



Univerzitet u Nišu
Elektronski fakultet



Slobodan A. Vlajkov

**PROJEKTOVANJE VIŠENIVOSKIH
KONSTELACIJA SIGNALA ZA
KOMUNIKACIONE SISTEME SA
OGRANIČENOM SNAGOM**

Doktorska disertacija

Niš, 2021.



University of Niš
Faculty of Electronic Engineering



Slobodan A. Vlajkov

**DESIGN OF MULTILEVEL SIGNAL
CONSTELLATIONS FOR POWER-LIMITED
COMMUNICATION SYSTEMS**

Doctoral dissertation

Niš, 2021.

Podaci o mentoru i doktorskoj disertaciji

Mentor:

Dr Aleksandra Jovanović, vanredni profesor, Univerzitet u Nišu,
Elektronski fakultet

Naslov:

Projektovanje višenivoskih konstelacija signala za komunikacione sisteme sa ograničenom snagom

Rezime:

Savremeni digitalni komunikacioni sistemi prenose ogromnu količinu podataka, tako da su istraživanja usmerena ka ostvarivanju efikasnijih prenosa neophodna, što temu doktorske disertacije čini aktuelnom i značajnom. Predmet istraživanja u doktorskoj disertaciji je kako poboljšati efikasnost po snazi višenivoskih PAM (Pulse Amplitude Modulation) i APSK (Amplitude Phase Shift Keying) konstelacija u komunikacionim sistemima sa ograničenom snagom, kao što su optičke komunikacije, satelitske komunikacije, bežične komunikacije, komunikacije sa više predajnih i prijemnih antena.

Jednu konstelaciju određuje raspored tačaka u konstelacionom dijagramu i verovatnoća emitovanja konstelacionih tačaka, zbog čega se pod projektovanjem ili oblikovanjem konstelacije podrazumeva određivanje položaja i/ili verovatnoće konstelacionih tačaka. Tako razlikujemo: geometrijsko, probabilističko i hibridno geometrijski-probabilističko oblikovanje konstelacija.

Oblikovanje konstelacije se uglavnom obavlja optimizovanjem neke metrike koja karakteriše kanal ili optimizovanjem minimalnog euklidskog rastojanja. Umesto toga, u ovoj disertaciji se oblikovanje konstelacija vrši korišćenjem tehnika projektovanja iz teorije kvantizacije. Naime, postojanje sličnosti u prostornoj predstavi konstelacija i kvantizacije motiv je da se primene tehnike za projektovanje kvantizera u projektovanju konstelacija.

Posebna pažnja je posvećena smanjivanju kompleksnosti

konstelacije, odnosno projektovanju deo po deo uniformnih konstelacija kako u pogledu rasporeda, tako i u pogledu verovatnoća konstelacionih tačaka. Predložene su metode projektovanja konstelacije inspirisane deo po deo linearnom kompanding kvantizacijom. Takođe, predložen je potpuno nov koncept korišćenja kompanding tehnike u projektovanju konstelacije.

Efikasnost po snazi je sposobnost modulacione tehnike da sačuva vernost, odnosno kvalitet digitalnih podataka pri niskim vrednostima odnosa signal-šum i izražava se kao odnos signal-šum po bitu potreban za postizanje zadate verovatnoće greške. U disertaciji se bavimo projektovanjem efikasnih po snazi višenivoskih konstelacija za kanale u kojima je dominantan aditivni beo Gausov šum, te je metrika za ocenu performansi konstelacije funkcionalna zavisnost verovatnoće greške po simbolu od odnosa signal-šum po bitu za nekodovanu konstelaciju u kanalu sa aditivnim belim Gausovim šumom. Tačnost analiza i ostvarenih rezultata verifikovana je vršenjem simulacija.

Naučna oblast:

Elektrotehničko i računarsko inženjerstvo

**Naučna
disciplina:**

Telekomunikacije

Ključne reči:

Digitalne modulacije, PAM konstelacija, APSK konstelacija, Efikasnost po snazi, Oblikovanje konstelacije, Skalarna kompanding kvantizacija, Kružno-simetrična kompanding kvantizacija, Detekcija signala, Kanal sa aditivnim belim Gausovim šumom, Verovatnoća greške po simbolu

UDK:

621.391+(621.391:519.226)/621.376

**CERIF
klasifikacija:**

T 121

Tip licence
kreativne
zajednice:

CC BY-NC-ND

Mentor and Doctoral dissertation informations

Doctoral Supervisor:	Dr. Aleksandra Jovanović, Associate Professor, University of Niš, Faculty of Electronic Engineering
Title of Doctoral Dissertation:	Design of multilevel signal constellations for power-limited communication systems
Abstract:	<p>In modern digital communication systems, a huge amount of data is transmitted, so that research aimed at achieving more efficient transmission is necessary, which makes the topic of this doctoral dissertation relevant and important. The subject of research in this doctoral dissertation is how to improve the power efficiency of multilevel PAM (Pulse Amplitude Modulation) and APSK (Amplitude Phase Shift Keying) constellations in power-limited communication systems, such as optical communications, satellite communications, wireless communications, multiple-input multiple-output systems.</p> <p>A constellation is defined by the geometric-space partition and probabilities of constellation points. Therefore, under constellation designing or constellation shaping the methods that optimize modulation format by adjusting the geometric-space location and/or probabilities of constellation points are assumed. All these methods are categorized within three constellation shaping schemes: geometric constellation shaping, probabilistic constellation shaping and hybrid probabilistic-geometric constellation shaping.</p> <p>Constellation shaping has been usually performed by optimizing some metric that characterize a channel or by optimizing the minimum Euclidean distance. Instead of this, in this dissertation constellation shaping is performed by applying designing techniques from quantization theory. Namely, the existence of similarity in the geometric-space representation of</p>

constellation and quantization motivates us to apply the quantization designing methods in constellation shaping.

Special attention is paid to reducing the constellation complexity, that is to designing the piecewise-uniform constellations in terms of the geometric-space partition and probability distribution of constellation points. Methods for designing constellation inspired by piecewise-linear companding quantization have been proposed. Also, a novel designing concept that employs the companding technique in constellation shaping on a totally different manner has been proposed.

Power efficiency is the ability of a modulation technique to preserve the fidelity/quality of digital data at low values of the signal-to-noise ratio, and is expressed as the signal-to-noise ratio per bit required to achieve a given error probability. In the dissertation we deal with designing power-efficient multilevel constellations for channels dominated by the additive white Gaussian noise, and the metric for constellation performance evaluation is a functional dependence of symbol error probability on signal-to-noise ratio per bit for uncoded constellation in channel with additive white Gaussian noise. The accuracy of analyzes and achieved results has been verified by performing simulations.

Scientific Field:

Electrical and Computer Engineering

Scientific

Telecommunications

Discipline:

Key Words:

Digital modulation, PAM constellation, APSK constellation, Power efficiency, Constellation shaping, Scalar companding quantization, Circularly-symmetric companding quantization, Signal detection, AWGN channel, Symbol error probability

UDC:

621.391+(621.391:519.226)/621.376

CERIF
Classification:

T 121

Creative
Commons
Licence Type:

CC BY-NC-ND

Sadržaj

Spisak slika.....	i
1 Uvod.....	12
2 Osnove PAM modulacije.....	19
2.1 PAM konstelacija sa ekvidistantnim i nejednako-verovatnim konstelacionim tačkama	20
2.2 MAP i ML pravilo odlučivanja u kanalu sa belim Gausovim šumom	22
2.3 Verovatnoća greške po simbolu.....	24
2.4 Analiza performansi PAM konstelacija sa ekvidistantnim i nejednako-verovatnim konstelacionim tačkama	25
3 Oblikovanje PAM konstelacije zasnovano na analogiji sa kvantizacijom	32
3.1 Analogija između PAM konstelacije i skalarne kvantizacije	33
3.2 Osnove oblikovanja PAM konstelacije pomoću kompadding tehnike	37
4 Projektovanje PAM konstelacija primenom kompadding tehnike	43
4.1 Projektovanje PAM konstelacije na osnovu analogije sa kvazilogaritamskom kompadding kvantizacijom	43
4.2 Projektovanje PAM konstelacije na osnovu analogije sa optimalnom kompadding kvantizacijom	52
4.3 Optimizacija deo po deo uniformne PAM konstelacije sa dva podskupa	63
5 Projektovanje APSK konstelacije inspirisano kružno-simetričnom kompadding kvantizacijom.....	87
5.1 Funkcije za geometrijsko i probabilističko oblikovanje APSK konstelacije.....	89
5.2 Performanse APSK konstelacije u kanalu sa belim Gausovim šumom.....	94
5.3 Analiza numeričkih rezultata	98
6 Zaključak.....	105
7 Literatura.....	108
8 Biografija Autora	113

Spisak slika

Slika 2.1. Blok šema modulator-kanal-demodulator	20
Slika 2.1.1. Najjednostavnija struktura PAM konstelacije – uniformna konstelacija	21
Slika 2.1.2. PAM konstelacija kompleksnije strukture– neuniformna konstelacija	21
Slika 2.2.1. Granice odlučivanja za: 1) MAP detektor $m_i = a$ za $P_{i-1} < P_i$, $m_i = b$ za $P_{i-1} = P_i$, $m_i = c$ za $P_{i-1} > P_i$; 2) ML detektor $m_i = b$	23
Slika 2.4.1. Raspodela verovatnoća konstelacionih tačaka za 8-PAM konstelaciju:.....	26
a) – uniformna raspodela - $P_i = [0.125, 0.125, 0.125, 0.125]$,	
b) – opadajuća raspodela - $P_i = [0.21, 0.15, 0.1, 0.04]$,	
c) – rastuća raspodela - $P_i = [0.04, 0.1, 0.15, 0.21]$,	
d) – „cik-cak“ raspodela - $P_i = [0.18, 0.07, 0.18, 0.07]$	
Slika 2.4.2. Relativna razlika u verovatnoći greške po simbolu ML i MAP detektora	28
Slika 2.4.3. Verovatnoće konstelacionih tačaka 8-PAM konstelacije dobijene aproksimacijom Gausove funkcije gustine verovatnoće	30
Slika 2.4.4. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum kod 8-PAM konstelacija sa ekvidistantnim tačkama i različitim raspodelama verovatnoća.....	31
Slika 2.4.5. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum za 16-PAM sa: 1) jednakoverovatnim konstelacionim tačkama i 2) raspodelom verovatnoća konstelacionih tačaka koja prati Gausovu raspodelu	31
Slika 3.1.1. Struktura kvantizera kao redna veza enkodera i dekodera	33
Slika 3.1.2. Skalarni uniformni kvantizer	34
Slika 3.1.3. Skalarni neuniformni kvantizer	34
Slika 3.1.4. Deo po deo uniformni kvantizer	35
Slika 3.1.5. Prikaz regiona (oblasti) kvantizera	36
Slika 3.2.1. Kompanding kvantizer.....	37
Slika 3.2.2. Prikaz prenosne karakteristike kompandora u prvom kvadrantu	38
Slika 3.2.3. Kompresorske karakteristike:	39
a) – Optimalna kompresorska karakteristika	
b) – Kvazilogaritamska kompresorska karakteristika	
Slika 3.2.4. Prikaz linearizovane optimalne kompresorske karakteristike za Gausovu funkciju gustine verovatnoće	40
Slika 3.2.5. Geometrijsko oblikovanje konstelacije.....	41
Slika 3.2.6. Probabilističko oblikovanje konstelacije	41
Slika 3.2.7. Hibridno oblikovanje konstelacije	42
Slika 4.1.1. Za $M = 16$, $\mu = 5, 50, 255$, SNR = 20 dB i različit broj podskupova L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max}	47
Slika 4.1.2. Za $M = 16$, $x_{\max} = 4.2$, SNR = 20 dB i različit broj podskupova L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od μ	47
Slika 4.1.3. Za $M = 16$, $\mu = 5, 50, 255$, SNR = 20 dB i različit broj podskupova L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max}	48
Slika 4.1.4. Za $M = 16$, i različite vrednosti μ i L , verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum.....	49
Slika 4.1.5. Za $M = 32$, $\mu = 1$ i različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum.....	51
Slika 4.1.6. Za $M = 64$, $\mu = 1$ i različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum.....	52
Slika 4.2.1. Za $M = 16$, SNR = 18 dB, za različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max}	57

Slika 4.2.2. Za $M = 32$, SNR = 25 dB, za različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max}	57
Slika 4.2.3. Za $M = 64$, SNR = 30 dB, za različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max}	58
Slika 4.2.4. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum kod različitih 16-PAM konstelacija	59
Slika 4.2.5. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum za različite 32-PAM konstelacije	60
Slika 4.2.6. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum kod različitih 64-PAM konstelacija	61
Slika 4.2.7. Komparativna analiza PAM konstelacija projektovanih na osnovu analogije sa optimalnom i kvazilogaritamskom kompadding kvantizacijom	63
Slika 4.3.1. Struktura deo po deo uniformne PAM konstelacije sa dva podskupa	65
Slika 4.3.2. Linearizacija kompresorske karakteristike	66
Slika 4.3.3. Linearizacija ekspanzorske karakteristike	67
Slika 4.3.4. Raspored konstelacionih tačaka za konstelacije oblikovane funkcijama iz klase $g_c(x, \eta)$ ($\eta = 4/3, M_1 > M_2; \eta = 2, M_1 = M_2; \eta = 4, M_1 < M_2$)	73
Slika 4.3.5. Za različite vrednosti η ($\eta = 4/3, M_1 > M_2; \eta = 2, M_1 = M_2; \eta = 4, M_1 < M_2$) i SNR = 25 dB, P_e u funkciji od x_{\max} kod konstelacija 16-PAM $_{\eta}^c$	73
Slika 4.3.6. Za različite vrednosti η ($\eta = 4/3, M_1 > M_2; \eta = 2, M_1 = M_2; \eta = 4, M_1 < M_2$) i optimalne vrednosti x_{\max} , zavisnost P_e od SNR-a kod konstelacija tipa 16-PAM $_{\eta}^c$	74
Slika 4.3.7. P_e u funkciji x_{\max} kod konstelacija 8-PAM $_{\eta}^c = 4/3$, 16-PAM $_{\eta}^c = 4/3$, 32-PAM $_{\eta}^c = 4/3$	75
Slika 4.3.8. P_e u funkciji SNR kod konstelacija oblikovanih pomoću funkcija iz klase $g_c(x, \eta = 4/3)$, kada je $M = 8, 16, 32$ i $x_{\max}^{\text{opt}} = 3.7$	76
Slika 4.3.9. Za različite vrednosti η ($\eta = 4/3, M_1 > M_2; \eta = 2, M_1 = M_2; \eta = 4, M_1 < M_2$) i SNR = 25 dB, P_e u funkciji SNR kod 16-PAM $_{\eta}^e$ konstelacije	77
Slika 4.3.10. Za različite vrednosti η ($\eta = 4/3, M_1 > M_2; \eta = 2, M_1 = M_2; \eta = 4, M_1 < M_2$) i optimalne vrednosti x_{\max} , zavisnost P_e od SNR kod konstelacije 16-PAM $_{\eta}^e$	78
Slika 4.3.11. P_e u funkciji x_{\max} kod konstelacija 8-PAM $_{\eta=4}^e$, 16-PAM $_{\eta=4}^e$, 32-PAM $_{\eta=4}^e$	79
Slika 4.3.12. Zavisnost P_e od SNR kod konstelacija oblikovanih pomoću funkcija iz klase $g_e(x, \eta = 4)$, kada je $M = 8, 16, 32$ i $x_{\max}^{\text{opt}} = 4.2$	80
Slika 4.3.13. Za različit broj konstelacionih tačaka, zavisnost P_e od SNR kod konstelacija oblikovanih funkcijama $g_c(x, \eta = 4/3)$, $g_e(x, \eta = 4)$ i kod konvencionalnih PAM konstelacija	81
Slika 5.1.1. Radijus konstelacione tačke u funkciji rednog broja prstena	92
Slika 5.1.2. Verovatnoća prstenova u zavisnosti od radijusa konstelacione tačke	93
Slika 5.1.3. APSK konstelacije za $M = 16$ i različito L, N	93
Slika 5.1.4. APSK konstelacije za $M = 32$ i različito L, N	94
Slika 5.1.5. APSK konstelacije za $M = 64$ i različito L, N	94
Slika 5.2.1. Podela prostora po MAP kriterijumu za APSK konstelaciju	96
Slika 5.3.1. SER u zavisnosti od L za: a) SNR = 15 dB, b) SNR = 20 dB	100
Slika 5.3.2. SER u funkciji SNR za nekodovane APSK konstelacije u AWGN kanalu	102

1 Uvod

Predmet naučnog istraživanja ove doktorske disertacije je razvoj konstelacija signala za komunikacione sisteme sa ograničenom snagom. Razmatrane su konstelacije sa više nivoa i to kako jednodimenzionalne, tako i dvodimenzionalne konstelacije. Predložene su nove konstelacije u impulsno amplitudskoj modulaciji (pulse amplitude modulation – PAM) i digitalnoj amplitudsko-faznoj modulaciji (amplitude phase shift keying – APSK), koje su u odnosu na postojeće konstelacije efikasnije u pogledu potrebne snage. Uz metode za razvoj ovih konstelacija dat je i predlog za buduće istraživanje na temu kvadraturno amplitudske modulacije (quadrature amplitude modulation – QAM). Istraživanje sprovedeno u okviru disertacije je motivisano time što je kod višenivoskih (M -arnih) konstelacija, uvedenih prevashodno da bi se popravila spektralna efikasnost konstelacije, smanjena otpornost konstelacije na uticaj šuma [1]. Naime, sa višenivoskim konstelacijama se kroz zadat propusni opseg sa svakim od M mogućih signala prenosi $\log_2 M$ bita čime se postiže bolja spektralna efikasnost. S druge strane, kod višenivoskih konstelacija se smanjuje otpornost konstelacije na uticaj šuma zbog većeg broja nivoa (konstelacionih tačaka) tako da dolazi do porasta verovatnoće greške, čime se zapravo smanjuje efikasnost po snazi. To znači da prenos sa više nivoa zahteva bolji odnos signal-šum, što ga ne čini pogodnim za primenu u komunikacionim sistemima sa ograničenom snagom (power-limited communications). Otuda i pitanje kako sa takvim konstelacijama u komunikacionim kanalima slabog kvaliteta, odnosno u komunikacionim sistemima sa ograničenom snagom ostvariti bolji kvalitet primljenog signala. Istraživanje prikazano u disertaciji daje neke odgovore na ovo pitanje.

Predstavnik jednodimenzionalne modulacione tehnike koju smo obrađivali je višenivoska impulsna amplitudska modulacija (PAM) koja se koristi za modulaciju signala u

osnovnom opsegu i kod koje je informacija sadržana u amplitudi signala. Iako je PAM modulacija jedna od najstarijih modulacija i dalje ima široku primenu u Ethernet komunikaciji i optičkim mrežama [2]-[5]. Pored toga, kvadraturna amplitudska modulacija (QAM) može biti realizovana sabiranjem dva PAM signala. S obzirom da je QAM modulacija široko primenjena u SDMA-OFDM (space division multiple access-ortogonal frequency division multiplexing) komunikacionim sistemima [6], [7] i u MC-CDMA (multicarrier code division multiple access) prijemnicima [8], [9] mogućnost korišćenja PAM konstelacije za generisanje QAM signala povećava značaj naših istraživanja.

Pored jednodimenzionalne PAM konstelacije u disertaciji je obrađena digitalna amplitudsko fazna modulacija (APSK) koja predstavlja dvodimenzionalnu konstelaciju višeg reda. Ova konstelacija se sastoji od koncentričnih prstenova, pri čemu svaki od prstenova sadrži konstelacione tačke koje su međusobno udaljene za konstantnu vrednost faze. APSK modulacija je popularan modulacioni format spektralno efikasan i robustan na nelinearna izobličenja [10]-[21]. Zbog ovih osobina APSK modulacija je pogodna za modulaciju signala koji se prenosi kroz nelinearne kanale. Tako, APSK modulacija je integrisana u drugoj generaciji standarda za digitalno emitovanje videa putem satelita, DVB - S2 [12]. APSK modulacija je i u optičkim komunikacionim sistemima prepoznata kao pogodan modulacioni format za prevazilaženje problema uzrokovanih nelinearnošću optičkih vlakana [18]-[21]. APSK modulacija se koristi i u sistemima sa višestrukim ulazima i višestrukim izlazima (MIMO sistemi) [22]-[26].

Jednu konstelaciju određuje raspored tačaka u konstelacionom dijagramu i verovatnoća emitovanja konstelacionih tačaka zbog čega se pod projektovanjem konstelacije ili oblikovanjem konstelacije (constellation shaping) podrazumeva određivanje položaja i verovatnoće konstelacionih tačaka. U zavisnosti od toga koje karakteristike imaju pomenuti parametri konstelacije, konstelacije mogu biti: 1) sa jednakoverovatnim i ekvidistantnim tačkama - konstelacije najjednostavnije strukture, ali slabijih performansi u pogledu spektralne efikasnosti i efikasnosti po snazi; 2) sa konstelacionim tačkama koje nisu ekvidistantne i/ili nisu jednakoverovatne - konstelacije kompleksnije strukture, ali performansama boljih u pogledu spektralne efikasnosti i efikasnosti po snazi. U disertaciji, sa ciljem da se poveća efikasnost po snazi konstelacije, proučavano je:

- Geometrijsko oblikovanje konstelacija (geometric constellation shaping - GCS): Pod geometrijskim oblikovanjem se podrazumeva prostorno uređivanje konstelacionih tačaka u okviru konstelacionog dijagrama. Na primer, kod kružno-simetričnih konstelacija geometrijsko oblikovanje se može realizovati kroz nelinearni porast

radijusa konstelacionih prstenova počevši od centra. Pri tome je uobičajno da je veći broj konstelacionih tačaka koncentrisan u okolini centra konstelacije nego što je na obodu konstelacije kako bi se realizovala konstelacija čija je prostorna raspodela slična obliku Gausove raspodele. Ovo se obično ostvaruje optimizacijom metrika kao što su minimalno euklidsko rastojanje ili međusobna informacija [10], [11], [15], [27].

- Probabilističko oblikovanje konstelacija (probabilistic constellation shaping - PCS): Probabilističkim oblikovanjem se menjaju verovatnoće konstelacionih tačaka kako bi se dobila konstelacija sa verovatnoćama koje aproksimiraju Gausovu raspodelu. Zapravo, probabilističko oblikovanje ima ulogu da smanji srednju snagu signala i verovatnoću pogrešno primljenih simbola dodeljujući veće verovatnoće konstelacionim tačkama sa manjom amplitudom, odnosno dodeljujući manje verovatnoće konstelacionim tačkama sa većom amplitudom [28]-[29].
- Hibridno geometrijski-probabilističko oblikovanje konstelacija (hybrid geometric-probabilistic constellation shaping - HCS): Hibridno oblikovanje (HCS) kombinuje geometrijsko i probabilističko oblikovanje, odnosno podrazumeva istovremeno uređivanje položaja i verovatnoće konstelacionih tačaka čime se dobija fleksibilniji format konstelacije [30], [31].

Postoje mnoga istraživanja koja za temu imaju M -arne digitalne komunikacione sisteme sa jednakoverovatnim simbolima. Ova tema je dosta proučavana i značajna otkrića su standardizovana u knjigama kao što je [1]. Sa druge strane, M -arni digitalni komunikacioni sistemi sa nejednakoverovatnim simbolima nisu dovoljno istraživani i nisu u tolikoj meri primenjivani kako zbog same kompleksnosti problema, tako i zbog kompleksnosti implementacije predloženih rešenja [32]. Zbog toga je u [33] i [34] izvršena optimizacija konstelacije sa nejednakoverovatnim simbolima samo za binarni slučaj. U [32] je za dati skup verovatnoća konstelacionih tačaka problem optimizacije M -arne ASK (M -ary amplitude shift keying) modulacije rešavan minimizacijom verovatnoće greške po amplitudama konstelacionih tačaka. Pokazano je da ovako optimizovana konstelacija nije ekvidistantna. Prema rečima autora rada [32] njihov pristup je uključivao određivanje prostorne raspodele konstelacionih tačaka za sve moguće permutacije datih verovatnoća simbola i selektovanje one prostorne raspodele sa kojim se postiže najmanja verovatnoća greške. Kako broj

permutacija raste sa brojem konstelacionih tačaka, to su u [32] predstavljeni numerički rezultati samo za $M \leq 5$.

Kao što smo već naveli, oblikovanje konstelacije se uglavnom obavlja optimizovanjem neke metrike koja karakteriše kanal ili optimizovanjem minimalnog euklidskog rastojanja. Umesto toga, u ovoj doktorskoj disertaciji je oblikovanje konstelacija vršeno primenjujući tehnike projektovanja iz teorije kvantizacije. Naime, postojanje sličnosti u prostornoj predstavi konstelacija i kvantizacije motiv je da se primene tehnike za projektovanje kvantizera u projektovanju konstelacija. Korišćenje tehnika kvantizacije u projektovanju konstelacija srećemo i u radovima [35]-[51]. Rezultati ovih istraživanja [35]-[51] pokazuju da metode projektovanja zasnovane na tehnikama kvantizacije mogu biti efikasan alat u projektovanju konstelacije, ali i da ovo polje nauke nije dovoljno istraženo čak i za najjednostavnije konstelacije kao što je PAM modulacija. To nas je motivisalo da dublje proučimo projektovanje konstelacija korišćenjem tehnika iz teorije kvantizacije u cilju pronalaženja novih načina projektovanja i novih modela konstelacija sa kojima se ostvaruje dobitak u efikasnosti po snazi.

U jednom delu doktorske disertacije, kao u većini radovima na ovu temu [35]-[43], [45]-[50], model kvantizacije je direktno preslikan na model konstelacije uspostavljanjem analogije između konstelacionih tačaka i izlaznih nivoa kvantizera. Ovim postupkom dobijaju se konstelacije kod kojih nivoi sa većim verovatnoćama emitovanja imaju veću gustinu pakovanja. Sa stanovišta kvantizacije, ovo je poželjna karakteristika jer smanjuje srednje kvadratnu grešku. Međutim, sa stanovišta modulacije i verovatnoće greške, poželjne osobine u pogledu gustine konstelacionih tačaka i njihovih verovatnoća su suprotne. Zbog toga je u disertaciji predložen nov koncept oblikovanja koji tehnike za projektovanje kvantizacije koristi u oblikovanju konstelacija na sasvim drugačiji način, čime se ostvaruje podela prostora inverzna podeli koja karakteriše kvantizaciju [44], [51].

U ovoj disertaciji posebna pažnja je posvećena i strukturalnoj kompleksnosti konstelacije. Iz ovog razloga je u disertaciji fokus na projektovanju deo po deo uniformnih konstelacija kako u pogledu rasporeda konstelacionih tačaka, tako i u pogledu verovatnoća konstelacionih tačaka. Naime, proučavane su konstelacije kod kojih su konstelacione tačke grupisane u podskupove u okviru kojih su tačke ekvidistantne i jednakoverovatne, pri čemu svaki podskup karakteriše različita verovatnoća i rastojanje između konstelacionih tačaka. Pored toga, vršeno je ispitivanje kako broj podskupova i alokacija tačaka po podskupovima utiču na verovatnoću greške, a time i na efikasnost po snazi.

Konačno, treba reći da je efikasnost po snazi sposobnost modulacione tehnike da sačuva vernost, odnosno kvalitet digitalnih podataka pri niskim vrednostima odnosa signal-šum i izražava se kao odnos signal-šum po bitu potreban za postizanje zadate verovatnoće greške [1], [52]. Kako se u disertaciji bavimo projektovanjem konstelacija za kanale u kojima je dominantan aditivni beo Gausov šum, to je prilikom projektovanja konstelacija metrika za ocenu performansi bila zavisnost verovatnoće greške po simbolu od odnosa signal-šum za nekodovanu konstelaciju u kanalu sa aditivnim belim Gausovim šumom. Za svaku od proučavanih konstelacija analitički je određena verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum po bitu. Tačnost analiza i ostvarenih rezultata verifikovana je vršenjem simulacija.

Savremenim digitalnim komunikacionim sistemima prenosi se ogromna količina podataka, koja je iz dana u dan sve veća, zbog čega su istraživanja usmerena ka ostvarivanju efikasnijih prenosa aktuelna i značajna [13]-[24], [27], [29], [53], [54]. Predmet istraživanja u doktorskoj disertaciji je kako poboljšati efikasnost po snazi višenivoskih PAM i APSK konstelacija, tako da je tema doktorske disertacije aktuelna i posebno značajna za prenos digitalnih signala komunikacionim sistemima sa ograničenom snagom, kao što su optičke komunikacije, satelitske komunikacije, bežične komunikacije, komunikacije sa više predajnih i prijemnih antena.

U nastavku je data struktura doktorske disertacije. Disertacija je podeljena na šest poglavlja i sadrži 55 slika, 19 tabela i 72 bibliografske jedinice.

Nakon uvodnog dela disertacije, u drugom poglavlju date su osnove PAM konstelacije koje podrazumevaju definiciju osnovnih parametara konstelacije i osnovnih struktura konstelacije. Posebna pažnja je posvećena i detekciji simbola na prijemu, odnosno obrađeni su ML i MAP detektor. Na kraju poglavlja prikazani su rezultati uporednih analiza više tipova PAM konstelacija sa ekvidistantnim i nejednakoverovatnim konstelacionim tačkama.

U trećem poglavlju disertacije su prezentovane osnove kvantizacije, s obzirom da metode oblikovanja konstelacije koje su predložene u ovoj disertaciji se zasnivaju na analogiji između reprezentacionih nivoa i konstelacionih tačaka. Sadržinu ovog poglavlja čini opis osnovnih principa kvantizacije, parametara kvantizacije, kao i opis osnovnih tipova kvantizera i kompadding tehnike. Takođe su definisane kompresorske karakteristike korišćene u oblikovanju konstelacija, kao i linearizacija kompresorskih funkcija kojom se smanjuje strukturalna složenost konstelacija.

U četvrtom poglavlju disertacije prezentovano je naučno istraživanje vezano za jednodimenzionalne konstelacije. Naime, ovo poglavlje je podeljeno na tri sekcije u kojima

su obrađene PAM konstelacije projektovane na osnovu analogije sa: 1) linearizovanom kvazilogaritamskom kompanding kvantizacijom, 2) linearizovanom optimalnom kompanding kvantizacijom i 3) modelom inverznim sa linearizovanom optimalnom kompanding kvantizacijom. U prve dve sekcije prostornu raspodelu konstelacionih tačaka karakteriše veća gustina tačaka u oblasti većih verovatnoća. Vršena je optimizacija ovih PAM konstelacija u pogledu efikasnosti po snazi. Konkretno, kako linearizacijom kompresorskih karakteristika dobijamo deo po deo uniformne PAM konstelacije, ispitivano je kako broj podskupova utiče na performanse konstelacije kada je broj konstelacionih tačaka u podskupovima isti. Takođe je analiziran uticaj amplitude maksimalnog opterećenja na verovatnoću greške kako bi se odredila optimalna vrednost ovog parametra. U trećoj sekciji ovog poglavlja, predložen je nov pristup u projektovanju PAM konstelacije. Novina se ogleda u uspostavljanju analogije sa modelom koji je inverzan optimalnoj kompanding kvantizaciji čime se postiže manja gustina konstelacionih tačaka u oblasti većih verovatnoća. Izvršena je optimizacija ovih konstelacija za slučaj kada je broj podskupova dva i kada se konstelacija koristi za modulaciju signala koji se prenosi kroz kanal sa belim Gausovim šumom. Određena je optimalna amplituda maksimalnog opterećenja i optimalna alokacija tačaka po podskupovima. Izvršeno je poređenje novodobijenih konstelacija sa drugim modelima PAM konstelacije. Simulacija je potvrdila tačnost teorijskih rezultata.

U petom poglavlju opisani su doprinosi i istraživanje vezano za dvodimenzionalne konstelacije. Naime, u ovom delu obrađena je APSK konstelacija i njeno projektovanje inspirisano dvodimenzionalnom kružno-simetričnom kvantizacijom. Do sada se projektovanje konstelacija inspirisano kvantizacijom zasnivalo na direktnom preslikavanju modela kvantizacije na konstelacioni dijagram, zbog čega su konstelacije imale veću gustinu konstelacionih tačaka u oblasti većih verovatnoće. U ovom poglavlju predložen je nov metod projektovanja APSK konstelacije zasnovan na uspostavljanju analogije sa modelom koji je inverzan sa kružno-simetričnom kvantizacijom, čime su dobijene konstelacije koje karakteriše veća gustina konstelacionih prstenova na obodu konstelacije nego što je to oko centra konstelacije gde je verovatnoća emitovanja konstelacionih tačaka veća. Geometrijsko oblikovanje konstelacije je izvršeno korišćenjem radijalne kompresorske funkcije optimalne kompanding kvantizacije za kružno-simetrične izvore. U cilju dobijanja boljih performansi po pitanju efikasnosti po snazi, vršena je optimizacija parametara konstelacije. Ovo je podrazumevalo optimizaciju broja konstelacionih prstenova, kao i određivanje radijusa koji definiše kružnicu unutar koje se konstelacione tačke raspoređuju po prstenovima. Sva ispitivanja su vršena pod pretpostavkom da je u kanalu dominantan aditivan beo Gausov šum.

Dobijeni rezultati su potvrđeni simulacijom i takođe diskutovani u odnosu na poznate rezultate iz literature.

Šesto poglavlje je Zaključak u kome su navedeni glavni doprinosi ove disertacije. Sumirane su metode projektovanja razvijene u disertaciji, kao i poboljšanja u efikasnosti po snazi ostvarena predloženim metodama projektovanja.

Na kraju disertacije je dat i spisak korišćene literature koji sadrži 72 bibliografske jedinice.

Rezultati prikazani u disertaciji su većim delom verifikovani publikovanjem naučnih radova u časopisima i zbornicima međunarodnih i domaćih konferencija. Objavljeni naučni radovi o istraživanjima iz ove disertacije su navedeni u spisku literature.

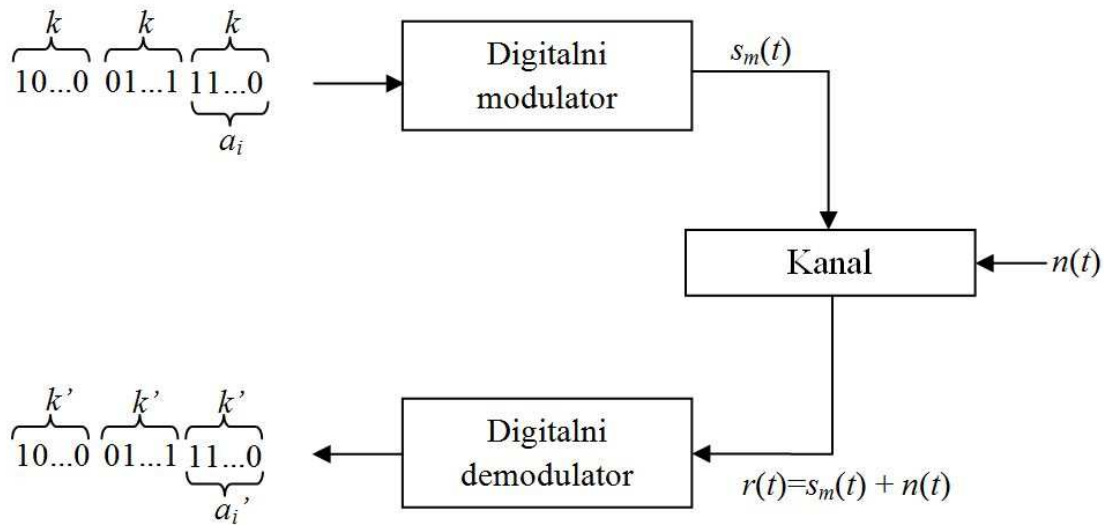
2 Osnove PAM modulacije

Pre nego što definišemo PAM konstelaciju, prisetimo se osnovna modulacionih tehnika. Uloga digitalnog modulatora je da niz impulsa sa ulaza pretvori u signal koji po svojim karakteristikama odgovara komunikacionom kanalu kroz koji se signal prenosi [52]. Proces pretvaranja/mapiranja digitalnih signala u analogne signale za prenos kroz komunikacioni kanal se naziva digitalna modulacija. Kako postoji veliki broj različitih vrsta komunikacionih kanala, za iste postoje i odgovarajuće modulacione tehnike koje odgovaraju specifičnostima prenosnog medijuma – komunikacionog kanala.

Modulacione tehnike u zavisnosti od toga da li modulirani signal zavisi samo od tekućeg ili i od predhodnih simbola mogu biti bez memorije i sa memorijom [52]. Našu pažnju u daljem istraživanju ćemo usmeriti na modulacione tehnike koje pripadaju grupi modulacionih tehnika bez memorije.

Pretpostavimo da je informacija dovedena na ulaz modulatora nekodovanog oblika i u binarnom zapisu predstavljena sa 0 i 1. Ovakav binarni niz je potrebno podeliti u podnizove-podsekvence fiksne dužine k , pri čemu svaka od podsekvenci odgovara jednom simbolu a_i . U postupku modulacije vrši se mapiranje svakog k -bitskog simbola a_i u ekvivalentni signal $s_m(t)$, za $m \in \{1, 2, \dots, M\}$, gde je $M = 2^k$. Tako se celokupan digitalni niz/sekvenca predstavlja skupom $s_m(t)$ signala. Ovako definisana modulacija se naziva M -arna modulacija.

Nakon digitalnog modulatora, koristan signal $s_m(t)$ se šalje kroz komunikacioni kanal. U ovoj disertaciji ćemo pretpostaviti da se prilikom prolaska signala kroz kanal, korisnom signalu pridodaje beli aditivni Gausov šum $n(t)$ što degradira prenos signala. Na izlazu kanala, odnosno na ulazu u prijemnik je signal $r(t)$ koji predstavlja zbir korisnog signala i šuma. Na osnovu odmerka primljenog signala $r = r(iT) = s(iT) + n(iT) = a_i + n$, $i \in N_0$, detektor donosi odluku o poslatom signalu. Na slici 2.1 možemo videti blok šemu modulator – kanal – demodulator koja prikazuje prenos signala od modulatora do demodulatora.



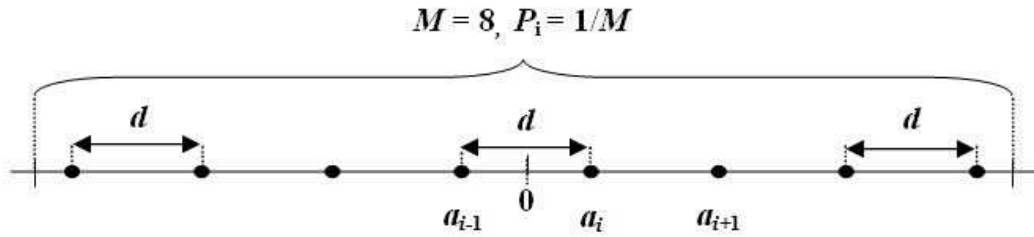
Slika 2.1. Blok šema modulator-kanal-demodulator

Korisna informacija koja se prenosi može biti sadržana u amplitudi, fazi ili frekvenciji ili u kombinaciji dva ili više parametara signala. Jedna od najranijih modulacionih tehnika za prenos signala u osnovnom opsegu, kod koje je korisna informacija sadržana u amplitudi modulisanog signala naziva se impulsna amplitudska modulacija ili skraćeno PAM modulacija. Ova modulaciona tehnika će biti osnova naučnog istraživanja u ovoj doktorskoj disertaciji.

2.1 PAM konstelacija sa ekvidistantnim i nejednakoverovnatnim konstelacionim tačkama

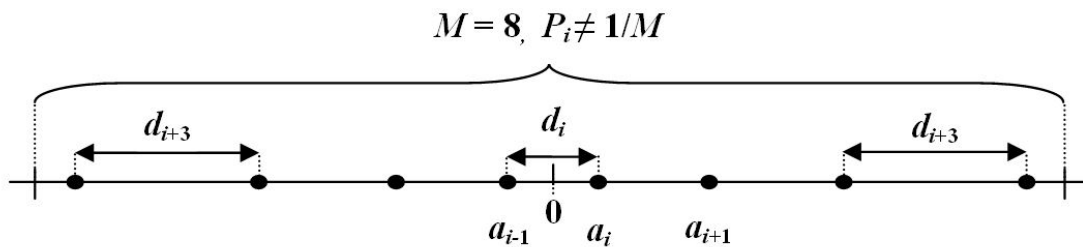
Osnovni parametri koji određuju jednu PAM konstelaciju su amplituda signala, odnosno pozicija konstelacione tačke u konstelacionom dijagramu i verovatnoća konstelacione tačke, odnosno verovatnoća emitovanja simbola. Posmatrajući ova dva osnovna parametara, PAM konstelacije možemo podeliti u dve osnovne kategorije:

- PAM konstelacije najjednostavnije strukture, konstelacije koje imaju jednakoverovnatne i ekvidistantne konstelacione tačke. Ove konstelacije imaju slabije performanse u pogledu spektralne efikasnosti i efikasnosti po snazi. Ovaj tip konstelacije je ilustrovan na slici 2.1.1.



