УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ФИЛОЗОФСКИ ФАКУЛТЕТ

Катарина Р. Максимовић

ИНТЕНЗИОНАЛНОСТ И ПОЈАМ АЛГОРИТМА

Докторска дисертација

Београд, 2022

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF PHILOSOPHY

Katarina R. Maksimović

INTENSIONALITY AND THE NOTION OF ALGORITHM

Doctoral dissertation

Belgrade, 2022

ПОДАЦИ О МЕНТОРУ И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ

МЕНТОР:

Др Милош Аџић, доцент

Универзитет у Београду

Филозофски факултет

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

Др Живан Лазовић, редовни професор

Универзитет у Београду

Филозофски факултет

Др Зоран Петрић, научни саветник

Математички институт

САНУ

Датум одбране:

ИЗЈАВА ЗАХВАЛНОСТИ

Желим да се захвалим пре свега свом ментору др Милошу Аџићу на корисним коментарима, дискусијама и бесконачном стрпљењу. Такође желим да се захвалим проф. Зорану Петрићу, проф. Слободану Вујошевићу, проф. Петеру Шредер-Хајстеру (Peter Schroeder-Heister), др Томасу Пихи (Thomas Piecha), др Паолу Пистонеу (Paolo Pistone), др Мајклу Арндту (Michael Arndt) и свим драгим људима који су својим питањима, предлозима, критикама и интересовањем за овај рад допринели његовом настанку. И на крају, желим да се захвалим проф. Кости Дошену због тога што нас није учио свету какав јесте, него какав треба да буде.

НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Интензионалност и појам алгоритма

РЕЗИМЕ

Екстензионални приступ проблему значења заснован је на претпоставци да се значење речи или већих језичких целина састоји искључиво у томе шта означавају. Са друге стране, интензионалним семантичким приступом можемо назвати онај у којем се значење не своди искључиво на његове референцијалне аспекте, већ се узима у обзир и семантички садржај. Иако на изглед наивно, екстензионално схватање значења је оно које превладава у логици, док је интензионално у великој мери занемарено. Разлика између интензионалног и екстензионалног у филозофији није нова. Међутим, често није била довољно јасно и прецизно дефинисана. Један од циљева овог рада је да одговоримо на питање шта би то значило дати интензионалну анализу појма у логици и математици. Такође ћемо показати да интензионално схватање значења има предности у односу на екстензионално у решавању неких појмовних проблема који се у логици јављају. Један од њих је проблем одређења појма алгоритма и њиме ћемо се у овом раду бавити.

Прво поглавље је уводно и служи да пружи историјски и филозофски оквир за питања којима ћемо се бавити у каснијим поглављима. У првом делу тог поглавља указаћемо на неке од разлога који су довели до тога да у логици и математици екстензионално схватање значења постане доминантно. У другом делу разматраћемо неке примере појмова које у логици које, како ћемо показати, разумемо на интензионалан начин. Најважнији од њих је појам дедукције и њиме се бави општа теорија доказа. Један од централних питања те теорије је питање у чему се састоји смисао формалног извођења. Према тој теорији, смисао извођења се састоји у томе *како* се закључак дедукује из хипотеза. Он се дакле састоји у самој дедукцији. Значење појма дедукције у општој теорији доказа одређујемо тако што дефинишемо услове под којима можемо рећи да два извођења имају исти смисао. Проблем налажења тих услова се назива проблемом једнакости доказа и он представља једну од централних тема те теорије. О проблему једнакости доказа, интензионалном приступу у општој теорији доказа, као и о резултатима коју су на њему засновани детаљније ћемо да говоримо у другом поглављу.

Један од главних циљева овог рада је да тај приступ покушамо да применимо на проблем одређења појма алгоритма. Алгоритам је појам који је врло значајан не само за логику већ и за теоријско рачунарство. Међутим, наше разумевање алгоритама је донекле још неформално, тај појам није сасвим прецизно дефинисан. Иако о том проблему није до сада пуно писано, он је добио на популарности током последње две деценије посебно захваљујући радовима математичара Јаниса Московакиса (Yiannis Moschovakis).

Московакис је о проблему одређења појма алгоритма писао у многим својим радовима. Он је аргументовао како можемо наћи одговарајућу дефиницију алгоритма само ако тај појам схватимо интензионално. У трећем поглављу ћемо рећи нешто више о тим аргументима. Такође ћемо приказати и критички испитати дефиницију алгоритма коју Московакис даје. Та дефиниција заснива се на појму рекурзора о којем ће у том поглављу бити нешто више речи. Као што је проблем једнакости доказа један од главних питања у општој теорији доказа, тако и Московакисова појмовна анализа питању једнакости алгоритама даје централно место. То питање ће и за нас бити од кључне важности и оно се може изразити на следећи начин: Када можемо рећи да су два алгоритма представљају исту процедуру израчунавања? У трећем поглављу ћемо видети како изгледа Московакисово решење тог проблема. Показаћемо, међутим, да критеријум једнакости алгоритама који он предлаже поседује значајна ограничења.

У четвртом и последњем поглављу показаћемо како се појам алгоритма може анализирати унутар ламбда рачуна. Ламбда рачун је формални систем заснован на схватању појма функције као правила повезивања. Овај једнакосни рачун кога је открио Алонзо Черч (Alonzo Church) тридесетих година прошлог века значајан је пре свега као формализација појма ефективне израчунљивости. Као што су показали Тјуринг (Alan Turing) и Клини (Stephen Kleene), функције које се могу на одређен начин представити у ламбда рачуну су све и само рекурзивне функције односно све и само функције које можемо израчунати помоћу Тјурингове машине. У четвртом поглављу ћемо показати како помоћу ламбда рачуна можемо да представимо не само све израчунљиве функције већ и алгоритме којима их израчунавамо. Решење које ћемо предложити има ту предност што проблем једнакости алгоритама своди на питање једнакости одговарајућих ламбда терама. У четвртом поглављу ћемо разматрати више различитих критеријума једнакости за алгоритме. У оквиру тих разматрања дефинисаћемо и неке нове једнакости између ламбда терама.

Кључне речи: алгоритам, једнакост алгоритама, интензионалност, једнакост интензија, ламбда рачун, општа теорија доказа, једнакост доказа, рекурзор

НАУЧНА ОБЛАСТ: Филозофија

УЖА НАУЧНА ОБЛАСТ: Филозофија математике, логика

DOCTORAL DISSERTATION TITLE:

Intensionality and the notion of algorithm

SUMMARY:

The extensional approach to meaning is based on the assumption that the meaning of words and larger linguistic compounds consists entirely in what they signify. On the other hand, the intensional approach is the one where meaning is not reduced in such a manner to its referential aspects, the semantical content is also seen as important. Although seemingly naive, the extensional view of meaning is dominant in logic, while the intensional has mostly been neglected. The difference between extensional and intensional is not new in philosophy. However, it often hasn't been defined clearly and precisely enough. One of the aims of this work is to explain what it means to give an intensional analysis of a concept in logic and mathematics. We will also show that the intensional approach may be advantageous in these disciplines when it comes to solving certain conceptual problems. One of these problems that we are particularly interested in is the problem of defining the concept of algorithm.

The first chapter is introductory and provides a historical and philosophical background for the questions we aim to answer in the remaining chapters. In the first part of that introduction, we will point to some of the reasons that led to the extensional view becoming prevalent in logic. In the second part, we will consider some examples of notions in logic that are understood intensionally. The most important of these is the concept of proof which is the subject matter of general proof theory. One of the central questions in this theory is the question of *the sense* of a formal derivation. According to this theory, the sense of a derivation is a deduction - *how* we derive the conclusion from the given hypothesis. The meaning of the concept of deduction is then defined by determining the conditions under which two derivations have the same sense. The problem of determining these conditions is called the problem of *proof identity* and it is the central topic of general proof theory. In the second chapter, we will talk in more detail about the problem of proof identity, the intensional approach in general proof theory, and about the results that are based on it.

One of the main aims of this work is to apply this approach to the problem of defining the notion of algorithm. An algorithm is a concept that is significant not just for logic but for computer science as well. Although not that many authors have written about it, it has gained some attention in the last two decades or so, especially thanks to the work of the mathematician Yiannis Moschovakis. Moschovakis has written about this problem in detail in many of his works. He has argued that to give an adequate definition of an algorithm one needs to understand this

concept intensionally. We are going to say something more about these arguments in the third chapter. There we will present and evaluate Moschovakis' definition of an algorithm and his views on algorithms in general. That definition is based on the concept of recursor that we will introduce in the same chapter. While in general proof theory the analysis of the concept of proof is based on the problem of proof identity, Moschovakis' approach revolves around the problem of algorithm identity. That problem is one of the main topics of this work and it can be expressed in the following way. When can one say that two algorithms represent the same computational procedure? In the third chapter of this work, we are going to present Moschovakis' solution to this problem. However, as we will show, the identity criteria proposed by Moschovakis have considerable limitations.

In the fourth and final chapter we show how the concept of an algorithm can be analyzed inside the lambda calculus. The lambda calculus is a formal system that is based on the concept of function seen as a rule of correspondence. This equality calculus was discovered by Alonzo Church in the 1930s. Its significance consists primarily in the formalization of the notion of effective calculability. As shown by Turing and Kleene, functions that are representable in the lambda calculus are exactly the recursive functions, that is, the functions that can be calculated by a Turing machine. In this chapter, we will show how we can represent not only computable functions inside lambda calculus but also algorithms that we used to calculate them. According to our proposal, the problem of algorithm equality is thus reduced to the question of the equality of the appropriate terms in the lambda calculus. In the last chapter, we consider several different equality criteria. We also define some new equalities between lambda terms.

Key words: algorithm, algorithm identity, intensionality, intension identity, lambda calculus, general proof theory, proof identity, recursor

SCIENTIFIC FIELD: Philosophy

FIELD OF STUDY: Philosophy of mathematics, logic

Садржај

Поглавље 1

ПРОБЛЕМ ИНТЕНЗИОНАЛНЕ АНАЛИЗЕ

1.1. Увод

Разлика између интензионалног и екстензионалног којом ћемо се у овом раду бавити ослања се на познату дистинкцију у филозофији која потиче од Готлоба Фрегеа (*Gottlob Frege*). То је дистинкција између онога што Фреге назива *Sinn* а што се може превести као *смисао* и онога што назива *Bedeutung* а што се у овом контексту може превести речју *референција.* [1] Смисао и референција представљају два различита аспекта значења. Када се питамо *Шта P означава? На шта се P односи?* тада нас занима референција израза P. Са друге стране, када желимо да сазнамо смисао P-а питамо се *Шта P изражава? Који је његов семантички садржај?*

На основу дистинкције између смисла и референције, можемо разликовати два приступа у појмовној анализи, па и у било којој врсти семантичких разматрања. Први приступ, који је дуго доминантан посебно у логици па и математици уопште, за главне узима референцијалне компоненте значења. Смисао неког израза се занемарује, и његово се значење своди на то шта тај израз означава. Према овом семантичком гледишту које ћемо звати *екстензионалним*, два израза посматрамо као синониме ако поседују исту референцију. Они се схватају такорећи као етикете чија улога није да изражавају неки садржај, већ само да означавају одређене објекте. Са друге стране, имамо *интензионални* приступ значењу. То је приступ који узима у обзир не само референцију, већ и садржај односно *смисао* језичких израза. Према овом становишту, синонимност два израза не исцрпљује се у једнакости њихове референције, потребно је још да ти изрази имају и исти садржај.

Док је екстензионални приступ проблему значења доминантан у логици као и модерној математици, интензионални приступ је у овим областима прилично занемарен,

[1] У зборнику *Огледи о језику и значењу* [Павковић, Лазовић, 1992] где је Фрегеов текст [Frege, 1982] преведен, уместо референција, реч *Bedeutng* се преводи са *номинатум*, што значи оно што је именовано или означено.

што је посебно очигледно у теорији скупова и теорији модела. У овом, уводном поглављу покушаћемо да расветлимо неке од разлога који су до тога довели. Међутим, показаћемо како схватање значења у логици и математици није само екстензионално. Области као што су *општа теорија доказа*, *теорија категорија* и *интуционистичка логика* показују да се интензионални аспекти значења неких појмова важних за логику и математику могу подједнако добро као и екстензионални описати прецизним формалним средствима. Један од тих појмова је појам *доказа* о којем ћемо говорити у наставку овог, уводног дела, али и детаљније у другом поглављу. Резултати опште теорије доказа ће нам помоћи да боље разумемо интензионални приступ значењу математичких појмова и да увидимо због чега је он значајан и користан. По узору на анализу појма доказа дату у општој теорији доказа, у трећем и четвртом поглављу ћемо пружити интензионалну анализу једног другог појма који је такође од централне важности за логику. То је појам *алгоритма*.

До краја овог уводног поглавља, упознаћемо читаоца са историјском позадином као и филозофским значајем разлике између интензионалног и екстензионалног. Почећемо са Фрегеовом становиштима на којима је она заснована.

1.2. Смисао и референција

Иако се разлика између екстензије (опсега) неког појма и његове интензије (садржаја) помиње и раније у филозофији, јасну дистинкцију између смисла и референције први је увео Фреге у раду *О смислу и референцији* (нем. *Über Sinn und Bedeutung*) [Frege, 1892]. Референцију језичког израза P он тамо дефинише као ентитет или колекцију ентитета које P означава, издваја или именује. На пример, референција имена Сократ је особа - чувени филозоф чија су становишта описана у Платоновим делима. Референција предиката *бити паметан* се може разумети као скуп паметних људи или ствари, а референција исказа као његова истиносна вредност. [2][3]

[2] Фреге разуме унарне предикате као функције које сликају објекте у истиносне вредности. Он одређује референцију унарног предиката као опсег вредности (*value range*) функције коју представља, што је веома блиско појму графа функције [Frege, 1891, p. 23]. Према томе, референција предиката *бити паметан* на скупу {Марко, Јован, Јованова мачка} би био на пример {(Марко, истина), (Јован, истина), (Јованова мачка, лаж)}. Из тога скупа једноставно можемо издвојити скуп {Марко, Јован} као скуп објеката у домену који су паметни и њега посматрати као референцију овог предиката.

[3] Истиносне вредности Фреге сматра објектима.

Према Фрегеовом мишљењу, значење делова језика као што су имена, предикати или искази се не исцрпљује у њиховој референцијалној улози, они такође *изражавају* одређени садржај. Тај садржај је оно што Фреге назива *смислом*. Примера ради, смисао предиката *бити паметан* је појам на основу којег називамо особу или ствар паметном. Смисао имена *Сократ* је оно по чему разликујемо Сократа од других људи, као што је на пример чињеница да је био познати филозоф који је учио Платона. Са друге стране, смисао неког исказа Фреге схвата као *мисао*.

> "Под речју мисао не подразумевам субјективни акт мишљења, већ његов објективни садржај који може да буде заједнички неколицини субјеката."
> [Frege 1892, p. 28]

За Фрегеа је било јако важно да се мисао, односно њен објективни садржај, разлучи од субјективног акта мишљења. У [Frege, 1892, p. 27] он наглашава да се смисао било ког језичког израза разликује од *представе* (нем. *die Vorstellung*) коју он може побудити. По његовом мишљењу, представа је само траг односно сећање на искуства чулних утисака или поступака, и као таква мора бити субјективна. Иста реч код различитих људи, а понекад и код истих људи у различитим контекстима, може побуђивати различите представе – менталне слике или емоције које са њом повезујемо. На пример, реч *дрво* може изазвати другачије представе код столара, биолога и песника. То указује како оне не чине објективан садржај коју та реч изражава, већ то представља *појам* дрвета. Фреге закључује како је тај појам, а не представа коју са њим повезујемо оно што конституише смисао речи *дрво*.

Фреге је увео појам смисла да би решио одређене проблеме у филозофији језика. Главно питање које се поставља у [Frege, 1892] тиче се проблема идентитета: *Шта изражавају искази идентитета? Да ли је идентитет релација између ствари или између имена*? Трагање за одговорима на та и слична питања било је мотивисано, барем делимично, становиштима Фрегеових савременика са којима се он није слагао. Наиме, они су тврдили да искази као што је $2 \times 2 = 2^2$ нису прави искази идентитета, као што је то на пример $4 = 4$. Њихови аргументи углавном су се заснивали на синтаксним разликама између израза који стоје са леве и са десне стране једнакости. Чињеница да се у изразу 2×2 позивамо на операцију множења, а у изразу 2^2 на операцију степеновања је, према овом гледишту, била довољна да оправда закључак да $2 \times 2 = 2^2$ не треба сматрати исказом идентитета у истом смислу у којем је то исказ $4 = 4$, видети [Frege, 1891, p. 19; Klement 2002, p. 8].

Фреге је то критиковао аргументујући да искази облика $a=b$ тврде идентитет *референције* језичких израза a и b, а не идентитет самих тих израза [Frege, 1891, p. 19]. Он уочава да оно што тврдимо када кажемо $4 = 4$ или $2 \times 2 = 2^2$ није синтаксна једнакост израза са леве и десне стране знака једнакости, већ једнакост бројева које ти изрази означавају. Али, овде Фреге примећује наредни проблем. Ако се исказима $2 \times 2 = 2^2$ и $4 = 4$ тврди једнакост броја 4 са самим собом, како то да исказ $2 \times 2 = 2^2$ није тривијално истинит као што је то $4 = 4$, већ до његовог сазнања морамо доћи израчунавањем? Исто питање поставља се и за исказе као што су *Зорњача = Вечерњача* и *Зорњача = Зорњача*. *Зорњача* је назив за небеско тело које се јавља на истоку пре изласка сунца, а *Вечерњача* за небеско тело које се јавља на западу уочи заласка. Оба поменута исказа су истинита, јер и *Зорњача* и *Вечерњача* означавају исти објекат – планету Венеру. Међутим, ако се првим исказом тврди исто што и другим (то да је планета Венера једнака самој себи), због чега је само први информативан, док је други очигледно истинит свакоме ко разуме значење знака „=“? Сазнање да је *Зорњача = Зорњача* јесте непосредно сазнање. Са друге стране, сазнање да је Венера једно те исто небеско тело које се појављује на истоку пре изласка сунца и на западу уочи заласка представљало је астрономско откриће.

На поменути проблем Фреге одговара позивајући се на дистинкцију између смисла и референције. Исказима идентитета не тврди се просто једнакост објеката, већ једнакост референције језичких израза. Примера ради, када кажемо *Зорњача = Вечерњача* ми тиме не тврдимо да је једна планета једнака самој себи већ хоћемо да кажемо како два имена означавају исти објекат. Према Фрегеовом мишљењу, исказ *Зорњача = Зорњача* чини тривијалним то што једнаки изрази морају имати једнаку референцију. Са друге стране, исказ *Зорњача = Вечерњача* није тривијалан већ информативан због тога што *Зорњача* и *Вечерњача* имају другачији *смисао*. Објаснимо то мало детаљније.

Изразе као што су *Зорњача, Вечерњача,* 2×2 или 2^2 Фреге назива *именима*. Појам *имена* код Фрегеа шири је од онога што се подразумева под појмом властитог имена природног језика као што су Јован, Петар, Марко, Сократ, као и од онога што се подразумева под појмом *индивидуалне константе* у логици. Фрегеов појам имена је можда најприближнији појму *затвореног терма* у логици (терма без слободних промењљивих). Свака дескрипција или опис који једнозначно одређује референта те дескрипције, попут израза *Платонов учитељ*, 2×2 или *Зорњача* може се сматрати именом. [4]

Будући да је основна улога имена у томе да представља, односно означава неки објекат, смисао имена се према Фрегеу састоји у *начину представљања* (нем. *die Art des Gegebenseins*). У [Frege 1892, p. 25] Фреге каже:

> "Ако се знак $'a'$ разликује од знака $'b'$ само као предмет (овде по свом спољашњем облику), не као знак (то ће рећи, не због начина на који нешто означава), сазнајна вредност исказа $a = a$ ће у суштини бити једнака вредности исказа $a = b$ (у случају када је $a = b$ истинито). Нека разлика се ту може јавити само ако разлика у знаковима одговара разлици у начину приказивања означених предмета. Нека a, b, c буду праве које повезују темена троугла са средишњим тачкама њима супротних страна. Тачка пресека a и b је тада иста као и тачка пресека b и c. Имамо, дакле, различите ознаке за једну исту тачку, а ова имена ('тачка пресека a и b', 'тачка пресека b и c') истовремено указују и на начин представљања (означених предмета)." [5]

У датом примеру, имамо два имена која поседују различит смисао. Прво је *тачка пресек а a и b,* а друго је *тачка пресека b и c.* Та два имена реферирају на исту тачку у простору. Своју референцију, међутим, они представљају на различите начине, јер указују на другачије услове под којима би се она могла одредити. У првом случају, поменуту тачку одређујемо позивајући се на пресек правих a и b, а у другом случају на пресек правих b *и* c. Дакле, смисао неког имена је за Фрегеа везан за опис или начин на који је именовани предмет приказан. То је нешто на основу чега одређујемо његову референцију. Када схватимо смисао имена, разумемо и како, у принципу, да издвојимо именовани објекат [Лазовић, 1992, p 9].

Према Фрегеовом схватању, имена као што су *Зорњача* и *Вечерњача* се разликују по смислу иако издвајају исти објекат, због тога што то чине на различите начине. Име *Зорњача* означава Венеру као небеско тело које се јавља на истоку пре изласка сунца, а име *Вечерњача* означава Венеру као небеско тело које се јавља на западу уочи заласка.

---

[4] У логици терми могу да садрже слободне променљиве као на пример $x + x$, али њихова денотације није фиксирана, већ зависи од интерпретације - од тога коју ћемо вредност да припишемо променљивој x.

[5] Превод преузет из [Павковић и Лазовић, 1992, p. 35].

Слично се може рећи и за изразе као што су 2×2 и 2^2. Оба се односе на број 4, али док први реферира на њега као на резултат множења броја 2 са самим собом, 2^2 реферира на број 4 као на резултат степеновања 2 са самим собом.

Увођење појма смисла имена као начина представљања омогућава Фрегеу да објасни откуда информативна разлика између истинитих исказа облика $a=b$ и оних облика $a=a$. Као што смо рекли, исказе идентитета чини истинитим то што имена са леве и десне стране означавају исти објекат. Међутим, то да ли је исказ идентитета информативан не зависи од тога да ли имена са десне и леве стране једнакости имају исту *референцију*, већ од тога да ли имају исти *смисао*, односно да ли на исти начин представљају дати објекат. Дакле, иако имена a и b означавају или представљају исти објекат, истинит исказ облика $a=b$ неће бити тривијалан већ информативан ако имена a и b тај објекат представљају на различите начине.

Према становишту које је заступао Фреге, а које смо овде представили у кратким цртама, смисао и референција представљају два независна аспекта значења. Фреге је сматрао да једнакост референције два израза неће увек пратити и једнакост њиховог смисла. У наставку ћемо представити једну другачију семантичку перспективу, ону која је постала камен темељац неких од најзначајнијих идеја у логици и математици уопште, а посебно у теорији скупова. Реч је о екстензионалном приступу значењу.

1.3. Екстензионална револуција

Према екстензионалном приступу, значење неког језичког израза своди се на референцију, на то шта тај израз означава. Његов смисао се при том занемарује. Овај приступ значењу превладава у логици. Део логике који се бави проблемом значења назива се *семантиком*. Док се синтакса бави формалним језицима и формалним системима, семантика се бави њиховом интерпретацијом. Класична *моделско-теоријска* семантика значење схвата у потпуности на екстензионалан начин. У њој делове формалног језика интерпретирамо тако што им приписујемо одређене објекте. Релација између израза и тога што он значи посматра се по узору на релацију између етикете и објекта који је њоме означен. Индивидуалне константе, предикати, искази, и везници су делови формалног језика који припадају различитим синтаксним категоријама.

Семантички гледано, сви ови изрази се у класичној логици посматрају као етикете за различите скуповно-теоријске објекте, као што су скупови, релације или функције.

Рекли смо да је референција исказа код Фрегеа истиносна вредност, док његов смисао представља мисао коју изражава. Ако прихватимо то становиште, можемо рећи да се значење исказа у класичној исказној логици своди на његову референцију. У семантици за класичну исказну логику исказ може значити само две ствари: истину или лаж. Истиносне вредности разумемо као некакве посебне скупове. Истиносна вредност *лаж* се представља празним скупом, док се истиносна вредност *истина* интерпретира синглтоном чији је једини елемент празан скуп.

Дакле, значења исказа се у класичној логици своде на само два објекта које можемо назвати 1 и 0, а можемо их звати и *истиносним вредностима*. У складу са тиме, значења логичких везника као што су *и, или, ако онда*, своде се на *истиносне функције* дефинисане на скупу истиносних вредности. Синтаксно гледано, везници су нешто што нам служи да помоћу исказа градимо нове исказе. Примера ради, ако имамо два исказа *Петар ће купити сладолед* и *Марко ће остати гладан*, везник као што је *или* моћи ће од та два исказа да изгради нови: *Петар ће купити сладолед или ће Марко остати гладан.* Гледано са семантичке стране, везници се посматрају као функције које одређују како значење сложеног исказа зависи од значења његових делова, односно простијих исказа из којих је он састављен. У класичној логици влада принцип истиносне фунцкионалности. Тај принцип нам каже да значење сложеног исказа, односно његова истиносна вредност зависи искључиво од истиносне вредности исказа из којих је он састављен. Пошто се значења исказа своде на истиносне вредности, везници се своде на истиносне фунцкије. Тако се значење везника *или*, на пример, своди на се функцију која од две истиносне вредности враћа већу, а значење везника *и* на функцију која од две истиносне вредности враћа мању.

Говорили смо о исказима и везницима и екстензионалном приступу у семантици за исказну логику. Сада ћемо рећи нешто и о екстензионалности у логици предиката. Екстензионално схватање значења у предикатској логици као и у моделско-теоријској семантици уопште, темељи се на разумевању појма скупа. Екстензионалност скупова у математици проистиче из критеријума идентитета за скупове. У теорији скупова два скупа су једнака ако и само ако имају исте чланове. То да је једнакост чланова нужан и довољан услов једнакости скупова је формално изражено једном од аксиома ZF (*Zermelo-Fraenkel*) формализације теорије скупова - *аксиомом екстензионалности*.

Аксиома екстензионалности говори нешто важно о значењу појма скупа. Њоме се апстрахује један, екстензионални аспект значења, док се други, интензионални, занемарује. Интуитивно говорећи, појам скупа би требало да садржи обе ове компоненте. Са једне стране, имамо екстензију, односно референцију неког скуповног израза. Она се састоји у томе који објекти овом скупу припадају. Са друге стане, имамо интензију или смисао који том скуповном изразу приписујемо. Он је заснован на правилима или својствима на основу којих се чланство у том скупу одређује.

Размотримо на пример два наредна скупа: скуп геометријских слика са три угла и скуп геометријских слика са три странице. Интуитивно говорећи, та два скуповна израза имају различито значење, они одређују два различита појма. *Имати три странице* не значи исто што и *имати три угла*. Међутим, заузимајући екстензионалну перспективу, ми апстрахујемо од тог појмовног садржаја. Не фокусирамо се на критеријуме за чланство у скупу, већ само на објекте који те критеријуме задовољавају. Једном када знамо о којим објектима је реч, критеријуме заборављамо и посматрамо само скупове одговарајућих објеката. Дакле, према аксиоми екстензионалности, скуп геометријских слика са три угла и скуп геометријских слика са три странице су једнаки јер њима припадају исти објекти – троуглови.

Као што се појам скупа у математици разуме екстензионално, исто је и са релацијама. Према интуитивном схватању релација, ако a и b стоје у некој релацији, онда су они повезани према неком правилу. У складу са тиме, очекивали бисмо да различита правила на основу којих можемо повезати a и b одређују различите релације. У математици, међутим, то није увек тако. Бинарну релацију између скупова A и B дефинишемо као подскуп њиховог Декартовог производа. Декартов производ скупова A и B представља скуп уређених парова (a,b) таквих да a припада скупу A и b припада скупу B. Последица тако одређеног појма релације је да ће две релације између A и B бити једнаке ако и само ако представљају исти скуп уређених парова. Објаснимо то на примеру. Нека $A = B = \{2,4,8\}$. Узмимо сада две бинарне релације које можемо да дефинишемо на овом скупу: *мањи од* и *дели*. У првој релацији стоје два броја ако је први мањи од другог или је њему једнак. У другој стоје два броја ако се други може поделити са првим без остатка. Јасно је да описи тих релација *значе* различите ствари. Међутим, екстензионално посматрано, те две релације биће једнаке на овом скупу бројева јер се састоје из истог скупа уређених парова: $\{(2,2),(2,4),(4,4),(2,8),(4,8),(8,8)\}$. Дакле, према схватању релација у математици, једном када знамо из којих уређених парова се нека релација састоји, сама *правила* на основу којих се чланови уређених парова у тој релацији повезују, више не играју никакву улогу.

Релацијама се служимо да у семантици предикатске логике интерпретирамо предикате. Синтаксно гледано, предикати су они делови језика који помоћу терама граде исказе. Појам терма овде нећемо прецизно дефинисати. Довољно је да схватимо терме као некаква уопштења имена. Предикат *бити паметан*, на пример, имену *Марко* придружује исказ *Марко је паметан*, а имену *Дара* исказ *Дара је паметна.* Овакве предикате називамо још и *унарним* због тога што *једном* имену придружују исказ. Постоје бинарни као и уопштено, n-арни предикати. Примери бинарних предиката су *бити већи од* (као у: 5 *је веће од* 4), *дели* (као у: 2 *дели* 4) *волети* (као у: *Марко воли Дару*), и тако даље.

У рачуну првог реда, n-арни предикати се интерпретирају n-арним релацијама, а унарни предикати се интерпретирају подскуповима на домену дискурса. Једноставно говорећи, интерпретација предиката је скуп објеката из домена на које се тај предикат истинито примењује. Објаснимо то на примеру. Нека наш домен буде скуп у коме се налазе три ђака основне школе, Јован, Петар и Марко. У логици, унарни предикат *имати 5 из математике* интерпретирамо на овом домену тако што побројимо ђаке из домена који имају 5 из математике и њих ставимо у скуп. Претпоставимо да само Јован има 5 из математике. Онда се овај предикат интерпретира синглтоном чији је члан Јован. Ако Јован и Марко имају 5 из математике онда се он интерпретира скупом чији су чланови Јован и Марко.

Скупове и релације дефинисане на одређеном домену можемо схватити као референције одговарајућих предиката – као објекте које они означавају. Идеју да референцију унарног предиката можемо схватити као скуп налазимо и код Фрегеа. Њему такође дугујемо идеју да смисао унарног предиката представља *појам* на основу којег се тај скуп формира. Ако је референција предиката одређени скуп, а његов смисао појам, онда је оправдано рећи да се у моделско-теоријској семантици не бавимо смислом, већ искључиво референцијом предиката. То постаје очигледно када уочимо да неке предикате различитог значења у логици интерпретирамо на исти начин. Узмимо два предиката, *волети сладолед са бананом* и *имати 5 из математике.* Интуитивно говорећи, ова два предиката не значе исто. То што неко воли сладолед са укусом банане *не значи* да има добру оцену из математике. Међутим, ако је Јован из домена горе једини ђак који има 5 из математике и једини који воли сладолед од банане, онда ова два предиката, логички гледано, значе исто на нашем домену. То је због тога што се значење предиката у семантици рачуна првог реда схвата екстензионално и та екстензионалност, како смо већ рекли, укорењена је пре свега у појму скупа.

Треба напоменути да екстензионални приступ значењу није нешто што је засновано на природном језику, већ представља донекле вештачку логичку конструкцију. [6] Значење предиката *волети сладолед од банане* се обично не своди на скуп љубитеља ове посластице. Значење бинарног предиката *волети се* обично се не своди на скуп парова људи који се међусобно воле. У обичном језику важне су обе компоненте значења, и смисао и референција. Другим речима, када говоримо о значењу неког израза обичног језика, не говоримо само о објектима које тај израз означава, или издваја, већ говоримо и о правилима на основу којих то чини.

Треба такође поменути да прихватање екстензионалног приступа у неким одређеним семантичким разматрањима, као на пример у семантици класичне логике, не повлачи да речи чијим се значењем тамо бавимо немају смисао нити да је њихов смисао ирелевантан за семантику природног језика. Прихватање екстензионалног приступа само значи да се интензионална компонента значења тих речи сматра ирелевантном за анализу појмова којима се у тим разматрањима бавимо. Примера ради, то што у семантици класичне логике прихватамо екстензионално тумачење предиката, не значи да прихватамо и то да предикати у обичном језику немају никакав смисао. Ми само посматрамо њихов смисао као ирелевантан за класичну логику.

Свођење значења неког израза на његову екстензију, или *екстензионализација његовог значења*, може се схватити као врста апстракције. Екстензионализацијом неког појма се апстрахује од интензионалних компоненти значења и тако се оне у потпуности занемарују. Важна нам је само екстензија. Апстракцију можемо упоредити са намерним, рационалним заборављањем [Došen, 1998, p. 9]. У једној појмовној анализи, ми свесно изостављамо, намерно заборављамо све аспекте тога појма који би се могли окарактерисати као субјективни, или који, Фрегеовим речима, спадају у домен

[6] Са могућим изузетком неких речи као што су властита имена или предикати као што је *бити плав*. Наиме, према екстензионалном схватању значења, предикати као што су *бити плав* интерпретирају се као скуп плавих ствари (на одређеном домену). Иако значење овог предиката интуитивно асоцирамо са импресијом плаве боје, та импресија се тешко може објаснити другачије него остензивно – показујући на објекат који ту импресију проузрокује. У том смислу, наше интуитивно разумевање тог предиката не удаљава се много од екстензионалног.

представе. [7] Концентришемо се само на оно што је објективно у његовом значењу. Екстензионална анализа је посебна врста појмовне анализе која у апстраховању иде и корак даље. Дакле, не занемарујемо само субјективни слој значења већ и онај који се тиче смисла. Као резултат те анализе, добијамо језгро значења које је сасвим поједностављено. Оно се своди само на референцију.

Један изванредан пример екстензионализације појма из обичног језика је откриће *материјалне импликације* [Došen, 2013, p. 26-27]. Материјална импликација или *класична импликација*, је логички везник који повезује два исказа A и B у исказ $A \Rightarrow B$, где се A назива *антецедерсом* а B *консеквенсом* импликације. Исказ облика $A \Rightarrow B$ треба читати као: *Ако* A *онда* B, A *имплицира* B или A *повлачи* B. У класичној логици $A \Rightarrow B$ је истинито ако и само ако је B истинито или A лажно. Имајући у виду да се значење везника у класичној логици посматра као истиносна функција, значење импликације ће, дакле, бити одређено на следећи начин: $A \Rightarrow B$ значи B *је истинито или је* A *лажно*.

Материјална импликација се може посматрати као резултат појмовне анализе везника *ако, онда* из обичног језика. Као што смо рекли, та анализа је екстензионална, јер значење *ако, онда* своди на истиносну функцију. Истини за вољу, материјална импликација делује прилично сведено и поједностављено у поређењу са импликацијом обичног језика. Тамо када тврдимо исказе облика *Ако A, онда B* ми обично претпостављамо да су A и B на неки начин повезани. Није сасвим јасно у чему се та веза тачно састоји, али чини се да некад може бити и узрочна, као на пример у исказу *Ако испустиш чашу, сломиће се*. Оно што се тим исказом тврди је да би сламање чаше било последица њеног испуштања. Код материјалне импликације овај сегмент значења се губи. Нас не занима да ли испуштање чаше узрокује њено сламање. Једино што нам је важно јесу истиносне вредности исказа у антецеденсу и консеквенсу. То је зато што се у класичној логици било каква веза између тих исказа која није истиносно-функционална сматра ирелевантном.

Разумевање везника *ако, онда* у класичној логици има за последицу да некад прихватамо као истините импликације које нам се у обичном језику чине неприхватљивим, или у најмању руку чудним. Примера ради, *Ако чаша почне да говори, сутра је среда* или *Ако Марко воли кајмак, орлови лете.* Први исказ би био истинит, јер

[7] У те аспекте значења неке речи могли бисмо да сврстамо уметнички дојам, индивидуалне асоцијације које та реч изазива код слушаоца и слично.

чаше не говоре, а други због тога што орлови лете. Оно због чега су ови искази чудни у обичном језику је што се чини да не постоји никаква повезаност између онога што је садржану у антецеденсу и онога што је садржано у консеквенсу.

Класична логика је истиносно-функционална у том смислу што значење (односно истиносна вредност) сложеног исказа зависи искључиво од значења (или истиносне вредности) исказа из којих је изграђен. Истиносна функционалност материјалне импликације и других везника у класичној логици огледа се у томе што истиносне вредности исказа које помоћу њих градимо једнозначно одређујемо захваљујући одговарајућим истиносним функцијама којима те везнике интерпретирамо. Заборављење везе између антецеденца и консеквенса је била цена коју смо платили да бисмо постигли истиносну функционалност импликације. Она нам је за узврат омогућила прецизност, јасноћу, потпуност као и одлучивост исказног рачуна, и његову једноставну алгебризацију. На примеру материјалне импликације можемо видети како једна позиција која полази од сасвим једноставних и на изглед наивних претпоставки о значењу може да произведе врло успешне резултате.

Као што смо већ рекли, екстензионални приступ који долази првенствено кроз теорију скупова је дубоко укорењен у класичној логици. Шта више, читава грана логике, *теорија модела* заснива се управо на таквом схватању значења. Међутим, екстензионални приступ значењу у математици није увек био доминантан. Све до друге половине XIX века, циљ математике је првенствено посматран кроз призму израчунавања. Велики преокрет у начину размишљања о сврси и циљевима математичког истраживања, које је Девлин (*Keith Devlin*) у свом чланку назвао *Гетингеншком револуцијом* [Devlin, 2003], одиграо се педесетих година XIX века у немачком граду Гетингену.

По Девлиновом мишљењу, једна од прекретница те револуције је био прелазак на екстензионално разумевање математичких појмова, од којих је један био посебно значајан – појам *функције*. Раније се на функције гледало као на нешто што је неодвојиво од једнакости посебног облика као што је:

$$y = 2 + 3x - 5.$$

Појам функције је био уско везан за *правило* или *процедуру* израчунавања једнакости овог типа. Био је везан за то *како* за дати број x који називамо *аргументом* израчунавамо број y који називамо *вредношћу*.

Прелазак на екстензионално схватање функције, које је данас општеприхваћено у математици, подразумева да се функција чији је домен A а кодомен B дефинише као скуп уређених парова облика (*аргумент, вредност*) који је такав да се сваком аргументу из скупа A може придружити тачно једна вредност из скупа B. [8] Функција је, дакле, посебна врста релације, једна посебна врста скупа. Последица овог одређења је да се значење израза као што је $y = 2 + 3x - 5$ више не доводи у везу са правилом на основу којег се вредности приписују аргументима. Све што је важно јесте резултат његове примене – то *које* се вредности приписују којим аргументима. На тај начин, значење појма функције лишено је његових интензионалних компоненти. То поједностављење се временом показало врло корисним. Појам функције је тако постао прецизно дефинисан, што нам је омогућило да нешто више кажемо о функцијама и њиховим својствима. Са друге стране, то поједностављење са собом носи екстензионализацију критеријума идентитета за функције. Две функције на истом домену и кодомену су једнаке ако истим аргументима приписују исте вредности, иако то можда чине следећи различита правила повезивања.

Према пост-револуционарном схватању предмета и сврхе математике, математика је појмовна анализа, истраживање *значења* појмова као што су функције и скупови. Међутим, *значење* овде треба узети првенствено у референцијалном смислу. Ми описујемо значење појмова у математици тако што налазимо или конструишемо одговарајуће математичке објекте којима те појмове представљамо. Оно што је овде интересантно приметити јесте да је екстензионални приступ значењу, који је уткан у пост-револуционарно схватање математике, јако близак духу платонизма. Упркос томе, многи математичари, научници а посебно филозофи 20. века су се снажно противили платонистичкој позицији у филозофији математике. Ипак, то није спречило да се екстензионални приступ значењу одржи као доминантна позиција. Један од разлога се свакако налази у неоспорном успеху логике, теорије скупова као и теорије модела. Захваљујући том успеху, екстензионална објашњења постала су присутна не само у логици већ, већ и у филозофији језика која је њоме била мотивисана. Један пример је теорија значења Доналда Дејвидсона [Davidson, 1967], која инспирисана моделско-теоријском семантиком покушава да значење исказа сведе на његове истиносне услове.

[8] Дата дефиниција се односи само на тоталне функције, оне код којих је вредност функције дефинисана за сваки аргумент. Тоталне функције су посебан случај парцијалних функција, код којих није искључено да за неке аргументе функција не даје никакву вредност. О парцијалним функцијама ћемо касније у раду више говорити.

Чини се да је један од разлога због којег су екстензионално оријентисана семантичка разматрања постала превладавајућа првенствено у математици, али и шире, тај што нам екстензионални приступ пружа посебну врсту једноставности. Тиме заобилазимо проблеме који се постављају пред појмовну анализу која би требало да се бави садржајем датих појмова, а не само њиховом референцијом. Ако следимо Фрегеове закључке да смисао треба да посматрамо као нешто објективно, онда би та појмовна анализа морала да разлучи смисао од субјективног слоја значења. Са друге стране, чини се да је тешко постићи објективност, недвосмисленост и прецизност у одређењу смисла неког појма (које су важне посебно у математици) какву налазимо у одређењу његове референције. У складу са тиме, највећа потешкоћа за интензионални приступ се можда састоји у формулисању јасне и прецизне интензионалне релације *синонимности*. Када значењу приступамо екстензионално, релација синонимности се своди на једнакост референције. Примера ради, синонимност два скуповна израза се своди на једнакост њихових чланова. Ту дакле постоји некаква редуктивна компонента која синонимност објашњава тако што је редукује на нешто што би требало да буде јасније или непосредније. Јасно је шта значи рећи да два скупа имају исте елементе. Али, оно што није у потпуности јасно јесте када два скуповна израза имају исти смисао.

Тај проблем се у неком облику поставља и пред Фрегеово схватање имена. Рекли смо да се код Фрегеа смисао имена састоји се у начину представљања, у томе *како* или *на основу чега* то име означава објекат који именује. Према томе, два имена би требало да буду синонимна ако означавају исте објекте и ако то чине на исти начин. Појам *једнаких начина представљања* међутим, посебно у вези са математичким изразима, није довољно прецизно изложен у [Frege, 1891].

Чини се да проблем дефинисања интензионалне релације синонимности која би уједно била и математички прецизна и нетривијална (несводива на референцију), може бити један од разлога због чега је интензионални приступ постао у великој мери занемарен у логици и математици. Други разлог је, као што смо рекли, неоспорни успех теорија које се заснивају на екстензионалном приступу. Заједно, ти разлози су довели до (имплицитне) претпоставке да је прецизност потребна за математичку анализу неодвојива од екстензионалне позиције. Циљ овог рада јесте да се том уверењу успротиви. Показаћемо да се интензионалне компоненте значења могу представити прецизним математичким средствима. Покушаћемо да покажемо како екстензионална перспектива не само што није увек нужно полазиште у математици, већ некад може бити непожељна.

1.4. Интензионалност у логици

Познати логичар Курт Гедел (*Kurt Gödel*) је сматрао да би се појам смисла могао формализовати и да би таква промена перспективе у логици могла донети значајне резултате. [9] Иако су његове идеје о интензионалној логици остале забележене тек у напоменама, јасно је да би према Геделовом схватању, интензионална логика требало да буде налик теорији скупова. То је сугерисано и њеним именом, јер ову логику Гедел је назвао *теорија појмова*. Она би требало да буде за појмове оно што је теорија скупова за скупове.

Према Геделовом мишљењу, теорија појмова би требало да буде теорија без типова (енг. *type-free*) и у складу са тиме, примена појма на објекат који под њега потпада је замишљена као неограничена. На тај начин, релација припадања која постоји између члана неког скупа и самог тог скупа и релација потпадања неког објекта под појам би се морале разликовати. Док је, због постојања парадокса, у ZF аксиоматизацији теорије скупова немогуће да скуп буде члан самог себе, Гедел је сматрао да би у случају појмова требало допустити самопримену.

Геделов рад на пољу интензионалности није никад задобио форму завршеног система, већ се састојао у идејама и смерницама о томе како би интензионална логика требало да изгледа. Са друге стране, Черч (*Alonso Church*) је активно радио на развијању формалног система у којем би се могли представити како референција (денотација) терма тако и његова интензија коју је Черч назвао *појмом* (енг. *concept*) [Church, 1951]. Оно што је Черча првенствено занимало била је релација између ствари и појма под који та ствар потпада. Међутим, док је Гедел веровао да интензионална логика мора бити теорија без типова, Черч је свој рад засновао на ламбда рачуну са типовима. Черчова теорија сусрела се са проблемима конзистентности који су довели до многобројних

[9] Геделови коментари о интензионалности могу да се нађу у [Wang, 1996, p. 247-287] и [Crocco et al, 2017]. Више о Геделовом схватању интензионалности читалац може наћи у [Kostić, 2021].

покушаја да се она преформулише [Church, 1973; 1974; 1993]. Међутим, ти покушаји нажалост никад нису произвели коначну и завршену интензионалну логику.

У овом раду нећемо се бавити интензионалном логиком. Наш циљ је да истражимо поједине примере појмовне анализе унутар логике и математике који узимају у обзир не само референцију већ и *смисао* појмова којима се баве. Желимо да испитамо на који начин се смисао тих појмова може представити математичким средствима. Улога Геделових и Черчових идеја о интензионалној логици у овом раду има превасходно хеуристичку улогу. Али, то не значи да неки проблеми којима су се Гедел и Черч бавили нису релевантни за наша разматрања. Наиме, за једно од централних питања интензионалне логике Черч узима проблем идентитета интензија – када два имена имају исту интензију. У раду [Church 1951] он предлаже више могућих решења тог проблема. Пошто су имена код Черча приказана ламбда термима, питање једнакости смисла постаје питање када два ламбда терма изражавају исти садржај, тј. када имају исту интензију. То је проблем којим ћемо се у нешто другачијем контексту, бавити у поглављу 4 овог рада.

1.4.1. Доказно теоријска семантика и значење везника

До сада смо о смислу неког израза говорили углавном као о нечему што се дефинише у односу на његову референцију. Видели смо да Фреге смисао имена одређује као начин представљања референта тог имена, док смисао предиката доводи у везу са правилом, или условима под којима одређујемо његову референцију. Дакле, чини се да је за поменуте врсте израза референција у неком смислу примарна, док се смисао дефинише тек у односу на њу, као правило или услов под којим се она одређује. [10] Такво схватање смисла, последица је прихватања дескриптивистичке слике језика која је присутна код Фрегеа. Према таквој слици, основна функција језика јесте да *описује* свет око нас. Сходно томе, функција језика да именује, означава или реферира на објекте заузима централно место, док су остале *прескриптивне* функције језика којима се нешто наређује, прописује, или пита секундарне [Maksimović, 2016].

[10] Чини се додуше да изузетак представља схватање смисла исказа који Фреге разуме као мисао. Одређење смисла исказа, односно садржаја мисли се код Фрегеа, за разлику од Витгенштајна, не одређује у односу на истиносну вредност тог исказа.

Следећи гледишта касног Витгенштајна [Wittgenstein, 1958] који је критиковао дескриптивистичку слику језика, можемо понудити и једно шире одређење смисла, које не претпоставља да је употреба неког језичког израза увек референцијалног карактера. Према том схватању, смисао неког лингвистичког израза P није заснован у правилима на основу којих се његова референција одређује, већ у правилима која одређују његову *употребу.* У складу са тиме, можемо рећи да два језичка израза имају исти смисао уколико иста правила одређују њихову употребу.

Приступ значењу који смо горе описали заступљен је у *доказно теоријској семантици* (енг. *proof theoretic semantics*). [11] Та теорија се бави значењем логичких константи, а првенствено логичких везника. Везници се не посматрају екстензионално, као етикете за истиносне функције већ се дефинишу *функционално* – на основу њихове улоге у дедукцијама. Ова интензионална семантика је заснована на формалним системима природне дедукције, претежно за интуиционистичку логику, који су у духу Генценових система из [Gentzen, 1935]. У тим системима, сваки везник је задат паром логичких правила која се називају *правила за увођење* и *правила за елиминацију датог везника*.

Правило за увођење n-арног везника * изражава услове под којима је дозвољено непосредно закључити исказ облика $* A_1 \dots A_n$. Примера ради, правило за увођења везника конјункције $\wedge$ (логичко *и*) дозвољава да се из две премисе A, B закључи $A \wedge B$. Извођењем овог закључка кажемо још и да смо *увели конјункцију*. Правило за увођење дисјункције $\vee$ (логичко *или*) каже да се исказ облика $A \vee B$ може директно закључити из премисе A или из премисе B појединачно. Извођењем овог закључка кажемо још и да смо *увели конјункцију.*

Са друге стране, правило за елиминацију n-арног везника * прописује шта можемо дедуковати служећи се исказом облика $* A_1 \dots A_n$ као премисом. Примера ради, правило за елиминацију конјункције каже нам да из премисе $A \wedge B$ можемо закључити било A, било B. Изводећи тај закључак, ми смо *елиминисали конјункцију*. Правило за елиминисање дисјункције је мало сложеније, али и даље веома интуитивно. Да бисмо елиминисали дисјункцију $A \vee B$ потребно је да претпоставимо A и осим тога да још претпоставимо B. Ако из обе хипотезе успемо независно да дођемо до заједничког

[11] За приказ основих идеја доказно теоријске семантике заинтересованог читаоца упућујемо на [Schroeder-Heister, 2012a].

закључка C, правило за елиминацију допушта нам да изведемо закључак C и на тај начин елиминишемо дисјункцију. Хипотезе A и B се не сматрају више релевантним за даљи ток дедукције и због тога се при елиминисању *прецртавају.*

У доказно-теоријској семантици логички везник се дефинише правилима за његово увођење и елиминацију. Постоји традиција, која потиче од Генцена, да је уобичајено узимати правила за увођење као примарна док се правила за елиминацију разумеју као њихове последице. Једно истраживање сугерише, додуше, да је временски редослед којим стичемо ова правила у менталном развоју обрнут [Kostić, Maksimović, Milošević, у припреми]. Идеју да правила за елиминацију имају примат у односу на правила за увођење налазимо у [Dummet, 1991, ch.13] и она се детаљније разматра у [Prawitz 1971], као и у [Schroeder-Heister, 2015].

Независно од тога коју групу правила би требало узети као примарну, да ли правила за увођење или елиминацију, свакако можемо рећи да је однос ових правила од велике важности за доказно-теоријску семантику. У Генценовом рачуну секвената, овај однос се одсликава у симетрији која постоји између правила за увођење лево и десно од рампе и која се некад у доказно-теоријској семантици назива *принципом хармоније,* видети [Schroeder-Heister, 2012a, section 2.2.1.]. Тај принцип везан је за чињеницу да се интуиционистички везници карактеришу *адјункцијама* [Došen, 2001]. Захваљујући томе, улога коју они имају у дедукцијама а која се у доказно-теоријској семантици сматра конститутивном за њихово значење, може се описати дволинијским правилима у оквиру секвентног рачуна [Došen, 1989; Schroeder-Heister, 2013]. Израз *дволинијска правила* долази отуда што се та правила могу читати на два начина, одозго надоле и одоздо нагоре.

1.4.2. Интуиционистичка логика и дедукција

Још пре појаве доказно-теоријске семантике, која је релативно млада теорија настала 90их година прошлог века, први интензионални пробој у логици начинили су интуиционисти. Интуиционистичка логика је постала позната по томе што одбацује закон искључења трећег: $A \vee \neg A$ није теорема те логике. Према традиционалној интерпретацији, одбацивање закона искључења трећег објашњава се као последица прихватања *конструктивизма*. Конструктивизам је позиција у филозофији математике према којој математички објекти немају независно постојање као што то имају физички објекти. [12] Они су само конструкције људског ума. [13] Историјски посматрано, интуиционистичка логика је и настала као формални израз конструктивистичких идеја у филозофији математике. Математичари који су се приклонили интуиционистичком покрету били су конструктивисти који су сматрали да филозофска гледишта о природи и циљевима математике повлаче са собом и одређене логичке последице.

Заузимање конструктивистичке позиције повлачи са собом редефинисање појма истине у математици. За платонисту, истина неког исказа математике састоји се у поклапању са чињеницама. Према мишљењу конструктивиста, не постоји платоновски свет математичких објеката. Његове чињенице само су чињенице људског ума. Због тога истиносна вредност математичких исказа мора бити заснована у нечему што ум конструише и што му је непосредно доступно. Али, то не значи да је истина у математици произвољна. Појам истине мора бити заснован на томе како и због чега се неки исказ у математици прихвата као истинит. Тако се за конструктивисте истина своди на *доказивост.* Према том гледишту, када у математици тврдимо да исказ A важи то не би требало схватати као *A је истинито*, већ као *A је доказиво*.[14]

Заступати ово становиште значи одбацити закон искључења трећег. Негација се обично у интуиционистичкој логици не узима као примитивна већ се негација од A дефинише као *A повлачи апсурд* ($A \Rightarrow\perp$). Према том схватању, закон искључења трећег би требало читати као: *или је A доказиво или се из A може дедуковати апсурд.* То тврђење међутим, није оправдано прихватити *a priori* за произвољно A, барем не без извесних додатних претпоставки. У прилог томе говори чињеница да постоје неки искази као што су аксиома избора (скраћено AC – *axiom of choice*) која је конзистентна са ZF (*Zermelo-Fraenkel* аксиоматизација теорије скупова), али је то такође и њена негација. [15] Под претпоставком да је ZF конзистентна теорија, ZF не доказује ни AC ни њену негацију.

[12] За више детаља о конструктивизму и о томе како је он повезан са интуиционизмом читаоца упућујемо на [Dummett, 1978, посебно p. 50-66, 215-248].
[13] То не значи међутим да би конструкције требало овде схватити као субјективне. Иако њихов метафизички статус није у потпуности јасан, чини се да је њихов реалитет сасвим близак појму *интерсубјективности* који налазимо код Канта.
[14] За једну другачију интерпретацију интуиционистичке логике видети [Maksimović, 2016].
[15] Аксиомом избора се тврди да за сваку колекцију непразних скупова постоји скуп који садржи тачно по један елемент из сваког од скупова из те колекције.

Дакле, прихватање конструктивизма повлачи одбацивање закона искључења трећег и на тај начин мења и нашу логику. Она више није класична већ интуиционистичка. Захваљујући закону искључења трећег, у класичној логици можемо доказати $\neg\neg A \Rightarrow A$. У интуиционистичкој логици међутим, то не мора бити случај. Двострука негација не повлачи истину. Из тог разлога, често се негација узима као тачка у којој се ове две логике размимоилазе. Међутим, следећи Дошена, можемо понудити једно другачије схватање интуиционистичке логике, које није нужно повезано са конструктивизмом. Према схватању које је он заступао, разлика између интуиционистичке и класичне логике није утемељена на разлици у разумевању негације, већ импликације [Došen, 1989]. Наиме, импликација класичне логике је материјална, она се може свести на негацију и дисјункцију. Другим речима, *Ако* A*, онда* B се у класичној логици може дефинисати као *не* A *или* B. Са друге стране, импликација интуиционистичке логике се, баш као ни импликација обичног језика, не може дефинисати истиносно-функцијски.

Можемо рећи да материјална импликација представља поједностављење везника *ако онда* из обичног језика. Наиме, у свакодневном говору значење *ако онда* засновано је на повезаности између антецеденса и консеквенса. Код материјалне импликације овај сегмент значења се губи. То је зато што се у класичној логици било каква веза између антецеденса и консеквенса која није истиносно-функцијска сматра ирелевантном.

У раду [Frege, 1879, p. 13], Фреге износи гледиште да везе између антецеденса и консеквенса нису део значења импликације, већ пре нешто на основу чега се импликација може тврдити. Ово гледиште делује веома блиско Грајсовом [Grice, 1989]. Према Грајсовом мишљењу, може се рећи да је срж значења везника *ако онда* ухваћена материјалном импликацијом. Остали семантички аспекти које у говору доводимо у везу са овим везником, као што је повезаност између антецеденса и консеквенса, не припадају његовом значењу већ се могу приписати претпоставкама рационалних говорника.

Једно друкчије објашњење значења импликације могли бисмо да понудимо ослањајући се на [Došen, 1989]. Иако нас у логици и математици не занимају узрочне везе између догађаја, и те како нас занимају дедуктивне везе између исказа. У математици, питања која се тичу импликација облика *Ако* A*, онда* B не могу се свести на питања истиносних вредности A и B, већ се често тичу тога *како* се исказ B може *дедуковати* из исказа A. У складу са тиме, било би помало непримерено тврдити да се значење везника *ако онда* у математици исцрпљује у истиносној функцији и да сама дедукција не чини његов битан аспект. О томе сведочи јака веза која постоји између импликације и дедукције коју у исказној и предикатској логици описује *теорема дедукције*. Та теорема почива на појму доказа из хипотеза и њоме се тврди да ако у хилбертовском систему за исказну или предикатску логику постоји доказ за исказ B из скупа хипотеза Γ ∪ A, онда у том систему постоји доказ за $A \Longrightarrow B$ из скупа хипотеза Γ. На идеји хипотетичког закључивања заснивају се формални системи природне дедукције, као и у нешто другачијем руху, рачун секвената. Теорема дедукције нам показује да се хипотетичко закључивање може опонашати и у хилбертовским системима, о чему ћемо више бити у прилици да кажемо у другом поглављу.

Према Дошеновом мишљењу, дедукција је оно што конституише значење импликације у интуиционистичкој логици [Došen, 1989]. У природно-дедукцијском систему за интуиционистичку исказну логику NJ уведеном у [Gentzen, 1935], импликација је карактерисана, као и сви други везници, правилима за увођење и елиминацију. Правило за елиминацију импликације дозвољава да се из две премисе, $A \Rightarrow B$ и A, дедукује закључак B. Други, познатији назив за то правило је *modus ponens*. Правило за увођење импликације може се формулисати на следећи начин. Нека је Γ скуп формула, могуће празан. Правило нам каже да са доказа за B из хипотезе A и хипотеза у Γ можемо да пређемо на доказ за $A \Longrightarrow B$ из хипотеза Γ. У природно-дедукцијском систему за интуиционистичку логику NJ само та два правила се претпостављају за интуиционистичку импликацију. Да бисмо из формалног система NJ прешли у природно-дедукцијски систем за класичну исказну логику NK, потребно је да систему NJ додамо закон искључења трећег као аксиому. Или, што је еквивалентно, да систему NJ придружимо Персово правило из којег се заједно са осталим правилима из NJ закон искључења трећег може дедуковати. Нека је Γ скуп формула, који може бити и празан. Персово правило каже да са доказа за A из Γ и хипотезе $A \Longrightarrow B$ можемо прећи на доказ за A који се ослања само на хипотезе из Γ. То правило се дакле тиче импликације и немогуће га је оправдати на основу правила за увођење и елиминацију овог везника. Оно носи додатну претпоставку да је импликација схваћена истиносно-функцијски, односно да је материјална.

Због тога што се интуиционистичка имликација може окарактерисати искључиво позивајући се на правила за увођење и елиминацију, то према Дошеновом мишљењу показује да се она заснива на дедукцији [Došen, 1989]. Док *Ако A, онда B* у класичној логици значи *B је истинито или је A лажно*, исказ *Ако A, онда B* за интуиционисту значи

Из претпоставке A може се дедуковати B. Следећи Дошенову идеју, интуиционистичко схватање импликације можемо да посматрамо као пример једног интензионалног разумевања појма. Интуиционистичка импликација је интензионална на два начина. Можемо рећи да повезаност између антецеденса и консеквенса чини интензионалну компоненту значења импликације односно смисао тог везника. Као што смо рекли, материјална импликација ту везу заборавља, фокусирајући се само на истиносне услове и она је у том смислу екстензионална. Са друге стране, интуиционистичка импликација је интензионална због тога што се њено значење темељи управо на дедуктивној повезаности између антецеденса и консеквенса.

Други смисао у којем је интуиционистичка импликација начинила интензионални пробој лежи у томе што интуиционистичка логика, за разлику од класичне, не своди значење импликације на одговарајућу истиносну функцију. Њено значење конституисано је *правилима* која одређују улогу тог везника у дедукцијама. Та семантичка позиција, блиска је Витгенштајновом схватању значења и представља основн идеју доказно-теоријске семантике. Као што смо већ рекли, у тој семантици логичке константе не добијају значење путем референције на скуповно-теоријске објекте већ захваљујући правилима која одређују улогу тих логичких константи у дедукцијама.

Док се интуиционстичка импликација везује за *дедукцију*, класична импликација је повезана са семантичком *релацијом консеквенције* [Došen, 1997]. Разлика између та два појма се међутим, често превиђа. Исказ A је логичка последица колекције исказа Γ ако свака валуација која чини сваки од исказа из Γ истинитим, чини и A истинитим, што записујемо као $\Gamma \vDash A$. Другим речима, $\Gamma \vDash A$ важи ако и само ако свака валуација чини A истинитим или постоји исказ у Γ који чини лажним. Када је Γ синглтон који садржи само исказ B, релација консеквенције се у том случају своди на материјалну импликацију. Другим речима, $B \vDash A$ важи ако и само ако за свако v, важи $v(B \rightarrow A) = 1$. У општијем случају, када у Γ постоји коначан број исказа n, ови искази се могу повезати у једну n-арну конјункцију. Али, релација консеквенције се онда опет своди на релацију између антецеденса и консеквенса материјалне импликације чији је антецеденс сада конјункција [Došen, 1997, p. 291].

Како Дошен примећује у [Došen 1997], главна разлика између дедукције и релације консеквенције је у следећем. Постоји само један начин на који исказ A може бити последица исказа из Γ. Или $\Gamma \vDash A$ важи или не важи, или Γ и A јесу у тој релацији или нису. То је последица екстензионалног схватања релација у математици о чему смо већ говорили. Према том схватању, релација није правило повезивања, већ скуп уређених парова. Уређен пар (a, b) код којег су прва и друга пројекција повезане на основу правила r_1 не разликује се од уређеног пара (a, b) код којег су оне повезане на основу правила r_2. Једнакост првих и једнакост других пројекција чини нужан и довољан услов за једнакост уређених парова. У складу са тиме, ако је A последица исказа из Γ онда имамо уређен пар (Γ, A) у релацији консеквценције. Али, док може постојати само један такав уређени пар за дато Γ и A, може постојати више различитих дедукција из Γ у A. Размотримо следећи пример.

Нека је Γ колекција исказних формула $C \Rightarrow A, B \wedge A, D, C$. Користећи се њима као хипотезама, формула A може дедуковати у природној дедукцији на више начина. Прво, формулу A можемо дедуковати из $B \wedge A$ користећи се правилом за елиминацију конјункције. Са друге стране, A се такође може дедуковати из хипотеза $C \Rightarrow A$ и C применом правила за елиминацију импликације. Дакле, можемо се користити двема различитим дедукцијама да из истог скупа хипотеза Γ дођемо до закључка A.

Ове дедукције полазе од различитих хипотеза из скупа Γ. Прва полази од хипотезе $B \wedge A$, а друга од хипотеза $C \Rightarrow A$ и C. Међутим, претпоставимо да се наш скуп Γ састоји из једне једине формуле - формуле $A \wedge A$. На колико бисмо различитих начина могли да дедукујемо A из $A \wedge A$? То бисмо могли да урадимо на барем два начина. Са једне стране, можемо се користити правилом за елиминацију конјункције које елиминише први конјункт или се можемо користити правилом за елиминацију конјункције које елиминише други конјункт. Обе ове дедукције полазе од исте хипотезе $A \wedge A$ и изводе исти закључак A, али су оне различите. Дефинишу их *различита правила* која су коришћена да се закључак изведе из хипотезе. Дакле, дедукција из $A \wedge A$ у A не може се свести на уређен пар $(A \wedge A, A)$ јер можемо имати само један такав уређени пар, док можемо имати барем две дедукције из $A \wedge A$ у A, видети [Došen, 2011, section 5].

Свођењем појма дедукције на релацију консеквенције ми тај појам екстензионализујемо и губимо из вида његов смисао. Смисао појма дедукције не састоји се само у томе да дедукујемо закључак из хипотеза, већ у томе *како* то радимо [Došen, 2016]. Интензионално разумевање тог појма би било оно које узима у обзир његов смисао – према којем дедукција није само уређен пар хипотезе и закључка већ представља *начин како* се закључак дедукује из хипотезе.

Интензионално разумевање дедукције представља централно полазиште опште теорије доказа, гране логике чији су предмет истраживања докази. Требало би поменути да се у општој теорији доказа појам дедукције узима као основнији од појма доказа, због тога што се други може дефинисати помоћу првог. Докази у традиционалном смислу, докази без хипотеза, посматрају се у општој теорији доказа као посебан случај доказа из хипотеза односно дедукција. За сада ћемо ова два термина користити синонимно.

Централни проблем којим се поменута теорија бави је питање *Шта је доказ?* Начин на који општа теорија доказа приступа поменутом проблему инспирисана је Фрегеовим *принципом апстракције*. Идеја тог принципа је да један појам можемо дефинисати као класу еквиваленције у односу на одговарајућу релацију еквиваленције. У [Frege 1884, §64] Фреге дефинише *правац* неке праве као класу еквиваленције њој паралелних правих. Та дефиниција проистиче из гледишта да је појам правца одређен условима под којима можемо рећи да две праве имају исти правац. Наиме, две праве ће имати исти правац када су паралелне. Пошто је лако видети да је релација паралелности на скупу правих релација еквиваленције, можемо се користити том релацијом еквиваленције да бисмо одредили појам правца. Према овом схватању, правац неке праве p карактерише скуп правих које су паралелне правој p.

Појам правца смо овде дефинисали одговарајући на питање када две праве имају исти правац. Сличну идеју следимо и у општој теорији доказа. Тамо покушавамо да одредимо појам доказа одговарајући на питање *Када се два доказа могу сматрати једнакима?* [Došen 2011, 2015b] Ово питање захтева да се бавимо формалним репрезентацијама доказа и своди се на проблем дефинисања одговарајуће релације еквиваленције на скупу тих репрезентација. Идеја је да, као што појам правца можемо окарактерисати путем скупа паралелних правих, тако и појам доказа можемо окарактерисати путем класе репрезентација које су еквивалентне с обзиром на одређену релацију.

Постоје две главне врсте критеријума једнакости за доказе [Došen, 2003]. Прва, која је била утицајнија, а чији је родоначелник Правиц (*Dag Prawitz*), заснива се на појму *нормалне форме доказа*. Интуитивно говорећи, доказ је у нормалној форми ако не поседује сувишне кораке. Водећи се Генценовим резултатима из [Gentzen, 1935], где је дефинисан појам нормалне форме у секвентном рачуну, Правиц дефинише процедуру свођења доказа у природној дедукцији на његову нормалну форму [Prawitz, 1965]. Идеја коју он заступа је да процедура нормализације не мења сам смисао доказа, већ само његову формулацију. У складу са том идејом, Правиц формулише следећи критеријум једнакости доказа. *Два доказа се сматрају једнакима ако се своде на исту нормалну форму*.

Друга врста критеријума једнакости доказа чији је родоначелник Ламбек (*Joachim Lambek*), почива на појму *општости доказа* [Lambek, 1972, p. 65]. Једноставно говорећи, уопштити доказ значи разумети га као инстанцу примене неких општих правила. Према том критеријуму, два доказа ће бити једнака ако су једнаких општости [Došen, 2003]. Идеја заједничка и једном и другом приступу проблему једнакости доказа је да се доказ може посматрати као значење, односно као интензија његове математичке репрезентације и да се релација еквиваленције на одређеној колекцији репрезентација доказа може посматрати као релација синонимности. Обе врсте једнакости доказа, и једнакост заснована на нормализацији као и једнакост заснована на општости одређују *интензионалне* релације синонимности на репрезентацијама доказа. Докази се не своде на уређене парове премиса и закључака, већ се њихово значење одређује тиме како смо из премиса извели закључак, којим правилима смо се користили. Такође, докази се не своде ни на синтаксне објекте, јер њихов садржај може бити заједнички различитим синтаксним изразима.

У другом поглављу овог рада говорићемо детаљније о томе. Такође, детаљније ћемо да говоримо и о самим репрезентацијама доказа у општој теорији доказа. Формални оквир унутар кога ћемо те репрезентације формулисати даће нам *теорија категорија*. [16]

1.4.3. Унутрашња и спољашња карактеризација

За разлику од теорије скупова, теорија категорија је боље прилагођена интензионалном приступу који нас овде посебно занима. Један од основних појмова теорије категорија је појам *стрелице*. Свака стрелица има свој *извор* или *почетак* (енг. *source*) и своју *мету* или *крај* (енг. *target*). Да стрелица f има свој почетак у објекту A а крај у објекту B пишемо као $f: A \to B$. У општем случају, стрелице се не своде на уређене парове својих извора и мета. Док је уређен пар (A, B) јединствен, можемо имати више

[16] За увод у теорију категорија видети [Mac Lane, 1998].

различитих стрелица из A у B и њих ћемо онда означити различитим словима f, g, h … . То не значи, међутим, да не постоје категорије (као што је категорија *предуређења*) у којима су стрелице схваћене екстензионално, као уређени парови извора и мета. [17] Али, уопштено гледано, појам стрелице се суштински разликује од појма уређеног пара. Код уређеног пара (A, B) увек апстрахујемо од интензионалне компоненте која повезује A и B. Код стрелице $f: A \to B$ ту интензионалну компоненту можемо да задржимо. То је зато што појам стрелице не обухвата само извор и мету већ и *начин* на који долазимо од извора до мете.

