

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ  
ФИЗИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Драгутин Р. Јовковић

КОРЕЛАЦИЈЕ У СИГНАЛИМА ТИПА  
БАРКХАУЗЕНОВОГ ШУМА

докторска дисертација

Београд, 2021

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF PHYSICS

Dragutin R. Jovković

CORRELATIONS IN BARKHAUSEN-LIKE  
SIGNALS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2021

Комисија за преглед и оцену дисертације

Ментор:

др Ђорђе Спасојевић  
редовни професор  
Физички факултет  
Универзитет у Београду

Чланови комисије:

др Сања Јањићевић  
асистент са докторатом  
Природно-математички факултет  
Универзитет у Крагујевцу

др Милан Кнежевић  
редовни професор у пензији  
Физички факултет  
Универзитет у Београду

Датум одбране:  
28. мај 2021. године

*Ова дисертација је плод вишегодишњег рада у оквиру Лабораторије за магнетизам, суперпроводност и флукуационе феномене под менторством проф. др Ђорђа Спасојевића.*

*Професору дугујем неизмерну захвалност, не само на стеченом знању, већ и на уложеном труду, на стрпљењу и разумевању које има за све нас.*

*Ништа мање захвалан сам осталим члановима групе - Сањи, Светиславу, Милошу, Милици и Стефану. Без њихове помоћи, њихових идеја и савета ова дисертација можда никада не би угледала светло дана. Радити у науци сигурно не би било толико лепо да није њих.*

*Поменуо бих да је знатан допринос при добијању приложених резултата имао инострани сарадник Ласе Лаурсон, коме такође дугујем захвалност.*

*Велику захвалност дугујем колегама са Катедре за општу физику Рударско-геолошког факултета, који су ми пружали велику подршку претходних година.*

*Веома сам захвалан и свим својим пријатељима, који вероватно и нису свесни колики су допринос дали мом успеху.*

*Најзад, највећу захвалност дугујем својој породици на непресушној, безусловној подршци коју добијам од када знам за себе.*



*Посвећено родитељима*

## Сажетак

У овој дисертацији приказани су резултати настали као резултат изучавања неравнотежног атермалног Изинговог модела са случајним пољем при адијабацком вођењу. Најпре су приказани резултати који се односе на временске корелације, а затим резултати добијени изучавањем понашања критичне неуређености и критичног магнетног поља на танким системима дебљине  $l$ . Критично понашање система огледа се у појављивању наглих налета активности - лавинама чије дистрибуције показују степено понашање инваријантно на промену скале. Приложено истраживање, засновано на скалирању и колапсу података прикупљених у нумеричким симулацијама, показује да корелације долазе до изражаја када се на сигнал постави коначан праг детекције. У таквом процесу догађаји од интереса које називамо подлавинама, се издвајају из оригиналне лавине при чему је могуће дефинисати време чекања као време измерено између два узастопна догађаја која прелазе висину изабраног прага. Покретање лавина је нескорелисан случајан процес, док су расподеле времена чекања степене што сугерише постојање корелација. Експериментални сигнали садрже спољни шум чије присуство може да утиче на корелације због чега је анализа такође спроведена на сигналима којима је додат вештачки спољни шум. Коришћена су два типа спољног шума - униформни бели шум генерисан из униформне расподеле и Гаусов бели шум генерисан из Гаусове расподеле, при чему је варирана стандардна девијација шума. Испоставља се да шум утиче на вредност експонента  $\gamma_{S/T}$  који описује скалирање просечне величине лавина  $\langle S \rangle_T$  трајања  $T$  као и да тај утицај зависи од врсте шума. Такође, постоји утицај на расподеле времена чекања и њихов колапс, тако да су предложена решења за његово одстрањивање у виду параметра и функција помака. Резултати су добијени помоћу великог броја нумеричких симулација на тродимензионалним једнакостраним системима на кубним решеткама различитих величина и неуређености, уз примену затворених граничних услова.

Узорци који се користе у експериментима најчешће нису једнакострани, већ имају једну димензију која је знатно мања од преостале две. Са променом облика узорка мења се вредност критичних параметара. У дисертацији је показано како критична неуређеност и критично магнетно поље зависе од промене дебљине  $l$  (најмање димензије система код којих су преостале знатно веће) при чему су у обзир узети различити гранични услови. Такође, предложени су изрази којима се описује понашање ефективне критичне неуређености бесконачних система дебљине  $l$ ,  $R_c(l)$  и ефективног магнетног поља бесконачних система дебљине  $l$ ,  $H_c(l)$ , али и изрази за ефективну критичну неуређеност  $R_c^{\text{eff}}(l, L)$  и ефективно критично магнетно поље  $H_c^{\text{eff}}(l, L)$  коначних система типа  $L \times L \times l$  који код оваквих система имају улогу ефективних критичних параметара. Ове претпоставке су потврђене колапсима кривих магнетизације и сусцептибилности који су за довољно мало  $l$  остварени помоћу експонената карактеристичних за дводимензиони модел, што показује да танки системи имају критично понашање дводимензионих система. Резултати су добијени из симулација неједнакостраничних система величине  $L \times L \times l$  за велики број различитих вредности  $l$  и  $R$  при чему су примењене две врсте граничних услова - отворени или затворени дуж  $l$  док су дуж  $L$  увек затворени.

**Кључне речи:** феромагнетизам, Баркхаузенов ефекат, Изингов модел са случајним пољем, праг детекције, временске корелације, екстерни шум

**Научна област:** Физика

**Ужа научна област:** Неравнотежна статистичка физика

**УДК број:**

## Abstract

In the following dissertation are presented numerical studies of the nonequilibrium athermal random field Ising model driven in adiabatic regime, regarding the correlations in the waiting times and the studies of behavior of the critical disorder and critical magnetic field in thin systems of thickness  $l$ . Intermittent bursts of activity, known as avalanches, portray the critical behavior of the system. The distributions of avalanches show power-law scale-invariant properties. Presented studies, based on the scaling and the collapsing of the data collected in numerical simulations, show that correlations can emerge when a finite threshold is applied on the signals. In this process, the events of interest, called subavalanches, are separated from the original avalanches and one can define waiting time as a time measured between two consecutive excursions above the given threshold. Even the triggering of the avalanches (could) be an uncorrelated process, waiting times (could) be power-law distributed implying the onset of threshold-induced correlations. Nevertheless, signals collected in experiments contain external noise which can impact the observed properties so the analysis was also done on the signals containing imposed externally generated noise. Two types of noise with various standard deviations were used - uniform white noise, generated from uniform distribution, and Gaussian white noise generated from Gaussian distribution. It turns out that noise affects values of the exponent  $\gamma_{S/T}$  that describes the scaling of the average avalanche size  $\langle S \rangle_T$  with duration  $T$  and this change depends on the noise type. Also, distributions of waiting time and collapses of its distributions are affected too, so a shift parameter and shift functions are proposed as methods for overcoming these distortions. The foregoing results are obtained through extensive numerical simulations on the equilateral cubic three-dimensional RFIM systems of various sizes and disorders, all of them having closed boundary conditions.

Most of the samples used in experiments are not equilateral, but have one linear dimension significantly smaller than the other two. With geometry of sample critical parameters also change. The way of how variation of thickness  $l$  (the smallest dimension of system whose other dimensions are much bigger), affects the values of critical disorder  $R_c(l)$  and critical magnetic field  $H_c(l)$  of infinite systems with thickness  $l$  is shown in this dissertation. Also, the expressions for the effective critical disorder  $R_c^{\text{eff}}(l, L)$  and effective critical magnetic field  $H_c^{\text{eff}}(l, L)$  of the  $L \times L \times l$  systems, playing the role of the effective critical parameters in these systems are proposed alongside. These hypotheses are supported by the scaling collapses of magnetization and susceptibility curves which are achieved with two-dimensional exponents when  $l$  is small enough, giving numerical evidence that the thin systems exhibit a 2D-like criticality. Data are collected from extensive simulations done on nonequilateral systems of size  $L \times L \times l$  for many different values of thickness  $l$  and disorder  $R$ , with two different boundary conditions - closed or open along  $l$ , and closed along  $L$ .

**Key words:** ferromagnetism, Barkhausen effect, Random field Ising model, detection level, time correlations, external noise

**Scientific field:** Physics

**Research area:** Nonequilibrium statistical physics

**UDC number:**

# Садржај:

<b>1</b>	<b>Увод</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Модел</b>	<b>3</b>
2.1	Изингов модел у случајном пољу . . . . .	3
2.2	Основне особине лавина и њихово понашање . . . . .	8
2.3	Идентификација критичних експонената . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Утицај прага детекције</b>	<b>14</b>
3.1	Расподеле параметара подлавине насталих постављањем прага детекције	14
3.1.1	Трајање подлавина . . . . .	14
3.1.2	Величина подлавина . . . . .	17
3.1.3	Времена чекања . . . . .	18
3.1.4	Скалирање дистрибуција . . . . .	22
3.2	Резултати . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Утицај шума</b>	<b>29</b>
4.1	Утицај шума на средњу величину лавина . . . . .	29
4.2	Утицај шума на расподеле времена чекања. Параметар помака . . . . .	31
4.3	Утицај шума на скалирање параметара подлавина насталих постављањем прага детекције . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Критично поље нееквилтерлних система</b>	<b>45</b>
5.1	Ефективни критични параметри . . . . .	45
5.1.1	Ефективна критична неуређеност . . . . .	46
5.1.2	Ефективно критично поље . . . . .	49
5.1.3	Скалирање магнетизације и сусцептибилности . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Закључак</b>	<b>58</b>
	<b>Литература</b>	<b>60</b>

# Глава 1

## Увод

Услед несавршености инструмената, а и утицаја околине, у експериментима је увек присутан спољни шум чији утицај често није занемарљив. С обзиром да се спољни шум смањује хардверски његово присуство је знатно смањено са развојем технологије. Ипак, чак ни уз употребу најсавременијих инструмената није могуће у потпуности сузбити присуство спољног шума.

Ради издвајања пулсева сигнала у ситуацијама када је шум знатно мањи од типичних пулсева сигнала уводи се праг детекције. У таквој ситуацији се пулсом сматра само онај део сигнала који се налази изнад прага  $V_{th}$  [1, 2]. Са друге стране, постављањем прага одговарајуће висине могуће је искључити мале догађаје који нису од интереса за анализу датог проблема (на пример јасно издвајање главног земљотреса од малих који му претходе или који следе), па се метода често примењује приликом анализе сигнала који не садрже никакав шум као што је случај са сигналима добијеним из нумеричких симулација различитих модела.

Скуп појава које показују лавински тип одговора при спољном вођењу је веома велики. Осим релаксације магнетних система при промени спољног поља [3, 4] и земљотреса [5, 6, 7, 8], такво понашање може се приметити и у понашању тржишта [9], неуронских активности [10, 11], у понашању чврстих и порозних материјала приликом пластичних деформација [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18], приликом пропагирања пукотина кроз нехомогену средину [19, 20], у неким хемијским реакцијама [21] итд. Код таквих сигнала примећено је постојање временских корелација које у случају кратких догађаја углавном потичу од појединачних лавина, док корелације између догађаја чије је трајање велико најчешће потичу од постојећих корелација у окидању лавина. Присуство корелација међу лавинама могуће је приметити у понашању расподела времена чекања - величине која настаје увођењем прага детекције. Наиме, ове расподеле се понашају експоненцијално уколико је изазивање лавина случајан процес [22], те промена њиховог понашања указује да је могуће постојање корелација у окидању лавина. Најчешће расподеле времена чекања прате степене законе [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] што долази до изражаја са порастом наметнутог прага детекције [19]. Осим тога, присуство прага детекције утиче на величину догађаја одређеног трајања, као и на максималне величине и трајања које је могуће приметити.

Један од модела који даје описани тип одговора јесте Изингов модел са случајним пољем. Сви сигнали који су у овом раду искоришћени за анализу постојања временских корелација добијени су у нумеричким симулацијама овог модела. У другој глави дат је опис Изинговог модела и његових основних особина, док је трећа глава посвећена анализи корелација које настају постављањем прага детекције на генерисани сигнал.

Од раније су познати неки од ефеката које ствара присуство спољног шума [32]. Какав утицај неизбежни спољни шум има на ефекте настале постављањем прага де-

текције и да ли је и на који начин тај утицај могуће избећи су нека од питања која се намећу. Неки од одговора презентовани су у четвртој глави.

Већина истраживања Изинговог модела са случајним пољем спроведена су на еквилатералним кубним решеткама различитих димензионалности. Испоставило се да такви системи показју нетривијално критично понашање када је  $2 \leq d \leq 5$  [33, 34, 35, 36, 37], а да се за  $d \geq 6$  могу описати теоријом средњег поља [38, 39, 40, 41]. Ипак, код узорака који се користе у експериментима, и то не нужно магнетним, најчешће је једна од димензија значајно мања од преосталих [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49]. Намеће се питање да ли се овакви системи понашају као дводимензионални или тродимензионални, и ако не, да ли је могуће описати прелаз од тродимензионалних ка дводимензионалним системима и поставити јасну границу која их раздваја. Недавна истраживања показала су како се ефективна критична неуређеност бесконачних система мења са порастом дебљине која је коначна [50], међутим, до сада није испитано како се при таквој промени мења ефективно критично поље, што може да буде од посебне важности јер је спољно поље параметар који је могуће контролисати. Даље, добро је познато да избор граничних услова не утиче на понашање Изинговог модела са случајним пољем на еквилатералним системима у термодинамичком лимиту [51, 52]. Испоставља се да избор граничних услова нема значајан утицај на понашање бесконачних система довољно велике дебљине, али да тај избор значајно утиче на промену ефективног критичног поља танких система бесконачно велике основе, што је показано у петој глави.

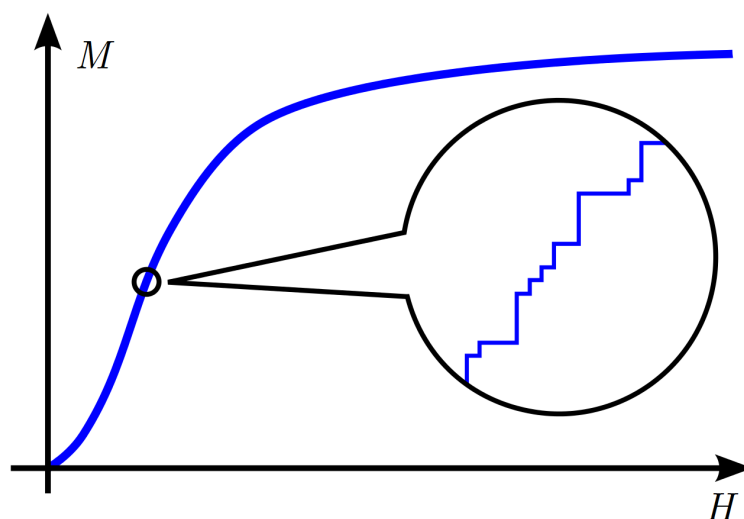
Шеста глава садржи кратак преглед резултата дисертације.



# Глава 2

## Модел

Један од процеса у којем је најпре примећена активност лавинског типа јесте Баркхаузен-ов ефекат [53]. Ефекат се испољава код феромагнетних система у виду скоковитих промена магнетизације када је систем изложен дејству спољног, споро и глатко променљивог магнетног поља, видети слику 2.1. Том приликом индукује се електро-

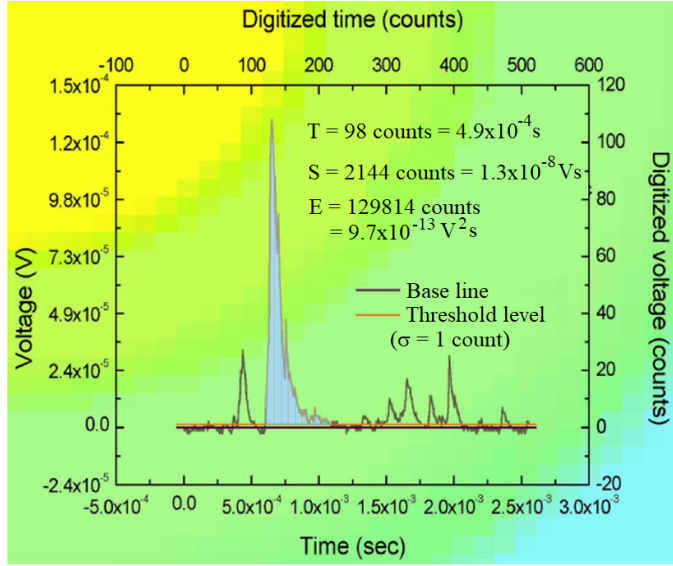


Слика 2.1: Хистерезисна петља феромагнетика на којој се при довољно великој резолуцији примећује да се магнетизовање материјала одвија у скоковима.

торна сила са стохастичким временским профилима континуалног спектра снаге који имају карактеристике шума. Настали профили (пример је приказан на слици 2.2), као и пратећи звук који настаје услед магнето-акустичке спреге, приказују ефекат познат као Баркхаузен-ов шум чије испитивање је дало једну од првих потврда Вајсове теорије магнетних домена [54], што је подстакло развој теоријских модела за описивање феромагнетика. Један од првих, уједно најзначајнијих модела, јесте Изингов модел [55]. Занимљиво је истаћи да је модел назван по Ернсту Изингу (Ernst Ising, 1900 – 1998), немачком научнику, иако је његов идејни творац Изингов ментор Вилхелм Ленц (Wilhelm Lenz, 1888 – 1957). Главни резултат Изинговог решења, које је део његове докторске дисертације, јесте одсуство фазног прелаза у једнодимензионом моделу.

### 2.1 Изингов модел у случајном пољу

Чист Изингов модел описује систем класичних спинова смештених у чворовима неке решетке који узимају вредности 1 или  $-1$ . Спинови интерагују изменски са најближим



Слика 2.2: Пример издвајања временског профила Баркхаузенoвoг пулса (шрафиран сивом бојом). На  $x$ -оси су приказани реално и дигитализовано време, а на  $y$ -оси дигитализовани и снимљени напон. Базна линија (base line) обојена је тамно љубичастом, а наметнути праг детекције (threshold или discrimination level) наранџастом бојом. На графику су приложене особине снимљеног пулса - трајање, величина, енергија; стандардна девијација спољасњег сума је износила  $\sigma = 1$  count. За детаље снимања Баркхаузенoвoг шума погледати [56].

суседима и интерагују са спољним магнетним пољем. Овакав систем описује Хамилтонијан:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - \sum_i H_i s_i, \quad (2.1)$$

$s_i$  и  $H_i$  су спин и спољно поље у чвору  $i$ , а  $\langle ij \rangle$  означава да се сумирање врши само по најближим суседима спина у чвору  $i$ . Интеграл изменске интеракције  $J$  је исти за све парове најближих суседа. Ако је спољно поље хомогено ( $H_i = H$ ), што ће у наставку текста бити случај, хамилтонијан система имаће следећи облик:

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i. \quad (2.2)$$

Као што је већ речено, у једнодимензионом случају нема фазног прелаза, док у системима виших димензија фазни прелази постоје. Најнижа димензија на којој се модел описује теоријом средњег поља (горња критична димензија) је 4. Ипак, чист Изингов модел не урачунава утицај постојећих нечистоћа које могу постојати у узорку као ни могућих дефеката решетке, па се при описивању реалних узорака знатно чешће користи атермални <sup>1</sup> Изингов модел у случајном пољу [57] најчешће означаван као RFIM (скраћеница од енглеског назива Random Field Ising model). Овај модел урачунава утицај дефеката тако што сваком чвору  $i$  придружује вредност случајног поља  $h_i$ . Ова промена се на Хамилтонијан (2.2) одражава тако што му додаје члан којим се

<sup>1</sup>Температура система је једнака нули јер је феромагнетна интеракција најчешће толико јака да је енергија термалних процеса занемарљива.

урачунава интеракција између спина  $s_i$  и случајног поља  $h_i$  у чвору  $i$ :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i - \sum_i h_i s_i. \quad (2.3)$$

Доња критична димензија овквог модела је 2 [58], док је вредност горње критичне димензије 6 [59, 60, 61].

С обзиром да је појава дефеката и нечистоћа у реалним узорцима стохастичка, вредности случајног поља бирају се независно из расподеле  $\rho(h)$  чија је очекивана вредност нула и то тако да је обезбеђена нескорелисаност вредности случајног поља у различитим чворовима:

$$\langle h_i \rangle = 0, \quad \langle h_i h_j \rangle = 0, \quad (2.4)$$

где  $\langle \dots \rangle$  представља усредњавање по различитим конфигурацијама случајног поља. Установљено је да критичност система слабо зависи од избора типа дистрибуције из које се узимају вредности случајног поља [62] па је најчешћи, а уједно и у овом раду, избор Гаусова расподела:

$$\rho(h_i) = \frac{1}{R\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{h_i^2}{2R^2}}, \quad (2.5)$$

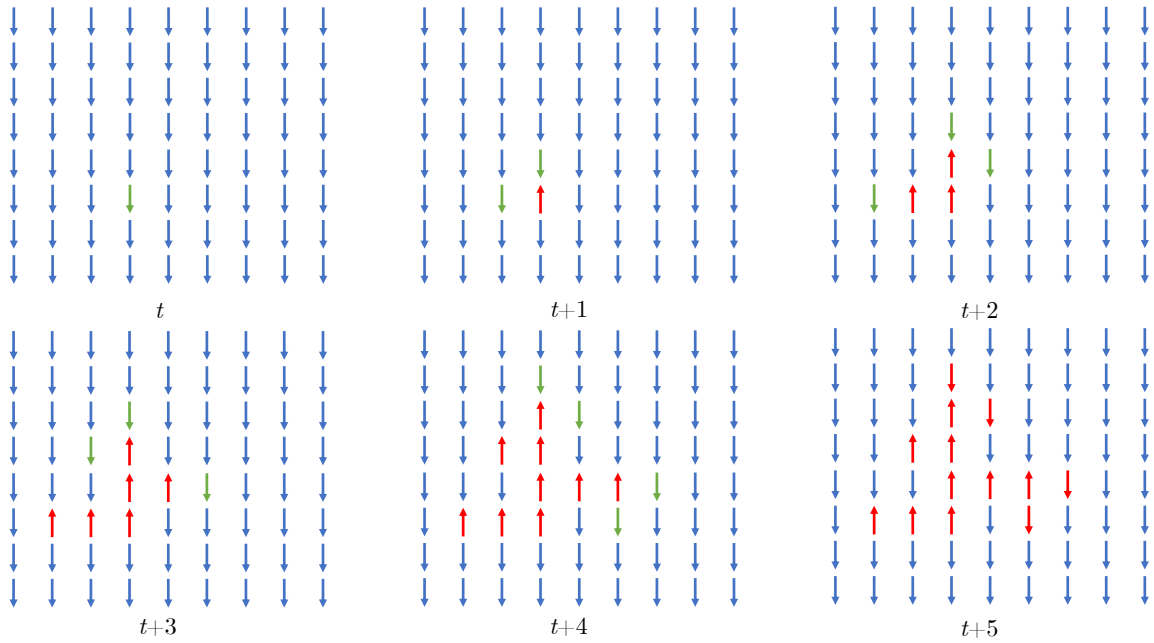
где је са  $R$  означена стандардна девијација која представља параметар уређености система који називамо неуређеност. Резултати представљени у наставку добијени су коришћењем модела поља замрзнутих у времену (quenched) који подразумева да је промена случајних поља спора, то јест да је карактеристично време промене случајних поља далеко веће од карактеристичног времена спинске динамике. Са друге стране, ако је време промене случајног поља упоредиво са карактеристичним временом спинске динамике ради се о моделу у којем су случајна поља променљива са временом (annealed).

Динамика система одређена је локалним правилом по којем је спин у чвору  $i$  стабилан све док је истог знака као ефективна поље  $h_i^{\text{eff}}$  у истом чвору које је дато са:

$$h_i^{\text{eff}} = J \sum_{\langle j \rangle} s_j + H + h_i, \quad (2.6)$$

где се сумирање врши по најближим суседима спина  $s_i$ . Сви спинови нестабилни у тренутку  $t$  промениће знак (флиповаће се) у наредном тренутку дискретног времена ( $t+1$ ). На тај начин промениће се вредност ефективног поља у њима суседним чворовима који се при томе могу дестабилизovati и који ће се флиповати у наредном тренутку дискретног времена ( $t+2$ ). Управо флиповани спинови могу дестабилизovati своје суседе који ће се флиповати у наредном тренутку и тако даље. На овај начин настаје лавина флиповања (спинска лавина) која траје све до тренутка у којем су сви спинови стабилни, тј. тренутка када флиповање спинова не изазива промену знака ефективног поља суседних спинова. Илустрација овог процеса приказана је на слици 2.3.

Када више нема нестабилних спинова све лавине су угашене. Тада једини начин да се изазове појава нових нестабилних спинова, а самим тим и нових лавина, јесте промена спољног магнетног поља. Та промена може бити таква да доводи до флиповања само једног (најнестабилнијег) спина, али и до флиповања више најнестабилнијих спинова. Уколико је брзина промене поља  $\Omega = \delta H / \delta t$  велика најчешће се у систему јавља истовремена пропација више лавина, а уколико је брзина промене поља веома мала такав сценарио је мало вероватан и најчешће кроз систем пропагира једна лавина. Како се систем понаша у области релативно великих (или малих) брзина промене спољног поља још увек није у потпуности испитано. Режим у којем се спољно поље мења тако да изазива промену знака само једног, најнестабилнијег спина, а да вредност поља



Слика 2.3: Процес простирања спинске лавине која настаје у тренутку  $t$  и гаси се у тренутку  $t + 5$ . Плавом бојом обојени су стабилни спинови, зеленом бојом обојени су нестабилни спинови, а црвеном бојом су обојени флиповани спинови.

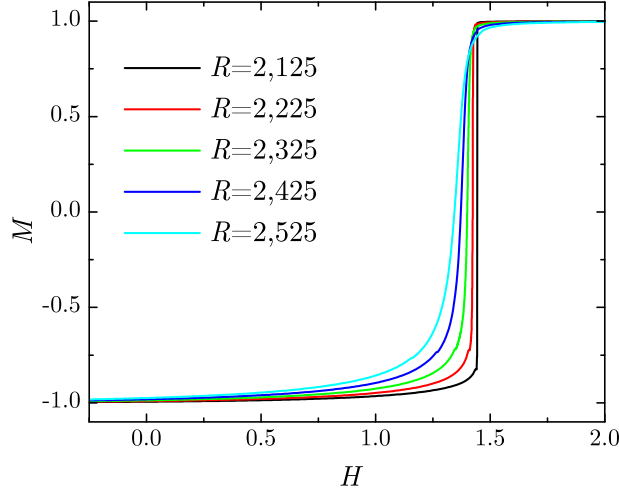
остаје константна током трајања настале лавине, обезбеђује да кроз систем пропагира највише једна лавина. Након гашења лавине спољно поље се мења до вредности која изазива флиповање следећег најнестабилнијег спина чиме ће (евентуално) настати нова лавина. Овакав режим вођења назива се адијабатски и он је гранични случај режима са константном променом брзине када брзина промене спољног поља  $\Omega$  тежи нули.

Лавине које прожимају систем дуж макар једне димензије називају се прожимајуће [35, 63] и оне могу бити различите димензионалности. На пример, у тродимензионом систему се могу јавити једнодимензионе, дводимензионе и тродимензионе прожимајуће лавине. Ако магнетизацију дефинишемо као средњу вредност спина коју има сваки од  $N$  спинова у систему:

$$M = \frac{1}{N} \sum_i^N s_i, \quad (2.7)$$

онда је јасно да прожимајуће лавине изазивају највећу промену магнетизације, те стога представљају најзначајнију врсту лавина које се јављају код оваквих система.

Уколико се систем релаксира великим бројем малих лавина онда се промена магнетизације одвија глатко што није случај када се релаксира у виду неколико веома великих лавина које ће флиповати све спинове система (слика 2.4). Прожимајуће лавине се јављају када је неуређеност довољно ниска пошто тада промена знака најближих суседа доминантно утиче на промену ефективног поља јер случајна поља немају довољно велику апсолутну вредност. Највећа неуређеност при којој долази до формирања прожимајуће лавине у систему назива се ефективна критична неуређеност  $R_c^{\text{eff}}(L)$  и она зависи од димензија система  $L$ . У термодинамичком лимиту, односно кад  $L \rightarrow \infty$ , важи  $R_c^{\text{eff}}(L) \rightarrow R_c$ , тј. ефективна критична неуређеност тежи критичној неуређености  $R_c$  коју имају бесконачни системи и она представља тачку која раздваја феромагнетну ( $R < R_c$ ) од парамагнетне ( $R > R_c$ ) фазе [34, 37]. Магнетизација  $M_R(H)$  система у парамагнетној фази је глатка функција спољног поља, док се у феромагнетној јавља нагли скок магнетизације  $\Delta M(R)$  због појаве прожимајуће лавине (или више



Слика 2.4: Магнетизација  $M$  у функцији спољног поља  $H$  за неколико неуређености неуређености. Криве су добијене на систему величине  $360 \times 360 \times 360$ .