Slika 2.1.1. Najjednostavnija struktura PAM konstelacije – uniformna konstelacija

- PAM konstelacije kompleksnije strukture, konstelacije čije tačke nisu ekvidistantne i/ili nisu jednakoverovatne čime ostvaruju bolje performanse u pogledu spektralne efikasnosti i efikasnosti po snazi. Prikaz ove konstelacije dat je na slici 2.1.2.



Slika 2.1.2. PAM konstelacija kompleksnije strukture– neuniformna konstelacija

U ovoj disertaciji posmatraćemo M -arne ili PAM konstelacije sa više nivoa, odnosno sa više konstelacionih tačaka M . Proučavaćemo simetrične PAM konstelacije što nam omogućava da tokom analize posmatramo samo pozitivni deo konstelacionog dijagrama i pojednostavimo proračune vezane za definisanje parametara konstelacije. Tako, poziciju konstelacionih tačaka na pozitivnom delu ose ćemo obeležiti sa $a_i, i = 1, 2, \dots, M/2$, dok rastojanje između susednih konstelacionih tačaka ćemo označiti sa d_i . Sada, ako pretpostavimo da su konstelacione tačke ekvidistantne, možemo formulisati izraz za amplitudu konstelacionih tačaka, odnosno poziciju konstelacionih tačaka:

$$a_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) d, \quad i = 1, \dots, \frac{M}{2} \quad (2.1.1)$$

Sledeća pomenuta bitna karakteristika PAM konstelacije su verovatnoće emitovanja konstelacionih tačaka $P_i = P(a_i), i = 1, 2, \dots, M/2$, koje mogu imati jednake i nejednake vrednosti, ali tako da je sveukupni njihov zbir jednak jedinici

$$2 \sum_{i=1}^{M/2} P_i = 1. \quad (2.1.2)$$

Sada, kada smo definisali osnovne parametre konstelacije, stvorili smo uslove za definisanje energetskog sadržaja simbola koje šalјemo, odnosno za definisanje srednje energije simbola E_s [1]:

$$E_s = 2 \sum_{i=1}^{M/2} a_i^2 P_i. \quad (2.1.3)$$

Ako je srednja energija simbola E_s i broj konstelacionih tačaka M , onda se može definisati srednja energija bita E_b :

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} \quad (2.1.4)$$

i odnos signal-šum po bitu SNR [1]:

$$SNR = 10 \log \frac{E_b}{N_0}, \quad (2.1.5)$$

gde je N_0 spektralna gustina šuma u AWGN kanalu.

2.2 MAP i ML pravilo odlučivanja u kanalu sa belim Gausovim šumom

Nakon prolaska kroz kanal, signal na prijemu je:

$$r = a_i + n, \quad (2.2.1)$$

gde je a_i odmerak korisnog signala $s_m(t)$ i n odmerak belog aditivnog Gausovog šuma $n(t)$ koji ima Gausovu funkciju gustine verovatnoće sa nultom srednjom vrednošću i varijansom $\sigma_n^2 = N_0/2$. Na osnovu jednačine (2.2.1), za dato a_i , odmerak r takođe ima Gausovu funkciju gustine verovatnoće sa istom varijansom kao šum, ali sa srednjom vrednošću a_i [1]:

$$p_i(r) = p_i(r|a_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left\{ -\frac{(r-a_i)^2}{N_0} \right\}, \quad -\infty < r < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (2.2.2)$$

Verovatnoća da je na prijemu pogrešno detektovan simbol u mnogome zavisi od tipa detekora na prijemu, odnosno od primenjenog pravila odlučivanja. Pravilo odlučivanja koje minimizuje verovatnoću greške se naziva „maximum a posteriori“ (MAP) pravilo odlučivanja. Detektor koji koristi MAP pravilo odlučivanja zahteva poznavanje apriornih verovatnoća simbola koje šalјemo i vrlo je složen. Iz ovih razloga poželјni su detektori

jednostavnije strukture. Primer nešto jednostavnijeg detektora je „maximum likelihood“ (ML) detektor koji ne uzima u razmatranje apriorne verovatnoće simbola.

Kao što smo već pomenuli, MAP kriterijum odlučivanja minimizuje verovatnoću greške, što dovodi do sledećeg pravila [1], [56]:

$$D(r) = a_i, \text{ ako je } p(a_i|r) \geq p(a_m|r) \text{ za } \forall m \quad (2.2.3)$$

Primenom Bajesovog pravila na (2.2.3) dobijamo jednostavniji oblik kriterijuma:

$$p(r|a_i)P_i \geq p(r|a_m)P_m, \text{ za } \forall m \quad (2.2.4)$$

Kombinujući izraze (2.2.4), (2.2.2) i (2.1.1) dolazimo do izraza koji definiše granice odlučivanja MAP detektora:

$$m_i = (i-1)d + \frac{N_0}{2d} \ln \frac{P_{i-1}}{P_i}, \quad i = 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (2.2.5)$$

$$m_1 = 0, \quad m_{M/2+1} = +\infty$$

Pretpostavljajući $P_i = \text{const}$ u (2.2.5) izvodi se uprošćeno ML pravilo odlučivanja [1], [56]:

$$D(r) = a_i, \text{ ako je } p(r|a_i) \geq p(r|a_m), \text{ za } \forall m \quad (2.2.6)$$

Zamenom (2.2.2) i (2.1.1) u (2.2.6) dobijamo relaciju za granice odlučivanja kod ML kriterijuma:

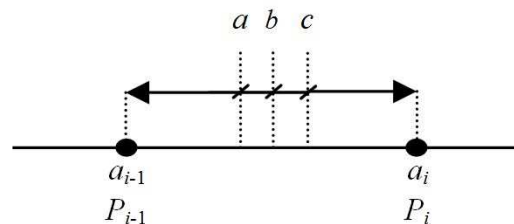
$$m_i = (i-1)d, \quad i = 2, \dots, \frac{M}{2} \quad (2.2.7)$$

$$m_1 = 0, \quad m_{M/2+1} = +\infty$$

Napomenimo da se za jednako verovatne konstelacione tačke $P_i = 1/M$ kriterijumi odlučivanja ML i MAP izjednačavaju. Ako su poznate granice odlučivanja, pravilo odlučivanja se može definisati i na sledeći način:

$$D(r) = a_i, \text{ ako je } m_i \leq r \leq m_{i+1} \quad (2.2.8)$$

Granice odlučivanja definisane po ML i MAP kriterijumu smo grafički ilustrovali na slici 2.2.1.



Slika 2.2.1. Granice odlučivanja za: 1) MAP detektor $m_i = a$ za $P_{i-1} < P_i$, $m_i = b$ za $P_{i-1} = P_i$, $m_i = c$ za $P_{i-1} > P_i$; 2) ML detektor $m_i = b$.

2.3 Verovatnoća greške po simbolu

Prilikom prenosa signala kroz kanal pridodaje se šum korisnom signalu, zbog čega je moguće da poslani simbol bude pogrešno detektovan na prijemu. Verovatnoća da je detektovan simbol drugačiji od poslanog simbola se naziva verovatnoća greške po simbolu (P_e). Opšti izraz za verovatnoću greške u slučaju simetrične PAM konstelacije je [1]

$$P_e = 2 \sum_{i=1}^{M/2} P_i P(e|a_i). \quad (2.3.1)$$

U izrazu (2.3.1) $P(e|a_i)$ predstavlja uslovnu verovatnoću greške po simbolu, odnosno verovatnoću da je pogrešan simbol detektovan ukoliko je simbol predstavljen konstelacionom tačkom a_i poslat:

$$\begin{aligned} P(e|a_i) &= P[r \notin [m_i, m_{i+1}) | a_i] = \\ &= 1 - P[r \in [m_i, m_{i+1}) | a_i] = \\ &= 1 - \int_{m_i}^{m_{i+1}} P(r|a_i) dr. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Da bismo dobili konačan izraz za verovatnoću greške potrebno je upotrebiti pomenuta pravila odlučivanja (MAP i ML) prilikom formiranja izraza. Uključujući izraze za uslovnu verovatnoću greške po simbolu (2.3.2), funkciju gustine verovatnoće (2.2.2), granice odlučivanja MAP detektora (2.2.5) i amplitudu konstelacione tačke (2.1.1) u izraz za verovatnoću greške (2.3.1) dolazimo do analitičkog zapisa za verovatnoću greške po simbolu MAP detektora [57]:

$$\begin{aligned} P_e &= P_1 \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} + \frac{\sqrt{N_0}}{2d} \ln \frac{P_1}{P_2} \right) \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M/2-1} P_i \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} - \frac{\sqrt{N_0}}{2d} \ln \left(\frac{P_{i-1}}{P_i} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} + \frac{\sqrt{N_0}}{2d} \ln \left(\frac{P_i}{P_{i+1}} \right) \right) \right] \\ &\quad + P_{M/2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} - \frac{\sqrt{N_0}}{2d} \ln \left(\frac{P_{M/2-1}}{P_{M/2}} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

gde je $\operatorname{erfc}(\cdot)$ komplementarna funkcija greške definisana jednačinom koja sledi:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \exp\{-t^2\} dt. \quad (2.3.4)$$

Za ML detektor, izraz za verovatnoću greške po simbolu (2.3.3) se mnogo pojednostavljuje:

$$P_e = (1 - P_{M/2}) \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right). \quad (2.3.5)$$

Ako u (2.3.5) pretpostavimo da su verovatnoće konstelacionih tačaka jednake, dolazimo do izraza za verovatnoću greške tradicionalne PAM konstelacije [1]:

$$P_e = \frac{M-1}{M} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right) \quad (2.3.6)$$

2.4 Analiza performansi PAM konstelacija sa ekvidistantnim i nejednakoverovatnim konstelacionim tačkama

U ovom delu istraživanja izvršićemo kvantifikaciju i uporednu analizu performansi osnovnih modela PAM konstelacija, ali pre toga definišimo kriterijume po kojima ćemo vršiti poređenje PAM konstelacija. Performanse PAM konstelacija ćemo sagledavati kroz dva aspekta:

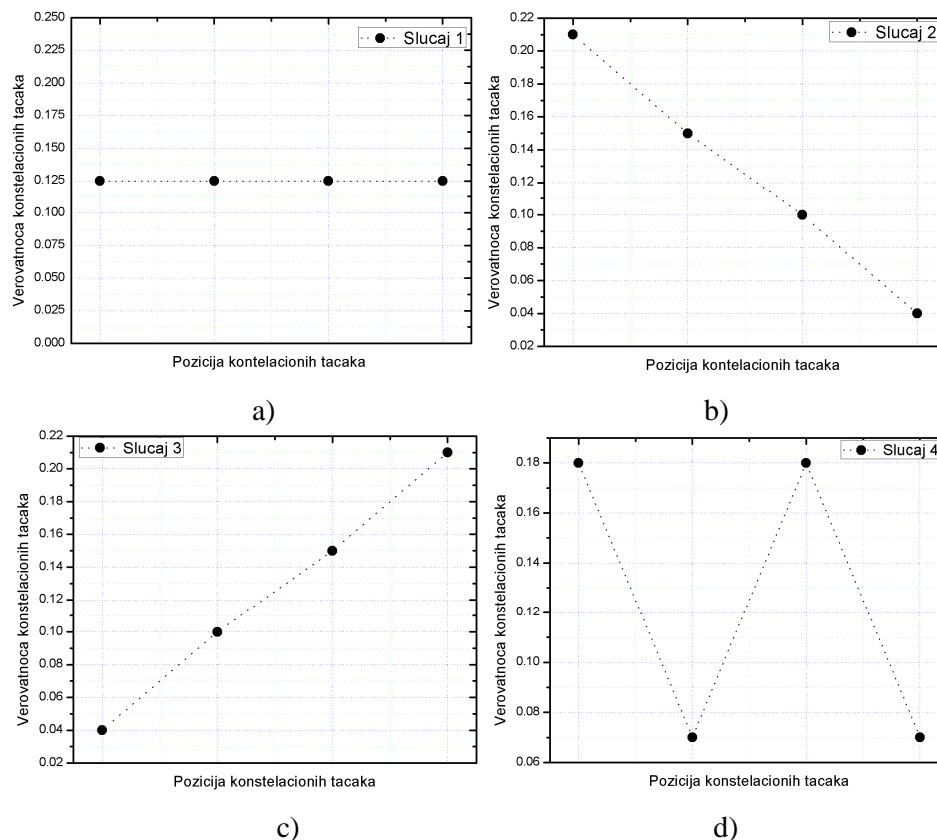
- efikasnost po snazi, odnosno energetska efikasnost konstelacije,
- kompleksnost, odnosno strukturalna složenost konstelacije.

Spektralna efikasnost predstavlja sposobnost modulacione tehnike da obezbedi prenos veće količine podataka u frekvencijski ograničenom opsegu. Spektralna efikasnost konstelacije se može unaprediti uvođenjem M -arnih ili konstelacija sa više nivoa, kod kojih se zbog porasta broja konstelacionih tačaka povećava osetljivost konstelacije na uticaj šuma, odnosno smanjuje se efikasnost po snazi. To znači da prenos sa više nivoa zahteva bolji odnos signal-šum.

Efikasnost po snazi predstavlja sposobnost modulacione tehnike da sačuva vernost, odnosno kvalitet digitalnih podataka pri niskim vrednostima odnosa signal-šum i izražava se kao odnos signal-šum po bitu potreban za postizanje zadate verovatnoće greške.

Nakon što smo definisali kriterijume za procenu performansi PAM konstelacija, naše istraživanje ćemo započeti sa PAM konstelacijama kod kojih su konstelacione tačke ekvidistantne i čija je verovatnoća emitovanja različita. Zgodno je ovom prilikom uporediti performanse postignute ML i MAP detektorom. Za scenario prikazan na slici 2.1,

pretpostavićemo da je PAM konstelacija M -arna i da je broj konstelacionih tačaka $M = 8$. Za ovako definisanu konstelaciju definisaćemo verovatnoće konstelacionih tačaka na nekoliko načina. Zapravo, posmatraćemo četiri slučaja grafički ilustrovana na slici 2.4.1. Za prvi slučaj uzeli smo da su verovatnoće konstelacionih tačaka jednake i da njihova vrednost iznosi $P_i = 0.125$ (uniformna raspodela). Grafički prikaz ove raspodele možemo videti na slici 2.4.1 - a). U drugom slučaju prikazanom na slici 2.4.1 - b) verovatnoća konstelacionih tačaka opada sa povećanjem amplitude konstelacionih tačaka (opadajuća raspodela). U slučaju kao na slici 2.4.1 - c) verovatnoća konstelacionih tačaka PAM konstelacije raste sa porastom amplitude konstelacionih tačaka, pa ćemo je s toga nazvati rastuća raspodela. Poslednji slučaj raspodele verovatnoća je takav da su verovatnoće tačaka oragnizovane kao „cik-cak“ raspodela, odnosno verovatnoća konstelacionih tačaka se ne menja monotono sa povećanjem amplitude konstelacionih tačaka, kao na slici 2.4.1 - d).



Slika 2.4.1. Raspodela verovatnoća konstelacionih tačaka za 8-PAM konstelaciju:

a) – uniformna raspodela - $P_i = [0.125, 0.125, 0.125, 0.125]$,

b) – opadajuća raspodela - $P_i = [0.21, 0.15, 0.1, 0.04]$,

c) – rastuća raspodela - $P_i = [0.04, 0.1, 0.15, 0.21]$,

d) – „cik-cak“ raspodela - $P_i = [0.18, 0.07, 0.18, 0.07]$.

Za sve prikazane raspodele verovatnoća konstelacionih tačaka, respektivno označene kao slučaj 1, 2, 3, 4, i za različite vrednosti odnosa signal-šum, vrednosti verovatnoće greške po simbolu za MAP i ML detektore dobijene pomoću formula (2.3.3) i (2.3.5) su prikazane u tabeli 2.4.1.

Kako bi bolje sagledali razliku u performansama između ML i MAP detektora, odredićemo relativnu razliku u verovatnoći greške po simbolu na sledeći način:

$$\delta[\%] = \frac{|\Delta P_e|}{P_e^{MAP}} \times 100 = \frac{|P_e^{ML} - P_e^{MAP}|}{P_e^{MAP}} \times 100 \quad (2.4.1)$$

gde P_e^{MAP} i P_e^{ML} predstavljaju verovatnoću greške MAP i ML detektora, respektivno. Rezultati dobijeni na osnovu (2.4.1) su grafički prikazani na slici 2.4.2. Za različite SNR vrednosti određena je relativna razlika δ .

Tabela 2.4.1. Verovatnoća greške po simbolu za ML i MAP detektore u funkciji odnosa signal-šum

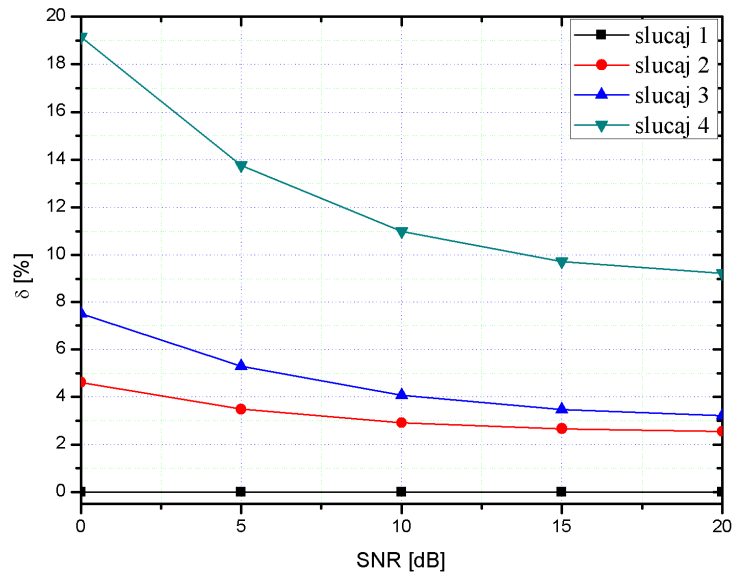
a) Slučaj 1 i Slučaj 2, b) Slučaj 3 i Slučaj 4

a)

$P_e(\text{SNR})$	Slučaj 1		Slučaj 2	
SNR[dB]	ML	MAP	ML	MAP
0	0.519	0.519	0.461	0.441
5	0.299	0.299	0.201	0.194
10	0.080	0.080	0.025	0.024
15	0.002	0.002	6.91×10^{-5}	6.73×10^{-5}
20	7.90×10^{-9}	7.90×10^{-9}	1.61×10^{-12}	1.57×10^{-12}

b)

$P_e(\text{SNR})$	Slučaj 3		Slučaj 4	
SNR[dB]	ML	MAP	ML	MAP
0	0.517	0.481	0.519	0.436
5	0.337	0.320	0.277	0.243
10	0.124	0.119	0.059	0.054
15	9.36×10^{-3}	9.05×10^{-3}	9.17×10^{-4}	8.35×10^{-4}
20	6.03×10^{-6}	5.84×10^{-6}	4.34×10^{-9}	3.97×10^{-9}



Slika 2.4.2. Relativna razlika u verovatnoći greške po simbolu ML i MAP detektora

Analizirajući rezultate prikazane u tabeli 2.4.1 i na slici 2.4.2, dolazimo do nekoliko zaključaka. U svakom od slučajeva, izuzev prvog, verovatnoća greške po simbolu MAP detektora je manja od verovatnoće greške po simbolu ML detektora (što je poznata činjenica). Za PAM konstelaciju sa jednakoverovatnim simbolima (slučaj 1) potvrdili smo da ne postoji razlika u verovatnoći greške ML i MAP detektora. Ovde je potrebno pomenuti da slučaj 1 predstavlja konvencionalno rešenje PAM konstelacije ili samo konvencionalni PAM, odnosno tradicionalni PAM. Za slučaj 2, odnosno kada raspodela verovatnoća konstelacionih tačaka opada, uočili smo da relativna razlika u pogledu verovatnoće greške po simbolu između ML i MAP iznosi oko 4.6% za SNR = 0 dB i 2.5% za SNR = 20 dB. Pored toga, verovatnoća greške po simbolu kod oba tipa detektora je za tri reda manja u odnosu na odgovarajući prvi slučaj. Vezano za slučaj 3, kada raspodela verovatnoća tačaka raste, relativna razlika u pogledu verovatnoće greške po simbolu je nešto veća i nalazi se u opsegu od 7.5% do 3.2% za odnos signal šum po bitu u opsegu od 0 dB do 20 dB. Kod oba tipa detektora za ovaj tip raspodele verovatnoća konstelacionih tačaka, verovatnoća greške je tri puta veća nego što je kod konvencionalnog PAM-a. Konačno, za četvrti slučaj sa „cik-cak“ raspodelom verovatnoća konstelacionih tačaka relativna razlika ima značajno veću vrednost u odnosu na ostale slučajeve. Relativna razlika dostiže vrednost od 19.1% za SNR = 0 dB i 9.2% za SNR = 20 dB. Pri tome, verovatnoća greške po simbolu za oba detektora je istog reda kao i verovatnoća greške konvencionalne PAM konstelacije. Sa slike 2.4.2 takođe možemo zaključiti da se krive za slučajeve 2, 3, 4 približavaju krivoj koja odgovara slučaju 1

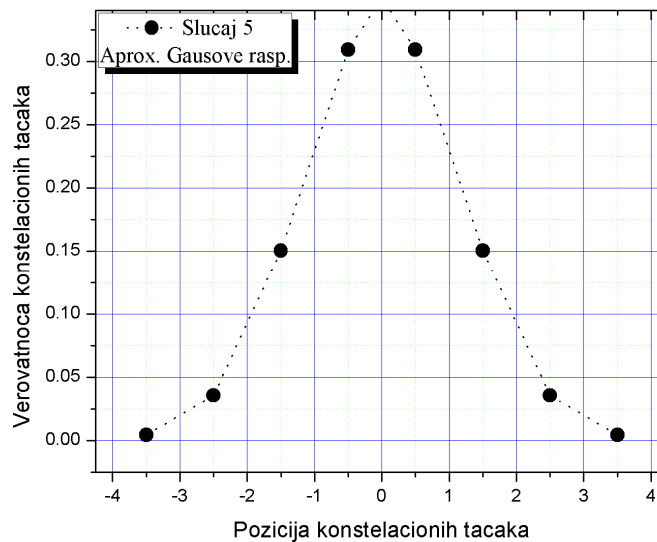
kada ne postoji razlika između MAP i ML detekcije. Ovo zapravo znači da sa povećanjem odnosa signal-šum relativna razlika između verovatnoća grešaka po simbolu se smanjuje. To znači da se za velike vrednosti SNR-a performanse MAP i ML detektora približavaju. Pored toga možemo da zaključimo da ML detektor posebno nije pogodan kada verovatnoće susednih konstelacionih tačaka znatno osciluju, kao što je u slučaju 4.

Kao što smo primetili, PAM konstelacija sa rastućom raspodelom verovatnoća konstelacionih tačaka ne predstavlja dobar primer konstelacije jer je njena verovatnoća greške po simbolu značajno veća nego što je greška kod konvencionalnog PAM-a. Iz ovoga možemo da zaključimo da neuniformna raspodela verovatnoća konstelacionih tačaka ne mora da i obavezno poboljša verovatnoću greške po simbolu. Zbog toga, određivanje verovatnoća konstelacionih tačaka sa ciljem da se smanji verovatnoća greške je veoma bitan zadatak pri projektovanju konstelacije. Imajući na umu da u odnosu na sve prikazane slučajeve, PAM konstelacija iz slučaja 2, odnosno PAM konstelacija sa opadajućom raspodelom verovatnoća konstelacionih tačaka, ima najbolje performanse u pogledu verovatnoće greške po simbolu, predložili smo PAM konstelaciju čije verovatnoće konstelacionih tačaka prate Gausovu raspodelu, slika 2.4.3. Zapravo, diskretizovali smo Gausovu funkciju gustine verovatnoće tako što smo pretpostavili da verovatnoća konstelacionih tačaka P_i je jednaka verovatnoći da se Gausova promenljiva, nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse nalazi unutar opsega $[a_i - d/2, a_i + d/2]$:

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(i-1)d}^{id} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{(i-1)d}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{id}{\sqrt{2}} \right) \right], i = 1, \dots, \frac{M}{2} \quad (2.4.2)$$

Za ovako definisanu 8-PAM konstelaciju, sa raspodelom verovatnoća konstelacionih tačaka koja prati Gausovu raspodelu i za PAM konstelacije opisane slučajevima 1, 2, 3, 4 izračunali smo verovatnoću greške po simbolu i prikazali na slici 2.4.4. Za ovaj i dalje proračune verovatnoće greške smo koristili MAP pravilo odlučivanja, s obzirom da smo prethodno prikazali da se sa ovim pravilom postiže manja greška nego sa ML pravilom. Na osnovu slike 2.4.4 možemo zaključiti da novopredstavljena PAM konstelacija (slučaj 5) postiže daleko manju verovatnoću greške po simbolu u odnosu na ostale prikazane slučajeve. Očigledno je da se sa PAM konstelacijom kod koje verovatnoća konstelacionih tačaka aproksimira Gausovu funkciju gustine verovatnoće postiže najmanja verovatnoća greške, pri čemu se u odnosu na druge PAM konstelacije ostvareni dobitak povećava sa povećanjem odnosa signal-šum. Pa tako, za $\text{SNR} = 17 \text{ dB}$, vrednost verovatnoće greške po simbolu za 8-PAM konstelaciju sa diskretizovanom Gausovom raspodelom verovatnoće konstelacionih tačaka iznosi $P_e^{SL.5} = 1.61 \times 10^{-13}$, odnosno, za ostale slučajeve i istu vrednost SNR-a, poredane u

opadajućem redosledu prema ostvarenim performansama $P_e^{Sl.2} = 5.43 \times 10^{-7}$ (slučaj 2, opadajuća raspodela), $P_e^{Sl.4} = 2.73 \times 10^{-5}$ (slučaj 4, „cik-cak“ raspodela), $P_e^{Sl.1} = 1.32 \times 10^{-4}$ (slučaj 1, konvencionalni PAM), $P_e^{Sl.3} = 1.17 \times 10^{-3}$ (slučaj 3, rastuća raspodela). Možemo da zaključimo da je vrednost verovatnoće greške kod 8-PAM konstelacije sa diskretizovanom Gausovom raspodelom verovatnoće konstelacionih tačaka u odnosu na konvencionalni 8-PAM manja za 8.2×10^8 puta. Izraženo na drugi način, za verovatnoću greške po simbolu jednaku 10^{-6} , ostvaren je dobitak od 5.8 dB u korist 8-PAM konstelacije sa Gausovom raspodelom verovatnoća konstelacionih tačaka.

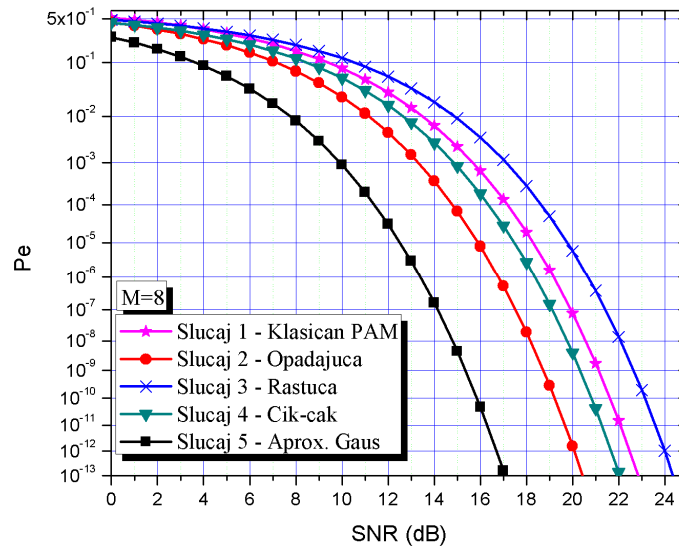


Slika 2.4.3. Verovatnoće konstelacionih tačaka 8-PAM konstelacije dobijene aproksimacijom Gausove funkcije gustine verovatnoće

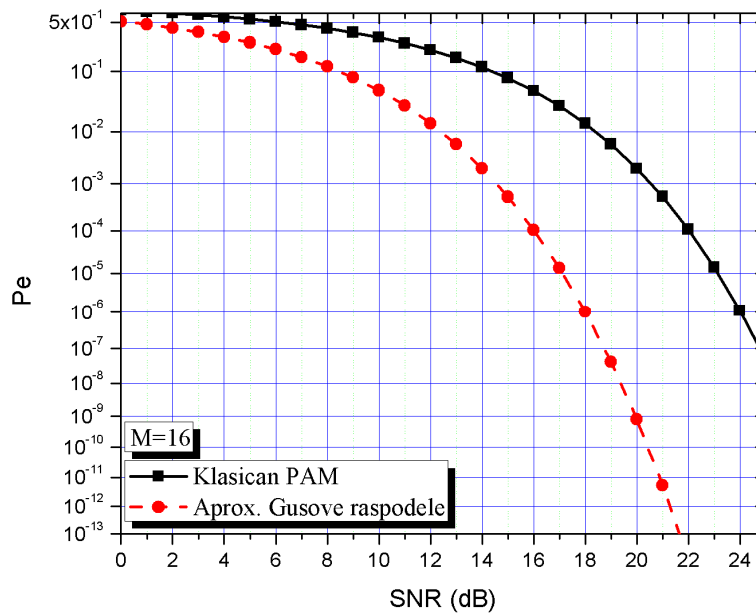
Poredeći slučajeve 5 i 1 za broj konstelacionih tačaka $M = 16$, dobijamo rezultate prikazane na slici 2.4.5. Na osnovu slike možemo da zaključimo da je za verovatnoću greške po simbolu 10^{-6} , kod 16-PAM konstelacije sa diskretizovanom Gausovom raspodelom verovatnoće konstelacionih tačaka potreban odnos signal-šum 18 dB, odnosno kod konvencionalne 16-PAM potreban SNR je 24 dB, što nas dovodi do dobitka od $\Delta\text{SNR} = 24 \text{ dB} - 18 \text{ dB} = 6 \text{ dB}$ u korist 16-PAM konstelacije sa raspodelom koja aproksimira Gausovu raspodelu.

Kako u ovoj doktorskoj disertaciji kvantifikujemo PAM konstelacije na osnovu njihove efikasnosti po snazi i složenosti, možemo da kažemo da PAM konstelacija čije verovatnoće konstelacionih tačaka prate Gausovu funkciju gustine verovatnoće ima bolje performanse u pogledu efikasnosti po snazi, ali da je kompleksnost ove PAM konstelacije zbog neuniformne

raspodele verovatnoća konstelacionih tačaka daleko veća nego što je kod tradicionalne PAM konstelacije.



Slika 2.4.4. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum kod 8-PAM konstelacija sa ekvidistantnim tačkama i različitim raspodelama verovatnoća



Slika 2.4.5. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum za 16-PAM sa: 1) jednakoverovatnim konstelacionim tačkama i 2) raspodelom verovatnoća konstelacionih tačaka koja prati Gausovu raspodelu

3 Oblikovanje PAM konstelacije zasnovano na analogiji sa kvantizacijom

PAM konstelacija je određena amplitudom/položajem konstelacionih tačaka i verovatnoćom emitovanja konstelacionih tačaka. Pomenimo da PAM konstelacija najjednostavnije strukture ima jednakoverovatne i ekvidistantne konstelacione tačke. Ovo rešenje ima slabije performanse u pogledu spektralne efikasnosti i efikasnosti po snazi. PAM konstelacija kompleksnije strukture je određena neekvidistantnim konstelacionim tačkama koje mogu imati istu ali i različitu verovatnoću emitovanja. Ovako projektovana PAM konstelacija ima bolje performanse u pogledu spektralne efikasnosti i efikasnosti po snazi, ali je implementacija ovog rešenja složena. Zbog toga postoji potreba za projektovanjem novih PAM konstelacija koje bi predstavljale kompromisno rešenje u pogledu efikasnosti i složenosti PAM konstelacije. U vezi sa tim, u ovom delu disertacije predložićemo nove načine oblikovanja PAM konstelacije.

Postoje različite metode za projektovanje, odnosno oblikovanje konstelacija [10]-[24], [27]-[29], [53], [54]:

- Geometrijsko oblikovanje konstelacija (eng. GCS – Geometric Constellation Shaping) – Ovo oblikovanje konstelacije podrazumeva prostorno uređivanje konstelacionih tačaka u okviru konstelacionog dijagrama.
- Probabilističko oblikovanje konstelacija – (eng. PCS – Probabilistic Constellation Shaping) - Ovim oblikovanjem konstelacije određuje se raspodela verovatnoća emitovanja konstelacionih tačaka.

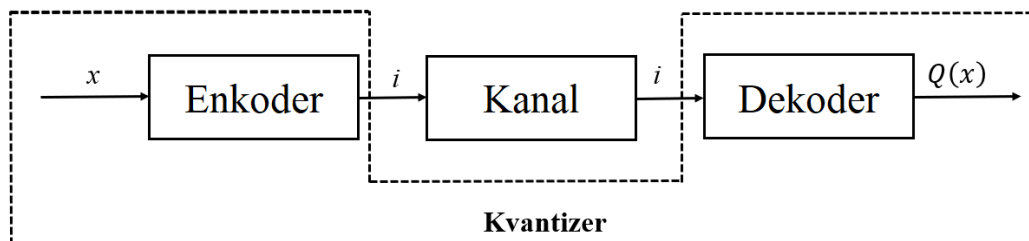
- Hibridno geometrijsko-probabilističko oblikovanje konstelacija – (eng. HCS- Hybrid Geometric-Probabilistic Constellation Shaping) – Kod ovog oblikovanja konstelacije vrši se prostorno uređenje konstelacionih tačaka i određivanje raspodele verovatnoće emitovanja konstelacionih tačaka.

3.1 Analogija između PAM konstelacije i skalarne kvantizacije

Projektovanje, odnosno oblikovanje PAM konstelacije ćemo vršiti na osnovu uspostavljene analogije između PAM konstelacije i kvantizacije, odnosno između konstelacionih tačaka i reprezentacionih nivoa kvantizera [35]-[45], [49], [50]. Analogija proizilazi iz toga što kod konstelacije i kvantizacije postoji slična prostorna raspodela konstelacionih tačaka i reprezentacionih nivoa.

U cilju boljeg razumevanja analogije između PAM konstelacije i kvantizacije, na narednim stranama ćemo prezentovati osnove kvantizacije.

Kvantizacija se može opisati kao proces transformacije amplitude signala koji je diskretizovan po vremenu u jednu od amplituda iz konačnog skupa mogućih amplituda. Sklop koji obavlja proces kvantizacije se naziva kvantizer. Njegova struktura je takva da se sastoji od kaskadne veze enkodera na predajnoj strani i dekodera na prijemnoj strani, kao što se može videti na slici 3.1.1 [58]-[60].



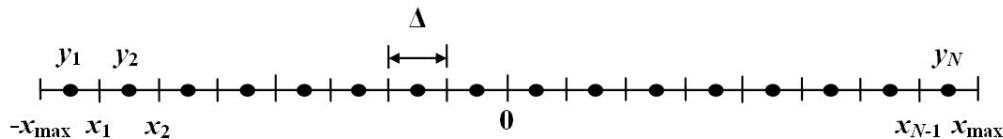
Slika 3.1.1. Struktura kvantizera kao redna veza enkodera i dekodera

Preciznije opisano, kvantizacija predstavlja mapiranje amplitude signala x čija je vrednost iz skupa realnih brojeva, u vrednost amplitude y iz konačnog skupa dozvoljenih izlaznih vrednosti kvantizera. Skup izlaznih nivoa kvantizera se još naziva i skup reprezentacionih nivoa kvantizera, odnosno kodna knjiga kvantizera. U uspostavljenoj analogiji reprezentacioni nivoi kvantizera odgovaraju konstelacionim tačkama u PAM konstelaciji. Veličina skupa dozvoljenih vrednosti amplituda je ograničena brojem N , koji

predstavlja broj nivoa kvantovanja i odgovara ukupnom broju konstelacionih tačaka M u okviru PAM konstelacije.

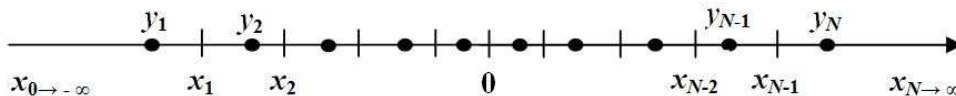
Za kvantizer se kaže da je potpuno određen ukoliko su poznati njegovi nivoi odlučivanja i reprezentacioni nivoi. Pod projektovanjem kvantizera se podrazumeva određivanje ovih parametara, što bi odgovaralo određivanju konstelacionih tačaka u PAM konstelaciji. Ako amplitudski opseg ulaznog signala posmatramo kao skup tačaka na realnoj osi, tada se kvantizacijom amplitudski opseg ulaznog signala deli na ćelije, nivoe odlučivanja i izlazne nivoe. U zavisnosti od toga da li su ćelije iste ili različite širine, kvantizere možemo podeliti u dve osnovne grupe:

- Uniformni kvantizeri su kvantizeri kod kojih su ćelije jednake, a izlazni nivoi se nalaze na sredini ćelija, tako da su izlazni nivoi podjednako međusobno udaljeni. Ovakav tip kvantizera predstavlja najjednostavniji model kvantizera i prema uvedenoj analogiji odgovara najjednostavnoj uniformnoj PAM konstelaciji, slika 3.1.2.



Slika 3.1.2. Skalarni uniformni kvantizer

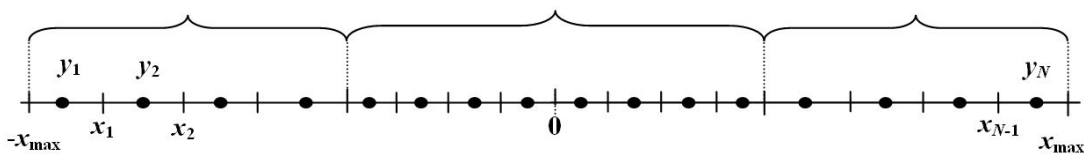
- Neuniformni kvantizeri su kvantizeri kod kojih ćelije nisu jednake, kod kojih izlazni nivoi nisu na sredini ćelija, tako da izlazni nivoi nisu podjednako međusobno udaljeni, slika 3.1.3. Ovaj tip kvantizera predstavlja najsloženiji model kvantizera, koji odgovara strukturalno najsloženijoj neuniformnoj PAM konstelaciji.



Slika 3.1.3. Skalarni neuniformni kvantizer

Kvantizacija čija je složenost između uniformne i neuniformne je deo po deo uniformna kvantizacija. Kod deo po deo uniformne kvantizacije razlikuju se podopsezi koji su uniformno podeljeni na ćelije, pri čemu je veličina ćelija u jednom opsegu različita od

veličine ćelija u drugim opsezima, slika 3.1.4. Zapravo, uniformna i neuniformna kvantizacija se mogu posmatrati kao granični slučajevi deo po deo uniformne kvantizacije. Uniformna kvantizacija se može posmatrati kao deo po deo uniformna sa jednim podopsegom, dok se neuniformna kvantizacija može posmatrati kao deo po deo uniformna kvantizacija kod koje je broj podopsega jednak broju nivoa kvantovanja. Deo po deo uniformni kvantizer prema analogiji odgovara deo po deo uniformnoj PAM konstelaciji, kod koje su konstelacione tačke podeljene u podskupove u okviru kojih su konstelacione tačke na jednakoj međusobnoj udaljenosti, dok je rastojanje između konstelacionih tačaka iz različitih podskupova različito.

