

ALFA BK UNIVERZITET

FAKULTET ZA MATEMATIKU I RAČUNARSKE NAUKE



**OPTIMIZACIJA PARAMETARA TRO-PARAMETARSKOG
KUBNOG INTERPOLACIONOG JEZGRA ZA PROCENU
FUNDAMENTALNE FREKVENCIJE GOVORNOG SIGNALA U
SPEKTRALNOM DOMENU**

Doktorska disertacija

Kandidat:

mr Nataša Savić 1/2014

Mentor:

prof. dr Zoran Milivojević

Beograd, 2017.

ALFA BK UNIVERSITY

**FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER
SCIENCE**



**THE OPTIMIZATION OF THREE-PARAMETRIC CUBIC
INTERPOLATION KERNEL PARAMETERS IN ORDER TO
ESTIMATE THE FUNDAMENTAL FREQUENCY OF SPEECH
SIGNAL IN SPECTRAL DOMAIN**

PhD thesis

Candidate:

mr Nataša Savić 1/2014

Mentor:

prof. Zoran Milivojević, PhD

Belgrade, 2017.



Алфа БК Универзитет

**ИЗЈАВА МЕНТОРА О ПРОЦЕНИ ОРИГИНАЛНОСТИ И
САГЛАСНОСТИ ЗА ПРЕДАЈУ
УРАЂЕНЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ**

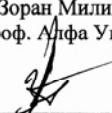
Овим изјављујем да сам након прегледаног рукописа докторске дисертације сагласан да кандидат мр Наташа Савић може да преда Служби за последипломске студије Универзитета урађену докторску дисертацију под називом:

**ОПТИМИЗАЦИЈА ПАРАМЕТАРА ТРО-ПАРАМЕТАРСКОГ КУБНОГ
ИНТЕРПОЛАЦИОНОГ ЈЕЗГРА ЗА ПРОЦЕНУ ФУНДАМЕНТАЛНЕ
ФРЕКВЕНЦИЈЕ ГОВОРНОГ СИГНАЛА У СПЕКТРАЛНОМ ДОМЕНУ,**

ради организације њене оцене и одбране, и да иста садржи оригиналан научни допринос који се састоји у *аналитичком одређивању тро-параметарског кубног конволуционог језгра, чијом применом је повећана прецизност процене фундаменталне фреквенције говорног сигнала.*

Београд, 5/5/2017 године

др Зоран Миливојевић,
ред. проф. Алфа Универзитета



(Потпис ментора)

Komisija
za pregled, ocenu i javnu odbranu doktorske disertacije

1. dr Mile Petrović, red. prof. FTN Kosovska Mitrovica-predsednik komisije

(Oblast: Elektrotehničko i računarsko inženjerstvo)

2. dr Nebojša Denić van. prof. Alfa BK Univerziteta- član

(Oblast: Informacioni sistemi i tehnologije)

3. dr Lazar Kopanja, docent Alfa BK Univerziteta- član

(Oblast: Informacioni sistemi i tehnologije)

4. dr Zoran Milivojević, red. prof. Alfa BK Univerziteta, mentor-član

(Oblast: Informacioni sistemi i tehnologije)

Datum usmene odbrane:

Zahvalnica

Zahvaljujem se prof. dr Zoranu Milivojeviću što me je upoznao sa novim informacionim disciplinama i primeni matematičkih metoda na rešavanju problema digitalnog procesiranja govora i slike, u kojima sam ostvarila određene doprinose koji i čine deo ove disertacije, na svestranoj pomoći, usmeravanju i vremenu koje mi je posvetio pri izradi ove disertacije.

Zahvaljujem se kolegama i prijateljima što su verovali u mene i podsticali da istrajem.

Zahvaljujem se svojoj porodici na podršci i razumevanju.

OPTIMIZACIJA PARAMETARA TRO-PARAMETARSKOG KUBNOG INTERPOLACIONOG JEZGRA ZA PROCENU FUNDAMENTALNE FREKVENCIJE GOVORNOG SIGNALA U SPEKTRALNOM DOMENU

Rezime

Iznalaženje optimalnih algoritama za procenu parametara govora i slike aktuelan je zadatak u obradi signala. Kod diskretnih električnih signala često se javlja potreba za interpolacijom (gubitak sempla, promena frekvencije odmeravanja, promena dimenzije slike, transformacija slike, zumiranje, rotacija, procena fundamentalne frekvencije u vremenskom i frekvencijskom domenu itd.) u cilju procene nekih parametara signala. Danas se intenzivno primenjuje konvoluciona interpolacija, kod koje se koristi interpolaciono jezgro. Mnogi algoritmi baziraju se na primeni parametarskih konvolucionih jezgara. Parametarska interpolaciona konvoluciona jezgra su pogodna su za *prilagođavanje jezgra* problematici u cilju smanjenja greške interpolacije. Minimiziranjem greške saglasno definisanom kriterijumu određuju se optimalne vrednosti parametra jezgra.

U ovoj doktorskoj disertaciji tretirana je problematika optimizacije parametara parametarskih interpolacionih konvolucionih jezgara za procenu fundamentalne frekvencije sinusnog i govornog signala. Kako bi se povećala preciznost interpolacije u ovom radu izvršena je konstrukcija, odnosno određen je analitički izraz za tro-parametarsko kubno konvoluciono jezgro. Određen je algoritam za optimizaciju parametara, i algoritam procene fundamentalne frekvencije čijom primenom je došlo do povećanja preciznosti procene fundamentalne frekvencije.

Opisan je algoritam minimiziranja talasavosti spektralne karakteristike. Primenom ovog algoritma određeni su optimalni parametri: a) Kvadratnog 1P, b) Kejsovog 1P, c) Kejsovog 2P, d) Grevilleovog 1P, e) Grevilleovog 2P i f) tro-parametarskog kubnog konvolucionog jezgra. Polazeći od ideje da spektralna karakteristika jezgra, $H(f)$ bude dobra aproksimacija karakteristike idealnog jezgra oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$ u propusnom i nepropusnom opsegu (Box funkcija $H_B(f)$) i minimiziranjem greške sličnosti određene su optimalne vrednosti parametra Kejsovog 1P, Kejsovog 2P i Grevilleovog 1P jezgra. Sa idejom da prvi izvod spektralne karakteristike 1P Kejsovog jezgra bude dobra aproksimacija prvog izvoda box funkcije i minimiziranjem njihove razlike određena je optimalna vrednost parametra jezgra.

Procena fundamentalne frekvencije sinusoidalnog i govornog signala vršena je uz prethodnu modifikaciju signala prozorskim funkcijama. U ovoj disertaciji korišćene su: a) Hamming-ova, b) Hann-ova c) Blackman-ova, d) pravougaona, e) Kaiser-ova i f) trougaona prozorska funkcije.

Kao mera kvaliteta, odnosno mera preciznosti algoritma za procenu f_0 , korišćena je srednje kvadratne greška (**engl.** *Mean Square Error*, MSE). Kao test signali korišćeni su: a) simulacioni sinusni test signal i b) realni govorni test signal.

U cilju povećanja: a) preciznosti procene i b) brzine izvršenja algoritma određeni su analitički izrazi za poziciju maksimuma rekonstruisane funkcije $X_r(f)$ koja je dobijena primenom konvolucije sa Kejsovim 2P jezgrom i 3PCC jezgrom.

Izvršena je komparativna analiza konvolucionih jezgara i primenjenih prozorskih funkcija. Detaljnom komparativnom analizom pokazano je da se najmanja greška procene fundamentalne frekvencije govornog signala dobija primenom troparametarskog interpolacionog jezgra.

Ključne reči: interpolacija, konvolucija, parametarsko jezgro, optimizacija, procena fundamentalne frekvencije

Naučna oblast:

Uža naučna oblast:

UDK:

THE OPTIMIZATION OF THREE-PARAMETRIC CUBIC INTERPOLATION KERNEL PARAMETERS IN ORDER TO ESTIMATE THE FUNDAMENTAL FREQUENCY OF SPEECH SIGNAL IN SPECTRAL DOMAIN

Abstract

Finding the optimal algorithms to estimate the parameters of speech and images is a current task in signal processing. With discrete electrical signals, there is often a need for interpolation (sample loss, change in sampling frequency, change in image dimension, image transformation, zooming, rotation, estimating the fundamental frequency in time and frequency domain, etc.) in order to estimate some of the signal parameters. Convolution interpolation which uses interpolation kernel is being used intensively at present. A lot of algorithms are based on the application of parametric convolution kernels. Parametric interpolation convolution kernels are suitable for *the adjustment of the kernel* to the problem in order to reduce interpolation error. By minimizing the error in accordance with the defined criteria, the optimal values of kernel parameter are determined.

This PhD thesis deals with the problem of optimizing the parameters of parametric interpolation convolution kernels in order to estimate the fundamental frequency of speech and sinusoidal signals. In order to increase the precision of interpolation a construction was performed in this paper, that is, the analytical form for the three-parametric cubic convolution kernel was determined. An algorithm for the optimization of parameters was determined, as well as the algorithm for estimating fundamental frequency whose implementation led to increasing the precision of estimation of fundamental frequency.

The algorithm for minimizing the wiggles of the spectral characteristic was described. By applying this algorithm, the optimal parameters of the following kernels were obtained: a) Quadratic 1P, b) Keys' 1P, c) Keys' 2P, d) Greville's 1P, e) Greville's 2P and f) three-parametric cubic convolution kernel. Starting from the idea that the spectral characteristic of the kernel, $H(f)$ is a good approximation of characteristic of an ideal kernel in the form $\sin(\pi x)/(\pi x)$ in passband and stopband range (Box function $H_B(f)$) and by minimizing the similarity error, the optimal values of the parameters for the following kernels were determined: Keys' 1P, Keys' 2P and Greville's 1P kernel. With the idea that the first derivative of the spectral characteristic of 1P Keys' kernel is a good approximation of first derivative of the box function and by minimizing their difference, the optimal value of the parameter was determined.

The estimation of fundamental frequency of the sinusoidal and speech signal was performed after prior modification of the signal by window functions. This thesis used: a) Hamming's, b) Hann's c) Blackman's, d) rectangular, e) Kaiser's and f) triangular window functions.

As a quality measure, that is, as a measure of algorithm precision in estimating f_0 , *Mean Square Error (MSE)* was used. The following signals were used as test signals: a) simulated sinusoidal test signal and b) real speech test signal.

In order to increase: a) the precision of estimation and b) the speed of algorithm performance, analytical formulas for maximum of the reconstructed function $X_r(f)$ were determined. This function was obtained by applying convolution with Keys' 2P kernel and 3PCC kernel.

A comparative analysis of convolution kernels and the applied window functions was performed. A detailed comparative analysis showed that the least error of estimating the fundamental frequency of speech signal is obtained by the use of three-parametric interpolation kernel.

Key words: interpolation, convolution, parametric kernel, optimization, estimation fundamental frequency

Scientific area:

Specific scientific area:

UDK:

SADRŽAJ

SADRŽAJ	i
UVOD	1
1. HRONOLOŠKI RAZVOJ INTERPOLACIJE	9
2. INTERPOLACIJA	16
2.1 Uvod	16
2.2 Interpolacija polinomima	17
2.2.1 Lagranževov interpolacioni polinom	18
2.2.2 Njutnov interpolacioni polinom	19
2.2.2.1 Prvi Njutnov interpolacioni polinom	19
2.2.2.2 Drugi Njutnov interpolacioni polinom	19
2.2.3 Tejlorov polinom	20
2.3 Interpolacija po segmentima (piecewise) polinomima	20
2.3.1 Po segmentima linearna interpolacija	21
2.3.2 Po segmentima kubna interpolacija	21
2.4 Splajn	22
2.5 Kubna konvolucija	22
2.6 Interpolacija trigonometrijskim funkcijama	23
3. PARAMETARSKA KONVOLUCIONA INTERPOLACIJA	24
3.1 Uvod	24
3.2 Konvolucija	24

3.3. Parametarska konvoluciona jezgra.....	25
3.3.1 Jednparametarska interpolaciona jezgra	26
3.3.1.1 Kvadratno Dodgsonovo jezgro.....	26
3.3.1.2 Kejsovo 1P jezgro,	27
3.3.1.3 Grevilleovo 1P jezgro,.....	28
3.3.1.4 Polinomijalno 1P jezgro petog reda	28
3.3.1.5 Kvadratno 1P jezgro.....	29
3.3.1.6 Jedno-parametarsko Polya jezgro.....	30
3.3.1.7 Polya racionalno jezgro	30
3.3.1.8 Polya kvazi-racionalno jezgro	31
3.3.2 Dvo-parametarska interpolaciona jezgra	31
3.3.2.1 Kejsovo 2P jezgro,	31
3.3.2.2 Grevilleovo 2P jezgro.....	32
3.4 Tro-parametarsko kubno konvoluciono jezgro	32
4. OPTIMIZACIJA PARAMETARA INTERPOLACIONIH JEZGARA.....	35
4.1 Uvod.....	35
4.2 Idealno interpolaciono jezgro.....	36
4.2.1 Vremenski oblik.....	36
4.2.2 Amplitudska karakteristika	36
4.2.3 Fizička ostvarljivost.....	36
4.2.4 Realno ostvarljiva interpolaciona jezgra.....	38
4.3 Algoritam minimiziranja talasavosti spektralne karakteristike	38
4.4 Optimizacija parametra kvadratnog 1P jezgra	39
4.5 Optimizacija parametra Kejsovog 1P jezgra.....	42
4.5.1 Minimiziranje interpolacione greške u prostornom domenu.....	42
4.5.2 Minimiziranje talasavosti spektralne karakteristike	43

4.5.3 Minimiziranje greške sličnosti spektralnih karakteristika	46
4.5.4 Minimiziranje razlike izvoda spektralnih karakteristika	48
4.6 Optimizacija parametra Kejsovog 2P jezgra	49
4.6.1 Minimiziranje talasavosti spektralne karakteristike	50
4.6.2 Minimiziranje greške sličnosti spektralnih karakteristika	51
4.7 Optimizacija parametra Grevilleovog 1P jezgra	53
4.7.1 Minimiziranje talasavosti spektralne karakteristike	53
4.7.2 Minimiziranje greške sličnosti spektralnih karakteristika	57
4.7.3 Nagib spektralne karakteristike	58
4.8 Optimizacija parametara Grevilleovog 2P jezgra	58
4.9 Optimizacija parametara tro-parametarskog jezgra	60
4.10 Eksperimentalni rezultati i analiza	65
4.10.1 Baza	66
4.10.2 Eksperiment	66
4.10.2.1 Eksperiment primenom 1P jezgra	67
4.10.2.2 Eksperiment primenom 2P jezgra	69
4.10.2.3 Eksperiment primenom 3P jezgra	70
4.10.3 Rezultati i analiza.....	71
4.10.3.1 Kvadratno 1P jezgro.....	71
4.10.3.2 Kejsovo 1P jezgro	74
4.10.3.3 Kejsovo 2P jezgro	81
4.10.3.4 Grevilleovo 1P jezgro.....	84
4.10.3.5 Grevilleovo 2P jezgro.....	90
4.10.3.6 Tro-parametarsko jezgro	93
5. PROCENA FUNDAMENTALNE FREKVENCIJE U SPEKTRALNOM DOMENU	98
5.1 Uvod.....	98

5.2 Fundamentalna frekvencija	98
5.2.1 Spektar sinusnog signala.....	99
5.2.2 Spektar govornog signala.....	99
5.3 Procena fundamentalne frekvencije	100
5.3.1 Peak-Picking algoritam.....	101
5.3.2 Interpolacija	102
5.3.3 Konvoluciona interpolacija.....	102
5.3.4 Algoritam procene fundamentalne frekvencije.....	103
5.4 Poliya interpolaciona jezgra	107
5.4.1 Kvazi-racionalno Polya jezgro.....	108
5.4.1.1 Eksperimentalni rezultati.....	108
5.4.1.2 Analiza rezultata.....	110
5.4.2 Racionalno Polya 1P jezgro	111
5.4.2.1 Eksperimentalni rezultati.....	111
5.4.2.2 Analiza rezultata.....	113
5.4.3 Polya 1P jezgro	114
5.4.3.1 Eksperimentalni rezultati.....	115
5.4.3.2 Analiza rezultata.....	116
5.5 Polinomijalna interpolaciona jezgra.....	116
5.5.1 Jednparametarska jezgra	117
5.5.1.1 Algoritam procene optimalnih vrednosti parametra.....	117
5.5.1.2 Kvadratno interpolaciono jezgro	119
5.5.1.2.1 Eksperimentalni rezultati.....	119
5.5.1.2.2 Analiza rezultata.....	120
5.5.1.3 Kubno interpolaciono jezgro (Kejsovo).....	121
5.5.1.3.1 Eksperimentalni rezultati.....	122

5.5.1.3.2 Analiza rezultata.....	125
5.5.1.4 Interpolaciono jezgro petog reda.....	126
5.5.1.4.1 Eksperimentalni rezultati.....	126
5.5.1.4.2 Analiza rezultata.....	129
5.5.2 Dvoparametarsko jezgro (Kejsovo).....	129
5.5.2.1 Algoritam procene optimalnih vrednosti.....	130
5.5.2.2 Kubno interpolaciono jezgro.....	130
5.5.2.2.1 Eksperimentalni rezultati.....	132
5.5.2.2.2 Analiza rezultata.....	133
5.5.3 Troparametarsko jezgro.....	134
5.5.3.1 Algoritam procene optimalnih vrednosti.....	134
5.5.3.2 Kubno interpolaciono jezgro.....	134
5.5.3.2.1 Eksperimentalni rezultati.....	135
5.5.3.2.2 Analiza rezultata.....	137
5.6 Zaključak.....	138
ZAKLJUČAK.....	139
LITERATURA.....	150
Biografija autora.....	166

Popis slika

Sl. 2.1 Interpolacija funkcije polinomom.....	18
Sl. 2.2 Greška interpolacije.....	18
Sl. 2.3 Linearna interpolacija po segmentima.....	21
Sl. 2.4 Kubna interpolacija po segmentima.....	22
Sl. 2.5 Interpolacija splajnom.....	23
Sl. 3.1 Kejsovo 1P jezgro za neke vrednosti parametra α	27
Sl. 3.2 Grevilleovo jednoparametarsko jezgro za neke vrednosti parametra α	28
Sl. 3.3 Interpolaciono jezgro petog reda za $\alpha= 3/64$	29
Sl. 3.4 Kvadratno 1P jezgro za neke vrednosti parametra α	29
Sl. 3.5 Kejsovo dvo-parametarsko jezgro za neke vrednosti parametara α i β	31
Sl. 3.6 Greville 2P jezgro za neke vrednosti parametara α i β	32
Sl. 3.7 Tro-parametarsko jezgro za neke vrednosti parametara α , β i γ	34
Sl. 4.1 Sinc funkcija na različitim segmentima a) $[-3, 3]$, b) $[-10, 10]$, c) $[-50, 50]$, d) $[-100, 100]$..	37
Sl. 4.2 Box funkcija i spektralne karakteristike odsečene sinc funkcije na različitim segmentima a) $[-3, 3]$, b) $[-10, 10]$, c) $[-50, 50]$, d) $[-100, 100]$	38
Sl. 4.3 Komponente Kejsovog 1P jezgra a) r_0 i b) r_1	44
Sl. 4.4 Spektralna karakteristika Kejsovog 1P jezgra, H , i njene komponente H_0 i H_1	45
Sl. 4.5 Zavisnost MSE od parametra α	47
Sl. 4.6 Spektralne karakteristike idealnog interpolacionog jezgra i Kejsovog 1P jezgra.....	48
Sl. 4.7 Zavisnost MSE od parametra Kejsovog 1P jezgra.....	49
Sl. 4.8 Komponente Kejsovog 2P jezgra.....	50
Sl. 4.9 Algoritam procene optimalnih parametara 2P jezgra.....	52
Sl. 4.10 Totalna srednja kvadratna greška izmedju amplitudske karakteristike 2P Kejsovog jezgra, H , i idealne H_B spektralne karakteristike u zavisnosti od parametara α , β	53
Sl. 4.11 Komponente r_0 i r_1 Grevilleovog jednoparametarskog jezgra.....	54
Sl. 4.12 Spektralne komponente Grevilleovog jednoparametarskog interpolacionog jezgra: H_0 i H_1	56

Sl. 4.13 Zavisnost MSE od parametra Grevilleovog 1P jezgra.	57
Sl. 4.14 .Komponente tro-parametarskog jezgra a) r_0 , b) r_1 , c) r_2 i d) r_3	62
Sl. 4.15 Spektralna karakteristika H i komponente H_0 , H_1 , H_2 i H_3 tro-parametarskog jezgra.....	64
Sl. 4.16 Spektralne karakteristike idealnog jezgra i tro-parametarskog jezgra.....	65
Sl. 4.17 Algoritam eksperimentalne procene parametara 1P jezgra.	68
Sl. 4.18 Algoritam eksperimentalne procene parametara 2P jezgra.	69
Sl. 4.19 Algoritam eksperimentalne procene parametara 3P jezgra.	70
Sl. 4.20 Zavisnost MSE od parametra kvadratnog 1P jezgra kod nekih test slika.....	73
Sl. 4.21 Funkcija Gausove normalne raspodele optimalnih vrednosti parametara α kod test slika...	73
Sl. 4.22 Zavisnost MSE od parametra Kejsovog 1P jezgra kod nekih test slika.	78
Sl. 4.23 Spektralna karakteristika 1P Kejsovog jezgra (H_K) i idealnog interpolacionog jezgra $\sin(\pi x)/(\pi x)$ (H_{box}), i tangenta spektralne karakteristike Kejsovog jezgra (y_{tag}) u graničnoj tački propusnog opsega za a) $\alpha=-0.5$, i b) $\alpha=-1.3$	81
Sl. 4.24 MSE(α , β) za ton G_3 za slučaj primene a) Kejsovog 2P za $f_s=44100$ Hz b) Kejsovog 1P jezgra za $f_s=44100$ Hz c) Kejsovog 2P za $f_s=22050$ Hz d) Kejsovog 1P jezgra za $f_s=22050$ Hz e) Kejsovog 2P za $f_s=8000$ Hz f) Kejsovog 1P jezgra za $f_s=8000$ Hz.	83
Sl. 4.25 Funkcija Gausove raspodele optimalnih vrednosti a) parametra α b) parametra β za frekvencije semplovanja $f_s=44.1$ kHz i $f_s=22.05$ kHz.....	83
Sl. 4.26 Vrednost MSE(α) kod interpolacije tona G_2 za frekvencije semplovanja a) $f_s=44.1$ kHz, b) $f_s=22.05$ kHz i c) $f_s=8$ kHz.....	85
Sl. 4.27 Vrednost MSE(α) kod interpolacije logatoma Noma semplovanja a) $f_s=44.1$ kHz , b) $f_s=22.05$ kHz i c) $f_s=8$ kHz.....	86
Sl. 4.28 Box funkcija, spektralna karakteristika i tangenta spektralne karakteristike Grevilleovog jezgra u graničnoj tački propusnog opsega i to za a) $\alpha=-3/16$ i b) $\alpha=-0.8$	87
Sl. 4.29 MSE(α , β) za test slike a) Grevilleovog 2P jezgra b) Grevilleovog 1P jezgra.....	92
Sl. 4.30 Funkcija Gausove raspodele optimalnih vrednosti a) parametra α b) parametra β i c) parametra γ kod interpolacije test slika.....	94
Sl. 4.31 Funkcija Gausove raspodele optimalnih vrednosti a) parametra α za $f_s=44.1$ kHz b) parametra β za $f_s =44.1$ kHz, c) parametra γ za $f_s =44.1$ kHz, d) parametra α za $f_s =22.05$ kHz e) parametra β za $f_s =22.05$ kHz, f) parametra γ za $f_s =22.05$ kHz, h) parametra α za $f_s =8$ kHz i) parametra β za $f_s =8$ kHz, j) parametra γ za $f_s =8$ kHz kod interpolacije audio signala	97
Sl. 5.1 Sinusoidalni signal: a) vremenski prikaz, b) 1/8 spektra, c) uvećanje spektra.....	99

Sl. 5.2 Govorni signal: a) vremenski oblik, b) vremenski oblik u trajanju 32 ms, c) 1/8 spektra i d) uvećanje spektra u okolini dominantne komponente.....	101
Sl. 5.3 Pikovi u spektru govornog signala.	101
Sl. 5.4 Greška procene fundamentalne frekvencije kod primene Peak-Picking algoritma.....	102
Sl. 5.5 Algoritam procene fundamentalne frekvencije.	104
Sl. 5.6 Vremenski oblik prozorskih funkcija: a) Hamming-ova, b) Hann-ova, c) Blackman-ova, d) pravougaona, e) Kaiser-ova i f) trougaona.....	106
Sl. 5.7 Spektralne karakteristike prozorskih funkcija:a) Hamming-ove, b) Hann-ove, c) Blackman-ove, d) pravougaone, e) Kaiser-ove i f) trougaone.	106
Sl. 5.8 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene kvazi-racionalnog Polya jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.	109
Sl. 5.9 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene kvazi-racionalnog Polya jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.....	110
Sl. 5.10 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene racionalnog Polya 1P jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.....	112
Sl. 5.11 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene racionalnog Polya 1P jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.....	113
Sl. 5.12 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Polya 1P jezgra za a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.....	116
Sl. 5.13 Algoritam procene optimalnog parametra jezgra.	118
Sl. 5.14 Zavisnost MSE od parametra α Kvadratnog 1P jezgra kod procene fundamentalne frekvencije govornog signala za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju [Savić1, 2014].....	120
Sl. 5.15 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Kejsovog 1P jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.	123
Sl. 5.16 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene Kejsovog 1P jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.	124

Sl. 5.17 Greška procene fundamentalne frekvencije za slučaj primene Hamming-ove prozorske funkcije za: a) sinusni signal i b) govorni signal.	125
Sl. 5.18 Zavisnost MSE od parametra jezgra petog reda za sinusni signal.....	128
Sl. 5.19 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene jezgra petog reda za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.....	129
Sl. 5.20 Algoritam procene optimalnih parametra dvo-parametarskog jezgra.	131
Sl. 5.21 Primena trougaone prozorske funkcije na sinusni signal a) $MSE(\alpha, \beta)$ primenom Kejs 2P, b) pozicija $\min(MSE(\alpha, \beta))$ u ravni $(\alpha\beta)$	133
Sl. 5.22 Primena trougaone prozorske funkcije na govorni signal (a) $MSE(\alpha, \beta)$ primenom Kejs 2P, b) pozicija $\min(MSE(\alpha, \beta))$ u ravni $(\alpha\beta)$	133
Sl. 5.23 Algoritam određivanja optimalnih parametara tro-parametarskog jezgra.....	136

Popis tabela

Tbl. 4.1. Eksperimentalne vrednosti optimalnog parametara jezgra, MSE_{min} i greška procene optimalnog parametra kod test slika.	71
Tbl. 4.2 Eksperimentalne vrednosti optimalnog parametara Kejsovog 1P jezgra i MSE_{min}	74
Tbl. 4.3 Minimalne vrednosti srednje kvadratne greške, MSE_{min} , optimalne vrednosti parametra jezgra, α_{opt} , koeficijenti, k_{α} , i uglovi nagiba, θ , tangente u graničnoj tački propusnog opsega.	79
Tbl. 4.4 $MSE_{min}(\alpha)$, α_{opt} i β_{opt} za Kejsovo 2P jezgro pri interpolacije audio signala za različite frekvencije semplovanja.	81
Tbl. 4.5 Parametri funkcije Gausove raspodele.	83
Tbl. 4.6 $MSE_{min}(\alpha)$ i α_{opt} kod interpolacije audio signala za različite frekvencije semplovanja.	85
Tbl. 4.7 $MSE_{min}(\alpha)$ i α_{opt} kod interpolacije govornog signala za različite frekvencije semplovanja.	86
Tbl. 4.8 Vrednosti koeficijenta pravca tangente (k_{α}) amplitudske karakteristike H u tački $f=0.5$ za različite vrednosti parametra α i $MSE(\alpha)$	87
Tbl. 4.9 Eksperimentalne vrednosti optimalnih parametara Grevilleovog 2P jezgra i MSE_{min}	90
Tbl. 4.10 Eksperimentalne vrednosti optimalnih parametara Grevilleovog 1P jezgra i MSE_{min}	90
Tbl. 4.11 $MSE_{min}(\alpha, \beta, \gamma)$ i α_{opt} , β_{opt} , γ_{opt}	93
Tbl. 4.12 $MSE_{min}(\alpha, \beta)$ i α_{opt} , β_{opt}	93
Tbl. 4.13 $MSE_{min}(\alpha, \beta)$ i α_{opt} , β_{opt}	93
Tbl. 4.14 $MSE_{min}(\alpha)$, α_{opt} , β_{opt} i γ_{opt} za 3P jezgro kod interpolacije audio signala za različite frekvencije semplovanja.	95
Tbl. 5.1 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene kvazi-racionalnog Polya jezgra i prozorske funkcije [Savić1, 2015].	108
Tbl. 5.2 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene kvazi-racionalnog Polya jezgra i prozorske funkcije [Savić1, 2015].	108
Tbl. 5.3 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Polya racionalnog jezgra i prozorske funkcije.	111
Tbl. 5.4 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene Polya racionalnog jezgra i prozorske funkcije.	112

Tbl. 5.5 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Polya 1P jezgra i prozorske funkcije [Milivojević1, 2015].	115
Tbl. 5.6 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene kvadratnog jezgra i prozorske funkcije.	120
Tbl. 5.7 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Kejsovog 1P jezgra i prozorske funkcije.	122
Tbl. 5.8 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene Kejsovog 1P jezgra i prozorske funkcije [Milivojević2, 2013]	124
Tbl. 5.9 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene jednoparametarskog jezgra petog reda i prozorske funkcije [Milivojević2, 2015].	127
Tbl. 5.10 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene jednoparametarskog jezgra petog reda i prozorske funkcije [Milivojević2, 2015].	127
Tbl. 5.11 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Kejsovog 2P jezgra i prozorske funkcije.	132
Tbl. 5.12 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene Kejsovog 2P jezgra i prozorske funkcije.	132
Tbl. 5.13 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene 3P jezgra i prozorske funkcije.	135
Tbl. 5.14 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene 3P jezgra i prozorske funkcije.	137

UVOD

Teorija interpolacije privlači pažnju mnogih naučnika od davnina. Interpolacione tehnike najpre su korišćene u astronomiji. Toomer [Toomer, 1978] smatra da je Hiparh sa Rodosa (Hipparchus of Rodos) (190.-120. pne) koristio linearnu interpolaciju u izgradnji tablica takozvanih "akord funkcija" (povezanih sa sinus funkcijom) u svrhu izračunavanja pozicije nebeskih tela. Opis linearne interpolacije može se naći u Almagestu (2. vek) od Ptolomeja. U engleskoj literaturi u matematičkom smislu prvi put je termin *interpolacija* upotrebio 1655. godine Wallis u infinitezimalnom računu. Njutnovi opisi geometrijske krive koja prolazi kroz zadati skup tačaka, iz 1675 godine, predstavljaju osnov za razvoj interpolacionih tehnika. Tokom 18. i početkom 19. veka Njutnov metod publikovali su evropski matematičari, uključujući i Njutn-Gausovu formulu iz 1812. godine, koja predstavlja osnovu za teoriju uzorkovanja podataka i njihovu rekonstrukciju. Tokom 19. veka studiozno se proučavaju interpolacione tehnike bazirane na polinomima.

Razvijene su interpolacione formule, nazvane prema imenima čuvenih matematičara i fizičara zaslužnih za tu problematiku: a) Lagranžova (**engl.** *Lagrange*), b) Njutnova (**engl.** *Newton*), Hermittova (**engl.** *Hermite*) i dr. [Milovanović, 1985]. Primenom interpolacionih formula za diskretni skup tačaka (x_i, y_i) , $0 \leq i \leq n$ određuje se polinom P_n stepena n čiji grafik prolazi kroz zadate tačke. Za veće vrednosti n primena ovih formula zahteva veliki broj aritmetičkih operacija. Kako veliki broj aritmetičkih operacija zahteva duže vreme izvršavanja, to za rad u realnom vremenu, naročito kod procesiranja signala gde se radi sa blokovima 256, 512, 1024,.. nije praktično koristiti polinomijalnu interpolaciju. Zbog toga se uvodi konvolucionna interpolacija primenom konvolucionog jezgra konačne dužine. Ideja je da se koristi interpolacija pomoću interpolacionog jezgra koje bi *klizilo* preko funkcije i omogućavalo interpolaciju u jednom intervalu čija dužina je određena dužinom jezgra.

U vremenskom domenu teorijski idealna interpolacija realizuje se konvolucijom sa sinc funkcijom oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$, gde je $-\infty < x < +\infty$. Spektar sinc funkcije je pravougaona, odnosno box funkcija. Karakteristike box funkcije su: a) idealno ravna karakteristika u propusnom i nepropusnom opsegu i b) idealna strmina u prelaznoj oblasti. Ovako definisana sinc funkcija nije praktično ostvariva. Da bi se omogućila praktična ostvarljivost, odnosno primenljivost kod

interpolacije, neophodno je obezbediti konačnu dužinu, odnosno trajanje funkcije sinc. Zato se vrši limitiranje sinc funkcije u negativnom i pozitivnom delu (odscanje) u granicama $-x_g \leq x \leq x_g$. Kao posledica ograničavanja funkcije njena spektralna karakteristika odstupa od pravougaonog oblika: a) javlja se talasavost karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu i b) prelazna oblast je sa konačnom strminom. Primena ovako modifikovane sinc funkcije ne obezbeđuje idealnu rekonstrukciju, odnosno rekonstruisana funkcija razlikuje se od originalne funkcije. Razlika originalne i rekonstruisane funkcije predstavlja grešku interpolacije $e(x)$. Aktuelan problem u nauci je minimiziranje greške interpolacije, odnosno kreiranje jezgra konačne dužine koje će u procesu konvolucione interpolacije obezbediti što manju grešku.

Za potrebe konvolucione interpolacije razvijeno je mnogo interpolacionih jezgara. Počev od jezgra drugog reda (**engl.** *quadratic kernel*) [Dodgson, 1997] preko trećeg reda (**engl.** *cubic kernel*) [Keys, 1981] [Meijering, 2003], petog reda (**engl.** *quintic kernel*) i na dalje [Meijering, 1999]. Posebno su aktuelna interpolaciona jezgra trećeg reda kao kompromis između preciznosti i numeričke složenosti.

Kubna konvolucija prvi put se pominje u radu Rifmana [Rifman, 1973] gde je za potrebe resemplovanja slike primenjena: a) metoda zaokruživanja na prvu susednu vrednost (**engl.** *nearest neighbor* - najbliži sused), b) bilinearna (**engl.** *bilinear*) i c) kubna interpolacija. U [Rifman, 1973] radu je prvi put analitički opisana kubna konvolucionarna funkcija. Problem resemplovanja slike detaljno je opisan u [Simon, 1975] gde je definisana greška interpolacije za slušaj primene kubne konvolucione funkcije. Analitički izraz za parametarski oblik kubnog konvolucionog jezgra prvi put sreće u radu Bernštajna [Bernstein, 1976]. Kejs u svom radu [Keys, 1981] studiozno proučava tehniku konvolucione interpolacije pomoću jednoparametarskog kubnog interpolacionog jezgra i pokazuje da je ovo jezgro pogodno za primenu kod procesiranja slike. Na osnovu definisane greške interpolacije i njene minimizacije određuje optimalnu vrednost parametra jezgra, koja je kod procesiranja slike $\alpha = -0.5$. Nakon toga, veliki broj autora radi na optimizaciji parametra jezgra za različite primene. Optimizacijom se jezgro prilagođava konkretnom interpolacionom problemu. Proces prilagođenja vrši se saglasno nekom kriterijumu [Meijering, 1999].

U mnogim informacionim sistemima javlja se potreba da se vrši procesiranje, odnosno obrada audio i govornih signala, sa ciljem prepoznavanja govora, govornika, popravku kvaliteta reprodukovanog zvuka kod starih audio snimaka, poprvku kvaliteta signala kome je superponiran šum i dr. Pored toga, zahteva se od informacionih sistema da mogu u realnom vremenu da izvrše klasifikacija emocionalnog stanja govornika, procenu zdravstvenog stanja na osnovu govora i dr [Joel,

2003]. Zbog toga je procena fundamentalne frkvencije (f_0) audio i govornih signala aktuelan zadatak, o čemu svedoči veliki broj objavljenih radova iz ove oblasti u naučnim časopisima sa visokim impakt faktorom [Hussain, 2002], [Veprek,2002]. Razvijen je veliki broj algoritama koji vrše obradu signala u vremenskom (**eng.** *Time Domain*, TD) i/ili frekventnom domenu (**eng.** *Frequency Domain*, FD) [Kacha, 2005], [Klapuri, 2003]. Kod obrade u frekventnom domenu potrebno je najpre signal iz vremenskog domena prevesti u frekventni domen primenom brze Furijeove transformacije-FFT (**eng.** *Fast Fourier Transform*). Procesom diskretne transformacije se diskretnom signalu x izračunava spektar X . Izračunati spektar je diskretan kao posledica diskretne transformacije, ustvari, predstavlja odmerke realnog kontinualnog spektra Xr . Komponente spektra izračunate su na frekvencijama sa korakom ΔF , odnosno na f_k , gde je $k = 0,1,\dots, NFFT$ a $NFFT$ predstavlja dužinu FFT-a. Kod govornog signala javlja se dominantna komponenta u spektru koja odgovara f_0 . To znači da se problem procene fundamentalne frekvencije svodi na pikovanje maksimalne komponente u spektru. U slučaju kada se f_0 signala razlikuje od frekvencija f_k na kojima se izračunava spektar, dolazi do pojave lažnih vrednosti amplituda spektralnih komponentata. Pojava se naziva curenje (**eng.** *Leakage*) spektra i posledica je osobine FFT-a u smislu očuvanja energije signala u vremenskom i frekvencijskom domenu. Povećanje preciznosti FFT-a podrazumeva povećanje broja tačaka $NFFT$ u spektru na kojima se izračunava spektar, što za sobom povlači povećanje vremena izračunavanja spektra, ali bez garancije precizne procene f_0 . Jedan način smanjenja greške je određivanje interpolacione funkcije i procena karakteristika spektra u intervalu između dva odbirka. Ovim postupkom se vrši rekonstrukcija spektra na osnovu FFT-a. Na dalje se parametri spektra određuju analitičkim postupcima (diferenciranje, integraljenje, ekstremne vrednosti,..).

U ovoj doktorskoj disertaciji tretirana je problematika optimizacije parametara parametarskih konvolucionih jezgara za procenu fundamentalne frekvencije govornog signala kao rezultat dugogodišnjeg intenzivnog rada autora u ovoj oblasti [Savić1, 2014], [Savić2, 2014], [Savić1, 2015], [Savić2, 2015], [Savić3, 2015], [Milivojević1, 2015], [Savić1, 2016], [Savić2, 2016], [Savić3, 2016], [Savić 4, 2016], [Savić5, 2016].

Autor je u disertaciji sistematizovao materiju iz oblasti interpolacije i predložio originalna konvolucionna jezgra: a) kvadratno 1P jezgro [Savić1, 2014], b) Polya 1P jezgro [Milivojević1, 2015], c) Polya racionalno jezgro [Savić2, 2015], d) Polya kvazi racionalno jezgro [Savić1, 2015] i e) tro-parametarsko kubno interpolaciono jezgro [Milivojević, -], kao i algoritme za optimizaciju parametara, i algoritam procene fundamentalne frekvencije čijom primenom je došlo do povećanja preciznosti procene fundamentalne frekvencije. Određeni su analitički izrazi za poziciju mak-

simuma rekonstruisane funkcije $X_r(f)$ koja je dobijena primenom konvolucije sa Kejsovim 2P jezgrom i 3PCC jezgrom.

S obzirom da je procena fundamentalne frekvencije vrlo značajna istraživači posebnu pažnju posvećuju ovoj problematici. Uvidom u svetsku naučnu literaturu zaključuje se da je do sada ovaj problem rešavan različitim algoritmima u vremenskom (autokorelacija [Rabiner, 1997], kroskorelacija [Samad, 2000], YIN [Kawahara, 2002],) i frekvencijskom (YIN [Kawahara, 2002], harmonijski proizvod spektra [Schroeder, 1968]) domenu.

Greška procene može da dovede do pogrešnog odlučivanja kod prepoznavanja govornika, emocionalnog stanja, zdravstvenog stanja i dr. Minimiziranjem greške saglasno definisanom kriterijumu određuju se optimalne vrednosti parametra jezgra.

U ovoj doktorskoj disertaciji prikazani su originalni algoritmi za određivanje optimalnih parametara parametarskih jezgra u spektralnom domenu: a) minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike, b) minimiziranje greške sličnosti spektralnih karakteristika i c) minimiziranje razlike izvoda spektralnih karakteristika. Analizom nagiba spektralne karakteristike na granici propusnog opsega, izvršena je komparativna analiza kod Kejsovog 1P i Grevileovog 1P jezgra sa različitim parametrima. Izbor optimalnih vrednosti parametara jezgra obavljen je i eksperimentalnim putem kod interpolacije: a) sinusoidalnog, b) audio, c) govornog signala i d) kod nekih test slika (Lena, Barbara, Camerman, ...).

Ukupna materija ove doktorske disertacije podeljena je u pet glava.

U prvoj glavi opisan je hronološki razvoj teorije interpolacije počevši od drevnog Vavilona i antičke Grčke do današnjih dana. Dat je prikaz najznačajnijih radova. Ukazano je na različite interpolacione tehnike, od oskulatorne interpolacije do tehnika konvolucione interpolacije, koje se koriste za rad u realnom vremenu u obradi signala.

U glavi 2 opisana je tehnika interpolacije. Dat je pregled značajnih numeričkih interpolacionih metoda. U prvom delu druge glave opisana je polinomijalna interpolacija. Definisana je Vandermondeova determinanta, koja je nazvana u čast francuskog matematičara Vandermondea (**engl.** *A. T. Wandermonde*, 1735 – 1796). Kako je određivanje koeficijenata interpolacionog polinoma putem izračunavanja determinanti numerički složena procedura to su razvijene posebne interpolacione formule za određivanje forme, odnosno određivanja koeficijenata interpolacionog polinoma [Fraser1, 1927], [Fraser, 1927], [Joffe, 1917]. U numeričkoj analizi intenzivno se koriste: a)

Lagranžeova, b) Njutnova, c) Hermiteova interpolaciona formula. Definisana je greška interpolacije $e(x)$ i grafički prikazana.

U drugom delu druge glave prikazane su interpolacije polinomima koje se primenjuju po segmentima. Umesto visokog stepena interpolacijskog polinoma, u praksi se koristi polinomna interpolacija po segmentima (**engl.** *piecewise polynomial interpolation*). Interval $[x_0, x_n]$ se podeli na više podintervala i na svakom od njih se funkcija aproksimira interpolacionim polinomom niskog stepena ($n \leq 5$). Nedostatak ovakve interpolacije je što kriva sastavljena od delova različitih polinoma nije glatka. Zato se za interpolacionu funkciju dodaju i uslovi neprekidnosti prvog i viših izvoda. Funkcija sastavljena od interpolacionih polinoma istog stepena za podsegmente segmenta $[x_0, x_n]$ koja zadovoljava uslove neprekidnosti izvoda do nekog reda, zove se splajn. Sa razvojem digitalnih računara, splajnovi su dobili veliki uticaj na geometrijsko modeliranje, geometrijski dizajn i kompjutersku grafiku [Dierckx, 1993], [Lancaster, 1986], [Marsh, 1999].

U trećoj glavi opisana je parametarska konvoluciona interpolacija. Opisana su parametarska konvoluciona jezgra. Parametarska konvoluciona jezgra su pogodna su za *prilagođavanje jezgra* problematici u cilju smanjenja greške interpolacije. Minimiziranjem greške saglasno definisanom kriterijumu određuju se optimalne vrednosti parametra jezgra. Opisana su jezgra sa jednim i dva parametra [Keys, 1981], [Dodgson, 1997], [Meijering, 2003], [Hanssen, 1999], [Greville, 1944].

U drugom delu treće glave prikazano je troparametarsko jezgro koje je originalni rezultat autora ove disertacije i prihvaćen je za objavljivanje u časopisu sa SCI liste "*Computing and Informatics*" kategorije M23, pod naslovom *Three-parametric cubic convolution kernel for estimating the fundamental frequency of the speech signal*. Tro-parametarsko kubno konvoluciono jezgro (3P-PCC) konstruisano od *piecewise* kubnih polinoma na segmentu $[-4,4]$. Jezgro je konstruisano uz tri parametra čime se povećava sloboda optimizacije parametara, odnosno, očekuje se da jezgro sa većim brojem parametara i njihovom optimizacijom u odnosu na signal povećava preciznost procene fundamentalne frekvencije.

U četvrtoj glavi opisani su algoritmi za optimizaciju parametara interpolacionih jezgara u spektralnom domenu. Optimizacija parametara jezgra izvršena je uz definisanje mere sličnosti sa spektralnom karakteristikom idealnog interpolacionog jezgra oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$ i minimiziranja razlike njihovih amplitudskih karakteristika.

U prvom delu četvrte glave opisano je idealno interpolaciono jezgro oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$ u vremenskom domenu odnosno box funkcija u spektralnom domenu. Kako je idealno interpolaciono

jezgro zbog svoje beskonačne dužine praktično neostvarivo postavlja se pitanje da li je moguće skratiti jezgro na prihvatljivu dužinu i izvršiti njegovu modifikaciju sa ciljem dobijanja optimalnih rezultata po nekom kriterijumu? Zbog toga se vrši interpolacija parametarskim jezgrima male dužine ($L \leq 8$) kao i određivanje vrednosti parametra tako da se dobijaju optimalni rezultati.

U drugom delu četvrte glave opisan je algoritam minimiziranja talasavosti spektralne karakteristike. Primenom ovog algoritma određeni su optimalni parametri: a) Kvadratnog 1P, b) Kejsovog 1P, c) Kejsovog 2P, d) Grevilleovog 1P, e) Grevilleovog 2P i f) tro-parametarskog kubnog konvolucionog jezgra. Prikazana je optimizacija parametra Kejsovog 1P jezgra u prostornom domenu. Polazeći od ideje da spektralna karakteristika jezgra, $H(f)$ bude dobra aproksimacija karakteristike idealnog jezgra oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$ u propusnom i nepropusnom opsegu (Box funkcija $H_B(f)$) i minimiziranjem greške sličnosti određene su optimalne vrednosti parametra Kejsovog 1P, Kejsovog 2P i Grevilleovog 1P jezgra. Sa idejom da prvi izvod spektralne karakteristike 1P Kejsovog jezgra bude dobra aproksimacija prvog izvoda box funkcije i minimiziranjem njihove razlike određena je optimalna vrednost parametra jezgra.

U trećem delu četvrte glave opisani su eksperimenti i prikazani rezultati tačnosti interpolacije primenom: a) Kvadratnog 1P, b) Kejsovog 1P, c) Kejsovog 2P, d) Grevilleovog 1P e) Grevilleovog 2P i f) tro-parametarskog kubnog konvolucionog jezgra. Eksperimenti su sprovedeni nad testnom bazom koja je sastavljena od: a) audio signala dobijenih snimanjem G tonova iz sedam oktava (G_1 – G_7) odsviranih na klaviru August Förster, b) govornih signala dobijenih snimanjem govornika c) standardnih test slika: Airplane, Artichare, Barbara, Baboon, Boats, Boy, Camerman, Cat, Fruits, Girl, Goldhill, Lena, Mountain, Pappers, Pool, Sails, Serrano, Tulips, Katedrala, Toranj, Watch, Zelda. Eksperimentom se određuje izbor optimalnih parametara i preciznost interpolacionog jezgra kod procene vrednosti signala, tako što se analizira greška procene koja predstavlja razliku između tačne (x_i) i interpolirane vrednosti (\hat{x}_i). Prikazani su algoritmi za procenu optimalnih vrednosti parametra jezgra. Algoritmi su prikazani grafički. Rezultati su prikazani grafički i tabelarno. Na kraju je izvršena komparativna analiza na bazi statističkih parametar rezultata merenja: a) srednja vrednost i b) varijansa.

U petoj glavi opisani su algoritmi za procenu fundamentalne frekvencije govornog signala u spektralnom domenu. Procena fundamentalne frekvencije može se izvršiti u: a) vremenskom domenu [Shimamura, 2001], [Kacha, 2005], [Shahnaz, 2012], [Rabiner, 1997], b) spektralnom domenu [Cheveigné, 2001], [Klapuri, 2003], [Liu, 2001], c) kepstrum domenu [Ahmadi, 1999]. kao i kombinacijom.

U prvom delu pete glave opisana je fundamentalna frekvencija, i to u: a) vremenskom i b) spektralnom domenu. Fundamentalna frekvencija je analizirana kod: a) sinusnog i b) govornog test signala. Procena fundamentalne frekvencije u spektralnom domenu podrazumeva: a) obradu vremenski diskretnog signala prozorskom funkcijom, b) transformaciju primenom diskretne Furijeove transformacije (DFT), odnosno algoritmom za brzu Furijeovu transformaciju (FFT) i c) određivanje spektralne komponente sa maksimalnom energijom, koja predstavlja fundamentalnu energiju. Određivanje spektralne komponente maksimalne energije vrši se primenom *pikovanja* maksimuma. Iz mnoštva pikovanih pikova biraju se oni koji pripadaju fundamentalnoj frekvenciji i njenim harmonicima na frekvencijama $i \cdot f_0$. Pikovi se biraju tako da zadovoljavaju određene kriterijume, kao što su: a) maksimalna energija i b) konstantno rastojanje između pikova. Razvijen je veliki broj algoritama za pikovanje i poznati su pod nazivom *Peak-Picking* algoritmi [Rabiner, 1997]. Pikovanjem se pravi greška procene. Greška procene fundamentalne frekvencije kreće se u granicama $[(-f_s/(2NFFT) \text{ Hz}, (f_s/(2NFFT) \text{ Hz})]$ gde je f_s frekvencija odabiranja, a $NFFT$ broj tačaka u kojima se izračunava FFT. Jedan način smanjenja greške je povećanje broja $NFFT$. Međutim, to ima za posledicu hardversko-softversko usložnjavanje sistema za obradu signala. Drugi način je određivanje interpolacione funkcije i procena karakteristika spektra u intervalu između dva odbirka. Ovim postupkom se vrši rekonstrukcija spektra na osnovu FFT-a. Nakon toga se parametri spektra određuju analitičkim postupcima (diferenciranje, integraljenje, ekstremne vrednosti,...) [Gardner, 1988]. U cilju povećanja: a) preciznosti procene i b) brzine izvršenja algoritma određeni su analitički izrazi za poziciju maksimuma rekonstruisane funkcije $X_r(f)$ koja je dobijena primenom konvolucije sa Kejsovim 2P jezgrom i 3PCC jezgrom.

U drugom delu pete glave opisani su algoritmi procene fundamentalne frekvencije bazirani na primeni konvolucionih jezgara i prozorskih funkcija. U ovoj disertaciji korišćene su: a) Hamming-ova, b) Hann-ova c) Blackman-ova, d) pravougaona, e) Kaiser-ova i f) trougaona prozorska funkcije. Kao mera kvaliteta, odnosno mera preciznosti algoritma za procenu f_0 , korišćena je srednje kvadratne greška (**engl.** *Mean Square Error*, MSE). Kao test signali korišćeni su: a) simulacioni sinusni test signal i b) realni govorni test signal. Sinusni test signal opisan u [Pang, 2000] i predstavlja signal sa fundamentalnom frekvencijom f_0 dobijen primenom frekvencije semplovanja f_s sa K harmonika sa slučajnim amplitudama (a_i) i fazama (θ_i) i dužinom FFT-a $NFFT$. Realni govorni test signal, dobijen je snimanjem jednog govornika u realnom akustičnom ambijentu [Milivojević1, 2010], [Milivojević2, 2010]. U procesu simulacije f_0 i θ_i su slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom u opsegu [G2 (97.99 Hz), G5 (783.99 Hz)] i $[0, 2\pi]$ respektivno. Frekvencija signala semplovanja je $f_s=8$ kHz, a dužina prozorske funkcije $N=256$ čime je obezbeđena analiza podsek-

venci koje traju 32 ms. Rezultati koji su prikazani u daljem delu rada odnose se na $f_0=125-140.625$ Hz, $K=10$ i $NFFT=512$.

U trećem delu pete glave prikazani su rezultati optimizacije optimalnih parametara jezgra kod procene fundamentalne frekvencije za: a) Kvazi-racionalno Polya, b) Racionalno Polya 1P i c) Polya 1P jezgro. Nakon toga prikazani su algoritmi procene i rezultati optimizacije parametara za polinomijalna interpolaciona jezgra, i to: a) jednoparametarska, b) dvo-parametarska i c) tro-parametarsko jezgro. Procena fundamentalne frekvencije govornog i sinusoidalnog signala izvršena je uz primenu a) kvadratnog 1P, b) kubnog Kejsovog 1P, c) kubnog Kejsovog 2P, d) kubnog tro-parametarskog i f) interpolacionog jezgra petog reda. Uzimajući srednju kvadratnu grešku kod procene fundamentalne frekvencije kao meru kvaliteta algoritma izvršena je komparativna analiza jezgara i primenjenih prozorskih funkcija. Detaljnom komparativnom analizom pokazano je da se najmanja greška procene fundamentalne frekvencije govornog signala dobija primenom tro-parametarskog interpolacionog jezgra, koje je originalni rezultat autora ove doktorske disertacije.

1. HRONOLOŠKI RAZVOJ INTERPOLACIJE

Teorija interpolacije privlači pažnju mnogih naučnika od davnina. Reč "interpolacija" (**engl.** *interpolation*) potiče od latinskog glagola *interpolare* (predstavlja složenicu od reči "inter" što znači između i reči "polare" u značenju izgladiti). Interpolacija označava umetanje novih elemenata niza između poznatih elemenata. Sistematski pregled razvoja u teoriji interpolacije prikazan je u [Meijering, 2002]. U engleskoj literaturi prvi put se sreće oko 1612. godine i upotrebljava u smislu " menjanje (teksta) po umetanju novog". U enciklopediji matematike [Bauschinger, 1900-1904] navodi se da je originalnu latinsku reč (**lat.** *interpolatio*) u matematičkom smislu prvi put upotrebio 1655. godine Wallis u njegovoj knjizi o infinitezimalnom računu [Wallis, 1972]. U svojoj knjizi o interpolaciji Thiele [Thiele, 1909], definiše interpolaciju kao "umetnost čitanja između redova u (numeričkoj) tabeli". U drevnom Vavilonu i antičkoj Grčkoj koriste se prve tehnike interpolacije u astronomiji. Toomer [Toomer, 1978] smatra da je Hipparchus sa Rodosa (190-120 pne) koristio linearnu interpolaciju u izgradnji tablica takozvanih "akord funkcija" (povezanih sa sinus funkcijom) u svrhu izračunavanja pozicije nebeskih tela. Egipćanin grčkog porekla Klaudije Ptolomej, matematičar i astronom koristio je "adaptivne" linearne interpolacione šeme za izračunavanje funkcije više promenljivih. U svom radu *Almagest* daje numeričke tabele i trigonometrijske funkcije u cilju detaljne razrade geocentričnog sistema [Brummelen, 1994]. Prva osoba koja je koristila interpolaciju drugog reda za računanje pozicije sunca i meseca u izgradnji kineskih efemerida i kalendara bio je astronom Liu Zhuo (*Huáng jí lì* ili "*Imperial Standard Calendar*"). Prema [Yan, 1987] korišćena formula može se zapisati u obliku:

$$f(x_0 + \xi T) = f(x_0) + \frac{\xi}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) + \xi(\Delta_1 - \Delta_2) - \frac{\xi^2}{2}(\Delta_1 - \Delta_2), \quad (1.1)$$

gde je $0 < \xi < 1$, $T > 0$, $\Delta_1 = f(x_0 + T) - f(x_0)$ i $\Delta_2 = f(x_0 + 2T) - f(x_0 + T)$.

Složenije tehnike kasnije su razvili Guo Shoujing i drugi. Kako bi napravili radni dnevni kalendar, tzv. "*Shòu shí lì*" koristili su interpolacione formule trećeg reda. Izuzetan doprinos u oblasti iz-

računavanja konačnih-razlika je napravio kineski matematičar Zhu Shijie. U svojoj knjizi *Sìyuán yùjiàn* ("Jade Mirror of the Four Origins", 1303. god.), daje pravilo za interpolacione formule četvrtog reda. Ova formula povezana je sa kasnijim formulama o interpolaciji koje su objavljene na zapadu. U Indiji, rad na interpolaciji višeg reda je počeo otprilike u isto vreme kada i u Kini [Martzloff, 1997]. U svom radu "*Dhyanagraha*" (oko. 625. god.), astronom-matematičar Brahmagupta je predložio metod za interpolaciju drugog reda za sinus i inverzne sinus funkcije. Ponavljajući originalni Sanskrit tekst u algebarskom jeziku, Gupta, prikazuje interpolacione formule drugog reda [Gupta, 1969]. U kasnijem radu, "*Khandakhadyaka*" (665. god.), Brahmagupta takođe opisuje opšti metod koji je omogućio interpolaciju za neekvidistantne podatke. Korišćenjem interpolacionih formula drugog reda Kennedy određuje parabolu kroz tri uzastopne tabelarne vrednosti i navodi da se parabolične šeme interpolacije mogu naći u nekoliko arapskih i persijskih izvora [Kennedy, 1997].

Očigledno, potpuno nezavisno od važnih dobijenih rezultata, mnogo ranije u drugim delovima sveta, teorija interpolacije u zapadnim zemljama počela je da se razvija tek nakon velike naučne revolucije. Posebno nova naučna otkrića u astronomiji i fizici, inicirana su od strane Kopernika, nastavljaju se doprinosom Keplera i Galilea, a kulminiraju u teoriji Njutna, dajući snažan podstrek daljem unapređenju matematike, uključujući i ono što se sada zove "klasična" teorija interpolacije.

Opštu interpolacionu formulu za ekvidistantne podatke zapisao je Gregory 1670. godine u pismu Collinsu [Gregory, 1939]. Nezavisno od Gregorija do ove formule je došao i Njutn, tako da se danas ova formula zove Gregori-Njutnova (Gregory-Newton). Doprinosi Njutna na temu interpolacije sadržani su u: 1) pismu za Smita iz 1675 [Newton, 1959]; 2) rukopisu pod nazivom "*Methodus Differentialis*" [Newton, 1981], koji je objavljen 1711, iako su ranije verzije verovatno napisane sredinom 1670; 3) rukopisu pod nazivom "*Regula Differentiarum*", napisan 1676., ali prvi put otkriven i objavljen u 20. veku [Fraser1, 1927], [Fraser2, 1927]; i 4) Lemi V u knjizi III njegovih proslavljenih "*Principia*" [Newton, 1960], koji se pojavio 1687. Kako su interpolacione formule iz "*Principia*" bile teške za razumevanje jer nisu sadržale dokaze, to nekoliko godina kasnije (1719.) Stirling objavljuje "*Methodus differentialis Newtoniana illustrata*". Danas je jedna od tih formula poznata pod nazivom Njutn-Stirlingova formula. Interesantno je napomenuti da ako su u Njutn-Stirlingovoj formuli diference trećeg i višeg reda jednake nuli, dobija se interpolaciona formula drugog reda koju je dao Brahmagupta.

1779. godine u [Waring, 1779] Waring objavljuje alternativu uopštene Njutnove formule koja ne zahteva izračunavanje konačnih razlika. Ova formula se obično pripisuje Lagranžu, koji je neznaajući za Waringa objavio formulu kasnije [Lagrange, 1877]. Formula se dobija na osnovu Ojlerove

formule [Euler, 1783]. Logičku vezu između Njutnove, Ojlerove i Waring- Lagranžeove uočio je i dokazao njihovu ekvivalentnost Gaus [Gauss, 1866]. 1812 Gaus je održao predavanje o interpolaciji koje je zabeležio njegov student, Encke, i prvi put objavljeno skoro 20 godina kasnije [Encke, 1830]. Pored drugih formula izveo je i onu koja je sada poznata kao Njtn-Gausova formula (**engl.** *Newton-Gauss*).

$$f(x_0 + \xi T) = f(x_0) + \xi \Delta f(x_0) + \frac{1}{2!} \xi(\xi - 1) \Delta^2 f(x_0 - T) + \dots \quad (1.2)$$

Ova formula predstavlja osnovu teorije uzorkovanja i rekonstrukcije.

Tokom 19. veka u radu [Bessel, 1824] pojavljuje se formula ekvivalentna formulama iz [Stirling, 1719], stoga je nazvana Njtn –Beselova. Značajne formule koje često koriste statističari su formule iz [Everett, 1900], [Everett, 1901]. Ove formule je alternativno dokazao Laplas pomoću funkcija generatrisa [Laplace, 1894]. Do početka 20. veka studiozno se proučava problem interpolacije i podeljenih razlika od strane mnogih matematičara, statističara, astronoma... Mnogi od njih uvode svoj sistem notacije i terminologije, što dovodi do konfuzije i reformulacije sada poznatih varijanti originalnih Njutnovih formula. Takođe tokom 1821. Koši proučava interpolaciju pomoću odnosa dva polinoma i sa više promenljivih. U drugoj polovini 19. veka u radovima Borchardt-a i Kronecker-a [Borchardt, 1860], [Kronecker, 1865] pojavljuje se generalizacija za rešenje problema interpolacije sa više promenljivih. Studiozno rešavanje problema publikovano je u radu Hermitea [Hermite, 1878]. U radu [Birkhoff, 1906] razmatra opštiji tip interpolacije i nalaženje funkcije, s obzirom na skup tačaka, koja zadovoljava određene uslove zajedno sa njenim izvodima. Značajan doprinos interpolaciji polinomima predstavlja i Wajerštrasova aproksimaciona teorema [Weierstrass, 1885].

Doprinos razvoju tehnike *oskulatorne interpolacije* je i opšte poznata formula koju je 1899. predložio Karup [Karup, 1899], a nezavisno od toga opisao King [King, 1907] nekoliko godina kasnije, a koja se može dobiti iz Everetove opšte formule:

$$f(x_0 + \xi T) = F(\xi, \delta) f(x_0 + T) + F(1 - \xi, \delta) f(x_0), \quad (1.3)$$

gde je:

$$F(\xi, \delta) = \xi + \frac{1}{3!} \xi(\xi^2 - 1^2) \delta^2 + \frac{1}{5!} \xi(\xi^2 - 1^2)(\xi^2 - 2^2) \delta^4 + \dots, \quad (1.4)$$

i δ Šepardov (**engl.** Shepard's) operator:

$$\delta\phi(\xi) = \phi\left(\xi + \frac{1}{2}\right) - \phi\left(\xi - \frac{1}{2}\right) \text{ i } \delta^p\phi(\xi) = \delta^{p-1}\phi\left(\xi + \frac{1}{2}\right) - \delta^{p-1}\phi\left(\xi - \frac{1}{2}\right), \quad p > 1, p \in \mathbb{Z}, \quad (1.5)$$

Kada je Frejzer [Fraser1, 1927], [Fraser2, 1927], 1927., sumirao stanje stvari u klasičnoj teoriji interpolacije, on je takođe izrazio svoja očekivanja za budućnost i predviđao je: “Dvadeseti vek će bez sumnje dočekati proširenje i razvoj pojma interpolacije izvan granica koje je obeležio Njutn pre 250 godina.”

Značajan doprinos predstavlja i rad Vitakera iz 1915. [Whittaker, 1915]. On je razmatrao Njutn-Gausovu formulu (1.2) i dokazao, da pod određenim uslovima ona predstavlja *kardinalnu funkciju*:

$$C(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x_0 + kT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(x - x_0 - kT)}{\frac{\pi}{T}(x - x_0 - kT)} \quad (1.6)$$

za koju je primetio da ima izuzetne osobine, $C(x_0 + kT) = f(x_0 + kT)$ za svaki ceo broj k . Iako se Vitaker nije pozivao na neke ranije radove, sada je poznato da je red (1.6) sa $x_0 = 0$ i $T = 1$ u osnovi dao Borel 1899. [Borel, 1899], koji ga je dobio kao granični slučaj Vering–Lagranž interpolacione formule. Pitanje konvergencije bilo je od velike važnosti u narednim studijama kardinalne funkcije. Pri uspostavljanju jednakosti kardinalne funkcije i funkcije koja je dobijena Njutn-Gausovom interpolacionom formulom, Vitaker je pretpostavio konvergenciju oba razvoja nizova. Kasnije su drugi autori pokazali, kroz određene primere, da kardinalna funkcija može da divergira kada Njutn-Gausova konvergira. Ovaj odnos je preciznije izučavao Ferrar [Ferrar, 1926].

