те чланове буду такви да обезбеђују стабилност и конзистентност нумеричког поступка за решавање система једначина.

Као што је више пута поменуто, не постоји универзални математички модел који одговара свим врстама вишефазног струјања. То се види и на примеру чланова који описују међусобно деловање фаза. Поједине силе, које описују међусобно деловање чврстих честица и гасовите фазе, не могу се применити за описивање међусобног деловања мехурова гаса и течности. И друге врсте вишефазног струјања имају своје специфичне силе које се моделирају. Чак унутар једне врсте вишефазног струјања, нпр. струјања течне и гасовите фазе, разликоваће се чланови који се примењују за различите типове (режиме) ове врсте вишефазног струјања (слике 1.4 и 1.6). То значи да сваки тип вишефазног струјања има своје специфичности које ће се исказати и кроз одговарајуће чланове $S_{\phi^k}^{\text{int}}$.

При струјању течне и гасовите фазе, механизми размене масе су испаравање и кондензација. У случају изотермског струјања, какво се разматра у овом раду, нема размене масе између фаза:

$$S_{m^k}^{\text{int}} = \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} - \dot{m}_{kl}) = 0.$$

Температурска неравнотежа између фаза је предуслов и за размену топлотне енергије кроз разделну површ, тако да за изотермско струјање важи и

$$S_{H^k}^{\text{int}} = \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} H^l - \dot{m}_{kl} H^k) + Q_H^{\text{int}} = 0.$$

Преостаје да се одреде чланови $S_{u^k}^{\text{int}}$, $S_{v^k}^{\text{int}}$ и $S_{w^k}^{\text{int}}$, који представљају размену количине

кретања између фаза.

4.1 Размена количине кретања између фаза - силе на разделној површи

Изворски чланови у једначини количине кретања гласе:

$$\begin{aligned} S_{u^k}^{\text{int}} &= \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} u^l - \dot{m}_{kl} u^k) + (p_{\text{int}}^k - p) \frac{\partial \alpha^k}{\partial x} + F_x^k \\ S_{v^k}^{\text{int}} &= \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} v^l - \dot{m}_{kl} v^k) + (p_{\text{int}}^k - p) \frac{\partial \alpha^k}{\partial y} + F_y^k \\ S_{w^k}^{\text{int}} &= \sum_{l=1}^{N_p} (\dot{m}_{lk} w^l - \dot{m}_{kl} w^k) + (p_{\text{int}}^k - p) \frac{\partial \alpha^k}{\partial z} + F_z^k \end{aligned}$$

Раније је речено да први сабирци на десној страни представљају размену количине кретања између фаза услед размене масе, јер сваки део флуида који прође кроз разделну површ (промени фазу) носи са собом одређену количину кретања. У случају изотермног струјања нема размене масе, па су први сабирци једнаки нули. Други сабирци су најчешће занемарљиви услед малог градијента поља притиска, тако да се изворски чланови свODE на **силе на разделној површи** које треба да опишу различите механизме међусобног деловања фаза, што није једноставан задатак. Пошто постоје различити ефекти које треба узети у обзир овом силом, она се представља као збир више сила, а то су: сила отпора, сила узгона, сила турбулентне дисперзије, сила хидродинамичког подмазивања и виртуелна масена сила. Овај збир је приказан једначином (4.1):

$$\boxed{\mathbf{F}^k = \mathbf{F}_D^k + \mathbf{F}_L^k + \mathbf{F}_{TD}^k + \mathbf{F}_{WL}^k + \mathbf{F}_{VM}^k} \quad (4.1)$$

Све силе у претходној једначини су изражене по јединици запремине, њихова димензија је N/m^3 . Исту димензију имају сви чланови у једначини количине кретања.

Пре него што се пређе на објашњавање сваке силе понаособ, треба напоменути да на мехур у течности делује и сила потиска, али да њу није потребно посебно моделирати допунским чланом у једначини (4.1). Сила потиска изворно представља површинску силу која зависи од градијента притиска по површи мехура. У случају двофазног мехурастог струјања, какво се у овом раду разматра, градијент притиска се своди на хидростатичку расподелу притиска $\nabla p = \rho^L \mathbf{g}$. Коришћењем теореме Гаус-Остроградског прелази се са површинског на запремински интеграл и добија се познати израз за силу потиска која делује на мехур $-\rho^L \mathbf{g} V_B$.

У једначини кретања фигурише градијент притиска и представља деловање површинске силе притиска. Метода коначних запремина предвиђа да се дискретизована једначина кретања множи запремином прорачунске ћелије, а како у производу учествује и удео фазе α^G , добија се сила потиска која делује на гасовиту фазу унутар прорачунске ћелије. Овим је показано да сила потиска учествује у прорачуну и да је није потребно моделирати допунским чланом.

4.1.1 Сила отпора

Стандардни израз за силу отпора која делује на мехур предвиђа да она зависи од коефицијента отпора, густине течности, пројекције површине у правцу релативне брзине и од саме релативне брзине фаза:

$$\mathbf{F}_D^{k'} = \frac{1}{2} C_D \alpha^G \rho^L A_{\text{ref}} |\mathbf{U}_R| \mathbf{U}_R$$

Силу је потребно изразити по јединици запремине. За јединичну запремину се бира запремина мехура пречника D_B , а пројекција површине мехура је круг пречника D_B , тако да сила отпора по јединици запремине гласи:

$$\mathbf{F}_D^L = -\mathbf{F}_D^G = \frac{3}{4} \frac{C_D}{D_B} \alpha^G \rho^L |\mathbf{U}_R| \mathbf{U}_R \quad (4.2)$$

Вектор \mathbf{F}_D^L представља силу отпора којом мехур делује на течну фазу, док вектор \mathbf{F}_D^G представља силу отпора којом течна фаза делује на гасовиту, тј. на мехур. Ове две силе су повезане законом дејства и противдејства (акције и реакције).

У овој дисертацији се разматра струјање мехурова ваздуха и воде у вертикалној цеви. Струјање обе фазе се одвија навише. У том случају брзина мехурова је већа од брзине течне фазе, тако да ће вектор релативне брзине бити усмерен навише (\uparrow) $\mathbf{U}_R = \mathbf{U}^G - \mathbf{U}^L$. Према једначини (4.2) сила која делује на течну фазу је усмерена навише и тежи да је убрза, док је сила отпора која делује на мехур (гасовиту фазу) усмерена супротно од вектора релативне брзине, тј. усмерена је наниже и тежи да успори мехурове. Знак сила зависи од тога на који је начин дефинисан вектор релативне брзине. Овде је то разлика вектора брзина гасовите и течне фазе $\mathbf{U}_R = \mathbf{U}^G - \mathbf{U}^L$.

Следећи задатак је одређивање коефицијента отпора C_D . Једну од најчешће коришћених претпоставки за коефицијент отпора дали су Ishii and Zuber 1979. године [36]. Према њима постоји више режима тако да сваком одговара посебан израз за коефицијент отпора.

- **Стоксова област** - одговара вредностима Рејнолдсовог броја $0 \leq \text{Re}_B \leq 0,2$. У овој области важи тачно Стоксово решење за опструјавање сфере $C_D = \frac{24}{\text{Re}_B}$. Ова област нема практичног значаја за проучавање струјања мехурова гаса у течности јер важи само за веома спора струјања.
- **Вискозна област** - Корекцијом Стоксовог решења за опструјавање сфере добија се зависност која важи за вредности Рејнолдсовог броја $0 \leq \text{Re}_B \leq 1000$ и која гласи:

$$C_{D,\text{sphere}} = \frac{24}{\text{Re}_B} (1 + 0,1 \text{Re}_B^{0,75}).$$

- **Турбулентна област** - важи за вредности Рејнолдсовог броја $\text{Re}_B > 1000$. За њу важе два израза за коефицијент отпора:

$$C_{D,\text{ellipse}} = \frac{2}{3} \sqrt{\text{Eo}} \quad \text{и} \quad C_{D,\text{cap}} = \frac{8}{3}.$$

У изразима за коефицијент отпора се појављују Рејнолдсов број за мехур и Етвешов

(Eötvös) број који се дефинишу на следећи начин:

$$\text{Re}_B = \frac{\rho^L |\mathbf{U}_R| D_B}{\mu^L}, \quad \text{Eo} = \frac{g(\rho^L - \rho^G) D_B^2}{\sigma} \quad (4.3)$$

Рејнолдсов број се дефинише преко релативне брзине фаза, пречника мехура, густине и динамичке вискозности течне фазе, док Етвешов број зависи од гравитационог убрзања, разлике у густини фаза, пречника мехура и коефицијента површинског напона. Етвешов број представља количник гравитационе силе и површинског напона.

На крају, коефицијент отпора мехура у **униформној струјни флуида** се рачуна према следећој једначини:

$$C_{DU} = \max [C_{D,\text{sphere}}, \min (C_{D,\text{ellipse}}, C_{D,\text{cap}})] \quad (4.4)$$

Једначину (4.4) за рачунање коефицијента отпора су дали Ishii and Zuber [36].

4.1.2 Сила узгона

Током кретања мехура кроз течну фазу на њега делује попречна сила узгона \mathbf{F}_L^k као последица постојања градијента брзине у попречном правцу. Ова сила зависи од коефицијента узгона, густине течне фазе, релативне брзине фаза и втложности течне фазе. Ако се примењује модел два флуида, што овде јесте случај, сила зависи и од удела фазе:

$$\mathbf{F}_L^L = -\mathbf{F}_L^G = C_L \alpha^G \rho^L (\mathbf{U}^G - \mathbf{U}^L) \times (\nabla \times \mathbf{U}^L) \quad (4.5)$$

Сила узгона има значајан утицај на расподелу мехурова по попречном пресеку. Коефицијент узгона се према Shaver and Podowski [37] рачуна на следећи начин:

$$C_L = \begin{cases} 0, & y/D_B < 0,5 \\ C_{L0} f_L(y) & 0,5 \leq y/D_B \leq 1 \\ C_{L0} & 1 < y/D_B \end{cases}$$

Као што се види, вредност коефицијента узгона зависи од растојања од зида која се мери координатом y . Уколико је то растојање од зида мања од половине пречника мехура, сила узгона је једнака нули. Ако удаљеност износи између половине и једног пречника мехура, тада се коефицијент узгона рачуна као $C_L = C_{L0} f_L(y)$, где је C_{L0} константна вредност коефицијента узгона мехура и износи $C_{L0} = 0,03$, док је $f_L(y)$ функција која опет зависи од растојања од зида и рачуна се као:

$$f_L(y) = 3 \left(\frac{2y}{D_B} - 1 \right)^2 - 2 \left(\frac{2y}{D_B} - 1 \right)^3.$$

Ова функција има минималну вредност за $y = 0,5D_B$, $f_L(0,5D_B) = 0$ и највећу вредност за $y = 1D_B$, $f_L(D_B) = 1$. У трећем случају, када је удаљеност од зида већа од вредности пречника мехура, коефицијент узгона има константну вредност $C_{L0} = 0,03$.

4.1.3 Хидродинамичка сила подмазивања

У непосредној близини зида ($y/D_B < 0,5$) између мехура и зида цеви јавља се ефекат хидродинамичког подмазивања. Он је описан силом хидродинамичког подмазивања

\mathbf{F}_{WL}^k (енгл. *wall lubrication force*). Ова сила делује од зида ка оси цеви и спречава да се мехурови гаса причврсте за зид. Резултат деловања ове силе је да у непосредној близини зида удео гасовите фазе буде мали. Сила хидродинамичког подмазивања се према Lubchenko [17] рачуна коришћењем израза:

$$\mathbf{F}_{\text{WL}}^{\text{L}} = -\mathbf{F}_{\text{WL}}^{\text{G}} = -\frac{3}{4} \frac{C_{\text{D}}}{D_{\text{B}}} \alpha^{\text{G}} |\mathbf{U}^{\text{G}} - \mathbf{U}^{\text{L}}| \frac{\mu_{\text{tL}}}{\sigma_{\text{TD}}} \left(\frac{1}{\alpha^{\text{G}}} + \frac{1}{1 - \alpha^{\text{G}}} \right) \alpha^{\text{G}} \frac{1}{y} \frac{D_{\text{B}} - 2y}{D_{\text{B}} - y} \mathbf{n} \quad (4.6)$$

Израз (4.6) се примењује ако је испуњен услов $y/D_{\text{B}} < 0,5$, и сама вредност силе зависи од растојања од зида y . У области за коју важи $y/D_{\text{B}} \geq 0,5$ сила хидродинамичког подмазивања је једнака нули, $\mathbf{F}_{\text{WL}} = 0$.

4.1.4 Сила турбулентне дисперзије

Флуктуационо кретање течне фазе утиче на кретање мехурова гаса или чврстих честица које се налазе у течной фази. То дејство се описује силом турбулентне дисперзије која према Burns et al. [38] гласи:

$$\mathbf{F}_{\text{TD}}^{\text{L}} = -\mathbf{F}_{\text{TD}}^{\text{G}} = \frac{3}{4} \frac{C_{\text{D}}}{D_{\text{B}}} \alpha^{\text{G}} |\mathbf{U}^{\text{G}} - \mathbf{U}^{\text{L}}| \mu_{\text{T}}^{\text{L}} \left(\frac{1}{\alpha^{\text{G}}} + \frac{1}{1 - \alpha^{\text{G}}} \right) \nabla \alpha^{\text{G}} \quad (4.7)$$

Види се да сила турбулентне дисперзије зависи од турбулентне динамичке вискозности $\mu_{\text{T}}^{\text{L}}$ којом се моделира турбуленција и од градијента удела гасовите фазе. На турбуленцију течне фазе утиче присуство и понашање мехурова у непосредној околини.

4.1.5 Виртуелна масена сила

Уколико одређена појава доведе до убрзања једне фазе, то ће утицати и на другу фазу. Ова веза је описана виртуелном масеном силом \mathbf{F}_{VM}^k . Она зависи од разлике убрзања фаза и рачуна се као:

$$\mathbf{F}_{\text{VM}}^{\text{L}} = -\mathbf{F}_{\text{VM}}^{\text{G}} = \alpha^{\text{G}} \rho^{\text{L}} C_{\text{VM}} \left(\frac{D\mathbf{U}^{\text{G}}}{Dt} - \frac{D\mathbf{U}^{\text{L}}}{Dt} \right), \quad (4.8)$$

где је са $\frac{D()}{Dt}$ означен материјални извод. За усамљену сферу у униформној струји невискозног флуида, коефицијент C_{VM} има вредност $C_{\text{VM}} = 0,5$. Ова константна зависи од облика мехурова и њихове концентрације, па се може увести корекција:

$$C_{\text{VM}} = 0,5 \frac{1 + 2\alpha^{\text{G}}}{1 - \alpha^{\text{G}}}$$

која треба да узме у обзир утицај околних мехурова. Виртуелна масена сила је важна када је изражена разлика у густни фаза.

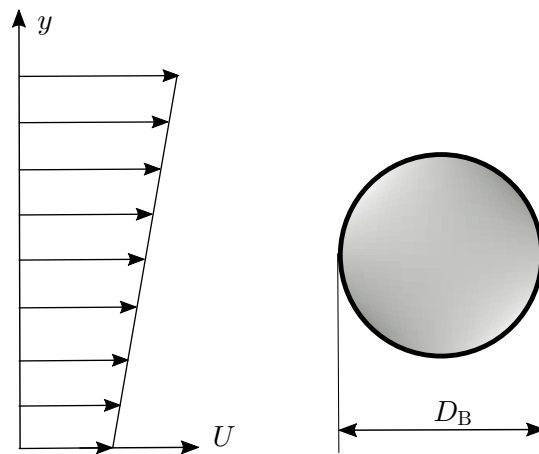
4.2 Утицај смицања на коефицијент отпора

Једначином (4.4) дефинисан је израз за коефицијент отпора усамљеног мехура у **униформној струји флуида**. У стварности мехур је често изложен смичућој струји флуида, тј. профил брзине није униформан. Да би се испитао утицај неуједначености профила брзине, (смицања) на коефицијент отпора мехура и сфере Legendre and

Magnaudet [11] су извели велики број нумеричких прорачуна решавајући пуне Навије-Стоксове једначине, тј. вршили су директне нумеричке симулације. Они су разматрали опструјавање сфере струјом флуида која није униформна, већ струјом флуида у којој постоји градијент брзине (слика 4.1). Као последица градијента брзине у непоремећеној струји флуида делују смичући напони, па се овакво струјање назива и смичуће струјање. Закључци до којих се дошло на примеру сфере се могу применити и на случај опструјавања мехура.

Нумерички прорачуни су извршени за различите вредности Рејнолдсовог броја у опсегу $0,1 \leq \text{Re}_B \leq 500$. Рејнолдсов број је дефинисан преко релативне брзине фаза и пречника мехура:

$$\text{Re}_B = \frac{\rho^L |U_R| D_B}{\mu^L}.$$



Слика 4.1. Опструјавање сфере струјом флуида са градијентом брзине (смичућом струјом флуида).

Прорачуни су истовремено вршени за различите вредности градијента брзинског поља, тј. за различите вредности смичућих напона у флуиду. Као мера интензитета смицања у флуиду користи се бездимензијска величина **степен смицања** Sr која се дефинише преко релативне брзине фаза U_R , пречника мехура D_B и градијента брзине течне фазе по попречној координати y , што се обележава као $\omega_s = |\text{grad}U^L|$:

$$\text{Sr} = \frac{D_B \omega_s}{|U_R|}. \quad (4.9)$$

Legendre and Magnaudet [11] су вршили прорачуне за вредности степена смицања $0 \leq \text{Sr} \leq 1$. У раду је праћен утицај смицања на коефицијенте узгона и отпора. Овде су од интереса закључци добијени о утицају смицања на коефицијент отпора.

Најпре су извршени нумерички прорачуни опструјавања сфере униформном струјом флуида, тј. без градијента брзине у попречном правцу $\text{Sr} = 0$. Добијени резултати за коефицијенте отпора и узгона се одлично слажу са постојећим изразима за рачунање коефицијената отпора и узгона, који су добијени емпиријским и полуемпиријским методама. Вредност коефицијента отпора при униформној струји флуида је означена са C_{DU} .

Затим су уследили прорачуни опструјавања сфере за исти опсег Рејнолдсовог броја $0,1 \leq \text{Re}_B \leq 500$, али сада са присуством градијента брзине у попречном правцу, тј. у смичућој струји флуида. Извршени су прорачуни за следеће вредности степена сми-

цања: $Sr = 0,01$, $Sr = 0,02$, $Sr = 0,1$, $Sr = 0,2$, $Sr = 0,5$, $Sr = 0,75$ и $Sr = 1$. Све вредности коефицијената отпора и узгона су упоређене са вредностима ових коефицијената у униформној струји флуида, како би се увидео утицај смицања.

Најпре су извршене две серије прорачуна за мале вредности степена смицања, прва за $Sr = 0,02$ и друга за $Sr = 0,2$. Прорачуни су извршени за опсег Рејнолдсовог броја $0,1 \leq Re_B \leq 500$. Добијене вредности коефицијента отпора у смичућој струји флуида C_D су упоређене са вредностима коефицијента отпора у униформној струји флуида ($Sr = 0$) C_{D_U} . Уочено је да постоји пораст вредности коефицијента отпора услед присуства смичућег струјања ($C_D > C_{D_U}$), али да је он при овако малим вредностима степена смицања мали. Највећи релативни пораст коефицијента отпора услед деловања смичућег струјања износи 1% за степен смицања $Sr = 0,02$ и приближно 4% за степен смицања $Sr = 0,2$. Поређење је приказано табелом 4.1. Закључује се да је при малим вредностима степена смицања $Sr < 0,2$, утицај смичућег струјања на коефицијент отпора мали.

Табела 4.1. Утицај смичућег струјања на коефицијент отпора сфере при малим вредностима степена смицања $Sr \leq 0,2$ [11].

Re_B	C_{D_U}	$Sr = 0,02$		$Sr = 0,2$	
		C_D	$\left(\frac{C_D}{C_{D_U}} - 1\right) 100$ [%]	C_D	$\left(\frac{C_D}{C_{D_U}} - 1\right) 100$ [%]
1	17.4	17.5	0.57	17.5	0.57
10	2.43	2.44	0.41	2.44	0.41
100	0.373	0.374	0.27	0.377	1.06
300	0.141	0.142	0.70	0.145	2.76
500	0.088	0.0889	1.01	0.0918	4.14

Да би се испитао утицај смичућег струјања у области $Sr \leq 1$, Legendre and Magnaudet [11] су извршили прорачуне за још три вредности степена смицања: $Sr = 0,5$, $Sr = 0,75$ и $Sr = 1$. Ови прорачуни су извршени за вредност Рејнолдсовог броја $Re_B = 300$. Додатно је извршен прорачун при условима $Re_B = 500$ и $Sr = 1$. Добијени резултати за коефицијент отпора су приказани у табели 4.2. Вредности коефицијента отпора у смичућој струји флуида су упоређене са коефицијентом отпора у униформној струји флуида и у табели је приказана релативна разлика изражена у процентима. При $Sr = 1$ релативна разлика ова два коефицијента отпора износи чак 53%.

Табела 4.2. Утицај смичућег струјања на коефицијент отпора сфере при умереним вредностима степена смицања $0,5 \leq Sr \leq 1$ [11].

Re_B	C_{D_U}	$Sr = 0,5$		$Sr = 0,75$		$Sr = 1$	
		C_D	$\left(\frac{C_D}{C_{D_U}} - 1\right) 100$ [%]	C_D	$\left(\frac{C_D}{C_{D_U}} - 1\right) 100$ [%]	C_D	$\left(\frac{C_D}{C_{D_U}} - 1\right) 100$ [%]
300	0.141	0.161	14.18	0.184	30.50	0.216	53.19
500	0.088	/	/	/	/	0.135	53.41

Овим је показано да при већим вредностима степена смицања утицај смицања доводи до значајног повећања коефицијента отпора, што не треба да буде занемарено.

Legendre and Magnaudet [11] због тога предлажу да се уведе корекција при рачунању коефицијента отпора која ће узети у обзир степен смицања. Предложена корекција гласи:

$$C_D(\text{Re}_B, \text{Sr}) = C_{D_U} (1 + 0,55 \text{Sr}^2) \quad (4.10)$$

Дакле, коефицијент отпора, који је рачунат за сферу у униформној струји флуида, се множи корекционим чланом $(1 + 0,55 \text{Sr}^2)$, како би се урачунао утицај смичућег струјања на коефицијент отпора.

Legendre and Magnaudet [11] су спровели детаљнију анализу како би утврдили узрок повећања коефицијента отпора. Анализирали су део силе отпора који потиче од вискозности, тј. од смичућих напона на површи сфере, и део силе отпора који потиче од расподеле притиска по сфери. Закључено је да је за повећање силе отпора одговоран део који потиче од притиска, док део који потиче од вискозности показује независност од изложености смичућем струјању. Део силе отпора који потиче од притиска се мења зато што постојање градијента брзине доводи до промене поља брзине око сфере и промене расподеле притиска по површини сфере.

Закључак који су Legendre and Magnaudet [11] извели проучавајући опструјавање сфере може се применити на мехур опструјаван течном фазом. Hosokawa and Tomiyama [7] су извршили експериментална испитивања струјања мехурова гаса у води које се одвија у вертикалној цеви кружног попречног пресека, пречника $D = 25 \text{ mm}$. Затим су спровели нумеричке прорачуне користећи различите нумеричке моделе и извршили поређење са експерименталним резултатима. Између осталог испитивали су утицај смицања на силу отпора. Дошли су до закључка да нумерички резултати боље одговарају експериментално измереним вредностима ако се у прорачуну силе отпора користи корекција за коефицијент отпора (4.10) коју су предложили Legendre and Magnaudet [11].

4.3 Ограничења постојеће корекције коефицијента отпора и увођење нове

Треба напоменути да су Legendre and Magnaudet [11] вршили прорачуне у опсегу степена смицања $0 \leq \text{Sr} \leq 1$ и да није испитано како се предложена корекција (4.10) понаша када степен смицања достиже више вредности. Степен смицања зависи од градијента брзине у попречном правцу (4.9), а он има највише вредности у непосредној близини зида цеви. Истовремено релативна брзина опада са приближавањем зиду цеви, а степен смицања је обрнуто пропорционалан релативној брзини. Све ово доводи до закључка да се вредност степена смицања повећава са приближавањем зиду цеви.

Hosokawa and Tomiyama [7] су за моделирање турбуленције користили стандардни $k - \varepsilon$ турбулентни модел, што значи да су коришћене и зидне функције за задавање граничних услова на зиду цеви. Зидним функцијама је премошћена област у непосредној близини цеви, ту се не врши прорачун струјања, већ се вредности физичких величина у средини прве прорачунске ћелије предвиђају унапред прописаним зидним функцијама (слика 3.4). Вредност турбулентне бездимензијске координате за прву прорачунску ћелију је $y^+ \geq 30$. Дакле, зидним функцијама је премошћена област у којој се очекују највеће вредности степена смицања Sr , то је област за коју важи $y^+ < 30$.

Предност коришћења зидних функција је смањење броја прорачунских ћелија и потребних рачунарских капацитета, као и времена извршавања прорачуна. Мана је то што се део струјног простора не прорачунава већ се користе неке унапред задате законитости. Зидне функције није пожељно користити када је од интереса посматрати процес непосредно у близини зида. Поред тога, важно је напоменути да не постоји сагласност око тога да ли је за вишефазно струјање оправдано користити зидне функције које су развијене за једнофазно струјање флуида.

Да би се извршио прорачун у непосредној близини зида (област $y^+ < 30$), потребно је користити неки од турбулентних модела без зидних функција (LRN) који не користи зидне функције већ се сав простор до зида цеви испуњава прорачунским ћелијама у којима се врши прорачун. Такав модел је $k - \varepsilon$ Launder-Sharma [43].

Идеја је да се изврши нумерички прорачун са турбулентним моделом ниског Рејнолдсовог броја (LRN) како би се испитало понашање уведене корекције (4.10) у непосредној близини зида, тј. у вискозном подслоју и прелазној области ($y^+ < 30$).

Поставка иницијалног прорачуна одговара наведеним подацима из експеримента Hosokawa and Tomiyama [7]. За разлику од нумеричког прорачуна који су они спровели, у овој дисертацији се користи турбулентни модел $k - \varepsilon$ Launder-Sharma [43], тако да се не користе зидне функције. Бездимензијска координата за прву прорачунску тачку уз зид има вредност $y^+ \approx 1$. Показано је да овакви нумерички прорачуни не поседују стабилност и да није могуће постићи конвергенцију решења.

Прорачун се извршава итеративно, при чему се исписују вредности посматраних физичких величина након сваког итеративног корака. Праћењем и анализом ових резултата од почетног корака до тренутка прекида прорачуна, утврђено је да до дивергенције решења доводи сила отпора која у прорачунским ћелијама непосредно уз зид ($y^+ < 30$) добија непримерено велике вредности $F_D = 10^{12} \text{ N/m}^3$. До оваквог решења долази услед наглог повећавања вредности коефицијента отпора C_D који се рачуна према препоруци Legendre and Magnaudet [11], тј. према једначини (4.10). У прорачуну се такође види да неоправдано велике вредности коефицијента отпора јесу последица наглог пораста вредности степена смицања и опадања релативне брзине U_R , управо у области непосредно уз зид цеви.

Закључује се да у области $y^+ < 30$ не може бити коришћена корекција коефицијента отпора, дата једначином (4.10). Она је добијена анализом прорачуна за које важи $Sr \leq 1$, а у овој области се јављају значајно више вредности степена смицања. Предложена квадратна зависност доводи до физички неоправдано великих вредности коефицијента отпора и последично силе отпора. Сила отпора директно је укључена у једначину кретања, тако да њена нетачна, превелика вредност, доводи до дивергенције прорачуна. Дакле, корекција (4.10), коју су предложили Legendre and Magnaudet [11], није погодна за коришћење заједно са турбулентним моделима без зидних функција.

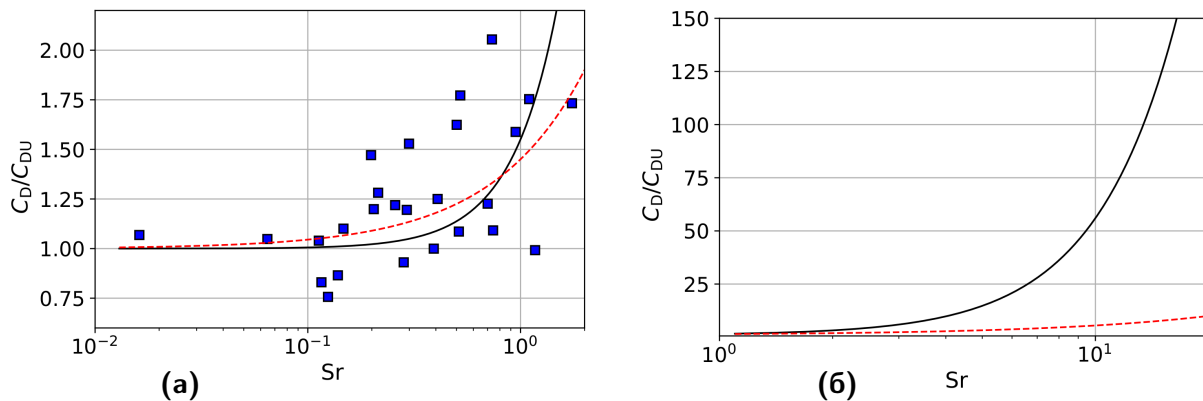
Са друге стране, јасно је да су Legendre and Magnaudet [11] показали да је потребно узети у обзир утицај смицања на коефицијент отпора и да је тај утицај све већи са порастом степена смицања. Све ово доводи до закључка да је потребно претпоставити нову корекцију коефицијента отпора која ће узети у обзир утицај смицања, али тако да се може користити и у области $y^+ < 30$, а да при томе не наруши стабилност нумеричког прорачуна.

До нове зависности дошло се анализом података које су представили Hosokawa and Tomiyama [7]. Они су у свом раду израчунали вредност коефицијента отпора C_D из једначине кретања која је пројектована на вертикални правац. При равномерном кретању мехура ($U^G \approx \text{const}$), сила потиска и сила отпора, које делују на мехур, се налазе у рав-

нотежи. Изједначавањем ових сила, које су изражене по јединици запремине мехура, добија се:

$$\frac{3}{4} \frac{C_D}{D_B} \rho^L U_R^2 = (\rho^L - \rho^G) g.$$

Користећи експерименталне податке о релативној брзини и пречнику мехура, из претходне једначине Hosokawa and Tomiyama [7] су израчунали вредност коефицијента отпора за поједине мехурове. Затим је за изабрану контролну запремину извршено осредњавање, израчуната је средња вредност коефицијента отпора мехурова који се налазе унутар изабране контролне запремине. Резултат осредњавања по једној контролној запремини је једна тачка на дијаграму 4.2. Пре него што су подаци о вредности коефицијента отпора унети у дијаграм, оне су упоређене са коефицијеном отпора у униформној струји флуида C_{DU} . Такође, на основу експериментално одређених величина Hosokawa and Tomiyama [7] су израчунали вредност степена смицања. Коначно, ради приказивања утицаја смицања на коефицијент отпора, они су дали дијаграм 4.2 (а), на којем се види количник коефицијента отпора у смичућој струји флуида и коефицијента отпора у униформној струји C_D/C_{DU} , за различите вредности степена смицања Sr . Одмах се види оправданост хипотезе Legendre and Magnaudet [11] да при рачунању коефицијента отпора треба узети у обзир утицај смицања. Дијаграм показује да пораст коефицијента отпора услед смицања у три тачке износи $\approx 75\%$, док је у једном случају премашио 100% .