Ово показује да је интензионална позиција у категоријама примарна, док је екстензионална секундарна – она представља посебан случај и захтева додатне претпоставке. Са друге стране, у теорији скупова је обрнуто. Екстензионална позиција је примарна, док интензионалне аспекте појмова можемо покушати да реконструишемо на основу датог екстензионалног апарата. То се можда најлакше види на примеру скуповно-теоријске анализе појма уређеног пара. Као што смо рекли, појам уређеног пара је екстензионално схваћен у односу на појам стрелице, јер не узима у обзир то *на основу чега* повезујемо прву и другу пројекцију, већ само *да* их повезујемо. Али, такође се може рећи да појам уређеног пара (A, B) ипак поседује неку интензионалну структуру у односу на појам скупа $\{A, B\}$. Наиме, значење (A, B) се не своди само на објекте A и B, већ подразумева и начин на који су они уређени. Дакле, иако важи $\{A, B\} = \{B, A\}$, у општем случају неће важити $(A, B) \neq (B, A)$. У теорији скупова интензионалну компоненту појма уређеног пара, односно тај редослед по којем су објекти A, B дати, *опонашамо* екстензионалним средствима. Тако појам уређеног пара (A, B) дефинишемо као $\{\{A\}, \{A, B\}\}$. [18] Ово је међутим, само један од начина на који можемо дефинисати уређени пар у теорији скупова. Постоје и други. Ипак, иако нам те различите дефиниције помажу да разликујемо уређен пар (A, B) од скупа $\{A, B\}$, чини се да *смисао* појма

[17] Овде би требало напоменути да постоји категорија у којој су објекти скупови, њене стрелице функције (она се назива *категорија скупова*), а која није екстензионална у том смислу да представља категорију предуређења. У овој категорији имамо више различитих стрелица истог типа, јер постоје различите функције са истим доменом и кодоменом. Међутим, то не значи да појам функције није екстензионалан на начин који смо раније објаснили. Треба само имати у виду да он није екстензионалан у том смислу да се своди на уређен пар скупова који чине њен домен и кодомен.

[18] Ово је дефиниција уређеног пара коју дугујемо Куратовском.

уређеног пара, оно што би требало да буде заједничко свим тим дефиницијама, није ухваћен ни једном од њих.

У теорији категорија можемо боље представити интензионалне компоненте одређених математичких појмова него што то можемо у теорији скупова. Разлог лежи у начину на који анализирамо појмове у овим теоријама. У теорији скупова, можемо рећи да појмове покушавамо да одредимо *изнутра*, навођењем њихових елемената. Са друге стране, у теорији категорија појмове карактеришемо *споља* – дефинишемо њихову употребу позивањем на одређене операције и једнакости везане за њих. Покушајмо то мало детаљније да објаснимо служећи се појмом *Декартовог производа*.

У теорији скупова, Декартов производ се дефинише као бинарна операција $\times$ на паровима скупова A, B. Резултат примене ове операције је скуп $A \times B$ чији су чланови уређени парови (a,b), такви да је a припада скупу A и b припада скупу B. На тај начин смо карактерисали Декартов производ изнутра, наводећи његове чланове. Са друге стране, описати појам Декартовог производа $A \times B$ у категоријама значи описати услове које та категорија треба да испуњава да бисмо операцију $\times$ на њеним објектима могли схватити као производ. Ти услови тичу се постојања одређених стрелица које везујемо за операцију $\times$ и једнакости између њих. Они гласе овако.

У категорији у којој имамо производ имамо операцију $\times$ на објектима која сваком пару објеката A, B придружује објекат $A \times B$. Дакле, помоћу те операције у овој категорији дефинишемо објекте посебне врсте. Такође, у њој имамо и одговарајућу операцију на стрелицама која има следећи задатак. Претпоставимо да постоји начин да у тој категорији стигнемо од неког објекта C до неког објекта A. Такође претпоставимо да постоји начин да стигнемо од C до B. Ако та категорија садржи производ, онда постоји и правило које нам каже како да стигнемо од C до објекта $A \times B$. Другим речима, то правило нам каже да стрелице $f: C \longrightarrow A$ и $g: C \longrightarrow B$ можемо *спарити* тако да дефинишемо стрелицу $\ll f, g \gg: C \longrightarrow A \times B$.

Такође, у категоријама у којима имамо производ $A \times B$, имамо и стрелице које називамо *пројекцијама*. Наиме, имамо прву пројекцију, $\pi^1_{A,B}: A \times B \longrightarrow A$, и другу пројекцију $\pi^2_{A,B}: A \times B \longrightarrow A$, као и одређене једнакости које те стрелице морају да задовољавају. Наиме, за стрелице $f: C \longrightarrow A$ и $g: C \longrightarrow B$,

$$\pi^1_{A,B} \circ \ll f, g \gg = f$$

$$\pi^2_{A,B} \circ \ll f, g \gg = g$$

$$\text{за свако } h: C \to A \times B, \ll \pi^1_{A,B} \circ h, \pi^2_{A,B} \circ h \gg = h.$$

Операцију $\circ$ на стрелицама коју називамо *композицијом* можемо разумети као надовезивање стрелица. Прва и друга једнакост нам кажу да је резултат надовезивања прве односно друге пројекције на спарене стрелице $\ll f, g \gg$ једнак стрелици f односно g. У другом поглављу овог рада више ћемо говорити о представљању појма производа у категоријама и о томе у каквој је вези тај појам са везником конјункције у логици.

Разлику између унутрашње и спољашње карактеризације [видети рецимо: Došen, 2017], можемо да поредимо са разликом између традиционалних или *директних* дефиниција и *имплицитних* дефиниција. Док традиционални појам дефиниције дугујемо Аристотелу, за појам имплицитне дефиниције су били заслужни математичари Хилберт (*David Hilbert*) и Поенкаре (*Henri Poincaré*). Они су предложили да се аксиоме еуклидске геометрије могу схватити као дефиниције појмова који се у њима јављају [Poincaré, 1902; Hilbert, 1899]. Идеја те врсте дефиниције, која је представљала место неслагања између Хилберта и Фрегеа, је да се значење појма може описати стипулирањем неких аксиома или закона који за тај појам важе. Имплицитне дефиниције одступају од традиционалних на барем два битна начина. Прво, оне не задовољавају традиционалну форму дефиниције *s=t*, где је *s definiens* а *t definiendum*. Друго, имплицитне дефиниције су нередуктивне, због тога што се помоћу њих неки термин дефинише позивањем на аксиоме или правила у којима се он сам јавља.

Унутрашња карактеризација појмова коју налазимо у теорији скупова је редуктивна и по форми наликује традиционалној дефиницији. Тамо неки појам дефинишемо тако што покушавамо да га сведемо на нешто што би требало да је простије, основније. Примера ради, појам функције сводимо на скуп уређених парова, а појам уређеног пара опет на некакав скуп. За разлику од скуповно-теоријских карактеризација појмова које су редуктивне, категоријалне карактеризације то не морају да буду. Теорија категорија пружа разјашњење многих важних математичких појмова, као што су појам Декартовог производа, појам функције и многи други. Међутим, не би било поштено рећи да у традиционалном смислу те речи, теорија категорија *дефинише* појам функције, с обзиром да се, како ћемо видети, сама дефиниција категорије на тај појам ослања [Došen, 2017]. У томе смислу, категоријална одређења појмова су налик имплицитним дефиницијама. Спољашњи приступ на којем се заснивају и његова нередуктивност један је од разлога због којих у теорији категорија имамо могућност да се бавимо интензијом а не само екстензијом одређених појмова математике.

Пре него што наставимо, рећи ћемо нешто мало и о модалној логици. До сада смо говорили о интуиционизму и интуиционистичком схватању импликације као о „првом пробоју у интензионално“. Међутим, у филозофији се појам интензионалног често доводи у везу са *модалном логиком*. Модална логика је проширење исказне логике операторима *нужно* (□) и *могуће* (◊). Неформално говорећи, $\Box p$ у модалној логици значи да је p истинито у *сваком* (релевантном) стању ствари. Са друге стране, $\Diamond\, p$ значи да је p истинито у *неком* (релевантном) стању ствари.

Постоји становиште да модална логика може помоћи да се формулише интензионална импликација, импликација која би требало да буде ближа смислу *Ако онда* из обичног језика. Према том гледишту, *Ако A, онда B* из обичног језика не значи *B је истинито или је A лажно* већ *B је истинито или је A лажно у сваком (релевантном) стању ствари.*

Међутим, не постоји ништа заиста интензионално у овом схватању импикације. Оно се и даље тиче само истиносних вредноти али не и начина на који су антецеденс и консеквенс повезани. То је због тога што класична модална логика представља проширење *класичног* исказног рачуна. Њена семантика је утемељена на екстензионалном приступу моделско-теоријске семантике.

Чак и ако постоји нека веза између модалне логике и интензионалног схватања импликације, она је ту само захваљујући преводу који је формулисао Гедел у [Gödel, 1933] између интуиционистичке логике и S_4 (али не и стандарднијег система S_5). У том смислу, могли бисмо рећи импликација у S_4 наликује скуповној дефиницији уређеног пара. Наиме, она успева до неке мере да опонаша интензионалне компоненте значења импликације користећи се екстензионалним средствима, али никада се заправо не бави њеном интензијом.

1.5. Алгоритми и интензионалност

Неформално говорећи, алгоритми су процедуре које се састоје из правила или инструкција о томе *како*, крећући се корак по корак, можемо извршити одређени задатак. У математици, појам алгоритма је уско везан за појам функције и за то *како* се вредност функције одређује за дати аргумент. Ако за сваки аргумент n постоји ефективна процедура – алгоритам, који ће у коначном низу корака да израчуна вредност f за n, онда се таква функција назива *израчунљивом*. Израчунљивим функцијама се бави *теорија израчунљивости*.

Резултати теорије доказа као и блиска веза између појма дедукције и појма алгоритма, о којој ћемо касније нешто више рећи, сугеришу да се други појам може анализирати по угледу на први. Разлика између израчунљиве функције и алгоритма који је израчунава наликује разлици између уређеног пара (Γ, B) који стоје у ралацији консеквенције, и доказа за B из скуп а хипотеза Γ. Уређени пар (Γ, B) представља екстензионални аспект дедукције, њен почетак и крај. Он представља хипотезе и закључак, а не саму дедукцију - начин на који се закључак изводи из хипотеза. На сличан начин, појам израчунљиве функције представља екстензионални аспект алгоритма. Функција, као екстензионално схваћен објекат представља оно што се израчунава, али не и правило или процедуру према којој се израчунавање извршава. Као што можемо имати више дедукција неког закључка из истог скупа хипотеза, тако можемо имати више алгоритама који израчунавају исту функцију.

Узмимо на пример функцију $f\colon \{(10, 2, 7, 4)\} \rightarrow \{21\}$. То је функција која слика уређену четворку $(10, 2, 7, 4)$ у број 21. Пошто смо функције дефинисали екстензионално, таква функција је јединствена. Међутим, иако постоји само једна таква функција, постоји више различитих алгоритама који је израчунавају. Овде ћемо навести два. Назовимо их A_1 и A_2. Према алгоритму A_1, да бисмо добили 21 прво применимо операцију одузимања на бројеве 10 и 4. Тако добијамо број 6. Онда овај број помножимо са 7. Тако добијамо 42. Да бисмо добили 21 потребно је само да овај резултат још поделимо са 2. Према алгоритму A_2 прво сабирамо бројеве 7 и 4 да бисмо добили 11, а онда тај резултат саберемо са 10. Алгоритми A_1 и A_2 дају исти резултат. Али, интуитивно гледано, они представљају различите процедуре израчунавања.

Централно питање којим се бавимо у поглављима 3. и 4. овог рада је питање услова под којима можемо рећи да два алгоритма представљају исту односно различиту процедуру израчунавања. Први који је увидео значај питања једнакости алгоритама и експлицитно га формулисао је математичар Јанис Московакис (*Yiannis Moschiovakis*). Московакис критикује екстензионално схватање алгоритама које не прави разлику између алгоритма и функције коју он израчунава. Према таквом схватању, питање једнакости алгоритама своди се на питање једнакости одговарајућих функција. Са друге стране, интензионално разумевање појма алгоритма, подразумева да узимамо у обзир не само резултате израчунавања, већ пре свега *како* се то израчунавање извршава. Да би два алгоритма била једнака није довољно само да дају исте резултате, већ и да то чине на исти начин.

Међутим, због чега би било важно разумети алгоритме интензионално? Екстензионалиста би могао приговорити да, иако разлика између процедура као што су A_1 и A_2 *de facto* постоји, она није од практичног значаја, с обзиром да на крају ипак добијамо исти резултат. Али, то није у потпуности тачно. Различити алгоритми имају различита својства и те разлике имају утицај на то како ћемо их имплементирати. Такође, они могу бити различитих сложености и премда дају иста решења, не морају бити подједнако ефикасни у томе. Важно је, дакле, узети у обзир интензионалне аспекте појма алгоритма не само са теоријске, већ и са практичне стране.

Московакис је аутор који је у новије време највише писао о важности интензионалне анализе појма алгоритма и о потреби да се тај појам формализује. Рад на тој анализи Московакис је започео у [Moschovakis, 1984], док је детаљније о томе писао у [Moschovakis, 1998; Moschovakis, 1989b; Moschovakis, 2001] као и у раду [Moschovakis & Paschalis, 2008]. Централни појам на којем се она заснива је појам *рекурзора*. Рекурзори су математички објекти који се састоје из пресликавања вишег реда. У трећем поглављу нешто више ћемо рећи о том појму. Московакис сматра да се алгоритми могу представити рекурзорима, а да се њихова једнакост може разумети као изоморфизам рекурзора. У трећем поглављу бавићемо се Московакисовом анализом појма алгоритма, и критички ћемо разматрати критеријум једнакости који он предлаже.

Московакис примећује да теорија израчунљивости уопштено није *експлицитно* постављала питање интензионалних једнакости алгоритама, и да у тој области појам алгоритма често није јасно разликован од појма израчунљиве функције. Ипак, не би било у потпуности оправдано рећи да у тој теорији није постојала идеја о функционалној једнакости која не би била екстензионално заснована. Један од првих и веома утицајних формалних оквира у којима се може представити појам ефективне израчунљивости је *ламбда рачун без типова* чији је идејни творац Черч. Ламбда рачун је једнакосни систем који формализује појам функције. Оно што је карактеристично за тај систем је то што се у њему функција не дефинише као скуп уређених парова већ као *правило повезивања* између аргумента и вредности. У складу са тим, једнакост функција у том рачуну може се интерпретирати као једнакост правила повезивања.

Ламбда рачуном ћемо се бавити у поглављу 4. Резултати о λ −дефинабилности рекурзивних функција, о којима ћемо тамо детаљније говорити, показују да се свака израчунљива функција може дефинисати унутар овог рачуна. Тако се природно намеће следеће питање. У каквој је вези појам функције схваћен као правило повезивања са алгоритмом који ту функцију израчунава? Даћемо одговор на то питање у четвртом поглављу када ћемо видети како унутар ламбда рачуна можемо да формализујемо појам алгоритма.

Ако алгоритме представимо у ламбда рачуну, добићемо критеријуме једнакости алгоритама који су засновани на нормализацији. *Кари-Хауардова кореcподенција* (*Curry-Howard correspondence*) - о којој ће бити више речи у другом поглављу - је резултат који нам показује да је нормализација дедукција исте врсте као и нормализација алгоритама. Та нормализација укорењена је у појму β-редукције овог рачуна, а једнакости које се на њој заснивају у појму β-једнакости. У другој половини четвртог поглавља испитаћемо још неке критеријуме једнакости алгоритама који се могу представити у ламбда рачуну.

Пре него што се упустимо у даљи ток рада, желели бисмо да скренемо пажњу на још нешто. Наиме, у овом раду не покушавамо да покажемо како ламбда рачун у практичном смислу представља оптималан оквир за изучавање алгоритама и њихових својстава. Оно што желимо да покажемо јесте да је то формални оквир који може помоћи бољем разумевању интензионалних аспеката овог појма као и проблема једнакости алгоритама.

Поглавље 2

ОПШТА ТЕОРИЈА ДОКАЗА

2.1. Увод

Ово поглавље представља детаљан приказ интензионалне анализе једног појма у логици. Појам о којем ћемо говорити је појам дедукције а грана логике која се њиме бави је *општа теорија доказа.* Циљ овог поглавља је излагање неких важних резултата из те области и разматрање њиховог значаја за проблем којим се у овој тези бавимо.

Централно питање опште теорије доказа тиче се једнакости доказа. *Када два доказа можемо сматрати једнакима?* Према [Došen, 2003] постоје две главне врсте критеријума једнакости. Прва, која је познатија, потиче од Правица и заснива се на појму нормалне форме доказа. Идеја тих критеријума је да су два доказа једнака ако се могу свести на исту нормалну форму. Друга врста критеријума једнакости које ћемо представити се темељи на појму општости доказа. Према тим критеријумима, два доказа се сматрају једнакима ако су исте општости. Овај предлог је Ламбеков (*Joachim Lambek*), али се појам уопштавања који ћемо овде представити разликује од изворног Ламбековог појма.

Како ћемо видети, оба критеријума једнакости доказа се заснивају на интензионалном схватању појма дедукције, али описују његову интензију на различите начине. Питање које се природно поставља јесте да ли се ове две врсте критеријума поклапају. Наиме, да ли свака два доказа која су једнака у погледу њихових нормалних форми такође имају и једнаку општост и обрнуто? Ово питање се може разумети као питање *потпуности* критеријума једнакости доказа и на њега ћемо се на кратко осврнути у последњем делу овог поглавља.

2.2. Проблем једнакости

Већ смо рекли да је теорија доказа грана логике која изучава доказе. Овде ћемо разликовати оно што Правиц назива *редуктивном теоријом доказа* од опште теорије доказа [Prawitz, 1971, p. 236]. Оснивач прве је Хилберт, док друга има свој извор у Генценовим радовима, пре свега у [Gentzen, 1935]. Ипак, може се рећи да је Хилберт допринео и њеном развоју, видети [Thiele, 2003].

Крајем XIX и почетком XX века, Хилберт је почео да се бави проблемима који су се тицали основа математике. Он је сматрао да решење тих проблема изискује проналажење адекватне аксиоматизације математике или макар њених значајних делова, чију конзистентност је потом требало доказати. За Хилберта, циљ је био не само пронаћи доказ конзистентности, већ је тај доказ требало моћи извести у потпуности *финитарним* средствима. Тај предлог је постао познат као *Хилбертов програм* који је он формулисао у [Hilbert, 1922].[19] Да би се Хилбертов програм спровео, било је потребно појам финитарног доказа учинити прецизним.

У раду [Tait, 1981] Тејт (*William Tait*) је изнео гледиште да појам финитарне доказивости одговара појму доказивости у примитивно рекурзивној аритметици, од кога је међутим касније одустао. Примитивно рекурзивна аритметика је формална теорија природних бројева која не укључује квантификаторе. На њеном језику можемо изразити основне аритметичке операције као што су сабирање, множење и степеновање, као и све примитивно рекурзивне функције. Гледиште да су сви докази унутар примитивно рекурзивне аритметике финитарни било је опште прихваћено. Оно што су неки оспоравали било је то да финитарна доказивост не превазилази доказивост у примитивно рекурзивној аритметици, видети [Zach, 1998]. Према Крајзеловом мишљењу (*Georg Kreisel*) [Kreisel, 1960] примера ради, финитарна доказивост одговара доказивости у Пеановој аритметици првог реда.

Геделове теореме непотпуности показале су да постоје значајне потешкоће са којима се Хилбертов програм суочава. Ако се појам финитарне доказивости разуме као *доказивост унутар теорије која је довољно јака да садржи примитивно рекурзивну*

[19] Треба напоменути да се назив *Хилбертов програм* односи само на једну конкретну групу проблема којима се Хилберт бавио, иако је сличних програматских приступа проблемима у Хилбертовом научном раду било више. Тако можемо да говоримо не само о Хилбертовом програму, већ и о *Хилбертовим програмима*, видети [Sieg, 2013].

аритметику, онда се *финитарни* доказ конзистентности аритметике не може дати. То је последица друге Геделове теореме непотпуности. Уврежено је мишљење да су Геделове теореме имале разарајуће последице на Хилбертов програм. Али и поред тога, значај Хилбертовог програма за теорију доказа остао је утиснут у формалним средствима којима се изучавају докази и њихова својства. Потреба за аксиоматизацијом математике као и за формализацијом појма финитарног доказа дале су доказима централно место у логици.

Проблеми у вези са формализацијом доказа заједнички су редуктивној и општој теорији доказа. Међутим, пошто је редуктивна теорија доказа била углавном мотивисана проблемима основа математике, она се више бавила појмовима *доказивости* и *конзистентности* него самим појмом *доказа*. Како то примећује Правиц, докази се тамо изучавају само као *средства*, док се у општој теорији доказа изучавају као независтан математички предмет [Prawitz, 1971, p. 237]. Према његовом мишљењу, та теорија се бави:

> ”представљањем доказа путем формалних извођења. На исти начин на који се поставља питање када две формуле дефинишу исти скуп или две реченице изражавају исти исказ, поставља се и питање када два извођења представљају исти доказ; другим речима, траже се критеријуми једнакости за доказе или релација „синонимности“ (еквиваленције) између двају извођења” [Prawitz, 1971, p. 237].

Правиц је питању једнакости доказа и одговарајућег критеријума за те једнакости дао централно место у овој теорији. Два главна и нераздвојива питања опште теорије доказа постала су тако *Шта је доказ?* и *Када се два доказа могу сматрати једнакима?* У [Gentzen, 1935] Генцен даје средства помоћу којих можемо одговорити на оба проблема. Он тамо уводи две врсте формалних система унутар којих можемо да формализујемо исказну и предикатску логику. Систем *природне дедукције* и *рачун секвената*. Природна дедукција је замишљена тако да опонаша неформално закључивање у математици и та формализација би требало да је интуитивнија (отуда и назив *природна* дедукција). Рачун секвената је, са друге стране, боље прилагођен изучавању структуралних својстава доказа. Она се у овом систему сасвим јасно виде, док су у природној дедукцији имплицитна. У рачуну секвената, који је Генцен увео због доказа конзистензности аритметике, он дефинише појам нормалне форме доказа. То је један од основних појмова теорије доказа и посебно опште теорије доказа, о којем ће бити више речи касније.

Формални системи које смо горе поменули заснивају се на хипотетичком закључивању. Просто говорећи, хипотетичко закључивање је закључивање које полази од претпоставки. На пример, под претпоставком да је 21. јануар среда, можемо да закључимо да је 23. јануар петак. У логици, претпоставке од којих полазимо називамо *хипотезама*. На појму хипотетичког закључивања заснива се појам хипотетичког доказа. *Хипотетички доказ* или доказ из хипотеза је онај у којем смо дедуковали неку формулу полазећи од одређеног скупа хипотеза (формула о којима ништа даље не претпостављамо). На основу појма доказа из хипотеза можемо да дефинишемо категорички доказ. *Категорички доказ* или доказ у традиционалном смислу је онај који полази од празног скупа хипотеза. Формула за коју постоји категорички доказ у неком формалном систему називамо *теоремом* тог система.

Као што смо рекли, на појму хипотетичког закључивања се заснивају системи природне дедукције, као и у нешто другачијем руху, рачун секвената. У природној дедукцији доказујемо теореме тако што полазимо од хипотеза и изводимо закључке помоћу правила закључивања. Како доказ напредује, хипотезе можемо *прецртавати* помоћу неких од тих правила. Када је хипотеза прецртана то значи да формула у закључку више ни на који начин од ње не зависи. Када су све хипотезе у доказу прецртане, то значи да је формула у корену доказа теорема. Хипотетички формат доказивања омогућен је тиме што у природној дедукцији имамо много правила закључивања и врло мало аксиома (које се уопште ни не морају јављати). Као што смо напоменули, нека од тих правила нам омогућавају прецртавање хипотеза, а правило које игра посебно значајну улогу је правило за увођење импликације које смо већ спомињали у уводном поглављу.

Осим хипотетичког закључивања у логици можемо да дефинишемо и категоричко закључивање. То је закључивање чије премисе могу бити само теореме. Формални системи чији је формат прилагођен више категоричком а мање хипотетичком закључивању су хилбертовски аксиоматски системи. Они имају пуно аксиома и врло мало правила закључивања. У тим системима показујемо да је нека формула теорема тако што је дедукујемо из одговарајућих аксиома помоћу узастопних примена правила закључивања. Идеја такве врсте доказивања је да у закључивању треба поћи од исказа које смо већ доказали из аксиома или од самих аксиома којима даљи доказ није потребан.

Због таквог формата у хилбертовским аксиоматским системима је врло тешко и неинтуитивно дедуковати. Чак је и проста тврђења релативно сложено доказати. Доказивање олакшава то што знамо да се у формалним системима хилбертовског типа хипотетичко закључивање ипак може представити. Резултат који нам то гарантује је *теорема дедукције*. Она каже да ако у хилбертовском систему постоји доказ за исказ B из скупа хипотеза Γ ∪ A, онда у том систему постоји доказ за $A \Longrightarrow B$ из скупа хипотеза Γ. Захваљујући теореми дедукције знамо да у хилбертовским системима можемо такорећи да опонашамо правило за увођење импликације.

Психолог Ленс Рипс (*Lance Rips*) тврди да су заснованост на правилима закључивања и фаворизовање хипотетичког закључивања два својства природне дедукције које чине тај формални систем интуитивнијим од аксиоматских [Rips, 1994]. То је у складу са чињеницом да се у логици ригидност система хилбертовског типа често ублажава коришћењем теореме дедукције, као и других „мета-теорема" које имају улогу да опонашају хипотетичко закључивање, чинећи извођења у тим системима више налик извођењима у природној дедукцији.

Хипотетичко становиште, које је такође присутно само у другом облику у секвентном рачуну, је један од разлога због којих је природна дедукција била значајна за општу теорију доказа. Она је променила наш начин гледања на доказе. У теорији доказа која је редуктивна, појам доказа се првенствено разуме у категоричком смислу, као доказ из празног скупа хипотеза. У општој теорији доказа, појам хипотетичког доказа или доказа из хипотеза постаје основнији од појма категоричког доказа [Došen, 2015a]. На тај начин, схватање доказа приближава се појму *дедукције*, где су премисе те дедукције хипотезе а закључак је формула која се доказује.

У општој теорији доказа замишљамо доказе као идеалне математичке објекте које представљамо извођењима унутар неког формалног система. Питање једнакости доказа које се у овој теорији поставља може се поставити као питање *Када два извођења представљају исти доказ?* Однос између доказа и извођења којим га формализујемо можемо да посматрамо као однос између неког језичког израза и онога шта тај израз изражава. Имајући то у виду, проблем једнакости доказа можемо формулисати и у облику наредног питања: *Када су два извођења синонимна?*

Као што смо већ рекли, докази су *дедукције*. Прва и најосновнија ствар о дедукцијама јесте то да почињу *премисом* (или скупом премиса), и завршавају се *закључком*. Према томе, нужан услов да би два извођења била синонимна је да буду истог типа. Треба да имају једнаке премисе и једнаке закључке. Проблем једнакости доказа тако можемо изразити у виду следећег питања:

Када два извођења ***истог типа*** *представљају исти доказ?*

На то питање можемо одговорити на три начина:

1) *увек*
2) *никад* (осим ако извођења нису синтаксно идентична)
3) *понекад*

Сваки од три дата одговора представља један приступ проблему једнакости доказа. Према првом приступу, који је критикован у раду [Došen, 2015a, section 6.5.] дедукција односно доказ из скупа хипотеза Γ са закључком B се посматра као уређен пар (Γ, B). Појам дедукције се тако своди на уређен пар исказа или скупа исказа у релацији консеквенције. Тиме се интензионални аспекти тог појма, то *како* долазимо од хипотеза до закључка, заборављају. Другим речима, он је екстензионализован.

> „Свођењем дедукција (*inferences*) из A до B на уређени пар (A, B) у релацији консеквенције (…) постигли бисмо нешто налик ономе што је постигнуто за појам функције. Овај појам је *екстензионалаизован.* Сведен је на скуп уређених парова. Ако смо пре схватали функције као нешто чиме се прелази са аргумента на вредност, сада је функција само скуп уређених парова сачињених од аргумената и вредности. Слично томе, дедукције би били уређени парови сачињени од премиса и закључака." [Došen, 2015a, p. 154] [20]

Последица овог, екстензионалног схватања дедукција је да сваки пар извођења која полазе из истог скупа хипотеза и имају исти закључак *увек* представљају исти доказ. Међутим, како Дошен примећује, док можемо имати само један уређен пар са првом пројекцијом A и другом пројекцијом B, можемо имати више различитих *начина* да исказ B дедукујемо из A [Došen, 2015a, p. 154]. То се може видети на примеру који смо већ помињали. Нека исказ A буде облика $C \wedge C$, а B нека буде C. Постоје бар два доказа формуле C из хипотезе $C \wedge C$. У првом доказу, формулу C дедукујемо из хипотезе $C \wedge$

[20] Треба напоменути овде да је екстензионализација појма доказа извршена такорећи на дубљем нивоу од екстензионализације појма функције. У случају функција екстензионализација не иде толико „дубоко" да функцију своди на уређен пар скупова који чине њен домен и кодомен, па допушта постојање различитих функција истог типа. Код свођења доказа на уређен пар премиса и закључака то није допуштено, не можемо имати различите доказе истог типа.

C на основу тога што елиминацијом конјункције можемо да елиминишемо леви конјункт. У другом доказу, C добијамо тако што из $C \wedge C$ елиминишемо десни конјункт. Док имамо два доказа за C из хипотезе $C \wedge C$, постоји само један уређени пар $(C \wedge C, C)$.

Због тога што једнакост дедукција своде на једнакост хипотеза и закључака, екстензионални критеријуми једнакости доказа нису примењиви у теорији чији би предмет требало да буду докази а не релација консеквенције. Они тривијализују проблем једнакости и на тај начин га пре заобилазе него што нуде решење. А, без могућности да се тај проблем постави, да парафразирамо Дошена, не може бити ни теорије доказа. До сличног закључка долази и Правиц:

> „Као што то назив сугерише, теорија доказа изучава доказе. Другим речима, она се бави не само теоремама неке теорије, *шта* знамо у теорији, већ и тиме *како* знамо те теореме" [Prawitz, 1971, p. 236].

Често је значајно, не само у теорији доказа већ и у логици уопште, разликовати доказе не само на основу њихових хипотеза и закључака већ и на основу идеја од којих полазе. Наиме, у логици и математици често нас не занима само да ли се доказ неког тврђења може наћи, већ да ли се он може извести на одређени начин. Некад је то важно из практичних а некад из теоријских разлога. На пример, важно је када се питамо постоји ли *финитарни* доказ конзистентности неког формалног система или ако се питамо да ли је за неко тврђење могуће дати *конструктиван* доказ. [21] Оваква питања не можемо смислено поставити осим ако нисмо у стању да доказе схватимо не само екстензионално, као уређене парове хипотеза и закључака, већ и интензионално – као начине долажења од хипотеза до закључака.

Видели смо да екстензионално схватање доказа води у тривијалност. Тиме добијамо релацију једнакости на доказима која је сувише широка. Са друге стране, једнакост доказа може постати тривијална и кад је сувише уско дефинисана. Према другом од горе наведена три приступа, два формална извођења представљају исти доказ само ако су синтаксно једнака. Другим речима, синтаксно различита извођења се *никад* не могу сматрати синонимним. Док је екстензионални приступ који смо горе разматрали

[21] Конструктиван доказ је онај у којем се не позивамо на класичне претпоставке, као што су закон искључења трећег, Персов закон, итд. Ако је тврђење које доказујемо егзистенцијалног облика, односно доказујемо да постоји објекат са одређеним својствима, конструктиван доказ би такав објекат издвојио, или барем показао како би се он принципу могао конструисати.

последица екстензионализације појма дедукције, други приступ бисмо могли назвати *синтаксним*, јер доказе своди на синтаксне објекте.

Некад се погрешно претпоставља да је синтаксни приступ последица интензионалног схватања доказа. Претпоставка је да доказ, као начин извођења закључка из хипотеза, можемо да опишемо прецизно унутар језика. На основу тога се изводи закључак да ће извођења да описују различите доказе ако се различито представљају унутар језика. Тај закључак, међутим, не чини се одрживим. Ако исту мисао можемо изразити различитим речима и исти исказ на различитим језицима, није јасно због чега не бисмо могли исти доказ изразити на синтаксно различите начине.

Свођење доказа на синтаксне објекте, на извођења која их представљају, има ту нежељену последицу да не можемо да разликујемо доказ од његове формализације. То је међутим некад потребно да чинимо у математици да бисмо могли да кажемо да ли је формализација неког доказа одговарајућа или не. На пример, ако се у формализацији неког конструктивног доказа позивамо на закон искључења трећег, та формализација неће на одговарајући начин представити почетни доказ.

Овде се може приговорити да неформални доказ можемо разликовати од његове формализације, чак и ако доказе схватимо као синтаксне објекте. Наиме, неформални доказ преставља синтаксни објекат у природном језику а његова формализација синтаксни објекат формалног језика. Формализација неког доказа представљала би онда вид превођења из природног у формални језик. Питање адекватности неке формализације свели би се тако на питање правила превођења. Међутим, није јасно на основу чега бисмо могли да формулишемо и оправдамо правила превођења ако не на основу *смисла* тога што преводимо.

Синтаксни приступ свакако не обећава много као математички занимљива теорија доказа. Једнакости доказа које се заснивају на синтаксној једнакости извођења су ништа мање тривијалне од екстензионалних једнакости које се заснивају на релацији консеквенције. Теорија доказа која би се заснивала на таквим једнакостима може се донекле упоредити са формалним системом чије су аксиоме све и само таутологије. У овом формалном систему не бисмо имали правила закључивања. Сваку теорему бисмо доказивали у самом једном кораку, позивајући се неку од бесконачно много аксиома. Радећи у таквом формалном систему не бисмо научили много о дедуковању нити о томе шта значи доказати неко тврђење у математици. У том смислу, он би био потпуно бескористан.

Вратимо се сада нашем почетном питању:

Када два (синтаксно различита) извођења истог типа представљају исти доказ?

Према трећем приступу одозго два (синтаксно различита) извођења истог типа *понекад* представљају исти доказ. *Понекад* овде не би требало разумети у дословном значењу. Та реч не указује на то да критеријуме једнакости доказа треба схватити као произвољне, зависне од контекста или нешто слично. Она просто сугерише да питање једнакости доказа није тривијално и на њега се не може дати тривијалан одговор. То је приступ опште теорије доказа. У тој теорији, синонимност извођења не може да се објасни на чисто екстензионалан начин нити може да се сведе на пуку синтаксну једнакост.

У општој теорији доказа развијана су, као што смо рекли, два начина формализације критеријума једнакости доказа [Došen, 2003]. Према првом типу критеријума, два извођења представљају исти доказ ако су еквивалентна у погледу њихове нормализације. Тај предлог Дошен назива *Тезом о нормализацији* (*Normalization conjecture*). Једнакост доказа можемо такође задати ослањајући се на појам *општости доказа*. Сходно томе, можемо тврдити да су два доказа једнака ако су њихове репрезентације еквивалентне у погледу њихових општости. То тврђење које је први формулисао Ламбек, Дошен назива *Тезом о генерализацији* (*Generality conjecture*).

У остатку овог поглавља, детаљније ћемо представити поменуте две врсте критеријума за једнакост доказа и осврнути се на резултате изложене у [Došen, 2003] који говоре о њиховом међусобном односу.

2.3. Једнакост доказа заснована на нормализацији

Нормализација почива на идеји да извођење може имати сувишне кораке који се могу уклонити. Тиме се извођење поједностављује без да се његова идеја суштински измени. Процедура поједностављења назива се *нормализација*, а њено исходиште *нормална форма доказа*. Неформално говорећи, доказ је у нормалној форми ако не садржи сувишне кораке.

Појмови нормализације доказа и нормалне форме се по први пут у логици јављају у [Gentzen, 1935]. Премда се такође може тврдити да се нормализација која је независно формализована у [Church, 1932; 1936b] може схватити као нормализација доказа, она је првенствено замишљена као нормализација функција. Више о њој биће речено нешто касније.

У [Gentzen, 1935] Генцен је дао анализу појма доказа унутар формалних система природне дедукције и секвентног рачуна. Иако еквивалентни, ти системи почивају на различитим идејама. Као што смо већ напоменули, природна дедукција је замишљена као формални систем који опонаша неформално закључивање у математици. Са друге стране, секвентни рачун има за циљ да прикаже структурална својства дедукције. Структурална својства су у секвентном рачуну описана *структуралним правилима*, а једно од тих правила је нарочито важно – *правило сечења*. То правило дозвољава да се докази надовезују или компонују. Централни резултат у раду [Gentzen, 1935] је теорема која каже да се сваки доказ у секвентном рачуну за логику првог реда који садржи правило сечења може *нормализовати* односно трансформисати у доказ који не садржи то правило. Та се теорема назива *Hauptsatz* или *Теорема о елиминацији сечења*.

Инспирисан Генценовим резултатом и идејом нормализације у [Gentzen, 1935], Правиц је дефинисао појам нормалне форме за природно-дедукцијска извођења у логици првог реда и потом доказао како се свако природно-дедукцијска извођење може трансформисати у извођење у нормалној форми [Prawitz, 1965]. Да бисмо објаснили на чему се та трансформација заснива, даћемо један пример природно-дедукцијског извођења у исказној логици које није у нормалној форми. Назовимо га α.

$$\begin{array}{c} \Gamma \qquad \Delta \\ D_1\left\{ \begin{array}{cc} \vdots & \vdots \end{array} \right\} D_2 \\ \dfrac{\dfrac{A \qquad B}{A \wedge B}\,\text{У}\wedge}{A}\,\text{Е}\wedge \end{array}$$

Као што је већ поменуто, природна дедукција је систем заснован на хипотетичком закључивању који фаворизује правила над аксиомима. У горе приказаном извођењу дедуковали смо A из скупа хипотеза Γ, а B из скупа хипотеза Δ (нека D_1 представља дедукцију из Γ у A, а D_2 дедукцију из Δ у B). Потом смо увели конјункцију између A и B, а затим смо исту ту конјункцију елиминисали да бисмо добили закључак A. Једноставно је видети да постоји нешто циркуларно у вези са овим извођењем. Увели смо конјункцију само да бисмо је одмах затим елиминисали. Можемо рећи да је тај корак сувишан јер њиме нисмо ништа придодали доказу. Његовим уклањањем извођење α можемо учинити директнијим, једноставнијим, а оно што преостаје када се тај корак уклони је извођење D_1.

У теорији доказа ово се поједностављење извођења назива *трансформација* или *редукција*. Идеја је да смо редукцијом α на D_1 доказ само поједноставили, али га суштински нисмо изменили. Нисмо увели никакве нове елементе који нису били већ садржани у α. Као што је већ поменуто, трансформација или редукција извођења такође се назива се и *нормализацијом*. На крају те процедуре стижемо до извођења које не може бити даље поједностављено и за које кажемо да се налази у *нормалној форми*.

Правиц је дефинисао појмове нормалне форме и нормализације у природној дедукцији у радовима [Prawitz, 1965; Prawitz, 1971]. Појам нормалне форме у природној дедукцији је заснован на идеји да је нормално извођење такво да ниједна елиминација везника не следи одмах након његовог увођења. Да би се постигла *потпуна нормална форма* (енг. *full normal form*) потребно је узети у обзир и посебну врсту редукција које Правиц назива *непосредним поједностављењима* (енг. *immediate simplifications*), а које су везане за сувишне примене класичног правила свођења на апсурд и за уклањање елиминације дисјункције када нема прецртаних претпоставки.

Као последицу ове врсте нормализације имамо да се извођења у потпуној нормалној форми односно његови делови могу поделити на три целине: *аналитичку, минималну и синтетичку* [Prawitz, 1971, theorem 3.2.2.]. Укратко речено, у аналитичком делу извођења врше се елиминације везника, док се у синтетичком врше увођења. Минимални део се налази између. Када се у минималном делу налази само једна формула она се назива *минималном формулом*. Она је уједно и закључак неког правила за елиминацију и премиса правила за увођење везника. Идеја те троделне поделе јесте да у доказу прво полазимо од сложених хипотеза које онда растављамо на једноставније делове. У другом стадијуму доказа прикупљамо материјал који онда у трећем стадијуму спајамо у закључак правилима за увођење везника.

Извођење у потпуној нормалној форми може се трансформисати у *проширену нормалну форму* – потпуну нормалну форму где су све *минималне формуле* атомске [Prawitz, 1971, p. 250]. [22] Такве трансформације се називају *непосредним проширењима*

[22] Под атомским формулама у исказној логици подразумевамо исказна слова или исказне константе $\perp$ и $\top$.

(енг. *immediate expansions*) [Prawitz, 1971, p. 254]. Као пример трансформације непосредног проширења размотримо следећи пример из [Prawitz, 1971, p. 254-255]. Нека α буде извођење које садржи грану на којој је $A \wedge B$ минимална формула и које садржи као свој део извођење D чији је закључак формула $A \wedge B$:

$$\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \end{array}\right\} D \\ A \wedge B \end{array}$$

Такво извођење α може се трансформисати у извођење које уместо D садржи:

$$\dfrac{\dfrac{D\left\{\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \wedge B \end{array}\right.}{A}\,\mathrm{E}\wedge \qquad \dfrac{\left.\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A \wedge B \end{array}\right\} D}{B}\,\mathrm{E}\wedge}{A \wedge B}\,\mathrm{У}\wedge$$

Оваква трансформација може деловати контраинтуитивно са становишта где се нормализација схвата као нешто што поједностављује кораке у изођењу, јер се чини да је прво извођење једноставније од другог. Међутим, проширена нормална форме тиче се поједностављења минималног дела извођења – он мора бити толико упрошћен да се у њему могу јављати само атомске формуле. Идеја је да пре него што извршимо увођења везника, и такорећи изградимо наше закључке, морамо прво доћи до самих атома.[23] То ће за последицу имати да некад морамо допустити трансформације као што је изнад поменута.

Правиц је показао да се свако извођење може трансформисати у (пуну, проширену) нормалну форму примењујући низ корака редукције. Тај резултат је овде за нас посебно значајан због тога што је омогућио Правицу да дефинише релацију еквиваленције на извођењима која се заснива на појму нормалне форме. Према тој

[23] Због захтева да минимални део мора бити атомизован, извођење у проширеној нормалној форми ће наликовати пешчаном сату. Горе и доле ће бити широко, док ће се сужавати у средини.

дефиницији, кажемо да су два извођења еквивалентна у погледу нормализације ако се своде на исту нормалну форму.

Као што смо већ раније рекли, Правиц је питању једнакости доказа и одговарајућег критеријума за те једнакости дао централно место у општој теорији доказа. Али, он није само формулисао поменути проблем, већ је предложио и решење. Према Правицовом мишљењу,

Два извођења представљају исти доказ ако и само ако су еквивалентна у погледу њихових нормалних форми [Prawitz, 1971, p. 257].

По узору на [Došen, 2003] ово тврђење можемо назвати *тезом о нормализацији* (*normalization conjecture*). Као што Мартин Леф и Крајзел (*Georg Kreisel*) истичу, тезу о нормализацији би требало разумети пре као филозофску анализу појма једнакости доказа [Kreisel, 1971, p. 114-117, 165] него као тврђење које се може математички доказати или оповргнути.

Та теза такође говори нешто значајно о томе у чему се састоји смисао формалног извођења и како се он односи према његовој синтакси. Као што смо већ рекли, доказе овде посматрамо као идеалне објекте који нису сводиви на синтаксу. Синтакса је нешто чиме се служимо да о њима говоримо. Међутим, то не значи да формални језик којим описујемо доказе и структура самих доказа нису блиско повезани. Према тези о нормализацији, смисао извођења се чува нормализацијом, а нормална форма је носилац значења. Синтаксно различита извођења могу имати исти смисао, али само под условом да се своде на исту нормалну форму. То значи да смисао такорећи кореспондира синтакси, када је извођење у нормалној форми.

Овде се може поставити следеће питање. Сама нормализација је синтаксна процедура. Доказне једнакости које су на њој засноване биће дакле синтаксно условљене. Њих дефинишемо у односу на некакав језик, правила редукције и одређени појам нормалне форме. Али, зар то није у супротности са становиштем да су докази нешто што је несводиво на синтаксу и у неком смислу независно од ње? Не нужно. Треба имати у виду да проблем једнакости доказа није проблем који је у потпуности независтан од језика, јер је то пре свега проблем који се тиче односа између језика и значења. Он се тиче тога када можемо рећи да два формална извођења имају исто значење. Проблем једнакости доказа можемо формулисати и као питање под каквим синтаксним манипулацијама ће значење извођења остати непромењено. У том смислу, проблем једнакости доказа зависи у неку руку од синтаксе јер ће укључивати нека синтаксна разматрања. Али, то не повлачи да су докази објекти синтаксне природе. То такође не значи да је проблем једнакости релативан и смислен само у односу на одређену синтаксу, у шта ће нас уверити наредно разматрање.

Као што Дошен истиче у [Došen, 2003], један од најснажнијих аргумената у прилог тезе о нормализацији лежи у томе што се у различитим формалним оквирима може дефинисати иста релација еквиваленције на скупу доказа конјунктивно-импликативног фрагмента интуиционистичке исказне логике. То је показано резултатима који носе заједничко име *Кари-Хауард-Ламбекова кореспонденција* (*Curry-Howard-Lambek correspondence)*. Познатији део ове кореcподенције, Кари-Хауардова кореcподенција говори о томе како се докази (у поменутом фрагменту логике) и њихове једнакости засноване на нормализацији могу представити унутар ламбда рачуна с типовима. Докази одговарају ламбда термима, искази које они доказују типовима тих терама, док једнакост доказа одговара једнакости одговарајућих терама. У [Lambek, 1974] и [Lambek, 1972] Ламбек је показао да се докази интуиционистичке исказне логике, као и ламбда терми са типовима, могу такође представитти и у *картезијанским затвореним категоријама* (*Cartesian Closed categories*). Он је доказао да једнакости доказа које је дао Правиц за конјунктивно-импликативни фрагмент интуиционистичке логике које одговарају једнакостима ламбда терама у ламбда рачуну с типовима такође одговарају једнакостима стрелица у картезијанским затвореним категоријама. То проширење Кари-Хауардове кореспонденције називамо Кари-Хауард-Ламбекова кореспонденција.

Та кореспонденција говори у прилог тези о нормализацији и оправдава дефинисање критеријума за једнакост доказа путем нормализације на тај начин што показује да смо на различите начине независно успели да дођемо до исте релације еквиваленције на скупу доказа. То показује да та релација није арбитрарно дефинисана и зависна од одређене синтаксе којом се служимо да о доказима говоримо. У наредним поглављима осврнућемо се на најбитније аспекте Кари-Хауард-Ламбекове кореспондеције. Прво ћемо увести ламбда рачун са типовима, а касније ћемо показати како се дедукције могу представити у картезијанским затвореним категоријама.

2.3.1. Кари-Хауард-Ламбекова кореспонденција

Ламбда рачун, чији је идејни творац Черч је формални оквир који описује функције и једнакости функција. Оно што је карактеристично за ламбда рачун, којем ће четврто поглавље овог рада бити посвећено, је да се у њему функције не разумеју као екстензионално схваћени објекти, него као *правила* помоћу којих аргументима функције придружујемо њихове вредности. У ламбда рачуну појам функције заснива се на двема операцијама: *ламбда апстракцији* (енг. *lambda abstraction*) помоћу које градимо функције, и *примени* (енг. *application*), операцији која описује примену функције на њен аргумент.

Функције у ламбда рачуну могу да буду аргументи других функција. Но, да би се предупредиле неке проблематичне примене (о којима ћемо у поглављу 4 више говорити), ламбда термима се могу доделити *типови*. Могли бисмо рећи да типови одређују које примене су смислене а које не. Типови су или атомски типови које означавамо са $p, q, r \ldots$, или облика $A \longmapsto B$ или облика $A \times B$, где су A и B типови. Тип $A \longmapsto B$ зваћемо *тип стрелице* (*arrow type*), а тип $A \times B$ *тип производа* (*product type*).

Деф. 2.3.1.1. Терми ламбда рачуна са типовима граде се индуктивно помоћу промењивих x, y, z ... (које могу бити и индексиране) на следећи начин (да је ламбда терм M типа A писаћемо као $M: A$):

(*промењиве*) Терм облика $x: A$ је ламбда терм типа A.[24]

(*апстракција*) Ако $M{:}B$ и $x: A$, онда $\lambda x. M: A \longmapsto B$.

(*примена*) Ако $M: A \longmapsto B$ и $N: A$, онда $MN: B$.

(*спаривање*) Ако $M{:}A$ и $N: B$, онда $\ll M, N \gg: A \times B$.

(*пројекције*) Ако $M{:}A \times B$, онда $\pi_1 M: A,\ \pi_2 M: B$.

Овим је закључена индуктивна дефиниција терама ламбда рачуна са оваквим типовима (упоредити са дефиницијама датим у [Girard, 2003, p. 15], [Došen & Petrić, 2000, section 7]).

[24] У [Girard 2003, p. 15] променљиве могу бити само атомског типа.

Формулација ламбда рачуна са типовима коју смо представили још се назива и *ламбда рачуном са сурјективним спаривањем*. Систем типова се може засниваті само на типу стрелице и ламбда рачун са таквим типовима се зове *ламбда рачун простих типова* (*simply typed lambda calculus*), видети [Barendregt, 1984, appendix 1]. Ако користимо само прве три клаузуле дефиниције ***2.3.1.1.*** горе, добијамо индуктивну дефиницију терама ламбда рачуна простих типова.

Треба напоменути да се променљива у ламбда терму може јавити као слободна или као везана. Ако се промењива x јавља у M, онда се она јавља везана у $\lambda x.M$. Промењива се јавља слободно ако се не јавља везано. Обично се усваја конвенција да се слободна и везана променљива у терму не обележавају истим словом. Ако терм не садржи слободне променљиве назива се *затвореним*.

Формуле ламбда рачуна с типовима су облика $M = N$, где су M и N терми истог типа. Ламбда рачун са типовима је једнакосни рачун у којем доказујемо једнакост терама који су истог типа. Осим стандардних аксиома који се претпостављају за једнакост и неких додатних који изражавају претпоставку да ламбда терми имају функционално понашање, у рачуну простих типова имамо и наредне аксиоме:

- (α) $\lambda x.M = \lambda y.M\,[y/x]$, ако y није слободно у M
- (β) $(\lambda x.M)N = M\,[N/x]$,
- (η) $\lambda x.Mx = M$, ако x није слободно у M.

Напомена. $M[N/x]$ означава супституцију терма N уместо слободне променљиве x у M.

У ламбда рачуну са сурјективним спаривањем додајемо још и следеће једнакости везане за пројекције и спаривање, видети [Girard, 2003, p. 16]:

- (β) $\pi_1 \ll M, N \gg = M, \pi_2 \ll M, N \gg = N$
- (η) $\ll \pi_1 L, \pi_2 L \gg = L$.

Као што смо већ напоменули, захваљујући Кари-Хауардовој кореспонденцији, знамо да се докази интуиционистичке логике, тачније њеног фрагмента за конјункцију и импликацију могу представити у ламбда рачуну са типовима, видети [Girard, 2003, section 3.].

Прво се можемо питати како у том рачуну представљамо исказе? Представљамо их типовима. Кореспонденција између исказа и типова је очигледна. Атомским типовима одговарају исказна слова. Тип $A \times B$ представљаће конјункцију исказа које представљају типови A и B. Слично, тип $A \longmapsto B$ представљаће импликацију чији је антецеденс A а консеквенс исказ B. Са друге стране, докази ће бити представљени термима. Ако је d доказ исказа A без хипотеза, онда постоји затворени терм $M: A$ који тај доказ представља. У општијем случају, ако је d доказ исказа A са хипотезама у Г, онда постоји терм $M: A$ са слободним промењивама који тај доказ представља и за сваку хипотезу B из Γ, постоји слободна промењива x у M, таква да $x: B$.

Докази исказног рачуна за конјункцију и импликацију се унутар ламбда рачуна са типовима могу представити ламбда термима захваљујући томе што се операцијама којима се ти терми граде могу приписати правила закључивања у систему природне дедукције [Girard, 2003, посебно section 3.5.]. Тако ламбда апстракцији одговара увођење импликације, док примени одговара правило за елиминисање импликације. Спаривању одговара увођење конјункције а пројекцијама лево и десно елиминисање конјункције. Најпростија дедукција, којом се из A дедукује A и коју можемо назвати дедукцијом идентитета, представљена је у ламбда рачуну слободном промењивом x која је типа A.

Кари-Хауардова кореспонденција такође показује да у ламбда рачуну са типовима једнакости терама одговарају једнакостима дедукција које се заснивају на Правицовој нормализацији. Једнакостима у ламбда рачуну одговарају једнакости дедукција које узимају у обзир и проширене нормалне форме, а ако узимамо у обзир само нормалне форме онда то одговара једнакостима терама у ламбда рачуну без η једнакости.

Требало би напоменути да у ламбда рачуну са типовима можемо представити и исказни рачун интуиционистичке логике са конјункцијом, импликацијом и *константом* ⊤, тако што скуп атомских типова проширујемо са типом T и где се уводи константа $k: T$ и једнакост за $x: T$, $x = k$ [Došen & Petrić, 2000, section 7].

Као што смо већ рекли, значај Кари-Хауардове кореспонденције се састоји у томе што се исти математички феномен – иста класа еквиваленције на извођењима, може описати независно из различитих углова – из угла формалног система природне дедукције и из угла ламбда рачуна са типовима. То представља снажан аргумент у прилог тезе о нормализацији, због тога што се тиме показује да критеријуми једнакости доказа који су њоме успостављени нису произвољни, већ имају чврсто математичко језгро.

Према Дошеновом мишљењу, међутим, ламбда рачун није оптималан оквир за анализу појма доказа [Došen, 2015a, section 6.4.]. Један од разлога је тај што представљањем доказа као терама ламбда рачуна, више наглашавамо закључке у односу на хипотезе, што се одсликава у томе да су хипотетички докази представљени термима са слободним промењивама. То становиште да категоричком треба у логици дати примат у односу на хипотетичко се у [Došen, 2015a; Schroeder-Heister, 2012b] класификује као једна од догми редуктивне теорије доказа, која се у општој теорији доказа одбацује. У општој теорији доказа желимо да посматрамо хипотетичке доказе – доказе из хипотеза, као примарније у односу на категоричке доказе – доказе из празног скупа хипотеза.

Ипак, не би било сасвим оправдано рећи да у ламбда рачуну не остављамо простора за хипотетичко схватање доказа, напротив. Као што смо управо споменули, хипотетички докази се представљају термима са слободним промењивама. Међутим, мислим да је Дошенов закључак овде да иако у ламбда рачуну допуштамо хипотетичке доказе, њихов хипотетички карактер није у првом плану. Сам формат ламбда рачуна са типовима нам то не омогућава. Наиме, терми су облика $M : A$ што значи да се доказ првенствено посматра као доказ неког исказа, а не као нешто што нам омогућава прелазак са премиса на закључак, што дакле, у неком смислу фаворизује категоричку форму наспрам хипотетичке.

Према Дошеновом мишљењу, други разлог због којег се може рећи да ламбда рачун није оптималан оквир за репрезентацију доказа је што у њему структуралне особине дедукције не долазе до изражаја, оне нису очигледне [Došen, 2016, section 3]. На пример, то да се докази могу надовезивати, што је у рачуну секвената представљено правилом сечења, је у ламбда рачуну приказано супституцијом [Došen, 2016, section 3, p. 70-71], која чини да асоцијативна природа тог надовезивања постаје скоро неприметна (Више о значају структуралних особина дедукција рећи ћемо у наставку).

Као што је већ споменуто, мање је познато да се Кари-Хауардова кореспонденција између природне дедукције и ламбда рачуна са типовима такође може проширити и на категорије, као што је то показао Ламбек. Наиме, Ламбек је показао да се докази интуиционистичког исказног рачуна за конјункцију и импликацију, и њихова једнакост заснована на нормализацији могу представити и унутар теорије категорија помоћу структура које се називају *картезијанске затворене категорије*. Докази се представљају стрелицама у овим категоријама, а њихова једнакост која је задата нормализацијом се представља једнакошћу тих стрелица.

Последица Ламбекових резултата је да се проблем једнакости доказа премешта у поље теорије категорија. Дошен је сматрао да теорија категорија пружа формална средства која су боље прилагођена самој природи доказа, него средства која пружа ламбда рачун са типовима. Према његовом мишљењу, то је случај претежно због тога што:

a) је у категоријама хипотетичка перспектива јасно примарнија у односну на категоричку и због тога што
b) су структуралне особине дедукција много јасније приказане у категоријама него у ламбда рачуну и њима се даје већа важност.

Грана (опште) теорије доказа која изучава дедукције кроз категорије назива се *категоријална теорија доказа* (енг. *categorial* или *categorical proof theory*). У одељку који следи увешћемо њене основне појмове. Показаћемо како се дедукције могу представити у категоријама и због чега је то значајно.

2.3.2. Докази у категоријама

У наставку ћемо прво да дефинишемо појам категорије, да бисмо након тога могли да говоримо о посебној врсти категорија – картезијанским категоријама. Да бисмо то урадили, прво ћемо да дефинишемо појмове графа и дедуктивног система на којима се дефиниција категорије заснива.

(Усмерени) Граф G је структура која се састоји из колекције *објеката Ob* које ћемо да означавамо великим словима $A, B, C\ldots$; колекције *стрелица Ar* које ћемо да означавамо словима $f, g, h\ldots$и пара фунцкија из *Ar* у *Ob* које се називају *извор* (*source*) и *мета* (*target*) а које свакој стрелици приписују њен извор, односно њену мету. Да стрелица f има као извор објекат A и мету објекат B се записује као $f\colon A\to B$. Уређени пар (A, B) ћемо назвати *типом* од f.

Граф G је *дедуктивни систем* ако за сваки објекат A из G постоји стрелица $\mathbf{1}_A\colon A\to A$ која се назива *идентичком* или *јединичном стрелицом* и постоји бинарна парцијална операција композиције $\circ$ која пару стрелица ($f: A \to B,\ g: B \to C$) придружује стрелицу $g \circ f: A \to C$ која се назива њиховом композицијом.

Деф. В.2.2.1. *Категорија* је дедуктивни систем D у којем важе наредне једнакости између стрелица одговарајућег типа:

$(cat\ 1l)$ $\quad f \circ \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}} = f$

$(cat\ 1r)$ $\quad \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \circ f = f$

$(cat\ 2)$ $\quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Појмови графа, дедуктивног система и категорије које смо управо представили дефинисани су као у [Lambek & Scott, 1986, p. 5].

Можемо се питати како нам појам категорије омогућава да анализирамо појам доказа. Дедукције, односно хипотетички докази могу се представити стрелицама у категорији где се извор посматра као хипотеза а мета као закључак доказа. То је први уочио Ламбек [Lambek 1968; 1969; 1972]. Такву карактеризацију појма доказа односно назваћемо *категоријалном*.

Стрелице идентитета у категоријама представљају доказе идентитета. Докази идентитета су најједноставније дедукције у којима се исказ A дедукује из самог себе. У секвентном рачуну докази идентитета су представљени секвентима облика $A \vdash A$, док су такви докази у природној дедукцији имплицитни. У природној дедукцији сама формула A може се посматрати као дедукција идентитета где је A уједно и хипотеза и закључак извођења.

Композиција стрелица у категоријама се интерпретира као надовезивање доказа. Интуитивно, надовезивање доказа представља начин на који помоћу два доказа градимо нови. Наиме, ако са једне стране имамо доказ који почиње хипотезом A и завршава се закључком B, и са друге доказ који почиње хипотезом B и завршава се закључком C, ми их можемо надовезати и тако изградити доказ који започиње хипотезом A и завршава се закључком C. Надовезивање доказа је у природној дедукцији опет имплицитно, а у секвентном рачуну му одговара већ поменуто правило сечења.

Сада ћемо рећи нешто о томе како можемо једнакости у категоријама разумети као једнакости дедукција. Једнакост $(cat\ 2)$ гарантује да је операција композиције асоцијативна. Асоцијативност композиције представља идеју да је редослед надовезивања небитан за значење доказа који је тако добијен. Та претпоставка је природна и она је у природној дедукцији имплицитна. Једнакостима $(cat\ 1l)$ и $(cat\ 1r)$ се тврди да је надовезивање доказа идентитета сувишно. Идеја доказа која је изражена у $f \circ \mathbf{1}_A$ и у $\mathbf{1}_B \circ f$ не разликује се од идеје која је већ изражена у f. У том смислу, може се рећи да надовезивањем са $\mathbf{1}_A$ или $\mathbf{1}_B$ нисмо ништа суштински ново додали оригиналном доказу, само смо га непотребно продужили. У рачуну секвената једнакостима $(cat\ 1l)$ и $(cat\ 1r)$ одговара чињеница да се сечење са аксиоматским секвентима може елиминисати. У природној дедукцији идеја ових једнакости се такође јавља али је она уграђена у сам формални апарат. Због тога како се у том систему представљају докази идентитета, у природној дедукцији не можемо ни направити синтаксну разлику између $f \circ \mathbf{1}_A$ и f, примера ради.

Представљање доказа помоћу стрелица у категоријама помаже нам да боље разумемо и истакнемо важност њихове хипотетичке природе. Према хипотетичком схватању доказа, доказе посматрамо пре свега као нешто помоћу чега се прелази са хипотеза на закључак, без да се иједном од та два даје примат. Представљање доказа помоћу стрелица показује да је прелазак са хипотеза на закључак важнији од њих самих. Дедукције су важније од исказа. То гледиште се у категоријалној теорији доказа одсликава у томе што се у категоријама стрелице посматрају као важније од објеката. У категорији ми не морамо да специфицујемо шта су објекти, да ли су то искази, скупови или нешто треће. Овај начин гледања на дедукције у складу је са схватањем према којем према којем хипотезе и закључци дедукција не морају да буду искључиво искази, већ то могу бити и императиви или питања [Došen, 2015a; Maksimović, 2016].

Према категоријалној теорији доказа, оно што одређује појам дедукције су пре свега њене структуралне особине – постојање дедукције идентитета и могућност надовезивања доказа који су истог типа. Као што смо рекли, појмове дедукције идентитета и операције надовезивања доказа ближе одређују једнакости које за њих претпостављамо.

Дедукције, међутим, не карактеришу само њихове структуралне особине, већ и њихова повезаност са *логичким везницима*. Да бисмо представили везнике у категоријама и да бисмо помоћи њих могли нешто значајно да кажемо о једнакости доказа, биће нам потребне категорије са богатијом структуром. Зато ћемо у наставку прво да уведемо појам картезијанске категорије.

Деф. 2.3.2.4. Категорија *са бинарним производима* је категорија у којој имамо бинарну операцију $\times$ на објектима, *пројекције*: $p^1_{A,B}: A \times B \rightarrow A,\ p^2_{A,B}: A \times B \rightarrow B$ (које се називају *првом* и *другом пројекцијом*); и бинарну операцију на стрелицама која се назива *спаривање* ($pairing$) и која примењена на сваки пар стрелица ($f: C \rightarrow A, g: C \rightarrow B$) даје стрелицу $\langle f, g \rangle : C \rightarrow A \times B$.

У категорији са производима важе наредне једнакости:

$(E1)$ $p^1 \circ \langle f, g \rangle = f$

$(E2)$ $p^2 \circ \langle f, g \rangle = g$

$(E3)$ за свако $h: C \rightarrow A \times B, \langle p1 \circ h, p2 \circ h \rangle = h$.

Деф. 2.3.2.5. Категорија C има *терминални објекат* ако се међу објектима те категорије налази објекат $\top$ заједно са фамилијом стрелица $k_A: A \rightarrow \top$, које су индексиране објектима из C, и које су такве да

$(E4)$ за свако $j: A \rightarrow \top, j = k_A$.

Служећи се појмовима категорије са бинарним производомима и појма терминалног објекта, дефинишемо појам картезијанске категорије.

Деф. 2.3.2.6. Категорија C је *картезијанска категорија* (скраћено: CC) ако је C категорија са бинарним производима и C има терминални објекат (упоредити дефиницију картезијанских категорија са [Došen, 2001], section 1).

Картезијанске категорије се могу посматрати као модел за исказни рачун који од везника садржи само конјункцију и константу $\top$. У том моделу пројекције одговарају правилима за елиминацију конјункције, а операција спаривања одговара увођењу конјункције. Да будемо прецизнији, спаривање би одговарало мало друкчијем правилу за увођење конјункције од стандардног. Наиме, код тог правила би се захтевало да оба конјункта зависе од истих хипотеза, што је захтев који немамо у Генценовој формулацији природне дедукције. Међутим, то што у први мах делује као потешкоћа се лако заобилази, будући да та два правила имају исту снагу у присуству пројекција, и можемо дефинисати операцију која би одговарала стандардном правилу за увођење конјункције.

У наставку ћемо да уведемо појам картезијанских затворених категорија (скраћено: CCC) које ће да моделују наш исказни рачун проширен импликацијом.

Деф. 2.3.2.7. Категорија C је картезијанска затворена категорија ако је C картезијанска категорија и C има бинарну операцију на објектима $\Rightarrow$ као и фамилију стрелица $\varepsilon_{A,B}$: $((A \Rightarrow B) \times A) \rightarrow B$ и парцијалну операцију на стрелицама која примењена на f: $C \times A \rightarrow B$ даје $\Gamma_{C,A}(f)$: $C \rightarrow A \Rightarrow B$, тако да важе наредне једнакости за све f, g одговарајућег типа:

$$(E5)\ \varepsilon_{A,B} \circ \langle \Gamma_{C,A}(f) \circ p^1_{C,A},\ p^2_{C,A} \rangle = f$$

$$(E6)\ \Gamma_{C,A}\ (\ \varepsilon_{A,B} \circ \langle g \circ p^1_{C,A},\ p^2_{C,A} \rangle) = g$$

(Дефиницију слободних картезијанских затворених категорија читалац може наћи и у [Došen & Petrić, 2000, section 10; Lambek & Scott, 1986, chapter 1.3])

Поменути Ламбекови резултати показују да CCC моделују исказни рачун са конјункцијом, константом $\top$ и интуиционистичком импликацијом (више о вези између слободних, картезијанских категорија, исказног рачуна и ламбда рачуна са типовима читалац може наћи у [Lambek & Scott, 1986, chapter 1]). Објекти CCC представљају исказе а стрелице извођења унутар овог рачуна, тако да $\times$ одговара конјункцији а $\Rightarrow$ импликацији. Једнакости између стрелица индукују релацију еквиваленције на извођењима која у потпуности одговара Правицовој релацији еквиваленције (узимајући у обзир проширене нормалне форме), а према Кари-Хауард-Ламбековој кореспонденцији такође и једнакостима $\lambda_{\beta\eta}$ рачуна са типовима. Једнакости $(E1)$, $(E2)$, $(E5)$ одговарају бета једнакостима, док једнакости $(E3)$ и $(E6)$ представљају ета једнакости. Чињеница да можемо описати оно што се испоставља као исти математички феномен – иста релација еквиваленције на извођењима, из више различитих, независних перспектива је врло значајно. То указује да заиста описујемо нешто што је чврсто укорењено у самом појму доказа и као што смо већ рекли, представља снажан аргумент у прилог тезе о нормализацији [Došen, 2003, p. 5].

2.3.3. Интензионалност као градација и појам максималности

Према Дошену [Došen, 2003], аргументи у прилог тези о нормализацији такође извиру и из резултата максималности, као што су они изложени у [Došen & Petrić, 2001] и [Došen & Petrić, 2000]. Овде се њима нећемо детаљније бавити, али ћемо рећи нешто укратко о појму максималности. Једноставно речено, категорија C је максимална ако ширење C новим једнакостима (на „језику“ те категорије) резултира у категорији у којој се једнакост стрелица своди на једнакост њихових типова. За такву категорију кажемо да представља *предуређење* [Došen & Petrić, 2001]. Показујући максималност неке категорије показујемо да додавањем нових једнакости добијамо екстензионалне критеријуме једнакости стрелица у тој категорији.

Појам максималности неке категорије повезан је са проблемом једнакости доказа на следећи начин. Као што смо рекли, неке категорије могу служити као модел за одговарајуће фрагменте исказног рачуна, а једнакости стрелица као једнакости доказа тог фрагмента. Примера ради, CC је модел за конјунктивни фрагмент исказне логике са константом $\top$. Показујући максималност за CC, видети [Došen & Petrić, 2000], показано је да би додавање нових доказних једнакости овог фрагмента већ постојећим водило потпуној екстензионализацији једнакости доказа тог фрагмента логике. Другим речима, једнакост доказа би се свела на једнакост њихових хипотеза и закључака.

Максимални критеријуми једнакости се дакле не могу даље ширити а да се не западне у екстензионалност. У неком смислу, може се рећи да је код њих постигнут максимални могући ниво поједностављења значења доказа који не води у потпуну екстензионалнизацију тог појма. Ово становиште претпоставља неку врсту градације степена интензионалности. Покушајмо то да објаснимо детаљније.

Као што смо већ рекли, свака екстензионализација представља неко поједностављење. Када неки појам екстензионализујемо ми апстрахујемо његову екстензију од осталих нереференцијалних компонената значења које при том заборављамо. На тај начин, поједностављујемо дати појам. Међутим, не води свако поједностављење значења до анализе која је у потпуности екстензионална. Наиме, можемо апстраховати *неке* али не нужно и *све* нереференцијалне компоненте значења. Примера ради, анализа значења везника *ако онда* која као резултат даје материјалну импликација у потпуности заборавља везу између антецеденса и консеквенса, и на тај начин поједностављује значење *ако онда* тако што га своди на истиносну функцију. Са друге стране, анализа значења везника *ако онда* која као резултат даје интуиционистичку импликацију не заборавља сасвим везу која постоји између антецеденса и консеквенса. Као што смо рекли, у интуиционистичкој логици $A \Rightarrow B$ значи да се B може дедуковати из A. Ипак, може се рећи да интуционистичка импликација поједностављује значење *ако онда* у односу на импликацију *релевантне логике.* Та импликација представља још стриктнију, чвршћу везу између антецеденса и консеквенса и тиме се приближава интуитивном схватању *ако онда* природног језика. Наиме, у релевантној логици $A \Rightarrow B$ значи да се B може дедуковати из A али да при том хипотеза A мора бити *искоришћена* у доказу. Ни у класичној логици, као ни у интуиционистичкој то није увек случај. Уколико је B само теорема, онда се може закључити $A \Rightarrow B$, иако се исказ A на пример уопште не јавља у доказу за B. Замисао која стоји иза тога је врло једноставна. Ако постоји (категорички) доказ за B, онда се, према дефиницији, B може дедуковати из празног скупа хипотеза. Али, ако се B може дедуковати без хипотеза, онда се такође може дедуковати и ако су неке хипотезе на располагању.