Ubrzo nakon objavljivanja Vitakerovih radova [Whittaker, 1927-1929], [Whittaker, 1935] na temu kardinalnih funkcija u interpolacionoj teoriji, Šenon je prepoznao njihov očigledan značaj za polje komunikacije. On je formulisao sada poznatu *teoremu semplovanja*, koju je prvobitno objavio 1948. [Shannon, 1948] bez dokaza, a već sledeće godine uz potpune dokaze u radu [Shannon, 1949] koji je očigledno već bio napisan 1940.: “Ako funkcija f ne sadrži frekvencije veće od ω rad/s, ona se određuje u potpunosti davanjem njenih ordinata u nizu tačaka raspoređenih na $1/2\omega$ sekundi.” Dalje u ovom radu, on je nazvao kritični interval semplovanja $T = 1/2\omega$ *Nikvistovim intervalom* koji odgovara opsegu ω , kao priznanje Nikvistovom otkriću [Nyquist, 1928] fundamentalne važnosti za oblast telegrafije. U opisu procesa rekonstrukcije, on je istakao da “Postoji jedna i samo jedna funkcija čiji je spektar ograničen na opseg ω i koja prolazi kroz date vrednosti u tačkama semplovanja koje su na udaljenosti od $1/2\omega$ sekunde. Funkcija može jednostavno da se rekonstruiše od semplova koristeći funkciju kardinalni sinus. Naime, ako je s_k k -ti sempl onda se funkcija f može odrediti sa:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \frac{\sin \pi(2\omega x - k)}{\pi(2\omega x - k)} \quad (1.7)$$

Kao što je istakao Higin [Higgins, 1985], teorema semplovanja treba da se razmatra iz dva dela, prvi deo navodi činjenicu da funkciju ograničenog opsega u potpunosti određuju njeni semplovi, a drugi deo opisuje kako da se rekonstruiše funkcija koristeći njene semplove. Oba ova dela teoreme semplovanja je u nešto drugačijem obliku predstavio Vitaker [Whittaker, 1927-1929], [Whittaker, 1935] i Ogura pre njega [Ogura, 1920]. Oni verovatno nisu bili svesni činjenice da je prvi deo teoreme bio objavljen još 1897. od strane Borela [Borel, 1897]. Ipak, Borel nije povezao te dve stvari [Higgins, 1985]. Narednih godina, postalo je poznato da je pre Šenona teoremu semplovanja, kako je Ruskom društvu za komunikaciju predstavio Koteljnikov [Kotel'nikov, 2000], u konkretnijem verbalnom obliku, ovu teoremu takođe opisao Rabe u nemačkoj literaturi [Raabe, 1939]. Nekoliko autora [Lüke, 1978], [Butzer, 1983] spomenuli su da je Someja [Someya, 1949] uveo ovu teoremu u japanskoj literaturi paralelno sa Šenomom. U engleskoj literaturi, Veston [Weston, 1949] je uveo ovu teoremu nezavisno od Šenona otprilike u isto vreme.

Potreba za praktično primenljivim metodama interpolacije ili "uglađivanjem" empirijskih podataka takođe je dala podsticaj Šenbergovoj analizi ove teme. U svojim značajnim radovima iz 1946. [Schoenberg1, 1946], [Schoenberg2, 1946], je zabeležio da za svaku formulu oskulatorne interpolacije koja se primenjuje na ekvidistantnim podacima, postoji parna bazna funkcija, $\Phi : R \rightarrow R$ tako da je:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k \Phi(x - k). \quad (1.8)$$

On je ovu parnu funkciju nazvao *osnovnom funkcijom* formule, i istakao da ona u potpunosti određuje svojstva rezultirajućeg interpolanta. Osnovne funkcije u Vering–Lagranž interpolaciji, s druge strane, poseduju ograničavajuće svojstvo neprekidnosti, ali ne i neprekidne diferencijabilnosti. On je zatim istakao glatke krive koje su dobijene korišćenjem mehaničkog splajna. Nastavio je da uvodi pojam matematičkog splajna: “Realna funkcija f definisana za svako realno x naziva se splajn krivom reda L i označava sa S_L ako ima sledeće karakteristike: 1) sastoji se od polinomijalnih lukova do stepena $L-1$; 2) pripada klasi neprekidno diferencijabilnih funkcija, tj f ima $L-2$ neprekidnih izvoda; 3) jedine moguće tačke funkcije različitih polinomijalnih lukova su celobrojne tačke $x=L$ ako je L paran, ili tačke $x=L+1/2$ ako je L neparan.” Ove zahteve ispunjavaju krive koje je prethodno predložio Dženkins [Jenkins, 1927] i izučavao Šenberg [Schoenberg1, 1946], a koja predstavlja jednu od od najranijih primera formule koja generiše splajnovu,

$$S_L(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k M_L(x-k), \quad (1.9)$$

gde je sa M_L označen prirodni splajn stepena $n = L-1$, i definisan sa:

$$M_L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} \right)^L e^{i\omega x} d\omega. \quad (1.10)$$

Interesantno je istaći, bez obzira na razlike, teoreme koje su opisali Šenon i Šenberg uključuju klasu funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koje se mogu predstaviti pomoću konvolucije koeficijenata c_k sa osnovnim funkcijama ili jezgrom $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prema formuli:

$$f_T(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right), \quad (1.11)$$

gde indeks T označava interval semplovanja i dodaje se da bi se naglasila činjenica zavisnosti od φ , odnosno aproksimacije originalne funkcije f na osnovu njenih T ekvidistantnih semplova. U slučaju Šenona, f su ograničenog opsega (**engl.** bandlimited functions), koeficijenti c_k su prosto semplovi $s_k = f(kT)$, a jezgro kardinalni sinus, $\sin(\pi x)/\pi x$. U Šenbergovoj teoremi funkcije f su *piecewise* polinomi stepena n , koeficijenti c_k se računaju iz uzoraka s_k , a jezgro je n -ti stepen prirodnog splajna.

Narednih decenija, i Šenonov i Šenbergov rad je imao veliku primenu, ali uglavnom na različitim poljima. Šenonov rad je imao jak uticaj na inženjerstvo u komunikaciji [Shanmugam, 1979], [Jones, 1989], [Blahut, 1990], [Couch, 1993], uključujući brojne primene obrade signala i analize primena [Marks, 1991], [Jerri, 1977], [Higgins, 1996], [Oppenheim, 1975], [Gonzalez, 1993], [Castleman, 1996] i do izvesne mere i numeričke analize [Hamming, 1973], [Stenger, 1981], [Stenger, 1993], [Lund, 1992]. Splajnovi, s druge strane i nakon nekih par decenija daljeg istraživanja od strane Šenberga [Schoenberg, 1969], pronašli su svoj put do teorije aproksimacije [De Boor, 1972], [Holland, 1979], [Schumaker, 1981], [Nürnbergger, 1989], [De Vore, 1993], [Dyn, 2001], i interpolacije sa jednom i više promenljivih [Späth1, 1995], [Späth2, 1995], [Bojanov, 1993], numeričke analize [Prenter, 1975], statistike [Wahba, 1990], i drugih oblasti matematike [Ahlberg, 1967]. Sa pojavom digitalnih kompjutera, splajnovi su dobili veliki uticaj na geometrijsko modeliranje i geometrijski dizajn [Lancaster, 1986], [Farin, 1988], [Dierckx, 1993], kompjutersku grafiku [Bartels, 1987], i čak dizajn fontova [Knuth, 1979].

Konvoluciona interpolacija od značaja je za praktičnu primenu u sferi obrade signala i slika. Početak 1970-ih je bio period kada je digitalna obrada slika počela ozbiljnije da se razvija. Jedna od prvih primena zabeležena u literaturi je bila geometrijska rektifikacija digitalnih fotografija dobijenih iz prvog "Earth Resources Technology" satelita lansiranog od strane Nacionalne administracije aeronautike i svemira Sjedinjenih Država 1972. Potreba za preciznijim interpolacijama u odnosu na standardne linearne interpolacije kod ovakve primene, dovela je do razvoja tehnike poznate pod nazivom *kubna konvolucija*, u kojoj se koristi jezgro nalik na "sinc" funkciju. Jezgro se sastoji od *piecewise* kubnih polinoma. Pored toga što interpolira, ovo jezgro je dizajnirano da bude neprekidno i da ima neprekidan prvi izvod. Kubnu konvoluciju prvi put pominje Rifman [Rifman, 1973], o njoj detaljnije govori Sajmon [Simon, 1975], a parametarski oblik ovakvog jezgra najpre se pojavio u radu Bernštajna [Bernstein, 1976]:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (\alpha + 2)|x|^3 - (\alpha + 3)|x|^2 + 1 & , \quad 0 < |x| \leq 1 \\ \alpha|x|^3 - 5\alpha|x|^2 + 8\alpha|x| - 4\alpha & , \quad 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases} \quad (1.12)$$

gde je α slobodan parametar. Rifman i Bernštajn u svojim radovima predlažu za izbor parametra vrednost $\alpha = -1$, dok je Sajmon predložio $\alpha = -3/4$, ili $\alpha = -1/2$.

Značajan doprinos istraživanju o kubnoj konvolucionoj interpolaciji je i Kejsova studija iz 1981. [Keys, 1981] koja je dala novi aproksimativno-teoretski uvid u ovu tehniku. On je koristeći Tjlorov razvoj za interpolacionu funkciju minimiziranjem greške interpolacije otkrio da je optimalni izbor parametra $\alpha = -1/2$. Za ovaj izbor parametra jezgra, kubna konvolucija daje aproksimacije trećeg reda originalne funkcije. U cilju povećanja preciznosti nastavio je da izvede kubno konvoluciono jezgro na uštrb veće prostorne podrške.

Druga komplementarna studija kubnog konvolucionog jezgra (1.12) je objavljena nešto kasnije od strane Parka i Schowengerdt-a [Park, 1983]. Umesto analize svojstava jezgra u prostornom domenu, oni su izvršili analizu u spektralnom domenu. Razvojem spektralne karakteristike u Maklorenov red uz ideju da je spektralna karakteristika jezgra dobra aproksimacija spektralne karakteristike idealnog interpolacionog jezgra, tj. box funkcije, oni su predložili kao najbolji izbor parametra $\alpha = -1/2$. To jest, ovo pruža najbolju niskofrekventnu aproksimaciju "idealnom" filteru rekonstrukcije.

2. INTERPOLACIJA

2.1 Uvod

Interpolacija predstavlja vezu između diskretnih i neprekidnih funkcija, odnosno diskretnog i kontinualnog domena. U inženjerstvu se često na osnovu merenja raznih veličina osim izmerenih podataka, pokušavaju odrediti i podaci koji se nalaze “između” izmerenih tačaka podataka. Pomoću interpolacije se na osnovu već poznatih podataka i vrednosti određuju nepznate međuvrednosti. Svako izračunavanje nove tačke između dve postojeće tačke podataka je interpolacija. Interpolacija se koristi i prilikom određivanja analitičkog izraza neke funkcije čije su vrednosti eksperimentalno određene na diskretnom skupu podataka. Naime, ako su poznate neke informacije o funkciji f , definisanoj na nekom skupu $X \subseteq \mathbb{R}$, na osnovu tih informacija može se f zameniti nekom drugom funkcijom g na skupu X , tako da su f i g bliske u nekom smislu. Skup X je najčešće zatvoreni interval oblika $[a, b]$ ili diskretni skup tačaka. Funkcija g bira se tako da bude relativno jednostavna za računanje. Interpolacija zahteva da se vrednosti funkcija f i g podudaraju na nekom konačnom skupu argumenata, tj. tačaka. Te tačke nazivaju se čvorovi interpolacije. Ako je rastojanje između čvorova jednako, čvorovi se nazivaju ekvidistantni. Ekvidistantni čvorovi čine ekvidistantnu mrežu. Rastojanje između dva čvora naziva se korak interpolacije, obeležava se sa h , $h = d(x_i, x_{i+1})$. Ako je dato $n+1$ tačaka $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ i poznate su vrednosti funkcije f u tim tačkama $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$, pri čemu nije poznat analitički izraz funkcije f , onda se pomoću interpolacione funkcije g izračunavaju međuvrednosti funkcije f . Može se pisati $f(x) \approx g(x)$, ili $f(x) = g(x) + e(x)$, gde je $e(x)$ greška koja se čini prilikom interpolacije. Prilikom interpolacije teži se da greška interpolacije bude minimalna. Osim uslova o jednakosti funkcijskih vrednosti u čvorovima, mogu se dodati i uslovi o jednakosti vrednosti izvoda funkcija u čvorovima [Drmač, 2003], [Davis, 1963], [Radunović, 2003].

2.2 Interpolacija polinomima

U praksi se uzima da je interpolaciona funkcija polinom stepena ne većeg od n , tj.

$$g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n. \quad (2.1)$$

Polinom $g(x)$ i funkcija f imaju jednake vrednosti u čvorovima interpolacije, tj. $g(x)$ zadovoljava uslov:

$$g(x_0) = y_0, g(x_1) = y_1, \dots, g(x_n) = y_n. \quad (2.2)$$

Prethodni uslov se svodi na sistem linearnih jednačina:

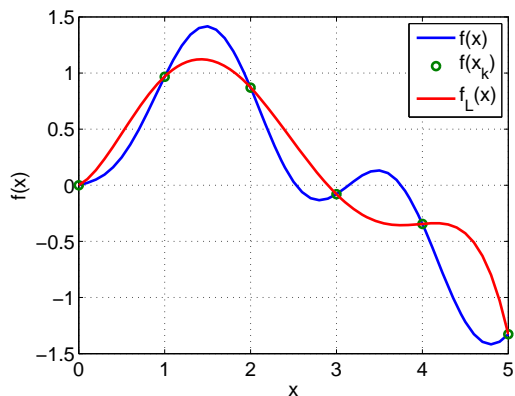
$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n &= y_0 \\ a_1 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n &= y_1 \\ \dots & \\ a_n + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n &= y_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ako je bar jedno $y_i \neq 0$ sistem (2.3) predstavlja nehomogeni sistem od $n+1$ linearnih jednačina sa $n+1$ nepoznatih a_0, a_1, \dots, a_n . Determinanta sistema je:

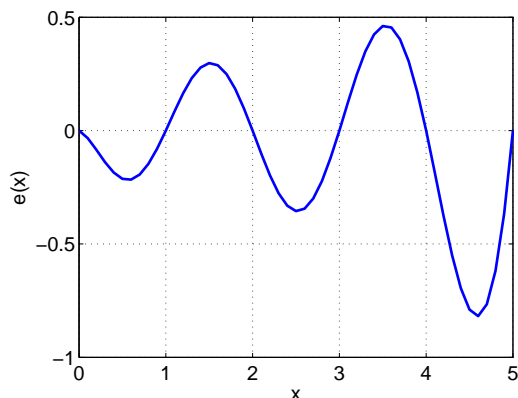
$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Sistem će imati jedinstveno rešenje ako je determinanta sistema $D \neq 0$. U literaturi je ova determinanta poznata kao Vandermondeova determinanta, u čast francuskog matematičara Vandermondea (**engl.** *A. T. Vandermonde, 1735–1796*). Na taj način polinom $g(x)$ definisan sa (2.2) jednoznačno je određen. Kako je određivanje koeficijenata polinoma $g(x)$ putem izračunavanja determinanti numerički složena procedura to su razvijene posebne interpolacione formule za određivanje forme, odnosno određivanja koeficijenata a_0, \dots, a_n interpolacionog polinoma [Fraser, 1927 (1)], [Fraser, 1927 (2)], [Joffe, 1917]. Poznate su: a) Lagranžeova, b) Njutnova, c) Hermiteova..... interpolaciona formula. Ove formule nazivaju se po imenima matematičara zaslužnih za tu problematiku (**engl.** *Lagrange*), (**engl.** *Newton*), (**engl.** *Hermite*) [Milovanović, 1985].

Na Sl. 2.1 prikazan je princip interpolacije funkcije $f(x)$ polinomom $f_L(x)$ u čvorovima x_k . Greška interpolacije $e(x) = f(x) - f_L(x)$ polinomom prikazana je na Sl. 2.2.



Sl. 2.1 Interpolacija funkcije polinomom.



Sl. 2.2 Greška interpolacije.

2.2.1 Lagranževov interpolacioni polinom

Interpolacija pomoću Lagranževog polinoma je postupak u kome se polazeći od poznatih $n+1$ čvorova konstruiše nova baza prostora. Interpolacioni polinom možemo odmah napisati korišćenjem tzv. Lagranževove baze $\{L_i, i = 0, 1, \dots, n\}$ prostora polinoma [Bronštejn, 1964].

Neka je funkcija f data svojim vrednostima $y_i = f(x_i)$, u tačkama $x_i, i = 0, 1, \dots, n$. Lagranževov interpolacioni polinom stepena n koji prolazi kroz ove tačke je:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad (2.5)$$

gde je L_i bazna funkcija:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (2.6)$$

Greška Lagranževog interpolacionog polinoma može se predstaviti u obliku [Milovanović, 1985]:

$$|e_n(x)| = \max_{a \leq \xi \leq b} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|. \quad (2.7)$$

U slučaju uvođenja novog čvora, u cilju smanjenja greške interpolacije primena Lagranževove interpolacione formule zahteva ponavljanje celokupnog računskog postupka. Forma interpolacionog polinoma kod koje je mnogo pogodnije dodavati čvorove interpolacije je Njutnov interpolacioni polinom.

2.2.2 Njutnov interpolacioni polinom

Njutnov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama ima oblik:

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j), \quad (2.8)$$

gde je podeljena razlika reda k definisana sa:

$$\begin{aligned} f[x_0] &= y_0, (k=0) \\ f[x_0, x_1, \dots, x_k] &= \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}, (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Greška interpolacije može se svesti na Lagranžeov oblik (2.7).

Interpolacione čvorove treba birati tako da tačka x u kojoj računamo vrednost funkcije pomoću njenog interpolacionog polinoma bude što bliža sredini intervala [Milovanović, 1985].

2.2.2.1 Prvi Njutnov interpolacioni polinom

Kada se interpolacija izvodi na početku intervala koristi se Prvi Njutnov interpolacioni polinom .

Prvi Njutnov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama unapred ima oblik:

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i), \quad (2.10)$$

gde su konačne razlike unapred reda k definisane sa:

$$\begin{aligned} \Delta^0 y_i &= y_i \\ \Delta^k y_i &= \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, (k=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.2.2 Drugi Njutnov interpolacioni polinom

Drugi Njutnov interpolacioni polinom koristi se kada se interpolacija izvodi na kraju intervala. Može se zapisati u obliku:

$$P_n(x) = y_n + \sum_{k=1}^n \frac{\nabla^k y_n}{k! h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_{n-i}) \quad (2.12)$$

gde su konačne razlike unazad reda k definisane sa:

$$\begin{aligned}\nabla^0 y_i &= y_i \\ \nabla^k y_i &= \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}, (k=1,2,\dots)\end{aligned}\quad (2.13)$$

2.2.3 Tejlorov polinom

Ako vrednosti argumenta x_0, x_1, \dots, x_n teže sve ka broju c i ako su izvodi funkcije $f(x)$ do reda $n+1$ neprekidni u c Njutnov interpolacioni polinom prelazi u Tejlorov polinom:

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n. \quad (2.14)$$

Problem "najbolje" interpolacione formule ne može se postaviti uopšteno nego se može govoriti o najboljoj tačnije najpodesnijoj formuli za konkretan zadatak.

2.3 Interpolacija po segmentima (piecewise) polinomima

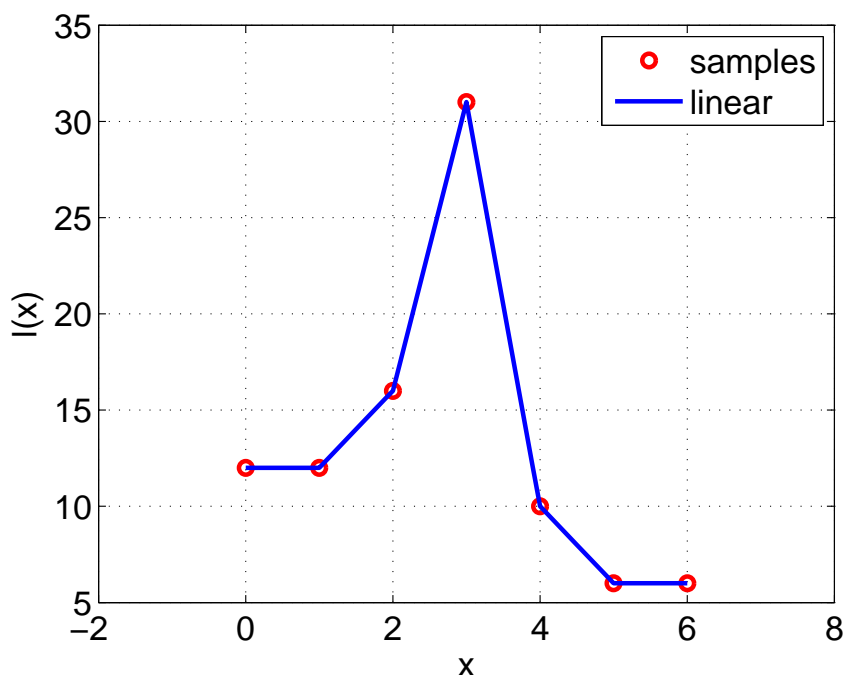
Povećanje broja interpolacionih čvorova dovodi do povećanja stepena interpolacionog polinoma. Interpolacija funkcije polinomom visokog stepena ne daje dobre rezultate ako se ne može birati položaj interpolacijskih tačaka. Kod nekih funkcija povećanje stepena interpolacionog polinoma može dovesti do povećanja greške interpolacije. Poznata je Rungeova funkcija. Nemački matematičar Runge 1901. godine je konstruisao funkciju $f(x)=1/(1+x^2)$ za $x \in [-5,5]$ koja ima svojstvo da niz Njutnovih interpolacijskih polinoma na ekvidistantnoj mreži ne konvergira prema toj funkciji kada se broj čvorova poveća. Međutim ako se za istu funkciju uzme posebno odabrana mreža neekvidistantnih čvorova (Čebiševljeva mreža), onda niz Njutnovih interpolacijskih polinoma konvergira funkciji f . Osim izbora interpolacijskih čvorova na interpolacionu grešku znatno utiče i glatkoća funkcije koja se interpolira. Nema univerzalnog odgovora na to kako odabrati tačke interpolacije. [Drmač, 2003]. Na intervalima male dužine interpolacija daje rezultate zadovoljavajuće tačnosti i polinomima nižeg stepena. Zato se u praksi koriste interpolacioni polinomi nižih stepena ($n \leq 5$). Umesto visokog stepena interpolacijskog polinoma u praksi se koristi po segmentima polinomna interpolacija (**engl.** *piecewise polynomial interpolation*). Umesto jednog polinoma $P_n(x)$ definisanog na zatvorenom intervalu $[a, b]$, interval $[a, b]$ podeli se na više podintervala $[x_{k-1}, x_k]$ $k=1,2,\dots,n$, koji najčešće ne obuhvataju više od 4 tačke i na svakom od njih funkcija aproksimira interpolacionim polinomom $p_k(x)$ niskog stepena. Najčešće su to linearne funkcije ili polinomi 3. reda. Ako želimo aproksimirati vrednost funkcije f u tački $x \in [a,b]$, prvo treba utvrditi između kojih čvorova se nalazi x , tj pronaći za koje k važi $x_{k-1} \leq x \leq x_k$.

2.3.1 Po segmentima linearna interpolacija

Ako je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i u tačkama $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ poznate su njene vrednosti $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$. Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ $k=1, 2, \dots, n$ određuje se linearna funkcija, tj. polinom $p_k(x)$ prvog reda koji se može zapisati u obliku:

$$p_k(x) = y_{k-1} + \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot (x - x_{k-1}), \quad x \in [x_{k-1}, x_k]. \quad (2.15)$$

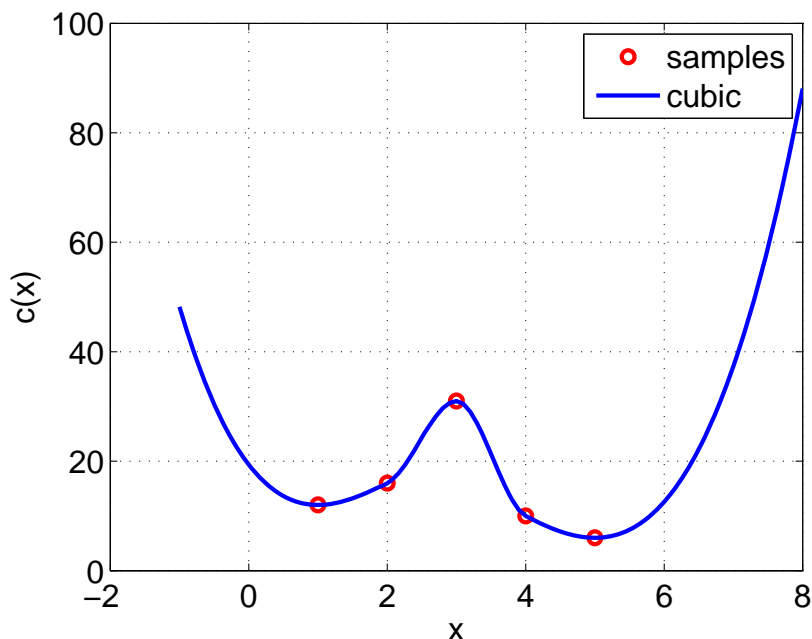
Na Sl. 2.3 prikazan je grafik interpolacione funkcije po segmentima linearnim funkcijama.



Sl. 2.3 Linearna interpolacija po segmentima.

2.3.2 Po segmentima kubna interpolacija

Kroz svaka dva susedna interpolaciona čvora od ukupno $(n + 1)$ čvorova na intervalu $[x_0, x_n]$, provlači se polinom 3. stepena. U praksi se najčešće koristi jer polinom trećeg stepena nije komplikovan za računanje, a s druge strane dovoljno je visokog reda da njegov grafik ima intervale rasta i pada i lokalni minimum, odnosno maksimum. Ova svojstva grafika odgovaraju opisu mnogih inženjerskih procesa, tj. vezi zavisnih promenljivih. Primer kubne interpolacije po delovima prikazan je na Sl. 2.4.



Sl. 2.4 Kubna interpolacija po segmentima.

2.4 Splajn

Kod interpolacije, sa različitim interpolacionim polinomima u pojedinim podintervalima u zajedničkoj susednoj tački polinomi imaju jednake funkcijske vrednosti, ali prvi izvod ima jednu vrednost sa leve strane, a drugu sa desne strane te tačke, pa u toj tački nije neprekidan. Zato kriva sastavljena od delova različitih polinoma nije glatka, što je nedostatak ovakve interpolacije. Da bi se otklonio ovaj nedostatak potrebno je dodati uslov neprekidnosti prvog izvoda u zajedničkim tačkama. Mogu se dodati i uslovi neprekidnosti viših izvoda u tim tačkama. Interpolacija po segmentima različitim polinomima kojoj su dodati i uslovi neprekidnosti izvoda zove se splajn interpolacija [Bartels, 1987]. U praksi se najčešće koristi kubni splajn. Interpolacija splajnom prikazana je na Sl. 2.5.

2.5 Kubna konvolucija

Inerpolaciona funkcija koja je kompozicija *piecewise* kubnih polinoma na subintervalima $[-2,-1)$, $[-1,-0)$, $[0,1]$, $(1,2]$ može se predstaviti u opštem obliku sa:

$$r(x) = \begin{cases} A_{31}|x|^3 + A_{21}|x|^2 + A_{11}|x| + A_{01} & , \quad 0 < |x| \leq 1 \\ A_{32}|x|^3 + A_{22}|x|^2 + A_{12}|x| + A_{02} & , \quad 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases} \quad (2.16)$$

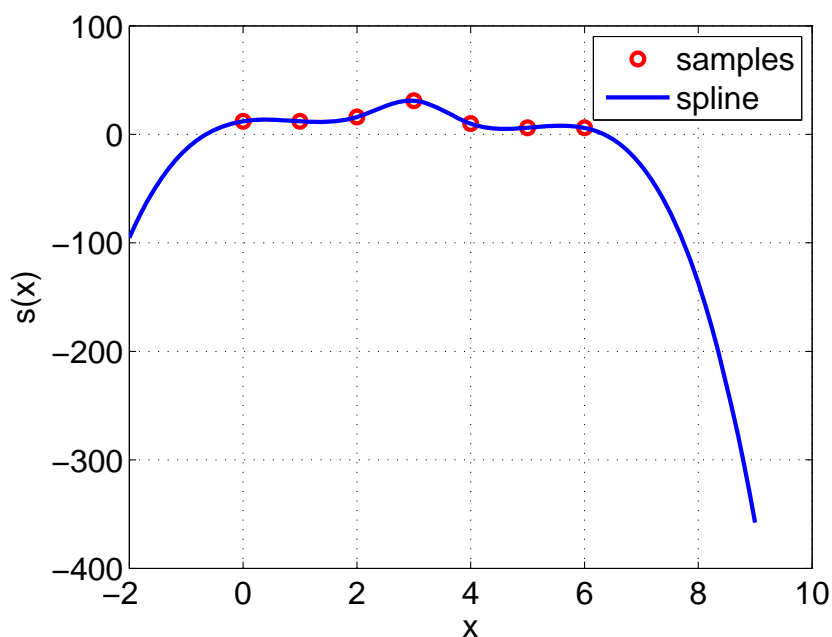
Da bi dobro aproksimirala sinc funkciju interpolaciona funkcija mora da zadovolji uslove: vrednost interpolacione funkcije u nuli je $r(0) = 1$, a u interpolacionim čvorovima $r(k) = 0$, za $\forall k \neq 0$ i $k = \pm 1, \pm 2$, neprekidno diferencijabilna za $k = \pm 1, \pm 2$. Na osnovu definisanih uslova, tj. iz sistema linearnih jednačina dobija se poznato Kejsovo jednoparametarsko jezgro koje će biti opisano u narednoj glavi.

2.6 Interpolacija trigonometrijskim funkcijama

Za interpolaciju periodičnih funkcija pogodno je koristiti trigonometrijske funkcije [Radunović, 2003]. Jedna od takvih formula za interpolaciju 2π -periodične funkcije je formula Hermitea:

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^n \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\sin(x - x_j)}{\sin(x_i - x_j)} \right) f(x_i). \quad (2.17)$$

Ova formula odgovara Lagranževoj formuli za neperiodične funkcije. Formula se koristi se za proizvoljan raspored čvorova interpolacije.



Sl. 2.5 Interpolacija splajnom.

3. PARAMETARSKA KONVOLUCIONA INTERPOLACIJA

3.1 Uvod

Njutn-Gausova formula iz 1812 godine predstavlja osnovu za teoriju uzorkovanja podataka i njihovu rekonstrukciju. Tokom 19. veka studiozno se proučavaju interpolacione tehnike bazirane na polinomima. Interpolacija polinomima je najjednostavnija, međutim za nizove dužine $N > 10$, kod savremenih sistema za obradu signala nije praktično primeniti polinom, jer je:

- a) nepraktično visok red interpolacionog polinoma, tj. veliki broj čvorova koji se koriste,
- b) složen numerički postupak,
- c) dugo vreme izvršavanja.

Sve ovo dovodi do neprimenljivosti kod sistema za rad u realnom vremenu (**engl.** *real-time regime*).

Rešavanje ovih problema vodilo je ka formiranju interpolacionih funkcija niskog reda ($N < 7$) kojima se vrši konvolucija sa nizovima podataka (semplovi koji su arhivirani) i vrše interpolacije željenih vrednosti. Kako bi se povećala brzina izračunavanja u praksi se najčešće koristi konvoluciona interpolacija polinomima trećeg reda (kubne konvolucione funkcije odnosno konvoluciona jezgra).

Ideja je da se koristi interpolacija pomoću interpolacionog jezgra koje bi klizilo preko funkcije i omogućavalo interpolaciju u jednom intervalu, čija dužina je određena dužinom jezgra.

3.2 Konvolucija

Konvolucija neprekidnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$ definiše se sledećim izrazom:

$$f(x) \otimes g(x) = \int f(t) \cdot g(x-t) dt . \quad (3.1)$$

Za diskretne funkcije konvolucija je određena izrazom:

$$f(n) \otimes g(n) = \sum_k f(k)g(n-k). \quad (3.2)$$

Konvolucija koja se bazira na interpolaciji uniformno uzorkovanih podataka podrazumeva upotrebu konvolucionog jezgra. Ako je f semplovana funkcija a g odgovarajuća interpolaciona funkcija, tada je u interpolacionim čvorovima x_k vrednost semplovane funkcije jednaka vrednosti interpolacione funkcije, tj. $f(x_k)=g(x_k)$. Za ravnomerno raspoređene podatke mnoge interpolacione funkcije mogu se zapisati kao:

$$g(x) = \sum_k f_k r(x - x_k). \quad (3.3)$$

U jednakosti (3.3), f_k su parametri koji zavise od semplovanih podataka, a r je interpolaciono jezgro. Da bi funkcija $g(x)$ bila dobar interpolator jezgro r mora da ispunjava uslove $r(0)=1$ i $r(k)=0$ za svaki ceo broj različit od nule. Dobro poznati primer takvog jezgra je teorijski idealno, ali računarski neostvarivo je sinc funkcija. Drugi primer su računarski ostvarivi, ali teorijski daleko od idealnog, najbliži sused i linearno interpolaciono jezgro. Kubna konvoluciona jezgra predstavljaju kompromis između tačnosti i numeričke složenosti.

3.3. Parametarska konvoluciona jezgra

Konvoluciona interpolacija uniformno semplovanih podataka realizuje se primenom interpolacionog konvolucionog jezgra.

Kubna konvolucija prvi put se pominje u radu Rifmana [Rifman, 1973], nešto detaljnije kod Sejmone [Simon, 1975], dok se opšti oblik jezgra prvi put sreće u radu Bernštajna [Bernstein, 1976]. Za potrebe konvolucione interpolacije razvijeno je mnogo interpolacionih jezgara. Počev od jezgra drugog reda (**engl.** *quadratic kernel*) [Dodgson, 1997] preko trećeg reda (**engl.** *cubic kernel*) [Keys, 1981] [Meijering, 2003], petog reda (**engl.** *quintic kernel*) i na dalje [Meijering, 1999].

Različita interpolaciona jezgra omogućavaju različitu preciznost i efikasnost interpolacionih algoritama. Brzina izvršavanja interpolacionih algoritama i njihova numerička preciznost direktno su povezani sa izborom interpolacionog jezgra. U cilju povećanja procene interpolirane vrednosti izvršena je parametarizacija jezgra. Parametar jezgra moguće je odrediti saglasno nekom kriterijumu tako da se dobije najveća preciznost procene, odnosno minimizira greška interpolacije. Tako određena vrednost parametra jezgra postaje optimalna, odnosno, jezgro je optimizovano za određenu problematiku [Reicherbach, 2003]. Prema broju parametara moguće je izvršiti podelu na:

- a) jedno-parametarska,

- b) dvo-parametarska i
- c) višeparametarska jezgra.

U literaturi su definisana sledeća parametarska konvoluciona jezgra:

- a) jedno-parametarska
 - i) Kvadratno Dodgsonovo jezgro [Dodgson, 1997],
 - ii) Kejsovo 1P jezgro [Keys, 1981] ,
 - iii) Grevilleovo 1P jezgro [Meijering, 2003],
 - iv) Polinomialno 1P jezgro petog reda [Meijering, 1999] ,
- b) dvo-parametarska
 - i) Kejsovo 2P jezgro [Hanssen, 1999],
 - ii) Grevilleovo 2P jezgro [Greville, 1944].

Autor ove doktorske disertacije je u svojim radovima, zajedno sa drugim koautorima, objavio konstrukciju i optimizaciju sledećih jedno-parametarskih jezgara:

- a) Kvadratno 1P jezgro [Savić1, 2014],
- b) Jedno-parametarsko Polya jezgro [Milivojević1, 2015],
- c) Polya racionalno jezgro [Savić2, 2015],
- d) Polya kvazi racionalno jezgro [Savić1, 2015].

U daljem tekstu prikazani su analitički izrazi nekih značajnih parametarskih jezgara. Izbor optimalnih parametara biće opisan u narednoj glavi.

3.3.1 Jednparametarska interpolaciona jezgra

3.3.1.1 Kvadratno Dodgsonovo jezgro

U radu [Dodgson, 1997] definisano je kvadratno parametarsko interpolaciono jezgro sa:

$$r(x) = \begin{cases} -2\alpha|x|^2 + \frac{1}{2}(\alpha+1) & , \quad 0 < |x| \leq \frac{1}{2} \\ \alpha|x|^2 + \left(-2\alpha - \frac{1}{2}\right)|x| + \frac{3}{4}(\alpha+1) & , \quad \frac{1}{2} < |x| \leq \frac{3}{2} \\ 0 & , \quad |x| > \frac{3}{2} \end{cases} \quad (3.4)$$

gde je α parametara jezgra.

3.3.1.2 Kejsovo 1P jezgro,

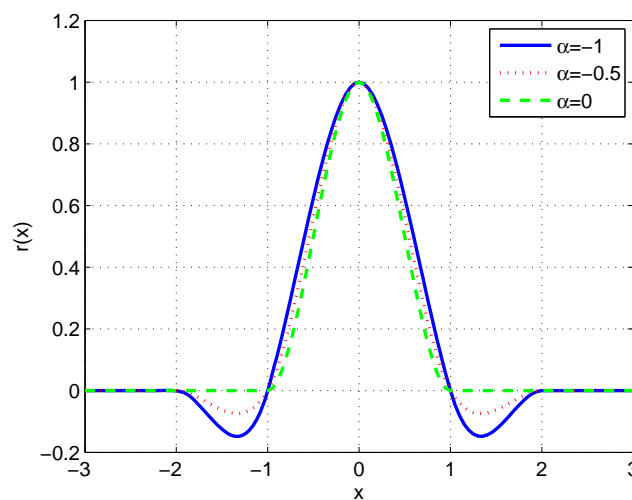
Polazeći od opšteg oblika jezgra iz Bernštajnovog rada [Bernstein, 1976] Kejs u radu [Keys, 1981] studiozno proučava tehniku konvolucione interpolacije i jedno-parametarsko kubno interpolaciono jezgro definisano sa:

$$r(x) = \begin{cases} (\alpha+2)|x|^3 - (\alpha+3)|x|^2 + 1 & , \quad 0 < |x| \leq 1 \\ \alpha|x|^3 - 5\alpha|x|^2 + 8\alpha|x| - 4\alpha & , \quad 1 < |x| \leq 2, \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases} \quad (3.5)$$

gde je α parametara jezgra.

U radu Kejs određuje optimalnu vrednost parametra razvojem u red i pokazuje da je $\alpha = -0.5$ optimalna vrednost kod procesiranja slike.

Na Sl. 3.1 prikazano je Kejsovo 1P jezgro za neke vrednosti parametra jezgra.



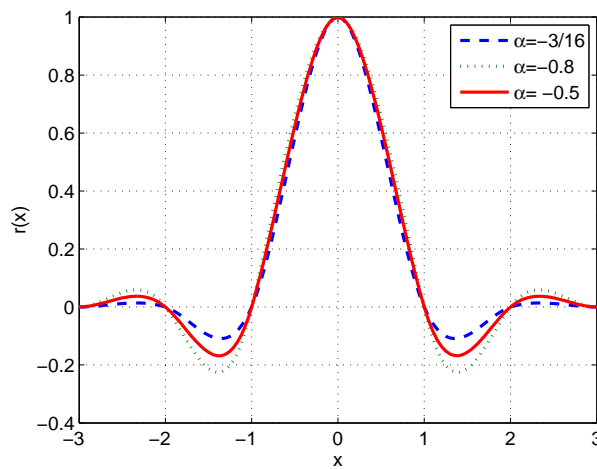
Sl. 3.1 Kejsovo 1P jezgro za neke vrednosti parametra α .

3.3.1.3 Grevilleovo 1P jezgro,

U radu [Meijering, 2003] opisano je Grevilleovo parametarsko jezgro sa:

$$r(x) = \begin{cases} \left(\alpha + \frac{3}{2}\right)|x|^3 - \left(\alpha + \frac{5}{2}\right)|x|^2 + 1 & 0 < |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2}(\alpha - 1)|x|^3 - \left(3\alpha - \frac{5}{2}\right)|x|^2 + \left(\frac{11}{2}\alpha - 4\right)|x| - (3\alpha - 2) & 1 < |x| \leq 2 \\ \frac{1}{2}\alpha|x|^3 + 4\alpha|x|^2 - \frac{21}{2}\alpha|x| + 9\alpha & 2 < |x| \leq 3 \\ 0 & |x| > 3 \end{cases} \quad (3.6)$$

Grevilleovo jedno-parametarsko jezgro prikazano je na Sl. 3.2.



Sl. 3.2 Grevilleovo jednoparametarsko jezgro za neke vrednosti parametra α .

3.3.1.4 Polinomijalno 1P jezgro petog reda

U radu [Meijering, 1999] prikazano je jedno-parametarsko interpolaciono konvoluciono jezgro petog reda. Opšti oblik ovog jezgra je:

$$r(x) = \begin{cases} a_{50}|x|^5 + \dots + a_{10}|x| + a_{00} & 0 < |x| \leq 1 \\ a_{51}|x|^5 + \dots + a_{11}|x| + a_{01} & 1 < |x| \leq 2 \\ a_{52}|x|^5 + \dots + a_{12}|x| + a_{02} & 2 < |x| \leq 3 \\ 0 & |x| > 3 \end{cases} \quad (3.7)$$

Koeficijenti jezgra su:

$$\begin{array}{lll} a_{00}=1, & a_{01}=66\alpha+5, & a_{02}=-162\alpha, \\ a_{10}=0, & a_{11}=265\alpha-15, & a_{12}=297\alpha, \\ a_{20}=-18\alpha+45/16, & a_{21}=45/16-392\alpha, & a_{22}=-216\alpha, \\ a_{30}=0, & a_{31}=270\alpha-10, & a_{32}=78\alpha, \end{array}$$

$$a_{40} = -18\alpha + 45/16,$$

$$a_{41} = -88\alpha + 45/16,$$

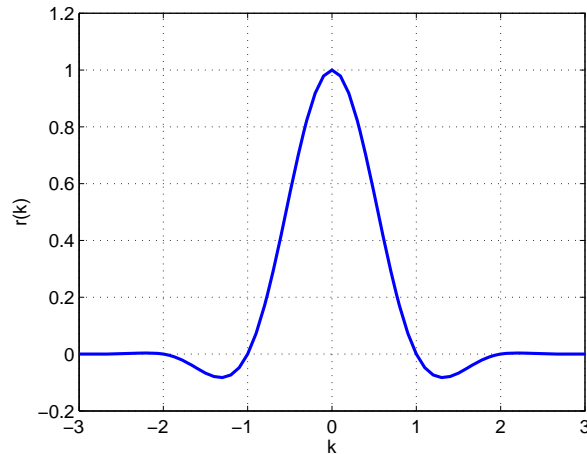
$$a_{42} = -14\alpha,$$

$$a_{50} = 10\alpha - 21/16,$$

$$a_{51} = 11\alpha - 5/16,$$

$$a_{52} = \alpha,$$

gde α predstavlja parametar jezgra.



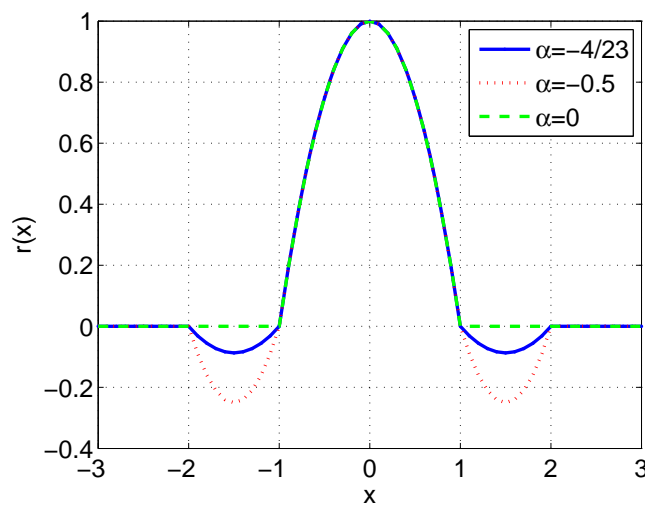
Sl. 3.3 Interpolaciono jezgro petog reda za $\alpha = 3/64$.

3.3.1.5 Kvadratno 1P jezgro

U radu [Savić1, 2014] definisano je kvadratno jedno-parametarsko (1P) interpolaciono jezgro sa:

$$r(x) = \begin{cases} -|x|^2 + 1 & , \quad 0 < |x| \leq 1 \\ -2\alpha|x|^2 + 6\alpha|x| - 4\alpha & , \quad 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Kvadratno 1P jezgro prikazano je na Sl. 3.4.



Sl. 3.4 Kvadratno 1P jezgro za neke vrednosti parametra α .

3.3.1.6 Jedno-parametarsko Polya jezgro

U mnogim naučnim disciplinama javlja se potreba za analizom rasutih podataka (**eng. scattered data**). Rasuti podaci predstavljaju skup od n neregularno raspoređenih tačaka $P_i(x_i, y_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ u xOy ravni. U odnosu na regularnu mrežu (**eng. regular grid**) tačke P_i su raspoređene neregularno, odnosno rasute su unutar ćelija regularne mreže. Procesom regularizacije mreže, odnosno grid-ingovanjem (**eng. gridding**) sve tačke P_i se raspoređuju u temenima regularne mreže. Time se omogućava procesiranje podataka algoritmima razvijenim za podatke koji se predstavljaju regularnim mrežama. Ovaj problem rešava se interpolacionim ili aproksimacionim algoritmima. Analiza rasutih podataka obavlja se, pored ostalog, i radijalno baznim funkcijama (**eng. radial basis function, RBF**) [Buhmann, 2003]. Osobina invarijantnosti *RBF* u odnosu na translaciju, rotaciju i refleksiju čini ih pogodnim za primenu kod digitalne obrade slike. Značajne rezultate u oblasti proučavanja *RBF*-a dali su Bochner i Schoenberg u svojim radovima [Bochner, 1933], [Schoenberg, 1938]. Na osnovu njihovih teorema izvedeni su izrazi za interpolaciona jezgra koja su pogodna za interpolaciju rasutih podataka.

Polya jezgra konstruisana su na osnovu analogije sa Polya frekventnom funkcijom [Schoenberg, 1951], odnosno sa njenom Furijeovom transformacijom [Knockaert, 2008].

U radu [Milivojević1, 2015] definisano je jezgro:

$$r(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\gamma x^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2 x^2}}, & k-1 \leq |x| \leq k, \quad k = 1, 2, \dots, L/2 \\ 0 & |x| > L/2 \end{cases}, \quad (3.9)$$

gde α predstavljaju parametar jezgra, a γ pozitivnu konstantu. Interpolaciono jezgro (3.9) ne zadovoljava uslov $r(x_k) = 0$, što kao posledicu dovodi do toga da interpolirana funkcija ne prolazi kroz čvorove. Samim tim ovako generisana funkcija predstavlja aproksimaciju funkcije.

3.3.1.7 Polya racionalno jezgro

Uvodeći analogiju sa Polya frekventnom funkcijom, odnosno sa njenom Furijeovom transformacijom dobija se izraz za parametarsko Polya racionalno jezgro [Savić2, 2015]:

$$r(x) = \begin{cases} 1/(1 + \alpha^2 |x|^2), & k-1 \leq |x| \leq k, \quad k = 1, \dots, L/2 \\ 0 & |x| > L/2 \end{cases}, \quad (3.10)$$

gde α predstavlja parametar jezgra, a L predstavlja dužinu jezgra.

3.3.1.8 Polya kvazi-racionalno jezgro

U radu [Savić1, 2015] definisano je Polya kvazi racionalno jezgro sa:

$$r(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{1+\alpha^2|x|^2}, & k-1 \leq |x| \leq k, \quad k=1, \dots, L/2 \\ 0 & |x| > L/2 \end{cases} \quad (3.11)$$

gde α predstavlja parametar jezgra, a L predstavlja dužinu jezgra.

3.3.2 Dvo-parametarska interpolaciona jezgra

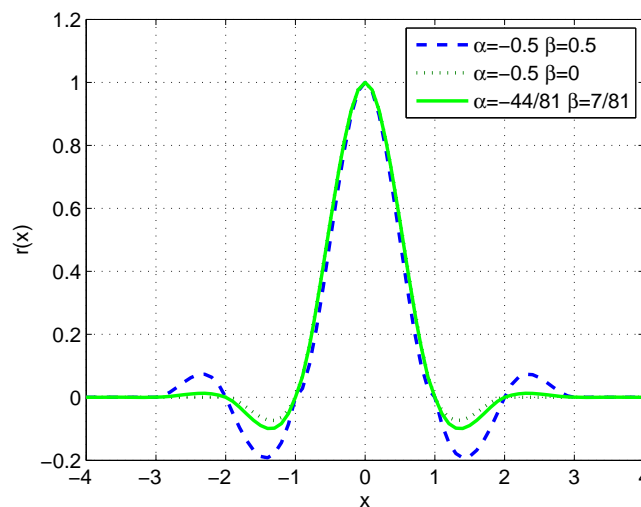
3.3.2.1 Kejsovo 2P jezgro,

U radu [Hanssen, 1999] predložena je modifikacija 1P Kejsovog jezgra uvođenjem drugog parametra, i na taj način formirano Kejsovo dvo-parametarsko jezgro. Analitički oblik 2P Kejsovog jezgra je;

$$r(x) = \begin{cases} (\alpha - \beta + 2)|x|^3 - (\alpha - \beta + 3)|x|^2 + 1 & 0 < |x| \leq 1 \\ \alpha|x|^3 - (5\alpha - \beta)|x|^2 + (8\alpha - 3\beta)|x| - (4\alpha - 2\beta) & 1 < |x| \leq 2 \\ \beta|x|^3 - 8\beta|x|^2 + 21\beta|x| - 18\beta & 2 < |x| \leq 3 \\ 0 & |x| > 3 \end{cases} \quad (3.12)$$

gde su α i β parametri jezgra. Za $\beta=0$ dobija se 1P Kejsovo jezgro.

Na Sl. 3.5 prikazano je Kejsovo 2P jezgro za neke vrednosti parametara jezgra α i β .



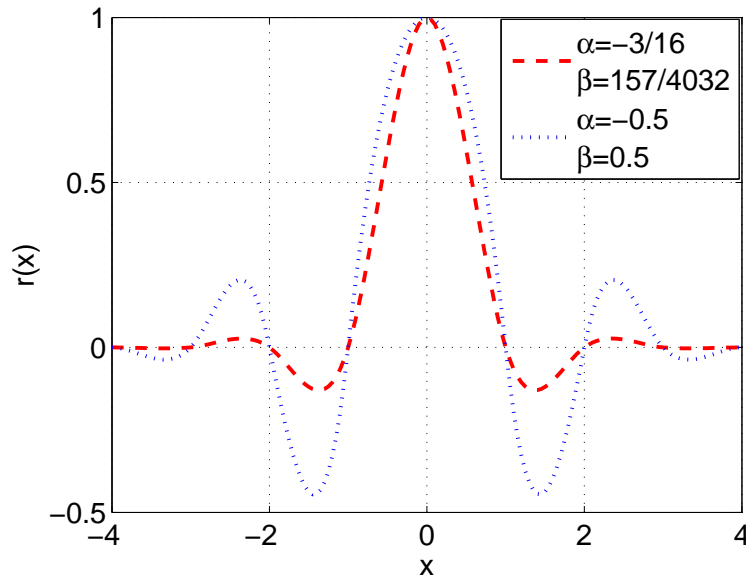
Sl. 3.5 Kejsovo dvo-parametarsko jezgro za neke vrednosti parametara α i β .

3.3.2.2 Grevilleovo 2P jezgro

Grevilleovo dvo-parametarsko jezgro definisano je sa [Greville, 1944]:

$$r(x) = \begin{cases} \left(\alpha - \frac{5}{2}\beta + \frac{3}{2}\right)|x|^3 - \left(\alpha - \frac{5}{2}\beta + \frac{5}{2}\right)|x|^2 + 1 & 0 \leq |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2}(\alpha - \beta - 1)|x|^3 - \left(3\alpha - \frac{9}{2}\beta - \frac{5}{2}\right)|x|^2 + \left(\frac{11}{2}\alpha - 10\beta - 4\right)|x| - (3\alpha - 6\beta - 2) & 1 < |x| \leq 2 \\ \frac{1}{2}(\alpha - 3\beta)|x|^3 + \left(4\alpha - \frac{25}{2}\beta\right)|x|^2 - \left(\frac{21}{2}\alpha - 34\beta\right)|x| + (9\alpha - 30\beta) & 2 < |x| \leq 3 \\ -\frac{1}{2}\beta|x|^3 + \frac{11}{2}\beta|x|^2 - 20\beta|x| + 24\beta & 3 < |x| \leq 4 \\ 0 & |x| > 4 \end{cases} \quad (3.13)$$

Na Sl. 3.6 prikazano je Grevilleovo dvo-parametarsko jezgro za neke vrednosti parametara α i β .



Sl. 3.6 Greville 2P jezgro za neke vrednosti parametara α i β .

3.4 Tro-parametarsko kubno konvoluciono jezgro

U cilju povećanja preciznosti interpolacije, u ovoj disertaciji konstruisano je Tro-parametarsko kubno konvoluciono jezgro (3P-PCC).

Tro-parametarsko kubno konvoluciono jezgro (3P-PCC) $r(x)$ definisano je polinomima trećeg reda na intervalima $[-4, -3)$, $[-3, -2)$, $[-2, -1)$, $[-1, -0]$, $[0, 1]$, $(1, 2]$, $(2, 3]$, $(3, 4]$. Opšti oblik ovog jezgra je prikazan jednačinom (3.14).

$$r(x) = \begin{cases} a_3|x|^3 + a_2|x|^2 + a_1|x| + a_0 & 0 \leq |x| \leq 1 \\ b_3|x|^3 + b_2|x|^2 + b_1|x| + b_0 & 1 < |x| \leq 2 \\ c_3|x|^3 + c_2|x|^2 + c_1|x| + c_0 & 2 < |x| \leq 3 \\ d_3|x|^3 + d_2|x|^2 + d_1|x| + d_0 & 3 < |x| \leq 4 \\ 0 & |x| > 4 \end{cases} \quad (3.14)$$

Pretpostavimo da interpolaciono jezgro zadovoljava sledeće uslove:

$$\begin{aligned} r(0) = 1 &\Rightarrow a_0 = 1 \\ r(1) = 0 &\Rightarrow a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ r(2) = 0 &\Rightarrow 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0 = 0, \\ r(3) = 0 &\Rightarrow 27c_3 + 9c_2 + 3c_1 + c_0 = 0 \\ r(4) = 0 &\Rightarrow 64d_3 + 16d_2 + 4d_1 + d_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} r(x) \Rightarrow a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = b_3 + b_2 + b_1 + b_0, \quad (3.16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} r(x) \Rightarrow 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0 = 8c_3 + 4c_2 + 2c_1 + c_0, \quad (3.17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} r(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} r(x) \Rightarrow 27c_3 + 9c_2 + 3c_1 + c_0 = 27d_3 + 9d_2 + 3d_1 + d_0, \quad (3.18)$$

$$r'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, \quad (3.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} r'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} r'(x) \Rightarrow a_3 + 2a_2 + a_1 = 3b_3 + 2b_2 + b_1, \quad (3.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} r'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} r'(x) \Rightarrow 12b_3 + 4b_2 + b_1 = 12c_3 + 4c_2 + c_1, \quad (3.21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} r'(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} r'(x) \Rightarrow 27c_3 + 6c_2 + c_1 = 27d_3 + 6d_2 + d_1, \quad (3.22)$$

$$r'(4) = 0 \Rightarrow 48d_3 + 8d_2 + d_1 = 0. \quad (3.23)$$

Uslovi (3.15)-(3.23) predstavljaju sistem linearnih jednačina. Sistem ima 13 jednačina i 16 nepoznatih. Otuda tri promenljive mogu biti proizvoljne ($b_3=\alpha$, $c_3=\beta$ i $d_3=\gamma$). Rešenja ovog sistema su:

$$a_0 = 1; a_1 = 0; a_2 = -\alpha + \beta - \gamma - 3; a_3 = \alpha - \beta + \gamma + 2; \tag{3.24}$$

$$b_0 = -4\alpha + 2\beta - 2\gamma; b_1 = 8\alpha - 3\beta + 3\gamma; b_2 = -5\alpha + \beta - \gamma; b_3 = \alpha; \tag{3.25}$$

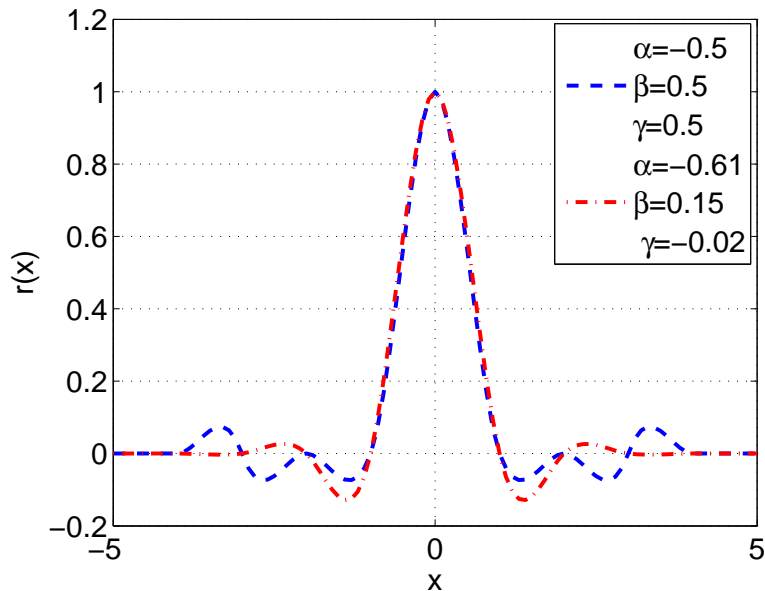
$$c_0 = -18\beta + 6\gamma; c_1 = 21\beta - 5\gamma; c_2 = -8\beta + \gamma; c_3 = \beta; \tag{3.26}$$

$$d_0 = -48\gamma; d_1 = 40\gamma; d_2 = -11\gamma; d_3 = \gamma, \tag{3.27}$$

gde su α, β i γ proizvoljni realni brojevi. Zamenom jednakosti (3.24)-(3.27) u (3.14) 3P- PCC jezgro može se zapisati u obliku:

$$r(x) = \begin{cases} (\alpha - \beta + \gamma + 2)|x|^3 + (-\alpha + \beta - \gamma - 3)|x|^2 + 1 & , \quad 0 \leq |x| \leq 1 \\ \alpha|x|^3 + (-5\alpha - \beta - \gamma)|x|^2 + (8\alpha - 3\beta + 3\gamma)|x| + (-4\alpha + 2\beta - 2\gamma) & 1 < |x| \leq 2 \\ \beta|x|^3 + (-8\beta + \gamma)|x|^2 + (21\beta - 5\gamma)|x| + (-18\beta + 6\gamma) & 2 < |x| \leq 3 \\ \gamma|x|^3 - 11\gamma|x|^2 + 40\gamma|x| - 48 & 3 < |x| \leq 4 \\ 0 & |x| > 4 \end{cases} \tag{3.28}$$

Za vrednost parametra $\gamma=0$ dobija se Kejsovo dvo-parametarsko jezgro, a za $\gamma=0$ i $\beta=0$ dobija se Kejsovo jednoparametarsko jezgro. Na Sl. 3.7 prikazano je tro-parametarsko jezgro za razne vrednosti parametara α, β i γ .



Sl. 3.7 Tro-parametarsko jezgro za neke vrednosti parametara α, β i γ .

4. OPTIMIZACIJA PARAMETARA INTERPOLACIONIH JEZGARA

4.1 Uvod

Teorijski idealno interpolaciono jezgro oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$ definisano je na intervalu $(-\infty, \infty)$. Zbog svoje beskonačne dužine fizički je neostvarljivo. Skraćivanje jezgra prozorskom funkcijom dovodi do promene spektralne karakteristike jezgra. Javlja se talasavost karakteristike. Postavlja se pitanje da li je moguće skratiti jezgro na prihvatljivu dužinu i izvršiti njegovu modifikaciju sa ciljem dobijanja optimalnih rezultata po nekom kriterijumu. Zbog toga se vrši parametarizacija jezgra i određivanje vrednosti parametra tako da se dobijaju optimalni rezultati.

Optimizacija parametra vrši se u:

- a) vremenskom i/ili
- b) frekvencijskom domenu.

Optimizacija u vremenskom domenu podrazumeva podešavanje parametara jezgra tako da vremenski oblik konvolucionog jezgra što bolje aproksimira oblik idealnog jezgra oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$. U [Keys, 1981] izvršena je optimizacija Kejsovog 1P jezgra u vremenskom domenu.

Pravougaona funkcija (Box funkcija) je spektralna karakteristika teorijski idealnog interpolacionog jezgra oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$. Kod parametarskih jezgara promenom parametra jezgra moguće je u velikoj meri spektralnu karakteristiku učiniti sličnom sa box funkcijom [Pianikh, 2012]. Optimizaciju je moguće izvršiti prema različitim kriterijumima:

- a) smanjenje talasavosti spektralne karakteristike primenom Tejlorovog razvoja,
- b) minimiziranje greške spektralne karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu,
- c) na osnovu nagiba spektralne karakteristike.

4.2 Idealno interpolaciono jezgro

4.2.1 Vremenski oblik

Pri obradi signala često je potrebno vršiti D/A konverziju tj. na osnovu uzoraka $x_s(t)$ konstruisati neprekidnu funkciju $x(t)$. Na osnovu teoreme o uzorkovanju, signal je moguće rekonstruisati preko konvolucije sa sinc funkcijom u prostornom domenu. Na taj način u spektralnom domenu biće izvršeno množenje sa pravougaonom funkcijom. Pri rekonstrukciji funkcije razmatra se i spektar uzorkovanih podataka. Furijeova transformacija pruža informacije o spektralnom sadržaju analiziranog signala. Box funkcija i funkcija $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ predstavljaju Furijeov transformacioni par. Furijeova transformacija pravougaone (box) funkcije je sinc funkcija.

$$x(2\pi t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{box}(f) e^{-i2\pi ft} df = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi ft} df = \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i\pi t} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (4.1)$$

Po teoriji uzorkovanja kardinalni sinus, odnosno *sinc* funkcija predstavlja idealno interpolaciono jezgro. Međutim zbog svoje beskonačne dužine ovo jezgro nije ostvarivo. Odsecanje funkcije, tj. definisanost na konačnom segmentu, izaziva talasavost njene spektralne karakteristike (box funkcija). Grafički prikaz odsečene *sinc* funkcije i njene spektralne karakteristike na segmentu a) [-3, 3], b) [-10, 10], c) [-50, 50], d) [-100, 100] dat je na Sl. 4.1 i Sl. 4.2

4.2.2 Amplitudska karakteristika

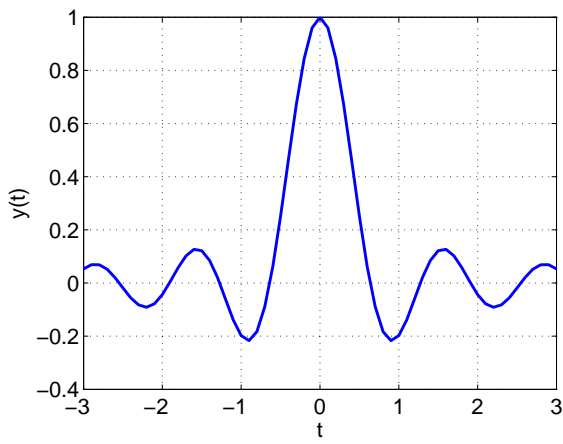
Amplitudska karakteristika idealnog interpolacionog jezgra je pravougaona H_B (box) funkcija:

$$H_B = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c \\ 0, & f_c < |f| \leq 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

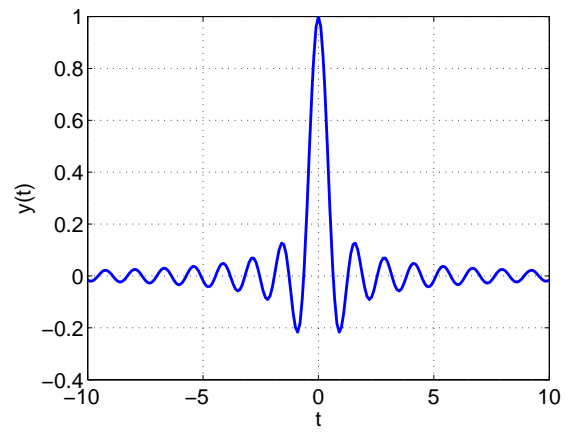
gde f_c predstavlja graničnu učestanost.

