УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Соња Телебаковић Онић

ФРОБЕНИЈУСОВЕ АЛГЕБРЕ И ТОПОЛОШКЕ КВАНТНЕ ТЕОРИЈЕ ПОЉА

докторска дисертација

Београд, 2022.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Sonja Telebaković Onić

FROBENIUS ALGEBRAS AND TOPOLOGICAL QUANTUM FIELD THEORIES

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2022.

Ментор:

др Зоран Петрић
научни саветник, Математички институт САНУ, Београд

Чланови комисије:

др Раде Живаљевић
научни саветник, Математички институт САНУ, Београд
редовни професор, Универзитет у Београду, Физички факултет

др Александар Липковски
редовни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марко Радовановић
ванредни професор, Универзитет у Београду, Математички факултет

др Ђорђе Баралић
виши научни сарадник, Математички институт САНУ

Датум одбране: ____________________

мојој баки
Ружици Димковић

Захвалница

Неизмерну захвалност дугујем свом ментору др Зорану Петрићу, редовном професору Математичког факултета, на уложеном времену и труду да своје математичко знање и искуство несебично подели са мном. Захваљујем му се и на посвећености која се ретко среће, огромном стрпљењу, подстицању и помоћи без које израда ове докторске дисертације не би била могућа.

Захваљујем се свим члановима комисије за одбрану докторске дисертације на пажљивом читању рукописа, као и корисним сугестијама и коментарима који су допринели квалитету овог рада. Посебно сам захвална председнику комисије, професору др Радету Живаљевићу, што ми је омогућио да као предавач активно учествујем у раду београдског КГТА семинара, на коме су увек занимљива и корисна предавања и пријатељска атмосфера. Изузетном професору др Александру Липковском од срца хвала за дугогодишњу успешну сарадњу и искрену подршку коју ми пружа од почетка моје каријере. Задовољство ми је да се додатно захвалим др Ђорђу Баралићу. Велики број резултата који су ушли у састав ове дисертације настао је као резултат сати и дана проведених у заједничком раду и пријатељским разговорима. Веома сам захвална и мом драгом колеги, ванредном професору др Марку Радовановићу, који ме је увек подржавао и бодрио и са којим годинама делим кабинет и свакодневницу на Математичком факултету.

Колеги Стевану Гајовићу захваљујем што је указао на примену Жигмондијеве теореме у раду ([17]).

Пријатна ми је дужност да се сетим професора др Косте Дошена и захвалим му на интересантним и корисним разговорима у оквиру Семинара за логику Математичког института САНУ. Заједнички радови професора Дошена и професора Петрића били су велика инспирација и мотивација за моје истраживање.

Продекану Математичког факултета, доценту др Миљану Кнежевићу, дугујем велику захвалност на помоћи при избору ментора и пријави теме. Његови стални подстицаји у раду и непоколебљива вера у мене веома су заслужни за настанак ове дисертације.

Захваљујем се и мом другару и колеги, доценту др Мареку Светлику, на безусловној подршци, позитивној енергији и разумевању још од наших студентских дана.

Највећу захвалност дугујем својој породици и пријатељима који су кроз бескрајну љубав, бригу, стрпљење, толеранцију, бројна одрицања и веру у мене увек били мој највећи ослонац и охрабрење да истрајем на свом путу.

Соња Телебаковић Онић

Наслов дисертације: Фробенијусове алгебре и тополошке квантне теорије поља

Резиме: У овој докторској дисертацији изучавамо везу између Фробенијусових алгебри и тополошких квантних теорија поља (TQFT). Познато је да свакој дводимензионалној TQFT (2-TQFT) одговара једна комутативна Фробенијусова алгебра и обрнуто, тј. да је категорија чији су објекти 2-TQFT еквивалентна категорији комутативних Фробенијусових алгебри. Свака 2-TQFT је потпуно одређена сликом једнодимензионалне сфере S^1 и сликама генератора категорије дводимензионалних оријентисаних кобордизама. Релацијама које важе за ове кобордизме одговарају управо аксиоме комутативне Фробенијусове алгебре.

Пратећи Фробенијусову структуру која је на овај начин додељена сфери S^1, испитујемо Фробенијусову структуру сфера свих других димензија. За свако $d \geq 2$, сфера S^{d-1} је комутативан Фробенијусов објекат у категорији d-димензионалних кобордизама. Показујемо да нема разлике међу сферама S^{d-1}, за $d \geq 2$, јер су оне ослобођене било каквих додатних једнакости које се могу изразити на језику множења, јединице, комножења и којединице. Изузетак је сфера S^0 која није комутативан, али јесте симетричан Фробенијусов објекат.

Сфера S^0 се пресликава у матричну Фробенијусову алгебру помоћу брауеријанске репрезентације, која је пример верног 1-TQFT функтора. Доказујемо да је свака 1-TQFT, која пресликава нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке у векторски простор димензије бар 2, веран функтор.

На крају, показујемо да комутативној Фробенијусовој алгебри $\mathbb{Q}\mathbb{Z}_5 \otimes Z(\mathbb{Q}\mathbb{S}_3)$, која је настала као тензорски производ групне алгебре и центра групне алгебре, одговара верна 2-TQFT. То значи да су дводимензионални кобордизми еквивалентни ако и само ако су им одговарајућа линеарна пресликавања једнака.

Кључне речи: Фробенијусова алгебра, тополошка квантна теорија поља, симетрична моноидална категорија, комутативан Фробенијусов објекат, веран функтор, оријентисана многострукост, кобордизам, нормална форма, брауеријанска репрезентација, Кронекеров производ, пермутацијска матрица, Жигмондијева теорема

Научна област: Математика

Ужа научна област: Алгебра

AMS класификација: 57R56, 18A22, 18C40, 18M05, 15A69, 15B34

Dissertation title: Frobenius algebras and topological quantum field theories

Abstract: In this dissertation the connection between Frobenius algebras and topological quantum field theories (TQFTs) is investigated. It is well-known that each 2-dimensional TQFT (2-TQFT) corresponds to a commutative Frobenius algebra and conversely, i.e., that the category whose objects are 2-TQFTs is equivalent to the category of commutative Frobenius algebras. Every 2-TQFT is completely determined by the image of 1-dimensional sphere S^1 and by its values on the generators of the category of 2-dimensional oriented cobordisms. Relations that hold for these cobordisms correspond precisely to the axioms of a commutative Frobenius algebra.
Following the pattern of the Frobenius structure assigned to the sphere S^1 in this way, we examine the Frobenius structure of spheres in all other dimensions. For every $d \geq 2$, the sphere S^{d-1} is a commutative Frobenius object in the category of d-dimensional cobordisms. We prove that there is no distinction between spheres S^{d-1}, for $d \geq 2$, because they are all free of additional equations formulated in the language of multiplication, unit, comultiplication and counit. The only exception is the sphere S^0 which is a symmetric Frobenius object but not commutative.
The sphere S^0 is mapped to a matrix Frobenius algebra by the Brauerian representation, which is an example of a faithful 1-TQFT functor. We obtain the faithfulness result for all 1-TQFTs, mapping the 0-dimensional manifold, consisting of one point to a vector space of dimension at least 2.
Finally, we show that the commutative Frobenius algebra $\mathbb{Q}\mathbb{Z}_5 \otimes Z(\mathbb{Q}\mathbb{S}_3)$, defined as the tensor product of the group algebra and the centre of the group algebra, corresponds to the faithful 2-TQFT. It means that 2-dimensional cobordisms are equivalent if and only if the corresponding linear maps are equal.

Keywords: Frobenius algebra, topological quantum field theory, symmetric Frobenius object, faithful functor, oriented manifold, cobordism, normal form, Brauerian representation, Kronecker product, commutation matrix, Zsigmondy's Theorem

Research area: Mathematics

Research sub-area: Algebra

AMS Subject Classification: 57R56, 18A22, 18C40, 18M05, 15A69, 15B34

Садржај

Увод

Фробенијусове алгебре се први пут појављују у теорији репрезентација, у раду немачког математичара Фробенијуса из 1903. године ([16]). Он је проучавао коначно-димензионалне алгебре код којих су прва и друга регуларна репрезентација изоморфне. Сам термин Фробенијусова алгебра први користе Брауер, Незбит и Накајама у низу радова тридесетих година прошлог века (видети на пример [33] и [34]). Они дају и неколико еквивалентних карактеризација Фробенијусових алгебри о којима ће бити речи у првом поглављу ове дисертације. Према једној од тих дефиниција, Фробенијусова алгебра је коначно-димензионална алгебра над пољем $\mathbb{K}$ заједно са линеарном формом $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$, таквом да важи

$$(\forall a \in A) \quad \varepsilon(ab) = 0 \ \Rightarrow b = 0.$$

На пример, алгебра квадратних матрица над пољем $\mathbb{K}$ са трагом је пример Фробенијусове алгебре.

Алтернативну карактеризацију Фробенијусових алгебри као алгебри које су истовремено и коалгебре, при чему множење и комножење задовољавају одређене услове компатибилности, даје Лоувир 1967. године ([27]), а касније, деведесетих година XX века, ови услови привлаче пажњу и Квина ([37]) и Абрамса ([1] и [2]).

Предмет ове докторске дисертације је проучавање везе између Фробенијусових алгебри и тополошких квантних теорија поља, коју је први приметио Дијкграф (видети [8]). Тиме су се касније бавили и Квин, Савин и Абрамс, као и многи други математичари, а ова веза је најдетаљније објашњена у Коковој књизи ([23]). На основу Атијине аксиоматизације ([3]), n-димензионална тополошка квантна теорија поља (n-TQFT) је симетрични моноидални функтор из категорије оријентисаних n-кобордизама у категорију коначно-димензионалних векторских простора над фиксираним пољем. Овакав функтор свакој затвореној оријентисаној $(n-1)$-димензионалној многострукости придружује векторски простор, а сваком оријентисаном n-кобордизму линеарно пресликавање. Познато је да свакој 2-TQFT одговара једна комутативна Фробенијусова алгебра и обрнуто. Прецизније речено, категорија чији су објекти 2-TQFT је еквивалентна категорији комутативних Фробенијусових алгебри. Аксиомама комутативне Фробенијусове алгебре одговарају релације које важе за 2-димензионалне оријентисане кобордизме као што је приказано на слици 2.1 (на страни 22).

Тополошке квантне теорије поља са становишта физике подразумевају инваријантност у односу на промене облика простор-времена. Самим тим је јасна њихова примењивост у анализама закривљених простор-времена, нпр. у теоријама квантне гравитације. У математици представљају значајан алат при изучавању многострукости и њихових инваријанти. Међутим, у литератури се врло ретко разматра питање комплетности ових инваријанти, тј. питање верности TQFT. Верност функтора као што је TQFT је посебно битна пошто обезбеђује да алгебарска слика категорије кобордизама нема дефекта. Стога, акценат у овој докторској дисертацији стављамо на решавање проблема верности оваквих функтора.

Рад је организован на следећи начин. У првом поглављу дајемо преглед основних дефиниција и особина Фробенијусових алгебри, а наводимо и најважније примере Фробенијусових алгебри.

Друга глава посвећена је оригиналним резултатима који су објављени у коауторском раду са Ђ. Баралићем и З. Петрићем ([4]). Пратећи Фробенијусову структуру која се стандардно додељује једнодимензионалној сфери, у том раду се испитује Фробенијусова структура сфера свих других димензија. Почевши од димензије $d = 1$, све сфере су комутативни Фробенијусови објекти у категоријама чије су стрелице $(d + 1)$-димензионални кобордизми. У односу на језик којим се описује Фробенијусова структура (множење, комножење, јединица, којединица), нема разлике међу овим сферама, јер су оне ослобођене било каквих додатних једнакости које се могу изразити на том језику. Једини изузетак је нулдимензионална сфера, чија одговарајућа Фробенијусова структура није комутативна, већ само симетрична.

Инспирисани класичним резултатом Р. Брауера ([5]) из области репрезентације група, у коме је конструисана једна дијаграматска алгебра, К. Дошен и З. Петрић доказују верност једног симетричног моноидалног функтора из категорије 1-кобордизама у категорију матрица. Како се категорија матрица може посматрати као скелетон категорије коначно-димензионалних векторских простора, њихов функтор је пример једне верне 1-TQFT, коју аутори називају брауеријанским функтором ([10], [11], [12] и [13]). Мотивисана овим радовима, аутор тезе у трећој глави доказује да се, у односу на поље карактеристике нула, свака 1-TQFT, која пресликава нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке у векторски простор димензије бар 2, поклапа са брауеријанским функтором до на множење инвертибилним матрицама, и уопштава резултат верности Дошена и Петрића на све 1-TQFT (видети [35]).

На крају, у четвртој глави, показујемо да комутативној Фробенијусовој алгебри $\mathbb{Q}\mathbb{Z}_5 \otimes Z(\mathbb{Q}\mathbb{S}_3)$, која је настала као тензорски производ групне алгебре и центра групне алгебре, одговара верна 2-TQFT. Резултати презентовани у овој глави део су коауторског рада са С. Гајовићем и ментором З. Петрићем ([17]).

Тема ове дисертације припада области која комбинује идеје из алгебре, логике, топологије и математичке физике, а надамо се да ће резултати добијени у њој имати одјека у овим областима.

Глава 1

Фробенијусове алгебре

Фробенијусове алгебре се први пут појављују почетком XX века у раду Фердинанда Георга Фробенијуса ([16]). Овај познати немачки математичар*, оснивач теорије репрезентација група, први је проучавао алгебре код којих су прва и друга регуларна репрезентација изоморфне.

Реӣрезенӣација алīебре A је векторски простор V заједно са хомоморфизмом алгебри $\rho : A \to EndV$, тј. линеарним пресликавањем које „чува" множење и јединицу

$$\rho(ab) = \rho(a) \circ \rho(b)$$

$$\rho(1_A) = \mathbf{1}_V.$$

Уобичајена ознака за $\rho(a)v$ је $a \cdot v$ (лево дејство A на V), па претходне једнакости можемо записати у облику

$$(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$$

$$1_A \cdot v = v.$$

Векторски простор V на овај начин има структуру левог A-модула. На пример, ако је $V = A$ и $\rho : A \to EndA$ дефинисано на следећи начин

$$\rho(a) : A \to A$$

$$\rho(a)b = ab$$

као оператор левог множења са a, ова репрезентација се назива *ӣрва реīуларна реӣрезенӣација*. Слично, A добија структуру десног A-модула ако ρ дефинишемо са $\rho(a)b = ba$. Ако су V_1 и V_2 две репрезентације алгебре A, *хомоморфизам реӣрезенӣација* је линеарно пресликавање $\phi : V_1 \to V_2$ које комутира са дејством, тј.

$$\phi(a \cdot v) = a \cdot \phi(v), \text{ за све } v \in V_1, a \in A.$$

Хомоморфизам репрезентација је *изоморфизам реӣрезенӣација* ако је изоморфизам векторских простора. За две репрезентације кажемо да су изоморфне ако постоји изоморфизам између њих. *Друīа реīуларна реӣрезенӣација алīебре* A је векторски простор A^* са хомоморфизмом алгебри

$$\rho : A \to End(A^*)$$

$$(\rho(a)\Lambda)(b) = \Lambda(ba), \quad \Lambda \in A^*, a, b \in A.$$

*Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)

Фробенијус је проучавао коначно-димензионалне алгебре код којих су прва и друга регуларна репрезентација изоморфне као леви A-модули. Касније су Брауер, Незбит и Накајама уочили да је проучавање коначно-димензионалних алгебри са овим својством кључно за боље разумевање структуре алгебри које нису полупросте. У низу радова који су објављени од 1937. до 1941. године, Брауер, Незбит и Накајама дају карактеризацију Фробенијусових алгебри која је независна од избора базе алгебре и називају овакве алгебре Фробенијусовим именом (видети [33] и [34]). Према једној од њихових еквивалентних карактеризација, *Фробенијусова алгебра* је коначно-димензионална алгебра A над пољем $\mathbb{K}$ заједно са недегенеративном $\mathbb{K}$-билинеарном формом $\langle \_|\_ \rangle : A \times A \to \mathbb{K}$ која је асоцијативна, тј.

$$\langle ab|c \rangle = \langle a|bc \rangle, \text{ за све } a, b, c \in A.$$

У последње време интересовање за Фробенијусове алгебре је порасло због њихове повезаности са тополошким квантним теоријама поља. Дијкграф је 1989. године у својој докторској дисертацији [8] први приметио да су 2-димензионалне тополошке квантне теорије поља у суштини исто што и комутативне Фробенијусове алгебре. Много детаљнији доказ еквиваленције између категорије 2-димензионалних тополошких квантних теорија поља и категорије комутативних Фробенијусових алгебри може се наћи у радовима Квина [37] и Абрамса [2].

Фробенијусове алгебре имају широку примену у многим областима математике, теоријске физике и рачунарства. Интересантна је улога Фробенијусових алгебри у теорији бројева, алгебарској геометрији и комбинаторици. Коришћене су за проучавање Хопфових и Кошуљевих алгебри, као и кохомолошких прстенова компактних оријентисаних многострукости.

1.1 Основни појмови и тврђења

У овој секцији ћемо дати преглед основних појмова и нека њихова својства, која су потребна за дефинисање Фробенијусове алгебре. Приликом писања ове секције, највише се ослањамо на књигу Јоакима Кока ([23]).

Дефиниција 1.1.1. *Упаривање векторских простора* V и W је линеарно пресликавање

$$\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$$

$$v \otimes w \mapsto \langle v|w \rangle.$$

Дефиниција 1.1.2. Упаривање $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ је *недегенеративно по* V ако постоји линеарно пресликавање $\gamma_V : \mathbb{K} \to W \otimes V$ тако да је следећа композиција једнака $\mathbf{1}_V$:

$$V \cong V \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\mathbf{1}_V \otimes \gamma_V} V \otimes (W \otimes V) \cong (V \otimes W) \otimes V \xrightarrow{\beta \otimes \mathbf{1}_V} \mathbb{K} \otimes V \cong V$$

Слично, упаривање $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ је *недегенеративно по* W ако постоји линеарно пресликавање $\gamma_W : \mathbb{K} \to W \otimes V$ тако да је следећа композиција једнака $\mathbf{1}_W$:

$$W \cong \mathbb{K} \otimes W \xrightarrow{\gamma_W \otimes \mathbf{1}_W} (W \otimes V) \otimes W \cong W \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{\mathbf{1}_W \otimes \beta} W \otimes \mathbb{K} \cong W$$

Ако је упаривање недегенеративно и по V и по W, може се показати да се пресликавања γ_V и γ_W поклапају и означавамо их са γ. У том случају кажемо да је упаривање β *недегенеративно*, а пресликавање γ називамо *коупаривање*.

Нека је $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$. Ако фиксирамо други аргумент $w \in W$, добијамо линеарну форму

$$\begin{aligned} \beta_w &: V \to \mathbb{K} \\ v &\mapsto \langle v|w\rangle, \end{aligned}$$

помоћу које дефинишемо линеарно пресликавање

$$\begin{aligned} \beta_{left} &: W \to V^* \\ w &\mapsto \beta_w = \langle \_|w\rangle. \end{aligned}$$

Слично, ако фиксирамо први аргумент $v \in V$, добијамо линеарну форму

$$\begin{aligned} {}_v\beta &: W \to \mathbb{K} \\ w &\mapsto \langle v|w\rangle, \end{aligned}$$

која задаје линеарно пресликавање

$$\begin{aligned} \beta_{right} &: V \to W^* \\ v &\mapsto {}_v\beta = \langle v|\_\rangle. \end{aligned}$$

Лема 1.1.1. *Упаривање $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ је недегенеративно по W акко је W коначно-димензионални векторски простор и индуковано пресликавање $\beta_{left} : W \to V^*$ је инјективно. Слично, β је недегенеративно по V акко је V коначне димензије и $\beta_{right} : V \to W^*$ је инјективно.*

Доказ. Претпоставимо да је β недегенеративно по W. Тада постоји коупаривање $\gamma_W : \mathbb{K} \to W \otimes V$ и $\gamma_W(1_{\mathbb{K}}) = \sum_{i=1}^n w_i \otimes v_i$, за неке векторе $w_i \in W$ и $v_i \in V$. Изаберимо произвољан $x \in W$ и пресликајмо га помоћу композиције $W \to W \otimes V \otimes W \to W$:

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n w_i \otimes v_i \otimes x \mapsto \sum_{i=1}^n w_i \langle v_i|x\rangle.$$

Због недегенеративности по W ова композиција је $\mathbf{1}_W$, па је $x = \sum_{i=1}^n w_i\langle v_i|x\rangle$ за свако $x \in W$. Према томе, вектори $w_1, \dots, w_n$ генеришу простор W, па је он коначне димензије. Да бисмо показали инјективност пресликавања $\beta_{left} : W \to V^*$, претпоставимо да је $\beta_{left}(x) = \beta_x = 0$, тј. да за све $y \in V$ важи $\beta_x(y) = \langle y|x\rangle = 0$. Тада посебно и за векторе $v_1, \dots, v_n$ важи да је $\langle v_i|x\rangle = 0$. Према томе, вектор x је нула.

Обрнуто, претпоставимо да је простор W коначне димензије и да је пресликавање $\beta_{left} : W \to V^*$ инјективно. Изаберимо базу $w_1, \dots, w_n$ за W. Из линеарне независности вектора $w_1, \dots, w_n$ и инјективности пресликавања β_{left} следи да су и линеарне форме $\beta_{w_1}, \dots, \beta_{w_n} : V \to \mathbb{K}$ линеарно независне. Тада постоје вектори $v_1, \dots, v_n \in V$ такви да је $\beta_{w_i}(v_i) = 1$ и $\beta_{w_j}(v_i) = 0$, за $i \neq j$. Дефинишимо коупаривање $\gamma_W : \mathbb{K} \to W \otimes V$ са $\gamma_W(1_{\mathbb{K}}) = \sum_{i=1}^n w_i \otimes v_i$. Докажимо да је композиција $W \xrightarrow{\gamma_W \otimes \mathbf{1}_W} W \otimes V \otimes W \xrightarrow{\mathbf{1}_W \otimes \beta} W$ једнака $\mathbf{1}_W$. Произвољан $x \in W$ је облика $\sum_{j=1}^n \lambda_j w_j$ и пресликава се сам у себе:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j w_j \mapsto \sum_{j=1}^n \gamma_W(\lambda_j) \otimes w_j = \sum_{i,j} \lambda_j (w_i \otimes v_i \otimes w_j) \mapsto \sum_{i,j} \lambda_j w_i \beta(v_i \otimes w_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i.$$

□

Дефиниција 1.1.3. *Дуално пресликавање* линеарног пресликавања $\psi : V \to W$ је пресликавање $\psi^* : W^* \to V^*$ дефинисано са

$$\Lambda \mapsto \Lambda \circ \psi.$$

Лема 1.1.2. *Нека је $\psi : V \to W$ линеарно пресликавање између коначно-димензионалних простора и нека је $\psi^* : W^* \to V^*$ његово дуално пресликавање. Тада важи:*

(1) *ψ је инјективно ако и само ако ψ^* је сурјективно.*

(2) *ψ је сурјективно ако и само ако ψ^* је инјективно.*

Лема 1.1.3. *Нека су V и W коначно димензионални векторски простори и нека је $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ упаривање. Тада је пресликавање $\beta_{right} : V \to W^*$ дуално пресликавање пресликавања $\beta_{left} : W \to V^*$ и обрнуто.*

Доказ. Дуално пресликавање пресликавања $\beta_{left} : W \to V^*$ је пресликавање $\beta^*_{left} : V^{**} \to W^*$, тј.

$$\beta^*_{left} : Hom(V^*, \mathbb{K}) \to Hom(W, \mathbb{K})$$
$$T \mapsto T \circ \beta_{left}.$$

Како је V коначне димензије, постоји канонски изоморфизам

$$V \xrightarrow{\sim} V^{**} = Hom(V^*, \mathbb{K})$$
$$v \mapsto T := [\Lambda \mapsto \Lambda(v)].$$

Према томе, $\beta^*_{left} : V \xrightarrow{\sim} Hom(V^*, \mathbb{K}) \to W^*$

$$v \mapsto T := [\Lambda \mapsto \Lambda(v)] \mapsto T \circ \beta_{left}.$$

Нека је $w \in W$ произвољан елемент. Тада је $(T \circ \beta_{left})(w) = T(\langle \_ | w \rangle) = \langle v|w \rangle$. Дакле, β^*_{left} је пресликавање које v пресликава у линеарну форму $w \mapsto \langle v|w \rangle$, па се поклапа са β_{right}. □

Лема 1.1.4. *Нека су V и W коначно-димензионални векторски простори и нека је $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ упаривање. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) *β је недегенеративно упаривање.*

(2) *Линеарно пресликавање $\beta_{left} : W \to V^*$ је изоморфизам.*

(3) *Линеарно пресликавање $\beta_{right} : V \to W^*$ је изоморфизам.*

Доказ. Директном применом лема 1.1.1, 1.1.2 и 1.1.3. □

Специјално, ако су простори V и W исте димензије, услове (2) и (3) можемо заменити условима да су β_{left} и β_{right} инјективна, тј. условима:

(2') $\forall v \in V \ \langle v|w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0.$

(3') $\forall w \in W \ \langle v|w \rangle = 0 \Rightarrow v = 0.$

Дефиниција 1.1.4. $\mathbb{K}$-*алгебра* је $\mathbb{K}$-векторски простор A заједно са два $\mathbb{K}$-линеарна пресликавања

$$\mu : A \otimes A \to A, \quad \eta : \mathbb{K} \to A,$$

која називамо редом *множење* и *јединица*, тако да следећи дијаграми комутирају

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A \arrow[r, "\mu\otimes \mathbf{1}_A"] \arrow[d, "\mathbf{1}_A\otimes\mu"'] & A\otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[drr, "\mu"'] & \mathbb{K}\otimes A \arrow[l, "\eta\otimes \mathbf{1}_A"'] \cong & A \arrow[d, "\mathbf{1}_A"] & \cong A\otimes\mathbb{K} \arrow[r, "\mathbf{1}_A\otimes\eta"] & A\otimes A \arrow[dll, "\mu"] \\ & & A & & \end{tikzcd}$$

Ако са xy означимо $\mu(x\otimes y)$, а са 1_A слику елемента $1_\mathbb{K}$ при пресликавању η, услове комутативности дијаграма можемо записати и као $(xy)z = x(yz)$, $\ 1_A x = x = x1_A$. Ови услови значе да је множење асоцијативно и да постоји неутрални елемент 1_A за множење. Линеарност пресликавања $\mu : A\otimes A \to A$ еквивалентна је билинеарности одговарајућег пресликавања $\overline{\mu} : A\times A \to A$, па је множење дистрибутивно према сабирању. Према томе, свака $\mathbb{K}$-алгебра има и структуру прстена са јединицом.

Предност дефинисања појма алгебре помоћу дијаграма је у томе што окретањем стрелица добијамо дуални појам.

Дефиниција 1.1.5. *Коалгебра* над пољем $\mathbb{K}$ је $\mathbb{K}$-векторски простор A заједно са два $\mathbb{K}$-линеарна пресликавања

$$\delta : A \to A\otimes A,\ \ \varepsilon : A\to\mathbb{K},$$

која називамо редом *комножење* и *којединица*, тако да следећи дијаграми комутирају

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes A & A\otimes A \arrow[l, "\delta\otimes \mathbf{1}_A"'] \\ A\otimes A \arrow[u, "\mathbf{1}_A\otimes\delta"] & A \arrow[l, "\delta"] \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\varepsilon\otimes \mathbf{1}_A"] & \mathbb{K}\otimes A \cong & A & \cong A\otimes\mathbb{K} & A\otimes A \arrow[l, "\mathbf{1}_A\otimes\varepsilon"'] \\ & & A \arrow[ull, "\delta"] \arrow[u, "\mathbf{1}_A"'] \arrow[urr, "\delta"'] & & \end{tikzcd}$$

Дефиниција 1.1.6. Нека је A прстен са јединицом. *Десни A-модул* је $\mathbb{K}$-векторски простор M заједно са $\mathbb{K}$-линеарним пресликавањем

$$\alpha : M\otimes A \to M$$

$$x\otimes a \mapsto x\cdot a$$

тако да следећи дијаграми комутирају

$$\begin{tikzcd} M\otimes A\otimes A \arrow[r, "\alpha\otimes \mathbf{1}_A"] \arrow[d, "\mathbf{1}_M\otimes\mu"'] & M\otimes A \arrow[d, "\alpha"] \\ M\otimes A \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\otimes A \arrow[d, "\alpha"] & M\otimes\mathbb{K} \arrow[l, "\mathbf{1}_M\otimes\eta"'] \arrow[dl] \\ M & \end{tikzcd}$$

тј. да важи $(x\cdot a)\cdot b = x\cdot(ab)$ и $x\cdot 1_A = x$, за све $a, b\in A$, $\ x\in M$. Пресликавање α називамо *десно дејство* A на M.

Напомена 1.1.1. Како је α дефинисано на тензорском производу, следи да важи и дистрибутивност $x\cdot(a+b) = x\cdot a + x\cdot b$, $\ (x+y)\cdot a = x\cdot a + y\cdot a$.

Пример 1.1.1. Ако је A, $\mathbb{K}$-алгебра, онда A има и структуру десног A-модула, пошто је множење $\mu : A\otimes A\to A$ специјални случај дејства.

Дефиниција 1.1.7. Нека су M и N десни A-модули. $\mathbb{K}$-линеарно пресликавање $\phi : M\to N$ називамо *десним A-хомоморфизмом* или *десним A-линеарним пресликавањем* ако следећи дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \arrow[r, "\phi \otimes \mathbf{1}_A"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \otimes A \arrow[d, "\alpha'"] \\ M \arrow[r, "\phi"'] & N \end{tikzcd}$$

Другим речима, за све $x \in M$ и све $a \in A$ важи $\phi(x \cdot a) = \phi(x) \cdot a$.

На сличан начин дефинишемо и леви A-модул и леви A-хомоморфизам.

Дефиниција 1.1.8. *Леви A-модул* је векторски простор M са $\mathbb{K}$-линеарним пресликавањем $A \otimes M \to M, \quad a \otimes x \mapsto a \cdot x$ које задовољава аксиоме $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$ и $1_A \cdot x = x$. *Леви A-хомоморфизам* је $\mathbb{K}$-линеарно пресликавање $\phi : M \to N$ између два лева A-модула ако задовољава услов $\phi(a \cdot x) = a \cdot \phi(x)$, за све $x \in M$ и све $a \in A$.

Ако је M десни A-модул, онда дуални простор $M^* = Hom(M, \mathbb{K})$ има канонску структуру левог A-модула која је дата са:

$$A \otimes M^* \to M^*$$

$$a \otimes \Lambda \mapsto a \cdot \Lambda := [x \mapsto \Lambda(x \cdot a)].$$

Слично, ако је M леви A-модул, онда M^* има канонску структуру десног A-модула

$$M^* \otimes A \to M^*$$

$$\Lambda \otimes a \mapsto \Lambda \cdot a := [x \mapsto \Lambda(a \cdot x)].$$

Дефиниција 1.1.9. Нека је M десни A-модул, а N леви A-модул. Упаривање $\beta : M \otimes N \to \mathbb{K}$ је *асоцијативно* ако следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd} M \otimes A \otimes N \arrow[r, "\mathbf{1}_M \otimes \alpha'"] \arrow[d, "\alpha \otimes \mathbf{1}_N"'] & M \otimes N \arrow[d, "\beta"] \\ M \otimes N \arrow[r, "\beta"'] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Другим речима, упаривање $\beta : x \otimes y \mapsto \langle x|y \rangle$ је асоцијативно ако

$$\langle x \cdot a|y \rangle = \langle x|a \cdot y \rangle, \text{ за све } x \in M, a \in A, y \in N.$$

Лема 1.1.5. *Ако су M и N редом десни и леви A-модул и ако је $\beta : M \otimes N \to \mathbb{K}$ упаривање, онда су следећи услови еквивалентни:*

(1) *β је асоцијативно упаривање.*

(2) *Пресликавање $\beta_{left} : N \to M^*$ је лево A-линеарно.*

(3) *Пресликавање $\beta_{right} : M \to N^*$ је десно A-линеарно.*

Доказ. Како је услов асоцијативности симетричан, довољно је показати да је (1) $\Leftrightarrow$ (2). Пресликавање $\beta_{left} : N \to M^*$ дефинисано са $y \mapsto \beta_y = \langle \_|y \rangle$ је лево A-линеарно ако и само ако за све $a \in A$ и $y \in N$ важи $\beta_{left}(a \cdot y) = a \cdot \beta_{left}(y)$, тј. линеарне форме $\beta_{a \cdot y} : M \to \mathbb{K}$ и $a \cdot \beta_y : M \to \mathbb{K}$ су једнаке. Тај услов је еквивалентан услову да за свако $x \in M$ важи $\beta_{a \cdot y}(x) = (a \cdot \beta_y)(x)$, који се своди на асоцијативност упаривања $\langle x|a \cdot y \rangle = \langle x \cdot a|y \rangle$. $\square$

Лема 1.1.6. *Ако је A, $\mathbb{K}$-алгебра, онда постоји узајамно једнозначна кореспонденција између линеарних форми $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ и асоцијативних упаривања $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$.*

Доказ. Сваки линеарни функционал $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ одређује канонско упаривање $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ дефинисано са $\beta(x \otimes y) = \varepsilon(xy)$, које је асоцијативно, јер је множење у алгебри асоцијативно.
Обрнуто, свако асоцијативно упаривање $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$, $x \otimes y \mapsto \langle x|y\rangle$ одређује канонску линеарну форму $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ дефинисану са

$$a \mapsto \langle 1_A|a\rangle = \langle a|1_A\rangle.$$

Ако кренемо од линеарне форме и придружимо јој канонско асоцијативно упаривање, а њему затим придружимо канонску линеарну форму, добићемо линеарну форму од које смо кренули и обрнуто. □

1.2 Дефиниције и примери Фробенијусових алгебри

У овој секцији ћемо изложити основне дефиниције Фробенијусових алгебри, са посебним освртом на примере. Од стандардне литературе наводимо [23] и [44].

Дефиниција 1.2.1. *Фробенијусова алгебра* је $\mathbb{K}$-алгебра A коначне димензије заједно са линеарном формом $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ чије језгро

$$Ker(\varepsilon) = \{a \in A \mid \varepsilon(a) = 0\}$$

не садржи нетривијалне леве идеале прстена A. Линеарну форму ε називамо *Фробенијусова форма.*

Напомена 1.2.1. На датој $\mathbb{K}$-алгебри на различите начине можемо дефинисати Фробенијусове форме.

Напомена 1.2.2. Услов да $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне леве идеале еквивалентан је услову да $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне главне леве идеале. Ако је $I \neq \{0\}$ нетривијални леви идеал такав да $I \subseteq Ker(\varepsilon)$, онда постоји не-нула елемент $x \in I$ и за главни идеал генерисан са x важи $Ax = \{ax \mid a \in A\} \subseteq I \subseteq Ker(\varepsilon)$. Услов да $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне главне леве идеале можемо записати у облику

$$\varepsilon(Ay) = 0 \;\Rightarrow\; y = 0.$$

Лема 1.2.1. *Нека је $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ линеарна форма и нека је $\langle x|y\rangle = \varepsilon(xy)$ одговарајуће асоцијативно упаривање $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) *β је недегенеративно упаривање.*

(2) *$Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне леве идеале.*

(3) *$Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне десне идеале.*

Доказ. На основу леме 1.1.4(2') упаривање $\langle\ |\ \rangle$ је недегенеративно ако и само ако

$$\begin{aligned} \forall x \in A\ \langle x|y\rangle = 0 \;&\Rightarrow y = 0,\ \text{тј.}\\ \langle A|y\rangle = 0 \;&\Rightarrow y = 0,\ \text{тј.}\\ \varepsilon(Ay) = 0 \;&\Rightarrow y = 0, \end{aligned}$$

што је еквивалентно услову да $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне леве идеале, па је (1) $\Leftrightarrow$ (2). За (1) $\Leftrightarrow$ (3) користимо услов (3') из леме 1.1.4. $\square$

Дефиниција 1.2.2. *Фробенијусова алгебра* је $\mathbb{K}$-алгебра A коначне димензије заједно са асоцијативним недегенеративним упаривањем $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$, које називамо *Фробенијусово упаривање.*

Претходна лема показује да су прва и друга дефиниција еквивалентне.

На основу леме 1.1.4 свако недегенеративно упаривање $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ индукује два $\mathbb{K}$-линеарна изоморфизма $\beta_{left} : A \xrightarrow{\sim} A^*$ и $\beta_{right} : A \xrightarrow{\sim} A^*$. Асоцијативност упаривања β еквивалентна је, на основу леме 1.1.5, услову да је β_{left} лево A-линеарно, као и услову да је β_{right} десно A-линеарно. Према томе, свако Фробенијусово упаривање индукује леви A-изоморфизам $A \xrightarrow{\sim} A^*$ и десни A-изоморфизам $A \xrightarrow{\sim} A^*$. Обрнуто, сваки леви A-изоморфизам $f : A \xrightarrow{\sim} A^*$ дефинише асоцијативно недегенеративно упаривање $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ задато са $\langle x|y \rangle = (f(y))(x)$. Упаривање β је асоцијативно јер важи $\langle x \cdot a|y \rangle = (f(y))(x \cdot a) = (a \cdot f(y))(x) = (f(a \cdot y))(x) = \langle x|a \cdot y \rangle$. Како се пресликавање $\beta_{left} : A \xrightarrow{\sim} A^*$ поклапа са изоморфизмом f, следи да је упаривање β недегенеративно.

Слично, сваки десни A-изоморфизам $g : A \xrightarrow{\sim} A^*$ дефинише асоцијативно недегенеративно упаривање $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ задато са $\langle x|y \rangle = (g(x))(y)$.

Можемо закључити да је друга дефиниција Фробенијусове алгебре еквивалентна са следећим дефиницијама.

Дефиниција 1.2.3. *Фробенијусова алгебра* је $\mathbb{K}$-алгебра A коначне димензије заједно са левим A-изоморфизмом $A \xrightarrow{\sim} A^*$.

Дефиниција 1.2.4. *Фробенијусова алгебра* је $\mathbb{K}$-алгебра A коначне димензије заједно са десним A-изоморфизмом $A \xrightarrow{\sim} A^*$.

Ако имамо Фробенијусову форму $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ чије језгро не садржи нетривијалне главне леве идеале, можемо дефинисати $f : A \to A^*$ са $f(1_A) = \varepsilon$ и продужити га до лево A-линеарног пресликавања $f(x) = x \cdot \varepsilon$. Ако је $f(x) = 0$, онда је $(f(x))(y) = 0$ за све $y \in A$, тј. $(x \cdot \varepsilon)(y) = \varepsilon(y \cdot x) = 0$ за све $y \in A$. Како $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне главне леве идеале, закључујемо да је $x = 0$ и да је пресликавање f инјективно. Из $\dim A = \dim A^*$ следи да је f и сурјективно, тј. да је f леви A-изоморфизам.

Обрнуто, ако имамо леви A-изоморфизам $f : A \xrightarrow{\sim} A^*$, можемо дефинисати линеарну форму $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ са $\varepsilon = f(1_A)$ чије језгро не садржи нетривијалне главне леве идеале, јер је f инјективно и лево A-линеарно.

Тврђење 1.2.1. *Нека је A коначно-димензионална $\mathbb{K}$-алгебра. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) *Постоји $\mathbb{K}$-линеарна форма $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ таква да је $\varepsilon(ab) = \varepsilon(ba)$, за све $a, b \in A$, и $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне леве идеале од A.*

(2) *Постоји асоцијативно недегенеративно упаривање $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ такво да је $\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle$, за све $a, b \in A$.*

(3) *Постоји леви A-изоморфизам $A \xrightarrow{\sim} A^*$ који је и десно A-линеаран.*

Доказ. Докажимо да је (1) $\Leftrightarrow$ (3). Ако је $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ линеарна форма таква да је $\varepsilon(ab) = \varepsilon(ba)$, за све $a, b \in A$, и $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне леве идеале од A, дефинишимо

$\mathbb{K}$-линеарно пресликавање $f : A \to A^*$ са $f(a)(b) = \varepsilon(ab)$, за све $a, b \in A$. Пресликавање f је и лево и десно A-линеарно на основу следећих једнакости

$$(c \cdot f(a))(b) = f(a)(bc) = \varepsilon(a(bc)) = \varepsilon((bc)a) = \varepsilon(b(ca)) = \varepsilon((ca)b) = f(ca)(b)$$
$$(f(a) \cdot c)(b) = f(a)(cb) = \varepsilon(a(cb)) = \varepsilon((ac)b) = f(ac)(b),$$

за све $a, b, c \in A$. Како $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне леве (десне) идеале од A, пресликавање f је инјективно, а због $\dim A = \dim A^*$ и изоморфизам.