Можемо рећи да анализа значења *ако онда* на којој се заснива класична импликација највише поједностављује значење тог везника, јер изоставља *све* његове интензионалне компоненте. Са друге стране, релевантна импликација, изоставља најмање интензионалних компоненти и задржава најчвршћу везу између антецеденса и консеквенса. Интуиционистичка импликација је у средини, она изоставља само неке од интензионалних компоненти, док задржава оне најважније. [25] Релевантна као и интуиционистичка импликација су формализације везника *ако онда* које узимају у обзир његов смисао, а не само његову екстензију. Међутим, тај смисао је код друге више поједностављен него код прве, јер је веза између антецеденса и консеквенса постоји али је донекле ослабљена.

Оно што овај пример показује јесте да је могуће бавити се интензијом неког појма користећи се различитим нивоима апстракције. Са једне стране имамо крајњу екстензионализацију појма у којој је ниво апстракције и поједностављења највиши – у њему заборављамо све осим референцијалних компонента значења. На другој страни спектра налази се некакво идеално, непоједностављено значење тог појма које обухвата

[25] Разлике између некласичних логика, као што су релевантна и интуиционистичка логика могу се представити као разлике у погледу структуралних правила која су претпостављена у секвентним формулацијама поменутих логика. Због тога некласичне логике као што су интуиционистичка и релевантна припадају класи логика које се називају *супструктуралним* (енг. *substructural logics*) (више о тим логикама видети у [Došen & Schroeder-Heister, 1993]). Појам структуралног правила је уведен у [Gentzen, 1935]. Структурална правила се не тичу логичких везника колико структуре саме дедукције такорећи, па се може рећи и да се супструктуралне логике разликују по томе што имају другачија схватања дедукције. Интуиционистичка логика се разликује од класичне по томе што ограничава правило слабљења (енг. *thinning*) док га релевантна логика у потпуности одбацује. *Линеарну логику* карактерише одбацивање слабљења као и контракције. У овој логици разликује се доказ за B у коме се хипотеза A јавља само једном, од доказа за B у коме се хипотеза A јавља више пута. Дакле, не само да бележимо да ли је A коришћено у доказу већ нас интересује и колико је пута коришћено.

све његове интензионалне компоненте. Између ова два краја спектра налазе се различити нивои или градуације интензионалности. Према овом становишту, можемо рећи да је нека анализа више или мање интензионална у зависности од тога колико се удаљава од крајње екстензионализације и колико се приближава идеалном непоједностављеном значењу. Примера ради, можемо рећи да је релевантна логика у том смислу интензионалнија од интуиционистичке која је интензионална у односу на класичну.

Управо та градуација интензионалности се дешава када се бавимо проблемом једнакости доказа из перспективе нормализације. Напоменули смо да једнакости доказа које су засноване на нормализацији нису јединствене већ долазе у два облика. То је последица тога што Правиц формулише појам нормализације на два начина: позивајући се на потпуне нормалне форме и на проширене нормалне форме. Нормализација која укључује проширене нормалне форме на нешто слободнији и поједностављенији начин схвата смисао доказа од нормализације која се ограничава само на потпуне нормалне али не и на проширене нормалне форме. То је због тога што нам прва допушта да изједначимо неке доказе које су према другој интензионално различити [видети стр. 43 и 44 овог рада]. На основу прве нормализације која је у том смислу мање интензионлана дефинишемо једнакост доказа која одговара једнакости у ламбда рачуну са η аксиомом. На основу друге која је више интензионална одређујемо једнакост која се представља у ламбда рачуну без η аксиоме. Треба напоменути да није случајно што су критеријуми једнакости који укључују η они који су мање интензионални. Више о значењу η ћемо рећи у четвртом поглављу када се будемо детаљније бавили ламбда рачуном и тамо ћемо јасније видети зашто нас у неким контекстима прихватање те аксиоме удаљава од интензионалног становишта.

Ово шире схватање једнакости које укључује проширене нормалне форме даје нам критеријуме једнакости доказа који су за одређене фрагменте исказног рачуна максимални. Њихова максималност показује да је постигнут максимални могући ниво поједностављења значења доказа који не води у потпуну екстензионализацију тог појма. Другим речима, можемо рећи да је успостављена је оптимална равнотежа између потребе да се ти критеријуми што је могуће више поједноставе са једне, и потребе да се сачува интензионални аспекат значења доказа са друге стране. Појам максималности овде показује да анализа неког појма која је „интензионалнија“ не мора у сваком контексту бити и оптималнија.

Рекли смо да је могуће пружити интензионалне анализе истог математичког појма са различитим нивоима апстракције. Међутим, треба имати у виду да нису сваке две појмовне анализе на овај начин упоредиве. Некад имамо две идејно сличне анализе које се разликују према нивоу апстракције а некад просто имамо две анализе које полазе од различитих идеја и сагледавају исти појам из различитих углова. О томе ћемо да говоримо у наставку овог поглавља. Наиме, у претходним одељцима анализирали смо појам једнакости доказа из перспективе нормализације. Показали смо да се нормална форма извођења може посматрати као носилац његовог значења, а процес нормализације као процес путем кога се доказ синтаксно оптимизује, али се не мења суштински. У одељку који следи представићемо једну другачију анализу појма једнакости доказа, према којој значење извођења није утемељено у његовој нормалној форми, већ у његовој општости.

2.4. Једнакост доказа заснована на општости

Ламбеков рад има веома значајно место у општој теорији доказа. Као што смо напоменули, он је допринео томе да се релација еквиваленције између извођења коју је описао Правиц математички опише. Наиме, Ламбек је показао да се једнакост терама ламбда рачуна са типовима може представити једнакошћу стрелица у картезијанским затвореним категоријама [Lambek 1972; Lambek 1974]. Мање је познато да је он развио још једну врсту релације еквиваленције на извођењима. Та релација се заснивала на идеји да су два извођења једнака ако су исте општости. Да бисмо видели шта то тачно значи, погледајмо следећи Ламбеков пример.

Нека је $A \wedge A$ хипотеза и формула A закључак дедукције d. Колико има различитих дедукција које имају исту хипотезу и закључак као d? Можемо наћи барем две. Назовимо их d_1 и d_2. Интуитивно, у d_1 формула A потиче од левог конјункта из формуле $A \wedge A$, док у d_2 формула A потиче од десног конјункта. Када ове дедукције формалније прикажемо у систему природне дедукције, можемо рећи да се у d_1 користимо правилом за елиминацију конјункције којим добијамо леви конјункт (то правило закључивања допушта да дедукујемо B из премисе $B \wedge C$), а у d_2 се користимо правилом за елиминацију конјункције којим добијамо десни конјункт (то правило закључивања допушта да дедукујемо C из премисе $B \wedge C$).

У категоријама, дедукције d_1 и d_2 су представљене првом пројекцијом $\pi^1_{p,p}: p \wedge p \rightarrow p$ и другом пројекцијом $\pi^2_{p,p}: p \wedge p \rightarrow p$. У [Lambek, 1972, p. 65] Ламбек каже да су $\pi^1_{p,p}: p \wedge p \rightarrow p$ и $\pi^2_{p,p}: p \wedge p \rightarrow p$ различите *општости*, због тога што се прва уопштава до $\pi^1_{p,q}: p \wedge q \rightarrow p$, док се друга уопштава до $\pi^2_{p,q}: p \wedge q \rightarrow q$. Те две стрелице се не могу изједначити с обзиром да нису истог типа. Оне имају различиту мету.

Једноставан и интуитиван начин да представимо општост извођења јесте помоћу графова као што је то учињено у [Došen, 2003]. Требало би споменути да је појам графа који се овде користи шири од појма усмереног графа који смо ми увели раније. Укратко, разлика је у томе што су стрелице сада неусмерене, није нам више важно шта је почетак а шта крај стрелице колико то да ли су два објекта повезана или не. Код таквих, неусмерених графова, објекти се чешће називају *теменима* или *чворовима* (енг. *vertices*), а стрелице *ивицама* (енг. *edges*). Дакле, општост доказа ће бити представљена графом чија су темена јављања исказних слова у хипотезама и закључку извођења. Процедура уопштавања доказа, односно налажења његове општости састоји се мењању имена исказним променљивима. Уопштавање је дозвољено све док не мења правила која су коришћена у извођењу.

Она и само она јављања која остају иста након таквог уопштавања биће повезана ивицом у графу. На основу тога, општости од $\pi^1_{p,p}$ и $\pi^2_{p,p}$ биће представљене наредним графовима [Došen, 2003, p. 8]:

У првом графу прво јављање од p је повезано са доњим p, а у другом графу друго јављање од p је повезано са доњим p. Када се исказно слово p замени произвољном формулом A, свако јављање исказног слова у десноме A у премиси биће повезано са јављањем тог исказног слова у закључку.

Графови које смо горе описали графови чине категорију која се у [Došen, 2003, p. 9] назива *Графичком категоријом*. Објекти ове категорије су исказне формуле (које представљају хипотезе и закључке дедукција), док графови представљају стрелице. За сваку исказну формулу, имаћемо граф идентитета у којем су све ивице равне и паралелне. Графови се могу компоновати лепљењем (енг. *gluing*) темена и простим надовезивањем ивица. Лако је видети да ће та композиција бити асоцијативна, као и да важе категоријалне једнакости везане за идентитет. [26]

Једнакост графова који чине стрелице ове графичке категорије нам даје модел за једнакост доказа која се заснива на општости. Напоменимо још једном да графови овде не представљају доказе већ њихове општости. Рећи ћемо да су два извођења еквивалентна у погледу општости ако су њихове општости представљене истим графом. На основу те релације еквиваленције на извођењима могу се дефинисати следећи критеријуми за једнакост доказа.

Два извођења представљају исти доказ ако су еквивалентна у погледу њихове општости.

Идеја је да ће два извођења бити еквивалентна у погледу њихове општости ако се могу уопштити на исти начин. Та теза се у [Došen, 2003, section 3] назива *Тезом о општости* (*Generality conjecture*). [27] Као и раније када смо разматрали значење тезе о нормализацији, схватићемо тезу о општости не као математичко тврђење већ као филозофску анализу појма значења доказа.

Критеријуми једнакости доказа који се заснивају на општости почивају на идеји да је значење доказа у блиској вези са *правилима* закључивања која се у том доказу примењују и помоћу којих дедукујемо закључак из хипотеза. Може се рећи да је фундаментално својство правила у томе да изражавају нешто *опште*, а појам општости доказа можемо да схватимо као начин да представимо управо тај општи садржај правила која се у доказу користе.

И критеријуми једнакости доказа који се заснивају на нормализацији, као и они који се заснивају на општости резултат су појмовне анализе која значењу доказа приступа интензионално. Доказ се не посматра као синтаксни објекат нити као уређени пар који се састоји из хипотезе и закључка. Доказ се посматра као *смисао* извођења – и он се састоји у *вези* између хипотезе и закључка. Та веза није ништа друго него начин

[26] Требало би напоменути да је опис ових графова који одговарају категоријалним доказима ипак само скица. Овде су они сведени на релације, међутим, можемо их посматрати као сложеније геометријске објекте – многострукости (енг. *manifold*). Онда појам графа постаје релација „бити у истој компоненти повезаности“.

[27] У [Došen & Petrić, 2004, section 3] даје се још и једна другачија формулација тезе о општости.

како долазимо од хипотезе до закључка применом извесних правила. Два поменута критеријума за једнакост доказа дефинишу то шта значи *доћи на исти начин од хипотезе до закључка* користећи се другачијим појмовима. Критеријуми који се заснивају на нормализацији користе се појмом нормалне форме, а они који се заснивају на општости користе се појмом општости доказа. Међутим, иако полазе од различитих појмова, можемо се запитати да ли та два критеријума дају исте једнакости доказа. Другим речима, да ли дефинишу исту релацију синонимности на извођењима интуиционистичке логике? То је питање којим ћемо се бавити у наредном поглављу.

2.5. Кохеренција

Као што смо већ рекли, критеријуми једнакости доказа интуиционистичке исказне логике засновани на нормализацији су представљени у бикартезијанским затвореним категоријама. Критеријуми једнакости засновани на општости су са друге стране представљени у графичкој категорији коју генерише скуп исказних слова.

Тврдити да су два извођења еквивалентна у погледу њихове нормалне форме ако и само ако су еквивалентна у погледу њихове општости је у теорији категорија исто што и тврдити да постоји *кохеренција* (*coherence*) између слободно генерисане бикартезијанске категорије *C* и графичке категорије *G* [Došen, 2003]. Појам кохеренције дефинисаћемо као у [Došen, 2003, p. 9-10] и то на следећи начин.

Деф. 2.4.1. Нека је *C* слободно генерисана категорија и *G* је графичка категорија. *Кохеренција* између *C* и *G* важи ако:

$$f = g \text{ акко } F(f) = F(g),$$

где су f и g стрелице слободне категорије *C*, и *F* је пресликавање из *C* у *G*.

Извођења су представљена стрелицама а *F* треба да приписује сваком извођењу његову општост. Кохеренција између *C* и *G* важи ако и само ако је *F веран функтор* (енг. *faithful functor*). Једним смером еквиваленције, с леве на десну страну, тврди се да је *F* функтор, а другим смером се тврди да је он веран.

Према Дошену, доказати кохеренцију између слободне бикартезијанске категорије и графичке категорије како смо је дефинисали горе се може схватити као доказ теореме потпуности. Слободна бикартезијанска категорија се посматра као формални систем, а графичка категорија као модел. У складу са тиме, смер с лева на десно се може назвати *ваљаност* (енг. *soundness*), а смер са десна на лево *потпуност у ужем смислу* [Došen, 2003, p. 12].

Потпуност се овде односи на доказне једнакости које моделујемо у бикартезијанским затвореним категоријама. Доказ кохеренције би значио да су *све и само* једнакости које можемо добити у графичкој категорији ухваћене једнакостима стрелица у бикартезијанској затвореној категорији. Дошен такође истиче да доказати кохеренцију овде не би значило само доказати потпуност већ задобити и једноставну процедуру *одлучивости* за једнакост доказа. Пошто је једнакост графова на очигледан начин одлучива, доказ кохеренције би пружао и процедуру одлучивости за једнакост стрелица у слободним бикартезијанским категоријама.

У [Došen & Petrić, 2001] кохеренција је доказана за (слободне) картезијанске категорије као и за категорије са коначним копроизводима које укључују иницијални објекат. Ти резултати показују да ће докази исказног рачуна који садржи само конјункцију и константу $\top$ (или који садржи само дисјункцију и константу $\bot$) бити исте општости ако и само ако имају исту нормалну форму.

Међутим, кохеренција више не важи у бикартезијанским затвореним, као ни у картезијанским затвореним категоријама. У бикартезијанским категоријама и бикартезијанским затвореним категоријама кохеренција неће важити због присуства дистрибутивности конјункције над дисјункцијом, као и због присуства терминалног објекта са копроизводом и иницијалног објекта са производом. [28]

Проблем са иницијалним објектом и производом (и дуално, са терминалним објектом и копроизводом) се састоји у томе што су у графичкој категорији графови који представљају слике прве пројекције $\pi^1_{\bot,\bot}\colon \bot \times \bot \to \bot$ и друге пројекције $\pi^2_{\bot,\bot}\colon \bot \times \bot \to \bot$ једнаки [Došen, 2003, p. 12]. Због тога што не садрже исказне промењиве, обе стрелице се сликају у празан граф. Међутим, проблем је у томе што те стрелице нису једнаке у слободним бикартезијанским категоријама, јер се тамо прва и друга пројекција $\pi^1_{\bot,\bot}$ и $\pi^2_{\bot,\bot}$ увек разликују.

[28] У категоријама које садрже само производ или копроизвод без терминалног или иницијалног објекта и без дистрибутивности, кохеренција ће опет да важи, видети [Došen & Petrić, 2002].

Иако је идеја појма општости доказа та да представи правила закључивања која су у доказу коришћена и њихов општи карактер, делује да се наведени пример управо са тиме коси. Наиме, у хипотетичком доказу у којем полазимо од хипотезе $\perp \wedge \perp$ да бисмо закључили $\perp$ као леви конјункт користимо се другачијим правилом него у доказу у којем полазимо од исте хипотезе али помоћу правила за елиминацију закључујемо десни конјункт. Међутим, овде приказани критеријуми засновани на општости не разликују између таквих доказа. Није јасно због чега треба да разликујемо доказе који су представљени стрелицама $\pi^1_{p,p}$ и $\pi^2_{p,p}$ а не између доказа као што су $\pi^1_{\perp,\perp}$ и $\pi^2_{\perp,\perp}$? Ако правила посматрамо као нешто опште природе, онда би требало да можемо да разликујемо између два правила независно од тога којим их исказима инстанцирамо, укључујући исказне константе.

Требало би напоменути да ово што смо рекли не показује да нужно постоји проблем са самом идејом општости доказа и доказним једнакостима које су на основу ње дефинисане. Поменути проблем тиче се формализације појма општости доказа. Чини се да би формулација у којој би и исказне константне биле на неки начин диверсификоване уопштавањем била не само ближа интуитивној идеји општости доказа већ би и могла да избегне поменуте проблеме.

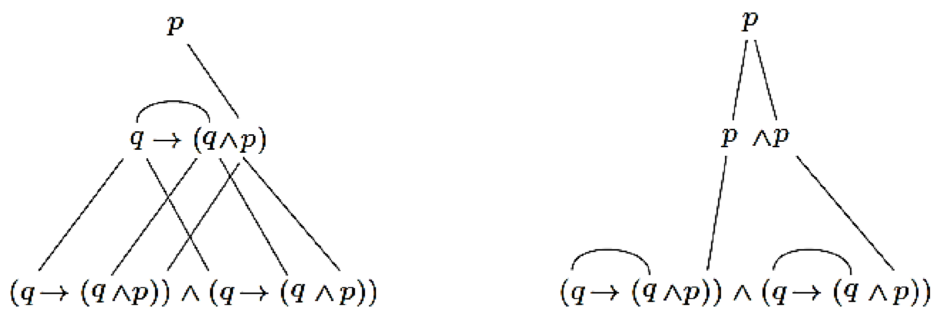
Вратимо се сада питању кохеренције. Проблем са дистрибутивношћу конјункције над дисјункцијом је у томе што у слободним бикартезијанским категоријама композиција двају стрелица

$$dist_1 \colon A \times (B + C) \to (A \times B) + (A \times C),$$

$$dist_2 \colon (A \times B) + (A \times C) \to A \times (B + C)$$

једнака стрелици идентитета на $(A \times B) + (A \times C)$. Међутим, граф које представља општост стрелице $dist_1 \circ dist_2$ (приказан на слици доле лево) и граф који представља општост од $1_{(A \times B)+(A \times C)} \colon (A \times B) + (A \times C) \to (A \times B) + (A \times C)$ (приказан на слици доле десно) нису једнаки [Došen & Petrić 2002, p. 4-5]:

Као што смо рекли, кохеренција не важи ни за картезијанске затворене категорије. Неће важити ни смер еквиваленције који смо назвали ваљаност као ни смер који смо назвали потпуност у ужем смислу. Да ваљаност не важи показује следећи пример стрелица које су у затвореним картезијанским категоријама једнаке а чије општости приказују наредни графови [Došen & Petrić, 2002, p. 5]:



Оба ова графа представљају општост доказа који полазе из хипотезе p и изводе закључак $(q \longrightarrow (q \wedge p)) \wedge (q \longrightarrow (q \wedge p))$. На слици са леве стране приказана је општост извођења у природној дедукцији у којем из хипотеза p и q прво закључујемо $q \longrightarrow (q \wedge p)$, при том прецртавајући хипотезу q. То чинимо двапут и онда уводимо конјункцију $(q \longrightarrow (q \wedge p)) \wedge (q \longrightarrow (q \wedge p))$. На слици са десне стране приказана је општост извођења у којем смо хипотезу p користили два пута да бисмо увели конјункцију $p \wedge p$, а потом из сваког конјункта независно добили $q \longrightarrow (q \wedge p)$, које смо на крају спојили у конјункцију.

Са становишта критеријума једнакости доказа заснованих на нормализацији, ова два извођења представљају исти доказ. Међутим, ако их посматрамо са становишта критеријума заснованих на општости, ова два извођења немају исто значење. У левом извођењу (извођењу чија је општост приказана графом лево) сва исказана слова q морају да остану иста да бисмо сачували правила извођења у доказу. Са друге стране, у десном извођењу два пара исказних слова q нису међусобно повезана, јер смо их дедуковали независно). Дакле, десно извођење се може уопштити до извођења чији је закључак

$$(q \longrightarrow (q \wedge p)) \wedge (r \longrightarrow (r \wedge p))$$

што није случај са левим извођењем које се не може даље уопштити.

На последња два наведена примера извођења критеријуми који се заснивају на општости показују се као интензионалнији него они који се заснивају на нормализацији. Први детаљније бележе везе између исказних слова у хипотезама и закључку дедукције, док се у нормализацији неке од тих веза губе. Са друге стране, видели смо и пример у којем је обрнуто случај – нормализација се показује као интензионалнија од општости.

Оно што наведени примери свакако показују је да се два критеријума једнакости доказа које смо овде представили не поклапају. Међутим, да ли то значи да нормализовати неки доказ не значи исто што и уопштити га и обрнуто? Чини се да то питање може да зависи и од тога како се општост и нормализација формулишу. Већ смо видели на примеру са иницијалним објектом и терминалним објектом да се то како је општост овде формализована не поклапа сасвим са тиме како се појам општости неког правила коришћеног у доказу интуитивно схвата. То показује да постоји простор за редефинисање начина на који се уопштавање доказа формализује.

Међутим, и нормализација доказа се такође може редефинисати. Потреба за тиме се јавља када говоримо о доказима класичне логике. Наиме, када у бикартезијанским затвореним категоријама прикажемо одређене класичне претпоставке, једнакост стрелица у тако добијеним категоријама своди се на једнакост њихових типова [Došen, 2003, p. 17]. Другим речима, једнакост доказа своди се на једнакост њихових хипотеза и закључака. Дошен и Петрић су показали да се синонимност извођења класичне логике ипак може засновати на појму нормализације, само се тај појам не може представити у бикартезијанским затвореним категоријама, већ у категоријама у којима дистрибутивност није изоморфизам [Došen & Petrić, 2007]. Користећи се тим категоријама, у [Došen & Petrić, 2007] аутори доказују резултат кохеренције који показује да је у случају класичне исказне логике могуће успоставити поклапање између једнакости доказа засноване на нормализацији и једнакости доказа засноване на општости.

Ипак, требало би напоменути да се тај резултат заснива на двема претпоставкама. Прва је претпоставка о постојању посебне врсте идеализованих доказа, који се називају *нулти докази* (енг. *zero proofs*), а друга је претпоставка о постојању операције *сабирања доказа* (енг. *proof addition*) [Došen, 2003, section 7; Došen & Petrić 2007]. [29] Претпоставка

[29] Претпоставка да за свака два објекта A и B постоји нулти доказ односно нулта стрелица значи да за свака два објекта A и B имамо стрелицу $0_{A,B}: A \to B$, која при композицији са било којом другом

да за свака два објекта A и B постоји нулти доказ односно нулта стрелица значи да за свака два објекта A и B имамо стрелицу $0_{A,B}: A \to B$, која при композицији са било којом другом стрелицом одговарајућег типа даје нулту стрелицу. Кажемо да су нулти докази идеализовани због тога што они у строгом смислу речи нису прави докази јер нам допуштају да из сваког исказа можемо директно да докажемо било који други исказ. Могуће је међутим, ограничити постојање нултих доказа на само оне парове исказа за које већ имамо доказ из једног у други [Došen, 2003, p. 21]. Проблем са нултим доказима је тај што, чак и уз то ограничење, није лако наћи оправдање за припуштање таквих доказа утемељено у самом појму доказа које би било независно од практичних разлога.

Шта на основу свега реченог можемо закључити о проблему једнакости доказа? Иако се појам нормализације као и појам општости могу редефинисати, чини се да је ипак тешко постићи кохеренцију тако да ниједна од дефиниција не представља удаљавање од интуитивног схватања тих појмова. То нас упућује на закључак да нормализовати неки доказ не значи исто што и уопштити га и обрнуто. У општој теорији доказа, дакле, вероватно не постоји јединствени критеријум једнакости, већ два различита интензионана критеријума. Али, шта то значи за проблем једнакости доказа? Да ли то значи да на њега не постоји прави одговор? Одговор није сасвим јасан и захтева даља интензионална истраживања односа између појмова нормализације и општости. Оно што свакако знамо је да питање једнакости доказа није ни субјективно ни произвољно. Постоји нешто у самом појму доказа што даје оправдање и једној и другој од поменутих релација еквиваленције, што показују овде приказани резултати опште теорије доказа.

2.6. Закључак

Циљ овог поглавља био је да прикажемо неке од најважнијих резултата опште теорије доказа и покажемо како су они засновани на интензионалном схватању појма доказа. Видели смо да у овој теорији питање *Шта је доказ?* можемо разумети као

стрелицом одговарајућег типа даје нулту стрелицу. Кажемо да су нулти докази идеализовани због тога што они у строгом смислу речи нису прави докази јер нам допуштају да из сваког исказа можемо директно да докажемо било који други исказ. Могуће је међутим, ограничити постојање нултих доказа на само оне парове исказа за које већ имамо доказ из једног у други [Došen, 2003, p. 21].

питање *Када два извођења имају исти смисао?.* Да бисмо на њега одговорили, дефинишемо релацију еквиваленције на извођењима коју некад називамо и релацијом синонимности. Као што смо рекли, када синонимност извођења схватимо екстензионално, на доказе гледамо као на уређене парове хипотеза и закључака у релацији консеквенције. Такво схватање, међутим, даје прилично тривијалну и са математичког становишта, не много интересантну релацију еквиваленције на извођењима. Синонимност извођења своди се на једнакост њихових хипотеза и закључака. Да бисмо се бавили општом теоријом доказа, међутим, дедукција се не може свести на хипотезе и закључак. Морамо узети у обзир интензију тога појма – *начин* на који прелазимо са првог на друго.

У овом поглављу показали смо како се на интензионалном схватању релације синонимности може изградити анализа појма доказа. Ове закључке ћемо да применимо у наставку рада када се будемо бавили појмом алгоритма. Као што доказе можемо формализовати путем извођења, природно је претпоставити да и алгоритам можемо да изразимо формално на неком језику. На изразима тог језика можемо да дефинишемо онда одговарајућу релацију еквиваленције. Идеја је да ће два језичка израза бити у тој релацији еквиваленције ако изражавају исту процедуру израчунавања. И тако, као што доказ одређујемо позивајући се на класу еквиваленције на извођењима, можемо да одредимо појам алгоритма позивајући се на одговарајућу класу еквиваленције на поменутим језичким изразима.

Међутим, поставља се питање како дефинисати ту релацију? Ако алгоритме схватимо екстензионално, процедура израчунавања се своди на функцију, а једнакост тих процедура на једнакост одговарајућих функција. Такво схватање тривијализује проблем једнакости алгоритама баш као што свођење доказа на уређени пар хипотеза и закључака тривијализује проблем једнакости доказа. Наш циљ је да се бавимо алгоритмима не екстензионално већ интензионално. То значи да узмемо у обзир не само резултате израчунавања, већ и то *како* и према којим *правилима* се то израчунавање одвија. Један од првих аутора који је експлицитно поставио питање интензионалног критеријума за једнакост алгоритама је Јанис Московакис. Он је не само поставио проблем, већ предложио и решење којем ћемо посветити наредно поглавље.

Поглавље 3

Израчунљиве функције и једнакост алгоритама

3. 1. Увод

Интуитивно говорећи функција f је *израчунљива* ако постоји скуп инструкција које чине ефективну процедуру према којој се за свако n, $f(n)$ може израчунати механички, корак по корак, са математичком сигурношћу. Такве ефективне процедуре се називају *детерминистички алгоритми*, а чешће само *алгоритми*.

Израчунљиве функције су предмет истраживања гране логике која се назива *теорија израчунљивости*. [30] Тридесетих година прошлог века та теорија изникла је из једног великог, тада отвореног проблема: *Како формално представити појам ефективне израчунљивости? Како одредити класу функција које су израчунљиве на природним бројевима?* [31] У свом раду из 1936. [Turing, 1936] Алан Тјуринг (*Alan Turing*) пружио је одговоре на ова питања уводећи појам *аутоматских рачунских машина* (*automatic computing machines*) које су постале познате као *Тјурингове машине*. [32] Те апстрактне машине састоје се из бесконачне траке и главе која се по њој креће. Траку чини низ поља таквих да се у сваком пољу може налазити или симбол 1 или симбол 0. Глава се по траци може кретати механички, корак по корак, лево или десно. Она може да „скенира“ симболе које се у пољима налазе и мења их по потреби, према утврђеном низу инструкција.

Помоћу бесконачне траке, служећи се симболима 0 и 1 можемо представити природне бројеве као и n-торке природних бројева као низове јединица на траци одвојених нулама. Број 3 рецимо можемо представити низом 111, а пар (3,4) низом симбола 11101111 на траци на којој се на осталим местима налазе само нуле. Израчунавање, односно кретање главе и то што она ради одређују *инструкције* које су следећег облика: *Ако се машина налази у стању S и глава је скенирала симбол x*, *уради*

[30] Мали увод у историју развоја најважнијих идеја у теорији израчунљивости заинтересован читалац ће наћи у раду [Soare, 1996].

[31] Строго говорећи, у наведеном Тјуринговом раду то је питање је постављено у нешто другачијој али еквивалентној формулацији.

[32] Детаљније о Тјуринговим машинама читалац може прочитати и у [Boolos et al., 2002, chapter 3].

q и пређи у стање S'. *Стање машине* у датом тренутку одређују положај главе и низ симбола на траци након извршавања одређене инструкције. *Почетно стање* представља почетак израчунавања, док *крајње стање* представља крај односно резултат израчунавања. Да функцију $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ израчунава нека Тјурингова машина T значи, упрошћено говорећи, да за свако $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{N}$ такве да $f(a_1, \dots, a_n) = b$, важи да ако се у почетном стању од T на траци налазе блокови симбола који представљају низ бројева $(a_1, \dots, a_n)$, у крајњем стању налазиће се блок симбола који представљају број b.[33]

Ако функцију може израчунати нека Тјурингова машина каже се да је та функција *Тјуринг-израчунљива*. У свом раду [Turing 1936] Тјуринг износи тезу да је функција израчунљива у неформалном смислу те речи ако и само ако постоји Тјурингова машина која је израчунава, другим речима, ако је *Тјуринг-израчунљива*. У част Алана Тјуринга, та теза носи име *Тјурингова теза*.

Отприлике у то време када се јавља појам Тјурингове машине, независно се јављају и друге формалне репрезентације појма ефективне израчунљивости, *рекурзивне функције*, као и већ поменути Черчов *ламбда рачун*, а касније и многе друге. Испоставило се међутим да су све поменуте формалне репрезентације еквивалентне, односно да одређују исту класу аритметичких функција. У свом раду [Church, 1936b] Черч је изнео предлог да се функција може сматрати израчунљивом ако и само ако је *представљива* односно *дефинабилна* у ламбда рачуну без типова. Тај предлог постао је познат као *Черчова теза*. Да су Тјурингова и Черчова теза еквивалентне показао је Тјуринг у већ поменутом раду [Turing, 1936, app.]. Захваљујући том резултату, те две тезе се могу посматрати, што је и уобичајено, као еквивалентне формулације јединствене тезе познате под обједињеним именом *Черч-Тјурингова теза*. Том тезом се тврди да је класа интуитивно израчунљивих функција једнака класи Тјуринг-израчунљивих функција.

Као што то сам назив сугерише, Черч-Тјурингова теза јесте *теза*, она није доказана нити оспорена и упитно је да ли је такав резултат уопште и могућ с обзиром на њену формулацију. Наиме, тезом се један *формално* дефинисан појам, појам Тјуринг-израчунљивости, доводи у везу са *неформалним* схватањем израчунљивости.[34] Међутим,

---

[33] Ако функција f није дефинисана за неке аргументе онда или T неће имати крајње стање или ће имати крајње стање које је у неком смислу нестандардно [Boolos et al., 2002, p. 33].

[34] Черч-Тјурингова теза је тврђење облика еквиваленције, облика *ако и само ако*. Према томе, она се може разумети као конјункција два исказа. Први је: *Ако је функција Тјуринг-израчунљива, онда је она и*

упркос томе, теза је нашироко прихваћена и постоје јаки аргументи који говоре њој у прилог. Један од најјачих аргумената полази од чињенице да су бројни познати формални оквири у којима се појам израчунавања представља, а који су формулисани независно једни од других, еквивалентне Тјуринговим машинама.

По угледу на становишта Гедела, Тјуринга и Черча, неки аутори као што је Сори (*Robert Soare*) сматрају да Черч-Тјурингову тезу треба схватити пре као *појмовну анализу* ефективне израчунљивости, него као *математичко* тврђење које изискује доказ [Soare, 1996, p. 296]. [35] Према том гледишту, када кажемо да је функција израчунљива у интуитивном смислу ако и само ако је Тјуринг-израчунљива тиме ништа стриктно говорећи не *тврдимо* већ *дефинишемо* један неформалан појам формалним средствима.

Како Сори наглашава, прихватање такве интерпретације повлачи да се Черчова и Тјурингова теза разликују у погледу њиховог садржаја, с обзиром да представљају две различите појмовне анализе. Прва представља анализу појма ефективне израчунљивости путем λ-дефинабилности, а друга путем Тјуринг-израчунљивости. Иако та два формална појма одређују исту класу израчунљивих функција, односно имају исту екстензију, они се разликују у том смислу што другачијим средствима приказују појам ефективно израчунљиве функције. Имајући то у виду, питање је колико је оправдано разумети обједињену, Черч-Тјурингову тезу као јединствену појмовну анализу. Том тезом се тврди да је *класа* интуитивно израчунљивих функција једнака *класи* Тјуринг израчунљивих функција. Дакле, њоме се строго говорећи не дефинише *појам* израчунљиве функције, већ се дефинише један *скуп*, односно *екстензија* тог појма. Према томе, чини се да би било оправдано назвати обједињену Черч-Тјурингову тезу појмовном анализом само у екстензионалном смислу.

интуитивно израчунљива, а други је: *Ако је функција интуитивно израчунљива, онда је она и Тјуринг-израчунљива*. Како примећује Крипке (*Saul Kripke*) у [Kripke, 2013], оно што се чини да изискује доказ у тој тези није први од та два конјункта, будући да њега можемо прихватити само на основу нашег интуитивног разумевања појма израчунљивости, већ други. Међутим, главни проблем који се поставља пред могућност једног таквог доказа је тај што би он изискивао прецизну спецификацију услова под којима је нека функција интуитивно израчунљива. Назовимо функцију која би те нове формалне услове израчунљивости испуњавала *F-израчунљивом*. Чак и када бисмо доказали да је свака *F-израчунљива* функција Тјуринг-израчунљива, да би тај доказ представљао доказ Черч-Тјурингове тезе, морали бисмо такође доказати да појам *F-израчунљивости* одговара интуитивном разумевању појма израчунљивости. Међутим, могућност тог доказа суочава се са истим проблемима са којима се суочава и могућност доказа саме Черчове тезе.

[35] У раду [Kripke, 2013] Крипке заступа једно другачије становиште. Наиме, он сматра да се Черч-Тјурингова теза своди на тезу коју можемо назвати *Хилбертовом тезом*. Више о Хилбертовој тези видети у [Kripke, 2013] и у [Kahle, 2019].

Формалне репрезетације израчунљивих функција, као што су Тјурингове машине, рекурзивне функције, ламбда рачун и остале можемо схватити као различите, али еквивалентне одговоре на питање *Шта је израчунљива функција?*. Интересантно је што би „*пре развоја теорија израчунљивости, многи математичари* […] *по свој прилици одбацили питање „Шта је израчунљива функција?“ као филозофско питање које није вредно пажње* […]“ [Došen, 2003, p. 2]. Ипак, управо је одговорима на њега теорија израчунљивости изродила неке од најплоднијих и најзначајнијих открића у историји логике. У овом поглављу бавимо се једним сличним питањем које је подједнако филозофско по духу. *Шта је алгоритам?*

3. 1. 1. Алгоритми и функције

Питања *Шта је алгоритам?* и *Шта је израчунљива функција?* су очигледно уско повезана, али да ли су и нераздвојива? Да ли из тога што умемо да окарактеришемо све функције које се могу израчунати према неком алгоритму следи да уједно поседујемо и задовољавајућу карактеризацију појма алгоритма?

Као што смо већ нагласили, у математици је функција одређена доменом, кодоменом и скупом уређених парова који чине њен граф. Она је екстензионално дефинисана. Са друге стране, алгоритам се неформално дефинише као *процедура*, скуп *правила* или *инструкција* који нам омогућава да механичким корацима израчунамо вредност функције за дати аргумент. Дакле, за разлику од појма функције који је екстензионално дефинисан, наше разумевање појма алгоритма темељи се на интензионалним компонентама значења.

У каквом су односу појам функције и појам алгоритма? Однос између та два појма бисмо могли посматрати по узору на однос између појма уређеног пара исказа (A, B) у релацији консеквенције и дедукције $A \vdash B$. Као што можемо имати више различитих дедукција чија је премиса A и закључак B, тако можемо имати и више различитих алгоритама који израчунавају исту функцију. Појам алгоритма се не може у потпуности свести на појам израчунљиве функције, као што се ни појам доказа не може свести на уређени пар исказа.

Такво схватање, међутим, није у духу екстензионалног погледа на значење. Према екстензионалном гледишту, процедуру израчунавања можемо свести на резултате које она даје. Интензију појма алгоритма можемо свести на његову екстензију – функцију коју тај алгоритам израчунава. У складу са тиме, схватање према којем се појам алгоритма не разликује од појма израчунљиве функције назваћемо *екстензионалним схватањем алгоритама*.

Иако екстензионално схватање алгоритама може бити прихватљиво а чак и корисно у одређеним контекстима, оно поседује значајна ограничења. Због тога што нам не омогућава да разликујемо начине за израчунавање неке функције, можемо пре рећи да ово схватање пре одбацује проблем одређења појма алгоритма него што на њега покушава да да одговор. Ако се процедура која израчунава неку функцију своди на саму ту функцију, онда питање начина на који се она израчунава постаје или беспредметно или тривијално. Са сличним проблемом смо се сусрели у другом поглављу када смо се бавили појмом доказа. Схватајући доказе екстензионално, као уређене парове исказа у релацији консеквенције, губимо из вида чињеницу да можемо имати више различитих начина да закључак дедукујемо из хипотеза. Како смо се трудили да покажемо, тиме у значајној мери ограничавамо наше истраживање и тривијализујемо питања којима се бави општа теорија доказа.

Екстензионално схватање алгоритама не чини се много корисним ни за теоријско рачунарство где тај појам заузима врло значајну улогу. Ово се посебно односи на *теорију алгоритама* где се бавимо не само израчунљивим функцијама већ и различитим *процедурама* за њихово израчунавање. Теорија алгоритама бави се њиховим својствима, понашањима, имплементацијама и комплексношћу. Тим питањима међутим, не можемо се бавити уколико не разликујемо различите процедуре израчунавања функције, другим речима, уколико појам алгоритма не схватимо *интензионално*.

Са једне стране, било би погрешно рећи да резултати редуктивне теорије доказа нису допринели бољем разумевању и формализацији појма доказа. Ипак, оправдано је приметити, како је истакао Правиц, да се та теорија више бавила доказима као средствима, него као математичким предметима по себи. Исто тако би било погрешно рећи да теорија израчунљивости није поставила основе за разумевање појма процедуре израчунавања. На крају крајева, та теорија се бави формалним оквирима, као што су Тјурингове машине, у којима можемо да формулишемо корак по корак инструкције за израчунавање одређене функције. Упркос томе, теорија израчунљивости није се у довољној мери експлицитно бавила проблемом одређења појма алгоритма и често у тој теорији не наилазимо увек на јасну дистинкцију између појма алгоритма и појма израчунљиве функције. [36] Проблем одређења појма алгоритма тек у новије време задобија већу пажњу захваљујући посебно радовима Јаниса Московакиса и Јурија Гуревича, о чему ћемо касније нешто више рећи. [37] [38] [39]

Користећи се Фрегеовеовим принципом апстракције, у општој теорији доказа доказ дефинишемо у односу на одређену класу еквиваленције на извођењима. Њега можемо посматрати као значење или интензију свих извођења која тој класи припадају, а релацију еквиваленције о којој је реч као *релацију синонимности* извођења. На сличан начин могли бисмо одредити и појам алгоритма. Идеја је да као што доказ представљамо путем формалних извођења, тако би и алгоритме требало моћи изразити на формалан начин у неком језику. То нам омогућава да дефинишемо алгоритам позивајући се на класу еквиваленције на скупу израза тог језика. Овакав приступ проблему одређења појма алгоритма у [Dean, 2016] носи име *алгоритми-као-апстрактни-објекти*. [40] [41] Он обухвата барем два питања:

1. *Како можемо изразити алгоритме у језику?*
2. *Како треба да изгледа одговарајућа релација еквиваленције на изразима тог језика, таква да једнакост алгоритама неће бити сводива на једнакост израчунљивих функција?*

Друго од два питања можемо назвати проблемом *једнакости алгоритама*. Још шездесетих година Џон Макарти (*John McCarthy*) увидео је значај тог проблема. У уводу текста "*Основе математичке теорије израчунавања*" [McCarthy, 1963] он наводи нека питања на које би та теорија требало да пружи одговор и једно од њих је *Како дефинисати еквиваленцију процеса израчунавања?*. Према Макартијевом мишљењу, један од циљева заснивања математичке теорије израчунавања је:

„Дефинисати теорију *еквиваленције процеса израчунавања.* Са таквом теоријом можемо дефинисати трансформације које чувају еквиваленцију.

[36] Такво изједначавање налазимо, примера ради, код Колмогорова и Успенског у раду [Kolmogorov & Uspenskii, 1958].
[37] Видети на пример [Moschovakis, 1998].
[38] Видети на пример [Gurevich, 2012].
[39] О проблему одређења појма алгоритма такође је писано у [Dean, 2016], [Yanofsky, 2010].
[40] У оригиналу: *algorithms-as-abstracts view* [Dean, 2016, p. 23].
[41] Расправу о томе којој врсти математичких објеката припадају алгоритми читалац може наћи у [Dean, 2016].

> Такве трансформације се могу користити да трансформишу алгоритам из облика у којем се лако може видети да даје праве одговоре и у еквивалентан облик који гарантовано даје исте одговоре али који има друге предности као што су брзина, економичност складиштења, или инкорпорација помоћних процеса. "

У раду „*Изгледи математичке логике у двадесет првом веку*" [Buss et al., 2001] Ричард Шор (*Richard Shore*) истиче три отворена и веома важна проблема из теоријског рачунарства којима логичка анализа може допринети. Трећи од тих проблема обухвата, чини се, оба горе наведена питања. Да би се он решио потребно је:

> „Наћи, и изнети конклузивне аргументе за формалну дефиницију алгоритма [...]. Овде желимо да ухватимо интуитивни идеју да, на пример, поједина два програма формулисана можда у различитим језицима изражавају *исти алгоритам*, док други који израчунавају исту функцију представљају различите алгоритме за ту функцију. Дакле, желимо дефиницију која ће до на неку прецизно дефинисану *релацију еквиваленције* ухватити *идеју да су два алгоритма једнака*, за разлику од тога да само рачунају исту функцију." [Buss et al., 2001, p. 175]

Блас, Дершовиц и Гуревич у раду „*Када су два алгоритма једнака*" [Blass et al., 2009] тврде да се таква релација еквиваленције не може наћи. Њихов главни аргумент почива на томе да је *идеја да су два алгоритма једнака* појам који је у великој мери завистан од контекста и да су критеријуми једнакости условљени не само практичним циљевима већ чак субјективним факторима. На основу тога аутори закључују да је трагање за релацијом еквиваленције која би у потпуности описала појам једнакости алгоритама недостижан циљ.

> „Разумно је претпоставити да ће свака садржајна представа о једнакости алгоритама бити прилагођена некој мање или више специфичној сврси, и да ће различите сврхе дати различите појмове једнакости. Општи, свенаменски појам „истог алгоритма" је заиста пуста жеља." [Blass et al., 2009, p. 15].

У одељку 7.2. рада [Blass et al., 2009] Блас, Дершовиц и Гуревич истичу неке од проблема за које сматрају да поседују исти статус суочавају се са истим приговорима као и проблем једнакости алгоритама. Као што је узалудно трагати за релацијом еквиваленције која би описала појам једнакости алгоритама, подједнако је узалудно трагати за релацијом еквиваленције на формалним извођењима која би одговарала појму једнакости доказа, сматрају поменути аутори. Према њиховом мишљењу, једнакост доказа такође не представља јединствен, објективан појам, већ у великој мери зависи од субјективних фактора, контекста у којем се налазимо и од практичних сврха доказа о којима говоримо.

Та схватања, чини се, директно су супротстављена закључцима које смо извели у другом поглављу. Тамо смо покушали да покажемо како у категоријалној теорији доказа наилазимо на пример успешне анализе појма доказа и једнакости доказа. Напоменули смо како у тој теорији изучавамо доказе као предмете по себи, док је сврха којој они служе секундарна. Ако су Блас, Дершовиц и Гуревич у праву, то је само привидно случај. Према њиховом мишљењу, проблем једнакости доказа је увек условљен неким конкретним, практичним питањима.

Није погрешно рећи да неки критеријуми једнакости могу бити бољи или кориснији за одређене циљеве од других. Међутим, није јасно због чега би сваки критеријум једнакости доказа увек морао бити *дефинисан* у односу на неку сврху. Примера ради, узмимо критеријуме засноване на нормализацији или општости које смо представили у другом поглављу. Није очигледно која би била практична сврха од које они зависе и да ли она уопште постоји.

Блас, Дершовиц и Гуревич се у поменутом одељку кратко осврћу на релацију еквиваленције извођења описану у категоријалној теорији доказа, и то ону која се заснива на нормализацији. Они тврде како је та релација „*сувише фина да би ухватила појам да су два доказа једнака*". Међутим, у ком тачно смислу је та релација *сувише фина* аутори даље не кажу. Они такође доводе у питање то колико су резултати који су постигнути у општој теорији доказа а који се односе на проблем једнакости, релевантни и примењиви када говоримо о доказима у математици. „*Једнакост доказа је проучавана прилично детаљно, али обично само на нивоу елементарне логике* (...)*"*, тврде Блас, Дершовиц и Гуревич [Blass et al., 2009, section 7.2.].

Оно што они желе да кажу је да се једнакости доказа које математичаре треба да занимају не односе само на доказе унутар исказног и предикатског рачуна, већ и на доказе који се могу формализовати унутар теорија првог реда, као што је *ZFC*, којима се општа теорија доказа не бави. Њени резултати нису у том смислу свеобухватни. Ипак, не би било оправдано због тога рећи да они нису значајни, јер није јасно како може далеко да се одмакне у разумевању једнакости доказа у *ZFC*, ако се нешто слично прво не постигне у „елементарној логици“.

Блас, Дершовиц и Гуревич највише имају право поводом питања јединствености критеријума једнакости за доказе. Као што смо рекли, они тврде да јединствени појам једнакости доказа не постоји и то је можда заиста тачно. Најјачи аргумент у прилог томе произилази из чињенице да се критеријум заснован на општости и онај заснован на нормализацији не поклапају. Као што смо видели, они дефинишу различите релације еквиваленције на извођењима. Међутим, треба имати у виду да то што можемо да формулишемо различите критеријуме једнакости, не повлачи да је питање једнакости доказа субјективно или произвољно. Наиме, постојање више релација еквиваленције на извођењима, не значи и да ћемо *било коју* релацију еквиваленције коју замислимо моћи да схватимо као *синонимност* извођења. Постоји нешто у појму доказа што одређујето које релације могу да описују синонимност извођења а које не, иако наше интуиције у погледу једнакости доказа нису сасвим прецизно одређене.

Сличне закључке можемо да изведемо и у случају проблема једнакости алгоритама. Можда јединствене критеријуме једнакости алгоритама никада нећемо наћи. Ипак, то не значи да појам једнакости алгоритама не можемо релативно успешно да формализујемо. Наш задатак је да дефинишемо релацију еквиваленције која би ухватила *неку* од интуиција које имамо о једнакости алгоритама, не нужно и све. Дакле, анализа за којом трагамо не мора нужно бити *једина исправна* анализа појма једнакости алгоритама, већ *једна могућа* анализа тог појма.

3. 1. 2. Заснивање теорије алгоритама

О интензионалној анализи појма алгоритма, као и о њеном значају највише је писао Јанис Московакис, посебно у раду [Moschovakis, 1998]. Рад на тој анализи Московакис је започео у [Moschovakis, 1984], док је детаљније о томе писао у [Moschovakis, 1998; Moschovakis, 1989b; Moschovakis, 2001] као и у раду [Moschovakis & Paschalis, 2008].

Московакис сматра да је један од главних мотива за проналажење формалне дефиниције појма алгоритма потреба да на прецизан начин алгоритмима приписујемо својства као што то можемо чинити за друге математичке објекте. Други мотив је потреба да се докази тврђења о алгоритмима, који су саставни део теорије алгоритама, могу учинити ригорозним. Пружање формалне карактеризације на којој се онда могу темељити одговарајући критеријуми једнакости за алгоритме је према његовом мишљењу најважнији задатак заснивања теорије алгоритама:

> „Да бисмо засновали теорију алгоритама, морамо *прецизно дефинисати* њене основне појмове, почевши од алгоритама, имплементација и релације између датог алгоритма и његових различитих имплементација“ [Moschovakis, 1998, p. 5].

Према Московакисовом мишљењу, и поред успешних еквивалентних описа појма ефективно израчунљиве функције, у теорији израчунљивости не наилазимо на задовољавајуће одређење појма алгоритма. Као што смо већ поменули, у тој теорији често није јасно одређено на који начин се појам алгоритма разликује од појма функције коју тај алгоритам рачуна. Са друге стране, у тој теорији имамо неформално схватање алгоритма као процедуре, низа инструкција или правила помоћу којих се израчунавање одвија корак по корак. Али, поставља се питање, како бисмо појам алгоритма могли формално одредити?

Са једне стране, можемо следити интуицију према којој је алгоритам нешто суштински секвенцијално – *низ* инструкција. Гуревичево одређење појма алгоритма темељи се на овој идеји [Gurevich, 2000]. Он заступа тезу да се структура алгоритма може описати појмом *ASM*-а, што је врста апстрактне машине која у одређеном смислу представља уопштење Тјурингове машине. [42]

Са друге стране, можемо следити интуицију да је начин на који израчунавамо неку функцију одређен њеном рекурзивном дефиницијом. На том схватању утемељено је Московакисово одређење појма алгоритама. Он истиче да алгоритам не би требало поистоветити са самом *дефиницијом* функције, већ пре са њеним *значењем*, односно са тим шта та дефиниција изражава. Према његовом мишљењу, алгоритме можемо посматрати као значења система рекурзивних дефиниција. Док је Гуревичева дефиниција алгоритама заснована на појму *итерације*, и представља уопштење појма Тјурингове машине, дефиниција коју даје Московакис узима као примитивну операцију

[42] *ASM* је скраћено од *abstract state machine*.

рекурзије и уопштава идеју да рекурзивна дефиниција функције описује начин њеног израчунавања.

Московакис сматра да апстрактне машине не моделују саме алгоритме већ њихове *имплементације* [Moschovakis, 2001, section 3; Moschovakis & Paschalis, 2008]. Московакисово одређење појма алгоритма, којем ћемо посветити остатак овог поглавља, темељи се на појму *рекурзора*. Према његовом мишљењу, алгоритми представљају системе рекурзивних једнакости, чију математичку структуру моделују рекурзори. Московакисова анализа је за нас посебно занимљива и значајна због тога што питање једнакости алгоритама у њој заузима централно место. У тој анализи, питање једнакости алгоритама своди се на питање *изоморфизма* рекурзора. Циљ остатка овог поглавља је да представимо и критички испитамо критеријуме једнакости алгоритама који се заснивају на изоморфизму рекурзора.

3.2. Московакис о појму алгоритма

3.2.1. Алгоритам као начин израчунавања функције

Према Московакисовом мишљењу, алгоритме можемо да посматрамо као математичке објекте који се могу изразити у неком формалном језику или имплементирати помоћу појма апстрактне машине. Он сматра да би алгоритме требало сматрати математичким објектима који су *независни* како од синтаксних објеката који их изражавају тако и од њихових имплементација. Међутим, Московакис такође каже:

> "Алгоритми међутим немају апсолутни смисао, већ само релативан у односу на одређене *податке* (енг. *data*) и одређене *задате* операције (могуће вишег реда) на овим подацима, у односу на које су *ефективни* [Moschovakis 1998, p. 24].

Према Московакисовом схватању, алгоритам представља начин да израчунамо неку функцију. Функција се дефинише у односу на свој домен и кодомен, и у том смислу се може рећи да је њено одређење *релативно* у односу на те скупове. Међутим, док се функција f на неком скупу M посматра као пресликавање из скупа M^n у скуп M, алгоритам који рачуна f се према Московакисовом схватању састоји из пресликавања *вишег реда* – пресликавања која за аргументе узимају не само објекте из скупа M већ и функције које су на њему дефинисане. То је због тога што Московакис разуме алгоритам као начин да израчунамо функцију позивајући се на функције које су унапред задате. Према томе, пресликавања вишег реда из којих се он састоји нису дефинисана само на одређеном скупу M већ се могу посматрати као пресликавања на одређеној *алгебарској структури* $\boldsymbol{M}$. Она се састоји из скупа M, уређеног на одређен начин, заједно са задатим операцијама које су на њему дефинисане. Алгоритам који израчунава функцију $f: M^n \rightarrow M$ дефинише се дакле на структури $\boldsymbol{M} = \langle M, o_1, \dots, o_j \rangle$, где су $o_1, \dots, o_j$ n-арне операције на скупу M које у алгоритму претпостављамо као задате. [43] У том смислу, може се рећи да је одређење алгоритма *релативно* не само у односу на скуп M, већ и у односу на алгебарску структуру $\boldsymbol{M}$ и операције на њој.

Сада ћемо објаснити како се овај начин гледања на алгоритме може повезати са тиме како тај појам неформално разумемо. Неформално говорећи, алгоритам се састоји из инструкција. Инструкцију можемо назвати простом ако се може извршити у једном кораку, као на пример:

напиши број 1!

Са друге стране, инструкције могу бити и сложене. Могу се састојати из више мање сложених инструкција. Па тако, *израчунај* $(x + y) \cdot z$ можемо посматрати као сложену инструкцију јер је можемо разложити на барем два корака: *сабери* $x + y$ и *помножи резултат са* z. У складу са тиме, формулисати алгоритам може се схватити као задатак да се релативно сложена инструкција разложи на једноставније кораке тако да на крају дођемо до инструкција које су толико једноставне да се не могу даље разложити. Такав низ инструкција формира ефективну процедуру коју може извршити и машина.

У математици, алгоритме разумемо као процедуре за израчунавање функција. Инструкције из којих се они састоје нам говоре како израчунати вредност одређене функције за дате аргументе. Просте инструкције су оне које ће нам рећи како да

[43] Ради једноставности, овде говоримо само о тоталним функцијама. Касније ћемо видети како се ово становиште лако може проширити и на парцијалне функције.

израчунамо функције које смо назвали *задатим* (*примитивним* или *основним*) у алгоритму. Сложене инструкције нам кажу како да на основу вредности задатих функција за дате аргументе израчунамо вредност главне функције. Сада ћемо то појаснити на примеру.

На почетку рада [Moschovakis, 1998] Московакис даје пример мерџ-сорт алгоритма (енг. *merge-sort algorithm*). Тај алгоритам сортира коначне низове чији су чланови елементи тоталног уређења $(L, \leq)$. *Тотално уређење* је посебна врста парцијалног уређења. Кажемо да је парцијално уређење $\leq_D$ тотално ако за свака два елемента x, $y \epsilon D$, важи да $x \leq_D y$ или $y \leq_D x$. Релација *мање или једнако* на скупу природних бројева представља можда најпознатији пример овог уређења, па је једноставности ради најлакше замислити да су чланови низова које сортирамо природни бројеви а релација у односу на коју то чинимо $(\mathbb{N}, \leq)$.

Низ u који сортирамо је облика $(u_0, \dots, u_m)$ где је свако $u_i \in L$, за $0 \leq i \leq m$. Скуп тих низова обележаваћемо са L^*. Кажемо да је u *сортиран* ако $u_0 \leq u_1 \dots \leq u_{m-1} \leq u_m$.

Према мерџ-сорт алгоритму, да бисмо сортирали низ u, на њега примењујемо сортирајућу функцију *sort*. Сортирајућа функција прво проверава дужину низа. Ако је u празан или има само један члан, онда се такав низ узима као већ сортиран и према томе, $sort\,(u) = u$. У супротном, извршава се следеће. Низ u дели се на две половине (или приближне половине, у случају да низ има непаран број чланова) и свака од те две половине се уређује независно и потом припаја у јединствени низ.

Припајање обавља функција припајања $merge\ (w, v)$. Та функција парове уређених низова треба да припоји у један уређен низ и дефинише се неформално на следећи начин. У првом кораку израчунавања $merge\ (w, v)$ проверава се да ли је било који од два низа w, v празан. Ако је један од њих празан, резултат $merge\ (w, v)$ ће бити други од два низа. Ако ниједан није празан, онда им се упоређују први елементи. Мањи од њих ће представљати први члан низа $merge\ (w, v)$. Ако је мањи био први члан од v, онда се функција $merge$ даље примењује на w и на $tail(v)$ - низ који је преостао када смо из v избрисали први члан. Ако је мањи пак био први члан од w, онда се функција $merge$ даље примењује на $(tail(w), v)$. Резултат примене $merge$ на $(w, tail(v))$ односно на $(tail(w), v)$ ће дати остатак низа $merge\ (w, v)$. Функција $merge$ се даље примењује све док један од два низа из уређеног пара низова на који се примењује на буде празан. Као резултат примене ове функције добијамо низ који је у потпуности сортиран.

Мерџ-сорт алгоритам који смо горе неформално описали одређује систем једнакости којима се рекурзивно дефинишу поменуте функције $sort$ и *merge*. Тај систем једнакости изгледа овако [Moschovakis, 1998, section 1]:

$$sort(u) \; = \; \begin{cases} u, \quad \text{ако } |u| \leq \; 1 \\ merge\Big(sort\big(h_1(u)\big), sort\big(h_2(u)\big)\Big), \; \text{иначе} \end{cases}$$

$$merge(v, w) \; = \begin{cases} v, \text{ако } |w| = 0 \\ w \;, \; \text{ако } \; |v| = 0 \\ (v_0) * \; merge(tail\,(v), w \,), \; \text{ако } v_0 \leq w_0 \\ (w_0) * merge\big(v, tail\,(w)\big), \text{иначе.} \end{cases}$$

У овим једнакостима $|u|$ одређује дужину низа u, односно број његових чланова. [44] Функције $h_1(u)$ и $h_2(u)$ нам дају прву односно другу половину u, док (u_0) означава низ чији је једини члан u_0. Њега можемо добити применом функције $head$ на низ u, која сваком низу приписује низ чији је једини члан први члан од u. Помоћу * обележили смо бинарну операцију конкатенације односно простог надовезивања низова, а $tail(u)$ је функција која сваком низу $(u_0, u_1, \dots, u_m)$, где $m > 0$, приписује низ $(u_1, \dots, u_m)$.

Мерџ-сорт представља процедуру сортирања низова дефинисану на једној датој структури коју одређује систем горе наведених рекурзивних једнакости. [45] У тој процедури користимо се одређеним функцијама као задатим (ту спадају $tail, h_1$, h_2 и остале) и на основу њих дефинишемо вредности других функција које израчунавамо (то се односи на функције *merge* и $sort$). Ово одређење мерџ-сорт алгоритма је у извесном смислу још увек неформално. Како га можемо прецизирати је питање на које ћемо дати одговор у наредном одељку.

[44] Уколико је низ w празан, то можемо записати и као $w = \emptyset$.

[45] У [Moschovakis, 1998, section 8.6.] структура на којој се мерџ-сорт алгоритам дефинише је $\langle L, L^*, \; \emptyset \;, \; eq_{\emptyset} \;, head, tail, append, \; \chi_{\leq}\rangle$, где је L тотално уређење, L^* је скуп низова чији су чланови елементи тог тоталног уређења, $\emptyset$ представља празан низ (који се може схватити као нуларна функција), $eq_{\emptyset}\colon L^* \rightarrow \{tt, ff\}$ представља функцију која проверава да ли је неки низ празан или није, $\chi \leq\colon L^* \rightarrow \{tt, ff\}$ представља функцију која проверава да ли је низ сортиран или није, а функције $head$, $tail$ и $append$ дефинишу се на следећи начин:
$head((u_0, u_1, \dots, u_n)) \; = \; u_0$
$tail((u_0, u_1, \dots, u_n)) \; = (u_1, \dots, u_n)$
$append\;(x, (u_0, u_1, \dots, u_n)) \; = (x, u_0, u_1, \dots, u_n)$.

3.2.2. Алгоритми и рекурзија

Московакисова идеја изнета већ у [Moskovakis, 1984] је да рекурзивно дефинисање функција описује процедуру њиховог израчунавања. Али, он такође истиче да алгоритам не треба поистоветити са рекурзивном дефиницијом функције. Док је дефиниција нешто што припада синтакси, алгоритам за Московакиса није синтаксни објекат [Moschovakis, 1998, section 3.6.]. Он је апстрактни математички објекат који представља значење (или интензију) система рекурзивних дефиниција. [46]

Московакис наглашава да алгоритам треба разликовати од процедуре која га *имплементира*. Примера ради, једну инструкцију: *Израчунај* $merge\left(sort(h_1(u)), sort(h_2(u))\right)$ можемо имплементирати на више начина. Са једне стране, можемо прво да израчунамо $sort(h_1(u))$, а након тога $sort(h_2(u))$. Такође, можемо и прво да израчунамо $sort(h_2(u))$, па након тога $sort(h_1(u))$, а можемо и обе ове вредности израчунати паралелним процесом. Према Московакисовом мишљењу, бирајући између једног од та три начина не правимо разлику на нивоу самог алгоритма већ на нивоу његовог извршавања односно имплементације [Moschovakis, 2001, section 3]. [47]

Разлика између појма алгоритма и појма имплементације код Московакиса се може објаснити на следећи начин. Док се алгоритам схвата као идеја према којој се израчунавање обавља, имплементација се састоји из низа корака у израчунавању који представљају конкретну примену те идеје. Појмом имплементације алгоритма Московакис се детаљно бавио у раду [Moschovakis, 2001]. [48] У трећем одељку тога рада он износи аргументе да апстрактне машине као што су на пример Тјурингове машине, не моделују на задовољавајући начин алгоритме већ њихове имплементације. Ти аргументи темеље се на постојању рекурзивних алгоритама, као што је мерџ-сорт који се могу имплементирати на више различитих начина. Према Московакисовом мишљењу, ниједна од тих имплементација не може се поистоветити са самим

[46] Израз *апстрактни математички објекат* овде не морамо узети у смислу који је строго платонистички. Желимо просто да кажемо да такав објекат може бити засебан предмет математичког истраживања, као што је то рецимо појам скупа. Можда се може приговорити да реч „апстрактни" ипак носи платонистичке конотације. Међутим, то се онда може рећи и за добар део математике.

[47] Према Гуревичу међутим, поменута три начина израчунавања представљала би разлике у самом алгоритмима. Видети рецимо [Gurevich, 2000, 3.3.4.].

[48] Такође видети [Moschovakis & Paschalis, 2008].

рекурзивним алгоритмом, јер својства имплементације некад не можемо приписати и алгоритму. Са друге стране, ако бисмо и изабрали једну од њих, Московакис тврди да би тај избор био произвољан. Он закључује како морамо да имамо појам алгоритма који је независтан од његових имплементација. Јер, тек на основу тог независног појма можемо да кажемо шта је то што ове различите имплементације чини имплементацијама *истог рекурзивног алгоритма*.

У прилог томе да постоји појам рекурзивног алгоритма који је независан од било какве имплементације говори и то што тврђења о мерџ-сорт-у можемо да докажемо у потпуности независно од његових имплементације, тврди Московакис [Moschovakis, 2001, section 3]. Све што нам је за тај доказ потребно садржано је у поменутим једнакостима којима смо рекурзивно дефинисали функције $sort$ и $merge$. На основу тога Московакис закључује да се мерџ-алгоритам као и појам алгоритма уопште темељи на системима рекурзивних једнакости:

> „Закључак из свега овога је да је мерџ-сорт алгоритам неки јединствени објекат *msort*, у потпуности одређен системима једнакости […]; и да су са *msort-ом* повезане одређене машине које га „имплементирају“ и „наслеђују“ нека од његових својстава […]. Најочигледнији избор јесте да кажемо да је *msort* просто систем […] (једнакости), и то је у ствари оно што ћемо и урадити.“ [Moschovakis, 2001, p. 927]

Идеја да је израчунавање засновано на појму рекурзије није нова. Она представља полазишну тачку једног од формалних оквира у којима се може представити појам израчунљиве функције. Формални оквир о којем је реч, а који смо раније споменули је систем *рекурзивних функција*. [49] У том систему израчунљиве функције градимо индуктивно из скупа функција за које претпостављамо да су нам дате применом операција *композиције*, *рекурзије* и *минимизације*. Функције $sort$ и *merge* које смо горе дефинисали, као и све функције које у мерџ-сорт алгоритму узимамо као задате, такође се могу дефинисати у систему рекурзивних функција. Можемо се запитати, по чему се онда алгоритам како је схваћен код Московакиса, разликује од рекурзивне функције? Појам рекурзивне функције је у одређеном смислу двосмислен. Наиме, са једне стране рекурзивну функцију можемо да посматрамо као екстензионално схваћен објекат, јер

[49] Више о рекурзивним функцијама видети у [Boolos et al., 2002, section 6].

једнакост функција у систему рекурзивних функција можемо екстензионално да дефинишемо на следећи начин. За функције $f(x_1, \dots, x_k)$ и $g\ (x_1, \dots, x_k)$, важи да $f \preccurlyeq g$ ако и само ако је g дефинисано барем толико као f, што значи да за свако $(x_1, \dots, x_k)$ за које је f дефинисано, g је такође дефинисано и $f(x_1, \dots, x_k) = g(x_1, \dots, x_k)$. Кажемо да су функције f и g су *једнаке* ако важи $f \preccurlyeq g$ и $g \preccurlyeq f$. То значи да једну исту функцију схваћену на екстензионалан начин, као скуп уређених парова, можемо на различите начине рекурзивно да дефинишемо. Са друге стране, под рекурзивном функцијом можемо подразумевати то како је она дефинисана, односно њену дефиницију у синтакси.

На који год начин од понуђена два да схватимо рекурзивну функцију, Московакисово схватање алгоритма се на њу не своди. Као што смо већ рекли, алгоритам не представља функцију (као екстензионалан објекат), већ то како је израчунавамо. У складу са тиме, можемо имати различите алгоритме који израчунавају исту функцију и својства која приписујемо алгоритму нису својства која нужно приписујемо функцији коју израчунава. Такође, као што смо већ напоменули, алгоритам не можемо изједначити ни са дефиницијом рекурзивне функције, јер за разлику од дефиниција алгоритми нису синтаксни објекти. Алгоритам би, према Московакисовом мишљењу, пре требало посматрати као значење односно *интензију* рекурзивне дефиниције функције.

Још једна разлика између алгоритама, како сматра Московакис, и рекурзивних функција је у томе што је за разлику од рекурзивне функције, алгоритам сачињен од пресликавања *другог реда*. У наредном одељку бићемо у прилици да више кажемо о тим пресликавањима и уопште о природи математичких објеката за које Московакис верује да моделују структуру алгоритама.

3.2.3. Рекурзори

У претходним одељцима говорили смо о алгоритмима претежно неформално. Изнели смо схватање према којем алгоритам представља значење система рекурзивних једнакости. У овом одељку бавићемо се математичким репрезентацијама алгоритама које се називају *рекурзори*.

Да бисмо увели појам рекурзора, прво ћемо да дефинишемо појам *парцијалног уређења*. Парцијално уређење на скупу D је бинарна релација R дефинисана на том скупу која је рефлексивна (за свако $d \in D,$ важи dRd), транзитивна (за свако $b, c, d \in D,$ важи ако bRc и $cRd,$ онда bRd) и антисиметрична (за свако $c, d \in D,$ важи ако dRc и $cRd,$ онда $c = d$). Пример овог уређења чини релација $\leq$ (*мање или једнако*) дефинисана на скупу природних бројева. Парцијално уређење на скупу D означаваћемо као $\leq_D$ (а некад само и $\leq$ када контекст то буде допуштао).

Требало би споменути да Декартов производ скупова $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n = D$ који су парцијално уређени релацијама $\leq_{D_1}, \ldots, \leq_{D_n}$ и сам чини парцијално уређење у односу на релацију $\leq_D$ коју можемо дефинисати на следећи начин:

$$x \leq_D y \iff x_1 \leq_{D_1} y_1 \;\&\; \ldots \;\&\; x_n \leq_{D_n} y_n \text{, где је } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ и } y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Скуп $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ ћемо у том случају назвати производом парцијално уређених скупова, а релацију $\leq_D$ у односу на коју је уређен *производом парцијалних уређења*.

Тотално уређење је посебна врста парцијалног уређења где су свака два елемента упоредива. Кажемо да је парцијално уређење $\leq_D$ тотално ако за свака два елемента x, $y \in D$, важи да $x \leq_D y$ или $y \leq_D x$. Релација мање или једнако на природним бројевима не само да представља пример парцијалног већ и пример тоталног уређења.