Слика 4.2. Количник коефицијента отпора у смичућој струји флуида и коефицијента отпора у униформној струји C_D/C_{DU} , за различите вредности степена смицања Sr . Са (■) су означени експериментални резултати Hosokawa and Tomiyama [7], пуном линијом (—) корекција (4.10), а испрекиданом линијом (- - -) нова корекција (4.11).

Пуном линијом на дијаграму 4.2 (а) приказана је корекција (4.10) коју су предложили Legendre and Magnaudet [11]. Иако постоји расипање експерименталних података, види се да предложена корекција добро предвиђа утицај смицања на посраст коефицијента отпора мехура. Она је изведена анализом случајева за које важи $Sr \leq 1$, што одговара дијаграму 4.2 (а), тако да су добра слагања очекивана.

Речено је да је мана предложене корекције (4.10) то што се не може користити за прорачун у непосредној близини зида. Оно што се догађа у овој области приказано је на дијаграму 4.2 (б). При даљем порасту степена смицања, што јесте случај у непосредној близини зида, предложена корекција (4.10) предвиђа повећање коефицијента отпора више стотина пута. На дијаграму 4.2 (б) су приказане вредности за опсег степена смицања $Sr \leq 11$. Претпоставка о овако драстичном повећавању коефицијента отпора није физички оправдана. Као што је речено, овако велике вредности коефицијента отпора узрокују дивергенцију решења током нумеричког прорачуна. Очигледно, предложена

квадратна зависност коорекције (4.10) од степена смицања Sr није погодна за коришћење у близини зида.

На основу до сада реченог, закључује се да је потребно претпоставити нову корекцију коефицијента отпора која ће, за разлику од постојеће (4.10), моћи да се користи заједно са турбулентним моделима ниског Рејнолдсовог броја (LRN).

Због тога је на основу експерименталних резултата Hosokawa and Tomiyama [7], приказаних на 4.2 (а), методом најмањих квадрата добијена нова корекција коефицијента отпора која не предвиђа квадратну, већ линеарну зависност од степена смицања Sr . Нова корекција која узима у обзир пораст коефицијента отпора услед смицања гласи:

$$C_D(\text{Re}_B, Sr) = C_{D_U} (1 + 0,45 Sr) \quad (4.11)$$

Нова корекција је на дијаграмима 4.2 приказана испрекиданом линијом. Очекивано, на дијаграму (а) се види да нова корекција добро описује експерименталне резултате, јер је сама једначина (4.11) добијена њиховом анализом. Оно где постоји значајна промена се види на дијаграму (б). При већим вредностима степена смицања види се велика разлика корекције (4.10) и нове корекције (4.11). Нова корекција има нижи коефицијент и линеарно зависи од степена смицања Sr , тако да у области виших вредности нема физички неоправданих предвиђања за пораст коефицијента отпора. Ово је особина која нову предложено корекцију (4.11) чини погодном за коришћење у прорачуну струјања у непосредној близини зида. Дијаграми (4.2) показују да нова корекција даје добре резултате при мањим вредностима степена смицања, и да надокнађује ману коју има корекција (4.10) у близини зида (при већим вредностима степена смицања Sr).

У сврху додатне валидације предложене корекције, у оквиру ове дисертације, извршени су нумерички прорачуни двофазног струјања за три различита случаја за која су доступни експериментални резултати. У сва три случаја ради се о струјању мехура ваздуха и воде у вертикалним цевима кружног попречног пресека. Струјање се одвија навише. Нумерички прорачуни су извршени најпре без узимања у обзир корекције коефицијента отпора услед смицања, а затим са узимањем нове предложене корекције (4.11). Сви остали параметри приликом задавања нумеричких прорачуна су исти, једино се разликује израз за рачунање коефицијента отпора. Након нумеричких прорачуна извршено је поређење резултата како би се утврдио утицај смицања на коефицијент отпора и валидност нове корекције (4.11). Стара корекција, дата једначином (4.10), не може бити коришћена јер се нумерички прорачуни врше са турбулентним моделом ниског Рејнолдсовог броја $k - \varepsilon$ Launder Sharma.

Као случајеви за тестирање бирају се три експеримента у којима су коришћене вертикалне цеви различитог пречника. Први експеримент Hosokawa and Tomiyama [7] је извршен у цеви пречника $D = 25 \text{ mm}$, други експеримент Liu [8] у цеви пречника $D = 38 \text{ mm}$, док је у трећем експерименту Shawkat et al. [12] коришћена цев пречника $D = 200 \text{ mm}$.

Нумерички прорачуни двофазног мехурастог струјања

Нумеричка (прорачунска) механика флуида (енгл. *Computational Fluid Dynamics - CFD*) представља важан алат за истраживање оних појава у вишефазним струјањима које је тешко проучавати експерименталним путем. Посебно детаљан увид у физику вишефазног струјања дају резултати директних нумеричких симулација (енгл. *Direct Numerical Simulation - DNS*) и симулација великих вртлога (енгл. *Large Eddy Simulation - LES*). Није увек могуће, а ни потребно, извршити овако детаљне прорачуне као што су директна нумеричка симулација и симулација великих вртлога. У овом раду користи се Рејнолдсов статистички приступ и модел турбулентне вискозности за описивање турбуленције.

Поређењем резултата нумеричких прорачуна са доступним експерименталним резултатима врши се валидација физичко-математичких модела и нумеричких поступака.

Циљ је да се у код софтверског пакета OpenFOAM угради нова предложена корекција (4.11) за коефицијент отпора, затим да се изврши низ нумеричких прорачуна у којим ће се користити ова корекција. Резултате нумеричких прорачуна треба анализирати и упоредити са експерименталним резултатима како би се увидео утицај и ефикасност нове корекције коефицијента отпора (4.11).

Да би истраживање било меродавно потребно је поређење извршити за већи број случајева. Бирају се три доступна експеримента Hosokawa and Tomiyama [7], Liu [8] и Shawkat et al. [12]. Они су изабрани због доступности великог броја експериментално добијених резултата. Такође, приликом избора вођено је рачуна да се поједине величине, као нпр. пречник цеви, међусобно разликују како би се добио увид у то колики је утицај нове корекције (4.11) при различитим условима струјања.

Из првог експеримента Hosokawa and Tomiyama [7] се разматрају четири случаја, којима се додељују ознаке Н1, Н2, Н3 и Н4. Из експеримента Liu [8] разматрају се три случаја L1, L15 и L29. Из последњег извора експерименталних резултата Shawkat et al. [12] разматрају се два тестирана случаја која овде носе ознаку S1 и S2.

Основни подаци о ових девет изабраних случајева су дати у табели 5.1. Ту су приказани пречник цеви D , дужина цеви L , удаљеност мерног пресека од улаза у цев L_m , привидне брзине гасовите J^G и течне фазе J^L , средња вредност удела гасовите фазе α^G и средња вредност пречника мехура D_B .

Табела 5.1. Приказ основних података за девет изабраних случајева: пречник цеви D , дужина цеви L , удаљеност мерног пресека од улаза у цев L_m , привидне брзине гасовите J^G и течне фазе J^L , средња вредност удела гасовите фазе α^G и средња вредност пречника мехура D_B . Префикси Н, L и S указују на то из ког рада је случај преузет, редом: Hosokawa and Tomiyama [7], Liu [8] и Shawkat et al. [12].

Случај	D [mm]	L [mm]	L_m [mm]	J^G [m/s]	J^L [m/s]	α^G [%]	D_B [mm]
H1	25	2000	1700	0.018	0.500	2.31	3.21
H2	25	2000	1700	0.025	0.500	3.99	4.25
H3	25	2000	1700	0.020	1.000	1.46	3.52
H4	25	2000	1700	0.036	1.000	3.30	3.66
L1	38	2800	1368	0.027	0.376	4.11	2.68
L15	38	2800	1368	0.027	0.753	2.63	2.43
L29	38	2800	1368	0.027	1.087	1.91	2.07
S1	200	9560	8400	0.015	0.450	2.30	3.85
S2	200	9560	8400	0.030	0.450	3.55	4.03

У уводном поглављу 1 речено је да се користи назив *привидне брзине фаза* јер оне представљају средње брзине струјања у случају када би се кроз цев, у којој се врше мерења, кретала само једна фаза. Оне се израчунавају као количник запреминског протока фазе, који се мери пре стварања мешавине, и површине попречног пресека цеви кроз коју струји мешавина. Међутим, након стварања мешавине ни једној фази није на располагању цела површина попречног пресека цеви, тако да ће стварна брзина фаза бити већа од привидне. Стварна брзина фазе се добија као однос запреминског протока и оне површине попречног пресека цеви која је на располагању посматраној фази, тако да следи веза стварне и привидне средње брзине фазе:

$$U^k = \frac{J^k}{\alpha^k} \quad (k = L, G). \quad (5.1)$$

Стварне брзине фаза се користе као гранични услови у поставци нумеричких прорачуна.

Дакле, потребно је за свих девет наведених случајева (табела 5.1) извршити нумеричке прорачуне струјања и то најпре без икакве корекције коефицијента отпора, а затим са новом корекцијом (4.11) која узима у обзир утицај смицања. Добијене нумеричке резултате треба упоредити са доступним експерименталним резултатима. На основу поређења нумеричких и експерименталних резултата изводе се закључци о значају утицаја смицања на целокупне резултате прорачуна и способности корекције (4.11) да исправно предвиди тај утицај.

5.1 Поставка нумеричких прорачуна

Нумерички прорачуни вишефазног струјања су сложенији од прорачуна једнофазног струјања због присуства више покретних, деформабилних разделних површи између фаза, дисконтинуитета физичких величина у струјном простору, што све за последицу има усложњавање система једначина који описују основне физичке законе.

Овде је за нумерички прорачун двофазног струјања мехурова ваздуха у води, које се одвија у вертикалним цевима кружног попречног пресека, коришћен софтвер отвореног кода OpenFOAM верзија v1906. За описивање двофазног струјања употребљен

је модел два флуида или Ојлер-Ојлер модел, тако да је за прорачун коришћен солвер twoPhaseEulerFoam. Две фазе се третирају као засебни флуиди. Систем једначина у себи садржи основне једначине за сваку фазу, као и чланове који описују међусобно деловање фаза. Основне једначине вишефазног струјања прилагођене моделу два флуида су изведене и приказане у поглављу 2. Када се систем основних једначина (3.31)-(3.33) примени за случај изотермског струјања, какво се овде разматра, он добија нешто једноставнији облик:

$$\frac{\partial (\alpha^k \rho^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k) = 0, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha^k \rho^k \mathbf{U}^k \mathbf{U}^k) = & -\alpha^k \nabla p^k + \\ & + \nabla \cdot \left[\alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) (\nabla \mathbf{U}^k + (\nabla \mathbf{U}^k)^T) - \frac{2}{3} \alpha^k (\mu^k + \mu_T^k) (\nabla \cdot \mathbf{U}^k) \mathbf{I} - \frac{2}{3} \alpha^k \rho^k k^k \mathbf{I} \right] + \alpha^k \rho^k \mathbf{g} + \mathbf{F}^k. \end{aligned} \quad (5.3)$$

За решавање проблема турбуленције коришћен је Рејнолдсов приступ, а како је циљ спровести прорачун и у непосредној близини зида цеви, за моделирање турбулентне вискозности изабран је турбулентни модел $k - \varepsilon$ Launder-Sharma [43], који је приказан у потпоглављу 3.4.1.2. Користе се допунске једначине за кинетичку енергију турбуленције (3.38) и дисипацију (3.39). У њима се појављују допунски чланови $S_{k^k}^{\text{int}}$ и $S_{\varepsilon^k}^{\text{int}}$. Речено је да они не фигуришу у допунским једначинама које се користе за једнофазно струјање, јер представљају утицај једне фазе на повећање или смањење интензитета турбуленције у другој фази. У овом случају, струјање ваздуха се сматра ламинарним, а струјање воде турбулентним, тако да је потребно одредити утицај мехурова на турбуленцију течне фазе. Присуство мехурова, њихово кретање брзином која је различита од брзине течне фазе доводи до повећања турбуленције. Постоји више модела (енгл. *bubble-induced turbulence - BIT models*) за описивање овог утицаја, овде се користи следећи модел:

$$S_{k^L}^{\text{int}} = K_{\text{BI}} \mathbf{F}_D \cdot \mathbf{U}_R, \quad S_{\varepsilon^L}^{\text{int}} = C_{\varepsilon B} \frac{S_k^{\text{int}}}{D_B / \sqrt{k^L}}. \quad (5.4)$$

Константе имају вредности $K_{\text{BI}} = 0,25$ и $C_{\varepsilon B} = 1$ (Rzehak R and Krepper E. [22], Colombo M and Fairweather M. [31]). Допунски чланови зависе од силе отпора, релативне брзине фаза, пречника мехура и кинетичке енергије течне фазе.

За силе \mathbf{F}^k које описују међусобно деловање фаза користе се модели приказани у потпоглављу 4.1. Сила отпора се рачуна на два начина, без корекције коефицијента отпора, према једначини (4.4), и узимајући у обзир утицај смицања на коефицијент отпора, за шта се користи нова корекција (4.11).

5.1.1 Прорачунска мрежа

Улога прорачунске мреже је да прорачунски простор подели на одговарајући број ћелија (коначних запремина) како би се применила метода коначних запремина за решавање система основних једначина.

У свим анализираним експериментима струјни простор је унутрашњост праве, дугачке цеви кружног попречног пресека која се налази у вертикалном положају. При оваквим условима струјање је осносиметрично. Претпоставка о осносиметричности струјања искоришћена је и при поставци нумеричких прорачуна. Због тога, могуће је за

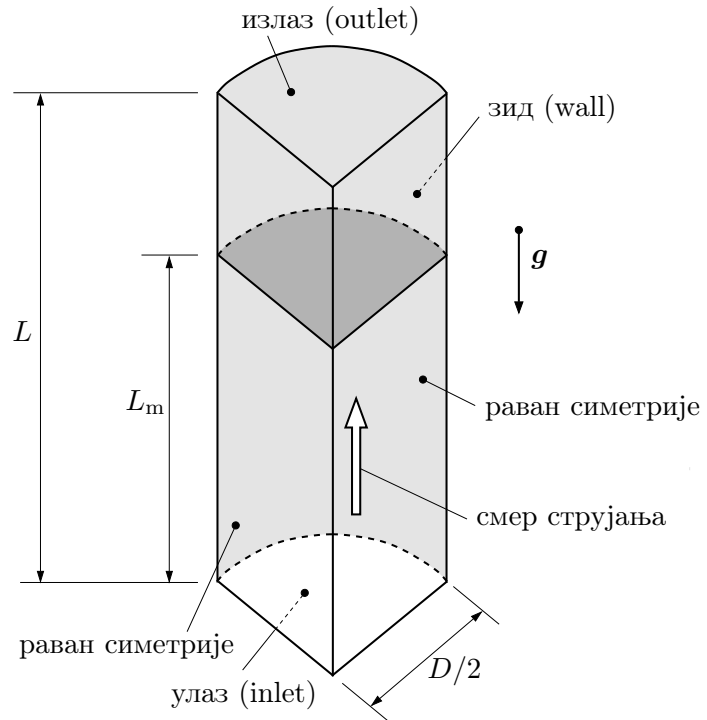
прорачунски домен изабрати четвртину цеви, а не целу цев. Овим се постиже значајна уштеда у броју прорачунских ћелија, што значи и у времену потребном за извршавање прорачуна струјања. Скица прорачунског домена је дата на слици 5.1.

Прорачунски простор је ограничен са пет површи. У хоризонталним равнима се налазе улазна и излазна површ. Зид цеви је облика четвртине омотача ваљка, а у вертикалном положају се још налазе две равни симетрије. Вредности пречника цеви D , укупне дужине цеви L и положај мерног пресека L_m се разликују у сва три разматрана експеримента и приказани су у табели 5.1.

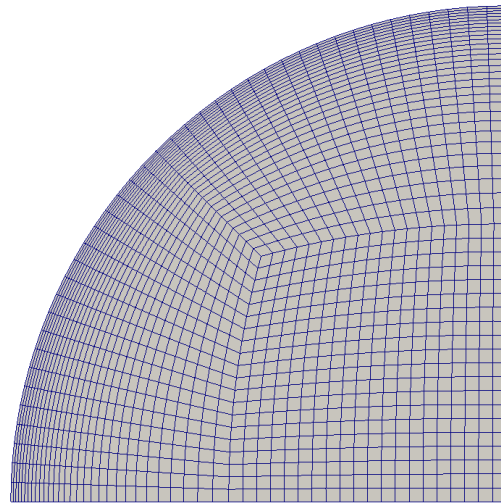
За поделу прорачунског простора на коначне запремине користи се блок структурирана прорачунска мрежа. Расподела коначних запремина по попречном пресеку је приказана на слици 5.2. Мрежа је направљена апликацијом blockMesh која је саставни део OpenFOAM програмског пакета. Овакав начин прављења мреже омогућава бољу контролу величине ћелија и квалитета прорачунске мреже.

Будући да се за моделирање турбулентне вискозности користи турбулентни модел без зидних функција (LRN модел) $k - \varepsilon$ Launder-Sharma, потребно је да вредност бездимензијске турбулентне координате y^+ у прорачунским ћелијама, које се граниче са зидом, буде $y^+ < 1$. Ово се постиже контролом броја подеока у радијалном правцу и степена смањења радијалне димензије прорачунских ћелија са приближавањем зиду. Да би ово било увек остварено прорачунска мрежа се прави за сваки разматрани режим. Унутар цеви исте геометрије користе се различите прорачунске мреже за прорачун струјања различитим протоцима, а при томе димензија свих ћелија у уздужном правцу (правцу струјања) се не мења.

Број прорачунских ћелија мреже и начин прављења мреже може имати утицај на резултате прорачуна. Ово је непожељно и да би било избегнуто потребно је извршити проверу осетљивости резултата прорачуна на густину (квалитет) мреже (енгл. *mesh*



Слика 5.1. Прорачунски домен облика четвртине цеви.



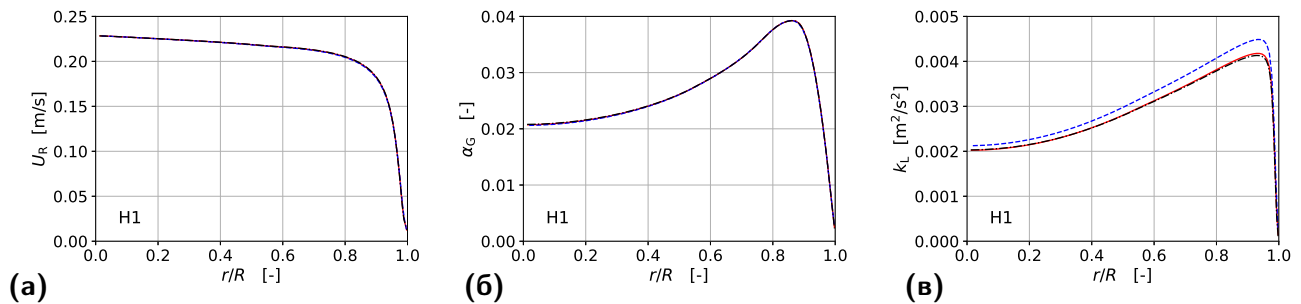
Слика 5.2. Попречни пресек прорачунске мреже.

refinement test или *mesh independence study*). Циљ је одредити оптималан број прорачунских ћелија. Ако их има премало, онда се резултати прорачуна разликују у зависности од броја ћелија. Повећавањем броја ћелија утицај на резултате је све мањи. После одређеног броја ћелија даље повећавање густине мреже неће утицати на резултате прорачуна, али хоће на повећавање времена потребног да се прорачун изврши. Због тога је потребно одредити ону вредност броја ћелија после које повећавање густине мреже не доводи до промене резултата.

Табела 5.2. Број ћелија прорачунских мрежа коришћених за проверу утицаја густине мреже на резултате прорачуна.

Случај	Мрежа 1	Мрежа 2	Мрежа 3
H1	165800	320000	409400
L1	210200	425000	563800
S1	368000	760400	908400

Пример провере осетљивости резултата на прорачунску мрежу је дат у табели 5.2. Приказани су подаци за по један режим струјања од сваког експеримента. Коришћене су три мреже различите густине, мрежа 1 има најмање ћелија, а мрежа 3 највише. У табели је приказан број прорачунских ћелија који има свака мрежа. Да би се увидело колико резултати зависе од густине мрежа поређени су профили брзине, удела гасовите фазе и кинетичке енергије турбуленције течне фазе. Дијаграми који одговарају случају 1 из експеримента Nosokawa and Tomiyama [7] су приказани на слици 5.3. Овај случај је означен са H1. Више података о њему је приказано у табели 5.1. На основу слике 5.3 закључује се да профили релативне брзине и удела фазе не зависе од избора мреже, али да је профил кинетичке енергије турбуленције другачији ако се користи мрежа 1, тако да се она одбацује. Повећавањем броја ћелија изнад оног броја који има мрежа 2 не постиже се повећање тачности резултата, али се додатно оптерећују рачунарски ресурси. Због тога је усвојено да је мрежа 2 оптимална.



Слика 5.3. Провера утицаја густине мреже на резултате прорачуна. Приказани су профили релативне брзине (а), удела фазе (б) и кинетичке енергије турбуленције (в) за случај H1. Коришћене су три различите мреже: мрежа 1 (—), мрежа 2 (- - -) и мрежа 3 (.....).

Сличан закључак изведен је и за случај L1 из Liu [8], као и за случај S1 из Shawkat et al. [12], који су приказани у табели 5.2. Овде су ради једноставности приказана само ова три случаја, а поступак провере је спроведен за сваки разматрани случај, тј. за сваки случај из табеле 5.1.

5.1.2 Почетни и гранични услови

На граничним површима прорачунског простора, који је приказан на слици 5.1, потребно је поставити граничне услове за физичке величине које фигуришу у прорачуну. Унутар прорачунског простора дефинишу се почетни услови.

На улазној површи задаје се униформни профил брзине за обе фазе. Користе се вредности које су добијене једначином (5.1), односно, користи се стварна средња брзина струјања фазе. Пошто се струјање ваздуха сматра ламинарним, кинетичка енергија турбуленције и дисипација се задају само за течну фазу. Вредности на улазној површи су униформне и одређују се према препоруци:

$$k^L = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{10} U^L \right)^2, \quad \varepsilon^L = \frac{C_\mu^{0.75} (k^L)^{1.5}}{D}.$$

Количник 1/10 представља претпоставку да интензитет флукуација течне фазе на улазу износи 10 % интензитета брзине, а $C_\mu = 0,09$ представља константу модела. На улазу је такође задата униформна вредност удела фазе α^G . У табели 5.3 је дат преглед вредности физичких величина на улазној површи за свих девет режима.

На излазној површи је задат Нојманов гранични услов $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ за сваку разматрану физичку величину ϕ .

На зиду цеви брзине обе фазе су $U^G = U^L = 0$ m/s. Удео гасовите фазе α^G такође има вредност 0 на зиду. Вредности кинетичке енергије турбуленције и дисипације за течну фазу на зиду цеви имају вредност блиску нули 10^{-10} m²/s³, јер се прва прорачунска тачка налази у области вискозног подслоја. Избегава се коришћење вредности 0 да не би дошло до проблема у прорачуну када се ова вредност појави у имениоцу.

Почетне вредности свих поменутих физичких величина су у целом домену једнаке вредностима на улазној површи прорачунског домена.

Табела 5.3. Приказ граничних услова задатих на улазној површи прорачунског простора.

Сучај	α^G [%]	U^G [m/s]	U^L [m/s]	k^L [m ² /s ³]	ε^L [m ² /s ³]
H1	2.31	0.7792	0.5118	0.0009375	0.0018867
H2	3.99	0.6266	0.5208	0.0009375	0.0018867
H3	1.46	1.3699	1.0148	0.00375	0.0150935
H4	3.3	1.0909	1.0341	0.00375	0.0150935
L1	4.11	0.6573	0.3921	0.0005301	0.0008023
L15	2.63	1.0268	0.7733	0.0021262	0.0064443
L29	1.91	1.41	1.1082	0.0044308	0.0193855
S1	2.3	0.6522	0.4606	0.0007593	0.0013754
S2	3.55	0.8451	0.4666	0.0007593	0.0013754

Фазе деле исто поље притиска. Као почетни услов у целом струјном простору користи се вредност притиска од 1 bar. На границама струјног простора се не задају вредности притиска као гранични услов, већ се притисак израчунава на основу вредности других физичких величина, као што се то догађа и унутар прорачунског простора. То се остварује граничним условом *calculated*.

5.1.3 Физичка својства фаза

Струјање течне фазе се сматра нестишљивим, а ваздух се третира као идеалан гас. За сваки од три експеримента измерена је температура фаза и према томе се у прорачуну задају физичка својства као што су густине фаза, коефицијенти вискозности и површински напон.

У радовима Hosokawa and Tomiyama [7] и Liu [8] доступне су средње вредности удела фазе и пречника мехурова, а у раду Shawkat et al. [12] оне се израчунавају на основу приказаних профила, односно интеграљењем експерименталих резултата:

$$\alpha^G = \frac{2}{R^2} \int_0^R \alpha^G(r) r dr, \quad D_B = \frac{2}{R^2} \int_0^R D_B(r) r dr.$$

Ове средње вредности су приказане у табели 5.1.

У прорачунима су коришћене претпоставке да сви мехурови имају исти пречник и да се он не мења. Такође, сматра се да мехурови имају облик сфере.

5.1.4 Метод решавања система једначина

За решавање стационарних проблема најчешће се користи SIMPLE алгоритам (енгл. *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*), док се за нестационарне проблеме може користити PISO алгоритам (енгл. *Pressure Implicit with Splitting of Operator*). У овом раду коришћен је PIMPLE алгоритам, који представља спој претходно поменути два алгоритма, па је тако настало и његово име.

PIMPLE алгоритам је првенствено намењен за решавање нестационарних проблема, али може бити коришћен и за добијање стационарног решења, што је овде случај. Предност PIMPLE алгоритма у односу на SIMPLE је већа стабилност. При решавању нестационарних проблема, PIMPLE алгоритам има предност у односу на PISO јер може да ради са већим временским корацима, тј. већим вредностима Курантовог броја Co .

Курантов број је важна бездимензијска величина и говори о вези величине временског корака прорачуна и величине ћелија прорачунске мреже. Дефинише се за сваку ћелију као однос растојања које флуид пређе за један временски корак и карактеристичне димензије прорачунске ћелије:

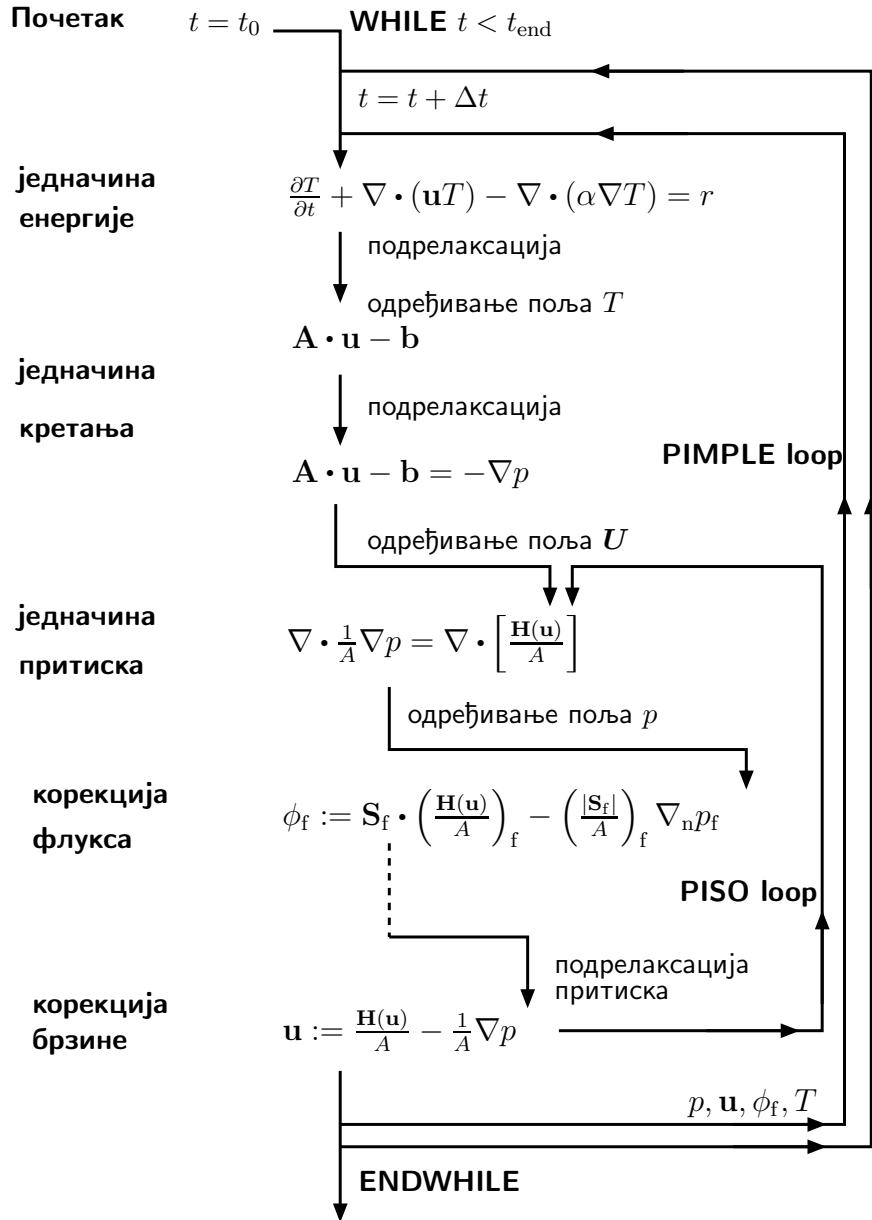
$$Co = \frac{U \Delta t}{\Delta x}.$$

За PISO алгоритам потребно је да важи $Co < 1$, док PIMPLE алгоритам може да ради и при вредностима $Co > 1$.

Шема основних корака PIMPLE алгоритма је приказана на слици 5.4 [4]. Унутар првог временског корака најпре се врши подрелаксација¹ једначине енергије и њено решавање у циљу добијања поља температуре T . Овај корак постоји ако је струјање неизотермско. Формира се матрична једначина кретања и врши се њена подрелаксација. Након њеног решавања добија се претпоставка за поље брзине, које онда улази у једначину за притисак. Након њеног решавања добија се вредност притиска, која се користи за кориговање флукса флуида кроз површи прорачунских ћелија. Следи подрелаксација притиска и поновно одређивање брзине на основу нове вредности поља

¹Подрелаксација је метод ограничавања степена промене вредности физичке величине између два узастопна итеративна корака. Негативно је то што се овим продужава време потребно за конвергенцију прорачуна, а позитивно то што се повећава стабилност нумеричког прорачуна.

притиска. Сада се извршава унутрашња PISO петља ради корекције поља притиска, флукса и брзине. Могуће је подесити број ових унутрашњих PISO петљи. Он најчешће има вредности 1,2 или 3. Због извршавања подрелаксација PIMPLE алгоритам је стабилан и може да ради са већим вредностима Курантовог броја. Препоручени број извршавања PIMPLE петљи је од 50 до 1000. Када се оне заврше, прелази се у наредни временски тренутак.



Слика 5.4. Мапа основних корака PIMPLE алгоритма [4].

Временски корак током прорачуна је променљив и он се у сваком итеративном кораку рачуна на основу услова за највећу дозвољену вредност Курантовог броја. За достизање стационарног решења потребно је за случај Hosokawa and Tomiyama [7] извршити прорачун струјања који обухвата 6s времена струјања. Просечно време потребно рачунару да изврши ову симулацију струјања је 12h. Време које се симулира (време потребно за достизање стационарног решења) у преостала два случаја Liu [8] и Shawkat et al. [12] је 38s, а просечно време које је поребно рачунару за извршавање прорачуна у ова два случаја је редом 22h, односно 120h. За паралелно извршавање прорачуна коришћено је 8 централних процесорских јединица (језгара) радне станице HP Z4 G4.