4.2.3 Fizička ostvarljivost

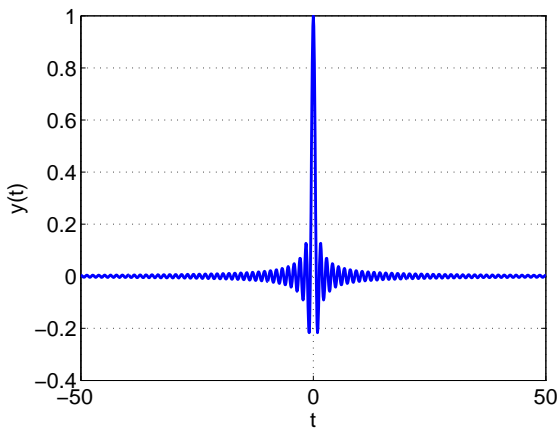
Interpolaciono jezgro je oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$ i definisano je na intervalu $(-\infty, \infty)$. Spektralna karakteristika je pravougaona funkcija, koja je u propusnom i nepropusnom opsegu idealno ravna, dok je prelazna oblast je beskonačno uska. Nije moguće praktično realizovati interpolaciono jezgro sa ovakvim karakteristikama.



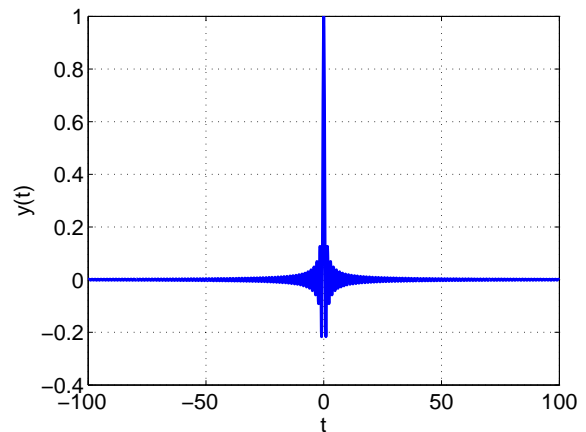
a)



b)

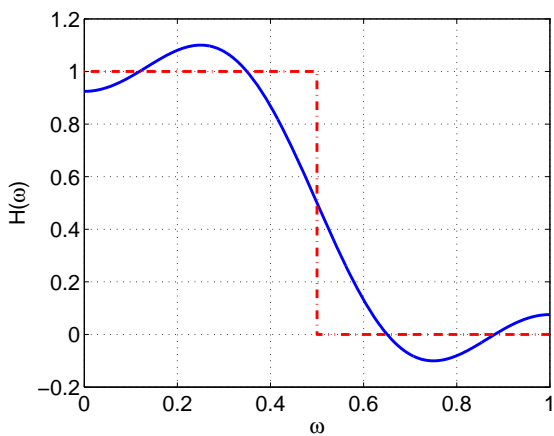


c)

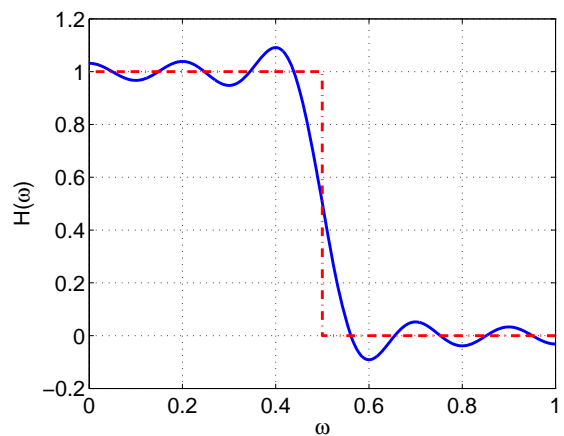


d)

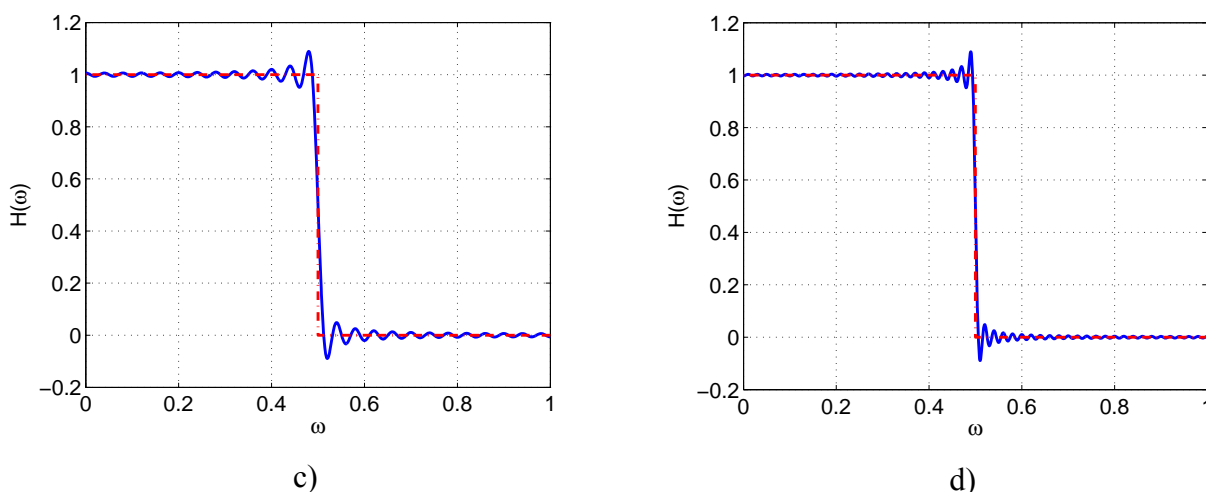
Sl. 4.1 Sinc funkcija na različitim segmentima a) $[-3, 3]$, b) $[-10, 10]$, c) $[-50, 50]$, d) $[-100, 100]$.



a)



b)



Sl. 4.2 Box funkcija i spektralne karakteristike odsečene sinc funkcije na različitim segmentima a) $[-3, 3]$, b) $[-10, 10]$, c) $[-50, 50]$, d) $[-100, 100]$.

4.2.4 Realno ostvarljiva interpolaciona jezgra

Idealno jezgro oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$ i sa granicama $(-\infty, \infty)$ nije fizički ostvarljivo. Fizička ostvarljivost podrazumeva konačno trajanje, odnosno konačnu dužinu jezgra. Pred konstruktorom jezgra postavljaju se zadaci:

- jezgro treba da je što kraće,
- vremenski oblik treba da je što prostiji,
- da je mala talasavost u propusnom i nepropusnom opsegu,
- veliki nagib spektralne karakteristike u prelaznoj oblasti.

U narednim poglavljima biće izvršena optimizacija parametara jezgara i to:

- Kvadratnog 1P jezgra,
- Kejsovih 1P i 2P jezgara,
- Grevilleovih 1P i 2P jezgara,
- Tro-parametarskog jezgra.

4.3 Algoritam minimiziranja talasavosti spektralne karakteristike

U ovom poglavlju biće opisan algoritam određivanja optimalnih parametara n -parametarskog jezgra $r(x)$ u spektralnom domenu minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike.

Algoritam se sastoji iz sledećih koraka:

Korak 1: Razlaganje jezgra $r(x)$ na komponente:

$$r(x) = r_0(x) + \alpha r_1(x) + \beta r_2(x) + \dots + \zeta r_n(x), \quad (4.3)$$

Korak 2: Primena Furijeove transformacije nad jezgrom,

$$H(f) = FT(r(x)) = FT(r_0(x) + \alpha r_1(x) + \dots + \zeta r_n(x)) = FT(r_0(x)) + \alpha FT(r_1(x)) + \dots + \zeta FT(r_n(x)), \quad (4.4)$$

tj. nad komponentama jezgra,

$$H_k(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_k(x) e^{-2\pi x f i} dx, \quad 0 \leq k \leq n, \quad (4.5)$$

Korak 3: Određivanje Tejlorovog razvoja u okolini $f=0$ (Maklorenov red) komponentata jezgra;

$$H_{T_k}(f) = c_0^k + c_1^k(\pi f) + c_2^k(\pi f)^2 + c_3^k(\pi f)^3 + c_4^k(\pi f)^4 + \dots, \quad 0 \leq k \leq n \quad (4.6)$$

Korak 4: Određivanje Tejlorovog razvoja spektralne karakteristike,

$$H_T(f) = H_{T_0}(f) + \alpha H_{T_1}(f) + \dots + \zeta H_{T_n}(f), \quad (4.7)$$

Korak 5: Eliminacija dejstva dominantnih članova spektralne karakteristike.

4.4 Optimizacija parametra kvadratnog 1P jezgra

U ovoj sekciji izvršena je optimizacija parametra kvadratnog 1P jezgra u spektralnom domenu. Optimizacija je izvršena minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike. Saglasno algoritmu iz sekcije 4.3, kvadratno 1P jezgro (3.8) može se se razložiti u obliku zbira komponentata:

$$r(x) = r_0(x) + \alpha r_1(x), \quad (4.8)$$

gde su:

$$r_0(x) = \begin{cases} -|x|^2 + 1 & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}, \quad (4.9)$$

$$r_1(x) = \begin{cases} 0 & , \quad |x| \leq 1 \\ -2|x|^2 + 6|x| - 4 & , \quad 1 < |x| \leq 2, \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases} \quad (4.10)$$

komponente jezgra.

Primenom Furijeove transformacije nad jezgrom $r(x)$ (3.8) dobija se spektralna karakteristika jezgra:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) e^{-2\pi x f i} dx. \quad (4.11)$$

Kako je

$$H(f) = FT(r(x)) = FT(r_0(x) + \alpha r_1(x)) = FT(r_0(x)) + \alpha FT(r_1(x)), \quad (4.12)$$

sledi da je

$$H(f) = H_0(f) + \alpha H_1(f), \quad (4.13)$$

gde su:

$$H_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_0(x) e^{-2\pi x f i} dx, \quad (4.14)$$

i

$$H_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_1(x) e^{-2\pi x f i} dx, \quad (4.15)$$

spektralne komponente jezgra. Primenom Ojlerove formule:

$$e^{-2\pi x f i} = \cos(2\pi x f) - i \sin(2\pi x f), \quad (4.16)$$

i definicije (4.9) spektralna komponenta H_0 može se predstaviti kao zbir određenih intgrala:

$$H_0(f) = \int_{-1}^0 (-x^2 + 1) \cos(2\pi x f) dx - i \int_{-1}^0 (-x^2 + 1) \sin(2\pi x f) dx \\ + \int_0^1 (-x^2 + 1) \cos(2\pi x f) dx - i \int_0^1 (-x^2 + 1) \sin(2\pi x f) dx. \quad (4.17)$$

Primenom parcijalne integracije i odgovarajućih trigonometrijskih jednakosti spektralna komponenta H_0 može se zapisati u obliku:

$$H_0(f) = \frac{\sin(2\pi f) - 2\pi f \cos(2\pi f)}{2\pi^3 f^3}. \quad (4.18)$$

Analogno, spektralna komponenta H_I , s obzirom na definiciju (4.10), je:

$$H_1(f) = \int_{-2}^{-1} (-2x^2 - 6x - 4) \cos(2\pi x f) dx - i \int_{-2}^{-1} (-2x^2 - 6x - 4) \sin(2\pi x f) dx \\ + \int_1^2 (-2x^2 + 6x - 4) \cos(2\pi x f) dx - i \int_1^2 (-2x^2 + 6x - 4) \sin(2\pi x f) dx. \quad (4.19)$$

Izračunavanjem određenih integrala dobija se:

$$H_1 = \frac{\sin(4\pi f) - \sin(2\pi f) + \sin^2(2\pi f) + 2\pi f \sin^2(\pi f) - 1}{\pi^3 f^3}. \quad (4.20)$$

Nakon razvoja u Tejlorov red u okolini $f=0$ (Maklorenov red) spektralne komponente H_0 i H_I dobijaju oblik:

$$H_{T0}(f) = \frac{4}{3} - \frac{8}{15}(\pi f)^2 + \frac{8}{105}(\pi f)^4 - \frac{16}{2835}(\pi f)^6 + \dots, \quad (4.21)$$

i

$$H_{T1}(f) = \frac{2}{3} - \frac{46}{15}(\pi f)^2 + \frac{268}{105}(\pi f)^4 - \frac{2582}{2835}(\pi f)^6 + \dots. \quad (4.22)$$

Sada se spektralna karakteristika jezgra može zapisati u obliku:

$$H_T(f) = \frac{2}{3}(2 + \alpha) - \frac{2}{15}(4 + 23\alpha)(\pi f)^2 \\ + \frac{4}{105}(2 + 67\alpha)(\pi f)^4 - \frac{2}{2835}(8 + 1291\alpha)(\pi f)^6 + \dots \quad (4.23)$$

U cilju smanjenja talasavosti spektralne karakteristike u propusnom opsegu treba eliminisati dejstvo kvadratnog člana. Potrebno je da koeficijent uz drugi član razvoja spektralne karakteristike $H_T(f)$ bude jednak nuli, odakle je:

$$23\alpha + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha_{opt} = -\frac{4}{23}. \quad (4.24)$$

4.5 Optimizacija parametra Kejsovog 1P jezgra

4.5.1 Minimiziranje interpolacione greške u prostornom domenu

U [Keys, 1981] je prikazan algoritam određivanja optimalnog parametra jezgra minimiziranjem interpolacione greške. Interpolaciona greška je definisana kao razlika između uzorkovane funkcije $f(x)$ i interpolacione funkcije $g(x)$. Interpolaciona funkcija $g(x)$ predstavljena je u sledećem obliku:

$$g(x) = \sum_k c_k r\left(\frac{x - x_k}{h}\right), \quad (4.25)$$

gde je c_k vrednost interpolacione funkcije u interpolacionom čvoru x_k , r interpolaciono jezgro, a h korak semplovanja, $h = x_k - x_{k-1}$. Vrednost interpolacione funkcije u interpolacionom čvoru x_j je:

$$g(x_j) = \sum_k c_k r\left(\frac{x_j - x_k}{h}\right) = \sum_k c_k r\left(\frac{(j-k)h}{h}\right) = \sum_k c_k r(j-k). \quad (4.26)$$

Generalno, interpolaciona funkcija (4.25) može se prikazati kao:

$$g(x) = \sum_k c_k r(s + j - k), \quad (4.27)$$

gde je $s = (x - x_j)/h$, $0 < s < 1$, $(x - x_k)/h = (x - x_k + x_k - x_j)/h = s + j - k$. Uzimajući u obzir da je jezgro izvan intervala $[-2, 2]$ jednako nuli (4.27) se može zapisati u obliku:

$$g(x) = c_{j-1}r(s+1) + c_j r(s) + c_{j+1}r(s-1) + c_{j+2}r(s-2). \quad (4.28)$$

Zamenom (jna jezgra) u (4.28) dobija se:

$$g(x) = c_{j-1}(\alpha s^3 - \alpha s^2 + \alpha) + c_j((\alpha + 2)s^3 + (\alpha + 3)s^2 + 1) + c_{j+1}(-(\alpha + 2)s^3 + (2\alpha + 3)s^2 + \alpha s) + c_{j+2}(-\alpha s^3 + \alpha s^2). \quad (4.29)$$

Uz pretpostavku da interpolirana funkcija f ima na intervalu $[x_j, x_{j+1}]$ neprekidne izvode najmanje trećeg reda, primenom Tejlorovog razvoja na interpoliranu funkciju u okolini x_j dobija se:

$$f(x) = f(x_j) + f'(x_j)(x - x_j) + f''(x_j)\frac{(x - x_j)^2}{2} + O(h^3), \quad (4.30)$$

gde je $O(h^3)$ ostatak razvoja, odnosno greška aproksimacije. Kako je $(x - x_j) = sh$ sledi:

$$f(x) = f(x_j) + shf'(x_j) + \frac{s^2 h^2 f''(x_j)}{2} + O(h^3). \quad (4.31)$$

Koeficijenti (4.29) c_{j-1}, \dots, c_{j+2} , određuju se iz (4.30) zamenom x sa x_{j-1}, \dots, x_{j+2} respektivno, nakon čega se interpolaciona funkcija može se zapisati u obliku:

$$g(x) = -(2\alpha + 1)[2f'(x_j)h + f''(x_j)h^2]s^3 + \left[(6\alpha + 3)f'(x_j)h + (4\alpha + 3)f''(x_j)\frac{h^2}{2} \right]s^2 + 2f'(x_j)hs + f(x_j) + O|h^3| \quad (4.32)$$

Greška interpolacije određuje se kao razlika:

$$f(x) - g(x) = (2\alpha + 1)[2f'(x_j)h + f''(x_j)h^2]s^3 - (2\alpha + 1)[3f'(x_j)h + 2f''(x_j)h^2]s^2 + (2\alpha + 1)shf'(x_j) + O|h^3| \quad (4.33)$$

Kod rekonstruisanja funkcije polinomom stepena $n \geq 3$ izborom parametra α moguće je obezediti da interpolaciona funkcija ne pravi grešku do trećeg reda. Na osnovu (4.33) zaključuje se da je:

$$2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \alpha_{opt} = -0.5. \quad (4.34)$$

4.5.2 Minimiziranje talasavosti spektralne karakteristike

U radu [Park, 1983] prikazana je optimizacija Kejsovog 1P jezgra u spektralnom domenu. Jezgro r definisano jednačinom (3.5) može se zapisati u obliku zbira komponentata:

$$r(x) = r_0(x) + \alpha r_1(x), \quad (4.35)$$

gde su:

$$r_0(x) = \begin{cases} 2|x|^3 - 3|x|^2 + 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases} \quad (4.36)$$

i

$$r_1(x) = \begin{cases} |x|^3 - |x|^2 & , \quad |x| \leq 1 \\ |x|^3 - 5|x|^2 + 8|x| - 4 & , \quad 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases} \quad (4.37)$$

Komponente Kejsovog 1P jezgra (r_0) i (r_1) prikazane su na Sl. 4.3.

Primenom Furijeove transformacije nad jezgrom $r(x)$ (3.5) dobija se spektralna karakteristika jezgra:

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) e^{-2\pi x f i} dx = H_0(f) + \alpha H_1(f), \quad (4.38)$$

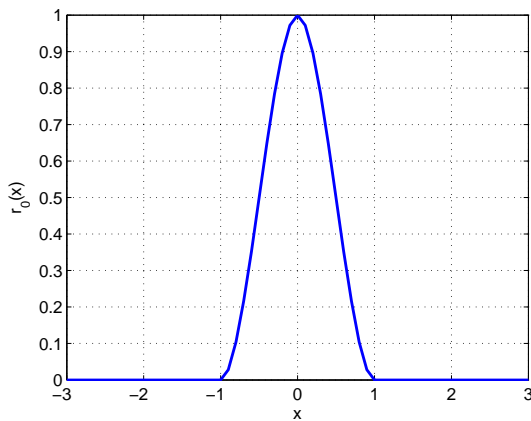
gde su:

$$H_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_0(x) e^{-2\pi x f i} dx, \quad (4.39)$$

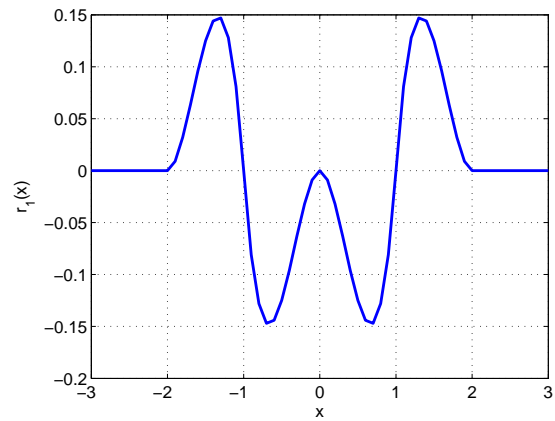
i

$$H_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_1(x) e^{-2\pi x f i} dx, \quad (4.40)$$

spektralne komponente jezgra.



a)



b)

Sl. 4.3 Komponente Kejsovog IP jezgra a) r_0 i b) r_1 .

Uzimajući u obzir definiciju (4.36) komponente r_0 spektralna komponenta H_0 može se zapisati u obliku:

$$H_0(f) = \int_{-1}^0 (-2x^3 - x^2 + 1) e^{-2\pi x f i} dx + \int_0^1 (2x^3 - x^2 + 1) e^{-2\pi x f i} dx. \quad (4.41)$$

Nakon primene Ojlerove formule jednakost (4.41) dobija oblik:

$$H_0(f) = \int_{-1}^0 (-2x^3 - x^2 + 1) (\cos(2\pi x f) - i \sin(2\pi x f)) dx + \int_0^1 (2x^3 - x^2 + 1) (\cos(2\pi x f) - i \sin(2\pi x f)) dx. \quad (4.42)$$

Primenom parcijalne integracije i odgovarajućih trigonometrijskih transformacija, jednakost (4.42) može se zapisati u obliku:

$$H_0(f) = \frac{6 \sin^2(\pi f) - 3\pi f \sin(2\pi f)}{2\pi^4 f^4}. \quad (4.43)$$

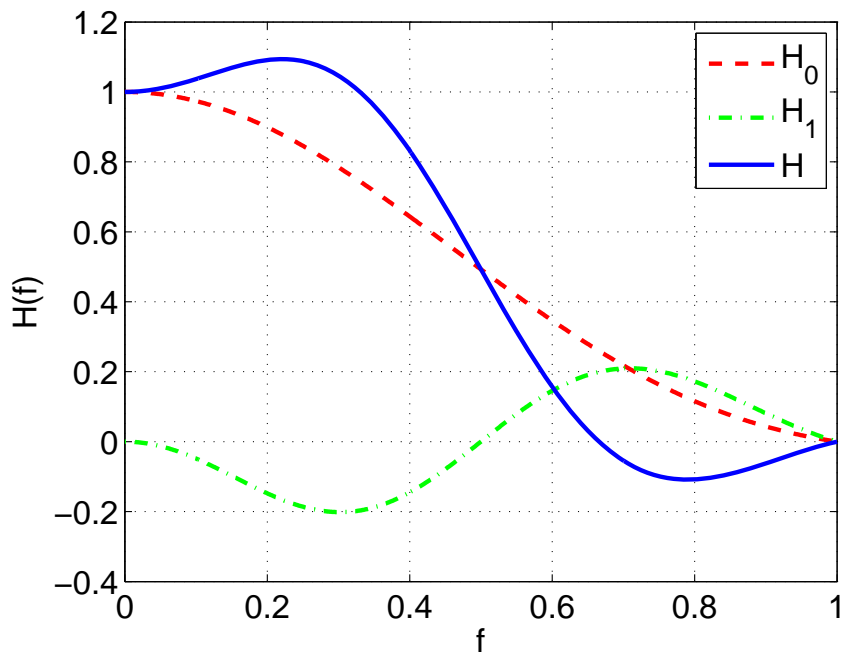
Analogno, spektralna komponenta H_1 (jednakost (4.40)) s obzirom na definiciju (4.37) komponente r_1 dobija oblik:

$$\begin{aligned} H_1(f) = & \int_{-2}^{-1} (-x^3 - 5x^2 - 8x - 4) (\cos(2\pi x f) - i \sin(2\pi x f)) dx + \\ & \int_{-1}^0 (-x^3 - x^2) (\cos(2\pi x f) - i \sin(2\pi x f)) dx + \\ & \int_0^1 (x^3 - x^2) (\cos(2\pi x f) - i \sin(2\pi x f)) dx + \\ & \int_1^2 (x^3 - 5x^2 + 8x - 4) (\cos(2\pi x f) - i \sin(2\pi x f)) dx \end{aligned} \quad (4.44)$$

Nakon izračunavanja određenih integrala jednakost (4.44) dobija oblik:

$$H_1(f) = \frac{3 \sin^2(2\pi f) - 4\pi f \sin(2\pi f) - \sin(4\pi f)}{2\pi^4 f^4}. \quad (4.45)$$

Na Sl. 4.4 prikazane su spektralna karakteristika, H , i spektralne komponente, H_0 i H_1 1P Kejsovog interpolacionog jezgra.



Sl. 4.4 Spektralna karakteristika Kejsovog 1P jezgra, H , i njene komponente H_0 i H_1 .

Razvojem u Tejlorov red u okolini $f=0$ (Maklorenov red) spektralne komponente H_0 i H_1 dobijaju oblik:

$$H_{T_0}(f) = 1 - \frac{4}{15}(\pi f)^2 + \frac{1}{35}(\pi f)^4 + \dots \quad (4.46)$$

i

$$H_{T_1}(f) = -\frac{8}{15}(\pi f)^2 + \frac{16}{35}(\pi f)^4 + \dots \quad (4.47)$$

Konačno, Tejlorov razvoj spektralne karakteristike je:

$$H_T(f) = H_{T_0}(f) + \alpha H_{T_1}(f) = 1 - \frac{4}{15}(2\alpha + 1)(\pi f)^2 + \frac{1}{35}(16\alpha + 1)(\pi f)^4 + \dots \quad (4.48)$$

U radu [Park, 1983], u cilju smanjenja talasavosti funkcije u propusnom opsegu predloženo je da koeficijent uz drugi član Tejlorovog razvoja spektralne karakteristike $H_T(f)$ bude jednak nuli, odakle je:

$$2\alpha + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha_{opt} = -0.5. \quad (4.49)$$

4.5.3 Minimiziranje greške sličnosti spektralnih karakteristika

Polazi se od ideje da spektralna karakteristika jezgra, $H(f)$ bude dobra aproksimacija karakteristike idealnog interpolacionog jezgra oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$ u propusnom i nepropusnom opsegu (Box funkcija $H_B(f)$). Razlika spektralnih karakteristika $H(f)$ i $H_B(f)$ predstavlja grešku sličnosti spektralnih karakteristika. Minimiziranjem greške sličnosti moguće je odrediti optimalnu vrednost parametra jezgra [Milivojević1, 2016]. Spektralna karakteristika jezgra $\sin(\pi x)/(\pi x)$ je idealna pravougaona funkcija $H_B(f)$ koja ima vrednost 1 u intervalu $[0-0.5]$ i vrednost 0 u intervalu $[0.5-1]$. Ukupna srednje kvadratna greška tada je:

$$E_T = \int_{-1}^1 |H_B(f) - H(f)|^2 df = 2 \int_0^1 |H_B(f) - H(f)|^2 df = 2 \left(\int_0^{0.5} |1 - H(f)|^2 df + \int_{0.5}^1 |H(f)|^2 df \right). \quad (4.50)$$

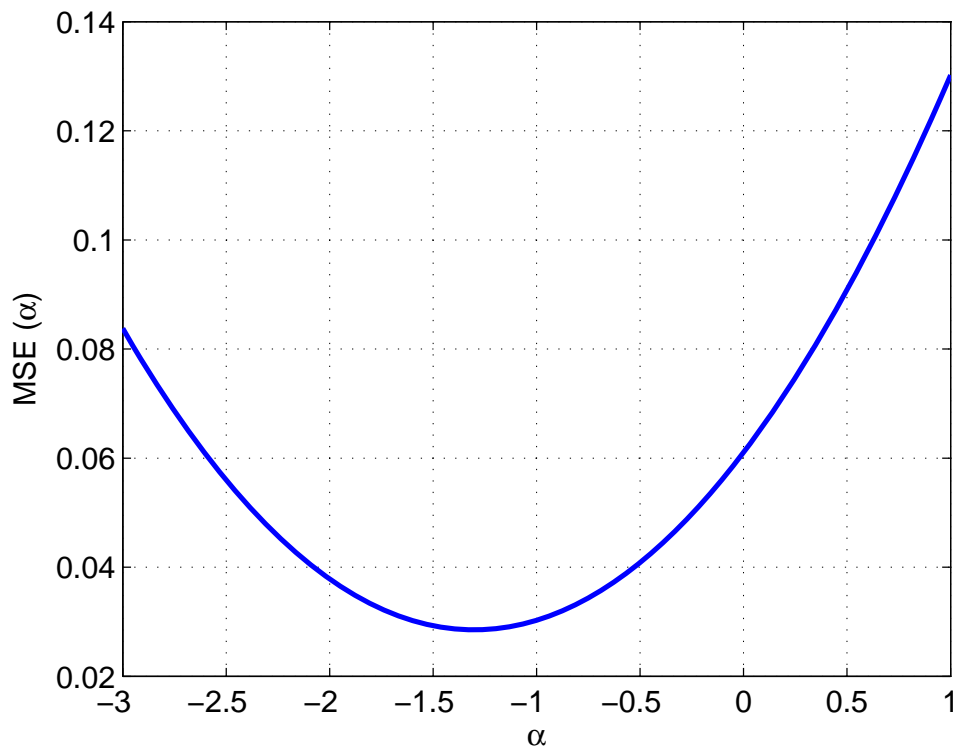
Prelaskom sa kontinualne frekventne ose na diskretnu, podelom segmenta $[0-1]$ na M segmenata, diskretni oblik srednje kvadratne greške (MSE) je:

$$MSE = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |H_B(f_k) - H(f_k)|^2 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{\frac{M-1}{2}} |1 - H(f_k)|^2 + \frac{1}{M} \sum_{k=\frac{M-1}{2}+1}^M |0 - H(f_k)|^2. \quad (4.51)$$

S obzirom da je:

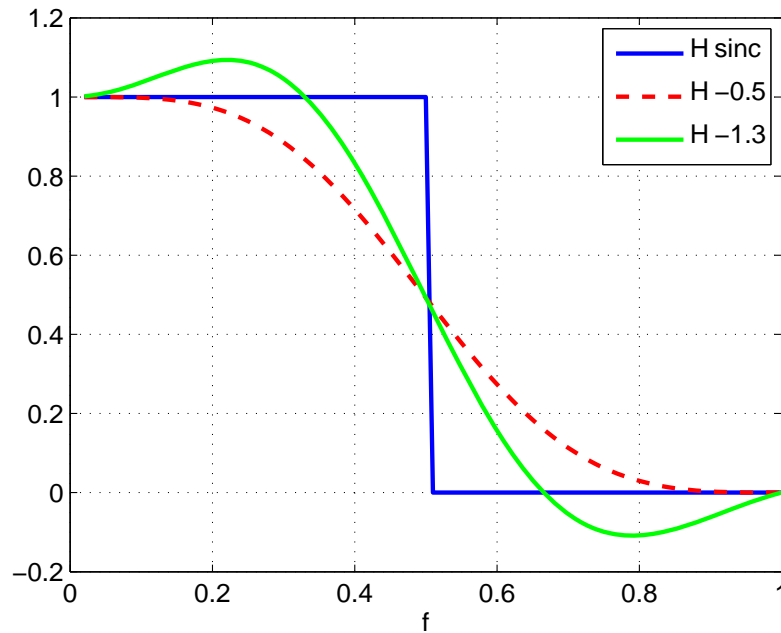
$$H(f) = H_0(f) + \alpha H_1(f) = H(f, \alpha), \quad (4.52)$$

srednja kvadratna greška MSE je zavisna od parametra α . Optimalna vrednost parametra α određena je na osnovu pozicije minimalne vrednosti $MSE(\alpha)$, $\alpha_{opt} = -1.3$. Zavisnost $MSE(\alpha)$ u opsegu $\alpha = (-3, 1)$ prikazana je na Sl. 4.5.



Sl. 4.5 Zavisnost MSE od parametra α .

Na Sl. 4.6 prikazane su spektralne karakteristike H_{sinc} , $H(f, -0.5)$ i $H(f, -1.3)$.



Sl. 4.6 Spektralne karakteristike idealnog interpolacionog jezgra i Kejsovog 1P jezgra.

4.5.4 Minimiziranje razlike izvoda spektralnih karakteristika

U ovoj sekciji prikazan je originalni algoritam određivanja optimalnog parametra 1P Kejsovog jezgra diferenciranjem spektralne karakteristike (DSC Algoritam) [Milivojević3, 2016]. Sa idejom da prvi izvod spektralne karakteristike 1P Kejsovog jezgra bude dobra aproksimacija prvog izvoda box funkcije i minimiziranjem njihove razlike određena je optimalna vrednost parametra jezgra (α_{opt}).

Diferenciranjem (4.38) dobija se:

$$H'(f) = \frac{d(H(f))}{df} = \frac{d(H_0(f) + \alpha H_1(f))}{df} = H'_0(f) + \alpha H'_1(f) = H'(f, \alpha), \quad (4.53)$$

gde su:

$$H'_0 = -\frac{6}{f^5 \pi^4} (2 \sin^2(f\pi) + f\pi \sin(2f\pi)) + \frac{3}{2f^4 \pi^4} \cdot (-2f\pi^2 \cos(2f\pi) + \pi \sin(2f\pi)), \quad (4.54)$$

i

$$H'_1 = \frac{-1}{2f^4 \pi^3} (4 \sin(2f\pi) - 5 \sin(4f\pi)) - \frac{2}{f^3 \pi^2} (2 \cos(2f\pi) + \cos(2f\pi)) + \frac{-2}{f^5 \pi^4} (3 \sin^2(2f\pi) - f\pi(4 \sin(2f\pi) + \sin(4f\pi))), \quad (4.55)$$

komponente izvoda spektralne karakteristike.

Uzimajući u obzir činjenicu da se box funkcija $H_B(f)$ može predstaviti kao razlika dve Hevisajdove step funkcije:

$$H_B(f) = H_H(f) - H_H(f - 0.5), \quad (4.56)$$

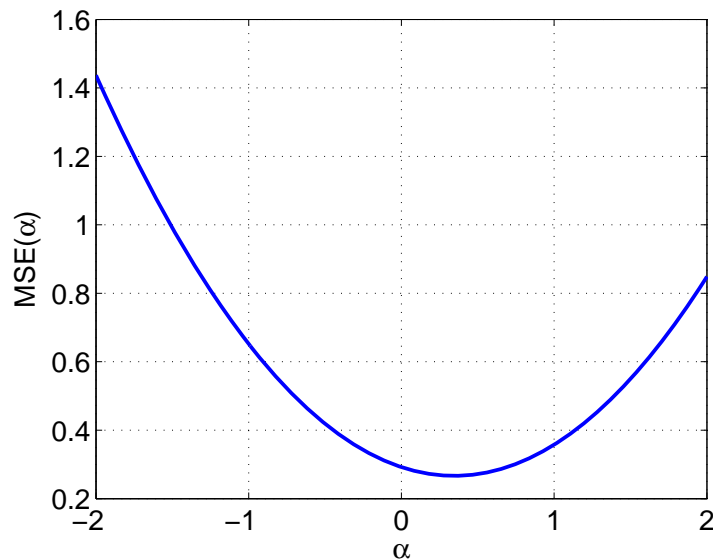
prelaskom sa kontinualne frekventne ose $f \in [0-1]$ na diskretnu k , gde je $0 \leq k \leq M-1$, izvod funkcije $H_B(f)$, je razlika dve Dirakove jedinične funkcije

$$H'_B(k) = \delta(k) - \delta\left(k - \left\lfloor \frac{M-1}{2} \right\rfloor\right). \quad (4.57)$$

Srednja kvadratna greška je:

$$MSE(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} |H'_B(k, \alpha) - H'(k, \alpha)|^2. \quad (4.58)$$

Na slici Sl. 4.7 prikazana je zavisnost MSE od parametra α . Optimalna vrednost parametra α određena je na osnovu pozicije minimalne vrednosti $MSE(\alpha)$, $\alpha_{opt} = 0.35$.



Sl. 4.7 Zavisnost MSE od parametra Kejsovog 1P jezgra

4.6 Optimizacija parametra Kejsovog 2P jezgra

Optimizacija parametara Kejsovog 2P jezgra biće izvršena u spektralnom domenu. Optimalni parametri jezgra biće određeni primenom algoritma za minimiziranje talasavosti spektralne karakteristike i minimiziranjem greške sličnosti spektralnih karakteristika.

4.6.1 Minimiziranje talasavosti spektralne karakteristike

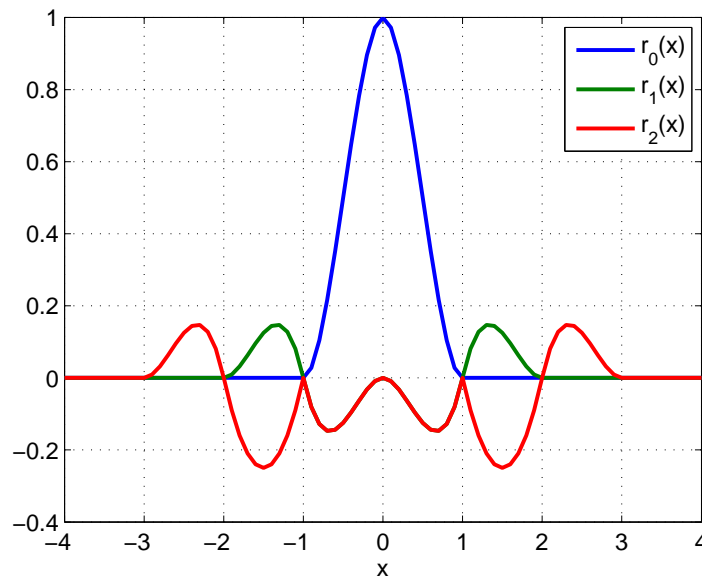
Kejsovo 2P jezgro r definisano jednačinom (3.12) može se zapisati u obliku zbira komponenata:

$$r(x) = r_0(x) + \alpha r_1(x) + \beta r_2(x). \quad (4.59)$$

Komponente (r_0) i (r_1) definisane su jednačinama (4.36) i (4.37), dok je (r_2) definisana sa:

$$r_2(x) = \begin{cases} |x|^3 - |x|^2, & 0 < |x| \leq 1 \\ |x|^2 - 3|x| + 2, & 1 < |x| \leq 2 \\ |x|^3 - 8|x|^2 + 21|x| - 18, & 2 < |x| \leq 3 \\ 0; & 3 < |x| \end{cases}. \quad (4.60)$$

Komponente jezgra prikazane su na Sl. 4.8.



Sl. 4.8 Komponente Kejsovog 2P jezgra.

Primenom Furijeove transformacije nad jezgrom $r(x)$ (3.12) dobija se spektralna karakteristika jezgra

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r(x) e^{-2\pi x f i} dx = H_0(f) + \alpha H_1(f) + \beta H_2(f), \quad (4.61)$$

gde su:

$$H_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_0(x) e^{-2\pi x f i} dx, \quad (4.62)$$

$$H_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_1(x) e^{-2\pi x f i} dx, \quad (4.63)$$

$$H_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_2(x) e^{-2\pi x f i} dx, \quad (4.64)$$

spektralne komponente jezgra. Spektralne komponente H_0 i H_1 predstavljene su jednakostima (4.43) i (4.45), dok se komponenta H_2 može se zapisati u obliku:

$$H_2(f) = \frac{3(\sin^2(3\pi f) - \sin^2(2\pi f) - \sin^2(\pi f)) + \pi f(3\sin(2\pi f) - 3\sin(4\pi f) - \sin(6\pi f))}{2\pi^4 f^4}. \quad (4.65)$$

Razvojem u Tejlorov red u okolini $f=0$ (Maklorenov red) spektralna komponenta H_2 dobijaju oblik:

$$H_{T_2}(f) = -\frac{8}{15}(\pi f)^2 - \frac{272}{105}(\pi f)^4 + \dots \quad (4.66)$$

Tejlorov razvoj spektralne karakteristike je:

$$\begin{aligned} H_T(f) &= H_{T_0}(f) + \alpha H_{T_1}(f) + \beta H_{T_2}(f) = \\ &= 1 - \frac{4}{15}(2\alpha + 2\beta + 1)(\pi f)^2 + \frac{1}{105}(48\alpha + 272\beta + 3)(\pi f)^4 + \dots \end{aligned} \quad (4.67)$$

Eliminacija dejstva dva dominantna člana postiže se izborom:

$$2\alpha + 2\beta + 1 = 0 \quad \text{i} \quad 48\alpha + 272\beta + 3 = 0. \quad (4.68)$$

Rešavanjem ovog sistema dobijaju se optimalne vrednosti parametara Kejsovog 2P jezgra:

$$\alpha = \alpha_{opt} = -\frac{19}{32} \quad \text{i} \quad \beta = \beta_{opt} = \frac{3}{32}. \quad (4.69)$$

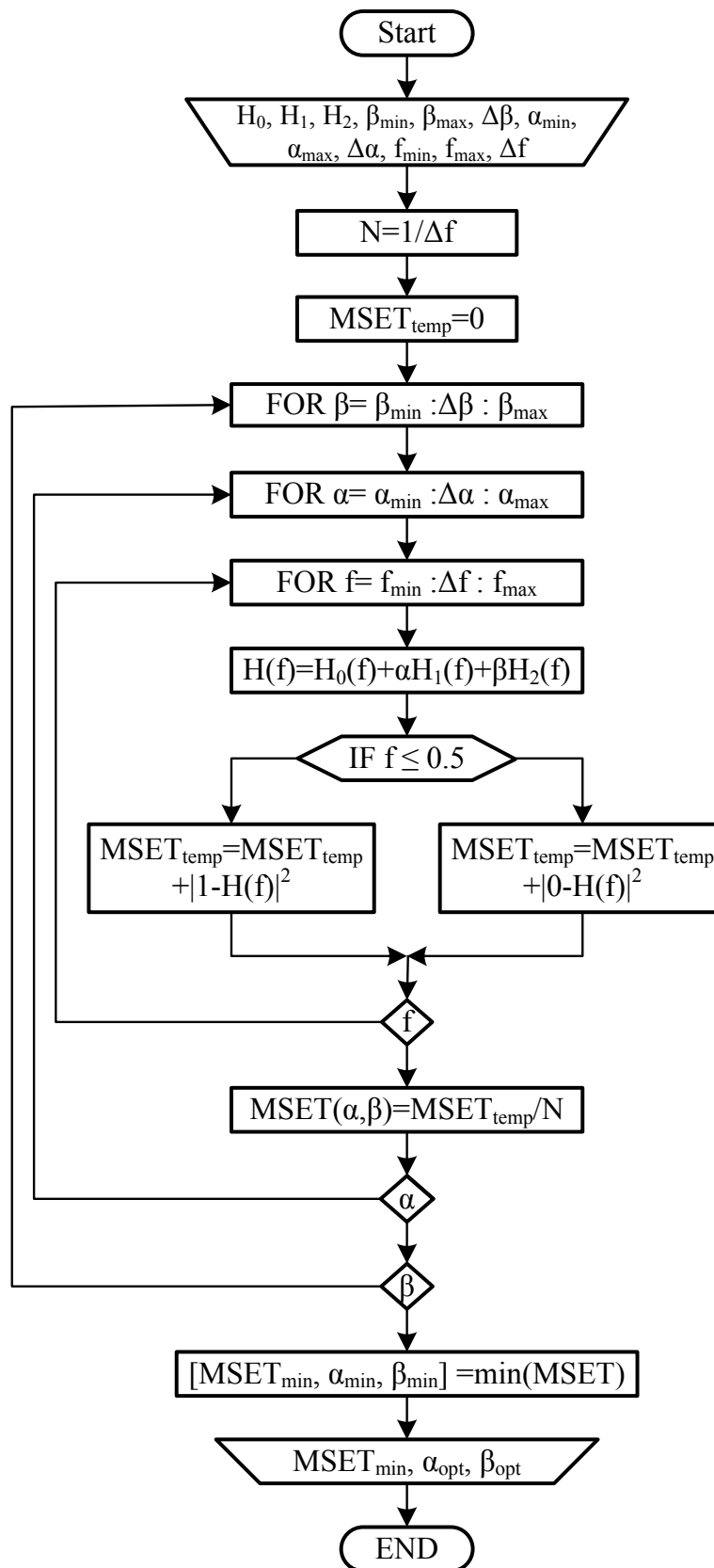
4.6.2 Minimiziranje greške sličnosti spektralnih karakteristika

Optimalna vrednost parametara Kejsovog 2P jezgra određena je minimiziranjem greške odstupanja spektralne karakteristike jezgra u odnosu na box funkciju $H_B(f)$ [Milivojević2, 2016].

S obzirom da je spektralna karakteristika jezgra:

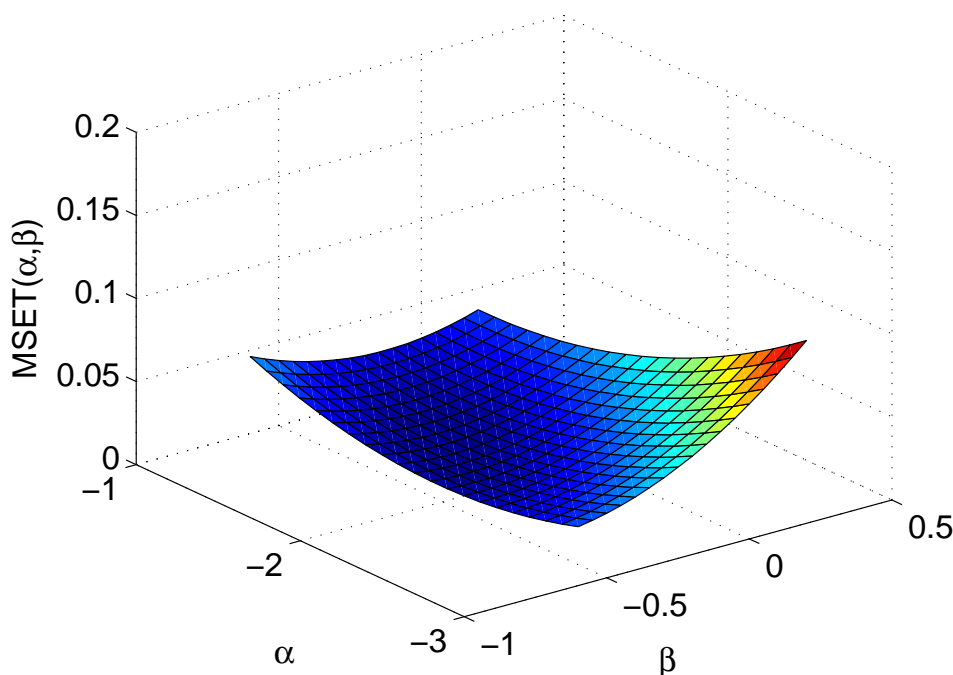
$$H(f) = H_0(f) + \alpha H_1(f) + \beta H_2(f) = H(f, \alpha, \beta), \quad (4.70)$$

to je srednja kvadratna greška MSE (jednačina (4.51)) zavisna od parametara α i β .



Sl. 4.9 Algoritam procene optimalnih parametara 2P jezgra.

Algoritam procene optimalnih parametara α_{opt} i β_{opt} Kejsovog 2P jezgra u spektralnom domenu prikazan je na Sl. 4.9. Ulazni parametri su spektralne komponente H_0 , H_1 i H_2 (jednačine (4.43), (4.45) i (4.65)), opseg parametra α (α_{min} , α_{max}), iterativni korak $\Delta\alpha$, opseg parametra β (β_{min} , β_{max}), iterativni korak $\Delta\beta$, i opseg normalizovane frekvencije f (f_{min} , f_{max}), iterativni korak Δf . Izlazne vrednosti su α_{opt} , β_{opt} i minimalna vrednost MSET_{min} . Zavisnost $\text{MSE}(\alpha, \beta)$ u opsegu $\alpha=(-3;-1)$ i $\beta=(-1;0.5)$ prikazana je na Sl. 4.10.



Sl. 4.10 Totalna srednja kvadratna greška izmedju amplitudske karakteristike 2P Kejsovog jezgra, H , i idealne H_B spektralne karakteristike u zavisnosti od parametara α , β .

Optimalna vrednost parametara α i β ($\alpha_{\text{opt}}=-1.9$ i $\beta_{\text{opt}}=-0.4$) određena je na osnovu pozicije minimalne vrednosti $\text{MSE}(\alpha, \beta)$.

4.7 Optimizacija parametra Grevilleovog 1P jezgra

4.7.1 Minimiziranje talasavosti spektralne karakteristike

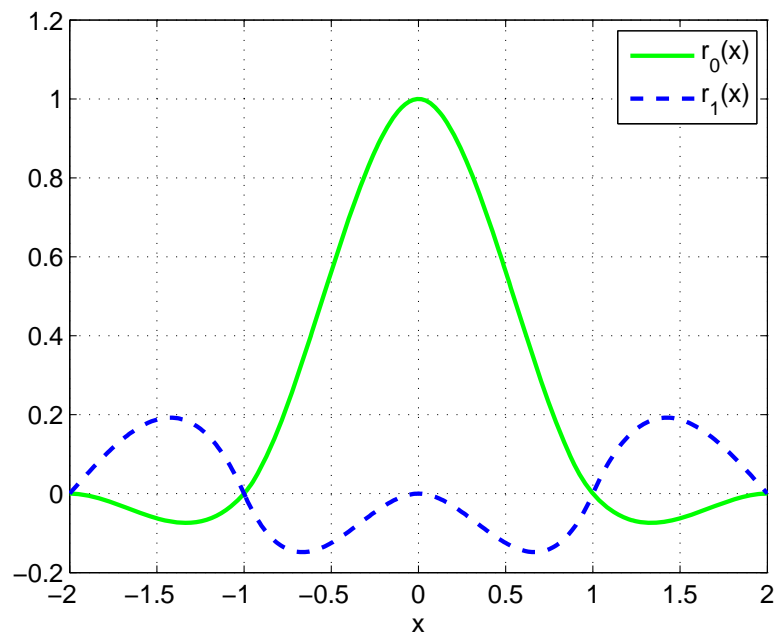
Komponente Grevilleovog jednoparametarskog jezgra su:

$$r_0(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}|x|^3 - \frac{5}{2}|x|^2 + 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ -\frac{1}{2}|x|^3 + \frac{5}{2}|x|^2 - 4|x| + 2 & , \quad 1 < |x| \leq 2, \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases} \quad (4.71)$$

i

$$r_1(x) = \begin{cases} |x|^3 - |x|^2; & 0 \leq |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2}|x|^3 - 3|x|^2 + \frac{11}{2}|x| - 3; & 1 \leq |x| \leq 2 \\ -\frac{1}{2}|x|^3 + 4|x|^2 - \frac{21}{2}|x| + 9; & 2 \leq |x| \leq 3 \\ 0; & 3 \leq |x| \end{cases} \quad (4.72)$$

Komponente Grevilleovog jezgra prikazane su na Sl. 4.11



Sl. 4.11 Komponente r_0 i r_1 Grevilleovog jednoparametarskog jezgra.

Primenom Furijeove transformacije nad komponentama (r_0) i (r_1), uzimajući u obzir definisanost komponenti jezgra, tj. jednakosti (4.71) i (4.72) spektralne komponente Grevilleovog 1P jezgra H_0 i H_1 mogu se zapisati respektivno:

$$\begin{aligned}
H_0(f) = & \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 2 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + 2 \right) \sin(2\pi x f) dx \\
& + \int_{-1}^0 \left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 1 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_{-1}^0 \left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 1 \right) \sin(2\pi x f) dx \\
& + \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 1 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 1 \right) \sin(2\pi x f) dx \\
& + \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x + 2 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x + 2 \right) \sin(2\pi x f) dx
\end{aligned} \tag{4.73}$$

i

$$\begin{aligned}
H_1(f) = & \int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + \frac{21}{2}x + 9 \right) \cos(2\pi x f) dx - \\
& i \int_{-3}^{-2} \left(\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + \frac{21}{2}x + 9 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\
& \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{11}{2}x - 3 \right) \cos(2\pi x f) dx - \\
& i \int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - \frac{11}{2}x - 3 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\
& \int_{-1}^0 (-x^3 - x^2) \cos(2\pi x f) dx - i \int_{-1}^0 (-x^3 - x^2) \sin(2\pi x f) dx + \\
& \int_0^1 (x^3 - x^2) \cos(2\pi x f) dx - i \int_0^1 (x^3 - x^2) \sin(2\pi x f) dx + \\
& \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{11}{2}x - 3 \right) \cos(2\pi x f) dx - \\
& i \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{11}{2}x - 3 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\
& \int_2^3 \left(-\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - \frac{21}{2}x + 9 \right) \cos(2\pi x f) dx - \\
& i \int_2^3 \left(-\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - \frac{21}{2}x + 9 \right) \sin(2\pi x f) dx
\end{aligned} \tag{4.74}$$

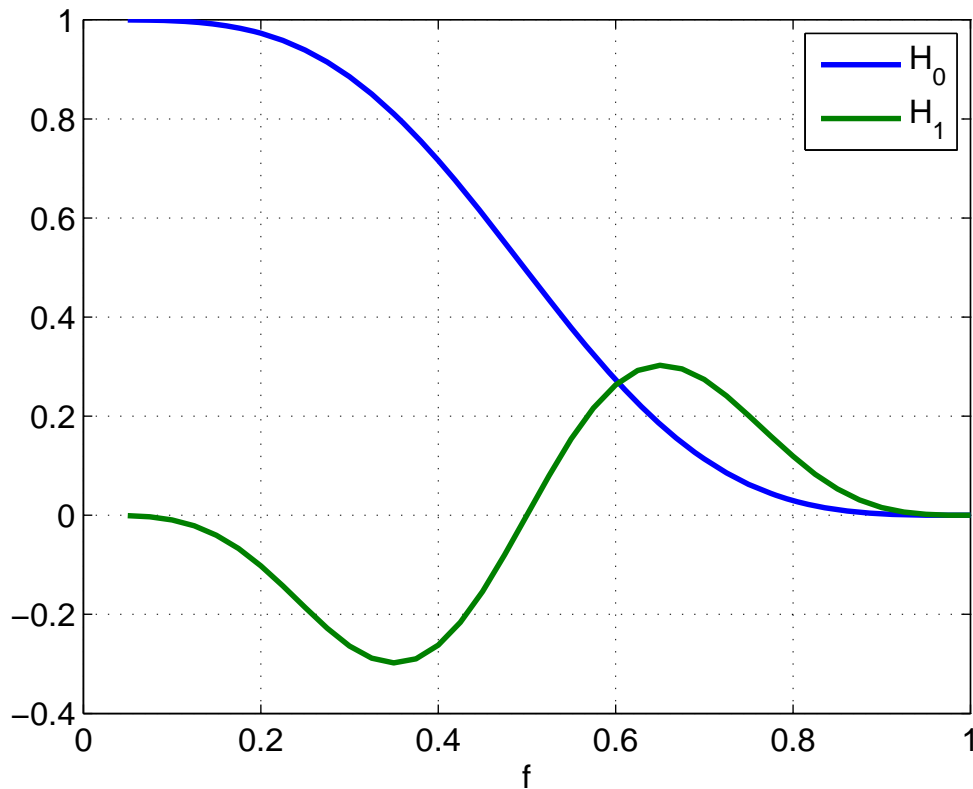
Nakon izračunavanja određenih integrala, primenom parcijalne integracije i odgovarajućih trigonometrijskih jednakosti spektralne komponente H_0 i H_1 mogu se zapisati u obliku:

$$H_0(f) = \frac{3 \sin^4(\pi f) - \pi f \sin^2(\pi f) \sin(2\pi f)}{\pi^4 f^4} , \tag{4.75}$$

i

$$H_1(f) = \frac{\sin(\pi f) \sin(2\pi f) \cdot (3 \sin(\pi f) \sin(2\pi f) - 6\pi f \sin(\pi f) + 4\pi f \sin^2(\pi f))}{\pi^4 f^4}. \quad (4.76)$$

Na Sl. 4.12 prikazane su spektralne komponente Grevilleovog jednoparametarskog interpolacionog jezgra.



Sl. 4.12 Spektralne komponente Grevilleovog jednoparametarskog interpolacionog jezgra: H_0 i H_1 .

Nakon razvoja u Tejlorov red u okolini $f=0$ spektralne komponente dobijaju oblik:

$$H_{T_0}(f) = 1 - \frac{1}{5}(\pi f)^4 + \frac{68}{945}(\pi f)^6 - \frac{62}{4725}(\pi f)^8 + \dots, \quad (4.77)$$

i

$$H_{T_1}(f) = -\frac{16}{15}(\pi f)^4 + \frac{80}{63}(\pi f)^6 - \frac{3056}{4725}(\pi f)^8 + \dots. \quad (4.78)$$

Tejlorov razvoj spektralne karakteristike je:

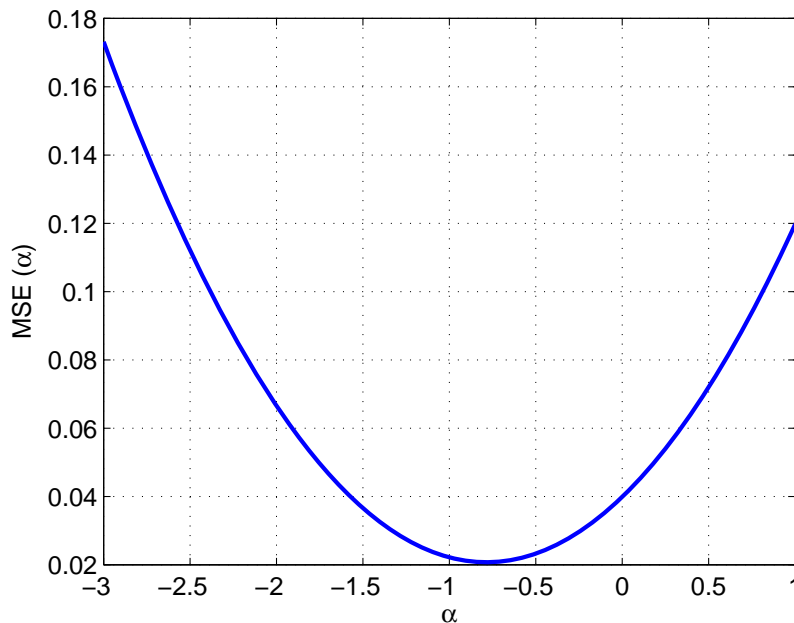
$$\begin{aligned}
 H_T(f) &= H_{T_0}(f) + \alpha H_{T_1}(f) \\
 &= 1 - \frac{1}{5} \left(\frac{16}{3} \alpha + 1 \right) (\pi f)^4 + \frac{4}{63} \left(\frac{17}{15} \alpha + 20 \right) (\pi f)^6 - \frac{2}{4725} (1521 \alpha + 31) (\pi f)^8 \dots
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Eliminacijom dejstva kvadratnog člana dobija se optimalni parametar jezgra:

$$\frac{16}{3} \alpha + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \alpha_{opt} = -\frac{3}{16}. \tag{4.80}$$

4.7.2 Minimiziranje greške sličnosti spektralnih karakteristika

Minimiziranjem greške spektralne karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu u odnosu na spektralnu karakteristiku idealnog interpolacionog jezgra oblika $\sin(\pi x)/\pi x$ primenjujući analogan postupak iz sekcije 4.5.3 određena je ukupna srednje kvadratna greška aproksimacije spektralne karakteristike Grevilleovog 1P jezgra i box funkcije. Kako spektralna karakteristika zavisi od parametra α to će i MSE zavistiti od α . Minimiziranjem srednje kvadratne greške određena je optimalna vrednost parametra jezgra. Zavisnost $MSE(\alpha)$ prikazana je na Sl. 4.13.



Sl. 4.13 Zavisnost MSE od parametra Grevilleovog 1P jezgra.

Optimalna vrednost parametra određena je na osnovu pozicije minimalne vrednosti $MSE(\alpha)$, $\alpha_{opt} = -0.8$.

4.7.3 Nagib spektralne karakteristike

Analizom nagiba spektralne karakteristike na granici propusnog opsega moguće je izvršiti komparativnu analizu jezgara sa različitim parametrima [Meijering, 1999]. Kod box karakteristike nagib tangente na granici propusnog opsega ima vrednost ∞ . Saglasno ovoj činjenici, spektralna karakteristika jezgra sa većim nagibom bolje aproksimira box funkciju, odnosno spektralnu karakteristiku idealnog interpolacionog jezgra.

Nagib spektralne karakteristike u nekoj tački definisan je kao nagib tangente spektralne karakteristike u toj tački prema apscisnoj osi. Koeficijent pravca tangente spektralne karakteristike u nekoj tački jednak je prvom izvodu spektralne karakteristike u toj tački:

$$k_\alpha = \operatorname{tg}(\theta) = H'(f) = \frac{d(H(f))}{df} = \frac{d(H_0(f) + \alpha H_1(f))}{df} = H'_0(f) + \alpha H'_1(f), \quad (4.81)$$

gde su:

$$H'_0 = \frac{1}{f^4 \pi^4} \cdot \left(\frac{-2f\pi^2 \cos(2f\pi) \sin^2(f\pi) + 6\pi \sin(2f\pi) \sin^2(f\pi) -}{f\pi^2 \sin^2(2f\pi) - \pi \sin^2(f\pi) \sin(2f\pi)} \right) - \frac{4}{f^5 \pi^4} (3 \sin^4(f\pi) - f\pi \sin^2(f\pi) \sin(2f\pi)) \quad (4.82)$$

i

$$H'_1 = \frac{1}{f^4 \pi^4} \left(\begin{array}{l} -12f\pi^2 \cos(2f\pi) \sin^2(f\pi) + 8f\pi^2 \cos(2f\pi) \sin^3(f\pi) - 6f\pi^2 \sin^2(2f\pi) - \\ 6\pi \sin^2(f\pi) \sin(2f\pi) + 6f\pi^2 \sin(f\pi) \sin^2(2f\pi) + 6\pi \sin^2(f\pi) \sin(4f\pi) + \\ 4\pi \sin(2f\pi) \sin^3(f\pi) + 3\pi \sin^3(2f\pi) \end{array} \right) - \frac{4}{f^5 \pi^4} (-6f\pi \sin^2(f\pi) \sin(2f\pi) + 4f\pi \sin^3(f\pi) \sin(2f\pi) + 3 \sin^2(f\pi) \sin^2(2f\pi)) \quad (4.83)$$

4.8 Optimizacija parametara Grevilleovog 2P jezgra

Optimalni parametri Grevilleovog 2P jezgra (3.13) biće određeni minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike. Saglasno algoritmu Grevilleovo 2P jezgro razlaže se na tri komponente. Komponente (r_0) i (r_1) predstavljene su jednakostima (4.71) i (4.72), a komponenta (r_2) definisana je sa:

$$r_2(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}|x|^3 + \frac{5}{2}|x|^2 & , \quad 0 \leq |x| \leq 1 \\ -\frac{1}{2}|x|^3 + \frac{9}{2}|x|^2 - 10|x| + 6 & , \quad 1 < |x| \leq 2 \\ \frac{3}{2}|x|^3 - \frac{25}{2}|x|^2 + 34|x| - 30 & , \quad 2 < |x| \leq 3 \\ -\frac{1}{2}|x|^3 + \frac{11}{2}|x|^2 - 20|x| + 24 & , \quad 3 < |x| \leq 4 \\ 0 & , \quad |x| > 4 \end{cases} \quad (4.84)$$

Primenom Furijeove transformacije nad komponentom (r_2) spektralna komponenta H_2 može se zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} H_2(f) = & \int_{-4}^{-3} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 20x + 24 \right) \cos(2\pi x f) dx - \\ & i \int_{-4}^{-3} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 20x + 24 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\ & \int_{-3}^{-2} \left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 - 34x - 30 \right) \cos(2\pi x f) dx - \\ & i \int_{-3}^{-2} \left(-\frac{3}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 - 34x - 30 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\ & \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 10x + 6 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 10x + 6 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\ & \int_{-1}^0 \left(\frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_{-1}^0 \left(\frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\ & \int_0^1 \left(-\frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_0^1 \left(-\frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\ & \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 10x + 6 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 10x + 6 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\ & \int_2^3 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 34x - 30 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_2^3 \left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{25}{2}x^2 + 34x - 30 \right) \sin(2\pi x f) dx + \\ & \int_3^4 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 20x + 24 \right) \cos(2\pi x f) dx - i \int_3^4 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 20x + 24 \right) \sin(2\pi x f) dx \end{aligned} \quad (4.85)$$

Nakon izračunavanja određenih integrala H_2 se može zapisati u obliku:

$$\begin{aligned}
H_2(f) = & \frac{(6 \cos^4(2\pi f) - 12 \cos^3(2\pi f) + 12 \cos(2\pi f))}{2\pi^4 f^4} + \\
& \frac{-13\pi f \sin(2\pi f) - 6\pi f \sin(4\pi f) + 4\pi f \cos^3(2\pi f) \sin(2\pi f)}{2\pi^4 f^4} + \\
& \frac{-10\pi^2 f^2 \cos(2\pi f) - 10\pi^3 f^3 \sin(2\pi f) - 6}{2\pi^4 f^4}
\end{aligned} \quad (4.86)$$

Tejlorov razvoj spektralne komponente H_2 je oblika:

$$H_{T_2}(f) = \frac{64}{15}(\pi f)^6 - \frac{2048}{315}(\pi f)^8 + \dots \quad (4.87)$$

Konačno, Tejlorov razvoj spektralne karakteristike je:

$$\begin{aligned}
H_T(f) = & H_{T_0}(f) + \alpha H_{T_1}(f) + \beta H_{T_2}(f) \\
= & 1 - \frac{1}{15}(16\alpha + 3)(\pi f)^4 + \frac{1}{945}(1200\alpha + 4032\beta + 68)(\pi f)^6 - \\
& \frac{1}{4725}(3056\alpha + 30720\beta + 62)(\pi f)^8 \dots
\end{aligned} \quad (4.88)$$

Eliminacija dejstva dva dominantna člana postiže se izborom:

$$16\alpha + 3 = 0 \text{ i } 1200\alpha + 4032\beta + 68 = 0. \quad (4.89)$$

Rešavanjem ovog sistema dobijaju se optimalne vrednosti parametara Grevilleovog 2P jezgra:

$$\alpha = \alpha_{opt} = -\frac{3}{16} \text{ i } \beta = \beta_{opt} = \frac{157}{4032}. \quad (4.90)$$

4.9 Optimizacija parametara tro-parametarskog jezgra

Optimalni parametri tro-parametarskog (3P) jezgra (3.28) biće određena tako da talasavost spektralne karakteristike bude minimalna. Saglasno algoritmu tro-parametarsko jezgro (3.28) može se predstaviti u obliku zbira komponenata:

$$r(x) = r_0(x) + \alpha r_1(x) + \beta r_2(x) + \gamma r_3(x). \quad (4.91)$$

Komponente jezgra su:

$$r_0(x) = \begin{cases} 2|x|^3 - 3|x|^2 + 1 & , \quad |x| \leq 1 \\ 0 & , \quad |x| > 1 \end{cases} \quad (4.92)$$

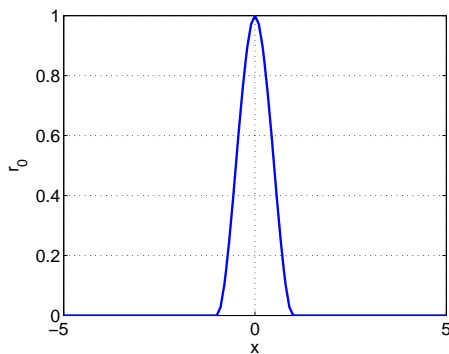
$$r_1(x) = \begin{cases} |x|^3 - |x|^2 & , \quad |x| \leq 1 \\ |x|^3 - 5|x|^2 + 8|x| - 4 & , \quad 1 < |x| \leq 2, \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases} \quad (4.93)$$

$$r_2(x) = \begin{cases} -|x|^3 + |x|^2, & 0 < |x| \leq 1 \\ |x|^2 - 3|x| + 2, & 1 < |x| \leq 2 \\ |x|^3 - 8|x|^2 + 21|x| - 18, & 2 < |x| \leq 3 \\ 0; & |x| > 3 \end{cases}, \quad (4.94)$$

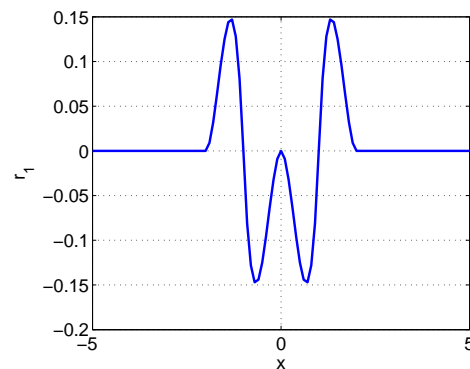
i

$$r_3(x) = \begin{cases} |x|^3 - |x|^2 + 1 & 0 \leq |x| \leq 1 \\ -|x|^2 + 3|x| - 2 & 1 < |x| \leq 2 \\ |x|^2 - 5|x| + 6 & 2 < |x| \leq 3 \\ |x|^3 - 11|x|^2 + 40|x| - 48 & 3 < |x| \leq 4 \\ 0 & |x| > 4 \end{cases}. \quad (4.95)$$

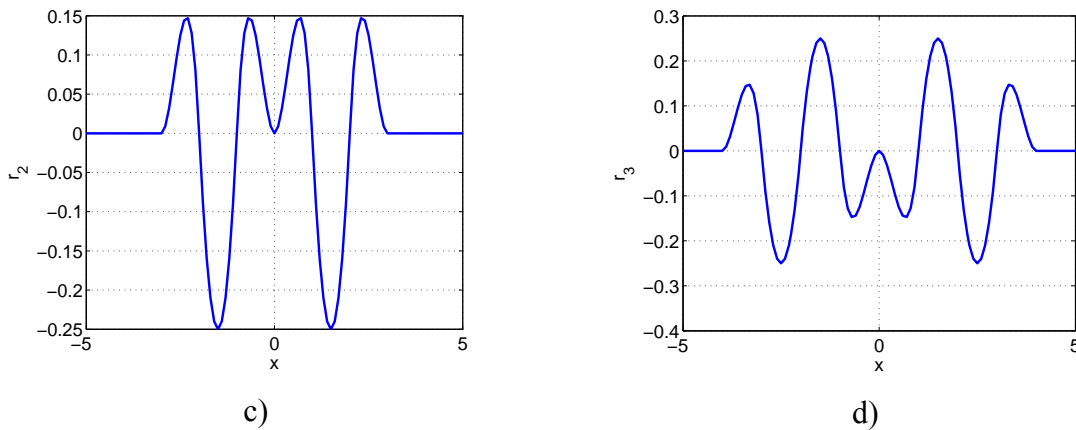
Na Sl. 4.14 prikazane su komponente tro-parametarskog jezgra



a)



b)



Sl. 4.14 .Komponente tro-parametarskog jezgra a) r_0 , b) r_1 , c) r_2 i d) r_3 .