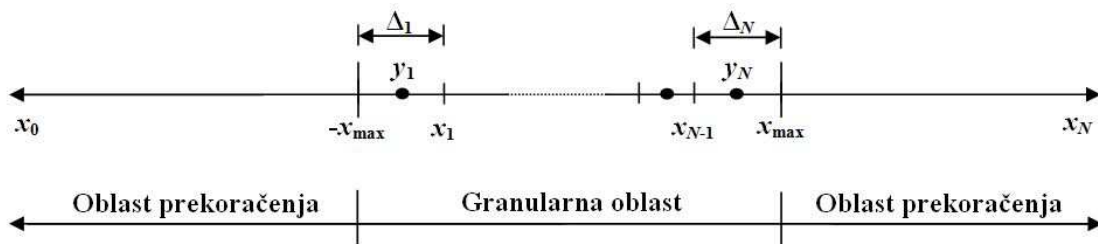


Slika 3.1.4. Deo po deo uniformni kvantizer

Kao što smo pomenuli, u toku kvantizacije se menja amplituda ulaznog odmerka. Razlika između originalne i kvantovane vrednosti amplitude odmeraka predstavlja grešku kvantizacije ili drugačije rečeno šum kvantizacije. Na ulaz kvantizera se dovode odmerci slučajnog procesa, zbog čega i odmerci greške kvantizacije formiraju slučajni niz. S obzirom na to, greška kvantizacije se menja od odmerka do odmerka, tako da je za procenu greške kvantizacije potrebno naći njenu srednju vrednost. Najčešće korišćena mera za grešku kvantizacije je srednje-kvadratna greška, koja se naziva distorzija. Bitno je napomenuti da za slučajeve kada je na ulazu kvantizera signal neograničene amplitude, kvadratna greška može imati i beskonačnu vrednost. Međutim, ova greška statistički nije značajna, jer kod signala koji se sreću u telekomunikacijama verovatnoća njenog pojavljivanja je zanemarljiva. Greška kvantizacije nije u vezi sa performansama PAM konstelacije projektovane na osnovu analogije sa kvantizacijom, što će kasnije biti obrazloženo u disertaciji.

U zavisnosti od toga kakva je priroda kvadratne greške, konačna ili beskonačna, amplitudski opseg ulaznog signala sačinjen od odmeraka na realnoj osi se deli na dve oblasti, granularnu oblast (amplitudski opseg kvantizera) i oblast prekoračenja. Kod ulaznih signala sa ograničenom amplitudom postoji samo granularna oblast, dok kod ulaznih signala sa neograničenom amplitudom postoje obe oblasti, kao na slici 3.1.5.

Granica između granularne oblasti i oblasti prekoračenja naziva se amplituda maksimalnog opterećenja kvantizera koju ćemo označiti sa x_{\max} . Amplituda maksimalnog opterećenja kvantizera je značajan parametar kvantizera, s obzirom na to da je jedan od parametara koji određuje ćelije kvantizera i reprezentante. To znači da je ovaj parametar bitan i pri određivanju konstelacionih tačaka. Cilj pri projektovanju kvantizera je odrediti vrednost amplitude maksimalnog opterećenja kvantizera tako da je bliska ili jednaka vrednosti za koju je distorzija najmanja, odnosno za koju je najmanja srednje kvadratna greška. Ovako odabrana vrednost amplitude maksimalnog opterećenja kvantizera se naziva optimalna vrednost i označava se sa x_{\max}^{opt} . Za razliku od ovoga, kod projektovanja PAM konstelacije određivanje x_{\max} vrednosti je nešto drugačije. Zapravo, vrednost ovog parametara se bira tako da je verovatnoća pogrešno primljenih simbola najmanja, odnosno da je efikasnost PAM konstelacije po snazi najveća.



Slika 3.1.5. Prikaz regiona (oblasti) kvantizera

Ukupna distorzija, relacija (3.1.1), se dobija tako što se po svakom ćelijskom intervalu integriše kvadratna greška uzrokovana kvantizacijom odmeraka, prethodno pomnožena težinama koje podležu određenoj funkcionalnoj zavisnosti. Funkcionalna zavisnost težina je zapravo određena funkcijom gustine verovatnoće amplitude koja se kvantuje $p(x)$, tako da je jednačina za ukupnu distorziju [58]-[60].

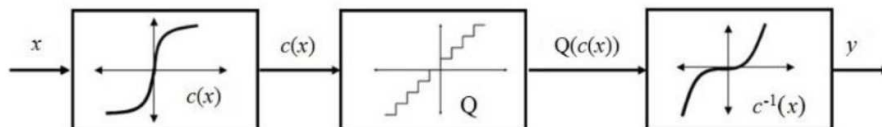
$$D = \sum_{i=1}^N D_i = \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - y_i)^2 p(x) dx. \quad (3.1.1)$$

Kod uniformne kvantizacije, kvadratna greška u svakoj od N ćelija kreće se u istim granicama, dok su težine kojima se vrši usrednjavanje ovih grešaka različite, osim kada je u pitanju kvantizacija uniformne slučajne promenljive. Imajući u vidu ovo, kao i to da su signali koji se susreću u telekomunikacijama uglavnom takvi da su verovatnije manje apsolutne vrednosti signala (npr. oblik Gausove raspodele), dolazi se do zaključka da je kod

uniformne kvantizacije distorzija u okviru statistički značajnih ćelija veća i obrnuto. Ovaj nepoželjan efekat se može eliminirati finim kvantovanjem odmeraka signala čije su apsolutne vrednosti male, dok se odmerci signala čije su apsolutne vrednosti velike, ali verovatnoće pojavljivanja veoma male, grubo kvantuju. Ovakav način kvantovanja rezultira manjom ukupnom distorzijom. Ovakva kvantizacija ima ćelije nejednakih širina, sa neuniformno raspoređenim reprezentacionim nivoima i nivoima odlučivanja-neuniformna kvantizacija. Neuniformna kvantizacija je u odnosu na uniformnu kvantizaciju složenija, ali s druge strane, za isti broj nivoa kvantovanja N može imati manju distorziju, odnosno pružati bolji kvalitet kvantovanog signala. Uspostavljajući analogiju sa modelom neuniformnog kvantizera projektovaćemo nove PAM konstelacije sa ciljem da ostvarimo bolju efikasnost po snazi nego što je kod konvencionalne PAM konstelacije.

3.2 Osnove oblikovanja PAM konstelacije pomoću kompanding tehnike

Jedan od načina realizacije neuniformnog kvantizera, koji ćemo na osnovu uvedene analogije primenjivati pri projektovanju neuniformne PAM konstelacije, je kompanding tehnika. Kvantizacija primenom komanding tehnike se realizuje kroz tri osnovna koraka: kompresija, uniformna kvantizacija i ekspanovanje, kao što je prikazano na slici 3.2.1. U prvom koraku, kompresijom koju definiše nelinearna kompresorska karakteristika $c(x)$, amplitude sa manjom apsolutnom vrednošću se pojačavaju. Drugi korak je uniformna kvantizacija komprimovanog odmerka $Q(c(x))$. Treći korak podrazumeva da se izlaz iz uniformnog kvantizera ekspanuje primenom operacije inverzne komprimovanju, tj. primenom inverzne kompresorske karakteristike $c^{-1}(\cdot)$. Konačno, na izlazu iz kompandora se dobija odmerak $y = c^{-1}(Q[c(x)])$, odnosno jedan od mogućih reprezentacionih nivoa neuniformnog kvantizera [58]-[60].

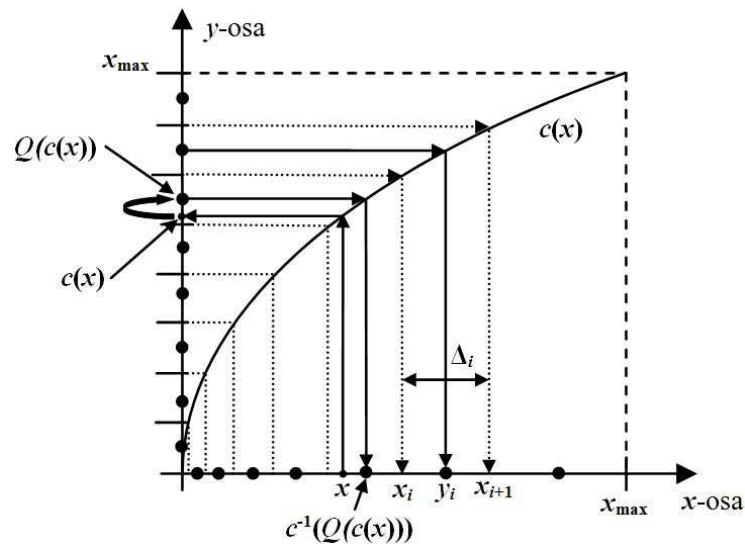


Slika 3.2.1. Kompanding kvantizer

Jasno je da kompresorska karakteristika određuje kompadding kvantizer i da se reprezentacioni nivoi određuju uniformnom podelom izlaza kompresora, a zatim preslikavanjem inverznom kompresorskom funkcijom

$$y_i = c^{-1} \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{x_{\max}}{M} \right], i = 1, 2, \dots, M/2. \quad (3.2.1)$$

Po ovom pravilu, na osnovu analogije, određujemo amplitude neuniformne PAM konstelacije. Odnosno, jednačinom (3.2.1) je definisano geometrijsko oblikovanje konstelacije.



Slika 3.2.2. Prikaz prenosne karakteristike komparatora u prvom kvadrantu

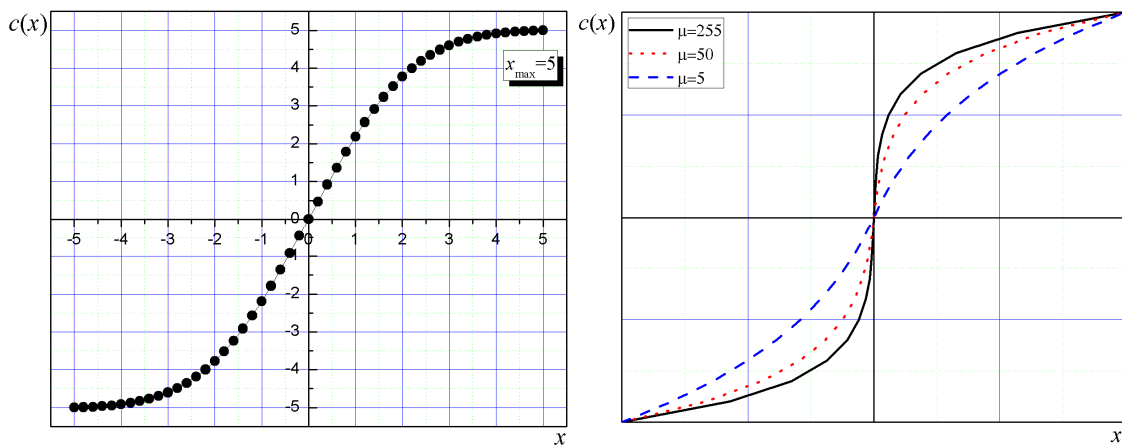
Prema uspostavljenoj analogiji verovatnoća konstelacione tačke P_i je jednaka verovatnoći da amplituda ulaznog odmerka uzima vrednosti iz i -tog amplitudskog kvanta neuniformnog kvantizera [59], [60]:

$$P_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x) dx \approx p_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = p(y_i) \Delta_i. \quad (3.2.2)$$

U jednačini (3.2.2), Δ_i označava širinu amplitudskog kvanta, dok $p(x)$ predstavlja funkciju gustine verovatnoće amplitude odmeraka na ulazu kvantizera, za koju je pretpostavljeno da je u okviru amplitudskog kvanta konstantna i jednaka vrednosti koju gustina ima u $x = y_i$. Ovom jednačinom je definisano probabilističko oblikovanje konstelacije.

Kompresorske karakteriske koje se najčeće koriste prilikom konstrukcije neuniformnih kvantizera primenom kompadding tehnike su optimalna kompresorska karakteristika i logaritamska kompresorska karakteristika. Pomenute kompresorske karakteristike ćemo

takođe koristiti i pri projektovanju novih PAM konstelacija. Optimalna kompresorska karakteristika je specifična po tome što se njome minimizuje distorzija. U kvantizaciji, optimalna kompresorska karakteristika se pokazala takvom da ne obezbeđuje konstantno dobar kvalitet kvantizacije kod signala čija se snaga signala menja u vremenu, odnosno kod nestacionarnih signala kao što je govorni signal. Odgovor na ovaj problem daje kompadding tehnika kod koje se primenjuje logaritamska kompresorska karakteristika, koja ima osobinu da u širokom opsegu varijanse (snage) ulaznog signala daje konstantan kvalitet na izlazu kvantizera [58]-[60]. Kod logaritamske kompadding kvantizacije, pored parametra x_{\max} , na kvalitet kvantizacije utiče i faktor kompresije logaritamske kompresorske karakteristike. U ovoj disertaciji obrađivaćemo kvazilogaritamsku kompresorsku karakteristiku, sa faktorom kompresije μ . Prilikom projektovanja PAM konstelacije, vrednosti parametara optimalne i kvazilogaritamske kompresorske karakteristike x_{\max} i μ biće određivane tako da je verovatnoća pogrešno primljenih simbola minimilana, odnosno da je efikasnost po snazi maksimalna. Podsetimo se da kada je u pitanju projektovanje kvantizera, ovi parametri se određuju tako da minimizuju srednje-kvadratnu grešku, odnosno distorziju kvantizera. To znači da će modeli kvantizera biti preslikani na konstelacione dijagrame, pri čemu će parametri modela imati drugačije vrednosti, imajući na umu da su kriterijumi za određivanje parametara PAM konstelacije i kvantizera različiti. Primer optimalne i kvazilogaritamske kompresorske karakteristike možete videti na slici 3.2.3.

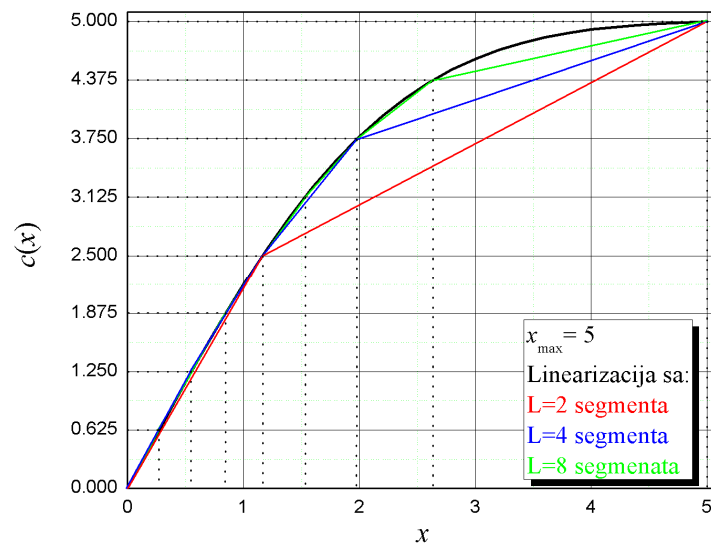


a) b)
Slika 3.2.3. Kompresorske karakteristike:

a) – Optimalna kompresorska karakteristika

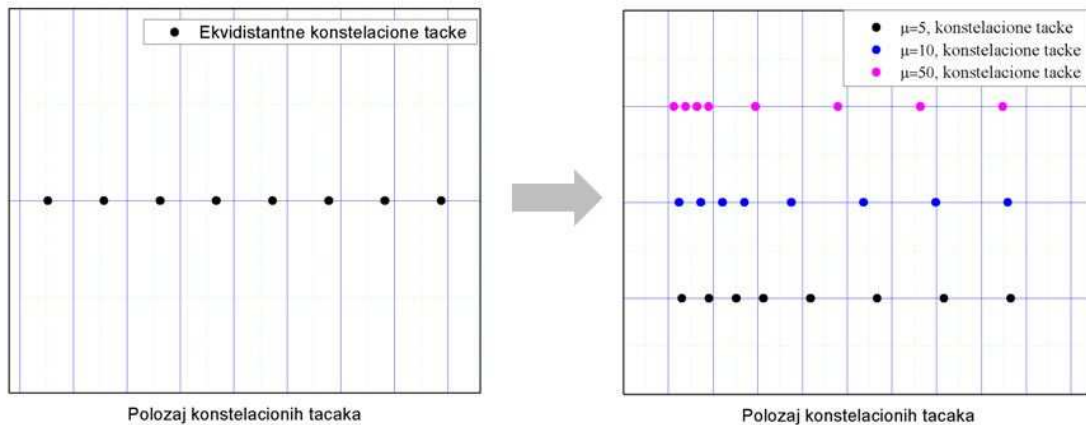
b) – Kvazilogaritamska kompresorska karakteristika

U cilju uprošćavanja strukturalne kompleksnosti kvantizera, a time i PAM konstelacije, u ovoj disertaciji biće razmatrana linearizacija kompresorskih karakteristika čime se ostvaruje geometrijsko i probabilističko, odnosno hibridno oblikovanje PAM konstelacije kojim se skup reprezentacionih nivoa tj. konstelacionih tačaka deli na podskupove u okviru kojih su konstelacione tačke ekvidistantne i jednakoverovatne. Na taj način će zapravo biti realizovana deo po deo uniformna konstelacija na osnovu analogije sa deo po deo uniformnom kvantizacijom, slika 3.1.4. Linearizovana optimalna karakteristika kompresora sa 2, 4 i 8 segmenata i amplitudom maksimalnog opterećenja $x_{\max} = 5$ prikazana je na slici 3.2.4 za pozitivne vrednosti argumenata.



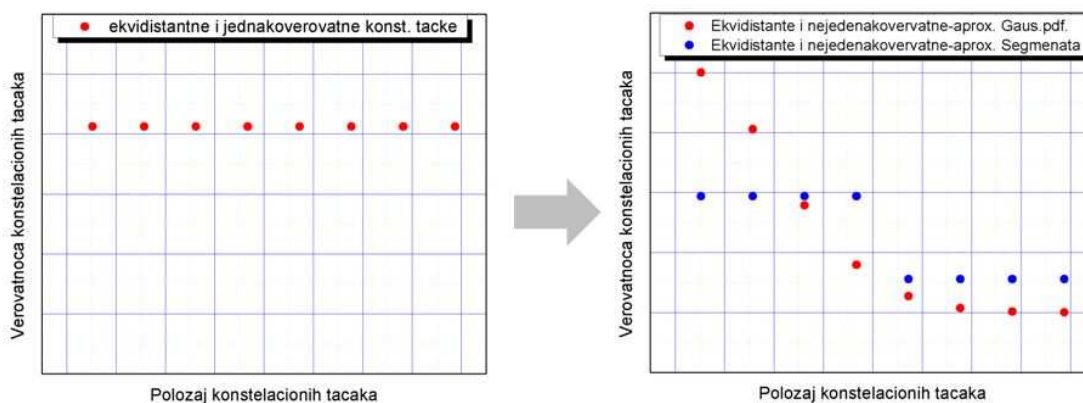
Slika 3.2.4. Prikaz linearizovane optimalne kompresorske karakteristike za Gausovu funkciju gustine verovatnoće

U cilju bolje ilustracije metoda za oblikovanje konstelacija (geometrijsko, probabilističko, hibridno oblikovanje) u nastavku ovog poglavlja data je grafička prezentacija oblikovanja na slikama 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7.



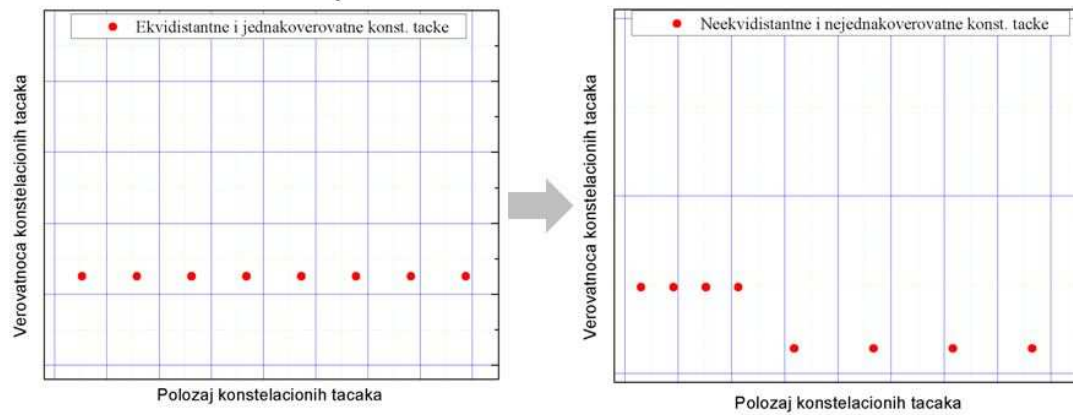
Slika 3.2.5. Geometrijsko oblikovanje konstelacije

Na slici 3.2.5 je prikazano geometrijsko oblikovanje konstelacije primenom kompandig tehnike sa kvazilogaritamskom karakteristikom kompresije koja je linerazovana tako da ima 2 segmenta (ovaj metod će biti detaljno objašnjen u sekciji 4.1). Geometrijsko oblikovanje konstelacije je primenjeno na uniformnu konstelaciju koja je prikazana na levoj strani slike. Ovo oblikovanje za rezultat daje deo po deo uniformnu konstelaciju sa dva podskupa u okviru kojih su tačke konstelacije ekvidistantne. Takođe se na slici može videti da za različite vrednosti parametara kompresije imamo različite geometrijski oblikovane konstelacije. Na slici 3.2.6 možemo videti probablističko oblikovanje konstelacije, odnosno primer transformacije konstelacije koja ima ekvidistantne i jednakoverovatne konstelacione tačke u novu probablistički oblikovanu konstelaciju kod koje rastojanje između tačaka ostaje nepromenjeno dok je raspodela verovatnoća konstelacionih tačaka drugačija.



Slika 3.2.6. Probablističko oblikovanje konstelacije

Slika 3.2.7 prikazuje geometrijsko i probabilističko, odnosno hibridno oblikovanje uniformne konstelacije (konvencionalne PAM konstelacije), koje za rezultat daje deo po deo uniformnu konstelaciju kako u pogledu rastojanja između konstelacionih tačaka, tako i u pogledu verovatnoća konstelacionih tačaka.



Slika 3.2.7. Hibridno oblikovanje konstelacije

4 Projektovanje PAM konstelacija primenom kompadding tehnike

Kako se savremenim komunikacionim sistemima prenosi sve veća količina podataka, od interesa je poboljšati efikasnost modulacionih formata, pa tako i efikasnost po snazi višenivoske PAM konstelacije sa ekvidistantnim i jednakoverovatnim konstelacionim tačkama. Sa druge strane, PAM konstelacije sa neekvidistantnim konstelacionim tačkama i raspodelom verovatnoća konstelacionih tačaka koje prate Gausovu funkciju gustine verovatnoće su visoko efikasne po snazi, ali veoma složene. S tim u vezi, javlja se potreba za projektovanjem novih PAM konstelacija koje prevazilaze neuniformne PAM konstelacije u pogledu strukturalne kompleksnosti i tradicionalne PAM konstelacije u pogledu efikasnosti po snazi.

4.1 Projektovanje PAM konstelacije na osnovu analogije sa kvazilogaritamskom kompadding kvantizacijom

Kako bi poboljšali efikasnosti po snazi konstelacije, u ovom delu disertacije ćemo istraživati projektovanje PAM konstelacije uspostavljanjem analogije između konstelacionih tačaka i reprezentacionih nivoa deo po deo uniformne kompadding kvantizacije zasnovane na μ zakonu kompresije.

U poređenju sa projektovanjem PAM konstelacije u [45], gde geometrijsko i probabilističko oblikovanje konstelacije određuje amplituda maskimalnog otperećenja, projektovanje PAM konstelacije zasnovano na kompadding tehnici sa kvazilogaritamskom kompresorskom karakteristikom pruža više slobode pri dizajniranju konstelacije. Zapravo,

pored amplitude maksimalnog opterećenja postojanje i parametara kompresije μ omogućava sofisticiranije geometrijsko i probabilističko oblikovanje PAM konstelacije.

Projektovanje PAM konstelacije u ovom poglavlju smo realizovali podelom skupa konstelacionih tačaka na podskupove, za koje važi pravilo da u okviru jednog podskupa rastojanje između susednih konstelacionih tačaka je isto, dok je ono različito za različite podskupove. Slično pravilo je primenjeno i za verovatnoću emitovanja konstelacionih tačaka. U okviru jednog podskupa verovatnoće konstelacionih tačaka su iste, dok su verovatnoće konstelacionih tačaka iz različitih podskupova različite. S obzirom na ovakav način projektovanja, uveli smo indeksiranje sa dva indeksa: i, j , gde indeks j označava j -tu konstelacionu tačku u okviru podskupa i . U vezi sa tim, konstelaciona tačka je definisana uređenim parom $\{a_{i,j}, P_i = P(a_{i,j})\}$, $i = 1, \dots, L$, $j = -M/(2L)+1, \dots, 0, 1, \dots, M/(2L)$, gde $a_{i,j}$ predstavlja amplitudu ili koordinatu konstelacione tačke u jednodimenzionalnom prostoru, $P_i = P(a_{i,j})$ predstavlja verovatnoću emitovanja konstelacione tačke, M je ukupan broj konstelacionih tačaka i L je ukupan broj podskupova u konstelaciji. Pored toga, pretpostavili smo da je broj konstelacionih tačaka u okviru podskupova jednak M/L . Postojanje simetrije u raspodeli konstelacionih tačaka omogućava da fokus bude na određivanju konstelacionih tačaka na pozitivnom delu realne x ose, $i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, M/(2L)$.

Sada možemo započeti projektovanje PAM konstelacije uspostavljanjem analogije između konstelacionih tačaka PAM konstelacije i reprezentacionih nivoa deo po deo uniformne kompanding skalarne kvantizacije. Kako dobitak u efikasnosti po snazi proizilazi iz Maxwell-Boltzmann raspodele, odnosno Gausove raspodele uzorkovane u diskretnim amplitudama i potom normalizovane [28], pretpostavićemo da amplitude na ulazu skalarnog kompanding kvantizera imaju Gausovu funkciju gustine verovatnoće čija je srednja vrednost jednaka nuli i varijansa jednaka jedinici [35], [36], [38]-[40], [44], [45].

Deo po deo uniformni kompanding kvantizer koji koristimo za projektovanje PAM konstelacije dobijen je linearizacijom kvazilogaritamske kompresorske karakteristike [58]:

$$c(x) = \frac{x_{\max}}{\ln(1 + \mu)} \ln \left(1 + \mu \frac{|x|}{x_{\max}} \right) \operatorname{sgn}(x), \quad |x| \leq x_{\max}. \quad (4.1.1)$$

U jednačini (4.1.1) μ predstavlja faktor kompresije kvazilogaritamske kompresorske karakteristike, x_{\max} označava amplitudu maksimalnog opterećenja kvantizera. Pretpostavimo da je L ukupan broj segmenata deo po deo linearne kompresorske karakteristike i da su granice segmenata označene sa t_i , $i = 1, 2, \dots, L+1$. Onda je i -ti segment definisan na intervalu $[-t_{i+1}, -t_i) \cup [t_i, t_{i+1})$. Linearizacija kompresorske karakteristike je izvedena tako da se

nelinearna i deo po deo linearna kompresorska karakteristika poklapaju u granicama segmenata [44], [45]. Zatim, ako pretpostavimo da je broj reprezentacionih nivoa u okviru segmenta isti, granice segmenata se mogu odrediti na sledeći način:

$$t_i = c^{-1} \left((i-1) \frac{x_{\max}}{L} \right) = \frac{x_{\max}}{\mu} \left[(1 + \mu)^{\frac{1}{L}(i-1)} - 1 \right], i = 1, \dots, L + 1. \quad (4.1.2)$$

Odnosno, reprezentacione nivoe za koje smo pretpostavili da su uniformno raspoređeni u okviru segmenata, odredićemo sa:

$$a_{i,j} = \frac{2L}{M} \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) t_{i+1} - \left(j - \frac{3}{2} \right) t_i \right], i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, \frac{M}{2L} \quad (4.1.3)$$

Na osnovu uspostavljene analogije između reprezentacionih nivoa i konstelacionih tačaka, amplitude konstelacionih tačaka smo odredili definisanjem reprezentacionih nivoa deo po deo uniformnog kompadding kvantizera pomoću jednačina (4.1.2) i (4.1.3).

Drugi ključni parametar konstelacije, verovatnoća emitovanja konstelacionih tačaka, biće određen specificiranjem verovatnoće reprezentacionih nivoa. Verovatnoća da amplituda sa Gausovom funkcijom gustine verovatnoće pripada određenom segmentu je obrađena u [44], [45]. Prateći analogiju i pretpostavku da su konstelacione tačke jednakoverovatne u okviru jednog podskupa, definisana je verovatnoća konstelacionih tačaka:

$$P(a_{i,j}) = \frac{P(t_i \leq x \leq t_{i+1})}{M/(2L)} = \frac{L}{M} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{t_i}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{t_{i+1}}{\sqrt{2}} \right) \right] \quad (4.1.4)$$

gde je $\operatorname{erfc}(\cdot)$ već pomenuta komplementarna funkcija greške.

Za simetrične deo po deo uniformne PAM konstelacije, po ugledu na jednačinu (2.1.3), srednja energija po simbolu je:

$$E_s = \overline{a^2} = 2 \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{M/(2L)} a_{i,j}^2 P(a_{i,j}). \quad (4.1.5)$$

Odnosno, odnos signal-šum po bitu (SNR) u kanalu sa aditivnim belim Gausovim šumom (AWGN) je [1]:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{2\overline{a^2}}{N_0 \log_2 M} \quad (4.1.6)$$

gde je $N_0/2$ spektralna gustina snage u kanalu sa aditivnim belim Gausovim šumom.

Kako MAP kriterijum minimizuje verovatnoću greške [1], [57], [61], razmatraćemo MAP detekciju signala. Prema izloženom izvođenju u drugom poglavlju disertacije, odnosno na osnovu relacija (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5), odredićemo granice odlučivanja na pozitivnom

delu realne ose $m_{i,j}$, $i = 1, \dots, L$, $j = 1, \dots, M/(2L)+1$, gde je $m_{1,1} = 0$, $m_{L,N/(2L)+1} = +\infty$, $m_{i,N/(2L)+1} = m_{i+1,1}$, i

$$m_{i,j} = \frac{a_{i,j} + a_{i,j-1}}{2}, \quad i = 1, \dots, L, j = 2, \dots, \frac{M}{2L},$$

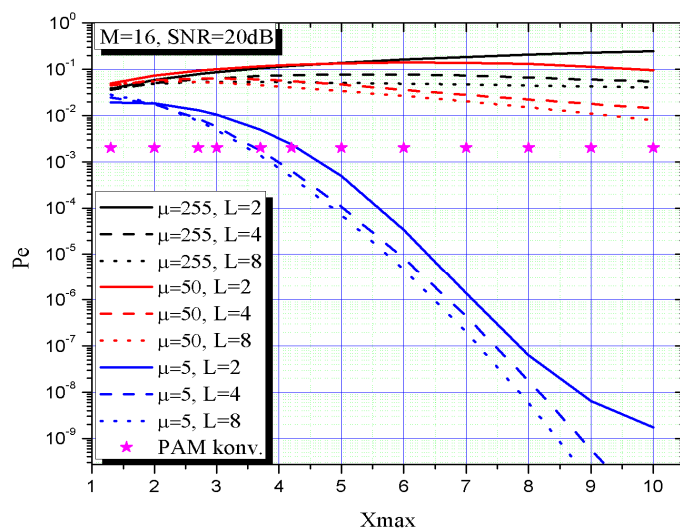
$$m_{i,j} = \frac{a_{i,1} + a_{i-1,M/(2L)}}{2} + \frac{N_0}{2(a_{i,1} - a_{i-1,M/(2L)})} \ln \frac{P_{i-1}}{P_i}, i = 2, \dots, L. \quad (4.1.7)$$

Jednačinama (4.1.3), (4.1.4) i (4.1.7) definisani su svi potrebni elementi za procenu verovatnoće greške PAM konstelacije u kanalu sa aditivnim belim Gausovim šumom. Referencirajući se na formulacije iz drugog poglavlja ove disertacije (2.3.1) i (2.3.2), izraz za verovatnoću greške po simbolu možemo zapisati na sledeći način:

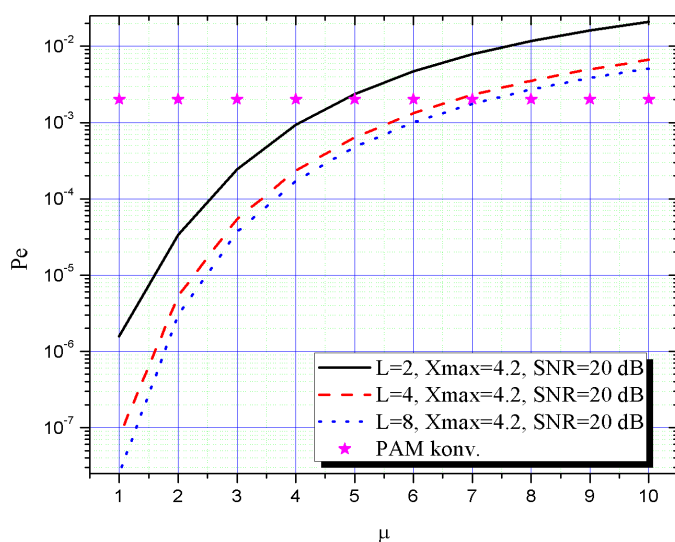
$$P_e = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{M/(2L)} P(a_{i,j}) \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{a_{i,j} - m_{i,j}}{\sqrt{N_0}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{m_{i,j+1} - a_{i,j}}{\sqrt{N_0}} \right) \right] \quad (4.1.8)$$

Kako smo definisali sve potrebne analitičke relacije, možemo nastaviti istraživanje o uticaju parametra kompresije μ na performanse PAM konstelacije. Analizu započinjemo slikom 4.1.1 na kojoj je za 16-PAM konstelaciju ($M = 16$), različit broj podskupova L i različite vrednosti parametra kompresije μ prikazana zavisnost verovatnoće greške po simbolu od parametra x_{\max} . Ova zavisnost je takođe prikazana i za referentnu, konvencionalnu 16-PAM konstelaciju. Na osnovu slike 4.1.1 možemo da zaključimo da za sve vrednosti L i vrednosti parametra kompresije μ u opsegu od 50 do 255, PAM konstelacije imaju dosta slabije performanse u odnosu na konvencionalnu PAM konstelaciju. Za x_{\max} u opsegu od 1 do 4, 16-PAM konstelacije koje imaju vrednost parametra $\mu = 5$, takođe imaju slabije performanse u odnosu na referentnu PAM konstelaciju. Međutim, na x_{\max} intervalu vrednosti $4 \leq x_{\max} \leq 10$, verovatnoća greške po simbolu se smanjuje kako se vrednost x_{\max} povećava, pri čemu performanse predloženih konstelacija prevazilaze performanse tradicionalne 16-PAM konstelacije.

Dalju analizu smo usmerili na posmatranje ponašanja zavisnosti verovatnoće greške po simbolu od μ za datu vrednost x_{\max} i različit broj podskupova L , što je prikazano na slici 4.1.2. Sa slike 4.1.2 se može primetiti da u poređenju sa konvencionalnom PAM konstelacijom, za $x_{\max} = 4.2$, konstelacije koje imaju vrednost parametra μ manju od 5 su superiornije u pogledu verovatnoće greške po simbolu. Bitno je naglasiti da PAM konstelacija projektovana za $\mu = 1$ postiže najbolje rezultate. Sa ove slike se takođe može zaključiti da se verovatnoća greške po simbolu smanjuje sa povećanjem broja podskupa, pri čemu se porast dobitka smanjuje sa povećanjem broja L .

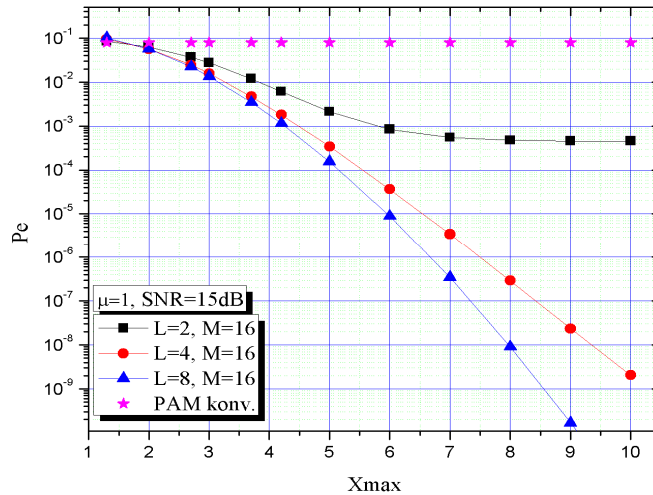


Slika 4.1.1. Za $M = 16$, $\mu = 5, 50, 255$, $\text{SNR} = 20$ dB i različit broj podskupova L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max}



Slika 4.1.2. Za $M = 16$, $x_{\max} = 4.2$, $\text{SNR} = 20$ dB i različit broj podskupova L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od μ

Na slici 4.1.3 je prikazana verovatnoća greške po simbolu (P_e) u zavisnosti od x_{\max} za 16-PAM konstelacije za vrednost parametra kompresije $\mu = 1$ i različit broj podskupova L . Sa slike se može zaključiti da se dobitak u efikasnosti po snazi značajno povećava sa porastom x_{\max} vrednosti.



Slika 4.1.3. Za $M = 16, \mu = 5, 50, 255, \text{SNR} = 20 \text{ dB}$ i različit broj podskupova L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max}

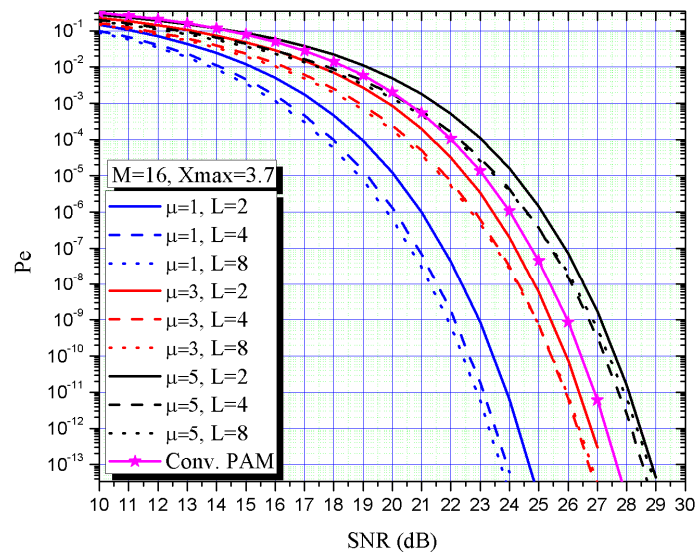
Međutim, nedostatak koji se javlja usled povećanja x_{\max} su veoma male vrednosti verovatnoća emitovanja konstelacionih tačaka kod ovakvih PAM konstelacija. Kako bi vrednost verovatnoća konstelacionih tačaka bila relevantna za prenos kroz komunikacioni kanal, potrebno je ograničiti x_{\max} vrednosti u skladu sa tim. Ukoliko pretpostavimo da je kriterijum minimalne verovatnoće konstelacionih tačaka $P(a_{i,j})_{\min} = 10^{-3}$, vrednosti amplitude maksimalnog opterećenja x_{\max} određene tako da zadovoljavaju ovaj kriterijum, za PAM konstelacije sa $M = 16, 32, 64$ nivoa su prikazane u tabeli 4.1.1.

Tabela 4.1.1. Vrednosti x_{\max} za $P(a_{i,j})_{\min} = 10^{-3}$

M	x_{\max}^{odr}				
	$L=2$	$L=4$	$L=8$	$L=16$	$L=32$
16	6	4.2	3.7	×	×
32	5	3.7	3	3	×
64	5	3	3	3	3

Na slici 4.1.4 prikazana je verovatnoća greške po simbolu P_e u zavisnosti od SNR za 16-PAM konstelacije. Ono što smo primetili u prethodnim koracima istraživanja uočava se i na slici 4.1.4. Verovatnoća greške po simbolu, a samim tim i efikasnost po snazi se može poboljšati smanjujući vrednost parametra μ i povećavajući L . Takođe, primetno je da PAM konstelacija projektovana za $\mu = 1$ prevazilazi tradicionalnu PAM konstelaciju kao i ostale prikazane konstelacije u celom opsegu signal-šum i za sve vrednosti L . U cilju kvantifikovanja postignutog dobitka u energetske efikasnosti, u tabeli 4.1.2, za referentnu tradicionalnu PAM konstelaciju i predložene PAM konstelacije, prikazane su potrebne

vrednosti SNR za zadatu verovatnoću greške po simbolu. Za postizanje verovatnoće greške po simbolu od 10^{-6} , 16-PAM konstelacija sa $\mu = 1$ i $L = 8$ zahteva vrednost odnosa signal-šum od 19.8 dB, dok je kod konvencionalne 16-PAM konstelacije potrebna vrednost SNR-a od 24 dB. Drugim rečima, može se konstantovati da u poređenju sa tradicionalnom PAM konstelacijom, predložena PAM konstelacija sa $\mu = 1$ i $L = 8$ postiže dobitak u efikasnosti po snazi koji je jednak $\Delta\text{SNR} = 24 \text{ dB} - 19.8 \text{ dB} = 4.2 \text{ dB}$ za verovatnoću greške po simbolu od 10^{-6} . To znači da upotrebom predložene PAM konstelacije određene sa $\mu = 1$ i $L = 8$ može se postići značajna ušteda energije. Preciznije, ako je željni nivo verovatnoće greške po simbolu 10^{-6} , korisna snaga signala se može smanjiti više nego dvostruko, odnosno za $10^{4.2/10} = 2.63$ puta.