5.2 Приказ и тумачење резултата нумеричких прорачуна

Нумерички прорачуни двофазног мехурастог струјања, који су овде приказани, извршени су у циљу утврђивања утицаја нове корекције (4.11) коефицијента отпора на резултате нумеричких прорачуна. Нова корекција (4.11) узима у обзир утицај смицања на коефицијент отпора мехура. За сваки од наведених случајева из табеле 5.1 извршене су две групе прорачуна:

- прва група без коришћења корекције која узима у обзир утицај смицања, тј. сматра се да се мехур налази у униформној струји флуида па се за рачунање коефицијента отпора користи израз (4.4) који су предложили Ishii and Zuber [36] ,
- друга група са коришћењем нове корекције коефицијента отпора (4.11) која узима у обзир утицај смицања.

Сви остали параметри у поставци обе групе нумеричких прорачуна су исти. Тиме је изолован утицај рачунања коефицијента отпора на резултате, што је циљ истраживања. Резултати обе групе нумеричких прорачуна су упоређени са експерименталним резултатима Hosokawa and Tomiyama [7] , Liu [8] и Shawkat et al. [12] .

Као што је већ речено, ова три експеримента су изабрана како би се увидео утицај нове корекције (4.11) при различитим условима струјања. Основни подаци о наведеним експериментима су приказани у табели 5.1. Поређење је извршено засебно за сваки од три експеримента, а прво је приказан случај Hosokawa and Tomiyama [7] .

5.2.1 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Hosokawa and Tomiyama [7]

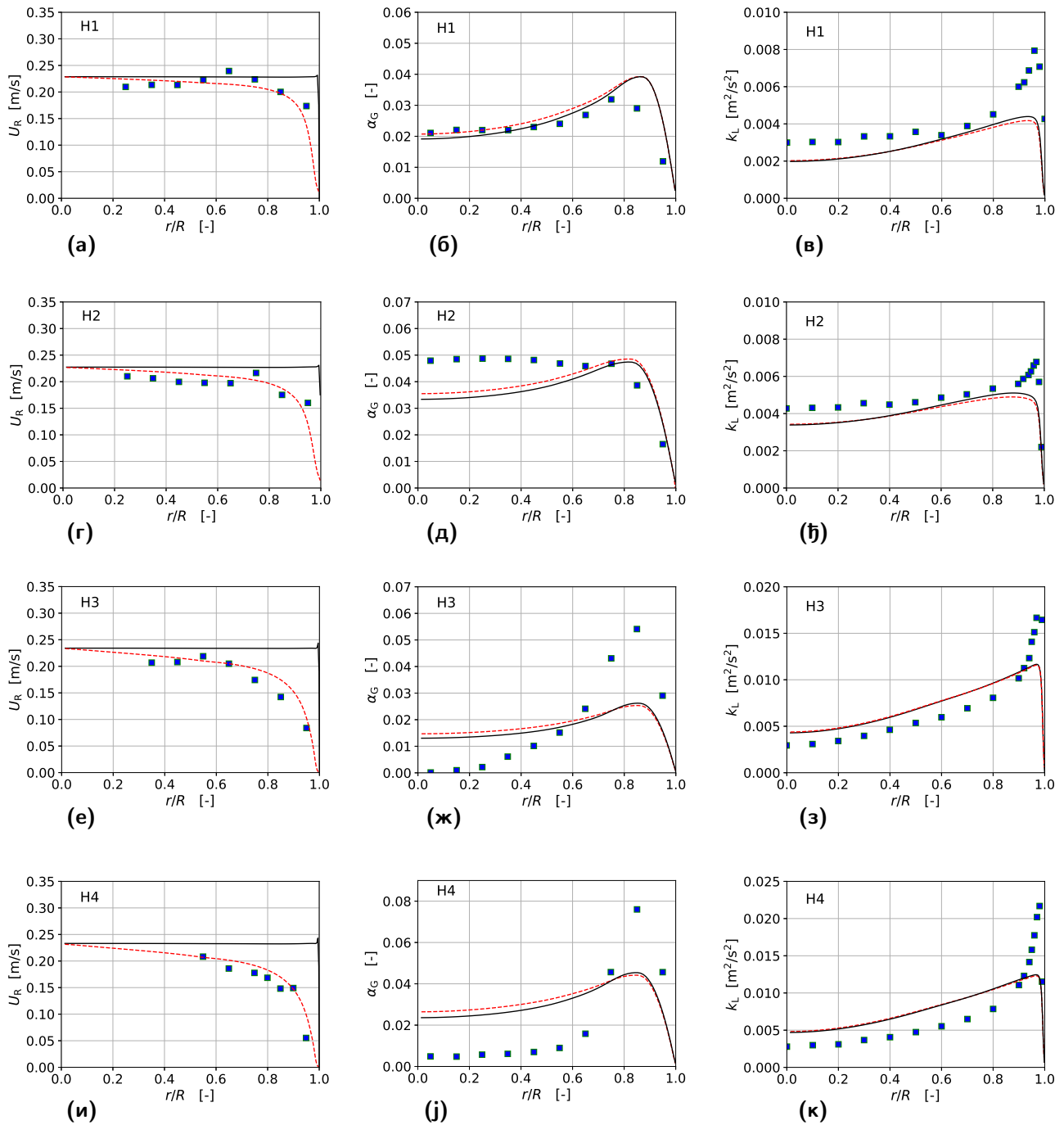
У експерименту који су спровели Hosokawa and Tomiyama [7] доступни су подаци о профилима релативне брзине U_R , удела гасовите фазе α^G и кинетичке енергије турбуленције течне фазе k^L . Због претпоставке о осносиметричности струјања, профили су мерени у радијалном правцу. За одређивање положаја мерних тачака коришћена је радијална координата r . Изабрани мерни пресек се налази на довољној удаљености од улазног пресека цеви.

На истом месту где се у експерименту налазио мерни пресек, посматрају се профили наведених величина који су добијени нумеричким прорачунима. Резултати су приказани на истим дијаграмима. Ознаке у облику квадрата (■) представљају вредности добијене експерименталним испитивањем, пуном линијом (—) представљени су профили добијени нумеричким прорачунима без коришћења корекције коефицијента отпора, тј. коефицијент отпора је рачунат према изразу (4.4), док су испрекиданим линијама (---) приказани профили који су добијени нумеричким прорачунима у којима је укључена нова корекција коефицијента отпора (4.11) која узима у обзир утицај смицања.

На слици 5.5 приказано је 12 дијаграма. Представљени су профили за три физичке величине: релативна брзина U_R , удео гасовите фазе α^G и кинетичка енергија турбуленције течне фазе k^L , и то за 4 разматрана случаја Н1, Н2, Н3 и Н4 из експеримента Hosokawa and Tomiyama [7] (видети табелу 5.1). Сваки дијаграм у левом горњем углу носи ознаку случаја на који се односи.

У првој колони приказани су профили релативне брзине фаза $U_R = U^G - U^L$. Нумерички прорачуни, извршени без корекције коефицијента отпора, предвиђају константну

вредност релативне брзине скоро по целом попречном пресеку, тј. до $r/R \leq 0,98$. У самој близини зида догађа се мали пораст релативне брзине и затим њено нагло опадање. Слагање са експерименталним резултатима у прва два случаја Н1 и Н2, којима одговарају мање брзине течне фазе, је релативно добро у области $r/R < 0,75$, док након тога одступања постају све већа. У друга два случаја Н3 и Н4, којима одговарају веће брзине течне фазе, значајно одступање од експерименталних резултата почиње раније и изражено је у области $r/R > 0,6$. Закључак је да нумерички прорачуни без корекције коефицијента отпора (4.4) не предвиђају добро профил релативне брзине.



Слика 5.5. Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Hosokawa and Tomiyama [7]. Са (■) означени су експериментални подаци, пуном линијом (—) резултати нумеричких прорачуна без корекције коефицијента отпора, док испрекидана линија (- - -) означава резултате нумеричких прорачуна са новом корекцијом коефицијента отпора (4.11).

Истовремено, види се да профили релативне брзине, добијени нумеричким прорачунима у које је укључена корекција коефицијента отпора (4.11), имају веома добра слагања са експерименталним резултатима у сва четири случаја Н1 - Н4. Вредност релативне брзине је највећа у оси цеви ($r = 0$) и затим лагано опада ка периферији. У прва два случаја Н1 и Н2, релативне брзина почиње интензивније да опада након позиције $r/R = 0,8$, док у друга два случаја Н3 и Н4, интензивније опадање релативне брзине почиње раније $r/R = 0,6$. У друга два случаја привидна брзине течне фазе J_L двоструко је већа од привидне брзине течне фазе у прва два случаја (табела 5.1). Већи запремински проток у истој цеви (пречник се не мења), значи већи градијент брзине, односно, већи степен смицања. Према томе, корекција (4.11) предвиђа већи пораст коефицијента отпора у друга два случаја Н3 и Н4. Већи коефицијент отпора значи већу силу отпора која доводи до смањења брзине гасовите фазе, а то уједно значи смањење релативне брзине. Смањење релативне брзине сада доводи до смањења силе отпора, тако да сила отпора на крају остаје непромењена, али се мењају величине које утичу на њу и то тако да се коефицијент отпора повећава, а релативна брзина смањује. Овакво понашање профила релативне брзине потврђено је експерименталним резултатима.

Овим се показује да је приликом нумеричког прорачуна струјања које су испитали Hosokawa and Tomiyama [7] неопходно узети у обзир утицај смицања на коефицијент отпора како би се исправно предвидео профил релативне брзине.

У другој колони слике 5.5 (б), (д), (ж) и (ј), приказани су профили удела гасовите фазе α^G . Расподела мехурова по попречном пресеку може бити таква да се врх профила удела фазе нађе на периферији цеви (енгл. *wall-peak*), као што је то случај на дијаграмима 5.5 (б), (ж) и (ј), али не и на дијаграму (д). Врх профила удела фазе се може налазити и у оси цеви (енгл. *core-peak*). Још увек није до краја разјашњено шта све може утицати на промену расподеле мехурова по попречном пресеку, Shawkat et al. [12].

У случају Н1 (слика 5.5 (б)), оба прорачуна и са и без корекције коефицијента отпора добро предвиђају расподелу мехурова по попречном пресеку. У случају Н2 (слика 5.5 (д)) оба прорачуна дају добро предвиђање у близини зида, али у средишњем делу цеви предвиђају нешто ниже вредности удела гасовите фазе.

У преостала два случаја Н3 и Н4 (слика 5.5 (ж), (ј)) нумерички прорачуни предвиђају веће вредност удела гасовите фазе у средишњем делу цеви, у поређењу са експерименталним резултатима, а истовремено предвиђају мање вредности у близини зида.

Закључак је да увођење корекције коефицијента отпора, што је тема овог рада, не утиче на предвиђање расподеле мехурова по попречном пресеку, јер у сва четири случаја Н1 - Н4 оба нумеричка прорачуна (са и без увођења корекције) дају веома сличне резултате. То је и очекивано јер сила отпора нема утицај на расподелу мехурова по попречном пресеку. На ово имају значајан утицај сила узгона, сила хидродинамичког подмазивања и сила турбулентне дисперзије, тј. силе које имају попречни правац деловања. Ови резултати се, изузев првог случаја Н1, разликују од експерименталних резултата, тако да би требало користити друге моделе за наведене силе. Још један могући разлог за ово неслагање је то што је у раду коришћена претпоставка да су мехурови сферног облика и да сви имају исти пречник, док у стварности постоје мехурови различитих величина.

У трећој колони приказани су профили кинетичке енергије турбуленције течне фазе k^L , слике 5.5 (в), (ђ), (з) и (к). Уопштено гледано, слагања експерименталних резултата и резултата нумеричких прорачуна су прихватљива. Тренд промене кинетичке енергије турбуленције је у сагласју са експерименталним резултатима, она расте од осе цеви ка

периферији и затим нагло опада у непосредној близини зида. На самом зиду цеви она је једнака нули. Приметно је да су максималне вредности кинетичке енергије турбуленције k^L измерене експерименталним путем веће од оних које предвиђају нумерички прорачуни. До истог закључка дошли су и Parekh and Rzehak [19], који као могући разлог наводе недостатак Рејнолдсовог статистичког приступа. Други разлог може бити и недостатак коришћених ВГТ модела. Већ је поменуто да је питање ВГТ модела препознато као област у којој је неопходан даљи напредак.

Важан закључак за овај рад јесте да промена вредности коефицијента отпора услед увођења његове корекције, не утиче на расподелу кинетичке енергије турбуленције течне фазе.

На основу до сада приказане анализе експерименталних и нумеричких резултата који одговарају случају Hosokawa and Tomiyama [7], закључује се да увођење корекције коефицијента отпора (4.11) има значајан утицај на расподелу профила релативне брзине и да је за добијање тачнијих резултата нумеричких прорачуна, у овом случају, неопходно користити корекцију коефицијента отпора која узима у обзир утицај смицања. Истовремено, кориговање коефицијента отпора се не одражава значајно на расподелу мехурова по попречном пресеку, и на облик профила кинетичке енергије турбуленције.

Да би се проверило да ли ови закључци важе и при другачијим условима струјања, спроведене су анализе на још неколико случајева. Изабрани су примери струјања који се одвијају у цевима различитих пречника.

5.2.2 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Liu [8]

За разлику од претходног случаја где су били доступни подаци о релативној брзини фаза, у Liu [8] доступни су засебно подаци о профилима брзине обе фазе. То омогућава детаљнији увид у последице увођења корекције коефицијента отпора.

На слици 5.6 приказано је 12 дијаграма, тј. за сваки од три режима струјања L1, L15 и L29 (видети табелу 5.1). Приказани су профили 4 физичке величине, а то су: брзина течне фазе U^L , брзина гасовите фазе U^G , удео гасовите фазе α^G и кинетичка енергија турбуленције течне фазе k^L .

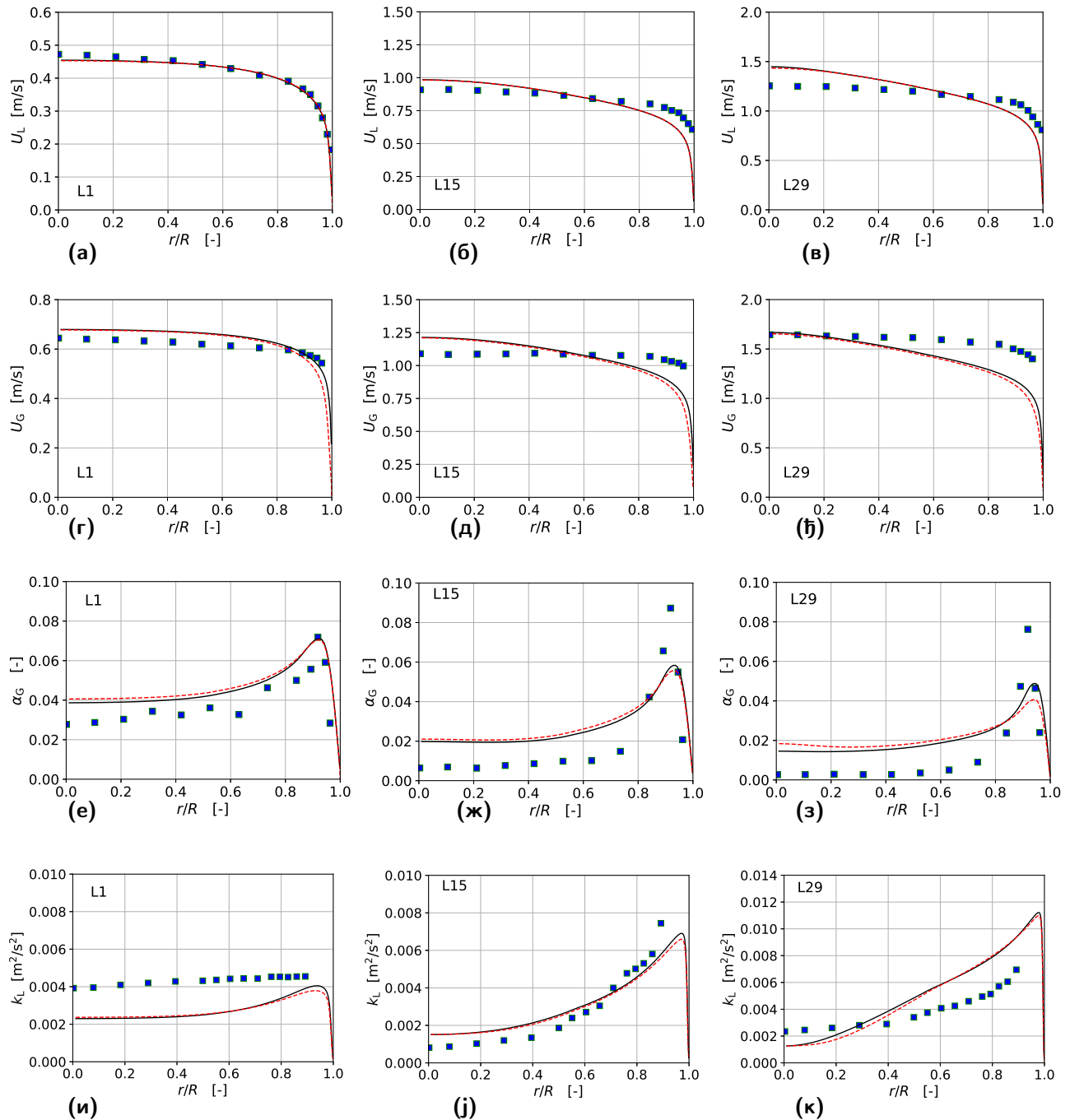
У првом реду, слике 5.6 (а), (б) и (в), приказани су профили брзине течне фазе U^L за сва три случаја. Не постоји никаква уочљива разлика између случајева када се у прорачуну користи корекција коефицијента отпора (4.11) и када се она не користи. Профили брзине течне фазе U^L који су добијени овим прорачунима се у потпуности подударају. То значи да увођење корекције коефицијента отпора (4.11), која узима у обзир утицај смицања, не утиче на брзинско поље течне фазе. Један од разлога је тај што је у свим разматраним случајевима удео гасовите фазе мали, од 1,91 % до 4,11 %, затим, инерцијалне силе воде су вишеструко веће од инерцијалних сила гасовите фазе, тако да промене, које се односе на кретање гасовите фазе, не утичу значајно на брзинско поље воде.

Слагање добијених профила нумеричким путем са профилима брзине, који су експериментално измерени, је добро, нарочито у случају L1, слика 5.6 (а). У друга два случаја L15 и L29 (слике 5.6 (б) и (в)) нумерички прорачуни предвиђају нешто веће брзине воде у средишњем делу цеви и нешто мање у близини зида.

У другом реду, слике 5.6 (г), (д) и (ђ), приказани су профили брзине гасовите фазе у мерном пресеку. Поново се види да нумерички прорачуни, у поређењу са резултатима експеримента, предвиђају мало веће вредности у унутрашњем делу струјног простора,

и мало мање вредности у близини зида.

За разлику од профила брзине течне фазе, код профила брзине гасовите фазе уочљива је разлика између две групе прорачуна: са и без корекције коефицијента отпора. Односно, профил брзине гасовите фазе зависи од тога да ли се при рачунању коефицијента отпора узима у обзир утицај смицања (корекција (4.11)) или не. Профили се поклапају у већем делу струјног простора, али до разлике долази са приближавањем зиду цеви. Види се да прорачуни изведени са корекцијом (4.11) предвиђају да брзина гасовите фазе брже опада са приближавањем зиду цеви.



Слика 5.6. Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Liu [8]. Са (■) означени су експериментални подаци, пуном линијом (—) резултати нумеричких прорачуна без корекције коефицијента отпора, док испрекидана линија (- - -) означава резултате нумеричких прорачуна са новом корекцијом коефицијента отпора (4.11).

Пошто се брзина течне фазе не мења када се у прорачун уведе корекција (4.11), а брзина гасовите фазе се смањује са приближавањем зиду цеви, закључује се да и релативна брзина фаза $U_R = U^G - U^L$ опада са приближавањем зиду цеви. То је исти закључак као у претходном случају Hosokawa and Tomiyama [7]. Разлика између ова два примера је у томе што је у случају Liu [8] утицај корекције (4.11) мање изражен. Објашњење је у томе што је у случају Liu [8] пречник цеви ($D = 38 \text{ mm}$) већи него у случају Hosokawa and Tomiyama [7] ($D = 25 \text{ mm}$), док интензитети брзина имају сличне вредности (табела 5.1), што значи да је градијент брзине мање изражен у цеви већег пречника, па ће самим тим и уведена корекција (4.11) имати мањи утицај на коефицијент отпора, а тиме и на резултате нумеричких прорачуна. Другим речима, при мањим вредностима степена смицања, ефекат увођења корекције (4.11) ће бити све мањи.

У трећем реду приказане су слике 5.6 (е), (ж) и (з) које представљају профиле удела гасовите фазе α^G . У случају L1 слагања нумеричких резултата са експериментом су добра. У преостала два случаја, L15 и L29, нумерички прорачуни дају нешто више вредности α^G у средишњем делу цеви и нешто ниже вредности у близини зида цеви него што је то добијено експерименталним испитивањем. Међусобно разликовање резултата нумеричких прорачуна који су извршени са корекцијом коефицијента отпора (4.11) и без ње је мало.

Последњи ред слике 5.6 даје профиле кинетичке енергије турбуленције k^L , то су слике (и), (ј), (к). Поново је међусобно разликовање резултата нумеричких прорачуна који су извршени са корекцијом коефицијента отпора (4.11) и без ње веома мало. Што се тиче слагања са експерименталним резултатима, оно је најбоље у случају L15. У случају L1 нумерички резултати су испод експерименталних дуж целог полупречника цеви. У последњем случају L29, у већем делу струјног простора нумерички резултати премашују експерименталне.

Види се да коришћење корекције коефицијента отпора доводи до малих промена у профилима удела гасовите фазе и кинетичке енергије турбуленције течне фазе. До истог закључка дошло се и у претходном случају Hosokawa and Tomiyama [7]. На ове величине не утиче директно коефицијент отпора, нити сила отпора, већ постоји посредан утицај на њих преко промене брзине фаза.

Најважније запажање у овом делу анализе је да утицај уведене корекције на резултате прорачуна слаби са слабљењем градијента брзине, тј. степена смицања (4.9). То ће бити проверено и на наредном случају, где се струјање одвија у цеви великог пречника.

5.2.3 Поређење нумеричких и експерименталних резултата за случај Shawkat et al. [12]

У претходном делу је речено да при мањим вредностима степена смицања ефекат увођења корекције (4.11) слаби. Ово може бити проверено у случају Shawkat et al. [12] где се разматра струјање кроз цев великог пречника ($D = 200 \text{ mm}$). Брзина струјања је слична као у претходна два случаја (видети табелу 5.1), а пречник је значајно већи. Очекује се да ће градијент брзине, а тиме и степен смицања, имати мање вредности. То даље доводи до тога да уведена корекција (4.11) мало утиче на коефицијент отпора, а тиме има мали утицај на резултате прорачуна. Очекује се да ће разлика у профилима брзине гасовите фазе бити мања него у претходном случају Liu [8].

У случају Shawkat et al. [12] познате су експериментално одређене вредности брзине течне фазе U^L , брзине гасовите фазе U^G и удела гасовите фазе α^G . У овом случају нису познате вредности кинетичке енергије турбуленције k^L . Разматрана су два случаја S1 и

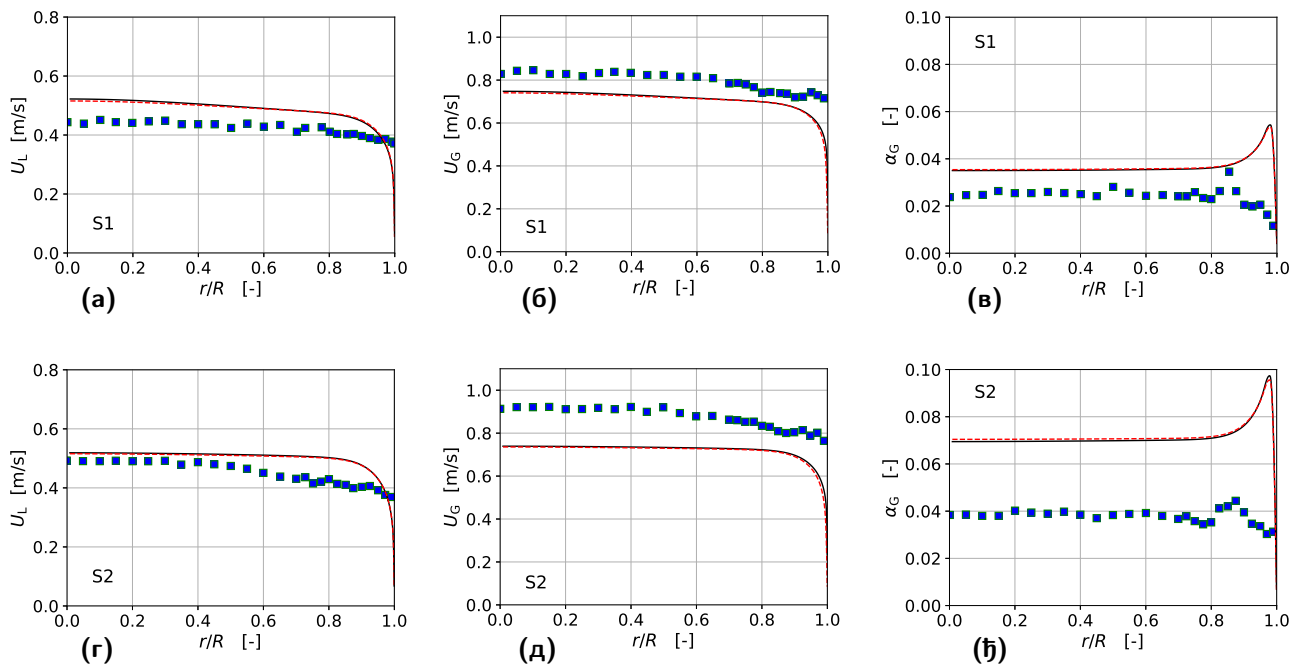
S2 (видети табелу 5.1), тако да је на слици 5.7 приказано 6 дијаграма.

У првој колони, слике 5.7 (а) и (г), приказани су профили брзине течне фазе U^L . Нумерички резултати предвиђају нешто више вредности брзине у односу на вредности које су одређене експериментално. Види се да, као и у претходном случају Liu [8], ни овде нема разлике између резултата нумеричких прорачуна који су извршени са и без узимања у обзир корекције коефицијента отпора (4.11). Образложење је дато на претходно разматраном случају у потпоглављу 5.2.2.

У другој колони, слике 5.7 (б) и (д), приказани су профили брзине гасовите фазе U^G . Резултати показују да је горе поменута претпоставка исправна, тј. да са повећавањем пречника цеви, што значи смањење степена смицања, утицај нове корекције (4.11) слаби. Разлика између резултата нумеричких прорачуна који су извршени са и без кориговања коефицијента отпора је једва приметна у области близу зида. Поново је разлика таква да прорачун са корекцијом коефицијента отпора (4.11) даје ниже вредности брзине гасовите фазе, а то значи ниже вредности релативне брзине.

Што се тиче поређења са експерименталним резултатима, у оба случаја S1 и S2, нумерички прорачуни предвиђају ниже вредности брзине гасовите фазе.

У последњој колони, слике 5.7 (в) и (ђ), приказани су профили удела гасовите фазе α^G . Као и у претходним случајевима, увођење корекције (4.11) у нумеричке прорачуне нема запаженог утицаја на ове резултате. Овде су приметна нешто већа одступања експерименталних у односу на нумеричке резултате, посебно у случају S2. Експериментални резултати показују приближно униформну расподелу α^G , са малим порастом на растојању $r/R = 0,85$. Нумерички прорачуни дају вишу вредност удела гасовите фазе дуж полупречника и предвиђају интензивнији скок вредности у близини зида.



Слика 5.7. Упоредивање нумеричких и експерименталних резултата за случај Shawkat et al. [12]. Са (■) означени су експериментални подаци, пуном линијом (—) резултати нумеричких прорачуна без корекције коефицијента отпора, док испрекидана линија (- - -) означава резултате нумеричких прорачуна са новом корекцијом коефицијента отпора (4.11).

Поново се као могући узрок ових неслагања види несавршеност математичких модела сила које описују међусобно деловање фаза, отворено питање ВИТ модела и претпоставка о томе да сви мехурови имају облик сфере и исту вредност пречника.

Овде треба напоменути да постоји једно неразјашњено питање када је реч о овим експерименталним резултатима. У раду Shawkat et al. [12] су доступни подаци о протоцима фаза који су измерени мерилом протока. Вредности протока фаза се могу добити и интегралњем поља брзине које је такође одређено експериментом. Примећено је да овде постоји неслагање протока измереног мерилом протока и израчунатог на основу профила брзине, и да оно износи до 10 %. Иста провера спроведена је за случај Liu [8], и тамо релативна грешка износи испод 1 %. За случај Hosokawa and Tomiyama [7] није извршена оваква провера јер тамо нису доступни профили брзина фаза, већ само профили релативне брзине.

5.3 Закључци након анализе резултата извршених нумеричких прорачуна

За изабране режиме струјања који су испитани експериментално и који су побројани у табели 5.1, извршене су две групе нумеричких симулација струјања и то, једна без кориговања коефицијента отпора, где се он рачуна према изразу (4.4), и друга група у којој се користи корекција коефицијента отпора (4.11) која узима у обзир утицај смицања. Резултати прорачуна су упоређени међусобно и са експерименталним резултатима и на основу тога су изведени закључци. Овде ће бити наведени најважнији закључци из претходне анализе.

Градијент брзине има утицај на вредност коефицијента отпора, па је потребно користити корекцију коефицијента отпора како би се математички моделирао овај утицај.

Постојећа корекција (4.10) успева у томе. Она је изведена на основу директних нумеричких симулација, Legendre and Magnaudet [11] и гласи:

$$C_D(\text{Re}_B, \text{Sr}) = C_{DU} (1 + 0,55 \text{Sr}^2).$$

У прорачунима у којима се примењује Ренолдсов статистички приступ ова корекција је тестирана само са турбулентним моделима са зидним функцијама (HRN) и дала је добре резултате, Hosokawa and Tomiyama [7].

Међутим, у овој дисертацији је показано да постојећа корекција (4.10) не може бити коришћена са турбулентним моделима без зидних функција (LRN), јер доводи до екстремно великих вредности коефицијента отпора у непосредној близини зида и тиме нарушава стабилност нумеричког прорачуна, тј. прорачун брзо дивергира.

Због тога, предложена је нова корекција коефицијента отпора (4.11):

$$C_D(\text{Re}_B, \text{Sr}) = C_{DU} (1 + 0,45 \text{Sr}).$$

Да би се проверила њена оправданост, она је имплементирана у софтвер OpenFOAM и коришћена у прорачунима.

Нумеричким прорачунима је показано да нова корекција може бити успешно коришћена са турбулентним моделима без зидних функција (LRN), што је њена основна предност у односу на постојећу корекцију (4.10).