Spektralna karakteristika jezgra razlaže se na komponente:

$$H(f) = FT(r(x)) = FT(r_0(x) + \alpha r_1(x) + \beta r_2(x) + \gamma r_3(x)) = H_0(f) + \alpha H_1(f) + \beta H_2(f) + \gamma H_3(f), \quad (4.96)$$

gde su:

$$H_0(f) = \int_{-1}^0 (-2x^3 - 3x^2 + 1)e^{-2\pi xfi} dx + \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 1)e^{-2\pi xfi} dx, \quad (4.97)$$

$$H_1(f) = \int_{-2}^{-1} (-x^3 - 5x^2 - 8x - 4)e^{-2\pi xfi} dx + \int_{-1}^0 (-x^3 - x^2)e^{-2\pi xfi} dx + \int_0^1 (x^3 - x^2)e^{-2\pi xfi} dx + \int_1^2 (x^3 - 5x^2 + 8x - 4)e^{-2\pi xfi} dx, \quad (4.98)$$

$$H_2(f) = \int_{-3}^{-2} (-x^3 - 8x^2 - 21x - 18)e^{-2\pi xfi} dx + \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x + 2)e^{-2\pi xfi} dx + \int_{-1}^0 (x^3 + x^2)e^{-2\pi xfi} dx + \int_0^1 (-x^3 + x^2)e^{-2\pi xfi} dx + \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)e^{-2\pi xfi} dx + \int_2^3 (x^3 - 8x^2 + 21x - 18)e^{-2\pi xfi} dx, \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned}
H_3(f) = & \int_{-4}^{-3} (-x^3 - 11x^2 - 40x - 48)e^{-2\pi xfi} dx + \int_{-3}^{-2} (x^2 + 5x + 6)e^{-2\pi xfi} dx + \\
& \int_{-2}^{-1} (-x^2 - 3x - 2)e^{-2\pi xfi} dx + \int_{-1}^0 (-x^3 - x^2)e^{-2\pi xfi} dx + \\
& \int_0^1 (x^3 - x^2)e^{-2\pi xfi} dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)e^{-2\pi xfi} dx + \\
& \int_2^3 (x^2 - 5x + 6)e^{-2\pi xfi} dx + \int_3^4 (x^3 - 11x^2 + 40x - 48)e^{-2\pi xfi} dx
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Nakon izračunavanja određenih integrala spektralne komponente mogu se zapisati u obliku:

$$H_0(f) = \frac{6\sin^2(\pi f) - 3\pi f \sin(2\pi f)}{2\pi^4 f^4}, \tag{4.101}$$

$$H_1(f) = \frac{3\sin^2(2\pi f) - 4\pi f \sin(2\pi f) - \pi f \sin(4\pi f)}{2\pi^4 f^4}, \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}
H_2(f) = & \frac{-3\sin^2(\pi f) - 3\sin^2(2\pi f) + 3\sin^2(3\pi f)}{2\pi^4 f^4} + \\
& \frac{3\pi f \sin(2\pi f) - 3\pi f \sin(4\pi f) - \pi f \sin(6\pi f)}{2\pi^4 f^4}
\end{aligned} \tag{4.103}$$

i

$$\begin{aligned}
H_3(f) = & \frac{3(\sin^2(\pi f) - \sin^2(3\pi f) + \sin^2(4\pi f))}{2\pi^4 f^4} - \\
& \frac{\pi f(3\sin(2\pi f) + 2\sin(4\pi f) - 3\sin(6\pi f) - \sin(8\pi f))}{2\pi^4 f^4}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Spektralna karakteristika i spektralne komponente prikazane su na Sl. 4.15.

Razvojem u Tejlorev red u okolini $f=0$ spektralne komponente jezgra dobijaju oblik:

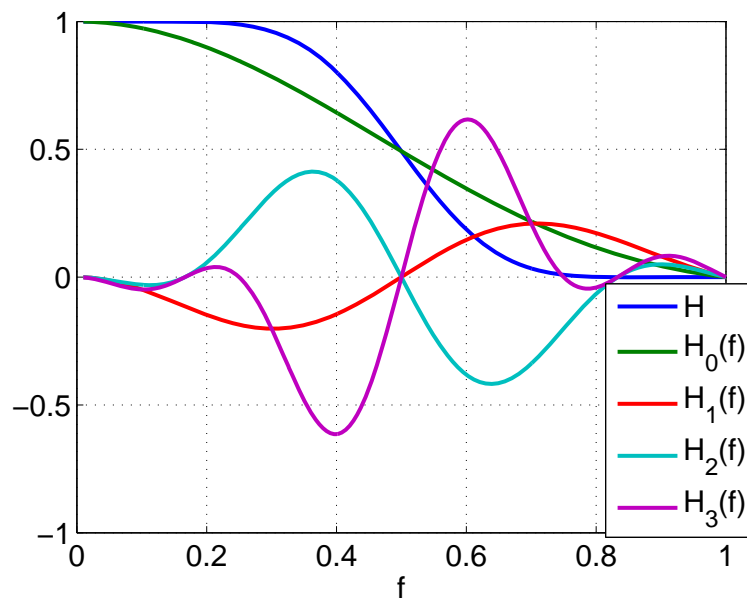
$$H_0(f) = 1 - \frac{4}{15}(\pi f)^2 + \frac{1}{35}(\pi f)^4 - \frac{8}{4725}(\pi f)^6 + \frac{2}{31185}(\pi f)^8 + \dots, \tag{4.105}$$

$$H_1(f) = -\frac{8}{15}(\pi f)^2 + \frac{16}{35}(\pi f)^4 - \frac{232}{1575}(\pi f)^6 + \frac{4112}{155925}(\pi f)^8 + \dots, \tag{4.106}$$

$$H_2(f) = -\frac{8}{15}(\pi f)^2 + \frac{272}{105}(\pi f)^4 - \frac{4232}{1575}(\pi f)^6 + \frac{205808}{155925}(\pi f)^8 + \dots, \quad (4.107)$$

i

$$H_3(f) = -\frac{16}{15}(\pi f)^2 + \frac{256}{35}(\pi f)^4 - \frac{25904}{1575}(\pi f)^6 + \frac{2640832}{155925}(\pi f)^8 + \dots. \quad (4.108)$$



Sl. 4.15 Spektralna karakteristika H i komponente H_0 , H_1 , H_2 i H_3 tro-parametarskog jezgra.

Tejlorov razvoj spektralne karakteristike je:

$$\begin{aligned} H(f) &= H_0(f) + \alpha H_1(f) + \beta H_2(f) + \gamma H_3(f) = \\ &= 1 - \frac{4}{15}(1 + 2\alpha + 2\beta + 4\gamma)(\pi f)^2 + \frac{1}{105}(3 + 48\alpha + 272\beta + 768\gamma)(\pi f)^4 \cdot \\ &\quad - \frac{8}{4725}(1 + 87\alpha + 1587\beta + 3238\gamma)(\pi f)^6 + O(\pi f)^8 \end{aligned} \quad (4.109)$$

U cilju smanjenja talasavosti spektralne karakteristike, u propusnom opsegu, treba eliminisati dejstvo dominantnih članova, što se postiže izborom:

$$1 + 2\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0, \quad (4.110)$$

$$3 + 48\alpha + 272\beta + 768\gamma = 0, \quad (4.111)$$

$$1 + 87\alpha + 1587\beta + 3238\gamma = 0. \quad (4.112)$$

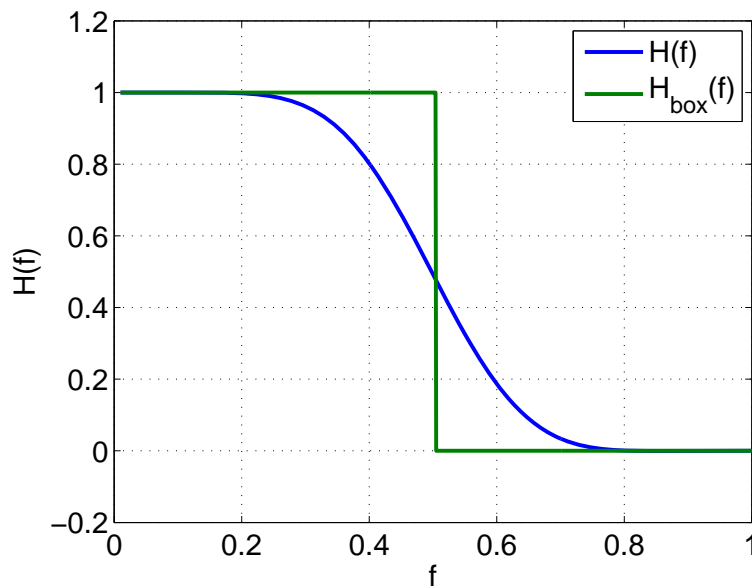
Rešavanjem ovog sistema dobijaju se optimalne vrednosti parametara jezgra:

$$\alpha = \alpha_{opt} = -\frac{4945}{8064} \approx -0.6132, \quad (4.113)$$

$$\beta = \beta_{opt} = \frac{409}{2688} \approx 0.1522, \quad (4.114)$$

$$\gamma = \gamma_{opt} = -\frac{157}{8064} \approx -0.0195. \quad (4.115)$$

Na Sl. 4.16 prikazane su box funkcija i spektralna karakteristika tro-parametarskog interpolacionog jezgra.



Sl. 4.16 Spektralne karakteristike idealnog jezgra i tro-parametarskog jezgra.

4.10 Eksperimentalni rezultati i analiza

U cilju eksperimentalne verifikacije teorijski određenih vrednosti optimalnih parametara jezgara izvršeni su eksperimenti izbora optimalnih parametara jezgara. Izbor optimalnih vrednosti parametara jezgra obavljen je kod interpolacije:

- a) audio signala,
- b) govornih signala,
- c) sinusoidalnih signala,
- d) nekih test slika,

Eksperimentalni rezultati su prikazani grafički i tabelarno. Izvršena je analiza rezultata i komparativna analiza efikasnosti konvolucione interpolacije sa izabranim parametrom jezgara.

4.10.1 Baza

a) Audio signali

Bazu čine audio signali dobijeni snimanjem G tonova iz sedam oktava (G_1 – G_7) odsviranih na klaviru August Förster. Frekvencije smplovanja su $f_s = \{8, 22.05, 44.1\}$ kHz sa 16 bps. Snimljeni materijal arhiviran je u obliku **wav** fajlova.

b) Govorni signali

a) Bazu čine govorni signali dobijeni snimanjem govornika. Smplovanje je obavljeno sa frekvencijama $f_s = \{4, 8, 11.025, 16, 22.05, 32, 44.1, 48\}$ kHz. Snimljeni materijal arhiviran je u obliku **wav** fajlova.

b) govorni signali dobijeni snimanjem govornika koji izgovaraju različite logatome tipa Afrikata, CCV-a, CVC-a, Frikativa, Laterala, Nazala i Ploziva [Subotić, 2012], [Kocinski, 2016]. Smplovanje je obavljeno sa frekvencijama $f_s = \{8, 22.05, 44.1\}$ kHz. Snimljeni materijal arhiviran je u obliku **wav** fajlova.

c) Slike

Bazu čine standardne test slike: Airplane, Artichare, Barbara, Baboon, Boats, Boy, Camerman, Cat, Fruits, Girl, Goldhill, Lena, Mountain, Pappers, Pool, Sails, Serrano, Tulips, Katedrala, Toranj, Watch, Zelda.

4.10.2 Eksperiment

Eksperimentom se određuje izbor optimalnih parametara i preciznost interpolacionog jezgra kod procene vrednosti signala, tako što se analizira greska procene koja predstavlja razliku izmedju tačne (x_i) i interpolirane vrednosti (\hat{x}_i). Problem pronalaženja tačne vrednosti je rešen na sledeći način: Interpoliraju se vrednosti signala $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, čije su vrednosti poznate i koriste kao tačne vrednosti. Procena vrednosti i -te komponente signala (\hat{x}_i) realizuje se formiranjem i -tog bloka $\mathbf{x}_{Bi} = \{x_{i-L+1}, \dots, x_{i-3}, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+3}, \dots, x_{i+L-1}\}$ i primenom konvolucionog iterpolacionog jezgra. Greška interpolacije je $e = x_i - \hat{x}_i$ gde je x_i komponenta signala \mathbf{x} i tretira se kao tačna vrednost dok je \hat{x}_i interpolirana vrednost.

4.10.2.1 Eksperiment primenom 1P jezgra

Izbor optimalne vrednosti parametra 1P interpolacionog jezgra obavljen je kod interpolacije test slika i audio signala koji su u procesu snimanja smplovani različitim frekvencijama.

Algoritam određivanja optimalne vrednosti parametra jezgra α_{opt} sastoji se od sledećih koraka:

Ulaz: Signal \mathbf{X} ,

dužina signala N ,

dužina jezgra L ,

komponente jezgra r_0 i r_1 ,

α_{min} , α_{max} , $\Delta\alpha$,

Izlaz: optimalni parametar α_{opt} .

Korak 1: Formiranje jezgra u funkciji α

$$r = r_0 + \alpha r_1$$

Korak 2: Selektovanje I -tog bloka \mathbf{X}_I dužine $M=2L-1$ signala \mathbf{X}

$$\mathbf{X}_I = \mathbf{X} \{x(I):x(I+M-1)\}.$$

Korak 3: Procena L -tog člana primenom konvolucije

$$\hat{x}_I(L) = x_{Bj} \otimes r.$$

Korak 4: Izračunavanje greška procene

$$e(I) = X_I(L) - \hat{x}_I.$$

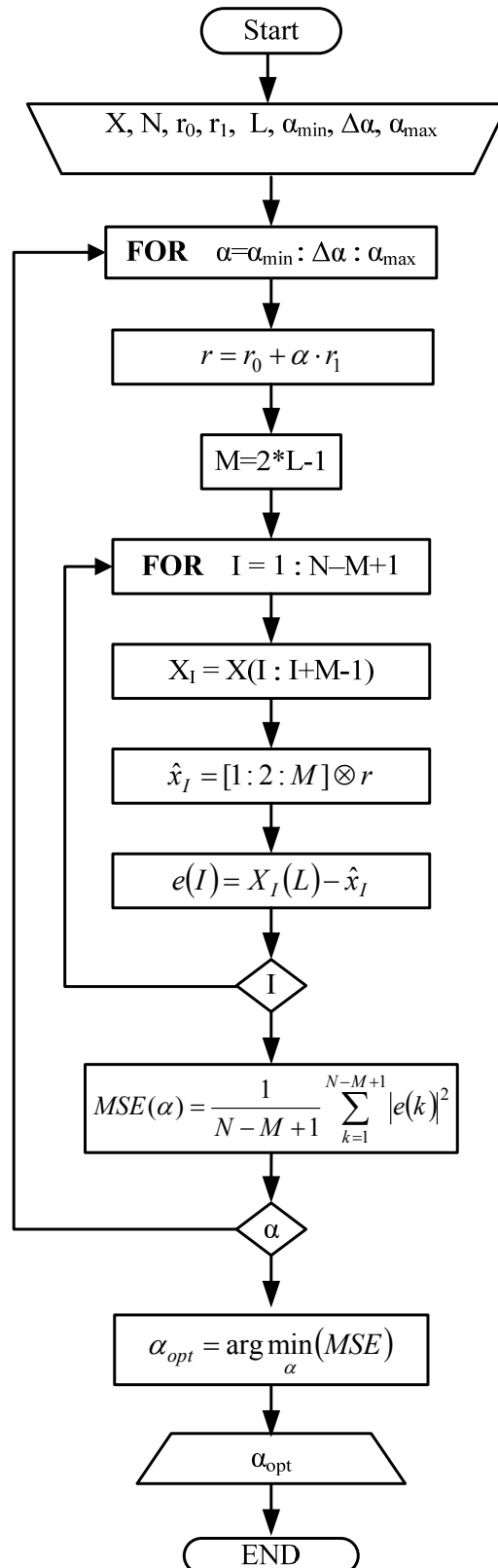
Korak 5: Izračunavanje srednje kvadratne greške

$$MSE(i) = \frac{1}{N-M+1} \sum_{k=1}^{N-M+1} |e_{B\alpha}(k)|^2.$$

Korak 6: Optimalni parametar

$$\alpha_{opt} = \arg \min_{\alpha} (MSE_{\alpha}).$$

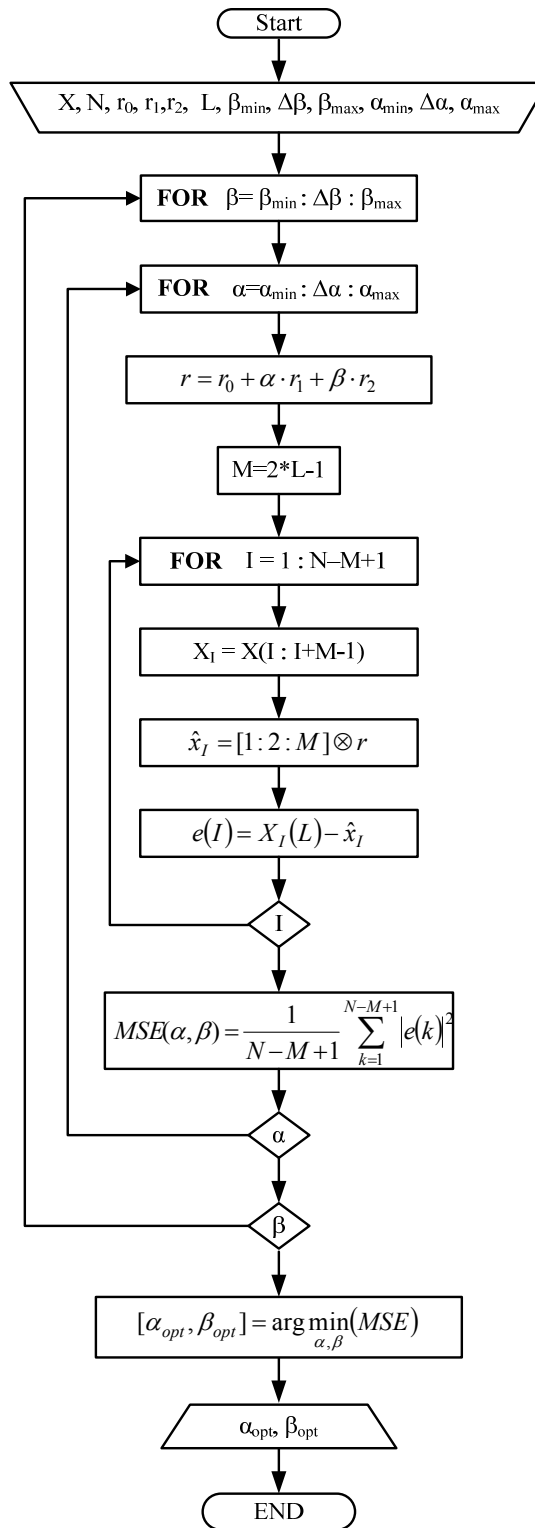
Kod interpolacije test slika najpre je formiran jednodimenzionalni niz nadovezivanjem vrsta matrice. Grafički prikaz algoritma je na slici Sl. 4.1.



Sl. 4.17 Algoritam eksperimentalne procene parametara IP jezgra.

4.10.2.2 Eksperiment primenom 2P jezgra

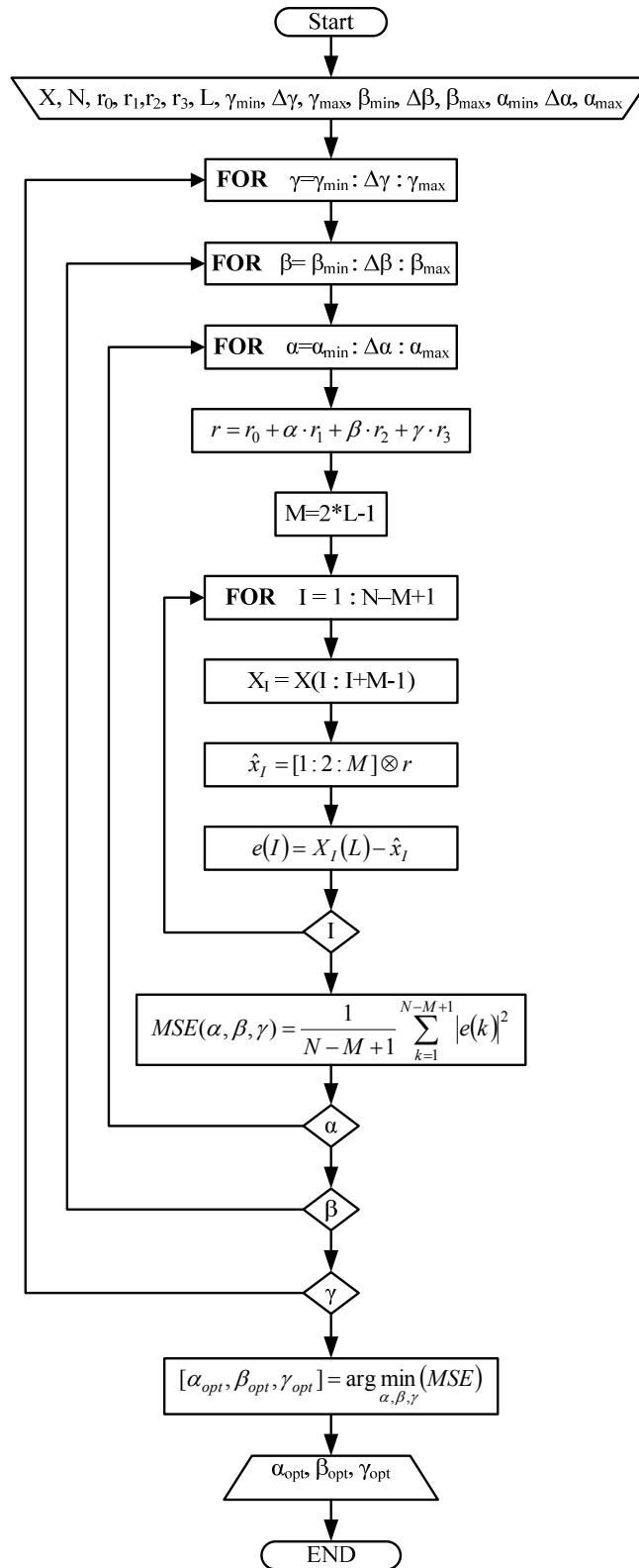
Algoritam određivanja optimalnih vrednosti parametara jezgra u procesu interpolacije kod test slika i audio signala uz primenu dvo-parametarskih jezgara prikazan je na Sl. 4.18.



Sl. 4.18 Algoritam eksperimentalne procene parametara 2P jezgra.

4.10.2.3 Eksperiment primenom 3P jezgra

Algoritam određivanja optimalnih parametara, α_{opt} , β_{opt} i γ_{opt} , jezgra prikazan je na Sl. 4.19.



Sl. 4.19 Algoritam eksperimentalne procene parametara 3P jezgra.

4.10.3 Rezultati i analiza

Za statističku analizu optimalnih parametara koristiće se srednja vrednost μ (jednačina (4.116)) i varijansa σ^2 (jednačina (4.117))

$$\mu = \frac{\sum_{k=1}^K \alpha_{opt}}{K}, \quad (4.116)$$

i

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{k=1}^K (\alpha_{opt} - \mu)^2}{K}, \quad (4.117)$$

gde je K ukupan broj parametara. Na osnovu μ i σ^2 određena je Gausova funkcija raspodele,

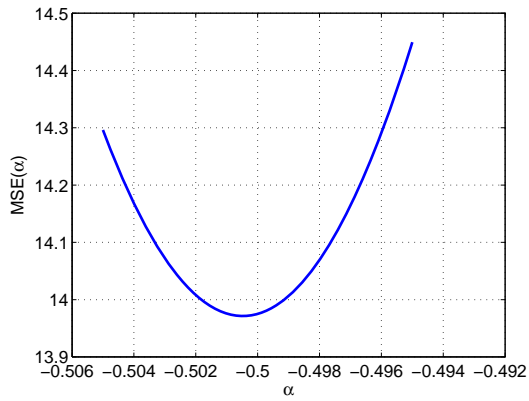
$$p(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(\alpha-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.118)$$

4.10.3.1 Kvadratno 1P jezgro

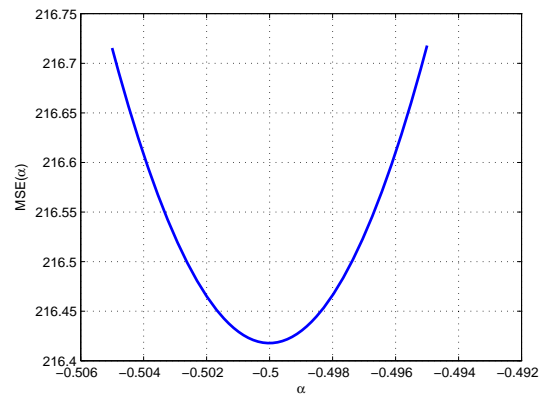
Za svaku test sliku k , gde je k redni broj slike, ($k=1, \dots, K$), a K ukupan broj test slika, određena je minimalna vrednost $MSE_{k_min}(\alpha_{k_opt})$ (Tbl. 4.1). Zavisnost $MSE(\alpha)$ za neke test slike prikazana je na Sl. 4.20. Statističkom analizom optimalnih vrednosti parametara (kolona α_{k_opt} u Tbl. 4.1 određeni su srednja vrednost μ (jednačina (4.116)), ($\mu = -0.4972$), i varijansa σ^2 (jednačina (4.117)) ($\sigma^2 = 3.6494 \cdot 10^{-5}$).

Tbl. 4.1. Eksperimentalne vrednosti optimalnog parametara jezgra, MSE_{min} i greška procene optimalnog parametra kod test slika.

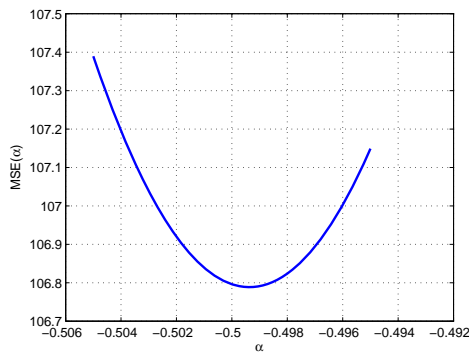
k	Slika	α_{k_op}	$MSE_{min}(\alpha)$	$ \alpha_{k_opt} - \mu $
1	Lena	-0.5005	13.9715	0.0033
2	Pappers	-0.5000	216.4179	0.0028
3	Goldhill	-0.4994	106.7888	0.0022
4	Camerman	-0.4987	307.4847	0.0015
5	Boats	-0.4979	338.8829	0.0007
6	Barbara	-0.4989	254.0589	0.0017
7	Baboon	-0.4936	607.6919	0.0036
8	Airplane	-0.4993	253.6805	0.0021
9	Artichare	-0.5012	164.2225	0.0040
10	Boy	-0.4781	3345.1	0.0191
11	Cat	-0.5000	18.9069	0.0028
12	Fruits	-0.4988	308.5901	0.0016
13	Girl	-0.4968	364.1118	0.0004



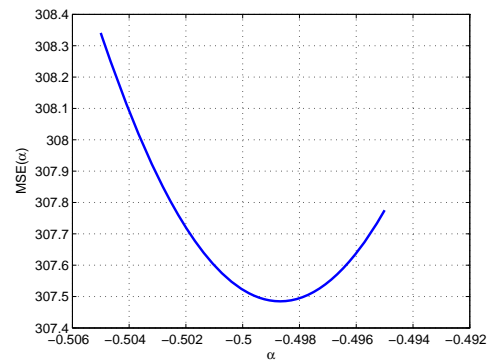
a) Lena



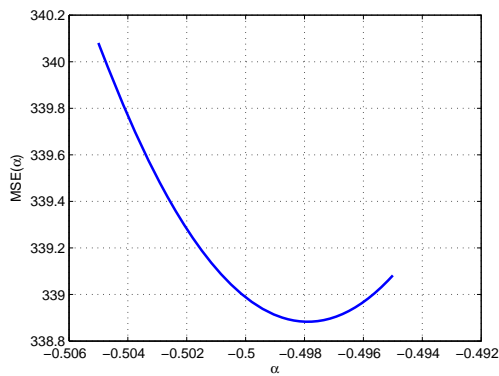
b) Pappers



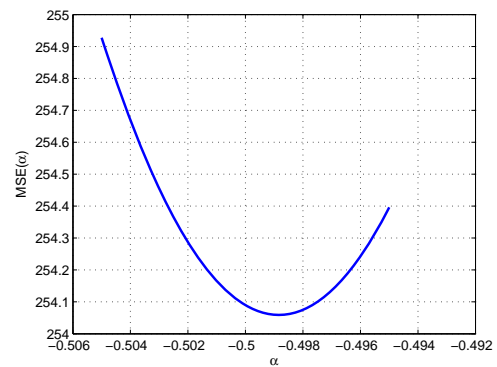
c) Goldhill



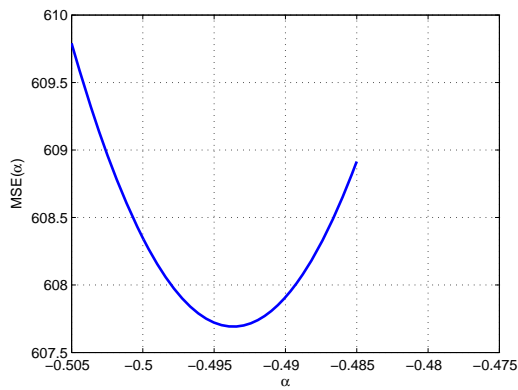
d) Cameraman



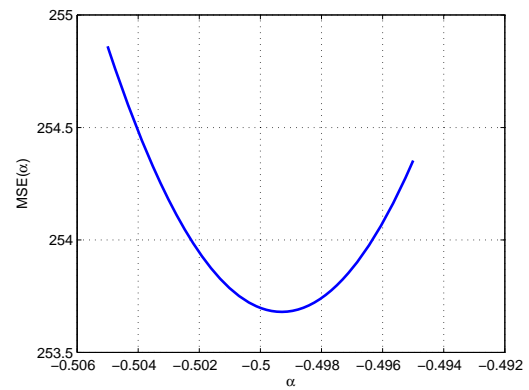
e) Boats



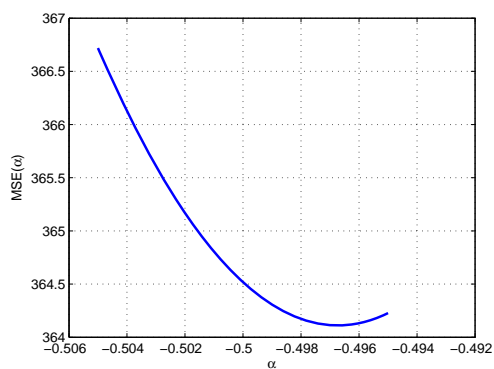
f) Barbara



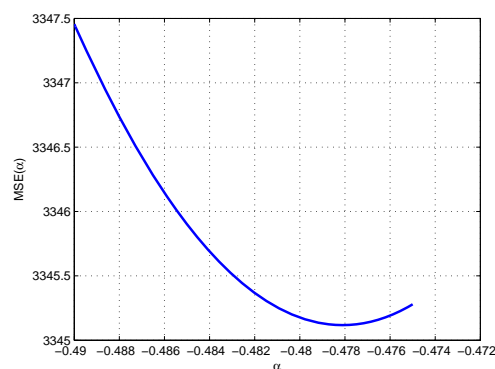
g) Baboon



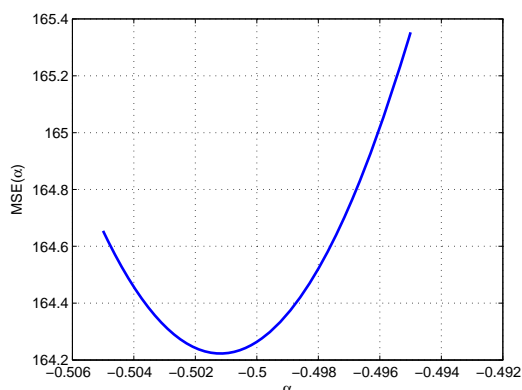
h) Airplane



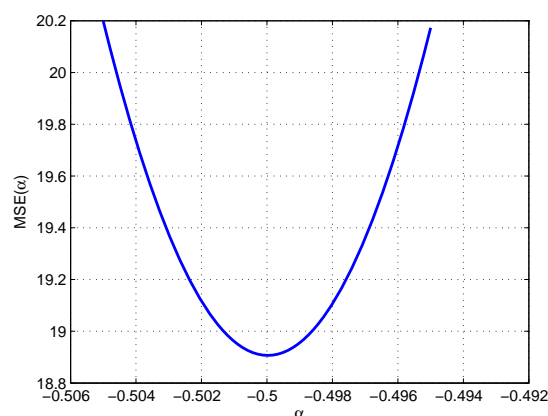
i) Girl



j) Boy



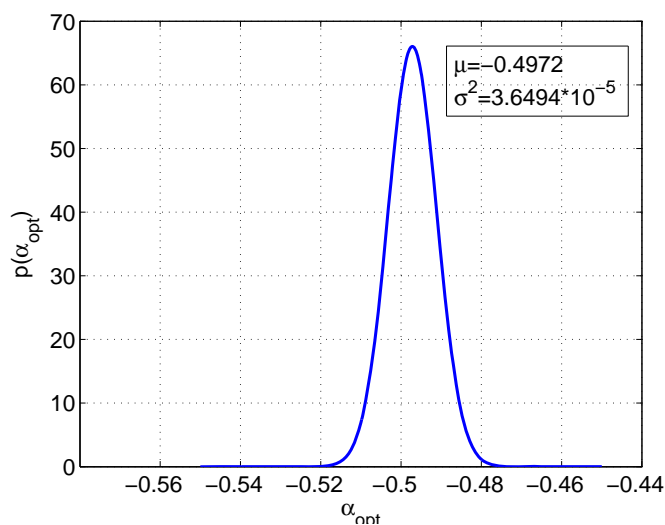
k) Artichare



l) Cat

Sl. 4.20 Zavisnost MSE od parametra kvadratnog IP jezgra kod nekih test slika.

Na Sl. 4.21 prikazana je funkcija Gausove raspodele (jednačina (4.118)) eksperimentalno dobijenih optimalnih vrednosti parametra kvadratnog IP jezgra, koja je određena na osnovu srednje vrednosti μ (jednačina (4.116)), ($\mu = -0.4972$), i varijanse σ^2 (jednačina (4.117)) ($\sigma^2 = 3.6494 \cdot 10^{-5}$).



Sl. 4.21 Funkcija Gausove normalne raspodele optimalnih vrednosti parametara α kod test slika.

Opseg optimalnih vrednosti parametra je $\alpha_{opt} \in [-0.5012 \div 0.4781]$ i srednja vrednost $\mu = \overline{\alpha_{opt}} = -0.4972$. Smatrajući μ za statistički tačnu vrednost zaključuje se da je:

a) greška procene optimalnog parametra, $\alpha_{opt} = \alpha_T = -4/23$ koji je izračunat minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike jezgra, $\Delta_T = |\alpha_T - \overline{\alpha_{opt}}| = 0.3233$;

b) najmanja greška $\Delta_{min} = |\alpha_{13_opt} - \mu| = 0.0004$ dobijena za sliku Girl,

c) najveća greška $\Delta_{max} = |\alpha_{10_opt} - \mu| = 0.0191$ dobijena za sliku Boy.

Na osnovu rezultata zaključuje se da je najveća greška procene $\Delta_T / \Delta_{max} = 0.3233 / 0.0191 = 16.93$ puta manja od greške procene parametra dobijenog metodom talasavosti.

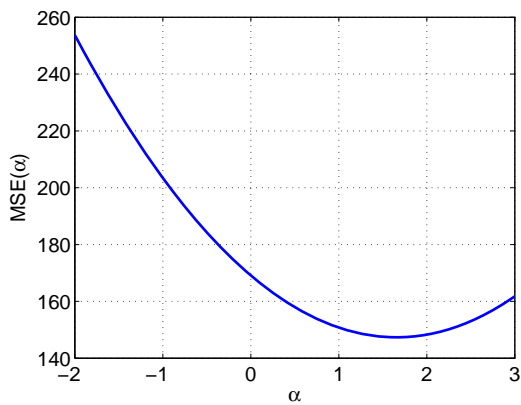
4.10.3.2 Kejsovo 1P jezgro

Izvršeno je testiranje efikasnosti DSC algoritma. U eksperimentu je izvršena interpolacija nekih test slika i određena optimalna vrednost parametra za svaku test sliku. Rezultati su prikazani tabelarno i grafički. Nakon toga izvršena je komparativna analiza rezultata interpolacije primenom optimalnih vrednosti parametra određenih algoritmom minimiziranja talasavosti spektralne karakteristike i algoritmom sličnosti sa box funkcijom. Vrednosti $MSE_{min} = \min(MSE(\alpha))$ i α_{opt} prikazane su u Tbl. 4.2. Na Sl. 4.22 prikazana je zavisnost $MSE(\alpha)$ za test slike.

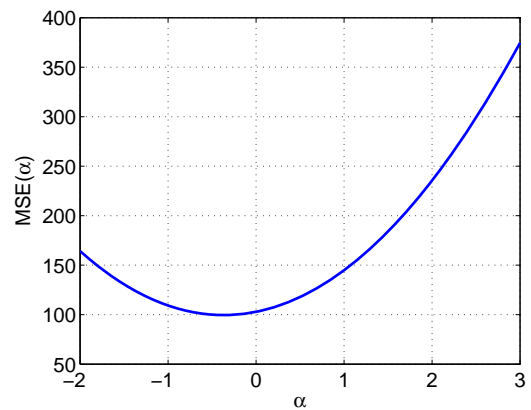
Tbl. 4.2 Eksperimentalne vrednosti optimalnog parametara Kejsovog 1P jezgra i MSE_{min} .

Slika	$MSE_{min}(\alpha)$	α_{opt}
Airplane	147.3644	1.7000
Artichare	99.5775	-0.4000
Barbara	262.1382	0.2000
Baboon	345.4822	0.3000
Boats	263.2281	0.3000
Boy	1854.30	2
Camerman	238.4147	-0.3000
Cat	11.1729	1.2000
Fruits	182.6516	-0.8000
Girl	201.9268	0.4000
Goldhill	103.9335	-0.2000
Lena	39.1490	-0.6000
Mountain	560.845	2.0000
Pappers	103.1632	-0.5000

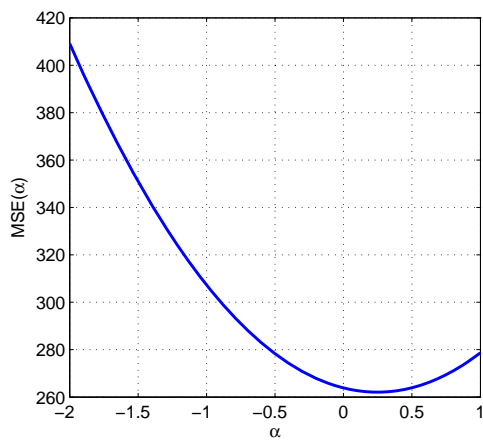
Pool	0.5324	1.6000
Sails	80.1722	-0.5000
Serrano	457.166	0
Tulips	38.0029	-0.7000
Katedrala	974.2089	0.9
Toranj	424.4350	-0.1000
Watch	0.6537	0
Zelda	54.7524	0.2



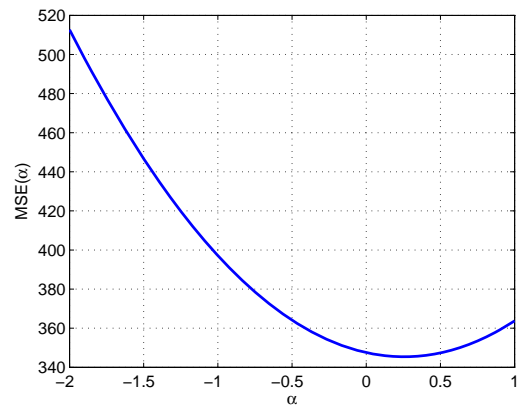
a) Airplane



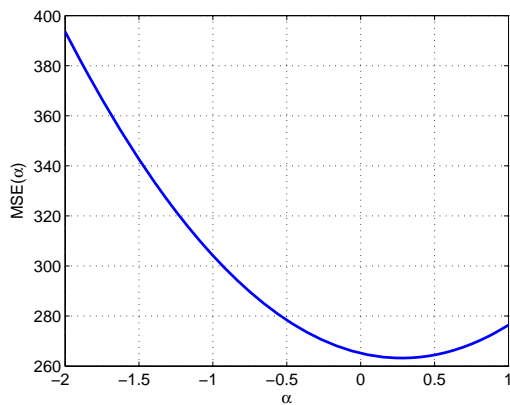
b) Artichare



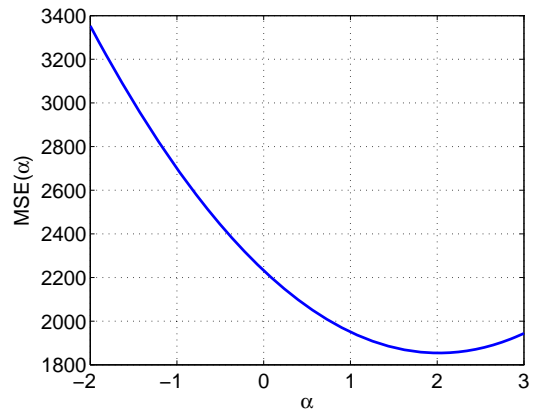
c) Barbara



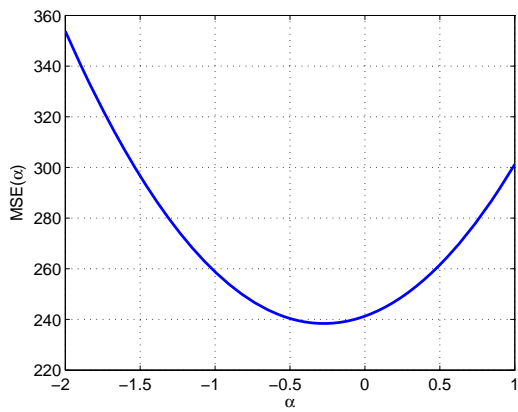
d) Baboon



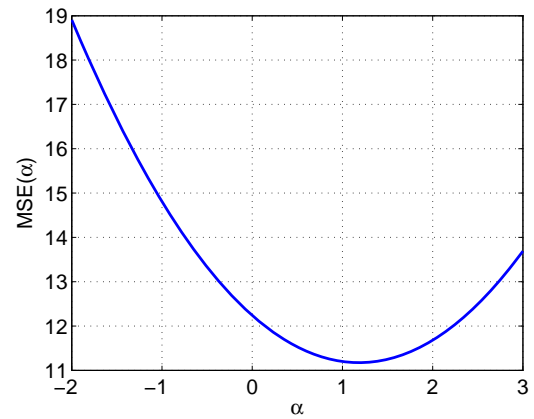
e) Boats



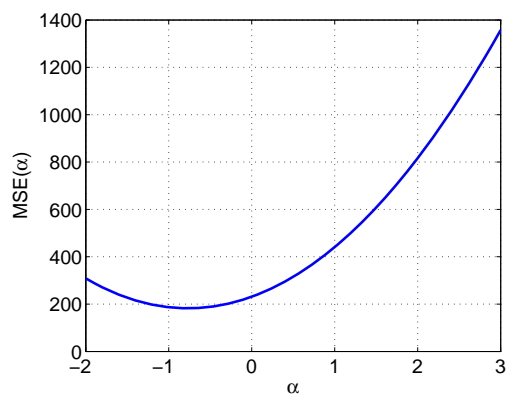
f) Boy



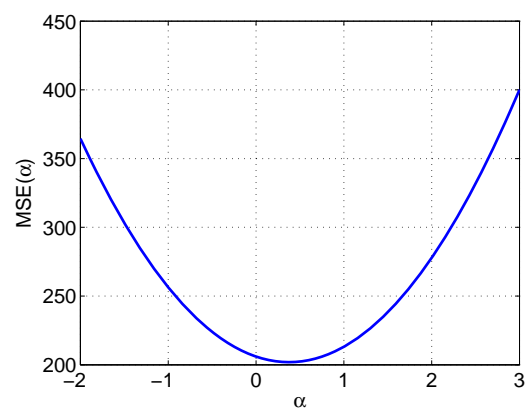
g) Cameraman



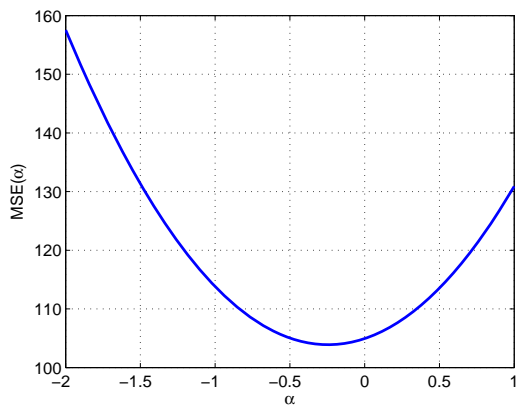
h) Cat



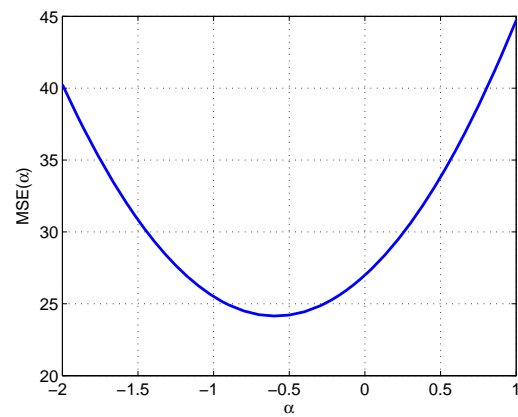
i) Fruits



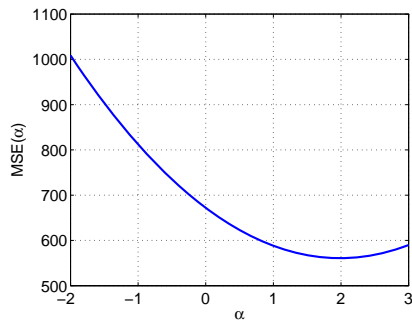
j) Girl



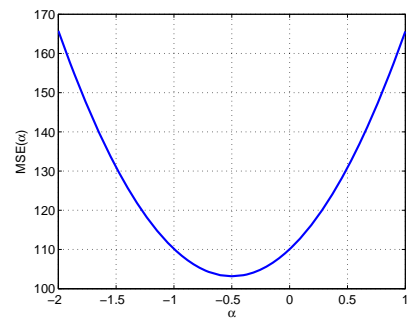
k) Goldhill



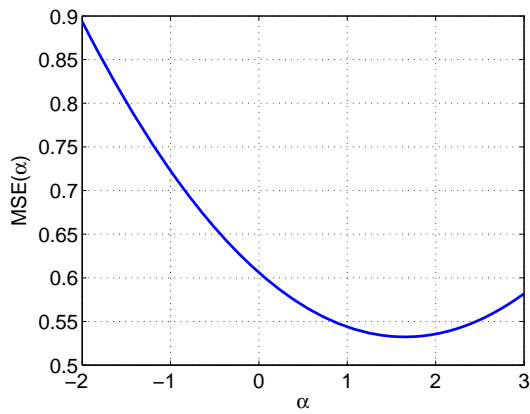
l) Lena



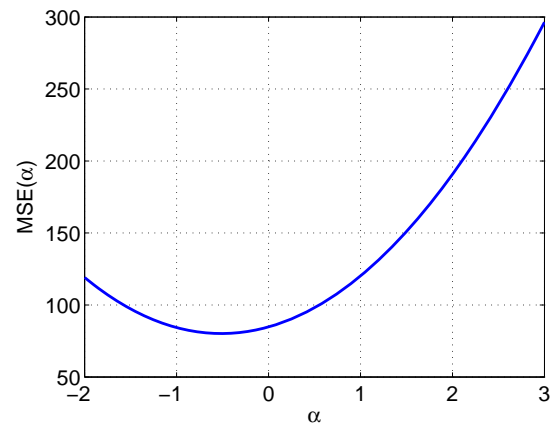
m) Mountain



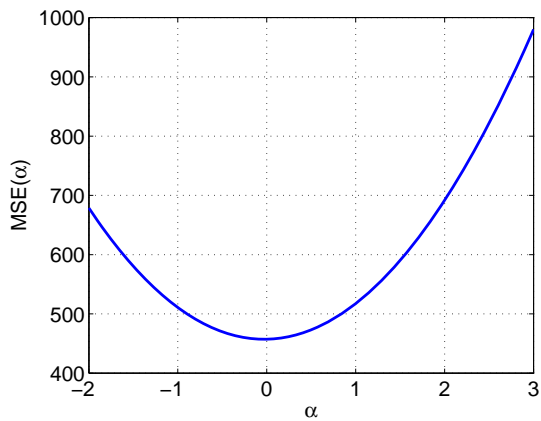
n) Pappers



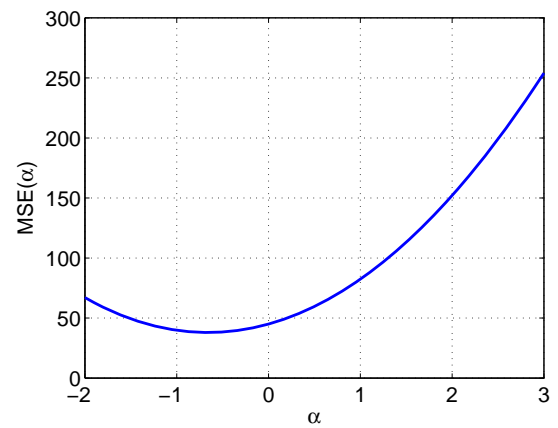
o) Pool



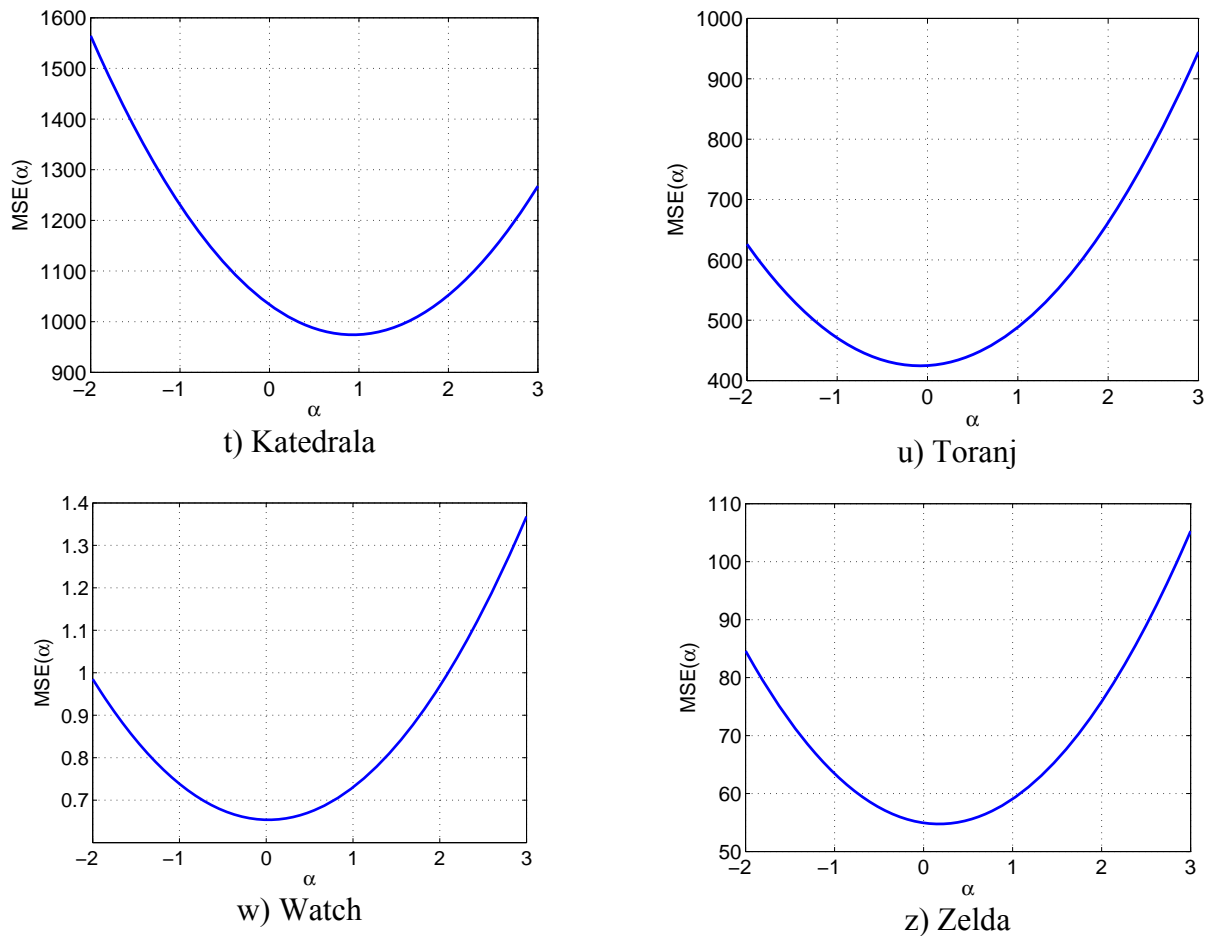
p) Sails



r) Serrano



s) Tulips



Sl. 4.22 Zavisnost MSE od parametra Kejsovog IP jezgra kod nekih test slika.

Opseg optimalnih vrednosti parametra jezgra izračunat za test slika (Tbl. 4.2, Sl. 4.22) je $\alpha_{opt} \in [-0.8 \div 2]$ i srednja vrednost $\overline{\alpha_{opt}} = 0.3045$.

Greška procene optimalnog parametra za:

- parametar $\alpha_{opt} = \alpha_T = -0.5$, koji je dobijen minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike [Park, 1983] je $\Delta_T = |\alpha_T - \overline{\alpha_{opt}}| = 0.8045$,
- parametar $\alpha_{opt} = \alpha_B = -1.3$, koji je dobijen na osnovu algoritma sličnosti sa box funkcijom [Milivojević1, 2016] je: $\Delta_B = |\alpha_B - \overline{\alpha_{opt}}| = 1.6045$,
- parametar $\alpha_{opt} = \alpha_D = 0.35$, dobijenog primenom algoritma DSC je $\Delta_D = |\alpha_D - \overline{\alpha_{opt_44.1}}| = 0.0455$.

Na osnovu greške procene optimalnog parametra za algoritam talasavosti, algoritam sličnosti i DSC algoritam zaključuje se da je najmanja greška procene dobijena algoritmom DSC.

Greška procene parametra jezgra dobijenog primenom DSC algoritma je:

a) $\Delta_T / \Delta_D = 0.8045 / 0.0455 = 17.68$ puta manja u odnosu na procenu algoritmom talasavosti,

b) $\Delta_B / \Delta_D = 1.6045 / 0.0455 = 35.26$ puta manja u odnosu na procenu algoritmom sličnosti sa box funkcijom.

Izbor optimalne vrednosti parametra 1P Kejsovog interpolacionog jezgra obavljen je i kod interpolacije audio signala koji su u procesu snimanja semplovani različitim frekvencijama. U Tbl. 4.3 prikazane su minimalne vrednosti srednje kvadratne greške, MSE_{min} , optimalne vrednosti parametra jezgra, α_{opt} , koeficijenti, $k_\alpha = tg(\theta) = H'(f)$, i uglovi nagiba, θ , koje tangente zaklapaju sa frekventnom osom u graničnoj tački propusnog opsega, za G tonove klavira iz sedam oktava. Na Sl. 4.23 prikazane su spektralne karakteristike: idealnog interpolacionog jezgra oblika $\sin(\pi x)/\pi x$, (H_{box}), Kejsovog jezgra (H_K), kao i tangenta (y_{tag}) karkteristike 1P Kejsovog jezgra u $f=0.5$ za a) $\alpha_{opt} = \alpha_T = -0.5$ i b) $\alpha_{opt} = \alpha_B = -1.3$.

Tbl. 4.3 Minimalne vrednosti srednje kvadratne greške, MSE_{min} , optimalne vrednosti parametra jezgra, α_{opt} , koeficijenti, k_α , i uglovi nagiba, θ , tangente u graničnoj tački propusnog opsega.

Ton	F_s [Hz]	α_{opt}	MSE_{min}	$k_\alpha = H'(0.5, \alpha_{opt})$	$\theta [^\circ]$
G ₁	44100	-0.5000	$2.8082 \cdot 10^{-8}$	-2.3210	-66.9912
	22050	-0.6000	$9.4172 \cdot 10^{-7}$	-2.4831	-68.0643
	8000	-0.7000	$3.9094 \cdot 10^{-4}$	-2.6452	-69.2914
G ₂	44100	-0.5000	$1.0026 \cdot 10^{-7}$	-2.3210	-66.9912
	22050	-0.6000	$5.2291 \cdot 10^{-6}$	-2.4831	-68.0643
	8000	-0.7000	$5.7721 \cdot 10^{-4}$	-2.6452	-69.2914
G ₃	44100	-0.6000	$1.8007 \cdot 10^{-7}$	-2.4831	-68.0643
	22050	-0.6000	$1.3729 \cdot 10^{-5}$	-2.4831	-68.0643
	8000	-0.7000	$3.8404 \cdot 10^{-4}$	-2.6452	-69.2914
G ₄	44100	-0.7000	$1.0442 \cdot 10^{-6}$	-2.6452	-69.2914
	22050	-0.6000	$7.9861 \cdot 10^{-5}$	-2.4831	-68.0643
	8000	-0.9000	0.0020	-2.9695	-71.3884
G ₅	44100	-0.6000	$1.0208 \cdot 10^{-6}$	-2.4831	-68.0643
	22050	-0.6000	$4.0376 \cdot 10^{-5}$	-2.4831	-68.0643
	8000	-0.7000	$4.7501 \cdot 10^{-4}$	-2.6452	-69.2914
G ₆	44100	-0.6000	$5.2584 \cdot 10^{-6}$	-2.4831	-68.0643
	22050	-0.6000	$1.4740 \cdot 10^{-4}$	-2.4831	-68.0643
	8000	-1.9000	0.0039	-4.5906	-77.7109
G ₇	44100	-0.6000	$2.5892 \cdot 10^{-6}$	-2.4831	-68.0643
	22050	-0.9000	$8.4682 \cdot 10^{-5}$	-2.9695	-71.3884
	8000	-0.9000	$4.7612 \cdot 10^{-4}$	-2.9695	-71.3884

Na osnovu eksperimentalnih rezultata prikazanih u Tbl. 4.3 i vrednosti α_{opt} dobijenih optimizacijom na osnovu Tejlorovog razvoja ($\alpha_{opt} = \alpha_T = -0.5$) [Park, 1983] i optimizacijom na osnovu MSE ($\alpha_{opt} = \alpha_B = -1.3$) (Sekcija 4.5.3) [Milivojević, 2016] može se zaključiti da je:

a) za $f_s = 44.1$ kHz, $\alpha_{opt_44.1} \in [-0.7 \div -0.5]$ i $\overline{\alpha_{opt_44.1}} = -0.5857$,

b) za $f_s = 22.05$ kHz, $\alpha_{opt_22.05} \in [-0.9 \div -0.6]$ i $\overline{\alpha_{opt_22.05}} = -0.6429$,

c) za $f_s = 8$ kHz, $\alpha_{opt} \in [-1.9 \div -0.7]$ i $\overline{\alpha_{opt_8}} = -0.9286$,

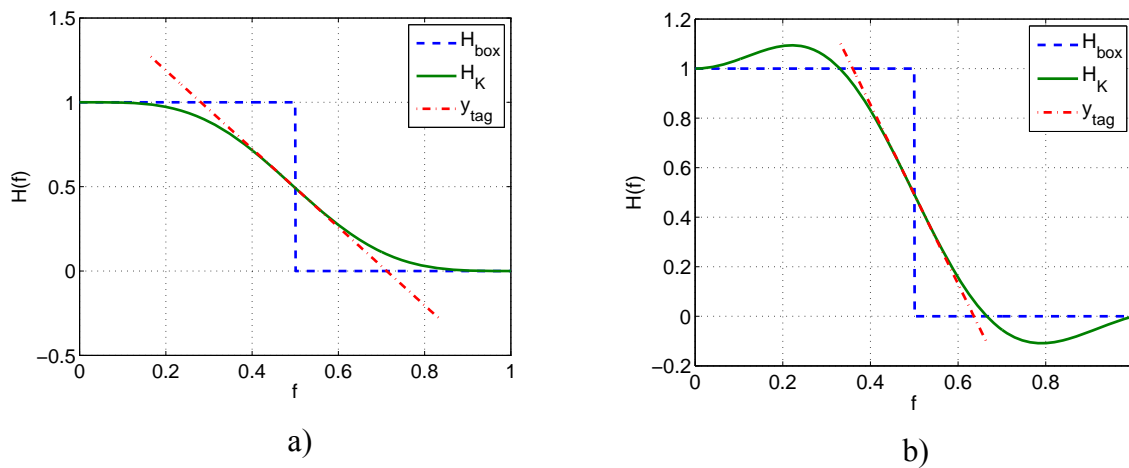
d) greška procene optimalnog parametra za parametar dobijen minimiziranjem talasavosti $\Delta_{asT_44.1} = |\alpha_T - \overline{\alpha_{opt_44.1}}| = 0.0857$, $\Delta_{asT_22.05} = |\alpha_T - \overline{\alpha_{opt_22.05}}| = 0.1429$, $\Delta_{asT_8} = |\alpha_T - \overline{\alpha_{opt_8}}| = 0.4286$, najmanja je za $f_s = 44.1$ kHz,

e) greška procene optimalnog parametra za parametar dobijen na osnovu sličnosti sa box funkcijom $\Delta_{asB_44.1} = |\alpha_B - \overline{\alpha_{opt_44.1}}| = 0.7143$, $\Delta_{asB_22.05} = |\alpha_B - \overline{\alpha_{opt_22.05}}| = 0.6571$,

$\Delta_{asB_8} = |\alpha_B - \overline{\alpha_{opt_8}}| = 0.3714$, najmanja je za $f_s = 8$ kHz,

f) greška procene optimalnog parametra $\alpha_{opt} = \alpha_T = -0.5$ manja 4.334 puta od greške procene parametra $\alpha_{opt} = \alpha_B = -1.3$.