Још један важан појам који ће нам користити у дефиницији рекурзора је појам *супремума*. Нека је D скуп парцијално уређен релацијом $\leq_D$ и нека је $A \subseteq D$. Супремум или најмања горња граница од A је најмањи елемент $a \in D$ (у односу на $\leq_D$) који је већи од свих елемената из A. Примера ради, број 9 је супремум скупа {1,…,9} у односу на релацију $\leq$. Супремум од A ћемо да обележимо са $supA$.

Када смо увели појмове парцијалног уређења, тоталног уређења и супремума, можемо да дефинишемо *потпуно парцијално уређење* и појам *монотоне функције*.

Деф. 3.2.3.1. (потпуно парцијално уређење) Нека је $A \subseteq D$, и D скуп парцијално уређењен релацијом $\leq_D$. Кажемо да је скуп A *усмерен* ако за свака два елемента $x, y \in A$ постоји елемент $z \in A$, такав да $x \leq_D z$ и $y \leq_D z$. Примера ради, скуп $\{1,3,5,7,9\}$ ће бити усмерен у односу на релацију $\leq$. Помоћу појма усмереног скупа можемо да дефинишемо потпуно парцијално уређење. Кажемо да је парцијално уређење $\leq_D$ *потпуно* (енг. *complete*) ако за сваки усмерени подскуп од D има супремум у D [Moschovakis & Paschalis, 2008, appendix]. [50]

[50] Упоредити рецимо са дефиницијом датом у [Amadio & Curien, 1996, def. 1.1.1.].

Према овој дефиницији, производ парцијално уређених скупова $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ ће бити потпуно парцијално уређен скуп ако је то свако $D_i, i \in \{1, \ldots, n\}$. Такође, сваки скуп D потпуно парцијално уређен релацијом $\leq_D$ ће имати *минимални елемент* $\perp_D$ такав да $\perp_D = \sup \emptyset$ [Moschovakis & Paschalis, 2008, appendix]. Минимални елемент од D је просто елемент који је најмањи од свих елемената у односу на релацију $\leq_D$.

На скуповима који су потпуно парцијално уређени можемо да дефинишемо пресликавања која се зову монотоне функције. [51]

Деф. 3.2.3.2. (монотона функција) Функција $\pi: D \rightarrow E$ (где су D и Е скупови потпуно парцијално уређени релацијама $\leq_D$ и $\leq_E$) је *монотона* ако за свако $d_1, d_2 \in D$ важи ако $d_1 \leq_D d_2$, онда $\pi(d_1) \leq_E \pi(d_2)$.

Идеја ове дефиниције јесте да су монотоне фунцкије оне које у неком смислу чувају поредак уређења. Важно својство монотоних функција је да имају *најмање фиксне тачке*. Интуитивно говорећи, фиксна тачка неке функције је аргумент који остаје непромењен након примене те функције. Следећа теорема говори о вези између монотоних функција и фиксних тачака [Moschovakis, 1998, theorem 5.1.]:

Теорема 3.2.3.3. (Теорема о најмањој фиксној тачки) Ако је $\pi: X \times D \rightarrow D$ монотоно пресликавање, где је $\leq_D$ потпуно парцијално уређење, и $X \times D$ је производ скупова парцијално уређењих релацијама $\leq_X$ *и* $\leq_D$, онда за свако $x \in X$ наредна једнакост:

$$d = \pi(x, d)$$

(где $x \in X$ и $d \in D$) има најмање решење $d_x \in D$. Оно је такво да:

$d_x = \pi(x, d_x)$, и за свако $e \in D$, *ако* $e \leq_D \pi(x, e)$, *онда* $d_x \leq_D e$.

Пре него што дефинишемо појам рекурзора, биће нам потребно још и да кажемо шта су непрекидне функције.

Деф. 3.2.3.4. (непрекидна функција) Функција $\pi: D \rightarrow E$ где су $\leq_D$ и $\leq_E$ потпуна парцијална уређења је *непрекидна* (или, *Скот-непрекидна*) ако је монотона и ако за сваки

[51] У принципу, монотоне функције смо могли да дефинишемо и на парцијално уређеним скуповима и то је уобичајено. Из практичних разлога одабрали смо да их дефинишемо на потпуно парцијално уређеним скуповима.

непразан усмерени подскуп $A \subseteq D$ важи да $sup\pi[A] = \pi(supA)$ (где са $\pi[A]$ означавамо скуп свих слика).

Идеја ове дефиниције јесте да је непрекидно пресликавање оно монотоно пресикавање које чува усмереност скупа и супремуме.

Након што смо се увели појмове потпуних парцијалних уређења, монотоних и непрекидних пресликавања, у наставку ћемо изложити дефиницију рекурзора која се на њих ослања. У раду [Moschovakis & Paschalis, 2008, def. 3.1.] аутори дефинишу појам рекурзора на следећи начин.

Деф. 3.2.3.5. Нека је X парцијално уређен скуп, а W је потпуно парцијално уређен скуп. *Рекурзор* (енг. *recursor*) $\alpha: X \rightsquigarrow W$ је уређена $K+1$-торка пресликавања $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_K)$, за $K \geq 0$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ чини *тело* (енг. *body*), а α_0 *главу* (енг. *head*) рекурзора. Сваки од $D_1, \dots, D_K$ је потпуно парцијално уређен скуп и:

(1) свако $\alpha_i: X \times D_1 \times \dots \times D_K \rightarrow D_i$ за $i \in \{1, \dots, K\}$ (које се назива *делом рекурзора*), је монотоно пресликавање;

(2) $\alpha_0: X \times D_1 \times \dots \times D_K \rightarrow W$ које се назива *излазним пресликавањем* (енг. *the output mapping*) је такође монотоно;

(3) $D_\alpha = D_1 \times \dots \times D_K$ је скуп решења за α, а број K зове се *димензијом* од α.

(4) $\tau_\alpha: X \times D_\alpha \rightarrow D_\alpha$ је (монотоно) *прелазно пресликавање* (енг. *transition mapping*) које се дефинише као $\tau_\alpha(x, \vec{d}) = (\alpha_1(x, \vec{d}), \dots, \alpha_K(x, \vec{d}))$, где је $\vec{d} \in D_\alpha$.

Према [Moschovakis & Paschalis, 2008, def. 3.1.], кажемо да је рекурзор $\alpha: X \rightsquigarrow W$ *неприкидан* (*continuous*) ако је свако α_i непрекидно. Кажемо да је рекурзор *дискретан* ако је X скуп парцијално уређен релацијом = и $W = Y \cup \{\perp\}$, за неки скуп Y (Овде $\perp$ узимамо као минимални елемент скупа $Y_\perp \stackrel{\text{def}}{=} Y \cup \{\perp\}$ у односу на релацију $\leq_{Y_\perp}$ која се дефинише као: $x \leq_{Y_\perp} y \iff x = \perp \lor x = y$, за $x, y \in Y_\perp$). [52]

Према становишту које аутори заступају у раду [Moschovakis & Paschalis, 2008], алгоритми нису ништа друго до (дискретни, непрекидни) рекурзори. Они сматрају да алгоритам који израчунава функцију $f: M^n \rightarrow M$ описује појам дискретног, непрекидног рекурзора $\alpha: M^n \rightsquigarrow M$. Скуп M^n можемо назвати *доменом*, или *скупом уноса* алгоритма представљеног са α. Аналогно томе, M стоји за *скуп вредности*. Ако је функција која се

[52] Видети [Moschovakis & Paschalis 2008, appendix].

израчунава парцијална, скуп вредности ће бити $M_{\perp}$, чији минимални елемент $\perp$ представља вредност *недефинисано*.

У наставку ћемо покушати да објаснимо, на примеру поменутог мерџ-сорт алгоритма, како рекурзори моделују алгоритме схваћене као системе рекурзивних једнакости. Као што смо већ рекли, L^* представља скуп низова које сортирамо мерџ-сорт алгоритмом. Чланови тих низова су елементи скупа L тотално уређеног релацијом $\leq$ које можемо замислити и као природне бројеве уређене релацијом *мање или једнако*. Да се подсетимо, циљ мерџ-сорт алгоритма је да сваком коначном низу u из L^* придружи низ који се састоји из истих чланова као L^* али који су поређани од најмањег ка највећем. Дакле, функција коју мерџ-сорт алгоритам израчунава, назовимо је $\overline{\alpha}_{ms}$, биће типа $L^* \to L^*$. То значи да ће рекурзор који моделује тај алгоритам, назовимо га $\alpha_{ms}: L^* \rightsquigarrow L^*$ бити типа $\alpha_{ms}: L^* \rightsquigarrow L^*$. Скуп L^* овде у једно стоји и за скуп уноса и за скуп вредности.

Рекурзор $\alpha_{ms}: L^* \rightsquigarrow L^*$ се састоји из тројке пресликавања $(\alpha_{0ms}, \alpha_{1ms}, \alpha_{2ms})$. Делови рекурзора $\alpha_{1ms}, \alpha_{2ms}$ чине његово тело, а α_{0ms} његову главу. Пре него што мало више кажемо о тим пресликавањима, рећи ћемо нешто прво о појму скупа решења и о димензији рекурзора.

За Московакиса, моделовање алгоритма је пре свега моделовање *система рекурзивних једнакости*. Једнакости неког алгоритма су рекурзивне дефиниције функција на које се у том алгоритму позивамо. У мерџ-сорт алгоритму, на пример, те једнакости су следеће:

$$sort(u) = \begin{cases} u, & \text{ако } |u| \leq 1 \\ merge\left(sort(h_1(u)), sort(h_2(u))\right), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$merge(v, w) = \begin{cases} v, \text{ако } |w| = 0 \\ w, \text{ ако } |v| = 0 \\ (v_0) * merge(tail\,(v), w), & \text{ако } v_0 \leq w_0 \\ (w_0) * merge(v, tail\,(w)), \text{иначе.} \end{cases}$$

Заједно ове једнакости чине систем. Сваки систем једнакости има нешто што се зове *скуп решења*. У општем случају, скуп решења за неки систем једнакости представља скуп вредности променљивих (у односу на неки задати скуп) које те једнакости симултано задовољавају. На пример, за наредни систем једнакости где су x и y природни бројеви:

$$x + y = 5$$

$9 - x = 7$

скуп решења је $\{2, 3\}$.

У скупу решења за систем рекурзивних једнакости попут оног којим смо неформално дефинисали мерџ-сорт неће се налазити бројеви, већ (парцијалне) функције које те једнакости задовољавају – функције $sort$ и $merge$. Дакле, решити једнакости неког алгоритма значи просто наћи функције које те једнакости задовољавају.

Сада када знамо шта значи решити ове једнакости, можемо боље и да разумемо шта је скуп решења у неком рекурзору. У општем случају, скуп решења рекурзора $\alpha: X \rightsquigarrow W$ је облика $D_1 \times \ldots \times D_K$. Свако D_i из $D_1 \times \ldots \times D_K$ за $1 \leq i \leq K$ представља скуп (могуће парцијалних) функција. Сваки тај скуп је потпуно парцијално уређен релацијом $\leq_W$ коју дефинишемо на следећи начин: $g \leq f \Leftrightarrow$ за свако $x \in X, g(x) \leq_W f(x)$ (да за $u, v \in W$ важи $u \leq_W v$ значи да $u = \perp$ или $v = y$). Ова релација треба да уређује функције у скупу на основу тога колико су дефинисане. Ако важи $g \leq f$ то значи да је функција f више дефинисана од g или је дефинисана барем толико колико и f и да ће за оне аргументе за које је g дефинисано, функције f и g имате исте вредности.

Елементи скупа решења $D_1 \times \ldots \times D_K$ у рекурзору α су дакле уређене K-торке (могуће парцијалних) функција. То су функције које рекурзивно дефинишемо и на које се позивамо у алгоритму који α представља. Али, шта представља број K? Димензија K рекурзора α означава колико је функција рекурзивно дефинисано у датом систему једнакости. Примера ради, димензија рекурзора који представља мерџ-сорт алгоритам је 2, пошто се систем једнакости заснива на две рекурзивне дефиниције којима дефинишемо већ поменуте функције *sort* и *merge*. Можемо додуше приметити да то нису и нису једине функције на које се у мерџ-сорт алгоритму позивамо. Као што смо рекли, ту имамо и функције као што су *tail*, h_1, h_2 и друге. Ипак, њих не дефинишемо, већ их узимамо као дате. Због тога оне по правилу неће бити елементи нашег скупа решења. Пошто је димензија рекурзора α_{ms} који представља мерџ-сорт алгоритам 2, његов скуп решења је облика $D_1 \times D_2$.

Рекли смо нешто о броју рекурзорских делова, а сада ћемо објаснити шта ти делови треба да представљају. Посматрајмо рекурзивне једнакости којима смо неформално одредили мерџ-сорт алгоритам. За сваку од тих једнакости постоји одговарајући *функционал* – монотоно пресликавање вишег реда и једнакост која је на основу њега дефинисана [Moschovakis, 1998, section 6]. Примера ради, првој од поменутих једнакости одговараће функционал

$$F(u, g, f): X \times D_1 \times D_2 \ \rightarrow W$$

дефинисан као:

$$F(u, g, f) = \begin{cases} u, & \text{ако } |u| \leq 1 \\ g\Big(f\big(h_1(u)\big), f\big(h_2(u)\big)\Big), & \text{иначе,} \end{cases}$$

и једнакост која је на основу њега дефинисана:

$$f(u) = F(u, g, f).$$

Помоћу функционала $F: X \times D_1 \times D_2 \ \rightarrow W$ дефинисаног изнад, можемо одредити одговарајући *оператор* – монотоно пресликавање $F_2': X \times D_1 \times D_2 \ \rightarrow D_2$ такво да $F_2'(u, g, f) = \varphi$ и:

$$\varphi(u) = \begin{cases} u, & \text{ако } |u| \leq 1 \\ g\Big(f\big(h_1(u)\big), f\big(h_2(u)\big)\Big), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Овај оператор можемо посматрати као дефиницију функције φ која одређује како да израчунамо $\varphi(u)$ када су нам дати g и f.

На сличан начин на који смо одредили оператор F_2' служећи се првом од рекурзивних дефиниција из система изнад, можемо одредити и оператор F_1' на основу друге од дефиниција. [53] Тај оператор даје нам једнакост $F_2'(u, g, f) = \chi$, где:

$$\chi(v, w) = \begin{cases} v, \text{ако } |w| = 0 \\ w\,, \ \text{ако } \ |v| = 0 \\ (v_0) * \ g(tail\ (v), w\,), \text{иначе ако } v_0 \leq w_0 \\ (w_0) * g\big(v, tail\ (w)\big), \text{иначе,} \end{cases}$$

У рекурзору α, свако од пресликавања $\alpha_i: X \times D_1 \times \ldots \times D_K \rightarrow D_i$ које смо назвали *рекурзорским деловима* представља оператор, као што је F_1' или F_2'. Ти оператори треба да моделују рекурзивно грађење функција. Свако α_i слика уређене K-торке функција из скупа решења у функције из D_i које су на основу њих дефинисане и свако α_i у одређеном смислу одговара једној од рекурзивних једнакости из система. Симултана решења тих једнакости, K-торке функција које у алгоритму рекурзивно одређујемо, представљају фиксне тачке прелазног пресликавања $\tau_\alpha: X \times D_\alpha \rightarrow D_\alpha$.

[53] Видети на пример како прелазимо са (3) на (4) у [Moschovakis & Paschalis, 2008, section 1].

Када смо објаснили шта представљају делови рекурзора, можемо рећи нешто о његовој главној компоненти, односно о предњем делу. Предњи део рекурзора α, односно пресликавање $\alpha_0\colon X \times D_\alpha \to W$ је функционал који одређује како се функција коју алгоритам израчунава евалуира. Функцију $\overline{\alpha}\colon X \to W$ коју израчунава алгоритам представљен рекурзором $\alpha\colon X \rightsquigarrow W$ дефинишемо као $\overline{\alpha}(x) = \alpha_0(x, \overrightarrow{d_x})$, т.д. $x \in X$, и $\overrightarrow{d_x}$ је најмања фиксна тачка система једнакости $\vec{d} = \tau_\alpha(x, \vec{d})$, видети [Moschovakis, 2001, def. 4.1.; Moschovakis & Paschalis, 2008, def 3.1.]. Напоменимо да ће парцијалну функцију $\overline{\alpha}\colon X \rightharpoonup Y$ израчунавати дискретни рекурзор $\alpha\colon X \rightsquigarrow Y \cup \{\perp\}$. (Парцијална функција $\overline{\alpha}$: $X \rightharpoonup Y$ може се представити као тотална функција $\overline{\alpha}\colon X \to Y_\perp$, где $Y_\perp = Y \cup \{\perp\}$. Као што смо рекли, елемент $\perp$ овде представља *недефинисано*, односно вредност функције када је та функција недефинисана за дати аргумент.)

Вредност функције $\bar{\alpha}\colon X \to W$ коју рекурзор α рачуна за унос $u \in X$ добијамо тако што израчунамо $\alpha_0(u, f_1, \dots, f_K)$, где су $(f_1, \dots, f_K)$ најмање фиксне тачке прелазног пресликавања $\tau_\alpha\colon X \times D_\alpha \to D_\alpha$. Да ће прелазно пресликавање τ_α да има фиксну тачку која је најмања у смислу релације $\leq_{D_\alpha}$ знамо на основу тога што је монотоно (непрекидно) и теореме о најмањој фиксној тачки. Најмања фиксна тачка тог пресликавања биће низ функција $(f_1, \dots, f_K)$ које симултано задовољавају систем рекурзивних дефиниција (моделован рекурзором α), а које су у одређеном смислу минимално дефинисане. У случају мерџ-сорт алгоритма, најмања фиксна тачка прелазног пресликавања $\tau_{\alpha ms}$ за унос u, биће (u, d_1, d_2), где су d_1 и d_2 најмање функције које задовољавају рекурзивне дефиниције за $sort$ и $merge$. У складу са тиме, функцију $\overline{\alpha}_{ms}\colon L^* \to L^*$, односно $\overline{\alpha}_{ms}(u)$ можемо одредити као $\alpha_0(u, d_1, d_2)$.

У овом одељку изнели смо дефиницију рекурзора – математичких објеката који према Московакисовом мишљењу моделују структуру алгоритама. Покушали смо да објаснимо како структура рекурзора одсликава структуру система рекурзивних једнакости. У наставку ћемо говорити о језику у којем те системе можемо формулисати – језику *МекКарти рекурзивних програма*. У наредном одељку представићемо тај језик, његову синтаксу и интерпретацију онако како су приказани у раду [Moschovakis & Paschalis, 2008]. Интерпретација је за нас посебно интересантна због тога што изрази тог језика имају како екстензије тако и интензије. Екстензије тих израза биће израчунљиве (могуће парцијалне) функције док ће њихове интензије бити алгоритми представљени, као што смо рекли, одговарајућим рекурзорима.

3.2.4. Језик рекурзивних програма и његова интерпретација

У раду „*Формални језик рекурзије*“ [Moschovakis, 1989a] Московакис уводи формални језик на којем можемо изразити алгоритме. *Денотација* израза овог језика је израчунљива функција. Ако је денотација неког израза функција f, онда је његова *интензија* алгоритам који израчунава f, односно одговарајући рекурзор. У Московакисовом и Паскалисовом раду [Moschovakis & Paschalis, 2008] језик на којем су алгоритми изражени није онај дефинисан у [Moschovakis, 1989a] већ језик *МекКартијевих рекурзивних програма* (*McCarthy recursive programs*) $L(\Phi)$. [54] Терми овог језика које ћемо звати *Ф-термима*, индуктивно се дефинишу на вокабулару Ф на следећи начин [Moschovakis & Paschalis, 2008, section 1]:

Деф. 3.2.4.1. (дефиниција експлицитних Ф-терама):

1. Константе 0 и 1 су Ф-терми.
2. Свака индивидуална променљива $x_1, x_2, \ldots$ је Ф-терм.
3. Свака примена функцијске променљиве p_k арности n на низ од n Ф-терама је Ф-терм.
4. Свака примена функцијске константе ϕ_k арности n која припада вокабулару Ф на низ од n Ф-терама је Ф-терм.
5. Ако су A_1, A_2 и A_3 Ф-терми, онда је то и израз: Ако $A_1 = 0$, онда A_2, иначе A_3. Тај израз можемо записати и као $c(A_1, A_2, A_3)$.

Служећи се појмом Ф-терама (деф. 3.2.4.1.), можемо да дефинишемо МекКартијеве рекурзивне програме [Moschovakis & Paschalis, 2008, (6)]:

Деф. 3.2.4.2. (дефиниција рекурзивних програма):

Нека су $A_0, A_1, \ldots, A_k$ Ф-терми. Нека се све индивидуалне променљиве које се појављују у A_i налазе у низу променљивих $\overrightarrow{x_i}$, а функцијске променљиве $p_0, p_1, \ldots, p_k$ буду једине функције променљиве које се појављују у $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Нека арности функцијских променљивих буду такве да наредне једнакости имају смисла. Онда

[54] Језик МекКартијевих рекурзивних програма је први пут уведен у раду [McCarthy, 1963].

рекурзивним програмом можемо назвати израз A који дефинишемо као систем наредних једнакости:

$p_0(\overrightarrow{x_0}) \ = \ A_0$

$p_1(\overrightarrow{x_1}) \ = \ A_1$

$\ldots$

$p_k(\overrightarrow{x_k}) \ = \ A_k.$

Сада ћемо рећи нешто више о семантици језика рекурзивних програма која је изложена у [Moschovakis & Paschalis, 2008, нарочито section 1].

Терми језика рекурзивних програма интерпретирају се на алгебарској структури $\boldsymbol{M} = (M, \bar{0}, \bar{1}, \{\phi^{\boldsymbol{M}}\}_{\phi \epsilon \Phi})$. Овде су $\bar{0}, \bar{1}$ истакнути објекти скупа M који треба да представљају вредности *тачно* и *нетачно*. Њих означавају константе 0 и 1. Са $\{\phi^{\boldsymbol{M}}\}_{\phi \epsilon \Phi}$ означавамо скуп функција дефинисаних на скупу M које представљају значења функцијских константи тог језика које су одређене вокабуларом Ф. [55]

Нека је B Ф-терм, а $\vec{x}$ и $\overrightarrow{p}$ низови индивидуалних и функцијских променљивих које укључују све променљиве у B. Ако вредности променљивих $\vec{x}$ и $\overrightarrow{p}$ у $\boldsymbol{M}$ означимо са $\vec{\boldsymbol{x}}$ и $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$, интерпретацију од B у $\boldsymbol{M}$ за $\vec{x}$:= $\vec{\boldsymbol{x}}$ и $\overrightarrow{p}$:= $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ ћемо означити као $[\![B]\!]^{\boldsymbol{M}}(\vec{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{p}})$. Сваки Ф-терм B и низови променљивих $\vec{x}, \overrightarrow{p}$ који укључују све променљиве у B одређују одговарајући (парцијални) функционал F_B дефинисан на $\boldsymbol{M}$ такав да $F_B(\vec{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{p}}) = [\![B]\!]^{\boldsymbol{M}}(\vec{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{p}})$ [Moschovakis & Paschalis, 2008, (3)].

На основу функционала $F_B(\vec{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{p}})$ можемо дефинисати непрекидни *оператор* $F'_B(\overrightarrow{\boldsymbol{p}})$, као у [Moschovakis & Paschalis 2008, (5)], који низу $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ од n парцијалних функција придружује парцијалну функцију на M:

$$F'_B\colon (M^{k1} \rightharpoonup M) \times \ldots \times \ (M^{kn} \rightharpoonup M) \ \longrightarrow (M^n \rightharpoonup M)$$

Овде k_i представља арност функцијске променљиве p_i која је i-та функцијска променљива у низу $\overrightarrow{p}$.

Појмовима функционала и оператора Московакис и Паскалис се служе да дефинишу како денотацију рекурзивног програма у некој алгебри тако и његову

[55] Функције овде могу бити и парцијалне и у том случају говоримо о *парцијалној алгебри*, видети [Moschovakis & Paschalis, 2008, p. 3].

интензију. Наиме, у [Moschovakis & Paschalis, 2008, (8)] налазимо да за сваки рекурзивни програм A који представља систем рекурзивних једнакости:

$$p_0(\overrightarrow{x_0}) = A_0$$
$$p_1(\overrightarrow{x_1}) = A_1$$
$$\ldots$$
$$p_k(\overrightarrow{x_k}) = A_k$$

и алгебру $(\boldsymbol{M}, \bar{0}, \bar{1}, \{\phi^{\boldsymbol{M}}\}_{\phi \epsilon \Phi})$, постоји низ непрекидних функционала $[\![A_0]\!], [\![A_1]\!], \ldots, [\![A_K]\!]$, таквих да чине наредни систем једнакости који можемо означити са ***3.2.4.3.***:

$$\boldsymbol{p_0}(\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}) = [\![A_0]\!](\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}, \vec{\boldsymbol{p}})$$
$$\boldsymbol{p_1}(\overrightarrow{\boldsymbol{x_1}}) = [\![A_1]\!](\overrightarrow{\boldsymbol{x_1}}, \vec{\boldsymbol{p}})$$
$$\ldots$$
$$\boldsymbol{p_k}(\overrightarrow{\boldsymbol{x_K}}) = [\![A_K]\!](\overrightarrow{\boldsymbol{x_K}}, \vec{\boldsymbol{p}}).$$

Према теореми о фиксној тачки, овај систем има скуп најмањих решења

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}$$

која представљају његове заједничке фиксне тачке. У складу са тиме, денотацију од A у $(\boldsymbol{M}, \bar{0}, \bar{1}, \{\phi^{\boldsymbol{M}}\}_{\phi \epsilon \Phi})$ аутори у [Moschovakis & Paschalis, 2008, p. 91] одређују као:

$$[\![A]\!]^M = [\![A_0]\!](\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_K}) \colon M^n \rightharpoonup M.$$

Дакле, денотација рекурзивног програма A у алгебри $\boldsymbol{M}$ ће бити (могуће парцијална) функција. Ако је $\boldsymbol{M}$ одговарајућа алгебарска структура на природним бројевима, денотација програма A ће бити (могуће парцијална) *рекурзивна функција*. Да бисмо схватили изражајну моћ језика рекурзивних програма, треба напоменути да ће за сваку рекурзивну функцију постојати програм на језику МекКарти рекурзивних програма чија је та функција денотација у одговарајућој алгебри.

Интензију од A у $\boldsymbol{M}$ аутори представљају рекурзором $r(A, \boldsymbol{M}) = \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K)$: $M^n \rightsquigarrow M_\perp$ који одређујемо на основу низа функционала $[\![A_0]\!], [\![A_1]\!], \ldots, [\![A_K]\!]$ који чине систем једнакости 3.2.4.3. [Moschovakis & Paschalis, 2008, def. 3.2]. Главу рекурзора α, односно α_0 одређујемо на основу функционала $[\![A_0]\!]$, док свакој од једнакости $p_i(\overline{x_i}) = A_i$ у A за $i \epsilon \{1, \ldots, K\}$ одговара непрекидни оператор α_i : $M^n \times D_1 \ldots \times D_K \to D_i$ који одређујемо на основу одговарајућег функционала $[\![A_i]\!]$.

Скупови решења у рекурзору α су облика $D_1 \times ... \times D_K$ и свако D_i = ($M^{ki} \rightharpoonup M$), где је k_i арност функцијске променљиве p_i.

Дакле, Московакис и Паскалис виде рекурзор (односно алгоритам који он представља) као интензију програма формулисаног на језику МекКарти рекурзивних програма, док је функција коју он израчунава његова денотација. Једно од централних питања којима се два поменута аутора баве у раду [Moschovakis & Paschalis, 2008] је питање *Када се два рекурзивна програма могу сматрати синонимним?* Два рекурзивна програма имају исту денотацију ако су функције који они рачунају екстензионално једнаке. Али, једнакост екстензија програма не повлачи и једнакост њихових интензија. Као што смо већ напоменули, ауторима је стало да се питање синонимности рекурзивних програма схвати на интензионалан начин. Према томе, они сматрају да два програма треба сматрати синонимним не само ако се односе на исте функције већ ако су *алгоритми* које они изражавају једнаки. Проблем синонимности рекурзивних програма своди се тако на проблем једнакости алгоритама којим се Московакис бавио и у својим ранијим радовима. Као и раније код њега, алгоритми су у [Moschovakis & Paschalis, 2008] представљени рекурзорима. Два алгоритма се ту сматрају једнаким ако су рекурзори који их представљају *изоморфни.* [56] Проблемом једнакости алгоритама и изоморфизмом рекурзора бавимо се у наредном одељку.

3.2.5. Једнакост алгоритама и изоморфизам рекурзора

Питање једнакости алгоритама је једно од централних питања којим се у овом поглављу бавимо. У ономе што следи ћемо представити и критички размотрити критеријуме једнакости алгоритама изнесене у раду [Moschovakis & Paschalis, 2008, section 3]. Као што смо већ рекли, у том раду алгоритми су представљени рекурзорима и два рекурзора представљају исти алгоритам онда када су *изоморфни*. У наставку ћемо да дамо дефиницију изоморфизма рекурзора преузету из [Moschovakis & Paschalis 2008, def. 3.3.].

[56] Требало би напоменути, међутим, да се дефиниција рекурзора која је изложена у [Moschovakis & Paschalis, 2008] разликује од дефиниције рекурзора дате рецимо у [Moschovakis, 1998, def. 6.2.]

Деф. 3.2.5.1. (Изоморфизам рекурзора) Два рекурзора $\alpha, \beta : X \rightsquigarrow W$ су изоморфна ако имају исту димензију K, постоји пермутација l: $(l_1, \dots, l_K)$ на низу $(1, .., K)$, као и изоморфизми парцијалних уређења ρ_i: $D_{\alpha, l_i} \rightarrow D_{\beta, i}$, такви да изоморфизам $\rho : D_\alpha \rightarrow D_\beta$ чува рекурзорску структуру и прелазна пресликавања. Кажемо да изоморфизам $\rho : D_\alpha \rightarrow D_\beta$ чува рекурзорску структуру и прелазна пресликавања ако за свако $x \in X$ и свако $d \in D_\alpha$ важи:

$$\rho(\tau_\alpha(x, d)) = \tau_\beta(x, \rho(d)),$$
$$\alpha_0(x, d) = \beta_0(x, \rho(d)).$$

Као што смо већ рекли, алгоритми представљају значења система рекурзивних једнакости. Идеја Московакисовог и Паскалисовог предлога је да два система рекурзивних једнакости имају исто значење ако их моделују изоморфни рекурзори. Појам изоморфизма рекурзора заснива се на идеји да су изоморфни рекурзори они који имају исту структуру. Међутим, изоморфизам два рекурзора не значи њихову строгу једнакост. Другим речима, није нужно да два рекурзора буду *једнака* да би била изоморфна. Једнакост рекурзора α и $\beta : X \rightsquigarrow W$, где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_K)$ и $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_K)$ повлачи да за свако $i \in \{0,1, \dots, K\}$ важи $\alpha_i = \beta_i$. То, међутим, не мора да буде случај ако су α и β само изоморфни. Разлог зашто за једнакост значења два система није нужна строга једнакост рекурзора већ само њихов изоморфизам лежи у претпоставци да је сам редослед којим записујемо рекурзивне једнакости у неком систему ирелевантан за његово значење.

Московакис и Паскалис дакле предлажу да су два алгоритма једнака ако их су рекурзори који их представљају изоморфни. У складу са тиме, два рекурзивна програма можемо назвати синонимним ако изражавају једнаке алгоритме. Нека су P_1, P_2 рекурзивни програми, и $r(P_1, \boldsymbol{M})$, $r(P_2, \boldsymbol{M})$ рекурзори који представљају њихове интензије у некој алгебри $\boldsymbol{M}$ у којој те програме интерпретирамо. Према овом предлогу, P_1 и P_2 можемо назвати *синонимним* у $\boldsymbol{M}$ ако су $r(P_1, \boldsymbol{M})$ и $r(P_2, \boldsymbol{M})$ изоморфни.

Међутим, како поменути аутори примећују у [Moschovakis & Paschalis, 2008, p. 98], проблем са предложеним критеријумима синонимности састоји се у томе што рекурзор $r(A, \boldsymbol{M})$ не представља увек оно што бисмо интуитивно назвали *интензијом* програма A, односно алгоритмом који он изражава. Објаснићемо то на примеру. Наиме, размотримо програм следећег облика [Moschovakis & Paschalis, 2008, (26)]:

$$E)\quad p_0(x,y) = \text{ Ако } \big(\phi_1(x) = 0\big)\text{онда } y, \text{иначе } \phi_2\big(\phi_1(y), x\big).$$

Програм E изражава алгоритам који се састоји из једне једине једнакости и дефинише се на основу три задате функције помоћу наредбе *Ако..., онда ..., иначе...* . Приметимо да у том програму немамо праву рекурзију, јер ниједну од функција у изразу Ако $(\phi_1(x) = 0)$ онда y, иначе $\phi_2\big(\phi_1(y), x\big)$ не дефинишемо рекурзивно. Пошто су све функције на које се позивамо у израчунавању задате, димензија рекурзора који представља интензију од E ће бити једнака нули. Како аутори примећују у [Moschovakis & Paschalis, 2008, p. 97], проблем са рекурзорима димензије 0, као што је $r(E, \boldsymbol{M})$ одозго, је што немамо начин да такав рекурзор разликујемо од функције коју израчунава. Као што смо рекли, алгоритам представљен рекурзором α димензије 0 је алгоритам у којем ниједну функцију не дефинишемо рекурзивно и у њему немамо праве рекурзивне једнакости. Самим тим, рекурзор α нема тело, већ само главу α_0. Скуп решења у таквом рекузрору ће бити $D_\alpha = \{\perp\}$, као што смо раније напоменули. Пошто је $D_\alpha = \{\perp\}$, следи да $\overrightarrow{d_x} = \perp$. Према томе, $\overline{\alpha}(x) = \alpha_0(x, \overrightarrow{d_x}) = \alpha_0(x, \perp) = \alpha_0(x)$. Једноставно речено, рекурзор α димензије 0, као што је $r(E, \boldsymbol{M})$, своди се на екстензионално схваћен објекат, функцију коју израчунава.

Московакис и Паскалис ово сматрају проблематичним, због тога што је њихов циљ *интензионално* одређење појма алгоритма. Рекурзори треба да представљају интензије рекурзивних програма - алгоритме, а не њихове екстензије - функције. Да би заобишли тај проблем, они уводе појам *каноничких форми* рекурзивних програма. Увођење каноничких форми почива на идеји да сама *формулација* неких програма као што је E не чини њихову интензију транспарентном и због тога не можемо да је представимо директно, рекурзором $r(E, \boldsymbol{M})$. Зато је потребно да овакве програме прво преформулишемо. Та нова и транспарентнија формулација назива се каноничком формом програма.

У седмом одељку рада [Moschovakis & Paschalis, 2008] аутори дефинишу појам каноничке форме као и једноставну процедуру путем које можемо сваки рекурзивни програм редуковати на његову каноничку форму. Програм у каноничкој форми је програм у којем се функцијски симболи примењују искључиво на *непосредне терме*. [57] То су или индивидуалне променљиве или представљају примену функцијских променљивих на индивидуалне променљиве. Процедура редукције програма A на његову каноничку форму $cf(A)$ извршава се низом од n корака. У сваком од корака програм B редукује се на програм C, тако што се нека једнакост у B, назовимо је Q, која је облика:

Q) $p_i(x_1, \ldots, x_n) = c(B_1, \ldots, B_{j-1}, B_j, B_{j+1})$,

у којој B_j није непосредни терм и где c означава кондиционал, неку функцијску константу или функцијску променљиву одговарајуће арности, замењује паром једнакости

Q') $p_i(x_1, \ldots, x_n) = c(B_1, \ldots, B_{j-1}, q(x_1, \ldots, x_n), B_{j+1})$,

$q(x_1, \ldots, x_n) = B_j$,

где је q функцијска променљива одговарајуће арности која се не јавља у B. [58]

Да кажемо да се програм A редукује у једном кораку на програм A^*, записаћемо $A \multimap_1 A^*$. Да кажемо да се програм A редукује (у могуће више корака) на програм A^*, записаћемо $A \multimap A^*$. Редукција A на A^* састоји се из $n \geq 0$ корака редукције таквих да $A \multimap A^* \stackrel{\text{def}}{=} A \multimap_1 A^1 \multimap_1 \ldots \multimap_1 A^{n-1} \multimap_1 A^*$. Ако је A^* у каноничкој форми, A^* зовемо *каноничком формом* од A.

Сваки рекурзивни програм може се редуковати на каноничку форму која је у одређеном смислу јединствена. [59] Програм као што је:

$$E: p_0(x, y) = \text{Ако } (\phi_1(x) = 0) \text{ онда } y, \text{иначе } \phi_2(\phi_1(y), x)$$

који није у каноничкој форми јер садржи терме $\phi_2(\phi_1(y), x)$ и $\phi_1(x)$ у области кондиционала, можемо у три корака редуковати на његову каноничку форму:

E_3: $p_0(x, y) = \text{Ако } (q_1(x, y) = 0), \text{онда } y, \text{иначе } q_2(x, y)$;

[57] Овде се подразумева да кондиционал *Ако A=0 онда B, иначе C* можемо записати као $c(A, B, C)$ где се c посматра као функцијски симбол.
[58] Видети [Moschovakis & Paschalis, 2008, def. 7.1.]
[59] Она је јединствена до на релацију *конгруенције* на програмима која је дефинисана у [Moschovakis & Paschalis, 2008, def. 7.2.]

$$q_2(x,y) \ = \ \phi_2(q_3(x,y),x),$$

$$q_3(x,y) \ = \ \phi_1(y),$$

$$q_1(x,y) \ = \ \phi_1(x).$$

Док је рекурзор $r(E,\ \boldsymbol{M})$ димензије 0, димензија рекурзора $r(E_3,\ \boldsymbol{M})$ којег дефинишемо на основу каноничке форме E_3 је 3. То значи да скуп решења у $r(E_3,\ \boldsymbol{M})$ неће бити $\{\perp\}$, већ облика $D_1 \times D_2 \times D_3$. Захваљујући структури скупа решења, рекурзор $r(E_3,\ \boldsymbol{M})$ се за разлику од $r(E,\ \boldsymbol{M})$, не своди на функцију коју израчунава.

Због разлога које смо навели, у седмом одељку рада [Moschovakis & Paschalis, 2008, def. 7.5.] Московакис и Паскалис износе предлог да алгоритам који E изражава представимо рекурзором $r(E_3,\ \boldsymbol{M})$, а не рекурзором $r(E,\ \boldsymbol{M})$. Уопштено говорећи, алгоритам изражен рекурзивним програмом A, према њиховом предлогу, представљамо рекурзором $r(cf(A),\ \boldsymbol{M})$, где је $cf(A)$ канонична форма од A, а не рекурзором $r(A,\ \boldsymbol{M})$.

Идеја која би требало то да оправда је заснована на претпоставци да редукција рекурзивног програма на његову каноничку форму не мења суштински његово значење. Редукција само представља преформулацију програма која омогућава да сагледамо интензионалну структуру алгоритма који је њиме изражен. Према том схватању, рекурзивни програм и његова канонична форма се не посматрају као изрази различитих алгоритама, већ као две формулације истог алгоритма.

Увођење каноничких форми омогућава Московакису и Паскалису да прецизније дефинишу релацију синонимности рекурзивних програма. Позивајући се на каноничке форме програма, они ту релација редефинишу на следећи начин. Нека су P_1, P_2 рекурзивни програми, а $r(cf(P_1),\ \boldsymbol{M})$ и $r(cf(P_2),\boldsymbol{M})$ рекурзори који представљају интензије њихових каноничких форми у некој алгебри $\boldsymbol{M}$. Програми P_1 и P_2 су *синонимни* у $\boldsymbol{M}$ ако су $r(cf(P_1),\ \boldsymbol{M})$ и $r(cf(P_2),\boldsymbol{M})$ изоморфни.

У ономе што следи размотрићемо примере који доводе у питање критеријуме једнакости алгоритама које предлажу Московакис и Паскалис. Тих примера има две врсте. Примери прве врсте треба да покажу да изоморфизам рекурзора одређује релацију еквиваленције која је у извесном смислу сувише рестриктивна да би представљала једнакост алгоритама. Другим речима, они показују да интуитивно једнаки алгоритми неће нужно бити представљени изоморфним рекурзорима. Примери друге врсте треба да покажу да изоморфизам рекурзора којима интерпретирамо каноничке форме два програма не гарантује и интуитивну једнакост алгоритама које ти програми изражавају. Дакле, може се рећи и да изоморфизам рекурзора одређује релацију која је у неким случајевима премало рестриктивна.

Према Московакисовом схватању, алгоритми су одређени системима рекурзивних једнакости. Нужан услов за то да два система одређују исти алгоритам, је да у оба та система постоји *једнак број* рекурзивно дефинисаних функција. Другим речима, рекурзори који те алгоритме представљају морају имати исту димензију. Чини се, међутим, да је такав услов сувише рестриктиван.

Примера ради, узмимо мерџ-сорт алгоритам који сортира коначне низове чији су чланови елементи тоталног уређења $(L, \leq)$ (видети одељак 3.2.1. овог рада). Као што смо рекли, Московакис тврди да је мерџ-сорт алгоритам неформално одређен системом наредних једнакости, назовимо га *мерџ-сорт систем (mss)*:

$$f(u) = \begin{cases} u, & \text{ако } |u| \leq 1 \\ g\Big(f\big(h_1(u)\big), f\big(h_2(u)\big)\Big), & \text{иначе} \end{cases}$$

$$g(v,w) = \begin{cases} v, \text{ако } |w| = 0 \\ w\,, \text{ако } \ |v| = 0 \\ (v_0) *\ g(tail\ (v), w\ ), \text{иначе ако } v_0 \leq w_0 \\ (w_0) * g\big(v, tail\ (w)\big), \text{иначе.} \end{cases}$$

Као што видимо, *mss* се састоји из две рекурзивне дефиниције функција $sort$ и $merge$.

Замислимо сада да *mss* проширимо са још једном једнакошћу eq^*, којом дефинишемо неку функцију h на коју се у процесу сортирања низа уопште не позивамо. То проширење можемо назвати $mss{+}eq^*$. Примера ради, замислимо да је h функција која проверава да ли низ u садржи члан који је строго мањи од броја који одређује дужину низа u. [60] Било би тешко рећи да смо овим проширењем мерџ-сорт система добили нови алгоритам за сортирање низова, различит од мерџ-сорт алгоритма, јер је једнакост са којом смо систем проширили *ирелевантна* за само израчунавање. Она је формално део система, али се у процедури сортирања нигде на њу не позивамо и она не доприноси одређењу функција $sort$ и $merge$. Међутим, рекурзори који моделују *mss* и $mss{+}eq^*$

[60] На који начин овде дефинишемо h није од посебног значаја.

биће различитих димензија, и према томе, неће бити изоморфни. Наиме, ако је димензија рекурзора који моделује mss број K, димензија рекурзора који моделује mss+eq^* мора бити барем $K+1$, јер у њему имамо барем једну нову једнакост eq^* којом дефинишемо h.

Овај пример показује да изоморфизам рекурзора одређује релацију еквиваленције на рекурзивним програмима која је сувише рестриктивна. И сам Московакис у раду [Moschovakis, 2001, section 8.2] говори о ограничењима релација еквиваленције која се дефинише на основу изоморфизма рекурзора. Он примећује:

> „Чињеница је, међутим, да је изоморфизам рекурзора веома фина релација еквиваленције на алгоритмима, коју не чувају многе трансформације које користимо у пракси када поједностављујемо или оптимизујемо програме; и да, да би била корисна у применама, теорију рекурзора треба обогатити темељитим изучавањем релација еквиваленције које су грубље од изоморфизма.“

Али, иако се може рећи да је изоморфизам рекурзора релација еквиваленције која је у извесном смислу сувише рестриктивна, такође се може тврдити и да изоморфизам рекурзора даје критеријуме једнакости који занемарују неке битне интензионалне разлике између алгоритама. То показује наредни пример. Нека A_1 буде рекурзивни програм следећег облика:

$p_0(x) =$ *Ако* $p_1(x) = 0$, *онда* $p_2(x)$, *иначе* $p_3\ (x)$,
Где
$p_1(x) = B_1$
$p_2\ (x) = B_2$
$p_3\ (x) = B_3,$
$\vdots$
$p_K\ (x) = B_K,$

Где су $B_3, B_2,$ различити експлицитни терми језика рекурзивних програма, у којима се променљиве p_2 односно p_3 могу али не морају јављати.

Са друге стране, нека A_2 буде програм облика:

$p_0(x) =$ *Ако* $p_1(x) = 0$, *онда* $p_3(x)$, *иначе* $p_2(x)$,

$p_1(x) = B_1$,

$p_2(x) = B_2$,

$p_3(x) = B_3$,

$\vdots$

$p_K(x) = B_K$,

Дакле, оба рекурзивна програма, A_1 и A_2 имају исти број функцијских промењљивих које у њима дефинишемо и састоје се из истог скупа једнакости којима су дефинисане $p_1, .., p_K$. Претпоставимо, једноставности ради, да програме A_1 и A_2 интерпретирамо у некој од стандардних алгебарских структура на $\mathbb{N}$. Претпоставимо још и да једнакости $p_2(x) = B_2$ и $p_3(x) = B_3$, заједно са осталим једнакостима у A_1 односно A_2, одређују екстензионално једнаке рекурзивне функције.

Према тој претпоставци, резултати израчунавања $p_2(x)$ и $p_3(x)$ су увек једнаки. Међутим, процедуре којима их израчунавамо могу бити различите. Као што смо већ нагласили, Московакис сматра да се процедура за израчунавање неке функције састоји у начину на који се она рекурзивно дефинише. У складу са тиме, ако $p_2(x) = B_2$ и $p_3(x) = B_3$ представљају различите рекурзивне дефиниције, онда се могу разликовати и процедуре помоћу којих израчунавамо $p_2(x)$ и $p_3(x)$. Али, ако $p_2(x)$ и $p_3(x)$ израчунавамо путем другачијих процедура, онда програми A_1 и A_2 изражавају различите алгоритме. Наиме, алгоритам изражен програмом A_1 представља наредбу облика: *Ако је одређени услов испуњен, израчунај* $p_2(x)$ (*према задатој процедури P1*), *иначе израчунај* $p_3(x)$ (*према задатој процедури P2*). Са друге стране, алгоритам који је изражен програмом A_2 представља наредбу облика: А*ко је одређени услов испуњен, израчунај* $p_3(x)$ (*према унапред задатој процедури P2), иначе израчунај* $p_2(x)$ *(према унапред задатој процедури P1*). Интуитивно, та два алгоритма представљају две различите наредбе, две различите процедуре израчунавања.

Међутим, рекурзори којима представљамо интензије програма A_1 и A_2 су изоморфни. Рекурзор који представља A_1 и рекурзор који представља A_2, назовимо их α и β, ће имати исту димензију K. Такође, њихови скупови решења D_α, D_β ће бити изоморфни, шта више, биће једнаки. [61] Пошто је изоморфизам између скупова решења ρ функција идентитета, услови за изоморфизам рекурзора α, β, ће гласити:

1. $\tau_{\alpha}(x, d) = \tau_{\beta}(x, d)$
2. $\alpha_0(x, d) = \beta_0(x, d)$.

Дакле, једнакости 1. и 2. своде се на екстензионалне једнакости прелазних пресликавања и глава рекурзора. Прва од једнакости ће да важи јер α, β имају једнака тела. Друга од једнакости ће такође да важи јер су функционали $\alpha_0 : X \times D_{\propto} \rightarrow W$ и $\beta_0 : X \times D_{\beta} \rightarrow W$ екстензионално једнака пресликавања. Зато што $D_{\propto} = D_{\beta,}$ они су дефинисани на истом домену и кодомену. Функционал $\alpha_0(x, p_1, \dots, p_K)$ одређујемо на следећи начин:

$$\alpha_0(x, p_1, \dots, p_K) = \begin{cases} p_2(x), \text{ако } p_1(x) = 0, \\ p_3(x), \qquad \text{иначе,} \end{cases}$$

а функционал $\beta_0(x, p_1, \dots, p_K)$ одређујемо као:

$$\beta_0(x, p_1, \dots, p_K) = \begin{cases} p_3(x), \text{ако } p_1(x) = 0, \\ p_2(x), \qquad \text{иначе.} \end{cases}$$

Иако су функционали α_0 и β_0 различито дефинисани, јасно је да ће истим аргументима приписивати исте вредности, односно да $\alpha_0(x, p_1, \dots, p_K) = \beta_0(x, p_1, \dots, p_K)$ за свако $(x, p_1, \dots, p_K)$. То значи да је и други од два горе поменута услова за изоморфизам задовољен. Дакле, рекурзори α, β јесу изоморфни, иако алгоритми које A_1 и A_2 изражавају представљају различите процедуре израчунавања.

У овом одељку навели смо пример где једнаке алгоритме представљамо рекурзорима који нису изоморфни, и пример који показује да изоморфни рекурзори увек не моделују исти алгоритам. Ти примери показују да изоморфизам рекурзора, иако значајан за изучавање алгоритама и њихових својстава, ипак не представља оптималну формализацију појма једнакости алгоритама.

[61] Присетимо се да објекте из скупа решења схватамо екстензионално. Функције које задовољавају дефиниције $p_2(x)$ и $p_3(x)$, ће бити екстензионално једнаки објекти и скупови D_2, D_3 којима те функције припадају ће такође бити једнаки.

3. 3. Закључак

У овом поглављу бавили смо се Московакисовим одређењем појма алгоритма. Као што смо рекли, то одређење заснива се на идеји да алгоритме дефинишу системими рекурзивних једнакости. Њихову математичку структуру представљају рекурзори, објекти који се састоје из пресликавања вишег реда. Појам рекурзора један је од најважнијих појмова Московакисове анализе и њему смо посебно посветили пажњу. Покушали смо да покажемо како схватање алгоритама као рекурзора уопштава идеју да је начин израчунавања неке функције описан њеном рекурзивном дефиницијом.

Једно од главних питања које Московакис поставља је *Када су два алгоритма једнака?* Пошто су алгоритми представљени рекурзорима, питање једнакости алгоритама своди се на проблем изоморфизма одговарајућих рекурзора. У претходном одељку изнели смо неке аргументе који указују на слабости тих критеријума једнакости. Аргументи које смо изнели, међутим, не показују да изоморфизам рекурзора не дефинише релацију еквиваленције која може рећи нешто важно о односима између два алгоритма. Они само показују да тај однос није оно што подразумевамо под *једнакошћу интензија*.

У наредном поглављу настављамо да трагамо за релацијом еквиваленције која би могла да описује једнакост алгоритама на бољи начин него изоморфизам рекурзора. Следићемо интуицију да алгоритам треба посматрати као интензионални еквивалент израчунљиве функције – као правило или процедуру њеног израчунавања. Али, одређење алгоритама којем ћемо се у наредном поглављу бавити неће бити утемељено, као Московакисово, на системима рекурзивних дефиниција већ на Черчовом ламбда рачуну.

Поглавље 4

ЛАМБДА РАЧУН

4.1. Увод

Ламбда рачун (λ-рачун) се као логички систем први пут појављује у [Church, 1932] и његов настанак био је мотивисан основама математике. Рана Черчова истраживања део су програма који је започео радом Шефинкела [Schöfinkel, 1924]. У том програму појам функције вишег реда треба да представља утемељење важних појмова логике, као што је то појам слободне променљиве. На појму функције вишег реда Черч заснива свој логички систем без типова, ламбда рачун. Черчов подухват, међутим, није се показао као успешан и убрзо након објављивања, у логичком систему из [Church, 1932] пронађене су противречности. То је довело до ревизије система у [Church, 1933], која га нажалост није спасла од парадокса, видети [Kleene & Rosser, 1935].[62]

Ламбда рачун као логички систем разликује се од *чистог ламбда рачуна* (енг. *pure lambda calculus*) унутар којег се може формализовати појам функције и који представља његову ванлогичку основу. У наставку ћемо се бавити само другим, па ћемо у складу са тиме, под речју *ламбда рачун* подразумевати чист ламбда рачун без типова уколико другачије није назначено.

За разлику од логичког система који је на њему заснован, чист ламбда рачун је конзистентан у смислу који ће касније бити прецизиран. Прави значај и примену он задобија кроз развој теорије израчунљивости. Један од кључних момената у том развоју представља рад [Church, 1936b] у којем Черч даје формалну анализу појма ефективно израчунљиве функције и износи тезу, која ће касније постати позната као *Черчова теза*, да је функција ефективно израчунљива ако и само ако је *λ-дефинабилна* (*λ-definable*). Да је функција λ-дефинабилна значи, грубо речено, да се она може на одређени начин представити у ламбда рачуну. Клини је доказао да су λ-дефинабилне оне и тачно оне функције које су дефинабилне у систему рекурзивних функција [Kleene, 1936], док је Тјуринг показао да су λ-дефинабилне функције оне и тачно оне које су израчунљиве

[62] Черч је нешто касније успео да пронађе конзистентну ревизију система, који се међутим показао као сувише слаб, што је водило окретању ка теорији типова у каснијим радовима.

помоћу Тјурингове машине [Turing, 1936, Turing, 1937]. Ти резултати сведоче о изражајној моћи ламбда рачуна, и уопште, о његовом значају за логику и анализу појма ефективно израчунљиве функције.

Користећи се ламбда рачуном Черч је први дао негативан одговор на Хилбертов *Entscheidungsproblem,* односно на питање одлучивости логике првог реда [Church, 1936a; Church, 1936b]. Практични значај ламбда рачуна, међутим, постао је очигледан тек касније, кроз развој рачунарства и области програмских језика и њихове семантике, видети [Cardone & Hindley, 2006, section 6]. Бројне карактеристике програмских језика инспирисане су њиме, док су поједини језици на њему директно засновани. Такође, значај ламбда рачуна у области програмских језика огледа се и у томе што су проблеми његове интерпретације не само мотивисали нека од кључних питања у вези са семантиком програма, већ су утицали и на њихова решења [Barendregt, 1984, p. 5].

Овде се нећемо бавити практичним последицама и применом ламбда рачуна, већ идејама на којима је он изграђен, његовим логичким значајем и формалним карактеристикама. Пре свега, ламбда рачун је систем у којем можемо дефинисати израчунљиве функције и доказивати *једнакости* између њих. Његова предност у односу на остале формализације појма ефективне израчунљивости као што је систем рекурзивних функција, састоји се у томе што се једнакост функција у ламбда рачуну не своди на једнакост екстензионално схваћених објеката. Она је замишљена као једнакост процедура којима се те функције израчунавају. То је могуће захваљујући чињеници да се у ламбда рачуну функција не схвата као скуп уређених парова, већ као *правило* које повезује аргумент функције са њеном вредношћу за тај аргумент. Због тога, ламбда рачуна није само значајан за изучавање израчунљивих функција као екстензионално схваћених објеката, већ и за разумевање *процедура* путем којих те функције израчунавамо, односно алгоритама.

У остатку овог поглавља показаћемо како можемо одредити појам алгоритма у ламбда рачуну и дефинисати прецизне критеријуме једнакости за алгоритме. У другом поглављу видели смо како се у ламбда рачуну са типовима може представити једнакост дедукција која је заснована на нормализацији. Сада ћемо видети да нормализација није нешто што је карактеристично искључиво за дедукције већ се такође може говорити и о нормализацији процедура израчунавања, као и о једнакостима алгоритама које су на њој засноване. Штавише, видећемо да је нормализација алгоритама исте врсте као и нормализација дедукција. Формални систем који нам све то омогућава је ламбда рачун без типова којем ћемо посветити остатак овог поглавља.

4.2. Функција као правило

Као што смо већ напоменули, у ламбда рачуну појам функције није схваћен у његовој *екстензији*, већ се бавимо првенствено његовом *интензијом*. У уводу из [Church, 1941] Черч каже:

> „Функција је *правило повезивања* на основу којег из било чега што је дато (као аргумент) можемо добити нешто друго (што представља вредност те функције за тај аргумент)."

Другим речима, функцију не посматрамо као скуп уређених парова, већ као правило или процедуру која нас води од аргумента функције ка њеној вредности за тај аргумент. Такав појам функције заснован је на две операције. Прва је *ламбда* а*пстракција*, а друга операција *примене*. Ламбда апстракцију можемо разумети као процес путем кога дефинишемо функције. Објаснимо то на примеру.

Терми су логички изрази којима именујемо или означавамо објекте. На пример, терм као што је $5 + 4$ означава број 9. Израз $5 + x$ који можемо посматрати као уопштење од $5 + 4$, такође представља терм, али за разлику од $5 + 4$, терм $5 + x$ сам по себи не означава број 9 нити неки конкретан број, већ то чини тек када промењљивој x припишемо одређену вредност. Дакле, ако x означава број 4, терм $5 + x$ ће означавати број 9, ако x означава број 5, терм $5 + x$ ће означавати број 10. Идеја ламбда апстракције је да терме као што је $5 + x$ можемо користити да дефинишемо, односно запишемо неке функције на природним бројевима. Примера ради, примењујући ламбда апстракцију на терм $5 + x$ добијамо израз $\lambda x.(5 + x)$ у којем променљива x није више слободна, већ је везана помоћу "λx". Оно што смо записали као $\lambda x.(5 + x)$ треба да представља једну функцију која сваком броју n придружује број $5 + n$. Ову функцију уобичајено записујемо као $f(x) = 5 + x$. Дакле, помоћу операције ламбда апстракције можемо апстраховати функцију из датог терма на сличан начин на који у наивној теорији скупова апстрахујемо скуп из датог својства.

Функције не карактерише само то што их можемо дефинисати већ и то што се *примењују* на аргументе. Тако је друга операција на којој је заснован појам функције у ламбда рачуну *функционална примена*. Примену $\lambda x.(5 + x)$ на t записујемо као $(\lambda x.(5 + x))t$. У ламбда рачуну операција примене се увек разуме као примена функције на *један* аргумент, па све функције имају облик *унарних* функција. Ово је могуће захваљујући чињеници коју је приметио Шефинкел у [Schöfinkel, 1924, section 2], а пре њега користио и Фреге [Frege, 1893, Vol. 1., chapter 14], да се n-арне функције могу дефинисати користећи се искључиво унарним функцијама.

Примера ради, узмимо операцију сабирања природиних бројева, видети [Curry & Feys, 1958, section B.2.]. [63] Нека $h(x,y) = x + y$. Желимо да запишемо $h(x,y)$ користећи се искључиво унарним функцијама. Прво дефинишемо унарну функцију која сваки природан број сабира са бројем x. Назовимо ту функцију $+x$. У ламбда нотацији, $+x$ бисмо могли записати као $\lambda y.(x + y)$. На основу $+x$, можемо дефинисати унарну функцију вишег реда назовимо је f^{+}, која сваком броју x придружује функцију $+x$. У ламбда нотацији, f^{+} можемо записати као $\lambda x \lambda y.(x + y)$. Није тешко уочити да наша функција $(f^{+}(x))$ примењена на y, што можемо записати и као

$$((\lambda x.\lambda y.(x + y))x)y$$

даје исти резултат као и $h(x,y)$. Наиме,

$$((\lambda x \lambda y.(x + y))x)y = (f^{+}(x))y = (+x)y = x + y = h(x,y).$$

Једноставно је видети како се ова процедура може уопштити на функције са n аргумената. [64]

Као што смо већ истакли у другом поглављу, улога типова је да ограниче смисленост примене. У ламбда рачуну са типовима неће свака примена бити смислена, терм је смислено применити само на терм који се са њиме слаже *по типу*. У формулацији ламбда рачуна без типова, терми се примењују на друге терме без ограничења, па и на саме себе. Према Черчовом мишљењу, то је допуштено захваљујући чињеници да је у ламбда рачуну функција примарно одређена правилом, док су домен и кодомен функције нешто што се накнадно одређује. Па тако, у уводу из [Church, 1941] Черч каже:

> “Наиме, није искључено да један од чланова опсега аргумената функције f може бити сама функција f. Та могућност је често била порицана, и заиста, ако функцију дефинишемо као повезивање два унапред задата опсега вредности, разлог порицања је јасан. Овде, међутим, сматрамо операцију или правило повезивања,

---

[63] Обично се сабирање два природна броја x, y записује као $x + y$, али можемо га записати и као $+(x,y)$ да истакнемо да је сабирање бинарна операција која парове природних бројева слика у број који настаје као резултат њиховог збрајања.

[64] Та процедура познатија је у рачунарству као *currying*, по Хаскелу Карију (*Haskell Curry*) који је користио у свом раду на комбинаторној логици, иако је Кари за то експлицитно приписао заслугу Шефинкелу, видети [Curry, 1930, p. 512].

које конституише функцију, као прво дате, а опсег аргумената је онда одређен као нешто што се састоји из ствари на које је операција примењива.“.

Да функција може у потпуности и првобитно бити одређена правилом повезивања, а не унапред задатим доменом и кодоменом показује функција идентитета. Наиме, функција идентитета је она функција која сваки аргумент слика у самог себе и ово правило може се разумети и применити независно од тога на који скуп објеката се примењује. Због тога, Черч сматра да је оправдано претпоставити да се међу објектима у том скупу могу налазити и друге функције, као и да се функција идентитета може применити сама на себе.

Као што смо већ рекли, примена и апстракција представљају две фундаменталне операције на којима се заснива појам функције у ламбда рачуну. Једнакости λ-рачуна, зване бета (β) и ета (η) једнакостима говоре о односу између примене и ламбда апстракције. Прва од њих, бета једнакост, каже нам како да *израчунамо* резултат примене функције настале ламбда апстракцијом на аргумент. Ако су t и a терми језика ламбда рачуна, односно *ламбда терми*, према бета једнакости важи $(\lambda x.t)a = t_a^x$, где је t_a^x терм који добијамо супституцијом x са a у t. Примера ради, $\big(\lambda x.(5 + x)\big)4 = 5 + 4$ и $\big(\lambda x.(5 + x)\big)x = 5 + x$ представљају инстанце бета једнакости. Са друге стране, ета једнакост нам каже да је функција која је настала апстракцијом по примени a на x, односно функција $\lambda x.ax$ једнака функцији a, под претпоставком да ламбда терм a не садржи слободну променљиву x.

Осим ета и бета једнакости, о којима ћемо касније више говорити, у ламбда рачуну важе и једнакости између терама који се разликују једино по преименовању везаних променљивих. Те једнакости се називају алфа (α) једнакостима.

Појам функције у ламбда рачуну је заснован дакле на двема операцијама и на једнакостима које за њих везујемо. Функција је одређена пре свега као нешто што се може дефинисати апстракцијом и као нешто што се може применити на аргументе, тако да су испоштоване одређене једнакости. Тиме је за разлику од класичне или *унутрашње* карактеризације појма функције која се заснива на скупу уређених парова, дата једна *спољашња* карактеризација тог појма, која је утемељена на схватању функције као правила. Унутрашња карактеризација појма функције усредсређена је на то шта све једна функција садржи, које резултате даје. Насупрот томе, спољашња карактеризација усредсређена је првенствено на то како се функција гради и како се израчунава.

Идеја о рачуну који треба да формализује појам функције дајући му спољашњу а не унутрашњу карактеризацију, не јавља се први пут код Черча, већ код Шефинкела [Schöfinkel, 1924]. Шефинкелова настојања у логици била су редукционистичка. Питање којим се он бавио било је како смањити број примитивних појмова у логици, и конкретно, елиминисати употребу везаних промењљивих. Шефинкелово решење тог проблема заснива се на увођењу *функцијског рачуна* (нем. *Funktionenkalkül*). У овом рачуну је централан појам функције и операција примене функције на аргумент узима се као примитивна. Појам примене се заснива на Шефинкеловом увиду да се све функције могу приказати као унарне [Schöfinkel, 1924, section 2] и да функције могу бити аргументи односно вредности других функција. Дакле, за разлику од ламбда рачуна у којем имамо као примитивне две операције, примену и апстракцију, у Шефинкеловом рачуну од операција на функцијама примитивна је једино примена, док се везане промењљиве уопште не јављају. У ламбда рачуну не претпостављамо ниједну функцију као унапред дату, већ имамо операцију грађења нових функција представљену ламбда апстракцијом. Са друге стране, у Шефинкеловом рачуну полазимо од скупа пет примитивних функција – које данас називамо основним *комбинаторима*, из којих применом градимо остале. Шефинкел је открио да се тај скуп може свести на скуп од само два комбинатора, званих S и K, помоћу којих применом можемо дефинисати преостале [Schöfinkel, 1924, section 4]. [65]

Шефинкелова открића представљају зачетак *теорије комбинатора* и на њих се надовезује рад Хаскела Карија (*Haskell Curry*). Кари, коме дугујемо назив *комбинатори*, је првобитно не знајући за Шефинкелов рад из 1924. независно дошао до открића комбинатора бавећи се формализацијом појма супституције. У својој докторској тези [Curry, 1930] он излаже формални систем комбинатора за који доказује резултат *комбинаторске потпуности*. Можемо рећи да се тим резултатом рађа *чиста комбинаторна логика*. [66] (Чиста) комбинаторна логика је у одређеном смислу еквивалентна ламбда рачуну. [67] Међутим, између њих постоје и значајне разлике.

О вези између ламбда рачуна и исказне логике било је више речи у другом одељку. Ту смо видели да ламбда апстракција кодира правило увођења везника импликације а функцијска примена модус поненс. Док у природној дедукцији имамо оба

[65] До на екстензионалну једнакост.

[66] За разлику од Шефинкела, код кога једнакост комбинатора није експлицитн задата правилима, код Карија наилазимо на формални систем комбинатора у правом смислу речи.

[67] Више о тој еквиваленцији видети у [Stenlund, 1972, section 5], а више уопште о односу ламбда рачуна и комбинаторне логике може се наћи у [Hindley & Seldin, 2008, посебно section 9].

ова правила, у хилбертовском систему за импликацију од правила имамо само модус поненс, али због тога имамо одређене аксиоме везане за импликацију. Ове аксиоме могу се кодирати поменутим комбинаторима S и K. То показује како је разлика између комбинаторне логике и ламбда рачуна слична разлици између хилбертовских система и природне дедукције. Прва група система фаворизује категорично, а друга хипотетичко гледиште. Да формализацију коју нам пружа ламбда рачун можемо назвати хипотетичком а ону коју нам пружа комбинаторна логика категоричком, показује то што је ламбда рачун у односу на комбинаторну логику боље прилагођен кодирању доказа из хипотеза. Као што смо већ рекли, хипотетички докази су у ламбда рачуну представљени термима са слободним променљивима.

Оно што омогућава да у природној дедукцији хипотетичко гледиште има примат у односу на категорично је чињеница да је ова врста формалних система заснована првенствено на правилима закључивања, док се у њима аксиоме могу али не морају јављати. Хипотетичко становиште у ламбда рачуну омогућено је тиме што не претпостављамо ниједну функцију као примитивну, као што то чинимо у комбинаторној логици, већ је оно што је примитивно само *правило* грађења (и примене) функција. Као што теорема дедукције гарантује да у хилбертовском формалном систему можемо да опонашамо хипотетичко закључивање, на сличан начин теорема комбинаторске потпуности показује да у комбинаторној логици можемо да опонашамо правило грађења функција, односно ламбда апстракцију [Došen, 1996, section 7.3.].

Овде не можемо даље улазити у проблеме комбинаторне логике као ни у однос између ламбда рачуна и комбинаторне логике, па заинтересованог читаоца упућујемо на [Stenlund, 1972; Hindley & Seldin, 2008]. У наставку бавићемо се само ламбда рачуном и у следећем одељку представићемо његову синтаксу.

4.3. Формални систем

4.3.1. Језик

Симболи језика ламбда рачуна састоје се из бесконачне пребројиве листе променљивих:

$x, y, z, w, \ldots, x_1, x_2 \ldots,$

Заједно са симболима

λ, (,), . .

Помоћу тог скупа симбола ламбда терме градимо индуктивно према следећој дефиницији:

***Деф. 4.3.1.1.* (*Ламбда терми*)**

1. Променљиве x_1, x_2 ... су ламбда терми
2. Ако су M и N ламбда терми, (MN) (што читамо као: *примена M на N*) је ламбда терм, док су M и N његови *непосредни подтерми*.
3. Ако је M ламбда терм, и x је променљива онда је и $(\lambda x. M)$ ламбда терм чији је M непосредни подтерм.

Напомена. Да означавамо ламбда терме користићемо се метапроменљивима M, N, L, P ... а некад и другим великим латиничним словима које ћемо индексирати ако је потребно. За индивидуалне променљиве ћемо користити метапроменљиве x, y, z, w ...

Напомена. Уобичајено је да се крајње спољашње заграде на термима изостављају. Такође, уобичајено је да се заграде асоцирају на лево. На пример, $((xy)z)(\lambda x. yy)$ се обично скраћено пише као: $xyz(\lambda x. yy)$. Још једна уобичајена конвенција је да се оператор ламбда апстракције чита као да се протеже крајње десно. Тако, уместо $xyz(\lambda x. yy)$ можемо писати $xyz\lambda x. yy$. Такође, често ћемо, како је то уобичајено, $\lambda x_1. \lambda x_2. \ldots \lambda x_n. M$ скраћено писати као $\lambda x_1 x_2 \ldots x_n. M$.

Симбол ≡ ће означавати синтаксну једнакост терама. Па можемо записати:

$$\lambda x_1. \lambda x_2. \ldots \lambda x_n. M \equiv \lambda x_1 x_2 \ldots x_n. M,$$

$$((xy)z)(\lambda x. yy) \equiv xyz(\lambda x. yy),$$

$$xyz(\lambda x. yy) \equiv xyz\lambda x. yy.$$

Сада ћемо да дамо дефиниције појмова подтерма, слободних променљивих и супституције.

Деф. 4.3.1.2. (подтерм) Скуп *подтерама* терма A који ћемо обележавати са $Sub(A)$ дефинисаћемо индуктивно на следећи начин [Barendregt, 1984, def 2.1.8.]:

1. $Sub(x) = \{x\}$
2. $Sub(\lambda x.M) = Sub(M) \cup \{\lambda x.M\}$
3. $Sub(MN) = Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{MN\}$.