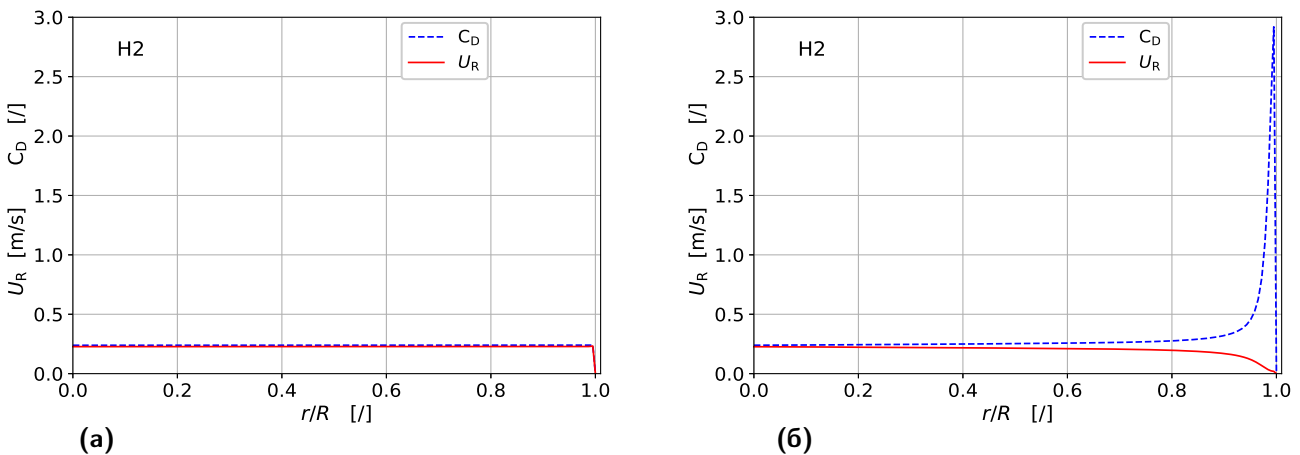
Да би се прецизније одредио утицај нове корекције (4.11) на резултате извршено је поређење прорачуна који су извршени уз њено коришћење и прорачуна који не користе никакву корекцију за коефицијент отпора (4.4). Валидација резултата нумеричких прорачуна извршена је поређењем са експерименталним резултатима. Тест је извршен

коришћењем резултата из три различита експеримента (Hosokawa and Tomiyama [7], Liu [8], Shawkat et al. [12]), из којих је изабрано укупно 9 случајева који су наведени у табели 5.1.

У случају Hosokawa and Tomiyama [7] показано је да је неопходно узети у обзир утицај смицања, тј. градијента брзине, да би се исправно предвидео профил релативне брзине. Показало се да нова предложена корекција (4.11) успешно извршава свој задатак. Корекција (4.11) доводи до повећања вредности коефицијента отпора и до смањења вредности релативне брзине, тако да вредност силе отпора остаје приближно непромењена. Дакле, интензитет силе отпора не зависи од тога да ли се користи корекција коефицијентна отпора или не, што је и очекивано, јер према закону о промени количине кретања за уздужни правац, сила отпора и сила потиска треба да буду уравнотежене.

На сликама 5.8 (а) и (б) се можда најбоље види утицај нове корекције коефицијента отпора. На обе слике приказани су профили релативне брзине U_R и коефицијента отпора C_D . Изабран је случај H2. На слици (а) су резултати добијени без кориговања коефицијента отпора, тј. он је рачунат према изразу (4.4), док су на слици (б) резултати добијени коришћењем нове корекције коефицијента отпора (4.11). На апсциси се налазе вредности релативне радијалне координате r/R , а на ординати се читавају вредности релативне брзине фаза U_R и коефицијента отпора C_D . Профили релативне брзине су приказани пуном линијом, а профили коефицијента отпора испрекиданом. Да би се јасније уочила промена, оба дијаграма имају исти опсег вредности на ординати.

Овде се види да једначина (4.11) доводи до истовременог пораста вредности коефицијента отпора C_D и до смањења релативне брзине фаза U_R , што је проузроковано смањењем брзине гасовите фазе U^G . Ове промене нису истог интензитета, тј. израженије су у случају коефицијента отпора. Обе величине утичу на вредност силе отпора, и то коефицијент отпора са првим степеном, а релативна брзина са другим, тако да се вредност силе отпора не мења. У оба случаја, и са и без кориговања коефицијента отпора, сила отпора има приближно исту вредност.



Слика 5.8. Вредности релативне брзине фаза U_R и коефицијента отпора C_D за случај H2 и то: (а) без корекције коефицијента отпора и (б) са корекцијом (4.11).

Такође се може видети да корекција не утиче на резултате у близини осе цеви, где је вредност градијента брзине прилижно једнака нули. Тамо где не постоји градијент брзине, додатни члан у корекцији (4.11) је једнак 1, јер је степен смицања дефинисан изразом (4.9). Јединична вредност корекционог члана значи да он нема утицаја на резултате. Померањем ка зиду цеви, градијент брзине расте, расте вредност корекционог члана, па и његов утицај на вредности физичких величина.

Што се тиче анализе резултата који одговарају случају Liu [8], закључено је да корекција (4.11) не утиче на профил брзине течне фазе, већ само на профил брзине гасовите фазе. Разлог је то што је у свим разматраним случајевима удео гасовите фазе мали, поред тога, инерцијалне силе воде су вишеструко веће од инерцијалних сила ваздуха, тако да мале промене у кретању мехурава пактично не утичу на брзинско поље воде.

Види се да је утицај корекције (4.11) у случају Liu [8] мањи него у случају Hosokawa and Tomiyama [7]. Разлог за то је што је овде коришћена цев већег пречника ($D = 38 \text{ mm}$), а брзина воде U^L је приближно иста као у Hosokawa and Tomiyama [7], па је вредност степена смицања мања.

Пратећи овај закључак, требало би да је у цеви великог пречника ($D = 200 \text{ mm}$), у случају Shawkat et al. [12], утицај корекције (4.11) још мањи. То је потврђено у приказаној анализи. Профил брзине воде се не мења, као ни у претходно разматраним случајевима, али су промене профила брзине ваздуха мање него у случају Liu [8]. Закључак је следећи: ако се вредност средње брзине струјања не мења значајно, у цевима већег пречника градијент брзине ће опадати, па ће тиме и корекција (4.11) имати све мањи утицај на резултате.

Дакле, у цевима мањег пречника потребно је узети у обзир корекцију коефицијента отпора услед деловања смицања како би се нумеричким прорачунима исправно предвидели резултати. У цевима већег пречника, утицај смицања слаби, па нема значајне разлике у томе да ли се у прорачуну користи корекција коефицијента отпора или не.

У сва три разматрана случаја, показано је да кориговање коефицијента отпора нема значајног утицаја на расподелу кинетичке енергије турбуленције течне фазе k^L и расподелу удела гасовите фазе α^G .

Важан закључак је да нова корекција (4.11) успешно предвиђа утицај смицања и да се, за разлику од постојеће корекције (4.10), она може користити са турбулентним моделима без зидних функција (LRN). То представља њену основну предност у односу на постојећу корекцију (4.10). Закључци наведени у овом потпоглављу су објављени у раду [48].

5.3.1 Квалификовање важности корекције (4.11) на основу вредности степена смицања

Пошто уведена корекција (4.11) зависи једино од степена смицања Sr , интересантно је посматрати расподелу ове величине по попречном (мерном) пресеку цеви. Ту се могу видети највеће вредности степена смицања које се јављају у струјном пољу. Пошто је у оси цеви градијент брзине једнак нули, ту не постоји ни смицање ($Sr = 0$). Са приближавањем зиду цеви расте градијент брзине, а опада релативна брзина фазе, тако да вредност степена смицања расте. Према постављеним граничним условима, брзина обе фазе на зиду цеви је $U^L = U^G = 0 \text{ m/s}$, па исто важи и за релативну брзину $U_R = 0 \text{ m/s}$. Из једначине (4.9) се види да ће вредност степена смицања у близини зида бити веома велика, и да ће на самом зиду тежити бесконачности. Због тога се неће посматрати вредност степена смицања на зиду, већ на радијалном растојању $r = 0,99 R$ од осе цеви. Поред овог податка, у табели 5.4, су приказане вредности степена смицања на још две позиције $r = 0,98 R$ и $r = 0,95 R$. Подаци су приказани за три изабрана случаја Н1, L1 и S1, тако да су овим обухваћена сва три експеримента, тј. три цеви различитог пречника.

У табели се види да степен смицања има највећу вредност унутар најмање цеви,

чији је пречник $D = 25 \text{ mm}$ (Hosokawa and Tomiyama [7]). Са порастом пречника цеви, вредност степена смицања значајно опада. Најмање вредности степена смицања су у највећој цеви (Shawkat et al. [12]) $D = 200 \text{ mm}$. Ако се пореде вредности степена смицања Sr у највећој и најмањој цеви, види се да на растојањима од осе $r = 0,98 R$ и $r = 0,99 R$, разлика у вредности Sr може бити чак 100, односно, 90 пута, што значи да увођење корекције (4.11) неће имати исти значај у ова два случаја.

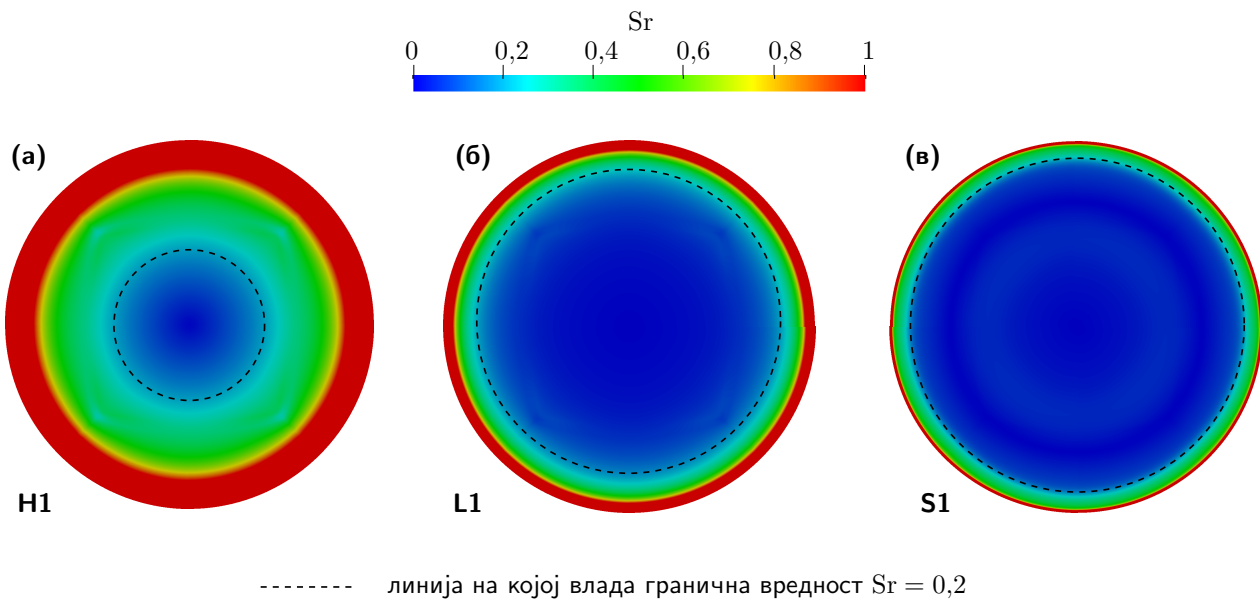
Табела 5.4. Приказ вредности степена смицања Sr за све три цеви (Hosokawa and Tomiyama [7] Liu [8], Shawkat et al. [12]), на три различите радијалне координате.

	Sr []		
	$r = 0,95 R$	$r = 0,98 R$	$r = 0,99 R$
H1	5,803	68,047	217,411
L1	1,083	6,627	44,459
S1	0,379	0,655	2,420

Може се поставити питање која је гранична вредност за степен смицања Sr која раздваја случајеве у којима јесте потребно, од оних у којима није потребно, узети у обзир корекцију коефицијента отпора услед смицања. На основу анализе коју су спровели Legendre and Magnaudet [11] и података који су приказани у табелама 4.1 и 4.2, могло би се закључити да је гранична вредност $Sr = 0,2$.

Према овом закључку, у струјном пољу у којем важи $Sr < 0,2$, утицај смицања на коефицијент отпора се може занемарити. У струјном пољу у којем степен смицања има вредности $Sr > 0,2$ приликом прорачуна треба урачунати утицај смицања на коефицијент отпора.

На слици 5.9 је приказана расподела степена смицања Sr по попречним пресецима све три разматране цеви. Изабрани су случајеви H1, L1 и S1. У претходној табели 5.4 се види до којих вредности се креће степен смицања у овим случајевима. Међутим, да би се јасније уочила гранична вредност $Sr = 0,2$, на слици 5.9 је изабран опсег вредности од $Sr = 0$, што јесте најмања вредност степена смицања, до $Sr = 1$. То значи да ће све оне вредности у којима је $Sr > 1$ бити приказане црвеном бојом.



Слика 5.9. Расподела степена смицања Sr по попречним пресецима три различите цеви, и то: (а) $D = 25 \text{ mm}$ за случај H1, (б) $D = 38 \text{ mm}$ за случај L1 и (в) $D = 200 \text{ mm}$ за случај S1.

У областима унутар испрекиданог круга важи $Sr < 0,2$ и ту коришћење корекције (4.11) неће довести до значајних промена. У областима изван испрекиданог круга важи $Sr > 0,2$ и ту смицање има значајан утицај на резултате прорачуна, што је обухваћено корекцијом (4.11).

У првом случају Н1, који је приказан на слици 5.9 (а), област у којој је утицај смицања значајан покрива 59,1 % површине попречног пресека, док унутрашњост круга износи 40,9 % површине. Овде се види да у већем делу струјног простора постоји утицај смицања који треба узети у обзир. Ово је објашњење за то што корекција (4.11) у случају Hosokawa and Tomiyama [7] доводи до значајних промена у резултатима прорачуна.

Другом случају L1, који је приказан на слици 5.9 (б), одговара вредност пречника $D = 38$ mm. Слика показује да у 18,8 % струјног простора степен смицања има вредност изнад граничне ($Sr > 0,2$), док у већем делу струјног простора од 81,2 %, утицај смицања није значајан. Круг који представља границу ове две области, пресеца радијалну координату на месту $r/R = 0,812$. На дијаграмима 5.6 се може видети да управо након ове позиције креће видљива разлика у профилима брзине гасовите фазе U^G , који су рачунати са и без коришћења корекције коефицијента отпора (4.11).

У последњем случају S1 (слика 5.9 (в)) пречник цеви има вредност $D = 200$ mm. Ту чак за 90 % струјног простора важи да је $Sr < 0,2$ што значи да би се могао занемарити утицај смицања, док овај утицај треба узети у обзир у само 10 % струјног простора. Овај однос даје објашњење зашто је увођење корекције (4.11) у случају Shawkat et al. [12] довело до веома малих промена у резултатима нумеричких прорачуна. Слично као у претходном случају, на дијаграмима 5.7 се може видети да разлика у профилима брзине гасовите фазе U^G почиње да се види при вредностима релативне радијалне координате $r/R > 0,9$, што одговара области изван круга на слици 5.9 (в).

Процена вредности степена смицања у струјном простору може навестити да ли је за дати проблем потребно користити корекцију коефицијента отпора која узима у обзир утицај смицања, или не.

Потребно је на још примера извршити проверу да ли се као гранична вредност степена смицања, која говори о његовом утицају, може користити вредност $Sr = 0,2$. Ово је једно од питања на која треба одговорити у будућим истраживањима, која се надовезују на ову дисертацију.

Експериментално испитивање двофазног мехурастог струјања

6.1 Опис постројења

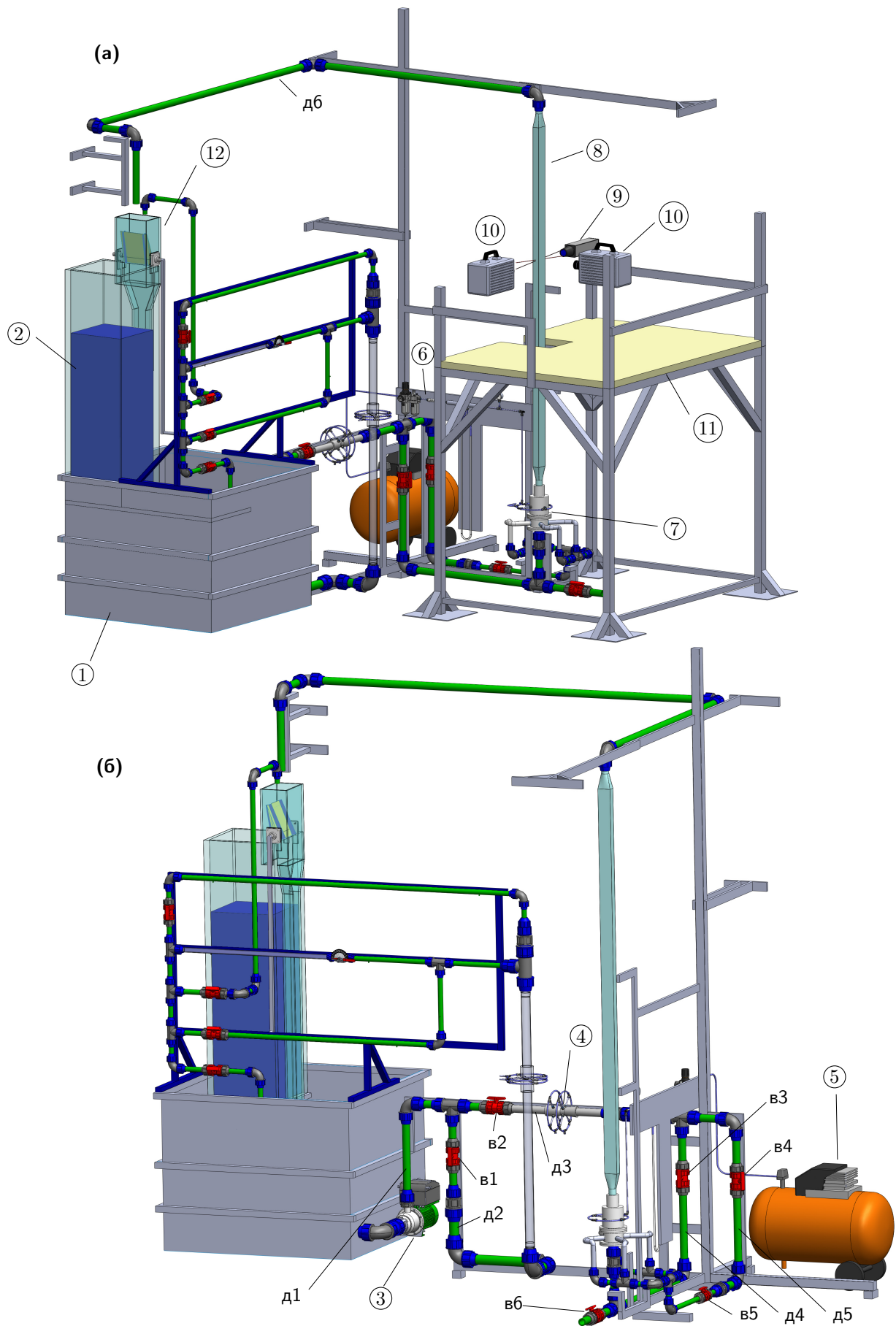
За експериментално испитивање двофазног мехурастог струјања, у оквиру рада на овој дисертацији, пројектовано је и израђено постројење приказано на слици 6.1. Оно се налази у Лабораторији за уљну хидраулику и пнеуматику (просторија бр. 014) на Машинском факултету Универзитета у Београду.

Основни делови постројења приказани на слици 6.1 су: ① велики доњи резервоар, ② горњи резервоар, ③ радијална пумпа, ④ Вентури цев за воду (протокомер воде), ⑤ компресор, ⑥ регулатор протока и мерило протока ваздуха, ⑦ комора за мешање воде и ваздуха, ⑧ канал правоугаоног попречног пресека у којем се врши испитивање, ⑨ ласер LDA система, ⑩ брзе камере за снимање мехурастог тока, ⑪ постоље за мерну опрему и оператера и ⑫ дивертер који омогућава примену запреминске методе за мерење протока воде. Поред наведеног, на слици су означене и важне деонице цевовода ознакама од д1 до д6, као и важни вентили за које су коришћене ознаке од в1 до в6.

Радијална, центрифугална пумпа ③ црпи воду из великог доњег резервоара ① и потискује је у деоницу д1. Вентил в1 је затворен, тако да вода не струји кроз деоницу д2. Цео систем цевовода који се надовезује на деоницу д2 се не користи у експерименту. Вентил в2 је отворен, тако да вода из деонице д1 наставља кроз деоницу д3 и долази до Вентури цеви ④. Вентури цев се користи као мерило протока течне фазе. Она је претходно калибрисана запреминском методом, што је могуће извести коришћењем горњег резервоара ② и дивертера ⑫. Пад притиска на Вентури цеви се мери помоћу обрнуте „U” цеви у којој се налази ваздух.

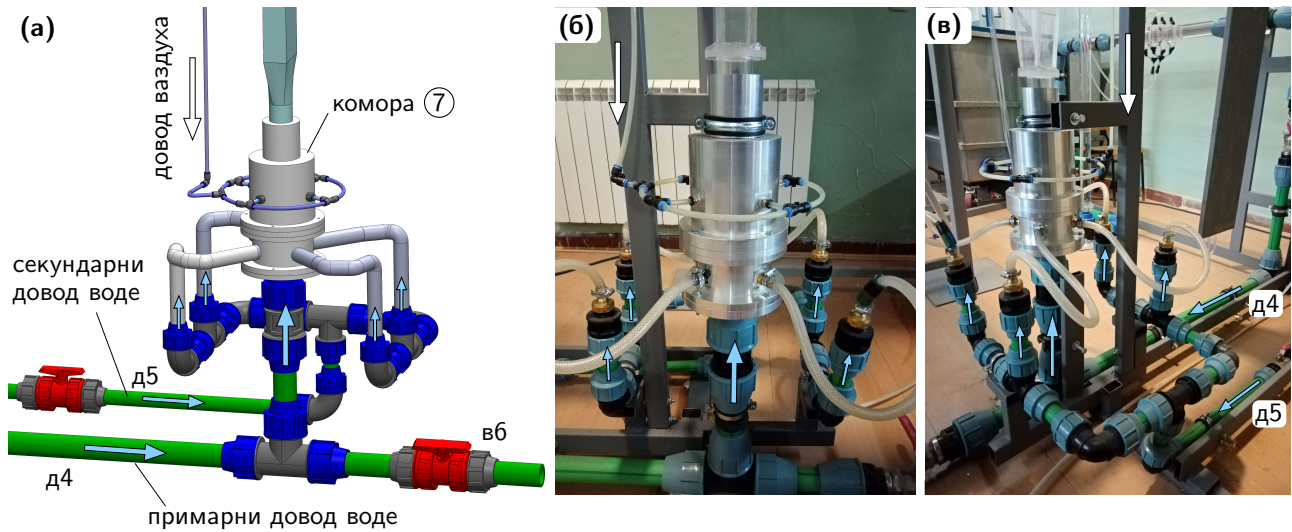
Вентури цев ④ је нестандардна. Она је пројектована за коришћење у приказаном систему. Подаци о геометрији Вентури цеви и њена калибрациона крива, која је добијена истовременим мерењем пада притиска и запреминског протока, су приказани у прилогу 7.2. Проток воде је мерен запреминском методом.

Након Вентури цеви вода одлази у две паралелне гране, то су деонице д4 и д5. У њима се налазе вентили в3, в4 и в5. Они омогућавају да се постигне потребан однос протока кроз ове две деонице. Овај однос протока утиче на механизам стварања мехура у комори ⑦, како ће касније бити објашњено. На деоницу д4 се надовезује и вентил в6 који је затворен у току рада постројења. Он служи за испуштање воде из система по завршетку рада.



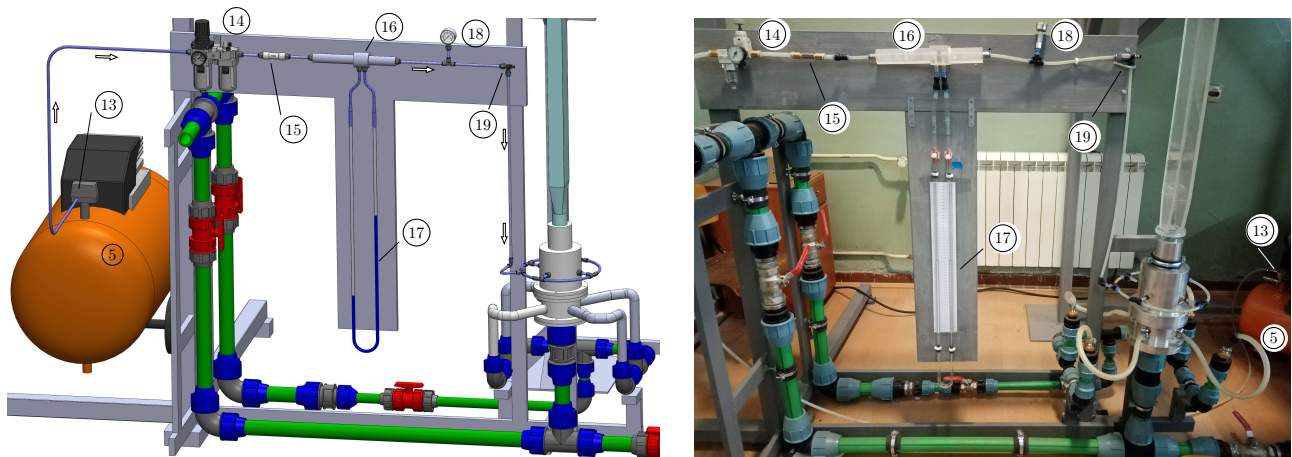
Слика 6.1. Приказ модела постројења за експериментално испитивање вишефазног струјања из два угла. На слици (б) изостављени су постоље и мерна опрема, ради прегледности слике. Означени су најважнији делови.

Обе донице д4 и д5 се завршавају у комори за мешање (7). Кроз деоницу д4 у комору улази примарни ток воде. Секундарни ток долази из деонице д5, која се пре коморе раздваја на четири паралелне гране, како би се секундарни ток воде равномерније распоредио по обиму коморе за мешање. Ово је приказано на слици 6.2.



Слика 6.2. Снабдевање коморе за мешање водом (примарни и секундарни ток) и ваздухом. Приказ доводних цеви на моделу постројења (а) и на изведеном постројењу (б) и (в).

Дакле, вода улази у комору (7) кроз деонице д4 и д5. Истовремено се у комору уводи ваздух. Систем за снабдевање коморе ваздухом је приказан на слици 6.3. Основни делови су: компресор (5), регулатор притиска (13), регулатор протока (14), неповратни вентил (15), мерило протока ваздуха (16), диференцијални манометар - „U” цев са водом (17), манометар (18) и вентил (19). Као мерила протока ваздуха користе се две бленде и једна Вентури цев, у зависности од жељеног опсега протока ваздуха. Подаци о ова три нестандардна мерила протока се налазе у додатку 7.2. Ту су приказане основне геометријске карактеристике, као и калибрационе криве сва три мерила протока.



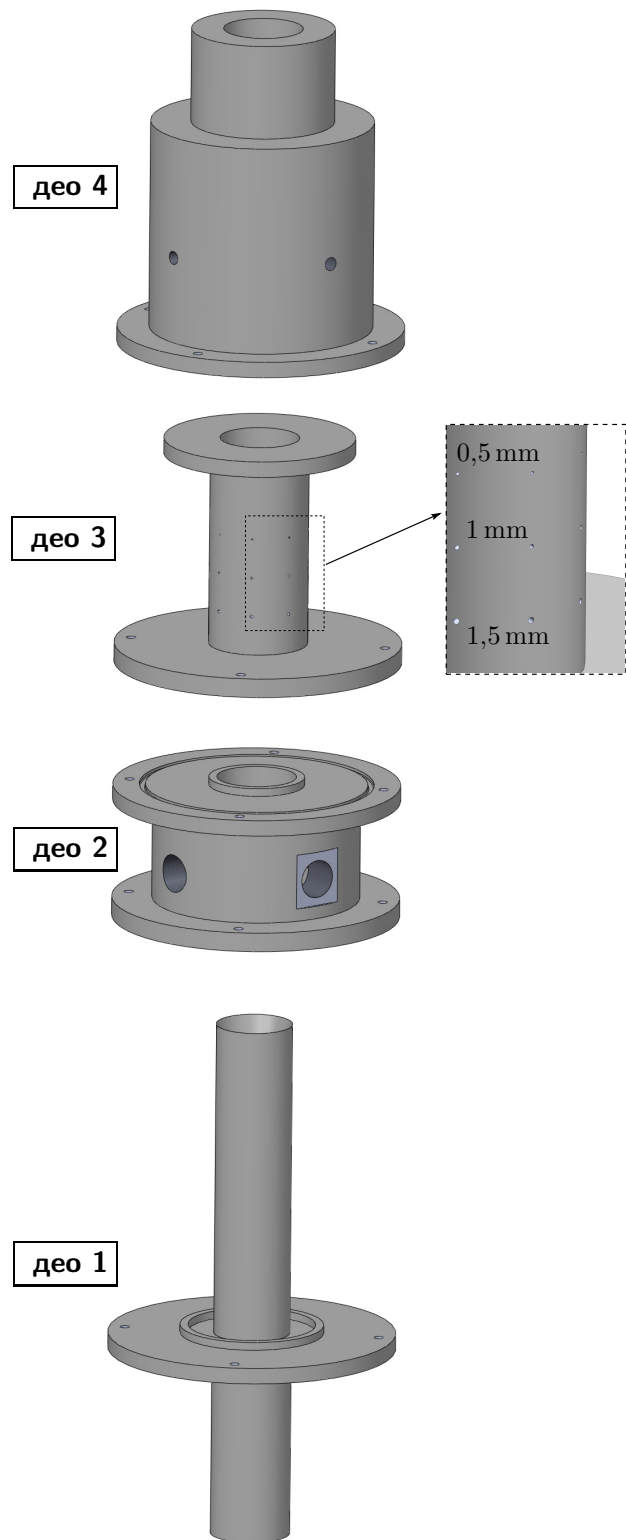
Слика 6.3. Приказ система за снабдевање коморе ваздухом на моделу (а) и на изведеном постројењу (б).

За стварање двофазног мехурастог тока користи се комора (7). Постоји више начина стварања мешавине воде и мехура ваздуха, како је наведено у одељку 1.3. Изабрано је решење које су применили Hosokawa and Tomiyama [7] са додатним модификацијама.

На слици 6.4 приказани су модели четири дела из којих је састављена комора. Делови су израђени у заводу за машине-алатке Катедре за производно машинство Машинског факултета у Београду. На делу 3 се налазе три групе отвора различитих пречника. Најниже су постављени отвори пречника 1,5 mm. Постоји 8 отвора који су равномерно распоређени по обиму. Изнад се налази друга група отвора пречника 1 mm, и на крају трећа група отвора најмањег пречника 0,5 mm. Направљене су три групе отвора са циљем да се контролише величина мехурова. У једном тренутку користи се само једна од три групе. У приказаном експерименту коришћена је средња група, тј. отвори пречника 1 mm.

Полупресек склопа коморе за мешање је дат на слици 6.5. Приказани су одговарајући прикључци за ваздух и воду. На дну дела 1 у комору улази примарни ток воде који долази из деонице д4. Кроз део 2 улази секундарни ток воде који долази из деонице д5. Секундарни ток из унутрашњости дела 2 одлази у зазор између делова 1 и 3. Зазор димензије 1 mm, који је посебно приказан на слици 6.5 (б), је најважнији део коморе јер се ту одвија стварање мехурова. Ваздух у комору улази кроз део 4 и заузима простор између делова 4 и 3. Затим пролази кроз отворе у делу 3 и долази до поменутог зазора. Већ је речено да је у току експеримента отворена само једна од три групе отвора у делу 3, који су приказани на слици 6.4. У овом случају то је средишња група отвора пречника 1 mm.