Обрнуто, ако је $f : A \xrightarrow{\sim} A^*$ пресликавање које је и леви и десни A-изоморфизам, дефинишимо $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ са $\varepsilon = f(1_A)$. Тада је

$$\varepsilon(a) = f(1_A)(a) = f(1_A)(a \cdot 1_A) = (f(1_A) \cdot a)(1_A) = f(1_A \cdot a)(1_A) = f(a)(1_A).$$

За елементе $a, b \in A$ важе следеће једнакости

$$\begin{aligned} \varepsilon(ab) &= f(ab)(1_A) = (f(a) \cdot b)(1_A) = f(a)(1_A \cdot b) = f(a)(b) \\ &= f(a \cdot 1_A)(b) = (a \cdot f(1_A))(b) = f(1_A)(ba) = \varepsilon(ba). \end{aligned}$$

Како је f мономорфизам, следи да $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне леве (десне) идеале од A. □

Дефиниција 1.2.5. Фробенијусова алгебра је *симетрична Фробенијусова алгебра* ако задовољава један, а самим тим сва три еквивалентна услова претходног тврђења.

Тврђење 1.2.2. *Ако је A, $\mathbb{K}$-алгебра са Фробенијусовом формом ε, онда је свака друга Фробенијусова форма на A облика $u \cdot \varepsilon$, где је $u \in A$ инвертибилан елемент.*

Доказ. Ако је $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ Фробенијусова форма и $u \in A$ инвертибилан елемент, онда је и $u \cdot \varepsilon$ такође Фробенијусова форма. Заиста, ако за све $x \in A$ важи $(u \cdot \varepsilon)(xy) = \varepsilon(xyu) = 0$, онда је $yu = 0$, па и $y = 0$. Према томе, $Ker(u \cdot \varepsilon)$ не садржи нетривијалне главне леве идеале. Нека је (A, ε') друга Фробенијусова структура на A. Како постоји изоморфизам $f : A \xrightarrow{\sim} A^*$ дефинисан са $f(x) = x \cdot \varepsilon$, а $\varepsilon' \in A^*$, постоји елемент $u \in A$ такав да је $\varepsilon' = f(u) = u \cdot \varepsilon$. Слично, како је ε' Фробенијусова форма, то постоји изоморфизам $f' : A \xrightarrow{\sim} A^*$ дефинисан са $f'(x) = x \cdot \varepsilon'$. За $\varepsilon \in A^*$, постоји елемент $v \in A$ такав да је $\varepsilon = f'(v) = v \cdot \varepsilon' = vu \cdot \varepsilon$. Из $f(1_A) = \varepsilon = vu \cdot \varepsilon = f(vu)$ следи да је $1_A = vu$, јер је f изоморфизам, па је елемент u инвертибилан. □

1.2.1 Примери

Пример 1.2.1. Тривијална Фробенијусова алгебра $A = \mathbb{K}$ са Фробенијусовом формом $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$ која је идентично пресликавање на $\mathbb{K}$.

Пример 1.2.2. Ако је A коначно раширење поља $\mathbb{K}$, како су у пољу A једини идеали $\{0\}$ и A, свако $\mathbb{K}$-линеарно пресликавање $A \to \mathbb{K}$ можемо узети за Фробенијусову форму.

Пример 1.2.3. Поље комплексних бројева $\mathbb{C}$ је Фробенијусова алгебра над пољем $\mathbb{R}$ са Фробенијусовом формом $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$ дефинисаном са $a + ib \mapsto a$.

Пример 1.2.4. Матрична алгебра $M_n(\mathbb{K})$ је Фробенијусова алгебра са Фробенијусовом формом $Tr : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ која свакој матрици $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{K})$ придружује њен траг

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Ако за све $X \in M_n(\mathbb{K})$ важи $Tr(XY) = 0$, онда тај услов важи и за елементарну матрицу E_{ij}, која има 1 у пресеку i-те врсте и j-те колоне, а на осталим местима нуле. Из $Tr(E_{ij} \cdot Y) = y_{ji} = 0$, за све $1 \leq i, j \leq n$ следи $Y = 0$. Како је $Tr(AB) = Tr(BA)$, ова Фробенијусова алгебра је симетрична. Фробенијусову форму можемо и другачије дефинисати као композицију множења нецентралним инвертибилним елементом и трага. На пример, ако $\varepsilon' : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ дефинишемо са

$$\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \mapsto \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \mapsto b + c$$

добићемо несиметричну Фробенијусову алгебру.

Пример 1.2.5. Нека је G коначна мултипликативна група чији је неутрал e. Групна алгебра $\mathbb{K}G$ је $\mathbb{K}$-векторски простор свих формалних линеарних комбинација $\sum_{g \in G} \lambda_g g$, где су $\lambda_g \in \mathbb{K}$. Множење у овој алгебри индуковано је множењем у групи G

$$(\sum_{g \in G} \lambda_g g)(\sum_{h \in G} \mu_h h) = \sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h gh.$$

Димензија $\mathbb{K}$-алгебре $\mathbb{K}G$ је једнака реду групе $|G|$, а неутрал за множење је e. Ова алгебра је комутативна ако и само ако је група G комутативна. Алгебра $\mathbb{K}G$ добија Фробенијусову структуру, ако Фробенијусову форму $\varepsilon : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}$ дефинишемо на генераторима са

$$\varepsilon(g) = \begin{cases} 1, & \text{ако } g = e \\ 0, & \text{ако } g \neq e. \end{cases}$$

Ако је $y = \sum_{g \in G} \lambda_g g \neq 0$, постоји $h \in G$ такав да је $\lambda_h \neq 0$. Тада је $\varepsilon(h^{-1}y) = \varepsilon(\sum_{g \in G} \lambda_g h^{-1} g) = \lambda_h \neq 0$, па $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне главне леве идеале.

Одговарајуће упаривање $\beta : \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G \to \mathbb{K}$ дефинисано са

$$(\sum_{g \in G} \lambda_g g) \otimes (\sum_{h \in G} \mu_h h) \mapsto \varepsilon(\sum_{g,h \in G} \lambda_g \mu_h gh) = \sum_{g \in G} \lambda_g \mu_{g^{-1}}$$

је асоцијативно и недегенеративно са коупаривањем $\gamma : \mathbb{K} \to \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G$ дефинисаним са

$$\gamma(1_{\mathbb{K}}) = \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes g.$$

И ово је пример симетричне Фробенијусове алгебре, од које опет можемо направити несиметричну компоновањем са нецентралним инвертибилним елементом, ако такав постоји.

Напомена 1.2.3. Фробенијусову форму $\varepsilon : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}$ можемо дефинисати и на други начин са

$$\varepsilon(g) = \begin{cases} |G|, & \text{ако } g = e \\ \ \ 0, & \text{ако } g \neq e. \end{cases}$$

Пример 1.2.6. Нека је A коначно-димензионална $\mathbb{K}$-алгебра и $T(A) = A \oplus A^*$, тј.

$T(A) = \{(a, f)|\ a \in A, f \in A^*\}$ тривијална екстензија алгебре A са A-бимодулом A^*. Тада $T(A)$ има структуру $\mathbb{K}$-алгебре у односу на операције дефинисане са

$$\begin{aligned}(a, f) + (b, g) &= (a + b, f + g)\\ c(a, f) &= (ca, cf)\\ (a, f)(b, g) &= (ab, ag + fb)\end{aligned}$$

за $a, b \in A, f, g \in A^*, c \in \mathbb{K}$ и њена димензија је $2 \dim A$. Фробенијусову форму $\varepsilon : T(A) \to \mathbb{K}$ можемо дефинисати са $\varepsilon(a, f) = f(1_A)$. Докажимо да $Ker(\varepsilon)$ не садржи нетривијалне главне леве идеале од $T(A)$. Претпоставимо да за све $(a, f) \in T(A)$ важи $\varepsilon((a, f)(b, g)) = 0$. Тада је

$$\begin{gathered}\varepsilon(ab, ag + fb) = (ag + fb)(1_A) = (ag)(1_A) + (fb)(1_A) =\\ g(1_A \cdot a) + f(b \cdot 1_A) = g(a) + f(b) = 0, \text{ за све } a \in A, f \in A^*.\end{gathered}$$

Специјално, за $f = 0$ важи $g(a) = 0$, за све $a \in A$, па је $g = 0$. За сваки $f \in A^*$ важи $f(b) = 0$, из чега следи $b = 0$ и $(b, g) = (0, 0)$.
И ово је пример симетричне Фробенијусове алгебре, јер је

$$\begin{gathered}\varepsilon((a, f)(b, g)) = \varepsilon(ab, ag + fb) = (ag + fb)(1_A) = g(a) + f(b) = f(b) + g(a) =\\ f(1_A \cdot b) + g(a \cdot 1_A) = (bf)(1_A) + (ga)(1_A) = \varepsilon(ba, bf + ga) = \varepsilon((b, g)(a, f)).\end{gathered}$$

1.3 Коалгебарска структура Фробенијусове алгебре

Карактеризација Фробенијусових алгебри као алгебри A које имају и комножење које је пресликавање A-модула A и $A \otimes A$ дата је у радовима Абрамса ([2] за комутативан и [1] за некомутативан случај).

Нека је A коначно-димензионална $\mathbb{K}$-алгебра са множењем $\mu : A \otimes A \to A$ и јединицом $\eta : \mathbb{K} \to A$. Означимо са $\bar{\mu} : A \otimes A \to A$ пресликавање $a \otimes b \mapsto ba$. Тада дуални простор A^* има природну структуру коалгебре.

Из линеарне алгебре је познато да постоји изоморфизам $\phi : A^* \otimes A^* \xrightarrow{\sim} (A \otimes A)^*$ дат са

$$f \otimes g \mapsto [a \otimes b \mapsto f(a)g(b)].$$

Комножење $\Delta : A^* \to A^* \otimes A^*$ ћемо дефинисати као композицију

$$A^* \xrightarrow{\bar{\mu}^*} (A \otimes A)^* \xrightarrow{\phi^{-1}} A^* \otimes A^*,$$

при чему је дуално пресликавање $\bar{\mu}^* : A^* \to (A \otimes A)^*$ дато са $\bar{\mu}^*(f) = f \circ \bar{\mu}$. Јасно је да за комножење Δ важи

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \ \Leftrightarrow\ f(ba) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)g_i(b), \text{ за све } a, b \in A. \tag{1.1}$$

Из асоцијативности множења $\bar{\mu}$ и контраваријантности функтора $F : Vect_{\mathbb{K}} \to Vect_{\mathbb{K}}$ који је на објектима дефинисан са $F : V \mapsto V^*$, а на стрелицама са $F : f \mapsto f^*$, следи коасоцијативност комножења Δ.

Којединицу $\epsilon : A^* \to \mathbb{K}$ дефинишемо као композицију

$$A^* \xrightarrow{\eta^*} \mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{K},$$

где је $\mathbb{K}^* \longrightarrow \mathbb{K}$ природни изоморфизам дат са $g \mapsto g(1)$, за $g \in \mathbb{K}^*$, док је дуално пресликавање $\eta^* : A^* \to \mathbb{K}^*$ дато са $\eta^*(f) = f \circ \eta$, за $f \in A^*$.

За којединицу $\epsilon : A^* \to \mathbb{K}$ важи

$$\epsilon(f) = f(1_A). \tag{1.2}$$

Ако је (C, Δ, ϵ) коалгебра и $\theta : V \to C$ изоморфизам векторских простора, онда и V има структуру коалгебре. Комножење $\delta : V \to V \otimes V$ је $\delta = (\theta^{-1} \otimes \theta^{-1}) \circ \Delta \circ \theta$, а којединица $\varepsilon = \epsilon \circ \theta$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta"'] & V \otimes V \\ C \arrow[r, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[u, "\theta^{-1} \otimes \theta^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ C \arrow[r, "\epsilon"'] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Ако је A Фробенијусова алгебра са недегенеративним асоцијативним упаривањем $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$, оно индукује десни A-линеарни изоморфизам $\theta = \beta_{right} : A \xrightarrow{\sim} A^*$ дефинисан са $a \mapsto \langle a|\_\rangle$. Комножење и којединицу дефинишемо са

$$\delta = (\theta^{-1} \otimes \theta^{-1}) \circ \Delta \circ \theta, \quad \varepsilon = \epsilon \circ \theta :$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\theta"'] & A \otimes A \\ A^* \arrow[r, "\Delta"'] & A^* \otimes A^* \arrow[u, "\theta^{-1} \otimes \theta^{-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\ A^* \arrow[r, "\epsilon"'] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Приметимо да за комножење и којединицу важи

$$\delta(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \quad \Leftrightarrow \quad \langle a|yx\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle a_i|x\rangle\langle b_i|y\rangle, \text{ за све } x, y \in A, \tag{1.3}$$

$$\varepsilon(a) = \langle a|1_A\rangle, \text{ за све } a \in A. \tag{1.4}$$

Којединица ε је заправо Фробенијусова форма која одговара Фробенијусовом упаривању β.

Варијанта следећег тврђења за случај када је A комутативна алгебра може се наћи у [15].

Тврђење 1.3.1. *Нека је A коначно-димензионална $\mathbb{K}$-алгебра. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) *A је Фробенијусова алгебра.*

(2) *Постоји коалгебарска структура (A, δ, ε) таква да је*

$$\delta(x) = \sum_{i=1}^{n} x a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i x, \quad \textit{за све } x \in A.$$

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2) Нека је дато недегенеративно асоцијативно упаривање $\langle\ |\ \rangle$. Тада комножење δ и којединицу ε дефинишемо са (1.3) и (1.4). Ако је $\delta(1_A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$, онда за све $x, y, z \in A$ важи

$$\sum_{i=1}^{n}\langle a_i|y\rangle\langle b_i x|z\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle a_i|y\rangle\langle b_i|xz\rangle = \langle 1_A|xzy\rangle = \langle x|zy\rangle,$$

па је $\delta(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i x$. Друга једнакост се доказује слично.

(2) $\Rightarrow$ (1) Дефинишимо упаривање $\beta : A\otimes A \to \mathbb{K}$ помоћу којединице

$$\langle x|y\rangle = \varepsilon(xy).$$

Како је множење у алгебри A асоцијативно, закључујемо да је ово упаривање асоцијативно. Ако за све $a \in A$ важи $\langle x|a\rangle = 0$, онда на основу аксиоме којединице $\mathbf{1}_A = (\varepsilon \otimes \mathbf{1}_A)\circ\delta$ имамо

$$x = (\varepsilon\otimes\mathbf{1}_A)(\delta(x)) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(xa_i)b_i = \sum_{i=1}^{n}\langle x|a_i\rangle b_i = 0,$$

па је упаривање и недегенеративно. $\square$

Ако је $e = [e_1, \dots, e_n]$ база за A, онда је $[\theta(e_1), \dots, \theta(e_n)]$ база за A^*, за коју постоји дуална база $f = [f_1, \dots, f_n]$ за A тако да је $\theta(e_i)(f_j) = \langle e_i|f_j\rangle = \delta_{ij}$. Такав пар база (e, f) називамо *дуални пар Фробенијусовог упаривања* $\langle\ |\ \rangle$.

Лема 1.3.1. *Нека је A Фробенијусова алгебра са упаривањем $\langle\ |\ \rangle$ и одговарајућом коалгебарском структуром (A, δ, ε). Ако базе $e = [e_1, \dots, e_n]$ и $f = [f_1, \dots, f_n]$ чине дуални пар упаривања $\langle\ |\ \rangle$, онда је*

$$\delta(1_A) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i.$$

Доказ. Нека је $\delta(1_A) = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i$. На основу аксиоме којединице и тврђења 1.3.1 за све $x \in A$ важи

$$x = (\mathbf{1}_A\otimes\varepsilon)(\delta(x)) = (\mathbf{1}_A\otimes\varepsilon)(\sum_{i=1}^{m} a_i\otimes b_i x) = \sum_{i=1}^{m}\varepsilon(b_i x)a_i = \sum_{i=1}^{m}\langle b_i|x\rangle a_i.$$

Према томе, систем вектора $[a_1, \dots, a_m]$ је генератриса векторског простора A из које се може издвојити база. После пренумерисања вектора можемо претпоставити да је $[a_1, \dots, a_n]$ база за A. Тада је $\delta(1_A) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b'_i$ и $\delta(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b'_i x$. Из једнакости $x = \sum_{i=1}^{n}\langle b'_i|x\rangle a_i$ следи да је $\langle b'_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$, тј. да базе $[a_1, \dots, a_n]$ и $[b'_1, \dots, b'_n]$ чине дуални пар.

Уочимо изоморфизам $\psi : A\otimes A \xrightarrow{\sim} Hom(A, A)$ дефинисан са

$$(\psi(a\otimes b))(c) = \langle a|c\rangle\cdot b, \quad \text{за све } a, b, c \in A.$$

Пошто базе $e = [e_1, \dots, e_n]$ и $f = [f_1, \dots, f_n]$ чине дуални пар, имамо да је

$$\psi(\sum_{i=1}^{n} e_i\otimes f_i) = \mathbf{1}_A.$$

Како је и $\psi(\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b'_i) = \mathbf{1}_A$, из инјективности пресликавања ψ следи да је $\delta(1_A) = \sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b'_i = \sum_{i=1}^{n} e_i\otimes f_i$. $\square$

Пример 1.3.1. Нека је $A = M_n(\mathbb{K})$ матрична Фробенијусова алгебра са асоцијативним недегенеративним упаривањем $\langle A|B\rangle = Tr(AB)$ и нека је $e = [E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ канонска база. Из $Tr(E_{i,j}E_{k,l}) = Tr(\delta_{jk}E_{i,l}) = \delta_{jk}\delta_{il}$ следи да базе $e = [E_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ и $f = [E_{j,i} \mid 1 \leq i, j \leq n]$ чине дуални пар упаривања $\langle\ |\ \rangle$. Ако је E јединична матрица реда n, на основу леме 1.3.1 за комножење $\delta : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}) \otimes M_n(\mathbb{K})$ важи

$$\delta(E) = \sum_{i,j=1}^{n} E_{i,j} \otimes E_{j,i}.$$

Тада је, на основу тврђења 1.3.1

$$\delta(X) = \sum_{i,j=1}^{n} E_{i,j} \otimes E_{j,i}X = \sum_{i,j=1}^{n} E_{i,j} \otimes (\sum_{k=1}^{n} x_{ik}E_{j,k}) = \sum_{i,k=1}^{n} x_{ik}(\sum_{j=1}^{n} E_{i,j} \otimes E_{j,k}).$$

За $n = 2$ имамо да је $\delta(\left[\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right]) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$.

Пример 1.3.2. Нека је $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ група са неутралом $e = g_1$ и нека је $\mathbb{K}G$ групна алгебра са Фробенијусовим упаривањем

$$\langle g|h\rangle = \begin{cases} 1, & \text{ако } gh = e \\ 0, & \text{ако } gh \neq e. \end{cases}$$

Тада $[g_1, \ldots, g_n]$ и $[g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}]$ чине дуални пар упаривања $\langle\ |\ \rangle$. На основу леме 1.3.1 за комножење $\delta : \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G$ важи

$$\delta(e) = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes g_i^{-1},$$

а на основу тврђења 1.3.1

$$\delta(x) = \sum_{i=1}^{n} xg_i \otimes g_i^{-1} = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes g_i^{-1}x.$$

Ово се разликује од уобичајене структуре Хопфове алгебре $\mathbb{K}G$ са комножењем и којединицом који су дефинисани на базним елементима са

$$\delta : g \mapsto g \otimes g$$

$$\varepsilon : g \mapsto 1 \text{ за све } g \in G.$$

Тврђење 1.3.2. *Нека је (A, ε) Фробенијусова алгебра са одговарајућом коалгебарском структуром (A, δ, ε) код које је Фробенијусова форма ε којединица. Тада је $\delta : A \to A \otimes A$ лево A-линеарно и десно A-линеарно, тј. следећи дијаграми комутирају*

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{1_A \otimes \delta} & A \otimes A \otimes A \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu \otimes 1_A} \\ A & \xrightarrow[\delta]{} & A \otimes A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\delta \otimes 1_A} & A \otimes A \otimes A \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_A \otimes \mu} \\ A & \xrightarrow[\delta]{} & A \otimes A \end{array}$$

Једнакости

$$\delta \circ \mu = (\mu \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \delta) \text{ и } \delta \circ \mu = (1_A \otimes \mu) \circ (\delta \otimes 1_A) \tag{1.5}$$

називамо *Фробенијусовим релацијама.*

Доказ. Ако је $\delta(1_A) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$, онда према тврђењу 1.3.1 за све $b \in A$ важи $\delta(b) = \sum_{i=1}^n be_i \otimes f_i$. Провериђемо да први дијаграм комутира:

$$((\mu \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \delta))(a \otimes b) = (\mu \otimes 1_A)(a \otimes \delta(b)) =$$
$$(\mu \otimes 1_A)(\sum_{i=1}^n a \otimes be_i \otimes f_i) = \sum_{i=1}^n abe_i \otimes f_i = \delta(ab) = (\delta \circ \mu)(a \otimes b).$$

Аналогно се проверава и за други дијаграм. □

Следећа теорема даје најважнију карактеризацију Фробенијусових алгебри помоћу Фробенијусових релација.

Теорема 1.3.1. (видети [23, Тврђење 2.3.24]) *Нека је A векторски простор са множењем $\mu : A \otimes A \to A$, јединицом $\eta : \mathbb{K} \to A$, комножењем $\delta : A \to A \otimes A$ и којединицом $\varepsilon : A \to \mathbb{K}$. Ако важе Фробенијусове релације, онда важи:*

(1) *Векторски простор A је коначне димензије.*

(2) *Множење је асоцијативно, комножење је коасоцијативно и A је коначно-димензионална $\mathbb{K}$-алгебра.*

(3) *Којединица ε је Фробенијусова форма, па је (A, ε) Фробенијусова алгебра.*

Лоувир је још 1967. године ([27]) проучавао објекте који су и моноид и комоноид, при чему важе и одређени услови компатибилности:

$$\delta = (1_A \otimes \mu) \circ (\gamma \otimes 1_A) = (\mu \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \gamma), \tag{1.6}$$

$$\mu = (\beta \otimes 1_A) \circ (1_A \otimes \delta) = (1_A \otimes \beta) \circ (\delta \otimes 1_A). \tag{1.7}$$

Он додуше није експлицитно навео Фробенијусове релације, али су оне директна последица услова (1.6) и (1.7). Први који је навео Фробенијусове релације и доказао претходну теорему је био Квин 1991. године ([37]), уз додатну претпоставку аксиоме симетрије. Независно од њега, Абрамс 1995. године даје карактеризацију комутативних Фробенијусових алгебри као алгебри које имају кокомутативно комножење које је пресликавање A-модула (видети [2]). Убрзо затим 1998. године у новом раду Абрамса [1] појављује се уопштење и на некомутативан случај.

Глава 2

Сфере као Фробенијусови објекти

Фробенијусову структуру једнодимензионалне сфере S^1 проучавали су многи математичари (видети [8], [2] и [23]). Сфера S^1, као комутативан Фробенијусов објекат категорије чији су морфизми 2-кобордизми, увек се помиње у контексту дводимензионалних тополошких квантних теорија поља и у вези са Фробенијусовим алгебрама. У својој докторској дисертацији Дијкграф се бавио и Фробенијусовом структуром сфера већих димензија (видети [8]).

Није тешко проверити да је за свако $d \geq 1$, сфера S^{d-1} симетричан Фробенијусов објекат у категорији $dCob$ чији су морфизими d-кобордизми. Лако се може проверити и да је за свако $d \geq 2$, сфера S^{d-1} комутативан Фробенијусов објекат у овој категорији. Иако Савин у раду [42] тврди да је свака сфера комутативан Фробенијусов објекат, то није тачно за 0-димензионалну сферу. Наиме, сфера S^0 није комутативан, али јесте симетричан Фробенијусов објекат. Према томе, када се димензија сфера повећа са 0 на 1, то резултира сужавањем класе симетричних на класу комутативних Фробенијусових објеката. Стога се природно поставља питање: да ли са новим повећањем димензија сфера добијамо нове класе Фробенијусових објеката? Показаћемо да је одговор на ово питање негативан. У односу на језик Фробенијусових објеката, нема разлике између сфера— почевши од димензије 1, све сфере су слободне од додатних једнакости које су формулисане на овом језику.

Ако додамо неку нову једнакост између канонских стрелица, тј. између оних стрелица које су релевантне за Фробенијусову структуру, неке канонске стрелице са истим доменом и кодоменом и даље остају различите. Према томе, постоји много различитих класа комутативних Фробенијусових објеката. Ако за две различите затворене 2-многострукости претпоставимо да важи одговарајућа једнакост између канонских стрелица, онда сви комутативни Фробенијусови објекти који задовољавају ту нову једнакост чине праву подкласу класе комутативних Фробенијусових објеката. На пример, класа комутативних Фробенијусових објеката који задовољавају једнакост: комножење компоновано са множењем је идентитет, чини праву подкласу класе комутативних Фробенијусових објеката који задовољавају једнакост: јединица компонована са комножењем, затим са множењем и на крају са којединицом једнако идентитети. Последња класа одговара пару 2-многострукости који се састоји од торуса $S^1 \times S^1$ и сфере S^2.

У овом поглављу ћемо показати да ниједна права подкласа класе комутативних Фробенијусових објеката не садржи сферу S^{d-1}, за $d \geq 2$. За ту сврху, конструисаћемо симетричну моноидалну категорију K са универзалним комутативним Фробенијусовим објектом, и показаћемо да је сваки симетрични моноидални функтор из K у $dCob$, који пресликава овај објекат у сферу S^{d-1} веран, за свако $d \geq 2$. Садржај овог поглавља објављен је у раду [4].

2.1 Моноидалне категорије и моноидални функтори

Ову уводну секцију ћемо посветити неким основним појмовима из теорије категорија, који су неопходни за разумевање даљег текста.

Дефиниција 2.1.1. *Моноидална категорија* $\langle \mathcal{M}, \otimes, e, \alpha, \lambda, \rho \rangle$ је категорија $\mathcal{M}$ са бифунктором $\otimes : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, који је асоцијативан до на природни изоморфизам $\alpha = \alpha_{a,b,c} : a \otimes (b \otimes c) \cong (a \otimes b) \otimes c$ и са објектом $e \in \mathcal{M}$, који је неутрал за $\otimes$ до на природне изоморфизме $\lambda_a : e \otimes a \cong a$ и $\rho_a : a \otimes e \cong a$. Ове стрелице морају да задовољавају следеће услове. Пентагон дијаграм

$$\begin{tikzcd}
a \otimes (b \otimes (c \otimes d)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathbf{1} \otimes \alpha"'] & (a \otimes b) \otimes (c \otimes d) \arrow[r, "\alpha"] & ((a \otimes b) \otimes c) \otimes d \\
a \otimes ((b \otimes c) \otimes d) \arrow[rr, "\alpha"'] & & (a \otimes (b \otimes c)) \otimes d \arrow[u, "\alpha \otimes \mathbf{1}"']
\end{tikzcd}$$

комутира за све $a, b, c, d \in \mathcal{M}$, троугаони дијаграм

$$\begin{tikzcd}
a \otimes (e \otimes c) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathbf{1} \otimes \lambda"'] & (a \otimes e) \otimes c \arrow[d, "\rho \otimes \mathbf{1}"] \\
a \otimes c \arrow[r, phantom, "="] & a \otimes c
\end{tikzcd}$$

комутира за све $a, c \in \mathcal{M}$ и $\lambda_e = \rho_e : e \otimes e \to e$. Моноидална категорија је *стриктна* када су структурне стрелице α, λ и ρ идентичне.

Из комутативности пентагон и троугаоног дијаграма и услова $\lambda_e = \rho_e$ на основу теореме кохеренције (видети последицу теореме VII.2.1 из [25]) следи да сваки дијаграм добијен од α, λ и ρ тензорисањем комутира. То значи да за произвољну реч са словима $a, b, \ldots, e$ постоји јединствено одређена композиција од α, λ и ρ која ту реч пресликава у реч са крајње лево асоцираним заградама у којој се слово e више не појављује.

Дефиниција 2.1.2. *Симетрична моноидална категорија* је моноидална категорија $\mathcal{M}$ заједно са фамилијом природних изоморфизама $\tau_{a,b} : a \otimes b \cong b \otimes a$ тако да следећи дијаграми комутирају

$$\begin{tikzcd}
a \otimes e \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\rho"'] & e \otimes a \arrow[d, "\lambda"] \\
a \arrow[r, phantom, "="] & a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \otimes b \arrow[r, "\tau_{a,b}"] \arrow[dr, "\mathbf{1}"'] & b \otimes a \arrow[d, "\tau_{b,a}"] \\
 & a \otimes b
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(a \otimes b) \otimes c \arrow[r, "\tau_{a \otimes b, c}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & c \otimes (a \otimes b) \arrow[d, "\alpha"] \\
a \otimes (b \otimes c) \arrow[d, "\mathbf{1} \otimes \tau_{b,c}"'] & (c \otimes a) \otimes b \arrow[d, "\tau_{c,a} \otimes \mathbf{1}"] \\
a \otimes (c \otimes b) \arrow[r, "\alpha"'] & (a \otimes c) \otimes b
\end{tikzcd}$$

Теорема кохеренције за моноидалне категорије проширује се и на симетричне, па сви формални дијаграми у којима се појављују α, λ, ρ и τ комутирају.

Пример 2.1.1. Категорија $Vect_{\mathbb{K}}$ свих векторских простора коначне димензије над фиксираним пољем $\mathbb{K}$ са уобичајеним тензорским производом $\otimes$ и једнодимензионалним векторским простором $\mathbb{K}$ као неутралом пример је симетричне моноидалне категорије која није стриктна. На основу универзалног својства тензорског производа постоји јединствени изоморфизам $\alpha_{V,W,U} : V \otimes (W \otimes U) \cong (V \otimes W) \otimes U$, такав да $v \otimes (w \otimes u) \mapsto (v \otimes w) \otimes u$. Структурни изоморфизми $\lambda_V : \mathbb{K} \otimes V \cong V$ и $\rho_V : V \otimes \mathbb{K} \cong V$ дати су редом са $a \otimes v \mapsto av$ и $v \otimes a \mapsto av$, док је $\tau_{V,W} : V \otimes W \cong W \otimes V$ дефинисано са $v \otimes w \to w \otimes v$.

Дефиниција 2.1.3. *Јаки моноидални функтор* између моноидалних категорија $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ је уређена тројка (F, F_2, F_0), где је

1. $F : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ обичан функтор који сваком објекту a из $\mathcal{M}$ придружује објекат $F(a)$ из $\mathcal{M}'$, а свакој стрелици $f : a \to a'$ из $\mathcal{M}$ придружује стрелицу $F(f) : F(a) \to F(a')$, при чему важи $F(\mathbf{1}_a) = \mathbf{1}_{F(a)}$ и $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;

2. F_2 је природна трансформација са компонентама $F_2(a, b) : F(a) \otimes F(b) \to F(a \otimes b)$ које су изоморфизми. Природност значи да за сваки пар стрелица $f : a \to a'$ и $g : b \to b'$ следећи дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd}
F(a) \otimes F(b) \arrow[r, "F_2"] \arrow[d, "Ff \otimes Fg"'] & F(a \otimes b) \arrow[d, "F(f \otimes g)"] \\
F(a') \otimes F(b') \arrow[r, "F_2"'] & F(a' \otimes b')
\end{tikzcd}$$

3. За неутрале e и e', $F_0 : e' \to F(e)$ је изоморфизам у категорији $\mathcal{M}'$.

При томе следећа три дијаграма комутирају у $\mathcal{M}'$:

$$\begin{tikzcd}
F(a) \otimes (F(b) \otimes F(c)) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\mathbf{1} \otimes F_2(b,c)"'] & (F(a) \otimes F(b)) \otimes F(c) \arrow[d, "F_2(a,b) \otimes \mathbf{1}"] \\
F(a) \otimes F(b \otimes c) \arrow[d, "F_2(a, b \otimes c)"'] & F(a \otimes b) \otimes F(c) \arrow[d, "F_2(a \otimes b, c)"] \\
F(a \otimes (b \otimes c)) \arrow[r, "F(\alpha)"'] & F((a \otimes b) \otimes c)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(b) \otimes e' \arrow[r, "\rho'"] \arrow[d, "\mathbf{1} \otimes F_0"'] & F(b) \\
F(b) \otimes F(e) \arrow[r, "F_2"'] & F(b \otimes e) \arrow[u, "F(\rho)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
e' \otimes F(b) \arrow[r, "\lambda'"] \arrow[d, "F_0 \otimes \mathbf{1}"'] & F(b) \\
F(e) \otimes F(b) \arrow[r, "F_2"'] & F(e \otimes b) \arrow[u, "F(\lambda)"']
\end{tikzcd}$$

Дефиниција 2.1.4. Моноидални функтор између стриктних моноидалних категорија је *стриктан* ако су F_0 и сви $F_2(a, b)$ идентични изоморфизми.

Дефиниција 2.1.5. Ако су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ симетричне моноидалне категорије, *симетрични моноидални функтор* је моноидални функтор (F, F_2, F_0) такав да следећи дијаграм комутира:

$$\begin{tikzcd}
F(a)\otimes F(b) \arrow[r, "\tau'"] \arrow[d, "F_2"'] & F(b)\otimes F(a) \arrow[d, "F_2"] \\
F(a\otimes b) \arrow[r, "F(\tau)"'] & F(b\otimes a)
\end{tikzcd}$$

Дефиниција 2.1.6. *Моноид* $(M, \mu : M\otimes M \to M, \eta : e \to M)$ у стриктној моноидалној категорији $\mathcal{M}$ је тројка која се састоји од објекта M категорије $\mathcal{M}$ и две стрелице μ и η тако да следећи дијаграми комутирају

$$\begin{tikzcd}
M\otimes M\otimes M \arrow[r, "\mu\otimes\mathbf{1}_M"] \arrow[d, "\mathbf{1}_M\otimes\mu"'] & M\otimes M \arrow[d, "\mu"] \\
M\otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M\otimes M \arrow[dr, "\mu"'] & M \arrow[l, "\eta\otimes\mathbf{1}_M"'] \arrow[r, "\mathbf{1}_M\otimes\eta"] \arrow[d, "\mathbf{1}_M"] & M\otimes M \arrow[dl, "\mu"] \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Комоноид $(M, \delta : M \to M\otimes M, \varepsilon : M \to e)$ у $\mathcal{M}$ се дефинише на дуалан начин.

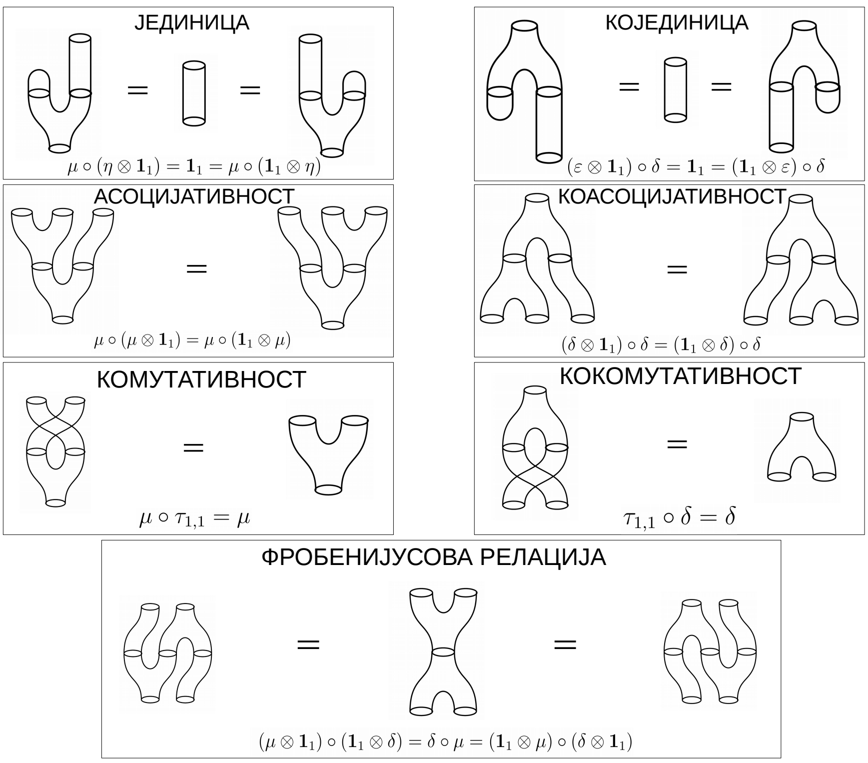
Фробенијусов објекат у $\mathcal{M}$ је петорка

$$(M, \mu : M\otimes M \to M, \eta : e \to M, \delta : M \to M\otimes M, \varepsilon : M \to e)$$

тако да је (M, μ, η) моноид, (M, δ, ε) комоноид, и важе следеће Фробенијусове једнакости

$$(\mu\otimes\mathbf{1}_M)\circ(\mathbf{1}_M\otimes\delta) = \delta\circ\mu = (\mathbf{1}_M\otimes\mu)\circ(\delta\otimes\mathbf{1}_M).$$

Ако је $\mathcal{M}$ симетрична моноидална категорија, онда је Фробенијусов објекат $(M, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ *комутативан* ако је $\mu\circ\tau_{M,M} = \mu$ и $\tau_{M,M}\circ\delta = \delta$, док је он *симетричан* ако је $\varepsilon\circ\mu\circ\tau_{M,M} = \varepsilon\circ\mu$ и $\tau_{M,M}\circ\delta\circ\eta = \delta\circ\eta$.



Слика 2.1: Аксиоме

2.2 Тополошке многострукости, оријентација и лепљење

Дефиниција 2.2.1. За $n \geq 0$, *тополошка многострукост димензије* n је Хаусдорфов тополошки простор M за који постоји пребројива база и који је локално еуклидски димензије n, тј. за сваку тачку од M постоји околина која је хомеоморфна отвореном подскупу од $\mathbf{R}^n$. *Карта* на тополошкој многострукости M је пар (U, φ), где је U отворен подскуп од M, $\varphi : U \to U'$ хомеоморфизам и $U' = \varphi(U) \subseteq \mathbf{R}^n$ отворен. *Атлас* на M је колекција карата $\{\varphi_i : U_i \to U_i' \mid i \in I\}$ тако да је $\bigcup\{U_i \mid i \in I\} = M$. За $n \geq 1$, n-димензионална *многострукост са границом* (∂-*многострукост*) је Хаусдорфов тополошки простор за који постоји пребројива база и у коме свака тачка има околину хомеоморфну отвореном подскупу полупростора

$$\pi_n^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n \geq 0\}.$$

Карта на n-димензионалној ∂-многострукости M је пар (U, φ), где је U отворен подскуп од M, $\varphi : U \to U'$ хомеоморфизам и $U' = \varphi(U) \subseteq \pi_n^+$ отворен. *Атлас* је поново колекција карата чији домени покривају M. *Рубна тачка* ∂-многострукости M је тачка која се са неком картом пресликава у тачку хиперравни

$$\pi_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n = 0\},$$

а иначе је *унутрашња тачка*. Скуп рубних тачака од M је њена *граница*, у ознаци ∂M, која је $(n-1)$-димензионална многострукост, а скуп унутрашњих тачака од M је њена *унутрашњост*, у ознаци $\mathrm{Int}M$, која је n-димензионална многострукост. *Унутрашњост* $\mathrm{Int}U$ отвореног подскупа U од M је $U - \partial M$. Свака n-димензионална многострукост, за $n \geq 1$, је n-димензионална ∂-многострукост, са празном границом.

Хомеоморфизам $f : U \to V$, где су $U, V \subseteq \mathbf{R}^n$ отворени, $n \geq 1$, *чува оријентацију* ако је за све $x \in U$ следећи изоморфизам хомолошких група са коефицијентима у $\mathbf{Z}$ идентитет

$$H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - \{0\}) \overset{\cong}{\to} H_n(U, U - \{x\}) \overset{f_*}{\to} H_n(V, V - \{f(x)\}) \overset{\cong}{\to} H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - \{0\}).$$

Први изоморфизам у овој композицији је дефинисан као композиција

$$H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - \{0\}) \xrightarrow{(t_x)_*} H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n - \{x\}) \xrightarrow[\text{eng. excision}]{\text{исецање}} H_n(U, U - \{x\}),$$

где је $t_x : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ транслација за x, а последњи изоморфизам је дефинисан аналогно.