њих) на некој вредности спољног поља  $H_t(R)$  у којој долази до фазног прелаза првог реда. Вредност поља при којој долази до фазног прелаза и скок магнетизације зависе од неуређености система. Када неуређеност система  $R$  тежи критичној неуређености преко вредности које су мање од  $R_c$ , тада и вредност поља на којој долази до фазног прелаза тежи вредности критичног поља,  $H_t(R) \rightarrow H_c$ , док скок у магнетизацији тежи нули,  $\Delta M(R) \rightarrow 0$ . Тако настаје критична крива магнетизације  $M_{R_c}(H)$ , крива која је глатка функција спољног поља свуда осим за вредност критичног поља  $H_c$  у којој је суспектибилност  $\chi = dM/dH$  бесконачна. Критичну магнетизацију дефинишемо као вредност магнетизације при критичној неуређености када спољно поље има критичну вредност,  $M_c \equiv M_{R_c}(H_c)$ . У неравнотежном моделу критични параметри  $R_c$ ,  $H_c$  и  $M_c$  зависе од димензионалности система и типа решетке [34, 64, 65, 66], и самим тим нису универзални. Њихове вредности за 3D случај приложене су у Табели 2.1.

Табела 2.1: Вредности неуниверзалних критичних параметара за 3D Изингов модел на кубној (3D) са случајним пољем [67]. Вредност критичне магнетизације је само поменуто на слици 1 у раду [34] због чега је наведена без одговарајуће грешке.

$R_c$	$H_c$	$M_c$
$2,16 \pm 0,03$	$1,435 \pm 0,004$	0,9

У близини критичне тачке  $(R_c, H_c)$  магнетизација бесконачних система се скалира на следећи начин [34, 68]

$$m_R(H) = |r|^\beta \mathcal{M}_\pm(h'|r|^{-\beta\delta}), \quad (2.8)$$

где је  $r \equiv (R - R_c)/R$  редукована неуређеност <sup>2</sup>,  $h' \equiv H - H_c - br$  редуковано магнетно поље, а  $m \equiv M_R(H) - M_c$  редукована магнетизација, где ”ротациони” члан  $b$  урачунава померање максимума суспектибилности за различите неуређености. Функције  $\mathcal{M}_\pm$  су универзалне скалирајуће функције,  $\mathcal{M}_-$  у феромагнетној, а  $\mathcal{M}_+$  у парамагнетној фази.

<sup>2</sup>У лимиту  $R \rightarrow R_c$  овако дефинисана редукована неуређеност даје исте резултате као и редукована неуређеност дефинисана на ”традиционалан” начин,  $r \equiv (R - R_c)/R_c$ , али је на овај начин обезбеђена бржа конвергенција.

Критични експонент  $\beta$  описује понашање скока магнетизације испод  $R_c$ ,  $\Delta M \propto |r|^\beta$ , а  $\delta$  описује скалирање редуковане магнетизације са редукованим магнетним пољем,  $m \propto h'^\delta$ . С обзиром да је суцептибилност први извод магнетизације, она ће се скалирати по закону:

$$\chi_R(H) = |r|^{\beta-\beta\delta} \mathcal{M}'_{\pm}(h'|r|^{-\beta\delta}), \quad (2.9)$$

где је  $\mathcal{M}'_{\pm} = d\mathcal{M}/dx$ , универзална скалирајућа функција суцептибилности.

При симулирању Изинговог модела, а такође RFIM-а, користе се два типа граничних услова - затворени (периодични) и отворени гранични услови. Код затворених граничних услова сви спинови система имају исти број суседа ( $2d$  у случају хиперкубних решетки, где је  $d$  број димензија система) и позиционо су еквивалентни јер је решетка тополошки затворена у хиперторус. Код отворених граничних услова спинови које се налазе на границама система немају исти број суседа као спинови у унутрашњости система већ је број њихових суседа мањи. Због тога се овакви спинови лакше флипују и окидање лавина па је вероватноћа окидања на површини већа него у унутрашњости система. На коначним системима ова два типа граничних услова дају различите резултате, али резултати добијени у термодинамичком лимиту су исти, са тим што резултати добијени уз затворене граничне услове брже конвергирају. Ефекат граничних услова је детаљно испитиван и уочено је да се најчешће комбиновањем граничних услова постижу услови најприближнији реалним.

Резултати презентовани у трећој у четвртој глави добијени су из симулација на 3D системима величине  $L^3$  и при затвореним граничним условима дуж свих димензија, док су резултати презентовани у петој глави добијени из симулација на системима којима су вариране димензије и гранични услови. Све симулације вођене су у адијабатском режиму. Уз то, у почетном тренутку сви спинови у систему имају вредност  $s_i = -1$ , а спољно поље има вредност  $H = -\infty$ , и симулације су урађене на узлазном делу хистерезисне петље. Симулација се завршава када вредности свих спинова у систему буду 1.

## 2.2 Основне особине лавина и њихово понашање

Основни параметри лавине који су од интереса за даљу анализу су величина и трајање лавине. Њихово понашање окарактерисано је степеним законима и критичним експонентима који су изложени у овом одељку.

### Величина лавине

Број флипованих спинова током трајања једне лавине представља величину  $S$  те лавине (величина лавине приказане на слици 2.1 је  $S = 13$ , на пример). Расподела величина лавина  $D_{R,H}(S)$  покренутих у бесконачном систему при неуређености  $R$  и спољном пољу  $H$  скалира се са величином лавине  $S$  као:

$$D_{R,H}(S) \sim S^{-\tau} \mathcal{D}_{\pm}^{(S)}(S^\sigma |r|, h'|r|^{-\beta\delta}), \quad (2.10)$$

где су  $\mathcal{D}_{\pm}(x, y)$  универзалне скалирајуће функције,  $\tau$  је експонент за величину лавина, а  $\sigma$  је експонент који описује понашање лавине максималне величине у близини критичне неуређености,  $S_{\max} \sim |r|^{-1/\sigma}$  [34, 69]. Интегралну расподелу добијамо интеграцијом израза (2.10) по свим вредностима спољног поља:

$$D_R^{(int)}(S) = \int dH D_{R,H}(S) \sim S^{-(\tau+\sigma\beta\delta)} \mathcal{D}_{\pm}^{(S,int)}(S^\sigma |r|), \quad (2.11)$$

где су  $\mathcal{D}_{\pm}^{(S,int)}$  одговарајуће скалирајуће функције интегралне расподеле. За  $R = R_c$  израз (2.11) се своди на

$$D_R^{(int)}(S) \sim S^{-(\tau+\sigma\beta\delta)}, \quad (2.12)$$

што је законитост приближна очекиваној на великим коначним решеткама [36]. Недавна истраживања показала су да расподела важи не само за бесконачне већ и за коначне системе уколико је њихова неуређеност већа од ефективне критичне неуређености [70].

Ако се универзалној скалирајућој функцији  $\mathcal{D}_{\pm}$  дода зависност од  $L$  [36, 50] и ако се члан  $h'|r|^{-\beta\delta}$  напише у облику производа  $h'|r|^{-\beta\delta} = (S^{\sigma\beta\delta}h') \times (S^{\sigma}r)^{-\beta\delta}$ , препознаје се да универзална скалирајућа функција зависи од  $S^{\sigma\beta\delta}h'$ ,  $S^{\sigma}r$  и  $S^{\sigma\nu}/L$ . Сада је универзалну скалирајућу функцију могуће записати у облику  $D_S(1; S^{\sigma\beta\delta}h', S^{\sigma}r, S^{\sigma\nu}/L)$  чиме долазимо до израза:

$$D_S(1; S^{\sigma\beta\delta}h', S^{\sigma}r, S^{\sigma\nu}/L) = S^{\tau}D_S(S; h', r, 1/L). \quad (2.13)$$

Експонент  $\nu$  описује начин на који корелациона дужина  $\xi$  модела дивергира у близини критичне тачке

$$\xi \sim r^{-\nu}.$$

## Трајање лавине

Време које протекне од флиповања најнестабилнијег спина до гашења лавине представља трајање лавине  $T$  (трајање лавине приказане на слици 2.1 је  $T = 5$ ). Расподела  $D_{R,H}(T)$  која показује понашање трајања лавина покренутих при вредности поља  $H$  и неуређености  $R$  има облик:

$$D_{R,H}(T) = T^{-\alpha}\mathcal{D}_{\pm}^{(T)}(T^{\sigma/\gamma_{T/S}}|r|, h'|r|^{-\beta\delta}), \quad (2.14)$$

где су  $\mathcal{D}_{\pm}^{(T)}(x, y)$  универзалне скалирајуће функције за дистрибуције трајања лавина,  $\alpha$  је критични експонент за трајање лавина, а  $\gamma_{T/S}$  је критични експонент трајања/величине. Експонент  $\gamma_{T/S}$  описује понашање средњег трајања  $\langle T \rangle$  лавина величине  $S$  у функцији управо  $S$ :

$$\langle T \rangle = S^{\gamma_{T/S}}. \quad (2.15)$$

Одговарајућа интегрална функција скалирања  $D_R^{(int)}(T)$  има облик:

$$D_R^{(int)}(T) \sim T^{-(\alpha+\sigma\beta\delta/\gamma_{T/S})}\mathcal{D}_{\pm}^{(T,int)}(T^{\sigma/\gamma_{T/S}}|r|), \quad (2.16)$$

где су  $\mathcal{D}_{\pm}^{(T,int)}$  одговарајуће универзалне скалирајуће функције за интегралне дистрибуције трајања. Аналогно расподелама величине, за коначне системе неуређености веће од ефективне критичне важи расподела (2.14). Слично расподелама величине могуће је додати члан  $T^{\sigma\nu/\gamma_{T/S}}/L$  који представља зависност од  $L$ , а затим члан  $h'|r|^{-\beta\delta}$  расписати као производ  $h'|r|^{-\beta\delta} = (T^{\sigma\beta\delta/\gamma_{T/S}}h') \times (T^{\sigma/\gamma_{T/S}}r)^{-\beta\delta}$ . Овиме се добија нови израз који описује понашање трајања лавине:

$$D_T(1; T^{\sigma\beta\delta/\gamma_{T/S}}h', T^{\sigma/\gamma_{T/S}}r, T^{\sigma\nu/\gamma_{T/S}}/L) = T^{\alpha}D_T(T; h', r, 1/L). \quad (2.17)$$

Осим поменутих, темељно изучавање величине које описују понашање су амплитуда сигнала, енергија и спектар снаге.

## 2.3 Идентификација критичних експонената

Нека је временски профил лавине  $f_i(t)$  где индекс  $i$  пребројава различите лавине. Време  $i$ -те лавине  $t$  мери се од почетка лавине. Елементарну вероватноћу појављивања лавине  $i$  при условима одређеним мулти-параметром  $\lambda$ , који мери удаљеност од критичне тачке, означимо са  $d_p(i; \lambda)$ . Код атермалног RFIM-а у адијабацком режиму мулти-параметар  $\lambda$  биће  $\lambda = (h', r, 1/L)$  где је  $h' = h + b_r r$  редуковано магнетно поље, а  $b_r$  параметар ротације за спољно поље  $H$ . У случају да посматрамо интегралне дистрибуције лавина мулти-параметар  $\lambda$  биће  $\lambda = (r, 1/L)$ . Посматрајмо сада фамилију скалирања  $S_b$  где је  $b$  слободни параметар чијим се дејством на лавину  $i$  добија лавина  $i'$  следећег временског профила:

$$f_{i'}(t) \equiv f_{S_b i}(t) = b^x f_i(b^y t), \quad (2.18)$$

где су  $x$  и  $y$  фиксирани експоненти. Претпоставимо ГХФ<sup>3</sup> хипотезу скалирања следећег облика:<sup>4</sup>

$$d_p(S_b i; b^\zeta \lambda) = b^{w_0} d_p(i; \lambda), \quad (2.19)$$

где је  $w_0$  фиксирани експонент, а  $z$  фиксирани мулти-експонент. Дакле,  $b^\zeta \lambda$  је скраћени запис за  $b^\zeta \lambda = (b^{\zeta_1} \lambda_1, b^{\zeta_2} \lambda_2, \dots, b^{\zeta_m} \lambda_m)$  где је  $\zeta$   $m$ -компонентни мулти-експонент,  $\lambda$   $m$ -компонентни мулти-параметар. Ако трајањем лавине  $i$  сматрамо први тренутак  $T(i) > 0$  за који је  $f_i(t) = 0$ , онда важи  $f_{S_b i}(T_{S_b i}) = b^x f_i(b^y T_{S_b i}) = 0$  одакле следи да се трајање скалира као<sup>5</sup>

$$T_{S_b i} = b^{-y} T_i. \quad (2.20)$$

Величина  $S_i$  лавине  $i$  рачуна се као интеграл сигнала по времену у границама трајања дате лавине,  $S_i = \int_0^{T_i} f_i(t) dt$  што даље значи да важи

$$S_{S_b i} = \int_0^{T_{S_b i}} f_{S_b i}(t) dt = \int_0^{b^{-y} T_i} b^x f_i(b^y t) dt.$$

Након увођења смене  $b^y t = t' \equiv t$  добијамо правило по којем се скалира величина лавине:

$$S_{S_b i} = b^{x-y} S_i. \quad (2.21)$$

Елементарну вероватноћу да се примети лавина  $i(T, S)$  трајања  $T \leq T_i \leq T + dT$  и величине  $S \leq S_i \leq S + dS$  дефинисаћемо као интеграл елементарних вероватноћа  $d_p(i; \lambda)$  по скупу  $\Gamma$  свих лавина које задовољавају поменуте услове:

$$dP(T, S; \lambda) = \int_{\Gamma} d_p(i; \lambda). \quad (2.22)$$

Густину вероватноће да се примети лавина  $i(T, S)$  под условима  $\lambda$  дефинисаћемо као:

$$P(T, S; \lambda) \equiv \frac{dP(T, S; \lambda)}{dT dS}. \quad (2.23)$$

<sup>3</sup>Скраћено од генерализована хомогена функција - Generalised homogenous function.

<sup>4</sup>Релације (2.18) и (2.19) важе само ако су време  $t$  и сигнал  $f(t)$  континуални, што је испуњено за Бархаузенов шум, међутим није испуњено за сигнал добијен симулацијом RFIM-а јер су и време и сигнал у симулацијама дискретни. Ипак, приступ је могуће применити ако сматрамо да је сигнал добијен аналогно-дигиталном конверзијом континуалног сигнала који је функција континуалног времена.

<sup>5</sup>У раду [71] важи  $y = 1$ .



Посматрајмо густину вероватноће за опажање скалиране лавине трајања  $b^{-y}$  и величине  $b^{x-y}s$  под условима  $b^\zeta \lambda$ :

$$P(b^{-y}T, b^{x-y}S; b^\zeta \lambda) = \frac{dP(b^{-y}, b^{x-y}S; b^\zeta \lambda)}{d(b^{-y}T)d(b^{x-y}S)} = \frac{\int_{\Gamma'} dp(i'; b^\zeta \lambda)}{b^{x-2y}dTdS}.$$

Скуп  $\Gamma'$  је лик скупа  $\Gamma$  при скалирању,  $\Gamma' = S_b(\Gamma)$  и представља скуп свих лавина које задовољавају услове  $b^{-y}T \leq T_i \leq b^{-y}(T + dT)$  и  $b^{x-y}S \leq S_i \leq b^{x-y}(S + dS)$ , што значи да важи:

$$\int_{\Gamma'} dp(i'; b^\zeta \lambda) = \int_{\Gamma} \frac{dp(S_b i; b^\zeta \lambda)}{dp(i; \lambda)} dp(i; \lambda) = b^{w_0} \int_{\Gamma} dp(i; \lambda)$$

због чега важи скалирање:

$$P(b^{-y}T, b^{x-y}S; b^\zeta \lambda) = b^{w_0-(x-2y)} P(T, S; \lambda). \quad (2.24)$$

Густине вероватноће  $P(T, S; \lambda)$  у основи представљају здружене расподеле

$$D_{T,S}(T, S; \lambda) = CP(T, S; \lambda) \quad (2.25)$$

за трајање и величину лавине при условима  $\lambda$ , где је  $C$  константа пропорционалности која нам није од интереса у овој анализи. Даље, помоћу (2.25) уводимо расподеле трајања лавина као:

$$D_T(T; h', r, 1/L) = C \int_0^\infty ds P(T, S; h', r, 1/L), \quad (2.26)$$

и расподеле величина лавина као:

$$D_S(S; h', r, 1/L) = C \int_0^\infty dT P(T, S; h', r, 1/L), \quad (2.27)$$

где је искоришћено да је у RFIM-у  $\lambda = (h', r, 1/L)$ . Расподела (2.26) се скалира по закону:

$$D_T(b^{-y}T; b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} / L) = b^{w_0+y} D_T(T; h', r, 1/L), \quad (2.28)$$

а расподела (2.27) по закону:

$$D_S(b^{x-y}S; b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} / L) = b^{w_0-x+y} D_S(S; h', r, 1/L). \quad (2.29)$$

Заиста, ако имамо у виду да је

$$D_T(b^{-y}T; b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} / L) = C \int_0^\infty ds' P(b^{-y}T, S'; b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} / L),$$

након увођења смене  $s' = b^{x-y}$  имамо

$$\begin{aligned} D_T(b^{-y}T; b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} / L) &= C \int_0^\infty d(b^{x-y}S) P(b^{-y}T, b^{x-y}S; b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} / L) = \\ &= C b^{x-y} \int_0^\infty ds b^{w_0-(x-2y)} P(T, S; h', r, 1/L) = \\ &= b^{w_0+y} D_T(T; h', r, 1/L). \end{aligned}$$

Аналогно, ако је

$$D_S(b^{x-y}S; b^{\zeta_h}h', b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = C \int_0^\infty dT' P(T', b^{x-y}S; b^{\zeta_h}h', b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L),$$

након увођења нове променљиве интеграције  $T' = b^{-y}T$ , добијамо

$$\begin{aligned} D_S(b^{x-y}S; b^{\zeta_h}h', b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) &= C \int_0^\infty d(b^{-y}T) P(b^{-y}T, b^{x-y}S; b^{\zeta_h}h', b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = \\ &= C b^{-y} \int_0^\infty dT b^{x_0-(x-2y)} P(T, S; h', r, 1/L) = \\ &= b^{w_0-(x-y)} D_S(S; h', r, 1/L). \end{aligned}$$

Ако узмемо да је  $b^{-y}T = 1$  једначина (2.26) добија облик степеног закона по  $T$ :

$$D_T(1; T^{\zeta_h/y}h', T^{\zeta_r/y}r, T^{\zeta_L/y}/L) = T^{w_0/y+1} D_T(T; h', r, 1/L), \quad (2.30)$$

а аналогно, ако у једначину (2.27) уврстимо  $b^{x-y}S = 1$  она ће имати облик степеног закона по  $S$ :

$$D_S(1; S^{\zeta_h/(y-x)}h', S^{\zeta_r/(y-x)}r, S^{\zeta_L/(y-x)}/L) = S^{w_0/(y-x)+1} D_S(S; h', r, 1/L). \quad (2.31)$$

Поређењем израза (2.30) и (2.31) са изразима (2.13) и (2.17) видимо да важе следеће везе:

$$\begin{aligned} \zeta_h/y &= \sigma\beta\delta/\gamma_{T/S}, \\ \zeta_r/y &= \sigma/\gamma_{T/S}, \\ \zeta_L/y &= \sigma\nu/\gamma_{T/S}, \\ w_0/y + 1 &= \alpha, \end{aligned} \quad (2.32)$$

односно:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_h/y}{1-x/y} &= \sigma\beta\delta, \\ \frac{\zeta_r/y}{1-x/y} &= \sigma, \\ \frac{\zeta_L/y}{1-x/y} &= \sigma\nu, \\ \frac{w_0/y}{1-x/y} + 1 &= \tau. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Коначно, изрази (2.32) и (2.33) дају идентификацију експонената:

$$\begin{aligned} w_0/y &= \alpha - 1 \\ x/y &= 1 - 1/\gamma_{T/S} = 1 - \gamma_{S/T} \\ \zeta_h/y &= \sigma\beta\delta/\gamma_{T/S} = \beta\delta/\nu z \\ \zeta_r/y &= \sigma/\gamma_{T/S} = 1/\nu z \\ \zeta_L/y &= \sigma\nu/\gamma_{T/S} = 1/z. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Познате вредности, комбинације и односи експонената од интереса приказани су у Табелама 2.2, 2.3 и 2.4.

Табела 2.2: Вредности критичних експонената за 3D Изингов модел на кубној решетки са случајним пољем [67].

$1/\sigma$	$\beta$	$1/\nu$	$\tau$	$\alpha$	$z$
$4,2 \pm 0,3$	$0,035 \pm 0,028$	$0,71 \pm 0,09$	$1,60 \pm 0,06$	$2,06 \pm 0,06$	$1,7 \pm 0,4$

Табела 2.3: Познате вредности комбинација критичних експонената за 3D Изингов модел на кубној решетки са случајним пољем [67].

$\sigma\beta\delta$	$\tau + \sigma\beta\delta$	$\beta\delta$	$\sigma\nu z$	$\sigma\nu$
$0,43 \pm 0,07$	$2,03 \pm 0,03$	$1,81 \pm 0,32$	$0,57 \pm 0,03$	$0,34 \pm 0,05$

Табела 2.4: Вредности ГХФ експонената за 3D Изингов модел на кубној решетки са случајним пољем израчунате на основу познатих релација.

$x/y$	$w_0/y$	$\zeta_h/y$	$\zeta_r/y$	$\zeta_L/y$
$-0,73$	$1,05$	$0,741$	$0,414$	$0,586$

# Глава 3

## Утицај прага детекције

### 3.1 Расподеле параметара подлавине насталих постављањем прага детекције

Увођењем прага детекције  $V_{\text{th}} \geq 0$ , унутар сваке лавине  $i$  која прелази висину задатог прага можемо посматрати карактеристике насталих подлавина које леже изнад прага  $V_{\text{th}}$  - трајање  $T$ , величину  $s$ , интерно време чекања  $T_{\text{int}}$  и екстерно време чекања  $T_{\text{ext}}$ .

Нека је  $V_{\text{th}}$  изабрани праг детекције и нека су  $t_1, t_2, \dots, t_k$  тренуци времена у којима праг  $V_{\text{th}}$  пресеца лавину  $i$ , односно важи  $f_i(t_1) = f_i(t_2) = \dots = f_i(t_k) = V_{\text{th}}$ . Ако су  $t_s$  и  $t_e$  два суседна тренутка из тог низа таква да је за све  $t_s < t < t_e$  лавина  $i$  изнад прага,  $f_i(t) > V_{\text{th}}$ , онда са  $(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s)$  можемо означити подлавину лавине  $i$  која почиње у тренутку  $t_s$  и завршава се у тренутку  $t_e$ , након којег лавина  $i$  силази испод прага детекције  $V_{\text{th}}$ . Ова ознака садржи све што једнозначно одређује лавину: индекс  $i$  оригиналне лавине чиме је једнозначно одређен временски профил  $f_i(t)$  лавине  $i$ , вредност прага  $V_{\text{th}}$  и тренутак  $t_s$  почетка подлавине којим је имплицитно одређен крајњи тренутак подлавине  $t_e$ . Временски профил подлавине  $(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s)$  узимамо у облику

$$f_{(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s)}(t') = f_i(t_s + t') - V_{\text{th}}, \quad (3.1)$$

где је  $t'$  време које се мери од почетка лавине,  $t_s < t_s + t' < t_e$ .

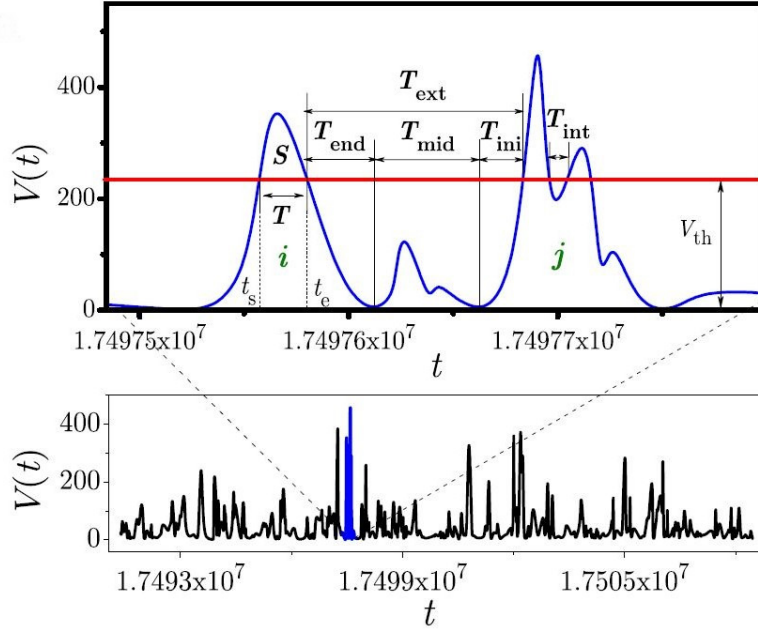
#### 3.1.1 Трајање подлавина

Трајање подлавине  $(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s)$  јесте време протекло између почетног  $t_s$  и крајњег  $t_e$  тренутка подлавине  $i$  (слика 3.1):

$$T(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s) \equiv t_e - t_s. \quad (3.2)$$

Сада из (2.18) имамо  $f_{S_b i}(t') = b^x f_i(b^y t')$ , одакле видимо да ако за неко  $t$  вреди да је  $f_i(t) < V_{\text{th}}$  онда важи  $f_{S_b i}(t' = b^{-y}t) = b^x f_i(b^y t) = b^x f_i(t) < b^x V_{\text{th}}$ , и аналогно да ако је  $f_i(t) > V_{\text{th}}$ , онда је  $f_{S_b i}(t') > b^x V_{\text{th}}$ . Можемо закључити да ако је  $t_s$  почетни тренутак подлавине  $(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s)$ , онда је  $t'_s \equiv b^{-y}t_s$  почетни тренутак скалиране подлавине  $(S_b i \uparrow b^x V_{\text{th}}; b^{-y}t_s)$ . Аналогно, ако је  $t_e = t_s + T(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s)$  крајњи тренутак исте подлавине онда је крајњи тренутак након скалирања исте подлавине  $t'_e \equiv b^{-y}t_e$ . На основу (3.2) важи скалирање трајања подлавине:

$$T(S_b i \uparrow b^x V_{\text{th}}; b^{-y}t_s) = b^{-y}T(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s). \quad (3.3)$$



Слика 3.1: На слици је илустровано како постављање прага детекције  $V_{th}$  (црвена линија) утиче на анализу сигнала приказаног у доњем делу слике, тј. одређивање величине подлавине  $S$ , трајања  $T$ , и свих дефинисаних врста времена чекања,  $T_{int}$  унутар лавине  $i$ , односно  $T_{ext}$ ,  $T_{end}$ ,  $T_{ini}$  и  $T_{mid}$  између суседних лавина  $i$  и  $j$  које прелазе преко прага  $V_{th}$ .