Како се види на слици (б), секундарни ток воде и ваздух улазе у зазор између делова 1 и 3. Овде се под дејством смичућих напона у води образује дисконтинуални ток ваздуха, тј. вода „цепа“ ток ваздуха на делове, односно мехурове. Мехурови су деформисани због геометрије зазора, али по напуштању зазора попримају уобичајени облик под дејством површинског напона. На слици 6.5 (в) увећано је приказано место где се зазор завршава. Мешавина настала у зазору се спаја са примарним током воде на врху дела 1, тако да из коморе излази двофазни мехурасти ток.

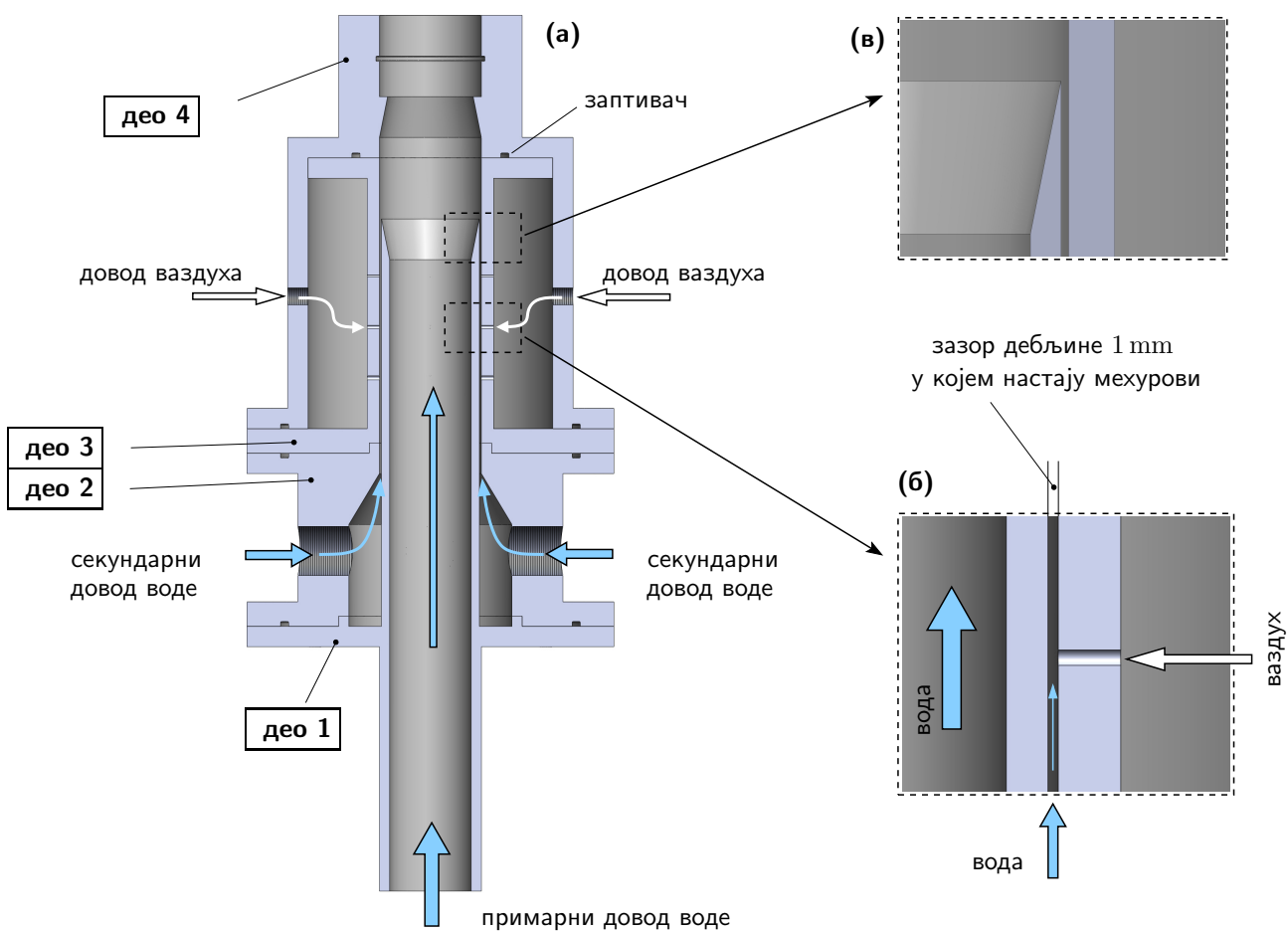


Слика 6.4. Комора за мешање воде и ваздуха.

Напоменуто је да однос протока воде кроз деонице d_4 и d_5 , тј. однос примарног и секундарног протока воде, утиче на процес образовања мехурова. То је зато што брзина струјања секундарног тока кроз зазор утиче на вредност смичућег напона у зазору, који је кључан у овом процесу.

Одступање од саосности и цилиндричности делова коморе може значити да је зазор са једне стране већи, а са друге мањи. То би довело до тога да се са једне стране стварају већи мехурови а са друге мањи. Због тога је важно да саосност и цилиндричност буду остварене.

На врху коморе за мешање, предвиђен је прикључак за канал у којем се врши испитивање. То је приказано на слици 6.2. Непосредно након коморе мења се попречни пресек канала са кружног на правоугаони (слика 6.3). Да би се остварило развијено струјање у мерном пресеку направљен је канал довољне дужине. Мерни пресек се налази на растојању од 1960 mm изнад коморе.



Слика 6.5. Полупресек склопа коморе (а). Издвојени приказ зазора између делова 1 и 3 у којем се ствара мешавина воде и ваздуха (б). Завршетак зазора из којег излазе мехурови (в).

6.2 Поступак мерења

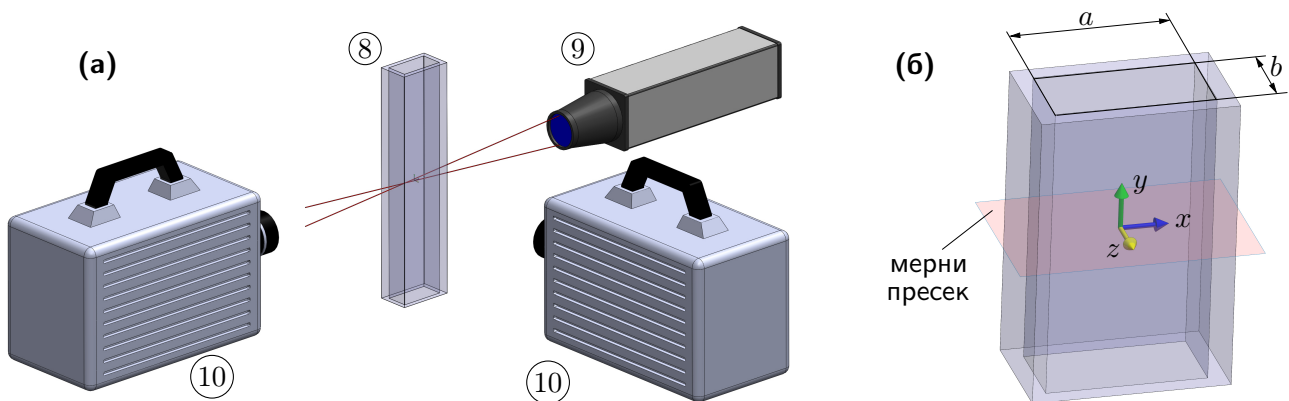
Канал у којем се врши испитивање је правоугаоног попречног пресека, страница $a = 70 \text{ mm}$ и $b = 35 \text{ mm}$. Канал је направљен од плексигласа (клирита) дебљине 8 mm. Хидраулички пречник канала износи:

$$D_H = \frac{4A}{O} = 46,67 \text{ mm}.$$

Мерни пресек се налази низструјно од излаза из коморе на растојању $L_m = 1960 \text{ mm}$, што износи приближно 42 вредности хидрауличног пречника канала $L_m/D_H = 42$. Ово растојање је довољно за формирање развијеног профила брзине. Укупна дужина правоугаоног дела канала је 2570 mm .

Око канала (8) (слика 6.1) на постољу (11) се налази LDA систем (9) и две брзе камере (10). Ово је приказано на слици 6.6 (а).

LDA метода мерења (енгл. *Laser Doppler Anemometry - LDA*) представља савремену неинвазивну методу мерења брзине струјања флуида. То је оптичка метода за мерење брзине флуида у који се додају честице са рефлексионим особинама. Предност методе је што у њој не постоје мерне сонде које се физички уносе у флуидну струју и тиме ремете њен ток. Овде је потребно да ласерски зраци имају оптички приступ мерној тачки.



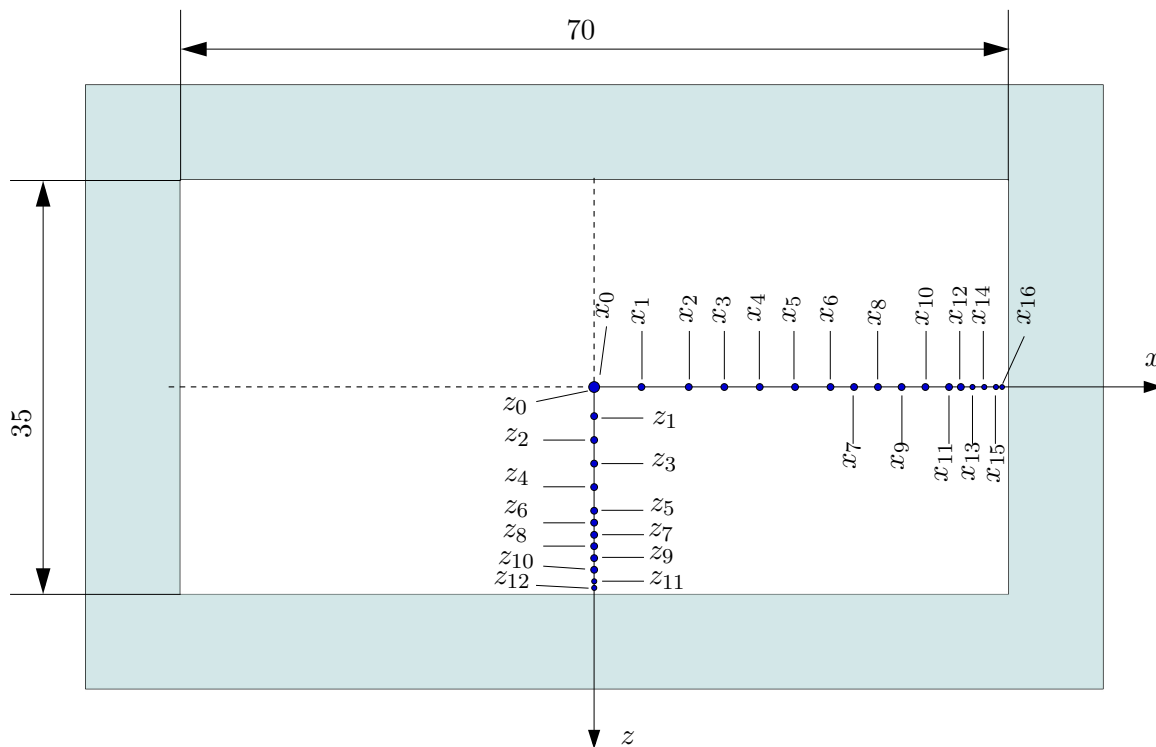
Слика 6.6. Положај ласера и брзих камера у односу на вертикални канал (а). Мерни пресек унутар канала и положај оса координатног система (б).

У струјни простор уперена су два ласерска зрака. Место њиховог пресека је мерна запремина. Њен облик се може апроксимирати елипсоидом. Услед интерференције два ласерска зрака, односно слагања таласа светлости, јављају се наизменичне области осветљења и таме, које се називају интерференционе пруге. Њихове димензије зависе од угла под којим се секу зраци и од таласне дужине светлости ласерског зрака. За положај ласерских зрака са слике 6.6 (а), пруге леже у равнима које су управне на осу y . У флуиду, чија се брзина одређује, налазе се веома мале честице које не утичу на струјно поље флуида, а које имају рефлексионе особине. Пошто су честице веома мале, оне бивају ношене струјом флуида. Када честица прође кроз мерну запремину она ће расути светлост ласерског зрака. Фотодетектор прикупља расуту светлост и анализом овог сигнала може се утврдити колико времена је било потребно честици да пређе пут од једне до друге пруге. Дебљина светле и тамне пруге је позната и зависи од угла под којим су постављени ласерски зраци и фреквенције светлости ласера. На основу тога може се обрадом сигнала израчунати брзина честице, а то значи брзина флуида. Више о методи LDA мерења може се пронаћи у [49].

Пошто LDA систем мери брзину у малој мерној запремини, која настаје пресецањем два ласерска зрака, унапред се одређују позиције мерних тачка у којима је потребно извршити мерење. Мерне тачке су приказане на слици 6.7. Дуж x осе изабрано је 17 тачака које носе ознаке од x_0 до x_{16} . Дуж z осе изабрано је 13 тачака које имају ознаке од z_0 до z_{12} . Вредности координата мерних тачака, тј. њихове позиције, су приказане у табели 6.1.

Мерење брзине LDA системом се може поделити на четири целине:

- (1) мерење уздужне компоненте брзине v^L у мерним тачкама дуж x осе,
- (2) мерење попречне компоненте брзине w^L у мерним тачкама дуж x осе,
- (3) мерење попречне компоненте брзине u^L у мерним тачкама дуж z осе,
- (4) мерење уздужне компоненте брзине v^L у мерним тачкама дуж z осе.

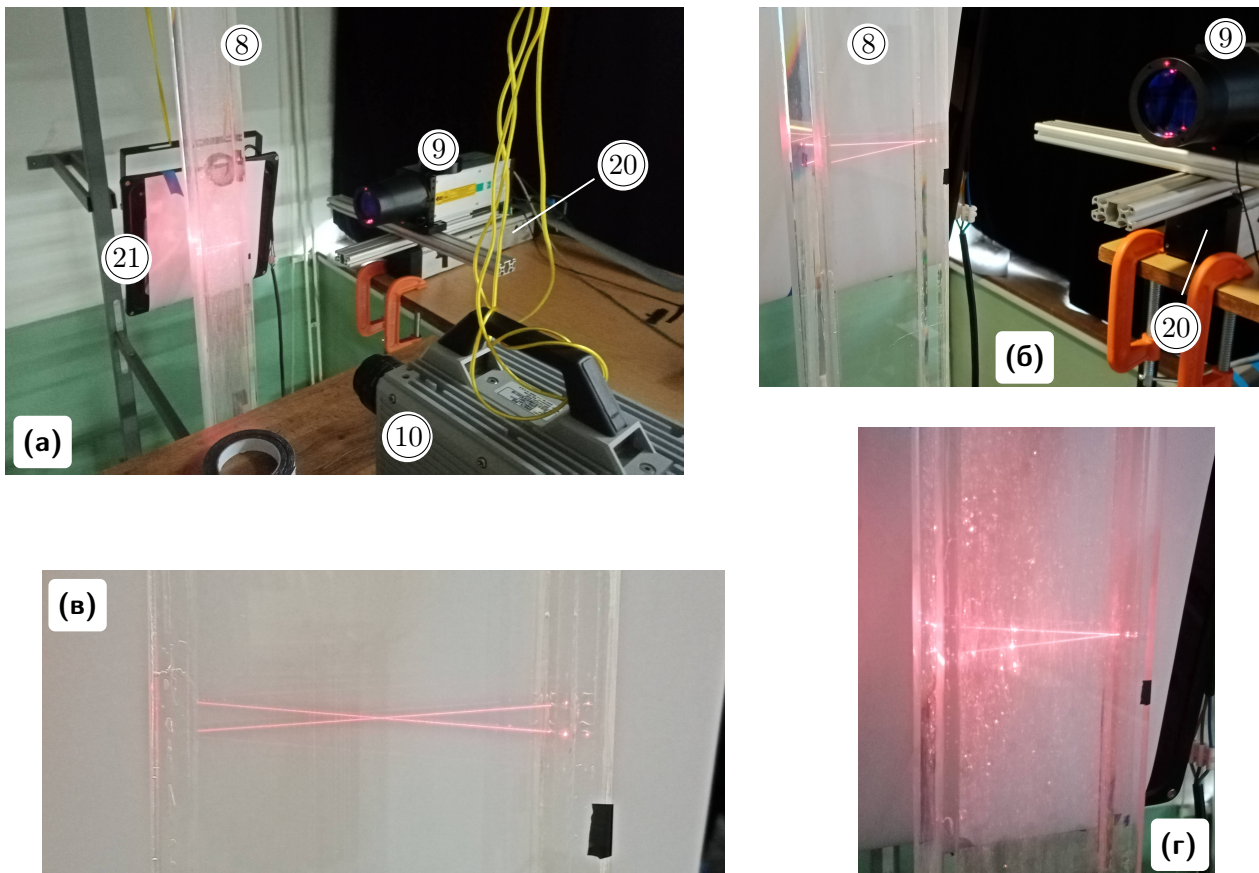


Слика 6.7. Приказ положаја мерних тачака дуж x и z осе.

Табела 6.1. Координате мерних тачака приказаних на слици 6.7.

Ознака	x [mm]	Ознака	z [mm]
x_0	0	z_0	0
x_1	4	z_1	2.5
x_2	8	z_2	4.5
x_3	11	z_3	6.5
x_4	14	z_4	8.5
x_5	17	z_5	10.5
x_6	20	z_6	11.5
x_7	22	z_7	12.5
x_8	24	z_8	13.5
x_9	26	z_9	14.5
x_{10}	28	z_{10}	15.5
x_{11}	30	z_{11}	16.5
x_{12}	31	z_{12}	17
x_{13}	32		
x_{14}	33		
x_{15}	34		
x_{16}	34.5		

Коришћени LDA систем је једнокомпоненти, што значи да се у једном тренутку мери само једна компонента брзине. Када се зраци ласера налазе у вертикалној равни, како је приказано на слици 6.6 (а), тада се мери вертикална, тј. уздужна или аксијална компонента брзине (усмерена дуж канала), која према слици 6.6 (б) има ознаку v^L . При оваквој оријентацији ласера, врши се 17 мерења, у мерним тачкама које леже на оси x . Ласер је причвршћен за вођицу којом се управља преко корачног мотора (енгл. *step motor*), тако да је могуће са великом прецизношћу остварити жељени положај ласера, тј. жељену позицију мерне тачке унутар струјног простора. (најмањи померај који може остварити корачни мотор је $1 \cdot 10^{-3} \text{mm}$). На овај начин могуће је измерити уздужну компоненту брзине v^L у мерним тачкама дуж x осе. То је прва **(1)** од четири горе поменуте целине мерења. Положај кућишта ласера **(9)**, ласерских зрака, вођице **(20)**, камере **(10)** и додатног осветљења **(21)** је приказан на сликама 6.8 (а) и (б). На сликама (в) и (г) приказано је формирање мале мерне запремине у пресеку два ласерска снопа.

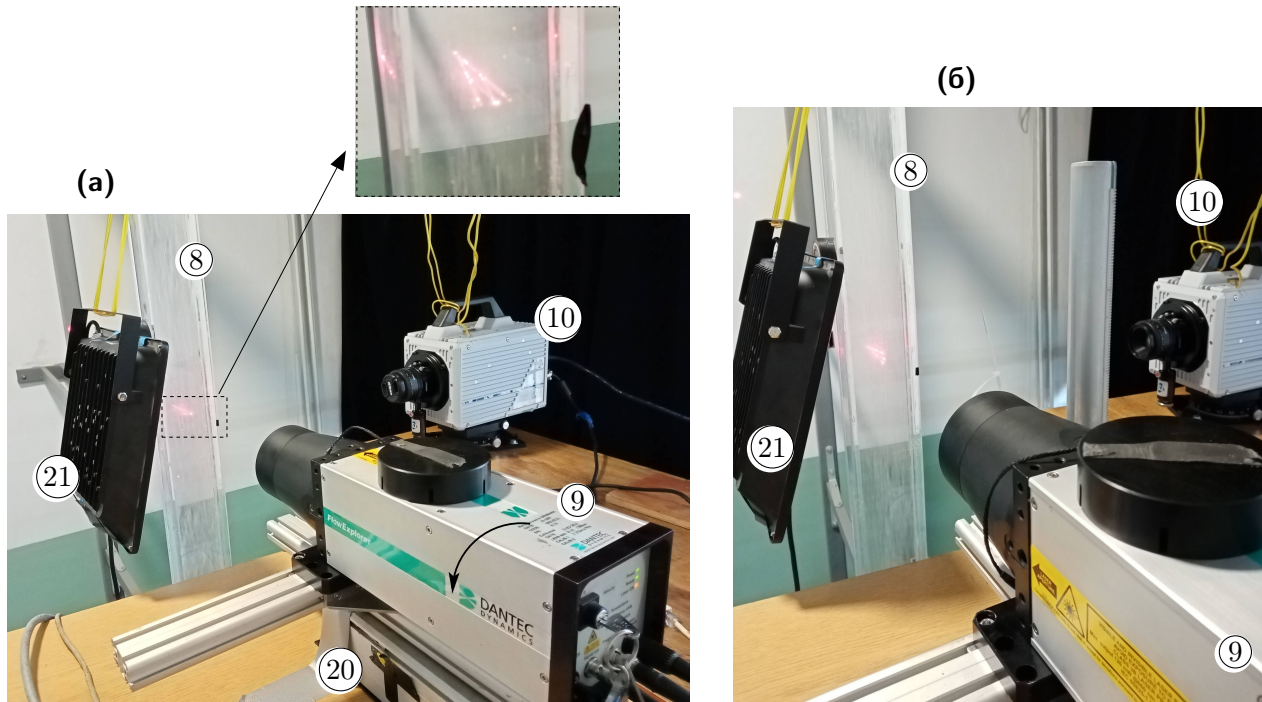


Слика 6.8. Мерење уздужне компоненте брзине v^L дуж осе x : (а) и (б) мерни пресек и ласер са припадајућом вођицом, (в) ласерски зраци у води, (г) ласерски зраци у условима двофазног струјања.

Када је завршена прва целина, тј. када је завршено мерење уздужне компоненте брзине v^L у свим мерним тачкама дуж x осе, ласер се скида са вођице, ротира за 90° и поново причвршћује на вођицу која се не помера. Зраци ласера се сада налазе у хоризонталној равни. У овом положају се мери попречна компонента брзине w^L . Мерење се врши у истих 17 тачака дуж осе x као у претходном делу. Ласер се поставља у исте позиције задавањем истих команди корачном мотору. Ово представља други **(2)** део мерења.

Након друге целине завршена су мерења дуж осе x , па се вођица ласера и ласер

премештају тако да се оса ласера подуара са z осом. Овакав положај вођице и ласера је приказан на слици 6.9. Зраци ласера се налазе у хоризонталном положају, како је то приказано на слици 6.9 (а). У овом положају ласер мери попречну компоненту брзине u^L . Мерење се врши у 13 тачака дуж z осе, које су приказане на слици 6.7 и које носе ознаке од z_0 до z_{12} . У табели 6.1 су дате координате ових тачака. Све време се користи десни координатни систем приказан на сликама 6.6 (б) и 6.7. Мерење попречне компоненте брзине u^L у 13 тачака дуж осе z , представља трећу фазу мерења (3).



Слика 6.9. Мерење брзине струјања воде у тачкама дуж z осе: (а) мерење попречне компоненте брзине u^L , (б) мерење уздужне компоненте брзине v^L .

По њеном завршетку прелази се на последњу, четврту фазу мерења (4), која представља мерење уздужне компоненте брзине v^L дуж осе z . Због тога је потребно заротирати ласер око осе z за 90° , како је то стрелицом означено на слици 6.9 (а) (пратити положај жуте траке на ласеру на сликама (а) и (б)). Сада се зраци ласера налазе у вертикалном положају (слика 6.9 (б)) и врше се читавања уздужне компоненте брзине v^L . Ова компонента брзине се мери у истих 13 мерних тачака дуж осе z , које су приказане на слици 6.7 и у табели 6.1.

До сада је било речи о положају ласера и позицијама мерних тачака, али не и о режимима струјања који су разматрани. Укупно је испитано 24 режима, који су остварени комбиновањем вредности протока течне и гасовите фазе. Речено је да се пре стварања мехурасте мешавине мере запремински протоци обе фазе коришћењем описаних протокомера (додатак 7.2). Остваривањем изабраних вредности протока постижу се унапред задати режими струјања. Изабрано је да се режими обележавају на основу привидне брзине струјања воде J^L и удела гасовите фазе α^G .

У уводном поглављу 1 је поменут појам привидне брзине фазе. Ако се измерени запремински проток воде подели са површином попречног пресека канала, у којем је вршено испитивање, добија се привидна брзина воде, која се у литератури још назива

(енгл. *liquid volumetric flux*) или (енгл. *superficial velocity of liquid flow*):

$$J^L = \frac{\dot{V}^L}{A_k}. \quad (6.1)$$

Исто важи за привидну брзину гасовите фазе. Ове брзине се називају привидним брзинама, зато што представљају средње брзине струјања у случају да се кроз канал креће само једна фаза. Међутим, након мешања фаза, ни једној фази није на располагању цела површина попречног пресека, јер део површине заузима друга фаза. Нпр. са порастом удела гасовите фазе, стварна брзина течне фазе ће се све више разликовати у односу на привидну брзину.

Изабрано је 24 режима струјања, који су настали комбиновањем вредности привидне брзине воде J^L и удела гасовите фазе α^G , тј. комбиновањем вредности запреминског протока течне и гасовите фазе. Постоје 4 изабране вредности привидне брзине воде: $J^L = 0,3 \text{ m/s}$, $J^L = 0,4 \text{ m/s}$, $J^L = 0,5 \text{ m/s}$ и $J^L = 0,6 \text{ m/s}$, док постоји 6 изабраних вредности удела гасовите фазе: $\alpha^G = 0 \%$, $\alpha^G = 0,5 \%$, $\alpha^G = 1 \%$, $\alpha^G = 2 \%$, $\alpha^G = 3 \%$, и $\alpha^G = 4 \%$. Њиховом комбинацијом добијају се 24 режима струјања, који су приказани у табели 6.2. Користи се систем означавања који ће бити објашњен на примеру режима **J04A2**:

- први део ознаке **J04** говори да је вредност привидне брзине воде $J^L = 0,4 \text{ m/s}$,
- други део ознаке **A2** говори да је вредност удела гасовите фазе $\alpha^G = 2 \%$.

Табела 6.2. Ознаке 24 изабрана режима струјања. Први део ознаке говори о вредности привидне брзине течне фазе J^L [m/s], а други део о вредности удела гасовите фазе α^G [%].

	$J^L = 0,3 \text{ m/s}$	$J^L = 0,4 \text{ m/s}$	$J^L = 0,5 \text{ m/s}$	$J^L = 0,6 \text{ m/s}$
$\alpha^G = 0 \%$	J03A0	J04A0	J05A0	J06A0
$\alpha^G = 0,5 \%$	J03A05	J04A05	J05A05	J06A05
$\alpha^G = 1 \%$	J03A1	J04A1	J05A1	J06A1
$\alpha^G = 2 \%$	J03A2	J04A2	J05A2	J06A2
$\alpha^G = 3 \%$	J03A3	J04A3	J05A3	J06A3
$\alpha^G = 4 \%$	J03A4	J04A4	J05A4	J06A4

Након калибрације мерила протока, може се израчунати колико треба да износи пад притиска на Вентури цеви за воду да би се добио задати проток воде, тј. задата средња брзина струјања. Исто важи за мерило протока ваздуха. Протоци се подешавају док манометри не покажу потребан пад притиска на протокомерима. За постизање потребних вредности протока ваздуха коришћен је регулатор протока (означен бројем 14 на слици 6.3), док су за регулацију протока воде коришћени фреквентни регулатор пумпе (и вентил по потреби).

На основу мерења пада притиска на Вентури цеви за воду (Δh), одређују се вредности запреминског протока воде. Овај и сви остали протокомери су претходно калибрисани. Њихове калибрационе криве су дате у додатку 7.2. На основу познатог протока, из једначине (6.1) се одређује привидна брзина воде J^L .

За мерење протока ваздуха користи се један од три мерила протока (додатак 7.2), у зависности од мерног опсега мерила протока. На основу пада притиска (Δh) израчунава

се запремински проток. На исти начин као у случају воде (једначина 6.1), одређује се привидна брзина гасовите фазе J^G . Као однос запреминског протока гасовите фазе и укупног протока обе фазе, израчунава се запремински удео гасовите фазе и изражава се у процентима:

$$\alpha^G = \frac{\dot{V}^G}{\dot{V}^L + \dot{V}^G} 100 \quad [\%]. \quad (6.2)$$

Подаци о свим овим величинама су дати у прилогу 7.2. Због тога што је експеримент обављен у 4 фазе, како је раније објашњено, ови режими су успостављани по 4 пута. Подаци о показивању мерила протока Δh , вредности запреминских протока обе фазе \dot{V}^L и \dot{V}^G , привидним брзинама фаза J^L и J^G и уделу гасовите фазе α^G су приказани у четири табеле у прилогу 7.2. Свака табела одговара једном од 4 фазе мерења која су раније наведена.

Ради прегледности, поступак спроведеног мерења је још једом приказан табелом 6.3.

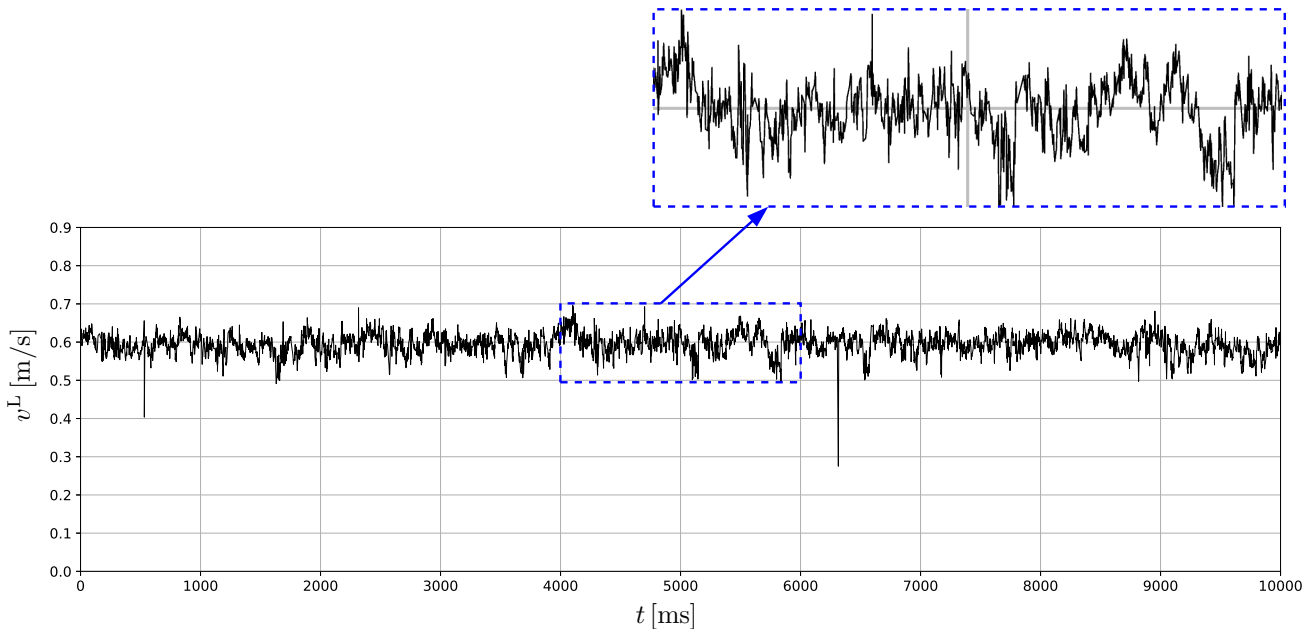
Табела 6.3. Поступак спровођења експерименталног испитивања.