Slika 4.1.4. Za $M = 16$, i različite vrednosti μ i L , verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum

Tabela 4.1.2. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 16 PAM konstelacija sa različitim vrednostima μ i različitim vrednostima L (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

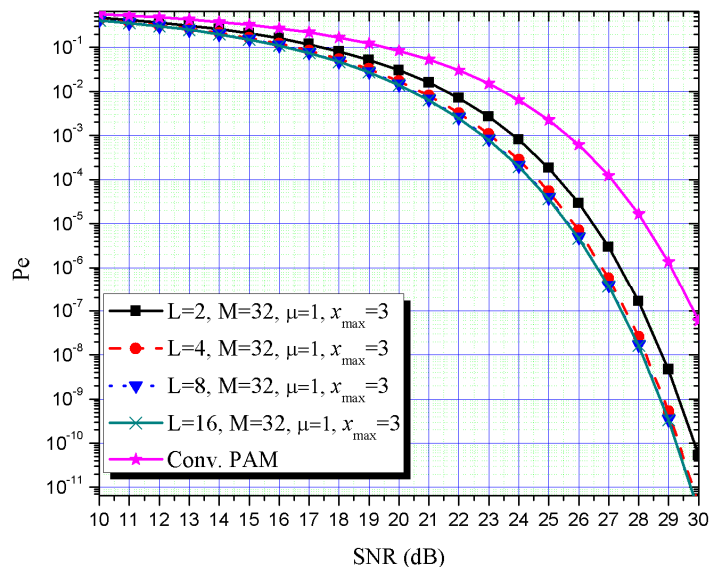
μ	L	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
1	2	3.7	10^{-6}	21	24	3
	4			20.1		3.9
	8			19.8		4.2
3	2			23.4		0.6
	4			22.8		1.2
	8			22.7		1.3
5	2			25.1		-1.1
	4			24.6		-0.6
	8			24.6		-0.6

Sa slike 4.1.4 i iz tabele 4.1.2 možemo izvesti sledeći zaključak. Za zadato μ , za vrednost ΔSNR dobijenu dupliranjem L -a (duplim povećanjem L -a) važi sledeća relacija: $\Delta\text{SNR}_{L=1}-\Delta\text{SNR}_{L=2} > \Delta\text{SNR}_{L=2}-\Delta\text{SNR}_{L=4} > \Delta\text{SNR}_{L=4}-\Delta\text{SNR}_{L=8}$. Na primer, kada je $\mu = 1$ važi: $\Delta\text{SNR}_{L=1}-\Delta\text{SNR}_{L=2} = 3$ dB, $\Delta\text{SNR}_{L=2}-\Delta\text{SNR}_{L=4} = 0.9$ dB, $\Delta\text{SNR}_{L=4}-\Delta\text{SNR}_{L=8} = 0.3$ dB. Zapravo, dobitak postignut duplim uvećanjem L -a se smanjuje sa povećanjem broja podskupova L . Pored toga, treba imati na umu da povećavajući L povećava se i kompleksnost konstelacije. Sve ovo ukazuje da treba da budemo oprezni kada povećavamo broj podskupova u konstelaciji.

Na slikama 4.1.5 i 4.1.6 je ilustrovan odnos između verovatnoće greške po simbolu i odnosa signal-šum kod 32-PAM i 64-PAM konstelacija, respektivno. Sa slike 4.1.5 i iz tabele 4.1.3 koja prikazuje rezultate u numeričkom zapisu, mogu se doneti slični zaključci kao kod 16-PAM konstelacije. Zapravo, za parametar kompresije $\mu = 1$ i vrednost $x_{\max} = 3$, 32-PAM konstelacije sa različitim brojem podskupova L , prevazilaze performanse konvencionalne 32-PAM konstelacije u celom opsegu odnosa signal-šum. Takođe možemo da primetimo da ostvareni dobitak dvostrukim povećanjem broja podskupova L , se smanjuje sa povećanjem L . Iz tabele 4.1.3 se može videti da za zadatu verovatnoću greške po simbolu od 10^{-6} , 32-PAM konstelacija sa $\mu = 1$ i $L = 16$ ostvaruje dobitak u odnosu na konvencionalnu 32-PAM konstelaciju u iznosu od 2.5 dB, što odgovara uštedi u snazi emitovanja signala od $10^{2.5/10} = 1.78$ puta.

Tabela 4.1.3. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 32-PAM konstelacija sa različitim vrednostima μ i različitim vrednostima L (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

$M = 32$						
μ	L	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
1	2	3	10^{-6}	27.4	29.1	1.7
	4			26.8		2.3
	8			26.62		2.48
	16			26.6		2.5



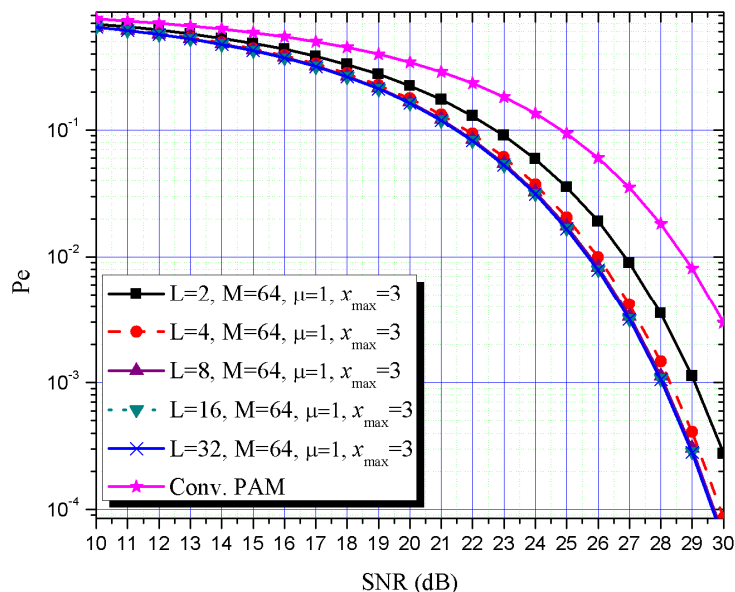
Slika 4.1.5. Za $M = 32$, $\mu = 1$ i različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum

Tabela 4.1.4. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 64-PAM konstelacija sa različitim vrednostima μ i različitim vrednostima L (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

$M = 64$						
μ	L	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
1	2	3	10^{-2}	26.85	28.75	1.9
	4			26		2.75
	8			25.75		3
	16			25.70		3.05
	32			25.65		3.10

Upoređujući rezultate prikazane na slikama 4.1.6, 4.1.5, 4.1.4 i u tabelama 4.1.4, 4.1.3, 4.1.2 možemo uočiti slično ponašanje P_e u funkciji od SNR kod 64-PAM konstelacije i ostalih PAM konstelacija za $M = 32$ i $M = 16$. Naime, 64-PAM konstelacije za $\mu = 1$, $x_{\max} = 3$ i različit broj L , nadmašuju konvencionalnu PAM konstelaciju u pogledu efikasnosti po snazi u celom opsegu SNR-a. Treba napomenuti da je za ostvarivanje verovatnoće greške od 10^{-2} sa 64-PAM konstelacijom projektovanom za $\mu = 1$, $x_{\max} = 3$ i $L = 8$ potrebno obezbediti odnos signal-šum u kanalu u vrednosti od 25.75 dB, čime se ostvaruje dobitak od 3 dB u odnosu na tradicionalnu PAM konstelaciju. Bitno je naglasiti i da se sa 64-PAM konstelacijama sa pomenutim vrednostima parametara μ i x_{\max} , dobitak ostvaren za vrednosti $L = 16$ i 32 povećava za svega 0.05 dB sa udvostručavanjem L -a (tabela 4.1.4). Ova činjenica

ukazuje na to da je potrebno pažljivo razmotriti pitanje kompromisa između strukturalne složenosti i energetske efikasnosti prilikom projektovanja konstelacije.



Slika 4.1.6. Za $M = 64$, $\mu = 1$ i različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum

U ovom delu istraživanja analizirali smo koje vrednosti parametra μ obezbeđuju poželjnu efikasnost po snazi. Pokazali smo da PAM konstelacije sa vrednostima parametara μ većim od 5 nisu efikasna rešenja u pogledu snage. S druge strane, PAM konstelacije sa vrednostima μ manjim od 5 nadmašuju konvencionalnu PAM konstelaciju u pogledu efikasnosti po snazi. U poređenju sa tradicionalnom PAM konstelacijom, dobitak u energetskej efikasnosti ide i do 4.2 dB za verovatnoću greške po simbolu 10^{-6} . To znači da je moguće smanjiti snagu signala za više od pola istovremeno zadržavajući istu vrednost P_e . Ako bi se kompleksnost konstelacije ograničila na dva podskupa, dobitak u efikasnosti po snazi je takođe značajan i iznosi i do 3 dB.

4.2 Projektovanje PAM konstelacije na osnovu analogije sa optimalnom kompandiranjem kvantizacijom

Shodno cilju istraživanja koji smo opisali u uvodnom delu ovog poglavlja, u ovom delu disertacije bavićemo se projektovanjem PAM konstelacije koja treba da nadmaši tradicionalnu PAM konstelaciju u efikasnosti po snazi, odnosno treba da bude jednostavnija u strukturalnoj

kompleksnosti u odnosu na PAM konstelaciju sa neekvidistantnim i nejednakoverovratnim konstelacionim tačkama. Projektovanje PAM konstelacije realizovaćemo geometrijskim i probablističkim oblikovanjem konstelacije. Zapravo, uspostavićemo analogiju između konstelacionih tačaka i reprezentacionih nivoa skalarnog kvantizera sa optimalnom kompresorskom karakteristikom čime ćemo realizovati geometrijsko i probablističko oblikovanje konstelacije.

Kako bi smanjili složenost konstelacije koja je posledica potpuno različitih verovatnoća konstelacionih tačaka, primenili smo ideju o podeli konstelacionih tačaka u manje podskupove u okviru kojih konstelacione tačke imaju istu verovatnoću emitovanja, dok je verovatnoća konstelacionih tačaka iz različitih podskupova različita. Ove zahteve realizujemo uspostavljanjem analogije između konstelacionih tačaka i reprezentacionih nivoa deo po deo uniformne skalarne kvantizacije koja je realizovana linearizacijom optimalne kompresorske karakteristike. Takođe, s obzirom da maksimizacija efiksanosti po snazi proizilazi iz diskretizovane Gausove raspodele verovatnoće konstelacionih tačaka, pretpostavićemo da amplitude koje se kvantuju imaju Gausovu funkciju gustine verovatnoće. Primena teorije kvantizacije u projektovanju konstelacije je korišćena u [38], [44], [56], [58], kao i u prvom delu ovog poglavlja. Za razliku od tih analiza, u analizi u ovom delu disertacije posvetili smo posebnu pažnju optimizaciji amplitude maksimalnog opterećenja kvantizera sa ciljem povećanja energetske efiksanosti konstelacije projektovane uspostavljanjem analogije sa kvantizacijom.

Kao što smo već pomenuli, pretpostavićemo da kod PAM konstelacije važi pravilo koje podrazumeva jednako rastojanje između susednih konstelacionih tačaka u okviru jednog podskupa, kao i pravilo da su verovatnoće emitovanja konstelacionih tačaka jednake u okviru jednog podskupa, dok su one različite za konstelacione tačke iz različitih podskupova. Zbog toga ćemo obeležavanje konstelacionih tačaka izvršiti na isti način kao u sekciji 4.1, gde indeks i određuje podskup konstelacionih tačaka, dok indeks j definiše određenu tačku u podskupu. Takođe ćemo pretpostaviti da je broj konstelacionih tačaka u podskupu jednak M/L , gde je M ukupan broj konstelacionih tačaka u konstelaciji i L broj podskupova. Konstelaciju sada možemo definisati pomoću uređenih parova $\{a_{i,j}, P_i = P(a_{i,j})\}$, $i = 1, \dots, L$, $j = -M/(2L)+1, \dots, 0, 1, \dots, M/(2L)$, gde je $a_{i,j}$ amplituda konstelacione tačke i $P(a_{i,j})$ verovatnoća emitovanja konstelacione tačke. Usled simetričnosti PAM konstelacije, u daljem istraživanju biće posmatrane konstelacione tačke na pozitivnom delu realne ose specificirane indeksima $i = 1, \dots, L$, $j = 1, \dots, M/(2L)$. Ovom prilikom je zgodno naglasti da postoje dva specijalna slučaja

gore definisane PAM konstelacije. Za $L = 1$, konstelacija predstavlja konstelaciju sa ekvidistantnim i jednakoverovratnim konstelacionim tačkama, odnosno uniformnu konstelaciju. Za $L = M/2$, konstelacija se sastoji od nejednakoverovratnih i neekvidistantnih konstelacionih tačaka, odnosno predstavlja neuniformnu konstelaciju.

Srednju energiju po simbolu ćemo izračunati primenom jednačine (4.1.5), odnosno za izračunavanje odnosa signal-šum koristićemo jednačinu (4.1.6). U kanalu sa aditivnim belim Gausovim šumom odmerak signala je degradiran jer je korisnom odmerku signala superponiran odmerak šuma n , koji ima nultu srednju vrednost i varijansu $\sigma_n^2 = N_0/2$. Tako se odmerak signala na prijemu može zapisati kao $r = a_{i,j} + n$, što dovodi do toga da odmerak r ima uslovnu Gausovu funkciju gustine verovatnoće, sa istom varijansom kao i šum, dok je srednja vrednost jednaka $a_{i,j}$ [1], [35]-[38], [42], [44]:

$$p(r|a_{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left\{-\frac{(r - a_{i,j})^2}{2\sigma_n^2}\right\}, -\infty < r < \infty \quad (4.2.1)$$

S obzirom na superiornost MAP kriterijuma u odnosu na ML kriterijum u pogledu verovatnoće greške, na prijemu ćemo koristiti MAP kriterijum odlučivanja. Stoga, za granice odlučivanja u pozitivnom delu PAM konstelacije važi: $m_{i,j}$, $i = 1, \dots, L$, $j = 1, \dots, M/(2L)+1$, gde je $m_{1,1} = 0$, $m_{L,N/(2L)+1} = +\infty$, $m_{i,N/(2L)+1} = m_{i+1,1}$, i relacija (4.1.7).

Sada imamo sve neophodne elemente za određivanje energetske efikasnosti konstelacije, zapravo, možemo izvesti formulu za određivanje verovatnoće greške po simbolu [1], [35]-[38], [42], [44]:

$$P_e = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{M/(2L)} P(a_{i,j}) \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{a_{i,j} - m_{i,j}}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{m_{i,j+1} - a_{i,j}}{\sqrt{2}\sigma_n}\right) \right]. \quad (4.2.2)$$

Konačno, da bismo i proračunali verovatnoću greške po simbolu potrebno je da odredimo konstelacione tačke, tj. njihove amplitude i verovatnoće. U tom cilju, slično kao u sekciji 4.1, uspostavljamo analogiju sa deo po deo linearnom komandning skalarnom kvantizacijom amplituda sa Gausovom funkcijom gustine verovatnoće, nulte srednje vrednosti i jedinične varijanse [38],[44]:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}, -\infty < x < \infty, \quad (4.2.3)$$

pri čemu, za razliku od sekcije 4.1 gde je linearizovana kvazilogaritamska kompresorska karakteristika, u ovoj sekciji je deo po deo linearni komandor dobijen linearizacijom optimalne kompresorske karakteristike za Gausov izvor [58]:

$$c(x) = x_{\max} \frac{1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{\sqrt{6}}\right)}{1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x_{\max}}{\sqrt{6}}\right)} \operatorname{sgn}(x). \quad (4.2.4)$$

Karakteristika kompresije je definisana na intervalu $c(x): [-x_{\max}, x_{\max}] \rightarrow [-x_{\max}, x_{\max}]$, gde već pomenuti parametar x_{\max} predstavlja amplitudu maksimalnog opterećenja kvantizera.

Kao i u prethodnim delovima ove doktorske disertacije, sa L ćemo označiti broj segmenata deo po deo linearne kompresorske karakteristike, sa t_i , $i = 1, 2, \dots, L+1$, $t_1 = 0$ i $t_{L+1} = +\infty$ ćemo označiti granice segmenata za pozitivni opseg vrednosti, gde je i -ti segment definisan na intervalu $[-t_{i+1}, -t_i) \cup [t_i, t_{i+1})$. Linearizacija kompresorske karakteristike je urađena na takav način da linearizovana karakteristika i nelinearizovana kompresorska karakteristika imaju jednake vrednosti u graničnim tačkama između segmenata. Kako je broj reprezentacionih nivoa u okviru segmenta isti, granice segmenta ćemo definisati na sledeći način:

$$c(t_i) = (i - 1) \frac{x_{\max}}{L}, \quad i = 1, \dots, L + 1. \quad (4.2.5)$$

Rešavanjem jednačine (4.2.5) po t_i dolazimo do izraza za granice segmenata:

$$t_i = c^{-1}\left((i - 1) \frac{x_{\max}}{L}\right), \quad i = 1, \dots, L + 1. \quad (4.2.6)$$

Sada možemo da definišemo širinu segmenta na pozitivnom delu realne ose $wd_i = t_{i+1} - t_i$. Takođe treba uzeti u obzir da je broj reprezentacionih nivoa u okviru segmenta M/L , tako da reprezentacioni nivoi mogu biti definisani na sledeći način:

$$a_{i,j} = t_i + \left(j - \frac{1}{2}\right) d_i, \quad i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, \frac{M}{2L}, \quad (4.2.7)$$

gde je

$$d_i = \frac{wd_i}{M/(2L)} = \frac{2L}{M} (t_{i+1} - t_i), \quad i = 1, \dots, L. \quad (4.2.8)$$

Na osnovu uspostvaljene analogije između reprezentacionih nivoa deo po deo linearnog komandora i konstelacionih tačaka deo po deo uniformne PAM konstelacije, jednačinama (4.2.7) i (4.2.8) zapravo su definisane amplitude konstelacionih tačaka. Sada je potrebno definisati drugi ključni parametar konstelacije, a to je, kao što znamo, verovatnoća emitovanja konstelacionih tačaka. Ovaj parametar ćemo odrediti definisanjem verovatnoće reprezentacionih nivoa. Prvo ćemo definisati verovatnoću da amplituda sa Gausovom funkcijom gustine verovatnoće pripada određenom segmentu [58]:

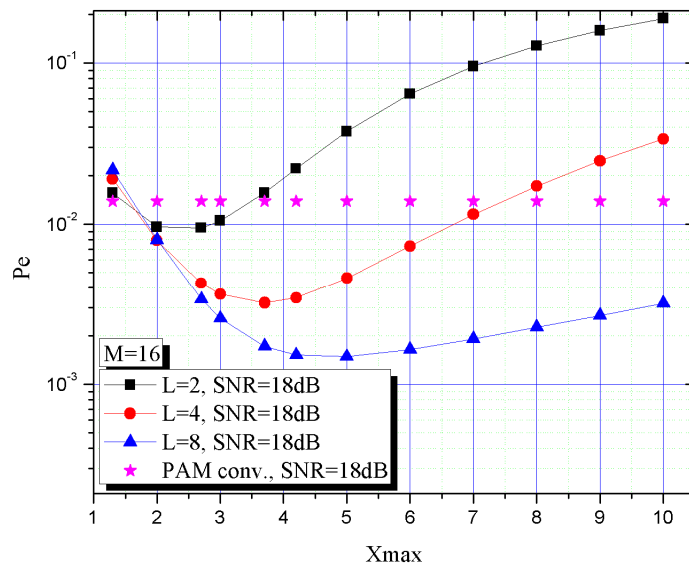
$$\begin{aligned}
P(t_i \leq x \leq t_{i+1}) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} p(x) dx = \\
&= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{t_i}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{t_{i+1}}{\sqrt{2}} \right) \right], i = 1, \dots, L.
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Nakon toga, prateći analogiju i pretpostavku o jednakoj verovatnoći konstelacionih tačaka u okviru podskupa, definišemo verovatnoću konstelacionih tačaka na sledeći način:

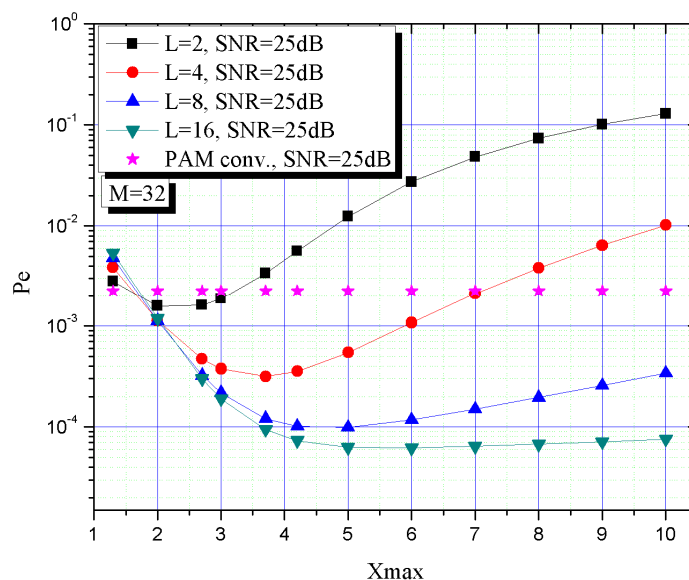
$$P(a_{i,j}) = \frac{P(t_i \leq x \leq t_{i+1})}{M/(2L)} = \frac{L}{M} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{t_i}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erfc} \left(\frac{t_{i+1}}{\sqrt{2}} \right) \right]. \tag{4.2.10}$$

U nastavku ćemo prikazati i objasniti numeričke rezultate. Analizu ćemo započeti slikom 4.2.1 na kojoj je za 16-PAM konstelaciju i različit broj podskupova L , prikazana verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max} . Ova zavisnost je takođe prikazana i za referentnu konstelaciju, odnosno tradicionalnu 16-PAM konstelaciju. Sa slike možemo primetiti da u poređenju sa konvencionalnom PAM konstelacijom, za vrednosti x_{\max} oko 1, sve predložene konstelacije imaju manju efikasnost po snazi budući da ostvaruju veću verovatnoću greške za dati odnos signal-šum. Sa druge strane, za vrednosti x_{\max} između 2 i 3 konstelacija sa $L = 2$ ima veću efikasnost po snazi u odnosu na konvencionalnu PAM konstelaciju, ali je njena efikasnost po snazi manja u odnosu na konstelacije sa $L = 4$ i $L = 8$. Za vrednosti x_{\max} veće od 4, konstelacija sa $L = 2$ ima veoma loše performanse. PAM konstelacija sa $L = 4$, za opseg $2 \leq x_{\max} \leq 7$, ima verovatnoću greške koja je manja u odnosu na referentnu konstelaciju. Za vrednosti x_{\max} veće od 2, najkompleksnija konstelacija sa $L = 8$ ima najbolje performanse u poređenju sa svim ostalim konstelacijama.

Na sličan način smo proučili i 32-PAM konstelaciju. Rezultate koje smo dobili prikazali smo na slici 4.2.2. Sa slike 4.2.2 možemo zaključiti da su relacije između performansi konstelacija sa $L = 2, 4, 8, 16$ i referentne 32-PAM konstelacije slične kao i u prethodno predstavljenim opservacijama za 16-PAM. Konstelacija sa 16 podskupova ima najmanju verovatnoću greške, odnosno najveću efikasnost po snazi, ali strukturalna kompleksnost konstelacije je takođe najveća. Pri tome, ostvareni dobitak u pogledu efikasnosti po snazi konstelacija između konstelacije sa $L = 16$ i konstelacije sa $L = 8$ je daleko manji u odnosu na dobitak ostvaren između konstelacija sa $L = 8$ i $L = 4$.



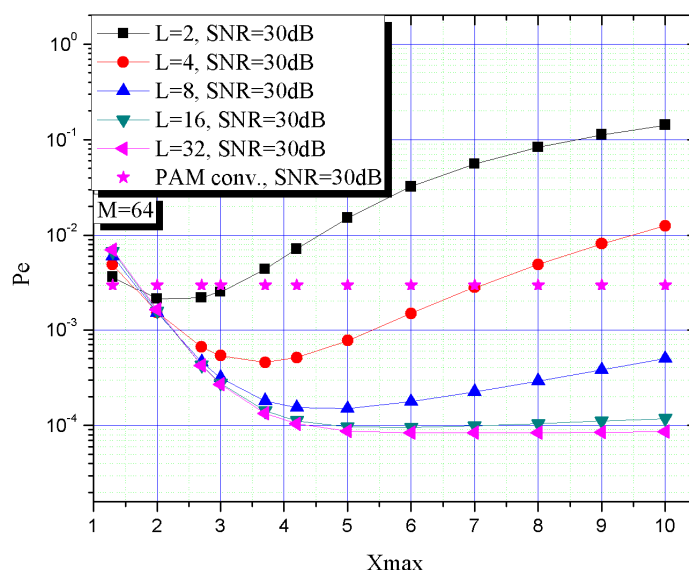
Slika 4.2.1. Za $M = 16$, SNR = 18 dB, za različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max}



Slika 4.2.2. Za $M = 32$, SNR = 25 dB, za različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{\max}

Rezultati za 64-PAM su prikazani na slici 4.2.3. Verovatnoće greške u funkciji od x_{\max} imaju slično ponašanje kao i na slikama 4.2.1 i 4.2.2. Kao što je očekivano, 64-PAM sa $L = 32$ ima najmanju verovatnoću greške, ali veoma približnu vrednosti P_e koju ima konstelacija sa $L = 16$. Drugim rečima, sa konstelacijom koju karakteriše $L = 32$ ostvareni

dobitak u pogledu verovatnoće greške u odnosu na konstelaciju sa $L = 16$ je najmanji, dok je strukturalna kompleksnost konstelacije najveća.



Slika 4.2.3. Za $M = 64$, $SNR = 30$ dB, za različite vrednosti L , verovatnoća greške po simbolu u zavisnosti od x_{max}

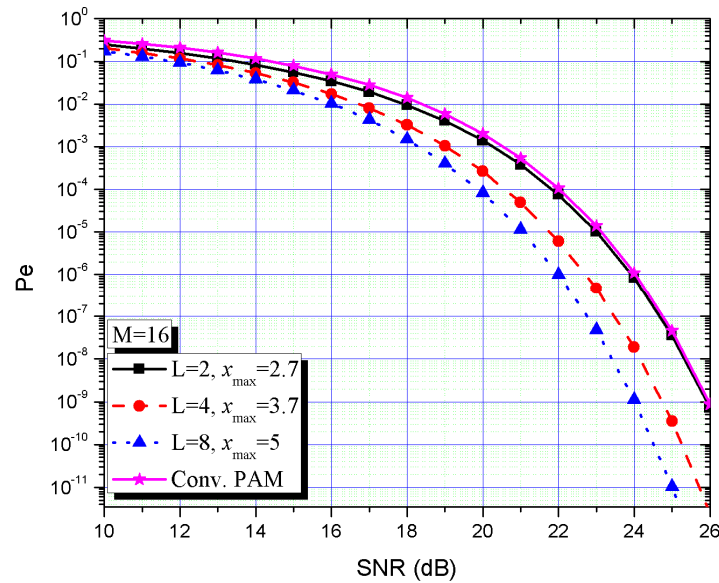
Optimalne vrednosti parametra x_{max} za 16, 32, 64-PAM konstelacije su predstavljene u tabeli 4.2.1. Na osnovu ovih rezultata dolazimo do zaključka da za vrednosti $L = 4, 8$ i 16 , vrednosti za x_{max}^{opt} su iste za sve vrednosti M . Odnosno, zapažamo da x_{max}^{opt} zavisi od broja podskupova u konstelaciji, ali ne i od ukupnog broja konstelacionih tačaka M .

Tabela 4.2.1. Optimalne vrednosti x_{max} za 16-PAM, 32-PAM, 64-PAM i različit broj podskupova

M	x_{max}^{opt}				
	$L=2$	$L=4$	$L=8$	$L=16$	$L=32$
16	2.7	3.7	5	×	×
32	2	3.7	5	6	×
64	2	3.7	5	6	7

Za različite 16-PAM konstelacije i odgovorajuće optimalne vrednosti x_{max} , verovatnoća greške po simbolu u funkciji SNR-a je prikazana na slici 4.2.4. Sa slike 4.2.4 se može zaključiti da, osim 16-PAM sa $L = 2$, konstelacije sa $L = 4$ i $L = 8$ su superiornije u pogledu energetske efikasnosti u odnosu na tradicionalni 16-PAM. Kvantifikacija postignutog dobitka u efikasnosti po snazi za 16-PAM je prikazana u tabeli 4.2.2. Primetno je da za postizanje

verovatnoće greške po simbolu od 10^{-6} , 16-PAM konstelacija za $x_{\max}^{\text{opt}} = 5$ i $L = 8$, zahteva najnižu vrednost odnos signal-šum jednaku 22 dB, dok je kod tradicionalne 16-PAM konstelacije potrebna vrednost SNR = 24 dB. Drugim rečima, primenom predložene konstelacije postiže se dobitak u efikasnosti po snazi koji je jednak $\Delta\text{SNR} = 24 \text{ dB} - 22 \text{ dB} = 2 \text{ dB}$.



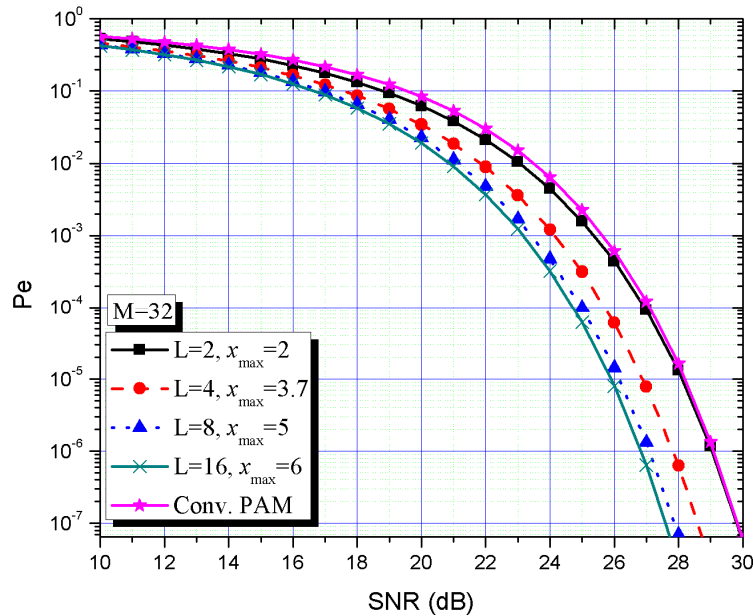
Slika 4.2.4. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum kod različitih 16-PAM konstelacija

Tabela 4.2.2. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 16-PAM konstelacija sa optimalnim vrednostima x_{\max} i različitim vrednostima L (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

$M = 16$					
L	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
2	2.7	10^{-6}	23.92	24	0.1
4	3.7		22.70		1.3
8	5		22		2

Efikasnost po snazi 32-PAM konstelacije, odnosno vrednost odnosa signal-šum za zadatu verovatnoću greške od 10^{-6} smo prikazali u tabeli 4.2.3. Na slici 4.2.5 smo prikazali funkcionalnu zavisnost verovatnoće greške od odnosa signal-šum. Na slici 4.2.5 možemo uočiti slično ponašanje verovatnoće greške kao i kod prethodno opisanih 16-PAM konstelacija. Naime, 32-PAM konstelacija sa dva podskupa postiže neznatno bolje performanse u odnosu na konvencionalni PAM, dok su 32-PAM konstelacije sa 4, 8 i 16

podskupa dosta bolje od referentne konstelacije. Takođe možemo da uočimo da se ostvareni dobitak sa povećanjem broja segmenata/podskupova smanjuje. Zapravo, numerički kvantifikovano (tabela 4.2.3), za postizanje verovatnoće greške od 10^{-6} , 32-PAM konstelaciji sa $x_{\max}^{\text{opt}} = 6$ i $L = 16$ je potreban SNR od 26.82 dB, čime se ostvaruje dobitak od 2.28 dB u odnosu na konvencionalni PAM.



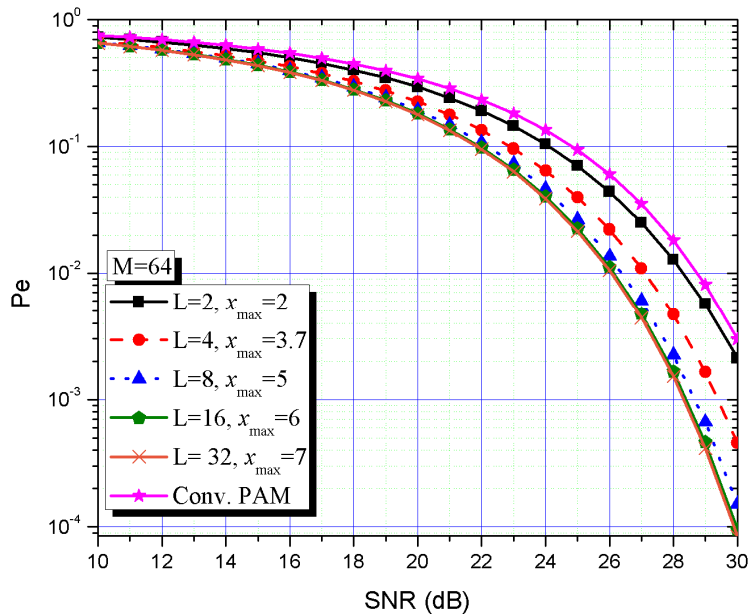
Slika 4.2.5. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum za različite 32-PAM konstelacije

Tabela 4.2.3. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 32-PAM konstelacije sa optimalnim vrednostima x_{\max} i različitim vrednostima L (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

$M = 32$					
L	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
2	2	10^{-6}	29.05	29.1	0.05
4	3.7		27.82		1.28
8	5		27.10		2
16	6		26.82		2.28

Na slici 4.2.6 i u tabeli 4.2.4 su prikazani rezultati za 64-PAM konstelacije. Posmatranjem slike 4.2.6 možemo da uočimo da sve 64-PAM konstelacije projektovane na predloženi način prevazilaze performanse konvencionalne PAM konstelacije. Iz tabele 4.2.4. se vidi da za zadatu verovatnoću greške, najveći ostvareni dobitak u odnosu na tradicionalnu PAM konstelaciju iznosi 2.7 dB. Važno je napomenuti da se porast dobitka smanjuje sa povećanjem L -a. Primera radi, za 64-PAM konstelacije sa $L = 8, 16, 32$ ostvareni dobitci

redom su 2.37 dB, 2.64 dB, 2.7 dB, što pokazuje da sa udvostučavanjem broja podskupa u konstelaciji dobija se povoljnija efikasnost po snazi za 0.27 dB kada poredimo konstelacije sa $L = 8$ i $L = 16$, odnosno za 0.06 dB kada poredimo konstelacije sa $L = 16$ i $L = 32$. S obzirom na ove činjenice, potrebno je napraviti kompromis između strukturalne kompleksnosti i efikasnosti po snazi PAM konstelacije.



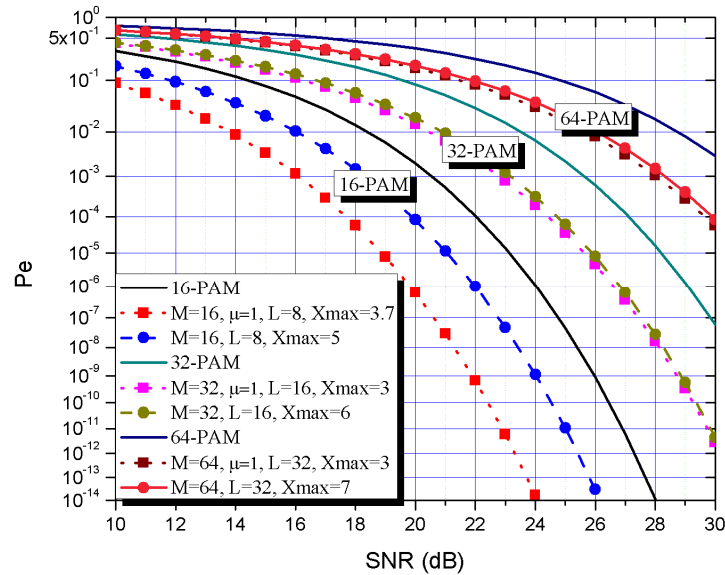
Slika 4.2.6. Verovatnoća greške po simbolu u funkciji odnosa signal-šum kod različitih 64-PAM konstelacija

Tabela 4.2.4. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 64-PAM konstelacija sa optimalnim vrednostima x_{\max} i različitim vrednostima L (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

$M = 64$					
L	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
2	2	10^{-2}	28.3	28.75	0.45
4	3.7		27.1		1.65
8	5		26.38		2.37
16	6		26.11		2.64
32	7		26.05		2.7

Sa ciljem da se postigne bolja efikasnost PAM konstelacije po snazi u odnosu na referentnu tradicionalnu PAM konstelaciju i manja strukturalna kompleksnost u odnosu na PAM konstelaciju sa neuniformnim rastojanjem između konstelacionih tačaka i nejednakim verovatnoćama emitovanja konstelacionih tačaka, u ovom poglavlju doktorske disertacije projektovana je deo po deo uniformna PAM konstelacija u pogledu rastojanja susednih konstelacionih tačaka i verovatnoća konstelacionih tačaka. Jedan od problema u ovom istraživanju je bio određivanje optimalne vrednosti parametra x_{\max} po pitanju verovatnoće greške, odnosno energetske efikasnosti. Prikazano je da optimalne vrednosti parametra x_{\max} zavise od broja podskupova L , ali ne i od odnosa signal-šum SNR i ukupnog broja konstelacionih tačaka M . Dobijeni rezultati takođe pokazuju da sa povećanjem broja podskupova, verovatnoća greške po simbolu se smanjuje. Sa druge strane, povećanjem broja podskupova strukturalna kompleksnost konstelacije raste. Pored toga, porast dobitka u efikasnosti po snazi se smanjuje sa povećanjem broja podskupova. Na osnovu ovoga može se zaključiti da pažljivo treba birati parametre PAM konstelacije.

Pored opisanih performansi PAM konstelacija projektovanih uključujući linearizaciju optimalne kompresorske karakteristike, u ovom delu disertacije smo uporedili najbolje PAM konstelacije u pogledu efikasnosti po snazi koje su oblikovane vršeći linearizaciju kvazilogaritamske i već pomenute optimalne kompresorske karakteristike. Zaključci komparativne analize se mogu izvesti na osnovu slike 4.2.7. Sve predložene PAM konstelacije prevazilaze performanse referentnih konvencionalnih PAM konstelacija za $M = 16, 32, 64$. Pored toga može se videti da su konstelacije projektovane na osnovu analogije sa kvazilogaritamskom kompadding kvantizacijom bolje u pogledu energetske efikasnosti u odnosu na PAM konstelacije projektovane na osnovu analogije sa optimalnom kompadding kvantizacijom, s tim da je dobitak za konstelacije sa $M = 16$ značajniji u odnosu na dobitke ostvarene za konstelacije sa $M = 32, 64$. Odnosno, izraženo numerički, za zadatu verovatnoću greške od 10^{-6} , dobitci za $M = 16, 32$ su 2.2 dB, 0.22 dB, respektivno, dok za verovatnoću greške od 10^{-2} i $M = 64$, dobitak iznosi 0.4 dB.