Лема 2.2.1. *Нека је $\{W_i \mid i \in I\}$ отворен покривач отвореног подскупа U од $\mathbf{R}^n$. Хомеоморфизам $f : U \to V$, где је V отворен подскуп од $\mathbf{R}^n$, чува оријентацију акко рестрикције f на W_i чувају оријентацију за свако $i \in I$.*

Атлас $\{\varphi_i : U_i \to U_i' \mid i \in I\}$ n-димензионалне многострукости, $n \geq 1$, је *оријентисан* ако за све $i, j \in I$, хомеоморфизам

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j[U_i \cap U_j] \to \varphi_i[U_i \cap U_j]$$

чува оријентацију. Многострукост која има овакав атлас је *оријентабилна*. Оријентисани атлас је *максималан* ако се не може проширити до оријентисаног атласа додавањем још једне карте.

Два оријентисана атласа $\{\varphi_i : U_i \to U_i' \mid i \in I\}$ и $\{\psi_j : V_j \to V_j' \mid j \in J\}$ исте многострукости су *еквивалентна* ако за све $i \in I$ и све $j \in J$, хомеоморфизам

$$\varphi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j[U_i \cap V_j] \to \varphi_i[U_i \cap V_j]$$

чува оријентацију (видети [45, Дефиниција 21.11]).

Тврђење 2.2.1. *Ако су два оријентисана атласа исте многострукости еквивалентна, онда је и њихова унија оријентисани атлас ове многострукости.*

Транзитивност ове релације следи на основу леме 2.2.1, па важи следеће тврђење.

Тврђење 2.2.2. *Ова релација је релација еквиваленције на скупу оријентисаних атласа једне оријентисане многострукости.*

Ако је оријентабилна многострукост повезана, онда ова релација еквиваленције има тачно две класе. Следеће тврђење је последица тврђења 2.2.1 и 2.2.2.

Тврђење 2.2.3. *Сваки оријентисани атлас може се проширити до јединственог максималног оријентисаног атласа.*

Оријентација 0-димензионалне многострукости M је функција $\varepsilon : M \to \{-1, 1\}$. За $n \geq 1$, *оријентација* оријентабилне n-димензионалне многострукости M је избор њеног максималног оријентисаног атласа $\mathcal{O}_M$. Оријентација супротна оријентацији $\mathcal{O}_M$ добија се компоновањем сваке карте из $\mathcal{O}_M$ са једном рефлексијом простора $\mathbf{R}^n$, на пример са рефлексијом у односу на хиперраван π_n.

Оријентација на производу $M \times N$ две оријентисане многострукости M и N дата је максималним оријентисаним атласом који садржи производе $\varphi_i \times \psi_j$, где су φ_i карте из $\mathcal{O}_M$, а ψ_j карте из $\mathcal{O}_N$. Хомеоморфизам f између две оријентисане n-димензионалне многострукости M и N *чува оријентацију* ако за сваку карту $\varphi : U \to U'$ на M важи

$$\varphi \in \mathcal{O}_M \quad \text{акко} \quad \varphi \circ g \in \mathcal{O}_N,$$

где је g рестрикција f^{-1} на $f[U]$. Утапање n-димензионалне многострукости у n-димензионалну многострукост *чува оријентацију* ако његова рестрикција на слику чува оријентацију. Хомеоморфизам (утапање) из M у N *мења оријентацију* ако хомеоморфизам (утапање) из M у N са супротном оријентацијом чува оријентацију.

Ако је $n \geq 1$, n-димензионална ∂-многострукост је оријентабилна ако је њена унутрашњост оријентабилна и оријентација унутрашњости је оријентација ∂-многострукости. Оријентацију оријентисане ∂-многострукости M поново означавамо са $\mathcal{O}_M$. Оријентисана n-димензионална ∂-многострукост $M \subseteq \mathbf{R}^n$ је *оријентисана са идентитетом* ако њена оријентација садржи карте $\mathbf{1}_U : U \to U$ за сваки отворен подскуп $U \subseteq \mathrm{Int}M$.

Оријентација оријентисане ∂-многострукости индукује оријентацију њене границе на следећи начин. За оријентисану 1-димензионалну ∂-многострукост M и $x \in \partial M$, оријентишемо x са $\varepsilon(x) = 1$, ако за неку околину U од x у M постоји карта $\varphi : U \to U' \subseteq \pi_1^+$ таква да њена рестрикција на $\mathrm{Int}U$ припада $\mathcal{O}_M$. У супротном, x оријентишемо са $\varepsilon(x) = -1$. На пример, ако је $I = [0, 1]$ оријентисан са идентитетом, онда је $\varepsilon(0) = 1$ и $\varepsilon(1) = -1$. Ова оријентација је супротна у односу на оријентацију дату у [24], али је у складу са оријентацијом датом у [23].

Оријентација сфере S^0 је индукована оријентацијом интервала $[-1, 1]$. Према томе, коју год оријентацију сфере S^0 да изаберемо, једна тачка је позитивна, а друга је негативна.

За $n \geq 2$, оријентисана n-димензионална ∂-многострукост M индукује оријентацију на ∂M дату максималним оријентисаним атласом, који садржи рестрикције од φ на ∂U за сваку карту $\varphi : U \to U' \subseteq \pi_n^+$ чија рестрикција на $\mathrm{Int}U$ припада $\mathcal{O}_M$. На пример, ако је полупростор π_n^+ оријентисан са идентитетом, онда је и његова граница π_n оријентисана са идентитетом. Ако је $\pi_n^- = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_n \leq 0\}$ оријентисан са идентитетом, онда је његова граница π_n оријентисана максималним оријентисаним атласом који садржи рестрикцију рефлексије $g : \pi_n \to \pi_n$, дефинисане са

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = (-x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0),$$

на сваки отворен $U \subseteq \pi_n$, тј. π_n има оријентацију супротну у односу на оријентацију из претходног примера.

Нека је Σ_M колекција компоненти повезаности границе n-димензионалне ∂-многострукости M. Утапање оријентисане $(n-1)$-многострукости у M, чија је слика Σ_M, *чува оријентацију* (*мења оријентацију*) ако његова рестрикција на слику, у односу на индуковану оријентацију од Σ_M, чува (мења) оријентацију.

Нека су X, Y и Z тополошки простори и $f : Z \to X$ и $g : Z \to Y$ непрекидне функције. Нека је $\asymp$ најмања релација еквиваленције на дисјунктној унији

$$X + Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$$

таква да за сваки $z \in Z$ важи $(f(z), 0) \asymp (g(z), 1)$.

Посматрајмо функције $i : X \to (X+Y)/\asymp$ и $j : Y \to (X+Y)/\asymp$ дефинисане са $i(x) = [(x,0)]_\asymp$ и $j(y) = [(y,1)]_\asymp$. Означимо са $X +_{f,g} Y$ тополошки простор $((X+Y)/\asymp, \mathcal{T})$ са топологијом

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq (X+Y)/\asymp \ \mid i^{-1}[U] \text{ је отворен у } X \text{ и } j^{-1}[U] \text{ је отворен у } Y\}.$$

Ово је *пушаут* од f и g у категорији тополошких простора, тј. следећи дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "i"'] & X +_{f,g} Y \end{tikzcd}$$

и важи следеће универзално својство. За сваки пар непрекидних функција $i' : X \to A$ и $j' : Y \to A$ такав да је $i' \circ f = j' \circ g$, постоји јединствена непрекидна функција $h : X +_{f,g} Y \to A$ таква да је $h \circ i = i'$ и $h \circ j = j'$.

Нека су M и N две n-димензионалне ∂-многострукости и нека су Σ_M и Σ_N редом колекције компоненти повезаности од ∂M и ∂N, при чему су и Σ_M и Σ_N хомеоморфни са $(n-1)$-димензионалном многострукошћу Σ. Означимо са $f : \Sigma \to M$ и $g : \Sigma \to N$ два утапања чије су слике редом Σ_M и Σ_N.

Тврђење 2.2.4. *Простор $M +_{f,g} N$ је n-димензионална ∂-многострукост.*

Доказ. Ако је M n-димензионална ∂-многострукост и K компонента повезаности њене границе, онда је $M - K$ такође n-димензионална ∂-многострукост чија је граница $\partial M - K$. Тврђење следи на основу [9, Поглавље VIII, Тврђење 1.11]. □

Нека су M и N две оријентабилне n-димензионалне ∂-многострукости, а Σ_M, Σ_N и Σ као и малопре. Ако је $f : \Sigma \to M$ утапање које чува оријентацију и чија је слика Σ_M, а $g : \Sigma \to N$ утапање које мења оријентацију и чија је слика Σ_N, онда је n-димензионална ∂-многострукост $M +_{f,g} N$ оријентабилна.

Ако су $\varphi : U \to U'$ и $\psi : V \to V'$ редом карте на M и N, за које постоји $\Gamma \subseteq \Sigma$ (може бити и празан скуп), тако да је $\partial U = f[\Gamma]$ и $\partial V = g[\Gamma]$, означимо са $\varphi +_{f,g} \psi$ хомеоморфизам из $U +_{f,g} V$ у $U' +_{\varphi\circ f, \psi\circ g} V'$, при чему су f и g заправо рестрикције утапања f и g на Γ. Хомеоморфизам $\varphi +_{f,g} \psi$ постоји на основу универзалног својства пушаута. Оријентацију многострукости $M +_{f,g} N$ дефинишемо као максимални оријентисани атлас који садржи $\varphi +_{f,g} \psi$ за све парове карата φ и ψ такве да рестрикција φ на $\mathrm{Int}U$ припада $\mathcal{O}_M$, а рестрикција ψ на $\mathrm{Int}V$ припада $\mathcal{O}_N$. При томе рестрикције утапања $i : M \to M +_{f,g} N$ и $j : N \to M +_{f,g} N$ на унутрашњости чувају оријентацију.

Пример 2.2.1. Нека је $n \geq 2$ и нека су π_n^+ и π_n оријентисане са идентитетом. Нека је $f : \pi_n \to \pi_n^+$ утапање које чува оријентацију, а $g : \pi_n \to \pi_n^+$ утапање које мења оријентацију, и нека су њихове слике π_n. Без умањења општости можемо претпоставити да је f инклузија, а g рефлексија

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = (-x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Посматрајмо n-димензионалну многострукост $\pi_n^+ +_{f,g} \pi_n^+$.

Нека је $\mathbf{g} : \pi_n^+ \to \pi_n^-$ композиција две рефлексије простора $\mathbf{R}^n$—једне у односу на хиперраван $\pi_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\}$ и друге у односу на хиперраван π_n. Приметимо да $\mathbf{g}$ чува оријентацију и да је рестрикција $\mathbf{g}$ на π_n управо рефлексија $g : \pi_n \to \pi_n$. Према томе, $\mathbf{g}$ мења оријентацију границе, док је композиција $\mathbf{g} \circ g : \pi_n \to \pi_n^-$ баш инклузија.

Следећи дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd}
\pi_n^+ \arrow[d, "\mathbf{1}"'] \arrow[dr, "i"'] & \pi_n \arrow[l, "\supseteq"'] \arrow[r, "g"] & \pi_n^+ \arrow[d, "\mathbf{g}"] \arrow[dl, "j"] \\
& \pi_n^+ +_{f,g} \pi_n^+ \arrow[d, dashed, "h"] & \\
\pi_n^+ \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbf{R}^n & \pi_n^- \arrow[l, "\supseteq"']
\end{tikzcd}$$

а хомеоморфизам $h : \pi_n^+ +_{f,g} \pi_n^+ \to \mathbf{R}^n$ постоји на основу универзалног својства пушаута. Ако је $\mathbf{R}^n$ оријентисана са идентитетом, овај хомеоморфизам чува оријентацију.

Хомеоморфизам из $\mathbf{R}^n$ у $\mathbf{R}^n$ или из S^n у S^n је *стабилан* ако је једнак коначној композицији хомеоморфизама од којих је сваки једнак идентичном на неком непразном отвореном скупу.

Следећу теорему је прво доказао Радо за $n = 2$, [38], затим Моисе за $n = 3$, [30], Квин за $n = 4$, [36], и Кирби за $n \geq 5$, [22], док је случај $n = 1$ тривијалан.

Теорема 2.2.1. (Стабилни хомеоморфизам) *Сваки хомеоморфизам простора* $\mathbf{R}^n$ *у самог себе који чува оријентацију је стабилан.*

Два хомеоморфизма $f, g : X \to Y$ су *изотопна* ако постоји хомотопија $\Phi : X \times I \to Y$ између f и g таква да је сваки $\Phi_t : X \to Y$ хомеоморфизам. Таква хомотопија се назива *изотопија*.

Теорема 2.2.2. (Александер) *Сваки хомеоморфизам из* $\mathbf{R}^n$ *у* $\mathbf{R}^n$*, или из* S^n *у* S^n*, чија је рестрикција на неки непразан отворен скуп идентично пресликавање, изотопан је идентичном пресликавању.*

Доказ. (За $\mathbf{R}^n$.) Нека је $U \subseteq \mathbf{R}^n$ непразан отворен скуп такав да је $f(x) = x$, за све $x \in U$. Без умањења општости можемо претпоставити да $0 \in U$ и да је отворена кугла $B(0, r)$ садржана у U. За свако $t \in (0, 1]$, пресликавање $\varphi_t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, дефинисано са $\varphi_t(x) = tx$ је хомеоморфизам. Дефинишимо $\Phi : \mathbf{R}^n \times I \to \mathbf{R}^n$ са

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} x, & t = 0, \\ \varphi_t^{-1} \circ f \circ \varphi_t(x), & t \in (0,1]. \end{cases}$$

Како је за свако t хомеоморфизам $\varphi_t^{-1} \circ f \circ \varphi_t$ једнак идентичном на кугли $B(0, r/t)$, чији полупречник тежи бесконачности када $t \to 0$, следи да је Φ изотопија између идентичног пресликавања и f.

(За сферу S^n.) Нека је $U \subseteq S^n$ непразан отворен скуп такав да је $f(x) = x$, за све $x \in U$. Ако је $p \in U$, онда је рестрикција хомеоморфизма f на $S^n - \{p\}$, који је хомеоморфан простору $\mathbf{R}^n$, хомеоморфизам из $S^n - \{p\}$ у $S^n - \{p\}$. На основу доказаног за случај $\mathbf{R}^n$, постоји изотопија $\Phi : (S^n - \{p\}) \times I \to S^n - \{p\}$ која остварује изотопију између ове рестрикције и идентичног пресликавања на $S^n - \{p\}$. Изотопију између f и идентичног пресликавања на S^n добијамо ако ставимо да је $\Phi(p, t) = p$, за свако $t \in I$. □

Лема 2.2.2. *Ако је* $\Phi_t : X \to X$ *изотопија између* f *и* g*, а* $\Gamma_t : X \to X$ *изотопија између* u *и* v*, онда је* $\Gamma_t \circ \Phi_t$ *изотопија између* $u \circ f$ *и* $v \circ g$*.*

Тврђење 2.2.5. *Сваки хомеоморфизам* $f : S^n \to S^n$ *који чува оријентацију изотопан је идентитети.*

Доказ. Нека је $p \in S^n$. Конструишимо хомеоморфизам $g : S^n \to S^n$ чија је рестрикција на неки непразан отворен скуп идентитета и такав да је $g(f(p)) = p$. Тада је рестрикција пресликавања $h = g \circ f$ на $S^n - \{p\}$ хомеоморфизам из $S^n - \{p\}$ у $S^n - \{p\}$. Како је $S^n - \{p\}$ хомеоморфан са $\mathbf{R}^n$, на основу теореме 2.2.1 следи да је ова рестрикција једнака композицији хомеоморфизама $h_k \circ \ldots \circ h_1$, при чему је сваки h_i једнак идентитети на неком непразном отвореном скупу. Ако дефинишемо $h_i(p) = p$, онда су сви $h_i : S^n \to S^n$ хомеоморфизми и $f = g^{-1} \circ h_k \circ \ldots \circ h_1$, па је хомеоморфизам f стабилан. На основу теореме 2.2.2, и леме 2.2.2, f је изотопан идентитети. □

Теорема 2.2.3. (Брауерова теорема о инваријантности домена, [31]) *Ако су* M *и* N *тополошке* n*-многострукости без граница и* $f : M \to N$ *непрекидно 1-1 пресликавање, онда је* f *отворено пресликавање.*

Лема 2.2.3. (Лема о лепљењу, [32, Теорема 18.3]) *Нека су* X *и* Y *затворени (или отворени) подскупови од* $A = X \cup Y$*. Ако је* $f : A \to B$ *такво да су обе рестрикције на* X *и* Y *непрекидне, онда је и* f *непрекидно пресликавање.*

Тврђење 2.2.6. *Ако је* $\Phi_t : S^n \to S^n$ *изотопија између идентитете и* f*, онда је* $F : S^n \times I \to S^n \times I$ *дефинисано са* $F(x,t) = (\Phi_t(x), t)$ *хомеоморфизам.*

Доказ. Пресликавање F је непрекидно и инверзно пресликавање F^{-1} дато је са $F^{-1}(x, t) = (\Phi_t^{-1}(x), t)$. Остаје да покажемо да је и F^{-1} непрекидно.

Нека је $G : S^n \times \mathbf{R} \to S^n \times \mathbf{R}$ дефинисано са

$$G(x,t) = \begin{cases} (x,t), & (x,t) \in S^n \times (-\infty, 0], \\ F(x,t), & (x,t) \in S^n \times [0,1], \\ (f(x),t), & (x,t) \in S^n \times [1, +\infty). \end{cases}$$

На основу леме 2.2.3 пресликавање G је непрекидно. Како је $(n+1)$-многострукост $S^n \times \mathbf{R}$ без границе, а пресликавање G је 1-1, применом теореме 2.2.3 добијамо да је G отворено пресликавање. Према томе, и F је отворено пресликавање, што значи да је F^{-1} непрекидно. □

Следеће тврђење је последица тврђења 2.2.5 и 2.2.6.

Тврђење 2.2.7. *Ако је $f : S^n \to S^n$ хомеоморфизам који чува оријентацију, онда постоји хомеоморфизам $F : S^n \times I \to S^n \times I$ такав да је $F(x,0) = (x,0)$ и $F(x,1) = (f(x),1)$.*

2.3 Категорија $dCobS$

Сада ћемо дефинисати категорију $dCobS$, која ће бити амбијент за Фробенијусов објекат S^{d-1}. Њени објекти ће бити коначне колекције $(d-1)$-димензионалних сфера, док ће морфизми бити класе еквиваленције тополошких d-кобордизама.

Ако је $d \geq 1$ и $i \in \mathbf{N}$, означимо са S_i, $(d-1)$-димензионалну сферу у $\mathbf{R}^d$ са центром у $(3i, 0, \ldots, 0)$ полупречника 1. Претпоставимо да је оријентација сфере S_0 изабрана, и да су сфере S_i оријентисане тако да је транслација за вектор $(3i, 0, \ldots, 0)$ хомеоморфизам из S_0 у S_i који чува оријентацију. Означимо са $\underline{0}$ празан скуп, а за $n > 0$, нека $\underline{n}$ означава затворену $(d-1)$-многострукост $S_0 \cup \ldots \cup S_{n-1}$.

Нека је M d-многострукост таква да је њена граница ∂M дисјунктна унија Σ_0 и Σ_1, при чему је Σ_0 хомеоморфно са $\underline{n}$, а Σ_1 са $\underline{m}$. Оријентације од Σ_0 и Σ_1 индуковане су оријентацијом многострукости M.

Нека су $f_0 : \underline{n} \to M$ и $f_1 : \underline{m} \to M$ два утапања чије су слике редом Σ_0 и Σ_1. Претпостављамо да f_0 чува, док f_1 мења оријентацију. Тројка (M, f_0, f_1) је *d-кобордизам* или само *кобордизам* из $\underline{n}$ у $\underline{m}$, а Σ_0 и Σ_1 су редом *улазна* и *излазна граница* од M у овом кобордизму.

За два d-кобордизма $K = (M, f_0, f_1)$ и $K' = (M', f_0', f_1')$ из $\underline{n}$ у $\underline{m}$ кажемо да су *еквивалентни*, у ознаци $K \sim K'$, ако постоји хомеоморфизам $F : M \to M'$ који чува оријентацију тако да следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dd, "F"] & \\ \underline{n} \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_0'"'] & & \underline{m} \arrow[ul, "f_1"'] \arrow[dl, "f_1'"] \\ & M' & \end{tikzcd}$$

Објекти категорије $dCobS$ су $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots$, док су морфизми класе еквиваленције d-кобордизама. *Идентични морфизам* из $\underline{n}$ у $\underline{n}$ у категорији $dCobS$ је класа еквиваленције d-кобордизма

$$\underline{n} \xrightarrow{\langle \mathbf{1}, c_0 \rangle} \underline{n} \times I \xleftarrow{\langle \mathbf{1}, c_1 \rangle} \underline{n}$$

где је I јединични интервал $[0,1]$, $\mathbf{1}$ је идентично пресликавање на $\underline{n}$, $c_0, c_1 : \underline{n} \to I$ су константна пресликавања дефинисана са $c_0(x) = 0$ и $c_1(x) = 1$, а $\langle , \rangle$ је упаривање. За $f : C \to A$, и $g : C \to B$, пресликавање $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$ дефинисано је са $\langle f, g\rangle(c) = (f(c), g(c))$. *Композиција* кобордизама $(M, f_0, f_1) : \underline{n} \to \underline{m}$ и $(N, g_0, g_1) : \underline{m} \to \underline{k}$ састоји се од d-многострукости $N +_{g_0,f_1} M$ добијене лепљењем дуж заједничке границе, и два пресликавања $j \circ f_0$ и $i \circ g_1$, где су $i : N \to N +_{g_0,f_1} M$ и $j : M \to N +_{g_0,f_1} M$ утапања у одговарајућем пушаут дијаграму (видети поглавље 2.2). Релација еквиваленције кобордизама је конгруенција операције компоновања (ако при композицији кобордизме заменимо њима еквивалентним, као резултат добијамо кобордизам еквивалентан почетном).

За $d = 2$, категорија $dCobS$ је изоморфна категорији **2-Cobord** из Абрамсовог рада [2, Секција 4]. Категорија $dCobS$ је стриктно моноидална у односу на суму на објектима ($\underline{n}+\underline{m} = \underline{n+m}$) и операцију „стављања једног поред другог" на морфизмима која је дата на следећи начин.

Ако су N и M две d-многострукости, означимо са $N+M$ дисјунктну унију $(N\times\{0\})\cup(M \times \{1\})$. За две функције $f : \underline{n} \to N$ и $g : \underline{m} \to M$, означимо са $f + g : \underline{n+m} \to N + M$ функцију дефинисану са

$$(f+g)(x) = \begin{cases} (f(x), 0), & x \in \underline{n} \\ (g(x - (3n, 0, \dots, 0)), 1), & x \notin \underline{n}. \end{cases}$$

Тада је *стављање кобордизама* (N, f_0, f_1) и (M, g_0, g_1) *једног поред другог* дато као d-кобордизам

$$(N + M, f_0 + g_0, f_1 + g_1).$$

Категорија $dCobS$ је и симетрична моноидална у односу на фамилију d-кобордизама $\underline{\tau_{n,m}}$, који су дефинисани са

$$\underline{n} + \underline{m} \xrightarrow{\langle \mathbf{1}, c_0\rangle} (\underline{n+m}) \times I \xleftarrow{\langle f, c_1\rangle} \underline{m} + \underline{n},$$

где је $f : \underline{n+m} \to \underline{n+m}$ транслација сфера S_i, $0 \leq i \leq n-1$, за вектор $(3m, 0, \dots, 0)$, односно транслација сфера S_j, $n \leq j \leq n+m-1$, за вектор $(-3n, 0, \dots, 0)$.

Касније ћемо показати да је категорија $dCobS$ скелетална, тј. да у категорији $dCobS$ не постоје два различита изоморфна објекта. Ова категорија је и пуна поткатегорија категорије $dCob$, чији су објекти све затворене $(d-1)$-многострукости, док су морфизми добијени од произвољних d-многострукости, а не само од оних чије су границе хомеоморфне колекцији сфера. Симетрична моноидална структура категорије $dCob$ дефинише се као и за $dCobS$.

2.4 Зашто радимо са сферама?

У овој секцији ћемо објаснити зашто за објекте категорије кобордизама узимамо само колекције сфера, тј. зашто радимо у категорији $dCobS$, а не у категорији $dCob$. Такође ће бити разјашњено и зашто посматрамо тополошке, а не глатке многострукости. Главни разлог је у томе што је рад са кобордизмима категорије $dCobS$ једноставнији, јер је небитно како лепимо.

Лема 2.4.1. *Ако је $f : \underline{1} \to \underline{1}$ хомеоморфизам који чува оријентацију, онда су кобордизми $(\underline{1} \times I, \langle \mathbf{1}, c_0\rangle, \langle \mathbf{1}, c_1\rangle)$ и $(\underline{1} \times I, \langle \mathbf{1}, c_0\rangle, \langle f, c_1\rangle)$ еквивалентни.*

Доказ. На основу тврђења 2.2.7 постоји хомеоморфизам $F : \underline{1} \times I \to \underline{1} \times I$ такав да је $F(x, 0) = (x, 0)$ и $F(x, 1) = (f(x), 1)$, па следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd}
& \underline{1} \times I \arrow[dd, "F"] & \\
\underline{1} \arrow[ur, "\langle \mathbf{1}, c_0 \rangle"] \arrow[dr, "\langle \mathbf{1}, c_0 \rangle"'] & & \underline{1} \arrow[ul, "\langle \mathbf{1}, c_1 \rangle"'] \arrow[dl, "\langle f, c_1 \rangle"] \\
& \underline{1} \times I &
\end{tikzcd}$$

□

Лема 2.4.2. *Ако су $u, v : \underline{1} \to \Sigma$ два хомеоморфизма која чувају оријентацију, онда су кобордизми $K_1 = (\Sigma \times I, \langle v, c_0 \rangle, \langle v, c_1 \rangle)$, $K_2 = (\Sigma \times I, \langle v, c_0 \rangle, \langle u, c_1 \rangle)$ и $(\underline{1} \times I, \langle \mathbf{1}, c_0 \rangle, \langle \mathbf{1}, c_1 \rangle)$ еквивалентни.*

Доказ. Хомеоморфизам F у центру следећег дијаграма добијен је из леме 2.4.1 за $f = v^{-1} \circ u$.

$$\begin{tikzcd}
& \Sigma \times I \arrow[d, "v^{-1} \times \mathbf{1}"] & \\
& \underline{1} \times I \arrow[dd, "F"] & \\
\underline{1} \arrow[uur, bend left, "\langle v, c_0 \rangle"] \arrow[ur, "\langle \mathbf{1}, c_0 \rangle"] \arrow[dr, "\langle \mathbf{1}, c_0 \rangle"'] \arrow[ddr, bend right, "\langle v, c_0 \rangle"'] & & \underline{1} \arrow[uul, bend right, "\langle v, c_1 \rangle"'] \arrow[ul, "\langle \mathbf{1}, c_1 \rangle"'] \arrow[dl, "\langle f, c_1 \rangle"] \arrow[ddl, bend left, "\langle u, c_1 \rangle"] \\
& \underline{1} \times I \arrow[d, "v \times \mathbf{1}"] & \\
& \Sigma \times I &
\end{tikzcd}$$

□

Лема 2.4.3. *Нека су $u, v : \underline{1} \to \Sigma$ два хомеоморфизма која чувају оријентацију, где је Σ део границе d-многострукости M. Тада су кобордизми $(M, f+u+g, h)$ и $(M, f+v+g, h)$ еквивалентни.*

Доказ. Нека су K_1 и K_2 кобордизми из леме 2.4.2. Ако су $\underline{n}$ и $\underline{m}$ редом домени функција f и g, онда је

$$\begin{aligned}
(M, f + u + g, h) &\sim (M, f + u + g, h) \circ \mathbf{1}_{\underline{n+1+m}} \\
&\sim (M, f + u + g, h) \circ (\mathbf{1}_{\underline{n}} + K_2 + \mathbf{1}_{\underline{m}}) \\
&= (M, f + v + g, h) \circ (\mathbf{1}_{\underline{n}} + K_1 + \mathbf{1}_{\underline{m}}) \\
&\sim (M, f + v + g, h) \circ \mathbf{1}_{\underline{n+1+m}} \\
&\sim (M, f + v + g, h).
\end{aligned}$$

□

Применом претходне леме и аналогног тврђења за излазну границу од M, добијамо следећу последицу.

Последица 2.4.1. *Сваки морфизам категорије $dCobS$ потпуно је одређен d-многострукошћу и два низа— низом компоненти повезаности улазне границе и низом компоненти повезаности излазне границе.*

У случају $d = 1$, уместо низова компоненти повезаности имамо низове парова тачака који одговарају улазној и излазној граници. Према томе, морфизам из $\underline{n}$ у $\underline{m}$ можемо означити са (M, Σ_0, Σ_1), где је $\Sigma_0 = (\Sigma_0^0, \ldots, \Sigma_0^{n-1})$ низ свих компоненти повезаности (или парова тачака у случају $d = 1$) улазне границе, а $\Sigma_1 = (\Sigma_1^0, \ldots, \Sigma_1^{m-1})$ низ свих компоненти повезаности излазне границе од M.

Тврђење 2.4.1. *Два кобордизма (M, Σ_0, Σ_1) и (N, Δ_0, Δ_1) су еквивалентна акко су одговарајући низови истих дужина и постоји хомеоморфизам $F : M \to N$ такав да је слика рестрикције од F на Σ_i^j једнака Δ_i^j, за свако $i \in \{0, 1\}$ и свако j.*

Доказ. Директни смер следи директно из дефиниције еквиваленције кобордизама. За супротни смер, нека су $h_0^j : \underline{1} \to \Sigma_0^j$, $0 \leq j \leq n-1$ хомеоморфизми који чувају оријентацију, а $h_1^j : \underline{1} \to \Sigma_1^j$, $0 \leq j \leq m-1$ хомеоморфизми који мењају оријентацију. Дефинишимо $g_i^j : \underline{1} \to \Delta_i^j$ са $F \circ h_i^j$. Тада F остварује еквиваленцију кобордизама $(M, \sum_{j=0}^{n-1} h_0^j, \sum_{j=0}^{m-1} h_1^j)$ и $(N, \sum_{j=0}^{n-1} g_0^j, \sum_{j=0}^{m-1} g_1^j)$. $\square$

Ако за објекте категорије d-кобордизама уместо колекција сфера узмемо произвољне затворене $(d-1)$-многострукости, онда за $d \geq 3$ стрелице те категорије неће бити одређене само многострукостима и низовима улазних и излазних граница. На пример, пуни торус код кога је торус улазна граница, а празан скуп излазна граница не одређује 3-кобордизам. Идентично пресликавање и хомеоморфизам торуса који мења паралеле и меридијане, и чува оријентацију, дају два различита 3-кобордизма.

Ако нашу категорију заменимо категоријом чије су стрелице глатки d-кобордизми, а објекти колекције сфера, аналогон последице 2.4.1 и тврђења 2.4.1 не важи за свако d. На пример, многострукост $S^{d-1} \times I$ код које је $S^{d-1} \times \{0\}$ улазна, а $S^{d-1} \times \{1\}$ излазна граница не одређује један d-кобордизам.

Дефиниција 2.4.1. *Псеудо-изотопија* глатке затворене многострукости M је дифеоморфизам $F : M \times I \to M \times I$ такав да је његова рестрикција на $M \times \{0\}$ једнака идентичном пресликавању. Рестрикција F на $M \times \{1\}$ је, до на идентификацију $M \times \{1\}$ са M, дифеоморфизам $f : M \to M$, за који кажемо да је *псеудо-изотопан* идентитети.

На основу дефиниције аналогне оној из секције 2.3 (видети [23, 1.2.17]), два глатка d-кобордизма $(S^{d-1} \times I, \langle \mathbf{1}, c_0 \rangle, \langle \mathbf{1}, c_1 \rangle)$ и $(S^{d-1} \times I, \langle \mathbf{1}, c_0 \rangle, \langle f, c_1 \rangle)$ су еквивалентна ако постоји дифеоморфизам $F : S^{d-1} \times I \to S^{d-1} \times I$ који чува оријентацију такав да следећи дијаграм комутира.

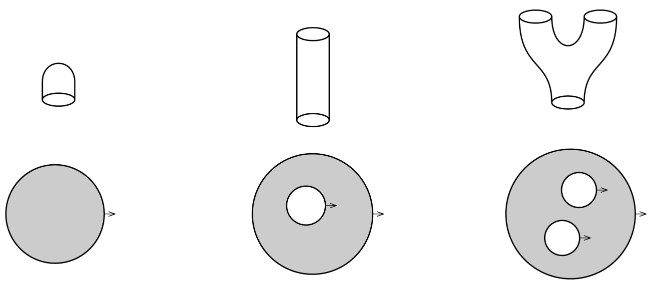
$$\begin{tikzcd}
 & S^{d-1} \times I \arrow[dd, "F"] & \\
S^{d-1} \arrow[ur, "\langle \mathbf{1}, c_0 \rangle"] \arrow[dr, "\langle \mathbf{1}, c_0 \rangle"'] & & S^{d-1} \arrow[ul, "\langle \mathbf{1}, c_1 \rangle"'] \arrow[dl, "\langle f, c_1 \rangle"] \\
 & S^{d-1} \times I &
\end{tikzcd}$$

Комутативност овог дијаграма еквивалентна је услову да је f псеудо-изотопно идентитети на S^{d-1}. Пошто не важи да је сваки дифеоморфизам на S^{d-1} који чува оријентацију псеудо-изотопан идентитети баш за свако d (видети [21], [6] и [7]), немамо увек јединствени d-кобордизам који одговара $S^{d-1} \times I$, ако смо изабрали да улазна граница буде $S^{d-1} \times \{0\}$, а излазна $S^{d-1} \times \{1\}$.

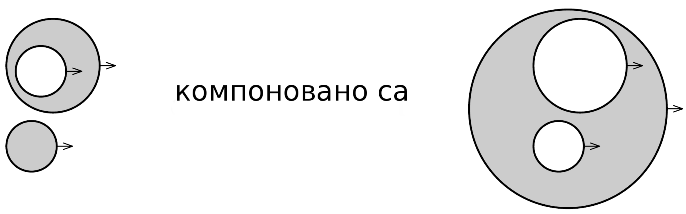
Међутим, за $d \leq 6$, али не и само за ове димензије, сваки дифеоморфизам на S^{d-1} који чува оријентацију је псеудо-изотопан идентитети. Кок је ову чињеницу имплицитно користио у случају $d = 2$ да би глатке 2-кобордизме приказивао помоћу цртежа који представљају одговарајуће многострукости. Резултат аналоган нашој последици 2.4.1 важи за 2-кобордизме из Кокове књиге [23].

2.5 Фробенијусова структура сфера

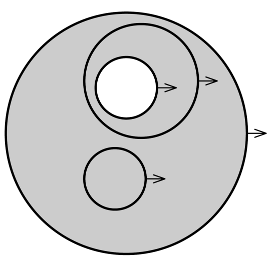
Познато је да је једнодимензионална сфера S^1 комутативан Фробенијусов објекат у категорији 2-кобордизама (погледати [2], [23] и [8]). Затворена полусфера је хомеоморфна дводимензионалном затвореном диску, цилиндар кружном прстену, а површ са границом која личи на пар панталона диску из кога смо избацили два диска. Узимајући у обзир и оријентацију њихових граница, ови кобордизми су представљени на следећој слици



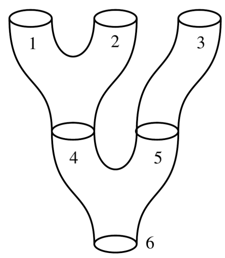
Релација јединице са слике 2.1 одговара зашивању диска и цилиндра на крај ногавица панталона:



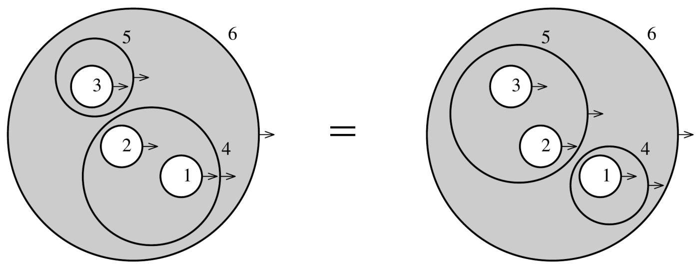
даје цилиндар исечен дуж две своје изводнице:



Слично, релацију асоцијативности, која је приказана на слици



добијамо из две различите декомпозиције диска из кога су избачена три диска:

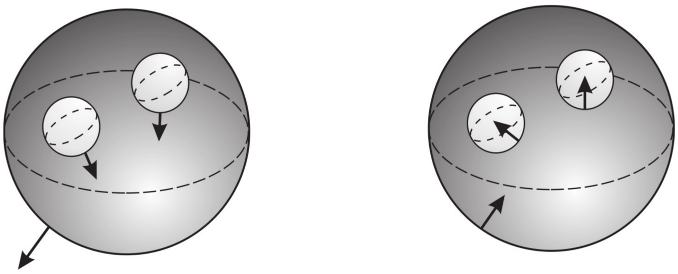


Релацију комутативности је тешко нацртати, али ју је лако разумети, јер она описује чињеницу да у диску из кога су извађена три диска улазне границе можемо слободно заменити. Променом оријентације добијамо и релације којединице, коасоцијативности и кокомутативности, а могу се проверити и Фробенијусове релације.

На сличан начин дефинишемо и Фробенијусову структуру сфера свих коначих димензија. Ако је D оријентисани d-димензионални диск са границом ∂D, означимо са $\underline{\eta}$ и $\underline{\varepsilon}$ редом d-кобордизме $(D, \emptyset, (\partial D))$ и $(D, (\partial D), \emptyset)$ приказане на слици 2.2:

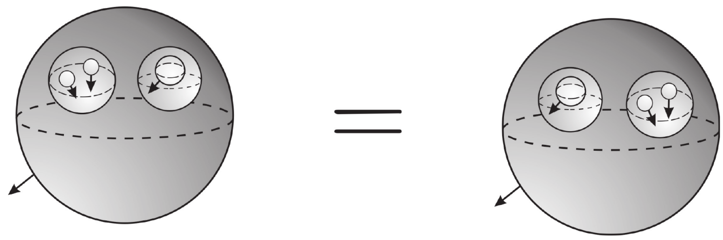
Слика 2.2: јединица и којединица

Ако су D_1 и D_2 два дисјунктна диска у унутрашњости диска D, нека је M, d-многострукост добијена од диска D избацивањем унутрашњости дискова D_1 и D_2. Означимо са $\underline{\mu}$ и $\underline{\delta}$ редом d-кобордизме $(M, (\partial D_1, \partial D_2), (\partial D))$ и $(M, (\partial D), (\partial D_1, \partial D_2))$, који су приказани на слици 2.3:



Слика 2.3: множење и комножење

Узимајући у обзир симетричну моноидалну структуру категорије $dCobS$, није тешко закључити да ови кобордизми испуњавају све услове који су неопходни да би сфера S^0 била симетричан Фробенијусов објекат категорије $1CobS$, а сфера S^{d-1}, за $d \geq 2$, комутативан Фробенијусов објекат категорије $dCobS$. На пример, релација асоцијативности у случају $d = 3$ илустрована је сликом 2.4:



Слика 2.4: асоцијативност

Дефинисана Фробенијусова структура сфере S^{d-1} гарантује да сваки симетрични моноидални функтор из категорије $dCobS$ у категорију коначно димензионалних векторских простора над фиксираним пољем пресликава сферу у Фробенијусову алгебру. Слика сфере S^{d-1}, за $d \geq 2$, при оваквом функтору је комутативна Фробенијусова алгебра. Ово је резултат Дијкграфа [8] (за детаље погледати поглавље 4 ове дисертације).

2.6 Категорија **K**

У овој секцији ћемо дефинисати категорију **K** у којој ће 1 бити универзални комутативни Фробенијусов објекат, као што је 1 универзални моноид као објекат симплицијалне категорије Δ. За разлику од категорије Δ, која је дефинисана као категорија монотоних функција између коначних ординала, наша категорија **K** неће бити конкретна категорија, већ ћемо је изградити од синтаксног материјала.

И категорија Δ се такође може дефинисати синтаксно (видети репрезентацију категорије Δ помоћу генератора и релација дату у [25, Секција VII.5]). Језик који се користи за овакву репрезентацију категорије Δ не укључује тензорисање, а ми ћемо га користити пошто ће нам значајно поједноставити представљање стрелица категорије **K** у нормалној форми.

Скуп објеката категорије **K** је скуп коначних ординала ω. Ординал n интерпретирамо као n-ти тензорски степен изабраног комутативног Фробенијусовог објекта, па је према томе моноидална структура на објектима дата сабирањем. Да бисмо дефинисали стрелице ове категорије, уводимо формални систем, у ознаци $\mathcal{K}$. Прво индуктивно дефинишемо *терме*, тј. речи које добијамо помоћу $\mathbf{1}$, $\circ$, $\otimes$, τ, μ, η, δ и ε.

1. За $n, m \in \omega$, речи $\mathbf{1}_n : n \to n$, $\tau_{n,m} : n+m \to m+n$, $\mu : 2 \to 1$, $\eta : 0 \to 1$, $\delta : 1 \to 2$, $\varepsilon : 1 \to 0$, су *примитивни терми*.

2. Ако су $f : n \to m$ и $g : m \to p$ терми, онда је $(g \circ f) : n \to p$ такође терм.

3. Ако су $f_1 : n_1 \to m_1$ и $f_2 : n_2 \to m_2$ терми, онда је $(f_1 \otimes f_2) : n_1 + n_2 \to m_1 + m_2$ такође терм.

4. Ништа више није терм.

Тип је реч облика $n \to m$, где су $n, m \in \omega$. Кажемо да је $n \to m$ тип терма $f : n \to m$, као и да је n *домен* терма, а m његов *кодомен*. *Језик* од $\mathcal{K}$ састоји се од речи облика $f = g$, где су f и g терми истог типа. Осим $f = f$, *аксиоме* формалног система $\mathcal{K}$ су следеће:

(стр) $$f \otimes \mathbf{1}_0 = f = \mathbf{1}_0 \otimes f, \quad (f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes (f_2 \otimes f_3),$$

за $f : n \to m$, $g : m \to p$ и $h : p \to q$,

(кат) $$f \circ \mathbf{1}_n = f = \mathbf{1}_m \circ f, \quad (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

(фун) $$\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_m = \mathbf{1}_{n+m}, \quad (g_1 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ f_2) = (g_1 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes f_2),$$

за $f_1 : n_1 \to m_1$ и $f_2 : n_2 \to m_2$,

(при) $$\tau_{m_1,m_2} \circ (f_1 \otimes f_2) = (f_2 \otimes f_1) \circ \tau_{n_1,n_2},$$

(инв) $$\tau_{m,n} \circ \tau_{n,m} = \mathbf{1}_{n+m},$$

(хекс) $$\tau_{n+m,p} = (\tau_{n,p} \otimes \mathbf{1}_m) \circ (\mathbf{1}_n \otimes \tau_{m,p}),$$

(асоц) $$\mu \circ (\mu \otimes \mathbf{1}_1) = \mu \circ (\mathbf{1}_1 \otimes \mu),$$

(јед) $$\mu \circ (\eta \otimes \mathbf{1}_1) = \mathbf{1}_1 = \mu \circ (\mathbf{1}_1 \otimes \eta),$$

(коасоц) $$(\delta \otimes \mathbf{1}_1) \circ \delta = (\mathbf{1}_1 \otimes \delta) \circ \delta,$$

(којед) $$(\varepsilon \otimes \mathbf{1}_1) \circ \delta = \mathbf{1}_1 = (\mathbf{1}_1 \otimes \varepsilon) \circ \delta,$$

(Фроб) $$(\mu \otimes \mathbf{1}_1) \circ (\mathbf{1}_1 \otimes \delta) = \delta \circ \mu = (\mathbf{1}_1 \otimes \mu) \circ (\delta \otimes \mathbf{1}_1),$$

(ком) $$\mu \circ \tau_{1,1} = \mu,$$

(коком) $$\tau_{1,1} \circ \delta = \delta.$$

Правила извођења у $\mathcal{K}$ су следећа:

$$\frac{f = g}{g = f} \qquad \frac{f = g \quad g = h}{f = h}$$

$$\frac{f_1 : n \to m = f_2 : n \to m \qquad g_1 : m \to p = g_2 : m \to p}{g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2}$$

$$\frac{f_1 = g_1 \qquad f_2 = g_2}{f_1 \otimes f_2 = g_1 \otimes g_2}$$

Кажемо да су терми f и g *једнаки*, ако је $f = g$ теорема у $\mathcal{K}$, и користимо ознаку $f \equiv g$. Релација $\equiv$ је релација еквиваленције и са $[f]$ означавамо класу еквиваленције терма f. Терме смо заправо посекли по најмањој релацији еквиваленције тако да је 1 комутативан Фробенијусов објекат у $\mathbf{K}$. Скуп стрелица категорије $\mathbf{K}$ је $\{[f] \mid f \text{ је терм}\}$. Домен од $[f]$ је домен од f, а исто важи и за кодомене. Јединични морфизам на n је $[\mathbf{1}_n]$ и $[g] \circ [f]$ је $[g \circ f]$.

Категорија $\mathbf{K}$ је стриктно моноидална у односу на моноидалну структуру дату са $\otimes$ и 0. Њена симетричност задата је фамилијом τ стрелица.

Категорија $\mathbf{K}$ има следеће универзално својство – за сваки комутативан Фробенијусов објекат M у симетричној стриктној моноидалној категорији $\mathcal{M}$, постоји јединствен симетрични моноидални функтор $F : \mathbf{K} \to \mathcal{M}$ такав да је $F(1) = M$. Према томе, за $d \geq 2$, постоји јединствени симетрични моноидални функтор из $\mathbf{K}$ у $dCobS$ који пресликава 1 у $\underline{1}$, који називамо *интерпретацијом* категорије $\mathbf{K}$ у $dCobS$.

2.7 Нормална форма стрелица категорије K

Дефинисаћемо нормалну форму терма, као у [23, 1.4.16], и показаћемо да се свака стрелица категорије **K** може представити у нормалној форми. У наредној секцији ћемо нормалну форму користити у доказу верности интерпретације категорије **K** у $dCobS$. Неки докази ће бити илустровани цртежима који одговарају интерпретацији категорије **K** у $2CobS$.

За почетак, уведимо неколико нових ознака. Нека су $V_{-1} = \eta$, $\Lambda_{-1} = \varepsilon$, $V_0 = H_0 = \Lambda_0 = \mathbf{1}_1$, и за $n \geq 1$, нека су

$$V_n = \mu \circ (\mu \otimes \mathbf{1}_1) \circ \ldots \circ (\mu \otimes \mathbf{1}_{n-1}) : n+1 \to 1,$$

$$H_n = \underbrace{(\mu \circ \delta) \circ \ldots \circ (\mu \circ \delta)}_{n} : 1 \to 1,$$

$$\Lambda_n = (\delta \otimes \mathbf{1}_{n-1}) \circ \ldots \circ (\delta \otimes \mathbf{1}_1) \circ \delta : 1 \to n+1.$$

Помоћу ових терама за $n, m, p \geq 0$ дефинишемо $E_{p,m,n}$ са

$$\Lambda_{p-1} \circ H_m \circ V_{n-1} : n \to p$$

За терм кажемо да је τ-*терм* ако се μ, η, δ и ε не појављују у њему. За сваки τ-терм $f : n \to n$ постоји јединствена пермутација на n која му одговара.

За терм кажемо да је *специјалан* ако је он τ-терм, или је облика

$$\pi \circ \bigotimes_{i=1}^{k} E_{p_i,m_i,n_i} \circ \chi,$$

за $k \geq 1$, при чему су π и χ два τ-терма. Терм χ називамо *главом* овог специјалног терма, $\bigotimes_{i=1}^{k} E_{p_i,m_i,n_i}$ његовим *центром*, а терм π, његовим *репом*.

Тврђење 2.7.1. *Сваки терм је једнак неком специјалном терму.*

За доказ претходног тврђења ћемо користити следеће леме.

Лема 2.7.1. *Сваки терм је једнак терму облика $f_n \circ \ldots \circ f_0$, $n \geq 0$, где су сви f_i облика $\mathbf{1}_l \otimes \beta \otimes \mathbf{1}_r$, за $l, r \geq 0$ и $\beta \in \{\tau, \mu, \eta, \delta, \varepsilon\}$.*

Доказ. На основу једнакости

$$f_1 \otimes f_2 = (f_1 \otimes \mathbf{1}_{m_2}) \circ (\mathbf{1}_{n_1} \otimes f_2) \quad \text{и} \quad (g \circ f) \otimes \mathbf{1}_m = (g \otimes \mathbf{1}_m) \circ (f \otimes \mathbf{1}_m),$$

које изводимо из аксиома (кат) и (фун): $f_1 \otimes f_2 \overset{(\text{кат})}{=} (f_1 \circ \mathbf{1}_{n_1}) \otimes (\mathbf{1}_{m_2} \circ f_2) \overset{(\text{фун})}{=} (f_1 \otimes \mathbf{1}_{m_2}) \circ (\mathbf{1}_{n_1} \otimes f_2)$ и $(g \circ f) \otimes \mathbf{1}_m \overset{(\text{кат})}{=} (g \circ f) \otimes (\mathbf{1}_m \circ \mathbf{1}_m) \overset{(\text{фун})}{=} (g \otimes \mathbf{1}_m) \circ (f \otimes \mathbf{1}_m)$. □

Лема 2.7.2. *За сваку пермутацију на n, постоји τ-терм $\pi : n \to n$ који одговара овој пермутацији. Ако су пермутације које одговарају τ-термима једнаке, онда су ови терми једнаки у $\mathcal{K}$.*

Доказ. На основу симетричне моноидалне кохеренције (видети [26]). □

Пошто постоји узајамно једнозначна коресподенција између τ-термова и пермутација, надаље ћемо τ-терм идентификовати са одговарајућом пермутацијом.

Лема 2.7.3. *За сваки τ-терм $\pi : p \to p$ и свако $l \in p$, постоји τ-терм $\pi' : p-1 \to p-1$ такав да је за $j = \pi^{-1}(l)$, терм π једнак*

$$(\tau_{1,l} \otimes \mathbf{1}_{p-l-1}) \circ (\mathbf{1}_1 \otimes \pi') \circ (\tau_{j,1} \otimes \mathbf{1}_{p-j-1}).$$

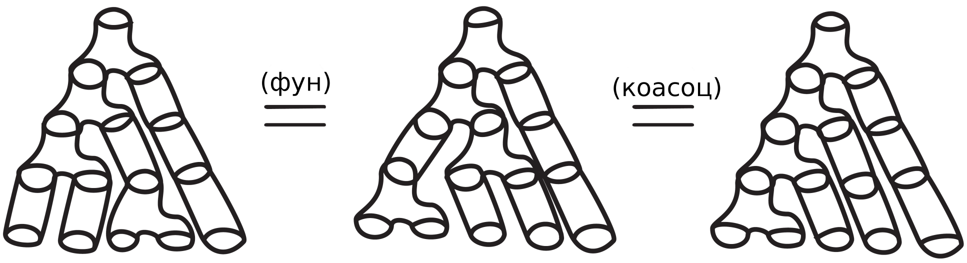
Доказ. Пермутација која одговара терму

$$(\tau_{l,1} \otimes \mathbf{1}_{p-l-1}) \circ \pi \circ (\tau_{1,j} \otimes \mathbf{1}_{p-j-1})$$

0 пресликава у 0. На основу леме 2.7.2, постоји τ-терм π' тако да ова пермутација одговара терму $(\mathbf{1}_1 \otimes \pi')$. Тврђење следи из леме 2.7.2 и аксиоме (инв). □

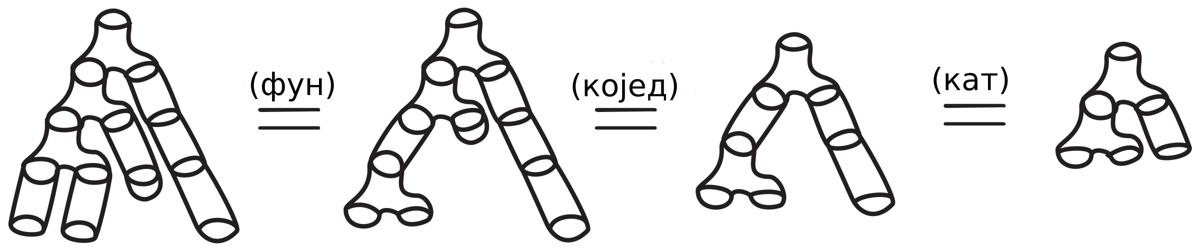
Следеће две леме добијамо користећи аксиоме (фун), (коасоц) и (којед).

Лема 2.7.4. *За $l + r = n \geq 0$, важи $(\mathbf{1}_l \otimes \delta \otimes \mathbf{1}_r) \circ \Lambda_n = \Lambda_{n+1}$.*



Слика 2.5: Лема 2.7.4

Лема 2.7.5. *За $l + r = n \geq 0$, важи $(\mathbf{1}_l\otimes \varepsilon\otimes\mathbf{1}_r) \circ \Lambda_n = \Lambda_{n-1}$.*



Слика 2.6: Лема 2.7.5

Лема 2.7.6. *За сваки τ-терм $\pi : l + r \to l + r$, важи*

$$(\mathbf{1}_l\otimes \eta \otimes \mathbf{1}_r) \circ \pi = (\tau_{1,l} \otimes \mathbf{1}_r) \circ (\mathbf{1}_1 \otimes \pi) \circ (\eta \otimes \mathbf{1}_{l+r}).$$

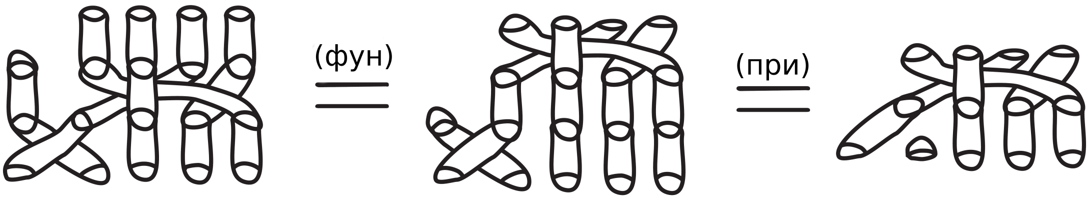
Доказ. Десна страна једнакости једнака је

$$\begin{aligned}
&(\tau_{1,l} \otimes \mathbf{1}_r) \circ (\mathbf{1}_1 \otimes \pi) \circ (\eta \otimes \mathbf{1}_{l+r}) \overset{\text{(фун)}}{=} (\tau_{1,l} \otimes \mathbf{1}_r) \circ ((\mathbf{1}_1 \circ \eta) \otimes (\pi \circ \mathbf{1}_{l+r}))\\
\overset{\text{(кат)}}{=}\ &(\tau_{1,l} \otimes \mathbf{1}_r) \circ ((\eta \circ \mathbf{1}_0) \otimes (\mathbf{1}_{l+r} \circ \pi)) \overset{\text{(фун)}}{=} (\tau_{1,l} \otimes \mathbf{1}_r) \circ (\eta \otimes \mathbf{1}_{l+r}) \circ (\mathbf{1}_0 \otimes \pi)\\
\overset{\text{(фун)}}{=}\ &(\tau_{1,l} \otimes \mathbf{1}_r) \circ (\eta \otimes \mathbf{1}_l \otimes \mathbf{1}_r) \circ \pi \overset{\text{(фун)}}{=} ((\tau_{1,l} \circ (\eta \otimes \mathbf{1}_l)) \otimes (\mathbf{1}_r \circ \mathbf{1}_r)) \circ \pi\\
&\overset{\text{(при)}}{=} (((\mathbf{1}_l \otimes \eta) \circ \tau_{0,l}) \otimes \mathbf{1}_r) \circ \pi.
\end{aligned}$$

На основу аксиома (инв), (хекс) и (стр) закључујемо да је $\tau_{0,l} = \mathbf{1}_l$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_l \overset{(\text{инв})}{=} \tau_{l,0} \circ \tau_{0,l} = \tau_{l,0} \circ \tau_{0+0,l} &\overset{(\text{хекс})}{=} \tau_{l,0} \circ (\tau_{0,l} \otimes \mathbf{1}_0) \circ (\mathbf{1}_0 \otimes \tau_{0,l}) \\ &\overset{(\text{стр})}{=} \tau_{l,0} \circ \tau_{0,l} \circ \tau_{0,l} \overset{(\text{инв})}{=} \tau_{0,l}.\end{aligned}$$

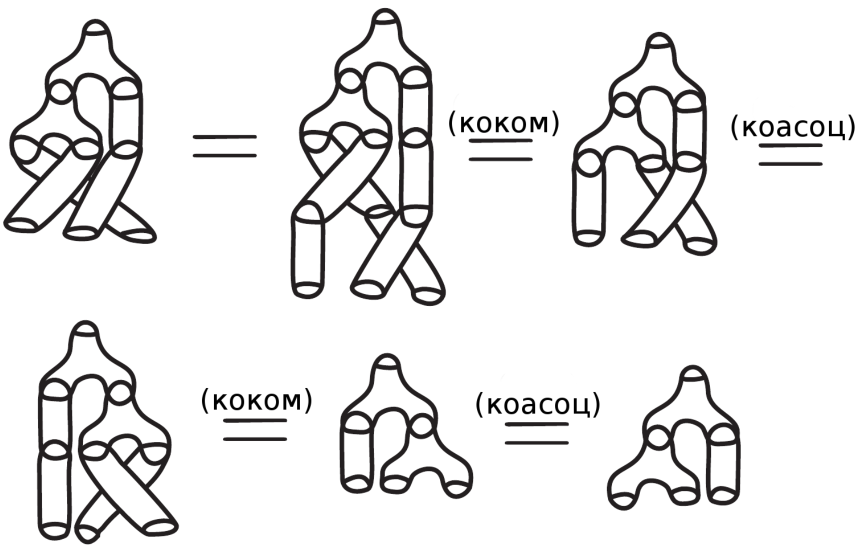
Према томе, десна страна једнакости једнака је левој. □



Слика 2.7: Лема 2.7.6

Користећи чињеницу да се свака пермутација може разложити на композицију транспозиција, као и аксиоме (коасоц), (асоц), (коком) и (ком), добијамо следећу лему.

Лема 2.7.7. *За сваки τ-терм $\pi : n+1 \to n+1$, важи $\pi \circ \Lambda_n = \Lambda_n$, и $V_n \circ \pi = V_n$.*



Слика 2.8: Лема 2.7.7

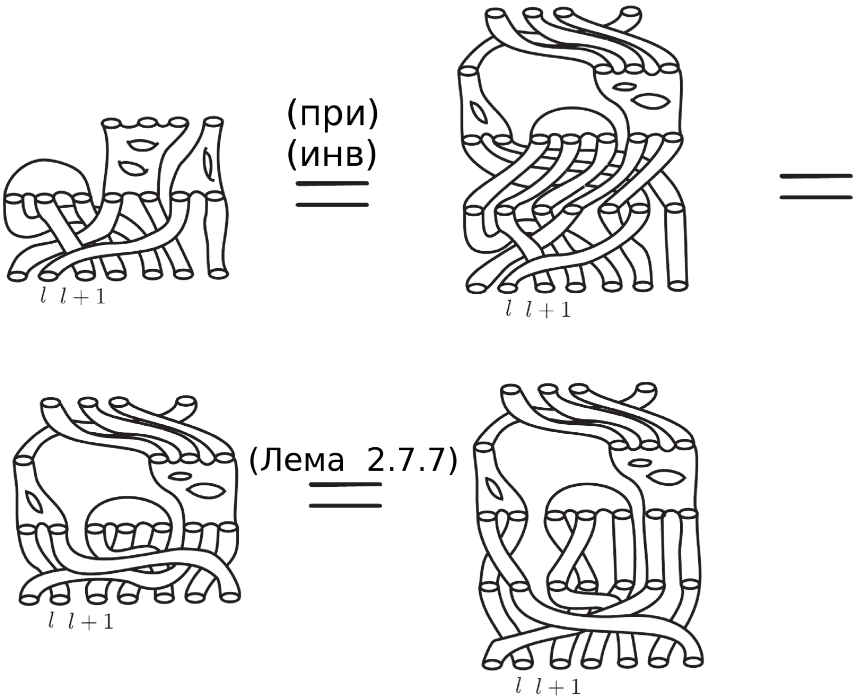
Ако имамо τ-терм $\pi : p \to p$, где је $p \geq 2$, онда за $l, l+1 \in p$ кажемо да су *паралелни у* π ако је $\pi^{-1}(l+1) = \pi^{-1}(l) + 1$, тј. ако постоји $j \in p$, тако да је $\pi(j) = l$ и $\pi(j+1) = l+1$.

Лема 2.7.8. *Нека је f специјални терм, који није τ-терм, са кодоменом $p \geq 2$. Тада за свако $l \in p-1$, постоји специјални терм који је једнак терму f, такав да су l и $l+1$ паралелни у његовом репу.*

Доказ. Нека је f облика $\pi\circ\bigotimes_{i=1}^{k} E_{p_i,m_i,n_i}\circ\chi$. Ако су l и $l{+}1$ помоћу π везани са кодоменом неког E_{p_j,m_j,n_j} из центра од f, тј. ако постоји $j\in\{1,\dots,k\}$ такав да је

$$\sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq \pi^{-1}(l), \pi^{-1}(l+1) < \sum_{i=1}^{j} p_i,$$

онда на основу леме 2.7.7, уколико је потребно, можемо додати τ-терм између центра и репа од f тако да l и $l+1$ буду паралелни у новом репу (видети слику 2.9).



Слика 2.9: Лема 2.7.8

Ако су l и $l+1$ помоћу π везани за кодомене два различита E_{p_i,m_i,n_i} и E_{p_j,m_j,n_j}, онда на основу следеће последице аксиома (при) и (инв)

$$f_1\otimes f_2=\tau_{m_2,m_1}\circ(f_2\otimes f_1)\circ\tau_{n_1,n_2},$$

без умањења општости можемо претпоставити да је l везан за E_{p_j,m_j,n_j}, а $l+1$ за $E_{p_{j+1},m_{j+1},n_{j+1}}$, тј. да постоји $j\in\{1,\dots,k\}$ такав да је

$$\sum_{i=1}^{j-1} p_i \leq \pi^{-1}(l) < \sum_{i=1}^{j} p_i \leq \pi^{-1}(l+1) < \sum_{i=1}^{j+1} p_i.$$

Уколико је потребно, на основу леме 2.7.7 можемо додати нови τ-терм између центра и репа од f да бисмо добили нови реп у коме су $l, l+1$ паралелни. $\square$

Доказ следеће леме је сличан доказу леме 2.7.3.

Лема 2.7.9. *За сваки τ-терм $\pi : p \to p$ и свако $l \in p-1$ тако да су l и $l+1$ паралелни у π, постоји τ-терм $\pi' : p-2 \to p-2$ тако да је за $j = \pi^{-1}(l)$, терм π једнак терму*

$$(\tau_{2,l} \otimes \mathbf{1}_{p-l-2}) \circ (\mathbf{1}_2 \otimes \pi') \circ (\tau_{j,2} \otimes \mathbf{1}_{p-j-2}).$$

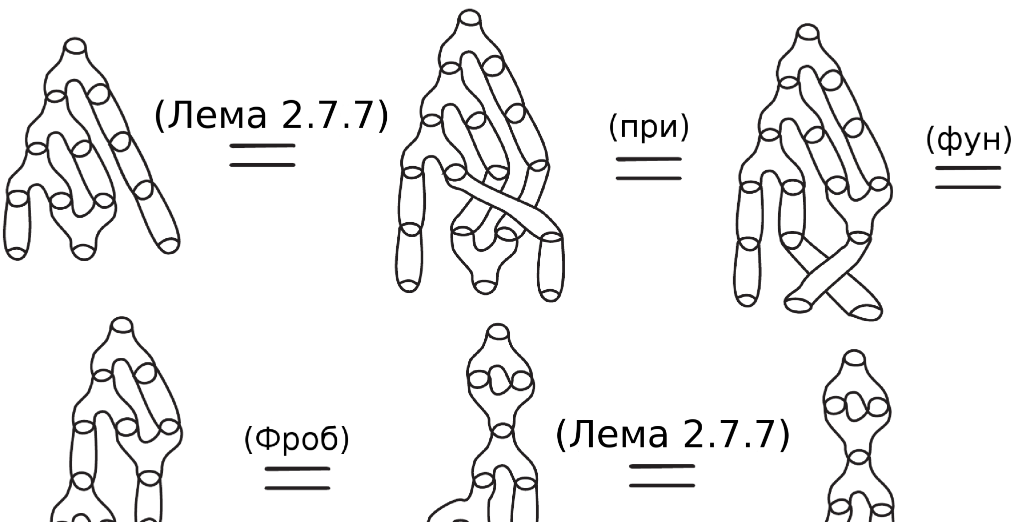
Доказ. Пермутација која одговара терму

$$(\tau_{l,2} \otimes \mathbf{1}_{p-l-2}) \circ \pi \circ (\tau_{2,j} \otimes \mathbf{1}_{p-j-2})$$

фиксира 0 и 1. На основу леме 2.7.2, постоји τ-терм $\pi' : p-2 \to p-2$ тако да ова пермутација одговара терму $\mathbf{1}_2 \otimes \pi'$. Тврђење следи из леме 2.7.2 и аксиоме (инв). $\square$

Применом леме 2.7.7 и аксиома (при), (фун) и (Фроб), добијамо следећу лему.

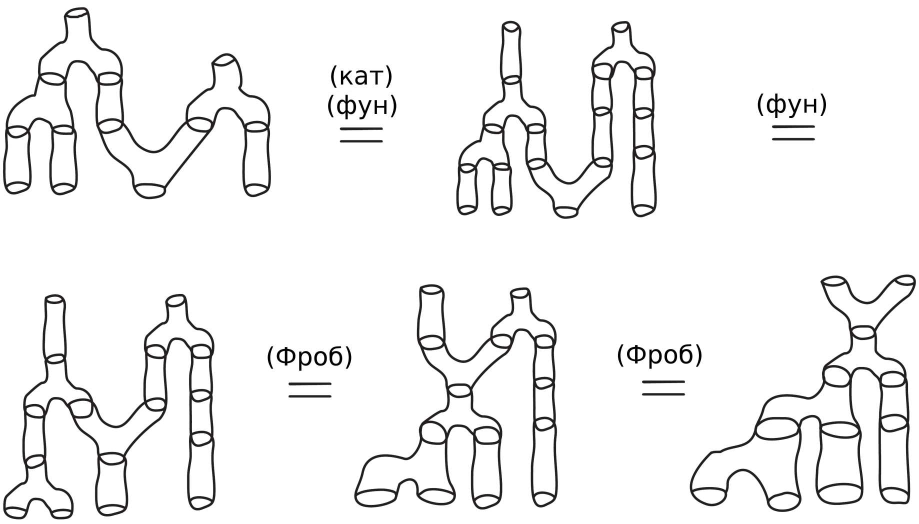
Лема 2.7.10. *За $n \geq 1$ важи $(\mathbf{1}_l \otimes \mu \otimes \mathbf{1}_{n-l-1}) \circ \Lambda_n = \Lambda_{n-1} \circ H_1$.*



Слика 2.10: Лема 2.7.10

Следећа лема је последица аксиома (фун) и (Фроб).

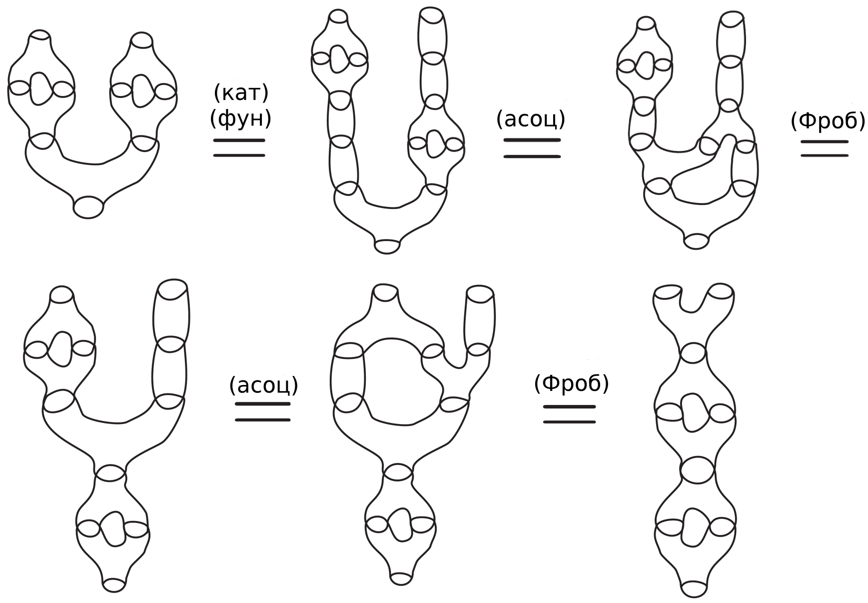
Лема 2.7.11. *За $n, m \geq 0$ важи $(\mathbf{1}_n \otimes \mu \otimes \mathbf{1}_m) \circ (\Lambda_n \otimes \Lambda_m) = \Lambda_{n+m} \circ \mu$.*



Слика 2.11: Лема 2.7.11

Из аксиома (фун), (асоц) и (Фроб) добијамо следећу лему.

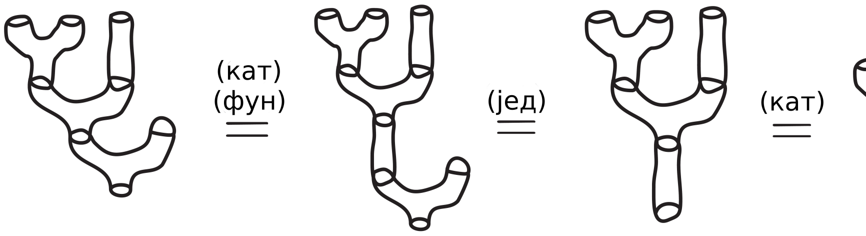
Лема 2.7.12. *За $n, m \geq 0$ важи $\mu \circ (H_n \otimes H_m) = H_{n+m} \circ \mu$ (видети слику 2.12).*



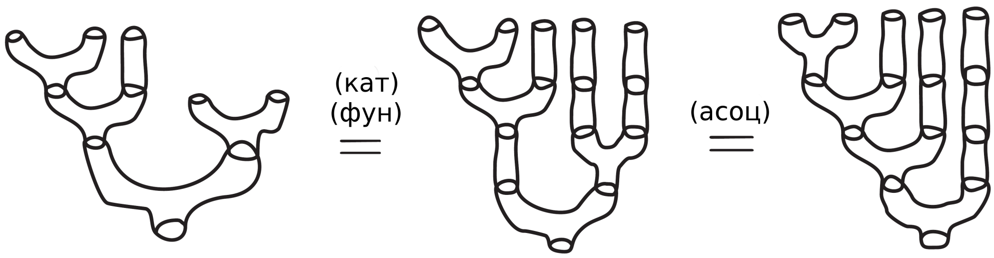
Слика 2.12: Лема 2.7.12

Лема 2.7.13. *За $n, m \geq -1$ важи $\mu \circ (V_n \otimes V_m) = V_{n+m+1}$ (видети слике 2.13 и 2.14).*

Доказ. Ако је бар један од n и m једнак -1, онда користимо аксиоме (фун) и (јед), а у осталим случајевима (фун) и (асоц). □



Слика 2.13: Лема 2.7.13, $m = -1$



Слика 2.14: Лема 2.7.13

Доказ тврђења 2.7.1. Нека је f терм. На основу леме 2.7.1, f је једнак терму облика $f_n \circ \ldots \circ f_0$, где је сваки f_i облика $\mathbf{1}_l \otimes \beta \otimes \mathbf{1}_r$, за $l, r \geq 0$ и $\beta \in \{\tau, \mu, \eta, \delta, \varepsilon\}$. Даље настављамо индукцијом по $n \geq 0$. Због једноставности ћемо често изостављати писање индекса код $\mathbf{1}$ који нису битни.

Ако је $n = 0$, тврђење важи пошто је $\mathbf{1}_l \otimes \beta \otimes \mathbf{1}_r$ специјални терм.

Ако је $n > 0$, онда је на основу индукцијске хипотезе терм $f_{n-1} \circ \ldots \circ f_0$ једнак терму облика $\pi \circ \bigotimes_{i=1}^{k} E_{p_i, m_i, n_i} \circ \chi$. Разликујемо следеће случајеве у зависности од облика терма f_n.

1° Ако је f_n облика $\mathbf{1}_l \otimes \tau \otimes \mathbf{1}_r$, онда је доказ готов јер је терм $f_n \circ \pi$, τ-терм.

2° Ако је f_n облика $\mathbf{1}_l \otimes \delta \otimes \mathbf{1}_r$, онда на основу леме 2.7.3, постоји τ-терм π' такав да је

$$f_n \circ \pi \overset{\text{(лема 2.7.3)}}{=\!=\!=} (\mathbf{1}_l \otimes \delta \otimes \mathbf{1}) \circ (\tau_{1,l} \otimes \mathbf{1}) \circ (\mathbf{1}_1 \otimes \pi') \circ (\tau_{j,1} \otimes \mathbf{1}).$$

На основу аксиоме (при) имамо $(\mathbf{1}_l \otimes \delta) \circ \tau_{1,l} = \tau_{2,l} \circ (\delta \otimes \mathbf{1}_l)$, па је

$$f_n \circ \pi \overset{\text{(при)}}{=} (\tau_{2,l} \otimes \mathbf{1}) \circ (\delta \otimes \mathbf{1}) \circ (\mathbf{1}_1 \otimes \pi') \circ (\tau_{j,1} \otimes \mathbf{1}).$$

Даље, на основу аксиома (кат) и (фун) важи $(\delta \otimes \mathbf{1}) \circ (\mathbf{1}_1 \otimes \pi') \overset{\text{(фун)}}{=} (\delta \circ \mathbf{1}_1) \otimes (\mathbf{1} \circ \pi') \overset{\text{(кат)}}{=} (\mathbf{1}_2 \circ \delta) \otimes (\pi' \circ \mathbf{1}) \overset{\text{(фун)}}{=} (\mathbf{1}_2 \otimes \pi') \circ (\delta \otimes \mathbf{1})$, па је

$$f_n \circ \pi = (\tau_{2,l} \otimes \mathbf{1}) \circ (\mathbf{1}_2 \otimes \pi') \circ (\delta \otimes \mathbf{1}) \circ (\tau_{j,1} \otimes \mathbf{1}).$$

Из аксиоме (при) имамо $(\delta\otimes\mathbf{1})\circ\tau_{j,1}=\tau_{j,2}\circ(\mathbf{1}\otimes\delta)$, па је

$$f_n\circ\pi=(\tau_{2,l}\otimes\mathbf{1})\circ(\mathbf{1}_2\otimes\pi')\circ(\tau_{j,2}\otimes\mathbf{1})\circ(\mathbf{1}_j\otimes\delta\otimes\mathbf{1}).$$

Тада је за неко $u\in k$, на основу аксиоме (фун), терм $(\mathbf{1}_j\otimes\delta\otimes\mathbf{1})\circ\bigotimes_{i=1}^k E_{p_i,m_i,n_i}$ једнак терму

$$(\mathbf{1}\otimes((\mathbf{1}\otimes\delta\otimes\mathbf{1})\circ E_{p_u,m_u,n_u})\otimes\mathbf{1})\circ(\bigotimes_{i=1}^{u-1}E_{p_i,m_i,n_i}\otimes\mathbf{1}_{n_u}\otimes\bigotimes_{i=u+1}^{k}E_{p_i,m_i,n_i}).$$

На основу леме 2.7.4 важи $(\mathbf{1}\otimes\delta\otimes\mathbf{1})\circ E_{p_u,m_u,n_u}=(\mathbf{1}\otimes\delta\otimes\mathbf{1})\circ\Lambda_{p_u-1}\circ H_{m_u}\circ V_{n_u-1}=\Lambda_{p_u}\circ H_{m_u}\circ V_{n_u-1}=E_{p_u+1,m_u,n_u}$. Поново применом аксиоме (фун) добијамо да је терм

$$(\mathbf{1}\otimes((\mathbf{1}\otimes\delta\otimes\mathbf{1})\circ E_{p_u,m_u,n_u})\otimes\mathbf{1})\circ(\bigotimes_{i=1}^{u-1}E_{p_i,m_i,n_i}\otimes\mathbf{1}_{n_u}\otimes\bigotimes_{i=u+1}^{k}E_{p_i,m_i,n_i})$$

једнак терму

$$\bigotimes_{i=1}^{u-1}E_{p_i,m_i,n_i}\otimes E_{p_u+1,m_u,n_u}\otimes\bigotimes_{i=u+1}^{k}E_{p_i,m_i,n_i},$$

који представља центар терма $f_n\circ\ldots\circ f_0$.

3° Ако је f_n облика $\mathbf{1}_l\otimes\varepsilon\otimes\mathbf{1}_r$, онда поступамо као у претходном случају, само што примењујемо лему 2.7.5 уместо леме 2.7.4 и добијамо терм

$$\bigotimes_{i=1}^{u-1}E_{p_i,m_i,n_i}\otimes E_{p_u-1,m_u,n_u}\otimes\bigotimes_{i=u+1}^{k}E_{p_i,m_i,n_i},$$

који представља центар терма $f_n\circ\ldots\circ f_0$.

4° Ако је f_n облика $\mathbf{1}_l\otimes\eta\otimes\mathbf{1}_r$, онда на основу леме 2.7.6 и (фун) важи

$$\begin{aligned}f_n\circ\pi\circ\bigotimes_{i=1}^{k}E_{p_i,m_i,n_i}&\overset{(\text{лема 2.7.6})}{=\!=\!=}(\tau_{1,l}\otimes\mathbf{1})\circ(\mathbf{1}_1\otimes\pi)\circ(\eta\otimes\mathbf{1})\circ\bigotimes_{i=1}^{k}E_{p_i,m_i,n_i}\\&\overset{(\text{фун})}{=}(\tau_{1,l}\otimes\mathbf{1})\circ(\mathbf{1}_1\otimes\pi)\circ\bigotimes_{i=0}^{k}E_{p_i,m_i,n_i},\end{aligned}$$

где је $p_0=1$ и $m_0=n_0=0$.

5° Ако је f_n облика $\mathbf{1}_l\otimes\mu\otimes\mathbf{1}_r$, како је $f_{n-1}\circ\ldots\circ f_0$ једнак специјалном терму облика $\pi\circ\bigotimes_{i=1}^k E_{p_i,m_i,n_i}\circ\chi$, на основу леме 2.7.8 можемо претпоставити да је $\pi^{-1}(l+1)=\pi^{-1}(l)+1$. На основу леме 2.7.9 постоји $\pi':p-2\to p-2$ тако да је $\pi=(\tau_{2,l}\otimes\mathbf{1}_{p-l-2})\circ(\mathbf{1}_2\otimes\pi')\circ(\tau_{j,2}\otimes\mathbf{1}_{p-j-2})$, па је

$$f_n\circ\pi=(\mathbf{1}_l\otimes\mu\otimes\mathbf{1}_r)\circ(\tau_{2,l}\otimes\mathbf{1}_{p-l-2})\circ(\mathbf{1}_2\otimes\pi')\circ(\tau_{j,2}\otimes\mathbf{1}_{p-j-2}).$$

На основу аксиоме (при) имамо $(\mathbf{1}_l\otimes\mu)\circ\tau_{2,l}=\tau_{1,l}\circ(\mu\otimes\mathbf{1}_l)$, па је

$$f_n\circ\pi\overset{(\text{при})}{=}(\tau_{1,l}\otimes\mathbf{1})\circ(\mu\otimes\mathbf{1})\circ(\mathbf{1}_2\otimes\pi')\circ(\tau_{j,2}\otimes\mathbf{1}_{p-j-2}).$$

Даље, на основу аксиома (кат) и (фун) важи $(\mu\otimes\mathbf{1})\circ(\mathbf{1}_2\otimes\pi') \overset{(\text{фун})}{=} (\mu\circ\mathbf{1}_2)\otimes(\mathbf{1}\circ\pi') \overset{(\text{кат})}{=} (\mathbf{1}_1\circ\mu)\otimes(\pi'\circ\mathbf{1}) \overset{(\text{фун})}{=} (\mathbf{1}_1\otimes\pi')\circ(\mu\otimes\mathbf{1})$, па је

$$f_n\circ\pi = (\tau_{1,l}\otimes\mathbf{1})\circ(\mathbf{1}_1\otimes\pi')\circ(\mu\otimes\mathbf{1})\circ(\tau_{j,2}\otimes\mathbf{1}_{p-j-2}).$$

Из аксиоме (при) имамо $(\mu\otimes\mathbf{1})\circ\tau_{j,2} = \tau_{j,1}\circ(\mathbf{1}\otimes\mu)$, па је

$$f_n\circ\pi = (\tau_{1,l}\otimes\mathbf{1})\circ(\mathbf{1}_1\otimes\pi')\circ(\tau_{j,1}\otimes\mathbf{1})\circ(\mathbf{1}_j\otimes\mu\otimes\mathbf{1}).$$

Разликујемо следећа два случаја у зависности од тога како је терм μ везан за центар $\bigotimes_{i=1}^k E_{p_i,m_i,n_i}$. Ако је μ везан за један E_{p_u,m_u,n_u}, онда је на основу аксиоме (фун) терм $(\mathbf{1}_j\otimes\mu\otimes\mathbf{1})\circ\bigotimes_{i=1}^k E_{p_i,m_i,n_i}$ једнак терму

$$(\mathbf{1}\otimes((\mathbf{1}\otimes\mu\otimes\mathbf{1})\circ E_{p_u,m_u,n_u})\otimes\mathbf{1})\circ(\bigotimes_{i=1}^{u-1} E_{p_i,m_i,n_i}\otimes\mathbf{1}_{n_u}\otimes\bigotimes_{i=u+1}^{k} E_{p_i,m_i,n_i}).$$

На основу леме 2.7.10 важи $(\mathbf{1}\otimes\mu\otimes\mathbf{1})\circ E_{p_u,m_u,n_u} = (\mathbf{1}\otimes\mu\otimes\mathbf{1})\circ\Lambda_{p_u-1}\circ H_{m_u}\circ V_{n_u-1} = \Lambda_{p_u-2}\circ H_1\circ H_{m_u}\circ V_{n_u-1} = E_{p_u-1,m_u+1,n_u}$. Поново применом аксиоме (фун) добијамо да је терм

$$(\mathbf{1}\otimes((\mathbf{1}\otimes\mu\otimes\mathbf{1})\circ E_{p_u,m_u,n_u})\otimes\mathbf{1})\circ(\bigotimes_{i=1}^{u-1} E_{p_i,m_i,n_i}\otimes\mathbf{1}_{n_u}\otimes\bigotimes_{i=u+1}^{k} E_{p_i,m_i,n_i})$$

једнак терму

$$\bigotimes_{i=1}^{u-1} E_{p_i,m_i,n_i}\otimes E_{p_u-1,m_u+1,n_u}\otimes\bigotimes_{i=u+1}^{k} E_{p_i,m_i,n_i}.$$

У другом случају, ако је μ везан за суседна два E_{p_u,m_u,n_u} и $E_{p_{u+1},m_{u+1},n_{u+1}}$, онда је на основу аксиоме (фун) терм $(\mathbf{1}_j\otimes\mu\otimes\mathbf{1})\circ\bigotimes_{i=1}^k E_{p_i,m_i,n_i}$ једнак терму

$$(\mathbf{1}\otimes((\mathbf{1}\otimes\mu\otimes\mathbf{1})\circ(E_{p_u,m_u,n_u}\otimes E_{p_{u+1},m_{u+1},n_{u+1}}))\otimes\mathbf{1})\circ$$
$$(\bigotimes_{i=1}^{u-1} E_{p_i,m_i,n_i}\otimes\mathbf{1}_{n_u+n_{u+1}}\otimes\bigotimes_{i=u+2}^{k} E_{p_i,m_i,n_i}).$$

На основу лема 2.7.11, 2.7.12 и 2.7.13 важи $(\mathbf{1}\otimes\mu\otimes\mathbf{1})\circ(E_{p_u,m_u,n_u}\otimes E_{p_{u+1},m_{u+1},n_{u+1}}) = E_{p_u+p_{u+1}-1,m_u+m_{u+1},n_u+n_{u+1}}$. Поново применом аксиоме (фун) добијамо центар облика

$$\bigotimes_{i=1}^{u-1} E_{p_i,m_i,n_i}\otimes E_{p_u+p_{u+1}-1,m_u+m_{u+1},n_u+n_{u+1}}\otimes\bigotimes_{i=u+2}^{k} E_{p_i,m_i,n_i}.$$

$\square$

Посматрајмо сада специјални терм облика

$$(*)\qquad \pi\circ(\bigotimes_{i=1}^{a} E_{0,m_i,0}\otimes\bigotimes_{i=1}^{b} E_{0,p_i,n_i}\otimes\bigotimes_{i=1}^{c} E_{q_i,r_i,0}\otimes\bigotimes_{i=1}^{d} E_{s_i,t_i,u_i})\circ\chi,$$

где су $a,b,c,d\geq 0$, и $n_i,q_i,s_i,u_i\geq 1$.

За $b \geq 1$, уведимо ознаке $\beta^1 = 0$, и $\beta^i = n_1 + \ldots + n_{i-1}$, за $i \in \{2, \ldots, b\}$.

Ако је $d \geq 1$, уведимо ознаке $\delta^1 = n_1 + \ldots + n_b$, $\delta_1 = q_1 + \ldots + q_c$, а за $i \in \{2, \ldots, d\}$, уведимо ознаке $\delta^i = n_1 + \ldots + n_b + u_1 + \ldots + u_{i-1}$ и $\delta_i = q_1 + \ldots + q_c + s_1 + \ldots + s_{i-1}$.

Ако је $c \geq 1$, уведимо ознаке $\gamma_1 = 0$, и $\gamma_i = q_1 + \ldots + q_{i-1}$, за $i \in \{2, \ldots, c\}$.

За специјални терм облика $(*)$ кажемо да је у *нормалној форми* ако

$$m_1 \leq m_2 \leq \ldots \leq m_a,$$

$$\chi^{-1}(\beta^1) < \chi^{-1}(\beta^2) < \ldots < \chi^{-1}(\beta^b),$$

$$\pi(\gamma_1) < \pi(\gamma_2) < \ldots < \pi(\gamma_c),$$

$$\pi(\delta_1) < \pi(\delta_2) < \ldots < \pi(\delta_d),$$

за свако $i \in \{1, \ldots, b\}$

$$\chi^{-1}(\beta^i) < \chi^{-1}(\beta^i + 1) < \ldots < \chi^{-1}(\beta^i + n_i - 1),$$

за свако $i \in \{1, \ldots, d\}$

$$\chi^{-1}(\delta^i) < \chi^{-1}(\delta^i + 1) < \ldots < \chi^{-1}(\delta^i + u_i - 1),$$

$$\pi(\delta_i) < \pi(\delta_i + 1) < \ldots < \pi(\delta_i + s_i - 1),$$

и на крају, за свако $i \in \{1, \ldots, c\}$

$$\pi(\gamma_i) < \pi(\gamma_i + 1) < \ldots < \pi(\gamma_i + q_i - 1).$$

На основу тврђења 2.7.1, леме 2.7.7 и једнакости

$$f_1 \otimes f_2 = \tau_{m_2, m_1} \circ (f_2 \otimes f_1) \circ \tau_{n_1, n_2},$$

која је последица аксиома (при) и (инв), можемо доказати следећу теорему.

Теорема 2.7.1. (Баралић, Петрић и Телебаковић [4]) *За сваки терм f постоји терм f' у нормалној форми тако да је $f \equiv f'$.*

2.8 Верност интерпретације

Дефиниција 2.8.1. Функтор $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ је *веран* ако за сваки пар стрелица $f, g : A \to B$ у категорији $\mathcal{C}$, $F(f) = F(g)$ повлачи $f = g$.

Главни циљ ове секције је да покажемо да је интерпретација синтаксне категорије $\mathbf{K}$ у конкретној категорији $dCobS$ веран функтор, за свако $d \geq 2$. Да бисмо то доказали, уведимо прво неке појмове. Сваки d-кобордизам $K = (M, \Sigma_0, \Sigma_1) : \underline{n} \to \underline{m}$ индукује следећу релацију еквиваленције ρ_K на скупу $(n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})$. Елементи (i, k) и (j, l) скупа $(n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})$ су у релацији ρ_K, тј. $(i, k)\rho_K(j, l)$ ако

$$\Sigma^i_k \text{ и } \Sigma^j_l \text{ припадају истој компоненти повезаности од } M.$$

На основу тврђења 2.4.1, и чињенице да хомеоморфизми чувају компоненте повезаности, закључујемо да важи следећа лема.

Лема 2.8.1. *Ако су два d-кобордизма $K = (M, \Sigma_0, \Sigma_1)$ и $L = (N, \Delta_0, \Delta_1)$ еквивалентна, онда је $\rho_K = \rho_L$.*

Помоћу следећег тврђења ћемо закључити да су категорије $dCobS$ и $\mathbf{K}$ скелеталне, тј. да не постоје два различита изоморфна објекта у њима.

Тврђење 2.8.1. *Ако је $K : \underline{n} \to \underline{m}$ изоморфизам, онда је $n = m$.*

Доказ. Означимо са $L : \underline{m} \to \underline{n}$ инверз од K. Докажимо да свака класа еквиваленције у односу на релацију ρ_K има тачно два елемента, од којих један има другу компоненту 0, а други елемент има другу компоненту 1. Отуда ће следити да је $n = m$.

Претпоставимо да постоји класа еквиваленције релације ρ_K која је једноелементни скуп $\{(i, 0)\}$. Тада је $\{(i, 0)\}$ такође и класа еквиваленције релације $\rho_{L\circ K}$, што је на основу леме 2.8.1 немогуће, пошто је кобордизам $L \circ K$ еквивалентан идентичном d-кобордизму.

Претпоставимо сада да постоји класа еквиваленције релације ρ_K која садржи елементе $(i, 0)$ и $(j, 0)$, за $i \neq j$. Тада постоји класа еквиваленције релације $\rho_{L\circ K}$ која садржи елементе $(i, 0)$ и $(j, 0)$, што је поново немогуће на основу леме 2.8.1.

Аналогно поступамо и у случајевима када је класа еквиваленције релације ρ_K једноелементни скуп $\{(i, 1)\}$ или када класа еквиваленције релације ρ_K садржи елементе $(i, 1)$ и $(j, 1)$, само што уместо релације $\rho_{L\circ K}$ користимо $\rho_{K\circ L}$. □

Последица 2.8.1. *Категорије $\mathbf{K}$ и $dCobS$, за $d \geq 2$, су скелеталне.*

Касније ћемо показати и да је категорија $1CobS$ такође скелетална. Означимо са $\underline{f}$ кобордизам који одговара терму f.

Лема 2.8.2. *Ако су d-кобордизми $\underline{E_{0,n,0}}$ и $\underline{E_{0,m,0}}$ еквивалентни, онда је $n = m$.*

Доказ. У случају када је $d = 2$, n је род површи $\underline{E_{0,n,0}}$, па тврђење директно следи на основу теореме о класификацији повезаних, компактних оријентисаних површи без границе. Ако је $d \geq 3$, онда је $\underline{E_{0,1,0}}$ хомеоморфно са $S^{d-1} \times S^1$, па има фундаменталну групу изоморфну адитивној групи целих бројева $\mathbb{Z}$. Даље на основу Ван Кампенове теореме добијамо да је фундаментална група од $\underline{E_{0,n,0}}$ слободна група са n генератора, $\underbrace{\mathbb{Z} * \ldots * \mathbb{Z}}_{n}$. Ово је довољно да закључимо да многострукости које одговарају $E_{0,n,0}$ и $E_{0,m,0}$, за $n \neq m$, нису хомеоморфне. □

У даљем тексту ћемо претпостављати да су терми f и f' у нормалним формама редом облика

$$\pi \circ (\bigotimes_{i=1}^{a} E_{0,m_i,0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{b} E_{0,p_i,n_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^{c} E_{q_i,r_i,0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{d} E_{s_i,t_i,u_i}) \circ \chi$$

и

$$\pi' \circ (\bigotimes_{i=1}^{a'} E_{0,m'_i,0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{b'} E_{0,p'_i,n'_i} \otimes \bigotimes_{i=1}^{c'} E_{q'_i,r'_i,0} \otimes \bigotimes_{i=1}^{d'} E_{s'_i,t'_i,u'_i}) \circ \chi'.$$

Тврђење 2.8.2. *Нека су f и f' терми у нормалној форми. Ако је $\underline{f} \sim \underline{f'}$, онда је $a = a'$ и $m_i = m'_i$ за све $1 \leq i \leq a$.*

Доказ. Како су кобордизми $\underline{f}$ и $\underline{f'}$ еквивалентни, постоји хомеоморфизам који пресликава затворене компоненте од $\underline{f}$ у затворене компоненте од $\underline{f'}$. Према томе, постоји бијекција из $\{1, \dots, a\}$ у $\{1, \dots, a'\}$ тако да је $\underline{E_{0,m_i,0}} \sim \underline{E_{0,m'_j,0}}$, где је j слика од i при овој бијекцији. Дакле, имамо да је $a = a'$, а пошто је $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_a$ и $m'_1 \leq m'_2 \leq \dots \leq m'_a$, на основу леме 2.8.2, закључујемо и да је $m_i = m'_i$, за све $1 \leq i \leq a$. □

Тврђење 2.8.3. *Нека су f и f' терми у нормалној форми. Ако је $\underline{f} \sim \underline{f'}$, онда терми f и f' репрезентују исту стрелицу у категорији $\mathbf{K}$, тј. $f \equiv f'$.*

Доказ. На основу тврђења 2.4.1, терми f и f' су истог типа $n \to m$. Доказ изводимо индукцијом по $n + m$. Ако је $n + m = 0$, терми f и f' су редом облика $\bigotimes_{i=1}^{a} E_{0,m_i,0}$ и $\bigotimes_{i=1}^{a'} E_{0,m'_i,0}$, па на основу тврђења 2.8.2 следи да је $f \equiv f'$.

Ако је $n + m > 0$, означимо са ρ релацију еквиваленције која, према леми 2.8.1, одговара кобордизмима $\underline{f}$ и $\underline{f'}$. Претпоставимо да је $b > 0$. Тада се E_{0,p_1,n_1} појављује у f. Како еквивалентним кобордизмима $\underline{f}$ и $\underline{f'}$ одговара иста релација еквиваленције ρ, следи да је и $b' > 0$. Нека је $X = \chi^{-1}[\{0, \dots, n_1 - 1\}]$. Тада је скуп $X \times \{0\}$ класа еквиваленције елемента $(\chi^{-1}(0), 0)$ у односу на релацију ρ. Нормална форма и релација ρ нам дају да је $n'_1 = n_1$, и да се пермутације χ и χ' поклапају на X.

Посматрајмо, даље, терм g облика $g_0 \otimes \dots \otimes g_{n-1}$, где је

$$g_i = \begin{cases} \mathbf{1}_1, & i \notin X, \\ \eta, & i \in X. \end{cases}$$

На основу аксиоме (при), закључујемо да је терм $f \circ g$ једнак терму f_1 у нормалној форми

$$\pi \circ (A \otimes \bigotimes_{i=2}^{b} E_{0,p_i,n_i} \otimes C \otimes D) \circ \chi_1,$$

где је A облика

$$\bigotimes_{i=1}^{k} E_{0,m_i,0} \otimes E_{0,p_1,0} \otimes \bigotimes_{i=k+1}^{a} E_{0,m_i,0},$$

терм C означава $\bigotimes_{i=1}^{c} E_{q_i,r_i,0}$, а D означава $\bigotimes_{i=1}^{d} E_{s_i,t_i,u_i}$. На исти начин добијамо да је терм $f' \circ g$ једнак терму f'_1 у нормалној форми

$$\pi' \circ (A' \otimes \bigotimes_{i=2}^{b'} E_{0,p'_i,n'_i} \otimes C' \otimes D') \circ \chi'_1,$$

уз ознаке A', C' и D' као и малопре.

Из $\underline{f} \sim \underline{f'}$ следи $\underline{f} \circ \underline{g} \sim \underline{f'} \circ \underline{g}$, а пошто је интерпретација функтор, даље следи и $\underline{f \circ g} \sim \underline{f' \circ g}$, тј. $\underline{f_1} \sim \underline{f'_1}$. На основу индукцијске хипотезе добијамо да су терми f_1 и f'_1 идентични. Према тврђењу 2.8.2 важи да су терми $\bigotimes_{i=1}^{a} E_{0,m_i,0}$ и $\bigotimes_{i=1}^{a'} E_{0,m'_i,0}$ идентични, а како су и терми A и A' идентични, закључујемо да је $p_1 = p'_1$. Остаје нам још да покажемо да су пермутације χ и χ' једнаке, што следи из чињенице да су χ_1 и χ'_1 једнаке, и да се χ и χ' поклапају на X.

Аналогно поступамо и у случају када је $b = 0$ и $c > 0$, или у случају када је $b = c = 0$ и $d > 0$. □

Теорема 2.8.1. (Теорема сагласности) *Ако за терме f и g важи $f \equiv g$, онда је $\underline{f} \sim \underline{g}$.*

Доказ. Индукцијом по дужини извођења $f = g$ у $\mathcal{K}$. Кључно је проверити да су у свакој од једначина (при), (инв), (хекс), (асоц), (јед), (коасоц), (којед), (Фроб), (ком) и (коком) кобордизми који одговарају левој и десној страни једначине еквивалентни. За индукцијски корак треба искористити симетричност и транзитивност једнакости, као и конгруентност у односу на композицију и тензорисање. □

С обзиром на теорему сагласности, да бисмо проверили да су терми f и g различити у $\mathbf{K}$, довољно је нацртати одговарајуће кобордизме $\underline{f}$ и $\underline{g}$ и на њима уочити разлику. Сада ћемо доказати обрат ове теореме.

Теорема 2.8.2. (Теорема потпуности) *Нека су $f, g : n \to m$ терми категорије $\mathbf{K}$. Ако су кобордизми $\underline{f}$ и $\underline{g}$ еквивалентни, онда је $f \equiv g$.*

Доказ. Нека су f и g терми истог типа такви да су одговарајући кобордизми $\underline{f}$ и $\underline{g}$ еквивалентни. На основу теореме о нормалној форми 2.7.1 постоје терми f' и g' у нормалној форми такви да је $f \equiv f'$ и $g \equiv g'$. Даље, на основу теореме сагласности 2.8.1 имамо да је $\underline{f} \sim \underline{f'}$ и $\underline{g} \sim \underline{g'}$. Пошто је $\underline{f} \sim \underline{g}$, на основу симетричности и транзитивности релације $\sim$, следи $\underline{f'} \sim \underline{g'}$. Како су терми f' и g' у нормалној форми, применом тврђења 2.8.3 добијамо да је $f' \equiv g'$. Због симетричности и транзитивности релације $\equiv$ следи $f \equiv g$. □

Према томе, да бисмо проверили да су терми f и g једнаки у $\mathbf{K}$, довољно је да нацртамо одговарајуће кобордизме и проверимо да ли су еквивалентни.

Следећа теорема је директна последица теореме сагласности и теореме потпуности.

Теорема 2.8.3. (Баралић, Петрић и Телебаковић [4]) *За свако $d \geq 2$, интерпретација категорије $\mathbf{K}$ у категорији $dCobS$ је веран функтор.*

Како је интерпретација категорије $\mathbf{K}$ у категорији $dCobS$ 1-1 на објектима, имамо утапање. Следећа последица је већ доказана у [23, Теорема 3.6.19].

Последица 2.8.2. *Категорија $\mathbf{K}$ је изоморфна са $2CobS$.*

Доказ. На основу теореме о класификацији 2-многострукости (видети нпр. [43, VI.40]) следи да је интерпретација, у случају када је $d = 2$ потпун функтор. □

Напоменимо да у случају када је $d > 2$ интерпретација није потпун функтор, па самим тим немамо изоморфизам ових категорија.

Глава 3

Верност једнодимензионалних тополошких квантних теорија поља

Крајем 80-их година прошлог века Витен [47] је увео појам тополошке квантне теорије поља као теорије која не зависи од избора геометријских величина (метрике, кривине и сл). Аксиоме ове теорије које је предложио Атија [3] наводимо у следећој дефиницији.

Дефиниција 3.0.1. *n-димензионална тополошка квантна теорија поља* је правило F које свакој затвореној оријентисаној $(n-1)$-многострукости Σ придружује векторски простор $F(\Sigma)$ над пољем $\mathbb{K}$, а сваком оријентисаном кобордизму $M : \Sigma_0 \to \Sigma_1$ придружује линеарно пресликавање $F(M) : F(\Sigma_0) \to F(\Sigma_1)$, при чему важе следеће аксиоме:

A1: Еквивалентним кобордизмима одговарају иста линеарна пресликавања

$$M \sim M' \;\; \Rightarrow \;\; F(M) = F(M').$$

A2: Цилиндру $\Sigma \times I$ над затвореном многострукошћу Σ одговара идентично пресликавање векторског простора $F(\Sigma)$.

A3: Ако је кобордизам M добијен лепљењем кобордизама M' и M'' дуж заједничке границе, онда је $F(M)$ композиција линеарних пресликавања $F(M')$ и $F(M'')$.

A4: Дисјунктној унији одговара тензорски производ.
Ако је $\Sigma = \Sigma' \bigsqcup \Sigma''$, онда је $F(\Sigma) = F(\Sigma') \otimes F(\Sigma'')$.
Ако је кобордизам $M : \Sigma_0 \to \Sigma_1$ дисјунктна унија кобордизама $M' : \Sigma_0' \to \Sigma_1'$ и $M'' : \Sigma_0'' \to \Sigma_1''$, онда је $F(M) = F(M') \otimes F(M'')$.

A5: Празној многострукости $\Sigma = \emptyset$ одговара поље $\mathbb{K}$.

Напомена 3.0.1. Специфичност квантне теорије је да дисјунктним унијама придружује тензорски производ, док им класична теорија придружује Декартов. Како Декартов производ има смисла на нивоу скупова, а за тензорски производ нам је неопходна и алгебарска структура, квантне теорије су богатији извор тополошких инваријанти од класичних теорија.

На језику теорије категорија, тополошка квантна теорија поља је симетрични моноидални функтор из категорије оријентисаних кобордизама у категорију векторских простора. Категоријални приступ развио је Квин [37].

У овом поглављу ћемо проучавати 1-димензионалне тополошке квантне теорије поља. Посебно ћемо разматрати случај стриктних и јаких 1-димензионалних тополошких квантних теорија поља. Под стриктном подразумевамо симетрични моноидални функтор између категорије 1-кобордизама и категорије матрица, док под јаком подразумевамо симетрични јаки моноидални функтор између категорије 1-кобордизама и категорије коначно-димензионалних векторских простора над фиксираним пољем. Доказаћемо да су и стриктне и јаке 1-димензионалне тополошке квантне теорије поља верне.

Описаћемо како се 1-кобордизмима могу придружити $0-1$ матрице. Ово придруживање је мотивисано једним од класичних резултата теорије репрезентација. Проучавајући репрезентацију ортогоналне групе, Рихард Брауер је 1937. године конструисао дијаграматску (геометријску) алгебру и описао њену матричну репрезентацију (видети [5]). Дошен и Петрић су уопштили Брауерову репрезентацију и добили симетричан моноидални функтор између категорије 1-кобордизама и категорије матрица (видети [12] и [13]). Овај функтор ћемо називати брауеријанским и показаћемо његову верност.

Главни резултат ове главе је да се свака стриктна 1-димензионална тополошка квантна теорија поља, која пресликава нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке у природан број $p \geq 2$, поклапа са брауеријанским функтором до на множење инвертибилним матрицама ([35]). Из верности брауеријанског функтора следи верност свих стриктних 1-димензионалних тополошких квантних теорија поља. То значи да свака таква 1-димензионална тополошка квантна теорија поља представља комплетну инваријанту 1-кобордизама. Резултат верности затим уопштавамо на све јаке 1-димензионалне тополошке квантне теорије поља, које пресликавају нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке у векторски простор димензије бар 2 ([35]). На самом крају овог поглавља објаснићемо да 1-димензионална тополошка квантна теорија поља, која одговара брауеријанској репрезентацији, пресликава нулдимензионалну сферу у матричну Фробенијусову алгебру ([4]).

3.1 Представљање релација еквиваленције помоћу функција

У овој секцији ће бити изложени резултати Дошена и Петрића, које ћемо у наставку рада непосредно користити.

Нека је X произвољан скуп и $R \subseteq X^2$ бинарна релација на X. Нека је p скуп такав да је ординал $2 = \{0, 1\}$ подскуп од p и нека је $\leq$ бинарна релација на p таква да је њена рестрикција на 2 уобичајена релација поретка. За $x, y \in X$ дефинишемо функцију $f_x : X \to p$ са

$$f_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{ако } (x,y) \in R \\ 0, & \text{ако } (x,y) \notin R. \end{cases}$$

Посматрајмо и скупове функција

$$\mathcal{F}^{\leq}(R) = \{f : X \to p \mid (\forall x, y \in X)\ \big((x,y) \in R \Rightarrow f(x) \leq f(y)\big)\},$$

$$\mathcal{F}^{=}(R) = \{f : X \to p \mid (\forall x, y \in X)\ \big((x,y) \in R \Rightarrow f(x) = f(y)\big)\}.$$

Тврђење 3.1.1. (Дошен и Петрић [10]) *Релација R је рефлексивна акко за све $x \in X$ важи $f_x(x) = 1$.*

Тврђење 3.1.2. (Дошен и Петрић [10],[11]) *Релација R је транзитивна акко за све $x \in X$ важи $f_x \in \mathcal{F}^{\leq}(R)$.*

Доказ. ($\Rightarrow$) Нека је R транзитивна релација, а $x \in X$ произвољни елемент скупа X. Претпоставимо да $(y,z) \in R$. Ако је $f_x(y) = 0$, онда је $f_x(y) \leq f_x(z)$. Ако је $f_x(y) = 1$, тада је $(x,y) \in R$. Из транзитивности релације R следи $(x,z) \in R$, те је $f_x(y) \leq f_x(z)$.

($\Leftarrow$) Ако је $(y,z) \in R \Rightarrow f_x(y) \leq f_x(z)$. Тада, $(y,z) \in R \Rightarrow f_x(y) = 0 \ \vee \ f_x(z) = 1$, што значи $(y,z) \in R \Rightarrow ((x,y) \in R \Rightarrow (x,z) \in R)$. □

Тврђење 3.1.3. (Дошен и Петрић [11]) *Ако је R симетрична релација, онда је $\mathcal{F}^{=}(R) = \mathcal{F}^{\leq}(R)$.*

Доказ. Нека су $x, y \in X$ такви да је $(x,y) \in R$. Ако $f \in \mathcal{F}^{\leq}(R)$, онда $f(x) \leq f(y)$, а због симетричности релације R и $f(y) \leq f(x)$, па $f \in \mathcal{F}^{=}(R)$. □

Тврђење 3.1.4. (Дошен и Петрић [11]) *Релација R је релација еквиваленције акко*

$$(\forall x, y \in X)\big((x,y) \in R \Leftrightarrow (\forall f \in \mathcal{F}^{=}(R))\ f(x) = f(y)\big).$$

Доказ. ($\Rightarrow$) Претпоставимо да је R релација еквиваленције и да за све $f \in \mathcal{F}^{=}(R)$ важи $f(x) = f(y)$. На основу тврђења 3.1.2 важи да је $(\forall x \in X)\ f_x \in \mathcal{F}^{\leq}(R)$. Према тврђењу 3.1.3 $(\forall x \in X)\ f_x \in \mathcal{F}^{=}(R)$, а према тврђењу 3.1.1 $f_x(x) = 1$. Тада је и $f_x(y) = 1$, тј. $(x,y) \in R$.

($\Leftarrow$) Из

$$(\forall x, y \in X)\ \big((\forall f \in \mathcal{F}^{=}(R))\ f(x) = f(y) \Rightarrow (x,y) \in R\big) \tag{3.1}$$

добијамо да је R рефлексивна за $x = y$. За транзитивност претпоставимо да је $(x,y) \in R$ и $(y,z) \in R$. Тада, за свако $f \in \mathcal{F}^{=}(R)$ имамо $f(x) = f(y) = f(z)$, па из (3.1) следи $(x,z) \in R$. За симетричност претпоставимо $(x,y) \in R$. Тада за свако $f \in \mathcal{F}^{=}(R)$ имамо $f(x) = f(y)$, па из (3.1) следи $(y,x) \in R$. □

Последица 3.1.1. (Дошен и Петрић [11]) *Ако су $R_1, R_2 \subseteq X^2$ релације еквиваленције, онда је $R_1 = R_2$ акко $\mathcal{F}^{=}(R_1) = \mathcal{F}^{=}(R_2)$.*

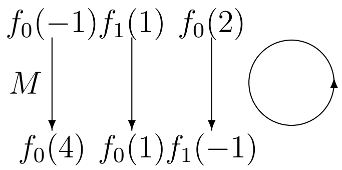
3.2 Категорије $1CobS$, $1Cob$ и $1Cob'$

У овој секцији ћемо дефинисати две варијанте категорије 1-кобордизама, у ознаци $1Cob$ и $1Cob'$. Категорија $1Cob$ ће бити дефинисана као симетрична стриктно моноидална категорија таква да је $1CobS$ њена пуна поткатегорија. Код објеката ове категорије ће нам бити важан не само број тачака и њихова оријентација, већ и чињеница да су те тачке проистекле из дисјунктне уније сфера S^0. У ситуацијама када ће нам од значаја бити само број тачака и њихова оријентација, због једноставности ћемо користити категорију $1Cob'$.

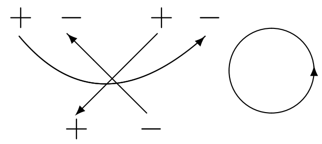
На основу дефиниције дате у секцији 2.3, објекти категорије $1CobS$ су $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \ldots$, где $\underline{0}$ означава празан скуп, а $\underline{n}$ означава 0-димензионалну многострукост, која се састоји од коначно много тачака $\{-1, 1, 2, 4, \ldots, 3n-4, 3n-2\}$, при чему свакој тачки придружујемо знак који репрезентује њену оријентацију

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x = 3i - 1, \\ -1, & x = 3i + 1. \end{cases}$$

Према томе, објекат категорије $1CobS$ можемо посматрати као низ добијен од пара $+-$. Стрелице категорије $1CobS$ су класе еквиваленције 1-кобордизама. На пример, кобордизам $(M, f_0, f_1) : \underline{2} \to \underline{1}$



приказан је на следећој слици



Категорија $1CobS$ је скелетална. Ако би постојао изоморфизам K између објеката $\underline{n}$ и $\underline{m}$, лако се види да K не садржи компоненте типа

У супротном, ако би K садржао овакву компоненту, онда би и $K^{-1} \circ K : \underline{n} \to \underline{n}$ имао овакву компоненту, што је немогуће. Аналогно, K не садржи ни компоненте типа

јер би у супротном и $K \circ K^{-1} : \underline{m} \to \underline{m}$ имао такве компоненте. Дакле, закључујемо да је $n = m$, тј. $\underline{n} = \underline{m}$ (видети тврђење 2.8.1).

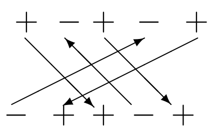
Означимо са $\underline{\underline{n}}$ скуп првих n чланова низа $-1, 1, 2, 4, \ldots, 3i - 1, 3i + 1, \ldots$. Дефинишимо симетричну стриктно моноидалну категорију $1Cob$ тако да је $1CobS$ њена пуна поткатегорија. Скуп објеката категорије $1Cob$ је

$$\{(\underline{\underline{n}}, \varepsilon) \mid n \in N, \varepsilon : \underline{\underline{n}} \to \{-1, 1\}\},$$

а стрелице су класе еквиваленције кобордизама облика

$$(M, f_0 : (\underline{\underline{n}}, \varepsilon_0) \to M, f_1 : (\underline{\underline{m}}, \varepsilon_1) \to M),$$

где је M, 1-многострукост таква да је њена граница ∂M дисјунктна унија Σ_0 и Σ_1; f_0 је утапање које чува оријентацију и чија је слика Σ_0, док је f_1 утапање које мења оријентацију и чија је слика Σ_1. Симетрична моноидална структура категорије $1Cob$ дефинисана је као код категорије $1CobS$ стављањем кобордизама једног поред другог, док симетрију остварују кобордизми $\tau_{n,m}$ који су дефинисани аналогно као у секцији 2.3, и који одговарају пермутацијама. На пример, $\tau_{3,2}$ је представљен на следећој слици:



Компоненту повезаности од M која је хомеоморфна сфери S^1 зовемо *циркуларном комӣонен̄ом кобордизма.* Као и у последици 2.4.1, свака стрелица категорије $1Cob$ потпуно је одређена 1-многострукошћу M и са два низа тачака $\Sigma_0 = (\Sigma_0^0, \ldots, \Sigma_0^{n-1})$ и $\Sigma_1 = (\Sigma_1^0, \ldots, \Sigma_1^{m-1})$, при чему први одговара улазној, а други излазној граници. Категорија $1Cob$ није скелетална, пошто постоје два различита објекта која су изоморфна. На пример, објекти $(\underline{\underline{2}}, \varepsilon_0)$ и $(\underline{\underline{2}}, \varepsilon_1)$, где је $\varepsilon_0(-1) = 1, \varepsilon_0(1) = -1, \varepsilon_1(-1) = -1, \varepsilon_1(1) = 1$ су изоморфни.

Објекти категорије $1Cob'$ су затворене оријентисане нулдимензионалне многострукости, које се састоје од коначно много тачака, при чему је свакој тачки придружен знак који репрезентује њену оријентацију. Објекте ове категорије ћемо поистовећивати са уређеним паровима (n, ε), где је $n = \{0, \ldots, n-1\}$, а $\varepsilon : n \to \{-1, 1\}$.

Морфизми категорије $1Cob'$ су класе еквиваленције 1-кобордизама $(M, f_0 : (n, \varepsilon_0) \to M,\ f_1 : (m, \varepsilon_1) \to M)$, где је M компактна оријентисана 1-димензионална многострукост са крајевима таква да је њена граница ∂M дисјунктна унија Σ_0 и Σ_1, f_0 је утапање које чува оријентацију и чија је слика Σ_0, док је f_1 утапање које мења оријентацију и чија је слика Σ_1. Многострукости Σ_0 и Σ_1 називамо редом *улазна* и *излазна ḡраница од* M. Два 1-кобордизма $K = (M, f_0, f_1)$ и $K' = (M', f_0', f_1')$ су *еквивален̄на*, у ознаци $K \sim K'$, ако постоји хомеоморфизам $F : M \to M'$ који чува оријентацију такав да следећи дијаграм комутира.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dd, "F"] & \\ (n,\varepsilon_0) \arrow[ur, "f_0"] \arrow[dr, "f_0'"'] & & (m,\varepsilon_1) \arrow[ul, "f_1"'] \arrow[dl, "f_1'"] \\ & M' & \end{tikzcd}$$

Категорија $1Cob'$ је стриктно моноидална у односу на „суму” на објектима

$$(n, \varepsilon_0) + (n', \varepsilon_1) = (n + n', \varepsilon_0 + \varepsilon_1),$$

где је $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 : n + n' \to \{-1, 1\}$ дефинисано са

$$(\varepsilon_0 + \varepsilon_1)(x) = \begin{cases} \varepsilon_0(x), & \text{ако } x \in n \\ \varepsilon_1(x - n), & \text{ако } x \notin n, \end{cases}$$

и операцију „стављања једног поред другог” на морфизмима, коју ћемо означавати са $\otimes$.

Сваки морфизам категорије $1Cob'$ је потпуно одређен 1-многострукошћу M и са два низа тачака његових граница које ћемо означити са

$$(0,0), (1,0), \ldots, (n-1, 0),$$

$$(0,1), (1,1), \ldots, (m-1, 1),$$

при чему први низ одговара улазној граници Σ_0, а други излазној Σ_1.

Сваком кобордизму $K = (M, \Sigma_0, \Sigma_1) : (n, \varepsilon_0) \to (m, \varepsilon_1)$ можемо придружити релацију еквиваленције R_K на скупу $(n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})$ на следећи начин. За $(i,k), (j,l)$ елементе скупа $(n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})$ имамо $((i,k),(j,l)) \in R_K$ акко

тачке (i,k) и (j,l) припадају истој компоненти повезаности од M.

Ако са c_X означимо број циркуларних компоненти кобордизма X, онда је јасно да за кобордизме $K, L : (n, \varepsilon_0) \to (m, \varepsilon_1)$ важи следеће тврђење.

Тврђење 3.2.1. *Кобордизми* K *и* L *су еквивалентни акко* $R_K = R_L$ *и* $c_K = c_L$.

Ако кобордизмима $K : (n, \varepsilon_0) \to (m, \varepsilon_1)$ и $L : (m, \varepsilon_1) \to (k, \varepsilon_2)$ одговарају редом релације R_K на скупу $(n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})$ и R_L на скупу $(m \times \{0\}) \cup (k \times \{1\})$, онда композицији кобордизама $L \circ K$ одговара релација еквиваленције $R_L * R_K$ на скупу $(n\times\{0\})\cup(k\times\{1\})$ која се може задати на следећи начин. Најпре дефинишимо функције $\varphi^0 : m \cup (k \times \{1\}) \to (m \times \{0\}) \cup (k \times \{1\})$ и $\varphi^1 : (n \times \{0\}) \cup m \to (n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})$,

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} (x, 0), & \text{ако } x \in m \\ x, & \text{ако } x \in k \times \{1\}, \end{cases}$$

$$\varphi^1(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x \in n \times \{0\} \\ (x, 1), & \text{ако } x \in m. \end{cases}$$

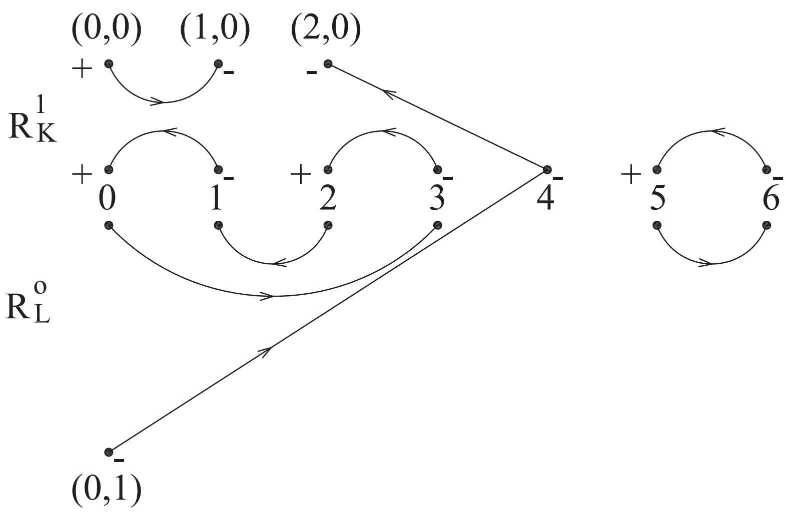
Затим, дефинишимо две нове релације $R^1_K \subseteq ((n \times \{0\}) \cup m)^2$ и $R^0_L \subseteq (m \cup (k \times \{1\}))^2$ са

$$(x, y) \in R^1_K \text{ акко } (\varphi^1(x), \varphi^1(y)) \in R_K,$$

$$(x, y) \in R^0_L \text{ акко } (\varphi^0(x), \varphi^0(y)) \in R_L.$$

Ако са $Cl(R^1_K \cup R^0_L)$ означимо транзитивно затворење релације $R^1_K \cup R^0_L$, онда је $R_L * R_K = Cl(R^1_K \cup R^0_L) \cap ((n \times \{0\}) \cup (k \times \{1\}))^2$.

Пример 3.2.1. Ако релацијама R_K и R_L одговарају редом партиције $\{\{(0,0),(1,0)\},\{(2,0),(4,1)\},\{(0,1),(1,1)\},\{(2,1),(3,1)\},\{(5,1),(6,1)\}\}$ и $\{\{(0,0),(3,0)\},\{(1,0),(2,0)\},\{(4,0),(0,1)\},\{(5,0),(6,0)\}\}$, онда релацији R_L*R_K одговара партиција $\{\{(0,0),(1,0)\},\{(2,0),(0,1)\}\}$, што је представљено на следећој слици.



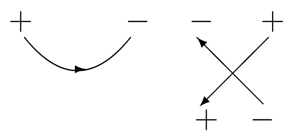
При рачунању релације која одговара композицији кобордизама K и L нисмо рачунали циркуларне компоненте, тј. оне класе еквиваленције X релације $Cl(R^1_K \cup R^0_L)$ такве да $X \cap (n \times \{0\}) = \emptyset$ и $X \cap (k \times \{1\}) = \emptyset$. У примеру 3.2.1 са приложене слике нисмо узимали у обзир кружницу која садржи 5 и 6, нити ону која садржи 0, 1, 2 и 3.

Ако је $R_K \subseteq ((n\times\{0\})\cup(m\times\{1\}))^2$ релација еквиваленције која одговара кобордизму K, њој придружујемо матрицу $A(K)$ формата $p^m\times p^n$ на следећи начин. Број врста матрице $A(K)$ једнак је броју функција $m\to p$. Свакој од тих функција одговара низ дужине m чији су сви чланови из скупа $\{0,1,\dots,p-1\}$. Скуп тих низова можемо лексикографски уредити тако да први буде низ $00\dots0$, а последњи $(p-1)(p-1)\dots(p-1)$. Користимо ово лексикографско уређење да елементе скупа $\{0,\dots,p^m-1\}$, тј. врсте матрице $A(K)$, идентификујемо са функцијама из m у p. Означимо са $f_i : m\to p$ функцију која одговара i-тој врсти. Колоне матрице $A(K)$ идентификујемо са функцијама из n у p. Нека је $g_j : n\to p$ функција која одговара j-тој колони. Нека је $[g_j,f_i] : (n\times\{0\})\cup(m\times\{1\})\to p$ функција дефинисана са

$$[g_j,f_i](x)=\begin{cases} g_j(\pi_0(x)), & \text{ако } x\in n\times\{0\}\\ f_i(\pi_1(x)), & \text{ако } x\in m\times\{1\}\end{cases}$$

где су $\pi_0 : n\times\{0\}\to n$ и $\pi_1 : m\times\{1\}\to m$ бијекције дефинисане са $\pi_0(u,0)=u$ и $\pi_1(v,1)=v$. Елемент $A(K)[i,j]$ у i-тој врсти и j-тој колони матрице $A(K)$ једнак је 1 акко $[g_j,f_i]\in\mathcal{F}^{=}(R_K)$, а иначе је 0.

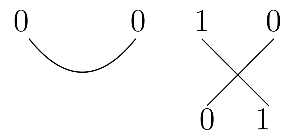
Пример 3.2.2. Ако је $K : (4,\varepsilon_0)\to(2,\varepsilon_1)$ кобордизам дат на следећој слици,



и $p=2$, одговарајућа матрица $A(K)$ једнака је

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccccccc} 0000 & 0001 & 0010 & 0011 & 0100 & 0101 & 0110 & 0111 & 1000 & 1001 & 1010 & 1011 & 1100 & 1101 & 1110 & 1111 \end{array} \\ \begin{array}{c} 00\\ 01\\ 10\\ 11 \end{array} & \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

На пример, елемент $A(K)[2,3]$ једнак је јединици, јер се низови 01 и 0010 који одговарају редом другој врсти и трећој колони уклапају у слику.



Напомена 3.2.1. Низ који одговара i-тој врсти матрице $A(K)$ заправо добијамо тако што број i, $0\le i<p^m$ представимо у систему са основом p са m цифара $a^1_0a^1_1\dots a^1_{m-1}$. Аналогно, низ који одговара j-тој колони матрице $A(K)$ добијамо када број j, $0\le j<p^n$, представимо у систему са основом p помоћу n цифара $a^0_0a^0_1\dots a^0_{n-1}$. Тада је елемент $A(K)[i,j]$ у i-тој врсти и j-тој колони матрице $A(K)$ једнак један ако за све $(i,k),(j,l)$ из $(n\times\{0\})\cup(m\times\{1\})$ важи

$$((i,k),(j,l))\in R_K\Rightarrow a^k_i=a^l_j.$$

3.3 Брауеријанска репрезентација

Нека је $Mat_{\mathbb{K}}$ категорија чији су објекти векторски простори $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$, и чије су стрелице из $\mathbb{K}^n$ у $\mathbb{K}^m$ све матрице формата $m \times n$ са компонентама у пољу $\mathbb{K}$ карактеристике 0. Идентични морфизам на $\mathbb{K}^n$ једнак је јединичној матрици реда n, док је множење матрица композиција стрелица. Објекте категорије $Mat_{\mathbb{K}}$ можемо идентификовати са природним бројевима, који представљају димензије векторских простора (видети [12]). Категорију $Mat_{\mathbb{K}}$ можемо посматрати и као скелетон категорије $Vect_{\mathbb{K}}$ коначно-димензионалних векторских простора над пољем $\mathbb{K}$. Према томе, категорије $Mat_{\mathbb{K}}$ и $Vect_{\mathbb{K}}$ су еквивалентне. Категорија $(Mat_{\mathbb{K}}, \otimes, 1, S_{n,m})$ је симетрична стриктно моноидална у односу на производ на објектима и Кронекеров производ на морфизмима, и фамилију $mn \times nm$ пермутацијских матрица $S_{n,m}$. Матрица $S_{n,m}$ је матрица линеарног пресликавања $\sigma : \mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m \otimes \mathbb{K}^n$ у односу на пар канонских база, које је дефинисано на базним векторима са $\sigma(e_i \otimes f_j) = f_j \otimes e_i$. На пример, $S_{3,2}$ је матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сада дефинишемо функтор B из категорије $1Cob'$ у категорију $Mat_{\mathbb{K}}$ на следећи начин. На објектима он је дефинисан са $B(n, \varepsilon) = p^n$, за $p \geq 2$. Ако је $K : (n, \varepsilon_0) \to (m, \varepsilon_1)$ морфизам у категорији $1Cob'$, онда је $B(K) = p^a \cdot A(K)$, где је a број циркуларних компоненти кобордизма K, тј. број компоненти повезаности које су хомеоморфне кружници S^1, а $A(K)$ је $(0, 1)$-матрица формата $p^m \times p^n$ коју на описани начин придружујемо кобордизму K.

Тврђење 3.3.1. *B је функтор.*

Доказ. Сличан доказ постоји у раду [11, Секција 5, Тврђење 4]. Идентичном морфизму $\mathbf{1}_n : (n, \varepsilon) \to (n, \varepsilon)$ у категорији $1Cob'$ одговара релација еквиваленције $1_n \subseteq ((n \times \{0\}) \cup (n \times \{1\}))^2$ дефинисана са

$$(x, y) \in 1_n \text{ акко } \pi_i(x) = \pi_j(y),$$

$$x \in n \times \{i\},\ y \in n \times \{j\},\ i, j \in \{0, 1\}.$$

Прво ћемо показати да је $B(\mathbf{1}_n) = p^0 \cdot A(\mathbf{1}_n)$ јединична матрица реда p^n. Ако је $f_i : n \to p$ функција која одговара i-тој врсти, а $f_j : n \to p$ функција која одговара j-тој колони, елемент $A(\mathbf{1}_n)[i, j]$ у i-тој врсти и j-тој колони матрице $A(\mathbf{1}_n)$ једнак је 1 акко $[f_j, f_i] \in \mathcal{F}^=(1_n)$, а иначе је 0. Услов да $[f_j, f_i] \in \mathcal{F}^=(1_n)$ еквивалентан је услову

$$\big(\forall x, y \in (n \times \{0\}) \cup (n \times \{1\})\big)\big((x, y) \in 1_n \Rightarrow [f_j, f_i](x) = [f_j, f_i](y)\big).$$

Разликујемо три случаја:

1. Ако су $x, y \in n \times \{0\}$, из $(x, y) \in 1_n$ следи да је $x = y$, па је $[f_j, f_i](x) = f_j(\pi_0(x)) = f_j(\pi_0(y)) = [f_j, f_i](y)$.

2. Ако су $x, y \in n \times \{1\}$, из $(x, y) \in 1_n$ следи да је $x = y$, па је $[f_j, f_i](x) = f_i(\pi_1(x)) = f_i(\pi_1(y)) = [f_j, f_i](y)$.

3. Ако је $x \in n \times \{0\}$, $y \in n \times \{1\}$, из $(x, y) \in 1_n$ следи да је $\pi_0(x) = \pi_1(y)$. Тада је $[f_j, f_i](x) = f_j(\pi_0(x))$, а $[f_j, f_i](y) = f_i(\pi_1(y)) = f_i(\pi_0(x))$.

Према томе, $[f_j, f_i] \in \mathcal{F}^=(1_n)$ акко $f_i = f_j$ акко $i = j$. Дакле, $A(\mathbf{1}_n)[i,j] = 1$ акко $i = j$, а иначе је $A(\mathbf{1}_n)[i,j] = 0$.

Покажимо сада да је $B(L \circ K) = B(L) \cdot B(K)$, за кобордизме $K : (n, \varepsilon_0) \to (m, \varepsilon_1)$ и $L : (m, \varepsilon_1) \to (k, \varepsilon_2)$.

Означимо са a и b број циркуларних компоненти кобордизама K и L. Тада је број циркуларних компоненти кобордизма $L \circ K$ једнак $a + b + c$, где је c број циркуларних компоненти које настају при прављењу релације $R_L * R_K$. Означимо са $X_1, \ldots, X_c$ класе еквиваленције релације $Cl(R_K^1 \cup R_L^0)$ које су дисјунктне са $n \times \{0\}$ и $k \times \{1\}$.

Провериһемо да за матрице $A(K) = [b_{sj}]$ формата $p^m \times p^n$, $A(L) = [a_{is}]$ формата $p^k \times p^m$ и $A(L \circ K) = [c_{ij}]$ формата $p^k \times p^n$ важи

$$A(L) \cdot A(K) = p^c \cdot A(L \circ K).$$

Доказујемо да се компоненте које се налазе у i-тој врсти и j-тој колони матрица са обе стране једнакости поклапају, тј. да је

$$\sum_{s=0}^{p^m-1} a_{is} \cdot b_{sj} = p^c \cdot c_{ij}.$$

Ако је $f_i : k \to p$ функција која одговара i-тој врсти, а $h_j : n \to p$ функција која одговара j-тој колони матрице $A(L \circ K)$, онда је

$$c_{ij} = 1 \text{ акко } [h_j, f_i] \in \mathcal{F}^=(R_L * R_K) \text{ акко}$$

$$\big(\forall x, y \in (n \times \{0\}) \cup (k \times \{1\})\big)\big((x, y) \in R_L * R_K \Rightarrow [h_j, f_i](x) = [h_j, f_i](y)\big). \tag{3.2}$$

Ако је $f_i : k \to p$ функција која одговара i-тој врсти, а $g_s : m \to p$ функција која одговара s-тој колони матрице $A(L)$, онда је

$$a_{is} = 1 \text{ акко } [g_s, f_i] \in \mathcal{F}^=(R_L) \text{ акко}$$

$$\big(\forall x, y \in (m \times \{0\}) \cup (k \times \{1\})\big)\big((x, y) \in R_L \Rightarrow [g_s, f_i](x) = [g_s, f_i](y)\big). \tag{3.3}$$

Ако је $g_s : m \to p$ функција која одговара s-тој врсти, а $h_j : n \to p$ функција која одговара j-тој колони матрице $A(K)$, онда је

$$b_{sj} = 1 \text{ акко } [h_j, g_s] \in \mathcal{F}^=(R_K) \text{ акко}$$

$$\big(\forall x, y \in (n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\})\big)\big((x, y) \in R_K \Rightarrow [h_j, g_s](x) = [h_j, g_s](y)\big). \tag{3.4}$$

Показаћемо да из услова (3.2) следи да постоји p^c функција $g_s : m \to p$ које задовољавају услове (3.3) и (3.4), тј. да постоји p^c елемената $s \in \{0, \ldots, p^m - 1\}$ тако да је $a_{is} = 1$ и $b_{sj} = 1$. Тада у суми

$$\sum_{s=0}^{p^m-1} a_{is} \cdot b_{sj}$$

имамо p^c сабирака који су једнаки 1, па је елемент у i-тој врсти и j-тој колони матрице $A(L) \cdot A(K)$ једнак p^c, као и елемент матрице $p^c \cdot A(L \circ K)$.

Претпоставимо да за функције $h_j : n \to p$ и $f_i : k \to p$ важи услов (3.2). Из њега следи

$$\big(\forall x, y \in n \times \{0\}\big)\big((x,z),(y,z) \in Cl(R_K^1 \cup R_L^0) \Rightarrow h_j(\pi_0(x)) = h_j(\pi_0(y))\big), \tag{3.5}$$

$$\big(\forall x, y \in k \times \{1\}\big)\big((x,z),(y,z) \in Cl(R_K^1 \cup R_L^0) \Rightarrow f_i(\pi_1(x)) = f_i(\pi_1(y))\big), \tag{3.6}$$

$$\big(\forall x \in n \times \{0\}\big)\big(\forall y \in k \times \{1\}\big)\big((x,z),(y,z) \in Cl(R_K^1 \cup R_L^0) \Rightarrow h_j(\pi_0(x)) = f_i(\pi_1(y))\big). \tag{3.7}$$

Ако је $z \in m$, дефинишемо $g_s(z) \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ на следећи начин. Ако постоји $x \in (n \times \{0\}) \cup (k \times \{1\})$ такво да је $(x,z) \in Cl(R_K^1 \cup R_L^0)$, онда

$$g_s(z) = \begin{cases} h_j(\pi_0(x)), & \text{ако } x \in n \times \{0\} \\ f_i(\pi_1(x)), & \text{ако } x \in k \times \{1\}. \end{cases}$$

Ако не постоји $x \in (n \times \{0\}) \cup (k \times \{1\})$ такво да је $(x,z) \in Cl(R_K^1 \cup R_L^0)$, то значи да је класа еквиваленције релације $Cl(R_K^1 \cup R_L^0)$ елемента z једна од класа $X_1, \ldots, X_c$. Тада све елементе те класе функција g_s пресликава у исти елемент из скупа $\{0, \ldots, p-1\}$. За сваку од c тих класа имамо по p могућности, па имамо p^c функција $g_s : m \to p$ које се разликују на класама $X_1, \ldots, X_c$, а поклапају на осталим класама еквиваленције релације $Cl(R_K^1 \cup R_L^0)$.

Ако за елемент z постоје два елемента x и y таква да $(x,z),(y,z) \in Cl(R_K^1 \cup R_L^0)$, онда због услова (3.5), (3.6) и (3.7) дефиниција функције g_s не зависи од избора x и y.

Проверићемо да ове функције g_s задовољавају услов (3.4).

Претпоставимо да $(x,y) \in R_K$. Разликујемо три случаја.

1. Ако је $x, y \in n \times \{0\}$, из $(x,y) \in R_K$ следи $(x,y) \in R_K^1 \subseteq Cl(R_K^1 \cup R_L^0)$, па је $(x,y) \in R_L * R_K$. На основу (3.2) важи $[h_j, f_i](x) = [h_j, f_i](y)$. Тада је $h_j(\pi_0(x)) = h_j(\pi_0(y))$, те је $[h_j, g_s](x) = [h_j, g_s](y)$.

2. Ако је $x \in n \times \{0\}$, $y \in m \times \{1\}$, из $(x,y) \in R_K$ следи $(x, \pi_1(y)) \in R_K^1 \subseteq Cl(R_K^1 \cup R_L^0)$. По дефиницији функција g_s имамо да је $g_s(\pi_1(y)) = h_j(\pi_0(x))$. Тада је $[h_j, g_s](x) = h_j(\pi_0(x)) = g_s(\pi_1(y)) = [h_j, g_s](y)$.

3. Ако је $x, y \in m \times \{1\}$, из $(x,y) \in R_K$ следи $(\pi_1(x), \pi_1(y)) \in R_K^1 \subseteq Cl(R_K^1 \cup R_L^0)$, па су $\pi_1(x)$ и $\pi_1(y)$ у једној од класа $X_1, \ldots, X_c$. По дефиницији функција g_s оба елемента $\pi_1(x)$ и $\pi_1(y)$ се пресликавају у исти. Тада је $[h_j, g_s](x) = g_s(\pi_1(x)) = g_s(\pi_1(y)) = [h_j, g_s](y)$.

Аналогно се проверава да функције g_s задовољавају услов (3.3).

Ако је $c_{ij} = 0$, онда $[h_j, f_i] \notin \mathcal{F}^{=}(R_L * R_K)$, тј. не важи услов (3.2). Показаћемо да тада не постоји функција $g_s : m \to p$ која задовољава услове (3.3) и (3.4). Тада не постоји $s \in \{0, \ldots, p^m - 1\}$ тако да је $a_{is} = 1$ и $b_{sj} = 1$, тј. за свако $s \in \{0, \ldots, p^m - 1\}$ важи да је $a_{is} = 0$ или $b_{sj} = 0$, па су у суми $\sum_{s=0}^{p^m-1} a_{is} \cdot b_{sj}$ сви сабирци једнаки нула. Елемент у i-тој врсти и j-тој колони матрице $A(L) \cdot A(K)$ једнак је нула, као и елемент матрице $p^c \cdot A(L \circ K)$ на истој позицији.

Претпоставимо да постоји функција $g_s : m \to p$ која задовољава услове (3.3) и (3.4). Доказаћемо да важи услов (3.2). Ако су $x, y \in n \times \{0\}$ и $(x, y) \in R_L * R_K$, онда постоји низ $x_1, \ldots, x_{2l}$, $l \geq 1$ такав да је

$$(x_1, x_2) \in R_K^1, (x_2, x_3) \in R_L^0, (x_3, x_4) \in R_K^1, \ldots, (x_{2l-1}, x_{2l}) \in R_K^1,$$

где је $x_1 = x,\ x_{2l} = y,\ x_2, \ldots, x_{2l-1} \in m$. Из $(x_1, x_2) \in R_K^1$ имамо да је $(x_1, \pi_1^{-1}(x_2)) \in R_K$, па из услова (3.4) следи да је $[h_j, g_s](x_1) = [h_j, g_s](\pi_1^{-1}(x_2))$, тј. $h_j(\pi_0(x_1)) = g_s(x_2)$. Из $(x_2, x_3) \in R_L^0$ имамо да је $(\pi_0^{-1}(x_2), \pi_0^{-1}(x_3)) \in R_L$. Применом услова (3.3) следи да је $[g_s, f_i](\pi_0^{-1}(x_2)) = [g_s, f_i](\pi_0^{-1}(x_3))$. Тада је $g_s(x_2) = g_s(x_3)$. Наизменичном применом услова (3.4) и (3.3) на крају добијамо да из $(x_{2l-1}, x_{2l}) \in R_K^1$ следи да је $(\pi_1^{-1}(x_{2l-1}), x_{2l}) \in R_K$, а затим и $[h_j, g_s](\pi_1^{-1}(x_{2l-1})) = [h_j, g_s](x_{2l})$. Тада је $g_s(x_{2l-1}) = h_j(\pi_0(x_{2l}))$. Дакле, имамо да је $h_j(\pi_0(x_1)) = h_j(\pi_0(x_{2l}))$, па следи да $[h_j, f_i](x) = [h_j, f_i](y)$. Аналогно доказујемо да важи услов (3.2) и у случајевима када је $x, y \in k \times \{1\}$ и $x \in n \times \{0\}$, $y \in k \times \{1\}$.

□

Тврђење 3.3.2. *B је веран функтор.*

Доказ. Нека су (n, ε_0) и (m, ε_1) два произвољна објекта категорије $1Cob'$ и нека су $K, L : (n, \varepsilon_0) \to (m, \varepsilon_1)$ два морфизма категорије $1Cob'$ таква да је $B(K) = B(L)$. Ако су a и b редом бројеви циркуларних компоненти кобордизама K и L, матрице $p^a \cdot A(K)$ и $p^b \cdot A(L)$ су истог формата $p^m \times p^n$ и одговарајуће компоненте тих матрица, које су или нула или степен броја p, се поклапају. То значи да је $a = b$, јер је $p \geq 2$ и да је

$$A(K)[i, j] = 1 \text{ акко } A(L)[i, j] = 1.$$

За сваке две функције $g_j : n \to p$ и $f_i : m \to p$ важи

$$[g_j, f_i] \in \mathcal{F}^{=}(R_K) \text{ акко } [g_j, f_i] \in \mathcal{F}^{=}(R_L).$$

Како је свака функција $f : (n \times \{0\}) \cup (m \times \{1\}) \to p$ облика $[g_j, f_i]$ за неке функције $g_j : n \to p$ и $f_i : m \to p$, закључујемо да је $\mathcal{F}^{=}(R_K) = \mathcal{F}^{=}(R_L)$. На основу последице 3.1.1 следи да је $R_K = R_L$. Применом тврђења 3.2.1 закључујемо да су кобордизми K и L еквивалентни.

□

Верност функтора B би се могла показати и као последица максималности из рада [12, Секција 14], али смо овде желели да наведемо директан, краћи доказ.

Тврђење 3.3.3. *Функтор B је стриктни моноидални функтор између моноидалних категорија $(1Cob', \otimes, (0, \varepsilon), \tau_{n,m})$ и $(Mat_{\mathbb{K}}, \otimes, 1, S_{n,m})$.*

Доказ. За јединичне објекте $(0,\varepsilon)$ и 1 у категоријама $1Cob'$ и $Mat_{\mathbb{K}}$ важи да је $B(0,\varepsilon) = p^0 = 1$. За свака два објекта (n,ε_0) и (n',ε_1) категорије $1Cob'$ важи $B((n,\varepsilon_0)+(n',\varepsilon_1)) = B(n+n',\varepsilon_0+\varepsilon_1) = p^{n+n'} = p^n \cdot p^{n'} = B(n,\varepsilon_0)\cdot B(n',\varepsilon_1)$.

Ако су a и b редом бројеви циркуларних компоненти кобордизама $K:(n,\varepsilon_0)\to(l,\varepsilon_0')$ и $L:(m,\varepsilon_1)\to(k,\varepsilon_1')$, онда је број циркуларних компоненти кобордизма $K\otimes L:(n+m,\varepsilon_0+\varepsilon_1)\to(l+k,\varepsilon_0'+\varepsilon_1')$ једнак $a+b$. Докажимо да је матрица $B(K\otimes L) = p^{a+b}\cdot A(K\otimes L)$ једнака Кронекеровом производу $B(K)\otimes B(L) = (p^a\cdot A(K))\otimes(p^b\cdot A(L)) = p^{a+b}\cdot(A(K)\otimes A(L))$, тј. да је $A(K\otimes L) = A(K)\otimes A(L)$. Како је $K\otimes L = (K\otimes \mathbf{1}_k)\circ(\mathbf{1}_n\otimes L)$, довољно је показати да важи $A(\mathbf{1}_n\otimes L) = A(\mathbf{1}_n)\otimes A(L)$ и $A(K\otimes\mathbf{1}_k) = A(K)\otimes A(\mathbf{1}_k)$, где су $A(\mathbf{1}_n)$ и $A(\mathbf{1}_k)$ јединичне матрице формата редом p^n и p^k.

Кобордизму $\mathbf{1}_n$ одговара релација еквиваленције 1_n на скупу $(n\times\{0\})\cup(n\times\{1\})$ дефинисана са

$$((x,i),(y,j))\in 1_n \text{ акко } x=y.$$

Нека је R_L релација еквиваленције на скупу $(m\times\{0\})\cup(k\times\{1\})$ која одговара кобордизму L. Означимо са $m^{+n} = \{n,n+1,\dots,n+m-1\}$ и $k^{+n} = \{n,n+1,\dots,n+k-1\}$, а затим дефинишимо релацију еквиваленције R_L^{+n} на скупу $(m^{+n}\times\{0\})\cup(k^{+n}\times\{1\})$ на следећи начин

$$((x,i),(y,j))\in R_L^{+n} \text{ акко } ((x-n,i),(y-n,j))\in R_L.$$

Тада кобордизму $\mathbf{1}_n\otimes L$ одговара релација еквиваленције $1_n\sqcup R_L^{+n}$ на скупу $((n+m)\times\{0\})\cup((n+k)\times\{1\})$.

Доказаћемо да за матрице $A(\mathbf{1}_n) = [a_{rs}]$ формата $p^n\times p^n$, $A(L) = [b_{vw}]$ формата $p^k\times p^m$ и $A(\mathbf{1}_n\otimes L) = [c_{ij}]$ формата $p^{n+k}\times p^{n+m}$ важи

$$c_{p^k\cdot r+v,\,p^m\cdot s+w} = 1 \text{ акко } a_{rs}=1, b_{vw}=1.$$

Ако r и s представимо у систему са основом p са n цифара $r = a_0^1a_1^1\dots a_{n-1}^1$ и $s = a_0^0a_1^0\dots a_{n-1}^0$, тада је

$$a_{rs} = 1 \text{ акко}$$

$$\text{(3.8)}\qquad \big(\forall (x,i),(y,j)\in(n\times\{0\})\cup(n\times\{1\})\big)\big(((x,i),(y,j))\in 1_n \Rightarrow a_x^i = a_y^j\big).$$

Ако v представимо у систему са основом p са k цифара $v = b_0^1b_1^1\dots b_{k-1}^1$, а w са m цифара $w = b_0^0b_1^0\dots b_{m-1}^0$, тада је

$$b_{vw} = 1 \text{ акко}$$

$$\text{(3.9)}\qquad \big(\forall (x,i),(y,j)\in(m\times\{0\})\cup(k\times\{1\})\big)\big(((x,i),(y,j))\in R_L \Rightarrow b_x^i = b_y^j\big).$$

Ако $p^k\cdot r+v$ представимо у систему са основом p са $n+k$ цифара $c_0^1c_1^1\dots c_{n+k-1}^1$, а $p^m\cdot s+w$ са $n+m$ цифара $c_0^0c_1^0\dots c_{n+m-1}^0$, тада је

$$c_{p^k\cdot r+v,\,p^m\cdot s+w} = 1 \text{ акко}$$

$$\text{(3.10)}\quad \big(\forall (x,i),(y,j)\in((n+m)\times\{0\})\cup((n+k)\times\{1\})\big)\big(((x,i),(y,j))\in 1_n\sqcup R_L^{+n} \Rightarrow c_x^i = c_y^j\big).$$

Лако се може закључити да се низови цифара $c_0^1c_1^1\dots c_{n+k-1}^1$ и $c_0^0c_1^0\dots c_{n+m-1}^0$ поклапају редом са $a_0^1a_1^1\dots a_{n-1}^1b_0^1b_1^1\dots b_{k-1}^1$ и $a_0^0a_1^0\dots a_{n-1}^0b_0^0b_1^0\dots b_{m-1}^0$.
Услов (3.10) еквивалентан је са следећа два услова

$$\big(\forall (x,i),(y,j)\in (n\times\{0\})\cup(n\times\{1\})\big)\big(((x,i),(y,j))\in 1_n \Rightarrow \begin{array}{ccc} c_x^i & = & c_y^j \\ \| & & \| \\ a_x^i & = & a_y^j \end{array}\big),$$

$$\big(\forall (x,i),(y,j)\in (m^{+n}\times\{0\})\cup(k^{+n}\times\{1\})\big)\big(((x,i),(y,j))\in R_L^{+n} \Rightarrow \begin{array}{ccc} c_x^i & = & c_y^j \\ \| & & \| \\ b_{x-n}^i & = & b_{y-n}^j \end{array}\big),$$

од којих је први еквивалентан са (3.8), а други са (3.9).
Аналогно се проверава да важи $A(K\otimes \mathbf{1}_k)=A(K)\otimes A(\mathbf{1}_k)$. □

Тврђење 3.3.4. $B(\tau_{n,m})=S_{p^n,p^m}$.

Доказ. Кобордизму $\tau_{n,m}$ одговара релација еквиваленције R_τ на скупу $((n+m)\times\{0\})\cup((m+n)\times\{1\})$ са партицијом $\{\{(0,0),\ (m,1)\},\ \{(1,0),\ (m+1,1)\},\ \dots,\ \{(n-1,0),\ (m+n-1,1)\},\ \{(n,0),\ (0,1)\},\ \{(n+1,0),\ (1,1)\},\ \dots,\ \{(n+m-1,\ 0),\ (m-1,1)\}\}$. Означимо са $a_{r,s}$ елемент матрице $B(\tau_{n,m})$ који се налази у r-тој врсти и s-тој колони. Ако r представимо у систему са основом p са $m+n$ цифара $a_0^1a_1^1\dots a_{m+n-1}^1$, а s представимо у систему са основом p са $n+m$ цифара $a_0^0a_1^0\dots a_{n+m-1}^0$, тада је $a_{rs}=1$ акко

$$\big(\forall (i,k),(j,l)\in ((n+m)\times\{0\})\cup((m+n)\times\{1\})\big)\big(((i,k),(j,l))\in R_\tau \Rightarrow a_i^k=a_j^l\big).$$

Према томе, $a_{rs}=1$ акко

$$a_0^0=a_m^1,\ a_1^0=a_{m+1}^1,\ \dots,\ a_{n-1}^0=a_{m+n-1}^1,\ a_n^0=a_0^1,\ a_{n+1}^0=a_1^1,\ \dots,\ a_{n+m-1}^0=a_{m-1}^1. \tag{3.11}$$

Са друге стране, ако су $e=[e_0,\dots,e_{p^n-1}]$ и $f=[f_0,\dots,f_{p^m-1}]$ редом канонске базе простора $\mathbb{K}^{p^n}$ и $\mathbb{K}^{p^m}$, матрица S_{p^n,p^m} је матрица линеарног пресликавања $\sigma:\mathbb{K}^{p^n}\otimes\mathbb{K}^{p^m}\to\mathbb{K}^{p^m}\otimes\mathbb{K}^{p^n}$ у односу на пар канонских база, које је дефинисано на базним векторима са $\sigma(e_i\otimes f_j)=f_j\otimes e_i$. Базне векторе e_i нумеришимо низовима дужине n чији су сви чланови из скупа $\{0,1,\dots,p-1\}$, док базне векторе f_j нумеришимо низовима дужине m. Свако s, $0\le s<p^{n+m}$ представимо у систему са основом p са $n+m$ цифара $a_0^0a_1^0\dots a_{n-1}^0a_n^0a_{n+1}^0\dots a_{n+m-1}^0$, а свако r, $0\le r<p^{m+n}$ у систему са основом p са $m+n$ цифара $a_0^1a_1^1\dots a_{m-1}^1a_m^1a_{m+1}^1\dots a_{m+n-1}^1$. Тада је у бази простора $\mathbb{K}^{p^n}\otimes\mathbb{K}^{p^m}$ s-ти базни вектор $g_s=e_{a_0^0a_1^0\dots a_{n-1}^0}\otimes f_{a_n^0a_{n+1}^0\dots a_{n+m-1}^0}$, док је у бази простора $\mathbb{K}^{p^m}\otimes\mathbb{K}^{p^n}$ r-ти базни вектор $h_r=f_{a_0^1a_1^1\dots a_{m-1}^1}\otimes e_{a_m^1a_{m+1}^1\dots a_{m+n-1}^1}$. Како је $\sigma(g_s)=f_{a_n^0a_{n+1}^0\dots a_{n+m-1}^0}\otimes e_{a_0^0a_1^0\dots a_{n-1}^0}$, елемент у r-тој врсти и s-тој колони матрице S_{p^n,p^m} једнак је 1 акко $\sigma(g_s)=h_r$, тј. акко

$$a_n^0a_{n+1}^0\dots a_{n+m-1}^0=a_0^1a_1^1\dots a_{m-1}^1,\quad a_0^0a_1^0\dots a_{n-1}^0=a_m^1a_{m+1}^1\dots a_{m+n-1}^1. \tag{3.12}$$

Поређењем једнакости (3.11) и (3.12) закључујемо да се одговарајуће компоненте матрица $B(\tau_{n,m})$ и S_{p^n,p^m} поклапају.

□

Функтор B одговара матричној репрезентацији алгебре Брауерових дијаграма (видети [5],[13]), па ћемо га називати *брауеријанском репрезентацијом.*

3.4 Стриктне 1-димензионалне тополошке квантне теорије поља

Означимо објекат $(1, \varepsilon_+)$, $\varepsilon_+(0) = 1$, категорије $1Cob'$ који се састоји од једне тачке са позитивном оријентацијом са $+$, а објекат $(1, \varepsilon_-)$, $\varepsilon_-(0) = -1$, који се састоји од једне тачке са негативном оријентацијом са $-$. Према томе, сваки објекат категорије $1Cob'$ можемо посматрати као низ $a_1 \dots a_n$, где је $a_i \in \{+, -\}$. Означимо објекат $(2, \varepsilon_{+-})$, $\varepsilon_{+-}(0) = 1$, $\varepsilon_{+-}(1) = -1$, који се састоји од две тачке од којих је прва позитивно оријентисана, а друга негативно са $+-$. Аналогно, објекат $(2, \varepsilon_{-+})$, $\varepsilon_{-+}(0) = -1$, $\varepsilon_{-+}(1) = 1$, означимо са $-+$. Нека је M интервал $[0, 1]$ са стандардном оријентацијом. У зависности од тога како је граница ∂M подељена на улазни и излазни део, разликујемо следеће повезане кобордизме у $1Cob'$:

1. Ако утапање $f_0 : (1, \varepsilon_+) \to M$ чува оријентацију, а $f_1 : (1, \varepsilon_+) \to M$ мења оријентацију, кобордизам $(M, f_0, f_1) : (1, \varepsilon_+) \to (1, \varepsilon_+)$ ћемо означавати са $id_+ : + \to +$.

2. Ако утапање $f_0 : (1, \varepsilon_-) \to M$ чува оријентацију, а $f_1 : (1, \varepsilon_-) \to M$ мења оријентацију, кобордизам $(M, f_0, f_1) : (1, \varepsilon_-) \to (1, \varepsilon_-)$ ћемо означавати са $id_- : - \to -$.

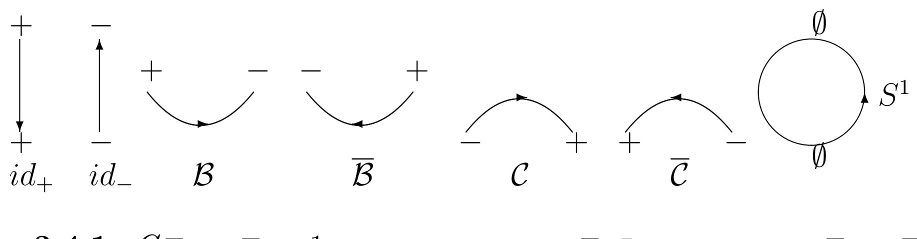
3. Ако утапање $f_0 : (2, \varepsilon_{+-}) \to M$ чува оријентацију, а $f_1 : \emptyset \to M$ мења оријентацију, кобордизам $(M, f_0, f_1) : (2, \varepsilon_{+-}) \to \emptyset$ ћемо означавати са $\mathcal{B} : +- \to \emptyset$.

4. Ако утапање $f_0 : (2, \varepsilon_{-+}) \to M$ чува оријентацију, а $f_1 : \emptyset \to M$ мења оријентацију, кобордизам $(M, f_0, f_1) : (2, \varepsilon_{-+}) \to \emptyset$ ћемо означавати са $\overline{\mathcal{B}} : -+ \to \emptyset$.

5. Ако утапање $f_0 : \emptyset \to M$ чува оријентацију, а $f_1 : (2, \varepsilon_{-+}) \to M$ мења оријентацију, кобордизам $(M, f_0, f_1) : \emptyset \to (2, \varepsilon_{-+})$ ћемо означавати са $\mathcal{C} : \emptyset \to -+$.

6. Ако утапање $f_0 : \emptyset \to M$ чува оријентацију, а $f_1 : (2, \varepsilon_{+-}) \to M$ мења оријентацију, кобордизам $(M, f_0, f_1) : \emptyset \to (2, \varepsilon_{+-})$ ћемо означавати са $\overline{\mathcal{C}} : \emptyset \to +-$.

7. Кружница S^1 као кобордизам из празног скупа у њега самог.



Дефиниција 3.4.1. *Стриктна 1-димензионална тополошка квантна теорија поља (1-TQFT)* је стриктни симетрични моноидални функтор F између категорије $1Cob'$ и категорије $Mat_{\mathbb{K}}$.

Мотивација за следеће тврђење потиче из рада [28, Тврђење 1.1.8].

Тврђење 3.4.1. *Нека је F стриктна 1-димензионална тополошка квантна теорија поља и нека су $p = F(+)$ и $q = F(-)$ слике редом тачке са позитивном и тачке са негативном оријентацијом. Тада је $p = q$.*

Доказ. Ако применимо функтор F на морфизам $\mathcal{B}: +- \to \emptyset$ у категорији $1Cob'$, добијамо морфизам $F(\mathcal{B}): F(+-) \to F(\emptyset)$ у категорији $Mat_{\mathbb{K}}$. Како је функтор F стриктан моноидалан, $F(+-) = F(+) \otimes F(-) = p \cdot q$ и $F(\emptyset) = 1$, па је $F(\mathcal{B})$ матрица формата $1 \times (pq)$. Уведимо ознаке

$$F(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1q} & \big| & \beta_{21} & \dots & \beta_{2q} & \big| & \dots & \big| & \beta_{p1} & \dots & \beta_{pq} \end{bmatrix}$$

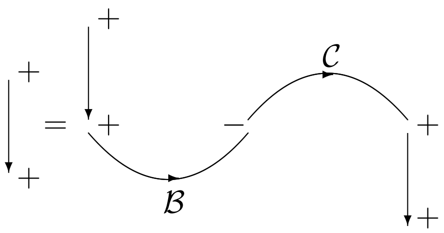
и $X = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1q} \\ \beta_{21} & \dots & \beta_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{p1} & \dots & \beta_{pq} \end{bmatrix}$. При стандардном изоморфизму $H: M_{p,q}(\mathbb{K}) \to M_{1,pq}(\mathbb{K})$, $H(X) = F(\mathcal{B})$.

Слично, применом фуктора F на морфизам $\mathcal{C}: \emptyset \to -+$, добијамо морфизам $F(\mathcal{C}): 1 \to q \cdot p$ у категорији $Mat_{\mathbb{K}}$, тј. матрицу формата $(qp) \times 1$. Уведимо ознаке

$$F(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1p} & \big| & \gamma_{21} & \dots & \gamma_{2p} & \big| & \dots & \big| & \gamma_{q1} & \dots & \gamma_{qp} \end{bmatrix}^T$$

и $Y = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \dots & \gamma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{q1} & \dots & \gamma_{qp} \end{bmatrix}$. При стандардном изоморфизму $L: M_{q,p}(\mathbb{K}) \to M_{qp,1}(\mathbb{K})$, $L(Y) = F(\mathcal{C})$.

Разложимо идентични кобордизам id_+ као композицију кобордизама $id_+ \otimes \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \otimes id_+$.



Применом функтора F на обе стране једнакости $id_+ = (\mathcal{B} \otimes id_+) \circ (id_+ \otimes \mathcal{C})$ добијамо

$$\begin{aligned} id_{F(+)} &= (F(\mathcal{B}) \otimes id_{F(+)}) \cdot (id_{F(+)} \otimes F(\mathcal{C})), \text{тј.} \\ E_p &= (F(\mathcal{B}) \otimes E_p) \cdot (E_p \otimes F(\mathcal{C})), \end{aligned}$$

где је E_p јединична матрица реда p. После множења матрица, добијамо систем од p^2 једначина

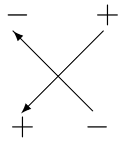
$$\sum_{k=1}^{q} \beta_{ik} \cdot \gamma_{kj} = \delta_{ij}, \quad i,j \in \{1, \dots, p\} \tag{3.13}$$

који је еквивалентан матричној једначини

$$X \cdot Y = E_p.$$

Према томе, матрица $X \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ има десни инверз, па су њене врсте линеарно независне, тј. ранг врста једнак је p.

Ако применимо функтор F на морфизам $\tau_{-+}: -+ \to +-$ у категорији $1Cob'$, који је приказан на слици



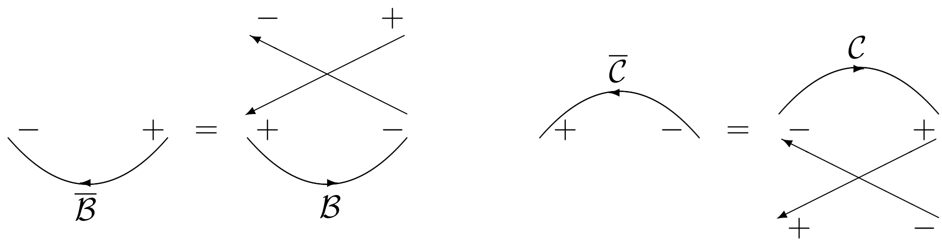
добијамо морфизам $F(\tau_{-+}) : F(-) \otimes F(+) \to F(+) \otimes F(-)$ у категорији $Mat_{\mathbb{K}}$, тј. матрицу формата $(pq) \times (qp)$. Због симетричности функтора F, знамо да је $F(\tau_{-+}) = S_{q,p}$. Пермутацијска матрица $S_{q,p}$ је ортогонална и задовољава следеће услове:

$$S_{qp} \cdot L(Y) = L(Y^T) \tag{3.14}$$

$$H(X) \cdot S_{qp} = H(X^T) \tag{3.15}$$

(за детаље видети [29, 39, 46]).

Кобордизми $\overline{\mathcal{B}}$ и $\overline{\mathcal{C}}$ се могу изразити као композиције $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \circ \tau_{-+}$ и $\overline{\mathcal{C}} = \tau_{-+} \circ \mathcal{C}$, што је приказано на слици

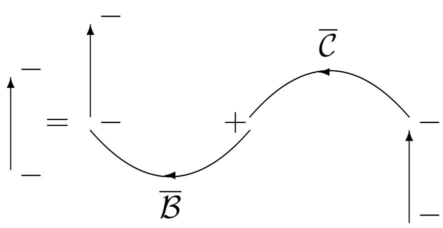


Према томе, $F(\overline{\mathcal{B}}) = F(\mathcal{B}) \cdot F(\tau_{-+})$ и $F(\overline{\mathcal{C}}) = F(\tau_{-+}) \cdot F(\mathcal{C})$, тј.

$$F(\overline{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1q} & | & \beta_{21} & \dots & \beta_{2q} & | & \dots & | & \beta_{p1} & \dots & \beta_{pq} \end{bmatrix} \cdot S_{qp} \overset{(3.15)}{=\!=} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{p1} & | & \beta_{12} & \dots & \beta_{p2} & | & \dots & | & \beta_{1q} & \dots & \beta_{pq} \end{bmatrix}$$

$$F(\overline{\mathcal{C}}) = S_{qp} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1p} & | & \gamma_{21} & \dots & \gamma_{2p} & | & \dots & | & \gamma_{q1} & \dots & \gamma_{qp} \end{bmatrix}^T \overset{(3.14)}{=\!=} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{q1} & | & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{q2} & | & \dots & | & \gamma_{1p} & \dots & \gamma_{qp} \end{bmatrix}^T.$$

Аналогно, ако кобордизам id_- разложимо као композицију кобордизама $id_- \otimes \overline{\mathcal{C}}$ и $\overline{\mathcal{B}} \otimes id_-$,



и применимо функтор F на обе стране једнакости $id_- = (\overline{\mathcal{B}} \otimes id_-) \circ (id_- \otimes \overline{\mathcal{C}})$, добијамо

$$\begin{aligned} id_{F(-)} &= (F(\overline{\mathcal{B}}) \otimes id_{F(-)}) \cdot (id_{F(-)} \otimes F(\overline{\mathcal{C}})), \text{тј.} \\ E_q &= (F(\overline{\mathcal{B}}) \otimes E_q) \cdot (E_q \otimes F(\overline{\mathcal{C}})), \end{aligned}$$

где је E_q јединична матрица реда q. После множења матрица, добијамо систем од q^2 једначина

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_{ik} \cdot \gamma_{li} = \delta_{kl}, \quad k, l \in \{1, \dots, q\}$$

који је еквивалентан матричној једначини

$$Y \cdot X = E_q.$$

Према томе, матрица $X \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ има леви инверз, па су њене колоне линеарно независне, тј. ранг колона једнак је q. Како је ранг врста једнак рангу колона, следи да је $p = q$ и да су матрице X и Y једна другој инверзне. $\square$

Свака стриктна 1-TQFT, $F : 1Cob' \to Mat_{\mathbb{K}}$ је јединствено одређена на објектима ако знамо слику позитивно оријентисане тачке $p = F(+)$. На основу тврђења 3.4.1 објекат $a_1 \dots a_n$ категорије $1Cob'$ који се састоји од k позитивно и l негативно оријентисаних тачака се при F пресликава у $p^k \cdot p^l = p^{k+l} = p^n$. Дакле, свака стриктна 1-TQFT, која пресликава нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке у природан број $p \geq 2$, поклапа се на објектима са брауеријанском репрезентацијом. Да бисмо одредили како F дејствује на морфизме категорије $1Cob'$, довољно је да опишемо слике повезаних кобордизама id_+, id_-, $\mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{B}}$, $\mathcal{C}$, $\overline{\mathcal{C}}$ и S^1. Матрице $F(id_+)$ и $F(id_-)$ су једнаке јединичној матрици E_p реда p. Пошто се кобордизми $\overline{\mathcal{B}}$ и $\overline{\mathcal{C}}$ могу изразити редом као композиције кобордизама $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ са кобордизмом τ_{-+}, а знамо да је $F(\tau_{-+}) = S_{pp}$, остаје још да размотримо матрице

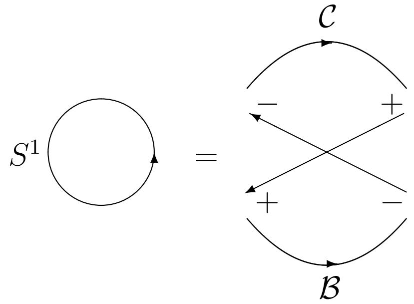
$$F(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1p} & | & \beta_{21} & \dots & \beta_{2p} & | & \dots & | & \beta_{p1} & \dots & \beta_{pp} \end{bmatrix} \in M_{1,p^2}(\mathbb{K}),$$

$$F(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1p} & | & \gamma_{21} & \dots & \gamma_{2p} & | & \dots & | & \gamma_{p1} & \dots & \gamma_{pp} \end{bmatrix}^T \in M_{p^2,1}(\mathbb{K})$$

и $F(S^1) \in M_{1,1}(\mathbb{K})$.

Тврђење 3.4.2. $F(S^1) = p$.

Доказ. Како се кобордизам S^1 може разложити као композиција кобордизама $\mathcal{B} \circ \tau_{-,+} \circ \mathcal{C}$,



за матрицу $F(S^1)$ важи $F(S^1) = F(\mathcal{B}) \cdot F(\tau_{-+}) \cdot F(\mathcal{C})$, тј.

$$\begin{aligned} F(S^1) = &\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1p} & | & \beta_{21} & \dots & \beta_{2p} & | & \dots & | & \beta_{p1} & \dots & \beta_{pp} \end{bmatrix} \cdot S_{pp} \cdot \\ &\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1p} & | & \gamma_{21} & \dots & \gamma_{2p} & | & \dots & | & \gamma_{p1} & \dots & \gamma_{pp} \end{bmatrix}^T \overset{(3.14)}{=\!=} \\ &\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1p} & | & \beta_{21} & \dots & \beta_{2p} & | & \dots & | & \beta_{p1} & \dots & \beta_{pp} \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{p1} & | & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{p2} & | & \dots & | & \gamma_{1p} & \dots & \gamma_{pp} \end{bmatrix}^T = \\ &\underbrace{\beta_{11}\gamma_{11} + \beta_{12}\gamma_{21} + \ldots + \beta_{1p}\gamma_{p1}}_{1} + \underbrace{\beta_{21}\gamma_{12} + \beta_{22}\gamma_{22} + \ldots + \beta_{2p}\gamma_{p2}}_{1} + \ldots \\ &+ \underbrace{\beta_{p1}\gamma_{1p} + \beta_{p2}\gamma_{2p} + \ldots + \beta_{pp}\gamma_{pp}}_{1} \overset{(3.13)}{=\!=} p \end{aligned}$$

□

На основу [18, Секција 2.8] и [46] матрична једначина $X \cdot Y = E_p$ може се представити и у облику $H(X) \cdot (E_p \otimes Y) = H(E_p)$, тј.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1p} & | & \beta_{21} & \dots & \beta_{2p} & | & \dots & | & \beta_{p1} & \dots & \beta_{pp} \end{bmatrix} \cdot (E_p \otimes Y) = \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 1 & \dots & 0 & | & \dots & | & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3.16}$$

као и у облику $(X \otimes E_p) \cdot L(Y) = L(E_p)$, тј.

$$\begin{aligned} &(X \otimes E_p) \cdot \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1p} & | & \gamma_{21} & \dots & \gamma_{2p} & | & \dots & | & \gamma_{p1} & \dots & \gamma_{pp} \end{bmatrix}^T = \\ &\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 1 & \dots & 0 & | & \dots & | & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Како брауеријанска репрезентација кобордизмима $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ придружује редом матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 1 & \dots & 0 & | & \dots & | & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ и}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 1 & \dots & 0 & | & \dots & | & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T,$$

закључујемо да се свака стриктна 1-TQFT на морфизмима $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ поклапа са брауеријанском репрезентацијом до на множење инвертибилним матрицама.

Тврђење 3.4.3. *Нека је $F : 1Cob' \to Mat_{\mathbb{K}}$ стриктна 1-TQFT, таква да је $F(+) = p \geq 2$, и нека је $B : 1Cob' \to Mat_{\mathbb{K}}$ брауеријанска репрезентација. Тада постоји моноидални природни изоморфизам $\theta : B \Rightarrow F$.*

Доказ. Сваком објекту a из $1Cob'$ треба придружити инвертибилни морфизам $\theta_a : B(a) \to F(a)$ у $Mat_{\mathbb{K}}$, тј. инвертибилну матрицу. Прво дефинишимо $\theta_\emptyset : 1 \to 1$, $\theta_+ : p \to p$ и $\theta_- : p \to p$ редом са E_1, E_p и X^{-1}, а затим за сваки објекат $a = a_1 \ldots a_n$ категорије $1Cob'$ дефинишимо θ_a као Кронекеров производ $\theta_{a_1} \otimes \ldots \otimes \theta_{a_n}$. Потребно је проверити да за сваки морфизам $f : a \to a'$ у $1Cob'$ следећи дијаграм комутира у $Mat_{\mathbb{K}}$

$$\begin{tikzcd} B(a) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "B(f)"'] & F(a) \arrow[d, "F(f)"] \\ B(a') \arrow[r, "\theta_{a'}"'] & F(a') \end{tikzcd}$$

Довољно је проверити за генераторе id_+, id_-, S^1, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\overline{\mathcal{B}}$ и $\overline{\mathcal{C}}$. Како је $B(id_+) = F(id_+) = E_p$ и $B(id_-) = F(id_-) = E_p$, важи $\theta_+ \cdot E_p = E_p \cdot \theta_+$ и $\theta_- \cdot E_p = E_p \cdot \theta_-$. Једнакост $\theta_\emptyset \cdot B(S^1) = F(S^1) \cdot \theta_\emptyset$ важи јер је $1 \cdot p = p \cdot 1$. Следећи дијаграми комутирају

$$\begin{tikzcd}
B(+-) \arrow[r, "\theta_{+-}"] \arrow[d, "B(\overset{+-}{\cup})"'] & F(+-) \arrow[d, "F(\overset{+-}{\cup})"] \\
B(\emptyset) \arrow[r, phantom, "="] & F(\emptyset)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B(\emptyset) \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d, "B(\underset{-+}{\cap})"'] & F(\emptyset) \arrow[d, "F(\underset{-+}{\cap})"] \\
B(-+) \arrow[r, "\theta_{-+}"'] & F(-+)
\end{tikzcd}$$

јер је $B(\overset{+-}{\cup}) \overset{(3.16)}{=\!=} F(\overset{+-}{\cup}) \cdot (E_p \otimes X^{-1}) = F(\overset{+-}{\cup}) \cdot (\theta_+ \otimes \theta_-) = F(\overset{+-}{\cup}) \cdot \theta_{+-}$ и

$$F(\underset{-+}{\cap}) \overset{(3.17)}{=\!=} (X^{-1} \otimes E_p) \cdot B(\underset{-+}{\cap}) = (\theta_- \otimes \theta_+) \cdot B(\underset{-+}{\cap}) = \theta_{-+} \cdot B(\underset{-+}{\cap}).$$

Користећи својство пермутацијске матрице S_{pp} које нам омогућава да заменимо места матрицама у Кронекеровом производу добијамо једнакости

$$B(\overset{-+}{\cup}) = B(\overset{+-}{\cup}) \cdot S_{pp} = F(\overset{+-}{\cup}) \cdot (E_p \otimes X^{-1}) \cdot S_{pp} =$$
$$F(\overset{+-}{\cup}) \cdot S_{pp} \cdot (X^{-1} \otimes E_p) = F(\overset{-+}{\cup}) \cdot (X^{-1} \otimes E_p) = F(\overset{-+}{\cup}) \cdot \theta_{-+}$$

$$\begin{aligned} F(\underset{+-}{\cap}) &= S_{pp} \cdot F(\underset{-+}{\cap}) = S_{pp} \cdot (X^{-1} \otimes E_p) \cdot B(\underset{-+}{\cap}) = \\ &= (E_p \otimes X^{-1}) \cdot S_{pp} \cdot B(\underset{-+}{\cap}) = \theta_{+-} \cdot B(\underset{+-}{\cap}). \end{aligned}$$

□

Следеће тврђење је директна последица претходног тврђења и верности брауеријанске репрезентације.

Последица 3.4.1. (Телебаковић Онић [35]) *Свака стриктна 1-*TQFT*, $F : 1Cob' \to Mat_{\mathbb{K}}$, таква да је $F(+) = p \geq 2$, је веран функтор.*

Доказ. Нека су $f, g : a \to a'$ два различита морфизма категорије $1Cob'$. Докажимо да је $F(f) \neq F(g)$. Претпоставимо супротно да су матрице $F(f)$ и $F(g)$ једнаке. Ако је $B : 1Cob' \to Mat_{\mathbb{K}}$ брауеријански функтор, на основу претходног тврђења постоји природни изоморфизам $\theta : B \Rightarrow F$ и важи $B(f) = \theta_{a'}^{-1} \cdot F(f) \cdot \theta_a = \theta_{a'}^{-1} \cdot F(g) \cdot \theta_a = B(g)$, што је у контрадикцији са условом да је брауеријански функтор веран. □

3.5 Јаке 1-димензионалне тополошке квантне теорије поља

Дефиниција 3.5.1. *Јака 1-димензионална тополошка квантна теорија поља (1-TQFT)* је јаки симетрични моноидални функтор (F, F_0, F_2) између стриктне моноидалне категорије $(1Cob', \otimes, \emptyset, \tau_{n,m})$ и нестриктне моноидалне категорије $(Vect_{\mathbb{K}}, \otimes, \mathbb{K}, \alpha, \lambda, \rho, \sigma_{V,W})$ коначно-димензионалних векторских простора над фиксираним пољем $\mathbb{K}$.

Свакој затвореној нулдимензионалној многострукости, коју поистовећујемо са низом тачака $a = a_1 \dots a_n$, где је $a_i \in \{+, -\}$, функтор F придружује векторски простор $F(a)$, а сваком оријентисаном 1-кобордизму K из a у b линеарно пресликавање $F(K) : F(a) \to F(b)$. Природна трансформација F_2 има компоненте $F_2(a,b) : F(a) \otimes F(b) \xrightarrow{\cong} F(ab)$ које су изоморфизми, а и $F_0 : \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} F(\emptyset)$ је изоморфизам у категорији $Vect_{\mathbb{K}}$. При томе следећи дијаграми, у којима фигуришу структурна пресликавања α, λ, ρ и σ, комутирају у $Vect_{\mathbb{K}}$

$$\begin{tikzcd}
F(a) \otimes (F(b) \otimes F(c)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathbf{1} \otimes F_2(b,c)"'] & (F(a) \otimes F(b)) \otimes F(c) \arrow[d, "F_2(a,b) \otimes \mathbf{1}"] \\
F(a) \otimes F(bc) \arrow[d, "F_2(a,bc)"'] & F(ab) \otimes F(c) \arrow[d, "F_2(ab,c)"] \\
F(a(bc)) \arrow[r, phantom, "="] & F((ab)c)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(b) \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathbf{1} \otimes F_0"'] & F(b) \arrow[d, equal] \\
F(b) \otimes F(\emptyset) \arrow[r, "F_2(b,\emptyset)"'] & F(b\emptyset)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes F(b) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "F_0 \otimes \mathbf{1}"'] & F(b) \arrow[d, equal] \\
F(\emptyset) \otimes F(b) \arrow[r, "F_2(\emptyset,b)"'] & F(\emptyset b)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(a) \otimes F(b) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "F_2(a,b)"'] & F(b) \otimes F(a) \arrow[d, "F_2(b,a)"] \\
F(ab) \arrow[r, "F(\tau)"'] & F(ba)
\end{tikzcd}$$

Желимо да докажемо да је свака јака 1-TQFT, $F : 1Cob' \to Vect_{\mathbb{K}}$, која пресликава $a_i \in \{+, -\}$ у векторски простор димензије бар 2, веран функтор.

Посматрајмо категорију $VectB_{\mathbb{K}}$ чији су објекти уређени парови (V, e), где је V векторски простор коначне димензије, а e једна његова изабрана база, док су морфизми из (V, e) у (V', e') сва линеарна пресликавања из V у V'. Ако је $e = [e_0, \dots, e_{n-1}]$ база придружена простору V, а $f = [f_0, \dots, f_{m-1}]$ база придружена простору W, са $e \otimes f$ ћемо означавати базу придружену простору $V \otimes W$, која на $(i \cdot m + j)$-том месту има вектор $\varphi(e_i, f_j)$, где је $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ канонско билинеарно пресликавање. Моноидална структура категорије $VectB_{\mathbb{K}}$ дата је на објектима са

$$(V, e) \otimes (W, f) = (V \otimes W, e \otimes f)$$

при чему је $(\mathbb{K}, 1_{\mathbb{K}})$ неутрал, а на морфизмима исто као у категорији $Vect_{\mathbb{K}}$.

Дефинишимо нови функтор $F^* : 1Cob' \to VectB_{\mathbb{K}}$ тако да се на морфизмима поклапа са функтором F, а на објектима га дефинишемо индуктивно на следећи начин.

За базу простора $F(\emptyset)$ узимамо слику од $1_{\mathbb{K}}$ при изоморфизму $F_0 : \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} F(\emptyset)$ и дефинишемо $F^*(\emptyset) = (F(\emptyset), F_0(1_{\mathbb{K}}))$. Ако је e_+ изабрана база простора $F(+)$, и e_- изабрана база простора $F(-)$, онда дефинишемо $F^*(+) = (F(+), e_+)$ и $F^*(-) = (F(-), e_-)$. Претпоставимо да смо индуктивно дефинисали F^* на свим објектима дужине највише $n-1$, и нека је $a = a_1 \dots a_n$ објекат дужине n. Тада $F^*(a_1 \dots a_n)$ дефинишемо са

$$F^*(a_1 \dots a_n) = (F(a_1 \dots a_n), e_{a_1 \dots a_n}),$$

при чему је база $e_{a_1\dots a_n}$ простора $F(a_1\dots a_n)$ добијена помоћу изоморфизма $F_2(a_1,a_2\dots a_n) : F(a_1)\otimes F(a_2\dots a_n) \to F(a_1\dots a_n)$. Прецизније, ако је e_{a_1} изабрана база простора $F(a_1)$ и $e_{a_2\dots a_n}$ индуктивно изабрана база простора $F(a_2\dots a_n)$, тада за базу простора $F(a_1\dots a_n)$ бирамо слику базе $e_{a_1}\otimes e_{a_2\dots a_n}$ при изоморфизму F_2.

Показаћемо да је функтор F^* веран из чега ће следити и верност функтора F.

Посматрајмо функтор $G : VectB_{\mathbb{K}} \to Mat_{\mathbb{K}}$, који векторском простору придружује његову димензију, а линеарном пресликавању његову матричну репрезентацију у односу на фиксирани пар база

$$G(V,e) = \dim V,$$
$$G(L : (V,e) \to (V',e')) = [L]_{e,e'}.$$

Лема 3.5.1. *Нека су $e=[e_0,\dots,e_{n-1}]$, $f=[f_0,\dots,f_{m-1}]$ и $g=[g_0,\dots,g_{k-1}]$ редом базе простора U, V и W. Ако је $\alpha : (U,e)\otimes((V,f)\otimes(W,g)) \to ((U,e)\otimes(V,f))\otimes(W,g)$, онда је*

$$G(\alpha) = E_{n\cdot m\cdot k},$$

где је $E_{n\cdot m\cdot k}$ јединична матрица реда $n\cdot m\cdot k$.

Доказ. Елемент $e_i\otimes(f_j\otimes g_h)$ се у бази простора $U\otimes(V\otimes W)$ налази на $(i\cdot(mk)+j\cdot k+h)$-том месту, а елемент $(e_i\otimes f_j)\otimes g_h$ се у бази простора $(U\otimes V)\otimes W$ налази на истом $((i\cdot m+j)\cdot k+h)$-том месту. Како је пресликавање α на базним векторима дефинисано са $\alpha(e_i\otimes(f_j\otimes g_h)) = (e_i\otimes f_j)\otimes g_h$, видимо да се l-ти вектор базе простора $U\otimes(V\otimes W)$ пресликава у l-ти вектор базе простора $(U\otimes V)\otimes W$, па је матрична репрезентација пресликавања α у односу на пар база $e\otimes(f\otimes g)$ и $(e\otimes f)\otimes g$ управо јединична матрица одговарајућег реда.

□

Лема 3.5.2. *Ако су a и b објекти категорије $1Cob'$, онда је*

$$G(F_2(a,b) : F(a)\otimes F(b) \xrightarrow{\cong} F(ab)) = E.$$

Доказ. Доказ изводимо индукцијом по дужини објекта a.
База индукције: Нека је $a_1 \in \{+,-\}$ објекат дужине 1, а $b = a_2\dots a_n$ објекат произвољне дужине. Означимо са $e_{a_1} = [e_0,\dots,e_{p-1}]$, $p\geq 2$, базу простора $F(a_1)$, а са $e_{a_2\dots a_n} = [f_0,\dots,f_{m-1}]$ базу простора $F(a_2\dots a_n)$. Тада је одговарајућа база $[g_0,\dots,g_{pm-1}]$ за $F(a_1)\otimes F(a_2\dots a_n)$ дата са $g_{i\cdot m+j} = e_i\otimes f_j$. Матрица линеарног пресликавања

$$F_2(a_1,a_2\dots a_n) : F(a_1)\otimes F(a_2\dots a_n) \xrightarrow{\cong} F(a_1\dots a_n)$$

у односу на пар база $[g_0,\dots,g_{pm-1}]$ и $[F_2(g_0),\dots,F_2(g_{pm-1})]$ једнака је јединичној матрици реда $p\cdot m$, тј. $G(F_2(a_1,b)) = E$.

Индукцијски корак: Претпоставимо да тврђење важи за све објекте a дужине мање од n, за $n>1$. За произвољан објекат $a = a_1\dots a_n$ категорије $1Cob'$, на основу комутативности следећег дијаграма

$$\begin{array}{ccc}
F(a_1)\otimes(F(a_2\dots a_n)\otimes F(b)) & \xrightarrow{\alpha} & (F(a_1)\otimes F(a_2\dots a_n))\otimes F(b) \\
\mathbf{1}\otimes F_2(a_2\dots a_n,b)\big\downarrow & & \big\downarrow F_2(a_1,a_2\dots a_n)\otimes\mathbf{1} \\
F(a_1)\otimes F(a_2\dots a_n b) & & F(a_1a_2\dots a_n)\otimes F(b) \\
F_2(a_1,a_2\dots a_n b)\big\downarrow & & \big\downarrow F_2(a_1a_2\dots a_n,b) \\
F(a_1(a_2\dots a_n b)) & = & F((a_1a_2\dots a_n)b)
\end{array}$$

важи

$$F_2(a_1a_2\dots a_n,b)=F_2(a_1,a_2\dots a_nb)\circ(\mathbf{1}\otimes F_2(a_2\dots a_n,b))\circ\alpha^{-1}\circ(F_2(a_1,a_2\dots a_n)\otimes\mathbf{1})^{-1}.$$

На основу индукцијске хипотезе и леме 3.5.1 следи да је

$$G(F_2(a_1a_2\dots a_n,b))=E.$$

□

Лема 3.5.3. (видети [14, Поглавље 11, Тврђење 17]) *Нека су* $L:(V,e)\to(V',e')$ *и* $H:(W,f)\to(W',f')$ *линеарна пресликавања коначно-димензионалних векторских простора. Тада је Кронекеров производ матрица* $[L]_{e,e'}$ *и* $[H]_{f,f'}$*, које репрезентују* L *и* H*, једнак матрици* $[L\otimes H]_{e\otimes f,e'\otimes f'}$*, која репрезентује линеарно пресликавање* $L\otimes H:V\otimes W\to V'\otimes W'$*, тј.*

$$G(L\otimes H)=G(L)\otimes G(H).$$

Тврђење 3.5.1. *Композиција* $GF^*:1Cob'\to Mat_{\mathbb{K}}$ *је стриктан моноидални функтор.*

Доказ. Лако се види да функтор GF^* пресликава јединични објекат у јединични

$$(GF^*)(\emptyset)=G(F(\emptyset),F_0(1_{\mathbb{K}}))=\dim(F(\emptyset))=1.$$

За произвољне објекте a и b категорије $1Cob'$ важи

$$\begin{aligned}(GF^*)(ab)&=G(F(ab),e_{ab})=\dim F(ab)=\dim(F(a)\otimes F(b))=\dim(F(a))\cdot\dim(F(b))\\&=G(F(a),e_a)\cdot G(F(b),e_b)=G(F^*(a))\cdot G(F^*(b)).\end{aligned}$$

За произвољна два морфизма $f:a\to a'$ и $g:b\to b'$ због природности F_2 следећи дијаграм комутира

$$\begin{tikzcd} F(a)\otimes F(b) \arrow[r, "F_2(a,b)"] \arrow[d, "Ff\otimes Fg"'] & F(ab) \arrow[d, "F(f\otimes g)"] \\ F(a')\otimes F(b') \arrow[r, "F_2(a',b')"'] & F(a'b') \end{tikzcd}$$

Дакле, имамо да је

$$\begin{aligned}(GF^*)(f\otimes g)&=G(F(f\otimes g))=G(F_2(a',b')\circ(F(f)\otimes F(g))\circ F_2^{-1}(a,b))\\&=G(F_2(a',b'))\cdot G(F(f)\otimes F(g))\cdot G(F_2^{-1}(a,b))\overset{(\text{лема 3.5.2})}{=\!=\!=}G(F(f)\otimes F(g))\\&\overset{(\text{лема 3.5.3})}{=\!=\!=}G(F(f))\otimes G(F(g))=(GF^*)(f)\otimes(GF^*)(g).\end{aligned}$$

□

У следећем тврђењу ћемо показати да композиција GF^* пресликава симетрију у симетрију.

Тврђење 3.5.2. $(GF^*)(\tau_{a,b})=S_{n,m}$.

Доказ. На основу комутативности дијаграма

$$\begin{tikzcd} F(a)\otimes F(b) \arrow[r, "\sigma_{F(a),F(b)}"] \arrow[d, "F_2(a,b)"'] & F(b)\otimes F(a) \arrow[d, "F_2(b,a)"] \\ F(ab) \arrow[r, "F(\tau_{a,b})"'] & F(ba) \end{tikzcd}$$

следи да је

$$(GF^*)(\tau_{a,b}) = G(F(\tau_{a,b})) = G(F_2(b,a)\circ\sigma_{F(a),F(b)}\circ F_2^{-1}(a,b)) =$$
$$G(F_2(b,a))\cdot G(\sigma_{F(a),F(b)})\cdot G(F_2^{-1}(a,b)) \overset{\text{(лема 3.5.2)}}{=\!=\!=} G(\sigma_{F(a),F(b)}).$$

Матрица линеарног пресликавања $\sigma_{F(a),F(b)} : F(a)\otimes F(b) \to F(b)\otimes F(a)$ не зависи од избора база $e = [e_0,\dots,e_{n-1}]$ и $f = [f_0,\dots,f_{m-1}]$ простора $F(a)$ и $F(b)$ и једнака је пермутацијској матрици $S_{n,m}$, па је $G(\sigma_{F(a),F(b)}) = S_{n,m}$. □

На основу претходних тврђења следи да је $GF^* : 1Cob' \to Mat_{\mathbb{K}}$ стриктна 1-TQFT. Лако се проверава да GF^* задовољава услов из последице 3.4.1, па је функтор GF^* веран.

Последица 3.5.1. *Функтор $F^* : 1Cob' \to VectB_{\mathbb{K}}$ је веран.*

Последица 3.5.2. (Телебаковић Онић [35]) *Ако је $(F, F_0, F_2) : 1Cob' \to Vect_{\mathbb{K}}$ јака 1-*TQFT*, која нулдимензионалну многострукост која се састоји од једне тачке пресликава у векторски простор димензије бар* 2*, онда је F веран функтор.*

3.6 Брауеријанска репрезентација и матрична Фробенијусова алгебра

Ова секција посвећена је сфери S^0, која је симетричан Фробенијусов објекат, али не и комутативан, у категорији $1CobS$. Показаћемо да брауеријанска репрезентација пресликава сферу S^0 у матричну Фробенијусову алгебру.

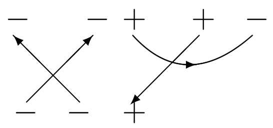
Нека је $\mathbb{K}$ поље карактеристике 0 и нека је p природан број већи или једнак од 2. Ако је $K = (M,\Sigma_0,\Sigma_1) : (\underline{\underline{n}},\varepsilon_0) \to (\underline{\underline{m}},\varepsilon_1)$ кобордизам категорије $1Cob$, поново му придружујемо релацију еквиваленције R_K на скупу $(n\times\{0\})\cup(m\times\{1\})$ као у секцији 3.2.

Затим кобордизму $K : (\underline{\underline{n}},\varepsilon_0) \to (\underline{\underline{m}},\varepsilon_1)$ додељујемо матрицу $A(K)$ формата $p^m\times p^n$ на исти начин као и раније у 3.2. Ако a_0 означава колону матрице $A(K)$, $0\le a_0 < p^n$, представимо a_0 у систему са основом p са n цифара $a_0^0\dots a_{n-1}^0$. Ако a_1 означава врсту матрице $A(K)$, $0\le a_1 < p^m$, представимо a_1 у систему са основом p са m цифара $a_0^1\dots a_{m-1}^1$. На пример, за $p=2$, $n=5$, $m=3$, $a_0=10$, $a_1=5$, имамо представљање $a_0 = 01010$ и $a_1 = 101$. Тада је елемент матрице $A(K)$ у врсти a_1 и колони a_0 једнак 1 ако за све (i,k) и (j,l) из скупа $(n\times\{0\})\cup(m\times\{1\})$ важи

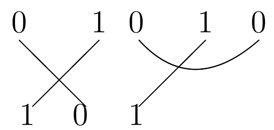
$$(i,k)R_K(j,l) \Rightarrow a_i^k = a_j^l;$$

иначе је тај елемент једнак 0.

Пример 3.6.1. Ако је K кобордизам представљен на следећој слици,



елемент матрице $A(K)$ који се налази у пресеку 5-те врсте и 10-те колоне једнак је 1, пошто се низови 101 и 01010, који одговарају редом 5-тој врсти и 10-тој колони уклапају у слику релације R_K.



Сада ћемо брауеријански функтор дефинисати као функтор из $1Cob$ у $Mat_{\mathbb{K}}$, уместо из $1Cob'$ у $Mat_{\mathbb{K}}$, и користићемо исту ознаку B. На објектима га дефинишемо са $B(\underline{n}, \varepsilon) = p^n$. За морфизам $K : (\underline{n}, \varepsilon_0) \to (\underline{m}, \varepsilon_1)$, дефинишемо

$$B(K) = p^c \cdot A(K),$$

где је c број циркуларних компоненти кобордизма K, а $A(K)$ матрица коју придружујемо кобордизму K. Аналогно као раније доказује се да је B симетричан моноидалан функтор који је веран.

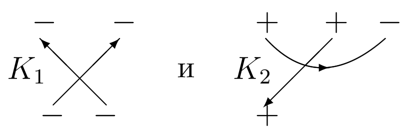
На основу дефиниције Кронекеровог производа, за матрице X, Y и $Z = X \otimes Y$ које су редом формата $m \times n$, $k \times l$ и $(m \cdot k) \times (n \cdot l)$ важи

$$x_{i,j} \cdot y_{q,r} = z_{i \cdot k+q, j \cdot l+r}.$$

Ако је кобордизам K добијен од кобордизама K_1 и K_2 „стављањем једног поред другог”, за матрице $Z = A(K)$, $X = A(K_1)$ и $Y = A(K_2)$, због моноидалности функтора B важи

$$z_{i \cdot k+q, j \cdot l+r} = 1 \text{ акко } x_{i,j} = y_{q,r} = 1.$$

У примеру 3.6.1, ако су K_1 и K_2, редом кобордизми



важи да је $z_{5,10} = x_{2,1} \cdot y_{1,2}$.

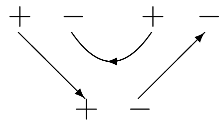
Посматрајмо сада рестрикцију функтора B на категорију $1CobS$. Пошто је сфера S^0, тј. објекат $\underline{1}$ Фробенијусов објекат у категорији $1CobS$, а самим тим и у категорији $1Cob$, његова слика при моноидалном функтору B је Фробенијусова алгебра. Показаћемо да $B(\underline{1})$ има структуру матричне Фробенијусове алгебре (видети пример 1.2.4).

Из дефиниције функтора B имамо да је $B(\underline{1}) = p^2$, тј. $B(\underline{1})$ је векторски простор $\mathbb{K}^{p^2}$ димензије p^2. При канонском изоморфизму $H : \mathbb{K}^{p^2} \to M_p(\mathbb{K})$ сваки вектор

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{p^2-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{p^2}$$

пресликава се у матрицу $H(\vec{v}) \in M_p(\mathbb{K})$ чији је елемент $[i,j]$ једнак $v_{i \cdot p+j}$. Да бисмо доказали да $M_p(\mathbb{K}) = B(\underline{1})$ има структуру матричне Фробенијусове алгебре, довољно је показати да $B(\underline{\mu})$ репрезентује множење матрица, а $B(\underline{\eta})$ траг матрице.

Кобордизам $\underline{\mu} : \underline{2} \to \underline{1}$ категорије $1CobS$ представљен је на следећој слици



Матрица која му одговара $B(\underline{\mu})$ има формат $p^2 \times p^4$. Нека је

$$H_2 : \mathbb{K}^{p^4} \to M_{p^2}(\mathbb{K})$$

канонски изоморфизам дефинисан као и H, тј. елемент $[i,j]$ матрице $H_2(\vec{v})$ је $v_{i \cdot p^2+j}$. Желимо да докажемо да за произвољне матрице $X, Y \in M_p(\mathbb{K})$ важи

$$H(B(\underline{\mu})\, H_2^{-1}(X \otimes Y)) = XY.$$

Ако је $p = 2$, матрица $B(\underline{\mu})$ једнака је

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а $H_2^{-1}(X \otimes Y)$ је вектор

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{15} \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{16}$$

где је $v_0 = x_{00} \cdot y_{00}$, $v_1 = x_{00} \cdot y_{01}$, $v_6 = x_{01} \cdot y_{10}$, $v_7 = x_{01} \cdot y_{11}$, $v_8 = x_{10} \cdot y_{00}$, $v_9 = x_{10} \cdot y_{01}$, $v_{14} = x_{11} \cdot y_{10}$ и $v_{15} = x_{11} \cdot y_{11}$. Према томе, у случају када је $p = 2$ имамо да је $B(\underline{\mu})\, H_2^{-1}(X \otimes Y)$ једнако вектору

$$\begin{bmatrix} x_{00} \cdot y_{00} + x_{01} \cdot y_{10} \\ x_{00} \cdot y_{01} + x_{01} \cdot y_{11} \\ x_{10} \cdot y_{00} + x_{11} \cdot y_{10} \\ x_{10} \cdot y_{01} + x_{11} \cdot y_{11} \end{bmatrix},$$

који се са H пресликава у XY.

За доказ општег случаја, уведимо ознаке $\vec{u} = B(\underline{\mu})\, H_2^{-1}(X \otimes Y)$ и $A = H(\vec{u})$. Желимо да докажемо да је за све $0 \le i, j \le p-1$,

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^{p-1} x_{i,k} \cdot y_{k,j}.$$

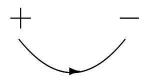
Пошто је елемент $a_{i,j}$ једнак $u_{i \cdot p+j}$, описаћемо како изгледа $[i \cdot p + j]$-та врста матрице $B(\underline{\mu})$, која је одређена низом ij. У тој врсти се елемент 1 појављује p пута у колонама које су одређене низовима

$$i00j,\ i11j,\ \ldots\ ,\ ikkj,\ \ldots\ ,\ i(p-1)(p-1)j,$$

док су сви остали елементи једнаки 0. Колона представљена низом $ikkj$ је заправо $[i \cdot p^3 + k \cdot p^2 + k \cdot p + j]$-та колона матрице $B(\underline{\mu})$. Како је $[i \cdot p^3 + k \cdot p^2 + k \cdot p + j]$-та координата вектора $H_2^{-1}(X \otimes Y)$ једнака $x_{i,k} \cdot y_{k,j}$, добијамо да је

$$a_{i,j} = u_{i \cdot p + j} = \sum_{k=0}^{p-1} x_{i,k} \cdot y_{k,j}, \quad 0 \leq i, j \leq p-1.$$

Кобордизам $\underline{\eta} : \underline{1} \to \underline{0}$ категорије $1CobS$ приказан је на следећој слици



Матрица $B(\underline{\eta})$ која му одговара има формат $1 \times p^2$. Показаћемо да за произвољну матрицу $X \in M_p(\mathbb{K})$ важи

$$B(\underline{\eta})\, H^{-1}(X) = \mathrm{Tr}(X).$$

За $p = 2$, ова једнакост гласи

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{00} \\ x_{01} \\ x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix} = x_{00} + x_{11}.$$

У општем случају, у јединој врсти матрице $B(\underline{\eta})$ компонента 1 се појављује p пута у колонама које су одређене низовима

$$00,\ 11,\ \ldots\ ,\ kk,\ \ldots\ ,\ (p-1)(p-1),$$

док су све остале компоненте те врсте 0. Колона матрице $B(\underline{\eta})$ представљена низом kk заправо је њена $[k \cdot p + k]$-та колона. Како је $[k \cdot p + k]$-та координата вектора $H^{-1}(X)$ једнака $x_{k,k}$, добијамо да је

$$B(\underline{\eta})\, H^{-1}(X) = \sum_{k=0}^{p-1} x_{k,k}.$$

Глава 4

Пример једне верне дводимензионалне тополошке квантне теорије поља

У овом поглављу ћемо показати да постоји комутативна Фробенијусова алгебра, која задовољава само оне једнакости на језику множења, јединице, комножења и којединице, које и дефинишу појам комутативне Фробенијусове алгебре (конкретно $\mathbb{QZ}_5 \otimes Z(\mathbb{QS}_3)$). Овој алгебри одговара 2-димензионална 2-TQFT, која је веран функтор. То значи да су 2-кобордизми еквивалентни ако и само ако су им одговарајућа линеарна пресликавања једнака. На тај начин добијамо комплетну инваријанту дводимензионалних кобордизама. У доказу овог резултата, који је добијен у [17], кључну улогу игра Жигмондијева теорема.

Иако је алгебра $\mathbb{QZ}_5 \otimes Z(\mathbb{QS}_3)$ слободна од додатних једнакости, нећемо је називати слободном комутативном Фробенијусовом алгебром. Наиме, категорија комутативних Фробенијусових алгебри је групоид у смислу Бранта (Brandt), па у њој нема слободно генерисаних објеката.

Дефиниција 4.0.1. Пресликавање $f : (A, \mu, \eta, \delta, \varepsilon) \to (A', \mu', \eta', \delta', \varepsilon')$ је *хомоморфизам Фробенијусових алгебри* ако следећи дијаграми комутирају, тј. ако је f и хомоморфизам алгебри и хомоморфизам коалгебри

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f \otimes f"'] & A \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f"] & A \otimes A \arrow[d, "f \otimes f"] \\
A' \otimes A' \arrow[r, "\mu'"'] & A' \arrow[r, "\delta'"'] & A' \otimes A'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dr, "\varepsilon"] \arrow[dd, "f"] & \\
\mathbb{K} \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & & \mathbb{K} \\
 & A' \arrow[ur, "\varepsilon'"'] &
\end{tikzcd}$$

Лема 4.0.1. (видети [23, Лема 2.4.5]) *Ако је $f : A \to A'$ хомоморфизам Фробенијусових алгебри, онда је f инвертибилан.*

На основу ове леме, категорија Фробенијусових алгебри је групоид, па је таква и њена пуна поткатегорија комутативних Фробенијусових алгебри.

Још увек није познато да ли постоји верна n-димензионална TQFT, за $n \geq 3$. Чак и негативан одговор на ово питање би био важан математички резултат. Значајан допринос решавању овог проблема дао је Јухас у раду [20], у ком је категорију кобордизама произвољне димензије представио генераторима и релацијама.