Upoređivanjem grešaka procene parametara zaključuje se da je interpolacija jezgrom, kome je parametar određen optimizacijom na osnovu minimiziranja talasavosti, preciznija od interpolacije sa jezgrom kome je parametar određen optimizacijom na osnovu sličnosti sa box funkcijom. Ako se u cilju upoređivanja kvaliteta amplitudskih karakteristika jezgara analizira nagib spektralne karakteristike u graničnoj tački propusnog opsega, onda se zaključuje da je jezgro sa parametrom $\alpha_{opt} = -1.3$ kvalitetnije od jezgra sa parametrom $\alpha_{opt} = -0.5$, zbog većeg nagiba amplitudske karakteristike jezgra, jer je za $\alpha_{opt} = -1.3$ nagib $|H'(0.5, -1.3)| = 3.6179$, a za $\alpha_{opt} = -0.5$ nagib je $|H'(0.5, -0.5)| = 2.321$, pa je $|H'(0.5, -1.3)| > |H'(0.5, -0.5)|$. Ovaj zaključak je u suprotnosti sa zaključkom izvedenim na osnovu eksperimentalnih rezultata. Povećanje nagiba dovodi do znatnog izdizanja amplitudske karakteristike u propusnom opsegu, tako da ona počinje da se sve više razlikuje od box karakteristike, osim u uskom delu oko granice propusnog opsega.



Sl. 4.23 Spektralna karakteristika 1P Kejsovog jezgra (H_K) i idealnog interpolacionog jezgra $\sin(\pi x)/(\pi x)$ (H_{box}), i tangenta spektralne karakteristike Kejsovog jezgra (y_{tag}) u graničnoj tački propusnog opsega za a) $\alpha=-0.5$, i b) $\alpha=-1.3$.

4.10.3.3 Kejsovo 2P jezgro

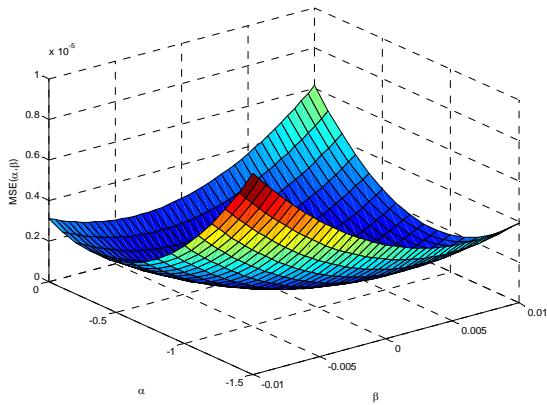
Primenom algoritma sa Sl. 4.9 za ulazne parametre ($\alpha_{min}=-3$, $\alpha_{max}=-1$, $\Delta\alpha=0.01$, $\beta_{min}=-0.6$, $\beta_{max}=0.2$, $\Delta\beta=0.05$ i $f_{min}=0$, $f_{max}=0.2$, $\Delta f=0.01$) dobijene su optimalne vrednosti parametra $\alpha_{opt}=-1.9$ i $\beta_{opt}=-0.4$ i MSET=0.0198. Minimalne vrednosti MSE kod interpolacije tonova G_1-G_7 za frekvencije semplanja $f_s=\{44.1, 22.05, 8\}$ kHz prikazane su u Tbl. 4.4. Na Sl. 4.24 a) prikazana je totalna srednja kvadratna greška (MSET) za ton G_3 kod primene 2P Kejsovog jezgra, i b) prikazana MSE za ton G_3 primenom 1P Kejsovog jezgra. Parametri funkcije Gausove raspodele a) σ^2 (varijansa) i b) μ (srednja vrednost) izračunati su na osnovu podataka iz Tbl. 4.4 i prikazani su u Tbl. 4.5. Funkcije Gausove raspodele optimalnih vrednosti parametara α i β za frekvencije semplanja $f_s=44.1$ kHz i $f_s=22.05$ kHz prikazane su na Sl. 4.25.

Tbl. 4.4 $MSE_{min}(\alpha)$, α_{opt} i β_{opt} za Kejsovo 2P jezgro pri interpolacije audio signala za različite frekvencije semplanja.

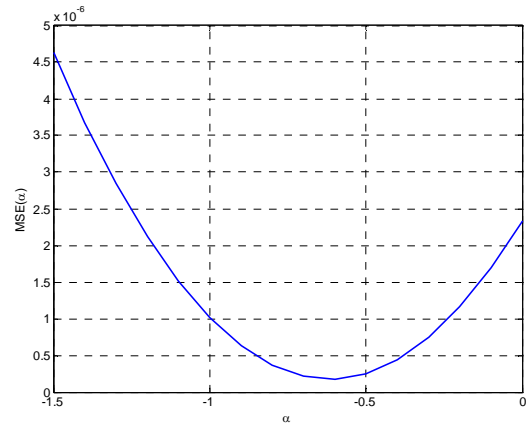
Ton	f_s [Hz]	α_{opt}	β_{opt}	MSE
G_1	44100	-0.5500	0	$2.2906 \cdot 10^{-8}$
	22050	-0.6500	0.0010	$8.1374 \cdot 10^{-7}$
	8000	-0.7000	0.0110	$3.8772 \cdot 10^{-4}$
G_2	44100	-0.5500	0.0010	$7.8752 \cdot 10^{-8}$
	22050	-0.7000	0.0060	$5.0339 \cdot 10^{-6}$
	8000	-0.8000	0.0500	$9.3589 \cdot 10^{-5}$
G_3	44100	-0.6000	0.0005	$1.7162 \cdot 10^{-7}$
	22050	-0.6000	0.0020	$1.3603 \cdot 10^{-5}$
	8000	-0.8000	0.0500	$4.6006 \cdot 10^{-5}$
	44100	-0.7000	0.0050	$8.5367 \cdot 10^{-7}$

G ₄	22050	-0.7000	0.0145	7.8177*10 ⁻⁵
	8000	-1.0000	0.1500	1.6737*10 ⁻⁴
G ₅	44100	-0.8000	0.0075	7.3630*10 ⁻⁷
	22050	-0.7000	0.0170	3.9116*10 ⁻⁵
G ₆	8000	-1.1000	0.4000	2.8594*10 ⁻⁵
	44100	-0.8000	0.0245	4.0872*10 ⁻⁶
G ₇	22050	-0.7000	0.0380	1.4387*10 ⁻⁴
	8000	-0.2000	0.9500	4.3180*10 ⁻⁴
G ₇	44100	-0.8000	0.0635	1.9657*10 ⁻⁶
	22050	-1	0.1000	8.3373*10 ⁻⁵
	8000	0	1.9900	0.0119

$f_s = 44100$ Hz

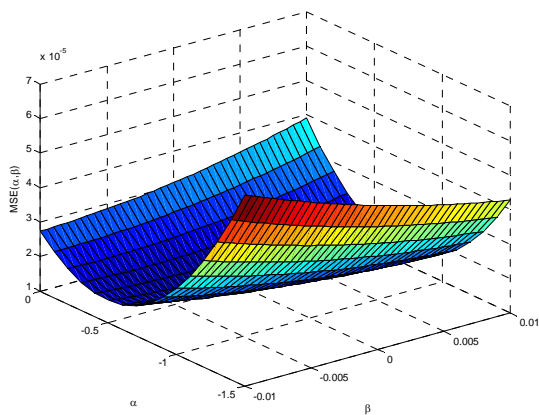


a)

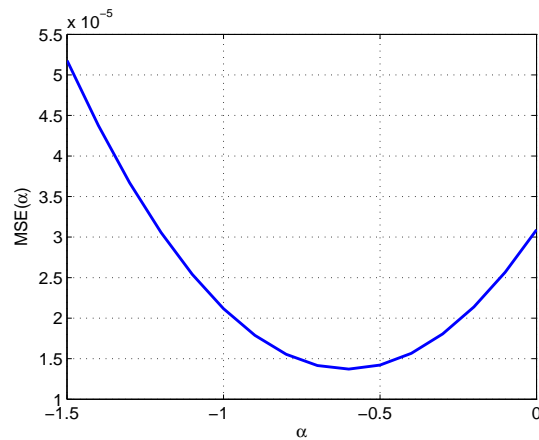


b)

$f_s = 22050$ Hz

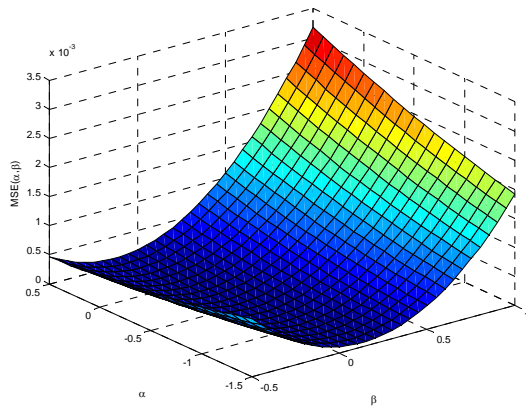


c)

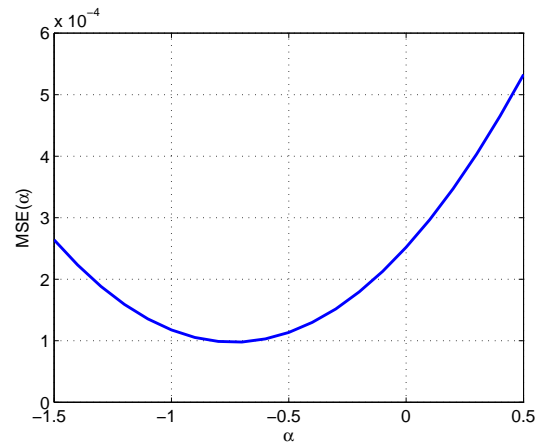


d)

$f_s = 8000$ Hz

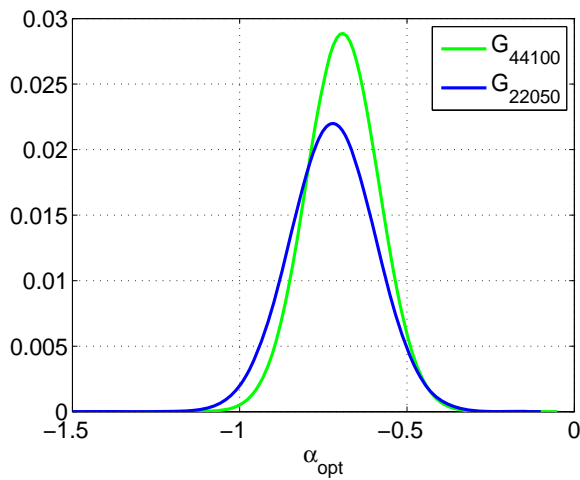


e)

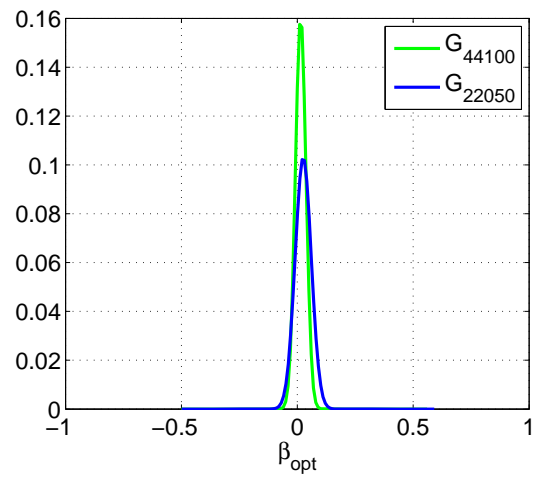


f)

Sl. 4.24 $MSE(\alpha, \beta)$ za ton G_3 za slučaj primene a) Kejsovog 2P za $f_s=44100$ Hz b) Kejsovog 1P jezgra za $f_s=44100$ Hz c) Kejsovog 2P za $f_s=22050$ Hz d) Kejsovog 1P jezgra za $f_s=22050$ Hz e) Kejsovog 2P za $f_s=8000$ Hz f) Kejsovog 1P jezgra za $f_s=8000$ Hz.



a)



b)

Sl. 4.25 Funkcija Gaussove raspodele optimalnih vrednosti a) parametra α b) parametra β za frekvencije semplovanja $f_s=44.1$ kHz i $f_s=22.05$ kHz.

Tbl. 4.5 Parametri funkcije Gaussove raspodele.

f_s [Hz]	α_{opt}		β_{opt}	
	σ^2	μ	σ^2	μ
44100	0.0120	-0.6929	$5.38 \cdot 10^{-4}$	0.0146
22050	0.0165	-0.7214	0.0012	0.0255
8000	0.1662	-0.6571	0.5330	0.5144

Na osnovu eksperimentalnih rezultata prikazanih u Tbl. 4.4 i optimalnih vrednosti parametara $\alpha_{opt}=-1.9$ i $\beta_{opt}=-0.4$ dobijenih algoritmom (Sekcija 4.6.2) i optimalnih parametara $\alpha_{opt}=-19/32$ i $\beta_{opt}=3/32$ dobijenih minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike (Sekcija 4.6.1) može se zaključiti da je:

a) u slučaju frekvencije semplovanja 44100 Hz opseg optimalnih vrednosti parametra α , $\alpha_{opt} \in [-0.8 \div -0.55]$ i srednja vrednost $\overline{\alpha_{opt}} = -0.6929$, dok je $\beta_{opt} \in [0 \div 0.0635]$ i $\overline{\beta_{opt}} = 0.0146$,

b) $\alpha_{opt} \in [-1.0 \div -0.6]$, srednja vrednost $\overline{\alpha_{opt}} = -0.7214$ i $\overline{\beta_{opt}} = 0.0255$ za $\beta_{opt} [0.001 \div 0.1]$ za $f_s=22050$ Hz,

c) za slučaj $f_s=8000$ Hz, $\alpha_{opt} \in [-1.1 \div 0]$ i $\beta_{opt} \in [0.01 \div 1.99]$, dok su srednje vrednosti $\overline{\alpha_{opt}} = -0.6571$ i $\overline{\beta_{opt}} = 0.5144$,

d) greška procene parametra $\alpha_{opt}=-1.9$ najmanja je pri frekvenciji semplovanja 22050 Hz $\Delta_{\alpha B} = |\alpha_{optB} - \overline{\alpha_{opt}}| = |-1.9 - (-0.7214)| = 1.1786$,

e) greška procene parametra $\alpha_{opt}=-19/32$ je $\Delta_{\alpha T} = |\alpha_{optT} - \overline{\alpha_{opt}}| = |-0.59375 - (-0.7214)| = 0.12765$,

f) greška procene parametra $\beta_{opt}=-0.4$ najmanja je pri frekvenciji semplovanja 22050 Hz $\Delta_{\beta B} = |\beta_{optB} - \overline{\beta_{opt}}| = |-0.4 - 0.0255| = 0.4255$,

g) za parametar $\beta_{opt}=3/32$ ova greška je $\Delta_{\beta T} = |\beta_{optT} - \overline{\beta_{opt}}| = |0.09375 - 0.0255| = 0.06825$.

Upoređivanjem grešaka procene parametra zaključuje se da je jezgro sa parametrima određenim metodom smanjenja talasavosti amplitudske karakteristike preciznije.

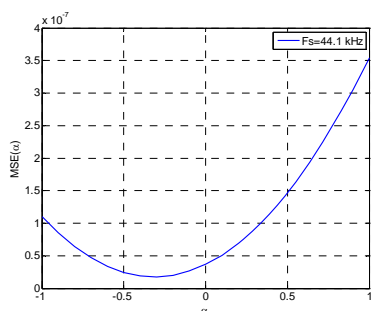
4.10.3.4 Grevilleovo 1P jezgro

U ovoj sekciji primenom Greville-ovog 1P jezgra izvršena je interpolacija audio signala (tonovi G₁–G₇ klavira August Forster) i govornih signala (logatomi srpskog jezika) i određene optimalne vrednosti parametara α . Nakon toga izvršena je komparativna analiza i ocenjena efikasnost Grevilleovog jezgra sa parametrima koji su birani različitim kriterijumima [Savić, 2016]. Rezultati su prikazani grafički i tabelarno.

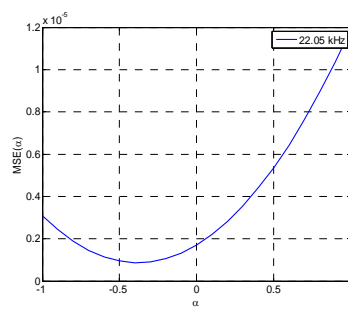
Na Sl. 4.26 prikazane su zavisnosti $MSE(\alpha)$ za ton G_2 klavira za a) $f_s=44.1$ kHz (sl 5. a)) b) $f_s=22.05$ kHz (sl 5. b)) i c) $f_s=8$ kHz (sl 5. c)). Vrednosti $MSE(\alpha)$ za tonove G iz sedam oktava (G_1 – G_7). prikazane su u Tbl. 4.6.

Tbl. 4.6 $MSE_{min}(\alpha)$ i α_{opt} kod interpolacije audio signala za različite frekvencije semplovanja.

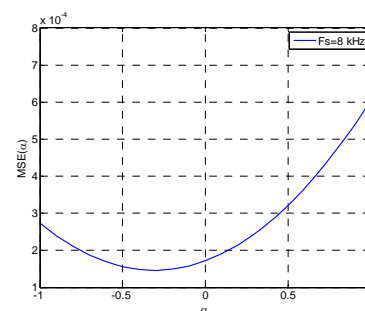
Ton	f_s [Hz]	α_{opt}	MSE
G_1	44100	-0.2000	$1.8416 \cdot 10^{-8}$
	22050	-0.3000	$1.8962 \cdot 10^{-7}$
	8000	-0.3000	$2.9092 \cdot 10^{-4}$
G_2	44100	-0.3000	$1.7782 \cdot 10^{-8}$
	22050	-0.4000	$8.6402 \cdot 10^{-7}$
	8000	-0.3000	$1.4601 \cdot 10^{-4}$
G_3	44100	-0.3000	$3.6858 \cdot 10^{-8}$
	22050	-0.3000	$9.4093 \cdot 10^{-6}$
	8000	-0.3000	$2.7414 \cdot 10^{-4}$
G_4	44100	-0.4000	$1.3610 \cdot 10^{-7}$
	22050	-0.3000	$4.9337 \cdot 10^{-5}$
	8000	-0.5000	0.0012
G_5	44100	-0.4000	$2.2348 \cdot 10^{-7}$
	22050	-0.3000	$2.4520 \cdot 10^{-5}$
	8000	-0.3000	$2.9696 \cdot 10^{-4}$
G_6	44100	-0.5000	$1.2164 \cdot 10^{-6}$
	22050	-0.3000	$8.9330 \cdot 10^{-5}$
	8000	-0.9000	0.0020
G_7	44100	-0.4000	$1.3255 \cdot 10^{-6}$
	22050	-0.3000	$8.2240 \cdot 10^{-5}$
	8000	0.000	0.0011



a)



b)



c)

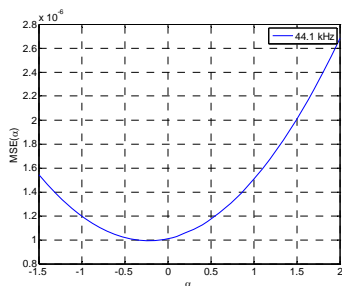
Sl. 4.26 Vrednost $MSE(\alpha)$ kod interpolacije tona G_2 za frekvencije semplovanja a) $f_s=44.1$ kHz, b) $f_s=22.05$ kHz i c) $f_s=8$ kHz.

U Tbl. 4.7 prikazane su vrednosti $MSE(\alpha)$ za logatome Afrikate, CCV-e, CVC-e, Frikative, Laterale, Nazale, Plozive.

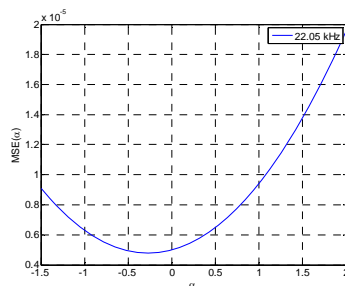
Tbl. 4.7 $MSE_{min}(\alpha)$ i α_{opt} kod interpolacije govornog signala za različite frekvencije semplovanja.

Logatom	f_s [Hz]	α_{opt}	MSE
Afrikat (Djucu)	44100	-0.4000	$1.1857 \cdot 10^{-5}$
	22050	2.0000	$5.0133 \cdot 10^{-4}$
	8000	1.7000	$7.1272 \cdot 10^{-4}$
CCV (Pre)	44100	-0.4000	$1.2922 \cdot 10^{-5}$
	22050	-0.4000	$8.2828 \cdot 10^{-4}$
	8000	3.1000	$7.2172 \cdot 10^{-4}$
CVC (Men)	44100	0.0000	$8.7620 \cdot 10^{-6}$
	22050	-0.4000	$3.6749 \cdot 10^{-5}$
	8000	1.0000	$3.5988 \cdot 10^{-4}$
Frikativ (Zefo)	44100	2.7000	$3.0932 \cdot 10^{-4}$
	22050	1.0000	0.0027
	8000	-0.3000	0.0020
Lateral (Lera)	44100	-0.3000	$1.1764 \cdot 10^{-5}$
	22050	-0.2000	$7.1226 \cdot 10^{-5}$
	8000	-0.3000	0.0021
Nazal (Noma)	44100	-0.2000	$9.9333 \cdot 10^{-7}$
	22050	-0.3000	$4.7954 \cdot 10^{-6}$
	8000	-0.4000	$5.2955 \cdot 10^{-5}$
Ploziv (Taku)	44100	0.2000	$2.2358 \cdot 10^{-6}$
	22050	0.2000	$9.6607 \cdot 10^{-6}$
	8000	-0.5000	$5.7292 \cdot 10^{-5}$

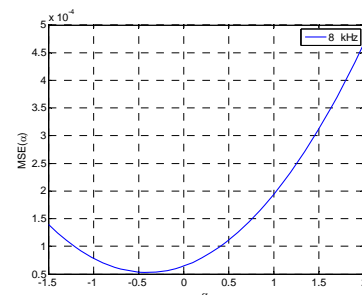
Na Sl. 4.27 prikazane su zavisnosti $MSE(\alpha)$ za logatom iz grupe Nazala, reč Noma za a) $f_s=44.1$ kHz (sl 5. a) b) $f_s=22.05$ kHz (sl 5. b) i c) $f_s=8$ kHz (sl 5. c)).



a)



b)



c)

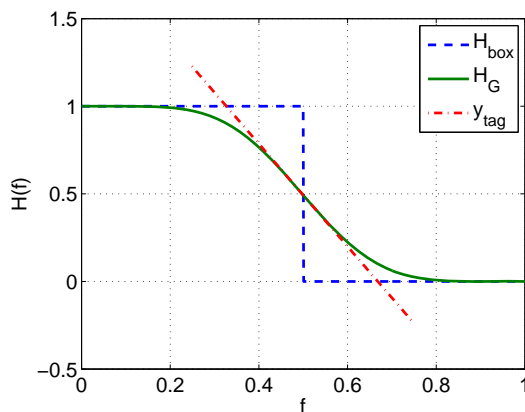
Sl. 4.27 Vrednost $MSE(\alpha)$ kod interpolacije logatoma Noma semplovanja a) $f_s=44.1$ kHz , b) $f_s=22.05$ kHz i c) $f_s=8$ kHz.

U Tbl. 4.8 prikazane su vrednosti koeficijenti pravca tangente amplitudske karakteristike H u tački $f=0.5$ za vrednosti parametra α iz Sekcije 4.7.1 ($\alpha=-3/16$) i Sekcije 4.7.2 ($\alpha=-0.8$), kao i odgovarajuće vrednosti $MSE(\alpha)$.

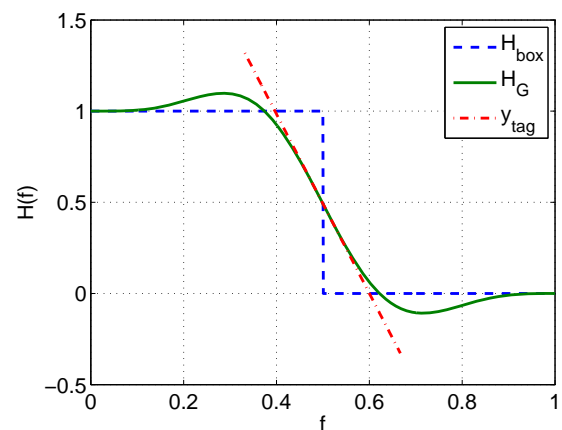
Tbl. 4.8 Vrednosti koeficijenta pravca tangente (k_α) amplitudske karakteristike H u tački $f=0.5$ za različite vrednosti parametra α i $MSE(\alpha)$

Kriterijum		$k_\alpha = H'(0.5, \alpha)$	$MSE(\alpha)$
Kriterijum 1	-3/16	-2.9289	0.0314
Kriterijum 2	-0.8	-4.9148	0.0204

Na Sl. 4.28 prikazane su amplitudske karakteristike: a) idealnog interpolacionog jezgra oblika $\sin(x)/x$ (H_{box}), b) Grevileovog jezgra (H_G), kao i tangenta (y_{tag}) karakteristike Grevileovog jezgra u $f=0.5$ i to za $\alpha_{\text{opt}} = \alpha_T = -3/16$ i $\alpha_{\text{opt}} = \alpha_B = -0.8$.



a) $\alpha_{\text{opt}} = -3/16$



b) $\alpha_{\text{opt}} = -0.8$

Sl. 4.28 Box funkcija, spektralna karakteristika i tangenta spektralne karakteristike Grevileovog jezgra u graničnoj tački propusnog opsega i to za a) $\alpha = -3/16$ i b) $\alpha = -0.8$.

Na osnovu rezultata prikazanih u Tbl. 4.6, Tbl. 4.7 i vrednosti α_{opt} dobijenih optimizacijom na osnovu minimiziranja talasavosti spektralne karakteristike, tj. na osnovu Tejlorovog razvoja ($\alpha_{\text{opt}} = \alpha_T = -3/16$) (Sekcija 4.7.1) i optimizacijom na osnovu MSE ($\alpha_{\text{opt}} = \alpha_B = -0.8$) (Sekcija 4.7.2) može se zaključiti da je:

1) za audio signal (tonovi G_1 – G_7),

1.a) za $f_s = 44.1 \text{ kHz}$, $\alpha_{\text{opt}_{44.1}} \in [-0.5 \div -0.2]$ i $\overline{\alpha_{\text{opt}_{44.1}}} = -0.3571$,

1.b) za $f_s = 22.05 \text{ kHz}$, $\alpha_{\text{opt}_{22.05}} \in [-0.4 \div -0.3]$ i $\overline{\alpha_{\text{opt}_{22.05}}} = -0.3143$,

1.c) za $f_s = 8 \text{ kHz}$, $\alpha_{\text{opt}_8} \in [-0.9 \div 0]$ i $\overline{\alpha_{\text{opt}_8}} = -0.3714$,

1.d) greška procene optimalnog parametra uz pretpostavku da su eksperimentalne vrednosti tačne vrednosti, za parametar dobijen na osnovu Tejlorovog razvoja:

$$\Delta_{asT_44.1} = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt_44.1}} \right| = \left| -0.1875 - (-0.3571) \right| = 0.1696 ,$$

$$\Delta_{asT_22.05} = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt_22.05}} \right| = \left| -0.1875 - (-0.3143) \right| = 0.1268 ,$$

$$\Delta_{asT_8} = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt_8}} \right| = \left| -0.1875 - (-0.3714) \right| = 0.1839 ,$$

najmanja je za $f_s=22.05\text{kHz}$,

1.e) greška procene optimalnog parametra uz pretpostavku da su eksperimentalne vrednosti tačne vrednosti, za parametar dobijen na osnovu sličnosti sa box funkcijom:

$$\Delta_{asB_44.1} = \left| \alpha_B - \overline{\alpha_{opt_44.1}} \right| = \left| -0.8 - (-0.3571) \right| = 0.4429 ,$$

$$\Delta_{asB_22.05} = \left| \alpha_B - \overline{\alpha_{opt_22.05}} \right| = \left| -0.8 - (-0.3143) \right| = 0.4857 ,$$

$$\Delta_{asB_8} = \left| \alpha_B - \overline{\alpha_{opt_8}} \right| = \left| -0.8 - (-0.3714) \right| = 0.4286 ,$$

najmanja je za $f_s=8\text{kHz}$,

1.f) greška procene optimalnog parametra dobijenog na osnovu kriterijuma 1, $\alpha_{opt} = \alpha_T = -3/16$ manja je od greške procene optimalnog parametra dobijenog po kriterijumu 2, $\alpha_{opt} = \alpha_B = -0.8$ ($\Delta_{asB_8} / \Delta_{asT_22.05} = 0.4286/0.1268 = 3.38013$).

2) Za govorni signal kod izgovora logatoma:

2.a) za $f_s=44.1\text{kHz}$, $\alpha_{opt} \in [-0.6 \div -0.2]$ i $\overline{\alpha_{opt_44.1}} = -0.2429$;

2.b) za $f_s=22.05\text{kHz}$, $\alpha_{opt} \in [-0.4 \div 2.7]$ i $\overline{\alpha_{opt_22.05}} = -0.6$;

2.c) za $f_s=8\text{kHz}$, $\alpha_{opt} \in [-0.5 \div 3.1]$ i $\overline{\alpha_{opt_8}} = 0.8857$;

2.d) greška procene parametra uz pretpostavku da su eksperimentalne vrednosti tačne vrednosti, za parametar dobijen na osnovu Tejlorovog razvoja:

$$\Delta_{asT_44.1} = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt_44.1}} \right| = \left| -0.1875 - (-0.2429) \right| = 0.0554 ,$$

$$\Delta_{asT_22.05} = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt_22.05}} \right| = \left| -0.1875 - (-0.6) \right| = 0.7875 ,$$

$$\Delta_{asT_8} = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt_8}} \right| = \left| -0.1875 - 0.8857 \right| = 1.0732$$

najmanja je za $f_s=44.1\text{kHz}$,

2.e) greška procene uz pretpostavku da su eksperimentalne vrednosti tačne vrednosti, za parametar dobijen na osnovu sličnosti sa box funkcijom:

$$\Delta_{asB_44.1} = \left| \alpha_B - \overline{\alpha_{opt_44.1}} \right| = \left| -0.8 - (-0.2429) \right| = 0.5571,$$

$$\Delta_{asB_22.05} = \left| \alpha_B - \overline{\alpha_{opt_22.05}} \right| = \left| -0.8 - (-0.6) \right| = 0.2,$$

$$\Delta_{asB_8} = \left| \alpha_B - \overline{\alpha_{opt_8}} \right| = \left| -0.8 - 0.8857 \right| = 1.6857,$$

najmanja je za $f_s=22.05\text{kHz}$,

2.f) greška procene optimalnog parametra dobijenog na osnovu kriterijuma 1, $\alpha_{opt} = \alpha_T = -3/16$ manja je od greške procene optimalnog parametra dobijenog po kriterijumu 2, $\alpha_{opt} = \alpha_B = -0.8$ ($\Delta_{asB_22.05} / \Delta_{asT_44.1} = 0.2/0.0554 = 3.6101$).

Upoređivanjem grešaka procene parametara zaključuje se da je interpolacija jezgrom kome je parametar određen optimizacijom na osnovu Tejlorovog razvoja (minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike) preciznija od interpolacije sa jezgrom kome je parametar određen optimizacijom na osnovu MSE i kod audio i kod govornih signala.

Ako se u cilju upoređivanja kvaliteta amplitudskih karakteristika jezgara primeni analiza nagiba spektralne karakteristike u graničnoj tački propusnog opsega, onda se zaključuje da je jezgro sa parametrom $\alpha_{opt} = -0.8$ kvalitetnije od jezgra sa parametrom $\alpha_{opt} = -3/16$ zbog većeg nagiba amplitudske karakteristike jezgra jer je za $\alpha_{opt} = -0.8$ nagib $|H'(0.5, -0.8)| = 4.9148$, a za $\alpha_{opt} = -3/16$ nagib je $|H'(0.5, -3/16)| = 2.9289$, pa je $|H'(0.5, -0.8)| > |H'(0.5, -3/16)|$ i $MSE(-0.8) < MSE(-3/16)$. Ovaj zaključak je u suprotnosti sa zaključkom izvedenim na osnovu eksperimentalnih rezultata. Eksperimentalni rezultati iz ovog rada opovrgavaju zaključak izveden u radu [Meijering, 1999] gde se kaže da je jezgro čija je spektralna karakteristika sa većim nagibom kvalitetnije od jezgra sa manjim nagibom karakteristike, i da smim tim bolje aproksimira idealnu box karakteristiku. Kod Greivileovog jezgra promena nagiba karakteristike ostvaruje se promenom parametra α . Povećanje nagiba dovodi do znatnog izdizanja amplitudske karakteristike u propusnom opsegu tako da ona počinje da se sve više razlikuje od box karakteristike osim u uskom delu oko granice propusnog opsega. Očito je da se promenom i primenom različitih kriterijuma javljaju suprotne tendencije.

4.10.3.5 Grevilleovo 2P jezgro

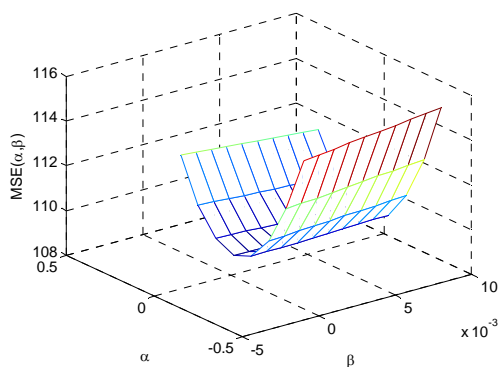
Izbor optimalnih vrednosti Grevilleovog 2P jezgra obavljen je kod interpolacije nekih test slika. Minimalne vrednosti MSE prikazane su u Tbl. 4.9. U cilju komparacije u Tbl. 4.10 prikazane su Minimalne vrednosti MSE primenom Grevilleovog 1P jezgra.

Tbl. 4.9 Eksperimentalne vrednosti optimalnih parametara Grevilleovog 2P jezgra i MSE_{min} .

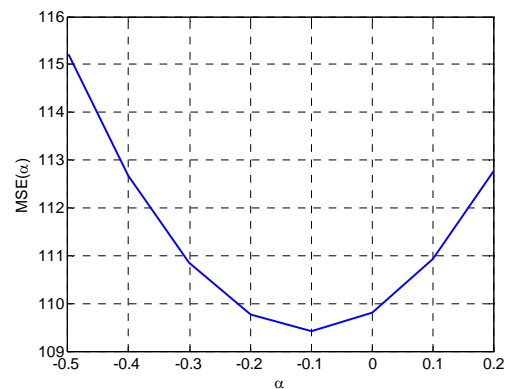
Slika	α_{opt}	β_{opt}	$MSE_{min}(\alpha, \beta)$
Lena	-0.1000	0.0070	109.4109
Pappers	0	0.0050	179.9298
Goldhill	0.2000	0.0900	102.2355
Camerman	0	0.1700	349.4497
Boats	0.6000	0.0700	418.9747
Baboon	0.2000	0.1100	206.4562

Tbl. 4.10 Eksperimentalne vrednosti optimalnih parametara Grevilleovog 1P jezgra i MSE_{min} .

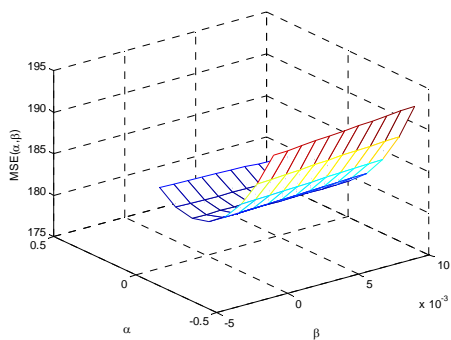
Slika	α_{opt}	$MSE_{min}(\alpha)$
Lena	-0.1000	109.4256
Pappers	0	179.9407
Goldhill	0.2000	102.5923
Camerman	0	351.5301
Boats	0.6000	420.2720
Baboon	0.2000	206.7969



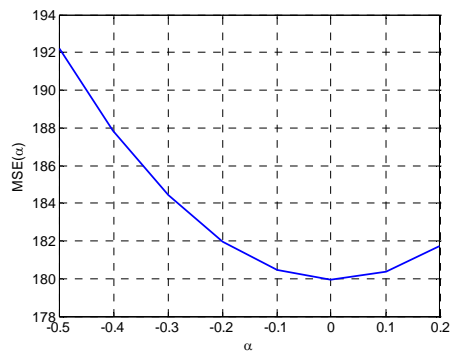
a) Lena



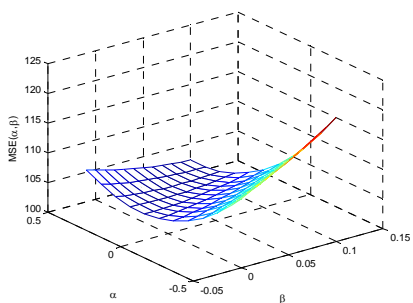
b) Lena



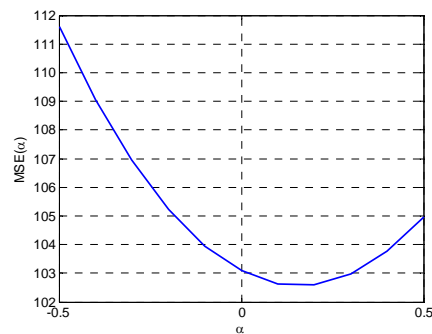
b) Pappers



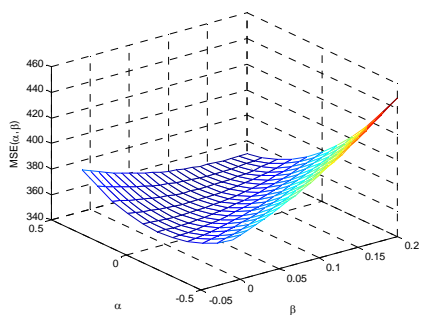
c) Pappers



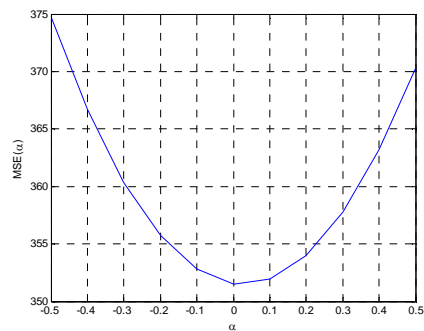
d) Goldhill



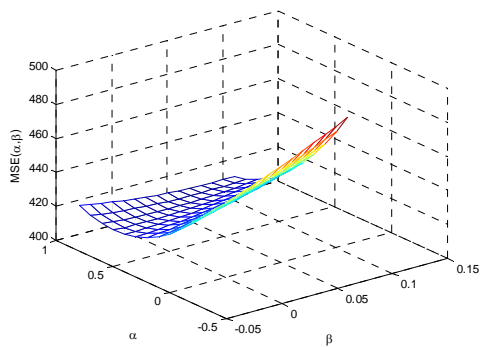
e) Goldhill



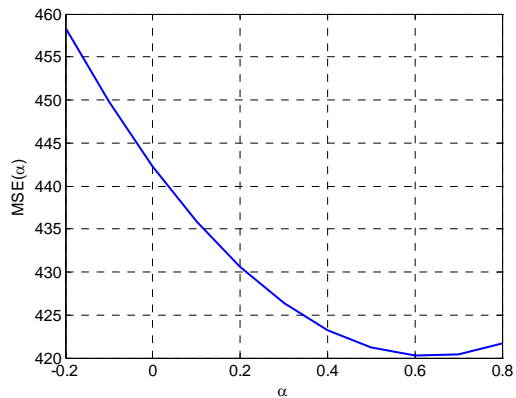
f) Camerman



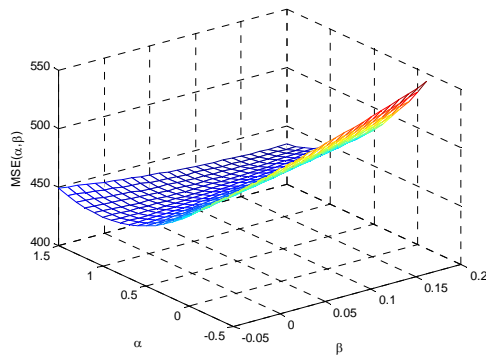
h) Camerman



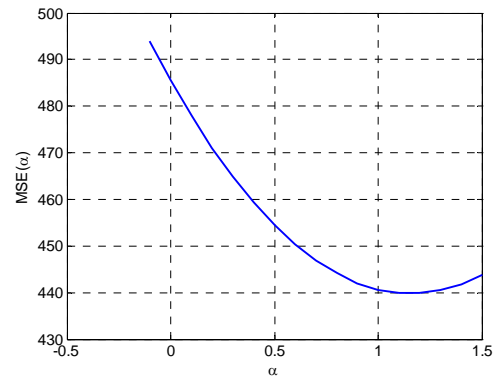
e) Boats



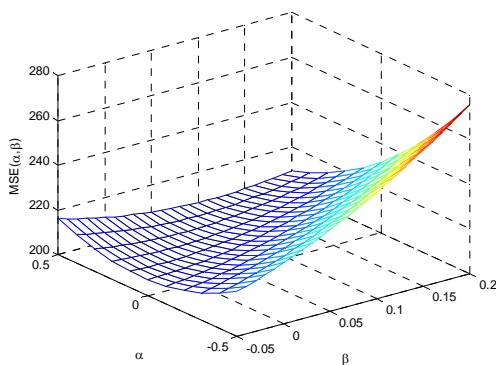
f) Boats



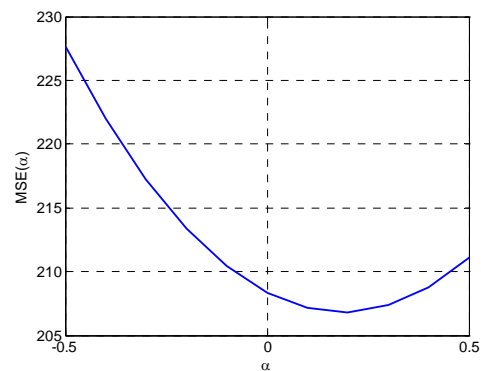
f) Barbara



f) Barbara



g) Baboon



h) Baboon

Sl. 4.29 $MSE(\alpha, \beta)$ za test slike a) Grevilleovog 2P jezgra b) Grevilleovog 1P jezgra.

Na osnovu eksperimentalnih rezultata prikazanih u Tbl. 4.9 i Tbl. 4.10 i optimalnih vrednosti parametara $\alpha_{opt} = -3/16$ i $\beta_{opt} = 157/4032$ dobijenih minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike (Sekcija 4.8) može se zaključiti da je:

- opseg optimalnih vrednosti parametra α , $\alpha_{opt} \in [-0.1 \div 0.6]$ i srednja vrednost $\overline{\alpha_{opt}} = 0.15$,
- opseg optimalnih vrednosti parametra β je $\beta_{opt} \in [0.05 \div 0.17]$ i $\overline{\beta_{opt}} = 0.075$,
- greška procene parametara $\alpha_{opt} = -3/16$ uz pretpostavku da su eksperimentalne vrednosti tačne vrednosti je: $\Delta_{\alpha} = |\alpha_{opt} - \overline{\alpha_{opt}}| = |-3/16 - 0.15| = 0.3375$,
- greška procene parametara $\beta_{opt} = 157/4032$ je $\Delta_{\beta} = |\beta_{opt} - \overline{\beta_{opt}}| = |157/4032 - 0.075| = 0.0361$,
- MSE dobijena primenom Greville 2P manja u odnosu na MSE dobijenu primenom Greville 1P.

4.10.3.6 Tro-parametarsko jezgro

Primenom tro-parametarskog jezgra u procesu interpolacije kod test slika dobijni su rezultati prikazani u Tbl. 4.11. U cilju komparativne analize u Tbl. 4.12 i Tbl. 4.13 prikazani su rezultati dobijeni primenom Kejs 2P jezgra i Kejs 1P jezgra respektivno.

Tbl. 4.11 $MSE_{min}(\alpha, \beta, \gamma)$ i α_{opt} , β_{opt} , γ_{opt}

Slika	α_{opt}	β_{opt}	γ_{opt}	MSE 3P
Lena	-0.4000	0.1000	-0.0350	109.1731
Barbara	1	0	-0.1500	419.5330
Camerman	-0.2000	0.1000	-0.0700	349.2783
Goldhill	-0.2000	0	-0.0650	102.1151
Pappers	-0.4000	0	-0.0525	179.6869
Boats	-0.0200	0	-0.0200	414.1401
Baboon	-0.3000	-0.1000	-0.1000	100.7268

Tbl. 4.12 $MSE_{min}(\alpha, \beta)$ i α_{opt} , β_{opt} .

Slika	α_{opt}	β_{opt}	MSE 2P
Lena	-0.5000	0.1000	109.2015
Barbara	1	0.1000	420.4089
Camerman	-0.2000	0.2000	349.5319
Goldhill	-0.3000	0	102.2502
Pappers	-0.4000	0.1000	179.6273
Boats	0.5000	0.1000	414.2656
Baboon	-0.2000	0.1000	100.7511

Tbl. 4.13 $MSE_{min}(\alpha, \beta)$ i α_{opt} , β_{opt} .

Slika	α_{opt}	MSE 2P
Lena	-0.6000	109.7312
Barbara	0.9000	420.9963
Camerman	-0.4000	350.7498
Goldhill	-0.3000	102.2502
Pappers	-0.5000	179.8750
Boats	0.4000	414.2891
Baboon	-0.3000	100.8070

Na osnovu eksperimentalnih rezultata prikazanih u Tbl. 4.11, Tbl. 4.12 i Tbl. 4.13 i optimalnih vrednosti parametara $\alpha_{opt}=-4945/8064$, $\beta_{opt}=409/2688$ i $\gamma_{opt}=157/8064$ dobijenih minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike (Sekcija 4.9) može se zaključiti da je:

a) opseg optimalnih vrednosti parametra α , $\alpha_{opt} \in [-0.4 \div 1.0]$ i srednja vrednost $\overline{\alpha_{opt}} = -0.0743$,

b) opseg optimalnih vrednosti parametra β je $\beta_{opt} \in [-0.1 \div 0.1]$ i srednja vrednost $\overline{\beta_{opt}} = 0.0143$

c) opseg optimalnih vrednosti parametra γ je $\gamma_{opt} \in [-0.1500 \div -0.0200]$ i srednja vrednost $\overline{\gamma_{opt}} = -0.0704$,

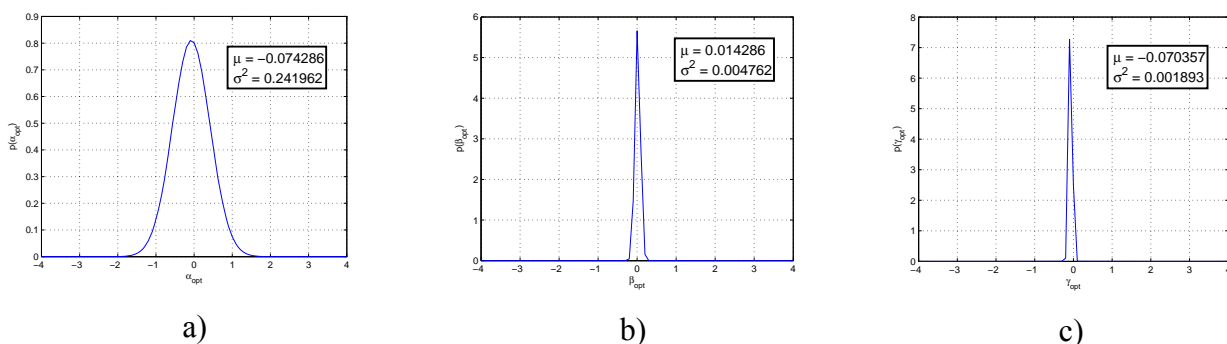
d) greška procene parametara $\alpha_{opt}=-4945/8064$ uz pretpostavku da su eksperimentalne vrednosti tačne vrednosti je: $\Delta_{\alpha} = |\alpha_{opt} - \overline{\alpha_{opt}}| = |-4945/8064 - (-0.0743)| = 0.5389$,

e) greška procene parametra $\beta_{opt}=409/2688$ je $\Delta_{\beta} = |\beta_{opt} - \overline{\beta_{opt}}| = |409/2688 - 0.0143| = 0.1379$,

f) greška procene za $\gamma_{opt}=-157/8064$ je $\Delta_{\gamma} = |\gamma_{opt} - \overline{\gamma_{opt}}| = |-157/8064 - (-0.0704)| = 0.0509$,

g) MSE dobijena primenom tro-parametarskog jezgra manja je u odnosu na MSE dobijenu primenom Kejs 1P i Kejs 2P za svaku test sliku.

Statističkom analizom optimalnih vrednosti parametara određeni su srednja vrednost, μ (jednačina (4.116)), i varijansa σ^2 (jednačina (4.117)). Na osnovu μ i σ^2 određena je Gausova funkcija raspodele, $p(\alpha)$ (jednačina (4.118)). Na Sl. 4.30 prikazana je funkcija Gausove raspodele eksperimentalno dobijenih optimalnih vrednosti parametra 3P jezgra kod interpolacije test slika.



Sl. 4.30 Funkcija Gausove raspodele optimalnih vrednosti a) parametra α b) parametra β i c) parametra γ kod interpolacije test slika.

Tbl. 4.14 $MSE_{min}(\alpha)$, α_{opt} , β_{opt} i γ_{opt} za 3P jezgro kod interpolacije audio signala za različite frekvencije semplovanja.

Ton	F_s [Hz]	α_{opt}	β_{opt}	γ_{opt}	MSE
G ₁	44100	-0.600	0.100	0.000	$1.9019 \cdot 10^{-8}$
	22050	-0.600	0.3000	-0.100	$2.1611 \cdot 10^{-7}$
	8000	-0.500	0.1000	-0.150	$3.7158 \cdot 10^{-4}$
G ₂	44100	-0.600	0.3000	-0.100	$3.6888 \cdot 10^{-8}$
	22050	-0.600	0.3000	-0.100	$2.2446 \cdot 10^{-6}$
	8000	-0.600	0.2000	0.000	$5.5242 \cdot 10^{-4}$
G ₃	44100	-0.600	0.3000	-0.100	$3.2183 \cdot 10^{-8}$
	22050	-0.700	0.2000	0.000	$1.3004 \cdot 10^{-5}$
	8000	-0.600	0.2000	-0.100	$3.4164 \cdot 10^{-4}$
G ₄	44100	-0.600	0.3000	-0.100	$1.0863 \cdot 10^{-7}$
	22050	-0.700	0.2000	0.000	$7.5599 \cdot 10^{-5}$
	8000	-0.600	0.2000	-0.225	0.0017
G ₅	44100	-0.600	0.3000	-0.100	$1.4717 \cdot 10^{-7}$
	22050	-0.600	0.1000	0.000	$3.8678 \cdot 10^{-5}$
	8000	-0.500	0.5000	-0.025	$4.0706 \cdot 10^{-4}$
G ₆	44100	-0.600	0.3000	-0.100	$9.3044 \cdot 10^{-7}$
	22050	-0.500	0.1000	-0.300	$1.3502 \cdot 10^{-4}$
	8000	-0.900	-0.400	1.700	$7.2846 \cdot 10^{-4}$
G ₇	44100	-0.500	0.2000	-0.400	$3.5341 \cdot 10^{-7}$
	22050	-0.700	0.9000	1.600	$2.7549 \cdot 10^{-5}$
	8000	0	0.3000	-1.700	$1.8495 \cdot 10^{-4}$

Na osnovu eksperimentalnih rezultata prikazanih u Tbl. 4.14 i optimalnih vrednosti parametara $\alpha_{opt}=-4945/8064$, $\beta_{opt}=409/2688$ i $\gamma_{opt}=-157/8064$ dobijenih minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike (Sekcija *) može se zaključiti da je:

a) za $f_s=44.1\text{kHz}$, $\alpha_{opt_44.1} \in [-0.6 \div -0.5]$, srednja vrednost $\overline{\alpha_{opt_44.1}} = -0.5857$, $\beta_{opt_44.1} \in [0.1 \div 0.3]$

$\overline{\beta_{opt_44.1}} = 0.2571$, $\gamma_{opt_44.1} \in [-0.4 \div 0]$ i $\overline{\gamma_{opt_44.1}} = -0.1286$,

b) za $f_s=22.05\text{kHz}$, $\alpha_{opt_22.05} \in [-0.7 \div -0.5]$ i $\overline{\alpha_{opt_22.05}} = -0.6286$, $\beta_{opt_22.05} \in [0.1 \div 0.9]$ i

$\overline{\beta_{opt_22.05}} = 0.3000$, $\gamma_{opt_22.05} \in [-0.3 \div 1.6]$ i $\overline{\gamma_{opt_22.05}} = 0.1571$,

c) za $f_s=8\text{kHz}$, $\alpha_{opt_8} \in [-0.9 \div 0]$ i $\overline{\alpha_{opt_8}} = -0.5286$, $\beta_{opt_8} \in [0.1 \div 0.9]$ i $\overline{\beta_{opt_8}} = 0.1571$, $\gamma_{opt_8} \in$

$[-1.7 \div 1.7]$ i $\overline{\gamma_{opt_8}} = 0.0714$,

d) greška procene parametra $\alpha_{opt}=-4945/8064$ koji je dobijen minimiziranjem talasavosti:

$$\Delta_{asT_44.1} = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt_44.1}} \right| = \left| -4945/8064 - (-0.5857) \right| = 0.0275,$$

$$\Delta_{asT_{22.05}} = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt_{22.05}}} \right| = \left| -4945/8064 - (0.6286) \right| = 0.0154,$$

$$\Delta_{asT_8} = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt_8}} \right| = \left| -4945/8064 - (0.5286) \right| = 0.0846, \text{ najmanja je za } f_s=22.05\text{kHz},$$

e) greška procene parametra $\beta_{opt}=409/2688$ koji je dobijen minimiziranjem talasavosti:

$$\Delta_{asT_{44.1}} = \left| \beta_T - \overline{\beta_{opt_{44.1}}} \right| = \left| 409/2688 - 0.2571 \right| = 0.1049,$$

$$\Delta_{asT_{22.05}} = \left| \beta_T - \overline{\beta_{opt_{22.05}}} \right| = \left| 409/2688 - 0.3 \right| = 0.1478,$$

$$\Delta_{asT_8} = \left| \beta_T - \overline{\beta_{opt_8}} \right| = \left| 409/2688 - 0.1571 \right| = 0.0049, \text{ najmanja je za } f_s=8\text{kHz},$$

f) greška procene parametra $\gamma_{opt}=-157/8064$ koji je dobijen minimiziranjem talasavosti

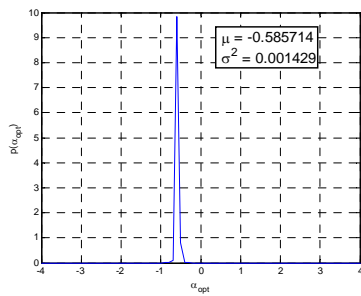
$$\Delta_{asT_{44.1}} = \left| \gamma_T - \overline{\gamma_{opt_{44.1}}} \right| = \left| -157/8064 - (-0.1286) \right| = 0.1091,$$

$$\Delta_{asT_{22.05}} = \left| \gamma_T - \overline{\gamma_{opt_{22.05}}} \right| = \left| -157/8064 - 0.1286 \right| = 0.1766,$$

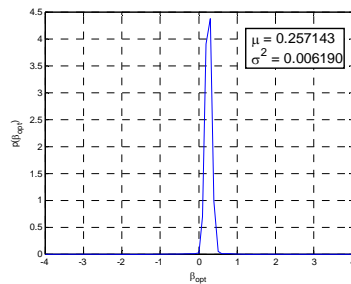
$$\Delta_{asT_8} = \left| \gamma_T - \overline{\gamma_{opt_8}} \right| = \left| -157/8064 - (-0.0714) \right| = 0.0519, \text{ najmanja je za } f_s=8\text{kHz}.$$

e) Komparacijom MSE-a (Tbl. 4.4 i Tbl. 4.14) može se zaključiti da je MSE dobijena kod interpolacije audio signala primenom 3P jezgra manja u odnosu na MSE dobijenu primenom Kejs 2P.

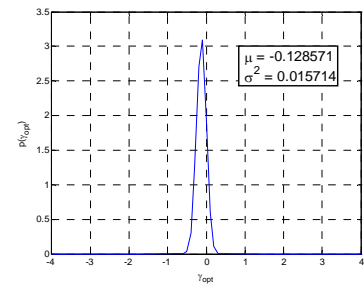
Na Sl. 4.31 prikazana je funkcija Gausove raspodele eksperimentalno dobijenih optimalnih vrednosti parametra 3P jezgra kod interpolacije audio signala za različite frekvencije samplovanja.



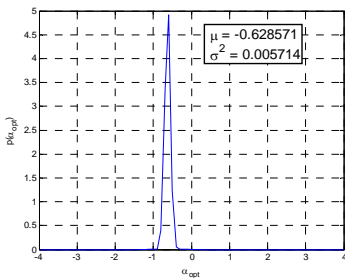
a) $\alpha_{opt_{44.1}}$



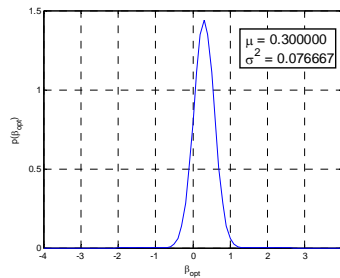
b) $\beta_{opt_{44.1}}$



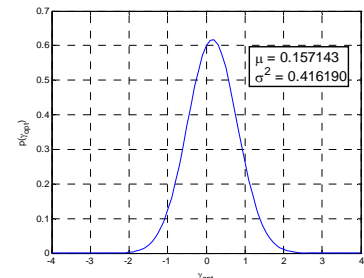
c) $\gamma_{opt_{44.1}}$



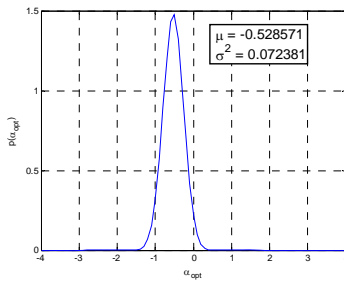
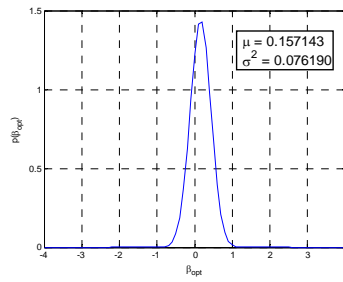
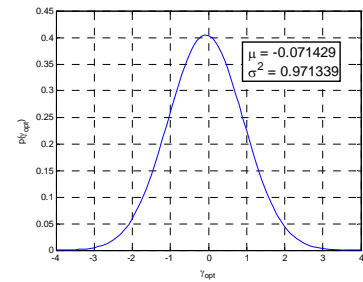
d) $\alpha_{opt_{22.05}}$



e) $\beta_{opt_{22.05}}$



f) $\gamma_{opt_{22.05}}$

h) α_{opt_8} i) β_{opt_8} j) γ_{opt_8}

Sl. 4.31 Funkcija Gaussove raspodele optimalnih vrednosti a) parametra α za $f_s=44.1$ kHz b) parametra β za $f_s =44.1$ kHz, c) parametra γ za $f_s =44.1$ kHz, d) parametra α za $f_s =22.05$ kHz e) parametra β za $f_s =22.05$ kHz, f) parametra γ za $f_s =22.05$ kHz, h) parametra α za $f_s =8$ kHz i) parametra β za $f_s =8$ kHz, j) parametra γ za $f_s =8$ kHz kod interpolacije audio signala

5. PROCENA FUNDAMENTALNE FREKVENCije U SPEKTRALNOM DOMENU

5.1 Uvod

U mnogim informacionim sistemima javlja se potreba za obradom govornih signala. Često se od informacionog sistema zahteva da u realnom vremenu izvrši analizu govora, prepoznavanje govornika, klasifikaciju emocionalnog stanja govornika [Kang, 2004], [Kang, 2006]. U mnogim multimedijalnim aplikacijama neophodna je obrada audio zapisa u cilju poboljšanja kvaliteta i razumljivosti govora. Tipičan primer je popravka govornog signala smanjenjem disonantnih frekvencija [Joen, 2003], [Kang, 2004]. Obrada govornog signala bazira se na analizi fundamentalne frekvencije i njenih dominantnih harmonika. Usled toga se procena fundamentalne frekvencije govornih signala nameće kao aktuelan zadatak [Janer, 1995], [Milivojević, 2011], [Yarman, 2006]. Brza i precizna procena fundamentalne frekvencije (f_0) je jedan od osnovnih zadataka pri obradi govornih i audio signala [Kawahara, 2002]. Postoji veliki broj standardnih metoda koje se koriste za procenu f_0 zasnovanih na različitim matematičkim principima autokorelacija [Rabiner, 1997], kros-korelacija [Samad, 2000], YIN [Kawahara, 2002], harmonijski proizvod spektra [Schroeder, 1968]. Algoritmi mogu da se sprovedu u:

- a) vremenskom domenu [Shimamura, 2001], [Kacha, 2005], [Shahnaz, 2012], [Rabiner, 1997],
- b) spektralnom domenu [Cheveigné, 2001], [Klapuri, 2003], [Liu, 2001],
- c) keprum domenu [Ahmadi, 1999].

5.2 Fundamentalna frekvencija

Fundamentalna frekvencija predstavlja osnovnu frekvenciju periodičnog, odnosno kvaziperiodičnog signala. Procena fundamentalne frekvencije u spektralnom domenu podrazumeva primenu Furijeove transformacije nad vremenski diskretnim signalom $x(n)$. Za rad u realnom vremenu primenjuje se brza Furijeova transformacija (**engl.** *Fast Fourier transform*, FFT). Spektar diskretnog periodičnog signala je kontinualan dok se njegovo izračunavanje FFT-a vrši u diskretnim tačkama.

