

## Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета у Београду донетом на седници одржаној 04.10.2013. именовани смо у комисију за преглед и оцену рукописа

### *О неким трансмисионим проблемима у дисјунктним областима,*

који је **Зорица Миловановић**, дипломирани математичар - мастер из Београда, поднела као своју докторску дисертацију. Након прегледа рукописа подносимо Наставно-научном већу следећи

## ИЗВЕШТАЈ

### Биографија докторанткиње

Зорица Миловановић се уписала на Математички факултет у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, 2000. године. Дипломирала је 2006. године и стекла звање Дипломирани математичар. На мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација уписала се 2007. године. Мастер рад под насловом *Проблеми сопствених вредности који садрже Диракову дистрибуцију* одбранила је 8. фебруара 2008. године, под менторством проф. др Бошка Јовановића, чиме је стекла звање Дипломирани математичар - мастер. На докторске студије на Математичком факултету у Београду, одсек Математика, уписала се 2009. године.

Зорица Миловановић је до 2008. године радила на Математичком факултету у Београду као истраживач приправник на научном пројекту под називом "Примена европских поступака за израчунавање потребне и одређивање дозвољене специфичне потрошње енергије за грејање нових и постојећих стамбених зграда", Министарства науке и заштите животне средине. Тренутно је запослена на Факултету за градитељски менаџмент Универзитета Унион – Никола Тесла у Београду. У звању асистента на Факултету за градитељски менаџмент држала је вежбе из следећих курсева: *Математика 1, 2 и 3* (одсек – опште грађевинарство), *Математика* (одсек – архитектура и урбанизам). Поред Факултета за градитељски менаџмент, на истом Универзитету држала је вежбе из следећих курсева: *Математика* (Факултет за екологију и заштиту животне средине), *Пословна матема-тика*, *Пословна статистика* (Факултет за предузетнички бизнис), *Економска матема-тика*, *Статистика* (Факултет за менаџмент некретнина). У фебруару 2013. године постала је спољни сарадник Математичког института САНУ у Београду.

### Предмет дисертације

Рукопис се бави трансмисионим проблемима чија су решења дефинисана у две (или више) раздвојених и неповезаних области. Таква ситуација настаје, на пример, ако је

решење у међуобласти познато, или се може одредити решавањем једноставнијег проблема. Ефекат деловања међуобласти може се моделовати помоћу нелокалних услова сагласности на границама посматраних подобласти.

Овакви проблеми се често јављају у пољима физике и технике. На пример, разматрана област се може састојати од више слојева материјала, чије се особине могу међусобно знатно разликовати. Слојеви могу имати структурну, термичку, електромагнетску или оптичку улогу итд. Математичким моделовањем преноса енергије и масе у областима са слојевима добијају се тзв. трансмисиони проблеми. Трансмисиони проблеми у дисјунктним областима представљају се системима парцијалних диференцијалних једначина са додатним условима (почетни и гранични услови, услови сагласности).

## **Приказ дисертације и њених главних доприноса**

Рукопис је сложен на рачунару, има 140 (11+125+4) страница и састоји се из следећих поглавља:

1. Моделни проблеми
2. Математички апарат
3. Трансмисиони спектрални проблем
4. Трансмисиони проблем за једначине елиптичког типа
5. Трансмисиони проблем за једначине параболичког типа

уз Предговор, Закључак, Списак литературе и Биографију докторанткиње.

Прво поглавље је уводног карактера. У њему су представљени моделни трансмисиони проблеми у једнодимензионом и дводимензионом случају као и примери реалних трансмисионих проблема.

У другом поглављу представљени су основни појмови и резултати (без доказа) из теорије линеарних оператора, теорије функционалних простора и теорије диференцијских схема који се користе у даљем раду.

У трећем поглављу представљен је трансмисиони спектрални проблем у једнодимензионом случају. Као моделни пример узета је област која се састоји од два несуседна интервала. У свакој подобласти задат је Штурм-Лиувилев проблем са граничним условима Робиновог типа (у спољашњим граничним тачкама) и нелокалним условима сагласности Робин-Дирихлеовог типа (у унутрашњим граничним тачкама). Доказана је егзистенција и јединственост слабих сопствених вредности и сопствених елемената. Описана је структура спектра и асимптотско понашање низа сопствених вредности. Изведена је нумеричка апроксимација методом коначних разлика.