• Део 1	поставити ласер тако да се његова оса и оса x поклапају зраци ласера треба да су у вертикалној равни при овом положају мери се уздужна компонента брзине v^L
	• успоставити режим 1 - J03A0 и извршити мерење у 17 тачака дуж x осе,
	• успоставити режим 2 - J03A05 и извршити мерење у 17 тачака дуж x осе,
	• ... • успоставити режим 24 - J06A6 и извршити мерење у 17 тачака дуж x осе
• Део 2	поставити ласер тако да се његова оса и оса x поклапају зраци ласера треба да су у хоризонталној равни при овом положају мери се попречна компонента брзине w^L
	• успоставити режим 1 - J03A0 и извршити мерење у 17 тачака дуж x осе,
	• успоставити режим 2 - J03A05 и извршити мерење у 17 тачака дуж x осе,
	• ... • успоставити режим 24 - J06A6 и извршити мерење у 17 тачака дуж x осе
• Део 3	поставити ласер тако да се његова оса и оса z поклапају зраци ласера треба да су у хоризонталној равни при овом положају мери се попречна компонента брзине u^L
	• успоставити режим 1 - J03A0 и извршити мерење у 13 тачака дуж z осе,
	• успоставити режим 2 - J03A05 и извршити мерење у 13 тачака дуж z осе,
	• ... • успоставити режим 24 - J06A6 и извршити мерење у 13 тачака дуж z осе
• Део 4	поставити ласер тако да се његова оса и оса z поклапају зраци ласера треба да су у вертикалној равни при овом положају мери се уздужна компонента брзине v^L
	• успоставити режим 1 - J03A0 и извршити мерење у 13 тачака дуж z осе,
	• успоставити режим 2 - J03A05 и извршити мерење у 13 тачака дуж z осе,
	• ... • успоставити режим 24 - J06A6 и извршити мерење у 13 тачака дуж z осе

Број мерења дуж x осе је $2 \cdot 24 \cdot 17 = 816$, а дуж z осе $2 \cdot 24 \cdot 13 = 624$, што значи да их укупно има 1440. Резултат сваког мерења је сигнал брзине који је потребно обрадити.

6.3 Обрада сигнала мерења

Свака од 1440 поменутих серија мерења траје 10 s. Резултат мерења је сигнал брзине оних честица које су прошле кроз мерну запремину. Веома важна величина је време проласка честице кроз мерну запремину. На слици 6.10 је приказан уобичајени изглед сигнала приликом мерења уздужне компоненте брзине.



Слика 6.10. Сигнал мерења уздужне компоненте брзине воде v^L у тачки x_7 при режиму струјања J05A05.

Сигнал приказан на слици 6.10 је добијен приликом мерења уздужне компоненте брзине воде v^L , мерење је извршено у тачки x_7 која има вредност координата $x = 22 \text{ mm}$, $z = 0 \text{ mm}$ (слика 6.7, табела 6.1). Режим струјања при којем је мерење извршено је **J05A05**, што значи да је привидна брзина струјања воде $J^L = 0,5 \text{ m/s}$, а удео гасовите фазе $\alpha^G = 0,5 \%$.

Мерење је трајало 10 s, односно 10000 ms, како је приказано на апсциси дијаграма 6.10. Током мерења забележен је сигнал брзине за 6250 честица које су прошле кроз мерну запремину. Резултат мерења је велика скупина података, чији је део приказан у табели 6.4. Ту се налазе подаци: редни број честице чија брзина је измерена, временски тренутак у којем је честица уочена, време проласка честице кроз мерну (контролну) запремину и читавање брзине. Ове податке је потребно статистички обрадити ради добијања вредности осредњене брзине струјања и вредности флукуација, које су потребне за рачунање кинетичке енергије турбуленције.

Временски осредњена брзина струјања се не рачуна просто аритметичком средином свих $N = 6250$ вредности, већ се уводи тежински коефицијент који узима у обзир време проласка честице кроз мерну запремину t_i . Дакле, већи тежински коефицијент припада оном мерењу брзине које је добијено на основу праћења честице која се дуже задржала у мерној запремини. Разлика у времену проласка честице кроз мерну запремину није због разлике у брзини кретања честица, већ због облика мерне запремине. Она настаје у пресеку два ласерска зрака тако да се може апроксимирати обликом елипсоида. Најдуже се у мерној запремини задржавају честице које је пресецају по средини, а оне честице које у мерну запремину улазе на периферији имају краће време боравка у њој.

Табела 6.4. Исечак табеле у којој су смештене бројевне вредности сигнала брзине приказаног на слици 6.10. Издвојено је првих 20 честица од укупно 6250.

Бр. (Row)	Време појављивања [ms] (Arrival Time [ms])	Време проласка t_t [μ s] (Transit Time t_t [μ s])	Брзина v^L [m/s] (Velocity v^L [m/s])
1	5.2617	109.2267	0.624472
2	6.6953	116.0533	0.606993
3	6.9410	116.0533	0.634361
4	7.1322	150.1867	0.610432
5	9.3303	300.3733	0.605643
6	11.8426	102.4000	0.590536
7	12.9212	109.2267	0.593709
8	14.3138	389.1200	0.598572
9	18.5737	102.4000	0.612789
10	21.0449	211.6267	0.616259
11	21.6457	252.5867	0.623271
12	23.7892	191.1467	0.610580
13	24.4992	197.9733	0.631070
14	24.7313	218.4533	0.626548
15	24.9907	150.1867	0.628505
16	25.4413	286.7200	0.627956
17	26.4243	430.0800	0.630966
18	27.0933	375.4667	0.622056
19	27.6258	109.2267	0.619268
20	29.6602	81.9200	0.610284

Као што се види у табели 6.4, време проласка честице кроз мерну запремину се може разликовати неколико пута. Због тога ова мерења не улазе у рачунање средње вредности са истим тежинским коефицијентом. Израз за рачунање осредњене вредности уздужне компоненте брзине воде је [39]:

$$\overline{v^L} = \frac{\sum_{i=1}^N (v_i^L t_i^t)}{\sum_{j=1}^N t_j^t} \quad (6.3)$$

Софтвер за управљање LDA системом [39] даје могућност аутоматског израчунавања осредњене вредности брзине на основу очитаних података.

Након што је одређена осредњена вредност уздужне компоненте брзине $\overline{v^L}$ може се дефинисати тренутна вредност флукуације као $v^L - \overline{v^L}$. За рачунање кинетичке енергије турбуленције потребно је одредити осредњену вредност квадрата флукуација компоненте брзине. Осредњавање се поново врши узимајући у обзир време проласка честице кроз мерну запремину:

$$\overline{(v^L)^2} = \frac{\sum_{i=1}^N \left[t_i^t (v_i^L - \overline{v^L})^2 \right]}{\sum_{j=1}^N t_j^t} \quad (6.4)$$

Ова величина се у литератури [39] означава са σ^2 и представља осредњену вредност флукуације, па је њен корен (енгл. RMS - root mean square) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ [m/s]. И величину

σ може израчунати софтвер који се користи за управљање LDA системом [39].

Осредњена вредност квадрата флукуација је потребна за израчунавање кинетичке енергије турбуленције течне фазе:

$$k^L = \frac{1}{2} \left[\overline{(u^L)^2} + \overline{(v^L)^2} + \overline{(w^L)^2} \right]$$

Интензитет брзине је доминантан у подужном правцу струјања (правац y осе) у односу на два попречна правца x и z , тако да ни у овом експерименту, као ни у сличним Hosokawa and Tomiyama [7], Liu [8], Shawkat et al. [12], није вршено мерење све три компоненте брзине у свакој мерној тачки. За сваку мерну тачку извршена су мерења подужне компоненте брзине v^L и једне од попречних компоненти, и то u^L за тачке дуж осе z и w^L за тачке дуж осе x . Користи се претпоставка да је интензитет флукуација у попречним правцима x и z приближан. На основу ове претпоставке кинетичка енергија турбуленције се за тачке које леже на оси x рачуна на следећи начин:

$$k^L = \frac{1}{2} \left[\overline{(v^L)^2} + 2 \cdot \overline{(w^L)^2} \right] \quad (6.5)$$

За мерне тачке које су постављене дуж z осе, кинетичка енергија турбуленције течне фазе се рачуна коришћењем следећег израза:

$$k^L = \frac{1}{2} \left[2 \cdot \overline{(u^L)^2} + \overline{(v^L)^2} \right] \quad (6.6)$$

Речено је да је извршено укупно 1440 мерења, па није прегледно табеларно приказати резултате. Они ће бити приказани у виду дијаграма у наредном поглављу 6.4. Овде су као пример дате израчунате вредности за сигнал који је приказан на слици 6.10:

- режим **J05A05**
- положај мерне тачке $x = 22 \text{ mm}$, $z = 0 \text{ mm}$
- осредњена вредност уздужне компоненте брзине

$$\overline{v_{x_7}^L} = \frac{\sum_{i=1}^{6250} (v_i^L t_i^t)}{\sum_{j=1}^{6250} t_i^t} = \boxed{0.5941804 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

- осредњена вредност квадрата флукуација уздужне компоненте брзине

$$\overline{(v_{x_7}^L)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{6250} \left[t_i^t (v_i^L - \overline{v^L})^2 \right]}{\sum_{j=1}^{6250} t_i^t} = 0.00075649 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Ако се искористи и мерење хоризонталне компоненте брзине у истој тачки x_7 , при истом режиму струјања, може се израчунати да је $\overline{(w_{x_7}^L)^2} = 0.00037671 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Сада се применом једначине (6.5) може израчунати вредност кинетичке енергије турбуленције воде у посматраној тачки $k_{x_7}^L = 0.00075496 \text{ m}^2/\text{s}^2$.

Пратећи приказан поступак могу се одредити средње брзине струјања и кинетичка енергија турбуленције у свим мерним тачкама са слике 6.7 за све режиме из табеле 6.2. Ови резултати су приказани у наставку.

6.4 Приказ и анализа експерименталних резултата

Резултати спроведеног експеримента обухватају профиле осредњене брзине струјања воде U^L и кинетичке енергије турбуленције k^L дуж полуоса попречног пресека канала. Попречни пресек је облика правоугаоника страница $a = 70 \text{ mm}$ и $b = 35 \text{ mm}$. Профили су приказани за 24 режима струјања који су наведени у табели 6.2. Режији носе ознаке које су већ објашњене.

Резултати су приказани на укупно 24 дијаграма, који су подељени у четири групе. Прве две слике 6.11 и 6.12 представљају профиле дуж осе x , док трећа и четврта слика 6.13 и 6.14 представљају профиле дуж осе z .

Свака од ове четири слике садржи по три пара дијаграма. Парови се разликују по томе која вредност удела гасовите фазе им одговара. Тако су на слици 6.11 приказана три пара дијаграма којима одговарају следеће вредности удела гасовите фазе $\alpha^G = 0 \%$, $\alpha^G = 0,5 \%$ и $\alpha^G = 1 \%$. За сваку вредност приказан је пар дијаграма, један за брзину струјања и други за кинетичку енергију турбуленције течне фазе. На сваком дијаграму се налазе четири профила који одговарају различитим вредностима привидних брзина струјања од $J^L = 0,3 \text{ m/s}$ до $J^L = 0,6 \text{ m/s}$. На овај начин на слици 6.11 су приказани профили за 12 режима струјања.

Слика 6.12 се од претходне разликује само у вредностима удела гасовите фазе, који овде износе $\alpha^G = 2 \%$, $\alpha^G = 3 \%$ и $\alpha^G = 4 \%$. На овој слици је приказано још 12 режима, тако да су до сада обухваћена сва 24 режима. Дужина полуосе по којој су приказани профили износи 35 mm .

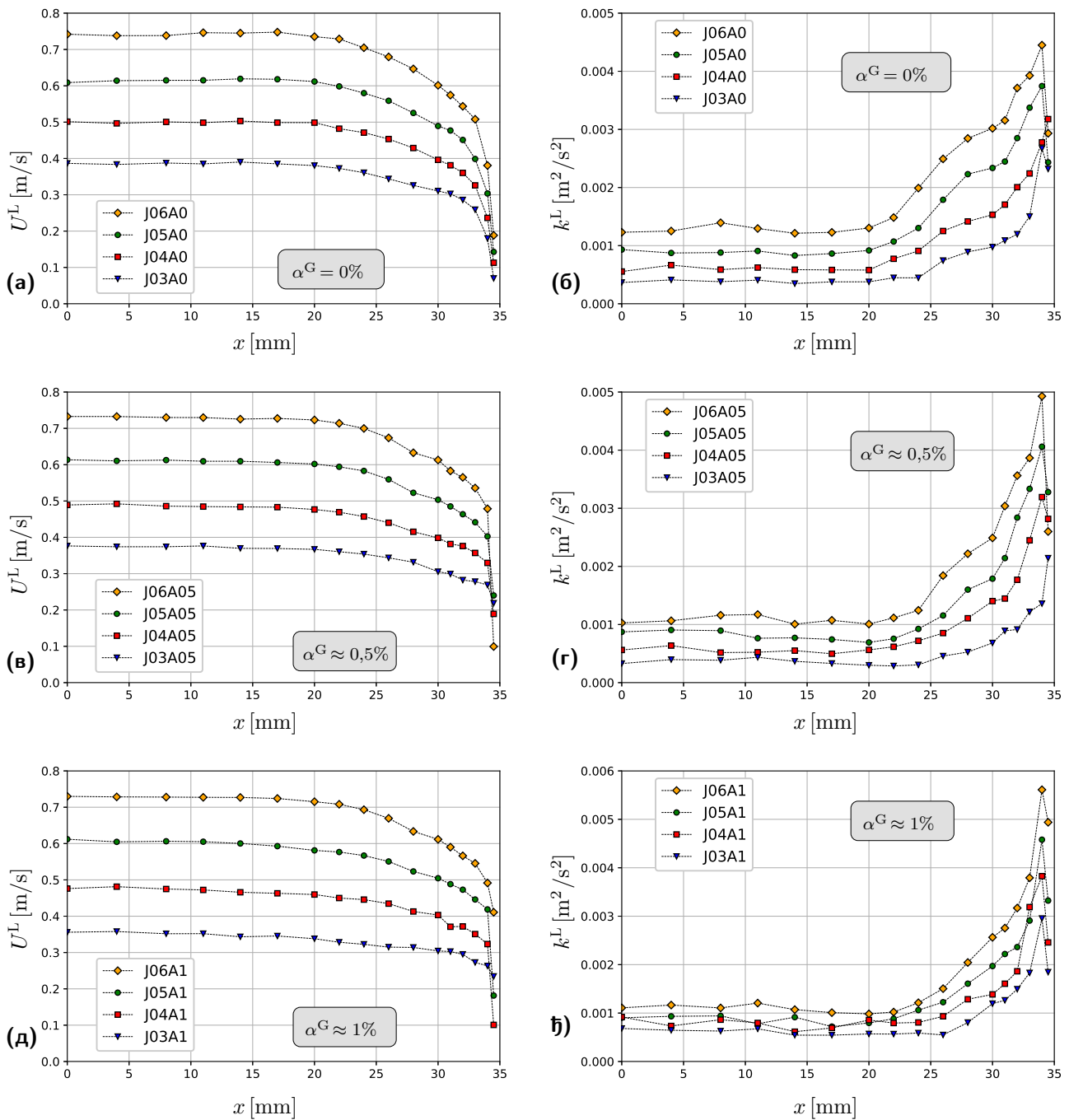
На сликама 6.13 и 6.14 приказано је исто што и на сликама 6.11 и 6.12, са том разликом што су овде дати профили по полуоси z , чија дужина је $17,5 \text{ mm}$.

Прво што се може приметити на приказаним профилима брзине јесте чињеница да њихов облик одговара очекиваном облику профила брзине при развијеном турбулентном режиму струјања. На основу хидрауличког пречника канала $D_H = 46,67 \text{ mm}$, кинематске вискозности воде, која на температури од 20° износи $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, и вредности привидних брзина струјања воде, може се израчунати Рејнолдсов број. При најмањој ($J_1^L = 0,3 \text{ m/s}$) и највећој ($J_4^L = 0,6 \text{ m/s}$) вредности привидних брзина струјања Рејнолдсов број има следеће вредности:

$$\text{Re}_1 = \frac{D_H J_1^L}{\nu} = 14001, \quad \text{Re}_4 = \frac{D_H J_4^L}{\nu} = 28002.$$

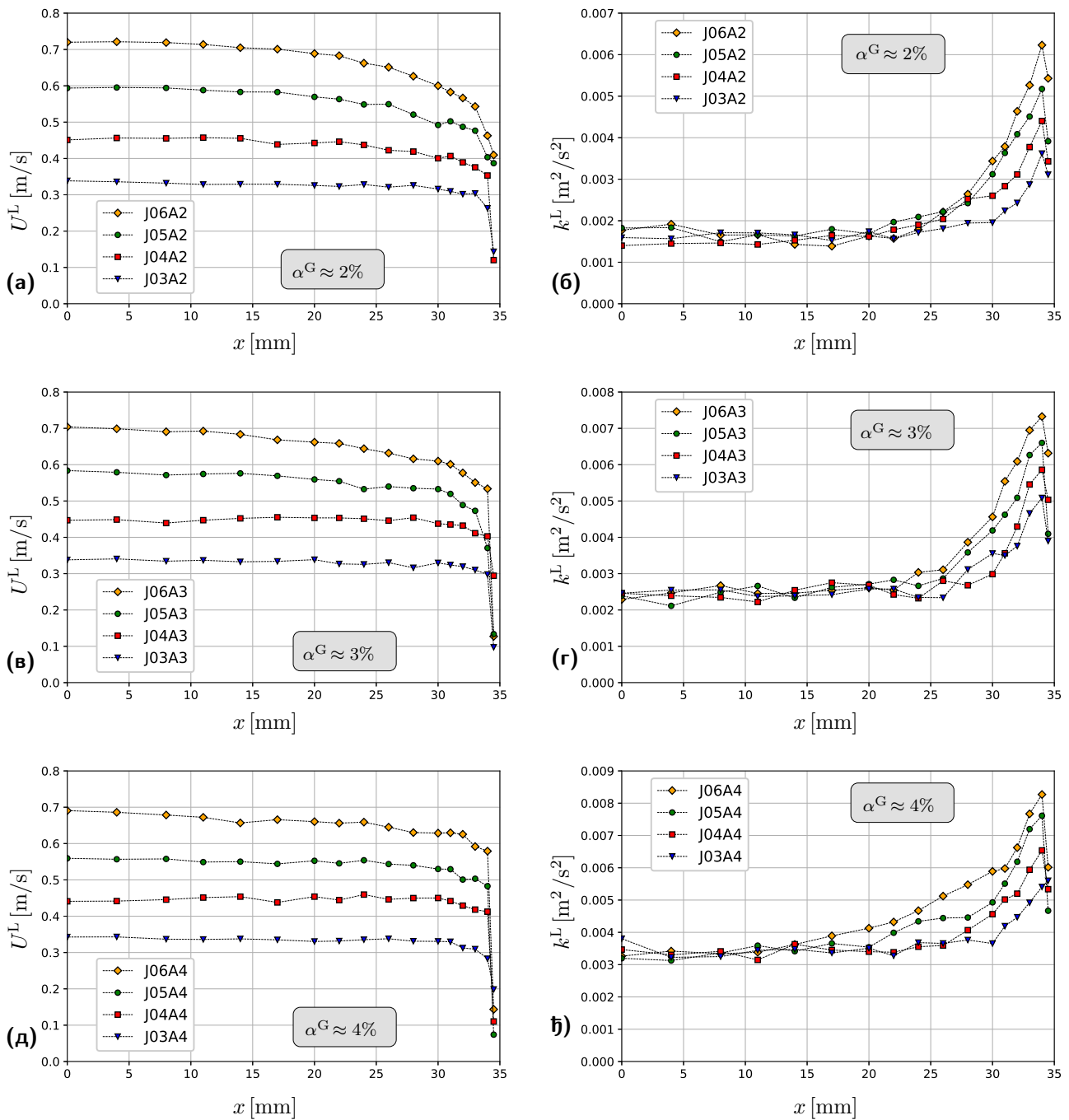
Овим се потврђује да струјање воде јесте турбулентно. Дакле, као што се очекује, вредности брзине су приближно константне у средишњем делу канала, а затим са порастом координате x (или координате z), тј. са приближавањем зиду канала долази до смањења брзине. Интензитет градијента брзине расте са приближавањем зиду. Према услову лепљења брзина на зиду је једнака нули. Највеће потешкоће приликом извођења мерења су везане за мерне тачке које се налазе у непосредној близини зида. Мерна тачка која је најближа зиду има вредност координате $x = 34,5 \text{ mm}$, што значи да је удаљена од зида за $0,5 \text{ mm}$. Ово је удаљеност од зида и прве мерне тачке која лежи на оси z .

Поредећи профиле брзине за различите вредности удела гасовите фазе α^G , уочава се



Слика 6.11. Распдела брзине течне фазе U^L и кинетичке енергије турбуленције k^L дуж x осе за различите вредности удела гасовите фазе: $\alpha^G = 0\%$ за (а) и (б), $\alpha^G \approx 0,5\%$ за (в) и (г), $\alpha^G \approx 1\%$ за (д) и (ђ). На свим дијаграмима приказани су профили за четири вредности привидне брзине струјања течне фазе $J^L = 0,3$ m/s, $J^L = 0,4$ m/s, $J^L = 0,5$ m/s и $J^L = 0,6$ m/s.

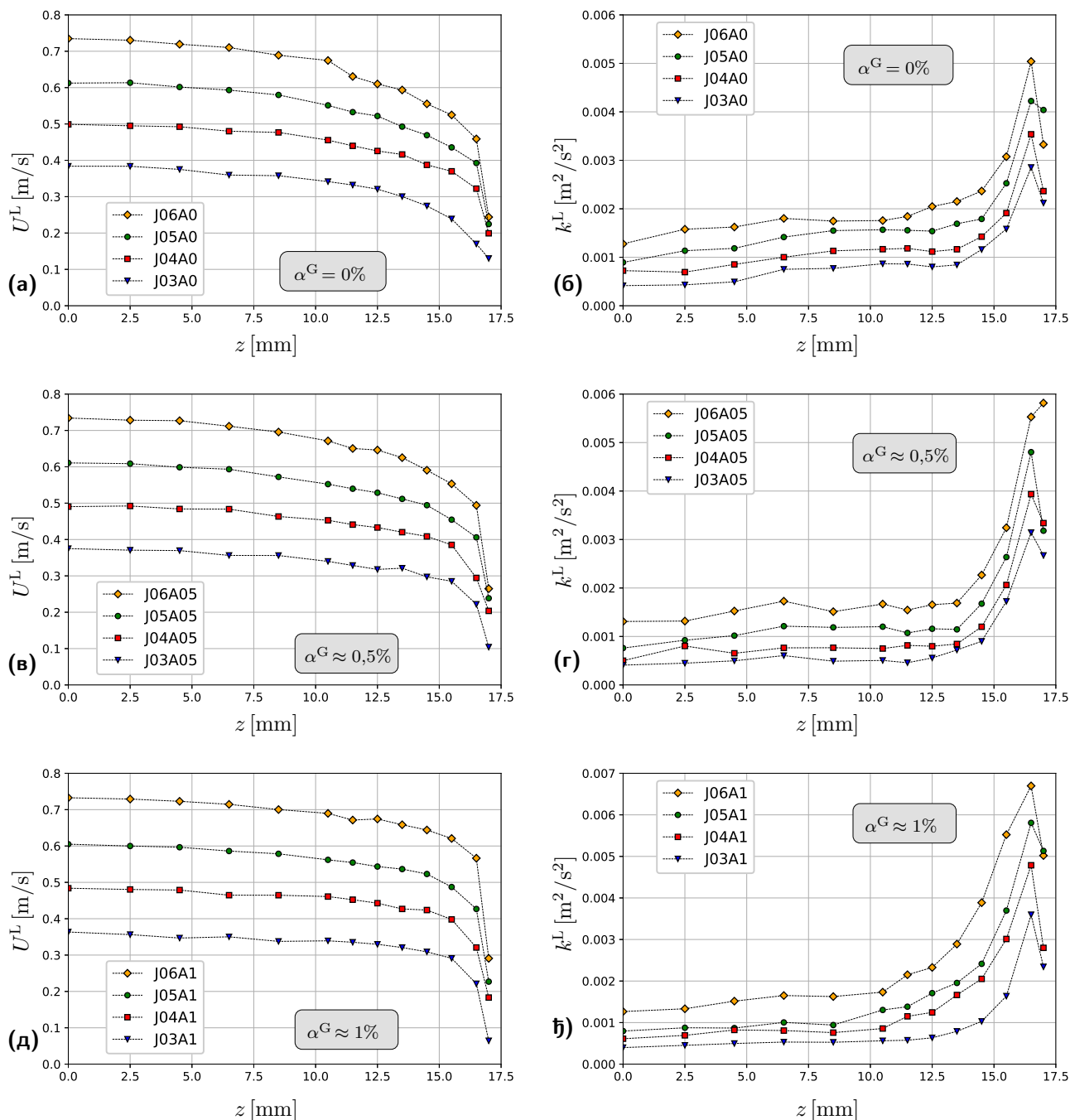
да повећавање запреминског удела ваздуха, тј. повећавање броја мехурова у струјном простору, доводи до *заравњања* профила брзине воде. Објашњење је следеће: мехурови се групишу у периферном делу струјног простора, тј. уз зид канала, а њихова брзина при вертикалном струјању нависе јесте већа од брзине воде, што је последица деловања силе потиска. Сила отпора којом вода делује на мехур и тежи да га успори, према закону дејства и противдејства делује на воду истим интензитетом и у истом правцу, а супротног смера, тако да она тежи да убрза воду. Као последица овог деловања мехурова на кретање течне фазе, види се да при повећавању вредности α^G , а за непромењену вредност протока воде (привидне брзине струјања J^L), долази до повећања брзине воде



Слика 6.12. Расподела брзине течне фазе U^L и кинетичке енергије турбуленције k^L дуж x осе за различите вредности удела гасовите фазе: $\alpha^G \approx 2\%$ за (а) и (б), $\alpha^G \approx 3\%$ за (в) и (г), $\alpha^G \approx 4\%$ за (д) и (ж). На свим дијаграмима приказани су профили за четири вредности привидне брзине струјања течне фазе $J^L = 0,3$ m/s, $J^L = 0,4$ m/s, $J^L = 0,5$ m/s и $J^L = 0,6$ m/s.

у близини зида канала. Као што је управо речено, проток воде је непроменљив, што значи да према једначини континуитета брзина воде у оси канала опада. И у овој области постоје мехурови који теже да убрзају воду али је ту њихов број мањи, па је и њихов утицај на воду мањи.

У дијаграмима који су смештени у десној колони приказан су профили кинетичке енергије течне фазе. Она је најмања у оси канала ($x = 0$, $z = 0$) и има приближно непроменљиву вредност до $x \approx 20$ mm, односно $z \approx 10$ mm. Са даљим приближавањем зиду канала вредност кинетичке енергије турбуленције значајно расте. На скоро свим дијаграмима се види пад кинетичке енергије турбуленције k^L у последњој мерној тачки

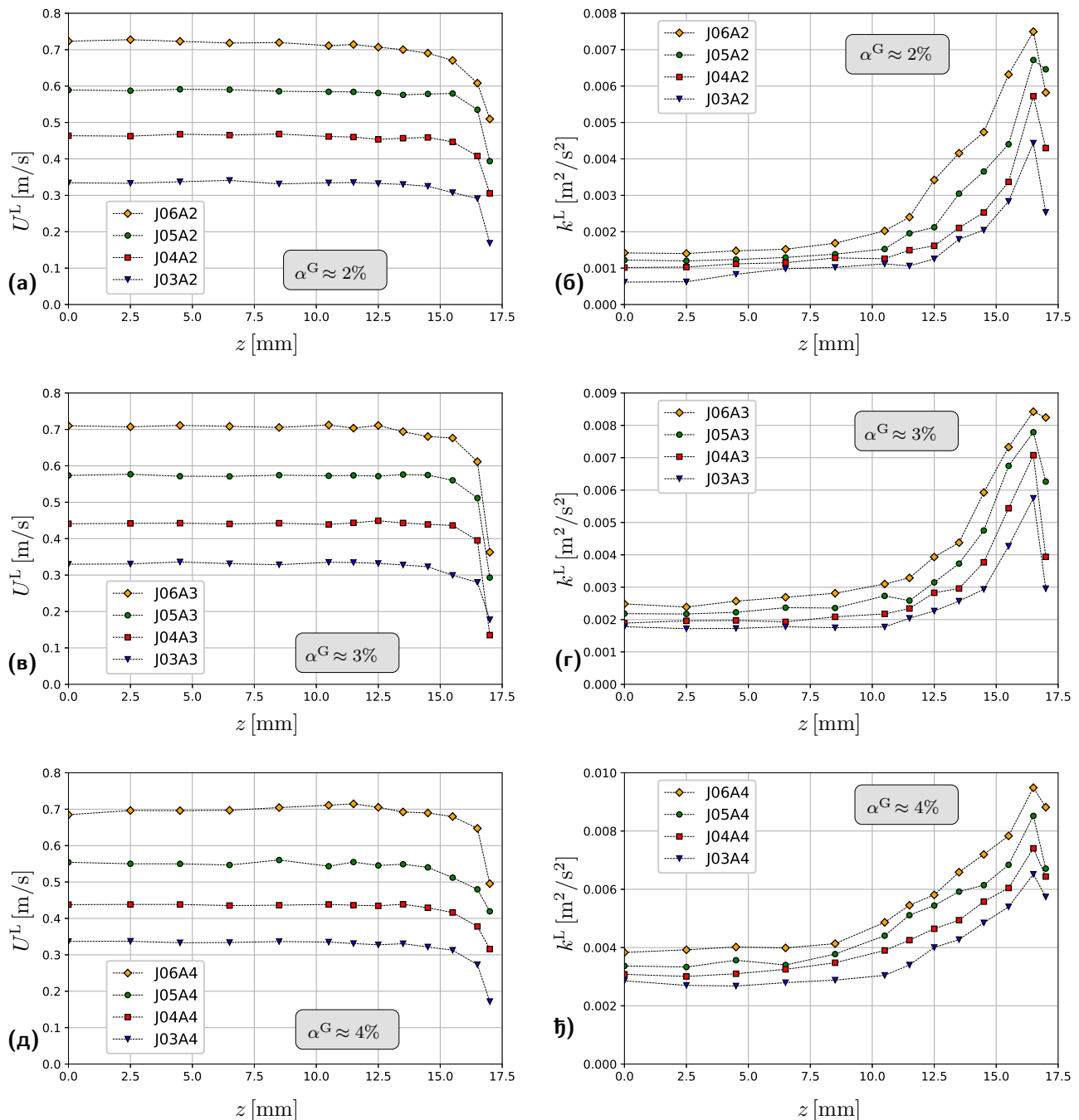


Слика 6.13. Расподела брзине течне фазе U^L и кинетичке енергије турбуленције k^L дуж z осе за различите вредности удела гасовите фазе: $\alpha^G = 0\%$ за (а) и (б), $\alpha^G \approx 0,5\%$ за (в) и (г), $\alpha^G \approx 1\%$ за (д) и (ђ). На свим дијаграмима приказани су профили за четири вредности привидне брзине струјања течне фазе $J^L = 0,3$ m/s, $J^L = 0,4$ m/s, $J^L = 0,5$ m/s и $J^L = 0,6$ m/s.

која је на растојању од зида цеви 0,5 mm.

Очекивано је да режимима са већом брзином струјања воде одговарају веће вредности кинетичке енергије турбуленције.