За сваку лавину  $i$  могуће је увести број њених подлавина  $n_i^{(T)}(T; V_{th})$  трајања  $T$  које прелазе висину прага детекције  $V_{th}$  за који важи релација:

$$n_{S_b i}^{(T)}(b^{-y}T; b^x V_{th}) = n_i^{(T)}(T; V_{th}). \quad (3.4)$$

Ова величина нам омогућује да уведемо расподелу подлавина трајања  $T$  изнад прага  $V_{th}$  при условима  $\lambda$ :

$$D_T(T; V_{th}, \lambda) \equiv C \int \frac{dn_i^{(T)}(T; V_{th})}{dT} dp(i; \lambda), \quad (3.5)$$

где величина  $dn_i^{(T)}(T; V_{th})/dT$  смисао као генералисана функција. За овако дефинисану расподелу подлавина трајања  $T$  важиће следећи закон скалирања:

$$D_T(b^{-y}T; b^x V_{th}, b^{\zeta h} h', b^{\zeta r} r, b^{\zeta L} / L) = b^{w_0+y} D_T(T; V_{th}, h', r, 1/L). \quad (3.6)$$

Заиста, расподела скалираних подлавина биће

$$D_T(b^{-y}T; b^x V_{th}, b^{\zeta} \lambda) = C \int \frac{dn_i^{(T)}}{dT}(b^{-y}T; b^x V_{th}) dp(i; b^{\zeta} \lambda) \quad (3.7)$$

где се интеграција врши по свим лавинама  $i$ . Након увођења смене  $i \equiv S_b i'$  имамо

$$(i; b^{\zeta} V_{th}) = dp(S_b i'; b^{\zeta} V_{th}) = b^{w_0} dp(i'; V_{th}), \quad (3.8)$$

уз шта још важи и:

$$\begin{aligned}
\frac{dn_i^{(T)}}{dT}(b^{-y}T; b^x V_{\text{th}}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_i^{(T)}(b^{-y}T + t; b^x V_{\text{th}})}{t} = \\
&= \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{n_{S_b i'}^{(T)}(b^{-y}T + b^{-y}t'; b^x V_{\text{th}})}{b^{-y}t'} = \\
&= b^y \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{n_{S_b i'}^{(T)}(b^{-y}(T + t'); b^x V_{\text{th}})}{t'} = \\
&= b^y \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{n_{i'}^{(T)}(T + t'; V_{\text{th}})}{t'} = \\
&= b^y \frac{dn_{i'}^{(T)}}{dT}(T; V_{\text{th}}).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Коначно, након замене (3.8) и (3.9) у (3.7) имамо закон скалирања расподела трајања (3.6):

$$\begin{aligned}
D_T(b^{-y}T; b^x V_{\text{th}}, b^\zeta \lambda) &= C \int \frac{dn_i^{(T)}}{dT}(b^{-y}T; b^x V_{\text{th}}) dp(i; b^\zeta \lambda) = \\
&= C \int b^y \frac{dn_{i'}^{(T)}}{dT}(T; V_{\text{th}}) b^{w_0} dp(i'; V_{\text{th}}) = \\
&= b^{w_0+y} D_T(T; V_{\text{th}}, \lambda),
\end{aligned}$$

где је  $\lambda = (h', r, 1/L)$  вектор параметара за RFIM. Расподела (3.5) је ”диференцијална”, тј. односи се на сигнал који је прикупљен на изабраној вредности спољњег поља  $H$ . У симулацијама се, као најближа апроксимација оваквим расподелама, прикупљају расподеле из узаних прозора спољњег поља ( $H - \delta H, H + \delta H$ ). Од посебног значаја су интегралне расподеле које добијамо интеграцијом диференцијалних расподела по свим вредностима спољног поља, што је у случају расподела трајања:

$$D_T^{(\text{int})}(T; V_{\text{th}}, r, 1/L) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dh' D_T(T; V_{\text{th}}, h', r, 1/L). \tag{3.10}$$

За ову расподелу важи скалирање:

$$D_T^{(\text{int})}(b^{-y}T; b^x V_{\text{th}}, b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} /L) = b^{w_0+y+\zeta_h} D_T^{(\text{int})}(T; V_{\text{th}}, r, 1/L), \tag{3.11}$$

што можемо показати на следећи начин:

$$\begin{aligned}
D_T^{(\text{int})}(b^{-y}T; b^x V_{\text{th}}, b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} /L) &= \int_{-\infty}^{\infty} dh' D_T^{(\text{int})}(b^{-y}T; b^x V_{\text{th}}, h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} /L) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d(b^{\zeta_h} \hbar) D_T^{(\text{int})}(b^{-y}T; b^x V_{\text{th}}, b^{\zeta_h} \hbar, b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} /L) = \\
&= b^{\zeta_h} \int_{-\infty}^{\infty} d\hbar b^{w_0+y} D_T(T; V_{\text{th}}, \hbar, r, 1/L) = \\
&= b^{w_0+y+\zeta_h} D_T^{(\text{int})}(T; V_{\text{th}}, r, 1/L),
\end{aligned}$$

при чему је примењена смена променљиве  $h' \equiv b^{\zeta_h} \hbar$ .

### 3.1.2 Величина подлавина

Имајући у виду (3.1) величину  $s$  подлавине ( $i \uparrow V_{\text{th}}; t_s$ ) дефинишемо као:

$$\begin{aligned}
s(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s) &= \int_0^{T(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s)} f_{i \uparrow V_{\text{th}}; t_s}(t') dt' = \\
&= \int_{t_s}^{t_e} f_i(t) dt - V_{\text{th}}(t_e - t_s) = \\
&= \int_{t_s}^{t_e} f_i(t) dt - V_{\text{th}} T(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

видети слику 3.1. За величину скалиране подлавине важиће

$$\begin{aligned}
S(S_b i \uparrow b^x V_{\text{th}}; b^{-y} t_s) &= \int_{b^{-y} t_s}^{b^{-y} t_e} f_{S_b i}(t') dt' - b^x V_{\text{th}} T(S_b i \uparrow b^x V_{\text{th}}; b^{-y} t_s) = \\
&= \int_{b^{-y} t_s}^{b^{-y} t_e} b^x f_i(b^y t') dt' - b^{x-y} V_{\text{th}} T(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s),
\end{aligned}$$

одакле након преласка на нову променљиву интеграције,  $t \equiv b^y t'$ , имамо величину скалиране подлавине:

$$S(S_b i \uparrow b^x V_{\text{th}}; b^{-y} t_s) = b^{x-y} \left[ \int_{t_s}^{t_e} f_i(t) dt - V_{\text{th}} T(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s) \right] = b^{x-y} s(i \uparrow V_{\text{th}}; t_s) \tag{3.13}$$

Слично трајању, за величину  $S$  уводимо број подлавина лавине  $i$  величине  $S$  које прелазе висину прага детекције  $V_{\text{th}}$  -  $n_i^{(S)}(S; V_{\text{th}})$  за који важи:

$$n_{S_b i}^{(S)}(b^{x-y} S; b^x V_{\text{th}}) = n_i^{(S)}(S; V_{\text{th}}), \tag{3.14}$$

као и расподелу подлавина изнад прага  $V_{\text{th}}$  величине  $S$  при условима  $\lambda$ :

$$D_S(S; V_{\text{th}}, \lambda) \equiv C \int \frac{dn_i^{(S)}(S; V_{\text{th}})}{dS} dp(i; \lambda). \tag{3.15}$$

За диференцијалну варијанту ове расподеле важи закон скалирања:

$$D_S(b^{x-y} S; b^x V_{\text{th}}, b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} L) = b^{w_0 - (x-y)} D_S(S; V_{\text{th}}, h', r, 1/L), \tag{3.16}$$

што се може показати аналогно доказу у случају расподела трајања:

$$\begin{aligned}
\frac{dn_i^{(S)}}{dS}(b^{x-y}S; b^xV_{\text{th}}) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{n_i^{(S)}(b^{x-y}S + \sigma; b^xV_{\text{th}})}{\sigma} = \\
&= \lim_{\sigma' \rightarrow \infty} \frac{n_{S_b i'}^{(S)}(b^{x-y}S + b^{x-y}\sigma'; b^xV_{\text{th}})}{b^{x-y}\sigma'} = \\
&= b^{y-x} \lim_{\sigma' \rightarrow \infty} \frac{n_{S_b i'}^{(S)}(b^{x-y}(S + \sigma'); b^xV_{\text{th}})}{\sigma'} = \\
&= b^{y-x} \lim_{\sigma' \rightarrow \infty} \frac{n_{i'}^{(S)}(S + \sigma'; V_{\text{th}})}{\sigma'} = \\
&= b^{y-x} \frac{dn_{i'}^{(S)}}{dS}(S; V_{\text{th}}),
\end{aligned} \tag{3.17}$$

због чега важи скалирање величине подлавина:

$$\begin{aligned}
D_S(b^{x-y}S; b^xV_{\text{th}}, b^\zeta\lambda) &= C \int \frac{dn_i^{(S)}}{dS}(b^{x-y}S; b^xV_{\text{th}}) dp(i; b^\zeta\lambda) = \\
&= C \int b^{y-x} \frac{dn_{i'}^{(S)}}{dS}(S; V_{\text{th}}) b^{w_0} dp(i'; V_{\text{th}}) = \\
&= b^{w_0+y-x} D_S(S; V_{\text{th}}, \lambda).
\end{aligned}$$

Такође, могуће је дефинисати интегралну расподелу величине подлавина:

$$D_S^{(\text{int})}(S; V_{\text{th}}, r, 1/L) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dh' D_S(S; V_{\text{th}}, h', r, 1/L), \tag{3.18}$$

за коју вреди скалирање:

$$D_S^{(\text{int})}(b^{x-y}S; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = b^{w_0-(x-y)+\zeta_h} D_S^{(\text{int})}(S; V_{\text{th}}, r, 1/L), \tag{3.19}$$

што можемо доказати аналогно расподелама трајања:

$$\begin{aligned}
D_S^{(\text{int})}(b^{x-y}S; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) &= \int_{-\infty}^{\infty} dh' D_S^{(\text{int})}(b^{x-y}S; b^xV_{\text{th}}, h', b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d(b^{\zeta_h}\hbar) D_S^{(\text{int})}(b^{x-y}T; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_h}\hbar, b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = \\
&= b^{\zeta_h} \int_{-\infty}^{\infty} d\hbar b^{w_0-x+y} D_S(S; V_{\text{th}}, \hbar, r, 1/L) = \\
&= b^{w_0-(x-y)+\zeta_h} D_S^{(\text{int})}(S; V_{\text{th}}, r, 1/L).
\end{aligned}$$

### 3.1.3 Времена чекања

Ознаком  $(i \downarrow V_{\text{th}}; t_s)$  означимо подламину лавине  $i$  која почиње у тренутку  $t_s$  и остаје испод прага  $V_{\text{th}}$ . У случају да ова подлавина није последња подлавина лавине  $i$  која је



испод прага  $V_{\text{th}}$ , тада са

$$T_{\text{int}}(i \downarrow V_{\text{th}}; t_s) = t_e - t_s, \quad (3.20)$$

означавамо интерно време чекања до прве наредне подлавине лавине  $i$  која прелази висину прага детекције  $V_{\text{th}}$ , где је  $t_e$  крајњи тренутак посматране подлавине (слика 3.1). У случају да  $(i \downarrow V_{\text{th}}; t_s)$  јесте последња подлавина лавине  $i$  испод прага  $V_{\text{th}}$  онда је формално истом формулом

$$T_{\text{ext}}(i \downarrow V_{\text{th}}; t_s) = t_e - t_s, \quad (3.21)$$

дато екстерно време чекања од последње подлавине лавине  $i$  која је изнад прага до прве такве подлавине неке наредне лавине која почиње у тренутку  $t_e$ , видети слику 3.1.

### Интерно време чекања

Ако у неком тренутку  $t$  за скалирану лавину вреди  $f_{S_b i}(t)V_{\text{th}}$ , онда у тренутку  $b^{-y}t$  за оригиналну лавину важи  $f_i(b^{-y}t) = b^{-x}f_{S_b i}(t) = V_{\text{th}}$ , односно постоји бијекција између тренутака пресецања оригиналне лавине са прагом и тренутака пресецања скалиране лавине са прагом. Дакле, при скалирању интерно време чекања се трансформише исто као трајање подлавина и лавина:

$$T_{\text{int}}(S_b i \downarrow b^x V_{\text{th}}; b^{-y} t_s) = b^{-y} T_{\text{int}}(i \downarrow V_{\text{th}}; t_s). \quad (3.22)$$

По аналогји са трајањем и величином увешћемо број појављивања интерног времена чекања  $T_{\text{int}}$  изнад  $V_{\text{th}}$  прага унутар лавине  $i$ , који се скалира као трајање:

$$n_{S_b i}^{(T_{\text{int}})}(b^{-y} T_{\text{int}}; b^x V_{\text{th}}) = n_i^{(T_{\text{int}})}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}), \quad (3.23)$$

и затим (диференцијалну) расподелу интерних времена чекања  $T_{\text{int}}$  изнад прага  $V_{\text{th}}$  при условима  $\lambda$ :

$$D_{T_{\text{int}}}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}, \lambda) \equiv C \int \frac{dn_i^{(T_{\text{int}})}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}})}{dT_{\text{int}}} dp(i; \lambda). \quad (3.24)$$

Закон скалирања овако дефинисане дистрибуције такође је исти као и у случају трајања:

$$D_{T_{\text{int}}}(b^{-y} T_{\text{int}}; b^x V_{\text{th}}, b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} L) = b^{w_0 + y} D_{T_{\text{int}}}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}, h', r, 1/L), \quad (3.25)$$

што се може аналогно доказати помоћу (3.22) и замене ознака  $T \rightarrow T_{\text{int}}$ . Имамо:

$$D_T(b^{-y} T; b^x V_{\text{th}}, b^{\zeta} \lambda) = C \int \frac{dn_i^{(T)}}{dT}(b^{-y} T; b^x V_{\text{th}}) dp(i; b^{\zeta} \lambda). \quad (3.26)$$

Затим, важи и:

$$\begin{aligned}
\frac{dn_i^{(T_{\text{int}})}}{dT_{\text{int}}}(b^{-y}T_{\text{int}}; b^xV_{\text{th}}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_i^{(T_{\text{int}})}(b^{-y}T_{\text{int}} + t; b^xV_{\text{th}})}{t} = \\
&= \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{n_{S_b i'}^{(T_{\text{int}})}(b^{-y}T_{\text{int}} + b^{-y}t'; b^xV_{\text{th}})}{b^{-y}t'} = \\
&= b^y \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{n_{S_b i'}^{(T_{\text{int}})}(b^{-y}(T_{\text{int}} + t'); b^xV_{\text{th}})}{t'} = \\
&= b^y \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{n_{i'}^{(T_{\text{int}})}(T_{\text{int}} + t'; V_{\text{th}})}{t'} = \\
&= b^y \frac{dn_{i'}^{(T_{\text{int}})}}{dT_{\text{int}}}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Заменом (3.27) у (3.26) добијамо закон скалирања расподела интерног времена чекања (3.25). Даље, можемо да уведемо интегралну расподелу

$$D_{T_{\text{int}}}^{(\text{int})}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}, r, 1/L) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dh' D_{T_{\text{int}}}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}, h', r, 1/L), \tag{3.28}$$

за коју важи скалирање:

$$D_{T_{\text{int}}}^{(\text{int})}(b^{-y}T_{\text{int}}; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = b^{w_0+y+\zeta_h} D_{T_{\text{int}}}^{(\text{int})}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}, r, 1/L), \tag{3.29}$$

што можемо показати на исти начин као у случају расподела трајања:

$$\begin{aligned}
D_{T_{\text{int}}}^{(\text{int})}(b^{-y}T_{\text{int}}; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) &= \int_{-\infty}^{\infty} dh' D_{T_{\text{int}}}(b^{-y}T_{\text{int}}; b^xV_{\text{th}}, h', b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d(b^{\zeta_h} \hbar) D_{T_{\text{int}}}(b^{-y}T_{\text{int}}; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_h} \hbar, b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = \\
&= b^{\zeta_h} \int_{-\infty}^{\infty} d\hbar b^{w_0+y} D_{T_{\text{int}}}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}, \hbar, r, 1/L) = \\
&= b^{w_0+y+\zeta_h} D_{T_{\text{int}}}^{(\text{int})}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}, r, 1/L).
\end{aligned}$$

## Екстерно време чекања

Одређивање расподеле екстерних времена чекања за избрани праг детекције представља компликованији проблем од одређивања расподела трајања, величине и интерног времена чекања. Разлог је у томе што за разлику од ове три величине, које се односе на појединачне лавине, екстерно време чекања повезује две лавине изнад прага између којих могу постојати лавине које не прелазе висину задатог прага детекције  $V_{\text{th}}$ . У општем случају постоје три времена чекања (слика 3.1):

- време пада  $T_{\text{end}}(i; V_{\text{th}})$  претходне лавине  $i$  испод прага детекције  $V_{\text{th}}$ , које меримо од тренутка последњег пресека прага и претходне лавине до тренутка њеног гашења,
- време раста  $T_{\text{ini}}(j; V_{\text{th}})$  наредне лавине  $j$  до прага детекције  $V_{\text{th}}$ , које меримо од тренутка појаве лавине  $j$  до тренутка њеног првог пресека са прагом детекције

$V_{\text{th}}$ , и

- међувреме  $T_{\text{mid}}(i, j; V_{\text{th}})$  које представља укупно трајање лавина које се налазе између лавине  $i$  и лавине  $j$ , а налазе се испод прага детекције  $V_{\text{th}}$ .

Дакле, екстерно време чекања једнако је збиру наведених времена чекања:

$$T_{\text{ext}}(i, j; V_{\text{th}}) = T_{\text{end}}(i; V_{\text{th}}) + T_{\text{mid}}(i, j; V_{\text{th}}) + T_{\text{ini}}(j; V_{\text{th}}). \quad (3.30)$$

С обзиром да су време пада лавине испод прага  $T_{\text{end}}(i; V_{\text{th}})$  и време раста лавине до прага  $T_{\text{ini}}(i; V_{\text{th}})$  карактеристике појединачних лавина, као и да важи бијективно пре-сликавање одговарајућих карактеристика за оригиналне и скалиране лавине, ова два времена требало би да се приликом скалирања трансформишу на исти начин као трајања подлавина изнад прага и интерна времена чекања:

$$\begin{aligned} T_{\text{end}}(S_b i; b^x V_{\text{th}}) &= b^{-y} T_{\text{end}}(i; V_{\text{th}}) \\ T_{\text{ini}}(S_b i; b^x V_{\text{th}}) &= b^{-y} T_{\text{ini}}(i; V_{\text{th}}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Такође, могуће је увести бројеве појављивања времена пада  $T_{\text{end}}$  лавине  $i$  испод прага детекције  $n_i^{(T_{\text{end}})}(T_{\text{end}}; V_{\text{th}})$  и појављивања времена раста  $T_{\text{ini}}$  лавине  $i$  до висине прага детекције  $n_i^{(T_{\text{ini}})}(T_{\text{ini}}; V_{\text{th}})$ , који се скалирају као:

$$\begin{aligned} n_{S_b i}^{(T_{\text{end}})}(b^{-y} T_{\text{end}}; b^x V_{\text{th}}) &= n_i^{(T_{\text{end}})}(T_{\text{end}}; V_{\text{th}}) \\ n_{S_b i}^{(T_{\text{ini}})}(b^{-y} T_{\text{ini}}; b^x V_{\text{th}}) &= n_i^{(T_{\text{ini}})}(T_{\text{ini}}; V_{\text{th}}), \end{aligned} \quad (3.32)$$

и за које је слично раније уведеним расподелама, могуће увести диференцијалне расподеле времена пада  $T_{\text{end}}$  испод прага  $V_{\text{th}}$ :

$$D_{T_{\text{end}}}(T_{\text{end}}; V_{\text{th}}, \lambda) \equiv C \int \frac{dn_i^{(T_{\text{end}})}(T_{\text{end}}; V_{\text{th}})}{dT_{\text{end}}} dp(i; \lambda), \quad (3.33)$$

и времена раста лавина  $T_{\text{ini}}$  до висине прага  $V_{\text{th}}$  при условима  $\lambda$ :

$$D_{T_{\text{ini}}}(T_{\text{ini}}; V_{\text{th}}, \lambda) \equiv C \int \frac{dn_i^{(T_{\text{ini}})}(T_{\text{ini}}; V_{\text{th}})}{dT_{\text{ini}}} dp(i; \lambda). \quad (3.34)$$

Аналогно доказима за (3.6) и (3.25) могуће је показати да ове расподеле имају исте законе скалирања као расподеле трајања подлавина  $D_T(T; V_{\text{th}}, \lambda)$  и интерних времена чекања  $D_{T_{\text{int}}}(T_{\text{int}}; V_{\text{th}}, \lambda)$  при условима  $\lambda = (V_{\text{th}}, r, 1/L)$ :

$$D_{T_{\text{end}}}(b^{-y} T_{\text{end}}; b^x V_{\text{th}}, b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} / L) = b^{w_0 + y} D_{T_{\text{end}}}(T_{\text{end}}; V_{\text{th}}, h', r, 1/L), \quad (3.35)$$

односно:

$$D_{T_{\text{ini}}}(b^{-y} T_{\text{ini}}; b^x V_{\text{th}}, b^{\zeta_h} h', b^{\zeta_r} r, b^{\zeta_L} / L) = b^{w_0 + y} D_{T_{\text{ini}}}(T_{\text{ini}}; V_{\text{th}}, h', r, 1/L). \quad (3.36)$$

Наравно, могуће је увести интегралне расподеле времена пада:

$$D_{T_{\text{end}}}^{(\text{int})}(T_{\text{end}}; V_{\text{th}}, r, 1/L) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dh' D_{T_{\text{end}}}(T_{\text{end}}; V_{\text{th}}, h', r, 1/L), \quad (3.37)$$

и времена раста лавине:

$$D_{T_{\text{ini}}}^{(\text{int})}(T_{\text{ini}}; V_{\text{th}}, r, 1/L) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dh' D_{T_{\text{ini}}}(T_{\text{ini}}; V_{\text{th}}, h', r, 1/L). \quad (3.38)$$

Аналогно се може показати да ће ове расподеле имати исте законе скалирања као интегралне расподеле трајања и интерног времена чекања:

$$D_{T_{\text{end}}}^{(\text{int})}(b^{-y}T_{\text{end}}; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = b^{w_0+y+\zeta_h} D_{T_{\text{end}}}^{(\text{int})}(T_{\text{end}}; V_{\text{th}}, r, 1/L), \quad (3.39)$$

односно:

$$D_{T_{\text{ini}}}^{(\text{int})}(b^{-y}T_{\text{ini}}; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = b^{w_0+y+\zeta_h} D_{T_{\text{ini}}}^{(\text{int})}(T_{\text{ini}}; V_{\text{th}}, r, 1/L). \quad (3.40)$$

Хипотеза (2.19) није довољна за формално одређивање закона скалирања расподеле међувремена  $D_{T_{\text{mid}}}$  и екстерног времена чекања  $D_{T_{\text{ext}}}$ . Ипак, могуће је закључити какав облик скалирања треба да имају ове расподеле. Да бисмо то урадили, можемо да посматрамо део сигнала који се састоји од две сукцесивне лавине  $i$  и  $j$  које прелазе висину прага детекције  $V_{\text{th}}$  и свих лавина између њих које остају испод  $V_{\text{th}}$ . Ако овакав део сигнала посматрамо као једну лавину<sup>1</sup>  $k$ , онда екстерно време чекања  $T_{\text{ext}}(i, j; V_{\text{th}})$  за нову лавину  $k$  представља интерно време чекања  $T_{\text{int}}(k; V_{\text{th}})$ . Стога закључујемо да ће се расподела екстерних времена чекања скалирати на исти начин као расподела интерних времена чекања:

$$D_{T_{\text{ext}}}(b^{-y}T_{\text{ext}}; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_h}h', b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = b^{w_0+y} D_{T_{\text{ext}}}(T_{\text{ext}}; V_{\text{th}}, h', r, 1/L). \quad (3.41)$$

Даље, због важења (3.30) разумно је очекивати да ће и расподела међувремена имати исту форму скалирања:

$$D_{T_{\text{mid}}}(b^{-y}T_{\text{mid}}; b^xV_{\text{th}}, b^{\zeta_h}h', b^{\zeta_r}r, b^{\zeta_L}/L) = b^{w_0+y} D_{T_{\text{mid}}}(T_{\text{mid}}; V_{\text{th}}, h', r, 1/L). \quad (3.42)$$

### 3.1.4 Скалирање дистрибуција

За анализу зависности одговора система од изабраног прага  $V_{\text{th}}$ , најприродније је извршити скалирање управо преко прага  $V_{\text{th}}$ , тежећи на тај начин да добијемо колапс расподела добијених при различитим вредностима прага  $V_{\text{th}}$ . Стога узмимо да важи  $b^xV_{\text{th}} = 1$ , тј. да је фактор скалирања  $b = V_{\text{th}}^{-1/x}$ . На тај начин, уз помоћ релација (2.34) добијамо скалирање:

$$D_T(T/V_{\text{th}}^{1/(\gamma_S/T-1)}; V_{\text{th}}^{\sigma/(1-\gamma_T/S)}r, V_{\text{th}}^{\sigma\nu/(1-\gamma_T/S)}L) = V^{\alpha_{\text{int}}/(\gamma_S/T-1)} D_T(T; V_{\text{th}}, r, 1/L). \quad (3.43)$$

$\alpha_{\text{int}} = \alpha + \sigma\nu\delta/\gamma_{T/S}$  је ознака за универзални скалирајући експонент интегралне расподеле трајања код RFIM-а који се уводи јер се подаци прикупљају из интервала спољног магнетног поља коначне ширине [37]. На основу једначине (3.43) очекујемо да ће расподеле трајања  $D_T$ , добијене за различите науређености  $R$  и величине  $L$  колапсирати на једну криву ако их помножимо са  $V_{\text{th}}^{\alpha_{\text{int}}/(\gamma_S/T-1)}$  и прикажемо у зависности од

<sup>1</sup>Сматрамо да сигнал пада довољно ниско, али не на нулу. Овакав сценарио је реалан с обзиром да, за разлику од сигнала добијеног симулацијама, у експерименту најчешће није могуће разликовати догађаје који се дешавају испод прага детекције.

$T/V_{\text{th}}^{1/(\gamma_{S/T}-1)}$  уколико при томе задовољавају услове

$$\begin{aligned} V_{\text{th}}^{\sigma/(1-\gamma_{T/S})} r &= \text{const}, \\ V_{\text{th}}^{\sigma\nu/(1-\gamma_{T/S})} / L &= \text{const}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Исти облик очекујемо за расподеле времена чекања  $D_{T_w}$ :

$$\begin{aligned} D_{T_w}(T_w/V_{\text{th}}^{1/(\gamma_{S/T}-1)} T_w; V_{\text{th}}^{\sigma/(1-\gamma_{T/S})} r, V_{\text{th}}^{\sigma\nu/(1-\gamma_{T/S})} L) &= \\ &= V^{\alpha_{\text{int}}/(\gamma_{S/T}-1)} D_{T_w}(T_w; V_{\text{th}}, r, 1/L), \end{aligned} \quad (3.45)$$

где  $T_w$  представља заједничку ознаку за  $T_{\text{int}}$ ,  $T_{\text{ext}}$ ,  $T_{\text{end}}$ ,  $T_{\text{ini}}$  и  $T_{\text{mid}}$ .

## 3.2 Резултати

У овом поглављу приказани су резултати који у највећој мери потврђују уведенe претпоставке.

На слици 3.2 приказане су диференцијалне расподеле трајања  $D(T)$  и величина  $D(S)$ , добијене за подлавине које се појављују изнад прага детекције  $V_{\text{th}}$  које су прикупљене из интервала магнетног поља центрираног око нуле у којем се сигнал може сматрати стохастички стационарним (што је у овом случају 8% магнетизације). Расподеле су добијене из симулација на кубној решетки димензије  $L = 1024$  за 40 различитих конфигурација случајног поља и при неуређености  $R = 2, 25$  (која је већа од ефективне критичне неуређености  $R_c^{\text{eff}} \approx 2, 21$ ).