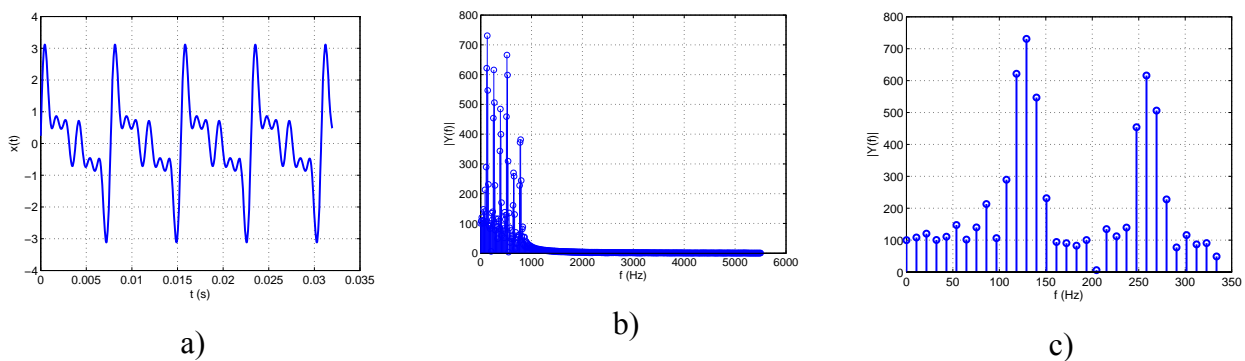
Povećanjem broja tačaka gde se izračunava spektar vrši se bolja aproksimacija kontinualnog spektra. Efekat dužine FFT-a prikazan je za a) sinusni i b) govorni signal. Signal je semplovan sa $f_s=44100$ Hz i nad njim je izvršena diskretna Furijeova transformacija u 4096 tačaka. Prikazani primeri su za blokove signala trajanja 32 ms (broj semplova je $N=1411$).

5.2.1 Spektar sinusnog signala

Sinusni test signal prikazan na Sl. 5.1 a) definisan je sa:

$$x(n) = \sum_{i=0}^K a_i \sin(2\pi f_0 n), \quad (5.1)$$

gde je f_0 fundamentalna frekvencija, a_i amplituda i -tog harmonika ($a_0=1$, $a_1=0.8$, $a_2=0.6$, $a_3=0.9$, $a_4=0.35$, $a_5=0.55$), K broj harmonika ($K=5$). Formirani sinusni signal je sa frekvencijom semplovanja $f_s=44100$ Hz, perioda semplovanja $T_s=1/f_s=22,676$ μ s, dužina FFT-a $NFFT=4096$ sa rezolucijom u spektru $\Delta f=f_s/NFFT=10,7666$ Hz. Spektar signala u opsegu 0-5.5 kHz prikazan je na Sl. 5.1 b). Uočavaju se pikovi na frekvencijama $i \cdot f_0$. Na slici Sl. 5.1 c) prikazan je deo spektra u opsegu 350 Hz. Fundamentalna frekvencija signala je $f_0=130$ Hz i ne poklapa se sa frekvencijama izračunavanja FFT-a. Kako se f_0 nalazi između 12-te i 13-te komponente u spektru to je $129,199$ Hz = $12 \cdot \Delta f < f_0 < 13 \cdot \Delta f = 139,965$ Hz.



Sl. 5.1 Sinusoidalni signal: a) vremenski prikaz, b) 1/8 spektra, c) uvećanje spektra.

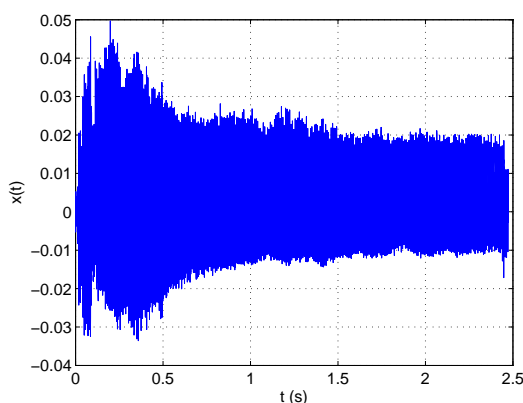
5.2.2 Spektar govornog signala

Nad govornim signalom $x(t)$, koji je semplovan sa $f_s=44100$ Hz primenjena je diskretna Furijeova transformacija dužine $NFFT=4096$ i dobijen spektar $X(f)$. Vremenski oblik govornog signala (samoglasnik 'a') prikazan je na Sl. 5.2.a. Vremenski oblik bloka govornog signala u trajanju od 32

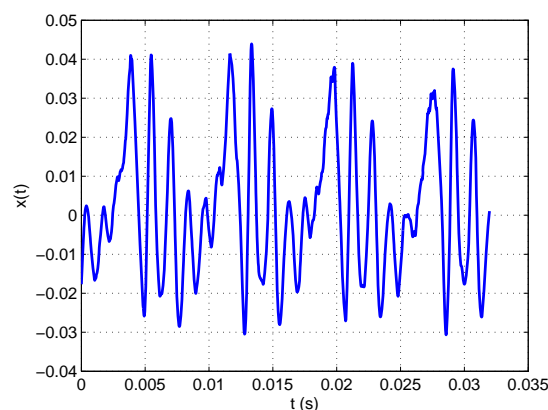
ms predstavljen je na Sl. 5.2.b. Spektar govornog signala prikazan je na Sl. 5.2.c. Spektar u okolini fundamentalne frekvencije prikazan je na Sl. 5.2.d. Spektar je diskretan i primenom *peak picking* algoritma locira se pozicija dominantnog pika, i na osnovu nje procenjuje se fundamentalna frekvencija f_0 .

5.3 Procena fundamentalne frekvencije

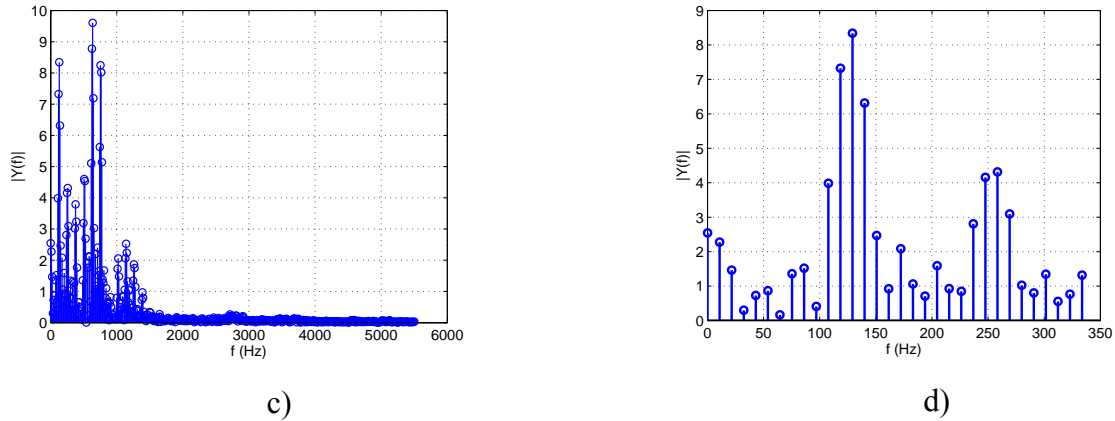
Određivanje fundamentalne frekvencije najčešće se bazira na lociranju pikova (**engl.** *peak picking*) amplitudske karakteristike u određenom frekvencijskom opsegu. Ovom metodom se analiziraju vrednosti signala na frekvencijama na kojima je izračunata FFT. Obično se stvarna vrednost frekvencije ne nalazi na frekvencijama gde je izračunata FFT već je između dva odbirka. Posledica nepodudaranja stvarne fundamentalne frekvencije, kao i njenih harmonika, manifestuje se u pojavljivanju komponenata u spektru kojih nema u stvarnom spektru. Ova pojava naziva se curenje spektra (**engl.** *spectral leakage*). Greška procene fundamentalne frekvencije kreće se u granicama $[(-f_s/(2NFFT)) \text{ Hz}, (f_s/(2NFFT)) \text{ Hz}]$ gde je f_s frekvencija odabiranja, a $NFFT$ broj tačaka u kojima se izračunava FFT. Jedan način smanjenja greške je povećanje broja $NFFT$. Međutim, to ima za posledicu hardversko-softversko usložnjavanje sistema za obradu signala. Drugi način je određivanje interpolacione funkcije i procena karakteristika spektra u intervalu između dva odbirka. Ovim postupkom se vrši rekonstrukcija spektra na osnovu FFT-a. Nakon toga se parametri spektra određuju analitičkim postupcima (diferenciranje, integraljenje, ekstremne vrednosti,...) [Gardner, 1988].



a)



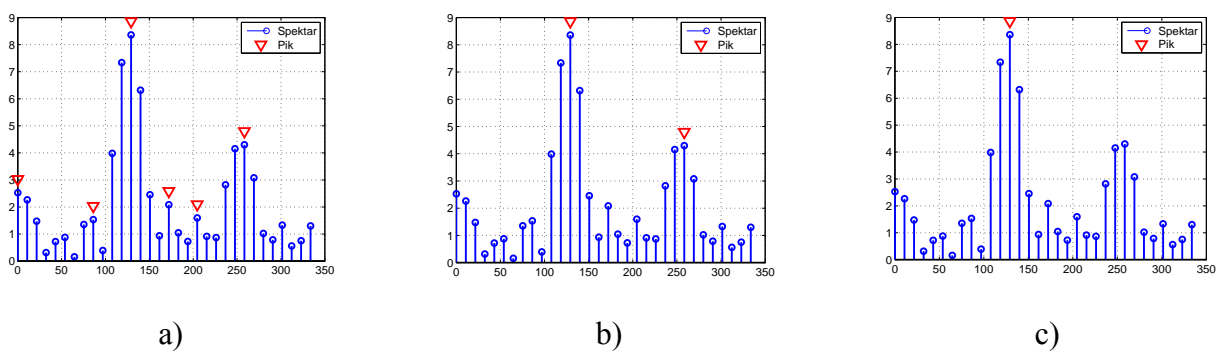
b)



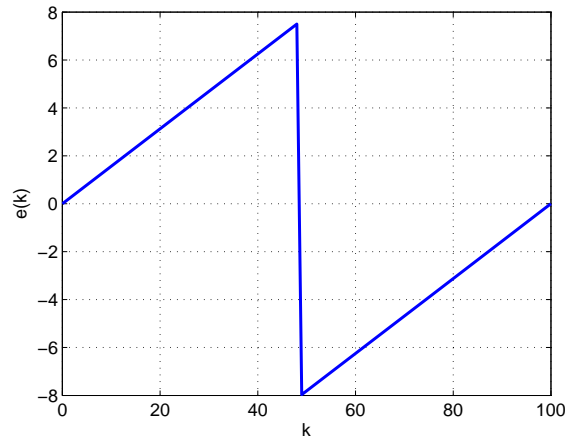
Sl. 5.2 Govorni signal: a) vremenski oblik, b) vremenski oblik u trajanju 32 ms, c) 1/8 spektra i d) uvećanje spektra u okolini dominantne komponente.

5.3.1 Peak-Picking algoritam

Problem procene fundamentalne frekvencije svodi na *pikovanju* maksimalnih komponenti u spektru (Sl. 5.3.a). Iz mnoštva pikovanih pikova biraju se oni koji pripadaju fundamentalnoj frekvenciji i njenim harmonicima na frekvencijama $i \cdot f_0$ (Sl. 5.3.b). Pikovi se biraju tako da zadovoljavaju određene kriterijume, kao što su: maksimalna energija, konstantno rastojanje između pikova. Na slici Sl. 5.3.c prikazan je pik koji odgovara fundamentalnoj frekvenciji. Na Sl. 5.4 prikazana je greška procene fundamentalne frekvencije koja se nalazi između dve maksimalne komponente u spektru kada se koristi Peak-Picking algoritam, to jest $e=f_0 - f_{0_est}$. Srednja kvadratna greška je $MSE_{pp}=20.196$.



Sl. 5.3 Pikovi u spektru govornog signala.



Sl. 5.4 Greška procene fundamentalne frekvencije kod primene Peak-Picking algoritma.

5.3.2 Interpolacija

Stvarna vrednost fundamentalne frekvencije nalazi se između spektralne komponente određene peak-picking algoritmom i njoj susedne komponente. Povećanje preciznosti procene f_0 postiže se primenom interpolacije. Primenom interpolacionih polinoma određuje se kontinualna kriva (rekonstruisana funkcija), tj polinom n -tog stepena, $p_n(f)$ koji predstavlja spektar signala. Određivanje f_0 realizuje se nalaženjem maksimuma funkcije $p_n(f)$. Rešavanjem jednačine $\frac{dp_n(f)}{df} = 0$ određuje se $f_0 = \arg \max(p_n(f))$. Međutim za rad u realnom vremenu polinomi stepena $n > 10$ nisu pogodni jer su numerički složeni i zahtevaju duže vreme izvršavanja. Nedostatak polinomijalne interpolacije rešava se primenom konvolucione interpolacije.

5.3.3 Konvoluciona interpolacija

Da bi se smanjila numerička složenost, odnosno skratilo vreme izvršavanja, primenjuje se interpolacija polinomima niskog stepena ($n \leq 5$) po segmentima. Konstruiše se interpolaciono jezgro koje se pomera preko funkcije koju treba interpolirati. Ovaj postupak je u matematici opisan kao konvolucija. Interpolacija kod koje se primenjuje konvolucija naziva se konvoluciona interpolacija sa interpolacionim jezgrom [Keys, 1981]. Primenom konvolucione interpolacije određuje se rekonstruisana funkcija spektra:

$$X_r(f) = \sum_{i=k+1-L/2}^{k+L/2} p_i r(f-i), \quad k \leq f \leq k+1, \quad (5.2)$$

gde je $p_i = X(i)$, r je interpolaciono jezgro, a L broj semplova koji učestvuju u interpolaciji. Diferenciranjem $X_r(f)$ i određivanjem ekstremnih vrednosti određuje se pozicija maksimuma koja predstavlja procenjenju fundamentalnu frekvenciju.

5.3.4 Algoritam procene fundamentalne frekvencije

Procena fundamentalne frekvencije signala x dužine N u spektralnom domenu vrši se tako što se signal x najpre podeli na blokove x_b dužine N_b . Zatim se vrši modifikacija prozorskom funkcijom w dužine N_b . Povećanje preciznosti postiže se preklapanjem blokova. Dužina preklapanja blokova je

$$N_p, \text{ a broj blokova } K = \left\lceil \frac{N - N_p}{N_b - N_p} \right\rceil.$$

Algoritam procene fundamentalne frekvencije sastoji se od sledećih koraka:

Ulaz: Frejm x_b dužine N_b ,

prozorska funkcija w ,

NFFT-dužina FFT-a,

r -parametarsko interpolaciono jezgro,

L dužina jezgra,

α parametar jezgra,

f_s frekvencija semplovanja.

Izlaz: Procenjena fundamentalna frekvencija f_e .

Korak 1: Obrada bloka x_b prozorskom funkcijom w ,

$$x_{bw} = x_b * w. \quad (5.3)$$

Korak 2: Određivanje spektra X_b primenom FFT-a,

$$X_{bw} = FFT(x_{bw}, NFFT). \quad (5.4)$$

Spektar signala x je kontinualan dok FFT određuje vrednosti spektra u pojedinim diskretnim tačkama $k=0, \dots, NFFT-1$.

Korak 3: Primenom *peak picking* algoritma pikuje se pozicija k -tog uzorka za koji X_{bw} ima najveću vrednost u spektru (k_{max}):

$$X_{bw}(k_{\max}) = \max(X_{bw}), \quad (5.5)$$

k_{\max} predstavlja spektralnu poziciju fundamentalne frekvencije f_0 ,

$$f_{e_{pp}} = (k_{\max} - 1) \cdot \Delta f, \quad (5.6)$$

gde je $\Delta f = f_s / NFFT$ spektralna rezolucija.

Korak 4: Stvarna vrednost f_0 , nalazi se između spektralnih komponenti k_{\max} i k_{pp} gde je:

$$k_{pp} = \arg \max(X_{bw}(k_{\max} - 1), X_{bw}(k_{\max} + 1)). \quad (5.7)$$

Primenom parametarske kubne konvolucione (PCC) interpolacije vrši se rekonstrukcija spektra, odnosno određuje se rekonstruisana funkcija:

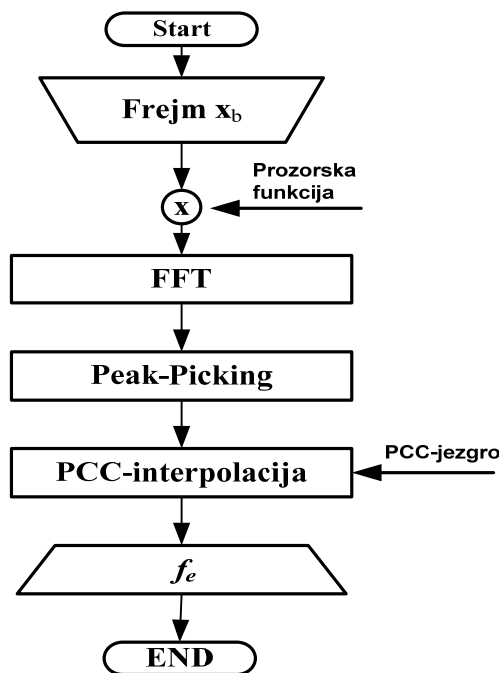
$$X_{bwr}(f) = \sum_{i=k_{\max}+1-L/2}^{k_{\max}+L/2} p_i r(f-i), \quad k_{\max} \leq f \leq k_{pp}, \quad (5.8)$$

gde je $p_i = X(i)$.

Korak 5: Diferenciranjem $X_{bwr}(f)$ i određivanjem ekstremnih vrednosti određuje se pozicija maksimuma koja predstavlja procenjenju fundamentalnu frekvenciju f_e ,

$$f_e = \arg \max_f (X_{bwr}). \quad (5.9)$$

Algoritam za procenu fundamentalne frekvencije prikazan je na Sl. 5.5.



Sl. 5.5 Algoritam procene fundamentalne frekvencije.

Procena f_0 zavisi od a) prozorske funkcije i b) tipa jezgra. Sva istraživanja sprovedena su primenom: a) Hamming-ove, b) Hann-ove c) Blackman-ove, d) pravougaone, e) Kaiser-ove i f) trougaone prozorske funkcije. Vremenski oblici i spektralne karakteristike prozorskih funkcija prikazane su na Sl. 5.7 i Sl. 5.8. Prozorske funkcije definisane su sa [Prabhu, 2013]:

a) Hamming-ova:

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n > N-1 \end{cases} \quad (5.10)$$

b) Hann-ova:

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 + 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n > N-1 \end{cases} \quad (5.11)$$

c) Blackman-ova:

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos \frac{2\pi n}{N-1} + 0.08 \cos \frac{4\pi n}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n > N-1 \end{cases} \quad (5.12)$$

d) Pravougaona:

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n > N-1 \end{cases} \quad (5.13)$$

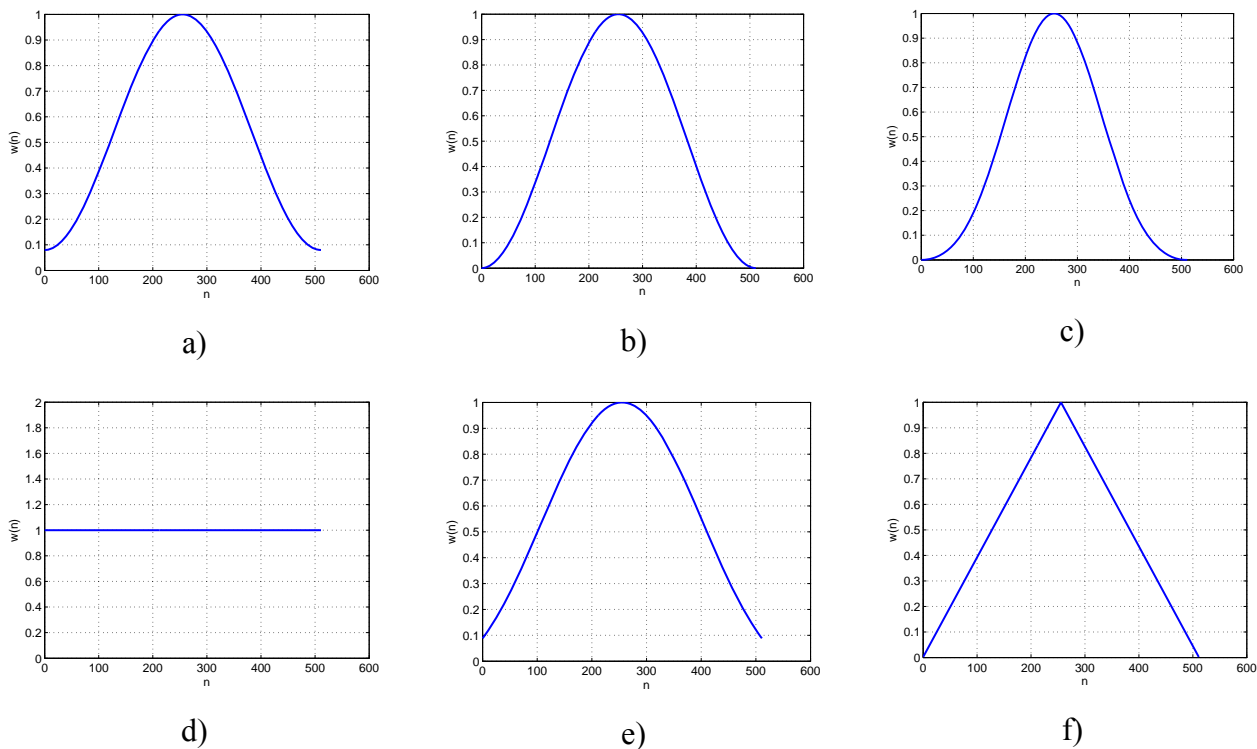
e) Kaiser-ova:

$$w(n) = \begin{cases} \frac{I_0 \left(\pi \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{N-1} - 1 \right)^2} \right)}{I_0(\pi \alpha)}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n > N-1 \end{cases} \quad (5.14)$$

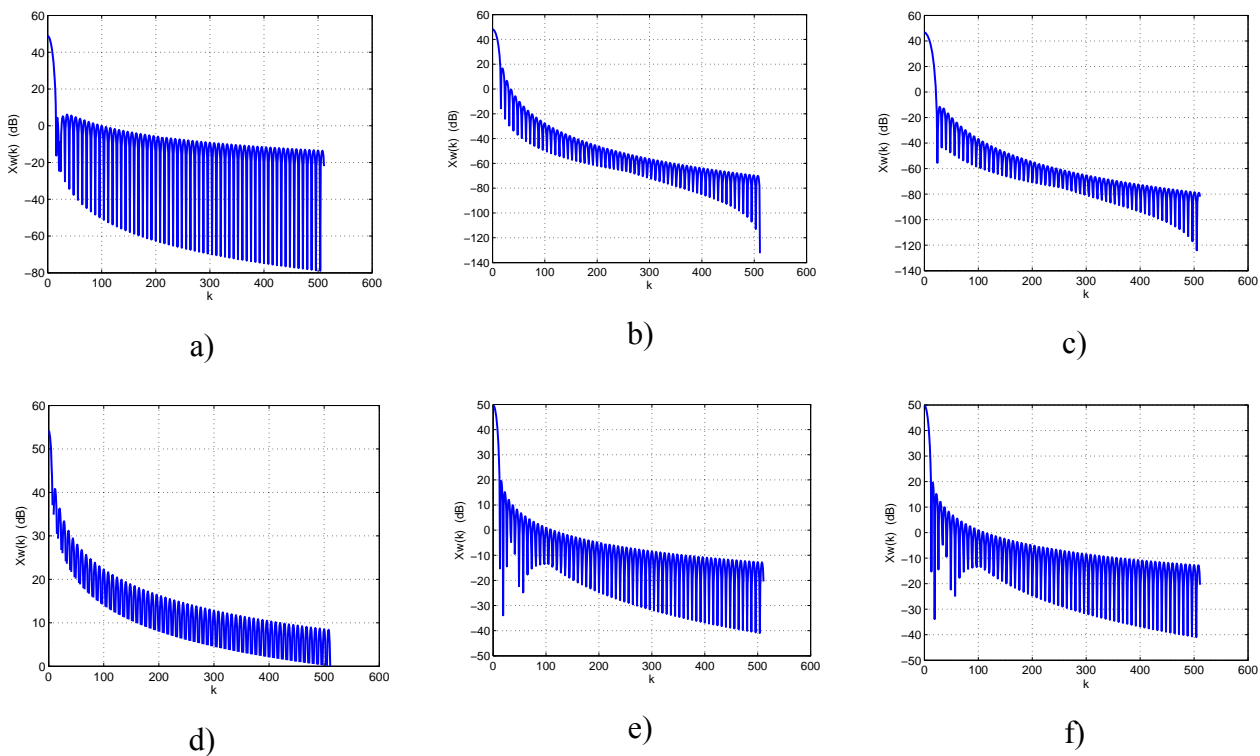
gde je sa I_0 označena Bessel-ova funkcija, i

f) Trougaona:

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2}{N-1} \left(\frac{N-1}{2} - \left| n - \frac{N-1}{2} \right| \right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n > N-1 \end{cases} \quad (5.15)$$



Sl. 5.6 Vremenski oblik prozorskih funkcija: a) Hamming-ova, b) Hann-ova, c) Blackman-ova, d) pravougaona, e) Kaiser-ova i f) trougaona.



Sl. 5.7 Spektralne karakteristike prozorskih funkcija: a) Hamming-ove, b) Hann-ove, c) Blackman-ove, d) pravougaone, e) Kaiser-ove i f) trougaone.

Kao mera kvaliteta, odnosno mera preciznosti algoritma za procenu f_0 , uvedena je srednje kvadratne greška MSE (**engl.** *Mean Square Error*, **MSE**):

$$MSE = \overline{(f_0 - f_e)^2}. \quad (5.16)$$

gde je f_0 stvarna, a f_e procenjena fundamentalna frekvencija. Na preciznost procene utiče vrednost parametra α . Minimiziranjem MSE moguće je odrediti optimalnu vrednost α . Optimalna vrednost je:

$$\alpha_{opt} = \arg \min_{\alpha} (MSE). \quad (5.17)$$

Algoritam procene f_0 primenjen je nad test signalima:

- a) simulacioni sinusni test signal,
- b) realni govorni test signal.

Sinusni test signal opisan u [Pang, 2000] dat je sa:

$$s(t) = \sum_{i=1}^K \sum_{g=0}^M a_i \sin \left(2\pi i \left(f_0 + g \frac{f_s}{M \cdot NFFT} \right) t + \theta_i \right). \quad (5.18)$$

gde je f_0 fundamentalna frekvencija, f_s frekvencija smplovanja, $NFFT$ dužina FFT-a, a_i i θ_i amplituda i faza i -tog harmonika respektivno, K broj harmonika, a M broj tačaka između dva sempla u spektru u kojima se vrši PCC interpolacija.

Realni govorni test signal, dobijen je snimanjem jednog govornika u realnom akustičnom ambijentu [Milivojević, 2010].

U procesu simulacije f_0 i θ_i su slučajne promenljive sa uniformnom raspodelom u opsegu [G2 (97.99 Hz), G5 (783.99 Hz)] i $[0, 2\pi]$ respektivno. Frekvencija signala smplovanja je $f_s=8$ kHz, a dužina prozorske funkcije $N=256$ čime je obezbeđena analiza podsekvenci koje traju 32 ms. Rezultati koji su prikazani u daljem delu rada odnose se na $f_0=125-140.625$ Hz, $K=10$ i $M=100$, $NFFT=512$.

U narednim poglavljima biće analizirana procena fundamentalne frekvencije kod sinusoidalnih i govornih signala primenom nekih od definisanih konvolucionih jezgara iz glave 3.

5.4 Poliya interpolaciona jezgra

U ovom poglavlju izvršena je analiza primene Polya jezgara dužine $L=4$ kod procene fundamentalne frekvencije nad test signalima uz primenu Hamming-ove, Hann-ove, Blackman-ove, pravougaone, Kaiser-ove i trougaone prozorske funkcije.

5.4.1 Kvazi-racionalno Polya jezgro

Konvolucionom interpolacijom uz primenu Kvazi-racionalnog Polya interpolacionog jezgra (3.11) izvršena je rekonstrukcija spektra složenog sinusoidalnog (5.18) i govornog signala. Određena je pozicija maksimuma rekonstruisanog spektra, odnosno izvršena procena fundamentalne frekvencije. Izračunavanjem MSE u zavisnosti od parametra jezgra i lociranjem minimuma određena je optimalna vrednost parametra za svaku prozorsku funkciju. Preciznost procene fundamentalne frekvencije merena je pomoću srednje kvadratne greške (MSE).

5.4.1.1 Eksperimentalni rezultati

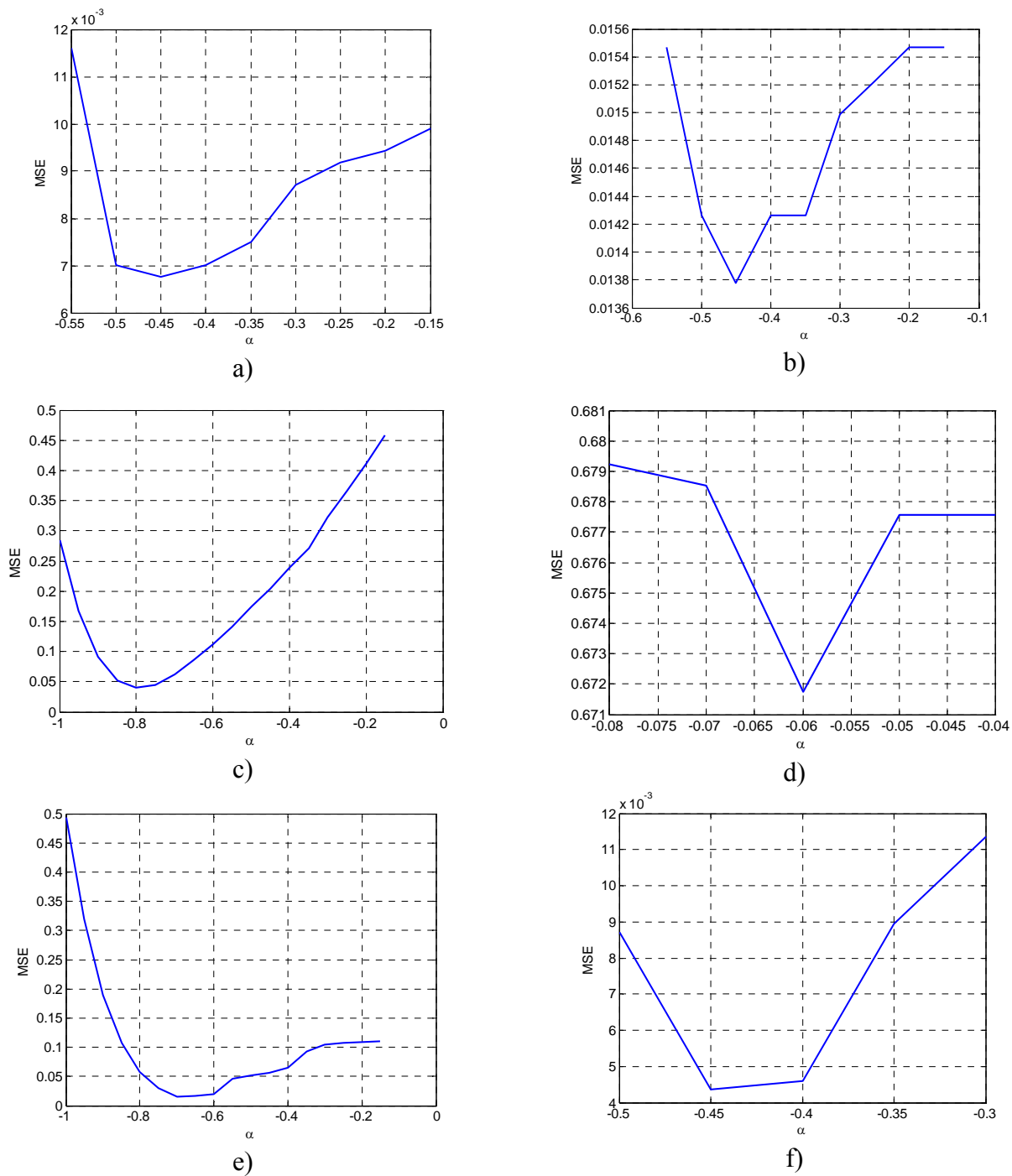
Optimalne vrednosti parametra α primenom kvazi-racionalnog Polya jezgra dužine $L=4$ nad sinusoidalnim signalom prikazani su u Tbl. 5.1 i na Sl. 5.8, dok su u Tbl. 5.2 i na Sl. 5.9 dati rezultati za govorni signal, uz primenu odgovarajućih prozorskih funkcija.

Tbl. 5.1 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene kvazi-racionalnog Polya jezgra i prozorske funkcije [Savić1, 2015].

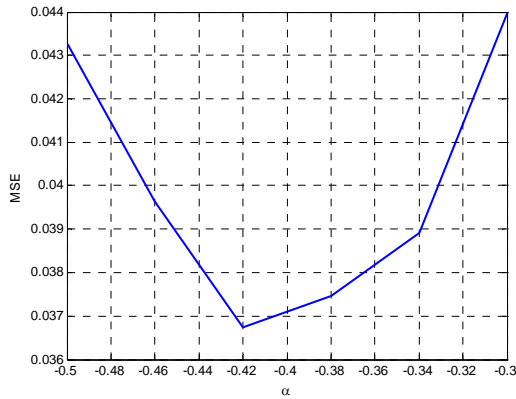
Prozorska f-ja	$MSE_{\min}(\alpha)$	α_{opt}
Hamming-ova	0.0068	-0.4500
Hann-ova	0.0138	-0.4500
Blackman-ova	0.0406	-0.8000
Pravougaona	0.6717	-0.0600
Kaiser-ova	0.0155	-0.7000
Trougaona	0.0044	-0.4500

Tbl. 5.2 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene kvazi-racionalnog Polya jezgra i prozorske funkcije [Savić1, 2015].

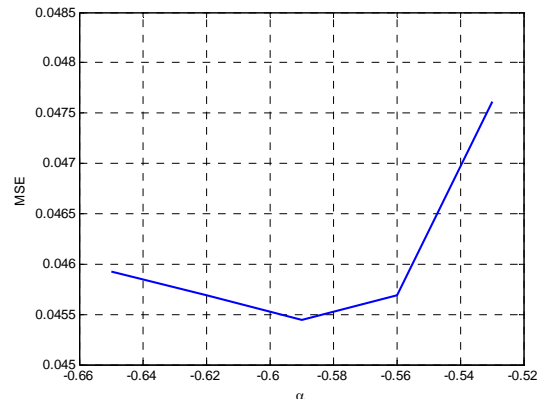
Prozorska f-ja	$MSE_{\min}(\alpha)$	α_{opt}
Hamming-ova	0.0367	-0.4200
Hann-ova	0.0454	-0.5900
Blackman-ova	0.0703	-0.8000
Pravougaona	0.2507	-0.3000
Kaiser-ova	0.0438	-0.7000
Trougaona	0.0367	-0.4400



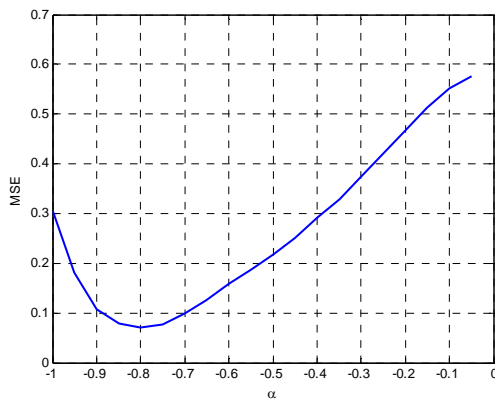
Sl. 5.8 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procrne fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene kvazi-racionalnog Polya jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.



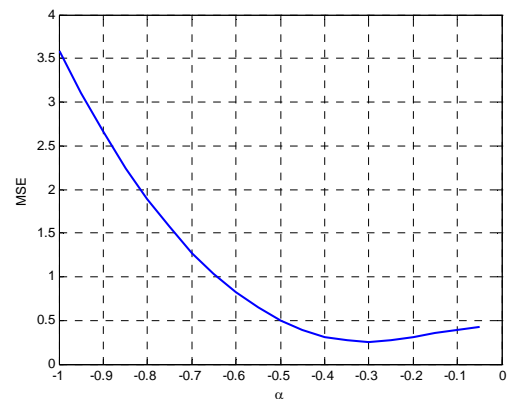
a)



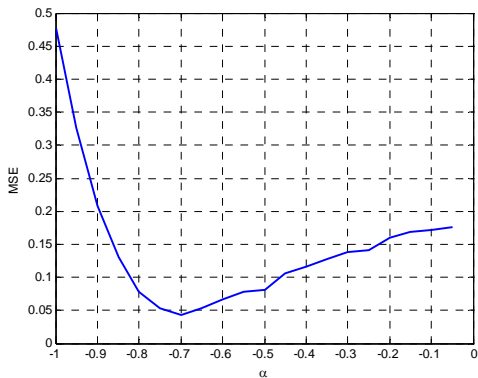
b)



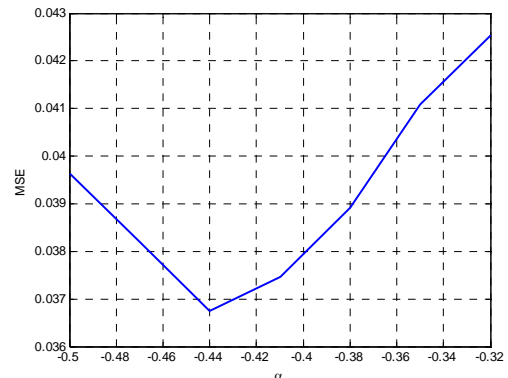
c)



d)



e)



f)

Sl. 5.9 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene kvazi-racionalnog Polya jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.

5.4.1.2 Analiza rezultata

Analizom rezultata za MSE prikazanih u tabelama (Tbl. 5.1 i Tbl. 5.2) i na slikama (Sl. 5.8 i Sl. 5.9), može se zaključiti:

a) Za sinusni test signal najmanja vrednost MSE ($MSE_{min}=0.0044$) dobijena je kod primene trougaone prozorske funkcije, a najveća primenom pravougaone. U odnosu na druge prozorske

funkcije trougaona je pokazala bolje rezultate: 35% (Hamming-ove), 68% (Hann-ove), 89% (Blackman-ove), 71% (Kaiser-ove) i 93% (pravougaona).

b) Kod govornog signala minimalna vrednost MSE ($MSE_{\min}=0.0367$) dobijena je primenom trougaone i Hammingove prozorska funkcija, dok je pravougaona prozorska funkcija prikazala najveću grešku ($MSE_{\min}=0.2507$). U odnosu na druge prozorske funkcije trougaona (Hammingova) je pokazala bolje rezultate: 20% (Hann-ova), 48% (Blackman-ova), 16% (Kaiser-ova) i 85% (Pravougaona).

c) Procena tačnosti f_0 za sinusni u odnosu na govorni signal je: $MSE_{\min_troug-Polya-sp} / MSE_{\min_troug_Polya-sin} = 0.0367 / 0.0044 = 8.34$ puta veća.

d) Pri obradi pravougaonom prozorskom funkcijom primenom kvazi-racionalnog Polya jezgra preciznije je obrađen govorni signal u odnosu na sinusni. Greška je $MSE_{\min_rect.sin} / MSE_{\min_rectang.polyasp} = 0.06717 / 0.02517 = 2.68$ puta manja kod govornog signala.

5.4.2 Racionalno Polya 1P jezgro

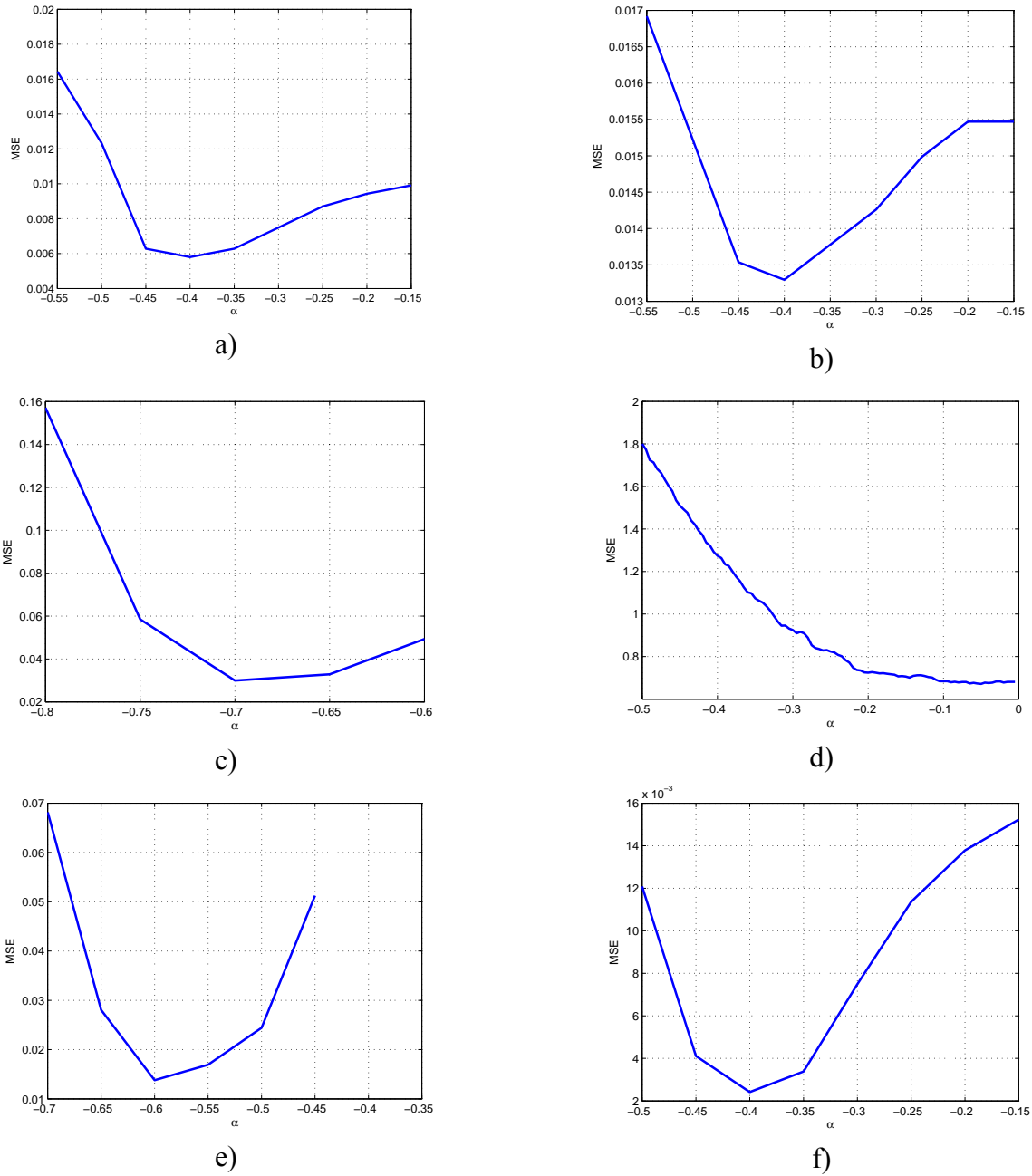
Konvolucionom interpolacijom uz primenu racionalnog Polya 1P interpolacionog jezgra (3.10) izvršena je rekonstrukcija spektra složenog sinusoidalnog signala (5.18). Određena je pozicija maksimuma rekonstruisanog spektra, odnosno izvršena procena fundamentalne frekvencije. Izračunavanjem MSE u zavisnosti od parametra jezgra i lociranjem minimuma određena je optimalna vrednost parametra za svaku prozorsku funkciju.

5.4.2.1 Eksperimentalni rezultati

Prikazani su rezultati za MSE_{\min} i α_{opt} u tabeli Tbl. 5.3 i na Sl. 5.10 za sinusni signal, a u tabeli Tbl. 5.4 i na Sl. 5.11 za govorni signal.

Tbl. 5.3 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Polya racionalnog jezgra i prozorske funkcije.

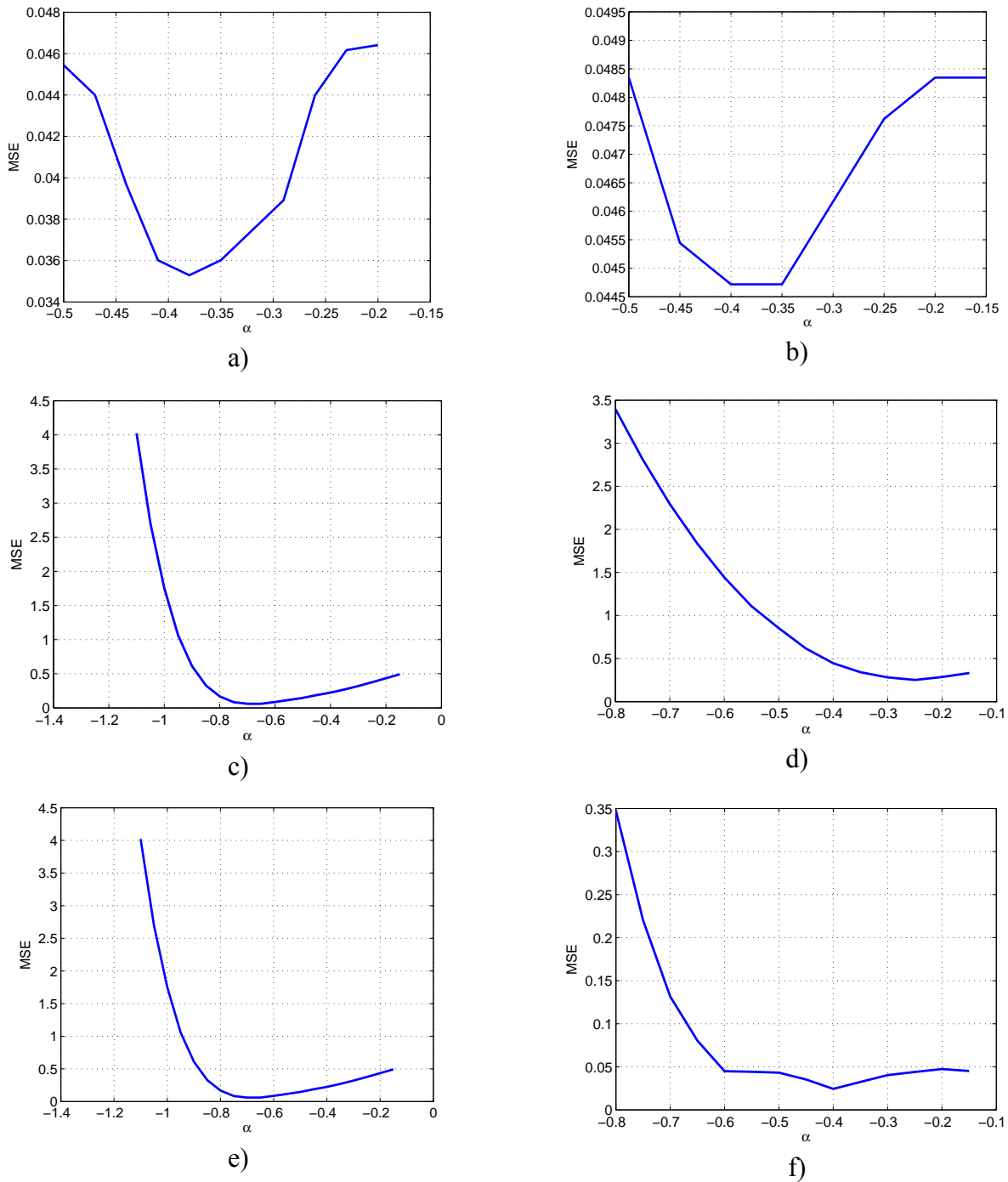
Prozorska f-ja	$MSE_{\min}(\alpha)$	α_{opt}
Hamming-ova	0.0058	-0.4000
Hann-ova	0.0133	-0.4000
Blackman-ova	0.0300	-0.7000
Pravougaona	0.6712	-0.0500
Kaiser-ova	0.0138	-0.6000
Trougaona	0.0024	-0.4000



Sl. 5.10 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene racionalnog Polya IP jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.

Tbl. 5.4 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene Polya racionalnog jezgra i prozorske funkcije.

Prozorska f-ja	$MSE_{\min}(\alpha)$	α_{opt}
Hamming-ova	0.0353	-0.380
Hann-ova	0.0447	-0.4000
Blackman-ova	0.0607	-0.6500
Pravougaona	0.2521	-0.2500
Kaiser-ova	0.0421	-0.6000
Trougaona	0.0244	-0.4000



Sl. 5.11 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene racionalnog Polya 1P jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.

5.4.2.2 Analiza rezultata

a) Za sinusni test signal najmanja vrednost MSE ($MSE_{\min}=0.0024$) dobijena je kod primene trougaone prozorske funkcije, a najveća primenom pravougaone. U odnosu na druge prozorske

funkcije trougaona je pokazala bolje rezultate: 59% (Hamming-ove), 82% (Han-ove), 92% (Blackman-ove), 83% (Kaiser-ove) i 99% (pravougaona).

b) Kod govornog signala minimalna vrednost MSE ($MSE_{\min}=0.0244$) dobijena je primenom trougaone prozorske funkcije, a najveća primenom pravougaone. U odnosu na druge prozorske funkcije trougaona je pokazala bolje rezultate i to: a) 31% (Hamming-ove), b) 45% (Hann-ove), c) 60% (Blackman-ove), d) 42% (Kaiser-ove) i e) 90% (pravougaone).

c) Procena tačnosti f_0 sinusnog u odnosu na govorni test signal pri interpolaciji racionalnim Polya jezgrom je:

$$MSE_{\min \text{Haming.Polya.sp}}/MSE_{\min \text{Haming.Polya.sin}}=0.0353/0.0058=6.09 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{\min \text{Hann.Polya.sp}}/MSE_{\min \text{Hann.Polya.sin}}=0.0447/0.0133=3.36 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{\min \text{Blackman Polya.sp}}/MSE_{\min \text{Blackman Polya.sin}}=0.0607/0.0300=2.02 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{\min \text{Kaiser Polya.sp}}/MSE_{\min \text{Kaiser. Polya.sin}}=0.0421/0.0138=3.05 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{\min \text{triangl.Polya.sp}}/MSE_{\min \text{triang Polya.sin}}=0.0244/0.0024=10.16 \text{ puta veća.}$$

d) Kod racionalne Polya interpolacije uz primenu pravougaone prozorske funkcije preciznije je procenjen govorni signal. Greška je $MSE_{\min \text{rectang Polya.sin}}/MSE_{\min \text{rectang Polya.sp}}=0.06712/0.2521=2.67$ puta manja kod procene govornog signala.

e) U odnosu na kvazi racionalno Polya interpolaciono jezgro kod kojeg su za sinusni signal najbolji rezultati dobijeni primenom trougaone prozorske funkcije predloženo jezgro je pokazalo $MSE_{\min \text{troug kvazi polya}}/MSE_{\min \text{troug polya}}=0.0044/0.0024=1.83$ puta manju grešku.

f) U odnosu na kvazi racionalno Polya interpolaciono jezgro kod kojeg su za govorni signal najbolji rezultati dobijeni primenom trougaone prozorske funkcije predloženo jezgro je pokazalo $MSE_{\min \text{troug kvazi polya}}/MSE_{\min \text{troug polya}}=0.0367/0.0244=1.504$ puta manju grešku.

5.4.3 Polya 1P jezgro

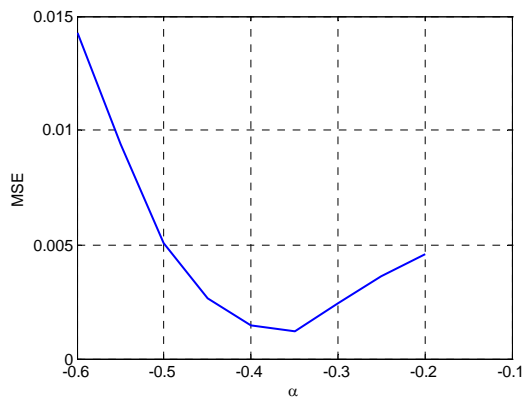
Konvolucionom interpolacijom uz primenu Polya 1P interpolacionog jezgra (3.9) izvršena je rekonstrukcija spektra složenog sinusoidalnog signala (5.18). Određena je pozicija maksimuma rekonstruisanog spektra, odnosno izvršena procena fundamentalne frekvencije. Izračunavanjem MSE u zavisnosti od parametra jezgra i lociranjem minimuma određena je optimalna vrednost parametra za svaku prozorsku funkciju.

5.4.3.1 Eksperimentalni rezultati

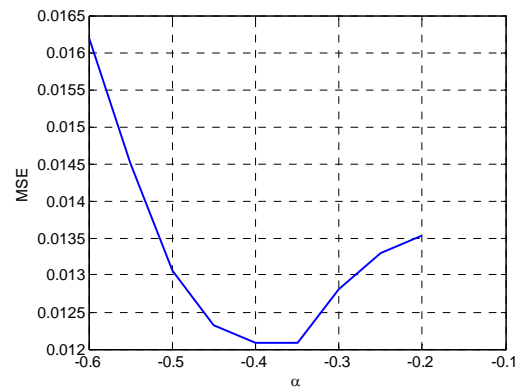
Minimalne vrednosti MSE i optimalne vrednosti parametra jezgra za odgovarajuću prozorsku funkciju prikazane su u Tbl. 5.5.

Tbl. 5.5 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Polya 1P jezgra i prozorske funkcije [Milivojević1, 2015].

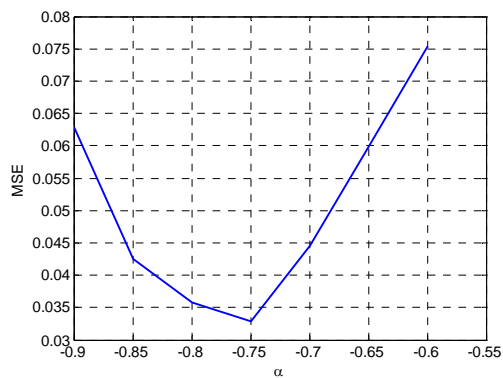
Prozorska f-ja	MSE _{min}	α_{\min}
Hamming-ova	0.0012	-0.35
Hann-ova	0.0125	-0.40
Blackman-ova	0.0329	-0.75
Pravougaona	1.0745	0.00
Kaiser-ova	0.0140	-0.70
Trougaona	0.0029	-0.44



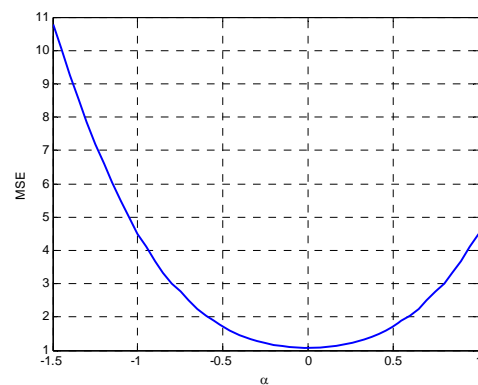
a)



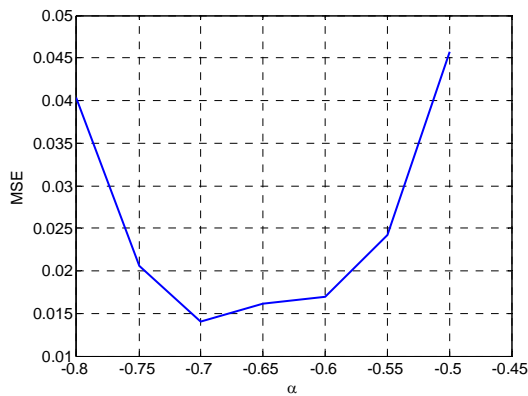
b)



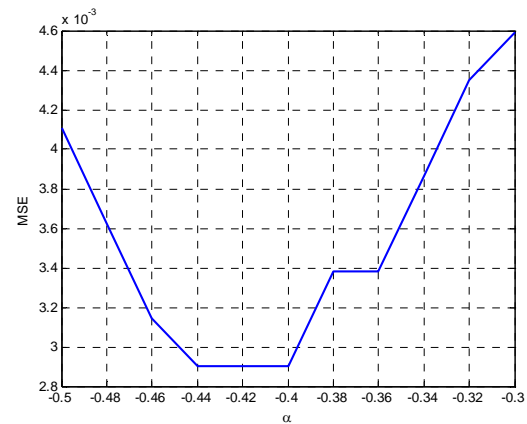
c)



d)



e)



f)

Sl. 5.12 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Polya 1P jezgra za a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.

5.4.3.2 Analiza rezultata

Analizom rezultata za MSE prikazanih u Tbl. 5.5 i na Sl. 5.12, zaključuje se da je:

a) najmanje MSE_{min} dobijeno za Hamming-ovu prozorsku funkciju. U odnosu na druge prozorske funkcije Hamming-ova je pokazala bolje rezultate: a) 90% (Hann-ove), b) 96% (Blackman-ove), c) 91% (Kaiser-ove), d) 99% (pravougaon'e) i f) 58% (trougaone),

b) procena tačnosti f_0 Polya 1P jezgrom preciznija je u odnosu na procenu primenom Polya kvazi-racionalnog parametarskog jezgra [Savić, 2015]. Poređenjem sa rezultatima dobijenim primenom Polya kvazi-racionalnog, gde je najmanje MSE dobijeno za trougaonu prozorsku funkciju, predloženo Polya jezgro ima $MSE_{min} \text{ Polya kvazi-rac.troug} / MSE_{min} \text{ Haming polya} = 3.67$ puta manju srednje kvadratnu grešku,

e) poređenjem sa rezultatima dobijenim primenom racionalnog Polya jezgra, gde je najmanje MSE dobijeno za trougaonu prozorsku funkciju, predloženo Polya 1P konvoluciono jezgro ima $MSE_{min} \text{ Polya raionalnoc.troug} / MSE_{min} \text{ Haming polya} = 1.25$ puta manju srednje kvadratnu grešku.

5.5 Polinomijalna interpolaciona jezgra

U ovom poglavlju izvršena je analiza efikasnosti procene fundamentalne frekvencije primenom parametarskih polinomijalnih jezgara drugog (kvadratnog), trećeg (kubnog) i petog reda. Analiza je obavljena za jednoparametarska, dvo-parametarska i tro-parametarska jezgra (Glava 3). Minimiziranjem MSE određene su optimalne vrednosti parametara.

5.5.1 Jednparametarska jezgra

Izborom parametra jezgra moguće je postići optimalne rezultate saglasno definisanom kriterijumu i konkretnom zahtevu. Optimizacija će biti izvršena izborom jezgra i prozorske funkcije. Optimalne vrednosti parametara konvolucionog jezgra određene su za Kvadratno, Kejsovo 1P, i jezgro petog reda sledećim algoritmom.

5.5.1.1 Algoritam procene optimalnih vrednosti parametra

Optimalne vrednosti parametara jezgra određuju se tako što se procesom interpolacije dobije minimalna greška procene fundamentalne frekvencije u spektralnom domenu. Algoritam procene optimalne vrednosti parametra interpolacionog jezgra sastoji se od sledećih koraka (grafička predstava algoritma prikazana je na Sl. 5.13):

Ulaz: Frejm \mathbf{x}_b , dužine N_b ,
 prozorska funkcija w ,
 $NFFT$ -dužina FFT-a,
 r -parametarsko interpolaciono jezgro,
 L dužina jezgra,
 α parametar jezgra,
 f_0 fundamentalna frekvencija.

Izlaz: Optimalni parametar jezgra α_{opt} .

Korak 1: Obrada bloka \mathbf{x}_b prozorskom funkcijom w ,

Korak 2: primenom FFT-a određuje se spektar X_{bw} ,

Korak 3: Metodom pikovanja određuje se pozicija spektralne komponente (k_{max}) sa najvećom amplitudom,

FOR $\alpha = \alpha_{min} : \Delta\alpha : \alpha_{max}$

Korak 4: Izdvajanje dela spektra u okolini pikovane komponente, $\mathbf{P}_b = [\mathbf{P}_{k_{max}-L/2+1}, \dots, \mathbf{P}_{k_{max}}, \dots, \mathbf{P}_{k_{max}+L/2}]$,

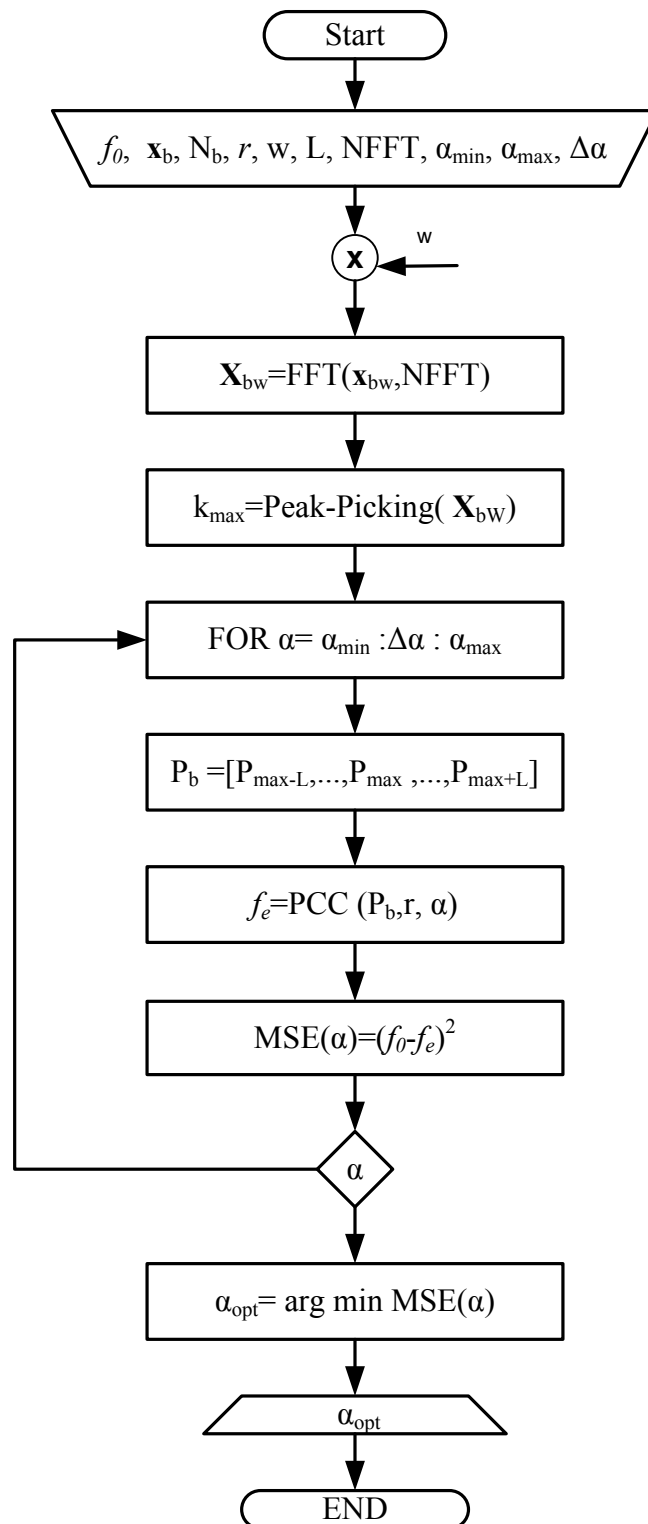
Korak 5: Procena f_e , primenom konvolucione interpolacije uz primenu 1P jezgra sa parametrom α ,

Korak 6: Određivanje srednje kvadratne greške interpolacije,

$$MSE(\alpha) = \overline{(f_0 - f_e)^2}, \quad (5.19)$$

END α ,

Korak 6: Određivanje α_{opt} (jednakost (5.17)).



Sl. 5.13 Algoritam procene optimalnog parametra jezgra.

5.5.1.2 Kvadratno interpolaciono jezgro

U ovom poglavlju analizirana je procena fundamentalne frekvencije govornog signala. Problem estimacije tačne pozicije u spektralnom domenu obavljen je pomoću kvadratnih parametarskih interpolacionih jezgara.