У четвртном поглављу разматра се елиптички трансмисиони проблем у две строго дисјунктне, неповезане правоугаоне области. У свакој подобласти задат је гранични проблем елиптичког типа, при чему се интеракција између њихових решења описује нелокалним условима сагласности Робин-Дирихлеовог типа. Претпостављено је да коефицијенти задатих једначина задовољавају услове регуларности и елиптичности који омогућавају постојање генералисаних решења у одговарајућим просторима Собољева. Доказана је егзистенција и јединственост решења коришћењем метода функционалне анализе и теорије парцијалних диференцијалних једначина (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, лема Лакса-Милграма итд). Извршена је нумеричка апроксимација методом коначних разлика и конструисана оцена брзине

конвергенције. Добијена оцена брзине конвергенције је сагласна с глаткошћу улазних података и у том смислу је оптимална, то јест при датој глаткости улазних података не може се повећати ред конвергенције, нити се при фиксираном реду конвергенције могу ослабити захтеви глаткости. Размотрен је случај некоерцивности билинеарне форме и изведена одговарајућа априорна оцена. Показано је да под извесним допунским претпоставкама и у овом случају важе претходно добијени резултати. Приликом конструкције методе коначних разлика и испитивања њених особина коришћене су методе теорије диференцијских схема (простори функција дискретног аргумента, метода енергетских неједнакости итд). За извођење оцено брзине конвергенције коришћене су методе теорије диференцијских схема, као и методе теорије функционалних простора (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, простори мултипликатора, интегралне репрезентације, лема Брамбла-Хилберта итд).

У петом поглављу разматра се параболички трансмисиони проблем у две строго дисјунктне, неповезане квадратне области. У свакој подобласти задат је почетно-гранични проблем параболичког типа, при чему се интеракција између њихових решења описује нелокалним условима сагласности Робин-Дирихлеовог типа. Претпостављено је да коефицијенти задатих једначина задовољавају услове регуларности и елиптичности који омогућавају постојање генерализаних решења у одговарајућим просторима Собољева. Доказана је егзистенција и јединственост решења коришћењем метода функционалне анализе и теорије парцијалних диференцијалних једначина (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, лема Лакса-Милграма итд). Изведена је нумеричка апроксимација методом коначних разлика, при чему је коришћена експлицитна диференцијска схема. Конструисана је оцена брзине конвергенције која је, слично као у елиптичком случају, сагласна с глаткошћу улазних података. Добијени теоријски резултати су тестирани на нумеричким примерима. Приликом конструкције методе коначних разлика и испитивања њених особина коришћене су методе теорије диференцијских схема (простори функција дискретног аргумента, метода енергетских неједнакости итд). За извођење оцено брзине конвергенције коришћене су методе теорије диференцијских схема, као и методе теорије функционалних простора (простори Собољева, теореме потапања, теореме о трагу, простори мултипликатора, интегралне репрезентације, лема Брамбла-Хилберта итд). Имплементација метода коначних разлика реализована је у програмском окружењу *Матлаб*. У последњем одељку је размотрена факторизована схема која обједињује добре особине експлицитне и имплицитне схеме – економичност и стабилност. Показано је да и за овакву схему важи раније изведена оцена брзине конвергенције (сагласна с глаткошћу улазних података).

Закључак рада дат је у шестом поглављу.

Списак литературе састоји се од 40 библиографских јединица, од којих су шест самоцитати, тј. радови докторанткиње.

## **Референце генерисане у току рада на дисертацији**

Резултати приказани у овом рукопису публиковани су у

- два коауторска рада у часописима са SCI листе,
- једном самосталном раду у домаћем часопису,
- два самостална рада у зборницима међународних скупова (серијске публикације),
- једном коауторском раду у међународном часопису ван SCI листе:

1. B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović, *Numerical approximation of 2D parabolic transmission problem in disjoint domains*, Applied Mathematics and Computation 228 (2014), pp. 508-519, Elsevier.  
ISSN: 0096-3003, IF 1.600, M21 Mathematics, Applied
2. B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović, *Finite difference approximation of a parabolic problem with variable coefficients*, Publ. Inst. Math. 95(109), (2014), pp. 49-62.  
ISSN 0350-1302, IF 0.152, M23 Mathematics
3. Z.D. Milovanović, *Elliptic transmission problem in disjoint domains*, Matematički vesnik 66, No 4 (2014), pp. 418-429.  
ISSN 0025-5165
4. Z.D. Milovanović, *Finite difference scheme for a parabolic transmission problem in disjoint domains*, Numerical Analysis and Its Applications 2012, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8236 (2013), pp. 403-410, Springer.  
ISSN 0302-9743, Naši u WOS
5. Z.D. Milovanović, *Convergence of a finite difference scheme for a parabolic transmission problem in disjoint domains*, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 13 (2013), pp. 433-434, Wiley.  
ISSN 1617-7061
6. A.M. Delić, B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović, *On the transmission eigenvalue problem in disjoint domains*, Comput. Methods Appl. Math., Vol. 11, No. 4 (2011), pp. 407-417, De Gruyter.  
ISSN 1609-4840

## Закључак

Рукопис *О неким трансмисионим проблемима у дисјунктним областима* садржи вредан научни допринос у области нумеричких метода решавања диференцијалних једначина. У њему је детаљно размотрена једна нестандартна класа контурних проблема, како са теоријског, тако и са нумеричког аспекта. Рад је написан на солидном математичком нивоу. Резултати добијени у овом рукопису приказани су у шест публикованих научних радова. Констатујемо да су испуњени сви циљеви наведени приликом предлагања теме дисертације, као и сви формални захтеви.

Имајући у виду наведено, предлажемо Научно-наставном већу Математичког факултета да рад Зорице Миловановић *О неким трансмисионим проблемима у дисјунктним областима* **прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за њену јавну одбрану.**

Београд, 04.03.2015.

### Чланови комисије:

---

др Бошко Јовановић, ментор, редовни професор  
Математичког факултета у Београду

---

академик Градимир Миловановић,  
Математички институт САНУ

---

др Десанка Радуновић, ванредни професор  
Математичког факултета у Београду

## Додатак

### Референце Зорице Миловановић

#### Мастер рад

Зорица Д. Миловановић: *Проблеми сопствених вредности који садрже Диракову дистрибуцију*, одбрањен на Математичком факултету Универзитета у Београду 2008. године (ментор: проф. др Бошко Јовановић).

#### Публиковани научни радови

1. B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović, *Numerical approximation of 2D Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains*, Applied Mathematics and Computation 228 (2014), pp. 508-519.
2. B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović, *Finite Difference Approximation of a Parabolic Problem with variable coefficients*, Publ. Inst. Math. 95(109), (2014), pp. 49-62.
3. Z.D. Milovanović, *Elliptic Transmission Problem in Disjoint Domains*, Matematički vesnik 66, No 4 (2014), pp. 418-429.
4. Z.D. Milovanović, *Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains*, Numerical Analysis and Its Applications 2012, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 8236 (2013), pp. 403-410, Springer.
5. Z.D. Milovanović, *Convergence of a Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains*, Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 13 (2013), pp. 433-434, Wiley.
6. A.M. Delić, B.S. Jovanović, Z.D. Milovanović, *On the transmission eigenvalue problem in disjoint domains*, Comput. Methods Appl. Math., Vol. 11, No. 4 (2011), pp. 407-417, De Gruyter.
7. Z.D. Milovanovic, B.S. Jovanovic, *About some spectral problems containing Dirac distribution*, Proc. of XVIII Conference on Applied Mathematics (PRIM 2009) held in Subotica (Serbia) 2009, University of Novi Sad, Faculty of Sciences, DMI, Novi Sad 2010, pp. 31-38.

#### Саопштења на научним скуповима

1. XVIII Seminar primenjene matematike (PIPM 2009), sa izlaganjem: "About Some Spectral Problems Containing Dirac Distribution", Subotica, 2009.
2. Pannonian Mathematical Modeling International Conference (PAMM 2011), sa izlaganjem: "About Transmission Eigenvalue Problem in Disjoint Domains", Novi Sad, Serbia, April 29-30, 2011.
3. NAA'12: Fifth International Conference on Numerical Analysis and Applications, sa izlaganjem: "Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains", Lozenetz, Bulgaria, June 15-20, 2012.
4. GAMM 2013: 84<sup>th</sup> Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics, sa izlaganjem: "Convergence of a Finite Difference Scheme for a Parabolic Transmission Problem in Disjoint Domains", Novi Sad, Serbia, March 18-22, 2013.
5. XIII Serbian Mathematical Congress, sa izlaganjem: "Numerical approximation of 2D elliptic transmission problem in disjoint domains", Vrnjačka Banja, Serbia, May 22-25, 2014.
6. Sixth Conference on Finite Difference Method: Theory and Applications, sa izlaganjem: "The transmission problem for elliptic second order equations in disjoint domains", Lozenetz, Bulgaria, June 18-23, 2014.

## **Учешће на пројектима фундаменталних и интердисциплинарних истраживања Министарства Републике Србије**

1. "Примена европских поступака за израчунавање потребне и одређивање дозвољене специфичне потрошње енергије за грејање нових и постојећих стамбених зграда", Министарство науке и заштите животне средине, 2006-2008.
2. "Енергетска ефикасност при концепцијском решавању искоришћења обновљивих ресурса у функцији одрживог развоја", Министарство науке, 2008-2011.
3. "Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене", Министарство просвете, науке и технолошког развоја, 2011- .
4. "Развој, пројектовање и имплементација савремених стратегија интегрисаног управљања оперативним радом и одржавањем возила и механизације", Министарство просвете, науке и технолошког развоја, 2011-2014.