Да је P подтерм од M писаћемо као $M[P]$.

Деф. 4.3.1.3. (слободне променљиве) Скуп слободних променљивих терма M који ћемо обележавати са $FV(M)$ дефинисаћемо на следећи начин [Barendregt, 1984, def 2.1.7.]:

4. $FV(x) = \{x\}$
5. $FV(\lambda x.M) = FV(M) \setminus \{x\}$
6. $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$.

Дакле, ако се променљива x јавља у терму P и није у опсегу λx кажемо да се јавља слободно. У супротном, променљива x у терму P је *везана* ако се јавља у опсегу λx. На пример, у терму $\lambda w.yzy(\lambda x.wx)$ променљиве z и y су слободне, док су x и w везане. Уобичајено је да се везане и слободне променљиве у терму увек обележавају различитим словима, што је конвенција коју ћемо и ми прихватити.

Ламбда терм се назива *затвореним* ако не садржи слободне променљиве, односно ако је $FV(M) = \emptyset$. Затворени терми се такође називају *комбинаторима*. У терму $\lambda x.yx$, променљива x се јавља везано, али променљива y је слободна. Дакле, терм $\lambda x.yx$ није комбинатор. Са друге стране, терми као што су $\lambda x.x$ и $\lambda xy.x$ јесу комбинатори.

Деф. 4.3.1.4. (супституција) За терме M и N и слободну променљиву x супституција променљиве x у M термом N, што ћемо писати као M^x_N, значи униформну замену сваког јављања слободне променљиве x у M термом N, под условом да су испуњени уобичајени услови за супституцију. Ти услови захтевају да ниједна слободна променљива у N не постане везана у M^x_N. [68]

Примера ради, у терму $\lambda y.x(zx)$ не можемо извршити супституцију $(\lambda y.x(zx))^x_{wy}$, јер бисмо тиме добили терм $\lambda y.wy(zwy)$, при чему би променљива y

[68] Уобичајено је још и да се супституција слободне променљиве x у M термом N записује као $M[N/x]$.

дакле постала везана. Са друге стране, дозвољено је извршити супституцију $(\lambda y.x(zx))_w^x$, што резултира термом $\lambda y.w(zw)$, односно $(\lambda y.x(zx))_w^x \equiv \lambda y.w(zw)$. (Због чега је важно да услови за супституцију увек буду испуњени објаснићемо нешто касније.)

Напомена. Ако се слободна промењива x не јавља у M, онда $M_N^x \equiv M$.

Рекли смо нешто о *језику* ламбда рачуна без типова. Дефинисали смо појмове ламбда терма, слободних и везаних промењивих, појмове подтерма и супституције. Остаје нам да уведемо *формуле* тог језика.

Деф. 4.3.1.4. (формула језика ламбда рачуна) Ако су M и N терми језика ламбда рачуна, онда је $M = N$ *формула* језика ламбда рачуна.

Овом дефиницијом завршавамо наш одељак о језику. У наставку, ћемо нешто више речи о самом формалном систему, његовим аксиомама и правилима закључивања.

4.3.2. Правила и аксиоме

Ламбда рачун је једнакосни рачун. У њему доказујемо формуле облика $M = N$ које можемо интерпретирати као функцијске једнакости. Пошто функције у ламбда рачуну разумемо интензионално, доказати $M = N$ значи доказати да терми M и N изражавају исто правило повезивања.

У ламбда рачуну имамо следећа правила закључивања [Stenlund, 1972, section 4.3.]:

1) $\dfrac{}{M=M}$ (*рефлексивност*)

2) $\dfrac{M=N}{N=M}$ (*симетричност*)

3) $\dfrac{M=N \quad N=L}{M=L}$ (*транзитивност*)

4) $\dfrac{N=L}{MN=ML}$

5) $\dfrac{N=L}{NM=LM}$

6) $\dfrac{N=L}{\lambda x.N=\lambda x.L}$

Прва три правила говоре да је релација једнакости на ламбда термима коју описујемо релација еквиваленције. Правила 4) и 5) гарантују да ламбда терми имају функционално понашање. Да свака функција може приписати једном аргументу тачно једну вредност нам гарантује 4), а да ће једнаке функције примењене на једнаке аргументе дати једнаке вредности нам гарантује 5). Правило 6) нам каже да апстраховање по истој променљивој на једнаким термима даје једнаке резултате. Заједно, 4)-6) нам кажу да је = у ламбда рачуну *конгруенција*. Поред поменутих правила, ламбда рачун садржи и следеће аксиоме:

(α) $\lambda x.M = \lambda y.\ M_y^x$, ако y није слободно у M

(β) $(\lambda x.M)N = M_N^x$

Аксиома (α) нам каже да ламбда терми, уз одређене претпоставке, не мењају значење након преименовања везаних променљивих. На пример, терм $\lambda x.zx$ значиће исто што и $\lambda y.zy$. Значај могућности тог преименовања постаје јасан при супституцији. Наиме, напоменули смо да супституцију M_N^x не можемо извршити уколико одређени услов није испуњен, услов да ниједна слободна променљива у N не постаје везана у M_N^x. Да је тај услов увек при супституцији испуњен врло је важно, јер у супротном наш једнакосни рачун може постати тривијалан, у њему можемо доказати једнакост произвољних ламбда терама [Barendregt, 1984, section 2.1.10.]. Дакле, у терму као што је $\lambda y.x(zx)y$ не можемо извршити супституцију $(\lambda y.x(zx))\,{}_{wy}^{x}$, јер бисмо тиме добили терм $\lambda y.wy(zwy)y$, при чему би променљива y у wy постала везана. Међутим, оно што можемо учинити је прво преименовати $\lambda y.x(zx)y$ у $\lambda u.x(zx)u$, па потом извршити супституцију $(\lambda u.x(zx)u)\,{}_{wy}^{x} \equiv wy(z(wy))u$. Алфа једнакост нам гарантује да је терм на којем смо извршили супституцију, $\lambda u.x(zx)u$ једнак нашем почетном терму $\lambda y.x(zx)y$. [69]

О значењу аксиоме (β) смо нешто већ рекли у другом поглављу када смо споменули Кари-Хауардову кореспонденцију. Видели смо да је она блиско повезана са

[69] Са друге стране, могућност преименовања везаних променљивих не мора бити гарантована *аксиомом*, већ се може посматрати као изједначавање терама на чисто синтаксном нивоу, видети [Stendlund, 1972, section 4.2.]. На тај начин, супституција M_N^x се дефинише не строго говорећи на јединственим термима M, N већ на класама еквиваленције терама који се разликују од M, N до на преименовање везаних променљивих. То нам омогућава да супституцију M_N^x можемо посматрати наивно, као дефинисану за сваки одабир M, N. Видети [Barendregt, 1984, одељци: *Terms modulo a change of bound variables*, *Substitution*, *app. C*].

нормализацијом и детаљније о томе ћемо касније више да кажемо. Интуитивно говорећи, овом аксиомом формално описујемо резултат који настаје када правило одређеног облика $\lambda x.M$, које има улогу функције, применимо на неко друго правило N, које има улогу аргумента. Треба имати у виду да се у ламбда рачуну примена функције на аргумент такође посматра као правило. Аксиомом (β) претпостављамо да се значење тог правила неће изменити након што примену израчунамо.

Систем који смо представили зове се λ_β рачун (ламбда-бета рачун). Формулација ламбда рачуна која се назива $\lambda_{\beta\eta}$ рачун (ламбда-бета-ета рачун) добија се када λ_β рачун проширимо са аксиомом:

(η) $\lambda x.Mx = M$, *ако* x *није слободно у* M.

Интересантно је споменути да је у $\lambda_{\beta\eta}$ рачуну аксиома (α) сувишна, с обзиром на то да се може дедуковати помоћу (η) и (β) на следећи начин.

Претпоставимо да y није слободно у M. Дакле, можемо закључити

1. $\lambda x.M = \lambda y.(\lambda x.M)\ y$, према (η).

На основу (β), следи

2. $\lambda y.(\lambda x.M)y = \lambda y.M\,\frac{x}{y}$.

Према правилу транзитивности (3), из 1. и 2. закључујемо да $\lambda x.M = \lambda y.M\ [y/x]$.

Занимљиво је напоменути да су бета и ета једнакости ламбда рачуна које говоре о односу функционалне примене и ламбда апстракције у вези са принципом инверзије адјункције [Došen, 2001]. Како Дошен примећује, принцип инверзије исте врсте јавља се у наивној теорији скупова између:

A) апстраховања скупа из датог својства (што подразумева формирање скупова на основу датог својства A помоћу израза облика: $\{x: A\}$), и
B) својства скупа да има чланове (својство на основу којег допуштамо формирање исказа облика $x \in a$, за сваки скуп a).

Чињеница да су A) и B), односно $\{x: \dots\}$ и $x \in \ \dots$, инверзни једно другом изражено је са два главна постулата у наивној теорији скупова: *постулатом компрехензије* и *постулатом екстензионалности*. Дошен показује да је апстраховање скупа из неког својства у вези са операцијом ламбда апстракције у ламбда рачуну, док је својство скупа да има чланове у вези са операцијом примене. Он даље показује како постулат компрехензије одговара бета једнакости ламбда рачуна, а принцип екстензионалности скупова ета једнакости [Došen, 2001, section 2]. Бета и ета једнакости, дакле, заједно говоре да су ламбда апстракција и примена инверзни у истом смислу у којем су то A) и B).

На први поглед, није непосредно јасно у каквој је интуитивној вези значење аксиоме (η) са екстензионалношћу у ламбда рачуну. Али, приметимо да уз присуство (η) једнакости користећи се правилима (1)-(6) и аксиомама (α), (β) можемо извести следећи принцип:

(ext): Ако x није слободно у M ни у N, онда $Mx = Nx \Longrightarrow M = N$.

Доказ. Претпоставимо да x није слободно у M ни у N и да $Mx = Nx$. Према правилу (6), следи да $\lambda x.Mx = \lambda x.Nx$. На основу претпоставке да се x не јавља слободно у M нити у N, према (η) и (2), (3) следи да $M = N$, као што је то показано у: [Curry & Feys 1958, chapter 3, section D4., p. 92].

Такође, у ламбда бета рачуну проширеном са аксиомом (ext), (η) ће важити као теорема. Претпоставимо да се x не јавља слободно у M. Следи да за сваки терм N, $(\lambda x.Mx)N = MN$, према (β). На основу (*ext*) следи да $\lambda x.Mx = M$.

Дакле, у присуству аксиома и правила ламбда-бета рачуна, (ext) и (η) јесу подједнаке снаге. Другим речима $\lambda_\beta +$ (η) и $\lambda_\beta + (ext)$ представљају еквивалентне једнакосне системе.

Идеја на којој се принцип (ext) заснива представља *екстензионално* схватање једнакости ламбда терама. Њиме се тврди да су ламбда терми M и N једнаки ако дају једнаке вредности за једнаке аргументе. Отуда потиче и назив тог принципа (*ext* је скраћено од *extensionality*). У складу са тиме, правило (6) се некад назива *слабом екстензионалношћу* (*weak extensionality*), пошто игра кључну улогу у извођењу (*ext*) уз присуство (η).

Као што Скот примећује у [Scott 1980, p. 232], екстензионално схватање једнакости функција није у складу са главном идејом ламбда рачуна, а то је разумевања функција као *правила* које повезују аргумент са вредношћу. Он каже:

> “Многи рачуни које су разматрали Черч и Кари узимају појам функције као **екстензионалан**, а прилично је теже у таквом контексту прецизирати значење ‘правила повезивања’“.

Наиме, ако функција није дефинисана тиме *које* резултате даје, већ *како* то чини, онда није јасно због чега бисмо у таквом рачуну прихватили принцип као што је (ext). Из тог разлога, као што је то и сам Черч увидео у [Church, 1941], λ_β рачун боље представља интензионалну једнакост функција од $\lambda_{\beta\eta}$ рачуна. Интензионална једнакост треба да се заснива на једнакостима самих *правила* израчунавања, а не на једнакостима резултата која та правила дају.

У одељку који следи увешћемо појмове редукције, конверзије и нормализације који ће нам помоћи не само да уђемо дубље у значења једнакости ламбда рачуна већ и да покажемо његову конзистентност. Из разлога које смо навели, бавићемо се претежно λ_β формализацијом ламбда рачуна док ћемо $\lambda_{\beta\eta}$ спомињати само у одређеним контекстима када је то потребно.

4.3.3. Редукција, конверзија и нормализација

> “Правило повезивања подразумева процес, наиме процес (израчунавања) којим се прелази са аргумента на вредност. […] то је у λ-рачуну реализовано појмом *редукције* […]” [Stenlund, 1972 , p. 43-44].

Са појмом *редукције* сусрели смо се у другом поглављу овог рада, када смо говорили о нормализацији доказа и о једнакостима доказа које се на њој заснивају. Процес којим се добија нормална форма извођења звали смо нормализацијом, трансформацијом или редукцијом. Рекли смо да два извођења имају исто значење, односно представљају исти доказ уколико се редукују, трансформишу или нормализују на исту нормалну форму. На сличан начин како се појам једнакости доказа заснива на појму редукције извођења, појам једнакости правила израчунавања се у ламбда рачуну заснива на појму редукције терама.

У ономе што следи формално ћемо да дефинишемо појмове редукције, конверзије и нормалне форме за ламбда терме. Почећемо са увођењем појма *контекста* који ће нам у тим дефиницијама бити значајан.

Једноставно речено, контексти су ламбда терми са празнинама. Да бисмо то боље илустровали, можемо рећи да контекст настаје из ламбда терма „брисањем“ неког његовог подтерма (на сличан начин на који можемо рећи да предикати у предикатској логици настају „брисањем“ одговарајућих терама из исказа). Објаснимо то на примеру. Узмимо рецимо ламбда терм $\lambda x.xy$ и замислимо да смо из тог терма избрисали y. На његовом месту остаће празнина [ ], тако да ћемо уместо $\lambda x.xy$ сада имати $\lambda x.x[\,]$. Оно што смо добили је контекст. Он се синтаксно понаша као (унарна) функција која пресликава терме у терме. Примера ради, када $\lambda x.x[\,]$ применимо на променљиву z, као резултат те примене добијамо $\lambda x.xz$. У општем случају, ако применимо $\lambda x.x[\,]$ на произвољан терм N, добићемо терм у којем уместо празнине пишемо N, односно $\lambda x.xN$.

Можемо дати следећу формалну дефиницију контекста [Barendregt, 1984, p. 29]:

Деф. 4.3.3.1.

1. Променљива x је контекст,
2. [ ] је контекст,
3. Ако су $C_1[\,]$ и $C_2[\,]$ контексти, онда је то и $C_1[\,]\,C_2[\,]$ (примена контекста на контекст), као и $\lambda x.\,C_1[\,]$ (ламбда апстракција по контексту).

Приметимо да се јављање слободне променљиве у M може постати везано у $C[M]$. Примера ради, нека је M терм yx, а $C\,[\,]$ контекст $\lambda xy.z[\,]y$. Дакле, $C[M]$ ће бити терм $\lambda xy.z(yx)y$. Променљиве y и x су слободне у M, али у $C\,[M]$, односно у терму $\lambda xy.z(yx)y$, оне постају везане.

Када смо одредили појам контекста можемо дефинисати појмове α-конверзије и β-редукције.

Алфа конверзија и алфа конгруенција

Нека је $\lambda x.M$ подтерм од P. Ако променљива y није слободна променљива у M, онда се замена неког јављања терма $\lambda x.M$ у P термом $\lambda y.M_y^x$ назива *α-конверзијом* или *преименовањем везаних променљивих* у P. То можемо мало формалније записати на следећи начин.

Деф. 4.3.3.2. (*α-конверзија*) Нека је P терм облика $C[\lambda x.M]$, а терм Q облика $C[\lambda y.M_y^x]$ где y није слободна променљива у M. Онда кажемо да Q добијамо из P α-конверзијом, што записујемо као: $P \equiv_{\alpha 1} Q$.

Ако терм M можемо добити из N само преименовањем везаних променљивих, односно низом α-конверзија, онда кажемо да су M и N *α-конгруентни* [Curry & Feys, 1958, p. 91]. Ту дефиницију можемо мало формалније записати као:

Деф. 4.3.3.3. $M \equiv_{\alpha} N$ (M и N су *α-конгруентни*) ако и само ако $M \equiv M_0 \equiv_{\alpha 1} M_1 \equiv_{\alpha 1} \dots \equiv_{\alpha 1} M_{n-1} \equiv_{\alpha 1} M_n \equiv N$, за $n \geq 0$.

Пример. 4.3.3.4. Терми $\lambda xy.xx(yz)$ и $\lambda uw.uu(wz)$ су α-конгруентни, што показују наредне конверзије:

$$\lambda xy.xx(yz) \equiv \lambda x(\lambda y.xx(yz))$$

$$\lambda x(\lambda y.xx(yz)) \equiv_{\alpha 1} \lambda x(\lambda w.xx(wz))$$

$$\lambda x(\lambda w.xx(wz)) \equiv_{\alpha 1} \lambda u(\lambda w.uu(wz))$$

$$\lambda u(\lambda w.uu(wz)) \equiv \lambda uw.uu(wz).$$

Није тешко видети да α-конгруенција представља релацију еквиваленције на ламбда термима [Hindley & Seldin,2008, lemma 1.19.b].

Такође је једноставно да се види да ће $M \equiv_{\alpha} N$ да важи ако и само ако $\lambda_{\alpha} \vdash M = N$, где λ_{α} означава рачун који добијемо када из λ_{β} одбацимо аксиому (β).

Преименовање везаних променљивих у ламбда рачуну је уобичајено посматрати као синтаксну процедуру која не мења значење и особине терма. Из тог разлога, обично се занемарују разлике између α- конгруентних терама и α- конгрунеција се посматра као синтаксна једнакост. То се често чини, примера ради, када постоји потреба да се неки посебно значајан терм именује. Обично то име не означава сам тај терм, већ класу њему α-конгруентних терама. То ће и овде бити случај. Назначаваћемо да се ради о α-конгруенцији односно α-конверзији, а не о синтаксној једнакости једино када је то потребно да прецизно одредимо неке друге важне појмове, као што је на пример појам редукције који дефинишемо у наставку.

$\boldsymbol{\beta}$-редукција

Терм облика $(\lambda x.K)L$ се назива β-*редексом* (или само *редексом*), а терм облика K_L^x његовим *контрактумом*.

Деф. 4.3.3.4. Терм M се β-*редукује* (или*: бета-редукује*) *у једном кораку* на N, што записујемо као $M \longrightarrow_{\beta 1} N$, ако је M облика $C[(\lambda x.K)L]$, а N је облика $C[K_L^x]$. Другим речима, кажемо да $M \longrightarrow_{\beta 1} N$ ако је N добијемо из M заменом тачно једног β-редекса његовим контрактумом.

Примери. 4.3.3.5.

$(\lambda y.y)\ z \longrightarrow_{\beta 1} z$

$(\lambda y.y)\ \lambda y.y \longrightarrow_{\beta 1} \lambda y.y$

$((\lambda x.y(xzx))w)w \longrightarrow_{\beta 1}\ y(wzw)w$

$((\lambda x.xxy)((\lambda zu.zw)s))w\ \longrightarrow_{\beta 1} \big((\lambda x.xxy)(\lambda u.sw)\big)w$

$(\lambda x.xx)\lambda x.xx \longrightarrow_{\beta 1} (\lambda x.xx)\lambda x.xx$

$(\lambda x.y)\lambda z.z \longrightarrow_{\beta 1} y.$

Користећи се дефиницијом *4.3.3.4.* можемо да уведемо појам редукције.

***Деф. 4.3.3.6.* (*редукција*)** Писаћемо $T \overrightarrow{\equiv}_{\beta 1,\alpha} U$ када будемо желели да кажемо да $T \longrightarrow_{\beta 1} U$ или $T \equiv_\alpha U$. Терм M се β-*редукује* (*бета-редукује* или само: *редукује*) на N, што записујемо као $M \longrightarrow_\beta N$, ако $M \equiv M_0 \overrightarrow{\equiv}_{\beta 1,\alpha} M_1 \overrightarrow{\equiv}_{\beta 1,\alpha} \dots \overrightarrow{\equiv}_{\beta 1,\alpha} M_n \equiv N$, где $n \geq 0$. Другим речима, важи $M\ \longrightarrow_\beta N$ ако се N може добити из M низом примена β-редукција односно α-конверзија [Hindley & Seldin, 2008, def. 1.24.].

На пример, важи $yy((\lambda xz.z(xx))zy) \longrightarrow_\beta\ yy\big(y(zz)\big)$ и то је оправдано следећим низом редукција:

$yy((\lambda xz.z(xx))zy) \equiv_{\alpha 1} yy((\lambda xu.u(xx))zy)$

$yy((\lambda xu.u(xx))zy) \longrightarrow_{\beta 1} yy((\lambda u.u(zz))y)$

$$yy((\lambda u.u(zz))y) \longrightarrow_{\beta 1} yy\big(y(zz)\big).$$

Нормална форма и нормализабилни терми

Сада када смо дефинисали појам редукције, можемо да уведемо и појам *нормалне форме* која представља њено крајње исходиште.

***Деф. 4.3.3.9.* (*нормална форма*)** Кажемо да је терм M у β*-нормалној форми* (или само: *нормалној форми*) ако не садржи ниједан β редекс. Ако $M \longrightarrow_{\beta} N$, и N је у нормалној форми, N се назива *нормалном формом* од M.

Примера ради, у нормалној форми су наредни терми: x, $x(yy)z$, $y\lambda z.y$, $\lambda x.x$, $\lambda xy.x$. Последња два терма су затворени терми односно *комбинатори* који су рачунски веома значајни. Захваљујући њиховим еквивалентима у комбинаторној логици, ови терми (до на α-конгруенцију) се уобичајено називају I и K. Комбинатор I понаша се као функција идентитета, јер за сваки терм M имамо да важи $(\lambda x.x)M \longrightarrow_{\beta} M$. Са друге стране, комбинатор K нам омогућава да дефинишемо терм који увек даје исту, константну вредност када се примени на било који други терм. Наиме, за сваки терм M важи да $(\lambda xy.x)M \longrightarrow_{\beta} \lambda y.M$, а за свако N да $(\lambda y.M)N \longrightarrow_{\beta} M$.

Приметимо да су I и K у нормалној форми, док терм $KI \equiv (\lambda y.\lambda x.y)\lambda z.z$ није. Очигледно, $(\lambda y.\lambda x.y)\lambda z.z$ је β-редекс. Међутим, иако он сам није у нормалној форми, своди се на терм који јесте, па имамо да $(\lambda y.\lambda x.y)\lambda z.z \longrightarrow_{\beta} \lambda x.\lambda z.z$.

Деф. 4.3.3.10. За терм M кажемо да је *β-нормализабилан* (или само: *нормализабилан*) ако постоји терм N такав да $M \longrightarrow_{\beta} N$ и терм N је у нормалној форми. Каже се још и да је N *нормална форма* од M.

Очигледно је да све нормалне форме представљају нормализабилне терме, али обрнуто није увек случај. Пример терма који није у нормалној форми, али се може нормализовати је $(\lambda z.y\lambda x.Ix)w$. У овом терму примећујемо два β-редекса. Први је Ix, а други је $(\lambda z.y\lambda x.Ix)w$. Редукцијом другог од та два редекса добијамо терм $y\lambda x.Ix$, у којем се јавља редекс Ix. Даљим његовим свођењем добијамо терм $y\lambda x.x$. Редукцију коју смо извели можемо записати као:

$(\lambda z. y\lambda x. Ix)w \longrightarrow_\beta y\lambda x. Ix \longrightarrow_\beta y\lambda x. x.$

Пошто је терм $y\lambda x. x$ у нормалној форми, и $(\lambda z. y\lambda x. Ix)w \longrightarrow_\beta y\lambda x. x$, терм $y\lambda x. x$ називамо нормалном формом од $(\lambda z. y\lambda x. Ix)w$.

Приметимо да смо терм $(\lambda z. y\lambda x. Ix)w$ такође могли редуковати на $y\lambda x. x$ сводећи прво редекс Ix:

$(\lambda z. y\lambda x. Ix)w \longrightarrow_\beta (\lambda z. y\lambda x. x)w \longrightarrow_\beta y\lambda x. x.$

Немају сви ламбда терми нормалну форму. Пример једног таквог терма је $(\lambda x. xx)\, \lambda x. xx$. Очигледно је да терм $(\lambda x. xx)\lambda x. xx$, који се обично означава са Ω, није у нормалној форми, јер је облика редекса. Он се такође не може ни свести на нормалну форму због тога што се редекс $(\lambda x. xx)\, \lambda x. xx$ увек редукује само на себе и тиме производи наредну бесконачну редукцију:

$(\lambda x. xx)\, \lambda x. xx \longrightarrow_\beta (\lambda x. xx)\, \lambda x. xx \longrightarrow_\beta (\lambda x. xx)\, \lambda x. xx \ldots$

Због тога што се Ω не може редуковати на други терм до на самог себе кажемо да је Ω *минималан* [Hindley & Seldin, 2008, example 1.27.d]. У [Lercher 1976] показано је да је терм Ω, о којем ће касније бити више речи, једини редекс који је у овом смислу минималан.

Терм $(\lambda x. xxx)\, \lambda x. xxx$ који ћемо означити са Ω_3, такође нема нормалну форму. Он садржи само један редекс $(\lambda x. xxx)\, \lambda x. xxx$ који није минималан као Ω, али као и Ω, производи бесконачни низа редукција који изгледа овако:

$(\lambda x. xxx)\, \lambda x. xxx \longrightarrow_\beta ((\lambda x. xxx)\, \lambda x. xxx)\lambda x. xxx \longrightarrow_\beta$

$(((\lambda x. xxx)\, \lambda x. xxx)\, \lambda x. xxx)\, \lambda x. xxx \longrightarrow_\beta \ldots$

Шта више, ово је једини низ редукција који Ω_3 производи, и као што видимо, не завршава се у нормалној форми.

Не значи да сваки терм који производи бесконачан низ редукција нема нормалну форму. Узмимо на пример $KI\Omega \equiv ((\lambda xy. x)\, \lambda x. x)\, \Omega$. Тај терм поседује два редекса $(\lambda xy. x)\lambda x. x$ и Ω. Редекс Ω, као што смо већ рекли, не може се даље редуковати на други терм осим на самог себе и одговоран је за то што терм $((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega$ представља почетак бесконачног низа редукција који изгледа овако:

$$((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega \longrightarrow_{\beta 1}\ ((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega\ \longrightarrow_{\beta 1}\ ((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega\ \longrightarrow_{\beta 1} \ldots$$

Са друге стране, $((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega$ такође производи и један коначан низ редукција захваљујући редексу $(\lambda xy.x)\lambda x.x$. Наиме, редекс $(\lambda xy.x)\lambda x.x$ своди се на $\lambda y.\lambda x.x$ па ће да важи:

$$((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega \longrightarrow_{\beta} (\lambda y.\lambda x.x)\ \Omega$$

Пошто се слободна променљива y не јавља у $\lambda x.x$, такође важи и $(\lambda y.\lambda x.x)\ \Omega \longrightarrow_{\beta} \lambda x.x$. Дакле, имамо:

$$((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega \longrightarrow_{\beta 1} (\lambda y.\lambda x.x)\ \Omega \longrightarrow_{\beta 1} \lambda x.x.$$

Ова коначна редукција коју $((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega$ производи показује да је $((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega$ нормализабилан терм чија је нормална форма $\lambda x.x$.

Терми који производе само коначне низове редукција називају се *јако нормализабилним*. Примера ради, терм као што је $(\lambda z.y\lambda x.Ix)w$ је јако нормализабилан, јер производи само две редукције и обе су коначне. Међутим, терм $((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega$ из примера горе је нормализабилан, али не и јако нормализабилан због тога што производи бесконачан низ редукција које потичу од редекса Ω. Разлика између терма T који је нормализабилан и терма U који је јако нормализабилан лежи у томе што је *неки* низ редукција који T производи коначан и завршава се у нормалној форми, док је, са друге стране, *сваки* низ редукција које U производи коначан и завршава се у нормалној форми. Поставља се питање како можемо да знамо који низ редукција из T ће водити до нормалне форме од T, ако она постоји? Да бисмо на то питање одговорили, дефинисаћемо појам *крање леве* (енг. *leftmost*) *редукције*.

Крајње лева редукција за терм M је она која полази од редекса у M који је крајње леви. Кажемо да је редекс $(\lambda x.M)N$ *крајње лево у* M ако се за сваки други редекс $(\lambda y.M')N'$ у $M,\ \lambda x$ налази лево у односу на λy [Barendregt, 1984, def. 8.4.7.]. На пример, у терму $(\lambda z.y\lambda x.Ix)w \equiv (\lambda z.y\lambda x.(\lambda u.u)x)w$, крајње леви редекс је $(\lambda z.y\lambda x.Ix)w$, јер је λz лево у односу на λu, док је у терму $((\lambda xy.x)\ \lambda x.x)\ \Omega \equiv ((\lambda xy.x)\ \lambda w.w)\lambda z.z$ крајње леви редекс $(\lambda xy.x)\ \lambda w.w$ јер је λx лево у односу на λz. [70]

Помоћу појма крајње леве редукције можемо да формулишемо наредно тврђење:

Тврђење. 4.3.3.11. Ако терм има нормалну форму, она се увек може досегнути следећи крајње леву редукцију.

Доказ овог тврђења читалац може пронаћи у [Curry & Feys, 1958, section 4E1] или у [Barendregt, 1984, section 13.2.].

Помоћу тврђења ***4.3.3.11.*** можемо доказати да неки ламбда терм нема нормалну форму показујући да је његова крајња лева редукција бесконачна. Тако, примера ради, можемо једноставно показати да $\Omega_3 M$ за произвољно M не може бити нормализабилан терм, јер је крајњи леви редекс у $\Omega_3 M$ терм Ω_3 за кога већ знамо да нема нормалну форму.

Еквиваленција и једнакост терама

Користећи се појмом редукције у ламбда рачуну можемо дефинисати релацију β-еквиваленције на ламбда термима.

Деф. 4.3.3.12. Када будемо желели да кажемо да важи $M_i \equiv_\alpha M_{i+1}$ или $M_i \longrightarrow_{\beta 1} M_{i+1}$ или $M_{i+1} \longrightarrow_{\beta 1} M_i$ писаћемо $M_i \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha} M_{i+1}$. Рећи ћемо да су терми M и N *β-еквивалентни,* што записујемо као $M \longleftrightarrow_\beta N$ ако важи да $M \equiv M_0 \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha} M_1 \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha} M_2 \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha} \ldots \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha} M_{n-1} \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha} M_n \equiv N$, за $n \geq 0$ [Hindley & Seldin 2008, def. 1.37.].

Приметимо да $M \longleftrightarrow_\beta N$ не повлачи да $M \longrightarrow_\beta N$ или $N \longrightarrow_\beta M$. Примера ради, нека је M је терм $\lambda x.II$, N терм облика KI, а L облика $\lambda x.I$. Јасно је да важи $M, N \longrightarrow_\beta L$, али неће важити $M \longrightarrow_\beta N$, као ни $N \longrightarrow_\beta M$.

Релација коју смо назвали *β-еквиваленцијом* на другим местима се назива релацијом β-једнакости или β-конвертибилности, видети на пример [Hindley & Seldin,

[70] Преименовања везаних променљивих смо овде извршили из практичних разлога, да бисмо лакше разликовали редексе.

2008, def. 1.37.]. Наредно тврђење повезује појам β-еквиваленције терама са једнакошћу која је доказива у λ_β рачуну.

Тврђење. 4.3.3.13. $M \leftrightarrow_\beta N$ ако и само ако $\lambda_\beta \vdash M = N$.

Доказ. Смер са десна на лево изводи се индукцијом по дужини доказа у λ_β. Доказ смера са лева на десно доказује се индукцијом по сложености дефиниције релације β-еквиваленције. ■

Тврђење ***4.3.3.13.*** показује да једнакост терама у λ_β одговара релацији еквиваленције на ламбда термима $\leftrightarrow_\beta$ која је заснована на појму β редукције. Једнакост терама у $\lambda_{\beta\eta}$ се такође може на сличан начин довести у везу са релацијом еквиваленције на термима коју можемо звати $\beta\eta$-еквиваленцијом, видети [Barendregt, 1984, proposition 3.3.2.].

Тврђењем као што је ***4.3.3.13.*** значења једнакости у ламбда рачуну се повезују са процесом нормализације, о чему ћемо касније моћи мало више да кажемо. Такође се успоставља одређена веза између синтаксе рачуна, са једне, и онога што би се могло назвати његовом *операционом семантиком*, са друге стране. У том смислу, ово тврђење које је облика еквиваленције личи на тврђење *потпуности* формалног система ламбда рачуна у односу на дату релацију редукције. Смер са лева на десно одговара потпуности у ужем смислу, док би смер са десна на лево требало да обезбеди конзистентност рачуна. Међутим, тврђење ***4.3.3.13.*** гарантује конзистентност λ_β тек када докажемо да важи одређено својство β-редукције о којем говоримо у следећем одељку.

4.3.4. *Конзистентност, Черч-Росерова теорема и значење једнакости*

Назовимо формулу ламбда рачуна $M = N$ *затвореном формулом* ако су M, N затворени ламбда терми односно комбинатори. Кажемо да је ламбда рачун *конзистентан* ако не доказује сваку затворену формулу [Barendregt, 1984, def. 2.1.30.].

Конзистентност једнакосног рачуна врло је важна јер њоме се гарантује да једнакости у њему нису тривијалне.

Наредна теорема која је први пут доказана у [Church & Rosser, 1936], имплицира да је λ_β конзистентан рачун. Реч је о Черч-Росеровој теореми за бета редукцију. Њоме се показује да процес бета редукције не може у крајњој инстанци дати два различита резултата.

Теорема 4.3.4.1. (***Черч-Росерова теорема за бета редукцију***). Ако $M \twoheadrightarrow_\beta N_1$ и $M \twoheadrightarrow_\beta N_2$, онда постоји терм L, такав да $N_1, N_2 \twoheadrightarrow_\beta L$.

Доказ. За доказ ове теореме видети [Barendregt, 1984, section 11].

Черч-Росерова теорема се некад назива и *теорема конфлуенције* (*Confluence theorem*) због тога што се њоме показује да је бета редукција *конфлуентна*. Бинарну релацију R на ламбда термима зваћемо *конфлуентном* ако за произвољне терме M, N_1, N_2 задовољава следећи услов:

MRN_1 и $MRN_2 \Longrightarrow$ постоји ламбда терм L, такав да N_1RL и N_2RL. [71]

Заједно са тврђењем ***4.3.3.13.*** Черч-Росерова теорема има следеће три последице:

1. $M = N$ се може доказати у λ_β само ако постоји терм L такав да се и M и N бета редукују на L.
2. Ако је терм нормализабилан, његова нормална форма је јединствена.
3. Ако је M или N нормализабилан и важи $M = N$, онда они имају исту нормалну форму (до на алфа конгруенцију).

Ове последице имплицирају да у систему λ_β не можемо доказати $M = N$ за нормалне форме M, N које нису α-конгруентне, као што су то затворени терми $S \equiv \lambda xyz.xz(yz)$ и $K \equiv \lambda xy.x$. Тиме се показује да једнакост у λ_β није тривијална и да је систем према томе конзистентан.

Черч-Росерова теорема говори нешто важно о *значењу* једнакости у λ_β рачуну. Наиме, њене последице показују да се једнакост два терма може доказати у том рачуну само ако постоји заједнички терм на који се оба редукују. Као што смо рекли, терми

[71] Ако бинарна релације на ламбда термима задовољава овај услов каже се још и да поседује *Черч-Росерово својство* [Stenlund, 1972, p. 73].

ламбда рачуна изражавају правила. Редукција неког терма представља процес *нормализације* чији је циљ да правило које тај терм изражава формулишемо на непосреднији, једноставнији начин. Черч-Росеровом теоремом гарантује се да процес нормализације не може произвести два различита резултата. То има за последицу да ће два правила израчунавања у ламбда рачуну бити једнака ако и само ако се нормализацијом могу довести до исте синтаксне форме. Другим речима, једнакост ламбда рачуна је заснована на нормализацији.

Као што смо рекли, нормална форма је максимално једноставна формулација неког правила. У ламбда рачуну са типовима о којем смо говорили у другом поглављу, сваки процес нормализације ламбда терма завршавао се нормалном формом. Међутим, као што смо видели, у ламбда рачуну без типова нису сви терми нормализабилни. Због тога је у овом рачуну тешко увек изједначити редукцију са *поједностављењем*. Терм као што је Ω_3 на пример, не само да се редукцијом не упрошћава, већ је сваки наредни резултат редукције све сложенији [Hindley & Seldin, 2008, example 1.25.e]. Ипак, то не значи да поједностављивање није *циљ* процеса редукције, већ да тај циљ није увек достижан.

На сличан начин на који Черч-Росерова теорема за бета редукцију гарантује конзистентност рачуна λ_β, тако и формулација Черч-Росерове теореме за бета-ета редукцију, која је први пут доказана у [Curry & Feys, 1958] гарантује конзистеност $\lambda_{\beta\eta}$ рачуна, видети [Barendregt, 1984, theorem 3.3.9.]. Треба напоменути, међутим, да се конзистентност ламбда рачуна у λ_β и $\lambda_{\beta\eta}$ формулацији такође може показати путем модела као што је то учинио први Скот у [Scott, 1969]. Према Скотовом мишљењу, доказ конзистентности ламбда рачуна који се ослања на моделе има предности у односу на традиционални доказ конзистентности који се заснива на Черч-Росеровој теореми. Он тврди:

> "За једнакосне системе које су увели Кари и Черч, доказ конзистентности **преко** Черч-Росерове теореме мени не улива велику сигурност. Као што је то случај са многим доказно-теоријским аргументима, резултат веома зависи од тачне формулације правила" [Scott, 1980, p. 225].

Такође, Скот каже:

„Стварно није ни најмање поштено од Черча (…) да се позива на доказ конзистентности **преко** Черч-Росерове теореме, пошто то не даје никакво **интуитивно** оправдање за избор правила редукције која су унапред дата“ [Scott, 1980, p. 232].

Други коментар се односи на пасус из увода у [Church, 1941] где Черч каже како резултат конзистентности (који се позива на Черч-Росерову теорему) пружа оправдање за то како је појам функције схваћен у ламбда рачуну. Према том схватању, интензија функције је оно што је примарно дато, док се њен домен накнадно реконструише:

„(…) третирамо операцију или правило повезивања које конституише функцију као примарно дато, а опсег аргумената је онда одређен као састављен из ствари на које је операција примењива. Ово је удаљавање које је природно у прелажењу са разматрања функција у посебном домену на разматрање функција уопште, и оно је подржано теоремама конзистентности које ће бити доказане у наставку.“

Скот приговара да није јасно како би Черч-Росерова теорема могла служити као *оправдање* за специфичан начин на који се појам функције представља у ламбда рачуну као ни за избор правила закључивања и аксиома која тај рачун конституишу. Међутим, чини се да Скот и Черч немају нужно исти појам *оправдања* на уму. Изгледа да Черч посматра Черч-Росерову теорему као оправдање система у том смислу што она показује његову *конзистентност*, а не у том смислу што показује његову *интуитивност*.

Али и поред тога, нисам сигурна да Скот у потпуности има право када каже да Черч-Росерова теорема ни на који начин не даје *интуитивно* оправдање за то како је појам редукције формализован у ламбда рачуну. Објаснићемо због чега у наставку.

Прво ћемо покушати да објаснимо шта би то значило да се неко својство налик конфлуентности припише неформалном израчунавању. Претпоставићемо да се израчунавање вредности функције f за дате аргументе према унапред задатој процедури коју формира скуп правила R састоји из корака које ћемо назвати *стањима*. Последњи корак у израчунавању који нам даје решење назваћемо крајњим стањем. Претпоставићемо да постоји почетно стање које представља почетак израчунавања и претпоставићемо да између стања постоји релација *достиживости* коју одређује скуп правила R. Рећи ћемо да је релација достиживости *конфлуентна* ако је следећи услов задовољен. Наиме, из неког стања у израчунавању s_i достижива су два стања s' и s'', само ако постоји стање s_n достиживо из оба ова стања применом правила из R.

Ако израчунавање функције f према процедури коју формира скуп правила R одређује скуп стања S, и релацију достиживости на овим стањима која је конфлуентна, рећи ћемо да је израчунавање f према R *конфлуентно.*

Сада ћемо покушати да објаснимо у каквој су вези интуитивни појам израчунавања које је ефективно, односно које се одвија према правилима ефективне процедуре и појам израчунавања које је конфлуентно. Претпоставимо да R формира ефективну процедуру којом се израчунава функција f. Оправдано је очекивати да процедура која је ефективна неће за исти унос произвести два различита решења. То можемо схватити као неку врсту ваљаности правила израчунавања или инструкција из којих се та процедура састоји. Ако претпоставимо да је функција f дефинисана за аргумент a, односно да постоји решење b, такво да $f(a) = b$, ваљаност правила из R нам гарантује да из било ког корака у рачунању $f(a)$, следећи R можемо достићи то решење. Ако су инструкције ваљане у овом, неформалном смислу, оне ће нас водити достизању решења израчунавања или нас воде неком стању из које је решење достиживо слеђењем задатих инструкција, под условом да такво решење постоји.

Да процедуру за израчунавање чини ефективном, између осталог, то што су инструкције из којих се она састоји ваљане у овом смислу показује пасус из [Kleene, 1988, p. 16-17] у којем Клини говори о алгоритму као о методи за израчунавање функције и каже:

> „Таква метода је задата скупом правила или инструкција које описују процедуру [одлучивања] која функционише на следећи начин. Након што је процедура описана, ако одаберемо било које питање из класе, процедура ће нам онда рећи како да изведемо узастопне кораке тако да ћемо после коначног броја корака имати одговор на одабрано питање… Након извођења сваког нашег корака на који нас је процедура навела, правила или инструкције ће нам *или* омогућити да препознамо да имамо одговор сада пред нама и да га ишчитамо, или у супротном, да још немамо одговор пред нама, у којем случају ће нам рећи које даље кораке да предузмемо.“

Дакле, ваљаност инструкција можемо посматрати као нужан услов који неки скуп правила израчунавања треба да задовољи да бисмо процедуру која се из тих правила састоји могли, интуитивно говорећи, да назовемо ефективном. Конфлуентност је својство које нам гарантује да је тај нужан услов испуњен. Ако је израчунавање конфлуентно, то значи да не може доћи до корака у рачунању, назовимо га s_j таквог да s_j не представља ни решење, нити нам инструкције могу рећи шта да учинимо да из s_j дођемо до решења.

Показујући да конфлуентност важи за бета-редукцију, Черч-Росерова теорема гарантује да процес израчунавања њоме описан задовољава интуитивни услов ваљаности. На тај начин, та теорема барем донекле пружа интуитивно оправдање за формализацију појма функције и процеса рачунања у ламбда рачуну. [72]

У наредном одељку, представићемо резултате који ће нам омогућити да нешто више кажемо о односу између бета-редукције и израчунавања, као и да дубље уђемо у рачунске аспекте ламбда рачуна. Увешћемо појам λ-дефинабилности функција и представићемо резултат који је први доказао Клини, да се све рекурзивне функције могу дефинисати средствима ламбда рачуна. Као што смо већ раније напоменули, овај резултат је значајан из више разлога. За нас је овде посебно важан јер ћемо помоћу њега моћи да повежемо појам алгоритма са значењем одређене класе ламбда терама.

[72] Приметимо да ће свако израчунавање које је секвенцијално бити и конфлуентно. Под секвенцијалним израчунавањем подразумевамо израчунавање које је такво да се из сваког стања у рачунању можемо следећи правила израчунавања прећи у највише једно стање. Секвенцијално израчунавање увек формира *низ* корака, функција за одређени унос према задатом скупу правила мора формирати *низ* корака. Са друге стране, конфлуентно израчунавње допушта постојање различитих путања у израчунавању, све док је испуњен услов да се све ове путање морају да тако кажемо, сусрести у некој тачки, односно да воде истом резултату.

4.4. Дефинабилност рекурзивних функција

Резултати λ-дефинабилности које ћемо у овом одељку приказати омогућавају нам да ефективне процедуре путем којих рачунамо рекурзивне функције формулишемо ламбда термима. То се може учинити захваљујући чињеници да у ламбда рачуну без типова постоје терми који се називају *комбинаторима фиксне тачке*.

Уопште, *фиксном тачком* неке функције f називамо њен аргумент који остаје непромењен након примене те функције. Другим речима, a је фиксна тачка функције f ако $f(a) = a$. У складу са тиме, дефинишемо комбинаторе фиксне тачке на следећи начин:

Деф. 4.4.1. (комбинатори фиксне тачке) *Комбинатори фиксне тачке* су затворени ламбда терми M такви да за сваки терм X важи $MX =_\beta X(MX)$.

Ти комбинатори сваком терму придружују његову фиксну тачку. Пример таквог комбинатора је терм $\lambda f.(\lambda x.f(xx))\ \lambda x.f(xx)$ који ћемо обележавати са Y. Да је Y заиста комбинатор фиксне тачке показују следеће редукције.

Нека је N произвољни ламбда терм. Терм YN производи следећу бета редукцију:

$$YN \longrightarrow_\beta (\lambda x.N(xx))\ \lambda x.N(xx) \longrightarrow_\beta N((\lambda x.N(xx))\ \lambda x.N(xx)).$$

Такође, имамо да:

$$N(YN) \longrightarrow_\beta N((\lambda x.N(xx))\ \lambda x.N(xx)).$$

На основу ових редукција можемо закључити да: $N(YN) =_\beta YN$.

Можемо приметити да иако $N(YN) =_\beta YN$ важи, не важи да $YN \longrightarrow_\beta N(YN)$. Постоје међутим, комбинатори фиксне тачке Mза које не важи само $N(MN) =_\beta MN$ већ и $MN \longrightarrow_\beta N(MN)$. Пример таквог комбинатора је терм $(\lambda zx.x(zzx))\lambda zx.x(zzx)$, што показује следећа редукција:

$$(\lambda zx.x(zzx))\lambda zx.x(zzx)\ X \rightarrow_\beta (\lambda x.x((\lambda zb.b(zzb))(\lambda zb.b(zzb))x))X$$

$$(\lambda x.x((\lambda zb.b(zzb))(\lambda zb.b(zzb))x))X \rightarrow_\beta X((\lambda zb.b(zzb))(\lambda zb.b(zzb))X).$$

Комбинатор $(\lambda zx.x(zzx))\lambda zx.x(zzx)$ се обично обележава са Θ и по Алану Тјурингу носи назив *Тјурингов комбинатор (фиксне тачке).*

Приметимо да комбинатори фиксне тачке, као што је Y нису нормализабилни терми, немају нормалну форму. Примера ради, да комбинатор Y који смо дефинисали као $\lambda f.(\lambda x.f(xx))\lambda x.f(xx)$ нема нормалну форму показује наредни бесконачан низ бета редукција:

$$\lambda f.(\lambda x.f(xx))\lambda x.f(xx) \rightarrow_\beta$$

$$\lambda f.f((\lambda x.f(xx))\lambda x.f(xx)) \rightarrow_\beta$$

$$\lambda f.f(f((\lambda x.f(xx))\lambda x.f(xx))) \rightarrow_\beta \dots$$

Захваљујући томе што класа комбинатора који задовољавају дефиницију ***4.4.1.*** може да „генерише" фиксне тачке, помоћу њих можемо да опонашамо операције рекурзије и минимизације унутар ламбда рачуна. Као што ћемо ускоро показати, то нам омогућава да у овом рачуну представимо све рекурзивне функције, и према Черч-Тјуринговој тези, све израчунљиве функције.

Али, да бисмо унутар ламбда рачуна могли да дефинишемо функције на природним бројевима, прво ћемо показати како се представљају сами природни бројеви. Ламбда терме који их представљају зваћемо *Черчовим нумералима*. У општем случају, ако је n природан број, његов Черчов нумерал ћемо писати као: $\ulcorner n \urcorner$.

Деф. 4.4.2. *Черчов нумерал* за број n, $\ulcorner n \urcorner$ дефинишемо као $\lambda fx.f^n(x)$, где $f^n(x)$ стоји за $f(\dots f(x))$ где се f јавља n пута [Hindley & Seldin, 2008, def. 4.2.]. Тако, имамо:

$$\ulcorner 0 \urcorner \equiv \lambda fx.x$$

$$\ulcorner 1 \urcorner \equiv \lambda fx.f(x)$$

$$\ulcorner 2 \urcorner \equiv \lambda fx.f(f(x)) \dots$$

Напомена. Приметимо да су Черчови нумерали увек затворени терми у нормалној форми и да за свака два терма, M, N важи да: $\ulcorner n \urcorner MN \rightarrow_\beta M^n N$.

У ламбда рачуну сваки број представља неко правило, односно неку функцију. То правило се састоји у примени одређене операције, при чему броју n одговара n −та примена те операције. Примера ради, број 1 представља правило које нам каже да неку операцију применимо једанпут, број 2 да исту операцију применимо два пута и тако даље. Према Черчовом мишљењу,

> „То је допустиво на основу тога што апстрактна теорија бројева захтева од позитивних целих бројева само да *формирају низ* (енг. *progression*), и под тиме условом, цели бројеви се могу поистоветити са било каквом врстом објеката." [Church, 1941, p. 29]

Дакле, значење природних бројева се према овом гледишту састоји примарно у томе *како* они *формирају низ*, а не у томе каквој врсти објеката припадају. Можемо рећи да је тиме насупрот унутрашњој, скуповној карактеризацији, у ламбда рачуну дата једна спољашња карактеризација појма природног броја.

Имајући у виду како се природни бројеви представљају ламбда термима, сада ћемо показати како се представљају функције на природним бројевима. Разликоваћемо при том, *тоталне функције* из скупа A у скуп B – функције које сваком елементу од A придружују тачно један елемент из B, од *парцијалних функција* из A у B - функција које сваком елементу од $A' \subseteq A$ придружују тачно један елемент из B. Само у случају парцијалних функција, али не у случају тоталних, могуће је да функција буде *недефинисана* за неки аргумент домена, када он припада $A \setminus A'$. У наставку, дефинисаћемо појам *λ-дефинабилности* тоталних функција на природним бројевима.

Деф. 4.4.5. Тотална функција на скупу природних бројева је тотално пресликавање $\varphi\colon \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ за неко $p \in \mathbb{N}$. Нека је φ тотална функција на скупу природних бројева са p аргумената. Кажемо да је функција φ *λ-дефинабилна* или *λ-представљива* ако:

За свако $n_1, n_2, \dots, n_p \in \mathbb{N}$, постоји затворени ламбда терм F такав да у ламбда рачуну важи следећа једнакост:

$$F \ulcorner n_1 \urcorner \ulcorner n_2 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner =_\beta \ulcorner \varphi(n_1, n_2, \dots, n_p) \urcorner.$$

Кажемо да је функција на бројевима *λ-дефинабилна* или *λ-представљива* термом F ако такво F постоји [Barendregt, 1984, p. 44].

Пошто су Черчови нумерали у нормалној форми, важиће $F \ulcorner n_1 \urcorner \ulcorner n_2 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner =_\beta \ulcorner \varphi(n_1, n_2, \dots, n_p) \urcorner$, само ако $F \ulcorner n_1 \urcorner \ulcorner n_2 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner \to_\beta \ulcorner \varphi(n_1, n_2, \dots, n_p) \urcorner$.

Сада када смо дефинисали шта значи да је тотална функција на природним бројевима λ-дефинабилна, следеће питање које се природно намеће је *Које тоталне функције на природним бројевима су λ-дефинабилне?* Захваљујући резултату који је први доказао Клини у [Kleene, 1936], имамо одговор на то питање:

Клинијева теорема. *Ако је φ* тотална функција на скупу природних бројева, онда је она *λ-дефинабилна* ако и само ако је *рекурзивна*.

Ову теорему чине следећа два тврђења:

1. *Ако је тотална функција φ на скупу природних бројева рекурзивна, онда је она λ-дефинабилна.*

2. *Ако је тотална функција φ на скупу природних бројева λ-дефинабилна, онда је она рекурзивна.*

Клинијева теорема је последица општије теореме о *парцијалним* рекурзивним функцијама чији ћемо доказ представити у одељку 4.4.1. Тврђење које ћемо у овом одељку формулисати и доказати, слабије је од тврђења 1. горе. Оно гласи:

Тврђење. 4.4.6. Ако је функција φ на скупу природних бројева *примитивно рекурзивна,* онда је φ λ-дефинабилна.

Доказ. Тврђење ***4.4.6.*** слабије је од тврђења 1. горе јер је скуп примитивно рекурзивних функција прави подскуп скупа тоталних рекурзивних функција. Тврђење ***4.4.6.*** доказаћемо индукцијом по сложености дефиниције примитивно рекурзивних функција, коју ћемо да дамо у наставку.

Деф 4.4.7. Следеће функције зовемо *основним* функцијама:

1. *Функција следбеника* $S\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за коју важи $S(m) = m + 1$;
2. *Пројекције* $\pi_i^l\colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$, за $1 \le i \le l$, за које важи $\pi_i^l(m_1, \ldots, m_l) = m_i$;
3. *Константне функције* $const_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, за које важи $const_n(x) = n$.

Деф 4.4.9. Нека $l, k \in \mathbb{N}$ и $1 \le i \le k$. Кажемо да је функција $h\colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ дефинисана *композицијом* функција $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ и $g_1 \ldots g_k\colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ ако за свако $(m_1, \ldots, m_l) \in \mathbb{N}^l$ важи

$$h(m_1, \ldots, m_l) = f(g_1(m_1, \ldots, m_l), \ldots, g_k(m_1, \ldots, m_l)).$$

Да је функција h дефинисана композицијом из f и g_i-ова можемо записати као:

$$h = Cn[f, g_1, \dots, g_k].$$

Ако су $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ или $g_i: \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ за неко i парцијалне функције, вредност $h(m_1, \dots, m_l)$ је дефинисана само ако је свако $g_i(m_1, \dots, m_l)$ дефинисано за свако i и ако је $f(g_1(m_1, \dots, m_l), \dots., g_k(m_1, \dots, m_l))$ дефинисано за свако $g_i(m_1, \dots, m_l)$.

Деф 4.4.10. Нека $k \in \mathbb{N}$. Кажемо да је функција $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ дефинисана *рекурзијом* из функција $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ и $g: \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ ако за свако $(n, m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$ важи

$$h(0, m_1, \dots, m_k) \; = \; f(m_1, \dots, m_k);$$
$$h(n+1, m_1, \dots, m_k) \; = \; g(y, h(n, m_1, \dots, m_k), m_1, \dots, m_k);$$

Функције g или f могу бити и парцијалне функције. И у том случају мора да важи:

$(0, m_1, \dots, m_k) \in Domh$ акко $(m_1, \dots, m_k) \in Domf$

$(n+1, m_1, \dots, m_k) \in Domh$ акко

$(n, m_1, \dots, m_k) \in Domh$ и $(n, h(n, m_1, \dots, m_k), m_1, \dots, m_k) \in Domg$.

Да је функција h дефинисана рекурзијом из функција f и g можемо записати као:

$$h = Pr[f, g].$$

Деф 4.4.11. (примитивно рекурзивне функције) За функцију h на природним бројевима кажемо да је *примитивно рекурзивна* ако важи:

1. h је основна функција, или

2. h је облика $Cn[f, g_1, \dots, g_k]$, где су $f, g_1, \dots, g_k$ примитивно рекурзивне функције, или

3. h је облика $Pr[f, g]$, где су f, g примитивно рекурзивне функције.

Сада када смо дефинисали примитивно рекурзивне функције, можемо да покажемо како се оне представљају у ламбда рачуну, полазећи од основних функција.

Тврђење 4.4.12. Основне примитивно рекурзивне функције (следбеник, константне функције и пројекције) које означавамо као $S: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $const_n: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, π_i^n,: $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, се тим редоследом λ-дефинишу следећим термима:

1. $\lambda yfx. f(yfx)$
2. $(\lambda y. \ulcorner n \urcorner)\ulcorner m \urcorner$.
3. $\lambda x_1, \dots, x_n. x_i$

Доказ. Овде нећемо дати потпун доказ овог тврђења. Само ћемо у кратким цртама показати да $\lambda yfx. f(yfx)$ дефинише функцију следбеника. То ћемо учинити тако што ћемо доказати да за произвољан број n важи:

$$\big(\lambda yfx. f(yfx)\big) \ulcorner n \urcorner =_\beta \ulcorner n+1 \urcorner.$$

Пошто смо рекли да број n у ламбда рачуну представљамо термом $\lambda zw. z^n w$ (видети дефинцију ***4.4.2.***) имамо да:

$\big(\lambda yfx. f(yfx)\big) \ulcorner n \urcorner \equiv \big(\lambda yfx. f(yfx)\big)(\lambda zw. z^n w)$ и

$\ulcorner n+1 \urcorner \equiv \lambda zw. z^{n+1} w$.

Редукујући терм $\big(\lambda yfx. f(yfx)\big)(\lambda zw. z^n w)$, добијамо:

$\big(\lambda yfx. f(yfx)\big)(\lambda zw. z^n w) \longrightarrow_\beta \lambda fx. f\big((\lambda zw. z^n w) fx\big)$

$\lambda fx. f\big((\lambda zw. z^n w) fx\big) \longrightarrow_\beta \lambda fx. f(\lambda w. f^n w) x$

$\lambda fx. f(\lambda w. f^n w) x \longrightarrow_\beta \lambda fx. f(f^n x) \equiv \lambda fx. f^{n+1} x \equiv \ulcorner n+1 \urcorner$.

Тиме смо показали да терм $\lambda yfx. f(yfx)$ λ-дефинише функцију следбеника.

Сада ћемо показати како се у ламбда рачуну представља композиција функција.

Ако су $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ и $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ две унарне функције на природним бројевима које су λ-дефинисане термима F и G, онда се њихова композиција, функција $h = f(g(m))$ дефинише као $\lambda x. F(Gx)$. То се може лако и показати.

Јасно је да $(\lambda x. F(Gx))\ulcorner m \urcorner \longrightarrow_\beta F(G\ulcorner m \urcorner)$. Пошто је, према претпоставци, G терм који λ-дефинише функцију $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, онда према деф. ***4.4.5.***, $G\ulcorner m \urcorner =_\beta \ulcorner g(m) \urcorner$, и према томе:

$$F(G^{\ulcorner}m^{\urcorner}) =_{\beta} F(^{\ulcorner}g(m)^{\urcorner}).$$

Такође смо претпоставили да F λ-дефинише функцију $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, па следи, према деф. ***4.4.5.***, да:

$$F(^{\ulcorner}g(m)^{\urcorner}) =_{\beta} {}^{\ulcorner}f(g(m))^{\urcorner}.$$

На основу једнакости за које смо до сада показали да важе можемо закључити да:

$$(\lambda x. F(Gx))^{\ulcorner}m^{\urcorner} =_{\beta} {}^{\ulcorner}f(g(m))^{\urcorner}.$$

Тиме смо доказали да терм $\lambda x. F(Gx)$ λ-дефинише функцију h.

На сличан начин на који смо показали да терм $\lambda x. F(Gx)$ λ-дефинише композицију функција $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ под претпоставком да F λ-дефинише f и G λ-дефинише g, може се доказати и општије тврђење, које овде нећемо засебно доказивати. Оно гласи:

Тврђење 4.4.13. Нека је f функција на скупу природних бројева са k аргумената, а $g_1, \dots, g_k$ функције на скупу природних бројева са l аргумената. Нека је функција $h\colon \mathbb{N}^l \longrightarrow \mathbb{N}$ њихова композиција дефинисана као $h(m_1, \dots, m_l) = f\big(g_1(m_1, \dots, m_l), \dots, g_k(m_1, \dots, m_l)\big)$. Ако су функције f и g_i λ-дефинисане термима F и G_i, онда функцију $h\colon \mathbb{N}^l \longrightarrow \mathbb{N}$ λ-дефинише терм: $\lambda x_1 \dots x_n. F(\dots(G_1 x_1) \dots x_l) \dots (\dots (G_k x_1) \dots x_l)$.

Дакле, термом $\lambda x_1 \dots x_n. F(\dots(G_1 x_1) \dots x_n) \dots (\dots (G_k x_1) \dots x_n)$ у ламбда рачуну представљамо композицију рекурзивних функција. Представљање рекурзије је нешто компликованије, па ћемо му посветити мало више пажње.

Нека су функције $h\colon \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ и $f\colon \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$ такве да $h = Pr[f, g]$. Вредност тако дефинисане функције h за аргумент $(n, m_1, \dots, m_k)$ можемо израчунати према следећим инструкцијама:

Провери да ли $n = 0$.
Ако $n = 0$, *онда израчунај* $f(m_1, \dots, m_k)$,
Ако $n \neq 0$, *онда израчунај* $g(n-1, h(n-1, m_1, \dots, m_k), m_1, \dots, m_k)$.

Да бисмо те инструкције формулисали у ламбда рачуну, конструисаћемо комбинатор R који задовољава наредне једнакости:

$$\boldsymbol{R}LM\ulcorner 0\urcorner =_\beta L$$

$$\boldsymbol{R}LM\ulcorner n+1\urcorner =_\beta M\ulcorner n\urcorner(\boldsymbol{R}ML\ulcorner n\urcorner).$$

Комбинатор R који задовољава ове једнакости назива се *рекурзивним комбинатором* или *комбинатором рекурзије* (енг. *recursion combinator*). Комбинатор рекурзије конструисаћемо помоћу терама (комбинатора) којима ћемо λ-дефинисати рекурзивне функције: *Ако…, онда…, иначе…*, *претходник* и *следбеник*. Те терме које ћемо обележити са: D, V, N дефинисаћемо на следећи начин [Hindely & Seldin 2008, p. 52]:

$$N \equiv \lambda uxy.x(uxy),$$

$$D \equiv \lambda xyz.z(Ky)x,$$

$$V \equiv \lambda x.x(\lambda z.D(N(z\,\mathbf{0}))(z\,\mathbf{0}))(\boldsymbol{D}\mathbf{00})\mathbf{1},$$

где $\mathbf{0} \equiv \ulcorner 0\urcorner \equiv \lambda xy.y$ и $\mathbf{1} \equiv \ulcorner 1\urcorner \equiv \lambda xy.xy$.

Већ смо показали да N дефинише функцију следбеника (видети тврђење ***4.4.12.*** горе). Комбинатор D треба да дефинише функцију: *Ако* $n = 0$, *онда примени* L, *ако* $n \geq 0$ *онда примени* M. Дакле, D треба да задовољава наредне једнакости:

$$DLM\ulcorner 0\urcorner =_\beta L$$

$$DLM\ulcorner n+1\urcorner =_\beta M.$$

Да се комбинатор D како је овде дефинисан заиста тако и понаша, лако је показати. Разликоваћемо два случаја, први где је $n = 0$, и други где је $n \geq 1$.

Доказ. 4.4.14.

Прво показујемо да $DLM\ulcorner 0\urcorner =_\beta L$.

Према дефиницији, $DLM\ulcorner 0\urcorner \equiv (\lambda xyz.z(Ky)x)\,LM\mathbf{0}$.

С обзиром да:

$$(\lambda xyz.z(Ky)x)LM\mathbf{0} \rightarrow_\beta$$

$$(\lambda yz.z(Ky)L)M\mathbf{0} \rightarrow_\beta$$

$(\lambda z.z(KM)L)\mathbf{0} \to_\beta$

$\mathbf{0}(KM)L \to_\beta$

$IL \to_\beta$

$L,$

закључујемо да $(\lambda xyz.z(Ky)x)LM\mathbf{0} =_\beta L$.

Сада показујемо да: $DLM\ulcorner n\urcorner =_\beta M$, за $n \geq 1$.

За свако n важиће да $DLM\ulcorner n\urcorner =_\beta \ulcorner n\urcorner(KM)L$, јер имамо:

$(\lambda xyz.z(Ky)x)LM\ulcorner n\urcorner \to_\beta (\lambda yz.z(Ky)L)M\ulcorner n\urcorner \to_\beta (\lambda z.z(KM)L)n \to_\beta \ulcorner n\urcorner(KM)L.$

Пошто је $n \geq 1$ следи да је n облика $l+1$ за неки број l , следи, према дефиницији ***4.4.2.***, да важи:

$$\ulcorner n\urcorner(KM)L \equiv \ulcorner l+1\urcorner(KM)L \equiv (\lambda xy.x^{l+1}y)(KM)L \equiv (\lambda xy.x(x^l y))(KM)L.$$

Такође, имамо да:

$$(\lambda xy.x(x^l y))(KM)L \to_\beta (\lambda y.KM((KM)^l y))L \to_\beta KM((KM)^l L),$$

па према томе,

$$(\lambda xy.x(x^l(y)))(KM)L =_\beta KM((KM)^l L).$$

Знамо да $KM((KM)^l L) =_\beta M$, на основу тога како смо дефинисали комбинатор K. Према томе, следи да:

$$\ulcorner l+1\urcorner(KM)L \equiv (\lambda xy.x(x^l(y)))(KM)L =_\beta M.$$

Пошто смо већ показали да $DLM\ulcorner l+1\urcorner =_\beta \ulcorner l+1\urcorner(KM)L$,

следи да $DLM\ulcorner n\urcorner =_\beta M$, за $n \geq 1$.

■

На сличан начин на који смо показали да је дефиниција комбинатора D одговарајућа, можемо показати, мада ми то овде нећемо чинити, да то важи и за комбинатор V. Другим речима, можемо доказати како за терм $V \coloneqq \lambda x.x(\lambda z.D(N(z\,\mathbf{0}))(z\,\mathbf{0}))(D\mathbf{00})\mathbf{1}$ важе наредне једнакости:

$V\ulcorner 0\urcorner = \ulcorner 0\urcorner$.

$V\ulcorner n+1\urcorner = \ulcorner n\urcorner$,

што нам гарантује да V λ-дефинише функцију претходника.

Користећи се комбинаторима N, D и V можемо дати наредну неформалну рекурзивну дефиницију комбинатора рекурзије: $\boldsymbol{R}xyz =_\beta Dx(y(Vz)(\boldsymbol{R}xy(Vz)))z$, видети [Hindley & Seldin, 2008, remark 4.15.].

Следећа теорема нам гарантује да се у присуству комбинатора фиксне тачке (видети деф. ***4.4.1.***), као што су већ поменути Θ или Y, комбинатор рекурзије да лако дефинисати [Hindley & Seldin 2008, corollary 3.3.1.].

Теорема 4.4.15. (Теорема о фиксној тачки) *За сваки ламбда терм N постоји ламбда терм M такав да за $n \geq 0$:*

$$My_1 \dots y_n =_\beta N[M/x].$$

Доказ. Нека је $M := F(\lambda xy_1 \dots y_n.N)$ где је F комбинатор фиксне тачке.

Напомена. Ако је F Тјурингов комбинатор Θ, поврх тога имаћемо да важи још и:

$$My_1 \dots y_n \to_\beta N[M/x].$$

Захваљујући доказу теореме о фиксној тачки, имамо процедуру како да за сваку задату рекурзивну дефиницију изражену језиком ламбда рачуна нађемо ламбда терм који ту рекурзивну дефиницију задовољава. Исту процедуру примењујемо да бисмо нашли наш комбинатор рекурзије кога смо рекурзивно задали као:

$$\boldsymbol{R}xyz =_\beta Dx(y(Vz)(\boldsymbol{R}xy(Vz)))z.$$

На основу доказа теореме о фиксној тачки рекурзивни комбинатор можемо дефинисати као $\boldsymbol{R} \equiv \Theta(\lambda uxyz.Dx(y(Vz)(uxy(Vz)))z)$.

Требало би напоменути да се комбинатор рекурзије може дефинисати и без присуства комбинатора фиксне тачке, користећи се само јако нормализабилним термима, као што је то урађено у [Hindley & Seldin, 2008, p. 53]. Дефиницију комбинатора рекурзије која је тамо изложена дугујемо Бернајсу (*Paul Bernays*).

Помоћу комбинатора R, можемо да представимо рекурзију у ламбда рачуну и формулишемо наредно тврђење.

Тврђење. 4.4.16. Нека су $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ рекурзивне функције које су λ-дефинисане термима F и G, а $h\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ функција дефинисана рекурзијом из f и g ($h = Pr[f,g]$). Онда следећи терм λ-дефинише h:

$$\lambda u x_1 .. x_k . R(F x_1 .. x_k)(\lambda uv. G u v x_1 .. x_k) u.$$

Доказ.

Нека $H \equiv \lambda u x_1 \dots x_k . R(F x_1 \dots x_k)(\lambda uv. G u v x_1 \dots x_k) u$.

Индукцијом по n ћемо доказати да:

$$H \ulcorner 0 \urcorner \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta \ulcorner h(0, m_1, \dots, m_k) \urcorner \text{ и}$$

$$H \ulcorner n+1 \urcorner \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta \ulcorner h(n+1, m_1, \dots, m_k) \urcorner.$$

Случај $n = 0$.

Када $n = 0$, онда $h(0, m_1, \dots, m_k) = f(m_1, \dots, m_k)$, за свако $m_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, k\}$.
Према претпоставци, f λ-дефинише терм F, па према томе
$F \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(m_1, \dots, m_k) \urcorner$ (шта више, $F \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \to_\beta \ulcorner f(m_1, \dots, m_k) \urcorner$).

Треба показати да:

$$(\lambda u x_1 \dots x_k . R(F x_1 \dots x_k)(\lambda uv. G u v x_1 \dots x_k) u)\ 0 \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta F \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner.$$

Јасно је да

$$(\lambda u x_1 .. x_k . R(F x_1 .. x_k)(\lambda uv. G u v x_1 .. x_k) u)\ 0 \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner$$
$$\to_\beta R(F \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner)(\lambda uv. G u v \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner) 0.$$

Према дефиницији R следи да

$$R(F \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner)(\lambda uv. G u v \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner) 0 \to_\beta F \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner.$$

Али, из претпоставке да f λ-дефинише терм F, следи да:

$$F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \to_\beta \ \ulcorner f(m_1, \dots, m_k)\urcorner.$$

Дакле, $(\lambda u x_1 .. x_k . R(F x_1 .. x_k)(\lambda uv. G uv x_1 .. x_k) u)\ 0\ \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \ \to_\beta \ \ulcorner f(m_1, \dots, m_k)\urcorner$.