U glavi 3 definisana su: a) Dodgsonovo [Dodgson, 1997] i b) kvadratno [Savić1, 2014] 1P jezgro. Analitički izraz za procenu fundamentalne frekvencije je:

$$f_e = \frac{-B}{2A}, \quad (5.20)$$

gde su A i B koeficijenti koji se izračunavaju na osnovu vrednosti spektralnih komponenta p_k . Za Dodgsonovo jezgro koeficijenti su:

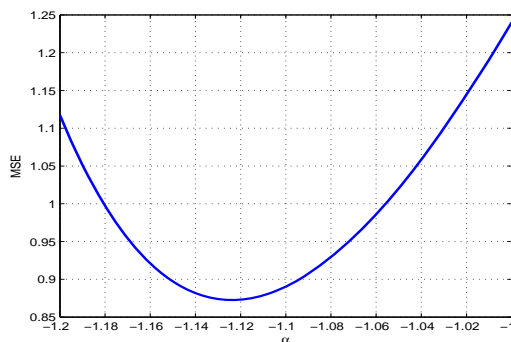
$$A = \alpha(p_{k-1} - 2p_k + p_{k+1}), \quad B = \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1}), \quad (5.21)$$

dok su za Kvadratno 1P interpolaciono jezgro:

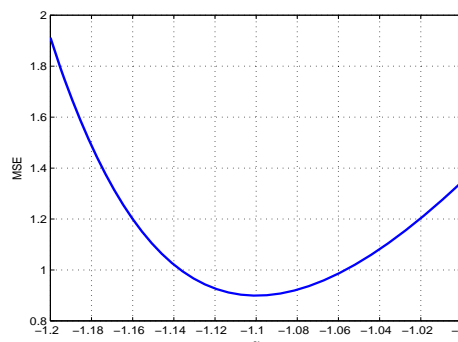
$$A = -2p_{k-1} - p_k - p_{k+1} - 2p_{k+2}, \quad B = 2\alpha p_{k-1} + 2p_{k+1} + 2\alpha p_{k+2}. \quad (5.22)$$

5.5.1.2.1 Eksperimentalni rezultati

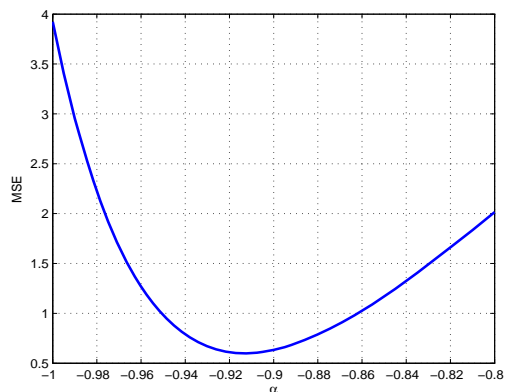
Vrednosti srednje kvadratne greške u zavisnosti od parametra α za standardne prozorske funkcije prikazane su na: Sl. 5.14 (a) Hamming-ova, b) Hann-ova, c) Blackman-ova, d) pravougaona, e) Kaiser-ova i f) trougaona). U Tbl. 5.6 prikazane su optimalne vrednosti parametra α i minimalne vrednosti MSE.



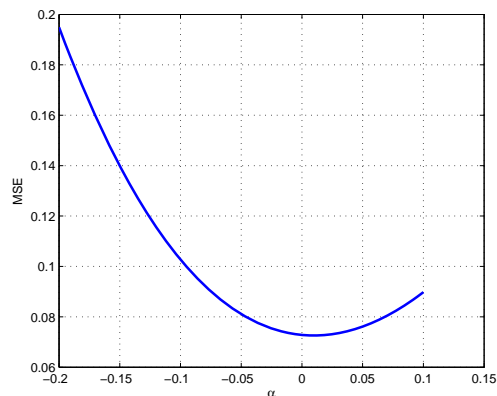
a)



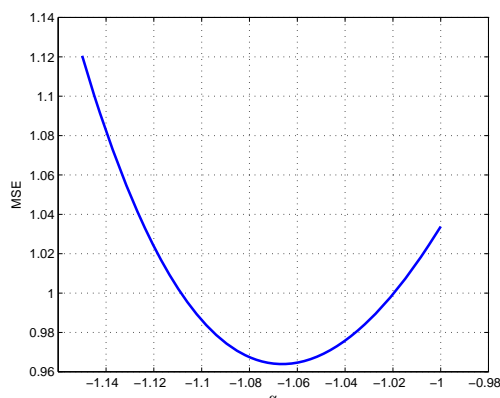
b)



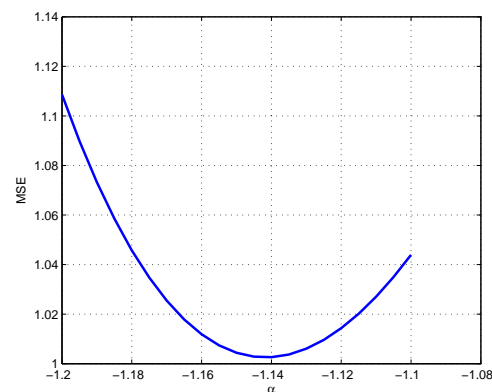
c)



d)



e)



f)

Sl. 5.14 Zavisnost MSE od parametra α Kvadratnog IP jezgra kod procene fundamentalne frekvencije govornog signala za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju [Savić1, 2014].

Tbl. 5.6 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene kvadratnog jezgra i prozorske funkcije.

Prozorska f-ja	$MSE_{\min}(\alpha)$	α_{opt}
Hamming-ova	0.8727	-1.125
Hann-ova	0.899	-1.1
Blackman-ova	0.6014	-0.915
Pravougaona	0.0726	0.01
Kaiser-ova	0.963	-1.065
Trougaona	1.0026	-1.14

5.5.1.2.2 Analiza rezultata

Na osnovu rezultata prikazanih na Sl. 5.14 i Tbl. 5.6 zaključuje se da:

a) primena Dodgsonovog konvolucionog jezgra (3.4) generiše neprihvatljivo velike vrednosti MSE ($MSE > 20$),

b) primena kvadratnog jezgra (3.8) dala je optimalne rezultate za pravougaonu prozorsku funkciju. U odnosu na druge prozorske funkcije pravougaona je pokazala bolje rezultate: 91% (Hamming-ove), 92% (Hann-ove, Kaiser-ove), 88% (Blackman-ove), 93% (trougaone),

c) poređenjem sa rezultatima dobijenim primenom kvazi-racionalnog Polya jezgra, gde je najmanje MSE za trougaonu prozorsku funkciju, zaključuje se da kvadratno interpolaciono jezgro ima $MSE_{\min_pravoug.kvadr} / MSE_{\min_troug.polya} = 16.5$ puta veću srednje kvadratnu grešku.

d) poređenjem sa rezultatima dobijenim primenom racionalnog Polya jezgra, gde je najmanje MSE za trougaonu prozorsku funkciju, zaključuje se da kvadratno interpolaciono jezgro ima $MSE_{\min_pravoug.kvadratno} / MSE_{\min_troug.polya} = 30.25$ puta veću srednje kvadratnu grešku.

Detaljnou analizom zaključuje se da Dodgsonovo jezgro proizvodi neprihvatljivo veliku grešku ($MSE > 20$) dok kvadratno jezgro uz primenu pravougaone prozorske funkcije daje bolji rezultat. U poredjenju sa Polya interpolacionim jezgrima kvadratno jezgro proizvodi znatno veće greške. S obzirom da proces konvolucije sa kvadratnim jezgrom ima manji nivo numeričke složenosti od konvolucije sa Polya jezgrima primena u sistemima za rad u realnom vremenu predstavlja kompromis između zahtevane brzine i preciznosti.

5.5.1.3 Kubno interpolaciono jezgro (Kejsovo)

Određivanje interpolacione funkcije primenom parametarske kubne konvolucije (**engl.** *Parametric Cubic Convolution* - PCC) prikazano je u radovima [Keys, 1981], [Park, 1983]. Detaljna analiza procene fundamentalne frekvencije, kao i prednost PCC interpolacije, koja se prvenstveno ogleda u brzini određivanja parametara interpolacione funkcije, opisana je u radu [Pang, 2000].

U cilju povećanja: a) preciznosti procene i b) brzine izvršenja algoritma u [Pang, 2000] prikazan je analitički izraz za određivanje pozicije maksimuma rekonstruisane funkcije (jednakosti (5.23), (5.24)).

Analitički izraz za poziciju maksimuma funkcije $X_r(f)$ (5.2) je:

$$f_{\max} = \begin{cases} k - \frac{c}{2b}, & a = 0 \\ k + \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, & a \neq 0 \end{cases}, \quad (5.23)$$

gde je k pozicija maksimalne komponente u spektru i za:

Kejs 1P

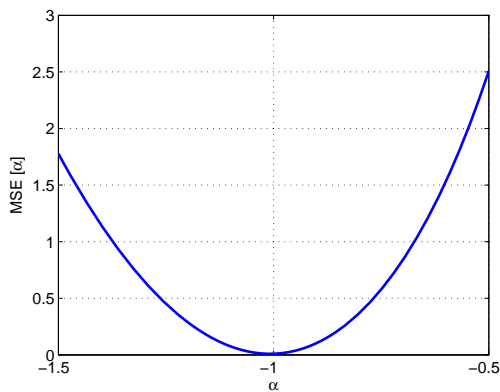
$$\begin{aligned}
 a &= 2(\alpha p_{k-1} + (\alpha + 2)p_k - (\alpha + 2)p_{k+1} - \alpha p_{k+2}) \\
 b &= -2\alpha p_{k-1} - (\alpha + 3)p_k + (2\alpha + 3)p_{k+1} + \alpha p_{k+2} \cdot \\
 c &= -\alpha p_{k-1} - \alpha p_{k+1}
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

5.5.1.3.1 Eksperimentalni rezultati

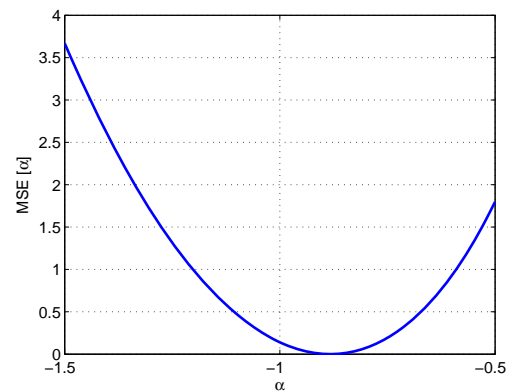
Primenjujući algoritam za određivanje parametara Kejsovog 1P interpolacionog nacrtani su dijagrami $MSE(\alpha)$ i određene minimalne vrednosti MSE za sinusni i govorni signal koje su prikazane na Sl. 5.15 ($MSE_{K_1P_SIN_min}$ Sine test signal) i Sl. 5.16 ($MSE_{K_1P_SP_min}$ Speech test signal). Određene su vrednosti α_{opt} za a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju. Vrednosti MSE i α_{opt} su prikazane u Tbl. 5.7 ($MSE_{K_1P_SIN_min}$ Sine test signal) i Tbl. 5.8 ($MSE_{K_1P_SP_min}$ Speech test signal). Na Sl. 5.17 prikazana je greška procene fundamentalne frekvencije za slučaj primene Hamming-ove prozorske funkcije za a) sinusni i b) govorni signal.

Tbl. 5.7 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Kejsovog 1P jezgra i prozorske funkcije.

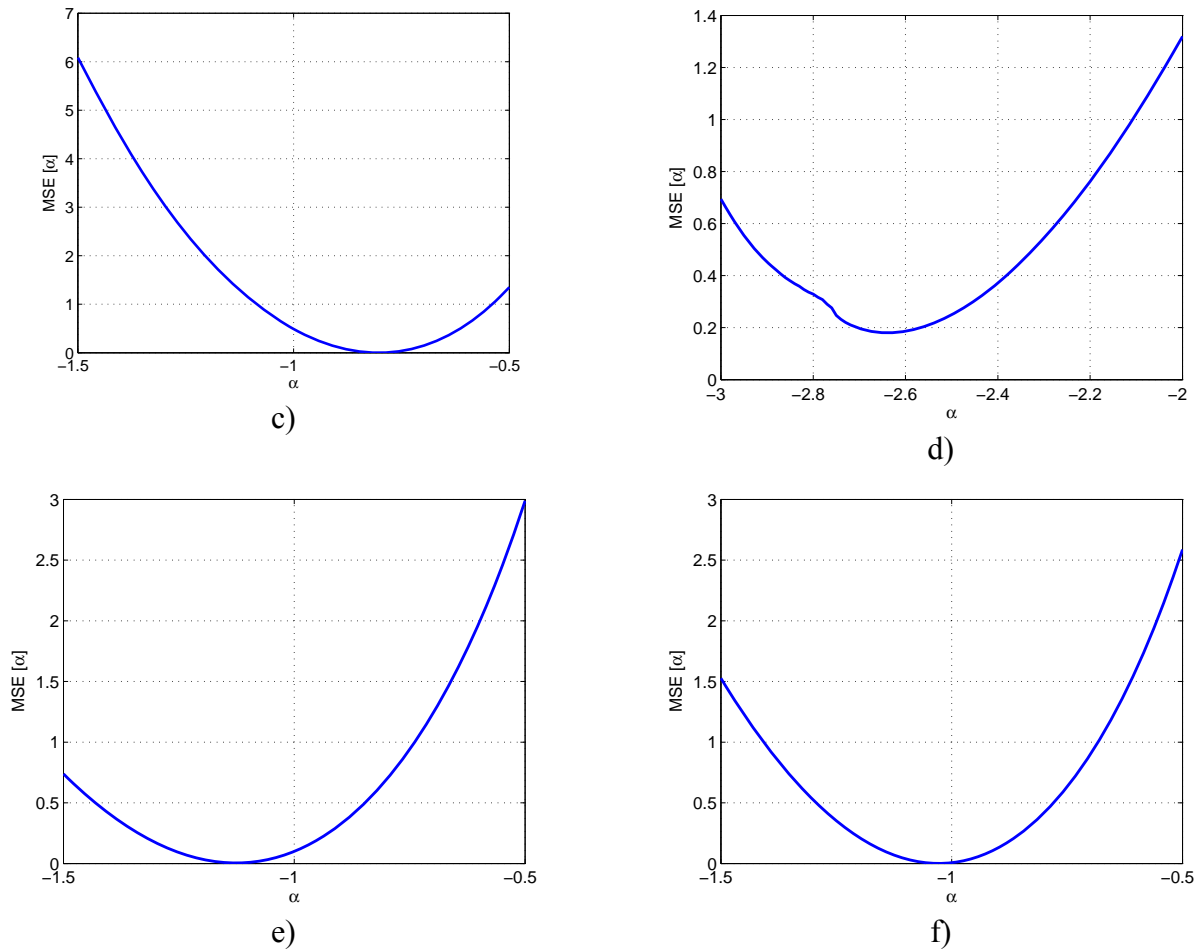
Prozorska f-ja	$MSE_{K_1P_SIN_min}$	α_{opt}
Hamming-ova	0.0097	-1.0100
Hann-ova	0.00063836	-0.8800
Blackman-ova	0.00043616	-0.8000
Pravougaona	0.1805	-2.6400
Kaiser-ova	0.0058	-1.1300
Trougaona	0.0015	-1.0300



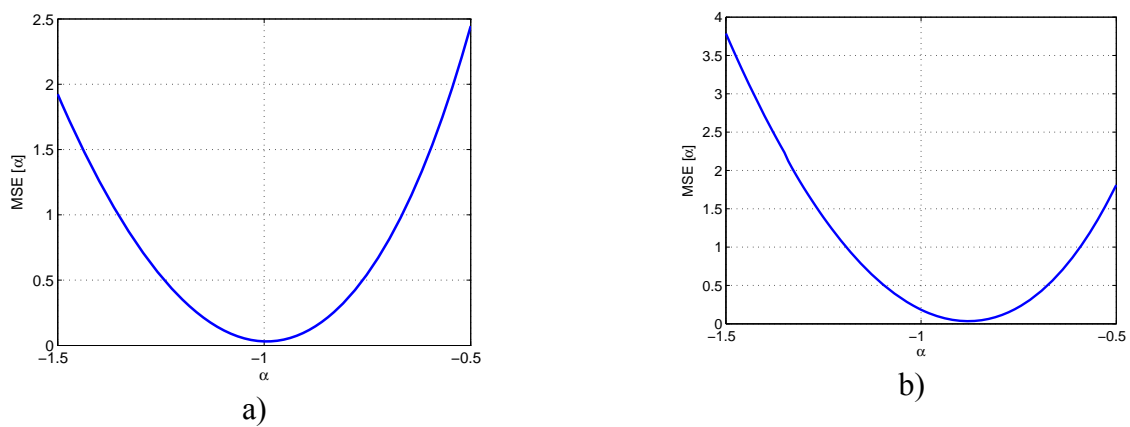
a)

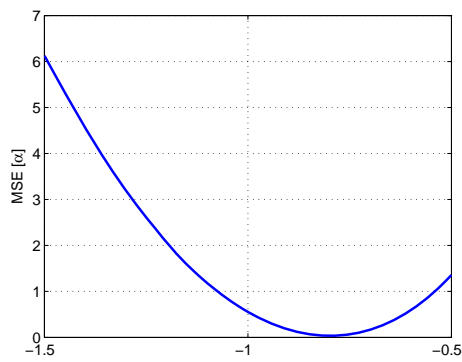


b)

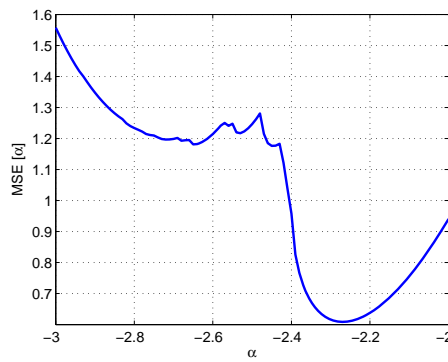


Sl. 5.15 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Kejsovog 1P jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.

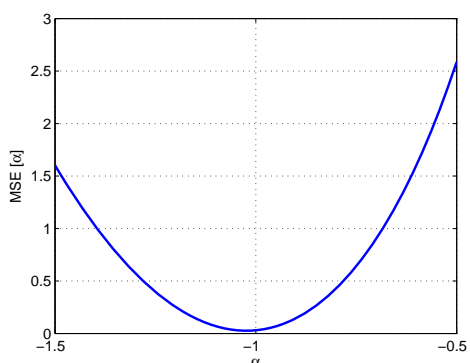




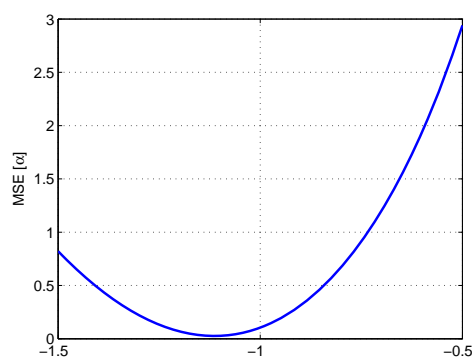
c)



d)



e)

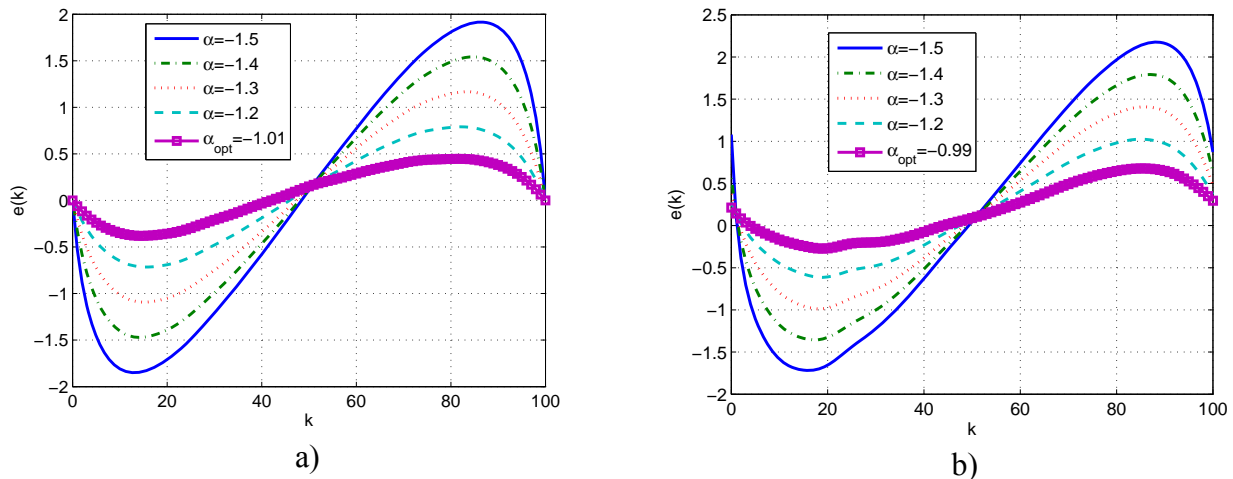


f)

Sl. 5.16 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene Kejsovog 1P jezgra za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.

Tbl. 5.8 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene Kejsovog 1P jezgra i prozorske funkcije [Milivojević, 2013] .

Prozorska f-ja	$MSE_{K\ 1P\ SP\ min}$	α_{opt}
Hamming-ova	0.0309	-0.9900
Hann-ova	0.0347	-0.8800
Blackman-ova	0.0357	-0.8000
Pravougaona	0.6087	-2.22700
Kaiser-ova	0.0275	-1.1100
Trougaona	0.0271	-1.0200



Sl. 5.17 Greška procene fundamentalne frekvencije za slučaj primene Hamming-ove prozorske funkcije za: a) sinusni signal i b) govorni signal.

5.5.1.3.2 Analiza rezultata

Na osnovu rezultata prikazanih u Tbl. 5.7 i Tbl. 5.8 zaključuje se:

a) U slučaju sinusnog signala najveća preciznost postignuta je primenom Blackman-ove prozorske funkcije ($MSE_{K_1P_SIN_min}=0.00043616$). Minimalna preciznost dobijena je u slučaju pravougaone prozorske funkcije ($MSE_{K_1P_SIN_min}=0.1805$),

b) za govorni signal najveća preciznost postiže se primenom trougaone prozorske funkcije ($MSE_{K_1P_SP_min}=0.0271$). Najmanju tačnost pokazala je pravougaona prozorska funkcija ($MSE_{K_1P_SP_min}=0.6087$),

c) veća tačnost se postiže pri proceni sinusnog signala. Poređenjem MSE za sinusni signal (Blackmanov prozor) i govorni (trougaoni prozor) dobija se odnos $MSE_{K_1P_SP_min} / MSE_{K_1P_SIN_min} = 0.0271 / 0.00043616 = 62.3331$. Iz ovog odnosa nameće se zaključak da je procena fundamentalne frekvencije sinusnog signala bolja u odnosu na procenu govornog signala,

d) u odnosu na kvazi-racionalno Polya jezgro kod kojeg su najbolji rezultati za sinusni signal dobijeni primenom trougaone prozorske funkcije, Kejsovo jednoparametarsko kubno konvoluciono jezgro je pri proceni sinusnog signala pokazalo $MSE_{min\,troug.\,polya.} / MSE_{min\,Black.\,keys} = 10.088$ puta manju grešku,

e) za govorni signal primenom trougaone prozorske funkcije dobijeni su najbolji rezultati i kod Kejsovog 1P i kod kvazi-racionalnog Polya jezgra. Komparacijom dobijenih rezultata zaključuje se

da je Kejsovo 1P jezgro pokazalo $MSE_{\min\text{triang.polyasp.}} / MSE_{\min\text{triang.keyssp.}} = 0.0367 / 0.0277 = 1.32$ puta manju gresku,

f) u odnosu na Polya 1P jezgro kod kojeg su najbolji rezultati dobijeni primenom trougaone prozorske funkcije, Kejsovo 1P kubno konvoluciono jezgro je pokazalo $MSE_{\min\text{troug.polya.}} / MSE_{\min\text{Black.keys}} = 3.76$ puta manju grešku,

g) u poredjenju sa rezultatima primene kvadratnog jezgra [Savić1, 2014], zaključuje se da primena Kejsovog 1P kubnog interpolacionog jezgra dovodi do srednje kvadratne greške koja je: 37.94 (Hamming-ova), 224.75 (Hann-ova), 48.15 (Kaiser-ova), 0.14 (pravougaona), 601.4 (Blackman-ova) i 358.07 (trougaona) puta manja,

h) kod sinusnog signala za slučaj primene trougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritham, $MSE_{pp} / MSE_{K_1P_sin_troug_min} = 20.196 / 0.0015 = 13464$ puta manja,

i) kod sinusnog signala za slučaj primene pravougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritham, $MSE_{pp} / MSE_{K_1P_sin_troug_min} = 20.196 / 0.1805 = 111.89$ puta manja,

j) kod govornog signala za slučaj primene trougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritham, $MSE_{pp} / MSE_{K_1P_sin_troug_min} = 20.196 / 0.0271 = 745.24$ puta manja,

k) kod govornog signala za slučaj primene pravougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritham, $MSE_{pp} / MSE_{K_1P_sin_troug_min} = 20.196 / 0.6087 = 33.27$ puta manja.

5.5.1.4 Interpolaciono jezgro petog reda

Primenom interpolacionog jezgra petog reda (3.7) opisanog u glavi 3 izvršena je procena fundamentalne frekvencije kod govornog i sinusnog signala.

5.5.1.4.1 Eksperimentalni rezultati

Vrednosti MSE i optimalnog parametra jezgra za sinusni i govorni signal prikazane su u Tbl. 5.9 i Tbl. 5.10 respektivno.

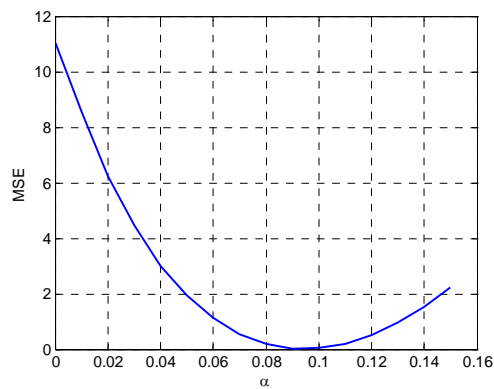
Tbl. 5.9 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene jednoparametarskog jezgra petog reda i prozorske funkcije [Milivojević2, 2015].

Prozorska f-ja	$MSE_{\min}(\alpha)$	α_{opt}
Hamming-ova	0.0329	0.0900
Hann-ova	0.0145	0.0800
Blackman-ova	0.0268	0.0800
Pravougaona	0.2410	0.2600
Kaiser-ova	0.0172	0.1100
Trougaona	0.0143	0.1000

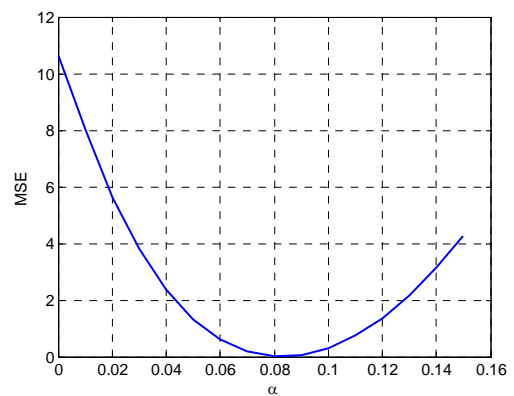
Tbl. 5.10 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene jednoparametarskog jezgra petog reda i prozorske funkcije [Milivojević2, 2015].

Prozorska f-ja	$MSE_{\min}(\alpha)$	α_{opt}
Hamming-ova	0.0411	0.0900
Hann-ova	0.0442	0.0800
Blackman-ova	0.0747	0.0700
Pravougaona	0.3894	0.2400
Kaiser-ova	0.0370	0.1000
Trougaona	0.0394	0.1000

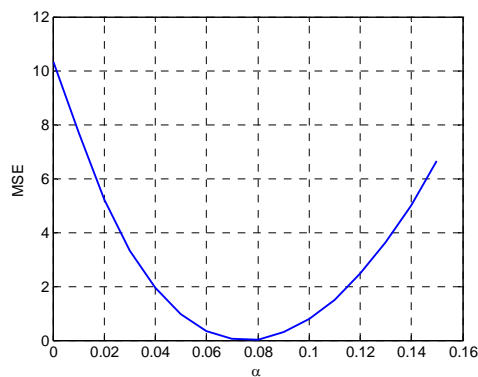
Na Sl. 5.18 i Sl. 5.19 dat je grafički prikaz zavisnosti MSE od parametra jezgra za sinusni i govorni signal respektivno.



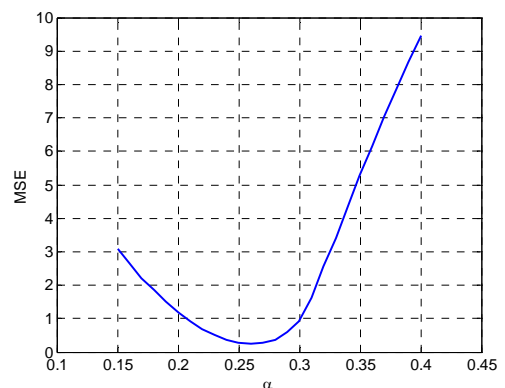
a)



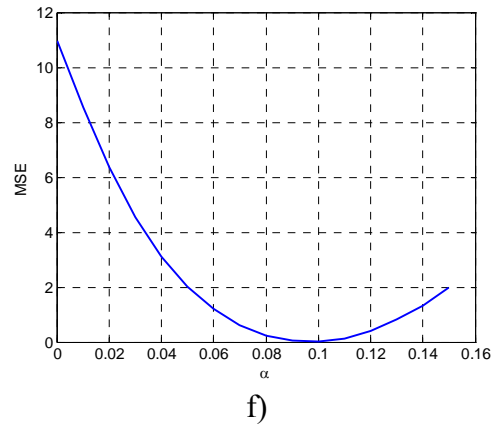
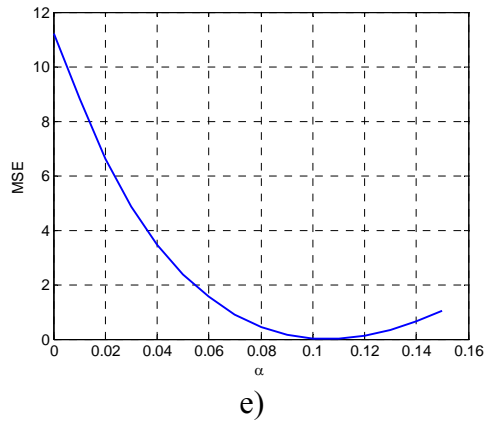
b)



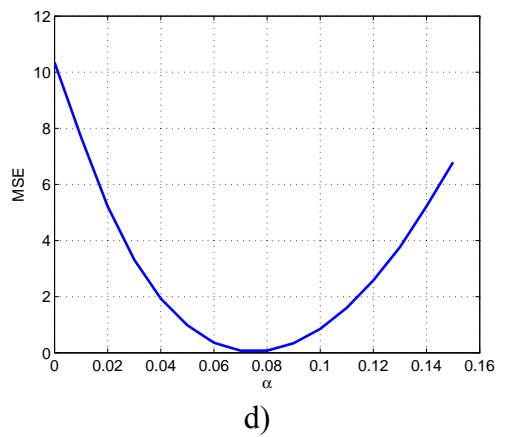
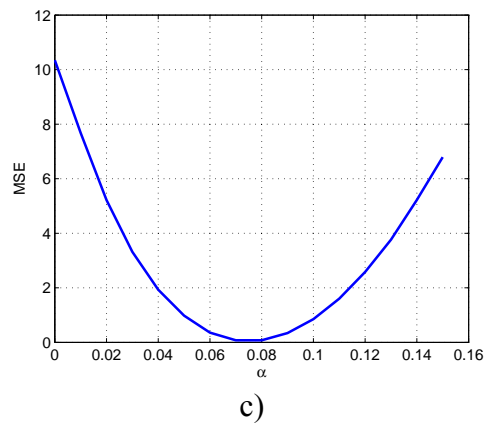
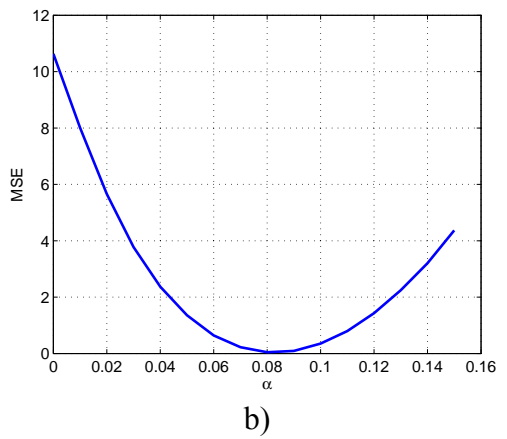
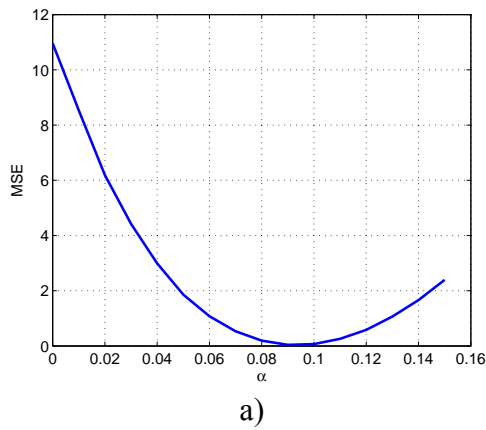
c)

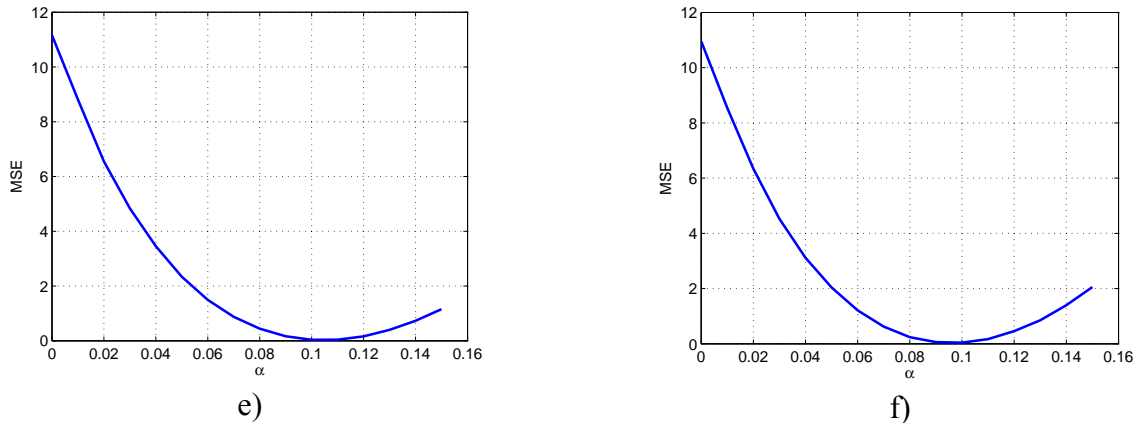


d)



Sl. 5.18 Zavisnost MSE od parametra jezgra petog reda za sinusni signal.





Sl. 5.19 Zavisnost MSE od parametra jezgra kod procrne fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene jezgra petog reda za: a) Hamming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu, e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju.

5.5.1.4.2 Analiza rezultata

Analizom rezultata za MSE prikazanih u Tbl. 5.9 i Tbl. 5.10 može se zaključiti da:

a) kod sinusnog signala najveća preciznost dobija se primenom trougaone prozorske funkcije ($MSE_{\min}=0.0143$, $\alpha_{\text{opt}}=0.1$), dok se primenom pravougaone funkcije dobija najveća greška ($MSE_{\min}=0.2410$, $\alpha_{\text{opt}}=0.26$). Preciznost procene trougaone funkcije je $0.2410/0.0143=16.853$ puta bolja u odnosu na pravougaonu funkciju,

b) kod govornog signala najmanja greška dobijena je primenom Kaiser-ove prozorske funkcije ($MSE_{\min}=0.0370$, $\alpha_{\text{opt}}=0.1$), a najveća primenom Blackman-ove prozorske funkcije ($MSE_{\min}=0.3894$, $\alpha_{\text{opt}}=0.24$). Kaiser-ova prozorska funkcija ima $0.3894/0.0370=10.524$ bolju preciznost u odnosu na pravougaonu,

c) preciznost procene sinusnog signala $0.0370/0.0143=2.5874$ puta bolja u odnosu na procenu govornog signala,

d) u poređenju sa Kejsovim 1P jezgrom trećeg reda, jezgro ima $0.0143/0.0015=9.55$ puta manju preciznost za sinusni i $0.0370/0.0271=1.365$ puta manju za govorni signal.

5.5.2 Dvoparametarsko jezgro (Kejsovo)

U radovima [Pang, 2000], [Mirković, 2004] pokazano je da se preciznost procene može povećati izborom optimalne vrednosti parametra jezgra, primenom jezgra sa dva parametra kao i izborom prozorske funkcije. Primena PCC za određivanje f_0 , uz prethodnu obradu signala prozorskim funkcijama prikazana je u [Milivojević, 2004]. U radu [Mirković, 2004] izvršena je analiza efikasnosti algoritma za procenu f_0 uz primenu Grevilleovog 2P jezgra. U ovom poglavlju izvršena je analiza

procene fundamentalne frekvencije kod sinusnog i govornog signala primenom konvolucione interpolacije sa Kejsovim 2P jezgrom.

5.5.2.1 Algoritam procene optimalnih vrednosti

Algoritam određivanja optimalnog parametra Kejsovog 2P (3.12) jezgra predstavljen je na Sl. 5.20.

5.5.2.2 Kubno interpolaciono jezgro

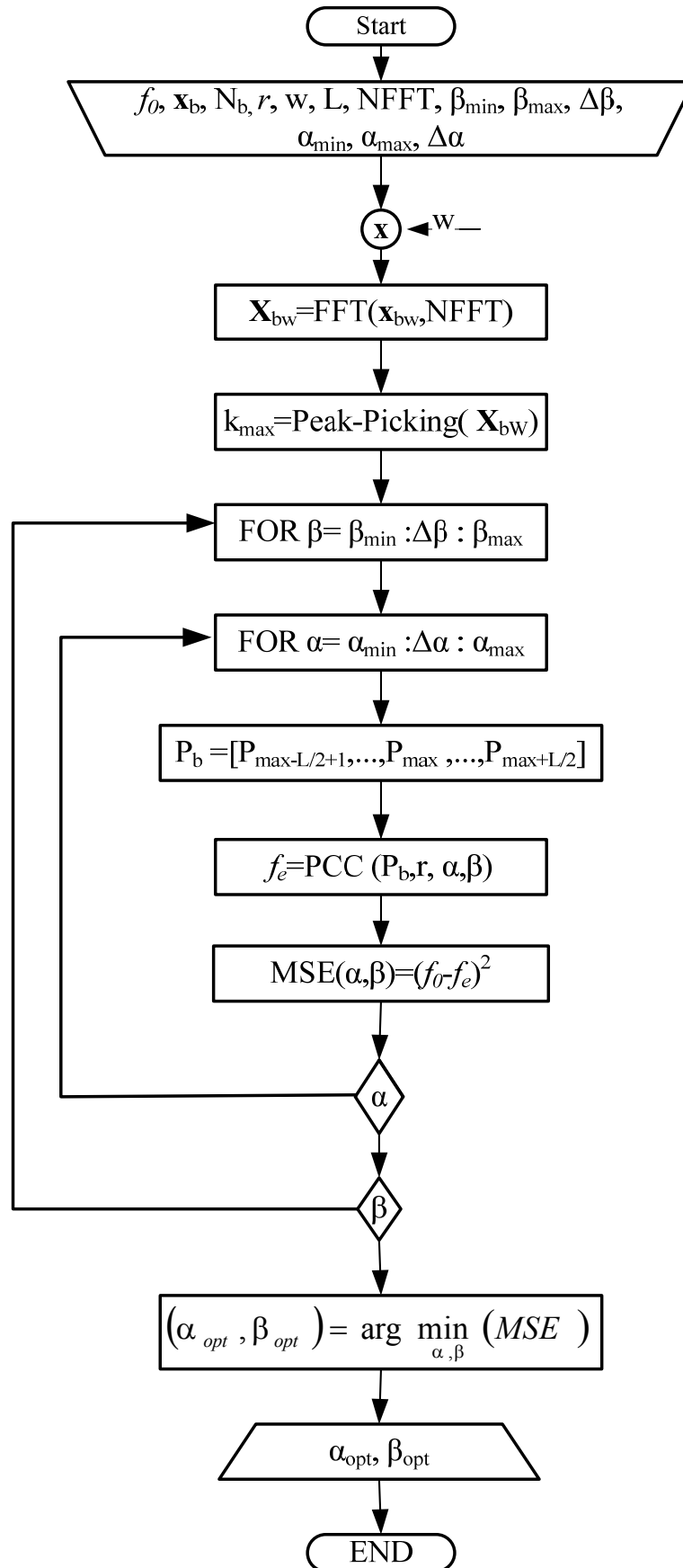
U cilju povećanja: a) preciznosti procene i b) brzine izvršenja algoritma određeni su analitički izrazi za poziciju maksimuma funkcije $X_r(f)$ (5.2), koja je dobijena primenom konvolucije sa Kejsovim 2P jezgrom.

Analitički izraz za poziciju maksimuma funkcije $X_r(f)$ (5.2) je:

$$f_{\max} = \begin{cases} k - \frac{c}{2b}, & a = 0 \\ k + \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, & a \neq 0 \end{cases}, \quad (5.25)$$

gde je k pozicija maksimalne komponente u spektru, a koeficijenti iz (5.25) su:

$$\begin{aligned} a &= 3(\beta p_{k-2} + \alpha p_{k-1} + (\alpha - \beta - 2)pk - (\alpha - \beta - 2)p_{k+1} - \alpha p_{k+2} - \beta p_{k+3}) \\ b &= (-4\beta)p_{k-2} + (-4\alpha + 2\beta)p_{k-1} + (-2\alpha + 2\beta - 6)p_k + (4\alpha - 4\beta + 6)p_{k+1} + \\ &\quad (2\alpha + 2\beta)p_{k+2} + (2\beta)p_{k+3} \\ c &= \beta p_{k-2} + (\alpha - \beta)p_{k-1} - (\alpha - \beta)p_{k+1} - \beta p_{k+2} \end{aligned} \quad (5.26)$$



Sl. 5.20 Algoritam procene optimalnih parametra dvo-parametarskog jezgra.

5.5.2.2.1 Eksperimentalni rezultati

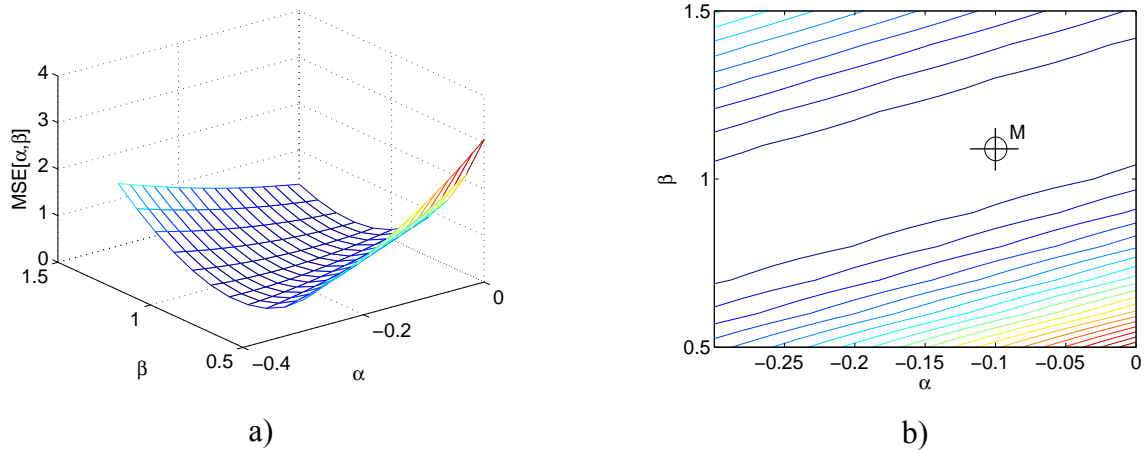
Primenom algoritma za određivanje parametara Kejsovog 2P interpolacionog jezgra određene su vrednosti α_{opt} i β_{opt} za a) Haming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju. Vrednosti optimalnih parametara i minimalna MSE su prikazane u Tbl. 5.11 ($MSE_{K_2P_SIN_min}$ Sine test signal) i Tbl. 5.12 ($MSE_{K_2P_SP_min}$ Speech test signal). U oba slučaja minimalna vrednost MSE dobija se primenom trougaone prozorske funkcije. Na Sl. 5.21 a) prikazana je funkcionalna zavisnost $MSE(\alpha, \beta)$ i pozicija $\min MSE(\alpha, \beta)$ u ravni (α, β) za sinusni signal, dok je na Sl. 5.22 a) prikazana funkcionalna zavisnost $MSE(\alpha, \beta)$ i pozicija $\min MSE(\alpha, \beta)$ u ravni (α, β) za govorni signal za slučaj primene trougaone prozorske funkcije.

Tbl. 5.11 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene Kejsovog 2P jezgra i prozorske funkcije.

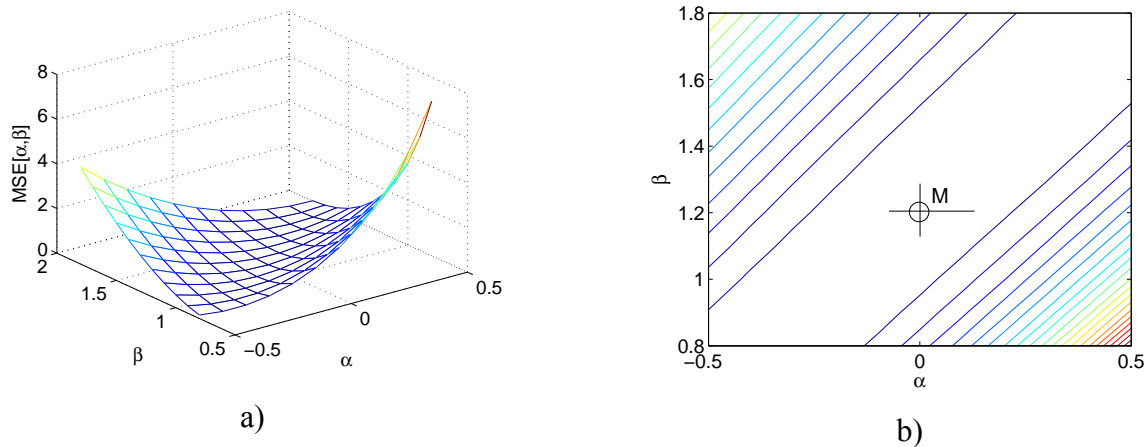
Prozorska f-ja	$MSE_{K_2P_SIN_min}$	α_{opt}	β_{opt}
Hamming-ova	0.0013	2.5500	4.6000
Hann-ova	$3.0273 \cdot 10^{-4}$	-1.4500	0.8000
Blackman-ova	$1.8042 \cdot 10^{-4}$	-0.7200	0.1800
Pravougaona	0.1514	-1.8000	0.9600
Kaiser-ova	0.0053	-1.0200	0.1200
Trougaona	$7.877 \cdot 10^{-5}$	-0.1000	1.1000

Tbl. 5.12 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene Kejsovog 2P jezgra i prozorske funkcije.

Prozorska f-ja	$MSE_{K_2P_SP_min}$	α_{opt}	β_{opt}
Hamming-ova	0.0284	-2.0000	-1.3000
Hann-ova	0.0302	-1.3000	-0.6000
Blackman-ova	0.0357	-0.7000	0.2000
Pravougaona	0.2884	0.1000	2.9000
Kaiser-ova	0.0257	-0.5500	0.6500
Trougaona	0.0255	0	1.2000



Sl. 5.21 Primena trougaone prozorske funkcije na sinusni signal a) $MSE(\alpha, \beta)$ primenom Kejs 2P, b) pozicija $\min(MSE(\alpha, \beta))$ u ravni (α, β) .



Sl. 5.22 Primena trougaone prozorske funkcije na govorni signal (a) $MSE(\alpha, \beta)$ primenom Kejs 2P, b) pozicija $\min(MSE(\alpha, \beta))$ u ravni (α, β) .

5.5.2.2.2 Analiza rezultata

Može se zaključiti da je kod interpolacije primenom Kejsovog 2P jezgra:

a) za sinusni signal najveća preciznost dobijena primenom trougaone prozorske funkcije ($MSE_{K_2P_SIN_min}=7.877 \cdot 10^{-5}$), a najmanja primenom pravougaone ($MSE_{K_2P_SIN_min}=0.1514$),

b) za govorni signal najveća preciznost dobijena primenom trougaone prozorske funkcije ($MSE_{K_2P_SP_min}=0.0255$), a najmanja primenom pravougaone ($MSE_{K_2P_SP_min}=0.2884$),

c) procena sinusnog u odnosu na procenu govornog signala uz primenu trougaone funkcije je $MSE_{K_2P_SP_min} / MSE_{K_2P_SIN_min} = 0.0255 / 7.877 \cdot 10^{-5} = 323.727$ puta bolja,

d) u poređenju sa Kejsovim 1P jezgrom, Kejsovo 2P jezgro ima veću preciznost $0.00043616/0.0000787=5.542$ puta za sinusni i $0.0271/0.0255=1.062$ puta za govorni signal,

e) kod sinusnog signala za slučaj primene trougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, $MSE_{pp}/MSE_{K_1P_sin_troug_min}=20.196/7.877*10^{-5}=256392$ puta manja,

f) kod sinusnog signala za slučaj primene pravougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, $MSE_{pp}/MSE_{K_1P_sin_troug_min}=20.196/0.1514=133.39$ puta manja,

g) kod govornog signala za slučaj primene trougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, $MSE_{pp}/MSE_{K_1P_sin_troug_min}=20.196/0.0255=792$ puta manja,

h) kod govornog signala za slučaj primene pravougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, $MSE_{pp}/MSE_{K_1P_sin_troug_min}=20.196/0.2884=70.03$ puta manja.

5.5.3 Troparametarsko jezgro

Primena jezgra sa dva parametra dovela je do veće preciznosti procene fundamentalne frekvencije. Zato se nameće pitanje da li je moguće povećati preciznost procene f_0 uz primenu jezgra sa većim brojem parametara, bez povećanja numeričke složenosti u odnosu na jedno-parametarska i dvo-parametarska jezgra? Stoga je izvršena konstrukcija tro-parametarskog jezgra i razvijen algoritam za procenu f_0 .

5.5.3.1 Algoritam procene optimalnih vrednosti

Optimalni parametri tro-parametarskog jezgra (jednačina*) određeni su primenom algoritma prikazanog na Sl. 5.23.

5.5.3.2 Kubno interpolaciono jezgro

Pozicija maksimuma rekonstruisane funkcije koja se dobija primenom konvolucione interpolacije sa tro-parametarskim jezgrom određuje se primenom jednačine:

$$f_{\max} = \begin{cases} k - \frac{c}{2b}, & a = 0 \\ k + \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, & a \neq 0 \end{cases}, \quad (5.27)$$

gde je k pozicija maksimalne komponente u spektru, a koeficijenti su dati sa ((5.28), (5.29), (5.30)).

$$a = 3(\mathcal{P}_{k-3} + \beta p_{k-2} + \alpha p_{k-1} + (\alpha - \beta + \gamma - 2)p_k - (\alpha - \beta + \gamma - 2)p_{k+1} - \alpha p_{k+2} - \beta p_{k+3} - \mathcal{P}_{k+4}), \quad (5.28)$$

$$b = -4\mathcal{P}_{k-3} + (-4\beta + 2\gamma)p_{k-2} + (-4\alpha + 2\beta - 2\gamma)p_{k-1} + (-2\alpha + 2\beta - 2\gamma - 6)p_k + (4\alpha - 4\beta + 4\gamma + 6)p_{k+1} + (2\alpha + 2\beta - 2\gamma)p_{k+2} + (2\beta + 2\gamma)p_{k+3} + 2\mathcal{P}_{k+4}, \quad (5.29)$$

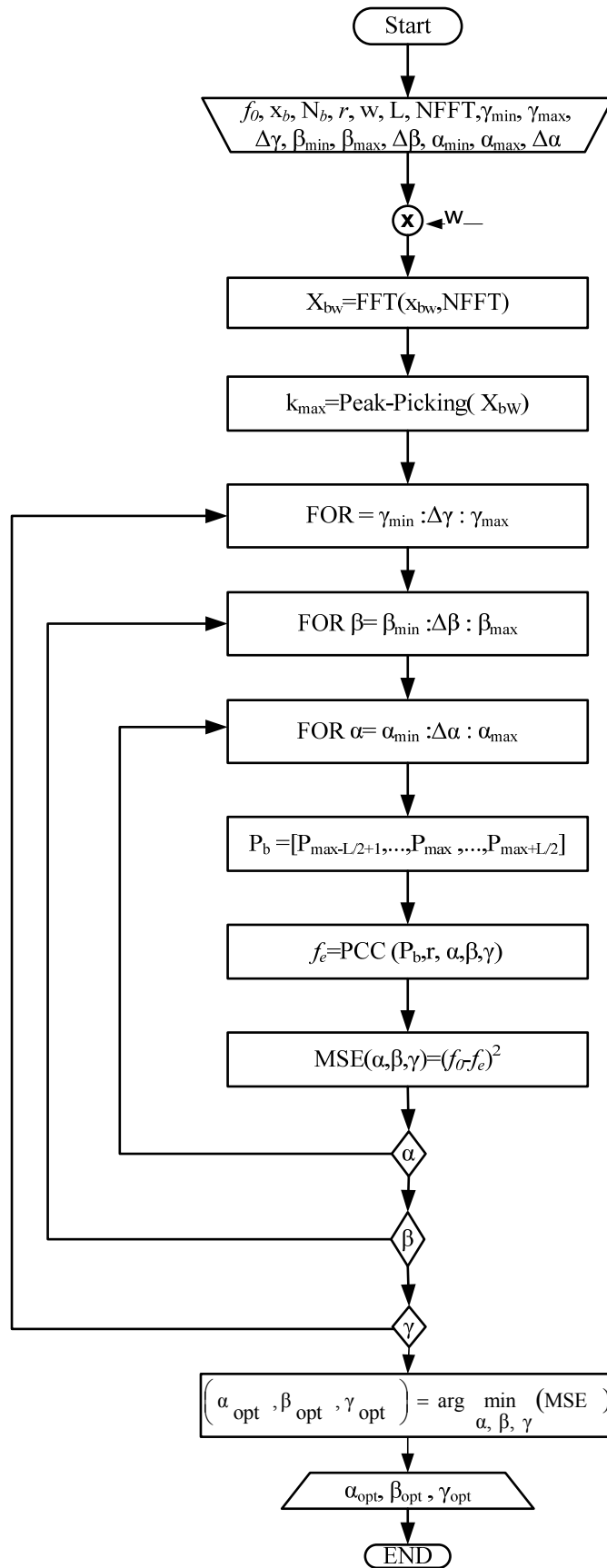
$$c = \mathcal{P}_{k-3} + (-\gamma + \beta)p_{k-2} + (\alpha - \beta + \gamma)p_{k-1} - (\alpha - \beta + \gamma)p_{k+1} + (-\gamma + \beta)p_{k+2} - \mathcal{P}_{k+3}. \quad (5.30)$$

5.5.3.2.1 Eksperimentalni rezultati

Primenom algoritma za određivanje optimalnih parametara 3P interpolacionog jezgra određene su vrednosti α_{opt} , β_{opt} i γ_{opt} za a) Haming-ovu, b) Hann-ovu, c) Blackman-ovu, d) pravougaonu e) Kaiser-ovu i f) trougaonu prozorsku funkciju. Optimalne vrednosti parametra i minimalna vrednost MSE za sinusni signal prikazane su u Tbl. 5.13, a za govorni signal u Tbl. 5.14.

Tbl. 5.13 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije sinusnog signala za slučaj primene 3P jezgra i prozorske funkcije

Prozorska f-ja	MSE _{K 3P SIN min}	α_{opt}	β_{opt}	γ_{opt}
Hamming-ova	0.0013	2.5800	4.7400	0.1000
Hann-ova	9.1211*10 ⁻⁵	-1.9500	-1.6000	-0.0900
Blackman-ova	8.2038*10 ⁻⁵	-0.6200	0.2800	-0.1000
Pravougaona	0.1485	-1.4500	1	-0.3400
Kaiser-ova	0.0039	-0.7000	0.1000	-0.3900
Trougaona	3.0849*10 ⁻⁵	-0.0800	1.4200	0.2900



SI. 5.23 Algoritam određivanja optimalnih parametara tro-parametarskog jezgra.

Tbl. 5.14 Minimalna vrednost MSE procene fundamentalne frekvencije govornog signala za slučaj primene 3P jezgra i prozorske funkcije

Prozorska f-ja	$MSE_{K_{3P_SP_min}}$	α_{opt}	β_{opt}	γ_{opt}
Hamming-ova	0.0119	-1.7000	-4.7000	-3.8000
Hann-ova	0.0202	-2.3000	-2.5000	-0.5000
Blackman-ova	0.0182	-2.3000	0.2000	3.2000
Pravougaona	0.1329	-0.2000	4.6000	2.000
Kaiser-ova	0.0035	0.9000	-0.8000	-3.1000
Trougaona	0.0212	1.6000	1.7000	-1.4000

5.5.3.2.2 Analiza rezultata

Na osnovu rezultata prikazanih u Tbl. 5.13 i Tbl. 5.14 očigledno je:

a) kod sinusnog test signala najveća preciznost postiže se izborom je trougaone prozorske funkcije ($MSE_{K_{3P_SIN_min}} = 3.0849 \cdot 10^{-5}$), a najmanja pravougaonom ($MSE_{K_{3P_SIN_min}} = 0.1485$),

b) za govorni signal najveća preciznost postiže se izborom je Kaiser-ove prozorske funkcije ($MSE_{K_{3P_SP_min}} = 0.0035$), a najmanja pravougaonom ($MSE_{K_{3P_SP_min}} = 0.1329$),

c) procena tačnosti za sinusni signal (trougaoni prozor) u odnosu na govorni signal (Kaiser-ov prozor) je $MSE_{K_{3P_SP_min}} / MSE_{K_{3P_SIN_min}} = 0.0035 / 3.0849 \cdot 10^{-5} = 113.455$ puta bolja,

d) preciznost procene govornog signala (3P-PCC, Kaiser-ova) u odnosu na procenu sinusnog signala (3P-PCC, Trougaona) $MSE_{K_{3P_SP_min}} / MSE_{K_{3P_SIN_min}} = 0.0035 / 3.0849 \cdot 10^{-5} = 113.45$ puta manja,

e) komparacijom minimalnih vrednosti MSE (MSE_{min}) prikazanih u Tbl. 5.12 i Tbl. 5.14 procena tačnosti f_0 3P jezgrom u odnosu na procenu Kejsovim 2P jezgrom za govorni signal je:

$$MSE_{minHamming.Kejs_2P.sp} / MSE_{minHamming.3P.sp} = 0.0284 / 0.0119 = 2.387 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{minHann.Kejs_2P.sp} / MSE_{minHann.3P.sp} = 0.0302 / 0.0202 = 1.495 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{minBlackman.Kejs_2P.sp} / MSE_{minBlackman.3P.sp} = 0.0357 / 0.0182 = 1.962 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{minKaiser.Kejs_2P.sp} / MSE_{minKaiser.3P.sp} = 0.0257 / 0.0035 = 7.343 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{mintriangl.Kejs_2P.sp} / MSE_{mintriangl.3P.sp} = 0.0255 / 0.0212 = 1.203 \text{ puta veća,}$$

f) kod sinusnog signala za slučaj primene trougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak-Picking algoritam, $MSE_{pp} / MSE_{K_{1P_sin_troug_min}} = 20.196 / 3.0849 \cdot 10^{-5} = 654863$ puta manja,

g) kod sinusnog signala za slučaj primene pravougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, $MSE_{PP}/MSE_{K_1P_sin_troug_min}=20.196/0.1485=136$ puta manja,

h) kod govornog signala za slučaj primene Kaiser-ove prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, $MSE_{PP}/MSE_{K_1P_sin_troug_min}=20.196/0.0035=5770.29$ puta manja,

i) kod govornog signala za slučaj primene pravougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, $MSE_{PP}/MSE_{K_1P_sin_troug_min}=20.196/0.1329=151.96$ puta manja.

5.6 Zaključak

Komparacijom minimalnih vrednosti MSE prikazanih u Tbl. 5.7-Tbl. 5.14 zaključuje se:

a) preciznost procene tačnosti f_0 govornog signala uz primenu Tro-parametarskog jezgra u odnosu na Polya jezgra, kvadratno jezgro, jezgro petog reda, Kejsovo 1P i Kejsovo 2P jezgro je:

$$MSE_{min.kvazi-rac-Polya_sp}/MSE_{min.3P.sp}=0.0367/0.0035= 10.486 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{min._rac-Polya_sp}/MSE_{min.3P.sp}=0.0244/0.0035= 6.971 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{min._kvadratno_sp}/MSE_{min.3P.sp}=0.0726/0.0035= 20.743 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{min._jezgro5.reda_sp}/MSE_{min.3P.sp}=0.0394/0.0035= 11.257 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{min._Kejs_1P_sp}/MSE_{min.3P.sp}=0.0271/0.0035= 7.743 \text{ puta veća,}$$

$$MSE_{min._Kejs_2Pa_sp}/MSE_{min.3P.sp}=0.0255/0.0035= 7.286 \text{ puta veća,}$$

b) optimalan izbor za sinusni signal je tro-parametarsko jezgro (3P-PCC) i trougaona prozorska funkcija. U poređenju sa optimalnim izborom za 1P-PCC (Blackman) i 2P-PCC (Trougaona), 3P-PCC (Trougaona) generiše 92.928 % i 60.83 % manje MSE, respektivno,

c) optimalan izbor za govorni signal je 3P-PCC i Kaiser-ova prozorska funkcija. U poređenju sa optimalnim izborom za 1P-PCC (Trougaona) i 2P-PCC (Kaiser-ova), 3P-PCC (Kaiser-ova) generiše 87.084 % i 86.381 % manje MSE, respektivno.

Na osnovu dobijenih rezultata preporučuje se upotreba 3P-jezgra sa Kaiser-ovom prozorskom funkcijom u fazi pretprocesiranja govornog signala. Navedeni rezultati pokazuju superiornost tro-parametarskog jezgra u odnosu na Polya jezgra, kvadratno jezgro, jezgro petog reda, Kejs 1P i Kejs 2P.

ZAKLJUČAK

Reč "interpolacija" (**engl.** *interpolation*) potiče od latinskog glagola *interpolare* (predstavlja složenicu od reči "inter" što znači između i reči "polare" u značenju izgladiti) i označava umetanje novih elemenata niza između poznatih elemenata. Sistematski pregled razvoja u teoriji interpolacije prikazan je u [Meijering, 2002]. U engleskoj literaturi prvi put se sreće oko 1612. godine i upotrebljavana je u smislu "menjanje (teksta) po umetanju novog". U enciklopediji matematike [Bauschinger, 1900-1904] navodi se da je originalnu latinsku reč (**lat.** *interpolatio*) u matematičkom smislu prvi put upotrebio 1655. godine Wallis u njegovoj knjizi o infinitezimalnom računu [Wallis, 1972].

Prilikom obrade podataka često se javlja potreba za procenom nekih vrednosti. Rezultati merenja uglavnom su izraženi na diskretnom skupu tačaka. Na osnovu tih podataka procenjuju se međuvrednosti, odnosno data diskretna funkcija zamenjuje se neprekidnom funkcijom na tom skupu ili na još širem skupu. Ovaj postupak predstavlja interpolaciju. Neprekidna funkcija naziva se interpolaciona funkcija. Tačke u kojima se diskretna i neprekidna funkcije podudaraju su interpolacioni čvorovi. Kao interpolacione funkcije se koriste polinomi, segment polinomi (**eng.** *piecewise polynomials*), racionalne funkcije, eksponencijalne i trigonometrijske funkcije. Interpolacija polinomima je najjednostavnija, međutim funkciju zadatu diskretnim vrednostima nije praktično aproksimirati na celom intervalu jednim polinomom, jer se javljaju oscilacije na krajevima intervala. Pored toga, zbog velikog broja tačaka polinom je visokog stepena, pa njegovo izračunavanje zahteva veliku numeričku složenost. Zato se pribegava podeli intervala na segmente sa različitim polinomima nižeg stepena na segmentima. Najčešće se koristi interpolacija jezgrom trećeg reda i metoda interpolacije poznata pod nazivom *kubna konvolucija*.

Značajnu ulogu imaju kubna parametarska jezgra. Često se primenjuju Kejsova i Grevileova jednoparametarska i dvoparametarska jezgra. Primećeno je da je interpolacija primenom dvoparametarskih konvolucionih jezgara preciznija u odnosu na interpolaciju jednoparametarskim

jezgrom. Kako bi se povećala preciznost interpolacije u ovom radu izvršena je konstrukcija, odnosno određen je analitički izraz za tro-parametarsko kubno konvoluciono jezgro.

Autor ove doktorske disertacije je u svojim radovima, zajedno sa koautorima, objavio konstrukciju sledećih jedno-parametarskih jezgara: a) Kvadratno 1P jezgro [Savić1, 2014], b) Jedno-parametarsko Polya jezgro [Milivojević1, 2015], c) Polya racionalno jezgro [Savić2, 2015], d) Polya kvazi racionalno jezgro [Savić1, 2015]. U trećoj glavi ove disertacije prikazani su analitički izrazi prethodno pomenutih parametarskih jezgara.

Izborom vrednosti parametra moguće je kontrolisati efikasnost primene jezgra kod rešavanja problema u različitim oblastima. Vršiti se parametarizacija jezgra i određivanje vrednosti parametra tako da se dobijaju optimalni rezultati.

Optimizacija parametra vrši se u: a) vremenskom i/ili b) frekvencijskom domenu.

Optimizacija u vremenskom domenu podrazumeva podešavanje parametara jezgra tako da vremenski oblik konvolucionog jezgra što bolje aproksimira oblik idealnog jezgra oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$. U [Keys, 1981] izvršena je optimizacija Kejsovog 1P jezgra u vremenskom domenu. Kejs je pokazao da je kod procesiranja slike optimalna vrednost parametra jezgra $\alpha = -0.5$. U radu [Park, 1983] prikazana je optimizacija Kejsovog 1P jezgra u spektralnom domenu. Razvojem spektralne karakteristike Kejsovog 1P jezgra u Maklorenov red, Park je pokazao da je najbolji izbor za slobodni parametar $\alpha = -0.5$, jer najbolje aproksimira Furijeovu transformaciju sinc funkcije, odnosno box funkciju.

Parametarska interpolaciona jezgra koja dobro aproksimiraju teorijski idealno interpolaciono jezgro oblika $\sin(\pi x)/(\pi x)$, $-\infty < x < +\infty$, su konačne dužine. Posledica ograničavanja sinc funkcije je odstupanje spektralne karakteristike od pravougaonog oblika, javlja se talasavost karakteristike u propusnom i nepropusnom opsegu.

U ovom radu predložen je algoritam određivanja optimalnih parametara parametarskog jezgra $r(x)$ u spektralnom domenu minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike. Algoritam se sastoji iz sledećih koraka: a) razlaganje jezgra na komponente, b) primena Furijeove transformacije nad komponentama jezgra i određivanje analitičkog izraza za spektralne komponente, c) određivanje spektralne karakteristike jezgra, d) određivanje Tejlorovog razvoja spektralnih komponenti u okolini nule, e) određivanje Tejlorovog razvoja spektralne karakteristike i f) eliminacija dejstva dominantnih članova spektralne karakteristike.

Primenom opisanog algoritma određeni su optimalni parametri: a) Kvadratnog 1P jezgra ($\alpha_{opt} = -4/23$), b) Kejsovog 1P jezgra ($\alpha_{opt} = -1/2$), c) Kejsovog 2P jezgra ($\alpha_{opt} = -19/32$, $\beta_{opt} = 3/32$), d) Grevilleovog 1P jezgra ($\alpha_{opt} = -3/16$), e) Grevilleovog 2P jezgra ($\alpha_{opt} = -3/16$, $\beta_{opt} = 157/4032$), i f) troparametarskog kubnog konvolucionog jezgra ($\alpha_{opt} = -4945/8064$, $\beta_{opt} = 409/2688$, $\gamma_{opt} = -157/8064$).

Na osnovu kriterijuma minimiziranja greške sličnosti spektralne karakteristike jezgra $H(f)$ i spektralne karakteristike idealnog interpolacionog jezgra, tj box funkcije, $H_B(f)$, u propusnom i nepropusnom opsegu, određene su optimalne vrednosti parametra: a) Kejsovog 1P ($\alpha_{opt} = -1.3$), b) Kejsovog 2P ($\alpha_{opt} = -1.9$, $\beta_{opt} = -0.4$) i c) Grevilleovog 1P ($\alpha_{opt} = -0.8$) jezgra.

Prikazan je originalni algoritam određivanja optimalnog parametra 1P Kejsovog jezgra diferenciranjem spektralne karakteristike (DSC Algoritam) koje je autor ove disertacije sa svojim koautorima objavio u radu [Milivojević3, 2016]. Sa idejom da prvi izvod spektralne karakteristike 1P Kejsovog jezgra bude dobra aproksimacija prvog izvoda box funkcije i minimiziranjem njihove razlike određena je optimalna vrednost parametra jezgra ($\alpha_{opt} = 0.35$).

Za potrebe analize nagiba spektralne karakteristike na granici propusnog opsega određeni su analitički izrazi izvoda spektralnih karakteristika: a) Kejsovog 1P, b) Kejsovog 2P i c) Grevilleovog 1P jezgra. Analizom nagiba spektralne karakteristike na granici propusnog opsega moguće je izvršiti komparativnu analizu jezgara sa različitim parametrima [Meijering, 1999]. Kod box karakteristike nagib tangente na granici propusnog opsega ima vrednost ∞ . Saglasno ovoj činjenici, spektralna karakteristika jezgra sa većim nagibom bolje aproksimira box funkciju, odnosno spektralnu karakteristiku idealnog interpolacionog jezgra.

U cilju eksperimentalne verifikacije teorijskih vrednosti optimalnih parametara 1P, 2P i 3P jezgara izračunatih prethodno opisanim algoritmima, sprovedeni su eksperimenti u okviru kojih su: a) vršene interpolacije, b) izračunavane srednje kvadratne greške interpolacije, MSE i c) određivane optimalne vrednosti parametara na osnovu minimuma MSE, ($[\alpha_{opt}, \beta_{opt}, \gamma_{opt}] = \arg \min_{\alpha, \beta, \gamma} (MSE)$). Interpolacije su obavljene nad bazom testnih signala, koja je sastavljena od: a) sinusoidalnih, b) audio, c) govornih signala i d) nekih test slika. Eksperimentalni rezultati su prikazani grafički i tabelarno. Eksperimentalno određene vrednosti optimalnih parametara razlikuju od vrednosti dobijenih teorijskom analizom. Definisana je apsolutna greška procene parametra jezgra kao razlika između vrednosti dobijene teorijskim i eksperimentalnim postupkom.

Analizom eksperimentalnih vrednosti za slučaj primene kvadratnog 1P jezgra kod test slika određen je opseg optimalnih vrednosti parametra $\alpha_{opt} \in [-0.5012; 0.4781]$ i srednja vrednost

$\mu = \overline{\alpha_{opt}} = -0.4972$. Smatrajući μ za statistički tačnu vrednost zaključuje se da je greška procene optimalnog parametra, koji je izračunat minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike jezgra ($\alpha_{opt} = \alpha_T = -4/23$), $\Delta_T = \left| \alpha_T - \overline{\alpha_{opt}} \right| = 0.3233$;

Primenom Kejsovog 1P jezgra kod test slika opseg optimalnih vrednosti parametra je $\alpha_{opt} \in [-0.8 \div 2]$ i srednja vrednost $\overline{\alpha_{opt}} = 0.3045$. Na osnovu greške procene optimalnog parametra za slučaj primene algoritma talasavosti, algoritma sličnosti i DSC algoritma, zaključuje se da je najmanja greška procene dobijena DSC algoritmom. Greška procene parametra jezgra dobijenog primenom DSC algoritma je: a) 17.68 puta manja u odnosu na procenu algoritmom talasavosti, i b) 35.26 puta manja u odnosu na procenu algoritmom sličnosti sa box funkcijom.

Na osnovu izbora optimalne vrednosti parametra 1P Kejsovog interpolacionog jezgra kod interpolacije audio signala, koji su u procesu snimanja semplovani različitim frekvencijama, zaključuje se da je interpolacija jezgrom, kome je parametar određen optimizacijom na osnovu minimiziranja talasavosti, preciznija od interpolacije sa jezgrom kome je parametar određen optimizacijom na osnovu sličnosti sa box funkcijom. Greška procene optimalnog parametra minimiziranja talasavosti $\alpha_{opt} = \alpha_T = -0.5$ manja je 4.334 puta od greške procene parametra $\alpha_{opt} = \alpha_B = -1.3$ koji je dobijen na osnovu sličnosti sa box funkcijom. Ako se u cilju upoređivanja oblika amplitudskih karakteristika jezgara analizira nagib spektralne karakteristike u graničnoj tački propusnog opsega, onda se zaključuje da je jezgro sa parametrom $\alpha = \alpha_B = -1.3$ kvalitetnije od jezgra sa parametrom $\alpha_{opt} = \alpha_T = -0.5$, zbog većeg nagiba amplitudske karakteristike jezgra. Ovaj zaključak je u suprotnosti sa zaključkom izvedenim na osnovu ekperimentalnih rezultata. Povećanje nagiba dovodi do znatnog izdizanja amplitudske karakteristike u propusnom opsegu tako da ona počinje da se sve više razlikuje od box karakteristike, osim u uskom delu oko granice propusnog opsega.

Analizom interpolacije audio signala (tonovi G1–G7 klavira August Forster) primenom Kejsovog 2P jezgra, određene su optimalne vrednosti parametara za svaki ton za frekvencije semplovanja $f_s = \{44.1, 22.05, 8\}$ kHz. Optimalne vrednosti parametara α i β su u opsegu $\alpha_{opt} \in [-1.1 \div -0.2]$ i $\beta_{opt} \in [0 \div 1.99]$. Najmanja greška procene parametara je za frekvencije semplovanja $f_s = 22.05$ kHz.

Upoređivanjem grešaka procene parametra zaključuje se da je jezgro sa parametrima određenim metodom smanjenja talasavosti amplitudske karakteristike preciznije.

Greška procene parametra $\alpha_{opt}=\alpha_T=-19/32$ koji je izračunat minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike $\Delta_{\alpha T} = |\alpha_T - \overline{\alpha_{opt}}| = 0.12765$ u odnosu na grešku procene parametra $\alpha_{opt}=\alpha_B=-1.9$, $\Delta_{\alpha B} = |\alpha_{optB} - \overline{\alpha_{opt}}| = 1.1786$, je $\Delta_{\alpha B} / \Delta_{\alpha T} = 1.1786 / 0.12765 = 9.23$ puta manja.

Greška procene parametra $\beta_{opt} = \beta_T = 3/32$ koji je izračunat minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike $\Delta_{\beta T} = |\beta_{optT} - \overline{\beta_{opt}}| = 0.06825$ u odnosu na grešku procene parametra $\beta_{opt} = \beta_B = -0.4$, $\Delta_{\beta B} = |\beta_{optB} - \overline{\beta_{opt}}| = 0.4255$, je $\Delta_{\beta B} / \Delta_{\beta T} = 0.4255 / 0.06825 = 6.23$ puta manja.

Primenom Greville-ovog 1P jezgra izvršena je interpolacija audio signala (tonovi G₁–G₇ klavira August Forster) i govornih signala (logatomi srpskog jezika) i određene optimalne vrednosti parametara α . Nakon toga, izvršene je komparativne analiza i ocenjena je efikasnost Grevilleovog jezgra sa parametrima koji su birani različitim kriterijumima. Upoređivanjem grešaka procene parametara zaključuje se da je interpolacija jezgrom kome je parametar određen algoritmom minimiziranja talasavosti spektralne karakteristike preciznija od interpolacije sa jezgrom kome je parametar određen optimizacijom na osnovu minimiziranja greške sličnosti sa box funkcijom i kod audio i kod govornih signala. Kod sinusnog signala greška procene optimalnog parametra dobijenog minimiziranjem talasavosti, $\alpha_{opt}=\alpha_T=-3/16$ manja je od greške procene optimalnog parametra dobijenog na osnovu minimiziranja razlike sličnosti, $\alpha_{opt}=\alpha_B=-0.8$, $\Delta_{\alpha B_8} / \Delta_{\alpha T_22-05} = 3.38013$ puta. Kod govornog signala greška procene optimalnog parametra dobijenog minimiziranjem talasavosti, $\alpha_{opt}=\alpha_T=-3/16$ manja je od greške procene optimalnog parametra dobijenog minimiziranjem greške sličnosti, $\alpha_{opt}=\alpha_B=-0.8$, $\Delta_{\alpha B_22.05} / \Delta_{\alpha T_44.1} = 0.2 / 0.0554 = 3.6101$ puta.

Izbor optimalnih vrednosti Grevilleovog 2P jezgra obavljen je kod interpolacije nekih test slika. Uz pretpostavku da su eksperimentalne vrednosti tačne vrednosti greška procene parametara dobijenih algoritmom minimiziranja talasavosti je: a) $\Delta_{\alpha} = |\alpha_{opt} - \overline{\alpha_{opt}}| = |-3/16 - 0.15| = 0.3375$ i b)

$$\Delta_{\beta} = |\beta_{opt} - \overline{\beta_{opt}}| = |157/4032 - 0.075| = 0.0361$$

Primenom tro-parametarskog jezgra, koje je predloženo u ovoj disertaciji, u procesu interpolacije kod test slika, dobijne su optimalne vrednosti parametra jezgra: a) opseg optimalnih vrednosti parametra α je $\alpha_{opt} \in [-0.4 \div 1.0]$ i srednja vrednost $\overline{\alpha_{opt}} = -0.0743$, b) opseg optimalnih vrednosti parametra β je $\beta_{opt} \in [-0.1 \div 0.1]$ i srednja vrednost, $\overline{\beta_{opt}} = 0.0143$ i c) opseg optimalnih vrednosti parametra γ je $\gamma_{opt} \in [-0.1500 \div -0.0200]$ i srednja vrednost, $\overline{\gamma_{opt}} = -0.0704$. Uz pretpostavku da su

eksperimentalne vrednosti tačne vrednosti greška procene parametara dobijenih algorimom minimiziranja talasavosti je: a) $\Delta_\alpha = |\alpha_{opt} - \overline{\alpha_{opt}}| = 0.5389$, b) $\Delta_\beta = |\beta_{opt} - \overline{\beta_{opt}}| = 0.1379$ i c) $\Delta_\gamma = |\gamma_{opt} - \overline{\gamma_{opt}}| = 0.0509$.

Primenom tro-parametarskog jezgra pri interpolaciji audio signala zaključuje se:

a) za $f_s=44.1$ kHz, $\alpha_{opt_44.1} \in [-0.6 \div -0.5]$, srednja vrednost $\overline{\alpha_{opt_44.1}} = -0.5857$, $\beta_{opt_44.1} \in [0.1 \div 0.3]$, $\overline{\beta_{opt_44.1}} = 0.2571$, $\gamma_{opt_44.1} \in [-0.4 \div 0]$ i $\overline{\gamma_{opt_44.1}} = -0.1286$, b) za $f_s=22.05$ kHz, $\alpha_{opt_22.05} \in [-0.7 \div -0.5]$ i $\overline{\alpha_{opt_22.05}} = -0.6286$, $\beta_{opt_22.05} \in [0.1 \div 0.9]$ i $\overline{\beta_{opt_22.05}} = 0.3000$, $\gamma_{opt_22.05} \in [-0.3 \div 1.6]$ i $\overline{\gamma_{opt_22.05}} = 0.1571$, c) za $f_s=8$ kHz, $\alpha_{opt_8} \in [-0.9 \div 0]$ i $\overline{\alpha_{opt_8}} = -0.5286$, $\beta_{opt_8} \in [0.1 \div 0.9]$ i $\overline{\beta_{opt_8}} = 0.1571$, $\gamma_{opt_8} \in [-1.7 \div 1.7]$ i $\overline{\gamma_{opt_8}} = 0.0714$, d) greška procene parametra $\alpha_T = -4945/8064$ koji je dobijen minimiziranjem talasavosti najmanja je za $f_s=22.05$ kHz, $\Delta_{asT_22.05} = |\alpha_T - \overline{\alpha_{opt_22.05}}| = 0.0154$, e) greška procene parametra $\beta_T = 409/2688$ koji je dobijen minimiziranjem talasavosti najmanja je za $f_s=8$ kHz, $\Delta_{asT_8} = |\beta_T - \overline{\beta_{opt_8}}| = 0.0049$, f) greška procene parametra $\gamma_{opt} = -157/8064$ koji je dobijen minimiziranjem talasavosti najmanja je za $f_s=8$ kHz, $\Delta_{asT_8} = |\gamma_T - \overline{\gamma_{opt_8}}| = 0.0519$.

Izvršena je procena fundamentalne frekvencije kod sinusnog i govornog signala primenom: a) kvazi-racionalnog Polya, b) racionalnog Polya, c) Polya 1P, d) kvadratnog 1P, e) Kejsovog 1P, f) petog reda, g) Kejsovog 2P i h) tro-parametarskog jezgra, nad test signalima uz primenu Hamming-ove, Hann-ove, Blackman-ove, pravougaone, Kaiser-ove i trougaone prozorske funkcije.

Primenom kvazi-racionalnog jezgra izveden je zaključak:

a) u procesu interpolacije sinusnog i govornog test signala najmanja vrednost MSE ($MSE_{min/sin}=0.0044$ i ($MSE_{min/govor}=0.0367$) dobijena je kod primene trougaone prozorske funkcije, a najveća primenom pravougaone,

b) procena tačnosti f_0 za sinusni u odnosu na govorni signal uz primenu trougaone prozorske funkcije je 8.34 puta veća,

c) u slučaju primene pravougaone prozorske funkcije veća preciznost se dobija kod govornog signala. Greška je 2.68 puta manja kod govornog signala.

Primenom racionalnog Polya jezgra zaključuje se:

a) za sinusni i govorni test signal najmanja vrednost MSE ($MSE_{\min/\sin}=0.0024$ i $MSE_{\min/\text{govor}}=0.0244$) dobijena je primenom trougaone prozorske funkcije, a najveća primenom pravougaone,

b) procena tačnosti f_0 sinusnog u odnosu na govorni test signal uz primenu trougaone prozorske funkcije je 10.16 puta veća,

c) uz primenu pravougaone prozorske funkcije preciznije je procenjen govorni signal. Greška je 2.67 puta manja kod procene govornog signala.

Primenom Polya 1P jezgra zaključuje se:

a) u procesu interpolacije sinusnog test signala najmanje $MSE_{\min}=0.0012$ dobijeno za Hamming-ovu prozorsku funkciju. U odnosu na druge prozorske funkcije Hamming-ova je pokazala bolje rezultate: a) 90% (Hann-ove), b) 96% (Blackman-ove), c) 91% (Kaiser-ove), d) 99% (pravougaone) i f) 58% (trougaone),

b) procena tačnosti f_0 Polya 1P jezgrom preciznija je u odnosu na procenu primenom Polya kvaziracionalnog parametarskog jezgra. Poređenjem sa rezultatima dobijenim primenom Polya kvaziracionalnog jezgra greška je 3.67 puta manja,

c) procena tačnosti f_0 Polya 1P jezgrom preciznija je i u odnosu na procenu primenom Polya racionalnog parametarskog jezgra. Polya 1P jezgro generiše 1.25 puta manju srednje kvadratnu grešku.

Primenom kvadratnog jezgra zaključuje se:

a) optimalne rezultate dala je pravougaona prozorska funkcija,

b) kvadratno jezgro generiše 16.5 puta veću srednje kvadratnu grešku u odnosu na kvazi racionalno Polya jezgro,

c) u odnosu na racionalno Polya jezgro kvadratno jezgro generiše 30.25 puta veću srednje kvadratnu grešku.

Primenom Kejsovog 1P jezgra zaključuje se:

a) kod sinusnog signala najveća preciznost postignuta je primenom Blackman-ove prozorske funkcije ($MSE_{K_1P_SIN_min}=4.3616 \cdot 10^{-4}$), a kod govornog primenom trougaone prozorske funkcije ($MSE_{K_1P_SP_min}=0.0271$). Procena fundamentalne frekvencije sinusnog signala bolja je 62.3331 puta u odnosu na procenu govornog signala,

b) minimalna preciznost dobijena je u slučaju pravougaone prozorske funkcije za sinusni i govorni signal ($MSE_{K_1P_SIN_min}=0.1805$), ($MSE_{K_1P_SP_min}=0.6087$),

c) za sinusni signal uz primenu trougaone prozorske funkcije, u odnosu na kvazi-racionalno Polya, Kejsovo 1P jezgro generiše 10.088 puta manju grešku, a za govorni 1.32 puta manju grešku,

d) u odnosu na Polya 1P jezgro kod kojeg su najbolji rezultati za sinusni signal dobijeni primenom trougaone prozorske funkcije, Kejsovo 1P kubno konvoluciono jezgro je pokazalo 3.76 puta manju grešku,

f) u poredjenju sa rezultatima primene kvadratnog jezgra [Savić1, 2014], zaključuje se da primena Kejsovog 1P kubnog interpolacionog jezgra dovodi do srednje kvadratne greške koja je: 37.94 (Hamming-ova), 224.75 (Hann-ova), 48.15 (Kaiser-ova), 0.14 (pravougaona), 601.4 (Blackman-ova) i 358.07 (trougaona) puta manja,

g) kod sinusnog signala za slučaj primene trougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak-Picking algoritam, 13464 puta manja, a primenom pravougaone prozorske funkcije 111.89 puta manja,

h) kod govornog signala za slučaj primene trougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak-Picking algoritam, 745.24 puta manja, dok je primenom pravougaone prozorske funkcije 33.27 puta manja.

Primenom jezgra petog reda zaključuje se:

a) kod sinusnog signala najveća preciznost dobija se primenom trougaone prozorske funkcije, dok se primenom pravougaone funkcije dobija najveća greška. Preciznost procene trougaone funkcije je 16.853 puta bolja u odnosu na pravougaonu funkciju,

b) kod govornog signala najmanja greška dobijena je primenom Kaiser-ove prozorske funkcije, a najveća primenom Blackman-ove prozorske funkcije. Kaiser-ova prozorska funkcija ima 10.524 bolju preciznost u odnosu na pravougaonu,

c) preciznost procene sinusnog signala je 2.5874 puta bolja u odnosu na procenu govornog signala,

d) u poređenju sa Kejsovim 1P jezgrom trećeg reda, jezgro ima 9.55 puta manju preciznost za sinusni i 1.365 puta manju za govorni signal.

Primenom Kejsovog 2P jezgra zaključuje se:

a) za sinusni i govorni signal najveća preciznost dobijena je primenom trougaone prozorske funkcije, a najmanja primenom pravougaone,

b) procena sinusnog u odnosu na procenu govornog signala uz primenu trougaone funkcije je 323.727 puta bolja,

c) u poređenju sa Kejsovim 1P jezgrom, Kejsovo 2P jezgro ima veću preciznost 5.542 puta za sinusni i 1.062 puta za govorni signal,

d) kod sinusnog signala za slučaj primene trougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, 256392 puta manja, a primenom pravougaone 133.39 puta manja,

e) kod govornog signala za slučaj primene trougaone prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, 792 puta manja, a primenom pravougaone 70.03 puta manja.

Primenom tro-parametarskog jezgra zaključuje se:

a) kod sinusnog test signala najveća preciznost postiže se izborom je trougaone prozorske funkcije, a najmanja pravougaonom,

b) za govorni signal najveća preciznost postiže se izborom je Kaiser-ove prozorske funkcije, a najmanja pravougaonom,

c) procena tačnosti za sinusni signal (trougaoni prozor) u odnosu na govorni signal (Kaiser-ov prozor) je 113.455 puta bolja,

d) komparacijom minimalnih vrednosti MSE, procena tačnosti f_0 3P jezgrom, u odnosu na procenu Kejsovim 2P jezgrom, za govorni signal, za slučaj primene Kaiser-ove prozorske funkcije je 7.343 puta veća,

e) kod sinusnog signala, za slučaj primene trougaone prozorske funkcije, srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak - Picking algoritam, je 654863 puta manja, dok je primenom pravougaone prozorske funkcije 136 puta manja,

f) kod govornog signala za slučaj primene Kaiser-ove prozorske funkcije je srednje kvadratna greška u odnosu na srednje kvadratnu grešku dobijenu kada se koristi Peak- Picking algoritam, 5770.29 puta manja, a za slučaj primene pravougaone prozorske funkcije 151.96 puta manja,

g) Preciznost procene tačnosti f_0 govornog signala uz primenu Tro-parametarskog jezgra je u odnosu na: a) kvazi-racionalno Polya jezgro 10.486 puta veća, b) kvazi racionalno Polya jezgro 6.971

puta veća, c) kvadratno jezgro 20.743 puta veća, d) jezgro petog reda 11.257 puta veća, e) Kejsovo 1P 7.743 puta veća, i f) Kejsovo 2P jezgro 7.286 puta veća,

h) optimalan izbor za sinusni signal je tro-parametarsko jezgro (3P-PCC) i trougaona prozorska funkcija. U poređenju sa optimalnim izborom za 1P-PCC (Blackman) i 2P-PCC (Trougaona), 3P-PCC (Trougaona) generiše 92.928 % i 60.83 % manje MSE, respektivno,

i) optimalan izbor za govorni signal je 3P-PCC i Kaiser-ova prozorska funkcija. U poređenju sa optimalnim izborom za 1P-PCC (Trougaona) i 2P-PCC (Kaiser-ova), 3P-PCC (Kaiser-ova) generiše 87.084 % i 86.381 % manje MSE, respektivno.

Na osnovu dobijenih rezultata preporučuje se upotreba 3P-jezgra sa Kaiser-ovom prozorskom funkcijom u fazi pretprocesiranja govornog signala. Navedeni rezultati pokazuju superiornost tro-parametarskog jezgra u odnosu na Polya jezgra, kvadratno jezgro, jezgro petog reda, Kejs 1P i Kejs 2P.

Iz dobijenih i verifikovanih rezultata u relevantnim naučnim časopisima, na međunarodnim i domaćim konferencijama mogu se odrediti naučni doprinosi doktorske disertacije, a to su:

a) konstruisano je tro-parametarsko kubno konvoluciono jezgro, čijom primenom je preciznije izvršena procena fundamentalne frekvencije kod sinusnog i govornog signala.

b) određeni su analitički izrazi za spektralne komponente jezgra i njihov Tejlorov razvoj u okolini nule.

c) optimizacija parametara jezgra u spektralnom domenu uz minimiziranje talasavosti spektralne karakteristike.

d) izvršen izbor prozorske funkcije za modifikaciju analiziranog signala u vremenskom domenu u cilju minimiziranja greške procene fundamentalne frekvencije u spektralnom domenu.

e) određen analitički izraz za procenu fundamentalne frekvencije primenom interpolacionog jezgra i, samim tim, izbegavanje interpolacije i ubrzavanje procene.

f) određeni su analitički izrazi izvoda spektralnih karakteristika: a) Kejsovog 1P, b) Kejsovog 2P i c) Grevileovog 1P jezgra.

Buduća istraživanja treba da se kreću u pravcu:

a) sagledavanje povećanja broja parametara kao i reda jezgra,

b) konstrukcija i parametarizacija Grevileovog 3P jezgra,

c) DSC algoritam za Grevileovo jezgro,

d) analiza efikasnosti procene fundamentalne frekvencije primenom tro-parametarskog jezgra u odnosu na primenu Grevileovih jezgara.

Svi opisani algoritmi i rezultati u ovoj disertaciji su posredstvom radova koji su objavljeni na domaćim i inostranim stručnim i naučnim konferencijama i časopisima prezentovani naučnoj i stručnoj javnosti.

LITERATURA

- [Ahlberg, 1967] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, and J. L. Walsh, *The Theory of Splines and Their Applications*, New York: Academic, vol. 38, Mathematics in Science and Engineering, 1967]
- [Ahmadi, 1999] S. Ahmadi and A. S. Spanias, *Cepstrum-based pitch detection using a new statistical V/UV classification algorithm*, IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, vol. 7, pp. 727 – 730, May 1999.
- [Bartels, 1987] R. Bartels, J. Beatty, and B. Barsky, *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling*, Morgan Kaufmann, Los Altos, CA, 1987.
- [Bauschinger, 1900-1904] [Bauschinger, 1900-1904] J. Bauschinger, *Interpolation*, in Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, W. F. Meyer, Ed. Leipzig, Germany: B. G. Teubner, pp. 799–820, 1900–1904.
- [Bernstein, 1976] R. Bernstein, *Digital image processing of earth observation sensor data*, IBM J. Res. Devel. vol. 20, no. 1. pp. 40-57, 1976.
- [Bessel, 1824] F. W. Bessel, *Anleitung und Tafeln die stündliche Bewegung des Mondes zu finden*, Astronomische Nachrichten, vol. II, no. 33, pp. 137–141, 1824.
- [Birkhoff, 1906] G. D. Birkhoff, *General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 7, no. 1, pp. 107–136, 1906.
- [Blahut, 1990] R. E. Blahut, *Digital Transmission of Information*. Reading, MA: Addi-

- son-Wesley, 1990.
- [Bochner, 1933] S. Bochner, *Monotone Funktionen, Stieltjes integrale und harmonische analyse*, Math. Ann, vol.108, pp. 378-410, 1933.
- [Bojanov, 1993] B. D. Bojanov, H. A. Hakopian, and A. A. Sahakian, *Spline Functions and Multivariate Interpolations*. Norwell, MA: Kluwer, 1993.
- [Borchardt, 1860] C. W. Borchardt, "Über eine Interpolationsformel für eine art symmetrischer Funktionen und über deren Anwendung," Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, pp. 1–20, 1860.
- [Borel, 1897] E. Borel, *Sur l' interpolation*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, vol. 124, no. 13, pp. 673–676, 1897
- [Borel, 1899] E. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, ser. 2, vol. 16, pp. 9–131, 1899
- [Bronštejn, 1964] I. N. Bronštejn, K. A. Semendjajev, *Matematički priručnik*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1964.
- [Brummelen, 1994] G. van Brummelen, *Lunar and planetary interpolation tables in Ptolemy's Almagest*, J. Hist. Astron., vol. 25, no. 4, pp. 297–311, 1994.
- [Buhmann, 2003] M. D. Buhmann, *Radial Basis Functions*, Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2003.
- [Butzer, 1983] P. L. Butzer, *A survey of the Whittaker-Shannon sampling theorem and some of its extensions*, J. Math. Res. Expos., vol. 3, no. 1, pp. 185–212, 1983.
- [Castleman, 1996] K. R. Castleman, *Digital Image Processing*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [Cheveigné, 2001] A. de Cheveigné and H. Kawahara, *Comparative evaluation of F0 estimation algorithms*, in Proc. Eurospeech, Copenhagen, Denmark, 2001, pp. 2451–2454.

- [Chui, 1993] C. K. Chui, *Multivariate Splines*, Philadelphia, PA: SIAM, 1993
- [Couch, 1993] L. W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 4th ed. New York: Macmillan, 1993.
- [Davis, 1963] P. J. Davis, *Interpolation and Approximation*, New York: Blaisdell, 1963.
- [De Boor, 1972] C. De Boor, *On calculating with B-splines*, J. Approx. Theory, vol. 6, no. 1, pp. 50–62, 1972.
- [De Vore, 1993] R. A. De Vore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*. New York: Springer-Verlag, vol. 303, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 1993.
- [Dierckx, 1993] P. Dierckx, *Curve and Surface Fitting With Splines*. Oxford, U.K.: Clarendon, 1993
- [Dodgson, 1997] N. A. Dodgson, *Quadratic interpolation for image resampling*, IEEE Trans. Image Processing, vol. 6, no.9, pp. 1322-1326, Sept. 1997.
- [Drmač, 2003] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, Sanja Singer, Saša Singer : *Numerička analiza*, PMF Zagreb, 2003.
- [Dyn, 2001] N. Dyn, D. Leviatan, D. Levin, and A. Pinkus, *Multivariate Approximation and Applications*, Eds. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [Encke, 1830] J. F. Encke, *Über interpolation*, Berliner Astronomisches Jahrbuch, vol. 55, pp. 265–284, 1830.
- [Euler, 1783] L. Euler, *De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina*, in *Opuscula Analytica Petropoli*, vol. 1, Academia Imperialis Scientiarum, pp. 157–210, 1783.
- [Everett, 1900] J. D. Everett, *On a central-difference interpolation formula*, Rep. Br. Assoc. Adv. Sci., vol. 70, pp. 648–650, 1900.

- [Everett, 1901] Everett , *On a new interpolation formula*, J. Inst. Actuar., vol. 35, pp. 452–458, 1901.
- [Farin, 1988] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: A Practical Guide*, Boston, MA: Academic, 1988.
- [Ferrar, 1926] W. L. Ferrar, *On the cardinal function of interpolation-theory*, in Proc. R. Soc. Edinburgh, vol. 46, pp. 323–333, 1926.
- [Fraser1, 1927] D. C. Fraser, *Newton's Interpolation Formulas*, London, U.K.: C. & E. Layton, 1927.
- [Fraser2, 1927] D. C. Fraser, *Newton and interpolation*, in Isaac Newton 1642–1727: A Memorial Volume, W. J. Greenstreet, Ed. London, U.K.: Bell, pp. 45–69, 1927
- [Gardner, 1988] W.A. Gardner, *Statistical spectral analysis*, Prentice Hall, New Jersey, 1988.
- [Gauss, 1866] C. F. Gauss, *Theoria interpolationis methodo nova tractata*, in Werke. Göttingen, Germany: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, vol. III, pp. 265–327, 1866.
- [Gonzalez, 1993] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Digital Image Processing*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1993.
- [Gregory, 1939] J. Gregory, *Letter to J. Collins (23 november 1670)*, in James Gregory Tercentenary Memorial Volume, H. W. Turnbull, Ed. London, U.K.: Bell, pp. 118–137, 1939.
- [Greville, 1944] T. N. E. Greville, *The General Theory of Osculatory Interpolation*, Trans. of the Actuarial Society of America, Vol. 45, pp. 202-265, 1944.
- [Gupta, 1969] R. C. Gupta, *Second order interpolation in Indian mathematics up to the fifteenth century*, Ind. J. Hist. Sci., vol. 4, no. 1–2, pp. 86–98, 1969.
- [Hamming, 1973] R. W. Hamming, *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, 2nd

- ed. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [Hanssen, 1999] R. Hanssen, R. Bamler, *Evaluation of Interpolation Kernels for SAR Interferometry*, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 37, no.1, pp. 318-321, Jan. 1999
- [Hermite, 1878] C. Hermite, *Sur la formule d'interpolation de Lagrange*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, vol. 84, no. 1, pp. 70–79, 1878.
- [Higgins, 1985] J. R. Higgins, *Five short stories about the cardinal series*, Bull. Amer. Math. Soc. New Ser., vol. 12, no. 1, pp. 45–89, 1985.
- [Higgins, 1996] J. R. Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis*, Foundations Oxford, U.K., Clarendon, 1996.
- [Hollannd, 1979] A. S. B. Holland and B. N. Sahney, *The General Problem of Approximation and Spline Functions*. Melbourne, FL: Krieger, 1979.
- [Hussain, 2002] Z. M. Hussain, B. Boashash, *Adaptive instantaneous frequency estimation of multicomponent signals using quadratic timefrequency distributions*, IEEE Trans. Signal Process., Vol 50 , No 8, pp.1866–1876, 2002.
- [Janer, 1995] L. Janer, *A modulated gaussian wavelet transform based speech analyser pitch determination algorithm*, in Proc. EUROSPEECH 1995, Madrid, Spain, pp. 405 –407, Sept. 1995.
- [Jenkins, 1927] W. A. Jenkins, *Graduation based on a modification of osculatory interpolation*, Trans. Actuar. Soc. Amer., vol. 28, pp. 198–215, 1927.
- [Jerri, 1977] A. J. Jerri, *The Shannon sampling theorem—its various extensions and applications: A tutorial review*, Proc. IEEE, vol. 65, pp. 1565–1596, Nov. 1977.
- [Joen, 2003] B. Joen, S. Kang, S. J. Baek, K. M. Sung, *Filtering of a Dissonant Frequency Based on Improved Fundamental Frequency Estimation for Speech Enhancement*, IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E86-A, No. 8, pp. 2063-2064, August 2003.

- [Joffe, 1917] S. A. Joffe, *Interpolation-formulae and central-difference notation*, Trans. Actuar. Soc. Amer., vol. 18, pp. 72–98, 1917
- [Jones, 1989] R. H. Jones and N. C. Steele, *Mathematics in Communication Theory*. Chichester, U.K.: Ellis Horwood, 1989.
- [Kacha, 2005] A. Kacha, F. Grenez, K. Benmahammed, *Time–frequency analysis and instantaneous frequency estimation using two-sided linear prediction*, IEEE Signal Processing, Vol. 85, pp. 491-503, 2005.
- [Kang, 2004] S. Kang, *Dissonant frequency filtering technique for improving perceptual quality of noisy speech and husky voice*, Signal Processing 84, pp. 431-433, 2004.
- [Kang, 2006] S. Kang, Y. Kim, *A Dissonant Frequency Filtering for Enhanced Clarity of Husky Voice Signals*, Lecture Notes Comp Science, 4188, Berlin, Springer, 2006.
- [Karup, 1899] J. Karup, *Über eine neue mechanische Ausgleichungsmethode*, in Transactions of the Second International Actuarial Congress, G. King, Ed. London, U.K.: Layton, pp. 31–77, 1899.
- [Kawahara, 2002] C. Kawahara, *YIN, a fundamental frequency estimator for speech and music*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 111, No. 4, pp. 1917–1930, 2002.
- [Kennedy, 1997] E. S. Kennedy, *The Chinese-Uighur calendar as described in the Islamic sources*, in Science and Technology in East Asia, N. Sivin, Ed. New York: Science History, pp. 191–199, 1977.
- [Keys, 1981] R. G. Keys, *Cubic convolution interpolation for digital image processing*, IEEE Trans. Acout. Speech, & Signal Processing, vol. ASSP-29, pp. 1153-1160, Dec. 1981.
- [King, 1907] King, *Notes on summation formulas of graduation, with certain new formulas for consideration*, J. Inst. Actuar., vol. 41, pp. 530–565, 1907.

- [Klapuri, 2003] A. Klapuri, *Multiple fundamental frequency estimation based on harmonicity and spectral smoothness*, IEEE Transactions On Audio, Speech, And Language Processing, Vol. 11, No. 6, pp. 804–816, 2003.
- [Knockaert, 2008] L. Knockaert, D. D. Zutter and T. Dhaene *Adaptive Interpolation Based on Polya Frequency Functions*, IEEE Trans. On Signal Processing, vol. 56, No.10, pp. 4683-4691, Oct. 2008.
- [Knuth, 1979] D. E. Knuth, *TEX and METAFONT: New Directions in Typesetting*. Bedford, MA: American Mathematical Soc., 1979.
- [Kocinski, 2016] J. Kocinski, E. Ozimek, *Speech Recognition in an Enclosure with a Long Reverberation Time*, Archives of acoustics, vol. 41, no. 2, pp. 255–264, 2016.
- [Kotel'nikov, 2000] V. A. Kotel'nikov, *On the transmission capacity of the "ether" and wire in electrocommunications*, in *Modern Sampling Theory*, Mathematics and Applications, J. J. Benedetto and P. J. S. G. Ferreira, Eds. Boston, MA: Birkhäuser, ch. 2, pp. 27–45, 2000
- [Kronecker, 1865] L. Kronecker, *Über einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrer Variabeln*, Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, pp. 686–691, 1865
- [Lagrange, 1877] J. L. Lagrange, *Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'école normale*, in *Œuvres de Lagrange*, J.-A. Serret, Ed. Paris, France: Gauthier-Villars, vol. 7, pp. 183–287, 1877.
- [Lancaster, 1986] P. Lancaster and K. Salkauskas, *Curve and Surface Fitting: An Introduction*. New York: Academic, 1986
- [Laplace, 1894] P. S. de Laplace, *Mémoire sur les suites (1779)*, in *Œuvres Complètes de Laplace*. Paris, France: Gauthier-Villars et Fils, vol. 10, pp. 1–89. [63] , *Théorie Anal*, 1894.
- [Liu, 2001] D. J. Liu and C. T. Lin, *Fundamental frequency estimation on the joint*

- time-frequency analysis of harmonic spectral structure*, IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, vol. 9, pp. 609 – 621, Sep. 2001.
- [Lüke, 1978] H. D. Lüke, *Zur Entstehung des Abtasttheorems*, Nach.tech. Zeit., vol. 31, no. 4, pp. 271–274, 1978.
- [Lund, 1992] J. Lund and K. L. Bowers, *Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations*. Philadelphia, PA: SIAM, 1992.
- [Marks, 1991] R. J. Marks II, *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1991
- [Marsh, 1999] D. Marsh, *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1999..
- [Martzloff, 1997] J. C. Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1997.
- [Meijering, 1999] E. Meijering, K. Zuiderveld, M. Viergever, *Image Reconstruction by Convolution with Simetrical Piecewise nth-Order Polynomial Kernels*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 8, no. 2, pp. 192-201, Feb. 1999.
- [Meijering, 2002] E. Meijering, *A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing*, Proceedings of the IEEE, vol. 90, no. 3, pp. 319-342. 2002.
- [Meijering, 2003] E. Meijering, M. Unser, *A Note on Cubic Convolution Interpolation*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 12, no. 4, pp. 447-479, April 2003.
- [Milivojević, -] Z. Milivojević, N. Savić, D. Brodić: *Three-parametric cubic convolution kernel for estimating the fundamental frequency of the speech signal*, Computing and Informatics (prihvaćen za objavljivanje).
- [Milivojević, 2004] Z. Milivojević, M. Mirkovic, P. Rajković, *Estimating of the fundamental frequency by the using of the parametric cubic convolution interpolation*,

- Proceedings of International Scientific Conference UNITECH, 2004, pp. 138-141, Gabrovo, Bulgaria, 2004.
- [Milivojević, 2011] Z. Milivojević, D. Brodić, *Estimation of the fundamental frequency of the speech signal compressed by G.723.1 algorithm applying PCC interpolation*, Journal of Electrical Engineering, vol. 62, no. 4, pp. 181-189, 2011.
- [Milivojević, 2013] Z. Milivojević, D. Brodić, *Estimation Of The Fundamental Frequency Of The Real Speech Signal Compressed By MP3 Algorithm*, Archives of Acoustics, vol. 38. No. 3, pp. 363-373, 2013.
- [Milivojević1, 2010] Z. Milivojević, M. Mirković, S. Milivojević, *Fundamental Frequency Estimation of The Speech Signal Compressed by MP3 Algorithm Using PCC Interpolation*, Advances in Electrical and Computer Engineering AECE, Vol. 10, No. 1, pp. 18-22, 2010.
- [Milivojević1, 2015] Z. Milivojević, N. Savić, D. Brodić, *Primena Polya parametarskog konvolucionog jezgra kod procene fundamentalne frekvencije u spektralnom domenu*, INFOTEH JAHORINA, vol. 14, pp. 355-360, Mart 2015.
- [Milivojević1, 2016] Z. Milivojević, N. Savić, Z. Veličković, D. Brodić, *Optimizacija parametra Kejsovog interpolacionog jezgra u spektralnom domenu*, Sekc. Računarske primene, pp. 280-285, Zbornik radova YU INFO 2016
- [Milivojević2, 2010] Z. Milivojević, N. Savić, *Procena fundamentalne frekvencije govornog signala komprimovanog G.723.1 algoritmom PCC interpolacijom*, Informacione tehnologije, Žabljak, Crna Gora, str. 71-74, 2010.
- [Milivojević2, 2015] Milivojević, Z. Veličković, D. Brodić, *Komparativna analiza preciznosti procene fundamentalne frekvencije interpolacionim jezgrima trećeg i petog reda*, INFOFEST 2015, pp. 208-218, 2015.
- [Milivojević2, 2016] Z. Milivojević, N. Savić, D. Brodić, P. Rajković, *Optimizacija parametara Kejsovog dvoparametarskog konvolucionog jezgra u spektralnom domenu*, XV Internacional Scientific-Professional Symposium INFOTEH-Jahorina 2016.

- [Milivojević, 2016] Z. Milivojević, N. Savić, Z. Veličković, D. Brodić, *Estimating optimal value of parameter IP Keys kernel by DSC algorithm*, Proceedings of International Scientific Conference UNITECH, 2016, pp. 151-155, Gabrovo, Bulgaria, 2016.
- [Milovanović, 1985] G. Milovanović, *Numerička analiza II deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1985.
- [Mirković, 2004] M. Mirković, Z. Milivojević and P. Rajković, *Performances of the system with the implemented PCC algorithm for the fundamental frequency estimation*, XII Telecommunications Forum TELFOR '04, Sec. 7. Signal processing, Beograd, 2004
- [Newton, 1959] I. Newton, *Letter to J. Smith (8 may 1675)*, in The Correspondence of Isaac Newton, H. W. Turnbull, Ed. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, vol. I, pp. 342–345, 1959.
- [Newton, 1960] I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (in English), in Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World. Berkeley, CA, F. Cajori 1960.
- [Newton, 1981] I. Newton, *Methodus differentialis*, in The Mathematical Papers of Isaac Newton, D. T. Whiteside, Ed. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, vol. VIII, ch. 4, pp. 236–257, 1981.
- [Nürnberger, 1989] G. Nürnberger, *Approximation by Spline Functions*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.
- [Nyquist, 1928] H. Nyquist, *Certain topics in telegraph transmission theory*, Trans. Amer. Inst. Electr. Eng., vol. 47, pp. 617–644, 1928.
- [Ogura, 1920] K. Ogura, *On a certain transcendental integral function in the theory of interpolation*, Thoku Math. J., vol. 17, pp. 64–72, 1920.
- [Oppenheim, 1975] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975.

- [Pang, 2000] H.S. Pang, S.J. Baek, K.M. Sung, *Improved Fundamental Frequency Estimation Using Parametric Cubic Convolution*, IEICE Trans. Fundamentals, vol. E83-A, No. 12, pp. 2747-2750, Dec. 2000.
- [Park, 1983] K. S. Park, R. A. Schowengerdt, *Image reconstruction by parametric cubic convolution*, Computer Vision, Graphics & Image Processing, vol. 23, pp. 258-272, 1983.
- [Pianykh, 2012] O. Pianykh, *Finitely-Supported L_2 Optimal Kernels for Digital Signal Interpolation*, IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 60, no. 1, pp. 494-498, Jan. 2012.
- [Prabhu, 2013] K. M. Prabhu, *Window Functions and Their Applications in Signal Processing*, CRC Press, 2013.
- [Prenter, 1975] P. M. Prenter, *Splines and Variational Methods*. New York: Wiley, 1975.
- [Raabe, 1939] H. Raabe, *Untersuchungen an der wechselzeitigen Mehrfachübertragung (Multiplexübertragung)*,” Elektr. Nach.tech., vol. 16, no. 8, pp. 213–228, 1939.
- [Rabiner, 1997] L. Rabiner, *On the use of autocorrelation analysis for pitch detection*, IEEE Transactions On Acoustic, Speech, Signal Processing, vol. ASSP-25, No. 1, pp. 24–33, 1997.
- [Radunović, 2003] D. Radunović, *Numeričke metode*, Akademska misao, Beograd, 2003.
- [Rifman, 1973] S. S. Rifman, *Digital rectification of ERTS multispectral imagery*, in Proc Symp. Significant Results Obtained From the Earth Resources Tehnology Satellite-1, vol 1, sec. B pp. 1131-1142, 1973.
- [Samad, 2000] S. A. Samad, A. Hussain, and L. K. Fah, *Pitch detection of speech signals using the cross-correlation technique*, in Proc. TENCON, vol. 1, pp. 283–286, 2000.
- [Savić 5, 2016] N. Savić, Z. Milivojević, *Optimizacija parametara kvadratnog IP konvolucionog jezgra minimiziranjem talasavosti spektralne karakter-*

- istike*, Visoka tehnička škola, Niš, str. 33-36, 2016.
- [Savić1, 2014] N. Savić, Z. Milivojević, D. Brodić, *Analiza efikasnosti kvadratnih konvolucionih jezgara kod procene frekvencije signala*, Informacione tehnologije, Žabljak, Crna Gora, pp. 56-59, 2014.
- [Savić1, 2015] N. Savić, Z. Milivojević, D. Blagojević *Procena fundamentalne frekvencije pomoću kvazi-racionalnog Polya interpolacionog jezgra*, Zbornik radova YU INFO 2015, pp. 411-416, 2015.
- [Savić1, 2016] N. Savić, Z. Milivojević, D. Blagojević, D. Brodić, *Optimizacija parametra Greville-ovog interpolacionog jezgra u spektralnom domenu*, Informacione tehnologije, Žabljak, Crna Gora, 2016.
- [Savić2, 2014] N. Savić, Z. Milivojević, D. Brodić, *Estimation of frequency of a signal by means of interpolation with a quadratic convolution kernel*, ETF Journal of Electrical Engineering, vol. 20, pp. 40-49, 2014.
- [Savić2, 2015] N. Savić, Z. Milivojević, *Analiza efikasnosti Polya racionalnog parametarskog interpolacionog jezgra kod procene fundamentalne frekvencije*, Zbornik IT'15, pp.132-136, 2015.
- [Savić2, 2016] N. Savić, Z. Milivojević, Z. Veličković, D. Brodić *Optimization of the parameter of 2P Keys interpolation kernel according to the criterion of similarity to sinc function in the spectral domain*, ICEST 2016, proceedings of papers 51st International scientific conference on information, communication and energy systems and technologies, Ohrid, Macedonia, -28 □ 30 June 2016.
- [Savić3, 2015] N. Savić, Z. Milivojević, D. Blagojević, D. Brodić, *Estimation of the fundamental frequency of speech signal by means of parametric quasi-rational Polya kernel*, Proceedings of The international scientific conference Unitech Gabrovo, Vol.2, pp. 119-125, 2015.
- [Savić3, 2016] N. Savić, Z. Milivojević, D. Blagojević, D. Brodić, *The slope of spectral characteristics as an optimality criteria for 1P Keys kernel*, XXIII Festi-

val of information technology achievements, Conference INFOFEST PULSE 2016.

- [Savić4, 2016] N. Savić, Z. Milivojević, D. Blagojević, D. Brodić, *Comparative analysis of the optimization criteria of Grevilles one-parametric interpolation kernel*, ETF Jurnal of Electrical Eng., vol. 22, pp. 43-58, 2016.
- [Schoenberg, 1938] I. J. Schoenberg, *Metric spaces and completely monotone functions*,“ IEEE , Ann. Math., Vol.39, pp. 811-841, 1938.
- [Schoenberg, 1951] I. J. Schoenberg, *On totally positive functions, Laplace integrals and entire functions of the Laguerre-Polya Schur type*, J.d . Ann. Math., Vol.1, pp. 331-374, 1951.
- [Schoenberg, 1969] I. J. Schoenberg, *Cardinal interpolation and spline functions*, J. Approx. Theory, vol. 2, no. 2, pp. 167–206, 1969
- [Schoenberg, 1973] I. J. Schoenberg, *Cardinal Spline Interpolation*. Philadelphia, PA: SIAM, 1973.
- [Schoenberg1, 1946] I. J. Schoenberg, *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A—on the problem of smoothing or graduation. A first class of analytic approximation formulae*, Quart. Appl. Math., vol. IV, no. 1, pp. 45–99, 1946.
- [Schoenberg2, 1946] I. J. Schoenberg, *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions, Part B—on the problem of osculatory interpolation. A second class of analytic approximation formulae*, Quart. Appl. Math., vol. IV, no. 2, pp. 112–141, 1946.
- [Schroeder, 1968] M. R. Schroeder, *Period histogram and product spectrum: New methods for fundamental-frequency measurement*, J. Acoust. Soc. Amer., vol. 43, no. 4, pp. 829–834, Apr. 1968.
- [Schumaker, 1981] L. L. Schumaker, *Spline Functions: Basic Theory*. New York: Wiley, 1981.

- [Shahnaz, 2012] C. Shahnaz, W. Zhu, M. Ahmad, *Pitch Estimation Based on a Harmonic Sinusoidal Autocorrelation Model and a Time-Domain Matching Scheme*, IEEE Transactions On Audio, Speech, And Language Processing, Vol. 20, No. 1, pp. 310-323, 2012.
- [Shanmugam, 1979] K. S. Shanmugam, *Digital and Analog Communication Systems*. New York: Wiley, 1979.
- [Shannon, 1948] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell Syst. Tech. J., vol. 27, pp. 379–423, 1948.
- [Shannon, 1949] C. E. Shannon, *Communication in the presence of noise*, Proc. Inst. Radio. Shisha, Eng., vol. 37, no. 1, pp. 10–21, 1949.
- [Shimamura, 2001] T. Shimamura and H. Kobayashi, *Weighted autocorrelation for pitch extraction of noisy speech*, IEEE Transactions on Speech and Audio Processing, vol. 9, pp. 727 – 730, Oct. 2001.
- [Simon, 1975] K. W. Simon, *Digital image reconstruction and resampling for geometric manipulation*, in Symp. On Machine Process. Of Remotely Sensed Data ,IEEE Pre pp.3A-1-3 A-11, 1975.
- [Someya, 1949] I. Someya, *Waveform Transmission* (in Japanese). Tokyo, Japan: Shyukyoo, 1949.
- [Späth1, 1995] H. Späth, *One Dimensional Spline Interpolation Algorithms*, Wellesley, MA: A. K. Peters, 1995.
- [Späth2, 1995] H. Späth, *Two Dimensional Spline Interpolation Algorithms*, Wellesley, MA: A. K. Peters, 1995.
- [Stenger, 1981] F. Stenger, *Numerical methods based on Whittaker cardinal, or sinc functions*, SIAM Rev., vol. 23, no. 2, pp. 165–224, 1981.
- [Stenger, 1993] F. Stenger, *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1993.

- [Stirling, 1719] J. Stirling, *Methodus differentialis Newtoniana illustrata*, Philos. Trans., vol. 30, no. 362, pp. 1050–1070, 1719.
- [Subotić, 2012] Lj. Subotić, D. Sredojević, I. Bjelaković, *Fonetika i fonologija: ortoep-ska i ortografska norma standardnog srpskog jezika*, Filozofski fakultet, Novi Sad, 2012.
- [Thiele, 1909] T. N. Thiele, *Interpolationsrechnung*, Leipzig, Germany: B. G. Teubner, 1909.
- [Toomer, 1978] G. J. Toomer, *Hipparchus* in Dictionary of Scientific Biography, C. C. Gillispie and F. L. Holmes, Eds. New York: Scribner, vol. XV, pp. 207–224, 1978.
- [Veprek, 2002] P. Veprek, M. Scordilis, *Analysis, enhancement and evaluation of five pitch determination techniques*, Speech Communication, Vol. 37, No. 3–4, pp. 249–270, 2002.
- [Wahba, 1990] G. Wahba, *Spline Models for Observational Data*. Philadelphia, PA: SIAM, 1990.
- [Wallis, 1772] J. Wallis, *Arithmetica Infinitorum*, Hildesheim, Germany: Olms Verlag, 1972.
- [Waring, 1779] E. Waring, *Problems concerning interpolations*, Philos. Trans. R. Soc. London, vol. 69, pp. 59–67, 1779.
- [Weierstrass, 1885] K. Weierstrass, *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente*, in Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin ,pp. 633/789–639/805.
- [Weston, 1949] J. D. Weston, *A note on the theory of communication*, London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., ser. 7, vol. 40, no. 303, pp. 449–453, 1949.

-
- [Whittaker, 1915] E. T. Whittaker, *On the functions which are represented by the expansions of interpolation theory*, in Proc. R. Soc. Edinburgh, vol. 35, pp. 181–194, 1915.
- [Whittaker, 1927-1929] J. M. Whittaker, *On the cardinal function of interpolation theory*, in Proc. Edinburgh Math. Soc., vol. 1, pp. 41–46, 1927–1929.
- [Whittaker, 1935] J. M. Whittaker, *Interpolatory function theory*, in Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics. Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1935.
- [Yan, 1987] L. Yan and D. Shírán, *Chinese Mathematics: A Concise History*. Oxford, U.K.: Clarendon, 1987.
- [Yarman, 2006] B. Yarman, U. Guz, H. Gurkan, *On the comparative results of SYMPES: A new method of speech modeling*, International Journal of Electronics and Communications (AEU), vol. 60, pp. 421-427, 2006.

Biografija autora

Nataša Savić rođena je 14. 12. 1965. godine u Prokuplju. Osnovnu i srednju školu završila je u Nišu. Filozofski fakultet u Nišu, Grupa za Matematiku završila je 1993. godine. Specijalističke studije na Filozofskom fakultetu u Nišu, na Grupi za matematiku upisala je 1994./95., a završila 1996. godine i odbranila specijalistički rad pod nazivom: "Funkcionalni račun u Banahovim algebrama". Stručni ispit za profesora matematike položila je 1998. godine. Magistarske studije na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Nišu završila je 2012. godine sa prosečnom ocenom 9.86 i odbranila magistarsku tezu "*Funkcije generatriše i Riordanovi nizovi sa primenom na Hankelove determinante i kombinatorna interpretacija*".

Školske 1993./94. radila je u Osnovnoj školi "Jastrebački partizani" u Merošini, a potom u Osnovnoj školi "Učitelj Tasa" u Nišu.

Od novembra 1994. godine radi na Visokoj tehničkoj školi u Nišu kao stručni saradnik za matematiku. Od 1999. godine do sada radi kao predavač. Predaje Matematiku i Nacrtnu geometriju.

Autor je do sada iz oblasti teme publikovao radove:

Radovi u međunarodnim časopisima (SCI) (M23)

1. Z. Milivojević, N. Savić, D. Brodić: *Three-parametric cubic convolution kernel for estimating the fundamental frequency of the speech signal*, Computing and Informatics (prihvaćen za objavljivanje)

Status rada

<http://www.cai.sk/ojs/index.php/cai/author/submissionReview/2506>

Potvrda o prihvatanju

<http://www.cai.sk/ojs/index.php/cai/author/viewEditorDecisionComments/2506#1202>

Radovi u časopisima nacionalnog značaja (M50)

1. N. Savić, Z. Milivojević, D. Brodić: *Estimation of the fundamental frequency of a signal by means of interpolation with a quadratic convolution kernel*, ETF Journal of Electrical Engineering, Vol. 20, pp. 40-49, 2014. (M52)

http://www.jee.ac.me/index.php?id=20_2014

2. **N. Savić**, Z. Milivojević, V. Moračanin:, *The analysis of the efficiency of Polya rational parametric interpolation kernel in estimating the fundamental frequency of the speech signal*, ETF Journal of Electrical Engineering, Vol. 21, pp. 59-73, 2015. **(M52)**

http://www.jee.ac.me/index.php?id=21_2015

3. **N. Savić**, Z. Milivojević, D. Blagojević, D. Brodić, *Comparative analysis of the optimization criteria of Grevilles one- parametric interpolation kernel*, ETF Jurnal of Electrical Eng., vol. 22, pp. 43-58, 2016. **(M52)**

http://www.jee.ac.me/index.php?id=22_2016

Radovi saopšteni na skupovima međunarodnog značaja štampani u celini (M30)

1. **N. Savić**, Z. Milivojević, D. Blagojević, D. Brodić: *Estimation of the fundamental frequency of speech signal by means of parametric quasi-rational Polya kernel*, Proceedings of The international scientific conference Unitech Gabrovo, Vol.2, pp. 119-125, 2015. **(M33)**

<http://eprints.ugd.edu.mk/14589/2/programaGabrovo15.pdf>

2. Z. Milivojević, **N. Savić**, Z. Veličković, D. Brodić, *Estimating optimal value of parameter 1P Keys kernel by DSC algorithm*, Proceedings of International Scientific Conference UNITECH, 2016, pp. 151-155, Gabrovo, Bulgaria, 2016. **(M33)**

<http://unitech.tugab.bg/docs/doc100.pdf>

3. **N. Savić**, Z. Milivojević, Z. Veličković, D. Brodić *Optimization of the parameter of 2P Keys interpolation kernel according to the criterion of similarity to sinc function in the spectral domain*, ICEST 2016, proceedings of papers 51st International scientific conference on information, communication and energy systems and technologies, Ohrid, Macedonia, -28 - 30 June 2016. **(M33)**

<http://icestconf.org/wp-content/uploads/2016/proceedings/ICEST2016.pdf>

4. Z. Milivojević, **N. Savić**, D. Brodić: *Primena Polya parametarskog konvolucionog jezgra kod procene fundamentalne frekvencije u spektralnom domenu*, Infoteh Jahorina Vol.14, str. 355-360, 2015. **(M33)**

<http://infoteh.etf.unssa.rs.ba/zbornik/2015/radovi/KST/KST-13.pdf>

5. Z. Milivojević, **N. Savić**, D. Brodić, P. Rajković: *Optimizacija parametara Kejsovog dvoparametarskog konvolucionog jezgra u spektralnom domenu*, Infoteh Jahorina 2016. **(M33)**

<http://infoteh.etf.unssa.rs.ba/zbornik/2016/radovi/KST-3/KST-3-12.pdf>

Radovi saopšteni na skupu nacionalnog značaja štampani u celini (M60)

1. Z. Milivojević, **N. Savić**: *Procena fundamentalne frekvencije govornog signala komprimovanog G.723.1 algoritmom PCC interpolacijom*, Informacione tehnologije, Žabljak, Crna Gora, str. 71-74, 2010. **(M63)**

<http://www.it.ac.me/zbornici/ZbornikIT10.pdf>

2. **N. Savić**, Z. Milivojević, D. Blagojević: *Procena fundamentalne frekvencije pomoću kvaziracionalnog Polya interpolacionog jezgra*, YU INFO, sekcija Primenjena informatika str. 411-416, Kopaonik, 2015. **(M63)**

<http://yuinfo.artkey.rs/YUINFO%202015%20zbornik.pdf>

3. **N. Savić**, Z. Milivojević, D. Brodić: *Analiza efikasnosti kvadratnih konvolucionih jezgara kod procene frekvencije signala*, Informacione tehnologije, Žabljak, Crna Gora, str. 56-59, 2014. **(M63)**

<http://www.it.ac.me/zbornici/ZbornikIT14.pdf>

4. **N. Savić**, Z. Milivojević, V. Moračanin: *Analiza efikasnosti Polya racionalnog parametarskog interpolacionog jezgra kod procene fundamentalne frekvencije*, Informacione tehnologije, Žabljak, Crna Gora, str. 132-135, 2015. **(M63)**

<http://www.it.ac.me/zbornici/ZBORNIK%20IT15%20FIN.pdf>

5. **N. Savić**, Z. Milivojević: *Analiza efikasnosti parametarskih interpolacionih konvolucionih jezgara kod procene fundamentalne frekvencije signala*, Visoka tehnička škola, Niš, str. 16-19, 2015. **(M63)**

http://www.vtsnis.edu.rs/naucno_istrazivacki_rad/zbornik_vtsnis/zbornik_2015/05_Zbornik_2015_N_Savic_Z_Milivojevic.pdf

6. Z. Milivojević, **N. Savić**, Zoran Veličković, D. Brodić: *Optimizacija parametra Kejsovog interpolacionog jezgra u spektralnom domenu*, YU INFO 2016, sekcija Računarske primene Kopaonik, str. 280-286, 2016. **(M63)**

<http://yuinfo.artkey.rs/zbornici/2016/YUINFO2016.pdf>

8. **N. Savić**, Z. Milivojević, D. Blagojević, D. Brodić : *Optimizacija parametra Greville-ovog interpolacionog jezgra u spektralnom domenu*, Informacione tehnologije, Žabljak, Crna Gora, 2016. **(M63)**

<http://www.it.ac.me/zbornici/ZbornikIT16.pdf>

9. **N. Savić**, Z. Milivojevic, D. Blagojevic, D. Brodic, *Nagib spektralne karakteristike kao kriterijum optimalnosti 1P Kejsovog jezgra*, XXIII Festival of information technology achievements, Conference INFOFEST PULSE 2016. **(M63)**

<https://www.infofest.com/odabrani-radovi/>

10. **N. Savić**, Z. Milivojević, *Optimizacija parametara kvadratnog 1P konvolucionog jezgra minimiziranjem talasavosti spektralne karakteristike*, Visoka tehnička škola, Niš, str. 33-36, 2016. **(M63)**

http://www.vtsnis.edu.rs/naucno_istrazivacki_rad/zbornik_vtsnis/zbornik_vtsnis_2016.html

Prilog 1.

Izjava o autorstvu

Potpisana **mr Nataša Savić**

broj indeksa **1/2014**

Izjavljujem

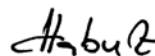
da je doktorska disertacija pod naslovom

**Optimizacija parametara tro-parametarskog kubnog interpolacionog jezgra za procenu
fundamentalne frekvencije govornog signala u spektralnom domenu**

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koj diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio/la autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 5. 5. 2017



Prilog 2.

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora: **mr Nataša Savić**

Broj indeksa: **1/14**

SP: Fakulte za matematiku i računarske nauke

Naslov rada **Optimizacija parametara tro-parametarskog kubnog interpolacionog jezgra za procenu fundamentalne frekvencije govornog signala u spektralnom domenu**

Mentor **prof. dr Zoran Milivojević**

Potpisana mr Nataša Savić

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao/la za objavljivanje na portalu **Digitalnog repozitorijuma Univerziteta**.

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 5. 5. 2017

AKB

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Alfa Bk Univerzitet da u Digitalni repozitorijum Univerziteta unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom: **Optimizacija parametara tro-parametarskog kubnog interpolacionog jezgra za procenu fundamentalne frekvencije govornog signala u spektralnom domenu**

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim prilogima predao/la sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalnom repozitorijumu Univerziteta, dostavljenu repozitorijumu Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije i dostupnu u otvorenom pristupu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo (CC BY)
2. Autorstvo – nekomercijalno (CC BY-NC)
3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada (CC BY-NC-ND)
4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima (CC BY-NC-SA)
5. Autorstvo – bez prerada (CC BY-ND)
6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima (CC BY-SA)

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci.

Kratak opis licenci je sastavni deo ove izjave).

Potpis autora

U Beogradu, 5. 5. 2012



1. **Autorstvo.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.

2. **Autorstvo – nekomercijalno.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

3. **Autorstvo – nekomercijalno – bez prerada.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.

4. **Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.

5. **Autorstvo – bez prerada.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

6. **Autorstvo – deliti pod istim uslovima.** Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.