Већ је било говора о утицају мехурова на интензитет турбуленције течне фазе. У одељку 3.4 су приказане допунске једначине за моделирање турбуленције. То су модели који су изведени за случај једнофазног струјања флуида. Да би они били примењени за прорачун вишефазног струјања потребно је било увести допунске чланове, као што су S_{kk}^{int} и $S_{\varepsilon k}^{\text{int}}$ који су део једначина (3.35), (3.36), (3.38) и (3.39). Улога ових допунских чанова је да опишу утицај распршене фазе (у овом случају мехурова) на континуалну



Слика 6.14. Расподела брзине течне фазе U^L и кинетичке енергије турбуленције k^L дуж z осе за различите вредности удела гасовите фазе: $\alpha^G \approx 2\%$ за (а) и (б), $\alpha^G \approx 3\%$ за (в) и (г), $\alpha^G \approx 4\%$ за (д) и (ж). На свим дијаграмима приказани су профили за четири вредности привидне брзине струјања течне фазе $J^L = 0,3$ m/s, $J^L = 0,4$ m/s, $J^L = 0,5$ m/s и $J^L = 0,6$ m/s.

фазу (у овом случају воду). Постоје математички модели за описивање допунских чланова. Један од тих (ВИТ) модела је приказан једначином (5.4). Он је коришћен у нумеричким прорачунима приказаним у поглављу 5.

Присуство мехурова у течној фази и њихово кретање брзином која се разликује у односу на брзину воде, доводи до повећања интензитета кинетичке енергије турбуленције течне фазе k^L . Овде приказани експериментални резултати потврђују тврдњу да присуство мехурова повећава кинетичку енергију турбуленције воде. На свим дијаграмима 6.11, 6.12, 6.13 и 6.14 се ово може видети тако што се прате режими који имају исту привидну брзину воде J^L а различити удео гасовите фазе α^G . Најмање вредности

кинетичке енергије турбуленције одговарају случају једнофазног струјања воде $\alpha^G = 0\%$. Са појавом мехура $\alpha^G = 0,5\%$ кинетичка енергија турбуленције расте. Даљем повећавању удела гасовите фазе α^G одговара пораст кинетичке енергије турбуленције воде k^L .

Приказани резултати могу послужити за верификацију резултата нумеричких прорачуна. За све експерименталне резултате, који су доступни у литератури, карактеристично је то да се испитивање врши у цевима кружног попречног пресека. Овде представљени експериментални резултати, који се односе на канал правоугаоног попречног пресека, могу послужити за испитивање универзалности математичких модела који се користе за нумеричке прорачуне двофазног мехурастог струјања.

Профили кинетичке енергије турбуленције k^L , добијени експерименталним путем, могу послужити за тестирање великог броја постојећих и нових ВИТ модела. ВИТ модели представљају један од недовољно истражених проблема моделирања двофазног мехурастог струјања.

6.4.1 Мерење брзине и удела гасовите фазе

За сва 24 режима која су побројана у табели 6.2 вршено је снимање кретања мехура кроз мерни пресек. На слици 6.6 је приказан положај две брзе камере које су усмерене ка каналу из два међусобно управна правца. Коришћена је брза камера Photron FASTCAM SA1 која има могућност снимања са 675000 слика у једној секунди (675000 fps). Брзина кретања мехура диктира потребну учестаност сликања струјног поља, тако да је у случају овог експеримента било довољно користити брзину снимања од 5000 фотографија у секунди (5000 fps). Са оваквом учестаношћу снимања при брзини кретања мехура од нпр. $U^G = 0,7\text{ m/s}$, у времену између две узастопне слике мехур пређе пут од 0,14 mm, што је значајно мање од његовог пречника, тако да се на овај начин може имати детаљан увид у кретање и расподелу мехура по попречном пресеку.

Мерни пресек, у који су уперене брзе камере са слике 6.6, се налази на растојању $L_m = 1960\text{ mm}$ од излаза из коморе (видети слику 6.1). Ово растојање износи приближно 42 вредности хидрауличког пречника канала ($L_m/D_H = 42$). Оно је довољно да се у мерном пресеку обезбеди развијени профил брзине обе фазе. И у простору између коморе и мерног пресека снимано је кретање мехура, како би се утврдило да ли комора уједначнео ствара мехурове по свом обиму. Закључено је да комора исправно ради.

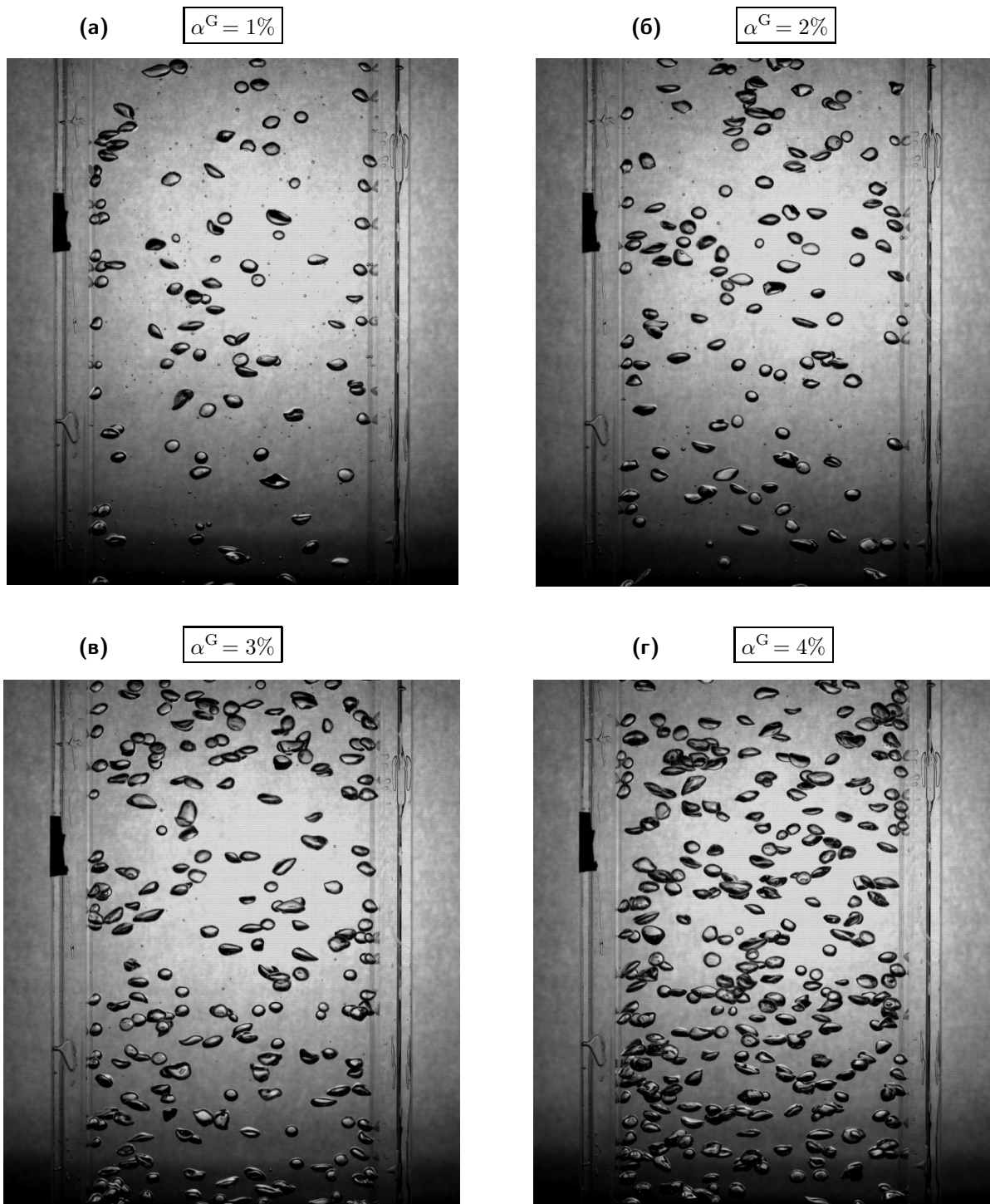
На слици 6.15 су приказане четири фотографије двофазног мехурастог струјања у мерном пресеку и његовој околини. Фотографије су снимљене брзом камером чија се оса поклапа са осом z усвојеног координатног система (видети слику 6.6). Фотографије приказују четири различита режима струјања којима је заједничка привидна брзина течне фазе $J^L = 0,5\text{ m/s}$, а разликује се удео гасовите фазе. На првој слици (а) удео гасовите фазе је најмањи и износи $\alpha^G = 1\%$. На другој слици (б) он износи $\alpha^G = 2\%$, док на преостале две слике (в) и (г) има вредности $\alpha^G = 3\%$ и $\alpha^G = 4\%$. На сликама се јасно може видети положај и облик мехура при сва четири режима струјања.

Снимање са две камере је вршено синхронизовано. У истом тренутку могуће је уочити исти мехур на оба снимка и тиме одредити његове просторне координате.

Потребно је да се на две узастопне фотографије прати исти мехур и да се на тај начин одреди пут који је он прешао. Познато је временско растојање између две узастопне фотографије (1/5000 s), тако да се може израчунати брзина кретања мехура U^G .

Удео гасовите фазе у некој тачки струјног простора се одређује тако што се та тачка посматра у току периода снимања и прати се када се у њој налази гасовита, а када течна

фаза. Удео гасовите фазе у посматраној мерној тачки се рачуна као количник времена током којег је у тој тачки била гасовита фаза и укупног времена мерења.



Слика 6.15. Фотографије струјног простора двофазног мехурастог струјања при привидној брзини течне фазе $J^L = 0,5 \text{ m/s}$, за четири вредности удела гасовите фазе: (а) $\alpha^G = 1\%$, (б) $\alpha^G = 2\%$, (в) $\alpha^G = 3\%$ и (г) $\alpha^G = 4\%$.

Снимање кретања мехурова за један режим је трајало приближно 10 s. Снимање је извршено за сва 24 режима, што даје велики скуп фотографија које заузимају приближно 350 GB меморијског простора. Поступак обраде овог материјала потребно је аутоматизовати. То за сада није извршено, тако да овде неће бити приказани профили брзине гасовите фазе U^G и њеног удела α^G . То ће бити предмет будућих истраживања.

Закључак

Приказана докторска дисертација се бави изучавањем двофазног мехурастог струјања. То је посебан режим струјања течности и гасова, при којем течност има значајно већи запремински удео. Течност, што је у случају ове докторске дисертације вода, представља континуалну фазу, а мехурови ваздуха распршену фазу.

У поглављу 1, дефинисани су основни појмови, потребни за разумевање материје изложене у наставку. Ту је дат преглед поделе вишефазних струјања, са посебним освртом на струјање течне и гасовите фазе. Приказани су различити режими струјања које могу образовати ове две фазе. Затим је дат преглед досадашњих истраживања која се односе на експериментално и нумеричко испитивање у овој области. На крају уводног поглавља дефинисани су циљеви рада.

Спровођење прорачуна вишефазног струјања предвиђа решавање основних једначина нумеричким поступком. У другом поглављу су приказане основне једначине које представљају математички израз општих физичких закона: закона о одржању масе, закона о помени количине кретања и закона о одржању енергије. У једначинама се појављују чланови који дефинишу размену масе, количине кретања и енергије између фаза.

Приликом решавања система основних једначина једнофазног струјања флуида, као препрека се појављује феномен турбуленције. Ова појава се јавља и при вишефазном струјању, где једна или обе фазе могу струјати у турбулентном режиму. Поглавље 3 посвећено је описивању турбуленције при вишефазном струјању. Ту су приказани поступци осредњавања основних једначина Рејнолдсовим и Фавреовим приступом. Затим, изложени су начини моделирања турбулентне вискозности. Представљен је и турбулентни модел $k - \varepsilon$ Launder Sharma, који је коришћен у нумеричким прорачунима. На крају поглавља 3 приказан је општи облик основних једначина, који је потребан ради лакшег баратања основним једначинама при њиховом нумеричком решавању.

Од великог су значаја они чланови унутар основних једначина који описују међусобно деловање фаза, тј. описују размену масе, количине кретања и енергије која се одвија кроз разделну површ. Тим члановима је посвећено поглавље 4. Посебна пажња усмерена је на силу отпора која делује на мехур. Према закону дејства и противдејства, силом отпора течна и гасовита фаза делују једна на другу. За њено рачунање користи се коефицијент отпора. У овој дисертацији, основна тема је испитивање утицаја смицања на коефицијент отпора. У раду Legendre and Magnaudet [11] је показано да постоји утицај смицања и да, под одређеним условима струјања, он може бити веома изражен. Интензитет смицања се мери бездимензијском величином која се назива степен смицања Sr . У раду Legendre and Magnaudet [11] је већ предложена корекција коефици-

цијента отпора која узима у обзир утицај смицања (4.10). У нумеричким прорачунима ова корекција се показала као добра, међутим, њен недостатак је у томе што се може користити само са турбулентним моделима са зидним функцијама (HRN), а не и са турбулентним моделима без зидних функција (LRN). Због тога је, у овом раду, на основу експерименталних испитивања Hosokawa and Tomiyama [7] предложена нова корекција коефицијента отпора (4.11) са циљем да се надомести недостатак постојеће корекције.

Ради провере нове корекције (4.11), она је имплементирана у софтвер OpenFOAM, помоћу којег је извршен низ нумеричких прорачуна. Поставка прорачуна, њихови резултати и анализа резултата су приказани у поглављу 5.

Поглавље 6 посвећено је експерименталном испитивању двофазног мехурастог струјања у вертикалном каналу правоугаоног попречног пресека. Приказано је постројење за извођење експеримента, начин извођења мерења и обрада експерименталних резултата који се односе на течну фазу.

7.1 Оцена испуњености задатих циљева и најважнији закључци

У одељку 1.4.1 су дефинисани задаци које је потребно извршити у оквиру ове дисертације. Следи одговор на сваки од дефинисаних задатака.

Задатак (1) је захтевао утврђивање разлога због којег постојећа корекција коефицијента отпора (4.10) не може да се користи заједно са турбулентним моделима без зидних функција (LRN). Одговор на ово питање је дат уз образложење слике 4.2. Турбулентни модели без зидних функција (LRN) омогућавају прорачун у струјном простору до самог зида. У овој области градијент брзине се значајно повећава, па тиме и степен смицања Sr , који је дефинисан једначином (4.9). Корекција (4.10):

$$C_D(Re_B, Sr) = C_{D_U} (1 + 0,55 Sr^2)$$

зависи од квадрата степена смицања. У области непосредно уз зид долази до наглог пораста корекционог члана, па и коефицијента отпора, што се види на слици 4.2 (б). Ово доводи до нестабилности, затим и прекида нумеричког прорачуна.

У оквиру задатка (2) било је потребно предложити нову корекцију коефицијента отпора која ће обухватити утицај смицања на коефицијент отпора и која ће моћи да се користи заједно са турбулентним моделима без зидних функција. На основу експерименталних резултата Hosokawa and Tomiyama [7] дата је нова корекција коефицијента отпора (4.11):

$$C_D(Re_B, Sr) = C_{D_U} (1 + 0,45 Sr).$$

Корекција је добијена методом најмањих квадрата и предвиђа линеарну зависност од степена смицања. Разлика нове (4.11) и постојеће корекције (4.10) се јасно види на слици 4.2 (б), која одговара вредности степена смицања $Sr > 1$.

Нова корекција (4.11) је имплементирана у код програмског пакета OpenFOAM, чиме је извршен задатак (3).

Задатак (4) захтева проверу утицаја нове корекције коефицијента отпора (4.11) на резултате нумеричких прорачуна. Да би се то постигло, извршене су две групе нумеричких прорачуна:

- без коришћења корекције коефицијента отпора

- са коришћењем нове корекције коефицијента отпора (4.11).

Прорачуни су извршени за случајеве чији су експериментални подаци доступни у литератури. Изабрано је укупно 9 режима струјања, који се одвијају у три различите цеви (Nosokawa and Tomiyama [7], Liu [8] и Shawkat et al. [12]). Основни подаци о изабраних 9 случајева су приказани у табели 5.1.

По завршетку прорачуна, како предвиђа задатак (5), извршено је поређење нумеричких резултата ова два приступа међусобно, и са експерименталним резултатима. Као најважнији закључак треба истаћи да нова корекција (4.11) успешно описује утицај смицања на вредност коефицијента отпора и да се, за разлику од постојеће корекције (4.10), може користити у прорачунима заједно са турбулентним моделима без зидних функција (LRN). Из осталих закључака, који су детаљније приказани у одељку 5.3, издвајају се следећи:

- нова корекција (4.11) доводи до повећања вредности коефицијента отпора. Истовремено, њеном применом, долази до смањења релативне брзине фаза, као што се види на слици 5.8;
- обе ове величине (коефицијент отпора и релативна брзина фаза) се јављају у изразу за силу отпора. Повећање једне и смањење друге је у таквом односу да вредност силе отпора остаје непромењена;
- утицај корекције (4.11) није исти по попречном пресеку цеви. У близини осе цеви, где је градијент брзине приближно једнак нули, нова корекција не утиче на резултате прорачуна. Са приближавањем зиду цеви расте вредност градијента брзине, па се повећава и утицај корекције коефицијенте отпора (4.11);
- корекција коефицијента отпора не утиче на брзину течне фазе, већ само на брзину гасовите фазе. Тиме се мења профил релативне брзине фаза;
- корекција (4.11) нема значајан утицај на профиле кинетичке енергије турбуленције течне фазе и на профиле удела гасовите фазе;
- утицај корекције (4.11) зависи од степена смицања. Било је потребно одредити граничну вредност степена смицања, која раздваја област у којој корекција (4.11) има значајан утицај на резултате, од области у којој је овај утицај мали. У одељку 5.3.1 је приказано да та гранична вредност износи $Sr = 0,2$.

Задатком (6) предвиђено је пројектовање и изградња постројења за експериментално испитивање двофазног мехурастог струјања у вертикалним цевима и каналима. У поглављу 6 је приказано опитно постројење, које је направљено за потребе оваквог испитивања. Оно је смештено у Лабораторији за уљну хидраулику и пнеуматику Машинског факултета у Београду.

Један од најважнијих делова постројења је комора за мешање течне и гасовите фазе, дефинисана задатком (7). У њој се ствара двофазни мехурасти ток. Комора је направљена по угледу на техничко решење Nosokawa and Tomiyama [7]. Приказ модела коморе и начин стварања двофазног тока су дати у поглављу 6.

У складу са задатком (8), на приказаном постројењу је извршено експериментално испитивање коришћењем савремене мерне опреме. Струјни простор у којем је извршен експеримент је унутрашњост вертикалног канала правоугаоног попречног пресека. Испитивање обухвата 24 режима струјања, који су приказани табелом 6.2.

У поглављу 6 је дат поступак извођења експеримента и начин обраде резултата који се односе на течну фазу, како је предвиђено задатком (9). Физичке величине које су разматране су брзина U^L и кинетичка енергија турбуленције k^L течне фазе. Профили ове две величине су приказане за сва 24 режима дуж две међусобно управне полуосе. Профили брзине и удела гасовите фазе нису приказани.

7.2 План будућих истраживања

План будућих истраживања обухвата више целина:

- даља анализа експерименталних резултата, како би се стекао увид у кретање и расподелу гасовите фазе. У одељку 6.4.1, где се говори о мерењу брзине и удела гасовите фазе, напоменуто је да обрада ових експерименталних резултата још увек није извршена. Потребно је довршити анализу снимака насталих у току експерименталних испитивања. Праћењем мехурова на сликама, које су настале из два међусобно управна правца, могу се одредити аксијалне брзине мехурова U^G . Брзина гасовите фазе, уз брзину воде, која је већ одређена, даће профиле релативне брзине фазе. На основу фотографија мехурова могу се још израчунати: удео гасовите фазе α^G , пречник D_B , запремина мехурова и степен деформације, како је то урађено на примеру Hosokawa and Tomiyama [7] у цеви кружног попречног пресека;
- све ове измерене величине омогућиће да се израчунају и друге важне величине, као што су коефицијент отпора C_D и степен смицања Sr . При познатој вредности запремине мехура и релативне брзине фазе, на основу једначине кретања мехура пројектоване на вертикални правац, могуће је израчунати коефицијент отпора мехура C_D . Када су познате брзина течне фазе, релативна брзина фазе и пречник мехура, могуће је, према једначини 4.9, одредити степен смицања Sr ;
- на овај начин може се одредити расподела степена смицања и коефицијента отпора мехура по осама симетрије правоугаоног канала. Када се израчунати коефицијент отпора C_D упореди са коефицијентом отпора у униформној струји флуида C_{D_U} , који је дефинисан једначином (4.4), моћи ће се направити нови дијаграм, по угледу на дијаграм 4.2. Овде се поступак за добијање дијаграма 4.2, који је спроведен у раду Hosokawa and Tomiyama [7], понавља за нову геометрију струјног простора и при другачијим условима струјања. То ће бити још једна провера нове корекције (4.11);
- уколико на новом дијаграму буде уочљиво расипање резултата, као на дијаграму 4.2, треба размотрити да ли на промену вредности коефицијента отпора утичу још неке величине поред степена смицања;
- затим је потребно извршити нумеричке прорачуне двофазног мехурастог струјања унутар канала правоугаоног попречног пресека. Улазни подаци за нумеричке прорачуне одговарају величинама које су остварене у експерименту. Прорачуне и овде треба извршити у две групе:
 - (1) са коришћењем нове корекције (4.11),
 - (2) без коришћења корекције коефицијента отпора.

Добијене резултате из ове две групе нумеричких прорачуна треба упоредити међусобно и са експерименталним подацима, слично као што је урађено у поглављу 5. Тада ће се видети колики је утицај нове корекције (4.11) на резултате. Ово ће бити још једна провера закључака који су о новој корекцији коефицијента отпора изнети у одељку 5.3. Између осталог, може се проверити да ли је гранична вредност за степен смицања $St = 0,2$ добро изабрана. Уколико јесте, њу треба предложити као критеријум који ће истраживачима указати на то да ли је, у конкретном случају, потребно узети у обзир корекцију коефицијента отпора услед смицања или не;

- у литератури која се бави испитивањем двофазног мехурасог струјања често се каже да су области у којима је неопходан даљи напредак: моделирање чланова који описују међусобно дејство фаза и испитивање утицаја мехурова на интензитет турбуленције течне фазе (ВИТ модели). У оквиру експерименталних резултата, добијени су профили кинетичке енергије турбуленције течне фазе, који су приказани у поглављу 6. Они могу послужити за проверу постојећих и тестирање нових ВИТ модела, који се користе у нумеричким прорачунима;
- експериментално постројење из поглавља 6 је направљено тако да канал у којем се врши испитивање буде променљив. Поред тога што се може мењати геометрија струјног простора, на овом постројењу се може мењати и величина мехурова. То се постиже захваљујући томе што део 3 коморе за мешање, приказане на сликама 6.4 и 6.5, има три реда отвора, који се међусобно разликују по пречнику. До сада је коришћен средњи ред отвора пречника 1 mm. Ако би се користили први или трећи ред, величина мехурова би била другачија.

Ово омогућава да се спроведу слични експерименти у цевима и каналима различитих димензија, при различитим величинама мехурова. Тиме би се испитале и друге занимљиве појаве којима се баве истраживачи у области двофазног мехурасог струјања. Једна од њих је одређивање параметара који утичу на то да ли ће се мехурови груписати у близини зида или у близини осе цеви. Према Shawkat et al. [12] ово питање још увек није потпуно разрешено, а важан параметар је управо однос пречника струјног простора и пречника мехура.

Закључује се да постоји више отворених питања из области приказане докторске дисертације, који могу бити предмет будућих истраживања.

Литература

- [1] Guan Heng Yeoh, Jiyuan Tu, „*Computational Techniques for Multi-Phase Flows*“, (2009.) ISBN: 9780080914893
- [2] Bengt Andersson, Ronnie Andersson, Love Håkansson, Mikael Mortensen, Rahman Sudiyo, Berend van Wachem „*Computational Fluid Dynamics for Engineers*“, Cambridge University Press, (2012), ISBN:9781139093590, DOI:<https://doi.org/10.1017/CBO9781139093590>
- [3] Мане Шашић, *Транспорт флуида цевима*, Машински факултет Универзитета у Београду, (1982.)
- [4] C.J. Greenshields and H.G. Weller, *Notes on Computational Fluid Dynamics: General Principles*, (2022), ISBN-13: 978-1399920780
- [5] G.F. Hewitt and D.N. Roberts, *Studies of Two-Phase Flow Patterns by Simultaneous Flash and XRay Photography*, AERE-M2159. (1969).
- [6] Mandhane, J.M., Gregory, G.A., and Aziz, K., 1974. *A flow pattern map for gas-liquid flow in horizontal pipes*, International Journal of Multiphase Flow 1, 537-553.
- [7] Hosokawa S and Tomiyama A. Multi-fluid simulation of turbulent bubbly pipe flows. Chem Eng Sci 2009; 64: 5308–5318.
- [8] Liu T. *Experimental investigation of turbulence structure in two-phase bubbly flow*. PhD Thesis, Northwestern University, Evanston, IL, USA, 1989.
- [9] T.J. Liu, S.G. Bankoff, *Structure of air-water bubbly flow in a vertical pipe—I. liquid mean velocity and turbulence measurements*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 36, Issue 4, 1993, Pages 1049-1060, ISSN 0017-9310, [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(05\)80289-3](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(05)80289-3).
- [10] T.J. Liu, S.G. Bankoff, *Structure of air-water bubbly flow in a vertical pipe—II. Void fraction, bubble velocity and bubble size distribution*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Volume 36, Issue 4, 1993, Pages 1061-1072, ISSN 0017-9310, [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(05\)80290-X](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(05)80290-X).
- [11] Legendre D and Magnaudet J. *The lift force on a spherical bubble in a viscous linear shear flow*. J Fluid Mech 1998; 368: 81–126.
- [12] Shawkat ME, Ching CY and Shoukri M. *Bubble and liquid turbulence characteristics of bubbly flow in a large diameter vertical pipe*. Int J Multiphase Flow 2008; 34: 767–785.

-
- [13] Lu J and Tryggvason G. *Effect of bubble deformability in turbulent bubbly upflow in a vertical channel*. Phys Fluids 2008; 20: 040701.
- [14] Lu J and Tryggvason G. *Dynamics of nearly spherical bubbles in a turbulent channel upflow*. J Fluid Mech 2013; 732: 166–189.
- [15] Adoua R, Legendre D and Magnaudet J. *Reversal of the lift force on an oblate bubble in a weakly viscous linear shear flow*. J Fluid Mech 2009; 628: 23–41.
- [16] Bois G and du Cluzeau A. *DNS of turbulent bubbly flows in plane channels using the front-tracking algorithm of TrioCFD*. In: Fluids engineering division summer meeting, Waikoloa, HI, USA, 2017.
- [17] Lubchenko N, Magolan B, Sugrue R, et al. *A more fundamental wall lubrication force from turbulent dispersion regularization for multiphase CFD applications*. Int J Multiphase Flow 2018; 98: 36–44.
- [18] Magolan B, Lubchenko N and Baglietto E. *A quantitative and generalized assessment of bubble-induced turbulence models for gas-liquid systems*. Chem Eng Sci X 2019; 2: 100009.
- [19] Parekh J and Rzehak R. *Euler–Euler multiphase CFD- simulation with full reynolds stress model and anisotropic bubble-induced turbulence*. Int J Multiphase Flow 2018; 99: 231–245.
- [20] Colombo M, Rzehak R, Fairweather M, et al. *Benchmarking of computational fluid dynamic models for bubbly flows*. Nucl Eng Des 2021; 375: 111075.
- [21] Lopez de Bertodano M, Lee SJ, Lahey RT, et al. *The prediction of Two-Phase turbulence and phase distribution phenomena using a Reynolds stress model*. J Fluid Eng 1990; 112: 107–113.
- [22] Rzehak R and Krepper E. *Bubble-induced turbulence: Comparison of CFD models*. Nucl Eng Des 2013; 258: 57–65.
- [23] Rzehak R and Krepper E. *Closure models for turbulent bubbly flows: a CFD study*. Nucl Eng Des 2013; 265: 701–711.
- [24] Rzehak R and Krepper E. *CFD modeling of bubble- induced turbulence*. Int J Multiphase Flow 2013; 55: 138–155.
- [25] Rzehak R and Krepper E. *Bubbly flows with fixed polydispersity: validation of a baseline closure model*. Nucl Eng Des 2015; 287: 108–118.
- [26] Rzehak R and Kriebitzsch S. *Multiphase CFD-simulation of bubbly pipe flow: a code comparison*. Int J Multiphase Flow 2015; 68: 135–152.
- [27] Rzehak R, Krepper E, Liao Y, et al. *Baseline model for the simulation of bubbly flows*. Chem Eng Technol 2015; 38: 1972–1978.
- [28] Troshko AA and Hassan YA. *A two-equation turbulence model of turbulent bubbly flows*. Int J Multiphase Flow 2001; 27: 1965–2000.

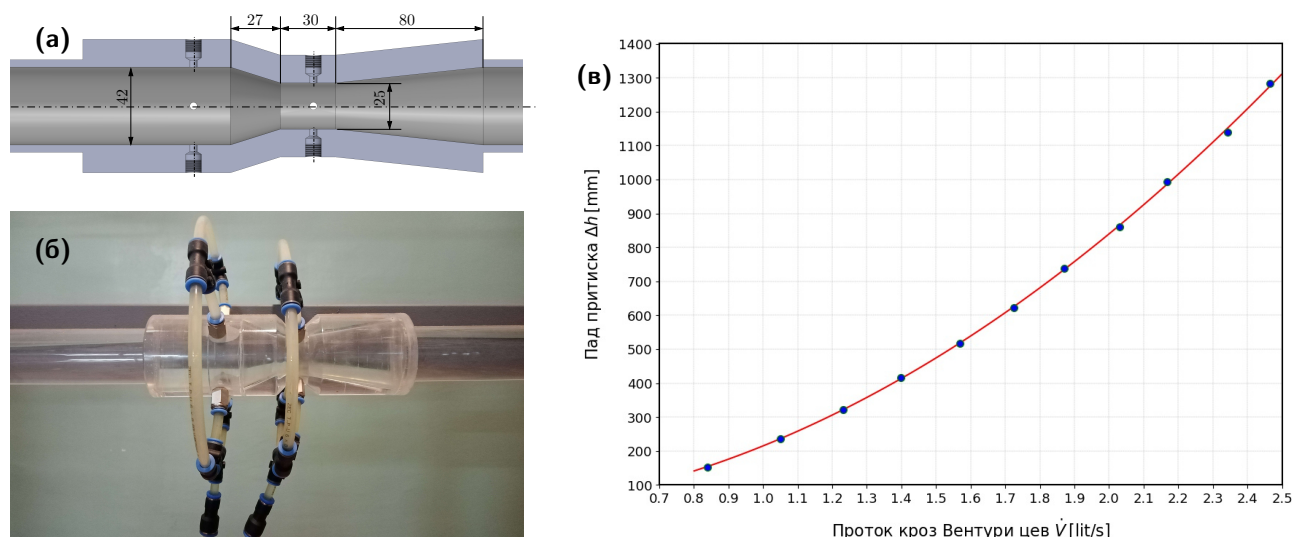
- [29] Colin C, Fabre J and Kamp A. *Turbulent bubbly flow in pipe under gravity and microgravity conditions*. J Fluid Mech 2012; 711: 469–515.
- [30] Colombo M and Fairweather M. *Multi-fluid computational fluid dynamic predictions of turbulent bubbly flows using an elliptic-blending Reynolds stress turbulence closure*. Front Energy Res 2020; 8: 44.
- [31] Colombo M and Fairweather M. *Multiphase turbulence in bubbly flows rans simulations*. Int J Multiphase Flow 2015; 77: 222–243.
- [32] Drew Donald, Passman Stephen. (1999.) *Theory of Multicomponent Fluids*. 10.1007/b97678.
- [33] Drew D.A. (1983) *Mathematical Modeling of Two-Phase Flow*. Annual Reviews on Fluid Mechanics, 15, 261-291. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.15.010183.001401>
- [34] Favre A. J. (1965.) *The equations of compressible turbulent gases*
- [35] Chen Changsi, Riley James, McMurtry Patrick, *A study of Favre averaging in turbulent flows with chemical reaction*. Combustion and Flame (ISSN 0010-2180), vol. 87, Dec. 1991, p. 257-277.
- [36] Ishii M and Zuber N. *Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows*. AIChE J 1979; 25: 843–855.
- [37] Shaver D and Podowski M. *Modeling of interfacial forces for bubbly flows in subcooled boiling conditions*. Chicago: Transactions of the American Nuclear Society, 2015.
- [38] Burns A, Frank T, Hamill I, et al. *The Favre averaged drag model for turbulent dispersion in Eulerian multi-phase flows*. In: Conf. on Multiphase Flow, ICMF2004, 30 May– 4 June 2004, Yokohama, Japan, paper no. 392, pp. 1–17.
- [39] BSA Flow Software Version 4.10 Installation & User’s Guide, Publication no.: 9040U5733, Dantec Dynamics A/S, Tenth edition, 2006.
- [40] Versteeg K., Malalasekera W. (1995). *An introduction to computational fluid dynamics - the finite volume method*. Addison-Wesley-Longman. ISBN: 978-0-582-21884-0
- [41] Lars Davidson (2022). *Fluid mechanics, turbulent flow and turbulence modeling*. Chalmers University of Technology SE-412 96 Göteborg, Sweden
- [42] Launder Brian, Spalding D.B.. (1974). *The Numerical Computation of Turbulent Flow Computer Methods*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 3. 269-289. 10.1016/0045-7825(74)90029-2.
- [43] Launder B. Sharma B. *Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc*. Letters in Heat and Mass Transfer 1974; 1(2): 131–137. DOI:[https://doi.org/10.1016/0094-4548\(74\)90150-7](https://doi.org/10.1016/0094-4548(74)90150-7).
- [44] Wilcox David. (2008). *Formulation of the $k-\omega$ Turbulence Model Revisited*. Aiaa Journal - AIAA J. 46. 2823-2838. 10.2514/1.36541.
- [45] Menter, Florian R.. “ZONAL TWO EQUATION $k-\omega$ TURBULENCE MODELS FOR AERODYNAMIC FLOWS.” (1993).

-
- [46] Menter, Florian R.. "Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications." *AIAA Journal* 32 (1994): 1598-1605.
- [47] Launder Brian, Reece G., Rodi W. (1975). Progress in the Development of a Reynolds Stress Turbulence Closure. *Journal of Fluid Mechanics*. 68. 537 - 566. 10.1017/S0022112075001814.
- [48] Raković M., Radenković D., Čočić A., Lecić M., *Euler-Euler numerical simulations of upward turbulent bubbly flows in vertical pipes with low-Reynolds-number model*. *Advances in Mechanical Engineering*, 2022, 14(4), ISSN: 1687-8140, IF: 1.566 (M23). <https://doi.org/10.1177/16878132221094909>
- [49] Дејан Илић, Ђорђе Чантрак, *Практикум за лабораторијске вежбе из мерења при струјању флуида*, Машински факултет Универзитета у Београду, (2017.)
- [50] <https://www.foxvalve.com/solids-conveying-eductor-systems/pneumatic-conveying-solids-venturi-eductors/wood-chips-sawdust>
- [51] <https://www.kirinoikeuchi.co.jp/eng/products/spray/2ryutai/921>
- [52] Wang Jianhua, Wan De-Cheng. (2020.) *Application Progress of Computational Fluid Dynamic Techniques for Complex Viscous Flows in Ship and Ocean Engineering*. *Journal of Marine Science and Application*. 19. 10.1007/s11804-020-00124-8.

Прилози

Прилог А - Калибрационе криве коришћених мерила протока

Као протокомер воде коришћена је нестандардна Вентури цев која је приказана на слици 7.1. Изглед Вентури цеви у полупресеку са њеним најважнијим димензијама, приказан је на слици 7.1 (а). На слици 7.1 (б) види се Вентури цев уграђена у постројење. На слици 7.1 (в) дата је калибрациона крива Вентури цеви.



Слика 7.1. Вентури цев као мерило протока течне фазе: (а) скица полупресека са важним димензијама, (б) Вентури цев израђена од плексигласа и уграђена у мерно постројење, (в) зависност пада притиска од протока, тј. калибрациона крива Вентури цеви.

Плаве тачке приказују експериментално добијене податке. Пад притиска на Вентури цеви одређен је помоћу обрнуте „U” цеви са водом. Проток је мерен запреминском методом. Црвена линија на дијаграму представља калибрациону криву која је добијена на основу експерименталних података, тј. применом методе најмањих квадрата.

Једначине које повезују пад притиска на Вентури цеви Δh [mm] и проток воде \dot{V} [l/s] су:

$$\Delta h = 15,04099 - 12,45955\dot{V} + 212,4019\dot{V}^2 \quad \text{и}$$

$$\dot{V} = 15,46752 - \frac{15,46752 - 0,1028926}{1 + \left(\frac{\Delta h}{21557,19}\right)^{0,6035514}}$$

За мерење протока ваздуха коришћене су две бленде и једна Вентури цев. Сва три мерила протока су нестандардна. Калибрисани су у Лабораторији за механику флуида

Машинског факултета у Београду. За калибрацију коришћен је примарни протокомер гаса са клипом. Пад притиска ваздуха је у сва три случаја мерен помоћу „U” цеви са водом. Три нестандардна мерила протока су пројектована тако да се њихови мерни опсежи надовезују један на други.

Две бленде, приказане на слици 7.2 (а), имају све исте димензије осим пречника светлог отвора бленде. На бленди 1 он износи $d = 0,5 \text{ mm}$ (слика 7.2 (в)), док на бленди 2 износи $d = 1,5 \text{ mm}$, слика 7.2 (е).

Вентури цев за ваздух је приказана на слици 7.2 (б), а њен полупресек на слици 7.2 (д). Пречник најужег дела Вентури цеви је $d = 1 \text{ mm}$.

Бленда 1 је предвиђена за мерења малих запреминских протока до $\dot{V} \approx 0,6 \text{ [l/s]}$. Њена калибрациона крива је дата на дијаграму 7.2 (г), а једначине које описују зависност пада притиска и запреминског протока су:

$$\Delta h = 2,312758 + 161,8361\dot{V} + 822,1835\dot{V}^2 \quad \text{и}$$

$$\dot{V} = 2,72803 + \frac{-0,01568763 - 2,72803}{1 + \left(\frac{\Delta h}{2351872}\right)^{0,6961204}}$$

Вентури цев за ваздух је предвиђена за мерења запреминских протока до $\dot{V} \approx 3 \text{ [lit/s]}$. Њена калибрациона крива је дата на дијаграму 7.2 (ђ), а једначине које описују зависност пада притиска и запреминског протока ваздуха су:

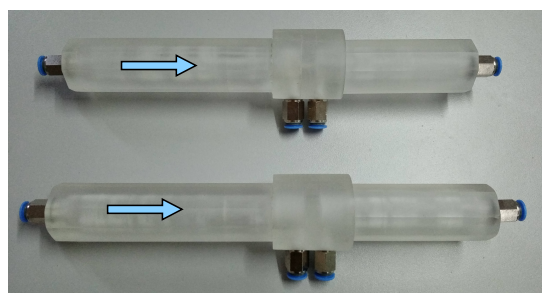
$$\Delta h = 3,550906 + 7,243828\dot{V} + 73,23008\dot{V}^2 \quad \text{и}$$

$$\dot{V} = 35,98229 - \frac{0,04466635 + 35,98229}{1 + \left(\frac{\Delta h}{5603947}\right)^{0,5410006}}$$

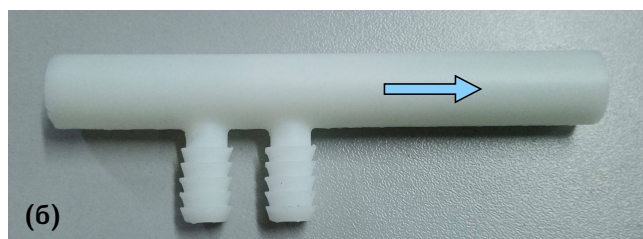
Бленда 2 је предвиђена за мерења запреминских протока ваздуха до $\dot{V} \approx 6,5 \text{ [lit/s]}$. Њена калибрациона крива је приказана на дијаграму 7.2 (ж), а једначине које описују зависност пада притиска ваздуха и запреминског протока су:

$$\Delta h = 0,9727064 + 2,875174\dot{V} + 9,593502\dot{V}^2 \quad \text{и}$$

$$\dot{V} = 154,9617 - \frac{0,1534467 + 154,9617}{1 + \left(\frac{\Delta h}{171694,1}\right)^{0,5175481}}$$



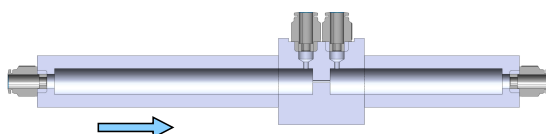
(а)



(б)

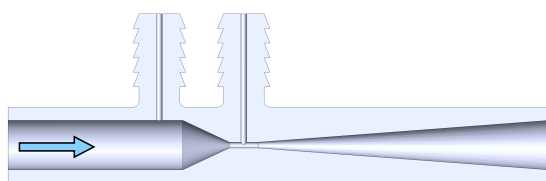
(в)

Бленда за ваздух 1

пречник цеви $D = 15 \text{ mm}$ пречник отвора бленде $d = 0,5 \text{ mm}$

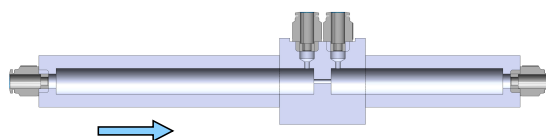
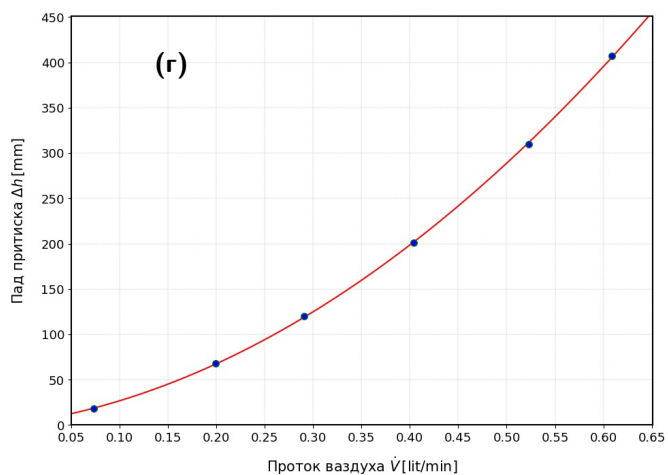
(д)

Вентури цев за ваздух

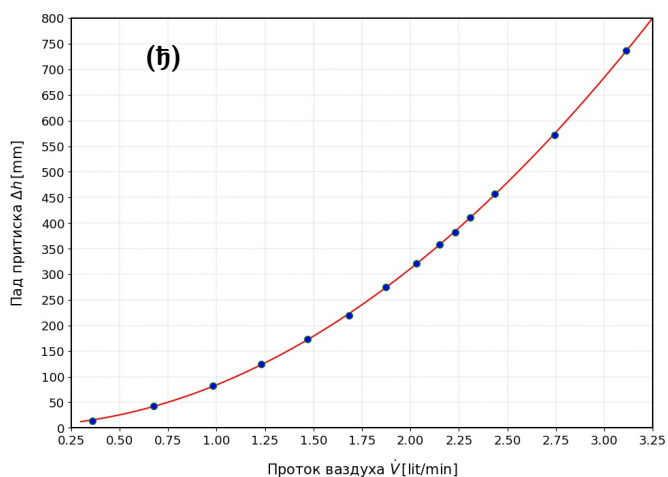
пречник цеви $D = 8,5 \text{ mm}$ пречник отвора $d = 1 \text{ mm}$

(е)

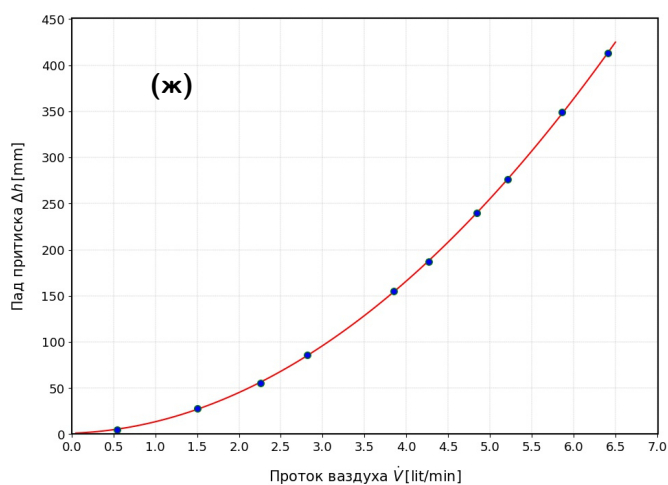
Бленда за ваздух 2

пречник цеви $D = 15 \text{ mm}$ пречник отвора бленде $d = 1,5 \text{ mm}$ 

(г)



(ђ)



(ж)

Слика 7.2. Протокомери за ваздух: фотографије коришћених протокомера (а) и (б), полупресек мерне бленде 1 (в), калибрациона крива мерне бленде 1 (г), полупресек Вентури цев за ваздух (д), калибрациона крива Вентури цеви (ђ), полупресек мерне бленде 2 (е), калибрациона крива мерне бленде (ж).

Прилог Б - Подаци о мерењу запреминског протока фаза

Детаљни подаци о мерењу запреминских протока течне и гасовите фазе приликом извођења експеримента су дати у наредним табелама. Како је експеримент извршен из четири дела, то су подаци дати кроз четири табеле:

- Табела 7.1 - мерење уздужне компоненте v брзине дуж x осе,
- Табела 7.2 - мерење попречне компоненте w брзине дуж x осе,
- Табела 7.3 - мерење попречне компоненте u брзине дуж z осе,
- Табела 7.4 - мерење уздужне компоненте v брзине дуж z осе.

На основу мерења пада притиска на протокомерима (Δh), одређују се вредности запреминског протока воде и ваздуха. Сва мерила протока су претходно калибрисана. Њихове калибрационе криве су дате у додатку 7.2. Из једначине (6.1) се одређује привидна брзина воде J^L , а на сличан начин и привидна брзина ваздуха J^G . На крају, према једначини (6.2), као однос запреминских протока гасовите и течне фазе израчунава се запремински удео гасовите фазе и изражава се у процентима.

Приказани су подаци за 24 режима који су добијени комбиновањем 4 вредности привидне брзине течне фазе ($J^L = 0,3 \text{ m/s}$, $J^L = 0,4 \text{ m/s}$, $J^L = 0,5 \text{ m/s}$, $J^L = 0,6 \text{ m/s}$) и 6 вредности удела гасовите фазе ($\alpha^G = 0 \%$, $\alpha^G = 0,5 \%$, $\alpha^G = 1 \%$, $\alpha^G = 2 \%$, $\alpha^G = 3 \%$, и $\alpha^G = 4 \%$).

Табела 7.1. Протоци фаза и остале израчунате величине приликом мрења уздужне компоненте брзине U_y дуж x осе.

		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
$J^L \approx 0,3\text{m/s}$	ознака	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^L[\text{l/s}]$	$J^L [\text{m/s}]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$
	B03A0-X	122	0.7508	0.3065	0	0	0	0	/	/	/	/
	B03A05-X	123	0.7538	0.3077	78	0.2186	0.0015	0.4834	/	/	/	/
	B03A1-X	121	0.7477	0.3052	234	0.4428	0.0030	0.9869	/	/	/	/
	B03A2-X	122	0.7508	0.3065	/	/	/	/	67	0.8765	0.4558	1.9458
	B03A3-X	120	0.7446	0.3039	/	/	/	/	141	1.3158	0.9592	2.9453
	B03A4-X	120	0.7446	0.3039	/	/	/	/	244	1.7622	1.6599	3.9443
			Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух		
$J^L \approx 0,4\text{m/s}$	ознака	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^L[\text{l/s}]$	$J^L [\text{m/s}]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$
	B04A0-X	207	0.9804	0.4002	0	0	0	0	/	/	/	/
	B04A05-X	205	0.9756	0.3982	121	0.2930	0.0020	0.5005	/	/	/	/
	B04A1-X	206	0.9780	0.3992	382	0.5881	0.0040	1.0023	/	/	/	/
	B04A2-X	205	0.9756	0.3982	/	/	/	/	113	1.1674	0.7687	1.9945
	B04A3-X	204	0.9731	0.3972	/	/	/	/	244	1.7622	1.6599	3.0181
	B04A4-X	204	0.9731	0.3972	/	/	/	/	426	2.3556	2.8980	4.0344
		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
$J^L \approx 0,5\text{m/s}$	ознака	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^L[\text{l/s}]$	$J^L [\text{m/s}]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$
	B05A0-X	314	1.2132	0.4952	0	0	0	0	/	/	/	/
	B05A05-X	319	1.2230	0.4992	173	0.3680	0.0025	0.5015	/	/	/	/
	B05A1-X	319	1.2230	0.4992	565	0.7261	0.0049	0.9895	/	/	/	/
	B05A2-X	318	1.2211	0.4984	Бленда за ваздух 2				172	1.4638	1.1701	1.9980
	B05A3-X	318	1.2211	0.4984	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	376	2.2086	2.5578	3.0146
	B05A4-X	318	1.2211	0.4984	92	2.9301	0.6259	3.9994	/	/	/	/
		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
$J^L \approx 0,6\text{m/s}$	ознака	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^L[\text{l/s}]$	$J^L [\text{m/s}]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$
	B06A0-X	461	1.4769	0.6028	0	0	0	0	/	/	/	/
	B06A05-X	457	1.4703	0.6001	234	0.4428	0.0030	0.5019	/	/	/	/
	B06A1-X	458	1.4719	0.6008	Бленда за ваздух 2				67	0.8765	0.4558	0.9925
	B06A2-X	456	1.4686	0.5994	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G [\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	244	1.7622	1.6599	1.9998
	B06A3-X	454	1.4653	0.5981	76	2.6450	0.5170	3.0084	/	/	/	/
	B06A4-X	452	1.4620	0.5968	130.5	3.5271	0.8878	4.0208	/	/	/	/

Табела 7.2. Протоци фаза и остале израчунате величине приликом мрења попречне компоненте брзине U_z дуж x осе.

		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
$J^L \approx 0,3\text{m/s}$	ознака	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^L[\text{l/s}]$	$J^L[\text{m/s}]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$
	B03A0-XH	123	0.7538	0.3077	0	0	0	0	/	/	/	/
	B03A05-XH	122	0.7508	0.3065	78	0.2186	0.0015	0.4853	/	/	/	/
	B03A1-XH	122	0.7508	0.3065	234	0.4428	0.0030	0.9829	/	/	/	/
	B03A2-XH	121	0.7477	0.3052	/	/	/	/	67	0.8765	0.4558	1.9538
	B03A3-XH	121	0.7477	0.3052	/	/	/	/	141	1.3158	0.9592	2.9331
	B03A4-XH	121	0.7477	0.3052	/	/	/	/	244	1.7622	1.6599	3.9281

		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
$J^L \approx 0,4\text{m/s}$	ознака	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^L[\text{l/s}]$	$J^L[\text{m/s}]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$
	B04A0-XH	206	0.9780	0.3992	0	0	0	0	/	/	/	/
	B04A05-XH	205	0.9756	0.3982	121	0.2930	0.0020	0.5005	/	/	/	/
	B04A1-XH	205	0.9756	0.3982	382	0.5881	0.0040	1.0048	/	/	/	/
	B04A2-XH	205	0.9756	0.3982	/	/	/	/	113	1.1674	0.7687	1.9945
	B04A3-XH	204	0.9731	0.3972	/	/	/	/	244	1.7622	1.6599	3.0181
	B04A4-XH	205	0.9756	0.3982	/	/	/	/	426	2.3556	2.8980	4.0244

		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
$J^L \approx 0,5\text{m/s}$	ознака	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^L[\text{l/s}]$	$J^L[\text{m/s}]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$
	B05A0-XH	320	1.2250	0.5000	0	0	0	0	/	/	/	/
	B05A05-XH	320	1.2250	0.5000	173	0.3680	0.0025	0.5007	/	/	/	/
	B05A1-XH	319	1.2230	0.4992	565	0.7261	0.0049	0.9895	/	/	/	/
	B05A2-XH	318	1.2211	0.4984	Бленда за ваздух 2				172	1.4638	1.1701	1.9980
	B05A3-XH	317	1.2191	0.4976	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	376	2.2086	2.5578	3.0195
	B05A4-XH	317	1.2191	0.4976	92	2.9301	0.6259	4.0059	/	/	/	/

		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
$J^L \approx 0,6\text{m/s}$	ознака	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^L[\text{l/s}]$	$J^L[\text{m/s}]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$
	B06A0-XH	457	1.4703	0.6001	0	0	0	0	/	/	/	/
	B06A05-XH	457	1.4703	0.6001	234	0.4428	0.0030	0.5019	/	/	/	/
	B06A1-XH	457	1.4703	0.6001	Бленда за ваздух 2				67	0.8765	0.4558	0.9936
	B06A2-XH	457	1.4703	0.6001	$\Delta h[\text{mm}]$	$\dot{V}^G[\text{l/min}]$	$J^G[\text{m/s}]$	$\alpha^G[\%]$	244	1.7622	1.6599	1.9976
	B06A3-XH	453	1.4637	0.5974	76	2.6450	0.5170	3.0118	/	/	/	/
	B06A4-XH	452	1.4620	0.5968	130.5	3.5271	0.8878	4.0208	/	/	/	/

Табела 7.3. Протоци фаза и остале израчунате величине приликом мрења попречне компоненте брзине U_x дуж z осе.

		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух				
		ознака	Δh [mm]	\dot{V}^L [l/s]	J^L [m/s]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]
$J^L \approx 0,3\text{m/s}$	B03A0-ZH	121	0.7477	0.3052	0	0	0	0	/	/	/	/	
	B03A05-ZH	121	0.7477	0.3052	78	0.2186	0.0015	0.4873	/	/	/	/	
	B03A1-ZH	121	0.7477	0.3052	234	0.4428	0.0030	0.9869	/	/	/	/	
	B03A2-ZH	121	0.7477	0.3052	/	/	/	/	67	0.8765	0.4558	1.9538	
	B03A3-ZH	121	0.7477	0.3052	/	/	/	/	141	1.3158	0.9592	2.9331	
	B03A4-ZH	120	0.7446	0.3039	/	/	/	/	244	1.7622	1.6599	3.9443	
		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух				
		ознака	Δh [mm]	\dot{V}^L [l/s]	J^L [m/s]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]
$J^L \approx 0,4\text{m/s}$	B04A0-ZH	205	0.9756	0.3982	0	0	0	0	/	/	/	/	
	B04A05-ZH	206	0.9780	0.3992	125	0.2992	0.0020	0.5099	/	/	/	/	
	B04A1-ZH	206	0.9780	0.3992	380	0.5864	0.0040	0.9994	/	/	/	/	
	B04A2-ZH	208	0.9828	0.4012	/	/	/	/	113	1.1674	0.7687	1.9798	
	B04A3-ZH	204	0.9731	0.3972	/	/	/	/	244	1.7622	1.6599	3.0181	
	B04A4-ZH	204	0.9731	0.3972	/	/	/	/	426	2.3556	2.8980	4.0344	
		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух				
		ознака	Δh [mm]	\dot{V}^L [l/s]	J^L [m/s]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]
$J^L \approx 0,5\text{m/s}$	B05A0-ZH	313	1.2112	0.4944	0	0	0	0	/	/	/	/	
	B05A05-ZH	315	1.2151	0.4960	173	0.3680	0.0025	0.5047	/	/	/	/	
	B05A1-ZH	315	1.2151	0.4960	564	0.7255	0.0049	0.9950	/	/	/	/	
	B05A2-ZH	313	1.2112	0.4944	Бленда за ваздух 2				172	1.4638	1.1701	2.0143	
	B05A3-ZH	313	1.2112	0.4944	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	376	2.2086	2.5578	3.0392	
	B05A4-ZH	314	1.2132	0.4952	92	2.9301	0.6259	4.0254	/	/	/	/	
		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух				
		ознака	Δh [mm]	\dot{V}^L [l/s]	J^L [m/s]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]
$J^L \approx 0,6\text{m/s}$	B06A0-ZH	458	1.4719	0.6008	0	0	0	0	/	/	/	/	
	B06A05-ZH	459	1.4736	0.6015	251	0.4617	0.0031	0.5222	/	/	/	/	
	B06A1-ZH	458	1.4719	0.6008	Бленда за ваздух 2				67	0.8765	0.4558	0.9925	
	B06A2-ZH	458	1.4719	0.6008	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	244	1.7622	1.6599	1.9953	
	B06A3-ZH	458	1.4719	0.6008	76	2.6450	0.5170	2.9950	/	/	/	/	
	B06A4-ZH	458	1.4719	0.6008	130.5	3.5271	0.8878	3.9938	/	/	/	/	

Табела 7.4. Протоци фаза и остале израчунате величине приликом мрења уздужне компоненте брзине U_y дуж z осе.

		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
ознака		Δh [mm]	\dot{V}^L [l/s]	J^L [m/s]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]
$J^L \approx 0,3\text{m/s}$	B03A0-Z	121	0.7477	0.3052	0	0	0	0	/	/	/	/
	B03A05-Z	121	0.7477	0.3052	78.5	0.2196	0.0015	0.4895	/	/	/	/
	B03A1-Z	120	0.7446	0.3039	234	0.4428	0.0030	0.9910	/	/	/	/
	B03A2-Z	120	0.7446	0.3039	/	/	/	/	67	0.8765	0.4558	1.9619
	B03A3-Z	120	0.7446	0.3039	/	/	/	/	141	1.3158	0.9592	2.9453
	B03A4-Z	120	0.7446	0.3039	/	/	/	/	244	1.7622	1.6599	3.9443
		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
ознака		Δh [mm]	\dot{V}^L [l/s]	J^L [m/s]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]
$J^L \approx 0,4\text{m/s}$	B04A0-Z	207	0.9804	0.4002	0	0	0	0	/	/	/	/
	B04A05-Z	207	0.9804	0.4002	125	0.2992	0.0020	0.5087	/	/	/	/
	B04A1-Z	207	0.9804	0.4002	388	0.5933	0.0040	1.0085	/	/	/	/
	B04A2-Z	207	0.9804	0.4002	/	/	/	/	113	1.1674	0.7687	1.9847
	B04A3-Z	204	0.9731	0.3972	/	/	/	/	244	1.7622	1.6599	3.0181
	B04A4-Z	204	0.9731	0.3972	/	/	/	/	426	2.3556	2.8980	4.0344
		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
ознака		Δh [mm]	\dot{V}^L [l/s]	J^L [m/s]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]
$J^L \approx 0,5\text{m/s}$	B04A0-Z	316	1.2171	0.4968	0	0	0	0	/	/	/	/
	B04A05-Z	315	1.2151	0.4960	175	0.3706	0.0025	0.5084	/	/	/	/
	B04A1-Z	314	1.2132	0.4952	565	0.7261	0.0049	0.9976	/	/	/	/
	B04A2-Z	312	1.2092	0.4936	Бленда за ваздух 2				172	1.4638	1.1701	2.0176
	B04A3-Z	312	1.2092	0.4936	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	376	2.2086	2.5578	3.0442
	B04A4-Z	308	1.2012	0.4903	92	2.9301	0.6259	4.0654	/	/	/	/
		Вентури цев за воду			Бленда за ваздух 1				Вентури цев за ваздух			
ознака		Δh [mm]	\dot{V}^L [l/s]	J^L [m/s]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]
$J^L \approx 0,6\text{m/s}$	B03A0-Z	458	1.4719	0.6008	0	0	0	0	/	/	/	/
	B03A05-Z	459	1.4736	0.6015	235	0.4439	0.0030	0.5021	/	/	/	/
	B03A1-Z	459	1.4736	0.6015	Бленда за ваздух 2				67	0.8765	0.4558	0.9914
	B03A2-Z	459	1.4736	0.6015	Δh [mm]	\dot{V}^G [l/min]	J^G [m/s]	α^G [%]	244	1.7622	1.6599	1.9931
	B03A3-Z	460	1.4752	0.6021	76	2.6450	0.5170	2.9883	/	/	/	/
	B03A4-Z	454	1.4653	0.5981	130.5	3.5271	0.8878	4.0117	/	/	/	/

Биографски подаци

Милан (Млађен) Раковић рођен је 08.04.1992. у Београду. Основну школу *Растко Немањић-Свети Сава* у Новој Пазови завршио је 2007. године као носилац Вукове дипломе. Средњу школу *Земунска гимназија* похађао је у периоду од 2007. до 2011. године и све четири године завршио са одличним успехом.

По завршетку средње школе уписује се на Машински факултет Универзитета у Београду 2011. године. Основне академске студије завршава 2014. године са просечном оценом 9,93 (9 и 93/100) и наградом Студент генерације. Завршни (B.Sc.) рад под насловом *Хидрауличне турбине у малим, мини и микро хидроенергетским постројењима* је урађен из предмета *Основе турбомашина*.

Мастер академске студије на модулу *Хидроенергетика* уписује 2014. године, а завршава их 2016. године са просечном оценом 9,90 (9 и 90/100) и наградом Студент генерације. Мастер (M.Sc.) рад под насловом *Нумерички прорачун турбулентног струјања воде кроз цев са уграђеном мерном блендом* је урађен под менторством проф. др Александра Тоћића.

Након дипломирања, 2016. године, уписује докторске академске студије на Машинском факултету у Београду при Катедри за механику флуида. Као студент докторских студија изводио је аудиторне и лабораторијске вежбе из предмета *Механика флуида Б* на трећој години основних академских студија у току школске 2016/2017 године. Као добитник стипендије Министарства просвете, науке и технолошког развоја, ангажован је на пројекту под називом *Примена савремених мерних и прорачунских техника за изучавање струјних параметара вентилационих система на моделу енергетски изузетно ефикасног (пасивног) објекта*, чији је евиденциони број ТР35046.

Од 21. децембра 2017. запослен је на Машинском факултету у звању асистента при Катедри за механику флуида. У наредном периоду настављено је ангажовање у извођењу аудиторних и лабораторијских вежби на предмету *Механика флуида Б* и *Нумеричка механика флуида*. Од 2019. године постаје члан тима Лабораторије за механику флуида Машинског факултета у Београду и почиње активно да учествује у њеном раду. Кандидат је до сада аутор или коаутор 8 радова.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани Милан Раковић

Број индекса Д05/2016

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Утицај смицања на коефицијент отпора мехура при двофазном мехурастом
струјању

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 19.04.2023.

Милан Раковић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _____ Милан Раковић _____

Број индекса _____ Д05/2016 _____

Студијски програм _____ докторске академске студије _____

Наслов рада _____ Утицај смицања на коефицијент отпора мехура при двофазном
мехурастом струјању _____

Ментор _____ др Александар Ћоћић, ванредни професор _____

Потписани _____ Милан Раковић, маг. инж. маш. _____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, _____ 19.04.2023. _____

Милан Раковић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Утицај смицања на коефицијент отпора мехура при двофазном мехурастом
струјању

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 19.04.2023.

Милан Поповић

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.