Пошто, према претпоставци, имамо да $f(m_1, \dots, m_k) = h(0, m_1, \dots, m_k)$, то значи да ће за $H \equiv (\lambda u x_1 \dots x_k . R(F x_1 \dots x_k)(\lambda uv. G uv x_1 \dots x_k) u)$ важити

$$H\ulcorner 0\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner h(0, m_1, \dots, m_k)\urcorner.$$

Случај $n \geq 1$.

Претпоставићемо да: $H\ulcorner n-1\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner h(n-1, m_1, \dots, m_k)\urcorner$ и показаћемо да:

$$H\ulcorner n\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner h(n, m_1, \dots, m_k)\urcorner.$$

Нека је $\alpha \equiv (\lambda uv. G uv \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)$. На основу дефиниције H, следи да:

$$H\ulcorner n\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \longrightarrow_\beta \ R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha\ulcorner n\urcorner,$$

па према томе,

$$H\ulcorner n\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha\ulcorner n\urcorner.$$

На основу дефиниције R и D и претпоставке да $n \geq 1$, можемо закључити:

$$
\begin{aligned}
& R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha\ulcorner n\urcorner \\
&=_\beta \ D(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner) \left(\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\right)\ulcorner n\urcorner. \\
&=_\beta \ \Big((\lambda uv. G uv \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\Big). \\
&=_\beta \ \Big(\big(G(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\big)\Big)
\end{aligned}
$$

На основу дефиниције H, следи да

$$H\ulcorner n-1\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \longrightarrow_\beta \ R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha\ulcorner n-1\urcorner,$$

па према томе,

$$H\ulcorner n-1\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha\ulcorner n-1\urcorner.$$

Према индуктивној претпоставци,

$$H\ulcorner n-1\urcorner\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner h(n-1,m_1,\ldots,m_k)\urcorner.$$

Па из тога можемо закључити да:

$$R(F\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner) =_\beta \ulcorner h(n-1,m_1,\ldots,m_k)\urcorner.$$

Пошто $V\ulcorner n\urcorner =_\beta \ulcorner n-1\urcorner$ и $R(F\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner) =_\beta \ulcorner h(n-1,m_1,\ldots,m_k)\urcorner$, следи да:

$$\Big(\big(G(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner\big)\Big) =_\beta$$

$$(G(\ulcorner n-1\urcorner)(\ulcorner h(n-1,m_1,\ldots,m_k)\urcorner)\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner).$$

Према претпоставци, G λ-дефинише функцију g, а то значи да за свако $n, l, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, имамо $G\ulcorner n\urcorner\ulcorner l\urcorner\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner g\ (n,l,m_1,\ldots,m_k\ )\urcorner$. Због тога следи да:

$$(G(\ulcorner n-1\urcorner)(\ulcorner h(n-1,m_1,\ldots,m_k)\urcorner)\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner) =_\beta$$

$$\ulcorner g\ (n-1,h(n-1,m_1,\ldots,m_k),m_1,\ldots,m_k\ )\urcorner.$$

Пошто $h = Pr[f,g]$, следи да:

$$\ulcorner g\ (n-1,h(n-1,m_1,\ldots,m_k),m_1,\ldots,m_k\ )\urcorner = \ulcorner h(n,m_1,\ldots,m_k)\urcorner.$$

Показали смо да:

$$H\ulcorner n\urcorner\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner =_\beta \Big(\big(G(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner\big)\Big), \text{ и}$$

$$\Big(\big(G(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner\big)\Big) =_\beta \ulcorner h(n,m_1,\ldots,m_k)\urcorner.$$

Знајући да је једнакост у ламбда рачуну транзитивна, можемо закључити да

$$H\ulcorner n\urcorner\ulcorner m_1\urcorner\ldots\ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner h(n,m_1,\ldots,m_k)\urcorner.$$

Дакле, терм $H \equiv \lambda ux_1..x_k.R(Fx_1..x_k)(\lambda uv.Guvx_1..x_k)u\ \lambda$ −дефинише h.

■

Показали смо како у ламбда рачуну можемо λ-дефинасати основне рекурзивне фунцкије. Показали смо такође како можемо да λ-дефинишемо примитивно рекурзивне фунцкије изграђене композицијом и рекурзијом. Тиме смо показали да важи наредна теорема:

Теорема. 4.4.6. Све примитивно рекурзивне функције су λ-дефинабилне.

Доказ. На основу тврђења ***4.4.12, 4.4.13.***, и ***4.4.16.***.

■

4.4.1. λ-дефинабилност парцијалних функција

У наставку, показаћемо како се појам λ-дефинабилности (видети деф. ***4.4.2.***) може проширити на парцијалне функције. Парцијална функција $f: A \rightharpoonup B$ је пресликавање које сваком елементу из $A' \subseteq A$ придружује тачно један елемент скупа B. Дакле, за разлику од тоталне функције $g: A \to B$, парцијална функција $f: A \rightharpoonup B$ може бити *недефинисана* за аргумент a, када $a \in A \setminus A'$.

Главни проблем за проширење појма λ-дефинабилности на парцијалне функције је како представити вредност *недефинисано*. Предлог који је изнео Черч у [Church, 1941, p. 29], био је да се *недефинисана* вредност у ламбда рачуну представи термом који *нема нормалну форму*. Према тој идеји, појам λ-дефинабилности парцијалних функција одређује се на следећи начин [Hindley & Seldin, 2008, def. 4.5.]:

Деф. 4.4.1.1. Парцијална функција $\varphi: \mathbb{N}^p \to \mathbb{N}$ је λ-дефинабилна ако постоји затворен ламбда терм F такав да за све $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$,

$F\ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner =_\beta \ulcorner \varphi(n_1, \dots, n_p) \urcorner$, ако је φ дефинисано за аргумент $(n_1, \dots, n_p)$,

$F\ulcorner n_1 \urcorner \dots \ulcorner n_p \urcorner$ *нема нормалну форму*, иначе.

Приметимо да је на скупу тоталних рекурзивних функција ова дефиниција λ-дефинабилности еквивалентна старој. Тотална рекурзивна функција је λ-дефинабилна према новој дефиницији ако и само ако је λ-дефинабилна према старој.

Користећи се дефиницијом ***4.4.1.1***., Клини је доказао следећу теорему у [Kleene, 1936]:

Теорема 4.4.1.2. Парцијална функција на скупу природних бројева је λ-дефинабилна ако и само ако је рекурзивна.

Већ смо нешто рекли о значају овог резултата. Сада ћемо покушати да разјаснимо разлоге на којима почива идеја да се недефинисана вредност функције у ламбда рачуну интерпретира термом без нормалне форме.

У математици, *смисленост* примене функције f на неки аргумент a обично се одређује у односу на то да ли је вредност функције f *дефинисана* за аргумент a, односно да ли a припада или не припада домену функције f. То је последица екстензионалног схватања функција. Са друге стране, рекли смо да се смислена примена функције на аргумент за Черча не одређује у односу на унапред задате домен и кодомен на којима је функција *дефинисана*, већ се домен и кодомен одређују у односу на то на које објекте се функција *смислено* примењује [Church, 1941, introduction]. Као што смо већ објаснили, таква позиција проистиче из схватања функција као правила. Следећи је можемо рећи да је израчунљива функција f дефинисана за неки аргумент a ако је смислено применити одређено *правило* израчунавања f на a.

Дефиниција ***4.4.1.1.*** представља један начин да одредимо шта значи смислена примена функције на аргумент. Према том одређењу, примена функције представљене ламбда термом M на аргумент представљен ламбда термом N је смислена ако је MN нормализабилан терм. То одређење проистиче из Черчовог становишта да се значење ламбда терма састоји у његовој нормалној форми. Ако се значење терма састоји у његовој нормалној форми, терми који немају нормалну форму могу се сматрати бесмисленим [Church, 1941, p. 14-15].

Један од аргумената у прилог томе да недефинисану вредност функције на природним бројевима у ламбда рачуну можемо представити термом који нема нормалну форму заснива се на чињеници да су сви нумерали у нормалној форми. Нека је $f: \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ парцијална функција таква да је вредност $f(n)$ за неко n представљена термом који се не може свести на нормалну форму. Пошто су сви терми који представљају природне бројеве у нормалној форми, следи да $f(n)$ не може бити природни број. Према томе, можемо закључити да је $f(n)$ недефинисано.

Други аргумент који говори у прилог дефиницији ***4.4.1.1.*** заснива се на чињеници да је нормализација терма који се не може довести у нормалну форму бесконачан процес. Као што смо већ рекли, ламбда терме не схватамо као функције у екстензионалном смислу, већ као *правила* на основу којих се израчунавање одвија. Дакле, представити недефинисану вредност функције унутар ламбда рачуна, не значи само представити саму ту вредност као објекат, већ пре свега представити израчунавање које не успева да произведе решење. Такво израчунавање се међутим никада не завршава, ако под крајем израчунавања подразумевамо достизање решења. У том смислу се може рећи да такво израчунавање наликује бесконачној нормализацији ламбда терма која никада не достиже нормалну форму.

Међутим, како је то приметио Барендрегт у [Barendregt, 1984, p. 40], дефиниција ***4.4.1.1.*** има значајне недостатке од којих ћемо навести неке. Први недостатак тиче се превода између комбинаторне логике и ламбда рачуна, јер скуп терама који имају нормалну форму не чува се овим преводима. То представља проблем зато што из претпоставке да је нека функција λ-дефинабилна, не можемо да закључимо да је представљива термом у комбинаторној логици, и обрнуто.

Други недостатак дефиниције ***4.4.1.1.*** последица је тога што она, као што смо већ рекли, почива на претпоставци да се значење неког ламбда терма састоји у његовој нормалној форми и да се терми без нормалне форме могу сматрати *бесмисленим*. Прихватање позиције да се у ламбда рачуну *смислено* изједначава са *нормализабилним* суочава се међутим са следећом потешкоћом. Према Барендрегтовом мишљењу, интуитивно је очекивати да бисмо бесмислене терме у принципу могли изједначити. Ако ниједан од два терма не носи семантички садржај, онда немамо на основу чега семантички да их разликујемо. Међутим, како он показује у [Barendregt, 1984, p. 39, proposition 2.2.4.], терми који нису нормализабилни не могу се увек конзистентно изједначити. То сугерише да нису сви терми без нормалне форме лишени семантичког садржаја.

Као пример смислених терама који немају нормалну форму можемо узети комбинаторе фиксне тачке. Када би ти комбинатори изражававали бесмислена правила, не би било могуће објаснити значај који они имају за представљање операција рекурзије и минимизације унутар ламбда рачуна. О томе ћемо бити у прилици да више кажемо касније.

Ови аргументи сугеришу да смислено у ламбда рачуну не значи увек и нормализабилно и указују на то да дефиниција ***4.4.1.1.*** не одређује на сасвим задовољавајући начин појам бесмислене односно *недефинисане* примене функције на аргумент. Треба, међутим, имати у виду да се Клинијев резултат (видети теорему ***4.4.1.2.***) који се ослања на дефиницију ***4.4.1.1.*** односи на формулацију ламбда рачуна из [Church, 1936]. Та формулација се у литератури назива λI *рачун* и разликује се од оне коју смо ми овде приказали. [73] Наиме, у синтакси λI рачуна постоје одређена ограничења при грађењу ламбда терама. Она се односе на терме који се граде ламбда апстракцијом. Према дефиницији ***4.3.1.1.***, ако је M ламбда терм, онда је то и $(\lambda x. M)$. Са друге стране, $\lambda x. M$ је терм у λI рачуну, само ако се променљива x *јавља* слободно у M. Последица тог синтаксног ограничења је да у λI рачуну терми као што је $K \equiv \lambda xy. x \equiv \lambda x. \lambda y. x$ нису дозвољени. Пошто се променљива y не јавља као слободна променљива у x, $\lambda y. x$ не може бити терм λI рачуна, као ни $\lambda x. \lambda y. x$. Због тога што се формулација ламбда рачуна којом се ми овде бавимо допушта терме као што је K, она се још у литератури назива и λK рачун.

Захваљујући синтаксним ограничењима у односу на λK рачун, у λI се произвољни терми без нормалне форме могу конзистентно изједначити [Church 1936]. То, како увиђа Барендрегт, чини дефиницију ***4.4.1.1.*** прилагођену λI рачуну, али не и λK рачуну којим се овде бавимо.

Како се наводи у [Curry & Feys, 1958, ch 3, p.106], један од разлога због којих је Черч преферирао λI верзију рачуна у односу на λK тиче се јако нормализабилних терама. Наиме, у [Church, 1936] Черч је показао како је терм у λI рачуну нормализабилан ако и само ако је јако нормализабилан. Видели смо да у λK рачуну то није случај. Постоје нормализабилни терми који садрже ненормализабилне подтерме. Примера ради, узмимо терм $KI\Omega$. Док Ω сам није нормализабилан, $KI\Omega$ се своди на I, што показује наредна редукција:

$$KI\Omega \equiv \big((\lambda x. \lambda y. x)\lambda z. z\big)\Omega \to_\beta (\lambda y. \lambda z. z)\Omega \to_\beta \lambda z. z \equiv I.$$

Разумљиво је због чега би за Черча било важно да је сваки нормализабилан терм уједно и јако нормализабилан. Ако нормализабилни терми имају ненормализабилне

[73] Више о овој формулацији ламбда рачуна може се наћи у [Barendregt, 1984, ch. 9].

подтерме, то би значило да се смислен терм може изградити из бесмислених делова, што је према Черчовом мишљењу проблематично. То је проблематично, међутим, само ако претпоставимо да сваки подтерм доприноси значењу целине, или да значење целине зависи од значења сваког од њених делова. У λK рачуну то не претпостављамо. Док се у λI рачуну сваки део значења узима као да доприноси значењу целине, у λK неки делови израза могу бити *ирелевантни*. На пример, можемо рећи да је значење Ω ирелевантно за значење $KI\Omega$. Оно је ирелевантно не само у том смислу што се терм $KI\Omega$ своди на $(\lambda x.I)\Omega$, односно на нормалну форму I у којој се Ω не јавља, већ због тога што се за *произвољан* терм M, KIM своди на $(\lambda x.I)M$ и, према томе на I. То нам говори да је значење терма $KI\Omega$ и уопште терма KIM, *независно* од семантичког садржаја Ω односно M. Захваљујући томе у λK рачуну неки терми могу имати бесмислене делове све док је значење тих делова ирелеватно за значење целог терма.

Навели смо неке од потешкоћа са којима се суочава дефиниција ***4.4.1.1.***. Како Барендрегт сматра, те потешкоће се заобилазе уколико појам *недефинисане* вредности функције не одредимо позивајући се на појам ненормализабилног терма, већ користећи се појмом *несводивог* (енг. *unsolvable*) терма. Тај појам ћемо сада дефинисати.

Деф. 4.4.1.3. Рећи ћемо да је ламбда терм у *чеоној нормалној форми* (енг. *head normal form*) када је облика: $\lambda x_1 \dots x_n . x M_1 \dots M_m,$ за $n, m \geq 0$ [Barendregt, 1984, p. 41].

Кажемо да је M *сводив* (*solvable*) терм ако постоји N такав да $M \to_\beta N,$ и N је у чеоној нормалној форми. Такође, у том случају кажемо да је N *чеона нормална форма* од M. Кажемо да је M *несводив* (*unsolvable*) ако није сводив (упоредити са [Barendregt, 1984, p. 41]). [74]

Није тешко показати да је сваки терм M или облика (1) или облика (2) [Barendregt, 1984, corollary 8.3.6.]:

(1) $\lambda x_1 \dots x_n . x M_1 \dots M_m,$ за $n, m \geq 0,$

(2) $\lambda x_1 \dots x_n . (\lambda x. M_0) M_1 \dots M_m,$ за $n \geq 0, m \geq 1.$

Што значи да ће сви несводиви терми бити облика (2).

[74] У λI рачуну терм је несводив ако и само ако нема нормалну форму, видети [Barendregt, 1984, proposition 2.2.12.].

Јасно је да је свака нормална форма уједно и чеона нормална форма и да су, према томе, сви нормализабилни терми сводиви. Међутим, обрнуто не важи. Класа нормализабилних терама прави је подскуп класе сводивих терама. Примери терама који су сводиви али не и нормализабилни укључују комбинаторе фиксне тачке о којима смо већ говорили, као што је терм $Y \equiv \lambda y.(\lambda x.y(xx))\ \lambda x.y(xx)$. Терм Y нема нормалну форму, али се своди на чеону нормалну форму: $\lambda y.y((\lambda x.y(xx))\ \lambda x.y(xx))$.

Док је нормална форма терма јединствена (до на алфа конверзију), што показују королари Черч-Росерове теореме, терм може имати више синтаксно различитих чеоних нормалних форми, па чак и бесконачно много. Међутим, такође захваљујући Черч-Росеровој теореми за бета редукцију, знамо да све чеоне нормалне форме једног терма морају бити доказиво једнаке у ламбда рачуну.

Терм Y представља пример ламбда терма који поседује бесконачно много чеоних нормалних форми што показује следећи низ бета редукција:

$$\lambda y.\big(\lambda x.y(xx)\big)\lambda x.y(xx) \to_\beta$$
$$\lambda y.y\Big(\big(\lambda x.y(xx)\big)\lambda x.y(xx)\Big) \to_\beta$$
$$\lambda y.y(y((\lambda x.y(xx))\ \lambda x.y(xx))) \to_\beta \ldots$$

Први члан овог бесконачног низа представља сам терм Y и он очигледно није у чеоној нормалној форми. Као што се да приметити, $\lambda y.y\Big(\big(\lambda x.y(xx)\big)\lambda x.y(xx)\Big)$ и $\lambda y.y(y((\lambda x.y(xx))\ \lambda x.y(xx)))$ су у чеоној нормалној форми и оба терма представљају предње нормалне форме од Y које нису алфа конгруентне, већ само бета-једнаке. Знамо да ће сваки терм у овом низу који следи након $y(y((\lambda x.y(xx))\ \lambda x.y(xx)))$ такође бити у чеоној нормалној форми захваљујући наредном тврђењу.

Тврђење 4.4.1.4. Ако је терм M у предњој нормалној форми, и $M \to_\beta N$, следи да је и N у предњој нормалној форми.

Доказ. Видети дефиницију ***4.4.1.3.***.

Дакле, Y није нормализабилан терм, не може се свести на нормалну форму. Са друге стране, он је ипак сводив, јер се може свести на чеону нормалну форму. Пример терма који није ни нормализабилан ни сводив би био Ω. Још неки несводиви терми осим Ω су $\lambda x.\Omega$, Ω_3, $(\lambda y.xxy)(\lambda y.xxy)$, и многи други о којима ћемо говорити касније.

За све несводиве терме важи следеће тврђење.

Тврђење 4.4.1.5. Ако је терм T несводив, несводив је и терм TU.

Доказ. Видети [Barendregt, 1984, corollary 8.3.4.].

То тврђење нам говори да несводиви терми представљају чудну врсту функција. То су функције које примењене на било који аргумент дају нешто што наликује њима самима. Још једна важна особина несводивих терама је да се сви могу конзистентно изједначити [Barendregt, 1984, section 6.1.]. Оба поменута својства сугеришу да постоји блиска веза између појма *несводивог* и појма *бесмисленог* или *недефинисаног* у ламбда рачуну. Несводиви терми могу се у неку руку посматрати као терми без семантичког садржаја. У складу са тиме, можемо да се послужимо појмом несводивог терма да редефинишемо појам λ-дефинабилности који укључује и парцијалне функције на следећи начин [Barendregt, 1984, p. 178, def. 8.4.]:

Деф. 4.4.1.6. Парцијална функција $\varphi: \mathbb{N}^p \rightarrow \mathbb{N}$ је λ-дефинабилна ако постоји затворен ламбда терм F такав да за све $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$,

$F\ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_p \urcorner =_\beta \ulcorner \varphi(n_1, \ldots, n_p) \urcorner$, ако је φ дефинисано за аргумент $(n_1, \ldots, n_p)$,

Терм $F\ulcorner n_1 \urcorner \ldots \ulcorner n_p \urcorner$ је *несводив*, иначе.

Ако постоји такав терм F, кажемо да F λ-дефинише функцију φ.

На скупу тоталних функција, дефиниција ***4.4.1.6.*** еквивалентна је дефиницији ***4.4.2.,*** као и дефиницији ***4.4.1.1.***. На основу те еквиваленције и теореме ***4.4.6.*** непосредно следи:

Теорема 4.4.1.7. Све примитивно рекурзивне функције су λ-дефинабилне (према новој дефиницији).

За разлику од дефиниције ***4.4.1.1.*** у којој се недефинисана вредност функције представља термом који нема нормалну форму, у дефиницији ***4.4.1.6.*** недефинисана вредност функције представља се термом који је несводив, односно који нема како нормалну форму тако ни чеону нормалну форму. Ослањајући се на ову дефиницију, можемо доказати да је парцијална функција λ-дефинабилна ако и само ако је рекурзивна. Доказ смера са лева на десно ове еквиваленције изводимо индукцијом по дефиницији парцијалних рекурзивних функција коју ћемо ради прегледности изнети у наставку.

Деф. 4.4.1.7. (Дефиниција парцијалних рекурзивних функција)

Кажемо да је (парцијална) функција h на природним бројевима рекурзивна ако важи:

1. да је h једна од основних функција, или

2. да је $h: \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ облика $Cn[f, g_1, \dots, g_k]$, где су $f, g_1, \dots, g_k$ рекурзивне функције одговарајуће арности, или

3. да је $h: \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ облика $Pr[f, g]$, где су f, g рекурзивне функције одговарајуће арности, или

4. да је $f: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ (парцијална) рекурзивна функција са $k + 1$ аргумената, и $h: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ је облика $Mn[\,f\,]\,(m_1, \dots, m_k)$, тако да важи:

$Mn[\,f\,]\ (m_1, \dots, m_k) =$ y, ако је $f\,(m_1, \dots, m_k, y) = 0$, и ако за све $z < y$, $f\,(m_1, \dots, m_k, z)$ је дефинисано и $\neq 0$,

Недефинисано, иначе.

Када смо дефинисали парцијалне рекурзивне функције у наставку можемо доказати следећу теорему о њима.

Теорема 4.4.1.8. Све (парцијалне) рекурзивне функције су ламбда-дефинабилне (према дефиницији ***4.4.1.5***).

Као што смо рекли, ову теорему доказаћемо индукцијом по сложености дефиниције парцијалних рекурзивних функција. Да су основне функције ламбда-дефинабилне већ смо доказали (видети доказ теореме *4.4.6.*). Само ћемо показати да то важи и за функције изграђене композицијом, рекурзијом и минимизацијом. Доказ ћемо извести служећи се следећим трима лемема. Прва од њих гласи:

Лема 4.4.1.9. (Парцијална) функција $h\colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ облика $Cn[f, g_1, \dots, g_k]$ где су $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ и $g_1, \dots, g_k\colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ (парцијалне) рекурзивне функције је ламбда-дефинабилна под претпоставком да су ламбда-дефинабилне $f, g_1, \dots, g_k$.

Доказ. Теоремом ***4.4.6.*** показали смо да су све примитивно рекурзивне функције ламбда-дефинабилне. На основу доказа те теореме, можемо закључити да терм

$$\lambda x_1 \dots x_n . F(\dots(G_1 x_1) \dots x_n) \dots (\dots(G_k x_1) \dots x_n)$$

ламбда дефинише функцију $h\colon \mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$ облика $Cn[f, g_1, \dots, g_k]$, када су $f, g_1, \dots, g_k$ тоталне функције ламбда дефинисане одговарајућим термима F, $G_1 \dots G_k$. Из тога следи да: $\ulcorner h(m_1, \dots, m_l) \urcorner =_\beta (\lambda x_1 \dots x_l . F(\dots(G_1 x_1) \dots x_l) \dots (\dots(G_k x_1) \dots x_l)) \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_l \urcorner$, када је $h(m_1, \dots, m_l)$ дефинисано.

Међутим, сада говоримо не само о тоталним, већ и о парцијалним рекурзивним функцијама. Дакле, требало би показати да ће

$$(\lambda x_1 \dots x_n . F(\dots(G_1 x_1) \dots x_l) \dots (\dots(G_k x_1) \dots x_l)) \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_l \urcorner$$

бити несводиво, ако је $f(g_1(m_1, \dots, m_l), \dots, g_k(m_1, \dots, m_l))$ недефинисано. Али, та импликација проблематична је из следећег разлога. Нека је $k = l = 1$, па наша композиција задобија облик $f(g(m))$. Нека је $g(m)$ недефинисано за неко m. Претпоставимо да G ламбда дефинише g, а F ламбда дефинише f. Следи да ће $G\ulcorner m \urcorner$ бити несводиво. Проблем је у томе што $(\lambda x . F(G x))\ulcorner m \urcorner$ не мора бити несводиво када је то и $G\ulcorner m \urcorner$. Нека је $G \equiv K\Omega$, а $F \equiv \lambda y . \ulcorner 0 \urcorner$ [Barendregt, 1984, example 2.2.9.]. Једноставно је видети да ће наредне једнакости да важе:

$$(\lambda x . F(G x))\ulcorner m \urcorner \equiv \Big(\lambda x . (\lambda y . \ulcorner 0 \urcorner)\big((K\Omega)x\big)\Big)\ulcorner m \urcorner =_\beta (\lambda x . \ulcorner 0 \urcorner)\ulcorner m \urcorner =_\beta \ulcorner 0 \urcorner.$$

Као што видимо, $\ulcorner 0 \urcorner$ није несводив терм већ је терм у нормалној форми, тачније нумерал. Приметимо да исти проблем остаје када је $G\ulcorner m \urcorner$ било који несводиви терм.

Да бисмо тај проблем решили, уместо

$$\lambda x_1 \dots x_l . F(\dots(G_1 x_1) \dots x_l) \dots (\dots(G_k x_1) \dots x_l))$$

функцију облика $Cn[f, g_1, \dots, g_k]$ можемо представити следећим термом:

$$\lambda x_1 \dots x_l . ((G_1 x_1 \dots x_l)KII) \dots ((G_k x_1 \dots x_l)KII)\ (F(G_1 x_1 \dots x_l) \dots (G_k x_1 \dots x_l)).$$

Да овај терм заиста ламбда дефинише композицију функција знамо на основу тога што $(G_1 x_1 \dots x_l)KII =_\beta I$, кад год $G_1 x_1 \dots x_l$ представља нумерал неког броја, а $(G_1 x_1 \dots x_l)KII$ је несводиво када је то и $G_1 x_1 \dots x_l$, [Barendregt, 1984, lemma 8.4.5.].

Нова дефиниција композиције, истини за вољу, није елегантна као претходна, али решава поменути проблем. Идеја која стоји иза оваквог начина представљања композиције у ламбда рачуну је да пре израчунавања вредности $Cn[f, g_1, \dots, g_k]$ $(m_1, \dots, m_l)$ морамо прво да проверимо да ли су све $g_1, \dots, g_k$ дефинисане за аргументе $(m_1, \dots, m_l)$.

Приметимо да када су $f, g_1, \dots, g_k$ тоталне, важиће
$\lambda x_1 \dots x_l. ((G_1 x_1) \dots x_l)KII) \dots (\dots (G_k x_1) \dots x_l)KII)\ (F(G_1 x_1) \dots x_l) \dots (G_k x_1) \dots\ x_l)) =_\beta$
$\lambda x_1 \dots x_l. \quad (F(G_1 x_1) \dots x_l) \dots (\dots (G_k x_1) \dots\ x_l).$

■

Друга лема којом ћемо се служити да покажемо да су све парцијалне рекурзивне функције ламбда дефинабилне је лема ***4.4.1.10.*** Она гласи:

Лема 4.4.1.10. Терм $\lambda u x_1 \dots x_k. R(F x_1 \dots x_k)(\lambda uv. v(KII)Guv x_1 \dots x_k)u$ ламбда-дефинише функцију h: $\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ облика $Pr[f, g](n, m_1, \dots, m_k)$, где су f и g рекурзивне функције одговарајуће арности.

Доказ. Ову лему ћемо доказати индукцијом по аргументу n. Нека

$$H \equiv (\lambda u x_1 \dots x_k. R(F x_1 \dots x_k)(\lambda uv. v(KII)Guv x_1 \dots x_k)u).$$

Доказаћемо да:

$$H \ulcorner l \urcorner \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta \ulcorner Pr[f, g]\ (n, m_1, \dots, m_k) \urcorner,$$

ако је $Pr[f, g]\ (l, m_1, \dots, m_k)$ дефинисано, а да је иначе

$$H \ulcorner l \urcorner \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \text{ несводиво.}$$

Нека је $\alpha \equiv (\lambda uv. v(KII)Guv \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner)$. Нека су f и g тоталне функције. Онда ће то бити и h. У доказу се служимо индукцијом по n.

Случај $n = 0$.

Када је $n = 0$, онда $h(0, m_1, \dots, m_k) = f(m_1, \dots, m_k)$, за свако $m_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Према претпоставци, f λ-дефинише терм F, па према томе

$$F \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta \ulcorner f(m_1, \dots, m_k) \urcorner$$

(шта више, имамо да $F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \to_\beta \ulcorner f(m_1,\dots,m_k)\urcorner$).

Да важи $H\ulcorner 0\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner h(0,m_1,\dots,m_k)\urcorner$ можемо показати као у доказу тврђења ***4.4.13.***.

Случај $n > 0$.

На основу дефиниција комбинатора R и D можемо извести следећи низ редукција:

$$(\lambda u x_1..x_k.R(Fx_1..x_k)(\lambda uv.v(KII)Guvx_1..x_k)u)\ulcorner n\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner$$
$$\to_\beta R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)(\lambda uv.v(KII)Guv\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\ulcorner n\urcorner.$$
$$\to_\beta D(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\left(\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\right)\ulcorner n\urcorner.$$
$$\to_\beta (\lambda uv.v(KII)Guv\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big).$$
$$\to_\beta \big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)KII\left(G(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\right).$$

На основу дефиниције H, следи да

$$H\ulcorner n-1\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \longrightarrow_\beta R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha\ulcorner n-1\urcorner,$$

па према томе,

$$H\ulcorner n-1\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha\ulcorner n-1\urcorner.$$

Према индуктивној претпоставци,

$$H\ulcorner n-1\urcorner \ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner h(n-1,m_1,\dots,m_k)\urcorner.$$

Па из тога што смо претходно утврдили можемо закључити да:

$$R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner) =_\beta \ulcorner h(n-1,m_1,\dots,m_k)\urcorner.$$

Пошто је терм $R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)$ једнак неком нумералу, следи да

$$\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)KII =_\beta I,$$

а према томе,

$$\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)KII\left(G(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\right)$$
$$\to_\beta G(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner.$$

Пошто $V\ulcorner n\urcorner =_\beta \ulcorner n-1\urcorner$ и $R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner) =_\beta \ulcorner h(n-1,m_1,\dots,m_k)\urcorner$, следи да:

$$\Big(\big(G(V\ulcorner n\urcorner)\big(R(F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner)\alpha(V\ulcorner n\urcorner)\big)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\big)\Big) =_\beta$$
$$(G(\ulcorner n-1\urcorner)(\ulcorner h(n-1, m_1, \dots, m_k)\urcorner)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner).$$

Према претпоставци, G λ-дефинише функцију g, а то значи да за свако $n, l, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, имамо $G\ulcorner n\urcorner\ulcorner l\urcorner\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner g\ (n, l, m_1, \dots, m_k\ )\urcorner$. Због тога следи да:

$$(G(\ulcorner n-1\urcorner)(\ulcorner h(n-1, m_1, \dots, m_k)\urcorner)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner) =_\beta$$
$$\ulcorner g\ (n-1, h(n-1, m_1, \dots, m_k), m_1, \dots, m_k\ )\urcorner.$$

Пошто $h = Pr[f, g]$, следи да:

$$\ulcorner g\ (n-1, h(n-1, m_1, \dots, m_k), m_1, \dots, m_k\ )\urcorner = \ulcorner h(n, m_1, \dots, m_k)\urcorner,$$

И тиме смо показали да

$$H\ulcorner n\urcorner\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta \ulcorner h(n, m_1, \dots, m_k)\urcorner.$$

Размотримо сада случај где је $\ulcorner h(n, m_1, \dots, m_k)$ недефинисано за неко $(n, m_1, \dots, m_k)$. Показаћемо да ће $H\ulcorner n\urcorner\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner$ у том случају бити несводиво.

Претпоставимо да је $\ulcorner h(n, m_1, \dots, m_k)$ недефинисано за неко $(n, m_1, \dots, m_k)$. Разликоваћемо два случаја, када $n = 0$ и када $n > 0$.

Случај $n = 0$

Када $n = 0$, онда $h(n, m_1, \dots, m_k) = f(m_1, \dots, m_k)$, па је $f(m_1, \dots, m_k)$ недефинисано. Из тога следи да је $F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner$ несводииво јер према претпоставци, функцију f λ-дефинише терм F. Према томе, $H\ulcorner 0\urcorner\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner$ ће бити несводиво јер

$H\ulcorner 0\urcorner\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta F\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner$.

Случај $n > 0$

Када $n > 0$, онда

$H\ulcorner n\urcorner\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner =_\beta$

$$\big(R(F^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})\alpha(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})\big)KII\ \big(G(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})\big(R(F^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})\alpha(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})\big)^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}\big).$$

Пошто $H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner} =_\beta R(F^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})\alpha^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}$, следи да:

$$\big(R(F^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})\alpha(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})\big)KII\ \big(G(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})\big(R(F^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})\alpha(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})\big)^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}\big) =_\beta$$
$$(H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})KII\ (G(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})(H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}).$$

Према индуктивној претпоставци,

$$H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner} =_\beta {}^{\ulcorner}h(n-1,m_1,\dots,m_k)^{\urcorner},$$

ако је $h(n-1,m_1,\dots,m_k)$ дефинисано, иначе, $H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}$ несводиво.

Претпоставимо да је $h(n-1,m_1,\dots,m_k)$ дефинисано.

Следи да је
$h(n,m_1,\dots,m_k) = g\ (n-1,h(n-1,m_1,\dots,m_k),m_1,\dots,m_k)$ недефинисано и да:

$$(H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})KII\ (G(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})(H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}) =_\beta$$
$$G(^{\ulcorner}n-1^{\urcorner})(^{\ulcorner}h(n-1,m_1,\dots,m_k)^{\urcorner})^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}.$$

Према претпоставци, G дефинише функцију g. Из тога можемо да закључимо да ће $G(^{\ulcorner}n-1^{\urcorner})(^{\ulcorner}h(n-1,m_1,\dots,m_k)^{\urcorner})^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}$ бити несводиво, а према томе и $H^{\ulcorner}n^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}$.

Претпоставимо да је $h(n-1,m_1,\dots,m_k)$ недефинисано.

Из тога следи, према индуктивној хипотези да је $H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}$ несводиво.
Према [Barendregt, 1984, lemma 8.4.5.], терм $(H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})KII$ је такође несводив, а према томе и терм

$$(H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})KII\ (G(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})(H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}).$$

Пошто је

$$(H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})KII\ (G(V^{\ulcorner}n^{\urcorner})(H^{\ulcorner}n-1^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}) =_\beta$$
$$(H^{\ulcorner}n^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner}),$$

Следи да је $(H^{\ulcorner}n^{\urcorner}\,{}^{\ulcorner}m_1{}^{\urcorner}\dots{}^{\ulcorner}m_k{}^{\urcorner})$ несводиво.

■

Да бисмо показали да су све рекурзивне функције ламбда дефинабилне, поред лема ***4.4.1.9.*** и ***4.4.1.10.*** треба показати и да ће функција облика $Mn[\, f\,]\,(m_1, \dots, m_k)$ бити ламбда дефинабилна према новој дефиницији, под претпоставком да то важи за f. То ћемо показати тако што ћемо опонашати операцију минимизације у ламбда рачуну. Наиме, конструисаћемо терм F такав да важи:

Ако $f(\boldsymbol{m}, y) = 0$, *онда* $F\ulcorner\boldsymbol{m}\urcorner\ulcorner y\urcorner =_\beta \ulcorner y\urcorner$, *иначе* $F\ulcorner\boldsymbol{m}\urcorner\ulcorner y\urcorner =_\beta F\ulcorner\boldsymbol{m}\urcorner\ulcorner y + 1\urcorner$,
(где $\boldsymbol{m}$ стоји за низ природних бројева: $m_1, \dots, m_k$, а $\ulcorner\boldsymbol{m}\urcorner$ стоји за низ нумерала $\ulcorner m_1\urcorner\ulcorner m_2\urcorner, \dots, \ulcorner m_k\urcorner$).

Под претпоставком да функцију f λ-дефинише терм P, и да комбинатори D, V, N имају значење као и раније, рекурзивна дефиниција која интуитивно дефинише F изгледа овако:

$$Fx_1 \dots x_k y =_\beta Dy(Fx_1 \dots x_k(Ny))(Px_1 \dots x_k y).$$

Да бисмо на основу те једнакости одредили терм F опет се користимо истом процедуром као и пре када смо дефинисали комбинатор рекурзије. На основу те процедуре, којом смо се служили када смо дали доказ теореме о фиксној тачки, дефинишемо F као:

$$F \equiv \Theta(\lambda u x_1 \dots x_k y. Dy(ux_1 \dots x_k(Ny))(Px_1 \dots x_k y)),$$

Приметимо да $F \longrightarrow_\beta \ \lambda x_1 \dots x_k y. Dy((\Theta W)x_1 \dots x_k(Ny))(Px_1 \dots x_k y)$,

где $W \ \equiv \ \lambda u x_1 \dots x_k y. Dy\big(ux_1 \dots x_k(Ny)\big)(Px_1 \dots x_k y)$.

Сада када смо одредили F, формулишемо наредну лему.

Лема 4.4.1.11. Нека је k природан број а $f\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ рекурзивна функција. Под претпоставком да P λ-дефинише функцију $f(m_1, \dots, m_k, q)$, функцију $Mn[\, f\,]$ $(m_1, \dots, m_k)$ ће λ-дефинисати терм: $\lambda x_1 \dots x_k. \Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0}$, (где је W дефинисано као горе).

Доказ. Претпоставимо да P λ-дефинише функцију f. Треба да докажемо да $(\lambda x_1 \dots x_k. \Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta \ulcorner q \urcorner$, онда када је $Mn[\, f\,]\,(m_1, \dots, m_k) = q$ за неки број q, а да је $(\lambda x_1 \dots x_k. \Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner$ несводиво онда када је $Mn[\, f\,]$ $(m_1, \dots, m_k)$ недефинисано.

Случај 1.

Претпоставимо да $Mn[\, f\,]\,(m_1, \dots, m_k) = q$ за неки број q. Доказаћемо индукцијом по q да онда важи $(\lambda x_1 \dots x_n. \Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta \ulcorner q \urcorner$.

Случај 1.1. $q = 0$.

Доказујемо да важи наредна импликација:

$$Mn[\, f\,]\,(m_1, \dots, m_k) = 0 \implies (\lambda x_1 \dots x_k. \Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta \ulcorner 0 \urcorner.$$

Тривијално следи да:

$$(\lambda x_1 \dots x_k. \Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \to_\beta \Theta W \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \, \mathbf{0}\,.$$

Пошто знамо да је Θ комбинатор фиксне тачке и важи $\Theta W \to_\beta W(\Theta W)$, добијамо:

$$\Theta W \ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \, \mathbf{0} \to_\beta W(\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \, \mathbf{0}.$$

И онда, према дефиницији W следи:

$$W(\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \mathbf{0} \to_\beta D\mathbf{0}((\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner (N\mathbf{0}))(P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \mathbf{0}).$$

Али, пошто по претпоставци, P λ-дефинише функцију f, следи да

$$P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \mathbf{0} =_\beta \mathbf{0} \text{ (шта више, } P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \mathbf{0} \to_\beta \mathbf{0}\text{)}.$$

Дакле, на основу значења комбинатора D, имаћемо:

$$D\mathbf{0}((\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner (N\mathbf{0}))(P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \mathbf{0}) \to_\beta \mathbf{0}.$$

Пошто је бета редукција транзитивна, закључујемо да

$$(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \ \longrightarrow_\beta \ \mathbf{0},$$

и дакле, $(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \ =_\beta \ \mathbf{0}.$

Случај 1.2. $q \geq 1$.

Доказујемо да важи наредна импликација:

$$Mn[\, f\,]\,(m_1, \dots, m_k) \ = q + 1 \implies (\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \ =_\beta \ulcorner q + 1 \urcorner.$$

Претпоставимо као и пре да је f λ-дефинисано термом P. Претпоставимо још и да $Mn[\, f\,]\,(m_1, \dots, m_k) \ = q + 1$. Из те претпоставке следи да $f(m_1, \dots, m_k, q + 1) \ = \ 0$, и за све $z < q + 1$, $f(m_1, \dots, m_k, z)$ је дефинисано и $f(m_1, \dots, m_k, z) \ \neq \ 0$.

Дакле, $f(m_1, \dots, m_k, q) \ \neq \ 0$, и према томе, $P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \ulcorner q \urcorner \ \neq_\beta \ 0$.

Као и пре, имамо да,

$$(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \longrightarrow_\beta$$
$$(D\mathbf{0}((\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner (N\mathbf{0}))(P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \mathbf{0}).$$

Пошто $q \geq 1$, и према претпоставци, све $z < q + 1$, $f(m_1, \dots, m_k, z)$ је дефинисано и $f(m_1, \dots, m_k, z) \ \neq \ 0$, а f је λ-дефинисано термом P, следи да:

$$(D\mathbf{0}((\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner (N\mathbf{0}))(P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \mathbf{0}) \longrightarrow_\beta$$
$$(D\boldsymbol{q}((\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner (N\boldsymbol{q}))(P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \boldsymbol{q}).$$

На основу тога што $P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \ulcorner q \urcorner \ \neq_\beta \ \mathbf{0}$, као што смо раније рекли, следи да

$$(D\boldsymbol{q}((\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner (N\boldsymbol{q}))(P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \boldsymbol{q}) \longrightarrow_\beta \ (\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner (N\boldsymbol{q}).$$

Због дефиниције ΘW, и дефиниције N имамо да:

$$(\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner (N\boldsymbol{q}) \ \longrightarrow_\beta (D\boldsymbol{q} + \mathbf{1}((\Theta W)\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner (N\boldsymbol{q} + \mathbf{1}))(P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \boldsymbol{q} + \mathbf{1}).$$

Пошто, према претпоставци, $f(m_1, \dots, m_k, q + 1) \ = \ 0$, и f је λ-дефинисано термом P, следи да $P\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner \boldsymbol{q} + \mathbf{1} =_\beta \mathbf{0}$. Према томе,

$(D\boldsymbol{q}+\mathbf{1}((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{q}+\mathbf{1}))(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{q}+\mathbf{1}) \twoheadrightarrow_\beta \ \ulcorner q+1\urcorner$, и

$(D\boldsymbol{q}+\mathbf{1}((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{q}+\mathbf{1}))(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{q}+\mathbf{1}) =_\beta \ \ulcorner q+1\urcorner$.

Показали смо да

$(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0})\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \twoheadrightarrow_\beta$

$(D\boldsymbol{q}((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{q}))(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{q}) \twoheadrightarrow_\beta$

$(D\boldsymbol{q}+\mathbf{1}((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{q}+\mathbf{1}))(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{q}+\mathbf{1}) \twoheadrightarrow_\beta$

$\ulcorner q+1\urcorner$.

На основу тога можемо закључити да $(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0})\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \twoheadrightarrow_\beta \ \ulcorner q+1\urcorner$, под претпоставком да $Mn[\,f\,]\,(m_1, \dots, m_k) \ = q+1$. Тиме смо доказали да важи:

$$Mn[\,f\,]\,(m_1, \dots, m_k) \ = q+1 \ \Longrightarrow \ (\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0})\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \ =_\beta \ulcorner q+1\urcorner.$$

До сада смо показали да $(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0})\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \ =_\beta \ulcorner q\urcorner$, ако $Mn[\,f\,]$ $(m_1, \dots, m_k) = q$. Сада ћемо показати да $(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0})\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner$ неће имати чеону нормалну форму, ако је $Mn[\,f\,]\ (m_1, \dots, m_k)$ недефинисано.

Случај 2.

Претпоставимо да је $Mn[\,f\,]\ (m_1, \dots, m_k)$ недефинисано. Према дефиницији ***4.4.11.b***., следи да:

1. постоји број w такав да је $f(m_1, \dots, m_k, w)$ недефинисано и за свако $y < w$, $f(m_1, \dots, m_k, y) \neq 0$.
2. или је $f(m_1, \dots, m_k, y)$ дефинисано за свако y и $f(m_1, \dots, m_k, y) \neq 0$, или

Случај 2.1.

Постоји w такво да је $f(m_1, \dots, m_k, w)$ недефинисано и за свако $y < w$, $f(m_1, \dots, m_k, y) \neq 0$.

На основу дефиниција D и W следи да:

$(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0})\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \rightarrow_\beta \ \Theta W\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\,(N\boldsymbol{w})$,

$\Theta W\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\,(N\boldsymbol{w}) \to_\beta D\boldsymbol{w}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{w})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{w})$, и

$D\boldsymbol{w}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{w})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{w}) \to_\beta$

$(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{w})(K((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{w})))\boldsymbol{w}$.

Према претпоставци, $f(m_1, \dots, m_k, w)$ је недефинисано, а функцију f λ-дефинише терм P. Следи да ће $(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{w})$ бити несводиво. Захваљујући тврђењу ***4.4.1.5.***, закључујемо да ће онда и да $(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{w})(K((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{w})))\boldsymbol{w}$ такође бити несводиво.

Пошто терм $(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{w})(K((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{w})))\boldsymbol{w}$ нема чеону нормалну форму, следи да терм $(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0})\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner$ који се на њега редукује такође неће имати чеону нормалну форму, што смо и хтели да покажемо.

Случај 2.2

Претпоставимо да је $f(m_1, \dots, m_k, y)$ дефинисано за свако y и $f(m_1, \dots, m_k, y) \neq 0$.

Као што смо већ показали,

$(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0})\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner \to_\beta \Theta W\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\,\mathbf{0}$,

$\Theta W\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\,\mathbf{0} \to_\beta W(\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0}$,

$W(\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0} \to_\beta D\mathbf{0}((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{0}))(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0})$.

Сада треба да покажемо да ће $D\mathbf{0}((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{0}))(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0})$ бити несводиво.

Према претпоставци, P λ-дефинише функцију f и за свако y, постоји неко $n > 0$ такво да $f(m_1, \dots, m_k, y) = n$, следи да $(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{y}) =_\beta \boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{n} \neq_\beta \mathbf{0}$ за свако y.

Пошто $(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0}) \neq_\beta \mathbf{0}$, следи да

$D\mathbf{0}((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{0}))(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0}) \to_\beta \Theta W\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\,(N\mathbf{0})$ и

$\Theta W\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\,(N\mathbf{0}) \to_\beta D\mathbf{1}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{1})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{1})$.

Пошто $(P\ulcorner m_1\urcorner \dots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{1}) \neq_\beta \mathbf{0}$, имамо да

$D\mathbf{1}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{1})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{1}) \ \rightarrow_\beta \ \Theta W\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner \, (N\mathbf{1})$ и

$\Theta W\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner \, (N\mathbf{1}) \rightarrow_\beta D\mathbf{2}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{2})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{2})$.

Шта више, с обзиром да P дефинише функцију f, $f(m_1, \ldots, m_k, y)$ је дефинисано за свако y и $f(m_1, \ldots, m_k, y) \neq 0$, следи да ће за свако $y\epsilon\mathbb{N}$, $\Theta W\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner \, (N\boldsymbol{y}) \rightarrow_\beta \ \Theta W\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner \, (N(\boldsymbol{y}+\mathbf{1}))$ и

$D\boldsymbol{y}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{y})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{y}) \rightarrow_\beta$

$D\boldsymbol{y}+\mathbf{1}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\boldsymbol{y}+\mathbf{1})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{y}+\mathbf{1})$.

Дакле, терм $D\mathbf{0}((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{0}))(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0})$ производи бесконачан низ редукција:

Ред. 4.4.1.19.

$D\mathbf{0}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{0})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0}) \ \rightarrow_\beta$

$\Theta W\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner \, (N\mathbf{0}) \rightarrow_\beta$

$D\mathbf{1}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{1})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{1}) \ \rightarrow_\beta$

$\Theta W\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner \, (N\mathbf{1}) \ \rightarrow_\beta$

$D\mathbf{2}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{2})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{2}) \ \rightarrow_\beta$

$\Theta W\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner \, (N\mathbf{2}) \ \rightarrow_\beta \ \ldots$

Овај низ редукција је *квази крајње леви* (*quasi leftmost*) или скраћено *qlm* према дефиницији из [Hindley & Seldin, 2008, def. 3.21.]. Према теореми из [Hindley & Seldin, 2008, corollary 3.22.1.], ако терм T производи бесконачан *qlm* низ редукција, он нема нормалну форму. На основу те теореме можемо закључити да терм $D\mathbf{0}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{0})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0})$ нема нормалну форму, под претпоставком да $(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\boldsymbol{y}) \neq_\beta \mathbf{0}$, за свако $y\epsilon\mathbb{N}$. Дакле, нормалну форму неће имати ни $(\lambda x_1 \ldots x_k.\Theta W x_1 \ldots x_k\mathbf{0})\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner$ који се на терм $D\mathbf{0}\big((\Theta W)\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner(N\mathbf{0})\big)(P\ulcorner m_1\urcorner \ldots \ulcorner m_k\urcorner\mathbf{0})$ редукује.

Међутим, ми овде хоћемо да докажемо једно јаче тврђење. Наиме, не тврдимо само да $(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner$ нема нормалну форму, већ да нема ни *чеону нормалну форму*. Да бисмо то показали, по узору на појам *qlm* редукције, дефинисаћемо појам *qh* редукције (*quasi head reduction*).

Приметимо да је сваки терм или у чеоној нормалној форми или облика $\lambda x_1 \dots x_n.\big((\lambda y.M_0)M_1\big)N_1 \dots N_n$ [Amadio & Curien, 1996, remark 2.1.3.].

Ако је терм облика $\lambda x_1 \dots x_n.((\lambda y.M_0)M_1)N_1 \dots N_n$, терм $(\lambda y.M_0)M_1$ се назива његовим *чеоним* редексом или *h-редексом* (*head redex*).

Чеоном редукцијом (*head reduction*) терма T назваћемо низ бета редукција

$T \to_\beta T_1 \to_\beta T_2 \to_\beta T_3 \to_\beta \dots$

У којима се редукују искључиво чеони редекси [Barendregt, 1984, def. 8.3.10.].

Кажемо да се чеона редукција $T \to_\beta T \to_\beta \dots T \to_\beta T_n$ *завршава* у T_n, ако је T_n у чеоној нормалној форми. Иначе, чеона редукција је бесконачна.

Редукцију $T \to_\beta T_1 \to_\beta T_2 \to_\beta \dots T_{n-1} \to_\beta T_n$ ... назваћемо *квази-чеоном* (qh) ако за свако i, ако T_i није крај редукције, постоји T_j, $j \geq i$, такво да се у редукцији $T_j \to_\beta T_{j+1}$ редукује чеони редекс.

Теорема. 4.4.1.22. Ако T производи квази-чеону бесконачну редукцију, онда T нема чеону нормалну форму.

Доказ. По узору на доказ теореме 13.2.6. у [Barendregt, 1984]. Идеја доказа је да на основу бесконачне квази-чеоне редукције можемо конструисати бесконачну чеону редукцију. ■

Није тешко показати да редукција ***4.4.1.19.*** представља бесконачну-квази чеону редукцију. На основу теореме ***4.4.1.14.*** можемо закључити да терм $(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner$ нема чеону нормалну форму, под претпоставком да P $\lambda -$ дефинише функцију f и за свако y, постоји неко $n > 0$ такво да $f(m_1, \dots, m_k, y) = n$.

Тиме смо завршили наш доказ. Показали смо да $(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner =_\beta \ulcorner q \urcorner$, онда када је $Mn[\,f\,]\,(m_1, \dots, m_k) = q$ за неки број q, као и да је $(\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0})\ulcorner m_1 \urcorner \dots \ulcorner m_k \urcorner$ несводиво онда када је $Mn[\,f\,]$

$(m_1, \ldots, m_k)$ недефинисано. Из тога следи да терм $(\lambda x_1 \ldots x_k . \Theta W x_1 \ldots x_k \mathbf{0})$ ламбда-дефинише функцију $Mn[\, f \,]\ (m_1, \ldots, m_k)$.

■

На основу чињенице да су све основне функције могу λ-дефинабилне, и лема ***4.4.1.9.***, ***4.4.1.10.***, и ***4.4.1.11.*** које смо доказали следи теорема:

Теорема. 4.4.1.8. Све парцијалне рекурзивне функције су λ-дефинабилне.

Да су све λ-дефинабилне функције рекурзивне нећемо доказивати. То следи на основу чињенице да је скуп једнакости у λ_β *рекурзивно набројив* (овде нећемо дати дефиницију појма рекурзивно набројивог скупа, а читалац је може наћи у [Boolos et al., 2002, section 8.3.]). Та чињеница заједно са теоремом ***4.4.1.8.*** имплицира Клинијеву теорему [Barendregt, 1984, theorem 6.3.13.]:

4.4.1.23. Функција на природним бројевима је рекурзивна ако и само је λ-дефинабилна.

4.5. Алгоритми и ламбда терми

Резултати о λ-дефинабилности рекурзивних функција које смо представили у претходном одељку омогућавају нам да прецизније дефинишемо однос између алгоритама, израчунљивих функција и ламбда терама. Ако је φ рекурзивна функција која је дефинисана термом F, онда можемо рећи да је *алгоритам* који израчунава функцију φ изражен термом F. Ово одређење појма алгоритма прати основну идеју ламбда рачуна према којој ламбда терм не представља само функцију као екстензионално схваћен објекат, већ правило помоћу којег је израчунавамо.

То што алгоритме можемо да представимо помоћу одговарајућих ламбда терама има за последицу да проблем *једнакости алгоритама* можемо свести на питање једнакости тих терама. Према понуђеној анализи, два алгоритма би била једнака ако се једнакост терама који их представљају може доказати у λ_β рачуну. На тај начин, алгоритам можемо јасно да разликујемо од *функције* коју израчунава, с обзиром да једна израчунљива функција може да буде λ-дефинисана различитим термима. Предложени критеријуми једнакости, дакле, нису екстензионални. Као што смо рекли, два ламбда терма су једнака ако се помоћу бета редукције могу свести на исти терм. У складу са тиме, две процедуре за израчунавање се у ламбда рачуну посматрају као једнаке ако се процесом нормализације могу довести у исту синтаксну форму. [75]

Понуђена анализа појма алгоритма утемељена је, дакле, на две идеје. Прва је да се инструкције у алгоритму као и докази, могу формулисати на начин који је у неком смислу заобилазан или непотребно компликован. Друга је да такве инструкције можемо поједноставити а да при томе не променимо и саму идеју на којој је процедура заснована.

Према предложеном схватању, алгоритам је интензија ламбда терма којим представљамо одговарајући израчунљиву функцију. Два ламбда терма су синонимна, односно изражавају исти алгоритам ако су бета једнака. У том смислу, алгоритам је одређен класом бета-једнаких терама. Одређење појма алгоритма које је овде дато формулисано је по узору на то како је појам дедукције одређен у општој теорији доказа. Као што смо рекли у другом поглављу, доказ се тамо може одредити класом еквиваленције извођења која се нормализацијом своде на исту синтаксну форму. Према становишту које овде предлажемо, нормализација алгоритама која је повезана са бета-редукцијом у ламбда рачуну је исте врсте као и нормализација извођења.

Према датом одређењу, алгоритам је дефинисан као процедура израчунавања која се може представити одговарајућим ламбда термом односно класом бета-једнаких ламбда терама. Са друге стране, у другом поглављу смо рекли како се алгоритам може посматрати и као смисао дефиниције рекурзивне функције. Можемо се запитати у каквом су међусобном односу та два схватања? Да ли уопште представљају помирљиве позиције? У ономе што следи покушаћемо то да испитамо.

Али, пре него што то учинимо, напоменућемо да ћемо ради лакшег праћења текста израз рекурзивна функција (када контекст то буде допуштао) користити да говоримо не само о функцији као екстензионалном објекту већ о њеном синтаксном изразу, односно о њеној дефиницији.

[75] До на алфа једнакост.

Када смо дефинисали рекурзивне функције (видети дефиницију ***4.4.8.***) међу датим функцијама претпоставили смо константну функцију $const_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ за свако n. Међутим, да смо уместо $const_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ за свако n претпоставили као примитивну само $const_0\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ добили бисмо дефиницију рекурзивних функција која је еквивалентна дефиницији ***4.4.8.***. Еквиваленцију обезбеђује то што се за свако n, $const_n(x)$ може дефинисати комозицијом $const_0(x)$ и функције следбеника помоћу једнакости $const_n(x) = s^n\,(const_0(x))$, где s^n означава n-тог следбеника, односно n-ту примену функције следбеника.

Једнакошћу $const_n(x) = s^n\left(const_0(x)\right)$ изражавамо једнакост *екстензија* функција са леве и десне стране. Другим речима, изражавамо то да $const_n(x)$ и $s^n\left(const_0(x)\right)$ дају исту вредност за сваки број x. Међутим, овде нас не занима само екстензионална једнакост већ и то да ли су дефиниције функција са леве и десне стране једнакости и *интензионално* једнаке. Унутар система рекурзивних функција, као што смо већ рекли, немамо начин на одговоримо на то питање. Да бисмо то учинили, потребно је да одредимо појам интензије или смисла рекурзивне функције.

Становиште да под *смислом* рекурзивне дефиниције функције подразумемо *алгоритам* блиско је Московакисовом схватању алгоритама. Према том схватању, начин на који је функција рекурзивно дефинисана одређује процедуру њеног израчунавања, која чини њен смисао. Питање интензионалне једнакости ових функција се тако своди на питање једнакости алгоритама које оне израчунавају. Према Московакисовом мишљењу, алгоритам који је одређен дефиницијом $const_n(x)$ и алгоритам који је одређен дефиницијом $s^n\left(const_0(x)\right)$ не би се могли сматрати једнакима, јер су изграђени из различитих скупова примитивних функција. Те функције дакле, немају исти смисао.

Са друге стране, ако алгоритме представимо ламбда термима, онда се питање једнакости интензија функција $s^n\left(const_0(x)\right)$ и $const_n(x)$ своди на питање једнакости одговарајућих ламбда терама. Можемо рећи да ламбда терм представља смисао рекурзивне функције ако он представља њен *директан превод* у скуп ламбда терама. Функцију директног превода $\boldsymbol{t}$ из скупа рекурзивних функција у скуп ламбда терама можемо да дефинишемо на следећи начин.

Деф. 4.5.1. Ако је h основна функција према дефиницији ***4.4.8***., њен директан превод ће бити ламбда терм који ламбда-дефинише h према тврђењу ***4.4.12.***. Да је H директан превод од h можемо записати и као $\boldsymbol{t}(h) = H$.

Нека су $f, g_1, \ldots, g_k$ рекурзивне функције одговарајуће арности, а h функција облика $Cn[f, g_1, \ldots, g_k]\ (m_1, \ldots, m_l)$. Ако за ламбда терме F и $G_1, \ldots, G_k$ важи $\boldsymbol{t}(f) = F$, $\boldsymbol{t}(g_i) = G_i$, онда је директан превод функције h ламбда терм који дефинише h према леми ***4.4.1.9.***.

Нека су f и g рекурзивне функције одговарајуће арности, а h функција облика $Pr[f, g](m_1, \ldots, m_l)$. Ако за ламбда терме F и G важи $\boldsymbol{t}(f) = F$, $\boldsymbol{t}(g) = G$, онда је директан превод функције h ламбда терм који дефинише h према леми ***4.4.1.10.***.

Нека је f рекурзивна функција одговарајуће арности, а h функција облика $Mn[f](m_1, \ldots, m_k)$. Ако за ламбда терм P важи $\boldsymbol{t}(f) = P$, онда је директан превод функције h ламбда терм који дефинише h према леми ***4.4.1.11.***.

Сада када смо дефинисали директан превод произвољне рекурзивне функције, њен смисао можемо да дефинишемо као класу терама који су бета-једнаки њеном директном преводу. Према овој дефиницији, две рекурзивне функције ће бити интензионално једнаке ако и само ако су њихови директни преводи бета-једнаки, односно ако припадају истој класи бета-једнаких терама. На основу овог критеријума, функције $const_n(x)$ и $s^n\ (const_0(x))$ су не само екстензионално једнаке, већ имају и исти смисао.

Да су њихови преводи бета-једнаки можемо једноставно показати. Прво ћемо показати да $\boldsymbol{t}\big(const_1(x)\big) =_\beta \boldsymbol{t}(s\ \big(const_0(x)\big))$. Према томе како смо дефинисали функцију директног превода, следи да $\boldsymbol{t}\big(const_1(x)\big) = \lambda z.\ulcorner 1 \urcorner \equiv \lambda zfx. f(x)$. Takође, $\boldsymbol{t}(s\ \big(const_0(x)\big) = \lambda z. (\lambda wfx. f(wfx))\ ((\lambda yfx. x)z)$. Дакле, показаћемо да важи:

$$\lambda z. \big(\lambda wfx. f(wfx)\big)\big((\lambda yfx. x)z\big) =_\beta \lambda zfx. f(x).$$

Да та једнакост важи показује следећа редукција:

$\lambda z. (\lambda wfx. f(wfx))\ ((\lambda yfx. x)z)$

$\to_\beta \lambda z. (\lambda fx. f(\ ((\lambda ygw. w)z\ )fx))$

$\to_\beta\ \lambda z. (\lambda fx. f(\ (\lambda gw. w)\ fx))$

$\to_\beta \lambda z. (\lambda fx. f(\ (\lambda w. w)\ x))$

$\to_\beta \lambda z.\lambda fx.f(x)$.

Дакле, $\lambda z.\big(\lambda wfx.f(wfx)\big)\big((\lambda yfx.x)z\big) \to_\beta\ \lambda zfx.f(x)$ и према томе,

$$\lambda z.\big(\lambda wfx.f(wfx)\big)\big((\lambda yfx.x)z\big) =_\beta\ \lambda zfx.f(x).$$

Сада ћемо показати да $\boldsymbol{t}\big(const_{n+1}(x)\big) =_\beta\ \boldsymbol{t}(s^{n+1}\ \big(const_0(x)\big))$, под претпоставком да $\boldsymbol{t}\big(const_n(x)\big) =_\beta\ \boldsymbol{t}(s^n\ \big(const_0(x)\big))$.

Пошто је једноставно видети да $\lambda wfx.f^n(wfx)\ =_\beta\ \boldsymbol{t}(s^n\ (x))$, ламбда терм $\lambda wfx.f^n(wfx)$ третираћемо као директан превод од $s^n\ (x)$.

Показаћемо да

$$\boldsymbol{t}\big(const_{n+1}(x)\big) = \lambda z.\ulcorner n+1\urcorner =_\beta$$

$$\lambda b.\big(\lambda wfx.f(wfx)\big)\ \Big(\Big(\lambda a.\big(\lambda wfx.f^{n+1}(wfx)\big)\big((\lambda z.\ulcorner 0\urcorner)a\big)\Big)\,b\Big) = \boldsymbol{t}(s^{n+1}\ \big(const_0(x)\big)).$$

Према индуктивној претпоставци,

$$\boldsymbol{t}(s^n\ \big(const_0(x)\big)) = \lambda a.\big(\lambda wfx.f^{n+1}(wfx)\big)\big((\lambda z.\ulcorner 0\urcorner)a\big) =_\beta \lambda z.\ulcorner n\urcorner = \boldsymbol{t}\big(const_n(x)\big).$$

Дакле,

$$\lambda b.\big(\lambda wfx.f(wfx)\big)\ \Big(\Big(\lambda a.\big(\lambda wfx.f^{n+1}(wfx)\big)\big((\lambda z.\ulcorner 0\urcorner)a\big)\Big)\,b\Big) =_\beta$$

$$\lambda b.\big(\lambda wfx.f(wfx)\big)\ ((\lambda z.\ulcorner n\urcorner)b) =_\beta$$

$$\lambda b.\big(\lambda wfx.f(wfx)\big)\ (\ulcorner n\urcorner) =_\beta$$

$$\lambda b.\ulcorner n+1\urcorner \equiv \lambda z.\ulcorner n+1\urcorner = \boldsymbol{t}\big(const_{n+1}(x)\big).$$

■

Гледиште које смо изнели заснива се на претпоставци да је интензија рекурзивне функције алгоритам, и да су два алгоритма једнака ако су представљена једнаким ламбда термима. Према том гледишту, смисао рекурзивне функције може се представити класом ламбда терама који су бета-једнаки њеном директном преводу. У складу са тиме, две рекурзивне функције поседују исти смисао ако одређују исту класу бета-једнаких ламбда терама.

То гледиште суочава се, међутим, са следећим проблемом. Узмимо примера ради функцију $Mn[\ f\ ]\ (m_1, \dots, m_k)$. Интензију од $Mn[\ f\ ]\ (m_1, \dots, m_k)$ представили смо ламбда термом $\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0}$, где је W одређено као и раније. Међутим, иако смо оператор минимизације дефинисали позивајући се на комбинатор Θ, то смо такође могли учинити позивајући се на комбинатор Y или било који други комбинатор фиксне тачке. Наиме, терм $\lambda x_1 \dots x_k.\ YWx_1 \dots x_k\mathbf{0}$ такође ће да дефинише функцију $Mn[\,f\,]$ $(m_1, \dots, m_k)$ исто као и $\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0}$. Пошто терми $\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0}$ и $\lambda x_1 \dots x_k.\ YWx_1 \dots x_k\mathbf{0}$ нису бета једнаки, према критеријумима за једнакост алгоритама које смо изложили, представљају различите процедуре израчунавања. С обзиром да се разликују по значењу, није могуће рећи да оба терма имају исто значење као и функција $Mn[\,f\,]$ $(m_1, \dots, m_k)$. А проблематично је то што није очигледно који од ова два терма интуитивно представља *праву* или *бољу* репрезентацију интензије функције $Mn[\,f\,]$ $(m_1, \dots, m_k)$. Наша дефиниција директног превода изгледа помало произвољна.

Проблем са којим се овде суочавамо донекле смо дотакли у трећем поглављу овог рада, када смо се бавили Московакисовим схватањем алгоритама. Тај проблем тиче се односа рекурзије и итерације и тога како можемо рекурзију представити средствима итерације. Наиме, када неку рекурзивну функцију представимо у неком језику или моделу израчунавања који је заснован на итерацији, као што је то ламбда рачун или Тјурингове машине, постоји могућност да добијемо више различитих репрезентација. Онда се поставља питање како да утврдимо која од тих репрезентација представља *праву* репрезентацију смисла те рекурзивне функције.

Постоји три начина да на овај проблем одговоримо. Први је тај да покажемо како је једна од репрезентација, у овом случају један од понуђених директних превода, боља од других. Тако можемо, рецимо, тврдити да терм $\lambda x_1 \dots x_k.\Theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0}$ верније представља смисао од $Mn[\,f\,]$ $(m_1, \dots, m_k)$ него $\lambda x_1 \dots x_k.\ YWx_1 \dots x_k\mathbf{0}$ због следећег својства комбинатора Θ које комбинатор Y не поседује. Наиме, за свако N важи $\Theta N \longrightarrow N(\Theta N)$, али не нужно и $YN \longrightarrow N(YN)$. Захваљујући том својству сваки корак у израчунавању $Mn[\,f\,]$ $(m_1, \dots, m_k)$ можемо да представимо корацима у бета редукцији што нам омогућава да израчунавање вредности коју даје функција за већи број на важан начин зависи од тога како смо израчунали вредност коју функција даје за мањи број.

Други начин да на поменути проблем одговоримо је да одбацимо становиште да се смисао рекурзивне функције састоји у процедури њеног израчунавања. Према том гледишту, смисао рекурзивне дефиниције не би био процедура већ *скуп* процедура које имплементирају ту рекурзивну дефиницију на одређени, задовољавајући начин. То би значило, примера ради, да интензију рекурзивне дефиниције $Mn[\,f\,]$ $(m_1, \dots, m_k)$ не представља ни класа терама бета једнаких терму $\lambda x_1 \dots x_k.\theta W x_1 \dots x_k\mathbf{0}$ ни класа терама бета једнаких терму $\lambda x_1 \dots x_n.YWx_1 \dots x_k\mathbf{0}$, већ скуп ламбда терама који су бета једнаки терму $\lambda x_1 \dots x_k.\Phi W x_1 \dots x_k\mathbf{0}$, где је Φ било који комбинатор фиксне тачке.

Трећи начин да на поменути проблем покушамо да одговоримо је да задржимо претпоставку да је смисао рекурзивне функције процедура израчунавања односно алгоритам, али да редефинишемо критеријуме њихове једнакости.

У одељку који следи, разматраћемо такву релацију синонимности на скупу ламбда терама према којој ће $\lambda x_1 \dots x_n. \Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0}$ и $\lambda x_1 \dots x_n.\ YW x_1 \dots x_k \mathbf{0}$ да буду синонимни терми. Она се разликује како од бета тако и од бета-ета једнакости и заснива се на појму *рачунског садржаја* (енг. *computational significance*).