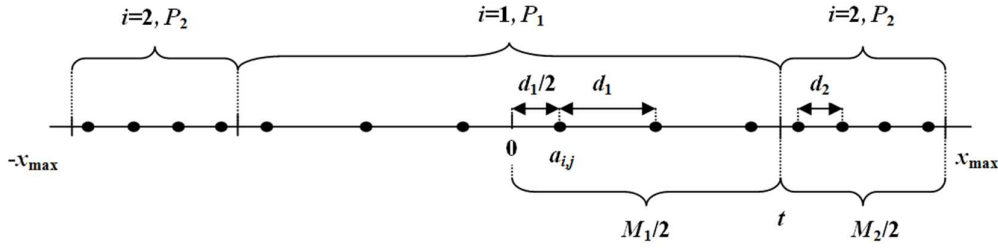
Slika 4.2.7. Komparativna analiza PAM konstelacija projektovanih na osnovu analogije sa optimalnom i kvazilogaritamskom komandning kvantizacijom

4.3 Optimizacija deo po deo uniformne PAM konstelacije sa dva podskupa

Jednodimenzionalne konstelacije, kao što je PAM konstelacija, ne ostavljaju mnogo prostora za modifikaciju [62]. To znači da poboljšanje performansi PAM konstelacija predstavlja istraživački izazov. Da bismo odgovorili ovom izazovu, koristićemo prednosti neuniformnih konstelacija signala. Pored toga, kao i u prethodnim poglavljima ove disertacije, proučavaćemo projektovanje konstelacija uspostavljanjem analogije između konstelacionih tačaka i reprezentacionih nivoa kvantizera. Kod kvantizacije visoke rezolucije, jedan od načina za definisanje reprezentacionih nivoa je pomoću inverzne kompresorske karakteristike [44]. U stvari, princip komandovanja u kvantizaciji omogućava određivanje neuniformnih reprezentacionih nivoa iz uslova da ih kompresorska karakteristika preslikava u ekvidistantne nivoe. Inspirisani ovom pogodnom karakteristikom komandning tehnike, u ovom delu disertacije formulišaćemo novu metodu projektovanja konstelacije. Slično kao u sekciji 4.2, i u ovoj sekciji razmatraćemo optimalnu kompresorsku karakteristiku za Gausov izvor [38], [45], [58]. Odlučili smo se za ovu kompresorsku karakteristiku iz razloga što tada verovatnoće reprezentacionih nivoa aproksimiraju Gausovu raspodelu, što je poželjna

karakteristika konstelacionih tačaka [63]. Međutim, nakon pažljivog proučavanja konstelacija dobijenih na ovakav način uočili smo neke nedostatke. Zapravo, gustina konstelacionih tačaka je veća u oblasti gde je verovatnoća konstelacionih tačaka veća i obrnuto. Sa stanovišta kvantizacije i distorzije, ovo je poželjna karakteristika. Međutim, sa stanovišta modulacije i verovatnoće greške, zahtevi u pogledu prostornog rasporeda i verovatnoće konstelacionih tačaka su obrnuti. Da bismo prevazišli ovaj nedostatak, uspostavićemo analogiju sa modelom inverznim sa kompadding kvantizacijom. Tako ćemo postići da se rastojanje između susednih konstelacionih tačaka smanjuje sa udaljavanjem od koordinatnog početka i da verovatnoća konstelacionih tačaka prati Gausovu raspodelu, čime će gustina viševerovatnih konstelacionih tačaka biti manja nego gustina tačaka sa manjom verovatnoćom emitovanja. Ovakav način projektovanja konstelacije je nov i do sada nije razmatran u literaturi.

Projektovanje konstelacija polazeći od neuniformne kvantizacije rezultira veoma kompleksnim konstelacijama. Ove konstelacije su neuniformne u pogledu prostorne raspodele konstelacionih tačaka, kao i u pogledu verovatnoća emitovanja konstelacionih tačaka. Kao što smo pomenuli i ranije, implementacija takve konstelacije je složena. Kako bi pojednostavili konstelaciju i njenu implementaciju, i ovde ćemo kao i u sekcijama 4.1 i 4.2, izvršiti linearizaciju nelinearnih karakteristika komandora, odnosno linearizaciju optimalne kompresorske i ekspanzorske karakteristike. Primenom linearizacije ćemo dobiti deo po deo linearne funkcije, na osnovu kojih ćemo projektovati deo po deo uniformne PAM konstelacije. Kako realizacija konstelacionih tačaka sa nejednakom verovatnoćom predstavlja jednu od glavnih teškoća prilikom implementacije, ograničili smo broj linearnih segmenata na 2, za razliku od projektovanja koje smo prikazali u sekcijama 4.1 i 4.2, gde broj segmenata nije bio ograničen. Zapravo u ovom poglavlju razmatramo optimizaciju deo po deo uniformne konstelacije čije su konstelacione tačke podeljene u svega dva podskupa. Rastojanje između susednih konstelacionih tačaka i verovatnoće konstelacionih tačaka ćemo obeležiti sa d_1 i P_1 u okviru prvog podskupa, odnosno sa d_2 i P_2 u okviru drugog podskupa. Na slici 4.3.1 je ilustrovana predložena struktura PAM konstelacije. Slika jasno ukazuje na postojanje simetrije u raspodeli konstelacionih tačaka. Ova simetrija nam omogućava da se fokusiramo na određivanje konstelacionih tačaka na pozitivnom delu realne ose, nakon čega se na osnovu simetrije mogu lako odrediti ostale konstelacione tačke.



Slika 4.3.1. Struktura deo po deo uniformne PAM konstelacije sa dva podskupa

U skladu sa strukturom sa slike 4.3.1, predložili smo sličnu notaciju kao u prethodnim delovima disertacije. Uređene parove koji opisuju konstelacione tačke predložene PAM konstelacije smo obeležili sa $\{a_{i,j}, P(a_{i,j})\}$, $i = 1, 2$, $j = -M_i/2+1, \dots, M_i/2$, gde $a_{i,j}$ predstavlja amplitudu ili koordinatu konstelacione tačke u jednodimenzionalnom prostoru, $P(a_{i,j}) = P_i$ je verovatnoća konstelacione tačke ili verovatnoća simbola koje prenosimo i M_i je broj konstelacionih tačaka u okviru i -tog podskupa. Ako je ukupan broj konstelacionih tačaka M , važi sledeće:

$$M_1 + M_2 = M, \quad (4.3.1)$$

$$M_1 P_1 + M_2 P_2 = 1, \quad (4.3.2)$$

$$a_{1,j} = \left(j - \frac{1}{2}\right) d_1, \quad j = 1, \dots, \frac{M_1}{2}, \quad (4.3.3)$$

$$a_{2,j} = \frac{M_1}{2} d_1 + \left(j - \frac{1}{2}\right) d_2, \quad j = 1, \dots, \frac{M_2}{2}, \quad (4.3.4)$$

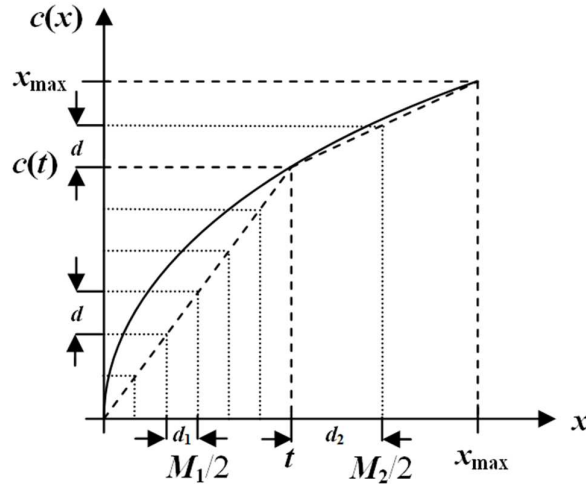
$$a_{i,j} = -a_{i,-j+1}, \quad i = 1, 2, \quad j = -\frac{M_i}{2} + 1, \dots, 0. \quad (4.3.5)$$

U nastavku ćemo parametre konstelacije M_1 , M_2 , d_1 , d_2 , P_1 , P_2 odrediti koristeći koncept analogije sa deo po deo linearnom optimalnom kompadding kvantizacijom. Ponovimo da je za pozitivne vrednosti argumenata optimalna kompresorska karakteristika za amplitudu sa Gausovom funkcijom gustine verovatnoće [38], [45], [58]:

$$c_{\text{opt}}(x) = x_{\text{max}} \frac{1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{\sqrt{6}}\right)}{1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x_{\text{max}}}{\sqrt{6}}\right)} \operatorname{sgn}(x), \quad 0 \leq x \leq x_{\text{max}}, \quad (4.3.6)$$

gde je x_{max} amplituda maksimalnog opterećenja kvantizera.

Za pozitivne vrednosti argumenata, kompresorska karakteristika ilustrovana je na slici 4.3.2. Na slici je prikazana i karakteristika dobijena linearizacijom funkcije. Linearizacija je izvedena tako da se nelinearna i deo po deo linearna kompresorska karakteristika poklapaju u granicama segmenata [44], [45].



Slika 4.3.2. Linearizacija kompresorske karakteristike

Očigledno je da je parametar kojim možemo uticati na rezultat linearizacije granica segmenata, koja je ovde označena sa t_c . Sada, podsetimo se da komandning kvantizaciju karakterišu neuniformne tačke koje nakon kompresije formiraju uniformni raspored. Drugim rečima, uniformni raspored tačaka se nakon ekspanovanja transformiše u izlazne nivoe, odnosno u neuniformni raspored konstelacionih tačaka. Matematički zapis ovoga što smo izložili izgleda:

$$c_{\text{opt}}(t_c) = \frac{M_1}{M} x_{\text{max}} = \frac{x_{\text{max}}}{\eta}, \quad (4.3.7)$$

gde η predstavlja odnos između ukupnog broja konstelacionih tačaka M i broja konstelacionih tačaka u okviru prvog segmenta M_1 :

$$\eta = \frac{M}{M_1}. \quad (4.3.8)$$

Kombinujući jednačine (4.3.7) i (4.3.6) odredićemo granicu između segmenata:

$$t_c = \sqrt{6} \operatorname{erfc}^{-1} \left\{ 1 - \frac{1}{\eta} \left[1 - \operatorname{erfc} \left(\frac{x_{\text{max}}}{\sqrt{6}} \right) \right] \right\}. \quad (4.3.9)$$

Odnos η nedvosmisleno određuje granicu između segmenata. Onda možemo da zaključimo da parametar η definiše različite aproksimacije kompresorske karakteristike, odnosno definiše

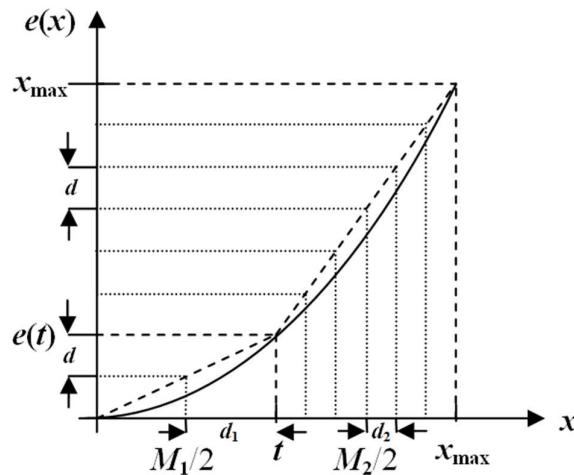
klasu funkcija. Klasu funkcija koje definišu linearizovanu optimalnu kompresorsku karakteristiku za Gausovu funkciju gustine verovatnoće označićemo sa $f_c(x, \eta)$:

$$f_c(x, \eta) = \begin{cases} \frac{x_{\max}}{\eta t_c} x, & x \leq t_c \\ \frac{x_{\max}}{\eta(x_{\max} - t_c)} [(\eta - 1)x + x_{\max} - \eta t_c], & t_c \leq x \leq x_{\max} \end{cases}. \quad (4.3.10)$$

Sada, nakon linearizacije optimalne kompresorske funkcije možemo definisati i klasu funkcija za geometrijsko oblikovanje konstelacije:

$$a_k = g_c \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{2x_{\max}}{M}, \eta \right) = f_c^{-1} \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{2x_{\max}}{M}, \eta \right), k = 1, \dots, \frac{M}{2}. \quad (4.3.11)$$

Optimalna ekspandorska karakteristika za amplitude koje imaju Gausovu funkciju gustine verovatnoće je zapravo inverzna funkcija optimalne kompresorske karakteristike $e_{\text{opt}}(x) = c_{\text{opt}}^{-1}(x)$, gde je $c_{\text{opt}}(x)$ definisano jednačinom (4.3.6), [45], [58]. Linearizaciju optimalne ekspandorske karakteristike izvršićemo na isti kao i linearizaciju optimalne kompresorske karakteristike. To znači da se deo po deo linearne aproksimacije sa 2 segmenta, označene sa $f_e(x, \eta)$ i optimalna ekspandorska karakteristika $e_{\text{opt}}(x)$ podudaraju u granicama segmenata, tako da je: $f_e(0, \eta) = e_{\text{opt}}(0) = 0$, $f_e(t_e, \eta) = e_{\text{opt}}(t_e)$ i $f_e(x_{\max}, \eta) = e_{\text{opt}}(x_{\max}) = x_{\max}$, pri čemu t_e označava granicu između segmenata, kao što je prikazano na slici 4.3.3.



Slika 4.3.3. Linearizacija ekspandorske karakteristike

Sada možemo generisati raspored konstelacionih tačaka inverzan rasporedu koji definiše (4.3.11). Pođimo od sledećeg:

$$e_{\text{opt}}(t_e) = \frac{M_1}{M} x_{\text{max}} = \frac{x_{\text{max}}}{\eta}. \quad (4.3.12)$$

Nakon ovoga odredimo granicu segmenata t_e :

$$t_e = e_{\text{opt}}^{-1}\left(\frac{x_{\text{max}}}{\eta}\right) = c_{\text{opt}}\left(\frac{x_{\text{max}}}{\eta}\right) = x_{\text{max}} \left(\frac{1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\eta} \frac{x_{\text{max}}}{\sqrt{6}}\right)}{1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x_{\text{max}}}{\sqrt{6}}\right)} \right). \quad (4.3.13)$$

Sada možemo definisati klasu aproksimacija ekspanzorske karakteristike $f_e(x, \eta)$:

$$f_e(x, \eta) = \begin{cases} \frac{x_{\text{max}}}{\eta t_e} x, & x \leq t_e \\ \frac{x_{\text{max}}}{\eta(x_{\text{max}} - t_e)} [(\eta - 1)x + x_{\text{max}} - \eta t_e], & t_e \leq x \leq x_{\text{max}} \end{cases}. \quad (4.3.14)$$

Konačno, nakon linearizacije ekspanzorske funkcije možemo definisati i klasu funkcija za geometrijsko oblikovanje konstelacije:

$$a_k = g_e\left(\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2x_{\text{max}}}{M}, \eta\right) = f_e^{-1}\left(\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{2x_{\text{max}}}{M}, \eta\right), k = 1, \dots, \frac{M}{2}. \quad (4.3.15)$$

Ponovimo, jednačine (4.3.9) i (4.3.13) pokazuju da za zadatu vrednost x_{max} , granica između segmenta je određena odnosom η . Takođe, definišući η definišemo i granicu između segmenata i konkretnu funkciju oblikovanja iz klasa funkcija $g_c(x, \eta)$ i $g_e(x, \eta)$ koja ekvidistantne tačke slika u neuniformne konstelacione tačke, odnosno u našem slučaju deo po deo uniformne tačke. Potsetimo se da smo odredili funkcije oblikovanja konstelacije samo za pozitivne vrednosti argumenata, zbog uočene simetrije u raspodeli konstelacionih tačaka.

Sada kada smo definisali dve klase funkcija za oblikovanje konstelacija $g_c(x, \eta)$ i $g_e(x, \eta)$ možemo započeti projektovanje PAM konstelacija. PAM konstelacije projektovane klasom funkcija $g_c(x, \eta)$ ćemo obeležavati sa PAM_{η}^c , odnosno PAM konstelacije projektovane klasom $g_e(x, \eta)$ ćemo obeležavati sa PAM_{η}^e . Kako su predložene funkcije oblikovanja konstelacije deo po deo linearne, konstelacione tačke su ekvidistantne u okviru segmenata. Odnosno, skup konstelacionih tačaka je podeljen u dva podskupa sa $M_1 = M/\eta$ i $M_2 = M(\eta-1)/\eta$ konstelacionih tačaka, pri čemu su rastojanja između susednih konstelacionih tačaka u podskupovima konstantna i iznose:

$$d_1 = \frac{t}{M_1/2} = \eta \frac{2t}{M}, \quad (4.3.16)$$

$$d_2 = \frac{x_{\text{max}} - t}{M_2/2} = \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{2(x_{\text{max}} - t)}{M}. \quad (4.3.17)$$

U (4.3.16) i (4.3.17) t je granica između linearnih segmenata određena sa (4.3.9) ili (4.3.13), u zavisnosti od izbora klase funkcija. Za dato x_{max} i η , određujući d_1 i d_2 , mi zapravo

određujemo amplitude konstelacionih tačaka $a_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = -M_i/2+1, \dots, M_i/2$ (vidi jednačine od (4.3.3) do (4.3.5)).

Konačno, kako bismo u potpunosti definisali konstelacione tačke neophodno je odrediti i verovatnoće njihovog emitovanja. Poznato je da Gausova raspodela verovatnoće je poželjna karakteristika konstelacije [63]. To možemo da postignemo uz pretpostavku da argumenti predloženih klasa funkcija imaju Gausovu funkciju gustine verovatnoće. Pored toga, da bismo izbegli da konstelacija postane previše složena, kao i u sekcijama 4.2 i 4.3, uvodimo ograničenje da su konstelacione tačke u okviru podskupa jednakoverovatne. Ovo dovodi do sledećeg. Verovatnoća da je konstelaciona tačka iz prvog podskupa emitovana $M_1 \times P_1$ je jednaka verovatnoći da Gausova slučajna promenljiva sa nultom srednjom vrednosti i jediničnom varijansom uzima vrednost po modulu manju nego što je vrednost granice segmenata t :

$$M_1 P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx = 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \quad (4.3.18)$$

Kombinovanjem ove jednačine sa jednačinama (4.3.2) i (4.3.8) dolazimo do izraza za verovatnoću konstelacionih tačaka u okviru podskupova:

$$P_1 = \frac{1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{M_1} = \eta \frac{1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{M}, \quad (4.3.19)$$

$$P_2 = \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{M_2} = \frac{\eta}{\eta - 1} \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{M}. \quad (4.3.20)$$

Ovim završavamo projektovanje konstelacije.

Polazeći od opšteg izraza za srednju energiju po simbolu (2.1.3), [1], pri čemu smo pretpostavili simetričnu strukturu PAM konstelacije koja je prikazana na slici 4.3.1, možemo zapisati:

$$E_s = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=-M_i/2+1}^{M_i/2} a_{i,j}^2 P(a_{i,j}) = 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{M_i/2} a_{i,j}^2 P(a_{i,j}). \quad (4.3.21)$$

Ovde uvodimo ograničenje da je broj konstelacionih tačaka u podskupovima paran. Uzimajući u obzir ovaj uslov odredićemo srednju energiju po simbolu predložene konstelacije:

$$E_s = \frac{M_1(M_1^2 - 1)}{12} P_1 d_1^2 + \frac{M_2(M_2^2 - 1)}{12} P_2 d_2^2 + \frac{P_2}{4} M_1 M_2 d_1 (M_1 d_1 + M_2 d_2). \quad (4.3.22)$$

Prilikom izvođenja prethodnog izraza uzeli smo u obzir da je $a_{i,j}$ određeno izrazima (4.3.3) i (4.3.4) kao i da je:

$$\sum_{k=1}^{K/2} (2k-1)^2 = \frac{K(K+1)(K-1)}{6}. \quad (4.3.23)$$

Uslov da je $K/2$ ceo broj neophodan je da bi važila jednačina (4.3.23). Iz ovoga sledi da M_i , $i = 1, 2$ mora biti paran broj.

Svaki simbol se koduje sa $\log_2 M$ bita, pa tako srednju energiju po bitu računamo kao u jednačini (2.1.4), odnosno odnos signal-šum po bitu u kanalu sa belim Gausovim šumom određujemo prema formuli (2.1.5).

Nakon prenosa signala kroz kanal sa belim aditivnim Gausovim šumom, prijemnik donosi odluku na osnovu sledećeg odmerka:

$$r = a_{i,j} + n, \quad (4.3.24)$$

gde n predstavlja odmerak šuma sa Gausovom funkcijom gustine verovatnoće nulte srednje vrednosti i varijanse $\sigma_n^2 = N_0/2$ [1]. Odavde sledi da je odmerak primljenog signala r slučajna promenljiva sa uslovnom Gausovom funkcijom gustine verovatnoće:

$$p_{i,j}(r) = p(r|a_{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left\{-\frac{(r - a_{i,j})^2}{N_0}\right\}, \quad -\infty < r < \infty, \quad (4.3.25)$$

$$i = 1, 2, \quad j = -\frac{M_i}{2} + 1, \dots, \frac{M_i}{2},$$

gde N_0 predstavlja spektralnu gustinu snage belog Gausovog šuma, kao što smo i ranije pomenuli [1].

Verovatnoća da je na prijemu detektovan simbol koji je različit u odnosu na onaj koji je poslat predstavlja verovatnoću greške po simbolu. U skladu sa ovim, počevši od opšteg izraza, verovatnoću greške možemo zapisati na sledeći način:

$$P_e = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=-M_i/2+1}^{M_i/2} P(e|a_{i,j}) P(a_{i,j}) = 2 \sum_{i=1}^2 P_i \sum_{j=1}^{M_i/2} P(e|a_{i,j}), \quad (4.3.26)$$

gde $P(e|a_{i,j})$ predstavlja verovatnoću pogrešno detektovanog simbola kada je poslat simbol modulisan sa $a_{i,j}$. Da bismo dobili konačni izraz za verovatnoću greške po simbolu neophodno je definisati pravilo odlučivanja. Prema obrazloženjima iz prethodnih poglavlja,

ovo istraživanje ćemo nastaviti koristeći pravilo odlučivanja koje minimizuje verovatnoću greške po simbolu. Naime, razmatraćemo pravilo odlučivanja zasnovano na maksimalnim aposteriornim verovatnoćama, odnosno razmatraćemo MAP kriterijum odlučivanja. Prema MAP kriterijumu, granice odlučivanja $m_{i,j}$, $i = 1, 2, j = 1, \dots, M_i/2+1$ mogu biti određene iz:

$$p(a_{i,j-1}|m_{i,j}) = p(a_{i,j}|m_{i,j}), \quad i = 1, 2, \quad j = 2, \dots, M_i/2, \quad (4.3.27)$$

$$p(a_{1,M_1/2}|m_{1,M_1/2+1}) = p(a_{2,1}|m_{2,1}), \quad (4.3.28)$$

pri čemu je $m_{1,M_1/2+1} = m_{2,1}$. Primenom Bajasevog pravila [1], [58] na jednačine (4.3.27) i (4.3.28) i nakon toga zamenom jednačine (4.3.25) u njima, definišemo granice odlučivanja:

$$\begin{aligned} m_{i,j} &= \frac{a_{i,j} + a_{i,j-1}}{2} = a_{i,j-1} + \frac{d_i}{2} = a_{i,j} - \frac{d_i}{2}, \\ & \quad i = 1, 2, j = 2, \dots, \frac{M_i}{2}, \\ m_{1,\frac{M_1}{2}+1} &= m_{2,1} = \frac{a_{1,\frac{M_1}{2}} + a_{2,1}}{2} + \frac{N_0}{d_1 + d_2} \ln \frac{P_1}{P_2} \\ &= a_{1,\frac{M_1}{2}} + \frac{d_1 + d_2}{4} + \frac{N_0}{d_1 + d_2} \ln \frac{P_1}{P_2} \\ &= a_{2,1} - \frac{d_1 + d_2}{4} + \frac{N_0}{d_1 + d_2} \ln \frac{P_1}{P_2}, \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

pri čemu važi:

$$\begin{aligned} m_{1,1} &= 0, \\ m_{2,M_2/2+1} &= \infty. \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

Za date granice odlučivanja, formulisaćemo pravilo odlučivanja i verovatnoću greške po simbolu na sledeći način:

$$D(r) = a_{i,j}, \text{ ako je } m_{i,j} \leq r < m_{i,j+1}, \quad (4.3.31)$$

$$\begin{aligned} P_e &= 2 \sum_{i=1}^2 P_i \sum_{j=1}^{M_i/2} P(r \notin [m_{i,j}, m_{i,j+1}) | a_{i,j}) \\ &= 2 \sum_{i=1}^2 P_i \sum_{j=1}^{M_i/2} [1 - P(m_{i,j} \leq r < m_{i,j+1} | a_{i,j})] \\ &= 1 - 2 \sum_{i=1}^2 P_i \sum_{j=1}^{M_i/2} \int_{m_{i,j}}^{m_{i,j+1}} p(r | a_{i,j}) dr. \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Konačno, zamenjujući jednačine (4.3.29), (4.3.30) i (4.3.25) u (4.3.32), dolazimo do opšteg izraza za verovatnoću greške po simbolu:

$$P_e = P_1 \left[(M_1 - 1) \operatorname{erfc} \left(\frac{d_1}{2\sqrt{N_0}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{d_1 + d_2}{4\sqrt{N_0}} + \frac{\sqrt{N_0}}{d_1 + d_2} \ln \frac{P_1}{P_2} \right) \right] \\ + P_2 \left[(M_2 - 2) \operatorname{erfc} \left(\frac{d_2}{2\sqrt{N_0}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{d_1 + d_2}{4\sqrt{N_0}} + \frac{\sqrt{N_0}}{d_1 + d_2} \ln \frac{P_1}{P_2} \right) \right] \quad (4.3.33)$$

gde je $\operatorname{erfc}(\cdot)$ komplementarna funkcija greške definisana jednačinom (2.3.4), [1], [58]. Naučna istraživanja sa temom o verovatnoći greške u modulaciji su brojna. U tim radovima prepoznata je i važnost opštih izraza za verovatnoću grešaka [61], [64]. Za PAM konstelaciju sa jednakoverovatnim ($P_1 = P_2 = 1/M$) i ekvidistantnim ($d_1 = d_2 = d$) konstelacionim tačkama, izrazi za srednju energiju po simbolu (4.3.22) i verovatnoću greške po simbolu (4.3.33) postaju poznati izrazi iz literature [1]:

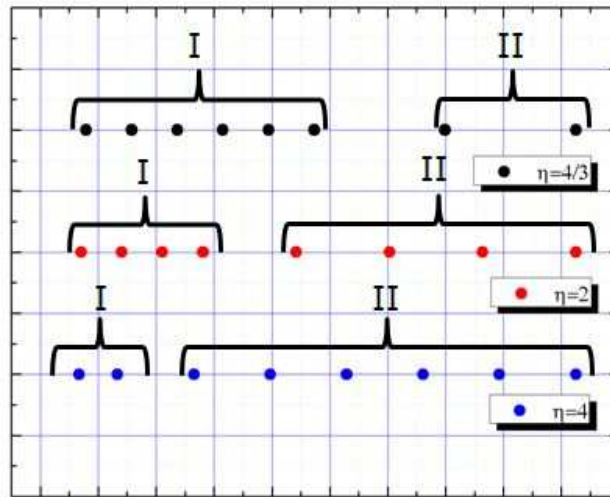
$$E_s = \frac{M^2 - 1}{12} d^2, \quad (4.3.34)$$

$$P_e = \frac{M - 1}{M} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right). \quad (4.3.35)$$

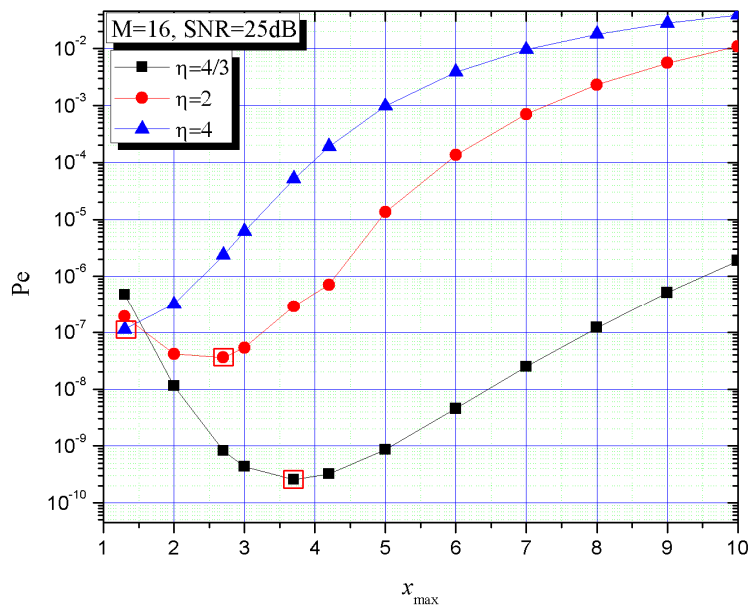
U ovom delu disertacije detaljno ćemo analizirati performanse konstelacija oblikovanih predloženim deo po deo linearnim funkcijama. Posebnu pažnju ćemo posvetiti ispitivanju ponašanja verovatnoće greške po simbolu P_e u funkciji odnosa signal-šum po bitu SNR. Prvo ćemo predstaviti rezultate koje smo dobili proučavajući konstelacije oblikovane funkcijama koje su inverzne sa linearizovanom optimalnom kompresorskom karakteristikom za Gausovu funkciju gustine verovatnoće. Na početku, pogledajmo na slici 4.3.4 kako se izbor parametra η odražava na raspodelu tačaka po segmentima, odnosno po podskupovima.

Prema jednačinama (4.3.16), (4.3.17) i (4.3.9), da bismo odredili rastojanje između konstelacionih tačaka u okviru podskupova, neophodno je definisati parametar x_{\max} . Kao što znamo, ovaj parametar određuje jednodimenzionalni prostor unutar kojeg su raspoređene konstelacione tačke. Primenom sličnih principa kao u sekcijama 4.2 i 4.3, za datu vrednost η parametar x_{\max} ćemo odrediti tako da minimizuje verovatnoću greške po simbolu. Pored toga, ne smemo zanemariti činjenicu da verovatnoća greške zavisi i od odnosa signal-šum. Stoga, prilikom određivanja vrednosti x_{\max} koja odgovara najmanjoj vrednosti verovatnoće greške, neophodno je specificirati vrednost SNR. Sa slike 4.3.5 za date vrednosti SNR-a i parametra

η , odredili smo vrednosti x_{\max} koje minimizuju verovatnoću greške po simbolu. Ovako određene vrednosti x_{\max} nazivamo optimalnim vrednostima.



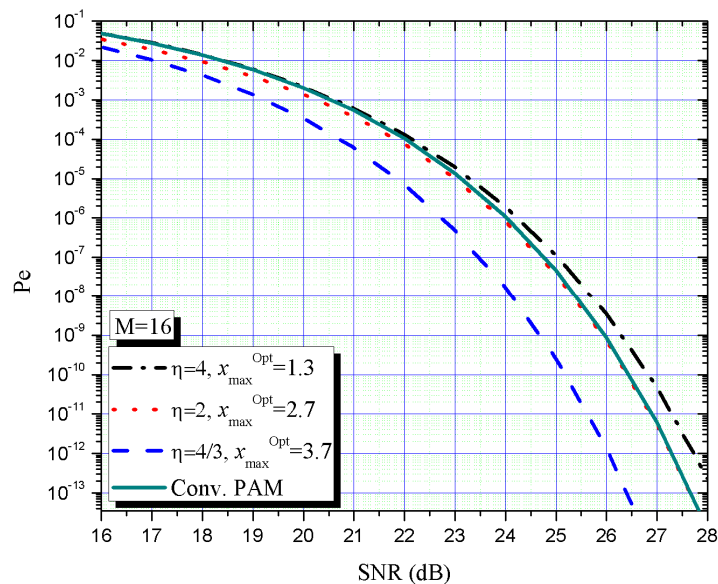
Slika 4.3.4. Raspored konstelacionih tačaka za konstelacije oblikovane funkcijama iz klase $g_c(x, \eta)$ ($\eta = 4/3, M_1 > M_2$; $\eta = 2, M_1 = M_2$; $\eta = 4, M_1 < M_2$)



Slika 4.3.5. Za različite vrednosti η ($\eta = 4/3, M_1 > M_2$; $\eta = 2, M_1 = M_2$; $\eta = 4, M_1 < M_2$) i $\text{SNR} = 25 \text{ dB}$, P_e u funkciji od x_{\max} kod konstelacija 16-PAM $_{\eta}^c$

Za optimalne vrednosti parametra x_{\max} za svaku od pretpostavljenih vrednosti η , na slici 4.3.6 smo prikazali verovatnoću greške po simbolu u zavisnosti od SNR-a, odnosno prikazali smo

performanse konstelacija za različite vrednosti η . Na osnovu grafika prikazanih na slici 4.3.6 možemo da zaključimo da je najmanja vrednost P_e ostvarena sa konstelacijama koje su projektovane za $\eta = 4/3$. To znači da kada je $M = 16$, najbolje performanse u pogledu verovatnoće greške po simbolu, odnosno u pogledu efikasnosti po snazi se postižu kada deo po deo uniformna PAM_{η}^c konstelacija sadrži 12 konstelacionih tačaka u prvom podskupu ($M_1 = 12$) i 4 tačke u drugom ($M_2 = 4$). Takođe, slika jasno pokazuje da za neadekvatno odabrane vrednosti η , PAM_{η}^c ima veće vrednosti P_e nego što ima uniformna PAM konstelacija. Naime, ukoliko je $\eta > 2$ konstelacije projektovane funkcijama iz klase $f_c(x, \eta)$ ne nadmašuju konvencionalnu uniformnu PAM konstelaciju u pogledu verovatnoće greške po simbolu. Slika 4.3.6 nam takođe pokazuje da dobitak ostvaren sa 16- $PAM_{\eta}^c = 4/3$ postaje značajniji kako vrednost odnosa signal-šum raste. Konkretno, kao što se može videti u tabeli 4.3.7, P_e za 16- $PAM_{\eta}^c = 4/3$ u odnosu na vrednost P_e za uniformnu 16-PAM konstelaciju je samo 1.3 puta manja kada je SNR = 10 dB, dok za slučaj kada je SNR = 24 dB postignuti dobitak je veći, odnosno vrednost P_e je oko 10^2 puta manja. U tabeli 4.3.1 prikazali smo efikasnost po snazi ostvarenu za različite vrednosti η , odnosno zabeležili smo potrebne vrednosti odnosa signal-šum da bi verovatnoća greške bila 10^{-6} . Iz tabele možemo zaključiti da sa konstelacijom 16- $PAM_{\eta}^c = 4/3$ i $x_{\max}^{\text{opt}} = 3.7$ postizemo dobitak u energetskoj efikasnosti od 1.28 dB u odnosu na tradicionalnu 16-PAM konstelaciju kada je verovatnoća greške 10^{-6} .

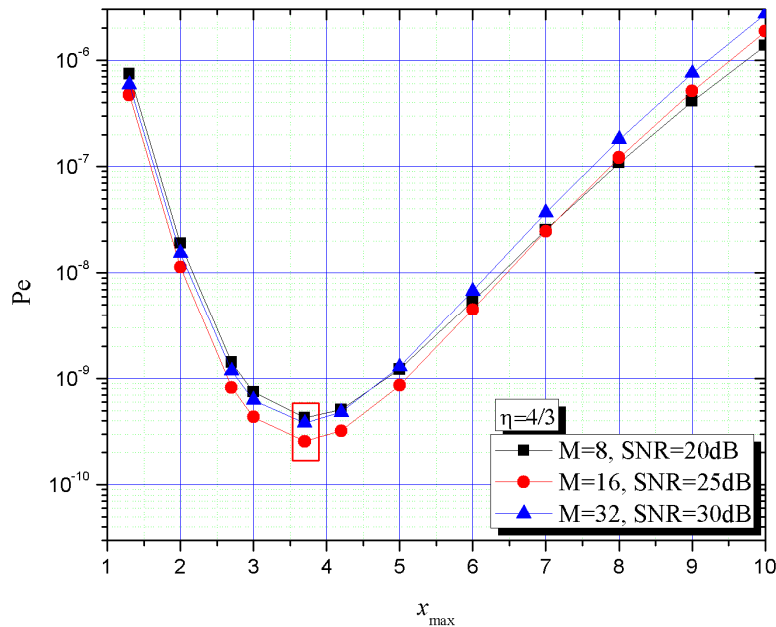


Slika 4.3.6. Za različite vrednosti η ($\eta = 4/3, M_1 > M_2; \eta = 2, M_1 = M_2; \eta = 4, M_1 < M_2$) i optimalne vrednosti x_{\max} , zavisnost P_e od SNR-a kod konstelacija tipa 16- PAM_{η}^c

Tabela 4.3.1. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 16-PAM $_{\eta^c}$ konstelacija koje karakterišu optimalne vrednosti x_{\max} i različite vrednosti η (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

M	η	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
16	4	1.3	10^{-6}	24.23	24	-0.23
	2	2.7		23.91		0.09
	4/3	3.7		22.72		1.28

U daljem istraživanju smo proučavali performanse 8-PAM $_{\eta^c}$ i 32-PAM $_{\eta^c}$ konstelacija kada je $\eta \in \{8/7, 4/3, 8/5, 2, 8/3, 4, 8\}$. Interesantno je da u svim slučajevima najbolje performanse, tj. ostvarena je najmanja verovatnoća greške po simbolu kada je $\eta = 4/3$. Za ovako odabranu vrednost η , nastavili smo analizu sa ciljem da odredimo optimalne vrednosti parametra x_{\max} za konstelacije 8-PAM $_{\eta^c}$ i 32-PAM $_{\eta^c}$, što je prikazano na slici 4.3.7. Na osnovu slike možemo zaključiti da za sve tri konstelacije 8-PAM $_{\eta^c = 4/3}$, 16-PAM $_{\eta^c = 4/3}$, 32-PAM $_{\eta^c = 4/3}$, vrednost parametra x_{\max} koja daje najmanju vrednost P_e je ista i iznosi $x_{\max}^{\text{opt}} = 3.7$, čime zaključujemo da x_{\max}^{opt} ne zavisi od broja konstelacionih tačaka u konstelaciji. Za ove konstelacije, rastojanja između susednih konstelacionih tačaka u podskupovima d_1 i d_2 , koja se dobijaju formulama (4.3.16), (4.3.17) i (4.3.9), kao i verovatnoće konstelacionih tačaka P_1 i P_2 , propračunate relacijama (4.3.19), (4.3.20) i (4.3.9), su prikazane u tabeli 4.3.2.



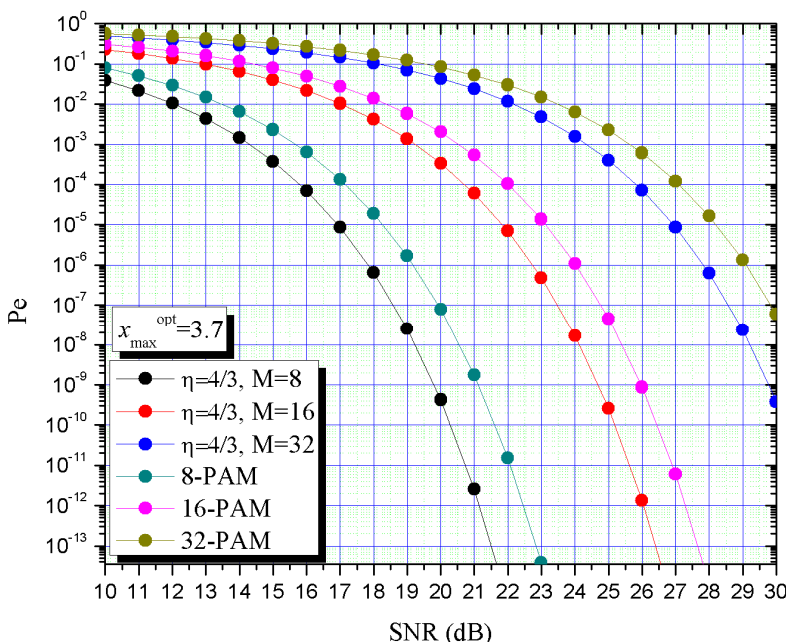
Slika 4.3.7. P_e u funkciji x_{\max} kod konstelacija 8-PAM $_{\eta^c = 4/3}$, 16-PAM $_{\eta^c = 4/3}$, 32-PAM $_{\eta^c = 4/3}$

Tabela 4.3.2. Parametri deo po deo uniformne konstelacije oblikovane funkcijama iz klase

$$g_c(x, \eta)$$

	x_{\max}	t	d_1	d_2	P_1	P_2
8-PAM $^c_{\eta=4/3}$	3.7	1.893	0.631	1.807	0.157	0.029
16-PAM $^c_{\eta=4/3}$	3.7	1.893	0.315	0.904	0.078	0.015
32-PAM $^c_{\eta=4/3}$	3.7	1.893	0.158	0.452	0.039	0.007

Performanse, odnosno vrednost verovatnoće greške po simbolu u zavisnosti od SNR-a, za konstelacije projektovane na osnovu funkcija iz klase $f_c(x, \eta = 4/3)$, kada je broj konstelacionih tačaka u konstelacijama $M = 8, 16, 32$ i $x_{\max}^{\text{opt}} = 3.7$ su prikazane na slici 4.3.8. Na slici je prikazana verovatnoća greške i za odgovarajuća konvencionalna rešenja PAM konstelacije. Sa slike se može videti da predložene konstelacije u celom opsegu SNR-a nadmašuju performanse konvencionalnih rešenja. Preciznije prikazano u tabeli 4.3.3, za verovatnoću greške po simbolu 10^{-6} dobitak u efikasnosti po snazi iznosi oko 1.3 dB kod sve tri konstelacije u odnosu na njima odgovarajuće uniformne PAM konstelacije.