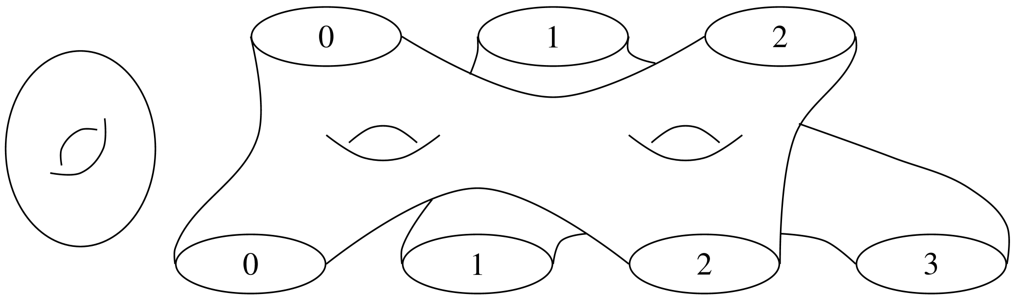
4.1 Категорија $2CobS$ и 2-димензионалне тополошке квантне теорије поља (2-TQFT)

Нека је $2CobS$ категорија чији су објекти $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, ..., где $\underline{n}$ означава низ n кругова, док су морфизми класе еквиваленције 2-кобордизама, као у секцији 2.3. Кобордизме ћемо као и до сада означавати са K, L, ..., а ознака $K \sim L$ ће значити да кобордизми K и L припаду истој класи еквиваленције.

Ако је $K : \underline{n} \to \underline{m}$ један 2-кобордизам чије су улазна и излазна граница редом низови кругова $(\Sigma_0^0, \dots, \Sigma_0^{n-1})$ и $(\Sigma_1^0, \dots, \Sigma_1^{m-1})$, поново дефинишемо релацију еквиваленције ρ_K на скупу

$$(\{0, \dots, n-1\} \times \{0\}) \cup (\{0, \dots, m-1\} \times \{1\})$$

на следећи начин: $(i,k)\rho_K(j,l)$ ако Σ_k^i и Σ_l^j припадају истој компоненти повезаности од K (видети секцију 2.8). Ако је кобордизам $K : \underline{3} \to \underline{4}$ приказан на следећој слици,

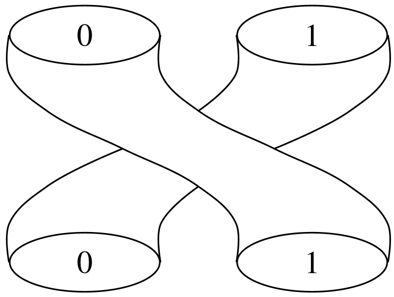


онда имамо две класе еквиваленције релације ρ_K,

$$\{(0,0),(2,0),(0,1),(2,1)\} \quad \text{и} \quad \{(1,0),(1,1),(3,1)\}.$$

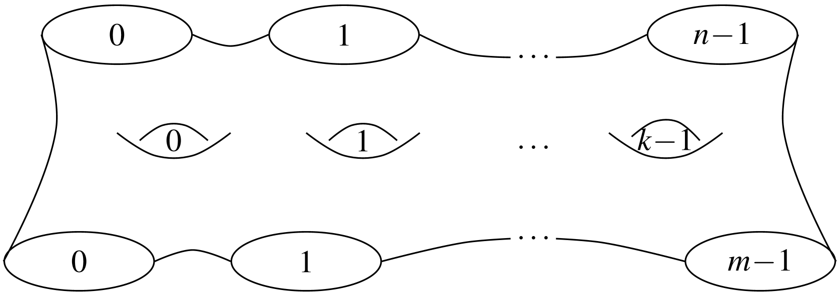
Род компоненте повезаности од K која садржи Σ_k^i ћемо означити са $(g_k^i)_K$.

За категорију $2CobS$ знамо да је симетрична моноидална у односу на тензорски производ $\otimes$ дат „стављањем кобордизама једног поред другог" и симетрију генерисану транспозицијама:



Нека је $Vect_{\mathbb{K}}$ категорија коначно-димензионалних векторских простора над фиксираним пољем $\mathbb{K}$ са стандардном симетричном моноидалном структуром. На основу аксиома, које је Атија навео у раду [3, Секција 2]), 2-димензионална тополошка квантна теорија поља (2-TQFT) је јаки симетрични моноидални функтор из категорије $2CobS$ у $Vect_{\mathbb{K}}$.

Ако су $m, k, n \geq 0$, означимо са $E_{m,k,n}$ повезани 2-кобордизам који има n улаза, m излаза и род k, а приказан је на следећој слици



Дијкграф је први приметио да су категорија 2-димензионалних тополошких квантних теорија поља и категорија комутативних Фробенијусових алгебри еквивалентне (видети [8]). Много детаљније доказе дали су Квин ([37]), Савин ([42]) и Абрамс ([2]), а занимљив и исцрпан приказ ове везе постоји и код Кока ([23, Секција 3.3]).

Ако је $F : 2CobS \to Vect_{\mathbb{K}}$ симетричан моноидални функтор (2-TQFT), он је потпуно одређен сликом круга, тј. векторским простором $A = F(\underline{1})$ и сликама генератора $E_{1,0,2}$, $E_{1,0,0}$, $E_{2,0,1}$ и $E_{0,0,1}$ категорије $2CobS$. Како је F моноидални функтор, он слика објекат $\underline{n}$ у тензорски степен $A^{\otimes n}$. Ако су $\mu = F(E_{1,0,2}) : A \otimes A \to A$, $\quad \eta = F(E_{1,0,0}) : \mathbb{K} \to A$, $\delta = F(E_{2,0,1}) : A \to A \otimes A$ и $\varepsilon = F(E_{0,0,1}) : A \to \mathbb{K}$ линеарна пресликавања добијена као слике генератора категорије $2CobS$, пошто је F моноидални функтор, релације које важе у $2CobS$, преводе се у релације између ових линеарних пресликавања, тј. у аксиоме комутативне Фробенијусове алгебре (слика 2.1). Дакле, ако је F једна 2-TQFT, онда је $(F(\underline{1}), \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ комутативна Фробенијусова алгебра.

Обрнуто, ако бисмо кренули од комутативне Фробенијусове алгебре $(A, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$, код које је множење означено са μ, јединица са η, комножење са δ, а којединица са ε, тада би могли да конструишемо 2-TQFT, у ознаци $F_A : 2CobS \to Vect_{\mathbb{K}}$ тако да је $F_A(\underline{1}) = A$ и да се генератори $E_{1,0,2}$, $E_{1,0,0}$, $E_{2,0,1}$ и $E_{0,0,1}$ категорије $2CobS$ пресликавају редом у μ, η, δ и ε. Лако се може проверити да је функтор F_A добро дефинисан, пошто релацијама које важе у $2CobS$ тачно одговарају аксиоме комутативне Фробенијусове алгебре. За линеарно пресликавање $F_A(K)$ које одговара кобордизму K надаље ћемо користити ознаку $(K)_A$, а једнакост $F_A(K) = F_A(L)$ ћемо скраћено записивати са $K =_A L$.

Јасно је да су ове две конструкције једна другој инверзне. Ако кренемо од 2-TQFT, F и конструишемо комутативну Фробенијусову алгебру $A = F(\underline{1})$, а затим дефинишемо симетрични моноидални функтор такав да $\underline{1} \mapsto A$, поново смо добили F. Према томе, постоји узајамно једнозначна коресподенција између 2-димензионалних TQFT и комутативних Фробенијусових алгебри. Кореспонденција важи и за стрелице ових категорија.

У овом поглављу ћемо конструисати пример комутативне Фробенијусове алгебре A за коју је функтор F_A веран, тј. у којој важе само оне једнакости које су наведене у списку аксиома комутативних Фробенијусових алгебри.

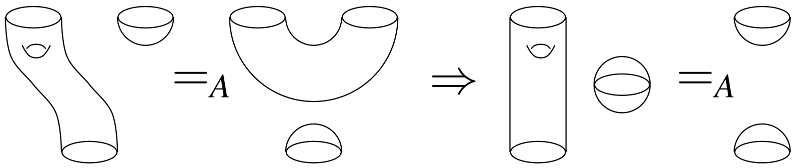
У даљем тексту биће нам потребне три леме, чији докази директно следе из моноидалности функтора F_A.

Лема 4.1.1. (Запушавање рупа одозго и одоздо) *Ако за кобордизме $K, L : \underline{n} \to \underline{m}$ важи да су одговарајућа линеарна пресликавања једнака, тј. $K =_A L$, онда за свако $0 \leq i \leq n-1$ и $0 \leq j \leq m-1$, важи*

$$K \circ (\mathrm{id}_i \otimes E_{1,0,0} \otimes \mathrm{id}_{n-i-1}) =_A L \circ (\mathrm{id}_i \otimes E_{1,0,0} \otimes \mathrm{id}_{n-i-1})$$

и

$$(\mathrm{id}_j \otimes E_{0,0,1} \otimes \mathrm{id}_{m-j-1}) \circ K =_A (\mathrm{id}_j \otimes E_{0,0,1} \otimes \mathrm{id}_{m-j-1}) \circ L.$$



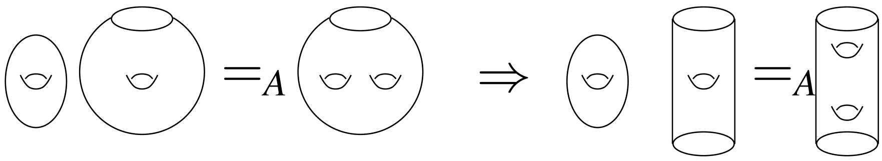
Слика 4.1: Лема 4.1.1

Лема 4.1.2. *Ако за кобордизме $K, L : \underline{1} \to \underline{0}$ важи да су одговарајућа линеарна пресликавања једнака, тј. $K =_A L$, онда је*

$$(K \otimes \mathrm{id}_1) \circ E_{2,0,1} =_A (L \otimes \mathrm{id}_1) \circ E_{2,0,1}.$$

Аналогно, ако за кобордизме $K, L : \underline{0} \to \underline{1}$ важи $K =_A L$, онда је

$$E_{1,0,2} \circ (K \otimes \mathrm{id}_1) =_A E_{1,0,2} \circ (L \otimes \mathrm{id}_1).$$



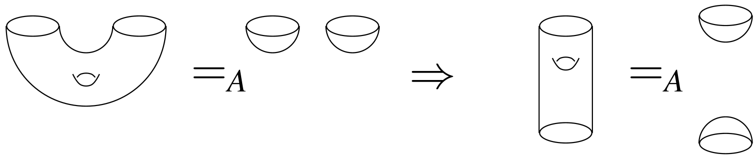
Слика 4.2: Лема 4.1.2

Лема 4.1.3. *Ако за кобордизме $K, L : \underline{2} \to \underline{0}$ важи да су одговарајућа линеарна пресликавања једнака, тј. $K =_A L$, онда је*

$$(K \otimes \mathrm{id}_1) \circ (\mathrm{id}_1 \otimes E_{2,0,0}) =_A (L \otimes \mathrm{id}_1) \circ (\mathrm{id}_1 \otimes E_{2,0,0}).$$

Аналогно, ако за кобордизме $K, L : \underline{0} \to \underline{2}$ важи $K =_A L$, онда је

$$(\mathrm{id}_1 \otimes E_{0,0,2}) \circ (K \otimes \mathrm{id}_1) =_A (\mathrm{id}_1 \otimes E_{0,0,2}) \circ (L \otimes \mathrm{id}_1).$$



Слика 4.3: Лема 4.1.3

Тврђење 4.1.1. (Максималност) *Нека су K и L кобордизми категорије $2CobS$ који нису еквивалентни, $K \nsim L$. Ако су одговарајућа линеарна пресликавања једнака, тј. $K =_A L$, где је $\dim(A) > 1$, онда за неке $k_1 \geq \ldots \geq k_n \geq 0$ и $l_1 \geq \ldots \geq l_m \geq 0$ такве да је $(k_1, \ldots, k_n) \neq (l_1, \ldots, l_m)$ важи*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} E_{0,k_i,0} =_A \bigotimes_{j=1}^{m} E_{0,l_j,0}. \tag{4.1}$$

Доказ. Кобордизмима $K : \underline{n} \to \underline{m}$ и $L : \underline{n'} \to \underline{m'}$ на основу претпоставке одговарају иста линеарна пресликавања $F_A(K) : A^{\otimes n} \to A^{\otimes m}$ и $F_A(L) : A^{\otimes n'} \to A^{\otimes m'}$. Пошто је $\dim(A) > 1$, закључујемо да кобордизми K и L имају исте домене и кодомене ($n = n'$ и $m = m'$). Како кобордизми K и L нису еквивалентни, они или индукују две различите релације еквиваленције ρ_K и ρ_L, или у супротном имају исте релације еквиваленције, тј. исте компоненте повезаности, али су им „рупе различито распоређене". Разликујемо следеће случајеве.

1. Ако је $\rho_K = \rho_L$ и за сваки пар (i, k) важи да је $(g^i_k)_K = (g^i_k)_L$, то значи да се кобордизми K и L разликују у оним компонентама повезаности које су хомеоморфне сфери са извесним бројем „рупа". Тада применом леме 4.1.1 на све компоненте границе одмах добијамо једнакост типа (4.1).

2. Ако је $\rho_K = \rho_L$ и постоји пар (i, k) такав да је $(g^i_k)_K \neq (g^i_k)_L$, онда прво примењујемо лему 4.1.1 да „запушимо све улазне и излазне рупе" осим оне која одговара пару (i, k), а затим користимо лему 4.1.2 да бисмо добили једнакост облика

$$E_{1,p,1} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} E_{0,k_i,0}) =_A E_{1,q,1} \otimes (\bigotimes_{j=1}^{m} E_{0,l_j,0}), \tag{4.2}$$

   за неке $n, m, p, q \geq 0$ такве да је $p \neq q$, и $k_1 \geq \ldots \geq k_n \geq 0$, $l_1 \geq \ldots \geq l_m \geq 0$. Даље, компоновањем обе стране једнакости (4.2) здесна са $E_{1,a,0}$, а слева са $E_{0,a,1}$, где је $a > \max\{k_1, l_1\}$, лако се добија облик (4.1).

3. Ако је $\rho_K \neq \rho_L$, онда постоје парови (i, k) и (j, l) такви да је $(i, k)\rho_K(j, l)$, али не важи $(i, k)\rho_L(j, l)$. На пример, ако је $(i, 0)\rho_K(j, 1)$, али не важи $(i, 0)\rho_L(j, 1)$, применом леме 4.1.1 на све компоненте границе, осим на оне које одговарају паровима $(i, 0)$ и $(j, 1)$, директно добијамо једнакост облика

$$E_{1,p,1} \otimes (\bigotimes_{i=1}^{n} E_{0,k_i,0}) =_A E_{1,q,0} \otimes E_{0,r,1} \otimes (\bigotimes_{j=1}^{m} E_{0,l_j,0}), \tag{4.3}$$

   за неке $n, m, p, q, r \geq 0$ и $k_1 \geq \ldots \geq k_n \geq 0$, $l_1 \geq \ldots \geq l_m \geq 0$.

   У случају када је, на пример, $(i, 0)\rho_K(j, 0)$, али не важи $(i, 0)\rho_L(j, 0)$, поново примењујемо лему 4.1.1 да „запушимо све улазне и излазне рупе", осим оних које одговарају паровима $(i, 0)$ и $(j, 0)$, а затим користимо и лему 4.1.3 да бисмо добили једнакост облика (4.3). Аналогно поступамо и за $(i, 1)$ и $(j, 1)$.

   Једнакост (4.3) множимо здесна са $E_{1,a,0}$, а слева са $E_{0,a,1}$, за $a > \max\{k_1, l_1\}$, и добијамо облик (4.1).

$\square$

4.2 Фробенијусове алгебре $\mathbb{QZ}_5$ и $Z(\mathbb{QS}_3)$

У свим примерима који следе, за изабрану базу $f = [f_1, \ldots, f_n]$ векторског простора V, са $f \otimes f$ ћемо означавати базу

$$[f_1 \otimes f_1, f_1 \otimes f_2, \ldots, f_1 \otimes f_n, f_2 \otimes f_1, f_2 \otimes f_2, \ldots, f_2 \otimes f_n, \ldots, f_n \otimes f_n],$$

придружену простору $V \otimes V$, а одговарајућа линеарна пресликавања ћемо репрезентовати матрицама у односу на ове базе.

Пример 4.2.1. Фробенијусова структура групне алгебре $\mathbb{K}G$ дефинисана је у примеру 1.2.5 задавањем Фробенијусове форме

$$\varepsilon(g)=\begin{cases}1, & \text{ако } g=e\\ 0, & \text{ако } g\neq e.\end{cases}$$

Специјално, ако за поље $\mathbb{K}$ узмемо поље рационалних бројева $\mathbb{Q}$, а за групу G цикличну групу $\mathbb{Z}_5$ реда 5 генерисану елементом a, онда је групна алгебра $\mathbb{QZ}_5$ димензије 5 и $f=[e,a,a^2,a^3,a^4]$ је њена база. Матрица множења $\mu:\mathbb{QZ}_5\otimes\mathbb{QZ}_5\to\mathbb{QZ}_5$ у односу на пар база $f\otimes f$ и f једнака је матрици M реда 5×25

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0
\end{bmatrix},$$

док је јединица $\eta:\mathbb{Q}\to\mathbb{QZ}_5$ репрезентована матрицом

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Репрезентација комножења $\delta:\mathbb{QZ}_5\to\mathbb{QZ}_5\otimes\mathbb{QZ}_5$ у односу на пар база f и $f\otimes f$ је матрица M^T, а којединица $\varepsilon:\mathbb{QZ}_5\to\mathbb{Q}$ је репрезентована матрицом

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Приметимо да је линеарно пресликавање $(E_{1,1,1})_{\mathbb{QZ}_5}$ репрезентовано матрицом

$$\begin{bmatrix}5&0&0&0&0\\0&5&0&0&0\\0&0&5&0&0\\0&0&0&5&0\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}.$$

Према томе, ако за A узмемо алгебру $\mathbb{QZ}_5$, функтор F_A неће бити веран, јер имамо

$$E_{1,0,1}\otimes E_{1,1,1}=_{\mathbb{QZ}_5}E_{1,1,1}\otimes E_{1,0,1}.$$

Пример 4.2.2. У случају групне алгебре $\mathbb{K}G$ Фробенијусову форму можемо дефинисати и на други начин са

$$\varepsilon(g)=\begin{cases}|G|, & \text{ако } g=e\\ 0, & \text{ако } g\neq e,\end{cases}$$

али ни тада функтор F_A неће бити веран, за групну алгебру $A=\mathbb{QZ}_5$.

Множење $\mu:\mathbb{QZ}_5\otimes\mathbb{QZ}_5\to\mathbb{QZ}_5$ је поново репрезентовано матрицом M, а јединица $\eta:\mathbb{Q}\to\mathbb{QZ}_5$ матрицом

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Репрезентација комножења $\delta : \mathbb{QZ}_5 \to \mathbb{QZ}_5 \otimes \mathbb{QZ}_5$ у односу на пар база f и $f \otimes f$ је сада матрица $\frac{1}{5}M^T$, а којединица $\varepsilon : \mathbb{QZ}_5 \to \mathbb{Q}$ је репрезентована матрицом

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Лако се види да у комутативној Фробенијусовој алгебри $(\mathbb{QZ}_5, \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ важи $\mu \circ \delta = \mathrm{id}_1$. У литератури се Фробенијусове алгебре које задовољавају ову једнакост називају специјалним. Према томе, ако за A узмемо алгебру $\mathbb{QZ}_5$, функтор F_A ни тада неће бити веран, јер за свако k имамо

$$E_{1,k,1} =_{\mathbb{QZ}_5} E_{1,0,1}.$$

Приметимо да су линеарна пресликавања $(E_{0,k,0})_{\mathbb{QZ}_5}$, $(E_{1,k,0})_{\mathbb{QZ}_5}$, $(E_{0,k,1})_{\mathbb{QZ}_5}$ и $(E_{1,k,1})_{\mathbb{QZ}_5}$ редом репрезентована матрицама

$$5, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 4.2.3. Нека је $Z(\mathbb{K}G) = \{x \in \mathbb{K}G \mid xy = yx \text{ за све } y \in \mathbb{K}G\}$ центар групне алгебре. Нека су $C_1, \dots, C_l$ различите класе конјугације групе G. Уведимо ознаку

$$c_i = \sum_{g \in C_i} g \in \mathbb{K}G,\ 1 \le i \le l.$$

Тврђење 4.2.1. (видети [19, Поглавље 12, Тврђење 12.22]) *Елементи $c_1, \dots, c_l$ формирају базу за $Z(\mathbb{K}G)$.*

Специјално, ако је поље $\mathbb{K}$ поље рационалних бројева $\mathbb{Q}$, а група G симетрична група $\mathbb{S}_3$, онда је $f = [c_1, c_2, c_3]$ база за центар групне алгебре $Z(\mathbb{QS}_3)$, где је $c_1 = \epsilon$ идентична пермутација, $c_2 = (12) + (13) + (23)$ сума транспозиција, а $c_3 = (123) + (132)$ сума циклуса дужине 3.

Множење $\mu : Z(\mathbb{QS}_3) \otimes Z(\mathbb{QS}_3) \to Z(\mathbb{QS}_3)$ представљено је следећом таблицом

$\cdot$	c_1	c_2	c_3
c_1	c_1	c_2	c_3
c_2	c_2	$3(c_1 + c_3)$	$2c_2$
c_3	c_3	$2c_2$	$2c_1 + c_3$

па је матрица линеарног пресликавања μ у односу на пар база $f \otimes f$ и f једнака матрици

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Јединица $\eta : \mathbb{Q} \to Z(\mathbb{QS}_3)$ је репрезентована матрицом

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Фробенијусова форма дата је као композиција $Z(\mathbb{QS}_3) \xrightarrow{i} \mathbb{QS}_3 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q}$, где је i инклузија, а $\varepsilon(c_1) = 1, \varepsilon(c_2) = 0, \varepsilon(c_3) = 0$. Према томе, матрица којединице $Z(\mathbb{QS}_3) \to \mathbb{Q}$ једнака је матрици

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Репрезентација комножења $\delta : Z(\mathbb{QS}_3) \to Z(\mathbb{QS}_3) \otimes Z(\mathbb{QS}_3)$ у односу на пар база f и $f \otimes f$ је матрица формата 9×3, која је транспонат матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Лако се може проверити да је $(Z(\mathbb{QS}_3), \mu, \eta, \delta, \varepsilon)$ комутативна Фробенијусова алгебра. Приметимо да је линеарно пресликавање $(E_{1,1,1})_{Z(\mathbb{QS}_3)}$ репрезентовано матрицом

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{9}{2} \end{bmatrix},$$

чији k-ти степен

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \begin{bmatrix} 2^{2k-1}+1 & 0 & 2^{2k}-1 \\ 0 & 3 \cdot 2^{2k-1} & 0 \\ 2^{2k-1}-\frac{1}{2} & 0 & 2^{2k}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

репрезентује линеарно пресликавање $(E_{1,k,1})_{Z(\mathbb{QS}_3)}$. Тада закључујемо да су линеарна пресликавања $(E_{0,k,0})_{Z(\mathbb{QS}_3)}$, $(E_{1,k,0})_{Z(\mathbb{QS}_3)}$ и $(E_{0,k,1})_{Z(\mathbb{QS}_3)}$ репрезентована редом матрицама

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}(2^{2k-1}+1), \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \begin{bmatrix} 2^{2k-1}+1 \\ 0 \\ 2^{2k-1}-\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \begin{bmatrix} 2^{2k-1}+1 & 0 & 2^{2k}-1 \end{bmatrix}.$$

Специјално, за $k = 0$, кобордизму $E_{0,0,0}$ одговара константа 1. Према томе, ако за A узмемо алгебру $Z(\mathbb{QS}_3)$, функтор F_A неће бити веран, јер имамо

$$E_{0,0,0} =_{Z(\mathbb{QS}_3)} E_{0,0,0} \otimes E_{0,0,0}.$$

4.3 Верност

Ако су (A, μ_A, η_A) и (B, μ_B, η_B) две $\mathbb{K}$-алгебре, векторски простор $A \otimes B$ постаје $\mathbb{K}$-алгебра ако множење $\mu_{A\otimes B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \to A \otimes B$ дефинишемо као композицију

$$A \otimes B \otimes A \otimes B \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes \tau_{B,A} \otimes \mathrm{id}_B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{\mu_A \otimes \mu_B} A \otimes B,$$

а јединицу $\eta_{A\otimes B} : \mathbb{K} \to A \otimes B$ као композицију

$$\mathbb{K} \cong \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{\eta_A \otimes \eta_B} A \otimes B.$$

Ако су $(C, \delta_C, \varepsilon_C)$ и $(D, \delta_D, \varepsilon_D)$ две коалгебре, онда $C \otimes D$ такође има природну структуру коалгебре. Комножење $\delta_{C\otimes D}$ дефинишемо као композицију

$$C \otimes D \xrightarrow{\delta_C \otimes \delta_D} C \otimes C \otimes D \otimes D \xrightarrow{\mathrm{id}_C \otimes \tau_{C,D} \otimes \mathrm{id}_D} C \otimes D \otimes C \otimes D,$$

а којединицу $\varepsilon_{C\otimes D}$ као композицију

$$C \otimes D \xrightarrow{\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K}.$$

Према томе, тензорски производ две Фробенијусове алгебре има природну структуру Фробенијусове алгебре, јер је тензорски производ и алгебра и коалгебра, а лако се може проверити да важе Фробенијусове релације.

У овој секцији ћемо са $\mathbb{A}$ означавати тензорски производ $\mathbb{QZ}_5 \otimes Z(\mathbb{QS}_3)$. Алгебра $\mathbb{A}$ димензије 15 има комутативну Фробенијусову структуру као тензорски производ две комутативне Фробенијусове алгебре. Доказаћемо да је функтор $F_{\mathbb{A}}$ веран.

Приметимо прво да је у овом случају линеарно пресликавање $(E_{0,k,0})_{\mathbb{A}}$ репрезентовано рационалним бројем

$$5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} (2^{2k-1}+1).$$

Да бисмо доказали верност 2-TQFT која одговара алгебри $\mathbb{A}$, неопходна нам је следећа лема, у чијем доказу користимо Жигмондијеву теорему.

Теорема 4.3.1. **(Жигмондијева теорема, видети [48], [40, P 1.7] и [41])** *Нека су $a > b \geq 1$ узајамно прости и нека је $n \geq 1$ природан број. Тада постоји прост број p такав да дели $a^n + b^n$, али не дели $a^k + b^k$, за све k, $0 < k < n$, са изузетком $n = 3$, $a = 2$, $b = 1$.*

Лема 4.3.1. *Ако за $k_1 \geq \ldots \geq k_n \geq 0$ и $l_1 \geq \ldots \geq l_m \geq 0$ важи*

$$\prod_{i=1}^{n}\left(5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k_i-1}(2^{2k_i-1}+1)\right) = \prod_{j=1}^{m}\left(5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{l_j-1}(2^{2l_j-1}+1)\right), \tag{4.4}$$

онда је $n = m$ и $(k_1, \ldots, k_n) = (l_1, \ldots, l_m)$.

Доказ. Нека су p и q такви да је $k_1 \geq \ldots \geq k_p \geq 0$, $l_1 \geq \ldots \geq l_q \geq 0$ и $k_{p+1} = \ldots = k_n = 0$, $l_{q+1} = \ldots = l_m = 0$, ако уопште има оних који су нула. Тада се једнакост (4.4) своди на

$$5^n \cdot \frac{3^{(\sum_1^p k_i)-p}}{2^{(\sum_1^p k_i)-p}} \prod_{i=1}^{p}(2^{2k_i-1}+1) = 5^m \cdot \frac{3^{(\sum_1^q l_j)-q}}{2^{(\sum_1^q l_j)-q}} \prod_{j=1}^{q}(2^{2l_j-1}+1). \tag{4.5}$$

Како је последња цифра броја $2^{2k-1}+1$ или 3 или 9, он није дељив са 5, па закључујемо да је $n = m$. Пошто су сви фактори у једнакости (4.5) непарни, осим $2^{(\sum_1^p k_i)-p}$ и $2^{(\sum_1^q l_j)-q}$, следи да је $(\sum_1^p k_i) - p = (\sum_1^q l_j) - q$, а после скраћивања и да је

$$\prod_{i=1}^{p}(2^{2k_i-1}+1) = \prod_{j=1}^{q}(2^{2l_j-1}+1). \tag{4.6}$$

Докажимо да је $(k_1, \ldots, k_n) = (l_1, \ldots, l_m)$. Претпоставимо супротно, да је $(k_1, \ldots, k_p) \neq (l_1, \ldots, l_q)$. После скраћивања оних фактора у једнакости (4.6) који су једнаки, можемо претпоставити да су сви k_i различити од свих l_j. Без умањења општости, можемо претпоставити и да је $k_1 > l_1$. Ако би $k_1 = 2$, онда би $l_1 = \ldots = l_q = 1$, па би $(\sum_1^q l_j) - q = 0 < (\sum_1^p k_i) - p$. Према томе, $k_1 \geq 3$ и $2k_1 - 1 \geq 5$. На основу Жигмондијеве теореме, постоји прост број који дели $2^{2k_1-1}+1$, а не дели $2^{2l_j-1}+1$, за све $1 \leq j \leq q$, што је у контрадикцији са једнакошћу (4.6).

□

Теорема 4.3.2. (Гајовић, Петрић и Телебаковић Онић [17])
Ако је $\mathbb{A} = \mathbb{QZ}_5 \otimes Z(\mathbb{QS}_3)$, *онда је одговарајућа 2*-TQFT, $F_{\mathbb{A}}$ *верна и инјективна на објектима.*

Доказ. Из $F_{\mathbb{A}}(\underline{n}) = F_{\mathbb{A}}(\underline{m})$, тј. из $A^{\otimes n} = A^{\otimes m}$ следи да је $\underline{n} = \underline{m}$, јер је $\dim(\mathbb{A}) > 1$, па је функтор $F_{\mathbb{A}}$ инјективан на објектима. На основу леме 4.3.1 за све $k_1 \geq \ldots \geq k_n \geq 0$ и $l_1 \geq \ldots \geq l_m \geq 0$ такве да је $(k_1, \ldots, k_n) \neq (l_1, \ldots, l_m)$ имамо

$$\bigotimes_{i=1}^{n} E_{0,k_i,0} \neq_{\mathbb{A}} \bigotimes_{j=1}^{m} E_{0,l_j,0}.$$

Применом тврђења 4.1.1 добијамо и верност функтора $F_{\mathbb{A}}$.

□

Литература

[1] L. Abrams. "Modules, Comodules, and Cotensor Products over Frobenius Algebras." In: *Journal of Algebra* 219 (1999), pp. 201–213.

[2] L. Abrams. "Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras." In: *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 5 (1996), pp. 569–587.

[3] M. Atiyah. "Topological quantum field theories." In: *Publications Mathématiques de l' I.H.É.S.* 68 (1988), pp. 175–186.

[4] Dj. Baralić, Z. Petrić, and S. Telebaković. "Spheres as Frobenius objects." In: *Theory and Applications of Categories* 33, 24 (2018), pp. 691–726.

[5] R. Brauer. "On algebras which are connected with semisimple continuous groups." In: *Annals of Mathematics* 38 (1937), pp. 857–872.

[6] W. Browder. "Diffeomorphisms of 1-connected manifolds." In: *Transactions of the American Mathematical Society* 128 (1967), pp. 155–163.

[7] J. Cerf. "The pseudo-isotopy theorem for simply connected differentiable manifolds." In: *Lecture Notes in Mathematics, Manifolds-Amsterdam, vol. 197, Springer, Berlin.* Ed. by N. Kuiper. 1970, pp. 76-82.

[8] R. Dijkgraaf. "A geometric approach to two dimensional conformal field theory." Doctoral dissertation. University of Utrecht, 1989.

[9] A. Dold. *Lectures in Algebraic Topology.* Springer, Berlin, 1972.

[10] K. Došen and Z. Petrić. "A Brauerian representation of split preorders." In: *Mathematical Logic Quarterly* 49 (2003), pp. 579–586.

[11] K. Došen and Z. Petrić. "Generality of proofs and its Brauerian representation." In: *The Journal of Symbolic Logic* 68 (2003), pp. 740–750.

[12] K. Došen and Z. Petrić. "Symmetric self-adjunctions and matrices." In: *Algebra Colloquium* 19 (1) (2012), pp. 1051–1082.

[13] K. Došen and Z. Petrić. "Symmetric self-adjunctions: A justification of Brauer's representation of Brauer's algebras." In: *Proceedings of the Conference "Contemporary Geometry and Related Topics", University of Belgrade, Faculty of Mathematics.* Ed. by N. Bokan et al. 2006, pp. 177-187.

[14] D. Dummit and R. Foote. *Abstract Algebra.* 3rd Edition, John Wiley & Sons, New York, 2004.

[15] R. Farnsteiner. "Self-injective Algebras: Frobenius Algebras and Coalgebras." Lecture Notes, 2006, `https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/selected.html`.

[16] G. Frobenius. "Theorie der hyperkomplexen Grössen." In: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* 24 (1903), pp. 504–537, 634–645.

[17] S. Gajović, Z. Petrić, and S. Telebaković Onić. "A Faithful 2-dimensional TQFT." In: *Homology, Homotopy and Applications* 22 (1) (2020), pp. 391–399.

[18] A. Jain. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice-Hall, Inc., Engelwood Cliffs, New Jersey, 1989.

[19] G. James and M. Liebeck. *Representations and Characters of Groups*. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[20] A. Juhász. "Defining and classifying TQFTs via surgery." In: *Quantum Topology* 9 (2018), pp. 229–321.

[21] M. Kervaire and J. Milnor. "Groups of homotopy spheres. I." In: *Annals of Mathematics, Second Series* 77 (1963), pp. 504–537.

[22] R. C. Kirby. "Stable homeomorphisms and the annulus conjecture." In: *Annals of Mathematics, Second Series* 89 (1969), pp. 575–582.

[23] J. Kock. *Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[24] M. Kreck. "Orientation of manifolds." Manifold Atlas, 2013, `http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Orientation_of_manifolds`.

[25] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Expanded Second Edition, Springer, Berlin, 1971 (1998).

[26] S. Mac Lane. "Natural associativity and commutativity." In: *Rice University Studies, Papers in Mathematics* 49 (1963), pp. 28–46.

[27] F. W. Lawvere. "Ordinal sums and equational doctrines." In: *Seminar on Triples and Categorical Homology Theory, ETH 1966/67. No. 80 in Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York*. Ed. by B. Eckmann. 1967, pp. 141-155.

[28] J. Lurie. "On the Classification of Topological Field Theories." In: *Current Developments in Mathematics* (2008), pp. 129–280.

[29] J. Magnus and H. Neudecker. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. 2nd Edition, John Wiley & Sons, Baffins Lane, Chichester, West Sussex, 1999.

[30] E. E. Moise. "Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung." In: *Annals of Mathematics, Second Series* 56 (1952), pp. 96–114.

[31] J. R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley, Mentlo Park, 1984.

[32] J. R. Munkres. *Topology*. Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 1975 (2000).

[33] T. Nakayama. "On Frobeniusean algebras I." In: *Annals of Mathematics* 40 (1939), pp. 611–633.

[34] C. Nesbitt. "On the regular representations of algebras." In: *Annals of Mathematics* 39 (1938), pp. 634–658.

[35] S. Telebaković Onić. "On the Faithfulness of 1-dimensional Topological Quantum Field Theories." In: *Glasnik Matematički* 55 (2020), pp. 67–83.

[36] F. Quinn. "Ends of maps. III. Dimensions 4 and 5." In: *Journal of Differential Geometry* 17 (1982), pp. 503–521.

[37] F. Quinn. "Lectures on axiomatic topological quantum field theory." In: *Geometry and Quantum Field Theory, American Mathematical Society, Providence*. Ed. by D. S. Freed and K. K. Uhlenbeck. 1995, pp. 323-453.

[38] T. Radó. "Über den Begriff der Riemannschen Fläche." In: *Acta Universitatis Szegediensis* 2 (1924), pp. 101–121.

[39] C. Rakotonirina. "On the Tensor Permutation Matrices." (2013). arXiv:1101.0910v3.

[40] P. Ribenboim. *Catalan's Conjecture*. Academic Press, Boston, 1994.

[41] M. Roitman. "On Zsigmondy primes." In: *Proceedings of the AMS* 125 (1997), pp. 1913–1919.

[42] S. Sawin. "Direct sum decompositions and indecomposable TQFTs." In: *Journal of Mathematical Physics* 36 (1995), pp. 6673–6680.

[43] H. Seifert and W. Threlfall. *A textbook of topology*. Pure and Applied Mathematics, 89, Academic Press, New York, English translation of 1934 classic German textbook, 1980.

[44] A. Skowroński and K. Yamagata. *Frobenius Algebras I*. EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011.

[45] L. W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, New York, 2008.

[46] W. J. Vetter. "Vector Structures and Solutions of Linear Matrix Equations." In: *Linear Algebra and Its Applications* 10 (1975), pp. 181–188.

[47] E. Witten. "Topological quantum field theory." In: *Communications in Mathematical Physics* 117 (1988), pp. 353–386.

[48] K. Zsigmondy. "Zur Theorie der Potenzreste." In: *Journal Monatshefte für Mathematik* 3 (1892), pp. 265–284.

Биографија аутора

Соња Телебаковић Онић рођена је 20.08.1981. године у Београду. Дипломирала је на Математичком факултету Универзитета у Београду 2007. године на смеру Теоријска математика и примене са просечном оценом 9,14. Докторске студије на Катедри за алгебру и математичку логику Математичког факултета Универзитета у Београду уписала је 2007. године. Све испите на докторским студијама положила је са оценом 10.

Запослена је на Математичком факултету на Катедри за алгебру и математичку логику од 2007. године, прво као сарадник у настави, а затим као асистент и асистент практичне наставе. До сада је држала вежбе из следећих предмета: Линеарна алгебра А, Линеарна алгебра Б, Алгебра 1А, Алгебра 1Б, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Линеарна алгебра, Алгебра 1, Алгебра 2 на основним академским студијама, као и Методологија истраживања у настави математике на мастер академским студијама.

Учествовала је на научним пројектима Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије: Анализа и алгебра са применама, под бројем *ОН 174032*; Аналитичке и алгебарске методе и примене у геометрији, топологији и теорији бројева, под бројем *ОН 144020*.

До сада је објавила следеће радове везане за докторску дисертацију:

1. Dj. Baralić, Z. Petrić, and S. Telebaković, *Spheres as Frobenius objects*, Theory and Applications of Categories 33, 24 (2018), pp. 691-726 (M23).

2. S. Gajović, Z. Petrić, and S. Telebaković Onić, *A Faithful 2-dimensional TQFT*, Homology, Homotopy and Applications 22 (1) (2020), pp. 391-399 (M23).

3. S. Telebaković Onić, *On the Faithfulness of 1-dimensional Topological Quantum Field Theories*, Glasnik Matematički 55 (2020), pp. 67-83 (M23).

као и радове из других области:

4. B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, and S. Telebaković, *Formulae of Partial Reduction for Linear Systems of First Order Operator Equations*, Applied Mathematics Letters 23 (2010), pp. 1367-1371 (M21).

5. B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, and S. Telebaković, *Differential Transcendency in the Theory of Linear Differential Systems with Constant Coefficients*, ISRN Mathematical Analysis 2012 (2012), pp. 1-8 (M51).

Саопштења на конференцијама:

1. S. Telebaković Onić, *1-dimensional Topological Quantum Field Theories and Brauerian Representation*, IX Simpozijum *Matematika i primene*, Beograd, 30. novembar i 1. decembar 2018.

2. S. Telebaković, *On the Brauerian Representation and 1-dimensional Topological Quantum Field Theories*, Godišnji susret seminara za konfiguracione prostore Matematičkog instituta SANU, Beograd, 25-27. decembar 2017.

3. B. Malešević, D. Todorić, I. Jovović, and S. Telebaković, *On some reduction formulae for linear systems of operator equations*, 12. Srpski matematički kongres, Novi Sad, 28. avgust - 2. septembar 2008 (izlagač).

Удата је и има три ћерке.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ____

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, _________________

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____

Број индекса ____

Студијски програм ____

Наслов рада ____

Ментор ____

Потписани/а ____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, __________________________

____