4.6. Рачунски садржај и Бемова дрвета

Већ смо говорили о нормализацији ламбда терма као о процесу синтаксног поједностављења. У идеалном случају, нормализација терма се завршава у достизању нормалне форме. Видели смо међутим да се некад нормална форма не може достићи. Ипак, то не значи да су такви терми лишени садржаја и да су правила која они изражавају бесмислена. То само значи да се она не могу формулисати на максимално једноставан начин. Узмимо на пример комбинаторе фиксне тачке као што су Θ и Y које смо већ помињали. Иако можемо рећи да правила која изражавају Y или Θ не можемо изразити *максимално* једноставно и непосредно, јер они немају нормалну форму, можемо их изразити на начин који би био *довољно* једноставан и непосредан да би могао бити примењив. Један начин да се прецизно одреди шта би то значило да су правила формулисана на *довољно* непосредан и једноставан начин је путем појма *чеоне нормалне форме*. Сетимо се да је ламбда терм у нормалној форми ако нигде не садржи јављање бета редекса. Са друге стране, ламбда терм је у чеоној нормалној форми ако не садржи јављање бета редекса на *одређеним местима*. У дефиницији ***4.4.2.1.*** рекли смо да је терм у чеоној нормалној форми ако је облика $\lambda x_1 \dots x_n. x M_1 \dots M_m$, за $n, m \geq 0$. Дакле, чеона нормална форма наликује стандардној нормалној форми јер не садржи јављање бета редекса у чеонем делу: $\lambda x_1 \dots x_n. x$, али разликује се од терма у нормалној форми јер допушта јављања бета редекса у $M_1 \dots M_m$.

Каже се још и да се чеона нормална форма терма може схватити као *апроксимација* нормалне форме. Покушајмо да то мало појаснимо. Као што смо напоменули, терм Y примера ради, нема нормалну форму због тога што се не може редуковати у *коначном* броју корака на терм који нема редекс. Међутим, у идеализованом случају након *бесконачног* низа бета редукција:

$$Y \equiv \lambda y.\left(\lambda x.y(xx)\right)\lambda x.y(xx) \to_\beta$$
$$\lambda y.y\left(\left(\lambda x.y(xx)\right)\lambda x.y(xx)\right) \to_\beta$$
$$\lambda y.y(y((\lambda x.y(xx))\ \lambda x.y(xx))) \to_\beta \ldots$$

терм Y се редукује на бесконачни терм $\lambda f.f(f(f \ldots) \ldots)$ у којем не постоји јављање редекса. Терм $\lambda f.f(f(f \ldots) \ldots)$ можемо у том смислу сматрати *идеализованом нормалном формом* (енг. *ideal normal form*) од Y. Очигледно је да такав терм представља идеализацију, а не ламбда терм због тога што смо терме ламбда рачуна дефинисали као коначне изразе.

Посматрајући редукцију изнад, можемо приметити да терм Y има бесконачно много чеоних нормалних форми: $M_1 \equiv \lambda f.f((\lambda x.f(xx))\ \lambda x.f(xx))$, $M_2 \equiv \lambda f.f(f((\lambda x.f(xx))\ \lambda x.f(xx)))$, …, $M_n \equiv \lambda f.f^n((\lambda x.f(xx))\ \lambda x.f(xx))$, $M_{n+1} \equiv \lambda f.f^{n+1}((\lambda x.f(xx))\ \lambda x.f(xx))$, …

Свака од ових чеоних нормалних форми терма Y представља апроксимацију његове идеализоване нормалне форме. Неке апроксимације могу бити тачније или приближније од других у смислу да су синтаксно ближе односно сличније идеализованој нормалној форми $\lambda f.f(f(f \ldots) \ldots)$. Примера ради, M_2 би јој била била синтаксно ближа од M_1, а M_{n+1} ближа него M_n.

Појам *M је тачнија апроксимација од N* или *M носи више информација него N* можемо учинити прецизним на следећи начин. Прво ћемо да дефинишемо скуп парцијалних ламбда терама.

Као у [Amadio & Curien, 1998, p. 51,52] проширимо наш језик ламбда терама са додатним симболом Ω (приметимо да се симбол Ω разликује од Ω којим означавамо ламбда терм $(\lambda x.xx)\,\lambda x.xx$). Нека $\boldsymbol{P}$ буде скуп *парцијалних ламбда терама M* дефинисаних као $M := \Omega \mid x \mid MN \mid \lambda x.M$, који је уређен релацијом $\leq$ на следећи начин:

- $\Omega \leq M$;
- Ако $M_1 \leq M_2$ и $M_3 \leq M_4$, онда $M_1M_3 \leq M_2M_4$;
- Ако $M_1 \leq M_2$, онда $\lambda x.M_1 \leq \lambda x.M_2$;

Парцијални терми су ламбда терми који нису у потпуности дефинисани. На пример, израз $\lambda x. xy\Omega$ представља парцијални ламбда терм облика $\lambda x. M_1M_2M_3$ у којем M_3 није дефинисано. Релација $\leq$ уређује парцијалне ламбда терме у односу на то колико су дефинисани, или другим речима, у односу на количину информација које носе. $M \leq N$ значи да M носи мање (или једнако) информација него N. Парцијални терм Ω, на пример, носи најмање информација, он је у потпуности недефинисан. У складу са тиме, терм $\lambda x. xyx$, на пример, носиће више информација од $\lambda x. xy\Omega$.

На основу скупа $\boldsymbol{P}$ и уређења дефинисаног на њему, скуп апроксимација ламбда терама дефинишемо на следећи начин.

Деф. 4.6.1. Нека $\boldsymbol{N}$ буде подскуп од скупа $\boldsymbol{P}$, који наслеђује уређење од $\boldsymbol{P}$, а који је дефинисан као:

- $\Omega \in \boldsymbol{N}$,
- $M_1 \dots M_p \in N \Rightarrow \lambda x. xM_1 \dots M_p \in \boldsymbol{N}$.

Скуп $\boldsymbol{N}$ представља скуп *апроксимација* ламбда терама.

Релација $\leq$ као и раније уређује скуп апроксимација ламбда терама према томе колико информација носе. $M \leq N$ значи да апроксимација M носи мање (или једнако) информација него апроксимација N. Терм Ω је најмањи елемент скупа апроксимација и он као што смо рекли, не носи никакве информације јер је у потпуности недефинисан.

Сада ћемо показати како сваком ламбда терму можемо да припишемо његову апроксимацију.

Деф. 4.6.2. Дефинисаћемо функцију превода $\omega(M)$ из скупа ламбда терама у скуп њихових апроксимација $\boldsymbol{N}$ на следећи начин:

$$\omega(M) = \begin{cases} \Omega, \text{ако } M \text{ није у чеоној нормалној форми,} \\ \lambda x_1 \dots x_n. x\omega(M_1) \dots \omega(Mp), \text{ако је } M \text{ облика } \lambda x_1 \dots x_n. xM_1 \dots Mp \end{cases}$$

Испод ћемо дати неколико примера који показују како помоћу функције $\omega(M)$ можемо ламбда термима да придружимо њихове апроксимације.

Примери. 4.6.3.

a) $\omega(\lambda f. f((\lambda x. f(xx))\, \lambda x. f(xx)) = \lambda f. f\, \Omega$

b) $\omega(\lambda f. f(f((\lambda x. f(xx))\, \lambda x. f(xx)))) = \lambda f. f(f\, \Omega)$

c) $\omega(\lambda xy.yx) = \lambda xy.yx$

d) $\omega((\lambda xy.yx)xz) = \Omega$

e) $\omega((\lambda x.xxx)\lambda x.xxx) = \Omega$

f) $\omega(\lambda f.((\lambda x.f(xx))\,\lambda x.f(xx)) = \Omega$,

g) $\omega(\lambda y.y\left((\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))y\right)) = \lambda y.y\,\Omega$.

Функција превода $\omega(M)$ ламбда терму M приписује одговарајућу апроксимацију која са собом носи неке информације о терму M. Терми M који нису у чеоној нормалној форми посматрају се као црне кутије. Апроксимација $\omega(M)$ у том случају неће носити никакве транспарентне информације о терму M (видети примере (d), (e) и (f) горе). Са друге стране, нормалне форме се посматрају као потпуно транспарентни терми, па је апроксимација терма који је у нормалној форми једнака самом том терму, видети пример (c) горе.

Као што смо рекли, апроксимације можемо поредити у односу на количину информације које носе. Примера ради (видети ***4.6.3.*** (a) и (b) горе), $\lambda f.f\,\Omega$ носи мање информација него $\lambda f.f(f\,\Omega)$, што значи да $\omega(\lambda f.f((\lambda x.f(xx))\,\lambda x.f(xx)) \leq \omega(\lambda f.f(f((\lambda x.f(xx))\,\lambda x.f(xx))))$. Приметимо да терми $M_1 \equiv \lambda f.f((\lambda x.f(xx))\,\lambda x.f(xx))$ и $M_2 \equiv \lambda f.f(f((\lambda x.f(xx))\,\lambda x.f(xx)))$ представљају чеоне нормалне форме терма Y такве да $M_1 \longrightarrow_\beta M_2$. Индукцијом по M лако се доказује да у општем случају важи [Amadio & Curien, 1998, p. 52]:

Тврђење. 4.6.4. $M \longrightarrow_\beta N \Rightarrow \omega(M) \leq \omega(N)$.

Ово тврђење показује да је бета редукција процес путем којег можемо открити више информација о терму. Објаснимо то на примеру већ поменутог комбинатора Y. Нормализујући тај комбинатор добијамо наредну бесконачну редукцију.

$$\lambda y.\left(\lambda x.y(xx)\right)\lambda x.y(xx) \to_\beta$$

$$\lambda y.y\left(\left(\lambda x.y(xx)\right)\lambda x.y(xx)\right) \to_\beta$$

$$\lambda y.y(y((\lambda x.y(xx))\;\lambda x.y(xx))) \to_\beta \ldots$$

Функција превода $\omega(M)$ сваком терму у овој редукцији приписује одговарајућу апроксимацију. Тако имамо:

$$\omega\left(M_0 \equiv \lambda y.\left(\lambda x. y(xx)\right)\lambda x. y(xx)\right) = \Omega.$$

$$\omega\left(M_1 \equiv \lambda y. y(\left(\lambda x. y(xx)\right)\lambda x. y(xx))\right) = \lambda y. y\,\Omega.$$

$$\omega\left(M_2 \equiv \lambda y. y(y(\left(\lambda x. y(xx)\right)\lambda x. y(xx)\right)) = \lambda y. y(y\,\Omega).$$

$$\ldots$$

$$\omega\left(M_n \equiv \lambda y. y^n(\left(\lambda x. y(xx)\right)\lambda x. y(xx)\right)) = \lambda y. y^n\,\Omega$$

$$\omega\left(M_{n+1} \equiv \lambda y. y^{n+1}(\left(\lambda x. y(xx)\right)\lambda x. y(xx)\right)) = \lambda y. y^{n+1}\,\Omega.$$

Можемо уочити да је превод сваког наредног терма у редукцији синтаксно све ближи и ближи идеализованој нормалној форми терма Y. За свако n имамо $\omega(M_n) \leq \omega(M_{n+1})$. То значи да како напредујемо у редукцији добијамо све више и више информација о терму Y и о његовој идеализованој нормалној форми. Другим речима, добијамо све приближнију апроксимацију те форме.

До сада смо рекли нешто о апроксимацијама ламбда терама и о томе како је скуп апроксимација уређен. Користећи се горе дефинисаним појмовима, сада можемо дефинисати *Бемово дрво* ламбда терма као у [Amadio & Curien, 1998, p. 52, def. 2.3.3.].

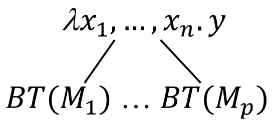
Деф. 4.6.5. Нека $supS$ означава супремум (најмање горње ограничење) скупа S. Можемо одредити *Бемово дрво* (*Böhm tree*) од терма M као: $BT(M) = sup\,\{\omega(N), M \twoheadrightarrow_\beta N\}$. [76] Идеја те дефиниције је да Бемово дрво $BT(M)$ представља, у неком смислу, најпроближнију апроксимацију нормалне форме или идеализоване нормалне форме од M.

Појму Бемовог дрвета такође можемо дати еквивалентно синтаксно одређење као у [Barendregt 1984, p. 216]:

Да бисмо одредили шта се налази у корену тог дрвета прво одређујемо да ли је терм M сводив или не. Ако је M несводиво, $BT(M)$ ће се састојати из само једног јединог чвора који је уједно и корен. Он ће бити обележен са Ω. Са друге стране, ако је M

[76] Појам Бемовог дрвета први пут је уведен у [Barendregt, 1977].

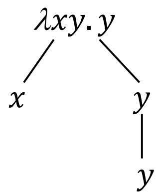
сводиви терм који се редукује на чеону нормалну форму: $\lambda x_1, \ldots, x_n. yM_1 \ldots M_p$, онда $BT(M)$ одређујемо као:



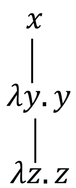
Бемово дрво ћемо звати *коначним* ако има коначан број чворова, а у супротном ћемо га звати *бесконачним*. Да би било јасније како одређујемо Бемово дрво неког терма, доле ћемо дати неколико примера.

Примери. 4.6.7.

a) $BT(\lambda xy. yx(yy))$



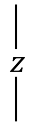
b) $BT(x(\lambda y. y(\lambda z. z)))$



c) $BT((\lambda x. xx)\lambda x. xx)$

Ω

d) $BT((\lambda x. z(xx))\ \lambda x. z(xx))$



$$z$$

$$\vdots$$

e) $BT(\lambda y.xy)$

$$\begin{array}{c} \lambda y.x \\ | \\ y \end{array}$$

f) $BT(z((\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy)))$

$$\begin{array}{c} z \\ | \\ \Omega \end{array}$$

g) $BT\ (Y)$

$$\begin{array}{c} \lambda x.x \\ | \\ x \\ | \\ x \\ \\ \vdots \end{array}$$

h) $BT\ (\Theta)$

$$\begin{array}{c} \lambda x.x \\ | \\ x \\ | \\ x \\ \\ \vdots \end{array}$$

i) $BT\ (\Theta \mathrm{y})$

$$\begin{array}{c} y \\ | \\ y \\ | \end{array}$$

y

$\vdots$

Приметимо да су једнино дрвета у примерима ***4.6.7.d.*** и ***4.6.7.g.*** бесконачна, док су остала коначна. Уопште ће важити да је $BT(M)$ бесконачно, само ако M нема нормалну форму. Међутим, неће важити импликација у обрнутом смеру. Могуће је да терми који немају нормалну форму, као ни чеону нормалну форму имају коначно Бемово дрво (видети примере: ***4.6.7.c., 4.6.7.e., 4.6.7.f.***).

Као што смо рекли, појам Бемовог дрвета неког терма треба да представља најтачнију односно најближу апроксимацију његове идеалне нормалне форме. Ако се M своди на нормалну форму N, онда је идеална нормална форма од M само нормална форма, односно N, а њена најближа апроксимација је она сама. То видимо у примерима ***4.6.7.a.*** и ***4.6.7.e***. Са друге стране ако се M не своди на нормалну форму, али се своди на чеону нормалну форму у коначном броју корака и на идеализовану нормалну форму у бесконачно много корака, као што је случај са термом Y, онда је најближа апроксимација једнака идеализованој нормалној форми (видети примере ***4.6.7.d.***, ***4.6.7.g.*** и ***4.6.7.h***).

У примеру ***4.6.7.c.***. налази се Бемово дрво терма који није сводив, нема нормалну, а ни чеону нормалну форму. То дрво је изузетно просто, састоји се само из корена у којем се налази симбол Ω. Рекли смо да Ω представља најмању апроксимацију која је у потпуности недефинисана. Због тога, Ω овде можемо изједначити са *недефинисано*.

Постоје терми који се не своде ни на нормалне форме ни на идеализоване нормалне форме у бесконачно много корака, али се ипак своде на чеону нормалну форму, као у примеру ***4.6.7.f.*** У том примеру, најближа апроксимација терма је $z(\Omega)$, јер је редекс $((\lambda x.xxy)(\lambda x.xxy))$ несводив терм.

Појам Бемовог дрвета замишљен је да формализује појам *рачунског садржаја* правила израчунавања. Интуитивно, рачунски садржај неког правила односи се на то шта све можемо израчунати користећи се њиме. Идеја да Бемово дрво неког терма формализује тај појам заснива се на претпоставци да је чеона нормална форма терма носилац његовог рачунског садржаја. Према том гледишту, терми без чеоне нормалне форме посматрају се као бесмислени. Они су лишени рачунског садржаја и због тога сви имају исто, тривијално Бемово дрво које састоји из једног јединог чвора у којем је Ω.

Један од разлога због којег терме без чеоне нормалне можемо посматрати као рачунски ирелевантне проистиче из тога што примена несводивог терма M на произвољан терм N увек као резултат даје MN који је несводив (видети лему ***4.4.1.18.***). У том смислу, терми без чеоне нормалне форме су као некаква чудна, чак циркуларна правила чијом применом не можемо добити ништа што се емо посматрати као лишене рачунског садржаја заснива се на наредној леми [Barendregt, 1984, proposition 14.3.24.]:

Лема 4.6.8. (*genericity lemma*) Нека је M несводив ламбда терм и нека је N терм који има нормалну форму. Онда за произвољан контекст важи да $C[M] = N \Longrightarrow C[T] = N$, за сваки ламбда терм T.

Овом лемом се тврди да несводиве ламбда терме можемо посматрати као рачунски ирелевантне, јер се ламбда терм који садржи несводиви терм M своди на нормалну форму само ако се своди на исту нормалну форму и када се уместо M јавља било који други терм.

О вези између несводивих терама и недефинисаних функција већ смо говорили када смо се бавили тиме како рекурзивне функције можемо да дефинишемо у ламбда рачуну. Сада ћемо рећи нешто о томе како се можемо користити појмом Бемовог дрвета да дефинишемо релацију еквиваленције на ламбда термима.

Деф. 4.6.9. Кажемо за два терма M и N да су *Бем еквивалентна* ако $BT(M) = BT(N)$.

Који је однос између Бемове еквиваленције и бета једнакости? Захваљујући тврђењу ***4.6.4.***, лако је доказати да $M =_\beta N \Rightarrow BT(M) = BT(N)$. Другим речима, бета-једнаки терми ће имати исто Бемово дрво. Еквиваленција $M =_\beta N \Leftrightarrow BT(M) = BT$ важиће само под условом да су M и N нормализабилни терми. Међутим, када узмемо у обзир терме без нормалне форме, импикација са лева на десно неће важити. Бем еквивалентни терми не морају увек бити и бета једнаки, што показује наредни пример: $BT(\Theta) = BT(Y)$, док $\Theta \neq_\beta Y$, (видети ***4.6.7.g., 4.6.7.h.***).

Штавише, не само да Θ и Y имају исто Бемово дрво, то ће важити за свака два комбинатора фиксне тачке. О томе говори наредно тврђење које овде нећемо доказивати [Barendregt, 1984, p. 217]:

Тврђење*. *4.6.10. Ако су Φ_1, Φ_2 комбинатори фиксне тачке, онда $BT(\Phi_1) = BT(\Phi_2)$ и њихово Бемово дрво изгледа овако:

$$\begin{array}{c} \lambda z.z \\ | \\ z \\ | \\ z \\ \\ \vdots \end{array}$$

Још један пример терама који нису једнаки али имају исто Бемово дрво су рецимо Ω и Ω_3. Дакле, важи $BT(\Omega) = BT(\Omega_3)$, док $\Omega \neq_\beta \Omega_3$.

Бемова еквиваленција се, дакле, разликује од релације еквиваленције коју одређује бета једнакост. Она се такође разликује од релације коју одређује бета-ета једнакост. Наиме, постоје терми M, N, такви да важи $M =_{\beta\eta} N$, али $(BT)M \neq (BT)N$. Нека $M \equiv \lambda x.yx$ и $N \equiv x$. Бемово дрво $(BT)x$ састоји се из само једног јединог чвора у којем се налази x. То дрво очигледно се разликује од $(BT)\lambda x.yx$ које изгледа овако:

$(BT)\lambda x.yx$:

$$\begin{array}{c} \lambda x.y \\ | \\ x \end{array}$$

Са друге стране, такође постоје терми M, N, такви да важи $(BT)M = (BT)N$, док $M \neq_{\beta\eta} N$. Примера ради, нека $M \equiv \Omega$ и $N \equiv \Omega_3$, или $M \equiv Y$ и $N \equiv \Theta$.

Ламбда теоријом називамо конзистентну једнакосну екстензију ламбда рачуна [Barendregt, 1984, p. 411]. Показано је да Бемова еквиваленција генерише једну ламбда теорију [Barendregt, 1984, section 16]. То значи две ствари. Прва је да мора важити наредно тврђење:

Тврђење*. *4.6.11. Ако $(BT)M = (BT)N$, онда $BT(C[M]) = BT(C[N])$.

Дакле, када Бем-еквивалентне терме међусобно заменимо у произвољном контексту, терми који добијамо пре и после замене остају Бем-еквивалентни.

Такође, пошто Бемова еквиваленција генерише ламбда теорију то значи да на основу једнакости Бемових дрвета можемо да дефинишемо нетривијалну релацију синонимности на ламбда термима и то на следећи начин:

Теза*. *4.6.12. Ламбда терми M и N имају исто значење ако су Бем-еквивалентни, односно ако $(BT)M = (BT)N$.

Бемова еквиваленција терама заснована је на једнакости њиховог рачунског садржаја. Интуитивно говорећи, рачунски садржај терма је оно што њиме можемо израчунати. Међутим, то да два правила имају *једнак рачунски садржај* не значи само да дају *исте резултате* у екстензионалном смислу, већ и да на одређен, релевантан начин имају исто понашање.

Критеријуми синонимности који се заснивају на једнакости рачунског садржаја повезани су са идејом нормализације. Терми који се редукују на исти терм имају исти рачунски садржај и сматрају се синонимним. У ламбда-бета рачну, једнаки су само терми који се редукују на исти терм у *коначном* времену. Са друге стране, Бем еквивалентни терми су не само они који се редукују на заједнички терм у коначном, већ и у *бесконачном* времену. Као пример можемо навести Y и Θ који се у бесконачном времену редукују на исту идеализовану нормалну форму $\lambda f. f(f(f \dots) \dots)$. Дакле, критеријуми синонимности засновани на једнакости Бемових дрвета подразумевају једно шире схватање нормализације која не обухвата само нормализацију у коначном него и нормализацију у бесконачном времену. Међутим, треба имати у виду да се они не темеље у потпуности на идеји нормализације, као што то чине критеријуми засновани на бета једнакости. Они не одређују неко правило израчунавања само у односу на *форму* терма који га изражава и начин на који се та форма може поједноставити, већ и у односу на то шта све тим правилом можемо односно не можемо израчунати. То можда најбоље можемо видети код несводивих терама о којима ћемо касније нешто више рећи.

4.6.1. Бемова дрвета и смисао дефиниција рекурзивних функција

Према гледишту које смо овде предложили, алгоритам представља значење терма који ламбда-дефинише неку израчуњиву функцију. Проблем једнакости алгоритама се тако своди на проблем синонимности ламбда терама. Теза ***4.6.15.*** нам каже да су два ламбда терма синонимна ако имају исто Бемово дрво. У складу са тиме можемо рећи:

Теза. 4.6.16. Два алгоритма су једнака ако их представљају Бем еквивалентни терми.

Према тези ***4.6.16.,*** два алгоритма представљају исту процедуру израчунавања ако су формулисана правилима истог рачунског садржаја. На први поглед, чини се да овај критеријум за једнакост алгоритама, за разлику од пређашњег који се заснива на бета-једнакости, заобилази проблем који смо изнели у одељку 4.5. Тај проблем се тиче одређења интензионалне синонимности рекурзивних функција и произилази из конјункције две претпоставке. Прва је да дефиниција рекурзивне функције одређује јединствен алгоритам који можемо разумети као њену интензију. Друга је да алгоритам одређује класа бета једнаких ламбда терама. Као што смо раније напоменули, проблем лежи у томе што се чини да, интуитивно говорећи, дефиниција рекурзивне функције не одређује увек јединствену класу бета једнаких терама. Узмимо примера ради функцију облика $Mn[\,f\,]\ (m_1, \ldots, m_k)$. Интензију израза $Mn[\,f\,]\ (m_1, \ldots, m_k)$ представили смо ламбда термом $\lambda x_1 \ldots x_k . \Theta W x_1 \ldots x_k \mathbf{0}$, где је W одређено као и раније. Међутим, интуитивно говорећи, на основу саме дефиниције $Mn[\,f\,]\ (m_1, \ldots, m_k)$ није очигледно због чега би њен смисао боље био представљен термом $\lambda x_1 \ldots x_k . \Theta W x_1 \ldots x_k \mathbf{0}$ него, рецимо, термом $\lambda x_1 \ldots x_k .\ Y W x_1 \ldots x_k \mathbf{0}$ који такође ламбда-дефинише $Mn[\,f\,]\ (m_1, \ldots, m_k)$. Са друге стране, не можемо рећи да је смисао те рекурзивне функције изражен и једним и другим термом, због тога што $\lambda x_1 \ldots x_k . \Theta W x_1 \ldots x_k \mathbf{0}$ и $\lambda x_1 \ldots x_k .\ Y W x_1 \ldots x_k \mathbf{0}$ нису бета-једнаки, па према томе немају исти смисао.

Чини се да прихватање нових критеријума за синонимност ламбда терама може помоћи да се овај проблем отклони. Наиме, према тези ***4.6.16.***, интензија рекурзивне функције није одређена класом бета једнаких терама, већ класом Бем-еквивалентних терама, па ће:

Теза. 4.6.17. Две рекурзивне функције бити интензионално једнаке ако њихови директни преводи припадају истој класи Бем-еквивалентних терама.

Пошто комбинатори Θ и Y имају исто Бемово дрво (видети тврђење ***4.6.10.*** и пример ***4.6.7.***), терми $\lambda x_1 \dots x_k. \Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0}$ и $\lambda x_1 \dots x_k.\ YW x_1 \dots x_k \mathbf{0}$ ће такође бити Бем-еквивалентни (видети тврђење ***4.6.11***). То значи да ће према тези ***4.6.16.*** та два терма изражавати једнаке процедуре израчунавања и према томе, имати исто значење. Ако $\lambda x_1 \dots x_k. \Theta W x_1 \dots x_k \mathbf{0}$ и $\lambda x_1 \dots x_k.\ YW x_1 \dots x_k \mathbf{0}$ имају исто значење, питање који од та два терма има исти смисао као и $Mn[\,f\,]\,(m_1, \dots, m_k)$ постаје тривијално. Одговор је: оба терма. Тако поменути проблем наизглед нестаје.

Међутим, теза ***4.6.17.*** се суочава са следећом потешкоћом. Она се тиче тога како разумемо значење рекурзије. Према тој тези, смисао $k+1$-арне рекурзивне функције $Pr[f, g](n, m_1, \dots, m_k)$ представљаће класа терама који имају исто Бемово дрво као и терм $\lambda u x_1 \dots x_k. R(F x_1 \dots x_k)(\lambda uv. v(KII) G uv x_1 \dots x_k) u$, под условом да су функције f и g директно дефинисане термима $F, G,$ и где је R комбинатор рекурзије кога смо дефинисали као $R \equiv \Theta(\lambda uxyz. Dx(y(Vz)(uxy(Vz)))z)$ (видети деф***. 4.4.16.***). Као што смо већ напоменули, комбинатор рекурзије могли смо такође да дефинишемо користећи се искључиво нормализабилним термима, без позивања на комбинаторе фиксне тачке [Hindley & Seldin 2008, theorem 4.11., (14)]. Међутим, та дефиниција комбинатора рекурзије имаће другачије Бемово дрво од терма $\Theta(\lambda uxyz. Dx(y(Vz)(uxy(Vz)))z)$. Поставља се питање која дефиниција комбинатора рекурзије од те две може боље да представи значење рекурзије као операције за грађење функција. Проблем је у томе што се чини да сама операција рекурзије не даје примат, барем не на очигледан начин, ни једној од тих различитих дефиниција. Наиме, чини се да ће сваки терм $\lambda u x_1 \dots x_k. R(F x_1 \dots x_k)(\lambda uv. v(KII) G uv x_1 \dots x_k) u$, где су f и g функције одговарајуће арности директно дефинисане термима $F, G,$ на подједнако добар начин представити интензију рекурзивне функције облика $Pr[f, g](n, m_1, \dots, m_k)$, све док је R комбинатор који задовољава наредне једнакости:

$$RLM\ulcorner 0 \urcorner =_\beta L$$

$$RLM\ulcorner n+1 \urcorner =_\beta M\ulcorner n \urcorner(RLM\ulcorner n \urcorner).$$

Као што смо видели, можемо на различите начине да дефинишемо комбинаторе рекурзије. Те дефиниције могу бити терми који нису једнаки не само у ламбда-бета рачуну, већ који немају ни исто Бемово дрво. Та чињеница нас наводи на закључак да ипак не можемо помирити становиште да алгоритам чини смисао рекурзивне функције са становиштем да алгоритам одређује класа бета-једнаких или Бем-еквивалентних ламбда терама. Тај проблем, дакле, нисмо у потпуности решили тиме што смо редефинисали релацију еквиваленције на ламбда термима у односу на коју одређујемо критеријуме једнакости за алгоритме.

Нови критеријуми једнакости који се заснивају на Бемовој еквиваленцији стварају и неке нове потешкоће које раније нису биле присутне. Наиме, реч је о томе што постоје ламбда терми који имају исто Бемово дрво, а који не могу на подједнако добар начин да представљају интензију неке рекурзивне функције. Објаснимо то на примеру. Као што смо већ напоменули, сваки комбинатор фиксне тачке има исто Бемово дрво јер сви комбинатори фиксне тачке имају исту идеализовану нормалну форму која изгледа овако: $\lambda x.x(x(x\ldots))$ (видети тврђење ***4.6.10.***). Међутим, неће сви ламбда терми T са Бемовим дрветом $BT(Y)$ бити и комбинатори фиксне тачке, јер не задовољавају сви једнакост $TN =_\beta N(TN)$. Један пример таквог комбинатора је терм $BM(B(BM)B)$, где је $\mathrm{B} = \lambda xyz.x(yz)$, и $M = \lambda x.xx$ [Statman, 1993, p. 442]. Терми који имају Бемово дрво као комбинатори фиксне тачке, али нису комбинатори фиксне тачке се истражују у раду [Goldberg, 2005]. Тамо се зову *строго нестандардн им комбинаторима фиксне тачке* (енг. *strictly non-standard fixed point combinators*). Ми ћемо их овде назвати комбинаторима *квази-фиксне тачке.*

Комбинатори квази фиксне тачке имају исти рачунски садржај као и комбинатори фиксне тачке. Помоћу њих можемо дефинисати операторе рекурзије и минимизације у ламбда рачуну на сличан начин како то можемо учинити помоћу комбинатора Θ или Y. Показали смо како се рекурзивна функција $h\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ облика $Pr[f,g](n,m_{1,},..,m_k)$ може дефинисати термом $\lambda ux_1 \ldots x_k.R(Fx_1 \ldots x_k)(\lambda uv.v(KII)Guvx_1 \ldots x_k)u$, где су $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ дефинисане термима F и G. Ако у терму $R \equiv \Theta(\lambda uxyz.Dx(y(Vz)(uxy(Vz)))z)$ комбинатор Θ заменимо са $BM(B(BM)B)$ добићемо комбинатор R^* такав да $\lambda ux_1..x_k.R^*\,(Fx_1..x_k)(\lambda uv.v(KII)Guvx_1..x_k)u$ такође λ-дефинише функцију h. Терми $\lambda ux_1..x_k.R\ (Fx_1..x_k)(\lambda uv.v(KII)Guvx_1..x_k)u$ и $\lambda ux_1..x_k.R^*\,(Fx_1..x_k)(\lambda uv.v(KII)Guvx_1..x_k)u$ нису бета једнаки, и према критеријумима за једнакост алгоритама који се заснивају на бета једнакости неће представљати једнаке процедуре израчунавања. Са друге стране, ова два терма имају исто Бемово дрво. Они су Бем-еквивалентни и према критеријумима једнакости алгоритама који се заснивају на Бем-еквиваленцији та два терма представљају једнаке процедуре израчунавања.

Међутим, не мислим да би било оправдано рећи да R^* и R имају исто значење и да терми $\lambda u x_1 .. x_k . R^* \, (F x_1 .. x_k)(\lambda u v . v (KII) G u v x_1 .. x_k) u$ и $\lambda u x_1 .. x_k . R (F x_1 .. x_k)(\lambda u v . v (KII) G u v x_1 .. x_k) u$ подједнако верно описују смисао рекурзивне функције $Pr[f, g](n, m_{1,}, .., m_k)$. Разлог лежи у следећем. Наиме, комбинатор рекурзије смо неформално одредили као комбинатор који задовољава наредне једнакости.

$RLM\ulcorner 0 \urcorner \; =_\beta \; L$

$RLM\ulcorner n+1 \urcorner =_\beta M\ulcorner n \urcorner (RLM\ulcorner n \urcorner)$.

Тиме смо задали једну рекурзивну дефиницију која треба да одређује то шта рекурзија као операција ради. Смисао те операције на функцијама је, грубо говорећи, да примену функције на веће бројеве одредимо позивајући се на то како се *та функција* примењује на мање бројеве. Док наш комбинатор R како смо га дефинисали задовољава ту дефиницију, комбинатор R^* је строго говорећи не задовољава, јер

$$R^* LM\ulcorner n+1 \urcorner \neq_\beta M\ulcorner n \urcorner (R^* LM\ulcorner n \urcorner).$$

Из тог разлога, не можемо рећи да комбинатор $\boldsymbol{R}^*$ има исто значење као и комбинатор рекурзије и да $\lambda u x_1 .. x_k . R^* \, (F x_1 .. x_k)(\lambda u v . v (KII) G u v x_1 .. x_k) u$ изражава исти смисао као и $Pr[f, g](n, m_{1,}, .., m_k)$.

У овом и претходном одељку покушали смо да одговоримо на питање у чему се састоји интензија или смисао рекурзивне функције. Изнели смо предлог да је смисао рекурзивне функције алгоритам, и да је алгоритам представљен класом бета-једнаких ламбда терама. То становиште наишло је на извесне проблеме. Због тога смо, у покушају да исте отклонимо, у шестом одељку овог поглавља испитивали нову тезу да се једнакост интензија рекурзивних функција сведе на једнакост Бемових дрвета одговарајућих ламбда терама којима те функције представљамо. Указали смо на предности, али и мане тог предлога. Закључили смо да се проблем синонимности рекурзивних функција не може на потпуно задовољавајући начин свести како на питање бета-једнакости тако ни на питање Бем-еквиваленције одређених ламбда терама.

Поставља се питање како бисмо тај проблем уопште могли решити. На њега на жалост немамо потпун одговор. Чини се да смисао или интензија дефиниције рекурзивне функције не одређује јединствену процедуру израчунавања, већ *скуп* процедура које нису строго говорећи *једнаке,* али све имплементирају ту дефиницију рекурзивне функције. Примера ради, можемо рећи да свака процедура израчунавања представљена термом $\lambda x_1 \dots x_n . \Phi W x_1 \dots x_n \mathbf{0}$, где је Φ комбинатор фиксне тачке, а W одређено као раније, имплементира рекурзивну функцију $Mn[\, f \,]\ (x_1, \dots, x_n)$. Такође, можемо рећи да свака процедура представљена термом $\lambda u x_1 .. x_k . R(F x_1 .. x_k)(\lambda uv. v(KII)Guvx_1 .. x_k)u$, где је R рекурзивни комбинатор имплементира $Pr[f, g](n, x_1, \dots, x_k)$, под претпоставком да су функције f и g имплементиране на одговарајући начин термима F и G. У складу са овим, интензију рекурзивне функције више не бисмо посматрали као јединствену процедуру израчунавања, већ као скуп процедура које ту функцију имплементирају на одређени, задовољавајући начин. Према том схватању, рекурзивна функција не би одређивала алгоритам већ нешто општије од тога.

4.6.2. Екстензионализација значења несводивих терама

У овом одељку вратићемо се проблему једнакости алгоритама и упоређивању различитих критеријума једнакости. Већ смо представили критеријуме који се заснивају на једнакости Бемових дрвета ламбда терама. У наставку, желимо да говоримо о још једном аспекту ових критеријума који до сада нисмо имали прилику детаљно да размотримо.

Видели смо да је ламбда теорија генерисана релацијом Бемове еквиваленције интензионална, јер се једнакост терама одређује у односу на појам рачунског садржаја и не своди се на екстензионалну једнакост. Шта више, та теорија је *максимална* интензионална ламбда теорија. Њено проширење новим једнакостима имало за последицу да у тој теорији мора да важи и η једнакост [Bucciarelli & Salibra, 2008]. [77]

[77] До сада смо о η једнакости говорили као о једнакости која у екстензионализује појам правила израчунавања. Међутим, овде би требало напоменути да $\lambda_{\beta\eta}$ није у потпуности екстензионална теорија у том смислу што се критеријуми једнакости алгоритама који би били засновани на $\lambda_{\beta\eta}$ не своде на екстензионалну једнакост функција. Ламбда теорија у којој је то случај је приказана у [Barendregt 1984, одељак 16], видети такође [Bucciarelli & Salibra, 2008].

Међутим, иако ламбда теорија генерисана релацијом Бемове еквиваленције није екстензионална, постоје и неки њени аспекти који нису у потпуности складу са схватањем терама као правила израчунавања. Наиме, ова теорија припада групи ламбда теорија које овде називамо *С-теоријама.* С-теорије (енг. *sensible theories*) су ламбда теорије у којима се изједначавају сви терми без чеоне нормалне форме. [78] Изједначавање несводивих терама овде проистиче из претпоставке да смисао терма јесте његов рачунски садржај. Видели смо у одељку 4.4. да терме без чеоне нормалне форме можемо схватити као недефинисане вредности функција, или као функције које нису дефинисане ни за један аргумент. У том смислу, несводиви терми поседују *недостатак* рачунског садржаја, помоћу њих не можемо ништа израчунати. Захваљујући томе, можемо рећи да су рачунски бесмислени и изједначити их. Тако је у ламбда теорији која се заснива на једнакости Бемових дрвета значење терама без чеоне нормалне форме *екстензионализовано.* Заборављамо сама правила која несводиви терми изражавају, а њихово значење одређујемо у односу на резултате њихове примене, или другим речима, у односу на то шта помоћу њих можемо или не можемо израчунати.

Ово гледиште је у потпуности оправдано ако функције разумемо у њиховој екстензији. Јер ако функције схватимо екстензионало, сваке две празне функције истог типа су једнаке. Међутим, ако функције посматрамо у њиховој интензији, дакле не као скупове уређених парова аргумената и вредности, већ као *правила* израчунавања, ништа нас не обавезује да прихватимо ту позицију. Две процедуре које нису у стању да произведу решење ни за један унос не морају се састојати из истих правила.

Овде се може поставити питање како процедуре израчунавања које не дају решење можемо уопште назвати процедурама? Размотримо наредни пример. Имамо парцијалну функцију дефинисану као $Mn\big[Cn\ [\pi_1^2, s, \pi_1^1\ ]\big](m)$: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ где је s функција следбеника, а π_1^2 и π_1^1 означавају одговарајуће пројекције. Вредност од $Mn\big[Cn\ [\pi_1^2, s, \pi_1^1\ ]\big](m)$ треба да буде најмањи број n за који функција $Cn\ [\pi_1^2, s, \pi_1^1\ ](n, m) = \pi_1^2(s(n),\ m\ )$ даје вредност 0. Међутим, једноставно је видети да такав број не постоји, јер $\pi_1^2(s(n),\ m\ ) =\ s(n) \neq 0$ за свако n и за свако m. Дакле, вредност рекурзивне функције $Mn[\pi_1^2(s(n),\ m)]$ биће недефинисана за произвољан природан број. Ипак, то не значи да се израчунавање вредности те функције не одвија сходно одређеним правилима. Та правила нам налажу да прво израчунамо

[78] Придев *sensible* у буквалном преводу значи *разуман, рационалан*.

вредност од $\pi_1^2(s(0),\ m)$ и проверимо да ли је она једнака 0. Ако није, правила нам налажу да израчунамо вредност од $\pi_1^2(s(1),\ m)$, па онда да проверимо да ли је она једнака 0, и тако даље док не дођемо до решења.

Уопште, када говоримо о процедурама које не дају решење ни за један аргумент просто имамо у виду низ правила израчунавања или инструкција према којима би се израчунавање функције као што је $Mn\big[Cn\,[\pi_1^2, s, \pi_1^1\,]\big](m)$ могло одвијати. Иако такве процедуре за израчунавање нису много корисне, тешко је рећи да су правила из којих се оне састоје строго говорећи бесмислена, јер њима се смислено користимо и када израчунавамо вредности других рекурзивних функција дефинисаних помоћу минимизације.

Као што смо рекли, несводиви терми су они који ламбда-дефинишу функције као што је $Mn\big[Cn\,[\pi_1^2, s, \pi_1^1\,]\big](m)$ и помоћу њих представљамо правила односно процедуре према којима се такве функције израчунавају. Иако можемо рећи да свака два несводива терма имају исти рачунски садржај као и $Mn\big[Cn\,[\pi_1^2, s, \pi_1^1\,]\big](m)$, није сасвим коректно рећи да произвољан несводив терм представља *процедуру* израчунавања функције $Mn\big[Cn\,[\pi_1^2, s, \pi_1^1\,]\big](m)$ коју смо горе описали. Та процедура је много верније изражена термом $\lambda x_1.\theta W x_1 \mathbf{0}$ (где је W одређено као и раније, а P је терм који ламбда-дефинише функцију $Cn\,[\pi_1^2, s, \pi_1^1\,](n, m))$ који представља директан превод од $Mn\big[Cn\,[\pi_1^2, s, \pi_1^1\,]\big](m)$, него термом као што је Ω, који се своди искључиво на самог себе.

Дакле, C-теорије као што је теорија заснована на еквиваленцији Бемових дрвета, поседују једну екстензионалну компоненту која није присутна у λ_β, а то је изједначавање свих несводивих терама. У раду [Berarducci, 1994] такође се критикује становиште да све несводиве терме треба изједначити, зато што тиме занемарујемо њихову интензионалну односно „унутрашњу“ структуру. Аутор заступа становиште да постоје несводиви терми без унутрашње структуре које можемо узети за потпуно бесмислене, али разматра позицију да би скуп тих терама требало ограничити на прави подскуп несводивих терама, као што су *прости терми* (енг. *easy terms*) или *нулти терми* (енг. *zero terms*).

Наиме, *нулти терми* су они ламбда терми који се не могу свести на терм облика $\lambda x.M$. Неки примери нултих терама су Ω, ΩI и Ω_3. Терми који нису нулти, али су несводиви, су на пример $\lambda x.\Omega$ или $\lambda x.(\lambda y.yyx)(\lambda y.yyx)$. Поставља се питање због чега би само нулте несводиве терме, али не и остале несводиве терме требало сматрати бесмисленима? Узмимо на пример, $\lambda x.\Omega$ који није нулти терм. Разлика између $\lambda x.\Omega$ и Ω лежи у томе што први испуњава један од нужних услова да представља функцију која може бити смислено примењена на неки аргумент, а то је да почиње ламбда апстракцијом.

Класа простих терама је још ужа од класе нултих терама. Она представља њен прави подскуп. Прости терми су они терми који се могу конзистентно изједначити са било којим затвореним ламбда термом, видети [Jacopini, Venturini Zilli, 1985]. То није случај са свим несводивим или чак свим нултим термима. Пример простог терма је Ω, док ΩI рецимо то није. Чињеница да се прости терми могу конзистентно изједначити са било којим затвореним термом се узима као аргумент за то да ови терми можемо сматрати бесмисленима. Наиме, претпоставка је да се недостатак њиховог значења огледа управо у томе што прости терм, такорећи, може попримити значење било којег другог терма.

У [Berarducci, 1994] изложени су аргументи који сугеришу да се не могу ни сви прости терми узети као строго говорећи бесмислени. Један аргумент почива томе да не можемо све просте терме изједначити међусобно, видети [Intrigila, 1991]. Из тог разлога, у раду [Berarducci, 1994] аутор заступа позицију да скуп бесмислених терама треба ограничити на скуп *празних* (*mute*) терама. Празни терми су прости терми који се сви могу истовремено конзистентно изједначити са било којим другим затвореним термом.

Овде се нећемо бавити тиме како најбоље описати скуп рачунски бесмислених терама. Али питање које нас занима јесте можемо ли да пронађемо неке нове (нетривијалне) једнакости између несводивих терама које се не би сводиле ни на бета ни на ета једнакости, и које би биле утемељене на интензионалној структури несводивих терама. Да бисмо прецизније одредили и јасније разумели појам интензионалне структуре несводивог терма послужићемо се појмом графа бета-редукције (енг. *beta reduction graph*) који ћемо дефинисати у наредном одељку.

4.7. Графови бета-редукције

Граф бета редукције ламбда терма је појам значајан за изучавање својстава и понашања терама ламбда рачуна. Њиме се представљају начини нормализације неког терма. Бемово дрво терма M може се реконструисати из графа бета редукције од M, али не и обрнуто, граф бета редукције терма M не може се конструисати из $BT(M)$. У ономе што следи увешћемо прво дефиницију графова бета редукције преузету из [Venturini Zilli, 1984, p. 253, def. 2.1.]. Потом ћемо разматрати неке од примера графова бета редукције и испитаћемо корелације између неких својстава самих графова и својстава терама који су тим графовима представљени.

Деф. 4.7.1. *Граф редукције (или граф бета-редукције)* терма T, је граф $G(T)$ који описује структуру коју формирају све бета редукције које потичу из терма T. Темена овог графа биће обележена ламбда термима, односно представницима класа алфа конгруентних терама, на које се терм T редукује, а свака стрелица ће представљати један корак у бета редукцији. Да изразимо то формалније, $G(T)$ је граф редукције акко:

1) M означава теме од $G(T)$ акко $T \twoheadrightarrow_\beta M$,
2) Ако су M_1, M_2 ознаке различитих темена у G, онда $M_1 \not\equiv_\alpha M_2$,
3) За $n \geq 1$, n стрелица спаја теме M_1 са теменом M_2, са могућношћу да $M_1 = M_2$, ако и само ако се M_2 може добити из M_1 редукцијом n јављања редекса у M_1.

Последња ставка у овој дефиницији односи се на то да стрелице у графу редукције које представљају редукцију у једном кораку можемо замислити као индексиране јављањима редекса који ову редукцију производе. Због тога што сваки ламбда терм може садржати само коначан број јављања бета редекса, свако теме у графу редукције G може бити извор само коначно много стрелица.

Због овог и још неких других ограничења која одређују структуру графа редукције, а која се помињу у [Venturini Zilli, 1984, p. 255], јасно је да се не може сваки усмерени граф G обележити ламбда термима на такав начин да G представља граф редукције за неки терм T. Та ограничења произилазе како из специфичне синтаксне грађе ламбда терама, тако и из специфичних својстава бета-редукције, и овде ћемо поменути само неке од њих.

На пример, због Черч-Росерове теореме за бета редукцију (видети теорему ***4.3.4.1.***), не постоје ламбда терми T_1, T_2, T_3, такви да граф наредног облика може да буде граф редукције.

$$\begin{tikzcd} & T_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T_2 & & T_3 \end{tikzcd}$$

Такође, на основу *Леме паралелних потеза* (*The parallel moves lemma*), видети [Curry & Feys, 1958], знамо да граф бета редукције (са $n \ \geq 1$ стрелица из T_1 у N) не може бити ни следећег облика:

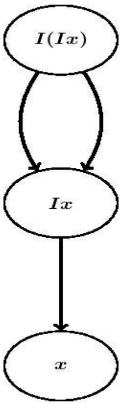
$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift right=2] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d, phantom, "\cdots"] & T_2 \arrow[l, shift right] \\ N & \end{tikzcd}$$

Наиме, лема паралелних потеза имплицира да мора постојати редекс у T_2 који производи стрелицу чији је извор T_2, а чија ће мета бити N.

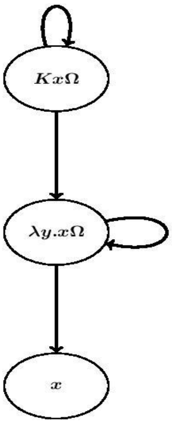
Да бисмо се боље упознали са појмом графа редукције који ће за нас овде бити важан, у наставку ћемо навести неке примере. Напоменимо да ће симбол ω означавати ламбда терм $\lambda x.xx$, симбол ω_3 ламбда терм $\lambda x.xxx$, док ознаке Ω, Ω_3 користимо као и раније: $\Omega \equiv \omega\omega$, $\Omega_3 \equiv \omega_3\omega_3$. Ознаке K и I користимо да означимо одговарајуће комбинаторе опет као и раније.

Примери. 4.7.2.

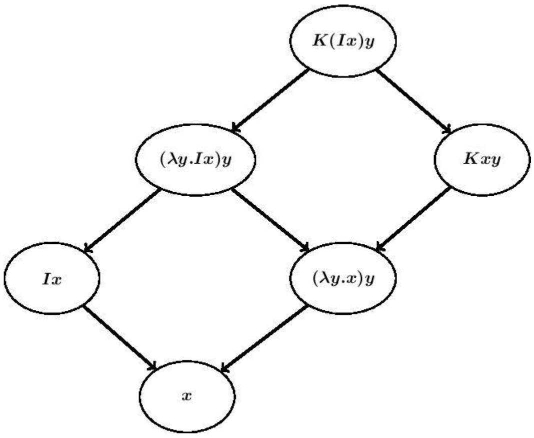
(a) $G\ (I(Ix))$



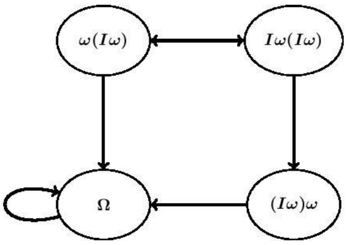
(b) $G(Kx\Omega)$



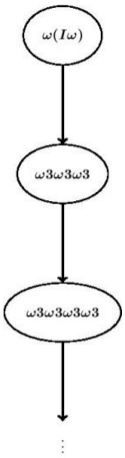
(c) $G(K(Ix)y)$



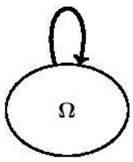
(d) $G(\omega(I\omega))$



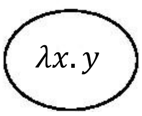
(e) $G(\Omega_3)$



(f) $G(\Omega)$



(g) $G(\lambda x.y)$



Помоћу појма графа редукције можемо изразити одређена својства ламбда терама. Да бисмо то учинили, треба прво да дефинишемо неке појмове и горе дати примери ће нам помоћи да те појмове боље разумемо.

У графу $G(T)$ теме означено са T називаћемо *првим теменом*. Као у [Venturini Zilli, 1984, p. 253], теме B назваћемо *следбеником* темена A ако постоји стрелица чији је извор у A а мета у B. Приметимо да A може имати више од једног следбеника (када A садржи више од једног јављања бета редекса), као у примеру ***4.7.2.c.***, где су и $(\lambda y.Ix)y$ и Kxy следбеници темена обележеног са $K(Ix)y$. Такође, теме може бити без иједног следбеника, као у графу у примеру ***4.7.2.g.*** где постоји само једно теме које нема следбеника. Као у примерима ***4.7.2.*** (b), (d), (f), теме T може бити и следбеник самог себе што се у графу представља малом кружном стрелицом око T. Кружне стрелице са извором и метом у A зваћемо *локнама* (*loops*).

Деф. 4.7.4. Као у [Venturini Zilli, 1984, def. 3.1.], граф редукције зваћемо *линеарним* акко сваки чвор има највише једног следбеника. У примерима **4.7.2.,** линерани графови су обележени словима (a), (e), (f), (g). Приметимо да граф (b) није линеаран зато што $Kx\Omega$ има два следбеника, самог себе и $\lambda y.x\Omega$.

Рећи ћемо да је граф *локално линеаран* ако за сваки чвор постоји највише једна стрелица која у њему почиње. Очигледно, сваки локално линеарни граф је линеаран али не и обрнуто. На пример, граф ***4.7.2.a*** је линеаран, али не и локално линеаран.

Деф. 4.7.5. Теме A у графу G зваћемо *псеудо-коначним* ако A није следбеник ниједног темена M у G таквог да $A \neq M$. Теме ћемо звати *коначним* ако нема следбеника. У примерима ***4.7.2.*** графови који имају коначна темена су (a), (b), (c), и (g). У графовима (d) и (f) теме обележено са Ω је само псеудо-коначно, али не и коначно, пошто је само свој следбеник. Приметимо да граф (e) не садржи коначно као ни псеудо-коначно теме.

Сада ћемо дефинисати појам *путање* у графу редукције.

Деф. 4.7.6. *Коначна путања* у графу G је коначан низ темена и стрелица тога графа који почиње и завршава се у теменима. Дакле, коначна путања у графу G је:

$$T_1 \to_1 T_2 \to_2 T_3 \dots \; T_{k-1} \to_{l-1} T_k \to_l T_{k+1}$$

где $k \geq 2,$ и $l \geq 1$, и сва темена и стрелице из те путање су у графу G.

На пример, $K(Ix)y \longrightarrow Kxy \longrightarrow (\lambda y.x)y$ је коначна путања у ***4.7.2.c***. Први члан коначне путање назваћемо њеним *почетком*, а последњи њеним *крајем*.

Не претпостављамо да сва темена у путањи морају бити различита. Па је најкраћа путања и најпростија коначна путања облика $T_1 \rightarrow T_2$, где $T_1 = T_2$, као у примерима ***4.7.2.,*** у графовима (f), (d), (e).

Теме B се може досегнути или је *достиживо* из темена A акко постоји коначна путања са почетком у A и крајем у B. За теме A кажемо да је *крајње-теме* у G ако је достиживо из свих темена M графа G, таквих да $M \neq A$. Напоменимо и да је теме A крајњи чвор у $G(T)$ ако и само ако је A *минимална форма* од T у смислу у којем се тај појам дефинише у [Böhm & Micali, 1980]. Лако је показати да постоји коначна путања од темена A до темена B у неком графу само ако се ламбда терм A може бета редуковати на B и $A \not\equiv B$.

Појам коначне путање се може проширити, па тако можемо дефинисати и бесконачне путање. Бесконачна путања у графу G је *бесконачан низ*

$$T_1 \rightarrow_1 T_2 \rightarrow_2 T_3 \dots \; T_{k-1} \rightarrow_{l-1} T_k \rightarrow_l T_{k+1} \dots$$

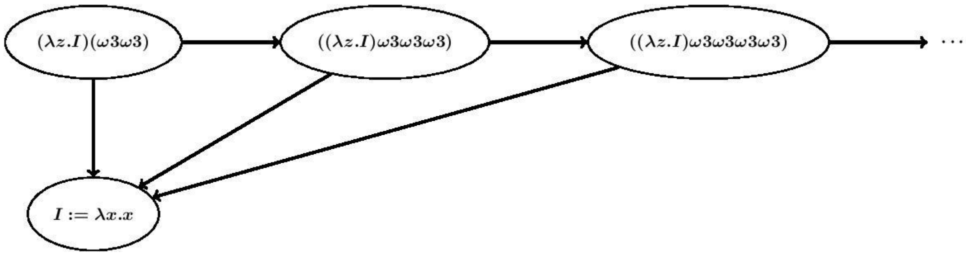
такав да је свако теме T_i и свака стрелица $T_i \rightarrow_j T_{i+1}$ који припадају том низу, јесу стрелице и темена графа G. Допуштено је да за неко m и неко k такве да $m < k$, $T_k = T_m$.

У примерима ***4.7.2.*** графови који имају бесконачне путање су (b), (d), (e), (f). Док у примеру (e) имамо бесконачну путању у којој је свако наредно теме различито од претходног, у графу (f) на пример налази се путања као што је: $\Omega \rightarrow \Omega \rightarrow \Omega$ ... која је такође бесконачна. Јасно је да ако граф садржи локну око темена A, имаће и бесконачну путању: $A \rightarrow_1 A \rightarrow_2 A \dots$.

Може се рећи да је граф *бесконачан* ако има бесконачну путању, и *коначан* ако не садржи такву путању. Уобичајено је, међутим, да се граф дефинише као коначан односно бесконачан на основу броја темена у њему, рецимо [Venturini Zilli, 1984, def. 2.1.], [Barendregt, 1984, section 3.1.]. Те две дефиниције очигледно нису еквивалентне. Према првој, у примерима ***4.7.2.*** графови (a), (c) и (g) ће да буду коначни, док ће остали бити бесконачни. Са друге стране, ако пођемо од друге дефиниције, сви осим графа (e) ће да буду коначни. У наставку ћемо се користити другом од ових двају дефиниција.

На примерима као што су (f) и (g) видимо да коначност графа $G(T)$ не имплицира да терм T има нормалну форму. Али, бесконачност графа $G(T)$ такође не значи да T нема нормалну форму, што се види на наредном примеру из [Barendregt, 1984, fact 3.1.23.]:

$$G((\lambda z.I)\Omega_3)$$



Ламбда терм $((\lambda z.I)\Omega_3)$ своди се на нормалну форму $\lambda x.x$ $(= I)$, али као што видимо, граф $G((\lambda z.I)\Omega 3)$ је бесконачан.

Дакле, коначност графа $G(T)$ не имплицира да терм T има нормалну форму, као ни обрнуто. Са друге стране, ако је T јако нормализабилан, знамо да ће $G(T)$ бити коначан [Barendregt, 1984, p. 57].

4.7.1. Графови редукције, нормалне форме и једнакост терама

Увели смо појам графа редукције и представили неке примере таквих графова. Сада је време да кажемо нешто више о томе шта нам својства графа редукције неког терма могу рећи о њему. У овом одељку бавићемо се везом између графа редукције неког терма и његове нормализабилности. Прво питање којим ћемо се бавити је постоје ли својства графа редукције $G(M)$, назовимо их P_1 и P_2 таква да:

- M има нормалну форму ако и само ако $G(M)$ има својство P_1 и
- M је јако нормализабилно ако и само ако $G(M)$ има својство P_2?

Да бисмо та својства прецизно одредили, потребно је прво да дефинишемо неке појмове.

Присетимо се да је теме B достиживо из темена A у графу G ако у G постоји коначна путања из A у B. Рећи ћемо да је теме A *почетак* или *почетно теме* у G ако је

A теме из којег су сва темена M у G, $M \neq A$ достижива. Лако је видети да је A почетак у $G(T)$ акко је T достиживо из A или $A = T$. Дакле, прво теме ће уједно бити и почетно (мада не нужно и обрнуто).

Псеудо-извор у G је теме A које није следбеник ниједног темена M у G које је различито од А. *Извор* је теме у G које није следбеник ниједног темена (укључујући и њега самог) у G. Лако је показати да ће у сваком графу редукције извор бити јединствен. Из примера ***4.7.2.***, сви графови осим (d) имају псеудо-извор, док само (a), (c), (e), (g) имају извор.

Теме A ћемо назвати *крајњим теменом* у G ако је достиживо из свих темена у G која су различита од A. Теме A ћемо назвати *псеудо-коначним теменом* у G A нема других следбеника осим себе. Теме A ћемо звати *коначним* ако нема следбеника.

Графови (a), (b), (c), (g) из примера ***4.7.2.*** имају коначно теме, док графови (d) и (f) имају псеудо-коначно теме али не и коначно теме.

Користећи се горе дефинисаним појмовима можемо формулисати следеће еквиваленције 1, 2 и 3, које ћемо у наставку звати тврђењима ***4.7.1.1., 4.7.1.2., 4.7.1.3.***:

1. Ламбда терм M је *у нормалној форми* ако и само ако $G(M)$ има само један чвор, који је уједно и извор и коначни чвор у исто време, означен са M.
2. Ламбда терм M има *нормалну форму* ако и само ако $G(M)$ има коначни чвор.
3. Ламбда терм M је *јако нормализабилан* ако и само ако су све путање у $G(M)$ коначне.

Доказ тврђења 4.7.1.1. Ако је M је у нормалној форми, онда неће постојати терм N такав да $M \longrightarrow_{\beta 1} N$, будући да M не садржи бета редекс. Према дефиницији графа редукције, из тога следи да ће граф $G(M)$ да се састоји из само једног чвора M и неће садржати ни једну стрелицу. Такође, ако је M уједно и извор и коначни чвор у исто време, M је у нормалној форми, јер у супротном, M би морало имати следбеника.

Доказ тврђења 4.7.1.2. Ако M има нормалну форму, следи да постоји терм N такав да $M \to_{\beta} N$ и N је у нормалној форми. Пошто је N у нормалној форми и према томе, не садржи бета-редексе, следи да N не може имати следбеника у $G(M)$. Из тога следи да $G(M)$ има коначно теме и то коначно теме је N. Са друге стране, ако претпоставимо да $G(M)$ има коначно теме N, следи да $M \longrightarrow_{\beta} N$, пошто је N теме у $G(M)$.

Пошто је N коначно, то значи да нема следбеника. Из тога следи да N не може да садржи бета-редекс. Дакле, N је нормална форма од M. На основу Черч-Росерове теореме за бета-редукцију која имплицира јединственост нормалних форми, следи и да ће коначна темена у графу бета редукције такође бити јединствена.

Доказ тврђења 4.7.1.3. Претпоставимо да је терм M јако нормализабилан. Следи да не постоји бесконачан низ бета-редукција које почињу у M. Претпоставимо да $G(M)$ садржи бесконачну путању. Онда можемо на основу те путање лако дефинисати бесконачан низ бета редукција које почињу у M. Дакле, $G(M)$ садржи само коначне путање ако је M јако нормализабилан. Такође, ако $G(M)$ садржи само коначне путање, онда не може ни да постоји бесконачна бета редукција која почиње у M. Јер, претпоставимо да таква редукција постоји. Онда бисмо на основу ње лако могли да конструишемо бесконачну путању у $G(M)$, што је према нашој претпоставци немогуће. Дакле, ако $G(M)$ не садржи бесконачну путању, M је јако нормализабилан терм. ■

Сада се питамо можемо ли да дефинишемо релацију еквиваленције R на скупу графова редукције такву да су $G(T)$ и $G(U)$ у тој релацији ако и само ако $T =_\beta U$? Одмах је јасно да та релација неће бити једнакост графова. Примера ради, може бити случај да T није у нормалној форми, а U јесте. У том случају граф $G(T)$ би садржао барем два темена и барем једну стрелицу између њих, док би се $G(U)$ састојао из само једног темена без стрелица. Релацију R можемо да дефинишемо на следећи начин:

Графови $G(M)$ и $G(N)$ су у релацији R ако и само ако $G(M)$ и $G(N)$ ***имају заједничко теме****.*

Лако је увидети да ова еквиваленција важи. Ако $M =_\beta N$, онда постоји терм L такав да $M \twoheadrightarrow_\beta L$ и $N \twoheadrightarrow_\beta L$. На основу дефиниције графа редукије, следи да ће L бити теме које припада како графу $G(M)$ тако и графу $G(N)$. Такође, ако постоји теме L које припада графу $G(M)$ и графу $G(N)$, из тога следи да $M \twoheadrightarrow_\beta L$ и $N \twoheadrightarrow_\beta L$ и према томе, $M =_\beta N$.

Међутим, проблем са овом дефиницијом релације R је у томе што на основу ње не можемо много да закључимо о *структури* графова који су у тој релацији, знамо само да они поседују заједничко теме. Из тог разлога релацију R ћемо да дефинишемо на други начин. Да бисмо то учинили, потребно је прво да уведемо појам *доњег подграфа*.

Нека је $Ar(G)$ скуп стрелица графа G, а $N(G)$ скуп темена од графа G. Кажемо да је F *подграф* од G ако су скупови темена графа F и скуп стрелица графа F подскупови од $N(G)$ и $Ar(G)$.

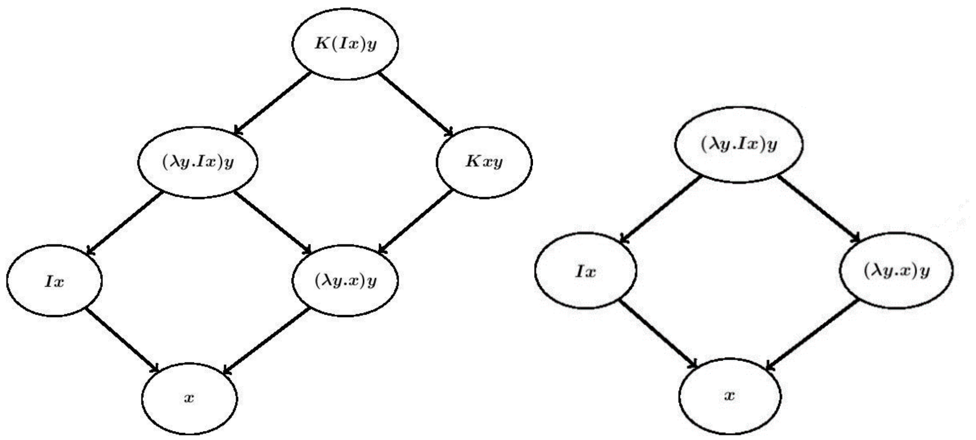
Деф. 4.7.1.7. F је *доњи подраф* од G ако је F непразни подграф од G и важи да:

- Ако је A теме из G такво да $A \in F$, онда за свако теме B, такво да је B следбеник A у G, B ће бити следбеник од A у F и
- Ако је A теме из G такво да $A \in F$, онда све стрелице f из G, које почињу из A ће такође бити и стрелице у F. [79]

На основу појма доњег подграфа можемо да дефинишемо следећу релацију међу графовима бета редукције.

Деф. 4.7.1.8. Кажемо да се граф редукције G своди на граф F, што записујемо као $G \to F$, ако је F доњи подграф од G.

У примеру доле, граф редукције $G((\lambda y.Ix)y)$ приказан са десне стране доњи је подграф графа редукције $G(K(Ix)y)$ приказаног са леве стране.



Користећи се релацијом свођења на скупу графова редукције можемо да дефинишемо релацију еквиваленције графова редукције.

[79] Празан граф ћемо схватити као граф са празним скупом темена. Празан подраф је подграф неког графа који је празан. Непразан граф је граф који није празан.

Деф. 4.7.1.9. Граф редукције $G(T_1)$ и граф редукције $G(T_1)$ зовемо *еквивалентним*, што записујемо као $G(T_1) \leftrightarrow G(T_1)$, ако постоји граф редукције $G(T_3)$, такав да $G(T_1) \rightarrow G(T_3)$ и $G(T_2) \rightarrow G(T_3)$.

Лако је видети да је тако дефинисана релација рефлексивна и симетрична. Да је релација такође и транзитивна следи из наредне теореме:

Теорема 4.7.1.10. $G(T_1) \leftrightarrow G(T_2)$ ако и само ако $T_1 =_\beta T_2$.

Доказ. Претпоставимо да $G(T_1) \leftrightarrow G(T_2)$. Према дефиницији **4.7.1.9.** следи да постоји терм T_3 такав да је граф редукције $G(T_3)$ доњи подграф од $G(T_1)$ и од $G(T_2)$. Тривијално следи да ће T_3 бити теме у $G(T_3)$. Пошто је према претпоставци $G(T_3)$ доњи пограф од $G(T_1), T_3$ ће такође бити теме у $G(T_1)$. Из тога следи, на основу дефиниције графа редукције, да $T_1 \longrightarrow_\beta T_3$. Слично резоновање показује да $T_2 \longrightarrow_\beta T_3$. Дакле, пошто се T_1 и T_2 редукују на исти терм, они ће бити једнаки, односно следи да $T_1 =_\beta T_2$.

Сада показујемо да важи и други смер еквиваленције. Претпоставимо да важи $T_1 =_\beta T_2$. Следи да постоји терм T_3, такав да $T_1 \longrightarrow_\beta T_3$ и $T_2 \longrightarrow_\beta T_3$. Треба показати да ће граф редукције $G(T_3)$ бити доњи подграф од $G(T_1)$ и од $G(T_2)$. Да је $G(T_3)$ подграф од $G(T_2)$ и $G(T_1)$ важи јер је према дефиницији графа редукције свако теме A које припада $G(T_3)$ такво је да $T_3 \longrightarrow_\beta A$, и пошто $T_1, T_2 \longrightarrow_\beta T_3$, следи да $T_1, T_2 \rightarrow_\beta A$. Према томе, A је теме које припада и графу од $G(T_1)$ и од $G(T_2)$. Такође, лако можемо показати за сваку стрелицу f која припада графу $G(T_3)$, да ће припадати и графовима $G(T_1)$ и $G(T_2)$.

Треба показати да је $G(T_3)$ *доњи* подграф од $G(T_1)$ и од $G(T_2)$, што подразумева да треба да покажемо следеће:

1. Ако је A теме из $G(T_1)$ такво да је A такође и теме из $G(T_3)$, онда за свако теме B, такво да је B следбеник A у $G(T_1)$, B ће бити следбеник од A у $G(T_3)$ и
2. Ако је A теме из $G(T_1)$ такво да је A такође и теме из $G(T_3)$, онда све стрелице f из $G(T_1)$, које почињу из A ће такође бити и стрелице у $G(T_3)$.

(исто треба показати и за $G(T_2)$.)

Прво показујемо да важи 1. Претпоставимо да $A \in G(T_3)$. Следи да $T_3 \longrightarrow_\beta A$. Пошто је B следбеник од A у $G(T_1)$, из тога можемо закључити да $A \longrightarrow_{\beta 1} B$. Према томе, $T_3 \longrightarrow_\beta B$ из чега следи да B припада $G(T_3)$, будући да је $G(T_3)$ граф редукције.

Сада показујемо да важи 2. Претпоставимо да $A \in G(T_3)$ и да је за неко теме X, $f: A \to X$ је стрелица у $G(T_1)$. То значи да се X добија контракцијом једног јављања бета редекса у A и да је X према томе следбеник од A. Дакле, према 1., $X \in G(T_3)$. Према дефиницији графова редукције следи да за сваку редукцију бета редекса из A која резултира у X, а према томе и за ону која је обележена стрелицом f у $G(T_1)$ постоји одговарајућа стрелица $g: A \to X$ која ту редукцију представља у $G(T_3)$. Стрелице f, g морају бити једнаке јер су истог типа и индексиране су истим јављањем редекса .

На сличан начин можемо показати да је $G(T_3)$ доњи подграф од $G(T_2)$. ■

Теоремом ***4.7.1.10.*** показали смо да су два графа редукције $G(T_1)$ и $G(T_2)$ еквивалентна ако и само ако су ламбда терми T_1 и T_2 једнаки. Ова јако проста теорема важна је за наше излагање из следећих разлога.