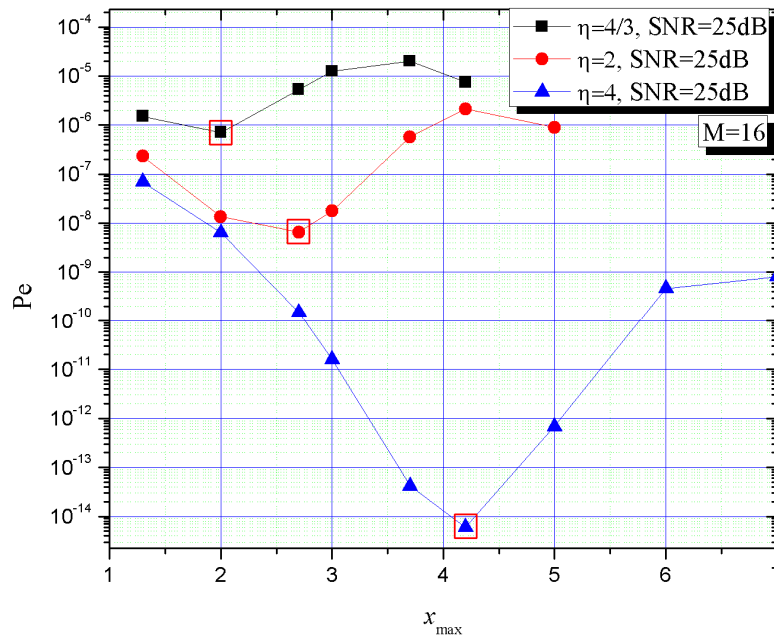


Slika 4.3.8. P_e u funkciji SNR kod konstelacija oblikovanih pomoću funkcija iz klase $g_c(x, \eta = 4/3)$, kada je $M = 8, 16, 32$ i $x_{\max}^{\text{opt}} = 3.7$

Tabela 4.3.3. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 8-PAM $_{\eta^c = 4/3}$, 16-PAM $_{\eta^c = 4/3}$, 32-PAM $_{\eta^c = 4/3}$ koje karakteriše i optimalna vrednost x_{\max} (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

η	M	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
4/3	8	3.7	10^{-6}	17.83	19.16	1.33
	16			22.72	24	1.28
	32			27.83	29.1	1.27

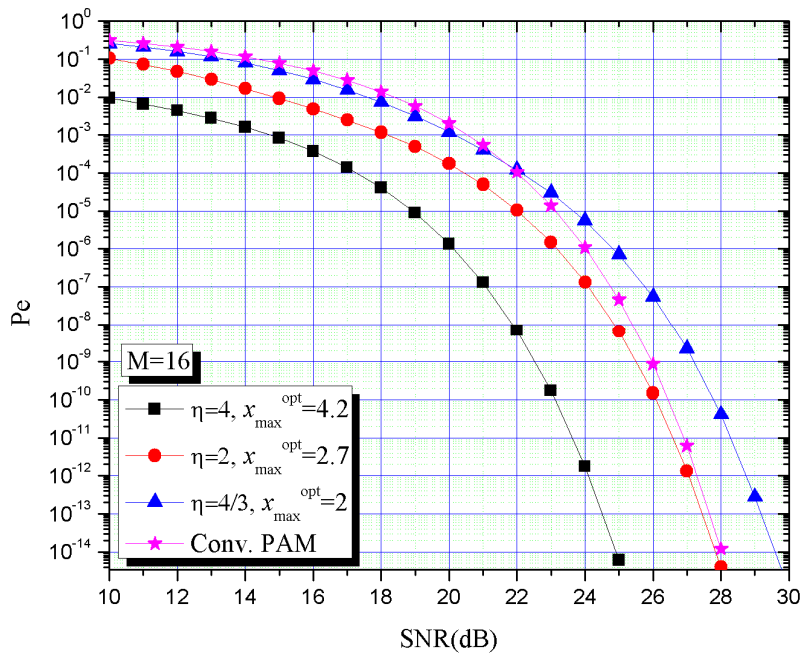
Na narednim stranicama doktorske disertacije obradili smo performanse konstelacija koje su oblikovane primenom funkcija koje predstavljaju inverzne linearizovane optimalne ekspanzorske karakteristike za Gausovu funkciju gustine verovatnoće, $g_e(x, \eta)$. Konstelacije projektovane funkcijama iz ove klase označavaćemo sa PAM $_{\eta^e}$. Istraživanje započinjemo određivanjem optimalne vrednosti x_{\max} , odnosno biramo vrednost x_{\max} tako da vrednost P_e bude najmanja, i to za konstelacije koje imaju $M = 16$ i različite vrednosti parametra η . Rezultate koje smo dobili prikazali smo na slici 4.3.9.



Slika 4.3.9. Za različite vrednosti η ($\eta = 4/3, M_1 > M_2; \eta = 2, M_1 = M_2; \eta = 4, M_1 < M_2$) i SNR = 25 dB, P_e u funkciji SNR kod 16-PAM $_{\eta^e}$ konstelacije

Za ovako određene optimalne vrednosti x_{\max}^{opt} , na slici 4.3.10 smo prikazali zavisnost verovatnoće greške po simbolu od odnosa signal-šum kod pomenutih konstelacija. Sa slike možemo da zaključimo da je $\eta > 2$ neophodan uslov da konstelacija 16-PAM $_{\eta^e}$ nadmaši

konvencionalnu uniformnu PAM konstelaciju, pri čemu se najmanja verovatnoća greške postiže za $\eta = 4$, odnosno za broj konstelacionih tačaka u podskupovima $M_1 = 4$ i $M_2 = 12$. Ova konstelacija, $16\text{-PAM}^e_{\eta=4}$, u pogledu verovatnoće greške nadmašuje ne samo konvencionalnu uniformnu 16-PAM konstelaciju, već i najbolju konstelaciju iz klase 16-PAM^c_{η} , konstelaciju $16\text{-PAM}^c_{\eta=4/3}$. Ovo potvrđuju i rezultati prikazani u tabeli 4.3.7, u kojoj je zabeležena verovatnoća greške po simbolu za konvencionalne uniformne PAM, $16\text{-PAM}^c_{\eta=4/3}$ i $16\text{-PAM}^e_{\eta=4}$ konstelacije. U tabeli 4.3.4 smo za različite vrednosti η prikazali efikasnost po snazi konstelacija iz klase $g_e(x, \eta)$, odnosno prikazali smo potrebne vrednosti odnosa signal-šum za verovatnoću greške 10^{-6} . Iz tabele možemo zaključiti da se sa konstelacijom $16\text{-PAM}^e_{\eta=4}$ koju karakteriše i optimalna vrednost $x_{\max}^{\text{opt}} = 4.2$ ostvaruje dobitak u efikasnosti po snazi od 3.87 dB u poređenju sa tradicionalnom 16-PAM konstelacijom kada je verovatnoća greške 10^{-6} .

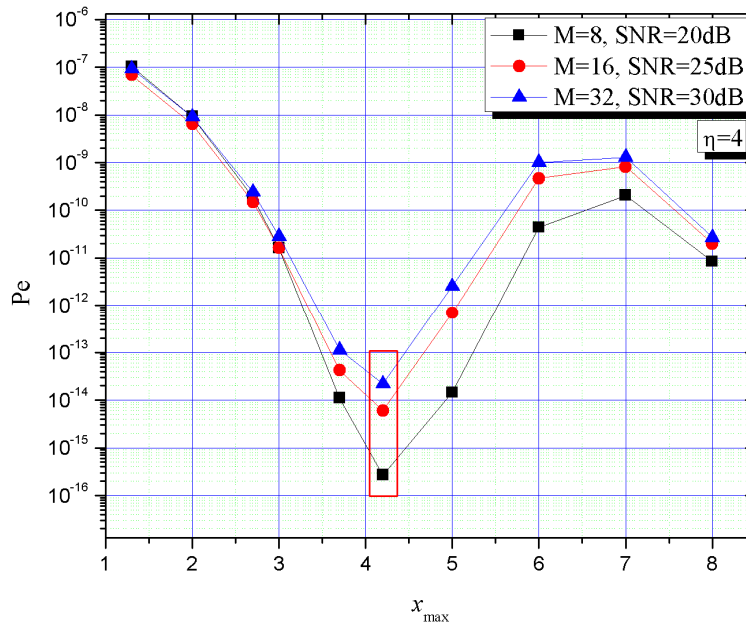


Slika 4.3.10. Za različite vrednosti η ($\eta = 4/3, M_1 > M_2$; $\eta = 2, M_1 = M_2$; $\eta = 4, M_1 < M_2$) i optimalne vrednosti x_{\max} , zavisnost P_e od SNR kod konstelacije 16-PAM_{η}^e

Tabela 4.3.4. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 16-PAM $_{\eta}^e$ konstelacije sa optimalnim vrednostima x_{\max} i različitim vrednostima η (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

M	η	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
16	4	4.2	10^{-6}	20.13	24	3.87
	2	2.7		23.16		0.84
	4/3	2		24.83		-0.83

Istraživanje smo proširili na 8-PAM $_{\eta}^e$ i 32-PAM $_{\eta}^e$ konstelacije za slučaj kada je parametar $\eta = 4$. Rezultati prikazani na slici 4.3.11 pokazuju da optimalna vrednost x_{\max} ne zavisi od broja konstelacionih tačaka u konstelaciji.



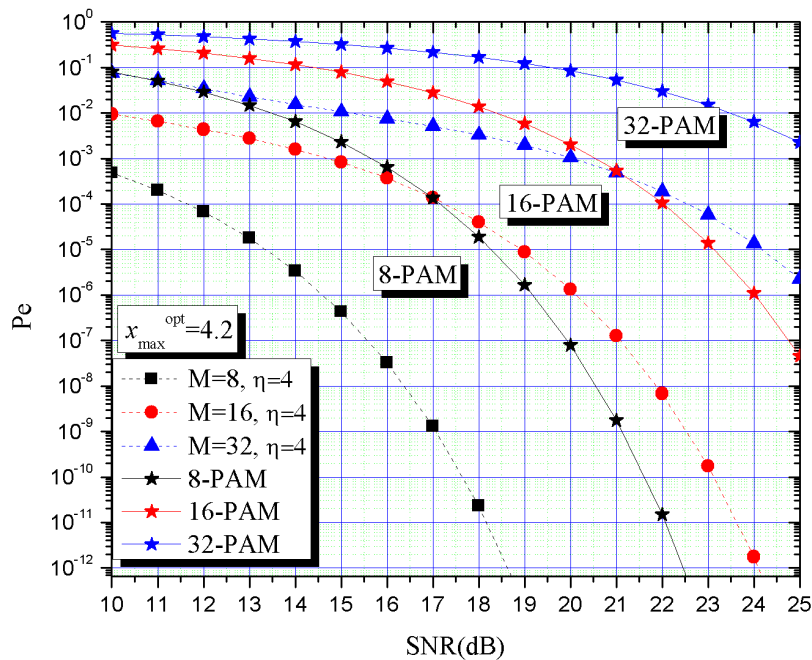
Slika 4.3.11. P_e u funkciji x_{\max} kod konstelacija 8-PAM $_{\eta=4}^e$, 16-PAM $_{\eta=4}^e$, 32-PAM $_{\eta=4}^e$

Ponašanje verovatnoće greške u zavisnosti od odnosa signal-šum kod konstelacija iz klase $g_e(x, \eta = 4)$, kada je broj konstelacionih tačaka $M = 8, 16, 32$ i optimalna vrednost $x_{\max}^{\text{opt}} = 4.2$, kao i performanse njima odgovarajućih tradicionalnih uniformnih PAM konstelacija prikazane su na slici 4.3.12. Možemo zaključiti da predložene konstelacije prevazilaze konvencionalna rešenja PAM konstelacije u pogledu verovatnoće greške u celom SNR opsegu. Za reprezentativne konstelacije iz klase PAM $_{\eta}^e$ uradili smo proračun po jednačinama (4.3.13), (4.3.16), (4.3.17), (4.3.19) i (4.3.20). Na taj način smo odredili

rastojanje između susjednih konstelacionih tačaka u podskupovima d_1 i d_2 i verovatnoće konstelacionih tačaka P_1 i P_2 (vidi tabelu 4.3.5).

Tabela 4.3.5. Parametri deo po deo uniformne konstelacije oblikovane funkcijama iz klase $g_e(x, \eta)$

	x_{\max}	t	d_1	d_2	P_1	P_2
8-PAM $^e_{\eta=4}$	4.2	1.943	1.943	0.752	0.474	0.0087
16-PAM $^e_{\eta=4}$	4.2	1.943	0.971	0.376	0.237	0.0043
32-PAM $^e_{\eta=4}$	4.2	1.943	0.486	0.188	0.119	0.0022



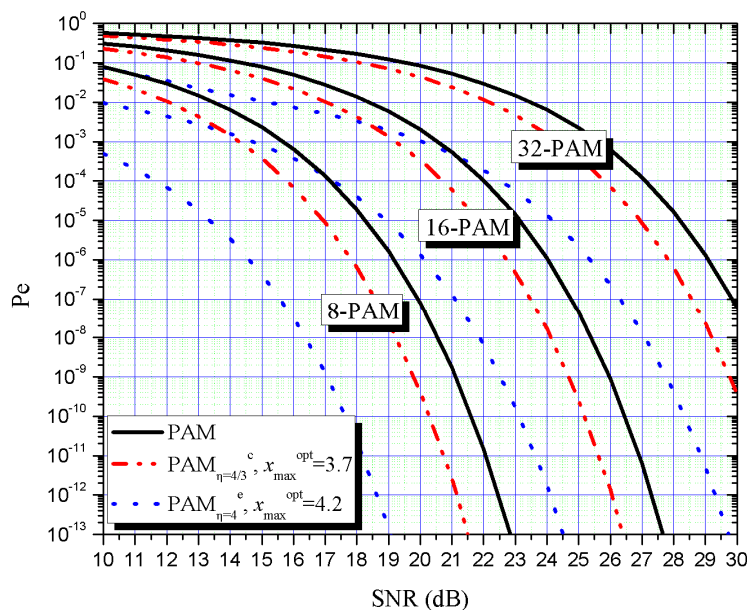
Slika 4.3.12. Zavisnost P_e od SNR kod konstelacija oblikovanih pomoću funkcija iz klase $g_e(x, \eta = 4)$, kada je $M = 8, 16, 32$ i $x_{\max}^{\text{opt}} = 4.2$

Dobici u efikasnosti po snazi ostvareni sa predloženim konstelacijama predstavljeni su u tabeli 4.3.6. Na osnovu rezultata iz tabele može se konstatovati ušteda u korisnoj snazi signala, odnosno potrebna snaga signala je manja za $10^{2.09/10} = 1.62$ puta sa 8-PAM $^e_{\eta=4}$, $10^{3.87/10} = 2.43$ puta sa 16-PAM $^e_{\eta=4}$ i $10^{3.87/10} = 2.37$ puta sa 32-PAM $^e_{\eta=4}$ u odnosu na potrebnu snagu signala kod odgovarajućih tradicionalnih PAM konstelacija.

Tabela 4.3.6. Za datu vrednost P_e potreban SNR kod 8-PAM $_{\eta^e=4}$, 16-PAM $_{\eta^e=4}$, 32-PAM $_{\eta^e=4}$ koje karakteriše i optimalna vrednost x_{\max} (SNR* je potreban SNR kod konvencionalne PAM konstelacije, $\Delta\text{SNR} = \text{SNR}^* - \text{SNR}$)

η	M	x_{\max}	P_e	SNR [dB]	SNR* [dB]	ΔSNR [dB]
4	8	4.2	10^{-6}	17.07	19.16	2.09
	16			20.13	24	3.87
	32			25.36	29.1	3.74

Na slici 4.3.13 i u tabeli 4.3.7 sumirali smo rezultate za verovatnoću greške po simbolu konstelacija koje smo razmatrali u ovom delu. Naime, uporedili smo najbolje M -arne PAM $^c_{\eta}$ i M -arne PAM $^e_{\eta}$ konstelacije za broj konstelacionih tačaka 8, 16 i 32. Da bi pregled rezultata bio potpuniji, na slici 4.3.13 i u tabeli 4.3.7, takođe smo prikazali i zavisnost P_e od SNR za konvencionalne uniformne M -arne PAM konstelacije. Možemo zaključiti da za zadanu vrednost broja konstelacionih tačaka M , najmanja verovatnoća greške po simbolu se postiže sa konstelacijom PAM $^e_{\eta=4}$.



Slika 4.3.13. Za različit broj konstelacionih tačaka, zavisnost P_e od SNR kod konstelacija oblikovanih funkcijama $g_e(x, \eta = 4/3)$, $g_e(x, \eta = 4)$ i kod konvencionalnih PAM konstelacija

Tabela 4.3.7. P_e određeno za zadate SNR vrednosti za konstelacije sa slike 4.3.13

SNR	10 dB	12 dB	14 dB	16 dB	18 dB	20 dB	22 dB	24 dB
8-PAM	0.0796	0.0292	0.0065	6.52×10^{-4}	1.91×10^{-5}	7.9×10^{-8}	1.49×10^{-11}	2.12×10^{-17}
8-PAM ^c _{$\eta=4/3$}	0.0310	0.0106	0.0015	7.06×10^{-5}	6.44×10^{-7}	4.24×10^{-10}	4.35×10^{-15}	6.1×10^{-23}
8-PAM ^e _{$\eta=4$}	4.86×10^{-4}	6.84×10^{-5}	3.40×10^{-6}	3.26×10^{-8}	2.31×10^{-11}	2.68×10^{-16}	4.56×10^{-24}	2.52×10^{-36}
16-PAM	0.3112	0.2081	0.1164	0.0496	0.0139	2.02×10^{-3}	1.05×10^{-4}	1.09×10^{-6}
16-PAM ^c _{$\eta=4/3$}	0.2286	0.1371	0.0654	0.0219	0.0042	3.41×10^{-4}	7.05×10^{-6}	1.69×10^{-8}
16-PAM ^e _{$\eta=4$}	0.0095	0.0044	0.0016	3.72×10^{-4}	4.06×10^{-5}	1.35×10^{-6}	6.82×10^{-9}	1.77×10^{-12}
32-PAM	0.5698	0.4799	0.3785	0.2712	0.1683	0.0840	0.0301	0.0064
32-PAM ^c _{$\eta=4/3$}	0.4902	0.3945	0.2927	0.1924	0.1053	0.0435	0.0116	0.0016
32-PAM ^e _{$\eta=4$}	0.0764	0.0346	0.0154	0.0075	0.0033	0.0011	1.88×10^{-4}	1.36×10^{-5}

Konačno, uporedili smo naše rezultate sa rezultatima iz [35]-[38], [65]. Za $M = 16$ i SNR = 24 dB, verovatnoća greške po simbolu ostvarena jednakoverovatnom PAM konstelacijom, geometrijski oblikovanom tako da prati Gausovu raspodelu iz [65] je 3.736×10^{-4} . Za isto M i SNR, primenom Lojd-Maksovog iterativnog algoritma prilikom projektovanja PAM konstelacije, kao u [35], verovatnoća greške je smanjena na 10^{-8} , dok se sa optimizovanom konstelacijom iz [36] postiže verovatnoća greške po simbolu 10^{-11} . Međutim, treba naglasiti da konstelacije iz [35] i [36] su kompleksne ne samo zbog složene iterativne procedure projektovanja, već i zbog toga što su konstelacione tačke nejednakoverovatne. Naime, konstelacije iz [35] i [36] su neuniformne u pogledu prostornog uređenja konstelacionih tačaka, kao i u pogledu verovatnoća konstelacionih tačaka. Ako pogledamo podatke prikazane u tabeli 4.3.7, možemo zaključiti da nove deo po deo uniformne konstelacije sa samo 2 podskupa i 2 različite verovatnoće konstelacionih tačaka postižu verovatnoću greške koju imaju neuniformne konstelacije iz [35] i [36], za razliku od konstelacija iste složenosti iz [37] i [38]. Naime, konstelacije iz [37] i [38] su takođe deo po deo uniformne, sa dva podskupa i dve različite verovatnoće konstelacionih tačaka, ali za $M = 16$ i SNR = 24 dB postižu verovatnoću greške po simbolu 10^{-6} . Ukoliko se podsetimo konstelacija koje smo obradili u sekciji 4.2, možemo uočiti da za slučajeve kada je $M = 16$, $L = 2$ i SNR = 24 dB ostvarena je verovatnoća greške od 10^{-6} . Glavni razlozi zbog kojih konstelacije iz [37], [38] i iz sekcije 4.2 ne postižu značajno smanjenje verovatnoće greške po simbolu u odnosu na verovatnoću greške konvencionalnih uniformnih PAM konstelacija su:

1) isti broj konstelacionih tačaka u podskupovima i 2) više verovatne susedne konstelacione tačke su na manjem rastojanju nego manje verovatne tačke. Prvi nedostatak je otklonjen kod obe klase PAM konstelacija predloženih u ovom delu uvođenjem parametarskih deo po deo linearnih funkcija za oblikovanje konstelacije. Naime, preko parametra η može se postići nejednak broj konstelacionih tačaka u podskupovima. Drugi nedostatak je prevaziđen kod konstelacija iz klase PAM^{η} , jer funkcije koje su korišćene za njihovo oblikovanje obezbeđuju manju gustinu viševerovatnih konstelacionih tačaka.

U ovoj sekciji disertacije odradili smo i simulaciju prenosa signala koji je modulisan predloženim PAM konstelacijama. Simulirali smo prenos u osnovnom opsegu preko komunikacionog kanala sa belim aditivnim Gasuovim šumom. Postupak simulacije je sažet sledećim algoritmom:

- 1) Podesimo ulazne parametre: tip klase PAM konstelacije i vrednosti parametara η i x_{\max} , kao i broj konstelacionih tačaka M i odnos signal-šum po bitu u dB. Takođe, zadajmo broj simbola u simulaciji N_{sim} .
- 2) Definišimo parametar t , krucijalni parametar za konfiguraciju konstelacije, izračunavanjem (4.3.9) ili (4.3.13) u zavisnosti od tipa klase konstelacije.
- 3) Odredimo amplitude konstelacionih tačaka $a_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = -M_i/2+1, \dots, 0, \dots, M_i/2$ koristeći relacije (4.3.3) - (4.3.5), gde su M_1 , M_2 , d_1 i d_2 određeni sa (4.3.8), (4.3.1), (4.3.16) i (4.3.17).
- 4) Generišimo sekvencu signala $x(s)$, $s = 1, 2, \dots, N_{sim}$ koja se sastoji od PAM modulisanih simbola čije su verovatnoće P_1 i P_2 definisane jednačinama (4.3.19) i (4.3.20). Da bismo to uradili, koristićemo ugrađenu MATLAB funkciju za generisanje Gausovih slučajnih promenljivih sa nultom srednjom vrednošću i varijansom 1. Nakon toga, pridružimo sve promenljive manje od t konstelacionim tačkama $a_{1,j}$, $j = -M_1/2+1, \dots, 0, \dots, M_1/2$, odnosno promenljive veće od t pridružimo konstelacionim tačkama $a_{2,j}$, $j = -M_2/2+1, \dots, 0, \dots, M_2/2$.
- 5) Simulirajmo prenos kroz kanal sa belim aditivnim Gausovim šumom čija je spektralna gustina snage N_0 .

$$N_0 = \frac{E_b}{10^{\frac{SNR}{10}}} = \frac{\frac{E_s}{\log_2(M)}}{10^{\frac{SNR}{10}}} = \frac{\sum_{s=1}^{N_{sim}} x^2(s)}{N_{sim} \log_2(M) 10^{\frac{SNR}{10}}}. \quad (4.3.36)$$

Koristeći ugrađenu MATLAB funkciju generišimo Gausov šum $n(s)$, $s = 1, 2, \dots, N_{sim}$ nulte srednje vrednosti i standardne devijacije σ

$$\sigma = \sqrt{\frac{N_0}{2}}. \quad (4.3.37)$$

Dodajmo šum PAM signalima koje smo generisali u koraku 4, čime dobijamo signal na prijemu

$$r(s) = x(s) + n(s), s = 1, 2, \dots, N_{sim}. \quad (4.3.38)$$

- 6) Odredimo granice odlučivanja MAP detektora $m_{i,j}$, $i = 1, 2, j = -M_i/2+1, \dots, 0, \dots, M_i/2$ prema (4.3.29) i (4.3.30).
- 7) Rekonstruišimo signal $\hat{x}(s)$, $s = 1, 2, \dots, N_{sim}$, donošenjem odluke o tome šta je poslato na osnovu primljenog signala iz koraka 5. Primenimo pravilo odlučivanja dato u (4.3.31).
- 8) Odredimo broj pogrešno prenetih simbol N_e poredeći detektovane simbole $\hat{x}(s)$ sa poslatim simbolima $x(s)$.
- 9) Procenimo verovatnoću greške po simbolu deleći broj grešaka sa ukupnim brojem generisanih simbola

$$P_{e-sim} = \frac{N_e}{N_{sim}}. \quad (4.3.39)$$

Simulacija opisana predstavljenim algoritmom, realizovana je u programskom paketu MATLAB. Rezultati simulacije dati su u tabeli 4.3.8. Za svaki od rezultata simuliran je prenos od 10^7 simbola. Dobijeni rezultati se vrlo dobro poklapaju sa teorijskim rezultatima (videti tabele 4.3.7 i 4.3.8) što potvrđuje tačnost teorijske analize predstavljene u disertaciji.

Tabela 4.3.8. Rezultati simulacije za verovatnoću greške po simbolu P_{e-sim} uniformne PAM, deo po deo uniformne $PAM_{\eta^c = 4/3}$ i deo po deo uniformne $PAM_{\eta^e = 4}$ konstelacije

SNR	10 dB	12 dB	14 dB	16 dB	18 dB	20 dB
16-PAM	0.3115	0.2080	0.1164	0.0497	0.0139	2.0×10^{-3}
16-PAM ^c _{$\eta = 4/3$}	0.2284	0.1372	0.0654	0.0219	0.0042	3.448×10^{-4}
16-PAM ^e _{$\eta = 4$}	0.0095	0.0044	0.0016	3.72×10^{-4}	4.18×10^{-5}	1.23×10^{-6}
32-PAM	0.5697	0.4802	0.3786	0.2711	0.1682	0.0840
32-PAM ^c _{$\eta = 4/3$}	0.4899	0.3945	0.2925	0.1924	0.1053	0.0435
32-PAM ^e _{$\eta = 4$}	0.0764	0.0346	0.0154	0.0075	0.0033	0.0011

Na kraju, upoređićemo M -arne PAM konstelacije koje smo predložili sa M -arnim ASK konstelacijama koje karakterišu nejednake verovatnoće simbola iz [32]. U ovom istraživanju, kao i u [32], razmatra se prenos signala kroz kanal sa belim aditivnim Gausovim šumom, pri čemu se na prijemu koristi MAP detektor. Vršeci simulaciju za $M = 4$ i $\text{SNR} = 12$ dB dobili smo da verovatnoća greške po simbolu iznosi 7×10^{-8} ili 10^{-8} u zavisnosti od tipa PAM konstelacije. Ove vrednosti su slične sa vrednostima verovatnoće greške koje su dobijene na slici 3 u [32] (za $M = 4$ i $\text{SNR} = 12$ dB, P_e je približno 10^{-8}). Sa druge strane, složenost projektovanja konstelacija je potpuno različita. Naime, u našem istraživanju definisali smo jednačine (4.3.9), (4.3.13), (4.3.16), (4.3.17), (4.3.19) i (4.3.20) za direktno oblikovanje konstelacije, dok procedura oblikovanja u [32] zahteva upotrebu programskog jezika za rešavanje sistema jednačina. Pored toga, u [32], da bi se simbolima optimalno dodelile date verovatnoće, uzete su u obzir sve permutacije datog skupa verovatnoća. Kada je broj konstelacionih tačaka M velik, broj permutacija postaje neprihvatljivo velik. To je verovatno razlog zašto su u [32] za M -arnu ASK konstelaciju prikazani rezultati samo za $M \leq 5$.

U ovoj sekciji predložili smo nove metode za projektovanje, odnosno oblikovanje konstelacije koje rezultuju deo po deo uniformnim PAM konstelacijama sa dva podskupa ekvidistantnih i jednakoveratnih konstelacionih tačaka, pri čemu su rastojanja između susednih tačaka i verovatnoće konstelacionih tačaka ovih podskupova različite. Naime, izveli smo deo po deo linearne funkcije koje uniformnu PAM konstelaciju transformišu u deo po deo uniformnu. Štaviše, predložili smo dve klase funkcija za oblikovanje konstelacije što je dalo dve klase deo po deo uniformnih PAM konstelacija, PAM^c_η i PAM^e_η . Za razliku od drugih deo po deo uniformnih PAM konstelacija, ovde predložene deo po deo uniformne PAM konstelacije mogu imati različit broj konstelacionih tačaka u okviru podskupova. Ovo se postiže odabirom vrednosti za parametar η (vrednost parametra treba da je različita od 2). Pored toga, funkcije oblikovanja koje daju konstelacije iz klase PAM^e_η obezbeđuju manju gustinu više verovatnih konstelacionih tačaka, što je poželjna karakteristika konstelacije koja smanjuje verovatnoću greške.

U ovom odeljku smo detaljno proučili ponašanje klasa konstelacija PAM^c_η i PAM^e_η kada je broj konstelacionih tačaka u podskupovima različit. Zaključili smo da se najbolja konstelacija iz klase PAM^c_η dobija za $\eta = 4/3$, dok je u klasi PAM^e_η najbolja konstelacija $\text{PAM}^e_{\eta=4}$. Ove konstelacije sa samo dva podskupa i dve različite verovatnoće konstelacionih tačaka značajno smanjuju verovatnoću greške po simbolu u poređenju sa verovatnoćom greške kod konvencionalne uniformne PAM konstelacije. Uz to, verovatnoća greške po

simbolu za $PAM^c_{\eta=4/3}$ konstelaciju je približno jednaka verovatnoći greške po simbolu neuniformne konstelacije projektovane Lojd-Maksovim iterativnim algoritmom, pri čemu $PAM^e_{\eta=4}$ konstelacije pariraju čak i neuniformnim konstelacijama dobijenim postupkom združene optimizacije.

5 Projektovanje APSK konstelacije inspirisano kružno-simetričnom kompaning kvantizacijom

Amplitudsko fazna modulacija (APSK) je konstelacija višeg reda (višenivoska konstelacija) koja se sastoji od nekoliko koncentričnih prstenova, pri čemu svaki od prstenova sadrži konstelacione tačke koje su međusobno udaljene za konstantnu vrednost faze. APSK modulacija predstavlja spektralno efikasnu i efikasnu po snazi modulaciju koja je uz to robustna na nelinearna izobličenja [10]-[21]. Ova pogodnost čini da se APSK modulacija primenjuje prilikom prenosa kroz nelinearne kanale. Tako, APSK modulacija je integrisana u drugu generaciju standarda za digitalno emitovanje videa putem satelita, DVB-S2 [12]. APSK modulacioni format je prepoznat kao pogodan za prevazilaženje problema nelinearnosti optičkih vlakana u optičkim komunikacionim sistemima [18]-[21]. APSK modulacija se primenjuje i u sistemima sa višestrukim ulazima i višestrukim izlazima (MIMO sistemi) [22]-[26].

Sa istim ciljem kao i u prethodnim poglavljima, u ovom delu disertacije ćemo razmatrati kako da poboljšamo efikasnost po snazi APSK konstelacije kako bi odgovorili zahtevima koje današnje komunikacije postavljaju u pogledu efikasnijeg prenosa velike količine podataka. Ovim izazovima ćemo odgovoriti primenjujući oblikovanje konstelacija, što je prepoznato i u literaturi [10]-[24], [27]-[29], [53], [54]. Bavićemo se: geometrijskim oblikovanjem (GCS) konstelacije, probabilističkim oblikovanjem konstelacije (PCS) i hibridnim oblikovanjem konstelacije (HCS) koje podrazumeva istovremenu primenu geometrijskog i probabilističkog oblikovanja konstelacije.

Geometrijsko oblikovanje APSK konstelacije se može realizovati kroz nelinearni porast radijusa konstelacionih prstenova počevši od centra. Uobičajno je da je veći broj konstelacionih tačaka koncentrisan blizu centra konstelacije (nego na periferiji konstelacije) sa ciljem da se realizuje dvodimenzionalna konstelacija koja prati Gausov oblik. Ovakvo geometrijsko uređenje konstelacionih tačaka se obično dobija optimizacijom metrika, poput minimalnog euklidskog rastojanja, međusobne informacije (MI), generalizovane MI [10], [11], [15], [27].

Probabilističko oblikovanje (PCS) APSK konstelacije ima ulogu da odredi verovatnoće konstelacionih tačaka. Probabilističko oblikovanje se uobičajno sprovodi tako da verovatnoće konstelacionih tačaka prate Gausovu raspodelu. Zapravo, probabilističko oblikovanje ima ulogu da smanji srednju snagu signala i verovatnoću pogrešno primljenih simbola dodeljujući veće verovatnoće konstelacionim tačkama sa manjom amplitudom, odnosno dodeljujući manje verovatnoće konstelacionim tačkama sa većom amplitudom. Tako, kod APSK konstelacija koje su kružno-simetrične, verovatnoće konstelacionih tačaka u okviru jednog prstena, odnosno verovatnoće konstelacionih tačaka sa istom amplitudom imaju istu verovatnoću emitovanja [27], [29]. Kao što smo već pomenuli, realizacija nejednako verovatnih konstelacionih tačaka se vrši po Maxwell-Boltzmann raspodeli, koja predstavlja Gausovu raspodelu uzorkovanu u diskretnim amplitudama u konačnom amplitudskom opsegu čime se postiže maksimizacija entropije uz ograničenje srednje snage signala [66], [67].

Kako bi postigli fleksibilniji format APSK konstelacije, naše istraživanje usmerićemo na hibridno oblikovanje konstelacije (HCS) koje podrazumeva kombinaciju geometrijskog i probabilističkog oblikovanja, odnosno istovremeno uređivanje položaja i verovatnoće konstelacionih tačaka. Ovakav način oblikovanja konstelacije vršićemo sa ciljem da povećamo energetska efikasnost konstelacije, odnosno efikasnost po snazi u kanalima sa belim aditivnim Gausovim šumom. Umesto uobičajene metodologije koja podrazumeva optimizaciju metrike kanala ili minimalnog euklidskog rastojanja, predložićemo oblikovanje APSK konstelacije zasnovano na tehnici kvantizacije. Zapravo, postoji sličnost između APSK konstelacije i kružno-simetrične kvantizacije u smislu da obe dele dvodimenzionalni geometrijski prostor na koncentrične prstenove koji sadrže tačke koje su međusobno razdvojene konstantnom fazom. Ova sličnost nas je inspirisala da primenimo prednosti koje pružaju tehnike kvantizacije prilikom hibridnog oblikovanja APSK konstelacije. Hibridno oblikovanje konstelacija zasnovano na tehnikama vektorske kvantizacije je predloženo i

publikovano u [39], [40], [46]-[48]. U tim istraživanjima, različiti modeli vektorske kvantizacije su direktno preslikani na konstelacioni dijagram. Ovim je ostvareno u [39], [40], [46]-[48] uređenje konstelacionih tačaka takvo da konstelacione tačke imaju veću gustinu u oblastima većih verovatnoća konstelacionih tačaka, što predstavlja glavni nedostatak tih konstelacija. Kao što smo pomenuli ranije, sa aspekta kvantizacije to je poželjna karakteristika jer se time smanjuje distorzija, odnosno smanjuje se srednje kvadratna greška. Međutim, sa stanovišta modulacije i verovatnoće greške, poželjna karakteristika u pogledu gustine konstelacionih tačaka i njihovih verovatnoća je obrnuta, što smo pokazali i u odeljku 4.3. Pozivajući se na rezultate i zaključke iz sekcije 4.3, naša dalja istraživanja usmerićemo na oblikovanje konstelacije u dvodimenzionalnom prostoru sa ciljem da realizujemo konstelacije kod kojih konstelacione tačke sa većom verovatnoćom imaju manju gustinu. Ovo je obrnuto poretku koji postoji u kružno-simetričnoj kvantizaciji. Da bismo postigli gore pomenuto, predložićemo primenu tehnika kvantizacije u oblikovanju APSK konstelacija na potpuno drugačiji način.

5.1 Funkcije za geometrijsko i probablističko oblikovanje APSK konstelacije

U ovom delu disertacije definisaćemo nov metod za projektovanje APSK konstelacije zasnovan na geometrijskom i probablističkom oblikovanjm konstelacije. Kao rezultat dobićemo M -arnu APSK konstelaciju sa L neekvidistantnih koncentričnih prstenova, pri čemu svaki od njih sadrži N konstelacionih tačaka čije su apriorne verovatnoće konstantne u okviru jednog prstena. Započecemo istraživanje tako što ćemo definisati APSK konstelaciju kao skup M parova koje čine kompleksna predstava konstelacione tačke ($r_i \exp\{j\theta_{i,k}\}$) i njena apriorna verovatnoća (P_i)

$$C = \{(r_i \exp\{j\theta_{i,k}\}, P_i) : 1 \leq i \leq L, 1 \leq k \leq N\}, \quad (5.1.1)$$

gde je $L \times N = M$ i važi:

$$N \sum_{i=1}^L P_i = 1. \quad (5.1.2)$$

U APSK konstelaciji, usled kružne simetrije, fazni pomeraj između susednih konstelacionih tačaka koje pripadaju istom prstenu je konstantan i iznosi $2\pi/N$. Pa tako, takođe usled

simetrije, najbolji fazni pomeraj između susednih prstenova, uzimajući u obzir maksimizaciju minimalnog euklidskog rastojanja, iznosi πN [10]. U skladu sa tim, definišemo fazu konstelacionih tačaka $\theta_{i,k}$, $i = 1, \dots, L$, $k = 1, \dots, N$ na sledeći način:

$$\theta_{i,k} = \vartheta(i, k, N) = \begin{cases} \frac{2\pi}{N} \left(k - \frac{1}{2} \right), & i = 1, 3, 5, \dots, k = 1, \dots, N \\ \frac{2\pi}{N} (k - 1), & i = 2, 4, 6, \dots, k = 1, \dots, N \end{cases}. \quad (5.1.3)$$

Da bismo odredili radijus prstenova konstelacionih tačaka, uvodimo funkciju geometrijskog oblikovanja koja skup uniformno raspoređenih radijusa $\{(i-1/2)d, i = 1, 2, \dots, L\}$ transformiše u skup neuniformno raspoređenih radijusa $\{r_i, i = 1, 2, \dots, L\}$. Podsetimo se da smo u prethodnim diskusijama došli do zaključka da je korisno primeniti kompanding tehniku na inverzan način prilikom projektovanja konstelacije. Zapravo, u kompanding kvantizaciji izlazni nivoi se određuju primenom ekspanzorske funkcije na uniformno raspoređene nivoe. Na taj način postiže se da se gustina izlaznih nivoo smanjuje sa smanjivanjem verovatnoće izlaznih nivoo. Suprotno ovome, u disertaciji predlažemo da se radijusi konstelacionih tačaka dobijaju primenom kompresorske funkcije na uniformno raspoređene nivoe. Ovim se obezbeđuje da se gustina prstenova povećava sa smanjivanjem apriornih verovatnoća konstelacionih tačaka. Zbog toga, funkciju geometrijskog oblikovanja definišemo kao kompresorsku funkciju kompanding kvantizacije. S obzirom da razmatramo kružno-simetričnu APSK konstelaciju, radijalna kompresorska funkcija optimalne kompandig kvantizacije za kružno-simetrične izvore [49] se nameće kao dobar izbor za formulaciju funkcije oblikovanja konstelacije. Zapravo, modifikovaćemo radijalnu kompresorsku funkciju predloženu u [49] tako da je preslikavanje iz $[0, r_{\max}]$ u $[0, r_{\max}]$ umesto preslikavanja $[0, +\infty)$ u $[0, 1)$. Nakon toga, primenjujući funkciju na ekvidistantne nivoe $(i-1/2)d$, gde je $d = r_{\max}/L$, izvodimo novu funkciju za geometrijsko oblikovanje konstelacije i određivanje radijusa prstenova:

$$r_i = \varphi(i, L, r_{\max}) = r_{\max} \frac{\sqrt{1 - \exp\left\{-\frac{(i-1/2)^2 r_{\max}^2}{4L^2}\right\}}}{\sqrt{1 - \exp\left\{-\frac{r_{\max}^2}{4}\right\}}}, \quad i = 1, \dots, L. \quad (5.1.4)$$

Kao što možemo da primetimo u predloženoj formulaciji (5.1.4) geometrijska funkcija oblikovanja zavisi samo od broja prstenova L i parametra r_{\max} .

Da bismo odredili verovatnoću emitovanja konstelacionih tačaka određenog radijusa $P_i^l = N \times P_i$, uvodimo funkciju koja skup od L jednakih verovatnoća $\{1/L, i = 1, 2, \dots, L\}$, transformiše u skup različitih verovatnoća $\{P_i^l = N \times P_i, i = 1, 2, \dots, L\}$. P_i^l zapravo označava verovatnoću da tačka koja se emituje pripada i -tom prstenu. Probabilističku funkciju

oblikovanja ćemo formulirati primenjujući analogiju sa inverznim modelom kompadding kvantizacije. Inverzni model optimalne kompadding kvantizacije za kružno-simetrične izvore pretpostavlja da se dvodimenzionalna slučajna promenljiva sastavljena od dve nezavisne Gausove slučajne promenljive dovodi na ulaz bloka sastavljanog od kaskadne veze ekspandora, uniformnog kvantizera i kompresora. Zapravo, pretpostavićemo da suma apriornih verovatnoća konstelacionih tačaka koje pripadaju prstenu koji je određen radijusom r_i ($P_i^l = N \times P_i$) predstavlja verovatnoću da se dvodimenzionalna slučajna promenljiva sastavljena od dve nezavisne Gausove promenljive nalazi u opsegu $[t_i, t_{i+1})$, gde je vrednost t_i određena predloženom funkcijom geometrijskog oblikovanja na sledeći način:

$$\begin{aligned} t_i &= \varphi(i - 1/2, L, r_{\max}), \quad i = 1, \dots, L \\ t_{L+1} &= +\infty \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Matematička formulacija prethodne pretpostavke je:

$$P_i^l = NP_i = \exp\left\{-\frac{t_i^2}{2}\right\} - \exp\left\{-\frac{t_{i+1}^2}{2}\right\}, \quad i = 1, \dots, L. \quad (5.1.6)$$

Zamenom (5.1.5) u (5.1.6) i nakon toga sređivanjem izraza dolazimo do nove funkcije za probabilističko oblikovanje

$$\begin{aligned} P_i &= \omega(i, N, L, r_{\max}) = \\ &\begin{cases} \frac{1}{N} \left(\exp\left\{-\frac{\varphi^2(i - 1/2, L, r_{\max})}{2}\right\} - \exp\left\{-\frac{\varphi^2(i + 1/2, L, r_{\max})}{2}\right\} \right), & i = 1, \dots, L - 1 \\ \frac{1}{N} \exp\left\{-\frac{\varphi^2(i - 1/2, L, r_{\max})}{2}\right\}, & i = L. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Iz jednačina (5.1.4) do (5.1.7) se može zaključiti da broj konstelacionih tačaka po jednom prstenu N utiče na apriorne verovatnoće konstelacionih tačaka P_i , $i = 1, 2, \dots, L$, ali ne utiče na verovatnoće prstena P_i^l , $i = 1, 2, \dots, L$. Iz (5.1.7) može se zaključiti da funkcija probabilističkog oblikovanja zavisi od funkcije geometrijskog oblikovanja definisane izrazom (5.1.4). Formule (5.1.4) i (5.1.7) pokazuju da predložena APSK konstelacija ima sledeću karakteristiku: manja gustina radijusa prstenova, veće apriorne verovatnoće konstelacionih tačaka (slika 5.1.1 i slika 5.1.2). Zapravo, sa slike 5.1.1 možemo da primetimo da naša konstelacija, za razliku od konstelacija dobijenih uobičajnim geometrijskim oblikovanjem, ima više konstelacionih prstenova lociranih na periferiji nego u blizini centra konstelacije. Takođe, sa slike 5.1.2 možemo uočiti da prsten na najvećem rastojanju od susednih prstenova ima najveću apriornu verovatnoću što nije uobičajena raspodela. Ove karakteristike

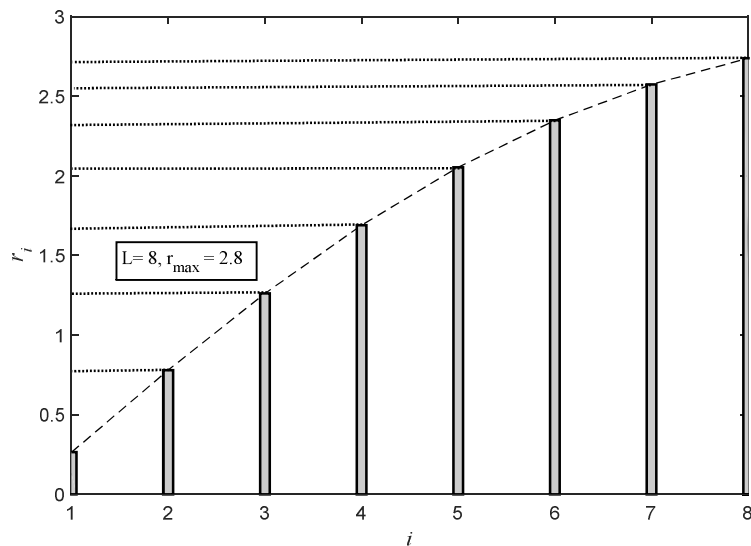
konstelacije omogućuje smanjivanje verovatnoće greške po simbolu, i veću efikasnost po snazi.

Konačno, možemo konstantovati da se kodna knjiga naše kružno-simetrične APSK konstelacije može zapisati na sledeći način:

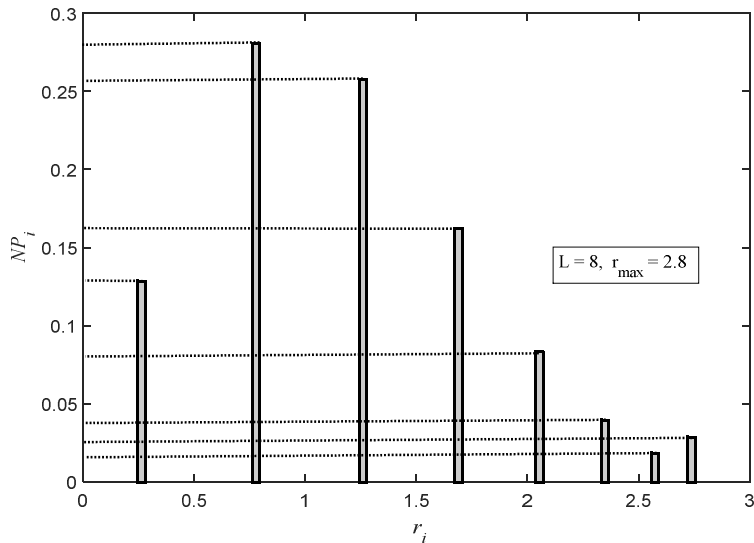
$$C = \{(r_i \exp\{j\theta_{i,k}\}, P_i) | r_i = \varphi(i, L, r_{\max}), \theta_{i,k} = \vartheta(i, k, N), P_i = \omega(i, N, L, r_{\max}): 1 \leq i \leq L, 1 \leq k \leq N\} \quad (5.1.8)$$

gde $\varphi(i, L, r_{\max})$, $\vartheta(i, k, N)$ i $\omega(i, N, L, r_{\max})$ su funkcije definisane sa (5.1.4), (5.1.3) i (5.1.7), respektivno. Srednja energija po bitu naše APSK konstelacije se izračunava primenom osnovnih definicija za srednju energiju po bitu [1]:

$$E_b = \frac{N \sum_{i=1}^L P_i r_i^2}{\log_2 M} = \frac{N}{\log_2 N + \log_2 L} \sum_{i=1}^L \omega(i, N, L, r_{\max}) \varphi^2(i, L, r_{\max}). \quad (5.1.9)$$

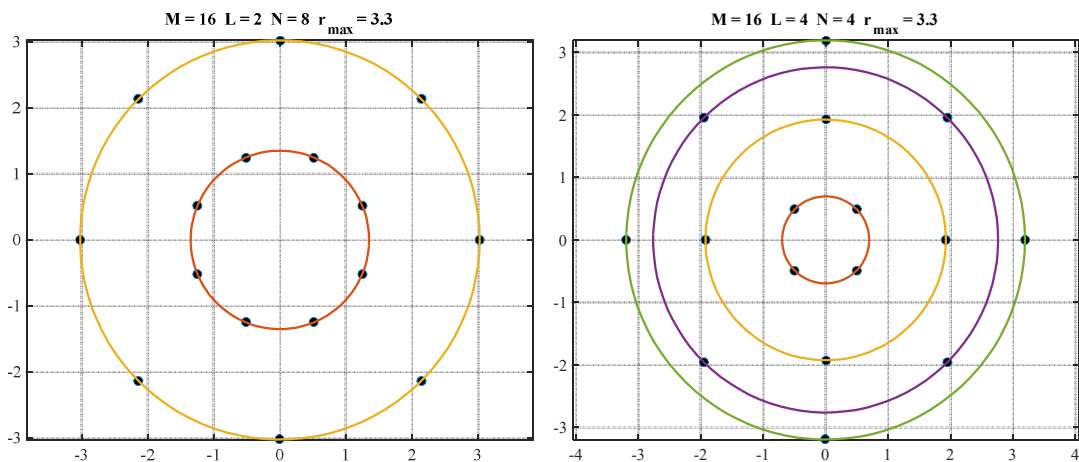


Slika 5.1.1. Radijus konstelacione tačke u funkciji rednog broja prstena

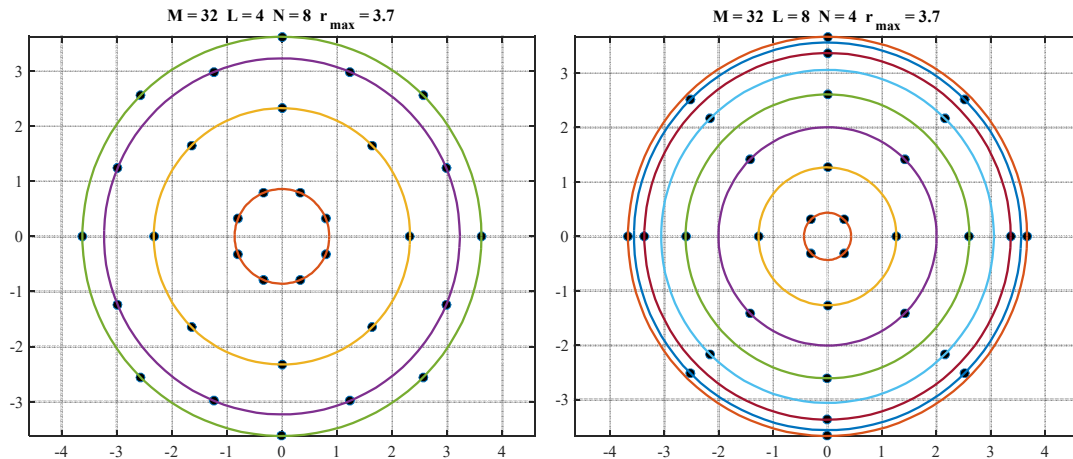


Slika 5.1.2. Verovatnoća prstenova u zavisnosti od radijusa konstelacione tačke

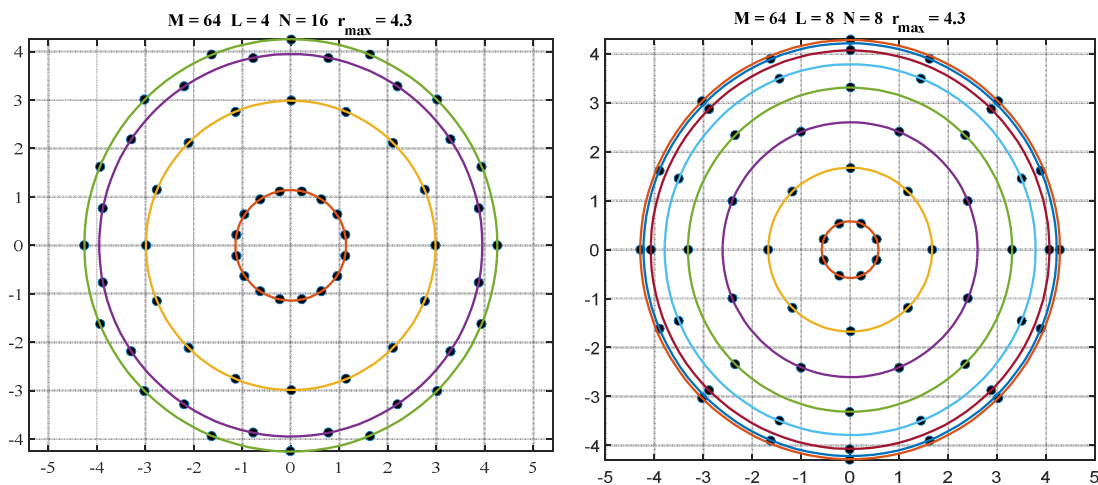
Možemo naglasiti da su L , N i r_{\max} parametri konstelacije koji se biraju u zavisnosti od toga koje su željene performanse. To znači da kod konstelacije koju predlažemo postoji visok stepen slobode prilikom njenog projektovanja. Sa L i r_{\max} direktno utičemo na radijuse prstenova u okviru kojih je N konstelacionih tačaka uniformno raspodeljeno. Takođe sa L i r_{\max} kontrolišemo P_i^l , dok sa N podešavamo ukupan broj konstelacionih tačaka M i njihove apriorne verovatnoće (P_i). Pored toga, kako važi da je $M = L \times N$, broj konstelacionih tačaka nije ograničen na stepen 2. Za različite vrednosti L , N i r_{\max} , r_i i $\theta_{i,k}$ se nalaze koristeći jednačine (5.1.4) i (5.1.3). Predložene konstelacione dijagrame smo prikazali na slikama 5.1.3, 5.1.4, 5.1.5.



Slika 5.1.3. APSK konstelacije za $M = 16$ i različito L, N



Slika 5.1.4. APSK konstelacije za $M = 32$ i različito L, N



Slika 5.1.5. APSK konstelacije za $M = 64$ i različito L, N

5.2 Performanse APSK konstelacije u kanalu sa belim Gausovim šumom

U ovom delu disertacije odredićemo verovatnoću pogrešno primljenih simbola kada se za modulaciju signala koji se prenosi kroz kanal sa belim Gausovim šumom koristi predložena APSK konstelacija. Neka je C APSK konstelacija definisana izrazom (5.1.8). Pretpostavićemo da $\mathbf{x} = r_x \exp\{j\theta_x\} \in C$ predstavlja modulirani simbol koji se šalje kroz kanal

sa belim aditivnim Gausovim šumom. Modulirani signal prolaskom kroz AWGN kanal biva degradiran šumom čija spektralna gustina snage iznosi $N_0/2$. Pa tako, signal na prijemu ima oblik

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (5.2.1)$$

gde \mathbf{n} predstavlja AWGN komponentu sa kružnom kompleksnom Gausovom raspodelom $CN(0, N_0/2)$. Primljeni signal se obrađuje prema MAP kriterijumu. MAP kriterijum ispituje sve $P(\mathbf{x}_{i,k} | \mathbf{y})$, $i = 1, 2, \dots, L$, $k = 1, 2, \dots, N$ i selektuje $\mathbf{x}_{i,k} = a_i \exp\{j\theta_{i,k}\}$ koja maksimizira $P(\mathbf{x}_{i,k} | \mathbf{y})$ [1]

$$\mathbf{x}^* = \arg \max_{\mathbf{x}_{i,k}} P(\mathbf{x}_{i,k} | \mathbf{y}). \quad (5.2.2)$$

Primenom Bajesovog pravila, pomenuto pravilo odlučivanja može biti pojednostavljeno na sledeći način [49]

$$\mathbf{x}^* = \arg \max_{\mathbf{x}_{i,k}} p(\mathbf{y} | \mathbf{x}_{i,k}) P(\mathbf{x}_{i,k}), \quad (5.2.3)$$

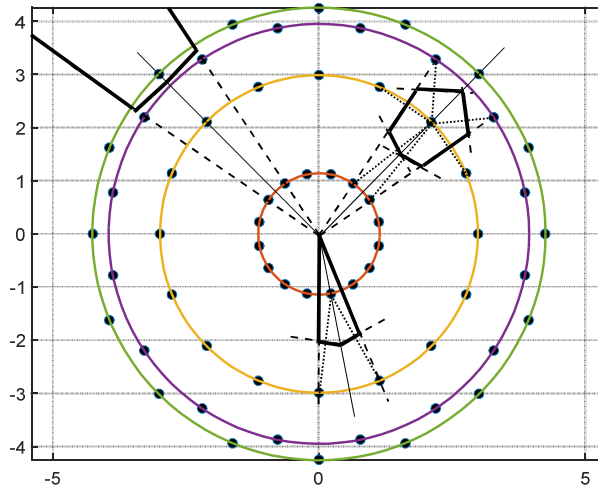
gde $P(\mathbf{x}_{i,k}) = P_i$ predstavlja apriornu verovatnoću konstelacione tačke, definisanu sa (5.1.7), dok funkcija uslovne gustine verovatnoće $p(\mathbf{y} | \mathbf{x}_{i,k})$ predstavlja probabilistički opis AWGN kanala. Iz (5.2.1) sledi da je $p(\mathbf{y} | \mathbf{x}_{i,k})$ združena gustina dve nezavisne Gausove slučajne promenljive koje imaju istu varijansu ($N_0/2$) i različite srednje vrednosti $r_i \cos \theta_{i,k}$ i $r_i \sin \theta_{i,k}$. Ovo implicira da oblast odlučivanja za svaku konstelacionu tačku, osim za tačke na prvom i poslednjem prstenu, predstavlja nepravilan heksagon dobijen postavljanjem normala na linije koje povezuju posmatranu konstelacionu tačku $\mathbf{x}_{i,k}$ sa najbližim susedima

$$t_{i,k,l,m} = \frac{d_{i,k,l,m}}{2} + \frac{N_0}{d_{i,k,l,m}} \ln \frac{P_i}{P_l}, \text{ za } \forall l, m \because \mathbf{x}_{l,m} \in N(\mathbf{x}_{i,k}). \quad (5.2.4)$$

U (5.2.4) $N(\mathbf{x}_{i,k})$ označava skup najbližih suseda konstelacione tačke $\mathbf{x}_{i,k}$ dok $d_{i,k,l,m}$ je euklidsko rastojanje između konstelacionih tačaka $\mathbf{x}_{i,k}$ i $\mathbf{x}_{l,m}$

$$d_{i,k,l,m} = [r_i^2 + r_l^2 - 2r_i r_l \cos(\theta_{i,k} - \theta_{l,m})]^{1/2}. \quad (5.2.5)$$

Dodatno objašnjenje, odnosno ilustracija podele dvodimenzionalnog prostora na oblasti odlučivanja prikazana je na slici 5.2.1. Treba napomenuti da (5.2.4) se svodi na $d_{i,k,l,m}/2$ za $l = i$. To znači da granice odlučivanja između konstelacionih tačaka koje pripadaju istom prstenu su normale postavljene na sredini između tačaka.



Slika 5.2.1. Podela prostora po MAP kriterijumu za APSK konstelaciju

Da bismo izveli izraz za verovatnoću pogrešno primljenih simbola, izvođenje ćemo započeti primenjujući osnovnu definiciju za verovatnoću greške po simbolu SER [1] na kružno-simetričnu konstelaciju

$$\text{SER} = \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^N P(e|\mathbf{x}_{i,k}, C) P_i, \quad (5.2.6)$$

gde $P(e|\mathbf{x}_{i,k}, C)$ predstavlja verovatnoću da je pogrešan simbol detektovan na prijemu pod uslovom da je poslat simbol $\mathbf{x}_{i,k}$ i da je konstelacija definisana sa C . Uslovna verovatnoća greške po simbolu $P(e|\mathbf{x}_{i,k}, C)$ može biti predstavljena kao:

$$P(e|\mathbf{x}_{i,k}, C) = P\left(\bigcup_{l=1}^L \bigcup_{m=1}^N \mathbf{x}_{l,m} \mid \mathbf{x}_{i,k}, C\right), \quad (5.2.7)$$

gde $E(\mathbf{x}_{l,m}|\mathbf{x}_{i,k}, C)$ predstavlja događaj da je simbol $\mathbf{x}_{l,m}$ primljen pod uslovom da je simbol $\mathbf{x}_{i,k}$ poslat, pri čemu su moguće konstelacione tačke definisane sa (5.1.8). Pritom, potrebno je naglasiti da verovatnoća da je $\mathbf{x}_{l,m}$ detektovano ako je $\mathbf{x}_{i,k}$ poslato ne uzimajući u obzir ostale konstelacione tačke (verovatnoća greške za binarne simbole) je veća od verovatnoće kada se računavaju ograničenja koja poizilaze iz C , $P(E(\mathbf{x}_{l,m}|\mathbf{x}_{i,k}, C)) \leq P(E(\mathbf{x}_{l,m}|\mathbf{x}_{i,k}))$. Stoga, gornja granica za uslovnu verovatnoću greške po simbolu (5.2.7) može biti određena na sledeći način

$$P(e|\mathbf{x}_{i,j}, C) \leq \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^N \mathbf{x}_{l,m} \mid \mathbf{x}_{i,k} P\left(E(\mathbf{x}_{l,m}|\mathbf{x}_{i,k})\right). \quad (5.2.8)$$

Zamenom (5.2.8) u (5.2.6) dobijamo

$$\text{SER} \leq \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^N \mathbb{1}_{l \neq i \vee m \neq k} P_i P \left(E(\mathbf{x}_{l,m} | \mathbf{x}_{i,k}) \right). \quad (5.2.9)$$

Aproksimacijom (5.2.9) pojednostavljujemo proračun verovatnoće greške po simbolu. Zapravo, proračun verovatnoće greške po simbolu za dvodimenzionalnu konstelaciju je razložen na proračunu $M \times (M-1)$ verovatnoća greške kod binarnih signala. Poznato je da sa MAP kriterijumom odlučivanja verovatnoća greške za binarne signale, u našem slučaju označene sa $\mathbf{x}_{i,k}$ i $\mathbf{x}_{l,m}$, u funkciji njihovog euklidskog rastojanja $d_{i,k,l,m}$ može biti predstavljena kao u [1]

$$P \left(E(\mathbf{x}_{l,m} | \mathbf{x}_{i,k}) \right) = Q \left(\sqrt{\frac{d_{i,k,l,m}^2}{2N_0}} + \sqrt{\frac{2N_0}{d_{i,k,l,m}^2}} \ln \frac{P_i}{P_l} \right), \quad (5.2.10)$$

gde $Q(\cdot)$ predstavlja Q funkciju

$$Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \quad (5.2.11)$$

Zamenjujući (5.2.10) u (5.2.9) definišemo union bound (gornju granicu) za verovatnoću greške po simbolu MAP prijemnika za kružno-simetričnu konstelaciju koja ima nejednake apriorne verovatnoće i jednak broj konstelacionih tačaka po prstenovima

$$\text{SER} \leq \sum_{i=1}^L \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^N \mathbb{1}_{l \neq i \vee m \neq k} P_i Q \left(\sqrt{\frac{d_{i,k,l,m}^2}{2N_0}} + \sqrt{\frac{2N_0}{d_{i,k,l,m}^2}} \ln \frac{P_i}{P_l} \right). \quad (5.2.12)$$

Usled kružne simetrije izraz za union bound (5.2.12) može se dalje pojednostaviti. Naime, za dato i i bilo koje k uslovne verovatnoće greške $P(e|\mathbf{x}_{i,k}, C)$, $k = 1, 2, \dots, N$ su jednake. To nam omogućava da pojednostavimo izraz (5.2.12) na sledeći način

$$\text{SER} \leq N \sum_{i=1}^L \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^N \mathbb{1}_{l \neq i \vee m \neq k^*} P_i Q \left(\sqrt{\frac{d_{i,k^*,l,m}^2}{2N_0}} + \sqrt{\frac{2N_0}{d_{i,k^*,l,m}^2}} \ln \frac{P_i}{P_l} \right). \quad (5.2.13)$$

gde k^* predstavlja proizvoljno izabranu vrednost za k . U poređenju sa (5.2.12), broj sabiraka sume je smanjen N puta, odnosno broj sabiraka je smanjen sa $M \times (M-1)$ na $L \times (M-1)$. Kako je Q funkcija opadajuća funkcija, doprinos članova u (5.2.13) se smanjuje sa udaljavanjem od poslate konstelacione tačke $\mathbf{x}_{i,k^*,i} = 1, 2, \dots, L$. To znači da izraz (5.2.13) može dalje biti pojednostavljen zanemarivanjem članova koji nisu susedi simbola koji je poslat $\mathbf{x}_{i,k^*,i} = 1, 2, \dots, L$. Pored toga, potrebno je uzeti u obzir da za veće vrednosti N svaki \mathbf{x}_{i,k^*} ima 6 suseda ako je $i = 2, \dots, L-1$ ili 4 suseda ako je $i = 1$ ili $i = L$ (vidi sliku 5.2.1). Takođe, treba

uključiti i kružnu simetriju pri uprošćavanju izraza. Sve ovo je omogućilo da izraz za verovatnoću greške po simbolu ima samo $3L-2$ članova sume:

$$\begin{aligned}
\text{SER} \approx & 2NP_1Q \left(\sqrt{\frac{d_{1,k^*,1,k^*+1}^2}{2N_0}} \right) \\
& + 2NP_1Q \left(\sqrt{\frac{d_{1,k^*,2,k^*}^2}{2N_0}} + \sqrt{\frac{2N_0}{d_{1,k^*,2,k^*}^2}} \ln \frac{P_1}{P_2} \right) \\
& + 2N \sum_{i=2}^{L-1} P_i Q \left(\sqrt{\frac{d_{i,k^*,i-1,k^*}^2}{2N_0}} + \sqrt{\frac{2N_0}{d_{i,k^*,i-1,k^*}^2}} \ln \frac{P_i}{P_{i-1}} \right) \\
& + 2N \sum_{i=2}^{L-1} P_i Q \left(\sqrt{\frac{d_{i,k^*,i,k^*+1}^2}{2N_0}} \right) \\
& + 2N \sum_{i=2}^{L-1} P_i Q \left(\sqrt{\frac{d_{i,k^*,i+1,k^*}^2}{2N_0}} + \sqrt{\frac{2N_0}{d_{i,k^*,i+1,k^*}^2}} \ln \frac{P_i}{P_{i+1}} \right) \\
& + 2NP_L Q \left(\sqrt{\frac{d_{L,k^*,L-1,k^*}^2}{2N_0}} + \sqrt{\frac{2N_0}{d_{L,k^*,L-1,k^*}^2}} \ln \frac{P_L}{P_{L-1}} \right) \\
& + 2NP_L Q \left(\sqrt{\frac{d_{L,k^*,L,k^*+1}^2}{2N_0}} \right).
\end{aligned} \tag{5.2.14}$$

5.3 Analiza numeričkih rezultata

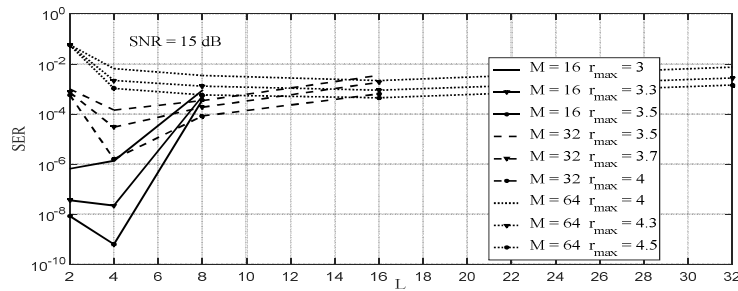
U ovom delu ispitaćemo sposobnost predloženih konstelacija da sačuvaju kvalitet digitalnih poruka pri niskim nivoima snage, odnosno analiziraćemo efikasnost po snazi konstelacije procenjujući $\text{SNR} = E_b/N_0$ koji je potreban za postizanje date verovatnoće greške po simbolu. Ispitaćemo zavisnost SER od parametara konstelacije kao što su r_{\max} , L i M . Na slici 5.3.1 smo prikazali zavisnost verovatnoće greške po simbolu SER od broja prstenova u konstelaciji L , za različite vrednosti parametra r_{\max} i M i za vrednosti SNR jednake 15 dB i 20 dB. Sa slike 5.3.1 možemo zaključiti da SER raste sa povećanjem broja konstelacionih tačaka. Drugo zapažanje je da se SER smanjuje, odnosno poboljšava se efikasnost po snazi sa

povećanjem r_{\max} . Parametar r_{\max} direktno utiče na geometrijsko oblikovanje konstelacije (vidi jednačinu (5.1.4)) i na probabilističko oblikovanje konstelacije (vidi relacije (5.1.6) i (5.1.7)). Povećavajući r_{\max} konstelacione tačke organizujemo u okviru šireg kruga i u isto vreme činimo da razlika između apriornih verovatnoća konstelacionih tačaka po prstenovima bude izraženija.

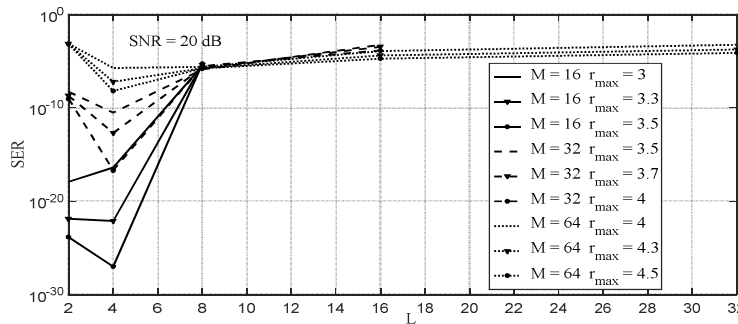
Rezultati predstavljeni na slici 5.3.1 pokazuju da zavisnost verovatnoće greške po simbolu od L ima svoj minimum. U skoro svim slučajevima minimum verovatnoće greške je postignut za $L = 4$. Optimalna vrednost L zavisi od M , ali takođe i od SNR i r_{\max} . Stoga, za $M = 64$, kada je SNR jednak 15 dB, optimalna vrednost L je jednaka 16, dok za veću vrednost SNR od 20 dB najmanja SER vrednost može biti postignuta za $L = 4$. Takođe, za $M = 16$, ako r_{\max} ima malu vrednost, na primer $r_{\max} = 3$, optimalna vrednost za L jednaka je 2, dok je u drugim slučajevima optimalna vrednost jednaka $L = 4$. Prilikom određivanja r_{\max} potrebno je imati na umu da se sa povećanjem vrednosti r_{\max} smanjuje verovatnoća greške po simbolu, pa tako adekvatan izbor za 16-APSK može biti konstelacija sa parametrima $r_{\max} = 3.3$ i $L = 4$. Dodatna smernica u vezi sa određivanjem r_{\max} je da veća vrednost M podrazumeva veću vrednost r_{\max} . Zapravo, verovatnoća greške po simbolu se povećava sa povećanjem broja konstelacionih tačaka M , zbog čega je neophodno povećati r_{\max} kako bi smanjili verovatnoću greške. Međutim, sa r_{\max} povećanjem možemo prouzrokovati zanemarljivo malu verovatnoću konstelacionih tačaka sa L -tog prstena (P_L) čime se pak na neki način smanjuje veličina konstelacije. Zbog toga se vrednost r_{\max} ne može povećavati u nedogled. Shodno ovome potrebno je postići kompromis kada je određivanje r_{\max} vrednosti u pitanju.

U tabeli 5.3.1 smo odredili radijuse prstenova i verovatnoće konstelacionih tačaka na svakom od prstenova za nekoliko APSK konstelacija. U vezi sa prethodnim izlaganjem povećali smo r_{\max} sa povećanjem M . U tabeli 5.3.1 takođe smo prikazali vrednosti SER za različite vrednosti SNR. Odredili smo verovatnoću greške po simbolu primenom aproksimativne formule (5.2.14) i vršeci simulaciju u programskom paketu MATLAB. Dobijeni rezultati ukazuju na dobro podudaranje teorijske vrednosti SER i vrednosti dobijene kroz simulaciju SER^* . Ovim smo potvrdili tačnost aproksimativne formule za izračunavanje verovatnoće greške po simbolu. Pored toga, rezultati prikazani u tabeli 5.3.1 potvrđuju opservacije sa slike 5.3.1. Zapravo, za $M = 16$ i $r_{\max} = 3.3$, APSK konstelacija koja ima $L = 4$ nadmašuje druge konstelacije u pogledu SER-a za vrednosti SNR-a iz tabele 5.3.1. Pri tome, razlika u verovatnoći greške je značajnija kada se 16-APSK sa $L = 4$ poredi sa 16-APSK koja ima $L = 8$, nego kada se poređenje vrši sa 16-APSK sa $L = 2$. Rezultati za 32-APSK jasno

pokazuju da je odgovarajuća L vrednost jednaka 4, dok za $M = 64$ optimalna L vrednost zavisi od SNR-a. Tako, optimalna L vrednost je 8 za SNR vrednosti 18 dB i 19 dB, dok za SNR = 20 dB optimalna L vrednost iznosi 4, pri čemu je za obe vrednosti L verovatnoća greške po simbolu približnih vrednosti za sve vrednosti SNR iz table 5.3.1.



a)



b)

Slika 5.3.1. SER u zavisnosti od L za: a) SNR = 15 dB, b) SNR = 20 dB

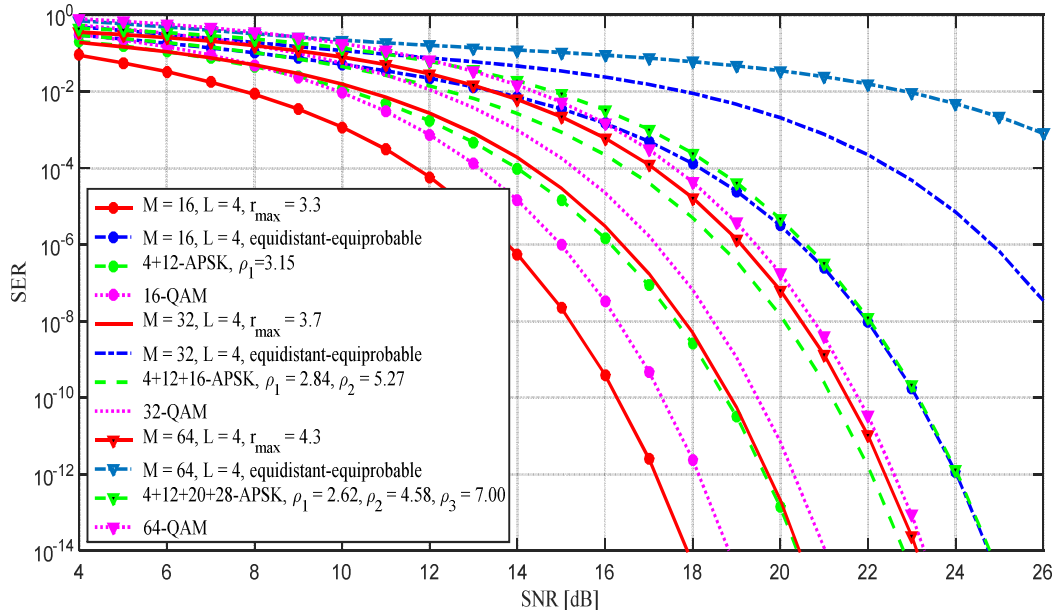
Da bismo ocenili postignute rezultate, na slici 5.3.2 prikazali smo zavisnost verovatnoće greške po simbolu od SNR za predložene APSK konstelacije (crvene krive) i druge konstelacije iz literature. Prikazali smo zavisnost SER od SNR za M -arne APSK konstelacije čije su konstelacione tačke jednakoverovatne i organizovane u okviru L ekvidistantnih koncentričnih prstenova (krive plave boje). Ove konstelacije smo uzeli u razmatranje jer smo njihovim oblikovanjem generisali predložene konstelacije. Sa slike 5.3.2 je evidentno da se predloženim hibridnim oblikovanjem konstelacije postižu značajni dobiti u pogledu efikasnosti po snazi u poređenju sa početnim konstelacijama, jer za istu vrednost verovatnoće greške po simbolu potrebna je mnogo manja vrednost odnosa signal-šum.

Tabela 5.3.1. Parametri APSK konstelacija, SER procenjen na osnovu formule (5.2.14) i SER* određen simulacijom

M	r_{\max}	L	N	$\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_L]$ $\mathbf{P} = [P_1, P_2, \dots, P_L]$	SNR[dB]	SER	SER*
16	3.3	2	8	$\mathbf{r} = [1.3505, 3.0225]$ $\mathbf{P} = [0.1180, 0.0070]$	11	4.9309×10^{-4}	4.8780×10^{-4}
					12	9.3739×10^{-5}	9.0900×10^{-5}
					13	1.1879×10^{-5}	1.0700×10^{-5}
		4	4	$\mathbf{r} = [0.6967, 1.9255, 2.7625, 3.1947]$ $\mathbf{P} = [0.1496, 0.0864, 0.0115, 0.0026]$	11	3.09×10^{-4}	3.13×10^{-4}
					12	5.84×10^{-5}	6.25×10^{-5}
					13	7.39×10^{-6}	7.30×10^{-6}
		8	2	$\mathbf{r} = [0.3511, 1.0315, 1.6496, 2.1757, 2.5943, 2.9047, 3.1183, 3.2544]$ $\mathbf{P} = [0.1078, 0.1914, 0.1226, 0.0502, 0.0171, 0.0058, 0.0022, 0.0030]$	11	0.0050	0.0043
					12	0.0029	0.0025
					13	0.0016	0.0014
32	3.7	2	16	$\mathbf{r} = [1.6508, 3.4767]$ $\mathbf{P} = [0.0614, 0.0011]$	13	0.0073	0.0073
					14	0.0026	0.0026
					15	7.3451×10^{-4}	7.3210×10^{-4}
		4	8	$\mathbf{r} = [0.8584, 2.3251, 3.2303, 3.6224]$ $\mathbf{P} = [0.0930, 0.0299, 0.0018, 2.97 \times 10^{-4}]$	13	8.25×10^{-4}	8.26×10^{-4}
					14	1.88×10^{-3}	1.88×10^{-3}
					15	3.00×10^{-5}	2.77×10^{-5}
		8	4	$\mathbf{r} = [0.4335, 1.2666, 2.0052, 2.6079, 3.0594, 3.3682, 3.5601, 3.6678]$ $\mathbf{P} = [0.0770, 0.1090, 0.0472, 0.0125, 0.0029, 0.0008, 0.0002, 0.0004]$	13	0.0011	0.0010
					14	4.4412×10^{-4}	4.0600×10^{-4}
					15	1.8743×10^{-4}	1.6920×10^{-4}
64	4	2	32	$\mathbf{r} = [1.8987, 3.8185]$ $\mathbf{P} = [0.0311, 0.0002]$	18	0.0075	0.0075
					19	0.0027	0.0027
					20	7.5861×10^{-4}	7.7700×10^{-4}
		4	16	$\mathbf{r} = [0.9937, 2.6480, 3.5892, 3.9416]$ $\mathbf{P} = [0.0522, 0.0099, 3.19 \times 10^{-4}, 4.26 \times 10^{-5}]$	18	1.44×10^{-4}	1.39×10^{-4}
					19	2.08×10^{-5}	2.12×10^{-5}
					20	1.8824×10^{-6}	7.0000×10^{-7}
		8	8	$\mathbf{r} = [0.5027, 1.4622, 2.2957, 2.9528, 3.4207, 3.7199, 3.8905, 3.9767]$ $\mathbf{P} = [0.0487, 0.0557, 0.0169, 0.0030, 5.25 \times 10^{-4}, 1.14 \times 10^{-4}, 3.24 \times 10^{-5}, 5.29 \times 10^{-5}]$	18	9.2605×10^{-5}	9.0300×10^{-5}
					19	1.6513×10^{-5}	1.6500×10^{-5}
					20	2.4834×10^{-6}	3.4000×10^{-6}
		16	4	$\mathbf{r} = [0.2521, 0.7504, 1.2314, 1.6850, 2.1026, 2.4777, 2.8064, 3.0872, 3.3208, 3.5100, 3.6589, 3.7729, 3.8575, 3.9184, 3.9609, 3.9896]$ $\mathbf{P} = [0.0297, 0.0677, 0.0668, 0.0446, 0.0233, 0.0104, 0.0043, 0.0017, 7.28 \times 10^{-4}, 3.21 \times 10^{-4}, 1.51 \times 10^{-4}, 7.67 \times 10^{-5}, 4.14 \times 10^{-5}, 2.34 \times 10^{-5}, 1.37 \times 10^{-5}, 9.20 \times 10^{-5}]$	18	2.5732×10^{-4}	2.1890×10^{-4}
					19	1.6410×10^{-4}	1.3700×10^{-4}
					20	1.2178×10^{-4}	1.0160×10^{-4}

U tabeli 5.3.2, prikazali smo potreban SNR za postizanje $SER = 10^{-6}$. Upoređujući performanse predloženih APSK konstelacija i odgovarajućih APSK konstelacija sa jednakoverovratnim konstelacionim tačkama raspodešenim po ekvidistantnim prstenovima, ostvareni dobitak u efikasnosti po snazi za verovatnoću greške po simbolu 10^{-6} iznosi od $\Delta SNR = 5.88$ dB za $M = 16$, do $\Delta SNR = 11.14$ dB za $M = 64$. To znači da se ostvaruje značajna ušteda energije. Tačnije, ako je željeni nivo $SER = 10^{-6}$, korisna snaga signala se može smanjiti za $10^{5.88/10} = 3.87$ puta ako je $M = 16$ ili za $10^{11.14/10} = 13$ puta ako je $M = 64$. Posmatrajući naše i početne konstelacije za $L = 4$, možemo da primetimo da za razliku od konstelacija sa jednakoverovratnim konstelacionim tačkama i ekvidistantnim prstenovima kod kojih gubitak zbog povećanja brzine $R = \log_2 M$ iznosi 4.37 dB/bit i 5.06 dB/bit, ovaj nepoželjni efekat za našu APSK konstelaciju je daleko manji i iznosi 2.62 dB i 2.71 dB/bit.

Slične zaključke možemo izvesti i za druge vrednosti L . Ovo je još jedna potvrda da je naša APSK konstelacija energetski efikasnija u poređenju sa APSK konstelacijom sa jednakoverovatnim konstelacionim tačkama koje su raspoređene po ekvidistantnim prstenovima.



Slika 5.3.2. SER u funkciji SNR za nekodovane APSK konstelacije u AWGN kanalu

Možemo da primetimo da je u tabeli 5.3.2 ostvarena najmanja SNR vrednost (za $SER = 10^{-6}$) kada je L jednako 4, ukoliko predložena APSK konstelacija ima 16 ili 32 konstelacione tačke. Sa druge strane, najmanja SNR vrednost (za istu vrednost SER) se postiže za $L = 8$ kada naša APSK konstelacija ima 64 konstelacionih tačaka. Ovi rezultati se poklapaju sa rezultatima iz tabele 5.3.1.

Tabela 5.3.2. Poređenje APSK konstelacija

SER = 10^{-6}	Naša APSK		Početna APSK		$N_1+N_2+\dots+N_L$ - APSK standard			APSK ^[17]		QAM
M	(L, N, r_{\max})	SNR	(L, N)	SNR	(L, N_1, \dots, N_L)	$(\rho_1, \dots, \rho_{L-1})$	SNR	(L, N, r_0)	SNR	SNR
16	(2,8,3.3)	13.96	(2,8)	19.84	(2,4,12)	(3.15)	16.14	(2,8,1.2)	<u>17.43</u>	14.99
	(4,4,3.3)	<u>13.79</u>	(4,4)	20.47		(2.85)	15.55	(4,4,1.5)	18.65	
	(8,2,3.3)	16.30	(8,2)	23.26		(2.57)	15.38	(8,2,1.6)	24.50	
32	(2,16,3.7)	18.22	(2,16)	24.72	(3,4,12,16)	(2.84,5.27)	18.64	(2,16,1.2)	20.25	17.17
	(4,8,3.7)	<u>16.41</u>	(4,8)	24.84		(2.72, 4.87)	18.26	(4,8,1.4)	<u>19.95</u>	
	(8,4,3.7)	16.70	(8,4)	25.30		(2.53, 4.3)	17.83	(8,4,1.6)	23.53	
64	(4,16,4.3)	19.12	(4,16)	29.90	(4,4,12,20,28)	(2.62,4.58,7.00)	20.61	(4,16,1.3)	<u>22.04</u>	19.46
	(8,8,4.3)	<u>18.97</u>	(8,8)	29.84		(2.58,4.40,6.56)	20.34	(8,8,1.5)	24.68	
	(16,4,4.3)	19.10	(16,4)	30.24		(2.50,4.14,6.00)	20.12	(16,4,1.6)	29.64	

Efikasnost po snazi naše APSK konstelacije smo uporedili i sa efikasnošću tradicionalne APSK konstelacije. U tabeli 5.3.2 smo prikazali potrebne vrednosti SNR za postizanje SER 10^{-6} . Preciznije, uporedili smo novu APSK konstelaciju sa standardnim rešenjima za APSK konstelaciju koja imaju jednakoverovatne konstelacione tačke ($P_i = const$) i različit broj konstelacionih tačaka po prstenovima ($N_i, i = 1, 2, \dots, L$). Usled različitog broja konstelacionih tačaka po prstenovima, usvojena nomenklatura za ove konstelacije je $N_1+N_2+\dots+N_L$ -APSK. Za ove konstelacije, optimizovane po kriterijumu maksimalne međusobne informacije (MI), optimalni relativni radijus i fazni pomeraj svakog od prstena u odnosu na unutrašnji prsten su određeni u [10]-[42], [14]. U [10]-[42], [14] je pokazano da ne postoji primetna zavisnost od faznih pomeraja između prstenova za visoke vrednosti SNR. Zato su, samo optimalni relativni radijusi $\rho_i = r_{i+1}/r_1, i = 1, 2, \dots, L-1$ specificirani u zavisnosti od spektralne efikasnosti. U tabeli 5.3.2, za M jednako 16, 32 i 64 prikazali smo parametre APSK konstelacije (L, N_1, \dots, N_L) i ($\rho_1, \dots, \rho_{L-1}$) iz [10]-[42], [14]. Na slici 5.3.2 i u tabeli 5.3.2, prikazali smo verovatnoću greške po simbolu za ove APSK konstelacije (zelene krive) dobijene formulama koje su izvedene u [68]-[70]. Dobijeni rezultati pokazuju da naše APSK konstelacije nadmašuju APSK konstelacije predložene u [10]-[42], [14] u pogledu SER-a i efikasnosti po snazi. Konkretno, za SER = 10^{-6} dobitak u energetskej efikasnosti postignut sa našim APSK konstelacijama $\Delta SNR = SNR^{N_1+N_2+\dots+N_L-APSK} - SNR^{naš APSK}$ ide do 2.35 dB za $M = 16$, 2.23 dB za $M = 32$ i 1.64 dB za $M = 64$. Ovo znači da potrebna snaga signala može biti smanjena za trećinu, što omogućava manju potrošnju energije. S obzirom da novi koncept i metod za hibridno oblikovanje APSK konstelacije poboljšava efikasnost po snazi APSK konstelacije, predložena konstelacija može biti primenjena u komunikacionim sistemima ograničene snage kao što su optički komunikacioni sistemi [18]-[21], [71], [72], satelitski komunikacioni sistemi [10]-[12], komunikacionim sistemima sa ograničenom snagom i kod bežičnih prenosa višestruki-ulaz višestruki-izlaz (multiple-input multiple-output) [22]-[26].

U kanalima u kojima je dominantan beli aditivni Gausov šum, naša APSK konstelacija je efikasnija po snazi u odnosu na nedavno predloženu APSK konstelaciju u [17]. Svaki prsten APSK konstelacije iz [17] nosi isti broj konstelacionih tačaka pri čemu su konstelacione tačke sa različitih prstenova poravnate po linijama koje polaze iz centra. Susedni prstenovi su na jednakom međusobnom rastojanju, ali je prvi prsten na radijalnom rastojanju r_0 od centra. Za APSK konstelaciju iz [17] prikazali smo u tabeli 5.3.2 potreban SNR za SER = 10^{-6} . Na osnovu podvučenih podataka u tabeli 5.3.2 za našu APSK konstelaciju i APSK konstelaciju

iz [17], možemo zaključiti da ja sa našom APSK konstelacijom potreban 3.64 dB do 3.07 dB manji SNR da bi se postigla verovatnoća greške po simbolu jednaka 10^{-6} .

Konačno, uporedili smo performanse naše kružno-simetrične APSK konstelacije sa kvadratnom QAM konstelacijom iz [1]. Sa slike 5.3.2 se može videti da za date vrednosti r_{\max} i L naša APSK konstelacija nadmašuje M -arnu QAM konstelaciju (ljubičaste krive) u pogledu efikasnosti po snazi. Kako bi kvantifikovali ovaj dobitak koristili smo podatke prikazane u tabeli 5.3.2. Na osnovu razlike odnosa signal-šum M -arnih QAM konstelacija i naših konstelacija koje imaju $L = 4$ možemo zaključiti da smo postigli dobitak u efikasnosti po snazi Δ SNR jednak 1.2 dB za $M = 16$, 0.76 dB za $M = 32$ i 0.34 dB za $M = 64$. Ovaj dobitak opada sa povećanjem M , pa tako naša APSK konstelacija značajno nadmašuje M -arnu QAM konstelaciju za male vrednosti M .

Na kraju možemo sumirati. U ovom poglavlju doktorske disertacije smo predložili nov metod hibridnog oblikovanja APSK konstelacije inspirisan kompanding kvantizacijom. Novina metode u odnosu na druge metode zasnovane na tehnikama kvantizacije je u uspostavljanju analogije sa obrnutim modelom optimalne kompanding kvantizacije za kružno-simetrične izvore. Preciznije, geometrijsko oblikovanje je definisano modifikovanom radijalnom kompresorskom funkcijom kružno-simetrične optimalne kompanding kvantizacije, dok je probablistička funkcija oblikovanja određena uspostavljanjem analogije sa verovatnoćama izlaznih nivoa u modelu inverznom kompanding kvantizaciji. Ovaj način projektovanja APSK konstelacije omogućava da konstelacija ima sledeće karakteristike 1) manju gustinu više verovatnih prstenova i 2) više konstelacionih prstenova koncentrisanih na periferiji konstelacije nego u blizini centra konstelacije čime se smanjuje verovatnoća greške po simbolu i značajno povećava efikasnost po snazi. U poređenju sa optimizovanim APSK konstelacijama po kriterijumu maksimalne međusobne informacije, nakon podešavanja parametara naše APSK konstelacije tako da minimizuju SER nekodovanog APSK signala u kanalu sa belim aditivnim Gausovim šumom, postigli smo dobitak u efikasnosti po snazi 2.35 dB za $M = 16$, 2.23 dB za $M = 32$ i 1.64 dB za $M = 64$ kada je SER ograničen na 10^{-6} . Naša APSK konstelacija takođe prevazilazi M -arnu QAM konstelaciju u pogledu efikasnosti po snazi, pri čemu je dobitak značajniji pri malim vrednosti M . Kako su ostvarena značajna poboljšanja u efikasnosti po snazi, predložena APSK konstelacija je pogodna za primenu u različitim komunikacionim sistemima sa ograničenom snagom.

6 Zaključak

U ovom poglavlju dat je kratak pregled rezultata naučnog istraživanja sprovedenog u okviru disertacije:

1. Analizom PAM konstelacija sa ekvidistantnim konstelacionim tačkama čije su verovatnoće emitovanja različite, ustanovljeno je da raspodela verovatnoća konstelacionih tačaka ima značajan uticaj na efikasnost po snazi konstelacije. Pored toga, ustanovljeno je da konstelacija sa verovatnoćama konstelacionih tačaka koje aproksimiraju Gausovu raspodelu je najpovoljnija u pogledu efikasnosti po snazi. Međutim, kompleksnost takve PAM konstelacije je zbog neuniformne raspodele verovatnoća konstelacionih tačaka daleko veća nego što je kompleksnost tradicionalne uniformne PAM konstelacije.

2. Detaljno je obrazloženo kako i zašto se može uvesti analogija između konstelacije i kvantizacije, odnosno između reprezentacionih nivoa i konstelacionih tačaka. Takođe je objašnjen princip projektovanja konstelacije inspirisan kompadding kvantizacijom. Pri tome je razmatrano kako se linearizacija kompresorskih karakteristika odražava na oblikovanje konstelacija (geometrijsko, probabilističko, hibridno). Rezultat projektovanja konstelacije na ovakav način je deo po deo uniformna konstelacija koja se u pogledu kompleksnosti nalazi između tradicionalne uniformne PAM konstelacije i neuniformne PAM konstelacije.

3. Prezentovano je projektovanje deo po deo PAM konstelacije na osnovu analogije sa kvazilogaritamskom kompadding kvantizacijom kod koje je linearizovana kvazilogaritamska karakteristika kompresije. Ispitan je uticaj parametra kompresije μ , amplitude maksimalnog opterećenja x_{\max} i broja podskupova L na efikasnost po snazi M -arne PAM konstelacije. Na osnovu rezultata se može zaključiti da konstelacije sa vrednostima parametra $\mu > 5$ ne predstavljaju efikasna rešenja u pogledu potrebne snage, dok su za vrednosti $\mu < 5$ rezultati značajno bolji u odnosu na tradicionalno rešenje, posebno za $\mu = 1$. Sa povećanjem broja podskupova L verovatnoća greške se smanjuje, s tim da se ostvareni dobitak umanjuje kako broj podskupova raste. U poređenju sa tradicionalnom PAM konstelacijom, za verovatnoću greške po simbolu 10^{-6} , dobitak u efikasnosti po snazi ide i do 4.2 dB, ukoliko je broj konstelacionih tačaka 16, odnosno do 2.5 dB ukoliko je broj tačaka 32. Ovo znači da je sa razmatranom PAM konstelacijom moguće značajno smanjiti snagu, zadržavajući pritom istu vrednost verovatnoće greške P_e . Za jednostavnija rešenja konstelacije sa dva podskupa i za istu verovatnoću greške dobitak u efikasnosti po snazi iznosi 3 dB za $M = 16$ i 1.7 dB za $M = 32$.

4. Opisano je projektovanje deo po deo uniformne PAM konstelacije na osnovu analogije sa optimalnom kompadding kvantizacijom kod koje je linearizovana optimalna karakteristika kompresije. Za takvu višenivosku PAM konstelaciju određena je optimalna vrednost amplitude maksimalnog opterećenja x_{\max} . Pritom je pokazano da optimalna vrednost parametra x_{\max} zavisi od broja podskupova u konstelaciji, ali ne i od odnosa signal-šum i ukupnog broja konstelacionih tačaka M . I ovde sa povećanjem broja podskupova verovatnoća greške po simbolu se smanjuje, dok se kompleksnost konstelacije povećava. Takođe je primetno da sa povećanjem broja podskupova u konstelaciji, dobitak u efikasnosti po snazi dobijen udvostručavanjem broja podskupova se smanjuje. Komparativnom analizom predloženih konstelacija može se zaključiti da PAM konstelacije projektovane na osnovu analogije sa optimalnom kompadding kvantizacijom nadmašuju tradicionalne PAM konstelacije u efikasnosti po snazi, ali da su manje efikasne u odnosu na PAM konstelacije projektovane na osnovu analogije sa kvazilogaritamskom kompadding kvantizacijom.

5. Izvršena je optimizacija PAM konstelacija koje imaju dva podskupa i koje su projektovane uspostavljanjem analogije prvo sa deo po deo linearnom optimalnom kompadding kvantizacijom (klasa PAM^c konstelacija), a zatim i sa njoj inverznim modelom (klasa PAM^e konstelacija). Projektovanje uspostavljanjem analogije sa modelom koji je inverzan kompadding kvantizaciji predstavlja potpuno nov pristup u projektovanju konstelacija. Primenom ovog načina projektovanja ostvarena je manja gustina viševerovatnih konstelacionih tačaka što ima pozitivan uticaj na verovatnoću greške po simbolu, odnosno na efikasnost po snazi. Za razliku od prethodno predstavljenih rešenja, kod PAM^c i PAM^e razmatrana je i alokacija tačaka po podskupovima kontrolisana pomoću parametra η koji predstavlja odnos ukupnog broja tačaka i broja tačaka u okviru prvog podskupa. Ustanovljeno je da su u okviru svoje klase, najefikasnije po snazi konstelacije sa alokacijom konstelacionih tačaka koju karakteriše $\eta = 4/3$ za PAM_{η}^c ($PAM_{\eta}^c = 4/3$) i $\eta = 4$ za PAM_{η}^e ($PAM_{\eta}^e = 4$). Ispitan je uticaj amplitude maksimalnog opterećenja na performanse konstelacije. Pokazano je da optimalna vrednost amplitude maksimalnog opterećenja zavisi od alokacije konstelacionih tačaka po podskupovima, ali ne i od ukupnog broja konstelacionih tačaka. $PAM_{\eta}^c = 4/3$ nadmašuje tradicionalnu PAM konstelaciju u efikasnosti po snazi i taj dobitak za verovatnoću greške po simbolu 10^{-6} iznosi oko 1.3 dB za sve razmatrane brojeve konstelacionih tačaka. Takođe, upoređujući sva predložena rešenja iz sekcije 4.3, može se zaključiti da je najveća efikasnost po snazi konstelacije $PAM_{\eta}^e = 4$. Sa ovom konstelacijom se u odnosu na konvecionalno rešenje PAM konstelacije, za

verovatnoću greške 10^{-6} , ostvaruje dobitak u efikasnosti po snazi od 2.09 dB do 3.87 dB u zavisnosti od toga koliki je broj konstelacionih tačaka. Odnosno, u odnosu na konstelacije iz klase $PAM_{\eta^c = 4/3}$ i istu verovatnoće greške, konstelacija $PAM_{\eta^e = 4}$ ostvaruje dobitak od oko 1.3 do 2.5 dB. Ovi rezultati su verifikovani i vršenjem simulacije.

6. Predložene su nove APSK konstelacije iz grupe dvodimenzionalnih konstelacija. Oblikovanje, odnosno projektovanje novih konstelacija je obavljeno uspostavljanjem analogije sa modelom koji je inverzan modelu kružno-simetrične kompadding kvantizacije. Ovakav način oblikovanja je omogućio da je u konstelaciji gustina viševerovatnih prstenova manja, kao i da je gustina konstelacionih prstenova veća na periferiji konstelacije nego u blizini centra konstelacije, čime je smanjena verovatnoća greške po simbolu i povećana efikasnost po snazi. Takođe je izvršena optimizacija predloženog modela APSK konstelacije, nakon čega je ostvarena efikasnost po snazi daleko bolja nego što je efikasnost tradicionalne APSK konstelacije. Ostvaren dobitak iznosi 2.35 dB za $M = 16$, 2.23 dB za $M = 32$ i 1.64 dB za $M = 64$ ukoliko je ciljano verovatnoća greške po simbolu 10^{-6} . Drugim rečima, potrebna snaga signala može biti smanjena i za trećinu, što omogućava manju potrošnju energije. Konačno, komparativna analiza M -arne QAM i u disertaciji predložene APSK konstelacije pokazuje da je predloženo rešenje APSK konstelacije efikasnije po snazi, pri čemu je dobitak značajniji kod konstelacija sa manjim brojem konstelacionih tačaka. S obzirom da su ostvarena značajna poboljšanja u efikasnosti po snazi, predložene APSK konstelacije su pogodne za primenu u različitim komunikacionim sistemima sa ograničenom snagom, kao što su satelitske komunikacije, optičke komunikacije, MIMO sistemi.

7. U disertaciji ostvareni rezultati u razvoju višenivoskih efikasnih po snazi konstelacija su značajni i zbog toga što se mogu dalje nadograđivati. Tako, jedna od ideja je razviti nove QAM konstelacije koristeći za modulaciju nosioca u kvadraturi PAM konstelacije predložene u disertaciji, što će i biti predmet budućeg istraživanja.

7 Literatura

- [1] J. G. Proakis, M. Salehi, 'Digital communications', *McGraw-Hill*, 2008, 5thedn.
- [2] I. N. Osahon, S. Rajbhandari, W. O. Popoola, "Performance comparison of equalization techniques for SI-POF multi-gigabit communication with PAM-M and device non-linearities", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 36, no. 11, pp. 2301-2308, 2018.
- [3] R. van der Linden, N.-C. Tran, E. Tangdiongga, T. Koonen, "Optimization of flexible non-uniform multilevel PAM for maximizing the aggregated capacity in PON deployments", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 36, no. 12, pp. 2328-2336, 2018.
- [4] I. N. Osahon, M. Safari, W. O. Popoola, "10-Gb/s transmission over 10-m SI-POF with M -PAM and multilayer perceptron equalizer", *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 30, no. 10, pp. 911-914, 2018.
- [5] Y. Hsu, C.-Y. Chuang, X. Wu, et all, "2.6 Tbit/s on-chip optical interconnect supporting mode-division-multiplexing and PAM-4 signal", *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 30, no. 11, pp. 1052-1055, 2018.
- [6] K. P. Bagadi, V. Annepu, S. Das, "Recent trends in multiuser detection techniques for SDMA-OFDM communication system", *Physical Communication*, vol. 20, pp. 93-108, 2016.
- [7] K. P. Bagadi, S. Das, "Minimum symbol error rate multiuser detection using an effective invasive weed optimization for MIMO/SDMA-OFDM system", *International Journal of Communication Systems*, vol. 27, no. 12, pp. 3837-3854, 2014.
- [8] Kumar C. V. R., Bagadi K. P., "Design of MC-CDMA receiver using radial basis function network to mitigate multiple access interference and nonlinear distortion", *Neural Computing and Applications*, 2017., doi: 10.1007/s00521-017-3127-0.
- [9] C. V. R. Kumar, K. P. Bagadi, "MC-CDMA receiver design using recurrent neural networks for eliminating multiple access interference and nonlinear distortion", *International Journal of Communication System*, vol. 30, no. 16, 2017, doi: 10.1002/dac.3328.
- [10] R. De Gaudenzi, A. Guillen i Fabregas, and A. Martinez, "Performance analysis of turbo-coded APSK modulations over nonlinear satellite channels", *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 5, no. 9, pp. 2396-2407, September 2006.
- [11] R. De Gaudenzi, A. Guillen i Fabregas and A. Martinez, "Turbo-coded APSK modulations design for satellite broadband communications", *International Journal of Satellite Communications and Networking*, vol. 24, pp. 261-281, May 2006, doi:10.1002/sat.841.
- [12] European Telecommunications Standards Institute, "Digital video broadcasting (DVB) second generation: Framing structure, channel coding and modulation systems for broadcasting, interactive services, news gathering and other broadband satellite applications", ETSI EN 302 307 version 1.2.1, August 2009.
- [13] Flexible serially concatenated convolutional turbo codes with Near-Shannon bound performance for telemetry applications, CCSDS Orange Book, Issue 1, September 2007, CCSDS 131.2-O-1.
- [14] K. P. Liolis and N. S. Alagha, "On 64-APSK constellation design optimization", *2008 10th International Workshop on Signal Processing for Space Communications*,

- pp. 1-7, Rhodes Island, 2008, doi:10.1109/SPSC.2008.4686709.
- [15] M. C. Valenti and X. Xiang, "Constellation shaping for bit-interleaved LDPC coded APSK", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 60, no. 10, pp. 2960-2970, October 2012, doi:10.1109/TCOMM.2012.070912.110533.
- [16] H. Méric, "Approaching the Gaussian channel capacity with APSK constellations", *IEEE Communications Letters*, vol. 19, no. 7, pp. 1125-1128, July 2015, doi:10.1109/LCOMM.2015.2431674.
- [17] P. Ferrand, M. Maso and V. Bioglio, "High-rate regular APSK constellations", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 67, no. 3, pp. 2015-2023, March 2019, doi:10.1109/TCOMM.2018.2886258.
- [18] B. Kwak, N. Song, B. Park and D. S. Kwon, "Spiral QAM: A novel modulation scheme robust in the presence of phase noise", in *Proc. 2008 IEEE 68th Vehicular Technology Conference*, Calgary, BC, pp. 1-5, 2008, doi: 10.1109/VETECONF.2008.221.
- [19] C. Häger, A. G. i. Amat, A. Alvarado and E. Agrell, "Constellation optimization for coherent optical channels distorted by nonlinear phase noise", in *Proc. 2012 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, Anaheim, CA, pp. 2870-2875, 2012, doi:10.1109/GLOCOM.2012.6503552.
- [20] C. Häger, A. Graell i Amat, A. Alvarado and E. Agrell, "Design of APSK constellations for coherent optical channels with nonlinear phase noise", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 61, no. 8, pp. 3362-3373, August 2013, doi:10.1109/TCOMM.2013.061913.120713.
- [21] Y. Han, S. Yu, M. Li, J. Yang and W. Gu, "An SVM-based detection for coherent optical APSK systems with nonlinear phase noise", *IEEE Photonics Journal*, vol. 6, no. 5, pp. 1-10, Oct. 2014, doi: 10.1109/JPHOT.2014.2357424.
- [22] X. Jin, Q. Wu, Q. Li, W. C. Zhai and N. Jin, "Design of power allocation for APSK non-coherent spatial modulation system", *Mobile Networks and Applications*, June 2020, doi:10.1007/s11036-020-01581-9.
- [23] J. Liu, L. Dan, P. Yang, L. Xiao, F. Yu and Y. Xiao, "High-rate APSK-aided differential spatial modulation: design method and performance analysis", *IEEE Communications Letters*, vol. 21, no. 1, pp. 168-171, Jan. 2017, doi: 10.1109/LCOMM.2016.2610962.
- [24] Y. Zhou, H. Zhang, P. Zhang and D. Yuan, "Non-coherent spatial modulation and optimal multi-ring APSK constellation design", *IEEE Communications Letters*, vol. 22, no. 5, pp. 950-953, May 2018, doi: 10.1109/LCOMM.2018.2810876.
- [25] E. Basar, M. Wen, R. Mesleh, M. Di Renzo, Y. Xiao and H. Haas, "Index modulation techniques for next-generation wireless networks", *IEEE Access*, vol. 5, pp. 16693-16746, 2017, doi: 10.1109/ACCESS.2017.2737528.
- [26] S. Sugiura, T. Ishihara and M. Nakao, "State-of-the-art design of index modulation in the space, time, and frequency domains: benefits and fundamental limitations", *IEEE Access*, vol. 5, pp. 21774-21790, 2017, doi: 10.1109/ACCESS.2017.2763978.
- [27] Z. Qu, I. B. Djordjevic and J. Anderson, "Two-dimensional constellation shaping in fiber-optic communications", *Applied Sciences*, vol. 9, no. 9, p. 1889, May 2019.
- [28] F. R. Kschischang, S. Pasupathy, "Optimal nonuniform signaling for Gaussian channels", *IEEE Transaction on Information Theory*, vol. 39, no. 3, pp. 913-929, 1993.
- [29] J. Cho and P. J. Winzer, "Probabilistic constellation shaping for optical fiber communications", *Journal of Lightwave Technology*, vol. 37, no. 6, pp. 1590-1607, 15 March 2019, doi:10.1109/JLT.2019.2898855.
- [30] J. Cai et al., "70.46 Tb/s over 7,600 km and 71.65 Tb/s over 6,970 km transmission

- in C+L band using coded modulation with hybrid constellation shaping and nonlinearity compensation”, *Journal of Lightwave Technology*, vol. 36, no. 1, pp. 114-121, 1 Jan.1, 2018, doi:10.1109/JLT.2017.2757281.
- [31] Z. Qu, S. Zhang and I. B. Djordjević, "Universal hybrid probabilistic-geometric shaping based on two-dimensional distribution matchers", in *Proc. 2018 Optical Fiber Communications Conference and Exposition (OFC)*, San Diego, CA, pp. 1-3, 2018.
- [32] L. Wei, I. Korn, "Optimal M-amplitude shift keying/quadrature amplitude shift keying with non-equal symbol probabilities”, *IET Communications*, vol. 5, no. 6, pp. 745-752, 2011.
- [33] I. J. Korn, P. Fonseka, S. Xing, "Optimal binary communication with nonequal probabilities”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 9, pp. 1435-1438, 2003.
- [34] V. P. Ipatov, "Comments on 'Optimal binary communication with nonequal probabilities””, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 55, no. 1, p. 231, 2007.
- [35] Z. H. Perić, "Nonlinear transformation of one-dimensional constellation points in order to error probability decreasing”, *Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics*, vol. 11, no. 3, pp. 291-299, 1998.
- [36] Z. H. Perić, S. M. Bogosavljević, "Performance of nonuniform PAM constellations for Gaussian channel”, *Electronics and Electrical Engineering*, vol. 52, no. 3, pp. 27-30, 2004.
- [37] Z. H. Perić, N. Milošević, A. Ž. Jovanović, et al., "Design of piecewise uniform PAM constellation", *XII International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements*, Niš, Serbia, pp. 109-111, November 2014.
- [38] Z. H. Perić, A. Ž. Jovanović, S. Vlajkov, "Comparative analysis of various PAM constellations", *XIII International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements*, Niš, Serbia, pp. 27-30, November 2016.
- [39] I. B. Đorđević, A. Ž. Jovanović, Z. H. Perić, T. Wang, "Multidimensional optical transport based on optimized vector-quantization-inspired signal constellation design”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 62, no. 9, pp. 3262-3273, 2014.
- [40] I. B. Đorđević, A. Ž. Jovanović, M. Cvijetić, Z. H. Perić, "Multidimensional vector quantization-based signal constellation design enabling beyond 1 Pb/s serial optical transport networks”, *IEEE Photonics Journal*, vol. 5, no. 4, 2013.
- [41] Z. H. Perić, S. Bogosavljević, I. Đorđević, "Signal constellation design for PAM system and Gaussian channel", *International Symposium on Communication Systems and Digital Signal Processing*, vol. 1, pp. 100-104, Sheffield, UK, 6-8 April 1998.
- [42] Z. H. Perić, N. Milošević, A. Stevanović, Z. Nikolić, "Analiza performansi deo po deo uniformne PAM konstelacije", *ETLAN 2015*, pp. TE1.1, Srebrno Jezero, Jun 2015.
- [43] I. B. Djordjević, A. Ž. Jovanović, Z. H. Perić, T. Wang, "Optimized vector-quantization-based signal constellation design (OVQ-SCD) for multidimensional optical transport”, in *CLEO: Science and Innovations*, San Jose, California United States, 8-13 June, 2014, https://www.osapublishing.org/aop/abstract.cfm?uri=CLEO_SI-2014-STu3J.5.
- [44] S. A. Vlajkov, A. Ž. Jovanović, Z. H. Perić, "Approach in companding-quantisation-inspired PAM constellation design”, *IET Communications*, vol. 12, no. 18, pp. 2305-2314, 2018, <https://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-com.2018.5439>.
- [45] S. A. Vlajkov, A. Ž. Jovanović, Z. H. Perić, "Improvement of energy efficiency of

- PAM constellation by applying optimal companding quantization in constellation design", *55th International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies (ICEST 2020)*, pp. 155-158, Niš, Serbia, 2020, doi:10.1109/ICEST49890.2020.9232834.
- [46] H. G. Batshon, I. B. Djordjević, L. Xu and T. Wang, "Iterative polar quantization-based modulation to achieve channel capacity in ultrahigh-speed optical communication systems", *IEEE Photonics Journal*, vol. 2, no. 4, pp. 593-599, Aug. 2010, doi: 10.1109/JPHOT.2010.2051219.
- [47] Z. H. Perić, I. B. Djordjević, S. M. Bogosavljević and M. C. Stefanović, "Design of signal constellations for Gaussian channel by using iterative polar quantization", in *Proc. 9th Mediterranean Electrotechnical Conference (MELECON '98)*, Tel-Aviv, Israel, vol. 2, pp. 866-869, 1998, doi:10.1109/MELCON.1998.699349.
- [48] Z. H. Perić and S. M. Bogosavljević, "A method for exact error probability determination of nonuniform signaling for Gaussian channels", *Elektronika IR Elektrotehnika*, vol. 7, no.49, pp. 9-12, 2003.
- [49] Z. Perić, O. Milanović and A. Jovanović, "Optimal companding vector quantization for circularly symmetric sources", *Information Sciences*, vol. 178, no.22, pp. 4375-4381, November 2008, doi:10.1016/j.ins.2008.05.029.
- [50] S. A. Vlajkov, A. Ž. Jovanović, Z. H. Perić, "The influence of compression parameter μ on the energy efficiency of PAM constellation based on μ -law companding quantization", *55th International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies (ICEST 2020)*, pp. 159-162, Niš, Serbia, 2020, doi:10.1109/ICEST49890.2020.9232782.
- [51] A. Ž. Jovanović, I. B. Djordjevic, Z. H. Perić, S. A. Vlajkov, "Circularly symmetric companding quantization-inspired hybrid constellation shaping for APSK modulation to increase power efficiency in Gaussian-noise-limited channel", *IEEE Access*, vol. 9, pp. 4072- 4083, 2020.
- [52] M. Dukić, G. Marković, D. Vujić, 'Principi telekomunikacija - Zbornik rešenih problema', *Akademski misao*, Beograd, 2009.
- [53] L. Jiang et al., "A novel multi-level constellation compression modulation for GFDM-PON", *IEEE Photonics Journal*, vol. 11, no. 2, pp. 1-11, April 2019, doi: 10.1109/JPHOT. 2019.2897315.
- [54] X. Wu et al.: "A probabilistic shaping method based on intrinsic bit-level labeling and asymmetric polygon modulation for optical interconnects", *Optics Communications*, vol. 444, pp. 68-73, August 2019, doi:10.1016/j.optcom.2019.03.028.
- [55] G. Lukatela, D. Drajić, G. Petrović, R. Petrović, 'Digitalne telekomunikacije', *Građevinska knjiga*, Beograd, 1984.
- [56] D. B. Drajić, P. N. Ivaniš, 'Uvod u teoriju informacija i kodovanje', *Akademski misao*, Beograd, 2009.
- [57] S. A. Vlajkov, A. Ž. Jovanović, Z. H. Perić, "Comparative analysis of ML and MAP detectors for PAM constellation in AWGN channel", *Facta Universitatis, Series: Electronics and Energetics*, vol. 33, no. 2, pp. 217-226, 2020.
- [58] N. S. Jayant, P. Noll, 'Digital coding of waveforms', *Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall*, 1984.
- [59] Z. H. Perić, V. M. Despotović, Jelena R. Nikolić, A. Ž. Jovanović, N. B. Simić, 'Praktikum iz digitalnih telekomunikacija I sa MATLAB primerima', *Elektronski fakultet u Nišu*, 2017.

- [60] Z. H. Perić, A. Ž. Jovanović, Jelena R. Nikolić, 'Zbirka zadataka iz digitalnih telekomunikacija I – odabrana poglavlja', *Elektronski fakultet u Nišu*, 2016.
- [61] A. Alvarado, E. Agrell, F. Brannstrom, "Asymptotic comparison of ML and MAP detectors for multidimensional constellations", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 64, no. 2, pp. 1231-1240, 2018.
- [62] M. Lipardi, D. Matteredand, F. Sterle, "Constellation design for widely linear transceivers", *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2010, doi:10.1155/2010/176587.
- [63] G. Forney, R. Gallager, G. Lang, F. Longstaff, S. Qureshi, "Efficient modulation for band-limited channels", *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, vol. 2, no. 5, pp. 632-646, 1984.
- [64] M. Ivanov, F. Brannstrom, A. Alvarado, et al., "On the exact BER of bit-wise demodulators for one-dimensional constellations", *IEEE Transactions on Communications*, vol. 61, no. 4, pp. 1450-1459, 2013.
- [65] F.W. Sun, H. C. A. van Tilborg, "Approaching capacity by equiprobable signaling on the Gaussian channel", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 39, no. 5, pp. 1714-1716, 1993.
- [66] S. Arimoto, "An algorithm for computing the capacity of arbitrary discrete memoryless channels", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no. 1, pp. 14-20, January 1972, doi:10.1109/TIT.1972.1054753.
- [67] R. Blahut, "Computation of channel capacity and rate-distortion functions", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no. 4, pp. 460-473, July 1972, doi:10.1109/TIT.1972.1054855.
- [68] W. Sung et al., "Performance analysis of APSK modulation for DVB-S2 transmission over nonlinear channels", *International Journal of Satellite Communications and Networking*, vol. 27, pp. 295-311, May 2009, doi:10.1002/sat.938.
- [69] O. Afelumo, A. B. Awoseyila and B. G. Evans, "Simplified evaluation of APSK error performance", *Electronics Letters*, vol. 48, no. 14, pp. 886-888, 5 July 2012, doi:10.1049/el.2012.1740.
- [70] D. Shi, N. Wu, H. Wang and J. Kuang, "Simplified error performance analysis of APSK signals", *IEICE Communications Express*, vol. 3, pp. 163-167, 2014, doi:10.1587/comex.3.163.
- [71] N. Komuro and H. Habuchi, "Intensity modulation direct detection optical wireless communication with nonorthogonal code shift keying", in *Proc. 2019 IEEE 8th Global Conference on Consumer Electronics (GCCE)*, Osaka, Japan, pp. 723-726, 2019, doi:10.1109/GCCE46687.2019.9015538.
- [72] M. Liu, T. Wang and S. Tseng, "Throughput performance analysis of asynchronous optical CDMA networks with channel load sensing protocol", *IEEE Photonics Journal*, vol. 9, no. 3, pp. 1-13, June 2017, doi:10.1109/JPHOT.2017.2677945.

8 Biografija Autora

Slobodan A. Vlajkov rođen je u Pirotu, u Srbiji, 05.02.1989. Osnovnu školu “8. Septembar” i tehničku školu završio je u Pirotu. Oktobra 2008. godine upisao je Elektronski fakultet u Nišu. Tokom studija je imao priliku da bude student na razmeni na NTNU univerzitetu u Norveškoj, u periodu od jednog semestra. U periodu studiranja je pohađao i uspešno završio kursve iz mrežnih tehnologija CISCO (CCN1). Zvanje diplomirani inženjer elektrotehnike i računarstva dobio je 2013. godine na Elektronskom fakultetu u Nišu. U novembru 2013. godine upisuje doktorske studije na istom fakultetu na smeru Telekomunikacije. Od juna 2014. do januara 2018. radi kao inženjer za kontrolu procesa u novonapravljenom pogonu u okviru kompanije Tigar Tyres (Michelin group). Od januara 2018. godine radi na poziciji rukovodilac grupe za postizanje kvaliteta u istoj kompaniji. Njegova oblast istraživanja su digitalne modulacije i projektovanje konstelacija za komunikacione sisteme sa ograničenom snagom.

IZJAVA O AUTORSTVU

Izjavljujem da je doktorska disertacija, pod naslovom

Projektovanje višenivoskih konstelacija signala za komunikacione sisteme sa ograničenom snagom

koja je odbranjena na Elektronskom fakultetu u Nišu:

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada;
- da ovu disertaciju, ni u celini, niti u delovima, nisam prijavljivao na drugim fakultetima, niti univerzitetima;
- da nisam povredio autorska prava, niti zloupotrebio intelektualnu svojinu drugih lica.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci, koji su u vezi sa autorstvom i dobijanjem akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada, i to u katalogu Biblioteke, Digitalnom repozitorijumu Univerziteta u Nišu, kao i u publikacijama Univerziteta u Nišu.

U Nišu, _____

Potpis autora disertacije:

Dr Slobodan A. Vlajkov

**IZJAVA O ISTOVETNOSTI ŠTAMPANOG I ELEKTRONSKOG OBLIKA
DOKTORSKE DISERTACIJE**

Naslov disertacije:

**Projektovanje višenivoskih konstelacija signala za komunikacione
sisteme sa ograničenom snagom**

Izjavljujem da je elektronski oblik moje doktorske disertacije, koju sam predao na unošenje u **Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu**, istovetan štampanom obliku.

U Nišu, _____

Potpis autora disertacije:

Dr Slobodan A. Vlajkov

IZJAVA O KORIŠĆENJU

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku “Nikola Tesla” da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu unese moju doktorsku disertaciju, pod naslovom:

Projektovanje višenivoskih konstelacija signala za komunikacione sisteme sa ograničenom snagom

Disertaciju sa svim priložima predao sam u elektronskom obliku, pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju, unetu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Nišu, mogu koristiti svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons), za koju sam se odlučio.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)
- 3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade (CC BY-NC-ND)**
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)
5. Autorstvo – bez prerade (CC BY-ND)
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

U Nišu, _____

Potpis autora disertacije:

Dr Slobodan A. Vlajkov