Расподеле трајања и величине подлавина имају форму степеног закона

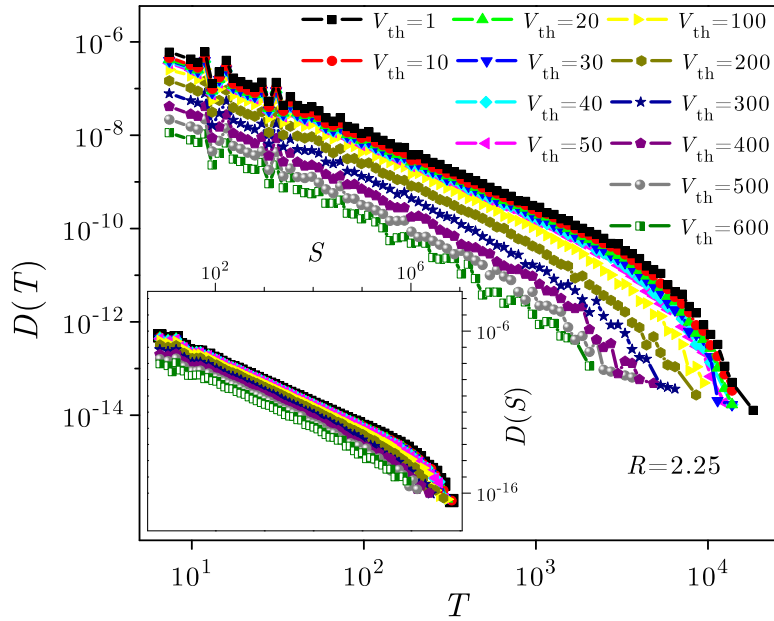
$$\begin{aligned} D(T) &= T^{-\tau_T} g_T(-T/T_0) \\ D(S) &= S^{-\tau_S} g_S(-S/S_0), \end{aligned} \quad (3.46)$$

који се завршава регионом у коме расподеле брзо опадају (cutoff). Време и величина одсецања за дистрибуције трајања и величине обележени су са  $T_0$  и  $S_0$ , и те величине се са порастом  $V_{\text{th}}$  смањују. Одговарајући експоненти, добијени коришћењем скалирајућих функција облика

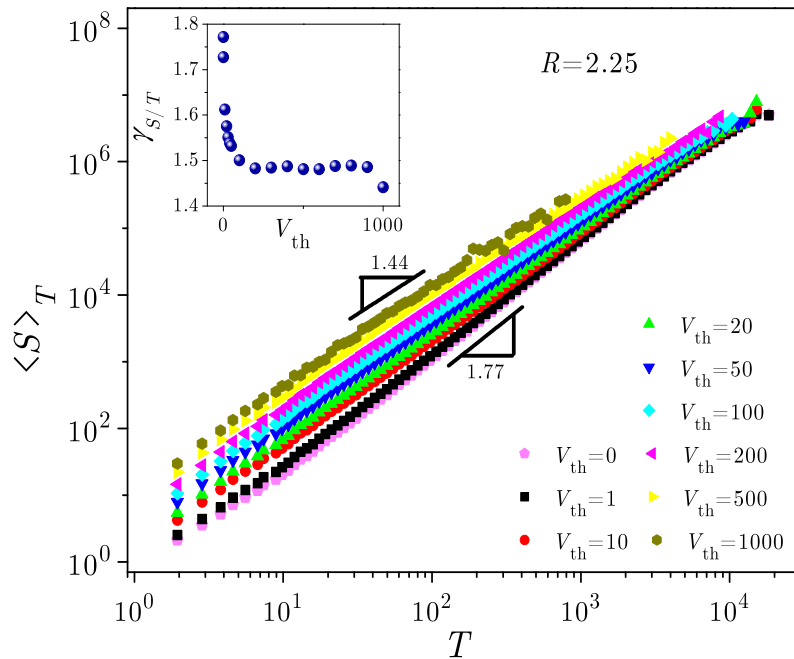
$$\begin{aligned} g_T(-T/T_0) &\propto e^{-(T/T_0)^{\sigma_T}} \\ g_S(-S/S_0) &\propto e^{-(S/S_0)^{\sigma_S}}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

имају вредности  $\tau_T = 1, 64 \pm 0, 02$  и  $\tau_S = 1, 38 \pm 0, 03$ , при чему су вредности експонената  $\sigma_T$  и  $\sigma_S$  за анализиране расподеле приближно 1.

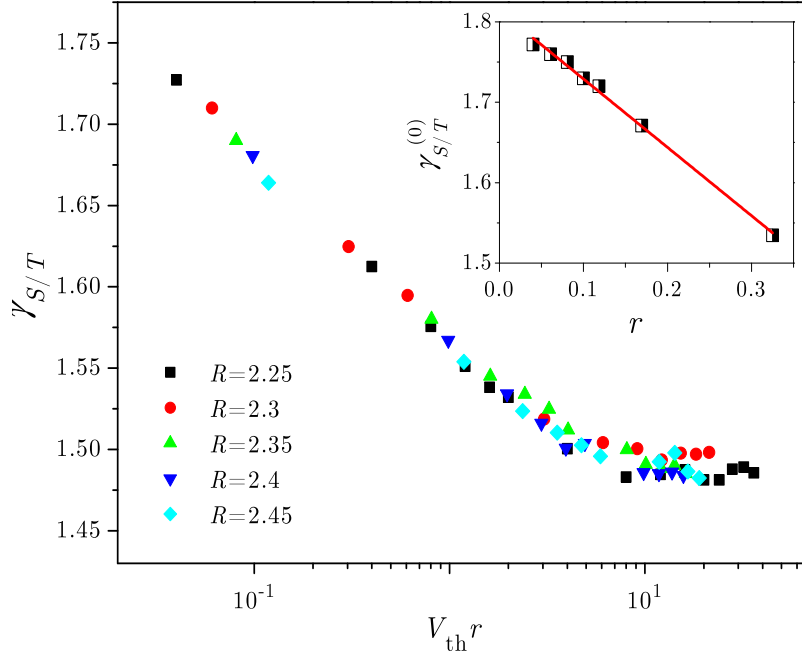
На слици 3.3 приказана је степена зависност просечних величина подлавина  $\langle S \rangle_T$  трајања  $T$  у функцији од трајања  $T$  за различите вредности прага детекције  $V_{\text{th}}$ . График показује да је та зависност степеног облика,  $\langle S \rangle_T \sim V_{\text{th}}^{\gamma_{S/T}}$  за велики скуп вредности  $V_{\text{th}}$  и да експонент  $\gamma_{S/T}$  варира са променом  $V_{\text{th}}$ . Варијација експонента  $\gamma_{S/T}$  приказана је на уметку (смањивање од  $\gamma_{S/T} = 1, 77$  ка  $\gamma_{S/T} = 1, 44$  са повећањем  $V_{\text{th}}$ ) где можемо видети да се у одређеном интервалу вредности  $V_{\text{th}}$  формира плато, што се слаже са предвиђањем модела пропагирања пукотине у нехомогеној средини (crack – line) [19]. Наредна слика, слика 3.4, приказује зависност  $\gamma_{S/T}$  од  $V_{\text{th}} r$  и даје бољи увид у промену  $\gamma_{S/T}$  са  $V_{\text{th}}$ . Види се да вредности  $\gamma_{S/T}$  добијене при различитим неуређеностима  $R$  колапсирају на исту криву формирајући плато на вредности  $\gamma_{S/T}^{(pl)} = 1, 49 \pm 0, 02$  чије је постојање важна карактеристика поменутог модела. Наиме,  $\gamma_{S/T}^{(pl)}$  се не мења при



Слика 3.2: На главном панелу приказане су расподеле трајања подлавина  $D(T)$  за различите вредности прага  $V_{th}$ , а на уметку су приказане расподеле величине подлавина  $D(S)$  прикупљене на истом систему ( $1024 \times 1024 \times 1024$ ,  $R = 2, 25$ ) за исте вредности прага  $V_{th}$ .



Слика 3.3: На главном графику приказана је степена зависност средње величине подлавина  $\langle S \rangle_T$  трајања  $T$  од трајања  $T$  за различите вредности прага  $V_{th}$ , док је на уметку приказана промена експонента  $\gamma_{S/T}$  са променом  $V_{th}$ . Резултати су прикупљени из истог сета података као резултати приказани на слици 3.2.



Слика 3.4: На главном графику приказано је како вредности експонента  $\gamma_{S/T}$  колапсирају када се прикажу у функцији од  $V_{th} r$  за неуређености у опсегу од  $R = 2,25$  до  $R = 2,45$ , а на уметку је приказана линеарна зависност експонента  $\gamma_{S/T}^{(0)}$  од редуковане неуређености  $r$ . Резултати су прикупљени на  $1024^3$  системима.

промени ни  $V_{th}$  ни  $r$  за разлику од  $\gamma_{S/T}$  који при нултом прагу износи  $\gamma_{S/T}^{(0)}$ , а чија се вредност мења линеарно са  $r$  (уметак слике 3.4). Дакле, промену експонента је могуће интерпретирати као crossover<sup>2</sup> између две карактеристичне вредности  $\gamma_{S/T}^{(pl)}$  и  $\gamma_{S/T}^{(0)}$ .

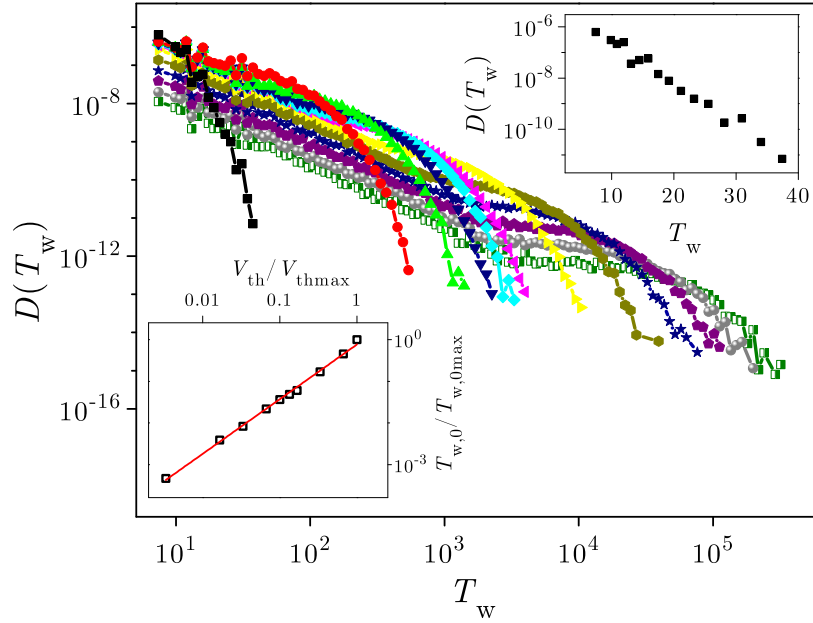
Расподеле  $D(T_w)$  времена чекања  $T_w$ , добијене из истог сета података и за исте вредности прага  $V_{th}$  као расподеле на слици 3.2, приказане су на слици 3.5. Примећује се да и ове расподеле имају степено понашање

$$D(T_w) = T_w^{-\tau_{T_w}} g_T(T_w/T_{w,0}) \quad (3.48)$$

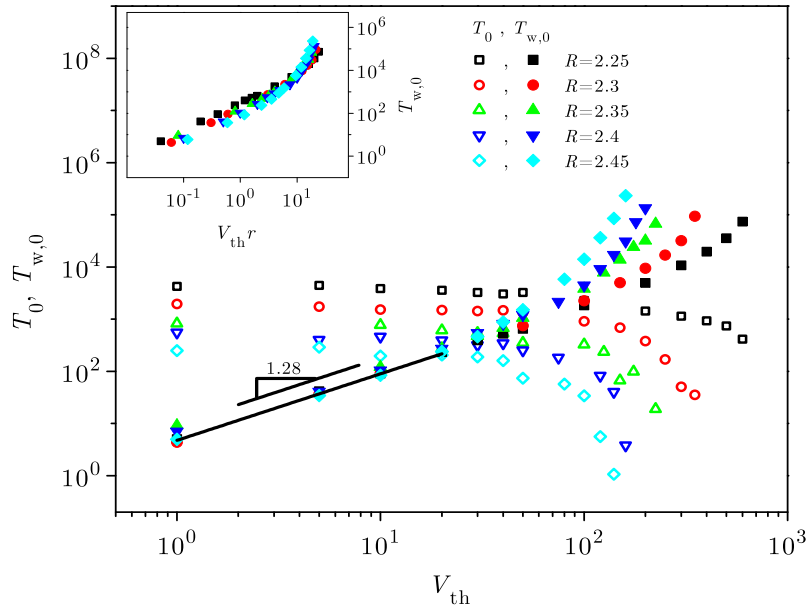
одређено вредношћу карактеристичног експонента  $\tau_{T_w} = 1,64 \pm 0,02$ , док  $T_{w,0}$  представља време одсецања карактеристично за расподелу времена чекања. За разлику од  $T_0$  време одсецања  $T_{w,0}$  расте са порастом прага  $V_{th}$ , и може се приметити (доњи уметак слике 3.5) да је тај пораст по степеном закону  $T_{w,0} \sim V_{th}^\delta$  за  $\delta = 1,30 \pm 0,02$ . Примећује се да се степени део појављује са повећањем  $V_{th}$  што указује на појаву корелација због постојања лавина које су делимично сакривене испод прага детекције  $V_{th}$ . Насупрот томе, за мале вредности прага  $T_{w,0}$  узима веома мале вредности те степена законитост у области ниских  $V_{th}$  нестаје при чему се законитост (3.48) приближно своди на експоненцијалну функцију скалирања  $g(T_w/T_{w,0})$ , што је приказано на горњем уметку слике 3.5.

Промена времена одсецања за расподеле трајања  $T_0$  и расподеле времена чекања  $T_{w,0}$  са прагом детекције  $V_{th}$  за различите неуређености  $R$ , веће од ефективне критичне неуређености  $R_c^{eff}$ , приказана је на главном графику слике 3.6. Видимо да за мале вредности прага време одсецања  $T_{w,0}$  расте степено,  $T_{w,0} \sim V_{th}^{1,3}$ , и да је раст бржи него за веће вредности  $V_{th}$ . У области ниских вредности прага  $V_{th}$  време одсецања за расподеле трајања  $T_0$  за одређено  $R$  је приближно константна величина, док за

<sup>2</sup>У српском језику се није усталио адекватан превод.



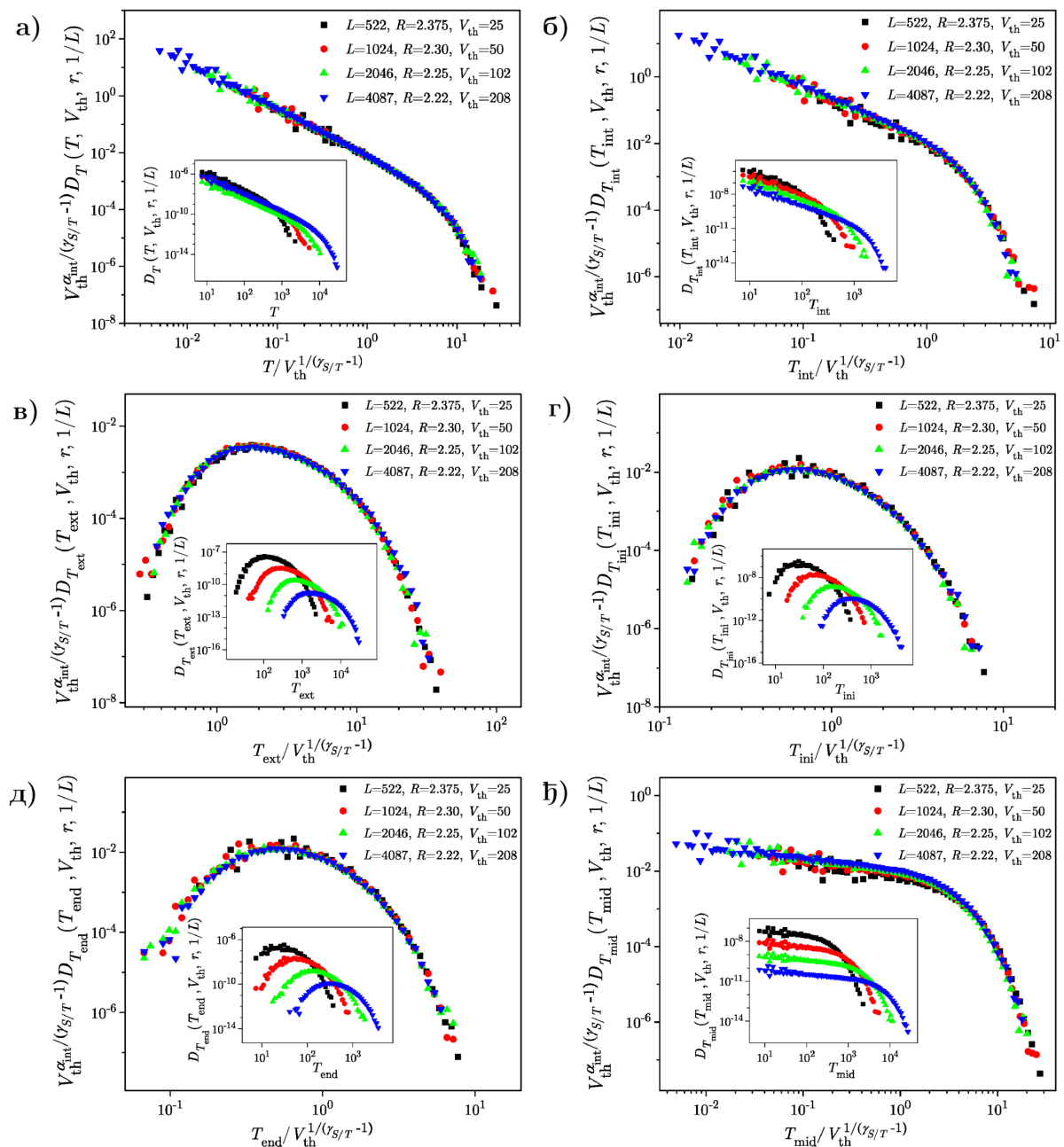
Слика 3.5: На главном графику приказане су расподеле времена чекања  $D(T_w)$  у функцији од  $T_w$  прикупљене из истог система при истим вредностима прага  $V_{th}$  као резултати на слици 3.2. На доњем уметку на  $\log - \log$  скали приказана је степена зависност  $T_{w,0} \sim V_{th}^\delta$ , за  $\delta \approx 1, 30$ . На горњем уметку види се приближно експоненцијално понашање расподеле  $D(T_w)$  добијене при најнижој вредности прага  $V_{th} = 1$ .



Слика 3.6: На главном графику приказано је понашање времена одсецања  $T_0$  расподела трајања  $D_T$  (празни симболи) и понашање времена одсецања  $T_{w,0}$  за расподеле времена чекања  $D_{T_w}$  (попуњени симболи) при порасту прага  $V_{th}$  за различите неуређености  $R$ . На уметку је приказано како се  $T_{w,0}$  скалира са  $V_{th}r$ . Резултати су добијени из истог сета симулација као резултати приказани на слици 3.4.



веће  $V_{th}$  опада брзином сличном брзини раста  $T_{w,0}$ . Намеће се следећи закључак: ако је праг детекције  $V_{th}$  висок толико да можемо да приметимо само лавине из региона наглог опадања расподеле добијене за  $V_{th} = 0$ , онда може да се јави велика разлика између трајања подлавина и времена чекања. Колапс времена одсецања расподела времена чекања  $T_{w,0}$  која одговарају различитим неуређеностима  $R$  добијен множењем  $V_{th}$  редукованом неуређеношћу  $r$  приказан је на уметку слике 3.6.



Слика 3.7: На главним графицима приказани су колапси расподела трајања подлавина  $D_T$  и свих времена чекања  $D_{T_{int}}$ ,  $D_{T_{ext}}$ ,  $D_{T_{ini}}$ ,  $D_{T_{end}}$ ,  $D_{T_{mid}}$ , које су добијене из тродимензионих система чије димензије  $L$ , неуређености  $R$  и висине постављеног прага  $V_{th}$ , дате у легендама и задовољавају услове (3.44). Оригиналне (нескалиране) расподеле приказане су на уметцима.

Потврда скалирајуће форме расподела трајања (3.43) приказана је на панелу а) слике 3.7 у виду колапса расподела  $D_T$  добијених из четири система који задовољавају услове задате релацијама (3.44), након примене поменуте форме скалирања. На пре-

осталим панелима слике 3.7 приказани су колапси расподела времена чекања  $D_{T_{\text{int}}}$ ,  $D_{T_{\text{ext}}}$ ,  $D_{T_{\text{ini}}}$ ,  $D_{T_{\text{end}}}$  и  $D_{T_{\text{mid}}}$  што потврђује форме скалирања дате са (3.45). Сетови мулти-параметара  $L_1 = 522, R_1 = 2, 375, V_{\text{th},1} = 25, L_2 = 124, R_2 = 2, 30, V_{\text{th},2} = 50, L_3 = 2046, R_3 = 2, 25, V_{\text{th},3} = 102$  и  $L_4 = 4087, R_4 = 2, 22, V_{\text{th},4} = 208$  осим што задовољавају (3.44), изабрани су тако да је неуређеност сваког система већа од његове ефективне критичне неуређености [50]. Важно је истаћи да без обзира што хипотеза скалирања (2.19) није довољна за предвиђање облика скалирања расподеле међувремена  $D_{T_{\text{mid}}}$ , исти тип скалирања важи и за њу (панел ђ) слике 3.7) што имплицира да претпоставка (2.19) не важи само за појединачне лавине већ и за веће делове сигнала.

# Глава 4

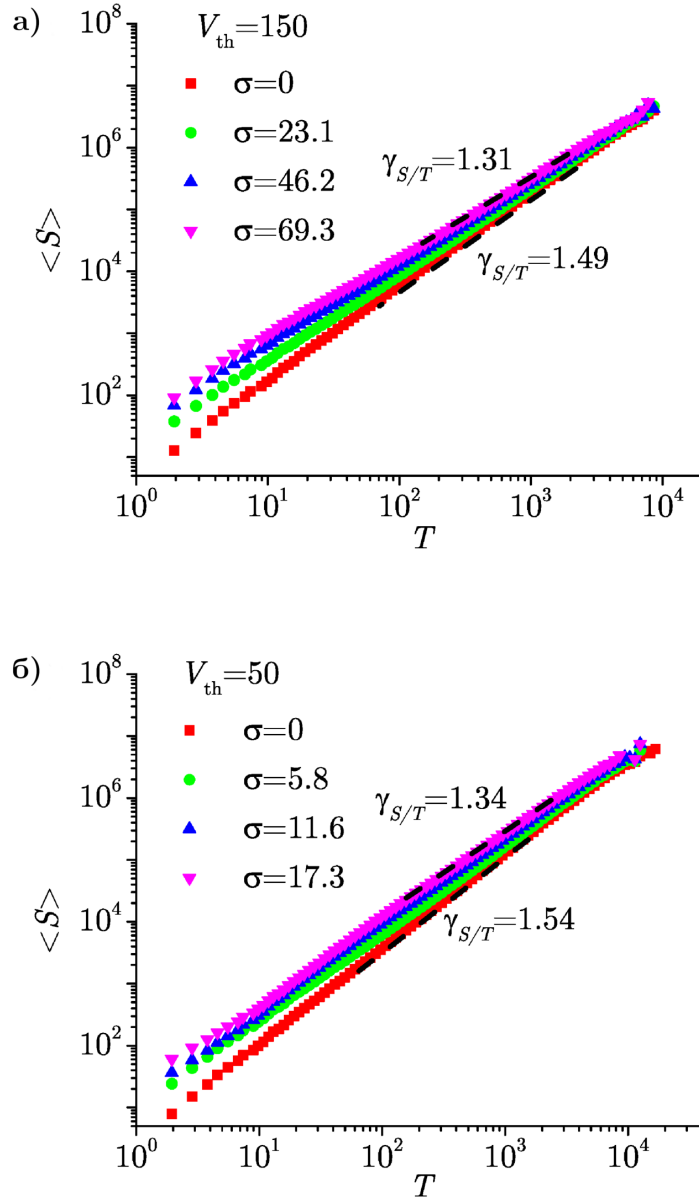
## Утицај шума

Као што је напоменуто, сигнали добијени из експеримената садрже екстерни шум  $n(t)$ . Поставља се питање у којој мери присутни шум утиче на претходно описане корелације настале постављањем прага детекције  $V_{\text{th}}$ . Са циљем испитивања тог утицаја, на сигнале добијене симулирањем 3D RFIM-а на кубној решетки придодат је засебно генерисан екстерни шум  $n(t)$ . У наставку приказани су резултати добијени додавањем две врсте шума - белог шума добијеног из униформне расподеле (UWN) и белог шума добијеног из Гаусове расподеле (GWN). Униформан бели шум генерисан је из расподеле ширине  $w$  што значи да било коју вредност  $n$  из интервала  $[-w, w]$  узима са вероватноћом  $p(n) = w/2$  а његова стандардна девијација износи  $\sigma = w/\sqrt{3}$ . Гаусовски бели шум генерисан је са стандардном девијацијом  $\sigma$ .

### 4.1 Утицај шума на средњу величину лавина

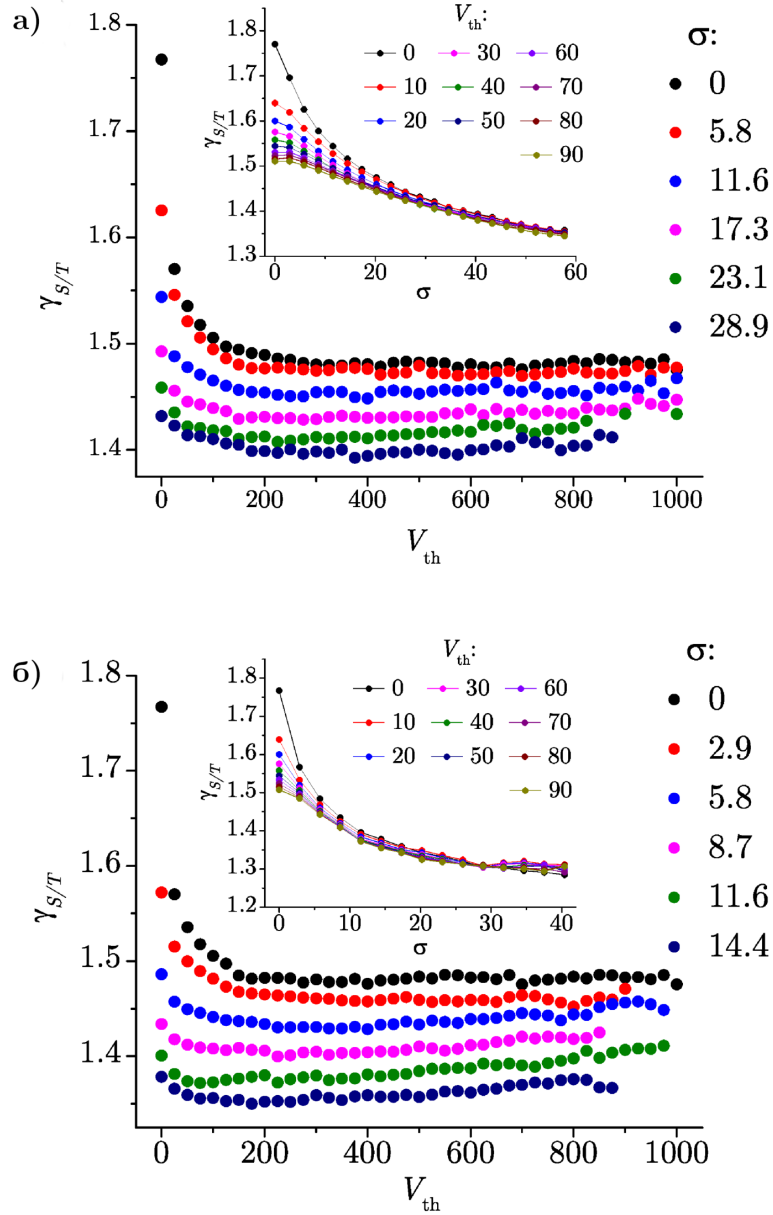
Промена средње величине лавина  $\langle S \rangle_T$  трајања  $T$  у функцији трајања  $T$  при константној вредности прага детекције у случају додатог белог шума ( $V_{\text{th}} = 150$ ) приказана је на панелу а) слике 4.1, док је у случају додатог Гаусовог шума ( $V_{\text{th}} = 50$ ) приказана на панелу б) слике 4.1. Примећује се да средња величина лавина и даље прати степени закон  $\langle S \rangle_T \sim T^{\gamma_{S/T}}$ , међутим, са видном променом вредности експонента  $\gamma_{S/T}$  са повећањем додатог екстерног шума. Наиме, за обе врсте шума нагиб кривих  $\langle S \rangle_T$  опада са порастом стандардне девијације  $\sigma$  шума. Разлог овог опадања је у томе што шум скраћује дуге лавине у подлавине знатно краћег трајања. Пошто краће подлавине потичу од неке дуже већег просечног сигнала  $\langle V(t) \rangle = \langle S \rangle T$ , очекивано је да њихове величине буду веће од величина лавина истог трајања. На слици (4.2) улустровано је како у присуству спољног шума једна лавина има већу величину од друге лавине истог трајања без шума. Овај ефекат постаје мање изражен са порастом трајања лавине, тако да вредност експонента  $\gamma_{S/T}$  опада са порастом ширине шума.

Даље, на слици 4.3 приказано је понашање експонента  $\gamma_{S/T}$  при различитим вредностима прага  $V_{\text{th}}$  и за различите стандардне девијације  $\sigma$ , у присуству униформног и Гаусовог шума, респективно. На главним панелима приказано је како се вредност експонента  $\gamma_{S/T}$  мења са порастом шума за различите вредности  $\sigma$ . Приметно је да се и када је на сигнал додат спољни шум јавља плато у сагласности са предвиђањем crack – line модела, из разлога што је при овим вредностима утицај малих лавина не приметан [71]. Ипак, када је  $\sigma$  довољно велико разлика у вредностима  $\gamma_{S/T}$  постаје не приметна чак и за мале вредности  $V_{\text{th}}$ . Разлог је у томе што на средњу величину кратких лавина највише утиче постојање шума, тј. највећи део таквих лавина потиче од шума, а не из оригиналног сигнала. Са друге стране, ни присуство прага ни присуство шума не утичу у великој мери на средњу величину дугачких лавина због чега очекујемо

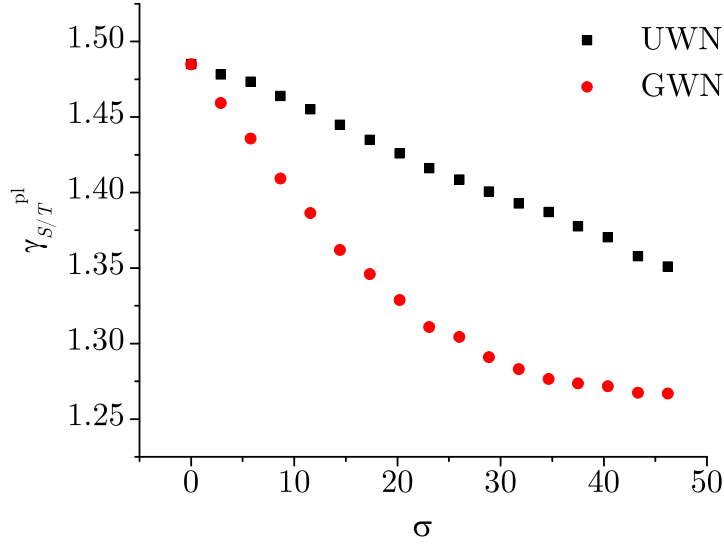


Слика 4.1: Понашање средње величине лавина датог трајања у зависности од трајања за различите опсеге стандардне девијације додатог униформног, панел а), и Гаусовог шума при константној висини прага детекције  $V_{th}$ , панел б). Резултати су добијени из система величине  $1024 \times 1024 \times 1024$  и неуређености  $R = 2, 25$ .





Слика 4.3: На главним панелима приказане су вредности експонента  $\gamma_{S/T}$  у зависности од висине прага детекције  $V_{th}$  при различитим вредностима стандардне девијације додатог униформног (панел а)) и Гаусовог шума (панел б)). На уметцима су приказане вредности експонента  $\gamma_{S/T}$  у зависности од  $\sigma$  и при различитим вредностима  $V_{th}$  мањим од вредности на којима се јавља плато. Подаци су добијени из истог сета као резултати приказани на слици 4.2.



Слика 4.4: Плато вредности експонента добијених за различите вредности  $\sigma$  у опсегу 0 – 50. Црним квадратима приказани су резултати добијени додавањем униформног (UWN), а црвеним кружићима додавањем Гаусовог шума (GWN).

расподелом добијеном у одсуству шума  $n(T_w; V_{th}, \sigma = 0)$ , то јест:

$$n(T_w; V_{th}' - p(\sigma), \sigma) = n(T_w; V_{th}, \sigma = 0). \quad (4.1)$$

Примери померања приказани су на главним графицима слике 4.5. Испоставља се да је параметар помака независан од величине система<sup>1</sup> и избора врсте времена чекања за  $R > R_c$ . Са друге стране, може се очекивати да  $n(T_w; V_{th}, \sigma)$  зависи од димензије система  $L$  и да се скалира са  $L^3$ . Такав колапс кривих  $n(T_w; V_{th}, \sigma)$  приказан је на слици 4.7 за оба испитивана случаја екстерног шума. На умецима су приказане криве  $n(T_w; V_{th}, \sigma)$  добијене из три система различитих димензија  $L$ , а исте неуређености  $R$ , док су на главним графицима приказане криве подељене са  $L^3$  и транслиране дуж  $V_{th}$ -осе за одговарајуће вредности параметра помака  $p(\sigma)$ , односно примењена је форма скалирања:

$$n(T_w; V_{th}, \sigma) = L^3 \tilde{n}(T_w; V_{th} - p(\sigma)), \quad (4.2)$$

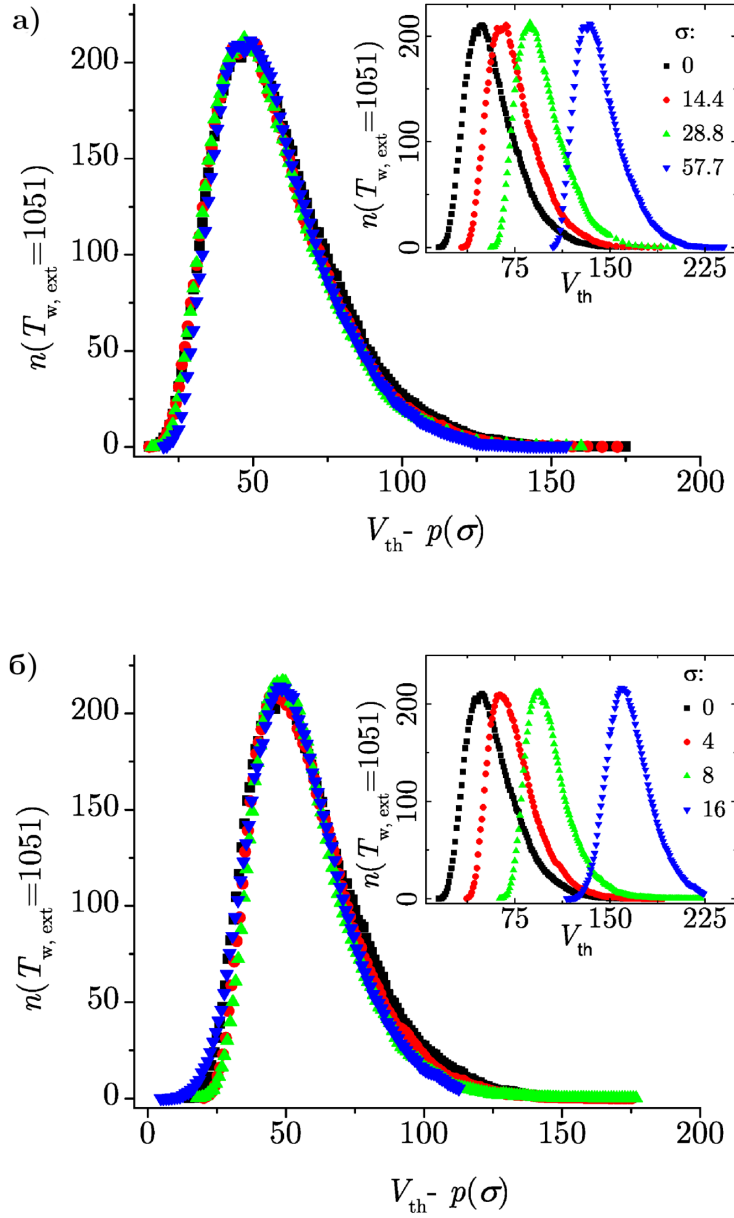
где  $\tilde{n}$  представља универзалну скалирајућу функцију. Важно је напоменути да је овај вид колапса могућ само ако је одабрано време чекања довољно дуго у поређењу са стандардном девијацијом, у супротном могуће је да се такво време чекања уопште не региструје у систему, иако је у случају мањег шума присутно.

С обзиром да је за веће вредности  $\sigma$  потребна већа висина прага детекције  $V_{th}$  да би се добила иста вредност  $n(T_w; V_{th}, \sigma)$ , очекивано је да параметар помака расте са порастом стандардне девијације. На слици 4.8 приказане су вредности параметра помака добијене за три различите неуређености на основу којих се може закључити да се параметар помака мења по степеном закону:

$$p(\sigma) = a + b\sigma^c. \quad (4.3)$$

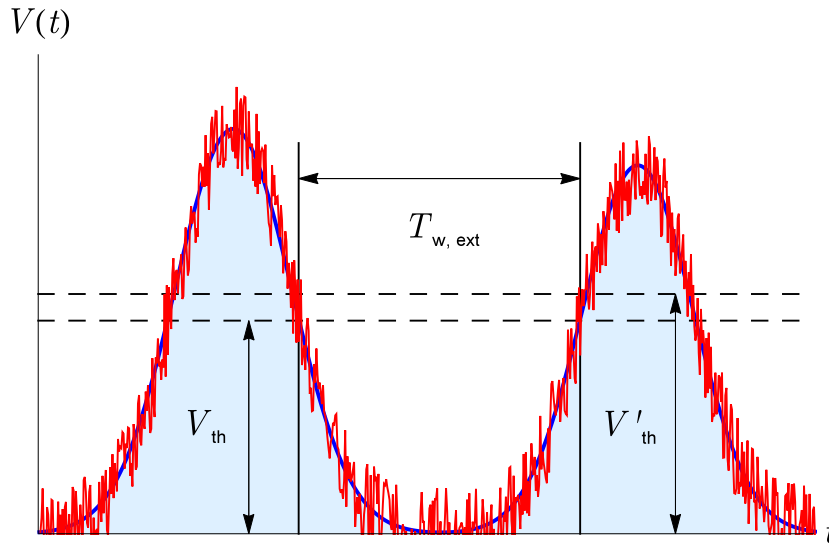
Најбољи фитови добијени су за вредности параметара које су приказане у Табелама

<sup>1</sup>Испитивани су само тродимензиони системи.



Слика 4.5: На уецима су бројеви појављивања времена чекања  $T_{w, \text{ext}} = 1051$  у зависности од  $V_{\text{th}}$  у случају додатог униформног (слика а) и Гаусовог (слика б) шума за неколико различитих вредности стандардне девијације. На главним графицима види се поклапање кривих након померања дуж  $V_{\text{th}}$ -осе за вредност параметра помака која зависи од  $\sigma$ . Резултати су добијени за тродименциони  $1024 \times 1024 \times 1024$  систем неуређености  $R = 2, 40$ .





Слика 4.6: Илустрација помераја прага детекције на којем се јавља екстерно време чекања  $T_{\text{ext}}$  са  $V_{\text{th}}$  на  $V'_{\text{th}}$  због присуства екстерног шума.

4.1 и 4.2 и одговарајуће криве приказане су на слици 4.8. Примећује се да се вредности параметара фита у случају униформног шума поклапају у оквиру грешке, док се код Гаусовог примећује зависност од неуређености  $R$ .

Табела 4.1: Најбоље вредности параметара фита из (4.3) добијене у случају додатог униформног шума за три различите неуређености.

$R$	$a$	$b$	$c$
2.25	$-3.3 \pm 0.3$	$1.33 \pm 0.02$	$1.041 \pm 0.002$
2.40	$-3.6 \pm 0.3$	$1.35 \pm 0.02$	$1.038 \pm 0.003$
2.55	$-3.6 \pm 0.3$	$1.39 \pm 0.02$	$1.033 \pm 0.002$

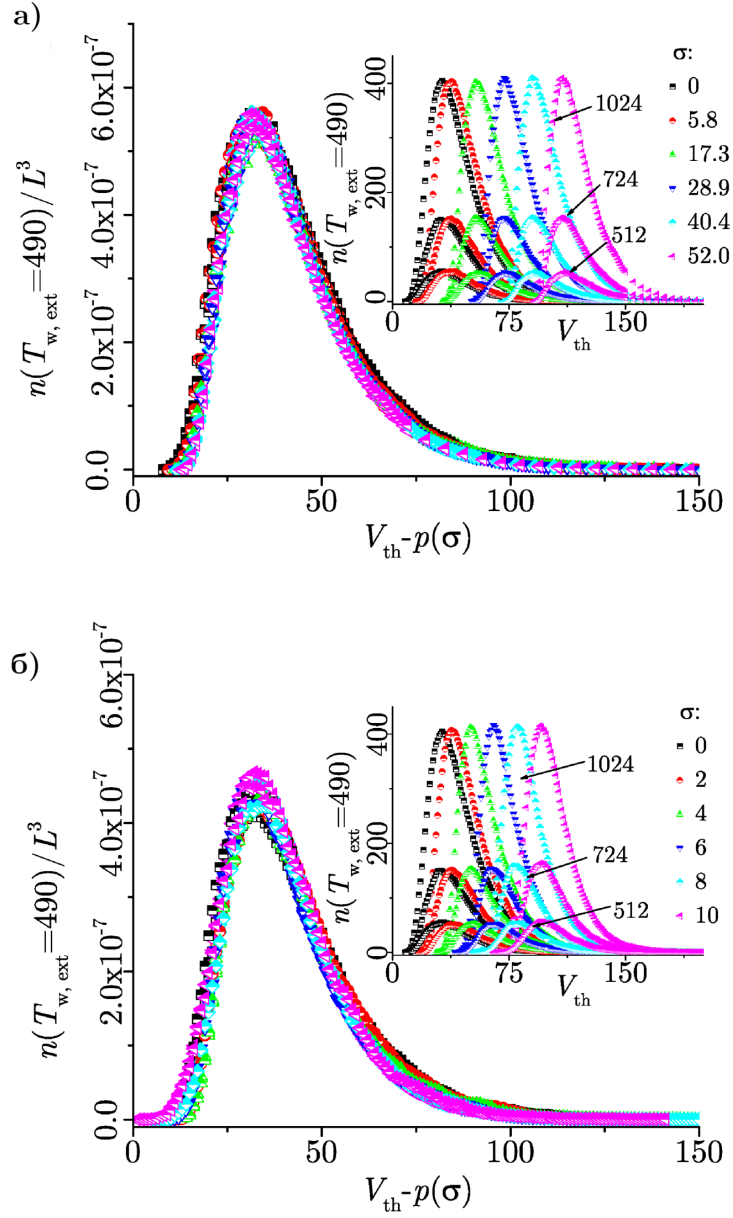
Табела 4.2: Исто као у Табели 4.1, само у случају Гаусовог шума.

$R$	$a$	$b$	$c$
2.25	$-3.9 \pm 0.9$	$3.8 \pm 0.3$	$1.20 \pm 0.02$
2.40	$-2.6 \pm 0.6$	$3.4 \pm 0.2$	$1.26 \pm 0.02$
2.55	$-4.3 \pm 0.8$	$4.8 \pm 0.2$	$1.16 \pm 0.02$

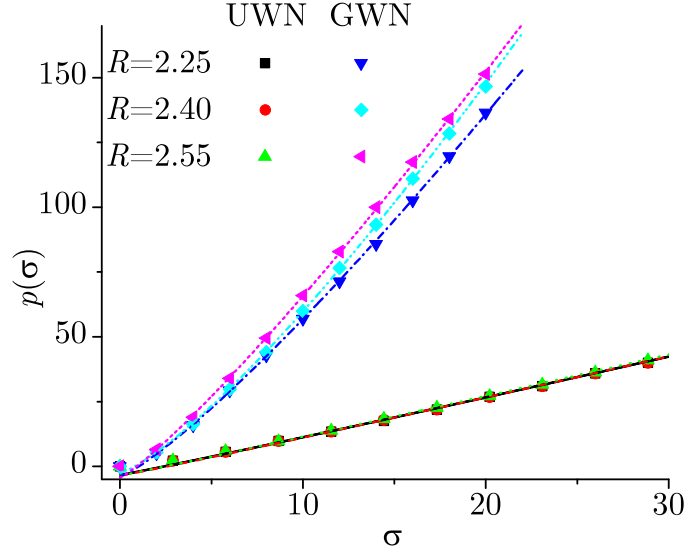
### 4.3 Утицај шума на скалирање параметара подла- вина насталих постављањем прага детекције

У овом поглављу објашњено је како присуство шума утиче на скалирање расподела предвиђено  $D_{T_w}(T_w; V_{\text{th}}, r, 1/L)$  изразом (3.45) под условима (3.44). Презентовани су резултати добијени за расподеле интерних и екстерних времена чекања, док су скалирања расподела осталих типова времена чекања приложена у додатку.

Додавање спољног шума утиче на расподеле времена чекања тако што повећава број кратких, а смањује број дугих догађаја, што се може видети на уметцима слике 4.9.



Слика 4.7: На умецима су расподеле броја појављивања екстерног времена чекања трајања  $T_{w, \text{ext}} = 490$  у зависности од висине прага детекције добијене за више различитих ширина екстерног шума додатог на сигнале добијене из тродимензионих система различитих димензија ( $L = 512, 724, 1024$ ), док су на главним панелима приказани колапси добијани применом скалирања (4.2). На слици а) приказани су резултати добијени након додавања униформног шума, а на слици б) резултати добијени након додавања Гаусовог шума.



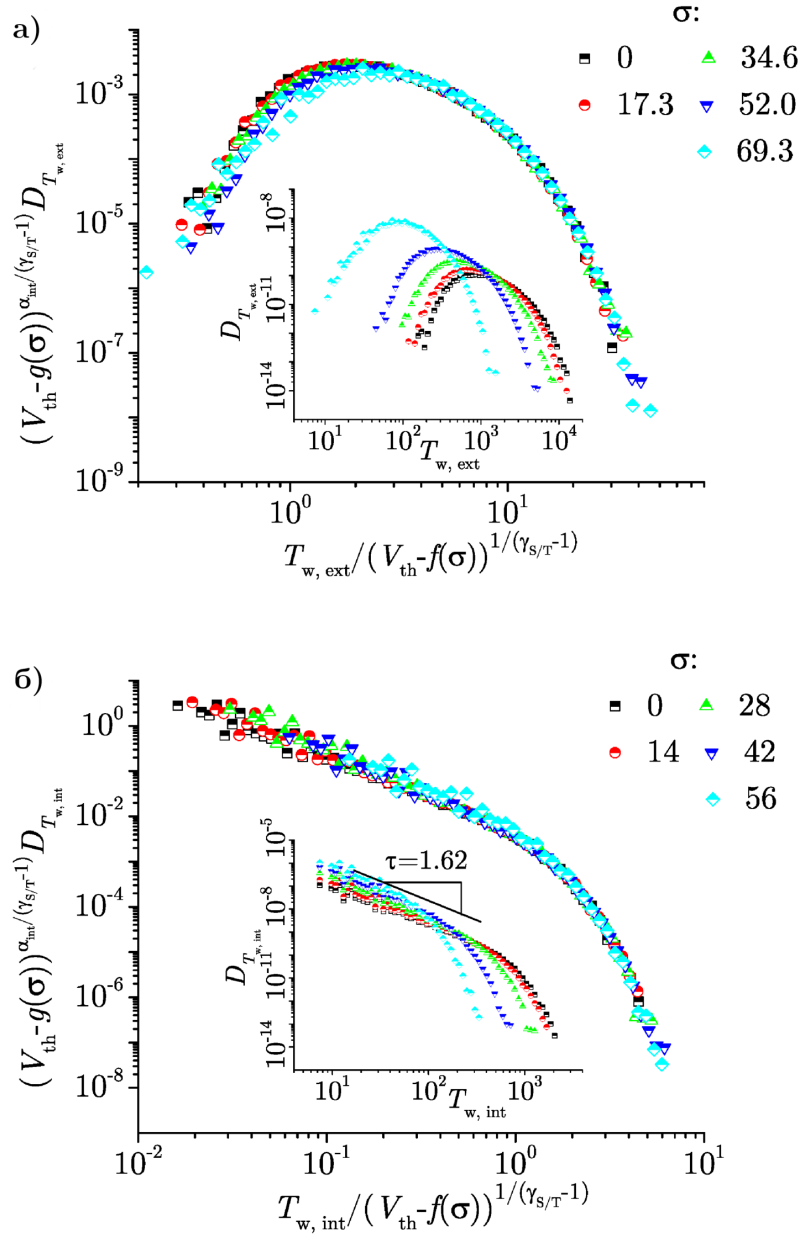
Слика 4.8: Вредности параметра помака  $p(\sigma)$  добијене на  $1024 \times 1024 \times 1024$  систему за  $R = 2, 25, R = 2, 40, R = 2, 55$  након примене униформног и Гаусовог шума. Резултати су фитовани на функцију (4.3) са вредностима приказанима у Табелама 4.1 и 4.2.

Промена кривих расподела времена чекања значи да ће се расподеле након примене скалирања (3.45) трансформисати различито и да колапс предвиђен изразом (3.45) неће бити потпун. Ипак, потпун колапс кривих  $D_{T_w}(T_w; V_{th}, r, 1/L)$  (које ће скраћено бити обележене са  $D_{T_w}$ ) у присуству спољног шума, могућ је након примене функција помака  $f(\sigma)$  и  $g(\sigma)$  које израз (3.45) модификују на следећи начин:

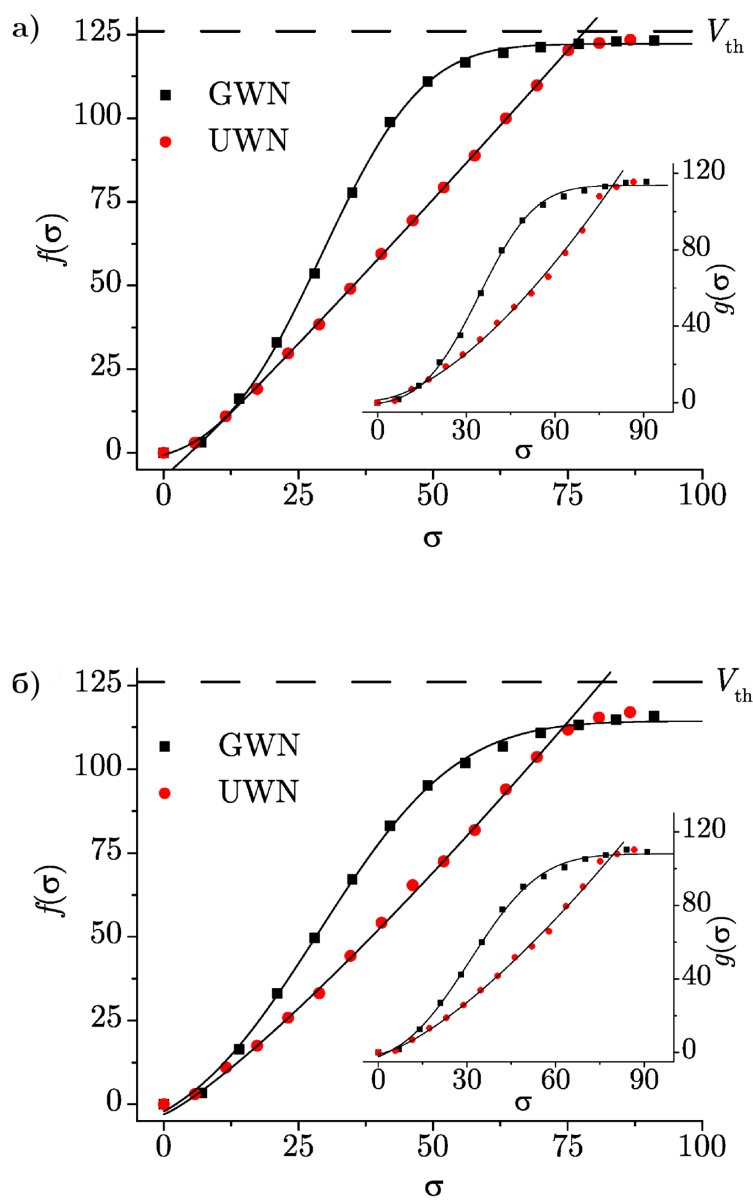
$$(V_{th} - g(\sigma))^{\alpha_{int}/(\gamma_{S/T} - 1)} D_{T_w}(T_w; V_{th}, r, 1/L) = D_{T_w}\left(T_w / (V_{th} - f(\sigma))^{1/(\gamma_{S/T} - 1)}; V_{th}^{\sigma'/(1-\gamma_{S/T})} r, V_{th}^{\sigma' \nu / (1-\gamma_{S/T})} / L\right). \quad (4.4)$$

Скалирање предвиђено изразом (4.4) омогућује да се након примене скалирања расподеле преклапају са оригиналном расподелом добијеном у одсуству спољног шума. Пример примене функција помака при скалирању расподела добијених на систему  $L = 2508, R = 2, 40, V_{th} = 126$  приказан је на главним панелима слике 4.9, а на слици 4.10 приказано је понашање функција помака помоћу којих је остварен колапс са слике 4.9. Приметно је да облик функција скалирања зависи од врсте примењеног шума. Наиме, функције помака  $\phi(\sigma)$  имају степени облик  $\phi(\sigma) \sim \sigma^s$  у присуству униформног шума, док се у присуству Гаусовог шума понашање функција помака може описати помоћу функције грешке  $\phi(\sigma) \sim \text{erf}(\sigma)$ . Након што стандардна девијација шума прерасте вредност која одговара стандардној девијацији примењеног прага,  $\sigma_{th} \approx V_{th}/\sqrt{3}$ , разлике у понашању функција помака  $f(\sigma)$  односно  $g(\sigma)$ , настале због присуства различитих врста шума, нестају и надаље функције помака теже вредности прага детекције  $V_{th}$  на исти начин, пратећи понашање узроковано присуством Гаусовог шума.

Функције помака  $f(\sigma)$  и  $g(\sigma)$  добијене на четири различита система ( $L_1 = 1448, R_1 = 2.27, V_{th1} = 75; L_2 = 2046, R_2 = 2.25, V_{th2} = 102; L_3 = 2508, R_3 = 2.24, V_{th3} = 126$  и  $L_4 = 3072, R_4 = 2.231, V_{th4} = 153$ ) чији су параметри одабрани тако да задовољавају услове (3.44) приказане су на умецима слике 4.11. Видимо да све функције помака следе исто правило што имплицира да би функције помака приказане у зависности од  $\rho = \sigma/\sigma_{th}$



Слика 4.9: На главним панелима приказани су колапси остварени применом функција скалирања на расподеле добијене на тродимензионом систему величине  $2508 \times 2508 \times 2508$  неуређености  $R = 2, 24$  применом прага  $V_{th} = 126$ . На графику а) приказано је скалирање расподела екстерних времена чекања у условима додатом униформног шума, а на графику б) скалирање расподела интерног времена чекања у присуству Гаусовог шума.



Слика 4.10: На слици а) приказане су функције помака расподела екстерних времена чекања, а слици б) приказане су функције помака расподела интерних времена чекања. У случају додатог униформног шума (црвени кружићи) функције помака фитоване су на степену зависност  $\phi(\sigma) \sim \sigma^s$ , а у случају Гаусовог шума (црни квадрати) на функцију пропорционалну функцији грешке  $\phi(\sigma) \sim \text{erf}(\sigma)$ .

након дељења одговарајућим вредностима прага  $V_{th}$  требало да колапсирају на исту криву. То би значило да понашање функција помака добијено из сета система који задовољавају услове (3.44), може да се опише на следећи начин у случају униформног шума:

$$\frac{\phi(\sigma)}{V_{th}} = p + q \left( \frac{\sigma}{\sigma_{th}} \right)^s, \quad (4.5)$$

односно:

$$\frac{\phi(\sigma)}{V_{th}} = i + j \operatorname{erf} \left( k \frac{\sigma}{\sigma_{th}} - l \right) \quad (4.6)$$

у случају Гаусовог шума. Колапси добијени помоћу (4.5) и (4.6) приказани су на главним панелима слике 4.11, а вредности параметара помоћу којих су добијени најбољи фитови, такође приказани на слици 4.11, приложене су у табелама 4.3 и 4.4.

Табела 4.3: Најбоље вредности параметара фитовања функција помака на функцију (4.5) добијене за интерна и екстерна времена чекања у присуству униформног шума.

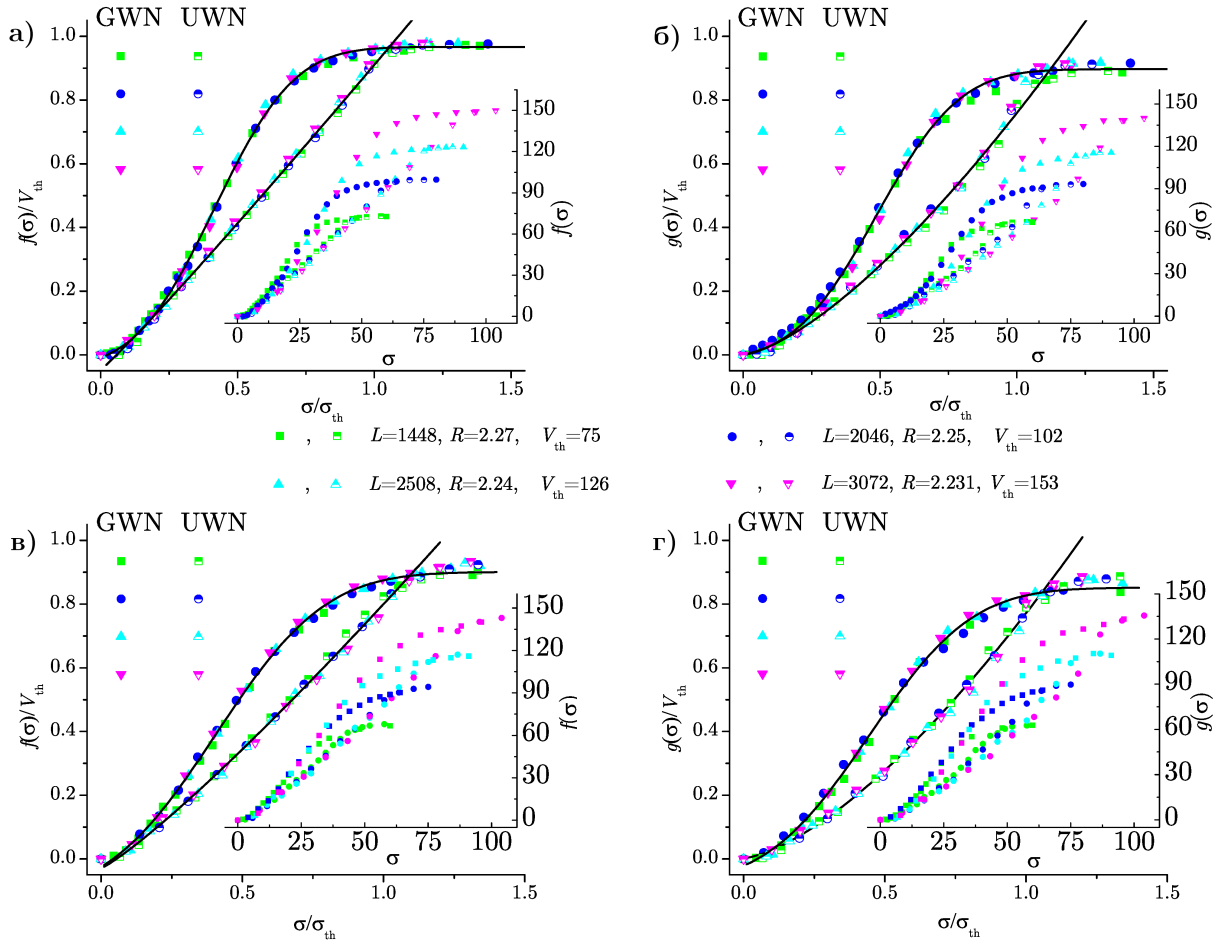
	$p$	$q$	$s$
Интерно време чекања			
$f(\sigma)$	$-0.028 \pm 0.009$	$0.83 \pm 0.01$	$1.16 \pm 0.03$
$g(\sigma)$	$-0.003 \pm 0.008$	$0.77 \pm 0.01$	$1.45 \pm 0.05$
Екстерно време чекања			
$f(\sigma)$	$-0.042 \pm 0.007$	$0.96 \pm 0.01$	$1.08 \pm 0.02$
$g(\sigma)$	$0.002 \pm 0.008$	$0.76 \pm 0.01$	$1.44 \pm 0.05$

Табела 4.4: Најбоље вредности параметара фитовања функција помака на функцију (4.6) добијене за интерна и екстерна времена чекања у присуству Гаусовог шума.

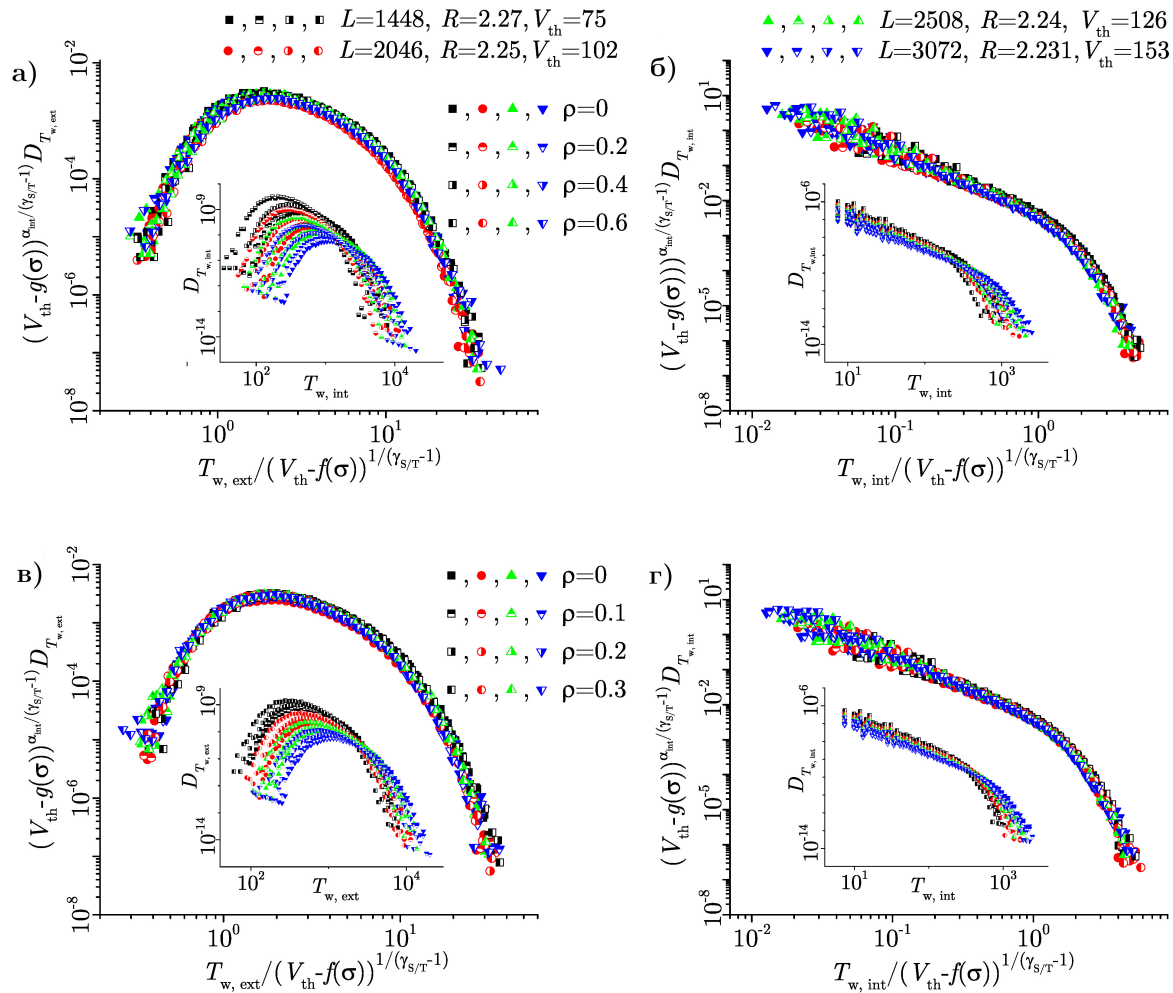
	$i$	$j$	$k$	$l$
Интерно време чекања				
$f(\sigma)$	$0.391 \pm 0.007$	$0.51 \pm 0.01$	$2.32 \pm 0.06$	$0.94 \pm 0.04$
$g(\sigma)$	$0.387 \pm 0.007$	$0.46 \pm 0.01$	$2.47 \pm 0.08$	$1.09 \pm 0.05$
Екстерно време чекања				
$f(\sigma)$	$0.462 \pm 0.004$	$0.505 \pm 0.005$	$3.09 \pm 0.05$	$1.29 \pm 0.03$
$g(\sigma)$	$0.439 \pm 0.004$	$0.458 \pm 0.005$	$2.96 \pm 0.07$	$1.44 \pm 0.04$

Коришћењем параметара из табела 4.3 и 4.4 остварени су колапси расподела интерних и екстерних времена чекања за неколико вредности  $\rho$  који су, илустрације ради, приказани на слици 4.12.

Такође, помоћу функција помака може се остварити колапс расподела трајања предвиђен скалирањем (3.43) након додавања спољног шума, што је приказано на слици 4.13. Утицај шума на расподеле трајања знатно је слабији од утицаја на расподеле времена чекања док год је праг детекције низак, односно изабран тако да је већински део сигнала изнад  $V_{th}$ , а стандардна девијација сигнала, иначе упоредива са висином прага, далеко мања од амплитуде сигнала. Расподеле приказане на сликама 4.9, 4.12 и 4.13 добијене су применом прага детекције чији је однос према амплитуди сигнала приближно 1:20. При оваквим условима присутни екстерни шум нема значајан утицај на појаву веома дугих догађаја и такви услови су најчешће испуњени у експерименту. Са порастом висине прага до изражаја би дошла симетрија између расподела трајања и интерних времена чекања [19] без обзира на присуство шума (наравно, уколико шум



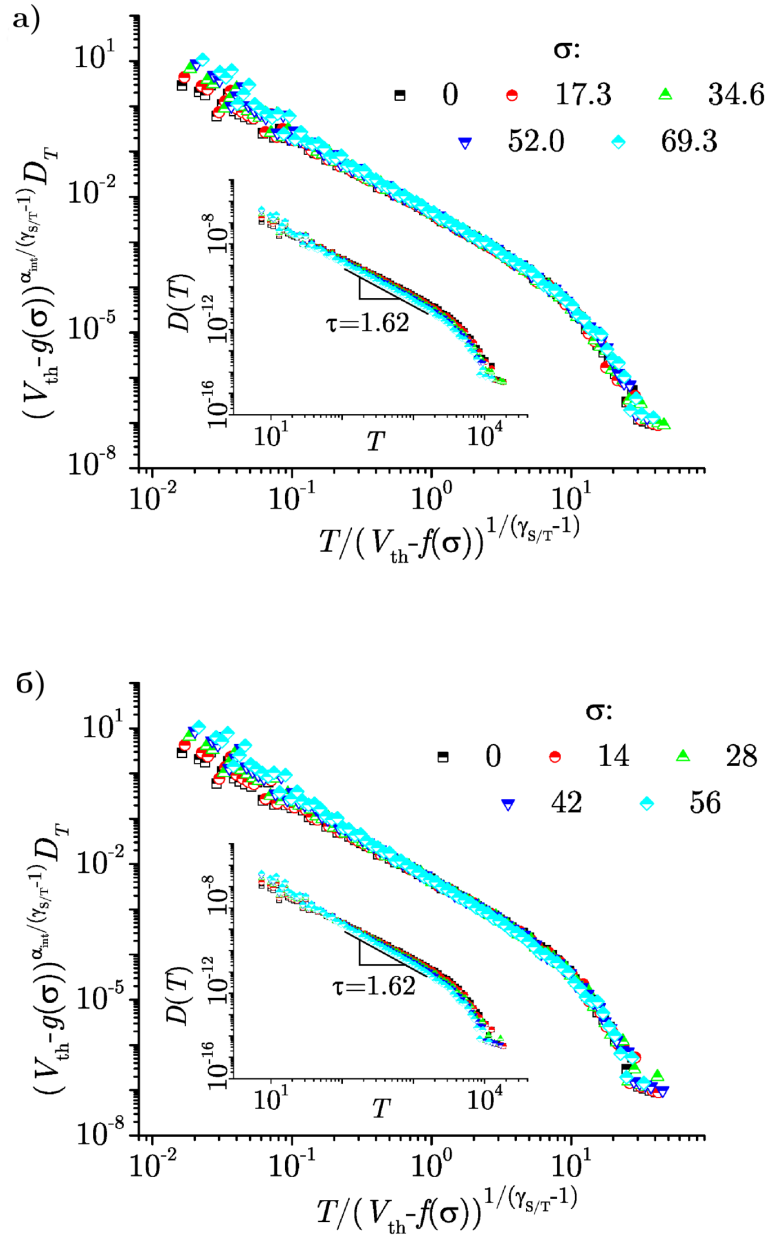
Слика 4.11: Функције помака  $f(\sigma)$  и  $g(\sigma)$  добијене на 4 различита система који задовољавају услове (3.44):  $L_1 = 1448, R_1 = 2.27, V_{th1} = 75$ ;  $L_2 = 2046, R_2 = 2.25, V_{th2} = 102$ ;  $L_3 = 2508, R_3 = 2.24, V_{th3} = 126$  и  $L_4 = 3072, R_4 = 2.231, V_{th4} = 153$ , приказане су на уметцима, а на главним панелима приказани су колапси остварени када су функције помака приказане у зависности од  $\rho = \sigma/\sigma_{th}$  подељене одговарајућим висинама прага  $V_{th}$ . Црним линијама приказане су функције фитовања дате са (4.5) и (4.6) добијене за вредности параметара које су приказане у табелама 4.3 и 4.4. На панелима а) и б) приказане су функције помака екстерних, а на панелима в) и д) интерних времена чекања, у присуству обе врсте коришћеног шума.



Слика 4.12: Главни графици слика а) и б) приказују (респективно) колапсе расподела интерних и екстерних времена чекања приказаних на уметцима у присуству униформног шума за различите односе  $\rho$  у опсегу од 0 до 0,6, док су на графицима в) и д) приказани исти колапси остварени у присуству Гаусовог шума при чему је  $\rho$  у опсегу од 0 до 0,3. Расподеле су добијене из истих сетова података као и расподеле приказане на слици 4.11.

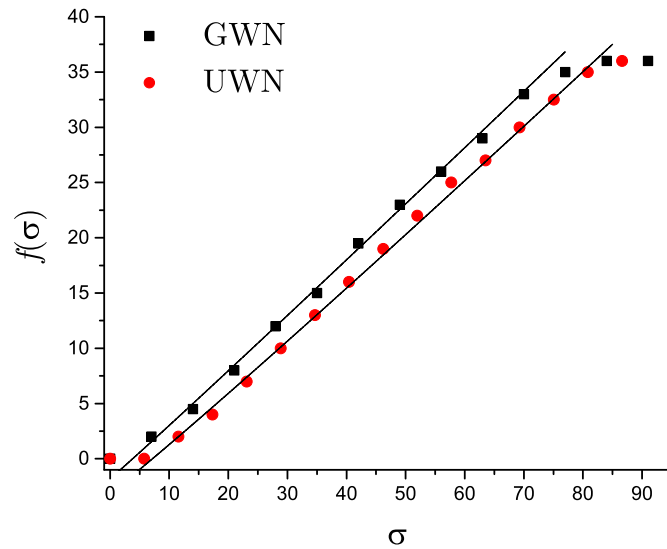


није превелики, тј. ремети сигнал у малој мери), што значи да би расподеле трајања ”попримиле” облик расподела интерних времена чекања и обрнуто. У прилог овој тврдњи иде чињеница да обе врсте расподела имају степено понашање,  $D_T \sim T^{-\tau}$  и  $D_{T_{w,int}} \sim T_{w,int}^{-\tau_{w,int}}$ , са једнаким вредностима експонената на које не утиче присуство спољног шума,  $\tau = \tau_T = \tau_{T_{w,int}} \approx 1,62$  [71].



Слика 4.13: На главним панелима приказани су колапси расподела трајања подлавина остварени применом функција скалирања. Расподеле су добијене за тродименциони систем величине  $2508 \times 2508 \times 2508$  неуређености  $R = 2, 4$  применом прага  $V_{th} = 126$  у присуству униформног (слика а) и Гаусовог (слика б) шума. На уметцима су приказане оригиналне (нескалиране) расподеле.

На крају, идеја функција помака се такође може применити на расподеле трајања (видети главне графике на слици 4.13). Ипак, постоје видне разлике у односу на функције помака расподела времена чекања које се јављају као последица постављања



Слика 4.14: Функције помака за расподеле трајања подлавина које су искоришћене при колапсирању приказаном на слици 4.13. У случајају обе врсте примењеног шума, функције помака имају скоро линеарно понашање.

релативно ниског прага. Наиме, функције помака  $f(\sigma)$  имају готово линеарно понашање ( $s = 1,04 \pm 0,05$  за униформни, односно  $s = 0,96 \pm 0,06$  за Гаусов шум), док су функције  $g(\sigma)$  нула у оба случаја примењеног шума, што се може видети на слици 4.14.

# Глава 5

## Критично поље нееквилатералних система

У овој глави приказани су резултати истраживања понашања Изинговог модела са случајним пољем која се односе на одређивање вредности критичног поља као и зависности тих вредности од димензија система и граничних услова [72].

### 5.1 Ефективни критични параметри

Као што је већ наведено у Глави 2, Изингов модел са случајним пољем карактеришу три критична параметра - критична неуређеност  $R_c$ , критично поље  $H_c$  и критична магнетизација  $M_c$ . Ови параметри су неуниверзални, што значи да њихове вредности зависе од димензионалности система као и врсте решетке у чијим чворовима се налазе спинови.

Познато је да код коначних система долази до појаве прожимајућих лавина уколико је неуређеност система ниска, што није случај при великим неуређеностима. Граница између ниске и високе неуређености није оштра већ се прелаз одвија у уској области у којој просечан број прожимајућих лавина по једној реализацији случајног поља пада са 1 на 0 са порастом неуређености. За ефективну критичну неуређеност  $R_c^{\text{eff}}$  узећемо центар ове области (слика 5.3). Даље, прожимајућим пољем  $H_{\text{sp}}$  можемо сматрати сваку вредност спољног поља на којој долази до појаве прожимајуће лавине код коначних система [63]. Та вредност није константна већ се за сваку неуређеност јавља уска расподела вредности прожимајућег поља зависна од  $R$ . Магнетна суцептибилност  $\chi$  добијена усредњавањем по великом броју реализација случајног поља за неуређеност  $R$ , има максимум у тачки  $H_c^{\text{eff}}(R)$  ове расподеле. Дакле, вредност  $H_c^{\text{eff}} \equiv H_c^{\text{eff}}(R_c^{\text{eff}})$  можемо сматрати ефективним критичним пољем за коначне системе. Резултати презентовани у наставку добијени су на системима величине  $L \times L \times l$ , где је дебљина  $l \leq L$ , а  $L$  дужина система по преостале две димензије. Такве системе називамо нееквилатералним (неједнакостраничним), за разлику од еквилатералних (једнакостраничних) којима су све дужине система дуж сва три просторна правца једнаке. Ефективну критичну неуређеност нееквилатералних система означаћемо са  $R_c^{\text{eff}}(l, L)$ , а ефективно критично поље са  $H_c^{\text{eff}}(l, L)$ . У термодинамичком лимиту ( $L \rightarrow \infty$ ) за различите добијамо фамилију бесконачних тродимензионалних решетки дебљине  $l$ , и свака од њих показује критично понашање које, осим критичних експонената<sup>1</sup>, описују критична неуређеност

$$R_c(l) = \lim_{L \rightarrow \infty} R_c^{\text{eff}}(l, L), \quad (5.1)$$

---

<sup>1</sup>Вредности ових експонената такође могу да варирају са променом дебљине  $l$  (реф).

критично поље

$$H_c(l) = \lim_{L \rightarrow \infty} H_c^{\text{eff}}(l, L), \quad (5.2)$$

и критична магнетизација

$$M_c(l) = \lim_{L \rightarrow \infty} M_c^{\text{eff}}(l, L). \quad (5.3)$$

Са повећањем основе система ( $L \times L$ ) однос  $l/L$  тежи нули уколико је дебљина  $l$  константна. То може да доведе до појаве прожимајућих лавина дуж најтање димензије система  $l$ . Због тога се при одређивању ефективних критичних параметара код оваквих система пожимајућим лавинама сматрају само лавине које прожимају систем дуж макар једне од димензија основе. Ово намеће избор граничних услова. С обзиром да избор граничних услова не утиче на понашање у термодинамичком лимиту, а да је конвергенција лимиту бржа када су гранични услови затворени (тј. периодични, енглески - closed са скраћеницом C) дуж свих димензија, природно се намеће избор у којем су гранични услови затворени дуж димензија основе  $L$ , а отворени (енглески - open, са скраћеницом O) дуж дебљине  $l$  (ССО). Ипак, из концептуалних разлога, ефективна критична неуређеност и ефективно критично поље испитивано је и на системима код којих су примењени затворени гранични услови дуж свих димензија система (ССС).

У наставку под **отвореним** системима подразумеваће се системи код којих је примењен отворени гранични услов дуж најтање димензије. Аналогно, **затворени** системи биће системи код којих је дуж  $l$  примењен затворен гранични услов.

### 5.1.1 Ефективна критична неуређеност

Промена ефективне критичне неуређености бесконачних отворених система дебљине  $l$  детаљно је анализирана у раду [50]. У овом поглављу је приказана слична анализа на затвореним системима.

Као у случају отворених система, расподелу броја прожимајућих лавина по једној реализацији случајног поља на затвореном систему димензија  $L \times L \times l$  могуће је моделирати функцијом:

$$N_{R_0, W}(R) = 0,5 \times \text{erfc}[(R - R_0)/W], \quad (5.4)$$

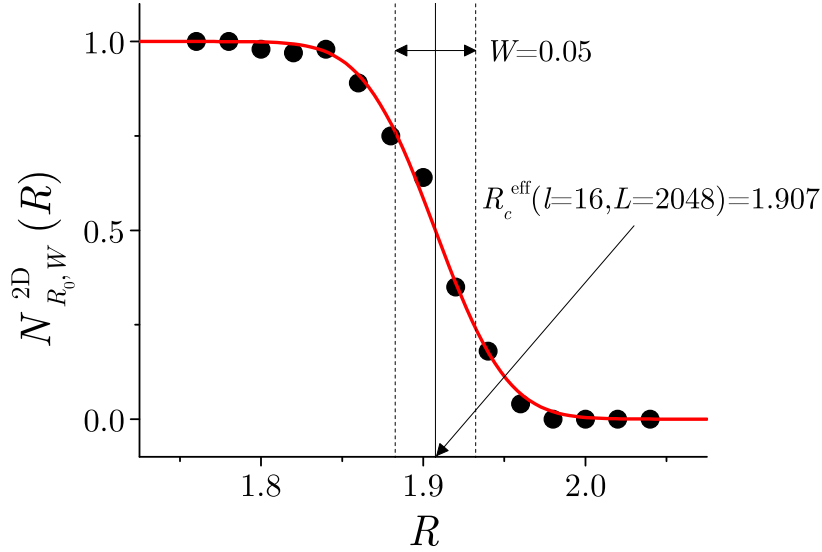
где је  $\text{erfc}(v) \equiv 2/\sqrt{\pi} \int_v^\infty e^{-t^2} dt$  комплементарна функција грешке аргумента  $v = (R - R_0)/W$ .  $R = R_0$  представља превојну тачку функције (5.4), а  $W$  ширину области у којој вредност  $\text{erfc}(v)$  пада са 0,75 на 0,25. Пошто тачка  $R_0$  раздваја област неуређености у којој је вероватноћа појављивања прожимајућих лавина велика од области у којој је та вероватноћа мала, том вредношћу проценићемо ефективну критичну неуређеност  $R_c^{\text{eff}, C}(l, L)$  затвореног система величине  $L \times L \times l$  (слика 5.3). Граничну вредност  $R_c^C = \lim_{L \rightarrow \infty} R_c^{\text{eff}, C}(l, L)$  узећемо за критичну неуређеност затвореног система дебљине  $l$  са бесконачном основом.

Вредности ефективног критичног поља  $R_c^{\text{eff}, C}(l, L)$  представљене у зависности од  $l$  и  $L$  формирају површ у простору чије су координате  $(l, L, R)$ . Помоћу претпоставки:

$$\frac{R_c^C(l) - R_c^{3D}}{R_c^C(l)} = \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3D}}}, \quad (5.5)$$

$$\frac{R_c^{\text{eff}, C}(l, L) - R_c^C(l)}{R_c^{\text{eff}, C}(l, L)} = \frac{(A' - \Delta)l^{1/\nu'}}{(l^{1/\nu_{3D}} - \Delta)L^{1/\nu'}}, \quad (5.6)$$

аналогно процедури спорведеној у [50] за отворене системе долазимо до теоријске предикције за површ на којој би требало да леже вредности ефективне критичне неуређености



Слика 5.1: Пример одређивања  $R_c^{\text{eff}}$  на систему са затвореним граничним условима величине  $2048 \times 2048 \times 16$ .

затворених система:

$$R_c^{\text{th,C}}(l, L) = R_c^{3\text{D}} \left[ 1 - \frac{\Delta}{l^{1/\nu_{3\text{D}}}} - \frac{(A' - \Delta)l^{1/\nu'}}{L^{1/\nu'} l^{1/\nu_{3\text{D}}}} \right]^{-1}. \quad (5.7)$$

Претпоставка (5.5) је иста као (10) у [50], и у њој је  $R_c^{3\text{D}} = 2,16$  критична неуређеност тродимензионалног RFIM-а, а  $\Delta \equiv 1 - R_c^{3\text{D}}/R_c^{2\text{D}} \approx -3$ , пошто критична неуређеност дводимензионалног RFIM-а износи  $R_c^{2\text{D}} = 0,54$  [37, 36]. Претпоставка (5.6) је модификована релација (11) из [50] јер садржи експонент  $\nu'$  (у оригиналном изразу фигурише  $\nu_{2\text{D}}$ ) и измењену константу

$$A'(l) \equiv \frac{(A' - \Delta)l^{1/\nu'}}{l^{1/\nu_{3\text{D}}} - \Delta}.$$

Ове измене су унете да би се истакле разлике које потичу од другачијих (затворених) граничних услова.

Наиме, када неуређеност прилази ефективној критичној вредности коначних система величине  $l$ , тада је корелациона дужина упоредива са величином система,  $\xi \sim l$ . Код еквилатералних тродимензионалних система линеарне димензије  $l$  важиће

$$1 - R_c^{3\text{D}}/R_c^{\text{eff}}(l, L = l) \sim l^{-1/\nu_{3\text{D}}}$$

када  $R \rightarrow R_c^{\text{eff}}(l, L = l)$ . Даље, за довољно велико  $l$ ,  $R_c^{\text{C}}(l)$  се понаша готово исто као  $R_c^{\text{eff}}(l, L = l)$ , тако да ће за системе са затвореним граничним условима дебљине  $l$  важити:

$$\frac{R_c^{\text{C}}(l) - R_c^{3\text{D}}}{R_c^{\text{C}}(l)} = \frac{\Delta'}{l^{1/\nu_{3\text{D}}}}, \quad (5.8)$$

аналогно хипотези (10) из [50] која важи у случају отворених система. Ипак, очекивано је да постоје неке разлике. Код отворених система дебљине  $l > 1$  ширење лавина се прекида на граничним површима због чега ефективно пропадају као дводимензионе [73]. Због тога постоји гладак прелаз са  $l = 2$  на  $l = 1$ . Са друге стране, тај прелаз код затворених система није гладак јер лавине могу да се шире дуж најкраће димензије

$l \geq 2$  за разлику од случаја  $l = 1$ . Због тога је  $l = 2$  најнижа вредност за коју важи (5.8). С обзиром да је дебљина  $l = 2$  веома мала могуће је спровести симулације система који имају довољно велику основу, на пример  $L = 8192$ . Из таквих симулација долази се до вредности параметра

$$\Delta' = 2^{1/\nu_{3D}}[R_c^C(2) - R_c^{3D}]/R_c^C(2) \approx -3,02$$

што се са вредношћу  $\Delta \approx -3$  која важи за отворене системе, слаже у оквирима грешке, због чега се може узети да важи

$$\Delta' = \Delta$$

односно претпоставка (5.8) постаје (5.5), то јест (10) из [50].

Да бисмо показали да важи (5.6) кренимо од једначине

$$\frac{R_c^{\text{eff},C}(l, L) - R_c^{3D}}{R_c^{\text{eff},C}(l, L)} = \frac{R_c^{\text{eff},C}(l, L) - R_c^C(l)}{R_c^{\text{eff},C}(l, L)} + \frac{R_c^C(l) - R_c^{3D}}{R_c^C(l)} \cdot \frac{R_c^{\text{eff}}(l)}{R_c^{\text{eff},C}(l, L)}, \quad (5.9)$$

која за  $L = l$  добија облик

$$\frac{R_c^{\text{eff},C}(l, l) - R_c^{3D}}{R_c^{\text{eff},C}(l, l)} = \frac{R_c^{\text{eff},C}(l, l) - R_c^C(l)}{R_c^{\text{eff},C}(l, l)} + \frac{R_c^C(l) - R_c^{3D}}{R_c^C(l)} \cdot \frac{R_c^{\text{eff}}(l)}{R_c^{\text{eff},C}(l, l)}. \quad (5.10)$$

Лева страна једначине (5.10) приказује како ефективна критична неуређеност  $R_c^{\text{eff},C}(l, l)$  прилази критичној неуређености  $R_c^{3D}$  еквилатералних тродимензионалних система линеарне димензије  $l$ , тако да важи

$$\frac{R_c^{\text{eff},C}(l, l) - R_c^{3D}}{R_c^{\text{eff},C}(l, l)} = \frac{A'}{l^{1/\nu_{3D}}}, \quad (5.11)$$

где константа  $A'$  наглашава да се ради о затвореним системима. Нумерички резултати добијени за  $l > 8$  сугеришу да  $R_c^{\text{eff},C}(l, L)$  тежи степено ка  $R_c^C(l)$  када  $L$  дивергира

$$\frac{R_c^{\text{eff},C}(l, L) - R_c^C(l)}{R_c^{\text{eff},C}(l, L)} = \frac{A'(l)}{L^{1/\nu'}}, \quad (5.12)$$

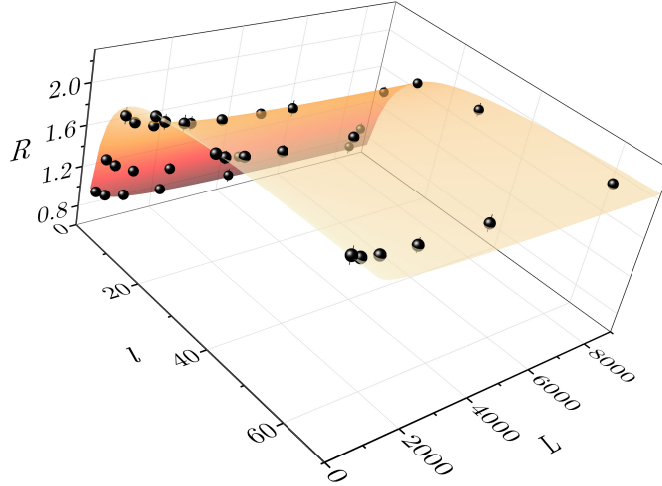
при чему експонент  $\nu'$  карактерише степено понашање (видети уметак слике 5.5). Након што уврстимо (5.11) и (5.12) у (5.10) налазимо

$$A'(l) = \frac{(A' - \Delta)l^{1/\nu'}}{l^{1/\nu_{3D}} - \Delta}, \quad (5.13)$$

израз који води ка (5.6).

Површ предвиђена релацијом (5.7) одређена фитовањем вредности ефективне критичне неуређености  $R_c^{\text{eff},C}(l, L)$  добијених из нумеричких симулација приказана је на слици 5.2. Најбољи фит остварен је са вредностима  $A' = 1,17 \pm 0,22$  и  $\nu' = 6,29 \pm 0,17$ . Приликом фитовања неуређености на комплементарну функцију грешке одређене су и грешке које су на слици 5.2 приказане усправним цртицама. Одступање вредности  $R_c^{\text{eff},C}$  од теоријске предикције је у оквиру  $\pm 0,07$  за системе дебљине  $l \geq 8$ . Међутим, код веома танких система ( $l < 8$ ) одступања су знатно већа.

Треба напоменути да је свака од 36 ефективних критичних неуређености приказаних на слици 5.2 добијена фитовањем графика добијеног од 15 неуређености, а да је за сваку од њих урађено по 200 симулација са различитим реализацијама случајног поља. То значи да је за одређивање сваке ефективне неуређености било потребно 3000 симу-



Слика 5.2: Символима су приказане вредности ефективне критичне неуређености  $R_c^{\text{eff,C}}(l, L)$  добијене на затвореним системима величине  $L \times L \times l$ . Такође, на графику је приказана површ која уз параметре  $A' = 1, 17 \pm 0, 22$  и  $\nu' = 6, 29 \pm 0, 17$  најбоље фитује вредности  $R_c^{\text{eff,C}}(l, L)$ .

лација, односно преко 100000 симулација за добијање свих вредности  $R_c^{\text{eff,C}}$  приказаних на слици 5.2.

### 5.1.2 Ефективно критично поље

Ефективно критично поље RFIM-а зависи од наметнутих граничних услова због чега је неопходно направити разлику између ефективног критичног поља система са затвореним граничним условима дуж свих димензија  $H_c^{\text{eff,C}}(l, L)$  и ефективног критичног поља система са отвореним граничним условима дуж најкраће димензије система  $H_c^{\text{eff,O}}(l, L)$ . Аналогно, у термодинамичком лимиту имамо  $H_c^{\text{O}}(l) = \lim_{L \rightarrow \infty} H_c^{\text{eff,C}}(l, L)$ , односно  $H_c^{\text{O}}(l) = \lim_{L \rightarrow \infty} H_c^{\text{eff,O}}(l, L)$ .

Код отворених система очекивано је да се лавине понашају слично лавинама код дводимензионалног RFIM-а. Због тога је понашање ефективног критичног поља отворених система могуће описати изразом:

$$H_c^{\text{eff,O}}(l, L) - H_c^{\text{O}}(l) = \frac{B(l)}{L^{1/\nu_{2D}}}, \quad (5.14)$$

где је  $\nu_{2D}$  експонент корелационе дужине дводимензионог модела, а  $B(l)$  зависност у функцији дебљине  $l$  коју треба одредити. Даље, пошто критично поље бесконачних система дебљине  $l \geq 2$  монотono опада са порастом дебљине, а уз то је очекивано да се код њих лавине понашају као лавине стандардних тродимензионих система, разумно је претпоставити да  $H_c^{\text{O}}(l)$  степено тежи 3D лимиту  $H_c^{\text{3D}}(l)$ , као неки критични параметри [74, 50]:

$$H_c^{\text{O}}(l) - H_c^{\text{3D}} = \Theta l^{-1/\nu_{3D}}, \quad (5.15)$$

где је  $\Theta$  константа коју треба одредити. У граничном случају  $l = 2$  помоћу (5.15) могуће је извршити симулације са веома великом базом, тако да је константу  $\Theta$  могуће

одредити користећи се граничним случајем [73],  $\Theta = 2^{1/\nu_{3D}}[H_c^O(2) - H_c^{3D}]$ . Коришћењем добијене вредности  $H_c^O(2) = 1,85 \pm 0,01$  и познатих вредности за  $H_c^{3D}$  и  $\nu_{3D}$  добија се вредност  $\Theta = 0,68 \pm 0,07$ . Сабирањем једначина (5.14) и (5.15) добија се израз:

$$H_c^{\text{eff},O}(l, L) - H_c^{3D} = \frac{B(l)}{L^{1/\nu_{2D}}} + \frac{\Theta}{l^{1/\nu_{3D}}} \quad (5.16)$$

Да бисмо одредили зависност  $B(l)$ , аналогно дводимензионом моделу [36] претпоставићемо да важи релација  $H_c^{\text{eff},O}(L) - H_c^{3D} = BL^{-1/\nu_{3D}}$  која важи за тродимензионе еквилатералне системе, а заправо представља специјални случај релације (5.16) када је  $l = L$ . Одавде следи

$$\frac{B}{l^{1/\nu_{3D}}} = \frac{\Theta}{l^{1/\nu_{3D}}} + \frac{B(l)}{l^{1/\nu_{2D}}},$$

па се долази до израза за тражену зависност:

$$B(L) = \frac{B - \Theta}{l^{1/\nu_{3D}}} l^{1/\nu_{2D}}. \quad (5.17)$$

Коначно, теоријска предикција промене ефективног критичног поља  $H_c^{\text{th},O}(l, L)$  у функцији  $l$  и  $L$  код отворених нееквилатералних система има облик:

$$H_c^{\text{th},O}(l, L) = H_c^{3D} + \frac{\Theta}{l^{1/\nu_{3D}}} + \frac{B - \Theta}{l^{1/\nu_{3D}}} \left(\frac{l}{L}\right)^{1/\nu_{2D}}. \quad (5.18)$$

Аналогно, код затворених система важи:

$$H_c^C(l) - H_c^{3D} = \Theta' l^{-1/\nu_{3D}}, \quad (5.19)$$

где је  $\Theta'$  нова константа карактеристична за затворене нееквилатералне системе. Као код отворених система, константа  $\Theta' = 2,32$  се израчунава помоћу критичног поља  $H_c^C(2) = 2,85$  добијеног у симулацијама на системима дебљине  $l = 2$  са веома великом основом. Аналогним поступком стижемо до теоријске предикције за понашање ефективног критичног поља код затворених система димензија  $L \times L \times l$ :

$$H_c^{\text{th},C}(l, L) = H_c^{3D} + \frac{\Theta'}{l^{1/\nu_{3D}}} + \frac{B' - \Theta'}{l^{1/\nu_{3D}}} \left(\frac{l}{L}\right)^{1/\nu'}, \quad (5.20)$$

при чему зависност  $B'(l)$  има облик:

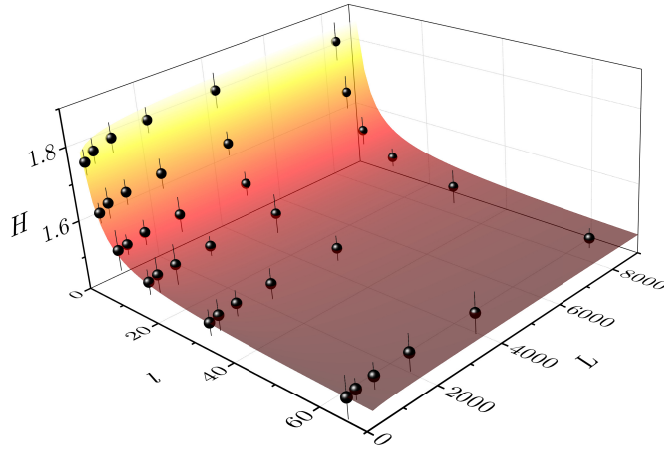
$$B'(L) = \frac{B' - \Theta'}{l^{1/\nu_{3D}}} l^{1/\nu'}, \quad (5.21)$$

где су  $B'$  и  $\Theta'$  уведени да би нагласили утицај затворених граничних услова.

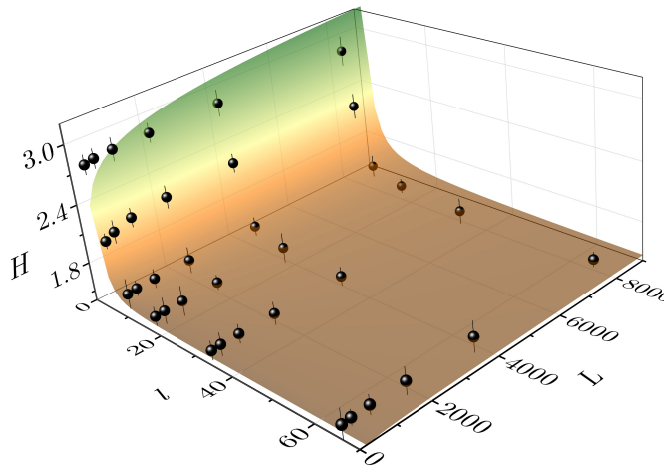
Вредности ефективног критичног поља  $H_c^{\text{eff},O}(l, L)$  добијене из симулација на отвореним системима различитих димензија као и површ предвиђена релацијом (5.18) добијена за најбољу вредност параметра фита  $B = 0,20 \pm 0,07$  приказане су на слици 5.3. На слици 5.4 су приказне вредности ефективног критичног поља  $H_c^{\text{eff},C}(l, L)$  одређене из симулација на затвореним системима различитих димензија као и површ добијена фитовањем помоћу релације (5.20) израчуната за најбољу вредност параметра фита  $B' = 2,32 \pm 0,19$ .

Када је неуређеност  $R = R_c^{\text{eff}}(l, L)$  у систему се јављају прожимајуће лавине због чега је био потребан велики број реализација случајног поља (од 200 на највећим до 32000 на најмањим системима) да би се након усредњавања добиле криве суспензибилности помоћу којих су одређене вредности спољног поља  $H_c^{\text{eff}}(l, L)$  при којима суспен-





Слика 5.3: Површ представља теоријску предикцију (5.18) добијену фитовањем вредности ефикасног критичног поља (симболи) нееквилатералних отворених система величине  $L \times L \times l$  која је добијена за најбољу вредност параметра фита  $B = 0,20 \pm 0,07$ .



Слика 5.4: Површ представља теоријску предикцију (5.20) добијену фитовањем вредности ефикасног критичног поља (симболи) нееквилатералних затворених система величине  $L \times L \times l$  која је добијена за најбољу вредност параметра фита  $B = 2,32 \pm 0,19$ .

тибилност достиже максимум у оба испитивана случаја граничних услова и за сваку неуређеност  $R = R_c^{\text{eff}}(l, L)$ . Грешке су одређене као највеће одступање вредности поља на којој се јавља прожимајућа лавина од вредности  $H_c^{\text{eff}}(l, L)$  и на графицима 5.3 и 5.4 приказане су вертикалним цртицама. Код отворених нееквилатералних система поклапање између теоријске предикције (5.18) и нумеричких вредности је у оквиру  $\pm 0,01$  за свако  $l$  и  $L$ . Код затворених система слагање је у опсегу од  $\pm 0,09$  за  $l \geq 8$ , али за  $l < 8$ , као и код неуређености, долази до појаве великог одступања што се боље види на слици 5.5.

Објашњење разлога одступања ефективних критичних параметара од теоријских предикција код затворених система је интуитивно. Пошто флиповање једног спина утиче на ефективно поље најближих суседа тог спина, утицај који ће имати површински спин (рецимо спин на доњој површини система) знатно ће зависити од примењеног граничног услова. Уколико је систем затворен дуж дебљине флиповани спин утицаће на већи број спинова (6) него у случају да је систем дуж дебљине отворен (4). Због тога гранични спин затвореног система има већи утицај на промену ефективног поља. Самим тим, уколико је удео граничних спинова у систему велики<sup>2</sup>, што је случај за  $l \leq 4$ , простирање лавина које обухватају површинске спинове је олакшано, чиме се знатно смањује вредност ефективног критичног поља. Због тога се код најтањих система јавља разлика између нумеричких вредности  $R = R_c^{\text{eff,C}}(l, L)$  и вредности предвиђених релацијом (5.7) која све прожимајуће лавине третира као дводимензионе. Даље, вредности ефективног критичног поља одређене су при нижим вредностима од оних предвиђених релацијом (5.20), тако да су њихове вредности за  $l \leq 4$  изнад теоријске површи, слика 5.5.

### 5.1.3 Скалирање магнетизације и сусцептибилности

У лимиту  $L \rightarrow \infty$  за бесконачно велике системе дебљине  $l$  израз (5.6) и израз (7) из [50] се свODE на исти облик:

$$R_c^{\text{th}}(l) = R_c^{3\text{D}}(1 - \Delta l^{-1/\nu_{3\text{D}}})^{-1}, \quad (5.22)$$

док изрази (5.15) и (5.19) постају:

$$H_c^{\text{th,O}}(l) = H_c^{3\text{D}} + \Theta l^{-1/\nu_{3\text{D}}}, \quad (5.23)$$

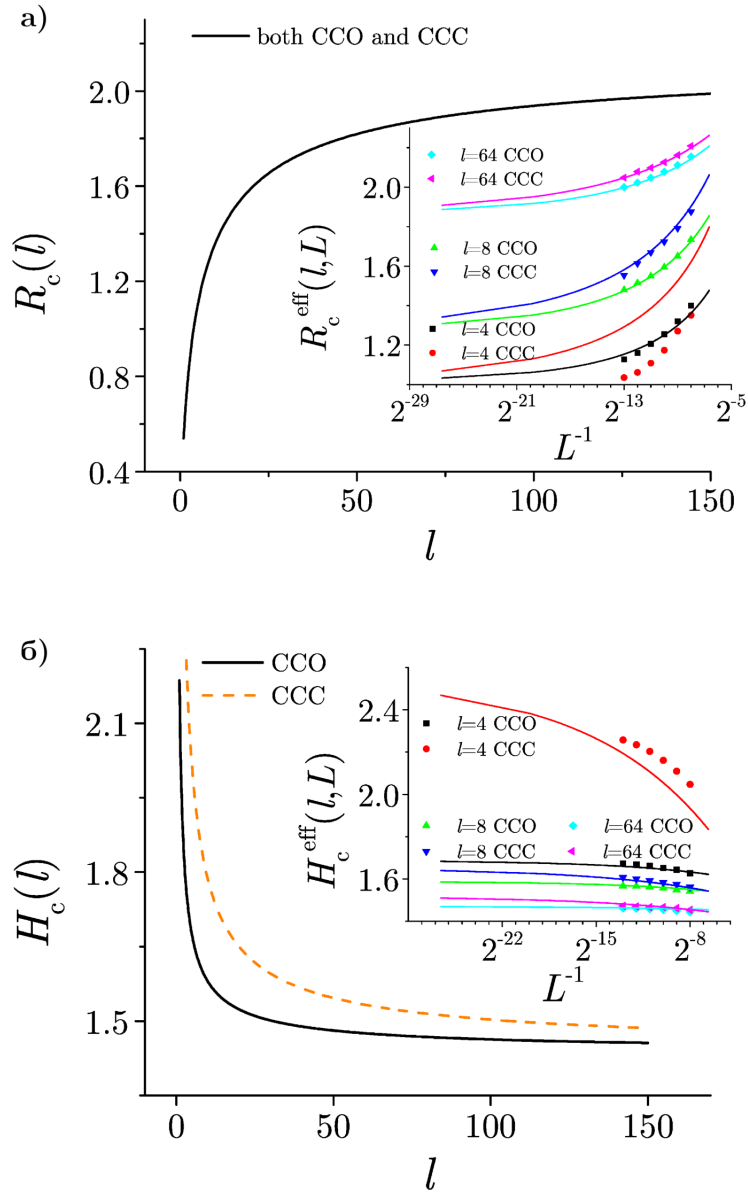
$$H_c^{\text{th,C}}(l) = H_c^{3\text{D}} + \Theta' l^{-1/\nu_{3\text{D}}}. \quad (5.24)$$

Различите вредности константи  $\Theta$  и  $\Theta'$  последица су избора различитих граничних услова. Коришћењем вредности које предвиђају релације (5.22), (5.23) и (5.24) могуће је колапсирањем кривих магнетизације и сусцептибилности тестирати њихову тачност.

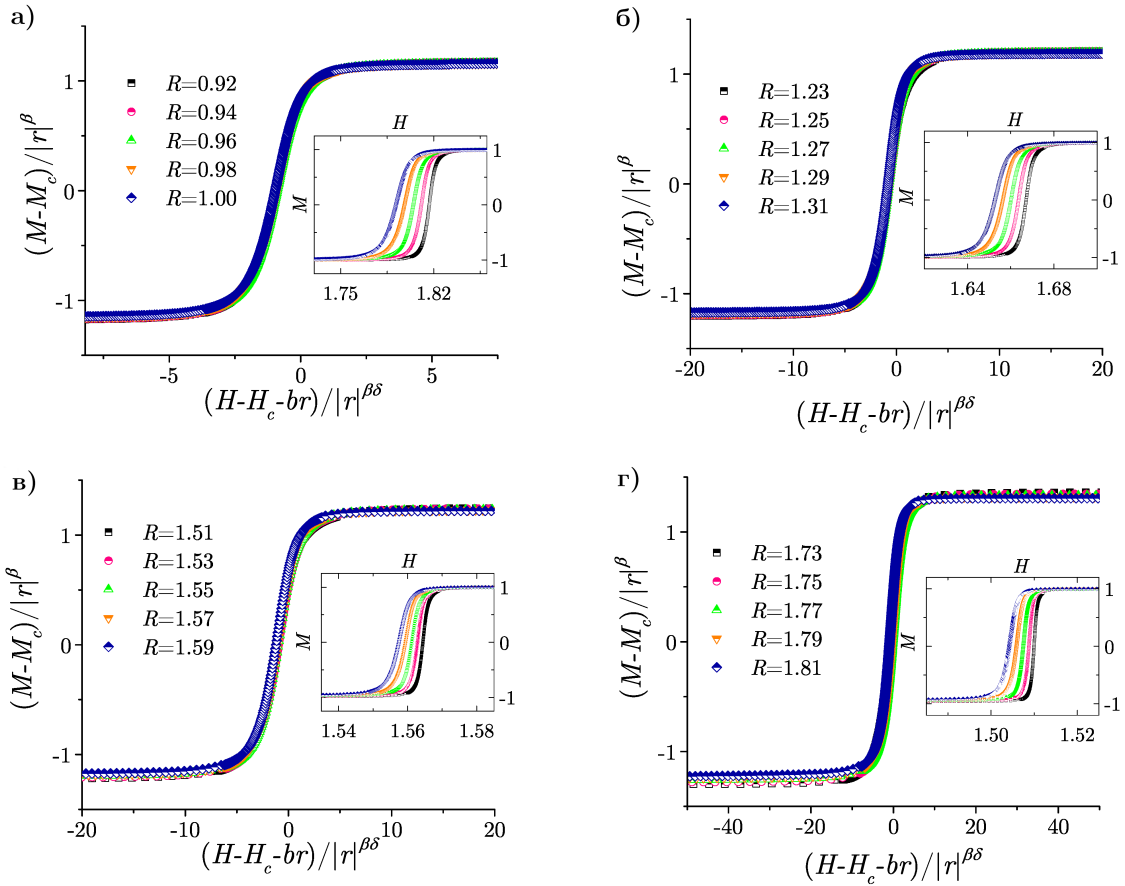
Магнетизација бесконачно великих система у близини критичне тачке ( $R_c, H_c, M_c$ ) скалира се по форми предвиђеној изразом (2.8) која је одређена вредностима критичних параметара  $\beta$  и  $\delta$ . С обзиром да код отворених система мале дебљине већину лавина можемо сматрати ефективно дводимензионалним (из разлога што лавине лако долазе до површина система и даље се шире у правцу димензија основе [73]) очекивано је да се колапс кривих магнетизације оствари за 2D вредности критичних експонената  $\beta$  и  $\delta$  [37]. Резултати приказани на слици 5.6 на којој је остварен колапс кривих магнетизације добијених на системима основе  $L = 8192$  различитих дебљина  $d = 2, 4, 8, 16$  уз вредности које предвиђају релације (5.22) и (5.23) као и вредности критичних експонената  $\beta = 0, 15$  и  $\delta = 32$ , иду у прилог тој претпоставци.

Код затворених танких система ситуација је другачија. Код њих нису све велике

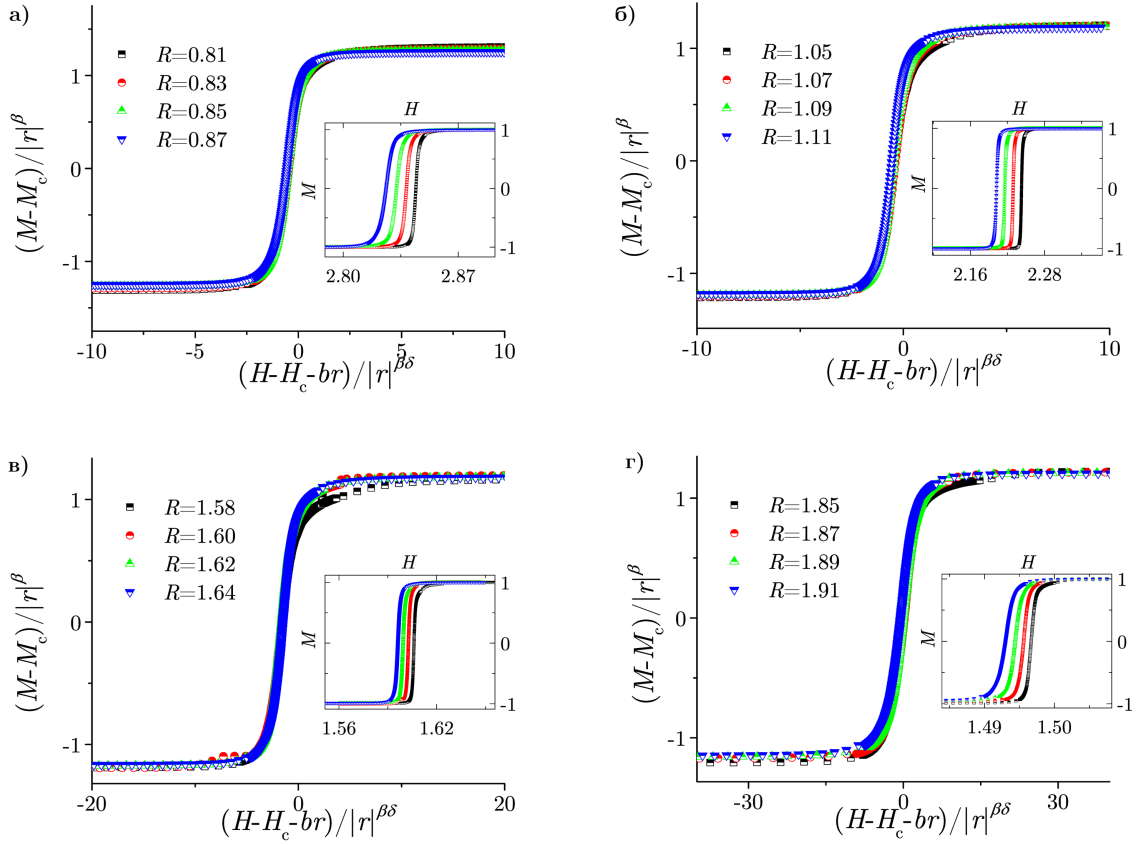
<sup>2</sup>Удео површинских спинова за системе дебљине  $l = 2, 4, 8, 16$  је 100%, 50%, 25%, 12, 5% итд.



Слика 5.5: На главном графику панела а) приказана је теоријска предикција критичне неуређености која је иста за затворене и отворене системе. На уметку су приказане вредности ефективне критичне неуређености у зависности од димензије основе  $L$  при фиксираној вредности дебљине  $l$ , као и одговарајуће криве предвиђене релацијом (5.7). На панелу б) приказане су аналогне величине које се односе на ефективно критично поље.



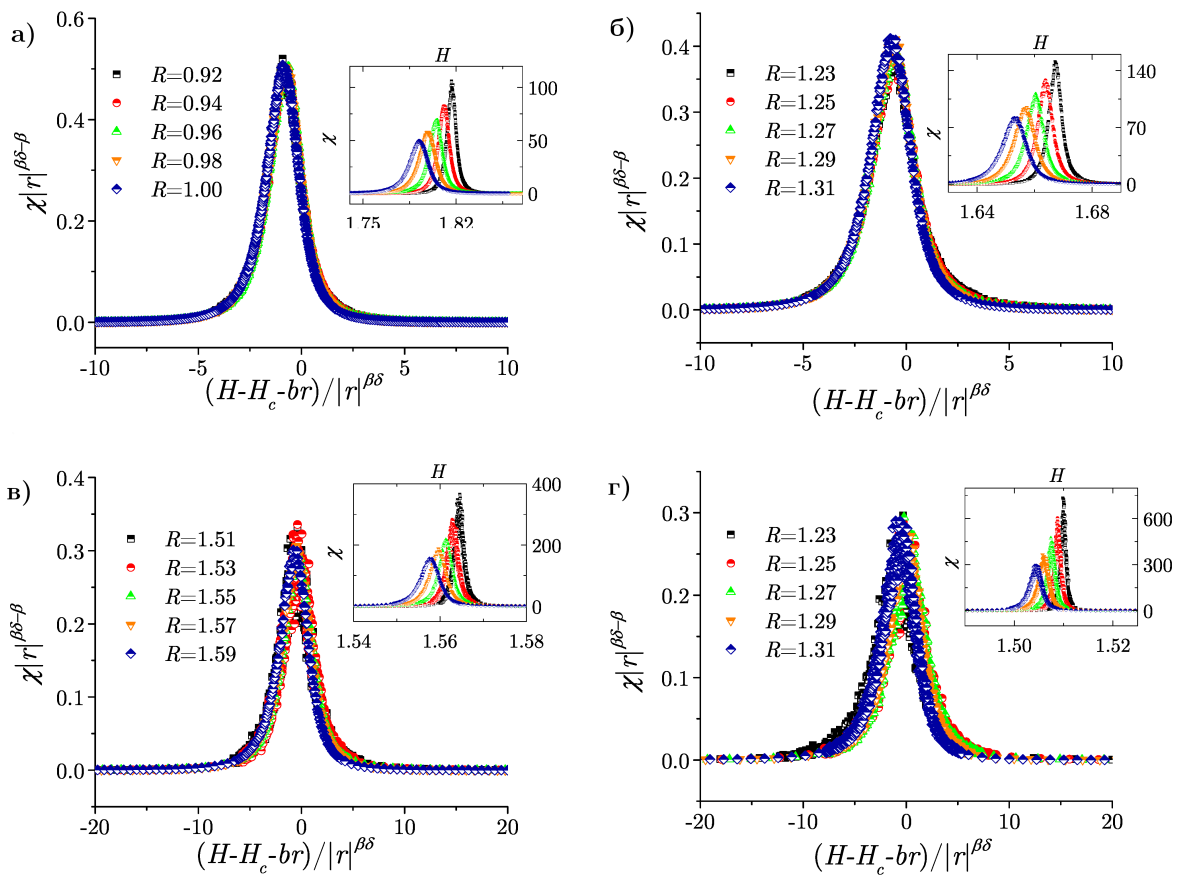
Слика 5.6: На главним графицима приказани су колапси кривих магнетизације предвиђени релацијом (5.23). Колапси су остварени помоћу критичних експонената који описују понашање дводимензионалног Изинговог модела са случајним пољем. Нескалиране криве магнетизације, приказане на уметцима, добијене су на отвореним системима различитих дебелина (панел а)  $l = 2$ , панел б)  $l = 4$ , панел в)  $l = 8$ , панел г)  $l = 16$ ) за различите неуређености  $R$ .



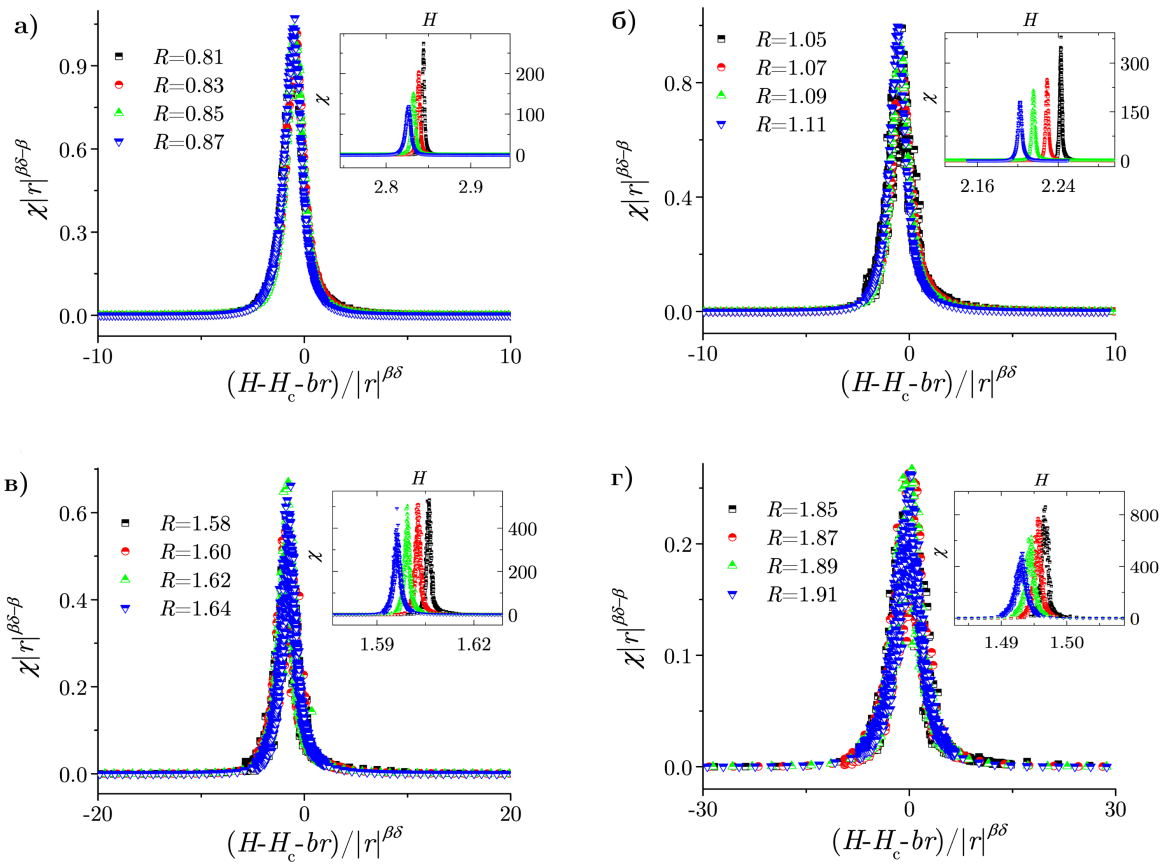
Слика 5.7: Исто као на слици 5.6 само за затворене системе.

лавине ефективно дводимензионалне јер гранични услови не утичу на простирање лавина. Због тога се колапс кривих магнетизације најтањих система ( $l = 2$  и  $l = 4$ ) не може остварити помоћу критичних експонената који описују 2D RFIM и  $R_c$  и  $H_c$  које предвиђају релације (5.22) и (5.24), панели а) и б) на слици 5.7, док је помоћу тих вредности могуће остварити колапс кривих магнетизације добијених на нешто дебљим системима ( $l = 8$  и  $l = 16$ ), што је приказано на панелима в) и г) слике 5.7. Код система дебљине  $d > 16$  колапс није могуће остварити помоћу ових критичних експонената јер је њихова дебљина довољно велика да понашање оваквих система веома мало подсећа на понашање 2D RFIM-а, те је неопходно њихове вредности мењати тако да се све више приближавају 3D вредностима [73].

На сликама 5.8 и 5.9 приказани су колапси кривих суспектибилности предвиђени изразом (2.9) остварени на исти начин и помоћу истог сета података као колапси на сликама 5.6 и 5.7.



Слика 5.8: Колапси кривих сусцептибилности добијени из истог сета података као на слици 5.6.



Слика 5.9: Колапси кривих сусцептибилности добијени из истог сета података као на слици 5.7.

# Глава 6

## Закључак

Резултати презентовани у првом делу дисертације показују да услед постављања прага детекције  $V_{th}$  на сигнале добијене из симулација атермалног Изинговог модела са случајним пољем долази до појаве временских корелација између лавина које се јављају као одговор система на промену спољног поља. Овим поступком из анализе искључујемо део сигнала који остаје испод прага чиме прелазимо на анализу параметара подлавина, као што су величина и трајање подлавине, али и различитих типова времена чекања. С обзиром да је у експерименталним сигнаlima немогуће елиминисати екстерни шум, у наставку је испитиван утицај присутног шума на корелације које настају када се у анализи сигнала постави праг детекције. Са тим циљем на сигнале добијене у нумеричким симулацијама Изинговог модела са случајним пољем вештачки су додаване две варијације екстерног шума, униформни и Гаусов шум који су генерисани из одговарајућих типова расподела. Главна карактеристика оба шума је њихова стандардна девијација  $\sigma$  и у раду није коришћен шум широк толико да значајно утиче на структуру сигнала.

Потенцијално један од најважнијих резултата јесте промена вредности експонента  $\gamma_{S/T}$  са порастом прага детекције  $V_{th}$ . Наиме, експонент тежи теоријској вредности  $\gamma_{S/T} = 1,77$  само када се на сигнал постави веома низак праг. Са повећањем висине дискриминационог нивоа, његова вредност опада све док се не устали на вредности  $V_{th}^{pl}$  која остаје таква у великом опсегу вредности прага детекције  $V_{th}$  и неуређености  $R$ . Овакав резултат може бити од велике користи у анализи експерименталних сигнала код којих је немогуће избећи постављање прага на добијени сигнал. Плато се одржава и у присуству спољног шума, али сада може да се формира на нижим вредностима прага него у одсуству шума. Ово значи да би у експерименту било веома тешко детектовати вредности  $\gamma_{S/T}$  више од плато вредности  $\gamma_{S/T}^{pl}$  из разлога што присуство шума поставља веома низак праг детекције изнад којег се јавља плато. Стабилне вредности  $\gamma_{S/T}^{pl}$  опадају са порастом ширине шума и то (скоро) линеарно у случају униформног, док је у случају Гаусовог шума промена линеарна све док стандардна девијација не достигне неку вредност при којој се зависност мења. Разлог лежи у томе што је униформни шум ограничен, а Гаусов не, што знатно повећава амплитуду Гаусовом шуму при истим вредностима стандардне девијације. Има смисла претпоставити да се понашање експонента  $\gamma_{S/T}^{pl}$  такође мења након неке довољно велике стандардне девијације униформног шума, међутим то је далеко од типичних експерименталних услова те стога такав сценарио није испитиван.

Степено понашање расподела времена чекања до којег долази када се на сигнал наметне одговарајући праг, указују на постојање временских корелација. Са друге стране, смањивањем висине прага нестаје степена зависност у расподелама времена чекања, и за најниже вредности прага детекције те расподеле постају експоненцијалне. Ова промена у понашању сугерише да постављање прага детекције доводи до појаве вре-



менских корелација иако је појава лавина случајан процес. Такође, расподеле величине и трајања подлавина имају степени облик и са порастом висине прага смањују се максималне величине и трајања присутне у сигналу (величина и време одсецања). Овакво понашање расподела слаже се са ранијим претпоставкама код crack-line модела пропагирања, што имплицира општији значај добијених резултата.

Увођењем прага детекције дефинисали смо трајање подлавине  $T$  и пет различитих доприноса укупном времену чекања:  $T_{\text{ext}}, T_{\text{int}}, T_{\text{ini}}, T_{\text{mid}}$  и  $T_{\text{end}}$ . Ове величине скалирају се по законима предвиђеним релацијама (3.43) и (3.45) уколико су претходно испуњени услови задати са (3.44) који намећу одговарајући однос између линеарне димензије система  $L$ , неуређености  $R$  и висине постављеног прага детекције  $V_{\text{th}}$ . Тиме је обезбеђено да се расподеле након трансформације предвиђене поменутиим законом скалирања преклопе. Разумно је очекивати да предложено скалирање важи за сигнале који имају карактеристике Бархаузеновог шума, односно релаксирају се у виду узастопних лавина.

Присуство шума утиче на појављивање свих типова времена чекања на тај начин што ефективно подиже ниво прага на којем се одређено време чекања јавља, што криву која показује број појављивања датог догађаја помера удесно. Да би се тај ефекат поништио уведен је параметар помака  $p(\sigma)$  којим се крива  $n(T_w; V_{\text{th}}, \sigma)$  транслира на место где би се налазила у одсуству шума. Параметар помака, који не зависи ни од димензије решетке ни од врсте времена чекања, степено расте са стандардном девијацијом примењеног шума при чему експонент зависи од неуређености система и врсте примењеног шума.

Тиме што утиче на  $n(T_w; V_{\text{th}}, \sigma)$  екстерни шум мења облик расподела свих времена чекања као и трајања подлавина тако што повећава број кратких, а смањује број веома дугих догађаја, што доводи до немогућности остварења предвиђеног колапса. Да би се овај проблем решио искоришћен је управо параметар помака. Због тога је предложена модификација (4.4) скалирајућих форми (3.43) и (3.45) уз помоћ које се колапс постиже применом функција помака на расподеле добијене из система који задовољавају услове (3.44) тако што се добијена расподела транслира дуж оса да би се поклопила са оригиналном расподелом добијеном без шума. Те функције имају различито понашање у зависности од врсте шума. У случају униформног шума имају степени облик, а у случају Гаусовог њихово понашање описује се функцијом грешке. Након вредности стандардне девијације која одговара задатој висини прага,  $\sigma_{\text{th}} \approx V_{\text{th}}/\sqrt{3}$ , те разлике нестају и функције асимптотски теже вредности примењеног прага  $V_{\text{th}}$ .

Вредно је помена да се упркос присуству шума задржава симетрија која се огледа у једнакости експонената који описују степено понашање расподела трајања и интерног времена чекања, коју предвиђа crack-line модел, што указује на општији значај добијених резултата.

Други део дисертације посвећен је изучавању неуниверзалних критичних параметара Изинговог модела са случајним пољем, пре свега ефективне критичне неуређености и ефективног критичног поља нееквилатералних система и утицају који на њих имају наметнути гранични услови. У термодинамичком лимиту ефективни критични параметри  $R_c^{\text{eff}}(l, L)$  и  $H_c^{\text{eff}}(l, L)$  теже критичним  $R_c^{\text{eff}}(l)$  и  $H_c^{\text{eff}}(l)$  који одговарају системима дебљине  $l$  са бесконачно великом основом. Релацијама (5.7), (5.18) и (5.20) дате су предикције понашања ових величина које су потврђене резултатима добијеним у нумеричким симулацијама система на којима су дуж основе  $L \times L$  примењени затворени, а дуж дебљине  $l$  отворени или затворени гранични услови.

Код система релативно велике дебљине не постоје значајне разлике узроковане променом граничних услова. Са друге стране, разлике се појављују код танких система и изразито су велике када је дебљина система  $l$  веома мала (нпр.  $l = 4$ ). Те разлике су изражене у колапсима кривих магнетизације и сусцептибилности. Наиме, колапси

се постижу са вредностима карактеристичним за 2D модел код отворених система свих дебљина, али не и код веома танких затворених система ( $l < 8$ ).

Резултати представљени у овој дисертацији добијени су из симулација на системима вођеним у адијабатском режиму. Нека од спроведених истраживања предвиђају да би резултати били другачији у случају вођења константном брзином као и са другачијим граничним условима, што би одговарало реалистичнијим ситуацијама. Реализација таквих истраживања је увелико у току.

# Литература

- [1] L. Laurson and M. J. Alava.  $1/f$  noise and avalanche scaling in plastic deformation. *Phys. Rev. E*, 74:066106, Dec 2006.
- [2] M. Rost, L. Laurson, M. Dubé, and M. Alava. Fluctuations in fluid invasion into disordered media. *Phys. Rev. Lett.*, 98:054502, Jan 2007.
- [3] G. Durin and S. Zapperi. The science of hysteresis. *Academic Press, Amsterdam*, 2006.
- [4] Dj. Spasojević, S. Bukvić, S. Miloshević, and H. E. Stanley. Barkhausen noise: Elementary signals, power laws, and scaling relations. *Physical Review E*, 54(2531), 1996.
- [5] D. S. Fisher. Collective transport in random media: from superconductors to earthquakes. *Physics Reports*, 301(1):113–150, 1998. ISSN 0370-1573.
- [6] F. Omori. On the after-shocks of earthquakes. *J. Coll. Sci., Imp. Univ., Japan*, 7: 111–200, 1894.
- [7] E. A. Jagla, François P. Landes, and Alberto Rosso. Viscoelastic effects in avalanche dynamics: A key to earthquake statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 112:174301, Apr 2014.
- [8] J. Davidsen and M. Baiesi. Self-similar aftershock rates. *Physical review. E*, 94 2-1: 022314, 2016.
- [9] J.-P. Bouchaud. Crises and collective socio-economic phenomena: Simple models and challenges. *Journal of Statistical Physics*, 151, Sep 2012.
- [10] N. Friedman, S. Ito, B. A. W. Brinkman, M. Shimono, R. E. L. DeVille, K. A. Dahmen, J. M. Beggs, and T. C. Butler. Universal critical dynamics in high resolution neuronal avalanche data. *Phys. Rev. Lett.*, 108:208102, May 2012.
- [11] C. Bédard, H. Kröger, and A. Destexhe. Does the  $1/f$  frequency scaling of brain signals reflect self-organized critical states? *Phys. Rev. Lett.*, 97:118102, Sep 2006.
- [12] M. Zaiser. - dislocation patterns in crystalline solids—phenomenology and modelling. In Georg Müller, Jean-Jacques Métois, and Peter Rudolph, editors, *Crystal Growth - From Fundamentals to Technology*, pages 215–238. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004. ISBN 978-0-444-51386-1.
- [13] T. Mäkinen, P. Karppinen, M. Ovaska, L. Laurson, and M. J. Alava. Propagating bands of plastic deformation in a metal alloy as critical avalanches. *Science Advances*, 6(41), 2020.
- [14] H. Salmenjoki, M. J. Alava, and L. Laurson. Machine learning plastic deformation of crystals. *Nature Communications*, 9, Dec 2018.

- [15] P. D. Ispánovity, L. Laurson, M. Zaiser, I. Groma, S. Zapperi, and M. J. Alava. Avalanches in 2d dislocation systems: Plastic yielding is not depinning. *Phys. Rev. Lett.*, 112:235501, Jun 2014.
- [16] S. Janičević, M. Ovaska, M. J. Alava, and L. Laurson. Avalanches in 2d dislocation systems without applied stresses. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2015(7):P07016, Jul 2015.
- [17] Z. Budrikis, S. Sandfeld, M. Zaiser, and M. Zapperi. Universal features of amorphous plasticity. *Nature Communications*, 8, 2017.
- [18] S. Sandfeld, Z. Budrikis, S. Zapperi, and D. F. Castellanos. Avalanches, loading and finite size effects in 2d amorphous plasticity: results from a finite element model. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2015(2):P02011, Feb 2015.
- [19] S. Janičević, L. Laurson, K. Måløy, S. Santucci, and M. Alava. Interevent correlations from avalanches hiding below the detection threshold. *Physical Review Letters*, 117:230601, Dec 2016.
- [20] S. Santucci, K. Tallakstad, L. Angheluta, L. Laurson, R. Toussaint, and K. Måløy. Avalanches and extreme value statistics in interfacial crackling dynamics. *Philosophical Transactions of The Royal Society A Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 377:20170394, Jan 2019.
- [21] J. Claycomb, K. Bassler, J. Miller, M. Nersesyan, and D. Luss. Avalanche behavior in the dynamics of chemical reactions. *Physical review letters*, 87:178303, Nov 2001.
- [22] R. Sanchez, D.E. Newman, and B. Carreras. Waiting-time statistics of self-organized-criticality systems. *Physical review letters*, 88:068302, Mar 2002.
- [23] L. I. Salminen, A. I. Tolvanen, and M. J. Alava. Acoustic emission from paper fracture. *Phys. Rev. Lett.*, 89:185503, Oct 2002.
- [24] J. Koivisto, J. Rosti, and M. J. Alava. Creep of a fracture line in paper peeling. *Phys. Rev. Lett.*, 99:145504, Oct 2007.
- [25] A. Corral. Long-term clustering, scaling, and universality in the temporal occurrence of earthquakes. *Physical review letters*, 92:108501, Apr 2004.
- [26] R. D’Amicis, R. Bruno, B. Bavassano, V. Carbone, and L. Sorriso-Valvo. On the scaling of waiting-time distributions of the negative imf  $b_z$  component. *Annales Geophysicae*, 24(10):2735–2741, 2006.
- [27] Y. Ben-Zion. Collective behavior of earthquakes and faults: Continuum-discrete transitions, progressive evolutionary changes, and different dynamic regimes. *Reviews of Geophysics*, 46(4), 2008.
- [28] M. Stojanova, S. Santucci, L. Vanel, and O. Ramos. High frequency monitoring reveals aftershocks in subcritical crack growth. *Phys. Rev. Lett.*, 112:115502, Mar 2014.
- [29] A. Tantot, S. Santucci, O. Ramos, S. Deschanel, M.-A. Verdier, E. Mony, Y. Wei, S. Ciliberto, L. Vanel, and P. C. F. Di Stefano. Sound and light from fractures in scintillators. *Phys. Rev. Lett.*, 111:154301, Oct 2013.
- [30] T. Mäkinen, A. Miksic, M. Ovaska, and Mikko J. Alava. Avalanches in wood compression. *Phys. Rev. Lett.*, 115:055501, Jul 2015.

- [31] P. Dietmar and R. C. Dante. Scaling properties of neuronal avalanches are consistent with critical dynamics, 2009.
- [32] L. Laurson, X. Illa, and M. Alava. The effect of thresholding on temporal avalanche statistics. *Journal of Statistical Mechanics Theory and Experiment*, 2009, Oct 2008.
- [33] G. Grinstein. On the lower critical dimension of the random field ising model (invited). *Journal of Applied Physics*, 55(6):2371–2376, 1984.
- [34] O. Perković, K. A. Dahmen, and J. P. Sethna. Disorder-Induced Critical Phenomena in Hysteresis: Numerical Scaling in Three and Higher Dimensions. *Physical Review B*, 59(6106), 1999.
- [35] F. J. Perez-Reche and E. Vives. Finite-size Scaling Analysis of the Avalanches in the Three-Dimensional Gaussian Random Field Ising Model with Metastable Dynamics. *Physical Review B*, 67(134421), 2003.
- [36] Dj. Spasojević, S. Janičević, and M. Knezević. Avalanche Distribution in the Two-Dimensional Nonequilibrium Zero-Temperature Random Field Ising Model. *Physical Review E*, 84(051119), 2011.
- [37] Dj. Spasojević, S. Janičević, and M. Knezević. Numerical Evidence for Critical Behavior of the Two-Dimensional Nonequilibrium Zero-Temperature Random Field Ising Model. *Physical Review Letters*, 106(175701), 2011.
- [38] K. A. Dahmen and J. P. Sethna. Hysteresis, Avalanches, and Disorder-Induced Critical Scaling: A Renormalization-Group Approach. *Physical Review B*, 53(14872), 1996.
- [39] O. Perković, K. A. Dahmen, and J. P. Sethna. Disorder-Induced Critical Phenomena in Hysteresis: A Numerical Scaling Analysis. *arXiv:cond-mat/9609072 v1*, 1996.
- [40] Dj. Spasojević, S. Janičević, and M. Knezević. Exact Results for Mean Field Zero Temperature Random Field Ising Model. *Europhys. Letters*, 76(5), 2006.
- [41] B. Ahrens and A. K. Hartmann. Critical behavior of the random-field ising model at and beyond the upper critical dimension. *Phys. Rev. B*, 83:014205, Jan 2011.
- [42] E. Puppín. Statistical properties of barkhausen noise in thin fe films. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5415–5418, Jun 2000.
- [43] S. Yang and J. L. Erskine. Domain wall dynamics and barkhausen jumps in thin-film permalloy microstructures. *Phys. Rev. B*, 72:064433, Aug 2005.
- [44] H-S. Lee, K-S. Ryu, I-S. Kang, and S-Ch. Shin. Universal Barkhausen Critical Scaling Behavior Observed in  $Ni_xFe_{1-x}$  ( $x = 0-0.5$ ) Films. *Journal of applied Physics*, 109(07E101), 2011.
- [45] K. J. Merazzo, D. C. Leitao, E. Jiménez, J. P. Araujo, J. Camarero, R. P. del Real, A. Asenjo, and M. Vázquez. Geometry-dependent magnetization reversal mechanism in ordered py antidot arrays. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 44(50):505001, Dec 2011.
- [46] H.-S. Lee, K.-S. Ryu, C.-Y. You, K.-R. Jeon, S.-H. Yang, S.S.P. Parkin, and S.-C. Shin. Asymmetric magnetic disorder observed in thermally activated magnetization reversal of exchange-biased irmn/cofe films. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 325: 13–16, 2013.

- [47] G. Z. dos Santos Lima, G. Corso, M. A. Correa, R. L. Sommer, P. Ch. Ivanov, and F. Bohn. Universal temporal characteristics and vanishing of multifractality in barkhausen avalanches. *Phys. Rev. E*, 96:022159, Aug 2017.
- [48] F. Bohn, M. A. Correa, N. R. Machado, R. D. Della Pace, C Chesman, and R. L. Sommer. Playing with universality classes of barkhausen avalanches. *Scientific Reports*, 8:11294, 2018.
- [49] G. Z. dos Santos Lima, G. Corso, M. A. Correa, R. L. Sommer, P. Ch. Ivanov, and F. Bohn. Universal temporal characteristics and vanishing of multifractality in Barkhausen avalanches. *Physical Review E*, 96(022159), 2017.
- [50] Dj. Spasojević, S. Mijatović, V. Navas-Portella, and E. Vives. Crossover from three-dimensional to two-dimensional systems in the nonequilibrium zero-temperature random-field ising model. *Physical Review E*, 97(012109), 2018.
- [51] L. A. Nunes Amaral, A.-L. Barabási, and H. E. Stanley. Universality classes for interface growth with quenched disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 73:62–65, Jul 1994.
- [52] A. A. Middleton and D. S. Fisher. Three-dimensional random-field ising magnet: Interfaces, scaling, and the nature of states. *Phys. Rev. B*, 65:134411, Mar 2002.
- [53] H. Barkhausen. Zwei mit Hilfe der neuen Verstärker entdeckte Erscheinungen. *Physik Z.*, 20:401–403, 1919.
- [54] P.-E. Weiss. L' hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique. *J. de Phys.*, 6:661–690, 1907.
- [55] E. Ising. Contribution to the Theory of Ferromagnetism. *Doctoral Dissertation*, 1924.
- [56] Dj. Spasojević. Kritično ponashanje Barkhauzenovog shuma - eksperiment i teorija. *Doktorska disertacija*, 2006.
- [57] G. Grinstein. Ferromagnetic Phase Transitions in Random Fields: The Breakdown of Scaling Laws. *Physical Review Letters*, 37(944), 1976.
- [58] Michael Aizenman and Jan Wehr. Rounding of first-order phase transitions in systems with quenched disorder. *Phys. Rev. Lett.*, 62:2503–2506, May 1989.
- [59] Amnon Aharony, Yoseph Imry, and Shang-keng Ma. Lowering of dimensionality in phase transitions with random fields. *Phys. Rev. Lett.*, 37:1364–1367, Nov 1976.
- [60] A P Young. On the lowering of dimensionality in phase transitions with random fields. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 10(9):L257–L256, May 1977.
- [61] G. Parisi and N. Surlas. Random magnetic fields, supersymmetry, and negative dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 43:744–745, Sep 1979.
- [62] J. Baró, Á. Corral, X. Illa, A. Planes, E. K. H. Salje, W. Schranz, D. E. Soto-Parra, and E. Vives. Statistical similarity between the compression of a porous material and earthquakes. *Phys. Rev. Lett.*, 110:088702, Feb 2013.
- [63] Dj. Spasojević, S. Janičević, and M. Knezević. Analysis of Spanning Avalanches in the Two-Dimensional Nonequilibrium Zero-Temperature Random-Field Ising Model. *Physical Review E*, 89(012118), 2014.

- [64] S. Prabodh and T. Diana. Hysteresis in random-field ising model on a bethe lattice with a mixed coordination number. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 49(23):235001, May 2016.
- [65] S. Janičević, S. Mijatović, and Dj. Spasojević. Critical Behavior of the Two-Dimensional Nonequilibrium Zero-Temperature Random Field Ising Model on a Triangular Lattice. *Physical Review E*, 95(042131), 2017.
- [66] S. Mijatović, D. Jovković, and Dj. Spasojević. Nonequilibrium athermal random-field ising model on hexagonal lattices. *Phys. Rev. E*, 103:032147, Mar 2021.
- [67] J. P. Sethna, K. A. Dahmen, and O. Perković. Random Field Ising Models of Hysteresis. *arXiv:cond-mat/0406320 v1.*, 2004.
- [68] J. P. Sethna, K. A. Dahmen, and O. Perković. The Science of Hysteresis. *Academic Press, Amsterdam*, 2006.
- [69] J. P. Sethna, K. A. Dahmen, S. Kartha, J. A. Krumhansl, B. W. Roberts, and J. D. Shore. Hysteresis and Hierarchies: Dynamics of Disordered-Driven First-Order Phase Transformation. *Physical Review Letters*, 70(3347), 1993.
- [70] S. Janičević, D. Knežević, S. Mijatović, and Dj. Spasojević. Scaling domains in the nonequilibrium athermal random field ising model of finite systems. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2021(1):013202, Jan 2021.
- [71] S. Janičević, D. Jovković, L. Laurson, and Dj. Spasojević. Threshold-induced correlations in the Random Field Ising Model. *Scientific Reports*, 8(2571), 2018.
- [72] S. Mijatović, D. Jovković, S. Janičević, and Dj. Spasojević. Critical disorder and critical magnetic field of the nonequilibrium athermal random-field ising model in thin systems. *Phys. Rev. E*, 100:032113, Sep 2019.
- [73] B. Tadić, S. Mijatović, S. Janičević, Dj. Spasojević, and G. J. Rodgers. The critical barkhausen avalanches in thin random-field ferromagnets with an open boundary. *Scientific Reports*, 9(6340), Oct 2019.
- [74] K. Kaneda, Y. Okabe, and M. Kikuchi. Shape effects of finite-size scaling functions for anisotropic three-dimensional ising models. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32(42):7263–7271, Oct 1999.





## Биографија

Драгутин Јовковић рођен је 9. јуна 1990. године у Чачку. Одрастао је у Гучи, где је завршио основну школу. Гимназију у Чачку завршио је 2009. године након чега је уписао студије теоријске и експерименталне физике на Физичком факултету Универзитета у Београду. Након што је 2014. године дипломирао са просечном оценом 9,13, уписао је мастер студије на истом факултету. Мастер тезу (Анализа критичног понашања Изинговог модела са случајним пољем на нули апсолутне температуре при преласку са тродимензионалних на дводимензионалне системе) урађену под менторством проф. др Ђорђа Спасојевића одбранио је септембра 2015. са оценом 10. Сарадња са проф. Спасојевићем настављена је на докторским студијама и до сада је уродила објављивањем пет научних радова, али и прикупљањем материјала за још неколико наредних. Од јануара 2016. запослен је као асистент на Катедри за техничку физику Рударско-геолошког факултета Универзитета у Београду, а од јуна 2018. ангажован је у оквиру пројекта 171027 - Суперпроводност, магнетизам и флукуационе појаве.

## Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Драгутин Јовковић

Број индекса 8005/2015

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Корелације у сигналима типа Баркхаузенoвoг шума

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 27. 05. 2021



Изјава о истоветности штампане и електронске верзије  
докторског рада

Име и презиме аутора Драгутин Јовковић

Број индекса 8005/2015

Студијски програм Физика кондензоване материје  
и статистичка физика

Наслов рада Корелације у сигнаlima типа Баркхаузенoвoг шума

Ментор проф. др Ђорђе Спасојевић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, 27. 05. 2021

  
\_\_\_\_\_

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

### Корелације у сигналима типа Баркхаузенoвoг шума

---

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.

Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 27. 05. 2021

  
\_\_\_\_\_

1. Ауторство. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прерада. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.