Увели смо појам графа редукције да бисмо формализовали појам *интензионалне структуре* ламбда терма. Дефинисали смо еквиваленцију графова као релацију која треба да представља једнакост интензионалних структура одговарајућих ламбда терама. Теоремом ***4.7.1.10.*** показали смо да еквиваленција графова почива на истој идеји нормализације као и једнакост терама у ламбда бета рачуну. Релација свођења графова показује шта се дешава са интензионалном структуром терма када га нормализујемо.

Међутим, може се приговорити да граф $G(M)$ није увек задовољавајућа репрезентација интензионалне *структуре* терма M. Наиме, када је M у нормалној форми, $G(M)$ се састоји само из једног темена и не садржи стрелице. Како такав граф који је наизглед без икакве структуре може да представи интензионалну структуру терма? На то се може одговорити да $G(M)$ није лишен структуре већ нам не може ништа више рећи о њој него што говори синтакса самог терма M. Пошто је M у нормалној форми, његова интензија је у потпуности описана његовом синтаксном.

4.7.2. Кружни графови

У овом одељку бавимо се неким интересантним врстама графова редукције и њиховим својствима. Да бисмо о њима говорили, прво ћемо дати дефиниције неких појмова преузетих из [Venturini Zilli, 1984, p. 253].

Коначну путању у графу редукције ћемо звати *затвореном* ако је прво теме исто као и последње теме у путањи. Граф G се назива *повезаним* када су свака два темена повезана путањом. *Компонента* (енг. *component*) од графа G је максимални повезани подграф од G.[80] Граф G се назива *јаком компонентом* (енг. *strong component*) ако су свака два темена међусобно достижива (за свака два темена A и B постоји коначна путања од A до B и путања од B до A).

Када смо рекли шта је јака компонента можемо да дефинишемо појам кружног графа.

Деф. 4.7.2.1. Граф G ћемо звати *кружним* ако је G јака компонента. *Луп граф* је кружни граф који има само један чвор и на њему једну локну. За ламбда терм ћемо рећи да је *кружан* ако је његов граф редукције кружни граф.

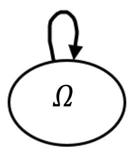
Приметимо да ће M бити кружни граф само ако за свако N такво да $M \longrightarrow_\beta N$, важи и $N \longrightarrow_\beta M$. То можемо лако и показати. Претпоставимо да $M \longrightarrow_\beta N$. Следи да је N теме графа редукције $G(M)$. Пошто је $G(M)$ према претпоставци кружни граф, следи да је $G(M)$ јака компонента. Дакле, постоји коначна путања од темена N до темена M. На основу те коначне путање, као што смо већ рекли, јасно је како можемо конструисати редукцију $N \longrightarrow_\beta M$.

Погледајмо сада неке примере кружних графова.

[80] Кажемо да је подграф макисмални повезани подграф у том смислу што ако бисмо га проширили са још неким теменом, он више не би био био повезан.

Примери. 4.7.2.2.

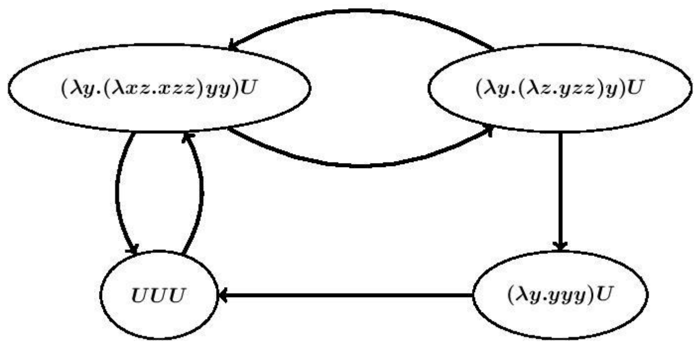
(1) $G(\Omega)$



(2) $G(\Omega\Omega)$

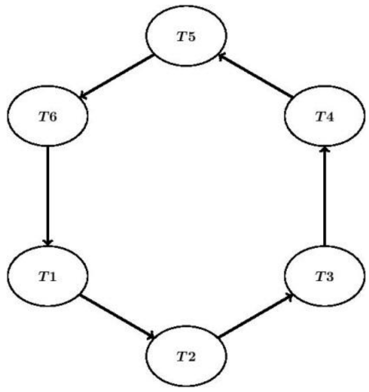
(3) $G(\ ((\lambda xy.xyy)\ \lambda xy.xyy)\ \lambda xy.xyy)$

(Нека $U \equiv \lambda xy.xyy$)



(4) $G(MMI)$

Нека $M \equiv \lambda xy.yyyyxxy$, $T_1 \equiv MMI$, $T_2 \equiv (\lambda y.yyyyMMy)I$, $T_3 \equiv IIIIMMI$, $T_4 \equiv IIIMMI$, $T_5 \equiv IIMMI$ и $T_6 \equiv IMMI$. Граф $G(MMI)$ ће изгледати овако:



У кружном графу из примера (4) горе имамо шест темена. Међутим, није тешко видети како бисмо могли за свако $n \geq 3$ конструисати терм чији би граф редукције био сличан графу $G(MMI)$ горе, само са n темена. Наиме, за $n \geq 3$, и за $M^n \equiv \lambda xy.y^{n-2}xxy$, терм $M^n M^n I$ производи кружни граф са n темена.

Помоћу примера ***4.7.2.2.*** горе илустроваћемо нека својства графова која ћемо у наставку да дефинишемо.

Као што смо већ поменули, граф називамо *линеарним* ако свако теме тога графа има највише једног следбеника. Граф називамо *локално линеарним* ако не може да постоји више од једне стрелице која почиње из једног темена. Графови (1), (2), (4) су линеарни док су само (1) и (4) локално линерални.

Деф. 4.7.2.3. Кружни граф редукције ћемо звати *чистим кружним графом* ако је линеарни граф који је уједно и јака компонента и *локално чистим кружним графом* ако је чист кружни граф који је и локално линеаран. Графови (1), (2), (4) из примера ***4.7.2.2.*** су чисти, док су само (1) и (4) локално чисти. Терм чији је граф чисти кружни граф односно локално чист кружни граф зваћемо *чистим кружним* односно *локално чистим кружним термом*.

Један интересантан пример кружног графа који налазимо у [Böhm & Micali, 1980] који није чист кружни граф је $G(HHI)$, где је $H := \lambda xy.x(yy)x$. Тај граф је интересантан због тога што је кружни граф који је уједно и бесконачан. Има бесконално много темена и из сваког темена постоји путања која се завршава у HHI. Могуће је показати, мада то овде нећемо чинити, да ако граф редукције има бесконачно много темена, не може бити чист кружни граф.

Терми који имају чисте кружне графове, и уопште кружне графове поседују следећу занимљиву особину.

Тврђење 4.7.2.4. Ако је M терм који има кружни граф, то ће бити и свако N такво да $M \longrightarrow_{\beta} N$. Шта више, имаћемо $G(M) = G(N)$.

Доказ. Два графа су једнака онда када имају исти скуп стрелица и исти скуп темена. Да је скуп стрелица односно темена графа $G(N)$ подскуп скупа стрелица односно темена графа $G(M)$ следи тривијално на основу тога што $M \longrightarrow_{\beta} N$. Међутим, није тешко показати и обратно. Па ћемо овде само показати да је скуп темена од $G(M)$ подскуп темена од $G(N)$. Претпоставили смо да $M \longrightarrow_{\beta} N$. Пошто је M кружни терм, следи да $N \longrightarrow_{\beta} M$. Претпоставимо да је A теме графа $G(M)$. Дакле, $M \longrightarrow_{\beta} A$. Пошто $N \longrightarrow_{\beta} M$ следи да $N \longrightarrow_{\beta} A$, па закључујемо да је A теме графа $G(N)$. Да свака стрелица која припада графу $G(M)$ припада и графу $G(N)$ следи на основу претходно показаног и претпоставке да је $G(N)$ граф редукције.

У овом одељку увели смо појам кружног графа и видели смо неке примере таквих графова. У наредном одељку рећи ћемо нешто више о термима који имају кружне графове и њиховом значењу.

4.7.3. Једнакости несводивих ламбда терама

У претходним одељцима увели смо и детаљније говорили о појму графа редукције. Показаћемо у наставку како нам тај појам може помоћи да боље разумемо смисао несводивих терама.

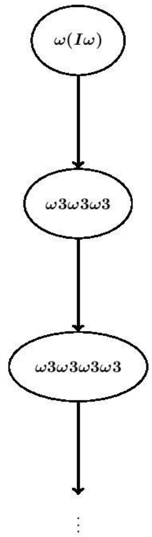
У ламбда рачуну, под смислом неког терма подразумевамо правило. Појам рачунског садржаја неког терма, као што смо рекли, више је у вези са тиме како тај терм можемо применити него што се тиче самог правила које он изражава и начина на које је оно формулисано. Идеја ламбда рачуна (првенствено ламбда-бета рачуна) је да разликујемо правила ако она одређују различите *начине* израчунавања, независно од тога *шта* њима можемо или не можемо израчунати и у чему резултира њихова примена. Из тог разлога, произвољни несводиви терми нису једнаки како у ламбда-бета рачуну, тако ни у ламбда-бета-ета рачуну.

Појам графа редукције можемо схватити као формализацију начина или структуре израчунавања коју одређује неко правило. Та формализација не узима у обзир рачунски садржај терма, већ само то на које све начине тај терм можемо нормализовати.

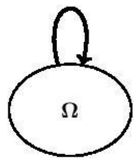
Као што смо показали теоремом ***4.7.1.10.***, критеријум једнакости правила израчунавања који се заснива на еквиваленцији графова редукције представља само другачији начин да формулишемо критеријум једнакости правила израчунавања који су засновани на бета-једнакости. Другим речима, том теоремом смо показали да су два графа редукције еквивалентна ако и само ако су терми које они представљају једнаки у ламбда-бета рачуну.

Сада ћемо покушати да објаснимо шта нам графови редукције још могу рећи о смислу односно о интензионалној структури несводивих терама, а што нисмо већ рекли до сада. Подсетимо се графова (e) и (f) из примера ***4.7.2.2.***

(e) $G(\Omega_3)$



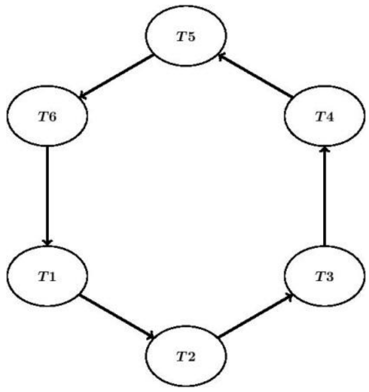
(f) $G(\Omega)$



Већ смо нагласили да λ_β није сензибилна теорија. Несводиви терми Ω и Ω_3 нису једнаки у ламбда-бета рачуну, а у примерима (e) и (f) горе можемо видети и како се њихови графови редукције $G(\Omega_3)$ и $G(\Omega)$, који немају заједнички доњи подграф разликују. Граф редукције $G(\Omega_3)$ представља један бесконачан линеарни и локално линерани граф који нема псеудо-коначни чвор. Са друге стране граф $G(\Omega)$ је циклични граф чији је псеудо-коначни чвор Ω. Графови редукиције $G(\Omega_3)$ и $G(\Omega)$ разликују се и по броју чворова. Први има бесконачно много чворова, док други има само један.

Разлике у тим графовима указују на разлике у значењу између терама Ω и Ω_3. Први терм се редукује само на себе, други не. Може се рећи да $G(\Omega)$ описује израчунавање које одређује једна једина инструкција и чији се смисао састоји у кружењу. Инструкција се извршава изнова и изнова и израчунавање односно нормализација никад не напредује – увек се враћамо назад на почетну тачку. Са друге стране, $G(\Omega_3)$ описује израчунавање које није кружно – никада се не враћамо се на почетну тачку. Али, оно напредује само привидно јер се у сваком кораку инструкција коју треба извршити се све више и више усложњава.

Посматрајмо сада терм MMI ($M \equiv \lambda xy.yyyyxxy$) и његов граф редукције из примера ***4.7.2.9.*** (4) горе. Да се подсетимо, $G(MMI)$ изгледа овако.



Граф $G(MMI)$ је као и $G(\Omega)$ чист, локално линеарни кружни граф. Терми Ω и MMI се дакле редукују сами на себе. Први у једном кораку, а други у шест корака.

Ако граф редукције неког терма описује његов смисао, онда се смисао терма MMI састоји у кружењу израчунавања. То је израчунавање које се никад не завршава и никад не напредује, већ се увек враћа на почетак. Идеја израчунавања у којем је крајња тачка уједно и почетна чини се заједничком термима Ω и MMI, само што је она у Ω изражена на једноставнији начин, без сувишних корака.

Када смо раније говорили о нормализацији и о једнакостима између терама које се на њој заснивају, рекли смо да се нормализација терма може посматрати као покушај да се исто правило израчунавања формулише на једноставнији начин. Имајући то у виду, зар терм Ω не бисмо могли посматрати као некакву нормализацију терма MMI? Идеја тог новог начина нормализације проистиче из становишта да је сам број корака ирелеватан ако је циљ израчунавања враћање тамо одакле смо почели.

Следећи ту идеју, у наставку ћемо да разматрамо једнакости између ламбда терама које би изједначавале терме као што су Ω и MMI. Да бисмо то учинили, прво ћемо да дефинишемо појам Ω-*редекса* (*омега-редекса*).

Деф. 4.7.3.1. Ламбда терм M ћемо назвати Ω-редексом ако је:

1) M је затворени несводиви терм чији је граф редукције локално чист кружни граф,
2) $M \not\equiv \Omega$, и
3) не постоји прави подтерм N од M који је локално чист кружни терм.

Напоменимо да се дата дефиниција омега-редекса разликује од схватања омега-редекса која је дата у [Barendregt, 1984, section 15.2.]. Тамо се омега-редексом назива сваки несводиви терм. У наставку ћемо под појмом омега-редекса подразумевати терм одређен дефиницијом ***4.7.3.1.,*** уколико другачије није експлицитно назначено.

Важно је напоменути да омега-редекси имају следећу особину.

Тврђење 4.7.3.2. Ако је O омега-редекс, сваки терм на који се O редукује мора да има тачно једно јављање бета-редекса.

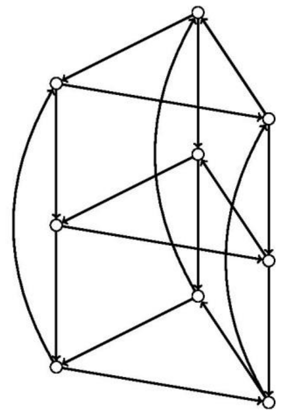
Доказ. Прво ћемо показати да ако је O омега-редекс, сваки терм на који се O редукује мора да има највише једно јављање бета-редекса. Претпоставимо да $O \longrightarrow_{\beta} P$ и да у P имамо два јављања истог бета редекса или два различита бета редекса. Из тога следи, на основу дефиниције графа редукције, да теме означено термом P у графу редукције $G(O)$ има две стрелице са извором у темену P. Међутим, то значи да $G(O)$ није локално чист кружни граф, што противречи претпоставци да је O омега-редекс. Дакле, P садржи највише једно јављање бета-редекса. Због тога што је O несводив, следи да свако P садржи тачно једно јављање бета-редекса. ∎

Означимо са $\lambda_{\beta\Omega}$ рачун једнакости λ_{β} проширен са свим једнакостима облика: $M = \Omega$, где је M омега-редекс, као његовим аксиомама. Поставља се питање, да ли је $\lambda_{\beta\Omega}$ конзистентан? Конзистеност следи на основу тога што су омега-редекси несводиви терми, а све једнакости између несводивих терама конзистентне су са λ_{β} [Barendregt, 1984, section 16].

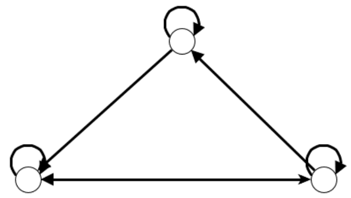
Као пример терама који су међусобно једнаки у $\lambda_{\beta\Omega}$ али не и у λ_{β} можемо навести следећа три терма: $(MMI_3)MMI_3$, $(MMI_3)\Omega$ и $\Omega\Omega$. Ова три терма су не само омега-једнака, већ се први омега-редукује на други, који се омега-редукује на трећи. У наставку ћемо да прикажемо њихове графове редукије (без обележених темена).

Пример 4.7.3.3.

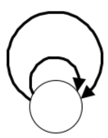
$G((MMI_3)MMI_3)$



$G\big(\Omega(MMI3)\big)$



$G(\Omega\Omega)$



Сада ћемо да говоримо мало о значењима једнакости као што су $(MMI_3)MMI_3 = (MMI_3)\Omega = \Omega\Omega$. Желимо да показажемо да су оне као и једнакости у λ_β такође засноване на идеји нормализације, само је нормализација о којој је реч мало другачије природе.

4.7.4. Бета-омега редукција и Черч-Росерова теорема

У овом одељку прво ћемо да дефинишемо појам *омега-редукције* по угледу на дефиницију појма бета-редукције, а онда и појам бета-омега редукције.

Кажемо да се терм U се Ω-*редукције у једном кораку* на терм T, што записујемо као $U \longrightarrow_{\Omega 1} T$, ако је U облика $C[M]$, где је M омега-редекс, а T је облика $C[\Omega]$. Примера ради, $K(MMI) \longrightarrow_{\Omega 1} K(\Omega)$.

Деф. 4.7.4.1. Писаћемо $T \overrightarrow{\equiv}_{\Omega 1,\alpha} U$ када будемо желели да кажемо да $T \longrightarrow_{\Omega 1} U$ или $T \equiv_\alpha U$. Терм M се Ω-*редукује* (*омега-редукује*) на N, што записујемо као $M \longrightarrow_\Omega N$, ако $M \equiv M_0 \overrightarrow{\equiv}_{\Omega 1,\alpha} M_1 \overrightarrow{\equiv}_{\Omega 1,\alpha} \dots \overrightarrow{\equiv}_{\Omega 1,\alpha} M_n \equiv N$, за $n \geq 0$. Другим речима, важи $M \longrightarrow_\Omega N$ ако се N може добити из M низом примена Ω-редукција односно α-конверзија.

Приметимо да се појам омега-редукције како смо га овде дефинисали разликује у односу на омега-редукцију дефинисану у [Barendregt, 1984, p. 72].

Сада ћемо да дефинишемо бета-омега редукцију.

Деф. 4.7.4.2. Писаћемо $T \overrightarrow{\equiv}_{\Omega 1\beta 1,\alpha} U$ када будемо желели да кажемо да $T \longrightarrow_{\Omega 1} U$ или $T \longrightarrow_{\beta 1} U$ $T \equiv_\alpha U$. Терм M се *бета-омега-редукује* на терм N, што записујемо као $M \longrightarrow_{\Omega\beta} N$, ако важи: $M \equiv M_0 \overrightarrow{\equiv}_{\Omega 1\beta 1,\alpha} M_1 \overrightarrow{\equiv}_{\Omega 1\beta 1,\alpha} \dots \overrightarrow{\equiv}_{\Omega 1\beta 1,\alpha} M_n \equiv N$, за $n \geq 0$. Другим речима ако постоји низ од $n \geq 0$ редукција (односно алфа-конверзија) који почиње у M и завршава се у N, таквих да сваки корак у низу представља један корак у бета-редукцији или у омега-редукцији (са могућим алфа-конверзијама).

Деф. 4.7.4.3. Терме M и N називамо *бета-омега еквивалентнима*, што записујемо као $M \longleftrightarrow_{\beta\Omega} N$ ако

$M \equiv M_0 \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha,\Omega} M_1 \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha,\Omega} M_2 \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha,\Omega} \dots \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha,\Omega} M_{n-1} \leftrightarrows_{\beta 1,\alpha,\Omega} M_n \equiv N$, за $n \geq 0$.

Једноставно је показати да $M \leftrightarrow_{\beta\Omega} N$ ако и само ако $\lambda_{\beta\Omega} \vdash M =_{\beta\Omega} N$. Као у доказу тврђења ***4.3.3.16***, смер са десна на лево се доказује индукцијом по сложености доказа у $\lambda_{\beta\Omega}$, а смер са лева на десно се доказује индукцијом по комплексности дефиниције релације $\leftrightarrow_{\beta\Omega}$.

Да су два терма *бета-омега еквивалентна* само ако се бета-омега редукују на заједнички терм показаћемо помоћу теореме коју ћемо назвати *Черч-Росерова теорема за бета-омега редукцију*. Та теорема гласи:

Теорема 4.7.4.4. (Черч-Росерова теорема за бета-омега редукцију). Ако $M \twoheadrightarrow_{\beta\Omega} N_1$ и $M \twoheadrightarrow_{\beta\Omega} N_2$, онда постоји терм L, такав да $N_1, N_2 \twoheadrightarrow_{\beta\Omega} L$.

Значај ове теореме састоји се у томе што желимо да покажемо како се бета-омега еквиваленција као и бета-еквиваленција терама заснива на појму нормализације. Другим речима, хоћемо да покажемо да ће два терма бити једнака у $\lambda_{\beta\Omega}$ само ако се редукују на исти терм. У остатку овог одељка увешћемо дефиниције и представити резултате који су потребни да би се та теорема доказала.

Прво ћемо да се присетимо појма ламбда контекста којег смо одредили на следећи начин (деф. ***4.3.3.1.***):

1) x је контекст,
2) [ ] је контекст (који називамо “празнином”),
3) Ако су $C_1[\,]$ и $C_2[\,]$ контексти, онда је и $C_1[\,]\, C_2[\,]$, а то је и $\lambda x.\, C_1[\,]$.

Одређујемо појам *арности* ламбда контекста C као број јављања празнина у C. Примера ради, $\lambda x. xy[]$ је контекст арности 1. Са друге стране, $(\lambda x. xy[])\, zz[]$ је контекст арности 2. Ламбда терме можемо посматрати као нуларне контексте. Да је C контекст арности n писаћемо као $C[]_1 \dots []_n$.

Треба напоменути да се у $C[]_1 \dots []_n$ свакој празнини приписује одређен број. Узећемо да су празнине нумерисане са лева на десно у односу на њихово јављање у терму. Дакле, крајња лева празнина биће означена бројем 1, друга до ње бројем 2 и тако даље. $C[]_1 \dots [M]_i \dots []_n$, $n \geq i \geq 1$, означава да је у контексту $C[]_1 \dots []_n$ i-та празнина попуњена термом M. Тако, $C[]_1[x]_2$ означава да је у неком бинарном контексту $C[]_1[]_2$ друга празнина попуњена променљивом x, док $C[x]_1[]_2$ означава да је у контексту $C[]_1[]_2$ прва празнина попуњена променљивом x. Примера ради, ако је контекст

$(\lambda x.xy[])\, zz[]$ облика $C[]_1[]_2$ онда је контекст $(\lambda x.xy[])\, zz[x]$ облика $C[]_1[x]_2$. Треба напоменути да се и $C[x]_1[]_2$ и $C[]_1[x]_2$ посматрају као унарни контексти.

Када је реч о бинарним контекстима, означавања празнина можемо изоставити и $C[]_1[]_2$ можемо краће записати као $C[]\,[]$.

Када смо одредили појам n-арног контекста, дефинисаћемо појам дисјунктних терама.

Назовимо два ламбда терма A, B *дисјунктним* ако ни A није подтерм од B ни B није потерм од A.

Нека су A, B подтерми од M. Кажемо да у M постоје *дисјунктна јављања* A и B ако су A и B дисјунктни терми или постоје контексти $C[], C'[]$ такви да $C[A] = M$, $C'[B] = M$, а $C'[] \neq C[]$. [81] Примера ради, у терму $M \equiv (\lambda x.xyK)\, zzK$, прво и друго јављање терма K су дисјунктна јављања, јер су контексти $(\lambda x.xy[])\, zzK$ и $(\lambda x.xyK)zz[]$ очигледно различити.

Тврђење 4.7.4.5. Ако у M постоје дисјунктна јављања A и B и дати су контексти $C[], C'[]$ такви да $C[A] = M$, $C'[B] = M$, онда постоји бинарни контекст $C^*[][]$ такав да:

1. $M \equiv C^*[A][B]$ и
2. $C[] = C^*[][B]$ и
3. $C'[] = C^*[A][]$

   Или
4. $M \equiv C^*[B][A]$ и
5. $C[] = C^*[B][]$ и
6. $C'[] = C^*[][A]$.

Доказ. Индукцијом по сложености M.

■

Користећи се тврђењем **4.7.4.5.** доказаћемо наредну лему.

Лема 4.7.4.6. Ако $M \longrightarrow_{\Omega 1} N_1$ и $M \longrightarrow_{\Omega 1} N_2$, онда постоји терм T, такав да $N_1, N_2 \longrightarrow_{\Omega} T$, у 1 кораку или мање.

[81] Упоредити са дефиницијом дисјунктних јављања подтерама датом у [Barendregt, 1984, p. 25].

Доказ.

Претпоставимо да $M \ \longrightarrow_{\Omega 1} N_1$ и $M \ \longrightarrow_{\Omega 1} N_2$.

Пошто, $M \ \longrightarrow_{\Omega 1} N_1$, према дефиницији омега-редукције следи да $M \equiv \ C[A]$, где је A омега-редекс и $N_1 \equiv \ C[\Omega]$.

Такође, пошто $M \ \longrightarrow_{\Omega 1} N_2$, следи да $M \equiv C'[B]$, где је B омега-редекс, $N_2 \equiv \ C'[\Omega]$.

Ако $N_1 \equiv N_2$, или $N_1 \equiv \ M$ или $N_2 \equiv \ M$, онда закључак тривијално следи.

Претпоставимо дакле да су N_1 и N_2 синтаксно различити терми. Из тога следи да се омега-редекси A и B морају у M јављати дисјунктно.

На основу тврђења ***4.7.4.5.*** следи да постоји бинарни контекст $C^*[][]$ такав да

1. $M \equiv \ C^*[A][B]$ и
2. $C[] = C^*[][B]$ и
3. $C'[] \ = \ C^*[A][]$

   Или
4. $M \equiv \ C^*[B][A]$ и
5. $C[] = C^*[B][]$ и
6. $C'[] \ = \ C^*[][A]$.

Претпоставићемо први дисјункт. Из њега следи да $N_1 = C^*[\Omega][B]$ и $N_2 = C^*[A][\Omega]$. Тражени терм T онда можемо дефинисати као $C^*[\Omega][\Omega]$. И закључак непосредно следи.

Исти закључак на сличан начин изводимо полазећи и од другог дисјункта. ■

Помоћу леме ***4.7.4.6.*** доказаћемо наредну лему:

Лема 4.7.4.7. За свако $n \geq 0$, ако $M \ \longrightarrow_{\Omega 1} N_1$ и $M \ \longrightarrow_{\Omega n} N_2$, онда постоји терм T, такав да $N_1 \longrightarrow_{\Omega} T$ у не више него n корака, а $N_2 \longrightarrow_{\Omega} T$ у не више од 1 корака.

Доказ. За $n = 0$ закључак следи тривијално. јер $M \equiv N_2$, па онда $T \equiv N_1$. За $n \geq 1$ лему ћемо доказати индукцијом по n.

<u>База индукције: $n = 1$.</u>

Следи из леме ***4.7.4.6.***

<u>Индуктивни корак: $n \ > 1$.</u>

Претпоставимо да $M \longrightarrow_{\Omega 1} N_1$ и $M \longrightarrow_{\Omega n+1} N_2$. Следи да постоји терм O такав да $M \longrightarrow_{\Omega n} O$ и $O \longrightarrow_{\Omega 1} N_2$. Према индуктивној хипотези постоји терм P такав да $N_1 \longrightarrow_{\Omega} P$ у не више него n корака $O \longrightarrow_{\Omega} P$ у не више од 1 корака. Дакле, $O \equiv P$ или $O \longrightarrow_{\Omega 1} P$. Ако $O \equiv P$ онда закључак тривијално следи јер $T \equiv N_2$. Ако $O \longrightarrow_{\Omega 1} P$, онда према леми ***4.7.4.6.*** следи да постоји терм Q такав да $P \longrightarrow_{\Omega} Q$ у једном кораку или мање и $N_2 \longrightarrow_{\Omega} Q$ у једном кораку или мање. Лако је видети да је терм Q терм T који смо тражили.

■

Остаје нам још да формулишемо и докажемо још једну лему, користећи се лемама које смо доказали до сада.

Лема 4.7.4.8. За свако $k \geq 0$, ако $M \longrightarrow_{\Omega k} N_1$ и $M \longrightarrow_{\Omega n} N_2$, онда постоји терм T, такав да $N_1 \longrightarrow_{\Omega} T$, у не више него n корака, а $N_2 \longrightarrow_{\Omega} T$ у не више од k корака.

Доказ. Лему ћемо доказати индукцијом по k служећи се лемом ***4.7.4.7.***.

■

На основу леме ***4.7.4.8.*** можемо да закључимо како Черч-Росерово својство важи за омега-редукцију. Другим речима, важи наредна теорема:

Теорема 4.7.4.9. (Черч-Росерова теорема за омега редукцију). Ако $M \longrightarrow_{\Omega} N_1$ и $M \longrightarrow_{\Omega} N_2$, онда постоји терм T, такав да $N_{1,} N_2 \longrightarrow_{\Omega} T$.

Доказ. Директно из леме ***4.7.4.8***..

■

Овом теоремом показали смо да Черч-Росерово својство важи за омега редукцију. У ономе што следи, приказаћемо скицу доказа који показује да Черч-Росерово својство такође важи за бета-омега редукцију, односно да важи наредна теорема:

Теорема 4.7.4.10. (Черч-Росерова теорема за бета-омега редукцију). Ако $M \rightarrow_{\beta\Omega} N_1$ и $M \rightarrow_{\beta\Omega} N_2$, онда постоји терм L, такав да $N_1, N_2 \rightarrow_{\beta\Omega} L$.

Доказ. Цео доказ ове теореме овде нећемо приказивати, али ћемо идеју на којој се он заснива приказати у кратким цртама, а детаље доказа читалац може наћи у додатку.

Идеја овог доказа представљена је следећом сликом ***4.7.3.16.***.

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{M} \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{N_2} \arrow[d] \\
M' \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[d] \\
\boldsymbol{N_1} \arrow[r] & A_3 \arrow[r] & \boldsymbol{L}
\end{tikzcd}
$$

Стрелице обојене плавом бојом означавају омега-редукцију, док оне означене црном означавају бета редукцију.

Претпоставимо да $M \longrightarrow_{\beta\Omega} N_1$ и $M \longrightarrow_{\beta\Omega} N_2$. Последица леме 15.2.6. из [Barendregt, 1984] је да се омега-редукција увек може извршити након бета-редукције. Другим речима, $M \longrightarrow_{\beta\Omega} N$ само ако постоји терм T такав да $M \longrightarrow_{\beta} T \longrightarrow_{\Omega} N$. На основу тога можемо да закључимо да постоје терми M', M'' са слике горе.

Постојање терма A_1 гарантовано је Черч-Росеровом теоремом за бета-редукцију.

Постојање A_2 и A_3 гарантује следећа теорема чији се доказ налази у Додатку 1.

Теорема. 4.7.4.11. Ако $M \longrightarrow_{\Omega} N$ и $M \longrightarrow_{\beta} N'$, онда постоји ламбда терм T такав да $N \longrightarrow_{\beta} T$ и $N' \longrightarrow_{\Omega} T$.

И на крају, постојање терма L следи на основу Черч-Росерове теореме за омега-редукцију коју смо горе доказали.

■

Черч-Росерова теорема за бета-омега редукцију гарантује нам да једнакости у $\lambda_{\beta\Omega}$ можемо да посматрамо као једнакости засноване на једној врсти нормализације. Овај проширени појам нормализације не почива само на бета-нормализацији, већ и на нормализацији локално чистих кружних терама која се састоји у смањењу броја корака у одређеним кружним израчунавањима. Као што смо већ напоменули, идеја на којој она почива јесте да је број корака ирелеватан када је једини смисао израчунавања враћање у почетну тачку.

У одељцима који су претходили, видели смо да несводиви терми могу да представе недефинисане вредности функција. Међутим, покушали смо да укажемо на то како може постојати и више начина на које функција може бити недефинисана, ако фукције схватимо интензионално. То схватање је у духу ламбда рачуна у којем смисао терма представља правило које можемо да раздвојимо од његовог рачунског садржаја.

Поставили смо питање која правила израчунавања која имају празан рачунски садржај можемо изједначити? Према критеријуму који нам пружа ламбда-бета рачун, само она која се нормализацијом могу довести до исте синтаксне форме, односно која представљају бета-једнаки терми. Овде смо покушали да предложимо и неке нове једнакости између несводивих терама које се заснивају на нормализацији одређених кружних правила израчунавања. Те нове једнакости назвали смо омега-једнакостима.

У овом поглављу дали смо одређење појма алгоритма користећи се формалним средствима које нам пружа ламбда рачун. Показали смо како питање једнакости алгоритама можемо да формулишемо као питање о једнакости одговарајућих терама у ламбда рачуну. Разматрали смо различите критеријуме једнакости. Видели смо да се једни у правом смислу речи *заснивају* на идеји нормализације. Реч је о критеријумима једнакости које пружа рачун λ_β. Са друге стране, критеријуми који проистичу из једнакости Бемових дрвета, су само блиско повезани са нормализацијом, али се првенствено заснивају на појму рачунског садржаја. Једнакости ламбда терама у $\lambda_{\beta\Omega}$ налазе се негде између. Са једне стране, оне су утемељене на идеји да нормализација неког терма чува његов смисао. По томе су врло блиски једнакостима заснованим на λ_β. Али, појам нормализације је у $\lambda_{\beta\Omega}$ мало проширен. Наиме, она не обухвата само бета-нормализацију, већ и нормализацију која је везана за једну класу несводивих ламбда терама које смо овде назвали *локално чистим кружним термима*. По томе што се неки несводиви терми који нису бета-једнаки могу изједначити, бета-омега једнакост донекле наликује једнакости која се заснива на Бемовим дрветима. Међутим, он ће се и значајно разликује по томе што једнакости између несводивих терама у $\lambda_{\beta\Omega}$ нису екстензионализоване.

Закључак

Главни циљ овог рада био је да разјаснимо у чему се састоји интензионални приступ значењу, да покажемо како се тај приступ примењује на неке конкретне проблеме у логици и математици и које користи тамо доноси. У другом поглављу бавили смо се проблемом одређења појма доказа и једнакости доказа у општој теорији доказа. Видели смо због чега је у тој теорији интензионални приступ не само користан, већ и неопходан да бисмо се бавили поменутим проблемом.

Други циљ овог рада био је да кроз интензионални приступ покушамо да пружимо једну карактеризацију појма који је такође од велике важности за логику. Реч је о појму алгоритма. У трећем поглављу изнели смо проблем одређења алгоритма и покушали смо да објаснимо због чега је тај проблем значајан. У остатку тог поглавља представили смо и критички разматрали Московакисово одређење алгоритма које се заснива на појму рекурзора. Посебну смо пажњу посветили критеријума једнакости за алгоритме који су утемељени на појму изоморфизма рекурзора. Закључили смо ово поглавље са тиме да Московакисови критеријуми једнакости алгоритама, иако теоријски интересантни и вероватно врло практично значајни, занемарују неке важне интензионалне аспекте тог појма.

У поглављу 4 изнели смо анализу појма алгоритма која се заснива на ламбда рачуну. Представили смо резултате о ламбда-дефинабилности рекурзивних функција и предложили схватање према којем се алгоритам који израчунава неку рекурзивну функцију може представити одговарајућим термом који ту функцију ламбда-дефинише. Ова анализа појма алгоритама има ту предност што проблем једнакости алгоритама може да сведе на питање једнакости одговарајућих ламбда терама који их представљају. На тај начин, добијамо критеријум једнакости алгоритама који се заснива на нормализацији. Као што смо видели та нормализација је исте врсте као нормализација доказа о којој смо говорили у поглављу 2. Ова чињеница може се посматрати као аргумент у прилог овом критеријуму једнакости, посебно имајући у виду блиску повезаност између појма доказа и појма алгоритма.

Осим поменутих, разматрали смо и још неке интензионалне критеријуме једнакости за алгоритме које можемо формулисати унутар ламбда рачуна. Први је заснован на једнакости Бемових дрвета терама, а други на бета-омега једнакости коју смо у овом раду дефинисали.

Разлог због којег смо одабрали ламбда рачун као формални оквир унутар којег можемо да говоримо о алгоритмима потиче првенствено и, чини се, природно из идеје на којој се ламбда рачун заснива, а то је схватање појма функције у њеној *интензији*. У овом раду нисмо настојали да покажемо како ламбда рачун представља у практичном смислу оптималан оквир за изучавање алгоритама и њихових својстава. Оно што смо настојали да покажемо јесте да је ламбда рачун формални оквир који може помоћи бољем разумевању интензионалних аспеката овог појма као и проблема једнакости алгоритама.

Додатак

Овде ћемо дати доказ за теорему ***4.7.4.11.*** Да бисмо то учинили, доказаћемо прво неколико мањих лема и тврђења.

Тврђење 1. Ако је терм $(\lambda x. L)K$ омега-редекс, следи да ће то бити и терм L_K^x.

Доказ. Претпоставимо да је $(\lambda x. L)K$ омега-редекс. Према дефинцији омега-редекса (видети деф. ***4.7.3.1.***), $(\lambda x. L)K$ је затворени несводиви терм, па ће то бити и L_K^x. Према дефиницији ***4.7.3.1.***, $(\lambda x. L)K$ је и локално чист кружни терм. Тврђење ***4.7.2.4.*** гарантује нам да ће то бити и L_K^x. Да бисмо показали да је L_K^x омега-редекс, треба показати да $L_K^x \not\equiv \Omega$ и да не постоји прави подтерм B од L_K^x који је локално чист кружни терм.

Пошто $(\lambda x. L)K \longrightarrow_\beta L_K^x$ и $(\lambda x. L)K$ је кружни терм, следиће да $L_K^x \longrightarrow_\beta (\lambda x. L)K$. Пошто $(\lambda x. L)K \not\equiv \Omega$, онда $L_K^x \not\equiv \Omega$, јер се Ω редукује једино на самог себе. Треба још само показати да не постоји прави подтерм B од L_K^x који је локално чист кружни терм.

Претпоставимо супротно. Дакле, претпоставимо да L_K^x садржи као прави подтерм неки терм који је локално чист кружни терм. Назовимо га B.

Већ смо показали да је L_K^x несводиво. Према томе, L_K^x је облика $\lambda x_1 \dots x_n. (\lambda x. M_0)M_1 \dots M_m$, за $n \geq 0, m \geq 1$. Пошто је $(\lambda x. L)K$ кружни терм према претпоставци, следи да $L_K^x \longrightarrow_\beta (\lambda x. L)K$. То имплицира да L_K^x не може да почиње ламбда апстракцијом, будући да не почиње ни $(\lambda x. L)K$ на кога се L_K^x редукује. Дакле $L_K^x \equiv (\lambda x. M_0)M_1 \dots M_m$.

Претпоставимо да L_K^x садржи као прави подтерм неки затворени, несводиви терм који је уједно и локално чист кружни терм. Назовимо га B. Лако је видети да B не може да буде подтерм ниједног од $M_0, M_1, \dots, M_m$. Наиме, с обзиром да је B несводив терм, он садржи бета-редекс. Ако је B подтерм неког од $M_0, M_1, \dots, M_m$, онда се тај редекс налази у L_K^x. Међутим, у L_K^x већ имамо један редекс, а то је $(\lambda x. M_0)M_1$. Према тврђењу ***4.7.3.2.***, морамо имати тачно један редекс у сваком терму на који се омега-редекс $(\lambda x. L)K$ редукује. Па, можемо да закључимо како је редекс $(\lambda x. M_0)M_1$ једини редекс у L_K^x и он је уједно и редекс из B. Другим речима, $B \equiv (\lambda x. M_0)M_1 \dots M_l$, за $m \geq l \geq 1$, а $L_K^x \equiv$

$(\lambda x.M_0)M_1 \dots M_l M_{l+1} \dots\ M_{l+k}$, за $l + k = m$, односно $L_K^x \equiv BM_{l+1} \dots\ M_{l+k}$, где је свако $M_0, M_1, \dots, M_m$ у нормалној форми.

Пошто је B према претпоставци кружни терм који не почиње ламбда апстракцијом, он се не може сводити на терм који почиње ламбда апстракцијом. Наиме, ако $B \longrightarrow_\beta \lambda y.P$, онда $\lambda y.P \longrightarrow_\beta B$, јер је B кружни терм. Међутим, то значи да B мора бити облика $\lambda y.O$, тако да $P \longrightarrow_\beta O$, што противречи томе да $B\ \equiv (\lambda x.M_0)M_1 \dots M_l$.

Пошто се B не своди на терм који почиње ламбда апстракцијом, онда је сваки терм O такав да $L_K^x \equiv BM_{l+1} \dots\ M_{l+k} \longrightarrow_\beta\ O$, облика $B'M_{l+1} \dots\ M_{l+k}$, $B \longrightarrow_\beta B'$. Из тога следи да је и $(\lambda x.L)K$ облика $B'M_{l+1} \dots\ M_{l+k}$, јер $L_K^x \longrightarrow_\beta (\lambda x.L)K$. Међутим, да би важило $(\lambda x.L)K \equiv B'M_{l+1} \dots\ M_{l+k}$, онда $l = 1, k = 0$ и дакле, $(\lambda x.L)K \equiv B'$. Из тога следи да $L_K^x \equiv\ B$, што противречи претпоставци да је B прави подтерм од L_K^x.

Дакле, L_K^x не садржи B као прави подтерм. Показали смо да он представља затворени несводиви терм чији ће граф редукције бити једнак графу редукције од A, и разликује се од Ω, па следи да L_K^x сам представља омега-редекс.

■

Користећи се тврђењем 1 чији смо доказ дали, доказаћемо наредну лему.

Нека да $N \longrightarrow_{\beta\leq 1} T$ значи да се терм да се терм N бета-редукује на терм да T у једном кораку или мање.

Лема 1. Ако $M\ \longrightarrow_{\Omega 1} N$ и $M\ \longrightarrow_{\beta 1} N'$, онда постоји ламбда терм T такав да $N \longrightarrow_{\beta\leq 1} T$ и $N' \longrightarrow_{\Omega} T$.

Доказ. Према претпоставци $M\ \longrightarrow_{\beta 1} N'$, па $M \equiv C[(\lambda x.L)K]$, а $N' \equiv\ C[L_K^x]$. Терм $(\lambda x.L)K$ ћемо назвати бета-редексом од M. Такође $M\ \longrightarrow_{\Omega 1} N$, па $M \equiv C'[A]$, где је A омега-редекс, а $N' \equiv\ C'[\Omega]$. Терм A ћемо назвати омега-редексом од M. У односу на то где се $(\lambda x.L)K$ и A налазе у M разликоваћемо 4 случаја.

Случај 1: A је подтерм од L.

Дакле, имамо да $M \equiv C[(\lambda x.L[A])K]$, а $N' \equiv\ C[(L[A])_K^x]$. Такође имамо да $N \equiv C[(\lambda x.L[\Omega])K]$. Терм T такав да $N \longrightarrow_{\beta\leq 1} T$ и $N' \longrightarrow_{\Omega} T$онда можемо да дефинишемо на следећи начин. $T \equiv C[(L[\Omega])_K^x]$. Очигледно је да $N \longrightarrow_{\beta 1} T$. Пошто је A према претпоставци затворен терм (сви омега-редекси су), онда можемо да закључимо и да $N' \longrightarrow_{\Omega} T$.

Случај 2: A је подтерм од K.

Дакле, имамо да $M \equiv C[(\lambda x.L)K[A]]$, а $N' \equiv C\left[L^{x}_{K[A]}\right]$. Такође имамо да $N \equiv C[(\lambda x.L)K[\Omega]]$. Терм T такав $N \longrightarrow_{\beta\leq 1} T$ и $N' \longrightarrow_{\Omega} T$ онда можемо да дефинишемо на следећи начин $T \equiv C\left[L^{x}_{K[\Omega]}\right]$. Очигледно је да $N \longrightarrow_{\beta 1} T$. Међутим, не следи да $N' \longrightarrow_{\Omega 1} T$, јер се слободна променљива x у L може јављати више пута. Ипак, лако можемо показати да $N' \longrightarrow_{\Omega} T$ у n корака, где је n број јављања слободне променљиве x у L.

Случај 3: Бета-редекс $(\lambda x.L)K$ и омега-редекс A се у M јављају дисјунктно.

Терм M је облика $C\,[A]\,[(\lambda x.L)K]$ или облика $C\,[(\lambda x.L)K]\,[A]$, где је C бинарни контекст. Претпоставимо да је терм M облика $C\,[A]\,[(\lambda x.L)K]$. Терм N' ће онда бити облика $C\,[A]\,[L^{x}_{K}]$, а $N \equiv C\,[\Omega]\,[(\lambda x.L)K]$ (видети тврђење ***4.7.4.5.***). Терм T онда можемо да дефинишемо на следећи начин $T \equiv C\,[\Omega]\,[L^{x}_{K}]$. На основу тврђења ***4.7.4.5.*** и дефиниција омега и бета-редукције лако се види да $N \longrightarrow_{\beta 1} T$ и $N' \longrightarrow_{\Omega} T$.

Случај 4: Бета-редекс $(\lambda x.L)K$ јесте уједно и омега-редекс A.

У том случају $M \equiv C[(\lambda x.L)K]$, $N \equiv C\,[\Omega]$, а $N' \equiv C[L^{x}_{K}]$. Терм T који тражимо је онда терм N, односно $T \equiv C\,[\Omega]$. Очигледно је да $N \longrightarrow_{\beta\leq 1} T$, јер се сваки терм бета-редукује сам на себе у 0 корака (према дефиницији бета-редукције). На основу тврђења 1 које смо доказали изнад, следи да ће L^{x}_{K} бити омега-редекс, с обзиром да је то терм $(\lambda x.L)K$. Онда је лако видети да имамо $N' \equiv C[L^{x}_{K}] \longrightarrow_{\Omega} T \equiv C\,[\Omega]$.

■

Овом лемом ћемо се служити да докажемо наредно тврђење које смо назвали лемом 2. Оно гласи:

Лема 2. Ако $M \longrightarrow_{\Omega n} N$ и $M \longrightarrow_{\beta 1} N'$, онда постоји ламбда терм T такав да $N \longrightarrow_{\beta\leq 1} T$ и $N' \longrightarrow_{\Omega} T$.

Доказ. Ову лему ћемо доказати индукцијом по n. База ове индукције следи из леме 1 коју смо доказали горе. Сада ћемо доказати индуктивни корак. Претпоставићемо да импликација важи за омега редукцију дужине n, а доказаћемо да важи за омега редукцију дужине $n+1$.

Нека $M \longrightarrow_{\Omega n+1} N$ и $M \longrightarrow_{\beta 1} N'$. Следи да постоји терм O такав да $M \longrightarrow_{\Omega n} O$ и $O \longrightarrow_{\Omega 1} N$. Према индуктивној хипотези, постоји терм P такав да $O \longrightarrow_{\beta \leq 1} P$ и $N' \longrightarrow_{\Omega} P$. Дакле, $O \longrightarrow_{\Omega 1} N$ и $O \longrightarrow_{\beta \leq 1} P$. Разликоваћемо два случаја, први где $O \longrightarrow_{\beta 1} P$ и други где $O \equiv P$. Претпоставимо да $O \longrightarrow_{\beta 1} P$. Према леми 1 следи да постоји терм Q такав да $N \longrightarrow_{\beta \leq 1} Q$ и $P \longrightarrow_{\Omega} Q$. Пошто $N' \longrightarrow_{\Omega} P$, следи да $N' \longrightarrow_{\Omega} Q$. Дакле, терм Q је наше T које смо тражили. Ако претпоставимо $O \equiv P$, онда је наше T које смо тражили терм N.

■

Лема 3. Ако $M \longrightarrow_{\Omega n} N$ и $M \longrightarrow_{\beta k} N'$, онда постоји ламбда терм T такав да $N \longrightarrow_{\beta \leq k} T$ и $N' \longrightarrow_{\Omega} T$.

Доказ. Ову лему ћемо доказати индукцијом по k. Базу индукције смо већ доказали дајући доказ леме 2. Сада ћемо доказати индуктивни корак. Претпоставићемо да импликација важи за бета-редукцију дужине k, а доказаћемо да важи за омега редукцију дужине $k+1$.

Нека $M \longrightarrow_{\Omega n} N$ и $M \longrightarrow_{\beta k+1} N'$. Следи да постоји терм S такав да $M \longrightarrow_{\beta k} S$ и $S \longrightarrow_{\beta 1} N'$. Према индуктивној хипотези, постоји терм P такав да $N \longrightarrow_{\beta \leq k} P$ и $S \longrightarrow_{\Omega} P$. Дакле, $S \longrightarrow_{\Omega} P$ и $S \longrightarrow_{\beta 1} N'$. На основу леме 2 следи да постоји терм Q такав да $N' \longrightarrow_{\Omega} Q$ и $P \longrightarrow_{\beta \leq 1} Q$. Пошто $N \longrightarrow_{\beta \leq k} P$ и $P \longrightarrow_{\beta \leq 1} Q$ следи да $N \longrightarrow_{\beta \leq k+1} Q$. Пошто имамо и $N' \longrightarrow_{\Omega} Q$ можемо да закључимо како је Q терм Т који смо тражили.

■

Сада можемо још једном да формулишемо теорему ***4.7.4.11.*** Она гласи:

Теорема 4.7.4.11. Ако $M \longrightarrow_{\Omega} N$ и $M \longrightarrow_{\beta} N'$, онда постоји ламбда терм T такав да $N \longrightarrow_{\beta} T$ и $N' \longrightarrow_{\Omega} T$.

Доказ ове теореме следи директно из леме 3.

■

Библиографија

Ackermann, W., (1928), "Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen" *Mathematische Annalen*, Vol. 99, pp. 118–133.

Amadio, R. M. & Curien, P., (1996), *Domains and Lambda-Calculi*, Cambridge University Press, New York.

Barendregt, H.P., (1984), *The lambda calculus: its syntax and semantics*, Elsevier Science, Amsterdam.

Berarducci, A. & Intrigila, B., (1993), "Some new results on easy lambda-terms", *Theoretical Computer Science*, Vol. 121, pp. 71-88.

Berarducci, A., (1994), "Infinite λ-calculus and non-sensible models", in: Ursini A., Aglianó P. (eds), 1996, *Logic and algebra*, Routledge, Boca Raton pp. 339-377.

Berarducci, A. & Dezani-Ciancaglini, M., (1999), "Infinite λ-calculus and types", *Theoretical Computer Science*, Vol. 212, pp. 29-75.

Blass, A., Derschowitz, N., & Gurevich, Y., (2009), "When are two algorithms the same", *Bulletin of symbolic logic*, Vol.15, No. 2, pp. 145-168.

Böhm, C. & Micali, S., (1980), "Minimal forms in λ-Calculus Computations", *The Journal of Symbolic Logic*, Vol. 45, No. 1, pp. 165-171.

Boolos, G., Burgess, J., Jeffrey, R., (2002), *Computability and Logic*, Cambridge University Press, New York.

Bucciarelli, A. & Salibra, A., (2008), "Graph Lambda theories", *Mathematical Structures in Computer Science*, Vol. 18, No. 5, pp. 975-1004.

Buss, S., Kechris, A., Pillay, A. & Shore, R., (2001), "The prospects for mathematical logic in the twenty-first century," *Bull. Symbolic Logic*, Vol. 7, pp. 169–196.

Cardone, F. & Hindley, R. J., (2006), "History of lambda-calculus and combinatory logic", published as: "Lambda-calculus and combinators in the 20th century" in: Gabbay, D.M., Woods, J. (eds.), 2009, *Handbook of the history of logic*, Vol. 5, pp. 723-817.

Church, A., (1932), "A set of postulates for the foundations of logic", *Ann. Of Math.* Vol. 2, No. 33, pp. 346-366.

Church, A., (1936), "An unsolvable problem of elementary number theory", *American Journal of Mathematics*, Vol. 58, No. 2, pp. 345-363.

Church, A. & Rosser, J. B., (1936), "Some properties of conversion", *Trans. Amer. Math. Soc*, Vol. 39, pp. 472-482.

Church, A., (1936a), "A note on the Entscheidungsproblem", *Journal of SymbolicLogic*, Vol 1, pp. 40–41, видети такође корекције: pp. 101–102.

Church, A., (1936b), "An unsolvable problem of elementary number theory", *American Journal of Mathematics,* Vol. 58, No.2, pp. 345–363.

Church, A., (1941), *The Calculi* of *Lambda Conversion,* Princeton University Press, second edition, 1951, reprinted in 1963 by University Microfilms, Ann Arbor, MI.

Church, A., (1951), "A Formulation of the Logic of Sense and Denotation", in: Henle, P., Kallen, H. (eds.), *Structure, Method, and Meaning; Essays in honor of Henry M. Sheffer*, Liberal Arts Press, New York, pp. 3-24.

Church, A., (1973), "Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation (Part I)", *Noûs,* Vol. 7, No. 1, pp. 24-33.

Church, A., (1974), "Outline of a Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation (Part II)", *Noûs,* Vol. 8, No. 2, pp. 135-156.

Church, A., (1993), "A Revised Formulation of the Logic of Sense and Denotation, Alternative (1)", *Noûs,* Vol. 27, No. 2, pp. 141-157.

Curry, H. B., Feys, R., (1958), *Combinatory Logic*, Vol. 1, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Curry, H. B., Hindley, J. R., & Seldin, J. P., (1972), *Combinatory Logic*, Vol. II, Studies in Logic 65, North-Holland publishing company, Amsterdam.

Crocco, G., et al., (2017), *Kurt Gödel Maxims and Philosophical Remarks* Volume X, ffhal-01459188f.

Davidson, D., (1967), "Truth and Meaning", *Synthese*, Vol. 17, pp. 304-323.

Dean, W., (2016), “Algorithms and the mathematical foundations of computer science”, in: Horsten, L. & Welch, P. (eds), 2016, *Gödel’s Disjunction*, First Edition, Oxford University Press, New York, pp. 19-66.

Devlin, K. (2003), “The forgotten revolution”, available online: https://tinyurl.com/mwxep6p7 (accessed on September 1st, 2020).

Došen, K., (1989), “Logical constants as punctuation marks”, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 30, pp. 362-381.

Došen, K. & Schroeder-Heister, P. (eds.), (1993), *Substructural logics*, Studies in Logic and Computation Vol. 2, Oxford University Press, Oxford.

Došen, K., (1995), “Logical consequence: A turn in style”, in: Chiara, M., et al. (eds.), *Logic and Scientific Methods*, Springer, Dordrecht. pp. 289-311.

Došen, K., (1996), “Deductive Completeness“, *The Bulletin of Symbolic Logic* Vol. 2, No. 3, pp. 243-283.

Došen, K., (1998), “An introduction to adjunction”, *Zbornik radova* (N.S.), Vol. 8, No. 16, pp. 5-44.

Došen, K. & Petrić, Z., (2000), ”The maximality of the typed lambda calculus and of cartesian closed categories” , *Publ. Inst. Math.* (*N.S.*), Vol. 68, No. 82, pp. 1-19, available online: https://tinyurl.com/yc297wrx (accessed on September 1st, 2020).

Došen, K., (2001), “Abstraction and application in adjunction” available online: https://tinyurl.com/y5xnpha4 (accessed on September 1st, 2020).

Došen, K. & Petrić, Z., (2001), „The Maximality of Cartesian Categories“, *Math. Log. Quart*., Vol. 47, pp. 137-144.

Došen, K. & Petrić, Z., (2002), „Bicartesian coherence“, *Studia Logica,* Vol. 71, pp.

331-353, available online: https://tinyurl.com/2nz2kuvy (accessed on September 1st, 2020).

Došen, K., (2003), “Identity of proofs based on Normalization and Generality“, *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 9, No. 4, pp. 477-503, (cited according to: https://tinyurl.com/nhzma48n (accessed on September 1st, 2020)).

Došen, K. & Petrić, Z., (2007), "Proof-Theoretical Coherence", available online: https://tinyurl.com/3u23bj32 (accessed on September 1st, 2020).

Došen, K., (2011), A prologue to the theory of deduction, in: Peliš, M., Punčochář, V. (Eds.), *The logica yearbook 2010*, London: College Publications, pp. 65–80.

Došen, K., (2013), *Основна логика*, available online: https://tinyurl.com/mrx7657c (accessed on September 1st, 2020).

Došen, K., (2015a), "Inferential semantics", in: Wansing, H. (ed.), *Dag Prawitz on Proofs and Meaning*, Springer International Publishing, pp. 147-162.

Došen, K., (2015b), "General Proof Theory", in: Schroeder-Heister, P. et al. (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science - Proceedings of the 14th International Congress (Nancy): Logic and Science Facing the New Technologies, introduction to the Symposium on General Proof Theory*, College Publications, pp. 149-151.

Došen, K., (2016), "On the paths of categories: An introduction to deduction", in: Piecha, T., Schroeder-Heister, P. (eds.), *Advances in Proof-Theoretic Semantics*, Springer International Publishing, pp. 65-77.

Dummett, M., (1978), *Truth and Other Enigmas*, Harvard University Press, Cambridge MA.

Dummett, M., (1991), *The Logical Basis of Metaphysics*, Duckworth, London.

Frege, G., (1879), *Begriffsschrift, a Formula Language, Modeled upon that of Arithmetic, for Pure Thought*, in: Van Heijenoort, J. (ed.), 1967, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, MA. Originally published as: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.*

Frege, G., (1891), "Funktion und Begriff", in: Patzig, G. (ed.), 1962, *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Frege, G., (1892), "Über Sinn und Bedeutung", *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, NF 100, pp. 25–50, reprinted as: "On Sense and reference", *The Philosophical Review*, 1948, Vol. 57, No. 3, pp. 209-230, translated to Serbian as: "О смислу и номинатуму", у: Павковић, А., Лазовић, Ж. (прир.), 1992, Огледи о језику и значењу, Филозофско друштво Србије, Београд, стр. 35-51.

Frege, G., (1893), *Grundgesetze der Arithmetik*, Verlag Hermann Pohle, Jena, 1893. Two vols. Reprinted as one vol. in 1962 by Georg Olms, Hildesheim, Germany, and in 1966 as No. 32 in series Olms Paperbacks. Partial English transl. in: Furth, M. (ed.), 1964, *The Basic Laws of Arithmetic, Exposition of the System*, Univ. California Press, Berkeley.

Gentzen, G., (1935), "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Matematische Zeitschrift* Vol. 39, pp. 76-210, published in English as: "Investigations into logical deduction", in: Scabo, M. (ed.), 1969, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 68-132.

Girard, J., et al., (2003), *Proofs and Types*, Cambridge University Press, New York.

Gödel, K., (1933), "Eine Interpretation des intuitionischen Aussagenkalküls", *Ergebnisse Math. Colloq.*, Vol. 4, pp. 39–40.

Goldberg, M., (2005), On the recursive enumerability of fixed-point combinators, BRICS.

Grice, H. P., (1989), *Studies in the way of words*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

Gurevich, Y., (2000), "Sequential Abstract State Machines Capture Sequential Algorithms", *Transanctions on Computational Logic* , Vol. 1, pp. 77-11.

Gurevich, Y., (2012), "What is an algorithm?", *SOFSEM: Theory and Practise of Computer Science*, Bielikova et al. (eds.), Springer, pp. 31-42.

Hamkins, J. D. & Lewis, A. (1998), "Infinite time Turing machines", available online: https://tinyurl.com/yrne58nz (accessed on September 1st, 2020).

Hilbert, D., (1922b), "Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, Vol. 1, pp. 157–177, серија предавања одржаних на Универзитету у Хамбургу, Јул 25–27, 1921. Поново издато са Бернајсовим белешкама у: *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, 1935, Springer, Berlin.

Hilbert, D. & Bernays, P., (1934), *Grundlagen der Mathematik* Vol. 1, Springer, Berlin.

Hindley, J. R. & Seldin, J. P., (2008), *Lambda Calculus and Combinators*, Cambridge University Press, New York.

Intrigila, B., (1991), "A problem on easy terms in λ −calculus", *Fundamenta informaticae*, Vol. 15. No. 1, pp. 99-106.

Intrigila, B., (1994), “Some results on numeral systems in $\lambda -$calculus”, *Notre Dame Journal of Formal Logic,* Vol. 35, No. 4, pp. 523-541.

Kahle, R., (2019), “Is there a “Hilbert thesis” ?”, *Studia logica,* Vol. 107, pp. 145-165.

Kleene, S. C. & Rosser, J. B., (1935), “The inconsistency of certain formal logics”, *Annals of Math.*, Vol. 36, No. 3, pp. 630-636.

Kleene, S. C., (1936), “λ-definability and recursiveness”, *Duke Math. J.*, Vol. 2, pp. 340-353.

Kleene, S. C., (1988), “Turing’s analysis of computability, and major applications of it”, in: Herken, R. (ed), *The universal Turing machine: A half-century survey,* Oxford University Press, New York, pp. 17–54.

Kolmogorov, A. N. & Uspenskii, V.A., (1958), On the definition of an algorithm, *Uspekhi Mat. Nauk,* Vol. 13, No. 4, pp. 3–28.

Kostić, J. & Maksimović, K., (2020), “Growing into deduction”, *Theoria*, Vol. 63, pp. 87-106.

Kostić, J., (2021), *Самореференција и теорија појмова*, докторска теза, Филозофски факултет Универзитета у Београду, Београд.

Kostić, J., Maksimović, K., Milošević, S. “Is natural deduction natural”, у припреми.

Kreisel, G., (1960), “Ordinal logics and the characterization of informal notions of proof”, in: Todd, J. A. (ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Edinburgh, 14–21 August 1958, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 289–299.

Kreisel, G., (1971) “A survey of proof theory II”, in: *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium,* J.E. Fenstad (ed.), North-Holland, Amsterdam, pp. 109-170.

Kripke, S., (2013), “The Church-Turing ‘Thesis’ as a Special Corollary of Gödel’s Completeness Theorem” in: Copeland, B. et. al. (eds.), *Computability: Turing, Gödel, Church and Beyond,* MIT Press, Cambridge MA, pp. 77-104.

Lambek, J., (1968), “Deductive systems and categories I: Syntactic calculus and residuated categories”, *Math. Systems Theory,* Vol. 2, pp. 287–318.

Lambek, J., (1969), “Deductive systems and categories II: Standard constructions and closed categories”, *Category theory, homology theory and their applications I,* Lecture Notes in Math-ematics, No. 86, Springer-Verlag, pp. 76-122.

Lambek, J., (1972), "Deductive systems and categories III: Cartesian closed categories, intuitionist propositional calculus and combinatory logic", in: Lawvere, F. (ed.), *Toposes, algebraic geometry and logic*, Lecture Notes in Mathematics, No. 274, Springer-Verlag, pp. 57-82.

Lambek, J. & Scott, P.J., (1986), *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

Лазовић, Ж., (1992), „Језик и значење", у: Павковић, А. и Лазовић, Ж. (прир.), *Огледи о језику и значењу*, Филозофско друштво Србије, Београд, стр 7-18.

Lercher, B., (1976), "Lambda-calculus terms that reduce to themselves", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 17, pp. 291–292.

Maksimović, K., (2016), "Uses of the Language of Mathematics", *Theoria*, Vol. 59, No. 1, pp. 26-41.

McCarthy, J., (1963), "A basis for a mathematical theory of computation", in: Braffort, P., & Hirschberg, D. (eds.), *Computer Programming and Formal Systems*, North-Holland, pp. 33-70.

Moschovakis, Y., (1984), "Abstract Recursion as a Foundation for the Theory of Algorithms", in: Richter, M.M. et al, (ed.), *Computation and Proof Theory*, Vol. 1104, Springer-Verlag, Berlin, pp. 289–364.

Moschovakis, Y., (1989a), "The Formal Language of Recursion", *Journal of Symbolic Logic* Vol. 54, No. 4, pp. 1216-1252.

Moschovakis, Y., (1989b), "A mathematical modeling of pure, recursive algorithms", in: Meyer, A. & Taitslin, M. (eds.), *Logic at Botik '89*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 363, pp. 208-229.

Moschovakis, Y., (1998), "On founding the theory of algorithms", in: Dales, H. & Oliveri, G. (eds.), *Truth in mathematics*, Clarendon Press, Oxford, pp. 71–104.

Moschovakis, Y., (2001), "What is an algorithm?", Engquist, B. & Schmid, W. (eds.), *Mathematics Unlimited – 2001 and beyond*, Springer, (Part II), pp. 919-936.

Moschovakis, Y. & Paschalis, V., (2008), “Elementary algorithms and their implementations”, in: Cooper, S. B., Löwe, B., Strobi, A. (eds), *New Computational Paradigms*, Springer, New York, pp. 87-118.

Павковић, А. и Лазовић, Ж. (прир.), (1992), *Огледи о језику и значењу*, Филозофско друштво Србије, Београд.

Prawitz, D., (1965), *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wiksell, Stockholm.

Prawitz, D., (1971), “Ideas and results in proof theory” in: Fenstad , J. E. (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam, pp. 235-307.

Rips, L.J., (1994), *The Psychology of Proof: Deductive Reasoning in Human Thinking*, MIT Press, Cambridge MA.

Schöfinkel, M., (1924), “Über die Bausteine der mathematischen Logik”, *Mathematische Annalen*, Vol. 92, pp. 305–316, English translation: “On the building blocks of mathematical logic”, in: van Heijenoort, J. (ed.), 1967, *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic*, Harvard University Press, Cambridge, MA, pp. 355–366.

Schroeder-Heister, P., (2012a), “Proof-theoretic semantics”, Zalta, E.N. (ed.), The Stanford Encyclopedia of Philosophy, available online: https://tinyurl.com/3r4phmh4 (accessed on September 1st, 2020).

Schroeder-Heister, P., (2012b), “The categorical and the hypothetical: A critique of some fundamental assumptions of standard semantics”, *Synthese* 187, pp. 925–942.

Schroeder-Heister, P., (2013), “Definitional Reflection and Basic Logic”, *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 164, No. 4, pp. 491–501.

Schroeder-Heister, P., (2015), “Proof-theoretic validity based on elimination rules”. in: Haeusler, E. H., de Campos Sanz, W. & Lopes, B. (eds.), *Why is this a Proof? Festschrift for Luiz Carlos Pereira*, College Publications, London, pp. 159–176.

Scott, D., (1969), “Models for the λ-calculus”, manuscript, (unpublished), 53 pp.

Scott, D., (1980), “Some models, some philosophy”, in: Barwise et al. (eds.), *Studies in Logic and the foundations of Mathematics*, Vol. 110, pp. 223-266.

Sieg, W., (2013), *Hilbert’s programs and beyond*, Oxford University Press, New York.

Statman, R., (1993), "Some examples of non-existent combinators", *Theoretical Computer Science*, Vol. 121, pp. 441-448.

Stenlund, S., (1972), *Combinators, λ-terms and proof theory*, Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Soare, R., (1996), "Computability and Recursion", *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 2, No. 3, pp. 284-321.

Tait, W. W., (1981), "Finitism", *Journal of Philosophy*, Vol. 78, pp. 524–546.

Venturini Zilli, M., (1984), "Reduction graphs in the lambda calculus", *Theoretical Computer Science*, Vol. 29, pp. 251-275.

Wadsworth, C. P., (1971), *Semantics and Pragmatics of the Lambda-calculus*, Dissertation, Oxford University, Oxford.

Wang, H., (1997), *A Logical Journey: from Gödel to Philosophy*, MIT Press, Cambridge MA.

Wittgenstein, L., (1958), *Philosophical Investigations*, Basil Blackwell, Oxford.

Yanofsky, N., (2010), "Towards a Definition of an Algorithm", preprint available online: tinyurl.com/3sn2txv5.

Zach, R., (1998), "Numbers and functions in Hilbert's finitism", *Taiwainese Journal for Philosophy and History of Science*, No. 10, pp. 33-60.

БИОГРАФИЈА:

Катарина Максимовић је рођена 1991. године у Београду. Завршила је девету Београдску гимназију 2010. и исте године је уписала студије филозофије на Филозофском факултету у Београду. Основне студије је завршила 2014. године са просечном оценом 9,98 и оценом 10 на дипломском испиту. Била је изабрана за најбољег студента генерације на филозофији.

Мастер студије филозофије је уписала одмах по завршеним основним студијама. Мастер тезу из области логике и филозофије математике писала је на тему „Употребе математичког језика“ и одбранила је са највишом оценом. На основу мастер тезе објављен је рад *Uses of the language of mathematics* у међународном часопису *Theoria* (2015) које издаје Филозофски институт Универзитета у Београду.

Докторске студије филозофије уписала је на филозофском факултету у Београду школске 2015/2016. године. Због нарочитог интересовања за логику и филозофију математике које је показала у току студија, тему доктората је природно посветила проблемима из тих области. Тема која носи наслов „Интензионалност и појам алгоритма“ писана је под менторством др Милоша Аџића. Неки резултати истраживања приказани у тези објављени су у облику научног рада под насловом *Facets of Intensionality* у часопису *Arhe* (2021) који издаје Универзитет у Новом Саду.

Од 2018. године, Катарина Максимовић је запослена на Филозофском факултету у Београду као истраживач-сарадник на Институ за филозофију. Ангажована је на пројекту Динамички системи у природи и друштву где се претежно бавила проблемима у вези са значењем у логици као и емпиријским и теоријским истраживањима проблема дедуктивног закључивања као когнитивног процеса. Неки од теоријских аспеката тих истраживања објављени су у раду *Growing into deduction* у часопису Theoria (2020).

Прилог 1

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора _____

Број индекса ______________________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, ________________

____

Прилог 2

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____

Број индекса ____

Студијски програм ____

Наслов рада ____

Ментор ____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањивања у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Потпис аутора

У Београду, ______________________   ______________________________

Прилог 3

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, ______________________

____

1. **Ауторство**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода